SERIE I : RAPPELS ET COMPLEMENTS DE MATHEMATIQUES

Exercice 1

Dans un repère orthonormé direct $R\,(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ on considère les vecteurs suivants

$\vec{V}_1 = 3\vec{\imath} + 3\vec{\jmath}$, $\vec{V}_2 = \vec{\imath} + 3\vec{\jmath} + \vec{k}$, $\vec{V}_3 = \vec{\imath} - \vec{\jmath} + 2\vec{k}$
$\vec{V}_4 = 2\vec{\jmath} - \vec{k}$

1. Représenter les vecteurs $\overrightarrow{V_1}$ et $\overrightarrow{V_2}$,
2. Calculer $\|\overrightarrow{V_1}\|$, $\|\overrightarrow{V_2}\|$, $\overrightarrow{V_1}.\overrightarrow{V_2}$, et $\overrightarrow{V_1} \wedge \overrightarrow{V_2}$,
3. Calculer l'angle formé par les vecteurs $\overrightarrow{V_1}$ et $\overrightarrow{V_2}$,
4. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{V_3}$, est perpendiculaire au plan (P) formé par les vecteurs $\overrightarrow{V_1}$ et $\overrightarrow{V_2}$,
5. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{V_4}$ appartient au plan (P) ;
6. Déterminer le vecteur unitaire $\vec{u}$ porté par les vecteurs $\overrightarrow{(V_1} + \overrightarrow{V_2})$;
7. Calculer le produit mixte $(\overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{V_2}, \overrightarrow{V_3})$ et montrer qu'il est invariant par permutation circulaire

Exercice 2 :

$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ et $\|\vec{r}\|$ = r.

1) Calculer le gradient du champ scalaire U, si U est respectivement :

1. r,
2. r^2,
3. r^{-1},
4. ln r,
5. f(r),
6. $\vec{c} \bullet \vec{r}$, où $\vec{c}$ est un vecteur constant.

2) Calculer la divergence et le rotationnel du vecteur $\vec{a}$, si $\vec{a}$ est respectivement :

1. $\vec{r}$;
2. $C\vec{r}$,
3. $\dfrac{\vec{r}}{r}$,
4. d) $f(r)\vec{r}$;

C est une constante et $f(r)$ une fonction scalaire.

Exercice 3

Dire si un champ vectoriel donné possède un potentiel U et le déterminer, si le potentiel existe :

1) $\vec{a} = (5x^2y - 4xy)\vec{i} + (3x^2 - 2y)\vec{j}$

2) $\vec{a} = yz\vec{i} + zx\vec{j} + xy\vec{k}$

3) $\vec{a} = (y+z)\vec{i} + (x+z)\vec{j} + (x+y)\vec{k}$

Exercice 4

Le champ vectoriel est-il potentiel, solénoïdal ou les deux à la fois ? Déterminer le potentiel pour le cas il existe :

1) $\vec{a} = (5x^2y - 4xy)\vec{i} + (3x^2 - 2y)\vec{j}$

2) $\vec{a} = yz\vec{i} + zx\vec{j} + xy\vec{k}$

3) $\vec{a} = (y+z)\vec{i} + (x+z)\vec{j} + (x+y)\vec{k}$

4) $\vec{a} = 2x\,\vec{i} - 3y\vec{j}$

Exercices complémentaires

Dans un repère cartésien (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$), la position d'un point M est donnée par $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. On considère les trois bases : polaire ($\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta$), cylindrique ($\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z$) et sphérique ($\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_\theta$) avec φ= colatitude ($0 \le \varphi \le \pi$) et θ=longitude ou azimut ($0 \le \theta \le 2\pi$).

1) Exprimer les composantes du vecteur $\vec{r}$ et d $\vec{r}$ dans chacune des bases.

2) Exprimer chacune des bases en fonction de la base cartésienne et inversement. Trouver les matrices de transformation.

3) Déterminer l'élément de surface dS en coordonnées polaires ; en déduire la surface d'un disque de rayon R.

4) Déterminer l'élément de volume d$\mathcal{V}$ en coordonnées cylindriques, puis coordonnées en sphériques. Calculer le volume d'un cylindre

de rayon R et de hauteur h. Calculer le volume d'une sphère de rayon R.

5) Déterminer l'élément de surface extérieure dS d'une sphère de rayon R en coordonnées sphériques. En déduire la surface extérieure d'une sphère de rayon R.

SERIE II : DIMENSION ET ANALYSE DIMENSIONNELLE

Exercice 1

Remplir le tableau ci-dessous.

Grandeur	Dimension	Unités		Facteur de conversion	
		SI	CGS	SI-CGS	CGS-SI
Masse					
Longueur					
Temps					
Surface					
Volume					
Vitesse					
Accélération					
Force					
Travail et énergie					
Puissance					
Pression					

Exercice 2

2.1. La formule de Stokes f = 6paηv donne la force résistante qui s'exerce sur une sphère de rayon a, de vitesse v, dans un fluide visqueux de coefficient de viscosité η. Déterminer l'équation aux dimensions du coefficient η.

2.2. La vitesse limite v d'une sphère de rayon a et de masse volumique ρ' tombant dans un milieu visqueux de coefficient de viscosité η et de masse volumique ρ est donnée par la formule :

$$v = \frac{1}{9}\frac{a^2 g(\rho' - \rho)}{\eta}$$

Où g est l'accélération de pesanteur. Vérifiez l'homogénéité de cette formule.

Exercice 3

Trouver la formule de la puissance dépensée par une hélice en admettant que c'est une fonction monôme de la masse volumique de l'air ρ, du diamètre D et de la vitesse de rotation ω.

Exercice 4

Établir les équations aux dimensions en fonction des grandeurs masse, longueur, temps, etc. :

1. De la constante de Planck h sachant que l'énergie transportée par un photon est donnée par la relation :

$$E = h\nu$$

Où ν représente la fréquence du rayonnement correspondant.

2. De la constante de Boltzmann k qui apparaît dans l'expression de l'énergie cinétique d'une molécule d'un gaz monoatomique à la température T ; à savoir :

$$E = \frac{3}{2}kT$$

3. De la permittivité du vide e_0 qui apparaît dans l'expression de la force d'interaction électrique (loi de Coulomb) :

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq'}{r^2}$$

4. De la perméabilité magnétique du vide μo qui, apparaît dans la loi de Laplace qui permet de prévoir la force d'interaction entre deux fils conducteurs parallèles de longueur L, placés dans le vide, séparés par une distance d et parcourus par des courants I et I' :

$$F = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{II'}{d}$$

Exercice 5

Vérifier l'homogénéité des expressions suivantes :

1) v = d t 2) v = t/d 3) v = 2d/t

4) Ec= mv 5) Ec = 2 mv^2

6) Ec=0,5 mv^2 7) W = mgd

8) W = mg/t

v : vitesse ; d : distance ; t : temps ; m : masse ; Ec : énergie cinétique ; W : travail ; g : accélération de la pesanteur.

Exercices Complémentaires :

Exercice 1

La perte de charge H d'un écoulement isovolume dans une conduite horizontale est donnée par la formule de Darcy :

H = f $\frac{l}{d}\frac{v^2}{2g}$, où f est un coefficient, l et d sont respectivement la longueur et le diamètre de la conduite, et g l'accélération de la pesanteur.

Déterminer la dimension de H.

H = $\frac{\Delta p}{\omega}$; Δp étant la différence de pression d'un liquide entre deux points situés à des niveaux différents, et ω le poids spécifique. Déterminer la dimension de ω.

Exercice 2

En utilisant les méthodes de l'analyse dimensionnelle, Trouver la formule la force centrifuge en admettant que c'est une fonction monôme de la masse m, de la vitesse V et du rayon r.

Exercice 3

Soit un système d'unités dans laquelle les grandeurs τ, μ, dv et dy ont pour unités :

τ : contrainte tangentielle visqueuse en $kg.m^{-2}$

μ : viscosité absolue ou dynamique en $kg.s.m^{-2}$

dv : variation de vitesse en $m.s^{-1}$

dy : variation de distance en m.

1) Donner les dimensions de τ, μ, dv et dy.

2) Vérifier l'expression $\tau = \mu\frac{dv}{dy}$ en dimensions

INYASS
COULIBALY
ADAMA

SERIE III: CINEMATIQUE DU POINT MATERIEL

Exercice 1

Un point M se déplace sur la circonférence $x^2 + y^2 = a^2$ avec une vitesse angulaire ⍰ constante.

1/ Déterminer la loi du mouvement de sa projection M_1 sur l'axe Ox, si à l'instant t=0 le point M occupait la position M_0 (a,0).

2/ Calculer la vitesse et l'accélération du mouvement de ce point.

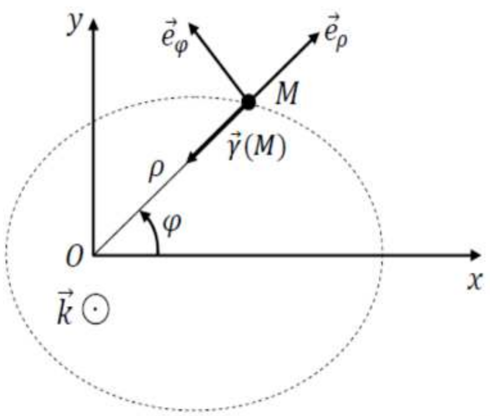
3/ Calculer la vitesse et l'accélération du mouvement de ce point M_1 à l'instant initial et lorsqu'il repasse à l'origine des coordonnées

4/ Quelle sont les valeurs maximales des grandeurs absolues de la vitesse et l'accélération du mouvement du point M_1 ?

Exercice 2

Considérons un point matériel M de masse m qui décrit dans un référentiel fixe $\Re(O, i, j, k)$, supposé galiléen, une trajectoire située dans le plan (xoy) de façon à ce que son accélération passe toujours pas un point fixe O (mouvement à accélération centrale).

Un mouvement est dit à accélération centrale s'il existe un point fixe O tel que, pour tout instant t, le vecteur accélération du point M, γ $(M/\Re)$, est colinéaire au vecteur position $\overrightarrow{OM}$. Il en découle : $\overrightarrow{OM} \wedge \vec{\gamma}(M/R) = \vec{0}$



Soit $\vec{c}$ le vecteur défini par : $\vec{c} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{V}(M/R)$

1) Montrer que $\vec{c}$ est un vecteur constant.

2) Déduire que le moment cinétique de M par rapport à O est constant.

3) Donner l'expression de $\vec{c}$ en coordonnées polaires $(\rho, \dot{\varphi})$.

4) Donner $c = \|c\|$ en fonction de ρ et $\dot{\varphi}$. Déduire de $c = cte$ que $2\dot{\rho}\,\dot{\varphi} + \rho\ddot{\varphi} = 0$.

5) On pose $u = \frac{1}{\rho}$ démontrer que

$$\overrightarrow{V}(M/R) = -c\,\frac{du}{d\varphi}\vec{e}_\rho + cu\vec{e}_\varphi$$

Exercice 3

Un point matériel M, animé d'un mouvement rectiligne le long de Ox pour x < 0 avec la vitesse v_0, est soumis à partir de O à une accélération $\vec{a} = -kv^2\,\vec{i}$ où k est une constante positive et v la vitesse à l'instant t.

1/ Exprimer v en fonction de t

2/ En déduire l'expression de x en fonction du temps et montrer que v = v_0 exp(-kx). On prendra pour l'origine des temps en O

Exercice 4

On laisse tomber d'un immeuble de hauteur h une bille sans vitesse initiale. La chute de celle-ci s'effectue à la verticale selon un mouvement uniformément d'accélération g.

1) Quelle est la trajectoire de la bille dans un référentiel lié à une voiture se déplaçant suivant un mouvement rectiligne uniforme de vitesse $\vec{u}$ et passant à la verticale de chute au moment du lâcher ?

2) Quelle est la trajectoire de la bille dans le même référentiel si on admet que la voiture entame au moment du lâcher et à partir de la verticale de chute un mouvement rectiligne uniformément accéléré d'accélération $\vec{a}_e$

Exercice 5

Un parachute P, assimilé à un point matériel P, tombe à la vitesse limite $\vec{u}$. Un train passe en 0, à la verticale de chute de P, au moment où P est à l'altitude h.

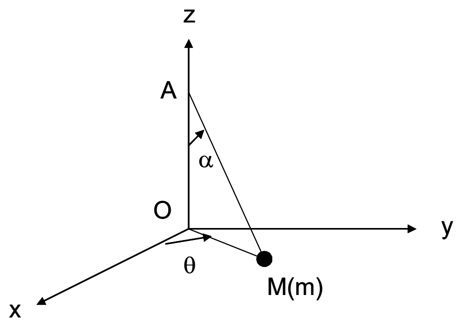
Déterminer la trajectoire de P, par rapport à un voyageur dans les cas suivants :

1/ Le train a un mouvement uniforme de vitesse $\vec{v}$, horizontale.
2/ Le train aborde une rampe formant l'angle α constant avec l'horizontale, à la vitesse $\vec{v}$.
3/ Le train a un mouvement rectiligne horizontal, à accélération constante $\vec{\Gamma}$.

INYASS COULIBALY ADAMA

SERIE IV: DYNAMIQUE DU POINT MATERIEL

Exercice 1



Un point matériel M, de masse m, lié par un fil inextensible de longueur l à un point fixe A, tourne avec une vitesse angulaire ω constante autour de l'axe Az.

1) α étant l'angle que forme AM avec la verticale, calculer la tension du fil T puis l'angle α en fonction de m, g, l et ω .

2) Calculer en coordonnées cylindriques d'origine O l'expression du moment cinétique de M par rapport à A. Vérifier que sa dérivée par rapport au temps est égale au moment par rapport à A de la résultante des forces appliquées à M.

Exercice 2

Un parachutiste de masse m, initialement immobile se déplace verticalement vers le bas en présence de la résistance de l'air $\vec{R}$. Celle-ci est proportionnelle à la vitesse instantanée $\vec{v}$ du parachutiste: $\vec{R} = -\alpha\ \vec{v}$.

Le parachutiste atteint une vitesse limite de 15 m/s. On donne g=10 m/s^2.

1) Déterminer à l'instant *t* :

a) la vitesse ; b) l'accélération ; c) la position du parachutiste ; d) la vitesse limite ;

2) Calculer le temps mis pour atteindre la vitesse de 14 m/s.

Exercice 3

La résultante des forces agissantes sur un point matériel est $\vec{F} = 3x^2\,\vec{i} + 5y\,\vec{j}$.

1/ Calculer le travail W_{01} de $\vec{F}$ entre x=0 et x=1, le long de la courbe d'équation $y = 2x^2$.

2/ Déterminer les positions d'équilibre. Etudier la stabilité des positions d'équilibre

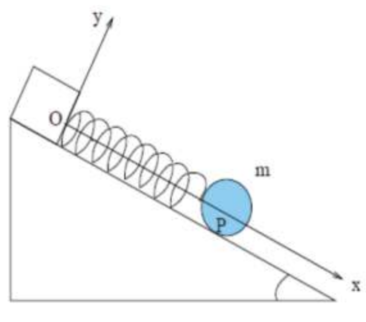
Exercice 4

Un objet ponctuel de masse m fixé à un ressort de constante de raideur k et longueur à vide L_0, attaché en O, se déplace le long d'un plan incliné d'angle α. On suppose la masse du ressort nulle, ainsi que sa longueur quand il est comprimé. La position de la masse est x_e à l'équilibre. On néglige les frottements. À l'instant initial, on lance la masse, située en x_e, une vitesse v_0 vers O.

1) Déterminer le mouvement x (t)

2) À quelle condition sur v_0 la masse frappe-t-elle le point *O* ?

3) À quel instant le choc a-t-il lieu et quelle est alors la vitesse de la masse

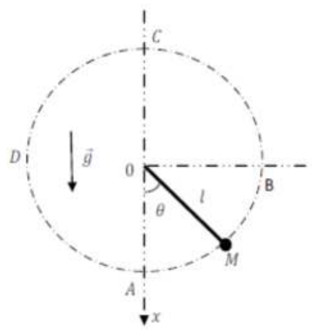


SERIE V : TRAVAIL D'UNE FORCE. ENERGIE CINETIQUE. ENERGIE POTENTIELLE. ENERGIE MECANIQUE

Exercice 1 :

On considère une masse m accrochée à une des extrémités M d'un fil de longueur l et de masse négligeable. L'autre extrémité O du fil est fixe dans le référentiel R terrestre considéré galiléen. L'objectif de l'exercice est de calculer la valeur minimale de la vitesse VA de la masse m au point A pour que celle-ci effectue un tour complet autour du point O, le fil restant constamment tendu.

On repère la masse M sur la boucle par l'angle q que fait OM avec la verticale OA. On notera VA et M la vitesse de M respectivement en A et en M.



I. Étude énergétique

1) En prenant l'origine de l'énergie potentielle de pesanteur au niveau du point A ($E_{PP}(A)=0$), donner l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur $E_{PP}(M)$ en M.

2) En déduire l'expression de l'énergie mécanique totale $E_m(A)$ en A et $E_m(M)$ en M.

3) Le système est-il conservatif ? En déduire une relation entre $E_m(A)$ et $E_m(M)$.

4) En déduire l'expression de V_M^2 en fonction de g, l, V_A et θ (relation n°1).

II. Etude Cinématique

L'étude du mouvement de M sur le cercle (ABCD) se fait naturellement en coordonnées polaires ($r = l, \theta$) et la base associée $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$

1) Exprimer le vecteur vitesse $\vec{V}_M$ en coordonnées polaires et en déduire la relation entre V_M, l et $\dot{\theta}$, Exprimer V_M^2 en fonction de l et $\dot{\theta}$ (relation n°2)

2) Exprimer le vecteur accélération $\vec{a}_M$ en coordonnées polaires. En déduire, en utilisant la relation n°2 précédente, l'expression de la composante radiale a_r (suivant $\vec{u}_r$) de l'accélération en fonction de V_M et l.

III. Etude Dynamique

1) Faire l'étude dynamique de M sur la partie circulaire (ABCD). On appellera $\vec{T}$ la tension du fil exercée sur la masse M.

2) En projetant le principe fondamental de la dynamique sur $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ exprimer le rapport T/m de la réaction T sur la masse m (relation n° 3)

3) En utilisant les relations n° 1 et 3, exprimer la tension T du support en fonction de l, g, V_A et θ.

4) Dire que la masse fait un tour complet le fil restant tendu se traduit par : Pour toute valeur de l'angle θ, la tension T existe : $\forall\theta, T(\theta) \geq 0$

a) Pour quelle valeur évidente de θ la réaction T est-elle minimale ?

b) En déduire la valeur minimale que doit avoir la vitesse V_A de la masse m au point A pour que celle-ci effectue un tour complet le fil restant tendu

c) Quelle est alors la vitesse V_C de la masse au point C.

CHAPITRE 6: OSCILLATEURS HARMONIQUES. OSCILLATEURS AMORTIS