Applications linéaires, matrices, déterminants

Exercice 1.

Soit $u: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie pour tout $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ par

$$u(x) = (x_1 + x_2 + x_3, 2x_1 + x_2 - x_3)$$

1. Montrer que u est linéaire.
2. Déterminer $\ker(u)$.

Allez à : Correction exercice 1

Exercice 2.

Soit $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x, y, z) = (x + y + z, -x + 2y + 2z)$$

On appelle $\beta = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\beta' = (f_1, f_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Donner une base et la dimension de $\ker(f)$ et une base et la dimension de $Im(f)$.

Allez à : Correction exercice 2

Exercice 3.

Soit $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie pour tout vecteur $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ par :

$$f(u) = (-2x + y + z, x - 2y + z)$$

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Donner une base de $\ker(f)$, en déduire $\dim\big(Im(f)\big)$.
3. Donner une base de $Im(f)$.

Allez à : Correction exercice 3

Exercice 4.

On considère l'application $h: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par :

$$h(x, y) = (x - y, -3x + 3y)$$

1. Montrer que h est une application linéaire.
2. Montrer que h est ni injective ni surjective.
3. Donner une base de son noyau et une base de son image.

Allez à : Correction exercice 4

Exercice 5.

Soit f l'application linéaire $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par :

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_3, 2x_1 + x_2 - 3x_3, -x_2 + 2x_3)$$

Et soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Calculer $f(e_1)$, $f(e_2)$ et $f(e_3)$.
2. Déterminer les coordonnées de $f(e_1)$, $f(e_2)$ et $f(e_3)$ dans la base canonique.
3. Calculer une base de $\ker(f)$ et une base de $Im(f)$.

Allez à : Correction exercice 5

Exercice 6.

Soit $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie pour tout vecteur $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ par :

$$f(u) = (-2x + y + z, x - 2y + z, x + y - 2z)$$

1. Montrer que f est une application linéaire.

2. Donner une base de $\ker(f)$, en déduire $\dim(Im(f))$.
3. Donner une base de $Im(f)$.

Allez à : Correction exercice 6

Exercice 7.

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$

Soit $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie pour tout $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ par :

$$f(u) = (6x - 4y - 4z, 5x - 3y - 4z, x - y)$$

1. Montrer qu'il existe un vecteur $a \in \mathbb{R}^3$, non nul, tel que $\ker(f) = Vect(a)$, déterminer un vecteur qui convient.
2. Soit $b = e_1 + e_2$ et $c = e_2 - e_3$
   a. Calculer $f(b)$ et $f(c)$
   b. En déduire que $\{b, c\}$ est une base de $Im(f)$.

On pourra utiliser une autre méthode.

3. Déterminer une ou plusieurs équations caractérisant $Im(f)$.
4. A-t-on $\ker(f) \oplus Im(f) = \mathbb{R}^3$?

Allez à : Correction exercice 7

Exercice 8.

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$ et $\mathcal{B}' = (f_1, f_2, f_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Soit $u: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ une application linéaire définie par

$$u(e_1) = f_1 - f_2 + 2f_3;\ \ u(e_2) = 2f_1 + f_2 - 3f_3; u(e_3) = 3f_1 - f_3\ \ et\ \ u(e_4) = -f_1 - 2f_2 + 5f_3$$

1. Déterminer l'image par u dans vecteurs $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$
2. Déterminer une base de $\ker(u)$ et sa dimension de $\ker(u)$.
3. Déterminer une base de $Im(u)$ et sa dimension.

Allez à : Correction exercice 8

Exercice 9.

Soit $u: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'application définie pour tout $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ par :

$$u(x) = (x_1 - x_2 + x_3, 0, x_1 + x_2 - x_3 + x_4, x_4)$$

Soit $E = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4, x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0\}$

1. Donner une base de $\ker(u)$ et sa dimension.
2. Donner une base (La plus simple possible) de $Im(u)$ et sa dimension.
3. A-t-on $\ker(u) \oplus Im(u) = \mathbb{R}^4$?
4. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$, en donner une base et sa dimension.
5. A-t-on $\ker(u) \oplus E = \mathbb{R}^4$?

Allez à : Correction exercice 9

Exercice 10.

On appelle $\beta = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

Soit $u: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ qui, à un vecteur $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ associe le vecteur $u(x) \in \mathbb{R}^4$ définit par :

$$u(x) = (x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4, x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4, -x_1 + x_2 - 2x_3 - 2x_4, -x_1 + x_2 - x_3 - x_4)$$

On admettra que u est une application linéaire.

1. Déterminer une base du noyau de u.
2. Déterminer une base de l'image de u.
3. Déterminer une ou plusieurs équations caractérisant $Im(u)$.

Allez à : Correction exercice 10

Exercice 11.

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont l'image de la base canonique $\beta = (e_1, e_2, e_3)$ est :

$$f(e_1) = -7e_1 - 6e_2$$
$$f(e_2) = 8e_1 + 7e_2$$
$$f(e_3) = 6e_1 + 6e_2 - e_3$$

1. Pour tout vecteur $x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$ déterminer $f \circ f(x)$.
2. En déduire que f est inversible (c'est-à-dire bijective) et déterminer f^{-1}.

Allez à : Correction exercice 11

Exercice 12.

Soit $f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ définie pour tout $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ par

$$f(x, y, z, t) = (x - 2y, x - 2y, 0, x - y - z - t)$$

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Déterminer le noyau et l'image de f.
3. A-t-on $\ker(f) \oplus Im(f) = \mathbb{R}^4$?

Allez à : Correction exercice 12

Exercice 13.

Soit l'application $f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ définie pour tout $u = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ par :

$$f(x, y, z, t) = (x + y, z + t, x + y + z + t)$$

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Déterminer une base de $\ker(f)$.
3. Déterminer une base de $Im(f)$.

Allez à : Correction exercice 13

Exercice 14.

Soit $u: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application définie par :

$$u(x_1, x_2, x_3) = (-2x_1 + 4x_2 + 4x_3, -x_1 + x_3, -2x_1 + 4x_2 + 4x_3)$$

1. Montrer que u est linéaire.
2. Déterminer une base de $\ker(u)$ et une base de $Im(u)$.
3. A-t-on $\ker(u) \oplus Im(u) = \mathbb{R}^3$?

Allez à : Correction exercice 14

Exercice 15.

Soit $\beta = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$

Soit u un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$u(e_1) = 2e_1 + e_2 + 3e_3; \quad u(e_2) = e_2 - 3e_3; \quad u(e_3) = -2e_2 + 2e_3$$

1. Soit $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ un vecteur.
   Déterminer l'image par u du vecteur x. (Calculer $u(x)$).
2. Soient $E = \{x \in \mathbb{R}^3, u(x) = 2x\}$ et $F = \{x \in \mathbb{R}^3, u(x) = -x\}$
   Montrer que E et F sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.
3. Déterminer une base de E et une base de F.
4. Y a-t-il $E \oplus F = \mathbb{R}^3$?

Allez à : Correction exercice 15

Exercice 16.

Soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$

Soit $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire telle que :

$f(e_1)=-\frac{1}{3}e_1+\frac{2}{3}e_2+\frac{2}{3}e_3=\frac{1}{3}(-e_1+2e_2+2e_3)$, $f(e_2)=\frac{2}{3}e_1-\frac{1}{3}e_2+\frac{2}{3}e_3=\frac{1}{3}(2e_1-e_2+2e_3)$ et $f(e_3)=\frac{2}{3}e_1+\frac{2}{3}e_2-\frac{1}{3}e_3=\frac{1}{3}(2e_1+2e_2-e_3)$

Soient $E_{-1}=\{u\in\mathbb{R}^3 \,|\, f(u)=-u\}$ et $E_1=\{u\in\mathbb{R}^3 \,|\, f(u)=u\}$

1. Montrer que E_{-1} et E_1 sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.
2. Montrer que e_1-e_2 et e_1-e_3 appartiennent à E_{-1} et que $e_1+e_2+e_3$ appartient à E_1.
3. Que peut-on en déduire sur les dimensions de E_{-1} et de E_1 ?
4. Déterminer $E_{-1}\cap E_1$.
5. A-t-on $E_{-1}\oplus E_1=\mathbb{R}^3$?
6. Calculer $f^2=f\circ f$ et en déduire que f est bijective et déterminer f^{-1}.

Allez à : Correction exercice 16

Exercice 17.

Soit $\beta=(e_1,e_2,e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$

Soient

$$a=\frac{1}{3}(2,-2,1);\, b=\frac{1}{3}(2,1,-2);\, c=\frac{1}{3}(1,2,2)$$

Soit $\beta'=(a,b,c)$

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ définie par :

$$u(e_1)=3e_1+e_2-e_3$$
$$u(e_2)=e_1+7e_2$$
$$u(e_3)=-e_1-e_3$$

1. Montrer que β' est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Soit $x=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3$, calculer $u(x)$.
3. Montrer que :

$$u(a)=3a-3c$$
$$u(b)=3b+3c$$
$$u(c)=-3a+3b+3c$$

Allez à : Correction exercice 17

Exercice 18.

Soit p l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ qui a tout vecteur $u=(x,y,z)$ associe le vecteur

$$p(u)=(2x+y+2z,y,-x-y-z)$$

Soit (e_1,e_2,e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On note $p^2=p\circ p$.

1. Montrer que p est une application linéaire.
2. Calculer $p(e_1)$, $p(e_2)$ et $p(e_3)$, puis $p^2(e_1)$, $p^2(e_2)$ et $p^2(e_3)$, que peut-on en déduire sur $p^2(u)$ pour tout $u\in\mathbb{R}^3$?
3. Donner une base de $Im(p)$ et une base de $\ker(p-Id)$, montrer que ces deux espaces vectoriels sont égaux.
4. Montrer que $\ker(p)\oplus Im(p)=\mathbb{R}^3$

Allez à : Correction exercice 18

Exercice 19.

Soit E un espace vectoriel. Soit f un endomorphisme de E tel que $f^2=f\circ f=Id_E$.

On pose $E_1=\ker(f-Id_E)$ et $E_2=\ker(f+Id_E)$

1. Soit $x_1\in E_1$ et $x_2\in E_2$. Calculer $f(x_1)$ et $f(x_2)$.
2. Pour tout $x\in E$ écrire $x=\frac{f(x)+x}{2}-\frac{f(x)-x}{2}$ et montrer que $E_1\oplus E_2=E$

3. On suppose que E est de dimension finie et que $f \neq \pm Id_E$. Soit $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ une base de E telle que : $E_1 = Vect(v_1, \dots, v_r)$ et $E_2 = Vect(v_{r+1}, \dots, v_n)$ calculer $f(v_i)$ dans la base $(v_1, v_2, \dots, v_n)$.

Allez à : Correction exercice 19

Exercice 20.

Soit $\beta = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Soit u un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ tel que $u(e_1) = e_1 + e_2$ et tel que $\dim(\ker(u)) = 1$

1. Déterminer $u(e_2)$ en fonction d'un paramètre $a \in \mathbb{R}$.
2. Déterminer l'image d'un vecteur $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}$ en fonction de a.
3. Déterminer une base du noyau de $\ker(u)$.

Allez à : Correction exercice 20

Exercice 21.

Soit $f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ l'application définie pour tout $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ par

$$f(x) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$$

On appelle $\beta = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

1. Calculer les images des vecteurs de la base canonique par f. En déduire la dimension de $\mathrm{im}(f)$.
2. Déterminer la dimension de $\ker(f)$ et en donner une base.

Allez à : Correction exercice 21

Exercice 22.

Soit u l'application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ définie pour tout $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ par :

$$u(x) = x_1 + x_2 + \dots + x_n$$

1. Montrer que u est une application linéaire.
2. Déterminer les dimensions de $\mathcal{I}m(u)$ et de $\ker(u)$.

Allez à : Correction exercice 22

Exercice 23.

Soit u une application linéaire de E dans E, E étant un espace vectoriel de dimension n avec n pair.

Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes

(a) $u^2 = O_E$ (où O_E est l'application linéaire nulle) et $n = 2\dim\big(Im(u)\big)$

(b) $Im(u) = \ker(u)$

Allez à : Correction exercice 23

Exercice 24.

Question de cours

Soit u une application linéaire de E vers E.

Montrer que : u est injective si et seulement si $\ker(u) = \{0_E\}$.

Allez à : Correction exercice 24

Exercice 25.

Soit $u: E \to E$ une application linéaire et λ un réel.

1. Soit $E_\lambda = \ker(u - \lambda id_E)$. Calculer $u(x)$ pour $x \in E_\lambda$
   Montrer que est un sous-espace vectoriel de E.
2. Soit $F \subset E$ un sous-espace vectoriel de E, montrer que $u(F)$ est un sous-espace vectoriel de E.
3. Si $\lambda \neq 0$, montrer que $u(E_\lambda) = E_\lambda$

Allez à : Correction exercice 25

Exercice 26.

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension respectives n et p

Soit $u: E \to F$ une application linéaire

1. Montrer que si $n < p$ alors u n'est pas surjective.
2. Montrer que si $n > p$ alors u n'est pas injective.

Allez à : Correction exercice 26

Exercice 27.

Soit $f: E \to F$ une application linéaire

Montrer que :

$$\ker(f) \cap \operatorname{im}(f) = f(\ker(f^2))$$

Allez à : Correction exercice 27

Exercice 28.

Soient f et g deux endomorphisme de $\mathbb{R}^n$. Montrer que

$$f(\ker(g \circ f)) = \ker(g) \cap Im(f)$$

Allez à : Correction exercice 28

Exercice 29.

Soit u un endomorphisme de E un espace vectoriel.

1. Montrer que $\ker(u) \subset \ker(u^2)$.
2. Montrer que $Im(u^2) \subset Im(u)$.

Allez à : Correction exercice 29

Exercice 30.

Soit u un endomorphisme de E, un espace vectoriel.

Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes

(i) $\ker(u) \cap im(u) = \{0_E\}$

(ii) $\ker(u) = \ker(u \circ u)$

Allez à : Correction exercice 30

Exercice 31.

Soit $u: \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, une application linéaire, $\underline{e} = (e_1, \dots, e_p)$ la base canonique de $\mathbb{R}^p$ et $\underline{f} = (f_1, \dots, f_q)$ la base canonique de $\mathbb{R}^q$.

1. $p = 3, q = 2$

   $u(e_1) = f_1 + 2f_2$, $u(e_2) = 2f_1 - f_2$ et $u(e_3) = -f_1 + f_2$

   a) Déterminer l'image d'un vecteur $x = (x_1, x_2, x_3)$ par u.

   b) Déterminer la matrice de u de la base $\underline{e}$ dans la base $\underline{f}$.

   c) Déterminer le noyau et l'image de u.

2. $p = 3$ et $q = 3$, dans cette question $\underline{e} = \underline{f}$

   $u(e_1) = 3e_1 + 2e_2 + 2e_3$, $u(e_2) = 2e_1 + 3e_2 + 2e_3$ et $u(e_3) = 2e_1 + 2e_2 + 3e_3$

   a) Déterminer l'image d'un vecteur $x = (x_1, x_2, x_3)$ par u.

   b) Déterminer la matrice de u de la base $\underline{e}$ dans la base $\underline{e}$.

   c) Déterminer le noyau et l'image de u.

Allez à : Correction exercice 31

Exercice 32.

Soit $u: \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, une application linéaire, $\underline{e} = (e_1, \dots, e_p)$ la base canonique de $\mathbb{R}^p$ et $\underline{f} = (f_1, \dots, f_q)$ la base canonique de $\mathbb{R}^q$.

1. $p = 2$, $q = 3$

$$A = Mat_{\underline{e},\underline{f}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Déterminer l'image d'un vecteur $x = (x_1, x_2)$ par u.

b) Déterminer l'image de la base $\underline{e}$ (c'est-à-dire $u(e_1)$ et $u(e_2)$).

c) Déterminer le noyau et l'image de u.

2. $p = 4$, $q = 4$, dans cette question $\underline{e} = \underline{f}$

$$A = Mat_{\underline{e},\underline{f}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 7 & -5 \end{pmatrix}$$

a) Déterminer l'image d'un vecteur $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ par u.

b) Déterminer l'image de la base $\underline{e}$ (c'est-à-dire $u(e_1)$, $u(e_2)$, $u(e_3)$ et $u(e_4)$).

c) Déterminer le noyau et l'image de u.

Allez à : Correction exercice 32

Exercice 33.

Soit $u: \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, une application linéaire, $\underline{e} = (e_1, \dots, e_p)$ la base canonique de $\mathbb{R}^p$ et $\underline{f} = (f_1, \dots, f_q)$ la base canonique de $\mathbb{R}^q$.

1. $p = 3$ et $q = 3$ dans cette question $\underline{e} = \underline{f}$. Soit $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$

$$u(x) = (x_1 + x_2, 2x_1 - x_3, 3x_1 + x_2 - x_3)$$

(On admet que u est une application linéaire).

a) Déterminer l'image de la base $\underline{e}$ (c'est-à-dire $u(e_1)$, $u(e_2)$, et $u(e_3)$).

b) Déterminer la matrice de u de la base $\underline{e}$ dans la base $\underline{e}$.

c) Déterminer le noyau et l'image de u.

2. $p = 3$ et $q = 3$ dans cette question $\underline{e} = \underline{f}$. Soit $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$

$$u(x) = (x_1 + x_2, x_1 + x_2, x_1 + x_2)$$

(On admet que u est une application linéaire).

a) Déterminer l'image de la base $\underline{e}$ (c'est-à-dire $u(e_1)$, $u(e_2)$, et $u(e_3)$).

b) Déterminer la matrice de u de la base $\underline{e}$ dans la base $\underline{e}$.

c) Déterminer le noyau et l'image de u.

Allez à : Correction exercice 33

Exercice 34.

Soit $f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire dont la matrice dans les base canonique de $\mathbb{R}^4$ et $\mathbb{R}^3$ est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 5 & -11 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer une base du noyau de f.
2. Déterminer une base de l'image de f. Quel est le rang de A ?

Allez à : Correction exercice 34

Exercice 35.

Déterminer le rang de la matrice

$$A=\begin{pmatrix}1&1&2&1&1\\2&1&1&1&1\\1&1&1&2&1\\2&1&1&1&1\end{pmatrix}$$

Allez à : Correction exercice 35

Exercice 36.

Soit la matrice A de définie par : $A=\begin{pmatrix}13&-8&-12\\12&-7&-12\\6&-4&-5\end{pmatrix}$

1. Montrer que A est inversible et calculer son inverse A^{-1}.
2. En déduire A^n, pour tout n entier.

Allez à : Correction exercice 36

Exercice 37.

Soit A la matrice de définie par : $A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$

1. Calculer A^2.
2. Trouver un polynôme P de degré 2 tel que $P(A)=O$.
3. En déduire A^{-1}.
4. Retrouver A^{-1} par une autre méthode.

Allez à : Correction exercice 37

Exercice 38.

Soit $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix}$

1. Calculer A^2 et A^3. Calculer A^3-A^2+A-I.
2. Exprimer A^{-1} en fonction de A^2, A et I.
3. Exprimer A^4 en fonction de A^2, A et I.

Allez à : Correction exercice 38

Exercice 39.

Soit A la matrice

$$A=\begin{pmatrix}3&0&1\\-1&3&-2\\-1&1&0\end{pmatrix}$$

Calculer $(A-2I)^3$, puis en déduire que A est inversible et déterminer A^{-1} en fonction de I, A et de A^2.

Allez à : Correction exercice 39

Exercice 40.

A tout nombre réel t on associe la matrice : $M(t)=\begin{pmatrix}\mathrm{ch}(t)&\mathrm{sh}(t)\\\mathrm{sh}(t)&\mathrm{ch}(t)\end{pmatrix}$

1. Calculer le produit des matrices $M(t_1)$ et (t_2), où t_1 et t_2 sont deux réels quelconques.
2. Montrer que $M(t)$ est inversible, et déterminer $M^{-1}(t)$.

Allez à : Correction exercice 40

Exercice 41.

Soit $\beta=(e_1,e_2,e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$

Soit $u:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que $E_1 = \{x \in \mathbb{R}^3, u(x) = x\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ dont on donnera une base a.
2. Soient $b = (0,1,1)$ et $c = (1,1,2)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Calculer $u(b)$ et $u(c)$.
3. Montrer que $\beta' = (a, b, c)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
4. Déterminer la matrice de passage P de β à β'.
5. Calculer P^{-1}.
6. Déterminer la matrice D de u dans la base β'.
7. Donner la relation entre A, P et D.

Allez à : Correction exercice 41

Exercice 42.

Soit f une application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par : $f(x_1, x_2) = (x_1 - x_2, x_1 + x_2)$ et $\beta = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$.
2. Déterminer la matrice A de f dans la base β.
3.
   a) Déterminer le noyau et l'image de f.
   b) En déduire que f est inversible.
   c) Déterminer f^{-1} dans la base β, en déduire A^{-1}.
4. Montrer que $A = RH$.
   Où H est la matrice d'une homothétie dont on donnera le rapport et R est la matrice d'une rotation dont on donnera l'angle.

Soient $a = e_1 + e_2$ et $b = e_1 - e_2$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$. On pose $\beta' = (a, b)$.

5. Montrer que $\beta' = (a, b)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
6. Calculer $f(a)$ et $f(b)$.
7. Déterminer la matrice de f dans la base β'.

Allez à : Correction exercice 42

Exercice 43.

Soit $\beta = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Soient $a = e_1 - e_2 + e_3$, $b = 2e_1 - e_2 + e_3$ et $c = 2e_1 - 2e_2 + e_3$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$

1. Montrer que $\beta' = (a, b, c)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer la matrice de passage P de β à β'. Calculer P^{-1}.
3. Déterminer la matrice R de u dans la base β'.
4.
   a) Calculer $P^{-1}AP$ en fonction de R
   b) Calculer R^4
   c) En déduire les valeurs de A^{4n}.

Allez à : Correction exercice 43

Exercice 44.

Soit $\beta = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Soit u une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par :

$u(e_1) = -3e_1 + 2e_2 - 4e_3$
$u(e_2) = e_1 - e_2 + 2e_3$
$u(e_3) = 4e_1 - 2e_2 + 5e_3$

1. Déterminer la matrice de u dans la base canonique.
2. Montrer que $E = \{x \in \mathbb{R}^3, u(x) = x\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Montrer que la dimension de E est 1 et donner un vecteur non nul a de E.
3. Montrer que $F = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, -2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Donner une base (b, c) de F.
4. Montrer que $\beta' = \big(a, b, u(b)\big)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
5. Montrer que $E \oplus F = \mathbb{R}^3$.
6. Déterminer la matrice R de u dans la base β'.

Allez à : Correction exercice 44

Exercice 45.

Soit $\beta = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Soit u l'application linéaire qui a un vecteur $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ associe le vecteur

$$u(x) = (x_2 - 2x_3, 2x_1 - x_2 + 4x_3, x_1 - x_2 + 3x_3)$$

1. Déterminer la matrice A de u dans la base canonique.
2. Déterminer une base (a, b) de $\ker(u - Id)$.
3. Donner un vecteur c tel que $\ker(u) = vect(c)$.
4. Montrer que $\beta' = (a, b, c)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
5. Déterminer la matrice D de u dans la base β'.
6. Montrer que $Im(u) = \ker(u - Id)$
7. Montrer que $\ker(u) \oplus Im(u) = \mathbb{R}^3$.

Allez à : Correction exercice 45

Exercice 46.

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini pour tout $x = (x_1, x_2, x_3)$ par

$$u(x) = (-10x_1 + 3x_2 + 15x_3, -2x_1 + 3x_3, -6x_1 + 2x_2 + 9x_3)$$

1. Déterminer la matrice A de u dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer la dimension du noyau et de l'image de u. On donnera un vecteur directeur a de $\ker(u)$.
3. A-t-on $\ker(u) \oplus Im(u) = \mathbb{R}^3$?
4. Déterminer un vecteur b tel que $a = u(b)$.
5. Montrer que $E_{-1} = \{x \in \mathbb{R}^3, u(x) = -x\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, déterminer un vecteur directeur de E_{-1} que l'on notera c.
6. Montrer que $\beta' = (a, b, c)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
7. Déterminer la matrice A' de u dans la base β' et donner la relation reliant A et A'.

Allez à : Correction exercice 46

Exercice 47.

Soit $\beta = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice par rapport à la base β est : $A = \begin{pmatrix} -6 & -3 & 0 & 6 \\ 6 & 3 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Soit $\beta' = (a, b, c, d)$ une famille de $\mathbb{R}^4$ définie par :

$a = e_1 - e_2$, $b = e_1 - e_2 - e_3$, $c = 2e_1 - 2e_2 + e_3 + e_4$ et $d = -e_1 + 2e_2$

1. Montrer que $\beta' = (a, b, c, d)$ est une base de $\mathbb{R}^4$.
2. Calculer $f(a)$, $f(b)$, $f(c)$ et $f(d)$ et les exprimer dans la base $\beta' = (a, b, c, d)$.

3. Déterminer la matrice de f dans la base β'.

Allez à : Correction exercice 47

Exercice 48.

Soit $\beta = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

Soit u un endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

On pose :

$a = (-1,1,0,-1)$, $b = (1,-2,-1,1)$, $c = (-2,3,1,-1)$ et $d = (2,-1,0,1)$

1. Montrer que $\beta' = (a, b, c, d)$ est une base de $\mathbb{R}^4$.
2. Donner la matrice de passage P de β à β'. Calculer P^{-1}.
3. Calculer $u(a)$, $u(b)$, $u(c)$ et $u(d)$ dans la base β'.
4. Déterminer la matrice T de u dans la base β'.
5. Calculer $N = T + I$, puis N^4 et en déduire $(A + I)^4$.

Allez à : Correction exercice 48

Exercice 49.

Soit u un endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique, $\beta = (e_1, e_2, e_3, e_4)$, est

$$A = \begin{pmatrix} -7 & 6 & 6 & 6 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 2 & 3 \\ -6 & 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

Soient a, b, c et d quatre vecteurs

$$a = -2e_1 - e_2 - e_3 - e_4;\quad b = e_2 - e_4;\quad c = 2e_1 + e_3 + e_4; d = 3e_1 + e_3 + 2e_4$$

1. Montrer que $\beta' = (a, b, c, d)$ est une base de $\mathbb{R}^4$.
2. Calculer $u(a), u(b), u(c)$ et $u(d)$ dans la base $\beta' = (a, b, c, d)$
3. En déduire la matrice D de u dans la base β'.
4. Déterminer la matrice P de passage de β à β'.
5. Calculer P^{-1}.
6. Calculer $P^{-1}AP$.

Allez à : Correction exercice 49

Exercice 50.

Soit $\beta = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

Soit u un endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

On pose $a = e_1 + e_2 + e_3$, $b = e_1$, $c = u(b)$ et $d = u^2(b)$.

1. Montrer que $\beta' = (a, b, c, d)$ est une base de $\mathbb{R}^4$.
2. Donner la matrice de passage P de β à β' . Calculer P^{-1}.
3. Calculer $u(a)$, $u(b)$, $u(c)$ et $u(d)$ dans la base β'.
4. Déterminer la matrice N de u dans la base β'.
5. Calculer N^4 et en déduire A^4.
6. Donner une base de $\ker(u)$

7. Donner une base de $Im(u)$.

Allez à : Correction exercice 50

Exercice 51.

Soit $\beta = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer un vecteur a non nul tel que $\ker(u) = vect(a)$
2. Déterminer un vecteur b tel que $a = u(b)$
3. Déterminer un vecteur c tel que $u(c) = -c$
4. Soit $d = (1,0,1,1)$, montrer que $\beta' = (a, b, c, d)$ est une base de $\mathbb{R}^4$
5. Calculer $u(d)$ dans la base β'.
6. Déterminer la matrice T de u dans β'.
7. Quel est le rang de A.
8. Soit $f = 2e_1 - e_2 - e_3 + e_4 = (2, -1, -1, 1)$
   Calculer $u(f)$, $u^2(f)$, $u^3(f)$ et on admettra que $\beta'' = \big(f, u(f), u^2(f), u^3(f)\big)$ est une base de $\mathbb{R}^4$
9. Calculer $u^4(f)$ et montrer que $u^4(f) = -2u^3(f) - u^2(f)$
   En déduire la matrice C de u dans la base β''.
10. Montrer que C et T sont deux matrices semblables (c'est-à-dire qu'il existe une matrice R, inversible, telle que $T = R^{-1}CR$

Allez à : Correction exercice 51

Exercice 52.

Soit $\beta = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$

Soit u l'application linéaire dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Donner une base (a, b) de $\ker(u)$.
2. Donner un vecteur c qui engendre $E_1 = \{x \in \mathbb{R}^4, u(x) = x\}$
3. Déterminer un vecteur $d \in \ker((u - id)^2)$ et $d \notin \ker(u - id)$, on pourra calculer $(A - I)^2$, en déduire que d vérifie $u(d) = \lambda c + d$, où λ est un réel qui dépendra du vecteur d que vous avez choisit.
4. Montrer que $\beta' = (a, b, c, d)$ est une base de $\mathbb{R}^4$.
5. Déterminer la matrice T de u dans la base β'. (en fonction de λ)

Allez à : Correction exercice 52

Exercice 53.

Soit $\beta = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$

Soit u un endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base β est :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer un vecteur a qui engendre le noyau de u.
2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que $E_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^4, u(x) = \lambda x\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.
3. Trouver un vecteur directeur b de E_{-1}. Déterminer une base (c, d) de E_1.

4. Montrer que $\beta' = (a, b, c, d)$ est une base de $\mathbb{R}^4$.
5. Déterminer la matrice de u dans la base β'.

Allez à : Correction exercice 53

Exercice 54.

Soit $\beta = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

Soit u un endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrices dans la base canonique est :

$$A = Mat_\beta(u) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 & -2 \\ -2 & 3 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On pose $a_1 = e_1 + 2e_2 + 3e_3 - 2e_4$, $a_2 = e_2 + e_3$, $a_3 = e_1 + 3e_2 + 5e_3 - 3e_4$ et $c = -e_1 - e_2 - e_3$

On pose $F = Vect(a_1, a_2, a_3)$.

1. Montrer que $\beta' = (a_1, a_2, a_3, c)$ est une base de $\mathbb{R}^4$ et donner la matrice P de passage de β à β'.
2. Déterminer la matrice D de u dans la base β'.
3. Montrer que pour tout $x \in F$, $u(x) \in F$ en déduire que $v: F \to F$ définie par $v(x) = u(x)$ est un endomorphisme de F, déterminer la matrice de v dans la base $\beta_a = (a_1, a_2, a_3)$.
4. Montrer que $\mathbb{R}^4 = F \oplus Vect(c)$.
5. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^4$ il existe un unique couple de vecteurs $(f, g) \in F \times Vect(c)$ tels que : $x = f + g$, calculer $u(x)$.

Allez à : Correction exercice 54

Exercice 55.

Soit $\beta = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Soit u un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} -10 & -3 & -12 \\ 5 & 0 & 7 \\ 6 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $A - \lambda I$ ne soit pas inversible. Déterminer alors $\ker(A - \lambda I)$.
2. Soit $a = (-3,1,2)$, calculer $u(a)$.
3. Déterminer $b \in \mathbb{R}^3$ tel que $u(b) = a - b$, puis $c \in \mathbb{R}^3$ tel que $u(c) = b - c$.
4. Montrer que $\beta' = (a, b, c)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
5. Déterminer $T = mat_{\beta'}(u)$.
6. Montrer que $(T + I)^3 = O$ (la matrice nulle). En déduire $(A + I)^3$.
7. Déterminer A^{-1} en fonction de A^2, A et I.

Allez à : Correction exercice 55

Exercice 56.

Soit $\beta = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On considère l'application linéaire f définie par

$$f(e_1) = 2e_2 + 3e_3; f(e_2) = 2e_1 - 5e_2 - 8e_3; f(e_3) = -e_1 + 4e_2 + 6e_3$$

On note $f^2 = f \circ f$.

1. Déterminer la matrice de f dans β.
2. Montrer que $E_1 = \ker(f - id_{\mathbb{R}^3})$ et que $N_{-1} = \ker(f^2 + id_{\mathbb{R}^3})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.
3. Déterminer a, b deux vecteurs tels que $E_1 = Vect(a)$ et $N_{-1} = Vect\big(b, f(b)\big)$. A-t-on $E_1 \oplus N_{-1} = \mathbb{R}^3$?
4. Montrer que $\beta' = \big(a, b, f(b)\big)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
5. On appelle $\beta' = \big(a, b, f(b)\big)$, quelle est la matrice de f dans β'.
6. Quelle est la matrice de f^2 dans β'

Allez à : Correction exercice 56

Exercice 57.

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A=\begin{pmatrix}2&-2&1&-2\\0&1&0&0\\-3&0&-2&2\\1&-1&1&-1\end{pmatrix}$$

Soit $\beta=(e_1,e_2,e_3,e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

Partie I

Soit $e_2=(0,1,0,0)\in\mathbb{R}^4$

1. Calculer $u(e_2)$, $u^2(e_2)$ et $u^3(e_2)$ et montrer que $\beta'=\big(e_2,u(e_2),u^2(e_2),u^3(e_2)\big)$ est une base de $\mathbb{R}^4$.
2. Calculer $u^4(e_2)$ dans la base en fonction de $u^2(e_2)$ et e_2. Déterminer la matrice C de u dans la base β'

Partie II

3. Déterminer un vecteur $a\in\mathbb{R}^4$ tel que $u(a)=a$ dont la première composante est 1.
4. Soit $b=(1,-1,0,1)$ et $c=e_1-e_3+e_4$, montrer que $u(b)=a+b$ et que $u(c)=-c$.
5. Déterminer un vecteur $d\in\mathbb{R}^4$ tel que $u(d)=c-d$.
6. Montrer que $\beta''=(a,b,c,d)$ est une base de $\mathbb{R}^4$.
7. Déterminer la matrice T de u dans la base β''.

Partie III

8. Montrer que les matrices T et C sont semblables.

Allez à : Correction exercice 57

Exercice 58.

Soit $\mathbb{R}_2[X]=\{a_0+a_1X+a_2X^2, a_i\in\mathbb{R}\}$ l'espace des polynômes réels de degré au plus 2 et soit $\mathcal{B}=(1,X,X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$? On considère l'application

$$f:\mathbb{R}_2[X]\to\mathbb{R}_2[X]$$
$$P\longmapsto (X+1)P'$$

1. Montrer que f est linéaire.
2. Montrer que la matrice A de f par rapport aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}$ est :

$$\begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&2\\0&0&2\end{pmatrix}$$

3. Montrer que $\mathcal{B}'=(1,X+1,(X+1)^2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
4. Trouver la matrice B de f par rapport aux bases $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}'$.
5. Calculer A^2, A^3 et B^k pour tout $k\in\mathbb{N}$.
6. Déterminer le rang de f.
7. Trouver une base de l'image de f.
8. Trouver une base de noyau de f.

Allez à : Correction exercice 58

Exercice 59.

Soit $u:\mathbb{R}_2[X]\to\mathbb{R}[X]$ défini par $u(P)=P+(1-X)P'$

Soit $\beta=(1,X,X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$

1. Montrer que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Déterminer la matrice de u dans β.
3. Déterminer le noyau et l'image de u.

Allez à : Correction exercice 59

Exercice 60.

Soit $u:\mathbb{R}_2[X]\to\mathbb{R}[X]$, l'application définie pour tout polynôme de $\mathbb{R}_2[X]$ par :

$$u(P) = 2P - (X - 1)P'$$

Soit $\beta = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

1. Montrer que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Déterminer la matrice A de u dans β.
3. Déterminer le noyau de u. On notera P_2 un vecteur directeur du noyau.
4. Donner une base de l'image de u.
5. Déterminer un polynôme P_1 tel que $u(P_1) = P_1$
6. Montrer que $\beta' = (1, P_1, P_2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
7. Déterminer la matrice D de u dans la base β'.

Allez à : Correction exercice 60

Exercice 61.

Soit $f: \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}[X]$ définie par $f(P) = P - (X - 2)P'$

1. Montrer que f est une application linéaire
2. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
3. Déterminer le noyau et l'image de f.
4. Déterminer la matrice de f dans la base $(1, X, X^2)$.
5. Montrer que $\beta' = (1, X - 2, (X - 2)^2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
6. Déterminer la matrice de passage P de β à β'. Calculer P^{-1}.
7. Quelle est la matrice de f dans la base β'.

Allez à : Correction exercice 61

Exercice 62.

Soit $\beta = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$

Soit u l'application qui a un polynôme de $\mathbb{R}_2[X]$ associe le polynôme de $\mathbb{R}[X]$ définie par :

$$u(P) = 2XP - X^2P'$$

1. Montrer que u est un endomorphisme $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Déterminer la matrice A de u dans la base canonique.
3. Déterminer la dimension de $\ker(u)$.
4. Déterminer une base et la dimension de $Im(u)$

Allez à : Correction exercice 62

Exercice 63.

Soit $u : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}[X]$ une application définie pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$ par

$$u(P) = P + (1 - X)P' + 2P''$$

On appelle $P_1 = 1 - X, P_2 = 1$ et $P_3 = 1 + 2X - X^2$

On appelle $\beta = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ et $\beta' = (P_1, P_2, P_3)$

1. Montrer que u est une application linéaire.
2. Montrer que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
3. Déterminer la matrice A de u dans la base canonique.
4. Montrer que β' est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
5. Déterminer la matrice D de u dans la base β'.

Allez à : Correction exercice 63

Exercice 64.

Soit $u: \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}[X]$ définie par

$$u(P) = \frac{1}{2}(1 - X^2)P'' + XP' - P$$

1. Montrer que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$

2. Déterminer une base (P_1, P_2) de $\ker(u)$.
3. Déterminer P_3 tel que $Im(u) = Vect(P_3)$.
4. Montrer que (P_1, P_2, P_3) est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
5. Déterminer la matrice de u dans la base (P_1, P_2, P_3).

Allez à : Correction exercice 64

Exercice 65.

Soit $\mathbb{R}_2[X] = \{a_0 + a_1X + a_2X^2, a_i \in \mathbb{R}\}$ l'espace des polynômes réels de degré au plus 2 et soit $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$? On considère l'application

$$f: \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$$
$$P \longmapsto f(P)$$

Où $f(P)(X) = P(X+1) - P(X) = a_0 + a_1(X+1) + a_2(X+1)^2 - (a_0 + a_1X + a_2X^2)$

1. Montrer que f est linéaire.
2. Montrer que la matrice A de f par rapport aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Montrer que $\mathcal{B}' = \big(1, X-1, (X-1)(X-2)\big)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
4. Trouver la matrice B de f par rapport aux bases $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}'$.

Allez à : Correction exercice 65

Exercice 66.

Partie I

Soit g une application de $\mathbb{R}_3[X]$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par :

$$g(P) = \big(P(-1), P(1)\big)$$

1. Montrer que g est une application linéaire.
2. Déterminer une base du noyau et déterminer l'image de g.

Partie II

Soit h une application linéaire de $\mathbb{R}_1[X]$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par :

$$h(P) = \big(P(-1), P(1)\big)$$

3. Montrer que h est bijective.

Allez à : Correction exercice 66

Exercice 67.

Soit $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

Soient a et b les fonctions définies par :

$$a(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad b(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

On pose $H = Vect(a, b)$ et $F = \{f \in H, f(\ln(2)) = 0\}$

1. Déterminer la dimension de H
2. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de H.
3. Quelle est la dimension de F ?
4. Soit $\varphi: H \to \mathbb{R}^2$ définie pour $f \in H$ par

$$\varphi(f) = (f(-\ln(2)), f(\ln(2)))$$

a) Montrer que φ est une application linéaire
b) Montrer que φ est un isomorphisme.

Allez à : Correction exercice 67

Exercice 68.

Soit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices à coefficient dans $\mathbb{R}$ à n lignes et n colonnes.

Soit $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. C'est-à-dire les matrices qui vérifient ${}^tA = -A$.

Soit $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. C'est-à-dire les matrices qui vérifient ${}^tA = A$.

1. Montrer que $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Pour toutes matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que $\frac{A+{}^tA}{2} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et que $\frac{A-{}^tA}{2} \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.
3. En déduire que $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) + \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
4. A-t-on $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?
5. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, décomposer A en une somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

Allez à : Correction exercice 68

Exercice 69.

Soit $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices à deux lignes et deux colonnes.

Soit ϕ l'endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie pour toute matrice A de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ par

$$\phi(A) = A - {}^tA$$

1. Rappeler la dimension de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Déterminer le noyau de ϕ, quel est sa dimension ?
3. Déterminer l'image de ϕ. En déduire que pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ et une matrice J, à déterminer tel que $\phi(A) = \lambda J$.

Allez à : Correction exercice 69

Exercice 70. (Hors programme)

1. Calculer $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & a+c & a+b \end{vmatrix}$
2.
   a) Calculer $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & c & d \\ b^2 & c^2 & d^2 \end{vmatrix}$

   b) Montrer que $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(d-a)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & c & d \\ b^2 & c^2 & d^2 \end{vmatrix}$, puis calculer $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}$

Allez à : Correction exercice 70

Exercice 71. (Hors programme)

Soit $A = \begin{pmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{pmatrix}$

1. Calculer $\Delta = \det(A)$
2. Déterminer les valeurs de a, b, c et d qui annule Δ.

Allez à : Correction exercice 71

Exercice 72.

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&-2\\-1&1&2\\1&0&-1\end{pmatrix}$$

Première partie

Soit $u:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ une application linéaire.

$\beta=(e_1,e_2,e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$

La matrice de u dans la canonique de $\mathbb{R}^3$ est A.

1. Montrer qu'il existe $a\in\mathbb{R}^3$, un vecteur non nul, tel que $\ker(u)=Vect(a)$.
2. Déterminer un vecteur $b\in\mathbb{R}^3$ tel que $a=u(b)$.
3. Montrer que $E_1=\{x\in\mathbb{R}^3,u(x)=x\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, donner un vecteur non nul $c\in E$.
4. Montrer que $\beta'=(a,b,c)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
5. Déterminer la matrice T de u dans la base β'.
6. Donner la relation entre A, T et la matrice de passage, notée Q, de β à β'.

Deuxième partie

Soit $\mathcal{B}=(1,X,X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

Soit $f:\mathbb{R}_2[X]\to\mathbb{R}[X]$ l'application linéaire définie par :

$$f(P)=(2+X+X^2)P-(1+2X+X^2+X^3)P'+\frac{1}{2}(-1+X+X^2+X^3+X^4)P''$$

1. Calculer $f(1)$, $f(X)$ et $f(X^2)$ et en déduire que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Donner la matrice B de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
3. On pose $P_0=1+X+X^2$, $P_1=1+X$ et $P_2=2+X+X^2$
   Montrer que $\mathcal{B}'=(P_0,P_1,P_2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
4. Déterminer la matrice T' de f dans la base $\mathcal{B}'$.
5. Donner la relation entre B, T' et la matrice, notée Q', de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

Troisième partie

Montrer que A et B sont deux matrices semblables.

Allez à : Correction exercice 72

Exercice 73.

Soit $A=\begin{pmatrix}-1&1&0&1\\-1&-1&1&3\\0&1&-1&-1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$

Soit $\beta=(e_1,e_2,e_3,e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

Soit $u:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$ un endomorphisme dont la matrice dans la base canonique est A.

1. Montrer que si v est un endomorphisme de E, un espace vectoriel de dimension n alors
$$\ker(v)\subset\ker(v^2)\subset\cdots\subset\ker(v^n)$$
2. Déterminer une base de $\ker(u+id_{\mathbb{R}^4})$, de $\ker((u+id_{\mathbb{R}^4})^2)$, de $\ker((u+id_{\mathbb{R}^4})^3)$ et de $\ker((u+id_{\mathbb{R}^4})^4)$.
   Donner l'entier p tel que $\ker((u+id_{\mathbb{R}^4})^p)=\ker((u+id_{\mathbb{R}^4})^{p+1})$
3.
   a) Donner un vecteur non nul a qui engendre $\ker(u+id_{\mathbb{R}^4})$.
   b) Donner un vecteur b vérifiant $a=(u+id_{\mathbb{R}^4})(b)$.
      Puis montrer que (a,b) est une base de $\ker((u+id_{\mathbb{R}^4})^2)$
   c) Donner un vecteur c vérifiant $b=(u+id_{\mathbb{R}^4})(c)$.
      Puis montrer que (a,b,c) est une base de $\ker((u+id_{\mathbb{R}^4})^3)$
   d) exprimer $u(b)$ et $u(c)$ en fonction de a, b et c.
4. soit $d=(1,1,0,1)$, calculer $u(d)$.

5. Montrer que $\beta' = (a, b, c, d)$ est une base de $\mathbb{R}^4$.
6. Donner la matrice, T, de u dans la base β' et donner la relation entre A, T et la matrice de passage P de β à β'.
7. Calculer $(T + I)^3(T - I)$ et en déduire $(A + I)^3(A - I)$

Allez à : Correction exercice 73

Exercice 74.

Première partie :

Soit g un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$

1. Montrer que $\ker(g) \subset \ker(g^2) \subset \ker(g^3)$
2. On suppose que $g^3 = O_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}$ et que $\{0_{\mathbb{R}^3}\} \subsetneq \ker(g) \subsetneq \ker(g^2) \subsetneq \ker(g^3)$
   a) Déterminer $\dim(\ker(g))$ et $\dim(\ker(g^2))$
   b) Montrer que $Im(g) \subset \ker(g^2)$, puis que $Im(g) = \ker(g^2)$.

Deuxième partie :

Soit g un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que $g^3 = O_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}$ et que $\{0_{\mathbb{R}^3}\} \subsetneq \ker(g) \subsetneq \ker(g^2) \subsetneq \ker(g^3)$

3. Soit $a \in \ker(g)$, un vecteur non nul, montrer qu'il existe $b \in \mathbb{R}^3$ tel que $g(b) = a$. Montrer que $b \in \ker(g^2)$ et en déduire que (a, b) est une famille libre.
4. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}^3$ tel que $g(c) = b$, montrer que alors (a, b, c) est une base de $\mathbb{R}^3$.
5. Déterminer la matrice de g dans la base (a, b, c).

Troisième partie :

Soit $\beta = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} -10 & -3 & -12 \\ 5 & 0 & 7 \\ 6 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

6. Montrer que $f + Id$ vérifie les hypothèses de la seconde partie.
7. Déterminer a, b et c tels que : $a \in \ker(f + Id)$, $(f + Id)(b) = a$ et $(f + Id)(c) = b$.
8. Déterminer la matrice de f dans la base (a, b, c).

Allez à : Correction exercice 74

CORRECTIONS

Correction exercice 1.

1. Soient $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ et $y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$, et soient λ et μ deux réels.
$$\lambda x + \mu y = (\lambda x_1 + \mu y_1, \lambda x_2 + \mu y_2, \lambda x_3 + \mu y_3) = (X_1, X_2, X_3)$$
Donc
$$\begin{aligned} u(\lambda x + \mu y) &= (X_1 + X_2 + X_3, 2X_1 + X_2 - X_3) \\ &= \big((\lambda x_1 + \mu y_1) + (\lambda x_2 + \mu y_2) + (\lambda x_3 + \mu y_3), 2(\lambda x_1 + \mu y_1) + (\lambda x_2 + \mu y_2) \\ &\quad - (\lambda x_3 + \mu y_3)\big) \\ &= \big(\lambda(x_1 + x_2 + x_3) + \mu(y_1 + y_2 + y_3), \lambda(2x_1 + x_2 - x_3) + \mu(2y_1 + y_2 - y_3)\big) \\ &= \lambda(x_1 + x_2 + x_3, 2x_1 + x_2 - x_3) + \mu(y_1 + y_2 + y_3, 2y_1 + y_2 - y_3) = \lambda u(x) + \mu u(y) \end{aligned}$$
Ce qui montre que u est linéaire.
2.
$$x = (x_1, x_2, x_3) \in \ker(u) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow L_2 - 2L_1 \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ -x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 = -3x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_3 = 0 \\ x_2 = -3x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2x_3 \\ x_2 = -3x_3 \end{cases}$$
Donc $x = (2x_3, -3x_3, x_3) = x_3(2, -3, 1)$, si on pose $a = (2, -3, 1)$

$$\ker(u) = Vect(a)$$

Allez à : Exercice 1

Correction exercice 2.

1. Soient $u = (x, y, z)$ et $u' = (x', y', z')$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$ et soient λ et λ' deux réels
$$\lambda u + \lambda' u' = (\lambda x + \lambda' x', \lambda y + \lambda' y', \lambda z + \lambda' z')$$
$$\begin{aligned} f(\lambda u + \lambda' u') &= \big(\lambda x + \lambda' x' + \lambda y + \lambda' y' + \lambda z + \lambda' z', -(\lambda x + \lambda' x') + 2(\lambda y + \lambda' y') + 2(\lambda z + \lambda' z')\big) \\ &= \big(\lambda(x + y + z) + \lambda'(x' + y' + z'), \lambda(-x + 2y + 2z) + \lambda'(-x' + 2y' + 2z')\big) \\ &= \lambda(x + y + z, -x + 2y + 2z) + \lambda'(x' + y' + z', -x' + 2y' + 2z') = \lambda f(u) + \lambda' f(u') \end{aligned}$$
Donc f est linéaire.
2. $$u = (x, y, z) \in \ker(u) \Leftrightarrow (x + y + z, -x + 2y + 2z) = (0,0) \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix} \begin{cases} x + y + z = 0 \\ -x + 2y + 2z = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 + L_1 \end{matrix} \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 3y + 3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -z \end{cases}$$
$$u = (0, -z, z) = z(0, -1,1)$$
On pose $a = (0, -1,1)$, a est une base de $\ker(f)$.
$$Im(u) = vect\big(f(e_1), f(e_2), f(e_3)\big)$$
$$f(e_1) = (1, -1) = f_1 - f_2; f(e_2) = (1,2) = f_1 + 2f_2 \text{ et } f(e_3) = (1,2) = f_1 + 2f_2$$
$$Im(u) = vect(f_1 - f_2, f_1 + 2f_2, f_1 + 2f_2) = vect(f_1 - f_2, f_1 + 2f_2)$$
$f_1 - f_2$ et $f_1 + 2f_2$ ne sont pas proportionnels ils forment donc une famille libre de $Im(f)$, comme c'est une famille génératrice de $Im(f)$, c'est une base de $Im(f)$et donc $\dim(Im(f) = 2$. Remarque $Im(f) = \mathbb{R}^2$.

Allez à : Exercice 2

Correction exercice 3.

1. $$\lambda u + \lambda' u' = (\lambda x + \lambda' x', \lambda y + \lambda' y', \lambda z + \lambda z')$$
$$\begin{aligned} f(\lambda u + \lambda' u') &= \big(-2(\lambda x + \lambda' x') + (\lambda y + \lambda' y') + (\lambda z + \lambda z'), (\lambda x + \lambda' x') - 2(\lambda y + \lambda' y') \\ &\quad + (\lambda z + \lambda z'), (\lambda x + \lambda' x') + (\lambda y + \lambda' y') - 2(\lambda z + \lambda z')\big) \\ &= \big(\lambda(-2x + y + z) + \lambda'(-2x' + y' + z'), \lambda(x - 2y + z) + \lambda'(x' - 2y' + z')\big) \\ &= \lambda(-2x + y + z, x - 2y + z) + \lambda'(-2x' + y' + z', x' - 2y' + z') = \lambda f(u) + \lambda' f(u) \end{aligned}$$
Donc f est linéaire.
2. $$u \in \ker(f) \Leftrightarrow f(u) = 0_{\mathbb{R}^2} \Leftrightarrow (-2x + y + z, x - 2y + z) = (0,0) \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix} \begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ 2L_2 + L_1 \end{matrix} \begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ -3y + 3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 2z = 0 \\ y = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = z \end{cases}$$
$$u = (z, z, z) = z(1,1,1)$$
Donc $\ker(f) = Vect(a)$ avec $a = (1,1,1)$.
D'après le théorème du rang
$$\dim(\ker(f) + \dim(Im(f) = \dim(\mathbb{R}^3) \Leftrightarrow 1 + \dim(Im(f) = 3 \Leftrightarrow \dim(Im(f) = 2$$
3. Donc $Im(f) = \mathbb{R}^2$. Une base est $\big((1,0), (0,1)\big)$

Allez à : Exercice 3

Correction exercice 4.

1. Soit $u = (x, y)$ et $u' = (x', y')$, $\lambda u + \lambda' u' = (\lambda x + \lambda' x', \lambda y + \lambda' y')$

$$\begin{aligned}h(\lambda u+\lambda' u')&=\big(\lambda x+\lambda' x'-(\lambda y+\lambda' y'),-3(\lambda x+\lambda' x')+3(\lambda y+\lambda' y')\big)\\&=\big(\lambda(x-y)+\lambda'(x'-y'),\lambda(-3x+3y)+\lambda'(-3x'+3y')\big)\\&=\lambda(x-y,-3x+3y)+\lambda'(x'-y',-3x'+3y')=\lambda h'u)+\lambda' h(u')\end{aligned}$$

Donc h est linéaire.

2. $h(1,1)=(0,0)=h(0,0)$ et pourtant $(1,1)\neq(0,0)$ donc h n'est pas injective.
   On va montrer que $(1,0)$ n'a pas d'antécédent. Supposons qu'il existe $u=(x,y)$ tel que $(1,0)=h(u)\Leftrightarrow(1,0)=(x-y,-3x+3y)\Leftrightarrow\begin{cases}1=x-y\\0=-3x+3y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1=x-y\\x=y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1=0\\x=y\end{cases}$, c'est impossible donc h n'est pas surjective.
   h est un endomorphisme donc h est injectif si et seulement si h est surjectif. Ici, h n'est pas injectif donc h n'est pas surjectif.
3. $u=(x,y)\in\ker(h)\Leftrightarrow(x-y,-3x+3y)=(0,0)\Leftrightarrow\begin{cases}x-y=0\\-3x+3y=0\end{cases}\Leftrightarrow x=y$
   Donc $u=(x,x)=x(1,1)$, $(1,1)$ est u vecteur non nul qui engendre $\ker(h)$, c'est une base de $\ker(h)$
   $h(e_1)=(1-0,-3\times1+3\times0)=(1,-3)=e_1-3e_2$ et
   $h(e_2)=((0-1,-3\times0+3\times1)=(-1,3)=-e_1+3e_2$
   $$Im(h)=Vect\big(h(e_1),h(e_2)\big)=Vect(e_1-3e_2,-e_1+3e_2)=Vect(e_1-3e_2)$$
   e_1-3e_2 est un vecteur non nul qui engendre $Im(h)$, c'est une base de $Im(h)$.

Allez à : Exercice 4

Correction exercice 5.

1. $f(e_1)=(1,2,0)=1\times e_1+2e_2+0\times e_3$
   $f(e_2)=(0,1,-1)=0\times e_1+1\times e_2-1\times e_3$
   et $f(e_3)=(-1,-3,2)=-1\times e_1-3e_2+2e_3$
2. Les coordonnées de $f(e_1)$ dans la base (e_1,e_2,e_3) sont $\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$
   Les coordonnées de $f(e_2)$ dans la base (e_1,e_2,e_3) sont $\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$
   Les coordonnées de $f(e_3)$ dans la base (e_1,e_2,e_3) sont $\begin{pmatrix}-1\\-3\\2\end{pmatrix}$
3.
   $$u=(x_1,x_2,x_3)\in\ker(f)\Leftrightarrow\begin{cases}x_1-x_3=0\\2x_1+x_2-3x_3=0\\-x_2+2x_3=0\end{cases}\Leftrightarrow L_2-2L_1\begin{cases}x_1-x_3=0\\x_2-x_3=0\\-x_2+2x_3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=0\\x_2=0\\x_3=0\end{cases}$$
   Donc $\ker(f)=\{0_{\mathbb{R}^3}\}$

Première méthode :

$Im(f)=\mathrm{Vect}\big(f(e_1),f(e_2),f(e_3)\big)$

Puis on regarde si la famille $\big(f(e_1),f(e_2),f(e_3)\big)$ est libre.

$$\alpha_1f(e_1)+\alpha_2f(e_2)+\alpha_3f(e_3)=0_{\mathbb{R}^3}\Leftrightarrow\alpha_1\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}+\alpha_3\begin{pmatrix}-1\\-3\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha_1-\alpha_3=0\\2\alpha_1+\alpha_2-3\alpha_3=0\\-\alpha_2+2\alpha_3=0\end{cases}$$

Il s'agit du même système que ci-dessus donc $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$. Cette famille est libre et elle engendre $Im(f)$ c'est une base de $Im(f)$, on en conclut que $\dim\big(Im(f)\big)=3$ et que $Im(f)=\mathbb{R}^3$.

Deuxième méthode (plus compliquée) :

$$\begin{aligned} Im(f) = Vect\big(f(e_1), f(e_2), f(e_3)\big) &= Vect(e_1 + 2e_2, e_2 - e_3, -e_1 - 3e_2 + 2e_3) \\ &= Vect(e_1 + 2e_2, e_2 - e_3, -e_1 - 3e_2 + 2e_3 + e_1 + 2e_2) \\ &= Vect(e_1 + 2e_2, e_2 - e_3, -e_2 + 2e_3) \\ &= Vect(e_1 + 2e_2, e_2 - e_3 - e_2 + 2e_3, -e_2 + 2e_3) \\ &= Vect(e_1 + 2e_2, e_3, -e_2 + 2e_3) \\ &= Vect(e_1 + 2e_2, e_3, -e_2 + 2e_3 - 2e_3) \\ &= Vect(e_1 + 2e_2, e_3, -e_2) \\ &= Vect(e_1 + 2e_2, e_3, e_2) = Vect(e_1, e_3, e_2) = Vect(e_1, e_2, e_3) \end{aligned}$$

Donc une base de $Im(f)$ est (e_1, e_2, e_3) et bien sur $Im(f) = \mathbb{R}^3$.

Troisième méthode :

Avec le théorème du rang, $\dim(\ker(f)) + \dim(Im(f) = \dim(\mathbb{R}^3) = 3$, comme $\dim(\ker(f)) = 0$, $\dim\big(Im(f)\big) = 3$ donc $Im(f) = \mathbb{R}^3$ et une base de $Im(f)$ est (e_1, e_2, e_3).

Allez à : Exercice 5

Correction exercice 6.

1.

$$\lambda u + \lambda' u' = (\lambda x + \lambda' x', \lambda y + \lambda' y', \lambda z + \lambda z')$$

$$\begin{aligned} f(\lambda u + \lambda' u') = \big(&-2(\lambda x + \lambda' x') + (\lambda y + \lambda' y') + (\lambda z + \lambda z'), (\lambda x + \lambda' x') - 2(\lambda y + \lambda' y') \\ &+ (\lambda z + \lambda z'), (\lambda x + \lambda' x') + (\lambda y + \lambda' y') - 2(\lambda z + \lambda z')\big) \\ &= (\lambda(-2x + y + z) + \lambda'(-2x' + y' + z'), \lambda(x - 2y + z) \\ &+ \lambda'(x' - 2y' + z'), \lambda(x + y - 2z) + \lambda'(x' + y' - 2z') \\ &= \lambda(-2x + y + z, x - 2y + z, x + y - 2z) \\ &+ \lambda'(-2x' + y' + z', x' - 2y' + z', x' + y' - 2z') = \lambda f(u) + \lambda' f(u) \end{aligned}$$

Donc f est linéaire.

2.

$$u \in \ker(f) \Leftrightarrow f(u) = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow (-2x + y + z, x - 2y + z, x + y - 2z) = (0,0,0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \left\{ \begin{array}{l} -2x + y + z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ 2L_2 + L_1 \\ 2L_3 + L_1 \end{matrix} \left\{ \begin{array}{l} -2x + y + z = 0 \\ -3y + 3z = 0 \\ 3y - 3z = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -2x + 2z = 0 \\ y = z \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = z \\ y = z \end{array} \right.$$

$$u = (z, z, z) = z(1,1,1)$$

Donc $\ker(f) = Vect(a)$ avec $a = (1,1,1)$.

D'après le théorème du rang

$$\dim(\ker(f)) + \dim\big(Im(f)\big) = \dim(\mathbb{R}^3) \Leftrightarrow 1 + \dim(Im(f) = 3 \Leftrightarrow \dim\big(Im(f)\big) = 2$$

3.

Première méthode

$$f(e_1) = (-2,1,1) \quad \text{et} \quad f(e_2) = (1,-2,1)$$

Sont deux vecteurs de l'image de f, ils ne sont pas proportionnels ils forment donc une famille libre de vecteurs dans un espace de dimension 2, c'est une base.

Deuxième méthode

$$f(e_1) = (-2,1,1);\ f(e_2) = (1,-2,1) \text{ et } f(e_3) = (1,1,-2)$$

$$Im(f) = Vect\big(f(e_1), f(e_2), f(e_3)\big)$$

$\big(f(e_1), f(e_2), f(e_3)\big)$ est une famille génératrice de $Im(f)$, le problème est de savoir si cette famille est libre.

Soit on fait « comme d'habitude », c'est-à-dire que l'on écrit qu'une combinaison linéaire de ces trois vecteurs est nulle

$$\lambda_1 f(e_1)+\lambda_2 f(e_2)+\lambda_3 f(e_3)=0_{\mathbb{R}^3}\Leftrightarrow \lambda_1(-2,1,1)+\lambda_2(1,-2,1)+\lambda_3(1,1,-2)=(0,0,0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{matrix} L_1\\ L_2\\ L_3\end{matrix}\begin{cases}-2\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0\\ \lambda_1-2\lambda_2+\lambda_3=0\\ \lambda_1+\lambda_2-2\lambda_3=0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{matrix} L_1\\ 2L_2+L_1\\ 2L_3+L_1\end{matrix}\begin{cases}-2\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0\\ -3\lambda_2+3\lambda_3=0\\ 3\lambda_2-3\lambda_3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda_1=\lambda_3\\ \lambda_2=\lambda_3\end{cases}$$

Donc pour tout $\lambda_3\in\mathbb{R}$

$$\lambda_3 f(e_1)+\lambda_3 f(e_2)+\lambda_3 f(e_3)=0_{\mathbb{R}^3}$$

Si on prend $\lambda_3=1$

$$f(e_1)+f(e_2)+f(e_3)=0_{\mathbb{R}^3}$$

$$Vect\big(f(e_1),f(e_2),f(e_3)\big)=Vect(f(e_1),f(e_2),-f(e_1)-f(e_2))=Vect\big(f(e_1),f(e_2)\big)$$

$f(e_1)$ et $f(e_2)$ ne sont pas proportionnels, ils forment une famille libre, comme cette famille est une famille génératrice de $Im(f)$, c'est une base de $Im(f)$.

Allez à : Exercice 6

Correction exercice 7.

1.

$$u=(x,y,z)\in\ker(f)\Leftrightarrow\begin{cases}6x-4y-4z=0\\5x-3y-4z=0\\x-y=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}6x-4x-4z=0\\5x-3x-4z=0\\x=y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}z=\dfrac{x}{2}\\y=x\end{cases}$$

Donc $u=\left(x,x,\frac{x}{2}\right)=\frac{x}{2}(2,2,1)$

On pose alors $a=(2,2,1)$ et $\ker(f)=Vect(a)$

2.

a. $b=(1,1,0)$ donc

$$f(b)=(6\times1-4\times1-4\times0,5\times1-3\times1-4\times0,1-1)=(2,2,0)=2(1,1,0)=2b$$

$c=(0,1,-1)=e_2-e_3$ donc

$$f(c)=(6\times0-4\times1-4\times(-1),5\times0-3\times1-4\times(-1),0-1)=(0,1,-1)=c$$

b.

Première méthode

$$b=\frac{1}{2}f(b)=f\left(\frac{b}{2}\right)\in Im(f)\quad\text{et}\quad c=f(c)\in Im(f)$$

Comme b et c ne sont pas proportionnels ils forment une famille libre de $Im(f)$.

D'autre part, d'après le théorème du rang

$$\dim(\ker(f))+\dim\big(Im(f)\big)=\dim(\mathbb{R}^3)$$

Donc $\dim\big(Im(f)\big)=2$, une famille libre à deux éléments dans un espace vectoriel de dimension 2 est une base.

Deuxième méthode

$$Im(f)=Vect\big(f(e_1),f(e_2),f(e_3)\big)$$

D'après le théorème du rang

$$\dim(\ker(f))+\dim\big(Im(f)\big)=\dim(\mathbb{R}^3)$$

Donc $\dim\big(Im(f)\big)=2$ par conséquent les trois vecteurs $f(e_1),f(e_2)$ et $f(e_3)$ sont liés

$$f(e_1)=(6,5,1)=6e_1+5e_2+e_3\quad\text{et}\quad f(e_2)=(-4,-3,-1)=-4e_1-3e_2-e_3$$

Ne sont pas proportionnels donc ils forment une famille libre de $Im(f)$, qui est de dimension 2, il s'agit d'une base de $Im(f)$.

Il reste à montrer que $b\in Vect\big(f(e_1),f(e_2)\big)$ et que $c\in Vect\big(f(e_1),f(e_2)\big)$

On cherche α et β tels que

$$b=\alpha f(e_1)+\beta f(e_2)$$

Cette égalité équivaut à

$$\alpha(6,5,1)+\beta(-4,-3,-1)=(1,1,0)\Leftrightarrow\begin{cases}6\alpha-4\beta=1\\5\alpha-3\beta=1\\\alpha-\beta=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}6\beta-4\beta=1\\5\beta-3\beta=1\\\alpha=\beta\end{cases}\Leftrightarrow\alpha=\beta=\frac{1}{2}$$

On cherche α et β tels que

$$c=\alpha f(e_1)+\beta f(e_2)$$

Cette égalité équivaut à

$$\alpha(6,5,1)+\beta(-4,-3,-1)=(0,1,-1)\Leftrightarrow\begin{cases}6\alpha-4\beta=0\\5\alpha-3\beta=1\\\alpha-\beta=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}6(\beta-1)-4\beta=0\\5(\beta-1)-3\beta=1\\\alpha=\beta-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2\beta=6\\2\beta=6\\\alpha=\beta-1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=\dfrac{1}{3}\\\beta=\dfrac{-2}{3}\end{cases}$$

Comme b et c ne sont pas proportionnels ils forment une famille libre de $Im(f)$, donc une base puisque la dimension de $\dim\big(Im(f)\big)=2$

Troisième méthode (variante de la deuxième méthode)

D'après le théorème du rang

$$\dim(\ker(f))+\dim\big(Im(f)\big)=\dim(\mathbb{R}^3)$$

Donc $\dim\big(Im(f)\big)=2$, par conséquent les trois vecteurs $f(e_1),f(e_2)$ et $f(e_3)$ sont liés

$$f(e_1)=(6,5,1)=6e_1+5e_2+e_3\quad\text{ et }\quad f(e_2)=(-4,-3,-1)=-4e_1-3e_2-e_3$$

Ne sont pas proportionnels donc ils forment une famille libre de $Im(f)$, qui est de dimension 2, il s'agit d'une base de $Im(f)$.

On va chercher une ou plusieurs équations caractérisant $Im(f)$

$$u=(x,y,z)\in Vect\big(f(e_1),f(e_2)\big)\Leftrightarrow\exists\alpha,\beta\in\mathbb{R},u=\alpha f(e_1)+\beta f(e_2)\Leftrightarrow\exists\alpha,\beta\in\mathbb{R},\alpha(6,5,1)+\beta(-4,-3,-1)=(x,y,z)\Leftrightarrow\exists\alpha,\beta\in\mathbb{R},\begin{matrix}L_1\\L_2\\L_3\end{matrix}\begin{cases}6\alpha-4\beta=x\\5\alpha-3\beta=y\\\alpha-\beta=z\end{cases}\Leftrightarrow\exists\alpha,\beta\in\mathbb{R},\begin{matrix}L_1\\6L_2-5L_1\\6L_3-L_1\end{matrix}\begin{cases}6\alpha-4\beta=x\\2\beta=6y-5x\\-2\beta=6z-x\end{cases}\Leftrightarrow\exists\alpha,\beta\in\mathbb{R},\begin{matrix}L_1\\L_2\\L_3+L_2\end{matrix}\begin{cases}6\alpha-4\beta=x\\2\beta=6y-5x\\0=-6x+6y+6z\end{cases}$$

Donc une équation caractérisant $Im(f)$ est $x-y-z=0$

Alors évidemment $b\in Im(f)$ et $c\in Im(f)$ car leurs composantes vérifient cette équation et on finit comme dans la seconde méthode.

3. $u=(x,y,z)\in Vect\big(f(e_1),f(e_2)\big)\Leftrightarrow\exists\alpha,\beta\in\mathbb{R},u=\alpha f(e_1)+\beta f(e_2)\Leftrightarrow\exists\alpha,\beta\in\mathbb{R},\alpha(6,5,1)+\beta(-4,-3,-1)=(x,y,z)\Leftrightarrow\exists\alpha,\beta\in\mathbb{R},\begin{matrix}L_1\\L_2\\L_3\end{matrix}\begin{cases}6\alpha-4\beta=x\\5\alpha-3\beta=y\\\alpha-\beta=z\end{cases}\Leftrightarrow\exists\alpha,\beta\in\mathbb{R},\begin{matrix}L_1\\6L_2-5L_1\\6L_3-L_1\end{matrix}\begin{cases}6\alpha-4\beta=x\\2\beta=6y-5x\\-2\beta=6z-x\end{cases}\Leftrightarrow\exists\alpha,\beta\in\mathbb{R},\begin{matrix}L_1\\L_2\\L_3+L_2\end{matrix}\begin{cases}6\alpha-4\beta=x\\2\beta=6y-5x\\0=-6x+6y+6z\end{cases}$ Donc une équation caractérisant $Im(f)$ est $x-y-z=0$
4. $2-2-1=-1$ donc $a\notin Im(f)=Vect(b,c)$, $\{b,c\}$ est libre donc $\{a,b,c\}$ est libre et à 3 vecteurs par conséquent c'est une base de $\mathbb{R}^3$ donc $\ker(f)\oplus Im(f)=\mathbb{R}^3$.

Allez à : Exercice 7

Correction exercice 8.

1.

$$\begin{aligned}u(x)&=u(x_1e_1+x_2e_2+x_3e_3+x_4e_4)=x_1u(e_1)+x_2u(e_2)+x_3u(e_3)+x_4u(e_4)\\&=x_1(f_1-f_2+2f_3)+x_2(2f_1+f_2-3f_3)+x_3(3f_1-f_3)+x_4(-f_1-2f_2+5f_3)\\&=(x_1+2x_2+3x_3-x_4)f_1+(-x_1+x_2-2x_4)f_2+(2x_1-3x_2-x_3+5x_4)f_3\end{aligned}$$

2.

$$x=(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\ker(u)\Leftrightarrow \begin{matrix}L_1\\L_2\\L_3\end{matrix}\left\{\begin{array}{l}x_1+2x_2+3x_3-x_4=0\\-x_1+x_2\qquad\quad-2x_4=0\\2x_1-3x_2-x_3+5x_4=0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \begin{matrix}L_1\\L_2+L_1\\L_3-2L_1\end{matrix}\left\{\begin{array}{l}x_1+2x_2+3x_3-x_4=0\\3x_2+3x_3-3x_4=0\\-7x_2-7x_3+7x_4=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x_1+2x_2+3x_3-x_4=0\\x_2+x_3-x_4=0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x_1+2(-x_3+x_4)+3x_3-x_4=0\\x_2=-x_3+x_4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x_1=-x_3-x_4\\x_2=-x_3+x_4\end{array}\right.$$

Donc

$$x=(-x_3-x_4,-x_3+x_4,x_3,x_4)=x_3(-1,-1,1,0)+x_4(-1,1,0,1)$$

Si on pose $a=(-1,-1,1,0)$ et $b=(-1,1,0,1)$, ces deux vecteurs n'étant pas colinéaires, et comme il engendre $\ker(u)$ ils forment une base de $\ker(u)$, et $\dim(ker(u))=2$

3. D'après le théorème du rang

$$\dim(\ker(u))+\dim\big(Im(u)\big)=\dim(\mathbb{R}^4)$$

Donc $\dim\big(Im(u)\big)=2$, $u(e_1)$ et $u(e_2)$ ne sont pas colinéaires, ils forment donc une libre libre à deux vecteurs dans un espace vectoriel de dimension 2, c'est une base.

Allez à : Exercice 8

Correction exercice 9.

1.

$$x=(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\ker(u)\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}x_1-x_2+x_3=0\\0=0\\x_1+x_2-x_3+x_4=0\\x_4=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x_1-x_2+x_3=0\\x_1+x_2-x_3=0\\x_4=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x_1=0\\x_2=x_3\\x_4=0\end{array}\right.$$

Donc $x=(0,x_3,x_3,0)=x_3(0,1,1,0)$, si on pose $a=e_2+e_3$ alors $\ker(u)=vect(a)$ et donc la dimension de $\ker(u)$ est 1.

2.

$$u(e_1)=(1,0,1,0)=e_1+e_3;\ u(e_2)=(-1,0,1,0)=-e_1+e_3;$$
$$u(e_3)=(1,0,-1,0)=e_1-e_3;\ u(e_4)=(0,0,0,1,1)=e_3+e_4$$
$$Im(u)=Vect(e_1+e_3,-e_1+e_3,e_1-e_3,e_3+e_4)=Vect(e_1+e_3,e_1-e_3,e_3+e_4)$$

Car $u(e_2)=-u(e_3)$

$$\begin{aligned}Im(u)&=Vect(e_1+e_3,e_1-e_3+e_1+e_3,e_3+e_4)=Vect(e_1+e_3,2e_1,e_3+e_4)\\&=Vect(e_3,e_1,e_3+e_4)=Vect(e_3,e_1,e_4)\end{aligned}$$

Cette famille est une sous-famille d'une famille libre, elle est libre (et génératrice) donc c'est une base de $Im(u)$

Autre méthode, d'après le théorème de rang

$$\dim(\ker(u)+\dim\big(Im(u)\big)=\dim(\mathbb{R}^4)\Rightarrow\dim\big(Im(u)\big)=3$$

Par conséquent $(e_1+e_3,e_1-e_3,e_3+e_4)$ est une famille génératrice à trois vecteurs dans un espace de dimension trois, c'est une base et donc $\dim\big(Im(u)\big)=3$.

3. Comme $\dim(\ker(u)+\dim\big(Im(u)\big)=\dim(\mathbb{R}^4)$

Le tout est de savoir si $a=e_2+e_3$ appartient à $Im(u)$, si c'est le cas $\ker(u)\subset Im(u)$ et il n'y a pas de somme directe et sinon $\ker(u)\cap Im(u)=\{0_{\mathbb{R}^4}\}$ et il y a somme directe.

Soit on montre que $(e_2+e_3,e_1+e_3,e_1-e_3,e_3+e_4)$ est libre et donc une base de $\mathbb{R}^4$ puisqu'il s'agit d'une famille libre à 4 vecteurs dans un espace de dimension 4 et on a

$$\ker(u)\oplus Im(u)=\mathbb{R}^4$$

Soit
$$\ker(u) + Im(u) = vect(e_1, e_3, e_4, e_2 + e_3) = Vect(e_1, e_2, e_3, e_4) = \mathbb{R}^4$$
Ce qui montre que $\ker(u) \oplus Im(u) = \mathbb{R}^4$.

4. $0 + 0 - 0 + 0 = 0$ donc $0_{\mathbb{R}^4} \in E$.
Soient $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in E$ et $y = (y_1, y_2, y_3, y_4) \in E$, on a
$$x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \quad \text{et} \quad y_1 + y_2 - y_3 + y_4 = 0$$
Pour tout et μ réels
$$\lambda x + \mu y = (\lambda x_1 + \mu y_1, \lambda x_2 + \mu y_2, \lambda x_3 + \mu y_3, \lambda x_4 + \mu y_4)$$
$$(\lambda x_1 + \mu y_1) + (\lambda x_2 + \mu y_2) - (\lambda x_3 + \mu y_3) + (\lambda x_4 + \mu y_4)$$
$$= \lambda(x_1 + x_2 - x_3 + x_4) + \mu(y_1 + y_2 - y_3 + y_4) = 0$$
Ce qui montre que $\lambda x + \mu y \in E$ donc E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.
$x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in E$, on a $x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0$ donc $x_1 = -x_2 + x_3 - x_4$
$$x = (-x_2 + x_3 - x_4, x_2, x_3, x_4) = x_2(-1,1,0,0) + x_3(1,0,1,0) + x_4(-10,0,1)$$
On pose $b = (-1,1,0,0)$, $c = (1,0,1,0)$ et $d = (-10,0,1)$, la famille (a, b, c) engendre E
$$\alpha b + \beta c + \gamma d = 0_{\mathbb{R}^4} \Leftrightarrow \alpha(-1,1,0,0) + \beta(1,0,1,0) + \gamma(-10,0,1) = 0_{\mathbb{R}^4} \Leftrightarrow \begin{cases} -\alpha + \beta - \gamma = 0 \\ \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}$$
Ce que signifie que (b, c, d) est une famille libre. Par conséquent (b, c, d) est une base de E.

5. $\ker(u) = Vect(a)$ avec $a = e_2 + e_3 = (0,1,1,0)$ donc $0 + 1 - 1 + 0 = 0$ ce qui montre que $a \in E$, autrement dit $\ker(u) \subset E$, on n'a pas : $\ker(u) \oplus Im(u) = \mathbb{R}^4$

Allez à : Exercice 9

Correction exercice 10.

1.
$$x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \ker(u) \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{matrix} \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 0 \\ -x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 - L_1 \\ L_3 + L_1 \\ L_4 + L_1 \end{matrix} \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ 3x_2 - 3x_3 = 0 \\ 0 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 - 2x_3 - 2x_4 \\ x_2 = x_3 \\ x_4 = -x_3 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 - 2x_3 + 2x_3 \\ x_2 = x_3 \\ x_4 = -x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = x_3 \\ x_4 = -x_3 \end{cases}$$
$$x = (x_3, x_3, x_3, -x_3) = x_3(1,1,1,-1)$$
$\ker(u)$ est la droite engendrée par $e_1 + e_2 + e_3 - e_4$

2.
$$Im(u) = Vect\big(u(e_1), u(e_2), u(e_3), u(e_4)\big)$$
$$u(e_1) = (1,1,-1,-1)$$
$$u(e_2) = (-1,2,1,1)$$
$$u(e_3) = (2,-1,-2,-1)$$
$$u(e_4) = (2,2,-2,-1)$$
D'après le théorème du rang
$$\dim(\ker(u)) + \dim\big(Im(u)\big) = \dim(\mathbb{R}^4)$$
Ce qui entraine que

$$\dim(Im(u)) = 3$$

Première méthode

On regarde si la famille $(u(e_1), u(e_2), u(e_3), u(e_4))$ est libre

$$\alpha u(e_1) + \beta u(e_2) + \gamma u(e_3) + \delta u(e_4) = 0_{\mathbb{R}^4} \Leftrightarrow \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \begin{cases} \alpha - \beta + 2\gamma + 2\delta = 0 \\ \alpha + 2\beta - \gamma + 2\delta = 0 \\ -\alpha + \beta - 2\gamma - 2\delta = 0 \\ -\alpha + \beta - \gamma - \delta = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 - L_1 \\ L_3 + L_1 \\ L_4 + L_1 \end{array} \begin{cases} \alpha - \beta + 2\gamma + 2\delta = 0 \\ 3\beta - 3\gamma = 0 \\ 0 = 0 \\ \gamma + \delta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha - \beta + 2\gamma + 2\delta = 0 \\ \beta = \gamma \\ \delta = -\gamma \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \gamma \\ \beta = \gamma \\ \delta = -\gamma \end{cases}$$

La famille n'est pas libre, pour $\gamma = 1$, cela donne la relation

$$u(e_1) + u(e_2) + u(e_3) - u(e_4) = 0_{\mathbb{R}^4}$$

Soit

$$u(e_1) + u(e_2) + u(e_3) = u(e_4)$$

Alors

$$\begin{aligned} Im(u) &= vect(u(e_1), u(e_2), u(e_3), u(e_4)) = Vect(u(e_1), u(e_2), u(e_3), u(e_1) + u(e_2) + u(e_3)) \\ &= Vect(u(e_1), u(e_2), u(e_3)) \end{aligned}$$

Comme $(u(e_1), u(e_2), u(e_3))$ est une famille génératrice à trois vecteurs dans un espace de dimension 3, c'est une base.

Deuxième méthode

$$e_1 + e_2 + e_3 - e_4 \in \ker(u)$$

Par conséquent

$$u(e_1 + e_2 + e_3 - e_4) = 0_{\mathbb{R}^4}$$

Ce qui entraine que

$$u(e_1) + u(e_2) + u(e_3) - u(e_4) = 0_{\mathbb{R}^4}$$

Et on conclut de la même façon.

3.

$$\begin{aligned} x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in Im(u) = Vect(u(e_1), u(e_2), u(e_3)) &\Leftrightarrow \exists(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3, x \\ &= \alpha u(e_1) + \beta u(e_2) + \gamma u(e_3) \Leftrightarrow \exists(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3, (x_1, x_2, x_3, x_4) \\ &= \alpha(1,1,-1,-1) + \beta(-1,2,2,1,1) + \gamma(2,-1,-2,-1) \Leftrightarrow \exists(\alpha, \beta, \gamma) \\ &\in \mathbb{R}^3, \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \begin{cases} \alpha - \beta + 2\gamma = x_1 \\ \alpha + 2\beta - \gamma = x_2 \\ -\alpha + \beta - 2\gamma = x_3 \\ -\alpha + \beta - \gamma = x_4 \end{cases} \Leftrightarrow \exists(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3 \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 - L_1 \\ L_3 + L_1 \\ L_4 + L_1 \end{array} \begin{cases} \alpha - \beta + 2\gamma + 2\delta = x_1 \\ 3\beta - 3\gamma = -x_1 + x_2 \\ 0 = x_1 + x_3 \\ \gamma + \delta = x_1 + x_4 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \exists(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3 \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 - L_1 \\ L_3 + L_1 \\ L_4 + L_1 \end{array} \begin{cases} \alpha - \beta + 2\gamma + 2\delta = x_1 \\ 3\beta - 3\gamma = -x_1 + x_2 \\ \gamma + \delta = x_1 + x_4 \\ 0 = x_1 + x_3 \end{cases} \end{aligned}$$

Ce qui montre que $Im(u) = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4, x_1 + x_3 = 0\}$

Allez à : Exercice 10

Correction exercice 11.

1. La matrice de $f \circ f$ dans la base β est $Mat_\beta(f) \times Mat_\beta(f)$

   Or $Mat_\beta(f) = \begin{pmatrix} -7 & 8 & 6 \\ -6 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ donc $Mat_\beta(f^2) = \begin{pmatrix} -7 & 8 & 6 \\ -6 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -7 & 8 & 6 \\ -6 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$
2. Il existe g telle que $g \circ f = Id$ donc f est bijective et $f^{-1} = f$.

Allez à : Exercice 11

Correction exercice 12.

1. Soit $u=(x,y,z,t)$, $u'=(x',y',z',t')$ deux vecteurs et λ et λ' deux réels.

$$\begin{aligned}f(\lambda u+\lambda' u)&=f(\lambda x+\lambda' x',\lambda y+\lambda' y',\lambda z+\lambda' z',\lambda t+\lambda' t')\\&=\big(\lambda x+\lambda' x'-2(\lambda y+\lambda' y'),\lambda x+\lambda' x'-2(\lambda y+\lambda' y'),0,\lambda x+\lambda' x'-(\lambda y+\lambda' y')\\&-(\lambda z+\lambda' z')-(\lambda t+\lambda' t')\big)\\&=\big(\lambda(x-2y)+\lambda'(x'-2y'),\lambda(x-2y)+\lambda'(x'-2y'),0,\lambda(x-y-z-t)\\&+\lambda'(x'-y'-z'-t')\big)\\&=\lambda(x-2y,x-2y,0,x-y-z-t)+\lambda'(x'-2y',x'-2y',0,x'-y'-z'-t')\\&=\lambda f(u)+\lambda f(u')\end{aligned}$$

f est bien linéaire.

2. Soit $u=(x,y,z,t)\in\ker(u)$

$$\begin{cases}x-2y=0\\x-2y=0\\0=0\\x-y-z-t=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-2y=0\\x-y-z-t=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2y\\y-z-t=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2y\\t=y-z\end{cases}$$

Donc

$$u=(2y,y,z,y-z)=y(2,1,0,1)+z(0,0,1,-1)$$

$a=(2,1,0,1)$ et $b=(0,0,1,-1)$ sont deux vecteurs non colinéaires (qui forment donc une famille libre) qui engendre $\ker(f)$ ils forment une base de $\ker(f)$.

D'après le théorème du rang

$$\dim(\ker(f))+\dim\big(Im(f)\big)=\dim(\mathbb{R}^4)\Leftrightarrow\dim\big(Im(f)\big)=2$$

Si on appelle (e_1,e_2,e_3,e_4) la base canonique de $\mathbb{R}^4$, $f(e_1)=(1,1,0,1)$ et $f(e_3)=(0,0,0,-1)$ sont deux vecteurs non proportionnels de $Im(f)$, ils forment donc une famille libre à deux éléments dans un espace de dimension 2, c'est une base de $Im(f)$.

3. On a $\ker(f)\oplus Im(f)=\mathbb{R}^4$ si et seulement si $\big(a,b,f(e_1),f(e_3)\big)$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

$$\det\big(a,b,f(e_1),f(e_3)\big)=\begin{vmatrix}2&0&1&0\\1&0&1&0\\0&1&0&0\\1&-1&1&-1\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}2&0&1\\1&0&1\\0&1&0\end{vmatrix}=+1\times\begin{vmatrix}2&1\\1&1\end{vmatrix}=1$$

$\big(a,b,f(e_1),f(e_3)\big)$ est une base de $\mathbb{R}^4$ donc $\ker(f)\oplus Im(f)=\mathbb{R}^4$.

Allez à : Exercice 12

Correction exercice 13.

1. Soient $u=(x,y,z,t)$ et $u'=(x',y',z',t')$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^4$. Soient λ et λ' deux réels.

$$\lambda u+\lambda' u'=\lambda(x,y,z,t)+\lambda'(x',y',z',t')=(\lambda x+\lambda' x',\lambda y+\lambda' y',\lambda z+\lambda' z',\lambda t+\lambda' t')$$

$$\begin{aligned}f(\lambda u+\lambda' u')&=f(\lambda x+\lambda' x',\lambda y+\lambda' y',\lambda z+\lambda' z',\lambda t+\lambda' t')\\&=\big((\lambda x+\lambda' x')+(\lambda y+\lambda' y'),(\lambda z+\lambda' z')+(\lambda t+\lambda' t'),(\lambda x+\lambda' x')+(\lambda y+\lambda' y')\\&+(\lambda z+\lambda' z')+(\lambda t+\lambda' t')\big)\\&=\big(\lambda(x+y)+\lambda'(x'+y'),\lambda(z+t)+\lambda'(z'+t'),\lambda(x+y+z+t)\\&+\lambda'(x'+y'+z'+t')\big)\\&=\lambda(x+y,z+t,x+y+z+t)+\lambda'(x'+y',z'+t',x'+y'+z'+t')\\&=\lambda f(u)+\lambda f(u')\end{aligned}$$

f est linéaire.

2.

$$u \in \ker(f) \Leftrightarrow f(u) = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow (x+y, z+t, x+y+z+t) = (0,0,0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ z+t=0 \\ x+y+z+t=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=-x \\ t=-z \end{cases} \Leftrightarrow u = (x,-x,z,-z) = x(1,-1,0,0) + z(0,0,1,-1)$$

On pose $a = (1,-1,0,0)$ et $b = (0,0,1,-1)$, a et b engendrent $\ker(f)$, d'autre part ces vecteurs ne sont pas proportionnels, ils forment donc une famille libre, finalement (a,b) est une base de $\ker(f)$.

3.

Première méthode

$$Im(f) = Vect\big(f(e_1), f(e_2), f(e_3), f(e_4)\big)$$

$$f(e_1) = (1,0,1); f(e_2) = (1,0,1); f(e_3) = (0,1,1); f(e_4) = (0,1,1)$$

Comme $f(e_1) = f(e_2)$ et $f(e_3) = f(e_4)$

$$Im(f) = Vect\big(f(e_1), f(e_3)\big)$$

$f(e_1)$ et $f(e_3)$ ne sont pas proportionnels, ils forment une famille libre, comme cette famille est génératrice de $Im(f)$, c'est une base de $Im(f)$.

Deuxième méthode

D'après le théorème du rang

$$\dim(\ker(f)) + \dim\big(Im(f)\big) = \dim(\mathbb{R}^4) \Leftrightarrow 2 + \dim\big(Im(f)\big) = 4 \Leftrightarrow \dim\big(Im(f)\big) = 2$$

Ensuite on cherche deux vecteurs non proportionnels de $Im(f)$, par exemple $f(e_1)$ et $f(e_3)$, ils forment une famille libre dans un espace de dimension 2, c'est une base.

Allez à : Exercice 13

Correction exercice 14.

1. Soient $x = (x_1, x_2, x_3)$ et $y = (y_1, y_2, y_3)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Soient λ et μ deux réels.

$$\lambda x + \mu y = (\lambda x_1 + \mu y_1, \lambda x_2 + \mu y_2, \lambda x_3 + \mu y_3)$$

$$\begin{aligned} u(\lambda x + \mu y) = \big(&-2(\lambda x_1 + \mu y_1) + 4(\lambda x_2 + \mu y_2) + 4(\lambda x_3 + \mu y_3), -(\lambda x_1 + \mu y_1) + \lambda x_3 \\ &+ \mu y_3, -2(\lambda x_1 + \mu y_1) + 4(\lambda x_2 + \mu y_2) + 4(\lambda x_3 + \mu y_3)\big) \\ = \big(&\lambda[-2x_1 + 4x_2 + 4x_3] + \mu[-2y_1 + 4y_2 + y_3], \lambda[-x_1 + x_3] \\ &+ \mu[-y_1 + y_3], \lambda[-2x_1 + 4x_2 + 4x_3] + \mu[-2y_1 + 4y_2 + y_3]\big) \\ = \ &\lambda(-2x_1 + 4x_2 + 4x_3, -x_1 + x_3, -2x_1 + 4x_2 + 4x_3) \\ &+ \mu(-2y_1 + 4y_2 + 4y_3, -y_1 + y_3, -2y_1 + 4y_2 + 4y_3) = \lambda u(x) + \mu u(y) \end{aligned}$$

Donc u est linéaire.

2. Soit $x = (x_1, x_2, x_3) \in \ker(u)$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ ses coordonnées dans la base canonique.

$$x \in \ker(u) \Leftrightarrow \begin{cases} -2x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 0 \\ -x_1 + x_3 = 0 \\ -2x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 = x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 = x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = -\frac{1}{2}x_3 \\ x_1 = x_3 \end{cases}$$

$$x = \left(x_3, -\frac{1}{2}x_3, x_3\right) = \frac{x_3}{2}(2,-1,2)$$

$a = (2,-1,2) = 2e_1 - e_2 + 2e_3$ est un vecteur non nul qui engendre $\ker(u)$, c'est une base de $\ker(u)$.

$$Im(u) = Vect\big(u(e_1), u(e_2), u(e_3)\big)$$

D'après le théorème du rang,

$$\dim(\ker(u)) + \dim\big(Im(u)\big) = \dim(\mathbb{R}^3) \Leftrightarrow 1 + \dim\big(Im(u)\big) = 3 \Leftrightarrow \dim\big(Im(u)\big) = 2$$

$u(e_1) = -2e_1 - e_2 - 2e_3 = (-2,-1,-2)$ et $u(e_2) = 4e_1 + 4e_3 = (4,0,4)$, ces deux vecteurs ne sont pas proportionnels, ils forment une famille libre de $Im(u)$ qui est de dimension 2, $\big(u(e_1), u(e_2)\big)$ est une base de $Im(u)$.

3. $\ker(u) \oplus Im(u) = \mathbb{R}^3 \Leftrightarrow \big(a, u(e_1), u(e_2)\big)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Il est presque évident que

$$u(e_1)+u(e_3)=a$$

Sinon on calcule $\alpha a+\beta u(e_1)+\gamma u(e_3)=0_{\mathbb{R}^3}$ et on s'aperçoit que $\alpha=1$, $\beta=-1$ et $\gamma=-1$ est une solution non nulle.

$\big(a,u(e_1),u(e_2)\big)$ n'est pas une base, donc on n'a pas $\ker(u)\oplus Im(u)=\mathbb{R}^3$

Allez à : Exercice 14

Correction exercice 15.

1.

$$\begin{aligned}u(x)=u(x_1e_1+x_2e_2+x_3e_3)&=x_1u(e_1)+x_2u(e_2)+x_3u(e_3)\\&=x_1(2e_1+e_2+3e_3)+x_2(e_2-3e_3)+x_3(-2e_2+2e_3)\\&=2x_1e_1+(x_1+x_2-2x_3)e_2+(3x_1-3x_2+2x_3)e_3\\&=(2x_1,x_1+x_2-2x_3,3x_1-3x_2+2x_3)\end{aligned}$$

2. $f(0_{\mathbb{R}^3})=0_{\mathbb{R}^3}=2\times 0_{\mathbb{R}^3}\Rightarrow 0_{\mathbb{R}^3}\in E$

Soient x et y deux vecteurs de E, alors $u(x)=2x$ et $u(y)=2y$

Soient λ et μ deux réels

$$u(\lambda x+\mu y)=\lambda u(x)+\mu u(y)=\lambda(2x)+\mu(2y)=2(\lambda x+\mu y)$$

Donc $\lambda x+\mu y\in E$ et E est un sous-espace-vectoriel de $\mathbb{R}^3$

$f(0_{\mathbb{R}^3})=0_{\mathbb{R}^3}=-0_{\mathbb{R}^3}\Rightarrow 0_{\mathbb{R}^3}\in F$

Soient x et y deux vecteurs de F, alors $u(x)=-x$ et $u(y)=-y$

Soient λ et μ deux réels

$$u(\lambda x+\mu y)=\lambda u(x)+\mu u(y)=\lambda(-x)+\mu(-y)=-(\lambda x+\mu y)$$

Donc $\lambda x+\mu y\in F$ et F est un sous-espace-vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

3.

$$x\in E\Leftrightarrow u(x)=2x\Leftrightarrow (2x_1,x_1+x_2-2x_3,3x_1-3x_2+2x_3)=2(x_1,x_2,x_3)$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2x_1=2x_1\\x_1+x_2-2x_3=2x_2\\3x_1-3x_2+2x_3=2x_3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1+x_2-4x_3=0\\3x_1-3x_2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=x_2\\x_3=0\end{cases}$$

Donc $x=(x_1,x_1,x_3)=x_1(1,1,0)=x_1(e_1+e_2)$

$e_1+e_2\neq 0_{\mathbb{R}^3}$, il s'agit d'une base de E.

$$x\in F\Leftrightarrow u(x)=-x\Leftrightarrow (2x_1,3x_1-x_2,3x_1-3x_2+2x_3)=-(x_1,x_2,x_3)$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2x_1=-x_1\\x_1+x_2-2x_3=-x_2\\3x_1-3x_2+2x_3=-x_3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x_1=0\\x_1+2x_2-2x_3=0\\3x_1-3x_2+3x_3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=0\\x_2=x_3\end{cases}$$

Donc $x=(0,x_3,x_3)=x_3(0,1,1)=x_3(e_2+e_3)$

$e_2+e_3\neq 0_{\mathbb{R}^3}$, il s'agit d'une base de F.

4.

$$\dim(E)+\dim(F)=1+1=2$$

Donc il n'y a pas somme directe.

Allez à : Exercice 15

Correction exercice 16.

1. Soient u,u' deux vecteurs de E_{-1}, alors $f(u)=-u$ et $f(u')=-u'$. Soient λ,λ' deux réels.

$$f(\lambda u+\lambda' u')=\lambda f(u)+\lambda' f(u')=\lambda(-u)+\lambda(-u')=-(\lambda u+\lambda' u')$$

La première égalité car f est linéaire, la seconde car u et u' sont dans E_{-1},

La troisième montre que $\lambda u+\lambda' u'\in E_{-1}$

$$f(0_{\mathbb{R}^3})=0_{\mathbb{R}^3}=-0_{\mathbb{R}^3}$$

La première égalité car l'image du vecteur nul par une application linéaire est toujours le vecteur nul, la seconde égalité montre que $0_{\mathbb{R}^3}\in E_{-1}$.

E_{-1} est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Soient u, u' deux vecteurs de E_1, alors $f(u) = u$ et $f(u') = u'$. Soient λ, λ' deux réels.

$$f(\lambda u + \lambda' u') = \lambda f(u) + \lambda' f(u') = \lambda u + \lambda u'$$

La première égalité car f est linéaire, la seconde car u et u' sont dans E_1,

La seconde montre que $\lambda u + \lambda' u' \in E_1$

$$f(0_{\mathbb{R}^3}) = 0_{\mathbb{R}^3}$$

La première égalité car l'image du vecteur nul par une application linéaire est toujours le vecteur nul, cela montre aussi que $0_{\mathbb{R}^3} \in E_1$.

E_1 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

2.

$$f(e_1 - e_2) = f(e_1) - f(e_2) = -\frac{1}{3}e_1 + \frac{2}{3}e_2 + \frac{2}{3}e_3 - \left(\frac{2}{3}e_1 - \frac{1}{3}e_2 + \frac{2}{3}e_3\right) = -e_1 + e_2 = -(e_1 - e_2)$$

Donc $e_1 - e_2 \in E_{-1}$

$$f(e_1 - e_3) = f(e_1) - f(e_3) = -\frac{1}{3}e_1 + \frac{2}{3}e_2 + \frac{2}{3}e_3 - \left(\frac{2}{3}e_1 + \frac{2}{3}e_2 - \frac{1}{3}e_3\right) = -e_1 + e_3 = -(e_1 - e_3)$$

Donc $e_1 - e_3 \in E_{-1}$

$$\begin{aligned} f(e_1 + e_2 + e_3) &= f(e_1) + f(e_2) + f(e_3) \\ &= -\frac{1}{3}e_1 + \frac{2}{3}e_2 + \frac{2}{3}e_3 + \frac{2}{3}e_1 - \frac{1}{3}e_2 + \frac{2}{3}e_3 + \frac{2}{3}e_1 + \frac{2}{3}e_2 - \frac{1}{3}e_3 = e_1 + e_2 + e_3 \end{aligned}$$

Donc $e_1 + e_2 + e_3 \in E_1$

3. Les vecteurs $e_1 - e_2$ et $e_1 - e_3$ ne sont pas proportionnels, ils forment une famille de E_{-1}, donc la dimension de E_1 est supérieur ou égal à 2.
   E_1 a un vecteur non nul, donc sa dimension est supérieur ou égal à 1.
4. Soit $u \in E_{-1} \cap E_1$, $f(u) = -u$ et $f(u) = u$ donc $-u = u$, ce qui signifie que le seul vecteur de $E_{-1} \cap E_1$ est le vecteur nul.
$$E_{-1} \cap E_1 = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$$
5.
$$\dim(E_{-1} + E_1) = \dim(E_{-1}) + \dim(E_1) - \dim(E_{-1} \cap E_1) = \dim(E_{-1}) + \dim(E_1) \geq 2 + 1 = 3$$
   Comme
$$E_{-1} + E_1 \subset \mathbb{R}^3$$
   On a
$$\dim(E_{-1} + E_1) \leq 3$$
   Finalement
$$\dim(E_{-1} + E_1) = 3$$
   Remarque : cela entraine que $\dim(E_{-1}) = 2$ et $\dim(E_1) = 1$
   L'intersection de ces sous-espaces vectoriels étant réduit au vecteur nul on a
$$E_{-1} \oplus E_1 = \mathbb{R}^3$$
6. On peut calculer $f^2(e_1)$, $f^2(e_2)$ et $f^2(e_3)$ pour s'apercevoir que ces vecteurs valent respectivement e_1, e_2 et e_3. Mais c'est long.

Autre méthode

D'après la question précédente $(e_1 - e_2, e_1 - e_3, e_1 + e_2 + e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

(Une base de E_{-1} collée à une base de E_1 donne une base de $\mathbb{R}^3$ si et seulement si $E_{-1} \oplus E_1 = \mathbb{R}^3$).

Tous les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ s'écrive de manière unique comme une combinaison linéaire de ces trois vecteurs, il suffit de montrer que $f^2(e_1 - e_2) = e_1 - e_2$, $f^2(e_1 - e_3) = e_1 - e_3$ et que $f^2(e_1 + e_2 + e_3) = e_1 + e_2 + e_3$

Là, j'ai fait long, en fait il suffit de montrer les égalités ci-dessous

$$f^2(e_1 - e_2) = f\big(f(e_1 - e_2)\big) = f\big(-(e_1 - e_2)\big) = -f(e_1 - e_2) = -\big(-(e_1 - e_2)\big) = e_1 - e_2$$

Car $e_1 - e_2 \in E_{-1}$

$$f^2(e_1 - e_3) = f\big(f(e_1 - e_3)\big) = f\big(-(e_1 - e_3)\big) = -f(e_1 - e_3) = -\big(-(e_1 - e_3)\big) = e_1 - e_3$$

Car $e_1 - e_3 \in E_{-1}$

$$f^2(e_1+e_2+e_3)=f\big(f(e_1+e_2+e_3)\big)=f(e_1+e_2+e_3)=e_1+e_2+e_3$$

Car $e_1+e_2+e_3\in E_1$

Par conséquent $f^2=id_{\mathbb{R}^3}$

Cela montre que $f^{-1}=f$ et que f est bijective.

Remarque :

Avec les matrices on retrouve ce résultat plus facilement.

Allez à : Exercice 16

Correction exercice 17.

1.

$$\alpha a+\beta b=\gamma c=0_{\mathbb{R}^3}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{2}{3}\alpha+\frac{2}{3}\beta+\frac{1}{3}\gamma=0\\-\frac{2}{3}\alpha+\frac{1}{3}\beta+\frac{2}{3}\gamma=0\\\frac{1}{3}\alpha-\frac{2}{3}\beta+\frac{2}{3}\gamma=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2\alpha-2\beta+\gamma=0\\-2\alpha+\beta+2\gamma=0\\\alpha-2\beta+2\gamma=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{matrix}L_1\\L_2+L_1\\2L_3-L_1\end{matrix}\begin{cases}2\alpha-2\beta+\gamma=0\\-\beta+3\gamma=0\\\gamma=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=0\\\beta=0\\\gamma=0\end{cases}$$

(a,b,c) est une famille libre à trois vecteurs dans un espace vectoriel de dimension 3, c'est une base de $\mathbb{R}^3$.

2.

$$\begin{aligned}u(x)=u(x_1e_1+x_2e_2+x_3e_3)&=x_1u(e_1)+x_2u(e_2)+x_3u(e_3)\\&=x_1(3e_1+e_2-e_3)+x_2(e_1+7e_2)+x_3(-e_1-e_3)\\&=[3x_1+x_2-x_3]e_1+[x_1+7x_2]e_2+[-x_1-x_3]e_3\\&=(3x_1+x_2-x_3,x_1+7x_2,-x_1-x_3)\end{aligned}$$

3. $a=\frac{1}{3}(2,-2,1)$ donc

$$u(a)=\frac{1}{3}(3\times2-2-1,2+7\times(-2),-2-1)=\frac{1}{3}(3,-12,-3)=(1,-4,-1)$$

$$3a-3c=3\times\frac{1}{3}(2,-2,1)-3\times\frac{1}{3}(1,2,2)=(2,-2,1)-(1,2,2)=(1,-4,-1)$$

On a bien $u(a)=3a-3c$

$b=\frac{1}{3}(2,1,-2)$ donc

$$u(b)=\frac{1}{3}\big(3\times2+1-(-2),2+7,-2-(-2)\big)=\frac{1}{3}(9,9,0)=(3,3,0)$$

$$3b+3c=3\times\frac{1}{3}(2,1,-2)+3\times\frac{1}{3}(1,2,2)=(2,1,-2)+(1,2,2)=(3,3,0)$$

On a bien $u(b)=3b+3c$

$c=\frac{1}{3}(1,2,2)$ donc

$$u(c)=\frac{1}{3}(3+2-2,1+7\times2,-1-2)=\frac{1}{3}(3,15,-3)=(1,5,-1)$$

$$\begin{aligned}-3a+3b+3c&=-3\times\frac{1}{3}(2,-2,1)+3\times\frac{1}{3}(2,1,-2)+3\times\frac{1}{3}(1,2,2)\\&=-(2,-2,1)+(2,1,-2)+(1,2,2)=(1,5,-1)\end{aligned}$$

On a bien $u(c)=-3a+3b+3c$

Allez à : Exercice 17

Correction exercice 18.

1. Soient $u=(x,y,z)$ et $u'=(x',y',z')$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$ et soient λ et λ' deux réels

$$\lambda u+\lambda' u'=(\lambda x+\lambda' x',\lambda y+\lambda' y',\lambda z+\lambda' z')$$

$$\begin{aligned}p(\lambda u+\lambda' u')&=\big(2(\lambda x+\lambda' x')+\lambda y+\lambda' y'+2(\lambda z+\lambda' z'),\lambda y+\lambda' y',-(\lambda x+\lambda' x')-(\lambda y+\lambda' y')\\&\quad-(\lambda z+\lambda' z')\big)\\&=(\lambda(2x+y+2z)+\lambda'(2x'+y'+2z'),\lambda y+\lambda' y',\lambda(-x-y-z)\\&\quad+\lambda'(-x'-y'-z')\\&=\lambda(2x+y+2z,y,-x-y-z)+\lambda'(2x'+y'+2z',y',-x'-y'-z')\\&=\lambda p(u)+\lambda' p(u')\end{aligned}$$

p est une application linéaire.

2.

$$p(e_1)=(2,0,-1)=2e_1-e_3;p(e_2)=(1,1,-1)=e_1+e_2-e_3;p(e_3)=(2,0,-1)=2e_1-e_3$$

$$p^2(e_1)=p\big(p(e_1)\big)=p(2e_1-e_3)=2p(e_1)-p(e_3)=2(2e_1-e_3)-(2e_1-e_3)=2e_1-e_3=p(e_1)$$

$$p^2(e_2)=p\big(p(e_2)\big)=p(e_1+e_2-e_3)=p(e_1)+p(e_2)-p(e_3)=2e_1-e_3+e_1+e_2-e_3-(2e_1-e_3)=e_1+e_2-e_3=p(e_2)$$

$$p^2(e_3)=p\big(p(e_3)\big)=p(2e_1-e_3)=2p(e_1)-p(e_3)=2(2e_1-e_3)-(2e_1-e_3)=2e_1-e_3=p(e_3)$$

Donc pour tout $u\in\mathbb{R}^3$, $p^2(u)=p(u)$ et donc $p^2=p$

3.

$$Im(p)=vect\big(p(e_1),p(e_2),p(e_3)\big)=vect\big(p(e_1),p(e_2)\big)$$

$\big(p(e_1),p(e_2)\big)$ est une famille de vecteurs non colinéaires, elle est donc libre, de plus elle engendre $Im(p)$, c'est une base de $Im(p)$.

$$u=(x,y,z)\in\ker(p-Id)\Leftrightarrow(p-Id)(u)=0_{\mathbb{R}^3}\Leftrightarrow p(u)-u=0_{\mathbb{R}^3}\Leftrightarrow p(u)=u$$

$$\Leftrightarrow(2x+y+2z,y,-x-y-z)=(x,y,z)\Leftrightarrow\begin{cases}2x+y+2z=x\\ y=y\\ -x-y-z=z\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x+y+2z=0\\ y=y\\ -x-y-2z=z\end{cases}\Leftrightarrow x+y+2z=0\Leftrightarrow x=-y-2z$$

$$u=(-y-2z,y,z)=y(-1,1,0)+z(-2,0,1)=y(-e_1-2e_3)+z(-2e_1+e_3)$$

$$\ker(p-Id)=Vect(-e_1-2e_3,-2e_1+e_3)$$

$(-e_1-2e_3,-2e_1+e_3)$ est une famille de vecteurs non colinéaires, elle est donc libre, de plus elle engendre $Im(p)$, c'est une base de $\ker(p-Id)$

Les composantes de $\big(p(e_1),p(e_2)\big)$ vérifient $x+y+2z=0$ donc $Im(p)\subset\ker(p-Id)$ et comme ces deux sous-espaces vectoriels sont de dimension 2 ils sont égaux.

4. D'après le théorème du rang

$$\dim(\ker(p))+\dim\big(Im(p)\big)=\dim(\mathbb{R}^3)=3$$

Si $u\in\ker(p)\cap Im(p)=\ker(p)\cap\ker(p-Id)$ alors $p(u)=0_{\mathbb{R}^3}$ et $p(u)=u$ donc $u=0_{\mathbb{R}^3}$, ce qui montre que $\ker(p)\cap Im(p)=\{0_{\mathbb{R}^3}\}$ et par conséquent

$$\ker(p)\oplus Im(p)=\mathbb{R}^3$$

Allez à : Exercice 18

Correction exercice 19.

1. Soit $x_1\in E_1$, $(f-id)(x_1)=0_E\Leftrightarrow f(x_1)-x_1=0_E\Leftrightarrow f(x_1)=x_1$

Soit $x_2\in E_2$, $(f+id)(x_2)=0_E\Leftrightarrow f(x_2)+x_2=0_E\Leftrightarrow f(x_2)=-x_2$

2. On pose $x_1=\frac{f(x)+x}{2}$ et $x_2=-\frac{f(x)-x}{2}$

$$f(x_1) = f\left(\frac{f(x)+x}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(f^2(x)+f(x)\right) = \frac{1}{2}\left(x+f(x)\right) = x_1$$

Donc, d'après la première question, $x_1 \in E_1$.

De même

$$f(x_2) = f\left(-\frac{f(x)-x}{2}\right) = -\frac{1}{2}\left(f^2(x)-f(x)\right) = -\frac{1}{2}\left(x-f(x)\right) = -x_2$$

Donc, d'après la première question, $x_2 \in E_2$.

Comme $x = x_1 + x_2$, on a $E_1 + E_2 = E$

Il reste à montrer que $E_1 \cap E_2 = \{0_E\}$

Si $x \in E_1 \cap E_2$ alors $f(x) = x$ et $f(x) = -x$ donc $x = -x$ ce qui montre que x est le vecteur nul.

On a $E_1 \oplus E_2 = E$.

3. $f(v_i) = v_i$ pour $1 \le i \le r$ et $f(v_i) = -v_i$ pour $r+1 \le i \le n$

Remarque :

La matrice de f dans cette base est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & & \cdots & & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & \cdots & & 0 \\ & 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & -1 & & \\ & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Allez à : Exercice 19

Correction exercice 20.

1. D'après le théorème du rang

$$\dim(\ker(u)) + \dim\left(Im(u)\right) = \dim(\mathbb{R}^2) \Leftrightarrow \dim(\mathrm{Im}(u)) = 2-1 = 1$$

Par conséquent $u(e_1)$ et $u(e_2)$ sont proportionnels et alors

$$u(e_2) = au(e_1) = ae_1 + ae_2$$

2.

$$u(x) = u(x_1e_1 + x_2e_2) = x_1u(e_1) + x_2u(e_2) = x_1(e_1+e_2) + a(x_1e_1 + x_2e_2)$$
$$= (x_1 + ax_2)e_1 + (x_2 + ax_2)e_2 = (x_1 + ax_2, x_2 + ax_2)$$

3.

$$u(e_2) = au(e_1) \Leftrightarrow u(e_2) - au(e_1) = 0_{\mathbb{R}^2} \Leftrightarrow u(e_2 - ae_1) = 0_{\mathbb{R}^2}$$

$e_2 - ae_1$ est un vecteur non nul de $\ker(u)$ et $\ker(u)$ est une droite, donc il s'agit d'une base de $\ker(u)$.

Allez à : Exercice 20

Correction exercice 21.

1.

$$f(e_1) = 1$$
$$f(e_2) = 1$$
$$f(e_3) = 1$$
$$f(e_4) = 1$$

Donc

$$Im(f) = \{1\} \quad et \quad \dim\left(im(f)\right) = 1$$

2. D'après le théorème du rang

$$\dim(\ker(f)) + \dim\left(Im(f)\right) = \dim(\mathbb{R}^4) \Leftrightarrow \dim(\ker(f)) = 3$$

$$x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \ker(f) \Leftrightarrow x = (-x_2 - x_3 - x_4, x_2, x_3, x_4)$$
$$= x_2(-1,1,0,0) + x_3(-1,0,1,0) + x_4(-1,0,0,1)$$

On pose $a = (-1,1,0,0)$, $b = (-1,0,1,0)$ et $c = (-1,0,0,1)$

(a,b,c) est une famille génératrice de $\ker(f)$ avec trois vecteurs et $\dim(\ker(f)) = 3$ donc (a,b,c) est une base de $\ker(f)$.

Allez à : Exercice 21

Correction exercice 22.

1. Soit $x, x' \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ et $x' = (x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$ et $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R}$
$$u(\lambda x + \lambda' x') = (\lambda x_1 + \lambda' x'_1) + (\lambda x_2 + \lambda' x'_2) + \dots + (\lambda x_n + \lambda' x'_n)$$
$$= \lambda(x_1 + x_2 + \dots . + x_n) + \lambda'(x'_1 + x'_2 + \dots + x'_n) = \lambda u(x) + \lambda' u(x')$$
Donc u est linéaire
2. $u(e_1) = u(e_2) = \dots = u(e_n) = 1$ donc $\dim\big(\mathcal{Im}(u)\big) = 1$
D'après le théorème du rang
$$\dim(\ker(u)) + \dim\big(\mathcal{Im}(u)\big) = \dim(\mathbb{R}^n) \Leftrightarrow \dim(\ker(u)) = n - 1$$

Allez à : Exercice 22

Correction exercice 23.

Supposons (a)

Si $y \in Im(u)$ alors il existe $x \in E$ $y = u(x)$ alors $u(y) = u^2(x) = 0_E$ alors $y \in Ker(u)$

Donc $Im(u) \subset \ker(u)$

D'après le théorème du rang
$$\dim(\ker(u)) + \dim\big(Im(u)\big) = \dim(E) \Leftrightarrow \dim(\ker(u)) + \frac{n}{2} = n \Leftrightarrow \dim(\ker(u)) = \frac{n}{2}$$
$Im(u) \subset \ker(u)$ et ces deux espaces ont la même dimension, donc ils sont égaux.

Supposons (b)

D'après le théorème du rang
$$\dim(\ker(u)) + \dim\big(Im(u)\big) = dimE \Leftrightarrow 2\dim\big(Im(u)\big) = n \Leftrightarrow 2\mathrm{rg(u)} = \mathrm{n}$$
Pour tout $x \in E$, $u(x) \in Im(u)$ donc $u(x) \in \ker(u)$ donc $u\big(u(x)\big) = 0_E$ donc $u^2 = O_E$.

Allez à : Exercice 23

Correction exercice 24.

Si u est injective alors si $x \in \ker(u) \Leftrightarrow u(x) = 0_F \Leftrightarrow u(x) = u(0_E) \Rightarrow x = 0_E$ car u est injective, ce qui montre que $\ker(u) = \{0_E\}$.

Si $\ker(u) = \{0_E\}$ alors $u(x) = u(y) \Leftrightarrow u(x) - u(y) = 0_F \Leftrightarrow u(x - y) = 0_F \Rightarrow x - y = 0_E$ car $\ker(u) = \{0_E\}$, et donc $x = y$ ce qui montre que u est injective.

Allez à : Exercice 24

Correction exercice 25.

1. $(u - \lambda id_E)(x) = 0_E \Leftrightarrow u(x) - \lambda x = 0_E \Leftrightarrow u(x) = \lambda x$
$u(0_E) = 0_E = \lambda \times 0_E \Rightarrow 0_E \in E_\lambda$
Soient x_1 et x_2 deux vecteurs de E_λ, on a $\mathrm{u}(x_1) = \lambda x_2$ et $u(x_2) = \lambda x_2$
Soient α_1 et α_2 deux réels.
$$u(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 u(x_1) + \alpha_2 u(x_2) = \alpha_1 \lambda x_1 + \alpha_2 \lambda x_2 = \lambda(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)$$
Donc $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \in E_\lambda$
E_λ est un sous-espace vectoriel de E.
2. F est un sous-espace vectoriel de E donc $0_E \in F$ par conséquent $u(0_E) = 0_E \in u(F)$
Pour tout x_1 et x_2 dans F. Pour tout α_1 et α_2 réels. On a $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \in F$
Soient y_1 et y_2 dans $u(F)$, il existe x_1 et x_2 dans F tels que $y_1 = u(x_1)$ et $y_2 = u(x_2)$
Alors
$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 = \alpha_1 u(x_1) + \alpha_2 u(x_2) = u(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)$$

Car u est linéaire, donc

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 = u(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \in u(F)$$

Car $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \in F$.

Par conséquent $u(F)$ est un sous-espace vectoriel de E.

3. Si $x \in E_\lambda$ alors $x = \frac{1}{\lambda} u(x) = u\left(\frac{1}{\lambda} x\right) \in u(E_\lambda)$ donc $E_\lambda \subset u(E_\lambda)$

Si $y \in u(E_\lambda)$ il existe $x \in E_\lambda$ tel que $y = u(x)$ donc $y = \lambda x \in E_\lambda$, ce qui montre que $u(E_\lambda) \subset E_\lambda$

Finalement

$$u(E_\lambda) = E_\lambda$$

Allez à : Exercice 25

Correction exercice 26.

1. Supposons que u soit surjective, alors $Im(u) = F$ par conséquent $\dim\big(Im(u)\big) = p$ et d'après le théorème du rang

$$\dim(\ker(u)) + \dim\big(Im(u)\big) = \dim(E) \Leftrightarrow \dim(ker(u)) + p = n \Leftrightarrow \dim(\ker(u)) = n - p < 0$$

Ce qui n'est pas possible, donc u n'est pas surjective.

2. Supposons que u soit injective, alors $\ker(u) = \{0_E\}$ par conséquent $\dim(ker(u)) = 0$ et d'après le théorème du rang, comme $Im(u) \subset F$ entraine que $\dim\big(Im(u)\big) < p$

$$\dim(\ker(u)) + \dim\big(Im(u)\big) = \dim(E) \Leftrightarrow \dim\big(Im(u)\big) = n \Leftrightarrow n = \dim\big(Im(u)\big) < p$$

Ce qui n'est pas possible, donc u n'est pas injective.

Allez à : Exercice 26

Correction exercice 27.

Soit $y \in \ker(f) \cap \mathrm{im}(f)$, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$, et $f(y) = 0_E$

Donc $f^2(x) = f\big(f(x)\big) = f(y) = 0_E$ donc $x \in \ker(f^2)$, comme $y = f(x)$, $y \in f(\ker(f^2))$

On a montré que

$$\ker(f) \cap \mathrm{im}(f) \subset f(\ker(f^2))$$

Soit $y \in f(\ker(f^2))$, il existe $x \in \ker(f^2)$ tel que $y = f(x)$, ce qui montre que $y \in Im(f)$ et comme $f(y) = f\big(f(x)\big) = f^2(x) = 0_E$ on a $y \in \ker(f)$

On a montré que

$$f(\ker(f^2)) \subset \ker(f) \cap \mathrm{im}(f)$$

Et donc

$$\ker(f) \cap \mathrm{im}(f) = f(\ker(f^2))$$

Allez à : Exercice 27

Correction exercice 28.

Soit $y \in f(\ker(g \circ f))$, il existe $x \in \ker(g \circ f)$ tel que $y = f(x)$

Donc $y \in Im(g)$,

D'autre part $x \in \ker(g \circ f)$ donc $(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = 0_{\mathbb{R}^n}$, par conséquent $g(y) = g\big(f(x)\big) = 0_{\mathbb{R}^n}$, ce qui montre que $y \in \ker(g)$.

On a donc $y \in \ker(g) \cap Im(f)$, on a montré que

$$f(\ker(g \circ f)) \subset \ker(g) \cap Im(f)$$

Soit $y \in \ker(g) \cap Im(f)$

$y \in Im(f)$ donc il existe $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $y = f(x)$

$y \in \ker(g)$ donc $g(y) = 0_{\mathbb{R}^n}$

On en déduit que $0_{\mathbb{R}^n} = g(y) = g\big(f(x)\big)$, ce qui montre que $x \in \ker(g \circ f)$ et comme $y = f(x)$ cela montre que $y \in f(\ker(g \circ f))$.

Allez à : Exercice 28

Correction exercice 29.

1. Soit $x \in \ker(u)$, $u(x) = 0_E$, donc $u^2(x) = u\big(u(x)\big) = u(0_E) = 0_E$ donc $x \in \ker(u^2)$, ce qui montre que
$$\ker(u) \subset \ker(u^2)$$
2. Soit $y \in im(u^2)$, il existe $x \in E$ tel que $y = u^2(x) = u\big(u(x)\big)$, autrement dit il existe $x' = u(x)$ tel que $y = u(x')$, ce qui montre que $y \in im(u)$.

Allez à : Exercice 29

Correction exercice 30.

Supposons que $\ker(u) \cap im(u) = \{0_E\}$ et montrons que $\ker(u) = \ker(u \circ u)$

Si $x \in \ker(u)$ alors $u(x) = 0_E$ alors $u\big(u(x)\big) = u(0_E) = 0_E$ alors $x \in \ker(u \circ u)$

Cela montre que $\ker(u) \subset \ker(u \circ u)$

Si $x \in \ker(u \circ u)$ alors $u\big(u(x)\big) = 0_E$, on pose $y = u(x) \in Im(u)$ et comme $u(y) = 0_E$, $y \in \ker(u) \cap im(u)$, d'après (i) $y = 0_E$ et donc $u(x) = 0_E$ ce qui signifie que $x \in \ker(u)$

Cela montre que $\ker(u \circ u) \subset \ker(u)$ et finalement $\ker(u) = \ker(u \circ u)$

Supposons que $\ker(u) = \ker(u \circ u)$ et montrons que $\ker(u) \cap Im(u) = \{0_E\}$

Soit $y \in \ker(u) \cap Im(u)$, il existe $x \in E$ tel que $y = u(x)$ et $u(y) = 0_E$, cela entraine que $u\big(u(x)\big) = 0_E$, autrement dit $x \in \ker(u \circ u)$, d'après (ii) $x \in \ker(u)$ donc $y = u(x) = 0_E$, cela montre bien que
$$\ker(u) \cap im(u) = \{0_E\}$$

Allez à : Exercice 30

Correction exercice 31.

1.

a)
$$\begin{aligned}u(x) = u(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3) &= x_1u(e_1) + x_2u(e_2) + x_3u(e_3)\\ &= x_1(f_1 + 2f_2) + x_2(2f_1 - f_2) + x_3(-f_1 + f_2)\\ &= (x_1 + 2x_2 - x_3)f_1 + (2x_1 - x_2 + x_3)f_2 = (x_1 + 2x_2 - x_3, 2x_1 - x_2 + x_3)\end{aligned}$$

b)
$$A = Mat_{\underline{e}}(u) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} u(e_1) & u(e_2) & u(e_3) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} f_1 \\ f_2 \end{array}$$

c)
$$x = (x_1, x_2, x_3) \in Ker(u) \Leftrightarrow u(x) = 0_{\mathbb{R}^2}$$
$$\Leftrightarrow AX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 - x_3 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix} \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 - 2L_1 \end{matrix} \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ -5x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2 \times \dfrac{3}{5}x_3 - x_3 = 0 \\ x_2 = \dfrac{3}{5}x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -\dfrac{1}{5}x_3 \\ x_2 = \dfrac{3}{5}x_3 \end{cases}$$

Donc $x = \left(-\frac{1}{5}x_3, \frac{3}{5}x_3, x_3\right) = \frac{x_3}{5}(-1,3,5)$, on en déduit que $\ker(u) = Vect(a)$ avec $a = (-1,3,5)$.

On en déduit que $\dim(\ker(u)) = 1$ et d'après le théorème du rang :
$$\dim(\ker(u)) + \dim\big(Im(u)\big) = \dim(\mathbb{R}^3) \Leftrightarrow \dim\big(Im(u)\big) = 2$$

Or $Im(u)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ donc $Im(u) = \mathbb{R}^2$.

Une autre méthode est d'écrire que :
$$Im(u) = Vect\big(u(e_1), u(e_2), u(e_3)\big)$$

Puis, avec le théorème du rang, de dire que la dimension de cet espace est 2, il suffit donc de trouver deux vecteurs non colinéaires dans $Im(u)$, soit par exemple $\big(u(e_1),u(e_2)\big)$ ou $\big(u(e_1),u(e_3)\big)$ ou encore $\big(u(e_2),u(e_3)\big)$, pour trouver une base (libre plus le bon nombre de vecteurs égal base). Mais je pense que si on ne remarque pas que $Im(u)=\mathbb{R}^2$ on a raté quelque chose parce que cela signifie que u est surjective.

2.

a) Soit $x=x_1e_1+x_2e_2+x_3e_3=(x_1,x_2,x_3)$

$$\begin{aligned}u(x)=u(x_1e_1+x_2e_2+x_3e_3)&=x_1u(e_1)+x_2u(e_2)+x_3u(e_3)\\&=x_1(3e_1+2e_2+2e_3)+x_2(2e_1+3e_2+2e_3)+x_3(2e_1+2e_2+3e_3)\\&=(3x_1+2x_2+2x_3)e_1+(2x_1+3x_2+2x_3)e_2+(2x_1+2x_2+3x_3)e_3\\&=(3x_1+2x_2+2x_3,2x_1+3x_2+2x_3,2x_1+2x_2+3x_3)\end{aligned}$$

b) Histoire de changer de méthode je ne vais pas faire comme dans le 1.

Les coordonnées de $u(x)$ dans la base $\underline{e}$ sont

$$\begin{pmatrix}3x_1+2x_2+2x_3\\2x_1+3x_2+2x_3\\2x_1+2x_2+3x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&2&2\\2&3&2\\2&2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=AX$$

Où

$$A=Mat_{\underline{e}}(u)=\begin{pmatrix}3&2&2\\2&3&2\\2&2&3\end{pmatrix}$$

c)

$$x=(x_1,x_2,x_3)\in\ker(u)\Leftrightarrow u(x)=0_{\mathbb{R}^3}\Leftrightarrow AX=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}3x_1+2x_2+2x_3\\2x_1+3x_2+2x_3\\2x_1+2x_2+3x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\begin{matrix}L_1\\L_2\\L_3\end{matrix}\begin{cases}3x_1+2x_2+2x_3=0\\2x_1+3x_2+2x_3=0\\2x_1+2x_2+3x_3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{matrix}L_1\\3L_2-2L_1\\L_3-L_2\end{matrix}\begin{cases}3x_1+2x_2+2x_3=0\\5x_2+2x_3=0\\-x_2+x_3=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{matrix}L_1\\L_2\\5L_3+L_2\end{matrix}\begin{cases}3x_1+2x_2+2x_3=0\\5x_2+2x_3=0\\7x_3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=0\\x_2=0\\x_3=0\end{cases}$$

Donc $\ker(u)=\{0_{\mathbb{R}^3}\}$

On peut utiliser le théorème du rang, mais je vais faire plus théorique (pour rire), u est un endomorphisme dont le noyau est réduit au vecteur nul est une injection, c'est donc une bijection, donc u est surjective et $Im(u)=\mathbb{R}^3$.

Allez à : Exercice 31

Correction exercice 32.

1.

a) Les coordonnées du vecteur $u(x)$ dans la base $\underline{f}$ sont :

$$AX=\begin{pmatrix}1&0\\-1&2\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\-x_1+2x_2\\x_1+x_2\end{pmatrix}$$

Donc $u(x)=(x_1,-x_1+2x_2,x_1+x_2)$

b) $u(e_1)=f_1-f_2+f_3$ et $u(e_2)=2f_2+f_3$

c)

$$x\in\ker(u)\Leftrightarrow u(x)=0_{\mathbb{R}^3}\Leftrightarrow AX=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x_1\\-x_1+2x_2\\x_1+x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=0\\-x_1+2x_2=0\\x_1+x_2=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=0\\x_2=0\end{cases}$$

Donc $\ker(u)=\{0_{\mathbb{R}^2}\}$

$$Im(u) = Vect\big(u(e_1), u(e_2)\big)$$

$u(e_1)$ et $u(e_2)$ sont deux vecteurs non proportionnels donc il forme une famille libre de $Im(u)$, cette famille étant génératrice, c'est une base de $Im(u)$.

Remarque :

Ici le théorème du rang ne sert pas à grand-chose.

Dans ce cas $Im(u)$ est un plan de $\mathbb{R}^3$.

2.

a) Les coordonnées du vecteur $u(x)$ dans la base $\underline{e}$ sont :

$$AX = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 7 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_3 - x_4 \\ -x_1 + 2x_2 - x_4 \\ x_1 - x_2 + x_3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 7x_3 - 5x_4 \end{pmatrix}$$

$$u(x) = (x_1 + 2x_3 - x_4, -x_1 + 2x_2 - x_4, x_1 - x_2 + x_3, 2x_1 + 3x_2 + 7x_3 - 5x_4)$$

b)

$u(e_1) = e_1 - e_2 + e_3 + 2e_4, u(e_2) = 2e_2 - e_3 + 3e_4, u(e_3) = 2e_1 + e_3 + 7e_4$ et $u(e_4) = -e_1 - e_2 - 5e_4$.

c)

$$x \in \ker(u) \Leftrightarrow u(x) = 0_{R^4} \Leftrightarrow AX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 + 2x_3 - x_4 \\ -x_1 + 2x_2 - x_4 \\ x_1 - x_2 + x_3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 7x_3 - 5x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \begin{cases} x_1 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 7x_3 - 5x_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 + L_1 \\ L_3 + L_2 \\ L_4 - 2L_1 \end{array} \begin{cases} x_1 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 3x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3 + x_4 \\ x_2 = -x_3 + x_4 \end{cases}$$

Un vecteur de $\ker(u)$ s'écrit $x = (-2x_3 + x_4, -x_3 + x_4, x_3, x_4) = x_3(-2,-1,1,0) + x_4(1,1,0,1)$ si on pose $a = (-2,-1,1,0)$ et $b = (1,1,0,1)$ alors

$$\ker(u) = Vect(a, b)$$

a et b ne sont pas propotionnels, ils forment une famille libre de $\ker(u)$, c'est une famille génératrice de $\ker(u)$et donc une base de $\ker(u)$

D'après le théorème du rang

$$\dim(\ker(u)) + \dim\big(Im(u)\big) = \dim(\mathbb{R}^4) \Leftrightarrow 2 + \dim\big(Im(u)\big) = 4 \Leftrightarrow \dim(Im(u) = 2$$

D'autre part :

$u(e_1) = e_1 - e_2 + e_3 + 2e_4$, $u(e_2) = 2e_2 - e_3 + 3e_4$ sont deux vecteurs non proportionnels de $Im(u)$, $\big(u(e_1), u(e_2)\big)$ est une famille libre à deux vecteurs dans un espace vectoriel de dimension 2, c'est une base de $Im(u)$.

Remarque :

$Im(u) = Vect\big(u(e_1), u(e_2), u(e_3), u(e_4)\big)$ ne sert à rien dans cette question.

Allez à : Exercice 32

Correction exercice 33.

1.

a)

$$e_1 = (1,0,0) \Rightarrow u(e_1) = (1,2,3) = e_1 + 2e_2 + 3e_3$$
$$e_2 = (0,1,0) \Rightarrow u(e_2) = (1,0,1) = e_1 + e_3$$
$$e_3 = (0,0,1) \Rightarrow u(e_3) = (0,-1,-1) = -e_2 - e_3$$

b)

$$A = Mat_{\underline{e}}(u) = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} u(e_1) & u(e_2) & u(e_3) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} \end{array}$$

c)

$$x \in \ker(u) \Leftrightarrow u(x) = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow (x_1 + x_2, 2x_1 - x_3, 3x_1 + x_2 - x_3) = (0,0,0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_1 - x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 - 2L_1 \\ L_3 - 3L_1 \end{matrix} \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ -2x_2 - x_3 = 0 \\ -2x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2 \\ x_3 = -2x_2 \end{cases}$$

$$x = (-x_2, x_2, -2x_2) = x_2(-1,1,-2)$$

$a = (-1,1,-2)$, $\ker(u) = Vect(a)$.

D'après le théorème du rang

$$\dim(\ker(u)) + \dim\big(Im(u)\big) = \dim(\mathbb{R}^3) \Leftrightarrow \dim\big(Im(u)\big) = 3 - 1 = 2$$

Il suffit de trouver deux vecteurs non colinéaires (qui forment donc une famille libre) dans $Im(u)$, par exemple : $u(e_1)$ et $u(e_2)$ (on aurait pu prendre $u(e_1)$ et $u(e_3)$ ou $u(e_2)$ et $u(e_3)$).

$$Im(u) = Vect\big(u(e_1), u(e_2)\big)$$

Il est totalement inutile de chercher une relation entre $u(e_1)$, $u(e_2)$ et $u(e_3)$ car le théorème du rang donne la dimension de l'image de u.

2.

a)

$$e_1 = (1,0,0) \Rightarrow u(e_1) = (1,1,1) = e_1 + e_2 + e_3$$
$$e_2 = (0,1,0) \Rightarrow u(e_2) = (1,1,1) = e_1 + e_2 + e_3$$
$$e_3 = (0,0,1) \Rightarrow u(e_3) = (0,0,0) = 0_{\mathbb{R}^3}$$

b)

$$Mat_{\underline{e}}(u) = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} u(e_1) & u(e_2) & u(e_3) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} \end{array}$$

c) $x = (x_1, x_2, x_3) \in \ker(u) \Leftrightarrow u(x) = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow (x_1 + x_2, x_1 + x_2, x_1 + x_2) = (0,0,0) \Leftrightarrow x_1 + x_2 = 0$

Un vecteur de $\ker(u)$ est de la forme $x = (x_1, -x_1, x_3) = x_1(1,-1,0) + (0,0,1)x_3$

Si on pose $a = (1,-1,0)$ et $b = (0,0,1)$, $Ker(u) = Vect(a, b)$

a et b sont deux vecteurs non proportionnels de $Ker(u)$ $\ker(u)$, cette famille engendre $\ker(u)$ il s'agit donc d'une base de $\ker(u)$. Pour l'image, pas besoin du théorème du rang, on pose $c = (1,1,1)$

$$Im(u) = Vect(c, c, 0_{\mathbb{R}^3}) = Vect(c)$$

$Im(u)$ est la droite engendrée par c.

Allez à : Exercice 33

Correction exercice 34.

1. soit $x \in \mathbb{R}^4$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ ses coordonnées dans la base canonique.

$$x\in\ker(f)\Leftrightarrow AX=O_{\mathbb{R}^4}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1&2&1&3\\1&1&2&1\\1&-2&5&-11\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x_1+2x_2+x_3+3x_4=0\\x_1+x_2+2x_3+x_4=0\\x_1-2x_2+5x_3-11x_4=0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\begin{array}{r}L_1\\L_2-L_1\\L_3-L_1\end{array}\left\{\begin{array}{l}x_1+2x_2+x_3+3x_4=0\\-x_2+x_3-2x_4=0\\-4x_2+4x_3-14x_4=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x_1+2x_2+x_3+3x_4=0\\-x_2+x_3-2x_4=0\\-2x_2+2x_3-7x_4=0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\begin{array}{r}\\\\L_3-2L_2\end{array}\left\{\begin{array}{l}x_1+2x_2+x_3+3x_4=0\\-x_2+x_3-2x_4=0\\-3x_4=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x_1=-3x_3\\x_2=x_3\\x_4=0\end{array}\right.$$

$$x=(-3x_3,x_3,x_3,0)=x_3(-3,1,1,0)$$

On pose $=(-3,1,1,0)$ $\ker(f)=Vect(a)$, c'est une base de $\ker(f)$.

2. D'après le théorème du rang

$$\dim(\ker(f))+\dim\big(Im(f)\big)=\dim(\mathbb{R}^4)$$

Donc

$$\dim(\mathrm{Im}(f))=3$$

Comme

$$Im(f)\subset\mathbb{R}^3$$

On a

$$Im(f)=\mathbb{R}^3$$

Et

$$rg(A)=3$$

Allez à : Exercice 34

Correction exercice 35.

A est la matrice d'une application linéaire de $\mathbb{R}^5$ dans $\mathbb{R}^4$.

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix}\in\ker(A)\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1&1&2&1&1\\2&1&1&1&1\\1&1&1&2&1\\2&1&1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x_1+x_2+2x_3+x_4+x_5=0\\2x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=0\\x_1+x_2+x_3+2x_4+x_5=0\\2x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\begin{array}{r}L_1\\L_2\\L_3\end{array}\left\{\begin{array}{l}x_1+x_2+2x_3+x_4+x_5=0\\2x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=0\\x_1+x_2+x_3+2x_4+x_5=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\begin{array}{r}L_1\\L_2-2L_1\\L_3-L_1\end{array}\left\{\begin{array}{l}x_1+x_2+2x_3+x_4+x_5=0\\-x_2-3x_3-x_4-x_5=0\\-x_3+x_4=0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x_1+x_2+2x_3+x_4+x_5=0\\-x_2-3x_3-x_4-x_5=0\\x_3=x_4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x_1=-x_2-2x_3-x_4-x_5\\x_2=-3x_3-x_4-x_5\\x_3=x_4\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x_1=-x_2-2x_4-x_4-x_5\\x_2=-3x_4-x_4-x_5\\x_3=x_4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x_1=-(-4x_4-x_5)-2x_4-x_4-x_5\\x_2=-4x_4-x_5\\x_3=x_4\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x_1=x_4\\x_2=-4x_4-x_5\\x_3=x_4\end{array}\right.$$

Donc

$$(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)=(x_4,-4x_4-x_5,x_4,x_4,x_5)=x_4(1,-4,1,1,0)+x_5(0,-1,0,0,1)$$

Les vecteurs $(1,-4,1,1,0)$ et $(0,-1,0,0,1)$ ne sont pas proportionnels et ils engendrent le noyau, donc $\ker(A)$ est de dimension 2.

D'après le théorème du rang

$$\dim(ker(A))+\dim\big(Im(A)\big)=5$$

Ce qui montre que $rang(A)=\dim\big(Im(A)\big)=3$.

Allez à : Exercice 35

Correction exercice 36.

1.

$$Y=AX\Leftrightarrow AX=Y\Leftrightarrow\begin{cases}13x_1-8x_2-12x_3=y_1\\12x_1-7x_2-12x_3=y_2\\6x_1-4x_2-5x_3=y_3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{matrix}\\13L_2-12L_1\\2L_3-L_2\end{matrix}\begin{cases}13x_1-8x_2-12x_3=y_1\\5x_2-12x_3=13y_2-12y_1\\-x_2+2x_3=2y_3-y_2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{matrix}\\\\5L_3+L_2\end{matrix}\begin{cases}13x_1-8x_2-12x_3=y_1\\5x_2-12x_3=13y_2-12y_1\\-2x_3=10y_3-5y_2+13y_2-12y_1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}13x_1=y_1+8x_2+12x_3\\5x_2=13y_2-12y_1+12x_3\\x_3=6y_1-4y_2-5y_3\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}13x_1=y_1+8x_2+12(6y_1-4y_2-5y_3)\\5x_2=13y_2-12y_1+12(6y_1-4y_2-5y_3)=60y_1-35y_2-60y_3\\x_3=6y_1-4y_2-5y_3\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}13x_1=73y_1-48y_2-60y_3+8(12y_1-7y_2-12y_3)\\x_2=12y_1-7y_2-12y_3\\x_3=6y_1-4y_2-5y_3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}13x_1=169y_1-104y_2-156y_3\\x_2=12y_1-7y_2-12y_3\\x_3=6y_1-4y_2-5y_3\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=13y_1-8y_2-12y_3\\x_2=12y_1-7y_2-12y_3\\x_3=6y_1-4y_2-5y_3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13&-8&-12\\12&-7&-12\\6&-4&-5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$$

Donc $A^{-1}=\begin{pmatrix}13&-8&-12\\12&-7&-12\\6&-4&-5\end{pmatrix}=A$

Le mieux aurait été de changer les rôles de x_1 et x_3 dans le premier système.

2. $A^2=I$ donc $A^{2n}=(A^2)^n=I^n=I$ et $A^{2n+1}=A^{2n}A=A$.

Allez à : Exercice 36

Correction exercice 37.

1. et 2.

$$A^2=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}=A+2I\text{ donc }P(X)=X^2-X-2$$

3. $A^2-A=2I\Leftrightarrow A(A-I)=2I\Leftrightarrow A\times\frac{A-I}{2}=I$ donc $A^{-1}=\frac{A-I}{2}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&-1&1\\1&1&-1\end{pmatrix}$

4.

$$AX=Y\Leftrightarrow\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=\begin{cases}x_2+x_3=y_1\\x_1+x_3=y_2\\x_1+x_2=y_3\end{cases}$$

Ici il y a un problème pour appliquer le pivot de Gauss parce qu'il n'y a pas de termes en x_1 dans la première ligne, il y a deux façons d'arranger ce problème, soit on intervertit $x_1$et x_2 soit on intervertit la ligne 1 avec une ligne où il y a un x_1, c'est ce que nous allons faire.

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}\begin{cases} x_2+x_3=y_1 \\ x_1+x_3=y_2 \\ x_1+x_2=y_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} L_2 \\ L_1 \\ L_3 \end{matrix}\begin{cases} x_1 + x_3 = y_2 \\ x_2+x_3=y_1 \\ x_1+x_2 = y_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3-L_1 \end{matrix}\begin{cases} x_1 + x_3 = y_2 \\ x_2+x_3=y_1 \\ x_2-x_3=-y_2+y_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3-L_2 \end{matrix}\begin{cases} x_1 + x_3 = y_2 \\ x_2+x_3=y_1 \\ -2x_3=-y_1-y_2+y_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=-x_3+y_2 \\ x_2=-x_3+y_1 \\ x_3=\frac{1}{2}y_1+\frac{1}{2}y_2-\frac{1}{2}y_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1=-\left(\frac{1}{2}y_1+\frac{1}{2}y_2-\frac{1}{2}y_3\right)+y_2 \\ x_2=-\left(\frac{1}{2}y_1+\frac{1}{2}y_2-\frac{1}{2}y_3\right)+y_1 \\ x_3=\frac{1}{2}y_1+\frac{1}{2}y_2-\frac{1}{2}y_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=-\frac{1}{2}y_1+\frac{1}{2}y_2+\frac{1}{2}y_3 \\ x_2=\frac{1}{2}y_1-\frac{1}{2}y_2+\frac{1}{2}y_3 \\ x_3=\frac{1}{2}y_1+\frac{1}{2}y_2-\frac{1}{2}y_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

Donc

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Allez à : Exercice 37

Correction exercice 38.

1. $A^2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
   $A^3=A^2A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
   $A^3-A^2+A-I=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=$
   O
2. $A^3-A^2+A-I=O \Leftrightarrow A(A^2-A+I)=I$ donc $A^{-1}=A^2-A+I$
3. $A^3=A^2-A+I$ donc $A^4=A(A^2-A+I)=A^3-A^2+A=(A^2-A+I)-A^2+A=I$

Allez à : Exercice 38

Correction exercice 39.

$$A-2I=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$(A-2I)^2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(A-2I)^3=(A-2I)(A-2I)^2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ce qui entraine que

$$A^3-3\times 2A^2+3\times 2^2A-2^3I=O$$

Car A et I commutent.

Ce qui équivaut à

$$A^3-6A^2+12A-8I=O$$

Soit encore

$$A^3-6A^2+12A=8I$$

Puis en divisant par 8 et en mettant A en facteur

$$A\left(\frac{1}{8}A^2-\frac{3}{4}A+\frac{3}{2}I\right)=I$$

Ce qui montre que A est inversible et que

$$A^{-1}=\frac{1}{8}A^2-\frac{3}{4}A+\frac{3}{2}I$$

Allez à : Exercice 39

Correction exercice 40.

1.

$$M(t_1)M(t_2)=\begin{pmatrix}\operatorname{ch}(t_1) & \operatorname{sh}(t_1)\\ \operatorname{sh}(t_1) & \operatorname{ch}(t_1)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\operatorname{ch}(t_2) & \operatorname{sh}(t_2)\\ \operatorname{sh}(t_2) & \operatorname{ch}(t_2)\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}\operatorname{ch}(t_1)\operatorname{ch}(t_2)+\operatorname{sh}(t_1)\operatorname{sh}(t_2) & \operatorname{ch}(t_1)\operatorname{sh}(t_2)+\operatorname{sh}(t_1)\operatorname{ch}(t_2)\\ \operatorname{sh}(t_1)\operatorname{ch}(t_2)+\operatorname{ch}(t_1)\operatorname{sh}(t_2) & \operatorname{sh}(t_1)\operatorname{sh}(t_2)+\operatorname{ch}(t_1)\operatorname{ch}(t_2)\end{pmatrix}$$

$$\operatorname{ch}(t_1)\operatorname{ch}(t_2)+\operatorname{sh}(t_1)\operatorname{sh}(t_2)=\frac{e^{t_1}+e^{-t_1}}{2}\frac{e^{t_2}+e^{-t_2}}{2}+\frac{e^{t_1}-e^{-t_1}}{2}\frac{e^{t_2}-e^{-t_2}}{2}$$
$$=\frac{e^{t_1+t_2}+e^{t_1-t_2}+e^{-t_1+t_2}+e^{-t_1-t_2}}{4}+\frac{e^{t_1+t_2}+e^{t_1-t_2}+e^{-t_1+t_2}+e^{-t_1-t_2}}{4}$$
$$=\frac{2e^{t_1+t_2}+2e^{-(t_1+t_2)}}{4}=\operatorname{ch}(t_1+t_2)$$

$$\operatorname{sh}(t_1)\operatorname{ch}(t_2)+\operatorname{ch}(t_1)\operatorname{sh}(t_2)=\frac{e^{t_1}-e^{-t_1}}{2}\frac{e^{t_2}+e^{-t_2}}{2}+\frac{e^{t_1}+e^{-t_1}}{2}\frac{e^{t_2}-e^{-t_2}}{2}$$
$$=\frac{e^{t_1+t_2}+e^{t_1-t_2}-e^{-t_1+t_2}-e^{-t_1-t_2}}{4}+\frac{e^{t_1+t_2}-e^{t_1-t_2}+e^{-t_1+t_2}-e^{-t_1-t_2}}{4}$$
$$=\frac{2e^{t_1+t_2}-2e^{-(t_1+t_2)}}{4}=\operatorname{sh}(t_1+t_2)$$

Donc $M(t_1)M(t_2)=M(t_1+t_2)$

2. $\det\big(M(t)\big)=\operatorname{ch}^2(t)-\operatorname{sh}^2(t)=1\neq 0$ donc la matrice est inversible.

Or $M(t)M(-t)=M(0)=I$ donc $\big(M(t)\big)^{-1}=M(-t)$

Allez à : Exercice 40

Correction exercice 41.

1.

$$E_1=\{x\in\mathbb{R}^3,u(x)=x\}=\{x\in\mathbb{R}^3,u(x)-x=0_{\mathbb{R}^3}\}=\{x\in\mathbb{R}^3,(u-Id_{\mathbb{R}^3})(x)=0_{\mathbb{R}^3}\}$$
$$=\ker(u-Id_{\mathbb{R}^3})$$

Donc E_1 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

$$x\in E_1\Leftrightarrow u(x)=x\Leftrightarrow AX=X\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1&2&-2\\2&1&-2\\2&2&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1+2x_2-2x_3=x_1\\2x_1+x_2-2x_3=x_2\\2x_1+2x_2-3x_3=x_3\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}2x_2-2x_3=0\\2x_1-2x_3=0\\2x_1+2x_2-4x_3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_2=x_3\\x_1=x_3\\2x_3+2x_3-4x_3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=x_3\\x_2=x_3\end{cases}$$

Par conséquent $x=(x_3,x_3,x_3)=x_3(1,1,1)$, on pose $a=(1,1,1)$ c'est une base de E_1.

2. Les coordonnées de $u(b)$ dans la base canonique sont

$$AX_b=\begin{pmatrix}1&2&-2\\2&1&-2\\2&2&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix}=-X_b$$

Donc $u(b)=-e_1-e_2=-b$

Les coordonnées de $u(c)$ dans la base canonique sont

$$AX_c=\begin{pmatrix}1&2&-2\\2&1&-2\\2&2&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-1\\-2\end{pmatrix}=-X_c$$

Donc $u(b)=-e_1-e_2-2e_3=-c$

3.

$$\det(a,b,c)=\begin{vmatrix}1&0&1\\1&1&1\\1&1&2\end{vmatrix}=1\times\begin{vmatrix}1&1\\1&2\end{vmatrix}-0\times\begin{vmatrix}1&1\\1&2\end{vmatrix}+1\times\begin{vmatrix}1&1\\1&1\end{vmatrix}=1\neq 0$$

Ce qui montre que (a,b,c) est une base de $\mathbb{R}^3$.

4.

$$P=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&1\\1&1&2\end{pmatrix}$$

5. On pose $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ et $X'=\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\\x_3'\end{pmatrix}$

$$PX'=X\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&1\\1&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\\x_3'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{matrix}L_1\\L_2\\L_3\end{matrix}\begin{cases}x_1'+x_3'=x_1\\x_1'+x_2'+x_3'=x_2\\x_1'+x_2'+2x_3'=x_3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{matrix}L_1\\L_2-L_1\\L_3-L_2\end{matrix}\begin{cases}x_1'+x_3'=x_1\\x_2'=-x_1+x_2\\x_3'=-x_2+x_3\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x_1'=-x_3'+x_1=x_1+x_2-x_3\\x_2'=-x_1+x_2\\x_3'=-x_2+x_3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\\x_3'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-1&1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

D'où

$$P^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-1&1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}$$

6.

$$D=\begin{array}{c}\begin{matrix}u(a)&u(b)&u(c)\end{matrix}\\\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\end{array}\begin{matrix}a\\b\\c\end{matrix}$$

7. $D=P^{-1}AP$

Allez à : Exercice 41

Correction exercice 42.

1. Soient $x=(x_1,x_2)$ et $x'=(x_1',x_2')$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$ et soient λ et λ' deux réels.

$$f(\lambda x+\lambda'x')=f(\lambda x_1+\lambda'x_1',\lambda x_2+\lambda'x_2')=\big(\lambda x_1+\lambda'x_1'-(\lambda x_2+\lambda'x_2'),\lambda x_1+\lambda'x_1'+(\lambda x_2+\lambda'x_2')\big)$$
$$=\big(\lambda(x_1-x_2)+\lambda'(x_1'-x_2'),\lambda(x_1+x_2)+\lambda'(x_1'+x_2')\big)$$
$$=\lambda(x_1-x_2,x_1+x_2)+\lambda'(x_1'-x_2',x_1'+x_2')=\lambda f(x)+\lambda'f(x')$$

f est une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ donc f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$.

2. $A=\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}$

3.

a) $x\in\ker(f)\Leftrightarrow\begin{cases}x_1-x_2=0\\x_1+x_2=0\end{cases}\Leftrightarrow L_1+L_2\begin{cases}x_1-x_2=0\\2x_1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=0\\x_2=0\end{cases}$

Donc $\ker(f)=\{0_{\mathbb{R}^2}\}$

On en déduit que f est injective, comme de plus, f est un endomorphisme, f est surjective et donc $Im(f)=\mathbb{R}^2$. (On aurait pu aussi invoquer le théorème du rang)

b) Du a) on tire que f est bijective et donc inversible (cela signifie la même chose).

c)

$$y=f(x)\Leftrightarrow(y_1,y_2)=f(x_1,x_2)\Leftrightarrow(y_1,y_2)=(x_1-x_2,x_1+x_2)\Leftrightarrow\begin{cases}y_1=x_1-x_2\\y_2=x_1+x_2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}y_1=x_1-x_2\\y_1+y_2=2x_1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_2=x_1-y_1\\x_1=\frac{1}{2}y_1+\frac{1}{2}y_2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_2=\frac{1}{2}y_1+\frac{1}{2}y_2-y_1\\x_1=\frac{1}{2}y_1+\frac{1}{2}y_2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x_2=-\frac{1}{2}y_1+\frac{1}{2}y_2\\x_1=\frac{1}{2}y_1+\frac{1}{2}y_2\end{cases}$$

Donc $f^{-1}(y_1,y_2)=(\frac{1}{2}y_1+\frac{1}{2}y_2,-\frac{1}{2}y_1+\frac{1}{2}y_2)$, ou, en changeant les rôles de x et de y :

$$f^{-1}(x_1,x_2)=(\frac{1}{2}x_1+\frac{1}{2}x_2,-\frac{1}{2}x_1+\frac{1}{2}x_2)$$

Et $A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}$

4. La matrice d'une homothétie est de la forme $H=\begin{pmatrix}h&0\\0&h\end{pmatrix}=hI$ et la matrice d'une rotation d'angle α est de la forme $R=\begin{pmatrix}\cos(\alpha)&-\sin(\alpha)\\\sin(\alpha)&\cos(\alpha)\end{pmatrix}$. Alors $RH=h\begin{pmatrix}\cos(\alpha)&-\sin(\alpha)\\\sin(\alpha)&\cos(\alpha)\end{pmatrix}=$ $\begin{pmatrix}h\cos(\alpha)&-h\sin(\alpha)\\h\sin(\alpha)&h\cos(\alpha)\end{pmatrix}$

Donc $\begin{cases}h\cos(\alpha)=1\\h\sin(\alpha)=1\end{cases}$, donc $\left(h\cos(\alpha)\right)^2+\left(h\sin(\alpha)\right)^2=1^2+1^2\Leftrightarrow h^2=2\Leftrightarrow h=\sqrt{2}\ ou\ h=-\sqrt{2}$

Si $h=-\sqrt{2}$ alors $\begin{cases}\cos(\alpha)=-\frac{1}{\sqrt{2}}\\\sin(\alpha)=-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{cases}$ donc $\alpha=\frac{5\pi}{4}$ modulo 2π.

Si $h=\sqrt{2}$ alors $\begin{cases}\cos(\alpha)=\frac{1}{\sqrt{2}}\\\sin(\alpha)=\frac{1}{\sqrt{2}}\end{cases}$ donc $\alpha=\frac{\pi}{4}$ modulo 2π.

5. $\det(a,b)=\begin{vmatrix}1&-1\\1&1\end{vmatrix}=2\neq0$ donc (a,b) est une base de $\mathbb{R}^2$.

6. Les coordonnées de $f(a)$ dans la base (e_1,e_2) sont $\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$, donc $f(a)=2e_2=a+b$

   Les coordonnées de $f(b)$ dans la base (e_1,e_2) sont $\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$, donc $f(a)=2e_1=a-b$

7. $Mat_{\beta'}(f)=\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}$

Allez à : Exercice 42

Correction exercice 43.

1.

$$\det(a,b,c)=\begin{vmatrix}1&2&2\\-1&-1&-2\\1&1&1\end{vmatrix}\underset{C_3-C_2}{=}\begin{vmatrix}1&2&2\\-1&-1&-2\\0&0&-1\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&2\\-1&-1\end{vmatrix}=-(-1+2)=-1\neq0$$

Donc (a,b,c) est une base de $\mathbb{R}^3$

2.

$$P=\begin{pmatrix}1&2&2\\-1&-1&-2\\1&1&1\end{pmatrix}$$

$$PX=Y\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1&2&2\\-1&-1&-2\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{matrix}L_1\\L_2\\L_3\end{matrix}\begin{cases}x_1+2x_2+2x_3=y_1\\-x_1-x_2-2x_3=y_2\\x_1+x_2+x_3=y_3\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{matrix}L_1\\L_2+L_1\\L_3+L_2\end{matrix}\begin{cases}x_1+2x_2+2x_3=y_1\\x_2\qquad\quad=y_1+y_2\\-x_3=y_2+y_3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=-2x_2-2x_3+y_1\\x_2=y_1+y_2\\x_3=-y_2-y_3\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=-2y_1-2y_2+2y_2+2y_3+y_1\\x_2=y_1+y_2\\x_3=-y_2-y_3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=-y_1\qquad+2y_3\\x_2=y_1+y_2\\x_3=\qquad-y_2-y_3\end{cases}$$

Donc

$$P^{-1}=\begin{pmatrix}-1&0&2\\1&1&0\\0&-1&-1\end{pmatrix}$$

3. Les coordonnées de $u(a)$ dans la base β sont

$$\begin{pmatrix}1&4&4\\-1&-3&-3\\0&2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$$

Donc $u(a)=a$

Les coordonnées de $u(b)$ dans la base β sont

$$\begin{pmatrix}1&4&4\\-1&-3&-3\\0&2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$$

Donc $u(b)=c$

Les coordonnées de $u(c)$ dans la base β sont

$$\begin{pmatrix}1&4&4\\-1&-3&-3\\0&2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\1\\-1\end{pmatrix}$$

Donc $u(c)=-b$

Par conséquent

$$R=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix}$$

4.

a)

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-1&0&2\\1&1&0\\0&-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&4&4\\-1&-3&-3\\0&2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&2\\-1&-1&-2\\1&1&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-1&0&2\\1&1&0\\0&-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&-2\\-1&-2&1\\1&1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix}=R$$

b)

$$R^2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

$$R^4=R^2R^2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=I$$

c) $R=P^{-1}AP\Leftrightarrow A=PRP^{-1}$

$$A^4=PRP^{-1}PRP^{-1}PRP^{-1}PRP^{-1}=PR^4P^{-1}=PIP^{-1}=I$$

Donc

$$A^{4n}=(A^4)^n=I^n=I$$

Allez à : Exercice 43

Correction exercice 44.

1. $A = Mat_\beta(u) = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & -2 \\ -4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$
2. $u(0_{\mathbb{R}^3}) = 0_{\mathbb{R}^3}$ donc $0_{\mathbb{R}^3} \in E$
   Soient $x \in E$ et $y \in E$ et λ et μ deux réels, $u(\lambda x + \mu y) = \lambda u(x) + \mu u(y) = \lambda x + \mu y$, donc $\lambda x + \mu y \in E$, E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
   $$x = (x_1, x_2, x_3) \in E \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & -2 \\ -4 & 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x_1 + x_2 + 4x_3 = x_1 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 = x_2 \\ -4x_1 + 2x_2 + 5x_3 = x_3 \end{cases}$$
   $$\Leftrightarrow \begin{cases} -4x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0 \\ -4x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \begin{cases} -4x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ -2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$
   $$\Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ 4L_2 + L_1 \\ 2L_3 - L_1 \end{matrix} \begin{cases} -4x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \\ -3x_2 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$
   Une base de E est le vecteur $a = (1,0,1)$ et bien sur $\dim(E) = 1$.
3. Il est clair que le vecteur nul est dans F.
   Soient $x \in F$ et $y \in F$ et λ et μ deux réels
   $\lambda x + \mu y = (\lambda x_1 + \mu y_1, \lambda x_2 + \mu y_2, \lambda x_3 + \mu y_3)$,
   $$-2(\lambda x_1 + \mu y_1) + 2(\lambda x_2 + \mu y_2) + 3(\lambda x_3 + \mu y_3) = \lambda(-2x_1 + 2x_2 + 3x_3) + \mu(-2y_1 + 2y_2 + 3y_3) = 0$$
   Donc $\lambda x + \mu y \in F$. F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
   $$x = (x_1, x_2, x_3) \in F \Leftrightarrow x = \left(x_2 + \frac{3}{2}x_3, x_2, x_3\right) = x_2(1,1,0) + \frac{x_3}{2}(3,0,2)$$
   On pose $b = (1,1,0)$ et $c = (3,0,2)$
   (b, c) est une famille génératrice de F formée de deux vecteurs non proportionnels, cette famille est donc libre.
   Une base de F est (b, c).
4. $u(b)$ a pour coordonnées :
   $$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & -2 \\ -4 & 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$
   $$\det(a, b, u(b)) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 + 3 = 1 \neq 0$$
   Donc $\big(a, b, u(b)\big)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   On aurait pu montrer que la famille est libre, et dire qu'une famille libre à 3 vecteurs dans un espace de dimension 3 est une base.
5. $\dim(E) + \dim(F) = 1 + 2 = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$
   $(1,0,1) \notin F$ car $-2 \times 1 + 2 \times 0 + 3 \times 1 = 1 \neq 0$ donc $E \cap F = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$
   Donc $E \oplus F = \mathbb{R}^3$.
6. $u\big(u(b)\big)$ a pour coordonnées
   $$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & -2 \\ -4 & 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
   Donc $u\big(u(b)\big) = -b$

$$mat_{\beta'}(u)=\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} u(a) & u(b) & u(u(b)) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} a \\ b \\ u(b) \end{array}$$

Allez à : Exercice 44

Correction exercice 45.

1. Les coordonnées de $u(x)$ dans la base canonique sont
$$\begin{pmatrix} x_2-2x_3 \\ 2x_1-x_2+4x_3 \\ x_1-x_2+3x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$
Donc la matrice de u dans la base canonique est
$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$
2. Soit $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ les coordonnées d'un vecteur $x=(x_1,x_2,x_3)$ dans la base canonique
$$x=(x_1,x_2,x_3)\in\ker(u-Id)\Leftrightarrow (A-I)X=O\Leftrightarrow\begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases} -x_1+x_2-2x_3=0 \\ 2x_1-2x_2+4x_3=0 \\ x_1-x_2+2x_3=0 \end{cases}\Leftrightarrow x_1-x_2+2x_3=0\Leftrightarrow x_1=x_2-2x_3$$
Donc $x=(x_2-2x_3,x_2,x_3)=x_2(1,1,0)+x_3(-2,0,1)$
On pose $a=(1,1,0)$ et $b=(-2,0,1)$, (a,b) est une famille de deux vecteurs non proportionnels, donc libre, qui engendrent $\ker(u-Id)$, c'est une base de $\ker(u-Id)$.
3. Soit $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ les coordonnées d'un vecteur $x=(x_1,x_2,x_3)$ dans la base canonique
$$x=(x_1,x_2,x_3)\in\ker(u)\Leftrightarrow AX=O\Leftrightarrow\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases} x_2-2x_3=0 \\ 2x_1-x_2+4x_3=0 \\ x_1-x_2+3x_3=0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases} x_2=2x_3 \\ 2x_1-2x_3+4x_3=0 \\ x_1-2x_3+3x_3=0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x_2=2x_3 \\ 2x_1+2x_3=0 \\ x_1+x_3=0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x_1=-x_3 \\ x_2=2x_3 \end{cases}$$
Donc $x=(-x_3,2x_3,x_3)$, si on pose $c=(-1,2,1)$ alors $\ker(u)=Vect(c)$
4.
$$\det(a,b,c)=\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-2-(-2+1)=-1\neq 0$$
En développant par rapport à la première colonne, donc (a,b,c) est une base de $\mathbb{R}^3$.
5. $u(a)-a=0_{\mathbb{R}^3}\Rightarrow u(a)=a$, de même $u(b)=b$ et $u(c)=0_{\mathbb{R}^3}$ donc
$$D=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
6. D'après la matrice de u dans la base β', $Im(u)=Vect(a,b)=\ker(u-Id)$
7. D'après le théorème du rang
$$\dim(\ker(u))+\dim\big(Im(u)\big)=\dim(\mathbb{R}^3)$$
Il reste à montrer que l'intersection de $\ker(u)$ et de $Im(u)$ est le vecteur nul.
$$x\in\ker(u)\cap Im(u)\Leftrightarrow\begin{cases} x\in\ker(u) \\ x\in Im(u) \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x\in\ker(u) \\ x\in\ker(u-Id) \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} u(x)=0_{\mathbb{R}^3} \\ u(x)-x=0_{\mathbb{R}^3} \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} u(x)=0_{\mathbb{R}^3} \\ u(x)=x \end{cases}\Leftrightarrow x=0_{\mathbb{R}^3}$$

On a donc $\ker(u) \oplus Im(u) = \mathbb{R}^3$.

Allez à : Exercice 45

Correction exercice 46.

1.

$$A = \begin{pmatrix} -10 & 3 & 15 \\ -2 & 0 & 3 \\ -6 & 2 & 9 \end{pmatrix}$$

2.

$$x = (x_1, x_2, x_3) \in \ker(u) \Leftrightarrow u(x) = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow \begin{cases} -10x_1 + 3x_2 + 15x_3 = 0 \\ -2x_1 + 3x_3 = 0 \\ -6x_1 + 2x_2 + 9x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{matrix} \\ 5L_2 - L_1 \\ L_3 - 3L_2 \end{matrix} \begin{cases} -10x_1 + 3x_2 + 15x_3 = 0 \\ 12x_2 = 0 \\ 2x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -10x_1 + 15x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{3}{2}x_3 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

$$x = \left(\frac{3}{2}x_3, 0, x_3\right) = \frac{x_3}{2}(3,0,2)$$

On pose $a = (3,0,2)$ et alors $\ker(u) = Vect(a)$ et $\dim(\ker(u)) = 1$

D'après le théorème du rang, $\dim(\ker(u)) + \dim\big(Im(u)\big) = \dim(\mathbb{R}^3) \Leftrightarrow \dim\big(Im(u)\big) = 2$

3. Le problème est de savoir si $\ker(u) \cap im(u) = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$ car $\dim(\ker(u)) + \dim\big(Im(u)\big) = \dim(\mathbb{R}^3)$

Première méthode :

On cherche une base de $Im(u)$ (ce qui revient à choisir deux des trois vecteurs parmi $u(e_1), u(e_2)$ et $u(e_3)$ car ces vecteurs sont deux à deux non proportionnels et que la dimension de l'image de u est 2, puis de montrer que ces trois vecteurs forment une base de $\mathbb{R}^3$, c'est long, on passe)

Deuxième méthode

D'après la matrice, il est clair que $a = u(e_2)$, comme $\ker(u) = Vect(a)$ on a $\ker(u) \subset im(u)$ et donc $\ker(u) \cap Im(u) \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$, ce qui montre que l'on n'a pas $\ker(u) \oplus Im(u) = \mathbb{R}^3$.

4.

Première méthode

On pose $X_a = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $X_b = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ les coordonnées de a et de b dans la base canonique et on résout le système

$$u(b) = a \Leftrightarrow AX_b = X_a \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -10 & 3 & 15 \\ -2 & 0 & 3 \\ -6 & 2 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

C'est long

Deuxième méthode

On remarque que $u(e_2) = a$ donc un vecteur b qui vérifie $u(b) = a$ est par exemple $b = e_2$

Remarque :

Ce n'est pas le seul mais l'énoncé demande « un vecteur b tel que $u(b) = a$ »

5. $u(0_{\mathbb{R}^3}) = 0_{\mathbb{R}^3} = -0_{\mathbb{R}^3}$ donc $0_{\mathbb{R}^3} \in E_{-1}$

Soit $x_1 \in E_{-1}$ et $x_2 \in E_{-1}$, on a $u(x_1) = -x_1$ et $u(x_2) = -x_2$, alors pour tout $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ on a

$$u(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 u(x_1) + \lambda_2 u(x_2) = \lambda_1(-x_1) + \lambda_2(-x_2) = -(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)$$

Donc

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in E_{-1}$$

Et E_{-1} est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$

Autre méthode :

$E_{-1} = \ker(u + id)$ donc E_{-1} est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

On pose $X_c=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ les coordonnées de c dans la base canonique

$$u(c)=-c\Leftrightarrow AX_c=-X_c\Leftrightarrow\begin{pmatrix}-10&3&15\\-2&0&3\\-6&2&9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}-10x_1+3x_2+15x_3=-x_1\\-2x_1+3x_3=-x_2\\-6x_1+2x_2+9x_3=-x_3\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-9x_1+3x_2+15x_3=0\\-2x_1+x_2+3x_3=0\\-6x_1+2x_2+10x_3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-3x_1+x_2+5x_3=0\\-2x_1+x_2+3x_3=0\\-3x_1+x_2+5x_3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-3x_1+x_2+5x_3=0\\-2x_1+x_2+3x_3=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{matrix}L_1\\L_2-L_1\end{matrix}\begin{cases}-3x_1+x_2+5x_3=0\\x_1-2x_3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-6x_3+x_2+5x_3=0\\x_1=2x_3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_2=x_3\\x_1=2x_3\end{cases}$$

$$x=(2x_3,x_3,x_3)=x_3(2,1,1)$$

On prend $c=(2,1,1)$ et on a $E_{-1}=Vect(c)$

6.

$$\alpha a+\beta b+\gamma c=0_{\mathbb{R}^3}\Leftrightarrow\alpha(3,0,2)+\beta(0,1,0)+\gamma(2,1,1)=(0,0,0)\Leftrightarrow\begin{cases}3\alpha+2\gamma=0\\\beta+\gamma=0\\2\alpha+\gamma=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=0\\\beta=0\\\gamma=0\end{cases}$$

(a,b,c) est une famille libre dans un espace vectoriel de dimension 3, c'est une base de $\mathbb{R}^3$.

7.

$$u(a)=0_{\mathbb{R}^3},u(b)=a,u(c)=-c$$

Donc

$$A'=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

$$A'=P^{-1}AP$$

Où

$$P=\begin{pmatrix}3&0&2\\0&1&1\\2&0&1\end{pmatrix}$$

Allez à : Exercice 46

Correction exercice 47.

1. $\det(a,b,c,d)=\begin{vmatrix}1&1&2&-1\\-1&-1&-2&2\\0&-1&1&0\\0&0&1&0\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&1&-1\\-1&-1&2\\0&-1&0\end{vmatrix}$ en développant par rapport à la dernière ligne. Puis $\det(e'_1,e'_2,e'_3,e'_4)=-\begin{vmatrix}1&-1\\-1&2\end{vmatrix}=-1$, de nouveau en développant par rapport à la dernière ligne. Ce déterminant est non nul donc (e'_1,e'_2,e'_3,e'_4) est une base de $\mathbb{R}^4$.
2.

Les coordonnées de $f(a)$ dans la base β sont : $\begin{pmatrix}-6&-3&0&6\\6&3&0&-6\\0&0&-3&3\\0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\3\\0\\0\end{pmatrix}$

$$f(a)=-3e_1+3e_2=-3(e_1-e_2)=-3a$$

Les coordonnées de $f(b)$ dans la base β sont : $\begin{pmatrix}-6&-3&0&6\\6&3&0&-6\\0&0&-3&3\\0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\3\\3\\0\end{pmatrix}$

$$f(b)=-3e_1+3e_2+3e_3=-3(e_1-e_2-e_3)=-3b$$

Les coordonnées de $f(c)$ dans la base β sont : $\begin{pmatrix} -6 & -3 & 0 & 6 \\ 6 & 3 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$f(c) = 0_{\mathbb{R}^4}$$

Les coordonnées de $f(d)$ dans la base β sont : $\begin{pmatrix} -6 & -3 & 0 & 6 \\ 6 & 3 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$f(d) = 0_{\mathbb{R}^4}$$

3. $Mat_{\beta'}(f) = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Allez à : Exercice 47

Correction exercice 48.

1. $\det(a,b,c,d) = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$, en additionnant , $C_3 + C_2$

Puis en développant par rapport à la troisième ligne :

$$\det(a,b,c,d) = -(-1)\begin{array}{c} \begin{matrix} C_1 & C_2 & C_3 \end{matrix} \\ \begin{vmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \begin{matrix} C_1 & C_2 & C_3 + C_1 \end{matrix} \\ \begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \end{array} = 1 \neq 0$$

Donc (a,b,c,d) est une base de $\mathbb{R}^4$.

2. $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$$X = PX' \Leftrightarrow PX' = X \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{matrix} \begin{cases} -x_1' + x_2' - 2x_3' + 2x_4' = x_1 \\ x_1' - 2x_2' + 3x_3' - x_4' = x_2 \\ -x_2' + x_3' = x_3 \\ -x_1' + x_2' - x_3' + x_4' = x_4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 + L_1 \\ L_3 \\ L_4 + L_2 \end{matrix} \begin{cases} -x_1' + x_2' - 2x_3' + 2x_4' = x_1 \\ -x_2' + x_3' + x_4' = x_1 + x_2 \\ -x_2' + x_3' = x_3 \\ -x_2' + 2x_3' = x_2 + x_4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 - L_2 \\ L_4 - L_2 \end{matrix} \begin{cases} -x_1' + x_2' - 2x_3' + 2x_4' = x_1 \\ -x_2' + x_3' + x_4' = x_1 + x_2 \\ -x_4' = -x_1 - x_2 + x_3 \\ x_3' - x_4' = -x_1 + x_4 \end{cases}$$

L_3 donne $x_4' = x_1 + x_2 - x_3$

L_4 donne $x_3' = -x_1 + x_4 + x_4' = x_2 - x_3 + x_4$

L_2 donne $x_2' = x_3' + x_4' - x_1 - x_2 = x_2 - x_3 + x_4 + x_1 + x_2 - x_3 - x_1 - x_2 = x_2 - 2x_3 + x_4$

L_1 donne

$$x_1' = x_2' - 2x_3' + 2x_4' - x_1 = x_2 - 2x_3 + x_4 - 2(x_2 - x_3 + x_4) + 2(x_1 + x_2 - x_3) - x_1$$
$$= x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4$$

D'où l'on déduit que $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

3. Les coordonnées de $u(a)$ dans la base (e_1, e_2, e_3, e_4) sont : $\begin{pmatrix} -3 & -2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Donc $u(a) = e_1 - e_2 + e_4 = -(e_1 + e_2 - e_4) = -a$

Les coordonnées de $u(b)$ dans la base (e_1, e_2, e_3, e_4) sont : $\begin{pmatrix} -3 & -2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

Donc $u(b) = -2e_1 + 3e_2 + e_3 - 2e_4 = a - b$

Les coordonnées de $u(c)$ dans la base (e_1, e_2, e_3, e_4) sont : $\begin{pmatrix} -3 & -2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Donc $u(c) = 3e_1 - 5e_2 - 2e_3 + 2e_4 = b - c$

Les coordonnées de $u(d)$ dans la base (e_1, e_2, e_3, e_4) sont : $\begin{pmatrix} -3 & -2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

Donc $u(d) = -4e_1 + 4e_2 + e_3 - 2e_4 = c - d$

4.

$$T = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Autre méthode

$$T = P^{-1}AP = (P^{-1}A)P = \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & -2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

5.

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ donc } N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Et } N^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Comme $A = P^{-1}TP$, $A + I = PTP^{-1} + PIP^{-1} = P(T + I)P^{-1} = PNP^{-1}$

Donc $(A + I)^4 = PNP^{-1}PNP^{-1}PNP^{-1}PNP^{-1} = PN^4P^{-1} = POP^{-1} = O$, la matrice nulle.

Allez à : Exercice 48

Correction exercice 49.

1.

$$\alpha a+\beta b+\gamma c+\delta d=0_{\mathbb{R}^4} \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{matrix}\begin{cases} -2\alpha + 2\gamma + 3\delta = 0 \\ -\alpha + \beta = 0 \\ -\alpha + \gamma + \delta = 0 \\ -\alpha - \beta + \gamma + 2\delta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ 2L_2 - L_1 \\ 2L_3 - L_1 \\ 2L_4 - L_2 \end{matrix}\begin{cases} -2\alpha + 2\gamma + 3\delta = 0 \\ 2\beta - 2\gamma - 3\delta = 0 \\ -\delta = 0 \\ -2\beta + \delta = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \gamma = 0 \\ \delta = 0 \\ \beta = 0 \end{cases}$$

Il s'agit d'une famille libre à 4 vecteurs dans un espace de dimension 4, c'est une base de $\mathbb{R}^4$.

2. Les coordonnées de $u(a)$ dans β sont

$$AX_a = \begin{pmatrix} -7 & 6 & 6 & 6 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 2 & 3 \\ -6 & 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = 2X_a$$

Donc $u(a) = 2a$

Les coordonnées de $u(b)$ dans β sont

$$AX_b = \begin{pmatrix} -7 & 6 & 6 & 6 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 2 & 3 \\ -6 & 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2X_b$$

Donc $u(b) = 2b$

Les coordonnées de $u(c)$ dans β sont

$$AX_c = \begin{pmatrix} -7 & 6 & 6 & 6 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 2 & 3 \\ -6 & 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -X_c$$

Donc $u(c) = -c$

Les coordonnées de $u(c)$ dans β sont

$$AX_d = \begin{pmatrix} -7 & 6 & 6 & 6 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 2 & 3 \\ -6 & 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = -X_d$$

Donc $u(d) = -d$

3.

$$D = Mat_{\beta'}(u) = \begin{array}{c} \begin{matrix} u(a) & u(b) & u(c) & u(d) \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \end{matrix}$$

4.

$$P = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

5.

$$Y = PX \Leftrightarrow\Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{matrix}\begin{cases} -2x_1 + 2x_3 + 3x_4 = y_1 \\ -x_1 + x_2 = y_2 \\ -x_1 + x_3 + x_4 = y_3 \\ -x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = y_4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ 2L_2 - L_1 \\ 2L_3 - L_1 \\ 2L_4 - L_1 \end{matrix}\begin{cases} -2x_1 + 2x_3 + 3x_4 = y_1 \\ 2x_2 - 2x_3 - 3x_4 = -y_1 + 2y_2 \\ -x_4 = -y_1 + 2y_3 \\ -2x_2 + x_4 = -y_1 + 2y_4 \end{cases}$$

D'après L_3

$$x_4 = y_1 - 2y_3$$

Ce que l'on remplace dans L_4

$$-2x_2 + y_1 - 2y_3 = -y_1 + 2y_4 \Leftrightarrow -2x_2 = -2y_1 + 2y_3 + 2y_4 \Leftrightarrow x_2 = y_1 - y_3 - y_4$$

On remplace ces deux résultats dans L_2

$$2(y_1 - y_3 - y_4) - 2x_3 - 3(y_1 - 2y_3) = -y_1 + 2y_2 \Leftrightarrow -2x_3 = 2y_2 - 4y_3 + 2y_4$$
$$\Leftrightarrow x_3 = -y_2 + 2y_3 - y_4$$

Et enfin on remet le tout dans L_1

$$-2x_1 + 2(-y_2 + 2y_3 - y_4) + 3(y_1 - 2y_3) = y_1 \Leftrightarrow -2x_1 = -2y_1 + 2y_2 + 2y_3 + 2y_4$$
$$\Leftrightarrow x_1 = y_1 - y_2 - y_3 - y_4$$

Donc

$$\begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 - y_3 - y_4 \\ x_2 = y_1 - y_3 - y_4 \\ x_3 = -y_2 + 2y_3 - y_4 \\ x_4 = y_1 - 2y_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$$

Donc

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

6.

$$P^{-1}AP = P^{-1}\begin{pmatrix} -7 & 6 & 6 & 6 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 2 & 3 \\ -6 & 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 & 0 & -2 & -3 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & -1 \\ -2 & -2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Allez à : Exercice 49

Correction exercice 50.

1. $c = u(b) = u(e_1) = \mathrm{e}_1 + \mathrm{e}_2$, voir la matrice.

Les coordonnées de $d = u(c)$ dans la base β sont : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\det(a,b,c,d) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

En développant par rapport à la quatrième colonne.

$$\det(a,b,c,d) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

En développant par rapport à la troisième ligne.

Donc (a,b,c,d) est une base de $\mathbb{R}^4$.

2. $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$X=PX'\Leftrightarrow PX'=X\Leftrightarrow\begin{cases}x_1'+x_2'+x_3'+x_4'=x_1\\ x_1'+x_3'+x_4'=x_2\\ x_1'+x_4'=x_3\\ x_4'=x_4\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x_2'=x_1-x_1'-x_3'-x_4'=x_1-(x_3-x_4)-(x_2-x_3)-x_4\\ x_3'=x_2-x_1'-x_4'=x_2-x_3\\ x_1'=x_3-x_4'=x_3-x_4\\ x_4'=x_4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1'=x_3-x_4\\ x_2'=x_1-x_2\\ x_3'=x_2-x_3\\ x_4'=x_4\end{cases}$$

Donc $P^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&1&-1\\1&-1&0&0\\0&1&-1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$

3. Les coordonnées de $u(a)$ dans la base β sont $\begin{pmatrix}1&0&-1&1\\1&0&-1&1\\0&1&-1&1\\0&1&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$

   Donc $u(a)=0_{\mathbb{R}^4}$
   $u(b)=c$, on a aussi $u(b)=e_1+e_2$ c'est donné par la deuxième colonne de la matrice, on en aura besoin plus tard.
   $u(c)=u\big(u(b)\big)=u^2(b)=d$,
   $$u(d)=u\big(u^2(b)\big)=u^2\big(u(b)\big)=u^2(e_1+e_2)=u\big(u(e_1)+u(e_2)\big)=u(e_1+e_2+e_3+e_4)$$
   $$=u(e_1)+u(e_2)+u(e_3)+u(e_4)=e_1=a$$
   Il suffit de faire la somme des quatre colonnes pour trouver les coordonnées de $u(d)$ dans la base β.
4.
$$N=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}$$
5.
$$N^2=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}$$
$$N^4=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$
   Or $A=PNP^{-1}$ donc $A^4=(PNP^{-1})^4=PNP^{-1}PNP^{-1}PNP^{-1}PNP^{-1}=PN^4P^{-1}=O$
6. Soit $x\in\mathbb{R}^4$, il s'exprime sous la forme $x=x_1'a+x_2'b+x_3'c+x_4'd$ dans la base β' ?
$$x\in\ker(u)\Leftrightarrow u(x)=0_{\mathbb{R}^4}\Leftrightarrow NX'=O\Leftrightarrow\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\\x_3'\\x_4'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x_4'\\0\\x_2'\\x_3'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$
   Donc $x=x_1'a$, $\ker(u)$ est la droite vectorielle engendrée par le vecteur a.
7. $Im(u)=Vect\big(u(a),u(b),u(c),u(d)\big)=Vect(0_{\mathbb{R}^4},c,d,a)=Vect(a,c,d)$

(a,c,d) est une famille (car (a,b,c,d) est libre) et génératrice de $Im(u)$, c'est une base de $Im(u)$.
Allez à : Exercice 50

Correction exercice 51.

1. Soit $x=(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\ker(u)$

$$u(x)=0_{\mathbb{R}^4}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}-x_1-x_2=0\\0=0\\-2x_1-x_3+x_4=0\\-x_1=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x_1=0\\x_2=0\\x_3=x_4\end{array}\right.$$

$$x=(0,0,x_4,x_4)=x_4(0,0,1,1)$$

On pose $a=(0,0,1,1)$

2. On cherche les vecteurs $x=(x_1,x_2,x_3,x_4)$ tels que $a=u(x)$

$$u(x)=a\Leftrightarrow AX=X_a\Leftrightarrow\begin{pmatrix}-1&-1&0&0\\0&0&0&0\\-2&0&-1&1\\-1&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}-x_1-x_2=0\\0=0\\-2x_1-x_3+x_4=1\\-x_1=1\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}x_1=-1\\x_2=1\\x_4=1+x_3\end{array}\right.$$

On prend un x_3 quelconque, $x_3=0$ par exemple

On pose $b=(-1,1,0,1)$

3. Première méthode

En regardant la matrice, il est clair que $u(e_3)=-e_3$, donc $c=e_3$ convient

Deuxième méthode

On cherche les vecteurs $x=(x_1,x_2,x_3,x_4)$ tels que $u(x)=-x$

$$u(x)=-x\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}-x_1-x_2=-x_1\\0=-x_2\\-2x_1-x_3+x_4=-x_3\\-x_1=-x_4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x_2=0\\x_4=x_1\\x_4=2x_1\end{array}\right.\Leftrightarrow x_1=x_2=x_4=0$$

$$x=(0,0,x_3,0)=x_3(0,0,1,0)=x_3e_3$$

4.

$$\det(a,b,c,d)=\begin{vmatrix}0&-1&0&1\\0&1&0&0\\1&0&1&1\\1&1&0&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&0&1\\1&1&1\\1&0&1\end{vmatrix}$$

En développant par rapport à la deuxième ligne

$$\det(a,b,c,d)=\begin{vmatrix}0&-1&0&1\\0&1&0&0\\1&0&1&1\\1&1&0&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1\\1&0\end{vmatrix}=-1\neq0$$

En développant par rapport à la première ligne

Par conséquent β' est une base de $\mathbb{R}^4$.

5. Les coordonnées de $u(d)$ dans la base β sont

$$AX_d=\begin{pmatrix}-1&-1&0&0\\0&0&0&0\\-2&0&-1&1\\-1&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\\-2\\-1\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}=X_c-X_d$$

Donc

$$u(d)=-c-d$$

6. On en déduit que

$$T=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&-1&-1\\0&0&0&-1\end{pmatrix}$$

7. Le rang de A est le même que celui de T, la matrice T a trois colonnes libres, (les seconde, troisième et quatrième) donc son rang est 3, donc le rang de A est 3.

8.

Les coordonnées de $u(f)$ dans la base β sont

$$AX_f=\begin{pmatrix}-1&-1&0&0\\0&0&0&0\\-2&0&-1&1\\-1&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\\-2\\-2\end{pmatrix}$$

Donc $u(f)=-e_1-2e_3-2e_4$

Les coordonnées de $u^2(f)$ dans la base β sont

$$A^2X_f=\begin{pmatrix}-1&-1&0&0\\0&0&0&0\\-2&0&-1&1\\-1&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\0\\-2\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\2\\1\end{pmatrix}$$

Donc $u^2(f)=e_1+2e_3+e_4$

Les coordonnées de $u^3(f)$ dans la base β sont

$$A^3X_f=A(A^2X_f)=\begin{pmatrix}-1&-1&0&0\\0&0&0&0\\-2&0&-1&1\\-1&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\2\\1\end{pmatrix}=A(AX_f)=\begin{pmatrix}-1\\0\\-3\\-1\end{pmatrix}$$

Donc $u^3(f)=-2e_1-4e_3-2e_4$

$$\det\left(f,u(f),u^2(f),u^3(f)\right)=\begin{vmatrix}2&-1&1&-1\\-1&0&0&0\\-1&-2&2&-3\\1&-2&1&-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1&1&-1\\-2&-2&-3\\-2&1&-1\end{vmatrix}$$

En développant par rapport à la deuxième ligne, puis en remplaçant la deuxième colonne par elle-même plus la première colonne et la troisième par elle-même moinss la première colonne

$$\det\left(f,u(f),u^2(f),u^3(f)\right)=\begin{vmatrix}-1&0&0\\-2&-4&-1\\-2&-1&1\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}-4&-1\\-1&1\end{vmatrix}=5\neq 0$$

Donc $\left(f,u(f),u^2(f),u^3(f)\right)$ est une base de $\mathbb{R}^4$

9.

Les coordonnées de $u^4(f)$ dans la base β sont

$$A^4X_f=\begin{pmatrix}-1&-1&0&0\\0&0&0&0\\-2&0&-1&1\\-1&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\0\\-3\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\4\\1\end{pmatrix}=-2\begin{pmatrix}-1\\0\\-3\\-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\0\\2\\1\end{pmatrix}$$

Ce qui montre que $u^4(f)=-2u^3(f)-u^2(f)$

$$C=\begin{array}{c}\begin{matrix}u(f)&u^2(f)&u^3(f)&u^4(f)\end{matrix}\\\begin{pmatrix}0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&1&0&-1\\0&0&1&-2\end{pmatrix}\end{array}\begin{matrix}f\\u(f)\\u^2(f)\\u^3(f)\end{matrix}$$

10. Soit Q la matrice de passage de β à β''

$$C=Q^{-1}AQ\Leftrightarrow A=QCQ^{-1}$$

D'autre part $A=PTP^{-1}$

Donc

$$PTP^{-1}=QCQ^{-1}$$

Ce qui entraine que

$$T=P^{-1}QCQ^{-1}P=(Q^{-1}P)^{-1}C(Q^{-1}P)$$

Soit $R=Q^{-1}P$

Allez à : Exercice 51

Correction exercice 52.

1. Soit $x=(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\ker(u)$
$$u(x)\in\ker(u)\Leftrightarrow\begin{pmatrix}3&-1&1&-3\\1&1&-1&-1\\0&1&-1&0\\1&0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}3x_1-x_2+x_3-3x_4=0\\x_1+x_2-x_3-x_4=0\\x_2-x_3=0\\x_1-x_4=0\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}3x_1-x_2+x_3-3x_4=0\\x_1+x_2-x_3-x_4=0\\x_2=x_3\\x_1=x_4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-x_2+x_3=0\\x_1-x_4=0\\x_2=x_3\\x_1=x_4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=x_4\\x_2=x_3\end{cases}$$
Donc $x=(x_4,x_3,x_3,x_4)=x_3(0,1,1,0)+x_4(1,0,0,1)$
On pose $a=(0,1,1,0)$ et $b=(1,0,0,1)$, c'est deux vecteurs engendrent $\ker(u)$ et ils ne sont proportionnels, ils forment une famille libre et génératrice de $\ker(u)$, c'est une base.
2. Soit $x=(x_1,x_2,x_3,x_4)\in E_1$
$$u(x)\in E_1\Leftrightarrow\begin{pmatrix}3&-1&1&-3\\1&1&-1&-1\\0&1&-1&0\\1&0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}3x_1-x_2+x_3-3x_4=x_1\\x_1+x_2-x_3-x_4=x_2\\x_2-x_3=x_3\\x_1-x_4=x_4\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}2x_1-x_2+x_3-3x_4=0\\x_1-x_3-x_4=0\\x_2-2x_3=0\\x_1-2x_4=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4x_4-2x_3+x_3-3x_4=0\\2x_4-x_3-x_4=0\\x_2=2x_3\\x_1=2x_4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_3-x_4=0\\-x_3-x_4=0\\x_2=2x_3\\x_1=2x_4\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=2x_4\\x_2=2x_4\\x_3=x_4\end{cases}$$
Donc $x=(2x_4,2x_4,x_4,x_4)=x_4=(2,2,1,1)$ par conséquent si on pose $c=(2,2,1,1)$ on a $E_1=vect(c)$
3. La matrice de $\ker((u-id)^2)$dans la base β est $(A-I)^2$
$$(A-I)^2=\begin{pmatrix}2&-1&1&-3\\1&0&-1&-1\\0&1&-2&0\\1&0&0&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-1&1&-3\\1&0&-1&-1\\0&1&-2&0\\1&0&0&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-1&1&1\\1&-2&3&-1\\1&-2&3&-1\\0&-1&1&1\end{pmatrix}$$
Donc
$$x=(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\ker((u-id)^2)\Leftrightarrow\begin{pmatrix}0&-1&1&1\\1&-2&3&-1\\1&-2&3&-1\\0&-1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}-x_2+x_3+x_4=0\\x_1-2x_2+3x_3-x_4=0\\x_1-2x_2+3x_3-x_4=0\\-x_2+x_3+x_4=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1-2x_2+3x_3-x_4=0\\-x_2+x_3+x_4=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=2x_2-3x_3+x_4\\x_2=x_3+x_4\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=2x_3+2x_4-3x_3+x_4=-x_3+3x_4\\x_2=x_3+x_4\end{cases}$$
Donc
$$x=(-x_3+3x_4,x_3+x_4,x_3,x_4)=x_3(-1,1,1,0)+x_4(3,1,0,1)$$
Le tout est de ne pas prendre $x_3=x_4$ sinon on retombe un vecteur proportionnel à $(2,2,1,1)$ on prend n'importe que quoi d'autre par exemple $x_3=1$ et $x_4=0$
Ensuite on regarde les coordonnées de $d=(-1,1,1,0)$ dans la base canonique
soit AX_d
$$AX_d=\begin{pmatrix}3&-1&1&-3\\1&1&-1&-1\\0&1&-1&0\\1&0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\-1\\0\\-1\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}2\\2\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\0\end{pmatrix}=-X_c+X_d$$

4.
$$\det(a,b,c,d)=\begin{vmatrix}1&0&2&-1\\0&1&2&1\\0&1&1&1\\1&0&1&0\end{vmatrix}$$
En soustrayant la quatrième colonne avec la seconde
$$\det(a,b,c,d)=\begin{vmatrix}1&0&2&-1\\0&1&2&0\\0&1&1&0\\1&0&1&0\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}0&1&2\\0&1&1\\1&0&1\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&2\\1&1\end{vmatrix}=1\neq 0$$
Donc (a,b,c,d) est une base de $\mathbb{R}^4$.

5.
$$T=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&-1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

Allez à : Exercice 52

Correction exercice 53.

1.
$$x=(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\ker(u)\Leftrightarrow u(x)=0_{\mathbb{R}^4}\Leftrightarrow AX=O\Leftrightarrow\begin{pmatrix}2&-1&0&1\\1&0&0&1\\0&0&1&0\\-3&1&0&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}2x_1-x_2+x_4=0\\x_1+x_4=0\\x_3=0\\-3x_1+x_2-2x_4=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x_1-x_2+x_4=0\\x_1=-x_4\\x_3=0\\-3x_1+x_2-2x_4=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-2x_4-x_2+x_4=0\\x_1=-x_4\\x_3=0\\3x_4+x_2-2x_4=0\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}x_2=-x_4\\x_1=-x_4\\x_3=0\\x_2=-x_4\end{cases}$$
$$x=(x_1,x_2,x_3,x_4)=(-x_4,-x_4,0,x_4)=x_4(-1,-1,0,1)$$
$a=(-1,-1,0,1)$ engendre $\ker(u)$.

2. $u(0_{\mathbb{R}^4})=0_{\mathbb{R}^4}=\lambda 0_{\mathbb{R}^4}$, donc $0_{\mathbb{R}^4}\in E_\lambda$
Soient x et y deux vecteurs de E_λ, on a $u(x)=\lambda x$ et $f(y)=\lambda y$
Par conséquent
$$u(\alpha x+\beta y)=\alpha u(x)+\beta u(y)=\alpha\lambda x+\beta\lambda y=\lambda(\alpha x+\beta y)$$
Ce qui montre que $\alpha x+\beta y\in E_\lambda$
E_λ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

3.
$$x=(x_1,x_2,x_3,x_4)\in E_{-1}\Leftrightarrow u(x)=-x\Leftrightarrow AX=-X\Leftrightarrow\begin{pmatrix}2&-1&0&1\\1&0&0&1\\0&0&1&0\\-3&1&0&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}2x_1-x_2+x_4=-x_1\\x_1+x_4=-x_2\\x_3=-x_3\\-3x_1+x_2-2x_4=-x_4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x_1-x_2+x_4=0\\x_1+x_2+x_4=0\\2x_3=0\\-3x_1+x_2-x_4=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x_1-x_2+x_4=0\\x_1+x_2+x_4=0\\2x_3=0\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow L_2+L_1\begin{cases}3x_1-x_2+x_4=0\\4x_1+2x_4=0\\x_3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x_1-x_2+x_4=0\\x_4=-2x_1\\x_3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_2=x_1\\x_4=-2x_1\\x_3=0\end{cases}$$
$$x=(x_1,x_2,x_3,x_4)=(x_1,x_1,0,-2x_1)=x_1(1,1,0,-2)$$

$b=(1,1,0,-2)$ engendre E_{-1}.

$$x=(x_1,x_2,x_3,x_4)\in E_1 \Leftrightarrow u(x)=x \Leftrightarrow AX=X \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1-x_2+x_4=x_1 \\ x_1+x_4=x_2 \\ x_3=x_3 \\ -3x_1+x_2-2x_4=x_4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1-x_2+x_4=0 \\ x_1-x_2+x_4=0 \\ 0=0 \\ -3x_1+x_2-3x_4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix}\begin{cases} x_1-x_2+x_4=0 \\ -3x_1+x_2-3x_4=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2+3L_2 \end{matrix}\begin{cases} x_1-x_2+x_4=0 \\ -2x_2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=-x_4 \\ x_2=0 \end{cases}$$

$$x=(x_1,x_2,x_3,x_4)=(-x_4,0,x_3,x_4)=x_3(0,0,1,0)+x_4(-1,0,0,1)$$

On pose $c=(0,0,1,0)$ et $d=(-1,0,0,1)$, (c,d) engendrent E_1, de plus ils ne sont pas proportionnels, donc ils forment une famille libre, c'est une base de E_1.

4. Première méthode

$$\det(a,b,c,d)=\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

En développant par rapport à la troisième colonne

$$\det(a,b,c,d)=\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}\begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}=\begin{matrix} L_1+L_3 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=-1\neq 0$$

En développant par rapport à la troisième colonne

Donc (a,b,c,d) est une base de $\mathbb{R}^4$.

Deuxième méthode

$$\alpha a+\beta b+\gamma c+\delta d=0_{\mathbb{R}^4} \Leftrightarrow \begin{cases} -\alpha+\beta-\delta=0 \\ -\alpha+\beta=0 \\ \gamma=0 \\ \alpha-2\beta+\delta=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\alpha+\beta-\delta=0 \\ \alpha=\beta \\ \gamma=0 \\ \alpha-2\beta+\delta=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\delta=0 \\ \alpha=\beta \\ \gamma=0 \\ -\beta+\delta=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \delta=0 \\ \alpha=\beta \\ \gamma=0 \\ \beta=0 \end{cases}$$

(a,b,c,d) est une famille libre à 4 vecteurs dans un espace vectoriel de dimension 4, c'est une base.

5. D'après les questions précédentes on a

$$u(a)=0_{\mathbb{R}^4};u(b)=-b;u(c)=c\ \text{ et } u(d)=d$$

Donc

$$Mat_{\beta'}(u)=\begin{array}{c} \begin{matrix} u(a) & u(b) & u(c) & u(d) \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}\begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \end{matrix}$$

Allez à : Exercice 53

Correction exercice 54.

1.

$$\det(a_1,a_2,a_3,c)=\begin{array}{c}\begin{matrix} C_1 & C_2 & C_3 & C_4 \end{matrix}\\ \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 5 & -1 \\ -2 & 0 & -3 & 0 \end{vmatrix}\end{array}=\begin{array}{c}\begin{matrix} C_1 & C_2 & C_3-C_1 & C_4+C_1 \end{matrix}\\ \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 & 2 \\ -2 & 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}\end{array}=\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 5 \\ -2 & 0 & -3 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{matrix} L_1 \\ L_2-L_1 \\ L_3 \end{matrix}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & -3 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{vmatrix}=-1$$

$$P=\begin{pmatrix}1&0&1&-1\\2&1&3&-1\\3&1&5&-1\\-2&0&-3&0\end{pmatrix}$$

2. Les coordonnées de $u(a_1)$ dans la base β sont $\begin{pmatrix}-1&2&-2&-2\\-2&3&-2&-2\\-2&2&-1&-2\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\3\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\-2\end{pmatrix}$

   Donc $u(a_1)=e_1+2e_2+3e_3-2e_4=a_1$

   Les coordonnées de $u(a_2)$ dans la base β sont $\begin{pmatrix}-1&2&-2&-2\\-2&3&-2&-2\\-2&2&-1&-2\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}$

   Donc $u(a_2)=e_2+e_3=a_2$

   Les coordonnées de $u(a_3)$ dans la base β sont $\begin{pmatrix}-1&2&-2&-2\\-2&3&-2&-2\\-2&2&-1&-2\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\3\\5\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3\\5\\-3\end{pmatrix}$

   Donc $u(a_3)=e_1+3e_2+5e_3-3e_4=a_3$

   Les coordonnées de $u(c)$ dans la base β sont $\begin{pmatrix}-1&2&-2&-2\\-2&3&-2&-2\\-2&2&-1&-2\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}$

   Donc $u(c)=e_1+e_2+e_3=-c$

$$D=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}$$

3. $u(a_1)=a_1\in F$, $u(a_2)=a_2\in F$ et $u(a_3)=a_3\in F$, (a_1,a_2,a_3) est une base de F donc pour tout $x\in F$, $u(x)\in F$.
   Pour tout $x\in F$, $v(x)=u(x)\in F$, et v est linéaire donc v est un endomorphisme de F.

$$Mat_{(a_1,a_2,a_3)}(v)=\begin{array}{c}\begin{matrix}u(a_1)&u(a_2)&u(a_3)\end{matrix}\\\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\end{array}\begin{matrix}a_1\\a_2\\a_3\end{matrix}$$

4. (a_1,a_2,a_3) est une base de F, (c) est une base de $Vect(c)$, et (a_1,a_2,a_3,c) est une base de $\mathbb{R}^4$, donc
$$\mathbb{R}^4=F\oplus Vect(c)$$
5. Par définition de la somme directe, pour tout $x\in\mathbb{R}^4$ il existe un unique $f\in F$ et un unique $g\in Vect(c)$ tel que $x=f+g$.
$$u(x)=u(f+g)=u(f)+u(g)=f-g$$

Allez à : Exercice 54

Correction exercice 55.

1.

$$\begin{vmatrix}-10-\lambda&-3&-12\\5&-\lambda&7\\6&2&7-\lambda\end{vmatrix}=(-10-\lambda)\begin{vmatrix}-\lambda&7\\2&7-\lambda\end{vmatrix}-5\begin{vmatrix}-3&-12\\2&7-\lambda\end{vmatrix}+6\begin{vmatrix}-3&-12\\-\lambda&7\end{vmatrix}$$
$$=(-10-\lambda)[-\lambda(7-\lambda)-14]-5[-3(7-\lambda)+24]+6(-21-12\lambda)$$
$$=(-10-\lambda)(\lambda^2-7\lambda-14)-5(3+3\lambda)-126-72\lambda$$
$$=-10\lambda^2+70\lambda+140-\lambda^3+7\lambda^2+14\lambda-15-15\lambda-126-72\lambda$$
$$=-\lambda^3-3\lambda^2-3\lambda-1=-(\lambda+1)^3$$

Si $\lambda=-1$ alors $A-\lambda I=A+I$ n'est pas inversible.

Soit $x=(x_1,x_2,x_3)$ et $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ ses coordonnées dans la base canonique.

$$x\in\ker(u+id)\Leftrightarrow X\in\ker(A+I)\Leftrightarrow (A+I)X=O\Leftrightarrow\begin{pmatrix}-9&-3&-12\\5&1&7\\6&2&8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-9x_1-3x_2-12x_3=0\\5x_1+x_2+7x_3=0\\6x_1+2x_2+8x_3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x_1+x_2+4x_3=0\\5x_1+x_2+7x_3=0\\3x_1+x_2+4x_3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{matrix}L_1\\L_2\end{matrix}\begin{cases}3x_1+x_2+4x_3=0\\5x_1+x_2+7x_3=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow L_2-L_1\begin{cases}3x_1+x_2+4x_3=0\\2x_1+3x_3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x_1+x_2+4x_3=0\\x_1=-\frac{3}{2}x_3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-\frac{9}{2}x_3+x_2+4x_3=0\\x_1=-\frac{3}{2}x_3\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x_2=\frac{1}{2}x_3\\x_1=-\frac{3}{2}x_3\end{cases}$$

Donc $x=\left(-\frac{3}{2}x_3,\frac{1}{2}x_3,x_3\right)=\frac{x_3}{2}(-3,1,2)$

Donc $\ker(A+I)$ est la droite vectorielle engendrée par le vecteur colonne $\begin{pmatrix}-3\\1\\2\end{pmatrix}$.

2. $(u+Id)(a)=0_{\mathbb{R}^3}\Leftrightarrow u(a)+a=0_{\mathbb{R}^3}\Leftrightarrow u(a)=-a$
3. Si on pose $X_a=\begin{pmatrix}-3\\1\\2\end{pmatrix}$ et $X_b=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ où X_b sont les coordonnées de b dans la base canonique alors

$$u(b)=a-b\Leftrightarrow AX_b=X_a-X_b\Leftrightarrow(A+I)X_b=X_a\Leftrightarrow\begin{pmatrix}-9&-3&-12\\5&1&7\\6&2&8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\1\\2\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-9x_1-3x_2-12x_3=-3\\5x_1+x_2+7x_3=1\\6x_1+2x_2+8x_3=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x_1+x_2+4x_3=1\\5x_1+x_2+7x_3=1\\3x_1+x_2+4x_3=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{matrix}L_1\\L_2\end{matrix}\begin{cases}3x_1+x_2+4x_3=1\\5x_1+x_2+7x_3=1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow L_2-L_1\begin{cases}3x_1+x_2+4x_3=1\\2x_1+3x_3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x_1+x_2+4x_3=1\\x_1=-\frac{3}{2}x_3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-\frac{9}{2}x_3+x_2+4x_3=1\\x_1=-\frac{3}{2}x_3\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x_2=\frac{1}{2}x_3+1\\x_1=-\frac{3}{2}x_3\end{cases}$$

Si on prend $x_3=0$ on a pour solution $b=(0,1,0)$.

Si on pose $X_b=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ et $X_c=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ où X_c sont les coordonnées de c dans la base canonique alors

$$u(c)=b-c\Leftrightarrow AX_c=X_b-X_c\Leftrightarrow(A+I)X_c=X_b\Leftrightarrow\begin{pmatrix}-9&-3&-12\\5&1&7\\6&2&8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-9x_1-3x_2-12x_3=0\\5x_1+x_2+7x_3=1\\6x_1+2x_2+8x_3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x_1+x_2+4x_3=0\\5x_1+x_2+7x_3=1\\3x_1+x_2+4x_3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{matrix}L_1\\L_2\end{matrix}\begin{cases}3x_1+x_2+4x_3=0\\5x_1+x_2+7x_3=1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow L_2-L_1\begin{cases}3x_1+x_2+4x_3=0\\2x_1+3x_3=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x_1+x_2+4x_3=0\\x_1=-\frac{3}{2}x_3+\frac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-\frac{9}{2}x_3+\frac{3}{2}+x_2+4x_3=0\\x_1=-\frac{3}{2}x_3+\frac{1}{2}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = \frac{1}{2}x_3 - \frac{3}{2} \\ x_1 = -\frac{3}{2}x_3 + \frac{1}{2} \end{cases}$$

Si on prend $x_3 = 1$ on a pour solution $c = (-1,-1,1)$.

4. $\det(a,b,c) = \begin{vmatrix} -3 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ donc (a,b,c) est une base de $\mathbb{R}^3$.
5. $T = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
6. $(T+I) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, par de simple calculs on trouve que $(T+I)^3 = O$.
$$(A+I)^3 = (PTP^{-1} + PIP^{-1})^3 = (P(T+I)P^{-1})^3 = P(T+I)^3P^{-1} = O$$
7. $(A+I)^3 \Leftrightarrow A^3 + 3A^2 + 3A + I = O \Leftrightarrow A(-3A^2 - 3A - 3I) = I$
Donc $A^{-1} = -3A^2 - 3A - 3I$

Allez à : Exercice 55

Correction exercice 56.

1.
$$A = \begin{array}{c} \begin{matrix} f(e_1) & f(e_1) & f(e_3) \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & -5 & 4 \\ 3 & -8 & 6 \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{matrix}$$

2. Soient $x \in E_1$, $(f - id_{\mathbb{R}^3})(x) = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow f(x) - x = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow f(x) = x$
$$f(0_{\mathbb{R}^3}) = 0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow 0_{\mathbb{R}^3} \in E_1$$
Soient x, x' deux vecteurs de E_1 donc $f(x) = x$ et $f(x') = x'$, soient λ, λ' deux réels
$$f(\lambda x + \lambda' x') = \lambda f(x) + \lambda' f(x') = \lambda x + \lambda' x'$$
Cela entraine que $\lambda x + \lambda' x' \in E_1$, par conséquent E_1 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
Soient $x \in N_{-1}$, $(f^2 + id_{\mathbb{R}^3})(x) = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow f^2(x) + x = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow f^2(x) = -x$
$$f(0_{\mathbb{R}^3}) = 0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow f^2(0_{\mathbb{R}^3}) = f(0_{\mathbb{R}^3}) = 0_{\mathbb{R}^3} = -0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow 0_{\mathbb{R}^3} \in N_{-1}$$
Soient x, x' deux vecteurs de N_{-1} donc $f^2(x) = -x$ et $f^2(x') = -x'$, soient λ, λ' deux réels
$$f^2(\lambda x + \lambda' x') = \lambda f^2(x) + \lambda' f^2(x') = \lambda(-x) + \lambda'(-x') = -(\lambda x + \lambda' x')$$
Cela entraine que $\lambda x + \lambda' x' \in N_{-1}$, par conséquent$N_{-1}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Remarque :

On peut aller plus vite en remarquant que $f + id_{\mathbb{R}^3}$ est une application linéaire et en invoquant le fait que le noyau d'une application linéaire un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Et puis pareil pour $f^2 + id_{\mathbb{R}^3}$.

3.
$$x \in E_1 \Leftrightarrow f(x) = x \Leftrightarrow AX = X \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & -5 & 4 \\ 3 & -8 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_2 - x_3 = x_1 \\ 2x_1 - 5x_2 + 4x_3 = x_2 \\ 3x_1 - 8x_2 + 6x_3 = x_3 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - 6x_2 + 4x_3 = 0 \\ 3x_1 - 8x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases}$$
Maintenant on peut appliquer la méthode du pivot de Gauss (à l'étape d'avant ce n'était pas possible).
$$x \in E_1 \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \begin{cases} -x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - 6x_2 + 4x_3 = 0 \\ 3x_1 - 8x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \begin{cases} -x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ 3x_1 - 8x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 + L_1 \\ L_3 + 3L_1 \end{matrix} \begin{cases} -x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ -x_2 + x_3 = 0 \\ -2x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ -x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = x_3 \end{cases}$$
$$x = (x_3, x_3, x_3) = x_3(1,1,1)$$

E_1 est la droite vectoriel engendrée par le vecteur $a = (1,1,1), E_1 = Vect(a)$.

$$x \in E_1 \Leftrightarrow f^2(x) = -x \Leftrightarrow A^2X = -X$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & -5 & 4 \\ 3 & -8 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & -5 & 4 \\ 3 & -8 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -x_1 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -x_2 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = -x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x_1 - x_2 + x_3 = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 - x_3$$

$$x = (x_2 - x_3, x_2, x_3) = x_2(1,1,0) + x_3(-1,0,1)$$

On cherche un vecteur de N_{-1}, prenons $x_2 = 1$ et $x_3 = 0$: $b = (1,1,0) = e_1 + e_2$

$$f(b) = f(e_1 + e_2) = f(e_1) + f(e_2) = 2e_2 + 3e_3 + 2e_1 - 5e_2 - 8e_3 = 2e_1 - 3e_2 - 5e_3$$

Il faut vérifier que ce vecteur est bien dans N_{-1}, $x_1 - x_2 + x_3 = 2 - -3 + (-5) = 0$, c'est bon, $f(b) \in N_{-1}$ ensuite il faut montrer que $(b, f(b))$ est une base de N_{-1}. $\dim(N_{-1}) < 3$ or $(b, f(b))$ est une famille libre (car b et $f(b)$ ne sont pas proportionnels) dans un espace de dimension inférieur ou égale à 2, cela entraine à la fois que $\dim(N_{-1}) \geq 2$, qu'alors $\dim(N_{-1}) = 2$ et que $(b, f(b))$ est une base de cet espace.

Il y a plusieurs méthode possible, la plus basique est de montrer que $(a, b, f(b))$ est une base de $\mathbb{R}^3$, on passe, c'est trop facile. Deuxième méthode, soit $x \in E_1 \cap N_{-1}$,

$x \in E_1 \Leftrightarrow f(x) = x \Rightarrow f(f(x)) = f(x) = x$ et $x \in N_{-1} \Leftrightarrow f^2(x) = -x$, cela entraine que $-x = x \Leftrightarrow x = 0_{\mathbb{R}^3}$, autrement dit $E_1 \cap N_{-1} = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$

Comme $\dim(E_1) + \dim(N_{-1}) = 1 + 2 = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$, on en déduit que $E_1 \oplus N_{-1} = \mathbb{R}^3$.

Remarque :

Sans rien faire de plus on peut en déduire que β' est une base.

4. Il faut d'abord calculer $f(a), f(b)$ et $f(f(b))$ dans la base $(a, b, f(b))$

$f(a) = a$ car $a \in E_1$.

$f(b) = f(b)$ çà c'est sûr ! et $f(f(b)) = f^2(b) = -b$

On en déduit la matrice de f dans la base $(a, b, f(b))$

$$\begin{array}{cc} \begin{matrix} f(a) & f(b) & f^2(b) \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} a \\ b \\ f(b) \end{matrix} \end{array}$$

5. Il faut calculer $f^2(a), f^2(b)$ et $f^2(f(b))$ dans la base $(a, b, f(b))$

$$f^2(a) = f(f(a)) = f(a) = a$$

$$f^2(b) = -b$$

$$f^2(f(b)) = f^3(b) = f(f^2(b)) = f(-b) = -f(b)$$

Donc la matrice est

$$\begin{array}{cc} \begin{matrix} f^2(a) & f^2(b) & f^3(b) \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} a \\ b \\ f(b) \end{matrix} \end{array}$$

Autre méthode la matrice de f^2 est la matrice de f au carré

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Allez à : Exercice 56

Correction exercice 57.

1. On appelle X_{e_2} les coordonnées de e_2 dans la base canonique

Les coordonnées de $u(e_2)$ dans la base canonique sont

$$AX_{e_2}=\begin{pmatrix}2&-2&1&-2\\0&1&0&0\\-3&0&-2&2\\1&-1&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\-1\end{pmatrix}$$

Les coordonnées de $u^2(e_2)$ dans la base canonique sont

$$\begin{pmatrix}2&-2&1&-2\\0&1&0&0\\-3&0&-2&2\\1&-1&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\1\\4\\-2\end{pmatrix}$$

Les coordonnées de $u^3(e_2)$ dans la base canonique sont

$$\begin{pmatrix}2&-2&1&-2\\0&1&0&0\\-3&0&-2&2\\1&-1&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-4\\1\\4\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\1\end{pmatrix}$$

Montrons que $\left(e_2,u(e_2),u^2(e_2),u^3(e_2)\right)$ est libre

$$\alpha e_2+\beta u(e_2)+\gamma u^2(e_2)+\delta u^3(e_2)=0_{\mathbb{R}^4}\Leftrightarrow \alpha\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\-1\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}-4\\1\\4\\-2\end{pmatrix}+\delta\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-2\beta-4\gamma-2\delta=0\\\alpha+\beta+\gamma+\delta=0\\4\gamma=0\\-\beta-2\gamma+\delta=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-2\beta-2\delta=0\\\alpha+\beta+\delta=0\\\gamma=0\\-\beta+\delta=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\beta+\delta=0\\\alpha+\beta+\delta=0\\\gamma=0\\-\beta+\delta=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\beta+\delta=0\\\alpha=0\\\gamma=0\\-\beta+\delta=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=0\\\beta=0\\\gamma=0\\\delta=0\end{cases}$$

$\left(e_2,u(e_2),u^2(e_2),u^3(e_2)\right)$ est une famille libre à 4 vecteurs dans un espace de dimension 4, c'est une base.

2.

Les coordonnées de $u^4(e_2)$ dans la base canonique sont

$$\begin{pmatrix}2&-2&1&-2\\0&1&0&0\\-3&0&-2&2\\1&-1&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-8\\1\\8\\-4\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}-4\\1\\4\\-2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$$

Donc $u^4(e_2)=-e_2+2u^2(e_2)$

$$C=\begin{array}{cc}\begin{matrix}u(e_2)&u^2(e_2)&u^3(e_2)&u^4(e_2)\end{matrix}&\\\begin{pmatrix}0&0&0&-1\\1&0&0&0\\0&1&0&2\\0&0&1&0\end{pmatrix}&\begin{matrix}e_2\\u(e_2)\\u^2(e_2)\\u^3(e_2)\end{matrix}\end{array}$$

3. On cherche les vecteurs $x=(x_1,x_2,x_3,x_4)$ tels que $u(x)=x$

$$u(x)=x\Leftrightarrow AX=X\Leftrightarrow\begin{pmatrix}2&-2&1&-2\\0&1&0&0\\-3&0&-2&2\\1&-1&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}2x_1-2x_2+x_3-2x_4=x_1\\x_2=x_2\\-3x_1-2x_3+2x_4=x_3\\x_1-x_2+x_3-x_4=x_4\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\begin{array}{c}L_1\\L_2\\L_3\end{array}\left\{\begin{array}{c}x_1-2x_2+x_3-2x_4=0\\-3x_1-3x_3+2x_4=0\\x_1-x_2+x_3-2x_4=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\begin{array}{c}L_1\\L_2+3L_1\\L_3-L_1\end{array}\left\{\begin{array}{c}x_1-2x_2+x_3-2x_4=0\\-6x_2-4x_4=0\\x_2=0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}x_1+x_3=0\\x_4=0\\x_2=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x_3=-x_1\\x_4=0\\x_2=0\end{array}\right.$$

$$x=(x_1,0,-x_1,0)=x_1(1,0,-1,0)$$

4. Les coordonnées de $u(b)$ dans la base canonique sont

$$AX_b=\begin{pmatrix}2&-2&1&-2\\0&1&0&0\\-3&0&-2&2\\1&-1&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\1\end{pmatrix}=X_a+X_b$$

Les coordonnées de $u(c)$ dans la base canonique sont

$$AX_c=\begin{pmatrix}2&-2&1&-2\\0&1&0&0\\-3&0&-2&2\\1&-1&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\-1\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\1\end{pmatrix}=-X_c$$

Donc $u(c)=-c$

5. On cherche les vecteurs $x=(x_1,x_2,x_3,x_4)$ tels que $u(x)=c-x$

$$u(x)=c-x\Leftrightarrow AX=X_c-X\Leftrightarrow\begin{pmatrix}2&-2&1&-2\\0&1&0&0\\-3&0&-2&2\\1&-1&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}2x_1-2x_2+x_3-2x_4=1-x_1\\x_2=-x_2\\-3x_1-2x_3+2x_4=-1-x_3\\x_1-x_2+x_3-x_4=1-x_4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}3x_1-2x_2+x_3-2x_4=1\\2x_2=0\\-3x_1-x_3+2x_4=-1\\x_1-x_2+x_3=1\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}3x_1+x_3-2x_4=1\\x_2=0\\-3x_1-x_3+2x_4=-1\\x_1+x_3=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}x_2=0\\-3x_1-x_3+2x_4=-1\\x_1=1-x_3\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}x_2=0\\-3(1-x_3)-x_3+2x_4=-1\\x_1=1-x_3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}x_2=0\\2x_4=2-2x_3\\x_1=1-x_3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}x_2=0\\x_4=1-x_3\\x_1=1-x_3\end{array}\right.$$

Prenons $x_3=0$ par exemple, alors $d=(1,0,0,1)$

6. On peut montrer que la famille β'' est libre et rappeler qu'elle a 4 vecteurs dans un espace de dimension 4 ou alors calculer le déterminant

$$\det(a,b,c,d)=\begin{vmatrix}1&1&0&-1\\0&-1&0&0\\-1&0&-1&1\\1&1&1&0\end{vmatrix}$$

On développe par rapport à la seconde ligne

$$\det(a,b,c,d)=+(-1)\begin{vmatrix}1&0&-1\\-1&-1&1\\1&1&0\end{vmatrix}$$

Puis par rapport à la première ligne

$$\det(a,b,c,d)=-\left(\begin{vmatrix}-1&1\\1&0\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}-1&-1\\1&1\end{vmatrix}\right)=-(-1-0)=1\neq 0$$

Donc β'' est une base.

7.

$$T=\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} u(a) & u(b) & u(c) & u(d) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array}$$

8. On pose

$$Q=\begin{pmatrix} 0 & -2 & -4 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice de passage de β à β', on $A=QCQ^{-1}$

Et

$$P=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice de passage de β à β'', on a $A=PTP^{-1}$

Donc

$$QCQ^{-1}=PTP^{-1}$$

Ce qui équivaut à

$$C=Q^{-1}PTP^{-1}Q=(P^{-1}Q)^{-1}T(P^{-1}Q)$$

Ce qui montre que C et T sont semblables.

Allez à : Exercice 57

Correction exercice 58.

1. Si $\in \mathbb{R}_2[X]$, $d^\circ(X+1)P' \leq 1+2-1=2$ donc f est bien une application de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}_2[X]$.
$f(\lambda_1P_1+\lambda_2P_2)=(X+1)(\lambda_1P_1+\lambda_2P_2)'=(X+1)\left(\lambda_1P_1'+\lambda_2P_2'\right)=\lambda_1(X+1)P_1'+\lambda_2(X+1)P_2'=\lambda_1f(P_1)+\lambda_2f(P_2)$
donc f est linéaire, c'est même un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
2.

$$f(1)=(X+1)\times 0=0=0\times 1+0\times X+0\times X^2$$
$$f(X)=(X+1)\times 1=0=1\times 1+1\times X+0\times X^2$$
$$f(X^2)=(X+1)\times 2X=0=0\times 1+2\times X+2\times X^2$$

Donc $A=\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(1) & f(X) & f(X^2) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ X \\ X^2 \end{array}$

3. $\alpha+\beta(X+1)+\gamma(X+1)^2=0 \Leftrightarrow \gamma X^2+(\beta+2\gamma)X+\alpha+\beta+\gamma=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma=0 \\ \beta+2\gamma=0 \\ \alpha+\beta+\gamma=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=0 \\ \beta=0 \\ \gamma=0 \end{cases}$
Donc B' est une famille libre de trois vecteurs dans un espace de dimension 3 ($\dim \mathbb{R}_2[X]=3$), c'est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
4.

$$f(1)=(X+1)\times 0=0=0\times 1+0\times X+0\times X^2$$
$$f(X+1)=(X+1)\times 1=0=0\times 1+1\times (X+1)+0\times (X+1)^2$$
$$f((X+1)^2)=(X+1)\times 2(X+1)=0=0\times 1+0\times (X+1)+2\times (X+1)^2$$

Donc

$$B=\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(1) & f(X+1) & f((X+1)^2) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ X+1 \\ (X+1)^2 \end{array}$$

5.

$$A^2=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&2\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&2\\0&0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&2\\0&1&6\\0&0&4\end{pmatrix}$$

$$A^3=AA^2=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&2\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&2\\0&1&6\\0&0&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&6\\0&1&14\\0&0&8\end{pmatrix}$$

Si $k>0$

$$B^k=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&2^k\end{pmatrix}$$

Et $B^0=I$

6.

La première colonne de la matrice A est nulle, donc le rang de A est inférieur ou égal à 2, les deux suivantes ne sont pas proportionnelles, donc le rang de A est au moins 2.

$$rg(A)=rg(f)=2$$

7.

$Im(f)$ est engendré par $f(X)=1+X$ et $f(X^2)=2X+2X^2$, cette famille constitue une base de $Im(f)$.

8.

D'après le théorème du rang, la dimension du noyau de f est 1, car

$$\dim(\ker(f)+\dim(Im(f)=\dim\mathbb{R}_2[X]=3$$

Or $f(1)=0$, donc le noyau de f est la droite vectorielle engendrée par le « vecteur » 1. (C'est-à-dire le polynôme constant égale à 1).

Allez à : Exercice 58

Correction exercice 59.

1.

$$u(\alpha P+\beta Q)=\alpha P+\beta Q+(1-X)(\alpha P+\beta Q)'=\alpha P+\beta Q+(1-X)(\alpha P'+\beta Q')$$
$$=\alpha(P+(1-X)P')+\beta(Q+(1-X)Q')=\alpha u(P)+\beta u(Q)$$

Donc u est une application linéaire

$$d°P\le 2\Rightarrow d°u(P)\le 2$$

Elle va de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}_2[X]$ il s'agit d'un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.

2.

$$u(1)=1+(1-X)\times 0=1$$
$$u(X)=X+(1-X)\times 1=1$$
$$u(X^2)=X^2+(1-X)\times 2X=2X-X^2$$
$$A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&2\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

3. $P\in\ker(u)$

$$u(P)=0\Leftrightarrow u(aX^2+bX+c)=au(X^2)+bu(X)+cu(1)=a(2X-X^2)+b+c=0$$
$$\Leftrightarrow -aX^2+2aX+b+c=0\Leftrightarrow\begin{cases}a=0\\c=-b\end{cases}$$
$$P=bX-b=b(X-1)$$

Donc $\ker(u)$ est la droite vectorielle engendrée par le polynôme $X-1$.

$$Im(u)=Vect\big(u(1),u(X),u(X^2)\big)=Vect(1,1,2X-X^2)=Vect(1,2X-X^2)$$

Ces deux polynômes ne sont pas proportionnels ils forment donc une famille libre (et génératrice) de $Im(u)$ donc une base de $Im(u)$.

Allez à : Exercice 59

Correction exercice 60.

1. Si $d°P \leq 2$ alors $d°P' \leq 1$ et $d°(X-1)P' \leq 2$ donc $d°u(P) \leq 2$

D'autre part

$$u(\lambda P + \mu Q) = 2(\lambda P + \mu Q) - (X-1)(\lambda P + \mu Q)' = 2(\lambda P + \mu Q) - (X-1)(\lambda P' + \mu Q')$$
$$= \lambda(2P - (X-1)P') + \mu(2Q - (X-1)Q') = \lambda u(P) + \mu u(Q)$$

Cela montre que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.

2.

$$u(1) = 2 \times 1 - (X-1) \times 0 = 2;$$
$$u(X) = 2X - (X-1) \times 1 = X + 1;$$
$$u(X^2) = 2X^2 - (X-1) \times 2X = 2X$$

Par conséquent

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Soit $P = aX^2 + bX + c$

$$u(P) = au(X^2) + bu(X) + cu(1) = 2aX + b(1+X) + 2c = (2a+b)X + b + 2c$$

Donc

$$u(P) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b = 0 \\ b + 2c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{b}{2} \\ c = -\dfrac{b}{2} \end{cases}$$

Et

$$P = -\frac{b}{2}X^2 + bX - \frac{b}{2} = -\frac{b}{2}(X^2 - 2X + 1) = -\frac{b}{2}(X-1)^2$$

Le noyau de u est la droite vectorielle engendrée par le polynôme $P_2 = (X-1)^2$

4. D'après le théorème du rang

$$\dim(\ker(u)) + \dim\big(Im(u)\big) = \dim(\mathbb{R}_2[X])$$

Donc

$$\dim\big(Im(u)\big) = \dim(\mathbb{R}_2[X]) - \dim(\ker(u)) = 3 - 1 = 2$$

$u(1) = 2$ et $u(X) = 1 + X$ sont deux polynômes non proportionnels de l'image de u, ils forment donc une famille libre dans un espace de dimension 2, $(2, 1+X)$ est une base de $Im(u)$.

5. Soit $P = aX^2 + bX + c$

$$u(P) = P \Leftrightarrow (2a+b)X + b + 2c = aX^2 + bX + c \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = a \\ 2a + b = b \\ b + 2c = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ 2a = 0 \\ c = -b \end{cases}$$
$$P = bX - b = b(X-1)$$
$$P_1 = X - 1$$

6.

$$\alpha + \beta(X-1) + \gamma(X-1)^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha - \beta + \gamma + (\beta - 2\gamma)X + \gamma X^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha - \beta + \gamma = 0 \\ \beta - 2\gamma = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}$$

β' est un famille libre à trois vecteurs dans un espace de dimension 3, c'est une base de $\mathbb{R}_2[X]$

7. $u(1) = 2 \times 1$, $u(P_1) = P_1$ et $u(P_2) = 0$, donc

$$D = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} u(1) & u(P_1) & u(P_2) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ P_1 \\ P_2 \end{array}$$

Allez à : Exercice 60

Correction exercice 61.

1. Soient $P_1, P_2 \in \mathbb{R}_2[X]$, soient $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$

$$f(\lambda_1P_1+\lambda_2P_2)=(\lambda_1P_1+\lambda_2P_2)-(X-2)(\lambda_1P_1+\lambda_2P_2)'=\lambda_1P_1+\lambda_2P_2-(X-2)(\lambda_1P_1'+\lambda_2P_2')$$
$$=\lambda_1(P_1-(X-2)P_1')+\lambda_2(P_2-(X-2)P_2')=\lambda_1f(P_1)+\lambda_2f(P_2)$$

Donc f est linéaire.

2. f est un endomorphisme si l'image de $\mathbb{R}_2[X]$ par f est $\mathbb{R}_2[X]$, autrement dit il faut que l'image d'un polynôme de degré inférieur ou égal à 2 soit un polynôme de degré inférieur ou égal à 2.

Première méthode

$$f(aX^2+bX+c)=aX^2+bX+c-(X-2)(2aX+b)$$
$$=aX^2+bX+c-(2aX^2+bX-4aX-2b)=-aX^2+4aX+c-2b$$

C'est bon, f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ (parce qu'il est clair que f est linéaire d'après la première question).

Deuxième méthode

$$d°P\leq 2\Rightarrow d°P'\leq 1$$

Donc

$$d°(X-2)P'\leq 1+1=2$$

Par conséquent

$$d°f(P)\leq 2$$

Troisième méthode

Comme $f(aX^2+bX+c)=af(X^2)+bf(X)+cf(1)$, il suffit de vérifier que $d°f(X^2)\leq 2$, $d°f(X)\leq 2$ et que $d°f(1)\leq 2$, ce qui est le cas car

$$f(X^2)=X^2-(X-2)\times 2X=-X^2+4X;$$
$$f(X)=X-(X-2)\times 1=2;$$
$$f(1)=1-(X-2)\times 0=1$$

3.

$$P\in\ker(f)\Leftrightarrow f(P)=0\Leftrightarrow -aX^2+4aX+c-2b=0\Leftrightarrow\begin{cases}-a=0\\4a=0\\c-2b=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=0\\c=2b\end{cases}$$
$$P=bX+2b=b(X+2)$$

Les polynômes de $\ker(f)$ sont proportionnels au polynômes $X+2$, il s'agit d'une droite vectorielle dont une base est le polynôme $X+2$.

D'après le théorème du rang

$$\dim(\ker(f))+\dim\big(Im(f)\big)=\dim(\mathbb{R}_2[X])\Leftrightarrow 1+\dim\big(Im(f)\big)=3\Leftrightarrow\dim\big(Im(f)\big)=2$$
$$f(X^2)=-X^2+4X;f(X)=2$$

Ces deux polynômes ne sont pas proportionnels, ils forment une famille libre de $Im(f)$ qui est de dimension 2, c'est une base de $Im(f)$.

Remarque :

$f(1)=1$ est proportionnel au vecteur (polynôme) $f(X)=2$.

4.

$$f(X^2)=4X-X^2;f(X)=2;f(1)=1$$

Par conséquent

$$A=Mat_{(1,X,X^2)}(f)=\begin{array}{cc}\begin{array}{ccc}f(1)&f(X)&f(X^2)\end{array}&\\\begin{pmatrix}1&2&0\\0&0&4\\0&0&-1\end{pmatrix}&\begin{array}{c}1\\X\\X^2\end{array}\end{array}$$

5.

$$\alpha\times 1+\beta(X-2)+\gamma(X-2)^2=0\Leftrightarrow\alpha+\beta X-2\beta+\gamma X^2-4\gamma X+4\gamma=0$$
$$\Leftrightarrow\gamma X^2+(\beta-4\gamma)X+\alpha-2\beta+4\gamma=0\Leftrightarrow\begin{cases}\gamma=0\\\beta-4\gamma=0\\\alpha-2\beta+4\gamma=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\gamma=0\\\beta=0\\\alpha=0\end{cases}$$

β' est une famille libre à trois vecteurs dans un espace de dimension 3, c'est une base.

6.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} 1 & X-2 & (X-2)^2 \end{array} \\ P = & \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} 1 \\ X \\ X^2 \end{array} \end{array}$$

$$PX = Y \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 = y_1 \\ x_2 - 4x_3 = y_2 \\ x_3 = y_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2x_2 - 4x_3 + y_1 \\ x_2 = 4x_3 + y_2 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2(y_2 + 4y_3) - 4y_3 + y_1 \\ x_2 = y_2 + 4y_3 \\ x_3 = y_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 + 2y_2 + 4y_3 \\ x_2 = y_2 + 4y_3 \\ x_3 = y_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Remarque :

On rappelle que P^{-1} est la matrice de passage de β' à β, cela signifie que

$$1 = 1$$
$$X = 2 \times 1 + 1 \times (X - 2)$$
$$X^2 = 4 \times 1 + 4 \times (X - 2) + 1 \times (X - 2)^2$$

7.

$$f(1) = 1$$
$$f(X - 2) = X - 2 - (X - 2) \times 1 = 0$$
$$f((X - 2)^2) = (X - 2)^2 - (X - 2) \times 2(X - 2) = -(X - 2)^2$$

Donc

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} f(1) & f(X-2) & f((X-2)^2) \end{array} \\ D = Mat_{\beta'}(f) = & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} 1 \\ X-2 \\ (X-2)^2 \end{array} \end{array}$$

Deuxième méthode

On calcule

$$D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

On trouve bien sûr le même résultat (cela fait partie du cours).

Allez à : Exercice 61

Correction exercice 62.

1. Soient P_1 et P_2 deux polynômes de $\mathbb{R}_2[X]$ et soient λ_1 et λ_2 deux réels.
$$u(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2) = 2X(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2) - X^2(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2)' = 2X(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2) - X^2(\lambda_1 P_1' + \lambda_2 P_2')$$
$$= \lambda_1(2XP_1 - X^2 P_1') + \lambda_2(2XP_2 - X^2 P_2') = \lambda_1 u(P_1) + \lambda_2 u(P_2)$$
Donc u est linéaire.
Soit $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$, $P' = 2aX + b$
$$u(P) = 2X(aX^2 + bX + c) - X^2(2aX + b) = 2aX^3 + 2bX^2 + 2cX - 2aX^3 - bX^2 = bX^2 + 2cX \in \mathbb{R}_2[X]$$
Donc u est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. $u(1) = 2X$, $u(X) = 2X^2 - X^2 = X^2$ et $u(X^2) = 2X^3 - 2X^3 = 0$
Par conséquent

$$A=\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}u(1) & u(X) & u(X^2)\end{array}\\ \begin{pmatrix}0&0&0\\2&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\end{array}\begin{array}{c}\\ 1\\ X\\ X^2\end{array}$$

3. Soit $P=aX^2+bX+c\in\ker(u)$,

$$u(P)=bX^2+2cX=0\Leftrightarrow b=c=0$$

Donc $P=aX^2$, une base de $\ker(u)$ est X^2 et $\dim(\ker(u))=1$.

4.

$$Im(u)=Vect\big(u(1),u(X),u(X^2)\big)=Vect(2X,X^2,0)=Vect(2X,X^2)=Vect(X,X^2)$$

(X,X^2) est une sous-famille d'une famille libre, c'est une famille libre et génératrice de $Im(u)$ c'est une base de $Im(u)$ et $\dim\big(Im(u)\big)=2$

Allez à : Exercice 62

Correction exercice 63.

1.

$$\begin{aligned}u(\lambda_1P_1+\lambda_2P_2)&=\lambda_1P_1+\lambda_2P_2+(1-X)(\lambda_1P_1+\lambda_2P_2)'+2(\lambda_1P_1+\lambda_2P_2)''\\&=\lambda_1P_1+\lambda_2P_2+(1-X)(\lambda_1P_1'+\lambda_2P_2')+2(\lambda_1P_1''+\lambda_2P_2'')\\&=\lambda_1(P_1+(1-X)P_1'+2P_1'')+\lambda_2(P_2+(1-X)P_2'+2P_2'')=\lambda_1u(P_1)+\lambda_2u(P_2)\end{aligned}$$

u est une application linéaire.

2. Il est clair que le degré de $u(P)=P+(1-X)P'+2P''$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à 2 lorsque P est un polynôme de degré inférieur ou égal à 2. Par conséquent u est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.

3.

$$u(1)=1$$
$$u(X)=X+(1-X)\times 1=1$$
$$u(X^2)=X^2+(1-X)\times 2X+2\times 2=4+2X-X^2$$
$$A=\begin{pmatrix}1&1&4\\0&0&2\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

4.

$$\alpha(1-X)+\beta\times 1+\gamma(1+2X-X^2)=0\Leftrightarrow -\gamma X^2+(-\alpha+2\gamma)X+\alpha+\beta+\gamma=0$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}-\gamma=0\\-\alpha+2\gamma=0\\\alpha+\beta+\gamma=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=0\\\beta=0\\\gamma=0\end{cases}$$

Cette famille est libre, elle a trois vecteurs dans un espace de dimension 3, c'est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

5.

$$u(1-X)=1-X+(1-X)\times(-1)=0$$
$$u(1)=1$$
$$\begin{aligned}u(1+2X-X^2)&=1+2X-X^2+(1-X)\times(2-2X)+2\times(-2)=-1-2X+X^2\\&=-(1+2X-X^2)\end{aligned}$$

Donc

$$D=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

Allez à : Exercice 63

Correction exercice 64.

1. Soit λ et μ deux réels et P et Q deux polynômes

$$u(\lambda P+\mu Q)=\frac{1}{2}(1-X^2)(\lambda P+\mu Q)''+X(\lambda P+\mu Q)'-(\lambda P+\mu Q)$$
$$=\frac{1}{2}(1-X^2)(\lambda P''+\mu Q'')+X(\lambda P'+\mu Q')-(\lambda P+\mu Q)$$
$$=\lambda\left(\frac{1}{2}(1-X^2)P''+XP'-P\right)+\mu\left(\frac{1}{2}(1-X^2)Q''+XQ'-Q\right)=\lambda u(P)+\mu u(Q)$$

Donc u est linéaire

Pour $P\in\mathbb{R}_2[X]$

$$d^\circ P''\le 0\Rightarrow d^\circ(1-X^2)P''\le 2$$
$$d^\circ P'\le 1\Rightarrow d^\circ XP''\le 2$$

Donc

$$d^\circ u(P)\le 2$$

Ce qui montre que $P\in\mathbb{R}_2[X]$ entraine que $u(P)\in\mathbb{R}_2[X]$. Donc u est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.

2. Soit $P=aX^2+bX+c$

$$P\in\ker(u)\Leftrightarrow u(P)=0\Leftrightarrow\frac{1}{2}(1-X^2)2a+X(2aX+b)-(aX^2+bX+c)=0\Leftrightarrow a-c=0$$

Donc $P=aX^2+bX+a=a(X^2+1)+bX$

La famille (X^2+1,X) est une famille de deux vecteurs non proportionnels, donc libre, qui engendre $\ker(u)$ donc c'est une base de $\ker(u)$

3. D'après le théorème du rang

$$\dim(\ker(u))+\dim\big(Im(u)\big)=\dim(\mathbb{R}_2[X])$$

Donc $\dim\big(Im(u)\big)=1$

$$u(1)=-1$$

Donc $Im(u)$ est la droite engendrée par le polynôme constant $P_3=1$ (ou -1 c'est pareil)

4.

$$\alpha(X^2+1)+\beta X+\gamma=0\Leftrightarrow\alpha X^2+\beta X+\alpha+\gamma=0\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=0\\\beta=0\\\alpha+\gamma=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=0\\\beta=0\\\gamma=0\end{cases}$$

Ce qui montre que (P_1,P_2,P_3) est une famille libre à trois vecteurs dans un espace vectoriel de dimension 3, il s'agit donc d'une base de $\mathbb{R}_2[X]$

5. On a $u(P_1)=0$, $u(P_2)=0$ et $u(P_3)=-1$ donc

$$D=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

Allez à : Exercice 64

Correction exercice 65.

1. Soient P_1 et P_2 deux polynômes de $\mathbb{R}_2[X]$ et λ_1 et λ_2 deux réels.

$$f(\lambda_1P_1+\lambda_2P_2)(X)=(\lambda_1P_1+\lambda_2P_2)(X+1)-(\lambda_1P_1+\lambda_2P_2)(X)$$
$$=\lambda_1P_1(X+1)+\lambda_2P_2(X+1)-\big(\lambda_1P_1(X+1)+\lambda_2P_2(X+1)\big)$$
$$=\lambda_1\big(P_1(X+1)-P_1(X)\big)+\lambda_2\big(P_2(X+1)-P_2(X)\big)=\lambda_1f(P_1)(X)+\lambda_2f(P_2)(X)$$

Ce qui entraine que :

$$f(\lambda_1P_1+\lambda_2P_2)=\lambda_1f(P_1)(X)+\lambda_2f(P_2)$$

2. f est linéaire.

$$f(1)(X)=1-1=0$$
$$f(X)(X)=(X+1)-X=1$$
$$f(X^2)=(X+1)^2-X^2=1+2X$$

Donc

$$A=\begin{array}{cc}\begin{array}{ccc}f(1)&f(X)&f(X^2)\end{array}&\\\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&2\\0&0&0\end{pmatrix}&\begin{array}{c}1\\X\\X^2\end{array}\end{array}$$

3.

$$\alpha \times 1 + \beta \times (X-1) + \gamma \times (X-1)(X-2) = 0 \Leftrightarrow \gamma X^2 + (\beta - 3\gamma)X + (\alpha - \beta + 2\gamma) = 0$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \gamma = 0 \\ \beta - 3\gamma = 0 \\ \alpha - \beta + 2\gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma = 0 \\ \beta = 0 \\ \alpha = 0 \end{cases}$$

$\mathcal{B}'$ est une famille libre à trois vecteurs dans un espace de dimension 3 c'est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

4.

$f(1)(X) = 0$, $f(X-1)(X) = (X-1+1) - (X-1) = 1$ et

$$f\big((X-1)(X-2)\big)(X) = (X-1+1)(X-2+1) - (X-1)(X-2) = X(X-1) - (X-1)(X-2)$$
$$= (X-1)\big(X - (X-2)\big) = 2(X-1)$$

Donc

$$B = \begin{array}{c} \begin{matrix} f(1) & f(X-1) & f\big((X-1)(X-2)\big) \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} 1 \\ X-1 \\ (X-1)(X-2) \end{matrix}$$

Allez à : Exercice 65

Correction exercice 66.

1. Soient $P_1, P_2 \in \mathbb{R}_3[X]$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$
$$g(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2) = \big((\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2)(1), (\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2)(-1)\big)$$
$$= \big(\lambda_1 P_1(-1) + \lambda_2 P_2(-1), \lambda_1 P_1(1) + \lambda_2 P_2(1)\big)$$
$$= \lambda_1\big(P_1(-1), P_1(1)\big) + \lambda_2\big(P_2(-1), P_2(1)\big) = \lambda_1 g(P_1) + \lambda_2 g(P_2)$$
Donc h est linéaire.
2. Soit $P \in \ker(g)$, $\big(P(-1), P(1)\big) = (0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} P(-1) = 0 \\ P(1) = 0 \end{cases}$
Un polynôme de degré inférieur ou égal à 3 qui s'annule en -1 et en 1 est de la forme
$$P = (aX+b)(X+1)(X-1) = aX(X^2-1) + b(X^2-1)$$
$(X(X^2-1), X^2-1)$ forme une famille libre (car les polynômes ne sont pas proportionnels) qui engendre $\ker(g)$, c'est une base de $\ker(g)$.
Une base $\mathbb{R}^3$ est $(1, X, X^2, X^3)$
$$g(1) = (1,1); g(X) = (-1,1); g(X^2) = (1,1); g(X^3) = (-1,1)$$
L'image de g est engendré par $(1,1)$ et $(-1,1)$ (ces vecteurs ne sont pas proportionnels) ils forment donc une famille libre, bref c'est une base de $\mathcal{Im}(g)$, comme $\mathcal{Im}(g) \subset \mathbb{R}^2$ et qu'ils ont la même dimension, on en déduit que $\mathcal{Im}(g) = \mathbb{R}^2$.
3. La linéarité de h est évidente (voir 1°)).
Soit $P = aX + b \in \mathbb{R}_1[X]$ un vecteur de $\ker(h)$,
$$\begin{cases} P(-1) = 0 \\ P(1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a + b = 0 \\ a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = 0$$
Le noyau de h est réduit au vecteur nul, de plus d'après le théorème du rang
$$\dim(\ker(h)) + \dim\big(\mathcal{Im}(h)\big) = \dim(\mathbb{R}_1[X]) \Leftrightarrow \dim\big(\mathcal{Im}(h)\big) = 2$$
Donc $\mathcal{Im}(h) = \mathbb{R}_1[X]$, autrement dit h est surjective, finalement h est bijective.

Allez à : Exercice 66

Correction exercice 67.

1. a et b ne sont pas proportionnelles donc (a,b) est libre, de plus (a,b) est une famille génératrice de H donc c'est une base de H, d'où $\dim(H)=2$.
2. Soit $\theta_{\mathbb{R}}$ l'application nulle, $\theta_{\mathbb{R}}(\ln(2))=0$ donc $\theta_{\mathbb{R}}\in F$
   Soient $f_1\in F$ et $f_2\in F$, donc $f_1(\ln(2))=0$ et $f_2(\ln(2))=0$ et soient λ_1,λ_2 deux réels
   $$(\lambda_1 f_1+\lambda_2 f_2)(\ln(2))=\lambda_1 f_1(\ln(2))+\lambda_2 f_2(\ln(2))=\lambda_1\times 0+\lambda_2\times 0=0$$
   Donc $\lambda_1 f_1+\lambda_2 f_2\in F$, F est un sous-espace-vectoriel de H.
3. On rappelle que
   $$\mathrm{ch}(\ln(2))=\frac{e^{\ln(2)}+e^{-\ln(2)}}{2}=\frac{2+\frac{1}{2}}{2}=\frac{5}{4}$$
   $$\mathrm{sh}(\ln(2))=\frac{e^{\ln(2)}-e^{-\ln(2)}}{2}=\frac{2-\frac{1}{2}}{2}=\frac{3}{4}$$
   $$f\in F\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c} f\in H\\ f(\ln(2))=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}\exists\lambda,\mu\in\mathbb{R},\ f=\lambda a+\mu b\\ f(\ln(2))=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}\exists\lambda,\mu\in\mathbb{R},\forall x\in\mathbb{R}\ \ f(x)=\lambda a(x)+\mu b(x)\\ f(\ln(2))=0\end{array}\right.$$
   $$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}\exists\lambda,\mu\in\mathbb{R},\forall x\in\mathbb{R}\ \ f(x)=\lambda a(x)+\mu b(x)\\ \lambda a(\ln(2))+\mu b(\ln(2))=0\end{array}\right.$$
   $$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}\exists\lambda,\mu\in\mathbb{R},\forall x\in\mathbb{R}\ \ f(x)=\lambda a(x)+\mu b(x)\\ \lambda\frac{5}{4}+\mu\frac{3}{4}=0\end{array}\right.$$
   $$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}\exists\lambda,\mu\in\mathbb{R},\forall x\in\mathbb{R}\ \ f(x)=\lambda a(x)+\mu b(x)\\ \lambda=-\frac{3}{5}\mu\end{array}\right.$$
   $$\Leftrightarrow\exists\mu\in\mathbb{R},\forall x\in\mathbb{R},\ \ f(x)=-\frac{3}{5}\mu a(x)+\mu b(x)\Leftrightarrow\exists\mu\in\mathbb{R}, f=\mu(-\frac{3}{5}a+b)$$
   F est un espace de dimension 1 dont une base est $-\frac{3}{5}a+b$.
4.
   a) Soient $f_1\in H$ et $f_2\in H$ et soient λ_1,λ_2 deux réels.
   $$\begin{aligned}\varphi(\lambda_1 f_1+\lambda_2 f_2)&=((\lambda_1 f_1+\lambda_2 f_2)(-\ln(2)),(\lambda_1 f_1+\lambda_2 f_2)(\ln(2))\\ &=(\lambda_1 f_1(-\ln(2))+\lambda_2 f_2(-\ln(2),\lambda_1 f_1(-\ln(2))+\lambda_2 f_2(-\ln(2))\\ &=\lambda_1(f_1(-\ln(2),f_1(\ln(2))+\lambda_2(f_2(-\ln(2),f_2(\ln(2))=\lambda_1\varphi(f_1)+\lambda_2\varphi(f_2)\end{aligned}$$
   Donc φ est une application linéaire.

   b) Soit $f\in\ker(\varphi)$, $\exists\lambda,\mu\in\mathbb{R},\forall x\in\mathbb{R}\ \ f(x)=\lambda a(x)+\mu b(x)$
   $$\varphi(f)=(0,0)\Leftrightarrow(f(-\ln(2),f(\ln(2))=(0,0)\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}f(-\ln(2)=0\\ f(\ln(2)=0\end{array}\right.$$
   $$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}\lambda a(-\ln(2))+\mu b(-\ln(2))=0\\ \lambda a(\ln(2))+\mu b(\ln(2))=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}\lambda\frac{5}{4}-\mu\frac{3}{4}=0\\ \lambda\frac{5}{4}+\mu\frac{3}{4}=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\lambda=0\\ \mu=0\end{array}\right.$$
   Donc $f=\theta_{\mathbb{R}}$, le noyau de φ est réduit au vecteur nul donc φ est injective, d'après le théorème du rang
   $$\dim(\ker(\varphi))+\dim(Im(\varphi)=\dim(H)\Leftrightarrow\dim(Im(\varphi)=2$$
   Ce qui montre que φ est surjective, finalement φ est surjective donc bijective.

Allez à : Exercice 67

Correction exercice 68.

1. Soient $A\in\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et $B\in\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et soient λ et μ deux réels.
   La matrice nulle O vérifie ${}^tO=-O$
   ${}^t(\lambda A+\mu B)=\lambda{}^tA+\mu{}^tB=\lambda(-A)+\mu(-B)=-(\lambda A+\mu B)$
   Donc $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Soient $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$et $B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$et soient λ et μ deux réels.
La matrice nulle O vérifie ${}^tO = O$
${}^t(\lambda A + \mu B) = \lambda {}^tA + \mu {}^tB = \lambda A + \mu B = \lambda A + \mu B$
Donc $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2. ${}^t\left(\frac{A+{}^tA}{2}\right) = \frac{1}{2}({}^tA + {}^t({}^tA)) = \frac{1}{2}({}^tA + A)$ donc $\frac{A+{}^tA}{2} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$
${}^t\left(\frac{A-{}^tA}{2}\right) = \frac{1}{2}({}^tA - {}^t({}^tA)) = \frac{1}{2}({}^tA - A) = -\frac{1}{2}(A - {}^tA)$ donc $\frac{A-{}^tA}{2} \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$
3. Pour toute matrice A :
$$A = \frac{1}{2}(A + {}^tA) + \frac{1}{2}(A - {}^tA)$$
Donc $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) + \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
4. Soit $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, ${}^tA = -A$ et ${}^tA = A$ donc $A = -A$ d'où $A = O$.
$\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \{O\}$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) + \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ entraine que $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
5.
$$A_s = \frac{1}{2}(A + {}^tA) = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & 4 \end{pmatrix}$$
$$A_a = \frac{1}{2}(A - {}^tA) = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$
A est la somme de $A_s \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et de $A_a \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

Allez à : Exercice 68

Correction exercice 69.

1. $\dim(\mathcal{M}_2(\mathbb{R})) = 2 \times 2 = 4$
2. Soit $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \ker(\phi)$
$$\phi(A) = O \Leftrightarrow A - {}^tA = O \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow b = c$$
Donc
$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
La famille de matrices
$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$ engendre $\ker(\phi)$ et
$$\alpha\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$$
Montre que cette famille est libre, elle forme donc une base de $\ker(\phi)$ et $\dim(\ker(\phi)) = 3$
3. Soit $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$
$$\phi(A) = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & c-b \\ b-c & 0 \end{pmatrix} = (b-c)\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
Par conséquent l'image de ϕ est la droite engendrée par la matrice $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
$Im(\phi)$ étant une droite, toute matrice de cette image est proportionnelle à J.

Allez à : Exercice 69

Correction exercice 70.

1.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & a+c & a+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ b+c & a-b & a-c \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1 \\ b+c & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

2.

a)

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} L_1 & L_2 & L_3 \end{array} \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & c & d \\ b^2 & c^2 & d^2 \end{vmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} L_1 & L_2-L_1 & L_3-L_1 \end{array} \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b & c-b & d-b \\ b^2 & c^2-b^2 & d^2-b^2 \end{vmatrix} \end{array} = (c-b)(d-b)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b & 1 & 1 \\ b^2 & c+b & d+b \end{vmatrix}$$

$$= (c-b)(d-b)(d-c)$$

b)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a & d-a \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 & d^2-a^2 \\ a^3 & b^3-a^3 & c^3-a^3 & d^3-a^3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a & d-a \\ a^2 & (b-a)(b+a) & (c-a)(c+a) & (d-a)(d+a) \\ a^3 & (b-a)(b^2+ba+a^2) & (c-a)(c^2+ac+a^2) & (d-a)(d^2+da+a^2) \end{vmatrix}$$

$$= (b-a)(c-a)(d-a)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b+a & c+a & d+a \\ a^3 & b^2+ba+a^2 & c^2+ac+a^2 & d^2+da+a^2 \end{vmatrix}$$

$$= (b-a)(c-a)(d-a)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+a & c+a & d+a \\ b^2+ba+a^2 & c^2+ac+a^2 & d^2+da+a^2 \end{vmatrix}$$

$$= (b-a)(c-a)(d-a)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & c & d \\ b^2+ba & c^2+ac & d^2+da \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ L_2-aL_1 \\ L_3-a^2L_1 \end{array}$$

$$= (b-a)(c-a)(d-a)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & c & d \\ b^2 & c^2 & d^2 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ L_3-aL_2 \end{array}$$

$$= (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)$$

Allez à : Exercice 70

Correction exercice 71.

1.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} C_1 & C_2 & C_3 & C_4 \end{array} \\ \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} C_1 & C_2-C_1 & C_3-C_1 & C_4-C_1 \end{array} \\ \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ a & b-a & b-a & b-a \\ a & b-a & c-a & c-a \\ a & b-a & c-a & d-a \end{vmatrix} \end{array} = a\begin{vmatrix} b-a & b-a & b-a \\ b-a & c-a & c-a \\ b-a & c-a & d-a \end{vmatrix}$$

$$= a(b-a)\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} C_1 & C_2 & C_3 \end{array} \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b-a & c-a & c-a \\ b-a & c-a & d-a \end{vmatrix} \end{array} = a(b-a)\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} C_1 & C_2-C_2 & C_3-C_1 \end{array} \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b-a & c-b & c-b \\ b-a & c-b & d-b \end{vmatrix} \end{array}$$

$$= a(b-a)\begin{vmatrix} c-b & c-b \\ c-b & d-b \end{vmatrix} = a(b-a)(c-b)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ c-b & d-b \end{vmatrix}$$

$$= a(b-a)(c-b)(d-c)$$

2. $\Delta = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ ou \\ a = b \\ ou \\ b = c \\ ou \\ c = d \end{cases}$

Allez à : Exercice 71

Correction exercice 72.

Première partie

1.

Soit $x = (x_1, x_2, x_3)$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

$$x \in \ker(u) \Leftrightarrow AX = O \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 \qquad - x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_1 = x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = -x_3 \\ x_1 = x_3 \end{cases}$$

$$x = (x_3, -x_3, x_3) = x_3(1, -1, 1)$$

On pose $a = (1, -1, 1)$ et alors $\ker(u) = Vect(a)$

2. On pose $X_b = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $X_a = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$u(b) = a \Leftrightarrow AX_b = X_a \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 = 1 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = -1 \\ x_1 \qquad - x_3 = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_1 = 1 + x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = -x_3 \\ x_1 = x_3 + 1 \end{cases}$$

On prend, par exemple $x_3 = 0$ alors $b = (1,0,0)$

3. Soient $x \in E_1$, $x' \in E_1$ et λ et λ' deux réels

$$u(\lambda x + \lambda' x') = \lambda u(x) + \lambda' u(x') = \lambda x + \lambda' x'$$

Donc

$$\lambda x + \lambda' x' \in E_1$$

$$u(0_{\mathbb{R}^3}) = 0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow 0_{\mathbb{R}^3} \in E_1$$

Donc E_1 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

$$x \in E_1 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 = x_1 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = x_2 \\ x_1 \qquad - x_3 = x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x_2 - 2x_3 = 0 \\ -x_1 + 2x_3 = 0 \\ x_1 \qquad - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = -2x_3 \\ x_1 = 2x_3 \end{cases}$$

$$x = (2x_3, -2x_3, x_3) = x_3(2, -2, 1)$$

Si on pose $c = (2, -2, 1)$ alors $E_1 = Vect(c)$.

4.

$$\det(a, b, c) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

Donc (a, b, c) est une base de $\mathbb{R}^3$.

5.

$$u(a) = 0_{\mathbb{R}^3}$$

$$u(b) = a$$

$$u(c) = c$$

Donc

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

6. $T = Q^{-1}AQ$

Deuxième partie

1.

$$f(1) = (2 + X + X^2) \times 1 - (1 + 2X + X^2 + X^3) \times 0 + \frac{1}{2}(-1 + X + X^2 + X^3 + X^4) \times 0$$
$$= 2 + X + X^2$$
$$f(X) = (2 + X + X^2)X - (1 + 2X + X^2 + X^3) \times 1 + \frac{1}{2}(-1 + X + X^2 + X^3 + X^4) \times 0$$
$$= 2X + X^2 + X^3 - 1 - 2X - X^2 - X^3 = -1$$
$$f(X^2) = (2 + X + X^2)X^2 - (1 + 2X + X^2 + X^3) \times 2X + \frac{1}{2}(-1 + X + X^2 + X^3 + X^4) \times 2$$
$$= 2X^2 + X^3 + X^4 - 2X - 4X^2 - 2X^3 - 2X^4 - 1 + X + X^2 + X^3 + X^4 = -1 - X - X^2$$
$$f(\alpha + \beta X + \gamma X^2) = \alpha f(1) + \beta f(X) + \gamma f(X^2) \in \mathbb{R}_2[X]$$

Car $f(1) \in \mathbb{R}_2[X]$, $f(X) \in \mathbb{R}_2[X]$ et $f(X^2) \in \mathbb{R}_2[X]$

2.

$$B = \begin{array}{c} \begin{matrix} f(1) & f(X) & f(X^2) \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} 1 \\ X \\ X^2 \end{matrix}$$

3. Les coordonnées de $P_0 = 1 + X + X^2$ dans la base $\mathcal{B}$ sont $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Les coordonnées de $P_1 = 1 + X$ dans la base $\mathcal{B}$ sont $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Les coordonnées de $P_2 = 2 + X + X^2$ dans la base $\mathcal{B}$ sont $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\det(P_0, P_1, P_2) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

En développement par rapport à la troisième ligne.

Donc (P_0, P_1, P_2) est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

4.

Les coordonnées de $f(P_0)$ dans la base $\mathcal{B}$ sont $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Donc $f(P_0) = O$

Les coordonnées de $f(P_1)$ dans la base $\mathcal{B}$ sont $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Donc $f(P_1) = 1 + X + X^2 = P_0$

Les coordonnées de $f(P_2)$ dans la base $\mathcal{B}$ sont $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Donc $f(P_2) = 2 + X + X^2 = P_2$

Donc

$$T'=\begin{array}{c} \begin{matrix} f(P_0) & f(P_1) & f(P_2) \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \end{matrix} = T$$

5. $T'=Q'^{-1}BQ'$

Troisième partie

$$Q'^{-1}BQ'=Q^{-1}AQ \Leftrightarrow QQ'^{-1}BQ'Q^{-1}=A \Leftrightarrow (Q'Q^{-1})^{-1}B(Q'Q^{-1})=A$$

Donc A et B sont semblables.

Allez à : Exercice 72

Correction exercice 73.

1. Si $x\in\ker(v)$ alors $v(x)=0_E$, alors $v\big(v(x)\big)=v(0_E)=0_E$ donc $x\in\ker(v^2)$, cela montre que $\ker(v)\subset\ker(v^2)$, de même si $x\in\ker(v^2)$ alors $v^2(x)=0_E$, alors $v\big(v^2(x)\big)=v(0_E)=0_E$ donc $x\in\ker(v^3)$, cela montre que $\ker(v^2)\subset\ker(v^3)$ et ainsi de suite.
2. Soit $x=(x_1,x_2,x_3,x_4)$ et $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ ses coordonnées dans la base canonique.

$$x\in\ker(u+id_{\mathbb{R}^4}) \Leftrightarrow (A+I)X=O \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_2 + x_4 = 0 \\ -x_1 + x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \\ 2x_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ -x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = x_1 \\ x_2 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

$$x=(x_1,0,x_1,0)=x_1(1,0,1,0)$$

$$(A+I)^2=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$x\in\ker\big((u+id_{\mathbb{R}^4})^2\big) \Leftrightarrow (A+I)^2X=O \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x_1 + x_3 + 5x_4 = 0 \\ 4x_4 = 0 \\ -x_1 + x_3 + x_4 = 0 \\ 4x_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = x_1 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

$$x=(x_1,x_2,x_1,0)=x_1(1,0,1,0)+x_2(0,1,0,0)$$

$\big((1,0,1,0),(0,1,0,0)\big)$ est une famille de vecteurs non proportionnels (donc libre) qui engendrent $\ker\big((u+id_{\mathbb{R}^4})^2\big)$, il s'agit d'une base de $\ker\big((u+id_{\mathbb{R}^4})^2\big)$.

$$(A+I)^3=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$$x\in\ker\big((u+id_{\mathbb{R}^4})^3\big) \Leftrightarrow (A+I)^3X=O \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x_4=0$$

$$x=(x_1,x_2,x_3,0)=x_1(1,0,0,0)+x_2(0,1,0,0)+x_3(0,0,0,1)=x_1e_1+x_2e_2+x_3e_3$$

(e_1,e_2,e_3) est une famille (évidement libre) qui engendre $\ker\big((u+id_{\mathbb{R}^4})^3\big)$, c'est une base de $\ker((u+id_{\mathbb{R}^4})^3)$.

$$(A+I)^4=\begin{pmatrix}0&1&0&1\\-1&0&1&3\\0&1&0&-1\\0&0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&16\end{pmatrix}$$

$$x\in\ker((u+id_{\mathbb{R}^4})^4)\Leftrightarrow(A+I)^4X=O\Leftrightarrow\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&16\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow x_4=0$$

$$\ker((u+id_{\mathbb{R}^4})^3)=\ker((u+id_{\mathbb{R}^4})^4)$$

$$p=3$$

3.

a) $a=(1,0,1,0)$ et $X_a=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}$

b) On pose $b=(x_1,x_2,x_3,x_4)$ et et $X_b=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}$ ses coordonnées dans la base canonique

$$a=(u+id_{\mathbb{R}^4})(b)\Leftrightarrow(A+I)X_b=X_a\Leftrightarrow\begin{pmatrix}0&1&0&1\\-1&0&1&3\\0&1&0&-1\\0&0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x_2+x_4=1\\-x_1+x_3+3x_4=0\\x_2-x_4=1\\2x_4=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_2=1\\-x_1+x_3=0\\x_2=1\\x_4=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_3=x_1\\x_2=1\\x_4=0\end{cases}$$

On prend, par exemple $x_3=0$, $b=(0,1,0,0)$.

$$(u+id_{\mathbb{R}^4})^2(b)=(u+id_{\mathbb{R}^4})\circ(u+id_{\mathbb{R}^4})(b)=(u+id_{\mathbb{R}^4})(a)=0_{\mathbb{R}^4}$$

Donc $b\in\ker((u+id_{\mathbb{R}^4})^2)$

D'autre part, a et b ne sont pas proportionnels ils forment une famille libre d'un espace de dimension 2, c'est une base de $\ker((u+id_{\mathbb{R}^4})^2)$.

c) On pose $c=(x_1,x_2,x_3,x_4)$ et $X_c=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}$ ses coordonnées dans la base canonique

$$b=(u+id_{\mathbb{R}^4})(c)\Leftrightarrow(A+I)X_c=X_b\Leftrightarrow\begin{pmatrix}0&1&0&1\\-1&0&1&3\\0&1&0&-1\\0&0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x_2+x_4=0\\-x_1+x_3+3x_4=1\\x_2-x_4=0\\2x_4=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_2=0\\-x_1+x_3=1\\x_2=1\\x_4=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_3=x_1+1\\x_2=0\\x_4=0\end{cases}$$

On prend, par exemple $x_1=0$, $c=(0,0,1,0)$

$$x\in\ker((u+id_{\mathbb{R}^4})^2)\Leftrightarrow\begin{cases}x_3=x_1\\x_4=0\end{cases}$$

Les composantes de c ne vérifient pas $\begin{cases}x_3=x_1\\x_4=0\end{cases}$ donc $c\notin Ker((u+id_{\mathbb{R}^4})^2)$, de plus (a,b) est une famille libre de $\ker((u+id_{\mathbb{R}^4})^2)$ par conséquent (a,b,c) est une famille libre, elle a trois vecteurs dans un espace vectoriel de dimension trois, c'est une base de $\ker((u+id_{\mathbb{R}^4})^2)$.

d) $a=(u+id_{\mathbb{R}^4})(b)\Leftrightarrow a=u(b)+b\Leftrightarrow u(b)=a-b$

$b=(u+id_{\mathbb{R}^4})(c) \Leftrightarrow b=u(c)+c \Leftrightarrow u(c)=b-c$

4. les coordonnées de d dans la base canonique sont

$$\begin{pmatrix}-1&1&0&1\\-1&-1&1&3\\0&1&-1&-1\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}$$

Donc $u(d)=d$

5. $x\in\ker((u+id_{\mathbb{R}^4})^3) \Leftrightarrow x_4=0$
Les composantes de d ne vérifient pas $x_4=0$ et (a,b,c) est une famille libre de $\ker((u+id_{\mathbb{R}^4})^3)$ donc (a,b,c,d) est une famille libre, elle a quatre vecteurs donc c'est une base de $\mathbb{R}^4$.

6.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} u(a) & u(b) & u(b) & u(d) \end{array} \\ T= & \begin{pmatrix}-1&1&0&0\\0&-1&1&0\\0&0&-1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix} \begin{array}{c} a\\ b\\ c\\ d\end{array}\end{array}$$

$$T=P^{-1}AP \Leftrightarrow A=PTP^{-1}$$

7.

$$T+I=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&2\end{pmatrix}\Rightarrow (T+I)^2=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&4\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (T+I)^3=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&8\end{pmatrix}$$

$$T-I=\begin{pmatrix}-2&1&0&0\\0&-2&1&0\\0&0&-2&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$(T+I)^3(T-I)=O$$

$$A+I=PTP^{-1}+PIP^{-1}=P(T+I)P^{-1}\Rightarrow (A+I)^3=P(T+I)^3P^{-1}$$

Et

$$A-I=P(T-I)P^{-1}$$

$$(A+I)^3(A-I)=P(T+I)^3P^{-1}P(T-I)P^{-1}=P(T+I)^3(T-I)P^{-1}=POP^{-1}=O$$

Allez à : Exercice 73

Correction exercice 74.

1. Si $u\in\ker(g)$ alors $g(u)=0_{\mathbb{R}^3}$ alors $g\big(g(u)\big)=g(0_{\mathbb{R}^3})=0_{\mathbb{R}^3}$ donc $u\in\ker(g^2)$, cela montre que

$$\ker(g)\subset\ker(g^2)$$

Si $u\in\ker(g^2)$ alors $g^2(u)=0_{\mathbb{R}^3}$ alors $g\big(g^2(u)\big)=g(0_{\mathbb{R}^3})=0_{\mathbb{R}^3}$ donc $u\in\ker(g^3)$, cela montre que

$$\ker(g^2)\subset\ker(g^3)$$

2.
a) $g^3=O_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}$ donc pour tout $u\in\mathbb{R}^3$, $g^3(u)=0_{\mathbb{R}^3}$. Donc $Ker(g^3)=\mathbb{R}^3$ et donc $\dim(Ker(g^3)=3$
$\{0_{\mathbb{R}^3}\}\subsetneq\ker(g)\subsetneq\ker(g^2)\subsetneq\ker(g^3)$donc $0<\dim(\ker(g))<\dim(\ker(g^2))<\dim(\ker(g^3))=3$
Donc $\dim(\ker(g))=1$ et $\dim(\ker(g^2))=2$
b) Si $v\in Im(g)$ alors il existe $u\in\mathbb{R}^3$ tel que $v=g(u)$ donc $g^2(v)=g^3(u)=0_{\mathbb{R}^3}$, donc $Im(g)\subset\ker(g^2)$

D'après le théorème du rang : $\dim(\ker(g)) + \dim\big(Im(g)\big) = 3$ donc $\dim\big(Im(g)\big) = 2$. Comme $\dim(\ker(g^2)) = 2$ aussi, on en déduit que $Im(g) = \ker(g^2)$.

3. $a \in \ker(g) \subset \ker(g^2) = Im(g)$ donc il existe $b \in \mathbb{R}^3$ tel que $a = g(b)$.
$g^2(b) = g(a) = 0_{\mathbb{R}^3}$ donc $b \in Ker(g^2)$.
$$\lambda a + \mu b = 0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow g(\lambda a + \mu b) = 0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow \lambda g(a) + \mu g(b) = 0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow \mu a = 0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow \mu = 0$$
On remplace dans $\lambda a + \mu b = 0_{\mathbb{R}^3}$, d'où l'on tire que $\lambda = 0$. La famille (a, b) est libre.
4. $b \in \ker(g^2) = Im(g)$ donc il existe $c \in \mathbb{R}^3$ tel que $b = g(c)$.
$g^2(c) = g(b) = a \neq 0_{\mathbb{R}^3}$ donc $c \notin \ker(g^2)$ or (a, b) est une famille libre de $\ker(g^2)$ donc (a, b, c) est une famille libre à trois éléments dans $\mathbb{R}^3$, un espace de dimension 3, c'est une base.
5. $$\begin{array}{cc} \begin{matrix} g(a) & g(b) & g(c) \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} a \\ b \\ c \end{matrix} \end{array}$$
6. La matrice de $f + Id$ dans la base canonique est : $A + I = \begin{pmatrix} -9 & -3 & -12 \\ 5 & 1 & 7 \\ 6 & 2 & 8 \end{pmatrix}$

La matrice de $(f + Id)^2$ dans la base canonique est :
$$(A+I)^2 = \begin{pmatrix} -9 & -3 & -12 \\ 5 & 1 & 7 \\ 6 & 2 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -9 & -3 & -12 \\ 5 & 1 & 7 \\ 6 & 2 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 0 & -9 \\ 2 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$
La matrice de $(f + Id)^3$ dans la base canonique est :
$$(A+I)^3 = \begin{pmatrix} -6 & 0 & -9 \\ 2 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -9 & -3 & -12 \\ 5 & 1 & 7 \\ 6 & 2 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
Donc $(f + Id)^3 = O_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}$, par conséquent $\ker((f + Id)^3) = \mathbb{R}^3$
$(A + I)^2 \neq O$ donc $(f + Id)^2 \neq O_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}$, il existe donc un vecteur x de $\mathbb{R}^3$ tel que $(f + Id)^2(x) \neq 0_{\mathbb{R}^3}$
Donc $\ker((f + Id)^2) \subsetneq \ker$.

Autre méthode :

on détermine une base de $\ker((f + Id)^2)$
$$x \in \ker((f+Id)^2) \Leftrightarrow (A+I)^2 X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -6 & 0 & -9 \\ 2 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} -6x_1 - 9x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_3 = 0 \\ 4x_1 + 6x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow 2x_1 + 3x_3 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -\frac{3}{2}x_3$$
$$x = (x_1, x_2, x_3) = \left(-\frac{3}{2}x_3, x_2, x_3\right) = \frac{3}{2}x_3(-1,0,2) + x_2(0,1,0)$$
$(-1,0,2)$ et $(0,1,0)$ sont deux vecteurs non proportionnels, donc libre de $\ker((f + Id)^2)$, d'autre part ils engendrent $\ker((f + Id)^2)$, il s'agit d'une base de $\ker((f + Id)^2)$, et $\dim(\ker((f + Id)^2)) = 2$
Donc $\ker((f + Id)^2) \subsetneq \ker((f + Id)^3) = \mathbb{R}^3$
$$(A+I)^2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 0 & -9 \\ 2 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } (A+I)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & -3 & -12 \\ 5 & 1 & 7 \\ 6 & 2 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
Donc $(0,1,0) \in \ker((f + Id)^2)$ et $(0,1,0) \notin \ker(f + Id)$
Donc $\ker(f + Id) \subsetneq \ker((f + Id)^2)$

Autre méthode :

On calcule la dimension de $\ker(f + Id)$.

$$x \in \ker(f+Id) \Leftrightarrow (A+I)X=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -9 & -3 & -12 \\ 5 & 1 & 7 \\ 6 & 2 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -9x_1 - 3x_2 - 12x_3 = 0 \\ 5x_1 + x_2 + 7x_3 = 0 \\ 6x_1 + 2x_2 + 8x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \\ 5x_1 + x_2 + 7x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \\ 5x_1 + x_2 + 7x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow 3L_2 - 5L_1 \begin{cases} 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \\ -2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -3x_2 \\ x_3 = 2x_2 \end{cases}$$

Donc $x = (x_1, x_2, x_3) = (-3x_2, x_2, 2x_2) = x_2(-3,1,2)$, $\ker(f+Id)$ est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $(-3,1,2)$. $\dim(\ker(f+Id)) = 1$, comme $\ker(f+Id) \subset \ker((f+Id)^2)$ et que $\dim(\ker(f+Id)) < \dim Ker((f+Id)^2)$, on a $\ker(f+Id) \subsetneq \ker((f+Id)^2)$

Il reste à montrer que $\ker(f+Id) \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$, on vient de montrer que $\dim(\ker(f+Id)) = 1$, donc c'est fini.

7. D'après la question précédente $a = (-3,1,2)$
Soit $b = (x_1, x_2, x_3)$ tel que $(f+Id)(b) = a$

$$(A+I)X_b = X_a \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -9 & -3 & -12 \\ 5 & 1 & 7 \\ 6 & 2 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -9x_1 - 3x_2 - 12x_3 = -3 \\ 5x_1 + x_2 + 7x_3 = 1 \\ 6x_1 + 2x_2 + 8x_3 = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 1 \\ 5x_1 + x_2 + 7x_3 = 1 \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 1 \\ 5x_1 + x_2 + 7x_3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow 3L_2 - 5L_1 \begin{cases} 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 1 \\ -2x_2 + x_3 = -2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x_1 + x_2 + 4(-2+2x_2) = 1 \\ x_3 = -2 + 2x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_1 = -9 - 9x_2 \\ x_3 = -2 + 2x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 3 - 3x_2 \\ x_3 = -2 + 2x_2 \end{cases}$$

On peut prendre n'importe quelle valeur pour x_2, en général on prend 0, mais ici, $x_2 = 1$ est plus adapté.
$b = (0,1,0)$ convient.

$$(f+Id)(c) = b \Leftrightarrow (A+I)X_c = X_b \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -9 & -3 & -12 \\ 5 & 1 & 7 \\ 6 & 2 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -9x_1 - 3x_2 - 12x_3 = 0 \\ 5x_1 + x_2 + 7x_3 = 1 \\ 6x_1 + 2x_2 + 8x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \\ 5x_1 + x_2 + 7x_3 = 1 \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \\ 5x_1 + x_2 + 7x_3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow 3L_2 - 5L_1 \begin{cases} 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \\ -2x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x_1 + x_2 + 4(3+2x_2) = 0 \\ x_3 = 3 + 2x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_1 = -12 - 9x_2 \\ x_3 = 3 + 2x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -4 - 3x_2 \\ x_3 = 3 + 2x_2 \end{cases}$$

Je prends, par exemple $x_2 = -1$, on trouve alors $x_1 = -1$ et $x_3 = 1$ donc $c = (-1,-1,1)$

8. On rappelle que, choisit ainsi, (a, b, c) est une base.

$$(f+Id)(a) = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow f(a) + a = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow f(a) = -a$$
$$(f+Id)(b) = a \Leftrightarrow f(b) + b = a \Leftrightarrow f(b) = a - b$$
$$(f+Id)(c) = b \Leftrightarrow f(c) + c = b \Leftrightarrow f(c) = b - c$$

Donc

$$Mat_{(a,b,c)}(u) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Allez à : Exercice 74