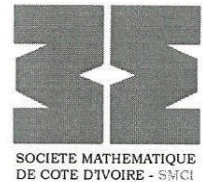


**CONCOURS HOUPHOUET BOIGNY
DE MATHÉMATIQUES**
Samedi 16 Avril 2016 à Yamoussoukro
Niveau IV: Première et Terminale
Durée : 4h

**EXERCICE 1**

I. On définit la fonction numérique h à variable réelle x telle que : $h(x) = m - \sqrt{x+p}$ où m et p sont deux nombres réels.

On dit que deux entiers distincts u et v sont échangeables par h s'il existe au moins un couple de nombres réels $(m; p)$ tel que $h(u) = v$ et $h(v) = u$.

- Démontrer que les nombres 2 et 3 sont échangeables par h .
- Les nombres 4 et 7 sont-ils échangeables par h ? Justifier votre réponse.
- Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que u et v soient échangeables.

II. On définit la fonction numérique g à variable réelle x telle que : $g(x) = m - c\sqrt{x+p}$ où m, p et c sont des nombres réels et $c > 0$.

On dit que deux entiers distincts u et v sont coupables par g s'il existe au moins un triplet de nombres réels $(m; p; c)$ tel que $g(u) = v$ et $g(v) = u$.

Démontrer que 2016 et 1816 sont coupables.

EXERCICE 2

Soient a, b et c les longueurs des côtés d'un triangle quelconque.

α, β et γ sont les mesures des angles de ce triangle.

Les questions ci-dessous sont indépendantes.

- Démontrer que : $3(ab + bc + ca) \leq (a + b + c)^2 < 4(ab + bc + ca)$
- Démontrer que : $(a + b)(b + c)(c + a) \geq 8(a + b - c)(b + c - a)(c + a - b)$
- Démontrer que : $\sqrt{a + b - c} + \sqrt{b + c - a} + \sqrt{c + a - b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}$
- On pose : $A = \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \tan\left(\frac{\beta}{2}\right) + \tan\left(\frac{\beta}{2}\right) \cdot \tan\left(\frac{\gamma}{2}\right) + \tan\left(\frac{\gamma}{2}\right) \cdot \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)$.
Calculer A .

EXERCICE 3

Des personnes font une ronde en se tenant par la main.

Chacun déclare : « mon voisin de droite et mon voisin de gauche sont des menteurs ».

Chacun peut être menteur (il dit toujours un mensonge) ou bien véridique (il dit toujours la vérité).

1. a) S'ils sont trois à faire la ronde, combien y-a-t-il de menteurs ?
b) S'ils sont quatre à faire la ronde, combien y-a-t-il de menteurs ?
2. Ils sont six à faire la ronde.
a) Est-il possible qu'il y ait trois véridiques ? Plus de trois véridiques ?
b) Déterminer le nombre maximal de menteurs dans la ronde.
3. Ils sont maintenant 2016 personnes à faire la ronde en se tenant par la main.
a) Déterminer le nombre minimal de menteurs dans la ronde.
b) Déterminer le nombre maximal de menteurs dans la ronde.
4. On considère maintenant une ronde de personnes où il y'a exactement 2016 menteurs.
Détermine le nombre maximal de personnes dans cette ronde.

EXERCICE 4

La figure ci-dessous (voir feuille annexe) représente un espace vert dans le jardin d'une cour. Le propriétaire demande au jardinier de créer à l'intérieur de cet espace un carré pour y planter des fleurs avec les contraintes suivantes : un sommet du carré est sur le segment $[OA]$, un sur le segment $[OB]$ et les deux autres sur l'arc de cercle $\widehat{AB}$.

Construire le carré demandé remplissant les conditions ci-dessus sur la feuille annexe.

Justifier votre méthode de construction.

Feuille annexe (à rendre avec la copie)

