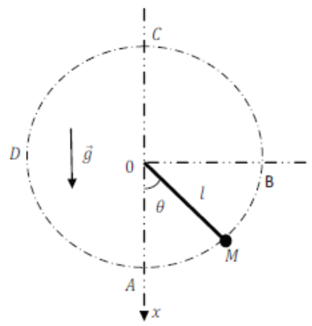
SERIE V : TRAVAIL D'UNE FORCE. ENERGIE CINETIQUE. ENERGIE POTENTIELLE. ENERGIE MECANIQUE

Exercice 1 :

On considère une masse m accrochée à une des extrémités M d'un fil de longueur l et de masse négligeable. L'autre extrémité O du fil est fixe dans le référentiel R terrestre considéré galiléen. L'objectif de l'exercice est de calculer la valeur minimale de la vitesse VA de la masse m au point A pour que celle-ci effectue un tour complet autour du point O, le fil restant constamment tendu.

On repère la masse M sur la boucle par l'angle q que fait OM avec la verticale OA. On notera VA et M la vitesse de M respectivement en A et en M.



I. Étude énergétique

1) En prenant l'origine de l'énergie potentielle de pesanteur au niveau du point A ($E_{PP}(A)$ =0), donner l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur $E_{PP}(M)$ en M.

2) En déduire l'expression de l'énergie mécanique totale $E_m(A)$ en A et $E_m(M)$ en M.

3) Le système est-il conservatif ? En déduire une relation entre $E_m(A)$ et $E_m(M)$.

4) En déduire l'expression de V_M^2 en fonction de g, l, V_A et θ (relation n°1).

II. Etude Cinématique

L'étude du mouvement de M sur le cercle (ABCD) se fait naturellement en coordonnées polaires (r = l,θ) et la base associée $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$

1) Exprimer le vecteur vitesse $\vec{V}_M$ en coordonnées polaires et en déduire la relation entre V_M , l et $\dot{\theta}$, Exprimer V_M^2 en fonction de l et $\dot{\theta}$ (relation n°2)

2) Exprimer le vecteur accélération $\vec{a}_M$ en coordonnées polaires. En déduire, en utilisant la relation n°2 précédente, l'expression de la composante radiale a_r (suivant $\vec{u}_r$) de l'accélération en fonction de V_M et l.

III. Etude Dynamique

1) Faire l'étude dynamique de M sur la partie circulaire (ABCD). On appellera $\vec{T}$ la tension du fil exercée sur la masse M.

2) En projetant le principe fondamental de la dynamique sur $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ exprimer le rapport T/m de la réaction T sur la masse m (relation n° 3)

3) En utilisant les relations n° 1 et 3, exprimer la tension T du support en fonction de l, g, V_A et θ.

4) Dire que la masse fait un tour complet le fil restant tendu se traduit par : Pour toute valeur de l'angle θ, la tension T existe : $\forall\theta, T(\theta) \geq 0$

a) Pour quelle valeur évidente de θ la réaction T est-elle minimale ?

b) En déduire la valeur minimale que doit avoir la vitesse V_A de la masse m au point A pour que celle-ci effectue un tour complet le fil restant tendu

c) Quelle est alors la vitesse V_C de la masse au point C.

CHAPITRE 6: OSCILLATEURS HARMONIQUES. OSCILLATEURS AMORTIS

A. Les deux formes de solutions de l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique : Etude Numérique

Un oscillateur harmonique obéit à l'équation différentielle $\ddot{x} + 3x = 0$ avec comme conditions initiales x(0) = 2,0 cm et $\dot{x}(0) = -6cm.s^{-1}$.

a) Quelle est la pulsation ω du mouvement et sa période T ?

b) Déterminer numériquement x(t). On présentera la solution sous la forme x(t) = Asin(ωt) +Bsin(ωt) où on cherchera numériquement A et B.

   i. On cherche désormais à écrire x(t) sous la forme x(t) = X cos (ωt +φ) en déterminant les trois paramètres numériquement. On donne cos(a +b) = cosa cosb − sina sinb. En développant l'expression précédente de x(t), redémontrer les relations A = X cosφ et B = −X sinφ. Exprimer X en fonction de A et B.

   ii. Quelle est la valeur numérique de l'amplitude X du mouvement ?

   iii. Calculer la phase φ à l'origine.

   iv. En déduire numériquement l'expression de x(t).

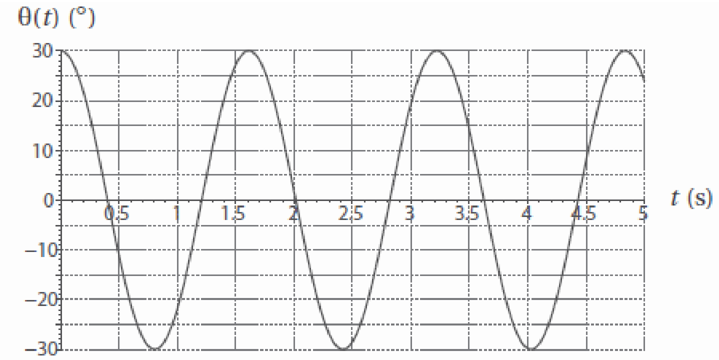
c) Représenter qualitativement le graphe de la fonction x(t).

d) Donner une expression numérique approchée de x(t), $\dot{x}(t)$ et $\ddot{x}(t)$ à t = 1,0 s

B. *Oscillations* d'un *pendule simple*

a) Un pendule simple est constitué d'un fil inextensible de longueur l auquel est attachée une masse m assimilée à un point matériel. On note g = 9,8 m.s^{-2} l'intensité du champ de pesanteur. L'évolution de l'angle θ que fait le pendule avec la verticale, pour de petits angles, est régie par l'équation différentielle $\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$. Que vaut la période T du mouvement ? et sa fréquence ?

b) L'évolution de θ(t) est donnée sur le graphe ci-dessous



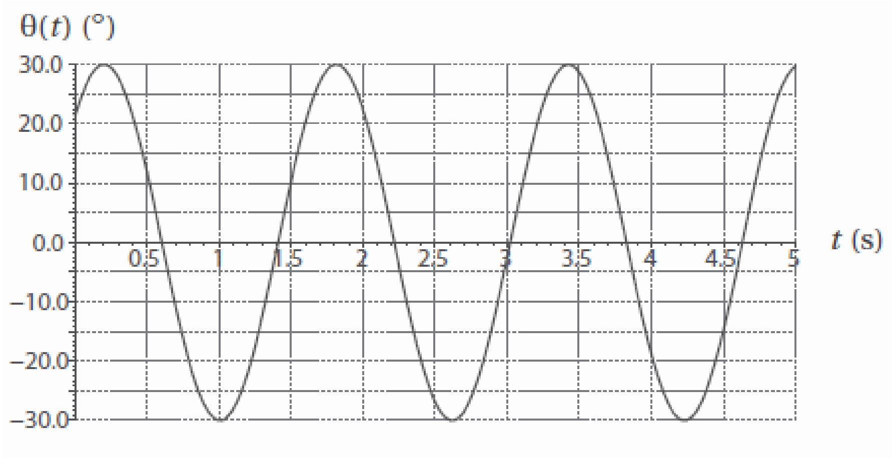
   i. Déterminer numériquement la période T du mouvement. En déduire la longueur l du pendule utilisé.

   ii. Déterminer une valeur approchée de l'amplitude θ_m et de la phase φ à l'origine du signal.

   iii. Après avoir calculé la pulsation ω du mouvement, en déduire une expression numérique de θ(t).

   iv. Déterminer graphiquement $\theta(0)$. et $\dot{\theta}(0)$. En déduire simplement $\ddot{\theta}(0)$.

c) On recommence avec de nouvelles conditions initiales, la période restante identique :



i. Déterminer une valeur approchée de l'amplitude θ_m et de la phase φ à l'origine du signal.

ii. Donner alors une expression numérique de $\theta(t)$. En déduire par calcul les conditions initiales $\theta(0)$ et $\dot{\theta}(0)$.

iii. Déterminer graphiquement la valeur de $\theta(0)$ et le signe de $\dot{\theta}(0)$. Comment pourrait-on procéder pour mesurer cette dernière valeur graphiquement ?