CHAPITRE 6: OSCILLATEURS HARMONIQUES. OSCILLATEURS AMORTIS

EXERCICE 1

a) L'équation différentielle est du type $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ soit une pulsation $\omega = \sqrt{3} = 1{,}7$ rad.s^{-1}.
On a donc $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = \dfrac{2\pi}{\sqrt{3}} = 3{,}6$ s.

b) On cherche une solution sous la forme

$$x(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$$

soit en tenant compte de la valeur obtenue de la pulsation $x(t) = A\cos\left(\sqrt{3}t\right) + B\sin\left(\sqrt{3}t\right)$.
Sachant que $x(0) = A$, on trouve $A = 2{,}0$ cm.
Pour trouver B, on calcule la dérivée de $x(t)$ soit

$$\dot{x}(t) = -A\sqrt{3}\sin\left(\sqrt{3}t\right) + B\sqrt{3}\cos\left(\sqrt{3}t\right)$$

On a donc $\dot{x}(0) = B\sqrt{3}$ soit $B = -\dfrac{6{,}0}{\sqrt{3}} = -3{,}5$ cm.

On trouve donc $x(t) = 2{,}0\cos\left(\sqrt{3}t\right) - \dfrac{6{,}0}{\sqrt{3}}\sin\left(\sqrt{3}t\right)$ soit numériquement $x(t) = 2{,}0\cos(1{,}7t) - 3{,}5\sin(1{,}7t)$.

i) On développe $x(t) = X\cos(\omega t + \varphi)$, ce qui donne $x(t) = X\cos(\omega t)\cos\varphi - X\sin(\omega t)\sin\varphi$. D'autre part, on a $x(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$. On en déduit par identification $A = X\cos\varphi$ et $B = -X\sin\varphi$.

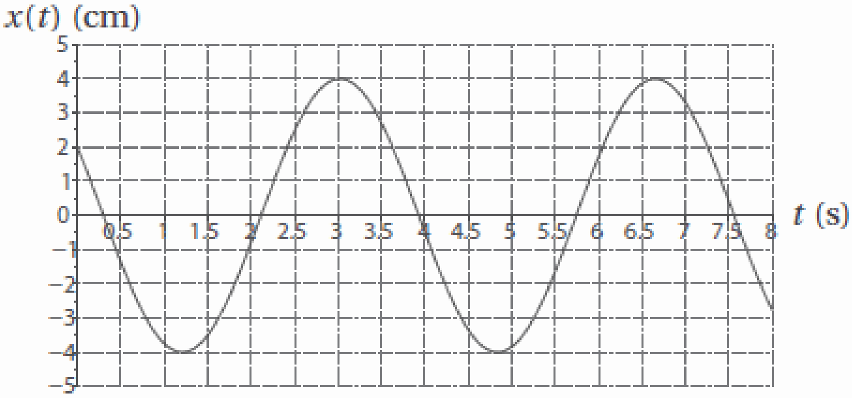
ii) On a donc $A^2 + B^2 = X^2\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right) = X^2$ dont on déduit $X = \sqrt{A^2 + B^2}$. L'amplitude X du mouvement vaut $X = \sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{2{,}0^2 + \left(-\dfrac{6}{\sqrt{3}}\right)^2} = 4{,}0$ cm.

iii) Pour trouver la phase à l'origine, on utilise le fait que $\cos\varphi = \dfrac{A}{X} = \dfrac{1}{2}$ et $\sin\varphi = -\dfrac{B}{X} = \dfrac{6}{4\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. On en déduit $\varphi = \dfrac{\pi}{3} = 1{,}0$ rad.s^{-1}.

iv) On en déduit une autre forme de $x(t)$ à savoir

$$x(t) = 4\cos\left(\sqrt{3}t + \frac{\pi}{3}\right) = 4\cos(1,7t + 1,0)$$

c) L'allure est une sinusoïde partant de $0 < x(0) < X$ avec une tangente à l'origine de pente $\dot{x}(0) < 0$ donc une allure décroissante en $t = 0,0$ s. On obtient alors le graphe :



d) On prend $x(t) = 4\cos\left(\sqrt{3}t + \frac{\pi}{3}\right)$ et on l'évalue en $t = 1,0$ s soit $x(1,0) = -3,7$ cm.

On a par dérivation $\dot{x}(t) = -4\sqrt{3}\sin\left(\sqrt{3}t + \frac{\pi}{3}\right)$.

On l'évalue pour $t = 1,0$ s soit $\dot{x}(1,0) = -2,5$ cm.s^{-1}.

Enfin l'équation différentielle donnant $\ddot{x} = -3x$, on en déduit $\ddot{x}(1,0) = -3x(1) = 11,2$ cm.s^{-2}.

On peut noter ici l'intérêt de n'effectuer les applications numériques qu'à la fin.

En effet, si on utilise l'expression approchée intermédiaire, on trouve $x(1,0) = -3,6$ cm ; $\dot{x}(1,0) = -3,0$ cm.s^{-1} et $\ddot{x}(1,0) = 11,1$ cm.s^{-2}. Force est de constater des écarts relativement significatifs.

EXERCICE 2

a) L'équation d'un oscillateur harmonique est de la forme $\ddot{\theta} + \omega^2\theta = 0$ donc par identification avec la formule proposée, on en déduit $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$ et $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = \frac{1}{f}$.

b) *i)* On lit que trois périodes correspondent à 4,8 s soit $T = \frac{4,8}{3} = 1,6$ s. On en déduit $l = g\frac{T^2}{4\pi^2} = 0,64$ m.

ii) Le signal atteint son maximum pour $\theta_m = 30°$ et le maximum est atteint en $t = 0,0$ s donc la phase à l'origine vaut $\varphi = 0$.

iii) On en déduit $\theta(t) = \theta_m \cos(\omega t + \varphi) = 30\cos(3,9t)$ puisque $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

iv) Ici $\theta(0) = \theta_m = 30°$ et cela correspond à un maximum, ce qui implique une dérivée nulle en $t = 0,0$ s donc $\dot{\theta}(0) = 0,0°.s^{-1}$.

Comme $\ddot{\theta} = -\omega^2\theta$, on trouve

$$\ddot{\theta}(0) = -3,9^2\theta(0) = -4,6.10^{2\circ}.s^{-2}$$

c) *i)* On a toujours $\theta_m = 30°$ mais le signal $\theta(t)$ présente cette fois un retard (soit $\varphi < 0$) associé à un écart temporel $\Delta t = 0,20$ s puisque son maximum survient cette fois-ci à $t = 0,20$ s. On en déduit $\varphi = -2\pi\frac{\Delta t}{T}$ soit approximativement $-\frac{\pi}{4}$.

On a alors $\theta(t) = \theta_m \cos(\omega t + \varphi) = 30\cos(3,9t - 0,57)$.

ii) On en déduit $\theta(0) = 30\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 21°$ d'une part et $\dot{\theta}(0) = -1,2.10^2 \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 83°.s^{-1}$ d'autre part. Le calcul de la dérivée de $\theta(t)$ donne $\dot{\theta}(t) = \theta_m \omega \cos\left(\omega t + \varphi\right)$ soit numériquement $\dot{\theta}(t) = -1,2.10^2 \sin(3,9t - 0,57)$.

iii) Graphiquement on lit bien $\theta(0) \approx 21°$ et $\dot{\theta}(0) > 0$ puisque la pente est croissante en $t = 0$. La valeur de $\dot{\theta}(0)$ pourrait être trouvée en calculant la pente de la tangente à la courbe $\theta(t)$ en $t = 0,0$ s.