

COURS D'ANALYSE 2A_Licence 1

DIABATE Nabongo

Maître de Conférences

Université Alassana Ouattara de Bouaké (Côte d'Ivoire)

Département des Sciences et Techniques

koloetienne180@gmail.com

18 avril 2023

Table des matières

1	DEVELOPPEMENTS LIMITES	1
1.1	Généralités	1
1.1.1	Définition et propriétés	1
1.1.2	Théorème de Taylor-Young	1
1.1.3	Développements limités usuels	2
1.2	Opérations sur les développements limités	3
1.2.1	Combinaison linéaire	3
1.2.2	Produit	3
1.2.3	Quotient	3
1.2.4	Fonction composée	3
1.2.5	Intégration	3
1.2.6	Dérivation	3
1.3	Applications des développements limités	4
1.3.1	Etude d'une fonction au voisinage de x_0	4
1.3.2	Développements limités au voisinage de $+\infty$ (ou $-\infty$)	4
2	CALCUL INTEGRAL	5
2.1	Fonctions intégrables sur $[a; b]$	5
2.1.1	Intégrale d'une fonction en escalier	5
2.1.2	Fonctions intégrables sur $[a; b]$ (au sens de Riemann)	5
2.1.3	Propriétés de l'intégrale	6
2.1.4	Majoration de l'intégrale	6
2.1.5	Théorème de la moyenne	7
2.2	Calcul numérique d'une intégrale	7
2.2.1	Méthode des rectangles	7
2.2.2	Méthode des trapèzes	7
2.2.3	Méthode de Simpson	7
2.3	Fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ et calcul de primitives	8
2.3.1	Primitives	8
2.3.2	Intégration par parties	8
2.3.3	Intégration par changement de variable	9

2.4	Primitives se ramenant aux fonctions rationnelles	9
2.4.1	Primitives de fractions rationnelles	9
2.4.2	Primitives des fonctions rationnelles en sinus et cosinus	9
2.4.3	Primitives de fonctions rationnelles en e^x , shx , chx	10
2.4.4	Primitives de fonctions contenant des radicaux	10
3	EQUATIONS DIFFERENTIELLES	11
3.1	Définitions générales	11
3.1.1	Equations différentielles	11
3.1.2	Ordre d'une équation différentielle	11
3.1.3	Solution d'une équation différentielle	11
3.1.4	Courbe intégrale	11
3.1.5	Problème de Cauchy	12
3.2	Equations différentielles du premier ordre	12
3.2.1	Cas où $F[t, x(t), x'(t)] = x'(t) - g(t)$ avec g une fonction continue donnée sur un intervalle I de \mathbb{R}	12
3.2.2	Cas où $F[t, x(t), x'(t)] = h[x(t)]x'(t) - g(t)$ avec h et g deux fonctions continues dont on connaît les primitives respectives H et G	12
3.2.3	Cas où $F[t, x(t), x'(t)] = x'(t) + a(t)x(t) - b(t)$ avec a et b deux fonctions données, continues sur un intervalle I de \mathbb{R}	13
3.2.4	Cas où $F[t, x(t), x'(t)] = x'(t) + a(t)x(t) - b(t)x^\alpha(t)$ avec a et b deux fonctions continues données sur un intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$ et α un réel.	13
3.2.5	Cas où $F[t, x(t), x'(t)] = x'(t) - a(t)x^2(t) - b(t)x(t) - c(t)$ avec a , b et c des fonctions continues données sur un intervalle I de \mathbb{R}	14
3.3	Equations différentielles linéaires du second degré à coefficients constants	14
3.3.1	Définition	14
3.3.2	Théorèmes dus à la linéarité	15
3.3.3	Méthode de résolution de l'équation homogène (E_{61})	15
3.3.4	Détermination d'une solution particulière x_p de l'équation (E_6)	15
3.4	Méthode générales de résolution de l'équation complexe (E_6)	16
3.4.1	Si x_1 et x_2 sont des solutions linéairement indépendantes de (E_6)	16
3.4.2	Si x_1 est une solution de l'équation homogène ne s'annulant pas sur I	17

Chapitre 1

DEVELOPPEMENTS LIMITES

1.1 Généralités

1.1.1 Définition et propriétés

Définition 1.1. Soit f une fonction définie au voisinage de 0. On dit que f admet un développement limité d'ordre n ($n \in \mathbb{N}$) au voisinage de 0 s'il existe des réels a_0, \dots, a_n tels que

$$f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + x^n\varepsilon(x)$$

où ε est une fonction telle que $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$. $P_n(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ s'appelle la partie régulière du développement limité. Le reste $x^n\varepsilon(x)$ s'écrit aussi $o(x^n)$. Dans un calcul, on pourra utiliser la même notation $\varepsilon(x)$ pour toute fonction telle que $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$.

Propriété 1.

- a) Si une fonction admet au voisinage de 0 un développement limité d'ordre n , il est unique.
- b) Si une fonction paire admet un développement limité, les coefficients a_1, a_3, \dots dont l'indice est impair sont nuls.
- c) Si une fonction impaire admet un développement limité, les coefficients a_0, a_2, \dots dont l'indice est pair sont nuls.

Propriété 2. (Propriété de troncature)

Si f admet au voisinage de 0 un développement limité d'ordre n dont la partie régulière est $a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$, alors pour tout $p \leq n$, f admet au voisinage de 0 un développement limité d'ordre p dont la partie régulière est $a_0 + a_1x + \dots + a_px^p$.

1.1.2 Théorème de Taylor-Young

Théorème 1.1. Si $f^{(n)}(0)$ existe, alors f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de 0 qui s'écrit

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + x^n\varepsilon(x).$$

1.1.3 Développements limités usuels

a) **La fonction** $x \mapsto (1+x)^\alpha$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + x^n\varepsilon(x).$$

Si $\alpha \in \mathbb{N}$, alors pour tout $p > \alpha$, les coefficients de x^p sont nuls.

Cas particuliers.

- $\frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + x^n\varepsilon(x).$
- $\sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + x^4\varepsilon(x).$
- $\frac{1}{\sqrt{1+x}} = (1+x)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + \frac{35}{128}x^4 + x^4\varepsilon(x).$

b) **La fonction** $x \mapsto e^x$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + x^n\varepsilon(x).$$

c) **La fonction** $x \mapsto \ln(1+x)$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + x^n\varepsilon(x).$$

d) **La fonction** $x \mapsto \sin x$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+2}\varepsilon(x).$$

e) **La fonction** $x \mapsto \cos x$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+1}\varepsilon(x).$$

f) **La fonction** $x \mapsto \operatorname{sh}x$

$$\operatorname{sh}x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+2}\varepsilon(x).$$

g) **La fonction** $x \mapsto \operatorname{ch}x$

$$\operatorname{ch}x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+1}\varepsilon(x).$$

1.2 Opérations sur les développements limités

1.2.1 Combinaison linéaire

Si f et g admettent au voisinage de 0 des développements limités d'ordre n de parties régulières $P_n(x)$ et $Q_n(x)$, alors $\lambda f + \mu g$ (où λ et μ sont des réels) admet au voisinage de 0 un développement limité d'ordre n dont la partie régulière est $\lambda P_n(x) + \mu Q_n(x)$.

1.2.2 Produit

Si f et g admettent au voisinage de 0 des développements limités d'ordre n de parties régulières $P_n(x)$ et $Q_n(x)$, alors fg admet au voisinage de 0 un développement limité d'ordre n dont la partie régulière est formée des termes de degré $\leq n$ du produit $P_n(x)Q_n(x)$.

1.2.3 Quotient

Si f et g admettent au voisinage de 0 des développements limités d'ordre n de parties régulières $P_n(x)$ et $Q_n(x)$, et si $g(0) \neq 0$, alors $\frac{f}{g}$ admet au voisinage de 0 un développement limité d'ordre n dont la partie régulière s'obtient par la division suivant les puissances croissantes de $P_n(x)$ par $Q_n(x)$ jusqu'à l'ordre n .

1.2.4 Fonction composée

Si f et g admettent au voisinage de 0 des développements limités d'ordre n de parties régulières $P_n(x)$ et $Q_n(x)$, et si $g(0) = 0$, alors la fonction composée $f \circ g$ admet au voisinage de 0 un développement limité d'ordre n . La partie régulière s'obtient en remplaçant x dans $P_n(x)$ par $Q_n(x)$ (i.e. $(P \circ Q)(x)$) et en ne conservant que les monômes de degré $\leq n$.

1.2.5 Intégration

Si f est dérivable sur un intervalle ouvert contenant 0, et si f' admet au voisinage de 0 un développement limité d'ordre $n - 1$:

$$f'(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + x^{n-1}\varepsilon(x)$$

alors f admet au voisinage de 0 un développement limité d'ordre n obtenu par intégration terme à terme :

$$f(x) = f(0) + a_0x + \frac{a_1}{2}x^2 + \dots + \frac{a_{n-1}}{n}x^n + x^n\varepsilon(x).$$

1.2.6 Dérivation

Si f est indéfiniment dérivable au voisinage de 0, on peut appliquer la formule de Taylor-Young à f et à f' . Les développements limités de f' s'obtiennent en dérivant les développements limités de f .

1.3 Applications des développements limités

1.3.1 Etude d'une fonction au voisinage de x_0 .

Si f est définie au voisinage de x_0 ($x_0 \neq 0$), avec le changement de variable $x = x_0 + h$, on se ramène au voisinage de 0.

$$f(x) = f(x_0 + h) = \phi(h).$$

Attention : Dans un développement limité d'ordre n au voisinage de x_0 :

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n + (x - x_0)^n \varepsilon(x - x_0)$$

à ne pas regrouper suivant les puissances de x . Pour une fonction f indéfiniment dérivable au voisinage de x_0 , la tangente à la courbe au point d'abscisse x_0 a pour équation

$$y = a_0 + a_1(x - x_0)$$

et le premier terme non nul d'ordre strictement supérieur à 1 donne (localement) la position de la courbe par rapport à la tangente. En particulier, si son degré est impair, il y a un point d'inflexion en x_0 .

1.3.2 Développements limités au voisinage de $+\infty$ (ou $-\infty$)

Soit f définie sur un intervalle $]A; +\infty[$ ou $] -\infty; A[$. Quand x tend vers l'infini, $X = \frac{1}{x}$ tend vers zéro. Et en remplaçant x par $\frac{1}{X}$ on est ramené au voisinage de 0.

Lorsque x et $f(x)$ tendent vers l'infini, on obtient une (éventuelle) asymptote oblique en effectuant le développement limité au voisinage de l'infini :

$$\frac{f(x)}{x} = a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^p} + \frac{1}{x^p} \varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)$$

où $\frac{c}{x^p}$ est le premier terme non nul après $\frac{b}{x}$. Dans ce cas, la courbe $y = f(x)$ admet une asymptote oblique d'équation $y = ax + b$. Et la position relative de la courbe et de l'asymptote est donnée par le signe de $f(x) - (ax + b)$ qui est celui de $\frac{c}{x^{p-1}}$, lorsque x tend vers l'infini.

Chapitre 2

CALCUL INTEGRAL

2.1 Fonctions intégrables sur $[a; b]$

2.1.1 Intégrale d'une fonction en escalier

Définition 2.1. On appelle subdivision σ de $[a; b]$, la donnée d'un nombre fini de points x_0, x_1, \dots, x_n tels que $x_0 = a$, $x_n = b$ et $x_0 < x_1 < \dots < x_n$. On note \mathcal{S} l'ensemble des subdivisions de $[a; b]$.

Définition 2.2. Une fonction f définie sur $[a; b]$ est une fonction en escalier sur $[a; b]$ s'il existe $\sigma \in \mathcal{S}$ telle que f soit constante et égale à ℓ_i sur chaque intervalle ouvert $]x_i; x_{i+1}[$.

Définition 2.3. On appelle intégrale de la fonction en escalier f , le nombre $\sum_{i=0}^{n-1} \ell_i(x_{i+1} - x_i)$. Ce nombre est noté $I(f)$ ou $\int_a^b f(t)dt$. $I(f)$ ne dépend pas de la valeur de f aux points x_i de la subdivision σ .

2.1.2 Fonctions intégrables sur $[a; b]$ (au sens de Riemann)

Définition 2.4. Soit f une fonction bornée sur $[a; b]$. f est dite **intégrable** sur $[a; b]$ (au sens de Riemann) si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe deux fonctions u et v en escalier sur $[a; b]$ telles que

$$u \leq f \leq v \quad \text{et} \quad 0 < I(v) - I(u) < \varepsilon.$$

Il existe alors un réel unique I tel que pour toutes fonctions u_1 et v_1 en escalier sur $[a; b]$ vérifiant $u_1 \leq f \leq v_1$, on ait

$$I(u_1) \leq I \leq I(v_1).$$

Le nombre I s'appelle **l'intégrale** de f sur $[a; b]$ et se note $I(f)$ ou $\int_a^b f(x)dx$. Ce nombre dépend de f , de a , de b , mais pas de la variable d'intégration, notée ici x , qui est une *variable muette*. Pour $a < b$, on pose $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$.

Interprétation géométrique

Soit f une fonction intégrable sur $[a; b]$.

- Si f est positive sur $[a; b]$, $\int_a^b f(x)dx$ représente l'aire de la partie \mathcal{D} du plan limitée par la courbe représentative de f dans un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) , l'axe des x et les parallèles à l'axe des y d'équations $x = a$ et $x = b$.
- Si f n'est plus supposée positive, $\int_a^b f(x)dx$ représente l'aire algébrique de \mathcal{D} .

Théorème 2.1.

- Toute fonction monotone sur $[a; b]$ est intégrable sur $[a; b]$.
- Toute fonction continue sur $[a; b]$ est intégrable sur $[a; b]$.
- Si f est continue sur $[a; b]$, on a

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f \left(a + i \frac{b-a}{n} \right) \right] = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f \left(a + i \frac{b-a}{n} \right) \right].$$

Le nombre $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$ s'appelle la valeur moyenne de f sur $[a; b]$.

2.1.3 Propriétés de l'intégrale

Propriété 3. $I(f) = \int_a^b f(x)dx$ ne change pas si on modifie la valeur de f sur $[a; b]$ en un nombre fini de points.

Propriété 4. (Linéarité)

Si f et g sont intégrables sur $[a; b]$, alors

- i) $\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$
- ii) $\forall k \in \mathbb{R}, \int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx.$

Propriété 5. (Relation de Chasles)

Si f est intégrable sur chaque intervalle, on a :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Propriété 6. (Relation d'ordre)

- Si f et g sont intégrables sur $[a; b]$ ($a < b$) et si pour tout $x \in [a; b]$, on a $f(x) \leq g(x)$, alors

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

- Si f est continue et positive sur $[a; b]$, on a :

$$\int_a^b f(x)dx = 0 \iff \forall x \in [a; b], f(x) = 0.$$

2.1.4 Majoration de l'intégrale

Propriété 7. a) Si f est intégrable sur $[a; b]$, alors $|f|$ est intégrable et

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

b) Soit f intégrable sur $[a; b]$ telle que pour tout $x \in [a; b]$, on ait $m \leq f(x) \leq M$. Alors

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq M.$$

2.1.5 Théorème de la moyenne

Théorème 2.2. Si f est continue sur $[a; b]$, alors il existe $c \in [a; b]$ tel que :

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = f(c).$$

2.2 Calcul numérique d'une intégrale

Le calcul exact de l'intégrale $I = \int_a^b f(x) dx$ est très souvent difficile, sinon impossible. On peut cependant obtenir des valeurs approchées de I par diverses méthodes qui consistent à calculer l'intégrale d'une fonction simple proche de f .

2.2.1 Méthode des rectangles

Elle consiste à approcher f par une fonction en escalier.

- A l'aide d'un partage de $[a; b]$ en n segments égaux (de longueur $h = \frac{b-a}{n}$), on obtient la valeur approchée R_n de I :

$$R_n = h \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \quad \text{avec} \quad x_i = a + ih = a + i \frac{b-a}{n}.$$

- Lorsque f possède une dérivée bornée sur $[a; b]$, on a la majoration suivante de l'erreur due à la méthode :

$$|I - R_n| \leq M_1 \frac{(b-a)^2}{2n} \quad \text{où} \quad M_1 = \sup_{x \in [a; b]} |f'(x)|.$$

- Si f est croissante sur $[a; b]$, R_n est une valeur approchée par défaut. Si f est décroissante sur $[a; b]$, R_n est une valeur approchée par excès.

2.2.2 Méthode des trapèzes

Elle consiste à approcher la courbe représentant f par une ligne polygonale.

- A l'aide du partage précédent de $[a; b]$, on obtient, en remplaçant les rectangles par des trapèzes, la valeur approchée T_n de I :

$$T_n = h \left[\frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right] \quad \text{avec} \quad x_i = a + i \frac{b-a}{n}.$$

- Lorsque f possède une dérivée seconde bornée sur $[a; b]$, on a la majoration suivante de l'erreur due à la méthode :

$$|I - T_n| \leq \frac{M_2(b-a)^3}{12n^2} \quad \text{où} \quad M_2 = \sup_{x \in [a; b]} |f''(x)|.$$

- Si f est convexe sur $[a; b]$, on a $T_n \geq I$ et si f est concave sur $[a; b]$, on a $T_n \leq I$.

2.2.3 Méthode de Simpson

Elle consiste à approcher localement la courbe représentant f par des arcs de paraboles.

- A l'aide d'un partage de $[a; b]$ en $2n$ segments égaux (de longueur $h = \frac{b-a}{2n}$), on obtient la valeur approchée S_{2n} de I :

$$S_{2n} = \frac{h}{3} \left[f(a) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \dots + 2f(x_{2n-1}) + f(b) \right]$$

$$= \frac{h}{3} \left[f(a) + f(b) + 4 \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{2i+1}) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_{2i}) \right] \text{ où } x_i = a + ih = a + i \frac{b-a}{2n}.$$

- Lorsque f possède une dérivée quatrième bornée sur $[a; b]$, on a la majoration suivante de l'erreur due à la méthode :

$$|I - S_{2n}| \leq \frac{M_4(b-a)^5}{180(2n)^4} \text{ où } M_4 = \sup_{x \in [a; b]} |f^{(4)}(x)|.$$

2.3 Fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ et calcul de primitives

2.3.1 Primitives

Théorème 2.3.

- Si f est intégrable sur $[a; b]$, la fonction F définie sur $[a; b]$ par $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ est continue sur $[a; b]$.
- Si f est continue sur $[a; b]$, la fonction F est dérivable sur $[a; b]$ et $F' = f$.

Définition 2.5. f étant définie sur un intervalle I , une fonction F définie sur I est une primitive de f si elle est dérivable sur I et si

$$\forall x \in I, F'(x) = f(x).$$

Théorème 2.4. F étant une primitive de f sur un intervalle I , toutes les primitives de f sur I sont de la forme $x \mapsto F(x) + C$ où C est une constante quelconque.

Cas des fonctions continues.

Toute fonction continue sur $[a; b]$ admet sur $[a; b]$ des primitives, en particulier la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$. On note $\int f(x)dx$ l'une quelconque des primitives de f . Si F est une primitive quelconque de f sur $[a; b]$, alors

$$\int_a^b f(t)dt = \left[F(t) \right]_a^b = F(b) - F(a).$$

Le calcul d'intégrales de fonctions se ramène donc à la recherche de primitives.

2.3.2 Intégration par parties

Soient u et v deux fonctions de classe \mathcal{C}^1 sur $[a; b]$. On a

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = \left[u(x)v(x) \right]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$$

qui s'écrit en termes de primitives

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx.$$

2.3.3 Intégration par changement de variable

Soit $u : [\alpha; \beta] \longrightarrow [a; b]$ une fonction à dérivée continue et f une fonction continue sur $[a; b]$. Alors

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(u(t)) u'(t) dt = \int_{u(\alpha)}^{u(\beta)} f(x) dx$$

ou, si u est bijective, on a

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{u^{-1}(a)}^{u^{-1}(b)} f(u(t)) u'(t) dt.$$

Dans les exercices, le symbole dx se transforme comme une différentielle :

$$x = u(t) \implies dx = u'(t) dt.$$

2.4 Primitives se ramenant aux fonctions rationnelles

2.4.1 Primitives de fractions rationnelles

On décompose la fraction rationnelle en éléments simples dans $\mathbb{R}(x)$. Toute fraction rationnelle est la somme de sa partie entière (polynôme dont on connaît les primitives) et de fractions de la forme

$$\frac{ax + b}{(x^2 + px + q)^n} \text{ avec } p^2 - 4q < 0, \text{ et } \frac{a}{(x - \alpha)^n}.$$

Par suite, on a :

$$\bullet \int \frac{dx}{(x - \alpha)^n} = \begin{cases} -\frac{1}{n-1} \frac{1}{(x - \alpha)^{n-1}} + C, & \text{si } n \neq 1 \\ \ln|x - \alpha| + C, & \text{si } n = 1 \end{cases}.$$

$$\bullet \int \frac{ax + b}{(x^2 + px + q)^n} dx = \frac{a}{2} \int \frac{2x + p}{(x^2 + px + q)^n} dx + \left(b - \frac{ap}{2}\right) \int \frac{1}{(x^2 + px + q)^n} dx.$$

La première primitive se calcule en utilisant le changement de variable $u = x^2 + px + q$. En écrivant sous forme canonique le trinôme $x^2 + px + q$, le calcul de la deuxième primitive se ramène après changement de variable à

$$I_n = \int \frac{1}{(t^2 + 1)^n} dt.$$

Une intégration par parties de I_{n-1} permet d'établir une relation de récurrence entre I_n et I_{n-1} , puis de calculer I_n à partir de $I_1 = \arctan t + C$.

2.4.2 Primitives des fonctions rationnelles en sinus et cosinus

On veut déterminer $\int f(x) dx$ où f est une fraction rationnelle en $\sin x$ et $\cos x$.

- Dans le cas où $f(x) dx$ est invariant :
 - lors du changement de x en $-x$, on peut poser $u = \cos x$.
 - lors du changement de x en $\pi - x$, on peut poser $u = \sin x$.
 - lors du changement de x en $\pi + x$, on peut poser $u = \tan x$.

- Sinon on peut poser $u = \tan \frac{x}{2}$.

Dans tous les cas, on est conduit au calcul de $\int g(u)du$ où g est une fraction rationnelle en u .

2.4.3 Primitives de fonctions rationnelles en e^x , shx , chx

Les changements de variables $u = e^x$ ou $u = e^{-x}$ et, dans le cas hyperbolique, $t = th \frac{x}{2}$ conduisent au calcul de primitives de fractions rationnelles.

Dans certains cas, les changements de variable $u = chx$, $u = shx$ ou $u = thx$ peuvent être envisagés.

2.4.4 Primitives de fonctions contenant des radicaux

- Si les radicaux sont de type $\sqrt[n]{ax+b}$ ou $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$, on pose $u = \sqrt[n]{ax+b}$ ou $u = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$. On exprime ensuite x en fonction de u et on calcule dx .
- Si les radicaux sont de type $\sqrt{ax^2+bx+c}$, on met le trinôme sous forme canonique et, après changement de variable on se ramène à la recherche d'une primitive d'une fonction contenant :

- soit $\sqrt{1+t^2}$, on pose alors :

$$t = sh\phi \iff \phi = \arg sh t.$$

- soit $\sqrt{1-t^2}$, on pose alors :

$$\left. \begin{array}{l} t = \sin \phi \\ -\frac{\pi}{2} \leq \phi \leq \frac{\pi}{2} \end{array} \right\} \iff \phi = \arcsin t \quad \text{ou} \quad \left. \begin{array}{l} t = \cos \phi \\ 0 \leq \phi \leq \pi \end{array} \right\} \iff \phi = \arccos t.$$

- soit $\sqrt{t^2-1}$, on pose alors :

$$\left. \begin{array}{l} t = \varepsilon ch\phi \\ \varepsilon = \text{signe de } t \\ \phi \geq 0 \end{array} \right\} \iff \phi = \arg ch |t|.$$

Chapitre 3

EQUATIONS DIFFERENTIELLES

3.1 Définitions générales

3.1.1 Equations différentielles

Définition 3.1. On appelle *équation différentielle* une relation entre la variable t , une fonction inconnue $x(t)$ et certaines de ses dérivées

$$F \left[t, x(t), x'(t), x''(t), \dots, x^{(n)}(t) \right] = 0 \quad (E)$$

où F est une fonction donnée de $n + 1$ variables.

3.1.2 Ordre d'une équation différentielle

Définition 3.2. On appelle *ordre de l'équation différentielle* (E) l'ordre de la dérivée de $x(t)$ le plus élevé dans l'équation (E) .

Ici l'ordre de l'équation (E) est n .

3.1.3 Solution d'une équation différentielle

Définition 3.3. On appelle *solution de l'équation différentielle* (E) ou *intégrale de* (E) , toute fonction définie sur un intervalle $I =]a; b[$ possédant des dérivées continues jusqu'à l'ordre n telle que

$$\forall t \in]a; b[, F \left[t, x(t), x'(t), x''(t), \dots, x^{(n)}(t) \right] = 0.$$

3.1.4 Courbe intégrale

Définition 3.4. On appelle *courbe intégrale de* (E) la courbe représentative d'une solution donnée de (E) .

3.1.5 Problème de Cauchy

Dans de nombreux cas, on ne s'intéresse pas à toutes les solutions de l'équation différentielle (E) , mais à certains d'entre elles vérifiant des conditions propres au problème étudié. On s'intéresse souvent à la solution de (E) qui vérifie à l'instant $t = t_0$, les relations

$$x(t_0) = x_0, x'(t_0) = x_1, x''(t_0) = x_2, \dots, x^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1}.$$

Définition 3.5. *On appelle problème de Cauchy, la recherche des solutions d'une équation différentielle (E) vérifiant des conditions initiales imposées.*

3.2 Equations différentielles du premier ordre

Elles sont de la forme générale $F[t, x(t), x'(t)] = 0$. Nous allons étudier quelques cas classiques.

3.2.1 Cas où $F[t, x(t), x'(t)] = x'(t) - g(t)$ avec g une fonction continue donnée sur un intervalle I de \mathbb{R}

L'équation (E) prend alors la forme connue

$$x'(t) = g(t) \quad (E_1).$$

Soit G une primitive de la fonction g . La solution générale de (E_1) s'écrit

$$\forall t \in]a; b[, x(t) = \int_a^t g(u) du + C = G(t) + C.$$

3.2.2 Cas où $F[t, x(t), x'(t)] = h[x(t)] x'(t) - g(t)$ avec h et g deux fonctions continues dont on connaît les primitives respectives H et G .

L'équation (E) prend la forme connue

$$h[x(t)] x'(t) = g(t) \quad (E_2).$$

appelée équation à variables séparables. La primitivation de (E_2) donne

$$H[x(t)] = G(t) + C.$$

Si la fonction H possède une fonction réciproque H^{-1} , on trouve $x(t) = H^{-1}[G(t) + C]$.

En pratique, on ne détermine pas H et H^{-1} mais on procède comme suit. On pose $x(t) = \frac{dx}{dt}$ et on écrit l'équation $h[x(t)] x'(t) = g(t)$ sous la forme différentielle

$$h(x) dx = g(t) dt \quad (E_{21}) \quad (\text{séparation de variables})$$

puis on intègre les deux membres de (E_{21}) . Enfin on exprime f en fonction de x .

3.2.3 Cas où $F[t, x(t), x'(t)] = x'(t) + a(t)x(t) - b(t)$ avec a et b deux fonctions données, continues sur un intervalle I de \mathbb{R} .

L'équation (E) prend la forme

$$x'(t) + a(t)x(t) = b(t) \quad (E_3)$$

appelée équation différentielle linéaire d'ordre 1.

Théorèmes dues à la linéarité

- 1) Toute solution de l'équation (E_3) est de la forme $x_p(t) + x_h(t)$ où x_p est une solution particulière de (E_3) et x_h une solution de l'équation homogène associée c'est-à-dire de l'équation

$$x'(t) + a(t)x(t) = 0 \quad (E_{31}).$$

- 2) L'ensemble des solutions de (E_{31}) est un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension 1.

Détermination de la solution x_h de l'équation homogène (E_{31}) .

Il est évident que $x = 0$ est une solution.

Si $x \neq 0$, (E_{31}) est une équation à variables séparables du type (E_2) . Ses solutions sont de la forme

$$x_h(t) = K \exp\left(-\int_{t_0}^t a(u)du\right)$$

avec K est une constante arbitraire et t_0 un élément quelconque de l'intervalle I .

Recherche d'une solution particulière x_p de l'équation (E_3) : Méthode de variation de la constante de Lagrange.

x_1 étant une solution non nulle de (E_{31}) , on introduit une fonction auxiliaire K inconnue de telle sorte que $x(t) = K(t)x_1(t)$ soit une solution de (E_3) . On obtient $K'(t) = \frac{b(t)}{x_1(t)}$, ce qui permet de calculer $K(t)$ puis $x_p(t)$.

3.2.4 Cas où $F[t, x(t), x'(t)] = x'(t) + a(t)x(t) - b(t)x^\alpha(t)$ avec a et b deux fonctions continues données sur un intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$ et α un réel.

L'équation (E) prend la forme

$$x'(t) + a(t)x(t) = b(t)x^\alpha(t) \quad (E_4)$$

appelée équation de Bernoulli

- Il est évident que $x = 0$ est une solution.
- Supposons $x \neq 0$.
 - Si $\alpha = 1$, on retrouve une équation linéaire homogène.

- Si $\alpha \neq 1$, on pose $h(t) = \frac{1}{x^{\alpha-1}(t)}$.

L'équation différentielle vérifiée par la nouvelle fonction h est la suivante

$$h'(t) + (1 - \alpha)a(t)h(t) = (1 - \alpha)b(t).$$

C'est une équation différentielle de type (E_3) que l'on sait résoudre. On détermine alors $h(t)$ puis la fonction $x(t)$.

3.2.5 Cas où $F[t, x(t), x'(t)] = x'(t) - a(t)x^2(t) - b(t)x(t) - c(t)$ avec a , b et c des fonctions continues données sur un intervalle I de \mathbb{R}

L'équation (E) prend ici la forme

$$x'(t) = a(t)x^2(t) + b(t)x(t) + c(t) \quad (E_5)$$

appelée équation de Riccati.

Méthode de résolution :

Si l'on connaît une solution particulière x_p de (E_5) , on recherche la solution générale de (E_5) sous la forme $x = x_p + \frac{1}{h}$, où h est une fonction à déterminer. La nouvelle fonction h vérifie alors l'équation

$$h'(t) + \left(2x_p(t)a(t) + b(t)\right)h(t) + a(t) = 0.$$

C'est une équation du type (E_3) que l'on sait résoudre. On détermine alors $h(t)$ puis la fonction recherchée $x(t)$.

3.3 Equations différentielles linéaires du second degré à coefficients constants

3.3.1 Définition

Une équation différentielle linéaire du second degré à coefficients constants est une équation de la forme

$$F[t, x(t), x'(t), x''(t)] = ax''(t) + bx'(t) + cx(t) - d(t) = 0$$

où a , b et c sont des constantes données telles que $a \neq 0$ et $d(t)$ une fonction continue donnée sur un intervalle I de \mathbb{R} .

Expression courante

On rencontre souvent ces équations sous la forme

$$ax''(t) + bx'(t) + cx(t) = d(t) \quad (E_6).$$

3.3.2 Théorèmes dus à la linéarité

- Toute solution de l'équation (E_6) est de la forme $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$ où x_p est appelée solution particulière de (E_6) et x_h est une solution homogène associée, c'est-à-dire de l'équation

$$ax''(t) + bx'(t) + cx(t) = 0 \quad (E_{61}).$$

- L'ensemble des solutions de (E_{61}) est un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension 2.
- Si x_1 est une solution particulière de

$$ax''(t) + bx'(t) + cx(t) = d_1(t)$$

et x_2 une solution particulière de

$$ax''(t) + bx'(t) + cx(t) = d_2(t),$$

alors $x_1 + x_2$ est une solution particulière de

$$ax''(t) + bx'(t) + cx(t) = d_1(t) + d_2(t).$$

3.3.3 Méthode de résolution de l'équation homogène (E_{61})

On pose $x(t) = e^{rt}$ et on remplace $x(t)$ par sa valeur dans l'équation (E_{61}) . On obtient

$$e^{rt}(ar^2 + br + c) = 0.$$

Puisque $e^{rt} \neq 0$, on a

$$ar^2 + br + c = 0 \quad (E_{62}).$$

Cette équation est appelée équation caractéristique associée à (E_{61}) .

On pose $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si $\Delta > 0$, l'équation (E_{62}) a deux solutions réelles r_1 et r_2 . Par conséquent, la solution homogène x_h est donnée par :

$$x_h(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t} \text{ avec } A, B \in \mathbb{R}.$$

- Si $\Delta = 0$, l'équation (E_{62}) a une solution double $r_0 = -\frac{b}{2a}$. La solution homogène x_h est donnée par :

$$x_h(t) = (At + B)e^{r_0 t} \text{ avec } A, B \in \mathbb{R}.$$

- Si $\Delta < 0$, l'équation (E_{62}) a deux solutions complexes conjuguées $\alpha \pm i\beta$. La solution homogène x_h est donnée par

$$x_h(t) = (A \cos \beta t + B \sin \beta t)e^{\alpha t} \text{ avec } A, B \in \mathbb{R}.$$

3.3.4 Détermination d'une solution particulière x_p de l'équation (E_6)

Trois cas sont à considérer selon l'expression du second membre $d(t)$. On rappelle que $a \neq 0$.

a) Cas où $d(t) = P_n(t)$ avec $P_n(t)$ un polynôme de degré n .

Une solution particulière sera aussi un polynôme de degré :

$$n \text{ si } c \neq 0, \text{ i.e. } x_p(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \dots + \alpha_n t^n$$

$$n + 1 \text{ si } c = 0 \text{ et } b \neq 0, \text{ i.e. } x_p(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \dots + \alpha_n t^n + \alpha_{n+1} t^{n+1} \quad .$$

$$n + 2 \text{ si } c = b = 0, \text{ i.e. } x_p(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \dots + \alpha_{n+1} t^{n+1} + \alpha_{n+2} t^{n+2}$$

Dans chacun de ces cas, on utilise la méthode des coefficients indéterminés pour déterminer les α_i .

b) Cas où $d(t) = e^{\alpha t} P_n(t)$ avec $P_n(t)$ un polynôme de degré n et α un réel.

On effectue le changement de variables $x_p(t) = e^{\alpha t} z(t)$ et on détermine z de telle que x_p soit une solution particulière de (E_6) . On obtient après calcul, l'équation

$$az''(t) + (2a\alpha + b)z'(t) + (a\alpha^2 + b\alpha + c)z(t) = P_n(t)$$

ce qui nous ramène au cas précédent.

c) Cas où $d(t) = e^{\alpha t} \cos(\beta t) P_n(t)$ ou bien $d(t) = e^{\alpha t} \sin(\beta t) P_n(t)$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $P_n(t)$ un polynôme de degré n à coefficients réels.

En remarquant que

$$e^{\alpha t} \cos(\beta t) P_n(t) = \mathcal{R}_e \left(e^{(\alpha+i\beta)t} P_n(t) \right) \text{ et } e^{\alpha t} \sin(\beta t) P_n(t) = \mathcal{I}_m \left(e^{(\alpha+i\beta)t} P_n(t) \right),$$

on considère l'équation (E_6) étendue aux fonctions à valeurs complexes de la variable t , avec pour second membre la fonction complexe $e^{(\alpha+i\beta)t} P_n(t)$. On la résout comme dans le cas précédent pour obtenir une solution particulière complexe \tilde{x}_p .

Une solution particulière x_p de l'équation (E_6) est alors la partie réelle ou la partie imaginaire suivant le cas, c'est-à-dire

$$x_p(t) = \mathcal{R}_e \left(\tilde{x}_p \right) \text{ ou } x_p(t) = \mathcal{I}_m \left(\tilde{x}_p \right).$$

3.4 Méthodes générales de résolution de l'équation complexe (E_6)

3.4.1 Si x_1 et x_2 sont des solutions linéairement indépendantes de (E_6)

On cherche la solution de (E_6) sous la forme

$$x(t) = u(t)x_1(t) + v(t)x_2(t)$$

où u et v sont des fonctions inconnues soumises à la condition

$$u'(t)x_1(t) + v'(t)x_2(t) = 0.$$

Les fonctions u et v sont obtenues en résolvant le système

$$\begin{cases} u'x_1 + v'x_2 = 0 \\ u'x_1' + v'x_2' = d \end{cases}$$

dont le déterminant

$$w(t) = \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) \end{vmatrix}$$

appelé *wronskien* de x_1 et x_2 est non nul sur I lorsque x_1 et x_2 sont linéairement indépendantes.

$$u' = -\frac{x_2 d}{w} \text{ et } v' = \frac{x_1 d}{w}.$$

3.4.2 Si x_1 est une solution de l'équation homogène ne s'annulant pas sur I

On cherche les solutions de (E_6) sous la forme

$$x(t) = u(t)x_1(t)$$

où u est une fonction inconnue, vérifiant l'équation différentielle (reporter dans (E_6))

$$(ax_1)u'' + (bx_1 + 2ax_1')u' = d$$

qui est une équation linéaire du premier ordre en u' .