

Exercice 1

Décrire les parties de  $\mathbb{R}$  dans lesquelles évolue  $x$  pour que les assertions suivantes soient vraies :

- a)  $(x > 3 \text{ ou } x \leq 0) \text{ et } x > -2$       b)  $(x > 2 \text{ et } x \geq -1) \text{ ou } (x < 0 \text{ et } x \geq -1)$   
 c)  $(x > 2 \text{ ou } x < 0) \text{ et } x \in [-1; 4[$       d)  $(x > 3 \text{ et } x \in [-2; 5]) \text{ ou } (x < 0 \text{ et } x \in [-2; 5[)$   
 e)  $x > 1 \text{ et } x < 2 \text{ et } x \neq 0$       f)  $x > 1 \text{ et } x < 6 \text{ et } x \neq 3$   
 g)  $(x \leq 0 \text{ ou } x > 1) \text{ et } x < 2$       h)  $x > 1 \Rightarrow x > 2$ .

Exercice 2

Etant donnés  $P$ ,  $Q$  et  $R$  trois assertions, vérifier que :

- a)  $P \text{ ou } (Q \text{ et } R) \sim (P \text{ ou } Q) \text{ et } (P \text{ ou } R)$   
 b)  $P \text{ et } (Q \text{ ou } R) \sim (P \text{ et } Q) \text{ ou } (P \text{ et } R)$   
 c)  $\text{non}(P \Rightarrow Q) \sim P \text{ et } \text{non}(Q)$ .  
 d)  $\text{non}(P \Leftrightarrow Q) \sim (P \text{ et } \text{non}(Q)) \text{ ou } (Q \text{ et } \text{non}(P))$ .

Exercice 3

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction définie sur  $I$  à valeurs réelles.

Exprimer à l'aide de quantificateurs les assertions suivantes :

- a) " la fonction  $f$  est négative "  
 b) " la fonction  $f$  s'annule "  
 c) " la fonction  $f$  est la fonction nulle "  
 d) "  $f$  n'est pas une fonction constante "  
 e) "  $f$  ne prend jamais deux fois la même valeur "  
 f) "  $f$  prend toutes les valeurs réelles "  
 g) "  $f$  prend des valeurs arbitrairement grandes "  
 h) " la fonction  $f$  présente un maximum et un minimum "

Exercice 4

Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Montrer que

- a)  $\left( |x| \leq \frac{x}{2} \right) \Leftrightarrow x = 0$ .  
 b)  $(\forall \varepsilon > 0, |x| \leq \varepsilon) \Leftrightarrow x = 0$   
 e)  $(\forall \varepsilon > 0, |x| < \varepsilon) \Leftrightarrow x = 0$ .  
 c)  $(\forall \delta > 0, |x| < \delta) \Leftrightarrow (\forall \delta \geq 0, |x| \leq \delta)$   
 b)  $[\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, (\forall x) (|x| < \eta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon)] \Leftrightarrow [\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, (\forall x) (|x| < \eta \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon)]$ .

Exercice 1

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  non vide et  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction à valeurs réelles définie sur  $I$ .

Exprimer les négations des assertions suivantes ainsi que leur sens éventuels :

- a)  $\forall x \in I, f(x) \geq 0$
- b)  $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in I, f(x) = y$
- c)  $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in I, |f(x)| \leq M$
- d)  $\forall x, y \in I, x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$
- e)  $\forall x, y \in I, x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$
- f)  $\forall x, y \in I, f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$
- g)  $\forall x, y \in I, f(x) > f(y) \Rightarrow x \leq y$ .

Exercice 2

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Soient  $A$  et  $B$  deux parties de  $\mathbb{R}$ ; quelle différence de sens ont les deux assertions proposées :

- a)  $\forall x \in A, \exists y \in B, y = f(x)$  et  $\exists y \in B, \forall x \in A, y = f(x)$ .
- b)  $\forall y \in B, \exists x \in A, y = f(x)$  et  $\exists x \in A, \forall y \in B, y = f(x)$ .
- c)  $\forall x \in \mathbb{R}, \exists M \in \mathbb{R}, f(x) < M$  et  $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) < M$ ?

Exercice 3

Etant données  $A, B$  et  $C$  trois parties de  $E$ , justifier les équivalences suivantes :

- a)  $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B \Leftrightarrow A \cap B = A \Leftrightarrow A \setminus B = \emptyset$ .
- b)  $A \cup B = A \cap C \Leftrightarrow B \subseteq A \subseteq C$
- c)  $\begin{cases} A \cup B = A \cup C \\ A \cap B = A \cap C \end{cases} \Leftrightarrow B = C$ .

Exercice 4

Soit  $A, B$  et  $C$  trois parties de  $E$ , on appelle différence symétrique de  $A$  et  $B$ , l'ensemble :

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Montrer que  $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ .

UNIVERSITE NANGUI ABROGOUA

UFR SFA

L1

Fiche de T D N° 3 De Logique et Raisonnements

2021-2022

Exercice 1

I) Soit  $f : E \rightarrow F$  et  $g : F \rightarrow G$ . Etablir les implications suivantes :

- a)  $g \circ f$  injective  $\Rightarrow f$  injective
- b)  $g \circ f$  surjective  $\Rightarrow g$  surjective

II) Soit  $E, F, G$  trois ensembles,  $f : E \rightarrow F, g : F \rightarrow G$  et  $h : G \rightarrow E$

Etablir que si  $h \circ g \circ f$  est injective et que  $g \circ f \circ h$  et  $f \circ h \circ g$  sont surjectives alors  $f, g$  et  $h$  sont bijectives.

Exercice 2

Soit  $E, F, G$  trois ensembles,  $f : E \rightarrow F$  et  $g_1, g_2 : F \rightarrow G$ .

On suppose  $f$  surjective et  $g_1 \circ f = g_2 \circ f$ . Montrer que  $g_1 = g_2$ .

Exercice 3

Soit  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  et  $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  les applications définies par :

$$\forall k \in \mathbb{N}, f(k) = 2k \text{ et } g(k) = \begin{cases} k/2 & \text{si } k \text{ est pair} \\ (k-1)/2 & \text{si } k \text{ est impair} \end{cases}$$

- a) Etudier l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité de  $f$  et  $g$ .
- b) Préciser les applications  $g \circ f$  et  $f \circ g$ .

Etudier leur injectivité, surjectivité et bijectivité.

Exercice 4

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue. On considère les assertions suivantes :

$P : " \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0 "$ ,  $Q : " \exists x \in \mathbb{R}, f(x) = 0 "$  et  
 $R : " (\forall x \in \mathbb{R}, f(x) > 0) \text{ ou } (\forall x \in \mathbb{R}, f(x) < 0) "$ .

Parmi les implications suivantes lesquelles sont exactes :

- a)  $P \Rightarrow Q$       b)  $Q \Rightarrow P$       c)  $Q \Rightarrow R$
- d)  $\text{non}(R) \Rightarrow Q$       e)  $\text{non}(Q) \Rightarrow \text{non}(P)$       f)  $\text{non}(P) \Rightarrow \text{non}(R)$ ?

Exercice 5      Soit  $a, b$  et  $c$  trois réels tels que  $c \neq 0$  et  $a^2 + bc \neq 0$ .

On considère la fonction  $f : \mathbb{R} \setminus \{a/c\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{a/c\}$  définie par  $f(x) = \frac{ax + b}{cx - a}$ .

Justifier que  $f$  est une application bien définie.

Calculer  $f \circ f$ , en déduire que  $f$  est une permutation dont on déterminera l'application réciproque.

Exercice 6

Soit  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$  définie par  $f(n) = \begin{cases} n/2 & \text{si } n \text{ est pair} \\ \frac{-(n+1)}{2} & \text{sinon} \end{cases}$ .

Montrer que  $f$  est bien définie et bijective.

UNIVERSITE NANGUI ABROGOUA

UFR SFA

L1

Fiche de T D N° 4 De Logique et Raisonnements

2021-2022

Exercice 1

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite numérique définie par :

$$\begin{cases} u_2 = 1; & u_3 = 4 \\ u_{n+1} = 3u_{n-1} + u_n \end{cases}$$

Montrer que  $(u_n)$  est croissante et déterminer le terme général de  $(u_n)$ .

Exercice 2

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite numérique définie par :

$$\begin{cases} u_2 = 2; & u_3 = 6 \\ u_{n+1} = 3u_{n-1} + 2u_n \end{cases}$$

Montrer que  $(u_n)$  est strictement croissante et déterminer le terme général de  $(u_n)$ .

Exercice 3

A) Montrer que deux suites adjacentes sont convergentes et qu'elles ont la même limite.

B) Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite numérique définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 4; & u_1 = 2 \\ u_{2n+1} = \frac{1}{2}u_{2n-1} + \frac{3}{2} \\ u_{2n} = \frac{9}{2} - \frac{1}{2}u_{2n-1} \end{cases} \quad \text{Posons } v_n = u_{2n} \quad \text{et} \quad w_n = u_{2n+1}$$

1°) Montrer que les suites  $(v_n)$  et  $(w_n)$  sont adjacentes

2°) Déterminer les termes généraux de  $(v_n)$  et  $(w_n)$ . et en déduire que  $(u_n)$  est convergente.