

EXERCICE 1 (5 points)

u est une fonction de la variable réelle x , dérivable sur son ensemble de définition.
 On désigne par u' la fonction dérivée de u .
 Voici le tableau des variations de u :

x	$-\infty$	-1	1	2	$+\infty$
$u'(x)$		+	0	-	-
$u(x)$	$-\infty$	0	e	0	-1

A. 1) Préciser l'ensemble de définition D de u , puis déterminer les limites de u aux bornes de D .

2) a) Quelles sont les solutions de l'équation $u(x) = 0$?

b) Déterminer $u(1)$ et $u'(1)$.

3) Déterminer le signe de $u(x)$ suivant les valeurs de x .

B. En utilisant le tableau des variations de u , dresser les tableaux des variations des fonctions numériques f , g et h telles que :

a) $f = \ln u$; b) $g = |u|$; c) $h = \ln|u|$ où \ln désigne la fonction logarithme népérien.

EXERCICE 2 (5 points)

Un sac contient neuf jetons indiscernables au toucher sur lesquels sont inscrits les lettres du mot **D I V I D E N D E**, à raison d'une lettre par jeton.

1) On tire au hasard du sac successivement et sans remise quatre jetons que l'on pose côte à côte sur une table, dans l'ordre du tirage.

a) Quelle est la probabilité P_1 d'obtenir le mot **V I D E** ?

b) Quelle est la probabilité P_2 d'obtenir le mot **E D E N** ?

2) Cette fois, on tire simultanément et au hasard deux jetons parmi les neuf jetons du sac. A chacune des lettres **D**, **V** et **N**, on attribue la valeur 2 ; à la lettre **E**, on attribue la valeur 1 et à la lettre **I**, la valeur 3.

a) Calculer la probabilité P_3 de tirer deux jetons portant chacun la lettre **E**.

b) Calculer la probabilité P_4 de tirer deux jetons portant chacun une consonne.

c) Calculer la probabilité P_5 de tirer un jeton portant une consonne et un jeton portant la lettre **I**.

3) Soit X la variable aléatoire qui, à chaque résultat possible du tirage, associe la somme des valeurs des lettres qui y sont inscrites.

a) Préciser l'ensemble des valeurs possibles de X .

b) Déterminer la loi de probabilité de X , puis calculer son espérance mathématique $E(X)$.

PROBLEME (10 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) où l'unité graphique est 2cm.

PARTIE A

On considère la fonction numérique g définie sur \mathbb{R} par $g(x) = ae^{2x} + be^x$ où a et b sont deux constantes réelles.

Déterminer a et b pour que la courbe (Γ) représentative de g dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) passe par le point $A(0; -3)$ et admette en ce point une tangente de coefficient directeur -2 .

PARTIE B

Soit la fonction numérique f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = e^{2x} - 4e^x$ et soit (\mathcal{C}) sa courbe représentative dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1. a) Calculer la limite de f en $-\infty$.
b) Quelle en est la conséquence graphique pour (\mathcal{C}) ?
2. a) Vérifier que $f(x) = e^x(e^x - 4)$ pour tout réel x .
b) En déduire la limite de f en $+\infty$.
3. a) Soit f' la fonction dérivée de f . Montrer que pour tout réel x , $f'(x) = 2e^x(e^x - 2)$ puis, étudier le sens de variation de f .
b) Donner le tableau des variations complet de f .
c) Ecrire une équation de la tangente (Δ) à (\mathcal{C}) en son point d'abscisse 0.
d) Déterminer les coordonnées du point d'intersection B de (\mathcal{C}) avec l'axe des abscisses du repère.
4. On se propose d'étudier la position de (\mathcal{C}) par rapport à (Δ) .
Pour cela, on considère la fonction h définie sur \mathbb{R} par : $h(x) = e^{2x} - 4e^x + 2x + 3$.
 - a) Etudier les variations de h , puis dresser son tableau de variation en y faisant figurer $h(0)$. (On ne demande pas de calculer les limites de h).
 - b) En déduire le signe de $h(x)$ suivant les valeurs de x , puis donner la position de (\mathcal{C}) par rapport à (Δ) .
 - c) Tracer (Δ) et (\mathcal{C}) dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

PARTIE C

On pose $L = \int_0^{\ln 2} h(x) dx$.

- a) Calculer la valeur exacte de L .
- b) En déduire la valeur exacte de l'aire en cm^2 du domaine \mathcal{D} , ensemble des points $M(x, y)$ tels que
$$\begin{cases} 0 \leq x \leq \ln 2 \\ -2x - 3 \leq y \leq f(x) \end{cases}$$

CORRIGE SUJET 1 (Série A1)

Exercice 2 (suite)

Exercice 1

$]-\infty; +\infty[$ (0,25x2)
 $u(x) = -\infty; \lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = -1$ (0,25x2)

$u(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$ ou $x = -1$
 $S = \{-1; 2\}$ (0,25x2)

$u(1) = e$ et $u'(1) = 0$ (0,25x2).
 $x) > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty; -1[\cup]2; +\infty[$
 $x) < 0 \Leftrightarrow x \in]-1; 2[$ (0,5)

	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
)	-	0	+ 0	-

$f = \ln u \Rightarrow D_f =]-1; 2[$ (0,75)

	-1	1	2
)	+	0	-
)		0	
)	$-\infty$		$+\infty$

$D_f =]-1; 2[$ (1)

	$-\infty$	-1	1	2	$+\infty$
)	-	+	0	-	+
)	$+\infty$		0		$+\infty$
)		$-\infty$		$+\infty$	

$D_f = \ln |u| \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{-1; 2\}$ (1)

	$-\infty$	-1	1	2	$+$
)	-	+	0	-	+
)	$+\infty$		$-\infty$		$+\infty$
)		$-\infty$		$+\infty$	

Exercice 2

Nombre de résultats possibles ${}^4 A_9 = 9 \times 8 \times 7 \times 6 = 3024$

Nombre de cas favorables au tirage du mot "EIFFEL" $1 \times 2 \times 3 \times 2 = 12$ donc $P_1 = \frac{12}{3024} = \frac{1}{252}$ (1)

Nombre de cas favorables au tirage du mot "EIFFE" $2 \times 3 \times 1 \times 1 = 6$ donc $P_2 = \frac{6}{3024} = \frac{1}{504}$ (0,5)

Nombre de tirages possibles ${}^2 C_9 = \frac{9 \times 8}{2 \times 1} = 36$

Nombre de cas favorables au tirage de deux jetons

portant chacun la lettre E ${}^2 C_2 = 1$ donc $P_3 = \frac{1}{36}$ (0,5)

b) Nombre de tirages permettant d'obtenir un jeton portant une consonne et un jeton portant la lettre I est :

${}^1 C_3 \times {}^1 C_1 = 3 \times 1 = 3$ donc $P_4 = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$ (0,5)

c) Nombre de tirages favorisant l'obtention de deux jetons portant chacun une consonne ${}^2 C_3 = \frac{3 \times 2}{2!} = 3$ donc

$P_5 = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$ (0,5)

3. a) $X \in \{2; 3; 4; 5; 6\}$ (0,5)

b) Loi de probabilité de X (1,25 avec 0,25 par erreur)

$(X = x_i)$	2	3	4	5	6
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{14}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{1}{36}$

$E(X) = 2 \times \frac{1}{36} + 3 \times \frac{10}{36} + 4 \times \frac{14}{36} + 5 \times \frac{10}{36} + 6 \times \frac{1}{36}$ (0,25)
 $= \frac{140}{36} = \frac{35}{9}$

Problème

Partie A

$g(x) = ae^{2x} + be^x$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

$A(0, -3) \in (\Gamma) \Leftrightarrow g(0) = -3 \Leftrightarrow a + b = -3$ (0,25x2)

(Γ) admet en A une tangente de coefficient directeur -2 équivaut à $g'(0) = -2$. (0,25x2)

Or $g'(x) = 2ae^{2x} + be^x$ donc (0,25)

$g'(0) = -2 \Leftrightarrow 2a + b = -2$ d'où le système (0,5)

$\begin{cases} a + b = -3 \\ 2a + b = -2 \end{cases} \Leftrightarrow a = 1 \text{ et } b = -4$ (0,5)

Donc g est définie sur \mathbb{R} par $g(x) = e^{2x} - 4e^x$.

Partie B

f est définie sur \mathbb{R} par $f'(x) = e^{2x} - 4e^x$.

1. a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{2x} - e^x) = 0$ (0,25)

b) En conséquence, l'axe des abscisses est asymptote horizontale à (C) en $-\infty$. (0,25)

2. a) $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = (e^x)^2 - 4e^x \Rightarrow f(x) = e^x(e^x - 4)$ (0,25)

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - 4) = +\infty \Rightarrow$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ (par produit) (0,25)

3. a) $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 2e^{2x} - 4e^x = 2e^x(e^x - 2)$ (0,5+0,25)

$\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0 \Rightarrow f'(x)$ a le signe de $e^x - 2$.

x	$-\infty$	$\ln 2$	$+\infty$
f(x)	-	0	+

 (0,5)

$\forall x \in]-\infty; \ln 2[, f'(x) < 0$ donc f est strictement décroissante sur $]-\infty; \ln 2[$. (0,25)

$\forall x \in]\ln 2; +\infty[, f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $]\ln 2; +\infty[$. (0,25)

Partie B (suite)

3. b) (0,5)

x	$-\infty$	$\ln 2$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
f(x)	0	-4	$+\infty$

c) $(\Delta): y = f'(0)x + f(0) \Rightarrow (\Delta): y = -2x - 3$. (0,5)

d) $f(x) = 0 \Leftrightarrow e^x(e^x - 4) = 0 \Leftrightarrow e^x - 4 = 0$

$e^x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \ln 4 = 2 \ln 2 \Rightarrow B(2 \ln 2; 0)$. (0,5)

4. h est définie sur \mathbb{R} par $h(x) = e^{2x} - 4e^x + 2x + 3$.

$\forall x \in \mathbb{R}, h'(x) = 2e^{2x} - 4e^x + 2$

a) $= 2(e^{2x} - 2e^x + 1)$ (0,25)

$= 2(e^x - 1)^2 \Rightarrow$ (0,25)

$\forall x \in \mathbb{R}, h'(x) \geq 0$. (0,25)

On en déduit que h est strictement croissante sur \mathbb{R} et $h(0) = 0$. (0,25),

d'où le tableau de variation (0,5)

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h'(x)$	+	0	+
h(x)		0	

b) En conclusion, $h(x) < 0$ pour $x \in]-\infty; 0[$

et $h(x) > 0$ pour $x \in]0; +\infty[$. (0,5)

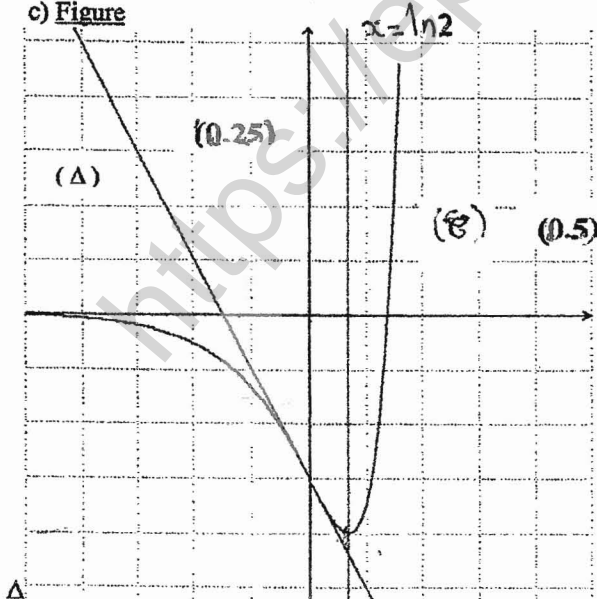
Position de (\mathcal{C}) par rapport à (Δ)

Elle est donnée par le signe de $f(x) - (-2x - 3)$.

$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) - (-2x - 3) = e^{2x} - 4e^x + 2x + 3 = h(x)$ (0,25)

Donc d'après l'étude du signe de $h(x)$, (\mathcal{C}) est au-dessus de (Δ) sur $]0; +\infty[$, (\mathcal{C}) est en-dessous de (Δ) sur $]-\infty; 0[$ et (\mathcal{C}) et (Δ) sont sécantes au point A. (0,5)

c) Figure



Partie C

a)

$L = \int_0^{\ln 2} h(x) dx$
 $= \int_0^{\ln 2} (e^{2x} - 4e^x + 2x + 3) dx$
 $= \left[\frac{1}{2} e^{2x} - 4e^x + x^2 + 3x \right]_0^{\ln 2}$ (0,5)

$= 2 - 8 + (\ln 2)^2 + 3 \ln 2 - \frac{1}{2} + 4$

$= -6 + 4 - \frac{1}{2} + (\ln 2)^2 + 3 \ln 2$

$= (\ln 2)^2 + 3 \ln 2 - \frac{5}{2}$ (0,5)

b) Calcul d'aire

On sait que $f(x) - (-2x - 3) \geq 0$ sur $[0; \ln 2]$

donc

$\mathcal{A} = \int_0^{\ln 2} [f(x) - (-2x - 3)] dx$ u.a.

$= \int_0^{\ln 2} h(x) dx$ u.a.

1 u.a. = 4 cm², donc $A = L \times 4 \text{ cm}^2$

$= [4(\ln 2)^2 + 12 \ln 2 - 10] \text{ cm}^2$ (0,5)