


TD - 1
Nombres réels**Exercice****1**

1. Résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation $\frac{m}{x-3} > \frac{2}{x+1}$.

2. Résoudre dans \mathbb{R}_+^3 le système d'inconnue (x, y, z) :

$$\begin{cases} x^3 y^2 z^6 = 1 \\ x^4 y^5 z^{12} = 2 \\ x^2 y^2 z^5 = 3 \end{cases}$$

Exercice**2**

Dire en justifiant si les assertions suivantes sont vraies ou fausses :

1. La somme de deux nombres rationnels est un nombre rationnel.
2. Le produit de deux nombres rationnels est un nombre rationnel.
3. L'inverse d'un nombre rationnel non nul est un nombre rationnel.
4. La somme de deux nombres irrationnels est un nombre irrationnel.
5. Le produit de deux nombres irrationnels est un nombre irrationnel.
6. L'inverse d'un nombre irrationnel non nul est un nombre irrationnel.
7. La somme d'un nombre rationnel et d'un nombre irrationnel est un nombre irrationnel.
8. Le produit d'un nombre rationnel par un nombre irrationnel est un nombre irrationnel.
9. Si x est un nombre réel tel que x^7 et x^{12} sont des nombres rationnels alors x est un nombre rationnel.
10. Si x est un nombre réel tel que x^9 et x^{12} sont des nombres rationnels alors x est un nombre rationnel.

Exercice**3**

1. a) - Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

b) - En déduire les sommes $\sum_{k=1}^n k$ puis $\sum_{k=1}^{n+2} k(k+1)$.

2. Soient a et b deux réels différents de 1.

Calculer pour tout entier naturel non nul n , $\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=1}^{n-i} a^i b^k$.

3. Soit n un entier naturel non nul. Calculer $\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=1}^{n-i} (-1)^k$ et $\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=1}^{n-i} (-1)^i$.

4. Pour tout entier naturel n non nul, on pose $q = \frac{2 \times 4 \times \dots \times 2n}{3 \times 5 \times \dots \times (2n+1)}$.

a)- Écrire q à l'aide du symbole \prod

b)- Écrire q à l'aide des factorielles.

Exercice 4

1. Soient x, y et z des nombres réels. Quel est le coefficient de $x^2 y^4 z$ dans le développement de $(x + y + z)^7$?

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que pour tous réels a et b , on a $a^n - b^n = (a - b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$.

Exercice 5

1. Soient a et b deux nombres réels. Montrer que

$$(a) \quad |ab| \leq \frac{a^2 + b^2}{2}.$$

$$(b) \quad ||a| - |b|| \leq |a - b|.$$

$$(c) \quad |a| + |b| \leq |a + b| + |a - b|.$$

$$(d) \quad |a + b| + |a - b| = |a| + |b| + ||a| - |b||.$$

$$(e) \quad \left| \sqrt{|a|} - \sqrt{|b|} \right| \leq \sqrt{|b| - |a|}.$$

$$(f) \quad 1 + |ab - 1| \leq (1 + |a - 1|)(1 + |b - 1|).$$

2. Démontrer l'extension de l'inégalité de Bernoulli suivante

$$\forall x \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}, (1 + x)^n \geq 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2} x^2.$$

Exercice 6

Les parties de \mathbb{R} suivantes sont-elles majorées, minorées? si oui, préciser lorsqu'elles existent leurs bornes supérieures, bornes inférieures, plus grand élément, plus petit élément.

$$1. \quad A = \left\{ 1 + \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}$$

$$3. \quad B = \left\{ \frac{p}{p+q} \mid p \in \mathbb{N}; q \in \mathbb{N}^* \right\}$$

$$2. \quad B = \left\{ (-1)^n + \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}$$

$$4. \quad D = \left\{ \frac{1}{n} - \frac{1}{p} \mid n, p \in \mathbb{N}^* \right\}$$

Exercice 7

Montrer que l'ensemble \mathcal{D}_2 des nombres dyadiques, défini par $\mathcal{D}_2 = \left\{ \frac{n}{2^p} \mid n \in \mathbb{Z}, p \in \mathbb{N} \right\}$ est dense.

Exercice 8

1. Soient x et y deux réels. Prouver que

$$E(x) + E(y) \leq E(x + y) \leq E(x) + E(y) + 1.$$

2. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$E\left(\frac{E(nx)}{n}\right) = E(x).$$

Exercice 9

Le réel $\frac{2\pi}{3}$ est égal à

- | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| a) $\arcsin(\sin(2\pi/3))$ | c) $\arctan(\tan(2\pi/3))$ | e) $\tan(\arctan(2\pi/3))$ |
| b) $\arccos(\cos(2\pi/3))$ | d) $\sin(\arcsin(2\pi/3))$ | |

Exercice 10

En utilisant les formules trigonométriques, simplifier chaque expression en précisant son domaine de validité :

- | | |
|-------------------------|-------------------------|
| 1. $\cos(2 \arccos(x))$ | 5. $\cos(\arctan(x))$ |
| 2. $\sin(2 \arcsin(x))$ | 6. $\sin(\arctan(x))$ |
| 3. $\cos(2 \arcsin(x))$ | 7. $\tan(\arcsin(x))$ |
| 4. $\sin(2 \arccos(x))$ | 8. $\tan(2 \arctan(x))$ |

Exercice 11

Montrer que pour tous réels x et y , on a

$$\operatorname{ch}(x + y) = \operatorname{ch}(x)\operatorname{ch}(y) + \operatorname{sh}(x)\operatorname{sh}(y) \text{ et } \operatorname{sh}(x + y) = \operatorname{sh}(x)\operatorname{ch}(y) + \operatorname{ch}(x)\operatorname{sh}(y).$$

En déduire $\operatorname{th}(x + y)$ en fonction $\operatorname{th}(x)$ et $\operatorname{th}(y)$.

Exercice 12

- Rappeler la définition des fonctions argch , argsh et argth .
- Donner leurs expressions des fonctions argch , argsh et argth en fonction de la fonction \ln puis justifier.

TD - 2 Suites de nombres réels

Exercice 1

1. Montrer que si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente alors sa limite est unique.
2. En utilisant la définition, montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5n+3}{3n+5} = \frac{5}{3}$.
3. Montrer qu'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente si et seulement si les suites extraites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont convergentes vers une même limite.
4. L'assertion ci-dessous est-elle vraie ou fausse ?
" Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge si et seulement si $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_{n+1} - u_n) = 0$."
5. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite. L'assertion ci-dessous est-elle vraie ou fausse ?
" La suite $(|u_n|)_n$ peut converger alors que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est divergente."
6. Étudier la convergence des suites de termes généraux définis par $u_n = \cos(n)$ et $v_n = \sin(n)$.
7. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels. Montrer que si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} E(u_n) = +\infty$.

Exercice 2

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq 1, 0 \leq v_n \leq 1 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n v_n = 1.$$

Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 1$.

Exercice 3

Etudier les limites des suites dont les termes généraux sont définis par :

1. $u_n = \frac{a^n - b^n}{a^n + b^n}; a \in \mathbb{R}_+^*, b \in \mathbb{R}_+^*$.
2. $v_n = \frac{n^3 + 5n}{5n^3 + \cos n + \frac{1}{n^2}}$.
3. $w_n = \frac{2n + (-1)^n}{5n + (-1)^{n+1}}$.
4. $t_n = n - \sqrt{(n+a)(n+b)}$. $a, b \in \mathbb{R}$.
5. $s_n = \sqrt[n]{a^n + b^n}; a \in \mathbb{R}_+^*, b \in \mathbb{R}_+^*$.
6. $r_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n E(ka); a \in \mathbb{R}$.

Exercice 4

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite de nombres réels définies pour tout entier $n \geq 1$ par

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

1. En considérant la différence $u_{2n} - u_n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, démontrer que la suite (u_n) n'est pas une suite de Cauchy.
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante puis calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Exercice 5

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ les suites définies par :

$$\begin{cases} u_0 = 6 \\ v_0 = 3 \end{cases} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{3}(2u_n + v_n) \\ v_{n+1} = \frac{1}{6}(u_n + 5v_n) \end{cases}$$

1. On pose $a_n = \frac{1}{3}(u_n - v_n)$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique. Calculer a_n en fonction de n pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ et donner la limite de $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
2. Démontrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante. Que peut-on en déduire à l'aide de la question précédente ?
3. On pose $b_n = \frac{1}{3}(u_n + 2v_n)$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante. En déduire la limite des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exercice 6

Montrer que les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ suivantes sont adjacentes, où pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

1. $u_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$ et $v_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$.
2. $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$ et $v_n = u_n + \frac{2}{n+1}$.

Exercice 7

1. Montrer que les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définies pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{\sqrt{k}} \right) - 2\sqrt{n} \quad \text{et} \quad v_n = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{\sqrt{k}} \right) - 2\sqrt{n+1}$$

sont adjacentes.

2. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{\sqrt{k}} \right)$

Exercice 8

Donner l'expression du terme général des suites récurrentes réelles suivantes :

1. $u_0 = u_1 = 1, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n.$
2. $u_0 = 2, u_1 = 1, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 2u_{n+1} - 2u_n.$
3. $u_0 = 1, u_1 = 3, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$

Exercice 9

Trouver un équivalent le plus simple possible aux suites suivantes :

1. $u_n = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}$
2. $v_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$
3. $w_n = \frac{n^3 - \sqrt{1+n^2}}{\ln n - 2n^2}$
4. $z_n = \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right).$

Exercice 10

En utilisant les équivalents, déterminer la limite de la suite de terme général

1. $u_n = n \ln\left(\sqrt{\frac{n+1}{n-1}}\right)$
2. $u_n = \frac{n^2+3}{2n+3} (e^{-1/n} - 1)$
3. $u_n = \left(\frac{n}{n-2}\right)^n$

Exercice 11

Soit $a \in [0, +\infty[$. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 = a, \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = 1 + \frac{1}{4}u_n^2.$$

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.
2. En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ pour $a > 2$.
3. Soit $a \in [0, 2]$. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée par 2. En déduire qu'elle converge puis déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Exercice 12

1. $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n^2 + 1}.$
2. $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}.$
3. $u_0 \in \left[\frac{1}{3}, +\infty\right[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{u_n - \frac{2}{9}}.$

TD - 3 Limites et Continuités

Exercice 1

Soit f une fonction de \mathbb{R} vers \mathbb{R} et x_0 un point de \mathbb{R} .

1. Parmi les propositions suivantes, laquelle traduit que $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$.

- $\forall M \in \mathbb{R}, \exists \eta > 0, \forall x \in D_f, |x - x_0| \leq \eta \Rightarrow f(x) \geq M.$
- $\forall M \in \mathbb{R}, \exists \eta > 0, \forall x \in D_f, |x - x_0| \leq \eta \Rightarrow |f(x)| \leq M.$
- $\exists M \in \mathbb{R}, \forall \eta > 0, \forall x \in D_f, |x - x_0| \leq \eta \Rightarrow f(x) \geq M.$
- $\exists M \in \mathbb{R}, \forall \eta > 0, \forall x \in D_f, |x - x_0| \leq \eta \Rightarrow |f(x)| \leq M.$

2. Parmi les propositions suivantes, laquelle traduit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

- $\exists M \in \mathbb{R}, \forall A > 0, \forall x \in D_f, x \leq A \Rightarrow |f(x)| \leq M.$
- $\forall M \in \mathbb{R}, \exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in D_f, x \leq A \Rightarrow f(x) \leq M.$
- $\exists M \in \mathbb{R}, \forall A > 0, \forall x \in D_f, x \leq A \Rightarrow f(x) \geq M.$
- $\forall M \in \mathbb{R}, \exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in D_f, x > A \Rightarrow f(x) < M.$

3. Parmi les propositions suivantes, laquelle traduit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = x_0$.

- $\forall \varepsilon > 0, \exists A > 0, \forall x \in D_f, x \leq A \Rightarrow |f(x) - x_0| \leq \varepsilon.$
- $\exists \varepsilon > 0, \forall A > 0, \forall x \in D_f, x \leq A \Rightarrow |f(x) - x_0| \leq \varepsilon.$
- $\forall \varepsilon > 0, \exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in D_f, x \geq A \Rightarrow |f(x) - x_0| \leq \varepsilon.$
- $\exists \varepsilon > 0, \forall A \in \mathbb{R}, \forall x \in D_f, x \geq A \Rightarrow |f(x) - x_0| \leq \varepsilon.$

Exercice 2

Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes :

$$x \mapsto f(x) = \sqrt{-x} + \frac{1}{\sqrt{1-x}} ; x \mapsto g(x) = \ln(1-2 \cos x) ; x \mapsto h(x) = e^{1/x} \sqrt[3]{1-|x|} \text{ et } x \mapsto k(x) = \ln\left(\frac{1+|x|}{3-|x|}\right).$$

Exercice 3

En utilisant la définition de la notion de limite en un point, montrer que

$$1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad ; \quad 2) \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{1-x^2} = +\infty \quad ; \quad 3) \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x} = 1.$$

Exercice 4

On considère une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ admettant une limite finie ℓ lorsque $x \rightarrow +\infty$. Montrer que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A > 0 : \forall (x, x') \in]A, +\infty[\times]A, +\infty[, |f(x) - f(x')| \leq \varepsilon.$$

Exercice 5

Soit la fonction g définie sur \mathbb{R}^* par $g(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.

1. Montrer que g n'a pas de limite en 0.
2. En déduire que g n'est pas uniformément continue sur \mathbb{R}_+^* .

Exercice 6

Montrer que les fonctions f et g définies par

$$x \mapsto f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{et} \quad x \mapsto g(x) = xE\left(\frac{1}{x}\right)$$

sont prolongeables par continuité en 0.

Exercice 7

Soit f une fonction définie sur \mathbb{R} telle $f \circ f$ soit croissante et $f \circ f \circ f$ soit décroissante. Montrer que f est décroissante.

Exercice 8

Soient f et g deux fonctions de \mathbb{R} vers \mathbb{R} définies par

$$f(x) = \begin{cases} x+3 & \text{si } x \geq 0 \\ x^2 & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad g(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{si } x \geq 3 \\ x & \text{si } x < 3 \end{cases}.$$

Calculer pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(g \circ f)(x)$.

Exercice 9

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[0, 1]$. Laquelle des trois propositions suivantes est-elle correcte :

- (i) Il existe $C > 0$ tel que $|f(x) - f(y)| \leq C$ pour tous x et y dans $[0, 1]$;
- (ii) Il existe $D > 0$ tel que $|f(x) - f(y)| \leq 1$ pour tous x et y dans $[0, 1]$ vérifiant $|x - y| \leq D$;
- (iii) Il existe $E > 0$ tel que $|f(x) - f(y)| \leq E|x - y|$ pour tous x et y dans $[0, 1]$.

Exercice 11

Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xe^{-x} + x^2}{\ln x - x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin(2x)}{1 - \sqrt{\cos x}}, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{E\left(\frac{1}{x}\right) + x}{E\left(\frac{1}{x}\right) - x}, \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x}{\arccos x}$$

Exercice 12

1. Montrer que la fonction $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ est uniformément continue sur \mathbb{R}_+ .

$$x \mapsto \sqrt{x}$$
2. Montrer que la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ n'est pas uniformément continue sur $]0, 1]$.
3. Montrer que la fonction $x \mapsto x^2$ n'est pas uniformément continue sur $[0, +\infty[$.

Exercice 13

Soient I un intervalle de \mathbb{R} et $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1. Si I est un intervalle ouvert alors $f(I)$ est un intervalle ouvert.
2. Si I est un intervalle fermé alors $f(I)$ est un intervalle fermé.
3. Si I est un intervalle borné alors $f(I)$ est un intervalle borné.
4. Si I est un intervalle fermé et borné alors $f(I)$ est un intervalle fermé et borné.

Exercice 14

Soient $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur un intervalle I telles que pour tout $x \in I$, $|f(x)| = |g(x)|$.

Montrer que $f = g$ ou $f = -g$.

Exercice 15

Si f est une fonction définie sur $]0, 1[\cup]1, 2[\cup]3, +\infty[$, en quels points peut-on étudier :

1. l'existence d'une limite,
2. la continuité de f ,
3. un prolongement par continuité ?

TD - 4

Fonctions dérivable et DL

Exercice

1

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

- Montrer que f est dérivable sur \mathbb{R} et calculer l'expression de $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- f est-elle de classe C^1 sur \mathbb{R} .

Exercice

2

Les énoncés suivants sont ils corrects ? si la réponse est non les corriger.

- Soit f dérivable sur $[a, b]$, continue sur $]a, b[$ telle que $f(a) = f(b)$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.
- Soit f continue sur $[a, b]$ dérivable sur $]a, b[$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.
- Interprétation graphique du théorème des accroissements finis : soit f continue sur $[a, b]$ dérivable sur $]a, b[$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que le graphe de f admet au point $C(c, f(c))$ une tangente qui passe par les points $A(a, f(a))$ et $B(b, f(b))$.
- Questions : peut-on appliquer le théorème de Rolle à la fonction f définie par $f(x) = |x|$ sur $[-1, 1]$. Même avec la fonction g définie par $g(x) = 5x^2 + 3$ sur $[0, 2]$.
- Si f admet un développement limité d'ordre k au voisinage de 0, alors f'' admet un développement limité d'ordre $(k - 2)$ au voisinage de 0.
- Soit f_1, f_2, g_1 et g_2 des fonctions définies dans un voisinage de x_0 . Si $f_1 \underset{x_0}{\sim} g_1$ et $f_2 \underset{x_0}{\sim} g_2$ alors $f_1 - f_2 \underset{x_0}{\sim} g_1 - g_2$.

Exercice

3

(QCM une seule réponse exacte par question, justifiez brièvement vos réponses).

- Si f est une fonction dérivable de \mathbb{R} dans \mathbb{R} avec $f'(0) = 0$, alors :

En déduire $f'(0)$, $f''(0)$, $f^{(3)}(0)$ et $f^{(4)}(0)$.

4. Déterminer le développement limité à l'ordre 3, en $x = \frac{\pi}{4}$ de $f(x) = \sqrt{\tan x}$.
5. Déterminer le développement limité à l'ordre 4, en $x = 1$ de $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$.

Exercice 7

Déterminer les limites suivantes :

a) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} (2x^2 - 3x + 1) \tan(\pi x)$,

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^3 + x + 1} - \sqrt{x^2 + x}$,

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$,

d) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\operatorname{sh}^2(x) - \operatorname{sh}^2(a)}{x^2 - a^2}$ ($a \in \mathbb{R}^*$).

Exercice 8

On considère l'application $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 2x + \sin x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que f est bijective. On note f^{-1} sa bijection réciproque.
2. Montrer que f^{-1} est de classe \mathcal{C}^3 .
3. Déterminer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de f^{-1} .

Exercice 9

Montrer qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ unique, que l'on calculera, tel que l'application

$$f: x \mapsto \frac{1}{x^3} (\ln(1+x) + a(e^x - 1) + b \sin x)$$

admette une limite finie en 0, et déterminer alors cette limite.

Exercice 10

Déterminer les asymptotes éventuelles à la courbe au voisinage de l'infini de la fonction f définie par

$$f(x) = e^{\frac{1}{x}} \sqrt{x(x+2)}.$$

On précisera la position de la courbe par rapport aux asymptotes.

Exercice 11

Étudier puis tracer le graphe de la fonction donnée par $f(x) = \left(1 + \frac{1}{|x|}\right)^{|x|}$.



Nombres complexes

Exercice

1

Répondre par vrai ou faux aux affirmations suivantes :

Q₁. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a $|z|^2 = |z^2|$.

vrai.

faux.

Q₂. Pour tous $a, b \in \mathbb{C}$, on a $a + ib = 0 \implies a = 0$ et $b = 0$.

vrai

faux

Q₃. Deux nombres complexes de même module dont les arguments diffèrent de 2π sont égaux.

vrai

faux

Q₄. Pour tout nombre complexe z non nul, on a $\left|\frac{1}{z}\right| = |z|$.

vrai

faux

Q₅. Pour tous nombres complexes z et z' , on a

$$|z + z'| = |z| + |z'| \iff (z = 0 \text{ ou } \exists k \in \mathbb{R}, z = kz')$$

vrai

faux

Q₆. Pour tout nombre complexe z , on a $|\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$.

vrai

faux

Q₇. Le nombre complexe z tel que $z = re^{i\theta}$ avec r et θ des réels a θ pour argument.

vrai

faux

Q₈. L'équation $z^n = 1$ ($n \in \mathbb{N}^*$) admet exactement les n solutions : $z_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$, $k \in \{1, 2, \dots, n\}$

vrai

faux

Q₉. Les racine n -ièmes ($n \geq 2$) d'un nombre complexe Z s'obtiennent en multipliant l'une d'entre elles par les n racines n -ièmes de l'unité.

vrai

faux

Exercice 7

En précisant pour quelles valeurs des réels x et y , elles ont un sens, mettre sous forme exponentielle les expressions suivantes:

1. $1 + \sin x - i \cos x$.

3. $\frac{1 + \cos x + i \sin x}{1 - \cos x - i \sin x}$.

2. $\frac{1}{1 + i \tan x}$.

4. $\frac{e^{ix} + e^{iy}}{1 + e^{i(x+y)}}$.

Exercice 8

Cocher la ou les bonnes réponses.

Soient les nombres complexes $a = 1 + i\sqrt{3}$ et $b = 1 - i$

Il existe au moins un p de \mathbb{N}^* tel que a^p soit un réel.

Il existe au moins un n de \mathbb{N}^* tel que $b^n = 1$.

Il existe au moins un q de \mathbb{N}^* tel que a^q soit un imaginaire pur.

Il existe au moins un m de \mathbb{N}^* tel que a^m et b^m soient des réels.

Exercice 9

1. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $\alpha^5 = 1$. Calculer $A = \frac{\alpha}{1 + \alpha^2} + \frac{\alpha^2}{1 + \alpha^4}$.

2. Soit $\beta \in \mathbb{C}$ tel que $\beta^7 = 1$ et $\beta \neq 1$. Calculer $B = (1 + \beta)(1 + \beta^2)(1 + \beta^4)$.

3. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $\omega \in \mathbb{C}$ telle que $\omega^n = 1$. Montrer que $(1 + \omega)^n \in \mathbb{R}$.

Exercice 10

Cocher la ou les bonnes réponses.

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ et z_1, z_2, \dots, z_n les racines n -ièmes de l'unité. Alors

$z^n - 1 = (z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n)$, pour tout $z \in \mathbb{C}$.

$z_1 z_2 \cdots z_n = (-1)^{n-1}$.

$z_1 + z_2 + \cdots + z_n = 0$.

$z_1 + z_2 + \cdots + z_n = 1$.