REPUBLIQUE GABONAISE

OFFICE DU BACCALAUREAT

99-1 MATHEMATIQUES

Série : D
Durée : 4 heures
Coefficient : 4
Trois pages.

Exercice 1 (5 points)

I. 1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $9z^2 - 6z + 2 = 0$.
On désignera par u et v les deux solutions de l'équation, u étant la solution dont la partie imaginaire est positive.
2. Ecrire u et v sous forme trigonométrique.

II. Soit la suite $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de points M_n du plan complexe d'affixe z_n telle que :
$z_0 = 1$ et pour tout entier n : $z_{n+1} = \frac{1+i}{3} z_n$.

1. Pour tout entier naturel n, on pose : $u_n = \arg(z_n)$.
   a. Démontrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison $\frac{\pi}{4}$.
   b. Exprimer u_n en fonction de n.
2. Soit la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $v_n = |z_n|$.
   a. Démontrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{\sqrt{2}}{3}$.
   b. En déduire l'expression de v_n en fonction de n.
3. Déduire de ce qui précède l'expression de z_n en fonction de n.
4. Pour quelles valeurs de l'entier naturel n :
   a. z_n est-il réel ? Déterminer alors z_n.
   b. z_n est-il imaginaire pur ?
5. Pour tout entier naturel n, calculer $w_n = |z_{n+1} - z_n|$ en fonction de n.
   On remarquera que la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique.
6. On pose : $k_n = w_0 + w_1 + \ldots + w_n$.
   a. Exprimer k_n en fonction de n.
   b. Donner une interprétation géométrique de k_n.
   c. Déterminer la limite de k_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 2 (4 points)

Une urne contient deux boules numérotées 1, deux boules numérotées (- 1) et trois boules numérotées 0. On dispose en réserve d'une boule numérotée (- 1). Toutes les boules sont indiscernables au toucher.

Taty participe au jeu suivant ; il tire au hasard une boule de l'urne :

- si la boule tirée porte le numéro 1, il gagne 500 francs et le jeu s'arrête ;
- si la boule tirée porte le numéro (- 1), il perd 500 francs et le jeu s'arrête ;
- si la boule tirée porte le numéro 0, on introduit la boule de réserve numérotée (- 1) dans l'urne sans remettre la boule numérotée 0 que Taty vient de tirer, et Taty procède à un nouveau tirage d'une boule de l'urne :
  - si la boule tirée porte le numéro 1, il gagne 500 francs et le jeu s'arrête ;
  - si la boule tirée porte le numéro 0, il gagne 250 francs et le jeu s'arrête ;
  - si la boule tirée porte le numéro (- 1), il perd 500 francs et le jeu s'arrête.

1. a. Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

A : « Taty gagne 500 francs au premier tirage »

B : « Le jeu s'arrête au premier tirage ».

b. Soit l'événement C : « Taty perd au jeu ».

Démontrer que : $P(C) = \frac{23}{49}$.

2. On considère la variable aléatoire X égale au gain algébrique du joueur.

a. Déterminer la loi de probabilité de X.

b. Calculer l'espérance mathématique de X. Que peut-on en déduire ?

3. Taty effectue une série de trois parties.
Calculer la probabilité qu'il gagne au moins une partie.

Problème (11 points)

Partie A : résolution d'une équation différentielle.

On se propose de résoudre l'équation différentielle : $y' - 2y = \frac{-2}{1 + e^{-2x}}$ (E)

1. Déterminer la solution de l'équation $y' - 2y = 0$ qui prend la valeur 1 en 0.

2. On considère les fonctions f et g définies sur IR et telles que :

$$f(0) = \ln(2) \text{ et pour tout réel } x : f(x) = e^{2x} g(x).$$

a. Calculer $g(0)$.

b. Calculer $f'(x)$ en fonction de $g'(x)$ et de $g(x)$.

c. Démontrer que f est solution de l'équation (E) si et seulement si $g'(x) = \frac{-2e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$.

d. En déduire l'expression de $g(x)$ puis celle de $f(x)$ sachant que f est solution de l'équation (E).

Partie B : étude de la fonction h.

L'objet de cette partie est l'étude de la fonction h définie sur IR par :

$$h(x) = e^{2x} \ln(1 + e^{-2x})$$

On note (C) la courbe représentative de h dans un plan muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : 3 cm).

I. Etude d'une fonction auxiliaire

Soit la fonction k définie sur IR par : $k(x) = \ln(1 + e^{-2x}) - \dfrac{1}{e^{2x} + 1}$

1. Déterminer les limites de k en $+\infty$ et en $-\infty$.

2. Etudier le sens de variation de k et dresser son tableau de variation.

3. En déduire le signe de $k(x)$ pour tout réel x.

II. Etude de la fonction h

1. a. Déterminer la limite de h en $+\infty$.
   On pourra poser $t = \dfrac{1}{e^{2x}}$ et utiliser $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\ln(1+t)}{t} = 1$.
   b. Démontrer que pour tout réel x, on a : $h(x) = e^{2x}[-2x + \ln(1 + e^{2x})]$.
   En déduire la limite de h en $-\infty$.

2. a. Démontrer que pour tout réel x, $h'(x) = 2e^{2x}k(x)$.
   b. En déduire le sens de variation de h.
   c. Dresser le tableau des variations de h.

3. Tracer avec soin la courbe (C).

4. Déterminer une primitive sur IR de la fonction u définie par :
$$u(x) = \frac{1}{1 + e^{-2x}}$$
   On remarquera que pour tout réel x, $\dfrac{1}{1 + e^{-2x}} = \dfrac{e^{2x}}{1 + e^{2x}}$.

5. A l'aide d'une intégration par parties, calculer en cm^2 l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations ($x = -1$) et ($x = 0$).

MATHEMATIQUES : CORRIGE - TYPE

LE BAREME EST DONNE A TITRE INDICATIF ET PEUT DONC ETRE MODIFIE PAR LE JURY.

EXERCICE 1 5 POINTS

I EQUATION DU SECOND DEGRE DANS $\mathbb{C}$

1. Résolution de $9z^2 - 6z + 2 = 0$

$\Delta = -36 = (6i)^2$

Solutions : $\begin{cases} u = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}i = \frac{1}{3}(1+i) \\ v = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}i = \frac{1}{3}(1-i) \end{cases}$ 0,5

2. Forme trigonométrique des solutions

$u = \frac{\sqrt{2}}{3}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$v = \frac{\sqrt{2}}{3}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$ 0,5

$v = \frac{\sqrt{2}}{3}\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

II NOMBRES COMPLEXES ET SUITES

$M_n \longrightarrow z_n \begin{cases} z_0 = 1 \\ z_{n+1} = \frac{1+i}{3} z_n = u z_n \end{cases}$

1. $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$, avec $U_n = \arg z_n$

a) Suite arithmétique $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$U_{n+1} = \arg z_{n+1} = \arg u + \arg z_n$

$\boxed{U_{n+1} = U_n + \frac{\pi}{4}}$ 0,25

Donc (U_n) est une suite arithmétique de raison $\frac{\pi}{4}$ et de premier terme $U_0 = \arg z_0 = 0$.

b) Terme général de (U_n)

$\boxed{U_n = \frac{\pi}{4} n}$ 0,25

2. Suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $V_n = |z_n|$

a) Suite géométrique $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$V_{n+1} = |z_{n+1}| = |u \times z_n| = |u| \times |z_n|$

$\boxed{V_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{3} V_n}$ 0,25

Donc (V_n) est une suite géométrique de raison $\frac{\sqrt{2}}{3}$ et de premier terme $V_0 = |z_0| = 1$.

b) Terme général de (V_n)

$\boxed{V_n = \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^n}$ 0,25

3. Expression de z_n : forme trigonométrique

$z_n = |z_n|\left[\cos(\arg z_n) + i\sin(\arg z_n)\right]$

soit

$\boxed{z_n = \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^n \left[\cos\left(n\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(n\frac{\pi}{4}\right)\right]}$ 0,5

4. a) z_n est réel ssi $Im(z_n) = 0$

c.à.d $\sin\left(n\frac{\pi}{4}\right) = 0$

soit $n\frac{\pi}{4} = k\pi$,

D'où $\boxed{n = 4k,\ k\in\mathbb{N}}$ $\boxed{z_n = \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^{4n}(-1)^n}$ 0,5 0,75

b) z_n est imaginaire pur ssi $Re(z_n) = 0$

c.à.d. $\cos\left(n\frac{\pi}{4}\right) = 0$

Soit $n\frac{\pi}{4} = (2k+1)\frac{\pi}{2}$,

D'où $\boxed{n = 4k+2,\ k\in\mathbb{N}}$ 0,5 0,25

5. $W_n = |z_{n+1} - z_n| = M_n M_{n+1}$

$W_{n+1} = |z_{n+2} - z_{n+1}| = |u z_{n+1} - u z_n|$

$W_{n+1} = |u| \times |z_{n+1} - z_n|$

D'où $\boxed{W_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{3} W_n}$ 0,25

Donc la suite (W_n) est une suite géométrique de raison $\frac{\sqrt{2}}{3}$ et de premier terme $W_0 = |z_1 - z_0| = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

en déduit que :

$$\boxed{W_n = \frac{\sqrt5}{3}\left(\frac{\sqrt2}{3}\right)^n}$$ 0,5

6. $k_n = w_0 + w_1 + \dots + w_n$

a) EXPRESSION DE k_n EN FONCTION DE n

k_n est la somme des $(n+1)$ premiers termes d'une suite géométrique de raison $\frac{\sqrt2}{3}$ et de premier terme $\frac{\sqrt5}{3}$.

D'où $k_n = \frac{\sqrt5}{3} \times \dfrac{1-\left(\frac{\sqrt2}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{\sqrt2}{3}}$

Soit 0,5 $$\boxed{k_n = \frac{\sqrt5}{3-\sqrt2}\left[1 - \frac{\sqrt2}{3}\left(\frac{\sqrt2}{3}\right)^n\right]}$$

b) INTERPRETATION GEOMETRIQUE DE k_n

$k_n = W_0 + W_1 + W_2 + \dots + W_{n-1} + W_n$

0,25 $k_n = M_0M_1 + M_1M_2 + \dots + M_{n-1}M_n + M_nM_{n+1}$

C'est donc la longueur de la ligne brisée $M_0M_1M_2 \dots M_{n+1}$.

c) CONVERGENCE

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{\sqrt2}{3}\right)^n = 0$ car $0 < \frac{\sqrt2}{3} < 1$

Donc 0,25 $$\boxed{\lim_{n\to+\infty} k_n = \frac{\sqrt5}{3-\sqrt2} = \frac{3\sqrt5+\sqrt{10}}{7}}$$

EXERCICE 2 — 4 POINTS

2 Boules N° 1

2 Boules N° −1 — RESERVE : 1 Boule N° −1

3 Boules N° 0

1. a) CALCUL DE PROBABILITES

A : « Taty gagne 500F au premier tirage »

B : « Le jeu s'arrête au premier tirage »

$\boxed{p(A) = \frac{2}{7}}$ 0,5 et $\boxed{p(B) = \frac{4}{7}}$ 0,5

b) PROBABILITE DE L'EVENEMENT C

C : « TATY PERD AU JEU »

$p(C) = \frac{2}{7} + \frac{3}{7} \times \frac{3}{7}$

soit $\boxed{p(C) = \frac{23}{49}}$ 0,5

2. VARIABLE ALEATOIRE

a) LOI DE PROBABILITE DE X

VALEURS DE X : −500 ; 250 ; 500

$p(X=-500) = p(C) = \frac{23}{49}$

$p(X=250) = \frac{3}{7} \times \frac{2}{7} = \frac{6}{49}$

$p(X=500) = \frac{2}{7} + \frac{3}{7} \times \frac{2}{7} = \frac{20}{49}$

$X = x_i$	−500	250	500	TOTAL
$p(X=x_i)$	$\frac{23}{49}$	$\frac{6}{49}$	$\frac{20}{49}$	1

1

b) ESPERANCE MATHEMATIQUE

$E(X) = -500 \times \frac{23}{49} + 250 \times \frac{6}{49} + 500 \times \frac{20}{49}$

0,5 $\boxed{E(X) = 0}$ 0,25 Donc le jeu est EQUITABLE

3. PROBABILITE QUE TATY GAGNE AU MOINS UNE PARTIE SUR TROIS

$$\boxed{\begin{array}{l} p = 1 - \left(\frac{23}{49}\right)^3 \\ p \simeq 0{,}89658 \end{array}}$$ 0,75

PROBLEME 11 POINTS

PARTIE A : RESOLUTION D'UNE EQUATION DIFFERENTIELLE (2,5 POINTS)

1. EQUATION $y' - 2y = 0$ avec $y(0) = 1$

SOLUTIONS : fonctions $x \longmapsto Ce^{2x}$, $C \in \mathbb{R}$

SOLUTION AVEC $y(0)=1$: $\boxed{\text{fonction } x \longmapsto e^{2x}}$ 0,5

2. FONCTIONS f et g

$$\begin{cases} f(0) = \ln 2 \\ f(x) = e^{2x} g(x). \end{cases}$$

a) CALCUL DE $g(0)$

$f(0) = g(0)$ alors $\boxed{g(0) = \ln 2}$ 0,25

b) CALCUL DE $f'(x)$

$$f'(x) = 2e^{2x} g(x) + e^{2x} g'(x)$$

d'où $\boxed{f'(x) = [2g(x) + g'(x)]e^{2x}}$ (1) 0,5

c) f SOLUTION DE (E) équivaut à $g'(x) = \dfrac{-2e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$

•) Si f est solution de (E), alors :

$$f'(x) - 2f(x) = \frac{-2}{1+e^{-2x}} \quad \text{c.à.d}$$

$$2g(x)e^{2x} + g'(x)e^{2x} - 2e^{2x}g(x) = \frac{-2}{1+e^{-2x}}$$

d'où $g'(x) = \dfrac{-2e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$

* RECIPROQUEMENT

si $g'(x) = \dfrac{-2e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$ alors 0,5

$$f'(x) - 2e^{2x}g(x) = g'(x)e^{2x} \quad \text{d'après (1)}$$

$$f'(x) - 2f(x) = \frac{-2e^{-2x}}{1+e^{-2x}} \times e^{2x}$$

$$f'(x) - 2f(x) = \frac{-2}{1+e^{-2x}}$$

Donc f est solution de (E) cqfd.

d) EXPRESSIONS DE $g(x)$ ET DE $f(x)$

$$g'(x) = \frac{-2e^{-2x}}{1+e^{-2x}} = \frac{U'(x)}{U(x)} \quad \text{avec } U(x) = 1+e^{-2x}$$

D'où $\boxed{g(x) = \ln(1+e^{-2x})}$ 0,5

et donc $\boxed{f(x) = e^{2x}\ln(1+e^{-2x})}$ 0,25

PARTIE B : ETUDE DE LA FONCTION h (8,5 POINTS)

ETUDE DE LA FONCTION

$h : x \longmapsto e^{2x}\ln(1+e^{-2x})$.

I ETUDE D'UNE FONCTION AUXILIAIRE

$k : x \longmapsto \ln(1+e^{-2x}) - \dfrac{1}{e^{2x}+1}$

1. LIMITES

en $+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{e^{2x}+1} = 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty}(1+e^{-2x}) = 1$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(1+e^{-2x}) = 0$

Donc 0,5 $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} k(x) = 0}$

en $-\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty}(1+e^{-2x}) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x\to-\infty}\ln(1+e^{-2x}) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{e^{2x}+1} = 1$

Donc 0,5 $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} k(x) = +\infty}$

2. VARIATIONS

* $k'(x) = \dfrac{-2e^{-2x}}{1+e^{-2x}} + \dfrac{2e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}$

Après réduction et simplification on a

$\boxed{k'(x) = \dfrac{-2}{(e^{2x}+1)^2}}$ 0,5

* Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $k'(x) < 0$ 0,5

alors k est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$

Tableau des variations

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$k'(x)$	$-$
$k(x)$	$+\infty \searrow 0$

3. Signe de $k(x)$

k est dérivable et strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ et on a : $\lim\limits_{x\to-\infty} k(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} k(x) = 0$

k prend donc ses valeurs dans $]0, +\infty[$.

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\boxed{k(x) > 0}$ (0,5)

II. Etude de la fonction $h : x \mapsto e^{2x}\ln(1+e^{-2x})$

1. a) Limite en $+\infty$

Posons $t = \frac{1}{e^{2x}} = e^{-2x}$ alors $e^{2x} = \frac{1}{t}$

d'où $e^{2x}\ln(1+e^{-2x}) = \frac{1}{t}\ln(1+t) = \frac{\ln(1+t)}{t}$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} t = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{e^{2x}} = 0\\ \lim\limits_{t\to0}\frac{\ln(1+t)}{t} = 1\end{array}\right\}\text{ alors } \boxed{\lim_{x\to+\infty} h(x) = 1} \quad (1)$$

b) Limite en $-\infty$

$h(x) = e^{2x}\ln(1+e^{-2x}) = e^{2x}\ln\left(\frac{1+e^{2x}}{e^{2x}}\right)$

$h(x) = e^{2x}\left[\ln(1+e^{2x}) - \ln e^{2x}\right]$

Soit $\boxed{h(x) = e^{2x}\left[-2x + \ln(1+e^{2x})\right]}$ (0,5)

$= -2xe^{2x} + e^{2x}\ln(1+e^{2x})$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty}(2x)e^{2x} = 0\\ \lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x}\ln(1+e^{2x}) = 0\end{array}\right\}\text{ alors } \boxed{\lim_{x\to-\infty} h(x) = 0} \quad (0,5)$$

2. Variations

a) Dérivée

$h'(x) = 2e^{2x}\ln(1+e^{-2x}) + e^{2x}\,\frac{-2e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$

$h'(x) = 2e^{2x}\ln(1+e^{-2x}) - \frac{2e^{2x}}{1+e^{2x}}$

$h'(x) = 2e^{2x}\left[\ln(1+e^{-2x}) - \frac{1}{1+e^{2x}}\right]$

Soit $\boxed{h'(x) = 2e^{2x}k(x)}$ (0,5)

b) Sens de variation

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $2e^{2x} > 0$ alors $h'(x)$ est du signe de $k(x)$.
On peut donc déduire du I.3 que :
pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h'(x) > 0$ (0,25)

h est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

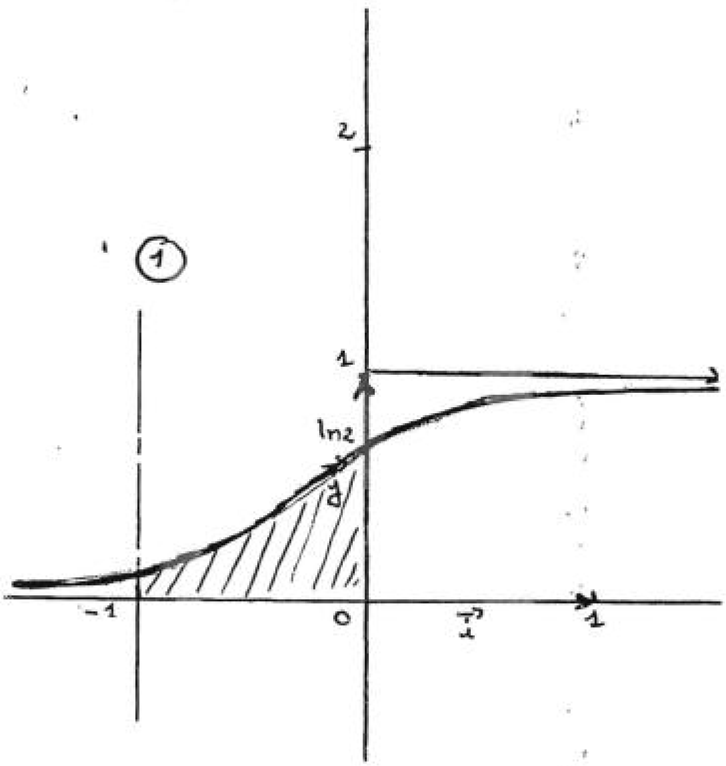
c) Tableau des variations

(0,25)

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$h'(x)$	$+$
$h(x)$	$0 \nearrow 1$

3. Tracé de la courbe

(1)



PRIMITIVE

$$u : x \longmapsto u(x) = \frac{1}{1+e^{-2x}}$$

$$u(x) = \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}} = \frac{1}{2} \times \frac{2e^{2x}}{1+e^{2x}}$$

Donc une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction u est la fonction U définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\boxed{U(x) = \frac{1}{2}\ln\left(1+e^{2x}\right)} \quad 0,5$$

5. CALCUL D'AIRE $\mathcal{A}$:

$$\begin{cases} -1 < x < 0 \\ 0 < y < h(x) \end{cases}$$

0,25

$$\mathcal{A} = \int_{-1}^{0} h(x)\,dx \ \text{u.a.} = \int_{-1}^{0} e^{2x}\ln\left(1+e^{-2x}\right)dx \ \text{u.a.}$$

Posons

$$\begin{cases} U(x) = \ln\left(1+e^{-2x}\right) \\ U'(x) = \dfrac{-2e^{-2x}}{1+e^{-2x}} \end{cases} \qquad \begin{cases} V(x) = \frac{1}{2}e^{2x} \\ V'(x) = e^{2x} \end{cases}$$

1,25

INTEGRATION PAR PARTIES : $\int UV' = [UV] - \int U'V$

$$\int_{-1}^{0} e^{2x}\ln\left(1+e^{-2x}\right)dx = \left[\frac{1}{2}e^{2x}\ln\left(1+e^{-2x}\right)\right]_{-1}^{0} + \int_{-1}^{0}\frac{dx}{1+e^{-2x}}$$

$$\int_{-1}^{0} e^{2x}\ln\left(1+e^{-2x}\right)dx = \left[\frac{1}{2}e^{2x}\ln\left(1+e^{-2x}\right) + \frac{1}{2}\ln\left(1+e^{2x}\right)\right]_{-1}^{0}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\ln 2 + \frac{1}{2}\ln 2\right) - \left(\frac{1}{2}e^{-2}\ln(1+e^{2}) + \frac{1}{2}\ln(1+e^{-2})\right)$$

Soit

$$= 1 + \ln 2 - \left(\frac{1+e^{2}}{2e^{2}}\right)\ln\left(1+e^{2}\right)$$

$$1,5 \quad \boxed{\mathcal{A} = 9\left[1 + \ln 2 - \frac{(1+e^{2})}{2e^{2}}\ln\left(1+e^{2}\right)\right]\text{cm}^2}$$