INYASS COULIBALY ADAMA

100% CONCOURS PRÉPAS

EL-HAJ LAAMRI • PHILIPPE CHATEAUX • GÉRARD EGUETHER
ALAIN MANSOUX • MARC REZZOUK • DAVID RUPPRECHT • LAURENT SCHWALD

TOUS LES EXERCICES D'ALGÈBRE ET DE GÉOMÉTRIE MP

Pour assimiler le programme, s'entraîner et réussir son concours

- Rappels de cours et exercices d'assimilation
- Plus de 400 exercices dont la majorité est issue d'oraux de concours récents
- Solutions complètes et détaillées

EdiScience

INYASS COULIBALY ADAMA

TOUS LES EXERCICES D'ALGÈBRE ET DE GÉOMÉTRIE MP

Pour assimiler le programme, s'entraîner
et réussir son concours

INYASS COULIBALY ADAMA

INYASS COULIBALY ADAMA

Consultez nos parutions sur dunod.com

INYASS COULIBALY ADAMA

TOUS LES EXERCICES D'ALGÈBRE ET DE GÉOMÉTRIE MP

Pour assimiler le programme, s'entraîner et réussir son concours

El-Haj Laamri
Agrégé en mathématiques et maître de conférences à Nancy-Université

Philippe Chateaux
Agrégé en mathématiques et professeur en MP au Lycée Henri Poincaré à Nancy

Gérard Eguether
Maître de conférences à Nancy-Université

Alain Mansoux
Agrégé en mathématiques et professeur en PC au Lycée Henri Poincaré à Nancy

Marc Rezzouk
Agrégé en mathématiques et professeur en PC au lycée Henri Poincaré à Nancy

David Rupprecht
Agrégé de Mathématiques et professeur en PSI au Lycée Henri Loritz à Nancy

Laurent Schwald
Agrégé en mathématiques et professeur en BCPST au lycée Henri Poincaré à Nancy

EdiScience

INYASS COULIBALY ADAMA

Couverture : *Claude Lieber*

ISBN 978-2-10-053965-9

Table des matières

Présentation de la série « Tous les exercices de mathématiques »

L'évolution récente de l'enseignement des disciplines scientifiques dans les C.P.G.E s'est concrétisée par la définition d'un nouveau programme de première année en 2003 et de seconde année en 2004. Un des objectifs de cette évolution a été de combler le fossé grandissant entre la classe terminale et les classes préparatoires. La progression est explicitement imposée par le nouveau programme qui prévoit notamment « un programme de début de l'année », qui exclut la présentation abstraite des concepts au profit d'une démarche fondée sur l'exemple comme point de départ de la conceptualisation, qui préconise l'approche algorithmique en complément de l'approche démonstrative et qui légitime la démarche expérimentale en mathématiques par l'utilisation des logiciels Maple ou Mathematica, logiciels systématiquement utilisés dans de nombreux concours, notamment dans le concours commun « Centrale - Supélec ». Mais les programmes des classes préparatoires ne sont pas les seuls à avoir évolué, les programmes de l'enseignement secondaire ont fait l'objet d'une évolution préalable. Enfin, l'attitude nouvelle des élèves face aux disciplines scientifiques rend inefficace l'approche axiomatique et leur appropriation grandissante de l'outil informatique nécessite d'intégrer cet outil à la pédagogie. L'ensemble de ces changements rend impérative la rédaction de nouveaux ouvrages.

On constate que c'est davantage la structure, l'ordre des thèmes abordés, l'esprit du programme qui ont évolué, le fond étant resté relativement stable. Sur ce fond, que nous n'avons pas la prétention de renouveler, il existe déjà une abondante et excellente littérature ; nous revendiquons une continuité par rapport à nos illustres prédécesseurs et nous nous sommes largement inspirés de leurs écrits pour y puiser exercices et sujets en nous efforçant de les présenter en parfaite cohérence avec l'esprit du programme actuel. Car cette nouvelle collection répond à une nécessité : entièrement rédigée après la parution des nouveaux programmes et le début de leur mise en œuvre, elle garantit une parfaite compatibilité entre la rédaction des ouvrages et les préconisations du programme… ce que n'aurait pu assurer sans risque d'anomalies une simple remise en forme d'une rédaction antérieure. Tous les ouvrages de cette collection sont écrits trois ans après l'apparition des nouveaux programmes et en respectent scrupuleusement l'esprit.

Les rédacteurs ont enseigné et interrogé dans le cadre de l'ancien et du nouveau programme, ils perçoivent donc parfaitement l'importance de l'évolution. Leur expérience de l'enseignement en classes préparatoires et à l'Université, leur intervention régulière en « colles », leur participation aux concours comme interrogateurs à l'oral et/ou correcteurs à l'écrit permettent d'affirmer qu'il s'agit d'équipes très « professionnelles ». L'équilibre entre la pluralité des approches qui enrichit le fond et la cohérence de la forme qui renforce l'efficacité est le résultat d'un véritable travail collaboratif, d'une maîtrise d'œuvre rigoureuse et de sources d'inspiration précieuses… citons particulièrement pour les exercices d'oral la *Revue de Mathématiques Spéciales*, l'*Officiel de la Taupe* et les *Archives des Professeurs de Spé du Lycée Henri Poincaré de Nancy* en particulier celles constituées par Walter APPEL.

Cette collection a l'ambition de faire bénéficier le lecteur de l'expertise professionnelle des rédacteurs, chaque ouvrage est donc rédigé avec un souci de rigueur et de clarté au service de la pédagogie, souci qui s'exprime dans quelques principes :

– La qualité de rédaction aboutie exigée des élèves nécessite que les auteurs soient eux-mêmes exemplaires dans leur rédaction, aussi bien celle des énoncés que celle des corrigés. Un soin tout particulier est apporté à l'écriture des éléments « logiques » : précis et sans ambiguïté, le style traduit explicitement les connexions logiques, implication, nécessité, suffisance… dans un souci permanent de rendre explicite ce qui, ailleurs, reste parfois implicite.
– Les corrigés proposés sont toujours complets et commentés quand il le faut, en privilégiant les solutions méthodiques et raisonnables aux approches « astucieuses » et « miraculeuses ». L'expérience prouve en effet qu'un corrigé trop « brillant » inquiète l'élève qui se sent incapable de la même performance et ne lui apprend rien de la démarche constructive qui peut amener à une solution lorsqu'on possède une maîtrise suffisante des concepts. L'expérience montre aussi la vertu du contre-exemple… il en est fait un usage courant.
– La présence de rappels de cours synthétiques est nécessaire pour replacer les exercices dans leur contexte théorique sans avoir à quitter l'ouvrage en cours de lecture, pour fixer aussi quelques notations choisies parmi les standards. Mais ces éléments de cours ne se substituent en rien à l'enseignement magistral ou aux ouvrages de référence, ils constituent seulement un « minimum conceptuel » immédiatement disponible pour aider la compréhension des exercices qui restent la matière essentielle de l'ouvrage.
– La volonté de respecter l'esprit des nouveaux programmes privilégie la présentation de sujets récents (de 2004 à 2007) en respectant scrupuleusement la forme de leur rédaction : aucun toilettage rédactionnel ne doit en masquer l'originalité, voire la difficulté. Le respect du lecteur exige sa mise en situation réelle de concours. Toutefois ces énoncés sont commentés et expliqués pour rassurer le lecteur en lui montrant que sous des traits parfois déroutants on peut retrouver des « visages

connus ». Certains exercices proposés aux concours avant 2003 figurent également dans cette collection en raison de leur intérêt ; ils sont alors rédigés sous une forme compatible avec le programme actuel.

Si ces principes généraux sont respectés dans l'ensemble de la collection, la plus grande maturité des élèves de deuxième année justifie quelques différences entre les ouvrages de première et de deuxième année. L'élève de première année peut avoir des difficultés à choisir seul, avec discernement, des sujets d'écrits dans les annales. Les ouvrages de première année présentent donc une sélection d'extraits de problèmes d'écrits. L'élève de deuxième année, plus mûr, est capable de trouver lui-même des sujets d'écrit, les ouvrages de deuxième année n'en présentent donc pas. Cette plus grande maturité explique aussi le choix qui a été fait de présenter en deuxième année un bon tiers des exercices d'oral dans leur rédaction d'origine, sans commentaires explicatifs, pour placer l'élève au plus près de la situation réelle du concours ; bien entendu, le corrigé est toujours rédigé clairement, avec toutes les indications et tous les commentaires que nécessite leur compréhension. L'objectif essentiel est le respect des élèves que l'on met dans une situation proche de celles des concours tout en les guidant dans la correction. Il semble également que des ouvrages spécifiques suivant les programmes (MP-MP*, PC-PC* et PSI-PSI*) soient justifiés en Mathématiques Spéciales alors qu'ils ne le sont pas en premier semestre de Mathématiques Supérieures. Mais, quels que soient les ouvrages, les auteurs ont réalisé un travail de sélection important parmi la multitude d'exercices disponibles pour proposer ceux qu'ils considèrent comme les plus significatifs : certains sont sélectionnés pour leur intérêt pédagogique, leur généralité, leurs déclinaisons possibles... d'autres sont présentés essentiellement pour donner une idée fidèle de « l'état de l'art actuel » des exercices d'oral et faire l'objet de commentaires au profit des futurs candidats.

On aura compris que les ouvrages de cette collection sont avant tout au service des élèves pour lesquels elle constitue un véritable outil pédagogique d'apprentissage et d'entraînement en vue des concours. Ces ouvrages devraient également convaincre les élèves de l'étendue des points abordés dans les sujets d'oral et d'écrit, qui couvrent réellement les programmes de première et de deuxième années. Mais les enseignants des C.P.G.E pourront aussi utiliser cette collection comme support de travaux dirigés et comme référence. Enfin, les examinateurs disposeront avec cette collection d'exemples de vrais sujets d'oraux donnés récemment ; les commentaires qui en sont faits pourront inspirer leur propre démarche pour une évaluation efficace et progressive des candidats.

Pour conclure cette présentation, on me pardonnera d'utiliser un ton plus personnel. Maître de conférences et agrégé en Mathématiques, j'ai souhaité partager plusieurs années d'expérience en assurant la maîtrise d'œuvre des ouvrages de cette collection. Quinze années de participation à différents concours en tant que correcteur d'écrit et examinateur d'oral, m'ont permis de bien connaître la littérature existante et de bien observer l'évolution de l'attitude des élèves qui sont soumis, toujours davantage, à des sollicitations nombreuses et diverses, sollicitations qui ne facilitent pas la concentration et peuvent, parfois, les gêner dans la maîtrise de l'ensemble des techniques. La nécessité ressentie d'ouvrages adaptés, l'enthousiasme face à l'idée de les rédiger, l'impossibilité de réaliser seul un tel travail, m'ont conduit à réunir des équipes de rédaction et à assurer la maîtrise d'œuvre du projet tout en participant activement à l'écriture. Au-delà de l'ambition de réaliser un travail de qualité, il s'agit d'une expérience humaine inoubliable.

Trois personnes ont contribué à la réalisation de ce projet et je souhaite, au sens propre, leur donner le dernier mot : merci.
Merci à Eric d'Engenières, éditeur chez Dunod, qui m'a accordé sa confiance, a su m'encourager par la qualité de nos échanges et a pu me guider par des conseils et suggestions toujours formulés de manière chaleureuse.
Merci à Hervé Coilland, directeur de l'I.U.T Nancy-Charlemagne et Vice-Président de l'Université Nancy 2 qui a toujours trouvé le temps pour des discussions amicales au cours desquelles se précisent les objectifs, s'échangent les idées et s'affinent quelques points de rédaction.
Merci, infiniment, à Nezha, ma femme, qui accepte que beaucoup de temps soit consacré à ce projet, qui préserve autour de moi le calme nécessaire à une entreprise rédactionnelle, qui m'encourage et me conseille dans les phases les plus critiques et dont l'amour est un soutien permanent.

Nancy, le 15 février 2008
El-Haj LAAMRI

Avant-propos

Ce livre couvre le programme d'algèbre et de géométrie de deuxième année MP, et poursuit la démarche rédactionnelle entamée avec les ouvrages de première année. Comme pour l'ensemble de la collection, le respect du programme officiel est un principe que nous avons suivi à la lettre. Par ailleurs, le programme prévoit la reprise et l'approfondissement en deuxième année de certains points abordés en première année : polynômes, espaces vectoriels, applications linéaires, calcul matriciel, déterminants, étude affine et métrique des courbes, espaces euclidiens. Nous avons mis à profit cette possibilité pour que le présent ouvrage, tout en étant sans ambiguïté destiné aux élèves de deuxième année, présente plusieurs chapitres utilisables en première lecture dès le deuxième semestre de première année et pour les « révisions estivales » entre la première et la deuxième année.

Le programme de deuxième année, « la tradition pédagogique » et le souci de garder une bonne cohérence dans la séquence d'algèbre linéaire nous ont amenés à placer en tête de cet ouvrage un chapitre d'algèbre générale suivi d'un chapitre de compléments sur les polynômes. Ce chapitre sur les polynômes se place dans la continuité de celui de première année et le complète par la présence d'exercices d'oraux de 2007 et d'exercices qui diffèrent de ceux proposés dans l'ouvrage de première année en raison de la plus grande maturité qu'ils exigent. A la frontière du programme mais présents dans certains exercices d'oraux, les notions de nombres algébriques et transcendants sont également abordées. Les chapitres qui suivent traitent des espaces vectoriels et des applications linéaires, puis du calcul matriciel. Les notions nouvelles de sommes directes, de trace et de matrices semblables sont illustrées par de nombreux exercices. De manière délibérée, les exercices proposés ont été sélectionnés pour clarifier et maîtriser l'articulation entre le point de vue matriciel et le point de vue vectoriel, plus géométrique. Ces chapitres permettent de réviser et d'approfondir le programme de première année tout en donnant une vue réaliste des exercices donnés à l'oral. Les systèmes linéaires et les déterminants nous ont permis, par les exercices choisis, de montrer l'efficacité d'une démarche méthodique sur des exemples simples qui s'appuient sur les acquis première année. La réduction des endomorphismes est un point essentiel du programme de deuxième année en raison de son intérêt pour la formation de l'élève (toutes les notions d'algèbre linéaire sont sollicitées), de son intérêt pour la préparation aux concours (toutes les épreuves de concours, ou presque, abordent ces questions) et de son intérêt pour l'évolution future de l'élève-ingénieur qui rencontrera ces notions utilisées dans de nombreux domaines scientifiques. Les espaces préhilbertiens et euclidiens réalisent une synthèse encore plus profonde entre les outils techniques et la démarche conceptuelle. Nous avons tenté de rendre compte par les rappels de cours et le choix des exercices de la richesse de ces concepts en privilégiant l'approche méthodique et en montrant à l'élève les vertus unificatrices de notions qui dépassent largement la géométrie et s'appliquent aussi bien à l'analyse qu'à l'algèbre. Dans le chapitre « quadriques et coniques », la classification et la méthode de réduction sont présentées de façon détaillée et illustrées par de nombreux exemples. Notre expérience d'examinateurs d'oral nous montre que les courbes polaires et paramétrées sont souvent négligées par les élèves. Par des exercices venant de tous les concours, nous souhaitons leurs montrer que cette négligence est risquée. Nous avons rédigé ce chapitre de manière progressive en y intégrant les éléments de programme de première année pour construire un ensemble complet et autonome. Le chapitre suivant traite des surfaces définies par un paramétrage ou par une équation cartésienne. C'est sous l'éclairage de ce double point de vue que sont abordées les notions fondamentales de vecteur normal et de plan tangent en un point régulier. Un choix judicieux et progressif d'exercices de concours permet aux étudiants de se familiariser avec les surfaces usuelles. Le dernier chapitre intitulé « compléments de géométrie » regroupe des exercices de tous les concours abordant les questions de géométrie (affine, euclidienne, isométries affines et vectorielles, lieux géométriques, calcul d'extrema). Absentes des programmes de deuxième année, ces notions ne sont pas absentes des concours. Enfin, nous avons apporté un soin tout particulier aux figures qui illustrent ces derniers chapitres.

Les premiers chapitres, par leur contenu et leur structure, marquent la transition entre les principes rédactionnels et pédagogiques propres aux ouvrages de première année et ceux utilisés pour les ouvrages de deuxième année. En première année, nous avions choisi de présenter et d'illustrer de façon linéaire chaque nouvelle notion l'une après l'autre. Nous nous adressions alors à des lecteurs sortant des classes terminales et encore peu autonomes dans leur approche. En deuxième année, nous avons choisi de présenter globalement l'essentiel des notions d'un chapitre puis de progresser par étapes vers une compréhension et une maîtrise de plus en plus approfondies. Chaque chapitre est donc constitué de trois parties :

– une présentation synthétique de l'essentiel du cours suivie d'exercices d'assimilation immédiate, dans lesquels chaque nouvelle notion est testée, sans complication inutile à ce niveau, dans un contexte qui permet d'identifier clairement une et une seule difficulté et de la résoudre, en respectant une sorte de « règle des trois unités » : un exercice, une difficulté, une solution ;

– des exercices d'entraînement dont la rédaction progressive et le découpage en questions ont pour objectif d'amener le lecteur à la compréhension en le confrontant de façon progressive aux difficultés propres à la notion étudiée ;
– des exercices d'approfondissement destinés à mettre l'élève en situation de concours , avec la nécessité pour lui de faire preuve de compréhension, d'initiative, d'intuition et de maîtrise technique.

La lecture d'un tel chapitre n'est donc plus nécessairement linéaire. La structure est parfaitement adaptée à des lecteurs de niveaux variés qui pourront éventuellement passer directement à une forme d'auto-évaluation en se concentrant sur les exercices d'approfondissements ou, au contraire, progresser pas à pas avec les exercices d'assimilation.

Si les élèves de deuxième année ont pu gagner en autonomie, il n'en reste pas moins que leurs niveaux de compétence et de compréhension restent très hétérogènes. Ainsi, entre des « 3/2 » qui découvrent le programme pour la première fois et n'ont encore été confrontés à aucun concours, des « 5/2 » qui ont déjà étudié le programme mais ont échoué à leur première expérience et des « 5/2 » déjà admis à des concours mais dont l'ambition les amène à viser encore plus haut, les différences sont très fortes. Ce sont ces différences, constatées en particulier lors des séances de « colles », qui nous ont amenés à cette rédaction permettant plusieurs niveaux de lecture et d'utilisation de l'ouvrage.

Entre les chapitres eux-mêmes, le programme de deuxième année n'impose pas d'ordre ni de découpage, contrairement au programme de première année. Cette liberté nous a permis de choisir une progression qui nous semblait la plus adaptée et la plus équilibrée. Chaque étape présente un nombre de notions nouvelles acceptable pour une perception d'ensemble compatible avec la structure des chapitres. Il n'y a pas que la hauteur des étages qui fait la difficulté d'un escalier : la hauteur acceptable des marches et leur régularité peut faciliter l'ascension... Nous avons donc retenu une progression qui nous semble adaptée, sans affirmer pour autant que d'autres progressions sont à rejeter. Notre diversité d'expérience, avantage de la rédaction collective, nous amène d'ailleurs à utiliser différentes progressions dans nos pratiques d'enseignement. Il reste ensuite le choix le plus difficile : face à l'infinité d'exercices possibles et au temps fini dont disposent les élèves pour préparer les concours, que proposer ? Quelques principes ont guidé notre sélection :

– respecter le parti-pris de progressivité en donnant des exercices qui permettent d'assimiler, puis de s'entraîner et enfin d'approfondir ;
– donner une vue précise et réaliste d'exercices qui « tombent à l'oral » en s'appuyant en particulier sur une veille attentive des sujets donnés à l'oral dans plusieurs concours depuis plusieurs années ;
– privilégier les exercices « génériques » dont la maîtrise donne les clefs de nombreux exercices (comme il avait déjà été annoncé en avant-propos des ouvrages de première année : habituer les élèves à reconnaître les « visages connus » sous leurs différentes apparences) ;

– profiter du « nomadisme » des exercices constaté entre des concours différents et ne pas hésiter à proposer un sujet de PC ou PSI si son intérêt pédagogique le justifie, sachant que ce même sujet peut apparaître plus tard en MP...
– convaincre les élèves que les oraux couvrent tout le programme des deux années.

Pour éviter l'arbitraire des préférences personnelles lors d'une rédaction collective, une référence incontestable et « objective » est nécessaire : nous avons choisi pour référence la réalité des exercices donnés à l'oral, principalement depuis 2004, date d'application du nouveau programme. Mais ces exercices ont pour objectif le « classement » des élèves et non leur formation. Dans un ouvrage d'apprentissage quotidien, certaines retouches se sont avérées nécessaires : lorsqu'ils utilisent ce livre, les élèves sont en cours de formation et pas encore en concours ! Notre expérience d'enseignants d'abord, de « colleurs » ensuite, d'examinateurs enfin, nous a permis d'observer en situation réelle, dans différentes classes, les élèves face à ces exercices... ce qui nous a convaincus de la nécessité d'en faire évoluer la rédaction pour qu'ils passent du statut d'exercice d'oral au statut d'exercice pédagogique. Notre expérience nous a permis cette adaptation sans, en aucune manière, dénaturer ces exercices. La rédaction retouchée de certains exercices répond à la fois à un objectif pédagogique et psychologique. Objectif pédagogique de guider l'élève par une rédaction détaillée qui fasse apparaître de façon explicite les difficultés et les techniques à maîtriser. Objectif psychologique de rassurer l'élève en l'amenant à résoudre seul une majorité de questions en favorisant ainsi le développement de son autonomie. Si un sujet a été donné à plusieurs concours, nous avons toujours choisi la version qui nous semblait la plus pédagogique, la plus détaillée. Nous avons également regroupé certains énoncés d'oral qui nous semblaient complémentaires ou permettaient de donner un aperçu des sujets régulièrement abordés à l'écrit. Quant aux éléments de cours, chacun sait que ce qui est élégamment écrit dans un cours à la rédaction parfaite n'est pas toujours aussi clair dans l'esprit des élèves... et nous n'avons pas hésité, parfois, à sacrifier l'élégance de la rédaction à la redondance lorsque cette dernière nous permettait de rendre explicites des notions souvent restées implicites.

C'est en premier lieu aux élèves des classes préparatoires MP, MP*, PC1, PC2 et PC* du Lycée Henri Poincaré et PSI et PSI* du Lycée Henri Loritz de Nancy que nous adressons, collectivement, nos remerciements. Ils ont en effet largement contribué par leurs réactions, leurs questions, leurs erreurs et leur compréhension à guider nos efforts de présentation des exercices, de clarification des questions, de simplification des corrigés.

Toujours aussi enthousiasmante cette aventure rédactionnelle est aussi une aventure humaine dans laquelle nous avons été aidés.
Aidés matériellement par l'Institut Elie Cartan de Nancy qui nous a permis d'utiliser ses moyens informatiques et ses ressources documentaires.
Aidés par l'IREM qui nous a donné un accès privilégié à ses ressources documentaires, ainsi que par l'I.U.T Nancy-Charlemagne dont la bibliothèque nous a toujours reçus avec sourire et efficacité.
Aidés également par le Lycée Henri Poincaré de Nancy qui nous a accueillis chaque

samedi matin, de septembre à mars, dans une salle équipée de moyens informatiques. Aidés enfin par trois collègues du Lycée Henri Poincaré, Gilles Demeusois, Michel Eguether et Edouard Lebeau qui nous ont lus en détail et dont les remarques ont sensiblement amélioré le présent ouvrage.
Que tous soient sincèrement remerciés.

Notre collègue de l'Institut Elie Cartan de Nancy, Françoise Géandier, a relu une partie du manuscrit... et a du supporter dans notre bureau commun la présence de l'ensemble de l'équipe. Nous la remercions et nous lui demandons de nous excuser pour le désordre conséquent.

Il est inévitable que certaines erreurs aient échappé à la vigilance de tous ceux qui ont lu cet ouvrage. Nous en assumons seuls la responsabilité et nous espérons que ceux qui en découvriront voudront bien nous faire part de leurs remarques à l'adresse suivante Elhaj.laamri@iecn.u-nancy.fr.

Enfin, si dans cette aventure humaine certaines personnes nous ont aidés, il en est sans qui rien n'aurait été possible. Nos compagnes, par leur infinie patience, leur soutien sans faille et leur attentive présence ont joué un rôle essentiel dans l'aboutissement de ce projet. Au moment de mettre un point final à cet ouvrage c'est vers elles que nos pensées se tournent.

Nancy le 15 avril 2008

El-Haj Laamri, Philippe Chateaux, Gérard Eguether, Alain Mansoux,
Marc Rezzouk, David Rupprecht, Laurent Schwald

Les exercices qui nous ont semblé les plus difficiles sont signalés par un ou deux symboles ☕.

Algèbre générale 1

1.1 L'ESSENTIEL DU COURS ET EXERCICES D'ASSIMILATION

1.1.1 Congruences et $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Ce qu'il faut savoir

- Les sous-groupes additifs de $\mathbb{Z}$ sont de la forme $n\mathbb{Z}$, où $n \in \mathbb{N}$.
- On définit dans $\mathbb{Z}$ la relation de **congruence** modulo n de la façon suivante :

$$x \equiv y \pmod{n} \text{ si et seulement si } x - y \in n\mathbb{Z}\,.$$

  On obtient une relation d'équivalence, compatible avec l'addition et la multiplication, ce qui signifie que pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3$, si $x \equiv y \pmod{n}$, alors $x + z \equiv y + z \pmod{n}$ et $xz \equiv yz \pmod{n}$.
- La classe d'équivalence de x est l'ensemble $x + n\mathbb{Z}$, on la note $\overline{x}$.
  Il y a exactement n classes d'équivalence, celles de $0,\ 1, \ldots, n-1$. Elles forment une partition de $\mathbb{Z}$. On note $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ l'ensemble formé de ces n classes d'équivalence.
- On définit une loi, encore notée +, dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ en posant : $\overline{x} + \overline{y} = \overline{x+y}$. La compatibilité de la congruence avec l'addition assure la cohérence de cette définition. Muni de cette loi, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un groupe abélien.

Exercice 1.1

Soit $n \in \mathbb{N}$.

1) Montrer que n est divisible par 3 si et seulement si la somme de ses chiffres (quand on écrit n en base 10) est divisible par 3.

2) Montrer que n est divisible par 8 si et seulement si le nombre formé par les trois derniers chiffres de n est divisible par 8.

1) Écrire un entier n en base 10 sous la forme $a_p \cdots a_1 a_0$, cela signifie que $n = a_0 10^0 + a_1 10^1 + \cdots + a_p 10^p$ (où $10^0 = 1$).
Or $10 \equiv 1 \pmod{3}$ donc $10^k \equiv 1 \pmod{3}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Ainsi $n \equiv a_0 + a_1 + \cdots + a_p \pmod{3}$ donc $3 \mid n$ si et seulement si $3 \mid a_0 + a_1 + \cdots + a_p$.

2) On remarque que $1000 = 8 \times 125 \equiv 0 \pmod 8$ donc $10^k \equiv 0 \pmod 8$ pour tout $k \geqslant 3$.
Ainsi, avec les notations précédentes $n \equiv a_0 10^0 + a_1 10^1 + a_2 10^2 \equiv a_2 a_1 a_0 \pmod 8$. Par conséquent, $8 \mid n = a_p \cdots a_1 a_0$ si et seulement si $8 \mid a_2 a_1 a_0$.

Exercice 1.2

Mines-Ponts MP 2007

Quel est le dernier chiffre de l'écriture décimale de 7^{7^7} ?

On a $7^1 \equiv -3 \pmod{10}$, $7^2 \equiv -1 \pmod{10}$, d'où $7^4 \equiv 1 \pmod{10}$. Il suffit donc de trouver le reste de la division euclidienne de l'exposant 7^7 par 4 :
$7^7 \equiv (-1)^7 \equiv -1 \equiv 3 \pmod 4$, donc il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $7^7 = 4n + 3$.
On en déduit que $7^{7^7} = 7^{4n} 7^3 \equiv 7^3 \equiv -7 \equiv 3 \pmod{10}$, donc le dernier chiffre de l'écriture décimale de 7^{7^7} est le chiffre 3.

Exercice 1.3

Petit théorème de Fermat

Soit p un nombre premier.

1) Montrer que pour $k \in [\![1\,,p-1]\!]$, p divise $\dbinom{p}{k}$.
2) En déduire que, pour tout $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$, $(a+b)^p \equiv a^p + b^p \pmod p$.
3) Montrer par récurrence que, pour tout $a \in \mathbb{Z}$, $a^p \equiv a \pmod p$, et que si p ne divise pas a, alors $a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$.

1) On a $\dbinom{p}{k} = \dfrac{p(p-1)\cdots(p-k+1)}{k!}$ mais factoriser par p n'est pas très éclairant car on ne sait pas si l'autre facteur est un entier.
Écrivons plutôt $k!\dbinom{p}{k} = p(p-1)\cdots(p-k+1)$. Par conséquent, $p \mid k!\dbinom{p}{k}$, or p est premier et $k \in [\![1\,,p-1]\!]$, donc p et $k!$ sont premiers entre eux.
On déduit par le théorème de Gauss que p divise $\dbinom{p}{k}$.

2) D'après la formule du binôme de Newton : $(a+b)^p = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} a^k b^{p-k}$.
D'après 1), pour $k \in [\![1\,,p-1]\!]$, $\dbinom{p}{k} \equiv 0 \pmod p$ donc, modulo p, seuls restent dans le développement le premier et le dernier terme :

$$(a+b)^p \equiv a^p + b^p \pmod p\,.$$

3) • Si $p = 2$, $a^2 - a = a(a-1)$ est un nombre pair, donc $a^2 \equiv a \pmod 2$.

• Supposons à présent $p \geqslant 3$. Démontrons, par récurrence sur $a \in \mathbb{N}$, la propriété $\mathcal{P}_a$ suivante : $a^p \equiv a \pmod p$.
Initialisation : $a = 0$. On a bien $0^p = 0 \equiv 0 \pmod p$, donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.
Hérédité : Soit $a \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}_a$ vraie et montrons $\mathcal{P}_{a+1}$.
$(a+1)^p \equiv a^p + 1^p \pmod p$ d'après la première question avec $b = 1$.
On en déduit avec $\mathcal{P}_a$ que $(a+1)^p \equiv a + 1 \pmod p$.
En conclusion, $a^p \equiv a \pmod p$ pour tout $a \in \mathbb{N}$.
Si $a \in \mathbb{Z}^-$, d'après ce qui précède $(-a)^p \equiv -a \pmod p$. Comme p est impair, on conclut que $a^p \equiv a \pmod p$. En résumé, $\forall a \in \mathbb{Z},\ a^p \equiv a \pmod p$.

• On déduit de ce qui précède que : $a\left(a^{p-1} - 1\right) \equiv 0 \pmod p$, donc si p ne divise pas a alors, comme p est premier, il est premier avec a et par théorème de Gauss, p divise $a^{p-1} - 1$. Ainsi, on a bien $a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$.

1.1.2 Sous-groupe engendré par une partie, groupes finis

Ce qu'il faut savoir

Pour les généralités sur les groupes, se reporter au livre de première année.

- Soient $(G, \perp)$ et $(G', \perp')$ deux groupes. On munit $G \times G'$ de la loi interne $*$ définie par $(x, x') * (y, y') = (x \perp y, x' \perp' y')$. L'ensemble $G \times G'$ muni de la loi $*$ est un groupe, appelé produit des groupes G et G'.
- Soient $(G,\cdot)$ un groupe, A une partie non vide de G. On appelle **sous-groupe engendré** par A le plus petit sous-groupe de G contenant A, c'est-à-dire l'intersection des sous-groupes de G contenant A. On le note $\mathrm{gr}(A)$.
- On a $\mathrm{gr}(A) = \{a_1 a_2 \cdots a_p \mid p \in \mathbb{N}^*,\ \forall i \in [\![1\,,p]\!], (a_i \in A \text{ ou } a_i^{-1} \in A)\}$.
- Si A est réduit à un élément a, le sous-groupe engendré par a est égal à $\{a^k \mid k \in \mathbb{Z}\}$.
  Par exemple, le groupe additif $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est engendré par $\overline{1}$.
- Un groupe est dit **cyclique** lorsqu'il est fini et engendré par un élément.
- Soit $a \in \mathbb{Z}$. L'élément $\overline{a}$ engendre $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ si et seulement si a est premier avec n.
- Soit $(G,\cdot)$ un groupe et a un élément de G. L'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathrm{gr}(a) \\ k & \longmapsto & a^k \end{array}$ est un morphisme de groupes surjectif de $(\mathbb{Z}, +)$ dans $(gr(a),\cdot)$. On a deux cas de figure :
  - Si f est injective, alors $\mathrm{gr}(a)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}$.
  - Sinon, le noyau de f est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$, donc il est de la forme $n\mathbb{Z}$, où $n \in \mathbb{N}^*$. L'entier n est le plus petit entier naturel non nul tel que $a^n = e$, on l'appelle l'ordre de a. Le groupe engendré par a est cyclique, égal à $\{a^k \mid 0 \leqslant k \leqslant n-1\}$. Il est isomorphe au groupe additif $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
- Le groupe additif $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est isomorphe au groupe multiplicatif U_n formé des racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité dans $\mathbb{C}$.

Exercice 1.4

Centrale MP 2007

Le groupe des permutations de $\{1, 2, 3\}$ est-il cyclique ?

On observe d'abord qu'un groupe cyclique est nécessairement abélien.
Soient τ la transposition qui échange 1 et 2 et τ' celle qui échange 1 et 3. On a $(\tau \circ \tau')(1) = 3$ et $(\tau' \circ \tau)(1) = 2$. Comme les deux permutations τ et τ' ne commutent pas, le groupe des permutations de $\{1, 2, 3\}$ n'est pas abélien, donc a fortiori il n'est pas cyclique.

Exercice 1.5

Montrer qu'un isomorphisme de groupes conserve l'ordre des éléments.

Soient $f : G \rightarrow G'$ un isomorphisme de groupes et a un élément de G d'ordre n. Comme $e' = f(e) = f(a^n) = (f(a))^n$, on en déduit que $f(a)$ est d'ordre fini, divisant n.
Si $f(a)^k = e'$, alors $f(a^k) = e'$ donc $a^k = e$ car f injective, d'où n divise k. Il en résulte que $f(a)$ est d'ordre n.

Exercice 1.6

Polytechnique MP 2006

Les groupes $(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}, +)$ et $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +) \times (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, +)$ sont-ils isomorphes ?

Dans $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$, $\overline{1}$ est d'ordre 8, alors qu'aucun élément de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ n'est d'ordre 8, car $4(x, y) = (\overline{0}, \overline{0})$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$. D'après l'exercice précédent, les deux groupes ne sont pas isomorphes.

Exercice 1.7

Mines-Ponts MP 2005

Donner deux groupes à 9 éléments non isomorphes.

Les groupes additifs $(\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}, +)$ et $((\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2, +)$ conviennent car $\overline{1}$ est d'ordre 9 dans le premier, alors que les éléments du second sont d'ordre 1 ou 3.

Exercice 1.8

Polytechnique MP 2005

Soient $(G, \cdot)$ un groupe et g un élément de G d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer l'ordre de g^m pour $m \in \mathbb{N}^*$.

Soit d le PGCD de n et m. Il existe deux entiers n' et m' premiers entre eux tels que $n = dn'$ et $m = dm'$. On a les équivalences suivantes :

$$(g^m)^k = e \iff g^{mk} = e \iff n \mid km \iff n' \mid km' \iff n' \mid k$$

(par théorème de Gauss)

Il en résulte que g^m est d'ordre $n' = \dfrac{n}{d}$.

Exercice 1.9

Centrale MP 2007, Mines-Ponts MP 2005

Soit G un groupe cyclique engendré par a, de cardinal n.

1) Montrer que tout sous-groupe de G est cyclique, de cardinal divisant n.

2) Soit d un diviseur de n. Montrer que G possède un unique sous-groupe de cardinal d.

3) Si $d \in \mathbb{N}$, on note $\varphi(d)$ le nombre d'entiers compris entre 1 et n qui sont premiers avec n. Démontrer que : $n = \displaystyle\sum_{d|n} \varphi(d)$.

1) Soit H un sous-groupe de G, distinct de $\{e\}$.
On note m le plus petit entier naturel non nul tel que $a^m \in H$. Comme H est un sous-groupe, le sous-groupe engendré par a^m est inclus dans H.
Soit $x \in H$. Il existe un entier naturel k tel que $x = a^k$. Par division euclidienne de k par m, il existe deux entiers naturels j et r tels que $k = mj + r$ et $r \leqslant m - 1$. Comme H est un groupe et que $x \in H$, $x(a^m)^{-j} \in H$, c'est-à-dire $a^r \in H$, d'où $r = 0$ par minimalité de m, puis $x = a^{mj}$. On a montré que H est cyclique engendré par a^m.
Par division euclidienne de n par m, il existe deux entiers naturels q et s tels que $n = mq + s$ et $s \leqslant m - 1$. Comme $a^n = e$, on en déduit $a^s = (a^m)^{-q}$, donc $a^s \in H$, d'où $s = 0$ par minimalité de m, donc m divise n.

2) Comme d divise n, il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $n = dm$. Montrons que le sous-groupe engendré par a^m est d'ordre d. On a $(a^m)^d = e$. S'il existe deux entiers k et j tels que $0 \leqslant j < k < d$ et $a^{km} = a^{jm}$, alors $a^{(k-j)m} = e$, or a est d'ordre n, donc $(k - j)m \geqslant n$, ce qui est absurde car $k - j \leqslant d - 1$. Le sous-groupe engendré par a^m est donc formé des d éléments distincts a^{km} pour $0 \leqslant k \leqslant d - 1$. Inversement, si H est un sous-groupe de G de cardinal d, l'étude menée à la première question montre que H est engendré par $a^{n/d}$.

3) Plaçons nous dans le groupe additif $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Soit $x \in [\![0\,, n-1]\!]$, l'élément $\overline{x}$ est d'ordre d dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ si et seulement si $\overline{dx} = \overline{0}$ et $\forall k \in [\![1\,, d-1]\!]$, $\overline{kx} \neq \overline{0}$. Cela équivaut à l'existence de $u \in [\![1\,, d-1]\!]$ premier avec d tel que $x = \dfrac{n}{d}u$. Par conséquent, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ possède autant d'éléments d'ordre d que d'entiers u compris entre 1 et $d - 1$ qui sont premiers avec d, c'est-à-dire $\varphi(d)$. En partitionnant

les éléments de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ suivant leur ordre (qui doit diviser n), on en déduit que $n = \sum_{d|n} \varphi(d)$.

Ce qu'il est bon de connaître

Théorème de Lagrange : si G est un groupe fini et H un sous-groupe de G, alors le cardinal de H divise le cardinal de G.
Ce résultat est démontré dans l'exercice qui suit.
Terminologie : lorsque G est un groupe fini, on appelle ordre de G son cardinal.

Exercice 1.10

Soit G un groupe fini de cardinal n.

1) Soit H un sous-groupe de G.
   - On introduit dans G la relation binaire suivante : $x\mathcal{R}y \iff x^{-1}y \in H$. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
   - En déduire que l'ordre de H divise l'ordre de G.
2) Montrer que pour tout élément a de G, on a $a^n = e$.
3) *question complémentaire (Centrale MP 2005)* : on suppose que $|G|$ s'écrit pq où p et q sont premiers et $p < q$. Montrer que G contient au plus un sous-groupe d'ordre q.

1) • ◦ $x\mathcal{R}x$ car $x^{-1}x = e \in H$.
   ◦ Si $x\mathcal{R}y$, alors $x^{-1}y \in H$, d'où $(x^{-1}y)^{-1} = y^{-1}x \in H$, donc $y\mathcal{R}x$.
   ◦ Si $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$, alors $x^{-1}z = (x^{-1}y)(y^{-1}z) \in H$, donc $x\mathcal{R}z$.
   - La classe d'équivalence d'un élément x est égal à l'ensemble des éléments $y \in G$ tels que $x^{-1}y \in H$, c'est-à-dire à xH, donc son cardinal est celui de H. Les classes d'équivalence forment une partition de G, donc s'il y a k classes, alors $\operatorname{card} G = k \operatorname{card} H$.

2) Soit $a \in G$. On applique ce qui précède à $H = \operatorname{gr}(a)$. On sait que $a^{\operatorname{card} H} = e$ et $\operatorname{card} H$ divise n, donc $\exists k \in \mathbb{N}^*,\ n = k \operatorname{card} H$, d'où $a^n = (a^{\operatorname{card} H})^k = e^k = e$.

3) On raisonne par l'absurde. Soient H et H' deux sous-groupes distincts de G d'ordre q. On sait que $H \cap H'$ est un sous-groupe de G dont l'ordre est strictement inférieur à q et divise q, donc $H \cap H' = \{e\}$.
Montrons que l'application ψ : $H \cap H'$ est d'ordre 1 et $\begin{array}{rcl} H \times H' & \to & G \\ (x, x') & \mapsto & xx' \end{array}$ est injective

Supposons $xx' = yy'$ avec $(x,y) \in H^2$ et $(x',y') \in H'^2$. On a alors $y^{-1}x = y'x'^{-1}$. Cet élément appartient à la fois à H et H', donc est égal à e, d'où $x = y$ et $x' = y'$. On en déduit que ψ est injective, donc $\operatorname{card}(H \times H') \leqslant \operatorname{card} G$, d'où $q^2 \leqslant pq$, ce qui est absurde.

1.1.3 Groupe symétrique

Ce qu'il faut savoir

- On note $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des permutations de $[\![1\,,n]\!]$. Muni de la loi $\circ$, cet ensemble est un groupe de cardinal $n!$, appelé **groupe symétrique** d'indice n.
- Soient $i_1, i_2, \ldots, i_p$ des entiers distincts appartenant à $[\![1\,,n]\!]$. On définit le **cycle** $(i_1, i_2, \ldots, i_p)$ comme étant la permutation σ telle que :

$$\begin{cases} \sigma(i_k) = i_{k+1} & \text{pour tout } k \in [\![1\,,p-1]\!], \\ \sigma(i_p) = i_1, & \\ \sigma(j) = j & \text{pour tout } j \notin \{i_1, \ldots, i_p\}. \end{cases}$$

  L'entier p est appelé la longueur du cycle, l'ensemble $\{i_1, \ldots, i_p\}$ est appelé son support.
  Une **transposition** est un cycle de longueur 2.
- Deux cycles à supports disjoints commutent.
- Toute permutation est la composée de cycles à supports deux à deux disjoints, la décomposition étant unique à l'ordre près des facteurs.
- Toute permutation est une composée de transpositions.
- Soit σ une permutation, on note $I(\sigma)$ le nombre de couples (i,j) tels que $1 \leqslant i < j \leqslant n$ et $\sigma(i) > \sigma(j)$. La **signature** de σ est le réel $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{I(\sigma)}$.
  La signature d'une transposition est égale à -1.
- La signature est un morphisme du groupe symétrique $\mathcal{S}_n$ dans le groupe multiplicatif $\{-1, 1\}$.
  Le noyau de ce morphisme, noté $\mathcal{A}_n$ (ensemble des permutations de signature $+1$) est un sous-groupe de $\mathcal{S}_n$ appelé **groupe alterné**.
  Si $n \geqslant 2$, $\mathcal{A}_n$ possède $\dfrac{1}{2}n!$ éléments.

Exercice 1.11

On note σ la permutation $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 7 & 4 & 6 & 1 & 8 & 5 & 10 & 9 & 3 \end{pmatrix}$.

Calculer σ^{2008}.

En décomposant σ en cycles disjoints, on obtient $\sigma = c_1 \circ c_2$, où $c_1 = (1,2,7,5)$ et $c_2 = (3,4,6,8,10)$. Comme c_1 et c_2 commutent, $\sigma^{2008} = c_1^{2008} \circ c_2^{2008}$. On a $c_1^4 = \mathrm{Id}$ et $2008 = 4 \times 502$ donc $c_1^{2008} = (c_1^4)^{502} = \mathrm{Id}$. D'autre part, $c_2^5 = \mathrm{Id}$ et $2008 = 5 \times 401 + 3$ donc $c_2^{2008} = c_2^3 = (3,8,4,10,6)$. Finalement, $\sigma^{2008} = (3,8,4,10,6)$.

Exercice 1.12

1) Démontrer que la signature d'un cycle de longueur p est égale à $(-1)^{p-1}$.
2) Quel est son ordre ?
3) A quelle condition son carré est-il un cycle de même longueur ?

1) Soit $\sigma = (i_1, i_2, \dots, i_p)$ un cycle de longueur p. Il est égal à la composée des $p-1$ transpositions $(i_1, i_2)(i_2, i_3) \dots (i_{p-1}, i_p)$, donc sa signature est le produit de leurs signatures, c'est-à-dire $(-1)^{p-1}$.
2) Si $k < p$, alors $\sigma^k(i_1) = i_{k+1} \neq i_1$ et $\sigma^p(i_1) = i_1$. Il en est de même pour les autres indices (car chaque élément du support d'un cycle joue le même rôle, et les autres éléments sont invariants), donc p est le plus petit entier strictement positif tel que $\sigma^p = \mathrm{Id}$, c'est-à-dire l'ordre de σ.
3) Si p est impair, alors σ^2 est le cycle $(i_1, i_3, i_5 \dots, i_p, i_2, i_4 \dots, i_{p-1})$ de longueur p. Si p est pair, alors $\sigma^2 = (i_1, i_3, \dots, i_{p-1}) \circ (i_2, i_4, \dots, i_p)$, c'est le produit de deux cycles de longueur $p/2$ à supports disjoints.
La condition cherchée est donc que p est impair.

Exercice 1.13

Décomposer en cycles disjoints la permutation suivante :
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 7 & 10 & 6 & 8 & 2 & 11 & 12 & 5 & 1 & 4 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$
Calculer son ordre, sa signature.

On a $\sigma = (1,7,12,9) \circ (2,10,4,8,5) \circ (3,6,11)$, donc $\varepsilon(\sigma) = (-1)^3(-1)^4(-1)^2 = -1$. Posons $c_1 = (1,7,12,9)$, $c_2 = (2,10,4,8,5)$ et $c_3 = (3,6,11)$. Comme ce sont des cycles à supports disjoints, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sigma^n = c_1^n \circ c_2^n \circ c_3^n$, et $\sigma^n = \mathrm{Id}$ équivaut à $c_1^n = c_2^n = c_3^n = \mathrm{Id}$ (car c_1^n, c_2^n et c_3^n, sont encore à support disjoint), c'est-à-dire n multiple de 4, de 5 et de 3, autrement dit de 60. L'ordre de σ est donc égal à 60.

1.1.4 Anneaux, idéaux, corps

Ce qu'il faut savoir

- Soient A et A' deux anneaux et f une application de A dans A'. On dit que f est un **morphisme** d'anneaux lorsque $\begin{cases} \forall (x,y) \in A^2, & f(x+y) = f(x) + f(y) \\ \forall (x,y) \in A^2, & f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y) \\ f(1_A) = 1_{A'} \end{cases}$
- Soient A un anneau commutatif et I une partie de A.
  On dit que I est un **idéal** de A lorsque $\begin{cases} I \text{ est un sous-groupe additif de } A \\ \forall a \in A,\ \forall x \in I,\ ax \in I \end{cases}$
- Toute intersection d'idéaux est un idéal. La somme de deux idéaux est un idéal.
- L'idéal engendré par un élément x de A est le plus petit idéal de A contenant x. Il est égal à xA.
- Soient a et b appartenant à A. On dit que a divise b lorsqu'il existe $c \in A$ tel que $b = ac$. Cela est équivalent au fait que $bA \subset aA$.
- Les idéaux de $\mathbb{Z}$ sont de la forme $n\mathbb{Z}$, où $n \in \mathbb{N}$.
- Soit $\mathbb{K}$ un corps. Les idéaux de $\mathbb{K}[X]$ sont de la forme $P\ \mathbb{K}[X]$, où $P \in \mathbb{K}[X]$.

Exercice 1.14

Démontrer que les seuls idéaux d'un corps K sont $\{0\}$ et K.

Soit I un idéal de K non réduit à $\{0\}$. Soit a un élément non nul de I. Soit $x \in K$, comme K est un corps, a est inversible dans K, donc $x = xa^{-1}a$. Or $a \in I$ et I est un idéal, donc $x \in I$, d'où finalement $I = K$.

Exercice 1.15

CCP MP 2005

Soit K un corps et $A = K \times K$.

1) Rappeler la structure canonique d'anneau de A.

2) L'anneau A est-il un corps ?

3) Déterminer les idéaux de A.

1) Les lois $+$ et $\cdot$ sont définies dans A à partir de celles de K par les relations :

$$(x,y) + (x',y') = (x+x', y+y') \text{ et } (x,y)\cdot(x',y') = (x \cdot x', y \cdot y')\,.$$

2) On a $(1,0)\cdot(0,1) = (0,0)$. L'anneau A n'est pas intègre, donc n'est pas un corps.

3) Soit I un idéal de A. On suppose d'abord que I n'est pas inclus dans $K \times \{0\}$, ni dans $\{0\} \times K$. Il existe un élément $(a, b) \in I$ tel que a et b soient tous deux non nuls. Par suite, pour tout $(x, y) \in A,\ (x, y) = (x \cdot a^{-1}, y \cdot b^{-1}) \cdot (a, b) \in I$ (car I est un idéal), donc $A = I$.
Si $I \subset K \times \{0\}$ et n'est pas réduit à $\{(0, 0)\}$, il existe $a \in K \setminus \{0\}$ tel que $(a, 0) \in I$, auquel cas pour tout $x \in K,\ (x, 0) = (x \cdot a^{-1}, 0) \cdot (a, 0) \in I$ (car I est un idéal), donc $A = K \times \{0\}$.
Finalement, les idéaux de A sont $\{(0, 0)\},\ K \times \{0\},\ \{0\} \times K$ et A (on vérifie facilement que ces quatre ensembles sont bien des idéaux).

Exercice 1.16

Centrale MP 2006, 2007

Soit I un idéal d'un anneau commutatif A. On appelle radical de I l'ensemble $\sqrt{I}$ défini par $\sqrt{I} = \{x \in A \mid \exists n \in \mathbb{N}^*,\ x^n \in I\}$.

1) Montrer que le radical d'un idéal est un idéal.

2) Déterminer le radical d'un idéal de $\mathbb{Z}$.

1) On observe déjà que $I \subset \sqrt{I}$.
Soient x et y appartenant à $\sqrt{I}$. Il existe p et q appartenant à $\mathbb{N}^*$ tels que $x^p \in I$ et $y^q \in I$. Par la formule du binôme, $(x+y)^{p+q-1} = \sum_{k=0}^{p+q-1} \binom{p+q-1}{k} x^k y^{p+q-1-k}$.
Pour $k \in [\![0\,,\,p-1]\!]$, on a $p+q-1-k \geqslant q$, d'où $y^{p+q-1-k} = y^{p-1-k} y^q \in I$ (car I est un idéal), donc $\binom{p+q-1}{k} x^k y^{p+q-1-k} \in I$ (toujours car I est un idéal).
Pour $k \in [\![p\,,\,p+q-1]\!]$, on a $x^k = x^{k-p} x^p \in I$, donc

$$\binom{p+q-1}{k} x^k y^{p+q-1-k} \in I.$$

Tous les termes de la somme appartiennent à I et I est stable par $+$, donc $(x+y)^{p+q-1} \in I$, d'où $x + y \in \sqrt{I}$, et clairement $-x \in I$.
Soient $x \in I$ et $a \in A$. Il existe $p \geqslant 1$ tel que $x^p \in I$, donc $(ax)^p = a^p x^p \in I$ (car I est un idéal). Ceci achève de prouver que $\sqrt{I}$ est un idéal de A.

2) Soit $n\mathbb{Z}$ un idéal de $\mathbb{Z}$. On décompose n en facteurs premiers sous la forme $p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}$.

- Soit $x \in \sqrt{n\mathbb{Z}}$. Il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que n divise x^k, donc pour tout $i \in [\![1\,,\,r]\!]$, p_i divise x^k. Or p_i est premier, donc p_i divise x, et ceci est valable pour tout i, d'où finalement $\prod_{i=1}^{r} p_i$ divise x.

- Inversement, si $\prod_{i=1}^{r} p_i$ divise x, alors en notant $k = \max(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$, n divise $\prod_{i=1}^{r} p_i^k$, donc n divise x^k, d'où $x \in \sqrt{n\mathbb{Z}}$.

Nous avons finalement montré que $\sqrt{n\mathbb{Z}} = \left(\prod_{i=1}^{r} p_i\right) \mathbb{Z}$.

1.1.5 L'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Ce qu'il faut savoir

- Comme la congruence modulo n est compatible avec la multiplication, on définit dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ une loi multiplicative en posant $\overline{x} \cdot \overline{y} = \overline{xy}$.
  L'ensemble $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ muni des lois + et $\cdot$ est un anneau commutatif.
  L'application $s : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \\ x & \longmapsto & \overline{x} \end{array}$ est un morphisme d'anneaux surjectif, appelé surjection canonique.
- Soit $a \in \mathbb{Z}$, $\overline{a}$ est inversible dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ si et seulement si a est premier avec n.
  Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\varphi(n)$ le nombre d'entiers naturels inférieurs à n et premiers avec n. La fonction φ est appelée **indicatrice d'Euler**.
  On note $U(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ le groupe multiplicatif des éléments inversibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Il est de cardinal $\varphi(n)$.
- L'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un corps si et seulement si n est premier.
- Si A est un anneau, alors l'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & A \\ x & \longmapsto & x\,1_A \end{array}$ est un morphisme d'anneaux. Deux possibilités se présentent :
  - Si f est injective, on dit que A est de **caractéristique** nulle.
  - Sinon, son noyau est un idéal de $\mathbb{Z}$, de la forme $n\mathbb{Z}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$. L'entier n est appelé la **caractéristique** de A.
- La caractéristique d'un corps est nulle ou égale à un nombre premier.

Autres connaissances utiles

- Soient m et n deux entiers naturels premiers entre eux. L'application $x \pmod{mn} \mapsto (x \pmod{m}, x \pmod{n})$ est un isomorphisme d'anneaux de $\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. En la restreignant aux éléments inversibles, on obtient un isomorphisme de groupes multiplicatifs entre $U(\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z})$ et $U(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \times U(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$. On en déduit que $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$.
- Soient p un nombre premier et $\alpha \in \mathbb{N}^*$. On a $\varphi(p^\alpha) = p^\alpha - p^{\alpha-1} = p^\alpha(1 - \frac{1}{p})$.
- Soit $p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}$ la décomposition en facteurs premiers de n. On a alors $\varphi(n) = p_1^{\alpha_1 - 1}(p_1 - 1) \cdots p_r^{\alpha_r - 1}(p_r - 1)$, ou encore $\varphi(n) = n(1 - \frac{1}{p_1}) \cdots (1 - \frac{1}{p_r})$.

Exercice 1.17

Centrale MP 2006

Soient a, b, c des entiers. Montrer que si 7 divise $a^3+b^3+c^3$, alors 7 divise abc.

On calcule les cubes dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$:

$$\overline{0}^3=\overline{0},\ \overline{1}^3=\overline{1},\ \overline{2}^3=\overline{1},\ \overline{3}^3=\overline{6},\ \overline{4}^3=\overline{1},\ \overline{5}^3=\overline{6},\ \overline{6}^3=\overline{6}\,.$$

On obtient les trois valeurs possibles $\overline{0}$, $\overline{1}$ et $\overline{-1}$. Si la somme de trois cubes est nulle, alors l'un des cubes est égal à $\overline{0}$, autrement dit l'un des 3 nombres a, b ou c est multiple de 7, ce qui implique que abc est multiple de 7.

Exercice 1.18

Résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système suivant : $\begin{cases} x \equiv 5 \pmod{12} \\ x \equiv 3 \pmod{25} \end{cases}$

Un tel système de congruences s'appelle un problème chinois. On traduit l'énoncé : il existe $(a,b)\in\mathbb{Z}^2$ tel que $x=5+12a=3+25b$, c'est-à-dire $x=5+12a$ et $-12a+25b=2$. On a l'identité de Bézout $-12\times 2+25\times 1=1$ (12 et 25 sont premiers entre eux). On la multiplie par 2 et on la soustrait de l'équation, ce qui donne de manière équivalente $12(a-4)=25(b-2)$. Par le théorème de Gauss, puisque 12 et 25 sont premiers entre eux, 12 divise $b-2$, donc l'équation équivaut à l'existence de $k\in\mathbb{Z}$ tel que $b-2=12k$, et donc $a-4=25k$. On reporte et on obtient que x est solution si et seulement si il existe $k\in\mathbb{Z}$ tel que $x=3+25(2+12k)$, c'est-à-dire $x=53+300k$. L'ensemble des solutions est donc la classe de 53 modulo $300=12\times 25$.

Exercice 1.19

TPE MP 2005

Résoudre dans $\mathbb{Z}/37\mathbb{Z}$ le système $\begin{cases} \overline{6}x+\overline{7}y = \overline{30} \\ \overline{3}x-\overline{7}y = \overline{0} \end{cases}$

En ajoutant les deux équations, on obtient $\overline{9}x=\overline{30}$. L'inverse de $\overline{9}$ est $\overline{-4}$ (à cause de la relation de Bézout $37-4\times 9=1$), donc $x=\overline{-4}\times\overline{30}=\overline{28}$. Par suite, $\overline{7}y=\overline{3}\times\overline{28}=\overline{10}$. L'inverse de $\overline{7}$ est $\overline{16}$ (car $-3\times 37+16\times 7=1$), donc $y=\overline{16}\times\overline{10}=\overline{12}$.

Remarque

Ce système linéaire admet une solution unique car son déterminant vaut $\overline{-63}$ qui n'est pas nul (on travaille dans $\mathbb{Z}/37\mathbb{Z}$ qui est un corps), voir exercice 6.8 page 163 pour une résolution avec les formules de Cramer.

Exercice 1.20

Mines-Ponts MP 2007

Déterminer le groupe des inversibles de l'anneau $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ et trouver un groupe qui lui soit isomorphe.

L'élément $\overline{x}$ est inversible dans $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ si et seulement si x est premier avec 9, donc le groupe des inversibles de $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ est l'ensemble $U(\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}) = \{\overline{1}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{7}, \overline{8}\}$.
Calculons les puissances de 2 pour déterminer le sous-groupe engendré par $\overline{2}$:
On a $\overline{2}^0 = \overline{1}$, $\overline{2}^1 = \overline{2}$, $\overline{2}^2 = \overline{4}$, $\overline{2}^3 = \overline{8}$, $\overline{2}^4 = \overline{7}$, $\overline{2}^5 = \overline{5}$. On obtient ainsi tous les éléments de $U(\mathbb{Z}/9\mathbb{Z})$ donc $U(\mathbb{Z}/9\mathbb{Z})$ est cyclique d'ordre 6, et par conséquent isomorphe au groupe additif $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.

Exercice 1.21

Mines-Ponts MP 2007

Les groupes multiplicatifs $U(\mathbb{Z}/9\mathbb{Z})$ et $U(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})$ sont-ils isomorphes ?

Comme 7 est premier, $U(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/7\mathbb{Z} \setminus \{\overline{0}\}$. Cherchons le sous-groupe de $U(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})$ engendré par $\overline{3}$. On a $\overline{3}^0 = \overline{1}$, $\overline{3}^1 = \overline{3}$, $\overline{3}^2 = \overline{2}$, $\overline{3}^3 = 6$, $\overline{3}^4 = 4$, $\overline{3}^5 = 5$. On obtient ainsi tous les éléments de $U(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})$, donc $U(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})$ est cyclique d'ordre 6, et d'après l'exercice précédent, il est isomorphe au groupe multiplicatif $U(\mathbb{Z}/9\mathbb{Z})$.

Exercice 1.22

Déterminer les éléments inversibles de l'anneau $\mathbb{Z}/24\mathbb{Z}$. Calculer l'ordre de chaque élément pour la multiplication.

L'élément $\overline{x}$ est inversible dans $\mathbb{Z}/24\mathbb{Z}$ si et seulement si x est premier avec 24, donc l'ensemble des inversibles de $\mathbb{Z}/24\mathbb{Z}$ est $U(\mathbb{Z}/24\mathbb{Z}) = \{\overline{1}, \overline{5}, \overline{7}, \overline{11}, \overline{13}, \overline{17}, \overline{19}, \overline{23}\}$.
Après calcul, on voit que tout élément de ce groupe est de carré $\overline{1}$, donc tous les éléments sont d'ordre 2, sauf $\overline{1}$ qui est d'ordre 1.

Remarque

Ce groupe est isomorphe au groupe additif $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$ (voir exercice 1.28 page 16).

Exercice 1.23

Centrale MP 2005

Le groupe des inversibles de l'anneau $\mathbb{Z}/20\mathbb{Z}$ est-il cyclique ?

On a $U(\mathbb{Z}/20\mathbb{Z}) = \{\overline{1}, \overline{3}, \overline{7}, \overline{9}, \overline{11}, \overline{13}, \overline{17}, \overline{19}\}$.
Le tableau suivant résume les ordres de ses éléments :

x	$\overline{1}$	$\overline{3}$	$\overline{7}$	$\overline{9}$	$\overline{11}$	$\overline{13}$	$\overline{17}$	$\overline{19}$
ordre de x	1	4	4	2	2	4	4	2

Aucun élément n'étant d'ordre 8, qui est le cardinal de $U(\mathbb{Z}/20\mathbb{Z})$, ce groupe n'est pas cyclique.

Remarque

Puisque $20 = 4 \times 5$ et que 4 et 5 sont premiers entre eux, on sait par le théorème chinois que $U(\mathbb{Z}/20\mathbb{Z})$ est isomorphe à $U(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) \times U(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})$ qui est égal à $\{\overline{1}, \overline{3}\}_{\text{mod } 4} \times \{\overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}\}_{\text{mod } 5}$, lui-même isomorphe au groupe **additif** $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

Exercice 1.24

Mines-Ponts MP 2006

Si p est un nombre premier, quel est le nombre de carrés dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$?

Dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, il y a 2 carrés.
On suppose $p \geqslant 3$. Si x et y appartiennent à $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, on a $x^2 = y^2 \iff x = \pm y$. Tout élément non nul est différent de son opposé, donc chaque carré non nul possède exactement deux antécédents par l'application $x \mapsto x^2$. Le nombre de carrés non nuls est donc $\dfrac{p-1}{2}$, et le nombre de carrés est $\dfrac{p-1}{2} + 1 = \dfrac{p+1}{2}$.

1.2 EXERCICES D'ENTRAÎNEMENT

Exercice 1.25

Centrale MP 2005

Déterminer les morphismes de groupes de $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, +)$ dans $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$, puis les automorphismes du groupe $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$.

- On note d le PGCD de m et n. Il existe donc deux entiers m' et n' premiers entre eux tels que $m = dm'$ et $n = dn'$.
  - Soit f un morphisme de groupes de $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, +)$ dans $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$.
    Soit $x \in [\![0\,, m-1]\!]$. Comme $\overline{x} = \underbrace{\overline{1} + \overline{1} \cdots + \overline{1}}_{x \text{ fois}}$, on a :
    $$f(\overline{x}) = \underbrace{f(\overline{1}) + f(\overline{1}) \cdots + f(\overline{1})}_{x \text{ fois}} = x f(\overline{1}),$$
    donc f est entièrement déterminée par la donnée de $f(\overline{1})$. On pose $f(\overline{1}) = \overline{a}$, où $a \in [\![0\,, n-1]\!]$. On a alors $m\overline{a} = mf(\overline{1}) = f(\overline{m}) = f(\overline{0}) = \overline{0}$, donc $n \mid ma$.

En simplifiant par d, on obtient $n' \mid m'a$, d'où $n' \mid a$ par théorème de Gauss, donc il existe $k \in [\![0\,,d-1]\!]$ tel que $a = k\dfrac{n}{d} = kn'$.

◦ Inversement, pour $k \in [\![0\,,d-1]\!]$, l'application $\begin{array}{rccc} f_k : & \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \\ & \overline{x} & \longmapsto & \overline{kn'x} \end{array}$ est un morphisme de groupes. On obtient finalement d morphismes solutions.

- On suppose maintenant $n = m$. On cherche une condition nécessaire et suffisante pour que $\begin{array}{rccc} f_k : & \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \\ & \overline{x} & \longmapsto & \overline{kx} \end{array}$ soit bijective. Comme $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est fini, f_k est bijective si et seulement si elle est injective, c'est-à-dire si on a l'équivalence $\overline{x} = \overline{0} \iff \overline{kx} = \overline{0}$.
  Si k est premier avec n, c'est vrai par théorème de Gauss.
  Sinon, en prenant $x = \dfrac{n}{n \wedge k}$, on a $\overline{x} \neq \overline{0}$ alors que $\overline{kx} = \overline{0}$.
  La condition cherchée est donc k premier avec n. Les automorphismes du groupe additif $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sont les applications f_k définies par $f_k(\overline{x}) = \overline{kx}$, pour $k \in [\![1\,,n]\!]$ et premier avec n. Ils sont au nombre de $\varphi(n)$.

Remarque

Les automorphismes d'un groupe G forment un groupe pour la loi $\circ$, noté $\mathrm{Aut}(G)$. Dans le cas de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, on a $f_k \circ f_{k'} = f_{kk'}$, donc $\mathrm{Aut}(G)$ est isomorphe au groupe multiplicatif des éléments inversibles de l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Exercice 1.26

Centrale MP 2005

Soit G un groupe. On note A l'ensemble des éléments de G d'ordre fini impair. Montrer que A est non vide, et que l'application $x \mapsto x^2$ est une permutation de A.

- L'ensemble A est non vide car l'élément neutre e est d'ordre 1, impair.
- Soit x un élément de G d'ordre impair $2p+1$. L'élément x^2 est également d'ordre $2p+1$ (voir par exemple l'exercice 1.8 page 4), donc appartient à A.
- Soient x et y des éléments de A tels que $x^2 = y^2$. Notons $2p+1$ l'ordre de x. On a $x = (x^2)^{p+1} = (y^2)^{p+1} = y^{2p+2}$, d'où $y^{4p+4} = x^2 = y^2$, soit $y^{4p+2} = e$. L'ordre de y divise $4p+2$ et est impair, donc divise $2p+1$, d'où $y = y^{2p+1}y = x$. L'application $x \mapsto x^2$ définie sur A est injective.
  Soit y un élément de A d'ordre $2p+1$. On pose $x = y^{p+1}$, on obtient $x^2 = y^{2p+2} = y$. De plus, $x^k = e \iff y^{k(p+1)} = e \iff 2p+1 \mid k(p+1)$, or $2p+1$ est premier avec $p+1$ (on a la relation de Bézout $2(p+1)-(2p+1) = 1$), donc $x^k = e \iff 2p+1 \mid k$, ce qui signifie que x est d'ordre $2p+1$, donc l'application étudiée est surjective.

Finalement, l'application $x \mapsto x^2$ est une permutation de A.

Exercice 1.27

Divers concours

Soient G un groupe abélien d'ordre n, et k un entier naturel non nul premier avec n. Montrer que l'application $f : x \mapsto x^k$ est un automorphisme de G, et expliciter sa réciproque.

Pour tout $(x, y) \in G^2$, $f(xy) = f(x)f(y)$ car G est abélien, donc f est un morphisme.
Par le théorème de Bézout, il existe deux entiers u et v tels que $uk + vn = 1$, d'où pour tout $x \in G$, $(x^k)^u = x^{1-kn} = x$ car tout élément de G élevé à la puissance n est égal à e (voir exercice 1.10 page 6). Par suite, l'application $g : x \mapsto x^u$ vérifie $f \circ g = g \circ f = \mathrm{Id}$, donc f est bijective, et g est sa réciproque.

Exercice 1.28

Mines-Ponts MP 2006 et 2007

Soit $(G,\cdot)$ un groupe fini non réduit à son élément neutre e tel que pour tout $g \in G,\ g^2 = e$.

1) Vérifier que G est abélien.

2) Justifier que si H est un sous-groupe strict de G et si $a \in G \setminus H$, alors $H \cup aH$ est un sous-groupe de G d'ordre égal à $2 \operatorname{card} H$.

3) En déduire que l'ordre de G est égal à une puissance de 2.

1) Soit $(x, y) \in G^2$. On a $xyxy = e$. En multipliant à gauche par x et à droite par y, on obtient $xxyxyy = xy$, d'où $yx = xy$.

2) • Si x et $y \in H$, alors $xy \in H$.
   • Si x et $y \in aH$, alors il existe x' et $y' \in H$ tels que $x = ax'$ et $y = ay'$ d'où $xy = x'y' \in H$ car $a^2 = e$ et G est abélien.
   • Si $x \in H$ et $y \in aH$, alors $xy \in aH$.

   On en déduit que $H \cup aH$ est stable pour la loi $\cdot$. Tout élément de G étant son propre symétrique, $H \cup aH$ est bien un sous-groupe de G. D'autre part, $H \cap aH = \varnothing$ (sinon a serait dans H), donc $\operatorname{card}(H \cup aH) = 2 \operatorname{card} H$.

3) On démontre par récurrence finie sur k que tant que $2^k \leqslant \operatorname{card} G$, il existe des éléments $a_1, \ldots, a_k$ de G tels que $H_k = \{a_1^{j_1} a_2^{j_2} \ldots a_k^{j_k} \mid (j_1, j_2, \ldots, j_k) \in \{0, 1\}^k\}$ soit un sous-groupe de G d'ordre 2^k.
   On pose $H_0 = \{e\}$. On suppose H_k construit et $2^{k+1} \leqslant \operatorname{card} G$. Comme $H_k \subsetneq G$, il existe un élément $a_{k+1} \in G \setminus H_k$. D'après 2), $H_{k+1} = H_k \cup a_{k+1} H_k$ est un sous-groupe d'ordre 2^{k+1} qui convient.
   Puisque G est fini, le processus s'arrête forcément, donc l'ordre de G est de la forme 2^n.

Complément : en étudiant l'application :
$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n & \longrightarrow & G \\ (\overline{j_1}, \dots, \overline{j_n}) & \longmapsto & a_1^{j_1} a_2^{j_2} \dots a_n^{j_n} \end{array}$$
qui est un isomorphisme de groupes, on en déduit que G est isomorphe au groupe additif $((\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n, +)$.

Exercice 1.29

Polytechnique MP 2006

Soit G un groupe fini d'ordre $2p$ avec p premier. Existe-t-il dans G un élément d'ordre p ?

- On suppose $p = 2$. Si G n'a pas d'élément d'ordre 2, alors soit $a \in G \setminus \{e\}$, a ne peut être que d'ordre 4 (d'où G est cyclique), auquel cas a^2 est d'ordre 2, ce qui apporte la contradiction.
  On suppose désormais $p \geqslant 3$.
- Supposons G cyclique, engendré par a. Dans ce cas, a^2 est d'ordre p.
- Sinon, les ordres des éléments de $G \setminus \{e\}$ sont 2 ou p. S'ils sont tous d'ordre 2, alors d'après l'exercice 1.28 page 16, l'ordre de G est une puissance de 2, ce qui n'est pas le cas.
  On en déduit que dans tous les cas, G admet un élément d'ordre p.

Exercice 1.30

Polytechnique MP 2006

Soit G un groupe abélien.

1) Soient x et y deux éléments de G d'ordres respectifs p et q premiers entre eux. Montrer que xy est d'ordre pq.

2) On suppose G d'ordre pq, où p et q sont deux nombres premiers distincts. Montrer que G possède un élément d'ordre pq (il est donc cyclique).

1) On suppose $(xy)^k = e$, c'est-à-dire $x^k y^k = e$. En élevant à la puissance p, on obtient $y^{kp} = e$ puisque x est d'ordre p, donc q divise kp, et par théorème de Gauss, q divise k. De façon analogue, p divise k, or p et q sont premiers entre eux, donc pq divise k. Comme on a évidemment $(xy)^{pq} = e$, on a bien prouvé que xy est d'ordre pq.
2) On raisonne par l'absurde en supposant que G n'a aucun élément d'ordre pq. Soit x un élément de $G \setminus \{e\}$. Il est d'ordre p ou q, disons p. Soit $y \in G \setminus \mathrm{gr}(x)$. Supposons y d'ordre p. Soit
$$H = \{x^i y^j \mid 0 \leqslant i, j \leqslant p - 1\}.$$
Comme G est abélien, H est le sous-groupe engendré par $\{x, y\}$. Si $x^i y^j = x^k y^l$, avec i, j, k, l compris entre 0 et $p - 1$, $x^{i-k} = y^{l-j}$. Cet élément est dans $\mathrm{gr}(x) \cap \mathrm{gr}(y)$ qui est un sous-groupe strict de $\mathrm{gr}(x)$ donc son ordre divise strictement p qui est premier, donc $\mathrm{gr}(x) \cap \mathrm{gr}(y) = \{e\}$, d'où $x^{i-k} = e$, et p divise

$i - k$, d'où $i = k$, et de même $j = l$. Le sous-groupe H est d'ordre p^2, ce qui est absurde car p^2 ne divise pas pq. Il en résulte que y est d'ordre q, donc xy est d'ordre pq par la question 1), ce qui apporte la contradiction.

Exercice 1.31

Centrale MP 2006, *p*-groupes de Prüfer

Soit p un nombre premier. On pose $G_p = \{z \in \mathbb{C} \mid \exists k \in \mathbb{N},\ z^{p^k} = 1\}$.

1) Montrer que G_p est un sous-groupe multiplicatif de $\mathbb{C}^*$.

2) Montrer que les sous-groupes propres de G_p sont cycliques et qu'aucun d'eux n'est maximal pour l'inclusion.

3) Montrer que G_p n'est pas engendré par un nombre fini d'éléments.

1) Soient z et $z' \in G_p$; il existe deux entiers j et k tels que $z^{p^j} = 1$ et $z'^{p^k} = 1$, d'où $(zz')^{p^{\max(j,k)}} = 1$ et $(z^{-1})^{p^j} = 1$ donc zz' et $z^{-1} \in G_p$. Comme $1 \in G_p$, il en résulte que G_p est un sous-groupe de $\mathbb{C}^*$.

2) On note U_k le groupe multiplicatif des racines p^{k} ièmes de l'unité dans $\mathbb{C}$. On rappelle que U_k est cyclique et que z est un générateur de U_k si et seulement si z est de la forme $e^{2i\pi u/p^k}$ avec u premier avec p, autrement dit si et seulement si $z \in U_k \setminus U_{k-1}$.

On a $G_p = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} U_k$, la suite d'ensembles (U_k) étant croissante pour l'inclusion.

Soit G un sous-groupe propre de G_p. Si G contient un élément de $U_k \setminus U_{k-1}$, alors G contient U_k, donc tous les U_j pour $j \leqslant k$. Comme G n'est pas égal à G_p, l'ensemble des entiers k tels que G contienne un élément de $U_k \setminus U_{k-1}$ est majoré, donc possède un plus grand élément r. Cet élément engendre U_r, donc $G \supset U_r$. Mais par définition de r, $G \subset U_r$. Finalement, les sous-groupes propres de G_p sont les sous-groupes U_k ; ils sont tous cycliques, emboités les uns dans les autres, donc aucun n'est maximal.

3) Supposons que la famille $(z_1, \dots, z_n)$ engendre G_p. Chaque élément z_k est d'ordre p^{α_k} où α_k est un entier naturel. En notant $\alpha = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} \alpha_k$, on a $z_k^{p^\alpha} = 1$ pour tout k, or tout élément z de G_p est un produit d'éléments de la forme z_i, donc on a également $z^{p^\alpha} = 1$, d'où $G_p \subset U_\alpha$, ce qui est absurde.

Exercice 1.32

1) Calculer $\sigma \circ c \circ \sigma^{-1}$ lorsque c est un cycle et σ une permutation de $\mathcal{S}_n$.

2) Rechercher dans $\mathcal{S}_n$ le commutant d'un cycle de longueur n, puis de la composée de deux cycles à supports disjoints de longueurs respectives p et $n-p$. (on caractérisera ses éléments, puis on trouvera son cardinal)

1) Si c est le cycle $(i_1, i_2, \ldots, i_p)$, on va montrer que $\sigma \circ c \circ \sigma^{-1}$ est le cycle $(\sigma(i_1)\ \sigma(i_2)\ \ldots \sigma(i_p))$.
En effet, chaque élément $\sigma(i_k)$ a pour image $\sigma(i_{k+1})$ et si j n'est pas de la forme $\sigma(i_k)$, alors $\sigma^{-1}(j)$ n'est pas de la forme i_k donc est invariant par c, et $(\sigma \circ c \circ \sigma^{-1})(j) = \sigma(\sigma^{-1}(j)) = j$.

2) • Soit σ commutant avec le cycle $c = (i_1, i_2, \ldots, i_n)$. Alors $\sigma \circ c \circ \sigma^{-1} = c$, et d'après ce qui précède, il existe $k \in [\![1\,, n]\!]$ tel que $\sigma(i_1) = i_k$ et les $p-$uplets $(\sigma(i_1), \sigma(i_2), \ldots, \sigma(i_p))$ et $(i_k, i_{k+1}, \ldots, i_{k-1})$ sont égaux, ce qui prouve que $\sigma = c^{k-1}$. Réciproquement, pour $k \in [\![0\,, n-1]\!]$, la permutation $\sigma = c^k$ commute avec c, donc le commutant de c est le groupe engendré par c, c'est-à-dire $\{c^k \mid 0 \leqslant k \leqslant n-1\}$.

• Posons $q = n-p$. Soient c le cycle $(i_1, i_2, \ldots, i_p)$ et c' le cycle $(j_1, j_2, \ldots, j_q)$; En écrivant $\sigma \circ c \circ c' \circ \sigma^{-1} = (\sigma \circ c \circ \sigma^{-1}) \circ (\sigma \circ c' \circ \sigma^{-1})$, on montre comme précédemment que $\sigma \circ c \circ c' \circ \sigma^{-1}$ est la composée des cycles $(\sigma(i_1), \sigma(i_2), \ldots, \sigma(i_p))$ et $(\sigma(j_1), \sigma(j_2), \ \ldots, \sigma(j_q))$. On recherche les permutations σ qui commutent avec $c \circ c'$ en distinguant deux cas.

◦ **1$^{\text{er}}$ cas : $p \neq q$**. Dans ce cas, σ commute avec $c \circ c'$ si et seulement si on a l'égalité des cycles $(\sigma(i_1), \sigma(i_2), \ \ldots, \sigma(i_p)) = (i_1, i_2, \ldots, i_p)$ et $(\sigma(j_1), \sigma(j_2), \ldots, \sigma(j_q)) = (j_1, j_2, \ldots, j_q)$ par unicité de la décomposition en cycles disjoints, donc il existe $k \in [\![0\,, p-1]\!]$ tel que $\sigma(i_1) = i_{k+1}$ et il existe $l \in [\![0\,, q-1]\!]$ tel que $\sigma(j_1) = j_{l+1}$, d'où $\sigma = c^k \circ c'^l$. Le commutant de $c \circ c'$ est le groupe engendré par $\{c, c'\}$, qui est abélien d'ordre pq.

◦ **2$^{\text{ème}}$ cas : $p = q$**. Dans ce cas, on a deux possibilités :

$$(\sigma(i_1), \sigma(i_2), \ldots, \sigma(i_p)) = (i_1, i_2, \ldots, i_p)$$

et

$$(\sigma(j_1), \sigma(j_2), \ldots, \sigma(j_p)) = (j_1, j_2, \ldots, j_p)$$

ou

$$(\sigma(i_1), \sigma(i_2), \ldots, \sigma(i_p)) = (j_1, j_2, \ldots, j_p)$$

et

$$(\sigma(j_1), \sigma(j_2), \ldots, \sigma(j_p)) = (i_1, i_2, \ldots, i_p)$$

Le commutant de $c \circ c'$ est donc égal à

$$\{c^k c'^l,\ c^k c'^l \phi \mid 0 \leqslant k \leqslant p-1,\ 0 \leqslant l \leqslant p-1\},$$

où ϕ est la permutation $(i_1, j_1)\,(i_2, j_2) \ldots (i_p, j_p)$. Il est d'ordre $2p^2 = \dfrac{n^2}{2}$.

Exercice 1.33

Centrale MP 2005

Soit $\Omega_n = \{\sigma \in \mathcal{S}_n |\ \forall k \in [\![1\,,n]\!],\ \sigma(n+1-k) = n+1-\sigma(k)\}$.

1) Montrer que Ω_n est un sous-groupe de $\mathcal{S}_n$.

2) Trouver le cardinal de Ω_n.

1) On voit que $\mathrm{Id} \in \Omega_n$. Soient σ et $\sigma' \in \Omega_n$. On a, pour tout $k \in [\![1\,,n]\!]$:

$$\sigma(\sigma'(n+1-k)) = \sigma(n+1-\sigma'(k)) = n+1-\sigma(\sigma'(k))$$

On en déduit que $\sigma \circ \sigma' \in \Omega_n$. On a $\sigma(n+1-\sigma^{-1}(k)) = n+1-k$, donc $n+1-\sigma^{-1}(k) = \sigma^{-1}(n+1-k)$, d'où $\sigma^{-1} \in \Omega_n$. Ceci prouve que Ω_n est un sous-groupe de $\mathcal{S}_n$.

2) Il y a n choix possibles pour $\sigma(1)$, à la suite de quoi $\sigma(n)$ est imposé. Il reste $n-2$ choix possibles pour $\sigma(2)$, à la suite de quoi $\sigma(n-1)$ est imposé. On poursuit ainsi le comptage.

- Lorsque n est pair, on obtient finalement $n(n-2)(n-4)\cdots 2$ éléments, soit $\prod_{k=1}^{n/2}(2k) = 2^{\frac{n}{2}}(\frac{n}{2})!$
- Lorsque n est impair, on obtient $\prod_{k=0}^{\frac{n-1}{2}}(2k+1) = \dfrac{n!}{2.4\ldots(n-1)} = \dfrac{n!}{2^{\frac{n-1}{2}}(\frac{n-1}{2})!}$.

Exercice 1.34

Centrale MP 2007

Soient K un corps, A un sous-anneau de K tel que $\forall x \in K^*,\ x \in A$ ou $x^{-1} \in A$. Soit M l'ensemble des éléments non inversibles de A, c'est-à-dire

$$M = \{x \in A \text{ non nul} \mid x^{-1} \notin A\} \cup \{0\}.$$

1) Montrer que M est un idéal de A.

2) Montrer que tout idéal de A distinct de A est contenu dans M.

1) On remarque déjà que $0 \in M$.
Soient x et y deux éléments non nuls de M. Alors x et y sont dans A, donc $x+y \in A$, mais x^{-1} et y^{-1} ne sont pas dans A. Supposons que $x+y \notin M$. Alors $x+y$ est non nul et son inverse noté z appartient à A. Les éléments $x^{-1}y$ et $y^{-1}x$ sont inverses l'un de l'autre, donc l'un des deux appartient à A. Supposons par exemple que ce soit $x^{-1}y$ (la situation est symétrique). On écrit $1 = (x+y)z = xz + yz$ et on multiplie par x^{-1}, ce qui donne $x^{-1} = z + x^{-1}yz$. Or A contient z et $x^{-1}y$ et est un anneau, donc $x^{-1}yz \in A$, or $z \in A$, donc en les ajoutant, on obtient que $x^{-1} \in A$, ce qui est absurde. On en déduit que $x+y \in M$.

Soient $x \in M$ et $a \in A$, tous deux non nuls. Comme A est un anneau, $ax \in A$, et $(ax)^{-1} = a^{-1}x^{-1}$. Si $(ax)^{-1} \in A$, comme $a \in A$ et que A est un anneau, leur produit qui est égal à x^{-1} appartient à A, ce qui est faux, donc $ax \in M$. Ceci achève de prouver que M est un idéal de A.

2) Soit I un idéal de A distinct de A. Supposons qu'il existe un élément $a \in I \setminus M$. Comme $a \in I \subset A$ et $a^{-1} \notin M$, on en déduit que $a^{-1} \in A$. Soit x un élément quelconque de A, on a $x = \underbrace{xa^{-1}}_{\in A}.\underbrace{a}_{\in I} \in I$ car I est un idéal. Par conséquent, $A = I$, ce qui est absurde. Il en résulte que $I \setminus M = \varnothing$, donc $I \subset M$.

Exercice 1.35

Mines-Ponts MP 2006, Centrale MP 2007

Soit p un nombre premier.

On pose $Z_p = \left\{ \frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{N}^*,\ p \text{ ne divise pas } b \right\}$,

et $J_p = \left\{ \frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{N}^*,\ p \text{ divise } a \text{ et ne divise pas } b \right\}$.

1) Montrer que Z_p est un sous-anneau de $\mathbb{Q}$.

2) Montrer que J_p est un idéal de Z_p, et que tout idéal de Z_p autre que Z_p est inclus dans J_p.

3) Déterminer les idéaux de Z_p.

1) On a $0 \in Z_p$. Soient $x = \frac{a}{b}$ et $y = \frac{c}{d}$ deux éléments de Z_p. On a $x - y = \frac{ad - bc}{bd}$ et $xy = \frac{ac}{bd}$. Comme p est premier et qu'il ne divise ni b ni d, il ne divise pas bd, donc $x - y$ et xy appartiennent à Z_p. On en déduit que Z_p est un sous-anneau de $\mathbb{Q}$.

2) Tout élément x non nul de $\mathbb{Q}$ vérifie $x \in Z_p$ ou $x^{-1} \in Z_p$, car lorsqu'on écrit x sous forme irréductible, le numérateur ou le dénominateur n'est pas multiple de p. Par ailleurs, les éléments inversibles de Z_p sont les rationnels dont le numérateur et le dénominateur ne sont pas divisibles par p, c'est-à-dire les éléments de $Z_p \setminus J_p$. D'après l'exercice 1.34 page 20, J_p est un idéal de Z_p, et tout idéal strict de Z_p est inclus dans J_p. Il n'est pas difficile de redémontrer directement tout cela.

3) On remarque que $J_p = pZ_p$. On se propose de démontrer que les idéaux non nuls de Z_p sont les ensembles $p^\alpha Z_p$, où $\alpha \in \mathbb{N}$.
Soit I un idéal non nul de Z_p. On note α le plus grand entier naturel tel que p^α divise les numérateurs de tous les éléments de I (écrits sous forme irréductible). Tout élément de I s'écrit donc sous la forme $p^\alpha \frac{u}{v}$, avec $\frac{u}{v} \in Z_p$, donc $I \subset p^\alpha Z_p$.
De plus, par maximalité de α, il existe un élément x de I s'écrivant $p^\alpha \frac{a}{b}$, avec a

et b premiers avec p. Mais alors $\frac{b}{a} \in Z_p$, et I est un idéal, donc $p^\alpha = \frac{b}{a}x \in I$, et comme I est un idéal, $p^\alpha Z_p \subset I$. Finalement, on a bien $I = p^\alpha Z_p$.

Exercice 1.36

Centrale MP 2005 et 2007, Théorème de Wilson

1) Si p est premier, montrer que $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$.

2) Calculer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, le reste de la division de $(n-1)!$ par n.

1) On calcule le produit des éléments du groupe multiplicatif $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ de deux manières différentes. En écrivant les éléments sous la forme $\overline{k}$, pour $k \in [\![1\,, p-1]\!]$, on obtient $\overline{(p-1)!}$. En groupant chaque élément non nul avec son inverse, il ne reste dans le produit que les éléments qui sont leur propre inverse, c'est-à-dire $\overline{1}$ et $\overline{-1}$. On en déduit que $\overline{(p-1)!} = \overline{-1}$, donc $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$.

2) Si p est premier, alors $(p-1)! \equiv -1 \equiv p-1 \pmod{p}$ donc le reste est $p-1$. Supposons n non premier ; il existe $(p, q) \in [\![2\,, n-1]\!]^2$ tel que $n = pq$. On distingue deux cas :

- Si $p \neq q$ alors p et q figurent dans le produit $(n-1)!$ donc le reste de la division de $(n-1)!$ par n est 0.
- Si on ne peut pas trouver de couple (p, q) avec $p \neq q$ tel que $n = pq$, alors n s'écrit sous la forme p^2 avec p premier. Le cas $p = 2$ est immédiat, on a $6 \equiv 2 \pmod{4}$. Si $p \geqslant 3$, alors p et $2p$ appartiennent à $[\![1\,, n-1]\!]$ et sont distincts donc à nouveau, le reste de la division de $(n-1)!$ par n est 0.

Récapitulons : $(n-1)! \equiv \begin{cases} n-1 & \pmod{n} \quad \text{si } n \text{ est premier} \\ 2 & \pmod{n} \quad \text{si } n = 4 \\ 0 & \pmod{n} \quad \text{sinon} \end{cases}$.

Exercice 1.37

TPE MP 2006

Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers de la forme $4n-1$, avec $n \in \mathbb{N}^*$.

Indication : S'inspirer fortement de la démonstration du cours sur le nombre infini de nombres premiers !

Tout d'abord, $3 = 4 \times 1 - 1$, donc l'ensemble de ces nombres n'est pas vide. Supposons qu'il n'en existe qu'un nombre fini, que l'on notera $p_1 < p_2 < \ldots p_n$.

L'entier $N = 4p_1 \cdots p_n - 1$ est congru à -1 modulo 4. Les diviseurs premiers de N sont donc impairs et ne peuvent être tous congrus à 1 modulo 4 (car sinon leur produit N serait lui aussi congru à 1).

On en déduit que N admet au moins un diviseur premier qui est congru à -1 modulo 4, donc il existe i tel que p_i divise N. Or p_i divise $4p_1 \dots p_n$, donc p_i divise leur différence qui est égale à 1, ce qui est absurde.

Exercice 1.38

Mines-Ponts MP 2005

Résoudre dans $\mathbb{Z}/143\mathbb{Z}$: $x^2 - \overline{4}x + \overline{3} = \overline{0}$.

Sous forme canonique, l'équation s'écrit $(x - \overline{2})^2 = \overline{1}$, c'est-à-dire $(y - \overline{1})(y + \overline{1}) = \overline{0}$ avec $y = x - \overline{2}$. Comme 143 n'est pas premier ($143 = 11 \times 13$), $\mathbb{Z}/143\mathbb{Z}$ n'est pas un corps, donc on ne peut pas en déduire a priori que $y = \overline{1}$ ou $y = \overline{-1}$. On peut envisager deux méthodes :

- Une recherche systématique à l'aide d'un programme informatique. Avec le logiciel Maple, cela donne :

```
sol:=[]:
for y from 1 to 142 do
if (y^2=1) mod 143 then sol:=[op(sol),y] fi od; sol;
```

  On obtient comme résultat la liste $[1, 12, 131, 142]$.
- Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $y^2 - 1 \equiv 0 \pmod{143}$. Comme $143 = 11 \times 13$, on obtient les quatre possibilités suivantes :
  - $y - 1 \equiv 0 \pmod{143}$
  - $y + 1 \equiv 0 \pmod{143}$
  - $y - 1 \equiv 0 \pmod{11}$ et $y + 1 \equiv 0 \pmod{13}$
  - $y + 1 \equiv 0 \pmod{11}$ et $y - 1 \equiv 0 \pmod{13}$.

  Le $3^{\text{ème}}$ système est un problème chinois. Il s'écrit $y = 1 + 11j = -1 + 13k$ avec $(j,k) \in \mathbb{Z}^2$, soit $13k - 11j = 2$, soit $13(k-1) = 11(j-1)$ soit $k = 1 + 11m$ avec $m \in \mathbb{Z}$, ce qui donne $y = 12 + 143m$, c'est-à-dire $y \equiv 12 \pmod{143}$.
  Le $4^{\text{ème}}$ système revient à changer y en son opposé, d'où $y \equiv -12 \pmod{143}$. Finalement, il y a quatre éléments de $\mathbb{Z}/143\mathbb{Z}$ de carré $\overline{1}$, en l'occurrence $\overline{1}, \overline{-1}, \overline{12}, \overline{-12}$, donc l'équation proposée admet quatre solutions : $\overline{3}, \overline{1}, \overline{14}, \overline{-10}$. Modulo 143, on retrouve les solutions obtenues avec le logiciel Maple.

Exercice 1.39

Centrale MP 2005

Soit n un entier $\geqslant 3$.

1) Dénombrer les éléments inversibles de l'anneau $\mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z}$.

2) Montrer que le groupe des inversibles de $\mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z}$ n'est pas cyclique.
Indication : montrer que pour x impair et $n \geqslant 3$, on a $x^{2^{n-2}} \equiv 1 \pmod{2^{n-1}}$.

1) Il s'agit des classes des éléments premiers avec 2^n, donc des classes des éléments impairs compris entre 1 et 2^n, ce qui fait 2^{n-1} éléments.

2) Soit x impair. Démontrons par récurrence sur n que $x^{2^{n-2}} \equiv 1 \pmod{2^{n-1}}$ pour $n \geqslant 3$.
Si $n = 3$, les carrés dans $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ sont $\overline{0}, \overline{1}$, donc tout nombre impair au carré est congru à 1 modulo 4.
Supposons que $x^{2^{n-2}} \equiv 1 \pmod{2^{n-1}}$, c'est-à-dire $x^{2^{n-2}} = 1 + a2^{n-1}$, avec $a \in \mathbb{Z}$.
En élevant au carré, on obtient alors :

$$x^{2^{n-1}} = (x^{2^{n-2}})^2 = 1 + a2^n + a^2 2^{2n-2} = 1 + 2^n(a + a^2 2^{n-2}) \equiv 1 \pmod{2^n}.$$

Ceci termine la preuve par récurrence. Par suite, l'ordre de tout élément de $U(\mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z})$ divise 2^{n-2}, or $U(\mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z})$ comporte 2^{n-1} éléments donc ne peut être cyclique.

Remarque

On peut démontrer que $U(\mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z})$ est isomorphe au groupe additif $\mathbb{Z}/2^{n-2}\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Exercice 1.40

TPE MP 2006

Soit p un nombre premier $\geqslant 3$.

1) On considère l'équation (E) sur $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$: $x^2 + ax + b = 0$.
Montrer que (E) possède des racines si et seulement si $a^2 - 4b$ est un carré dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

2) On suppose que p est de la forme $3u + 1$. Montrer qu'il existe $a \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ tel que $a^u \neq \overline{1}$. En déduire que $\overline{-3}$ est un carré dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

1) En mettant sous forme canonique (on remarque que l'inverse de $\overline{-2}$ est $\overline{\dfrac{p-1}{2}}$), (E) s'écrit : $(x - a\overline{\dfrac{p-1}{2}})^2 = a^2(\overline{\dfrac{p-1}{2}})^2 - b$, autrement dit $(x - a\overline{\dfrac{p-1}{2}})^2 = \overline{4}^{-1}(a^2 - 4b)$. Comme $\overline{4}^{-1}$ est le carré de $\overline{2}^{-1}$, (E) admet des racines si et seulement si $a^2 - 4b$ est un carré dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

2) Comme p est premier, $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est un corps, donc le polynôme $X^u - \overline{1}$ admet au plus u racines dans ce corps, or $\mathrm{card}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^* = p - 1 > u$, donc il existe $a \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ qui n'est pas racine, c'est-à-dire que $a^u \neq \overline{1}$.

On a $X^3 - \overline{1} = (X^2 + X + \overline{1})(X - \overline{1})$. Appliquons la question 1) avec $a = b = \overline{1}$. Si $\overline{-3}$ n'est pas un carré, $X^3 - \overline{1}$ et $X - \overline{1}$ ont les mêmes racines dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. On obtient une contradiction car a^u est racine du premier (car $a^{3u} = a^{p-1} = \overline{1}$ par petit théorème de Fermat) mais $a^u \neq \overline{1}$.

Exercice 1.41

Centrale MP 2005

Soit n un entier > 1. On écrit le rationnel $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$ sous forme irréductible $\dfrac{a}{b}$.

Montrer que a est impair et b pair.

Notons 2^p la plus grande puissance de 2 inférieure ou égale à n ($p \geqslant 1$ car $n > 1$). On a alors $2^{p+1} > n$, donc les entiers de 1 à n distincts de 2^p sont divisibles par une puissance de 2 inférieure strictement à 2^p. En réduisant au même dénominateur, on en déduit que $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i \leqslant n,\ i \neq 2^p} \frac{1}{i}$ s'écrit sous la forme $\dfrac{u}{2^q v}$, avec u et v impairs et $q < p$, donc $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} = \frac{1}{2^p} + \frac{u}{2^q v} = \frac{v + u2^{p-q}}{2^p v}$. Comme $p - q > 0$, $v + u2^{p-q}$ est impair et $2^p v$ est pair, donc la fraction réduite a son numérateur impair et son dénominateur pair.

1.3 EXERCICES D'APPROFONDISSEMENT

Exercice 1.42

Mines-Ponts MP 2005

Déterminer, à isomorphisme près, les groupes d'ordre 6.

On discute suivant les ordres des éléments de $G \setminus \{e\}$, qui sont des diviseurs de 6 autres que 1, c'est-à-dire 2, 3 ou 6.

- S'il y a un élément d'ordre 6, alors G est cyclique, c'est-à-dire isomorphe au groupe additif $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.
- Si tout élément est d'ordre 2, on reprend le raisonnement de l'exercice 1.28 page 16 : G est abélien, puis on considère $a \neq e$ dans G, puis $b \notin \{e, a\}$ dans G. L'ensemble $\{e, a, b, ab\}$ est un sous-groupe de G d'ordre 4, ce qui apporte une contradiction car 4 ne divise pas 6.
- Sinon, il existe un élément a d'ordre 3. Soit $b \in G \setminus \{e, a, a^2\}$. Les éléments b, ab, a^2b de G sont deux à deux distincts, et distincts de e, a, a^2 (vérification un peu longue mais facile ; par exemple, si $a^2b = a$, alors en multipliant à gauche par a, $b = a^2$ ce qui est faux), donc $G = \{e, a, a^2, b, ab, a^2b\}$. En procédant par élimination, on constate de même que $b^2 \in \{e, a, a^2\}$ et $ba \in \{ab, a^2b\}$.

- Si $b^2 = a$, alors $b^3 = ab \neq e$, donc b n'est pas d'ordre 2 ou 3, donc est d'ordre 6, ce qu'on a exclu au départ.
- Si $b^2 = a^2$, $b^3 = a^2b \neq e$, on aboutit à la même contradiction.

Par conséquent, $b^2 = e$.
Si $ba = ab$, alors $(ab)^2 = a^2b^2 = a^2 \neq e$ et $(ab)^3 = a^3b^3 = b \neq e$, donc ab est d'ordre 6, ce qui est exclu. Finalement, $ba = a^2b$. La table du groupe est entièrement déterminée.

Notons qu'on retrouve la structure du groupe symétrique $\mathcal{S}_3$, en identifiant a avec le cycle $(1, 2, 3)$ et b avec la transposition $(1, 2)$. Il y a donc deux structures de groupe d'ordre 6 : $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ muni de l'addition (cyclique) et $\mathcal{S}_3$.
Complément : Le lecteur curieux pourra s'intéresser aux structures de groupe d'ordre 4 (il y en a deux : $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ et $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ pour l'addition) et d'ordre 8 (il y en a trois abéliennes : $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$ et deux non abéliennes : le groupe diédral D_4 des isométries du carré et le groupe quaternionique).

Exercice 1.43

Polytechnique MP 2005, 2006, 2007

On appelle dérangement de E une permutation de E sans point fixe. On note d_n le nombre de dérangements d'un ensemble de cardinal n. On posera $d_0 = 0$.

1) Démontrer que : $d_{n+1} = n(d_n + d_{n-1})$.

2) • Justifier, à l'aide d'une partition du groupe symétrique, que $n! = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_k$.

• En déduire que $d_n = n! \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$, puis que $d_n \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{n!}{e}$.

3) Déterminer le nombre moyen de points fixes d'une permutation de n éléments.

1) On va compter les dérangements de $[\![1\,, n+1]\!]$ en les partitionnant selon l'image de 1, notée k, qui peut prendre toutes les valeurs comprises entre 2 et $n+1$:

- Lorsque l'image de k est 1, cela revient à compter les dérangements de l'ensemble $[\![1\,, n+1]\!] \setminus \{1, k\}$, c'est-à-dire d_{n-1}.
- Lorsque l'image de k n'est pas 1, on compte alors les dérangements de $[\![2\,, n+1]\!]$ dans $[\![1\,, n+1]\!] \setminus \{k\}$ (tout se passe comme si l'élément 1 à l'arrivée était renommé k), c'est-à-dire d_n.

S'agissant d'une partition, on obtient $d_{n+1} = n(d_n + d_{n-1})$.

2) • Soit k un entier compris entre 0 et n. Il y a $\dbinom{n}{k} d_{n-k}$ permutations admettant exactement k points fixes. En faisant varier k entre 0 et n, on obtient une

partition de $\mathcal{S}_n$, ce qui donne en passant aux cardinaux que

$$n! = \sum_{0\leqslant k\leqslant n} \binom{n}{k} d_{n-k} = \sum_{0\leqslant j\leqslant n} \binom{n}{j} d_j$$

en faisant le changement d'indice $j = n-k$ (ne pas oublier que $\binom{n}{j} = \binom{n}{n-j}$).

- Pour calculer d_n, on propose deux méthodes :
  - On pose $S = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)!$.

    D'après le point précédent, $S = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n-k}{j} d_j$.

    On échange l'ordre des sommations : $S = \sum_{j=0}^{n} \left(\sum_{k=0}^{n-j} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{n-k}{j} \right) d_j$.

    Le terme entre parenthèses vaut :

    $$\frac{n!}{j!} \sum_{k=0}^{n-j} \frac{(-1)^k}{k!(n-k-j)!} = \binom{n}{j} \sum_{k=0}^{n-j} (-1)^k \binom{n-j}{k}.$$

    Par formule du binôme, $\sum_{p=0}^{m} (-1)^p \binom{m}{p} = (1-1)^m$, donc le terme entre parenthèses vaut 0 si $j \neq n$ et 1 si $j = n$. Il reste finalement $S = d_n$, ce qui est la formule demandée.
    On sait que $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} = \frac{1}{e}$, donc $d_n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{n!}{e}$.

  - Soient A et B les matrices carrées d'ordre $n+1$ égales à $\left(\binom{i}{j}\right)_{0\leqslant i,j\leqslant n}$ et $\left((-1)^{i-j}\binom{i}{j}\right)_{0\leqslant i,j\leqslant n}$, avec la convention $\binom{i}{j} = 0$ lorsque $i < j$, de sorte que A et B sont triangulaires inférieures, la numérotation des indices se faisant à partir de 0. On vérifie assez facilement que $AB = I_{n+1}$ (par exemple en remarquant que A est la matrice dans la base canonique de l'endomorphisme $P(X) \mapsto P(X+1)$ de $\mathbb{R}_n[X]$ et B celle de son inverse $P(X) \mapsto P(X-1)$). On introduit alors les vecteurs colonnes $X = {}^t(d_0, \ldots, d_n)$ et $Y = {}^t(0!, \ldots, n!)$. La formule précédente appliquée pour chaque entier i de 0 à n se traduit par $AX = Y$, d'où $X = BY$. En regardant le dernier coefficient de X, on obtient la formule demandée.

Remarque

Une troisième méthode consiste à poser, pour $|x| < 1$, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_n}{n!} x^n$ et à montrer à l'aide du produit de Cauchy que $e^x f(x) = \frac{1}{1-x}$, d'où $f(x) = \frac{e^{-x}}{1-x}$. En refaisant le produit de Cauchy des deux séries entières de somme e^{-x} et $\frac{1}{1-x}$, on obtient par unicité des coefficients d'une série entière : $\frac{d_n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.

3) Soit $a_{n,k}$ le nombre de permutations de $\mathcal{S}_n$ ayant k points fixes. On a $a_{n,k} = \binom{n}{k} d_{n-k}$, car il s'agit de choisir les k points fixes parmi n puis de compter les dérangements des $n-k$ éléments restants. Le nombre moyen de points fixes est donc $\overline{m} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} k a_{n,k} = \frac{1}{(n-1)!} \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} d_{n-k}$ en utilisant l'égalité bien connue $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$, donc $\overline{m} = \frac{1}{(n-1)!} \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} d_j$. En utilisant la question 2), on en déduit que $\overline{m} = 1$.

1.3.1 Structure des éléments inversibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Exercice 1.44

Polytechnique MP 2007

Soient G un groupe abélien, x et y deux éléments de G d'ordres respectifs p et q. Démontrer qu'il existe un élément de G d'ordre PPCM(p, q).

A partir de la décomposition en facteurs premiers, on peut écrire p et q sous la forme suivante : $p = p_1^{u_1} \cdots p_r^{u_r} p_1^{\alpha_1} \cdots p_j^{\alpha_j} p'$, $q = p_1^{u_1} \cdots p_r^{u_r} p_{j+1}^{\alpha_{j+1}} \cdots p_r^{\alpha_r} q'$, où $p_1, \dots p_r$ sont des nombres premiers distincts, $j \leqslant r$, p' et q' ne sont divisibles par aucun des p_i et sont premiers entre eux. Soit m le PPCM de p et q. Grâce à la décomposition précédente, on a $m = \underbrace{p_1^{u_1+\alpha_1} \cdots p_j^{u_j+\alpha_j} p'}_{=a} \underbrace{p_{j+1}^{u_{j+1}+\alpha_{j+1}} \cdots p_r^{u_r+\alpha_r} q'}_{=b}$, donc m s'écrit ab, avec $a \mid p$, $b \mid q$ et $a \wedge b = 1$. Or $x^{p/a}$ est d'ordre a et $y^{q/b}$ est d'ordre b, et comme a et b sont premiers entre eux, leur produit est d'ordre m d'après l'exercice 1.30 page 17.

Exercice 1.45

ENS MP 2007 ☕☕

Soit p un nombre premier différent de 2. Montrer que le groupe multiplicatif $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ est cyclique.

Indication : utiliser l'exercice précédent

On pose $G = (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$. Le groupe multiplicatif G est d'ordre $p-1$. Soit s le PPCM des ordres des éléments de G. Par théorème de Lagrange, l'ordre de chaque élément de G divise $p-1$, donc s divise $p-1$ par définition du PPCM. Tous les éléments de G sont racines du polynôme $X^s - \overline{1}$ à coefficients dans le corps $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, dont le nombre de racines est inférieur ou égal à son degré s, donc $p-1 \leqslant s$. Il en résulte que $p-1 = s$.
D'après l'exercice 1.44 page 28, à partir de deux éléments de G d'ordres a et b on peut obtenir un élément d'ordre $\mathrm{PPCM}(a,b)$, donc en partant d'un élément de G et en appliquant cette propriété successivement à tous les autres éléments de G, on en déduit l'existence d'un élément de G d'ordre s, c'est-à-dire $p-1$, ce qui prouve que G est cyclique.

Exercice 1.46

Mines-Ponts MP 2006

Soit p un nombre premier différent de 2, et n un entier naturel $\geqslant 2$.
Montrer que $(1+p)^{p^{n-1}} \equiv 1 \pmod{p^n}$ et $(1+p)^{p^{n-2}} \equiv 1 + p^{n-1} \pmod{p^n}$.
Complément ☕ : démontrer que le groupe des inversibles de $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ est cyclique.

On procède par récurrence sur n, à la manière de l'exercice 1.39 page 23. Si $n = 2$, on a par formule du binôme $(1+p)^p = 1 + p^2 + \sum_{k=2}^{p} \binom{p}{k} p^k \equiv 1 \pmod{p^2}$.

Supposons $(1+p)^{p^{n-2}} = 1 + up^{n-1}$ et $(1+p)^{p^{n-3}} = 1 + p^{n-2} + vp^{n-1}$, avec $(u,v) \in \mathbb{Z}^2$. En élevant à la puissance p, on obtient grâce à la formule du binôme $(1+p)^{p^{n-1}} = 1 + up^n + \sum_{k=2}^{p} \binom{p}{k} u^k p^{(n-1)k} \equiv 1 \pmod{p^n}$ car $k \geqslant 2$ donc $(n-1)k \geqslant n$. On a $(1+p)^{p^{n-2}} = (1 + p^{n-2} + vp^{n-1})^p$, d'où en développant $(1+p)^{p^{n-2}} = 1 + p^{n-1} + vp^n + \sum_{k=2}^{p} \binom{p}{k} p^{(n-2)k}(1+vp)^k \equiv 1 + p^{n-1} \pmod{p^n}$ car $n \geqslant 3$ et $k \geqslant 2$, donc $(n-2)k \geqslant 2n-4 \geqslant n-1$. Puisque p divise $\binom{p}{k}$, on en déduit que $\binom{p}{k} p^{(n-2)k} \equiv 0 \pmod{p^n}$.

Complément : Soit $G = U(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$ le groupe des inversibles de l'anneau $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$. Le groupe G est d'ordre $\varphi(p^n) = p^n - p^{n-1} = p^{n-1}(p-1)$. D'après la question précédente, $\overline{1+p}$ est d'ordre p^{n-1}. Si on trouve un élément d'ordre $p-1$, comme $p-1$ est premier avec p^{n-1}, leur produit sera d'ordre $p^{n-1}(p-1)$ d'après l'exercice 1.30 page 17, donc engendrera G.
D'après l'exercice 1.45 page 29, il existe un élément $\overline{a}$ générateur de $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$. La classe de a modulo p^n appartient à G, on note k son ordre. Alors $a^k \equiv 1 \pmod{p^n}$ et a fortiori $a^k \equiv 1 \pmod{p}$, or $\overline{a}$ est d'ordre $p-1$ dans $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ d'où $p-1$ divise k, donc il existe $u \in \mathbb{N}$ tel que $k = u(p-1)$. Dans ce cas, l'ordre de a^u dans G est $p-1$, qui est le plus petit entier $j \geqslant 1$ tel que $(a^u)^j \equiv \pmod{p^n}$ par minimalité de k. Le tour est joué.

Exercice 1.47

Polytechnique MP 2006 ☕☕

Déterminer, à isomorphisme près, les groupes d'ordre $2p$, où p est un nombre premier différent de 2.

- Si G a un élément d'ordre $2p$, alors il est cyclique, isomorphe à $(\mathbb{Z}/2p\mathbb{Z}, +)$.
- Sinon, d'après l'exercice 1.29 page 17, G admet un élément a d'ordre p. Soit $b \in G \setminus \mathrm{gr}(a)$. Les éléments $a^k b$, pour $k \in [\![0\,,p-1]\!]$, sont deux à deux distincts et n'appartiennent pas au groupe engendré par a, donc
$$G = \{a^i b^j \mid 0 \leqslant i \leqslant p-1,\ 0 \leqslant j \leqslant 1\}.$$
Comme $\mathrm{gr}(a) \cap \mathrm{gr}(b)$ est un sous-groupe strict de $\mathrm{gr}(b)$, son ordre divise strictement celui de $\mathrm{gr}(b)$, et l'ordre de $\mathrm{gr}(b)$ divise strictement $2p$, donc $\mathrm{gr}(a) \cap \mathrm{gr}(b) = \{e\}$. Comme $b^2 \in G$ et n'est pas de la forme $a^k b$ (car $b \notin \mathrm{gr}(a)$), il est de la forme a^k et par suite appartient à $\mathrm{gr}(a) \cap \mathrm{gr}(b)$, donc $b^2 = e$.
Montrons que $ba = a^{p-1}b$. On sait que ba s'écrit sous la forme $a^k b$, avec $1 \leqslant k \leqslant p-1$ (car $ba \notin \mathrm{gr}(a)$). L'élément ab n'est pas d'ordre 1 ou $2p$, donc est d'ordre 2 ou p. Or $(ab)^p = (ab)^{2\frac{p-1}{2}} ab = a^{(k+1)\frac{p-1}{2}+1} b$ car $(ab)^2 = abab = aa^k bb = a^{k+1}$. Cet élément est différent de e car $b \notin \mathrm{gr}(a)$, donc ab est d'ordre 2, d'où $(ab)^2 = a^{k+1} = e$, donc $k = p-1$.
- On définit le groupe diédral D_p comme étant le groupe (pour la loi $\circ$) des isométries d'un polygone régulier à p côtés. Le groupe D_p est formé de p rotations et de p symétries axiales. Soient O le centre de ce polygone, a la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{2\pi}{p}$ (a est d'ordre p), et b une symétrie axiale (d'ordre 2) laissant invariant le polygone (son axe passe par deux sommets opposés si p est pair, et un sommet et le milieu du côté opposé si p est impair). On a alors $D_p = \{a^k,\ a^k b \mid 0 \leqslant k \leqslant p-1\}$, avec $ba = a^{p-1}b$. Il en résulte que si G n'est pas cyclique, alors il est isomorphe à D_p.

En conclusion, il existe deux structures de groupe d'ordre $2p$: $(\mathbb{Z}/2p\mathbb{Z}, +)$ qui est cyclique et le groupe diédral $(D_p, \circ)$.

Exercice 1.48

ENS MP 2006 ☕

1) Décrire les sous-groupes de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ isomorphes à $((\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^p, +)$, pour n et p éléments de $\mathbb{N}^*$.

2) Pour $m \neq n$, les groupes $\mathrm{GL}_m(\mathbb{C})$ et $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ sont-ils isomorphes ?

1) Soit G un tel sous-groupe. Les éléments de G sont de carré I_n donc sont diagonalisables, et comme ils commutent, ils sont simultanément diagonalisables (cf chapitre sur la réduction des endomorphismes). Par conséquent, il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ tel que pour tout $A \in G$, $P^{-1}AP = \mathrm{diag}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ avec pour tout i, $\varepsilon_i = \pm 1$. Il y a exactement 2^n matrices diagonales contenant des coefficients 1 ou -1 sur la diagonale, or G est d'ordre 2^p, donc nécessairement $p \leqslant n$, et quitte à changer la matrice de passage P, on peut se ramener au cas où $G = \{P\,\mathrm{diag}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p, 1 \dots, 1)P^{-1} \mid \forall i \in [\![1\,,\,p]\!],\ \varepsilon_i = \pm 1\}$.

2) Si $m < n$, alors $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ admet un sous-groupe isomorphe à $((\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n, +)$ tandis que d'après la question précédente, $\mathrm{GL}_m(\mathbb{C})$ n'en admet pas. Par symétrie entre m et n, on en déduit que pour $m \neq n$, les groupes $\mathrm{GL}_m(\mathbb{C})$ et $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ ne sont pas isomorphes.

Exercice 1.49

ENS MP 2006 ☕☕

1) Caractériser les permutations σ de $\mathcal{S}_n$ telles qu'il existe $s \in \mathcal{S}_n$ telle que $s \circ s = \sigma$.

2) Caractériser les permutations σ de $\mathcal{S}_n$ telles qu'il existe une et une seule $s \in \mathcal{S}_n$ telle que $s \circ s = \sigma$.

3) Soit $k \geqslant 3$ et $\sigma \in \mathcal{S}_n$. Etudier l'équation $s^k = \sigma$ dans $\mathcal{S}_n$.

1)
- Commençons par calculer le carré du cycle $c = (i_1, i_2, \dots, i_p)$.
  Si p est impair, alors c^2 est le cycle $(i_1, i_3, \dots, i_p, i_2, \dots, i_{p-1})$ de même longueur.
  Si p est pair, alors $c^2 = (i_1, i_3, \dots, i_{p-1})\,(i_2, i_4, \dots, i_p)$, qui est produit de deux cycles disjoints de longueur $p/2$.
  Inversement, les calculs précédents montrent que tout cycle de longueur impaire est un carré, et qu'un produit de deux cycles disjoints de même longueur est un carré.
- Soit $s \in \mathcal{S}_n$ et $c_1 \dots c_p$ sa décomposition en cycles disjoints. On a alors $s^2 = c_1^2 \dots c_p^2$.
  Il en résulte que les éléments de $\mathcal{S}_n$ qui sont des carrés sont donc ceux pour lesquels leur décomposition en cycles disjoints contient, pour tout nombre pair $2k$, un nombre pair de cycles de longueur $2k$.

Illustrons tout ceci par un exemple : la permutation s dont la décomposition en cycles est $(1,2,3)(4,5,6)(7,8,9,10)(11,12,13,14)$ peut s'écrire c^2 avec $c = (1,3,2)(4,6,5)(7,11,8,12,9,13,10,14)$, ou encore c'^2 avec $c' = (1,4,2,5,3,6)(7,11,8,12,9,13,10,14)$.

2) • On remarque que si les entiers $i_1,\dots,i_p, j_1,\dots,j_p$ sont deux à deux distincts, alors $(i_1,i_2,\dots,i_p)(j_1,j_2,\dots,j_p) = c^2 = c'^2$, avec $c = (i_1,j_1,i_2,j_2,\dots,i_p,j_p)$ et $c' = (i_1,j_2,i_2,j_3,\dots,i_p,j_1)$. Par conséquent, l'équation $s \circ s = \sigma$ n'admet pas une solution unique lorsque σ contient au moins deux cycles de même longueur, ou deux points fixes (car $\mathrm{Id}^2 = (i,j)^2 = \mathrm{Id}$).

• On suppose désormais que σ est composée de cycles de longueurs impaires deux à deux distinctes. On écrit $\sigma = s \circ s$ et on décompose s en cycles disjoints. Par unicité de la décomposition, s ne contient pas de cycle de longueur paire (car s^2 contiendrait deux cycles de même longueur), donc s est produit de cycles de mêmes supports que σ. Tout revient à examiner si dans $\mathcal{S}_p$ (avec p impair), l'équation $s \circ s = (1,2,\dots,p)$, où s est un p-cycle, admet une solution unique. D'après les calculs précédents, s est forcément le cycle $(1, s(1), 2, s(1)+1, 3, s(1)+2, \dots)$. Comme s est de longueur p, ceci n'est possible que si $s(1) = \dfrac{p+1}{2}$, donc il y a bien unicité.

En conclusion, les permutations σ telles que l'équation $s \circ s = \sigma$ possède une solution unique sont les composées de cycles disjoints de longueurs impaires deux à deux distinctes ayant au plus un point fixe.

3) • Démontrons pour commencer le lemme suivant : dans $\mathcal{S}_p$, l'équation $s^k = c$ où c est le cycle $(1,2,\dots,p)$ a une solution si et seulement si $p \wedge k = 1$.
Si $p \wedge k = 1$, alors il existe d'après la formule de Bézout deux entiers u et v tels que $vk - up = 1$, auquel cas $s = c^v$ convient car $s^k = c^{vk} = c^{1+up} = c$.
Si $p \wedge k = d > 1$ et $s^k = c$, alors s est forcément un p-cycle (unicité de la décomposition), et en écrivant $p = dp'$, $k = dk'$, on a :

$$(s^k)^{p'}(1) = s^{pk'}(1) = (s^p)^{k'}(1) = 1,$$

car $s^p(1) = 1$, alors que $c^{p'}(1) \neq 1$.

• Soit s un cycle de longueur p. Si d divise p, alors s^d est un produit de d cycles de longueur $\dfrac{p}{d}$.
Si k n'est pas premier avec p, soit d leur PGCD, alors $p = dp'$, $k = dk'$ avec $p' \wedge k' = 1$, donc $s^k = (s^d)^{k'}$. Comme k' est premier avec p', s^k est produit de d cycles de longueur $\dfrac{p}{d}$.

En conclusion, l'équation $s^k = \sigma$ admet des solutions dans $\mathcal{S}_n$ si et seulement si pour toute longueur r de cycle intervenant dans la décomposition en cycles disjoints de σ, on trouve un nombre de cycles de longueur r qui soit un multiple du pgcd de k et r.

Exercice 1.50

Polytechnique MP 2005 ☕

Soient A un anneau commutatif et I un idéal strict de A (distinct de A).

1) Montrer que I est maximal pour l'inclusion parmi les idéaux stricts de A si et seulement si pour tout $a \in A \setminus I,\ I + aA = A$.
   On dit que I est principal lorsqu'il existe $a \in A$ tel que $I = aA$.
   On dit que I est premier lorsque $\forall (a, b) \in (A \setminus I)^2,\ ab \in A \setminus I$.

2) Montrer que tout idéal maximal est premier.

3) Etudier la situation dans $\mathbb{Z}$ et dans $K[X]$.

4) Montrer que si A est un anneau principal (c'est-à-dire un anneau intègre tel que tout idéal est principal), alors les idéaux premiers non nuls et maximaux de A sont les mêmes.

5) Soit $A = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $I = \{f \in A \mid f(0) = 0\}$. L'idéal I est-il principal ? premier ? maximal ?

6) Soit $J = \{f \in A \mid \forall k \in \mathbb{N},\ f^{(k)}(0) = 0\}$. Montrer que J est un idéal. Est-il principal ? premier ? maximal ?

1) Supposons I maximal. Soit $a \in A \setminus I$. On constate que $I + aA$ est un idéal de A contenant I strictement (car $a \notin I$), donc $I + aA = A$.
   Supposons que pour tout $a \in A \setminus I,\ I + aA = A$. Soit J un idéal de A contenant strictement I, et soit $a \in J \setminus I$. Par hypothèse, $I + aA = A$, or $I \subset J$ et $aA \subset J$, donc leur somme est incluse dans J, d'où $J = A$ et I est maximal. L'équivalence est démontrée.

2) Soient $(a, b) \in (A \setminus I)^2$. On suppose que $ab \in I$. D'après 1), $A = I + aA$, donc il existe $x \in I$ et $y \in A$ tels que $1 = x + ay$, d'où $b = bx + aby$. Comme I est un idéal, $aby \in I$ et $bx \in I$, donc $b \in I$, ce qui est absurde, d'où finalement $ab \notin I$, et I est un idéal premier.

3) Les idéaux de $\mathbb{Z}$ sont de la forme $n\mathbb{Z}$. Un tel idéal est maximal si et seulement si n est premier, c'est-à-dire si et seulement si l'idéal est premier. Le résultat est le même dans $K[X]$.

4) Soient I un idéal premier non nul et J un idéal tel que $I \subsetneq J$. Comme A est principal, il existe a et $b \in A$ tels que $I = aA$ et $J = bA$. Comme I est inclus dans J, il existe $c \in A$ tel que $a = bc$, et $I \neq J$, donc $b \notin I$. Puisque I est premier, $c \in I$, donc il existe $d \in A$ tel que c$= ad$, d'où $a(1 - bd) = 0$. Or A est intègre et $a \neq 0$, donc $bd = 1$, d'où $1 \in J$, ce qui implique $J = A$. On a montré que I est maximal.

5) • Un exercice classique d'analyse montre que si $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ vérifie $f(0) = 0$, alors la fonction $g : x \mapsto \dfrac{f(x)}{x}$ prolongée par continuité en 0 en posant

$g(0) = f'(0)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Ceci se traduit par l'égalité $I = \mathrm{Id}\, A$, donc I est principal.

- L'idéal I est premier car si $(fg)(0) = 0$, alors $f(0) = 0$ ou $g(0) = 0$.
- Soit J un idéal de A contenant strictement I. Soit $f_0 \in J \setminus I$. Tout élément $f \in A$ peut s'écrire sous la forme $f - \dfrac{f(0)}{f_0(0)} f_0 + \dfrac{f(0)}{f_0(0)} f_0$, avec $f - \dfrac{f(0)}{f_0(0)} f_0 \in I \subset J$, d'où $f \in J$ et $J = A$, donc I est maximal (on retrouve ainsi qu'il est premier).

6) • Par linéarité de la dérivation, J est un sous-groupe additif. Si $f \in J$ et $g \in A$, alors fg a toutes ses dérivées nulles en 0 par la formule de Leibniz, donc $fg \in J$ et J est un idéal de A.

- On suppose que $f_1 f_2 \in J$ et que $f_2 \notin J$. Soit k le plus petit entier tel que $f_2^{(k)}(0) \neq 0$. En écrivant que $(f_1 f_2)^{(k)}(0) = 0$, on obtient par formule de Leibniz $f_1(0) f_2^{(k)}(0) + \displaystyle\sum_{1 \leqslant j \leqslant k} \binom{k}{j} f_1^{(j)}(0) f_2^{(k-j)}(0) = 0$, d'où $f_1(0) = 0$, puis en écrivant que $(f_1 f_2)^{(k+1)}(0) = 0$, on obtient de même $f_1'(0) = 0$ et ainsi de suite pour finalement obtenir par récurrence que toutes les dérivées de f_1 s'annulent en 0, donc $f_1 \in J$, ce qui prouve que J est premier.
- L'idéal J n'est pas maximal car il est inclus strictement dans I. Par la même méthode qu'à la question 4), on en déduit que J n'est pas principal.

Compléments sur les polynômes

2

Ce chapitre reprend et complète celui de première année sur les polynômes. Pour cette raison, il ne suit pas la structure usuelle de l'ouvrage. Il est composé de trois parties : généralités sur les polynômes, polynômes à coefficients entiers et des compléments sur les nombres algébriques et transcendants. Pour des rappels de cours sur les polynômes, on pourra se reporter au livre de première année.

2.1 GÉNÉRALITÉS SUR LES POLYNÔMES

Exercice 2.1

Centrale PSI 2007

Soit $P = X^5 + X^4 + 2X^3 + 1$. On note $z_1, \dots, z_5$ ses racines complexes. Calculer $\displaystyle\sum_{i \neq j} z_i^2 z_j$.

On note $\sigma_1, \dots, \sigma_5$ les fonctions symétriques élémentaires de $z_1, \dots, z_5$, et S la somme à calculer. On a $\sigma_2\sigma_1 = \displaystyle\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant 5} z_i z_j \sum_{1 \leqslant k \leqslant 5} z_k = S + 3 \sum_{i<j<k} z_i z_j z_k$ car en multipliant ces deux sommes, on trouve d'une part des termes de la forme $z_u^2 z_v$ lorsque k est égal à i ou j, et d'autre part des termes de la forme $z_i z_j z_k$ avec $i < j < k$, chacun de ces termes s'obtenant trois fois, à partir des produits $(z_i z_j) \times z_k,\ (z_i z_k) \times z_j$ et $(z_j z_k) \times z_i$. On en déduit que $S = \sigma_1\sigma_2 - 3\sigma_3$, or par relations entre coefficients et racines, on a $\sigma_1 = -1,\ \sigma_2 = 2,\ \sigma_3 = 0$, d'où $S = -2$.

Exercice 2.2

Mines-Ponts PSI 2006

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ unitaire de degré n tel que $\forall k \in [\![1\,, n+1]\!],\ P(k) = \dfrac{1}{k^2}$.

Calculer $P(n+2)$.

Le polynôme $X^2P - 1$ est unitaire, de degré $n+2$ et s'annule en chaque entier de 1 à $n+1$, donc il s'écrit $(X-a)\prod_{k=1}^{n+1}(X-k)$. En identifiant les termes constants, on obtient $1 = (-1)^{n+1}(n+1)!\,a$. En prenant la valeur en $n+2$, on obtient $(n+2)^2P(n+2) - 1 = \left(n+2+\dfrac{(-1)^n}{(n+1)!}\right)\prod_{k=1}^{n+1}(n+2-k)$, d'où $P(n+2) = \dfrac{1+(-1)^n+(n+2)!}{(n+2)^2}$.

Exercice 2.3

Polytechnique MP 2007

Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que :

$$P(U) \subset U, \quad \text{où} \quad U = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}.$$

Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$, de degré n, tel que $P(U) \subset U$. On pose $Q = \sum_{k=0}^{n} \overline{a_{n-k}} X^k$. On a $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $P(e^{i\theta})\overline{P(e^{i\theta})} = 1$, d'où par changement d'indice $j = n-k$ dans la deuxième somme, $\sum_{k=0}^{n} a_k e^{ik\theta} \cdot \sum_{j=0}^{n} \overline{a_{n-j}} e^{-i(n-j)\theta} = 1$, d'où $P(e^{i\theta})Q(e^{i\theta}) = e^{in\theta}$. Par conséquent, le polynôme $PQ - X^n$ s'annule en tout point de U, donc c'est le polynôme nul. Comme P est de degré n, on en déduit que Q est constant, donc $P = a_n X^n$, avec $|a_n| = 1$. Inversement, tous les polynômes aX^n avec $|a| = 1$ et $n \in \mathbb{N}$ conviennent.

Exercice 2.4

Mines-Ponts MP 2005

Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que X^n divise $X + 1 - P^2$.

- La fonction $x \mapsto \sqrt{1+x}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,\ 1[$ donc admet un développement limité à l'ordre $n-1$ au voisinage de 0, de la forme $P_0(x) + O(x^n)$, avec $P_0 = \sum_{k=0}^{n-1} \dfrac{1/2(1/2-1)\cdots(1/2-k+1)}{k!} X^k$ qui appartient à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.
  On a $x+1-P_0(x)^2 = (\sqrt{x+1} - P_0(x))(\sqrt{x+1} + P_0(x)) = (\sqrt{x+1} + P_0(x))O(x^n)$ donc $x+1-P_0(x)^2 = O(x^n)$ quand $x \to 0$. On en déduit que 0 est racine du polynôme $X+1-P_0^2$ avec un ordre de multiplicité au moins égal à n, donc ce polynôme est divisible par X^n.

- On remarque que si P est solution, alors $P(0)^2 = 1$ et $-P$ est aussi solution. On supposera désormais, quitte à changer P en $-P$, que P est un polynôme solution tel que $P(0) = 1$. On pose $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_p X^p$, avec $a_0 = 1$. On a $X + 1 - P^2 = 1 + X - \sum_{0 \leqslant i,j \leqslant p} a_i a_j X^{i+j}$. Les coefficients de degré inférieur ou égal à $n-1$ de ce polynôme doivent être nuls, d'où $a_1 = \dfrac{1}{2}$ et $\forall k \in [\![2\,, n-1]\!],\ 2a_k + \sum_{1 \leqslant i \leqslant k-1} a_i a_{k-i} = 0$. On en déduit que $p \geqslant n-1$ et que chaque coefficient a_k, pour $k \leqslant n-1$, est déterminé de façon unique à l'aide des précédents. L'ensemble des solutions est donc $\pm P_0 + X^n \mathbb{R}[X]$, où P_0 est le développement limité à l'ordre $n-1$ au voisinage de 0 de $\sqrt{1+x}$.

Exercice 2.5

Centrale MP 2006

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, unitaire, de degré n et scindé sur $\mathbb{R}$, dont tous les coefficients valent 1,0 ou -1. On note $x_1, \ldots, x_n$ ses racines et on suppose $P(0) \neq 0$.

1) Montrer que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leqslant 3$, puis que $\displaystyle\left(\prod_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/n} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2$. En déduire que $n \leqslant 3$.

2) Trouver tous les polynômes vérifiant ces conditions.

1) Pour $n \geqslant 2$, on a $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2$, or pour tout i, $\sigma_i \in \{-1, 0, 1\}$, donc $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leqslant 1{+}2 = 3$. Par concavité du logarithme, on a $\ln\left(\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) \geqslant \displaystyle\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln x_i^2$, d'où $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \geqslant \left(\prod_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/n}$. Or $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} x_i = (-1)^n P(0) \in \{-1, 1\}$ car $P(0) \neq 0$, donc $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \geqslant n$, d'où finalement $n \leqslant 3$.

2) On teste tous les polynômes possibles en fonction de leur degré :

- Pour $n = 1$, on obtient $X - 1$ et $X + 1$.
- Pour $n = 2$, on obtient $X^2 - 1$, $X^2 - X - 1$, et $X^2 + X - 1$.
- Pour $n = 3$, on a $\sigma_1^2 - 2\sigma_2 = 3$, d'où $\sigma_1 = \pm 1$ et $\sigma_2 = -1$, donc $P = X^3{+}X^2{-}X{-}1 = (X{+}1)^2(X{-}1)$ ou $P = X^3{-}X^2{-}X{+}1 = (X{-}1)^2(X{+}1)$.

> **Remarque**
> La commande Maple `fsolve(P(x),x,complex)` permet de connaître une approximation des racines de P.

Exercice 2.6

Polytechnique-ENS PSI 2005

On considère $P = \sum_{k=0}^{n} b_k X^k$ avec $0 < b_0 < \ldots < b_n$ et $Q = (X-1)P$.
Montrer que si z est une racine complexe de P, alors $Q(|z|) \leqslant 0$, et en déduire que $|z| \leqslant 1$.

Après développement, on a $Q = b_n X^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}(b_{k-1} - b_k)X^k - b_0$.

Si $P(z) = 0$, alors $Q(z) = 0$, donc $b_n z^{n+1} = \sum_{k=1}^{n}(b_k - b_{k-1})z^k + b_0$, d'où par inégalité triangulaire $b_n|z|^{n+1} \leqslant \sum_{k=1}^{n}(b_k - b_{k-1})|z|^k + b_0$ car les coefficients mis en jeu sont positifs. On en déduit l'inégalité $Q(|z|) \leqslant 0$.
Comme $b_0 > 0$, on a $z \neq 0$, d'où $P(|z|) > 0$ car les coefficients de P sont strictement positifs. Comme on a $Q(|z|) \leqslant 0$, on en déduit que $|z| - 1 \leqslant 0$.

Exercice 2.7

Centrale MP 2006. Décomposition de P'/P

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant.

1) Ecrire la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle $\dfrac{P'}{P}$.
2) Montrer que les racines de P' sont situées dans l'enveloppe convexe des racines de P (c'est-à-dire en sont barycentres à coefficients positifs).
3) En déduire que si P est scindé sur $\mathbb{R}$, P' également, puis que si toute racine de P est de partie réelle positive, alors il en va de même pour P'.

1) Comme P est scindé dans $\mathbb{C}[X]$, on peut écrire $P = \lambda \prod_{j=1}^{m}(X - a_j)^{r_j}$, où les a_j, deux à deux distincts, sont les racines de P, et les r_j, appartenant à $\mathbb{N}^*$, leurs ordres de multiplicité. On a alors :

$$P' = \lambda \sum_{j=1}^{m} r_j (X - a_j)^{r_j - 1} \prod_{k \neq j}(X - a_k)^{r_k}, \quad \text{d'où} \quad \frac{P'}{P} = \sum_{j=1}^{m} \frac{r_j}{X - a_j}.$$

2) Soit z une racine de P' qui n'est pas racine de P. On applique la relation précédente en z et on la conjugue, ce qui donne $0 = \sum_{j=1}^{m} \frac{r_j}{\overline{z} - \overline{a_j}} = \sum_{j=1}^{m} r_j \frac{z - a_j}{|z - a_j|^2}$, ce qui signifie que z est barycentre des points a_j affectés des coefficients (positifs) $\frac{r_j}{|z - a_j|^2}$. Si z est racine multiple de P, le résultat est évident.

3) Comme la droite réelle est convexe, tout barycentre à coefficients positifs de points de cette droite lui appartient également, donc toutes les racines de P' sont réelles (et sont comprises entre la plus petite et la plus grande racine de P). A noter qu'on peut retrouver ce résultat en appliquant le théorème de Rolle à P et en comptant le nombre de racines obtenues.
Le raisonnement est identique pour le demi-plan $x > 0$ qui est convexe.

Remarque
Cette propriété très importante sera souvent utilisée dans la suite.

Exercice 2.8

Centrale MP 2006 et 2007, Polytechnique MP 2007

Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que P' divise P.

Soit P de degré n tel que P' divise P. Dans ce cas, P' est de degré $n - 1$ et son coefficient dominant est égal à n fois celui de P, donc il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $nP = (X - a)P'$, c'est-à-dire $\frac{P'}{P} = \frac{n}{X - a}$. L'expression de la décomposition en éléments simples de $\frac{P'}{P}$ dans $\mathbb{C}[X]$ (voir exercice 2.7 page 38) et son unicité entraînent que a est la seule racine de P dans $\mathbb{C}$, donc $P = \lambda(X - a)^n$. Inversement, de tels polynômes conviennent.

Exercice 2.9

Polytechnique MP 2006, Centrale MP 2006

1) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé sur $\mathbb{R}$. Montrer que P' est scindé sur $\mathbb{R}$ et que toute racine multiple de P' est racine de P.

2) Si $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, montrer que le polynôme $Q = X^{10} + aX^9 + bX^8 + cX^7 + X + 1$ n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$.

1) On va démontrer sans utiliser l'exercice 2.7 page 38 que si P est scindé dans $\mathbb{R}$, alors P' également, en faisant appel au théorème de Rolle.
Soient $a_1, \ldots, a_p$ les racines de P classées en ordre croissant et $r_1, \ldots, r_p$ leurs ordres de multiplicité. Soit n le degré de P, on a $n = \sum_{i=1}^{p} r_i$. Si $r_i \geqslant 2$, alors a_i

est racine de P' d'ordre $r_i - 1$. Le théorème de Rolle appliqué à P entre a_i et a_{i+1} montre qu'il existe une racine b_i de P' dans l'intervalle $]a_i, a_{i+1}[$. On obtient ainsi pour P' au moins $d = p - 1 + \sum_{i=1}^{p}(r_i - 1)$ racines comptées avec leur ordre de multiplicité, or $d = p - 1 + \sum_{i=1}^{p} r_i - p = n - 1$ qui est le degré de P', donc on obtient ainsi toutes les racines de P'. Par conséquent, P' est scindé sur $\mathbb{R}$ et les b_i sont racines simples de P', donc les seules racines de P' susceptibles d'être multiples sont les a_i.

2) On raisonne par l'absurde en supposant Q scindé sur $\mathbb{R}$. D'après la question précédente, Q' et Q'' sont scindés sur $\mathbb{R}$.
Or $Q' = 10X^9+9aX^8+8bX^7+7cX^6+1$ et $Q'' = 90X^8+72aX^7+56bX^6+42cX^5$, donc 0 est racine multiple de Q'' sans être racine de Q', ce que contredit la question précédente appliquée au polynôme Q'.

Exercice 2.10

Mines-Ponts PC 2005, Centrale MP 2006

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré n ayant n racines réelles distinctes, et $Q = P^2 + 1$. Montrer que Q a $2n$ racines distinctes dans $\mathbb{C}$.

Il s'agit d'une application directe du fait que si P est scindé dans $\mathbb{R}$, P' l'est également (voir exercice 2.7 page 38). En effet, $Q' = 2P\,P'$, donc si z est une racine multiple de Q, alors $P(z)^2 = -1 \neq 0$ et $Q'(z) = 0$, d'où $P'(z) = 0$, donc z est réel. Mais dans ce cas, $P(z)$ est réel et son carré ne peut être égal à -1. En définitive, toutes les racines de Q sont simples, et comme il est de degré $2n$, elles sont au nombre de $2n$.

Exercice 2.11

Polytechnique MP 2006

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $P = \prod_{i=0}^{n-1}(X - i)$. Soit c un réel, quel est l'ordre de multiplicité maximal d'une racine de $P - c$?

Par théorème de Rolle, P' possède une racine, notée a_k, dans chaque intervalle $]k-1, k[$ pour $1 \leqslant k \leqslant n-1$, et comme $\deg P' = n - 1$, ce sont les seules racines de P' dans $\mathbb{C}$ et elles sont simples. Si x est racine multiple de $P - c$, alors $P(x) = c$ et $P'(x) = 0$, donc x est l'un des réels a_k.
Si $c \neq P(a_k)$ pour tout k, alors les racines de $P - c$ sont simples.
Si $x = a_k$ (on a alors $c = P(a_k)$), $P''(a_k) \neq 0$ car P' est à racines simples, donc a_k est racine exactement double de $P - P(a_k)$.

Exercice 2.12

Polytechnique MP 2007

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé à racines simples dans $\mathbb{R}[X]$. Montrer que P ne peut avoir deux coefficients consécutifs nuls.

Notons $P = \sum_{j=0}^{n} a_j X^j$ avec $a_n \neq 0$. On raisonne par l'absurde en supposant qu'il existe $k \leqslant n-1$ tel que $a_k = a_{k+1} = 0$. On a alors $n \geqslant 3$. En appliquant le théorème de Rolle à P dans chaque intervalle formé de deux racines consécutives de P, on obtient ainsi $n-1$ racines distinctes de P' qui est de degré $n-1$, donc P' est également simplement scindé dans $\mathbb{R}[X]$. On en déduit par récurrence que $P^{(k)}$ est simplement scindé dans $\mathbb{R}[X]$. Or $P^{(k)} = \sum_{j=k+2}^{n} j(j-1)\cdots(j-k+1)a_j X^{j-k}$ qui est divisible par X^2, donc 0 est racine double de $P^{(k)}$, ce qui entraîne une contradiction.

Exercice 2.13

Polytechnique MP 2006, PC 2007 ☕

Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ un polynôme de degré $n \geqslant 2$ et scindé sur $\mathbb{R}$. Montrer que $\forall k \in [\![1\,, n-1]\!],\ a_k^2 \geqslant a_{k-1}\, a_{k+1}$.

D'après l'exercice 2.7 page 38, P' est scindé dans $\mathbb{R}[X]$, et par récurrence $P^{(k-1)}$ également. On écrit alors $P^{(k-1)}$ sous la forme $\lambda \prod_{j=1}^{r}(X-b_j)$ (avec $b_j \in \mathbb{R}$ pour tout j), d'où

$$\frac{P^{(k)}}{P^{(k-1)}} = \sum_{j=1}^{r} \frac{1}{X-b_j}.$$

On dérive :

$$\frac{P^{(k+1)}P^{(k-1)} - \left(P^{(k)}\right)^2}{\left(P^{(k-1)}\right)^2} = -\sum_{j=1}^{r} \frac{1}{(X-b_j)^2}.$$

En multipliant par $(P^{(k-1)})^2$, on en déduit que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P^{(k+1)}(x)P^{(k-1)}(x) - P^{(k)}(x)^2 \leqslant 0.$$

En appliquant cette relation en 0, on obtient $(k+1)!\, a_{k+1}(k-1)!\, a_{k-1} - k!^2\, a_k^2 \leqslant 0$, d'où $a_{k+1}a_{k-1} \leqslant \dfrac{k}{k+1}a_k^2$. Or $k \leqslant k+1$ et $a_k^2 \geqslant 0$, d'où finalement $a_{k+1}a_{k-1} \leqslant a_k^2$.

Exercice 2.14

Centrale MP 2007

Soit $(P, Q) \in \mathbb{Q}[X]^2$. Démontrer l'équivalence entre les assertions suivantes :

- Les polynômes P et Q sont premiers entre eux dans $\mathbb{C}[X]$.
- Les polynômes P et Q sont premiers entre eux dans $\mathbb{Q}[X]$.

- Si P et Q sont premiers entre eux dans $\mathbb{C}[X]$, alors ils ne peuvent pas avoir de diviseur commun dans $\mathbb{Q}[X]$ non constant (car ce serait également un diviseur dans $\mathbb{C}[X]$) donc ils sont premiers entre eux dans $\mathbb{Q}[X]$.
- Si P et Q sont premiers entre eux dans $\mathbb{Q}[X]$, alors il existe grâce au théorème de Bézout deux polynômes U et V dans $\mathbb{Q}[X]$ tels que $UP + VQ = 1$. Ceci constitue également une relation de Bézout dans $\mathbb{C}[X]$, donc P et Q sont premiers entre eux dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 2.15

Polytechnique MP 2005, 2006

Montrer que tout polynôme irréductible de $\mathbb{Q}[X]$ n'a que des racines simples dans $\mathbb{C}$.

On applique le résultat de l'exercice précédent aux polynômes P et P', qui appartiennent à $\mathbb{Q}[X]$. Comme P est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$ et que P' est de degré inférieur à celui de P, leur PGCD dans $\mathbb{Q}[X]$ est un diviseur strict de P, donc P et P' sont premiers entre eux dans $\mathbb{Q}[X]$. En conséquence, ils sont également premiers entre eux dans $\mathbb{C}[X]$, ce qui signifie exactement que P et P' n'ont pas de racines communes, c'est-à-dire que les racines de P dans $\mathbb{C}$ sont simples.

Exercice 2.16

Polytechnique MP 2005

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $x_1, \ldots, x_n$ dans $\mathbb{C}$ deux à deux distincts, $m_1, \ldots, m_n$ dans $\mathbb{N}^*$ tels que le polynôme $P = \displaystyle\prod_{i=1}^{n} (X - x_i)^{m_i}$ soit dans $\mathbb{Q}[X]$. Montrer que $Q = \displaystyle\prod_{i=1}^{n} (X - x_i)$ est dans $\mathbb{Q}[X]$.

On décompose P en facteurs irréductibles dans $\mathbb{Q}[X]$, sous la forme $Q_1^{\alpha_1} \cdots Q_r^{\alpha_r}$, où les polynômes Q_i sont irréductibles, deux à deux distincts, et les $\alpha_i \in \mathbb{N}^*$. D'après l'exercice 2.15 page 42, chaque polynôme Q_i est à racines simples dans $\mathbb{C}$. D'autre part pour $i \neq j$, les polynômes Q_i et Q_j appartiennent à $\mathbb{Q}[X]$ et sont premiers entre eux dans $\mathbb{Q}[X]$, donc par théorème de Bézout, il existe U et V dans $\mathbb{Q}[X]$ tels que $UQ_i + VQ_j = 1$. Comme U et V appartiennent à $\mathbb{C}[X]$, on en déduit que Q_i et Q_j sont également premiers entre eux dans $\mathbb{C}[X]$. Par conséquent, ils n'ont pas de racines communes dans $\mathbb{C}$. Par unicité de la décomposition en facteurs irréductibles, on en déduit que $Q = Q_1 \cdots Q_r$, donc $Q \in \mathbb{Q}[X]$.

2.2 POLYNÔMES À COEFFICIENTS ENTIERS

Exercice 2.17

Polytechnique MP 2005

1) Le polynôme $X^4 + 4$ est-il irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$?

2) Quels sont les entiers naturels n tels que $n^4 + 4$ soit premier ?

1) On a

$$X^4+4 = X^4+4X^2+4-4X^2 = (X^2+2)^2-4X^2 = (X^2+2X+2)(X^2-2X+2).$$

Les deux trinômes obtenus sont à discriminant strictement négatif, donc sont irréductibles dans $\mathbb{Q}[X]$.

2) Si $n \in \mathbb{N}$, $n^4+4 = (n^2+2n+2)(n^2-2n+2)$. Le premier facteur est un entier $\geqslant 2$, donc si n^4+4 est premier, nécessairement $n^2-2n+2 = 1$, ce qui impose $n = 1$, auquel cas $n^4+4 = 5$ est bien premier. La réponse est donc $n = 1$.

Exercice 2.18

Centrale MP 2006 et 2007

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré d tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ P(n) \in \mathbb{Z}$.

1) Montrer que $P \in \mathbb{Q}[X]$.

2) Montrer que $d!P \in \mathbb{Z}[X]$.

Indication de la rédaction : introduire les polynômes de Hilbert (H_k) définis par $H_0 = 1$ et pour $k \geqslant 1$, $H_k = \dfrac{X(X-1)\cdots(X-k+1)}{k!}$.

Nous allons traiter les deux questions en même temps. Chaque polynôme H_k est de degré k, donc la famille $(H_k)_{0\leqslant k\leqslant d}$, échelonnée en degrés, est une base de $\mathbb{C}_d[X]$, donc il existe $(b_k)_{0\leqslant k\leqslant d} \in \mathbb{C}^{d+1}$ tel que $P = \displaystyle\sum_{0\leqslant k\leqslant d} b_k H_k$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Si $n < k$, alors $H_k(n) = 0$ et si $n \geqslant k$, alors $H_k(n) = \dbinom{n}{k}$, en particulier, $H_k(k) = 1$.

Le système linéaire $\begin{cases} b_0 H_0(0) + b_1 H_1(0) + \cdots + b_d H_d(0) = P(0) \\ b_0 H_0(1) + b_1 H_1(1) + \cdots + b_d H_d(1) = P(1) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ b_0 H_0(d) + b_1 H_1(d) + \cdots + b_d H_d(d) = P(d) \end{cases}$ dont les inconnues sont $b_0, \dots, b_d$ est triangulaire inférieur à coefficients dans $\mathbb{Z}$ et ses coefficients diagonaux valent 1, donc son déterminant est égal à 1. Il résulte alors des formules de Cramer que les inconnues b_k appartiennent à $\mathbb{Z}$. Comme les polynômes H_k sont à coefficients dans $\mathbb{Q}$, cela prouve que $P \in \mathbb{Q}[X]$, et comme les entiers $k!$ divisent $d!$ lorsque $k \leqslant d$, le polynôme $d!\,P$ appartient à $\mathbb{Z}[X]$.

Exercice 2.19

Polytechnique MP 2006

Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$. On suppose que P s'écrit comme produit de deux polynômes non constants de $\mathbb{Q}[X]$. Montrer que P s'écrit comme produit de deux polynômes non constants de $\mathbb{Z}[X]$.

Indications de la rédaction : Soit P un polynôme à coefficients dans $\mathbb{Z}$, on note $c(P)$– appelé contenu de P–le PGCD de ses coefficients. Démontrer que pour P et $Q \in \mathbb{Z}[X]$, on a :

– Si $c(P) = 1$ et $c(Q) = 1$, alors $c(PQ) = 1$.

– $c(PQ) = c(P)c(Q)$.

- Soient P et Q appartenant à $\mathbb{Z}[X]$.
  - On suppose que $c(P) = c(Q) = 1$ et que $c(PQ) \neq 1$. Soit p un nombre premier divisant tous les coefficients de PQ. Si $A = \sum a_k X^k$, on note $\overline{A}$ le polynôme $\sum \overline{a}_k X^k$ à coefficients dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[X]$. On vérifie facilement que $\overline{PQ} = \overline{P}\,\overline{Q}$. Par hypothèse, $\overline{PQ} = 0$, or $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est un corps, donc $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[X]$ est intègre, d'où $\overline{P} = 0$ ou $\overline{Q} = 0$, donc p divise tous les coefficients de P ou tous ceux de Q, ce qui est absurde car $c(P) = 1$ et $c(Q) = 1$.
  - On écrit $P = c(P)P_1$ et $Q = c(Q)Q_1$ avec $c(P_1) = c(Q_1) = 1$, donc $c(P_1 Q_1) = 1$, or $PQ = c(P)c(Q)P_1 Q_1$, d'où $c(PQ) = c(P)c(Q)$.
- Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ s'écrivant $P = P_1 P_2$ avec P_1 et $P_2 \in \mathbb{Q}[X]$. Notons μ_1 et μ_2 les PPCM des coefficients de P_1 et P_2, de sorte que $\mu_1 P_1$ et $\mu_2 P_2$ appartiennent à $\mathbb{Z}[X]$. Comme $\mu_1\mu_2 P = \mu_1 P_1\, \mu_2 P_2$, on a $\mu_1\mu_2 c(P) = c(\mu_1 P_1)\, c(\mu_2 P_2)$ (*). En factorisant les coefficients de $\mu_1 P_1$ par leur PGCD, on peut écrire $\mu_1 P_1 = c(\mu_1 P_1) A_1$ et de même $\mu_2 P_2 = c(\mu_2 P_2) A_2$, où A_1 et $A_2 \in \mathbb{Z}[X]$ et $c(A_1) = c(A_2) = 1$. Par suite, $\mu_1\mu_2 P = c(\mu_1 P_1)\, c(\mu_2 P_2)\, A_1 A_2$, d'où en utilisant la relation (*), $P = c(P) A_1 A_2$, ce qui montre que P est produit de deux polynômes non constants de $\mathbb{Z}[X]$.

Exercice 2.20

Polytechnique MP 2005 ☕

Etudier l'irréductibilité dans $\mathbb{Z}[X]$ puis dans $\mathbb{Q}[X]$ de $X^4-10X^3+21X^2-8X+11$.

Le polynôme P étudié est à coefficients dans $\mathbb{Z}$ et unitaire, donc par l'exercice 2.19 page 44, l'irréductibilité dans $\mathbb{Q}[X]$ se ramène à celle dans $\mathbb{Z}[X]$.
Supposons par l'absurde que P soit le produit de deux polynômes A et B à coefficients entiers. Distinguons deux cas selon le degré de A.

- Si A est de degré 1, P aurait une racine a dans $\mathbb{Z}$, d'où $-11 = a(a^3-10a^2+21a-8)$, et a diviserait 11. On vérifie alors facilement que $1, -1, 11$ et -11 ne sont pas racines.
- Si A est de degré 2, on aurait $P = (X^2 + aX + b)(X^2 + cX + d)$ avec $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. En regardant les termes constants, on obtient $bd = 11$, donc par symétrie, on peut supposer $b = 11$ ou $b = -11$.
  - Si $b = 11$, alors $P = (X^2 + aX + 11)(X^2 + cX + 1)$. En regardant les termes de degré 2 et 3, on trouve $a+c = -10$ et $ac = 9$, d'où $a = -1, c = -9$ ou $a = -9$, $c = -1$. Dans les deux cas, le produit ne redonne pas le polynôme initial.
  - Si $b = -11$, alors $P = (X^2 + aX - 11)(X^2 + cX - 1)$. On obtient comme avant $a + c = -10$ et $ac = 33$, dont les solutions ne sont pas entières.

Tous les cas de figure ont été envisagés, donc P est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$, et dans $\mathbb{Q}[X]$.

Exercice 2.21

Polytechnique MP 2007

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\Phi_n = \displaystyle\prod_{1\leqslant k\leqslant n,\, k\wedge n=1} \left(X - e^{2ik\pi/n}\right)$, appelé polynôme cyclotomique d'indice n.

1) Montrer que $\displaystyle\prod_{d|n} \Phi_d = X^n - 1$.

2) Montrer que Φ_n appartient à $\mathbb{Z}[X]$.
Indication de la rédaction : justifier l'existence et l'unicité de la division euclidienne d'un polynôme de $\mathbb{Z}[X]$ par un polynôme unitaire de $\mathbb{Z}[X]$.

1) Soient d et d' deux diviseurs de n dans $\mathbb{N}$. On suppose que les polynômes Φ_d et $\Phi_{d'}$ ont une racine commune, c'est-à-dire qu'il existe $k \in [\![1\,, d]\!]$ premier avec d, et $k' \in [\![1\,, d']\!]$ premier avec d', tels que $e^{2ik\pi/d} = e^{2ik'\pi/d'}$. En élevant à la puissance d, on obtient $e^{2idk'\pi/d'} = 1$ donc d' divise dk', puis d' divise d par théorème de Gauss. Comme d et d' jouent des rôles symétriques, on a aussi d

divise d', donc $d = d'$. Il en résulte que toutes les racines du polynôme $\prod_{d|n} \Phi_d$ sont simples, et sont racines de $X^n - 1$.

Soit $k \in [\![1\,,n]\!]$, on note δ le PGCD de k et n, donc on peut écrire $k = j\delta$ et $n = d\delta$ avec j et d premiers entre eux, donc $e^{2ik\pi/n} = e^{2ij\pi/d}$, qui est racine de Φ_d. Par conséquent, les racines de $X^n - 1$, qui sont simples, sont aussi racines de $\prod_{d|n} \Phi_d$. Comme ces deux polynômes sont unitaires, on en déduit qu'ils sont égaux.

2) • Soient $A \in \mathbb{Z}[X]$ et $B \in \mathbb{Z}[X]$ unitaire. Démontrons qu'il existe un couple unique $(Q, R) \in \mathbb{Z}[X]$ tel que $A = BQ + R$ avec $R = 0$ ou $\deg R < \deg B$. On procède comme pour la division euclidienne dans $K[X]$, où K est un corps.

   ◦ L'existence se montre par récurrence sur le degré de A : soit $n = \deg A$ et $p = \deg B$. Si $n < p$, alors on prend $Q = 0$ et $R = A$. Si $n \geqslant p$, alors on applique l'hypothèse de récurrence à $A_1 = A - X^{n-p}$ et B.

   ◦ La preuve de l'unicité est la même que dans $K[X]$: si $A = BQ+R = BQ_1+R_1$, alors $B(Q - Q_1) = R_1 - R$, donc en comparant les degrés, on en déduit que $R - R_1 = 0$ puis $Q - Q_1 = 0$.

• Montrons par récurrence sur n que $\Phi_n \in \mathbb{Z}[X]$.
On a $\Phi_1 = X - 1,\ \Phi_2 = X + 1,\ \Phi_3 = X^2 + X + 1$ qui appartiennent à $\mathbb{Z}[X]$.
Supposons que $\Phi_k \in \mathbb{Z}[X]$ pour tout $k \leqslant n - 1$. Le polynôme $P = \prod_{d|n,\, d<n} \Phi_d$ appartient alors à $\mathbb{Z}[X]$. Or $X^n - 1 = \Phi_n P$, donc par unicité de la division euclidienne dans $\mathbb{Z}[X]$, on en déduit que Φ_n est le quotient de la division euclidienne de $X^n - 1$ par P, donc appartient à $\mathbb{Z}[X]$, ce qui termine la récurrence.

Remarque
On peut compléter l'exercice en montrant que Φ_n est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$.

Exercice 2.22

Centrale MP 2005 ☕☕

Montrer que $X^n - 2$ est un polynôme irréductible de $\mathbb{Q}[X]$.

En utilisant l'exercice 2.19 page 44, il suffit de montrer que $X^n - 2$ est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$. Supposons par l'absurde qu'il s'écrive AB, avec A et $B \in \mathbb{Z}[X]$. Quitte à changer A en $-A$, on peut écrire $A = X^p + \sum_{k=0}^{p-1} a_k X^k$ et $B = X^{n-p} + \sum_{k=0}^{n-p-1} b_k X^k$.
Supposons que tous les a_k soient pairs. Tous les b_k ne le sont pas sans quoi le terme constant, égal à -2, serait multiple de 4. On note r le plus grand indice tel que b_r

soit impair. Le coefficient de X^{p+r} est égal à $b_r + \sum_{i+j=p+r, i \leqslant p-1} a_i b_j$. Ce coefficient vaut 0 ou -2 donc est pair. D'autre part, la somme mise en jeu est paire car les a_i le sont, et comme b_r est impair, on aboutit à une contradiction. On en déduit que les a_k, et par symétrie les b_k, ne sont pas tous pairs. On désigne par r (resp. s) le plus grand indice tel que a_r (resp. b_s) soit impair. Le coefficient de X^{r+s} doit être pair et vaut $\sum_{i+j=r+s} a_i b_j$. Si $i < r$, alors $j > s$ donc b_j est pair. Si $i > r$, alors a_i est pair, donc tous les termes de la somme sont pairs sauf $a_r b_s$ qui est impair, ce qui apporte la contradiction recherchée.

Remarque : une présentation plus élégante consisterait à réduire l'égalité $X^n - 2 = AB$ dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[X]$, ce qui donnerait par unicité de la décomposition $\overline{A} = X^p$ et $\overline{B} = X^{n-p}$, donc les a_k et les b_k sont pairs et le terme constant serait multiple de 4. Cela montre qu'à la différence de $\mathbb{C}[X]$ ou $\mathbb{R}[X]$, il existe dans $\mathbb{Q}[X]$ des polynômes irréductibles de tout degré.

2.3 COMPLÉMENTS : NOMBRES ALGÉBRIQUES ET TRANSCENDANTS, EXTENSIONS DE CORPS

Ce qu'il faut savoir

Soit $\alpha \in \mathbb{C}$, on pose $\mathbb{Q}[\alpha] = \{P(\alpha) \mid P \in \mathbb{Q}[X]\}$.

- L'ensemble $\mathbb{Q}[\alpha]$ est la plus petite $\mathbb{Q}$-algèbre de $\mathbb{C}$ contenant α.
- Un nombre complexe α est dit algébrique (sur $\mathbb{Q}$) lorsqu'il est racine d'un polynôme non nul à coefficients dans $\mathbb{Q}$. Si tel est le cas, l'ensemble $\mathcal{I}_\alpha = \{P \in \mathbb{Q}[X] \mid P(\alpha) = 0\}$ est un idéal de $\mathbb{Q}[X]$ non réduit à $\{0\}$, donc il existe un unique polynôme unitaire M_α tel que $\mathcal{I}_\alpha = M_\alpha \mathbb{Q}[X]$. Le polynôme M_α est appelé polynôme minimal de α.
- Si α est algébrique, alors $\mathbb{Q}[\alpha]$ est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel de dimension $\deg M_\alpha$, le polynôme M_α est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$ et $\mathbb{Q}[\alpha]$ est un corps.
  preuve :
  - Soit $d = \deg M_\alpha$. Par minimalité de M_α, la famille $(\alpha^k)_{0 \leqslant k \leqslant d-1}$ est libre dans $\mathbb{Q}[\alpha]$. Si $P \in \mathbb{Q}[X]$, par division euclidienne par M_α, il existe Q et $R \in \mathbb{Q}[X]$ tels que $P = M_\alpha Q + R$, avec $\deg R < d$. Par suite, $P(\alpha) = R(\alpha) \in \mathrm{Vect}(\alpha^k)_{0 \leqslant k \leqslant d-1}$. La famille $(\alpha^k)_{0 \leqslant k \leqslant d-1}$, de cardinal d, est donc une base de $\mathbb{Q}[\alpha]$.
  - Supposons que $M_\alpha = PQ$, avec P et $Q \in \mathbb{Q}[X]$, non constants. En prenant la valeur en α, on a $0 = P(\alpha)Q(\alpha)$, donc l'un des polynômes P ou Q appartient à $\mathcal{I}_\alpha$ et serait multiple de M_α, ce qui est impossible pour cause de degré, donc M_α est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.
  - Soit $P(\alpha)$ un élément non nul de $\mathbb{Q}[\alpha]$. Le polynôme P n'est pas multiple de M_α, lequel est irréductible, donc est premier avec M_α. Par théorème de

Bézout, il existe U et $V \in \mathbb{Q}[X]$ tels que $UP + VM_\alpha = 1$. En appliquant cette identité en α, on obtient $U(\alpha)P(\alpha) = 1$, donc $P(\alpha)$ est inversible dans $\mathbb{Q}[\alpha]$. Ceci montre que $\mathbb{Q}[\alpha]$ est un corps.

Exercice 2.23

Mines-Ponts MP 2005

1) Montrer que $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \mid (a, b) \in \mathbb{Q}^2\}$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$.

2) Les corps $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ et $\mathbb{R}$ sont-ils isomorphes ?

1) On remarque que $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ contient $\mathbb{Q}$, est stable par addition, multiplication et passage à l'inverse, car $(a + b\sqrt{2})^{-1} = \dfrac{a - b\sqrt{2}}{a^2 - 2b^2}$, le dénominateur ne s'annulant pas car $\sqrt{2}$ est irrationnel, donc est un sous-corps de $\mathbb{C}$.

2) Soit f un isomorphisme de corps de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$. On a :

$$f(\sqrt{3})^2 = f(\sqrt{3}^2) = f(3) = 3,$$

donc $f(\sqrt{3}) = \pm\sqrt{3}$ et $f(\sqrt{3}) \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$, donc $\exists (a, b) \in \mathbb{Q}^2,\ a + b\sqrt{2} = \sqrt{3}$. En élevant au carré, il vient $2ab\sqrt{2} = 3 - a^2 - 2b^2$, or $\sqrt{2}$ est irrationnel, donc $a = 0$ ou $b = 0$, ce qui est impossible car $\sqrt{\dfrac{3}{2}}$ et $\sqrt{3}$ sont irrationnels, donc $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ et $\mathbb{R}$ ne sont pas isomorphes.

Exercice 2.24

Centrale MP 2007

Soit $P = X^3 - X - 1$. Montrer que P est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$ et qu'il a une unique racine réelle a. Soit $V = \mathrm{Vect}_{\mathbb{Q}}\{a^k \mid k \in \mathbb{N}\}$. Donner une base et la dimension de V.

Soit a/b est une racine rationnelle de P, avec a et b entiers premiers entre eux. On a alors $a^3 - ab^2 - b^3 = 0$, donc b divise a et a divise b, or 1 et -1 ne sont pas racines de P, donc P n'a aucune racine dans $\mathbb{Q}$, donc aucun diviseur de degré 1 dans $\mathbb{Q}[X]$, et comme il est de degré 3, il est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.
En étudiant ses variations, on voit qu'il possède une unique racine réelle a, comprise entre 0 et 1.
On en déduit que a est algébrique et que P est le polynôme minimal de a, donc V est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel de dimension 3, et $(1, a, a^2)$ est une base de V.

Exercice 2.25

Mines-Ponts MP 2006 ☕

Soit $K = \mathbb{Q} + \mathbb{Q}\sqrt{2} + \mathbb{Q}\sqrt{3} + \mathbb{Q}\sqrt{6}$.

1) Montrer que la famille $(1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6})$ est une base du $\mathbb{Q}$-espace vectoriel K.

2) Montrer que K est un sous-corps de $\mathbb{R}$.

1) Montrons que la famille est libre. Soient $(a, b, c, d) \in \mathbb{Q}^4$ tels que

$$a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6} = 0.$$

Si $(c, d) \neq (0, 0)$, alors $c + d\sqrt{2} \neq 0$ par irrationnalité de $\sqrt{2}$, donc $\sqrt{3} = -\dfrac{a + b\sqrt{2}}{c + d\sqrt{2}}$. Or $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ est un corps, donc $\sqrt{3} = u + v\sqrt{2}$, avec u et $v \in \mathbb{Q}$. En élevant au carré, il vient $2uv\sqrt{2} = 3 - u^2 - 2v^2$, d'où $uv = 0$ par irrationnalité de $\sqrt{2}$. Si $u = 0$, on obtient que $\sqrt{3} = v\sqrt{2}$, ce qui est impossible car $\sqrt{\dfrac{3}{2}}$ est irrationnel. Si $v = 0$, on obtient que $u = \sqrt{3}$, ce qui est impossible par irrationnalité de $\sqrt{3}$. Il en résulte que $c = d = 0$, d'où $a + b\sqrt{2} = 0$, d'où $a = b = 0$ par irrationnalité de $\sqrt{2}$. La famille proposée étant génératrice, elle forme une base de K.

2) Posons $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ et montrons que $K = \mathbb{Q}[\alpha]$.

On a $(\alpha - \sqrt{2})^2 = 3$, d'où $\sqrt{2} = \dfrac{\alpha^2 - 1}{2\alpha}$, puis en élevant au carré $\alpha^4 - 10\alpha^2 + 1 = 0$. Par conséquent, α est algébrique sur $\mathbb{Q}$, et $\mathbb{Q}[\alpha]$ est un corps. On déduit de la première élévation au carré que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}[\alpha]$. Or $\sqrt{3} = \alpha - \sqrt{2}$ et $\sqrt{6} = \sqrt{2}\sqrt{3}$, donc ils appartiennent également à $\mathbb{Q}[\alpha]$, qui est un espace vectoriel, donc $K \subset \mathbb{Q}[\alpha]$. Comme $\alpha \in K$ et K est une $\mathbb{Q}$-algèbre, on a aussi $\mathbb{Q}[\alpha] \subset K$, d'où $K = \mathbb{Q}[\alpha]$. On a vu que α est algébrique, donc K est un corps et $\dim_{\mathbb{Q}} K = 4$, donc le polynôme minimal de α est de degré 4. D'après les calculs ci-dessus, il s'agit du polynôme $X^4 - 10X^2 + 1$.

Exercice 2.26

Polytechnique MP 2007 ☕☕

Quelle est la dimension du sous-espace engendré par les racines cinquièmes de l'unité dans le $\mathbb{Q}$-espace $\mathbb{C}$?

Soit $Q \in \mathbb{Z}[X]$, on note $\overline{Q}$ le polynôme à coefficients dans le corps $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ dont les coefficients sont les classes modulo 5 de ceux de Q. On vérifie facilement que $\overline{AB} = \overline{A}\,\overline{B}$ pour tout $(A, B) \in \mathbb{Z}[X]^2$.

Posons $\omega = e^{i\frac{2\pi}{5}}$, $E = \mathrm{Vect}\{\omega^k \mid k \in \mathbb{N}\}$ et $P = 1 + X + X^2 + X^3 + X^4$. On a $P(X+1) = \dfrac{(X+1)^5 - 1}{X} = X^4 + \binom{5}{4}X^3 + \binom{5}{3}X^2 + \binom{5}{2}X + \binom{5}{1}$. Démontrons que $P(X+1)$ est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$. Supposons qu'il existe A et B dans $\mathbb{Z}[X]$ non constants tels que $P = AB$. Quitte à changer A en $-A$, on peut supposer A et B unitaires.
On a alors $\overline{P(X+1)} = \overline{AB}$, d'où $\overline{AB} = X^4$. Par unicité de la décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}[X]$, on en déduit que $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont des puissances de X. Cela entraîne en particulier que les coefficients constants de A et B sont multiples de 5, donc le coefficient constant de AB est multiple de 25, or il est égal à 5, d'où une contradiction. On en déduit que $P(X+1)$ est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$, donc P également, et comme il est unitaire à coefficients entiers, il est aussi irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$ d'après l'exercice 2.19 page 44.
Comme $P(\omega) = 0$, on en déduit que P est le polynôme minimal de ω sur $\mathbb{Q}$, donc $\dim E = \deg P = 4$.

Espaces vectoriels et applications linéaires

3

Les exercices de ce chapitre portent sur une partie du cours qui pour son essentiel a été vue en première année. Les notions de famille génératrice, famille libre et base sont simplement étendues au cas des familles infinies. La notion plus nouvelle de somme directe est détaillée dans les rappels de cours et fait l'objet de plusieurs exercices. Les exercices d'assimilation et d'entraînement sont dans leur grande majorité abordables dès le second semestre de la première année. Ce chapitre constituera également un excellent support pour les révisions estivales. Les exercices d'approfondissement seront très utiles lors de la reprise de ce chapitre en deuxième année.

3.1 L'ESSENTIEL DU COURS ET EXERCICES D'ASSIMILATION

Dans tout ce qui suit, $\mathbb{K}$ est le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

3.1.1 Familles libres, familles génératrices, bases

Ce qu'il faut savoir

• Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit I un ensemble (éventuellement infini) et $\mathcal{F} = (x_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de E.

◦ On dit que la famille $\mathcal{F}$ est **libre** lorsque pour toute partie **finie** J de I et pour toute famille $(\lambda_i)_{i \in J}$ d'éléments de $\mathbb{K}$, on a :

$$\sum_{i \in J} \lambda_i x_i = 0_E \Rightarrow \forall i \in J,\ \lambda_i = 0_{\mathbb{K}}.$$

◦ On dit que la famille $\mathcal{F}$ est **génératrice** de E lorsque pour tout x élément de E il existe une partie **finie** J de I et une famille $(\lambda_i)_{i \in J}$ d'éléments de $\mathbb{K}$, telles que :

$$x = \sum_{i \in J} \lambda_i x_i .$$

◦ On dit que la famille $\mathcal{F}$ est une **base** de E lorsque c'est une famille libre et génératrice.

• **Espace vectoriel de dimension finie**

◦ On dit que E est de dimension finie lorsque E admet une famille génératrice **finie**.

◦ Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, alors

1) E admet une base ;

2) toutes les bases de E ont même cardinal appelé **dimension** de E ;

3) toute famille libre peut être complétée en une base de E (théorème de la base incomplète).

∘ Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $\mathcal{F}$ une famille de n éléments de E. Les trois propositions suivantes sont équivalentes :

1) $\mathcal{F}$ est une famille libre de E ;

2) $\mathcal{F}$ est une famille génératrice de E ;

3) $\mathcal{F}$ est une base de E.

• **Exemples**
Soient n et p dans $\mathbb{N}^*$.
∘ Le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $(\mathbb{K}^n, +, \cdot)$ est de dimension n.
∘ Le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $(\mathbb{K}_n[X], +, \cdot)$ est de dimension $n+1$.
∘ Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions respectives n et p, le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $(\mathcal{L}(E, F), +, \cdot)$ des applications linéaires de E dans F est de dimension finie np.
∘ Le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ est de dimension np.
∘ Le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $(\mathbb{K}[X], +, \cdot)$ n'est **pas** de dimension finie.
∘ Le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$ et le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des fonctions de classe $\mathcal{C}^k(I)$ à valeurs dans $\mathbb{K}$, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point, sont des espaces vectoriels qui ne sont **pas** de dimension finie.

Exercice 3.1

On considère une suite $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de polynômes de $\mathbb{K}[X]$ telle que pour tout k dans $\mathbb{N}$ on a $\deg P_k = k$.

1) Montrer que pour tout n dans $\mathbb{N}$ la famille $(P_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

2) Montrer que $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{K}[X]$.

1) Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ dans $\mathbb{K}^n$ tel que (1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k P_k = 0$. Raisonnons par l'absurde et supposons que les λ_k ne sont pas tous nuls. Soit alors p le plus grand des entiers k dans $[\![1, n]\!]$ tel que λ_k est non nul. Puisque pour tout k dans $\mathbb{N}$ on a $\deg P_k = k$, on en déduit que $\deg(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \lambda_k P_k) = p$ et par conséquent ce polynôme est non nul. Ce qui contredit (1). La famille $(P_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est libre et de cardinal $n+1$ dans un espace vectoriel de dimension $n+1$, c'est donc une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

2) • Montrons que la famille $(P_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est libre.
Soit J une partie **finie** de $\mathbb{N}$. Montrons que la famille $(P_j)_{j\in J}$ est libre. Comme

J est finie, il existe n dans $\mathbb{N}$ tel que $J \subset [\![0, n]\!]$ et par conséquent, la famille $(P_j)_{j \in J}$ est une sous-famille de $(P_0, \ldots, P_n)$. Comme on a déjà montré que cette dernière famille est libre et qu'une sous-famille d'une famille libre est libre, on en déduit que la famille $(P_j)_{j \in J}$ est libre.
Le résultat est vrai pour toute partie J finie de $\mathbb{N}$. On en conclut que la famille $(P_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est libre.
• Montrons que la famille $(P_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est génératrice.
Soit P dans $\mathbb{K}[X]$. Soit n le degré de P. Le polynôme P est dans $\mathbb{K}_n[X]$ et s'écrit donc comme combinaison linéaire de la famille $(P_0, \ldots, P_n)$, puisque d'après le résultat précédent la famille $(P_0, \ldots, P_n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$. Il s'écrit donc comme une combinaison linéaire finie de la famille $(P_i)_{i \in \mathbb{N}}$.
On a ainsi montré que la famille $(P_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{K}[X]$.

Exemples de bases de $\mathbb{K}[X]$: Soit $a \in \mathbb{K}$, les famille $((X-a)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $\left(\dfrac{(X-a)^n}{n!}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ sont des bases de $\mathbb{K}[X]$ qui rendent souvent de bons services dans les exercices.

Exercice 3.2

CCP PC 2006

Soit n dans $\mathbb{N}^*$ et soit (a, b) dans $\mathbb{R}^2$ tel que $a \neq b$.

1) Justifier que la famille $\mathcal{B} = \left((X-a)^k\right)_{0 \leqslant k \leqslant 2n}$ est une base de $\mathbb{R}_{2n}[X]$.

2) Déterminer les coordonnées de $(X-a)^n(X-b)^n$ dans la base $\mathcal{B}$.
Indication de la rédaction : remarquer que $X - b = X - a + (a - b)$.

1) On déduit de l'exercice 3.1 page 52 que la famille $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}_{2n}[X]$. On peut également utiliser la formule de Taylor : tout polynôme P de $\mathbb{R}_{2n}[X]$ s'écrit $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k$. Ceci montre que la famille $\mathcal{B}$ est génératrice. Comme elle est de plus de cardinal $2n+1$ dans un espace de dimension $2n+1$, on en déduit que c'est une base de $\mathbb{R}_{2n}[X]$.

2) On peut essayer d'utiliser la formule de Taylor mais les calculs ne sont pas commodes. Comme $X - b = X - a + (a - b)$, on a d'après la formule du binôme de Newton $(X-b)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (X-a)^k (a-b)^{n-k}$. On en déduit que

$$(X-a)^n(X-b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (X-a)^{n+k}(a-b)^{n-k}.$$

Le changement d'indice $i = n + k$ montre alors que

$$(X-a)^n(X-b)^n = \sum_{i=n}^{2n} \binom{n}{i-n}(X-a)^i(a-b)^{2n-i}.$$

On obtient alors les coordonnées $\lambda_0, \ldots, \lambda_{2n}$ de $(X-a)^n(X-b)^n$ dans la base $\mathcal{B}$

$$\lambda_k = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad k \in [\![0, n-1]\!] \\ \binom{n}{k-n}(a-b)^{2n-k} & \text{si} \quad k \in [\![n, 2n]\!] \end{cases}$$

Exercice 3.3

Soit $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et soit a dans $\mathbb{R}$. On considère la fonction f_a définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f_a(x) = e^{ax}$. Montrer que la famille $\mathcal{L} = (f_a)_{a \in \mathbb{R}}$ est une famille libre de E.

Montrons que toute sous-famille finie de $\mathcal{L}$ est libre. Pour cela, on va procéder par récurrence sur le cardinal des sous-familles finies de $\mathcal{L}$. Soit $\mathcal{L}_1$ une sous-famille $\mathcal{L}$ de cardinal 1. Cette famille contient une seule fonction f_a, cette famille est libre puisque cette fonction n'est pas nulle. Soit $n \geqslant 2$ un entier naturel. On suppose que toute sous-famille $\mathcal{L}_{n-1}$ de $\mathcal{L}$ de cardinal $n-1$ est libre. Soit alors $\mathcal{L} = (f_{a_1}, \ldots, f_{a_n})$ une sous-famille de $\mathcal{L}$. Quitte à réindexer la famille $(a_1, \ldots, a_n)$ et comme tous les a_i sont distincts on peut supposer que a_n est strictement plus grand que tous les autres a_i. Soit alors $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ dans $\mathbb{R}^n$ tel que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_{a_i} = 0$. Cette somme de fonctions admet pour limite 0 en $+\infty$ puisque elle est constamment nulle. Pour la même raison, on a $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} e^{-a_n x} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_{a_i}(x) = 0$ et on en déduit que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e^{(a_i - a_n)x} = 0$. Or chacun des termes de cette somme tend vers 0 sauf le n-ième qui tend vers α_n. On en déduit que $\alpha_n = 0$. On a alors $\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i f_{a_i} = 0$ et comme la famille $(f_{a_1}, \ldots, f_{a_{n-1}})$ est de cardinal $n-1$, par hypothèse de récurrence, elle est libre. On en déduit que finalement pour tout k dans $[\![1, n]\!]$, on a $\alpha_k = 0$. On a montré par récurrence que toute sous-famille finie de $\mathcal{B}$ est libre, ce qui montre que la famille $\mathcal{B}$ est libre.

3.1.2 Sous-espaces vectoriels

Ce qu'il faut savoir

Soit $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soit F une partie de E.

Sous-espaces vectoriels

• On dit que F est un sous-espace vectoriel de E lorsque
(i) la partie F est non vide,

(ii) pour tout $(x, y) \in F^2$, $x + y \in F$, (stabilité pour la loi +),
(iii) pour tout $x \in F$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda x \in F$ (stabilité pour la loi externe).
• Pour que F soit un sous-espace vectoriel de E, il suffit que F vérifie l'une des propriétés suivantes :
(i) la partie F est non vide et pour tout $(x, y) \in F^2$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $x + \lambda y \in F$;
(ii) il existe une famille $(e_1, \ldots, e_n)$ de vecteurs de E telle que

$$F = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_n) ;$$

(iii) la partie F est le noyau ou l'image d'une application linéaire ;
(iv) la partie F est une somme ou une intersection de sous-espaces vectoriels connus.

Dimension d'un sous-espace vectoriel

○ Si E est de dimension finie, alors tous les sous-espaces vectoriels de E sont de dimension finie.
○ Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E avec G de dimension finie. Si $F \subset G$ et $\dim F = \dim G$ alors $F = G$.
○ **Formule de Grassmann** Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Si F et G sont de dimension finie, alors le sous-espace vectoriel $F + G$ est de dimension finie et on a $\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$.

Exercice 3.4

Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et soit $E = \mathbb{R}_n[X]$. Soit H l'ensemble des polynômes P de E tels que $P(1) = P'(1) = 0$.

1) Montrer que H est un sous-espace vectoriel de E.
2) Montrer que P appartient à H si et seulement si $(X - 1)^2$ divise P.
3) Donner une base de H et déterminer sa dimension.

1) L'ensemble H est une partie non vide de E car elle contient le polynôme nul. Soient P et Q dans H, soit λ dans $\mathbb{R}$. Soit R le polynôme égal à $P + \lambda Q$. On a $R(1) = P(1) + \lambda Q(1) = 0$ et de la même façon $R'(1) = P'(1) + \lambda Q'(1) = 0$.
On a bien montré que H est un sous-espace vectoriel de E.
2) Soit P dans E. Le polynôme P est dans H si et seulement si 1 est racine double de P, ce qui signifie exactement que P appartient à H si et seulement si $(X - 1)^2$ divise P.
3) Soit P dans H, il existe un polynôme de degré inférieur ou égal à $n - 2$ tel que $P(X) = (X - 1)^2 Q(X)$. Plus précisément, il existe $(a_0, \cdots, a_{n-2})$ dans $\mathbb{R}^{n-1}$ tel que $Q(X) = \sum_{i=0}^{n-2} a_i X^i$, ce qui montre que $P(X) = \sum_{i=0}^{n-2} a_i X^i (X - 1)^2$ et donc la famille $\mathcal{F} = ((X - 1)^2, X(X - 1)^2, \ldots, X^{n-2}(X - 1)^2)$ est génératrice de H. En outre, la famille $\mathcal{F}$ est échelonnée en degré, elle est donc libre.
La famille $\mathcal{F}$ est une base de H et $\dim H = n - 1$.

Exercice 3.5

CCP MP 2006

Soit E un espace vectoriel. Soient L, M et N trois sous-espaces vectoriels de E.

1) Montrer que $(L \cap M) + (L \cap N) \subset L \cap (M + N)$.

2) Montrer qu'on n'a pas toujours l'égalité $L \cap (M + N) = (L \cap M) + (L \cap N)$.

1) Soit x dans $(L \cap M) + (L \cap N)$. Il existe alors x_1 dans $(L \cap M)$ et x_2 dans $(L \cap N)$ tels que $x = x_1 + x_2$. Comme x_1 et x_2 sont dans L qui est un sous-espace vectoriel, on en déduit que x est dans L. Par ailleurs (x_1, x_2) est dans $M \times N$, donc x appartient à $M + N$. Ainsi x appartient à $L \cap (M + N)$, d'où l'inclusion $(L \cap M) + (L \cap N) \subset L \cap (M + N)$.

2) Il suffit de considérer trois droites vectorielles D_1, D_2 et D_3 deux à deux distinctes dans le plan $\mathbb{R}^2$. En effet, $(D_2 + D_3) = \mathbb{R}^2$, et $D_1 \cap (D_2 + D_3) = D_1$, tandis que $D_1 \cap D_2$ et $D_1 \cap D_3$ sont réduits au vecteur nul.

3.1.3 Applications linéaires

Ce qu'il faut savoir

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

• On dit qu'une application u de E dans F est **linéaire** lorsque pour tout $(x, y) \in E^2$ et tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$, $u(\alpha x + \beta y) = \alpha u(x) + \beta u(y)$.

Notation On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F.

• **Noyau et image d'une application linéaire** Soit u dans $\mathcal{L}(E, F)$.

◦ L'ensemble $\{x \in E \mid u(x) = 0_F\}$ est un sous-espace vectoriel de E qu'on appelle noyau de u et qu'on note $\operatorname{Ker} u$.

◦ L'ensemble $\{y \in F \mid \exists x \in E \text{ tel que } u(x) = y\}$ est un sous-espace vectoriel de E qu'on appelle image de u et qu'on note $\operatorname{Im} u$.

• **Construction d'applications linéaires** Soit $(e_i)_{i \in I}$ une base de E et soit $(f_i)_{i \in I}$ une famille quelconque d'éléments de F. Il existe une unique application linéaire u dans $\mathcal{L}(E, F)$ telle que pour tout i dans I on a $u(e_i) = f_i$.

• **Application linéaire injective, surjective, bijective** Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

◦ L'application u est injective si et seulement si $\operatorname{Ker} u = \{0_E\}$.

◦ L'application u est surjective si et seulement si $\operatorname{Im} u = F$.

• **Isomorphisme**

◦ On dit que l'application linéaire u est un isomorphisme lorsque u est bijective.

◦ On dit que E et F sont isomorphes lorsqu'il existe un isomorphisme de E vers F.

○ L'application u est un isomorphisme si et seulement si l'image d'une base de E par u est une base de F.

○ Tout supplémentaire du noyau de u est isomorphe à l'image de u.

Cas de la dimension finie On suppose que E est de dimension finie.

• **Théorème du rang** : Soit u dans $\mathcal{L}(E, F)$. L'image de u est de dimension finie, on appelle rang de u la dimension de $\operatorname{Im} u$ que l'on note $\operatorname{rg} u$ et on a

$$\dim(\operatorname{Im} u) + \dim(\operatorname{Ker} u) = \dim E.$$

• On suppose que E et F sont de dimension finie.

○ Si $\dim E = \dim F$, alors u est bijective $\Leftrightarrow$ u est injective $\Leftrightarrow$ u est surjective.

Mise en garde : Ce résultat est faux si $\dim E \neq \dim F$ ou si les deux espaces ne sont pas de dimension finie.

○ Soit $\mathcal{B}_E$ une base de E et $\mathcal{B}_F$ une base de F. L'application linéaire u est bijective si et seulement si la matrice $M_{\mathcal{B}_E\mathcal{B}_F}(u)$ est inversible et on a alors $M_{\mathcal{B}_F\mathcal{B}_E}(u^{-1}) = \left(M_{\mathcal{B}_E\mathcal{B}_F}(u)\right)^{-1}$.

Le dernier résultat permet de ramener la question de la bijectivité d'une application linéaire à l'étude de l'inversibilité d'une matrice. On peut alors utiliser les techniques rappelées page 98.

Exercice 3.6

Soit $E = \mathbb{K}[X]$. Soient les applications linéaires φ et ψ définies sur E par $\varphi(P) = P'$ et $\psi(P) = XP$.
Les applications φ et ψ sont-elles injectives, surjectives, bijectives ?

• Il est clair que $\operatorname{Ker} \varphi$ est l'ensemble des polynômes constants. L'application φ n'est pas injective. En revanche, elle est surjective puisque tout polynôme admet une primitive polynômiale. Finalement, φ n'est pas bijective puisqu'elle n'est pas injective.
• Pour tout polynôme non nul P, on a $\deg(\psi(P)) = \deg(P) + 1$, on en déduit que le polynôme 1 n'est pas dans $\operatorname{Im} \psi$. Ceci montre que l'application ψ n'est pas surjective. La même relation sur le degré montre que le noyau de ψ est réduit au polynôme nul. L'application ψ est injective. Puisque ψ n'est pas surjective, elle n'est pas bijective.

Remarque
Les deux exemples ci-dessus montrent bien que si f est un endomorphisme d'un espace vectoriel E, la chaine d'équivalence : « f est bijective $\Leftrightarrow$ f est injective $\Leftrightarrow$ f est surjective », n'est vraie que si E est de dimension finie.

Exercice 3.7

CCP PSI 2006

Soient $n \geqslant 2$ et $f \ : \ \mathbb{R}_n [X] \longrightarrow \mathbb{R}_2 [X]$ qui à P associe $f(P) = XP(1) + (X^2 - 4)P(0)$. Montrer que f est linéaire et trouver $\dim \operatorname{Ker} f$ et $\dim \operatorname{Im} f$.

• Soient P et Q dans $\mathbb{R}_n [X]$ et soient α et β dans $\mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} f(\alpha P + \beta Q) &= X(\alpha P + \beta Q)(1) + (X^2 - 4)(\alpha P + \beta Q)(0) \\ &= X(\alpha P(1) + \beta Q(1)) + (X^2 - 4)(\alpha P(0) + \beta Q(0)) \\ &= \alpha(XP(1) + (X^2 - 4)P(0)) + \beta(XQ(1) + (X^2 - 4)Q(0)) \\ &= \alpha f(P) + \beta f(Q). \end{aligned}$$

On a ainsi montré que f est linéaire.

• Déterminons le noyau de f. Comme un polynôme est nul si et seulement si tous ses coefficients sont nuls, $f(P) = 0$ si et seulement si $P(1) = P(0) = 0$, ce qui équivaut à $X(X - 1)$ divise P. Comme n est supérieur ou égal à 2, il existe alors Q dans $\mathbb{R}_{n-2} [X]$ tel que $P(X) = Q(X)X(X - 1)$. On en déduit l'existence de $(a_0, \ldots, a_{n-2})$ dans $\mathbb{R}^{n-2}$ tel que $P(X) = \sum_{k=0}^{n-2} a_k X^k X(X - 1)$. Ceci montre que la famille $(X(X - 1), \ldots, X^{n-1}(X - 1))$ est une famille génératrice de $\operatorname{Ker} f$. Comme elle est étagée en degré, elle est libre et c'est donc finalement une base de $\operatorname{Ker} f$. On en déduit que la dimension de $\operatorname{Ker} f$ est $n - 1$. Par le théorème du rang, on a $\dim \operatorname{Im} f = \dim \mathbb{R}_n [X] - \dim \operatorname{Ker} f = 2$. On en déduit (même si la question n'est pas posée) que $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(X, X^2 - 4)$.

Exercice 3.8

TPE MP 2006

Soit a dans $\mathbb{K}$ et soit n un entier supérieur ou égal à 3. On considère l'endomorphisme ϕ de $\mathbb{K}_n [X]$ défini par : $\phi(P) = (X - a)(P' - P'(a)) - 2(P - P(a))$. Déterminer le noyau et l'image de ϕ.

Remarquons que si a est racine double de P, l'expression de $\phi(P)$ se simplifie grandement. Il est donc assez naturel de se placer dans une base de $\mathbb{K}_n [X]$ constituée de polynômes admettant a pour racine. La formule de Taylor pour les polynômes assure que la base $(e_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ où $e_k = \dfrac{(X - a)^k}{k!}$ est particulièrement adaptée. En effet pour tout entier $k \geqslant 2$, on a :

$$\phi\left(\frac{(X - a)^k}{k!}\right) = (X - a)\frac{(X - a)^{k-1}}{(k - 1)!} - 2\frac{(X - a)^k}{k!} = (k - 2)\frac{(X - a)^k}{k!}.$$

Par ailleurs : $\phi(X-a) = -2(X-a)$, et $\phi(1) = 0$. On a donc (pour $n \geqslant 3$) :

$$\operatorname{Im}\phi = \operatorname{Vect}(\phi(e_0), \ldots, \phi(e_n)) = \operatorname{Vect}((X-a), (X-a)^3, \ldots, (X-a)^n)$$

La famille $((X-a), (X-a)^3, \ldots, (X-a)^n)$ est étagée en degré, elle est donc libre et par conséquent c'est une base de $\operatorname{Im}\phi$. On en déduit en particulier que $\dim \operatorname{Im}\phi = n-1$. Le théorème du rang montre alors que $\dim \operatorname{Ker}\phi = 2$, comme on connaît deux polynômes non liés dans le noyau de ϕ, on en déduit que ces deux polynômes forment une base de $\operatorname{Ker}\phi$. La famille $\left(1, (X-a)^2\right)$ est une base de $\operatorname{Ker}\phi$.

Remarque
Ceux qui parmi nos lecteurs ont déjà pratiqué la réduction remarqueront qu'on a en fait obtenu une base de $\mathbb{K}_n[X]$ constituée de vecteurs propres de ϕ.

Ce qu'il faut retenir

Comme le montre l'exercice 3.8, l'étude d'une application linéaire est grandement facilitée par le choix d'une base adaptée.

Exercice 3.9

Mines-Ponts PSI 2005, CCP et Mines-Ponts MP 2006

Soit f l'application définie sur $E = \mathbb{R}_n[X]$ par $f(P) = P - P'$.

1) Montrer de deux façons différentes que l'application f est bijective.

2) Pour Q dans E, trouver P tel que $Q = P - P'$.
Indication de l'examinateur du CCP : on pourra s'intéresser à $Q^{(n+1)}$.

Il est clair que f est un endomorphisme de E.

1) *Première méthode :* On étudie le noyau de f. Soit P un polynôme non nul. On a alors $\deg(P') < \deg(P)$. On en déduit que $\deg(f(P)) = \deg(P)$ ce qui montre que $f(P)$ est non nul. Le noyau de f est ainsi réduit au polynôme nul, ce qui montre que f est injective. Comme f est un endomorphisme dans un espace de dimension finie, on en déduit que f est bijective.
Deuxième méthode : On va examiner l'image par f de la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}_n[X]$. On a $f(1) = 1$ et pour tout k dans $[\![1, n]\!]$, on a $f(X^k) = X^k - kX^{k-1}$. On constate que la famille $(f(X^k))_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est échelonnée en degré (voir exercice 3.1), cette famille est donc libre. En outre, elle est de cardinal $n+1$ dans un espace de dimension $n+1$, c'est donc une base de $\mathbb{R}_n[X]$. Comme l'image par f d'une base de $\mathbb{R}_n[X]$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$, l'application f est bijective.

2) Soit Q dans $\mathbb{R}_n[X]$. D'après le résultat précédent, il existe P dans $\mathbb{R}_n[X]$ tel que $Q = P - P'$. Pour trouver P on peut essayer d'inverser la matrice obtenue à la question précédente. On peut aussi, comme le suggère l'énoncé, calculer les dérivées successives de Q. On obtient $Q = P - P'$, $Q' = P' - P''$,

$Q'' = P'' - P^{(3)}, \ldots, Q^{(n)} = P^{(n)} - P^{(n+1)}$. Comme P est de degré n, le polynôme $P^{(n+1)}$ est nul, et en sommant les égalités précédentes on obtient : $\sum_{k=0}^{n} Q^{(k)} = P$.

Remarque
Pour montrer que f est bijective, on peut aussi examiner sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$. Cette matrice est triangulaire supérieure et tous ses coefficients diagonaux sont non nuls, elle est donc inversible. On verra plus loin dans l'exercice 3.19 une autre façon de retrouver ces résultats.

Exercice 3.10

Centrale PSI 2005, Mines-Ponts PC 2006

Soient E un espace vectoriel de dimension finie, u et v dans $\mathcal{L}(E)$.

1) Montrer que $\operatorname{rg}(u+v) \leqslant \operatorname{rg} u + \operatorname{rg} v$.

2) On suppose $u+v$ bijectif et $u \circ v = 0$. Montrer que $\operatorname{rg} u + \operatorname{rg} v = \dim E$.

3) *Question de la rédaction :* Montrer que $\operatorname{Im} v = \operatorname{Ker} u$.

1) Soit y dans E. Si y appartient à $\operatorname{Im}(u+v)$, alors il existe $x \in E$ tel que $y = u(x)+v(x)$. Il en résulte que y appartient à $\operatorname{Im} u + \operatorname{Im} v$, donc $\operatorname{Im}(u+v) \subset \operatorname{Im} u + \operatorname{Im} v$ et par conséquent $\dim \operatorname{Im}(u+v) \leqslant \dim(\operatorname{Im} u + \operatorname{Im} v)$.
On déduit alors de la formule de Grassmann que

$$\dim(\operatorname{Im} u + \operatorname{Im} v) \leqslant \dim \operatorname{Im} u + \dim \operatorname{Im} v.$$

Finalement $\dim \operatorname{Im}(u+v) \leqslant \dim \operatorname{Im} u + \dim \operatorname{Im} v$, ce qui est exactement $\operatorname{rg}(u+v) \leqslant \operatorname{rg} u + \operatorname{rg} v$.

2) On sait déjà grâce à la première question que $\operatorname{rg}(u+v) \leqslant \operatorname{rg} u + \operatorname{rg} v$. Or $u+v$ est bijectif, on a donc $\operatorname{rg}(u+v) = \dim E$, et part suite $\dim E \leqslant \operatorname{rg} u + \operatorname{rg} v$ (1).
Par ailleurs la condition $u \circ v = 0$ est équivalente à $\operatorname{Im} v \subset \operatorname{Ker} u$ et on a par conséquent $\dim \operatorname{Im} v \leqslant \dim \operatorname{Ker} u$. En appliquant le théorème du rang à u, on obtient $\dim \operatorname{Im} v \leqslant \dim E - \dim \operatorname{Im} u$, c'est-à-dire $\operatorname{rg} u + \operatorname{rg} v \leqslant \dim E$ (2). De (1) et (2), on obtient le résultat demandé.

3) On a déjà dit que $u \circ v = 0$ entraîne $\operatorname{Im} v \subset \operatorname{Ker} u$. Le théorème du rang nous dit que $\dim \operatorname{Ker} u = \dim E - \operatorname{rg} u$ et la relation obtenue à la question précédente montre alors que $\dim \operatorname{Ker} u = \operatorname{rg} v$. On a ainsi montré que $\operatorname{Im} v \subset \operatorname{Ker} u$ et que ces deux sous-espaces vectoriels sont de même dimension. On en déduit que $\operatorname{Im} v = \operatorname{Ker} u$.

Exercice 3.11

Soient E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension n, F et G deux sous-espaces de E. Existe-t-il un endomorphisme u de E tel que $\operatorname{Im} u = F$ et $\operatorname{Ker} u = G$?

D'après le théorème du rang, une condition nécessaire d'existence de u est que $\dim F + \dim G = n$. Supposons donc cette condition réalisée. Soit $(g_1, \ldots, g_p)$ une base du noyau, que l'on complète en une base $(g_1, \ldots, g_n)$ de E. Soit $(f_{p+1}, \ldots, f_n)$ une base de F. Un endomorphisme u est défini par sa valeur sur les vecteurs de base.

Posons $u(g_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } 1 \leqslant j \leqslant p \\ f_j & \text{si } p+1 \leqslant j \leqslant n \end{cases}$.

Alors $G \subset \operatorname{Ker} u$ et $F \subset \operatorname{Im} u$, donc $\dim G \leqslant p$ et $\dim \operatorname{Im} g \leqslant n - p$, mais puisque $\dim G + \dim F = n$, on a $\dim G = p$ et $\dim \operatorname{Im} g = n - p$, d'où l'on déduit que $G = \operatorname{Ker} u$ et $F = \operatorname{Im} u$.

3.1.4 Sous-espaces vectoriels supplémentaires

Ce qu'il faut savoir

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient F et G des sous-espaces vectoriels de E.

• **Sous-espaces vectoriels supplémentaires**

◦ On dit que F et G sont **supplémentaires** et on note $E = F \oplus G$, lorsque pour tout x dans E il existe un unique couple (u, v) dans $F \times G$ tel que $x = u + v$.

Exemple : Dans l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, les sous-espaces vectoriels des fonctions paires et impaires sont supplémentaires.

◦ Les sous-espaces vectoriels F et G sont **supplémentaires** si et seulement si $E = F + G$ et $F \cap G = \{0_E\}$.

• **Cas de la dimension finie**

◦ Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension **finie**, les sous-espaces vectoriels F et G de E sont supplémentaires dans E si et seulement si :

$$\begin{cases} F \cap G = \{0\} \\ \dim F + \dim G = \dim E \end{cases}.$$

◦ Soit $(u_1, \ldots, u_p)$ une base de F et soit $(v_1, \ldots, v_q)$ une base de G. Les sous-espaces vectoriels F et G sont **supplémentaires** si et seulement si la famille $(u_1, \ldots, u_p, v_1, \ldots, v_q)$ est une base de E

• **Hyperplans**

◦ On dit qu'un sous-espace vectoriel H de E est un hyperplan de E, lorsque H admet une droite vectorielle pour supplémentaire ; on montre qu'alors pour tout a dans $E \setminus H$ on a $E = H \oplus \mathbb{K}a$.

◦ Un sous-espace vectoriel H de E est un hyperplan si et seulement si il existe une forme linéaire non nulle dont H est le noyau.

Exercice 3.12

Centrale PC 2007, CCP PC 2007

Soient H_1 et H_2 deux hyperplans d'un espace vectoriel de dimension n où n est un entier supérieur ou égal à 2. Quelle est la dimension de $H_1 \cap H_2$?

La formule de Grassmann donne $\dim(H_1+H_2) = \dim(H_1)+\dim(H_2)-\dim(H_1\cap H_2)$. Comme $H_1 + H_2$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$, on sait que sa dimension est inférieure ou égale à n. Par ailleurs, on sait que $\dim H_1 = \dim H_2 = n-1$, donc $\dim(H_1\cap H_2) \geqslant 2(n-1)-n = n-2$. En outre, $H_1\cap H_2$ est un sous-espace vectoriel de H_1 (et de H_2), donc sa dimension est inférieure ou égale à $n-1$. On a finalement $n-2 \leqslant \dim(H_1\cap H_2) \leqslant n-1$. On en déduit que $\dim(H_1\cap H_2)$ vaut $n-1$ ou $n-2$. L'examen de deux droites vectorielles dans le plan, montre très rapidement que (pour $n \geqslant 2$) ces deux situations peuvent se produire. On peut en fait même préciser que $\dim(H_1\cap H_2) = n-1$ si et seulement si $H_1 = H_2$. En effet si $H_1 = H_2$, le résultat est immédiat. Si $\dim(H_1\cap H_2) = n-1$, alors on a $H_1\cap H_2 \subset H_1$ et $\dim(H_1\cap H_2) = \dim H_1$, on en déduit $H_1\cap H_2 = H_1$, ce qui montre que $H_1 \subset H_2$, et de nouveau, en vertu de l'égalité des dimensions de ces sous-espaces vectoriels (ou parce que H_1 et H_2 jouant des rôles symétriques l'inclusion réciproque est aussi vraie), on a finalement $H_1 = H_2$.

Conclusion : Si $H_1 = H_2$ alors $\dim(H_1\cap H_2) = n-1$, si H_1 et H_2 sont distincts alors $\dim(H_1\cap H_2) = n-2$.

Remarque

Étant donnés k hyperplans $H_1, \cdots, H_k$ d'un espace vectoriel de dimension n. On peut montrer par récurrence sur k que $\dim(\cap_{i=1}^k H_i) \geqslant n-k$.

3.1.5 Projecteurs

Ce qu'il faut savoir

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soit p dans $\mathcal{L}(E)$.

• On dit que p est un **projecteur** lorsque $p\circ p = p$.
• Soit p un projecteur de $\mathcal{L}(E)$, alors $y \in \operatorname{Im} p \Leftrightarrow p(y) = y$,

• Projecteurs et sous-espaces supplémentaires
∘ Soit p un projecteur de $\mathcal{L}(E)$. On a $E = \operatorname{Ker} p \oplus \operatorname{Im} p$,
∘ Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E tels que $E = F\oplus G$. Il existe un unique projecteur p de $\mathcal{L}(E)$ tel que $\operatorname{Im} p = F$ et $\operatorname{Ker} p = G$; on dit alors que p est le projecteur sur F parallèlement à G.

Exercice 3.13

Soit n dans $\mathbb{N}^*$ et $E = \mathbb{R}^n$ muni d'une base $(e_1,\dots,e_n)$. On note H le sous-espace vectoriel de E d'équation cartésienne $x_1+\cdots+x_n = 0$. On note u le vecteur défini par $u = e_1+\cdots+e_n$.

1) Montrer que $E = H\oplus D$.

2) Soit x dans E. Donner la décomposition de x dans $H\oplus D$.

3) Donner la projection p sur H parallèlement à D et la projection q sur D parallèlement à H.

1) Soit φ l'application linéaire de E vers $\mathbb{R}$ qui à $x = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n$ associe le réel $x_1 + \cdots + x_n$. Le sous-espace vectoriel H est le noyau de φ. Comme de plus φ est non nulle, le sous-espace H est un hyperplan de E. Le vecteur u n'est pas dans H, on a donc $E = H \oplus D$.

2) Soit x dans E, d'après le résultat précédent il existe y dans H et z dans D tels que $x = y + z$. Puisque z est dans D, il existe α dans $\mathbb{R}$ tel que $z = \alpha u$. On a alors $\varphi(x) = \varphi(y) + \alpha\varphi(u) = n\alpha$. On en déduit que $z = \dfrac{\varphi(x)}{n}u$ et par conséquent $y = x - z = x - \dfrac{\varphi(x)}{n}u$. En coordonnées dans la base $(e_1, \ldots, e_n)$ on obtient successivement $z = (\dfrac{x_1}{n} + \cdots + \dfrac{x_n}{n})(e_1 + \cdots + e_n)$, puis $y = (x_1 - (\dfrac{x_1}{n} + \cdots + \dfrac{x_n}{n}))e_1 + \cdots + (x_n - (\dfrac{x_1}{n} + \cdots + \dfrac{x_n}{n}))e_n$.

3) Les résultats précédents montrent que pour tout x dans E, on a

$$p(x) = x - \frac{1}{n}\varphi(x)(e_1 + \cdots + e_n) \text{ et } q(x) = \frac{1}{n}\varphi(x)(e_1 + \cdots + e_n).$$

On retrouve en particulier que $p + q = \mathrm{Id}_E$.

Exercice 3.14

Mines-Ponts PC 2007, Mines-Ponts MP 2007

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

1) Soient F et G deux sous-espaces supplémentaires de E et p dans $\mathcal{L}(E)$ le projecteur sur F parallèlement à G. Montrer que $q = \mathrm{Id}_E - p$ est un projecteur. Déterminer l'image et le noyau de q.

2) Soient p_1 et p_2 deux projecteurs de E tels que $p_2 \circ p_1 = 0$. On pose $f = p_1 + p_2 - p_1 \circ p_2$. Montrer que f est un projecteur.

3) Déterminer l'image et le noyau de f.

1) Pour montrer que q est un projecteur, on montre que $q \circ q = q$. Calculons $(\mathrm{Id}_E - p)^2$. On a $(\mathrm{Id}_E - p)^2 = \mathrm{Id}_E - 2p + p^2 = \mathrm{Id}_E - p$ (car $p^2 = p$). On a ainsi montré que q est un projecteur. On sait alors que x appartient à $\operatorname{Im} q$ si et seulement si $q(x) = x$. Cette dernière condition est équivalente à $(\mathrm{Id}_E - p)(x) = x$, c'est à dire $p(x) = 0_E$. On en déduit que $\operatorname{Im} q = \operatorname{Ker} p = G$. De la même manière, pour x dans E, on a $q(x) = 0_E$ si et seulement si $p(x) = x$, on en déduit que $\operatorname{Ker} q = \operatorname{Im} p = F$.

2) Pour montrer que f est un projecteur, on montre que $f \circ f = f$. On peut mener les calculs directement en utilisant la relation $p_2 \circ p_1 = 0$. On peut simplifier ces calculs en constatant que $f = p_1 \circ (\mathrm{Id}_E - p_2) + p_2$: on sait que $q_2 = \mathrm{Id}_E - p_2$ est la projection sur $\operatorname{Ker} p_2$ parallèlement à $\operatorname{Im} p_2$ et on a en particulier $q_2 \circ p_2 = p_2 \circ q_2 = 0$ tandis que la relation $p_2 \circ p_1 = 0$ entraîne $q_2 \circ p_1 = p_1$.

Ainsi :

$$f^2 = (p_1 \circ q_2 + p_2) \circ (p_1 \circ q_2 + p_2) = p_1 \circ q_2 \circ p_1 \circ q_2 + p_2 = f.$$

On a bien montré que f est un projecteur.

3) On constate sans peine que si x est dans $\operatorname{Ker} p_1 \cap \operatorname{Ker} p_2$ on a $f(x) = 0$. Il est donc naturel d'examiner si l'inclusion $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker} p_1 \cap \operatorname{Ker} p_2$ est vraie.
Soit x dans $\operatorname{Ker} f$. On a $p_1(x) + p_2(x) = p_1 \circ p_2(x)$. En appliquant p_1 aux deux membres de cette égalité, on obtient $p_1(x) = 0$, en appliquant p_2, on obtient que $p_2(x) = 0$. on a montré que $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker} p_1 \cap \operatorname{Ker} p_2$. Finalement $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} p_1 \cap \operatorname{Ker} p_2$.
L'écriture $f = p_2 + p_1 \circ (\mathrm{Id}_E - p_2)$ montre que $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Im} p_1 + \operatorname{Im} p_2$. Comme f est un projecteur, pour montrer qu'un vecteur x est dans $\operatorname{Im} f$ il suffit de montrer que $f(x) = x$. Soit alors x dans $\operatorname{Im} p_1 + \operatorname{Im} p_2$, il existe y_1 dans $\operatorname{Im} p_1$ et y_2 dans $\operatorname{Im} p_2$ tels que $x = y_1 + y_2$. Des relations $p_1(y_1) = y_1$, $p_2(y_2) = y_2$ et $p_2(y_1) = 0_E$, on déduit que

$$f(x) = f(y_1+y_2) = p_2(y_1+y_2)+p_1\circ(\mathrm{Id}_E - p_2)(y_1+y_2) = y_2+p_1(y_1+y_2-y_2) = x.$$

On a ainsi montré que $(\operatorname{Im} p_1+\operatorname{Im} p_2) \subset \operatorname{Im} f$. On a finalement $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} p_1+\operatorname{Im} p_2$.
On peut préciser ce résultat : puisque $\operatorname{Im} p_1 \subset \operatorname{Ker} p_2$ et $\operatorname{Ker} p_2 \cap \operatorname{Im} p_2 = \{0_E\}$, on a $\operatorname{Im} p_2 \cap \operatorname{Im} p_1 = \{0_E\}$. On en déduit que la somme de $\operatorname{Im} p_1$ et $\operatorname{Im} p_2$ est directe. On a donc montré que $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} p_1 \oplus \operatorname{Im} p_2$.

3.1.6 Somme directe

Ce qu'il faut savoir

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, n un entier naturel non nul et $E_1, \dots, E_n$ une famille de sous-espaces vectoriels de E.

• On dit que la somme $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} E_i$ est directe et on écrit alors $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} E_i = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i$, lorsque $\forall x \in \displaystyle\sum_{i=1}^{n} E_i$, $\exists!(x_1, \dots, x_n) \in E_1 \times \dots \times E_n$ tel que $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i$.

• Voici un critère très pratique, voir exercice 3.15

La somme $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} E_i$ est directe si et seulement si pour tout $(x_1, \dots, x_n)$ dans $E_1 \times \cdots \times E_n$, l'égalité $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} x_i = 0$ entraîne $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $x_i = 0_E$.

• **Somme directe en dimension finie**

On suppose E de dimension finie. Alors

∘ $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} E_i = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i \Leftrightarrow \dim\left(\sum_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \dim(E_i)$.

• Par ailleurs, soit pour i dans $[\![1,n]\!]$, une base $(x_{i1},\dots,x_{iq_i})$ de E_i, où q_i est la dimension de E_i

$$E=\bigoplus_{i=1}^{n}E_i \Leftrightarrow \begin{array}{l}(x_{11},\dots,x_{1q_1},x_{21},\dots,x_{2q_2},\dots,x_{n1}\dots,x_{nq_n})\\ \text{est une base de } E.\end{array}$$

• **Somme directe et projecteurs**

Soit $(E_1,\dots,E_n)$ une famille de sous-espaces vectoriels de E. Alors $E=\bigoplus_{i=1}^{n}E_i$ si et seulement si il existe une (unique) famille $(p_1,\dots,p_n)$ de projecteurs de E tels que :

1) $\forall i\in[\![1,n]\!]$, $\operatorname{Im}p_i=E_i$.

2) $\forall(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$, $i\neq j\Rightarrow p_i\circ p_j=0$

3) $\sum_{i=1}^{n}p_i=\operatorname{Id}_E$.

• **Construction d'applications linéaires**

Soient $E_1,\dots,E_n$ des sous-epaces vectoriels de E tels que $E=\bigoplus_{i=1}^{n}E_i$ et F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit pour tout i dans $[\![1,n]\!]$ une application linéaire u_i dans $\mathcal{L}(E_i,F)$. Il existe une unique application linéaire u dans $\mathcal{L}(E,F)$ telle que pour tout i dans $[\![1,n]\!]$, la restriction $u_{|E_i}$ de u à E_i soit égale à u_i.

Exercice 3.15

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et E_1, E_2, E_3 et E_4 quatre sous-espaces vectoriels tels que $(E_1+E_2)+(E_3+E_4)=(E_1+E_2)\oplus(E_3+E_4)$ et $(E_1+E_3)+(E_2+E_4)=(E_1+E_3)\oplus(E_2+E_4)$. Montrer que la somme $E_1+E_2+E_3+E_4$ est directe.

Soit (x_1,x_2,x_3,x_4) dans $E_1\times E_2\times E_3\times E_4$ tel que $x_1+x_2+x_3+x_4=0_E$. Le vecteur $x_1+x_2=-(x_3+x_4)$ est dans $(E_1+E_2)\cap(E_3+E_4)$ il est donc nul. De même le vecteur $x_1+x_3=-(x_2+x_4)$ est dans $(E_1+E_3)\cap(E_2+E_4)$ il est donc nul. On en déduit $x_1=-x_2=-x_3=x_4$, ce qui montre que x_1 est dans $E_1\cap E_2\cap E_3\cap E_4$. Comme on a $E_1\cap E_2\cap E_3\cap E_4\subset(E_1+E_2)\cap(E_3+E_4)$, on en déduit que x_1 est nul et par suite $x_1=x_2=x_3=x_4=0_E$. On a montré que la somme des sous-espaces E_1, E_2, E_3 et E_4 est directe.

Exercice 3.16

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient $H_1,\dots,H_n$ des sous-espaces vectoriels tels que leur somme est directe. Soient $F_1,\dots,F_n$ des sous-espaces vectoriels de E tels que pour tout i dans $[\![1,n]\!]$, on a $F_i\subset H_i$.

1) Montrer que la somme des F_i est directe.

2) Montrer que si $H_1 \oplus \cdots \oplus H_n = F_1 \oplus \cdots \oplus F_n$, alors pour tout i dans $[\![1,n]\!]$, on a $F_i = H_i$.

1) Soit $(x_1,\dots,x_n)$ dans $F_1 \times \cdots \times F_n$ tel que $x_1 + \cdots + x_n = 0_E$. Comme pour tout i dans $[\![1,n]\!]$, on a $F_i \subset H_i$, on en déduit que $(x_1,\dots,x_n)$ appartient à $H_1 \times \cdots \times H_n$ et comme la somme des $H_1,\dots,H_n$ est directe, on en déduit que pour tout i dans $[\![1,n]\!]$, on a $x_i = 0_E$.

2) Soit i dans $[\![1,n]\!]$. On a déjà $F_i \subset H_i$. Soit y_i dans H_i. Le vecteur y_i est dans $H_1 \oplus \cdots \oplus H_n$, par hypothèse il est donc également dans $F_1 \oplus \cdots \oplus F_n$. Il existe ainsi $(x_1,\dots,x_n)$ dans $F_1 \times \cdots \times F_n$ tel que $x_1 + \cdots + x_n = y_i$. Soit alors les vecteurs $z_1,\dots,z_n$ définis par : pour $k \neq i$, $z_k = x_k$ et $z_i = x_i - y_i$. Pour tout k dans $[\![1,n]\!]$ le vecteur z_k est dans H_k et on a $z_1 + \cdots + z_n = 0_E$. Comme $H_1,\dots,H_n$ sont des sous-espaces vectoriels qui sont en somme directe, on en déduit que pour tout k dans $[\![1,n]\!]$, on a $z_k = 0_E$. En particulier $z_i = 0_E$ ce qui entraîne $y_i = x_i$. On peut aussi obtenir ce résultat en invoquant l'unicité de l'écriture de y_i dans la somme directe $H_1 \oplus \cdots \oplus H_n$. On en déduit que y_i est dans F_i. On a montré ainsi que $H_i \subset F_i$.

Exercice 3.17

ENSEA PC 2006

Soient E et F deux espaces vectoriels et f une application linéaire de E dans F. Soient G et H deux sous-espaces vectoriels de E.

1) Montrer que $f(G+H) = f(G) + f(H)$.

2) Montrer que si f est injective et si la somme $G+H$ est directe, alors $f(G \oplus H) = f(G) \oplus f(H)$

1) Soit $y \in E$, on a :

$$\begin{aligned} y \in f(G+H) &\Leftrightarrow \exists (x_1,x_2) \in G \times H \text{ tel que } f(x_1+x_2) = y \\ &\Leftrightarrow \exists (x_1,x_2) \in G \times H \text{ tel que } f(x_1) + f(x_2) = y \\ &\Leftrightarrow \exists (y_1,y_2) \in f(G) \times f(H) \text{ tel que } y = y_1 + y_2 \\ &\Leftrightarrow y \in f(G) + f(H). \end{aligned}$$

On a donc ainsi montré que $f(G+H) = f(G) + f(H)$.

2) D'après la question précédente on sait que $f(G \oplus H) = f(G) + f(H)$. Il ne reste plus qu'à montrer que $f(G) + f(H) = f(G) \oplus f(H)$. Soient y_1 dans $f(F)$ et y_2 dans $f(G)$ tels que $y_1 + y_2 = 0_F$. Il existe x_1 dans G et x_2 dans H tel que $f(x_1) = y_1$ et $f(x_2) = y_2$. On a donc $f(x_1) + f(x_2) = f(x_1 + x_2) = 0_F$. Comme f est injective, on en déduit que $x_1 + x_2 = 0_E$. Et puisque la somme $F + G$ est directe, on en déduit que $x_1 = x_2 = 0_E$ ce qui entraîne $y_1 = y_2 = 0_F$. On a bien montré que la somme $f(F) + f(G)$ est directe.

3.1.7 Endomorphismes nilpotents

Ce qu'il faut savoir

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On dit que f est un endomorphisme nilpotent lorsqu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que f^p est l'endomorphisme nul sur E. On utilisera l'abus de notation $f^p = 0$.

Si f un endomorphisme nilpotent sur E, alors il existe un unique entier p dans $\mathbb{N}^*$ tel que $f^p = 0$ et $f^{p-1} \neq 0$. On appelle cet entier **indice de nilpotence** de f.

Exemple : Soit $n \in \mathbb{N}$. La dérivation sur $\mathbb{R}_n[X]$ est un endomorphisme nilpotent d'indice $n+1$.

Exercice 3.18

CCP PSI 2005 majoration de l'indice de nilpotence

Soit E un espace vectoriel de dimension n et soit f dans $\mathcal{L}(E)$. On suppose qu'il existe p tel que $f^p = 0$ et $f^{p-1} \neq 0$. Montrer que $f^n = 0$.

Indication de la rédaction :

On pourra s'intéresser à la famille $(x, f(x), \ldots, f^{p-1}(x))$ où x est tel que $f^{p-1}(x) \neq 0$.

Remarquons que si p est inférieur ou égal à n, on a $f^n = f^p \circ f^{n-p} = 0$ et le résultat est acquis. On va montrer qu'on a toujours p inférieur à n.

Par hypothèse, il existe x dans E tel que $f^{p-1}(x) \neq 0$. On va montrer que la familllle $(x, f(x), \ldots, f^{p-1}(x))$ est libre.

Soit $(a_0, \ldots, a_{p-1})$ dans $\mathbb{R}^p$ tel que $\displaystyle\sum_{i=0}^{p-1} a_i f^i(x) = 0$ (1).

En composant cette égalité par f^{p-1} et sachant que $f^p = 0$, on obtient : $a_0 f^{p-1}(x) = 0$. Comme $f^{p-1}(x) \neq 0$ on en déduit $a_0 = 0$. L'égalité (1) se simplifie en $\displaystyle\sum_{i=1}^{p-1} a_i f^i(x) = 0$. En composant cette fois par f^{p-2}, on montre que a_1 est nul, puis en réitérant ce procédé on montre que tous les a_i sont nuls. On a ainsi montré que la famille $(x, f(x), \ldots, f^{p-1}(x))$ est libre. Son cardinal est donc plus petit que la dimension de E, ce qui montre que $p \leqslant n$.

Ce qu'il faut savoir

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et f un endomorphisme nilpotent de E.

- L'entier p tel que $f^p = 0$ et $f^{p-1} \neq 0$ est appelé indice de nilpotence de f.

• Soit p l'indice de nilpotence de f. Soit x tel que $f^{p-1}(x) \neq 0_E$, la famille $(x, f(x), \ldots, f^{p-1}(x))$ est libre.

• L'indice de nilpotence de f est inférieur ou égal à n.

Exercice 3.19

D'après CCP MP 2006

1) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et f dans $\mathcal{L}(E)$. Montrer que si f est nilpotent d'indice de nilpotence $p \geqslant 1$, alors $\mathrm{Id}_E - f$ est bijective et a pour réciproque $f^{-1} = \sum_{i=0}^{p-1} f^i$.

2) Soient $E = \mathbb{R}_n[X]$ et f dans $\mathcal{L}(E)$ définie par : $\forall P \in E,\ f(P) = P - P'$. Montrer que f est inversible et calculer son inverse.

1) Un simple calcul montre que $(f - \mathrm{Id}_E) \circ \sum_{i=0}^{p-1} f^i = \sum_{i=0}^{p-1} (f^i - f^{i+1}) = \mathrm{Id}_E - f^p = \mathrm{Id}_E$.

On en déduit que f est bijective de réciproque $f^{-1} = \sum_{i=0}^{p-1} f^i$.

2) Soit g l'application définie pour tout $P \in E$ par $g(P) = P'$. On a $f = \mathrm{Id}_E - g$ et $g^{n+1} = 0$. Le résultat précédent montre que f est bijective et a pour réciproque $f^{-1} = \mathrm{Id}_E + \sum_{i=0}^{n} g^i$. Ainsi, f^{-1} est définie pour tout $P \in E$ par $f^{-1}(P) = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}$, où $P^{(k)}$ désigne la k-ième dérivée du polynôme P.

Remarque
On a déjà traité la deuxième question avec deux autres points de vue dans l'exercice 3.9 page 59.

3.1.8 Dualité

Ce qu'il faut savoir

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

• On appelle **dual** de E le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des formes linéaires sur E et on le note E^*.

• **Dualité en dimension finie** On suppose E de dimension n.
◦ Le dual de E est de dimension finie et $\dim E^* = \dim E$.
◦ **Base duale :** soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Il existe une unique base de E^*, appelée **base duale** de $\mathcal{B}$, notée $(e_1^*, \ldots, e_n^*)$ telle que :

$$\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2, \; e_i^*(e_j) = \delta_{ij}.$$

◦ **Base anté-duale** : Soit $\mathcal{L}$ une base de E^*, il existe une unique base $\mathcal{B}$ de E appelée **base anté-duale** de $\mathcal{L}$ telle que $\mathcal{L}$ soit la base duale de $\mathcal{B}$.

Exercice 3.20

ENSEA MP 2006

On note $E = \mathbb{R}_n[X]$. Soit a dans $\mathbb{R}$. Montrer que les polynômes $Q_k = (X - a)^k$, $0 \leqslant k \leqslant n$, forment une base de E. Quelle en est la base duale ?

La famille proposée est une famille de polynômes échelonnés en degré, elle est donc libre. Par ailleurs, elle est de cardinal $n + 1$ dans un espace de dimension $n + 1$; c'est donc une base de $\mathbb{R}_n[X]$. On aurait pu également montrer qu'elle est génératrice en utilisant la formule de Taylor :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \; P(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X - a)^k.$$

C'est d'ailleurs cette formule qui va nous permettre de trouver la base duale de la famille proposée. Soit, pour k dans $[\![0, n]\!]$, l'application linéaire φ_k définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par $\varphi_k(P) = \dfrac{P^{(k)}(a)}{k!}$.

Soit alors k dans $[\![0, n]\!]$. Si $j < k$ alors $\varphi_k(Q_j) = 0$ car la dérivée k-ième d'un polynôme de degré j est nulle. Si $j > k$ alors $\varphi_k(Q_j) = 0$ car a est racine d'ordre j de Q_j. On constate de plus que $\varphi_k(Q_k) = 1$. On a bien montré que la famille $(\varphi_0, \ldots, \varphi_n)$ est la base duale de $(Q_0, \ldots, Q_n)$.

Exercice 3.21

TPE MP 2005

Soient ϕ_1, ϕ_2 et ϕ_3 les formes linéaires définies sur $E = \mathbb{R}^3$ par

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_1(x, y, z) = y + z \\ \phi_2(x, y, z) = x + z \\ \phi_3(x, y, z) = x + y \end{array} \right. .$$

Montrer que (ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3) est une base de E^*. Déterminer sa base anté-duale.

• Comme E^* est de dimension 3, pour montrer que (ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3) est une base de E^*, il suffit de montrer que cette famille est libre. Soient $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ dans $\mathbb{R}^3$, tels que $\lambda_1\phi_1 + \lambda_2\phi_2 + \lambda_3\phi_3 = 0_{E^*}$. L'égalité précédente signifie que pour tout (x, y, z) dans $\mathbb{R}^3$, on a $\lambda_1\phi_1(x, y, z) + \lambda_2\phi_2(x, y, z) + \lambda_3\phi_3(x, y, z) = 0_E$. On en déduit que pour tout (x, y, z) dans $\mathbb{R}^3$ on $\lambda_1(y + z) + \lambda_2(z + x) + \lambda_3(y + x) = 0_E$. En évaluant cette dernière égalité en $(x, y, z) = (1, 0, 0)$, puis $(x, y, z) = (0, 1, 0)$ et enfin $(x, y, z) = (0, 0, 1)$, on obtient un système linéaire en $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, dont la résolution mène à $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0, 0, 0)$. On en déduit que cette famille est libre. Comme elle est de cardinal 3 dans un espace de dimension 3, c'est une base de E^*.

• Déterminons (e_1, e_2, e_3) la base anté-duale de ϕ_1, ϕ_2. Cette base (e_1, e_2, e_3) est définie par les conditions : pour tout (i, j) dans $[\![1, 3]\!]^2$ on a $\phi_i(e_j) = \delta_{ij}$. En notant (x_i, y_i, z_i) les coordonnées de e_i dans la base canonique, déterminer (e_1, e_2, e_3) revient à résoudre les systèmes :

$$\begin{cases} y_1 + z_1 = 1 \\ x_1 + z_1 = 0 \\ x_1 + y_1 = 0. \end{cases} \begin{cases} y_2 + z_2 = 0 \\ x_2 + z_2 = 1 \\ x_2 + y_2 = 0. \end{cases} \begin{cases} y_3 + z_3 = 1 \\ x_3 + z_3 = 0 \\ x_3 + y_3 = 0. \end{cases} .$$

Résoudre chacun de ces systèmes est équivalent à inverser la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

On obtient $M^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. On remarquera que M est la matrice des coordonnées de la famille (ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3) dans la base duale canonique de $(\mathbb{R}^3)^*$. Son inversibilité nous indique que cette famille est libre, ce qui nous permet de retrouver le fait que c'est une base de E^*.

On en déduit $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = M^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. De la même manière on obtient $(x_2, y_2, z_2) = \left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$ et $(x_3, y_3, z_3) = \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}\right)$.

Exercice 3.22

TPE MP 2005

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Montrer qu'il existe une et une seule forme linéaire φ sur $\mathbb{K}_n[X]$ qui envoie 1 sur 0, X sur 1 et qui est nulle pour tout polynôme s'annulant en 0 et 1.

Considérons la famille de polynômes $(P_0, \ldots, P_n)$ définie par : $P_0 = 1$, $P_1 = X$ et pour k dans $[\![2, n]\!]$, $P_k = X^{k-1}(1 - X)$. Cette famille est échelonnée en degré et de cardinal $n + 1$, c'est donc une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Dire que $P(1) = P(0) = 0$ signifie qu'il existe $Q \in \mathbb{K}_{n-2}[X]$ tel que $P = X(1-X)Q$, c'est-à-dire qu'il existe $(a_0, \dots, a_{n-2}) \in \mathbb{K}^n$ tel que

$$P = \sum_{k=0}^{n-2} a_k X^{k+1}(1-X) = \sum_{k=2}^{n} a_{k-2} P_k$$

et finalement que P appartient à $\mathrm{Vect}(P_2, \dots, P_n)$.

On en déduit que la condition « φ est nulle pour tout polynôme s'annulant en 0 et 1 » est équivalente à la condition « φ est nulle sur $P_2, \dots, P_n$ ».

On sait qu'alors il existe une unique forme linéaire φ telle que $\varphi(P_1) = 1$ et telle que, pour tout k dans $[\![2, n]\!]$, $\varphi(P_k) = \varphi(P_0) = 0$.

3.2 EXERCICES D'ENTRAÎNEMENT

Exercice 3.23

Mines-Ponts PSI 2007

Soient E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que $\dim \operatorname{Ker} u \leqslant \dim \operatorname{Ker} u^2 \leqslant 2 \dim \operatorname{Ker} u$.

La première inégalité vient de $\operatorname{Ker} u \subset \operatorname{Ker} u^2$.

Soit v l'endomorphisme de $\operatorname{Im} u$ défini, pour tout $x \in \operatorname{Im} v$ par $v(x) = u(x)$. Le théorème du rang donne donc $\dim \operatorname{Im} u = \operatorname{rg} u = \dim \operatorname{Ker} v + \operatorname{rg} v$. Mais $\operatorname{Im} v = \operatorname{Im} u^2$ et $\operatorname{Ker} v = \operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Im} v$. On en déduit que $\operatorname{rg} v = \operatorname{rg} u^2$ et $\dim \operatorname{Ker} v \leqslant \dim \operatorname{Ker} u$. Alors $\operatorname{rg} u = \dim \operatorname{Ker} v + \operatorname{rg} v \leqslant \dim \operatorname{Ker} u + \operatorname{rg} u^2$. Ou encore $\dim E - \dim \operatorname{Ker} u \leqslant \dim \operatorname{Ker} u + \dim E - \dim \operatorname{Ker} u^2$, d'où l'on déduit $\dim \operatorname{Ker} u^2 \leqslant 2 \dim \operatorname{Ker} u$.

Exercice 3.24

CCP PSI 2006

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et f dans $\mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E.

1) Vérifier que pour tout p dans $\mathbb{N}$, on a $\operatorname{Ker} f^p \subset \operatorname{Ker} f^{p+1}$ et $\operatorname{Im} f^p \supset \operatorname{Im} f^{p+1}$. Montrer que les suites $(\operatorname{Ker} f^p)_{p\in\mathbb{N}}$ et $(\operatorname{Im} f^p)_{p\in\mathbb{N}}$ sont stationnaires à partir d'un certain rang.

2) Montrer que pour p dans $\mathbb{N}^*$, si $\operatorname{Ker} f^p = \operatorname{Ker} f^{p+1}$ alors pour tout q dans $\mathbb{N}$ on a $\operatorname{Ker} f^p = \operatorname{Ker} f^{p+q}$.

3) Soit p dans $\mathbb{N}^*$. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

   (1) $\operatorname{Im} f^p = \operatorname{Im} f^{p+1}$, (2) $\operatorname{Ker} f^p = \operatorname{Ker} f^{p+1}$, (3) $E = \operatorname{Ker} f^p \oplus \operatorname{Im} f^p$.

4) Donner des exemples d'endomorphismes f pour lesquels $E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$.

1) Soit x dans E. L'égalité $f^p(x) = 0$ entraîne $f(f^p(x)) = f^{p+1}(x) = 0$, d'où $\operatorname{Ker} f^p \subset \operatorname{Ker} f^{p+1}$.
Soit y dans E. Si y appartient à $\operatorname{Im} f^{p+1}$ alors il existe x dans E tel que $y = f^{p+1}(x)$. Ainsi $y = f^p(f(x))$, ce qui montre que y appartient à $\operatorname{Im} f^p$.
De la relation $\operatorname{Ker} f^p \subset \operatorname{Ker} f^{p+1}$, on déduit que la suite d'entiers $(\dim \operatorname{Ker} f^p)_{p \in \mathbb{N}}$ est croissante, elle est par ailleurs majorée par $\dim E$. Cette suite est donc convergente et comme c'est une suite d'entiers elle est stationnaire à partir d'un certain rang : il existe q dans $\mathbb{N}$ tel que $p \geqslant q$ entraîne $\dim \operatorname{Ker} f^p = \dim \operatorname{Ker} f^q$. Comme on a de plus $\operatorname{Ker} f^p \subset \operatorname{Ker} f^{p+1}$, on en déduit que $p \geqslant q$ entraîne $\operatorname{Ker} f^p = \operatorname{Ker} f^{p+1}$. Le théorème du rang appliqué à f^p et f^{p+1} et la relation $\operatorname{Im} f^p \supset \operatorname{Im} f^{p+1}$ montre que, pour $p \geqslant q$, on a également $\operatorname{Im} f^p = \operatorname{Im} f^{p+1}$.

2) Soit p tel que $\operatorname{Ker} f^p = \operatorname{Ker} f^{p+1}$. Soit q dans $\mathbb{N}$, soit H_q la proposition : $\operatorname{Ker} f^p = \operatorname{Ker} f^{p+q}$. H_1 est vraie par hypothèse.
Soit q dans $\mathbb{N}$, supposons H_q vraie. Soit x dans $\operatorname{Ker} f^{p+q+2}$, alors

$$f^{p+q+2}(x) = f^{p+q+1}(f(x)) = 0.$$

Ainsi $f(x)$ appartient à $\operatorname{Ker} f^{p+q+1}$ et, d'après H_q, il en résulte que $f(x)$ appartient à $\operatorname{Ker} f^{p+q}$. On en déduit $f^{p+q+1}(x) = 0$ ce qui montre que x est dans $\operatorname{Ker} f^{p+q+1}$. L'inclusion réciproque ne pose pas de difficulté. On a donc montré que H_{q+1} est vraie.

Par principe de récurrence on a H_q est vraie pour tout q dans $\mathbb{N}^*$. On a montré que si $\operatorname{Ker} f^p = \operatorname{Ker} f^{p+1}$ alors pour tout q dans $\mathbb{N}^*$ on a $\operatorname{Ker} f^p = \operatorname{Ker} f^{p+q}$.

3) D'après la relation précédente on a $\operatorname{Ker} f^p \subset \operatorname{Ker} f^{p+1}$ et $\operatorname{Im} f^p \supset \operatorname{Im} f^{p+1}$. Le théorème du rang appliqué à f^p et f^{p+1} montre que

$$\dim \operatorname{Ker} f^p = \dim \operatorname{Ker} f^q \Leftrightarrow \dim \operatorname{Im} f^p = \dim \operatorname{Im} f^q.$$

On en déduit que (1) $\Leftrightarrow$ (2).
Montrons que (2) entraîne (3). Le théorème du rang appliqué à f^p montre qu'on a $\dim E = \dim \operatorname{Im} f^p + \dim \operatorname{Ker} f^p$. Il reste à montrer que $\operatorname{Im} f^p \cap \operatorname{Ker} f^p = \{0\}$. Soit z dans $\operatorname{Im} f^p \cap \operatorname{Ker} f^p$. Il existe x dans E tel que $z = f^p(x)$ et $f^p(z) = 0$. On en déduit que $f^{2p}(x) = 0$. Or $p \geqslant 1$ on a donc, d'après le résultat précédent, $\operatorname{Ker} f^p = \operatorname{Ker} f^{2p}$. On en déduit que $f^p(x) = 0$, ce qui montre que $z = 0$. On en déduit que $\operatorname{Im} f^p \cap \operatorname{Ker} f^p = \{0\}$. Finalement on a bien $E = \operatorname{Ker} f^p \oplus \operatorname{Im} f^p$.
Montrons que (3) entraîne (1).
Soit y dans $\operatorname{Im} f^p$. Il existe x dans E tel que $y = f^p(x)$. Comme on a par hypothèse $E = \operatorname{Ker} f^p \oplus \operatorname{Im} f^p$, il existe (x', z) dans $\operatorname{Ker} f^p \times E$ tel que $x = x' + f^p(z)$. Comme $p \geqslant 1$ on peut écrire $y = f^p(x) = f^p(x' + f^p(z)) = f^{2p}(z) = f^{p+1}(f^{p-1}(z))$. $(p \geqslant 1)$. On en déduit que y appartient à $\operatorname{Im} f^{p+1}$. L'inclusion réciproque étant acquise on a bien $\operatorname{Im} f^p = \operatorname{Im} f^{p+1}$.

4) La relation proposée est par exemple vérifiée par les projecteurs puisque pour tout projecteur p, on a $E = \operatorname{Ker} p \oplus \operatorname{Im} p$.

Exercice 3.25

Centrale MP 2007 ☕

Soient n dans $\mathbb{N}$ et $A = \left\{ P \in \mathbb{R}_n\,[X] \mid \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(1) = 0 \right\}$.

1) Montrer que A est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$ et en donner la dimension.

2) Donner une base de A

1) Soit φ l'application de $\mathbb{R}_n\,[X]$ dans $\mathbb{R}$ qui à P associe $\sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(1)$. L'application φ est linéaire et A est le noyau de φ, par conséquent A est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n\,[X]$. Comme φ est une forme linéaire non nulle, par exemple $\varphi(1) = 1$, le sous-espace vectoriel A est un hyperplan de $\mathbb{R}_n\,[X]$ et on a donc $\dim A = n$.

2) Au vu de l'expression de φ, il est naturel d'examiner les valeurs quelle prend en les $Q_p = (X-1)^p$ pour p dans $[\![1, n]\!]$. Comme 1 est racine multiple d'ordre p de Q et que $k > p$ entraîne $Q^{(k)} = 0$, on a $\varphi((X-1)^k) = Q_p^{(p)}(1) = p!$. On peut alors construire une famille de polynômes échelonnée en degré dont chacun des éléments est dans le noyau de φ : pour p dans $[\![1, n]\!]$ on choisit $H_p(X) = Q_p(X) - p! = (X-1)^p - p!$. La famille $(H_1, \ldots, H_n)$ est libre et de cardinal n dans un sous-espace vectoriel de dimension n, c'est donc une base de A.

Exercice 3.26

Soit E un espace vectoriel. Soient f et g deux endomorphismes de E qui commutent. Montrer que le noyau et l'image de f sont stables par g.

Montrons que le noyau de f est stable par g. Soit x dans $\operatorname{Ker} f$. On a $f(x) = 0_E$, donc $g(f(x)) = 0_E$, alors $f(g(x)) = g(f(x)) = 0_E$ ce qui montre que $g(x)$ est dans le noyau de f.

Montrons que l'image de f est stable par g. Soit y dans $\operatorname{Im} f$, il existe x dans E tel que $f(x) = y$. On a alors $g(y) = g(f(x)) = f(g(x))$ ce qui montre que $g(y)$ est dans l'image de f. On a bien sûr également, les endomorphismes f et g jouant des rôles symétriques, la stabilité du noyau et de l'image de g par f. Ces résultats sont importants pour l'étude du commutant d'un endomorphisme.

Exercice 3.27

Mines-Ponts MP 2006, Centrale MP 2007 Inégalité de Sylvester ☕

Soient f et g dans $\mathcal{L}(E)$ où E est un espace vectoriel de dimension finie n.

1) Montrer que $|\operatorname{rg} f - \operatorname{rg} g| \leqslant \operatorname{rg}(f+g) \leqslant \operatorname{rg} f + \operatorname{rg} g$.

2) Montrer l'équivalence des deux propositions :
 i) $\operatorname{rg}(f+g) = \operatorname{rg} f + \operatorname{rg} g$
 ii) $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Im} g = \{0\}$ et $\operatorname{Ker} f + \operatorname{Ker} g = E$.

3) Montrer que $\operatorname{rg} f + \operatorname{rg} g - n \leqslant \operatorname{rg}(g \circ f) \leqslant \min\{\operatorname{rg} f, \operatorname{rg} g\}$.

1) Commençons par montrer l'inégalité de droite en comparant $\operatorname{Im}(f+g)$ et $\operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g$.
Soit x dans E. Si x appartient à $\operatorname{Im}(f+g)$, alors il existe $x' \in E$ tel que $x = f(x') + g(x')$. Il en résulte que x appartient à $\operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g$. On en déduit que $\operatorname{Im}(f+g) \subset \operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g$. Ainsi $\dim \operatorname{Im}(f+g) \leqslant \dim(\operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g)$.
Comme $\dim(\operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g) \leqslant \dim \operatorname{Im} f + \dim \operatorname{Im} g$, on a finalement
$\dim \operatorname{Im}(f+g) \leqslant \dim \operatorname{Im} f + \dim \operatorname{Im} g$, ce qui est exactement $\operatorname{rg}(f+g) \leqslant \operatorname{rg} f + \operatorname{rg} g$.
Pour montrer l'inégalité de gauche on va utiliser une méthode très classique pour ce genre d'inégalité en appliquant celle de droite aux fonctions $f+g$ et $-g$. On a alors $\operatorname{rg}(f+g-g) \leqslant \operatorname{rg}(f+g) + \operatorname{rg}(-g)$. Comme g et $-g$ ont la même image, ces deux applications ont même rang et l'inégalité précédente devient $\operatorname{rg} f \leqslant \operatorname{rg}(f+g) + \operatorname{rg} g$. On en déduit $\operatorname{rg} f - \operatorname{rg} g \leqslant \operatorname{rg}(f+g)$ (1). En échangeant les rôles de f et g, on obtient $\operatorname{rg} g - \operatorname{rg} f \leqslant \operatorname{rg}(f+g)$ (2). Les inégalités (1) et (2) se résument en $|\operatorname{rg} f - \operatorname{rg} g| \leqslant \operatorname{rg}(f+g)$.

2) Montrons d'abord que i) entraîne $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Im} g = \{0\}$. Supposons ainsi que $\operatorname{rg}(f+g) = \operatorname{rg} f + \operatorname{rg} g$. On a déjà dit que $\operatorname{Im}(f+g) \subset (\operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g)$. On en déduit, en utilisant la formule de Grassmann, que

$$\dim \operatorname{Im}(f+g) \leqslant \dim \operatorname{Im} f + \dim \operatorname{Im} g - \dim(\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Im} g).$$

La condition $\operatorname{rg}(f+g) = \operatorname{rg} f + \operatorname{rg} g$ montre alors que $\dim(\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Im} g) \leqslant 0$, ce qui entraîne $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Im} g = \{0\}$.
Montrons alors qu'on a aussi $\operatorname{Ker} f + \operatorname{Ker} g = E$. On va montrer que sous la condition $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Im} g = \{0\}$, on a $\dim(\operatorname{Ker} f + \operatorname{Ker} g) \geqslant n$. La formule de Grassmann montre que (3) $\dim(\operatorname{Ker} f + \operatorname{Ker} g) = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Ker} g - \dim(\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Ker} g)$.
Remarquons alors que $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Ker} g = \operatorname{Ker}(f+g)$. La première inclusion $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Ker} g \subset \operatorname{Ker}(f+g)$ est immédiate. Soit alors x dans $\operatorname{Ker}(f+g)$. On a $f(x) = g(-x)$, ce qui montre que $f(x)$ est dans l'image de f et dans l'image de g. Le résultat $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Im} g = \{0\}$ montre alors que $f(x) = g(x) = 0$, et on a donc x appartient à $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Ker} g$.
On déduit de l'égalité $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Ker} g = \operatorname{Ker}(f+g)$ et du théorème du rang que $\dim(\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Ker} g) = n - \operatorname{rg}(f+g)$. En reportant cette égalité dans la relation (3) et en utilisant à nouveau le théorème du rang pour f et pour g on obtient

$$\begin{aligned}\dim(\operatorname{Ker} f + \operatorname{Ker} g) &= \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Ker} g - n + \operatorname{rg}(f+g)\\ &= n - \operatorname{rg}(f) - \operatorname{rg}(g) + \operatorname{rg}(f+g).\end{aligned}$$

Or on vient de montrer que $\operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g) = \operatorname{rg}(f+g)$. On en déduit que $\dim(\operatorname{Ker} f + \operatorname{Ker} g) = n$, ce qui entraîne $\operatorname{Ker} f + \operatorname{Ker} g = E$.
Supposons réciproquement que $\operatorname{Ker} f + \operatorname{Ker} g = E$ et $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Im} g = \{0\}$. La

deuxième condition entraîne à nouveau $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Ker} g = \operatorname{Ker}(f+g)$. On en déduit de la même manière que précédemment que

$$\dim(\operatorname{Ker} f + \operatorname{Ker} g) = n - \operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g) - \operatorname{rg}(f+g).$$

Comme on a par hypothèse $\dim(\operatorname{Ker} f + \operatorname{Ker} g) = n$, on en déduit que la proposition $\operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g) = \operatorname{rg}(f+g)$ est bien vérifiée.

3) Commençons par montrer l'inégalité de droite. Cette inégalité est équivalente à $\operatorname{rg}(g \circ f) \leqslant \operatorname{rg} f$ et $\operatorname{rg}(g \circ f) \leqslant \operatorname{rg} g$. Comme on a $\operatorname{Im}(g \circ f) \subset \operatorname{Im} g$ on a $\operatorname{rg}(g \circ f) \leqslant \operatorname{rg} g$. Par ailleurs on a $\operatorname{Ker}(f) \subset \operatorname{Ker}(g \circ f)$. On en déduit $\dim(\operatorname{Ker}(f)) \leqslant \dim(\operatorname{Ker}(g \circ f))$. Le théorème du rang montre alors que $n - \operatorname{rg}(f) \leqslant n - \operatorname{rg}(g \circ f)$. On en déduit l'inégalité souhaitée.
Pour montrer l'inégalité de gauche, on introduit la restriction de g à $\operatorname{Im} f$, notée $g_{|\operatorname{Im} f}$ et définie par : $g_{|\operatorname{Im} f} : \begin{array}{ccc} \operatorname{Im} f & \longrightarrow & E \\ x & \mapsto & g(x). \end{array}$
L'ensemble $\operatorname{Im} f$ est un espace vectoriel et $g_{|\operatorname{Im} f}$ est une application linéaire qui a même image que $g \circ f$.
Soit y dans E. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} y \in \operatorname{Im} g \circ f &\Leftrightarrow \exists x \in E \ \text{ tel que } \ y = g \circ f\ (x) \\ &\Leftrightarrow \exists x \in E \ \text{ tel que } \ y = g(f(x)) \\ &\Leftrightarrow \exists x' \in \operatorname{Im} f \ \text{ tel que } \ y = g(x') \\ &\Leftrightarrow y \in \operatorname{Im}(g_{|\operatorname{Im} f}). \end{aligned}$$

On va donc voir quels sont les renseignements que nous donne le théorème du rang appliqué à $g_{|\operatorname{Im} f}$ et on essaiera d'expliciter son noyau. On a déjà $\operatorname{rg}(g \circ f) = \operatorname{rg}(g_{|\operatorname{Im} f})$. En appliquant le théorème du rang à $g_{|\operatorname{Im} f}$ on a

$$\dim \operatorname{Im} f = \operatorname{rg}(g_{|\operatorname{Im} f}) + \dim \operatorname{Ker}(g_{|\operatorname{Im} f}),$$

ce dont on déduit

$$\operatorname{rg} f = \operatorname{rg}(g \circ f) + \dim \operatorname{Ker}(g_{|\operatorname{Im} f})\,. \tag{4}$$

On a par ailleurs $\operatorname{Ker}(g_{|\operatorname{Im} f}) = \operatorname{Ker} g \cap \operatorname{Im} f$. En effet Soit x dans $\operatorname{Ker}(g_{|\operatorname{Im} f})$, par définition, on a x dans $\operatorname{Im} f$ et $g(x) = 0$, ce qui est équivalent à x est dans $\operatorname{Ker} g \cap \operatorname{Im} f$. La relation (4) devient (5) $\operatorname{rg} f = \operatorname{rg}(g \circ f) + \dim(\operatorname{Ker} g \cap \operatorname{Im} f)$. Comme $\dim \operatorname{Ker} g \cap \operatorname{Im} f \leqslant \dim \operatorname{Ker} g \leqslant n - \operatorname{rg} g$, on déduit de (5) que $\operatorname{rg} f \leqslant \operatorname{rg}(g \circ f) + n - \operatorname{rg} g$, ce qui donne l'inégalité voulue, appelée inégalité de Sylvester.

Exercice 3.28

Mines-Ponts MP 2005

Soient des entiers n et p tels que $0 < p \leqslant n$. Soit f dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ et soit g dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$ telles que $f \circ g = \operatorname{Id}_{\mathbb{R}^p}$. Donner le rang et la nature de $g \circ f$.

L'application $f \circ g = \operatorname{Id}_{\mathbb{R}^p}$ est bijective. On en déduit que f est surjective et que g est injective. Le fait que f est surjective entraîne (1) $\operatorname{Im} g \circ f = \operatorname{Im} g$. Comme g est injective d'après le théorème du rang : $\operatorname{rg} g = p$. On en déduit $\operatorname{rg} g \circ f = p$.

On a $(g \circ f)^2 = g \circ f \circ g \circ f = g \circ f$, l'application $g \circ f$ est donc un projecteur. Comme g est injective $g \circ f(x) = 0$ si et seulement si $f(x) = 0$ et on a donc (2) $\operatorname{Ker} g \circ f = \operatorname{Ker} f$. De (1) et (2) on peut préciser que $g \circ f$ est le projecteur sur $\operatorname{Im} g$, parallèlement à $\operatorname{Ker} f$.

Exercice 3.29

Mines-Ponts MP 2005

Soient u et v dans dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ tels que $\operatorname{rg} u + \operatorname{rg} v \leqslant n$ et $u + v = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}$. Montrer que u et v sont des projecteurs.

En appliquant u à l'égalité $u + v = \mathrm{Id}_E$, on obtient $u^2 + u \circ v = u$. Pour montrer que u est un projecteur il suffit donc de montrer que $u \circ v = 0$. Pour obtenir ce dernier résultat il suffit de montrer que $\operatorname{Im} v \subset \operatorname{Ker} u$. Or on constate que ce qui est facile à montrer c'est plutôt l'inclusion $\operatorname{Ker} u \subset \operatorname{Im} v$, en effet pour tout x dans $\operatorname{Ker} u$, l'égalité $u(x) + v(x) = x$ devient $v(x) = x$ ce qui montre que x appartient à $\operatorname{Im} v$. On peut alors essayer d'examiner les dimensions de $\operatorname{Im} v$ et $\operatorname{Ker} u$ pour montrer que ces deux sous-espaces vectoriels sont égaux.

Commençons par montrer que $\operatorname{rg} u + \operatorname{rg} v = n$. Pour tout x dans E, on a $x = u(x) + v(x)$, on en déduit que $E = \operatorname{Im} u + \operatorname{Im} v$. Ainsi on a $\dim(\operatorname{Im} u + \operatorname{Im} v) = n$, or on sait que $\dim(\operatorname{Im} u + \operatorname{Im} v) = \dim \operatorname{Im} u + \dim \operatorname{Im} v - \dim \operatorname{Im} u \cap \operatorname{Im} v$. On en déduit $\dim \operatorname{Im} u + \dim \operatorname{Im} v \geqslant n$. Comme par hypothèse $\operatorname{rg} u + \operatorname{rg} v \leqslant n$, on a finalement $\operatorname{rg} u + \operatorname{rg} v = n$.

Le théorème du rang montre alors que $\dim \operatorname{Ker} u = n - \operatorname{rg} u = \operatorname{rg} v$. Comme on sait que $\operatorname{Ker} u \subset \operatorname{Im} v$, on en déduit $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Im} v$ et par conséquent $u \circ v = 0$.

On a donc montré que $u^2 = u$, ce qui montre que u est un projecteur. Les hypothèses étant symétriques en u et v, l'application linéaire v est également un projecteur.

3.3 EXERCICES D'APPROFONDISSEMENT

Exercice 3.30

Centrale PC 2006

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soient f et g deux endomorphismes de E. Montrer que

1) $\operatorname{rg}(g \circ f) = \operatorname{rg} g \Leftrightarrow E = \operatorname{Im} f + \operatorname{Ker} g$.

2) $\operatorname{rg}(g \circ f) = \operatorname{rg} f \Leftrightarrow \operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} g = \{0\}$

1) On a toujours $\operatorname{Im} g \circ f \subset \operatorname{Im} g$. On en déduit que l'égalité $\operatorname{rg}(g \circ f) = \operatorname{rg} g$ est équivalente à $\operatorname{Im} g \circ f = \operatorname{Im} g$.

Supposons $E = \operatorname{Im} f + \operatorname{Ker} g$. Montrons qu'alors $\operatorname{Im} g \circ f \supset \operatorname{Im} g$. Soit y dans $\operatorname{Im} g$. Il existe x dans E tel que $g(x) = y$. Or par hypothèse il existe (x', z) dans $E \times \operatorname{Ker} g$

tel que $x = f(x') + z$. On a alors $y = g(x) = g(f(x'))$, ce qui montre que y est dans $\operatorname{Im} g \circ f$. Grâce à la remarque précédente on en déduit $\operatorname{rg}(g \circ f) = \operatorname{rg} g$.

Supposons réciproquement que $\operatorname{Im} g \circ f = \operatorname{Im} g$. Soit x dans E. Il existe par hypothèse x' dans E tel que $g \circ f(x') = g(x)$. On en déduit $g(x - f(x')) = 0$, donc $z = x - f(x')$ est dans $\operatorname{Ker} g$. On a ainsi réussi à écrire $x = f(x') + z$ comme somme d'un élément de $\operatorname{Im} f$ et d'un élément de $\operatorname{Ker} g$. On a donc montré $E = \operatorname{Im} f + \operatorname{Ker} g$.

2) Supposons $\operatorname{rg}(g \circ f) = \operatorname{rg} f$.

Le théorème du rang montre alors que $\dim \operatorname{Ker} f = \dim \operatorname{Ker} g \circ f$. Comme on a toujours $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker} g \circ f$, on en déduit $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} g \circ f$. Soit alors x dans $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} g$, il existe x' dans E tel que $x = f(x')$ et $g(x) = g(f(x')) = 0$. On en déduit que x' est dans $\operatorname{Ker} g \circ f$, or on vient de montrer que $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} g \circ f$, on a donc $f(x') = x = 0$. On a ainsi montré que $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} g \subset \{0\}$. L'inclusion réciproque est immédiate. On a donc $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} g = \{0\}$.

Supposons réciproquement que $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} g = \{0\}$, et montrons qu'alors on a l'égalité $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} g \circ f$. Il suffit de montrer $\operatorname{Ker} f \supset \operatorname{Ker} g \circ f$. Soit x dans $\operatorname{Ker} g \circ f$ alors $f(x)$ est dans $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} g = \{0\}$. On a donc $f(x) = 0$, ce qui montre que x est dans $\operatorname{Ker} f$. On conclut par le théorème du rang qu'on a bien $\operatorname{rg}(g \circ f) = \operatorname{rg} f$.

Remarque

On peut par exemple utiliser les résultats obtenus pour démontrer le résultat classique : il y a équivalence (en dimension finie) entre $E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Im} f^2 = \operatorname{Im} f$. On remarquera également que ces résultats sont parfaitement cohérents avec ceux dont on dispose sur les projecteurs.

Exercice 3.31

Centrale MP, Mines-Ponts 2006

Soient n dans $\mathbb{N}^*$, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ des réels distincts non nuls et, pour $1 \leqslant i \leqslant n$, L_i la forme linéaire définie sur $E = \mathbb{R}_{n-1}[X]$ par : $\forall P \in E, L_i(P) = \displaystyle\int_0^{a_i} P(t)\,dt$.

Montrer que $(L_1, L_2, \ldots, L_n)$ est une base de E^*.

Remarquons tout d'abord que pour P dans $\mathbb{R}_n[X]$ la fonction F_P qui à x associe $\displaystyle\int_0^x P(t)\,dt$ est la primitive de P qui s'annule en 0. On a ainsi :

$$\forall P \in E, L_k(P) = F_P(a_k).$$

Soit $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ dans $\mathbb{R}^n$ tel que $\displaystyle\sum_{k=1}^n \alpha_k L_k = 0$. Ceci signifie que pour tout polynôme P de E on a $\displaystyle\sum_{k=1}^n \alpha_k L_k(P) = \sum_{k=1}^n \alpha_k F_P(a_k) = 0$.

Il est alors naturel de chercher des polynômes particuliers qui permettront de faire apparaître des égalités menant à la nullité de tous les α_k. On va proposer des polynômes qui devraient vous rappeler les polynômes interpolateurs de Lagrange. Soit, pour i dans $[\![1,n]\!]$, le polynôme Q_i défini par : $Q_i(X) = X \prod_{j\in[\![1,n]\!]\setminus\{i\}} \left(\dfrac{X-a_j}{a_i-a_j}\right)$.

Soit P_i le polynôme dérivé de Q_i. Par construction Q_i est la primitive de P_i qui s'annule en 0.

Pour tout k dans $[\![1,n]\!]$: $L_k(P_i) = Q_i(a_k) = \begin{cases} 0 \text{ si } k \neq i \\ 1 \text{ si } k = i \end{cases}$.

Ainsi, pour tout i dans $[\![1,n]\!]$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \alpha_k L_k(Q_i) = \alpha_i = 0$.

On en déduit que la famille $(L_1, L_2, \ldots, L_n)$ est libre.

Comme c'est une famille libre de cardinal n dans un espace de dimension n, la famille $(L_1, L_2, \ldots, L_n)$ est une base de E^*.

Exercice 3.32

Mines-Ponts 2005

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, n dans $\mathbb{N}^*$ et $f_1, \ldots, f_p$ des formes linéaires sur E. Montrer que $(f_1, \ldots, f_p)$ est une famille libre de E^* si et seulement si :

$$\forall(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p,\ \exists x \in E \text{ tel que } \forall i \in \{1, \ldots, p\},\ f_i(x) = \lambda_i$$

La propriété à démontrer est équivalente à la proposition suivante : la famille $(f_1, \ldots, f_p)$ est libre si et seulement si l'application Φ de E vers $\mathbb{R}^p$ qui à x associe $\Phi(x) = (f_1(x), \ldots, f_p(x))$ est surjective.

Supposons que : $\forall(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p,\ \exists x \in E$ tel que $\forall i \in \{1, \ldots, p\},\ f_i(x) = \lambda_i$.

Soit $(\alpha_1, \ldots, \alpha_p) \in \mathbb{R}^p$. Par hypothèse pour tout j dans $[\![1,p]\!]$, il existe x_j dans E tel que : $\forall i \in [\![1,p]\!],\ f_i(x_j) = \delta_{ij}$ où δ_{ij} désigne le symbole de Kronecker. On a alors :

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{p} \alpha_i f_i = 0 &\Rightarrow \forall x \in E,\ \sum_{i=1}^{p} \alpha_i f_i(x) = 0 \\ &\Rightarrow \forall j \in [\![1,p]\!],\ \sum_{i=1}^{p} \alpha_i f_i(x_j) = 0 \\ &\Rightarrow \forall j \in [\![1,p]\!],\ \alpha_j = 0\end{aligned}$$

On a montré que la famille $(f_1, \ldots, f_p)$ est libre.

Pour démontrer que si la famille $(f_1, \ldots, f_p)$ est libre, alors l'application Φ définie plus haut est surjective, on va passer par la contraposée de cette proposition. Supposons que Φ n'est pas surjective. Alors $\operatorname{Im}\Phi$ est inclus dans un hyperplan H de $\mathbb{R}^p$. Soit $(\alpha_1, \ldots, \alpha_p)$ dans $\mathbb{R}^p$ tel que $H = \left\{(x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{R}^p \mid \sum_{i=1}^{p} \alpha_i x_i = 0\right\}$.
Remarquons que comme H est un hyperplan, on a $(\alpha_1, \ldots, \alpha_p) \neq (0, \ldots, 0)$. Comme pour tout x dans E, $\Phi(x)$ appartient à H. On en déduit que pout tout x dans E, on a $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i f_i(x) = 0$. Ceci signifie exactement que $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i f_i = 0$, et comme la famille $(\alpha_1, \ldots, \alpha_p) \neq (0, \ldots, 0)$ ceci montre que la famille $(f_1, \ldots, f_p)$ est liée.

Exercice 3.33

Mines Ponts 2005 ☕

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $\mathcal{S}$ l'ensemble des sous-espaces vectoriels de E. Trouver les applications d de $\mathcal{S}$ dans $\mathbb{R}^+$ telles que :

$$\forall (F, F') \in \mathcal{S}^2,\ F \cap F' = \{0\} \Rightarrow d(F + F') = d(F) + d(F').$$

On peut commencer par essayer de voir si on ne connaît pas quelques applications simples de $\mathcal{S}$ dans $\mathbb{R}^+$ qui répondent à la condition proposée. On constate sans peine que l'application nulle et la dimension conviennent, avec un peu d'imagination on peut même proposer les applications de la forme α dim (où α est un réel positif). Ces premieres remarques ne donnent pas la réponse à la question question posée mais permettent au moins d'orienter les recherches ultérieures : il existe de telles applications, il en existe même plusieures.

L'une des caractéristiques importantes des applications proposées dans la remarque précédente est qu'elles sont constantes sur les sous-espaces de même dimension.

Par ailleurs, commme E est de dimension finie, tout sous-espace vectoriel H de E admet une base, par exemple $(e_1, \ldots, e_p)$ et on a $H = \oplus_{i=1}^{p} \operatorname{Vect}(e_i)$. On montre par récurrence que, pour une application d répondant à la condition proposée, on a

$$d(H) = \sum_{i=1}^{p} d(\operatorname{Vect}(e_i)) \quad (1).$$

Cette dernière remarque amène donc naturellement à examiner comment se comporte une telle application d sur les droites vectorielles et, suivant la première remarque, on va essayer de montrer que d est constante sur les droites vectorielles.

Soient H_1 et H_2 deux droites vectorielles de vecteurs directeurs respectifs e_1 et e_2. On va montrer que H_1 et H_2 ont un supplémentaire commun. Si e_1 et e_2 sont colinéaires alors $H_1 = H_2$ et le résultat est acquis. Sinon, on complète la famille libre (e_1, e_2) en une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de E. Le sous-espace $H = \operatorname{Vect}(e_1 + e_2, e_3, \ldots, e_n)$ (réduit à

$H = \mathrm{Vect}(e_1+e_2)$ pour $n = 2$) est un supplémentaire commun à H_1 et H_2. On a alors $E = H_1 \oplus H = H_2 \oplus H$, et par conséquent : $d(H_1) = d(H_2)$. On a donc montré que d est constante sur les droites vectorielles. Soit α cette constante. Grâce à la formule (1) on obtient $d(H) = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} d(\mathrm{Vect}(e_i)) = \alpha\, p = \alpha \dim H$.

On a donc montré que toute application de $\mathcal{S}$ dans $\mathbb{R}$ satisfaisant à la condition de l'énoncé est de la forme $\alpha \dim$ où α est un réel positif.

Exercice 3.34

Mines-Ponts MP 2005

Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie de l'espace vectoriel $\mathbb{C}[X]$.

1) Montrer que F admet une base dont tous les polynômes ont même degré.

2) Montrer que F admet une base $(P_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ telle que la suite $(\deg P_i)$ soit strictement croissante.

1) Soit n la dimension de F. Soit $\mathcal{B} = (P_1, \ldots, P_n)$ une base de F. La famille $(P_1, \ldots, P_n)$ est finie. Quitte à renuméroter les éléments de la famille $\mathcal{B}$, on peut donc se ramener à P_1 de degré maximal dans la famille $(P_1, \ldots, P_n)$. On va modifier la base $\mathcal{B} = (P_1, \ldots, P_n)$ de F, en ajoutant P_1 aux éléments qui ne sont pas de degré maximal et montrer que la famille ainsi obtenue est une base qui vérifie le critère proposé.

Soit la famille $(Q_1, \ldots, Q_n)$ de polynômes définie par : $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $Q_i = P_i+\delta_i P_1$. où δ_i est défini par : $\delta_i = 1$ si $\deg P_i < \deg(P_1)$ et $\delta_i = 0$ sinon .

Par construction le degré de Q_i est égal au degré de P_1.

Notons $\mathcal{B}'$ la famille $(Q_1, \ldots, Q_n)$.

Comme on ne modifie pas le rang d'une famille de vecteurs en ajoutant à chacun de ses éléments une combinaison linéaire des autres éléments, la famille $\mathcal{B}'$ a même rang que la famille $\mathcal{B}$, elle est donc libre. Pour tout i dans $[\![1,n]\!]$, le polynôme Q_i est dans F car il est combinaison linéaire d'éléments de $\mathcal{B}$. On a donc une famille libre d'éléments de F qui est de cardinal n, c'est donc une base de F qui est telle que tous ses éléments ont même degré.

2) On va montrer ce résultat par récurrence sur la dimension de F.

Si la dimension de F est égale à 1, toute base de F convient.

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Supposons le résultat acquis pour tout sous-espace de $\mathbb{C}[X]$ de dimension $n-1$.

Soit F un sous-espace vectoriel de dimension n. Par la procédure précédente on construit une base $(Q_1, \ldots, Q_n)$ de F dont tous les polynômes sont de même degré. Quitte à multiplier certains de ces polynômes par un scalaire adéquat, on peut se ramener à une base dont tous les polynômes ont même degré et sont unitaires.

Considérons alors la famille $(R_1, \dots, R_n)$ de polynômes définie par : pour tout i dans $[\![1, n-1]\!]$, $R_i = P_i - P_n$ et $R_n = P_n$. On montre comme précédemment que la famille obtenue est une base de F. De plus le degré des R_i est strictement inférieur au degré de R_n. On a $F = \text{Vect}\,(R_1, \dots, R_{n-1}) \oplus \text{Vect}(R_n)$. Le sous-espace $\text{Vect}\,(R_1, \dots, R_n)$ est de dimension $n-1$. Il existe donc une base $(S_1, \dots, S_{n-1})$ de $\text{Vect}\,(R_1, \dots, R_{n-1})$, telle que la suite $(\deg S_i)$ soit strictement croissante. Comme $F = \text{Vect}\,(R_1, \dots, R_{n-1}) \oplus \text{Vect}(R_n)$, la famille $(S_1, \dots, S_{n-1}, R_n)$ est une base de F. Montrons que $\deg S_{n-1} < \deg R_n$. Comme par construction S_{n-1} est dans $\text{Vect}\,(R_1, \dots, R_{n-1})$, le polynôme S_{n-1} est combinaison linéaire des polynômes R_i qui sont tous de degré strictement inférieur au degré de R_n, on en déduit $\deg S_{n-1} < \deg R_n$. On a ainsi montré que la suite des degrés de la famille $(S_1, \dots, S_{n-1}, R_n)$ est strictement croissante et c'est une base de F.

Exercice 3.35

Centrale MP 2006

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie n et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 = -\text{Id}_E$.

1) Montrer que $(a, f(a))$ est libre pour tout a non nul de E.

2) Montrer que n est un entier pair. On pose $n = 2p$.
On pose $\text{Vect}(a, f(a)) = F(a)$ pour tout a non nul de E.

3) Montrer l'existence de $a_1, \dots, a_p$ dans E tels que $F(a_1) \oplus \cdots \oplus F(a_p) = E$.

4) Déduire des questions précédentes une base de E dans laquelle la matrice de f est particulièrement simple.

1) Soit α et β deux réels tels que $\alpha a + \beta f(a) = 0$. En appliquant f, on obtient $\alpha f(a) - \beta a = 0$ Alors $\alpha(\alpha a + \beta f(a)) - \beta(\alpha f(a) - \beta a) = (\alpha^2 + \beta^2)a = 0$, et puisque $a \neq 0$, on en déduit $\alpha^2 + \beta^2 = 0$, s'où $\alpha = \beta = 0$. Le système $(a, f(a))$ est donc libre.

2) Si $f^2 = -\text{Id}$, on a $\det f^2 = (\det f)^2 = (-1)^n$, ce qui n'est possible que si n est pair.

3) Soit $k \in \{1, \dots, p-1\}$, et soit $(a_1, \dots, a_k)$ dans E^k tels que la somme $F_k = F(a_1) + \cdots + F(a_k)$ soit directe. Montrons la propriété suivante : Si a_{k+1} n'appartient pas à F_k, alors la somme $F(a_1) + \cdots + F(a_k) + F(a_{k+1})$ est directe.

Montrons que $F(a_{k+1}) \cap F_k = \{0\}$. Soit x dans $F(a_{k+1}) \cap F_k$. Il existe deux réels λ et μ tels que $x = \lambda a_{k+1} + \mu f(a_{k+1})$. Comme F_k est stable par f, on a

$$f(x) = f(\lambda a_{k+1} + \mu f(a_{k+1})) = \lambda f(a_{k+1}) - \mu a_{k+1} \in F_k,$$

puis $\quad \lambda(\lambda a_{k+1} + \mu f(a_{k+1})) - \mu(\lambda f(a_{k+1}) - \mu a_{k+1}) = (\lambda^2 + \mu^2) a_{k+1} \in F_k\,.$

Mais puisque a_{k+1} n'est pas dans F_k cela implique $\lambda = \mu = 0$. Il en résulte que $F(a_{k+1}) \cap F_k = \{0\}$. La somme $F(a_{k+1}) + F_k$ est donc directe, d'où l'on déduit que la somme $F(a_1) + \cdots + F(a_k) + F(a_{k+1})$ est directe. Alors $\dim(F(a_1) + \cdots + F(a_k) + F(a_{k+1})) = 2k + 2$.
En partant de $F(a_1)$ où $a_1 \neq 0$, on construit ainsi une suite de sous-espaces $F(a_1), \ldots, F(a_p)$ tels que $\dim(F(a_1) + \cdots + F(a_k) + F(a_p)) = 2p$. Alors $F(a_1) \oplus \cdots \oplus F(a_k) \oplus F(a_p) = E$, ce qui donne le résultat.

4) Notons $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Dans la base $(a_1, f(a_1), a_2, f(a_2), \ldots, a_p, f(a_p))$, l'application f a pour matrice $\begin{pmatrix} J & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & J \end{pmatrix}$.

Exercice 3.36

Centrale MP 2006

Soit n dans $\mathbb{N}^*$ et $p_1, p_2, \ldots, p_m$ des projecteurs non nuls de $E = \mathbb{R}^n$ vérifiant $p_i \circ p_j = 0$ pour tout $i \neq j$.

1) On suppose $m = n$. Montrer que $E = \operatorname{Im} p_1 \oplus \cdots \oplus \operatorname{Im} p_n$.

2) Montrer que la famille $(p_1, p_2, \ldots, p_m)$ est libre.

3) Soit p un projecteur de $\mathbb{R}^n$. Déterminer la dimension du commutant de p (c'est-à-dire l'ensemble des endomorphismes de $\mathbb{R}^n$ commutant avec p).

4) Trouver une partie libre de cardinal maximal, constituée de projecteurs de $\mathbb{R}^n$.

1) On va commencer par montrer que la somme $\sum_{i=1}^{n} \operatorname{Im} p_i$ est directe.

Soit $(y_1, \ldots, y_n)$ dans $\operatorname{Im} p_1 \times \cdots \times \operatorname{Im} p_n$. On suppose que $\sum_{j=1}^{n} y_j = 0$.

La condition $p_i \circ p_j = 0$ pour tout $i \neq j$ montre que $p_i(y_j) = 0$ pour tout $i \neq j$. Soit alors i dans $[\![1, n]\!]$. De $p_i\left(\sum_{j=1}^{n} y_j\right) = 0$ on déduit $\sum_{j=1}^{n} p_i(y_j) = p_i(y_i) = y_i = 0$. On en conclut que la somme $\sum_{i=1}^{m} \operatorname{Im} p_i$ est directe.

Montrons alors que $\bigoplus_{i=1}^{m} \operatorname{Im} p_i = E$. Soit i dans $[\![1, n]\!]$. Par hypothèse $p_i \neq 0$, et on a donc $\dim \operatorname{Im} p_i \geqslant 1$. Comme $\dim \bigoplus_{i=1}^{m} \operatorname{Im} p_i = \sum_{i=1}^{m} \dim \operatorname{Im} p_i$, on en déduit que $\dim \bigoplus_{i=1}^{m} \operatorname{Im} p_i \geqslant m$. Or on a supposé $m = n$, donc $\bigoplus_{i=1}^{m} \operatorname{Im} p_i$ est un sous-espace vectoriel de E, de dimension supérieure ou égale à $\dim E$. Il en résulte que $\bigoplus_{i=1}^{m} \operatorname{Im} p_i = E$.

2) Soit $(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ dans $\mathbb{R}^m$ tel que $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i p_i = 0$. Soit j dans $[\![1, n]\!]$. On a alors $p_j \circ \left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i p_i \right) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i p_j \circ p_i = 0$. Comme par hypothèse $i \neq j$ entraîne $p_j \circ p_i = 0$, on en déduit $\lambda_j p_j^2 = \lambda_j p_j = 0$. Comme p_j est un projecteur non nul, il en résulte que $\lambda_j = 0$. On a ainsi montré que la famille $(p_1, p_2, \ldots, p_m)$ est libre.

3) Soit f dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. Montrons que f appartient au commutant de p si et seulement si le noyau et l'image de p sont stables par f. On sait déjà que cette denière condition est nécessaire (voir exercice 3.26 page 73), montrons qu'elle est suffisante. Soit x dans E. Comme p est un projecteur on a $E = \operatorname{Ker} p \oplus \operatorname{Im} p$, il existe donc (x_1, x_2) dans $\operatorname{Ker} p \times \operatorname{Im} p$ tel que $x = x_1 + x_2$. Comme on a $p(x) = x_1$, on a $f \circ p(x) = f(x_1)$ et par ailleurs, $p \circ f(x) = p(f(x_1) + f(x_2)) = f(x_1)$, car par hypothèse $\operatorname{Im} p$ et $\operatorname{Ker} p$ sont stables par f.

On sait que f appartient au commutant de p si et seulement si le noyau et l'image de p sont stables par f. Soit k le rang de p, soient $(e_1, \ldots, e_k)$ une base de $\operatorname{Im} p$ et $(e_{k+1}, \ldots, e_n)$ une base de $\operatorname{Ker} p$, comme $E = \operatorname{Ker} p \oplus \operatorname{Im} p$, la famille $(e_1 \ldots, e_n)$ est une base de E. Les sous-espaces vectoriels $\operatorname{Im} p$ et $\operatorname{Ker} p$ sont stables par f si et seulement si dans la base $(e_1 \ldots, e_n)$, f admet une matrice de la forme :

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{cc} \operatorname{Im} p & \operatorname{Ker} p \end{array} & \\ \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \end{array}\right) & \begin{array}{l} \operatorname{Im} p \\ \operatorname{Ker} p \end{array} \end{array}$$

On en déduit que la dimension du commutant de p est $k^2 + (n-k)^2$.

4) On va essayer de construire une famille libre de projecteurs à partir des matrices E_{ij} (voir chapitre « Matrices » ex. 4.22 p. 114). Pour i dans $[\![1, n]\!]$, la matrice E_{ii} est la matrice d'un projecteur de $\mathbb{R}^n$. On peut constater que pour i et j dans $[\![1, n]\!]$ avec $i \neq j$ les matrices $E_{ii} + E_{ij}$ sont également des matrices de projecteurs (il suffit de calculer leur carré pour s'en convaincre). On peut regrouper toutes ses matrices dans la description suivante : Soient i et j dans $[\![1, n]\!]$. On définit P_{ij} la matrice égale à $E_{ii} + (1 - \delta_{ij}) E_{ij}$ (où δ_{ij} est le symbole de Kronecker). La famille des $(P_{ij})_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2}$

est une famille de matrices de projecteur. La liberté de la famille des $(E_{ij})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ permet de montrer sans difficulté la liberté de la famille des $(P_{ij})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$. En effet soit $(a_{ij})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ dans $\mathbb{R}^{n^2}$ telle que :

$$\sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} a_{ij} P_{ij} = 0. \tag{1}$$

En remplaçant P_{ij} par son expression $E_{ii} + (1 - \delta_{ij})E_{ij}$, on constate que pour $i \neq j$ le seul coefficient devant E_{ij} est a_{ij} ; tous ces coefficients sont donc nuls. La relation (1) se simplifie alors en $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{ii} E_{ii} = 0$, dont on déduit que pour i dans $[\![1,n]\!]$ les a_{ii} sont tous nuls.

On a donc ainsi construit une famille de projecteurs de $\mathbb{R}^n$ qui est libre et dont le cardinal est n^2. Comme $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ est de dimension n^2, la famille proposée est une base de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ et elle est donc de cardinal maximal.

Exercice 3.37

Centrale MP 2006 ☕

Soient E, F et G des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie.

1) Soient u dans $\mathcal{L}(E,F)$ et v dans $\mathcal{L}(E,G)$. Montrer que l'existence de w dans $\mathcal{L}(F,G)$ telle que $v = w \circ u$ équivaut à : $\operatorname{Ker} u \subset \operatorname{Ker} v$.

2) Soient u dans $\mathcal{L}(E,G)$ et v dans $\mathcal{L}(F,G)$. Montrer que l'existence de w dans $\mathcal{L}(E,F)$ telle que $u = v \circ w$ équivaut à : $\operatorname{Im} u \subset \operatorname{Im} v$.

3) Soit u dans $\mathcal{L}(E)$. Établir l'existence de p dans $\mathcal{L}(E)$ et v dans $\mathrm{GL}(E)$ telles que $p^2 = p$ et $u = p \circ v$.

4) Soit u dans $\mathcal{L}(E)$. Établir l'existence de p dans $\mathcal{L}(E)$ et v dans $\mathrm{GL}(E)$ telles que $p^2 = p$ et $u = v \circ p$.

1) S'il existe w dans $\mathcal{L}(F,G)$ telle que $v = w \circ u$, alors pour tout x dans $\operatorname{Ker} u$, on a $v(x) = w(u(x)) = 0$. On a donc bien $\operatorname{Ker} u \subset \operatorname{Ker} v$.
Supposons que $\operatorname{Ker} u \subset \operatorname{Ker} v$.
Si u est nulle, alors v est nulle et tout élément w dans $\mathcal{L}(F,G)$ convient.
Supposons u non nulle. Le théorème de la base imcomplète permet de construire une base $(e_1,\dots,e_n)$ de E telle qu'il existe p et k dans $\mathbb{N}$ vérifiant $0 \leqslant k \leqslant p \leqslant n$ tels que $(e_1,\dots,e_k)$ est une base de $\operatorname{Ker} u$ et $(e_1,\dots,e_p)$ est une base de $\operatorname{Ker} v$, (avec $k = 0$ si u est injective, et $p = 0$ si v est injective). Pour i dans $[\![k+1,n]\!]$, posons $f_i = u(e_i)$.
Le résultat essentiel qui permet de résoudre cet exercice est le suivant si $(e_1,\dots,e_n)$ est une base de E telle que $(e_1,\dots,e_k)$ est une base de $\operatorname{Ker} u$ alors la famille $(u(e_{k+1}),\dots,u(e_n))$ est une base de $\operatorname{Im} u$. En effet, soit H le sous-espace

vectoriel défini par $H = \mathrm{Vect}(e_{k+1}, \dots, e_n)$, ce sous-espace vectoriel est un supplémentaire de $\mathrm{Ker}\, u$ et on sait que la restriction de u à H est un isomorphisme. Par conséquent la famille $(u(e_{k+1}), \dots, u(e_n))$ est une base de $\mathrm{Im}\, u$.

On complète la famille $(f_{k+1}, \dots, f_n)$ en une base $(f_{k+1}, \dots, f_q)$ de F. On définit alors w par : pour tout i dans $[\![k+1, n]\!]$, $w(f_i) = v(e_i)$ et pour tout i dans $[\![n+1, q]\!]$, $w(f_i) = 0$.

Montrons qu'on a bien $v = w \circ u$. Soit i dans $[\![1, n]\!]$. Si $i \leqslant k$ alors $u(e_i) = v(e_i) = 0$ et on a bien $v(e_i) = w(u(e_i))$. Si $k+1 \leqslant i \leqslant n$ alors $w(u(e_i)) = w(f_i) = v(e_i)$. On a donc v et $w \circ u$ qui coïncident sur une base de E, ces applications linéaires sont donc égales.

2) S'il existe w dans $\mathcal{L}(E, F)$ telle que $u = v \circ w$, alors de manière évidente $\mathrm{Im}\, u \subset \mathrm{Im}\, v$.
Supposons $\mathrm{Im}\, u \subset \mathrm{Im}\, v$.
Si $u = 0$ alors $w = 0$ convient. On suppose désormais u non nulle. Soit $(e_1, \dots, e_k)$ est une base de $\mathrm{Ker}\, u$ complétée en une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E (avec $k = 0$ si u est injective).
On complète de nouveau la base $(u(e_{k+1}), \dots, u(e_n)) = (f_{k+1}, \dots, f_n)$ de $\mathrm{Im}\, u$ en une base $(f_{k+1}, \dots, f_q)$ de F de sorte qu'il existe p dans $[\![k+1, n]\!]$ tel que $(f_{k+1}, \dots, f_p)$ est une base de $\mathrm{Im}\, v$.
Comme on a $\mathrm{Im}\, u \subset \mathrm{Im}\, v$, pour tout i dans $[\![k+1, n]\!]$, il existe e'_i dans E tel que $v(e'_i) = f_i = u(e_i)$. Soit alors w dans $\mathcal{L}(E, F)$ définie par : pour tout i dans $[\![k+1, n]\!]$, $w(e_i) = e'_i$ et pour tout i dans $[\![1, k]\!]$, $w(e_i) = 0$. On vérifie sans peine qu'on a alors $u = v \circ w$.

3) Si $u = 0$, alors on peut prendre $p = 0$ et tout élément de $\mathcal{L}(E)$ convient. Supposons donc $u \neq 0$. Soit $(e_1, \dots, e_k)$ est une base de $\mathrm{Ker}\, u$ complétée en une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E (avec $k = 0$ si u est injective). On complète la base $(u(e_{k+1}), \dots, u(e_n)) = (f_{k+1}, \dots, f_n)$ de $\mathrm{Im}\, u$ en une base $(f_1, \dots, f_n)$ de E.
Soit v l'application linéaire de $\mathcal{L}(E)$ définie par : $\forall i \in [\![1, n]\!],\ v(e_i) = f_i$. Comme l'image par v de la base $(e_1, \dots, e_n)$ est encore une base de E, l'application v est bijective. Soit p le projecteur sur $\mathrm{Im}\, u$ parallèlement à $\mathrm{Vect}(f_1, \dots, f_k)$. Pour tout i dans $[\![k+1, n]\!]$ on a $p(f_i) = f_i$ et pour tout i dans $[\![1, k]\!]$ on a $p(f_i) = 0$. On montre alors que $p \circ v$ et u coïncident sur la base $(e_1, \dots, e_n)$, elles sont donc égales.

4) Si $u = 0$, alors on peut prendre $p = 0$ et tout élément de $\mathcal{L}(E)$ convient. Supposons donc $u \neq 0$. Soit v l'application linéaire définie à la question précédente et soit cette fois p le projecteur sur $G = \mathrm{Vect}(e_{k+1}, \dots, e_n)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}\, u = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_k)$. On vérifie que u et $v \circ p$ coïncident sur la base $(e_1, \dots, e_n)$, elles sont donc égales.
On peut aussi procéder en traduisant le résultat de la question 3) sous forme matricielle et appliquer ce résultat à la transposée de la matrice de u.

Exercice 3.38

Centrale MP 2006

Soit E un espace vectoriel de dimension finie égale à n.

1) Soient x et y dans E non colinéaires. Déterminer le plus grand entier k pour lequel il existe des formes linéaires indépendantes $f_1, \dots, f_k$ telles que pour tout i dans $[\![1, k]\!]$, $f_i(x) = f_i(y)$.

2) Soient $f_1, \dots, f_k$ des formes linéaires sur E. Montrer l'équivalence

$$(f_1, \dots, f_k) \text{ libre} \Leftrightarrow \dim \bigcap_{i=1}^{k} \operatorname{Ker}(f_i) = n - k.$$

1) La question posée revient à trouver la plus grande famille libre $(f_1, \dots, f_k)$ telle que pour tout i dans $[\![1, k]\!]$, $f_i(x - y) = 0$.
Il est naturel d'essayer de trouver un sous-espace vectoriel qui contient toutes les formes linéaires f de E^* telles que $f(x - y) = 0$ et de déterminer sa dimension. Les vecteurs x et y non colinéaires étant fixés, soit ϕ, l'application de E^* dans $\mathbb{R}$ définie par $\phi(f) = f(x - y)$. L'application ϕ ainsi définie est une forme linéaire sur E^*. De plus $f(x) = f(y)$ si et seulement si $f \in \operatorname{Ker} \phi$.
Comme x et y ne sont pas colinéaires, le vecteur $x - y$ n'est pas nul. Il existe donc f dans E^* telle que $f(x - y) \neq 0$ et on en déduit que ϕ n'est pas nulle. Comme ϕ est une forme linéaire non nulle sur E, son noyau est un hyperplan de E^* et sa dimension est donc $n - 1$. Il existe donc au maximum $n - 1$ formes linéaires indépendantes $(f_1, \dots, f_{n-1})$ vérifiant : $\forall i \in [\![1, n-1]\!]$, $f_i(x) = f_i(y)$.

2) On va construire une application linéaire adaptée au problème posé.
Soit ψ l'application linéaire de E dans $\mathbb{R}^k$ qui à $x \in E$ associe $(f_1(x), \dots, f_k(x))$.
On a les équivalences suivantes :

$$x \in \bigcap_{i=1}^{k} \operatorname{Ker}(f_i) \Leftrightarrow \forall i \in [\![1, n]\!],\ f_i(x) = 0 \Leftrightarrow \psi(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \operatorname{Ker} \psi.$$

Le théorème du rang appliqué à ψ donne : $\dim \operatorname{Ker} \psi + \dim \operatorname{Im} \psi = \dim E = n$.
On en déduit alors :

$$\dim \bigcap_{i=1}^{k} \operatorname{Ker}(f_i) = n - k \Leftrightarrow \dim \operatorname{Im} \psi = k \Leftrightarrow \psi \text{ surjective.}$$

On est alors ramené à la situation de l'exercice 3.32 puisque ψ surjective équivaut à $\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in \mathbb{R}^k,\ \exists x \in E$ tel que $\forall i \in \{1, \dots, k\},\ f_i(x) = \lambda_i$.

On en déduit que $(f_1, \dots, f_k)$ est libre si et seulement si $\dim \bigcap_{i=1}^{k} \operatorname{Ker}(f_i) = n - k$.

Exercice 3.39

Centrale MP 2006, 2007

Soit $E = \mathbb{R}_{2n-1}[X]$, et $a_1, \ldots, a_n$ des réels distincts. Pour tout i dans $[\![1, n]\!]$, on pose $T = \prod_{k=1}^{n}(X - a_k)$ et $T_i = T/(X - a_i)$. Pour tout P dans E on définit $\varphi_i(P) = P(a_i)$ et $\psi_i(P) = P'(a_i)$. Montrer que $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \psi_1, \ldots, \psi_n)$ est une base de E^* et exprimer à l'aide de T et des T_i sa base anté-duale.

Soit ϕ l'application linéaire de E dans $\mathbb{R}^{2n}$ qui à tout polynôme $P \in E$ associe $(P(a_1), \ldots, P(a_n), P'(a_1), \ldots, P'(a_n))$.

Montrons que Φ est injective. Soit P un polynôme tel que $\Phi(P) = 0$. Pour tout i dans $[\![1, n]\!]$, le réel a_i est alors racine double de P. Comme les réels a_i sont distincts on en déduit que le polynôme T^2 divise P. Or par hypothèse P est de degré $2n - 1$, tandis que T^2 est de degré $2n$. On en déduit que $P = 0$. On a montré que Φ est injective. Or E et $\mathbb{R}^{2n}$ ont même dimension. On en déduit que Φ est un isomorphisme. On peut alors utiliser le critère de l'exercice 3.32 pour en déduire que la famille $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \psi_1, \ldots, \psi_n)$ est libre. Comme de plus elle est de cardinal $2n$, dans un espace de dimension $2n$, c'est bien une base de E^*.

Déterminons la base anté-duale de $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \psi_1, \ldots, \psi_n)$.

Soit i dans $[\![1, n]\!]$. Commençons par chercher un polynôme P_i tel que

$$\forall j \in [\![1, n]\!] \begin{cases} \varphi_j(P_i) = 0 \\ j \neq i \Rightarrow \psi_j(P_i) = 0 \\ \psi_i(P_i) = 1 \end{cases}.$$

Ces conditions sont équivalentes à : pour tout j dans $[\![1, n]\!]$ différent de i, le réel a_j est racine double de P_i, tandis que a_i est racine simple de P_i et $P_i'(a_i) = 1$. Il existe donc un réel α_i tel que le polynôme P_i soit de la forme $\alpha_i T_i T$. La condition $P_i'(a_i) = 1$ va nous permettre de déterminer α_i. On a :

$$P_i(X) = \alpha_i T_i(X) T(X) = \alpha_i (X - a_i) T_i^2(X),$$

d'où $P_i'(X) = \alpha_i \left((X - a_i) 2 T_i(X) T_i'(X) + T_i^2(X)\right)$.

On en déduit $P_i'(a_i) = \alpha_i T_i^2(a_i)$. Comme $T_i^2(a_i)$ est non nul, on a donc $\alpha_i = \dfrac{1}{T_i^2(a_i)}$.

On en déduit : $P_i(X) = \dfrac{1}{T_i(a_i)} T_i(X) T(X)$.

Soit i dans $[\![1, n]\!]$. Cherchons un polynôme Q_i tel que

$$\forall j \in [\![1, n]\!] \begin{cases} \psi_j(Q_i) = 0 \\ j \neq i \Rightarrow \varphi_j(Q_i) = 0 \\ \varphi_i(Q_i) = 1 \end{cases}.$$

Ces conditions sont équivalentes à : pour tout j dans $[\![1,n]\!]$ différent de i, le réel a_j est racine double de Q_i, tandis que a_i est racine de Q_i' et $Q_i(a_i) = 1$. On en déduit qu'il existe b_i et c_i tels que Q_i s'écrit sous la forme $Q_i = (b_i X + c_i)T_i^2(X)$. Les conditions sur $Q_i'(a_i)$ et $Q_i(a_i)$ permettent de déterminer b_i et c_i. Pour rendre les calculs un peu plus agréables, il est naturel d'écrire qu'il existe β_i et γ_i tels que $b_i X + c_i = \beta_i(X - a_i) + \gamma_i$. Le polynôme Q_i s'écrit alors sous la forme $Q_i(X) = \beta_i(X - a_i)T_i^2(X) + \gamma_i T_i^2(X) = \dfrac{\beta_i}{\alpha_i}P_i(X) + \gamma_i T_i^2(X)$. On a alors $Q_i' = \dfrac{\beta_i}{\alpha_i}P_i' + \gamma_i 2T_i T_i'$. Les conditions $Q_i(a_i) = 1$ et $Q_i'(a_i) = 0$ deviennent alors :

$$\begin{cases} \gamma_i T_i^2(a_i) = 1 \\ \dfrac{\beta_i}{\alpha_i} + 2\gamma_i T_i(a_i)T_i'(a_i) = 0 \end{cases}$$

Ce système se résout et donne $\gamma_i = \dfrac{1}{T_i^2(a_i)}, \quad \beta_i = -2\dfrac{T_i'(a_i)}{T_i^3(a_i)}$.

On en déduit $Q_i(X) = \dfrac{1}{T_i^3(a_i)}T_i(X)\left(T_i(a_i)T_i(X) - 2T_i'(a_i)T(X)\right)$.

La base anté-duale de $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \psi_1, \ldots, \psi_n)$ est $(P_1, \ldots, P_n, Q_1, \ldots, Q_n)$.

Exercice 3.40

Centrale PC 2006

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

1) Déterminer les f de $\mathcal{L}(E)$ tels que $(x, f(x))$ soit liée pour tout x de E

2) Déterminer le commutant de $\mathcal{L}(E)$.

3) Déterminer le commutant de $\mathrm{GL}(E)$.

1) On va montrer que les éléments de $\mathcal{L}(E)$ qui vérifient cette condition sont les homothéties.
Si E est réduit au vecteur nul, l'espace $\mathcal{L}(E)$ est réduit à l'application nulle qui est une homothétie. On se place désormais dans le cas où E n'est pas réduit au vecteur nul.
Soit x dans $E\setminus\{0\}$. La famille $(x, f(x))$ est liée avec $x \neq 0$, il existe donc α dans $\mathbb{K}$ tel que $f(x) = \alpha x$. Soit y dans E. Ou bien y est lié avec x, ou bien la famille (x, y) est libre. Dans le premier cas il existe a dans $\mathbb{K}$ tel que $y = ax$ et on en déduit immédiatement, $f(y) = af(x) = a\alpha x = \alpha y$. Dans le second cas, y et $x + y$ sont non nuls et il existe (β, γ) dans $\mathbb{K}^2$ tel que $f(y) = \beta y$ et $f(x + y) = \gamma(x + y)$. Comme f est linéaire on a $f(x + y) = f(x) + f(y)$ et on en déduit : $\gamma(x + y) = \alpha x + \beta y$.

On a donc $(\gamma - \alpha)x + (\gamma - \beta)y = 0$, et comme la famille (x, y) est libre on en déduit $\gamma = \alpha = \beta$. Ainsi dans tous les cas $f(y) = \alpha y$ et on a montré que f est une homothétie.

Remarque
Pour cette question on n'a pas utilisé le fait que E est de dimension finie.

2) Le commutant de $\mathcal{L}(E)$ contient les homothéties.
Soit f dans le commutant de $\mathcal{L}(E)$, montrons que f est une homothétie.
Soit x dans $E \setminus \{0\}$. Comme E est de dimension finie la droite vectorielle $\mathrm{Vect}(x)$ admet un supplémentaire H dans E. Soit alors p la projection sur $\mathrm{Vect}(x)$ parallèlement à H. On a $\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Vect}(x)$ et $p(x) = x$. On a alors $f(p(x)) = f(x) = p(f(x)) \in \mathrm{Vect}(x)$ et ainsi la famille $(x, f(x))$ est liée. On a donc montré que pour tout x dans E la famille $(x, f(x))$ est liée, le résultat précédent nous permet donc de dire que f est une homothétie.

3) Le commutant de $\mathrm{GL}(E)$ contient les homothéties de rapport non nul.
Soit f dans le commutant de $\mathrm{GL}(E)$, montrons que f est une homothétie.
Soit x dans $E \setminus \{0\}$, comme E est de dimension finie la droite vectorielle $\mathrm{Vect}(x)$ admet un supplémentaire H dans E. Soit alors s la symétrie par rapport à H et parallèlement à $\mathrm{Vect}(x)$. Pour une symétrie s, on sait que $E = E_1 \oplus E_{-1}$ où $E_1 = \{x \in E \mid s(x) = x\}$ et $E_{-1} = \{x \in E \mid s(x) = -x\}$ et dans le cas présent on a par construction $E_1 = H$ et $E_{-1} = \mathrm{Vect}(x)$. De l'égalité $s(f(x)) = f(s(x)) = -f(x)$, on déduit $f(x) \in E_{-1}$ donc $f(x) \in \mathrm{Vect}(x)$, ce qui montre que $(x, f(x))$ est liée. On conclut comme précédemment.

Exercice 3.41

Mines-Ponts MP 2005

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F un sous-espace vectoriel de E et G un sous-espace vectoriel de F. On suppose que G est de codimension finie dans E. Montrer que $\mathrm{codim}_E G = \mathrm{codim}_E F + \mathrm{codim}_F G$.

Il faut commencer par montrer que si G est de codimension finie dans E, alors G est de codimension finie dans F.

Par hypothèse il existe G_1 sous-espace vectoriel de dimension finie de E tel que $E = G \oplus G_1$. Soit alors $G_2 = F \cap G_1$. On va montrer que G_2 est un supplémentaire de G dans F.

On a : $G \cap G_2 = G \cap G_1 \cap F = \{0\}$ car $G \cap G_1 = \{0\}$.

D'autre part, soit z dans F. Il existe (x, x_1) dans $G \times G_1$ tel que $z = x + x_1$. Le vecteur x_1 est par définition dans G_1, mais comme $x_1 = z - x$ il est aussi dans F car z est dans F et x est dans $G \subset F$. Ainsi x_1 est dans $G_1 \cap F$, ce qui montre qu'on a écrit z comme somme d'un élément x de G et d'un élément x_1 de G_2.

En conclusion on a montré que $G \cap G_2 = \{0\}$ et $G + G_2 = F$. On en déduit que $G \oplus G_2 = F$ et comme par construction G_2 est un sous-espace vectoriel de G_1 qui est de dimension finie, il est lui même de dimension finie. On a donc montré que G est de codimension finie dans F.

Montrons que F est de codimension finie dans E.

Soit G_3 un supplémentaire de G_2 dans G_1. Un tel supplémentaire existe car G_1 est de dimension finie.

Montrons que G_3 est un supplémentaire de F dans E.

On a les relations : $E = G \oplus G_1, \quad G_1 = G_2 \oplus G_3, \quad F = G \oplus G_2$.
On en déduit que : $E = F \oplus G_3$.

Comme G_3 est un sous-espace vectoriel de G_1, il est de dimension finie. On en déduit que F est de codimension finie dans E.

On a $\mathrm{codim}_E G = \dim G_1$ et $\mathrm{codim}_E F = \dim G_3$ ainsi que $\mathrm{codim}_F G = \dim G_2$. De plus, par construction, on a $G_1 = G_3 \oplus G_2$, d'où $\dim G_1 = \dim G_3 + \dim G_2$. On en déduit : $\mathrm{codim}_E G = \mathrm{codim}_E F + \mathrm{codim}_F G$.

Exercice 3.42

Polytechnique MP 2006 (première question) ☕☕

Soient E un espace vectoriel de dimension n et $V_1,\dots,V_k$ des sous-espaces vectoriels de E. On suppose : $\dim V_1 + \cdots + \dim V_k > n(k-1)$. Montrer que l'intersection des V_i n'est pas réduite à $\{0\}$.

Le résultat est immédiat pour $k = 1$. Pour $k = 2$, puisque $\dim(V_1 + V_2) \leqslant n$ La formule de Grassmann montre que si V_1 et V_2 sont tels que $\dim V_1 + \dim V_2 > n$, alors, on a $\dim(V_1 \cap V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 + V_2) > 0$.

On en déduit que l'intersection $V_1 \cap V_2$ n'est pas réduite à $\{0\}$.

Ces premiers résultats peuvent inciter à faire un raisonnement par récurrence. On a en fait plutôt intérêt à procéder en adaptant la démonstration suivante de la formule de Grassmann.

Soient V_1 et V_2 deux sous-espaces vectoriels de E. Soit u, l'application linéaire de $V_1 \times V_2$ dans E, qui au couple (x, y) associe $u(x, y) = x - y$. On va appliquer le théorème du rang à u. L'image de u est donnée par $\mathrm{Im}\, u = V_1 + V_2$. Si le couple (x, y) dans $V_1 \times V_2$ est tel que $x + y = 0$, on a $y = -x$ et par conséquent x est dans $V_1 \cap V_2$.
Réciproquement, soit un couple (x, y) dans $V_1 \times V_2$ tel que x est dans $V_1 \cap V_2$ et $y = x$. Alors (x, y) appartient à $\mathrm{Ker}\, u$. On montre alors sans difficulté que l'application de $V_1 \cap V_2$ dans $\mathrm{Ker}\, u$ qui à x associe (x, x) est un isomorphisme d'espaces vectoriels. On en déduit que $\dim \mathrm{Ker}\, u = \dim(V_1 \cap V_2)$. Par ailleurs l'espace vectoriel $V_1 \times V_2$ est de dimension $\dim V_1 + \dim V_2$. En reportant les différentes relations obtenues dans le théorème du rang qui dit que $\dim V_1 \times V_2 = \dim \mathrm{Im}\, u + \dim \mathrm{Ker}\, u$, on obtient la

formule de Grassmann $\dim V_1 + \dim V_2 = \dim(V_1 + V_2) + \dim(V_1 \cap V_2)$.
Dans le cas qui nous intéresse, on se donne k sous-espaces vectoriels $V_1, \ldots, V_k$, et on considère l'application linéaire v de $V_1 \times \cdots \times V_k$ vers E^{k-1} qui au k-uplet $(x_1, \ldots, x_k)$ associe $(x_2 - x_1, x_3 - x_1, \ldots, x_k - x_1)$. De nouveau $\operatorname{Ker} v$ est isomorphe à $V_1 \cap \cdots \cap V_k$ grâce à l'application linéaire qui à x dans $V_1 \cap \cdots \cap V_k$ associe $(x, \ldots, x)$. Le théorème du rang montre alors que

$$\dim V_1 + \cdots + \dim V_k = \dim(V_1 \cap \cdots \cap V_k) + \dim \operatorname{Im} v.$$

Or l'image de v est incluse dans E^{k-1} et sa dimension est donc au plus égale à $n(k-1)$. L'hypothése $\dim V_1 + \cdots + \dim V_k > n(k-1)$ entraîne ainsi que $\dim(V_1 \cap \cdots \cap V_k) > 0$, ce qui signifie que l'intersection des V_i n'est pas réduite à $\{0\}$.

4 Matrices

Ce chapitre reprend le cours de première année sur les matrices et le complète avec la notion de trace. Tous les exercices de la partie assimilation et entraînement, hormis ceux utilisant la trace qui peuvent être laissés de côté dans une première lecture, sont abordables dès la première année. On peut ainsi utiliser ce chapitre dès le second semestre de la première année et il constituera également un excellent support pour les révisions estivales. Les exercices d'approfondissement seront très utiles lors de la reprise de ce chapitre en deuxième année.

Dans tout ce chapitre $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

4.1 L'ESSENTIEL DU COURS ET EXERCICES D'ASSIMILATION

4.1.1 Calcul dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Ce qu'il faut savoir

Matrices rectangulaires $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

- Soient n et p dans $\mathbb{N}$. L'ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est un espace vectoriel de dimension finie égale à np.
  On définit pour i dans $[\![1,n]\!]$ et j dans $[\![1,p]\!]$ la matrice E_{ij} dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ de coefficient général $a_{\ell k}$ défini par : $a_{\ell k} = \begin{cases} 1 \text{ si } \ell = i \text{ et } k = j \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$.
  La famille $(E_{ij})_{1\leqslant i\leqslant p, 1\leqslant j\leqslant n}$ est une base de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ appelée base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
- Soient $A = (a_{ij})$ une matrice dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B = (b_{ij})$ une matrice dans $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, la matrice $C = AB$ est une matrice de $\mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ dont le coefficient général $(c_{ij})_{1\leqslant i\leqslant n, 1\leqslant j\leqslant q}$ est défini par

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,q]\!] \;\; c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}.$$

Matrices carrées $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

- Lorsque $p = n$, on a la règle de multiplication :

$$\forall (i,j,k,\ell) \in [\![1,n]\!]^4 \;:\; E_{ij} E_{k\ell} = \delta_{jk} E_{i\ell},$$

  où δ est le symbole de Kronecker.

- **Matrices carrées symétriques et antisymétriques**
  - L'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qu'on note $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, de dimension égale à $\frac{1}{2}n(n+1)$. La famille $(E_{ij}+E_{ji})_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}$ est une base de $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$.
  - L'ensemble des matrices antisymétriques qu'on note $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, de dimension égale à $\frac{1}{2}n(n-1)$. La famille $(E_{ij}-E_{ji})_{1\leqslant i<j\leqslant n}$ est une base de $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$.
  - On a $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})=\mathcal{S}_n(\mathbb{K})\oplus\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$. De manière explicite, toute matrice M dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ s'écrit sous la forme $M=\frac{1}{2}(M+{}^tM)+\frac{1}{2}(M-{}^tM)$.

Calcul dans l'anneau $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}),+,\times)$

- L'ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ muni de + et × est un anneau. Il est **non commutatif** : pour A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ on n'a pas toujours $AB=BA$.
- L'anneau $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ n'est pas **intègre** : pour A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, l'égalité $AB=0$ n'entraîne pas $A=0$ ou $B=0$.
- **Algèbre** $\mathbb{K}[A]$ Soit A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on définit $\mathbb{K}[A]=\{P(A)\mid P\in\mathbb{K}[X]\}$. Muni des trois lois +, × et ·, l'ensemble $\mathbb{K}[A]$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- **Deux identités remarquables très utiles :** soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui **commutent**, c'est-à-dire telles que $AB=BA$ et soit N dans $\mathbb{N}$.
  - Formule du binôme de Newton : $(A+B)^N=\displaystyle\sum_{k=0}^{N}\binom{N}{k}A^kB^{N-k}$.
  - $A^N-B^N=(A-B)\displaystyle\sum_{k=1}^{N}B^{k-1}A^{N-k}$.

    En particulier on a $(I_n-A)\displaystyle\sum_{k=0}^{N}A^k=I_n-A^{N+1}$.

Remarque

Pour tout A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a par convention $A^0=I_n$.

- **Quelques méthodes de calcul de** A^p

  Soient A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et p dans $\mathbb{N}$. Lorsqu'on veut calculer A^p :
  - on teste une formule vraissemblable qu'on valide ensuite par récurrence ;
  - on décompose A en somme de deux matrices qui commutent et dont les puissances sont faciles à calculer ;

- on met en évidence un polynôme P de degré le plus petit possible tel que $P(A) = 0$. Soit R_p le reste de la division euclidienne de X^p par P, alors $A^p = R_p(A)$;
- on diagonalise A si c'est possible (voir chapitre « Réduction »).

Exercice 4.1

Soit n dans $\mathbb{N}$, et soit A la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1. Déterminer A^k pour $k \in \mathbb{N}$.

On constate sans peine que $A^2 = nA$, puis que $A^3 = n^2 A$. On va donc montrer par récurrence que pour tout k dans $\mathbb{N}^*$, on a $A^k = n^{k-1}A$.
La formule a été vérifiée au rang 1.
Soit k dans $\mathbb{N}$, tel que $A^k = n^k A$.
On a alors $A^{k+1} = AA^k = n^{k-1}A^2 = n^{k-1}nA = n^k A$, ce qui montre que la propriété est héréditaire.
On a ainsi montré par récurrence que pour tout k dans $\mathbb{N}^*$, on a $A^k = n^{k-1}A$.

Exercice 4.2

CCP PSI 2005

Soit $A = \left(a_{i,j}\right)_{1\leqslant ij\leqslant n}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ où $a_{ij} = 1$ si $i \neq j$ et $a_{ii} = 0$. Calculer A^p pour p dans $\mathbb{N}^*$.

On a $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$. On peut alors choisir d'écrire A sous la forme $A = B - I_n$ où B est une matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1. Comme B et I_n commutent, on peut utiliser la formule du binôme de Newton pour calculer A^p. D'après l'exercice précédent, pour tout $k \geqslant 1$: $B^k = n^{k-1}B$, (attention : le fait que la formule n'est pas vraie pour $k = 0$ a son importance). On a alors, pour tout $p \geqslant 1$:

$$\begin{aligned}
A^p &= \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} B^k(-I_n)^{p-k} = (-1)^p I_n + \sum_{k=1}^{p} \binom{p}{k} n^{k-1}(-1)^{p-k} B \\
&= (-1)^p I_n + \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{p} \binom{p}{k} n^k(-1)^{p-k}\right) B \\
&= (-1)^p I_n + \frac{1}{n}\left(\sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} n^k(-1)^{p-k} - (-1)^p\right) B \\
&= (-1)^p I_n + \frac{(n-1)^p - (-1)^p}{n} B.
\end{aligned}$$

Exercice 4.3

CCP MP 2007

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$. Calculer A^n, pour n dans $\mathbb{N}$.

Indication de la rédaction : on cherchera un polynôme annulateur de A de degré 2.

Commençons par calculer A^2. On obtient $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & -10 \\ 5 & 14 \end{pmatrix}$. On remarque alors que $A^2 = 5A - 6I_n$. Le polynôme $P(X) = X^2 - 5X + 6$ est donc un polynôme annulateur de A.

Soit n dans $\mathbb{N}$. Il existe un unique (a_n, b_n) dans $\mathbb{R}^2$ et un unique Q dans $\mathbb{R}[X]$ tels que $X^n = Q(X)P(X) + a_n X + b_n$ (division euclidienne de X^n par P). En remarquant que $P(2) = P(3) = 0$, on détermine a_n et b_n :

$$\begin{cases} 2^n = 2a_n + b_n \\ 3^n = 3a_n + b_n \end{cases}.$$

On en déduit $a_n = 3^n - 2^n$ et $b_n = 3\cdot 2^n - 2\cdot 3^n$. Ainsi, pour n dans $\mathbb{N}$, on a :

$$A^n = Q(A)P(A) + a_n A + b_n I_n = a_n A + b_n I_n = (3^n - 2^n)A + (3\cdot 2^n - 2\cdot 3^n)I_n.$$

On en déduit $\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = \begin{pmatrix} 2^{n+1} - 3^n & 2^{n+1} - 2\cdot 3^n \\ 3^n - 2^n & 2\cdot 3^n - 2^n \end{pmatrix}$.

4.1.2 Matrices nilpotentes

Ce qu'il faut savoir

Soit A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

• On dit que A est nilpotente lorsqu'il existe p dans $\mathbb{N}^*$ tel que $A^p = 0$.

Exemple : Les matrices triangulaires strictement supérieures, ou strictement inférieures, sont nilpotentes.

Indice de nilpotence : on appelle indice de nilpotence de A le plus petit entier p dans $\mathbb{N}$ tel que $A^p = 0$.

• Soit A un matrice nilpotente de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, son indice de nilpotence est inférieur ou égal à n. Voir exercice 3.18 page 67 pour la démonstration de ce résultat.

Exercice 4.4

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1) Montrer que A est nilpotente d'indice 3.

2) Montrer qu'il n'existe pas X dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $X^2 = A$.

1) Un simple calcul montre que $A^2 \neq 0$ et $A^3 = 0$.

2) Supposons qu'il existe une matrice X dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $X^2 = A$. On a alors $X^6 = 0$, ce qui montre que X est nilpotente. On sait alors que son indice de nilpotence est inférieur ou égal à 3. On a donc $X^3 = 0$ et par suite $X^4 = X^3 X = 0$, ce qui contredit $X^4 = A^2 \neq 0$. On en déduit que l'équation matricielle $X^2 = A$ n'a pas de solution.

4.1.3 Matrices et applications linéaires

Ce qu'il faut savoir

Soit $(n, p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$.

- Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions respectives n et p. Soient $\mathcal{B}_E = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et $\mathcal{B}_F = (f_1, \ldots, f_p)$ une base de F. Soit u dans $\mathcal{L}(E, F)$. Pour tout i dans $[\![1, n]\!]$, il existe un unique élément $(m_{i1}, \ldots, m_{ip})$ dans $\mathbb{K}^p$ tel que $u(e_j) = \displaystyle\sum_{i=1}^{r} m_{ij} f_i$.
  - On appelle alors matrice de u dans les bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ la matrice $M_{\mathcal{B}_E\mathcal{B}_F}(u)$ de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ définie par :

$$M_{\mathcal{B}_E\mathcal{B}_F}(u) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} u(e_1) & \ldots & u(e_n) \end{array} \\ \begin{pmatrix} m_{11} & \ldots & m_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{p1} & \ldots & m_{pn} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ f_1 \\ \vdots \\ f_p \end{array} .$$

  - On retiendra que les colonnes de la matrice de u (dans les bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$), sont données par les coordonnées des vecteurs $u(e_j)$ dans la base $\mathcal{B}_F$.
  - Lorsque $F = E$ et $\mathcal{B}_E = \mathcal{B}_F$, on note $M_{\mathcal{B}_E}(u)$ la matrice $M_{\mathcal{B}_E\mathcal{B}_F}(u)$.

- Soit (x, y) dans $E \times F$, il existe $(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ et il existe $(y_1, \cdots, y_p) \in \mathbb{K}^p$ tel que $y = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} y_i f_i$. Posons $X = {}^t(x_1, \cdots, x_n)$ et $Y = {}^t(y_1, \cdots, y_p)$.

  On a $$y = u(x) \Leftrightarrow Y = M_{\mathcal{B}_E\mathcal{B}_F}(u)X.$$

- Soit $\mathcal{B}_E$ une base fixée de E.
  L'application de $(\mathcal{L}(E), +, \cdot, \circ)$ dans $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \cdot, \times)$ qui, à u associe $M_{\mathcal{B}_E}(u)$, est un isomorphisme d'algèbres. En particulier, pour tout $(f, g) \in \mathcal{L}(E) \times \mathcal{L}(E)$,

on a

$$M_{\mathcal{B}_E}(g \circ f) = M_{\mathcal{B}_E}(g) \times M_{\mathcal{B}_E}(f).$$

Application linéaire canoniquement associé à une matrice Soit A une matrice de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$. On appelle application linéaire canoniquement associé à A, l'application linéaire f de $\mathbb{K}^n$ vers $\mathbb{K}^p$ qui, à tout $X \in \mathbb{K}^n$, considéré comme vecteur colonne, associe AX.

Exercice 4.5

D'après Centrale PC 2006

Soient $A = X^4 + 1$ et $B = X^4 + X$, soit f l'application qui à P dans $\mathbb{R}_3[X]$ associe le reste de la division euclidienne de AP par B.

1) Montrer que f est linéaire

2) Donner la matrice de f dans la base canonique.

3) Déterminer l'image et le noyau de f.

1) Soient P_1 et P_2 dans $\mathbb{R}_3[X]$. Soient α et β dans $\mathbb{R}$. Soit R_1 et Q_1 respectivement le reste et le quotient de la division euclidienne de AP_1 par B. Soit R_2 et Q_2 respectivement le reste et le quotient de la division euclidienne de AP_2 par B. On a $A(\alpha P_1 + \beta P_2) = (Q_1 + Q_2)(\alpha P_1 + \beta P_2) + \alpha R_1 + \beta R_2$. Comme $\deg(\alpha R_1 + \beta R_2) \leqslant \min(\deg(R_1), \deg(R_2))$, on a $\deg(\alpha R_1 + \beta R_2) < 4$, ce qui par unicité du reste de la division euclidienne montre que $\alpha R_1 + \beta R_2$ est le reste de la division euclidienne de $A(\alpha P_1 + \beta P_2)$ par B. On a donc $f(\alpha P_1 + \beta P_2) = \alpha R_1 + \beta R_2 = \alpha f(P_1) + \beta f(P_2)$. On a ainsi montré que f est linéaire.

2) On calcule les images par f des vecteurs de la base canonique $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3)$ de $\mathbb{R}_3[X]$. À partir des divisions euclidiennes : $(X^4 + 1) = (X^4 + X) + (-X + 1)$, $X(X^4 + 1) = X(X^4 + X) + (-X^2 + X)$, $X^2(X^4 + 1) = X^2(X^4 + X) + (-X^3 + X^2)$, $X^3(X^4+1) = (X^3-1)(X^4+X)+(X^3+X)$, on obtient $f(1) = 1-X$, $f(X) = X-X^2$, $f(X^2) = X^2 - X^3$, $f(X^3) = X^3 + X$. On en déduit :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3) Soit (x_1, x_2, x_3, x_4) dans $\mathbb{R}^4$. Le vecteur (x_1, x_2, x_3, x_4) est dans le noyau de f si et seulement si (x_1, x_2, x_3, x_4) est solution du système linéaire :

$$\begin{cases} x_1 + x_4 & = 0 \\ -x_1 + x_2 & = 0 \\ -x_2 + x_3 & = 0 \\ -x_3 + x_4 & = 0 \end{cases}.$$

En additionnant toutes ces équations, on trouve $2x_4 = 0$. On en déduit que $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$ ce qui montre que $\operatorname{Ker} f = \{0_E\}$. le théorème du rang montre ensuite que $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}_3[X]$.

Remarque

On peut aussi calculer le déterminant de $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$ et constater qu'il n'est pas nul (il vaut 2).

Exercice 4.6

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3 et f dans $\mathcal{L}(E)$ tel que $f^3 = 0$ et $f^2 \neq 0$. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Il existe un vecteur x_0 dans E tel que $f^2(x_0) \neq 0$. Soit $\mathcal{B} = (f^2(x_0), f(x_0), x_0)$. Montrons que cette famille est libre.

Soit (α, β, γ) dans $\mathbb{R}^3$ tel que $\alpha x_0 + \beta f(x_0) + \gamma f^2(x_0) = 0$. En appliquant f^2 à cette relation, compte tenu du fait que $f^3 = 0$, on obtient $\alpha f^2(x_0) = 0$. On en déduit $\alpha = 0$. En appliquant cette fois f à la relation $\beta f(x_0) + \gamma f^2(x_0) = 0$ on obtient $\beta = 0$, et finalement $\gamma = 0$. La famille $\mathcal{B}$ est libre et de cardinal 3 dans un espace de dimension 3, c'est donc une base de E. Dans cette base la matrice de f est

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} f^3(x) & f^2(x) & f(x) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} f^2(x) \\ f(x) \\ x \end{array} \end{array}.$$

4.1.4 Matrices inversibles et calcul de l'inverse

Ce qu'il faut savoir

Soit A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée.

- On dit que A est inversible lorsqu'il existe une matrice B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = BA = I_n$.

Dans ce cas B est unique et on l'appelle l'inverse de A et on la note A^{-1}.

Notation On note $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n et inversibles.

- Soit $(A, B) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})^2$, la matrice AB est inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
- Si A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible, alors pour tout k dans $\mathbb{N}^*$, la matrice A^k est inversible et $(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k$, la matrice ${}^tA$ est inversible et $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$.

Différentes caractérisations de l'inversibilité d'une matrice carrée

Soit A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. La matrice A est inversible si et seulement si l'une des propriétés suivantes est vérifiée :

- il existe B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $BA = I_n$;
- il existe B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = I_n$;
- le noyau de A est réduit à 0, c'est-à-dire la seule solution de l'équation $AX = 0$ pour X dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, est la matrice colonne $X = 0$;
- elle est la matrice dans une certaine base d'un endomorphisme bijectif ;
- son rang est égal à n ;
- son déterminant est non nul (voir chapitre « Déterminants »).

Quelques méthodes pour déterminer l'éventuel inverse d'une matrice *A*

- Exhiber une matrice B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = I_n$ ou $BA = I_n$.
- Rechercher un polynôme P tel que $P(A) = 0$ et $P(0) \neq 0$. En effet, soit $P(X) = a_0 + a_1X + \cdots + a_kX^k$ un tel polynôme, alors
$$-a_0I_n = a_1A + \cdots + a_kA^k = A(a_1I_n + \cdots + a_kA^{k-1}),$$
et par conséquent A est inversible et $A^{-1} = \dfrac{-1}{a_0}(a_1I_n + \cdots + a_kA^{k-1})$.
- Résoudre le système linéaire $AX = Y$, on obtient alors $X = A^{-1}Y$ (Voir chapitre « Equations linéaires ») ;
- Calculer la transposée de la comatrice[1].

Remarque
Les méthodes de détermination permettent en général d'assurer l'inversibilité.

Exercice 4.7

Soient A et B deux matrices carrées d'ordre n telles que $A + B = AB$. Montrer que $I_n - A$ est inversible.

En l'absence d'indications supplémentaires sur A et B on ne peut qu'essayer de deviner l'éventuel inverse de $I_n - A$. Remarquons que la relation proposée est symétrique en A et B, la matrice $I_n - B$ doit elle aussi être inversible. En effectuant le produit

1. En dehors des cas $n = 2$ et $n = 3$, cette dernière méthode, donnant lieu en général à des calculs très lourds, doit être considérée comme théorique.

$(I_n - A)(I_n - B)$, on obtient $(I_n - A)(I_n - B) = I_n - A - B + AB = I_n$. La matrice $I_n - A$ est donc inversible et son inverse est $I_n - B$.

Remarque
L'inverse à gauche de $I_n - A$ étant aussi son inverse à droite, on peut déduire du résultat précédent que $(I_n - B)(I_n - A) = I_n$. En développant le terme de gauche on obtient $A + B = BA$, ce qui reporté dans la relation de départ montre que $AB = BA$. On a ainsi montré que $A + B = AB$ entraîne que A et B commutent.

Exercice 4.8

Montrer que $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est inversible et calculer son inverse.

On va chercher un polynôme annulateur de A. On calcule A^2 et on obtient :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

On constate alors que $A^2 = 2A + 3I_4$. On déduit de cette égalité la relation $A\left(\frac{1}{3}(A - 2I_4)\right) = I_4$. Ceci montre que A est inversible et que

$$A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4.9

Soit n dans $\mathbb{N}^*$.

1) Soit N une matrice nilpotente dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que les matrices $I_n - N$ et $I_n + N$ sont inversibles.

2) On note A la matrice définie par $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & 0 & 1 \\ 0 & & \cdots & & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que $I_n + A$ est inversible et déterminer son inverse.

1) Il existe p dans $\mathbb{N}$ tel que $N^p = 0$. On a ainsi $(I_n - N)\left(\sum_{i=0}^{p-1} N^i\right) = I_n - N^p = I_n$.

   La matrice $I_n - N$ est donc inversible et a pour matrice inverse $\sum_{i=0}^{p-1} N^i$. Si N est nilpotente alors $-N$ est également nipotente de même indice de nilpotence et donc $I_n + N$ est inversible et a pour matrice inverse $\sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i N^i$.

2) On peut expliciter la matrice $I_n + A$ et l'inverser par des manipulations sur les lignes. On peut aussi utiliser le résultat précédent en remarquant que la matrice A est nilpotente d'indice de nilpotence n. De plus, on calcule sans difficulté ses puissances : pour k dans $[\![1, n-1]\!]$, tous les coefficients (a_{ij}) de A sont nuls sauf ceux dont les indices vérifient $j - i = k$ qui sont égaux à 1. En d'autres termes, pour k dans $[\![1, n-1]\!]$:

$$\begin{array}{rcl}
 & \begin{array}{ccccccc} & & & k+1\text{-ème} & & & \\ & & & \text{colonne} & & & \\ & & & \downarrow & & & \end{array} & \\
A^k = & \begin{pmatrix}
0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\
 & & & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\
 & & & & \ddots & \ddots & 0 \\
\vdots & & & & & 0 & 1 \\
 & & & & & & 0 \\
 & & & & & & \vdots \\
0 & & & \cdots & & & 0
\end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \\ \longleftarrow (n-k)\text{-ième ligne} \\ \\ \\ \\ \end{array}
\end{array}$$

On en déduit que $I_n + A$ est inversible et a pour matrice inverse $\sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i A^i$. Ce qui, de façon plus explicite, donne :

$$(I_n + A)^{-1} = \begin{pmatrix}
1 & -1 & 1 & \cdots & (-1)^{n-1} \\
0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\
0 & & \ddots & 1 & -1 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 1
\end{pmatrix}$$

Exercice 4.10

Soit n dans $\mathbb{N}^*$. Soit M dans $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ définie par

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & \binom{1}{1} & \binom{2}{1} & \cdots & \binom{n}{1} \\ \vdots & \ddots & \binom{2}{2} & \cdots & \binom{2}{n} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \binom{n}{n} \end{pmatrix}.$$

Montrer que M est inversible et donner son inverse.

Cette matrice est triangulaire supérieure et aucun de ses coefficients diagonaux n'est nul, elle est donc de rang $n+1$ et par conséquent elle est inversible. La matrice se prête mal à des manipulations sur les lignes. Les coefficients binomiaux font penser à la formule du binôme de Newton et on va interpréter M comme la matrice de l'application linéaire f de $\mathbb{R}_{n+1}[X]$ dans lui-même qui à P associe $f(P) = P(X+1)$. On constate qu'en notant $\mathcal{B} = (1, X, \ldots, X^n)$ la base canonique de $\mathbb{R}_{n+1}[X]$, on a $M = M_{\mathcal{B}}(f)$. L'application linéaire f est bijective puisque M et inversible et sa réciproque g est l'application linéaire qui à P dans $\mathbb{R}_{n+1}[X]$ associe le polynôme $P(X-1)$. On a donc $M^{-1} = M_B(g)$. On obtient :

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & \cdots & (-1)^n \\ 0 & \binom{1}{1} & -\binom{2}{1} & \cdots & (-1)^{n-1}\binom{n}{1} \\ \vdots & \ddots & \binom{2}{2} & \cdots & (-1)^{n-2}\binom{2}{n} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \binom{n}{n} \end{pmatrix}.$$

4.1.5 Matrices de passage

Ce qu'il faut savoir

Soient n dans $\mathbb{N}^*$ et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E.

- La matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ est la matrice P de la famille $\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}$: sa j-ème colonne est constituée des coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ du j-ème vecteur de la base $\mathcal{B}'$.
- La matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ est égale à la matrice $M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_E)$.

• **Formules de changement de bases**
On note P la matrice de passage de la base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ à la base $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$.
∘ Soit x dans E. Il existe $(x_1, \dots, x_n)$ dans $\mathbb{K}^n$ tel que $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ et $(x'_1, \dots, x'_n)$ dans $\mathbb{K}^n$ tel que $x = \sum_{i=1}^{n} x'_i e'_i$. Soit $X = {}^t(x_1, \dots, x_n)$ et soit $X' = {}^t(x'_1, \dots, x'_n)$.
On a alors $X = PX'$.
∘ Soit f un endomorphisme de E, de matrice M dans la base $\mathcal{B}$, et de matrice M' dans la base $\mathcal{B}'$. On a $M' = P^{-1}MP$.

Exercice 4.11

Centrale PC 2006

Soit n dans $\mathbb{N}^*$. Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$.
On note $\mathcal{B}' = (P_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$, où $P_k = X^k(1-X)^{n-k}$.

1) Montrer que $\mathcal{B}'$ est une base de E.

2) Donner les matrices de passages de la base canonique vers $\mathcal{B}'$ et de $\mathcal{B}'$ vers la base canonique.
Indication de l'examinateur : on remarquera que $1 = X + (1-X)$.

1) Montrons que la famille $\mathcal{B}'$ est libre. Soit $(\alpha_0, \dots, \alpha_n)$ dans $\mathbb{R}^n$ tel que

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha_k P_k = 0. \qquad (*)$$

Remarquons que pour tout k dans $[\![1, n]\!]$, le réel 0 est racine d'ordre k de P_k alors qu'il n'est pas racine de P_0. En évaluant l'égalité $(*)$ en 0, on obtient donc $\alpha_0 = 0$. En dérivant $(*)$ puis en évaluant à nouveau en 0, on obtient cette fois $\alpha_1 = 0$. En réitérant ce procédé, on obtient que, pour tout k dans $[\![0, n]\!]$, α_k est nul. La famille $\mathcal{B}'$ est libre et de cardinal égal à la dimension de E, c'est donc une base de E.

2) • Notons $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n+1}$, la matrice de passage[2] de la base canonique $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}' = (P_0, \dots, P_n)$. Pour tout k dans $[\![0, n]\!]$, on obtient sans difficulté les coordonnées du polynôme P_k dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$. En effet, on a pour tout j dans $[\![1, n]\!]$:

$$P_j(X) = X^j(1-X)^{n-j} = \sum_{i=0}^{n-j} \binom{n-j}{i} (-1)^i X^{i+j} = \sum_{i=j}^{n} \binom{n-j}{i-j} (-1)^{i-j} X^i .$$

2. Attention au décalage d'indice : a_{ij} est le coefficient de P_{j-1} sur X^{i-1}

On en déduit :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n+1]\!]^2,\ a_{ij} = \begin{cases} \dbinom{n+1-j}{i-j}(-1)^{i-j} & \text{pour } j \leqslant i \leqslant n+1, \\ 0 & \text{pour } 1 \leqslant i \leqslant j-1 \end{cases}.$$

• Déterminons la matrice de passage de la base $\mathcal{B}'$ à la base $\mathcal{B}$. Pour cela exprimons chaque X^j en fonction des vecteurs de la base $\mathcal{B}'$. On déduit de la relation $1 = X + (1-X)$, que pour tout p entier on a $1^p = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} X^k (1-X)^{p-k}$. D'où :

$$\begin{aligned} X^{n-p} &= \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} X^{n-p+k}(1-X)^{p-k} = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} P_{n-p+k}(X) \\ &= \sum_{i=n-p}^{n} \binom{p}{i+p-n} P_i(X) \qquad (i = n-p+k). \end{aligned}$$

On en déduit que pour tout j dans $[\![0,n]\!]$, $X^j = \displaystyle\sum_{i=j}^{n} \binom{n-j}{i-j} P_i(X)$. En notant b_{ij} le coefficient général de la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ vers $\mathcal{B}$, on a

$$\forall (i,j) \in [\![1,n+1]\!]^2,\ b_{ij} = \begin{cases} \dbinom{n+1-j}{i-j} & \text{pour } j \leqslant i \leqslant n+1 \\ 0 & \text{pour } 1 \leqslant i \leqslant j-1 \end{cases}.$$

Exercice 4.12

TPE PC 2005, CCP MP 2006

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension 3 et soit (e_1, e_2, e_3) une base de E. Soient H le plan d'équation $x + y + z = 0$ et D la droite $x = y/2 = z/3$.

1) Montrer que $H \oplus D = E$.

2) Trouver la matrice de la projection sur H parallèlement à D.

1) Un vecteur $xe_1 + ye_2 + ze_3$ appartient à $H \cap D$ si et seulement si ses coordonnées x, y et z sont solution du système linéaire : $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x = y \\ 3x = z. \end{cases}$ Il en résulte que $H \cap D = \{0_E\}$. En outre, $\dim H + \dim D = \dim E$, d'où $H \oplus D = E$.

2) Notons p le projecteur sur H parallèlement à D et M sa matrice dans la base (e_1, e_2, e_3).

Soit (e'_1, e'_2) une base de H et e'_3 un vecteur directeur de D. La relation $H \oplus D = E$ assure que (e'_1, e'_2, e'_3) est une base de E. Par ailleurs la matrice M' de p dans cette nouvelle base est donnée par : $M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On sait également que, en notant P la matrice de passage de (e_1, e_2, e_3) à (e'_1, e'_2, e'_3) que l'on a : $M' = P^{-1}MP$.

En choisissant par exemple $e'_1 = e_1 - e_3$, $e'_2 = e_2 - e_3$ et $e'_3 = e_1 + 2e_2 + 3e_3$, on obtient :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \qquad P^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On en déduit $M = PM'P^{-1} = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 3 \end{pmatrix}$.

Remarque

Pour déterminer la matrice de P, on aurait pu procéder comme dans l'exercice 3.13, page 62.

4.1.6 Rang d'une matrice

Ce qu'il faut savoir

Soient (n, p) dans $\mathbb{N}^2$ et M dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

- On appelle rang de M le rang de la famille de ses vecteurs colonnes.
- Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n de base $\mathcal{B}_E$ et F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension p de base $\mathcal{B}_F$. Si u est une application linéaire de E vers F telle que $M = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u)$, alors on a $\mathrm{rg}\,(u) = \mathrm{rg}\,(M)$.
- On a $\mathrm{rg}\,(M) = \mathrm{rg}\,({}^tM)$. c'est-à-dire que le rang de M est aussi le rang de la famille de ses vecteurs lignes
- Si $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, alors $\mathrm{rg}\,(PM) = \mathrm{rg}\,(M)$. Si $Q \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$, alors $\mathrm{rg}\,(MQ) = \mathrm{rg}\,(M)$.

Exercice 4.13

CCP MP 2006 et 2007

Soit n dans $\mathbb{N}^*$, soient u et v les aplications linéaires définies sur $\mathbb{R}_n[X]$ par

$$\forall P \in \mathbb{R}_n\,[X]\,, u(P) = P(X+1) \text{ et } v(P) = P(X-1).$$

1) Déterminer le rang de $f = u - v$ à partir de sa matrice.

2) Retrouver ce résultat par une autre méthode.

1) Cherchons l'image par $f = u - v$ des vecteurs de $\mathcal{B} = (1, X, \ldots, X^n)$ la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$. Soit k dans $[\![1, n]\!]$, on a

$$f(X^k) = (X+1)^k - (X-1)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (1 - (-1)^i) X^{k-i}.$$

On constate en particulier que, pour $i \in [\![1, n]\!]$ et $j \geqslant i$ on a $a_{ij} = 0$ et pour $i \in [\![1, n-1]\!]$ on a $a_{i\,i+1} = 2i$. On en déduit que la matrice de f dans la base canonique est de la forme :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & a_{1,3} & a_{1,4} & \cdots & a_{1,n+1} \\ 0 & 0 & 4 & a_{2,4} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & \ddots & a_{n-1,n+1} \\ \vdots & & & & \ddots & 2n \\ 0 & \cdots & & & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que le rang de f est n.

2) On peut étudier le noyau de f puis utiliser le théorème du rang. Soit P un polynôme tel que $f(P) = 0$. Alors pour tout x dans $\mathbb{R}$, on a $P(x+1) = P(x-1)$, ou encore, pour tout x dans $\mathbb{R}$, on a $P(x+2) = P(x)$. Le polynôme P est donc pérodique de période 2. On montre alors que P est constant (il est de degré inférieur ou égal à n et il prend $n+1$ fois la valeur P(0)). On en déduit que $\mathrm{Ker}(P) = \mathrm{Vect}(1)$, le théorème du rang montre alors que $\mathrm{rg}\,(f) = n + 1 - 1 = n$.

Exercice 4.14

Étudier en fonction de λ dans $\mathbb{R}$ le rang de la matrice $A_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & \lambda & -\lambda \end{pmatrix}$.

On ne modifie pas le rang d'une matrice en ajoutant à l'une de ses colonnes une combinaison linéaire des autres colonnes. On essaie ainsi par manipulations sur les colonnes de transformer A_λ en une matrice triangulaire. On effectue successivement les opérations : $c_4 \leftarrow c_4 - c_2$, puis $c_3 \leftarrow c_3 - c_1$ et enfin $c_2 \leftarrow c_2 - c_1$; on a alors obtenu une matrice dont les deux premières lignes ont la forme souhaitée ; l'opération $c_4 \leftarrow c_4 - c_3$ permet d'obtenir ensuite une matrice triangulaire inférieure :

$$\mathrm{rg}\,(A_\lambda) = \mathrm{rg} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} c_1 & c_2 - c_1 & c_3 - c_1 & c_4 - c_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & \lambda + 1 & -\lambda - 1 \end{pmatrix} \end{array} = \mathrm{rg} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} c_1 & c_2 & c_3 & c_4 - c_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & \lambda + 1 & -2\lambda - 2 \end{pmatrix} \end{array}.$$

On en déduit que si $\lambda = -1$, alors le rang de A_λ est 3, si $\lambda \neq -1$, alors le rang de A_λ est 4.

4.1.7 Matrices semblables

Ce qu'il faut savoir

Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

• On dit que A et B sont semblables lorsqu'il existe P dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ tel que $A = P^{-1}BP$.

• **Caractérisation** : les matrices A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont semblables si et seulement si il existe un espace vectoriel E de dimension n, deux bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B'}_E$ de E, un endomorphisme f de E tels que $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_E}(f)$ et $B = \mathcal{M}_{\mathcal{B'}_E}(f)$.

• **Propriétés**

○ Si deux matrices sont semblables, alors elles ont même rang, même déterminant et même trace. La réciproque est fausse.

○ Si A et B sont semblables, alors pour tout k dans $\mathbb{N}$, les matrices A^k et B^k sont semblables. Si de plus A est inversible, alors B est inversible et pour tout k dans $\mathbb{Z}$, les matrices A^k et B^k sont semblables.

Remarque

En pratique, pour montrer que deux matrices ne sont pas semblables, on utilise la contraposée de l'une de ces implications.

Exercice 4.15

Navale MP 2006

Soient $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1) Montrer que A et B ne sont pas semblables.

2) Montrer que A et C sont semblables.
Indication de la rédaction : on cherchera la matrice de l'endomorphisme associé à C dans une nouvelle base obtenue par permutation des vecteurs de la base canonique.

1) Les matrices A et B n'ont pas même trace, elles ne sont donc pas semblables.

2) Soient c et a les endomorphismes de $\mathbb{R}^4$ de matrices respectives C et A dans la base canonique (e_1, e_2, e_3, e_4) de $\mathbb{R}^4$. On a alors :

$$c(e_1) = 0, \qquad c(e_2) = e_1, \qquad c(e_3) = 0, \qquad c(e_4) = e_3.$$
$$a(e_1) = 0, \qquad a(e_2) = 0, \qquad a(e_3) = e_1, \qquad a(e_4) = e_2.$$

On constate ainsi que dans la nouvelle base (e'_1, e'_2, e'_3, e'_4) définie par :

$$e'_1 = e_1, \qquad e'_2 = e_3, \qquad e'_3 = e_2, \qquad e'_4 = e_4,$$

l'endomorphisme c a pour matrice A. Ceci montre que A et C sont semblables.

Exercice 4.16

CCP PSI 2005

Les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ sont-elles semblables ?

Remarquons que ces deux matrices ont même rang, même trace et même déterminant, ce qui ne permet pas de trancher. Comme A et B sont particulièrement simples, il est naturel de s'intéresser à leur carré. On constate que $A^2 \neq 0$ mais que $B^2 = 0$. Or s'il existait P dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = P^{-1}BP$, on aurait alors $A^2 = P^{-1}BPP^{-1}BP = P^{-1}B^2P = 0$. Il en résulte que A et B ne sont pas semblables.

Remarque
Plus généralement, on montre que si deux matrices A et B sont semblables, alors les polynômes P tels que $P(A) = 0$ vérifient également $P(B) = 0$.

Exercice 4.17

Soient A dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que AB et BA sont semblables.

On veut trouver une matrice P dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $BA = P^{-1}ABP$. La matrice A étant inversible, il est naturel de voir si l'on peut exprimer une telle matrice P au moyen de A. On constate en fait que $P = A$ convient car $A^{-1}ABA = BA$. On a ainsi montré que AB et BA sont semblables.

4.1.8 Trace d'une matrice carrée

Ce qu'il faut savoir

Soit $A = (a_{ij})$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- On appelle trace de A le réel noté $\mathrm{tr}(A)$ défini par $\mathrm{tr}(A) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.

- **Propriétés :** soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et (α, β) dans $\mathbb{K}^2$.

1) $\operatorname{tr}(\alpha A + \beta B) = \alpha \operatorname{tr} A + \beta \operatorname{tr} B$;

2) $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$;

3) $\operatorname{tr}({}^tA) = \operatorname{tr}(A)$;

4) pour P dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ on a $\operatorname{tr}(P^{-1}AP) = \operatorname{tr}(A)$.

• **Trace d'un endomorphisme**
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $\mathcal{B}$ une base de E et f un endomorphisme de E. Le réel $\operatorname{tr}(M_{\mathcal{B}}(f))$ ne dépend pas du choix de la base $\mathcal{B}$: on l'appelle trace de f est on le note $\operatorname{tr}(f)$.

Exercice 4.18

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. Déterminer la trace des endomorphismes suivants :

1) une homothétie h de rapport λ,

2) un projecteur p,

3) une symétrie s.

1) Soit $\mathcal{B}$ une base de E. La matrice de h dans $\mathcal{B}$ est λI_n. On en déduit que $\operatorname{tr}(h) = n\lambda$.

2) On sait que $E = \operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Ker} p$. Soit alors $(e_1, \dots, e_r)$ une base de $\operatorname{Im} p$ et $(e_{r+1}, \dots, e_n)$ une base de $\operatorname{Ker} p$. La famille $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E. Comme pour tout i dans $[\![1, r]\!]$, on a $p(e_i) = e_i$ et pour tout i dans $[\![r+1, n]\!]$, $p(e_i) = 0_E$, la matrice de p est de la forme $M_{\mathcal{B}}(p) = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$. On en déduit que $\operatorname{tr}(p) = r = \operatorname{rg}(p)$

3) On sait que $E = \operatorname{Ker}(\mathrm{Id}_E - s) \oplus \operatorname{Ker}(\mathrm{Id}_E + s)$. Soit alors $(e_1, \dots, e_r)$ une base de $\operatorname{Ker}(\mathrm{Id}_E - s)$ et $(e_{r+1}, \dots, e_n)$ une base de $\operatorname{Ker}(\mathrm{Id}_E + s)$. La famille $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E. Comme pour tout i dans $[\![1, r]\!]$, on a $s(e_i) = e_i$ et pour tout i dans $[\![r+1, n]\!]$, $s(e_i) = -e_i$, la matrice de p est de la forme $M_{\mathcal{B}}(p) = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & -I_{n-r} \end{array}\right)$.
On en déduit que $\operatorname{tr}(s) = \dim(\operatorname{Ker}(\mathrm{Id}_E - s)) - \dim(\operatorname{Ker}(\mathrm{Id}_E + s)) = 2r - n$.

Ce qu'il faut savoir

La trace d'un projecteur est égale à son rang.

Exercice 4.19

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

1) Montrer que l'ensemble $H = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ \mathrm{tr}(M) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et en déterminer la dimension.
2) Donner une base de H.
3) Soit ϕ l'application, qui à toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, associe
$$\phi(M) = \mathrm{tr}(M)I_n - M.$$
Montrer que ϕ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et déterminer sa trace.
4) Etablir que $\phi \circ \phi = (n-2)\phi + (n-1)\,\mathrm{Id}$. En déduire que pour $n \geqslant 2$, l'application ϕ est inversible et déterminer son inverse.

1) La trace est une application linéaire et l'ensemble H est par définition son noyau, donc H est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Comme la trace est une forme linéaire non nulle, le sous-espace vectoriel H est un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, donc $\dim H = n^2 - 1$.
2) Pour trouver une base de H, il est naturel de commencer par examiner quels sont les éléments de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui sont dans H : ce sont toutes les E_{ij} à diagonales nulles (c'est-à-dire telles que $i \neq j$). On a déjà ainsi une famille libre de cardinal $n^2 - n$ qui est dans H. On peut compléter cette famille par les matrices de la forme $E_{11} - E_{ii}$ avec i dans $[\![2, n]\!]$. On obtient alors une famille $\mathcal{B}_H$ d'éléments de H qui est libre et de cardinal $n^2 - n + n - 1 = n^2 - 1$, c'est donc une base de H.
3) L'application ϕ est à image dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. La linéarité de la trace entraîne la linéarité de ϕ. Pour calculer la trace de ϕ, on cherche une base adaptée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On constate que si M est dans H, alors $\phi(M) = -M$. En particulier pour tout élément M de $\mathcal{B}_H$ on a $\phi(M) = -M$. Comme I_n n'est pas dans H et H est un hyperplan, la famille $\mathcal{B}$ obtenue en complétant $\mathcal{B}_H$ par I_n est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a
$$M_{\mathcal{B}}(\phi) = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc|c} \quad & \mathcal{B}_H & \quad & I_n \end{array} & \\ \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & & 0 & 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & & -1 & 0 \\ \hline 0 & \dots & 0 & n-1 \end{array}\right) & \begin{array}{c} \\ \mathcal{B}_H \\ \\ I_n \end{array} \end{array}$$
et on en déduit que $\mathrm{tr}\,\phi = (-1)(n^2 - 1) + n - 1 = n - n^2$.
4) Soit M dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a
$$\begin{aligned} \phi \circ \phi(M) &= \phi(\mathrm{tr}(M)I_n - M) = \mathrm{tr}(\mathrm{tr}(M)I_n - M)I_n - (\mathrm{tr}(M)I_n - M) \\ &= (n-2)\,\mathrm{tr}(M)I_n + M = (n-2)\phi(M) + (n-1)M. \end{aligned}$$

On en déduit que $\phi \circ \phi = (n-2)\phi + (n-1)\,\mathrm{Id}$. On peut encore écrire cette relation sous la forme $\phi \circ (\phi - (n-2)\,\mathrm{Id}) = (n-1)\,\mathrm{Id}$. L’application ϕ est donc bijective, d’application réciproque $\dfrac{1}{n-1}(\phi - (n-2)\,\mathrm{Id})$.

Remarque

Pour déterminer ϕ^{-1} on a utilisé un polynôme annulateur de ϕ. On peut aussi obtenir ϕ^{-1} directement en résolvant pour N dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ donnée, l’équation (E) $\mathrm{tr}(M)I_n - M = N$. Remarquons que pour résoudre (E), il suffit de déterminer la trace de la matrice M. Pour cela, on commence par appliquer la trace à (E). On obtient $\mathrm{tr}(M)n - \mathrm{tr}(M) = \mathrm{tr}(N)$, d’où $\mathrm{tr}(M) = \dfrac{\mathrm{tr}(N)}{n-1}$. On en déduit alors que $M = \dfrac{\mathrm{tr}(N)}{n-1}I_n - N$.

4.1.9 Matrices par blocs

Ce qu’il faut savoir

Soient (n, p) dans $(\mathbb{N}^*)^2$ et (n_1, n_2, p_1, p_2) dans $(\mathbb{N}^*)^4$ tels que $n_1 + n_2 = n$ et $p_1 + p_2 = p$.

• Soient A dans $\mathcal{M}_{n_1,p_1}(\mathbb{K})$, B dans $\mathcal{M}_{n_1,p_2}(\mathbb{K})$, C dans $\mathcal{M}_{n_2,p_1}(\mathbb{K})$ et D dans $\mathcal{M}_{n_2,p_2}(\mathbb{K})$. Soit M la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ définie par

$$M = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right),$$

on dit que M est définie par blocs.

• Soit M_1 et M_2 deux matrices pour lesquelles on dispose d’écriture par blocs de **tailles compatibles** pour que tous les produits aient un sens :

$$M_1 = \left(\begin{array}{c|c} A_1 & B_1 \\ \hline C_1 & D_1 \end{array}\right) \qquad M_2 \left(\begin{array}{c|c} A_2 & B_2 \\ \hline C_2 & D_2 \end{array}\right)$$

Alors on sait donner une écriture par blocs du produit M_1M_2 et on obtient :

$$M_1M_2 = \left(\begin{array}{c|c} A_1A_2 + B_1C_2 & A_1B_2 + B_1D_2 \\ \hline C_1A_2 + D_1C_2 & C_1B_2 + D_1D_2 \end{array}\right).$$

• **Exemple** Soit r un entier tel que $r \leqslant \min(n, p)$, on note J_{npr} la matrice de$\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ définie par :

$$J_{npr} = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right).$$

• **Caractérisation du rang à partir des matrices J_{npr}.** Soit M dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. La matrice M est de rang r si et seulement si il existe U dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et V dans $\mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$ telles que $M = U J_{npr} V$

Remarque

Soient A et B dans $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. On dit que A et B sont équivalentes lorsqu'il existe P dans $\mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$ et Q dans $\mathrm{GL}_q(\mathbb{K})$ tels que : $A = PBQ$. La propriété précédente s'énonce alors : M dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est de rang r si et seulement si M est équivalente à J_{npr}.

Exercice 4.20

Soient A dans $\mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$, B dans $\mathcal{M}_{pq}(\mathbb{R})$ et C dans $\mathcal{M}_{mq}(\mathbb{R})$. On note r le rang de A et s le rang de B.

1) Montrer que le rang de la matrice $M_1 = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \end{array}\right)$ est égal à $r+s = \operatorname{rg} A + \operatorname{rg} B$.

2) Comparer le rang de la matrice $M_2 = \left(\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline 0 & B \end{array}\right)$ avec $r+s$.

3) On suppose que B est inversible. Montrer qu'alors le rang de la matrice $M_2 = \left(\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline 0 & B \end{array}\right)$ est encore égal à $r+s = \operatorname{rg} A + \operatorname{rg} B$.

1) Nous allons donner deux méthodes.

- Première méthode, on travaille sur les colonnes de M_1.

Pour $i \in \{1, \dots, n\}$, notons u_j le j-ième vecteur colonne de A et $U_j = \begin{pmatrix} u_j \\ 0 \end{pmatrix}$ le j-ième vecteur colonne de M_1. Pour $k \in \{1, \dots, q\}$, notons v_k le k-ième vecteur colonne de B et $V_k = \begin{pmatrix} 0 \\ v_k \end{pmatrix}$ le k-ième vecteur colonne de M_1.
Les vecteurs colonnes de M_1 sont donc $U_1, \dots, U_n, V_1, \dots, V_q$.
Soit $(u_{j_1}, \dots u_{j_r})$ une famille libre extraite de $(u_1, \dots, u_n)$ et $(v_{k_1}, \dots v_{k_s})$ une famille libre extraite de $(v_1, \dots, v_q)$.
Montrons que la famille $(U_{j_1}, \dots, U_{j_r}, V_{k_1}, \dots, V_{k_s})$ est une famille libre. Si l'on a $\displaystyle\sum_{k=1}^{r} \lambda_k U_{j_k} + \sum_{k=1}^{s} \mu_k V_{j_k} = 0$, on obtient $\displaystyle\sum_{k=1}^{r} \lambda_k U_{j_k} = -\sum_{k=1}^{s} \mu_k V_{j_k}$. En prenant les p dernières coordonnées, on a alors $\displaystyle 0 = -\sum_{k=1}^{s} \mu_k v_{j_k}$. Par ailleurs, la famille $(v_{k_1}, \dots v_{k_s})$ est libre, il en résulte que les μ_k sont nuls. On en déduit alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{r} \lambda_k U_{j_k} = 0$, d'où $\displaystyle\sum_{k=1}^{r} \lambda_k u_{j_k} = 0$. Or, la famille $(u_{j_1}, \dots u_{j_r})$ est libre, les λ_k sont donc nuls. Ainsi, la famille $(U_{j_1}, \dots, U_{j_r}, V_{k_1}, \dots, V_{k_s})$ est libre et par conséquent $\operatorname{rg} M \geqslant r+s = \operatorname{rg} A + \operatorname{rg} B$.

Soit maintenant une famille $\mathcal{F}$ de $r+s+1$ vecteurs colonnes de M_1. Elle contient nécessairement au moins $r+1$ vecteurs colonnes dans la matrice $\begin{pmatrix} A \\ 0 \end{pmatrix}$ ou au moins $s+1$ vecteurs colonnes dans $\begin{pmatrix} 0 \\ B \end{pmatrix}$. Dans le premier cas, il y a au moins $r+1$ vecteurs colonnes de A et la famille $\mathcal{F}$ est liée car elle contient une famille liée. Dans le deuxième cas, il y a au moins $s+1$ vecteurs colonnes de B et la famille $\mathcal{F}$ est liée.

Finalement $\operatorname{rg} M = \operatorname{rg} A + \operatorname{rg} B$.

• **Deuxième méthode** : on se ramène à une matrice triangulaire par blocs.

La matrice A est de rang r, il existe donc P_A dans $\mathrm{GL}_m(\mathbb{R})$ et Q_A dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telles que $P_A A Q_A = J_{mnr}$. La matrice B est de rang s, il existe donc P_B dans $\mathrm{GL}_p(\mathbb{R})$ et Q_B dans $\mathrm{GL}_q(\mathbb{R})$ telles que $P_B B Q_B = J_{pqs}$. Soit alors les matrices $P = \left(\begin{array}{c|c} P_A & 0 \\ \hline 0 & P_B \end{array}\right)$ et $Q = \left(\begin{array}{c|c} Q_A & 0 \\ \hline 0 & Q_B \end{array}\right)$. Ces matrices sont inversibles : $P^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} P_A^{-1} & 0 \\ \hline 0 & P_B^{-1} \end{array}\right)$ et $Q^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} Q_A^{-1} & 0 \\ \hline 0 & Q_B^{-1} \end{array}\right)$, et de plus :

$$\left(\begin{array}{c|c} P_A & 0 \\ \hline 0 & P_B \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} Q_A & 0 \\ \hline 0 & Q_B \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} J_{mnr} & 0 \\ \hline 0 & J_{pqs} \end{array}\right).$$

On en déduit que M_1 est équivalente à une matrice de rang $r+s$. On a donc $\operatorname{rg} M_1 = r+s$.

2) Là aussi on peut utiliser les deux méthodes précédentes, nous allons vous présenter le travail sur les colonnes.
Pour $k \in \{1, \dots, q\}$, notons w_k le k-ième vecteur colonne de C. On peut refaire la première partie du raisonnement précédent en notant cette fois $V_k = \begin{pmatrix} w_k \\ v_k \end{pmatrix}$.
On obtient encore $\operatorname{rg} M \geqslant r+s = \operatorname{rg} A + \operatorname{rg} B$. L'inégalité peut être stricte il suffit de prendre $A=0$, $B=0$ et $C \neq 0$.

3) Supposons que B est inversible. On a donc $p=q=s$. Soit une famille de $r+s+1$ vecteurs colonnes de M. Comme on peut prendre au plus s vecteurs dans $\begin{pmatrix} C \\ B \end{pmatrix}$, il y a au moins $r+1$ vecteurs de cette famille dans la matrice $\begin{pmatrix} A \\ 0 \end{pmatrix}$, alors il y a au moins $r+1$ vecteurs dans A et la famille est liée. Finalement $\operatorname{rg} M = \operatorname{rg} A + \operatorname{rg} B$.

Remarque

On peut aussi se ramener plus directement à la question précédente en remarquant que

$$\left(\begin{array}{c|c} I_m & -CB^{-1} \\ \hline 0 & I_n \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline 0 & B \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \end{array}\right).$$

Comme la matrice $\left(\begin{array}{c|c} I_m & -CB^{-1} \\ \hline 0 & I_n \end{array}\right)$ est inversible $\left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \end{array}\right)$ et $\left(\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline 0 & B \end{array}\right)$ ont même rang.

Exercice 4.21

CCP MP 2006

Soit M dans $\mathcal{M}_{n+p}(\mathbb{R})$ décomposée par blocs : $M = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right)$ avec A dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Montrer que : $\mathrm{rg}\,(A) = \mathrm{rg}\,(M) \Leftrightarrow D = CA^{-1}B$.

Remarquons tout d'abord que comme A est dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, la proposition à démontrer est équivalente à : $\mathrm{rg}\,(M) = n \Leftrightarrow D = CA^{-1}B$.
On va essayer de multiplier M par des matrices inversibles jusqu'à obtenir une matrice diagonale par blocs dont les blocs diagonaux sont assez simples.

$$\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} A^{-1} & 0 \\ \hline 0 & I_n \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} I_n & B \\ \hline CA^{-1} & D \end{array}\right).$$

On a ensuite :

$$\left(\begin{array}{c|c} I_n & B \\ \hline CA^{-1} & D \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} I_n & B \\ \hline 0 & -I_p \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} I_n & 0 \\ \hline CA^{-1} & CA^{-1}B - D \end{array}\right).$$

Comme toutes les matrices par lesquelles on a multiplié M sont inversibles, le rang de M est égal au rang de $\left(\begin{array}{c|c} I_n & 0 \\ \hline CA^{-1} & CA^{-1}B - D \end{array}\right) = \mathrm{rg}\, I_n + \mathrm{rg}\,(CA^{-1}B - D)$. On en déduit $\mathrm{rg}\,(M) = n \Leftrightarrow \mathrm{rg}\,(CA^{-1}B - D) = 0 \Leftrightarrow D = CA^{-1}B$.

4.2 EXERCICES D'ENTRAÎNEMENT

Exercice 4.22

CCP MP 2006

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n > 1$.

1) Montrer que f dans $\mathcal{L}(E)$, de rang 1, n'est pas forcément un projecteur.

2) Montrer que f dans $\mathcal{L}(E)$, de rang 1 et de trace 1 est un projecteur.

3) Trouver une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ constituée de projecteurs.

1) On choisit $E = \mathbb{R}^2$. On considère l'endomorphisme f de E ayant pour matrice $M_f = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ dans la base canonique. Il est clair que $\mathrm{rg}\, f = 1$. Mais $f^2 = 0 \neq f$, ce qui montre que f n'est pas un projecteur.

2) Soit f de rang 1 et de trace 1. Soit $(e_1, \dots, e_{n-1})$ une base de $\operatorname{Ker} f$. D'après le théorème de la base incomplète, il existe un vecteur e_n de E tel que la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E. Soit M'_f la matrice de f dans cette base. La matrice M'_f est de la forme :

$$M'_f = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} f(e_1) & \dots & f(e_{n-1}) & f(e_n) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix} & \begin{array}{c} e_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ e_n \end{array} \end{array}.$$

Comme la trace de f est égale à 1, on a $a_n = 1$. Un simple calcul matriciel montre alors que grâce à la condition $a_n = 1$, on a $(M'_f)^2 = M'_f$, ce qui montre que $f^2 = f$. On a ainsi montré que f est un projecteur.

3) Les matrices $E_{11}, \cdots, E_{nn}$ et $E_{ij} + E_{jj}$ avec $i \neq j$ sont de rang 1 et de trace 1, elles sont des matrices de projecteurs. En outre, elles forment une famille libre de n^2 matrices, donc une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 4.23

CCP PC 2006 Matrices de rang 1

Soit n dans $\mathbb{N}^*$. On considère $2n$ nombres réels $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ et la matrice $A = (a_{ij})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que pour tout (i, j) dans $[\![1, n]\!]^2$ $a_{ij} = \alpha_i \beta_j$.

1) Déterminer le rang de A.

2) Montrer que $A^2 = (\operatorname{tr} A)A$ et en déduire que si $\operatorname{tr} A \neq 0$, il existe un projecteur p et une homothétie h dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ tels que A soit la matrice de $p \circ h$ dans une certaine base.

3) Soit M dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de rang égal à 1. Montrer qu'il existe X dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\setminus\{0\}$ et Y dans $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})\setminus\{0\}$ tels que $M = XY$.

4) Déduire des résultats précédents l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $A^2 = 0$.

1) Pour j dans $[\![1, n]\!]$, notons C_j la j-ème colonne de A. On a par définition de A :

$$C_j = \beta_j \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}.$$

On en déduit que toutes les colonnes de A sont proportionelles, ce qui montre que $\operatorname{rg} A \leqslant 1$. S'il existe (i, j) dans $[\![1, n]\!]^2$ tel que $\alpha_i \beta_j \neq 0$ alors $\operatorname{rg} A = 1$, sinon $A = 0$ et $\operatorname{rg} A = 0$.

2) Soit c_{ij} le coefficient général de la matrice A^2. Pour tout (i, j) dans $[\![1, n]\!]^2$ on a $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{kj} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_i \beta_k \alpha_k \beta_j = \left(\sum_{k=1}^{n} \beta_k \alpha_k\right) a_{ij} = \operatorname{tr} A \; a_{ij}$. On a ainsi $A^2 = (\operatorname{tr} A)A$.

Supposons $\operatorname{tr} A \neq 0$ et considérons la matrice $B = \dfrac{1}{\operatorname{tr} A} A$. On a alors $B^2 = \dfrac{1}{(\operatorname{tr} A)^2} A^2 = \dfrac{1}{\operatorname{tr} A} A = B$. Ainsi B est la matrice d'un projecteur p. Soit alors h l'homothétie de rapport $\operatorname{tr} A$. Dans toute base la matrice de h est $(\operatorname{tr} A)\, I_n$. Alors la matrice $A = B((\operatorname{tr} A)\, I_n)$ est la matrice de $p \circ h$.

3) Comme M est de rang 1, l'une de ses colonnes est non nulle. On note X cette colonne. Toujours parce que M est de rang 1, toutes les autres colonnes de M sont proportionnelles à X. Pour j dans $[\![1, n]\!]$, en notant C_j la j-ième colonne de M, il existe y_j dans $\mathbb{R}$ tel que $C_j = y_j X$. Si on note Y le vecteur ligne $(y_1, \ldots, y_n)$ on a alors $M = XY$. Comme M est non nulle, Y est non nulle et on a bien obtenu l'écriture proposée.

4) Soit g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont M est la matrice dans la base canonique. On a $g^2 = 0$ ce qui entraîne $\operatorname{Im} g \subset \operatorname{Ker} g$. On en déduit que $\dim \operatorname{Im} g \leqslant \dim \operatorname{Ker} g$ et le théorème du rang montre alors que $\operatorname{rg} g = 0$ ou $\operatorname{rg} g = 1$.

• Si $\operatorname{rg} g = 0$, alors $g = 0$ et par conséquent $M = 0$.

• Si $\operatorname{rg} g = 1$, alors $\operatorname{rg} M = 1$, et le résultat de la question 3) montre qu'il existe X dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ et Y dans $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ tels que $M = XY$. On a alors, puisque YX s'identifie à un nombre,

$$M^2 = 0 \Rightarrow XYXY = 0 \Rightarrow X(YX)Y = (YX)(XY) = (YX)M = 0.$$

Comme M est non nulle on en déduit que c'est le scalaire YX qui est nul. On peut remarquer que ce scalaire est en fait la trace de M, ce qui est cohérent avec le résultat du 1).

Exercice 4.24

Centrale PSI 2005

1) Montrer que $A_n = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha/n \\ \alpha/n & 1 \end{pmatrix}$ est la matrice d'une similitude dont on précisera les éléments.

2) Calculer $B_n = A_n^n$, puis déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} B_n$.

La matrice A_n a pour déterminant $1 + \alpha^2/n^2$. On peut donc l'écrire
$A_n = \sqrt{1+\alpha^2/n^2}\begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{1+\alpha^2/n^2}} & -\dfrac{\alpha/n}{\sqrt{1+\alpha^2/n^2}} \\ \dfrac{\alpha/n}{\sqrt{1+\alpha^2/n^2}} & \dfrac{1}{\sqrt{1+\alpha^2/n^2}} \end{pmatrix}$, et c'est la matrice d'une similitude de rapport $r_n = \sqrt{1+\alpha^2/n^2}$ et d'angle θ_n défini par $\cos\theta_n = \dfrac{1}{\sqrt{1+\alpha^2/n^2}}$ et $\sin\theta_n = \dfrac{\alpha/n}{\sqrt{1+\alpha^2/n^2}}$.

2) Alors B_n est une similitude de rapport r_n^n et d'angle $n\theta_n$. On obtient donc $B_n = A_n^n = (1+\alpha^2/n^2)^{n/2}\begin{pmatrix} \cos n\theta_n & -\sin n\theta_n \\ \sin n\theta_n & \cos n\theta_n \end{pmatrix}$. Mais $\dfrac{n\ln\left(1+\frac{\alpha^2}{n^2}\right)}{2} \sim \dfrac{\alpha^2}{2n}$.

Il en résulte que $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n^n = \lim\limits_{n\to+\infty} \exp\dfrac{n\ln\left(1+\frac{\alpha^2}{n^2}\right)}{2} = 1$. D'autre part $\lim\limits_{n\to+\infty} n\theta_n = \lim\limits_{n\to+\infty} n\,\mathrm{Arcsin}\dfrac{\alpha/n}{\sqrt{1+\alpha^2/n^2}} = \alpha$. Donc la suite (B_n) converge vers $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$.

Exercice 4.25

CCP PSI 2005

Soient $N = \begin{pmatrix} a_1 & a_1 & \dots & a_1 \\ a_2 & a_2 & \dots & a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & a_n & \dots & a_n \end{pmatrix}$ où $\alpha = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i \neq 0$ et $M = (b_{ij})$ la matrice définie par : $i \neq j \Rightarrow b_{ij} = 2a_i$ et $b_{ii} = a_i - \sum\limits_{j\neq i} a_j$.

1) Calculer N^2.

2) Montrer que M est inversible et déterminer son inverse.

1) On vérifie sans difficulté que $N^2 = \alpha N$.

2) On va encore une fois chercher un polynôme annulateur de M. Pour essayer d'utiliser la relation précédente, on écrit $M = 2N - \alpha I_n$. On a alors

$$M^2 = (2N - \alpha I_n)^2 = 4N^2 - 4\alpha N + \alpha^2 I_n = \alpha^2 I_n.$$

Comme α est non nul on en déduit que M est inversible et son inverse est donnée par la relation $M^{-1} = \dfrac{1}{\alpha^2}M$.

Exercice 4.26

CCP PSI 2005

Soit $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et soit $C(J) = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid MJ = JM\}$.

1) Montrer que $C(J)$ est un sous-espace vectoriel et en donner une base.
L'ensemble $C(J)$ est appelé *commutant* de J.

2) Existe-t-il une inclusion entre $C(J)$ et $D(J) = \{Y \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid Y^2 = J\}$?
Trouver $D(J)$.

1) On va montrer que $C(J)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
La matrice nulle est dans $C(J)$ donc $C(J)$ est non vide.
Soient A et B dans C(J), soient α et β dans $\mathbb{R}$:

$$(\alpha A + \beta B)J = \alpha AJ + \beta BJ = \alpha JA + \beta JB = J(\alpha A + \beta B)\,.$$

On a donc montré que $C(J)$ est une partie non vide de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ stable par combinaison linéaire. On en déduit que $C(J)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
La matrice J étant très simple on va pour une fois traduire la condition d'appartenance au commutant en relations coefficient à coefficient.
Soit $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. La matrice A appartient à $C(J)$ si et seulement si $JA = AJ$, ce qui s'écrit $\begin{pmatrix} g & h & i \\ a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & c & a \\ e & f & d \\ h & i & g \end{pmatrix}$.

On en déduit que A appartient à $C(J)$ si et seulement si $\begin{cases} a = e = i \\ b = f = g \\ c = d = h \end{cases}$.

On reconnaît alors que A s'écrit sous la forme $aI_n + bJ^2 + cJ$. On vient de montrer que $C(J) \subset \mathrm{Vect}(I_n, J, J^2)$, l'inclusion réciproque est immédiate et comme la famille (I_n, J, J^2) est libre, cette famille est finalement une base de $\mathrm{Vect}(I_n, J, J^2) = C(J)$.

2) On va montrer que $D(J) \subset C(J)$.
Soit Y dans $D(J)$. On a alors $YJ = YY^2 = Y^2Y = JY$, ce qui montre que Y est dans $C(J)$. On a bien montré que $D(J) \subset C(J)$. Le résultat précédent montre alors que, pour Y dans $D(J)$, il existe a, b et c dans $\mathbb{R}$ tels que $Y = aI_n + bJ + cJ^2$.
La condition $Y^2 = J$ s'écrit alors : $(aI_n + bJ + cJ^2)(aI_n + bJ + cJ^2) = J^2$, ce qui, en développant et en remarquant que $J^3 = I_n$ devient

$$(a^2 + 2bc)I_n + (c^2 + 2ab)J + (b^2 + 2ac)J^2 = J\,.$$

Comme la famille (I_n, J, J^2) est libre, on en déduit que le système :

$$(S) \left\{ \begin{array}{l} a^2 + 2bc = 0 \\ c^2 + 2ab = 1 \\ b^2 + 2ac = 0 \end{array} \right. .$$

En multipliant la première ligne et la troisième ligne de (S) par respectivement a et b, on constate que (S) entraîne $a^3 - b^3 = 0$. Comme la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, qui à x associe x^3 est bijective, on en déduit que $a = b$. Le système (S) se simplifie alors en

$$(S') \left\{ \begin{array}{l} a^2 + 2ac = 0 \\ c^2 + 2a^2 = 1 \end{array} \right. .$$

On en déduit que $a = 0$ ou $a = -2c$, ce qui mène respectivement à $a = b = 0$, $c = \pm 1$ ou $a = b = \frac{2}{3}$, $c = -\frac{1}{3}$ ou $a = b = -\frac{2}{3}$, $c = \frac{1}{3}$. on vérifie sans difficulté que ces solutions conviennent effectivement, et on en déduit :

$$D(J) = \left\{ \pm J^2, \pm \frac{1}{3} \left(2I_n + 2J - J^2 \right) \right\}.$$

Remarque
Voir chapitre « Réduction » pour des méthodes plus générales de recherche d'un commutant.

Exercice 4.27

Mines-Ponts MP 2006

Montrer que les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ et ${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ sont semblables.

Devant ce genre d'exercice il est naturel de se tourner vers des méthodes qui seront vues dans le chapitre « Réduction ». Nous allons vous présenter une solution élémentaire adaptée à cette matrice particulière mais difficilement généralisable.

Soit u un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice A dans une base notée $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$.

On a donc $\left\{ \begin{array}{l} u(e_1) = e_1 + 3e_2 + 2e_3 \\ u(e_2) = 2e_1 + e_2 + 3e_3 \\ u(e_3) = 3e_1 + 2e_2 + e_3 \end{array} \right.$. Alors si l'on pose $v_1 = e_2$, $v_2 = e_1$, $v_3 = e_3$,

on obtient $\left\{ \begin{array}{l} u(v_1) = v_1 + 2v_2 + 3v_3 \\ u(v_2) = 3v_1 + v_2 + 2v_3 \\ u(v_3) = 2v_1 + 3v_2 + v_3 \end{array} \right.$. Dans la base $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, v_3)$, la matrice de u est donc ${}^tA$. Les matrices A et ${}^tA$ sont donc semblables.

Exercice 4.28

Centrale PSI 2006

Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $M = \left(\begin{array}{c|c} A & A \\ \hline A & B \end{array}\right)$.

1) Déterminer le rang de M en fonction de A et B.

2) Calculer M^{-1} quand elle existe.

1) Par manipulation sur les lignes et les colonnes de M, on trouve :
$$\operatorname{rg} M = \operatorname{rg}\left(\begin{array}{c|c} A & A \\ \hline A & B \end{array}\right) = \operatorname{rg}\left(\begin{array}{c|c} A & A \\ \hline 0 & B-A \end{array}\right) = \operatorname{rg}\left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B-A \end{array}\right).$$
On en déduit, voir exercice 4.20, que $\operatorname{rg} M = \operatorname{rg} A + \operatorname{rg}(B-A)$.

2) Puisque $\operatorname{rg} A \leqslant n$ et $\operatorname{rg}(B-A) \leqslant n$, on a $\operatorname{rg} M = 2n$ si et seulement si $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(B-A) = n$. Il en résulte que la matrice M est inversible si et seulement si A et $B - A$ sont inversibles. Supposons que les matrices A et $A - B$ sont inversibles et déterminons l'inverse de la matrice M. On vous propose deux méthodes pour déterminer l'inverse de M.

- *Première méthode :* les manipulations précédentes peuvent être traduites en termes de produits par des matrices inversibles :
$$\left(\begin{array}{c|c} I_n & 0 \\ \hline -I_n & I_n \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} A & A \\ \hline A & B \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} A & A \\ \hline 0 & B-A \end{array}\right),$$
$$\left(\begin{array}{c|c} A & A \\ \hline 0 & B-A \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} I_n & -I_n \\ \hline 0 & I_n \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B-A \end{array}\right).$$
En s'inspirant de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, on a $\left(\begin{array}{c|c} I_n & 0 \\ \hline -I_n & I_n \end{array}\right)^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} I_n & 0 \\ \hline I_n & I_n \end{array}\right)$
et $\left(\begin{array}{c|c} I_n & -I_n \\ \hline 0 & I_n \end{array}\right)^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} I_n & I_n \\ \hline 0 & I_n \end{array}\right)$. On a donc
$$\left(\begin{array}{c|c} A & A \\ \hline A & B \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} I_n & 0 \\ \hline I_n & I_n \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B-A \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} I_n & I_n \\ \hline 0 & I_n \end{array}\right)$$
$$\begin{aligned}\left(\begin{array}{c|c} A & A \\ \hline A & B \end{array}\right)^{-1} &= \left(\begin{array}{c|c} I_n & I_n \\ \hline 0 & I_n \end{array}\right)^{-1}\left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B-A \end{array}\right)^{-1}\left(\begin{array}{c|c} I_n & 0 \\ \hline I_n & I_n \end{array}\right)^{-1} \\ &= \left(\begin{array}{c|c} I_n & -I_n \\ \hline 0 & I_n \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} A^{-1} & 0 \\ \hline 0 & (B-A)^{-1} \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} I_n & 0 \\ \hline -I_n & I_n \end{array}\right) \\ &= \left(\begin{array}{c|c} A^{-1} + (B-A)^{-1} & -(B-A)^{-1} \\ \hline -(B-A)^{-1} & (B-A)^{-1} \end{array}\right).\end{aligned}$$

- *Deuxième méthode :* Etant donnés X et Y deux vecteurs colonnes de $\mathbb{C}^n$, résolvons le système d'équations $M\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$, d'inconnues U et V où

U et V sont deux vecteurs colonnes de $\mathbb{C}^n$. Ce système est équivalent au système $\begin{cases} AU + AV = X \\ AU + BV = Y \end{cases}$ qui équivaut successivement aux systèmes suivants : $\begin{cases} A(U + V) = X \\ A(U + V) + (B - A)V = Y \end{cases}$, puis $\begin{cases} A(U + V) = X \\ (B - A)V = Y - X \end{cases}$, ou encore $\begin{cases} U + V = A^{-1}X \\ V = (B - A)^{-1}(Y - X) \end{cases}$ et enfin $\begin{cases} U = A^{-1}X - (B - A)^{-1}(Y - X) \\ V = (B - A)^{-1}(Y - X) \end{cases}$.

Comme le système $M\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ est équivalent à $M^{-1}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}$, on en déduit $M^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} + (B - A)^{-1} & -(B - A)^{-1} \\ -(B - A)^{-1} & (B - A)^{-1} \end{pmatrix}$.

Exercice 4.29

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $3n$. Soit f un endomorphisme de E tel que $\operatorname{rg} f = 2n$ et $f^3 = 0$. Montrer que $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f^2$ et trouver une base $\mathcal{B}$ telle que la matrice de f dans $\mathcal{B}$ soit $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ I_n & 0 & 0 \\ 0 & I_n & 0 \end{pmatrix}$.

• Par hypothèse $\operatorname{rg} f = 2n$, donc, d'après le théorème du rang on a l'égalité $\dim \operatorname{Ker} f = \dim E - \operatorname{rg} f = n$.
Puisque $f^3 = 0$, on a $\operatorname{Im} f^2 \subset \operatorname{Ker} f$, donc $\operatorname{rg} f^2 \leqslant \dim \operatorname{Ker} f = n$.
Soit g l'endomorphisme de $\operatorname{Im} f$ défini par $g(x) = f(x)$ pour $x \in \operatorname{Im} f$. Puisque, pour tout $x \in E$, on a $f^2(x) = g(f(x))$, on a alors $\operatorname{Im} g = \operatorname{Im} f^2$, et donc $\operatorname{rg} g = \operatorname{rg} f^2$. D'autre part, en utilisant le théorème du rang on obtient $2n = \dim \operatorname{Im} f = \dim \operatorname{rg} g + \dim \operatorname{Ker} g$. Mais $\operatorname{Ker} g$ est inclus dans $\operatorname{Ker} f$, donc $2n \leqslant \dim \operatorname{rg} f^2 + n$, et finalement $\operatorname{rg} f^2 \geqslant n$. Comme on a l'inégalité inverse, on obtient $\dim \operatorname{Im} f^2 = n = \dim \operatorname{Ker} f$. Alors $\operatorname{Im} f^2 = \operatorname{Ker} f$.

• Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de $\operatorname{Ker} f$. C'est aussi une base de $\operatorname{Im} f^2$, donc il existe $(u_1, \dots, u_n)$ dans E^n tel que, pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, on ait $e_j = f^2(u_j)$. Considérons alors le système $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_n, f(u_1) \dots, f(u_n), f^2(u_1), \dots, f(u_n))$. C'est un système de $3n$ vecteurs dans un espace de dimension $3n$. Pour montrer que c'est une base de E, il suffit donc de démontrer qu'il est libre. Soit alors une combinaison linéaire nulle de ces vecteurs $\sum_{j=1}^{n} a_j u_j + \sum_{j=1}^{n} b_j f(u_j) + \sum_{j=1}^{n} c_j f^2(u_j) = 0$. En appliquant f^2 à cette relation, et, puisque $f^3 = 0$, on obtient $\sum_{j=1}^{n} a_j f^2(u_j) = \sum_{j=1}^{n} a_j e_j = 0$, et puisque la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est libre, on en déduit $a_1 = \dots = a_n = 0$. Donc

$\sum_{j=1}^{n} b_j f(u_j) + \sum_{j=1}^{n} c_j f^2(u_j) = 0$. En appliquant f, à cette relation, il vient $\sum_{j=1}^{n} b_j f^2(u_j) = \sum_{j=1}^{n} b_j e_j = 0$, et de nouveau on déduit $b_1 = \cdots = b_n = 0$. Il reste alors $\sum_{j=1}^{n} c_j f^2(u_j) = \sum_{j=1}^{n} c_j e_j = 0$, et finalement $c_1 = \cdots = c_n = 0$. Le système $\mathcal{B}$ est une base de E, et dans cette base la matrice de f est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ I_n & 0 & 0 \\ 0 & I_n & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 4.30

Centrale MP 2005

Montrer que les matrices triangulaires réelles qui commutent avec leur transposée sont diagonales.

On va procéder par récurrence sur la taille de la matrice considérée. Soit n dans $\mathbb{N}$, soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui commute avec sa transposée.

Si n=1, la matrice A est diagonale.

Soit $n \geqslant 2$, on suppose que le résultat est vrai pour les matrices de taille $n-1$. Quitte à échanger A et ${}^tA$, on peut supposer A triangulaire supérieure et on peut alors écrire A sous la forme :

$$A = \left(\begin{array}{c|ccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & A' & \\ 0 & & & \end{array}\right),$$

où A' est une matrice triangulaire supérieure de $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$. En notant V le vecteur colonne défini par ${}^tV = (a_{12}, \ldots, a_{1n})$, on a :

$$A\,{}^tA = \left(\begin{array}{c|ccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & A' & \\ 0 & & & \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|ccc} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ \hline a_{12} & & & \\ \vdots & & {}^tA' & \\ a_{1n} & & & \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \sum_{i=1}^{n} a_{1i}^2 & {}^tV\,{}^tA' \\ \hline A'V & A'\,{}^tA' \end{array}\right),$$

tandis que :

$${}^tA A = \left(\begin{array}{c|ccc} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ \hline a_{12} & & & \\ \vdots & & {}^tA' & \\ a_{1n} & & & \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|ccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & A' & \\ 0 & & & \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} a_{11}^2 & a_{11}\,{}^tV \\ \hline a_{11}V & {}^tA'A' + V\,{}^tV \end{array}\right).$$

On en déduit que $A\,{}^tA = {}^tAA$ entraîne $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{1i}^2 = a_{11}^2$ et $A'\,{}^tA' = {}^tA'A' + V\,{}^tV$. Ceci entraîne que pour tout i dans $[\![2, n]\!]$, le réel a_{1i} est nul, donc $V = 0$ et ${}^tA'A' = A'\,{}^tA'$. Alors A' est diagonale par hypothèse de récurrence et on a ainsi montré que A est diagonale.

Exercice 4.31

Polytechnique MP 2005

Soit A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On pose, pour M dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\Delta_A(M) = AM - MA$.

1) Calculer les puissances de Δ_A.

2) Montrer que si A est nilpotente, alors Δ_A est nilpotente.

1) Commençons par determiner Δ_A^2. Soit M dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a : $\Delta_A^2(M) = \Delta_A(AM - MA) = A^2M - 2AMA + MA^2$. Pour Δ_A^3, on obtient $\Delta_A^3 = A^3M - 3A^2MA + 3AMA^2 - MA^3$.

On peut alors conjecturer que : $\forall n \in N,\ \Delta_A^n(M) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} A^{n-k}MA^k$.

Montrons ce résultat par récurrence.
Le résultat est vrai pour $n = 1$.
Soit n dans $\mathbb{N}$. On suppose que le résultat est vrai au rang n. On a :

$$\begin{aligned}
\Delta_A^{n+1}(M) &= \Delta_A(\Delta_A^n(M)\\
&= \Delta_A\left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}A^{n-k}MA^k)\right)\\
&= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}A^{n+1-k}MA^k - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}A^{n-k}MA^{k+1}\\
&= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}A^{n+1-k}MA^k - \sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k-1}\binom{n}{k-1}A^{n+1-k}MA^k\\
&= A^{n+1}M + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k\left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right)A^{n+1-k}MA^k + (-1)^{n+1}MA^{n+1}\\
&= \sum_{k=0}^{n+1}(-1)^k\binom{n+1}{k}A^{n+1-k}MA^k
\end{aligned}$$

Ce qui montre que le résultat est héréditaire.

Remarque
On peut aussi démontrer ce résultat en utilisant que $M \mapsto MA$ et $M \mapsto AM$ commutent puis en leur appliquant la formule du binôme de Newton.

2) Soit p l'indice de nilpotence de A. Soit n dans $\mathbb{N}$. Soit k dans $[\![0,n]\!]$. Si $k < p$ et $n-k < p$ alors $n = n-k+k < 2p$. Par contraposition, $n \geqslant 2p$ entraîne $k \geqslant p$ ou $n-k \geqslant p$ et par suite $A^k = 0$ ou $A^{n-k} = 0$. Donc l'inégalité $n \geqslant 2p$ entraîne que pour tout k dans $[\![1,n]\!]$, pour tout M dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a $A^{n-k}MA^k = 0$. On en déduit que $n \geqslant 2p$ entraîne $\Delta_A^n = 0$: on a ainsi montré que Δ_A est un endomorphisme nilpotent.

4.3 EXERCICES D'APPROFONDISSEMENT

Exercice 4.32

Mines-Ponts MP 2006

1) Soit f une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant : pour tout A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $f(AB) = f(BA)$. Montrer que f est proportionnelle à la trace.

2) Soit g un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant : pour tout A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $g(AB) = g(BA)$ et $g(I_n) = I_n$. Montrer que g conserve la trace.

1) On va essayer de déterminer les valeurs que peut prendre f sur les éléments de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ i \neq j \Rightarrow f(E_{ij}) = f(E_{ij}E_{jj}) = f(E_{jj}E_{ij}) = f(0) = 0.$$

On a par ailleurs :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 : f(E_{ii}) = f(E_{ij}E_{ji}) = f(E_{ji}E_{ij}) = f(E_{jj}).$$

Soit alors λ la valeur commune de f sur les E_{ii}. On constate que f et $\lambda\,\mathrm{tr}$ coïncident sur la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Elles sont donc égales. On a ainsi montré que f est proportionelle à la trace.

2) On peut considérer l'application $\varphi = \mathrm{tr} \circ g$. Cette forme linéaire vérifie les conditions de la question précédente, elle est donc proportionelle à la trace. La condition $g(I_n) = I_n$ entraîne que la constante de proportionnalité vaut 1. On a ainsi montré que $\mathrm{tr} \circ g = \mathrm{tr}$, ce qui montre que pour tout A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a $\mathrm{tr}(g(A)) = \mathrm{tr}(A)$.
On peut aussi reprendre les mêmes calculs que précédemment qui montrent que pour $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, si $i \neq j$ alors $g(E_{ij}) = 0$ tandis que g est constante sur les E_{ii}.
La condition $g(I_n) = I_n$ va nous permettre de calculer $g(E_{11})$. En effet :

$$g(I_n) = g(\sum_{i=1}^{n} E_{ii}) = ng(E_{11}).$$

On en déduit $g(E_{11}) = \dfrac{1}{n} I_n$.

Soit $A = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On a $A = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{ij}E_{ij}$. On en déduit que

$$g(A) = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{ij}g(E_{ij}) = \sum_{1\leqslant i\leqslant n} a_{ii}\frac{1}{n}I_n = \frac{\operatorname{tr}(A)}{n}I_n.$$

Il est alors clair que $\operatorname{tr}(g(A)) = \operatorname{tr} A$. On a en fait montré mieux que ce que proposait l'énoncé puisqu'on a donné une expression explicite de g.

Exercice 4.33

Dual de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Montrer que pour tout ϕ dans le dual de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, il existe une matrice A telle que :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ \phi(M) = \operatorname{tr}(AM).$$

Notons $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})^*$ le dual de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soit Φ l'application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans son dual, qui à toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ associe la forme linéaire $\Phi(A)$ définie par : $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ \Phi(A)(M) = \operatorname{tr}(AM)$. La question posée dans l'énoncé revient à montrer que Φ est surjective.

On montre sans peine que Φ est linéaire et comme $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})^*$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ont même dimension il suffit de montrer que Φ est injective pour montrer que c'est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Soit $A = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ telle que $\Phi(A)$ est nulle. Pour tout M dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a $\Phi(A)(M) = \operatorname{tr}(AM) = 0$. En particulier, pour tout (k,l) dans $[\![1,n]\!]^2$, on a :

$$\operatorname{tr}(AE_{kl}) = \operatorname{tr}(\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{ij}E_{ij}E_{kl}) = \operatorname{tr}\sum_{1\leqslant i\leqslant n} a_{ik}E_{il} = a_{lk} = 0.$$

On en déduit que A est nulle. On a montré que Φ est injective, comme $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})^*$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ont même dimension, on en déduit que Φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels. En particulier Φ est surjective.

Remarque

Pour montrer l'injectivité de Φ on peut aussi s'intéresser à $\Phi(A)({}^tA)$. On a en effet $\operatorname{tr}(A\,{}^tA) = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{ij}^2$, et on a donc $\operatorname{tr}(A\,{}^tA) = 0$ si et seulement si $A = 0$. Voir chapitre « Espaces euclidiens » pour fournir un cadre naturel à ce qui peut sembler ici une belle astuce.

Exercice 4.34

Centrale MP 2006

Trouver les A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que : $\exists\, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})\backslash\,\{0\}\,,\; AB = BA = 0$.

Si A est inversible et si $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifie $AB = 0$, alors $A^{-1}AB = A^{-1}0 = 0$, d'où on déduit que $B = 0$. On en déduit que s'il existe B telle que $AB = 0$ alors A n'est pas inversible.

Supposons réciproquement que A n'est pas inversible. Soit r le rang de A. Il existe P et Q dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telles que : $QAP = J_r$. Soit H_r la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ définie par $H_r = I_n - J_r$. Comme $r < n$, la matrice H_r est non nulle et on a $J_r H_r = H_r J_r = 0$. On a ainsi $QAPH_r = 0$ (1) et $H_r QAP = 0$ (2). En multipliant (1) à gauche par Q^{-1} et à droite par Q on obtient $APH_r Q = 0$, en multipliant (2) à gauche par P et à droite par P^{-1} on obtient : $PH_r QA = 0$. On a donc trouvé une matrice $B = PH_r Q$ telle que $AB = BA = 0$.

En conclusion : $\exists\, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})\backslash\,\{0\}\,,\; AB = BA = 0 \Leftrightarrow A \notin \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 4.35

TPE MP 2006, CCP MP 2007

Soient A et B fixées dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Résoudre l'équation (1) $\quad X + \mathrm{tr}(X)A = B$.

Remarquons qu'il suffit de déterminer la trace de X pour résoudre l'équation (1), puisque l'on a $X = -\,\mathrm{tr}(X)A + B$. Remarquons également que toute solution X de (1) s'écrit sous la forme $X = \lambda A + B$.

On peut commencer par appliquer la trace aux deux membres de l'équation (1) et on obtient (2) $\quad \mathrm{tr}(X)(1 + \mathrm{tr}(A)) = \mathrm{tr}(B)$.
Il est également intéressant de remarquer que l'application f qui à X associe $X + \mathrm{tr}(X)A$ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On sait alors que si l'ensemble des solutions de cette équation n'est pas vide, alors toute solution de (1) s'écrit comme somme d'une solution particulière et d'un élément du noyau de f.
On va étudier les différents cas possibles à partir de la relation (2).
• Cas $\mathrm{tr}(A) \neq -1$.
La relation (2) permet alors d'écrire $\mathrm{tr}(X) = \dfrac{\mathrm{tr}(B)}{1 + \mathrm{tr}(A)}$ et en reportant cette relation dans l'équation (1), on obtient $X = B - \dfrac{\mathrm{tr}(B)}{1 + \mathrm{tr}(A)}A$.
• Cas $\mathrm{tr}(A) = -1$.
La relation (2) entraîne $\mathrm{tr}(B) = 0$. On en déduit deux nouveaux cas à distinguer.

- Supposons que $\mathrm{tr}(B) \neq 0$. Alors l'équation (1) n'a pas de solution.
- Supposons que $\mathrm{tr}(B) = 0$. On cherche alors une solution particulière de l'équation (1). On constate que B en est une. Il faut ensuite déterminer le noyau de

l'application f, c'est-à-dire l'ensemble des matrices X telles que $X + \mathrm{tr}(X)A = 0$. Si X vérifie cette relation, alors on a $X = -\mathrm{tr}(X)A$, ce qui entraîne X appartient à $\mathrm{Vect}(A)$. On vérifie réciproquement, grâce à l'hypothèse $\mathrm{tr}(A) = -1$, que X appartient à $\mathrm{Vect}(A)$ entraîne $X + \mathrm{tr}(X)A = 0$. On en déduit alors que l'ensemble des solutions de l'équation $X + \mathrm{tr}(X)A = B$ est la droite affine $B + \mathrm{Vect}(A)$.

Pour conclure :

- Si $\mathrm{tr}(A) \neq -1$, alors l'équation (1) admet une unique solution donnée par $X = B - \dfrac{\mathrm{tr}(B)}{1 + \mathrm{tr}(A)} A$.
- Si $\mathrm{tr}(A) = -1$ et $\mathrm{tr}(B) \neq 0$, alors l'équation (1) n'a pas de solution.
- Si $\mathrm{tr}(A) = -1$ et $\mathrm{tr}(B) = 0$, l'ensemble des solutions de l'équation (1) est la droite affine $B + \mathrm{Vect}(A)$.

Exercice 4.36

Centrale MP PSI et PC 2007

Soit n dans $\mathbb{N}^*$. Etant donnée une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, déterminer toutes les matrices $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, telles que $X + {}^tX = \mathrm{tr}(X)\, M \quad (1)$.

Remarquons tout d'abord que l'ensemble $\mathcal{E}$ des solutions de (1) est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (c'est le noyau de l'endomorphisme ϕ_M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui à X associe $X + {}^tX - \mathrm{tr}(X)\, M$), contenant $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. On sait que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Dans ces conditions on montre facilement que $\mathcal{E} = (\mathcal{E} \cap \mathcal{S}_n(\mathbb{R})) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. En effet, on a l'inclusion $(\mathcal{E} \cap \mathcal{S}_n(\mathbb{R})) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{E}$, et inversement, soit X dans $\mathcal{E}$. Il existe X_S dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et X_A dans $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ telles que $X = X_S + X_A$. Alors $X_S = X - X_A$ est dans $\mathcal{E}$ et dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ donc dans $\mathcal{E} \cap \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, d'où $\mathcal{E} \subset (\mathcal{E} \cap \mathcal{S}_n(\mathbb{R})) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.
Cette décomposition de $\mathcal{E}$ montre qu'il suffit de déterminer les matrices symétriques solutions de (1). Les solutions de (1) seront somme d'une matrice symétrique solution de (1) et d'une matrice antisymétrique quelconque.
D'autre part, si M dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est solution de (1), alors en appliquant la trace aux deux membres de l'équation vérifiée par M, on obtient $(2 - \mathrm{tr}(M))\,\mathrm{tr}(X) = 0$.
Soit S une matrice symétrique solution de (1). Alors (1) entraîne $2S = \mathrm{tr}(S)\, M$ et par suite la matrice $\mathrm{tr}(S)\, M$ doit être aussi symétrique.
• Si M est non symétrique, alors on doit avoir $\mathrm{tr}(S) = 0$, ce qui entraîne $S = 0$. Réciproquement $S = 0$ est bien solution de $2S = \mathrm{tr}(S)\, M$. Ainsi dans ce cas l'ensemble des solutions de (1) est $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.
• Supposons maintenant que M est symétrique
Si on connaît $\mathrm{tr}(S)$ on connaît S car $S = \dfrac{\mathrm{tr}(S)}{2} M$. On a $\mathrm{tr}(S)\ (\mathrm{tr}(M) - 2) = 0$.
○ Si $\mathrm{tr}(M) \neq 2$, alors on a nécessairement $\mathrm{tr}(S) = 0$ et comme précédemment $S = 0$. Dans ce cas, l'ensemble des solutions de $X + {}^tX = \mathrm{tr}(X)\, M$ est encore l'ensemble des matrices antisymétriques $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

$\circ$ Si $\mathrm{tr}(M) = 2$ on n'a plus d'information sur la trace de S.
Comme S est de la forme $\lambda\, M$ où $\lambda \in \mathbb{R}$, cherchons S sous cette forme. On a alors $2S = 2\lambda\, M$ et $\mathrm{tr}(S)\, M = \mathrm{tr}(\lambda\, M)\, M = \lambda\ \mathrm{tr}(M)\, M = 2\lambda\, M$.
On a ainsi montré que $S = \lambda\, M$ est solution de (1). L'ensemble des solutions de (1) est donc $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) + \mathrm{Vect}(M)$.

En résumé
- si M n'est pas symétrique ou si $\mathrm{tr}(M) \neq 2$, alors l'ensemble des solutions de (1) est $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$;
- si M est symétrique et si $\mathrm{tr}(M) = 2$, alors l'ensemble des solutions de (1) est $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) + \mathrm{Vect}(M)$.

Exercice 4.37

Mines-Ponts MP 2007 ☕☕

Soient A dans $\mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ et B dans $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ telles que $AB = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1) Montrer que AB est la matrice d'un projecteur.

2) Montrer que $BA = I_2$.
Indication de la rédaction : on pourra commencer par montrer que BA est inversible.

1) Un simple calcul montre que $(AB)^2 = AB$ et on en déduit que AB est la matrice d'un projecteur.

2) Pour montrer que BA est inversible, on va montrer que son rang est 2. On va pour cela utiliser le fait que pour toutes applications linéaires u et v telles que $u \circ v$ ait un sens, on a $\mathrm{rg}\,(u \circ v) \leqslant \min\{\mathrm{rg}\, u, \mathrm{rg}\, v\}$ (voir exercice 3.27 page 73). Remarquons que AB est de rang 2. On a ainsi

$$\mathrm{rg}\,(AB) = \mathrm{rg}\,(ABAB) = \mathrm{rg}\,(A(BAB)) \leqslant \mathrm{rg}\,(BAB) \leqslant \mathrm{rg}\,(BA).$$

Le rang de AB est donc supérieur ou égal à 2. Par ailleurs BA est une matrice carrée d'ordre 2, donc $\mathrm{rg}\,(BA) = 2$ et par conséquent, cette matrice est inversible. La relation $ABAB = AB$ entraîne $A(BA - I_2)B = 0$, et en multipliant cette relation à gauche par B et à droite par A, on obtient $BA(BA - I_2)BA = 0$. Comme BA est inversible on en déduit que $BA = I_2$.

Exercice 4.38

Centrale PC 2005, PSI 2006, MP 2007 ☕☕

1) Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel et soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que, pour tout $x \in E \setminus \{0_E\}$, la famille $(x, u(x))$ est liée. Montrer que u est une homothétie.

2) Montrer que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de trace nulle est semblable à une matrice de diagonale nulle.
Indication de la rédaction : on pourra raisonner par récurrence sur n.

3) Soient $d_1, \dots, d_n$ dans $\mathbb{K}$ deux à deux distincts, et $D = \operatorname{diag}(d_1, \dots, d_n)$. Soit $\varphi \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))$ qui à M associe $DM - MD$. Déterminer le noyau et l'image de φ.

4) Etant donnée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, établir l'équivalence des propriétés (i) et (ii) suivantes : (i) $\operatorname{tr} A = 0$, (ii) $\exists (X, Y) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2$ tel que $XY - YX = A$.

1) Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, il existe $\gamma_i \in \mathbb{K}$ tel que $u(e_i) = \gamma_i e_i$. Il existe aussi $\gamma \in \mathbb{K}$ tel que $u\left(\sum_{i=1}^{n} e_i\right) = \gamma \sum_{i=1}^{n} e_i$. on obtient alors en vertu de la linéarité de u que $\gamma \sum_{i=1}^{n} e_i = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i e_i$, et comme $\mathcal{B}$ est une base, on en déduit $\gamma_1 = \ldots = \gamma_n = \gamma$. Ainsi $u = \gamma \operatorname{Id}_E$, ce qui signifie que u est une homothétie.

2) On va montrer ce résultat par récurrence sur la taille n de A.

Pour $n = 1$ le résultat est immédiat car une matrice de $\mathcal{M}_1(\mathbb{K})$ de trace nulle est nulle. Supposons le résultat acquis au rang $n - 1$ et montrons le au rang n.

Soit A une matrice carrée de taille $n \geqslant 2$ et de trace nulle. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à A. On veut montrer qu'il existe une base dans laquelle la matrice de f est à diagonale nulle.
Commençons par montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{K}^n$ dans laquelle la matrice $A' = M_{\mathcal{B}'}(f) = (a'_{ij})_{1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant n}$ est telle que $a'_{11} = 0$. Il suffit pour cela de trouver une base dont le premier vecteur e_1 est tel que $f(e_1)$ n'a pas de composante sur e_1. Or, pour que cette condition soit vérifiée, il suffit de trouver x dans $\mathbb{K}^n$ tel que la famille $(x, f(x))$ soit libre et de choisir alors $e_1 = x$ et $e_2 = f(x)$ comme premiers vecteurs d'une base de $\mathbb{K}^n$. Or, d'après la première question, les endomorphismes f de $\mathcal{L}(E)$ tels que $(x, f(x))$ est liée pour tout x de E sont les homothéties de E. Si f est une homothétie, comme elle est de trace nulle, c'est l'application nulle et le résultat est acquis. Sinon il existe x dans $\mathbb{K}^n$ tel que la famille $(x, f(x))$ soit libre, on complète donc la famille $(e_1, e_2) = (x, f(x))$ en une base $\mathcal{B}' = (e_1, e_2, e_3, \dots, e_n)$ de $\mathbb{K}^n$. On a alors $A' = M_{\mathcal{B}'}(f) = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & a'_{12} & \cdots & a'_{1n} \\ \hline 1 & & & \\ 0 & & B & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \end{array}\right)$.

La matrice B est carrée d'ordre n et on a de plus $\operatorname{tr} f = \operatorname{tr} A' = \operatorname{tr} B = 0$. Par hypothèse de récurrence, il existe P dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ tel que $P^{-1}BP$ soit à diagonale nulle. Soit alors Q la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ définie par : $Q = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & P & \\ 0 & & & \end{array}\right)$.

La matrice Q est inversible et son inverse est donné par $Q^{-1} = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & P^{-1} & \\ 0 & & & \end{array}\right)$.

On a alors :

$$Q^{-1}A'Q = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & P^{-1} & \\ 0 & & & \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & a'_{12} & \cdots & a'_{1n} \\ \hline 1 & & & \\ 0 & & B & \\ \vdots & & & \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & P & \\ 0 & & & \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & P^{-1} & \\ 0 & & & \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} 0 & (a'_{12}, \ldots, a'_{1n})P \\ \hline 1 & \\ 0 & BP \\ \vdots & \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{c|c} 0 & (a'_{12}, \ldots, a'_{1n})P \\ \hline P^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} & P^{-1}BP \end{array}\right).$$

Comme la matrice $P^{-1}BP$ est à diagonale nulle, la matrice $Q^{-1}A'Q$ est aussi à diagonale nulle. Or, par construction A est semblable à A' qui est semblable à $Q^{-1}A'Q$ qui est à diagonale nulle, on a bien montré que A est semblable à une matrice de diagonale nulle.

3) Soit $M = (m_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On vérifie que $\varphi(M) = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ où $a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i = j \\ (d_i - d_j)m_{ij} & \text{si } i \neq j \end{cases}$.

• Déterminons $\operatorname{Ker}\varphi$. Une matrice M appartient à $\operatorname{Ker}\varphi$ si et seulement si pour tout couple $(i,j) \in \{1,\ldots,n\}^2$ tel que $i \neq j$, on a $(d_i - d_j)m_{ij} = 0$. Comme les d_i sont deux à deux distincts, on en déduit $m_{ij} = 0$. Ainsi $\operatorname{Ker}\varphi$ est l'ensemble des matrices diagonales que l'on note $\mathcal{D}$.

• Déterminons $\operatorname{Im}\varphi$. Le sous-espace vectoriel $\operatorname{Im}\varphi$ est inclus dans le sous-espace $\mathcal{N}$ des matrices dont les coefficients diagonaux sont nuls. D'autre part, d'après le théorème du rang, $\dim \operatorname{Im}\varphi = n^2 - \dim \operatorname{Ker}\varphi = n^2 - n$. Comme on a également $\dim \mathcal{N} = n^2 - n$, on en déduit que $\operatorname{Im}\varphi = \mathcal{N}$.

4) • Supposons que (ii) est vraie. Il existe $(X, Y) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2$ tel que $XY - YX = A$. On a alors $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(XY - YX)$. Or la trace est linéaire et $\mathrm{tr}(XY) = \mathrm{tr}(YX)$, donc $\mathrm{tr}(A) = 0$. Ainsi $(ii) \Rightarrow (i)$.
• Supposons que (i) est vraie. D'après la question 2), la matrice$A$ est semblable à une matrice B dont les coefficients diagonaux sont nuls. Il existe donc $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ tel que $B = P^{-1}AP$. Or, B appartient à $\mathcal{N} = \mathrm{Im}\,\varphi$. Il existe donc $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $B = \varphi(C) = DC - CD$. Ainsi $P^{-1}AP = DC - CD$. On en déduit alors que

$$\begin{aligned} A &= PDCP^{-1} - PCDP^{-1} \\ &= (PDP^{-1})(PCP^{-1}) - (PCP^{-1})(PDP^{-1}) \\ &= XY - YX, \end{aligned}$$

où $X = PDP^{-1}$ et $Y = PCP^{-1}$

Exercice 4.39

Polytechnique MP 2005

Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose qu'il existe $n + 1$ valeurs de λ dans $\mathbb{C}$ telles que $A + \lambda B$ soit nilpotente. Montrer que A et B sont nilpotentes.

Indication de la rédaction : l'indice de nilpotence d'une matrice nilpotente de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inférieur ou égal à n voir exercice 3.18 page 67.

Soit $C(\lambda)$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définie par $C(\lambda) = (A + \lambda B)^n$. On sait que l'indice de nilpotence d'une matrice nilpotente de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est inférieur ou égal à n. L'énoncé nous dit donc qu 'il existe $n + 1$ valeurs de λ dans $\mathbb{C}$ telles que $C(\lambda) = 0$. Or les coefficients de $C(\lambda)$ sont des polynômes en λ de degré au plus n (on montre par récurrence que pour k dans $\mathbb{N}$ les coefficients de $(A + \lambda B)^k$ sont des polynômes en λ de degré au plus k), qui admettent chacun $n + 1$ racines. Ces polynômes sont donc nuls et on en déduit : pour tout λ dans $\mathbb{C}$ la matrice $C(\lambda) = (A+\lambda B)^n = 0$. On a donc montré que pour toute valeur de λ, la matrice $A + \lambda B$ est nilpotente, en particulier pour $\lambda = 0$ on obtient que A est nilpotente.

Comme la matrice $(A+\lambda B)^n$ est nulle pour tout λ elle est en particulier nulle en $n+1$ valeurs non nulles de λ. En ces $n + 1$ valeurs la matrice $B + \dfrac{1}{\lambda}A$ est nilpotente. On peut alors appliquer ce que l'on vient de démontrer en inversant les rôles de A et B et on en déduit alors que B est nilpotente.

Exercice 4.40

Polytechnique MP 2005, Centrale 2004 ☕

Soient $\mathbb{K}$ un corps, $n \in \mathbb{N}^*$ et $A_1, A_2, \cdots, A_n$ des matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent deux à deux. Montrer que $A_1A_2 \cdots A_n = 0$.

Notons u_k l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ de matrice A_k dans la base canonique de $E = \mathbb{K}^n$.

Raisonnons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ la dimension de l'espace. Pour $n = 1$ la proposition est immédiate (l'endomorphisme u_1 est nul).

Soit $n \geqslant 2$. Supposons la proposition vraie pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$ et montrons-la pour n.

Si $u_n = 0$ la proposition est immédiate.

Sinon, l'endomorphisme u_n étant nilpotent n'est pas inversible, son noyau $\operatorname{Ker} u_n$ est donc non nul et différent de $\mathbb{K}^n$, et, comme les u_k commutent avec u_n, on en déduit que $\operatorname{Ker} u_n$ est stable par les u_k pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$. Soit $(e_1, \ldots, e_p)$ une base de $\operatorname{Ker} u_n$. On la complète pour avoir une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E.

Dans la base $\mathcal{B}$, l'endomorphisme u_k a pour matrice $B_k = \begin{pmatrix} C_k & D_k \\ 0 & E_k \end{pmatrix}$, où C_k et E_k sont des matrices carrées d'ordre p et $n-p$ respectivement, avec de plus $C_n = 0$. On remarque que p et $n-p$ appartiennent à $[\![1, n-1]\!]$.

Pour $k \in [\![1, n-1]\!]$, les u_k commutant deux à deux, nous remarquons, avec la règle du produit par blocs, que les E_k et C_k commutent deux à deux, et, les u_k étant nilpotents, que les E_k et C_k sont nilpotentes. On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence aux C_k et aux E_k (il y en a au plus $n-1$) : $E_1 \cdots E_{n-1} = 0$ et $C_1 \cdots C_{n-1} = 0$. On en déduit avec la règle du produit par blocs : $B_1 \cdots B_{n-1} = \begin{pmatrix} 0 & D \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, d'où l'on tire, avec $B_n = \begin{pmatrix} 0 & D_n \\ 0 & E_n \end{pmatrix}$, la relation

$$B_1 \cdots B_n = B_n B_1 \cdots B_{n-1} = \begin{pmatrix} 0 & D_n \\ 0 & E_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & D \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 .$$

On a donc $u_1 \circ \cdots \circ u_n = 0$ et enfin $A_1 \cdots A_n = 0$.

Exercice 4.41

Mines-Ponts MP 2007 ☕

Soit A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^q = I_n$, avec q dans $\mathbb{N}^*$. Montrer que :

$$\dim \operatorname{Ker}(A - I_n) = \frac{1}{q} \sum_{k=1}^{q} \operatorname{tr}(A^k).$$

Remarquons que l'énoncé ne distingue pas la matrice $A - I_n$ et l'endomorphisme qui lui est canoniquement associé, nous procéderons de même dans le corrigé.

On doit établir une formule qui montre un lien entre la trace d'une matrice et la dimension du noyau d'un certain endomorphisme. Ce genre de relation peut faire penser à celle qui lie la trace d'un projecteur à son rang. Il est donc relativement naturel de se demander si la matrice $B = \dfrac{1}{q}\displaystyle\sum_{k=1}^{q} A^k$ n'est pas celle d'un projecteur.

Par ailleurs la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{q} A^k$ et la relation $A^q = I_n$ font penser à la formule rappelée en début de chapitre qui montre que $(A - I_n)\displaystyle\sum_{k=1}^{q} A^k = A^{q+1} - A = 0. \qquad (1)$.

On peut alors démontrer par récurrence que, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, on a $A^i \displaystyle\sum_{k=1}^{q} A^k = \sum_{k=1}^{q} A^k$.
Cette relation va nous permettre de démontrer que B est la matrice d'un projecteur :

$$B^2 = \frac{1}{q^2}\left(\sum_{k=1}^{q} A^k\right)^2 = \frac{1}{q^2}\sum_{i=1}^{q}\left(A^i \sum_{k=1}^{q} A^k\right) = \frac{1}{q^2} q \sum_{k=1}^{q} A^k = B\,.$$

On en déduit que $\operatorname{tr} B = \dim \operatorname{Im} B$. La formule (1) montre que $\operatorname{Im} B \subset \operatorname{Ker}(A - I_n)$. De plus si x est dans $\operatorname{Ker}(A - I_n)$, alors $Ax = x$ et par conséquent :

$$Bx = \frac{1}{q}\sum_{k=1}^{q} A^k x = \frac{1}{q}\sum_{k=1}^{q} x = x.$$

Ceci montre que x vérifie la relation caractéristique d'appartenance à l'image du projecteur B. On en déduit que $\operatorname{Im} B = \operatorname{Ker}(A - I_n)$, puis que $\operatorname{tr} B = \dim \operatorname{Ker} B$, ce qui s'écrit :

$$\dim \operatorname{Ker}(A - I_n) = \frac{1}{q}\sum_{k=1}^{q} \operatorname{tr}(A^k).$$

5 Déterminants

5.1 RAPPELS DE COURS ET EXERCICES D'ASSIMILATION

5.1.1 Un calcul de déterminant d'ordre 3

Dans ce chapitre nous approfondissons l'étude des déterminants commencée en première année. Nous vous proposons de tester vos connaissances sur un exercice très simple :

Exercice 5.1

Calculer le déterminant $D = \begin{vmatrix} 144 & 121 & 100 \\ 36 & 33 & 30 \\ 96 & 99 & 90 \end{vmatrix}$.

Vous pouvez tenter votre chance avec la règle de Sarrus, mais l'utilisation des opérations élémentaires conduit à des calculs beaucoup plus simples !

On a en effet $D = \begin{vmatrix} 12^2 & 11^2 & 10^2 \\ 3\times 12 & 3\times 11 & 3\times 10 \\ 8\times 12 & 9\times 11 & 9\times 10 \end{vmatrix} = 12\times 11\times 10\times 3 \begin{vmatrix} 12 & 11 & 10 \\ 1 & 1 & 1 \\ 8 & 9 & 9 \end{vmatrix}$ car le déterminant est linéaire par rapport à chacune de ses colonnes et par rapport à chacune de ses lignes. En retranchant la première colonne aux deux suivantes, on obtient $D = 12\times 11\times 10\times 3 \begin{vmatrix} 12 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 8 & 1 & 1 \end{vmatrix}$. En développant alors par rapport à la deuxième ligne on obtient

$$D = -12\times 11\times 10\times 3 \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -12\times 11\times 10\times 3\times 1 = -3960.$$

5.1.2 Déterminants d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$

Ce qu'il faut savoir

Méthodes de calcul

• Utilisation des opérations élémentaires (cf. exercices 5.2, 5.5,...) :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée d'ordre n.

◦ On ne modifie pas le déterminant de A en ajoutant à une colonne de A une combinaison linéaire des autres colonnes.

◦ Si on multiple l'une des colonnes de A par un scalaire λ, alors le déterminant de A est multiplié par λ :

$$\det(C_1, \ldots, C_{i-1}, \lambda C_i, C_{i+1}, \ldots, C_n) = \lambda \det(C_1, \ldots, C_n).$$

◦ Si A a deux colonnes identiques, alors $\det(A) = 0$. Si on échange deux colonnes de A, alors son déterminant est changé en son opposé.

◦ Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors $\det({}^tA) = \det(A)$. Il en résulte que les règles de calculs concernant les colonnes de A s'appliquent aussi aux lignes.

• Déterminant d'une matrice triangulaire : soit $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ une matrice triangulaire par blocs, où A et C sont des matrices carrées d'ordre respectif p et q. On a alors $\det(M) = \det(A)\det(C)$. (cf. exercices 5.2 et 5.3).

Il en résulte que le déterminant d'une matrice triangulaire est égal au produit de ses éléments diagonaux. (cf. exercice 5.5).

Propriétés des déterminants

• Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ (cf. exercice 5.3).

• Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors $\det(A) = 0$ si et seulement si le rang de A est strictement inférieur à n. Lorsque A est inversible, $\det(A)$ est non nul et dans ce cas $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$ (cf. exercice 5.7).

• Développement d'un déterminant selon une ligne ou une colonne (cf. exercice 5.7) :

– Soit $A = (a_{ij})$ une matrice carrée d'ordre n. On note Δ_{ij} le mineur relatif au coefficient a_{ij}, c'est-à-dire le déterminant de la matrice obtenue en supprimant la ligne d'indice i et la colonne d'indice j. Alors

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \Delta_{ij} \quad \text{pour tout indice de ligne } i \text{ et}$$

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \Delta_{ij} \quad \text{pour tout indice de colonne } j\ .$$

◦ Le coefficient $(-1)^{i+j}\Delta_{ij}$ est appelé le **cofacteur** du coefficient a_{ij}.

◦ La matrice $\mathrm{Com}(A) = \left((-1)^{i+j}\Delta_{ij}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est appelée la **comatrice** de A.

◦ La matrice ${}^t\mathrm{Com}(A)$ vérifie la relation $A\,{}^t\mathrm{Com}(A) = {}^t\mathrm{Com}(A)A = \det(A)I_n$. Il en résulte que si A est inversible, alors $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)}\,{}^t\mathrm{Com}(A)$.

• La formule de Leibniz : soit $A = (a_{ij})$ une matrice carrée d'ordre n. On a alors

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} \dots a_{n\sigma(n)} .$$

où $\mathcal{S}_n$ désigne le groupe des permutations de l'ensemble $\{1, \dots, n\}$ et $\varepsilon(\sigma)$ la signature de la permutation σ (cf. exercice 5.5).

Déterminant d'un système de vecteurs, d'un endomorphisme

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$ et soit $\mathcal{B}$ une base de E.

• Le déterminant d'un système de n vecteurs $\mathcal{S} = (x_1, \dots, x_n)$ dans la base $\mathcal{B}$ est égal au déterminant de la matrice P du système dans la base $\mathcal{B}$. On le note $\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)$.

Pour que $\mathcal{S}$ soit une base de E, il faut et il suffit que ce déterminant soit non nul.

L'application $(x_1, \dots, x_n) \mapsto \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)$ est une forme n-linéaire alternée sur l'espace vectoriel E. Pour toute forme n-linéaire alternée φ définie sur E, il existe un scalaire λ tel que

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n, \ \varphi(x_1, \dots, x_n) = \lambda \det{}_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) \ \ \text{(cf. exercice 5.15)}$$

• Lorsque f est un endomorphisme de E, le déterminant de f est égal au déterminant de la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$. Ce déterminant ne dépend pas du choix de la base $\mathcal{B}$ (cf. exercice 5.6).

Exercice 5.2

CCP PSI 2005

Soient a, b, c, d quatre nombres complexes. Calculer le déterminant de la matrice

$$M = \begin{pmatrix} -a & b & c & d \\ b & -a & d & c \\ c & d & -a & b \\ d & c & b & -a \end{pmatrix}$$

Indication de la rédaction : on pourra décomposer M en blocs : $M = \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}$ où $A = \begin{pmatrix} -a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} c & d \\ d & c \end{pmatrix}$ puis, à l'aide d'opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes de M, se ramener au calcul du déterminant d'une matrice triangulaire par blocs.

À l'aide des opérations élémentaires $C_1 \leftarrow C_1 - C_3$ puis $C_2 \leftarrow C_2 - C_4$, on obtient :
$\det(M) = \begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A - B & B \\ B - A & A \end{vmatrix}$.

Les opérations élémentaires $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$ puis $L_4 \leftarrow L_4 + L_2$ donnent alors

$$\det(M) = \begin{vmatrix} A - B & B \\ 0 & A + B \end{vmatrix} = \det(A - B)\det(A + B)$$

Finalement :

$$\begin{aligned}\det(M) &= \left((a+c)^2 - (b-d)^2\right)\left((c-a)^2 - (b+d)^2\right) \\ &= -(a+b+c-d)(a-b+c+d)(-a+b+c+d)(a+b-c+d).\end{aligned}$$

Exercice 5.3

Mines-Ponts PSI 2006

Soient $p, q \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_{pq}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{qp}(\mathbb{K})$. Montrer que

$$\det(I_q - BA) = \det(I_p - AB)$$

Indication de la rédaction : on pourra effectuer les produits par blocs.

$$\begin{pmatrix} I_p - AB & A \\ 0 & I_q \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ B & I_q \end{pmatrix} \textit{ et } \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ B & I_q \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_p & A \\ 0 & I_q - BA \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} I_p - AB & A \\ 0 & I_q \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ B & I_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ B & I_q \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_p & A \\ 0 & I_q - BA \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_p & A \\ B & I_q \end{pmatrix}.$$

On en déduit que $\det(I_p - AB) \cdot \det(I_q) = \det(I_p) \cdot \det(I_q - AB)$ et donc

$$\det(I_p - AB) = \det(I_q - AB).$$

Exercice 5.4

CCP PSI 2004

Soient $p, q \in \mathbb{N}^*$, avec $p > q$, $A \in \mathcal{M}_{pq}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{qp}(\mathbb{K})$. Montrer que $\det(AB) = 0$.

Soit f l'application linéaire de $\mathbb{K}^q$ dans $\mathbb{K}^p$ canoniquement associée à la matrice A et g l'application linéaire de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^q$ canoniquement associée à la matrice B. On sait que le rang de $f \circ g$ est inférieur ou égal au rang de f et au rang de g et donc $\mathrm{rg}\,(f \circ g) \leqslant q$. Comme $\mathrm{rg}\,(AB) = \mathrm{rg}\,(f \circ g)$, AB est une matrice carrée dont le rang est strictement inférieur à son ordre p. On a donc $\det(AB) = 0$.

Exercice 5.5

CCP MP 2006

Soient $a, b \in \mathbb{C}$ et n un entier supérieur ou égal à 2. On considère le déterminant d'ordre n

$$D(a,b)=\begin{vmatrix} 0 & b & \dots & b \\ a & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ a & \dots & a & 0 \end{vmatrix}.$$

1) Soit ψ l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par $\forall x \in \mathbb{C},\ \psi(x) = D(a+x, b+x)$. Montrer que ψ est une fonction polynomiale. Que peut-on dire de son degré ?

2) En déduire $D(a,b)$.

1) La formule de Leibniz montre que l'application

$$x \mapsto \psi(x) = D(a+x, b+x) = \begin{vmatrix} x & b+x & \dots & b+x \\ a+x & x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b+x \\ a+x & \dots & a+x & x \end{vmatrix}$$

est une fonction polynomiale.
En retranchant la première ligne de $D(a+x, b+x)$ à chacune des suivantes, puis en développant par rapport à la première ligne, on voit que ψ une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à 1. Il existe donc deux constantes complexes α et β telles que $\forall x \in \mathbb{C}, \quad \psi(x) = \alpha x + \beta$.

2) Supposons d'abord $a \neq b$. Pour $x = -b$, $\psi(-b) = D(a-b, 0)$ est le déterminant d'une matrice triangulaire et on a donc $\psi(-b) = (-b)^n$. On obtient de même, pour $x = -a$, $\psi(-a) = (-a)^n$.
On a donc $\begin{cases} -\alpha b + \beta & = & (-b)^n \\ -\alpha a + \beta & = & (-a)^n \end{cases}$.
On en déduit que $D(a,b) = \psi(0) = \beta = \dfrac{a(-b)^n - b(-a)^n}{a-b}$.
Supposons maintenant $a = b$.
En effectuant l'opération élémentaire $C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + \cdots + C_n$, on obtient

$$D(a,a) = \begin{vmatrix} (n-1)a & a & \dots & a \\ (n-1)a & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ (n-1)a & \dots & a & 0 \end{vmatrix} = (n-1)a \begin{vmatrix} 1 & a & \dots & a \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & a & \ddots & a \\ 1 & \dots & a & 0 \end{vmatrix}$$

puis, en retranchant la première ligne à chacune des suivantes :

$$D(a,a) = (n-1)a \begin{vmatrix} 1 & a & \dots & a \\ 0 & -a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -a \end{vmatrix} = (n-1)(-1)^{n-1}a^n.$$

Remarque

On peut retrouver ce dernier résultat en observant que, pour a fixé dans $\mathbb{C}$, l'application $b \mapsto D(a,b)$ est une fonction polynomiale (cela résulte encore de la formule de Leibniz). Elle est donc continue et on a : $D(a,a) = \lim\limits_{\substack{b\to a\\ b\neq a}} D(a,b)$.

Exercice 5.6

D'après Centrale MP 2005

On munit l'espace vectoriel $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de sa base canonique

$$\mathcal{B} = (E_{11}, E_{21}, \ldots, E_{n1}, E_{12}, \ldots, E_{n2}, \ldots, E_{1n} \ldots, E_{nn}) .$$

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Calculer la trace et le déterminant de l'endomorphisme f de l'espace vectoriel E défini par : $\forall M \in E, \quad f(M) = AM$.

Rappelons que E_{ij} est la matrice carrée d'ordre n dont tous les coefficients sont nuls, excepté le coefficient situé à l'intersection de la ligne d'indice i et de la colonne d'indice j qui est égal à 1.

Si $A = (a_{ij})$, alors les coefficients a_{ij} sont les coordonnées de A dans la base $\mathcal{B}$. On a donc $A = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}E_{ij}$ et, pour $k, \ell \in \{1, \ldots, n\}$,

$$AE_{k\ell} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}E_{ij}E_{k\ell} = \sum_{i=1}^{n} a_{ik}E_{i\ell} .$$

La matrice de l'endomorphisme $f : M \mapsto AM$ dans la base $\mathcal{B}$ est un matrice carrée d'ordre n^2. Elle se présente sous la forme d'une matrice diagonale par blocs $\begin{pmatrix} A & \mathbf{0}_n & \ldots & \mathbf{0}_n \\ \mathbf{0}_n & A & & \mathbf{0}_n \\ \vdots & & \ddots & \\ \mathbf{0}_n & & & A \end{pmatrix}$ où $\mathbf{0}_n$ désigne la matrice nulle dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a donc $\mathrm{tr}(f) = n\,\mathrm{tr}(A)$ et $\det(f) = \big(\det(A)\big)^n$.

Exercice 5.7

(Comatrice) Centrale MP 2006

On désigne par $\mathrm{Com}(A)$ la comatrice de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1) Expliquer brièvement pourquoi ${}^t\mathrm{Com}(A)A = A\,{}^t\mathrm{Com}(A) = \det(A)I_n$.

2) Etudier le rang de la comatrice de A en fonction du rang de A.

1) Désignons par $c_{i,j}$ le cofacteur de $a_{i,j}$. Rappelons que $c_{i,j} = (-1)^{i+j}\Delta_{i,j}$, où $\Delta_{i,j}$ est le mineur relatif au coefficient $a_{i,j}$, c'est-à-dire le déterminant de la matrice carrée d'ordre $n-1$ obtenue en supprimant la ligne d'indice i et la colonne d'indice j.

   On sait que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}c_{i,k} = \det(A)$ (développement du déterminant par rapport à sa i-ième ligne).

   Soit alors j un indice différent de i et soit A_j la matrice obtenue en remplaçant la i-ième ligne de A par la j-ème ligne. Comme A_j a deux lignes égales, on a $\det(A_j) = 0$. En développant le déterminant de A_j par rapport à sa i-ième ligne, on obtient $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{j,k}c_{i,k} = \det(A_j) = 0$.

   On a donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{j,k}c_{i,k} = \begin{cases} \det A & \text{si } j = i, \\ 0 & \text{si } j \neq i. \end{cases}$

   Il en résulte que $A\,{}^t\mathrm{Com}(A) = \det(A)I_n$.

   On obtient de la même manière la relation ${}^t\mathrm{Com}(A)A = \det(A)I_n$, en développant le déterminant par rapport aux colonnes de A.

2) Désignons par C la comatrice de A.

   - Si $\mathrm{rg}\,(A) = n$, alors ${}^tC = \dfrac{1}{\det(A)}\,A^{-1}$ est inversible et donc
   $$\mathrm{rg}\,(C) = \mathrm{rg}\,({}^tC) = n.$$
   - Si $\mathrm{rg}\,(A) < n-1$, alors toute matrice U obtenue en supprimant une colonne de A est de rang $< n-1$ et toute matrice V obtenue en supprimant une ligne de U, est, elle aussi, de rang $< n-1$. Ainsi tous les mineurs de la matrice A sont nuls. On a donc $C = 0$ et son rang est égal à 0.
   - Si $\mathrm{rg}\,(A) = n-1$, alors on peut extraire du système des vecteurs-colonnes de A un sous-système libre formé de $n-1$ vecteurs. En d'autres termes, il existe une matrice U, obtenue en supprimant une colonne de A, dont le rang est égal à $n-1$. Comme $n-1$ est aussi le rang du système des vecteurs-lignes de U, il existe une matrice V, obtenue en supprimant une ligne à U, dont le rang est égal à $n-1$. Le déterminant de V est non nul et donc la matrice C possède au moins un coefficient non nul ; on a donc $\mathrm{rg}\,(C) \geqslant 1$.
   Par ailleurs la relation $A\,{}^tC = 0$ montre que l'image de ${}^tC$ est incluse dans le noyau de A. On a donc $\mathrm{rg}\,({}^tC) \leqslant 1$ et donc $\mathrm{rg}\,(C) = \mathrm{rg}\,({}^tC) = 1$.

   Récapitulons :

   - Si $\mathrm{rg}\,(A) = n$, alors $\mathrm{rg}\,(C) = n$.
   - Si $\mathrm{rg}\,(A) = n-1$, alors $\mathrm{rg}\,(C) = 1$.
   - Si $\mathrm{rg}\,(A) < n-1$, alors $\mathrm{rg}\,(C) = 0$.

Exercice 5.8

D'après Centrale MP 2006

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$. Montrer que M est inversible dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ si et seulement si $\det(M) = \pm 1$.

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ une matrice inversible dont l'inverse appartient à $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$. On a alors $\det(M)\det(M^{-1}) = \det(MM^{-1}) = \det(I_n) = 1$ et donc $\det(M)$ est un entier dont l'inverse appartient à $\mathbb{Z}$. Il en résulte que $\det(M) = \pm 1$.

Réciproquement supposons le déterminant de $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ égal à ± 1.

L'expression de la matrice inverse à l'aide de la comatrice (cf. exercice 5.7) : $M^{-1} = \dfrac{1}{\det(M)}\,{}^t\mathrm{Com}(M)$, montre que l'inverse de M appartient à $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$.

Exercice 5.9

TPE PSI 2006

Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et x un nombre réel. Calculer, lorsque k est un entier tel que $0 \leqslant k < n-1$,

$$\Delta(x) = \begin{vmatrix} (x+1)^k & 2^k & 3^k & \dots & n^k \\ (x+2)^k & 3^k & 4^k & \dots & (n+1)^k \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ (x+n)^k & (n+1)^k & (n+2)^k & \dots & (2n-1)^k \end{vmatrix}$$

En développant $\Delta(x)$ par rapport à sa première colonne, on observe qu'il s'agit d'un polynôme (de la variable x), dont le degré est strictement inférieur à $n-1$. On a par ailleurs $\Delta(1) = \Delta(2) = \cdots = \Delta(n-1) = 0$ puisqu'il s'agit à chaque fois du déterminant d'une matrice qui a deux colonnes identiques. Il en résulte que Δ est le polynôme nul.

5.2 EXERCICES D'ENTRAÎNEMENT

Exercice 5.10

Centrale MP 2005

On considère la matrice carrée d'ordre n,

$$A = (a_{ij}), \quad \text{avec} \quad a_{ij} = 1 + 2 + \cdots + \max(i, j).$$

Calculer $\det(A)$.

Soient $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de la matrice A. Pour tout $j > 1$ on a $C_j - C_{j-1} = \begin{pmatrix} j \\ \vdots \\ j \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ (les $j-1$ premiers coefficients sont égaux à j et les suivants sont égaux à 0). La suite d'opérations élémentaires $C_n \longleftarrow C_n - C_{n-1}, \dots, C_2 \longleftarrow C_2 - C_1$ transforme donc A en la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 3 & 0 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 6 & 0 & 0 & \ddots & n-1 & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 1+\dots+(n-1) & 0 & 0 & \dots & 0 & n \\ 1+\dots+n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

En développant le déterminant de B par rapport à sa dernière ligne on obtient $\det(A) = \det(B) = (-1)^{n+1} n! \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Exercice 5.11

Centrale MP 2007

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1) On pose $M = \begin{pmatrix} A & B \\ -B & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que $\det(M) \geqslant 0$.

2) On suppose que $AB = BA$. Montrer que $\det(A^2 + B^2) \geqslant 0$. Qu'en est-il si A et B ne commutent pas ?

1) Pour tout j compris entre 1 et n, échangeons la colonne d'indice j et la colonne d'indice $n + j$ dans la matrice M. Chaque échange multiplie le déterminant par -1 et on obtient donc $\det(M) = (-1)^n \begin{vmatrix} B & A \\ 0 & -B \end{vmatrix}$. Il en résulte que $\det(M) = (-1)^n \det(B) \det(-B) = \det(B)^2 \geqslant 0$.

2) Soit $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et soit $\overline{C}$ la matrice dont les coefficients sont les conjugués des coefficients de C. La formule de Leibniz montre que $\det(\overline{C}) = \overline{\det(C)}$. En appliquant ce résultat à la matrice $C = A + iB$, on obtient

$$\begin{aligned}\det(A^2 + B^2) &= \det((A + iB)(A - iB)) \\ &= \det(A + iB) \det(A - iB) \\ &= \det(A + iB)\overline{\det(A + iB)} \\ &= |\det(A + iB)|^2 \geqslant 0.\end{aligned}$$

Avec $n = 2$, prenons par exemple les matrices $A = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

On a alors $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$ et $B^2 = -I_2$, d'où $A^2 + B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}$ et $\det(A^2 + B^2) = -1/2$.

Exercice 5.12

TPE MP 2006

Soit $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$. Calculer le déterminant de $M = (m_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ où $m_{ij} = a_i a_j$ si $i \neq j$ et $m_{ii} = 1 + a_i^2$.

Si tous les a_i sont nuls, alors $M = I_n$ et $\det(M) = 1$. Dans la suite, nous supposons $(a_1, \ldots, a_n) \neq (0, \ldots, 0)$. On peut alors écrire $M = A + I_n$, avec

$$A = (a_i a_j) = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a_1 & \ldots & a_n \end{pmatrix} .$$

Désignons par f l'endomorphisme de l'espace vectoriel $E = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A. Pour $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in E$, on a

$$f(X) = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a_1 & \ldots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k x_k \right) \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} .$$

Il en résulte que le noyau de f est l'hyperplan H d'équation $\sum_{k=1}^{n} a_k x_k = 0$. Soit $(e_1, \ldots, e_{n-1})$ une base de H.

On a de plus, avec $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$, $f(a) = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \right) a \neq 0_E$. Il en résulte que $a \notin H$, de sorte que $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_{n-1}, a)$ est une base de E. La matrice de f dans cette base est alors la matrice diagonale $\operatorname{diag}(0, \ldots, 0, \sum_{k=1}^{n} a_k^2)$.

L'endomorphisme canoniquement associé à M est alors $f + \mathrm{Id}_E$ et sa matrice dans la base $\mathcal{B}$ est $\operatorname{diag}(1, \ldots, 1, 1 + \sum_{k=1}^{n} a_k^2)$. On a donc

$$\det(M) = \det(f + \mathrm{Id}_E) = 1 + \sum_{k=1}^{n} a_k^2.$$

Exercice 5.13

Mines-Ponts MP, PSI 2007

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ telles que $A + kB \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ pour tout $k \in \{0, \ldots, 2n\}$. Calculer $\det A$ et $\det B$.

Nous utilisons ici un résultat établi dans l'exercice 5.8 : une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ est inversible dans l'anneau $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ si et seulement si $\det(M) = \pm 1$.

Soit P le polynôme défini par : $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = \det(A + xB)$. La formule de Leibniz montre que son degré est inférieur ou égal à n. Pour tout $k \in \{0, \ldots, 2n\}$, on a $P(k) = \pm 1$. Comme l'ensemble $E = \{0, \ldots, 2n\}$ contient $2n + 1$ éléments, il existe une partie F de E contenant strictement plus de n éléments telle que la restriction de P à F soit une constante ε, égale à +1 ou -1. Le polynôme $P - \varepsilon$ est alors de degré inférieur ou égal à n et possède strictement plus de n racines. C'est donc le polynôme nul. En particulier, pour $x = 0$, on obtient $P(0) = \det A = \varepsilon$.

Pour $x \neq 0$, posons $y = \dfrac{1}{x}$. La relation $\det(A + xB) = \varepsilon$ montre que $\det(yA + B) = \varepsilon y^n$ pour tout $y \in \mathbb{R}^*$. Le polynôme $\det(yA + B) - \varepsilon y^n$ est donc le polynôme nul et on a donc en particulier pour $y = 0$, $\det(B) = 0$.

Exercice 5.14

Polytechnique MP 2007

Soient $A, H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, avec $\operatorname{rg} H = 1$.

Montrer que $\det(A + H)\det(A - H) \leqslant \det(A)^2$.

Soit h l'endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à H. Le théorème du rang montre que noyau K de h est de dimension $n - 1$. Soit $(e_2, \ldots, e_n)$ une base de K que nous complétons en une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$ et soient P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ à la base $\mathcal{B}$ et $H' = P^{-1}HP$ la matrice de h dans la base $\mathcal{B}$. Les $n - 1$ dernières colonnes de H' sont nulles.

Posons $A' = P^{-1}AP$ et, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $g(\lambda) = \det(A + \lambda H) = \det(A' + \lambda H')$. En développant le déterminant $g(\lambda)$ par rapport à sa première colonne, on voit que c'est un polynôme de degré inférieur ou égal à 1 de la variable λ. Il existe donc deux constantes réelles a et b telles que : $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ g(\lambda) = a + b\lambda$.

Mais alors $\det(A + H)\det(A - H) = g(1)g(-1) = a^2 - b^2 \leqslant a^2 = g(0)^2 = \det(A)^2$.

Exercice 5.15

Centrale MP 2005 ☕

Soient E un espace vectoriel de dimension $n \geqslant 2$, $\mathcal{B}$ une base de E et soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

On considère l'application f définie par : $\forall(x_1,\dots,x_n)\in E^n$,

$$f(x_1,\dots,x_n)=\sum_{k=1}^{n}\det_{\mathcal{B}}(x_1,\dots,x_{k-1},u(x_k),x_{k+1},\dots,x_n)$$

1) On suppose qu'il existe $i\neq j$ tel que $x_i=x_j$. Montrer que $f(x_1,\dots,x_n)=0$.

2) Montrer que $f(x_1,\dots,x_n)=\operatorname{tr}(u).\det_{\mathcal{B}}(x_1,\dots,x_n)$.

1) Supposons qu'il existe $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$ tel que $i<j$ et $x_i=x_j$. Pour tout entier $k\in[\![1,n]\!]$ distinct de i et de j, on a $\det_{\mathcal{B}}(x_1,\dots,x_{k-1},u(x_k),x_{k+1},\dots,x_n)=0$, puisque la famille $(x_1,\dots,x_{k-1},u(x_k),x_{k+1},\dots,x_n)$ comporte deux fois le même vecteur.
Il reste donc

$$f(x_1,\dots,x_n)=\det_{\mathcal{B}}(x_1,\dots,x_{i-1},u(x_i),x_{i+1},\dots,x_n)+\det_{\mathcal{B}}(x_1,\dots,x_{j-1},u(x_j),x_{j+1},\dots,x_n)\,.$$

Le second déterminant est obtenu à partir du premier par échange des vecteurs situés à la i-ième et la j-ième places. Leur somme est donc égale à 0 et on a bien $f(x_1,\dots,x_n)=0$.

2) L'application f est la somme de n formes n-linéaires. C'est donc une forme n-linéaire et nous avons démontré dans la question précédente qu'elle est alternée. On sait d'après le cours qu'il existe une constante λ telle que

$$\forall(x_1,\dots,x_n)\in E^n,\ f(x_1,\dots,x_n)=\lambda.\det_{\mathcal{B}}(x_1,\dots,x_n).$$

En particulier pour $(x_1,\dots,x_n)=(e_1,\dots,e_n)$ on obtient

$$f(e_1,\dots,e_n)=\lambda.\det_{\mathcal{B}}(e_1,\dots,e_n)=\lambda.$$

Soit $A=(a_{ij})$ la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$. On a alors

$$f(e_1,\dots,e_n)=\sum_{k=1}^{n}\det_{\mathcal{B}}(e_1,\dots,e_{k-1},u(e_k),e_{k+1},\dots,e_n)$$

et

$$\det_{\mathcal{E}}(e_1,\dots,e_{k-1},u(e_k),e_{k+1},\dots,e_n)=\begin{vmatrix}1&0&\dots&a_{1k}&\dots&0\\0&1&\ddots&a_{2k}&\dots&0\\\vdots&&\ddots&\ddots&&\vdots\\0&\dots&\dots&a_{kk}&\ddots&0\\\vdots&&&\vdots&\ddots&\vdots\\0&\dots&\dots&a_{nk}&\dots&1\end{vmatrix}.$$

En développant ce déterminant par rapport à sa k-ième ligne on obtient $\det_{\mathcal{B}}(e_1, \dots, e_{k-1}, u(e_k), e_{k+1}, \dots, e_n) = a_{kk}$, d'où $\lambda = \sum_{k=1}^{n} a_{kk} = \operatorname{tr}(u)$ et $f(x_1, \dots, x_n) = \operatorname{tr}(u). \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)$.

Exercice 5.16

CCP MP 2006

Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $A_n = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ où $a_{i,i} = 2\cos\theta$, $a_{i,j} = -1$ si $j = i-1$ ou $j = i+1$, et $a_{i,j} = 0$ sinon. Calculer $\det(A_n)$.

Pour $n \geqslant 3$, posons $\Delta_n = \det(A_n) = \begin{vmatrix} 2\cos\theta & -1 & 0 & 0 & \dots \\ -1 & 2\cos\theta & -1 & 0 & \dots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & -1 & 2\cos\theta \end{vmatrix}$.

En développant ce déterminant par rapport à la première colonne on obtient

$$\Delta_n = 2\cos\theta\Delta_{n-1} + \begin{vmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2\cos\theta & -1 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & & -1 & 2\cos\theta \end{vmatrix}.$$

En développant ce dernier déterminant par rapport à sa première ligne, on obtient la relation $\forall n \geqslant 3,\ \Delta_n = 2\cos\theta\Delta_{n-1} - \Delta_{n-2}$ $(*)$.

On calcule directement $\Delta_1 = 2\cos\theta$ et $\Delta_2 = 4\cos^2\theta - 1$. (On observe que la relation $(*)$ précédente est aussi vérifiée pour $n = 2$, si on convient que $\Delta_0 = 1$).

Il s'agit alors d'une relation de récurrence linéaire du second ordre. L'équation caractéristique associée est (E) $r^2 - 2r\cos\theta + 1 = 0$ et son discriminant est $\Delta = 4(\cos^2\theta - 1) = -4\sin^2\theta$.

- Lorsque $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$, l'équation (E) a deux racines distinctes $r_1 = \cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$ et $r_2 = \cos\theta - i\sin\theta = e^{-i\theta}$. Il existe deux constantes complexes A et B telles que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \Delta_n = Ae^{ni\theta} + Be^{-ni\theta}$. Les constantes A et B sont déterminées par les conditions initiales $\Delta_0 = 1 = A + B$ et $\Delta_1 = 2\cos\theta = Ae^{i\theta} + Be^{-i\theta}$. On en déduit alors $A = \dfrac{e^{i\theta}}{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}$ et $B = \dfrac{-e^{-i\theta}}{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}$ et donc
$$\Delta_n = \frac{e^{i\theta}e^{ni\theta} - e^{-i\theta}e^{-ni\theta}}{e^{i\theta} - e^{-i\theta}} = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}.$$
- Lorsque θ est de la forme $2k\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$, l'équation (E) a une unique racine $r = 1$ et il existe deux constantes complexes A et B telles que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\Delta_n = A + Bn$. On déduit des conditions initiales $\Delta_0 = 1$ et $\Delta_1 = 2$ que $\Delta_n = n + 1$.

- Lorsque θ est de la forme $(2k+1)\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$, l'équation (E) a une unique racine $r = -1$ et il existe deux constantes complexes A et B telles que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\Delta_n = (-1)^n(A + Bn)$. Les conditions initiales $\Delta_0 = 1$ et $\Delta_1 = -2$ donnent alors $\Delta_n = (-1)^n(1+n)$.

Exercice 5.17

(Déterminant de Cauchy) ☕

Soient n un entier supérieur ou égal à 2 et $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ des nombres complexes tels que $a_i + b_j \neq 0$ pour tout i et pour tout j.

Calculer le déterminant $K_n = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{a_1+b_1} & \dfrac{1}{a_1+b_2} & \cdots & \dfrac{1}{a_1+b_n} \\ \dfrac{1}{a_2+b_1} & \dfrac{1}{a_2+b_2} & \cdots & \dfrac{1}{a_2+b_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{1}{a_n+b_1} & \dfrac{1}{a_n+b_2} & \cdots & \dfrac{1}{a_n+b_n} \end{vmatrix}$.

Indication : on pourra introduire la fraction rationnelle $R(x) = \dfrac{(x-a_1)\dots(x-a_{n-1})}{(x+b_1)\dots(x+b_n)}$

et le déterminant $\begin{vmatrix} \dfrac{1}{a_1+b_1} & \dfrac{1}{a_1+b_2} & \cdots & R(a_1) \\ \dfrac{1}{a_2+b_1} & \dfrac{1}{a_2+b_2} & \cdots & R(a_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{1}{a_n+b_1} & \dfrac{1}{a_n+b_2} & \cdots & R(a_n) \end{vmatrix}$.

Nous supposons les coefficients b_i deux à deux distincts (dans le cas contraire, on a évidemment $K_n = 0$).

Considérons alors la fraction rationnelle $R(x) = \dfrac{(x-a_1)\dots(x-a_{n-1})}{(x+b_1)\dots(x+b_n)}$.

On a

$$R(a_1) = \cdots = R(a_{n-1}) = 0 \quad \text{et} \quad R(a_n) = \frac{(a_n-a_1)\dots(a_n-a_{n-1})}{(a_n+b_1)\dots(a_n+b_n)}.$$

En décomposant R en éléments simples, on voit qu'il existe des nombres complexes $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que $R(x) = \dfrac{\lambda_1}{x+b_1} + \cdots + \dfrac{\lambda_n}{x+b_n}$. En fait, seule la valeur du coefficient λ_n sera utile dans la suite. En remplaçant x par $-b_n$ dans la fraction rationnelle $(x+b_n)R(x)$ on obtient $\lambda_n = \dfrac{(b_n+a_1)\dots(b_n+a_{n-1})}{(b_n-b_1)\dots(b_n-b_{n-1})}$.

Notons $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de K_n et remplaçons la dernière colonne par $\lambda_1 C_1 + \cdots + \lambda_n C_n$. On obtient

$$\lambda_n K_n = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{a_1+b_1} & \dfrac{1}{a_1+b_2} & \dots & R(a_1) \\ \dfrac{1}{a_2+b_1} & \dfrac{1}{a_2+b_2} & \dots & R(a_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{1}{a_n+b_1} & \dfrac{1}{a_n+b_2} & \dots & R(a_n) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \dfrac{1}{a_1+b_1} & \dfrac{1}{a_1+b_2} & \dots & 0 \\ \dfrac{1}{a_2+b_1} & \dfrac{1}{a_2+b_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{1}{a_n+b_1} & \dfrac{1}{a_n+b_2} & \dots & R(a_n) \end{vmatrix}$$

$$= R(a_n) K_{n-1}.$$

On a donc $K_n = \left(\dfrac{(b_n - b_1)\dots(b_n - b_{n-1})}{(b_n + a_1)\dots(b_n + a_{n-1})}\right)\left(\dfrac{(a_n - a_1)\dots(a_n - a_{n-1})}{(a_n + b_1)\dots(a_n + b_n)}\right) K_{n-1}$,

et comme $K_1 = \dfrac{1}{a_1+b_1}$ on en déduit aisément que

$$K_n = \frac{\displaystyle\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (b_j - b_i). \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_j - a_i)}{\displaystyle\prod_{1 \leqslant i, j \leqslant n} (a_i + b_j)}.$$

Exercice 5.18

TPE MP 2006, Mines-Ponts MP 2006 ☕

Soit n un entier, avec $n \geqslant 2$. On se propose de déterminer l'ensemble $\mathcal{S}$ des matrices A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que

$$\forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ \det(A + B) = \det(A) + \det(B).$$

1) Donner un exemple de matrice appartenant à $\mathcal{S}$.

2) Soit A une matrice appartenant à $\mathcal{S}$.

- Montrer que $\det(A) = 0$.
- A l'aide d'un raisonnement par l'absurde, montrer que A est nulle, en complétant une colonne non nulle de A par le théorème de la base incomplète.

1) La matrice nulle appartient à $\mathcal{S}$.

2) Soit $A \in \mathcal{S}$. En écrivant la relation de l'énoncé avec $B = A$, on obtient $\det(2A) = 2^n \det(A) = 2\det(A)$ et donc $\det(A) = 0$ puisque $n \geqslant 2$.

Supposons A non nulle et désignons par $A_1, \dots, A_n$ les colonnes de A. (Ce sont des éléments de l'espace vectoriel $E = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$). La matrice A possède au moins une colonne non nulle A_{i_0} et à l'aide du théorème de la base incomplète, on peut trouver une base $(A'_1 \dots, A'_n)$ de E, avec $A'_{i_0} = A_{i_0}$.

On peut alors écrire

$$\begin{pmatrix} A'_1 & \dots & A'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & \dots & A_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A'_1 - A_1 & \dots & A'_n - A_n \end{pmatrix}$$

d'où, par hypothèse,

$$\det \begin{pmatrix} A'_1 & \dots & A'_n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} A_1 & \dots & A_n \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} A'_1 - A_1 & \dots & A'_n - A_n \end{pmatrix}$$

Le déterminant de la matrice $\begin{pmatrix} A'_1 - A_1 & \dots & A'_n - A_n \end{pmatrix}$ est nul puisque sa i_0-ième colonne est égale à 0. On obtient donc $\det \begin{pmatrix} A'_1 & \dots & A'_n \end{pmatrix} = 0$, ce qui est absurde.

Exercice 5.19

Mines-Ponts MP 2007

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Montrer que tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ contient au moins une matrice inversible.

Soit H un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et soit $(E_{ij}, (i,j) \in \{1, \dots, n\}^2)$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Si H contient toutes les matrices E_{ij} avec $i \neq j$, alors H contient la matrice

$$A = E_{1,n} + \sum_{i=2}^{n} E_{i,i-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

En développant le déterminant de A par rapport à sa première ligne, on obtient $\det(A) = (-1)^{n+1}$ et donc A est inversible.

Supposons maintenant qu'il existe un couple (i, j), avec $i \neq j$, tel que $E_{ij} \notin H$. On a alors $H + \mathrm{Vect}(E_{ij}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et en particulier il existe $a \in \mathbb{C}$ et $M \in H$ tels que $I_n = M + aE_{ij}$. On en déduit que $M = I_n - aE_{ij}$ et cette matrice est inversible puisque c'est une matrice triangulaire dont les éléments diagonaux sont tous égaux à 1.

5.3 EXERCICES D'APPROFONDISSEMENT

Exercice 5.20

Matrice à diagonale dominante
(D'après Mines-Ponts MP 2005, Polytechnique MP 2006)

1) Soit $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad |a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}| \tag{1}$$

Montrer que A est inversible.

Indication de la rédaction : En supposant A non inversible, on pourra introduire un vecteur non nul $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que $AX = 0$.

2) Soit $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2, \quad a_{ij} \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \forall i \in [\![1, n]\!], \quad a_{ii} > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ij}.$$

Montrer que $\det(A) > 0$.

Indication de la rédaction : on pourra considérer $P(x) = \det(A + xI_n)$.

1) Soit A une matrice non inversible vérifiant les hypothèses (1). Il existe alors un vecteur $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}$ non nul tel que $AX = 0$. On a donc

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = 0 \tag{E_i}$$

pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. Soit $k \in [\![1, n]\!]$ tel que $|x_k| \geqslant |x_j|$ pour tout $j \in [\![1, n]\!]$. Comme X est non nul, on a $x_k \neq 0$ et $\left|\dfrac{x_j}{x_k}\right| \leqslant 1$ pour tout $j \in [\![1, n]\!]$.

La relation (E_k) permet alors d'écrire

$$|a_k| = \left| \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} \frac{x_j}{x_k} a_j \right| \leqslant \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} \left| \frac{x_j}{x_k} \right| |a_j| \leqslant \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} |a_j|$$

ce qui est en contradiction avec les hypothèses (1).

2) Soit x un réel. La matrice $A + xI_n$ est à diagonale dominante pour tout $x \in \mathbb{R}_+$. On a donc $\det(A + xI_n) \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.

D'autre part $P(x) = \det(A + xI_n)$ est un polynôme unitaire de degré n, à coefficients réels. Il en résulte que $P(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$. La question précédente montre que P ne s'annule pas sur l'intervalle $\mathbb{R}_+$. Grâce au théorème des valeurs intermédiaires on peut affirmer qu'il y est de signe constant. On a donc $P(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et en particulier $P(0) = \det(A) > 0$.

Exercice 5.21

Mines-Ponts MP 2006

Calculer $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 + x & x & \dots & x \\ x & a_2 + x & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ x & \dots & x & a_n + x \end{vmatrix}$ où $a_1, \dots, a_n$ sont des réels.

Nous utilisons ici la propriété de linéarité du déterminant par rapport aux colonnes. Pour tout $j \in [\![1, n]\!]$ on peut écrire la j−ième colonne sous la forme

$$\begin{pmatrix} x \\ \vdots \\ x + a_j \\ \vdots \\ x \end{pmatrix} = X + A_j, \text{ avec } X = \begin{pmatrix} x \\ \vdots \\ x \\ \vdots \\ x \end{pmatrix} \text{ et } A_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Le réel Δ apparaît alors comme la somme de 2^n déterminants, mais au plus $n + 1$ de ces déterminants sont non nuls (tous les déterminants comportant deux fois la colonne X sont nuls). On obtient donc $\Delta = \det(\text{diag}(a_1, \dots, a_n)) + \sum_{j=1}^{n} \Delta_j$, avec

$$\Delta_j = \begin{vmatrix} a_1 & 0 & \dots & x & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & & x & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & & x & & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & x & \dots & a_n \end{vmatrix} = x \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} a_i .$$

Finalement $\Delta = x \left(\sum_{j=1}^{n} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} a_i \right) + \prod_{i=1}^{n} a_i .$

Exercice 5.22

TPE MP 2006

Soient $n > 2$ un entier et $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 0$. Calculer le déterminant de $M = (m_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ où $m_{ij} = a_i + a_j$ si $i \neq j$ et $m_{ii} = 0$.

On a : $$\det(M)=\begin{vmatrix} 0 & a_1+a_2 & \dots & a_1+a_n \\ a_2+a_1 & 0 & \dots & a_2+a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n+a_1 & a_n+a_2 & \dots & 0 \end{vmatrix}.$$

En utilisant la relation $a_1+a_2+\dots+a_n=0$, on remarque que la somme des lignes de M est égale à $\big((n-2)a_1 \quad (n-2)a_2 \quad \dots \quad (n-2)a_n\big)$. L'opération élémentaire $[L_1 \leftarrow L_1+L_2+\dots+L_n]$ donne donc :

$$\det(M)=(n-2)\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_2+a_1 & 0 & \dots & a_2+a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n+a_1 & a_n+a_2 & \dots & 0 \end{vmatrix}.$$

Retranchons alors la première ligne à chacune des suivantes on obtient

$$\det(M)=(n-2)\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_2 & -a_2 & a_2 & \dots & a_2 \\ a_3 & a_3 & -a_3 & \dots & a_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & a_n & a_n & \dots & -a_n \end{vmatrix}.$$

On retranche ensuite la première colonne à chacune des suivantes :

$$\det(M)=(n-2)\begin{vmatrix} a_1 & a_2-a_1 & a_3-a_1 & \dots & a_n-a_1 \\ a_2 & -2a_2 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & 0 & -2a_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & 0 & 0 & \dots & -2a_n \end{vmatrix}.$$

On effectue pour finir l'opération élémentaire

$$[C_1 \leftarrow C_1+\frac{1}{2}C_2+\frac{1}{2}C_3+\dots+\frac{1}{2}C_n]$$

pour obtenir

$$\det(M)=(n-2)\begin{vmatrix} A & a_2-a_1 & a_3-a_1 & \dots & a_n-a_1 \\ 0 & -2a_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -2a_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -2a_n \end{vmatrix}.$$

Avec $A=a_1+\frac{1}{2}\big((a_2-a_1)+(a_3-a_1)+\dots+(a_n-a_1)\big)=-\frac{1}{2}(n-2)a_1$.

On en déduit $\det(M)=(-2)^{n-2}(n-2)^2a_1\dots a_n$.

Exercice 5.23

Ecole Polytechnique MP 2006 ☕

Soit p un nombre premier, $a_0, a_1, \dots, a_{p-1}$ des éléments de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

On pose $M = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{p-1} \\ a_{p-1} & a_0 & \dots & a_{p-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_1 & \dots & a_{p-1} & a_0 \end{pmatrix}$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que M soit inversible et calculer $\det(M)$.

Notons K le corps $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. On sait que $x^p = x$ pour tout $x \in K$.

Considérons la matrice $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \\ 1 & 0 & \dots & & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_p(K)$.

En considérant J comme la matrice, dans la base canonique $(e_1, e_2, \dots, e_p)$ de l'espace vectoriel K^p, de l'endomorphisme f défini par

$$f(e_1) = e_p, f(e_2) = e_1, \dots, f(e_p) = e_{p-1},$$

on calcule facilement les puissances successives de J. On voit notamment que $J^p = I_p$ et que $M = a_0 I_p + a_1 J + \dots + a_{p-1} J^{p-1}$.

Soit $K[J]$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(K)$ engendré par $(I_p, J, \dots, J^{p-1})$. C'est une sous-algèbre commutative de l'algèbre $\mathcal{L}(K)$ et la formule de binôme montre que l'application $M \to M^p$ est un endomorphisme de l'algèbre $K[J]$.

(C'est une conséquence du fait que, lorsque p est un nombre premier, le coefficient binomial $\binom{p}{k}$ est congru à 0 modulo p pour $1 \leqslant k \leqslant p-1$ cf. exercice 1.3 page 2).

Il en résulte que

$$\begin{aligned} M^p &= (a_0 I_p + a_1 J + \dots + a_{p-1} J^{p-1})^p = a_0^p I_p^p + a_1^p J^p + \dots a_{p-1}^p J^{p(p-1)} \\ &= (a_0 + a_1 + \dots + a_{p-1}) I_p \end{aligned}$$

On en déduit que $\det(M^p) = (a_0 + a_1 + \dots + a_{p-1})^p = a_0 + a_1 + \dots + a_{p-1}$. Ainsi M est inversible si et seulement si $a_0 + a_1 + \dots + a_{p-1} \neq 0$.

Enfin $\det(M) = \det(M)^p = \det(M^p) = a_0 + a_1 + \dots + a_{p-1}$.

Exercice 5.24

Polytechnique MP 2006

Montrer que deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ le sont dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Si M et M' sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, alors il existe une matrice $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $M' = Q^{-1}MQ$, c'est-à-dire telle que $QM' = MQ \quad (*)$.

La matrice $Q = (q_{jk})$ est à coefficients complexes ; on peut écrire $q_{jk} = a_{jk} + ib_{jk}$ et donc $Q = A + iB$, avec $A = (a_{jk})$ et $B = (b_{jk})$. Las matrices A et B sont à coefficients réels et la relation $(*)$ s'écrit $AM' + iBM' = MA + iMB$. En séparant les parties réelles et imaginaires, on obtient $AM' = MA$ et $BM' = MB$.

On a donc aussi $(A + xB)M' = M(A + xB)$ pour tout nombre réel x.

Posons alors $P(x) = \det(A + xB)$. Il s'agit d'un polynôme à coefficients réels et ce polynôme n'est pas le polynôme nul puisque $P(i) = \det(Q) \neq 0$. Il existe donc un nombre réel x_0 tel que $P(x_0) \neq 0$.

La matrice $Q_0 = A + x_0B$ est donc inversible dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et vérifie $Q_0M' = MQ_0$. On a donc $M' = Q_0^{-1}MQ_0$, ce qui montre que M et M' sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 5.25

CCP PSI 2005, Mines-Ponts PC 2006 ☕

1) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   Montrer que si $\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\det(C + X) = \det(X)$, alors $C = 0$.
2) Soient A et B appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que
$$\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \det(A + X) = \det(B + X).$$
   Montrer que $A = B$.

1) En prenant en particulier $X = -C$, on obtient $(-1)^n \det(C) = 0$ et donc $\det(C) = 0$. Le rang r de C est donc strictement inférieur à n. On sait que dans ces conditions, il existe des matrices inversibles P et Q telles que $C = PJ_rQ$, avec $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Introduisons la matrice $J'_r = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{pmatrix}$ et posons $D = PJ'_rQ$.
   On a alors $C + D = P(J_r + J'_r)Q = PI_nQ = PQ$, d'où
   $\det(C + D) = \det(D) = \det(PQ) \neq 0$. Il en résulte que D est inversible et puisque $\mathrm{rg}\,(D) = \mathrm{rg}\,(J'_n) = n - r$, on a $r = 0$ et donc $C = 0$.
2) Si $\det(A + X) = \det(B + X)$ pour tout $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors on a aussi
$$\det(A - B + X) = \det(B - B + X) = \det(X)$$
   pour tout matrice X et donc $A - B = 0$ d'après la question précédente.

Équations linéaires 6

6.1 L'ESSENTIEL DU COURS

Ce qu'il faut savoir

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Soit b un élément de F. On considère l'équation linéaire $(\mathcal{E})$: $\quad f(x) = b$ où l'inconnue x est un élément de E.

L'équation $f(x) = 0_F$ est appelée l'équation homogène associée.

Description de l'ensemble des solutions

• L'ensemble (S_H) de solutions de l'équation homogène est un sous-espace vectoriel de E (le noyau de l'application linéaire f).

• Supposons l'équation linéaire $f(x) = b$ compatible et soit x_0 une de ses solutions. Alors l'ensemble $\mathcal{S}$ de ses solutions est le sous-espace affine

$$\mathcal{S} = x_0 + S_H$$

dont la direction est le sous-espace vectoriel $S_H = \mathrm{Ker}(f)$ des solutions de l'équation homogène associée.

• Cas où E et F sont de dimensions finies :

Notons r le rang de l'application linéaire f et n la dimension de E.

◦ L'ensemble $S_H = \mathrm{Ker}(f)$ des solutions de l'équation linéaire homogène $f(x) = 0_F$ est un sous-espace vectoriel de E de dimension $n - r$.

◦ L'ensemble $\mathcal{S}$ de l'équation linéaire $f(x) = b$ est ou bien l'ensemble vide (lorsque l'équation est incompatible), ou bien un sous-espace affine de E de dimension $n - r$.

Système de Cramer

• Il s'agit d'un système linéaire de la forme $AX = B$ où on donne une matrice inversible $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et où l'inconnue, X, appartient à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Un tel système admet une unique solution : $X = A^{-1}B$.

• **Les formules de Cramer**

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ l'unique solution du système de Cramer $AX = B$. Désignons par Δ le déterminant de A et, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, par Δ_i le déterminant de la matrice obtenue en remplaçant la i-ième colonne de A par le second membre B. On a alors $x_i = \dfrac{\Delta_i}{\Delta}$.

6.2 EXERCICES

Exercice 6.1

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$ et soit p un projecteur de E. Montrer que l'ensemble des endomorphismes f de E tels que $f \circ p = p$ est un sous-espace affine de E et donner sa dimension.

L'application $\Phi\colon f \mapsto f \circ p$ est une application linéaire de l'espace vectoriel $\mathcal{L}(E)$ dans lui même. L'exercice consiste à résoudre l'équation linéaire

$$\Phi(f) = p \tag{$*$}$$

On dispose d'une solution particulière évidente : $f = p$. L'ensemble $\mathcal{S}$ de ses solutions est donc le sous-espace affine $p + S_H$ de $\mathcal{L}(E)$ où $S_H = \operatorname{Ker}(\Phi)$ est l'ensemble des endomorphismes f de E tels que $f \circ p = 0$.

C'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$. Pour déterminer sa dimension, observons d'abord que la relation $f \circ p = 0$ équivaut à l'inclusion de $\operatorname{Im}(p)$ dans le noyau K de f. Introduisons alors une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_r, e_{r+1}, \ldots, e_n)$ de E où $(e_1, \ldots, e_r)$ est une base de $\operatorname{Im}(p)$ et $(e_{r+1}, \ldots, e_n)$ une base de $\operatorname{Ker}(p)$. Pour que l'image de p soit inclus dans le noyau de f, il faut et il suffit que $f(e_i) = 0$ pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$. Cette condition est caractérisée par le fait que la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est de la forme

$$M = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & M_1 \end{pmatrix}$$

où $\mathbf{0}$ désigne la matrice nulle de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et M_1 une matrice arbitraire dans $\mathcal{M}_{n,n-p}(\mathbb{K})$.

Comme l'application qui à $f \in \mathcal{L}(E)$ associe sa matrice dans la base $\mathcal{B}$ est un isomorphisme, la dimension de $\operatorname{Ker}(\Phi)$ est égale à celle de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,n-p}(\mathbb{K})$, c'est-à-dire $n(n-p)$.

Exercice 6.2

Mines-Ponts PSI 2006

Soient a, b et c les racines du polynôme $X^3 - X + 1$. Résoudre le système

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ ax + by + cz = 2 \\ a^2x + b^2y + c^2z = -3 \end{cases}$$

Remarquons que les racines du polynôme $P = X^3 - X + 1$ sont deux à deux distinctes, puisque les racines du polynôme dérivé $P' = 3X^2 - 1$, $x_1 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ et $x_2 = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ ne sont pas racines de P. Le déterminant D du système est un déterminant de Vandermonde : $D = (c-a)(c-b)(b-a)$. Il est non nul et le système est donc de Cramer : il admet une unique solution $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3$.

Les relations usuelles entre les coefficients et les racines de P montrent que $a+b+c = 0$, $a^2+b^2+c^2 = (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca) - 2$ et $a^3+b^3+c^3 = a+b+c-3 = -3$. Donc (a, b, c) est l'unique solution du système.

Exercice 6.3

Centrale PSI 2006

Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$. Résoudre dans $\mathbb{C}$

$$\left\{\begin{array}{rcl} \lambda x + y + z + t &=& 1 \\ x + \lambda y + z + t &=& \mu \\ x + y + \lambda z + t &=& \mu^2 \\ x + y + z + \lambda t &=& \mu^3 \end{array}\right.$$

Soit D déterminant du système. On calcule

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} \qquad L_1 \leftarrow L_1 + L_2 + L_3 + L_4 \\ &= (\lambda+3) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} \qquad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \end{array} \\ &= (\lambda+3) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda+3)(\lambda-1)^3 \end{aligned}$$

• Premier cas : Supposons $\lambda \neq -3$ et $\lambda \neq 1$. Le système est de Cramer. Il admet une unique solution.

En sommant les quatre équations on obtient

$$(\lambda+3)(x+y+z+t) = 1 + \mu + \mu^2 + \mu^3 \quad \text{d'où} \quad x+y+z+t = \frac{1+\mu+\mu^2+\mu^3}{\lambda+3}.$$

En retranchant la première équation on obtient $x(1-\lambda) = \dfrac{1+\mu+\mu^2+\mu^3}{\lambda+3} - 1$, d'ou

$$x = \frac{1}{\lambda-1}\left(1 - \frac{1+\mu+\mu^2+\mu^3}{\lambda+3}\right)$$

On obtient de la même façon $y = \dfrac{1}{\lambda-1}\left(\mu - \dfrac{1+\mu+\mu^2+\mu^3}{\lambda+3}\right)$,

$z = \dfrac{1}{\lambda-1}\left(\mu^2 - \dfrac{1+\mu+\mu^2+\mu^3}{\lambda+3}\right)$ et $t = \dfrac{1}{\lambda-1}\left(\mu^3 - \dfrac{1+\mu+\mu^2+\mu^3}{\lambda+3}\right)$.

• Deuxième cas : Supposons $\lambda = 1$. Le système s'écrit $x+y+z+t = 1 = \mu = \mu^2 = \mu^3$. Il est compatible si et seulement si $\mu = 1$ et l'ensemble des solutions est l'hyperplan affine d'équation $x + y + z + t = 1$.

• Troisième cas : supposons enfin $\lambda = -3$. L'opération élémentaire $[L_4 \leftarrow L_4+L_1+L_2+L_3]$ montre que le système équivaut à

$$\begin{cases} -3x + y + z + t &= 1 \\ x - 3y + z + t &= \mu \\ x + y - 3z + t &= \mu^2 \\ 0 &= 1 + \mu + \mu^2 + \mu^3 \end{cases}$$

Le système est compatible si et seulement si $1 + \mu + \mu^2 + \mu^3 = 0$, c'est-à-dire si et seulement si $\mu \in \{-1, i, -i\}$.

On peut choisir t arbitrairement dans $\mathbb{C}$ et pour tout $t \in \mathbb{C}$, (x, y, z) est la solution du système de Cramer

$$\begin{cases} -3x + y + z &= 1 - t \\ x - 3y + z &= \mu - t \\ x + y - 3z &= \mu^2 - t \end{cases}$$

En sommant les trois équations, il vient $-x - y - z = 1 + \mu + \mu^2 - 3t$, d'où $-4x = 2 + \mu + \mu^2 - 4t$ et $x = -\dfrac{1}{4}(2 + \mu + \mu^2) + t$. On trouve de même $y = -\dfrac{1}{2}(1 + 2\mu + \mu^2) + t$ et $z = \dfrac{1}{2}(1 + \mu + 2\mu^2) + t$. L'ensemble des solutions est la droite affine passant par $-\dfrac{1}{4}(2 + \mu + \mu^2, 1 + 2\mu + \mu^2, 1 + \mu + 2\mu^2, 0)$ et dirigée par le vecteur $(1, 1, 1, 1)$.

Exercice 6.4

Mines-Ponts MP 2005, Ecole polytechnique PSI 2006 ☕ ☕

1) Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $f_1, \dots, f_n$ des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ formant une famille libre de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\det(f_i(x_j))_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \neq 0$.

2) Réciproque ?

1) On fait une démonstration par récurrence sur l'entier n.
La propriété est évidente pour $n = 1$: si f_1 est non nulle, alors il existe $x_1 \in \mathbb{R}$ tel que $f_1(x_1) \neq 0$.
Pour $n \geqslant 2$, supposons la propriété vérifiée à l'ordre $n-1$ et soient $f_1, \ldots, f_n$ des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ formant une famille libre. La famille $f_1, \ldots, f_{n-1}$ est elle aussi libre et l'hypothèse de récurrence montre qu'il existe $(x_1, \ldots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ tel que
$$\Delta_n = \det(f_i(x_j))_{1 \leqslant i,j \leqslant n-1} \neq 0.$$
Considérons alors l'application $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par
$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \varphi(x) = \begin{vmatrix} f_1(x_1) & \ldots & f_1(x_{n-1}) & f_1(x) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ f_{n-1}(x_1) & \ldots & f_{n-1}(x_{n-1}) & f_{n-1}(x) \\ f_n(x_1) & \ldots & f_n(x_{n-1}) & f_n(x) \end{vmatrix}.$$
En développant ce déterminant par rapport à sa dernière colonne, on voit qu'il existe des réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tels que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \lambda f_1(x) + \cdots + \lambda_{n-1} f_{n-1}(x) + \lambda_n f_n(x).$$
c'est-à-dire $\varphi = \lambda f_1 + \cdots + \lambda_{n-1} f_{n-1} + \lambda_n f_n$, avec $\lambda_n = \Delta_n \neq 0$.
Comme la famille $f_1, \ldots, f_n$ est libre, φ est non nulle. Il existe donc $x_n \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi(x_n) \neq 0$, ce qui démontre que la propriété est vérifiée à l'ordre n.

2) Supposons maintenant qu'il existe $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que
$$\det(f_i(x_j))_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \neq 0$$
Démontrons que la famille $(f_1, \ldots, f_n)$ est libre. Soient pour cela $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ des nombres réels tels que $\lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_n f_n = 0$. On a alors
$$\begin{cases} \lambda_1 f_1(x_1) + \cdots + \lambda_n f_n(x_1) = 0 \\ \lambda_1 f_1(x_2) + \cdots + \lambda_n f_n(x_2) = 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \cdots\cdots \\ \lambda_1 f_1(x_n) + \cdots + \lambda_n f_n(x_n) = 0 \end{cases}$$
Le n-uplet $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ apparaît alors comme solution d'un système linéaire homogène de Cramer. On a donc $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$, ce qui démontre bien que la famille $(f_1, \ldots, f_n)$ est libre.

Exercice 6.5

TPE MP 2005 ☕

Soit $a \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ et $b \in \mathbb{C}$. Résoudre le système $\begin{cases} x_1 &= & ax_n + b \\ x_2 &= & ax_1 + b \\ \vdots & & \\ x_n &= & ax_{n-1} + b \end{cases}$

Désignons par u le point fixe de l'application affine $x \mapsto ax + b$, c'est-à-dire $u = \dfrac{b}{1-a}$ et posons $x_i' = x_i - u$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$.

Le système s'écrit $\begin{cases} x_1' & = & ax_n' \\ x_2' & = & ax_1' \\ \vdots & & \\ x_n' & = & ax_{n-1}' \end{cases}$

Il s'agit d'un système linéaire homogène : il admet donc au moins la solution nulle. Les $n-1$ dernières équations permettent d'exprimer $x_2', \dots, x_n'$ à l'aide de x_1' :

$$x_2' = ax_1', \dots, x_n' = a^{n-1}x_1'.$$

La première équation s'écrit alors $x_1' = a^n x_1'$. Si $a^n = 1$, c'est-à-dire si a est une racine n-ième de l'unité distincte de 1, alors les solutions sont de la forme $x_1'(1, a, \dots, a^{n-1})$ où x_1' est un nombre complexe arbitraire, tandis que si a n'est pas une racine de l'unité, le système admet la seule solution nulle.

En conclusion : si a est une racine n-ième de l'unité distincte de 1, alors les solutions sont de la forme $A(1, a, \dots, a^{n-1}) + u(1, 1, \dots, 1)$ où A est une constante complexe arbitraire. Sinon, le système admet la seule solution constante : $u = (1, \dots, 1)$.

Exercice 6.6

Centrale MP, PC 2006

Soit $k \in \mathbb{C}^*$ et (S) le système

$$\begin{cases} (1+k^2)x_1 + kx_2 & = & 0 & \\ \dots & & & \\ kx_{i-1} + (1+k^2)x_i + kx_{i+1} & = & 0 & (2 \leqslant i \leqslant n-1) \\ \dots & & & \\ kx_{n-1} + (1+k^2)x_n & = & 0 & \end{cases}$$

Résoudre (S) en utilisant une suite $(u_i)_{i \in \mathbb{N}}$ solution de la récurrence

$$ku_{i-1} + (1+k^2)u_i + ku_{i+1} = 0.$$

Commençons par déterminer l'ensemble $\mathcal{S}$ des suites $(u_i)_{i \in \mathbb{N}}$ solutions de la relation de récurrence linéaire $ku_{i-1} + (1+k^2)u_i + ku_{i+1} = 0$. Le discriminant de l'équation caractéristique $kr^2 + (1+k^2)r + k = 0$ est $\Delta = (1+k^2)^2 - 4k^2 = (1-k^2)^2$. Si $k \neq \pm 1$, alors l'équation admet deux racines complexes distinctes $r_1 = -k$ et $r_2 = -\dfrac{1}{k}$ et les éléments de $\mathcal{S}$ sont les combinaisons linéaires des suites géométriques de raisons respectives $-k$ et $-\dfrac{1}{k}$.

Si $k = 1$ ou $k = -1$, alors l'équation caractéristique admet la racine double $-k$ les éléments de $\mathcal{S}$ sont les suites de la forme $\forall i \in \mathbb{N},\ u_i = (a + bi)(-k)^i$, où a et b sont deux constantes complexes arbitraires.

On sait de plus qu'une telle suite est déterminée par ses deux premiers termes u_0 et u_1. De façon précise, pour tout $(x_0, x_1) \in \mathbb{C}^2$ il existe une unique suite $(u_i) \in \mathcal{S}$ telle que $u_0 = x_0$ et $u_1 = x_1$.

Soit alors $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite appartenant à $\mathcal{S}$. Si $u_0 = u_{n+1} = 0$, alors $(u_1, \dots, u_n)$ est solution du système (S). Réciproquement si $(x_1, \dots, x_n)$ est une solution de S, alors la suite $(u_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathcal{S}$ définie par ses deux premiers termes $u_0 = 0$ et $u_1 = x_1$ vérifie $u_{n+1} = 0$.

Supposons d'abord $k \neq \pm 1$. Les relations $u_0 = u_{n+1} = 0$ s'écrivent

$$(S') \quad \begin{cases} a + b & = 0 \\ ak^{n+1} + b\dfrac{1}{k^{n+1}} & = 0 \end{cases}$$

Lorsque $k^{2n+2} \neq 1$, il s'agit d'un système de Cramer. On a $a = b = 0$, d'où $u_i = 0$ pour tout $i \in \mathbb{N}$ et (S) admet la seule solution $(x_1, \dots, x_n) = (0, \dots, 0)$. (C'est un système de Cramer).

Lorsque $k^{2n+2} = 1$ (S') est un système de rang 1. Ses solutions sont les couples de la forme $(a, -a)$, $a \in \mathbb{C}$ et les suites u_n sont de la forme $u_i = a(-1)^i\left(k^i - \dfrac{1}{k^i}\right)$.

Les solutions de (S) sont de la forme $a\left(-\left(k - \dfrac{1}{k}\right), \dots, (-1)^n\left(k^n - \dfrac{1}{k^n}\right)\right)$. (Il s'agit donc d'un système dont le rang est égal à $n - 1$).

Dans la cas où $k = \pm 1$, les relations $u_0 = u_{n+1} = 0$ s'écrivent

$$(S') \quad \begin{cases} a & = 0 \\ a + b(n+1) & = 0 \end{cases}$$

On obtient donc $a = b = 0$ et le système (S) admet l'unique solution nulle (c'est un système de Cramer).

Exercice 6.7

Mines-Ponts MP 2007

1) Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ pour que $A = \begin{pmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \cdots & b & a \end{pmatrix}$ soit inversible dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

2) Calculer A^{-1} dans ce cas.

Indication de la rédaction : pour la question 2) on pourra chercher à résoudre le système linéaire $Y = AX$, avec $Y = {}^t(y_1, \dots, y_n)$ et $X = {}^t(x_1, \dots, x_n)$.

1) Calculons le déterminant de A. En ajoutant les $n-1$ dernières colonnes à la première colonne de A, on fait apparaître le facteur $a+(n-1)b$ et on a donc $\det(A) = (a+(n-1)b)\begin{vmatrix} 1 & b & \dots & b \\ 1 & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ 1 & \dots & b & a \end{vmatrix}$. En retranchant la première ligne au suivantes, on obtient $\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & b & \dots & b \\ 0 & a-b & 0 & \dots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & a-b \end{vmatrix}$ et en développant par rapport à la première colonne, on obtient $\det(A) = (a+(n-1)b)(a-b)^{n-1}$. Il en résulte que A est inversible si et seulement si $a \neq b$ et $a \neq (1-n)b$.

2) Soient $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ et cherchons à résoudre le système de Cramer $\begin{cases} ax_1 + bx_2 + \cdots + bx_n & = y_1 \\ bx_1 + ax_2 + \cdots + bx_n & = y_2 \\ \dots & \\ bx_1 + bx_2 + \cdots + ax_n & = y_n \end{cases}$

à l'aide d'opérations élémentaires sur les équations. En les additionnant, on obtient

$$(a+(n-1)b)(x_1 + \cdots + x_n) = y_1 + \cdots + y_n,$$

d'où (1) $\quad x_1 + \cdots + x_n = \dfrac{1}{a+(n-1)b}\,(y_1 + \cdots + y_n)$, puis

$$b(x_1 + \cdots + x_n) = \frac{b}{a+(n-1)b}\,(y_1 + \cdots + y_n).$$

En retranchant cette équation à chacune des équations du système, on obtient

$$\begin{cases} (a-b)x_1 & = y_1 - \dfrac{b}{a+(n-1)b}\,(y_1 + \cdots + y_n) \\ (a-b)x_2 & = y_2 - \dfrac{b}{a+(n-1)b}\,(y_1 + \cdots + y_n) \\ \dots & \dots\dots \\ (a-b)x_n & = y_n - \dfrac{b}{a+(n-1)b}\,(y_1 + \cdots + y_n) \end{cases}$$

On en déduit $x_i = \dfrac{1}{b-a}\,y_i - \dfrac{b}{(b-a)(a+(n-1)b)}\,(y_1 + \cdots + y_n)$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$. On a donc aussi , pour tout $i \in [\![1,n]\!]$,

$$x_i = \frac{-by_1 - \cdots - by_{i-1} + (a+(n-2)b)y_i - by_{i+1} - \cdots - by_n}{(a-b)(a+(n-1)b)}.$$

On en déduit finalement :

$$A^{-1} = \frac{1}{(a-b)(a+(n-1)b)} \begin{pmatrix} a+(n-2)b & -b & \cdots & -b \\ -b & a+(n-2)b & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -b \\ -b & \cdots & -b & a+(n-2)b \end{pmatrix}.$$

Exercice 6.8

TPE MP 2005

Résoudre dans $\mathbb{Z}/37\mathbb{Z}$ le système $\begin{cases} \overline{6}x + \overline{7}y &= \overline{30} \\ \overline{3}x - \overline{7}y &= \overline{0} \end{cases}$

Il s'agit de résoudre un système de deux équations à deux inconnues $x, y \in \mathbb{Z}/37\mathbb{Z}$ qui est un corps, puisque 37 est un nombre premier.

Le déterminant du système $\Delta = \overline{-63} = \overline{11}$ est non nul. La relation de Bézout $11 \times 27 - 37 \times 8 = 1$ montre que l'inverse de $\overline{11}$ est $\overline{27} = -\overline{10}$.

Il s'agit d'un système de Cramer ; il admet donc une solution unique que l'on peut calculer grâce aux formules de Cramer :

$$x = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} \overline{30} & \overline{7} \\ \overline{0} & -\overline{7} \end{vmatrix} = +\overline{10} \times \overline{30} \times \overline{7} = -\overline{10} \times \overline{7}^2 = -\overline{490} = \overline{28}.$$

$$y = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} \overline{6} & \overline{30} \\ \overline{3} & \overline{0} \end{vmatrix} = +\overline{10} \times \overline{30} \times \overline{3} = -\overline{10} \times \overline{7} \times \overline{3} = -\overline{210} = \overline{12}.$$

On peut vérifier avec `Maple` : l'instruction `msolve({6*x+7*y=30,3*x-7*y},37)` donne `(y=12,x=28)`.

7 Réduction des endomorphismes

Dans tout ce chapitre E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

7.1 L'ESSENTIEL DU COURS ET EXERCICES D'ASSIMILATION

7.1.1 Valeurs et vecteurs propres

Ce qu'il faut savoir

Éléments propres d'un endomorphisme

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

- Un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ est une **valeur propre** de u lorsqu'il existe un vecteur $x \neq 0_E$ de E tel que $u(x) = \lambda x$. Ce vecteur x est appelé **vecteur propre** associé à la valeur propre λ.

> **Remarque**
> Le vecteur nul n'est pas un vecteur propre de u.

- L'ensemble des valeurs propres de u est appelé le **spectre** de u, on le note $\mathrm{Sp}(u)$.
- Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on note $E_\lambda(u) = \mathrm{Ker}(u - \lambda\, \mathrm{Id}_E)$. Si $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$, alors $E_\lambda(u)$ est constitué du vecteur nul et des vecteurs propres de valeur propre λ. On l'appelle **sous-espace propre associé à** λ. Si $\lambda \notin \mathrm{Sp}(u)$, alors $E_\lambda(u) = \{0_E\}$.
- Le scalaire λ appartient à $\mathrm{Sp}(u)$ si et seulement si $u - \lambda\, \mathrm{Id}_\mathrm{E}$ est non injectif. En particulier 0 est valeur propre de u si et seulement si u est non injectif.
- Les vecteurs propres et les valeurs propres sont souvent appelés les **éléments propres de** u.
- **Propriété importante :** si $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ sont p valeurs propres distinctes de u, alors la somme $E_{\lambda_1} + \cdots + E_{\lambda_p}$ est directe. Ainsi des vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes sont linéairement indépendants. En particulier, dans un espace de dimension n, il ne peut y avoir plus de n valeurs propres distinctes.
- Une droite est stable par u si et seulement si cette droite est incluse dans un sous-espace propre, ou encore, ce qui revient au même, un vecteur directeur de cette droite est un vecteur propre.

Éléments propres d'une matrice

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- On dit que $\lambda \in \mathbb{K}$ est valeur propre de M lorsqu'il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ non nul tel que $MX = \lambda X$. Ce vecteur X est appelé vecteur propre de M associé à la valeur propre λ.
- Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $\mathcal{B}$ une base de E, u un endomorphisme de E et $M = Mat(u, \mathcal{B})$. Les valeurs propres de u et de M sont identiques, et x est vecteur propre de u pour la valeur propre λ si et seulement si $X = Mat(x, \mathcal{B})$ est vecteur propre de M pour la valeur propre λ. On peut donc appliquer à la matrice M les définitions et les propriétés concernant l'endomorphisme u.
- Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors on peut la considérer comme une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Un complexe λ est une valeur propre complexe de M si et seulement si il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que $MX = \lambda X$. On distingue donc le spectre réel, $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(M)$ et le spectre complexe, $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(M)$ qui le contient.
- Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et si λ est une valeur propre complexe de M, alors $\overline{\lambda}$ est également une valeur propre de M, et $E_{\overline{\lambda}}(M) = \overline{E_\lambda(M)} = \{\overline{X} \mid X \in E_\lambda(M)\}$.

Exercice 7.1

Déterminer les éléments propres de l'endomorphisme

$$\psi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \\ f & \longmapsto & f'' \end{array} \right. .$$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On cherche les fonctions non nulles $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que $f'' = \lambda f$.

Si $\lambda > 0$, $E_\lambda(\psi) = \mathrm{Vect}\left(t \mapsto \mathrm{ch}\left(\sqrt{\lambda} t\right), t \mapsto \mathrm{sh}\left(\sqrt{\lambda} t\right)\right)$.

Si $\lambda < 0$, $E_\lambda(\psi) = \mathrm{Vect}\left(t \mapsto \cos\left(\sqrt{-\lambda} t\right), t \mapsto \sin\left(\sqrt{-\lambda} t\right)\right)$.

Si $\lambda = 0$, il s'agit de $\mathrm{Vect}\,(t \mapsto t, t \mapsto 1) = \left\{t \mapsto at + b, (a, b) \in \mathbb{R}^2\right\}$.

Ainsi, $\mathrm{Sp}(\psi) = \mathbb{R}$.

Exercice 7.2

Soit Φ l'endomorphisme qui a pour matrice dans la base canonique de $\mathbb{C}^4$,

$$A = \begin{pmatrix} 0_2 & -I_2 \\ I_2 & 0_2 \end{pmatrix}.$$

En appliquant la définition, montrer que i et $-i$ sont des valeurs propres de Φ et déterminer les vecteurs propres associés. En déduire tous les sous-espaces propres de A.

Cherchons $V = {}^t(x, y, z, t)$ tel que $AV = iV$. Cela s'écrit

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -z &= ix \\ -t &= iy \\ x &= iz \\ y &= it \end{cases} \iff \begin{cases} x &= iz \\ y &= it \end{cases}.$$

Ainsi $V \in \operatorname{Ker}(A - iI_4)$ si et seulement si il existe $(z, t) \in \mathbb{C}^2$ tel que $V = \begin{pmatrix} iz \\ it \\ z \\ t \end{pmatrix}$.

Finalement $\operatorname{Ker}(A - iI_4) = \operatorname{Vect}(\begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$. En résolvant le système $AV = -iV$, on vérifie de la même façon que $\operatorname{Ker}(A + iI_4) = \operatorname{Vect}(\begin{pmatrix} -i \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$. Comme la somme des dimensions des sous-espaces propres est égale à la dimension de l'espace vectoriel $\mathbb{C}^4$, il n'y pas d'autre sous-espace propre.

Remarques

- On aurait pu remarquer que $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ et utiliser que $AV = iV \Leftrightarrow A\overline{V} = -i\overline{V}$.
- On aurait pu également effectuer un résolution à l'aide d'une écriture par blocs $V = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ où X et Y sont dans $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{C})$.

Exercice 7.3

CCP PSI 2007, Centrale PSI 2007

Soit Φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ défini par $\Phi(P) = (2X + 1)P - (X^2 - 1)P'$.
Déterminer les éléments propres de Φ.
Indication de la rédaction : on remarquera que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout $x \neq \pm 1$, on a $\dfrac{2x + 1 - \lambda}{x^2 - 1} = \dfrac{1 + \lambda}{2(x + 1)} + \dfrac{3 - \lambda}{2(x - 1)}$.

Une condition nécessaire et suffisante pour que $\lambda \in \mathbb{R}$ soit valeur propre de f est qu'il existe un polynôme P distinct du polynôme nul tel que (R) : $\Phi(P) = \lambda P$. La relation (R) s'écrit $(X^2 - 1)P' - (2X + 1 - \lambda)P = 0$. Le polynôme P est de la forme $P = a_n X^n + \cdots + a_0$, où n est le degré de P, et où a_n est un réel non nul. Le coefficient de X^{n+1} dans le polynôme $Q = (X^2 - 1)P' - (2X + 1 - \lambda)P$ est alors égal à $(n - 2)a_n$, et puisque Q est le polynôme nul, on a nécessairement $n = 2$: le polynôme P est de degré 2.

Pour qu'un polynôme P vérifie la relation (R), il faut et il suffit que la fonction polynomiale associée vérifie sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle linéaire

$$(E) \quad (x^2-1)y' - (2x+1-\lambda)y = 0\,.$$

Lorsque y est une fonction polynomiale, l'équation (E) est vérifiée sur $\mathbb{R}$ dés qu'elle est vérifiée sur $]1,+\infty[$. Résolvons donc cette équation sur $]1,+\infty[$. Elle s'écrit $y' = \dfrac{2x+1-\lambda}{x^2-1}\,y$. Notons f la fonction définie sur $]1,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{2x+1-\lambda}{x^2-1}$. Elle se décompose en éléments simples sous la forme $f(x) = \dfrac{1+\lambda}{2(x+1)} + \dfrac{3-\lambda}{2(x-1)}$ et, sur $]1,+\infty[$, admet comme primitive $F : x \mapsto \dfrac{1+\lambda}{2}\ln(x+1) + \dfrac{3-\lambda}{2}\ln(x-1)$. Les solutions de l'équation différentielle sont donc $y = Ce^F$, où C est une constante, ce qui donne $y = C(x+1)^{\frac{1+\lambda}{2}}(x-1)^{\frac{3-\lambda}{2}}$. Il reste à chercher pour quelles valeurs de λ cette solution est une fonction polynomiale de degré 2. Il y a trois possibilités :

- $\dfrac{1+\lambda}{2} = 2$ et $\dfrac{3-\lambda}{2} = 0$, c'est-à-dire $\lambda = 3$. Ainsi $\lambda = 3$ est une valeur propre de Φ associé au sous-espace propre $E_3 = \mathrm{Vect}((X+1)^2)$.
- $\dfrac{1+\lambda}{2} = 1$ et $\dfrac{3-\lambda}{2} = 1$, c'est-à-dire $\lambda = 1$. Ainsi $\lambda = 1$ est une valeur propre de Φ associé au sous-espace propre $E_1 = \mathrm{Vect}(X-1)(X+1)$.
- $\dfrac{1+\lambda}{2} = 0$ et $\dfrac{3-\lambda}{2} = 2$, c'est-à-dire $\lambda = -1$. Ainsi $\lambda = -1$ est une valeur propre de Φ associé au sous-espace propre $E_{-1} = \mathrm{Vect}((X-1)^2)$.

Exercice 7.4

CCP PC 2006

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3 et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 \neq 0$ et $f^3 = 0$.

1) Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $(x, f(x), f^2(x))$ soit une base de E.

2) Montrer que la seule droite de E stable par f est $\mathbb{R}f^2(x)$.

3) Montrer que le seul plan de E stable par f est $\mathbb{R}f(x) + \mathbb{R}f^2(x)$.

1) Puisque $f^2 \neq 0$, il existe un $x \in E$ tel que $f^2(x) \neq 0$. On vérifie aisément que la famille $(x, f(x), f^2(x))$ est libre (voir exercice 3.18, page 67), donc il s'agit d'une base de E.

2) L'endomorphisme f est nilpotent donc son spectre est réduit à $\{0\}$. Soit $\mathcal{D}$ une droite stable par f et soit x un vecteur non nul de E tel que $\mathcal{D} = \mathbb{R}x$. Il existe

$\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = \lambda x$ et x est donc un vecteur propre associé à la valeur propre λ. On a nécessairement $\lambda = 0$ et donc $x \in \operatorname{Ker} f$. Ainsi, $\mathcal{D} \subset \operatorname{Ker} f$.

Déterminons le noyau de f. On sait que $\dim \operatorname{Ker} f = 3 - \operatorname{rg} f$. Dans la base $\mathcal{B} = (x, f(x), f^2(x))$, la matrice représentant f s'écrit $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Cette matrice est de rang 2 donc f est également de rang 2 et $\operatorname{Ker} f$ est une droite. On a donc $\mathcal{D} = \operatorname{Ker} f$. En regardant la matrice, on se rend compte que $\operatorname{Ker} f = \mathbb{R} f^2(x)$.

Réciproquement, $\operatorname{Ker} f = \mathbb{R} f^2(x)$ est bien une droite stable et c'est la seule.

3) Soit $\mathcal{P}$ un plan stable par f. L'endomorphisme $f_{|\mathcal{P}}$ induit par f sur $\mathcal{P}$ est encore un endomorphisme nilpotent. Comme $\dim \mathcal{P} = 2$, on sait que l'indice de nilpotence de $f_{|\mathcal{P}}$ est inférieur ou égal à 2. On a donc $f_{|\mathcal{P}}^2 = 0$ et donc $\mathcal{P} \subset \operatorname{Ker} f^2$.

Déterminons maintenant le noyau de f^2. On sait que $\dim \operatorname{Ker} f^2 = 3 - \operatorname{rg} f^2$ et on a $\operatorname{Mat}(f^2, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On en déduit que $\operatorname{rg} f^2 = 1$ et que $\operatorname{Ker} f^2$ est un plan. On a donc $\mathcal{P} = \operatorname{Ker} f^2$ et on voit sur la matrice que $\operatorname{Ker} f^2 = \mathbb{R} f(x) \oplus \mathbb{R} f^2(x)$.

Réciproquement, $\operatorname{Ker} f^2 = \mathbb{R} f(x) \oplus \mathbb{R} f^2(x)$ est bien un plan stable par f et c'est le seul.

7.1.2 Polynôme caractéristique

Ce qu'il faut savoir

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et u un endomorphisme d'un espace vectoriel E de **dimension finie** n.

- La fonction $\chi_M : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ \lambda & \longmapsto & \det(M - \lambda I_n) \end{array} \right.$ est polynomiale. Son polynôme associé, que l'on notera également χ_M, est appelé le **polynôme caractéristique** de M. Il est de degré n et s'écrit
$$\chi_M = (-1)^n X^n + (-1)^{n-1}(\operatorname{tr} M) X^{n-1} + \cdots + \det M.$$
- Les racines dans $\mathbb{K}$ du polynôme caractéristique χ_M sont exactement les valeurs propres de M.

> **Remarque**
> une matrice à coefficients **complexes** admet au moins une valeur propre dans $\mathbb{C}$ et une matrice à coefficients réels **d'ordre impair** admet au moins une valeur propre dans $\mathbb{R}$.

- Lorsque le polynôme χ_M est scindé dans $\mathbb{K}[X]$, avec $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ pour racines, on a $\det M = \prod_{k=1}^{n} \lambda_k$ et $\operatorname{tr} M = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k$.

- On appelle **ordre de multiplicité** d'une valeur propre λ de M, et on note $m(\lambda)$, l'ordre de multiplicité de la racine λ du polynôme χ_M.

Remarque pratique

Si λ est une valeur propre complexe d'une matrice réelle, alors $\overline{\lambda}$ est aussi valeur propre de même ordre de multiplicité que λ.

- Deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique. La réciproque est fausse.
- La fonction $\chi_u : \begin{cases} \mathbb{K} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ \lambda & \longmapsto & \det(u - \lambda \mathrm{Id}_E) \end{cases}$ est polynomiale. Son polynôme associé, que l'on notera également χ_u, est appelé le **polynôme caractéristique** de u.
- Si $\mathcal{B}$ est une base de E et $M = Mat(u, \mathcal{B})$ alors $\chi_M = \chi_u$. Ceci permet d'appliquer les définitions et propriétés précédentes à l'endomorphisme u.
- **Propriétés**
  - Si F est un sous-espace stable de u, alors χ_{u_F} divise χ_u.
  - Pour $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$, on a $1 \leqslant \dim E_\lambda(u) \leqslant m(\lambda)$.

Exercice 7.5

Quel est le spectre (réel) de la matrice réelle $R = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$?

Donner son polynôme caractéristique puis ses valeurs propres complexes.

La matrice R est la matrice d'une rotation d'angle θ dans le plan vectoriel $\mathbb{R}^2$ muni de sa structure canonique d'espace euclidien.

En général, le spectre réel de R est l'ensemble vide car si la matrice possède une valeur propre réelle, alors il existe une droite stable par la rotation d'angle θ, ce qui n'est le cas que si $\theta = \pi\ (2\pi)$ (et alors $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(R) = \{-1\}$) ou si $\theta = 0\ (2\pi)$ (et alors $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(R) = \{1\}$).

Calculons le polynôme caractéristique de R.

$$\chi_R(X) = \begin{vmatrix} \cos\theta - X & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta - X \end{vmatrix} = (\cos\theta - X)^2 + \sin^2\theta$$
$$= (\cos\theta - X + i\sin\theta)(\cos\theta - X - i\sin\theta) = \left(X - e^{i\theta}\right)\left(X - e^{-i\theta}\right).$$

Les valeurs propres complexes de R sont $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$ (elles sont bien sûr conjuguées car χ_R est un polynôme à coefficients réels).

Pour $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$, on retrouve que la matrice R n'a pas de valeur propre réelle. En revanche, elle a deux valeurs propres complexes simples et conjuguées.

Exercice 7.6

Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Exprimer le polynôme caractéristique de A^{-1} en fonction de celui de A.

Puisque A est inversible, toute valeur propre de A est non nulle. Soit $\lambda \in \mathbb{K}^*$,

$$\begin{aligned}\chi_{A^{-1}}(\lambda) &= \det\left(A^{-1} - \lambda I_n\right) = \det\left(-\lambda A^{-1}\left(-\frac{1}{\lambda} I_n + A\right)\right)\\ &= (-\lambda)^n \frac{1}{\det A} \det\left(A - \frac{1}{\lambda} I_n\right) = (-\lambda)^n \frac{1}{\det A} \chi_A(\frac{1}{\lambda}).\end{aligned}$$

Conclusion : $\chi_{A^{-1}}(X) = \dfrac{(-1)^n}{\det A} X^n \chi_A\left(\dfrac{1}{X}\right)$. On peut remarquer que le polynôme $X^n \chi_A\left(\dfrac{1}{X}\right)$ a ses coefficients écrits dans l'ordre inverse de ceux du polynôme $\chi_A(X)$.

Exercice 7.7

Mines-Ponts PC 2007 et MP 2006

Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On se propose de démontrer que AB et BA ont le même polynôme caractéristique.

1) Démontrer le résultat lorsque la matrice A est inversible.

2) On se place maintenant dans le cas général. Soit $\lambda \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Etablir que

$$\begin{pmatrix} \lambda I_n - BA & B \\ 0 & \lambda I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ A & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ A & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda I_n & B \\ 0 & \lambda I_n - AB \end{pmatrix}.$$

En déduire que AB et BA ont le même polynôme caractéristique.

1) Lorsque A est inversible, on a pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned}\chi_{AB}(\lambda) &= \det(AB - \lambda I_n) = \det(A) \det\left(B - \lambda A^{-1}\right)\\ &= \det\left(B - \lambda A^{-1}\right) \det(A) = \det(BA - \lambda I_n) = \chi_{BA}(\lambda).\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $\chi_{AB}(\lambda) = \chi_{BA}(\lambda)$.

2) On vérifie aisément que les deux produits par blocs sont égaux à $\begin{pmatrix} \lambda I_n & B \\ \lambda A & \lambda I_n \end{pmatrix}$.

En prenant les déterminants, on obtient

$$\det(\lambda I_n - BA) \det(\lambda I_n) = \det(\lambda I_n) \det(\lambda I_n - AB),$$

c'est-à-dire, $\lambda^n \chi_{BA}(\lambda) = \lambda^n \chi_{AB}(\lambda)$. On en déduit que AB et BA ont le même polynôme caractéristique.

7.1.3 Endomorphismes et matrices diagonalisables

Ce qu'il faut savoir

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de **dimension finie** et u un endomorphisme de E.

- L'endomorphisme u est dit **diagonalisable** lorsque l'une des propositions équivalentes suivantes est vérifiée :
  - il existe une base de E formée de vecteurs propres de u,
  - on a $E = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} E_\lambda(u)$.
- **Caractérisation des endomorphismes diagonalisables** : l'endomorphisme u est diagonalisable si, et seulement si, il vérifie l'une des propositions équivalentes suivantes :
  - $\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \dim E_\lambda(u) = \dim E$,
  - le polynôme χ_u est scindé sur $\mathbb{K}$ et pour toute valeur propre λ, on a $\dim E_\lambda(u) = m(\lambda)$.
- **Cas particulier important :** si χ_u est scindé sur $\mathbb{K}$ et à racines simples, alors l'endomorphisme u est diagonalisable et chaque sous-espace propre est de dimension 1.

Remarque pratique

pour déterminer $\dim E_\lambda(u)$, on étudie suivant les cas $\mathrm{Ker}\,(u - \lambda \mathrm{Id}_E)$ (système linéaire) ou bien $\mathrm{rg}\,(u - \lambda \mathrm{Id}_E)$ car, d'après le théorème du rang, on a $\dim E_\lambda(u) = \dim E - \mathrm{rg}\,(u - \lambda \mathrm{Id}_E)$.

- **Exemples d'endomorphismes diagonalisables :** les homothéties sont les endomorphismes diagonalisables possédant une seule valeur propre, les projecteurs (resp. les symétries) sont les endomorphismes diagonalisables dont le spectre est inclus dans $\{0, 1\}$ (resp. dans $\{-1, 1\}$).

Remarque

Lorsque u est diagonalisable, on a $\mathrm{tr}\, u = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}\, u} m(\lambda)\lambda$ et $\det u = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}\, u} \lambda^{m(\lambda)}$.

- On dit qu'une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est **diagonalisable** lorsqu'elle est semblable à une matrice diagonale. Cela équivaut à l'existence d'une matrice P inversible, dont les colonnes sont des vecteurs propres de M, telle que $P^{-1}MP$ est diagonale.

Exercice 7.8

Soient a_1 et a_2 deux réels tels que $(a_1, a_2) \neq (0,0)$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & a_1 \\ a_2 & 0 \end{pmatrix}$.

1) Calculer le polynôme caractéristique de A.

2) Montrer que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ si et seulement si $a_1a_2 > 0$.

3) Montrer que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ si et seulement si $a_1a_2 \neq 0$

1) On a, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & a_1 \\ a_2 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - a_1a_2$.

2) • Si $a_1a_2 > 0$, alors le polynôme χ_A a deux racines réelles distinctes. Il est donc scindé à racines simples. Par conséquent A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, admet deux valeurs propres distinctes et chaque sous-espace propre est de dimension 1.

• Si $a_1a_2 < 0$, alors le polynôme χ_A n'admet pas de racine réelle (donc il n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$). Par conséquent, A n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

• Si $a_1a_2 = 0$, alors χ_A admet 0 pour seule racine et cette racine est double. Si A était diagonalisable, elle serait semblable à la matrice diagonale de diagonale nulle, donc la matrice nulle. Ainsi A serait la matrice nulle, ce qui n'est pas le cas. Par conséquent, A n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Conclusion : la matrice A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ si et seulement si $a_1a_2 > 0$.

3) • Si $a_1a_2 \neq 0$, alors le polynôme χ_A a deux racines distinctes (réelles lorsque $a_1a_2 > 0$, complexes conjuguées lorsque $a_1a_2 < 0$). Il est donc scindé à racines simples. Par conséquent A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$, admet deux valeurs propres distinctes et chaque sous-espace propre est de dimension 1.

• Si $a_1a_2 = 0$, alors le raisonnement de la question précédente est encore valable.

Conclusion : la matrice A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ si et seulement si $a_1a_2 \neq 0$.

Exercice 7.9

TPE PC 2006

Déterminer $a \in \mathbb{R}$ pour que 2 soit valeur propre de $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ a & 1 & 1 \\ 0 & 1+a & 3 \end{pmatrix}$.

Montrer alors que A est diagonalisable et déterminer ses éléments propres.

• On vérifie facilement que $\chi_A = X^3 - 5X^2 + 6X - 2 - 2a$. Le réel 2 est valeur propre de A si et seulement si $\chi_A(2) = 0$, c'est-à-dire $a = -1$. Dans ce cas, on a $\chi_A = (X-2)X(X-3)$.

- Déterminons les sous-espaces propres de A.

  On cherche l'espace propre $E_0(A)$. Le vecteur $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ est dans le sous-espace propre $E_0(A)$ si, et seulement si, il vérifie $AX = 0\,X$. Or

$$AX = 0 \iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & & & = & 0 \\ -x & + & y & + & z & = & 0 \\ & & & & 3z & = & 0 \end{array} \right. \iff x = y \text{ et } z = 0.$$

  On en déduit que $E_0(A) = \mathrm{Vect}(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix})$.

  On vérifie de la même façon que $E_2(A) = \mathrm{Ker}(A - 2I_3) = \mathrm{Vect}(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix})$ et $E_3(A) = \mathrm{Ker}(A - 3I_3) = \mathrm{Vect}(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix})$.

- On note P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à la base formée par les vecteurs propres de A. On a alors $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ et donc $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Remarque

Il n'est pas nécessaire d'effectuer les calculs pour $P^{-1}AP$. En effet, cette matrice est la matrice de l'endomorphisme canoniquement associé à A dans la nouvelle base formée des vecteurs propres. Les valeurs propres apparaissent sur la diagonale dans le même ordre que les vecteurs propres dans la matrice de passage P.

Exercice 7.10

TPE MP 2007

Soient n dans $\mathbb{N}^*$, $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et (a, b) dans $\mathbb{R}^2$. Soit u dans $\mathcal{L}(E)$ qui, à toute matrice M, associe $u(M) = aM + b\,{}^tM$.

1) Montrer que u est diagonalisable.

2) Déterminer $\mathrm{tr}(u)$ et $\det(u)$.

1) Pour S dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, on a $u(S) = (a+b)S$. Pour A dans $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, on a $u(A) = (a-b)A$. Il en résulte $a+b$ et $a-b$ sont des valeurs propres de u, que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est inclus dans le sous-espace propre associé à la valeur propre $a+b$ de u et que $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ est inclus dans la sous-espace propre associé à la valeur propre $a-b$. Comme de plus $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, on peut trouver une base de E formée de vecteurs propres et l'endomorphisme u est donc diagonalisable.

2) La trace de u est donnée par

$$\operatorname{tr}(u) = (a+b)\dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{R}))+(a-b)\dim(\mathcal{A}_n(\mathbb{R})) = \frac{n(n+1)}{2}(a+b)+\frac{n(n-1)}{2}(a-b).$$

Le déterminant de u est donné par

$$\det(u) = (a+b)^{\dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{R}))}(a-b)^{\dim(\mathcal{A}_n(\mathbb{R}))} = (a+b)^{\frac{n(n+1)}{2}}(a-b)^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

Exercice 7.11

CCP PSI 2006

Soit J_n la matrice réelle d'ordre n, où $n \geqslant 2$, dont tous les coefficients sont égaux à 1. Calculer le rang, le polynôme caractéristique de A. Montrer que A est diagonalisable et déterminer ses éléments propres.

- Il est immédiat que $\operatorname{rg} A = 1$.
- Puisque $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(A - 0I_n) = 1$, le réel 0 est valeur propre de A et, par le théorème du rang, $\dim E_0(A) = n-1$. Il en résulte que 0 est racine d'ordre de multiplicité au moins $n-1$ de χ_A. Le polynôme χ_A s'écrit donc sous la forme $\chi_A = (-1)^n X^{n-1}(X-a) = (-1)^n X^n + (-1)^{n-1} a X^{n-1}$ où a est un nombre réel. L'expression générale du polynôme caractéristique donne $a = \operatorname{tr} A = n$. En conclusion $\chi_A = (-1)^n X^{n-1}(X-n)$.
- Le polynôme caractéristique de A est scindé et possède deux racines distinctes 0 et n, d'ordre de multiplicité respectif $n-1$ et 1. La question précédente donne $\dim E_0(A) = n-1$. Comme la racine n est simple, on a $\dim E_n(A) = 1$. Le polynôme caractéristique est scindé et, pour chaque valeur propre, la dimension du sous-espace propre est égale à l'ordre de multiplicité de la valeur propre. Par conséquent A est diagonalisable.
- Déterminons les sous-espaces propres de A.
  Pour déterminer $E_0(A)$, on résout le système $AX = 0$ où $X = {}^t(x_1, \ldots, x_n)$. Il équivaut à $x_1 + \cdots + x_n = 0$. On a alors

$$E_0(A) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right).$$

Pour déterminer $E_0(A)$, on résout le système $AX = nX$. Il est équivalent à

$$x_1 + \cdots + x_n = nx_1 = nx_2 = \ldots = nx_n.$$

On obtient alors

$$E_n(A) = \mathrm{Vect}(\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}).$$

L'exercice suivant est un classique qu'on trouve chaque année dans plusieurs concours.

Exercice 7.12

Plusieurs concours et plusieurs années

Donner les valeurs propres et les sous-espaces propres de la matrice réelle M dont les éléments diagonaux valent a et les autres valent b. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que M soit inversible.

Dans le cas où $b = 0$, la matrice est diagonale. On suppose désormais que $b \neq 0$.

On pourrait calculer le polynôme caractéristique de la matrice M (on obtient $\chi_M = (-1)^n(X - (a + (n-1)b)(X - (a - b))^{n-1})$, voir exercice 6.7, page 161) et déterminer ensuite les éléments propres de M.

On propose ici une autre méthode en remarquant que M s'écrit $M = (a-b)I_n + bJ_n$ où $J_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est la matrice de l'exercice précédent.

La matrice J_n est diagonalisable sur $\mathbb{R}$. Il existe donc $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}J_nP$ est la matrice diagonale $D = \mathrm{diag}(\underbrace{0, \ldots, 0}_{n-1 \text{ fois}}, n)$. On obtient alors

$$\begin{aligned} P^{-1}MP &= (a-b)P^{-1}I_nP + bP^{-1}J_nP = (a-b)I_n + bD \\ &= \mathrm{diag}(\underbrace{a-b, \ldots, a-b}_{n-1 \text{ fois}}, a + (n-1)b). \end{aligned}$$

Ainsi, M est diagonalisable dans la même base que J_n. Plus précisément, les deux valeurs propres (distinctes car $b \neq 0$) sont $a - b$ et $a + (n-1)b$, et les sous-espaces propres sont $E_{a-b}(M) = E_0(J_n)$, hyperplan (voir exercice précédent) et

$$E_{a+(n-1)b}(M) = \mathrm{Vect}\left({}^t(1, 1, \ldots, 1)\right).$$

La matrice M est inversible si et seulement si $0 \notin \mathrm{Sp}(M)$ c'est-à-dire $a \neq b$ et $a \neq (1-n)b$. On peut retrouver cette condition par un calcul de déterminant (voir exercice 6.7, page 161).

Exercice 7.13

Soit $n \in \mathbb{N}$ supérieur ou égal à 2, et soit $A = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 & 1-n \\ \vdots & & \vdots & 1-n \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 & 1-n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Montrer que la matrice A n'est pas diagonalisable.

Remarquons que A est de rang 1 (car toutes les lignes sont identiques) donc $E_0(A)$ est de dimension $n-1$. La multiplicité de la valeur propre 0 est donc supérieure ou égale à $n-1$, le polynôme caractéristique χ_A s'écrit alors $\chi_A = (-1)^n X^{n-1}(X-a)$ où a est un nombre réel. L'expression générale du polynôme caractéristique donne $a = \operatorname{tr} A = 0$. En conclusion $\chi_A = (-1)^n X^n$. Si A était diagonalisable, elle serait semblable à la matrice nulle, et donc elle serait égale à la matrice nulle. Ce n'est pas le cas et donc A n'est pas diagonalisable.

Ce qu'il faut retenir

Si le rang d'une matrice est petit, alors son noyau a une grande dimension et 0 est valeur propre de multiplicité au moins égale à $\dim \operatorname{Ker} u$. De nombreux exercices portent sur des matrices de rang 1 ou 2.

En particulier, si M est de rang 1, alors $\chi_M = (-1)^n X^{n-1}(X - \operatorname{tr} M)$. Il en résulte que M est diagonalisable si et seulement si $\operatorname{tr} M \neq 0$. Voir les exercices 7.29 page 190, 7.30 page 191.

7.1.4 Polynômes d'endomorphismes, polynômes annulateurs

Ce qu'il faut savoir

Polynômes d'endomorphismes

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

- À tout polynôme $P = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k X^k \in \mathbb{K}[X]$, on associe l'endomorphisme de E, $P(u) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k u^k$ (avec la convention $u^0 = \mathrm{Id}_E$).
- L'application $\varphi_u : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathcal{L}(E) \\ P & \longmapsto & P(u) \end{array} \right.$ est un morphisme de $\mathbb{K}$-algèbre. On retiendra en particulier :

$$\forall (P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2, (PQ)(u) = P(u) \circ Q(u) = Q(u) \circ P(u).$$

Attention

- Lorsque $P = 1$, on a $P(u) = \mathrm{Id}_E$. Lorsque $P = X$, on a $P(u) = u$.
- Si $x \in E$, alors $P(u)(x)$ a un sens (c'est l'image du vecteur x par l'endomorphisme $P(u)$). En revanche, $P(u(x))$ n'a en général pas de sens.

Remarque

On note $\mathbb{K}[u] = \mathrm{Im}\,\varphi_u$. C'est une sous-algèbre commutative de $\mathcal{L}(E)$.

- **Lien avec la stabilité :** soit $P \in \mathbb{K}[X]$.
  - Les sous-espaces vectoriels $\mathrm{Ker}\,P(u)$ et $\mathrm{Im}\,P(u)$ sont stables par u.
  - Si F est un sous-espace de E stable par u, alors F est stable par $P(u)$ et $P(u)_F = P(u_F)$.
- Si λ est une valeur propre de u et $P \in \mathbb{K}[X]$, alors $P(\lambda)$ est une valeur propre de $P(u)$.

Polynômes annulateurs

- On dit que le polynôme P est un **polynôme annulateur** de u lorsque $P(u)$ est l'endomorphisme nul de E, ce qu'on notera abusivement $P(u) = 0$ dans la suite de ce chapitre.
- Si $P(u) = 0$, alors toute valeur propre de u est un zéro de P ; autrement dit $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(u) \subset P^{-1}(0)$.
- Lorsque E est de dimension finie, tout endomorphisme u de E admet au moins un polynôme annulateur. Ce n'est pas vrai lorsque E n'est pas de dimension finie (voir exercice 7.16 page 178).
- **Résultat important :** si P est un polynôme annulateur de u, alors toute valeur propre de u est racine de P. La réciproque est fausse.

Polynôme minimal

- L'ensemble $\mathcal{I}_u = \{P \in \mathbb{K}[X],\ P(u) = 0\}$ est un idéal de $\mathbb{K}[X]$ appelé idéal annulateur de u.
- En dimension finie, il existe un polynôme non nul de degré minimal π_u (que l'on pourra choisir unitaire) tel que $\mathcal{I}_u = \pi_u \mathbb{K}[X]$. On l'appelle le **polynôme minimal** de u.
  On a $\mathbb{K}[u] = \mathrm{Vect}\left(\mathrm{Id}_E, u, \ldots, u^{\deg(\pi_u)-1}\right)$ donc $\dim \mathbb{K}[u] = \deg(\pi_u)$.
  Les racines de π_u sont **exactement** les valeurs propres de u.

Le théorème de Cayley-Hamilton

Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie. Alors $\chi_u(u) = 0$, ou de manière équivalente : $\pi_u \mid \chi_u$. **Il en résulte que** $\deg(\pi_u) \leqslant \dim E$.

Exercice 7.14

TPE MP 2006

Déterminer le polynôme minimal de la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

On calcule facilement $A^2 = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ puis $A^3 = 4A$. Il en résulte que le polynôme $P = X^3 - 4X = X(X+2)(X-2)$ est un polynôme annulateur de A et qu'aucun des polynômes X, $X-2$, $X+2$, $X(X+2)$, $X(X-2)$ et $(X+2)(X-2)$ n'est annulateur de A. Le polynôme minimal de A est donc $P = X^3 - 4X$.

Exercice 7.15

Mines-Ponts MP 2005, Centrale 2004

Soient $n \geqslant 2$ et A la matrice carrée réelle d'ordre n dont tous les coefficients sont égaux à 1. Donner le polynôme minimal de A.

Nous avons déjà étudié cette matrice dans l'exercice 7.11 page 174.
Cherchons le polynôme minimal π_A. Comme A n'est pas une homothétie, $\deg \pi_A \geqslant 2$. De plus $A^2 = nA$ donc le polynôme $X^2 - nX = X(X-n)$ est annulateur. Il en résulte que $\pi_A = X(X-n)$.

Remarque
Notons que le polynôme minimal de A est scindé à racines simples ce qui, on le verra plus loin, prouve que A est diagonalisable.

Exercice 7.16

Centrale MP 2007

Donner un exemple de couple (E, u) où E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et u un endomorphisme de E n'admettant pas de polynôme annulateur non nul.

Soient $E = \mathbb{R}[X]$ et u l'endomorphisme de E défini par $u(P) = XP$. Par récurrence sur k, on vérifie facilement que $\forall P \in E,\ u^k(P) = X^k P$.

Soit $A = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ un polynôme non nul. On en déduit que

$$\forall P \in E,\ A(u)(P) = \sum_{k=0}^{n} a_k u^k(P) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k P = AP\ .$$

Si A est un polynôme annulateur de u, alors $A(u)(1) = 0$, donc $A = 0$, ce qui est absurde. Il en résulte que u n'admet pas de polynôme annulateur non nul. Ce résultat n'est pas en contradiction avec le théorème du cours car $\mathbb{R}[X]$ est de dimension infinie.

7.1.5 Lemme de décomposition des noyaux.

Ce qu'il faut savoir

Lemme de décomposition des noyaux : Si P et Q sont deux polynômes premiers entre eux alors $\operatorname{Ker}(PQ(u)) = \operatorname{Ker} P(u) \oplus \operatorname{Ker} Q(u)$.

Plus généralement, soit $(P_1, \ldots, P_r) \in \mathbb{K}[X]^r$ une famille de polynômes **deux à deux premiers entre eux**, et soit $P = \prod_{k=1}^{r} P_k$. On a alors

$$\operatorname{Ker} P(u) = \bigoplus_{k=1}^{r} \operatorname{Ker} P_k(u)\ .$$

En particulier, si P est un polynôme annulateur de u alors $E = \bigoplus_{k=1}^{r} \operatorname{Ker} P_k(u)$.

Les sous-espaces $\operatorname{Ker} P_k(u)$ sont stables par u et les projections associées sont des polynômes en u.

Exercice 7.17

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $u \in \mathcal{L}(E)$. On considère deux polynômes P et Q de $\mathbb{K}[X]$ premiers entre eux. Montrer que $\operatorname{rg}(P(u)) + \operatorname{rg}(Q(u)) \geqslant n$ et caractériser le cas d'égalité.

D'après le lemme de décomposition des noyaux, $\operatorname{Ker} PQ(u) = \operatorname{Ker} P(u) \oplus \operatorname{Ker} Q(u)$ et par le théorème du rang

$$\begin{aligned}
\operatorname{rg}(P(u)) + \operatorname{rg}(Q(u)) &= (n - \dim \operatorname{Ker} P(u)) + (n - \dim \operatorname{Ker} Q(u)) \\
&= n + n - \dim \operatorname{Ker} P(u) - \dim \operatorname{Ker} Q(u) \\
&= n + n - \dim \operatorname{Ker} PQ(u) = n + \operatorname{rg}(PQ(u))
\end{aligned}$$

Il en résulte que $\operatorname{rg}(P(u)) + \operatorname{rg}(Q(u)) \geqslant n$ et il y a égalité si et seulement si $\operatorname{rg}(PQ(u)) = 0$, c'est-à-dire si et seulement si PQ est un polynôme annulateur de u.

7.1.6 Endomorphismes trigonalisables

Ce qu'il faut savoir

Soit E un espace vectoriel **de dimension finie égale à n sur $\mathbb{K}$.** Un endomorphisme u de E est dit **trigonalisable** lorsqu'il existe une base dans laquelle la matrice de u est triangulaire.

Remarque

Si dans une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ la matrice de u est triangulaire supérieure, alors dans la base $(e_n, \dots, e_1)$, elle est triangulaire inférieure.
Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite trigonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ lorsqu'il existe une matrice $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que la matrice $P^{-1}MP$ soit triangulaire.

Exercice 7.18

CCP MP 2006

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1) Donner le polynôme caractéristique de A et ses valeurs propres.

2) Déterminer les sous-espaces propres de A. La matrice A est-elle diagonalisable ?

3) Déterminer V_1, V_2, V_3 tels que $AV_1 = V_1$, $AV_2 = 3V_2$ et $AV_3 = V_2 + 3V_3$.

4) Montrer que (V_1, V_2, V_3) est une base de $\mathbb{R}^3$ et donner la matrice de passage P de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à la base (V_1, V_2, V_3).

1) On calcule facilement, par exemple avec la règle de Sarrus, le polynôme caractéristique de A. On obtient $\chi_A = (3 - X)^2(1 - X)$. Les valeurs propres de A sont 1 (valeur propre simple) et 3 (valeur propre double).

2) On a $A - I_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et on en déduit aisément que

$$E_1(A) = \mathrm{Vect}((1, 0, -1)).$$

De même $A - 3I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ d'où on déduit aisément que

$$E_3(A) = \mathrm{Vect}((0, 1, 0)).$$

La somme des dimensions des sous-espaces propres est égale à $2 < 3$, donc A n'est pas diagonalisable.

3) On peut choisir $V_1 = {}^t(1, 0, -1)$ et $V_2 = {}^t(0, 1, 0)$.

Les coordonnées (x, y, z) de V_3 vérifient le système $\begin{cases} 2z & = 0 \\ x + z & = 1 \end{cases}$.

On peut donc prendre $V_3 = {}^t(1, 0, 0)$.

4) Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Le déterminant de P est égal à 1. Il en résulte que (V_1, V_2, V_3) est une base de $\mathbb{R}^3$ et P est la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à la base (V_1, V_2, V_3).

7.1.7 Diagonalisation, trigonalisation et polynôme annulateur

Ce qu'il faut savoir

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$.

- **Critères de diagonalisation**
  - L'endomorphisme u est diagonalisable si et seulement si u admet un polynôme annulateur **non nul, scindé dans** $\mathbb{K}[X]$ **et à racines simples**.
  - L'endomorphisme u est diagonalisable si et seulement si son **polynôme minimal** est **scindé dans** $\mathbb{K}[X]$ **et à racines simples**.
  - Si u est diagonalisable et si F est un sous-espace stable par u, alors $u|_F$ est diagonalisable.
- **Critères de trigonalisation**
  - L'endomorphisme u est trigonalisable si et seulement si u admet un polynôme annulateur **non nul, scindé dans** $\mathbb{K}[X]$**.**
  - L'endomorphisme u est trigonalisable si et seulement si son polynôme minimal est scindé dans $\mathbb{K}[X]$.
  - Si u est trigonalisable et si F est un sous-espace stable par u, alors $u|_F$ est trigonalisable.

Exercice 7.19

CCP MP 2007

Soient n un entier $\geqslant 2$ et $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $f(M) = {}^tM$. Déterminer le polynôme minimal de f. En déduire que f est diagonalisable.

On remarque que $f \circ f = \mathrm{Id}$ et que $f \neq \pm\mathrm{Id}$, donc le polynôme $X^2-1 = (X-1)(X+1)$ est annulateur de f, mais pas les polynômes $X - 1$ et $X + 1$. Il en résulte que $X^2 - 1$ est le polynôme minimal de f. Comme ce polynôme est scindé à racines simples dans $\mathbb{R}[X]$, f est diagonalisable.

Remarque
Voir l'exercice 7.10 pour la recherche des éléments propres de f et une autre preuve du fait que f est diagonalisable.

Exercice 7.20

Navale PSI 2006, Mines-Ponts MP 2006 et 2007

Soient $a \in \mathbb{R}^*$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & a & a^2 \\ a^{-1} & 0 & a \\ a^{-2} & a^{-1} & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que A est diagonalisable et déterminer $\operatorname{Sp} A$ sans calculer χ_A.

Indication de la rédaction : on pourra calculer A^2 et en déduire un polynôme annulateur de A.

On vérifie que $A^2 = A + 2I_3$. Le polynôme $P = X^2 - X - 2 = (X+1)(X-2)$ est annulateur de A, scindé sur $\mathbb{R}$ et à racines simples. La matrice A est donc diagonalisable. De plus $\operatorname{Sp} A \subset \{-1, 2\}$. Si l'une des racines de P n'était pas valeur propre, alors la matrice A serait diagonalisable avec une seule valeur propre et serait donc une matrice scalaire, ce qui n'est pas le cas. Ainsi $\operatorname{Sp} A = \{-1, 2\}$.

Remarque
Bien entendu, le polynôme annulateur donne un critère de diagonalisation et les valeurs propres éventuelles, mais ne donne pas les sous-espaces propres.
Par exemple, pour déterminer les sous-espaces propres de A, on résout le système $AX = \lambda X$. Ainsi, en résolvant le système $AX = -X$, on obtient $E_{-1}(A) = \operatorname{Vect}(V_1, V_2)$ où $V_1 = {}^t(-a, 1, 0)$ et $V_2 = {}^t(-a^2, 0, 1)$. De même, en résolvant le système $AX = 2X$, on obtient $E_2(A) = \operatorname{Vect}(V_3)$ où $V_3 = {}^t(a^2, a, 1)$.

Exercice 7.21

CCP MP 2007

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que $(u + \mathrm{Id}_E)^3 \circ (u - 2\,\mathrm{Id}_E) = 0$ et $(u + \mathrm{Id}_E)^2 \circ (u - 2\,\mathrm{Id}_E) \neq 0$. L'endomorphisme u est-il trigonalisable ? Est-il diagonalisable ?

Le polynôme $(X+1)^3(X-2)$ est un polynôme annulateur de u, et il est scindé dans $\mathbb{R}[X]$. L'endomorphisme u est donc trigonalisable.

On en déduit de plus que $\operatorname{Sp}(u) \subset \{-1, 2\}$.

Si u était diagonalisable, alors $(X+1)(X-2)$ serait un polynôme annulateur de u donc a fortiori le polynôme $(X+1)^2(X-2)$, ce qui n'est pas le cas par hypothèse. L'endomorphisme u n'est donc pas diagonalisable.

7.1.8 Quelques applications de la réduction des matrices

Ce qu'il faut savoir

- **Calcul des puissances de** A : soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$.
  - Lorsqu'on dispose d'un polynôme P annulateur de A, on effectue la division euclidienne de X^n par P. Il existe $(Q, R) \in \mathbb{K}[X]^2$ tels que $X^n = PQ + R$ avec $\deg R \leqslant n - 1$. On en déduit que $A^n = P(A)Q(A) + R(A) = R(A)$. En particulier, en notant p le degré de P, A^n est combinaison linéaire de $(I, A, \ldots, A^{p-1})$. Voir exercice 7.22.
  - Lorsque A est diagonalisable, il existe $P \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$ et D diagonale telles que $P^{-1}AP = D$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $P^{-1}A^nP = D^n$ et donc $A^n = PD^nP^{-1}$.
  - Lorsque A est seulement trigonalisable, on essaie d'écrire $A = PTP^{-1}$ avec $P \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$, T triangulaire supérieure telle que $T = D + N$ avec D diagonale, N triangulaire strictement supérieure et $DN = ND$. Ainsi on peut utiliser la formule du binôme de Newton, et on obtient $T^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k D^{n-k}$, N étant nilpotente, le calcul est alors plus simple (voir exercice 7.23, page 184).
- **Étude des suites récurrences linéaires :** par exemple, si pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a la relation $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$ où $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}$ d'où on déduit les suites (u_n), (v_n) et (w_n).
- **Résolution d'équations matricielles**
  - Rappelons une propriété importante : si f et g sont deux endomorphismes de E tels que $f \circ g = g \circ f$, alors tout sous-espace propre de f est stable par g.
  - Lorsqu'on veut résoudre l'équation $M^2 + M = A$ où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on utilise le fait que la matrice inconnue M commute avec A, donc les espaces propres de A sont stables par M. On effectue alors un changement de bases permettant de se ramener à une équation plus simple. Cette démarche est illustrée dans l'exercice 7.24 page 186.
- **Étude des systèmes différentiels du type** $Y' = AY$ **(ou** $Y' = AY + B(t)$**).** On cherche P inversible telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale ou triangulaire en déterminant les éléments propres de la matrice. En posant $Z = P^{-1}Y$, le système différentiel se réécrit $Z' = (P^{-1}AP)Z + P^{-1}B(t)$ que l'on sait résoudre. On termine en revenant à $Y = PZ$ (remarquons que le calcul de P^{-1} n'est pas

nécessaire si $B(t) = 0$). Nous renvoyons le lecteur au chapitre sur les équations différentielles linéaires dans le tome d'analyse.

Exercice 7.22

CCP MP 2007

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Le polynôme caractéristique de A est $P_A(X) = X^2 - X - 2 = (X+1)(X-2)$ et on sait d'après le théorème de Cayley-Hamilton que c'est un polynôme annulateur de A. Ceci nous permet de calculer A^n lorsque $n \in \mathbb{N}$. En effet la division euclidienne dans $\mathbb{R}[X]$ du polynôme X^n par le polynôme P_A s'écrit $X^n = Q_n P_A + R_n$ où Q_n et R_n sont des polynômes, avec degré $R_n \leqslant 1$. Il existe donc des constantes réelles a_n et b_n telles que : (1) $\quad X^n = Q_n P_A + a_n X + b_n$.

On détermine a_n et b_n et donnant à X successivement les valeurs qui annulent le polynôme P_A. Pour $X = -1$ on obtient $(-1)^n = -a_n + b_n$, et pour $x = 2$ on obtient $2^n = 2a_n + b_n$. On en déduit $a_n = \dfrac{2^n - (-1)^n}{3}$ et $b_n = \dfrac{2^n + 2(-1)^n}{3}$.

En remplaçant alors la variable X par la matrice A dans la relation (1) on obtient $A^n = a_n A + b_n I_2 = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2^{n+1} + (-1)^n & -2^n + (-1)^n \\ -2^{n+1} + 2(-1)^n & 2^n + 2(-1)^n \end{pmatrix}$.

Exercice 7.23

TPE MP 2006

On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1) Montrer que A n'est pas diagonalisable.

2) Montrer que A et B sont semblables.

3) Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

1) On vérifie facilement que $\chi_A = (1 - X)^3$. Déterminons le sous-espace propre associé à la valeur propre 1.
On cherche $U = {}^t(x, y, z)$ tel que $(A - I_3)U = 0$, c'est-à-dire tel que $\begin{cases} -x + y = 0 \\ -y + z = 0 \\ x - 3y + 2z = 0 \end{cases}$.
On en déduit que le sous-espace propre associé à la valeur propre 1 est de dimension 1 et il est dirigé par $V_1 = {}^t(1, 1, 1)$. La matrice A n'est donc pas diagonalisable.

2) La matrice B n'est pas davantage diagonalisable puisqu'elle aussi admet 1 pour unique valeur propre, et qu'elle n'est pas égale à la matrice I_3.
Pour montrer que A est semblable à B, on cherche V_2 et V_3 tels que $AV_2 = V_2 + V_1$ et $AV_3 = V_2 + V_3$ (car les vecteurs de la base canonique vérifient des relations analogues pour la matrice B).
Posons $V_2 = {}^t(x, y, z)$. Nous obtenons le système $\begin{cases} -x + y = 1 \\ -y + z = 1 \\ x - 3y + 2z = 1 \end{cases}$. On peut donc choisir $V_2 = {}^t(-1, 0, 1)$.
Cherchons enfin $V_3 = {}^t(x, y, z)$ tel que $AV_3 = V_2 + V_3$. Par la même méthode on voit qu'on peut choisir $V_3 = {}^t(1, 0, 0)$.
Soit P la matrice de passage de la famille (V_1, V_2, V_3) dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On a par définition $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. On en déduit que $\det(P) = 1$, donc P est inversible et (V_1, V_2, V_3) est une base de $\mathbb{R}^3$. Si f est l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice A, on a $f(V_1) = V_1$, $f(V_2) = V_1 + V_2$ et $f(V_3) = V_2 + V_3$. Il en résulte que B est la matrice de f dans la base (V_1, V_2, V_3), donc les matrices A et B sont semblables.

3) D'après ce qui précède, on a $P^{-1}AP = B$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PB^nP^{-1}$. Calculons B^n.
On décompose B sous la forme $B = I + J$, avec $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, on a $J^3 = 0$.
La matrice J vérifie $J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $J^3 = 0$. Comme elle commute avec la matrice I, on peut utiliser la formule du binôme de Newton, et on a $(I + J)^n = I + nJ + \binom{n}{2} J^2$. On en déduit, après calculs, $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, puis

$$A^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(n-1)(n-2) & -n(n-2) & \frac{1}{2}n(n-1) \\ \frac{1}{2}n(n-1) & (1-n)(1+n) & \frac{1}{2}n(n+1) \\ \frac{1}{2}n(n+1) & -n(n+2) & \frac{1}{2}(n+1)(n+2) \end{pmatrix}.$$

Exercice 7.24

TPE MP 2006

On se propose de résoudre dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'équation (1) : $X^2 + X = A$, avec $A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1) Déterminer une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que $A = PDP^{-1}$.

2) Déterminer les matrices $Y \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $Y^2 + Y = D$.

Indication de la rédaction : on pourra commencer par montrer qu'une matrice Y vérifiant $Y^2 + Y = D$ commute avec la matrice D, et en déduire que c'est une matrice diagonale.

3) Résoudre alors l'équation (1).

1) La matrice A est triangulaire et admet 6, 2 et 0 pour valeurs propres (simples). Elle est donc diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On obtient sans calcul le sous-espace propre $E_6(A)$: c'est la droite vectorielle engendrée par $u = (1, 0, 0)$. On obtient de même le sous-espace propre $E_2(A)$: c'est la droite vectorielle engendrée par $v = (0, 1, 0)$. Le sous-espace propre $E_0(A)$ est le noyau de A : c'est la droite vectorielle engendrée par $w = (0, 1, 1)$. On a donc $A = PDP^{-1}$, avec $D = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2) Commençons par résoudre l'équation (2) : $Y^2 + Y = D$. Une solution Y de cette équation commute avec D puisque $DY = (Y^2 + Y)Y = Y(Y^2 + Y) = YD$. Si on désigne par y (resp. d) l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice, dans la base (u, v, w), est égale à Y (resp. D), alors les endomorphismes y et d commutent. Il en résulte que les sous-espace propres de d sont stables par y. Il existe donc des réels a, b et c tels que $y(u) = au$, $y(v) = bv$ et $y(w) = cw$, et on a donc $Y = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$.

On en déduit que $a^2 + a = 6$, $b^2 + b = 2$ et $c^2 + c = 0$ et il en résulte que l'ensemble $\mathcal{Y}$ des solutions de (2) est formé des matrices diagonales de la forme $Y = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ avec $a \in \{-3, 2\}$, $b \in \{-2, 1\}$ et $c \in \{-1, 0\}$.

3) Résolvons alors l'équation $X^2 + X = A$. En multipliant les deux membres par P à gauche et P^{-1} à droite, elle est équivalente à $(PXP^{-1})^2 + (PXP^{-1}) = PAP^{-1}$, c'est-à dire à $PXP^{-1} \in \mathcal{Y}$. Les solutions de (1) sont donc les matrices de la forme $X = P^{-1}YP$, avec $Y \in \mathcal{Y}$. On obtient ainsi les huit matrices de la forme $X = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & b-c \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$, avec $a \in \{-3, 2\}$, $b \in \{-2, 1\}$ et $c \in \{-1, 0\}$.

Exercice 7.25

Mines-Ponts MP 2007

On considère trois suites réelles $(u_n)_{n\geqslant 0}$, $(v_n)_{n\geqslant 0}$ et $(w_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = -u_n + v_n + w_n$, $v_{n+1} = u_n - v_n + w_n$, $w_{n+1} = u_n + v_n - w_n$. Exprimer u_n, v_n et w_n en fonction de n et trouver une condition nécessaire et suffisante sur (u_0, v_0, w_0) pour que ces trois suites convergent.

Posons $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$. Le système peut s'écrire $X_{n+1} = AX_n$ avec $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, d'où $X_n = A^n X_0$. On détermine les éléments propres (voir exercice 7.12 page 175), on trouve que $E_1(A) = \operatorname{Vect}\left(C_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ et $E_{-2}(A) = \operatorname{Vect}\left(C_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, C_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

La famille (C_1, C_2, C_3) est une base de diagonalisation de A. Il existe des nombres a, b et c tels que $X_0 = aC_1 + bC_2 + cC_3$. Il vient $X_n = A^n X_0 = aC_1 + b2^n C_2 + c2^n C_3$. On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = a - 2^n b - 2^n c$, $v_n = a + 2^n b$ et $w_n = a + 2^n c$.

On voit que les trois suites convergent si et seulement si $b = c = 0$. Puisque $u_0 = a - b - c$, $v_0 = a + b$ et $w_0 = a + c$, ces conditions sont équivalentes à $u_0 = v_0 = w_0$.

7.1.9 Utilisation d'un logiciel de calcul formel

Dans certains concours, un logiciel de calcul formel est mis à disposition des candidats. L'exercice suivant se prête bien à l'utilisation de Maple.

Exercice 7.26

Centrale PSI

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 6 & -6 & 5 \\ -4 & -1 & 10 \\ 7 & -6 & 4 \end{pmatrix}$.

1) Déterminer le polynôme caractéristique et le polynôme minimal de A.

2) Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de A. La matrice est-elle diagonalisable ?

3) Déterminer une matrice triangulaire T et une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP = T$.

Nous donnons la solution à l'aide de `Maple`. Nous commençons par charger le module `linalg` qui comporte de nombreuses instructions relatives aux matrices : `with(linalg)`.

Commençons par définir la matrice A :

```
A :=matrix(3,3,[6,-6,5,-4,-1,10,7,-6,4]) ;
```

1) On obtient le polynôme caractéristique et le polynôme minimal à l'aide des instructions `charpoly` et `minpoly` :

$$\texttt{charpoly(A,x)} = x^3 - 9x^2 + 15x + 25.$$
$$\texttt{minpoly(A,x)} = x^3 - 9x^2 + 15x + 25.$$

(Attention `charpoly(A,x)` retourne le déterminant de la matrice $xI_n - A$.)

2) On obtient les valeurs propres à l'aide de l'instruction `eigenvals(A)`. `Maple` retourne : $-1, 5, 5$. La valeur propre -1 est simple tandis que la valeur propre 5 est double.

Les sous-espaces propres sont obtenus à l'aide de la commande `eigenvects(A)`. On obtient

$$[5, 2, ([1, 1, 1])], [-1, 1, [5/2, 15/4, 1])].$$

On retrouve le fait que 5 est valeur propre double. Une base du sous-espace propre associé est formé du seul vecteur $[1, 1, 1]$. Il est donc de dimension 1. La matrice A n'est pas diagonalisable. L'ordre de multiplicité de la valeur propre -1 est égal à 1, et le sous-espace propre est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $[5/2, 12/4, 1]$.

3) On utilise la commande `T :=jordan(A,'P')`.

Elle retourne $T = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$. Avec la commande `P :=evalm(P)` on obtient la matrice de passage $P = \begin{bmatrix} 5/3 & 11 & -2/3 \\ 5/2 & 11 & -5/2 \\ 2/3 & 11 & -2/3 \end{bmatrix}$.

On peut vérifier le résultat à l'aide de la commande `evalm(P&*T&*inverse(P))`. On retrouve bien la matrice A.

7.2 EXERCICES D'ENTRAÎNEMENT

Exercice 7.27

TPE MP 2006

Soient $n \geqslant 2$ et ϕ l'endomorphisme qui à toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ associe $\operatorname{tr}(M)I_n - M$, où I_n désigne la matrice identité.

1) Calculer ϕ^2 et en déduire que ϕ est diagonalisable.

2) Déterminer les valeurs et sous-espaces propres de ϕ.

3) Calculer la trace et le déterminant de ϕ.

4) Calculer le polynôme caractéristique de ϕ.

5) Montrer que ϕ est inversible et déterminer ϕ^{-1}.

1) Pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$,

$$\begin{aligned}\phi^2(M) &= \operatorname{tr}(\phi(M))I_n - \phi(M) = (n-1)\operatorname{tr}(M)\,I_n - (\operatorname{tr}(M)I_n - M)\\ &= (n-2)\,(\operatorname{tr}(M)I_n - M) + (n-1)M = (n-2)\phi(M) + (n-1)M.\end{aligned}$$

Le polynôme $P = X^2 - (n-2)X - (n-1) = (X+1)(X-n+1)$ est scindé à racines simples et c'est un polynôme annulateur de ϕ, donc ϕ est diagonalisable.

2) Pour $n \geqslant 2$, ϕ n'est visiblement pas une homothétie donc ϕ admet pour valeur propre -1 et $n-1$. Remarquons que $M \in E_{-1}(\phi) \Leftrightarrow \operatorname{tr}(M)I_n = 0$ donc $E_{-1}(M) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mid \operatorname{tr}(M) = 0\}$, il s'agit d'un hyperplan (dimension n^2-1). Le second sous-espace propre est donc une droite. On vérifie aisément que $\phi(I_n) = (n-1)I_n$ donc $E_{n-1}(M) = \operatorname{Vect}(I_n)$.

3) La trace de ϕ est égale à la somme des valeurs propres comptées avec leur multiplicité : $\operatorname{tr}\phi = \left(n^2-1\right) \times (-1) + (n-1) = -n(n-1)$.
De même, le déterminant de ϕ est égal au produit des valeurs propres comptées avec leur multiplicité : $\det\phi = (-1)^{n^2-1} \times (n-1) = (-1)^{n-1}(n-1)$ (n^2 a même parité que n).

4) Le polynôme caractéristique est $\chi_\phi(X) = (-1-X)^{n^2-1}(n-1-X)$.

5) ϕ est inversible puisque $\det\phi \neq 0$. On détermine ϕ^{-1} grâce au polynôme annulateur, en effet
$\phi^2 - (n-2)\phi - (n-1)\operatorname{Id} = 0$ donc $\phi - (n-2)\operatorname{Id} - (n-1)\phi^{-1} = 0$.
Il vient $\phi^{-1} = \dfrac{1}{n-1}(\phi - (n-2)\operatorname{Id})$. Pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$,

$$\phi^{-1}(M) = \frac{1}{n-1}\left(\operatorname{tr}(M)I_n - (n-1)M\right).$$

Exercice 7.28

ENSAM PSI 2006

Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ b & c & 2 & 0 \\ d & e & f & 2 \end{pmatrix}$ soit diagonalisable.

Comme A est triangulaire (inférieure), on lit les valeurs propres avec leur multiplicité sur la diagonale : les valeurs propres sont 1 et 2 et elles sont doubles. Pour que la matrice A soit diagonalisable, il faut et il suffit que $\dim E_1(A) = \dim(\mathrm{Ker}(A - I_4)) = 2$ et $\dim E_2(A) = \dim(\mathrm{Ker}(A - 2I_4)) = 2$.

Par le théorème du rang, ceci est équivalent à $\mathrm{rg}(A - I_4) = 2$ et $\mathrm{rg}(A - 2I_4) = 2$.

Comme $A - I_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \\ b & c & 1 & 0 \\ d & e & f & 1 \end{pmatrix}$, son rang est égal à 2 si et seulement si $a = 0$.

De même le rang de $A - 2I_4$ est égal à 2 si et seulement si $f = 0$.
Conclusion : la matrice A est diagonalisable si et seulement si $a = f = 0$.

Exercice 7.29

TPE MP 2006, Centrale MP 2007

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice de rang 1.

1) Montrer que A est annulée par un polynôme de degré inférieur ou égal à deux.

2) En déduire que si $\mathrm{tr}\, A \neq 0$, alors A est diagonalisable. Que dire si $\mathrm{tr}\, A = 0$?

3) **Application :** Montrer que la matrice $A = (i/j)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est diagonalisable et trouver ses éléments propres.

1) On sait qu'il existe deux vecteurs colonnes X et Y non nuls tels que $A = X{}^tY$. Il en résulte que $A^2 = X{}^tYX{}^tY = {}^tYXA = (\mathrm{tr}\, A)A$.

2) Si $\mathrm{tr}\, A \neq 0$, alors $X^2 - (\mathrm{tr}\, A)X$ est un polynôme annulateur de A scindé à racines simples, donc A est diagonalisable.
Si $\mathrm{tr}\, A = 0$, alors $A^2 = 0$ et $A \neq 0$ car elle est de rang 1, donc A n'est pas diagonalisable.

3) On suppose $A = \left(i/j\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$. Toutes les colonnes de A sont proportionnelles à la première (qui est non nulle) donc $\mathrm{rg}\, A = 1$. De plus, $\mathrm{tr}\, A = n \neq 0$ donc A est diagonalisable. Soit $X = {}^t(x_1, \ldots, x_n)$. L'équation $AX = nX$ donne

$\sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{j} = n\frac{x_1}{1} = \ldots = n\frac{x_n}{n}$. On voit ainsi que ${}^t(1, 2, \ldots, n)$ est vecteur propre

de valeur propre n. Enfin $\operatorname{Ker} A = E_0(A)$ est l'hyperplan d'équation $\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{k} = 0$.

Exercice 7.30

Mines-Ponts MP 2007, Centrale PSI 2007

Soient $n \geqslant 3$ et $a_1, \ldots, a_n$ des réels non tous nuls.

On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & a_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & a_{n-1} \\ a_1 & \ldots & a_{n-1} & a_n \end{pmatrix}$.

Déterminer les valeurs propres de A et son polynôme caractéristique. Est-elle diagonalisable ?

Indication de la rédaction : discuter suivant le rang de A pour déterminer un polynôme annulateur de A.

Il y a deux cas à distinguer :

- Lorsque $a_1 = \cdots = a_{n-1} = 0$ et $a_n \neq 0$, la matrice est diagonale et de rang 1. Elle admet deux valeurs propres : 0 d'ordre $n-1$ et a_n d'ordre 1 et le polynôme caractéristique vaut alors $\det(A - XI_n) = (-X)^{n-1}(a_n - X)$.
- Supposons que l'un des réels a_k, où $k \in [\![1, n-1]\!]$, est non nul, notons le a_s. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ représenté par A dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$.
  - Déterminons le rang de f. Pour $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ on a $f(e_k) = a_k e_n$. Les vecteurs $f(e_1), \ldots, f(e_{n-1})$ sont donc colinéaires, et $f(e_s) = a_s e_n$ n'est pas nul, donc e_n appartient à $\operatorname{Im} f$. Par ailleurs $f(e_n) = a_1 e_1 + \cdots + a_s e_s + \cdots + a_n e_n$ n'est pas colinéaire à e_n. Il en résulte que $\operatorname{Im} f$ est de dimension 2 et admet pour base $(e_n, f(e_n))$, donc $\operatorname{Ker} f$ est de dimension $n-2$.
  - Déterminons à présent un polynôme annulateur de f.

    En posant $\sigma = \sum_{k=1}^{n-1} a_k^2$, on a tout d'abord $f^2(e_n) = \sum_{k=1}^{n} a_k f(e_k) = \sigma e_n + a_n f(e_n)$ puis $f^3(e_n) = \sigma f(e_n) + a_n f^2(e_n) = (\sigma + a_n^2) f(e_n) + \sigma a_n e_n$. On en déduit que $f^3(e_n) - a_n f^2(e_n) = \sigma f(e_n)$. D'autre part, pour $k \in \{1, \ldots, n-1\}$, on a $f^2(e_k) = a_k f(e_n)$ et $f^3(e_k) = a_k f^2(e_n) = a_k a_n f(e_n) + \sigma a_k e_n$, et là aussi $f^3(e_k) - a_n f^2(e_k) = \sigma f(e_k)$. Il en résulte que le polynôme $P = X^3 - a_n X^2 - \sigma$ est annulateur et admet pour racines non nulles : $\lambda_1 = \frac{a_n + \sqrt{a_n^2 + 4\sigma}}{2}$ et

$\lambda_2 = \dfrac{a_n - \sqrt{a_n^2 + 4\sigma}}{2}$. Si l'une de ces racines λ n'était pas valeur propre de f, alors A vérifierait la relation $A^2 = \lambda A$. Cette relation implique en particulier que $a_s a_n = \lambda a_s$ donc que $a_n = \lambda$, et que $a_1^2 + \cdots + a_n^2 = \lambda a_n$, donc que $\sigma = 0$, c'est-à-dire $a_1 = \cdots = a_{n-1} = 0$ ce qui n'est pas possible. Les deux racines λ_1 et λ_2 sont donc valeurs propres et nécessairement elles sont d'ordre 1. Alors le polynôme caractéristique de A est $(-1)^n X^{n-2}(X^2 - a_n X - \sigma)$.

Remarques

- On peut calculer le déterminant $D(a_1, \ldots, a_n, \lambda) = \det(A - \lambda I_n)$ par récurrence. En développant ce déterminant on obtient la relation
$$D(a_1, \ldots, a_n, \lambda) = -\lambda D(a_2, \ldots, a_n, \lambda) + (-1)^{n+1} a_1^2 \lambda^{n-2}.$$
- La matrice A étant symétrique réelle, on pouvait conclure d'emblée qu'elle est diagonalisable (voir chapitre sur les espaces euclidiens).

Exercice 7.31

TPE MP 2005

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & a_n \\ \vdots & \ddots & / & \vdots \\ \vdots & a_2 & \ddots & \vdots \\ a_1 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}, \quad (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Étudier si A est diagonalisable.

Indication de la rédaction : Soit $(e_i)_{i \in [\![1\,,n]\!]}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Remarquer que pour $i \in [\![1\,, E\left(\frac{n}{2}\right)]\!]$, les plans $F_i = \mathrm{Vect}(e_i, e_{n+1-i})$ sont stables par A.

Si $n = 2p+1$ est impair, on voit que la droite $\mathrm{Vect}(e_{p+1})$ est stable par A.

Si n est pair, $\mathbb{R}^n = \bigoplus_{i=1}^{E(\frac{n}{2})} F_i$, si n est impair, $\mathbb{R}^n = \bigoplus_{i=1}^{E(\frac{n}{2})} F_i \oplus \mathrm{Vect}(e_{p+1})$ donc A est diagonalisable si et seulement si les endomorphismes induits sur les F_i sont diagonalisables.

Cela revient a étudier le caractère diagonalisable des matrices $\begin{pmatrix} 0 & a_{n+1-i} \\ a_i & 0 \end{pmatrix}$.

L'exercice 7.8 page 172 nous apporte la solution : A est diagonalisable si et seulement si
$$\forall i \leqslant \frac{n}{2}, \quad (a_i a_{n+1-i} > 0 \text{ ou } a_i = a_{n+1-i} = 0).$$

Exercice 7.32

Mines-Ponts MP 2007

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice diagonalisable et $M = \begin{pmatrix} A & I_n \\ I_n & A \end{pmatrix}$. Montrer que M est diagonalisable.

Soient $(X_1, \ldots, X_n)$ une base de vecteurs propres de A dans l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres associées et considérons les vecteurs $Y_i = \begin{pmatrix} X_i \\ X_i \end{pmatrix}$ et $Y_i' = \begin{pmatrix} X_i \\ -X_i \end{pmatrix}$. On a

$$MY_i = \begin{pmatrix} A & I_n \\ I_n & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_i \\ X_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\lambda_i + 1)X_i \\ (\lambda_i + 1)X_i \end{pmatrix} = (\lambda_i + 1)Y_i \ .$$

On voit de même que $MY_i' = (\lambda_i - 1)Y_i'$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. On obtient ainsi une famille de $2n$ vecteurs propres de la matrice M.
Montrons que c'est une famille libre. Soient $a_1, \ldots, a_n$ et $a_1', \ldots a_n'$ des scalaires tels que $a_1 Y_1 + \cdots + a_n Y_n + a_1' Y_1' + \cdots + a_n' Y_n' = 0$. On obtient alors

$$(a_1 + a_1')X_1 + \cdots + (a_n + a_n')X_n = 0 \quad \text{et} \quad (a_1 - a_1')X_1 + \cdots + (a_n - a_n')X_n = 0.$$

Comme la famille $(X_1, \ldots, X_n)$ est libre,on en déduit que $a_i + a_i' = a_i - a_i' = 0$ pour tout i, et donc $a_1 = \cdots = a_n = a_1' = \cdots = a_n' = 0$. La famille $(Y_1, \ldots, Y_n, Y_1', \ldots, Y_n')$ est donc une famille libre dans l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{K})$. C'est donc une base de vecteurs propres de la matrice M qui est donc diagonalisable.

Exercice 7.33

Centrale MP 2007

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et B la transposée de la comatrice. Montrer que tout vecteur propre de A est vecteur propre de B.

On part de la relation $AB = BA = (\det A)I_n$, et on discute suivant le rang de A.

- Si $\operatorname{rg} A = n$, alors A est inversible et $B = (\det A)A^{-1}$. Soit X un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ (cette valeur propre est nécessairement non nulle). On a $AX = \lambda X$, d'où l'on déduit $A^{-1}X = \dfrac{1}{\lambda}X$ et $BX = \dfrac{\det A}{\lambda} X$. Donc X est un vecteur propre de B associé à la valeur propre $\dfrac{\det A}{\lambda}$.
- Si $\operatorname{rg} A \leqslant n - 2$, alors les coefficients de B sont, au signe près, des déterminants d'ordre $n - 1$ extraits de A. Ils sont donc sont nuls, et il en résulte que $B = 0$. Dans ce cas tout vecteur est vecteur propre de B.
- Si $\operatorname{rg} A = n - 1$, alors A n'est pas inversible et $\det A = 0$, donc $AB = BA = 0$. Les vecteurs colonnes $V_1, \ldots, V_n$ de B vérifient donc $AV_i = 0$.

- Soit U un vecteur propre de A associé à la valeur propre 0. Comme l'endomorphisme f de $E = \mathbb{C}^n$ associé canoniquement à A est de rang $n-1$, le noyau de f est une droite vectorielle engendrée par le vecteur ${}^tU = (x_1, \dots, x_n)$. Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, le vecteur ${}^tV_i$ appartient à $\operatorname{Ker} f$, et il existe donc λ_i tel que $V_i = \lambda_i U$. Alors si $\Lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, on a $B = U\Lambda$. En particulier $BU = U\Lambda U$. Mais $\Lambda U = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$, donc $BU = \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) U$ et U est un vecteur propre de B, associé à la valeur propre $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$.
- Soit U un vecteur propre de A associé une valeur propre non nulle λ. On a $AU = \lambda U$, donc $0 = BAU = \lambda BU$, et on en déduit $BU = 0$. Il en résulte que U est un vecteur propre de B associé à la valeur propre 0.

Exercice 7.34

Centrale MP 2007

Soit $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Montrer que M^{-1} est un polynôme en M.

Nous allons donner deux méthodes distinctes.
Première méthode :
Utilisons le polynôme caractéristique $\chi_M = (-1)^n X^n + \alpha_{n-1} X^{n-1} + \cdots + \alpha_1 X + \alpha_0$ de M. On a $\alpha_0 = \det(M) \neq 0$. D'après le théorème de Cayley-Hamilton on a $(-1)^n M^n + \alpha_{n-1} M^{n-1} + \cdots + \alpha_1 M + \alpha_0 I_n = 0$, d'où :

$$M((-1)^n M^{n-1} + \alpha_{n-1} M^{n-2} + \cdots + \alpha_1 I_n) = -\alpha_0 I_n.$$

On en déduit que $M^{-1} = -\dfrac{1}{\alpha_0}\left((-1)^n M^{n-1} + \alpha_{n-1} M^{n-2} + \cdots + \alpha_1 I_n\right)$.
Deuxième méthode :
On considère l'endomorphisme Φ de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ défini pour tout $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ par $\Phi(X) = MX$. Le sous-espace vectoriel $\mathcal{F}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ engendré par $(I_n, M, \dots, M^k, \dots)$ est stable par Φ, et ses éléments sont les polynômes en M. Désignons par Φ_1 l'endomorphisme induit par Φ sur $\mathcal{F}$. Puisque M est inversible, l'endomorphisme Φ_1 est injectif, et puisque $\mathcal{F}$ est un espace vectoriel de dimension finie, il est aussi surjectif. Il existe donc un élément M' de $\mathcal{F}$, c'est-à-dire un polynôme en M, tel que $\Phi_1(M') = MM' = I_n$. On en déduit que $M^{-1} = M'$.

Exercice 7.35

Mines-Ponts MP 2006

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 + A^2 + A = 0$. Montrer que le rang de A est pair.

Le polynôme $P = X^3 + X^2 + X = X(X - j)(X - j^2)$ est scindé et à racines simples dans $\mathbb{C}[X]$, donc A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = \{0, j, j^2\}$.
Si A est la matrice nulle, alors son rang est nul, et il est pair. On suppose dans la suite $A \neq 0$.
Puisque A est réelle, son polynôme caractéristique est nécessairement à coefficients réels. En outre A étant non nulle, j et $\overline{j}$ sont les valeurs propres complexes de A et elles ont le même ordre de multiplicité. Si f est l'endomorphisme de $E = \mathbb{C}^n$ associé canoniquement à A, on a alors $\dim \mathrm{Ker}(f - j\,\mathrm{Id}_E) = \dim \mathrm{Ker}(f - \overline{j}\,\mathrm{Id}_E)$.
Comme A est diagonalisable, on a $\mathbb{C}^n = \mathrm{Ker}\, f \oplus \mathrm{Ker}(f - j\,\mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(f - \overline{j}\,\mathrm{Id}_E)$.
On en déduit du théorème du rang

$$\mathrm{rg}\, A = n - \dim \mathrm{Ker}\, f = \dim \mathrm{Ker}(f - j\,\mathrm{Id}_E) + \dim \mathrm{Ker}(f - \overline{j}\,\mathrm{Id}_E),$$

et donc $\mathrm{rg}\, A = 2 \dim \mathrm{Ker}(f - j\,\mathrm{Id}_E)$. Ainsi, le rang de A est pair.

Exercice 7.36

Mines-Ponts MP 2006

Soit $A \in GL_6(\mathbb{R})$ vérifiant $A^3 - 3A^2 + 2A = 0$ et $\mathrm{tr}(A) = 8$. Déterminer le polynôme caractéristique de A.

Remarquons d'abord que puisque A est inversible, on a aussi $A^2 - 3A + 2I_6 = 0$. Le polynôme $P = X^2 - 3X + 2 = (X - 2)(X - 1)$ est donc un polynôme annulateur de A et comme il est scindé et à racines simples dans $\mathbb{R}[X]$, A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_6(\mathbb{R})$. De plus les valeurs propres de A appartiennent à $\{1, 2\}$. Désignons par a (resp. b) l'ordre de multiplicité de la valeur propre 1 (resp. 2) (avec la convention que $a = 0$ si 1 n'est pas valeur propre, et $b = 0$ si 2 n'est pas valeur propre). On a alors $a + b = 6$ et $a + 2b = \mathrm{tr}(A) = 8$. On en déduit que $b = 2$ et $a = 4$, puis que le polynôme caractéristique de A est $\chi_A(X) = (X - 1)^4(X - 2)^2$.

Exercice 7.37

Mines-Ponts MP 2007

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = A + 6I_n$. Que peut-on dire de $\det A$?

Le polynôme $P = X^3 - X - 6$ est un polynôme annulateur de A et il est scindé et à racine simple dans $\mathbb{C}[X]$:

$$P = (X - 2)(X^2 + 2X + 3) = (X - 2)(X + 1 + i\sqrt{2})(X + 1 - i\sqrt{2}).$$

Il en résulte A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et que les racines complexes du polynôme caractéristique P_A de A appartiennent à $\{-2, -1 + i\sqrt{2}, -1 - i\sqrt{2}\}$. De plus si $r = -1 + i\sqrt{2}$ est racine d'ordre q de P_A, alors $\overline{r} = -1 - i\sqrt{2}$ est aussi racine d'ordre q de P_A. Désignons par p l'ordre de multiplicité de la valeur propre 2 (avec les conventions que $p = 0$ si 2 n'est pas une racine de P_A et que $q = 0$ si r n'est pas racine de P_A). On a alors $\det A = 2^p (r\overline{r})^q = 2^p 3^q$, avec $p + 2q = n$.

On peut se demander si réciproquement, étant donnés deux entiers p et q tels que $p + 2q = n$, il existe une matrice A telle que $A^3 = A + 6I_n$ et $\det A = 2^p 3^q$. Soit A la matrice diagonale par blocs $A = \mathrm{diag}(2I_p, \underbrace{B, \dots, B}_{q \text{ fois}})$ où $B = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Le polynôme caractéristique de B est $P_B = X^2 + 2X + 3$. On a donc $P(B) = 0$ et $P(A) = \mathrm{diag}(P(2)I_p, P(B), \dots, P(B)) = 0$. De plus $\det A = 2^p(\det B)^q = 2^p 3^q$.

7.2.1 Sous-espaces stables

Exercice 7.38

TPE MP 2006

Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1) Quels sont les sous-espaces de $\mathbb{R}^3$ stables par M ?

2) Un sous-espace de $\mathbb{R}^3$ stable par M admet-il toujours un supplémentaire stable par M ?

1) On obtient facilement (par exemple à l'aide de la règle de Sarrus) le polynôme caractéristique de M. On trouve $\chi_M(X) = (X^2 + 1)(1 - X)$. La matrice M admet donc la seule valeur propre réelle 1, et son ordre de multiplicité est égal à 1. On vérifie facilement que le sous-espace propre associé à la valeur propre 1 est la droite vectorielle engendrée par $u = (1, 1, 1)$. Dans la suite nous désignerons par f l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice M.
Déterminons alors les sous-espaces de $\mathbb{R}^3$ stable par f, autres que $\{0\}$ et $\mathbb{R}^3$, c'est-à-dire de dimension 1 ou 2.

- Les droites vectorielles stables par f sont les droites vectorielles engendrées par un vecteur propre de f. La droite vectorielle D_1 engendrée par u est donc la seule droite vectorielle stable.
- Soit P un plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Il peut être défini comme le noyau d'une forme linéaire φ définie sur $\mathbb{R}^3$ par : $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ \varphi(x, y, z) = ax + by + cz$ où a, b et c sont trois réels non tous nuls. L'application $\varphi \circ f$ est une forme linéaire définie sur $\mathbb{R}^3$, et une condition nécessaire et suffisante pour que P soit stable par f, est que le plan $P = \operatorname{Ker} \varphi$ soit inclus dans le noyau de la forme linéaire $\varphi \circ f$. On sait que cela équivaut à l'existence d'un $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi \circ f = \lambda \varphi$. Matriciellement cette condition s'écrit $\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} M = \lambda \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}$, ou encore ${}^tM^t \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} = \lambda^t \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}$. Ainsi λ est une valeur propre de la matrice ${}^tM$ et ${}^t\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé. Comme M et ${}^tM$ ont les mêmes valeurs propres, on a $\lambda = 1$, et on vérifie facilement que le sous-espace propre associé est

engendré par le vecteur $(1, 0, 1)$. On peut donc prendre $(a, b, c) = (1, 0, 1)$, et le plan P_1 d'équation $x + z = 0$ est le seul plan stable par f.

2) Puisque u n'appartient pas à P_1, la droite D_1 et le plan P_1 sont supplémentaires. Donc tout sous-espace de $\mathbb{R}^3$ stable par M admet un supplémentaire stable.

Exercice 7.39

Mines-Ponts MP 2005, Polytechnique MP 2007

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que u est diagonalisable si et seulement si tout sous-espace stable par u admet un supplémentaire stable par u.

- Supposons que u est diagonalisable et soit $\mathcal{B}$ une base de vecteurs propres. Soit F un sous-espace stable par u. Par le théorème de la base incomplète, on peut compléter une base de F à l'aide de vecteurs choisis dans la base $\mathcal{B}$. Le sous-espace vectoriel engendré par ces vecteurs propres est un supplémentaire stable par u.
- Supposons que tout sous-espace stable par u admet un supplémentaire stable par u. L'endomorphisme u admet au moins une valeur propre car son polynôme caractéristique admet au moins une racine complexe. Par conséquent le sous-espace $F = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} E_\lambda(u)$ n'est pas réduit à $\{0\}$ et par définition il contient tous les vecteurs propres de u. Considérons un supplémentaire G de F stable par u. Si $G \neq \{0\}$, l'endomorphisme induit $u|_G$ admet au moins un vecteur propre. Ce vecteur est aussi un vecteur propre de u, ce qui est contradictoire. On a donc $G = \{0\}$ d'où $E = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} E_\lambda(u)$ et donc u est diagonalisable.

Exercice 7.40

Centrale MP 2006

Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel réel de dimension finie $n \geqslant 1$. Montrer qu'il existe une droite ou un plan vectoriel stable.

Si u admet une valeur propre alors un vecteur propre associé engendre une droite stable. Supposons que $\mathrm{Sp}(u) = \varnothing$, alors le polynôme minimal π_u est produit de polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ de degré 2. Il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $X^2 + \alpha X + \beta \mid \pi_u$ avec $\alpha^2 - 4\beta < 0$ et $\mathrm{Ker}(u^2 + \alpha u + \beta\,\mathrm{Id}) \neq \{0\}$ sinon $\dfrac{\pi_u}{X^2 + \alpha X + \beta}$ serait un polynôme annulateur de u.
Soit $x \in \mathrm{Ker}(u^2 + \alpha u + \beta\,\mathrm{Id}) \setminus \{0\}$. On sait que x n'est pas un vecteur propre de u

donc la famille $(x, u(x))$ est libre. On a de plus $u^2(x) = -\alpha u(x) - \beta x$ d'où on déduit aisément que le plan vectoriel $\mathrm{Vect}(x, u(x))$ est stable par u.

Exercice 7.41

Mines-Ponts MP 2007

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et $\mathcal{R}$ une partie de $\mathcal{L}(E)$ telle que les seuls sous-espaces vectoriels stables par tous les éléments de $\mathcal{R}$ sont E et $\{0\}$.

1) Soit f un élément de $\mathcal{L}(E)$. Montrer que si f commute avec tous les éléments de $\mathcal{R}$, alors f est une homothétie.

2) Ce résultat subsiste-t-il si E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ?

1) Comme le corps de base est $\mathbb{C}$, l'endomorphisme f a au moins une valeur propre λ. Désignons par F le sous-espace propre de f associé. Comme chaque endomorphisme $r \in \mathcal{R}$ commute avec f, le sous-espace F est stable par tous les endomorphismes $r \in \mathcal{R}$. Comme $F \neq \{0\}$, il résulte de l'hypothèse que $F = E$. L'endomorphisme f est donc l'homothétie de rapport λ.

2) Donnons un contre-exemple dans le cas d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Soient E un espace vectoriel euclidien de dimension 2 et $\mathcal{R}$ l'ensemble des rotations de E. La partie $\mathcal{R}$ vérifie les conditions de l'énoncé : soit en effet $F \neq \{0\}$ un sous-espace vectoriel stable par toutes les rotations $r \in \mathcal{R}$, et soit x_0 un vecteur non nul de F. Pour tout vecteur x non nul de E, il existe une rotation r telle que $x = \dfrac{\|x\|}{\|x_0\|} r(x_0)$.
On a donc $F = E$.
Si f une rotation distincte de Id_E et de $-\mathrm{Id}_E$, f n'est pas une homothétie, bien qu'elle commute avec tous les éléments de $\mathcal{R}$.

7.2.2 Endomorphismes cycliques et matrices compagnons

Exercice 7.42

Matrice compagnon, Centrale PSI 2006

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. On considère l'endomorphisme f de E défini par

$$\forall i \in [\![1\,, n-1]\!],\ f(e_i) = e_{i+1} \text{ et } f(e_n) = \sum_{k=1}^{n} a_k e_k\ .$$

1) Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.

2) Calculer $f^n(e_1)$ et en déduire un polynôme annulateur de f.

3) Déterminer le polynôme minimal de f et le polynôme caractéristique caractéristique de f.

4) A quelle condition f est-il diagonalisable ?

1) La matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est $M_P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & a_1 \\ 1 & \ddots & & & \vdots & a_2 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & \ddots & 1 & 0 & a_{n-1} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & a_n \end{pmatrix}$.

2) On a d'une part $f^n(e_1) = f(e_n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k e_k = \sum_{k=1}^{n} a_k f^{k-1}(e_1)$, et, pour $k \in [\![0\,, n-1]\!]$, on a d'autre part $f^k(e_1) = e_{k+1}$.
Considérons le polynôme $P = X^n - a_n X^{n-1} - \cdots - a_2 X - a_1$. La relation précédente s'écrit $P(f)(e_1) = 0$. Pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$ on a $f^k \circ P(f) = P(f) \circ f^k$, et on a donc $f^k \circ P(f)(e_1) = P(f)(e_{1+k}) = 0$. L'endomorphisme $P(f)$ est donc l'endomorphisme nul, et P est un polynôme annulateur de f. Le polynôme minimal π_f de f est donc un diviseur du polynôme P.

3) Soit d le degré du polynôme π_f, et supposons $d < n$. On peut alors écrire $\pi_f = X^d + b_{d-1}X^{d-1} + \cdots + b_1 X + b_0$ et on a

$$f^d(e_1)+b_{d-1}f^{d-1}(e_1)+\cdots+b_1 f(e_1)+b_0 e_1 = e_{d+1}+b_{d-1}e_d+\cdots+b_1 e_2+b_0 e_1 = 0,$$

ce qui contredit le fait que $\mathcal{B}$ est une famille libre. On a donc $d = n$ et puisque π_f divise P, on a $P = \pi_f$.
Le polynôme minimal π_f est aussi un diviseur du polynôme caractéristique χ_f de f. Comme ils sont tout deux de degré n, on a $\chi_f = (-1)^n P$.

4) Soit λ une valeur propre de f, c'est-à-dire une racine de P. Comme les $n-1$ premières colonnes de la matrice $M_P - \lambda I_n$ sont linéairement indépendantes, le rang de $M_P - \lambda I_n$ supérieur ou égal à $n-1$. Il est donc égal à $n-1$ et les sous-espaces propres sont des droites vectorielles. La matrice M_P est diagonalisable si et seulement si la somme de ses sous-espaces propres (qui, ici, sont des droites) est l'espace tout entier donc si et seulement si P possède n racines distinctes.

Remarque

La matrice M_P est appelée la **matrice compagnon** du polynôme P.

Exercice 7.43

Matrices circulantes, Centrale MP 2006

Soient $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_n \\ \alpha_n & \alpha_1 & \ldots & \alpha_{n-1} \\ \alpha_{n-1} & \alpha_n & \ldots & \alpha_{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_2 & \alpha_3 & \ldots & \alpha_1 \end{pmatrix}$

deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1) Expliciter J^k pour $1 \leqslant k \leqslant n-1$ et J^n.
Indication de la rédaction : on pourra calculer Je_p pour $p \in [\![1, n]\!]$ où $(e_1, \ldots, e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

2) Montrer que la matrice J est diagonalisable et déterminer une base $\mathcal{B}$ de vecteurs propres de la matrice J.

3) Montrer que M est diagonalisable dans $\mathcal{B}$.

4) *Question de la rédaction :* en déduire $\det(A)$.

1) Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$. On remarque que $Je_p = e_{p-1}$ pour $p \in [\![2, n]\!]$ et $Je_1 = e_n$. Ce phénomène cyclique permet de calculer $J^k e_p$ avec $k \in [\![1, n-1]\!]$ et $p \in [\![1, n]\!]$.
Si $p > k$, $J^k e_p = e_{p-k}$ et si $p \leqslant k$, $J^k e_p = J^{k-(p-1)} e_1 = J^{k-p} e_n = e_{n-k+p}$ d'où l'allure des matrices J^k pour $1 \leqslant k \leqslant n-1$: $J^k = \begin{pmatrix} 0 & I_{n-k} \\ I_k & 0 \end{pmatrix}$ et $J^n = I_n$.

2) Le polynôme $X^n - 1$ est un polynôme annulateur de la matrice J et il est scindé à racines simples dans $\mathbb{C}[X]$ (ses racines sont les racines n-ième de l'unité). La matrice J est donc diagonalisable et on a $\mathrm{Sp}(J) \subset \{\omega^k, k \in [\![0, n-1]\!]\}$ avec $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$.
Soit $i \in [\![1, n]\!]$.
Cherchons à résoudre le système $JX = \omega^i X$ avec $X = {}^t(x_1, \ldots, x_n)$. On obtient

$$\begin{cases} x_2 = \omega^i x_1 \\ x_3 = \omega^i x_2 \\ \quad\vdots \\ x_1 = \omega^i x_n \end{cases}$$

Les solutions sont de la forme ${}^t(x_1, \ldots, x_n) = a\,{}^t(1, \omega^i, \ldots, \omega^{(n-1)i})$ où a est une constante complexe arbitraire. Ainsi ω^i est une valeur propre de J et le sous-espace propre associé est la droite vectorielle engendrée par $W_i = {}^t(1, \omega^i, \ldots, \omega^{(n-1)i})$. Une base de vecteur propre est donc $\mathcal{B} = (W_1, \ldots, W_n)$.
La matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}$ est la matrice $Q = (\omega^{j(i-1)})_{1 \leqslant i, j \leqslant n}$. C'est une matrice de Vandermonde.

3) On a $M = \alpha_1 I_n + \alpha_2 J + \cdots + \alpha_n J^{n-1} = P(J)$ avec $P = \alpha_1 + \alpha_2 X + \cdots + \alpha_n X^{n-1}$. Comme J est diagonalisable, M l'est également, au moyen de la même matrice de passage.

4) Le déterminant de M est le produit des valeurs propres donc $\det M = \prod_{k=0}^{n-1} P(e^{i\frac{2\pi}{n}k})$.

Exercice 7.44

Centrale MP 2006

Soit f un endomorphisme diagonalisable d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension n. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

(1) il existe $x \in E$ tel que $(x, f(x), \ldots, f^{n-1}(x))$ engendre E.

(2) f a toutes ses valeurs propres simples.

(3) $(\mathrm{Id}_E, f, \ldots, f^{n-1})$ est libre.

(1)⇒(3). Si $(\underset{E}{\mathrm{Id}}, f, \ldots, f^{n-1})$ est liée alors $(x, f(x), \ldots, f^{n-1}(x))$ aussi ce qui est contradictoire.

(3)⇒(2). Si f n'a pas toutes ses valeurs propres simples alors $\pi_f = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} (X - \lambda)$ est de degré strictement inférieur à n et on en déduit aisément que la famille $(\underset{E}{\mathrm{Id}}, f, \ldots, f^{n-1})$ est liée, ce qui contredit l'hypothèse.

(2)⇒(1). Soit $(x_k)_{k \in [\![1\ ,n]\!]}$ une base de vecteurs propres et soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres associées. Posons $x = \sum_{k=1}^{n} x_k$. La matrice associée à la famille de vecteurs $(x, f(x), \ldots, f^{n-1}(x))$ dans la base $(x_k)_{k \in [\![1,n]\!]}$ est la matrice de Vandermonde $V = (\lambda_i^{j-1})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$. Comme les (λ_i) sont distinctes la matrice V est inversible et $(x, f(x), \ldots, f^{n-1}(x))$ est libre. Comme c'est une famille de n vecteurs, c'est une base de E.

7.2.3 Commutant d'un endomorphisme

Exercice 7.45

Mines-Ponts MP 2005

Montrer que deux endomorphismes diagonalisables d'un espaces vectoriel de dimension finie admettent une base commune de vecteurs propres si et seulement s'ils commutent. Généraliser.

Si deux endomorphismes u et v admettent une base commune de vecteurs propres $\mathcal{B}$, alors les matrices de u et de v dans la base $\mathcal{B}$ sont diagonales, et elles commutent de manière évidente.Donc les endomorphismes u et v commutent.
Supposons réciproquement que u et v commutent et sont diagonalisables.
Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ les valeurs propres distinctes de u, et soient $E_1, \ldots, E_p$ les sous-espace propres associés. Chaque sous-espace E_i est stable par v, et l'endomorphisme v_i induit par v sur E_i est un endomorphisme diagonalisable. On peut donc trouver une base $\mathcal{B}_i$ de E_i formée de vecteurs propres de v_i, donc de v. Notons que les vecteurs de la base $\mathcal{B}_i$ sont aussi des vecteurs propres de u par définition. Comme E est somme directe des sous-espaces E_i, le système $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_p)$ obtenu en regroupant les vecteurs des bases $\mathcal{B}_i$ est une base de E, et c'est une base commune de vecteurs propres pour u et v.

Montrons plus généralement que si $u_1, \ldots, u_q$ sont q endomorphismes diagonalisables qui commutent deux à deux, alors il existe une base de vecteurs propres commune à tous ces endomorphismes. On raisonne par récurrence sur q.

La propriété est vérifiée pour $q = 1$ et $q = 2$. Supposons la vérifié à l'ordre q, et soit u_{q+1} un endomorphisme diagonalisable qui commute avec $u_1, \ldots, u_q$.
Soient E_1,..., E_p les sous-espaces propres de u_{q+1}. Ils sont stables par $u_1, \ldots u_q$ et les endomorphismes induits par $u_1, \ldots, u_q$ sur chaque sous-espace E_i commutent et sont diagonalisables. Grâce à l'hypothèse de récurrence on peut trouver une base $\mathcal{B}_i$ de E_i formée de vecteurs propres de $u_1, \ldots, u_q$. Comme précédemment, la base $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_p)$ est une base commune de vecteurs propres pour $u_1, \ldots, u_q, u_{q+1}$. La propriété est donc vérifiée à l'ordre $q + 1$.

Exercice 7.46

Commutant d'un endomorphisme diagonalisable, très classique

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension finie $n \geqslant 2$ et $u \in \mathcal{L}(E)$. On note, $C(u) = \{v \in \mathcal{L}(E) \mid u \circ v = v \circ u\}$.

1) Montrer que $C(u)$ est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$ contenant $\mathbb{K}[u]$.
2) Démontrer que si u admet n valeurs propres distinctes, alors on a l'égalité $C(u) = \mathrm{Vect}(\mathrm{Id}_E, u, \ldots, u^{n-1})$.
3) On suppose que u est diagonalisable. Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ les valeurs propres deux à deux distinctes d'ordres de multiplicité respectifs $m_1, \ldots, m_p$, et de sous-espaces propres respectifs $E_1, \ldots, E_p$.
   Soit $v \in \mathcal{L}(E)$, montrer que $v \in C(u)$ si et seulement si $\forall k \in [\![1 , p]\!]$, E_k est stable par v. En déduire $\dim C(u)$).

1) On a $u \circ \mathrm{Id}_E = \mathrm{Id}_E \circ u = u$ donc $\mathrm{Id}_E \in C(u)$. Si $(v, w) \in C(u)^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, alors $u \circ (\lambda v + \mu w) = \lambda u \circ v + \mu u \circ w = \lambda v \circ u + \mu w \circ u = (\lambda v + \mu w) \circ u$, et donc $(\lambda v + \mu w) \in C(u)$. Enfin si $(v, w) \in C(u)^2$, alors $u \circ v \circ w = v \circ u \circ w = v \circ w \circ u$ et $v \circ w \in C(u)$. Il en résulte que $C(u)$ est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$.

De plus, pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$ on a $u \circ P(u) = P(u) \circ u$ et donc $\mathbb{K}[u] \subset \mathrm{C}(u)$.

2) Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres de u. On a $E = \bigoplus_{k=1}^{n} E_{\lambda_k}(u)$ et les $E_{\lambda_k}(u)$ sont des droites engendrées par des vecteurs propres $(x_k)_{k \in [\![1,n]\!]}$ qui forment une base. Soit $v \in \mathcal{L}(E)$ commutant avec u. Alors les droites $E_{\lambda_k}(u)$ sont stables par v donc les vecteurs $(x_k)_{k \in [\![1,n]\!]}$ sont des vecteurs propres de v également. Ainsi la famille $\mathcal{B} = (x_k)_{k \in [\![1\ ,n]\!]}$ est une base formée de vecteurs propres de u et de v..
Montrons maintenant que v est un polynôme en u (de degré $\leqslant n-1$). Soient $D = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ (resp. $D' = (\lambda'_1, \ldots, \lambda'_n)$) la matrice de u (resp. v) dans la base $\mathcal{B}$. Comme les λ_i sont distincts, il existe un polynôme P de degré inférieur ou égal à $n-1$ tel que $P(\lambda_i) = \lambda'_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ (polynôme d'interpolation de Lagrange). On a alors $D' = P(D)$, et donc $v = P(u)$.

3) Traitons maintenant le cas général. On sait que si $v \in C(u)$, alors les sous-espaces propres E_k sont stables par v. Réciproquement supposons les sous-espaces E_k stables par v et pour tout $k \in [\![1, p]\!]$ soit $\mathcal{B}_k$ une base du sous-espace propre E_k. Soit $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_p)$ la base de E obtenue par juxtaposition. La matrice de v dans la base $\mathcal{B}$ est une matrice diagonale par blocs de la forme (1) $V = (M_1, \ldots, M_k)$ où $M_k \in \mathcal{M}_{m_k}(\mathbb{K})$. La matrice u dans cette même base est de la forme $U = (\lambda_1 I_{m_1}, \ldots, \lambda_p I_{m_k})$. Les matrices U et V commutent, et il en résulte que u et v commutent.
Enfin l'application de l'espace vectoriel $C(u)$ dans l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est un isomorphisme de $C(u)$ sur le sous-espace vectoriel $\mathcal{F}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ formé des matrices de la forme (1). Il en résulte que :

$$\dim(\mathrm{C}(u)) = \dim(\mathcal{F}) = \dim\left(\mathcal{M}_{m_1}(\mathbb{K}) \times \cdots \times \mathcal{M}_{m_p}(\mathbb{K})\right) = \sum_{k=1}^{p} m_k^2.$$

Ce que l'on peut retenir

- Deux endomorphismes diagonalisables commutent si et seulement si ils sont co-diagonalisables, c'est-à-dire admettent une base commune de vecteurs propres.
- Soit u un endomorphisme diagonalisable à valeurs propres simples, et soit v un endomorphisme qui commute avec u. Toute base de vecteurs propres de u est une base de vecteurs propres de v.

7.2.4 Endomorphismes nilpotents

Exercice 7.47

Centrale MP 2006, endomorphismes nilpotents d'indice maximal

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ de dimension finie $n \geqslant 1$ et $u \in \mathcal{L}(E)$. Lorsque, pour un certain $p \in \mathbb{N}$, $u^p = 0$ et $u^{p-1} \neq 0$, on dit que u est nilpotent d'indice p.

1) Soit u un endomorphisme nilpotent. Déterminer le polynôme caractéristique de u. En déduire que $u^n = 0$.

2) Soit u un endomorphisme nilpotent. Montrer que u est d'indice n si et seulement si $\operatorname{rg} u = n - 1$.
Question de la rédaction : montrer dans ce cas qu'il existe une base dans laquelle la matrice de u est égale à $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$.

3) On suppose $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer qu'il existe une et une seule droite de E stable par f si et seulement si, pour un certain $\lambda \in \mathbb{C}$, $f - \lambda \mathrm{Id}_E$ est nilpotent d'indice n.

1) Il existe un entier p tel que $u^p = 0$. Il en résulte que 0 est la seule valeur propre de u. Comme le polynôme caractéristique de u est scindé de degré n, il est égal à $(-1)^n X^n$. En appliquant le théorème de Cayley-Hamilton, on obtient que $u^n = 0$. Notons aussi qu'on a $u^k = 0$ pour tout $k \geqslant p$.

2) Supposons d'abord que l'indice de nilpotence de u soit égal à n. On a alors $u^{n-1} \neq 0$. Soit x un vecteur de E tel que $u^{n-1}(x) \neq 0$. Démontrons que le famille $\mathcal{B} = (x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$ est une base de E. Comme c'est une famille de n vecteurs dans un espace de dimension n, il suffit de montrer que c'est une famille libre. Soient pour cela des scalaires $a_0, \dots, a_{n-1}$ tels que $y = \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k(x) = 0$. En prenant l'image de ce vecteur par l'endomorphisme u^{n-1} on obtient $a_0 u^{n-1}(x) = 0$, et donc $a_0 = 0$. En prenant ensuite les images de y successivement par $u^{n-2}, \dots, u, \mathrm{Id}_E$ on obtient de même $a_1 = \cdots = a_{n-1} = 0$, ce qui démontre que la famille est libre. La matrice de u dans cette base est précisément la matrice J de l'énoncé, et puisque le rang de J est égal à $n - 1$, on a $\operatorname{rang} u = n - 1$.

Supposons maintenant $\operatorname{rang}(u) = n - 1$. On a alors, par le théorème du rang, $\dim \operatorname{Ker} u = 1$. Soit $i \in [\![1, n-1]\!]$, et posons $m_i = \dim \operatorname{Ker} u^i$. Pour tout vecteur $x \in \operatorname{Ker} u^{i+1}$, on a $u(x) \in \operatorname{Ker} u^i$. La restriction φ_i de u à $\operatorname{Ker} u^{i+1}$ est donc une application linéaire de $\operatorname{Ker} u^{i+1}$ dans $\operatorname{Ker} u^i$ et on a $\operatorname{Ker} \varphi_i = \operatorname{Ker} u^{i+1} \cap \operatorname{Ker} u = \operatorname{Ker} u$. Le théorème du rang montre que $\dim \operatorname{Ker} u^{i+1} = \dim \operatorname{Im} \varphi_i + \dim \operatorname{Ker} \varphi_i \leqslant \dim \operatorname{Ker} u^i + 1$. On a donc $m_{i+1} \leqslant m_i + 1$ et puisque $m_1 = 1$, on en déduit que $m_{n-1} \leqslant n - 1$. L'endomorphisme u^{n-1} est donc non nul et l'indice de u est donc égal à n.

3) Une droite vectorielle est stable par f si et seulement si elle est engendrée par un vecteur propre de f.

Supposons qu'il existe une et une seule droite de E stable par f. Alors f n'a qu'une seule valeur propre. Notons la λ. L'endomorphisme $u = f - \lambda \operatorname{Id}_E$ admet 0 pour unique valeur propre et le théorème de Cayley-Hamilton montre que u est nilpotent. Les vecteurs propres de u sont les vecteurs non nuls de $\operatorname{Ker} u$. Il résulte de l'hypothèse que $\operatorname{Ker} u$ est de dimension 1, et on déduit de la question précédente que $u = f - \lambda \operatorname{Id}_E$ est nilpotent d'indice n.

Réciproquement, si $f - \lambda \operatorname{Id}_E$ est nilpotente d'indice n, alors $\operatorname{Ker} f - \lambda \operatorname{Id}_E$ est la seule droite vectorielle stable par $f - \lambda \operatorname{Id}_E$, et c'est donc aussi la seule droite stable par f.

Exercice 7.48

Polytechnique MP 2005

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Déterminer l'ensemble des polynômes complexes P tels que $P(A)$ est nilpotente ?

La matrice $P(A)$ est nilpotente si et seulement si il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $P^k(A) = 0$, ce qui équivaut à l'existence de $k \in \mathbb{N}$ tel que $\pi_A \mid P^k$.

Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ les valeurs propres (distinctes) de A. On a alors $\pi_A = \prod_{i=1}^{r} (X - \lambda_i)^{\beta_i}$, avec $\beta_i \geqslant 1$ pour tout $i \in [\![1, p]\!]$.

- Supposons que π_A divise P^k. Il existe $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P^k = \pi_A Q$. Soit λ une racine de π_A, alors $P(\lambda)^k = 0$, donc λ est racine de P.
- Supposons que toute racine de π_A soit racine de P. Le polynôme $\prod_{i=1}^{r} (X - \lambda_i)$ divise P, donc en posant $k = \max_{1 \leqslant i \leqslant r} \beta_i$, on en déduit que π_A divise $\prod_{i=1}^{r} (X - \lambda_i)^k$, donc divise P^k.

En conclusion, l'ensemble cherché est l'idéal de $\mathbb{C}[X]$ engendré par $\prod_{i=1}^{r} (X - \lambda_i)$.

Exercice 7.49

Polytechnique MP 2005

Soient E un espace vectoriel de dimension finie et u dans $\mathcal{L}(E)$ tel que $\operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Im} u = E$. Montrer que le projecteur p sur $\operatorname{Ker} u$ parallèlement à $\operatorname{Im} u$ est un polynôme en u.

Nous allons vous guider un peu :

1) Démontrer le résultat lorsque $\pi_u(0) \neq 0$.

2) On suppose désormais que π_u s'écrit $X^k Q$ avec $k \geqslant 1$ et $Q(0) \neq 0$.
Montrer que $\operatorname{Ker} u^k = \operatorname{Ker} u$.

3) Montrer que $\pi_u = XQ$.

4) Conclure.

1) Si $\pi_u(0) \neq 0$, alors $0 \notin \mathrm{Sp}(u)$ donc $\operatorname{Ker} u = \{0\}$ et $\operatorname{Im} u = E$. Donc $p = \mathrm{Id}_E$.

2) D'après le lemme de décomposition des noyaux $E = \operatorname{Ker} u^k \oplus \operatorname{Ker} Q(u)$.
Comme Q s'écrit $Q = \alpha_0 + \alpha_1 X + \cdots$ avec $\alpha_0 \neq 0$, si $x \in \operatorname{Ker} Q(u)$ alors $x = -\dfrac{1}{\alpha_0}(\alpha_1 u(x) + \cdots)$ donc $x \in \operatorname{Im} u$. Ainsi $\operatorname{Ker} Q(u) \subset \operatorname{Im} u$.
D'autre part, on sait que $\operatorname{Ker} u \subset \operatorname{Ker} u^k$ donc, pour des raisons de dimension, $\operatorname{Ker} Q(u) = \operatorname{Im} u$ et $\operatorname{Ker} u^k = \operatorname{Ker} u$.

3) On a $E = \operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Ker} Q(u)$ donc XQ est un polynôme annulateur de u, donc multiple de π_u. Comme $\pi_u = X^k Q$, nécessairement $k = 1$ et $\pi_u = XQ$.

4) Le lemme de décomposition des noyaux appliqué à $X \times Q$ en u (Q et X sont premiers entre eux car $Q(0) \neq 0$) nous dit que le projecteur sur $\operatorname{Ker} u$ parallèlement à $\operatorname{Ker} Q(u) = \operatorname{Im} u$ est un polynôme en u (c'est un résultat du cours : il peut être utile de revoir la démonstration du lemme de décomposition des noyaux).

7.3 EXERCICES D'APPROFONDISSEMENT

Exercice 7.50

Mines-Ponts MP 2006 ☕

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $(A, B) \in \mathbb{R}[X]^2$ où B est un polynôme de degré $n+1$ scindé à racines simples.

Soit Φ l'endomorphisme $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & \Phi(P) \end{array} \right.$ où $\Phi(P)$ est le reste de la division euclidienne de AP par B.

Déterminer les éléments propres de Φ. Existe-t-il une base de $\mathbb{R}[X]$ formée de vecteurs propres ?

L'énoncé admet que Φ est un endomorphisme.
Notons $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}$ les racines (deux à deux distinctes) de B. Soient $(L_i)_{i \in [\![1\,,n+1]\!]}$ les polynômes de Lagrange de $\mathbb{R}_n[X]$ tels $\forall (i,j) \in [\![1, n+1]\!]^2$, $L_i\left(\alpha_j\right) = \delta_{i,j}$.
Pour tout $j \in [\![1\,, n+1]\!]$, posons $R_i = \Phi(L_i) \in \mathbb{R}_n[X]$.
On a alors $A\left(\alpha_j\right) L_i\left(\alpha_j\right) = B\left(\alpha_j\right) Q_i\left(\alpha_j\right) + R_i\left(\alpha_j\right)$,
d'où (puisque $B\left(\alpha_j\right) = 0$), $R_i\left(\alpha_j\right) = A\left(\alpha_j\right)\delta_{i,j}$, ce qui montre (unicité du polynôme interpolateur) que $R_i = A(\alpha_i) L_i$.
Ainsi les L_i sont des vecteurs propres de valeurs propres $A(\alpha_i)$.
Remarquons aussi que $B\mathbb{R}[X] = \operatorname{Ker} \Phi$. Ainsi $B\mathbb{R}[X]$ est le sous-espace propre associé à la valeur propre 0, et une base de ce sous-espace est $(B, XB, X^2B, X^3B, \ldots)$.

Un théorème important du cours nous permet d'affirmer que $\mathbb{R}[X] = B\mathbb{R}[X] \oplus \mathbb{R}_n[X]$. Comme de plus, $\mathbb{R}_n[X] = \mathrm{Vect}(L_1, \ldots, L_n)$,
$\left(L_1, \ldots, L_n, B, XB, X^2B, X^3B \cdots\right)$ est une base de $\mathbb{R}[X]$ formée de vecteurs propre de Φ.

Exercice 7.51

Mines-Ponts MP 2007

Soient A et B deux matrices dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisables.

1) Montrer l'existence de $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\exp(A) = P(A)$.

2) On suppose que $\exp A = \exp B$. Montrer que $A = B$.

Nous renvoyons le lecteur au chapitre « Espaces vectoriels normés » du livre d'Analyse pour la définition et les propriétés de l'exponentielle de matrice. Nous utiliserons ici les résultats suivants : si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors

a) les matrices A et $\exp(A)$ commutent,

b) si λ est une valeur propre de A, et si x est un vecteur propre associé, alors $\exp(A) \cdot x = e^{\lambda} x$,

c) pour toute matrice inversible Q, $\exp(Q^{-1}AQ) = Q^{-1}\exp(A)Q$,

d) si $A = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, alors $\exp(A) = \mathrm{diag}(e^{\lambda_1}, \ldots, e^{\lambda_n})$.

1) Puisque A est diagonalisable, il existe une matrice inversible Q et une matrice diagonale $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ telles que $A = QDQ^{-1}$. Soient $\mu_1, \ldots, \mu_p$ les valeurs propres distinctes de A et soit P un polynôme d'interpolation de Lagrange tel que $P(\mu_j) = e^{\mu_j}$ pour tout $j \in [\![1, p]\!]$. Puisque les λ_i sont les valeurs propres de A, on a aussi $P(\lambda_i) = e^{\lambda_i}$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ et on a donc $P(D) = \exp(D)$. Il en résulte que $\exp(A) = Q\exp(D)Q^{-1} = QP(D)Q^{-1} = P(QDQ^{-1}) = P(A)$.

2) Pour tout $j \in [\![1, p]\!]$ soit E_j le sous-espace propre de A associé à la valeur propre μ_j, et soit m_j sa dimension. Il résulte de la propriété b) que E_j est inclus dans le sous-espace propre E'_j associé à la valeur propre e^{μ_j} de $\exp(A)$. Notons m'_j la dimension de E'_j. On a $m_j \leqslant m'_j$, et $n = \displaystyle\sum_{j=1}^{p} m_j \leqslant \sum_{j=1}^{p} m'_j \leqslant n$. Il en résulte que $m'_j = m_j$, et donc $E'_j = E_j$ pour tout $j \in [\![1, p]\!]$. En d'autres termes, les sous-espaces propres de $\exp(A)$ coïncident avec ceux de A.
Supposons alors que $\exp(B) = \exp(A)$.
Comme B commute avec $\exp(B) = \exp(A)$, les sous-espaces propres de $\exp(A)$, et donc ceux de A, sont stables par l'endomorphisme b canoniquement associé à B. Pour tout j la restriction de b à E_j est diagonalisable, et on peut donc trouver une base de E_j formée de vecteurs propres de B. On en déduit qu'il existe une base commune de vecteurs propres de A et de B, et donc une matrice inversible Q telle que $Q^{-1}AQ = D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ et $Q^{-1}BQ = D' = \mathrm{diag}(\lambda'_1, \ldots, \lambda'_n)$.

La relation $\exp(A) = \exp(B)$ entraîne $\exp(D) = \exp(D')$, et on a donc $e^{\lambda_i} = e^{\lambda'_i}$ pour tout i. On en déduit que $\lambda_i = \lambda'_i$ et donc $D = D'$, puis $A = B$.

Exercice 7.52

Mines-Ponts MP 2007

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall (i,j) \in [\![1\,,n]\!]^2,\ a_{i,j} \in \,]0,\,1[$ et $\forall i \in [\![1\,,n]\!],\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1$.

1) Montrer que $|\det A| \leqslant 1$.

2) Montrer que 1 est valeur propre de A.

3) Soit b une valeur propre complexe de A. Montrer que $|b| \leqslant 1$ et que si $|b| = 1$, alors $b = 1$.

1) Démontrons, par récurrence sur l'entier $n \in \mathbb{N}^*$, que si $B = (b_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est telle que $b_{ij} \in [0,1]$ et $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} b_{ij} \leqslant 1$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, alors $|\det B| \leqslant 1$.

La propriété est évidente si $n = 1$. Supposons $n > 1$, et supposons la propriété démontrée pour les matrices carrées d'ordre $n-1$. Pour tout $j \in [\![1,n]\!]$ désignons par B_j la matrice carrée d'ordre $n-1$ obtenue en supprimant la première ligne et la j-ième colonne de B. On peut appliquer l'hypothèse de récurrence aux matrices B_j, et on obtient :

$$|\det B| = \left|\sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} b_{1j} \det B_j\right| \leqslant \sum_{j=1}^{n} b_{1j} |\det B_j| \leqslant \sum_{j=1}^{n} b_{1j} \leqslant 1.$$

La propriété est donc vérifiée pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

2) Posons $U = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$. Les relations $\forall i \in [\![1\,,n]\!],\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1$ montrent que $AU = U$. Donc le réel 1 est valeur propre de A et U est un vecteur propre associé.

3) Soit $b \in \mathbb{C}$ une valeur propre de A, et soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ un vecteur propre associé. Soit i_0 un indice tel que $|x_{i_0}| \geqslant |x_i|$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$. On a évidemment $x_{i_0} \neq 0$. La relation $AX = bX$ entraîne en particulier $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{i_0 j} x_j = b x_{i_0}$,

d'où on déduit

$$|b| = \left|\sum_{j=1}^{n} a_{i_0 j} \frac{x_j}{x_{i_0}}\right| \leqslant \sum_{j=1}^{n} a_{i_0 j} \left|\frac{x_j}{x_{i_0}}\right| \leqslant \sum_{j=1}^{n} a_{i_0 j} = 1.$$

Si $|b| = 1$, alors les inégalités précédentes sont des égalités, et on a donc $\left|\dfrac{x_j}{x_{i_0}}\right| = 1$ pour tout $j \in [\![1, n]\!]$. Quitte à remplacer X par un vecteur proportionnel, on peut supposer $x_{i_0} = 1$. On a alors $b = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{i_0 j} x_j$ avec $|x_j| = 1$. Soit B le point du plan d'affixe b et pour tout j, M_j le point d'affixe x_j. Les points M_j sont situés sur le cercle de centre O et de rayon 1, et B est le barycentre des points M_j affectés des coefficients strictement positifs $a_{i_0 j}$. Montrons que dans ces conditions on a nécessairement $M_1 = \cdots = M_n = B$:
Soit XOY un nouveau repère orthonormé du plan dans lequel les coordonnées de B sont $(1, 0)$ et pour tout $j \in [\![1, n]\!]$ soit X_j l'ordonnée de M_j. Si l'un des X_j est strictement inférieur à 1, alors $1 = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{i_0 j} X_j < \sum_{i=1}^{n} a_{i_0 j} = 1$, ce qui est absurde.
Il en résulte donc que $b = x_{i_0} = 1$.

Exercice 7.53

Centrale PSI 2007

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$, $f \in \mathcal{L}(E)$ et Φ l'endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$ qui à u associe $f \circ u$.

1) Montrer que Φ et f ont les mêmes polynômes annulateurs. En déduire qu'ils ont le même spectre et que f est diagonalisable si et seulement si Φ est diagonalisable.

2) Exprimer le sous-espace propre de Φ associé à la valeur propre λ en fonction de celui de f.

3) Donner sa dimension en fonction de celle du sous-espace propre de f correspondant.

4) Calculer le polynôme caractéristique de Φ.

1) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On a $\Phi^2(u) = (f \circ f) \circ u = f^2 \circ u$, et une démonstration par récurrence évidente sur l'entier $p \in \mathbb{N}$ montre que $\Phi^p(u) = f^p \circ u$ pour tout $p \in \mathbb{N}$. On en déduit, par linéarité, que pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$, $P(\Phi)(u) = P(f) \circ u$. Il en résulte que $P(\Phi) = 0$ si et seulement si $P(f) = 0$. Les endomorphismes Φ et f ont donc les mêmes polynômes annulateurs, et donc le même polynôme minimal et le même spectre.

L'endomorphisme f est diagonalisable si et seulement si il existe il existe un polynôme P scindé à racine simple tel que $P(f) = 0$. Comme $P(\Phi) = P(f)$ cette condition est réalisée si et seulement si l'endomorphisme Φ est diagonalisable.

2) Montrons que v est un vecteur propre de Φ associé à la valeur propre λ si et seulement si $\operatorname{Im} v \subset \operatorname{Ker}(f - \lambda \operatorname{Id}_E)$.
• Soit v un vecteur propre de Φ associé à la valeur propre λ. Puisque $v \neq 0$, on a $\operatorname{Im} v \neq \{0_E\}$. Soit y un vecteur non nul de $\operatorname{Im} v$. Il existe x non nul dans E tel que $v(x) = y$. On a alors $f(y) = f \circ v(x) = \lambda v(x) = \lambda y$, et donc $(f - \lambda \operatorname{Id}_E)(y) = 0_E$, d'où l'inclusion $\operatorname{Im} v \subset \operatorname{Ker}(f - \lambda \operatorname{Id}_E)$.
• Supposons que $\operatorname{Im} v \subset \operatorname{Ker}(f - \lambda \operatorname{Id}_E)$. Pour tout $x \in E$, on a $v(x) \in \operatorname{Im} v$ et donc $f(v(x)) = \lambda v(x)$. Ainsi $f \circ v = \lambda v$ et v est un vecteur propre de Φ associé à la valeur propre λ.

3) Soit λ une valeur propre de Φ associé à v et soit k la dimension de $\operatorname{Ker}(f - \lambda \operatorname{Id}_E)$. Introduisons une base $\mathcal{B}_\lambda = (e_1, \ldots, e_k)$ de $\operatorname{Ker}(f - \lambda \operatorname{Id}_E)$ et complétons cette base par $n - k$ vecteurs notés $e_{k+1}, \ldots, e_n$ pour obtenir la base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E. Comme $\operatorname{Im} v \subset \operatorname{Ker}(f - \lambda \operatorname{Id}_E)$, pour tout $\ell \in \{0, \ldots, n\}$, on a $v(e_\ell) \in \operatorname{Ker}(f - \lambda \operatorname{Id}_E)$. Il en résulte que v est un vecteur propre de Φ si et seulement si la matrice de v dans la base $\mathcal{B}$ est de la forme $\begin{pmatrix} m_{11} & \ldots & m_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{k1} & \ldots & m_{kn} \\ 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$.
Le sous-espace propre de Φ associé à la valeur propre λ est donc isomorphe à l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{k,n}(\mathbb{R})$. Il est donc de dimension nk.

4) Cherchons le polynôme caractéristique de Φ. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et soit M la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$. On considère la base $\mathcal{B}_{\mathcal{L}(E)} = (u_{11}, \ldots, u_{n1}, u_{12}, \ldots, u_{n2}, \ldots, u_{1n}, \ldots, u_{nn})$, où u_{ij} est l'endomorphisme de E défini sur la base $\mathcal{B}$ par $u_{ij}(e_j) = e_i$ et $u_{ij}(e_k) = 0$ si $k \neq j$. En écrivant la matrice de Φ dans la base $\mathcal{B}_{\mathcal{L}(E)}$ on obtient une matrice $\mathcal{M}$ diagonale par blocs, dont les éléments diagonaux sont formés de n matrices M. On en déduit que $\det(\mathcal{M} - \lambda I_{n^2}) = \det(M - \lambda I_n)^n$.

Exercice 7.54

Mines-Ponts MP 2005, Centrale PC 2006, Polytechnique MP 2005

Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ de dimension finie n et g un endomorphisme de E.

1) Montrer que l'application T définie sur $\mathcal{L}(E)$ par $T(f) = f \circ g - g \circ f$ est un endomorphisme.

2) Montrer que si g est nilpotent, alors T l'est aussi.
Indication de la rédaction : on pourra remarquer que $T = G - D$ avec $G(f) = f \circ g$ et $D(f) = g \circ f$ et que $G \circ D = D \circ G$.

3) La réciproque est-elle vraie ?

4) Montrer que si g est diagonalisable, alors T l'est aussi.
Indication de la rédaction : on pourra à nouveau étudier G et D et montrer qu'ils sont diagonalisables.

1) T est bien une application de $\mathcal{L}(E)$ dans lui-même et elle est linéaire car pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et $(f, h) \in (\mathcal{L}(E))^2$, on a

$$\begin{aligned} T(\lambda f + \mu h) &= (\lambda f + \mu h) \circ g - g \circ (\lambda f + \mu h) \\ &= \lambda(f \circ g - g \circ f) + \mu(fh \circ g - g \circ h) = \lambda T(f) + \mu T(h). \end{aligned}$$

2) Considérons les endomorphismes de $\mathcal{L}(E)$ définis par $G(f) = f \circ g$ et $D(f) = g \circ f$. Remarquons que $T = G - D$, $G \circ D = D \circ G$, $G^p(f) = f \circ g^p$ et $D^p(f) = g^p \circ f$ pour $p \in \mathbb{N}$. Si g est nilpotent avec $g^p = 0$, alors $G^p = 0$ et $D^p = 0$. Comme G et D commutent, $T^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} (-1)^k D^k G^{m-k}$. En choisissant $m = 2p - 1$ (ou plus), on remarque que pour tout $k \in [\![0, m]\!]$, $k \geqslant p$ ou $m - k \geqslant p$ donc $D^k G^{m-k} = 0$, on en déduit que $T^m = 0$ donc T est bien nilpotente.

3) La réciproque est fausse, car si $g = \mathrm{Id}_E$, alors $T = 0$ est nilpotente (au sens large) mais pas g.

4) Si g est diagonalisable, il existe un polynôme P scindé à racines simples tel que $P(g) = 0$.
Remarquons qu'alors $P(G)(f) = f \circ P(g) = 0$, de même pour D. Ainsi G et D sont diagonalisables et comme ils commutent, ils admettent une base commune de vecteurs propres qui est aussi une base de vecteurs propres de T.

Exercice 7.55

Mines-Ponts MP 2006

Montrer que A et B, deux matrices réelles carrées d'ordre n diagonalisables, ayant même spectre et telles que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathrm{tr}(A^k) = \mathrm{tr}(B^k)$ sont semblables.

Notons $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ les valeurs propres distinctes de A (et B) et $m_1, \ldots, m_p$ et $m'_1, \ldots, m'_p$ les ordres de multiplicités respectivement de A et de B. Pour montrer que A et B sont semblables, nous allons démontrer que $m_i = m'_i$ pour tout $i \in [\![1, p]\!]$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, la relation $\operatorname{tr}(A^k) = \operatorname{tr}(B^k)$ s'écrit $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} m_i \lambda_i^k = \sum_{i=1}^{p} m'_i \lambda_i^k$.

En faisant varier k de 0 à $p-1$, on obtient p égalités qui peuvent se traduire matriciellement par

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_p \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_1^{p-1} & \lambda_2^{p-1} & \cdots & \lambda_p^{p-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_p \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_1^{p-1} & \lambda_2^{p-1} & \cdots & \lambda_p^{p-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m'_1 \\ m'_2 \\ \vdots \\ m'_p \end{pmatrix}$$

La matrice $p \times p$ est une matrice de Vandermonde donc est inversible, il en découle que pour tout $k \in [\![1\,,\,p]\!]$, $m_k = m'_k$.

Ainsi A et B sont semblables à $\operatorname{diag}(\underbrace{\lambda_1, \dots, \lambda_1}_{m_1 \text{ fois}}, \dots, \underbrace{\lambda_p, \dots, \lambda_p}_{m_p \text{ fois}})$ donc semblables entre elles.

Exercice 7.56

Centrale MP 2007

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que les trois assertions suivantes sont équivalentes :

$i)$ A est nilpotente ;

$ii)$ A est semblable a une matrice triangulaire dont la diagonale est nulle ;

$iii)$ $\forall k \in \{1, \dots, n\}$, $\operatorname{tr}(A^k) = 0$.

Toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Plus précisément, il existe $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et T triangulaire supérieure telles que $A = QTQ^{-1}$. En particulier, pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a $A^k = QT^kQ^{-1}$.

• $i) \Rightarrow ii)$ Si A est nilpotente, il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^p = 0$, et donc $T^p = Q^{-1}A^pQ = 0$. Soient $t_1, \dots, t_n$ les éléments diagonaux de T. Les éléments diagonaux de T^p sont alors $t_1^p, \dots, t_n^p$. Ainsi $T^p = 0$ implique $t_1^p = \cdots = t_n^p = 0$ puis $t_1 = \cdots = t_p = 0$. La matrice T est donc triangulaire avec des éléments diagonaux nuls.

• $ii) \Rightarrow i)$ Les valeurs propres de A sont celles de T. Elles sont donc toutes nulles et le polynôme caractéristique de A est $(-1)^n X^n$. Le théorème de Cayley-Hamilton entraîne alors que $A^n = 0$ et A est nilpotente.

• $ii) \Rightarrow iii)$ Si les éléments diagonaux de T sont nuls, ceux de T^k sont nuls également et $\operatorname{tr}(A^k) = \operatorname{tr}(T^k) = 0$.

• $iii) \Rightarrow ii)$ Supposons que, pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, on ait $\operatorname{tr}(A^k) = 0$. Raisonnons par l'absurde et supposons que A admette p valeurs propres distinctes non nulles $\lambda_1, \dots, \lambda_p$. En notant $m(\lambda_\ell)$ l'ordre de multiplicité (> 0) de la valeur propre λ_ℓ pour la matrice T, on aura alors, pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$ la relation $\operatorname{tr}(A^k) = \operatorname{tr}(T^k) = \displaystyle\sum_{\ell=1}^{p} m(\lambda_\ell)\lambda_\ell^k = 0$. Les nombres $m(\lambda_1), \dots, m(\lambda_p)$ sont alors solutions du système linéaire

$$(S)\quad \begin{cases} m(\lambda_1)\lambda_1 + \cdots + m(\lambda_p)\lambda_p = 0 \\ m(\lambda_1)\lambda_1^2 + \cdots + m(\lambda_p)\lambda_p^2 = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ m(\lambda_1)\lambda_1^p + \cdots + m(\lambda_p)\lambda_p^p = 0 \end{cases}$$

Mais ce système se ramène à un système de Vandermonde dont le déterminant vaut $\lambda_1 \cdots \lambda_p \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant p} (\lambda_j - \lambda_i)$ et n'est pas nul. C'est donc un système de Cramer, et l'on obtient $m(\lambda_1) = \cdots = m(\lambda_p) = 0$, d'où une contradiction, puisque les nombres $m(\lambda_i)$ sont supposés non nuls.

Exercice 7.57

Mines-Ponts MP 2007

Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $AB = 0$.

1) Montrer que A et B ont un vecteur propre commun.

2) *Question de la rédaction* : démontrer qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ tel que $P^{-1}AP$ et $P^{-1}BP$ soient triangulaires supérieures.

1) Tout d'abord, comme tout polynôme est scindé sur $\mathbb{C}$, toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ admet au moins une valeur propre, donc un vecteur propre. Alors, si une des matrices est nulle, par exemple A, tout vecteur est vecteur propre de A et en particulier les vecteurs propres de B sont vecteurs propres de A.

- Dans ce qui suit, on suppose que A et B ne sont pas nulles. Cette hypothèse implique en particulier que A et B ne sont pas inversibles. En effet si une des matrices était inversible, par exemple A, on aurait alors $B = A^{-1}AB = 0$.
- En notant u et v les endomorphismes de $\mathbb{C}^n$ associés à A et B, l'hypothèse $AB = 0$ est équivalente à $u \circ v = 0$, ce qui est encore équivalent à $\operatorname{Im} v \subset \operatorname{Ker} u$.
  - *Premier cas :* $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(v) \neq \{0\}$.
    Dans ce cas v admet une valeur propre λ non nulle. Soit x un vecteur propre associé. On a $v(x) = \lambda x$, donc $x = v(x/\lambda)$. Ainsi x appartient à $\operatorname{Im} v$ donc à $\operatorname{Ker} u$, et x est un vecteur propre de u associé à la valeur propre 0.
  - *Deuxième cas :* $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(v) = \{0\}$.
    Le polynôme caractéristique χ_v de v admet alors comme unique racine le nombre 0. C'est donc $\chi_v(X) = (-1)^n X^n$ et il résulte du théorème de Cayley-Hamilton que $v^n = 0$. Ainsi v est un endomorphisme nilpotent. Appelons p l'indice de nilpotence de v, c'est-à-dire le plus petit entier p tel que $v^p = 0$ et $v^{p-1} \neq 0$. Puisque v est non nul, on a $2 \leqslant p \leqslant n$. Puisque v^{p-1} est non nul, il existe $x \in \mathbb{C}^n$ tel que $y = v^{p-1}(x) \neq 0$. On en déduit alors que $v(y) = v^p(x) = 0$. Ainsi y est un vecteur propre

de v associé à la valeur propre 0. Or, par hypothèse $u \circ v = 0$. Ainsi, $u(y) = u \circ v^{p-1}(x) = (u \circ v) \circ v^{p-2}(x) = 0$, et y est aussi un vecteur propre de u associé à la valeur propre 0.

2) Démontrons par récurrence qu'il existe une base de E dans laquelle les matrices de u et v sont triangulaires supérieures. La propriété est évidente pour $n = 1$. Supposons la vraie au rang n et plaçons nous en dimension $n+1$.
Soit e un vecteur propre commun de u et v appartenant à $\operatorname{Ker} u$. Soit H un supplémentaire de la droite $\mathbb{C}e$ dans E. Notons π la projection sur H parallèlement à $\mathbb{C}e$, u_1 la restriction de $\pi \circ u$ à H et v_1 la restriction de $\pi \circ v$ à H, et $\mathcal{B}$ une base de E commençant par e et suivie d'une base $\mathcal{B}_1$ de H. Dans cette base, la matrice de u s'écrit $\begin{pmatrix} 0 & L_1 \\ 0 & U_1 \end{pmatrix}$ et celle de v s'écrit $\begin{pmatrix} \lambda & L_2 \\ 0 & V_1 \end{pmatrix}$. On sait que U_1 est la matrice de u_1 dans la base $\mathcal{B}_1$ et V_1 est celle de v_1. En écrivant que $u \circ v = 0$, on obtient par un produit par blocs que $U_1 V_1 = 0$, donc $u_1 \circ v_1 = 0$. On peut alors appliquer l'hypothèse de récurrence, il existe une base $\mathcal{B}_1'$ de H dans laquelle les matrices de u_1 et de v_1 sont triangulaires supérieures. Plaçons-nous à présent dans la base $\mathcal{B}' = \{e\} \cup \mathcal{B}_1'$. On a $u(e) = 0$ et $v(e) = \lambda e$. Pour $k \geqslant 2$, $u(e_k') = u'(e_k') + \alpha_k e$ (de même pour $v(e_k')$), donc les matrices de u et v dans la base $\mathcal{B}'$ sont triangulaires supérieures, ce qui achève la récurrence.

Exercice 7.58

Centrale MP 2006 et 2007, Polytechnique MP 2007

Soit E un espace vectoriel complexe de dimension finie non nulle. Soient u et v des endomorphismes de E; on pose $[u, v] = u \circ v - v \circ u$.

1) On suppose $[u, v] = 0$. Montrer que u et v sont cotrigonalisables.
Indication de la rédaction : on pourra commencer par montrer que u et v possèdent un vecteur propre en commun.

2) On suppose $[u, v] = \lambda u$, où $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Montrer que u est nilpotent et que u et v sont cotrigonalisables.
Indication de la rédaction : on montrera par récurrence que $\forall k \in \mathbb{N}$ $[u^k, v] = k\lambda u^k$.

3) On suppose l'existence de complexes α et β tels que $[u, v] = \alpha u + \beta v$. Montrer que u et v sont cotrigonalisables.

1) Le polynôme caractéristique de u possède au moins une racine dans $\mathbb{C}$, donc l'endomorphisme u au moins une valeur propre. Soit α une valeur propre de u, et soit $E_\alpha(u)$ le sous-espace propre associé. Comme u et v commutent, $E_\alpha(u)$ est stable par v. L'endomorphisme induit par v sur $E_\alpha(u)$ possède à son tour au moins une valeur propre, et donc $E_\alpha(u)$ contient au moins un vecteur propre de v. Nous avons ainsi démontré que u et v ont au moins un vecteur propre commun. Nous allons

nous inspirer de la démonstration du théorème de trigonalisation pour démontrer que u et v sont simultanément trigonalisables.

Nous procédons par récurrence sur la dimension n de E. La propriété est évidemment vérifiée à l'ordre 1. Pour $n > 1$, supposons la vérifiée à l'ordre $n-1$, et vérifions la lorsque $\dim E = n$. Soit e_1 un vecteur propre commun à u et v, et soit F un supplémentaire de $\mathrm{Vect}(e_1)$. Soit $(e_2, \ldots, e_n)$ une base de F. Alors $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est une base de E et dans cette base la matrice de u est de la forme $U = \begin{pmatrix} \alpha & * \\ 0 & A \end{pmatrix}$ et le matrice de v est de la forme $V = \begin{pmatrix} \beta & * \\ 0 & B \end{pmatrix}$. Comme U et V commutent, les matrices A et B commutent dans $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{C})$.

Soit p_F la projection sur F parallèlement à $\mathrm{Vect}(e_1)$, et soit $u_{|F}$ la restriction de u à F. Alors A est la matrice de l'endomorphisme $f = p_F \circ u_{|F}$ de F dans la base $(e_2, \ldots, e_n)$ et de même B est la matrice de $g = p_F \circ v_{|F}$. Les endomorphismes f et g commutent, et l'hypothèse de récurrence assure l'existence d'un base $(e'_2, \ldots, e'_n)$ de F dans laquelle les matrices A' de f et B' de g sont triangulaire supérieures. Dans la base $(e_1, e'_2, \ldots, e'_n)$ les matrices de u et de v sont alors respectivement $U' = \begin{pmatrix} \alpha & * \\ 0 & A' \end{pmatrix}$ et $V' \begin{pmatrix} \beta & * \\ 0 & B' \end{pmatrix}$. Elles sont triangulaires supérieures.

2) La démonstration de la relation $\forall k \in \mathbb{N}\ [u^k, v] = k\lambda u^k$ est évidente par récurrence sur l'entier k (la seule difficulté est de conjecturer cette relation) !
Il en résulte que si u^k est non nul, alors c'est un vecteur propre de l'endomorphisme $\Phi\colon f \mapsto [f, v]$ de $\mathcal{L}(E)$, associé à la valeur propre $k\lambda$. Comme $\mathcal{L}(E)$ est un espace vectoriel de dimension finie, Φ a un nombre fini de valeurs propres, et il existe donc $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^k = 0$. Ainsi l'endomorphisme u est nilpotent. Le noyau $\mathrm{Ker}\, u$ de u est stable par v car u et v commutent. En reprenant le schéma de la démonstration de la question 1) avec $\alpha = 0$, on vérifie qu'avec les notations précédentes, A est nilpotente et A et B vérifie $[A, B] = \lambda A$. On peut donc à nouveau effectuer la récurrence et construire une base de E dans laquelle les matrices de u et de v sont triangulaires supérieures (avec une diagonale de 0 pour la matrice de u).

3) On suppose $\beta \neq 0$. Soit $v' = \alpha u + \beta v$. On a alors $[u, v'] = \beta[u, v] = \beta v'$ donc $[\frac{1}{\beta}u, v'] = v'$. D'après 2), $\frac{1}{\beta}u$ et v' sont cotrigonalisables donc u et v' aussi et donc, également, u et $\frac{1}{\beta}\left(v' - \alpha u\right) = v$.

Exercice 7.59

Centrale MP 2007 ☕

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(u, v, h) \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)^3$ tel que $h \circ u - u \circ h = 2u$, $h \circ v - v \circ h = -2v$ et $u \circ v - v \circ u = h$.

1) Soit x un vecteur propre de h.

- Montrer que $u(x)$ est nul ou est un vecteur propre de h.
- Montrer que, si $k \in \mathbb{N}$ et $u^k(x) \neq 0$, alors $u^k(x)$ est un vecteur propre de h.

2) • Etablir l'existence d'un vecteur propre y de h dans le noyau de u. On pose $h(y) = \lambda y$.

- Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose $y_k = v^k(y)/k!$. Exprimer $u(y_k)$, $v(y_k)$ et $h(y_k)$.

3) On suppose qu'aucun sous-espace vectoriel non trivial de $\mathbb{C}^n$ n'est stable simultanément par u, v et h. Montrer que la famille $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ engendre $\mathbb{C}^n$.

4) Proposer un exemple non trivial de configuration étudiée dans cet exercice.

1) • Comme $h(x) = \lambda x$, on a $h(u(x)) = u(h(x)) + 2u(x) = (\lambda + 2)u(x)$.

- On démontre par récurrence sur k que $h(u^k(x)) = (\lambda + 2k)u^k(x)$. La propriété est vraie pour $k = 0$ et $k = 1$. Supposons la vraie jusqu'au rang k. On a

$$\begin{aligned} h(u^{k+1})(x) &= h(u(u^k(x))) = u(h(u^k(x))) + 2u(u^k(x)) \\ &= (\lambda + 2k)u^{k+1}(x) + 2u^{k+1}(x) = (\lambda + 2(k+1))u^{k+1}(x), \end{aligned}$$

d'où la propriété établie au rang $k + 1$.

2) • Si u est injective, alors u est bijective, d'où $u^{-1} \circ h \circ u - h = 2\,\mathrm{Id}_E$. Par propriété de la trace, on a $\mathrm{tr}(u^{-1} \circ h \circ u) = \mathrm{tr}(u \circ u^{-1} \circ h) = \mathrm{tr}\, h$, d'où $\mathrm{tr}(2\,\mathrm{Id}_E) = 0$, ce qui est absurde, donc $\mathrm{Ker}\, u$ n'est pas réduit à $\{0\}$. Il est stable par h, donc la restriction de h à $\mathrm{Ker}\, u$ est un endomorphisme scindé (car on travaille sur $\mathbb{C}$), donc possède un vecteur propre y.

- ◦ On a immédiatement $v(y_k) = (k + 1)y_{k+1}$.
  - ◦ De même qu'à la question précédente, on peut montrer par récurrence sur k que $h(v^k(y)) = (\lambda - 2k)v^k(y)$ (le signe $-$ s'obtient en changeant h en $-h$ et λ en $-\lambda$). On en déduit que $h(y_k) = (\lambda - 2k)y_k$.
  - ◦ On démontre par récurrence sur k que $u(v^k(y)) = (k\lambda - k(k-1))v^{k-1}(y)$. La propriété est vraie pour $k = 0$ et $k = 1$. Supposons la vraie jusqu'au rang k. On a

$$\begin{aligned} u(v^{k+1}(y)) &= v(u(v^k(y))) + h(v^k(y)) \\ &= v(k\lambda - k(k-1))v^{k-1}(y) + (\lambda - 2k)v^k(y) \\ &= (k\lambda - k(k-1) + \lambda - 2k)v^k(y) \\ &= ((k+1)\lambda - k(k+1))v^k(y) \end{aligned}$$

donc la propriété est vraie au rang $k+1$. On en déduit que $u(y_k) = (\lambda - k + 1)y_{k-1}$ pour $k \geqslant 1$.

3) Considérons le sous-espace vectoriel F engendré par la famille $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Les calculs menés à la question précédente montrent que F est stable par u, v et h, et d'autre part, F n'est pas réduit à $\{0\}$ car y est non nul. Il en résulte que $F = E$, c'est-à-dire que la famille $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ engendre E.

4) Dans $\mathbb{C}^2$ muni de la base canonique, on considère les endomorphismes u, v et h de matrices respectives $U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Par un calcul élémentaire, on vérifie que $HU - UH = 2U$, $HV - VH = -2V$ et $UV - VU = H$, donc les endomorphismes u, v et h vérifient bien les conditions de l'énoncé.

Remarque

Le lecteur pourra montrer que u et v sont nilpotents, et que si une telle configuration est présente dans $\mathbb{R}^n$, alors l'entier n est pair.

Exercice 7.60

Mines-Ponts PSI 2006

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que A^2 soit triangulaire supérieure, de diagonale $(1, 2, \dots, n)$. Montrer que A est triangulaire supérieure.

(On supposera $n \geqslant 2$.)
Remarquons que A^2 est diagonalisable car elle possède n valeurs propres distinctes.
Le polynôme $P = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} (X^2 - k) = \prod_{k=1}^{n} \left(X - \sqrt{k}\right)\left(X + \sqrt{k}\right)$ est scindé à racines simples et annulateur pour A donc A est diagonalisable.
De plus, pour tout $i \in [\![1\,, n]\!]$, $E_{\sqrt{i}}(A) \oplus E_{-\sqrt{i}}(A) \subset E_i(A^2)$ (qui est une droite) et comme

$$\mathbb{R}^n = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i(A^2) = \bigoplus_{i=1}^{n} \left(\underbrace{E_{\sqrt{i}}(A)}_{\text{droite ou } \{0\}} \oplus \underbrace{E_{-\sqrt{i}}(A)}_{\text{droite ou } \{0\}} \right)$$

On a $E_{\sqrt{i}}(A) \oplus E_{-\sqrt{i}}(A) = E_i(A^2)$ et soit $\sqrt{i}$ soit $-\sqrt{i}$ est valeur propre simple de A.
Revenons au problème des matrices triangulaires.
Soit $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et posons pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $F_i = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_i)$.
Nous pouvons remarquer qu'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est triangulaire supérieure si et seulement si pour tout $i \in [\![1\,, n-1]\!]$, F_i est stable par M.
Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $F_i = E_1(A^2) \oplus \cdots \oplus E_i(A^2)$ car $F_i \subset E_1(A^2) \oplus \cdots \oplus E_i(A^2)$ (la restriction de A à F_i est diagonalisable de valeurs propres $\{1, \dots, i\}$) et les deux sous-espaces ont même dimension.

Comme $E_{\sqrt{i}}(A) \oplus E_{-\sqrt{i}}(A) = E_i(A^2)$, on a $F_i = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{i} \left(\underbrace{E_{\sqrt{i}}(A)}_{\text{droite ou } \{0\}} \oplus \underbrace{E_{-\sqrt{i}}(A)}_{\text{droite ou } \{0\}} \right)$

donc F_i est un sous-espace stable par A.
Conclusion : A est triangulaire supérieure (de diagonale, dans l'ordre $\pm\sqrt{1}, \dots, \pm\sqrt{n}$).

Exercice 7.61

Centrale MP 2007

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$. On considère l'équation (E) $AM = MB$, où l'inconnue M appartient à $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1) On suppose que (E) possède une solution non nulle M.

- Montrer que, pour tout P de $\mathbb{C}[X]$, on a $P(A)M = MP(B)$.
- Montrer que A et B ont une valeur propre commune.

2) On suppose que A et B ont une valeur propre commune.

- Montrer que si X et Y sont deux vecteurs colonnes non nuls, alors la matrice $X{}^tY$ est non nulle.
- Montrer que (E) admet une solution non nulle.

1) • On montre par récurrence sur k que $A^kM = MB^k$. C'est vrai pour $k = 0$ et $k = 1$. Supposons la propriété vraie au rang k. On a alors $A^{k+1}M = AA^kM = AMB^k = MB^{k+1}$, donc la propriété est vraie au rang $k+1$. Par linéarité, on en déduit que $P(A)M = MP(B)$ pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$.

• Choisissons pour P le polynôme caractéristique χ_A de la matrice A. Par le théorème de Cayley-Hamilton, $\chi_A(A) = 0$, donc $M\chi_A(B) = 0$. Comme M est non nulle, la matrice $\chi_A(B)$ est non inversible, donc $\det \chi_A(B) = 0$. Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres de A, et $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ leurs ordres de multiplicité, de sorte que $\chi_A = \prod_{k=1}^{n}(X - \lambda_k)^{\alpha_k}$. On en déduit qu'il existe $k \in [\![1\,, p]\!]$ tel que $\det(B - \lambda_k) = 0$, donc $\lambda_k \in \operatorname{Sp} A \cap \operatorname{Sp} B$.

2) • Comme $X \neq 0$, il existe $i \in [\![1\,, n]\!]$ tel que $x_i \neq 0$, et de même il existe $j \in [\![1\,, n]\!]$ tel que $y_j \neq 0$. L'élément de ligne i et de colonne j de la matrice $X{}^tY$ étant égal à $x_i y_j$, il est non nul donc $X{}^tY \neq 0$.

• Notons λ une valeur propre commune à A et B. Il existe un vecteur colonne non nul X tel que $AX = \lambda X$. Comme B et ${}^tB$ ont même polynôme caractéristique, λ est également valeur propre de ${}^tB$, donc il existe un vecteur colonne non nul Y tel que ${}^tBY = \lambda Y$. D'après la question précédente, la matrice $M = X{}^tY$ est non nulle et $AM = AX{}^tY = \lambda X{}^tY = X{}^t\lambda Y = X{}^t({}^tBY) = MB$.

Exercice 7.62

Produit tensoriel, Mines-Ponts MP 2006

Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, A et B deux éléments de E. Soit f l'endomorphisme de E défini par $f(X) = AX$.

1) Soient $(X_1, \ldots, X_n)$ et $(Y_1, \ldots, Y_n)$ deux bases de $\mathbb{C}^n$. Montrer que la famille des n^2 matrices $X_i\,{}^tY_j$ est une base de E.

2) Montrer que f est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable.

3) Même étude avec $g : X \mapsto XB$.

4) Soit alors $\Phi : X \mapsto AXB$ avec A et B diagonalisables. Montrer que Φ est diagonalisable. La réciproque est-elle vraie ?

1) Notons (E_i) la base canonique de $\mathbb{C}^n$. On sait que $\left(E_i\,{}^tE_j\right)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ est la base canonique de $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Comme $(X_1, \ldots, X_n)$ et $(Y_1, \ldots, Y_n)$ sont deux bases de $\mathbb{C}^n$, pour tout $(i, j) \in [\![1\,, n]\!]^2$, $E_i\,{}^tE_j$ est combinaison linéaire de $\left(X_i{}^tY_j\right)$ donc $\left(X_i{}^tY_j\right)$ est une famille génératrice de E, comme elle est constituée de n^2 éléments, il s'agit d'une base de E.

2) Remarquons que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f^k(X) = A^kX$. Supposons f diagonalisable. Il existe un polynôme P scindé à racines simples annulateur de f donc pour tout $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $P(f)(X) = P(A)X = 0$.
Il en résulte que $P(A) = 0$ et donc A est diagonalisable.
Supposons maintenant A diagonalisable. Il existe $U_1, \ldots, U_n$ une base de $\mathbb{C}^n$ constituée de vecteurs propres de A associée aux valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.
Posons $E_{ij} = U_i\,{}^tU_j$. D'après la première question, $\left(E_{ij}\right)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ est une base de $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, de plus $f(E_{ij}) = \lambda_i E_{ij}$. Donc $\left(E_{ij}\right)_{(i,j)\in[\![1\,,n]\!]^2}$ est une base de vecteurs propres de f, f est diagonalisable.

3) On procède de même pour g mais en considérant $V_1, \ldots, V_n$ une base de $\mathbb{C}^n$ constituée de vecteurs propres de ${}^tB$.

4) On remarque que $\Phi = g \circ f = f \circ g$. Comme f et g sont diagonalisables et commutent, ils sont codiagonalisables et leur composée est diagonalisable donc Φ est diagonalisable.
La réciproque est fausse en prenant par exemple $B = 0$ et A non diagonalisable. L'endomorphisme Φ est nul, donc diagonalisable, mais pas A.

Exercice 7.63

ENS Paris, Lyon, Cachan MP 2006 ☕

Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \cap \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ à valeurs propres (complexes) de module majoré par 1. Montrer que les valeurs propres de A sont des racines de l'unité.

Indication de la rédaction : on montrera que les polynômes caractéristiques possibles pour A^k, $k \in \mathbb{N}$ sont en nombre fini.

Le polynôme caractéristique de A s'écrit sous la forme

$$\chi_A = (-1)^n X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0 = (-1)^n \prod_{k=1}^{n}(X - \lambda_k).$$

La famille (λ_k) représente les valeurs propres de A, supposées de module $\leqslant 1$. Nous savons que pour tout $k \in [\![1\,,n]\!]$,

$$a_{n-k} = (-1)^n \times (-1)^k \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n} \lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_k}.$$

On en déduit que

$$|a_{n-k}| \leqslant \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n} |\lambda_{i_1}| \cdots |\lambda_{i_k}| \leqslant \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n} 1 = \binom{n}{k}$$

Les coefficients $a_k \in \mathbb{Z}$ du polynôme caractéristique de A sont donc majorés en valeur absolue par $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$. Les polynômes caractéristiques possibles pour A sont donc en nombre fini. On peut effectuer le même raisonnement pour les puissance itérées A^k, $k \in \mathbb{N}$. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$ alors $0 < |\lambda| \leqslant 1$.
Supposons $|\lambda| < 1$ alors $\{\lambda^k, k \in \mathbb{N}\}$ est infini mais est inclus dans l'ensemble des valeurs propres des A^k, $k \in \mathbb{N}$ qui, lui, est fini car ces valeurs propres sont racines d'un nombre fini de polynômes, d'où l'absurdité. Ainsi, pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$, $|\lambda| = 1$.

Exercice 7.64

ENS Paris,Lyon,Cachan MP 2005 ☕

Soient n un entier $\geqslant 2$, $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_{n-1}, c_1, \ldots, c_{n-1}$ des réels tels que pour tout $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, $b_i c_i > 0$, et M la matrice tridiagonale

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ c_1 & a_2 & b_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & c_2 & a_3 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & c_{n-1} & a_n \end{pmatrix}.$$

1) Montrer que M est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

2) Trouver une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ayant même polynôme caractéristique et mêmes termes diagonaux que M.

1) Notons Δ_n le polynôme caractéristique χ_M. En développant sur les dernières lignes le déterminant, on trouve

$$\Delta_n = (a_n - X)\,\Delta_{n-1} - b_{n-1}c_{n-1}\Delta_{n-2} \qquad (1).$$

Étudions pour commencer les racines de Δ_1 et Δ_2.
$\Delta_1 = a_1 - X$ et $\Delta_2 = (a_1 - X)\,(a_2 - X) - b_1c_1$.
$\Delta_2(a_1) = -b_1c_1 < 0$ donc, Δ_2 étant un polynôme du second degré de monôme dominant X^2, Δ_2 possède deux racines réelles de part et d'autres de la racine réelle a_1 de Δ_1. On remarque que Δ_1 et Δ_2 sont scindés à racines (réelles) simples et que la racine de Δ_1 sépare les racines de Δ_2.
Effectuons un raisonnement par récurrence.
Soient $k \geqslant 2$ et $\mathcal{P}_k$ la propriété suivante :

Δ_k est scindé à racines simples $\alpha_1^k, \dots, \alpha_k^k$ et $\alpha_1^k < \alpha_1^{k-1} < \cdots < \alpha_{k-1}^{k-1} < \alpha_k^k$.

$\mathcal{P}_2$ est vraie. Soit $k \geqslant 2$. Supposons $\mathcal{P}_i$ vraie pour $i \in [\![2\,,k]\!]$ et montrons $\mathcal{P}_{k+1}$.
On sait que $\Delta_{k+1} = (a_{k+1} - X)\,\Delta_k - b_kc_k\Delta_{k-1}$
donc $\Delta_{k+1}(\alpha_i^k) = \underbrace{-b_kc_k\Delta_{k-1}(\alpha_i^k)}_{\text{changement de signe / } i}$ pour $i \in [\![1\,,k-1]\!]$.

Comme $\Delta_{k-1}(\alpha_i^k)$ change de signe à chaque i successif (racines simples croisées), Δ_{k+1} possèdent au moins une racines dans chaque $]\alpha_i^k, \alpha_{i+1}^k[$, $i \in [\![1, k-1]\!]$, ce qui fait $k-1$ racines.
Les deux dernières se trouvent dans $]-\infty, \alpha_1^k[$ et $]\alpha_k^k, +\infty[$.
○ En effet, commençons par remarquer que

$$\lim_{t\to-\infty} \Delta_{k+1}(t) = +\infty \text{ et } \lim_{t\to+\infty} \Delta_{k+1}(t) = (-1)^n \times \infty$$

($\Delta_{k+1}(X)$ est de monôme dominant $(-X)^n$).
○ D'autre part

$$\Delta_{k+1}(\alpha_1^k) = \left(a_{k+1} - \alpha_1^k\right)\Delta_k(\alpha_1^k) - b_kc_k\Delta_{k-1}(\alpha_1^k) = -b_kc_k\Delta_{k-1}(\alpha_1^k)$$

donc, puisque $b_kc_k > 0$,

$$\operatorname{sgn}(\Delta_{k+1}(\alpha_1^k)) = -\operatorname{sgn}(\Delta_{k-1}(\alpha_1^k)) = -\operatorname{sgn}(\lim_{t\to-\infty} \Delta_{k-1}(t)) = -1$$

car $\alpha_1^k < \alpha_1^{k-1}$ par hypothèse de récurrence. De même,

$$\Delta_{k+1}(\alpha_k^k) = \left(a_{k+1} - \alpha_k^k\right)\Delta_k(\alpha_k^k) - b_kc_k\Delta_{k-1}(\alpha_k^k) = -b_kc_k\Delta_{k-1}(\alpha_k^k)$$

donc, puisque $b_kc_k > 0$,

$$\operatorname{sgn}(\Delta_{k+1}(\alpha_k^k)) = -\operatorname{sgn}(\Delta_{k-1}(\alpha_k^k)) = -\operatorname{sgn}(\lim_{t\to+\infty} \Delta_{k-1}(t)) = -(-1)^n$$

car $\alpha_k^k > \alpha_{k-1}^{k-1}$ par hypothèse de récurrence.
Ainsi

$$\operatorname{sgn}(\Delta_{k+1}(\alpha_1^k)) = -\operatorname{sgn}(\lim_{t\to-\infty} \Delta_{k+1}(t)) \text{ et } \operatorname{sgn}(\Delta_{k+1}(\alpha_k^k)) = -\operatorname{sgn}(\lim_{t\to+\infty} \Delta_{k+1}(t)),$$

donc, toujours par le théorème des valeurs intermédiaires, Δ_{k+1} s'annule sur $]-\infty, \alpha_1^k[$ et $]\alpha_k^k, +\infty[$ ce qui nous donne ses $k+1$ racines, nécessairement simples ($\deg \Delta_{k+1} = k+1$) et croisées avec celles de Δ_k.

2) Posons $\gamma_i = \sqrt{b_i c_i}$. La matrice $\begin{pmatrix} a_1 & \gamma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \gamma_1 & a_2 & \gamma_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & \gamma_2 & a_3 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \gamma_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & \gamma_{n-1} & a_n \end{pmatrix}$ a même polynôme caractéristique que M (la relation de récurrence (1) est la même) et même termes diagonaux.

Espaces préhilbertiens 8

8.1 L'ESSENTIEL DU COURS ET EXERCICES D'ASSIMILATION

Ce qu'il faut savoir

Soit E un espace vectoriel réel.

- **Forme bilinéaire symétrique**
  - On appelle **forme bilinéaire symétrique** sur E toute application φ définie sur $E \times E$ à valeurs réelles telle que :
    – pour tout $x \in E$, l'application $y \mapsto \varphi(x, y)$ est linéaire (linéarité à droite)
    – pour tout $y \in E$, l'application $x \mapsto \varphi(x, y)$ est linéaire (linéarité à gauche)
    – pour tout $(x, y) \in E \times E$, $\varphi(x, y) = \varphi(y, x)$ (symétrie).
  - L'ensemble des formes bilinéaires symétriques sur E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
  - On dit que la forme bilinéaire symétrique est **positive** lorsque, pour tout $x \in E$, on a $\varphi(x, x) \geqslant 0$. On dit qu'elle est **définie positive**, lorsque de plus, l'égalité $\varphi(x, x) = 0$ implique $x = 0_E$ (la réciproque étant toujours vraie).

- **Formes quadratiques**
  - Si φ est une forme bilinéaire symétrique, on appelle forme quadratique associée à φ, l'application q définie sur E à valeurs réelles, telle que, pour tout $x \in E$, $q(x) = \varphi(x, x)$. On dit qu'elle est **positive** lorsque, pour tout $x \in E$, $q(x) \geqslant 0$, et **définie positive** lorsque, pour tout $x \in E \setminus \{0\}$, $q(x) > 0$.
  - **Formules de polarisation :** si q est la forme quadratique associée à φ, alors pour tout $(x, y) \in E \times E$, on a :
  $$\varphi(x, y) = \frac{1}{2}\left(q(x+y) - q(x) - q(y)\right) = \frac{1}{4}\left(q(x+y) - q(x-y)\right).$$
  - **Inégalité de Cauchy-Schwarz :** si φ est une forme bilinéaire symétrique positive et si q est sa forme quadratique associée, alors pour tout $(x, y) \in E^2$, on a $\varphi(x, y)^2 \leqslant q(x)q(y)$.

- **Matrice d'une forme bilinéaire symétrique**
  Soient φ une forme bilinéaire symétrique sur E, et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E. On pose $a_{i,j} = \varphi(e_i, e_j)$ pour i et j compris entre 1 et n. La matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est appelée matrice de la forme bilinéaire symétrique φ (ou

de sa forme quadratique associée q) dans la base $\mathcal{B}$. Cette matrice est symétrique.

Si $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ et $y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$, on note X et Y les vecteurs colonnes des coordonnées de x et y dans la base $\mathcal{B}$. Alors $\varphi(x, y) = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{i,j} x_i y_j = {}^t X A Y$. En particulier, $q(x) = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{i,j} x_i x_j = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} x_i^2 + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} a_{i,j} x_i x_j = {}^t X A X$.

Exercice 8.1

Soient $E = \mathbb{R}[X]$ et B l'application de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$B(P, Q) = P(0)Q(1) + P(1)Q(0).$$

Montrer que B est une forme bilinéaire symétrique. Est-elle positive ?

On vérifie facilement que $\forall (P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2,\ B(P, Q) = B(Q, P)$ et que $\forall \alpha \in \mathbb{R},\ \forall (P, Q, R) \in \mathbb{R}[X]^3,\ B(\alpha P + Q, R) = \alpha B(P, R) + B(Q, R)$, donc B est une forme bilinéaire symétrique sur E.
On a $B(P, P) = 2P(0)P(1)$. En particulier $B(X - 1/2, X - 1/2) = -1/2 < 0$, donc B n'est pas positive.

Exercice 8.2

On se place dans l'espace vectoriel $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1) Soit Q l'application de E dans $\mathbb{R}$ définie par $Q(M) = (\operatorname{tr} M)^2$. Montrer que Q est une forme quadratique positive sur E. Expliciter la forme bilinéaire symétrique associée.

2) Soit Q' l'application de E dans $\mathbb{R}$ définie par $Q'(M) = \operatorname{tr}(M^2)$. Montrer que Q' est une forme quadratique sur E. Montrer que sa restriction au sous espace $\mathcal{S}_n$ des matrices symétriques est définie positive, et que sa restriction au sous-espace $\mathcal{A}_n$ des matrices antisymétriques est négative.

1) Pour tout $(M, N) \in E \times E$, on pose $f(M, N) = \operatorname{tr}(M) \operatorname{tr}(N)$. Par linéarité de la trace, f est une forme bilinéaire symétrique et $Q(M) = f(M, M) \geqslant 0$, donc Q est une forme quadratique positive de forme polaire f.

2) On pose $f'(M, N) = \operatorname{tr}(MN)$. L'application f' est clairement bilinéaire et on a $Q'(M) = f'(M, M)$. On sait que pour tout couple (M, N) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$, $\operatorname{tr}(MN) = \operatorname{tr}(NM)$, donc f' est symétrique, et Q' est la forme quadratique

associée à f'. Soit $M = (m_{ij}) \in E$, le $i^{\text{ème}}$ coefficient diagonal de M^2 est égal à $\sum_{j=1}^{n} m_{ij} m_{ji}$, donc $Q'(M) = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} m_{ij} m_{ji}$.

- Si M est symétrique, alors $Q'(M) = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} m_{ij}^2$; c'est la somme des carrés de tous les coefficients de M, donc $Q'(M) \geqslant 0$, et $Q'(M) = 0 \iff M = 0$, donc Q' restreinte à $\mathcal{S}_n$ est définie positive.
- Si M est antisymétrique, alors $Q'(M) = -\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} m_{ij}^2$. On obtient l'opposé du terme précédent, donc Q' restreinte à $\mathcal{A}_n$ est définie négative.

Remarque

On observe en outre que pour tout $(M, N) \in \mathcal{S}_n \times \mathcal{A}_n,\ f'(M, N) = 0$. On dit que $\mathcal{S}_n$ et $\mathcal{A}_n$ sont conjugués vis-à-vis de la forme quadratique Q'.

Exercice 8.3

Changement de base pour une forme bilinéaire symétrique

Soient E un espace de dimension n, $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ deux bases de E. Soit f une forme bilinéaire symétrique sur E, de matrices A et A' dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.

1) Soit P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. Démontrer que $A' = {}^tPAP$.
2) En déduire que A et A' sont de même rang (appelé rang de la forme bilinéaire f ou de la forme quadratique associée) et que $\det A$ et $\det A'$ sont de même signe.
3) **Application** (*Mines-Ponts MP 2006*) :
   Déterminer le rang de la forme quadratique Q sur $\mathbb{R}^n$ définie par :
$$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n,\ Q(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n,\, i \neq j} x_i x_j\ .$$

1) Soient X' et Y' deux vecteurs colonnes de $\mathbb{R}^n$, x et y les éléments de E représentés par X' et Y' dans la base $\mathcal{B}'$. En posant $X = PX'$ et $Y = PY'$, on sait que x et y sont représentés par les vecteurs colonnes X et Y dans la base $\mathcal{B}$. On a donc $f(x, y) = {}^tXAY$ et $f(x, y) = {}^tX'A'Y'$, selon qu'on effectue le calcul dans la base $\mathcal{B}$ ou $\mathcal{B}'$. On en déduit que ${}^tX'A'Y' = {}^tX'{}^tPAPY'$ pour tout couple de vecteurs colonnes (X', Y'). En choisissant $X' = E_i$ et $Y' = E_j$ (où $(E_1, \ldots, E_n)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$), on en déduit que les coefficients d'indice (i, j) des deux matrices sont égaux, d'où finalement $A' = {}^tPAP$.
2) Multiplier une matrice par une matrice inversible ne modifie pas son rang, or P est inversible (matrice de changement de base) donc ${}^tP$ également, par

conséquent, A et A' ont le même rang. D'autre part, $\det({}^tP) = \det P$, d'où $\det A' = (\det P)^2 \det A$, donc $\det A$ et $\det A'$ sont de même signe.

3) D'après ce qui précède, le rang de Q est celui de la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients diagonaux sont nuls et dont les autres coefficients sont égaux à 1. Or $\det A = (-1)^{n-1}(n-1)$ est non nul (voir exercice 6.7, page 161), donc Q est de rang n.

8.1.1 Produit scalaire

Ce qu'il faut savoir

Soit E un espace vectoriel réel.

- On appelle **produit scalaire** sur E toute forme bilinéaire symétrique définie positive. On le note en général $(x, y) \mapsto (x \mid y)$ ou $\langle x, y \rangle$. Lorsque E est muni d'un produit scalaire, on dit que E est un espace **préhilbertien** réel.
  Dans la suite, E est un espace préhilbertien réel.
- **Inégalité de Cauchy-Schwarz :** $\forall (x, y) \in E^2,\ (x \mid y)^2 \leqslant (x \mid x)(y \mid y)$.
  Il y a égalité si et seulement si la famille (x, y) est liée.
- **Inégalité de Minkowski :** $\forall (x, y) \in E^2,\ \sqrt{(x+y \mid x+y)} \leqslant \sqrt{(x \mid x)} + \sqrt{(y \mid y)}$.
  Il y a égalité si et seulement si la famille (x, y) est positivement liée (c'est-à-dire $x = 0$ ou $\exists \alpha \geqslant 0,\ y = \alpha x$).
- L'application $x \mapsto \sqrt{(x \mid x)}$ est une norme sur E, dite **norme préhilbertienne** associée au produit scalaire.
- **Produits scalaires usuels :**
  - Dans $E = \mathbb{R}^n$, on définit le produit scalaire canonique $(x \mid y) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ où $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, \ldots, y_n)$.
  - Dans $E = \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$, on définit le produit scalaire $(f \mid g) = \displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\,dt$.
  - Dans $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on définit le produit scalaire $(A \mid B) = \operatorname{tr}({}^tAB) = \displaystyle\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{ij} b_{ij}$.

Exercice 8.4

CCP MP 2006

Soient $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ et $B : E \times E \to \mathbb{R}$ définie par $B(f, g) = \displaystyle\int_0^1 f(t)g(t)\,dt$.

1) Montrer que B est un produit scalaire sur E.

2) On pose $F = \{h \in E \mid \displaystyle\int_0^1 h(t)\,dt = 1\}$. Calculer $\displaystyle\min_{h \in F} \int_0^1 h(t)^2\,dt$.

1) Il est évident que B est une forme bilinéaire symétrique, et on a, pour tout $f \in E$, $B(f,f) = \int_0^1 f(t)^2\,dt \geqslant 0$, donc B est positive. Enfin, si $B(f,f) = 0$, alors f^2 est une fonction continue positive sur $[0,1]$ d'intégrale nulle, donc c'est la fonction nulle, d'où $f = 0$. On conclut que B est un produit scalaire sur E.

2) En notant 1 la fonction constante égale à 1, on a par inégalité de Cauchy-Schwarz $B(h,1)^2 \leqslant B(1,1)B(h,h)$, d'où $\forall h \in F,\ 1 \leqslant \int_0^1 h(t)^2\,dt$. On a égalité lorsque h est la fonction constante égale à 1, donc $\min\limits_{h\in F} \int_0^1 h(t)^2\,dt = 1$.

Exercice 8.5

Centrale PC 2007

Soient E un espace préhilbertien, a un vecteur unitaire de E, k un réel, et Φ l'application de E^2 dans $\mathbb{R}$ définie par $\Phi(x,y) = (x|y) + k(x|a)(y|a)$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que Φ soit un produit scalaire sur E.

On suppose que $k \neq 0$ et que le vecteur a est non nul (sinon Φ est le produit scalaire donné sur E). L'application Φ est bilinéaire par bilinéarité du produit scalaire $(.|.)$. La symétrie est également immédiate puisque, pour tout $(x,y) \in E^2$, on a $\Phi(y,x) = (y|x) + k(y|a)(x|a) = \Phi(x,y)$.
Soit $x \in E$. On a $\Phi(x,x) = \|x\|^2 + k(x|a)^2$. Si $k \geqslant 0$, alors $\Phi(x,x) \geqslant \|x\|^2$ et Φ est positive et définie. On suppose maintenant que $k < 0$. L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne $|(x|a)|^2 \leqslant \|a\|^2\|x\|^2 = \|x\|^2$ avec égalité lorsque x est colinéaire à a. Cela donne $\Phi(x,x) \geqslant \|x\|^2 + k\|x\|^2 = (1+k)\|x\|^2$ avec égalité lorsque $x = a$ (par exemple). Pour que $\Phi(x,x)$ soit strictement positif pour tout $x \neq 0_E$, il faut que $1 + k > 0$ (en prenant $x = a$) et cette condition est suffisante.
Conclusion : l'application Φ est un produit scalaire si et seulement si $k > -1$.

8.1.2 Orthogonalité

Ce qu'il faut savoir

Soit E un espace préhilbertien réel, muni d'un produit scalaire noté $(\cdot|\cdot)$.

- On dit que :
  - deux vecteurs x et y de E sont orthogonaux lorsque $(x \mid y) = 0$.
  - un vecteur $x \in E$ est orthogonal à un sous-espace vectoriel F de E lorsque, pour tout $y \in F$, on a $(x \mid y) = 0$.
  - deux sous-espaces vectoriels F et G sont orthogonaux lorsque pour tout $(x,y) \in F \times G$, on a $(x \mid y) = 0$.

> **Remarque**
> Si F et G sont orthogonaux, alors $F \cap G = \{0_E\}$, donc la somme $F + G$ est directe.

- Soit A une partie de E. On définit le sous-espace vectoriel
$$A^\perp = \{x \in E \mid \forall y \in A, (x \mid y) = 0\},$$
appelé **orthogonal de** A. On a notamment $A^\perp = (\mathrm{Vect} A)^\perp$.

> **Remarque**
> Si F est un sous-espace vectoriel de E, alors les sous-espaces F et $F^\perp$ sont orthogonaux.

- On dit qu'une famille de vecteurs est orthogonale (resp. orthonormale) lorsque les vecteurs sont deux à deux orthogonaux (resp. deux à deux orthogonaux et unitaires).
- **Résultat important :** une famille de vecteurs orthogonaux **ne contenant pas le vecteur nul** est libre.
- **Théorème de Pythagore :** les vecteurs x et y sont orthogonaux si et seulement si $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.
Si $(x_1, \ldots, x_n)$ est une famille orthogonale, alors $\|x_1 + \cdots + x_n\|^2 = \|x_1\|^2 + \cdots + \|x_n\|^2$.
La réciproque est fausse si $n \geqslant 3$.
- Si les sous-espaces $F_1, \ldots, F_n$ sont deux à deux orthogonaux, alors leur somme est directe, et elle est notée $F_1 \overset{\perp}{\oplus} F_2 \overset{\perp}{\oplus} \ldots \overset{\perp}{\oplus} F_n$.
Lorsque $F_1 \overset{\perp}{\oplus} F_2 \overset{\perp}{\oplus} \ldots \overset{\perp}{\oplus} F_n = E$, on dit que les sous-espaces $F_1, \ldots, F_n$ sont des **supplémentaires orthogonaux**.

> **Remarque**
> Contrairement au cas des sommes directes, il n'y a pas de différence entre « deux à deux orthogonaux » et « chacun est orthogonal à la somme des autres ».

- Lorsque les sous-espaces F et $F^\perp$ sont supplémentaires, on appelle **projection orthogonale sur F**, la projection sur F parallèlement à $F^\perp$. Elle est notée p_F.

Exercice 8.6

CCP MP 2007

Soient E un espace préhilbertien réel de dimension finie et $(v_1, \ldots, v_n)$ une base de E. Montrer que, pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, il existe un unique vecteur $v \in E$ tel que $(v \mid v_i) = x_i$ pour tout $i \in [\![1\,, n]\!]$.

Soit $f : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ x & \longmapsto & ((x \mid v_1), \ldots, (x \mid v_n)) \end{array}$. On observe que f est linéaire. Montrons qu'elle est injective. Soit $x \in E$ tel que $f(x) = 0$. Comme $(v_1, \ldots, v_n)$ est une base, il existe $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $x = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i$, donc $(x \mid x) = \sum_{i=1}^{n} a_i (x \mid v_i)$.

Comme $f(x) = 0$, on a $(x \mid v_i) = 0$ pour tout i, donc $(x \mid x) = 0$, c'est-à-dire $x = 0$. Comme f est injective et $\dim E = \dim \mathbb{R}^n = n$, on conclut que f est bijective. En conséquence, pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, il existe un unique $v \in E$ tel que $f(v) = (x_1, \ldots, x_n)$ c'est-à-dire pour tout $i \in [\![1\,,n]\!]$, $(v \mid v_i) = x_i$.

Exercice 8.7

CCP MP 2007

Soient E un espace préhilbertien réel et $f \in \mathrm{GL}(E)$ telle que :

$$\forall (x, y) \in E^2,\ (x \mid y) = 0 \Rightarrow (f(x) \mid f(y)) = 0.$$

1) Calculer $(u + v \mid u - v)$ lorsque u et v sont deux vecteurs unitaires.

2) Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall x \in E,\ \|f(x)\| = \alpha\|x\|$.

3) En déduire que $\forall (x, y) \in E^2,\ (f(x) \mid f(y)) = \alpha^2 (x \mid y)$.

1) En développant, on obtient $(u + v \mid u - v) = \|u\|^2 - \|v\|^2 = 1 - 1 = 0$.

2) Si u et v sont unitaires, alors $(u + v \mid u - v) = 0$ donc

$$(f(u + v) \mid f(u - v)) = (f(u) + f(v) \mid f(u) - f(v)) = 0,$$

c'est-à-dire $\|f(u)\|^2 = \|f(v)\|^2$. On en déduit que pour tout vecteur unitaire x, la norme de $f(x)$ est constante, que l'on note α. Comme f est bijective, on a $\alpha > 0$. Soit $x \in E \setminus \{0\}$, le vecteur $y = \dfrac{x}{\|x\|}$ est unitaire donc $\|f(y)\| = \alpha$, d'où $\|f(x)\| = \alpha\|x\|$. L'égalité reste valable pour $x = 0$.

3) Soit $(x, y) \in E^2$. Par formule de polarisation, on a :

$$\begin{aligned} 4(f(x) \mid f(y)) &= (f(x + y) \mid f(x + y)) - (f(x - y) \mid f(x - y)) \\ &= \alpha^2 (x + y \mid x + y) - \alpha^2 (x - y \mid x - y) = 4\alpha^2 (x \mid y). \end{aligned}$$

Exercice 8.8

CCP PSI 2006, ENSEA MP 2007

Soit $E = \mathcal{C}^2([0, 1], \mathbb{R})$.

1) Montrer que l'application $\varphi : (f, g) \mapsto \displaystyle\int_0^1 \big(f(t)g(t) + f'(t)g'(t)\big)\, dt$ définit un produit scalaire sur E.

2) Soient $F = \{f \in E \mid f(0) = f(1) = 0\}$ et $G = \{g \in E \mid g'' = g\}$. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires et orthogonaux.

1) L'existence de $\varphi(f, g)$ est immédiate puisque la fonction $fg + f'g'$ est continue sur $[0, 1]$. On montre facilement que φ est bilinéaire et symétrique. Si $f \in E$, on a $\varphi(f, f) = \displaystyle\int_0^1 (f^2(t) + f'(t)^2)\, dt$, si bien que $\varphi(f, f) \geqslant 0$. Soit $f \in E$ telle

que $\varphi(f, f) = 0$. Puisque la fonction $f^2 + f'^2$ est continue et positive sur $[0, 1]$ et que $\displaystyle\int_0^1 (f^2 + f'^2)(t)\,dt = 0$, la fonction est nulle sur $[0, 1]$. Les fonctions sont à valeurs réelles donc f est nulle sur $[0, 1]$. L'application φ est bien un produit scalaire sur E. On le notera $(.|.)$ dans la suite.

2) On commence par montrer que F et G sont orthogonaux (ce qui entraîne que la somme $F + G$ est directe). Soient $f \in F$ et $g \in G$. Une intégration par parties de $\displaystyle\int_0^1 f'(t)g'(t)\,dt$ donne :

$$(f|g) = \int_0^1 f(t)g(t)\,dt + \left[f(t)g'(t)\right]_0^1 - \int_0^1 f(t)g''(t)\,dt = 0,$$

car $f(0) = f(1) = 0$ et $g'' - g = 0$. Les deux sous-espaces F et G sont orthogonaux. Il reste à montrer qu'ils sont supplémentaires. On procède, comme souvent, par analyse-synthèse. Soit $h \in E$. On suppose qu'il existe $f \in F$ et $g \in G$ telles que $h = f + g$. On cherche à déterminer ces fonctions. Le sous-espace le plus simple est G puisque $G = \mathrm{Vect}(\mathrm{sh}, \mathrm{ch})$, alors que F est de dimension infinie. On écrit $g = A\,\mathrm{ch} + B\,\mathrm{sh}$. Les valeurs en 0 et 1 donnent $h(0) = A$ et $h(1) = A\,\mathrm{ch}\,1 + B\,\mathrm{sh}\,1$, c'est-à-dire $B = \dfrac{h(1) - h(0)\,\mathrm{ch}\,1}{\mathrm{sh}\,1}$. La fonction g est donc entièrement déterminée. On écrit alors $f = h - g$, ce qui définit f. On passe à la partie synthèse. Soit $g = A\,\mathrm{ch} + B\,\mathrm{sh}$ où A et B sont les constantes déterminées ci-dessus, et $f = h - g$. Il est immédiat que $g \in G$ et $f + g = h$. Il reste à prouver que $f \in E$. On a $f(0) = h(0) - g(0) = h(0) - A = 0$ et $f(1) = h(1) - g(1) = h(1) - (h(0)\,\mathrm{ch}\,1 + h(1) - h(0)\,\mathrm{ch}\,1) = 0$. Ainsi h se décompose en $h = f + g$ avec $f \in F$ et $g \in G$. Les sous-espaces F et G sont donc des supplémentaires orthogonaux.

Exercice 8.9

Centrale MP 2005

On note $\ell^2(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que la série de terme général u_n^2 converge, muni du produit scalaire défini par $\langle u, v\rangle = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n$.

Soit F le sous-espace formé des suites à support fini (c'est-à-dire ayant un nombre fini de termes non nuls). Vérifier que $F \subset \ell^2(\mathbb{R})$, puis déterminer $F^\perp$.

- Soit u un élement de F, il existe un entier naturel q tel que $\forall n > q,\ u_n = 0$. La suite $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k^2$ est stationnaire à la valeur S_q à partir du rang q, donc la série $\sum u_n^2$ converge.

- Pour $p \in \mathbb{N}$, notons $e(p)$ l'élément de F défini par $\forall n \in \mathbb{N},\ e(p)_n = \delta_{np}$.
  Soit $u \in F^{\perp}$, on a alors $\langle u, e(p)\rangle = 0$, ce qui donne $u_p = 0$, ceci étant vrai pour tout entier p, on en déduit que $u = 0$, donc $F^{\perp} = \{0\}$.

> **Remarque**
> On démontre facilement que F est dense dans $\ell^2(\mathbb{R})$ pour la norme associée au produit scalaire précédent.

8.1.3 Bases orthonormales, projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie

Ce qu'il faut savoir

- On appelle **espace euclidien**, tout espace préhilbertien réel de **dimension finie**.
- Soit E un espace euclidien. Pour $a \in E$, on note φ_a l'endomorphisme de E qui a tout $x \in E$ associe $\varphi_a(x) = (a \mid x)$. L'application $a \mapsto \varphi_a$ est un isomorphisme entre les espaces vectoriels E et E^*.
- Si E est un espace euclidien, alors il admet une base orthonormale. Si $\mathcal{F}$ est une famille orthonormale de vecteurs de E, alors on peut la compléter en une base orthonormale de E.
- **Procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt**
  Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base quelconque de E.
  - Il existe une unique base orthogonale $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ telle que $e'_1 = e_1$ et pour tout $k \in [\![1\,, n-1]\!]$, $e'_{k+1} - e_{k+1} \in \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_k)$.
    On calcule les vecteurs (e'_k) par l'algorithme suivant :
    $$\forall k \in [\![1\,, n-1]\!],\ e'_{k+1} = e_{k+1} - \sum_{j=1}^{k} \frac{(e_{k+1} \mid e'_j)}{(e'_j \mid e'_j)} e'_j\ .$$
  - En posant $e''_k = \dfrac{e'_k}{\|e'_k\|}$, la base $\mathcal{B}'' = (e''_1, \dots, e''_n)$ est orthonormale et on a :
    $$\forall k \in [\![1\,, n]\!],\ \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_k) = \mathrm{Vect}(e''_1, \dots, e''_k)\ .$$
- **Calculs dans une base orthonormale**
  soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale d'un espace euclidien E. Soient $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ et $y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$ deux vecteurs de E.
  - On a $(x \mid y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ et $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$.
  - En posant $X = {}^t(x_1, \dots, x_n)$ et $Y = {}^t(y_1, \dots, y_n)$, on a $(x \mid y) = {}^tXY$ et $\|x\|^2 = {}^tXX$.

- **Projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel de dimension finie**
  Soit E un **espace préhilbertien réel** et F un sous-espace vectoriel de E de **dimension finie**.
  - On a $F \oplus F^{\perp} = E$.
  - Si, de plus, E est de dimension finie, alors $\dim F + \dim F^{\perp} = \dim E$ et $F^{\perp\perp} = F$.
  - Pour $x \in E$, on note $d(x, F) = \min_{z \in F} \|x - z\|$. Ce minimum est atteint en un unique vecteur, le projeté orthogonal de x sur F. On a :
  $$\|x\|^2 = d(x, F)^2 + \|p_F(x)\|^2.$$
  - Soit $\mathcal{B}_F = (e_1, \ldots, e_m)$ une base orthonormale de F. Pour tout $x \in E$, on a :
  $$p_F(x) = \sum_{i=1}^{m} (e_i \,|\, x) e_i \quad , \quad \sum_{i=1}^{m} (e_i \,|\, x)^2 \leqslant \|x\|^2 \quad \textbf{(inégalité de Bessel)}.$$

Exercice 8.10

CCP MP 2005

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ est muni de sa structure euclidienne canonique. Soit F le sous-espace de $\mathbb{R}^4$ d'équations cartésiennes $\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x - y + z - t = 0 \end{cases}$.

1) Donner la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur F.

2) Soit $a = (1, 1, 1, 3) \in \mathbb{R}^4$. Calculer $d(a, F)$.

1) On remarque que $(x, y, z, t) \in F \iff x + z = 0$ et $y + t = 0$. On en déduit que les deux vecteurs $e_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1, 0)$ et $e_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 0, -1)$ forment une base orthonormale de F. Soit $V = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$, alors on a :
$$p_F(V) = \langle e_1, V\rangle e_1 + \langle e_2, V\rangle e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x - z)e_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}(y - t)e_2.$$
La matrice de p_F dans la base canonique est $\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2) On en déduit que $p_F(a) = (0, -1, 0, 1)$, donc
$$d(a, F) = \sqrt{\|a\|^2 - \|p_F(a)\|^2} = \sqrt{10}.$$

Exercice 8.11

Mines-Ponts MP 2007

Calculer $\inf\left\{\int_0^1 (t\ln t - at - b)^2\,dt \mid (a,b)\in\mathbb{R}^2\right\}$. Indiquer les valeurs de (a,b) pour lesquelles ce minimum est atteint.

On munit $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ de son produit scalaire usuel (voir exercice 8.4 page 226) défini par $(f \mid g) = \int_0^1 f(t)g(t)\,dt$. On note g l'élément de E défini par $\forall t \in \,]0,1]$, $g(t) = t\ln t$ et $g(0) = 0$ (prolongement par continuité en 0), f_0 la fonction constante égale à 1 et f_1 la fonction $t \mapsto t$. Soit F le plan vectoriel engendré par f_0 et f_1. Il s'agit de déterminer le minimum de $\|g - f\|^2$ lorsque f décrit F, c'est-à-dire le carré de la distance de g à F. On cherche pour cela une base orthonormale de F en appliquant le procédé d'orthogonalisation de Schmidt à la base (f_0, f_1). On part du vecteur f_0 (qui est unitaire) et on cherche e_1 sous la forme $f_1 + af_0$ vérifiant $(f_0 \mid e_1) = 0$. On obtient la condition $(f_0 \mid f_1) + a(f_0 \mid f_0) = 0$, d'où $a = -\frac{1}{2}$. Par conséquent, $\left(f_0, \dfrac{f_1 - \frac{f_0}{2}}{\|f_1 - \frac{f_0}{2}\|}\right)$ est une base orthonormale de F, donc le projeté orthogonal de g sur F est égal à $p(g) = (g \mid f_0)f_0 + \left(g \mid \dfrac{f_1 - \frac{f_0}{2}}{\|f_1 - \frac{f_0}{2}\|}\right)\dfrac{f_1 - \frac{f_0}{2}}{\|f_1 - \frac{f_0}{2}\|}$. En intégrant par parties, on obtient $(g \mid f_0) = \left[\frac{t^2}{2}\ln t\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{t}{2}\,dt = -\frac{1}{4}$ et par un calcul analogue, $(g \mid f_1) = -\frac{1}{9}$, d'où $(g \mid f_1 - \frac{f_0}{2}) = \frac{1}{72}$. On a $(f_1 - \frac{f_0}{2} \mid f_1 - \frac{f_0}{2}) = \int_0^1 (t^2 - t + \frac{1}{4})\,dt = \frac{1}{12}$, d'où finalement :

$$p(g) = -\frac{1}{4}f_0 + \left(-\frac{1}{9} + \frac{1}{8}\right)12\left(f_1 - \frac{f_0}{2}\right) = \frac{f_1}{6} - \frac{f_0}{3}.$$

On sait d'autre part que $d(g,F)^2 = \|g - p(g)\|^2 = \|g\|^2 - \|p(g)\|^2$, d'où :

$$d(g,F)^2 = \|g\|^2 - (g \mid f_0)^2 - \frac{(g \mid f_1 - \frac{f_0}{2})^2}{(f_1 - \frac{f_0}{2} \mid f_1 - \frac{f_0}{2})}.$$

Or $\|g\|^2 = \int_0^1 t^2(\ln t)^2\,dt = -\frac{2}{3}\int_0^1 t^2 \ln t\,dt = \frac{2}{3}\int_0^1 \frac{t^2}{3}\,dt$ en intégrant deux fois par parties, d'où $\|g\|^2 = \frac{2}{27}$.

Par suite, $d(g,F)^2 = \frac{2}{27} - \frac{1}{16} - \frac{1}{16\times 27} = \frac{1}{108}$.

Autre méthode envisageable : le projeté orthogonal $p(g) = bf_0 + af_1$ est caractérisé par le fait que $(p(g) - g \mid f_0) = (p(g) - g \mid f_1) = 0$, ce qui donne le système $\begin{cases} b(f_0 \mid f_0) + a(f_1 \mid f_0) = (g \mid f_0) \\ b(f_0 \mid f_1) + a(f_1 \mid f_1) = (g \mid f_0) \end{cases}$. Ce système s'écrit $\begin{cases} b + \dfrac{a}{2} = -\dfrac{1}{4} \\ \dfrac{b}{2} + \dfrac{a}{3} = -\dfrac{1}{9} \end{cases}$.

La solution est $a = \dfrac{1}{6}$ et $b = -\dfrac{1}{3}$. On poursuit ensuite comme précédemment.

8.1.4 Espaces préhilbertiens complexes

Ce qu'il faut savoir

Soit E un espace vectoriel complexe. On ne donne ici que les différences par rapport au cas réel.

- On appelle **produit scalaire hermitien** sur E toute application φ définie sur $E \times E$ à valeurs complexes telle que :
  - l'application φ est linéaire à droite,
  - l'application φ est semi-linéaire à gauche, c'est-à-dire que pour tout $y \in E$ et pour tout $(x, x', \lambda) \in E \times E \times \mathbb{C}$, on a
  $$\varphi(x + \lambda x', y) = \varphi(x, y) + \overline{\lambda}\varphi(x', y),$$
  - pour tout $(x, y) \in E \times E$, $\varphi(x, y) = \overline{\varphi(y, x)}$ (φ est hermitienne)
  - pour tout $x \in E$, $\varphi(x, x) \geqslant 0$ (positivité)
  - si $x \in E$ vérifie $\varphi(x, x) = 0$, alors $x = 0$ (définie).
- Si x et y sont dans E, on a
$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\,\mathrm{Re}(x \mid y).$$
- On appelle **espace hermitien** tout espace vectoriel préhilbertien complexe de **dimension finie**. Si F est un sous-espace de dimension finie d'un espace préhilbertien complexe, muni d'une base orthonormale $(e_1, \dots, e_m)$, on a :
$$E = F \overset{\perp}{\oplus} F^{\perp},$$
et si $x \in E$, alors on a $p_F(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{m} (e_k \mid x) e_k$ (la formule ne change pas mais on fera très attention au sens du produit scalaire qui n'est plus symétrique).
- Les expressions du produit scalaire et de la norme dans une base orthonormale deviennent :
$$(x \mid y) = \sum_{k=1}^{n} \overline{x_k} y_k \quad \text{et} \quad \|x\|^2 = \sum_{k=1}^{n} |x_k|^2.$$

Exercice 8.12

TPE MP 2005

1) Montrer que l'application $(f,g) \mapsto (f|g) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \overline{f}g$ définit un produit scalaire hermitien sur l'espace vectoriel $E = \{f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{C}) \mid |f|^2 \text{ intégrable sur } \mathbb{R}\}$.

2) Soient $n \in \mathbb{Z}$ et f_n l'application définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \left(\dfrac{1+ix}{1-ix}\right)^n \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.
Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, la fonction f_n est dans E. Montrer qu'il existe une unique suite $(k_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de réels strictement positifs tels que $(k_n f_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ soit une famille orthonormale de E.

1) Même si cela n'est pas explicitement demandé, on commence par montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{C})$. L'ensemble est non vide. Soient $f \in E$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, il est immédiat que λf est encore continue sur $\mathbb{R}$ et que $|\lambda f|^2$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. Il reste à prouver la stabilité par somme. Soient f et g dans E. On a $|f+g|^2 = |f|^2 + |g|^2 + 2\,\mathrm{Re}(\overline{f}g)$, donc $|f+g|^2 \leqslant |f|^2 + |g|^2 + 2|\overline{f}g|$. On utilise l'inégalité $|2ab| \leqslant a^2 + b^2$, valable pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, appliquée aux complexes $|\overline{f}(t)|$ et $|g(t)|$ (où $t \in \mathbb{R}$). Cela donne finalement, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $|f(t)+g(t)|^2 \leqslant 2(|f(t)|^2 + |g(t)|^2)$ donc $|f+g|^2$ est intégrable. On a prouvé que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{C})$.
Il faut maintenant justifier l'existence du produit scalaire. Si f et g sont dans E, alors on a $|\overline{f}g| \leqslant \dfrac{1}{2}(|f|^2 + |g|^2)$, ce qui prouve l'intégrabilité de $\overline{f}g$ sur $\mathbb{R}$. La linéarité à droite est immédiate. Si $(f,g) \in E^2$, alors on a $(g|f) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \overline{g}f = \int_{\mathbb{R}} \overline{g\overline{f}} = \overline{\int_{\mathbb{R}} g\overline{f}} = \overline{(f|g)}$, l'application est hermitienne. Si $f \in E$, alors $(f|f) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} |f|^2$ est un réel positif ou nul et, puisque $|f|^2$ est continue et positive sur $\mathbb{R}$, on a $(f|f) = 0$ si et seulement si f est nulle sur $\mathbb{R}$. L'application donnée est un produit scalaire hermitien.

2) Chacune des fonctions f_n est continue sur $\mathbb{R}$ à valeurs complexes. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Pour $x \in \mathbb{R}$, on a $|1+ix| = |1-ix|$ et $|f_n(x)|^2 = \dfrac{1}{1+x^2}$. La fonction $|f_n|^2$ est donc intégrable sur $\mathbb{R}$ et $f_n \in E$. Pour justifier l'existence de cette suite (k_n), il suffit de prouver que la famille $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est orthogonale. Comme aucune des fonctions f_n n'est nulle, il suffit de choisir $k_n = \dfrac{1}{\|f_n\|}$. Soient m et n dans $\mathbb{Z}$ et distincts. On calcule le produit scalaire $(f_n|f_m)$ qui vaut :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1-ix}{1+ix}\right)^n \left(\frac{1+ix}{1-ix}\right)^m \frac{1}{1+x^2}\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1+ix}{1-ix}\right)^{m-n} \frac{1}{1+x^2}\,dx.$$

On effectue le changement de variable $x = \tan t$ (possible car on a l'intégrale d'une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$ et $t \mapsto \tan t$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $]-\pi/2, \pi/2[$ sur $\mathbb{R}$). On obtient :

$$\begin{aligned}(f_n|f_m) &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\frac{1+i\tan t}{1-i\tan t}\right)^{m-n} dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\frac{\cos t + i\sin t}{\cos t - i\sin t}\right)^{m-n} dt \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{2i(m-n)t}\,dt = \left[\frac{e^{2i(m-n)t}}{2i(m-n)}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} \\ &= \frac{e^{i(m-n)\pi}-e^{-i(m-n)\pi}}{2i(m-n)} = \frac{\sin(m-n)\pi}{m-n} = 0.\end{aligned}$$

La famille $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est donc orthogonale. Un calcul semblable dans le cas où $m = n$ donne

$$\|f_n\|^2 = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} dt = \pi.$$

On peut donc prendre $k_n = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Exercice 8.13

Centrale PSI 2006

1) Montrer que l'application $f : (P, Q) \mapsto \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \overline{P(e^{it})}Q(e^{it})\,dt$ définit un produit scalaire hermitien sur $\mathbb{C}_n[X]$.

2) Montrer que $(1, X, \cdots, X^n)$ est une base orthonormale de $\mathbb{C}_n[X]$.

3) Soit $Q = X^n + \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} b_k X^k$. Calculer $\|Q\|^2$ et en déduire que $M = \sup\limits_{|z|=1} |Q(z)| \geqslant 1$.

Montrer que $M = 1$ si et seulement si $Q = X^n$.

1) On vérifie facilement que f est semi-linéaire à gauche et linéaire à droite, et que $\forall (P, Q),\ f(Q, P) = \overline{f(P, Q)}$. On a $f(P, P) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} |P(e^{it})|^2\,dt$, qui est $\geqslant 0$. Si $f(P, P) = 0$, alors P est nul sur le cercle unité donc admet une infinité de racines, donc $P = 0$. On a bien montré que f est un produit scalaire hermitien sur $\mathbb{C}_n[X]$.

2) Si $j \neq k$, alors on a :

$$f(X^j, X^k) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(k-j)t}\,dt = 0, \quad \text{et} \quad f(X^k, X^k) = 1,$$

donc $(1, X, \cdots, X^n)$ est une base orthonormale de $\mathbb{C}_n[X]$.

3) Comme la base canonique est orthonormale, on a $\|Q\|^2 = 1 + \sum_{k=0}^{n-1} |b_k|^2$. D'autre part, $\|Q\|^2 \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} M^2\,dt = M^2$, d'où $M \geqslant 1$. Si $M = 1$, alors $\sum_{k=0}^{n-1} |b_k|^2 = 0$, donc tous les b_k sont nuls et $Q = X^n$.
Réciproquement, si $Q = X^n$, on a bien $Q(e^{it}) = e^{int}$, d'où $M = 1$.

8.2 EXERCICES D'ENTRAÎNEMENT

Exercice 8.14

Centrale MP 2005, 2006

Soient q_1 et q_2 des formes quadratiques sur $\mathbb{R}^n$, q_2 étant définie positive. Montrer que q_1/q_2 est bornée sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Comme q_2 est définie positive, $\sqrt{q_2}$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$.
Notons $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid q_2(x) = 1\}$ la sphère unité pour cette norme, S est une partie fermée bornée de $\mathbb{R}^n$ donc compacte. La forme quadratique q_1 étant continue sur $\mathbb{R}^n$, elle est bornée et atteint ses bornes sur S, donc il existe deux réels m et M tels que $\forall y \in S,\ m \leqslant q_1(y) \leqslant M$. Soit $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, le vecteur $\dfrac{x}{\sqrt{q_2(x)}}$ appartient à S, donc $m \leqslant q_1(\dfrac{x}{\sqrt{q_2(x)}}) \leqslant M$, d'où $m \leqslant \dfrac{q_1(x)}{q_2(x)} \leqslant M$.

Exercice 8.15

Mines-Ponts MP 2006

Soit E un espace vectoriel normé.

1) Montrer que $\forall (x, y) \in E^2,\ \|x\| + \|y\| \leqslant 2\max(\|x + y\|, \|x - y\|)$.

2) Montrer que l'on peut avoir l'égalité avec $x \neq 0$ et $y \neq 0$.

3) On suppose désormais que la norme est euclidienne.

- Montrer que $\forall (x, y) \in E^2,\ \|x\| + \|y\| \leqslant \sqrt{2}\max(\|x + y\|, \|x - y\|)$.
- Peut-on améliorer la constante $\sqrt{2}$?

1) Soit $(x, y) \in E^2$. On a $x = \dfrac{x+y}{2} + \dfrac{x-y}{2}$ donc par l'inégalité triangulaire, $\|x\| \leqslant \dfrac{\|x+y\|}{2} + \dfrac{\|x-y\|}{2}$. De même, $y = \dfrac{x+y}{2} + \dfrac{y-x}{2}$ donc

$\|y\| \leqslant \dfrac{\|x+y\|}{2} + \dfrac{\|x-y\|}{2}$. En ajoutant les deux inégalités, on obtient finalement :

$$\|x\| + \|y\| \leqslant \|x+y\| + \|x-y\| \leqslant 2\max(\|x+y\|, \|x-y\|)\,.$$

2) On se place dans $\mathbb{R}^2$ muni de la norme infinie définie par :

$$\|(x_1, x_2)\|_\infty = \sup(|x_1|, |x_2|).$$

On considère $x = (1,0)$ et $y = (0,1)$. On a $x+y = (1,1)$ et $x-y = (1,-1)$, donc $\|x\|_\infty + \|y\|_\infty = 2$ et $\|x+y\|_\infty = \|x-y\|_\infty = 1$ donc

$$2\max(\|x+y\|_\infty, \|x-y\|_\infty) = 2.$$

3) • Soit $(x,y) \in E^2$. En appliquant la relation de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^2$ aux vecteurs $(1,1)$ et $(\|x\|, \|y\|)$, on obtient $\|x\| + \|y\| \leqslant \sqrt{2}\sqrt{\|x\|^2 + \|y\|^2}$.
Or $2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 = \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 \leqslant 2\max(\|x+y\|^2, \|x-y\|^2)$, d'où $\|x\| + \|y\| \leqslant \sqrt{2}\max(\|x+y\|, \|x-y\|)$.

• On se place dans $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire canonique. On choisit de nouveau $x = (1,0)$ et $y = (0,1)$. On a alors $\|x\| + \|y\| = 2$, $\|x+y\| = \|x-y\| = \sqrt{2}$, donc la constante $\sqrt{2}$ est optimale.

Exercice 8.16

Mines-Ponts MP 2005

On pose $E = \mathcal{C}([-1,1], \mathbb{R})$. On pose, pour f et g dans E,

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)\,dt.$$

1) Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E.

2) On pose $F = \{f \in E \mid \forall x \in [\,0,\,1\,]\,,\ f(x) = 0\}$. Déterminer $F^\perp$.

3) Déterminer $F + F^\perp$.

4) Déterminer l'orthogonal de l'ensemble des fonctions polynomiales.

1) voir exercice 8.4 page 226.

2) Posons $G = \{f \in E \mid \forall x \in [\,-1,\,0\,]\,,\ f(x) = 0\}$. On remarque que si $f \in F$ et $g \in G$, alors le produit fg est nul donc $\langle f, g\rangle = 0$, d'où $G \subset F^\perp$.
Soit $g \notin G$, quitte à changer g en $-g$, il existe $a \in [\,-1,\,0\,]$ tel que $g(a) > 0$. Comme g est continue, il existe un intervalle $[\,b,\,c\,] \subset [\,-1,\,0\,]$ tel que $b < c$ et $g > 0$ sur $[\,b,\,c\,]$. On définit alors $f \in E$ continue affine par morceaux par $\forall x \in [\,-1,\,1\,] \setminus [\,b,\,c\,]\,,\ f(x) = 0$, $f(\dfrac{b+c}{2}) = 1$, f affine sur $\left[b,\,\dfrac{b+c}{2}\right]$

et sur $\left[\dfrac{b+c}{2}, c\right]$. On observe que $f \in F$ et que le produit fg est nul sur $[-1, 1] \setminus [b, c]$ et strictement positif sur $]b, c[$, donc $\langle f, g\rangle > 0$, d'où $g \notin F^{\perp}$. Finalement, on a montré que $F^{\perp} = G$.

3) Soit $f \in E$ telle que $f(0) = 0$. On construit deux fonctions g et h en posant $\begin{cases} \forall x \in [-1, 0], & g(x) = f(x), \quad h(x) = 0 \\ \forall x \in [0, 1], & g(x) = 0, \quad h(x) = f(x) \end{cases}$. Les fonctions g et h sont continues sur $[-1, 1]$ car f est continue et $f(0) = 0$, donc $g \in F$ et $h \in G = F^{\perp}$.
Inversement si $f \in F$ et $g \in F^{\perp}$, alors $f(0) = 0$ et $g(0) = 0$ donc $(f+g)(0) = 0$. Il en résulte que $F + F^{\perp} = \{f \in E \mid f(0) = 0\}$. On observe que $F + F^{\perp} \neq E$, ce qui n'est pas en contradiction avec le cours car F est de dimension infinie.

4) Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des fonctions polynomiales, et $f \in \mathcal{P}^{\perp}$. Par théorème de Weierstrass, il existe une suite (P_n) de fonctions polynomiales qui converge uniformément vers f sur $[-1, 1]$. Or $\|P_n f - f^2\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty \|P_n - f\|_\infty$, donc

$$\left|\int_{-1}^{1} (P_n(x)f(x) - f(x)^2)\, dx\right| \leqslant 2\|f\|_\infty \|P_n - f\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Or $\displaystyle\int_{-1}^{1} P_n(x)f(x)\, dx = 0$, d'où en faisant tendre n vers l'infini, on obtient que $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)^2\, dx = 0$ d'où $f = 0$ par continuité de f. On en déduit que $\mathcal{P}^{\perp} = \{0\}$.

Exercice 8.17

Mines-Ponts MP 2005

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire rendant orthonormale la base canonique $(E_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, et on note $\|\cdot\|$ la norme associée.

1) Verifier que $\forall (M, N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2,\ (M \mid N) = \mathrm{tr}({}^tMN)$.

2) Soient I la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1. Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, calculer $\displaystyle\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \|M - aI - bJ\|$.

1) Soient $M = (m_{i,j})$ et $N = (n_{i,j})$ appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Comme $M = \displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} m_{i,j}E_{i,j}$ et $N = \displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} n_{i,j}E_{i,j}$ et que $(E_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est orthonormale, on a $(M \mid N) = \displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} m_{i,j}n_{i,j}$. Or le terme d'indice (j, j) de ${}^tMN$ est égal à $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} m_{i,j}n_{i,j}$, donc $(M \mid N) = \mathrm{tr}({}^tMN)$.

2) Notons F le plan vectoriel engendré par les matrices I_n et J. Il s'agit de calculer la distance de M à F. On vérifie que $(I \mid I) = \operatorname{tr} I = n$, $(I \mid J) = \operatorname{tr} J = n$, $(J \mid J) = \operatorname{tr} J^2 = \operatorname{tr}(nJ) = n^2$. On en déduit que la famille $\left(\dfrac{I}{\sqrt{n}}, \dfrac{J-I}{\sqrt{n^2-n}}\right)$ est une base orthonormale de F, donc on a :

$$p_F(M) = \frac{1}{n}(I \mid M)I + \frac{1}{n^2-n}(J - I \mid M)(J-I).$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned}\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \|M - aI - bJ\| = d(M,F) &= \sqrt{\|M\|^2 - \|p_F(M)\|^2}\\ &= \sqrt{(M \mid M) - \left(\frac{I}{\sqrt{n}} \mid M\right)^2 - \left(\frac{J-I}{\sqrt{n^2-n}} \mid M\right)^2}\\ &= \sqrt{\operatorname{tr}({}^tMM) - \frac{1}{n}(\operatorname{tr} M)^2 - \frac{1}{n^2-n}(\operatorname{tr}(J-I)M)^2}.\end{aligned}$$

Exercice 8.18

Mines-Ponts MP 2007, déterminant de Gram

Soit E un espace euclidien.

1) Soit $(v_1, \ldots, v_p)$ une famille de vecteurs de E. On note $\mathcal{G}(v_1, \ldots, v_p)$ la matrice carrée d'ordre p de terme général $(v_i \mid v_j)$. Montrer que :
- si $(v_1, \ldots, v_p)$ est liée, alors $\det \mathcal{G}(v_1, \ldots, v_p) = 0$,
- si $(v_1, \ldots, v_p)$ est libre, alors $\det \mathcal{G}(v_1, \ldots, v_p) > 0$.

2) On suppose que la famille $(v_1, \ldots, v_p)$ est libre et on pose $F = \operatorname{Vect}(v_1, \ldots, v_p)$. Montrer que, pour tout $x \in E$, on a $d(x,F) = \sqrt{\dfrac{\det \mathcal{G}(v_1, \ldots, v_p, x)}{\det \mathcal{G}(v_1, \ldots, v_p)}}$.

1) • On suppose $(v_1, \ldots, v_p)$ liée. Il existe un p-uplet $(a_1, \ldots, a_p) \in \mathbb{R}^p$ non nul tel que $\displaystyle\sum_{j=1}^{p} a_j v_j = 0$. En faisant le produit scalaire par v_i, on obtient que, pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $\displaystyle\sum_{j=1}^{p} a_j (v_i \mid v_j) = 0$, ce qui signifie que les colonnes C_j de la matrice de Gram vérifient la relation de liaison $\displaystyle\sum_{j=1}^{p} a_j C_j = 0$, donc que son déterminant est nul.

• On suppose $(v_1, \ldots, v_p)$ libre et on note F le sous-espace (de dimension p) engendré par ces vecteurs. Soient $(v'_1, \ldots, v'_p)$ une base orthonormale de

F et $P = (p_{ij})$ la matrice de passage de la base v' à v. On a pour tout $(i, j) \in [\![1 , p]\!]^2$, $v_i = \sum_{k=1}^{p} p_{ki} v'_k$. Comme v' est orthonormale, on en déduit que $(v_i \mid v_j) = \sum_{k=1}^{p} p_{ki} p_{kj}$, donc $\mathcal{G}(v_1, \dots, v_p) = {}^tP P$. Par conséquent, $\det \mathcal{G}(v_1, \dots, v_p) = (\det P)^2 > 0$ car P est inversible.

2) Soit $x \in E$ et soit $p(x)$ le projeté orthogonal de x sur F. Comme $(v_1, \dots, v_p)$ est une base de F, il existe $(a_1, \dots, a_p) \in \mathbb{R}^p$ tel que $p(x) = \sum_{i=1}^{p} a_i v_i$. Soient $(C_j)_{1 \leqslant j \leqslant p+1}$ les colonnes de la matrice $M = \mathcal{G}(v_1, \dots, v_p, x)$. On effectue l'opération élémentaire $C_{p+1} \leftarrow C_{p+1} - \sum_{j=1}^{p} a_j C_j$. Pour $i \in [\![1 , p]\!]$, le nouveau coefficient de la ligne i de C_{p+1} est égal à :

$$(x \mid v_i) - \sum_{j=1}^{p} a_j (v_j \mid v_i) = (x - p(x) \mid v_i) = 0$$

car $x - p(x) \in F^{\perp}$, et le dernier coefficient est égal à :

$$\begin{aligned}(x \mid x) - \sum_{j=1}^{p} a_j (x \mid v_j) &= (x \mid x - p(x)) \\ &= \|x - p(x)\|^2 + (p(x) \mid x - p(x)) = d(x, F)^2 .\end{aligned}$$

En développant le déterminant obtenu par rapport à la dernière colonne, on obtient finalement $\det M = d(x, F)^2 \det \mathcal{G}(v_1, \dots, v_p)$, puis le résultat demandé car les déterminants sont strictement positifs.

Exercice 8.19

Polytechnique MP 2007

On munit $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire défini par $\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)\,dt$. Existe-t-il $A \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall P \in \mathbb{R}[X],\ P(0) = \langle A, P \rangle$?

Supposons qu'il existe un tel polynôme A. On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\langle A, X^n \rangle = 0$, autrement dit pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\langle XA, X^n \rangle = \langle A, X^{n+1} \rangle = 0$. Il en résulte que le polynôme XA est orthogonal à tout élément de la base canonique de $\mathbb{R}[X]$, donc en le décomposant dans cette base, on en déduit qu'il est orthogonal à lui-même, donc c'est le polynôme nul. Or $\mathbb{R}[X]$ est intègre, donc $A = 0$. On choisit alors $P = 1$, on a $P(0) = 1$ et $\langle A, P \rangle = 0$, ce qui entraîne une contradiction.

Remarque

Cet exercice illustre le fait que l'application $A \mapsto \langle A,\cdot\rangle$ de $\mathbb{R}[X]$ dans son dual n'est pas un isomorphisme. En effet, la forme linéaire $P \mapsto P(0)$ ne peut pas s'écrire sous la forme $\langle A,\cdot\rangle$. Ce résultat n'est pas en contradiction avec le cours car $\mathbb{R}[X]$ est de dimension infinie.

8.3 EXERCICES D'APPROFONDISSEMENT

Exercice 8.20

Centrale MP 2007, Mines-Ponts MP 2006

On munit $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ du produit scalaire $(f,g) \mapsto \langle f,g\rangle = \displaystyle\int_0^1 f(t)g(t)\,dt$.

1) Montrer l'existence et l'unicité de $A_n \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ \ P(0) = \langle A_n, P\rangle.$$

2) Montrer que A_n est scindé sur $\mathbb{R}$ et possède n racines simples dans $]0,\ 1[$.

1) Puisque $\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension finie, l'application $A \mapsto \langle A,\cdot\rangle$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ sur son dual, or l'application $\delta : P \mapsto P(0)$ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}_n[X]$, donc il existe un unique polynôme $A_n \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\delta = \langle A_n,\cdot\rangle$, c'est-à-dire pour tout $P \in \mathbb{R}[X],\ P(0) = \langle A_n, P\rangle$.

2) Le polynôme A_n n'est pas nul car la forme linéaire δ n'est pas nulle. Notons r le nombre de racines d'ordre de multiplicité impaire de A_n appartenant à l'intervalle $]0,\ 1[$ et supposons $r \leqslant n-1$. Si on note $a_1,\dots,a_r$ ces racines, alors on peut écrire $A_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{r}(X-a_k)\,B$, où B est un polynôme non nul de signe constant sur $]0,\ 1[$. Par définition de A_n, on a pour tout $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, $\langle XP, A_n\rangle = 0$, donc en particulier pour $P = \displaystyle\prod_{k=1}^{r}(X-a_k)$, ce qui donne $\displaystyle\int_0^1 t\prod_{k=1}^{r}(t-a_k)^2\,B(t)\,dt = 0$. Or la fonction intégrée est continue sur $]0,\ 1[$ et garde un signe constant, donc elle est nulle sur $]0,\ 1[$, ce qui signifie que le polynôme $\displaystyle\prod_{k=1}^{r}(X-a_k)^2B$ possède une infinité de racines, donc c'est le polynôme nul, d'où $B=0$ ce qui est absurde. On en déduit que $r=n$, donc A_n admet n racines d'ordre impair dans $]0,\ 1[$, or il est de degré inférieur ou égal à n, il est donc exactement de degré n et possède n racines simples dans l'intervalle $]0,\ 1[$.

Exercice 8.21

Mines-Ponts MP 2005

On pose $E_n = \{P \in \mathbb{R}[X] \,|\, \forall Q \in \mathbb{R}_n[X],\ \int_0^1 P(t)Q(t)\,dt = 0\}$.

1) Montrer que E_n est un espace vectoriel.

2) Montrer qu'il existe un unique polynôme P dans $\mathbb{R}_{n+1}[X]$ unitaire appartenant à E_n.

3) ☕ Montrer que P n'a que des racines simples et réelles, appartenant toutes à l'intervalle $]0,\ 1[$.

1) On munit $\mathbb{R}[X]$ de son produit scalaire usuel, défini par $(P \mid Q) = \int_0^1 P(t)Q(t)\,dt$.
On constate alors que $E_n = \mathbb{R}_n[X]^\perp$, c'est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.

2) Comme $\mathbb{R}_n[X]$ est un sous-espace de $\mathbb{R}[X]$ de dimension finie (égale à $n+1$), on sait que $\mathbb{R}[X] = \mathbb{R}_n[X] \overset{\perp}{\oplus} E_n$. Un polynôme P vérifie la propriété demandée si et seulement si $P \in E_n$ et $X^{n+1} - P \in \mathbb{R}_n[X]$, donc P est le projeté orthogonal de X^{n+1} sur E_n. Il est de degré $n+1$.

3) Notons r le nombre de racines d'ordre de multiplicité impaire de P appartenant à l'intervalle $]0,\ 1[$ et supposons $r \leqslant n$. Si on note $a_1, \ldots, a_r$ ces racines, alors on peut écrire $P = \prod_{k=1}^{r}(X - a_k)\,B$, où B est un polynôme non constant de signe constant sur $]0,\ 1[$. Comme $P \in E_n$, $(P \,|\, \prod_{k=1}^{r}(X - a_k)) = 0$, d'où $\int_0^1 \prod_{k=1}^{r}(t - a_k)^2\, B(t)\,dt = 0$. Or la fonction intégrée est continue sur $]0,\ 1[$ et garde un signe constant, donc elle est nulle sur $]0,\ 1[$, ce qui signifie que le polynôme $\prod_{k=1}^{r}(X - a_k)^2 B$ possède une infinité de racines, donc c'est le polynôme nul, d'où $B = 0$ ce qui est absurde. Il en résulte que $r = n+1$, or P est de degré $n+1$, donc possède exactement $n+1$ racines simples dans $]0,\ 1[$, et n'en a pas d'autre.

Exercice 8.22

Centrale MP 2007

Soit E un espace préhilbertien réel. On note N la norme dans $\mathcal{L}_c(E)$ subordonnée à celle de E. Soit p un projecteur continu et non nul de E.

1) Montrer que $\operatorname{Ker} p$ et $\operatorname{Im} p$ sont fermés.

2) Montrer que si Ker p et Im p sont complets, alors E est complet.

3) Montrer que $N(p) \geqslant 1$.

4) Montrer que p est un projecteur orthogonal si et seulement si $N(p) = 1$.

5) ☕☕

- Montrer qu'une limite simple de projecteurs orthogonaux est un projecteur orthogonal.
- Donner un exemple d'une suite de projecteurs orthogonaux non nuls qui possède une limite simple nulle.
  Indication de la rédaction : on utilisera l'identité de Bessel-Parseval suivante : soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille orthonormale de E et $F = \operatorname{Vect}\{e_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.
  Si F est dense dans E, alors pour tout $x \in E$, on a $\|x\|^2 = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \langle e_n, x\rangle^2$.

1) On a $\operatorname{Ker} p = p^{-1}(\{0\})$ et $\operatorname{Im} p = (p - \operatorname{Id}_E)^{-1}(\{0\})$ car p est un projecteur. Or les endomorphismes p et $p - \operatorname{Id}_E$ sont continus et le singleton $\{0\}$ est fermé, donc Ker p et Im p sont fermés.

2) Soit (x_n) une suite de Cauchy dans E. Comme p est continu, on a $\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2$, $\|p(x_n) - p(x_m)\| \leqslant N(p)\|x_n - x_m\|$, donc $(p(x_n))$ est une suite de Cauchy dans Im p qui est complet, donc elle converge vers un élément $y \in \operatorname{Im} p$. Par différence, la suite $(x_n - p(x_n))$ est également de Cauchy dans Ker p qui est complet, donc converge vers un élément $z \in \operatorname{Ker} p$. On en déduit que la suite (x_n) converge vers $y + z$, ce qui démontre que E est complet.

3) Comme p est non nul, il existe un vecteur y non nul appartenant à Im p, d'où $\|p(y)\| = \|y\|$. Or $N(p) = \sup\limits_{x\neq 0} \dfrac{\|p(x)\|}{\|x\|}$, d'où $N(p) \geqslant 1$.

4)
- Si p est un projecteur orthogonal, alors $\forall x \in E,\ \|x\|^2 = \|p(x)\|^2 + \|x - p(x)\|^2$, donc $\|p(x)\| \leqslant \|x\|$. Avec la question précédente, on en déduit que $N(p) = 1$.
- On suppose $N(p) = 1$, c'est-à-dire $\forall x \in E,\ \|p(x)\| \leqslant \|x\|$. Soient $x \in \operatorname{Im} p$ et $y \in \operatorname{Ker} p$. On a $\forall t \in \mathbb{R},\ p(x + ty) = x$, d'où $\|x + ty\|^2 \geqslant \|x\|^2$, c'est-à-dire $t(t\|y\|^2 + 2\langle x, y\rangle) \geqslant 0$. On en déduit que pour tout $t > 0$, $t\|y\|^2 + 2\langle x, y\rangle \geqslant 0$, d'où en faisant tendre t vers 0, on obtient $\langle x, y\rangle \geqslant 0$. Pour tout $t < 0$, $t\|y\|^2 + 2\langle x, y\rangle \leqslant 0$, d'où $\langle x, y\rangle \leqslant 0$ en faisant tendre t vers 0. En conclusion, $\langle x, y\rangle = 0$, donc p est un projecteur orthogonal.

5)
- Soit (p_n) une suite de projecteurs orthogonaux qui converge simplement vers p. Comme p_n est linéaire, on a $\forall (\alpha, x, y) \in \mathbb{R} \times E^2,\ p_n(\alpha x + y) = \alpha p_n(x) + p_n(y)$. En faisant tendre n vers $+\infty$, on conclut que p est linéaire.
  On a pour tout $x \in E$, $\|p_n(x)\| \leqslant \|x\|$, d'où en faisant tendre n vers $+\infty$,

$\|p(x)\| \leqslant \|x\|$, donc p est continue et $N(p) \leqslant 1$.

$$\begin{aligned}\|p_n(p_n(x)) - p(p(x))\| &\leqslant \|p_n(p_n(x)) - p_n(p(x))\| + \|p_n(p(x)) - p(p(x))\| \\ &\leqslant \|p_n(x) - p(x)\| + \|p_n(p(x)) - p(p(x))\| .\end{aligned}$$

Chacun de ces deux termes tend vers 0, car

$$p_n(x) \to p(x) \quad \text{et} \quad p_n(p(x)) \to p(p(x)).$$

Or $p_n(p_n(x)) = p_n(x)$, donc on obtient en passant à la limite que

$$p(p(x)) = p(x),$$

donc p est un projecteur. Si p est non nul, alors d'après la question 3 et l'inégalité $N(p) \leqslant 1$, on obtient $N(p) = 1$, donc p est un projecteur orthogonal (et cela reste vrai si $p = 0$).

- Soit E un espace préhilbertien de dimension infinie, contenant une famille orthonormale $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $F = \text{Vect}\{e_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ soit dense dans E. Posons $F_n = \text{Vect}\{e_k \,|\, k \in [\![0\,,n]\!]\}$ pour tout n et p_{F_n} le projecteur orthogonal sur F_n, qui existe puisque F_n est de dimension finie. Comme la famille (e_k) est orthonormale, on a $p_{F_n}(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \langle e_k, x\rangle x$. Posons $p_n = \text{Id}_E - p_{F_n}$, on observe que p_n est le projecteur orthogonal sur $F_n^{\perp}$, donc p_n est non nul. D'après l'identité de Parseval, $\|p_n(x)\|^2 = \|x\|^2 - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \langle e_k, x\rangle^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, donc la suite (p_n) converge simplement vers 0.

Exercice 8.23

Centrale MP 2007, Mines-Ponts MP 2007, Polytechnique MP 2005

Soit $\mathcal{E}$ l'espace des fonctions continues f de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ telles que $x \mapsto f(x)^2 e^{-x}$ soit intégrable sur $\mathbb{R}_+$. On munit $\mathcal{E}$ du produit scalaire défini par :

$$\forall (f,g) \in \mathcal{E}^2,\ \langle f, g\rangle = \int_0^{+\infty} f(x)g(x)e^{-x}\,dx$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, soit L_n la fonction $x \mapsto \dfrac{e^x}{n!}\dfrac{d^n}{dx^n}(e^{-x}x^n)$ définie sur $\mathbb{R}^+$.

1) Justifier que $\mathcal{E}$ contient les fonctions polynomiales et que L_n est une fonction polynomiale de degré n dont on indiquera le coefficient dominant et le terme constant.

2) Montrer que $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille orthonormale de $\mathcal{E}$.

3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe $(a_n, b_n, c_n) \in \mathbb{R}^3$ tels que :

$$XL_n = a_n L_{n+1} + b_n L_n + c_n L_{n-1}.\ \text{Déterminer } a_n.$$

4) Pour $a \in \mathbb{R}$, soit $f_a : x \mapsto e^{-ax}$. A quelle condition a-t-on $f_a \in \mathcal{E}$? Cette condition étant supposée réalisée, calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \langle f_a, L_n\rangle^2 - \langle f_a, f_a\rangle$. Que peut-on en conclure ?

1) Si $P \in \mathbb{R}[X]$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 P(x)^2 e^{-x} = 0$, donc $x \mapsto P^2(x)e^{-x}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$. En utilisant la formule de Leibniz, on obtient :

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k e^{-x} n(n-1)\cdots(k+1)x^k = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{n!}{(k!)^2(n-k)!}x^k .$$

On en déduit que L_n est une fonction polynomiale de degré n, de coefficient dominant $(-1)^n/n!$ et de terme constant égal à 1.

2) On remarque que pour $p \leqslant n$, $\langle L_n, X^p\rangle = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_0^{+\infty} x^p \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x}x^n)dx$. Posons pour k et j entiers naturels tels que $j \leqslant k \leqslant n$, $I_{k,j} = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^j \frac{d^k}{dx^k}(e^{-x}x^n)dx$. En intégrant par parties, on obtient pour $j \geqslant 1$, $I_{k,j} = \left[\dfrac{d^{k-1}}{dx^{k-1}}(e^{-x}x^n)x^j\right]_0^{+\infty} - jI_{k-1,j-1}$. Le crochet a pour limite 0 en $+\infty$ et est nul en 0 car il reste une puissance de x quand on dérive $k-1$ fois $e^{-x}x^n$. On en déduit que $I_{k,j} = -jI_{k-1,j-1}$, donc par récurrence, $I_{n,p} = (-1)^p p! I_{n-p,0} = (-1)^p p! \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{d^{n-p}}{dx^{n-p}}(e^{-x}x^n)\,dx$.
Si $p < n$, alors $I_{n,p} = 0$ car la dérivée $(n-p-1)^{\text{ème}}$ de $e^{-x}x^n$ s'annule en 0 et tend vers 0 en $+\infty$.
Si $p = n$, alors $I_{n,n} = (-1)^n n! J_n$, où $J_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}x^n\,dx$. En intégrant par parties, on obtient $J_n = \left[-e^{-x}x^n\right]_0^{+\infty} + n\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}x^{n-1}\,dx = nJ_{n-1}$. On en déduit par récurrence $J_n = n!J_0 = n!$, d'où $I_{n,n} = (-1)^n(n!)^2$. Cela entraîne que pour tout $p < n$, $\langle L_n, X^p\rangle = 0$, donc par linéarité, L_n est orthogonal à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, et en particulier à L_p pour tout $p < n$. Comme le coefficient dominant de L_n est $\dfrac{(-1)^n}{n!}$, on a $\langle L_n, L_n\rangle = \dfrac{(-1)^n}{n!}\langle L_n, X^n\rangle = \dfrac{(-1)^n}{(n!)^2} I_{n,n} = 1$. On a bien montré que $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille orthonormale de $\mathcal{E}$.

3) Comme XL_n est de degré $n+1$ et que $(L_k)_{0\leqslant k\leqslant n+1}$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}_{n+1}[X]$, on a $XL_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n+1}\langle XL_n, L_k\rangle L_k$. On remarque que

$$\langle XL_n, L_k\rangle = \langle L_n, XL_k\rangle,$$

donc si $k \leqslant n-2$, alors $XL_k \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ d'où $\langle XL_n, L_k\rangle = 0$. En remplaçant, on obtient :

$$XL_n = a_n L_{n+1} + b_n L_n + c_n L_n$$

avec $a_n = \langle XL_n, L_{n+1}\rangle$, $b_n = \langle XL_n, L_n\rangle$ et $c_n = \langle XL_n, L_{n-1}\rangle$. Comme le coefficient dominant de L_n est égal à $(-1)^n/n!$, le polynôme $n!XL_n + (n+1)!L_{n+1}$ est de degré inférieur ou égal à n, donc son produit scalaire par L_{n+1} est nul, d'où $n!a_n + (n+1)! = 0$, d'où $a_n = -(n+1)$.

4) La fonction f_a appartient à $\mathcal{E}$ si et seulement si $x \mapsto e^{-(2a+1)x}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, c'est-à-dire $a > -1/2$.

On a d'une part $\langle f_a, f_a\rangle = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-(2a+1)x}\,dx = \frac{1}{2a+1}$ et d'autre part :

$$\begin{aligned} n!\langle f_a, L_n\rangle &= \int_0^{+\infty} e^{-ax}\frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x})\,dx \\ &= \left[e^{-ax}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^n e^{-x})\right]_0^{+\infty} + a\int_0^{+\infty} e^{-ax}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^n e^{-x})\,dx \end{aligned}$$

en intégrant par parties. Le premier crochet est nul. En poursuivant les intégrations par parties, de la même façon qu'à la question 2), on obtient :

$$n!\langle f_a, L_n\rangle = a^n \int_0^{+\infty} e^{-ax}x^n e^{-x}\,dx.$$

Après le changement de variables $t = (a+1)x$, on aboutit à :

$$\frac{a^n}{(a+1)^{n+1}}\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\,dt.$$

Cette dernière intégrale a été calculée plus haut et vaut $n!$, d'où

$$\langle f_a, L_n\rangle = \frac{a^n}{(a+1)^{n+1}}.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty}\langle f_a, L_n\rangle^2 - \langle f_a, f_a\rangle &= \frac{1}{(a+1)^2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a}{a+1}\right)^{2n} - \frac{1}{2a+1} \\ &= \frac{1}{(a+1)^2}\frac{1}{1-\dfrac{a^2}{(a+1)^2}} - \frac{1}{2a+1} = 0. \end{aligned}$$

Par conséquent, $d(f_a, \mathbb{R}_n[X]) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, autrement dit f_a appartient à l'adhérence de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathcal{E}$ muni de la norme préhilbertienne étudiée.

9 Espaces euclidiens

9.1 L'ESSENTIEL DU COURS ET EXERCICES D'ASSIMILATION

Dans toute la suite du chapitre, sauf indication contraire, E désigne un espace euclidien de dimension n.

9.1.1 Adjoint d'un endomorphisme

Ce qu'il faut savoir

- Soit u un endomorphisme de E. Il existe un unique endomorphisme de E noté u^*, appelé **adjoint** de u, tel que $\forall (x, y) \in E^2,\ (u^*(x) \mid y) = (x \mid u(y))$. Si A est la matrice de u dans une **base orthonormale**, alors ${}^tA$ est la matrice de u^* dans cette base.
- **Propriétés de l'adjoint** :
  - L'application $u \mapsto u^*$ est un endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$. Si u et v appartiennent à $\mathcal{L}(E)$, alors $(u^*)^* = u$ et $(u \circ v)^* = v^* \circ u^*$.
  - Si F est un sous-espace vectoriel stable par u, alors $F^\perp$ est stable par u^*.
  - $\operatorname{Ker} u^* = (\operatorname{Im} u)^\perp \quad , \quad \operatorname{Im} u^* = (\operatorname{Ker} u)^\perp$.
  - Les endomorphismes u et u^* ont même rang, même déterminant, même trace, même polynôme caractéristique.
- On dit que u est **autoadjoint** (ou **symétrique**) lorsque $u^* = u$.
  L'endomorphisme u est autoadjoint si et seulement si sa matrice dans une base orthonormale est symétrique.
- On dit que u est **antisymétrique** lorsque $u^* = -u$.
  L'endomorphisme u est antisymétrique si et seulement si sa matrice dans une base orthonormale est antisymétrique.
- On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$) l'ensemble des matrices réelles symétriques (resp. antisymétriques) d'ordre n. On a $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- Si φ est une forme bilinéaire symétrique sur E, alors il existe un unique endomorphisme autoadjoint u tel que $\forall (x, y) \in E^2,\ \varphi(x, y) = (u(x) \mid y)$. Sa matrice dans toute base orthonormale est égale à celle de φ.
- L'endomorphisme autoadjoint u est dit **positif** (resp. **défini positif**) lorsque la forme bilinéaire symétrique associée à u est positive (resp. définie positive).

Une matrice symétrique A est dite positive lorsque l'endomorphisme autoadjoint qu'elle représente dans une base orthonormale est positif.
Notation : $\mathcal{S}_n^+$ (resp. $\mathcal{S}_n^{++}$) désigne l'ensemble des matrices symétriques positives (resp. définies positives).

Exercice 9.1

TPE MP 2007

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On pose $u = f^* \circ f$.

1) Démontrer que u est autoadjoint positif.

2) Montrer que si f est inversible, alors u est défini positif.

3) Montrer que $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} u = \operatorname{Im} f^*$.

1) On a $u^* = f^* \circ (f^*)^* = u$ donc u est autoadjoint. Pour tout $x \in E$, on a $(u(x) \mid x) = (f(x) \mid f(x)) \geqslant 0$, donc u est positif.

2) Soit $x \in E$ tel que $(u(x) \mid x) = 0$. On a alors $(f(x) \mid f(x)) = 0$, c'est-à-dire $f(x) = 0$, d'où $x = 0$ car f est bijective, donc u est défini positif.

3) Si $f(x) = 0$, alors $u(x) = f^*(f(x)) = 0$.
Si $u(x) = 0$, alors $(x \mid u(x)) = 0$, d'où $(f(x) \mid f(x)) = 0$, donc $f(x) = 0$. Il en résulte que $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Ker} f$.
Comme u est autoadjoint, $\operatorname{Im} u = \operatorname{Im} u^* = (\operatorname{Ker} u)^\perp = (\operatorname{Ker} f)^\perp = \operatorname{Im} f^*$.

Exercice 9.2

CCP MP 2006

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\forall x \in E,\ (u(x) \mid x) = 0$.
Démontrer que $u^* = -u$, puis que $\operatorname{Ker} u = (\operatorname{Im} u)^\perp$.

Soit $(x, y) \in E^2$. En appliquant l'hypothèse en x, y et $x + y$, on obtient :

$$\begin{aligned} 0 &= (u(x) + u(y) \mid x + y) = (u(x) \mid x) + (u(x) \mid y) + (x \mid u(y)) + (u(y) \mid y)\,. \\ 0 &= 0 + (u(x) \mid y) + (x \mid u(y)) + 0 = (u(x) \mid y) + (x \mid u(y))\,. \end{aligned}$$

Par unicité de l'adjoint, on en déduit que $u^* = -u$. On a alors

$$\operatorname{Ker} u = \operatorname{Ker} u^* = (\operatorname{Im} u)^\perp.$$

Exercice 9.3

CCP MP 2005

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f$. Montrer que $\operatorname{Ker}(f + f^*) = \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Ker} f^*$.

L'inclusion $\mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{Ker}\, f^* \subset \mathrm{Ker}(f + f^*)$ est évidente.
Soit $x \in \mathrm{Ker}(f + f^*)$: on a $f(x) + f^*(x) = 0$. Puisque $\mathrm{Im}\, f \subset \mathrm{Ker}\, f$, on a $f(f(x)) = 0$, d'où $f(f^*(x)) = 0$. En faisant le produit scalaire par x, on obtient que $(f^*(x) \,|\, f^*(x)) = 0$, d'où $f^*(x) = 0$ d'où $f(x) = 0$ en reportant dans la relation de départ. On en déduit par double inclusion que $\mathrm{Ker}(f + f^*) = \mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{Ker}\, f^*$.

Exercice 9.4

Caractérisation d'un projecteur orthogonal, Centrale MP 2007

Soit p un projecteur de E. Démontrer l'équivalence des assertions suivantes :

(i) $\mathrm{Im}\, p$ est orthogonal à $\mathrm{Ker}\, p$.

(ii) $p^* = p$.

(iii) $\forall x \in E,\ \|p(x)\| \leqslant \|x\|$.

Indication : Pour montrer (iii)$\Rightarrow$ (i), on appliquera la propriété (iii) à $x + ty$.

(i) $\Rightarrow$ (ii) Soient x et y des vecteurs de E. On a $x = p(x) + x - p(x)$. Comme $p(y) \in \mathrm{Im}\, p$ et $x - p(x) \in \mathrm{Ker}\, p$, et que $\mathrm{Im}\, p$ est orthogonal à $\mathrm{Ker}\, p$, on a $(x \,|\, p(y)) = (p(x) \,|\, p(y))$. Par symétrie, cette expression est égale à $(p(x) \,|\, y)$, donc $p^* = p$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Par hypothèse $(p(x) \,|\, x - p(x)) = (x \,|\, p(x - p(x))) = (x \,|\, 0) = 0$, or $x = p(x) + x - p(x)$ donc par relation de Pythagore, $\|x\|^2 = \|p(x)\|^2 + \|x - p(x)\|^2$, d'où $\|p(x)\| \leqslant \|x\|$.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Soient $x \in \mathrm{Im}\, p$, $y \in \mathrm{Ker}\, p$ et $t \in \mathbb{R}^*$. Comme $p(x + ty) = x$, on en déduit que $\|x\|^2 \leqslant \|x + ty\|^2$, d'où $t^2\|y\|^2 + 2t(x \,|\, y) \geqslant 0$.
On en déduit que pour tout $t > 0$, $2(x \,|\, y) + t\|y\|^2 \geqslant 0$, d'où $(x \,|\, y) \geqslant 0$ en faisant tendre t vers 0.
De même, pour tout $t < 0$, on a $2(x \,|\, y) + t\|y\|^2 \leqslant 0$, d'où $(x \,|\, y) \leqslant 0$ en faisant tendre t vers 0.
Cela prouve que $(x \,|\, y) = 0$. On a bien montré que $\mathrm{Im}\, p$ est orthogonal à $\mathrm{Ker}\, p$.

Exercice 9.5

Centrale PSI 2007

Soient p et q deux projecteurs orthogonaux de E. Montrer que $p \circ q = 0$ si et seulement si $q \circ p = 0$.

D'après l'exercice précédent, un projecteur orthogonal est autoadjoint, donc $(p \circ q)^* = q^* \circ p^* = q \circ p$. On en déduit que si $p \circ q = 0$, alors $q \circ p = 0$, et réciproquement car p et q jouent des rôles symétriques.

9.1.2 Endomorphismes orthogonaux

Ce qu'il faut savoir

- Un endomorphisme u de E est dit **orthogonal** lorsqu'il conserve le produit scalaire, c'est-à-dire $\forall (x, y) \in E^2,\ (u(x) \mid u(y)) = (x \mid y)$.
- L'endomorphisme u est orthogonal si et seulement si $u^* \circ u = \mathrm{Id}_E$ (c'est-à-dire que u est inversible et $u^* = u^{-1}$).
- L'endomorphisme u est orthogonal si et seulement si l'image par u d'une base orthonormale est une base orthonormale.
- On note $\mathcal{O}(E)$ l'ensemble des automorphismes orthogonaux. Muni de la loi $\circ$, $\mathcal{O}(E)$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}(E)$, appelé groupe orthogonal.
- Si $u \in \mathcal{O}(E)$, alors $\det u = \pm 1$. On note $\mathcal{SO}(E)$ le sous-groupe de $\mathcal{O}(E)$ formé des éléments de déterminant égal à 1, appelé groupe spécial orthogonal.
- Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est orthogonale lorsque l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à M est orthogonal. Cela est équivalent à l'une des propositions suivantes :
  (i) les colonnes de M forment une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$.
  (ii) la matrice vérifie la relation ${}^tMM = M{}^tM = I_n$.
  L'ensemble des matrices orthogonales de $\mathbb{R}^n$ est noté $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. C'est un groupe multiplicatif, appelé **groupe orthogonal**.
- **Caractérisation matricielle des endomorphismes orthogonaux :** l'endomorphisme u est orthogonal si et seulement si sa matrice dans une base orthonormale quelconque de E est orthogonale.
- **Changement de bases orthonormales :** si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases orthonormales de E, alors la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ est une matrice orthogonale.
- **Endomorphismes orthogonaux particuliers :**
  - Soit F un sous-espace vectoriel de E. On appelle :
    - ⋆ **symétrie orthogonale** par rapport à F, la symétrie par rapport à F dans la direction $F^\perp$.
    - ⋆ **réflexion** toute symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan (son déterminant vaut alors -1).
  - Lorsque $\dim E = 2$, une rotation de E est un endomorphisme orthogonal de déterminant 1. Sa matrice dans toute base orthonormale s'écrit $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ où $\theta \in \mathbb{R}$.
  - Lorsque $\dim E = 3$, une rotation de E est un endomorphisme orthogonal u de déterminant 1. Dans une base orthonormale dont le premier vecteur est dans $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}_E)$, sa matrice s'écrit $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ où $\theta \in \mathbb{R}$.

Exercice 9.6

CCP, Centrale, Mines-Ponts MP 2006 et 2007

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ une matrice orthogonale. Démontrer que :

1) $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{i,j}^2 = n.$

2) $\displaystyle\left|\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{i,j}\right| \leqslant n.$

Indication de la rédaction : considérer $(AV \mid V)$, où $V = {}^t(1, \ldots, 1)$.

3) $\displaystyle n \leqslant \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |a_{i,j}| \leqslant n\sqrt{n}.$

1) Le coefficient (j, j) de la matrice ${}^tAA$ est égal à $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}^2$. Comme ${}^tAA = I_n$, on en déduit que $\forall j \in [\![1\,, n]\!]$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}^2 = 1$, donc en sommant sur j variant de 1 à n, on a $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{i,j}^2 = n$.

2) Soit V le vecteur colonne ${}^t(1, \ldots, 1)$. La $i^{\text{ème}}$ coordonnée de AV est égale à $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}$, donc $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{i,j} = (AV \mid V)$. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,
$$\left|\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{i,j}\right| \leqslant \|AV\|\,\|V\| = \|V\|^2 = n.$$

3) Comme $a_{i,j} \in [-1, 1]$, on sait que $a_{i,j}^2 \leqslant |a_{i,j}|$. En sommant pour i et j variant de 1 à n, on obtient $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |a_{i,j}| \geqslant \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{i,j}^2 = n$ d'après la première question.

Par inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^{(n^2)}$, on a :
$$\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |a_{i,j}| \leqslant \sqrt{\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{i,j}^2}\sqrt{\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} 1} = n\sqrt{\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{i,j}^2} = n\sqrt{n}\,.$$

Exercice 9.7

CCP PSI 2007

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ antisymétrique. Montrer que $I_n + A$ est inversible. On pose $B = (I_n + A)^{-1}(I_n - A)$. Montrer que B est orthogonale. Calculer $\det B$.

Soit X un vecteur colonne de $\mathbb{R}^n$ tel que $(I_n + A)X = 0$. En faisant le produit scalaire canonique par X, on obtient $-(X \mid X) = (AX \mid X)$. Or $(AX \mid X) = 0$ car A est antisymétrique, donc $X = 0$. Cela prouve que $I_n + A$ est inversible.
La transposition commute avec le passage à l'inverse, donc ${}^tB = {}^t(I_n - A){}^t(I_n + A)^{-1}$, d'où ${}^tB = (I_n + A)(I_n - A)^{-1}$, or $I_n + A$ commute avec $I_n - A$ donc avec son inverse, d'où ${}^tBB = I_n$, donc B est orthogonale.
On a $\det B = \dfrac{\det(I_n - A)}{\det(I_n + A)}$, or $\det(I_n + A) = \det {}^t(I_n + A) = \det(I_n - A)$, d'où $\det B = 1$, donc $B \in \mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 9.8

Mines-Ponts MP 2006

Soient $u \in E$ non nul et $g \in \mathcal{O}(E)$. On note σ la symétrie orthogonale par rapport à l'hyperplan $(\mathbb{R}u)^\perp$. Décrire l'endomorphisme $g \circ \sigma \circ g^{-1}$.

Posons $h = g \circ \sigma \circ g^{-1}$. On a $\sigma(u) = -u$, donc $h(g(u)) = -g(u)$.
Soit $x \in E$ tel que $(x \mid g(u)) = 0$, on a $(g^{-1}(x) \mid u) = 0$, d'où $\sigma(g^{-1}(x)) = g^{-1}(x)$, donc $h(x) = x$. On en conclut que h est la symétrie orthogonale par rapport à l'hyperplan $(\mathbb{R}g(u))^\perp$, car les deux endomorphismes coïncident sur la droite engendrée par $g(u)$ et sur son orthogonal.

Exercice 9.9

TPE MP 2006, Mines-Ponts MP 2006

L'espace $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est muni du produit scalaire usuel défini par $\langle X, Y \rangle = \mathrm{tr}({}^tXY)$.

1) Soit ϕ_A l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par : $\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \phi_A(X) = AX$. Calculer l'adjoint de ϕ_A pour ce produit scalaire.
2) A quelle condition ϕ_A est-il une isométrie (c'est-à-dire $\phi_A^* \circ \phi_A = \mathrm{Id}$) ?

1) Il est logique de penser que $\phi_{{}^tA}$ pourrait être l'adjoint de ϕ_A, nous allons le montrer. Pour tout $(X, Y) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$, on a :

$$\langle \phi_A(X), Y \rangle = \mathrm{tr}({}^t(AX)Y) = \mathrm{tr}({}^tX{}^tAY) = \langle X, \phi_{{}^tA}(Y) \rangle .$$

On en déduit que $\phi_A^* = \phi_{{}^tA}$

2) On constate que $\phi_A \circ \phi_B = \phi_{AB}$. L'endomorphisme ϕ_A est orthogonal si et seulement si $(\phi_A)^* \circ \phi_A = \mathrm{Id}_E$, c'est-à-dire $\phi_{{}^tAA} = \mathrm{Id}_E$, ce qui est équivalent à ${}^tAA = I_n$, c'est-à-dire A orthogonale.

Exercice 9.10

Mines-Ponts MP 2006

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que deux quelconques des trois propriétés suivantes entraînent la troisième :

(i) $f \in \mathcal{O}(E)$.

(ii) $f^2 = -\operatorname{Id}_E$.

(iii) $f(x)$ est orthogonal à x pour tout $x \in E$.

La propriété (i) s'écrit $f^* \circ f = \operatorname{Id}_E$ et la propriété (iii) équivaut à $f^* = -f$ (voir exercice 9.2 page 249), donc si (i) et (ii) sont vraies, alors en composant la relation $f^* \circ f = \operatorname{Id}_E$ par f à droite, on obtient $-f^* = f$, donc (iii) est vraie. Le raisonnement est le même pour les autres implications.

Exercice 9.11

CCP MP 2005

Soit E euclidien et $u \in \mathcal{O}(E)$. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_k = \dfrac{1}{k}\displaystyle\sum_{j=0}^{k-1} u^j$.

- Montrer que $(\operatorname{Im}(\operatorname{Id}_E - u))^\perp = \operatorname{Ker}(\operatorname{Id}_E - u)$.
- Montrer que la suite (v_k) converge vers le projecteur orthogonal sur $\operatorname{Ker}(\operatorname{Id}_E - u)$.

- Comme u est orthogonal, $(\operatorname{Id}_E - u)^* = \operatorname{Id}_E - u^{-1} = -u^{-1}(\operatorname{Id}_E - u)$. Or u^{-1} est inversible, donc

$$\operatorname{Ker}(\operatorname{Id}_E - u)^* = \operatorname{Ker}(\operatorname{Id}_E - u), \quad \text{c'est-à-dire} \quad (\operatorname{Im}(\operatorname{Id}_E - u))^\perp = \operatorname{Ker}(\operatorname{Id}_E - u).$$

- Examinons la restriction de v_k à $\operatorname{Ker}(\operatorname{Id}_E - u)$ et à son orthogonal.

  Si $x \in \operatorname{Ker}(\operatorname{Id}_E - u)$, alors $u(x) = x$, donc $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $u^k(x) = x$, d'où $v_k(x) = x$.

  Si $x \in \operatorname{Im}(\operatorname{Id}_E - u)$, alors il existe $y \in E$ tel que $x = y - u(y)$, d'où $u^j(x) = u^j(y) - u^{j+1}(y)$, d'où $v_k(x) = \dfrac{x - u^k(x)}{k}$, donc

$$\|v_k(x)\| \leqslant \frac{2\|x\|}{k} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0.$$

  On en déduit que v_k converge vers le projeté orthogonal sur $\operatorname{Ker}(u - \operatorname{Id}_E)$.

9.1.3 Réduction des endomorphismes autoadjoints

Ce qu'il faut savoir

- **Théorème fondamental** : Soit u un endomorphisme autoadjoint de E. Alors u est diagonalisable et ses espaces propres sont orthogonaux (on dit que u est diagonalisable dans une base orthonormale).
  Ce théorème est parfois appelé **théorème spectral**.
- **Version matricielle** : Si A est une matrice symétrique réelle, alors il existe une matrice P orthogonale telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.
- Soient u un endomorphisme autoadjoint de E et $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ une base orthonormale de vecteurs propres de u, pour les valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Soit $x \in E$, se décomposant sous la forme $x = \sum_{i=1}^{n} x_i\varepsilon_i$. Alors $(u(x) \mid x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2$.
- Soient u un endomorphisme autoadjoint de E et $\operatorname{Sp} u$ l'ensemble de ses valeurs propres. Alors on a :
$$\sup_{\|x\|=1} (u(x) \mid x) = \max \operatorname{Sp} u \quad , \quad \inf_{\|x\|=1} (u(x) \mid x) = \min \operatorname{Sp} u \ .$$
- Un endomorphisme autoadjoint est positif (resp. défini positif) si et seulement si ses valeurs propres sont positives (resp. strictement positives).
- Soit φ une forme bilinéaire symétrique, alors il existe une base orthonormale $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ et des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que pour tout $(x, y) \in E^2$ tel que $x = \sum_{i=1}^{n} x_i\varepsilon_i$ et $y = \sum_{i=1}^{n} y_i\varepsilon_i$, on a $\varphi(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i y_i$.

Exercice 9.12

CCP et Mines-Ponts MP 2005

Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ une matrice symétrique réelle de valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Prouver que $\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}^2 = \sum_{1\leqslant k\leqslant n} \lambda_k^2$.

Il s'agit de calculer la trace de A^2 de deux manières différentes. En utilisant le produit scalaire usuel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on sait que $\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}^2 = \operatorname{tr}({}^tAA) = \operatorname{tr}(A^2)$ car A est symétrique. En diagonalisant A, on obtient que A^2 est semblable à la matrice diagonale $\operatorname{diag}(\lambda_1^2, \dots, \lambda_n^2)$. Comme la trace est invariante par changement de base, on en déduit $\operatorname{tr}(A^2) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2$, d'où l'égalité demandée.

Exercice 9.13

Centrale MP 2007

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^tAA = A{}^tA$. On suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^p = 0$.

1) Montrer que ${}^tAA = 0$.

2) En déduire que $A = 0$.

1) Comme A commute avec sa transposée, on a $({}^tAA)^p = ({}^tA)^p A^p = 0$. On en déduit que toutes les valeurs propres de ${}^tAA$ sont nulles. Or cette matrice est symétrique donc diagonalisable, on en déduit qu'elle est nulle.

2) On sait que $\mathrm{tr}({}^tAA) = \displaystyle\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{ij}^2$, donc cette somme est nulle, ce qui entraîne que tous ses termes sont nuls, donc que A est nulle.

Exercice 9.14

CCP et Mines-Ponts MP 2006

Si $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ vérifie $M^p = I_n$ avec $p \in \mathbb{N}^*$, que vaut M^2 ?

La matrice M est diagonalisable donc il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et des réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tels que $M = P\,\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)P^{-1}$. L'égalité $M^p = I_n$ entraîne que $\forall i, \lambda_i^p = 1$, donc $\lambda_i \in \{-1, 1\}$, d'où $\lambda_i^2 = 1$, ce qui donne immédiatement que $M^2 = PI_nP^{-1} = I_n$.

Exercice 9.15

TPE MP 2005

Pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on pose $q(x, y, z) = 11x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 10xy + 10xz - 6yz$. La forme quadratique q est-elle définie positive ?

La matrice de la forme quadratique q dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est égale à $\begin{pmatrix} 11 & -5 & 5 \\ -5 & 3 & -3 \\ 5 & -3 & 3 \end{pmatrix}$. On vérifie que son déterminant est nul, donc l'une de ses valeurs propres est nulle, ce qui entraîne que q n'est pas définie positive.

Autre méthode :
On a

$$\begin{aligned} q(x, y, z) &= 11(x - \frac{5}{11}y + \frac{5}{11}z)^2 + \frac{8}{11}y^2 + \frac{8}{11}z^2 - \frac{16}{11}yz \\ &= 11(x - \frac{5}{11}y + \frac{5}{11}z)^2 + \frac{8}{11}(y - z)^2 \geqslant 0. \end{aligned}$$

On voit que $q(0,1,1) = 0$ donc q est positive, mais n'est pas définie positive.

Exercice 9.16

Mines-Ponts MP 2005

Soit q la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^3$ par :

$$q(x,y,z) = 13x^2 + 13y^2 + 10z^2 + 8xy + 4xz + 4yz\ .$$

Déterminer le maximum de q sur la sphère unité de $\mathbb{R}^3$. Trouver une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$ (pour le produit scalaire canonique) dans laquelle q soit décomposée en carrés.

Notons M la matrice de q dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On a $M = \begin{pmatrix} 13 & 4 & 2 \\ 4 & 13 & 2 \\ 2 & 2 & 10 \end{pmatrix}$.

Calculons le polynôme caractéristique de M : $\chi_M(\lambda) = \det(M - \lambda I_3)$.

$$\begin{aligned} \chi_M(\lambda) &= (13-\lambda)(\lambda^2 - 23\lambda + 126) - 4(-4\lambda + 36) + 2(2\lambda - 18) \\ &= (13-\lambda)(\lambda - 9)(\lambda - 14) + 20(\lambda - 9) \\ &= (9-\lambda)(\lambda^2 - 27\lambda + 162) = -(\lambda-9)^2(\lambda - 18). \end{aligned}$$

Le maximum de q sur la sphère unité est la plus grande valeur propre de M, donc 18. Déterminons l'espace propre $\mathrm{Ker}(M - 18I_3)$:

$$MX = 18X \iff \begin{cases} -5x + 4y + 2z = 0 \\ 4x - 5y + 2z = 0 \\ 2x + 2y - 8z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = y \\ x + y = 4z \end{cases} \iff x = y = 2z$$

On a $\mathrm{Ker}(M - 18I_3) = \mathbb{R}\varepsilon_1$ avec $\varepsilon_1 = \frac{1}{3}{}^t(2,2,1)$. Comme M est symétrique, ses espaces propres sont orthogonaux, donc

$$\mathrm{Ker}(M - 9I_3) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + 2y + z = 0\}.$$

Une base orthonormale de ce plan vectoriel est $(\varepsilon_2, \varepsilon_3)$, avec $\varepsilon_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}{}^t(-1,1,0)$ et $\varepsilon_3 = \varepsilon_1 \wedge \varepsilon_2 = \frac{1}{3\sqrt{2}}{}^t(-1,-1,4)$. La famille $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$ et pour tout $v \in \mathbb{R}^3$ s'écrivant sous la forme $x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + x_3\varepsilon_3$, on a $q(v) = 18x_1^2 + 9x_2^2 + 9x_3^2$.

9.2 EXERCICES D'ENTRAÎNEMENT

Exercice 9.17

CCP MP 2005

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ muni du produit scalaire $(P \mid Q) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(0)Q^{(k)}(0)$. Soit u l'endomorphisme de E défini par $u(P) = P''$. Déterminer l'adjoint de u.

Le polynôme $A = u^*(P)$ est caractérisé par la propriété :

$$\forall Q \in E,\ (A \mid Q) = (P \mid Q''),$$

c'est-à-dire $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} A^{(k)}(0)Q^{(k)}(0) = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(0)Q^{(k+2)}(0) = \sum_{k=2}^{n} P^{(k-2)}(0)Q^{(k)}(0)$.
En prenant successivement pour Q les polynômes de la base canonique de E, on obtient $A(0) = 0,\ A'(0) = 0$ et $A^{(k)}(0) = P^{(k-2)}(0)$ pour $k \in [\![2\,,n]\!]$. On en déduit par la formule de Taylor que :

$$u^*(P) = \sum_{k=2}^{n} \frac{P^{(k-2)}(0)}{k!} X^k\ .$$

Exercice 9.18

CCP MP 2005

Soient $u_1, \ldots, u_p \in \mathcal{L}(E)$ autoadjoints tels que $\operatorname{rg} u_1 + \cdots + \operatorname{rg} u_p = n$ et $\forall x \in E,\ \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \langle u_i(x), x\rangle = \langle x, x\rangle$.

1) Montrer que $u_1 + \cdots + u_p = \mathrm{Id}_E$.

2) Montrer que $E = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{p} \operatorname{Im} u_i$.

3) Montrer que si $i \neq j$, alors $u_i \circ u_j = 0$ et calculer u_j^2.

4) Reconnaître les endomorphismes u_i.

1) Soit v l'endomorphisme $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} u_i - \mathrm{Id}_E$. Par hypothèse, on a $\forall x \in E,\ \langle v(x), x\rangle = 0$, donc d'après l'exercice 9.2 page 249, $v^* = -v$. Or les endomorphismes u_i sont autoadjoints, donc v également, d'où finalement $v = 0$.

2) La question 1) entraîne que

$$\sum_{i=1}^{p} \operatorname{Im} u_i = E,$$

donc $n = \dim \sum_{i=1}^{p} \operatorname{Im} u_i \leqslant \sum_{i=1}^{p} \dim \operatorname{Im} u_i = n$ par hypothèse. On en déduit que cette inégalité est une égalité, donc la somme des $\operatorname{Im} u_i$ est directe.

3) Soit $x \in E$. En appliquant la formule du 1) en $u_j(x)$, on obtient :

$$u_j(x) = \sum_{i=1}^{p} u_i(u_j(x)).$$

Comme la somme des $\operatorname{Im} u_i$ est directe, il en résulte que pour tout $x \in E$, $u_j(x) = u_j(u_j(x))$ et $0 = u_i(u_j(x))$ pour $i \neq j$, d'où $u_j^2 = u_j$ et $u_i \circ u_j = 0$ pour $i \neq j$.

4) Comme u_i est autoadjoint, pour tout $(x, y) \in E^2$ et $i \neq j$, on a $\langle u_i(x), u_j(y)\rangle = \langle x, (u_i \circ u_j)(y)\rangle = 0$, donc $\operatorname{Im} u_i$ est orthogonal à $\operatorname{Im} u_j$. Comme $\operatorname{Im} u_i$ et $\bigoplus_{j\neq 1} \operatorname{Im} u_j$ sont supplémentaires, on en déduit que u_i est le projecteur orthogonal sur $\operatorname{Im} u_i$.

Exercice 9.19

CCP MP 2006

Montrer que les déterminants suivants sont strictement positifs :

1) $\det(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ où $a_{i,j} = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(it)\sin(jt)\,dt$.

Indication de la rédaction : on montrera que la famille de fonctions $(t \mapsto \sin kt,\ 1 \leqslant k \leqslant n)$ est libre.

2) $\det\left(\dfrac{e^{i+j} - 1}{i + j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$

1) Soit $A = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et q la forme quadratique représentée par A dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Comme $\det A$ est le produit des valeurs propres de A, il suffit de montrer que q est définie positive pour conclure que $\det A > 0$.

- On a $q(x) = \displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{ij}x_ix_j = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sum_{k=1}^{n} x_k \sin kt\right)^2 dt \geqslant 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.
- Montrons par récurrence sur n que les fonctions $(t \mapsto \sin kt,\ 1 \leqslant k \leqslant n)$ forment une famille libre. C'est évident pour $n = 1$. Supposons que

ce soit vrai au rang $n-1$, et considérons des réels $x_1,\dots,x_n$ tels que $\forall t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k \sin kt = 0$. En dérivant deux fois par rapport à t, on obtient $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} -k^2 x_k \sin kt = 0$. En multipliant la première relation par n^2 et en ajoutant la seconde, on obtient $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} (n^2-k^2) x_k \sin kt = 0$, d'où $\forall k \in [\![1\,,n-1]\!]$, $(n^2-k^2)x_k = 0$ par hypothèse de récurrence. Il en résulte que $\forall k \in [\![1\,,n-1]\!]$, $x_k = 0$, d'où $x_n = 0$ en reportant.

- Si $q(x) = 0$, alors la fonction $t \mapsto \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k \sin kt\right)^2$ est continue positive et son intégrale sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ est nulle, donc la fonction est nulle. On déduit de la remarque précédente que $x_k = 0$ pour tout k, donc $x = 0$.

2) Soit f_k la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f_k(t) = e^{kt}$. On sait que la famille $(f_1,\dots,f_n)$ est libre (voir exercice 3.3 page 54), et on note F le sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ engendré par cette famille. On munit F du produit scalaire défini par $(f \mid g) = \displaystyle\int_0^1 f(t)g(t)\,dt$. Si $f = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k f_k$, on a :

$$(f \mid f) = \int_0^1 \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} x_i x_j e^{(i+j)t}\,dt = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} x_i x_j \frac{e^{i+j}-1}{i+j}.$$

On en déduit que la matrice étudiée représente le produit scalaire $(\,\mid\,)$ dans la base $(f_1,\dots,f_n)$, donc son déterminant est strictement positif.

Exercice 9.20

Mines-Ponts MP 2006

Soient E un espace euclidien de dimension 3, a et b deux vecteurs non nuls de E. On pose, pour tout $x \in E$, $f(x) = a \wedge (b \wedge x)$. A quelle condition f est-elle diagonalisable ?

En utilisant la formule du double produit vectoriel, on obtient :

$$f(x) = (a \mid x)b - (a \mid b)x.$$

On pose $g(x) = (a \mid x)b$, de sorte que $f = g - (a \mid b)\,\mathrm{Id}_E$. Le problème revient à savoir si g est diagonalisable. Or $g^2(x) = (a \mid x)(a \mid b)x$, donc $g^2 = (a \mid b)g$. L'endomorphisme g est non nul et annule le polynôme $X(X-(a \mid b))$.

- Si $(a \mid b) \neq 0$, alors ce polynôme est scindé à racines simples, donc g est diagonalisable.
- Si $(a \mid b) = 0$, alors $g^2 = 0$ et $g \neq 0$, donc g n'est pas diagonalisable.

Exercice 9.21

Centrale MP 2006

Soit E un espace euclidien de dimension 3. Caractériser les éléments $s \in \mathcal{SO}(E)$ pour lesquels il existe $x \in E \setminus \{0\}$ tel que $\langle s(x), x\rangle = 0$.

On rappelle que les éléments de $\mathcal{SO}(E)$ sont les rotations, et que si s est la rotation d'axe dirigé par le vecteur unitaire e et d'angle θ, alors on a :

$$\forall x \in E,\ s(x) = (\cos\theta)x + (\sin\theta)e \wedge x + (1 - \cos\theta)\langle e, x\rangle e\ .$$

On en déduit que $\langle s(x), x\rangle = \cos\theta\langle x, x\rangle + (1 - \cos\theta)\langle e, x\rangle^2$.

- Si $\cos\theta > 0$, alors $\langle s(x), x\rangle > 0$ pour tout x non nul.
- Supposons $\cos\theta \leqslant 0$. Soit u un vecteur unitaire orthogonal à e. Pour $t \in \left[0,\ \pi/2\right]$, posons $x(t) = u\cos t + e\sin t$ et $\varphi(t) = \langle s(x(t)), x(t)\rangle = \cos\theta + (1 - \cos\theta)\sin^2 t$. La fonction φ est continue sur $\left[0,\ \pi/2\right]$ et on a $\varphi(0) = \cos\theta \leqslant 0$, $\varphi(\pi/2) = 1$, donc par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $t \in \left[0,\ \pi/2\right]$ tel que $\varphi(t) = 0$ c'est-à-dire $\langle s(x(t)), x(t)\rangle = 0$ où $x(t)$ est un vecteur unitaire.

Les rotations qui conviennent sont celles d'angle θ vérifiant $\cos\theta \leqslant 0$. Comme la trace d'une rotation d'angle θ est égale à $1 + 2\cos\theta$ (expression matricielle dans une base adaptée), la condition obtenue s'écrit également $\operatorname{tr} s \leqslant 1$.

Exercice 9.22

Mines-Ponts MP 2007

Soit u un endomorphisme de E symétrique défini positif. Montrer que, pour tout $x \in E,\ \|x\|^4 \leqslant (u(x) \mid x)\,(u^{-1}(x) \mid x)$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'il y ait égalité.

Soit $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ une base orthonormale de vecteurs propres de u, et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres associées, strictement positives par hypothèse. Soit $x = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k\varepsilon_k$ un vecteur de E. On a $(u(x) \mid x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k^2$ et $(u^{-1}(x) \mid x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^2}{\lambda_k}$.

On pose $y_k = \sqrt{\lambda_k}x_k$ et $z_k = \dfrac{x_k}{\sqrt{\lambda_k}}$ pour $k \in [\![1\,,n]\!]$.

- En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz à y et z dans $\mathbb{R}^n$, on obtient que $\left(\sum_{k=1}^{n} y_k z_k\right)^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} y_k^2 \sum_{k=1}^{n} z_k^2$, c'est-à-dire $\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k^2 \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^2}{\lambda_k}$, d'où $\|x\|^4 \leqslant (u(x)\,|\,x)\,(u^{-1}(x)\,|\,x)$.
- Si l'inégalité précédente est une égalité pour un certain vecteur x non nul, alors les vecteurs y et z sont colinéaires. Comme les réels λ_k sont non nuls, il existe un réel α tel que $\forall k,\ \sqrt{\lambda_k}x_k = \alpha\frac{x_k}{\sqrt{\lambda_k}}$, d'où $(\alpha - \lambda_k)x_k = 0$, donc il existe $j \in [\![1\,,n]\!]$ tel que $\alpha = \lambda_j$. On en déduit que pour tout k tel que $\lambda_k \neq \lambda_j$, on a $x_k = 0$, autrement dit x est un vecteur propre de u.

  Inversement, si $u(x) = \lambda x$, alors $u^{-1}(x) = \frac{1}{\lambda}x$, donc $\|x\|^4 = (u(x)\,|\,x)\,(u^{-1}(x)\,|\,x)$

Exercice 9.23

Mines-Ponts MP 2006

On pose pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n,\ Q_\alpha(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \alpha\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2$.

A quelle condition sur le réel α la forme quadratique Q_α est-elle définie positive ?

La matrice M de Q_α dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ a tous ses coefficients diagonaux égaux à $1-\alpha$ et non diagonaux égaux à $-\alpha$.

- Si $\alpha = 0$, alors $M = I_n$, donc Q_0 est définie positive.
- Si $\alpha \neq 0$, alors $M - I_n$ est de rang 1 et M est diagonalisable, donc 1 est valeur propre de M d'ordre $n-1$. Soit X le vecteur colonne ${}^t(1, \dots, 1)$, on a $MX = (1 - n\alpha)X$, donc la dernière valeur propre est $1 - n\alpha$. La forme quadratique Q_α est définie positive si et seulement si toutes les valeurs propres de M sont strictement positives, c'est-à-dire $\alpha < 1/n$.

Exercice 9.24

Centrale PC 2007

1) Les valeurs propres d'une matrice symétrique réelle dont tous les coefficients sont positifs sont-elles positives ?
2) Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ de valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Montrer que :
$$\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \lambda_i \lambda_j = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_{i,i}a_{j,j} - a_{i,j})^2 .$$
3) On suppose que les valeurs propres de A sont positives. Montrer que $\forall (i,j) \in [\![1\,,n]\!]^2,\ a_{i,i}a_{j,j} \geqslant a_{i,j}^2$.

1) La réponse est NON. En effet, la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ est symétrique à coefficients strictement positifs et ses valeurs propres sont égales à -1 et 3.

2) On remarque que $2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \lambda_i \lambda_j = (\sum_{i=1}^{n} \lambda_i)^2 - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2$, ce qui nous amène à considérer les traces de A et de A^2. En partant de la définition de la trace, on a $\operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$ et $\operatorname{tr}(A^2) = \sum_{j=1}^{n} (A^2)_{j,j} = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{i,j}^2$.

En diagonalisant A, on obtient $\operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$ et $\operatorname{tr}(A^2) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2$.

En combinant les deux, on obtient :

$$2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \lambda_i \lambda_j = (\sum_{i=1}^{n} a_{i,i})^2 - \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{i,j}^2 = 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_{i,i} a_{j,j} - a_{i,j}^2) .$$

3) Soit q la forme quadratique représentée par A dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$. Comme les valeurs propres de A sont positives, la forme quadratique q est positive. Soit P le plan vectoriel engendré par (e_i, e_j) et q' la restriction de q à P. La matrice de q' dans la base (e_i, e_j) est égale à $A' = \begin{pmatrix} a_{i,i} & a_{i,j} \\ a_{i,j} & a_{j,j} \end{pmatrix}$. Comme q' est également positive, les valeurs propres de A' sont positives, donc $\det A' \geqslant 0$, c'est-à-dire $a_{i,i} a_{j,j} \geqslant a_{i,j}^2$.

Exercice 9.25

CCP MP 2006

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique positive. Montrer que $(\det A)^{\frac{1}{n}} \leqslant \dfrac{\operatorname{tr} A}{n}$.

Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres de A, positives par hypothèse. On sait que $\det A = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$ et $\operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$.

- Si $\det A = 0$, l'inégalité est évidente.
- Si $\det A > 0$, alors $\forall i,\ \lambda_i > 0$. Par convexité de l'exponentielle, on a $\exp(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i) \leqslant \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \exp x_i$. On choisit alors $x_i = \ln \lambda_i$ pour tout i, ce qui donne finalement $(\det A)^{\frac{1}{n}} \leqslant \dfrac{\operatorname{tr} A}{n}$.

Exercice 9.26

Mines-Ponts MP 2006

Soient (a, b) une famille libre de E et u l'endomorphisme de E défini par $u(x) = (a \mid x)\, b$.

1) Déterminer u^*.

2) Soit $f = u + u^*$. Que dire de f ? Trouver ses éléments propres. Déterminer le maximum de $\{(x \mid f(x)) \mid \|x\| = 1\}$.

1) Pour tout $(x, y) \in E^2$, on a $(u(x) \mid y) = (a \mid x)(b \mid y)$. On note v l'endomorphisme de E défini par $v(x) = (b \mid x)\, a$. On a alors tout $(x, y) \in E^2$, $(u(x) \mid y) = (x \mid v(y))$. On en déduit par unicité de l'adjoint que $u^* = v$.

2) L'endomorphisme f est autoadjoint. Soit F le plan $\mathrm{Vect}(a, b)$. La restriction de f à $F^\perp$ est nulle. Etudions la restriction f_1 de f à F. Dans la base (a, b) de F (non orthonormale a priori), la matrice de f_1 est égale à $\begin{pmatrix} (a \mid b) & (b \mid b) \\ (a \mid a) & (a \mid b) \end{pmatrix}$. Ses valeurs propres sont égales à $(a \mid b) \pm \sqrt{(a \mid a)(b \mid b)}$.

Retrouvons cela par une autre méthode. On pose $a_1 = \dfrac{a}{\|a\|}$ et $b_1 = \dfrac{b}{\|b\|}$. Les vecteurs a_1 et b_1 sont unitaires. On pose $\cos\theta = (a_1 \mid b_1)$.
On a $f(x) = \|a\|\,\|b\|\,\big((a_1 \mid x)b_1 + (b_1 \mid x)a_1\big)$. On en déduit que :

$$f(a_1 + b_1) = \|a\|\,\|b\|(1 + \cos\theta)(a_1 + b_1) = ((a \mid b) + \|a\|\,\|b\|)(a_1 + b_1)$$
$$f(a_1 - b_1) = \|a\|\,\|b\|(-1 + \cos\theta)(a_1 - b_1) = ((a \mid b) - \|a\|\,\|b\|)(a_1 - b_1)$$

On retrouve que les valeurs propres de f sont 0 et $(a \mid b) \pm \|a\|\,\|b\|$, et on obtient les espaces propres qui sont $F^\perp$ pour la valeur propre 0, et les bissectrices des droites engendrées par a et b dans le plan F pour les deux valeurs propres simples. Le maximum de $(x \mid f(x))$ quand x décrit la sphère unité est la plus grande valeur propre de f, c'est-à-dire $(a \mid b) + \|a\|\,\|b\|$.

Exercice 9.27

Mines-Ponts-Ponts MP 2007

Si A est une matrice antisymétrique réelle, que peut-on dire des valeurs propres complexes de A ?
Indication de la rédaction : s'intéresser à ${}^t\overline{X}AX$.

Soient λ une valeur propre complexe de A et $X = {}^t(x_1, \ldots, x_n)$ un vecteur colonne non nul de $\mathbb{C}^n$ tel que $AX = \lambda X$. L'idée consiste à calculer ${}^t\overline{X}AX$ de deux manières différentes. En transposant, on obtient $-{}^tXA = \lambda\, {}^tX$, d'où en conjuguant $-{}^t\overline{X}A = \overline{\lambda}\, {}^t\overline{X}$, ce qui donne ${}^t\overline{X}AX = -\overline{\lambda}\, {}^t\overline{X}X$.

D'autre part, ${}^t\overline{X}AX = {}^t\overline{X}\lambda X = \lambda {}^t\overline{X}X$. Or ${}^t\overline{X}X = \sum_{k=1}^{n} |x_k|^2 > 0$ car X est non nul.

En simplifiant par cette expression, on obtient finalement que $\overline{\lambda} = -\lambda$, donc λ est nul ou imaginaire pur.

Exercice 9.28

Polytechnique MP 2005

Soit S une matrice symétrique réelle. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur les valeurs propres de S pour que S soit le carré d'une matrice antisymétrique réelle.

- Soit A une matrice antisymétrique telle que $S = A^2$. On note u et v les endomorphismes représentés par S et A dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Soient λ une valeur propre de u et E_λ l'espace propre associé. Soit x un vecteur propre de u associé à λ. On a $\lambda(x \mid x) = (u(x) \mid x) = (v(x) \mid v^*(x)) = -(v(x) \mid v(x)) \leqslant 0$, d'où $\lambda \leqslant 0$. Supposons $\lambda < 0$. Comme $v^2 = u$, E_λ est stable par v. Notons v_λ la restriction de v à E_λ, on a alors $v_\lambda^2 = \lambda\,\mathrm{Id}_{E_\lambda}$, d'où $(\det v_\lambda)^2 = \det(\lambda\,\mathrm{Id}_{E_\lambda}) = \lambda^{\dim E_\lambda}$. On en déduit que $\lambda^{\dim E_\lambda} > 0$, donc $\dim E_\lambda$ est paire.
- Supposons que les valeurs propres de S soient négatives et que les espaces propres associées aux valeurs propres non nulles soient de dimension paire. En groupant par deux les valeurs propres non nulles, et en appliquant le théorème fondamental, il existe une matrice P orthogonale et des réels $a_1, \dots, a_p$ tels que $P^{-1}SP = \mathrm{diag}(-a_1^2 I_2, \dots, -a_p^2 I_2, 0 \dots, 0)$. Notons J_a la matrice 2×2 égale à $\begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix}$ et $A = P\,\mathrm{diag}(J_{a_1}, \dots, J_{a_p}, 0 \dots, 0)$. Etant donné que $J_a^2 = -a^2 I_2$, on a $A^2 = S$ et A est antisymétrique.

La condition nécessaire et suffisante cherchée est donc que les valeurs propres de S soient négatives et que les valeurs propres non nulles aient un ordre de multiplicité paire.

Exercice 9.29

Mines-Ponts MP 2005, Polytechnique MP 2007, inégalité de Hadamard

Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe un couple (P, T) avec P orthogonale et T triangulaire supérieure à coefficients diagonaux positifs tel que $A = PT$. En déduire une majoration de $|\det A|$ en fonction des normes de ses vecteurs colonnes.

Soient $\mathcal{B}_0$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique, et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ la famille des vecteurs colonnes de A, qui forme une base de $\mathbb{R}^n$.

Soit $\mathcal{B}_1 = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ la base orthogonale obtenue en appliquant le procédé d'orthogonalisation de Schmidt à $\mathcal{B}$. On sait que pour tout i, $e_i - \varepsilon_i \in \mathrm{Vect}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{i-1})$, donc par relation de Pythagore, $\|e_i\|^2 \geqslant \|\varepsilon_i\|^2$. En posant pour tout i, $e'_i = \dfrac{\varepsilon_i}{\|\varepsilon_i\|}$, la famille $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$, et la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est triangulaire supérieure de coefficients diagonaux égaux à $(\|\varepsilon_1\|^{-1}, \dots, \|\varepsilon_n\|^{-1})$. On note P la matrice de passage de $\mathcal{B}_0$ à $\mathcal{B}'$, elle est orthogonale car $\mathcal{B}_0$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases orthonormales, et T la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$. On a alors $PT = A$. Or T est l'inverse de la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, donc est triangulaire supérieure à coefficients diagonaux $(\|\varepsilon_1\|, \dots, \|\varepsilon_n\|)$. Comme $\det P = \pm 1$, on obtient $|\det A| = \displaystyle\prod_{j=1}^{n} \|\varepsilon_j\| \leqslant \prod_{j=1}^{n} \|e_j\|$, donc $|\det A|$ est inférieur ou égal au produit des normes de ses vecteurs colonnes.

Exercice 9.30

Mines-Ponts MP 2005

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u \circ u = 0$. Prouver l'équivalence :

$$\mathrm{Im}\, u = \mathrm{Ker}\, u \iff u + u^* \text{ bijectif.}$$

- Supposons que $\mathrm{Im}\, u = \mathrm{Ker}\, u$. Soit $x \in E$ tel que $u(x) + u^*(x) = 0$. En prenant l'image par u on obtient $u(u^*(x)) = 0$, d'où en faisant le produit scalaire par x, on obtient $\langle u^*(x), u^*(x)\rangle = 0$, d'où $u^*(x) = 0$ et en reportant $u(x) = 0$. Par conséquent, $x \in \mathrm{Ker}\, u^* = (\mathrm{Im}\, u)^{\perp} = (\mathrm{Ker}\, u)^{\perp}$, or $x \in \mathrm{Ker}\, u$, d'où $x = 0$. On en déduit que l'endomorphisme $u + u^*$ est injectif, donc bijectif.
- Supposons $u + u^*$ bijectif. Comme $u^2 = 0$, on a déjà $\mathrm{Im}\, u \subset \mathrm{Ker}\, u$.
  Soit $x \in \mathrm{Ker}\, u$. Par hypothèse, il existe $y \in E$ tel que $x = u(y) + u^*(y)$. En prenant l'image par u, on obtient $u(u^*(y)) = 0$, d'où $u^*(y) = 0$ en faisant le produit scalaire par y, ce qui donne $x = u(y) \in \mathrm{Im}\, u$. On a bien montré que $\mathrm{Im}\, u = \mathrm{Ker}\, u$.

Exercice 9.31

Mines-Ponts MP 2005

Si f est un endomorphisme autoadjoint de E, on note $\lambda(f)$ la plus petite valeur propre de f et $\mu(f)$ la plus grande. Montrer que, si f et g sont autoadjoints, alors $\mu(f+g) \geqslant \mu(f) + \lambda(g)$.

On sait que $\lambda(f) = \min\limits_{\|x\|=1} (f(x) \mid x)$ et $\mu(f) = \max\limits_{\|x\|=1} (f(x) \mid x)$. Pour tout vecteur x de norme 1, on a $(f(x) + g(x) \mid x) = (f(x) \mid x) + (g(x) \mid x) \geqslant (f(x) \mid x) + \lambda(g)$. On passe à la borne supérieure sur tous les vecteurs de norme 1, et on obtient $\mu(f+g) \geqslant \mu(f) + \lambda(g)$.

Exercice 9.32

Centrale MP 2006, Mines-Ponts MP 2005

Soient $(e_1, \dots, e_n)$ et $(f_1, \dots, f_n)$ deux bases orthonormales de E et $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que la somme $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} (u(e_i) \mid f_j)^2$ ne dépend que de u.

Il existe un unique endomorphisme v de E tel que $v(e_i) = f_i$ pour tout $i \in [\![1\,,n]\!]$. Comme ces deux bases sont orthonormales, v est orthogonal. Posons

$$S = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} (u(e_i) \mid f_j)^2.$$

On a $S = \displaystyle\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} (u(e_i) \mid v(e_j))^2 = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} ((v^* \circ u)(e_i) \mid e_j)^2$.

Notons $M = (m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ la matrice de $v^* \circ u$ dans la base $(e_1, \dots, e_n)$. Pour tout couple $(i, j) \in [\![1\,,n]\!]^2$, on a $m_{j,i} = ((v^* \circ u)(e_i) \mid e_j)$, donc

$$S = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} m_{j,i}^2 = \mathrm{tr}({}^tMM) = \mathrm{tr}((v^* \circ u)^* \circ v^* \circ u) = \mathrm{tr}(u^* \circ v \circ v^* \circ u) = \mathrm{tr}(u^* \circ u)$$

car $v \circ v^* = \mathrm{Id}_E$. Cela montre que la somme S ne dépend que de u.

Exercice 9.33

Mines-Ponts MP 2005

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^3 = \mathrm{Id}_E$, $u \neq \mathrm{Id}_E$ et $u \circ u^* = u^* \circ u$.

1) Montrer que u est orthogonal.

2) Décrire u si $\dim E = 3$.

1) Comme $u^3 = \mathrm{Id}_E$, on obtient en prenant l'adjoint $(u^*)^3 = \mathrm{Id}_E$. L'endomorphisme $u^* \circ u$ est autoadjoint et $(u^* \circ u)^3 = (u^*)^3 \circ u^3 = \mathrm{Id}_E$. En se plaçant dans une base de vecteurs propres de $u^* \circ u$, on en déduit que pour toute valeur propre λ de $u^* \circ u$, on a $\lambda^3 = 1$ d'où $\lambda = 1$, donc $u^* \circ u = \mathrm{Id}_E$, c'est-à-dire que u est orthogonal.

2) On a $(\det u)^3 = \det u^3 = 1$, d'où $\det u = 1$, donc u est une rotation. Comme $u^3 = \mathrm{Id}_E$, son angle est égal à $\pm\dfrac{2\pi}{3}$.

Exercice 9.34

Mines-Ponts MP 2005, TPE MP 2007

Déterminer les matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que ${}^tM\,M\,{}^tM = I_n$.

Si M est une telle matrice, alors ${}^tM$ est inversible, d'inverse $M' = M{}^tM$. Or la matrice M' est symétrique, donc son inverse également, ce qui entraîne que M est symétrique. On obtient donc la relation $M^3 = I_n$. Or M est diagonalisable donc il existe P inversible telle que $M = P\,\mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)P^{-1}$. En élevant au cube, on obtient que $\forall i \in [\![1\,,n]\!],\ \lambda_i^3 = 1$, d'où $\lambda_i = 1$, donc $M = PI_nP^{-1} = I_n$.

Exercice 9.35

Centrale MP 2006

Soient A et B appartenant à $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On pose $f(t) = \max \mathrm{Sp}(A + tB)$ pour tout réel t. Montrer que f est convexe.

On munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire canonique. On sait que si $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, alors la plus grande valeur propre de M est égale à la borne supérieure de ${}^tXAX$ lorsque le vecteur colonne X vérifie $\|X\| = 1$. Comme A et B sont symétriques, $A + tB$ est symétrique pour tout réel t, donc ${}^tX(A + tB)X \leqslant f(t)$ pour tout vecteur unitaire X dans $\mathbb{R}^n$. Soient $(t, t') \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in [\,0,\ 1\,]$. Pour tout vecteur X unitaire, on a :

$$\begin{aligned} {}^tX\left(A + ((1-\lambda)t + \lambda t')B\right)X &= (1-\lambda){}^tX(A + tB)X + \lambda{}^tX(A + t'B)X \\ &\leqslant (1-\lambda)f(t) + \lambda f(t'). \end{aligned}$$

En passant à la borne supérieure lorsque X décrit la sphère unité de $\mathbb{R}^n$, on obtient $f((1-\lambda)t + \lambda t') \leqslant (1-\lambda)f(t) + \lambda f(t')$, donc f est convexe.

Exercice 9.36

Centrale MP 2006, Polytechnique PC 2007

Soient A et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, symétriques et positives. Montrer que :

$$0 \leqslant \mathrm{tr}(AB) \leqslant \mathrm{tr}(A)\ \mathrm{tr}(B)\,.$$

Que dire de plus si A et B sont définies positives ?

Il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et D diagonale, égale à $\mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, telles que $D = PBP^{-1}$. Posons $A' = PAP^{-1} = (a'_{i,j})$. On a $AB = P^{-1}A'DP$ donc :

$$\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(A'D) = \sum_{j=1}^{n} a'_{j,j}\lambda_j.$$

Or A est positive et P est orthogonale, donc A' est positive. Par conséquent, ses coefficients diagonaux le sont (car si A' est la matrice de f dans la base e', on a $a'_{j,j} = f(e'_j, e'_j)$) et B est positive donc ses valeurs propres le sont. On en déduit en développant le produit que $0 \leqslant \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a'_{j,j}\lambda_j \leqslant \sum_{j=1}^{n} a'_{j,j} \times \sum_{j=1}^{n} \lambda_j$.

Or $\sum_{j=1}^{n} a'_{j,j} = \operatorname{tr} A' = \operatorname{tr} A$ et $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = \operatorname{tr} D = \operatorname{tr} B$, d'où $0 \leqslant \operatorname{tr}(AB) \leqslant \operatorname{tr} A \operatorname{tr} B$.
Si A et B sont définies positives, A' aussi donc $a'_{j,j} > 0$, et $\lambda_j > 0$ pour tout j. Par conséquent, les deux inégalités sont strictes (pour $n \geqslant 2$).

Exercice 9.37

Mines-Ponts MP 2006, Centrale MP 2005 et 2006

On pose, pour $x \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $q(X) = \det \begin{pmatrix} 0 & {}^tX \\ X & A \end{pmatrix}$, où A est une matrice symétrique réelle définie positive d'ordre n. Montrer que q est définie négative.
Indication de l'examinateur : on se ramènera au cas où A est diagonale.

Par hypothèse, il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP = D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ avec $\lambda_i > 0$ pour tout $i \in [\![1\,,n]\!]$. Posons $M = \begin{pmatrix} 0 & {}^tX \\ X & A \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix}$. La matrice Q appartient à $\mathcal{O}_{n+1}(\mathbb{R})$ et $Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P^{-1} \end{pmatrix}$. En effectuant le produit par blocs, on en déduit que $Q^{-1}MQ = \begin{pmatrix} 0 & {}^tXP \\ P^{-1}X & P^{-1}AP \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & {}^tY \\ Y & D \end{pmatrix}$, où Y est le vecteur colonne $P^{-1}X$. On a donc $q(X) = \det \begin{pmatrix} 0 & {}^tY \\ Y & D \end{pmatrix}$. Soient $y_1, \dots, y_n$ les coefficients de Y. Effectuons sur cette matrice l'opération élémentaire suivante : $C_1 \leftarrow C_1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{y_k}{\lambda_k} C_{k+1}$. La première colonne de cette matrice devient égale à ${}^t(-\sum_{k=1}^{n} \frac{y_k^2}{\lambda_k}, 0 \dots, 0)$. La matrice obtenue est triangulaire, donc son déterminant est le produit des éléments diagonaux, d'où $q(X) = -\sum_{k=1}^{n} \frac{y_k^2}{\lambda_k} \times \prod_{k=1}^{n} \lambda_k$. Si le vecteur X est non nul, alors Y également (car P est inversible), donc $q(X) < 0$. On en déduit que q est une forme quadratique définie négative.

Exercice 9.38

Centrale MP 2005

1) Soient q une forme quadratique définie positive sur $\mathbb{R}^n$ et $(u_k)_{k \geqslant 0}$ une suite de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ telle que $q(u_k) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$. Montrer que $u_k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$.

2) Soient $a \in \mathbb{R}$, $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que

$$x_k^2 + y_k^2 + 2ax_k y_k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0.$$

A-t-on $x_k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$ et $y_k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$?

1) L'application $\sqrt{q}$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$, donc si $(q(u_k))_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, alors $(\sqrt{q(u_k)})_{k\in\mathbb{N}}$ également, donc la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 (rappelons-nous que toutes les normes dans $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes).
2) Soit q la forme quadratique de $\mathbb{R}^2$ définie par $q(x, y) = x^2 + y^2 + 2axy$. On a $q(x, y) = (x + ay)^2 + (1 - a^2)y^2$.
   - Si $|a| < 1$, alors q est définie positive, donc la suite $((x_k, y_k))_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 d'après 1).
   - Si $|a| \geqslant 1$, alors $q(x, y) = (x + (a + \sqrt{a^2 - 1})y)(x + (a - \sqrt{a^2 - 1})y)$. En prenant les suites constantes non nulles $y_k = 1$ et $x_k = \sqrt{a^2 - 1} - a$, on a $q(x_k, y_k) = 0$ donc la réponse est non en général.

Exercice 9.39

Mines-Ponts MP 2006

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que $\forall x \in E,\ \|f(x)\| \geqslant \|f^*(x)\|$. Montrer que $f \circ f^* = f^* \circ f$, puis que $\forall x \in E,\ \|f(x)\| = \|f^*(x)\|$.

Considèrons l'endomorphisme $g = f^* \circ f - f \circ f^*$. On remarque d'une part que $g^* = g$, et d'autre part que pour tout x, $(g(x) \mid x) = \|f(x)\|^2 - \|f^*(x)\|^2 \geqslant 0$, donc g est autoadjoint positif, ce qui entraîne que ses valeurs propres sont positives. Or $\operatorname{tr}(f^* \circ f) = \operatorname{tr}(f \circ f^*)$, d'où $\operatorname{tr} g = 0$, donc la somme des valeurs propres de g est nulle, donc elles sont toutes nulles. Comme g est diagonalisable, il en résulte que $g = 0$, d'où $(g(x) \mid x) = 0$ pour tout $x \in E$, c'est-à-dire $\|f(x)\| = \|f^*(x)\|$.

Exercice 9.40

Mines-Ponts MP 2005

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^tA\,A = A\,{}^tA$ et $A^3 = A^2$. On pose $S = {}^tA\,A$. Montrer que $S^2 = S$. En déduire que $A^2 = A$, puis que A est symétrique.

- Soient f et u les endomorphismes de $\mathbb{R}^n$ de matrices respectives A et S dans la base canonique orthonormale de $\mathbb{R}^n$. Comme $S = {}^tAA$, on a $u = f^* \circ f$. La matrice S est symétrique donc il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ tel que $P^{-1}SP = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Par hypothèse, $S^3 = ({}^tA)^3A^3 = ({}^tA)^2A^2 = S^2$, d'où $\lambda_i^3 = \lambda_i^2$ pour tout i, donc $\lambda_i \in \{0, 1\}$. On en déduit que $S^2 = S$.
- D'après l'exercice 9.1 page 249, $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Im} u = \operatorname{Im} f^*$. Or f commute avec f^*, donc $u = (f^*)^* \circ f^*$, d'où $\operatorname{Im} u = \operatorname{Im}(f^*)^* = \operatorname{Im} f$. Comme u est autoadjoint, on a $\operatorname{Im} u = (\operatorname{Ker} u)^\perp$, d'où $E = \operatorname{Im} f \overset{\perp}{\oplus} \operatorname{Ker} f$. Si $x \in \operatorname{Ker} f$, alors

$f(x) = f^2(x) = 0$. Si $x \in \operatorname{Im} f$, alors il existe $y \in E$ tel que $x = f(y)$. Mais alors $f^2(x) = f^3(y) = f^2(y) = f(x)$. On en déduit que f^2 et f coïncident sur deux sous-espaces supplémentaires donc $f^2 = f$, c'est-à-dire $A^2 = A$. Il en résulte que f est un projecteur dont l'image et le noyau sont orthogonaux, ce qui entraîne d'après l'exercice 9.4 page 250 que f est autoadjoint, c'est-à-dire A symétrique.

9.2.1 Racine carrée d'une matrice symétrique positive et applications

Exercice 9.41

Racine carrée dans $\mathcal{S}_n^+$ (tous concours)

Soit v un endomorphisme autoadjoint positif de E.

1) Montrer qu'il existe un endomorphisme autoadjoint positif w tel que $w^2 = v$.

2) Soit λ un réel positif et h un endomorphisme autoadjoint positif de E. Montrer que $\operatorname{Ker}(h - \lambda \operatorname{Id}_E) = \operatorname{Ker}(h^2 - \lambda^2 \operatorname{Id}_E)$.

3) En déduire que w est unique.

1) Soient $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormale de vecteurs propres de v et $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ les valeurs propres associées. Comme v est positif, on a $\forall i,\ \lambda_i \geqslant 0$. On définit l'endomorphisme w par $w(e_i) = \sqrt{\lambda_i} e_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. Par construction, $w^2 = v$ car les deux endomorphismes coïncident sur une base, et w est autoadjoint positif car il admet une base orthonormale de vecteurs propres et ses valeurs propres sont positives.

2)
- L'inclusion $\operatorname{Ker}(h - \lambda \operatorname{Id}_E) \subset \operatorname{Ker}(h^2 - \lambda^2 \operatorname{Id}_E)$ est évidente.
- Posons $F = \operatorname{Ker}(h^2 - \lambda^2 \operatorname{Id}_E)$. Comme h commute avec $h^2 - \lambda^2 \operatorname{Id}_E$, F est stable par h, et $h|_F$ est autoadjoint donc diagonalisable dans une base orthonormale $\mathcal{B}$ de F. Il existe des réels positifs $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ tels que la matrice de $h|_F$ dans $\mathcal{B}$ soit égale à $\operatorname{diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_p)$. Or $(h|_F)^2 = \lambda^2 \operatorname{Id}_F$, donc $\forall i,\ \alpha_i^2 = \lambda^2$, d'où $\alpha_i = \lambda$ car ils sont positifs. Il en résulte que $h|_F = \lambda \operatorname{Id}_F$, donc que $F \subset \operatorname{Ker}(h - \lambda \operatorname{Id}_E)$.

3) Soit h un endomorphisme autoadjoint positif tel que $h^2 = v$. Soit λ une valeur propre de v. D'après 2), $\operatorname{Ker}(h - \sqrt{\lambda} \operatorname{Id}_E) = \operatorname{Ker}(v - \lambda \operatorname{Id}_E) = \operatorname{Ker}(w - \sqrt{\lambda} \operatorname{Id}_E)$. On en déduit que h et w coïncident sur chaque sous-espace propre de v, or v est diagonalisable, donc E est la somme directe des sous-espaces propres de v, d'où $h = w$, ce qui démontre bien l'unicité de w.

Ce qu'il faut retenir

Si $A \in \mathcal{S}_n^+$, alors il existe une matrice S unique dans $\mathcal{S}_n^+$ telle que $A = S^2$. Il est indispensable de savoir démontrer ce résultat.

Exercice 9.42

Un grand classique

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, symétrique définie positive. Montrer qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = {}^tPP$.

Il existe $Q \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ telles que $A = QDQ^{-1}$. Posons $\Delta = \mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n})$ et $P = \Delta Q^{-1}$. On a ${}^tP = {}^tQ^{-1}\Delta = Q\Delta$, donc ${}^tPP = Q\Delta^2Q^{-1} = A$.

Remarque

On peut également retrouver ce résultat en utilisant l'exercice précédent. Si A représente la matrice de v, alors la matrice P de l'endomorphisme w convient car elle est symétrique donc ${}^tPP = P^2 = A$.

Exercice 9.43

Centrale MP 2007

Soient u un endomorphisme autoadjoint et v un endomorphisme autoadjoint défini positif de E. Montrer que $u \circ v$ est diagonalisable.

D'après l'exercice 9.41 page 271, il existe w autoadjoint positif tel que $w^2 = v$, et w est inversible car v l'est. On en déduit $u \circ v = u \circ w^2 = w^{-1} \circ (w \circ u \circ w) \circ w$. Or $w \circ u \circ w$ est autoadjoint donc diagonalisable, et la matrice de $u \circ v$ dans une base est semblable à celle de $w \circ u \circ w$, donc $u \circ v$ est aussi diagonalisable.

Exercice 9.44

Mines-Ponts MP 2005

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que A est diagonalisable si et seulement si il existe S symétrique définie positive telle que ${}^tA = SAS^{-1}$.

- Supposons A diagonalisable. Il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et D diagonale telles que $A = PDP^{-1}$. On a alors ${}^tA = {}^tP^{-1}D{}^tP = {}^tP^{-1}P^{-1}AP{}^tP$. Si on note S la matrice symétrique ${}^tP^{-1}P^{-1}$, on sait que S est définie positive et on a directement ${}^tA = SAS^{-1}$.
- Supposons qu'il existe $S \in S_n^{++}$ telle que ${}^tA = SAS^{-1}$, c'est-à-dire $SA = {}^tAS$. La matrice SA est alors symétrique, et S^{-1} est alors symétrique définie positive, donc d'après l'exercice 9.43 page 272, la matrice $A = S^{-1}SA$ est diagonalisable.

Exercice 9.45

CCP MP 2007

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique définie positive. Montrer qu'il existe des vecteurs $v_1, \dots, v_n$ de $\mathbb{R}^n$ tels que $A = (\langle v_i, v_j \rangle)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.

En utilisant l'exercice 9.42 page 272, on écrit A sous la forme ${}^tPP$. Notons $P = (u_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ et $v_1, \dots, v_n$ les vecteurs colonnes de P.

On a alors $\langle v_i, v_j \rangle = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_{ki} u_{kj}$ qui est le terme d'indice (i, j) de la matrice ${}^tPP$, c'est-à-dire de A.

Exercice 9.46

Décomposition polaire (tout concours)

1) Soit $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe un unique couple (U, S) où U est orthogonale et S symétrique définie positive tel que $M = US$.
Indication de la rédaction : appliquer l'exercice 9.41 page 271 à ${}^tMM$.

2) Montrer que $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est un compact et que $\mathcal{S}_n^+$ est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

3) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $U \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $S \in \mathcal{S}_n^+$ telles que $M = US$.

1) • **Existence** La matrice $A = {}^tMM$ est symétrique définie positive. D'après la partie existence de l'exercice 9.41 page 271, il existe S symétrique définie positive telle que $A = S^2$. On pose alors $U = MS^{-1}$ de sorte que $M = US$ et ${}^tUU = {}^tS^{-1}\,{}^tMMS^{-1} = S^{-1}S^2S^{-1} = I_n$ donc U est orthogonale.

• **Unicité** Supposons $M = US = U'S'$ avec U et U' orthogonales, S et S' symétriques définies positives. On a alors ${}^tMM = {}^tS\,{}^tUUS = S^2$ et de même ${}^tMM = S'^2$, d'où $S^2 = S'^2$. On utilise la partie unicité de l'exercice 9.41 page 271 pour obtenir $S = S'$, ce qui donne en remplaçant $U = U'$.

2) • Soit $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $f(M) = {}^tMM$. L'application f est continue et $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est l'image réciproque par f du singleton $\{I_n\}$ qui est fermé, donc $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est fermé dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, alors $\forall X \in \mathbb{R}^n$, $\|MX\| = \|X\|$, donc la norme triple de M est égale à 1, donc $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est borné dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On en déduit que c'est un compact.

• Soit $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite dans $\mathcal{S}_n^+$ qui converge vers A. Pour tout entier k et tout vecteur colonne X de $\mathbb{R}^n$, on a ${}^tA_k = A_k$ et ${}^tXA_kX \geqslant 0$, donc en faisant tendre k vers l'infini, on obtient ${}^tA = A$ et ${}^tXAX \geqslant 0$, d'où $A \in \mathcal{S}_n^+$. Il en résulte que $\mathcal{S}_n^+$ est fermé dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

3) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ non inversible. Comme $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (voir notre livre d'analyse exercice 6.5), il existe une suite $(M_k)_{k \in \mathbb{N}}$ dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ qui

converge vers M. En appliquant la question 1), pour tout entier k, il existe U_k orthogonale et S_k symétrique définie positive telles que $M_k = U_k S_k$. Comme $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est compact, on peut extraire de la suite $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une sous-suite $(U_{\phi(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge vers une matrice $U \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Par conséquent, $S_{\phi(k)} = U_{\phi(k)}^{-1} M_{\phi(k)}$ converge vers la matrice $S = U^{-1}M$. Or $\mathcal{S}_n^+$ est fermé, donc $S \in \mathcal{S}_n^+$, et on a bien $M = US$.

Remarque

On perd dans ce cas l'unicité de la décomposition, car si $M = 0$, alors $S = 0$ et toute matrice orthogonale U vérifie $M = US$.

Exercice 9.47

Mines-Ponts MP 2005, Centrale MP 2007

Soient f et g des endomorphismes de E tels que $\forall x \in E,\ \|f(x)\| = \|g(x)\|$.
Etablir l'existence de $h \in \mathcal{O}(E)$ tel que $g = h \circ f$.
Indication de la rédaction : comparer f^*f et g^*g puis utiliser la décomposition polaire.

Par hypothèse, pour tout $x \in E$, on a $(x \mid f^*f(x) - g^*g(x)) = \|f(x)\|^2 - \|g(x)\|^2 = 0$.
D'après l'exercice 9.2 page 249, $f^*f - g^*g$ est antisymétrique. Or il est également symétrique, donc $f^*f = g^*g$.
D'après l'exercice 9.46 page 273, il existe u et u' orthogonaux et s et s' symétriques positifs tels que $f = us$ et $g = u's'$, d'où $f^*f = s^2$ et $g^*g = s'^2$, ce qui entraîne $s^2 = s'^2$. Par unicité de la racine carrée d'un endomorphisme autoadjoint positif (voir exercice 9.41 page 271), on en déduit que $s = s'$, d'où $g = u'u^{-1}f$, ce qui permet de conclure car $\mathcal{O}(E)$ est un groupe donc $u'u^{-1} \in \mathcal{O}(E)$.

9.2.2 Réduction simultanée et applications

Exercice 9.48

Un exercice classique : la réduction simultanée de deux formes quadratiques

Soient A et B appartenant à $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que si A est définie positive, alors il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et D diagonale telles que $A = {}^tPP$ et $B = {}^tPDP$ (réduction simultanée).

Méthode 1 Soient q_1 et q_2 les formes quadratiques de matrices A et B dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$. Par hypothèse, q_1 est définie positive, donc on peut munir $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire associé à q_1. Par théorème de réduction appliqué à q_2, il existe une base $\mathcal{B}'$ orthonormale pour q_1 dans laquelle q_2 est décomposée en carrés, c'est-à-dire dans laquelle la matrice D de q_2 est diagonale. On note P la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$. Comme $\mathcal{B}'$ est orthonormale pour q_1, la matrice de q_1 dans $\mathcal{B}'$ est égale à I_n. En utilisant les formules de changement de base pour une forme quadratique ($A' = {}^tQAQ$ voir exercice 8.3 page 225), on en déduit que ${}^tPI_nP = A$ et de même ${}^tPDP = B$.

Méthode 2 D'après l'exercice 9.42 page 272, il existe $R \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = {}^tRR$. Posons $C = {}^tR^{-1}BR^{-1}$. La matrice C est symétrique, donc il existe $Q \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et D diagonale telles que $C = {}^tQDQ$. On en déduit que $B = {}^tRCR = {}^tR{}^tQDQR = {}^tPDP$ avec $P = QR \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. D'autre part, ${}^tQQ = I_n$ donc ${}^tPP = {}^tR{}^tQQR = {}^tRR = A$.

Ce qu'il faut retenir

Si $A \in \mathcal{S}_n^{++}$ et $B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, alors il existe une matrice P inversible et une matrice D diagonale telles que $A = {}^tPP$ et $B = {}^tPDP$.

Il est utile de savoir démontrer ce résultat.

Exercice 9.49

Mines-Ponts MP 2006

Soient A et B appartenant à $\mathcal{S}_n^+$. Montrer que pour tout $t \in \,]0, 1[$, on a :

$$(\det A)^t(\det B)^{1-t} \leqslant \det(tA + (1-t)B)\,.$$

- Si A n'est pas inversible, on a ${}^tX(tA + (1-t)B)X = t{}^tXAX + (1-t){}^tXBX \geqslant 0$ pour tout vecteur colonne X car A et B sont positives, donc $tA + (1-t)B \in \mathcal{S}_n^+$, d'où $\det(tA + (1-t)B) \geqslant 0$.
- Supposons à présent A et B inversibles (A et B jouent des rôles symétriques). D'après l'exercice 9.48 page 274, il existe P inversible et D diagonale telles que $A = {}^tPP$ et $B = {}^tPDP$. On note $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les coefficients diagonaux de D. Pour tout vecteur colonne X, on a ${}^tXBX \geqslant 0$, donc ${}^tPXDPX \geqslant 0$, or P est inversible, donc en posant $Y = PX$, on obtient ${}^tYDY \geqslant 0$ pour tout vecteur colonne Y, donc tous les λ_i sont positifs. Soit $t \in \,]0, 1[$. On a $(\det A)^t(\det B)^{1-t} = (\det P)^2 \left(\prod_{i=1}^n \lambda_i\right)^{1-t}$ et $\det(tA + (1-t)B) = (\det P)^2 \prod_{i=1}^n (t + (1-t)\lambda_i)$. La fonction logarithme est concave, donc $\ln(t.1 + (1-t)\lambda_i) \geqslant t\ln 1 + (1-t)\ln\lambda_i$. En sommant pour i variant de 1 à n, on obtient $\sum_{i=1}^n \ln(t + (1-t)\ln\lambda_i) \geqslant (1-t)\sum_{i=1}^n \ln\lambda_i$. En prenant l'exponentielle qui est croissante, on en déduit finalement le résultat demandé.

Exercice 9.50

Centrale MP 2007

Soient $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{S}_n^{++}$. Montrer que le polynôme $\det(A - XB)$ est scindé.

Il s'agit encore d'une application de la réduction simultanée de deux matrices symétriques dont l'une est définie positive. Il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ telles que $A = {}^tPDP$ et $B = {}^tPP$, ce qui donne :

$$\det(A - XB) = (\det P)^2 \det(D - XI_n) = (\det P)^2 \prod_{k=1}^{n} (\lambda_k - X)\,.$$

Exercice 9.51

Centrale MP 2007

Soient A et B appartenant à $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, q_A et q_B les formes quadratiques sur $\mathbb{R}^n$ canoniquement associées (c'est-à-dire $q_A(X) = {}^tX\,A\,X$). On suppose $0 \leqslant q_A \leqslant q_B$. Montrer que $\det A \leqslant \det B$.

- Si $\det A = 0$, alors $\det B \geqslant 0$ car B est symétrique positive.
- Supposons à présent A inversible. D'après l'exercice 9.48 page 274, il existe P inversible et D diagonale telles que $A = {}^tPP$ et $B = {}^tPDP$. On note $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les coefficients diagonaux de D. Soit $Y = {}^t(y_1, \dots, y_n)$ un vecteur colonne de $\mathbb{R}^n$ et $X = P^{-1}Y$. On a $q_A(X) = {}^tXAX = {}^tYY = \sum_{i=1}^{n} y_i^2$ et $q_B(X) = {}^tXBX = {}^tYDY = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2$. Par hypothèse, on a $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2 \geqslant \sum_{i=1}^{n} y_i^2$ pour tout Y, donc en prenant pour Y les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^n$, on en déduit $\lambda_i \geqslant 1$ pour tout i. Or $\det A = (\det P)^2$ et $\det B = (\det P)^2 \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$, d'où $\det A \leqslant \det B$.

Exercice 9.52

Mines-Ponts, Centrale MP 2005

Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétriques définies positives. Montrer que :

- $\det(A + B) \geqslant \det A + \det B$.
- $(\det(A + B))^{1/n} \geqslant (\det A)^{1/n} + (\det B)^{1/n}$.

On adopte la même méthode que dans les exercices précédents. Il existe P inversible et D diagonale telles que $A = {}^tPP$ et $B = {}^tPDP$. En notant $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les coefficients diagonaux de D, on a $\det A = (\det P)^2$, $\det B = (\det P)^2 \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$ et $\det(A+B) = (\det P)^2 \prod_{i=1}^{n}(1+\lambda_i)$. Comme B est définie positive, les λ_i sont strictement positifs donc en développant le produit, on obtient immédiatement l'inégalité $\prod_{i=1}^{n}(1+\lambda_i) \geqslant 1 + \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$, d'où $\det(A+B) \geqslant \det A + \det B$. Pour la seconde inégalité, on introduit la fonction f définie par $f(x) = \ln(1+e^x)$. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et $f''(x) = \dfrac{e^x}{(1+e^x)^2} \geqslant 0$, donc f est convexe. Par conséquent, $f\left(\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln \lambda_i\right) \leqslant \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(\ln \lambda_i)$, d'où $\ln\left(1 + \left(\prod_{i=1}^{n} \lambda_i\right)^{1/n}\right) \leqslant \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln(1+\lambda_i)$. En prenant l'exponentielle, on en déduit $1 + (\det D)^{\frac{1}{n}} \leqslant (\det(I_n + D))^{\frac{1}{n}}$ puis en multipliant par $\left(\det {}^tPP\right)^{\frac{1}{n}}$, on obtient $(\det A)^{\frac{1}{n}} + (\det B)^{\frac{1}{n}} \leqslant (\det(A+B))^{\frac{1}{n}}$.

9.3 EXERCICES D'APPROFONDISSEMENT

Exercice 9.53

Mines-Ponts MP 2007 ☕

Soient $(x_1, \dots, x_p)$ et $(y_1, \dots, y_p)$ deux familles de vecteurs de E. Démontrer l'équivalence :

$$\forall (i,j) \in [\![1\,,p]\!]^2,\ (x_i \mid x_j) = (y_i \mid y_j) \iff \exists h \in \mathcal{O}(E),\ \forall i \in [\![1\,,p]\!],\ h(x_i) = y_i\,.$$

- S'il existe $h \in \mathcal{O}(E)$ tel que $h(x_i) = y_i$ pour tout i, alors on a :

$$(y_i \mid y_j) = (h(x_i) \mid h(x_j)) = (x_i \mid x_j) \text{ pour tout couple } (i,j).$$

- Supposons que $\forall (i,j) \in [\![1\,,p]\!]^2,\ (x_i \mid x_j) = (y_i \mid y_j)$.
  Notons F le sous-espace vectoriel engendré par la famille $(x_1, \dots, x_p)$, r la dimension de F, et G le sous-espace engendré par $(y_1, \dots, y_p)$. Quitte à permuter les vecteurs, on peut supposer que $(x_1, \dots, x_r)$ est une base de F.
  - Pour $k \in [\![r+1\,,p]\!]$, il existe des réels $(a_{ik})_{1 \leqslant i \leqslant r}$ tels que $x_k = \sum_{i=1}^{r} a_{ik} x_i$.

    Montrons que la famille $(y_1, \dots, y_r)$ est libre :

Soient $(b_i)_{1\leqslant i\leqslant r}$ des réels tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{r} b_i y_i = 0$. On a :

$$\begin{aligned}0 &= \left(\sum_{i=1}^{r} b_i y_i \mid \sum_{i=1}^{r} b_i y_i\right) = \sum_{i,j} b_i b_j (y_i \mid y_j) = \sum_{i,j} b_i b_j (x_i \mid x_j)\\ &= \left(\sum_{i=1}^{r} b_i x_i \mid \sum_{i=1}^{r} b_i x_i\right)\end{aligned}$$

d'où $\displaystyle\sum_{i=1}^{r} b_i x_i = 0$, or la famille $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant r}$ est libre, donc tous les b_i sont nuls.

- Pour tout $k > r$, en développant $(x_k - \displaystyle\sum_{i=1}^{r} a_{ik}x_i \mid x_k - \sum_{i=1}^{r} a_{ik}x_i)$, on obtient que $0 = \|x_k - \displaystyle\sum_{i=1}^{r} a_{ik}x_i\|^2 = \|y_k - \sum_{i=1}^{r} a_{ik}y_i\|^2$, d'où $y_k = \displaystyle\sum_{i=1}^{r} a_{ik}y_i$. On en déduit que G est de dimension r et que $(y_1, \ldots, y_r)$ est une base de G (et que les familles (x_i) et (y_i) vérifient les mêmes relations de liaison).
- On définit une unique application linéaire h_1 de F dans G par :

$$\forall i \in [\![1\,, r]\!],\ h_1(x_i) = y_i,$$

qui est bijective car elle transforme une base de F en une base de G. Soit $x \in F$, il existe des réels $a_1, \ldots, a_r$ tels que $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{r} a_i x_i$. On a alors :

$$\begin{aligned}\|h_1(x)\|^2 &= (\sum_{i=1}^{r} a_i y_i \mid \sum_{i=1}^{r} a_i y_i) = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant r} a_i a_j (y_i \mid y_j) = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant r} a_i a_j (x_i \mid x_j)\\ &= (\sum_{i=1}^{r} a_i x_i \mid \sum_{i=1}^{r} a_i x_i) = \|x\|^2.\end{aligned}$$

- Soient $(x'_i)_{1\leqslant i\leqslant n-r}$ une base orthonormale de $F^{\perp}$ et $(y'_i)_{1\leqslant i\leqslant n-r}$ une base orthonormale de $G^{\perp}$. Soit h_2 l'unique application linéaire de $F^{\perp}$ dans $G^{\perp}$ définie par $\forall i \in [\![1\,, n-r]\!]$, $h_2(x'_i) = y'_i$. On a $\forall x \in F^{\perp}$, $\|h_2(x)\| = \|x\|$ car l'image d'une base orthonormale est orthonormale.
- On définit enfin h comme l'unique endomorphisme de E tel que $h|_F = h_1$ et $h|_{F^{\perp}} = h_2$. Soit $x \in E$. Il existe $(y, z) \in F \times F^{\perp}$ tel que $x = y + z$. On a $h(x) = h_1(y) + h_2(z)$. Or $h_1(y) \in G$ et $h_2(z) \in G^{\perp}$, donc

$$\|h(x)\|^2 = \|h_1(y)\|^2 + \|h_2(z)\|^2 = \|y\|^2 + \|z\|^2 = \|x\|^2,$$

donc h appartient à $\mathcal{O}(E)$.
On a en outre pour tout $i \in [\![1\,, p]\!]$, $h(x_i) = h_1(x_i) = y_i$.

Exercice 9.54

Mines-Ponts MP 2005

Soient E un espace préhilbertien réel et $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une famille de vecteurs non nuls de E telle que : $\forall x \in E,\ \sum_{k=1}^{n} \langle e_k, x\rangle^2 = \|x\|^2$.

1) Montrer que la famille $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est génératrice, puis que :

$$\forall x \in E,\ \sum_{k=1}^{n} \langle e_k, x\rangle e_k = x\ .$$

2) On suppose E euclidien de dimension n. Montrer que $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une base orthonormale de E.

3) Montrer que la conclusion précédente est fausse si E n'est pas de dimension n.

1) • On pose $F = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_n)$. Comme F est un sous-espace de dimension finie de E, on a $E = F \oplus F^{\perp}$. Si $x \in F^{\perp}$, alors $\forall k \in [\![1\,,n]\!]$, $\langle e_k, x\rangle = 0$, donc $\|x\|^2 = 0$, d'où $x = 0$. On en déduit que $F = E$, donc E est de dimension finie, et la famille $(e_1, \ldots, e_n)$ engendre E.

• On note u l'endomorphisme de E défini par $u(x) = x - \sum_{k=1}^{n} \langle e_k, x\rangle e_k$. On remarque que $\forall (x, y) \in E^2,\ \langle u(x), y\rangle = \langle x, y\rangle - \sum_{k=1}^{n} \langle e_k, x\rangle\langle e_k, y\rangle = \langle x, u(y)\rangle$, donc u est autoadjoint. Par ailleurs, $\langle u(x), x\rangle = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} \langle e_k, x\rangle^2 = 0$, ce qui entraîne par l'exercice 9.2 page 249 que $u^* = -u$. Il en résulte que $u = 0$, ce qu'il fallait démontrer.

2) Comme la famille $(e_1, \ldots, e_n)$ est génératrice et que E est de dimension n, c'est une base de E. Soit $j \in [\![1\,,n]\!]$. En remplaçant x par e_j dans l'égalité trouvée au 1), on obtient par unicité de la décomposition dans une base que $\forall k \neq j,\ \langle e_k, e_j\rangle = 0$ et $\langle e_j, e_j\rangle = 1$, donc $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base orthonormale de E.

3) Soit $E = \mathbb{R}^2$ muni de sa base canonique (i, j) et de son produit scalaire canonique.
On pose $e'_1 = i,\ e'_2 = -\dfrac{1}{2}i + \dfrac{\sqrt{3}}{2}j$ et $e'_3 = -\dfrac{1}{2}i - \dfrac{\sqrt{3}}{2}j$.
Soit $v = xi + yj \in E$. On a :

$$\begin{aligned}\langle e'_1, v\rangle^2 + \langle e'_2, v\rangle^2 + \langle e'_3, v\rangle^2 &= x^2 + \left(-\frac{x}{2} + y\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{x}{2} - y\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \\ &= \frac{3}{2}(x^2 + y^2) = \frac{3}{2}\|v\|^2.\end{aligned}$$

Il suffit à présent de poser $e_k = \sqrt{\frac{2}{3}} e'_k$ pour $k \in [\![1\,,3]\!]$ pour obtenir que $\forall v \in E$, $\sum_{k=1}^{3} \langle e_k, v\rangle^2 = \|v\|^2$. La famille (e_1, e_2, e_3) est liée dans E, donc a fortiori n'est pas orthogonale.

Exercice 9.55

Polytechnique MP 2006, Centrale et Mines-Ponts MP 2007

Soient p et q des projecteurs orthogonaux de E.

1) Montrer que $p \circ q \circ p$ est diagonalisable et que ses valeurs propres sont comprises entre 0 et 1.

2) Montrer que $(\operatorname{Im} p + \operatorname{Ker} q)^{\perp} = \operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Im} q$.

3) En déduire que $p \circ q$ est diagonalisable et que ses valeurs propres sont comprises entre 0 et 1.

1) On a $(p \circ q \circ p)^* = p^* \circ q^* \circ p^* = p \circ q \circ p$, donc l'endomorphisme $p \circ q \circ p$ est autoadjoint et par conséquent diagonalisable. Soit λ une valeur propre de $p \circ q \circ p$, et x un vecteur propre associé. On a $\lambda \|x\|^2 = \langle p(q(p(x))), x\rangle = \langle q(p(x)), p(x)\rangle$. Comme q est un projecteur orthogonal, on a pour tout y, $\langle q(y), y\rangle = \|q(y)\|^2$ et $\|q(y)\| \leqslant \|y\|$. En appliquant cela, on en déduit que $\lambda\|x\|^2 = \|q(p(x))\|^2 \geqslant 0$ et $\lambda\|x\|^2 \leqslant \|p(x)\|^2 \leqslant \|x\|^2$, d'où $\lambda \in [0,\ 1]$.

2) D'après le cours, $(\operatorname{Im} p + \operatorname{Ker} q)^{\perp} = (\operatorname{Im} p)^{\perp} \cap (\operatorname{Ker} q)^{\perp} = \operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Im} q$.

3) • Si $x \in \operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Im} q$, alors $q(x) = x$ et $p(x) = 0$ donc $(p \circ q)(x) = 0$.

• Etudions maintenant la restriction de $p \circ q$ à $\operatorname{Im} p + \operatorname{Ker} q$.

  ◦ Si $x \in \operatorname{Ker} q$, alors $(p \circ q)(x) = 0$.

  ◦ $\operatorname{Im} p$ est stable par $p \circ q$ et par $p \circ q \circ p$. Comme $p \circ q \circ p$ est diagonalisable, sa restriction à $\operatorname{Im} p$ l'est également donc il existe une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_r)$ de $\operatorname{Im} p$ et des réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ tels que $(p \circ q \circ p)(e_i) = \lambda_i e_i$ pour tout i allant de 1 à r. Or $p(e_i) = e_i$ car $e_i \in \operatorname{Im} p$, d'où $(p \circ q)(e_i) = \lambda_i e_i$. On complète $\mathcal{B}$ avec des vecteurs $(e_{r+1}, \ldots, e_s)$ de $\operatorname{Ker} q$ pour former une base de $\operatorname{Im} p + \operatorname{Ker} q$, et comme $(p \circ q)(e_i) = 0$ pour tout $i \in [\![r+1\,, s]\!]$, on dispose d'une base de $\operatorname{Im} p + \operatorname{Ker} q$ formée de vecteurs propres de $p \circ q$.

• Faisons le bilan. D'après le premier point, la restriction de $p \circ q$ à $(\operatorname{Im} p + \operatorname{Ker} q)^{\perp}$ est nulle. D'autre part, il existe une base de $\operatorname{Im} p + \operatorname{Ker} q$ de vecteurs propres de $p \circ q$ (avec les mêmes valeurs propres que $p \circ q \circ p$). En conclusion, $p \circ q$ est diagonalisable et ses valeurs propres sont celles de $p \circ q \circ p$, donc sont comprises entre 0 et 1.

Exercice 9.56

Centrale MP 2005, Polytechnique MP 2006, théorème de Jacobi-Sylvester ☕

1) Soit $M = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que M est définie positive si et seulement si $\forall k \in [\![1\,,n]\!]$, $\det M_k > 0$, où $M_k = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant k}$.

2) *Question de la rédaction* : En déduire que $\mathcal{S}_n^{++}$ est un ouvert de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

1) On note $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, q la forme quadratique représentée par M dans $\mathcal{B}$ et pour $k \in [\![1\,,n]\!]$, E_k le sous-espace engendré par la famille libre $\mathcal{B}_k = (e_1, \ldots, e_k)$.

- Supposons M définie positive. Soit q_k la restriction de q à E_k. Il s'agit d'une forme quadratique sur E_k, dont la matrice dans la base $(e_1, \ldots, e_k)$ est égale à M_k. Comme q est définie positive, q_k l'est également, donc $\det M_k > 0$.
- Supposons que $\forall k \in [\![1\,,n]\!]$, $\det M_k > 0$. Montrons que M est définie positive par récurrence sur n.
Si $n = 1$, $M = (a)$ avec $a = \det M > 0$, donc M est définie positive.
Supposons la propriété vraie jusqu'à l'ordre $n-1$. La matrice M_{n-1} vérifiant l'hypothèse de récurrence, elle est définie positive. En appliquant le théorème spectral, il existe une base orthonormale $\mathcal{B}'_{n-1} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1})$ de E_{n-1} et des réels strictement positifs $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$ tels que, en notant P la matrice de passage de $\mathcal{B}_{n-1}$ à $\mathcal{B}'_{n-1}$, on a $P \in \mathcal{O}_{n-1}(\mathbb{R})$ et $P^{-1}M_{n-1}P = D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1})$.
Définissons la matrice Q d'ordre n par $Q = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On constate que $Q \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et en effectuant un produit par blocs, on obtient :
$$\begin{aligned} Q^{-1}MQ &= \begin{pmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} M_{n-1} & C \\ {}^tC & m_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P^{-1}M_{n-1}P & P^{-1}C \\ C^tP & m_{nn} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} D & V \\ {}^tV & m_{nn} \end{pmatrix} \end{aligned}$$
où $V = {}^t(u_1, \ldots, u_{n-1})$ est le vecteur colonne $P^{-1}C$. Calculons le déterminant de cette matrice en faisant apparaître des zéros sur la dernière colonne par l'opération élémentaire $C_n \leftarrow C_n - \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{u_k}{\lambda_k} C_k$. Le dernier coefficient devient égal à $\mu = m_{nn} - \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{u_k^2}{\lambda_k}$. La matrice obtenue est triangulaire inférieure, d'où $\det M = \begin{vmatrix} D & V \\ {}^tV & m_{nn} \end{vmatrix} = \mu \displaystyle\prod_{i=1}^{n-1} \lambda_i$. Or $\det M > 0$, donc $\mu > 0$.

Soit $x \in \mathbb{R}^n$ et X le vecteur colonne associé. En posant $Y = Q^{-1}X = {}^t(y_1, \dots, y_n)$, on a $q(X) = {}^tXMX = {}^tY{}^tQMQY = \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k y_k^2 + 2\sum_{k=1}^{n-1} u_k y_k y_n + m_{nn} y_n^2$.
En faisant apparaître le début d'un carré, on obtient :

$$q(X) = \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k \left(y_k + \frac{u_k}{\lambda_k} y_n \right)^2 + \left(m_{nn} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{u_k^2}{\lambda_k} \right) y_n^2 .$$

Le coefficient devant y_n^2 est strictement positif, donc $q(x) \geqslant 0$ et si $q(x) = 0$, alors $y_n = 0$ et $\forall k \in [\![1\,, n-1]\!]$, $y_k + \dfrac{u_k}{\lambda_k} y_n = 0$, donc $Y = 0$, c'est-à-dire $x = 0$. On conclut que q est définie positive, ce qui achève la récurrence.

2) Soit φ l'application de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}^n$ définie par $\varphi(M) = (\det M_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$. Etant donné que $\det M_k$ est une expression polynômiale par rapport aux coefficients de M, l'application φ est continue sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. D'après la question précédente, $\mathcal{S}_n^{++} = \varphi^{-1}(\,]0, +\infty[\,^n)$. Or $]0, +\infty[\,^n$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et φ est continue, donc $\mathcal{S}_n^{++}$ est un ouvert de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 9.57

Polytechnique MP 2006, Centrale MP 2006 et 2007☕

Soit $P = (p_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{S}_n^{++}$.

1) Justifier que $\forall i \in [\![1\,, n]\!]$, $p_{i,i} > 0$.

2) *Question de la rédaction* : Montrer qu'il existe une matrice T triangulaire inférieure à coefficients diagonaux strictement positifs telle que $P = T{}^tT$.
Cette décomposition classique s'appelle décomposition de Choleski.

3) Montrer que $\det P \leqslant \prod_{i=1}^{n} p_{i,i}$.

4) Montrer que si P s'écrit $\begin{pmatrix} A & B \\ {}^tB & C \end{pmatrix}$, avec $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ et $C \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{R})$, alors $\det P \leqslant \det A \det C$.

1) Pour tout vecteur colonne X non nul, on a ${}^tXPX > 0$, donc en prenant $X = E_i$ correspondant au $i^{\text{ème}}$ vecteur de la base canonique, on a $p_{i,i} = {}^tE_i P E_i > 0$.

2) D'après l'exercice 9.41 page 271, il existe $S \in \mathcal{S}_n^{++}$ telle que $P = S^2$. Comme S est inversible, c'est la matrice de passage de la base canonique $\mathcal{B}$ à une base $\mathcal{B}'$. En appliquant le procédé d'orthonormalisation de Schmidt à $\mathcal{B}'$, on peut construire une base orthonormale $\mathcal{B}''$ telle que la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}''$, notée T', soit triangulaire supérieure à coefficients diagonaux strictement positifs. Notons U la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}''$. Comme ces bases sont orthonormales, $U \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, donc ${}^tUU = I_n$. Par la formule de changement de bases, on a $U = ST'$,

d'où ${}^tT'S^2T' = I_n$, c'est-à-dire $P = {}^tT'^{-1}T'^{-1}$. Posons $T = {}^tT'^{-1}$. La matrice T est triangulaire inférieure et $P = T{}^tT$.

3) On utilise la décomposition précédente et on note $T = (t_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$. Ainsi, on a $p_{i,i} = \sum_{j=1}^{i} t_{i,j}^2$, d'où $p_{i,i} \geqslant t_{i,i}^2$. Or $\det P = (\det T)^2 = \prod_{i=1}^{n} t_{i,i}^2$, d'où $\det P \leqslant \prod_{i=1}^{n} p_{i,i}$.

4) Soient q la forme quadratique associée à P dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$ et q_1 (resp. q_2) la restriction de q au sous-espace engendré par les p premiers vecteurs (resp. les $n-p$ derniers) de $\mathcal{B}$. Comme q est définie positive, q_1 et q_2 également, donc $A \in \mathcal{S}_p^{++}$ et $C \in \mathcal{S}_{n-p}^{++}$. D'après l'exercice 9.41 page 271, il existe $A_1 \in \mathcal{S}_p^{++}$ et $C_1 \in \mathcal{S}_{n-p}^{++}$ telles que $A_1^2 = A$ et $C_1^2 = C$. Posons $D = \begin{pmatrix} A_1^{-1} & 0 \\ 0 & C_1^{-1} \end{pmatrix}$. En effectuant le produit par blocs, on obtient $DPD = Q = \begin{pmatrix} I_p & A_1^{-1}BC_1^{-1} \\ C_1^{-1}{}^tBA_1^{-1} & I_{n-p} \end{pmatrix}$. La matrice Q est encore symétrique définie positive et ses coefficients diagonaux sont égaux à 1, donc en lui appliquant la question 3), on obtient $\det Q \leqslant 1$, d'où $\det P \leqslant (\det D)^{-2} = \det A \, \det C$.

Exercice 9.58

Centrale MP 2007

1) Soient $(a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ et (u_k) la suite définie par :

$$u_0 = b \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N},\ u_{k+1} = \frac{1}{2}\left(u_k + \frac{a}{u_k}\right).$$

Étudier la convergence de (u_k).

2) Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}$. On définit la suite (X_k) de matrices en posant $X_0 = I_n$ et $\forall k \in \mathbb{N},\ X_{k+1} = \frac{1}{2}\left(X_k + AX_k^{-1}\right)$. Justifier l'existence d'une telle suite et étudier sa convergence.

1) Soit $f : \,]0,+\infty[\, \to \,]0,+\infty[$ définie par $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right)$. La fonction f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $f'(x) = \frac{x^2-a}{2x^2}$, donc f est décroissante sur $]0,\sqrt{a}[$ et croissante sur $]\sqrt{a},+\infty[$ et on a $f(\sqrt{a}) = \sqrt{a}$.

On voit d'une part que $\forall x > 0,\ f(x) \geqslant \sqrt{a}$ et d'autre part que $f(x) - x = \frac{a-x^2}{2x}$, donc si $x \geqslant \sqrt{a}$, alors $\sqrt{a} \leqslant f(x) \leqslant x$. On en déduit que pour tout $k \geqslant 1$, $u_k \geqslant \sqrt{a}$ et que la suite $(u_k)_{k \geqslant 1}$ est décroissante et minorée, donc converge vers $\sqrt{a}$, qui est le seul point fixe de f.

2) Par théorème spectral, il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ strictement positifs tels que $P^{-1}AP = D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Posons $Y_k = P^{-1}X_kP$. L'étude (existence et convergence) de la suite (X_k) se ramène à celle de la suite (Y_k). On a $Y_{k+1} = \dfrac{1}{2}(Y_k + DY_k^{-1})$. Démontrons par récurrence sur k que Y_k existe et est diagonale à coefficients diagonaux strictement positifs, notés $u_k(1), \dots, u_k(n)$. La propriété est vérifiée au rang 0 car $Y_0 = I_n$.
Supposons qu'elle soit vraie au rang k. La matrice Y_k est inversible, d'inverse $\operatorname{diag}(u_k(1)^{-1}, \dots, u_k(n)^{-1})$, donc Y_k et DY_k^{-1} sont diagonales, d'où Y_{k+1} également et on a $Y_{k+1} = \operatorname{diag}(u_{k+1}(1), \dots, u_{k+1}(n))$ avec $u_{k+1}(i) = \dfrac{1}{2}\left(u_k(i) + \dfrac{\lambda_i}{u_k(i)}\right)$ pour tout $i \in [\![1\,, n]\!]$. La propriété est donc vérifiée au rang $k+1$. Chaque suite $(u_k(i))_{k\in\mathbb{N}}$ vérifie en outre la relation de récurrence étudiée à la question 1), donc converge vers $\sqrt{\lambda_i}$. On en déduit que la suite (Y_k) converge vers la matrice $\Delta = \operatorname{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$, donc la suite (X_k) converge vers $S = P\Delta P^{-1}$. La matrice S est symétrique définie positive et son carré est égal à A, donc il s'agit de l'unique racine carrée de A dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, mise en évidence dans l'exercice 9.41 page 271.

Exercice 9.59

Centrale MP 2005 ☕

Soit u un endomorphisme symétrique de E, et $H_u = \{x \in E \mid \langle u(x), x\rangle = 1\}$.

1) Trouver une condition nécessaire et suffisante sur le spectre de u pour qu'il existe $x \in H_u$ de norme 1.

2) Soit $v \in \mathcal{L}(E)$ symétrique défini positif. Montrer que $v^{-1} \circ u$ est diagonalisable.

3) Trouver une condition nécessaire et suffisante sur le spectre de $v^{-1} \circ u$ pour que $H_u \cap H_v \neq \varnothing$.

Pour alléger les notations, on note fg la composée de deux endomorphismes quelconques f et g.

1) Soient $\lambda_1 \leqslant \dots \leqslant \lambda_n$ les valeurs propres de u classées dans l'ordre croissant, et $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de vecteurs propres associés à ces valeurs propres. Soit $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ un vecteur de E. On sait que $\langle u(x), x\rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2$, d'où $\lambda_1 \|x\|^2 \leqslant \langle u(x), x\rangle \leqslant \lambda_n \|x\|^2$.
   - S'il existe x de norme 1 tel que $\langle u(x), x\rangle = 1$, alors $\lambda_1 \leqslant 1 \leqslant \lambda_n$.

- Supposons que $\lambda_1 \leqslant 1 \leqslant \lambda_n$. Pour $t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, on pose $x(t) = e_1 \cos t + e_n \sin t$. Le vecteur $x(t)$ est unitaire et $\langle u(x(t)), x(t)\rangle = \lambda_1 \cos^2 t + \lambda_n \sin^2 t$. On note $\varphi(t)$ cette expression. La fonction φ est continue sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ et $\varphi(0) = \lambda_1$, $\varphi(\dfrac{\pi}{2}) = \lambda_n$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, on en déduit l'existence d'un réel t tel que $\varphi(t) = 1$, c'est-à-dire $x(t) \in H_u$.

2) Comme v est symétrique défini positif, il existe d'après l'exercice 9.41 page 271 un endomorphisme s symétrique défini positif tel que $v = s^2$. On a alors $s(v^{-1}u)s^{-1} = s^{-1}us^{-1}$. Or cet endomorphisme est encore symétrique, donc diagonalisable. Comme les matrices de $v^{-1}u$ et de $s(v^{-1}u)s^{-1}$ dans toute base sont semblables, on en déduit que $v^{-1}u$ est diagonalisable (et a même polynôme caractéristique que $s^{-1}us^{-1}$).

3) L'astuce consiste à changer de produit scalaire. En conservant les notations du 2), on pose $(x \mid y) = \langle s(x), s(y)\rangle$. On obtient manifestement une forme bilinéaire symétrique, et $(x \mid x) = \langle s(x), s(x)\rangle \geqslant 0$ et $(x \mid x) = 0 \iff s(x) = 0 \iff x = 0$, donc on obtient un nouveau produit scalaire sur E.
On a également $(x \mid x) = \langle x, s^2(x)\rangle = \langle x, v(x)\rangle$, donc H_v est la sphère unité pour ce nouveau produit scalaire. Posons $u' = v^{-1}u$. On remarque que $u'^* = uv^{-1}$. Comparons $(u'(x) \mid y)$ et $(x \mid u'(y))$ pour $(x, y) \in E^2$:

$$\begin{aligned}
(u'(x) \mid y) &= \langle su'(x), s(y)\rangle = \langle u'(x), s^2(y)\rangle = \langle x, u'^*(s^2(y))\rangle \\
&= \langle x, uv^{-1}v(y)\rangle = \langle x, u(y)\rangle \\
(x \mid u'(y)) &= \langle s(x), su'(y)\rangle = \langle x, s^2(u'(y))\rangle = \langle x, u(y)\rangle .
\end{aligned}$$

Les deux expressions sont égales, donc u' est autoadjoint pour le nouveau produit scalaire. En appliquant la question 1) avec le nouveau produit scalaire, on sait qu'il existe un vecteur x tel que $(x \mid x) = 1$ et $(u'(x) \mid x) = 1$ si et seulement si $\min \operatorname{Sp} u' \leqslant 1 \leqslant \max \operatorname{Sp} u'$, autrement dit

$$H_u \cap H_v \neq \varnothing \iff \min \operatorname{Sp}(v^{-1}u) \leqslant 1 \leqslant \max \operatorname{Sp}(v^{-1}u) .$$

Exercice 9.60

Mines-Ponts MP 2006 et 2007 ☕

Soit $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, où $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{R})$. Montrer que $(\det A)^2 = (\det D)^2$.

En effectuant les produits par blocs, on a :

$${}^tMM = \begin{pmatrix} {}^tAA + {}^tCC & {}^tAB + {}^tCD \\ {}^tBA + {}^tDC & {}^tBB + {}^tDD \end{pmatrix} \text{ et } M{}^tM = \begin{pmatrix} A{}^tA + B{}^tB & A{}^tC + B{}^tD \\ C{}^tA + D{}^tB & C{}^tC + D{}^tD \end{pmatrix} .$$

Comme M est orthogonale, ces deux matrices sont égales à I_n. A partir du calcul de ${}^tMM$, on obtient que ${}^tAA + {}^tCC = I_p$ et ${}^tAB + {}^tCD = 0$, et à partir de celui de $M{}^tM$, on obtient que $A{}^tC + B{}^tD = 0$ et $C{}^tC + D{}^tD = I_{n-p}$.
On en déduit que :

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^tA & {}^tC \\ 0 & {}^tD \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A{}^tA & 0 \\ C{}^tA & I_{n-p} \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} {}^tA & {}^tC \\ 0 & {}^tD \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ {}^tDC & D{}^tD \end{pmatrix}.$$

En posant $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} {}^tA & {}^tC \\ 0 & {}^tD \end{pmatrix}$ et en écrivant que $\det(MN) = \det(NM)$, on en déduit que :

$$\det \begin{pmatrix} A{}^tA & 0 \\ C{}^tA & I_{n-p} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ {}^tDC & {}^tDD \end{pmatrix},$$

d'où $\det\left(A{}^tA\right) = \det\left({}^tDD\right)$, c'est-à-dire $(\det A)^2 = (\det D)^2$.

Exercice 9.61

Centrale MP 2005

Soit G un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$. On note $(.\,|\,.)$ le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$ et on pose, pour x et y dans $\mathbb{R}^n$, $\Psi(x, y) = \sum_{g \in G} (g(x) \,|\, g(y))$.

1) Vérifier que Ψ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.

2) Vérifier que $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2,\ \forall g \in G,\ \Psi(x, y) = \Psi(g(x), g(y))$. En déduire que G est isomorphe à un sous-groupe de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

3) Si $n = 2$ et $G \subset \mathrm{SL}(\mathbb{R}^2)$, montrer que G est cyclique.

1) Par linéarité des éléments de G, on constate que Ψ est une forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}^n$. On a $\Psi(x, x) = \sum_{g \in G} \|g(x)\|^2 \geqslant \|x\|^2$ car $\mathrm{Id} \in G$, donc Ψ est définie positive. Il s'agit ainsi d'un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.

2) • Soit $g \in G$. Pour tout $(x, y) \in G$, on a $\Psi(g(x), g(y)) = \sum_{h \in G} ((g(h(x)) \,|\, g(h(y)))$.
Comme G est un sous-groupe de $\mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$, l'application $h \mapsto h \circ g$ est une bijection de G sur G, donc on peut faire le changement d'indice $h' = h \circ g$ dans la somme, ce qui donne $\Psi(g(x), g(y)) = \sum_{h' \in G} (h'(x) \,|\, h'(y)) = \Psi(x, y)$.
Cela montre que G est un sous-groupe du groupe orthogonal de $\mathbb{R}^n$ relatif au produit scalaire Ψ, noté donc $\mathcal{O}_\Psi(\mathbb{R}^n)$.

• Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormale pour le produit scalaire Ψ. L'application, qui à un élément de $\mathcal{O}_\Psi(\mathbb{R}^n)$ associe sa matrice dans la base $\mathcal{B}$, est un isomorphisme de groupes de $\mathcal{O}_\Psi(\mathbb{R}^n)$ dans le groupe orthogonal matriciel $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Ceci entraîne que G est isomorphe à un sous-groupe de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

3) L'isomorphisme précédent conserve le déterminant, donc G est isomorphe à un sous-groupe fini de $\mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$, sous-groupe des rotations, c'est-à-dire à un sous-groupe multiplicatif G' de $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. Soit k le cardinal de G. Par le théorème de Lagrange, on a $\forall z \in G',\ z^k = 1$, donc G' est inclus dans le sous-groupe $\mathbb{U}_k$ des racines $k^{\text{ièmes}}$ de l'unité dans $\mathbb{C}$, qui est également de cardinal k, d'où $G' = \mathbb{U}_k$. Comme $\mathbb{U}_k$ est cyclique, engendré par $e^{2i\pi/k}$, on conclut que G est cyclique.

9.3.1 Endomorphismes commutant avec leur adjoint

Exercice 9.62

Mines-Ponts MP 2007

1) *Question de la rédaction* : Soit $g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $g \circ g^* = g^* \circ g$. Montrer que si F est un sous-espace de E stable par g, alors $F^\perp$ est également stable par g.
2) Que dire de $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^7)$ telle que $f^3 - f^2 + f = 0$ et $f^* \circ f = f \circ f^*$?

1) Soit M la matrice de g dans une base orthonormale $\mathcal{B}$ adaptée à la décomposition de E en $F \oplus F^\perp$. Comme $g(F) \subset F$, M s'écrit sous la forme $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ où A représente la matrice de $f|_F$ dans la partie de $\mathcal{B}$ contenant les vecteurs de F. Comme f commute avec f^*, on a ${}^tMM = M{}^tM$, c'est-à-dire $\begin{pmatrix} {}^tA & 0 \\ {}^tB & {}^tC \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^tA & O \\ {}^tB & {}^tC \end{pmatrix}$. En identifiant les blocs supérieurs gauches, on obtient ${}^tAA = A{}^tA + B{}^tB$. Comme la trace de ${}^tAA$ est égale à celle de $A{}^tA$, on en déduit que $\operatorname{tr}(B{}^tB) = 0$, donc la somme des carrés de tous les coefficients de B est nulle, donc $B = 0$, ce qui signifie exactement que $F^\perp$ est stable par f.

> **Remarque**
> Ce lemme est très utile dans l'étude des endomorphismes commutant avec leur adjoint.

2) On sait que $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im}(f \circ f^*)$, donc $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im}(f^* \circ f) = \operatorname{Ker}(f^* \circ f)^\perp$ car $f^* \circ f$ est autoadjoint, or $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker}(f^* \circ f)$, donc $\operatorname{Im} f = (\operatorname{Ker} f)^\perp$.
Par le lemme des noyaux, $\mathbb{R}^7 = \operatorname{Ker} f \oplus F$, avec $F = \operatorname{Ker}(f^2 - f + \operatorname{Id})$. Si $x \in F$, alors $x = f(x - f(x))$, donc $x \in \operatorname{Im} f$. Comme $\dim F = \dim(\operatorname{Im} f)$ par théorème du rang, on en déduit que $\operatorname{Im} f = F$. Etudions $f_1 = f|_F$. Le polynôme $X^2 - X + 1$ n'a pas de racine réelle et est annulateur de f_1, donc f_1 n'a pas de valeur propre réelle, et F est de dimension paire. Posons $h = \dfrac{2}{\sqrt{3}}(f_1 - \dfrac{1}{2}\operatorname{Id}_E)$.
On vérifie facilement que $h^2 = -\operatorname{Id}_E$ et que h commute avec son adjoint. Soit e un vecteur unitaire de F et $P = \operatorname{Vect}(e, h(e))$. Comme h n'a pas de valeur propre

réelle, les vecteurs e et $h(e)$ sont non colinéaires, donc P est un plan stable par h et la matrice de $h|_P$ dans la base $(e, h(e))$ est égale à $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. D'après 1), $P^\perp$ est stable par h. Soit $G = P^\perp$. Si $G \neq \{0\}$, alors on peut recommencer le même raisonnement avec $h|_G$. Finalement, on en déduit qu'il existe une base orthonormale de $\mathbb{R}^7$ dans laquelle la matrice de f est constituée de 1, 2 ou 3 blocs diagonaux égaux à $A = \dfrac{\sqrt{3}}{2}J + \dfrac{1}{2}I_2 = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} & -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \dfrac{\sqrt{3}}{2} & \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}$ (selon que f est de rang 2, 4 ou 6), tous les autres coefficients étant nuls.

Exercice 9.63

Réduction des endomorphismes orthogonaux, Centrale MP 2006

On pose $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. Soit u un automorphisme orthogonal de E.

On veut prouver que u vérifie la propriété suivante :

Il existe une base orthonormale de E où la matrice de u est de la forme $\mathrm{Diag}(D, R(\theta_1), \ldots, R(\theta_p))$ où D est diagonale à coefficients diagonaux égaux à 1 ou -1, et où $\theta_i \in]0, \pi[$.

1) Que dire des valeurs propres de u dans $\mathbb{R}$?

2) Soit x un vecteur propre de $u + u^*$. On pose $\Pi = \mathrm{Vect}(x, u(x))$. Montrer que Π et $\Pi^\perp$ sont stables par u.

3) Montrer que u vérifie la propriété demandée (on pourra procéder par récurrence sur la dimension de E).

4) *Applications :*

- Montrer que tout endomorphisme orthogonal de E est le produit de deux symétries orthogonales.
- (*Centrale MP 2007*) Trouver les matrices de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ diagonalisables sur $\mathbb{R}$.

1) Soit λ une valeur propre réelle de u, il existe un vecteur x non nul tel que $u(x) = \lambda x$. Or $\|u(x)\| = \|x\|$, d'où $\lambda = \pm 1$.

2) Notons λ la valeur propre associé à x. On a $u(x) + u^*(x) = \lambda x$, or $u^* = u^{-1}$, d'où en composant par u, on obtient $u^2(x) = \lambda u(x) - x$, ce qui prouve que Π est stable par u. Comme u est inversible, les sous-espaces Π et $u(\Pi)$ sont de même dimension, donc $\Pi = u(\Pi)$. En composant par u^{-1}, on obtient également $u^*(\Pi) = \Pi$, donc Π est stable par u^*. Comme Π est stable par u et par u^*, on en déduit que $\Pi^\perp$ est stable par u^* et par $(u^*)^* = u$.

3) Pour $n = 1$, la propriété est évidente. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Supposons la propriété vraie jusqu'au rang $n-1$ et plaçons nous en dimension n. Comme $u+u^*$ est autoadjoint, il possède un vecteur propre x que l'on peut choisir unitaire et avec les notations de 2, les sous-espaces Π et $\Pi^\perp$ sont stables par u.

- Si Π est de dimension 1, alors x est vecteur propre de u, donc $u(x) = \pm x$. La restriction de u à $\Pi^\perp$ est un endomorphisme orthogonal en dimension $n-1$ auquel on applique l'hypothèse de récurrence et on obtient la forme matricielle voulue en rajoutant à la nouvelle base le vecteur x.
- Si Π est de dimension 2, la restriction de u à $\Pi^\perp$ est un endomorphisme orthogonal en dimension $n-2$ auquel on applique l'hypothèse de récurrence. La restriction de u à Π est un endomorphisme orthogonal du plan Π, et ne possède pas de valeur propre, c'est donc une rotation de Π. Par suite, il existe une base de Π dans laquelle la matrice de $u|_\Pi$ est de la forme $R(\theta)$. En réunissant les bases orthonormales pour ces deux restrictions, on obtient une base orthonormale de E dans laquelle la matrice de u est de la forme souhaitée.

4) • D'après la question précédente, il existe une base orthonormale $\mathcal{B}$ dans laquelle la matrice de u est de la forme $\mathrm{Diag}(D, R(\theta_1), \dots, R(\theta_p))$. On sait que chaque rotation du plan est la composée de deux symétries axiales, donc pour tout $i \in [\![1\,,p]\!]$, il existe S_i et S'_i dans $\mathcal{O}_2(\mathbb{R})$ telles que $S_i^2 = S_i'^2 = I_2$ et $R(\theta_i) = S_i S'_i$. On pose $S = \mathrm{Diag}(D, S_1, \dots, S_p)$ et $S' = \mathrm{Diag}(I, S'_1, \dots, S'_p)$. Par construction, S et S' sont orthogonales, $S^2 = S'^2 = I_n$ et SS' est la matrice de u dans $\mathcal{B}$. En notant σ et σ' les endomorphismes de matrices S et S' dans $\mathcal{B}$, on en déduit que σ et σ' sont des symétries orthogonales et que $u = \sigma \circ \sigma'$.

Remarque de la rédaction
En utilisant la décomposition de la question 3), on peut démontrer que tout endomorphisme orthogonal en dimension n est la composée d'au plus n réflexions.

- Lorsque $\theta \in \,]0, \pi[$, la matrice $R(\theta)$ n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$ car ses valeurs propres dans $\mathbb{C}$ sont $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$ qui ne sont pas réelles, donc une matrice de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ si et seulement si ses valeurs propres sont égales à 1 ou -1, c'est-à-dire si elle représente une symétrie orthogonale.

Exercice 9.64

Réduction des endomorphismes antisymétriques, Polytechnique MP 2006

Montrer que toute matrice réelle antisymétrique est orthogonalement semblable à une matrice diagonale par blocs de la forme

$$\mathrm{Diag}\left(\begin{pmatrix} 0 & \lambda_1 \\ -\lambda_1 & 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 & \lambda_p \\ -\lambda_p & 0 \end{pmatrix}, 0, \dots, 0\right).$$

Soit u un endomorphisme antisymétrique en dimension n. Commençons par deux remarques. Soit $v = u^2 = -u^* \circ u$. On sait (voir exercice 9.1 page 249) que v est symétrique négatif, donc les valeurs propres de v sont négatives, et que $\operatorname{Ker} v = \operatorname{Ker}(u^* \circ u) = \operatorname{Ker} u$.
Soit x un vecteur propre de v pour une valeur propre $\lambda < 0$. La famille $(x, u(x))$ est libre, car sinon il existerait un réel α tel que $u(x) = \alpha x$, d'où $v(x) = \alpha^2 x$, d'où $\alpha^2 = \lambda$ ce qui est impossible. Soit Π le plan $\operatorname{Vect}(x, u(x))$. Comme $u^2(x) = \lambda x$, Π est stable par u, donc $\Pi^\perp$ est stable par u^*, donc par u.
Montrons par récurrence sur n qu'il existe une base orthonormale dans laquelle la matrice de u soit diagonale par blocs de la forme indiquée.
En dimension 1, c'est évident.
Supposons la propriété vérifiée jusqu'au rang $n-1$ et plaçons nous en dimension n.

- Si $u = 0$, c'est évident.
- Si u n'est pas inversible et n'est pas nul, le sous-espace $(\operatorname{Ker} u)^\perp$ est non nul, stable par u et de dimension $\leqslant n-1$, et la restriction de u à ce sous-espace est inversible et antisymétrique, donc on peut lui appliquer l'hypothèse de récurrence. Il existe une base orthonormale de $(\operatorname{Ker} u)^\perp$ dans laquelle la matrice de u est de la forme $\operatorname{Diag}\left(\begin{pmatrix} 0 & \lambda_1 \\ -\lambda_1 & 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 & \lambda_p \\ -\lambda_p & 0 \end{pmatrix}\right)$. En réunissant cette base et une base orthonormale de $\operatorname{Ker} u$, on obtient une base orthonormale de E dans laquelle la matrice de u est de la forme souhaitée.
- Si u est inversible, on considère une valeur propre $\lambda < 0$ de v et on applique la remarque précédente. Le plan Π est stable par u, donc la matrice de $u|_\Pi$ dans une base orthonormale de Π est antisymétrique, c'est-à-dire de la forme $\begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ -\lambda & 0 \end{pmatrix}$.
  Comme $\Pi^\perp$ est stable par u, $u|_{\Pi^\perp}$ est antisymétrique, donc par hypothèse de récurrence il existe une base orthonormale de $\Pi^\perp$ dans laquelle la matrice de $u|_{\Pi^\perp}$ est de la forme indiquée. En la réunissant à une base orthonormale de Π, on obtient encore une base orthonormale de E dans laquelle la matrice de u est de la forme souhaitée.

Exercice 9.65

Polytechnique MP 2006 ☕

On munit $\mathbb{R}^n$ de la norme euclidienne canonique et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme subordonnée notée $|||\cdot|||$.
Soit $B' = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid |||M||| \leqslant 1\}$.
Soit $M \in B'$. On dit que M est un point extrémal de B' lorsque :

$$\forall (A, B) \in B',\ \forall t \in\ ]0, 1[\ ,\ (1-t)A + tB = M \Rightarrow (M = A \text{ ou } M = B)\,.$$

1) Soit $M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Montrer que M est un point extrémal de B'.

2) Établir la réciproque.

1) On remarque d'abord que $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est inclus dans B'. Supposons qu'il existe A et B dans B' et $t \in]0, 1[$ tels que $M = (1-t)A + tB$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a $\|x\| = \|Mx\| \leqslant (1-t)\|Ax\| + t\|Bx\| \leqslant (1-t)\|x\| + t\|x\| = \|x\|$. On retrouve la même valeur des deux côtés de l'inégalité, donc $\|Ax\| = \|x\|$ et $\|Bx\| = \|x\|$ pour tout x, donc A et B appartiennent à $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. De plus, on se trouve dans le cas où l'inégalité triangulaire est une égalité, donc les vecteurs $(1-t)Ax$ et tBx sont colinéaires dans le même sens pour tout x, autrement dit $B^{-1}Ax$ est colinéaire à x dans le même sens pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. D'après un résultat classique d'algèbre linéaire (voir l'exercice 3.40 page 88), il existe un réel $\lambda > 0$ tel que $B^{-1}A = \lambda I_n$, d'où $A = \lambda B$, or A et B sont orthogonales, donc $\lambda = 1$, c'est-à-dire $A = B$. On a bien montré que M est un point extrêmal de B'.

2) Soit M un point extrêmal de B'. On utilise la décomposition polaire (voir exercice 9.46 page 273 : il existe $U \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $S \in \mathcal{S}_n^+$ telles que $M = US$. Par le théorème spectral, il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et des réels positifs $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que $P^{-1}SP = D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Comme $M \in B'$, on a $\forall X \in \mathbb{R}^n$, ${}^t(MX)MX \leqslant {}^tXX$, d'où ${}^t(SX)SX \leqslant {}^tXX$, d'où en posant $X = PY$, ${}^t(DY)DY \leqslant {}^tYY$ pour tout $Y \in \mathbb{R}^n$, ce qui se traduit par $\lambda_i \leqslant 1$ pour tout $i \in [\![1\,, n]\!]$.

   Supposons par exemple $\lambda_1 < 1$. Posons $\delta = \dfrac{1}{2}\min(\lambda_1, 1 - \lambda_1)$. On a alors $0 < \lambda_1 - \delta < \lambda_1 + \delta < 1$. Posons $S_1 = P\,\mathrm{diag}(\lambda_1 - \delta, \lambda_2, \dots, \lambda_n)P^{-1}$ et $S_2 = P\,\mathrm{diag}(\lambda_1 + \delta, \lambda_2, \dots, \lambda_n)P^{-1}$. Les matrices S_1 et S_2 sont symétriques définies positives et appartiennent à B' car leurs valeurs propres sont comprises entre 0 et 1, donc les matrices US_1 et US_2 appartiennent à B' et on a $\dfrac{1}{2}US_1 + \dfrac{1}{2}US_2 = UPDP^{-1} = M$. Or $S_1 \neq S_2$ donc $M \neq US_1$ et de même $M \neq US_2$, donc M n'est pas un point extrêmal de B'. On en déduit que $\lambda_1 = 1$ et de façon analogue, $\lambda_i = 1$ pour tout i, donc $S = I_n$, c'est-à-dire $M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 9.66

Centrale MP 2005 ☕

1) Soit s un endomorphisme symétrique défini positif de E. Calculer
$$\sup\{\mathrm{tr}(us) \mid u \in \mathcal{O}(E)\}\,.$$

2) Soit f un endomorphisme de E. Calculer
$$\sup\{\mathrm{tr}(uf) \mid u \in \mathcal{O}(E)\}\,.$$

Indication de la rédaction : utiliser la décomposition polaire de f.

1) Plaçons nous dans une base orthonormale de vecteurs propres de s, et notons $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres (strictement positives) associées. Pour $u \in \mathcal{O}(E)$, on note $U = (u_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ la matrice de u dans cette base ce qui donne

$\operatorname{tr}(us) = \sum_{j=1}^{n} u_{jj}\lambda_j$. Comme U est une matrice orthogonale, $|u_{jj}| \leqslant 1$ pour tout j, donc $\operatorname{tr}(us) \leqslant \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = \operatorname{tr} s$. Or $\mathrm{Id}_E \in \mathcal{O}(E)$, donc $\sup\{\operatorname{tr}(us) \mid u \in \mathcal{O}(E)\} = \operatorname{tr} s$.

2) On utilise la décomposition polaire de f (voir exercice 9.46 page 273) : il existe deux endomorphismes s symétrique défini positif et v orthogonal tels que $f = vs$. Comme $\mathcal{O}(E)$ est un groupe, l'application $u \mapsto uv$ est une bijection de $\mathcal{O}(E)$ sur lui-même, donc on a :

$$\sup\{\operatorname{tr}(uf) \mid u \in \mathcal{O}(E)\} = \sup\{\operatorname{tr}(u's) \mid u' \in \mathcal{O}(E)\} = \operatorname{tr} s = \operatorname{tr}(\sqrt{f^*f}).$$

Exercice 9.67

Centrale MP 2005

Soit $\mathcal{A} = \{u \in \mathcal{L}(E) \mid u \circ u^* \circ u = u\}$.
Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $u \in \mathcal{A}$.
(ii) $u \circ u^*$ est un projecteur orthogonal.
(iii) $u^* \circ u$ est un projecteur orthogonal.
(iv) $(\operatorname{Ker} u)^{\perp} = \{x \in E \mid \|u(x)\| = \|x\|\}$.

(i)⇒(ii) On a $(u \circ u^*)^2 = u \circ u^* \circ u \circ u^* = u \circ u^*$, donc $u \circ u^*$ est un projecteur. D'autre part, $u \circ u^*$ est autoadjoint, donc c'est un projecteur orthogonal.

(ii)⇒(iii) L'endomorphisme $v = u^* \circ u$ est autoadjoint et on a :

$$v^3 = u^* \circ (u \circ u^*)^2 \circ u = u^* \circ u \circ u^* \circ u = v^2 .$$

Les valeurs propres de v vérifient $\lambda^3 = \lambda^2$, donc sont égales à 0 ou 1, or v est diagonalisable, donc $v^2 = v$, c'est-à-dire que v est aussi un projecteur orthogonal.

(iii)⇒(iv) On sait que $\operatorname{Ker}(u^* \circ u) = \operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Im}(u^* \circ u) = (\operatorname{Ker} u)^{\perp} = \operatorname{Im} u^*$.

- Si $x \in (\operatorname{Ker} u)^{\perp}$, alors $(u^* \circ u)(x) = x$ d'où $\|u(x)\|^2 = (x \mid u^*(u(x))) = \|x\|^2$.
- Supposons $\|u(x)\| = \|x\|$. On pose $y = \|x - u^*(u(x))\|^2$. On a :

$$\begin{aligned} y &= (x \mid x) - 2(x \mid u^*(u(x))) + (u^*(u(x)) \mid u^*(u(x))) \\ &= -(x \mid x) + ((u^* \circ u)^2(x) \mid x) = -(x \mid x) + ((u^*(u(x)) \mid x) = 0. \end{aligned}$$

On en déduit que $x = u^*(u(x))$, d'où $x \in \operatorname{Im}(u^* \circ u) = (\operatorname{Ker} u)^{\perp}$.

(iv)⇒(i) Démontrons que $u \circ u^* \circ u$ et u coïncident sur $\operatorname{Ker} u$ et $(\operatorname{Ker} u)^{\perp}$.

- Si $x \in \operatorname{Ker} u$, alors $u(x) = 0$ et $(u \circ u^* \circ u)(x) = 0$.
- Démontrons que $u^* \circ u|_{(\operatorname{Ker} u)^{\perp}} = \mathrm{Id}$.
  Soit $x \in (\operatorname{Ker} u)^{\perp}$. Par hypothèse, $\|u(x)\| = \|x\|$.
  Posons de nouveau $y = \|x - u^*(u(x))\|^2$. En développant, on a :

$$y = (x \mid x) - 2(u(x) \mid u(x)) + (u^*(u(x)) \mid u^*(u(x))),$$

d'où $y = -\|x\|^2 + \|u^*(u(x))\|^2$. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a :

$$(u^*(u(x)) \mid u^*(u(x))) = (u(x) \mid u \circ u^* \circ u(x)) \leqslant \|u(x)\| \, \|u \circ u^* \circ u(x)\| \, .$$

On sait que $\operatorname{Im} u^* = (\operatorname{Ker} u)^{\perp}$ donc pour tout z, on a $\|u(u^*(z))\| = \|u^*(z)\|$. On en déduit que $(u^*(u(x)) \mid u^*(u(x))) \leqslant \|x\| \, \|u^*(u(x))\|$, ce qui donne en simplifiant $\|u^*(u(x))\| \leqslant \|x\|$. Il en résulte que $y \leqslant 0$, ce qui entraîne que $y = 0$, d'où $x - u^*(u(x)) = 0$.

On a montré que les endomorphismes $u \circ u^* \circ u$ et u coïncident sur $\operatorname{Ker} u$ et $(\operatorname{Ker} u)^{\perp}$. On en déduit qu'ils sont égaux, ce qui prouve que $u \in \mathcal{A}$.

L'exercice suivant suppose connues les propriétés classiques de l'exponentielle de matrices.

Exercice 9.68

Polytechnique, ENS MP 2007

1) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ antisymétrique. Montrer que $\exp A$ appartient à $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$.
2) Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\exp A \in \mathcal{S}_n^{++}$.
3) Soient A et B appartenant à $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telles que $\exp A = \exp B$. Montrer que $A = B$.
4) Démontrer que l'application $A \mapsto \exp A$ est une bijection de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{S}_n^{++}$.

1) Comme ${}^t A = -A$, on a ${}^t(\exp A) \exp A = \exp({}^t A) \exp A = \exp(-A) \exp A$. Comme A et $-A$ commutent, on en déduit que ${}^t(\exp A) \exp A = \exp(-A+A) = I_n$, d'où $\exp A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. De plus, $\det(\exp A) = e^{\operatorname{tr} A}$, or $\operatorname{tr} A = 0$, d'où $\det(\exp A) = 1$, d'où $A \in \mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$.
2) Par le théorème fondamental, il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que $P^{-1}AP = D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Or $\exp(P^{-1}AP) = P^{-1}(\exp A)P$, d'où $P^{-1}(\exp A)P = \operatorname{diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n})$. Or $e^{\lambda_k} > 0$ pour tout k, donc la matrice $\exp A$ est diagonalisable en base orthonormale à valeurs propres strictement positives, d'où $\exp A \in \mathcal{S}_n^{++}$.
3) On raisonne sur les endomorphismes en procédant comme pour la racine carrée dans $\mathcal{S}^+(E)$ (voir exercice 9.41 page 271) :
   - Soient u autoadjoint et λ un réel. Alors $\operatorname{Ker}(u - \lambda \operatorname{Id}_E) = \operatorname{Ker}(\exp u - e^{\lambda} \operatorname{Id}_E)$.
   - Soient u et v autoadjoints tels que $\exp u = \exp v$. Pour toute valeur propre λ de u, on a :

     $$\operatorname{Ker}(u - \lambda \operatorname{Id}_E) = \operatorname{Ker}(\exp u - e^{\lambda} \operatorname{Id}_E) = \operatorname{Ker}(\exp v - e^{\lambda} \operatorname{Id}_E) = \operatorname{Ker}(u - \lambda \operatorname{Id}_E),$$

     donc u et v coïncident sur chaque espace propre de u. Comme u est diagonalisable, on en déduit que $u = v$.
4) D'après les deux questions précédentes, l'application exponentielle est injective de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ à valeurs dans $\mathcal{S}_n^{++}$.

Si $B \in \mathcal{S}_n^{++}$, il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ strictement positifs tels que $P^{-1}BP = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. On pose alors $A = P \operatorname{diag}(\ln \lambda_1, \dots, \ln \lambda_n) P^{-1}$ et on vérifie facilement que $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\exp A = B$.

Ce dernier exercice propose une démonstration de la décomposition polaire basée sur le calcul différentiel.

Exercice 9.69

ENS MP 2007, autre preuve de la décomposition polaire

1) Montrer que l'application $(M, N) \mapsto \langle M, N\rangle = \operatorname{tr}({}^tMN)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2) Montrer que $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est un compact de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
3) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Déterminer la différentielle en 0 de l'application $M \mapsto \|A - \exp M\|^2$.
4) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que $\forall \Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}),\ \|I_n - A\| \leqslant \|\Omega - A\|$. Montrer que $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
5) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Etablir l'existence de $U \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et de $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telles que $A = US$.

1) Question de cours.
2) $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est fermé borné donc compact (voir exercice 9.46 page 273).
3) On pose $f(M) = A - \exp M$ et $\varphi(M) = \langle f(M), f(M)\rangle$. On sait que $\exp H = I_n + H + \sum_{k=2}^{\infty} \dfrac{H^k}{k!}$, donc $\exp H = I_n + H + o(\|H\|)$ quand H tend vers 0. Il en résulte que $d(\exp)(0)(H) = H$, donc que $df(0)(H) = -H$. Comme le produit scalaire est bilinéaire, on en déduit que $d\varphi(M)(H) = 2\langle f(M), df(M)(H)\rangle$, donc
$$d\varphi(0)(H) = 2\langle A - I_n, -H\rangle = 2\langle I_n - A, H\rangle\ .$$
4) On sait que si M est une matrice antisymétrique, alors $\exp M$ est orthogonale, donc $\forall M \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R}),\ \|A - I_n\|^2 \leqslant \|A - \exp M\|^2$. On en déduit que l'application φ restreinte au sous-espace vectoriel $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ admet un minimum absolu en 0, donc sa différentielle restreinte à ce sous-espace est nulle en 0. Par conséquent, on a $\forall H \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R}),\ \langle I_n - A, H\rangle = 0$, donc $I_n - A$ appartient à l'orthogonal de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, qui est égal à $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, donc la matrice A est symétrique.
5) Comme $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est compact, la distance de A à $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est atteinte, donc il existe $U \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ tel que $\forall P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}),\ \|U - A\| \leqslant \|P - A\|$. On pose $\Omega = U^{-1}P$. Comme $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est un groupe, quand P décrit $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, Ω également, donc on a aussi $\forall \Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}),\ \|U(I_n - U^{-1}A)\| \leqslant \|U(\Omega - U^{-1}A)\|$. Or si $U \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, alors $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \|UM\|^2 = \operatorname{tr}({}^tM{}^tUUM) = \|M\|^2$, donc $\forall \Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}),\ \|I_n - U^{-1}A\| \leqslant \|\Omega - U^{-1}A\|$. On déduit de la question précédente que la matrice $S = U^{-1}A$ est symétrique, d'où l'écriture $A = US$ demandée.

Quadriques et coniques 10

10.1 L'ESSENTIEL DU COURS ET EXERCICES D'ASSIMILATION

10.1.1 Classification des quadriques

Ce qu'il faut savoir

On se place dans un espace affine euclidien E_3 de dimension trois.

• On appelle **quadrique** un ensemble Q de points de E_3 vérifiant la condition : il existe un repère orthonormal $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k})$ et des réels a, b, c, d, e, f, g, h, i, j avec $(a, b, c, d, e, f) \neq (0, 0, 0, 0, 0, 0)$ tels que S admet dans $\mathcal{R}$ une équation cartésienne de la forme :

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz + gx + hy + iz + j = 0.$$

On note A la matrice définie par

$$A = \begin{pmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{pmatrix}.$$

Si Q est une quadrique, alors dans tout repère orthonormal, Q admet une équation cartésienne de la forme proposée ci-dessus. Il suffit d'appliquer les formules de changements de base pour s'en rendre compte, mais selon le repère choisi, l'équation cartésienne de Q est plus ou moins simple. On montre que les différentes situations possibles sont celles résumées dans les tableaux des pages suivantes.

Remarques mnémotechniques sur les tableaux suivants

• Le nom d'une quadrique est lié à la nature de son intersection avec les plans d'équation $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ dans le repère où elle admet une équation réduite. Lorsque deux de ces intersections sont de même nature, on utilise un terme en « oïde » qui décrit la nature commune de ces deux intersections, le terme en « ique » décrit alors la nature de la troisième intersection. Ainsi on doit s'attendre à ce que l'intersection d'un paraboloïde hyperbolique avec deux de ces plans soit une parabole et que la troisième de ces intersections soit une hyperbole.

• Lorsque le nom d'une quadrique contient les termes paraboloïdes ou cylindre le rang de sa matrice associé perd une unité.

Tableau 10.1 rg $A = 3$, Quadriques à centre

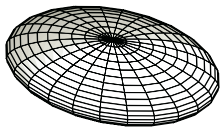
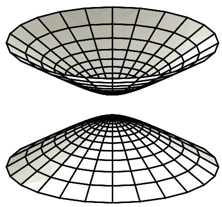
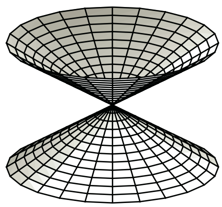
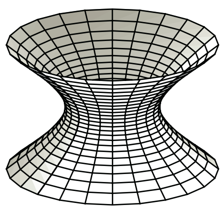
Équation réduite	représentation graphique	nature, nom
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$		$\varnothing$
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$		singleton
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$		ellipsoïde
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$		hyperboloïde à deux nappes
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$		cône
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$		hyperboloïde à une nappe

Tableau 10.2 rg $A = 2$

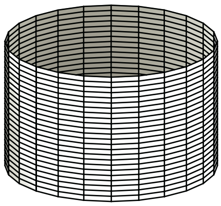
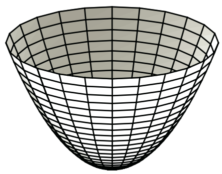
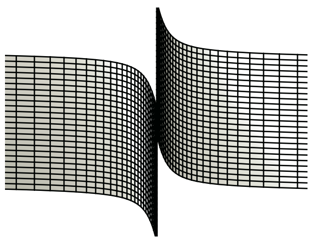
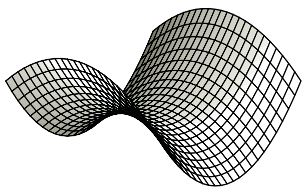
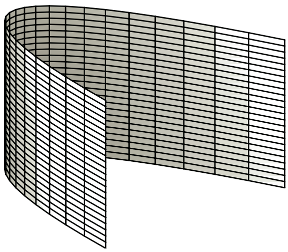
Équation réduite	représentation graphique	nature, nom
$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = -1$		$\varnothing$
$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 0$		droite
$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$		cylindre elliptique
$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 2\dfrac{z}{c}$		paraboloïde elliptique
$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 0$		deux plans sécants
$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$		cylindre hyperbolique
$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 2\dfrac{z}{c}$		paraboloïde hyperbolique

Tableau 10.3 rg $A = 1$

Équation réduite	représentation graphique	nature, nom
$\dfrac{x^2}{a^2} = -1$		$\varnothing$
$\dfrac{x^2}{a^2} = 0$		plan
$\dfrac{x^2}{a^2} = 1$		deux plans parallèles
$\dfrac{x^2}{a^2} = 2py$		cylindre parabolique

Exercice 10.1

Soit $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ un repère orthonormal de l'espace. Donner le nom des quadriques suivantes.

1) $2X^2 - Y^2 + 3Z^2 = 1$
2) $3Z^2 + 4Y^2 = 0$
3) $X + Y^2 + Z^2 = 0$
4) $-2X^2 + 3Y^2 - Z^2 = 5$
5) $X^2 - 3Y - Z^2 = 0$
6) $-2X^2 - 3Y^2 - Z^2 = 1$
7) $X^2 + Y^2 = 1$
8) $2X^2 - 5Y^2 + 2Z^2 = 0.$

1) hyperboloïde à une nappe
2) droite
3) paraboloïde elliptique
4) hyperboloïde à deux nappes
5) paraboloïde hyperbolique
6) vide
7) cylindre elliptique
8) cône.

Exercice 10.2

Indiquer des éléments de symétrie des quadriques à centre.

On se place dans un repère orthonormé $Oxyz$ où elles admettent une équation réduite. Elles admettent toute l'origine pour centre de symétrie ; les axes Ox, Oy et Oz pour axes de symétrie, et les plans xOy, yOz et zOx pour plans de symétrie.

Exercice 10.3

L'espace est rapporté à un repère orthonormal. $(0, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k})$. Discuter suivant α dans $\mathbb{R}$ la nature de la quadrique (S) d'équation $X^2 + \alpha Y^2 + Z^2 = \alpha$

- Lorsque $\alpha > 0$, la quadrique (S) est un ellipsoïde.
- Lorsque $\alpha = 0$, la quadrique (S) est une droite.
- Lorsque $\alpha < 0$, la quadrique (S) est un hyperboloïde à deux nappes.

L'exercice suivant doit vous permettre de vous entraîner à visualiser les quadriques. On essaiera de bien se représenter les intersections proposées avant de justifier sa réponse.

Exercice 10.4

Intersection d'une quadrique et d'un plan

On se placera bien sûr dans un repère où la quadrique proposée admet une équation réduite.

1) Donner un plan dont l'intersection avec un paraboloïde elliptique est une parabole.

2) Donner un plan dont l'intersection avec un cône est une hyperbole.

3) Est-ce que l'intersection d'un plan et d'un hyperboloïde à une nappe peut être une ellipse ?

4) Donner un plan dont l'intersection avec un cylindre parabolique est la réunion de deux droites parallèles.

5) Est-ce que l'intersection d'un plan et d'un hyperboloïde à deux nappes peut être vide ?

6) Est-ce que l'intersection d'un plan et d'un ellipsoïde peut être une parabole ?

7) Est-ce que l'intersection d'un plan avec un paraboloïde elliptique peut être une hyperbole ?

8) Est-ce que l'intersection d'un plan et d'un cylindre elliptique peut être une parabole ?

1) Il existe (a, b, c) un triplet de réels non nuls et un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k})$, tel que le paraboloïde elliptique (S) admet dans ce repère une équation de la forme $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-2\dfrac{z}{c}=0$. Considérons le plan P d'équation $x=0$. Le triplet $(O, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k})$ est un repère orthonormal de P. Soit M un point de P de coordonnées (X, Y) dans $(O, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k})$. Ses coordonnées dans $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k})$ sont $(0, X, Y)$. Le point M appartient à $P \cap (S)$ si et seulement si $\dfrac{X^2}{b^2}-2\dfrac{Y}{c}=0$, c'est l'équation d'une parabole dans P.

2) Il existe (a, b, c) un triplet de réels non nuls et un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k})$, tel que le cône (C) admet dans ce repère une équation de la forme $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0$. Considérons le plan P d'équation $x=\alpha$ avec $\alpha \neq 0$. Soit Ω le point de P de coordonnées $(\alpha, 0, 0)$. Le triplet $(\Omega, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k})$ est un repère orthonormal de P. Soit M un point de P de coordonnées (X, Y) dans $(\Omega, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k})$. Ses coordonnées dans $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k})$ sont (α, X, Y). Le point M appartient à $P \cap (C)$ si et seulement si $\dfrac{\alpha^2}{a^2}+\dfrac{X^2}{b^2}-\dfrac{Y^2}{c^2}=0$, c'est bien l'équation d'une hyperbole dans P.

3) Il existe (a, b, c) un triplet de réels non nuls et un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k})$, tel que l'hyperboloïde à une nappe (H) admet dans ce repère une équation de la forme $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$. Considérons le plan P d'équation $z=0$.
Le triplet $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est un repère orthonormal de P. Soit M un point de P de coordonnées (X, Y) dans $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Ses coordonnées dans $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k})$ sont $(X, Y, 0)$. Le point M appartient à $P \cap (H)$ si et seulement si $\dfrac{X^2}{a^2}+\dfrac{Y^2}{b^2}=1$, c'est l'équation d'une ellipse dans P.

4) Il existe (a, p) un couple de réels non nuls et un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k})$, tel que le cylindre parabolique (S) admet dans ce repère une équation de la forme $\dfrac{x^2}{a^2}=2py$. Soit α un réel strictement positif. Considérons le plan P d'équation $y=\alpha$. Soit Ω le point de P de coordonnées $(0, \alpha, 0)$. Le triplet $(\Omega, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{k})$ est un repère orthonormal de P. Soit M un point de P de coordonnées (X, Y) dans $(\Omega, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{k})$. Ses coordonnées dans $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k})$ sont (X, α, Y). Le point M appartient à $P \cap (S)$ si et seulement si $\dfrac{X^2}{a^2}=2p\alpha$. Comme α est strictement positif c'est l'équation d'un couple de droites parallèles dans P.

5) Il existe (a, b, c) un triplet de réels non nuls et un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k})$, tel que l'hyperboloïde à deux nappes (H) admet dans ce repère une équation de la forme $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=-1$. Considérons le plan P d'équation $z=0$. Un point M

de coordonnées (x, y, z) dans $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k})$ appartient à $P \cap (H)$ si et seulement si $z = 0$ et $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = -1$ ce qui est impossible. On a donc $P \cap (H) = \varnothing$.

6) Soit (E) un ellipsoïde. L'ensemble (E) est une partie bornée de l'espace et son intersection avec un plan sera donc également bornée. Comme une parabole n'est pas une partie bornée de l'espace, l'intersection d'un ellipsoïde et d'un plan ne peut être une parabole.

7) Il existe (a, b, c) un triplet de réels non nuls avec $c > 0$ et un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k})$, tel que le paraboloïde elliptique (E) admet pour équation dans ce repère $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 2\dfrac{z}{c}$. On constate que (E) est inclus dans le demi-espace $z \geqslant 0$. Soit P un plan. Si le plan P est parallèle au plan $z = 0$, on montre que son intersection avec H est une ellipse, sinon son intersection avec le demi-espace $z \geqslant 0$ est un demi-plan. Comme une hyperbole n'est jamais incluse dans un demi-plan, l'intersection de H et P ne peut être une hyperbole. Dans tous les cas l'intersection de P et (E) n'est jamais une hyperbole.

8) Il existe (a, b) un couple de réels non nuls et un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k})$, tel que le cylindre elliptique (E) admet pour équation dans ce repère $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. On va utiliser le fait que tout point de l'axe Oz est un centre de symétrie de (E). Soit P un plan. Si P est parallèle à l'axe Oz on montre que son intersection avec (E) est soit une droite, soit un couple de droites parallèles, soit vide. Si P n'est pas parallèle à l'axe Oz, alors il rencontre cet axe en un centre de symétrie de (E). Comme le plan P est lui même stable par cette symétrie centrale, l'intersection de (E) et P admet un centre de symétrie. Or une parabole n'a pas de centre de symétrie, ce qui montre que l'intersection de P et (E) n'est jamais une parabole.

10.1.2 Réduction des quadriques

Ce qu'il faut savoir

Notations et lien avec l'algèbre bilinéaire

L'espace E est rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k})$. Soit Q une quadrique qui admet pour équation cartésienne dans le repère $\mathcal{R}$:

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz + gx + hy + iz + j = 0.$$

On note A la matrice définie par $A = \begin{pmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{pmatrix}$.

On définit la fonction F, qui à tout triplet (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$, associe le réel

$$F(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz + gx + hy + iz + j.$$

On note ϕ et on appelle partie linéaire de Q, la forme linéaire sur $\mathbb{R}^3$ définie par

$$\phi(x, y, z) = gx + hy + iz.$$

On a alors, en notant X le vecteur colonne $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$:

$$M(x, y, z) \in S \Leftrightarrow F(x, y, z) = 0 \Leftrightarrow {}^tXAX + \phi(X) + j = 0.$$

Pratique de la réduction

Première étape

On détermine le **spectre** de A. La matrice A étant symétrique réelle, elle est diagonalisable dans une base orthonormale. Dans la suite, on note (e_1, e_2, e_3) une telle base et on note alors λ_1, λ_2 et λ_3 les valeurs propres respectivement associées à e_1, e_2 et e_3.

Deuxième étape

• rg $A = 3$.

∘ Remarquons tout d'abord que cette condition revient à « 0 n'appartient pas au spectre de A ». Dans ce cas la quadrique Q admet un unique centre de symétrie Ω et on dit que Q est à **centre**.

∘ Pour déterminer les coordonnées (x_0, y_0, z_0) de Ω, on peut utiliser le fait qu'elles vérifient le système d'équations

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) = 0 \end{cases}.$$

Il est aussi utile de savoir que, dans le cas où la partie linéaire ϕ est nulle, le centre de la quadrique est O.

∘ Grâce aux formules $x = x_0 + x'$, $y = y_0 + y'$, $z = z_0 + z'$, on détermine l'équation cartésienne de Q dans le repère $\mathcal{R}' = (\Omega, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k})$ obtenu par translation du repère $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k})$.

On obtient une équation de la forme :

$$ax'^2 + by'^2 + cz'^2 + 2dx'y' + 2ex'z' + 2fy'z' + \alpha = 0.$$

Enfin, sans avoir besoin d'expliciter les vecteurs e_1, e_2 et e_3, on sait que dans le repère $\mathcal{R}'' = (\Omega, e_1, e_2, e_3)$, la quadrique Q admet pour équation :

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + \lambda_3 Z^2 + \alpha = 0.$$

• rg $A < 3$.

∘ On explicite les vecteurs e_1, e_2 et e_3. On donne en particulier la matrice de passage de la base $(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k})$ à la base (e_1, e_2, e_3) : c'est la matrice P des coordonnées de e_1, e_2 et e_3 dans la base $(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k})$.

∘ En utilisant les formules de passage données par :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \cdot \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix},$$

on détermine l'équation cartésienne de Q dans le repère $\mathcal{R}' = (O, e_1, e_2, e_3)$.

∘ On met sous forme canonique les trinômes en X en Y, et en Z et on en déduit un nouveau repère $\mathcal{R}'' = (O', e_1, e_2, e_3)$ (obtenu par translation de $\mathcal{R}'$), dans lequel Q admet une équation cartésienne d'un des types proposés dans les tableaux 2 et 3.

Exercice 10.5

Centrale PC 2005

Etudier la quadrique Q d'équation $x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz - 2yz - 1 = 0$

La matrice de Q est donnée par $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Cette matrice est de rang 3 et la partie linéaire ϕ est nulle. Il s'agit donc d'une quadrique de centre O.

Le polynôme caractéristique de A est $\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4$. Son spectre est $\{-1, 2\}$. Soit (e_1, e_2, e_3) une base orthonormale de vecteurs propres. Dans le repère (O, e_1, e_2, e_3) la quadrique a pour équation : $-X^2 + 2Z^2 + 2Y^2 = 1$. Il faut bien réaliser qu'on n'a pas besoin d'expliciter la base (e_1, e_2, e_3) pour obtenir cette expression. On reconnaît un hyperboloïde à une nappe.

Exercice 10.6

Mines-Ponts PSI 2006

Reconnaître et réduire la quadrique d'équation :

$$2x^2 + 2y^2 + z^2 + 2xz - 2yz + 4x - 2y - z + 3 = 0.$$

La matrice de Q est donnée par $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Le rang de cette matrice vaut 2 et on a $\mathrm{Sp}(A) = \{0, 2, 3\}$. On obtient par exemple comme base orthonormale de vecteurs propres :

$$e_1 = \left(-\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right), \quad e_2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right), \quad e_3 = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right).$$

Les formules de passage du repère initial au repère orthonormal (O, e_1, e_2, e_3) s'écrivent :

$$\begin{cases} x = -\dfrac{\sqrt{6}}{6} X + \dfrac{\sqrt{2}}{2} Y + \dfrac{\sqrt{3}}{3} Z, \\ y = \dfrac{\sqrt{6}}{6} X + \dfrac{\sqrt{2}}{2} Y - \dfrac{\sqrt{3}}{3} Z \\ z = \dfrac{\sqrt{6}}{3} X + \dfrac{\sqrt{3}}{3} Z \end{cases}.$$

On en déduit que dans le repère (O, e_1, e_2, e_3), la quadrique a pour équation $2Y^2 + 3Z^2 - \dfrac{4\sqrt{6}}{3} X + \sqrt{2} Y + \dfrac{5\sqrt{3}}{3} Z + 3 = 0$. En mettant cette expression sous forme canonique, on obtient

$$3\left(Z + \frac{5}{18}\sqrt{3}\right)^2 + 2\left(Y + \frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 - \frac{4}{3}\sqrt{6}\left(X - \frac{37}{144}\sqrt{6}\right) = 0.$$

Soit $O' = \left(-\dfrac{5\sqrt{3}}{18}, -\dfrac{\sqrt{2}}{4}, \dfrac{37\sqrt{6}}{144}\right)$. Dans le repère orthonormal (O', e_1, e_2, e_3), la quadrique a pour équation $3Z'^2 + 2Y'^2 - \dfrac{4}{3}\sqrt{6}X' = 0$.
On reconnaît un paraboloïde elliptique.

10.1.3 Coniques

Les coniques ont été étudiées dans le livre de première année « Tous les exercices d'algèbre et de géométrie MPSI-PCSI-PTSI » auquel nous vous renvoyons pour les rappels de cours.

La méthode de réduction des quadriques donnée plus haut s'adapte sans difficulté aux coniques.

Exercice 10.7

Mines-Ponts MP 2006

Étudier la courbe (C) d'équation : $16x^2 - 24xy + 9y^2 + 19x - 20y = 0$.

Considérons la matrice $A = \begin{pmatrix} 16 & -12 \\ -12 & 9 \end{pmatrix}$.

Son polynôme caractéristique est $\lambda^2 - 25\lambda$. Le spectre de A est $\{25, 0\}$. On en déduit que (C) est une conique du genre parabole. Les vecteurs propres de A permettent de construire une base orthonormale (e_1, e_2) de $\mathbb{R}^2$. On obtient par exemple $e_1 = \left(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$ et $e_2 = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$. Dans le repère (O, e_1, e_2) la courbe (C) a pour équation $25X^2 - \frac{136}{5}X - \frac{23}{5}Y = 0$. On peut mettre sous forme canonique le terme de gauche de cette égalité et obtenir comme équation $25\left(X - \frac{68}{125}\right)^2 - \frac{23}{5}Y = \frac{4624}{625}$. La courbe (C) est une parabole.

10.2 EXERCICES D'ENTRAÎNEMENT

10.2.1 Quadriques

Exercice 10.8

Centrale PC 2006

On munit $\mathbb{R}^3$ de son repère orthonormal canonique. Caractériser la surface d'équation $y^2 + xy - xz - yz - 3x - 5y - 3 = 0$.

La matrice de Q est donnée par $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$.

Son polynôme caractéristique est $-\lambda^3 + \lambda^2 + \frac{3}{4}\lambda$ et on a $\mathrm{Sp}(A) = \left\{0, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right\}$. Comme la matrice de A n'est pas de rang 3, on explicite une base orthonormale de vecteurs propres. On obtient par exemple :

$$e_1 = \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right), \quad e_2 = \left(-\frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{6}\right), \quad e_3 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Dans le repère orthonormal (O, e_1, e_2, e_3), la quadrique a pour équation :

$$\frac{3}{2}Y^2 - \frac{1}{2}Z^2 - \frac{2}{3}\sqrt{3}X + \frac{13}{6}\sqrt{6}Y - \frac{3}{2}\sqrt{2}Z - 3 = 0.$$

En mettant sous forme canonique le terme de gauche de l'égalité précédente on obtient :

$$-\frac{1}{2}\left(Z+\frac{3}{2}\sqrt{2}\right)^2+\frac{3}{2}\left(Y+\frac{13}{18}\sqrt{6}\right)^2-\frac{2}{3}\sqrt{3}\left(X+\frac{49}{18}\sqrt{3}\right)=0.$$

Soit $O'=\left(-\frac{3}{2}\sqrt{2},-\frac{13}{18}\sqrt{6},-\frac{49}{18}\sqrt{3}\right)$. Dans le repère orthonormal (O',e_1,e_2,e_3), la quadrique a pour équation $\frac{3}{2}Y'^2-\frac{1}{2}Z'^2-\frac{2}{3}\sqrt{3}X'=0$.
On reconnaît un paraboloïde hyperbolique.

Exercice 10.9

Mines-Ponts PSI 2006

Reconnaître, pour α dans $\mathbb{R}$, la quadrique Q d'équation :

$$x^2+3y^2-3z^2-4xy+2xz-8yz+\alpha x+2y-z=1.$$

La matrice de Q est donnée par $A=\begin{pmatrix}1&-2&1\\-2&3&-4\\1&-4&-3\end{pmatrix}$.

Son polynôme caractéristique est $-\lambda^3+\lambda^2+30\lambda$. Le rang de cette matrice vaut 2 et on a $\mathrm{Sp}(A)=\{6,-5,0\}$. Comme la matrice de A n'est pas de rang 3, on explicite une base orthonormale de vecteurs propres. On obtient par exemple :

$$e_1=\left(\frac{\sqrt{6}}{6},-\frac{\sqrt{6}}{3},\frac{\sqrt{6}}{6}\right),\quad e_2=\left(0,\frac{\sqrt{5}}{5},\frac{2}{5}\sqrt{5}\right),\quad e_3=\left(-\frac{\sqrt{30}}{6},-\frac{\sqrt{30}}{15},\frac{\sqrt{30}}{30}\right).$$

Dans le repère orthonormal (O,e_1,e_2,e_3), la quadrique a pour équation :

$$6X^2-5Y^2+\frac{\sqrt{6}}{6}(\alpha-5)X-\frac{\sqrt{30}}{6}(1+\alpha)Z-1=0.$$

On constate alors que quelque soit la valeur de α, le terme en X pourra être regroupé avec le terme en X^2. On obtient la forme canonique :

$$6\left(X+\frac{\sqrt{6}}{72}(\alpha-5)\right)^2-5Y^2-\frac{\sqrt{30}}{6}(1+\alpha)Z-1-\frac{1}{144}(\alpha-5)^2=0.$$

L'expression obtenue montre que le terme constant est toujours non nul. Le terme en Z peut par contre être annulé si $\alpha=-1$. On a donc la situation suivante : si $\alpha=-1$ alors la quadrique est un cylindre hyperbolique, si $\alpha\neq-1$ alors la quadrique est un paraboloïde hyperbolique.

Exercice 10.10

Centrale PC 2005

Donner la nature de la surface (S) de $\mathbb{R}^3$ définie par $(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2 = k$.

La matrice de Q est donnée par $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Son polynôme caractéristique est $-\lambda^3 + 6\lambda^2 - 9\lambda$ et on a $\mathrm{Sp}(A) = \{0, 3\}$. Comme la matrice de A n'est pas de rang 3, on explicite une base orthonormale de vecteurs propres. On obtient par exemple :

$$e_1 = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right), \quad e_2 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \quad e_3 = \left(-\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3}, -\frac{\sqrt{6}}{6}\right).$$

Dans le repère orthonormal (O, e_1, e_2, e_3), la quadrique a pour équation :

$$3Y^2 + 3Z^2 = k.$$

Si $k < 0$, alors la quadrique est vide.

Si $k = 0$, alors la quadrique est réduite à la droite d'équations $Y = Z = 0$.

Si $k > 0$, alors la quadrique est un cylindre elliptique qui ici est de révolution.

Exercice 10.11

TPE PC 2005, Mines-Ponts MP 2006

Déterminer, suivant les valeurs des réels a et b, la nature de la quadrique dont l'équation dans un repère orthonormé est : $x^2 + xy - xz - yz + ax + bz = 0$.

La matrice de Q est donnée par $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$.

Son polynôme caractéristique est $-\lambda^3 + \lambda^2 + \frac{3}{4}\lambda$ et on a $\mathrm{Sp}(A) = \left\{0, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right\}$. Comme la matrice de Q n'est pas de rang 3, on explicite une base orthonormale de vecteurs propres. On obtient par exemple :

$$e_1 = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right), \quad e_2 = \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \quad e_3 = \left(-\frac{\sqrt{6}}{3}, -\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}\right).$$

Dans le repère orthonormal (O, e_1, e_2, e_3), la quadrique a pour équation :

$$-\frac{1}{2}Y^2 + \frac{3}{2}Z^2 + \frac{\sqrt{3}}{3}(a+b)X + \frac{\sqrt{2}}{2}bY - \frac{\sqrt{6}}{6}(2a+b)Z = 0.$$

Si $a \neq -b$, alors l'expression est du premier degré en X et il faudrait mettre sous forme canonique cette expression en Y et en Z. On peut le faire explicitement mais les calculs sont très désagréables et l'essentiel est de remarquer que cette manipulation fait apparaître un terme constant que l'on va pouvoir faire disparaître grâce à un changement de type ($X' = X + \gamma$) car $(a+b) \neq 0$. On sait ainsi qu'il existe un point O' tel que dans le repère (O', e_1, e_2, e_3), la quadrique Q a pour équation :

$$-\frac{1}{2}Y'^2 + \frac{3}{2}Z'^2 + \frac{\sqrt{3}}{3}(a+b)X' = 0.$$

La quadrique est alors un paraboloïde hyperbolique.

Si $a = -b$, alors l'équation obtenue dans (O, e_1, e_2, e_3), se simplifie en

$$-\frac{1}{2}Y^2 + \frac{3}{2}Z^2 - \frac{\sqrt{2}}{2}aY - \frac{\sqrt{6}}{6}aZ = 0.$$

En effectuant une mise sous forme canonique on obtient :

$$\frac{3}{2}\left(Z - \frac{1}{6}a\sqrt{6}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(Y + \frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2 = 0\,.$$

On reconnaît l'équation de la réunion de deux plans sécants.

10.2.2 Coniques

Exercice 10.12

CCP PSI 2006

Reconnaître suivant θ, la nature de $\mathcal{C}_\theta$:

$$x^2\sin^2\theta - xy\sin 2\theta + y^2(1+\cos^2\theta) = \sin^2\theta.$$

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} \sin^2\theta & -\sin\theta\cos\theta \\ -\sin\theta\cos\theta & 1+\cos^2\theta \end{pmatrix}$.

Le polynôme caractéristique de A est $\lambda^2 - 2\lambda + \sin^2\theta = (\lambda - 1 - \cos\theta)(\lambda - 1 + \cos\theta)$.
Commençons par traiter le cas $\theta \not\equiv 0(\pi)$.
Dans ce cas la conique $\mathcal{C}_\theta$ est à centre. Comme la partie linéaire en x et y dans l'équation de $\mathcal{E}$ est nulle, le centre est $(0,0)$.
Pour $\theta \equiv \dfrac{\pi}{2}(\pi)$ les deux valeurs propres de A sont confondues, mais dans tous les cas A est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 1+\cos\theta & 0 \\ 0 & 1-\cos\theta \end{pmatrix}$.
Les vecteurs propres de A permettent de construire une base orthonormale (e_1, e_2) de $\mathbb{R}^2$ telle que dans le repère (O, e_1, e_2), la conique $\mathcal{E}$ a pour équation $(1+\cos\theta)X^2 + (1-\cos\theta)Y^2 - \sin^2\theta = 0$. On en déduit que pour $\theta \not\equiv 0(\pi)$, la conique $\mathcal{C}_\theta$ est une ellipse propre, un cercle lorsque $\theta \equiv \dfrac{\pi}{2}(\pi)$.

Traitons maintenant le cas $\theta \equiv 0(\pi)$.
L'équation de $\mathcal{C}_\theta$ devient $y^2 = 0$. La conique $\mathcal{C}_\theta$ est dégénérée : c'est la droite d'équation $y = 0$.

Exercice 10.13

Mines-Ponts MP 2004

Soit C_λ la courbe d'équation $x^2 + 2\lambda xy + y^2 + 2x + 2y = 0$.

1) Déterminer les points communs à toutes les courbes C_λ.

2) Nature de C_λ suivant λ.

3) Ensemble des centres des C_λ.

1) Soit M un point de coordonnées (x_0, y_0) tel que pour tout λ dans $\mathbb{R}$, le point M appartient à C_λ. En particulier M appartient à C_1 et C_0. Ses coordonnées vérifient donc le système d'équations

$$\begin{cases} x^2 + 2xy + y^2 + 2x + 2y & = & 0 \\ x^2 + y^2 + 2x + 2y & = & 0 \end{cases}.$$

On en déduit que $xy = 0$. Si $x = 0$ alors l'appartenance de M à C_0 montre que $y = 0$ ou $y = -2$, si Si $y = 0$ on a $x = 0$ ou $x = -2$. On a donc ainsi montré que $C_1 \cap C_0 = \{(0,0), (0,-2), (-2,0)\}$, et on vérifie sans difficulté que les points ainsi obtenus appartiennent à C_λ pour tout λ dans $\mathbb{R}$.

2) Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}$.

Son polynôme caractéristique est $X^2 - 2X + 1 - \lambda^2 = (X - 1 - \lambda)(X - 1 + \lambda)$.
Commençons par traiter le cas $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.
La conique C_λ est à centre. Les coordonnées (x_0, y_0) de son centre Ω vérifient le système d'équations

$$\begin{cases} 2x_0 + 2\lambda y_0 + 2 & = & 0 \\ 2\lambda x_0 + 2y_0 + 2 & = & 0 \end{cases}.$$

On obtient $(x_0, y_0) = \left(-\dfrac{1}{\lambda+1}, -\dfrac{1}{\lambda+1}\right)$.

Dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$, la conique C_λ a pour équation $Y^2 + 2\lambda XY + Y^2 - \dfrac{2}{\lambda+1} = 0$.
Les vecteurs propres de A permettent de construire une base orthonormale (e_1, e_2) de $\mathbb{R}^2$ telle que dans le repère (Ω, e_1, e_2), la conique C_λ a pour équation $(1-\lambda)X'^2 + (1+\lambda)Y'^2 - \dfrac{2}{1+\lambda} = 0$.

• $\lambda \in]-1, 1[$

La conique C_λ est une ellipse propre car $\dfrac{2}{1+\lambda} > 0$.

• $\lambda \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1]$.

La conique C_λ est une hyperbole car $\dfrac{2}{1+\lambda} \neq 0$.

• $\lambda = -1$

La conique C_λ a pour équation $x^2 - 2xy + y^2 + 2x + 2y = 0$.

La matrice A a pour spectre $\{2, 0\}$. Les vecteurs $e_1 = (-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2})$ et $e_2 = (\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2})$ forment une base orthonormale de $\mathbb{R}^2$ constituée de vecteurs propres de A. Dans le repère (O, e_1, e_2) l'équation de C_λ est $\sqrt{2}X^2 + Y = 0$. Pour $\lambda = -1$, la conique C_λ est une parabole.

• $\lambda = 1$

La conique C_λ a pour équation $x^2 + 2xy + y^2 + 2x + 2y = 0$. On peut appliquer à nouveau les changements de base usuels, mais on peut aussi constater que $x^2 + 2xy + y^2 + 2x + 2y = (x + y)(x + y + 2)$. La conique C_λ est alors la réunion de deux droites parallèles.

3) L'ensemble des centres des C_λ est l'ensemble des points de coordonnées $(-\dfrac{1}{\lambda+1}, -\dfrac{1}{\lambda+1})$ pour λ dans $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Cet ensemble est la droite d'équation $x = y$ privée du point de coordonnées $(0, 0)$.

Exercice 10.14

Mines-Ponts MP 2006

Reconnaître et tracer la courbe $\mathcal{E}$ d'équation $13x^2 - 32xy + 37y^2 = 5$.

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 13 & -16 \\ -16 & 37 \end{pmatrix}$.

Le polynôme caractéristique de cette matrice est $\lambda^2 - 50\lambda + 225 = (\lambda - 5)(\lambda - 45)$. On en déduit que $\mathcal{E}$ est une conique à centre du genre ellipse.

Comme il n'y a pas de terme du premier degré en x et en y dans l'équation de $\mathcal{E}$, on constate, en menant les calculs habituels, que son centre est $(0, 0)$.

Les vecteurs propres de A permettent de construire une base orthonormale (e_1, e_2) de $\mathbb{R}^2$ telle que dans le repère (O, e_1, e_2), la conique $\mathcal{E}$ a pour équation $5X^2 + 45Y^2 - 5 = 0$. On constate alors que $\mathcal{E}$ est une ellipse propre (c'est-à-dire qu'elle est non vide et non réduite à un point).

Pour tracer $\mathcal{E}$ on peut expliciter les vecteurs propres de A. Ils donnent les directions des axes de l'ellipse. On obtient $(\frac{2}{5}\sqrt{5}, \frac{1}{5}\sqrt{5})$, associé à la valeur propre 5 et $(-\frac{1}{5}\sqrt{5}, \frac{2}{5}\sqrt{5})$ associé à la valeur propre 45.

10.3 EXERCICES D'APPROFONDISSEMENT

Exercice 10.15

CCP PSI 2006

Soit (S) la surface d'équation $x^2+y^2-z^2 = 1$. Montrer qu'aucune droite parallèle au plan (xOy) n'est contenue dans (S). Soit D la droite définie par $x = az+b$ et $y = cz+d$. Montrer que D est incluse dans (S) si et seulement si la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est orthogonale.

Remarquons que (S) est un hyperboloïde à une nappe.

Tout droite parallèle au plan (xOy) est contenue dans un plan P_α d'équation $z = \alpha$. Soit M un point de l'espace de coordonnées (x, y, z). Le point M appartient à $(S)\cap P_\alpha$ si et seulement si $x^2 + y^2 = 1 + \alpha^2$ et $z = \alpha$, ceci montre que $(S) \cap P_\alpha$ est borné, il ne contient donc pas de droite.

La droite D d'équations cartésiennes $x = az+b$ et $y = cz+d$ est incluse dans (S) si et seulement si pour tout z dans $\mathbb{R}$ on a $(az+b)^2+(cz+d)^2-z^2 = 1$ ce qui équivaut à : pour tout z dans $\mathbb{R}$, on $(a^2+c^2-1)z^2+2(ab+cd)z+b^2+d^2-1 = 0$. Finalement la droite D est incluse dans (S) si et seulement si $a^2+c^2 = 1$, $ab+cd = 0$ et $b^2+d^2 = 1$, ce qui signifie exactement que la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est orthogonale.

Exercice 10.16

Centrale MP 2005 et 2006

Soient m et a deux réels non nuls. On considère les droites

$$(D_1)\begin{cases} y = mx \\ z = a \end{cases} \text{ et } (D_2)\begin{cases} y = -mx \\ z = -a. \end{cases}$$

Trouver l'ensemble (S) des points M de $\mathbb{R}^3$ tels que $d(M, D_1) = d(M, D_2)$.

Trouver les droites incluses dans (S).

Rappelons que si M_0 est un point de D_1 et $\vec{u}$ un vecteur directeur de D_1, alors la distance d'un point M à la droite D_1 est donnée par la formule :

$$d(M, D_1) = \frac{\|\overrightarrow{M_0M} \wedge \vec{u}\|}{\|\overrightarrow{u}\|}$$

Les vecteurs $\vec{n}_1 = -m\vec{\imath}+\vec{\jmath}$ et $\vec{n}_2 = \vec{k}$ sont des vecteurs normaux aux plans qui définissent D_1, le vecteur $\vec{u} = \vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2 = \vec{\imath}+m\vec{\jmath}$ est alors un vecteur directeur de D_1.

En choisissant M_0 de coordonnées $(0, 0, a)$, on obtient

$$d(M, D_1)^2 = \frac{1}{1+m^2}\left((mx-y)^2+(1+m^2)(z-a)^2\right).$$

On en déduit, en changeant a en $-a$ et m en $-m$, que

$$d(M,D_2)^2 = \frac{1}{1+m^2}\left((mx+y)^2+(1+m^2)(z+a)^2\right).$$

Le point $M(x,y,z)$ appartient à (S) si et seulement si $d(M,D_1) = d(M,D_2)$, ou encore $d(M,D_1)^2 = d(M,D_2)^2$. Cette relation se traduit par l'équation $(mx-y)^2+(1+m^2)(z-a)^2 = (mx+y)^2+(1+m^2)(z+a)^2$, et finalement par $mxy + a(1+m^2)z = 0$.

On constate alors que (S) est une quadrique Q dont nous allons déterminer la nature.

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{m}{2} & 0 \\ \frac{m}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ la matrice de cette quadrique. Son spectre est $\left\{-\frac{m}{2}, \frac{m}{2}, 0\right\}$.

Comme la matrice de Q n'est pas de rang 3, on explicite une base orthonormale de vecteurs propres. On obtient par exemple :

$$e_1 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right), \quad e_2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right), \quad e_3 = (0,0,1).$$

Dans le repère orthonormal (O, e_1, e_2, e_3), la quadrique a pour équation :

$$-\frac{m}{2}X^2 + \frac{m}{2}Y^2 + a(1+m^2)Z = 0.$$

Comme m et a sont non nuls, cette équation est celle d'un paraboloïde hyperbolique.

Cherchons les droites incluses dans (S). Soit M_0 de coordonnées (x_0, y_0, z_0) un point de (S) et soit $\vec{v} = \alpha\vec{\imath} + \beta\vec{\jmath} + \gamma\vec{k}$ un vecteur directeur d'une droite D contenant M_0. La droite D admet pour représentation paramétrique $(x_0+\alpha t, y_0+\beta t, z_0+\gamma t)$ et elle est incluse dans (S) si et seulement si

$$\forall t \in \mathbb{R},\ m(x_0+\alpha t)(y_0+\beta t) + a(1+m^2)(z_0+\gamma t) = 0,$$

ou encore, puisque les coordonnées de M_0 vérifient l'équation de (S),

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \left(m(\alpha y_0 + \beta x_0) + a(1+m^2)\gamma\right) t + m(\alpha\beta)t^2 = 0.$$

Cette dernière expression est nulle pour tout t réel si et seulement si

$$\begin{cases} \alpha\beta & = & 0 \\ \gamma & = & \dfrac{-m}{a(1+m^2)}(\alpha y_0 + \beta x_0) \end{cases}.$$

On obtient $(\alpha,\beta,\gamma) = \lambda(0, 1, \dfrac{-m}{a(1+m^2)}x_0)$ ou $(\alpha,\beta,\gamma) = \lambda(1, 0, \dfrac{-m}{a(1+m^2)}y_0)$ $(\lambda \in \mathbb{R})$. Ceci montre que chaque point de (S) appartient à exactement deux droites qui sont incluses dans (S).

Exercice 10.17

Centrale MP 2005

Dans l'espace affine euclidien $\mathbb{R}^3$, trouver le lieu des points équidistants d'une droite D et d'un plan P.

Il y a deux situations à distinguer :
– la droite D et le plan P sont sécants
– la droite D est parallèle au plan P ou incluse dans le plan P.
Pour traiter cet exercice, le choix d'un repère bien adapté à chacune de ces situations est essentiel.
• La droite D et le plan P sont sécants.

On peut par exemple choisir un repère orthonormal de l'espace $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ tel que P a pour équation cartésienne dans ce repère $z = 0$ et il existe α dans $\mathbb{R}^*$ tel que D a pour système d'équations cartésiennes $y = \alpha z$, $x = 0$. Le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $(0, \alpha, 1)$ est un vecteur directeur de D et le point O appartient à cette droite. Soit alors M un point de l'espace de coordonnées (x, y, z).

On a $d(M, P) = |z|$ et $d(M, D) = \dfrac{\|\vec{u} \wedge \overrightarrow{OM}\|}{\|\vec{u}\|} = \dfrac{\sqrt{(y-\alpha z)^2 + (1+\alpha^2)x^2}}{\sqrt{1+\alpha^2}}$.

On en déduit que les points équidistants de D et de P sont les points M dont les coordonnées (x, y, z) vérifient la relation $z^2(1+\alpha^2) = (y-\alpha z)^2 + (1+\alpha^2)x^2$ ou encore $(1+\alpha^2)x^2 + y^2 - z^2 - 2\alpha yz = 0$.

On obtient donc une quadrique de matrice $A = \begin{pmatrix} 1+\alpha^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\alpha \\ 0 & -\alpha & -1 \end{pmatrix}$. Cette quadrique est de rang 3. Comme sa partie linéaire est nulle son centre est O. On peut se lancer dans le calcul du spectre de A, mais on peut aussi constater que la quadrique contient son centre et montrer que ce n'est pas un singleton en faisant référence à la définition géométrique de cette quadrique. (Il y a d'autres points de l'espace que l'origine qui sont équidistants de P et D). Le lieu des points à déterminer est un cône.

• La droite D est parallèle au plan P ou incluse dans le plan P.

On peut alors, par exemple, choisir un repère orthonormal de l'espace $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ tel qu'il existe α dans $\mathbb{R}$ de sorte que P a pour équation cartésienne $z = -\alpha$ et D admet pour système d'équations cartésiennes $z = \alpha$, $y = 0$. Soit alors M un point de l'espace de coordonnées (x, y, z). On a $d(M, P) = |z + \alpha|$ et $d(M, D) = \sqrt{y^2 + (z-\alpha)^2}$. On en déduit cette fois que les points équidistants de D et de P sont les points M dont les coordonnées (x, y, z) vérifient la relation $(z+\alpha)^2 = y^2 + (z-\alpha)^2$ ou encore $y^2 - 4\alpha z = 0$.
On a alors les deux cas suivants :
– si $\alpha = 0$, ce qui correspond à la situation où D est inclus dans P, alors l'ensemble recherché est le plan d'équation $y = 0$;
– si $\alpha \neq 0$ alors l'ensemble recherché est un cylindre parabolique.

Remarque
Le dernier résultat n'est pas très surprenant. L'intersection d'un plan H orthogonal à D avec le lieu cherché, est l'ensemble des points équidistants d'une droite et d'un plan, ce qui donne une parabole dans H. De plus, on constate que le lieu est invariant par les translations de vecteur colinéaire à un vecteur directeur de D.

11 Étude affine et métrique des courbes

Dans ce chapitre on complète l'étude des courbes paramétrées et polaires faite en première année. Nous ne mentionnerons dans les rappels de cours que les notions ne figurant pas dans notre livre « Tous les exercices d'algèbre et de géométrie MPSI-PCSI-PTSI ».

Précisons pour commencer les notations qui seront utilisées dans ce chapitre.

On se place dans $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Une application $f : t \mapsto f(t)$ de classe $\mathcal{C}^k$ $(k \geqslant 1)$ d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$ définit un **arc paramétré orienté de classe** $\mathcal{C}^k$. Nous noterons $\mathcal{C} = f(I)$ la courbe géométrique image de I par f. L'orientation correspond au sens de parcours de la courbe quand t décrit I. La variable t est appelé **paramètre** de l'arc de courbe.
Lorsque $f(t) = (x(t), y(t))$, nous noterons également $M(t)$ le point de la courbe de paramètre t.
Pour tout nombre réel θ, la base orthonormée directe $(\vec{u}(\theta), \vec{v}(\theta))$ est telle que l'angle $(\vec{\imath}, \vec{u}(\theta))$ soit de mesure θ.

11.1 L'ESSENTIEL DU COURS ET EXERCICES D'ASSIMILATION

11.1.1 Étude locale

Ce qu'il faut savoir

On étudie le comportement de la courbe lorsque t est au voisinage de $a \in I$. On suppose que la fonction f est indéfiniment dérivable au voisinage de a. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note $\overrightarrow{V_k} = x^{(k)}(a)\vec{\imath} + y^{(k)}(a)\vec{\jmath}$, et l'on suppose qu'il existe deux entiers p, q tels que
– le nombre p soit le plus petit entier au moins égal à 1, tel que $\overrightarrow{V_p} \neq \overrightarrow{0}$,
– le nombre q soit le plus petit entier, au moins égal à $p + 1$ tel que les vecteurs $\overrightarrow{V_p}$ et $\overrightarrow{V_q}$ ne soient pas colinéaires.
On a ainsi une base $(\overrightarrow{V_p}, \overrightarrow{V_q})$ du plan. Alors au voisinage de a, le comportement du vecteur $\overrightarrow{M(a)M(t)}$ est le même que celui du vecteur $\dfrac{(t-a)^p}{p!}\overrightarrow{V_p} + \dfrac{(t-a)^q}{q!}\overrightarrow{V_q}$.

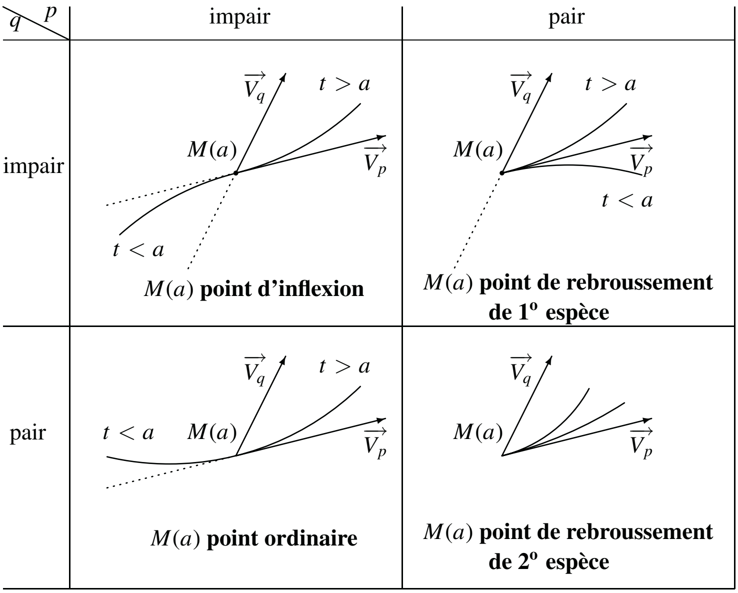
En particulier :

– La courbe est tangente en $M(a)$ au vecteur $\overrightarrow{V_p}$.

– La position de la courbe par rapport à sa tangente est donnée par le vecteur $(t-a)^q\overrightarrow{V_q}$: si l'on place l'origine de ce vecteur en $M(a)$, il se trouve situé, pour des valeurs de t proches de a, du même côté de la tangente que le point $M(t)$.

– Pour des valeurs de t supérieures à a et proches de a, la courbe se trouve à l'intérieur du parallélogramme construit sur les vecteurs $\overrightarrow{V_p}$ et $\overrightarrow{V_q}$ placés en $M(a)$.

– Pour des valeurs de t inférieures à a, la position de la courbe par rapport à sa tangente dépend des signes de $(t-a)^p$ et $(t-a)^q$, et donc de la parité des nombres p et q. Il en résulte quatre cas possibles, pour la position de $\mathcal{C}$ au voisinage de $M(a)$.



En pratique, sauf dans le cas où les fonctions x et y sont très simples (des fonctions polynômes par exemple), on préférera utiliser les développements limités. En effet, si les fonctions x et y sont indéfiniment dérivables au voisinage de a, elles possèdent alors des développements limités en a de la forme

$$x(t) = a_0 + a_1(t-a) + \ldots + a_n(t-a)^n + o((t-a)^n)$$
$$y(t) = b_0 + b_1(t-a) + \ldots + b_n(t-a)^n + o((t-a)^n)\,.$$

Pour $k \geqslant 1$, posons $\overrightarrow{U_k} = a_k\vec{\imath} + b_k\vec{\jmath}$. On a alors, d'après la formule de Taylor, $\overrightarrow{U_k} = \dfrac{1}{k!}\overrightarrow{V_k}$. On peut donc, dans l'étude précédente, remplacer les vecteurs $\overrightarrow{V_k}$ par les vecteurs $\overrightarrow{U_k}$.

Points singuliers

L'étude précédente est souvent utile lorsque le point $M(a)$ est singulier, c'est-à-dire lorsque $\overrightarrow{V_1} = \overrightarrow{0}$, cependant on peut obtenir le coefficient directeur de la tangente à la courbe en $M(a)$ comme limite en a du rapport $\dfrac{y(t)-y(a)}{x(t)-x(a)}$ et aussi, comme limite en a du rapport $\dfrac{y'(t)}{x'(t)}$.

Remarque

En coordonnées polaires, si $f(\theta) = (\rho(\theta)\cos\theta, \rho(\theta)\sin\theta)$, alors on a $\|\overrightarrow{V_1}\|^2 = x'^2 + y'^2 = \rho^2 + \rho'^2$ et il ne peut y avoir de point singulier en dehors de l'origine.

Points d'inflexion

Une condition **suffisante** pour que la courbe admette un point d'inflexion au point $M(a)$ est que les deux conditions suivantes soient satisfaites :

(i) les vecteurs $\overrightarrow{OM'}(a)$ et $\overrightarrow{OM''}(a)$ sont colinéaires,

(ii) les vecteurs $\overrightarrow{OM'}(a)$ et $\overrightarrow{OM'''}(a)$ sont linéairement indépendants.

La condition (i) est nécessaire mais pas suffisante (voir exercice 11.1).

Les conditions (i) et (ii) sont suffisantes mais pas nécessaires (voir exercice 11.2).

Exercice 11.1

Étudier au voisinage de 0, l'allure de la courbe représentative de la fonction f définie par $f(t) = \left(\dfrac{\sin^3 t}{1+t}, (1+t)(\operatorname{sh} t - \sin t)\right)$.

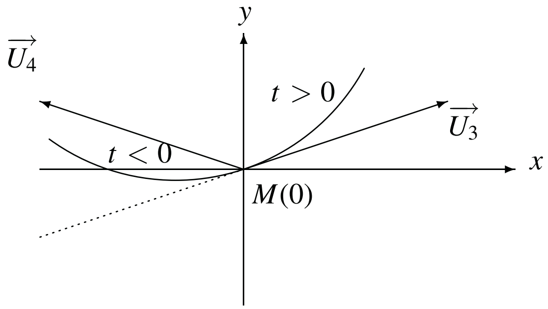
En effectuant un développement limité en zéro :

$$\begin{aligned} x(t) &= (t^3 + o(t^4))(1 - t + o(t)) = t^3(1 + o(t))(1 - t + o(t)) \\ &= t^3(1 - t + o(t)) = t^3 - t^4 + o(t^4), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y(t) &= (1+t)\left(\left(t + \frac{t^3}{6}\right) - \left(t - \frac{t^3}{6}\right) + o(t^4)\right) = (1+t)\left(\frac{t^3}{3} + o(t^4)\right) \\ &= t^3(1+t)\left(\frac{1}{3} + o(t)\right) = \frac{t^3}{3} + \frac{t^4}{3} + o(t^4). \end{aligned}$$

Ceci s'écrit vectoriellement $\overrightarrow{OM}(t) = \overrightarrow{OM}(0) + t^3\,\overrightarrow{U_3} + t^4\,\overrightarrow{U_4} + o(t^4)$, où $\overrightarrow{U_3} = \vec{\imath} + \dfrac{1}{3}\vec{\jmath}$ et $\overrightarrow{U_4} = -\vec{\imath} + \dfrac{1}{3}\vec{\jmath}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{U_3}$ et $\overrightarrow{U_4}$ ne sont pas colinéaires et forment donc une base du plan. Il en résulte que le point $M(0) = (0,\ 0)$ est un point ordinaire ($p = 3$ est impair et $q = 4$ est pair). La tangente à la courbe a comme vecteur directeur le vecteur $\overrightarrow{U_3}$.



Exercice 11.2

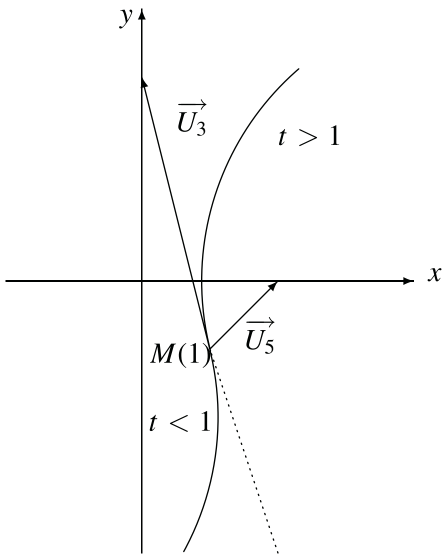
Étudier au voisinage de 1, l'allure de la courbe représentative de la fonction f définie par $f(t) = \left(1 + t(t-2)(t-1)^3\ ,\ -1 + (t^2 - 2t + 5)(t-1)^3\right)$.

En posant $u = t - 1$, on obtient

$$\begin{aligned} x(1+u) &= \quad 1 + (u+1)(u-1)u^3 = 1 - u^3 + u^5 \\ y(1+u) &= -1 + (u^2+4)u^3 \ = -1 + 4u^3 + u^5 \end{aligned}$$

Ceci s'écrit vectoriellement $\overrightarrow{OM}(1+u) = \overrightarrow{OM}(1) + u^3\,\overrightarrow{U_3} + u^5\,\overrightarrow{U_5}$, où $\overrightarrow{U_3} = -\vec{\imath} + 4\vec{\jmath}$ et $\overrightarrow{U_5} = \vec{\imath} + \vec{\jmath}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{U_3}$ et $\overrightarrow{U_5}$ ne sont pas colinéaires et forment donc une base du plan. Il en résulte que le point $M(1) = (1,\ -1)$ est un point d'inflexion ($p = 3$ et $q = 5$ sont impairs). La tangente à la courbe a comme vecteur directeur le vecteur $\overrightarrow{U_3}$.



Exercice 11.3

Étudier au voisinage de 1, l'allure de la courbe représentative de la fonction f définie par $f(t) = \left(t(3-2t)(t-1)^2\ ,\ t - 1 + \dfrac{1}{t} \right)$.

En posant $u = t - 1$, on a

$$x(1+u) = (1+u)(1-2u)u^2 = u^2 - u^3 - 2u^4 \ ,$$

$$y(1+u) = u + \frac{1}{1+u} = 1 + u^2 - u^3 + u^4 + o(u^4) \ .$$

Donc

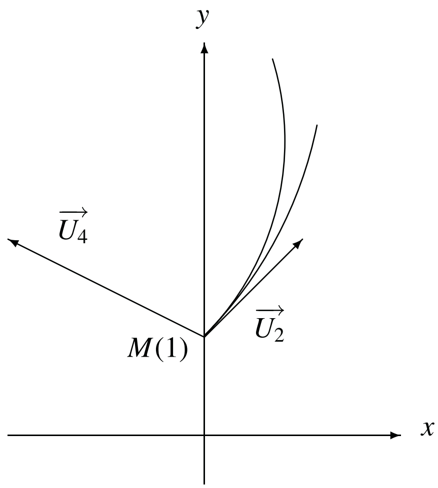
$$\overrightarrow{OM}(1+u) = \overrightarrow{OM}(1) + u^2\,\overrightarrow{U_2} + u^3\,\overrightarrow{U_3} + u^4\overrightarrow{U_4} + o(u^4) \ ,$$

où $\overrightarrow{U_2} = -\overrightarrow{U_3} = \vec{\imath} + \vec{\jmath}$ et $\overrightarrow{U_4} = -2\vec{\imath} + \vec{\jmath}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{U_2}$ et $\overrightarrow{U_4}$ ne sont pas colinéaires et forment donc une base du plan. Par contre $\overrightarrow{U_2}$ et $\overrightarrow{U_3}$ sont colinéaires. On a donc

$$\overrightarrow{OM}(t) = \overrightarrow{OM}(1) + u^2(1-u)\,\overrightarrow{U_2} + u^4\,\overrightarrow{U_4} + o(u^4) \ .$$

Il en résulte que le point $M(1) = (0,\ 1)$ est un point de rebroussement de deuxième espèce ($p = 2$ et $q = 4$ sont pairs). La tangente à la courbe a comme vecteur directeur le vecteur $\overrightarrow{U_2}$.



Exercice 11.4

Centrale PC 2007

Soit $\mathcal{C}$ la courbe paramétrée définie par $x(t) = t^2 + t$ et $y(t) = 2t + 1/t$ où $t \in \mathbb{R}^*$. Montrer que $\mathcal{C}$ admet trois points d'inflexion.

Pour $t \neq 0$, on obtient $x'(t) = 2t + 1$, $y'(t) = 2 - 1/t^2$, $x''(t) = 2$, $y''(t) = 2/t^3$, $x'''(t) = 0$, $y'''(t) = -6/t^4$.

• On constate en particulier que $\overrightarrow{OM'}(t)$ et $\overrightarrow{OM'''}(t)$ ne sont jamais colinéaires.

• Etudions si $\overrightarrow{OM'}(t)$ et $\overrightarrow{OM''}(t)$ peuvent être colinéaires.
Cette condition sera satisfaite si et seulement si le déterminant des vecteurs $\overrightarrow{OM'}(t)$ et $\overrightarrow{OM''}(t)$ est nul, c'est-à-dire $x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t) = 0$. Mais, $x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t) = 2\left(\frac{2t+1}{t^3} - \left(2 - \frac{1}{t^2}\right)\right) = 2\frac{-2t^3 + 3t + 1}{t^3}$. Il en résulte que la courbe admet des points d'inflexion pour les valeurs de t solutions de l'équation $2t^3 - 3t - 1 = 0$. Une solution évidente est $t = -1$. On peut alors factoriser $2t^3 - 3t - 1 = (t + 1)(2t^2 - 2t - 1)$, et on obtient deux autres solutions $t = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$.
Conclusion : la courbe admet trois points d'inflexion.

Exercice 11.5

Mines-Ponts PSI 2007

Déterminer les points de rebroussement de la courbe $\mathcal{C}$ paramétrée par $x(t) = t\cos t - \sin t$, $y(t) = 1 + \cos t$.

• Une condition nécessaire pour avoir un point de rebroussement au point de paramètre t est que $\overrightarrow{OM'}(t) = \vec{0}$ c'est-à-dire $x'(t) = y'(t) = 0$. Puisque $x'(t) = -t\sin t$ et $y'(t) = -\sin t$, la condition est satisfaite pour $t = k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
• Cherchons le premier vecteur dérivé non nul en $k\pi$. On a $x''(t) = -t\cos t - \sin t$ et $y''(t) = -\cos t$, donc $x''(k\pi) = k\pi(-1)^{k+1}$ et $y''(k\pi) = (-1)^{k+1}$. Le vecteur $\overrightarrow{OM''}(k\pi)$ n'est donc pas nul.

• Cherchons enfin le premier vecteur dérivé non colinéaire avec $\overrightarrow{OM''}(k\pi)$. On a $x'''(t) = t\sin t - 2\cos t$ et $y'''(t) = \sin t$, donc $x'''(k\pi) = 2(-1)^{k+1}$ et $y'''(k\pi) = 0$. On constate que les vecteurs $\overrightarrow{OM''}(k\pi)$ et $\overrightarrow{OM'''}(k\pi)$ ne sont pas colinéaires. On est donc dans le cas d'un point de rebroussement de première espèce.
Conclusion : Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, le point $M(k\pi)$ de coordonnées $(k\pi(-1)^k, 1 + (-1)^k)$ est un point de rebroussement de première espèce de la courbe $\mathcal{C}$.

11.1.2 Équation de la tangente et de la normale en un point

Ce qu'il faut savoir

• La **tangente** à la courbe en un point $M(t)$ admet pour vecteur directeur le vecteur $\overrightarrow{OM^{(p)}}(t) = x^{(p)}(t)\,\vec{\imath} + y^{(p)}(t)\,\vec{\jmath}$, premier vecteur dérivé non nul, (lorsque $M(t)$ est régulier, c'est le vecteur $\overrightarrow{OM'}(t)$).

Rechercher une équation de la tangente est donc le problème de géométrie affine élémentaire consistant à trouver une équation d'une droite dont on connaît un vecteur directeur et un point : soit P le point de la droite de coordonnées (X, Y). On obtient une équation de la tangente en écrivant que le déterminant dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ des vecteurs $\overrightarrow{OM^{(p)}}(t)$ et $\overrightarrow{M(t)P}$ est nul, ce qui donne pour équation

$$(Y - y(t))x^{(p)}(t) - (X - x(t))y^{(p)}(t) = 0\,.$$

Pour une courbe donnée par une équation polaire, on peut,

- ou bien revenir au paramétrage $x = \rho(\theta)\cos\theta$, $y = \rho(\theta)\sin\theta$ et appliquer ce qui précède (voir l'exercice 11.8),

- ou bien écrire une équation de la tangente dans le repère mobile $(O, \vec{u}(\theta), \vec{v}(\theta))$ et faire ensuite un changement de repère pour se ramener dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ (voir l'exercice 11.7).

• La **normale** à la courbe en un point $M(t)$, est la droite passant par $M(t)$ et orthogonale à la tangente. Soit Q le point de la droite de coordonnées (X, Y). On obtient une équation de la normale en écrivant que le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{OM^{(p)}}(t)$ et $\overrightarrow{M(t)Q}$ est nul, ce qui donne pour équation

$$(X - x(t))x^{(p)}(t) + (Y - y(t))y^{(p)}(t) = 0\,.$$

On peut également chercher un vecteur non nul $\vec{W}(t)$ orthogonal à $\overrightarrow{OM^{(p)}}(t)$, et écrire que $\vec{W}(t)$ et $\overrightarrow{M(t)Q}$ sont colinéaires.

Remarque

On peut bien sûr, dans les calculs précédents, remplacer $\overrightarrow{OM^{(p)}}(t)$ par un vecteur non nul qui lui est colinéaire.

Exercice 11.6

CCP PSI 2005 proche de Mines-Ponts MP 2007

Soit Γ la courbe paramétrée par $x(t) = 3t^2$, $y(t) = 2t^3$.

1) Pour tout t réel, donner une équation cartésienne de la tangente à Γ au point $M(t)$

2) Pour tout u réel, donner une équation cartésienne de la normale à Γ au point $M(u)$

3) Déterminer les droites qui sont à la fois tangentes et normales à Γ.

1) On a tout d'abord $\overrightarrow{OM'}(t) = 6t\,\vec{\imath} + 6t^2\,\vec{\jmath}$, et on constate que, pour $t \neq 0$, tous les points de la courbe sont réguliers. Dans ce cas, la tangente à la courbe au point $M(t)$ admet pour vecteur directeur $\overrightarrow{OM'}(t) = 6t\,\vec{\imath} + 6t^2\,\vec{\jmath}$, où encore, en divisant par $6t$, le vecteur $\vec{V}(t) = \vec{\imath} + t\,\vec{\jmath}$.

Lorsque $t = 0$, le point de la courbe est singulier. Le rapport $\dfrac{y(t) - y(0)}{x(t) - x(0)} = \dfrac{2t}{3}$ tend vers 0, lorsque t tend vers 0. Il en résulte que la courbe est tangente à l'axe Ox en $M(0) = O$. (Comme de plus la courbe est symétrique par rapport à Ox puisque la fonction x est paire et la fonction y est impaire, le point singulier est un point de rebroussement de première espèce).

Donc, pour tout $t \in \mathbb{R}$, le vecteur $\overrightarrow{V}(t) = \vec{\imath} + t\,\vec{\jmath}$ est un vecteur directeur de la tangente à la courbe en $M(t)$.

Soit P le point de la tangente de coordonnées (X, Y). Pour chercher une équation de la tangente, on écrit que le déterminant, dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$, des vecteurs $\overrightarrow{V}(t)$ et $\overrightarrow{M(t)P}$ est nul. Mais $\begin{vmatrix} 1 & X - 3t^2 \\ t & Y - 2t^3 \end{vmatrix} = Y - tX + t^3$.

On obtient donc comme équation de la tangente : $tX - Y - t^3 = 0$.

2) Soit Q le point de la normale de coordonnées (X, Y). On écrit cette fois que les vecteurs $\overrightarrow{V}(u)$ et $\overrightarrow{M(u)Q}$ sont orthogonaux. En calculant leur produit scalaire, on obtient $\overrightarrow{V}(u).\overrightarrow{M(u)Q} = X + uY - 3u^2 - 2u^4$.

On en déduit alors comme équation de la normale : $X + uY - 3u^2 - 2u^4 = 0$.

3) Dire qu'une droite est à la fois tangente et normale à Γ signifie qu'il existe deux points $M(t)$ et $M(u)$ tels que la tangente à Γ en $M(t)$ soit la normale à Γ en $M(u)$. Cela veut dire que les deux équations $tX - Y - t^3 = 0$ et $X + uY - 3u^2 - 2u^4 = 0$ sont deux équations de la même droite. Cela se traduit par la nullité des deux déterminants $\begin{vmatrix} 1 & u \\ t & -1 \end{vmatrix}$ et $\begin{vmatrix} 1 & 3u^2 + 2u^4 \\ t & t^3 \end{vmatrix}$, ce qui donne le système $(\mathcal{S})$ $\begin{cases} ut + 1 = 0 \\ t(t^2 - 3u^2 - 2u^4) = 0 \end{cases}$. D'après la première équation les nombres u et t ne peuvent être nuls. En multipliant la deuxième équation par $-u^2/t$, et puisque $u^2t^2 = 1$, on obtient $2u^6 + 3u^4 - 1 = 0$. Pour résoudre cette équation, posons $U = u^2$. On obtient $2U^3 + 3U^2 - 1 = 0$. Le polynôme $H(U) = 2U^3 + 3U^2 - 1$ a une racine évidente -1, ce qui permet de le factoriser. On trouve $2U^3 + 3U^2 - 1 = (U + 1)(2U^2 + U - 1) = (U + 1)^2(2U - 1)$. La seule racine positive de H est donc $1/2$, ce qui donne pour u les deux valeurs opposées $\pm 1/\sqrt{2}$. Puisque $t = -1/u$, on obtient alors les deux couples $(t, u) = (\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$ et $(t, u) = (-\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$. Il est facile de voir qu'ils vérifient bien le système $(\mathcal{S})$. On obtient les deux droites d'équation : $\sqrt{2}X - Y = 2\sqrt{2}$ et $\sqrt{2}X + Y = 2\sqrt{2}$.

Exercice 11.7

Centrale PC 2006

Soit la courbe Γ d'équation polaire $\rho = \cos 2\theta$. Déterminer une équation cartésienne de sa tangente au point de paramètre θ.

La courbe Γ est, à une homothétie près, la courbe $\mathcal{F}$ tracée dans l'exercice 11.29.

Remarquons tout d'abord que $\|\overrightarrow{OM'}(\theta)\|^2 = \rho(\theta)^2 + \rho'(\theta)^2 = \cos^2 2\theta + 4\sin^2 2\theta$ n'est jamais nul. La courbe n'a donc pas de point singulier.
L'énoncé de l'exercice ne précisant pas dans quel repère on cherche l'équation de la tangente, on va la donner, tout d'abord dans le repère mobile $(O, \vec{u}(\theta), \vec{v}(\theta))$, puis dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
Rappelons que $\vec{u}(\theta) = \cos\theta\,\vec{\imath} + \sin\theta\,\vec{\jmath}$ et $\vec{v}(\theta) = -\sin\theta\,\vec{\imath} + \cos\theta\,\vec{\jmath}$.

• Dans le repère $(O, \vec{u}(\theta), \vec{v}(\theta))$, on a $\overrightarrow{OM}(\theta) = \rho(\theta)\vec{u}(\theta)$, donc en dérivant on obtient $\overrightarrow{OM'}(\theta) = \rho'(\theta)\vec{u}(\theta) + \rho(\theta)\vec{v}(\theta)$. Soit P un point de la tangente à la courbe en $M(\theta)$ de coordonnées (X_θ, Y_θ) dans $(O, \vec{u}(\theta), \vec{v}(\theta))$. Les vecteurs $\overrightarrow{OM'}(\theta)$ et $\overrightarrow{M(\theta)P}$ sont colinéaires, et donc $\begin{vmatrix} \rho'(\theta) & X_\theta - \rho(\theta) \\ \rho(\theta) & Y_\theta \end{vmatrix} = 0$, ce qui donne l'équation $Y_\theta\rho'(\theta) - X_\theta\rho(\theta) + \rho(\theta)^2 = 0$, et puisque $\rho(\theta) = \cos 2\theta$ et $\rho'(\theta) = -2\sin 2\theta$, on obtient comme équation (1) $2Y_\theta \sin 2\theta + X_\theta \cos 2\theta = \cos^2 2\theta$.

• Le point P de la tangente a pour coordonnées (X, Y) dans le repère$(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. On a donc $X\,\vec{\imath} + Y\,\vec{\jmath} = X_\theta\,\vec{u}(\theta) + Y_\theta\,\vec{v}(\theta) = X_\theta(\cos\theta\,\vec{\imath} + \sin\theta\,\vec{\jmath}) + Y_\theta(-\sin\theta\,\vec{\imath} + \cos\theta\,\vec{\jmath})$.
On en déduit $X = X_\theta\cos\theta - Y_\theta\sin\theta$ et $Y = X_\theta\sin\theta + Y_\theta\cos\theta$, d'où l'on tire $X_\theta = X\cos\theta + Y\sin\theta$ et $Y_\theta = -X\sin\theta + Y\cos\theta$. En remplaçant X_θ et Y_θ par leur valeur dans l'équation (1), on obtient
(2) $Y(2\cos\theta\sin 2\theta + \sin\theta\cos 2\theta) + X(\cos\theta\cos 2\theta - 2\sin\theta\sin 2\theta) = \cos^2 2\theta$.

Bien sûr, on aurait pu obtenir directement cette équation, en partant du paramétrage $x(\theta) = \rho(\theta)\cos\theta$, $y(\theta) = \rho(\theta)\sin\theta$ de la courbe Γ.

Exercice 11.8

Podaire d'une spirale logarithmique par rapport à O, d'après CCP PC 2007

Soit $k \in \mathbb{R}^*$ et soit Γ la courbe d'équation polaire $\rho = e^{k\theta}$.

1) Déterminer un vecteur directeur de la tangente $\mathcal{T}_\theta$ à la courbe en un point $M(\theta)$ et en donner une équation cartésienne.

2) Déterminer un vecteur normal à la courbe en un point $M(\theta)$, puis trouver une équation cartésienne de la normale $\mathcal{N}_\theta$.

3) *Question de la rédaction :* Déterminer la projection $P(\theta)$ de l'origine O sur $\mathcal{T}_\theta$. Le point $P(\theta)$ décrit une courbe γ. Par quelle transformation géométrique simple obtient-on γ à partir de Γ ?

1) Remarquons tout d'abord que ρ ne s'annule pas. La courbe Γ n'a donc pas de point singulier.

La courbe admet comme paramétrage $x(\theta) = e^{k\theta}\cos\theta$, $y(\theta) = e^{k\theta}\sin\theta$. On a donc $x'(\theta) = e^{k\theta}(k\cos\theta - \sin\theta)$ et $y'(\theta) = e^{k\theta}(k\sin\theta + \cos\theta)$.

Le vecteur $\overrightarrow{OM'}(\theta)$ est un vecteur directeur de la tangente $\mathcal{T}_\theta$ à la courbe au point $M(\theta)$. En simplifiant par $e^{k\theta}$ on peut donc prendre comme vecteur directeur $\overrightarrow{V}(\theta) = (k\cos\theta - \sin\theta)\,\vec{\imath} + (k\sin\theta + \cos\theta)\,\vec{\jmath}$.
Soit Q le point de la tangente de coordonnées (X, Y). On écrit que le déterminant, dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$, des vecteurs $\overrightarrow{V}(\theta)$ et $\overrightarrow{M(\theta)Q}$ est nul, ce qui donne $\begin{vmatrix} k\cos\theta - \sin\theta & X - e^{k\theta}\cos\theta \\ k\sin\theta + \cos\theta & Y - e^{k\theta}\sin\theta \end{vmatrix} = 0$. On obtient pour équation de $\mathcal{T}_\theta$:

$$Y(k\cos\theta - \sin\theta) - X(k\sin\theta + \cos\theta) + e^{k\theta} = 0\,.$$

2) Un vecteur orthogonal à $\overrightarrow{V}(\theta)$ est $\overrightarrow{W}(\theta) = -(k\sin\theta + \cos\theta)\,\vec{\imath} + (k\cos\theta - \sin\theta)\,\vec{\jmath}$. C'est donc un vecteur directeur de la normale à la courbe. Soit R le point de la normale de coordonnées (X, Y). On écrit que le déterminant, dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$, des vecteurs $\overrightarrow{W}(\theta)$ et $\overrightarrow{M(\theta)R}$ est nul, ce qui donne $\begin{vmatrix} -(k\sin\theta + \cos\theta) & X - e^{k\theta}\cos\theta \\ k\cos\theta - \sin\theta & Y - e^{k\theta}\sin\theta \end{vmatrix} = 0$.
On obtient pour équation de $\mathcal{N}_\theta$:

$$X(k\cos\theta - \sin\theta) + Y(k\sin\theta + \cos\theta) - ke^{k\theta} = 0\,.$$

On aurait pu également écrire que le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{V}(\theta)$ et $\overrightarrow{M(\theta)R}$ est nul.

3) La droite orthogonale à $\mathcal{T}_\theta$ passant par O est donc la parallèle à $\mathcal{N}_\theta$ passant par O et a pour équation $X(k\cos\theta - \sin\theta) + Y(k\sin\theta + \cos\theta) = 0$. Les coordonnées du point $P(\theta)$ sont alors les solutions du système

$$\left\{\begin{array}{ll} X(k\sin\theta + \cos\theta) - Y(k\cos\theta - \sin\theta) & = e^{k\theta} \\ X(k\cos\theta - \sin\theta) + Y(k\sin\theta + \cos\theta) & = 0 \end{array}\right. .$$

D'où l'on tire

$$X = \frac{1}{k^2+1}(k\sin\theta + \cos\theta)e^{k\theta} \quad \text{et} \quad Y = \frac{1}{k^2+1}(\sin\theta - k\cos\theta)e^{k\theta}\,.$$

Soit α un angle tel que $\sin\alpha = \dfrac{k}{\sqrt{k^2+1}}$ et $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{k^2+1}}$. Alors

$$X = \frac{1}{\sqrt{k^2+1}}(\sin\alpha\sin\theta + \cos\alpha\cos\theta)e^{k\theta} = \frac{1}{\sqrt{k^2+1}}\cos(\theta - \alpha)e^{k\theta}$$

$$Y = \frac{1}{\sqrt{k^2+1}}(\cos\alpha\sin\theta - \sin\alpha\cos\theta)e^{k\theta} = \frac{1}{\sqrt{k^2+1}}\sin(\theta - \alpha)e^{k\theta}\,.$$

En posant $u = \theta - \alpha$, on obtient comme nouveau paramétrage de γ

$$X = \frac{e^{k\alpha}}{\sqrt{k^2+1}}e^{ku}\cos u \quad \text{et} \quad Y = \frac{e^{k\alpha}}{\sqrt{k^2+1}}e^{ku}\sin u.$$

Conclusion : la courbe γ s'obtient à partir de Γ par une homothétie de centre O et de rapport $\dfrac{e^{k\alpha}}{\sqrt{k^2+1}}$.

11.1.3 Changement de paramètre

Ce qu'il faut savoir

Rappelons que si u est une bijection de classe $\mathcal{C}^k$ de l'intervalle I sur l'intervalle J telle que u' ne s'annule pas, alors u^{-1} est une application de classe $\mathcal{C}^k$ de J sur I.
Si f est un paramétrage de classe $\mathcal{C}^k$ de I dans $\mathbb{R}^2$ dont la courbe image est $\mathcal{C} = f(I)$, alors $g = f \circ u^{-1}$ est une application de classe $\mathcal{C}^k$ de J dans $\mathbb{R}^2$ avec $\mathcal{C} = g(J)$. On dit que l'on a effectué un **changement de paramètre** ou un **reparamétrage** de la courbe $\mathcal{C}$.
On dit que l'arc g a **même orientation** que f lorsque $u' > 0$.
Un tel reparamétrage u qui conserve l'image $\mathcal{C}$ et le caractère $\mathcal{C}^k$ de l'arc est dit **admissible** et les deux arcs f et g de classe $\mathcal{C}^k$ seront dit $\mathcal{C}^k$**-équivalents**.

Exercice 11.9

Soit f l'application de $I = \left]-\pi/2, \pi/2\right[$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $f(t) = \left(\dfrac{1}{\cos^2 t}, 1 - \tan t\right)$. Soit g l'application de $J = \left]-\infty, \infty\right[$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $g(t) = (1 + t^2, 1 - t)$. Montrer que, pour tout entier $k \geqslant 1$, les arcs f et g sont $\mathcal{C}^k-$équivalents. Déterminer $f(I)$.

• Pour tout $t \in I$, on a $1 + \tan^2 t = \dfrac{1}{\cos^2 t}$. En considérant l'application u de I dans $\mathbb{R}$ définie par $u(t) = \tan t$ on obtient, pour tout $t \in I$, la relation $f(t) = g \circ u(t)$. L'application u est une bijection indéfiniment dérivable de I sur J telle que $u'(t) > 0$ et $f(I) = g(J)$. Pour tout entier $k \geqslant 1$, les arcs f et g sont donc $\mathcal{C}^k-$équivalents et ont même orientation.
• Déterminons la courbe $\mathcal{C} = f(I)$.
En éliminant t dans la définition de g, on obtient facilement $x(t)-1 = t^2 = (1-y(t))^2$ d'où $x(t) = y(t)^2 - 2y(t) + 2$. Il en résulte que $\mathcal{C}$ est inclus dans la parabole d'équation $x = y^2 - 2y + 2$, et puisque $y(t)$ prend toutes les valeurs réelles lorsque t décrit J, la parabole est décrite complètement.
Remarquons que si, pour t réel, on pose $h(t) = (t^2 - 2t + 2, t)$, on obtient alors un arc paramétré h qui n'a pas la même orientation que les deux précédents, car, en posant $\psi(t) = 1 - t$, on a $h \circ \psi = g$, avec $\psi' < 0$.

11.1.4 Aire d'un domaine limité par une courbe

Ce qu'il faut savoir

Soit f une application de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux d'un intervalle $I = [a, b]$ $(a < b)$ dans $\mathbb{R}^2$ telle que $f(a) = f(b)$ (courbe fermée). Si la restriction de f à $[a, b[$ est injective, alors l'aire géométrique $\mathcal{A}$ du domaine limité par la courbe est la valeur absolue d'une des intégrales suivantes

$$(1) \int_a^b y(t)x'(t)\,dt \ ; \ (2) \int_a^b y'(t)x(t)\,dt \ ; \ (3) \ \frac{1}{2}\int_a^b (x(t)y'(t) - y(t)x'(t))\,dt$$

et, en coordonnées polaires, si $f(\theta) = (\rho(\theta)\cos\theta, \rho(\theta)\sin\theta)$, alors l'aire $\mathcal{A}$ est l'intégrale (4) $\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_a^b \rho^2(\theta)d\theta$.

Quand t décrit $[\,a,\ b\,[$, une telle courbe est parcourue une fois et une seule et n'a pas de point double.

Plus généralement, si $f(a) \neq f(b)$ et

– si l'on complète l'arc de courbe par deux segments de droites parallèles à Oy passant par $M(a)$ et $M(b)$, et un morceau de l'axe Ox pour obtenir une courbe fermée $\mathcal{C}$, alors, si $\mathcal{C}$ est parcourue une fois et une seule et n'a pas de point double, l'aire limitée par $\mathcal{C}$ est donnée par la formule (1),

– si l'on complète l'arc de courbe par deux segments de droite parallèles à Ox passant par $M(a)$ et $M(b)$, et un morceau de l'axe Oy pour obtenir une courbe fermée $\mathcal{C}$, alors, si $\mathcal{C}$ est parcourue une fois et une seule et n'a pas de point double, l'aire limitée par $\mathcal{C}$ est donnée par la formule (2),

– si l'on complète l'arc de courbe par deux segments de droite joignant $M(a)$ et $M(b)$ à l'origine pour obtenir une courbe fermée $\mathcal{C}$, alors, si $\mathcal{C}$ est parcourue une fois et une seule et n'a pas de point double, l'aire limitée par $\mathcal{C}$ est donnée par la formule (3), ou, en coordonnées polaires, par la formule (4).

Remarque

Ces formules sont des applications de la formule de Green-Riemann. Elles se généralisent dans le cas où le domaine est non borné. Les intégrales sont alors généralisées et l'aire peut être infinie.

Exercice 11.10

Trouver l'aire du domaine limité par la courbe paramétrée par $x = t(t^2 - 1)$, $y = t^2(t^2 - 1)$, pour $t \in [0,\ 1\,]$.

La courbe est fermée, puisque $f(0) = f(1) = (0,0)$ et on peut montrer qu'elle n'a pas de point double.

En utilisant la formule (1) par exemple, $y(t)x'(t) = t^2(t^2-1)(3t^2-1) = 3t^6-4t^4+t^2$, d'où $\mathcal{A} = \left|\displaystyle\int_0^1 (3t^6 - 4t^4 + t^2)dt\right| = \dfrac{4}{105}$.

Exercice 11.11

Trouver l'aire de la boucle du folium de Descartes paramétrée par $x(t) = \dfrac{3t}{1+t^3}$, $y(t) = \dfrac{3t^2}{1+t^3}$ pour t variant de 0 à $+\infty$.

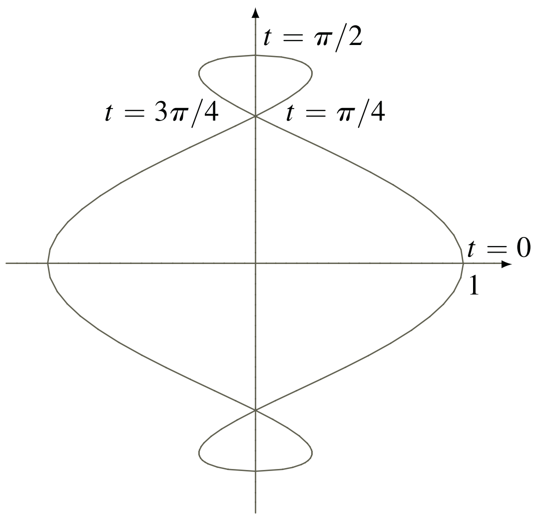
Lorsque t tend vers $+\infty$, $x(t)$ et $y(t)$ tendent vers 0, et, en utilisant la formule (3), l'aire $\mathcal{A}_T = \dfrac{1}{2}\left|\displaystyle\int_0^T (x(t)y'(t) - y(t)x'(t))\,dt\right|$ du domaine limité par la courbe et la droite joignant O à $M(T)$ a pour limite, lorsque T tend vers l'infini, l'aire de la boucle du folium de Descartes. On a $x'(t) = 3\,\dfrac{1-2t^3}{(1+t^3)^2}$ et $y'(t) = 3t\,\dfrac{2-t^3}{(1+t^3)^2}$, Donc $x(t)y'(t) - y(t)x'(t) = \dfrac{9t^2}{(1+t^3)^2}$. Alors

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\left|\int_0^{\infty} \frac{9t^2dt}{(1+t^3)^2}\right| = \left[-\frac{3}{2(1+t^3)}\right]_0^{\infty} = \frac{3}{2}\,.$$

Exercice 11.12

Trouver l'aire du domaine limité par la courbe paramétrée par $x(t) = \cos t \cos 2t$, $y = \sin t$.

On effectue une étude succinte de la courbe. Elle présente des symétries par rapport à O, Ox et Oy. Les fonctions x et y sont de période 2π. La courbe a deux points doubles sur Oy, le premier obtenu pour $t = \pi/4$ et $t = 3\pi/4$ et le second pour $t = -\pi/4$ et $t = -3\pi/4$. La courbe est formée de trois boucles.



On va utiliser la formule (2). On linéarise facilement $x(t)y'(t)$:

$$x(t)y'(t) = \cos^2 t \cos 2t = \frac{1+\cos 2t}{2}\cos 2t = \frac{\cos 2t}{2} + \frac{1+\cos 4t}{4},$$

En raison des symétries, on a pour les boucles du haut et du bas

$$\mathcal{A}_1 = 2\left|\int_{\pi/4}^{\pi/2} x(t)y'(t)dt\right| = \left|\left[\frac{\sin 4t}{8} + \frac{\sin 2t}{2} + \frac{t}{2}\right]_{\pi/4}^{\pi/2}\right| = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{8}.$$

De même pour la boucle centrale

$$\mathcal{A}_2 = 4\left|\int_0^{\pi/4} x(t)y'(t)dt\right| = \left|\left[\frac{\sin 4t}{4} + \sin 2t + t\right]_0^{\pi/4}\right| = 1 + \frac{\pi}{4}.$$

L'aire totale est donc $\mathcal{A} = 2\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 = 2$.

Remarquons que cette aire n'est pas $\left|\int_{-\pi}^{\pi} x(t)y'(t)dt\right|$ qui vaut $\pi/2$.

Exercice 11.13

Trouver l'aire limitée par la cardioïde définie en coordonnées polaires par $\rho(t) = \cos\theta + 1$

En utilisant la formule (4), on a

$$\rho(\theta)^2 = 1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta = \frac{3}{2} + 2\cos\theta + \frac{\cos 2\theta}{2},$$

et comme la courbe est obtenue une fois et une seule lorsque θ décrit $[-\pi, \pi]$, on obtient

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \frac{1}{2}\left|\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{3}{2} + 2\cos\theta + \frac{\cos 2\theta}{2}\right)d\theta\right| \\ &= \frac{1}{2}\left|\left[\frac{3\theta}{2} + 2\sin\theta + \frac{\sin 2\theta}{4}\right]_{-\pi}^{\pi}\right| = \frac{3\pi}{2}.\end{aligned}$$

11.1.5 Repère de Frenet

Ce qu'il faut savoir

Soit f un arc paramétré de classe $\mathcal{C}^k$.

- Soit $k \geqslant 1$ et $t \in I$. Le point $M(t)$ est **régulier** lorsque $\overrightarrow{OM}'(t) \neq \vec{0}$. L'arc est régulier lorsque tous ses points le sont.
- Soit $k \geqslant 2$ et $t \in I$. Le point $M(t)$ est **birégulier** lorsque, d'une part $\overrightarrow{OM}'(t) \neq \vec{0}$ et d'autre part $\overrightarrow{OM}'(t)$ et $\overrightarrow{OM}''(t)$ ne sont pas colinéaires. L'arc est birégulier lorsque tous ses points le sont.

• En un point régulier, on appelle **vecteur tangent**, le vecteur $\overrightarrow{T}(t) = \dfrac{\overrightarrow{OM}'(t)}{\|\overrightarrow{OM}'(t)\|}$,
et **vecteur normal** le vecteur $\overrightarrow{N}(t)$ tel que la base $(\overrightarrow{T}(t), \overrightarrow{N}(t))$ soit orthonormale directe. Le repère $(M(t), \overrightarrow{T}(t), \overrightarrow{N}(t))$ est appelé **repère de Frenet** au point $M(t)$. Le vecteur $\overrightarrow{T}(t)$ (ou le vecteur $\overrightarrow{OM}'(t)$) définit une demi-droite, appelée la **demi-tangente** à la courbe en $M(t)$.
• Si f est un arc régulier de classe $\mathcal{C}^k$ sur I avec $k \geqslant 2$, alors il existe une fonction α de classe $\mathcal{C}^{k-1}$ sur I, appelée **fonction angulaire**, telle que, pour tout $t \in I$, on ait $\overrightarrow{T}(t) = \cos\alpha(t)\ \vec{\imath} + \sin\alpha(t)\ \vec{\jmath}$, et donc $\overrightarrow{N}(t) = -\sin\alpha(t)\ \vec{\imath} + \cos\alpha(t)\ \vec{\jmath}$.

Exercice 11.14

Soit la courbe paramétrée par $x(t) = \sin t$ et $y(t) = \dfrac{\sin t}{2 + \cos t}$. L'origine O est un point double de cette courbe. Déterminer le repère de Frenet pour les valeurs de t telles que $M(t) = O$.

Les fonctions x et y sont de période 2π et l'origine est obtenue pour $t = 0$ et $t = \pi$ (modulo 2π).
On a $x'(t) = \cos t$ et $y'(t) = \dfrac{2\cos t + 1}{(2 + \cos t)^2}$.
• Pour $t = 0$, on obtient $x'(0) = 1$ et $y'(0) = 1/3$, donc $\|\overrightarrow{OM}(0)\| = \dfrac{\sqrt{10}}{3}$. Alors $\overrightarrow{T}(0) = \dfrac{1}{\sqrt{10}}(3\,\vec{\imath} + \vec{\jmath})$ et $\overrightarrow{N}(0) = \dfrac{1}{\sqrt{10}}(-\vec{\imath} + 3\,\vec{\jmath})$.
• Pour $t = \pi$, on obtient $x'(\pi) = -1$ et $y'(\pi) = -1$, donc $\|\overrightarrow{OM}(\pi)\| = \sqrt{2}$. Alors $\overrightarrow{T}(\pi) = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}(\vec{\imath} + \vec{\jmath})$ et $\overrightarrow{N}(\pi) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\vec{\imath} - \vec{\jmath})$.

Exercice 11.15

Soit la courbe d'équation polaire $\rho = \sin^2\theta$. Déterminer le repère de Frenet au point d'angle $\theta = \pi/4$.

On a $x(\theta) = \cos\theta\sin^2\theta$ et $y(\theta) = \sin^3\theta$, donc $x'(\theta) = -\sin^3\theta + 2\sin\theta\cos^2\theta$ et $y'(\theta) = 3\sin^2\theta\cos\theta$.
On obtient donc $x(\pi/4) = y(\pi/4) = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$, $x'(\pi/4) = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ et $y'(\pi/4) = \dfrac{3}{2\sqrt{2}}$, donc $\|\overrightarrow{OM}'(\pi/4)\| = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$. Alors

$$\overrightarrow{T}(\pi/4) = \frac{1}{\sqrt{10}}(\vec{\imath} + 3\,\vec{\jmath}) \quad \text{et} \quad \overrightarrow{N}(\pi/4) = \frac{1}{\sqrt{10}}(-3\,\vec{\imath} + \vec{\jmath}).$$

11.1.6 Abscisse curviligne - Longueur d'un arc de courbe

Ce qu'il faut savoir

Dans ce paragraphe l'arc paramétré f prend ses valeurs dans un espace vectoriel euclidien F (en général $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$).
Soit f un arc paramétré orienté de classe $\mathcal{C}^k$ défini sur I.
• Une abscisse curviligne est une fonction s de classe $\mathcal{C}^k$ sur I telle que, pour tout $t \in I$, on ait $s'(t) = \|\overrightarrow{OM}'(t)\|$. Si $s(I) = J$, alors, s est un paramétrage admissible de l'arc f qui définit la même orientation que celle de f.
Par abus de notation on notera s le paramètre de l'arc $f \circ s^{-1}$.
• Lorsque $I = [a, b]$, la longueur du chemin parcouru sur $\mathcal{C}$ lorsque t décrit I est donnée par l'intégrale $\ell_I = \displaystyle\int_a^b s'(t)\,dt$.
Lorsque I n'est pas un segment, l'intégrale généralisée définissant ℓ_I peut être infinie.
On a donc $s(t) = \displaystyle\int_a^t \|\overrightarrow{OM}'(t)\|\,dt + K$, où K est une constante.
En coordonnées polaires on a $\|\overrightarrow{OM}'(\theta)\| = \sqrt{\rho(\theta)^2 + \rho'(\theta)^2}$, et pour une courbe d'équation $y = h(x)$, on a $\|\overrightarrow{OM}'(x)\| = \sqrt{1 + h'(x)^2}$.
• L'arc $f \circ s^{-1}$ est appelé **représentation normale** de l'arc f.
Déterminer un paramétrage par l'abscisse curviligne revient donc à faire deux opérations successives : calculer une intégrale, puis trouver une application réciproque.

Exercice 11.16

Trouver un paramétrage par l'abscisse curviligne de la courbe d'équation $y = x^{3/2}$ pour $x \geqslant 0$.

On a $\overrightarrow{OM}'(x) = \vec{\imath} + \dfrac{3}{2}x^{1/2}\,\vec{\jmath}$, donc $\|\overrightarrow{OM}'(x)\| = \sqrt{1 + \dfrac{9}{4}x}$.

Pour $x \geqslant 0$, posons $s = \displaystyle\int_0^x \sqrt{1 + \frac{9}{4}t}\,dt$. Une primitive de $x \mapsto \sqrt{1 + \dfrac{9}{4}x}$ est $x \mapsto \dfrac{8}{27}\left(1 + \dfrac{9}{4}x\right)^{3/2} = \left(x + \dfrac{4}{9}\right)^{3/2}$ donc $s = \left(x + \dfrac{4}{9}\right)^{3/2} - \dfrac{8}{27}$. On en déduit

$$x = \left(s + \frac{8}{27}\right)^{2/3} - \frac{4}{9} \text{ et } y = \left[\left(s + \frac{8}{27}\right)^{2/3} - \frac{4}{9}\right]^{3/2}, \text{ pour } s \geqslant 0.$$

Exercice 11.17

Trouver un paramétrage par l'abscisse curviligne de la courbe d'équation polaire $\rho = \dfrac{1}{2}\sin^2\dfrac{\theta}{2}$ pour $\theta \in [0,\, 2\pi]$.

On a $\rho'(\theta) = \dfrac{1}{2}\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}$, donc $\|\overrightarrow{OM}'(\theta)\|^2 = \dfrac{1}{4}\sin^2\dfrac{\theta}{2}$. Si, pour $\theta \in [0,\, 2\pi]$, l'on pose $s = \displaystyle\int_\pi^\theta \|\overrightarrow{OM}'(t)\|\,dt = \int_\pi^\theta \frac{1}{2}\sin\frac{t}{2}\,dt = -\cos\frac{\theta}{2}$, alors s varie de -1 à 1, et on obtient $\rho = \dfrac{1}{2}\left(1-\cos^2\dfrac{\theta}{2}\right) = \dfrac{1}{2}(1-s^2)$. Par ailleurs $\sin\theta = 2\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2} = -2s\sqrt{1-s^2}$ et $\cos\theta = 2\cos^2\dfrac{\theta}{2} - 1 = 2s^2-1$ d'où $x(t) = (1-s^2)\left(s^2-\dfrac{1}{2}\right)$ et $y(t) = -s(1-s^2)^{3/2}$.

Exercice 11.18

Montrer que les deux arcs suivants ont même longueur :
$\mathcal{C}_1$ paramétré par $x(t) = 2\cos t$, $y(t) = \sin t$, pour $t \in \left[0,\, \pi/2\right]$
$\mathcal{C}_2$ paramétré en coordonnées polaires par $\rho(\theta) = \sin 2\theta$, pour $\theta \in \left[0,\, \pi/2\right]$.

Pour $\mathcal{C}_1$, on a $x'(t) = -2\sin t$ et $y(t) = \cos t$, donc $x'(t)^2 + y'(t)^2 = 4\sin^2 t + \cos^2 t$, et l'arc a pour longueur $\ell_1 = \displaystyle\int_0^{\pi/2}\sqrt{4\sin^2 t + \cos^2 t}\,dt$.
Pour $\mathcal{C}_2$, on a $\rho'(\theta) = 2\cos 2\theta$, donc $\rho(\theta)^2 + \rho'(\theta)^2 = 4\cos^2 2\theta + \sin^2 2\theta$, et l'arc a pour longueur $\ell_2 = \displaystyle\int_0^{\pi/2}\sqrt{4\cos^2 2\theta + \sin^2 2\theta}\,d\theta$.
Pour transformer cette dernière intégrale on effectue le changement de variable $u = 2\theta$. Alors $\ell_2 = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{\pi}\sqrt{4\cos^2 u + \sin^2 u}\,du$.
Comme la fonction intégrée est de période π et paire, on a encore
$$\ell_2 = \frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sqrt{4\cos^2 u + \sin^2 u}\,du = \int_0^{\pi/2}\sqrt{4\cos^2 u + \sin^2 u}\,du.$$
On a donc bien trouvé que $\ell_1 = \ell_2$.

Exercice 11.19

Soit k une entier supérieur ou égal à 3. Calculer la longueur de l'épicycloïde à k rebroussements paramétrée par $x(t) = (k+1)\cos t - \cos(k+1)t$, $y(t) = (k+1)\sin t - \sin(k+1)t$ lorsque $t \in [0,\, 2\pi]$.

On a $x'(t) = (k+1)(-\sin t + \sin(k+1)t)$ et $y'(t) = (k+1)(\cos t - \cos(k+1)t)$, donc

$$\begin{aligned} x'(t)^2 + y'(t)^2 &= 2(k+1)^2(1 - (\sin t \sin(k+1)t + \cos t \cos(k+1)t)) \\ &= 2(k+1)^2(1 - \cos kt) = 4(k+1)^2 \sin^2 \frac{kt}{2}\,. \end{aligned}$$

On a donc $\ell = \displaystyle\int_0^{2\pi} 2(k+1) \left|\sin \frac{kt}{2}\right| dt$. Mais la fonction intégrée est de période $2\pi/k$, donc la courbe a pour longueur

$$\ell = k \int_0^{2\pi/k} 2(k+1) \sin \frac{kt}{2}\, dt = 4(k+1) \left[-\cos \frac{kt}{2} \right]_0^{2\pi/k} = 8(k+1)\,.$$

Exercice 11.20

Calculer la longueur $\ell(\theta_0)$ de l'arc de spirale logarithmique d'équation polaire $\rho = e^{-b\theta}$, où $b > 0$, lorsque $\theta \in [\,0,\ \theta_0\,]$.
Qu'obtient-on lorsque θ_0 tend vers $+\infty$?

On a $\rho'(\theta) = -be^{-b\theta}$, donc $\rho(\theta)^2 + \rho'(\theta)^2 = (1+b^2)e^{-2b\theta}$. Alors

$$\ell(\theta_0) = \int_0^{\theta_0} \sqrt{1+b^2}e^{-b\theta}\, d\theta = \frac{\sqrt{1+b^2}}{b} \left[-e^{-b\theta} \right]_0^{\theta_0} = \frac{\sqrt{1+b^2}}{b}(1 - e^{-b\theta_0})\,.$$

Lorsque θ_0 tend vers $+\infty$, cette expression a pour limite $\ell(\infty) = \dfrac{\sqrt{1+b^2}}{b}$. La branche de spirale logarithmique qui s'enroule autour de l'origine a une longueur finie.

Exercice 11.21

Soit $a > 0$. Calculer la longueur $\ell(a)$ de l'arc de courbe de $\mathbb{R}^3$ paramétré par $x(t) = t\cos t$, $y(t) = t\sin t$, $z(t) = \dfrac{2\sqrt{2}}{3} t^{3/2}$ lorsque t varie de 0 à a.

On a $x'(t) = \cos t - t\sin t$, $y'(t) = \sin t + t\cos t$, $z'(t) = \sqrt{2t}$, d'où

$$\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} = \sqrt{1 + t^2 + 2t} = t + 1\,.$$

Alors $\ell(a) = \displaystyle\int_0^a (t+1)\, dt = \frac{a^2}{2} + a$.

11.1.7 Courbure - Formules de Frenet

Ce qu'il faut savoir

Soit f un arc de classe $\mathcal{C}^k$ $(k \geqslant 2)$, paramétré par l'abscisse curviligne s, c'est-à-dire tel que $\overrightarrow{OM}'(s) = \overrightarrow{T}(s)$, $x'(s) = \cos\alpha(s)$, $y'(s) = \sin\alpha(s)$.

En un point birégulier $M(s)$ on appelle **courbure** le nombre $\gamma(s) = \alpha'(s)$. Ce nombre n'est pas nul, et on appelle **rayon de courbure** le nombre $R(s) = 1/\gamma(s)$. On a alors les formules de Frenet

$$\overrightarrow{T}'(s) = \gamma(s)\overrightarrow{N}(s)\,,\ \overrightarrow{N}'(s) = -\gamma(s)\overrightarrow{T}(s)\,.$$

Comment calculer la courbure γ en un point d'une courbe de paramétrage quelconque

Les formules permettant un calcul direct n'étant pas au programme, on adoptera une des deux techniques suivantes, en tenant compte dans les deux cas, du fait que $\dfrac{dt}{ds} = \dfrac{1}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}$:

– lorsque l'on peut mettre facilement $\overrightarrow{T}(t)$ sous la forme $\cos\alpha(t)\,\vec{\imath} + \sin\alpha(t)\,\vec{\jmath}$, on utilise la relation $\gamma(t) = \dfrac{d\alpha}{ds} = \dfrac{d\alpha}{dt}\,\dfrac{dt}{ds}$ (Voir ex. 11.23),

– on utilise la relation $\dfrac{d\overrightarrow{T}}{ds} = \gamma\overrightarrow{N}$ en écrivant $\dfrac{d\overrightarrow{T}}{ds} = \dfrac{dt}{ds}\,\dfrac{d\overrightarrow{T}}{dt}$ (Voir ex. 11.22).

Notions hors programme utiles

Bien que les notions suivantes ne soient pas au programme, elles sont parfois employées dans les exercices d'oraux. Il peut être utile de les connaître.

Soit f un arc de classe $\mathcal{C}^k$ $(k \geqslant 2)$.

– On appelle **centre de courbure au point de paramètre** t le point $\Omega(t)$ défini par $\overrightarrow{O\Omega(t)} = \overrightarrow{OM(t)} + R(t)\overrightarrow{N(t)}$.

– Le cercle de centre $\Omega(t)$ et de rayon $|R(t)|$ est appelé **cercle osculateur** au point $M(t)$.

– L'ensemble des centres de courbure est (en général) une courbe $\mathcal{C}_1$ appelée **développée** de la courbe $\mathcal{C}$.

Exercice 11.22

Développée de la tractrice CCP PC 2006

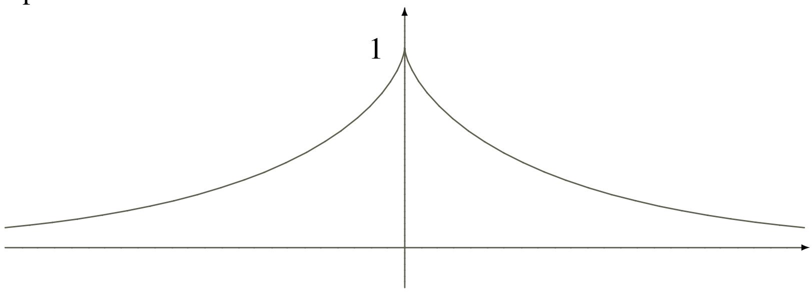
Dans le plan muni du repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on considère la courbe paramétrique : $\begin{cases} x = t - \operatorname{th} t \\ y = \dfrac{1}{\operatorname{ch} t} \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$.

1) Donner rapidement l'allure de la courbe.

2) Déterminer le rayon de courbure $R(t)$ en tout point $M(t)$ de la courbe.

3) Déterminer une équation cartésienne de l'ensemble des points $I(t)$ définis par la relation $\overrightarrow{IM}(t) = R(t)\overrightarrow{N}(t)$ où $\overrightarrow{N}(t)$ désigne le vecteur normal au point $M(t)$ (le point $I(t)$ est le centre de courbure).

1) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $x(-t) = -x(t)$ et $y(-t) = y(t)$. La courbe est donc symétrique par rapport à Oy. On a aussi $x'(t) = \operatorname{th}^2 t$ et $y'(t) = -\dfrac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch}^2 t}$. Sur $[0, +\infty[$ la fonction x est croissante et varie de 0 à $+\infty$, et la fonction y est décroissante et varie de 1 à 0. La courbe admet donc l'axe Ox comme asymptote horizontale.
Comme $x'(0) = y'(0) = 0$, la courbe admet un point singulier au point $M(0) = (0, 1)$. Le rapport $\dfrac{y'(t)}{x'(t)} = -\dfrac{1}{\operatorname{sh} t}$ tend vers $-\infty$ quand t tend vers 0 et la courbe admet l'axe Oy pour tangente verticale en ce point, et puisque la courbe est symétrique par rapport à Oy, le point $M(0)$ est un point de rebroussement de première espèce.



2) On a $x'(t)^2 + y'(t)^2 = \operatorname{th}^4 t + \dfrac{\operatorname{sh}^2 t}{\operatorname{ch}^4 t} = \operatorname{th}^2 t$. Donc, en notant $\varepsilon(t)$ le signe de t qui est aussi le signe de $\operatorname{th} t$ et de $\operatorname{sh} t$

$$\overrightarrow{T}(t) = \varepsilon(t)\left(\operatorname{th} t\,\vec{\imath} - \frac{1}{\operatorname{ch} t}\,\vec{\jmath}\right), \text{ et } \overrightarrow{N}(t) = \varepsilon(t)\left(\frac{1}{\operatorname{ch} t}\,\vec{\imath} + \operatorname{th} t\,\vec{\jmath}\right) = \frac{\varepsilon(t)}{\operatorname{ch} t}\left(\vec{\imath} + \operatorname{sh} t\,\vec{\jmath}\right).$$

On a $= \dfrac{ds}{dt} = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} = |\operatorname{th} t|$, puis,

$$\frac{d\overrightarrow{T}}{ds} = \frac{dt}{ds}\frac{d\overrightarrow{T}}{dt} = \frac{\varepsilon(t)}{|\operatorname{th} t|}\left(\frac{1}{\operatorname{ch}^2 t}\,\vec{\imath} + \frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch}^2 t}\,\vec{\jmath}\right) = \frac{1}{\operatorname{sh} t \operatorname{ch} t}\left(\vec{\imath} + \operatorname{sh} t\,\vec{\jmath}\right).$$

Mais, on a aussi $\dfrac{d\overrightarrow{T}}{ds} = \dfrac{1}{R}\overrightarrow{N} = \dfrac{1}{R}\dfrac{\varepsilon(t)}{\operatorname{ch} t}\left(\vec{\imath} + \operatorname{sh} t\,\vec{\jmath}\right)$.

Alors en identifiant les deux expressions de $\dfrac{d\overrightarrow{T}}{ds}$, on en déduit que $R(t) = |\operatorname{sh} t|$.

3) On a donc $R(t)\overrightarrow{N}(t) = \operatorname{th} t\left(\vec{\imath} + \operatorname{sh} t\,\vec{\jmath}\right)$, et on en déduit

$$\overrightarrow{OI}(t) = \overrightarrow{OM}(t) + R(t)\overrightarrow{N}(t) = t\,\vec{\imath} + \operatorname{ch} t\,\vec{\jmath}.$$

La courbe obtenue a donc pour équation cartésienne $y = \operatorname{ch} x$.

Exercice 11.23

Mines-Ponts MP 2005

Calculer la courbure γ le long de la courbe $\mathcal{C}$ d'équation polaire
$\rho = a(1 - \cos\theta)(a > 0)$

La fonction ρ étant de période 2π, on limite l'étude à $[0, 2\pi]$.

On a $\rho'(\theta) = a\sin\theta$, donc $\rho(\theta)^2 + \rho'(\theta)^2 = 2a^2(1-\cos\theta) = 4a^2\sin^2\dfrac{\theta}{2}\cdot$
Cette expression est nulle en 0 et 2π (point de rebroussement). Dans la suite on se limite à l'intervalle $]0, 2\pi[$. Sur cet intervalle, $\sin\dfrac{\theta}{2}$ est positif, et donc $\dfrac{ds}{d\theta} = \|\overrightarrow{OM'}(t)\| = 2a\sin\dfrac{\theta}{2}$.
En partant de $x(\theta) = a(1-\cos\theta)\cos\theta$ et $y(\theta) = a(1-\cos\theta)\sin\theta$ on obtient

$$x'(\theta) = a(-\sin\theta + \sin 2\theta) = 2a\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2},$$
$$y'(\theta) = a(\cos\theta - \cos 2\theta) = 2a\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2},$$

d'où $\overrightarrow{T}(\theta) = \cos\dfrac{3\theta}{2}\vec{\imath} + \sin\dfrac{3\theta}{2}\vec{\jmath}$, et donc, en posant $\alpha = 3\theta/2$, on trouve $\overrightarrow{T} = \cos\alpha\,\vec{\imath} + \sin\alpha\,\vec{\jmath}$. Ainsi $\gamma(\theta) = \dfrac{d\alpha}{d\theta}\dfrac{d\theta}{ds} = \dfrac{3}{4a\sin\frac{\theta}{2}}$.

Exercice 11.24

Centrale PC 2006

Soit a un réel strictement positif. Déterminer les courbes telles que $R(s) = a + s^2/a$, où s désigne l'abscisse curviligne et $R(s)$ le rayon de courbure.

Remarquons qu'un tel problème est invariant par les isométries conservant l'orientation (rotations, symétries centrales, translations).
On a $x'(s) = \cos\alpha(s)$, $y'(s) = \sin\alpha(s)$, et $\alpha'(s) = 1/R(s)$.
L'équation différentielle $\alpha'(s) = \dfrac{1}{R(s)} = \dfrac{1}{a}\dfrac{1}{1+\frac{s^2}{a^2}}$ a pour solution

$$\alpha(s) = \operatorname{Arctan}\frac{s}{a} + \alpha_0 .$$

On va chercher les courbes obtenues lorsque $\alpha_0 = 0$. Les autres sont obtenues à partir de celles-ci par rotation.
On a $\cos^2\operatorname{Arctan}\dfrac{s}{a} = \dfrac{1}{1+\tan^2\operatorname{Arctan}\frac{s}{a}} = \dfrac{1}{1+\frac{s^2}{a^2}}$, donc, en posant $\varepsilon = \pm 1$,

$$x'(s) = \cos\operatorname{Arctan}\frac{s}{a} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{1+\frac{s^2}{a^2}}}$$

et

$$y'(s) = \sin\operatorname{Arctan}\frac{s}{a} = \cos\operatorname{Arctan}\frac{s}{a}\tan\operatorname{Arctan}\frac{s}{a} = \frac{\varepsilon\frac{s}{a}}{\sqrt{1+\frac{s^2}{a^2}}}.$$

On peut se limiter à $\varepsilon = 1$, car le cas les courbes obtenues dans le cas $\varepsilon = -1$ se ramènent à celles obtenues dans le cas $\varepsilon = 1$ par symétrie centrale. Alors $x(s) = \displaystyle\int \frac{ds}{\sqrt{1+\frac{s^2}{a^2}}}$ et $y(s) = \displaystyle\int \frac{\frac{s}{a}\,ds}{\sqrt{1+\frac{s^2}{a^2}}}$.

Pour obtenir x et y il est préférable de changer de paramètre en prenant $s = a\,\mathrm{sh}\,t$, donc $ds = a\,\mathrm{ch}\,t\,dt$. Alors
$X(t) = x(a\,\mathrm{sh}\,t) = \displaystyle\int a\,dt = at + b$ et $Y(t) = y(a\,\mathrm{sh}\,t) = \displaystyle\int a\,\mathrm{sh}\,t\,dt = a\,\mathrm{ch}\,t + c$.
On peut prendre $b = c = 0$. Les autres courbes sont obtenues par translation à partir de ce cas particulier. On trouve alors la chainette d'équation $Y = a\,\mathrm{ch}\,\dfrac{X}{a}$.

11.2 EXERCICES D'ENTRAÎNEMENT

Exercice 11.25

Étudier et tracer la courbe représentative de la fonction f définie par $f(t) = (2t^3 + 3t^2, 3t^4 + 4t^3)$. En particulier, on étudiera les points singuliers et le point double.

Dérivées et tableau de variation

Les fonctions x et y sont définies sur $\mathbb{R}$. On a immédiatement $x' = 6t(t+1)$ et $y'(t) = 12t^2(t+1)$ et l'on obtient le tableau de variation suivant :

t	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
x'		$+$	0	$-$	0	$+$	
x	$-\infty$	↗	1	↘	0	↗	$+\infty$
y	$+\infty$	↘	-1	↗	0	↗	$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$+$	
y'/x'			-2		0		

Branches paraboliques

Lorsque t tend vers $\pm\infty$, $y(t)$ tend vers $+\infty$, et $y(t)/x(t)$ tend vers l'infini. La courbe admet deux branches paraboliques dans la direction des y positifs. (L'arc de courbe « ressemble » à des branches de paraboles d'axes parallèles à Oy).

Points singuliers

La courbe admet des points singuliers pour $t = 0$ et $t = -1$.

• Pour $t = 0$, le limite en zéro, du rapport $\dfrac{y(t) - y(0)}{x(t) - x(0)} = \dfrac{3t^2 + 4t}{2t + 3}$ est nulle. (On peut aussi regarder la limite de $y'(t)/x'(t) = 2t$). La courbe est donc tangente en O à l'axe des x, et le tableau de variation indique qu'il y aura un point de rebroussement de première espèce pour cette valeur.

• Pour $t = -1$, la nature du point de la courbe correspondant n'est plus évidente. Plutôt que d'effectuer un développement limité, on préférera ici calculer les dérivées successives en -1. On a
$x''(t) = 6(2t + 1)$ et $y''(t) = 12t(3t + 2)$, puis $x'''(t) = 12$ et $y'''(t) = 24(3t + 1)$.
Alors $\overrightarrow{OM}(t) = \overrightarrow{OM}(-1) + (t + 1)^2\overrightarrow{U_2} + (t + 1)^3\overrightarrow{U_3} + o((t + 1)^3)$, où

$$\overrightarrow{U_2} = \frac{1}{2!}\overrightarrow{OM''}(-1) = \frac{1}{2}(x''(-1)\vec{\imath} + y''(-1)\vec{\jmath}) = -3\vec{\imath} + 6\vec{\jmath},$$

$$\overrightarrow{U_3} = \frac{1}{3!}\overrightarrow{OM'''}(-1) = \frac{1}{6}(x'''(-1)\vec{\imath} + y'''(-1)\vec{\jmath}) = 2\vec{\imath} - 8\vec{\jmath}.$$

Les vecteurs $\overrightarrow{U_2}$ et $\overrightarrow{U_3}$ étant linéairement indépendants, on en déduit que l'on a de nouveau un point de rebroussement de première espèce en $t = -1$.
La tangente à la courbe au point $(x(-1), y(-1)) = (1, -1)$ a pour vecteur directeur le vecteur $\overrightarrow{U_2}$ donc pour coefficient directeur -2, ce que l'on obtient également en calculant la limite de $y'(t)/x'(t)$ en -1.

Point double

Le tracé de la courbe laisse apparaître un point double. Pour le déterminer on cherche deux valeurs distinctes t_1 et t_2 du paramètre, telles que $x(t_1) = x(t_2)$ et $y(t_1) = y(t_2)$. L'équation $x(t_1) - x(t_2) = 0$ donne $2(t_1^3 - t_2^3) + 3(t_1^2 - t_2^2) = 0$, et en simplifiant par $t_1 - t_2$, on obtient, $2(t_1^2 + t_1t_2 + t_2^2) + 3(t_1 + t_2) = 0$.
Le membre de gauche peut s'exprimer en fonction de $S = t_1 + t_2$ et $P = t_1t_2$. En effet $t_1^2 + t_1t_2 + t_2^2 = (t_1 + t_2)^2 - t_1t_2 = S^2 - P$,
et donc $2(t_1^2 + t_1t_2 + t_2^2) + 3(t_1 + t_2) = 2(S^2 - P) + 3S$.
On obtient $2(S^2 - P) + 3S = 0$, c'est-à-dire $2P = 2S^2 + 3S$.
L'équation $y(t_1) - y(t_2) = 0$ conduit, par un procédé analogue à
$3(t_1 + t_2)(t_1^2 + t_2^2) + 4(t_1^2 + t_1t_2 + t_2^2) = 0$, puis à $3S(S^2 - 2P) + 4(S^2 - P) = 0$, et finalement à $2P(3S + 2) = 3S^3 + 4S^2$.

Le système de départ, est donc équivalent au système $\begin{cases} 2P = 2S^2 + 3S \\ 2P(3S + 2) = 3S^3 + 4S^2 \end{cases}$

En remplaçant dans la deuxième équation $2P$ par son expression tirée de la première, il vient $(2S^2 + 3S)(3S + 2) = 3S^3 + 4S^2$, ce qui donne $S(S^2 + 3S + 2) = 0$.

On obtient trois valeurs possibles de S, donc trois couples (S, P) possibles :

$$(0, 0),\ (-2, 1),\ (-1, -1/2),$$

qui sont bien solutions du système comme on le vérifie facilement.
Les nombres t_1 et t_2 sont alors solutions de l'équation $t^2 - St + P = 0$. On étudie les trois cas obtenus.
(i) Lorsque $S = P = 0$, l'équation se réduit à $t^2 = 0$, et admet une racine double $t_1 = t_2 = 0$. On n'a donc pas de point double, mais on retrouve un point singulier.
(ii) Lorsque $S = -2$ et $P = 1$, l'équation $t^2 + 2t + 1 = 0$ admet encore une racine double $t = -1$, et l'on obtient l'autre point singulier.
(iii) Lorsque $S = -1$ et $P = -1/2$, le trinôme $t^2 + t - 1/2$ a un discriminant strictement positif. Il possède deux racines réelles distinctes et l'on aura bien un point double dans ce cas. Plutôt que de calculer $x(t_1)$ et $y(t_1)$, on va utiliser le fait que, si t désigne un des nombres t_1 ou t_2, on a alors $2t^2 + 2t - 1 = 0$.
En effectuant la division euclidienne de $x(t)$ par ce polynôme, on obtient

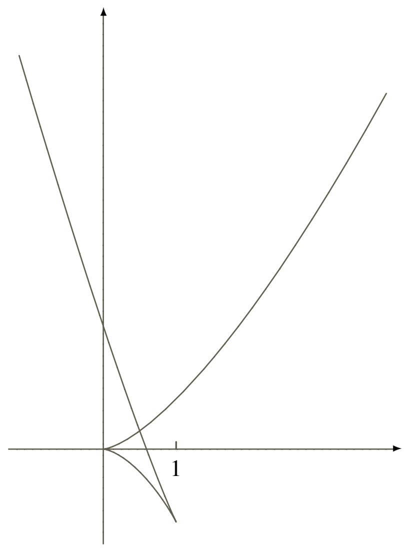
$$\begin{aligned} x(t_1) = x(t_2) &= 2t^3 + 3t^2 = (2t^2 + 2t - 1)\left(t + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \\ y(t_1) = y(t_2) &= 3t^4 + 4t^3 = (2t^2 + 2t - 1)\left(\frac{3t^2}{2} + \frac{t}{2} + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Le point double est donc le point de coordonnées $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$.

Intersection avec les axes

(i) Intersection avec Ox. On l'obtient lorsque $y(t) = 0$, c'est-à-dire pour $t = -4/3$, et dans ce cas $y(t) = 16/27$.
(ii) Intersection avec Oy. On l'obtient lorsque $x(t) = 0$, c'est-à-dire pour $t = -3/2$, et dans ce cas $y(t) = 27/16$.

Tracé de la courbe



Exercice 11.26

Étudier et tracer la courbe représentative de la fonction f définie par $f(t) = \left(\sin t\,,\ \dfrac{\cos^2 t}{2 - \cos t}\right)$. En particulier, on étudiera les points singuliers et on déterminera les points d'inflexion.

Réduction du domaine d'étude

Les fonctions x et y sont définies sur $\mathbb{R}$ et de périodes 2π. Si l'on veut utiliser la parité des fonctions, on prend alors l'intervalle $I_0 = [-\pi, \pi]$ comme intervalle d'étude. L'application $\Phi_1 : t \mapsto -t$ est une bijection de $I_1 = [0, \pi]$ sur $I_1' = [-\pi, 0]$, et l'on a $x(-t) = -x(t)$ et $y(-t) = y(t)$. La courbe est symétrique par rapport à Oy. On l'étudie sur I_1, et on complètera par la symétrie $\mathcal{S}_1$ par rapport à Oy.

Dérivées et tableau de variation

On obtient $x'(t) = \cos t$ et $y'(t) = \dfrac{\sin t \cos t(\cos t - 4)}{(2 - \cos t)^2}$. La fonction x' s'annule dans I_1 en $\pi/2$ et la fonction y' en 0, $\pi/2$ et π. On obtient facilement le tableau de variation suivant :

t	0		$\pi/2$		π
x'		$+$	0	$-$	
x	0	↗	1	↘	0
y	1	↘	0	↗	$\frac{1}{3}$
y'	0	$-$	0	$+$	0
y'/x'	0		-1		0

Points singuliers

La courbe présente un point singulier en $t = \pi/2$. Pour étudier sa nature, on pose $u = t - \pi/2$. Alors $x(t) = \cos u = 1 - \dfrac{u^2}{2} + o(u^3)$, et

$$y(t) = \frac{\sin^2 u}{2 + \sin u} = \frac{u^2 + o(u^3)}{2 + u + o(u)} = \frac{u^2}{2}\,\frac{1 + o(u)}{1 + \frac{u}{2} + o(u)} = \frac{u^2}{2}\left(1 - \frac{u}{2} + o(u)\right),$$

ce qui donne $y(t) = \dfrac{u^2}{2} - \dfrac{u^3}{4} + o(u^3)$. On a donc

$$\overrightarrow{OM}(t) = \overrightarrow{OM}\left(\frac{\pi}{2}\right) + \left(t - \frac{\pi}{2}\right)^2 \overrightarrow{U_2} + \left(t - \frac{\pi}{2}\right)^3 \overrightarrow{U_3} + o\left(\left(t - \frac{\pi}{2}\right)^3\right),$$

où $\overrightarrow{U_2} = -\dfrac{1}{2}\vec{\imath} + \dfrac{1}{2}\vec{\jmath}$ et $\overrightarrow{U_3} = -\dfrac{1}{4}\vec{\jmath}$. La courbe admet un point de rebroussement de première espèce, au point $(1, 0)$, et en son symétrique $(-1, 0)$.

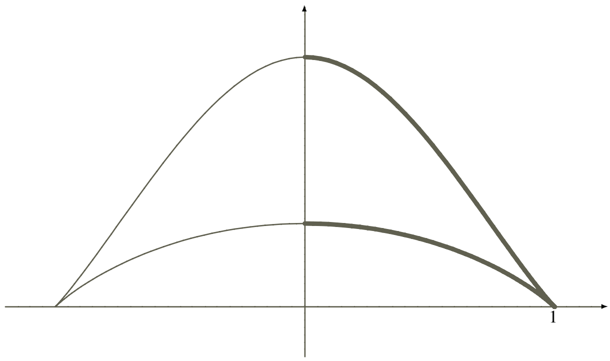
Points d'inflexion

Le tracé de la courbe fait apparaître deux points d'inflexion. Une condition nécessaire pour avoir un point d'inflexion en un point de paramètre t est que les vecteurs $\overrightarrow{OM}'(t)$ et $\overrightarrow{OM}''(t)$ soient colinéaires, ce qui se traduit par la condition $x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t) = 0$, où encore, lorsque $x'(t) \neq 0$, par la condition $(y'/x')'(t) = 0$.

On a $\dfrac{y'(t)}{x'(t)} = \dfrac{\sin t(\cos t - 4)}{(2 - \cos t)^2}$, et en dérivant cette expression, on obtient $\left(\dfrac{y'}{x'}\right)'(t) = \dfrac{3(2 - 3\cos t)}{(2 - \cos t)^3}$. Cette expression s'annule pour $t = \pm \operatorname{Arccos}(2/3)$, et les deux points d'inflexion sont : $\left(\dfrac{\sqrt{5}}{3}, \dfrac{1}{3}\right)$ et son symétrique par raport à Oy.

Tracé de la courbe

On trace l'arc de courbe obtenu lorsque t varie de 0 à π, puis on complète par la symétrie $\mathcal{S}_1$.



Exercice 11.27

Étudier et tracer la courbe définie en coordonnées polaires par $\rho(\theta) = \dfrac{2}{1 - e^{\theta}}$.

Déterminer en particulier, l'asymptote et les points doubles. Que se passe-t-il lorsque θ tend vers $-\infty$? vers $+\infty$?

La fonction ρ est définie sauf en 0.

Dérivée et tableau de variation

On a $\rho'(\theta) = \dfrac{2e^\theta}{(1-e^\theta)^2}$, et ρ' est toujours positive. On obtient le tableau de variation suivant :

θ	$-\infty$		0		$+\infty$
ρ'		$+$	$\|$	$+$	
ρ	2	$\nearrow$	$+\infty \;\|\; -\infty$	$\nearrow$	0

Étude en $-\infty$

Lorsque θ tend vers $-\infty$, alors $\rho(\theta)$ tend vers 2. La courbe s'approche du cercle de centre O et de rayon 2 (cercle asymptote). Comme $\rho > 2$ quand $\theta < 0$, la courbe possède une branche spirale qui s'enroule autour du cercle. Elle coupe le cercle lorsque $\rho(\theta) = \dfrac{2}{1-e^\theta} = -2$, c'est-à-dire lorsque $\theta = \ln 2$.

Étude en $+\infty$

Lorsque θ tend vers $+\infty$, alors $\rho(\theta)$ tend vers 0. La courbe possède une branche spirale qui s'enroule autour de l'origine (point asymptote).

Asymptote

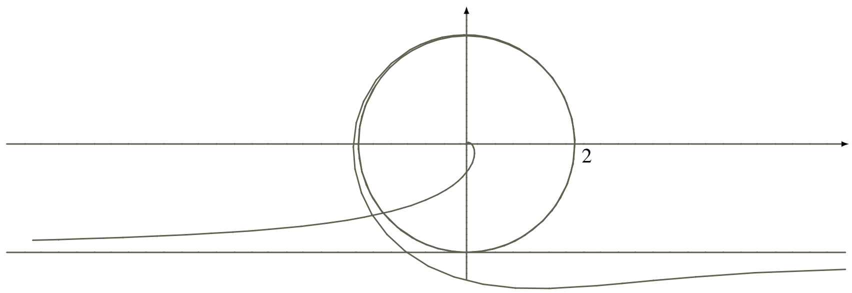
On a $y(\theta) = \rho(\theta)\sin\theta = \dfrac{2\sin\theta}{1-e^\theta}$. En utilisant un développement limité en zéro, on obtient $y(\theta) = \dfrac{2\theta + o(\theta^2)}{-\theta - \frac{\theta^2}{2} + o(\theta^2)} = -2\left(1 - \dfrac{\theta}{2}\right) + o(\theta) = -2 + \theta + o(\theta)\,.$

Cette expression tend vers -2 lorsque θ tend vers zéro. La courbe admet donc l'asymptote horizontale d'équation $y = -2$. La différence $y(\theta) + 2$ est du signe de θ. La courbe est donc au-dessus de son asymptote lorsque θ tend vers 0^+, et en dessous lorsque θ tend vers 0^-.

Points doubles

Il est facile de voir que l'équation $\rho(\theta + 2k\pi) = \rho(\theta)$, avec $k \in \mathbb{Z}^*$, n'a pas de solution. Par contre la courbe possède une infinité de points doubles, obtenus pour des valeurs θ_k telles que $\rho(\theta_k + (2k+1)\pi) = -\rho(\theta_k)$ avec $k \in \mathbb{Z}$. c'est-à-dire telles que $1 - e^{\theta_k + (2k+1)\pi} = e^{\theta_k} - 1$. Cette équation est équivalente à $e^{\theta_k}\left(1 + e^{(2k+1)\pi}\right) = 2$, donc à $\theta_k = \ln 2 - \ln\left(1 + e^{(2k+1)\pi}\right)$. Remarquons que lorsque k tend vers $+\infty$, la suite (θ_{-k}) admet $\ln 2$ pour limite. On retrouve la valeur de θ donnant le point d'intersection de la courbe et du cercle asymptote.

Tracé de la courbe



Exercice 11.28

Strophoïde droite, d'après Centrale MP 2006

1) Étudier et tracer la courbe $\mathcal{S}$ définie en coordonnées polaires par $\rho = \dfrac{\cos 2\theta}{\cos\theta}$.

2) Calculer l'aire entre la courbe et l'asymptote et l'aire de la boucle de la courbe.

3) *Question de la rédaction :* On appelle inversion de pôle O et de puissance λ, la transformation géométrique qui à tout point M distinct de O associe le point P situé sur la droite OM et tel que $\overline{OP}\cdot\overline{OM} = \lambda$.
Trouver l'équation polaire de l'image $\mathcal{H}$ de $\mathcal{S}$ dans l'inversion de pôle O et de puissance 2. En déduire l'équation cartésienne puis la nature de $\mathcal{H}$.

1) **Domaine de définition - Période - Réduction du domaine d'étude**
La fonction est de période 2π. Mais on constate que $\rho(\pi+\theta) = -\rho(\theta)$. La courbe est donc parcourue deux fois sur une période. On l'étudie sur un intervalle de longueur π.
La fonction ρ n'est pas définie si $\theta = \pi/2 + k\pi$ avec k entier. D'autre part on a $\rho(-\theta) = \rho(\theta)$. On choisit donc $I_0 = \left]-\pi/2,\, \pi/2\right[$ comme intervalle d'étude. L'application : $\Phi_1 : t \mapsto -t$ est une bijection de $I_1 = \left[0,\, \pi/2\right[$ sur $I_1' = \left]-\pi/2,\, 0\right]$, et la courbe est symétrique par rapport Ox. On l'étudie sur I_1, et on complètera par la symétrie $\mathcal{S}_1$ par rapport à Ox.
Dérivée et tableau de variation
On obtient

$$\rho'(\theta) = \frac{-2\cos\theta\sin 2\theta + \cos 2\theta\sin\theta}{\cos^2\theta} = -\frac{\sin\theta(2\cos^2\theta + 1)}{\cos^2\theta},$$

d'où le tableau de variation :

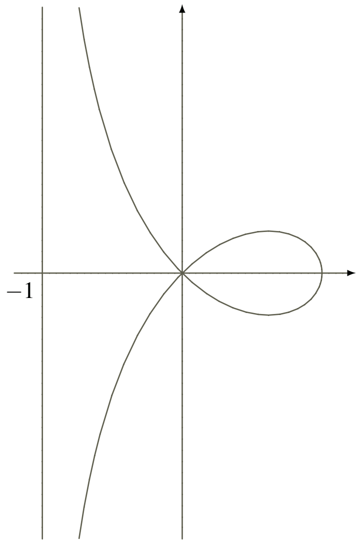
θ	0		$\pi/4$		$\pi/2$
ρ'	0		$-$		
ρ	1	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

Asymptote

Lorsque θ tend vers $\pi/2$, on a $x(\theta) = \rho(\theta)\cos\theta = \cos 2\theta$, et cette expression tend vers -1. On a donc une asymptote verticale d'équation $x = -1$, et $x(\theta) + 1$ est toujours positif, donc la courbe est à droite de son asymptote.

Tracé de la courbe

On trace l'arc de courbe obtenu lorsque θ varie de 0 à $\pi/2$, puis on complète par la symétrie par rapport à Ox.



2) En raison de la symétrie, l'aire $\mathcal{A}$ du domaine compris entre la courbe et son asymptote est le double de l'aire $\mathcal{A}_1$ du domaine limité par l'arc de courbe obtenu quand θ varie de $\pi/4$ à $\pi/2$, l'asymptote et l'axe Ox.

L'aire se calcule par la formule $\mathcal{A}_1 = \left| \displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/2} y(t)x'(t)\,dt \right|$.

On a $x'(\theta) = -2\sin 2\theta$, donc $y(\theta)x'(\theta) = -2\sin 2\theta \sin\theta \dfrac{\cos 2\theta}{\cos\theta}$. On linéarise facilement cette expression ce qui donne

$y(\theta)x'(\theta) = -4\sin^2\theta(2\cos^2\theta - 1) = -2\sin^2 2\theta + 4\sin^2\theta = 1 + \cos 4\theta - 2\cos 2\theta$.

Alors

$$\mathcal{A} = 2\left|\int_{\pi/4}^{\pi/2}(1+\cos 4\theta - 2\cos 2\theta)\,d\theta\right| = 2\left|\left[\theta + \frac{\sin 4\theta}{4} - \sin 2\theta\right]_{\pi/4}^{\pi/2}\right| = 2+\frac{\pi}{2}\,.$$

On a de même l'aire de la boucle de la courbe. Elle vaut

$$\mathcal{A} = 2\left|\int_{0}^{\pi/4}(1+\cos 4\theta - 2\cos 2\theta)\,d\theta\right| = 2\left|\left[\theta + \frac{\sin 4\theta}{4} - \sin 2\theta\right]_{0}^{\pi/4}\right| = 2-\frac{\pi}{2}\,.$$

3) • Soit M un point de $\mathcal{C}$ distinct de O situé sur la droite orientée faisant un angle θ avec Ox et soit P son image par l'inversion de pôle O et de puissance 2. On a donc $\overline{OM}(\theta) = \dfrac{\cos 2\theta}{\cos\theta}$ et, puisque $\overline{OM}(\theta)\overline{OP}(\theta) = 2$, on obtient $\overline{OP}(\theta) = \dfrac{2\cos\theta}{\cos 2\theta}$, ce qui donne l'équation polaire de $\mathcal{H}$.

• On en déduit

$$x(\theta) = \frac{2\cos^2\theta}{\cos 2\theta} = 1 + \frac{1}{\cos 2\theta} \quad \text{et} \quad y(\theta) = \frac{2\cos\theta\sin\theta}{\cos 2\theta} = \tan 2\theta\,.$$

Alors

$$(x(\theta)-1)^2 = \frac{1}{\cos^2 2\theta} = 1 + \tan^2 2\theta \quad \text{et} \quad (x(\theta)-1)^2 - y(\theta)^2 = 1\,.$$

La courbe $\mathcal{H}$ est donc incluse dans l'hyperbole équilatère d'équation cartésienne $(x-1)^2 - y^2 = 1$. Il est facile de vérifier que $\mathcal{H}$ est l'hyperbole complète, (le point O de $\mathcal{H}$ est l'image des points à l'infini de $\mathcal{C}$).

L'exercice suivant est la réunion de deux exercices concernant l'astroïde, donnés au CCP PC 2007

Exercice 11.29

CCP PC 2007

Dans le plan euclidien rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on considère la courbe $(\mathcal{A})$ paramétrée par $x(t) = \cos^3 t$ et $y(t) = \sin^3 t$.

1) Tracer la courbe $(\mathcal{A})$. On commencera par mettre en évidence les différentes symétries de $(\mathcal{A})$ afin de réduire l'intervalle d'étude à $\left[0, \pi/4\right]$.

2. a Montrer que $\overrightarrow{T} = -\cos t\,\vec{\imath} + \sin t\,\vec{\jmath}$ est un vecteur unitaire tangent à $(\mathcal{A})$ au point $M(t)$ de paramètre t.

2. b En déduire une équation cartésienne de la tangente $\mathcal{T}_t$ à $(\mathcal{A})$ au point $M(t)$.

2. c Calculer la longueur de la courbe $(\mathcal{A})$.

3) Pour $t \notin \mathbb{Z}\dfrac{\pi}{2}$, on note $A(t)$ et $B(t)$ les intersections respectives de $\mathcal{T}_t$ avec les axes Ox et Oy.

3. a Déterminer en fonction de t les coordonnées de $A(t)$ et $B(t)$. Vérifier que les applications A et B se prolongent par continuité à $\mathbb{R}$ tout entier.

3. b Vérifier que la longueur du segment $[\,A(t),\ B(t)\,]$ est constante.

4) Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $ab \neq 0$ et $a+b \neq 0$. On considère le point $P(t)$ du plan tel que $a\overrightarrow{P(t)A(t)} + b\overrightarrow{P(t)B(t)} = \vec{0}$.

4. a Exprimer en fonction de t les coordonnées de $P(t)$.

4. b Déterminer une équation cartésienne de la courbe $(\mathcal{E})$ décrite par $P(t)$ lorsque t varie. Quelle est la nature de cette courbe ?

5) On note $(\mathcal{F})$ l'ensemble M des points du plan pour lesquels il existe deux tangentes à $(\mathcal{A})$ qui passent par M et qui soient orthogonales en M.

5. a Soit M un point du plan de coordonnées (x,y). Montrer que M appartient à $(\mathcal{F})$ si et seulement si il existe $(t,\varepsilon) \in \mathbb{R}\times\{-1,1\}$ tel que $\begin{cases} x = \sin t\cos t(\sin t - \varepsilon\cos t) \\ y = \sin t\cos t(\cos t + \varepsilon\sin t) \end{cases}$.

5. b En déduire que $(\mathcal{F})$ admet $\rho = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos 2\theta$ comme équation polaire puis représenter graphiquement $(\mathcal{F})$.

6) Calculer l'aire du domaine limité par la courbe $(\mathcal{A})$.

1) Les fonctions x et y sont $2\pi-$périodiques et l'on peut réduire l'étude à un intervalle d'amplitude 2π.
Comme x est paire et y est impaire, les points $M(t)$ et $M(-t)$ sont symétriques par rapport à Ox et l'on peut réduire l'étude à $[\,0,\ \pi\,]$.
On a aussi $x(\pi - t) = -x(t)$ et $y(\pi - t) = y(t)$. Les points $M(\pi - t)$ et $M(t)$ sont symétriques par rapport à Oy et l'on peut réduire l'étude à $\left[0,\ \pi/2\right]$.
Enfin $x(\pi/2 - t) = y(t)$ et $y(\pi/2 - t) = x(t)$. Les points $M(\pi/2 - t)$ et $M(t)$ sont symétriques par rapport à la première bissectrice et l'on peut réduire l'étude à $I = \left[0,\ \pi/4\right]$.
Sur cet intervalle $x'(t) = -3\sin t\cos^2 t$ et $y'(t) = 3\cos t\sin^2 t$, et pour $t \neq 0$, on a $\dfrac{y'(t)}{x'(t)} = -\tan t$. Ce rapport à une limite nulle en 0, et en raison de la symétrie, le point $M(0) = (1,0)$ sera un point de rebroussement de première espèce.
Alors par symétrie, la courbe admet des points singuliers pour $t = k\pi/2$ avec k entier.
2.a En un point non singulier, on a $\overrightarrow{OM}'(t) = x'(t)\,\vec{\imath} + y'(t)\,\vec{\jmath} = 3\sin t\cos t\,\overrightarrow{T}$, et le vecteur $\overrightarrow{T}$ est unitaire. Donc $\overrightarrow{T}$ est bien un vecteur unitaire tangent à $(\mathcal{A})$ au point $M(t)$ de paramètre t.
Lorsque $t = k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), on a $\overrightarrow{T} = \pm\vec{\imath}$ qui est bien tangent à la courbe, et de même lorsque $t = \pi/2 + k\pi$, on a $\overrightarrow{T} = \pm\vec{\jmath}$.

2.b Si $P = (X, Y)$ est un point de la tangente à la courbe en $M(t)$, on écrit que les vecteurs $\overrightarrow{M(t)P}$ et $\overrightarrow{T}$ sont colinéaires, ce qui se traduit par $\begin{vmatrix} X - \cos^3 t & -\cos t \\ Y - \sin^3 t & \sin t \end{vmatrix} = 0$ d'où $\sin t(X - \cos^3 t) + \cos t(Y - \sin^3 t) = 0$. On obtient finalement pour équation de la tangente : $X \sin t + Y \cos t = \sin t \cos t$.

2.c Puisque $\overrightarrow{OM'} = 3 \sin t \cos t\, \overrightarrow{T}$, on en déduit que

$$\|3 \sin t \cos t\, \overrightarrow{T}\| = 3|\sin t \cos t| = \frac{3}{2}\,|\sin 2t|\,.$$

En utilisant les symétries de la courbe, sa longueur ℓ est obtenue par

$$\ell = 8 \int_0^{\pi/4} \frac{3}{2}\,|\sin 2t|\,dt = 12 \int_0^{\pi/4} \sin 2t\,dt = 6 \Big[-\cos 2t \Big]_0^{\pi/4} = 6\,.$$

3.a Les points $A(t)$ et $B(t)$ ont pour coordonnées respectives $(\cos t, 0)$ et $(0, \sin t)$.

3.b On obtient alors $\|\overrightarrow{A(t)B(t)}\| = 1$. La longueur du segment $[\,A(t),\,B(t)\,]$ est donc constante.

4.a Le point $P(t)$ est le barycentre de $A(t)$ et $B(t)$ affecté des coefficients a et b. les coordonnées (X, Y) sont donc données par $X = \dfrac{a \cos t}{a+b}$, $Y = \dfrac{a \sin t}{a+b}$.

Le point $P(t)$ se trouve donc sur l'ellipse d'équation cartésienne $\dfrac{X^2}{a^2} + \dfrac{Y^2}{b^2} = \dfrac{1}{(a+b)^2}$.

Réciproquement, si le point de P de coordonnées (X, Y) est un point de l'ellipse, il existe un réel t tel que $X = \dfrac{a \cos t}{a+b}$, $Y = \dfrac{a \sin t}{a+b}$, et P est le barycentre de $A(t)$ et $B(t)$ affecté des coefficients a et b donc appartient à $(\mathcal{E})$.

La courbe $(\mathcal{E})$ est donc l'ellipse toute entière.

5.a Soient t et u deux valeurs du paramètre pour lesquelles les tangentes sont orthogonales.

Les tangentes ont pour vecteurs directeurs respectifs $\overrightarrow{T}(t) = -\cos t\,\vec{\imath} + \sin t\,\vec{\jmath}$ et $\overrightarrow{T}(u) = -\cos u\,\vec{\imath} + \sin u\,\vec{\jmath}$ et les tangentes sont orthogonales si et seulement si ces vecteurs sont orthogonaux ce qui donne la condition $\cos t \cos u + \sin t \sin u = 0$, ou encore $\cos(u - t) = 0$, et finalement $u = t + \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

On a alors $\sin u = (-1)^k \cos t$ et $\cos u = (-1)^{k+1} \sin t$. Donc le point M appartient à $(\mathcal{F})$ si et seulement si les coordonnées (x, y) de M sont solutions du système $\begin{cases} x \sin t + y \cos t = \sin t \cos t \\ x \cos t - y \sin t = (-1)^{k+1} \sin t \cos t \end{cases}$.

Ce système se résout facilement et donne

$$x = \sin t \cos t\,(\sin t - (-1)^k \cos t) \quad \text{et} \quad y = \sin t \cos t\,(\cos t + (-1)^k \sin t)\,.$$

En posant $\varepsilon = (-1)^k$ on obtient bien la condition demandée.

5.b En remarquant que $\sin\dfrac{\varepsilon\pi}{4} = \dfrac{\varepsilon\sqrt{2}}{2}$ et $\cos\dfrac{\varepsilon\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, on a

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2t\,\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin t - \frac{\varepsilon\sqrt{2}}{2}\cos t\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2t\,\sin\left(t - \frac{\varepsilon\pi}{4}\right)$$

$$y = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2t\,\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos t + \frac{\varepsilon\sqrt{2}}{2}\sin t\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2t\,\cos\left(t - \frac{\varepsilon\pi}{4}\right).$$

Alors, en posant $u = \dfrac{\pi}{2} - t + \dfrac{\varepsilon\pi}{4}$ on obtient

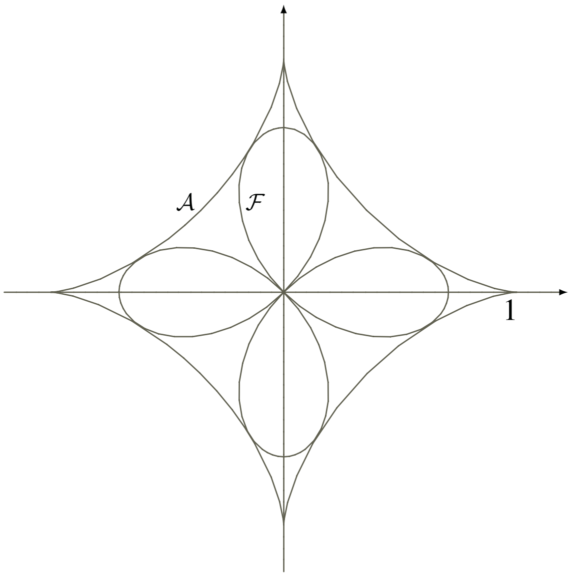
$$\sin 2t = \sin\left(\pi - 2u + \frac{\varepsilon\pi}{2}\right) = \sin\left(2u - \frac{\varepsilon\pi}{2}\right) = -\varepsilon\cos(2u),$$

et M appartient à $(\mathcal{F})$ si et seulement si il existe $u \in \mathbb{R}$ tel que

$$x = -\frac{\varepsilon\sqrt{2}}{2}\cos 2u\,\cos u \quad \text{et} \quad y = -\frac{\varepsilon\sqrt{2}}{2}\cos 2u\,\sin u\,.$$

En prenant $\theta = u$ lorsque $\varepsilon = -1$, et $\theta = u + \pi$ lorsque $\varepsilon = 1$ on constate que le point M appartient à la courbe $(\mathcal{F})$ si et seulement si un système de coordonnées polaires (ρ, θ) de M vérifie $\rho = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos 2\theta$.

L'étude de la courbe se fait sur le même intervalle $I = \left[0,\ \pi/4\right]$ que $(\mathcal{A})$ et avec les mêmes symétries. Sur I, la fonction ρ est décroissante. Lorsque $\theta = 0$, la courbe se trouve au point de coordonnées $(\sqrt{2}/2, 0)$ et y admet une tangente verticale, puisque ρ' s'annule. La courbe passe par l'origine pour $\theta = \pi/4$ en étant tangente à la première bissectrice.



6) On a $x(t)y'(t) - y(t)x'(t) = 3\sin^2 t \cos^2 t = \dfrac{3}{4}\sin^2 2t = \dfrac{3}{8}(1 - \cos 4t)$. L'aire cherchée vaut alors $\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{2\pi}(x(t)y'(t) - y(t)x'(t))\,dt = \dfrac{3}{16}\int_0^{2\pi}(1 - \cos 4t)\,dt = \dfrac{3\pi}{8}$.

Exercice 11.30

CCP MP 2007

Étudier la courbe $\mathcal{C}$ d'équation polaire $\rho : \theta \mapsto \dfrac{1 - \cos\theta}{1 + \sin\theta}$.

Question de la rédaction : Montrer qu'il existe des constantes a, b, c telles que $y(\theta) - (ax(\theta)^2 + bx(\theta) + c)$ tende vers 0 lorsque θ tend vers $-\pi/2$. Que représente la parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$ pour la courbe ?

Domaine de définition - Période - Réduction du domaine d'étude

La fonction ρ est définie pour $\theta \neq -\pi/2 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. D'autre part elle est de période 2π. On l'étudiera sur l'ensemble $I = [-\pi, \pi] \setminus \{-\pi/2\}$.

Dérivée et tableau de variation

Pour $\theta \neq -\pi/2$ modulo 2π, on obtient $\rho'(\theta) = \dfrac{1 + \sin\theta - \cos\theta}{(1 + \sin\theta)^2}$. En transformant le numérateur, on en déduit

$1 + \sin\theta - \cos\theta = 2\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2} + 2\sin^2\dfrac{\theta}{2} = 2\sqrt{2}\,\sin\dfrac{\theta}{2}\sin\left(\dfrac{\theta}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)$, et l'on a le tableau de variation suivant :

t	$-\pi$		$-\pi/2$		0		π
ρ'		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
ρ	2	$\nearrow$	$+\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	2

Puisque ρ s'annule en 0 sans changer de signe dans un voisinage de 0, on constate que la courbe possède un point de rebroussement de première espèce à l'origine et que la courbe est tangente à l'axe Ox en ce point.

Intersection avec les axes.

La courbe recoupe l'axe Ox pour $\theta = \pi$. On a $\rho(\pi) = 2$ et l'on obtient $\rho(\pi)/\rho'(\pi) = 1$. La tangente à la courbe a un coefficient directeur égal à 1 dans le repère $(O, \vec{u}(\pi), \vec{v}(\pi))$ et donc également dans $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

La courbe recoupe l'axe Oy pour $\theta = \pi/2$. On a $\rho(\pi) = 1/2$ et l'on obtient $\rho(\pi/2)/\rho'(\pi/2) = 1$. La tangente à la courbe a un coefficient directeur égal à 1 dans le repère $(O, \vec{u}(\pi/2), \vec{v}(\pi/2))$, et donc à -1 dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Direction asymptotique

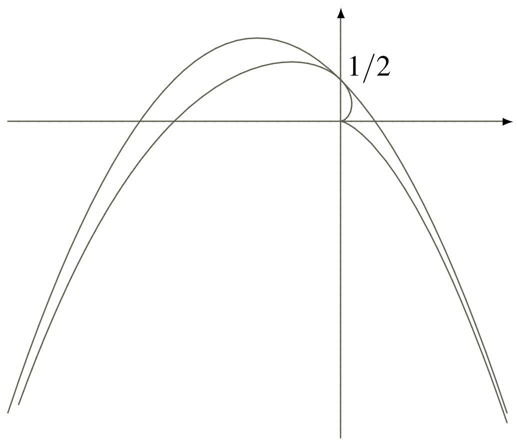
Pour étudier le comportement de la courbe au voisinage de $-\pi/2$, on va chercher la limite de l'abscisse $x(\theta) = \rho(\theta)\cos\theta$ du point $M(\theta)$ lorsque θ tend vers $-\pi/2$. En posant $\theta = u - \pi/2$, on obtient $x(\theta) = \dfrac{1-\sin u}{1-\cos u}\sin u = \dfrac{1-\sin u}{\sin\frac{u}{2}}\cos\dfrac{u}{2}$, et cette expression tend vers l'infini lorsque u tend vers 0, c'est-à-dire lorsque θ tend vers $-\pi/2$: on a une direction asymptotique dans la direction des $y < 0$. On peut préciser davantage l'allure de la courbe en cherchant un développement asymptotique de x et de y au voisinage de $-\pi/2$. En utilisant encore $\theta = u - \pi/2$, on obtient $x(\theta) = \dfrac{1}{u}\left(2 - 2u - \dfrac{u^2}{6} + o(u^2)\right)$ d'où $x(\theta)^2 = \dfrac{1}{u^2}\left(4 - 8u + \dfrac{10u^2}{3} + o(u^2)\right)$ et $y(\theta) = -\dfrac{2}{u^2} + \dfrac{2}{u} + \dfrac{5}{6} + o(1)$. Alors $y(\theta) + \dfrac{x(\theta)^2}{2} = -\dfrac{2}{u} + \dfrac{5}{2} + o(1)$ et $y(\theta) + \dfrac{x(\theta)^2}{2} + x(\theta) = \dfrac{1}{2} + o(1)$. Lorsque θ tend vers $-\pi/2$, la courbe « se colle » contre la parabole d'équation $y = -x^2/2 - x + 1/2$ (parabole asymptote).

Remarque

L'expression $y(\theta) + \dfrac{x(\theta)^2}{2} + x(\theta) - \dfrac{1}{2}$ se simplifie et donne $-\dfrac{1}{2}\cos^2\theta$ qui est toujours négatif ou nul. La courbe $\mathcal{C}$ est en dessous de la parabole. De plus elle est tangente à celle-ci au point de coordonnées $(0, 1/2)$.

Tracé de la courbe

Voici le tracé de la courbe et de sa parabole asymptote :



Exercice 11.31

Centrale MP 2007

Étudier la courbe d'équation polaire $\rho : \theta \mapsto \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta - \cos\theta}$.

Domaine de définition - Période - Réduction du domaine d'étude

La fonction ρ est de période π et est définie pour $\theta \neq \pi/4 + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Donc $\rho(\theta+\pi) = \rho(\theta)$, et la courbe est symétrique par rapport à l'origine. On l'étudiera sur l'ensemble $I = \left[0, \pi/2\right] \setminus \{\pi/4\}$ et on complètera par la symétrie $\mathcal{S}_1$ par rapport à O.

Dérivée et tableau de variation

Pour $\theta \neq \pi/4$ modulo π, on obtient $\rho'(\theta) = -\dfrac{1}{(\sin\theta - \cos\theta)^2}$, et l'on a le tableau de variation suivant :

t	$-\pi/2$		0		$\pi/4$		$\pi/2$
ρ'			$-$		‖	$-$	
ρ	0	$\searrow$	-1	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	0

On remarquera que la courbe passe par l'origine pour $\theta = \pi/2$ et est alors tangente à l'axe Oy.

Asymptote

Lorsque θ tend vers $\pi/4$, on a

$$Y(\theta) = \rho(\theta)\sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\cos\theta}{\sin\theta - \cos\theta}\,\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin\theta - \cos\theta) = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta,$$

donc cette expression tend vers $a = 1/2$ lorsque θ tend vers $\pi/4$, et la courbe admet une asymptote d'équation polaire $\rho = \dfrac{1}{2\sin(\theta - \pi/4)}$, ou d'équation cartésienne $y = x + \sqrt{2}/2$.

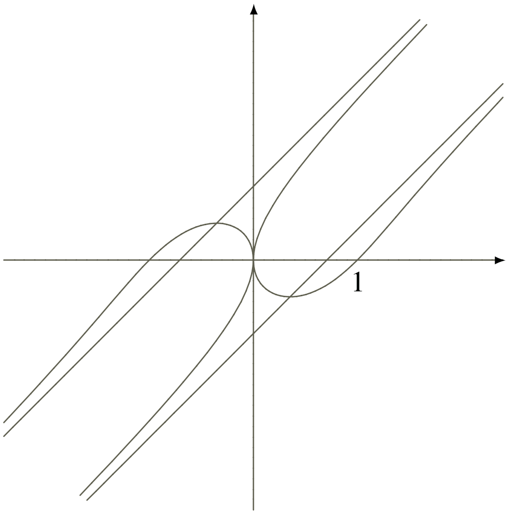
Par ailleurs, en se plaçant dans le repère $(O, \overrightarrow{u}(\pi/4), \overrightarrow{v}(\pi/4))$ on trouve

$$Y(\theta) - a = \rho(\theta)\sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\theta - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\theta - \cos\frac{\pi}{4}\right).$$

Cette expression est négative pour $\theta \in \left]-\pi/2, -\pi/4\right[\cup \left]\pi/4, \pi/2\right[$, et dans ce cas la courbe est située du même côté de l'asymptote que O. Lorsque $\theta \in \left]-\pi/4, \pi/4\right[$, le signe est négatif, et la courbe et O sont situés de part et d'autre de l'asymptote.
La courbe coupe l'asymptote pour $\theta = -\pi/4$.
Par symétrie il y a une deuxième asymptote d'équation $y = x - \sqrt{2}/2$.

Intersection avec Ox
Lorsque θ est dans I, la courbe coupe Ox en $\theta = 0$. On a $\rho(0) = -1$ et $\rho(0)/\rho'(0) = 1$. La tangente à la courbe est alors parallèle aux asymptotes.

Tracé de la courbe



11.3 EXERCICES D'APPROFONDISSEMENT

Exercice 11.32

CCP MP 2007

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit la courbe $\mathcal{C}_n$ d'équation cartésienne $(x^2 + y^2)^n = x^{2n-1}$.

1) Reconnaître la courbe $\mathcal{C}_1$.

2. a En coupant la courbe par la droite d'équation $y = tx$, trouver un paramétrage de $\mathcal{C}_n$.

2. b Soit M_n le point de $\mathcal{C}_n$ d'ordonnée positive où la courbe admet une tangente horizontale. Trouver la limite de la suite (M_n).

3. a Trouver l'équation polaire $\rho = f_n(\theta)$ de la courbe $\mathcal{C}_n$.

3. b Étudier les tangentes à la courbe $\mathcal{C}_n$ lorsque $\theta = 0$ et $\theta = \pi/2$.

3. c Représenter la courbe $\mathcal{C}_2$.

1) La courbe $\mathcal{C}_1$ a pour équation $x^2 + y^2 = x$. C'est le cercle de centre $(1/2, 0)$ et de rayon $1/2$.

2.a L'abscisse x du point d'intersection de la courbe et de la droite, est telle que $(1+t^2)^n x^{2n} = x^{2n-1}$ d'où l'on tire, si x est non nul, $x = \dfrac{1}{(1+t^2)^n}$ et $y = \dfrac{t}{(1+t^2)^n}$. On obtient ainsi un paramétrage de la courbe (privée du point O obtenu seulement lorsque t tend vers $+\infty$).

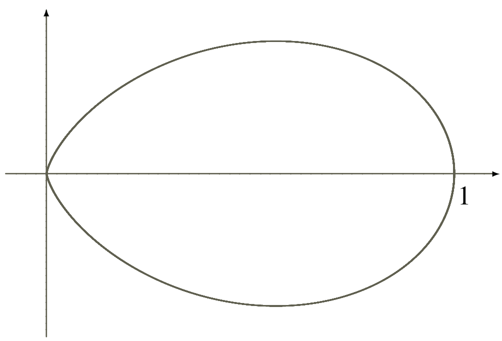
2.b On a $x'(t) = -\dfrac{2nt}{(1+t^2)^{n+1}}$ et $y'(t) = \dfrac{1-(2n-1)t^2}{(1+t^2)^{n+1}}$. Donc y' s'annule pour $t = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2n-1}}$ et x' ne s'annule pas pour ces valeurs. La courbe admet donc une tangente horizontale pour les valeurs obtenues. Le point M_n a comme coordonnées $x_n = \left(\dfrac{2n-1}{2n}\right)^n$ et $y_n = \dfrac{1}{\sqrt{2n-1}}\left(\dfrac{2n-1}{2n}\right)^n$. Alors comme la suite $\left(\left(1-\dfrac{1}{2n}\right)^n\right)$ converge vers $e^{-1/2}$, on en déduit que (x_n) converge vers $e^{-1/2}$ et (y_n) vers 0. La suite (M_n) converge donc vers le point de coordonnées $(e^{-1/2}, 0)$.

3.a En posant $x = \rho\cos\theta$ et $y = \rho\sin\theta$, et en remplaçant dans l'équation cartésienne de $\mathcal{C}_n$ on obtient $\rho^{2n} = \rho^{2n-1}\cos^{2n-1}\theta$, d'où l'on déduit l'équation polaire de $\mathcal{C}_n$: $\rho = f_n(\theta) = \cos^{2n-1}\theta$. (L'origine O est obtenue pour $\theta = \pi/2$).

3.b Notons $M(\theta)$ le point de la courbe de coordonnées polaires (ρ, θ) et $(\vec{u}(\theta), \vec{v}(\theta))$ le repère orthonormal direct lié à l'angle θ. On a $\rho'(\theta) = -(2n-1)\cos^{2n-2}\theta\sin\theta$. Dans le repère $(\vec{u}(\theta), \vec{v}(\theta))$ le vecteur de coordonnées $(\rho'(\theta), \rho(\theta))$ est, lorsque $\rho(\theta) \neq 0$, un vecteur directeur de la tangente. En particulier, si $\theta = 0$, on obtient $\vec{v}(0) = \vec{j}$ et la tangente est orthogonale à l'axe Ox.

Comme la courbe passe par l'origine en $\theta = \pi/2$, elle est tangente à l'axe Oy en O.

3.c La fonction ρ est $2\pi-$périodique, et comme $\rho(\theta+\pi) = -\rho(\theta)$, la courbe est parcourue deux fois sur une période. Il suffit de l'étudier sur $\left[-\pi/2, \pi/2\right]$. Comme ρ est paire, la courbe est symétrique par raport à Ox. La fonction ρ décroît de 1 à 0, lorsque θ varie de 0 à $\pi/2$. Voici le graphe de la courbe lorsque $n = 2$:



L'exercice suivant est la réunion de deux exercices concernant la lemniscate de Bernoulli

Exercice 11.33

Mines-Ponts MP 2007+ Centrale MP 2006

Soient F et F' les points du plan de coordonnées respectives $(1,0)$ et $(-1,0)$. On considère l'ensemble $\mathcal{C}$ des points M du plan tels que le produit des distance $MF \cdot MF'$ vaille 1.

1) Déterminer une équation cartésienne de la courbe $\mathcal{C}$.

2) Montrer que $\mathcal{C}$ a comme équation polaire $\rho = \sqrt{2\cos 2\theta}$.

3) Tracer $\mathcal{C}$.

4) Déterminer le repère de Frenet de $\mathcal{C}$.

5) Calculer la courbure aux points où elle est définie.

6) Calculer l'aire délimitée par la courbe $\mathcal{C}$.

7) Calculer la longueur d'une boucle de $\mathcal{C}$ à l'aide de $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$.

8) Exprimer $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$ comme somme d'une série.

9) Lorsque P décrit $\mathcal{C}$ privée de l'origine, déterminer le lieu $\mathcal{H}$ décrit par le point M de la droite OP, vérifiant $\overline{OP} \cdot \overline{OM} = \sqrt{2}$.

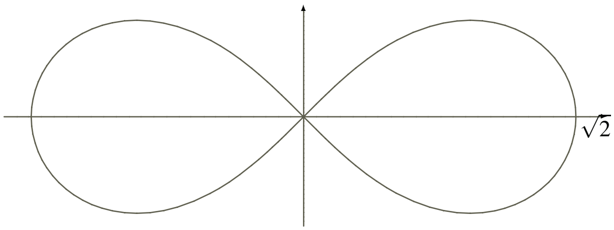
1) Si M a pour coordonnées (x, y) on a $MF^2 = (x-1)^2 + y^2$ et $MF'^2 = (x+1)^2 + y^2$, ce qui donne l'équation cartésienne $((x-1)^2 + y^2)((x+1)^2 + y^2) = 1$ ou encore $(x^2 + y^2)^2 = 2(x^2 - y^2)$.

2) En posant $x = \rho\cos\theta$ et $y = \rho\sin\theta$, on trouve $\rho^4 = 2\rho^2\cos 2\theta$, c'est-à-dire, $\rho = \pm\sqrt{2\cos 2\theta}$, ou $\rho = 0$.

Mais les points de coordonnées polaires (ρ, θ) et $(-\rho, \theta + \pi)$ étant les mêmes, il en résulte que les courbes d'équation polaire $\rho = \sqrt{2\cos 2\theta}$ et $\rho = -\sqrt{2\cos 2\theta}$ sont identiques, et comme elles contiennent l'origine, obtenue pour $\theta = \pi/4$, l'ensemble $\mathcal{C}$ a comme équation polaire $\rho = \sqrt{2\cos 2\theta}$.

3) La fonction ρ est de période π, donc la courbe est symétrique par rapport à O. La fonction ρ est paire, donc la courbe est symétrique par rapport à Ox. Il suffira de l'étudier sur l'intervalle $\left[0, \pi/2\right]$. Dans cet intervalle, $\cos 2\theta$ est positif si et seulement si θ appartient à l'intervalle $\left[0, \pi/4\right]$ et ρ est définie sur $\left[0, \pi/4\right]$ uniquement. Pour $\theta \in \left[0, \pi/4\right[$ on a alors $\rho'(\theta) = -\sqrt{2}\dfrac{\sin 2\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}$. La fonction ρ est décroissante et varie de $\sqrt{2}$ à 0. Le point $M(0)$ se trouve sur Ox avec une tangente

verticale, et la courbe passe par l'origine pour $t = \pi/4$ en étant tangente au rayon vecteur. On a le dessin suivant



4) On a $\rho(\theta)^2 + \rho'(\theta)^2 = \dfrac{2}{\cos 2\theta}$. On en déduit en particulier que, pour les valeurs de θ telles que $\cos 2\theta > 0$, on a la relation $\dfrac{ds}{d\theta} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{\cos 2\theta}}$.

D'autre part $x(\theta) = \cos\theta\sqrt{2\cos 2\theta}$ et $y(\theta) = \sin\theta\sqrt{2\cos 2\theta}$, donc

$$x'(\theta) = \sqrt{2}\left(-\sin\theta\sqrt{\cos 2\theta} + \cos\theta\,\frac{-\sin 2\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}\right) = -\sqrt{2}\,\frac{\cos 2\theta\sin\theta + \sin 2\theta\cos\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}$$

$$y'(\theta) = \sqrt{2}\left(\cos\theta\sqrt{\cos 2\theta} + \sin\theta\,\frac{-\sin 2\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}\right) = \sqrt{2}\,\frac{\cos 2\theta\cos\theta - \sin 2\theta\sin\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}\,.$$

On a donc finalement $x'(\theta) = -\sqrt{2}\,\dfrac{\sin 3\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}$ et $y'(\theta) = \sqrt{2}\,\dfrac{\cos 3\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}$.

(On remarque au passage que la courbe admet une tangente horizontale pour $\theta = \pi/6$).

On a alors $\overrightarrow{T}(\theta) = -\sin 3\theta\,\vec{\imath} + \cos 3\theta\,\vec{\jmath}$, et $\overrightarrow{N}(\theta) = -(\cos 3\theta\,\vec{\imath} + \sin 3\theta\,\vec{\jmath})$.

5) D'autre part, en posant $\alpha = \dfrac{\pi}{2} + 3\theta$, on a $\overrightarrow{T} = \cos\alpha\,\vec{\imath} + \sin\alpha\,\vec{\jmath}$, et il en résulte que la courbure $\gamma(\theta)$ vaut $\dfrac{d\alpha}{ds} = \dfrac{d\alpha}{d\theta}\dfrac{d\theta}{ds} = \dfrac{3}{\sqrt{2}}\sqrt{\cos 2\theta}\,.$

6) Pour des raisons de symétrie de la courbe, l'aire limitée par la courbe est quatre fois celle limitée par la courbe lorsque θ varie de 0 à $\pi/4$ et l'axe des x. On obtient alors $\mathcal{A} = 2\displaystyle\int_0^{\pi/4}\rho(\theta)^2 d\theta = 4\int_0^{\pi/4}\cos 2\theta d\theta = 2\Big[\sin 2\theta\Big]_0^{\pi/4} = 2\,.$

7) Toujours pour des raisons de symétrie, la longueur ℓ d'une boucle est donnée par $\ell = 2\displaystyle\int_0^{\pi/4}\sqrt{\rho(\theta)^2 + \rho'(\theta)^2}\,d\theta = 2\sqrt{2}\int_0^{\pi/4}\frac{d\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}$. Donc en utilisant la formule $\cos 2\theta = \dfrac{1 - \tan\theta}{1 + \tan\theta}$, on a $\ell = 2\sqrt{2}\displaystyle\int_0^{\pi/4}\sqrt{\frac{1 + \tan\theta}{1 - \tan\theta}}\,d\theta\,.$

L'intégrale I converge d'après le critère de Riemann, puisque, au voisinage de 1, $(1 - t^4)^{-1/2} = \big((1 + t^2)(1 + t)(1 - t)\big)^{-1/2} \sim \dfrac{1}{2(1 - t)^{1/2}}\,.$

En effectuant dans l'intégrale définissant ℓ le changement de variable $t = \tan\theta$ soit $\theta = \operatorname{Arctan} t$, on a $d\theta = \dfrac{dt}{1+t^2}$. Par ailleurs lorsque θ varie de 0 à $\pi/4$, t varie de 0 à 1. Donc $\ell = 2\sqrt{2}\displaystyle\int_0^1 \sqrt{\frac{1+t^2}{1-t^2}}\,\frac{dt}{1+t^2} = 2\sqrt{2}\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} = 2\sqrt{2}\,I$.

8) On peut décomposer en série entière de rayon 1, grâce à la série du binôme, la fonction $S : t \mapsto (1-t^4)^{-1/2}$. On a

$$\begin{aligned}(1-t^4)^{-1/2} &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}(-t^4)^n \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2^n n!}\,t^{4n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\,t^{4n}.\end{aligned}$$

Notons $S_N(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{N} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\,t^{4n}$. Comme la série entière est de rayon 1 la suite (S_N) converge simplement sur l'intervalle $[0,\ 1[$ vers la fonction continue S.
D'autre part $|S_N(t)| \leqslant S(t)$ et la fonction S est intégrable sur $[0,\ 1[$.
Il résulte du théorème de convergence dominée que l'on peut intégrer la série terme à terme. Donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\left[\frac{t^{4n+1}}{4n+1}\right]_0^1 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(4n+1)2^{2n}(n!)^2}$.

9) Par le même raisonnement que dans l'exercice 11.28, on trouve que l'équation polaire de la courbe $\mathcal{H}$ est $\rho = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2\cos 2\theta}}$. On a alors $x = \dfrac{\cos\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}$ et $y = \dfrac{\sin\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}$, d'où l'on tire $x^2 - y^2 = 1$. On obtient l'équation d'une hyperbole équilatère, et si un point de cette hyperbole est d'angle polaire θ alors on a nécessairement $x = \dfrac{\cos\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}$ et $y = \dfrac{\sin\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}$. L'hyperbole est donc obtenue entièrement.

Exercice 11.34

Mines-Ponts MP 2007

Soient $a, b > 0$ et Φ l'arc défini par $x(t) = a\sin^3 t$ et $y(t) = b\cos^3 t$.

1) Calculer la longueur $\ell(a,b)$ de l'arc.

2) Donner le rayon de courbure de Φ et le lieu des centres de courbure.

1) La courbe obtenue se déduit de celle de l'astroïde (voir ex. 11.29) par une affinité orthogonale. L'arc est symétrique par rapport aux axes et est constitué de quatre morceaux de même longueur. Un de ces morceaux est obtenu lorsque t décrit $\left[0,\ \pi/2\right]$.

On a
$$x'(t) = 3a\sin^2 t\cos t \text{ et } y'(t) = -3b\cos^2 t\sin t.$$
Donc $x'(t)^2 + y'(t)^2 = 9\sin^2 t\cos^2 t\, u(t)$, où l'on a posé $u(t) = a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t$. On peut remarquer que $u'(t) = 2(a^2 - b^2)\sin t\cos t$.

On calcule $\ell(a,b) = 4\displaystyle\int_0^{\pi/2}\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,dt$, ce qui donne, lorsque $a \neq b$,
$$\ell(a,b) = \frac{6}{a^2-b^2}\int_0^{\pi/2} u'(t)u(t)^{1/2}dt = \frac{6}{a^2-b^2}\left[\frac{2}{3}u(t)^{3/2}\right]_0^{\pi/2} = 4\,\frac{a^3-b^3}{a^2-b^2}\,.$$
Lorsque $a = b$, on obtient $\ell(a,b) = 12\displaystyle\int_0^{\pi/2} a\sin t\cos t\,dt = \left[6a\sin^2 t\right]_0^{\pi/2} = 6a.$

Donc, dans tous les cas, on trouve $\ell(a,b) = 4\,\dfrac{a^2+ab+b^2}{a+b}$.

2) Cherchons le rayon de courbure lorsque t n'est pas un point singulier, c'est-à-dire, lorsque $t \neq 0$ modulo $\pi/2$. Notons $\varepsilon(t)$ le signe de $\sin 2t$. On a alors
$$\overrightarrow{T}(t) = \varepsilon(t)\left(\frac{a\sin t}{\sqrt{u(t)}}\,\vec{\imath} - \frac{b\cos t}{\sqrt{u(t)}}\,\vec{\jmath}\right)\,, \quad \text{donc} \quad \overrightarrow{N}(t) = \varepsilon(t)\left(\frac{b\cos t}{\sqrt{u(t)}}\,\vec{\imath} + \frac{a\sin t}{\sqrt{u(t)}}\,\vec{\jmath}\right)\,.$$
Alors, en dérivant $\overrightarrow{T}$ par rapport à t, on obtient
$$\begin{aligned}\varepsilon(t)\,\frac{d\overrightarrow{T}}{dt} &= \frac{1}{\sqrt{u(t)}}(a\cos t\,\vec{\imath} + b\sin t\,\vec{\jmath}) - \frac{(a^2-b^2)\sin t\cos t}{u(t)^{3/2}}\,(a\sin t\,\vec{\imath} - b\cos t\,\vec{\jmath})\\ &= \frac{ab}{u(t)^{3/2}}\,(b\cos t\,\vec{\imath} + a\sin t\,\vec{\jmath})\,.\end{aligned}$$
Comme $\dfrac{ds}{dt} = \varepsilon(t)\sin t\cos t\,\sqrt{u(t)}$, on obtient alors
$$\frac{d\overrightarrow{T}}{ds} = \frac{dt}{ds}\frac{d\overrightarrow{T}}{dt} = \frac{\varepsilon(t)ab}{3\sin t\cos t\,u(t)^{3/2}}\,\overrightarrow{N},$$
d'où l'on déduit, qu'au point $\Phi(t)$, la courbure vaut
$$\gamma(t) = \frac{\varepsilon(t)ab}{3\sin t\cos t\,u(t)^{3/2}}\,,$$
et que le rayon de courbure vaut
$$R(t) = \frac{3\varepsilon(t)\sin t\cos t\,u(t)^{3/2}}{ab}\,.$$
Le centre de courbure Ω est défini par $\overrightarrow{O\Omega}(t) = \overrightarrow{OM}(t) + R(t)\overrightarrow{N}(t)$. On en déduit les coordonnées $(X(t), Y(t))$ de ce point
$$X(t) = \frac{\sin t}{a}\,(a^2\sin^2 t(1 + 3\cos^2 t) + 3b^2\cos^4 t)\,,$$
$$Y(t) = \frac{\cos t}{b}\,(b^2\cos^2 t(1 + 3\sin^2 t) + 3a^2\sin^4 t)\,.$$

Exercice 11.35

Mines-Ponts MP 2005

Soit $t \mapsto M(t) \in \mathbb{R}^2$ un arc birégulier et, pour tout $t \in \mathbb{R}$, soit $I(t)$ le centre de courbure de l'arc au point de paramètre t. On suppose que $\|\overrightarrow{M(t)I(t)}\|$ est indépendant de t. Que dire de $\{M(t) \mid t \in \mathbb{R}\}$?

Par définition du centre de courbure $\overrightarrow{M(t)I(t)} = R(t)\overrightarrow{N(t)}$, donc

$$\|\overrightarrow{M(t)I(t)}\| = |R(t)| \, \|\overrightarrow{N(t)}\| \, .$$

Mais comme $\overrightarrow{N(t)}$ est de norme 1, on a la relation $\|\overrightarrow{M(t)I(t)}\| = |R(t)|$. Il en résulte que la fonction $t \mapsto |\gamma(t)|$ est constante.
Utilisons alors l'abscisse curviligne s. Si $m(s) = (X(s), Y(s))$, est le point de la courbe d'abscisse curviligne s, on a alors $(X'(s), Y'(s)) = (\cos\alpha(s), \sin\alpha(s))$, et en notant $r(s)$ le rayon de courbure au point $m(s)$, on a $\alpha'(s) = 1/r(s)$. Il en résulte que la fonction $|\alpha'|$ est constante. Comme α' est une fonction continue, alors α' est une constante a non nulle. On en déduit $\alpha(s) = as + u$, puis $(X'(s), Y'(s)) = (\cos(as + u), \sin(as + u))$.
Ceci donne

$$(X(s), Y(s)) = \left(\frac{1}{a}\sin(as + u) + v, -\frac{1}{a}\cos(as + u) + w\right)$$

où u, v, w sont des constantes.
Finalement $(X(s) - v)^2 + (Y(s) - w)^2 = 1/a^2$, et la courbe est un arc de cercle de rayon $1/|a|$.

Surfaces 12

12.1 L'ESSENTIEL DU COURS ET EXERCICES D'ASSIMILATION

Ce qu'il faut savoir

On munit $\mathbb{R}^3$ de la base orthonormale directe canonique $\mathcal{B} = (\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k})$.

1) Une surface paramétrée $\mathcal{S}$ de $\mathbb{R}^3$ est définie par une application $f : U \to \mathbb{R}^3$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$: $\mathcal{S} = \{f(u, v) \mid (u, v) \in U\}$. On dit que f est un **paramétrage** de $\mathcal{S}$.

Un point $M_0 = f(u_0, v_0)$ de $\mathcal{S}$ est dit **régulier** lorsque les vecteurs $\overrightarrow{V_1} = \dfrac{\partial f}{\partial u}(u_0, v_0)$ et $\overrightarrow{V_2} = \dfrac{\partial f}{\partial v}(u_0, v_0)$ sont non colinéaires, c'est-à-dire lorsque le vecteur $\overrightarrow{N} = \dfrac{\partial f}{\partial u}(u_0, v_0) \wedge \dfrac{\partial f}{\partial v}(u_0, v_0)$ est non nul ; dans ce cas, la droite passant par M_0 et dirigée par le vecteur $\overrightarrow{N}$ est la **normale** à $\mathcal{S}$ au point M_0. Le plan passant par M_0 et dont la direction est le plan vectoriel $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{V_2})$ est le **plan tangent** à $\mathcal{S}$ au point M_0. C'est aussi le plan passant par M_0 et orthogonal à $\overrightarrow{N}$.

La surface $\mathcal{S}$ est dite **régulière** lorsque tous ses points sont réguliers.

2) **Un cas particulier**. Lorsque $\varphi : U \to \mathbb{R}$ est une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$, $\mathcal{S} = \{(x, y, \varphi(x, y)) \mid (x, y) \in U\}$ est la surface définie par le paramétrage $f : U \to \mathbb{R}^3$, avec $f(u, v) = (u, v, \varphi(u, v))$. On dit que $\mathcal{S}$ est la surface d'équation $z = \varphi(x, y)$. Une telle surface est régulière. Le plan tangent au point $M_0 = (x_0, y_0, z_0 = \varphi(x_0, y_0))$ est le plan d'équation cartésienne

$$z = z_0 + (x - x_0)\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0)\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x_0, y_0).$$

3) **Surface d'équation $F(x, y, z) = 0$.** Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^3$ et soit F une fonction de U dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. L'ensemble

$$\mathcal{S} = \{(x, y, z) \in U \mid F(x, y, z) = 0\}$$

est appelé la surface d'équation $F(x, y, z) = 0$.

Un point $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ de $\mathcal{S}$ est dit régulier lorsque le gradient de F au point M_0 : $\mathrm{grad}(F)(M_0) = \left(\dfrac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0), \dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0), \dfrac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)\right)$ est non nul. Dans ce cas, le plan tangent à $\mathcal{S}$ au point M_0 est le plan passant par M_0 et orthogonal au vecteur $\mathrm{grad}(F)(M_0)$.

Vocabulaire

Une droite D est dite **tracée** sur une surface $\mathcal{S}$ lorsque tous les points de D appartiennent à $\mathcal{S}$. Une surface est dite **réglée** lorsqu'elle est la réunion d'une famille de droites.

Exercice 12.1

TPE PC 2006

Trouver les plans tangents à la surface $\mathcal{S}$ d'équation $x^2+y^2+4z^2 = 1$ et parallèles au plan d'équation $x + 2y + z = 0$.

Soit $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + 4z^2 - 1$ et soit $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ un point de $\mathcal{S}$. Le gradient de F au point M_0 est le vecteur $\overrightarrow{N} = (2x_0, 2y_0, 8z_0)$. Il est non nul puisque $\|\overrightarrow{N}\|^2 = 4(x_0^2 + y_0^2 + 16z_0^2) > 0$. La surface $\mathcal{S}$ est donc régulière. La normale à $\mathcal{S}$ au point M_0 est aussi dirigée par le vecteur $\overrightarrow{N_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{N} = (x_0, y_0, 4z_0)$.

Pour que le plan tangent au point M_0 soit parallèle au plan d'équation $x+2y+z = 0$, il faut et il suffit qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{N_1} = \lambda(1, 2, 1)$, c'est-à-dire tel que $x_0 = \lambda$, $y_0 = 2\lambda$ et $4z_0 = \lambda$. La relation $x_0^2 + y_0^2 + 4z_0^2 = 1$ équivaut alors à $\lambda^2 = \dfrac{4}{21}$ et donc à $\lambda = \pm\dfrac{2}{\sqrt{21}}$.

On obtient donc deux points symétriques par rapport à l'origine : $M_0 = \dfrac{2}{\sqrt{21}}(1, 2, 1/4)$ et $M_0' = -M_0$. Les plans tangents à $\mathcal{S}$ en M_0 et M_0' sont les plans d'équation respective $x + 2y + z = \dfrac{\sqrt{21}}{2}$ et $x + 2y + z = -\dfrac{\sqrt{21}}{2}$.

Exercice 12.2

On considère la surface $\mathcal{S}$ d'équation $x^3-3xy+z = 0$ et un point $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ appartenant à $\mathcal{S}$. Montrer qu'il existe une droite et une seule passant par M_0 tracée sur $\mathcal{S}$.

Soit $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ un point de $\mathcal{S}$ et soit $V = (a, b, c)$ un vecteur non nul. Les points de la droite D passant par M_0 et dirigée par V sont de la forme $M = (x_0 + a\lambda, y_0 + b\lambda, z_0 + c\lambda)$ où λ est un réel. Pour que D soit incluse dans la surface $\mathcal{S}$, il faut et il suffit que

$$\forall\lambda \in \mathbb{R},\ (x_0 + a\lambda)^3 - 3(x_0 + a\lambda)(y_0 + b\lambda) + (z_0 + c\lambda) = 0$$

soit

$$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ a^3\lambda^3 + 3(a^2x_0 - 3ab)\lambda^2 + (3ax_0^2 - 3ay_0 - 3bx_0 + c)\lambda = 0.$$

Cette dernière relation signifie que le polynôme

$$P(\lambda) = a^3\lambda^3 + 3(a^2x_0 - 3ab)\lambda^2 + (3ax_0^2 - 3ay_0 - 3bx_0 + c)\lambda$$

est le polynôme nul, c'est-à-dire que ses coefficients sont nuls. On obtient donc $a = 0$ et $c = 3bx_0$ et donc $V = (0, b, 3bx_0) = b(0, 1, 3x_0)$. Il existe donc une droite D et une seule : c'est la droite passant par M_0 et dirigée par le vecteur $(0, 1, 3x_0)$.

Remarque

On en déduit que $\mathcal{S}$ est une **surface réglée**, c'est-à-dire qu'elle est la réunion d'une famille de droites.

Ce qu'il faut savoir

Intersection de deux surfaces

Soient F_1 et F_2 deux applications de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^3$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ et soient $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$ les surfaces d'équation respective $F_1(x, y, z) = 0$ et $F_2(x, y, z) = 0$. On suppose qu'il existe un point $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ situé sur $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$ et régulier pour chacune des deux surfaces. On suppose en outre que les plans tangents en M_0 à $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$ sont distincts, c'est-à-dire que les vecteurs gradients de F_1 et F_2 au point M_0 ne sont pas colinéaires.

Dans ces conditions, au voisinage de M_0, $\mathcal{C} = \mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2$ est le support d'une courbe paramétrée régulière et la tangente en M_0 à cette courbe est la droite d' intersection des plans tangents aux deux surfaces (cf. exercice 12.6).

12.2 EXERCICES D'ENTRAÎNEMENT ET D'APPROFONDISSEMENT

Exercice 12.3

CCP PC 2006, Centrale PC 2006

On considère la surface $\mathcal{S}$ d'équation $z^3 = xy$.

1) Ecrire un système d'équations paramétriques de $\mathcal{S}$.

2) Montrer que les axes Ox et Oy sont les seules droites tracées sur $\mathcal{S}$.

3) Trouver l'équation du plan tangent en un point régulier de la surface.

4) Quels sont les points réguliers de $\mathcal{S}$ en lesquels le plan tangent contient la droite $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3z - 3 \end{cases}$

1) On peut proposer le paramétrage $x = u^3$, $y = v^3$, $z = uv$, avec $(u, v) \in \mathbb{R}^3$.

2) On voit que $\mathcal{S}$ contient les axes (Ox) et (Oy). Réciproquement soit D une droite, $A = (a, b, c)$ un point de D et $V = (\alpha, \beta, \gamma) \neq (0, 0, 0)$ un vecteur directeur de D. Pour que D soit tracée sur $\mathcal{S}$, il faut et il suffit que $(c + t\gamma)^3 = (a + t\alpha)(b + t\beta)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. On doit donc avoir

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad t^3\gamma^3 + (3c\gamma^2 - \alpha\beta)t^2 + (3c^2\gamma - a\beta - b\alpha)t + c^3 - ab = 0.$$

Il s'agit d'un polynôme et une condition nécessaire et suffisante pour qu'il s'annule pour tout $t \in \mathbb{R}$, est que ses coefficients soient nuls. On obtient $\gamma^3 = 0$, $3c\gamma^2 - \alpha\beta = 0$, $3c^2\gamma - a\beta - b\alpha = 0$ et $c^3 - ab = 0$, d'où en déduit aisément $\gamma = 0$ et $\alpha\beta = 0$.

- Si $\alpha = 0$, on a alors $a\beta = 0$ et, puisque $\beta \neq 0$, on a $a = 0$, puis, $c^3 = 0$. D est alors l'axe (Oy).
- Si $\beta = 0$, on a alors $b\alpha = 0$ et, puisque $\alpha \neq 0$, on a $b = 0$, puis, $c^3 = 0$. D est alors l'axe (Ox).

3) La surface $\mathcal{S}$ est définie par l'équation $f(x, y, z) = 0$ avec $f(x, y, z) = z^3 - xy$. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$ et $\operatorname{grad}(f)(x, y, z) = (-y, -x, 3z^2)$. Le gradient de f s'annule seulement à l'origine, qui est donc le seul point singulier de $\mathcal{S}$. En un point régulier $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ de $\mathcal{S}$ le plan tangent est le plan d'équation $-y_0(x - x_0) - x_0(y - y_0) + 3z_0^2(z - z_0) = 0$. En tenant compte de la relation $z_0^3 = x_0y_0$ on obtient $xy_0 + yx_0 - 3zz_0^2 + z_0^3 = 0$.

4) Pour que le plan tangent au point M_0 contienne la droite d'équations $x = 2$, $y = 3z - 3$, il faut et il suffit que

$$\forall z \in \mathbb{R},\ 2y_0 + (3z - 3)x_0 - 3zz_0^2 + z_0^3 = 3z(x_0 - z_0^2) - 3x_0 + 2y_0 + z_0^3 = 0,$$

c'est-à-dire $x_0 = z_0^2$ et $-3x_0 + 2y_0 + z_0^3 = 0$ et, puisque $M_0 \in S$, $z_0^3 = x_0y_0$.

Si $z_0 = 0$, on obtient $x_0 = 0$ puis $y_0 = 0$, ce qui est exclu puisque le point M_0 est régulier. On a donc $z_0 \neq 0$ et les relations $x_0 = z_0^2$ et $x_0y_0 = z_0^3$ donnent $y_0 = z_0$. La relation $-3x_0 + 2y_0 + z_0^3 = 0$ donne alors $z_0^2 - 3z_0 + 2 = 0$, d'où $z_0 = 1$ ou $z_0 = 2$ et on obtient finalement $(x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 1)$ ou $(x_0, y_0, z_0) = (4, 2, 2)$.

Exercice 12.4

Mines-Ponts MP 2006

On donne la surface $\mathcal{S}$ d'équation cartésienne $xyz = 1$ et Σ l'ensemble des projections orthogonales de O sur les plans tangents à $\mathcal{S}$. Donner une équation cartésienne de Σ.

La fonction $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y, z) = xyz - 1$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ on a $\operatorname{grad}(f)(x, y, z) = (yz, zx, xy)$. En particulier si (x_0, y_0, z_0) est un point de (S) alors $\operatorname{grad}(f)(x_0, y_0, z_0) = \left(\dfrac{1}{x_0}, \dfrac{1}{y_0}, \dfrac{1}{z_0}\right) \neq (0, 0, 0)$. Tous les points de

S sont réguliers et le plan tangent T_0 à S au point (x_0, y_0, z_0) est le plan d'équation cartésienne $(x - x_0)\frac{1}{x_0} + (y - y_0)\frac{1}{y_0} + (z - z_0)\frac{1}{z_0} = 0$, ou $\frac{x}{x_0} + \frac{y}{y_0} + \frac{z}{z_0} = 3$. Le vecteur $\text{grad}(f)(x_0, y_0, z_0)$ est un vecteur normal au plan T_0 ; il en résulte que la projection orthogonal de O sur T_0 est le point $P = (X, Y, Z) = \left(\frac{\lambda}{x_0}, \frac{\lambda}{y_0}, \frac{\lambda}{z_0}\right)$, avec $\lambda\left(\frac{1}{x_0^2} + \frac{1}{y_0^2} + \frac{1}{z_0^2}\right) = 3$.

On en déduit que $XYZ = \lambda^3$ et que $X^2 + Y^2 + Z^2 = \lambda^2\left(\frac{1}{x_0^2} + \frac{1}{y_0^2} + \frac{1}{z_0^2}\right) = 3\lambda$, puis que $\frac{(X^2 + Y^2 + Z^2)^3}{XYZ} = 27$.

Réciproquement soient X, Y et Z trois réels non nuls tels que $(X^2{+}Y^2{+}Z^2)^3 = 27XYZ$. Posons $x_0 = \frac{X^2 + Y^2 + Z^2}{3X}$, $y_0 = \frac{X^2 + Y^2 + Z^2}{3Y}$ et $z_0 = \frac{X^2 + Y^2 + Z^2}{3Z}$. On a alors $x_0y_0z_0 = 1$. Le point $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ appartient de S et le plan tangent à S en ce point est le plan d'équation

$$x\frac{3X}{X^2 + Y^2 + Z^2} + y\frac{3Y}{X^2 + Y^2 + Z^2} + z\frac{3Z}{X^2 + Y^2 + Z^2} = 3.$$

La projection orthogonale de O sur ce plan est précisément (X, Y, Z).

Ainsi Σ est la surface d'équation $\frac{(X^2 + Y^2 + Z^2)^3}{XYZ} = 27$.

Exercice 12.5

Déterminer les droites tracées sur le paraboloïde hyperbolique H d'équation $z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$. Montrer que H est une surface réglée.

Nous utilisons la méthode de l'exercice précédent : soit $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ un point de H et soit $V = (\alpha, \beta, \gamma)$ un vecteur non nul. Pour que la droite passant par M_0 et dirigée par V soit contenue dans H il faut et il suffit que

$$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ z_0 + \gamma\lambda = \frac{(x_0 + \alpha\lambda)^2}{a^2} - \frac{(y_0 + \beta\lambda)^2}{b^2}$$

c'est-à-dire que le polynôme

$$P(\lambda) = \left(\frac{\alpha^2}{a^2} - \frac{\beta^2}{b^2}\right)\lambda^2 + \left(2\frac{x_0\alpha}{a^2} - 2\frac{2y_0\beta}{b^2} - \gamma\right)\lambda$$

soit le polynôme nul, ou encore que $\frac{\alpha^2}{a^2} - \frac{\beta^2}{b^2} = 0$ et $\gamma = \frac{2x_0\alpha}{a^2} - \frac{2y_0\beta}{b^2}$.

La première relation s'écrit $\frac{\alpha}{a} = \varepsilon \frac{\beta}{b}$, avec $\varepsilon = \pm 1$. Posons $k = \frac{\alpha}{a}$. Si $\varepsilon = +1$, on obtient $\alpha = ka$, $\beta = kb$ puis $\gamma = 2k\left(\frac{x_0}{a} - \frac{y_0}{b}\right)$, tandis que si $\varepsilon = -1$, on obtient $\alpha = ka$, $\beta = -kb$ et $\gamma = 2k\left(\frac{x_0}{a} + \frac{y_0}{b}\right)$.

On obtient donc les vecteurs de la forme

$$V = \left(ka, kb, 2k\left(\frac{x_0}{a} - \frac{y_0}{b}\right)\right) \text{ ou } V = \left(ka, -kb, 2k\left(\frac{x_0}{a} + \frac{y_0}{b}\right)\right) \quad (k \in \mathbb{R}).$$

Il existe donc exactement deux droites passant par M_0 et contenues dans H : elles sont respectivement dirigées par

$$V_1 = \left(a, b, \frac{2x_0}{a} - \frac{2y_0}{b}\right) \quad \text{et} \quad V_2 = \left(a, -b, \frac{2x_0}{a} + \frac{2y_0}{b}\right).$$

Il en résulte que H est la réunion d'une famille de droites : c'est donc une surface réglée.

Exercice 12.6

Centrale PC 2007

Soit $a > 0$ et soit Γ l'intersection de la sphère $\mathcal{S}$ d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ et du cylindre $\mathcal{C}$ d'équation $x^2 + y^2 - ax = 0$.

1) Déterminer un paramétrage de Γ.

2) Quel est la tangente à Γ en l'un de ses points ?

3) Soit P le point d'intersection de la tangente à Γ en un point M avec le plan (xOy). Déterminer le lieu de P lorsque M parcourt Γ.

1) L'intersection du cylindre $\mathcal{C}$ avec le plan $x0y$ est la courbe d'équation

$$\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{a^2}{4}\right).$$

C'est le cercle de centre $A = (\frac{a}{2}, 0, 0)$ et de rayon $\frac{a}{2}$.

Les points de $\mathcal{C}$ sont les points $M = (x, y, z)$ tels que

$$x = \frac{a}{2}(1 + \cos(\theta)) = a\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right), y = \frac{a}{2}\sin(\theta) = a\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right),$$
$$\theta \in [0, 2\pi].$$

Pour qu'un tel point M appartienne à Γ, il faut et il suffit que $z^2 = a^2 - x^2 - y^2$, c'est-à-dire $z^2 = a^2\left(1 - \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) = a^2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$. On a donc $z = \pm a\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$.

Comme $-\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right) = \sin\left(-\dfrac{\theta}{2}\right)$, la courbe Γ peut être décrite par le paramétrage :

$$\begin{cases} x = a\cos^2\left(\dfrac{\theta}{2}\right) \\ y = a\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right) \qquad \theta \in [-2\pi, 2\pi]. \\ z = a\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right) \end{cases}$$

2) La tangente à Γ au point M de paramètre θ est dirigée par le vecteur

$$(x'(\theta), y'(\theta), z'(\theta)) = \frac{a}{2}\left(-\sin(\theta), \cos(\theta), \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right).$$

C'est aussi l'intersection du plan tangent à la sphère $\mathcal{S}$ (le plan passant par M et perpendiculaire au rayon OM) et du plan tangent au cylindre $\mathcal{C}$ (le plan perpendiculaire à la droite (Am) passant par la projection orthogonale de M sur le plan xOy).

3) On déduit des calculs précédents un paramétrage de la tangente à Γ au point M de paramètre θ :

$$\begin{cases} x = a\cos^2\left(\dfrac{\theta}{2}\right) - \lambda\dfrac{a}{2}\sin(\theta) \\ y = a\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right) + \lambda\dfrac{a}{2}\cos(\theta) \qquad \lambda \in \mathbb{R}. \\ z = a\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right) + \lambda\dfrac{a}{2}\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right) \end{cases}$$

Pour $\theta \neq \pm\pi$, le point P où la tangente coupe le plan $(x0y)$ correspond à la valeur $\lambda = -2\tan\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$ et les coordonnées de P sont alors

$$\begin{cases} x = a\cos^2\left(\dfrac{\theta}{2}\right) + a\tan\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\sin\theta \\ y = a\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right) - a\tan\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\cos\theta \\ z = 0 \end{cases}$$

On obtient alors aisément

$$x = a + a\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \text{ et } y = a\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) - a\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right),$$

et, en posant $t = \tan\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$, $x = a + a\dfrac{t^2}{1+t^2}$, $y = a\dfrac{t^3}{1+t^2}$.

Le lieu de P est donc la courbe du plan $(x0y)$ définie par la paramétrisation

$$\begin{cases} x = a + a\dfrac{t^2}{1+t^2} \\ y = a\dfrac{t^3}{1+t^2} \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

(Cette courbe est appelée une cissoïde droite.)

Exercice 12.7

Mines-Ponts MP 2005

Soit a un nombre réel. Déterminer la surface S « balayée » par les droites parallèles au plan P d'équation $y + z = 0$ qui coupe les droites D_1 et D_2 d'équations respectives $\{x + y = a; z = 0\}$ et $\{z = a; x = 0\}$.

Le vocabulaire concernant les surfaces est parfois imagé ! Il faut comprendre que S est la réunion des droites parallèles à P et qui rencontrent D_1 et D_2.

La droite D_1 passe par le point $(a, 0, 0)$ et sa direction est Vect$((1, -1, 0))$. Les points de D_1 sont donc les points de de la forme $M_1 = (a+\lambda, -\lambda, 0)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. On voit de même que les points de D_2 sont de la forme $M_2 = (0, \mu, a)$, avec $\mu \in \mathbb{R}$. Les points $M = (x, y, z)$ de la droite $D = (M_1, M_2)$ sont les barycentres de M_1 et M_2, c'est-à-dire les points de la forme $M = tM_1 + (1-t)M_2 = t(a+\lambda, -\lambda, 0) + (1-t)(0, \mu, a)$, où t est un réel. Un paramétrage de D est donc :

$$\begin{cases} x = (a+\lambda)t \\ y = -(\lambda+\mu)t - (a+\lambda) \\ z = -at + a \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Pour que cette droite soit parallèle au plan P, il faut et il suffit que $y + z$ soit une constante (indépendante de t), c'est-à-dire que $\lambda + \mu + a = 0$.

Il en résulte que S est la surface définie par le paramétrage

$$\begin{cases} x = t(a+\lambda) \\ y = at - \lambda - a \\ z = (1-t)a \end{cases} \qquad (t, \lambda) \in \mathbb{R}^2.$$

On en déduit que $t = 1 - \dfrac{z}{a}$ puis que $\lambda = at - y - a = -z - y$. Il en résulte que S est la surface d'équation cartésienne $x = \left(1 - \dfrac{z}{a}\right)(a - y - z)$ ou $z^2 + yz - ax - ay - 2az + a^2 = 0$. Il s'agit donc d'une quadrique dont nous allons préciser la nature : on peut tout d'abord écrire l'équation sous la forme $(z-a)^2 + y(z-a) - ax = 0$. Dans un repère admettant le point $A = (0, 0, a)$ pour origine, S a pour équation $Z^2 + YZ - aX = 0$. La matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}$ de la forme quadratique $Z^2 + YZ$ a deux valeurs propres réelles : $\lambda_1 = \dfrac{1+\sqrt{2}}{2} > 0$ et $\lambda_2 = \dfrac{1-\sqrt{2}}{2} < 0$. Il s'agit donc d'un paraboloïde hyperbolique.

12.3 QUELQUES SURFACES USUELLES

Ce qu'il faut savoir

1) **Cylindre**

Une surface cylindrique $\mathcal{S}$ est définie par la donnée d'une courbe Γ et d'un vecteur non nul $\overrightarrow{K}$. La réunion des droites D dirigées par le vecteur $\overrightarrow{K}$ et qui rencontrent Γ est appelée un cylindre. Les droites D sont appelées les **génératrices** du cylindre et la courbe Γ une **directrice**. L'intersection d'un cylindre avec un plan orthogonal aux génératrices est appelée une **section droite**.

2) **Cônes**

Une surface conique $\mathcal{S}$ est définie par la donnée d'une courbe Γ et d'un point S qui n'est pas situé sur Γ.
La réunion des droites passant par S et qui rencontrent Γ est appelée le cône de sommet S et de directrice Γ. Ces droites sont appelées les **génératrices** du cône, S est appelé le **sommet** du cône et Γ est une **directrice**.

3) **Surface de révolution**

Soit D est une droite. Un **cercle d'axe** D est un cercle situé dans un plan perpendiculaire à D et dont le centre est situé sur D. Une **surface de révolution** $\mathcal{S}$ est définie par la donnée d'une courbe Γ et d'une droite D. La surface $\mathcal{S}$ est la réunion des cercles d'axe D qui rencontrent Γ.
La droite D est appelé l'**axe**, la courbe Γ est appelée une **directrice** et les cercles d'axe D qui rencontrent Γ sont appelés les **parallèles** de la surface.
On dit que $\mathcal{S}$ est la surface de révolution engendrée par la rotation de Γ autour de D.
Les plans qui contiennent l'axe D sont appelés les **plans méridiens**. L'intersection de $\mathcal{S}$ avec un plan méridien est appelé une **méridienne**.

Exercice 12.8

CCP MP 2007

Donner une équation du cylindre C dirigé par le vecteur $K = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et dont une directrice est l'intersection Γ des surfaces d'équations $x^2 + y^2 = 2z$ et $x^2 + y^2 + z^2 = 8$.

Pour qu'un point $M = (x, y, z)$ appartienne à C, il faut et il suffit que la droite passant par M et dirigée par le vecteur K rencontre la courbe Γ. Ainsi la relation $M \in C$ est équivalente à

$$\exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que } \begin{cases} (1): & (x+\lambda)^2 + (y+\lambda)^2 = 2(z+\lambda), \\ (2): & (x+\lambda)^2 + (y+\lambda)^2 + (z+\lambda)^2 = 8. \end{cases}$$

Par soustraction on voit que ces deux relations sont équivalentes à

$$\begin{cases} (1'): & (x+\lambda)^2 + (y+\lambda)^2 = 2(z+\lambda), \\ (2'): & (z+\lambda)^2 + 2(z+\lambda) - 8 = 0, \end{cases}$$

et comme le trinôme $T^2 + 2T - 8 = 0$ admet les deux racines réelles 2 et -4, elles sont encore équivalentes à

$$\begin{cases} (1''): & (x+\lambda)^2 + (y+\lambda)^2 = 2(z+\lambda), \\ (2''): & z+\lambda = 2 \text{ ou } z+\lambda = -4. \end{cases}$$

Comme $(x+\lambda)^2 + (y+\lambda)^2 \geqslant 0$, la seule valeur qui convient est $z+\lambda = 2$. Il en résulte que C est la surface d'équation $(x - z + 2)^2 + (y - z + 2)^2 = 4$.

Je vous propose maintenant un exercice très proche du précédent, où il s'agit de déterminer une équation d'un cône.

Exercice 12.9

Donner une équation du cône C de sommet $A = (1, 1, 1)$ et dont une directrice est l'intersection Γ des surfaces d'équations $x^2 + y^2 = 2z$ et $x^2 + y^2 + z^2 = 8$.

Pour qu'un point $M = (x, y, z)$ distinct de A appartienne à C, il faut et il suffit que la droite (AM) rencontre la courbe Γ. La relation $M \in C$ est donc ici équivalente à :

$$\exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que } \begin{cases} (1): & (1+\lambda(x-1))^2 + (1+\lambda(y-1))^2 = 2(1+\lambda(z-1)), \\ (2): & (1+\lambda(x-1))^2 + (1+\lambda(y-1))^2 + (1+\lambda(z-1))^2 = 8. \end{cases}$$

Par soustraction on voit que ces relations sont équivalentes à

$$\begin{cases} (1'): & (1+\lambda(x-1))^2 + (1+\lambda(y-1))^2 = 2(1+\lambda(z-1)), \\ (2'): & (1+\lambda(z-1))^2 + 2(1+\lambda(z-1)) - 8 = 0, \end{cases}$$

En procédant comme dans l'exercice précédent, on trouve ici $1 + \lambda(z - 1) = 2$ et il résulte que C est la surface d'équation

$$\left(1 + \frac{x-1}{z-1}\right)^2 + \left(1 + \frac{y-1}{z-1}\right) = 4 \quad \text{ou} \quad (z + x - 2)^2 + (z + y - 2)^2 = 4(z-1)^2.$$

Exercice 12.10

Centrale MP 2006 ☕

Identifier dans $\mathbb{R}^2$ la courbe Γ d'équation $\begin{cases} x^2 + y^2 - 2y - 3 = 0 \\ 2y - 2z + 3 = 0 \end{cases}$

Donner l'équation de la surface engendrée par la rotation de cette courbe autour de l'axe (Oz).

La courbe Γ est l'intersection du cylindre de révolution C d'équation $x^2+(y-1)^2 = 4$ avec le plan Π d'équation $2y - 2z + 3 = 0$. L'axe de C est la droite parallèle à l'axe (Oz) qui passe par le point $(0, 1, 0)$. Comme le plan Π n'est pas parallèle à l'axe (Oz), la courbe Γ est une ellipse.

Notons que Γ est aussi l'intersection du paraboloïde P d'équation $x^2 + y^2 = 2z$ et du plan Π. Soit alors S la surface engendrée par la rotation de Γ autour de l'axe (Oz) et soit $M = (x, y, z)$ un point de S. Il existe alors $\theta \in \mathbb{R}$, tel que l'image $M' = (x', y', z')$ de M par la rotation d'angle θ autour de l'axe (Oz) soit un point de Γ. On a alors $(x', y', z') = (x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta, z)$ et $(x\cos\theta - y\sin\theta)^2 + (x\sin\theta + y\cos\theta)^2 = 2z$. On a donc $x^2 + y^2 = 2z$, ce qui montre que S est incluse dans le paraboloïde P.

Observons que S n'est pas égal à P tout entier. On a en effet $x'^2 + (y'-1)^2 = 4$, d'où $-1 \leqslant y' \leqslant 3$ et puisque $z = y' + \dfrac{3}{2}$, $\dfrac{1}{2} \leqslant z \leqslant \dfrac{9}{2}$.

Réciproquement soit $M = (x, y, z)$ un point de P tel que $\dfrac{1}{2} \leqslant z \leqslant \dfrac{9}{2}$. Le nombre réel $y' - 1 = z - \dfrac{5}{2}$ est compris entre -2 et 2 et il existe donc un réel x' tel que $x'^2 + (y'-1)^2 = 4$. Comme $x^2 + y^2 = 2z = x'^2 + y'^2$, le point M' appartient à Γ et M est l'image de $M' = (x', y', z)$ dans une rotation d'axe (Oz). Donc M appartient à S.

5) Lorsque $\alpha = 0$, on obtient la quadrique d'équation $z^2 + 2y - 4 = 0$: il s'agit du cylindre étudié dans la question 3). (Ce n'est pas un cône). On peut donc supposer $\alpha \neq 0$. L'équation de $(Q_{(\alpha,\beta)})$ peut s'écrire

$$\alpha x^2 + \alpha\left(y + \frac{\beta-\alpha}{\alpha}\right)^2 + \beta z^2 - \left(4\beta + \frac{(\alpha-\beta)^2}{\alpha}\right) = 0.$$

Soit A le point de coordonnées $(0, y_0, 0)$ où $y_0 = \dfrac{\alpha-\beta}{\alpha}$ et plaçons nous dans le repère $R = (A, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k})$. Si (X, Y, Z) désigne les coordonnées d'un point dans ce repère, une équation de $(Q_{(\alpha,\beta)})$, est alors $\alpha X^2 + \alpha Y^2 + \beta Z^2 = K$, avec $K = 4\beta + \dfrac{(\alpha-\beta)^2}{\alpha} = \dfrac{(\alpha+\beta)^2}{\alpha}$. C'est un cône si et seulement si $K = 0$, c'est-à-dire si et seulement si $\alpha + \beta = 0$. Dans le repère initial il s'agit du cône d'équation $x^2 + (y-2)^2 - z^2 = 0$. Son sommet est le point $(0, 2, 0)$.

13 Compléments de géométrie

Préambule

La géométrie fait partie intégrante du programme des concours et intervient dans des domaines très variés. Bête noire des candidats, elle ne doit pas être négligée. Malgré l'apparente simplicité des énoncés, la résolution demande un savoir-faire qui ne s'acquiert que par un entraînement régulier. Le lecteur est invité à reprendre les chapitres de géométrie affine euclidienne en dimension 2 et 3 du livre de première année. Le but de ce chapitre – qui n'est en rien exhaustif – est d'inciter le candidat à travailler suffisamment la géométrie en lui montrant un échantillon de ce qui peut lui être demandé aux concours.

13.1 GÉOMÉTRIE AFFINE

Exercice 13.1

CCP MP 2006

Dans l'espace affine de dimension 3 rapporté à un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, on considère les droites $\mathcal{D}_1$, d'équations $x+y+z-1 = x-2y+2z-a = 0$, et $\mathcal{D}_2$, d'équations $z-2bx-2 = y-x-1 = 0$, où a et b sont deux paramètres réels.

Comment choisir a et b pour que ces droites soient coplanaires ?

Supposons que $\mathcal{D}_1$ soit définie par un de ses points A_1 et un vecteur directeur $\overrightarrow{u_1}$ et de même pour $\mathcal{D}_2$ avec A_2 et $\overrightarrow{u_2}$.

On remarque en distinguant le cas $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$ parallèles ou non, que ces droites sont coplanaires si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ sont liés c'est-à-dire

$$\det\left(\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right) = 0.$$

Déterminons A_1 par exemple en choisissant $z_{A_1} = 0$. On résout alors le système $\begin{cases} x+y=1 \\ x-2y=a \end{cases}$, il vient $x = \dfrac{a+2}{3}$ et $y = \dfrac{-a+1}{3}$.

Donc $A_1(\dfrac{a+2}{3}, \dfrac{-a+1}{3}, 0) \in \mathcal{D}_1$. On peut trouver un vecteur directeur en cherchant un second point, ou plus directement en calculant avec les formules du produit vectoriel usuel $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} = \overrightarrow{u_1}$. De même, on peut choisir $A_2(0,1,2)$ et $\overrightarrow{u_2}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2b \end{pmatrix}$. Les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont coplanaires si et seulement si $\det\left(\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right) = 0$ ce qui s'écrit $\begin{vmatrix} \dfrac{-a-2}{3} & 4 & -1 \\ \dfrac{a+2}{3} & -1 & -1 \\ 2 & -3 & -2b \end{vmatrix} = 0.$

On obtient finalement la condition suivante : $a + 2b + ab - 3 = 0$.

Ce qu'il faut retenir

Deux droites de l'espace $\mathcal{D}_1(A_1, \overrightarrow{u_1})$ et $\mathcal{D}_2(A_2, \overrightarrow{u_2})$ sont coplanaires si et seulement si $\det\left(\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right) = 0$.

Exercice 13.2

Mines-Ponts PC 2005

Soient M_1, M_2, M_3 et M_4, quatre points distincts du plan. Existe-t-il quatre points A_1, A_2, A_3 et A_4, tels qu'en posant $A_5 = A_1$, pour tout $i \in \{1,2,3,4\}$, M_i soit le milieu de A_iA_{i+1} ?

Une rédaction rapide consiste à raisonner avec les affixes $m_1, \ldots, m_4$ des points $M_1, \ldots, M_4$.

• Supposons qu'il existe quatre points A_1, A_2, A_3, A_4 (d'affixes respectives $a_1, \ldots, a_4$) vérifiant l'énoncé. On a :

$$a_1 = a_5 \text{ et pour tout } i \in \{1,2,3,4\},\ \frac{a_i + a_{i+1}}{2} = m_i.$$

De ce système à quatre équations, on en déduit notamment

$$2(m_1 - m_2) = a_1 - a_3 = 2(m_4 - m_3).$$

• Réciproquement, supposons $m_1 - m_2 = m_4 - m_3$ (1). Soit $a_1 \in \mathbb{C}$ quelconque. Soient $a_3 \in \mathbb{C}$ tel que $2(m_1 - m_2) = a_1 - a_3$ (2), $a_2 \in \mathbb{C}$ et $a_4 \in \mathbb{C}$ tels que $2m_1 = a_1 + a_2$ (3) et $2m_4 = a_4 + a_1$ (4).

(3) − (2) nous donne $2m_2 = a_2 + a_3$ et (4)-(2) combiné avec (1) nous donne $2m_3 = a_3 + a_4$. On en déduit que la propriété est satisfaite.

En conclusion, une condition nécessaire et suffisante sur les points M_1, M_2, M_3 et M_4 est $\overrightarrow{M_2M_1} = \overrightarrow{M_3M_4}$ c'est-à-dire que $M_1M_2M_3M_4$ est un parallélogramme.

Remarque
L'exercice revient à déterminer l'image de l'application linéaire associée canoniquement à la matrice $M \in \mathcal{M}_4(\mathbb{C})$ définie par $M = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Cette matrice est de rang 3 et $\operatorname{Im} M = \{{}^t(m_1, \dots, m_4) \mid m_1 - m_2 = m_4 - m_3\}$.

Exercice 13.3

Polytechnique MP 2006
Soient A, B, C trois points non alignés du plan, A' (resp. B', C') un point de (BC) (resp. $(AC), (AB)$). Montrer que $(AA'), (BB')$ et (CC') sont concourantes si et seulement si :

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \times \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \times \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -1.$$

Pour cet exercice de géométrie affine pure (on ne considère pas de distance euclidienne), considérons un repère qui simplifiera les calculs. Plaçons-nous dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

Remarquons que, nécessairement, $A' \neq A$ ($A \notin (BC)$) et, implicitement, $A' \neq C$ et de même pour les points B' et C'.

Soit $\alpha = \dfrac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}}$. On a $\overrightarrow{A'B} - \alpha\overrightarrow{A'C} = \overrightarrow{0} = (\overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{AB}) - \alpha(\overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{AC})$, ce qui donne $(1-\alpha)\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AB} - \alpha\overrightarrow{AC}$. On a $\alpha \neq 1$, sinon A, B et C seraient alignés, il vient que A' a pour coordonnées dans notre repère $\left(\dfrac{1}{1-\alpha}, \dfrac{-\alpha}{1-\alpha}\right)$. De la même manière, on trouve $B'\left(0, \dfrac{1}{1-\beta}\right)$ et $C'\left(\dfrac{-\gamma}{1-\gamma}, 0\right)$ avec $\beta \neq 1$ et $\gamma \neq 1$.

On détermine alors des équations des droites (AA'), (BB') et (CC').

Par exemple pour (BB') : on calcule $\begin{vmatrix} x-1 & -1 \\ y & \dfrac{1}{1-\beta} \end{vmatrix} = 0$ ce qui nous donne $x + (1-\beta)y - 1 = 0$.

On obtient pour (AA') : $\alpha x + y = 0$ et pour (CC') : $(\gamma - 1)x + \gamma y - \gamma = 0$.

Utilisons le lemme suivant : trois droites $\mathcal{D}_i : a_i x + b_i y + c_i = 0$ sont concourantes ou parallèles si et seulement si $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$.

En effet, si on note $M = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$, alors le déterminant de M est nul si et seulement si le noyau de $X \mapsto MX$ est non réduit à $\{0\}$ c'est-à-dire qu'il existe $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ tel que pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$, $a_i x + b_i y + c_i z = 0$.

Soit $z \neq 0$, auquel cas les trois droites sont concourantes au point de coordonnées $\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right)$, soit $z = 0$ et alors les vecteurs (a_1, a_2, a_3) et (b_1, b_2, b_3) sont colinéaires (car $(x, y) \neq (0, 0)$) donc les trois vecteurs (a_i, b_i), $i \in \{1, 2, 3\}$ également ce qui signifie, en considérant les vecteurs normaux, que les trois droites sont parallèles.

Pour terminer la preuve, on calcule

$$\begin{vmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 1 & 1-\beta & -1 \\ \gamma - 1 & \gamma & -\gamma \end{vmatrix} = \alpha\beta\gamma + 1$$

Conclusion : $(AA'), (BB')$ et (CC') sont concourantes si et seulement si

$$\alpha\beta\gamma = \frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \times \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \times \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -1.$$

Remarque

Ce résultat est appelé théorème de Céva.

Ce qu'il faut retenir

- Pour un exercice qui n'utilise pas de produit scalaire, d'angle, de distance euclidienne, il est souvent judicieux de choisir un repère affine qui simplifie les calculs.
- Trois droites du plan $\mathcal{D}_i : a_i x + b_i y + c_i = 0$ sont concourantes ou parallèles si et seulement si $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$.

13.2 GÉOMÉTRIE AFFINE EUCLIDIENNE

Exercice 13.4

Centrale PSI 2006

1) Montrer que $z \mapsto \dfrac{z-i}{z+i}$ est une bijection de $\mathbb{C} \setminus \{-i\}$ dans $\mathbb{C} \setminus \{1\}$.

2) Soient $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$ et $\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C}, \mathrm{Im}(z) > 0\}$. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{-i\}$.

Démontrer *géométriquement* que $z \in \mathcal{H} \Leftrightarrow \dfrac{z-i}{z+i} \in \mathcal{D}$.

En déduire une bijection de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{D}$.

Notons $\varphi : z \in \mathbb{C} \setminus \{-i\} \mapsto \dfrac{z-i}{z+i}$.

1) Soient $z \in \mathbb{C} \setminus \{-i\}$ et $Z = \varphi(z)$. Alors $Z = \dfrac{z-i}{z+i} \Leftrightarrow (1-Z)z = i(Z+1)$.

Il est clair que $Z \neq 1$ (sinon $2i = 0$), et donc $z = i\dfrac{Z+1}{1-Z}$. Ceci prouve que φ est une bijection de $\mathbb{C} \setminus \{-i\}$ sur $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ d'application réciproque $Z \mapsto \dfrac{Z+1}{1-Z}i$.

2) Soient A et B d'affixes respectives $-i$ et i, et soit M d'affixe z. On a alors

$$\frac{z-i}{z+i} \in \mathcal{D} \Leftrightarrow BM^2 < AM^2 \Leftrightarrow \left\|\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OM}\right\|^2 < \left\|\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OM}\right\|^2$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{2\overrightarrow{AB}}_{=4\vec{\jmath}} \cdot \overrightarrow{OM} > 0 \Leftrightarrow M \in \mathcal{H} \quad \text{(le vecteur } \vec{\jmath} \text{ est le vecteur d'affixe } i\text{)}.$$

(l'équivalence $BM < AM \Leftrightarrow M \in \mathcal{H}$ peut aussi se voir directement, il s'agit d'un demi-plan ouvert de frontière la médiatrice de $[A, B]$, c'est-à-dire (Ox)). Ainsi $z \in \mathcal{H} \Leftrightarrow \varphi(z) \in \mathcal{D}$ donc $Z \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \varphi^{-1}(z) \in \mathcal{H}$ (on a bien $\mathcal{H} \subset \mathbb{C} \setminus \{-i\}$ et $\mathcal{D} \subset \mathbb{C} \setminus \{1\}$) donc la restriction de φ à $\mathcal{H}$ est une bijection de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{D}$.

Exercice 13.5

Centrale PC 2005

Soit $E = \mathbb{R}^3$ muni de sa structure canonique d'espace vectoriel euclidien orienté. Soit $a \in E$ tel que $a \neq 0$. Montrer que tout vecteur de E est entièrement déterminé par la donnée de $< a, x >$ et de $a \wedge x$.

Posons $\overrightarrow{I} = \dfrac{1}{\|a\|}a$. On choisit $\overrightarrow{J}$ unitaire et orthogonal à $\overrightarrow{I}$ et on pose $\overrightarrow{K} = \overrightarrow{I} \wedge \overrightarrow{J}$. On sait que $\left(\overrightarrow{I}, \overrightarrow{J}, \overrightarrow{K}\right)$ est une base orthonormale directe.

Si x a pour coordonnées dans cette base (x_1, x_2, x_3), alors $< \overrightarrow{I}, x >= x_1$ et $\overrightarrow{I} \wedge x = -x_3\overrightarrow{J} + x_2\overrightarrow{K}$. Ainsi $x_1 = \dfrac{< a, x >}{\|a\|}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ -x_3 \\ x_2 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{\|a\|}(a \wedge x)$, ce qui permet donc de reconstituer entièrement x.

Exercice 13.6

Centrale PSI 2006

Soit $\mathcal{P}$ le plan d'équation $x+y+z = 0$ et $\mathcal{D}$ la droite d'équation $\begin{cases} x = -2z+3 \\ y = z-1 \end{cases}$.

Déterminer la projection orthogonale de $\mathcal{D}$ sur $\mathcal{P}$.

En paramétrant $\mathcal{D}$ par la variable z, on voit que $\overrightarrow{u}(-2, 1, 1)$ est un vecteur directeur (et que $A(3, -1, 0)$ est un point de $\mathcal{D}$). Le plan $\mathcal{P}$ contient l'origine donc son plan vectoriel admet la même équation $x + y + z = 0$, qui est vérifiée par les coordonnées de $\overrightarrow{u}$. Nous sommes donc dans le cas particulier où $\mathcal{D}$ est parallèle à $\mathcal{P}$. Sa projection est donc une droite de même vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ et passant par le projeté orthogonal de A sur $\mathcal{P}$.

On calcule alors les coordonnées de $p_{\mathcal{P}}(A)$ en passant par la projection vectorielle sur la normale (vectorielle) à $\mathcal{P}$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{Op_{\mathcal{P}}(A)} &= \overrightarrow{p_{\mathcal{P}}}(\overrightarrow{OA}) = \left(\mathrm{id} - \overrightarrow{p_{\mathcal{P}^\perp}}\right)(\overrightarrow{OA}) \\ &= \overrightarrow{OA} - \frac{< \overrightarrow{n}, \overrightarrow{OA} >}{\left\|\overrightarrow{n}\right\|^2}\overrightarrow{n} \text{ avec } \overrightarrow{n}(1,1,1) \text{ vecteur normal à } \mathcal{P}.\end{aligned}$$

Après calcul, on trouve que $p_{\mathcal{P}}(A)$ a pour coordonnées $\left(\frac{7}{3}, -\frac{5}{3}, -\frac{2}{3}\right)$ d'où une représentation paramétrique de la droite $p_{\mathcal{P}}(\mathcal{D})$,

$$p_{\mathcal{P}}(\mathcal{D}) : \begin{cases} x = -2t + \dfrac{7}{3} \\ y = t - \dfrac{5}{3} \\ z = t - \dfrac{2}{3} \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}.$$

On obtient le système d'équations, en éliminant la variable t,

$$p_{\mathcal{P}}(\mathcal{D}) : \begin{cases} x = -2z + 1 \\ y = z - 1 \end{cases}.$$

Ce qu'il faut retenir

- La présence de constantes non nulles dans les équations définissant les plans ou les droites de l'espace indiquent que ces sous-espaces sont affines (et non vectoriels). On obtient les équations de leur direction vectorielle en annulant ces constantes.
- Les transformations affines classiques (projections, symétries, rotations) possèdent des points invariants. Supposons qu'un point O est l'un des points invariants d'une application affine f. Pour étudier l'application f, on considère le point O comme origine et on utilise sa partie linéaire $\overrightarrow{f}$ grâce à la relation $\overrightarrow{Of(M)} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{OM})$.
- Il existe des applications affines sans point fixe : les translations, la composée d'une réflexion avec une translation de vecteur parallèle à la direction du plan de réflexion... Leur étude détaillée n'est pas un objectif du programme actuel.

Exercice 13.7

Centrale PSI 2007

Dans $\mathbb{R}^3$ affine euclidien, soient $\mathcal{P}$ le plan d'équation $2x + 3y + z - 1 = 0$ et $\mathcal{D}$ la droite d'équations $(x = y, y = z)$. Déterminer le plan symétrique (orthogonal) de $\mathcal{P}$ par rapport à $\mathcal{D}$.

Commençons par déterminer le point Ω, intersection de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$.

$$\begin{cases} 2x + 3y + z - 1 = 0 \\ x = y \\ y = z \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = \frac{1}{6}.$$

Nous savons que le plan $\mathcal{P}'$ symétrique de $\mathcal{P}$ par rapport à $\mathcal{D}$ passe par Ω et a pour vecteur normal $\overrightarrow{s_{\mathcal{D}}}(\overrightarrow{n})$ où $\overrightarrow{n}$ est un vecteur normal de $\mathcal{P}$ et $\overrightarrow{s_{\mathcal{D}}}$ est la symétrie vectorielle par rapport à $\overrightarrow{\mathcal{D}}$, la droite vectorielle associée à $\mathcal{D}$.
On peut prendre pour vecteur normal $\overrightarrow{n}(2,3,1)$ et le vecteur $\overrightarrow{u}(1,1,1)$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ ($\overrightarrow{\mathcal{D}} = \mathbb{R}\overrightarrow{u}$). Ainsi,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{s_{\mathcal{D}}}(\overrightarrow{n}) &= \left(2\overrightarrow{p_{\mathcal{D}}} - \mathrm{id}\right)\left(\overrightarrow{n}\right) = 2\frac{<\overrightarrow{u}, \overrightarrow{n}>}{\left\|\overrightarrow{u}\right\|^2}\overrightarrow{u} - \overrightarrow{n} \\ &= (2,1,3)\,. \end{aligned}$$

Le plan $\mathcal{P}'$ admet donc pour équation

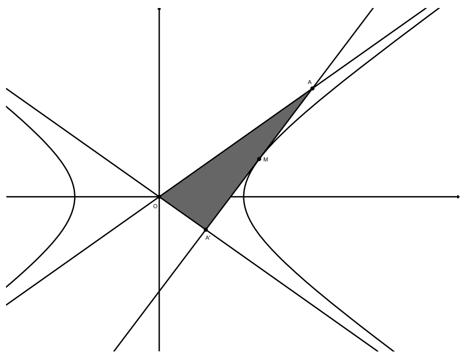
$$2 \times \left(x - \frac{1}{6}\right) + 1 \times \left(y - \frac{1}{6}\right) + 3 \times \left(z - \frac{1}{6}\right) = 0 \Leftrightarrow 2x + y + 3z - 1 = 0.$$

Exercice 13.8

Mines-Ponts MP 2007

Soit $\mathcal{H}$ une hyperbole du plan centrée en un point O, d'asymptotes $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$. La tangente à $\mathcal{H}$ en un point M recoupe $\mathcal{D}$ (resp. $\mathcal{D}'$) en A (resp. A'). Montrer que l'aire du triangle OAA' ne dépend pas de M.

Dans un repère orthonormal adapté, l'hyperbole $\mathcal{H}$ admet pour équation réduite $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ et les asymptotes ont pour équations $y = \pm\dfrac{b}{a}x$.



En un point $M(x_0, y_0)$ de $\mathcal{H}$, une équation de la tangente à $\mathcal{H}$ est $\dfrac{xx_0}{a^2} - \dfrac{yy_0}{b^2} = 1$ (en notant $f : (x, y) \mapsto \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} - 1$, une équation de la tangente en M à $\mathcal{H}$ est $\dfrac{\partial f}{\partial x}(M_0)(x - x_0) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(M_0)(x - x_0) = 0$).

Déterminons les coordonnées de A et A' en fonction de x_0 et y_0. Pour A, on résout le système :

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{xx_0}{a^2} - \dfrac{yy_0}{b^2} = 1 \\ y = \dfrac{b}{a}x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{a^2b}{bx_0 - ay_0} \\ y = \dfrac{ab^2}{bx_0 - ay_0} \end{array}\right. .$$

On a bien $bx_0 - ay_0 \neq 0$ car les asymptotes ne rencontrent pas l'hyperbole. De même, A' a pour coordonnées $\left(\dfrac{a^2b}{bx_0 + ay_0}, -\dfrac{ab^2}{bx_0 + ay_0}\right)$. L'aire $\mathcal{A}$ du triangle OAA' vaut donc

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'}\right)\right| = \frac{1}{2}\left|\frac{a^3b^3}{(bx_0)^2 - (ay_0)^2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}\right| \\ &= \left|\frac{ab}{\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2}}\right| = ab. \end{aligned}$$

Ainsi, l'aire $\mathcal{A}$ est indépendante de x_0 et y_0 donc du point M.

Exercice 13.9

Mines-Ponts MP 2007

Soit E un espace affine euclidien de dimension 3. Majorer le volume d'un tétraèdre de E dont les arêtes sont toutes $\leqslant 1$.

Nous savons que le volume d'un tétraèdre $ABCD$ est donné par la formule $\mathcal{V} = \dfrac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right]\right|$ où [ ] désigne le produit mixte. Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= \frac{1}{6}| < \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD} > | \leqslant \frac{1}{6}\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|\|\overrightarrow{AD}\| \\ &\leqslant \frac{1}{6}\|\overrightarrow{AB}\|\|\overrightarrow{AC}\|\|\overrightarrow{AD}\| \leqslant \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Exercice 13.10

Polytechnique MP 2007

Soit ABC un vrai triangle. Déterminer l'ensemble des points M du plan vérifiant :

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}.$$

La relation $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{MA}$ peut se simplifier avec la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MC}$$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}\right)=\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{BA}.$$

Les points M vérifiant les égalités de l'énoncé sont donc ceux vérifiant :

$$\overrightarrow{AB}\cdot\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}\right)=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CM}\text{ et }\overrightarrow{AC}\cdot\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}\right)=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BM}.$$

Soient les points H_{AB} et H_{AC} définies par $\overrightarrow{CH_{AB}}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BH_{AC}}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}$.

Les égalités de l'énoncé sont alors équivalentes à $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{MH_{AB}}=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{MH_{AC}}=0$.

On obtient un seul point, intersection de deux droites respectivement perpendiculaires à (AB) et (AC) et passant respectivement par H_{AB} et H_{AC}.

Exercice 13.11

Polytechnique MP 2007

1) Donner une condition nécessaire et suffisante sur $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ pour qu'existent trois points A,B,C du plan affine euclidien tels que $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\alpha$, $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}=\beta$ et $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=\gamma$.

2) On suppose cette condition vérifiée ainsi que $\alpha\beta\gamma\neq 0$.
Montrer que l'orthocentre H de ABC est le barycentre du système pondéré $(A,1/\alpha),(B,1/\beta),(C,1/\gamma)$.

1) Supposons (analyse) que les points A,B et C existent. Remarquons que $\alpha=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)=AB^2-\beta$. De même pour les autres relations. Ainsi $\begin{cases}AB^2=\alpha+\beta\\ BC^2=\beta+\gamma\\ AC^2=\alpha+\gamma\end{cases}$. En particulier, une condition nécessaire est que $\alpha+\beta\geqslant 0$, $\beta+\gamma\geqslant 0$ et $\alpha+\gamma\geqslant 0$. Rappelons qu'il existe un triangle (éventuellement plat) de côtés de longueur a,b et c si et seulement si $a\leqslant b+c$, $b\leqslant a+c$ et $c\leqslant a+b$ (ce qui s'écrit également de manière équivalente $|b-c|\leqslant a\leqslant b+c$). Par exemple $AB\leqslant AC+BC\Leftrightarrow\sqrt{\alpha+\beta}\leqslant\sqrt{\beta+\gamma}+\sqrt{\alpha+\gamma}$ s'écrit aussi en élevant au carré, $\gamma\geqslant-\sqrt{(\gamma+\alpha)(\gamma+\beta)}$.
Réciproquement (synthèse) supposons que $\alpha+\beta\geqslant 0$, $\beta+\gamma\geqslant 0$ et $\alpha+\gamma\geqslant 0$ et que $\gamma\geqslant-\sqrt{(\gamma+\alpha)(\gamma+\beta)}$, $\beta\geqslant-\sqrt{(\beta+\alpha)(\beta+\gamma)}$ et $\alpha\geqslant-\sqrt{(\alpha+\beta)(\alpha+\gamma)}$.
En posant $a=\sqrt{\beta+\gamma}$, $b=\sqrt{\alpha+\gamma}$ et $c=\sqrt{\alpha+\beta}$, on sait d'après l'hypothèse qu'il existe un triangle ABC (éventuellement plat) tel que $\begin{cases}AB^2=\alpha+\beta\\ BC^2=\beta+\gamma\\ AC^2=\alpha+\gamma\end{cases}$.

Ce système s'inverse en $\begin{cases} \alpha = \frac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2 - BC^2\right) \\ \beta = \frac{1}{2}\left(AB^2 + BC^2 - AC^2\right) \\ \gamma = \frac{1}{2}\left(AC^2 + BC^2 - AB^2\right) \end{cases}$.

Or $$BC^2 = \left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right)^2 = AB^2 + AC^2 - 2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$$

donc $\alpha = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ et de même $\beta = \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}$ et $\gamma = \overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$.
Conclusion : la condition nécessaire et suffisante est $\alpha + \beta \geqslant 0$, $\beta + \gamma \geqslant 0$, $\alpha + \gamma \geqslant 0$, $\alpha \geqslant -\sqrt{(\alpha+\beta)(\alpha+\gamma)}$, $\beta \geqslant -\sqrt{(\beta+\alpha)(\beta+\gamma)}$ et $\gamma \geqslant -\sqrt{(\gamma+\alpha)(\gamma+\beta)}$.

2) On suppose implicitement le triangle non plat. Soit H l'orthocentre de ABC. Il existe α', β', γ' réels de somme non nulle, définis à un scalaire multiplicatif non nul près tels que H est le barycentre du système pondéré $(A, \alpha'), (B, \beta'), (C, \gamma')$.
Nous avons par exemple, $(\alpha' + \beta' + \gamma')\overrightarrow{AH} = \beta'\overrightarrow{AB} + \gamma'\overrightarrow{AC}$. Sachant que les droites (AH) et (BC) sont orthogonales, on obtient, en effectuant le produit scalaire avec $\overrightarrow{BC}$, la relation $0 = -\beta\beta' + \gamma\gamma'$. De la même façon, on obtient $\alpha\alpha' = \beta\beta' = \gamma\gamma' = \lambda$. Le réel λ est non nul car $\alpha\beta\gamma \neq 0$ (sinon on aurait $\alpha' = \beta' = \gamma' = 0$).
Il en résulte que H est le barycentre du système pondéré $(A, \frac{\lambda}{\alpha}), (B, \frac{\lambda}{\beta}), (C, \frac{\lambda}{\gamma})$.
On peut bien sûr choisir $\lambda = 1$.

Ce qu'il faut savoir

Un triangle (éventuellement plat) de côté a, b, c existe si et seulement si $a \leqslant b+c$, $b \leqslant a + c$ et $c \leqslant a + b$ ce qui est équivalent à $|b - c| \leqslant a \leqslant b + c$.
Une autre formulation utile est : deux cercles $\mathcal{C}(O, R)$ et $\mathcal{C}(O', R')$ sont d'intersection non vide si et seulement si
$$|R - R'| \leqslant OO' \leqslant R + R'.$$

Exercice 13.12

Polytechnique MP 2007

Soient A, B, C et D quatre points du plan affine euclidien. Montrer que :
$$AC \times BD \leqslant AB \times CD + AD \times BC.$$

Désignons par b l'affixe de $\overrightarrow{AB}$, par c celle de $\overrightarrow{AC}$ et par d celle de $\overrightarrow{AD}$.
$b - d$ est l'affixe de $\overrightarrow{DB}$, $c - d$ est l'affixe de $\overrightarrow{DC}$ et $b - c$ est l'affixe de $\overrightarrow{CB}$.

Nous voulons donc démontrer que $|c| \, . \, |b-d| \leqslant |b| \, . \, |c-d| + |d| \, . \, |b-c|$.
Écrivons que $c(b-d) = b(c-d) + d(b-c)$. On utilise alors l'inégalité triangulaire (passage au module complexe) pour conclure.

Remarque
On doit cette inégalité au mathématicien grec Ptolémée.

13.3 ISOMÉTRIES VECTORIELLES ET AFFINES EN DIMENSION 3

Ce qu'il faut savoir

Rappelons et complétons les résultats sur les isométries vectorielles que nous avons déjà abordées dans le chapitre « espaces euclidiens » .

Soit $M \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R}) \setminus \{\pm I_3\}$, une matrice orthogonale (représentant un endomorphisme u dans une base orthonormale directe). Rappelons qu'il s'agit d'une matrice dont les vecteurs colonnes sont orthogonaux deux à deux **et unitaires**. Pour caractériser géométriquement l'automorphisme orthogonal associé, on regarde dans l'ordre :

• si la matrice M est de plus symétrique alors u est une symétrie orthogonale par rapport à son image. Dans ce cas, si $\operatorname{tr} u = 1 (= 1 + 1 - 1)$ alors u est une réflexion (symétrie par rapport à un plan) sinon u est un retournement (symétrie par rapport à une droite).

• si la matrice M n'est pas symétrique, on calcule son déterminant, s'il vaut 1 alors il s'agit d'une rotation sinon $\det M = -1$ et $-M$ est une rotation.

Si M est une rotation d'axe $\mathcal{D} = \mathbb{R}a$, **orienté** par le vecteur directeur a, on peut définir un angle θ caractérisant la rotation $u = \operatorname{rot}(a, \theta)$. On peut choisir $\theta \in]-\pi, \pi]$. La **trace** de cette matrice s'obtient immédiatement par $\operatorname{tr} u = 1 + 2\cos\theta$. Ainsi $\theta = \varepsilon \operatorname{Arccos}\left(\frac{1}{2}(\operatorname{tr} u - 1)\right)$ avec $\varepsilon = \pm 1$.

On cherche ensuite un vecteur a invariant (valeur propre 1) qui orientera l'axe $\mathcal{D} = \mathbb{R}a = E_1(u)$.

Pour déterminer le signe ε (le cosinus ne permet pas de trancher), on peut utiliser la formule ci-dessous très utile :

$$\forall x \in E \setminus \mathbb{R}a, \quad \operatorname{sgn}[a, x, u(x)] = \operatorname{sgn}(\sin\theta)$$

et ainsi déterminer le signe de θ (dans $]-\pi, \pi]$) en choisissant x le plus simple possible (typiquement un vecteur de la base canonique).

Remarques
∘ On utilise parfois la caractérisation suivante des rotations parmi les matrices orthogonales $M \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R})$.

Les vecteurs colonnes C_1, C_2 et C_3 de la matrice M forment une base orthonormale directe si et seulement si M est la matrice d'une rotation, ce qui peut se traduire par $C_3 = C_1 \wedge C_2$.
∘ si $\det u = -1$, alors $-u$ est une rotation (que l'on étudie comme précédemment) mais le géomètre préfère voir u comme la composée (commutative) d'une rotation et d'une réflexion ($s_{a^\perp}$)...

Exercice 13.13

CCP PC 2005

On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice représentative dans la base canonique est $A = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. Montrer que f est une isométrie dont on précisera les caractéristiques.

On remarque que A est une matrice orthogonale (ses vecteurs colonnes sont orthogonaux et **unitaires**) donc f est une isométrie vectorielle (ou encore un automorphisme orthogonal). De plus $\det A = 1$, donc f est une rotation. Pour la caractériser, on cherche son axe, c'est-à-dire son espace propre associé à la valeur propre 1 (ensemble des invariants). **Une fois l'axe orienté** (par un vecteur propre), on cherche son angle avec la trace et le produit mixte.

Le vecteur $u(1, -1, 0)$ engendre $E_1(A)$, l'axe est donc $\mathcal{D} = \mathbb{R}u$ et on l'oriente par u.

Soit $\theta \in]-\pi, \pi]$ un angle représentant la rotation. On sait que $\operatorname{tr} A = 1 + 2\cos\theta = \dfrac{1}{3}$ donc $\theta = \pm \operatorname{Arccos}(-1/3)$. Pour déterminer le signe, on peut utiliser la propriété bien pratique suivante. Pour tout $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{R}u$, le signe de $[x, f(x), u]$ est égal au signe de $\sin\theta$. On choisit x le plus simple possible, typiquement $x = (1, 0, 0)$ donc $f(x)$ vaut la première colonne de A. Il vient :

$$\operatorname{sgn}(\sin\theta) = \operatorname{sgn}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} > 0.$$

Conclusion : f est la rotation d'axe $\mathbb{R}u$, orienté par u et d'angle $\operatorname{Arccos}(-1/3)$.

Exercice 13.14

Navale PC 2005

On pose $M = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & a \\ -2 & 1 & b \\ -1 & 2 & c \end{pmatrix}$. Trouver a, b, c pour que M soit une matrice de rotation. Déterminer alors son axe et son angle.

Pour que M soit la matrice d'une rotation, il est nécessaire (et suffisant car $(C_1(M), C_2(M))$ est une famille orthonormale) que $C_3(M) = C_1(M) \wedge C_2(M)$. On résout donc :
$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \wedge \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$, ce qui donne directement $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$. Donc
$M = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

On procède alors comme dans l'exercice précédent.

• L'axe est porté et est orienté par le vecteur $u = (1, 0, -1)$. Soit $\theta \in]-\pi, \pi]$ son angle. On a $1 + 2\cos\theta = \operatorname{tr} A = \frac{5}{3}$ donc $\theta = \pm \operatorname{Arccos}\left(\frac{1}{3}\right)$. En prenant $x = (1, 0, 0) \in \mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{R}u$, on obtient :

$$\operatorname{sgn}(\sin\theta) = \operatorname{sgn}([x, Mx, u]) = \operatorname{sgn}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} > 0,$$

d'où $\theta = \operatorname{Arccos}\left(\frac{1}{3}\right)$.

Exercice 13.15

Centrale PSI 2006

Dans $\mathbb{R}^3$ affine euclidien, on considère les plans $\mathcal{P} : z = 0$ et $\mathcal{Q} : x + y + 2 = 0$. Soient $s_{\mathcal{P}}$ et $s_{\mathcal{Q}}$ les réflexions par rapport à $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$.

1) Donner les expressions analytiques de $s_{\mathcal{P}}$ et $s_{\mathcal{Q}}$ dans la base canonique.

2) Montrer que $s_{\mathcal{P}} \circ s_{\mathcal{Q}}$ est une rotation dont on déterminera l'axe et l'angle. Que dire de $s_{\mathcal{Q}} \circ s_{\mathcal{P}}$?

1) L'expression analytique de $s_{\mathcal{P}}$ est immédiate : $x' = x$, $y' = y$ et $z' = -z$. Pour la réflexion $s_{\mathcal{Q}}$, on peut également aller assez vite mais donnons une méthode générale. Soit $\overrightarrow{n_{\mathcal{Q}}}$ un vecteur normal unitaire de $\mathcal{Q}$. On peut prendre $\overrightarrow{n_{\mathcal{Q}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)$.

On a pour tout $x \in \mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{s_{\mathcal{Q}}}(x) &= \left(2\overrightarrow{p_{\mathcal{Q}}} - \operatorname{Id}\right)(x) = \left(2(\operatorname{Id} - \overrightarrow{p_{\operatorname{Vect}(\overrightarrow{n_{\mathcal{Q}}})}}) - \operatorname{Id}\right)(x) \\ &= \left(\operatorname{Id} - 2\overrightarrow{p_{\operatorname{Vect}(\overrightarrow{n_{\mathcal{Q}}})}}\right)(x) = x - 2 < \overrightarrow{n_{\mathcal{Q}}}, x > \overrightarrow{n_{\mathcal{Q}}}. \end{aligned}$$

On en déduit les images de la base canonique $\mathcal{B}$, d'où

$$\operatorname{mat}(\overrightarrow{s_{\mathcal{Q}}}, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le point $A(-2,0,0)$ appartient à $\mathcal{Q}$, donc si $M' = s_{\mathcal{Q}}(M)$, alors

$$\overrightarrow{AM'} = \overrightarrow{s_{\mathcal{Q}}}\left(\overrightarrow{AM}\right)$$

$$\begin{pmatrix} x'+2 \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x+2 \\ y \\ z \end{pmatrix};$$

d'où $\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & -y-2 \\ y' & = & -x-2 \\ z' & = & z \end{array}\right.$.

2) Les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ se coupent suivant la droite (AB) avec $A(-2,0,0)$ et $B(0,-2,0)$. On sait que la composée de deux réflexions est une rotation d'axe l'intersection des deux plans, ici (AB), et d'angle le double de l'angle formé par les deux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$. Ici les deux plans sont perpendiculaires donc l'angle vaut π et la rotation est un retournement. L'ordre dans lequel on considère les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ dans le raisonnement géométrique n'intervenant pas ($-\pi = \pi\ (2\pi)$), la composée $s_{\mathcal{Q}} \circ s_{\mathcal{P}}$ nous donne le même retournement.
On peut aussi prouver que $s_{\mathcal{P}} \circ s_{\mathcal{Q}}$ est un retournement en écrivant

$$\begin{aligned}\mathrm{mat}(\overrightarrow{s_{\mathcal{P}}}, \mathcal{B}) \times \mathrm{mat}(\overrightarrow{s_{\mathcal{Q}}}, \mathcal{B}) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Cette matrice est la matrice d'une rotation, sa trace valant $-1 = 1 + 2\cos\theta$, d'où $\cos\theta = -1$, et donc $\theta = \pi\ (2\pi)$. Il s'agit d'un retournement. La partie linéaire de $s_{\mathcal{P}} \circ s_{\mathcal{Q}}$, qu'on note $\overrightarrow{s_{\mathcal{P}}} \circ \overrightarrow{s_{\mathcal{Q}}}$, est un retournement. D'autre part, il est immédiat que tout point de $\mathcal{P} \cap \mathcal{Q} = (AB)$ est invariant par $s_{\mathcal{P}} \circ s_{\mathcal{Q}}$, et donc $s_{\mathcal{P}} \circ s_{\mathcal{Q}}$ est le retournement d'axe (AB).

Remarque

En général $s_{\mathcal{P}} \circ s_{\mathcal{Q}} \neq s_{\mathcal{Q}} \circ s_{\mathcal{P}}$. Les réflexions commutent ici car les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont perpendiculaires. Cependant, on retiendra que si $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ ne sont pas parallèles, alors $s_{\mathcal{P}} \circ s_{\mathcal{Q}}$ est une rotation d'axe $\mathcal{P} \cap \mathcal{Q}$ dont on peut déterminer l'angle en orientant l'axe et en se plaçant sur un plan perpendiculaire à l'axe (on se ramène au cas du plan, où le produit de deux réflexions est une rotation d'angle deux fois l'angle formé par les deux droites). Si $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont parallèles, alors on obtient une translation (on généralise sans peine le cas du plan).

Exercice 13.16

Polytechnique PC 2005

Soit $\overrightarrow{n} = (a, b, c)$ un vecteur unitaire de l'espace vectoriel euclidien $\mathbb{R}^3$. Caractériser l'endomorphisme associé à la matrice $A = \begin{pmatrix} b^2+c^2 & -ab & -ac \\ -ab & a^2+c^2 & -bc \\ -ac & -bc & a^2+b^2 \end{pmatrix}$.

• On remarque que la matrice A est orthogonale et symétrique. De plus, on a $\mathrm{tr}(A) = 2(a^2 + b^2 + c^2) = 2$, donc A est la matrice d'une réflexion (symétrie orthogonale par rapport à un plan). Cherchons le sous-espace propre $E_1(A)$. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$AX = X \Leftrightarrow \begin{cases} -a^2x - aby - acz = 0 \\ -abx - b^2y - bcz = 0 \\ -acx - bcy - c^2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\,(ax+by+cz) = 0 \\ b\,(ax+by+cz) = 0 \\ c\,(ax+by+cz) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow ax + by + cz = 0 \text{ (car l'une des coordonnées a,b ou c est non nulle).}$$

La matrice A est donc la matrice de la projection orthogonale sur le plan $\{M(x, y, z) \mid ax + by + cz = 0\}$.

• Voici une seconde résolution de l'exercice plus astucieuse.

Remarquons que $A = I_3 - J$ où $J = (x_i x_j)$, en notant $(a, b, c) = (x_1, x_2, x_3)$. La matrice J est la matrice de la projection orthogonale sur $\mathbb{R}\overrightarrow{n}$. En effet, $J = {}^t\overrightarrow{n}\ \overrightarrow{n}$ et donc $J\overrightarrow{x} = < \overrightarrow{n}, \overrightarrow{x} > \overrightarrow{n}$. On retrouve que la matrice A est donc la matrice de la projection orthogonale sur le plan orthogonal à $\overrightarrow{n}$, c'est-à-dire

$$\{M(x, y, z) \mid ax + by + cz = 0\}.$$

Exercice 13.17

TPE PC 2006

On considère l'espace vectoriel euclidien $\mathbb{R}^3$. Soit R une rotation d'angle θ et de vecteur directeur unitaire ω. Soit $x \in E$.

1) Montrer que $R(x) = \cos(\theta)x + \sin(\theta)(\omega \wedge x) + (1 - \cos\theta) < \omega, x > \omega$.

2) On pose $u_0 = x$ et on définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_{n+1} = \omega \wedge u_n$.
Calculer u_{2n} et u_{2n+1} pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3) On pose $v_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{\theta^k}{k!} u_k$. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to\infty} v_n$.

1) Si x est orthogonal à ω, alors on sait que $R(x) = \cos(\theta)x + \sin(\theta)(\omega \wedge x)$ donc la formule de l'énoncé est vraie puisque $<\omega, x>= 0$.
   Si x est colinéaire à ω alors $R(x) = x$ et on remarque que

$$\cos(\theta)x + \sin(\theta)(\underbrace{\omega \wedge x}_{=0}) + (1 - \cos\theta)\underbrace{<\omega, x> \omega}_{=x} = \cos(\theta)x + (1 - \cos\theta)x = x.$$

   La formule de l'énoncé est vraie pour de tels x. On conclut en disant que R et l'application $x \mapsto \cos(\theta)x+\sin(\theta)(\omega\wedge x)+(1-\cos\theta) <\omega, x> \omega$ sont deux endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ qui coïncident sur deux sous-espaces supplémentaires ($\mathbb{R}\omega$ et $(\mathbb{R}\omega)^\perp$) donc sont égaux sur $\mathbb{R}^3$.

2) Rappelons la formule du double produit vectoriel :

$$u \wedge (v \wedge w) =< u, w > v- < u, v > w.$$

   Soit φ l'application définie par $x \in \mathbb{R}^3 \mapsto \omega \wedge x$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^3$, on a :

$$\varphi(\varphi(x)) = \omega \wedge (\omega \wedge x) =<\omega, x> \omega - \underbrace{\|\omega\|^2}_{=1} x = -(x - p_\omega(x)) = -p_{\omega^\perp}(x),$$

   d'où $\varphi \circ \varphi = -p_{\omega^\perp}$. Calculons également $\varphi \circ \varphi \circ \varphi$. On a, pour tout $x \in \mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned}(\varphi \circ \varphi \circ \varphi)(x) &= \varphi(-p_{\omega^\perp}(x)) \\ &= \omega \wedge (<\omega, x> \omega - x) = -\omega \wedge x = -\varphi(x)\end{aligned}$$

   Il en découle que pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{2n} = \varphi^{2n}(x) = (-1)^n p_{\omega^\perp}(x) = (-1)^{n+1}u_2$ car $(p_{\omega^\perp})^2 = p_{\omega^\perp}$ et

$$u_{2n+1} = \varphi^{2n+1}(x) = (-1)^n p_{\omega^\perp}(\varphi(x)) = (-1)^{n+1}(-\varphi(x)) = (-1)^n u_1,$$

   cette dernière formule s'étend à $n = 0$ (mais pas la précédente).

3) Pour tout $x \in \mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned}v_{2n+1}(x) &= \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{\theta^k}{k!}u_k = u_0 + \sum_{p=1}^{n} \frac{\theta^{2p}}{(2p)!}u_{2p} + \sum_{p=0}^{n} \frac{\theta^{2p+1}}{(2p+1)!}u_{2p+1} \\ &= u_0 + \underbrace{\left(\sum_{p=1}^{n} \frac{\theta^{2p}}{(2p)!}(-1)^{p+1}\right)}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -(\cos\theta-1)} u_2 + \underbrace{\left(\sum_{p=0}^{n} \frac{\theta^{2p+1}}{(2p+1)!}(-1)^{p}\right)}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sin\theta} u_1,\end{aligned}$$

   d'où $\lim_{n\to+\infty} v_{2n+1}(x) = u_0 + (1 - \cos\theta)u_2 + \sin\theta u_1$.

Comme $\lim_{n\to+\infty}(v_{2n+1}(x)-v_{2n}(x)) = \lim_{n\to+\infty}\left[\left(\frac{\theta^{2n+1}}{(2n+1)!}(-1)^n\right)u_1\right] = 0$, on a

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} v_n(x) &= u_0 + (1-\cos\theta)u_2 + \sin\theta u_1\\ &= x + (1-\cos\theta)(<\omega, x>\omega - x) + \sin\theta\,(\omega\wedge x)\\ &= \cos(\theta)x + (1-\cos\theta)<\omega,x>\omega + \sin(\theta)(\omega\wedge x)\\ &= R(x).\end{aligned}$$

Conclusion : la série vectorielle $\sum \frac{\theta^k}{k!}u_k$ converge, sa somme $\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\theta^k}{k!}u_k$ est $R(x)$.

Exercice 13.18

Mines-Ponts MP 2007

Caractériser $s\circ r\circ s$ où r et s sont respectivement une rotation et une réflexion de $\mathbb{R}^3$ vectoriel euclidien.

Nous savons que $s\circ r\circ s$ est un automorphisme orthogonal et nous avons : $\det(s\circ r\circ s) = (\det s)^2\det r = 1$ donc $s\circ r\circ s$ est une rotation. Soit u vecteur directeur de l'axe de r et $\theta\in]-\pi,\pi]$ un angle de r orienté par u. Comme

$$(s\circ r\circ s)(s(u)) = s(r(u)) = s(u),$$

l'endomorphisme $s\circ r\circ s$ est une rotation d'axe $\mathbb{R}s(u)$. Déterminons son angle $\theta'\in]-\pi,\pi]$ en ayant orienté l'axe par $s(u)$. Puisque

$$1+2\cos\theta' = \operatorname{tr}(s\circ r\circ s) = \operatorname{tr}(r\circ s\circ s) = \operatorname{tr} r = 1+2\cos\theta,$$

on obtient $\theta = \theta'\ (2\pi)$ ou $\theta = -\theta'\ (2\pi)$.

Soit $x\in\mathbb{R}^3\setminus\mathbb{R}s(u)$. On sait que $\operatorname{sgn}(\sin\theta') = \operatorname{sgn}[x, s\circ r\circ s(x), s(u)]$. Or

$$[s(x), s(s\circ r\circ s(x)), s(s(u))] = \det s\times[x, s\circ r\circ s(x), s(u)]$$
$$[s(x), r\circ s(x), u] = -[x, s\circ r\circ s(x), s(u)].$$

Remarquons que $x\notin\mathbb{R}s(u)\Leftrightarrow s(x)\notin\mathbb{R}u$ donc $\operatorname{sgn}[s(x), r\circ s(x), u] = \operatorname{sgn}(\sin\theta)$. Ainsi $\operatorname{sgn}\sin\theta' = -\operatorname{sgn}(\sin\theta)$.

Conclusion : $s\circ r\circ s$ est la rotation d'axe $\mathbb{R}s(u)$ (orienté par $s(u)$) et d'angle $-\theta$.

Exercice 13.19

Mines-Ponts MP 2007, Polytechnique MP 2007

Montrer que $M = \begin{bmatrix} a & b & c\\ c & a & b\\ b & c & a\end{bmatrix}$ est la matrice d'une rotation si, et seulement si, il existe $t\in\left[0,\frac{4}{27}\right]$ tel que a, b et c sont les trois racines du polynôme X^3-X^2+t.

Pour simplifier la rédaction, raisonnons par implication.

• Si M est la matrice d'une rotation, alors ses vecteurs colonnes forment une base orthonormale directe de $\mathbb{R}^3$, donc $\left(\begin{pmatrix} a \\ c \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ a \\ c \end{pmatrix}\right)$ est une famille orthonormale et $\begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \\ b \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} b \\ a \\ c \end{pmatrix}$.

On en déduit les égalités $a^2+b^2+c^2 = 1$, $ab+bc+ca = 0$, ainsi que $a^2 - bc = a$, $b^2 - ca = b$, $c^2 - ab = c$.

Il vient $a^2+b^2+c^2 = a+b+c+ab+bc+ca = a+b+c$ donc $a+b+c = 1$.

Notons $S = a+b+c = 1$, $T = ab+bc+ca = 0$ et $t = -abc$.

On sait que a , b et c sont les solutions de l'équation $x^3 - Sx^2 + Tx + t = 0$ (car $(x-a)(x-b)(x-c) = x^3 - Sx^2 + Tx + t$) d'où a , b et c sont les trois racines réelles d'un polynôme $X^3 - X^2 + t$ où $t \in \mathbb{R}$.

Notons $f(x) = x^3 - x^2 + t$ et calculons $f'(x) = 3x^2 - 2x = x(3x-2)$. Ceci nous permet de dresser le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		0		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$-$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	t	$\searrow$	$f(\frac{2}{3})$	$\nearrow$	$+\infty$

Pour que f admette trois racines réelles (éventuellement confondues), il faut et il suffit que $f\left(\frac{2}{3}\right) \leqslant 0 \leqslant t$ ce qui équivaut à $t \in \left[0, \frac{4}{27}\right]$.

• Réciproquement, soient $t \in \left[0, \frac{4}{27}\right]$ et a, b et c les trois racines du polynôme $X^3 - X^2 + t$. Nous savons que $S = a+b+c = 1$ et $T = ab+bc+ca = 0$.

On calcule alors : $S^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca) = 1$, d'où $a^2+b^2+c^2 = 1$.

Enfin, $a^2 - a = a(a-1) = -a(b+c) = -ab - ac = bc$

De même, $b^2 - b = ca$ et $c^2 - c = ab$.

Ces relations montrent que $\left(\begin{pmatrix} a \\ c \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ a \\ c \end{pmatrix}\right)$ est une famille orthonormale et $\begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \\ b \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} b \\ a \\ c \end{pmatrix}$ donc les colonnes de M forment une base orthonormale directe, et M est bien la matrice d'une rotation.

Exercice 13.20

Polytechnique MP 2007

Donner une condition nécessaire pour que deux rotations de $\mathbb{R}^3$ commutent.

Écartons d'emblée le cas particulier où l'une des rotations est l'identité.

Soient r_1 et r_2 deux rotations distinctes de Id telles que $r_1 \circ r_2 = r_2 \circ r_1$.

Soit $\mathbb{R}u_1$ l'axe de r_1. C'est l'espace propre associé à la valeur propre 1. Comme r_1 et r_2 commutent, cet espace propre est stable par r_2, et comme c'est une droite, cela signifie que u_1 est un vecteur propre de r_2. La rotation r_2 n'a pas d'autre valeur propre que 1 ou -1 (auquel cas r_2 est un retournement) donc soit $\mathbb{R}u_1$ est l'axe de r_2 soit u_1 est orthogonal à l'axe de r_2 et r_2 est un retournement.

Examinons ce cas particulier, dans une base $\mathcal{B}$ orthonormale directe adaptée,

$$\operatorname{mat}(r_1, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \text{ et } \operatorname{mat}(r_2, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

On voit alors que $r_1 \circ r_2 = r_2 \circ r_1$ s'écrit

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ -\sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \Leftrightarrow \sin\theta = 0 \Leftrightarrow \theta \in \pi\mathbb{Z}.$$

Il en résulte que r_1 est soit l'identité (exclue par hypothèse) soit un retournement également.

En résumé, soit les deux rotations (supposées distinctes de Id) ont même axe, soit les deux rotations sont des retournements avec des axes orthogonaux.

Remarquons que cette condition nécessaire est également suffisante.

13.4 LIEUX GÉOMÉTRIQUES

Exercice 13.21

Centrale PC 2007

On se place dans le plan affine euclidien $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère orthonormé. Soit $\mathcal{E}$ l'ellipse d'équation $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

1) Montrer que la droite d'équation $ux + vy + w = 0$ est tangente à l'ellipse $\mathcal{E}$ si et seulement si $a^2u^2 + b^2v^2 = w^2$.

2) Trouver le lieu des points d'intersection des tangentes à $\mathcal{E}$ orthogonales entre elles.

1) En un point $M(x_0, y_0) \in \mathcal{E}$, une équation de la tangente à $\mathcal{E}$ est $\dfrac{xx_0}{a^2}+\dfrac{yy_0}{b^2}=1$. On sait qu'une équation de droite dans le plan est unique à un coefficient multiplicatif non nul près.

• Supposons que la droite d'équation $ux + vy + w = 0$ soit tangente à l'ellipse en un point (x_0, y_0). La tangente en (x_0, y_0) admet également pour équation $\dfrac{xx_0}{a^2}+\dfrac{yy_0}{b^2}=1$ donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\begin{cases} u = \lambda\dfrac{x_0}{a^2} \\ v = \lambda\dfrac{y_0}{b^2} \\ w = -\lambda \end{cases}$. Remarquons que $\lambda \neq 0$ et donc $w \neq 0$ car $(u, v) \neq (0,0)$. Il en résulte que $\begin{cases} x_0 = \dfrac{a^2u}{\lambda} \\ y_0 = \dfrac{b^2v}{\lambda} \\ \lambda = -w \end{cases}$. Puis, en utilisant la relation $\dfrac{x_0^2}{a^2}+\dfrac{y_0^2}{b^2}=1$, on obtient l'égalité $\dfrac{1}{a^2}\left(\dfrac{a^2u}{-w}\right)^2+\dfrac{1}{b^2}\left(\dfrac{b^2v}{-w}\right)^2=1$ qui peut s'écrire $a^2u^2+b^2v^2=w^2$.

• Réciproquement, supposons que $a^2u^2 + b^2v^2 = w^2$. Comme $(u, v) \neq (0,0)$, on a $w \neq 0$. Posons alors $\lambda = -w$, $x_0 = \dfrac{a^2u}{\lambda}$ et $y_0 = \dfrac{b^2v}{\lambda}$.

Notre hypothèse nous montre que $\dfrac{x_0^2}{a^2}+\dfrac{y_0^2}{b^2}=1$, et donc (x_0, y_0) est un point de l'ellipse. Comme on peut réécrire les relations sous la forme $\begin{cases} u = \lambda\dfrac{x_0}{a^2} \\ v = \lambda\dfrac{y_0}{b^2} \\ w = -\lambda \end{cases}$, on en déduit que la droite d'équation $ux + vy + w = 0$ est tangente à l'ellipse au point (x_0, y_0).

2) • Supposons que $M(x, y)$ est un point d'intersection de deux tangentes à l'ellipse $\mathcal{D} : ux + vy + w = 0$ et $\mathcal{D}' : -vx + uy + w' = 0$. Nous avons $a^2u^2 + b^2v^2 = w^2 = (ux + vy)^2$ (1) et $a^2v^2 + b^2u^2 = w'^2 = (-vx + uy)^2$ (2). La somme (1) + (2) nous donne $\left(a^2 + b^2\right)(u^2 + v^2) = \left(x^2 + y^2\right)(u^2 + v^2)$. Comme $(u, v) \neq (0,0)$, on en déduit que $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$, le point M est sur le cercle de centre O et de rayon $\sqrt{a^2+b^2}$.

• Réciproquement, donnons-nous un point $M(x, y)$ vérifiant $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$. Montrons qu'il existe $(u, v) \neq (0,0)$ tel que $a^2u^2 + b^2v^2 = w^2$ (3) et $a^2v^2 + b^2u^2 = w'^2$ (4) avec $w = -ux - vy$ et $w' = vx - uy$. On aura ainsi montré que M est point d'intersection de deux tangentes orthogonales $\mathcal{D} : ux + vy + w = 0$ et $\mathcal{D}' : -vx + uy + w' = 0$. La relation (3) peut s'écrire en remplaçant w par $-ux - vy$, $a^2u^2 + bv^2 = u^2x^2 + v^2y^2 + 2xyuv$ ce qui s'écrit également $u^2(x^2 - a^2) + 2xyuv + v^2(y^2 - b^2) = 0$.

Supposons $x^2 \neq a^2$ et cherchons un u solution avec $v = 1$ (on sait que si (u, v) est solution $(\lambda u, \lambda v)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}^*$ est également solution). On a un trinôme en u de discriminant $4[(xy)^2 + (x^2 - a^2)^2] > 0$ (car $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$) donc u existe et $(u, v) = (u, 1)$ est solution à notre problème.

Le cas particulier où $x \in \{-a, a\}$ se traite de même en inversant le rôle de u et v, on cherche v en imposant par exemple $u = 1$.

En conclusion, le lieu recherché, appelé courbe orthoptique de l'ellipse, est le cercle de centre O et de rayon $\sqrt{a^2 + b^2}$.

Exercice 13.22

Centrale PC 2007

On se place dans un espace affine euclidien de dimension 3. On se donne deux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ non coplanaires.

1) Montrer que l'on peut construire un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ tel que $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ aient pour système d'équations :

$$\mathcal{D} : \left\{ \begin{array}{l} y = mx \\ z = a \end{array} \right. \quad \text{et } \mathcal{D}' : \left\{ \begin{array}{l} y = -mx \\ z = -a \end{array} \right. \quad (\text{avec } a \neq 0 \text{ et } m \neq 0).$$

2) Déterminer le lieu des points équidistants de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.

1) Considérons Δ la perpendiculaire commune à $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$. Soient $\{H\} = \mathcal{D} \cap \Delta$ et $\{H'\} = \mathcal{D}' \cap \Delta$.

Prenons comme origine du repère, O le milieu de $[HH']$ et comme vecteur $\vec{k}$ un vecteur directeur unitaire de Δ.

Soient $\vec{u}$ et $\vec{u'}$ des vecteurs directeurs unitaires de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$. On choisit alors pour vecteurs $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$, des vecteurs directeurs unitaires des bissectrices de $\vec{\mathcal{D}} = \mathbb{R}\vec{u}$ et $\vec{\mathcal{D}'} = \mathbb{R}\vec{u'}$, par exemple,

$$\vec{\imath} = \frac{1}{\left\|\vec{u} + \vec{u'}\right\|}\left(\vec{u} + \vec{u'}\right) \quad \text{et} \quad \vec{\jmath} = \frac{1}{\left\|\vec{u} - \vec{u'}\right\|}\left(\vec{u} - \vec{u'}\right).$$

Le repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ obtenu répond alors à la question.

2) Rappelons que si $\mathcal{D}$ est définie par un point A et un vecteur directeur $\overrightarrow{u_{\mathcal{D}}}$, alors

$$d(M, \mathcal{D}) = \frac{\left\|\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{u_{\mathcal{D}}}\right\|}{\left\|\overrightarrow{u_{\mathcal{D}}}\right\|}.$$

Ici $A(0, 0, a)$ et $\vec{u}(1, m, 0)$ définissent $\mathcal{D}$. De même, $A'(0, 0, -a)$ et $\vec{u'}(1, -m, 0)$ définissent $\mathcal{D}'$.

Le lieu des points $M(x,y,z)$ équidistants de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ est défini par l'équation suivante :

$$\frac{\left\|\overrightarrow{AM}\wedge\overrightarrow{u}\right\|}{\left\|\overrightarrow{u}\right\|}=\frac{\left\|\overrightarrow{AM}\wedge\overrightarrow{u'}\right\|}{\left\|\overrightarrow{u'}\right\|}\Leftrightarrow\left\|\begin{pmatrix}-m(z-a)\\ z-a\\ mx-y\end{pmatrix}\right\|^2=\left\|\begin{pmatrix}m(z+a)\\ z+a\\ -mx-y\end{pmatrix}\right\|^2$$

$$\Leftrightarrow (m^2+1)az+mxy=0.$$

On obtient donc la quadrique d'équation $z=\dfrac{am}{m^2+1}xy$.

Il s'agit d'un paraboloïde hyperbolique (en forme de selle de cheval).

(en tournant les axes (Ox) et (Oy) autour de (Oz) d'un angle de $\dfrac{\pi}{4}$, on a les relations $x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(X-Y)$ et $y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(X+Y)$, $z=Z$, il vient dans le nouveau repère, $Z=\dfrac{am}{2(m^2+1)}\left(X^2-Y^2\right)$, le paraboloïde est « équilatère »).

Ce qu'il faut savoir

Quelques formules sur les distances

On se place dans l'espace affine euclidien orienté de dimension 3.

• **Distance d'un point à une droite** $\mathcal{D}$ définie par un point A et un vecteur directeur $\overrightarrow{u}$:

$$d(M,\mathcal{D})=\frac{\left\|\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{AM}\right\|}{\left\|\overrightarrow{u}\right\|}.$$

• **Distance d'un point à un plan** $\mathcal{P}$ d'équation $ax+by+cz+d=0$:

$$d(M,\mathcal{P})=\frac{|ax_M+by_M+cz_M+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

• **Distance entre deux droites non coplanaires $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$, perpendiculaire commune.**

Soient $\mathcal{D}=D(A,\overrightarrow{u})$ et $\mathcal{D}'=D(A',\overrightarrow{u'})$ deux droites non coplanaires. Posons $\overrightarrow{n}=\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{u'}$. On obtient un système d'équations définissant la perpendiculaire commune Δ à $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ en écrivant $\Delta=P(A,\overrightarrow{u},\overrightarrow{n})\cap P(A',\overrightarrow{u'},\overrightarrow{n})$.

La distance entre $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ s'obtient directement par la formule

$$d(\mathcal{D},\mathcal{D}')=\frac{\left|\det(\overrightarrow{u},\overrightarrow{u'},\overrightarrow{AA'})\right|}{\left\|\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{u'}\right\|}=\frac{\left|\left[\overrightarrow{u},\overrightarrow{u'},\overrightarrow{AA'}\right]\right|}{\left\|\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{u'}\right\|}.$$

Exercice 13.23

Centrale PC 2005

Soit $A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ un point du plan affine euclidien. Un repère orthonormal tournant d'origine A coupe les axes (Ox) et (Oy) en M et N.

Étudier le lieu géométrique décrit par P, projeté de l'origine O sur la droite (MN).

Posons $\overrightarrow{u_\theta} = \cos\theta\,\overrightarrow{i} + \sin\theta\,\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{v_\theta} = -\sin\theta\,\overrightarrow{i} + \cos\theta\,\overrightarrow{j}$. Notons (AX) et (AY) les axes du repère tournant $(A, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{v_\theta})$. On ne perdra pas de points en considérant que M est le point d'intersection de (Ox) avec (AY) et N le point d'intersection de (Oy) avec (AX).

Notons que pour que M et N existent, il faut que $\theta \notin \dfrac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$. On obtiendra tous les points P en faisant varier θ sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ (un intervalle de longueur π suffit).

Une équation de (AX) dans le repère d'origine $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est

$$-x\sin\theta + y\cos\theta = -\sin\theta + \cos\theta,$$

car A a pour coordonnées $(1, 1)$. De même

$$(AY) : x\cos\theta + y\sin\theta = \cos\theta + \sin\theta.$$

Ainsi les coordonnées des points M et N sont $M\left(\dfrac{\cos\theta+\sin\theta}{\cos\theta}, 0\right) = (1+\tan\theta, 0)$ et $N\left(0, \dfrac{\cos\theta-\sin\theta}{\cos\theta}\right) = (0, 1-\tan\theta)$.

Considérons le triangle rectangle OMN et calculons son aire de deux manières différentes. On obtient :

$$NM \times OP = ON \times OM = (1+\tan\theta)\times(1-\tan\theta) = 1-\tan^2\theta = \frac{\cos 2\theta}{\cos^2\theta}.$$

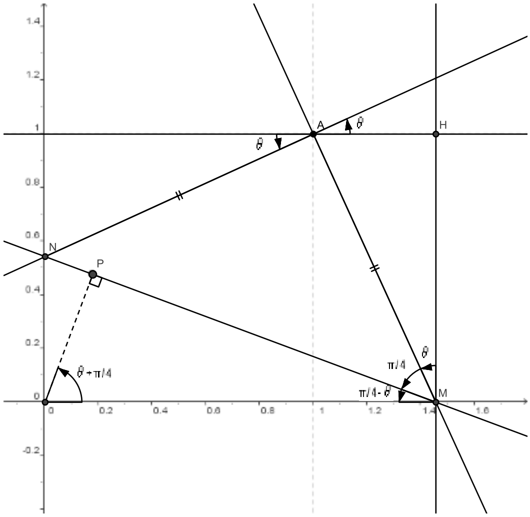
D'autre part, on a :

$$NM = \sqrt{OM^2+ON^2} = \sqrt{2}\sqrt{1+\tan^2\theta} = \frac{\sqrt{2}}{\cos\theta}.$$

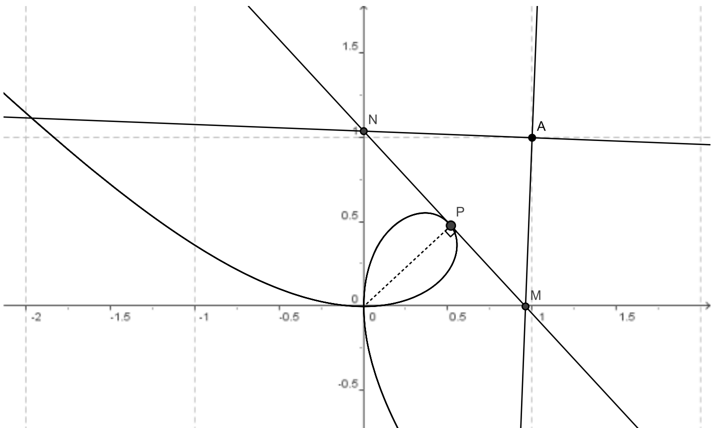
On obtient finalement,

$$OP = \frac{\sqrt{2}\cos 2\theta}{2\cos\theta}.$$

Comme l'angle $(\vec{\imath}, \overrightarrow{OP})$ mesure $\theta + \dfrac{\pi}{4}$ (2π) (voir figure, on remarque au passage que le triangle AMN est isocèle rectangle en A), on se place dans le repère $(O, \overrightarrow{u_{\frac{\pi}{4}}}, \overrightarrow{v_{\frac{\pi}{4}}})$ (ainsi $(O, \overrightarrow{u_{\frac{\pi}{4}}})$ est un axe de symétrie).



La courbe décrite par P est une courbe polaire d'équation $\rho = \dfrac{\sqrt{2}\cos 2\theta}{2\cos\theta}$, $\theta \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ pour l'axe polaire $(O, \overrightarrow{u_{\frac{\pi}{4}}})$.



Exercice 13.24

Centrale PC 2005

Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre O. Soient $\mathcal{D}$ et Δ deux droites orthogonales passant par O. Soit $M \in \mathcal{C}$. Notons P le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{D}$, et Q le projeté orthogonal de M sur Δ.

Enfin, notons A le projeté orthogonal de M sur la droite (PQ). Déterminer le lieu des points A lorsque M décrit le cercle $\mathcal{C}$.

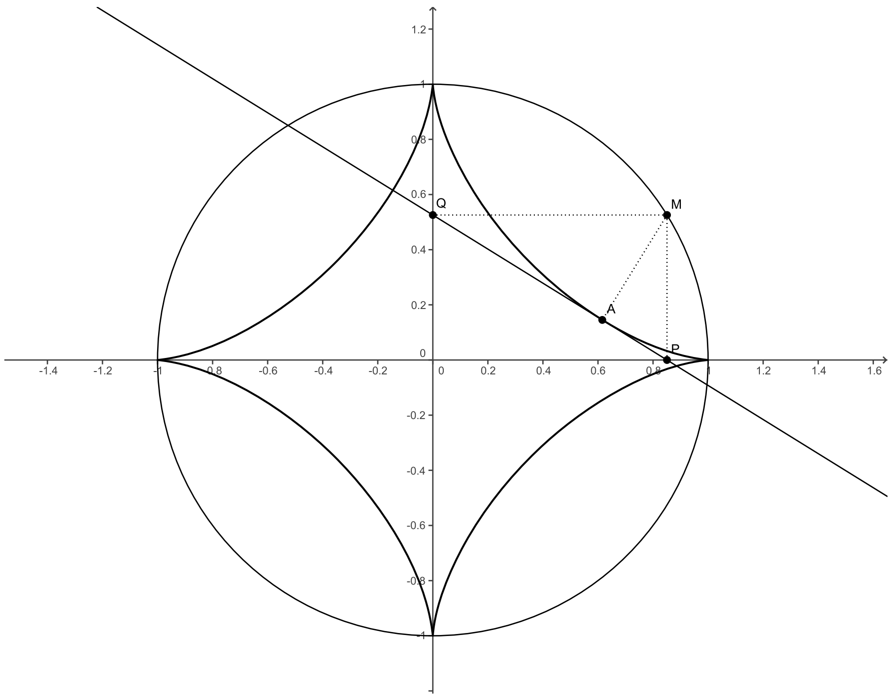
Par une similitude, ramenons-nous au cas où $\mathcal{C}$ est le cercle unité et $\mathcal{D}$ et Δ sont les axes (Ox) et (Oy). Le point M a pour coordonnées $(\cos\theta, \sin\theta)$ et $P(\cos\theta, 0)$, $Q(0, \sin\theta)$. La droite (PQ) admet pour équation :

$$\begin{vmatrix} x - \cos\theta & -\cos\theta \\ y & \sin\theta \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x\sin\theta + y\cos\theta = \sin\theta\cos\theta.$$

Le projeté A est le point d'intersection de la droite (PQ) et de la perpendiculaire à la droite (PQ) passant par M, d'équation

$$-x\cos\theta + y\sin\theta = -\cos\theta \times \cos\theta + \sin\theta \times \sin\theta = \sin^2\theta - \cos^2\theta.$$

On détermine facilement les coordonnées de A avec les formules de Cramer et on obtient $A\left(\cos^3\theta, \sin^3\theta\right)$. La courbe obtenue est appelée une astroïde.



Exercice 13.25

Centrale PC 2005

Soient Δ une droite mobile distante de 1 de l'origine, A, B les intersections de Δ avec (Ox) et (Oy) respectivement, C tel que $OACB$ soit un rectangle.

Déterminer le lieu des points M intersection de la parallèle à Δ passant par O et de la perpendiculaire à Δ passant par C

Une équation de la droite Δ est $x\cos\theta + y\sin\theta = 1$ avec $\theta \in]-\pi, \pi]$.

Pour $\theta \in]-\pi, \pi[\setminus \left\{-\dfrac{\pi}{2}, 0, \dfrac{\pi}{2}\right\}$, Δ coupe (Ox) en $A\left(\dfrac{1}{\cos\theta}, 0\right)$ et (Oy) en $B\left(0, \dfrac{1}{\sin\theta}\right)$, d'où les coordonnées du point $C\left(\dfrac{1}{\cos\theta}, \dfrac{1}{\sin\theta}\right)$.

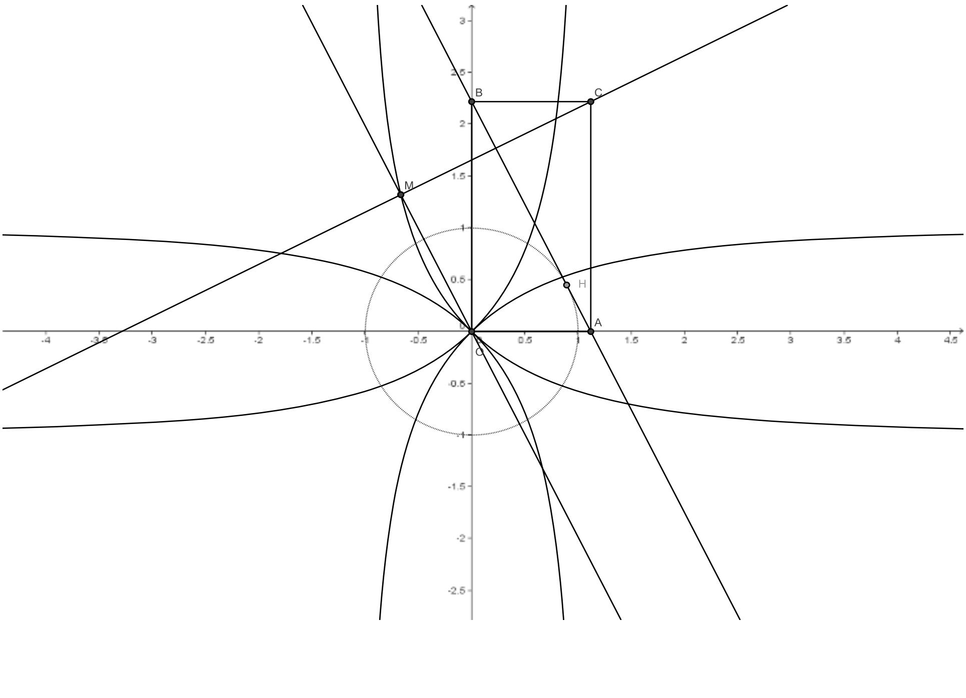
On peut remarquer dès à présent que le lieu des points est invariant par une rotation d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ et que l'on peut limiter l'étude à θ variant sur l'un des intervalles équivalents $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ ou $\left]\dfrac{\pi}{2}, \pi\right[$, $\left]-\dfrac{\pi}{2}, 0\right[$, $\left]-\pi, -\dfrac{\pi}{2}\right[$.

La parallèle à Δ passant par O admet pour équation $x\cos\theta + y\sin\theta = 0$ et la perpendiculaire à Δ passant par C, $-x\sin\theta + y\cos\theta = -\dfrac{1}{\cos\theta} \times \sin\theta + \dfrac{1}{\sin\theta} \times \cos\theta$.

On résout alors le système (avec les formules de Cramer)

$$\begin{cases} x\cos\theta + y\sin\theta = 0 \\ -x\sin\theta + y\cos\theta = -\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} + \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta} \end{cases}$$

pour obtenir $M\left(-\dfrac{\cos 2\theta}{\cos\theta}, \dfrac{\cos 2\theta}{\sin\theta}\right)$ et on peut se contenter d'étudier cette courbe paramétrée sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ pour en déduire le lieu (par rotation ou symétrie).



13.5 EXTREMA

Ce qu'il faut savoir

Inégalité entre moyenne arithmétique et moyenne géométrique. Le cas $n = 3$ est assez couramment utilisé dans des problèmes d'extremum en géométrie.

Soit $(a, b, c) \in \left(\mathbb{R}^+\right)^3$, on a $\sqrt[3]{abc} \leqslant \frac{1}{3}(a + b + c)$ avec égalité si et seulement si $a = b = c$.

(on le prouve en utilisant la (stricte) concavité du logarithme).

Exercice 13.26

TPE PSI 2007, 2006

Soit ABC un triangle du plan affine euclidien. Déterminer les points M intérieurs à ABC tels que le produit des distances de M aux trois côtés de ABC soit maximal.

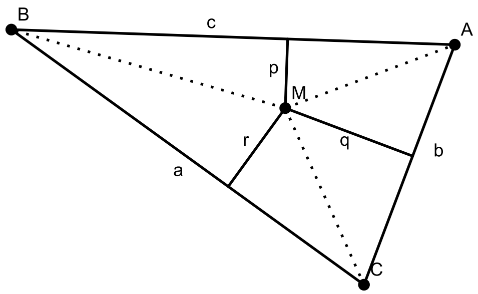
Indication de la rédaction : pour donner une interprétation géométrique, on pourra utiliser le lemme suivant :

Lemme : Soit ABC un triangle non aplati direct du plan affine euclidien orienté alors tout point M est barycentre de

$\left\{(A, [\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}]), (B, [\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MA}]), (C, [\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}])\right\}$ où $[\vec{u}, \vec{v}]$ désigne le produit mixte (c'est-à-dire le déterminant dans une base orthonormale directe).

La démonstration du lemme se trouve à la fin du corrigé.

Soit φ la fonction du plan dans $\mathbb{R}$ qui à un point M associe $\varphi(M)$ le produit de ses distances aux côtés de ABC. Soient a, b et c les longueurs des côtés du triangle ABC, p, q et r les distances de M aux trois côtés de ABC comme sur la figure suivante. On a $\varphi(M) = pqr$.



Remarquons que comme M est intérieur au triangle, $ar + bq + cp = 2S$ où S est l'aire du triangle ABC, si bien que la relation $r = (2S - bq + cp)/a$ montre qu'il s'agit d'un problème d'extremum d'une fonction de deux variables (p et q par exemple), que l'on pourrait traiter classiquement en recherchant un point critique.

Voici une autre démarche plus directe. On a par l'inégalité entre moyenne arithmétique et géométrique :

$$(pqrabc)^{\frac{1}{3}} \leqslant \frac{1}{3}(ar + bq + cp)$$

et l'égalité $ar + bq + cp = 2S$ nous donne

$$\varphi(M) = pqr \leqslant \frac{8S^3}{27abc}.$$

Nous avons égalité si et seulement si $ar = bq = cp$, c'est-à-dire si et seulement si les aires des triangles AMB, BMC et AMC sont égales.

Grâce au lemme, nous allons montrer que ce majorant est un maximum atteint lorsque M est le centre de gravité du triangle.

En effet, si les aires des triangles AMB, BMC et AMC sont égales, en ayant choisi un triangle ABC direct (sinon on compose par une réflexion), alors $[\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}] = [\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MA}] = [\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}] > 0$ donc M est l'isobarycentre de ABC.

Conclusion : φ est maximal lorsque M est le centre de gravité du triangle et vaut alors $\dfrac{8S^3}{27abc}$.

Démonstration du lemme

Soit M un point du plan, on sait qu'il existe $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ de somme non nulle, unique à un scalaire non nul multiplicatif près tel que M soit le barycentre de $\{(A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma)\}$. Nous avons $\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC} = 0$. Ainsi, en composant par $\left[\overrightarrow{MA}, \cdot\right]$, $\left[\overrightarrow{MB}, \cdot\right]$, et $\left[\overrightarrow{MC}, \cdot\right]$, il vient :

$$\left\{\begin{array}{l} \beta\left[\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right] + \gamma\left[\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MC}\right] = 0 \\ \alpha\left[\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}\right] + \gamma\left[\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}\right] = 0 \\ \alpha\left[\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MA}\right] + \beta\left[\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MB}\right] = 0. \end{array}\right.$$

Au moins l'un des produit mixtes est non nul car le triangle est supposé non aplati, par exemple $\left[\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right] \neq 0$, il vient en posant $\lambda = \dfrac{\gamma}{\left[\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right]}$,

$$\alpha = \lambda[\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}],\ \beta = \lambda[\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MA}] \text{ et } \gamma = \lambda[\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}].$$

On a $\lambda \neq 0$ car sinon $\alpha = \beta = \gamma = 0$. On trouve bien que M est barycentre de $\left\{(A, [\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}]), (B, [\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MA}]), (C, [\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}])\right\}$.

Exercice 13.27

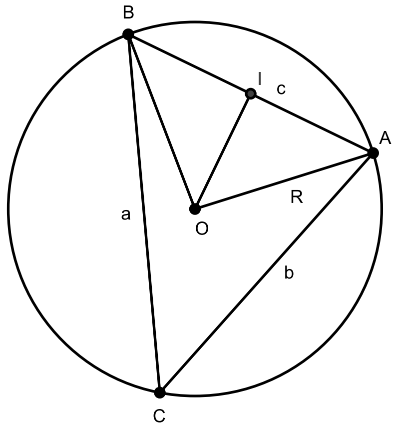
Mines-Ponts MP 2006

Soit O le centre d'un cercle $\mathcal{C}$ de rayon R, soient A, B et C les sommets d'un triangle inscrit dans ce cercle. Calculer l'aire maximale de ABC.

Indication pour une méthode géométrique : montrer que $S = 2R^2 \sin \hat{A} \sin \hat{B} \sin \hat{C}$ puis utiliser la concavité de la fonction $x \mapsto \ln(\sin x)$ sur $]0, \pi[$.

On peut sans trop de difficulté montrer que pour A et B fixés, c'est un triangle isocèle en C qui réalise l'aire maximale. On peut ensuite, en rapportant le plan à un repère orthonormal, ramener la recherche de l'aire maximale des triangles isocèles inscrit dans $\mathcal{C}$ à un problème de recherche de maximum d'une fonction d'une variable réelle.

Voici une autre méthode plus géométrique.



Soit S l'aire de ABC. On va chercher une relation liant S et R avec $a = BC, b = AC$ et $c = AB$ les longueurs des côtés de ABC. On a la relation :

$$S = \frac{1}{2}ab\left|\sin(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})\right|.$$

Pour faire apparaître r dans cette relation il est naturel de se tourner vers le théorème de l'angle inscrit. On a $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = 2(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})\ (2\pi)$. Par ailleurs le triangle OAB est isocèle en O, deux de ses côtés étant de longueur R. En notant I le milieu du segment $[AB]$, on obtient un triangle IAO qui est rectangle en I, à partir des relations trigonométriques dans un triangle rectangle, on obtient :

$$\left|\sin(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OI})\right| = \frac{AI}{AO} = \frac{c}{2R}.$$

Par ailleurs, dans ce triangle IAO, l'angle au sommet O est égal à la moitié de $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OI})$. On a donc :

$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OI}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})\ (\pi).$$

Remarquons que la division par 2 fait apparaître un modulo π. Ceci n'a d'effet que sur le signe de $\sin(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OI})$, et on en déduit :

$$\left|\sin(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OI})\right| = \left|\sin(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})\right| = \sin \hat{C}.$$

En reportant cette égalité dans les relations précédentes on obtient :

$$\sin \hat{C} = \frac{c}{2R}.$$

On montre de la même manière les relations $\sin \hat{A} = \dfrac{a}{2R}$ et $\sin \hat{B} = \dfrac{b}{2R}$. En reportant les deux dernières relations dans l'expression de S proposée ci-dessus on obtient :

$$S = 2R^2 \sin \hat{A} \sin \hat{B} \sin \hat{C}.$$

(les angles géométriques $\hat{A}$, $\hat{B}$ et $\hat{C}$ sont dans $]\,0, \pi\,[$).

On vérifie sans peine que la fonction définie sur $]\,0, \pi\,[$ par $x \mapsto \ln(\sin x)$ est à dérivée seconde strictement négative donc strictement concave. On en déduit :

$$\frac{1}{3}(\ln(\sin \hat{A}) + \ln(\sin \hat{B}) + \ln(\sin \hat{C})) \leqslant \ln\left(\sin\left(\frac{1}{3}(\hat{A} + \hat{B} + \hat{C})\right)\right),$$

avec égalité si et seulement si $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C}$. Ce qui, en composant par la fonction exponentielle, devient :

$$(\sin \hat{A} \sin \hat{B} \sin \hat{C})^{\frac{1}{3}} \leqslant \sin\left(\frac{1}{3}(\hat{A} + \hat{B} + \hat{C})\right).$$

On sait que $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \pi$. On déduit donc de l'inégalité précédente :

$$S \leqslant 2R^2\left(\sin\frac{\pi}{3}\right)^3 \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{4}R^2,$$

avec égalité si et seulement si $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C}$. On en déduit que le triangle d'aire maximale inscrit dans un cercle est équilatéral et son aire vaut $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}R^2$.

EL-HAJ LAAMRI • PHILIPPE CHATEAUX • GÉRARD EGUETHER
ALAIN MANSOUX • MARC REZZOUK • DAVID RUPPRECHT • LAURENT SCHWALD

100% LICENCE

100% BTS/DUT

100% CONCOURS

TOUS LES EXERCICES D'ALGÈBRE ET DE GÉOMÉTRIE MP

Pour assimiler le programme, s'entraîner et réussir son concours

Ce livre d'exercices corrigés d'Algèbre et Géométrie est un outil **d'apprentissage quotidien** destiné aux élèves de seconde année des classes préparatoires **MP**.

Les premiers chapitres assurent la transition entre la première et la seconde année. Ils pourront servir de support aux **révisions « estivales »** précédant le début de la deuxième année.

Chaque chapitre est constitué de trois parties :

– une présentation synthétique de **l'essentiel du cours** suivi d'exercices d'**assimilation** ;
– des exercices d'**entraînement** dont l'objectif est d'amener le lecteur à la compréhension et à une bonne maîtrise des notions étudiées ;
– des exercices d'**approfondissement** destinés à mettre l'élève en situation de concours ; ils fourniront une **référence** et une excellente base de travail pendant les périodes de révisions.

Les candidats aux concours du CAPES et de l'Agrégation pourront également trouver dans cet ouvrage une aide précieuse pour leur préparation.

El-Haj Laamri
Agrégé de Mathématiques
Maître de Conférences à Nancy-Université

Philippe Chateaux
Agrégé de Mathématiques
Professeur au Lycée Henri Poincaré en MP*

Gérard Eguether
Maître de Conférences à Nancy-Université

Alain Mansoux
Agrégé de Mathématiques
Professeur au Lycée Henri Poincaré en PC

Marc Rezzouk
Agrégé de Mathématiques
Professeur au Lycée Henri Poincaré en PC

David Rupprecht
Agrégé de Mathématiques
Professeur au Lycée Henri Loritz en PSI

Laurent Schwald
Agrégé en Mathématiques
Professeur au Lycée Henri Poincaré en BCPST

ISBN 978-2-10-053965-9

www.ediscience.net

EdiScience