U.M.A

Commission OPAM

OPAM 2016
Dakar Sénégal

# $24^{ièmes}$ OLYMPIADES PAN AFRICAINES DE MATHÉMATIQUES

**Jour 1 : Mercredi 27 avril 2016** **Durée : 4 h 30 min**

## Problème 1

Deux cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ se coupent en deux points distincts $M$ et $N$. Les cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ ont une tangente commune respectivement en $P$ et en $Q$, la tangente étant plus proche de $N$ que de $M$. La droite $(PN)$ recoupe le cercle $\mathcal{C}_2$ en un point $R$.
Montrer que la droite $(MQ)$ est la bissectrice de l'angle $\widehat{PMR}$.

## Problème 2

On dispose d'une pile de 2016 cartes et d'un chapeau. On tire une carte, on la met dans le chapeau et on partage arbitrairement les cartes restantes en deux piles. A l'étape suivante, on choisit l'une des deux piles, on tire une carte de cette pile que l'on met dans le chapeau puis on partage à nouveau arbitrairement le restant en deux nouvelles piles.
On répète ce procédé plusieurs fois : à la $k$-ième étape on tire une carte à partir de l'une des piles constituées à l'étape $(k-1)$ et on la met dans le chapeau puis on partage à nouveau cette pile en deux.
Est-il possible, après un certain nombre de répétitions de ce procédé, d'obtenir un nombre de piles de sorte que chacune d'elles contienne trois cartes ?

## Problème 3

Pour tout entier strictement positif $n$, on définit l'entier $P(n)$ par :

$$P(n) = n(n+1)(2n+1)(3n+1)\dots(16n+1).$$

Trouver le plus grand commun diviseur des entiers $P(1),\ P(2),\ P(3),\dots,P(2016)$.

U.M.A

Commission OPAM

OPAM 2016
Dakar Sénégal

# $24^{ième}$ OLYMPIADES PAN AFRICAINES DE MATHÉMATIQUES

**Jour 2 : Jeudi 28 avril 2016** **Durée : 4 h 30 min**

## Problème 1

Soient $x, y, z$ des réels strictement positifs tels que $xyz = 1$.
Montrer que

$$\frac{1}{(x+1)^2 + y^2 + 1} + \frac{1}{(y+1)^2 + z^2 + 1} + \frac{1}{(z+1)^2 + x^2 + 1} \leq \frac{1}{2}.$$

## Problème 2

$ABCD$ est un trapèze de bases $[AB]$ et $[CD]$, tel que $AB > CD$. Les points $M$ et $N$ sont situés respectivement sur $[AB]$ et $[BC]$ de sorte que chacun des segments $[CM]$ et $[AN]$ divise le trapèze en deux parties d'aires égales.
Montrer que le segment $[MN]$ coupe le segment $[BD]$ en son milieu.

## Problème 3

On considère un quadrillage de taille $n \times n$ formé par $n^2$ carrés de côté 1. On définit le centre d'un carré comme étant le point d'intersection de ses diagonales.
Déterminer le plus petit entier $m$ tel que, parmi n'importe quel nombre $m$ de carrés dans le quadrillage, on en a toujours quatre dont les centres sont les sommets d'un parallélogramme.