

## A NUL SACRIFICE, NULLE VICTOIRE

### A VAINCRE SANS PERIL ON TRIOMPHE SANS GLOIRE

**Le paresseux a des désirs qu'il ne peut satisfaire à moins d'user du chemin de la vicissitude.**

#### **EXERCICE 1** ( 2 points )

Pour chaque proposition du tableau ci dessous, écris, sur ta feuille de copie, le numéro de chaque ligne suivi de **Vrai** si la proposition est vraie ou de **Faux** si la proposition est fausse.

N°	Propositions
1	Soient $a$ un élément d'un intervalle $K$ et $f$ une fonction deux fois dérivables sur $K$ . Si $f''(a) = 0$ , alors le point de la représentation graphique de $f$ d'abscisse $a$ est un point d'inflexion.
2	Lorsque, dans une expérience aléatoire, on s'intéresse uniquement à la réalisation d'un certain événement $S$ précisé, appelé succès ou à sa non réalisation $\bar{S}$ , appelé échec, on dit que cette expérience correspond à une épreuve de Bernoulli.
3	Soit $z = a + ib$ un nombre complexe avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ , $ z  = \sqrt{a^2 - b^2}$
4	Soit $z$ et $z'$ deux nombres complexes non nuls, on a $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z') + k2\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ .

#### **EXERCICE 2** ( 2 points )

Pour chacun des énoncés du tableau ci-dessous, trois réponses **A**, **B**, et **C** sont proposées dont une seule permet d'avoir l'énoncé juste.

Écris, sur ta feuille de copie, le numéro de l'énoncé suivi de la lettre correspondant à la réponse correcte.

N°	Énoncés	Réponses		
		A	B	C
1	$\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln\left(\frac{x-2}{x+1}\right) = \dots$	1	-2	0
2	Si $f$ est une fonction dérivable et bijective sur $\mathbb{R}$ telle que $f(1) = 0$ et $f'(1) = -1$ , alors $f^{-1}$ est dérivable en 0 et on a $(f^{-1})'(0) = \dots$	-1	0	1
3	L'équation : $x \in \mathbb{R}$ , $(\ln x)^2 - 3\ln x + 2 = 0$ admet pour ensemble de solutions...	$\{-e^2; -e\}$	$\{e^2; e\}$	$\{1; 2\}$
4	Si A et B sont deux événements indépendants d'un même univers tels que $P(A) = 0,7$ et $P(B) = 0,2$ alors $P(A \cap B) = \dots$	$P(A \cap B) = 0,14$	$P(A \cap B) = 0,9$	$P(A \cap B) = 0,5$

**EXERCICE 3**

( 3 points )

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ . Unité 1 cm.

Soit le polynôme  $P$  défini par  $P(z) = z^3 - (6 + i\sqrt{3})z^2 + (11 + 4i\sqrt{3})z - 6 - 3i\sqrt{3}$ .

- 1) Justifie que 1 est un zéro de  $P$ .
- 2) a) Justifie que les racines carrées du nombre complexe  $-2 - 2i\sqrt{3}$  sont  $1 - i\sqrt{3}$  et  $-1 + i\sqrt{3}$ .
- b) Soit A et B deux points d'affixes respectives  $z_A = 1 - i\sqrt{3}$  et  $z_B = -1 + i\sqrt{3}$ .

Détermine la forme trigonométrique de  $z_A = 1 - i\sqrt{3}$  et  $z_B = -1 + i\sqrt{3}$ .

- c) Place exactement les point A et B dans le plan complexe.
- 3) Résous dans  $\mathbb{C}$ , l'équation  $z^2 - (5 + i\sqrt{3})z + 6 + 3i\sqrt{3} = 0$ .
- 4) Justifie que  $P(z) = (z - 1)(z^2 - (5 + i\sqrt{3})z + 6 + 3i\sqrt{3})$ .
- 5) En déduis dans  $\mathbb{C}$ , les solutions de l'équation :  $P(z) = 0$ .

**EXERCICE 4**

( 3 points )

1) Justifie qu'une primitive sur  $\left] 0; \frac{\pi}{4} \right]$  de la fonction  $x \mapsto \frac{1}{\cos^2 x}$  est la fonction  $x \mapsto \frac{\sin x}{\cos x}$ .

2) Soit  $f$  une fonction définie sur  $] -\infty; -2[$  par  $f(x) = \frac{-3x^3 - 8x^2 + 2x + 15}{(x+2)^2}$ .

a) Justifie que  $\forall x \in ] -\infty; -2[$ ,  $f(x) = -3x + 4 - \frac{2}{x+2} + \frac{3}{(x+2)^2}$ .

b) Détermine les primitives  $F$  de  $f$  sur  $] -\infty; -2[$ .

c) Détermine la primitive  $G$  de  $f$  sur  $] -\infty; -2[$  qui prend la valeur 1 en -3.

3) Calcule la limite de  $G$  en  $-\infty$  et en  $-2$  à gauche.

**EXERCICE 5**

( 5 points )

**A-** Soit la fonction  $g$  dérivable et définie sur  $] 0; +\infty[$  par  $g(x) = 1 + x \ln x$ .

- 1) Justifie que pour  $\forall x \in ] 0; +\infty[$ ,  $g'(x) = 1 + \ln x$  ou  $g'$  la dérivée de  $g$ .
- 2) Etudie le sens de variation de  $g$  puis dresse son tableau de variation. (on ne calculera pas les limites de  $g$ )
- 3) Déduis que  $\forall x \in ] 0; +\infty[$ ,  $g(x) > 0$ .

**B-** On considère la fonction  $f$  définie sur  $] 0; +\infty[$  par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x}{1+x \ln x} & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

On note  $(C_f)$  sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé  $(O, I, J)$ .

Unité graphique : 4 cm.

- 
- 1) a) Calcule la limite de  $f$  en  $+\infty$ .  
b) Justifie que  $f$  est continue en 0.
  - 2) a) Etudie la dérivabilité de  $f$  en 0.  
b) Donne une interprétation graphiquement du résultat.
  - 3) On suppose que  $f$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$  et on note  $f'$  sa dérivée.
    - a) Justifie que :  $\forall x \in ]0; +\infty[ , f'(x) = \frac{1-x}{(1+x \ln x)^2}$  .
    - b) Démontre que  $f$  est strictement croissante sur  $]0; 1]$  et strictement décroissante sur  $[1; +\infty[$ .
    - c) Dresse le tableau de variation de  $f$ .
  - 4) a) Démontre qu'une équation de la tangente (T) à la courbe ( $C_f$ ) au point O est  $y = x$ .  
b) Justifie que :  $\forall x \in ]0; +\infty[ , f(x) - x = \frac{-x^2 \ln x}{g(x)}$  .  
c) Déduis la position relative de ( $C_f$ ) et (T).
  - 5) Construis ( $C_f$ ) et (T) dans le même repère (O, I, J).

**EXERCICE 6** ( 5 points )

Le commercial d'une société de fabrication d'alcootest projette de conquérir le marché de la côte d'Ivoire.

L'essai de son produit sur un échantillon de la population composée de 8% de personnes ivres a donné les résultats suivants :

\*80% des personnes ivres sont déclarées positives à ce test ;

\*95% des personnes non ivres sont déclarées négatives à ce test.

Pour la hiérarchie des forces de sécurité routière, un alcootest n'est fiable que si, sur la base des résultats du test d'essai, le nombre minimal de personnes à contrôler pour que la probabilité d'avoir au moins un test positif soit supérieur à 0,99 n'excède pas 50.

Perturbé par cette information, il se demande si son alcootest peut être accepté par les autorités compétentes. A la recherche de personne ressource, il te sollicite.

À l'aide d'une production argumentée basée sur tes connaissances mathématiques, dis si le commercial peut réaliser son projet.