REPUBLIQUE GABONAISE
OFFICE NATIONAL DU BACCALAUREAT

2004 -1 MATHEMATIQUES
Série: B
Durée: 3 heures
Coefficient: 3

EXERCICE 1:

Un panneau "STOP" a été mis à un carrefour très fréquenté et extrêmement dangereux.
On a constaté que 25 % des automobilistes ne respectent pas le panneau "STOP", que 92% des automobilistes respectant le "STOP" ne provoquent pas d'accident et que 24% des automobilistes ne respectant pas le "STOP" provoquent un accident à ce carrefour.
On choisit au hasard un des automobilistes arrivant à ce carrefour et on définit les événements suivants :

R : « L 'automobiliste a respecté le panneau "STOP" »
A : « L'automobiliste a provoqué un accident à ce carrefour »

Pour tout événement V, on note $\overline{V}$ l'événement contraire de V.

1. Préciser les probabilités : $p(\overline{A}/R)$ et $p(A/\overline{R})$.
2. a) Déterminer la probabilité de chacun des événements :
   E : « L'automobiliste n'a pas respecté le "STOP" et a provoqué un accident »
   F : « L'automobiliste a respecté le "STOP" et a provoqué un accident »
   b) Justifier que la probabilité de provoquer un accident est $p = 12\%$
3. Un automobiliste a provoqué un accident à ce carrefour.
   Quelle est la probabilité qu'il n'ait pas respecté le panneau "STOP" ?
4. Huit automobilistes arrivent successivement à ce carrefour. On nomme X la variable aléatoire égale au nombre d'automobilistes de cette série ayant, indépendamment les uns des autres, provoqué un accident à ce carrefour.
   a) Déterminer la probabilité que deux au plus de ces automobilistes provoquent un accident à 10^{-2} près.
   b) Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X.
   c) Calculer l'écart - type de X à 10^{-2} près.

EXERCICE 2 :

Les budgets d'une entreprise ont été les suivants les trois dernières années (en millions de francs).

Année	2001	2002	2003
budget	360	396	435,6

1. On désigne par t_1 le taux d'augmentation du budget de 2001, et par t_2 celui de 2002.
   a) Calculer t_1 et t_2, et vérifier que $t_1 = t_2$.
   b) Calculer le budget de 2004 si le taux d'augmentation du budget de 2003 est de 10%.
2. On admet que le budget de cette entreprise s'accroît de 10% par an.
   Soit n un entier naturel, on désigne par U_n le budget de l'entreprise de l'année (2001+n).
   a) Préciser U_0 et U_1 .
   b) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = 1,1\, U_n$.
   En déduire la nature de la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
   c) Exprimer U_n en fonction de n.
3. Quel serait le budget de cette entreprise en 2010, à un million de francs près ?
4. En quelle année le budget de l'entreprise dépassera-t-il, pour la première fois, 2 milliards de francs ?

PROBLEME :

Le plan est rapporté à un repère orthonormal (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$), d'unité graphique 2 cm.

On considère les fonctions f et g définies sur l'intervalle [– 1 ; + ∞ [par :

$$f(x) = -1 + (-x+3)\,e^{x} \qquad \text{et} \qquad g(x) = -1 + \ln\left(\frac{x+7}{2x+4}\right)$$

ln désigne le logarithme népérien et e sa base.

Les parties A et B du problème sont indépendantes.

Partie A : Etude de la fonction f.

1. Calculer la limite de f en + ∞

2. Etudier le sens de variation de la fonction f et dresser son tableau de variation.
On y précisera f (– 1) ; f (2) ; f '(– 1) et f '(2). (f ' désignant la fonction dérivée de f)

3. Tracer la courbe représentative (C) de la fonction f.

4. A l'aide d'une intégration par parties calculer : $\int_{-1}^{x} (-t+3)\,e^{t}\,dt$.

En déduire : $I = \int_{-1}^{2} f(t)\,dt$.

Partie B : Etude de la fonction g.

On considère la fonction u définie sur [– 1; + ∞ [par : $u(x) = \dfrac{x+7}{2x+4}$.

1. Vérifier que, pour tout x de [– 1 ; + ∞ [, u(x) > 0.

2. Etudier le sens de variation de la fonction u.

3. a) On désigne par v la fonction affine qui à tout réel x associe v(x) = – 1 + x .
Vérifier que la fonction g est la fonction composée [v o (ln) o u] des fonctions u, ln et v.

b) En utilisant le sens de variation des fonctions u, ln et v montrer que g est une fonction décroissante sur [– 1 ; + ∞ [, puis dresser son tableau de variation.
(On admet que la composée de deux fonctions de même sens de variation est une fonction croissante, que la composée de deux fonctions de sens de variation contraires est une fonction décroissante)

4. a) Soit (Γ) la courbe représentative de la fonction g. Montrer que la droite (D) d'équation $y = -1 - \ln 2$ est asymptote à la courbe (Γ).

b) Tracer dans le repère précédent la courbe (Γ).

5. Soit G la fonction définie sur [– 1 ; + ∞ [par :

$$G(x) = -x + (x+7)\ln(x+7) - (x+2)\ln(2x+4)$$

Démontrer que G est une primitive de la fonction g sur [–1 ;+ ∞ [, et calculer $J = \int_{-1}^{2} g(t)\,dt$.

Partie C : Calcul d'aire.

1. a) Montrer que (C) et (Γ) se coupent au point d'abscisse 3.

b) Résoudre graphiquement l'inéquation : $g(x) \le f(x)$.

2. Calculer à 1 cm² près l'aire A du domaine plan constitué des points M (x ; y) tels que :

$$\begin{cases} -1 \le x \le 2 \\ g(x) \le y \le f(x) \end{cases}$$

CORRIGE 2004 - 1

I

1° Calcul de $P(\bar{A}/R)$ et $P(A/\bar{R})$

$P(\bar{A}/R)$ est la probabilité de ne pas provoquer d'accident sachant qu'on a respecté le STOP, alors $p(\bar{A}/R) = 0,92$ — 0,5

$P(A/\bar{R})$ est la probabilité de provoquer un accident sachant qu'on n'a pas respecté le stop, alors $p(A/\bar{R}) = 0,24$. — 0,5

2° a) Calcul de P(E) et de P(F)

$p(E) = p(A \cap \bar{R}) = p(\bar{R}) \times p(A/\bar{R}) = 0,25 \times 0,24 = 0,06$ → 0,5

$p(F) = p(A \cap R) = p(R) \times p(A/R) = [1 - p(\bar{R})][1 - p(\bar{A}/R)]$

$p(F) = 0,75 \times 0,08 = 0,06$. → 0,5

b) Calcul de p(A)

$p(A) = p(A \cap \bar{R}) + p(A \cap R) = p(E) + p(F) = 0,12$. → 0,5

3° Calcul de $P(\bar{R}/A)$

$$p(\bar{R}/A) = \frac{P(A \cap \bar{R})}{P(A)} = \frac{0,06}{0,12} = 0,5$$ → 0,75

4° a) Calcul de $P(X \leq 2)$

X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(8; 0,12)$ et

$p(X = k) = C_8^k \, 0,12^k \, 0,88^{8-k}$

$P(X \leq 2) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)$

$P(X \leq 2) = 0,88^8 + C_8^1 \, 0,12 \times 0,88^7 + C_8^2 \, 0,12^2 \times 0,88^6 = 0,94$ — 1

b) Calcul de E(X)

$X \rightsquigarrow \mathcal{B}(8; 0,12)$ alors $E(X) = np = 8 \times 0,12 = 0,96$ — 0,5

$40 = 28 + 12$

$6 + 19 + 12 + 4 + 14 + 14 + 17$

c) Calcul de σ_X

$X \rightsquigarrow \mathcal{B}(n,p)$ alors $V(X) = \sigma_X^2 = npq = 8 \times 0{,}12 \times 0{,}88 = 0{,}8448$

$\sigma_X = \sqrt{0{,}8448} = 0{,}92$ 0,25

II 1° a) Calcul de t_1 et t_2

$t_1 = \dfrac{\text{budget } 2002 - \text{budget } 2001}{\text{budget } 2001} = \dfrac{396-360}{360} = 10\%$ 0,25

$t_2 = \dfrac{\text{budget } 2003 - \text{budget } 2002}{\text{budget } 2002} = \dfrac{435{,}6-396}{396} = 10\%$ 0,25

$t_1 = t_2 = 10\%$

b) Calcul du budget 2004

budget 2004 = budget 2003 + 10% budget 2003 = 479,16 0,5

2° a) U_0 et U_1

U_0 = budget de 2001 = 360 0,25

U_1 = budget de [(2001+1) = 2002] = 396 0,25

b) Calcul de U_{n+1} en fonction de U_n.

$U_{n+1} = U_n + 10\% \, U_n = 1{,}1 \, U_n$. 0,25

(U_n) est donc une suite géométrique de raison $q = 1{,}1$

et de premier terme $U_0 = 360$ 0,75

c) Calcul de U_n en fonction de n. $U_n = q^n U_0 = 1{,}1^n \times 360$ 0,5

3° Budget en 2010 = U_9 $U_9 = 1{,}1^9 \times 360 = 848{,}86 \simeq 849$ 0,5

4° Budget dépasse 2000 en l'année... $U_n > 2000$ soit

$1{,}1^n \times 360 > 2000 \Rightarrow n > \dfrac{1}{\ln 1{,}1} \times \ln \dfrac{2000}{360}$ $n > \dfrac{1{,}715}{\ln 1{,}1}$

$n > 17,99$ et $n = 18$.

Le budget dépasse 2 milliards, pour la 1ère fois, en l'an 2019 0,5

III

PARTIE A

1° Limite de f en $+\infty$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}(-x+3) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty}(e^{x}) = +\infty\end{array}\right\} \text{ alors } \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$$ 0,5

2° Sens de variation de f

f est composée de fonctions toutes dérivables sur $[-1;+\infty[$

donc f est dérivable sur $[-1;+\infty[$ et $f'(x) = (-x+2)e^{x}$ 0,75

Signe de $f'(x)$ = signe de $(-x+2)$

Si $-1 \leq x \leq 2$, $-x+2 \geqslant 0$ et $f'(x) \geqslant 0$: f est croissante.

Si $x \geqslant 2$, $-x+2 \leq 0$ et $f'(x) \leq 0$: f est décroissante 0,75

$f(-1) = -1 + 4e^{-1}$ et $f'(-1) = 3e^{-1}$

$f(2) = -1 + e^{2}$ et $f'(2) = 0$

Tableau de variation

x	-1		2		$+\infty$
$f'(x)$	$3e^{-1}$	+	0	−	
$f(x)$	$-1+\frac{4}{e}$	↗	$-1+e^{2}$	↘	$-\infty$

1

3° Courbe de f 0,5

4° Calcul de $\int_{-1}^{x}(-t+3)e^{t}\,dt$

Posons $u = 3-t$ $u' = -1$

$v' = e^{t}$ $v = e^{t}$

$$\int_{-1}^{x}(-t+3)e^{t}\,dt = \left[(3-t)e^{t}\right]_{-1}^{x} - \int_{-1}^{x} -e^{t}\,dt$$ 0,75

$$= \left[(3-t)e^{t}\right]_{-1}^{x} + \left[e^{t}\right]_{-1}^{x} = \left[(4-t)e^{t}\right]_{-1}^{x}$$

$\int_{-1}^{x}(-t+3)e^{t}\,dt = (4-x)e^{x} - (5e^{-1}) = (4-x)e^{x} - 5e^{-1}$ 0,25

Calcul de $\int_{-1}^{2} f(t)\,dt$

$\int_{-1}^{2}(-t+3)e^{t}\,dt = 2e^{2} - 5e^{-1}$ alors $\int_{-1}^{2} f(t)\,dt = [-x]_{-1}^{2} + 2e^{2} - 5e^{-1}$

$\int_{-1}^{2} f(t)\,dt = 2e^{2} - 5e^{-1} + (-2-1) = 2e^{2} - 5e^{-1} - 3$

$$I = 2e^{2} - 5e^{-1} - 3 \simeq 9,94$$

PARTIE B

1° Montrons que $U(x) > 0$ sur $[-1;+\infty[$

Signe de $U(x)$ = signe de $[(x+7)(2x+4)]$ = signe de $(x+7)(x+2)$

Sur $[-1;+\infty[$ $(x+7)>0$ et $(x+2)>0$ donc $U(x) > 0$. 0,5

2° Sens de variation de U.

U est une fonction rationnelle, elle est donc dérivable sur $[-1;+\infty[$ et $U'(x) = -\frac{10}{(2x+4)^2}$. 0,5

$U'(x) < 0$ et U est une fonction décroissante. 0,5

3° g est la composée des fonctions U, $\ln$ et V

$(\ln \circ U)(x) = \ln U(x) = \ln\left(\frac{x+7}{2x+4}\right)$

$[V\circ(\ln\circ U)](x) = V[(\ln\circ U)(x)] = -1 + (\ln\circ U)(x)$

$[V\circ(\ln\circ U)](x) = -1 + \ln\left(\frac{x+7}{2x+4}\right) = g(x)$. 0,5

b) g est une fonction décroissante

Les fonctions V et $\ln$ sont des fonctions croissantes sur $\mathbb{R}_+^*$ donc $V\circ\ln$ est une fonction croissante.

La fonction U est décroissante et positive sur $[-1;+\infty[$ donc $(V\circ\ln)\circ U$ est décroissante sur $[-1;+\infty[$ 1

Tab. g $-1+\ln 3 \to -1-\ln 2$ 0,5

4° a) La droite (D) est asymptote à (Γ)

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x+7}{2x+4} = \frac{1}{2}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{x+7}{2x+4}\right) = \ln\frac{1}{2} = -\ln 2$

donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[-1+\ln\left(\frac{x+7}{2x+4}\right)\right] = -1-\ln 2$ 0,5

donc la droite (D) d'équation $y = -1-\ln 2$ est asymptote à (Γ). 0,25

b) Courbe (Γ) → 0,5

5° G est une primitive de g sur $[-1;+\infty[$

Calculons $G'(x) = -1 + \ln(x+7) + \frac{x+7}{x+7} - \left[\ln(2x+4) + \frac{2(x+2)}{2x+4}\right]$

$= -1 + \ln(x+7) + 1 - \ln(2x+4) - 1$

$= -1 + \ln\left(\frac{x+7}{2x+4}\right) = g(x)$ 0,50

G est donc une primitive de g. 0,25

Calcul de $J = \int_{-1}^{2} g(t)\,dt$

$J = G(2) - G(-1) = -2 + 9\ln 9 - 4\ln 8 - (1 + 6\ln 6 - \ln 2)$

$= -2 + 18\ln 3 - 12\ln 2 - (1 + 6\ln 3 + 6\ln 2 - \ln 2)$

$= -3 + 12\ln 3 - 17\ln 2 \simeq -1{,}600$ 0,75

PARTIE C

1° (C) et (Γ) se coupent en $x_0 = 3$

$f(3) = g(3) = -1$ donc (C) et (Γ) se coupent en $x_0 = 3$. 0,5

b) Résolution graphique de $g(x) \leq f(x)$

La courbe $(\mathscr{C})$ est au-dessus de (Γ) lorsque $-1 \leq x \leq 3$ 0,5

$S = [-1;3]$.

2° Calcul de A

$$A = (2\text{cm})^2 \times \int_{-1}^{2} [f(x) - g(x)]\, dx = 4\text{cm}^2 \times \int_{-1}^{2} f(x)dx - 4\text{cm}^2 \int_{-1}^{2} g(x)\, dx$$

$$= (4I - 4J)\,\text{cm}^2 = 4\,(9{,}94 + 1{,}60)\,\text{cm}^2 = 46{,}16\,\text{m}^2 \qquad \underline{1}$$

$$A = 46\ \text{cm}^2$$