COLLEGE MONAJOCE — Enseignement Général — Enseignement Technique	DEVOIR DE MATHEMATIQUES N°1	NIVEAU : Tle D DATE : 29/10/2021 HEURE :7h00-9h30 DUREE : 2 heures 30 minutes COEFFICIENT : 2 PROFESSEUR : M. DJAHA CONTACTS : 07 09 52 13 05

Consignes : Ce devoir comporte deux pages numérotées ½ et 2/2. La calculatrice scientifique est autorisée et est à usage strictement individuel. Tout contrevenant à cette règle est considéré comme un cas de tricherie sanctionné par la note de 00/40.

Exercice 1 : 2 points

Réponds par vrai ou par faux à chacune des affirmations suivantes en écrivant le numéro suivi de la lettre V pour vrai ou F pour faux.

1- Si pour tout $x > 0$, on a : $|f(x)| \leq \frac{2}{x+1}$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

2- Si f est une fonction continue et monotone sur l'intervalle I alors f admet une bijection réciproque noté f^{-1} définie sur $f(I)$.

3- Si pour tout $x > 0$, on a : $1 - \frac{4}{x} \leq f(x) \leq 3 + \frac{1}{x}$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = k$ avec $k \in [-4; 1]$.

4- Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ alors la courbe (C_f) admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses.

Exercice 2 : 2 points

Pour chaque ligne du tableau, trois réponses sont proposées dont une seule est exacte. Indique la réponse exacte en écrivant le numéro suivi de la lettre.

	AFFIRMATIONS	Réponse A	Réponse B	Réponse C
1	$\lim\limits_{x\to0} \frac{\tan(2x)}{Sin(4x)}$ est égale à	1	$\frac{1}{2}$	2
2	f et g sont deux fonctions définie sur un intervalle I avec $a \in$ I. Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ et $\lim\limits_{x\to b} g(x) = k$ alors :	$\lim\limits_{x\to a} fog(x) = k$	$\lim\limits_{x\to a} gof(x) = k$	$\lim\limits_{x\to k} gof(x) = b$
3	Une fonction monotone sur un intervalle J est :	Croissante puis décroissante sur J	Décroissante puis croissante sur J	Soit croissante sur J, soit décroissante sur J
4	f et g sont deux fonctions. Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x)$ alors :	On ne peut conclure à priori	$\lim\limits_{x\to a}(f+g)(x) = 2$	$\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$

Exercice 3 : 3 points

On considère la fonction h définie sur IR par : $\begin{cases} h(x) = \frac{x^2-3}{1+x^2} \; si \; x \leq 0 \\ h(x) = x\left(1 - \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right) - 3 \; si \; x > 0 \end{cases}$.

On note (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O,I,J).

1- Démontre que $\forall x \in]0; +\infty[, -3 \leq h(x) \leq 2x - 3$. Déduis en la limite à droite en 0 de h.

2- Montre que h est continue en 0.

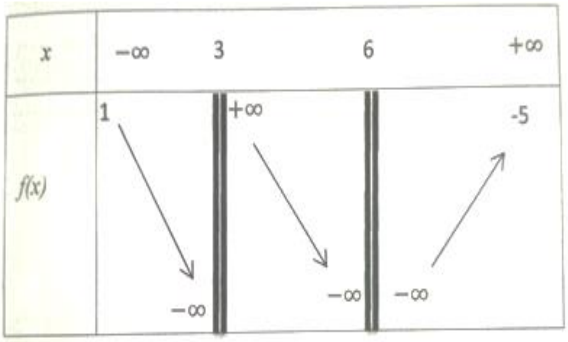
3- En posant $t = \frac{1}{x}$, démontre que $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = -3$. Interprète graphiquement le résultat.

4- Calcule $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)$. Interprète si possible le résultat obtenu.

Exercice 4 : 4 points (AU CHOIX) : Le candidat traitera soit la partie A soit la partie B (pas les deux) sous peine de non correction

PARTIE A : 4 points

On considère une fonction f définie sur l'intervalle noté D_f par son tableau de variation suivant :



1- Détermine D_f puis les limites aux bornes de D_f. On donnera une interprétation graphique des résultats
2- Donne l'image de chacun des intervalles par f
de $]-\infty; 3[$ et de $]6; +\infty[$
3- Détermine le nombre de solution sur IR de $f(x) = 0$.
4- Calcule : $\lim\limits_{x\to 0} f\left(\frac{x+1}{x^2}\right)$ et $\lim\limits_{x\to 2} f\left(\sqrt{9x^2}\right)$.
5- Construis la courbe (C_f) et ses asymptotes dans un repère orthonormé (O.I.J) d'unité 1 cm.

PARTIE B : 4 points

1- On donne $a > 0$, simplifie $A = \frac{\sqrt[3]{a^5} \times (\sqrt[4]{a^7})^2}{\sqrt{(a^2)^4} \times \sqrt[5]{a^2} \times \sqrt[5]{a^3}}$. Simplifie A sous forme $\sqrt[n]{a^k}$ avec n et k à préciser.
2- Résous dans IR les équations (E) et (F) : (E) : $\sqrt[3]{4-5x} = 3$; (F) : $4x^{\frac{2}{3}} - 5x^{\frac{1}{3}} + 1 = 0$.
3- a) Développe $(2+\sqrt{3})^3$ et $(2-\sqrt{3})^3$
b) Déduis en la valeur exacte de $B = \sqrt[3]{26 + 15\sqrt{3}} - \sqrt[3]{26 - 15\sqrt{3}}$.

Exercice 5 : 6 points

On considère la fonction S définie par $S(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-2x}}$. On note (C_S) sa courbe représentative dans le repère orthonormé (O,I,J).

1- Détermine l'ensemble de définition D_S de la fonction S.
2- Montre que S est continue sur $]-\infty; \frac{1}{2}[$.
3- On admet que S est dérivable sur $]-\infty; \frac{1}{2}[$ et sa dérivée par : $S'(x) = \frac{-1}{(1-2x)\sqrt{1-2x}}$.
Donne le sens de variation de S puis dresse son tableau de variations.
4- a) Justifie que S réalise une bijection de $[-4; 0]$ sur un intervalle K à préciser.
b) Détermine la bijection réciproque $S^{-1}(x)$ puis dresse son tableau de variation sur K.
5- On pose R une fonction définie par : $R(x) = S(x) - x$; Pour tout $x \in]-\infty; \frac{1}{2}[$.
a) Justifie que R est strictement décroissante sur $]-\infty; \frac{1}{2}[$.
b) Calcule $R([-4; 0])$
c) Démontre que l'équation $R(x) = 0$ admet une solution unique α tel que $\alpha \in [-4; 0]$.
d) Déduis-en que l'équation $S(x) = x$ admet une solution unique α tel que $\alpha \in [-4; 0]$.
6- Vérifie que $-0{,}7 < \alpha < -0{,}6$.

Exercice 6 : 4 points

Dans ses recherches au laboratoire, le scientifique M. X a établi le lien entre la dose d'alcool dans le sang (ou l'effet) et la durée de lucidité en heure. Il voudrait savoir la durée en heure qu'il faut pour être totalement lucide lorsque la dose d'alcool tend à s'annihiler dans le sang d'un adolescent qui consomme en moyenne 3 L d'alcool. (C'est-à-dire que l'alcooltest ne parvient pas à détecter de l'alcool à travers l'air buccal expiré)
Ses expériences ont abouti à la modélisation de la fonction D définissant la durée de lucidité et en fonction de la dose d'alcool x consommée par : $D(x) = \frac{1-\cos(3x)}{x^2}$.
Il avait noté la durée en heures et minutes dans son rapport mais son apprenti l'a égaré.
Craignant une réprimande de son Chef, l'apprenti veut calculer la durée de lucidité lorsque la dose d'alcool tend à s'annihiler. Mais il ne sait pas comment s'y prendre. Pour cela il te sollicite.

A partir de tes connaissances en Mathématiques, réponds à la préoccupation de l'apprenti.