

## Fractions rationnelles

**Exercice 1** 1. Décomposer  $\frac{X^3-3X^2+X-4}{X-1}$  en éléments simples sur  $\mathbb{R}$ .

2. Décomposer  $\frac{2X^3+X^2-X+1}{X^2-3X+2}$  en éléments simples sur  $\mathbb{R}$ .

3. Décomposer  $\frac{2X^3+X^2-X+1}{X^2-2X+1}$  en éléments simples sur  $\mathbb{R}$ .

4. Décomposer  $\frac{X^4+2X^2+1}{X^2-1}$  en éléments simples sur  $\mathbb{R}$ .

5. Décomposer  $\frac{X}{X^2-4}$  en éléments simples sur  $\mathbb{R}$ .

6. Décomposer  $\frac{X^5+X^4+1}{X^3-X}$  en éléments simples sur  $\mathbb{R}$ .

7. Décomposer  $\frac{X^5+X^4+1}{X(X-1)^4}$  en éléments simples sur  $\mathbb{R}$ .

8. Décomposer  $\frac{X^5+X^4+1}{(X-1)^3(X+1)^2}$  en éléments simples sur  $\mathbb{R}$ .

9. Décomposer  $\frac{X^7+3}{(X^2+X+2)^3}$  en éléments simples sur  $\mathbb{R}$ .

10. Décomposer  $\frac{(3-2i)X-5+3i}{X^2+iX+2}$  en éléments simples sur  $\mathbb{C}$ .

11. Décomposer  $\frac{X+i}{X^2+i}$  en éléments simples sur  $\mathbb{C}$ .

12. Décomposer  $\frac{X}{(X+i)^2}$  en éléments simples sur  $\mathbb{C}$ .

13. Décomposer  $\frac{X^2+1}{X^4+1}$  en éléments simples sur  $\mathbb{R}$  et sur  $\mathbb{C}$ .

14. Décomposer  $\frac{X}{X^4+1}$  en éléments simples sur  $\mathbb{R}$  et sur  $\mathbb{C}$ .

15. Décomposer  $\frac{X^2+X+1}{X^4+1}$  en éléments simples sur  $\mathbb{R}$  et sur  $\mathbb{C}$ .

16. Décomposer  $\frac{X^5+X+1}{X^4-1}$  en éléments simples sur  $\mathbb{R}$  et sur  $\mathbb{C}$ .

17. Décomposer  $\frac{X^5+X+1}{X^6-1}$  en éléments simples sur  $\mathbb{R}$  et sur  $\mathbb{C}$ .

18. Décomposer  $\frac{X^3-2}{X^4(X^2+X+1)^2}$  en éléments simples sur  $\mathbb{R}$  et sur  $\mathbb{C}$ .

19. Décomposer  $\frac{X}{(X^2+1)(X^2+4)}$  en éléments simples sur  $\mathbb{R}$  et sur  $\mathbb{C}$ .

20. Décomposer  $\frac{X^2-3}{(X^2+1)(X^2+4)}$  en éléments simples sur  $\mathbb{R}$  et sur  $\mathbb{C}$ .

**Exercice 2** Décomposition en éléments simples  $\Phi = \frac{2x^4 + x^3 + 3x^2 - 6x + 1}{2x^3 - x^2}$ .

**Exercice 3** Décomposition en éléments simples  $\Phi = \frac{2x^5 - 8x^3 + 8x^2 - 4x + 1}{x^3(x-1)^2}$ .

**Exercice 4** Décomposition en éléments simples  $\Phi = \frac{4x^6 - 2x^5 + 11x^4 - x^3 + 11x^2 + 2x + 3}{x(x^2 + 1)^3}$ .

---

## Fractions rationnelles

---

*Indication 2* Attention il y a une partie entière, la fraction s'écrit

$$\Phi = x + 1 + \frac{4x^2 - 6x + 1}{2x^3 - x^2}.$$

*Indication 3* Il y a une partie entière qui vaut 2.

## Fractions rationnelles

**Correction 1** 1.  $\frac{X^3-3X^2+X-4}{X-1} = X^2 - 2X - 1 - \frac{5}{X-1}$ .

2.  $\frac{2X^3+X^2-X+1}{X^2-3X+2} = 2X + 7 - \frac{3}{X-1} + \frac{19}{X-2}$ .

3.  $\frac{2X^3+X^2-X+1}{X^2-2X+1} = 2X + 5 + \frac{3}{(X-1)^2} + \frac{7}{X-1}$ .

4.  $\frac{X^4+2X^2+1}{X^2-1} = X^2 + 3 + \frac{2}{X-1} - \frac{2}{X+1}$ .

5.  $\frac{X}{X^2-4} = \frac{1/2}{X+2} + \frac{1/2}{X-2}$ .

6.  $\frac{X^5+X^4+1}{X^3-X} = X^2 + X + 1 - \frac{1}{X} + \frac{1/2}{X+1} + \frac{3/2}{X-1}$ .

7.  $\frac{X^5+X^4+1}{X(X-1)^4} = 1 + \frac{1}{X} + \frac{3}{(X-1)^4} + \frac{6}{(X-1)^3} + \frac{10}{(X-1)^2} + \frac{4}{X-1}$ .

8.  $\frac{X^5+X^4+1}{(X-1)^3(X+1)^2} = 1 + \frac{3/4}{(X-1)^3} + \frac{3/2}{(X-1)^2} + \frac{37/16}{X-1} - \frac{1/8}{(X+1)^2} - \frac{5/16}{X+1}$ .

9.  $\frac{X^7+3}{(X^2+X+2)^3} = X - 3 + \frac{7X+13}{(X^2+X+2)^3} - \frac{7X+21}{(X^2+X+2)^2} + \frac{14}{X^2+X+2}$ .

10.  $\frac{(3-2i)X-5+3i}{X^2+iX+2} = \frac{2+i}{X-i} + \frac{1-3i}{X+2i}$ .

11.  $\frac{X+i}{X^2+i} = \frac{-\frac{\sqrt{2}+2}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4}i}{X - \frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}i}{2}} + \frac{\frac{\sqrt{2}+2}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}i}{X - \frac{-\sqrt{2}+\sqrt{2}i}{2}}$ .

12.  $\frac{X}{(X+i)^2} = \frac{1}{X+i} - \frac{i}{(X+i)^2}$ .

13.  $\frac{X^2+1}{X^4+1} = \frac{1/2}{X^2+\sqrt{2}X+1} + \frac{1/2}{X^2-\sqrt{2}X+1} = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{4}i}{X - \frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}i}{2}} + \frac{\frac{\sqrt{2}}{4}i}{X - \frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}i}{2}} + \frac{\frac{\sqrt{2}}{4}i}{X + \frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}i}{2}} + \frac{-\frac{\sqrt{2}}{4}i}{X + \frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}i}{2}}$ .

14.  $\frac{X}{X^4+1} = -\frac{\sqrt{2}/4}{X^2+\sqrt{2}X+1} + \frac{\sqrt{2}/4}{X^2-\sqrt{2}X+1} = \frac{-\frac{1}{4}i}{X - \frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}i}{2}} + \frac{\frac{1}{4}i}{X - \frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}i}{2}} + \frac{-\frac{1}{4}i}{X + \frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}i}{2}} + \frac{\frac{1}{4}i}{X + \frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}i}{2}}$ .

15.  $\frac{X^2+X+1}{X^4+1} = \frac{(2-\sqrt{2})/4}{X^2+\sqrt{2}X+1} + \frac{(2+\sqrt{2})/4}{X^2-\sqrt{2}X+1} = \frac{-\frac{1+\sqrt{2}}{4}i}{X - \frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}i}{2}} + \frac{\frac{1+\sqrt{2}}{4}i}{X - \frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}i}{2}} + \frac{-\frac{1-\sqrt{2}}{4}i}{X + \frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}i}{2}} + \frac{\frac{1-\sqrt{2}}{4}i}{X + \frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}i}{2}}$ .

16.  $\frac{X^5+X+1}{X^4-1} = X + \frac{3/4}{X-1} + \frac{1/4}{X+1} - \frac{X+\frac{1}{2}}{X^2+1} = X + \frac{3/4}{X-1} + \frac{1/4}{X+1} + \frac{-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}i}{X-i} + \frac{-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}i}{X+i}$ .

17.  $\frac{X^5+X+1}{X^6-1} = \frac{1/2}{X-1} + \frac{1/6}{X+1} + \frac{\frac{1}{3}X-\frac{2}{3}}{X^2-X+1} = \frac{1/2}{X-1} + \frac{1/6}{X+1} - \frac{\frac{1}{3}j}{X+j} - \frac{\frac{1}{3}j^2}{X+j^2}$ , où on a posé de façon standard  $j = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ .

18.  $\frac{X^3-2}{X^4(X^2+X+1)^2} = -\frac{2}{X^4} + \frac{4}{X^3} - \frac{2}{X^2} - \frac{3}{X} + \frac{X+1}{(X^2+X+1)^2} + \frac{3X+5}{X^2+X+1} = -\frac{2}{X^4} + \frac{4}{X^3} - \frac{2}{X^2} - \frac{3}{X} + \frac{\frac{1}{3}j^2}{(X-j)^2} + \frac{\frac{1}{3}j}{(X-j^2)^2} + \frac{\frac{3}{2} - \frac{23\sqrt{3}}{18}i}{X-j} + \frac{\frac{3}{2} + \frac{23\sqrt{3}}{18}i}{X-j^2}$ , où on a posé de façon standard  $j = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ .

19.  $\frac{X}{(X^2+1)(X^2+4)} = \frac{\frac{1}{3}X}{X^2+1} - \frac{\frac{1}{3}X}{X^2+4} = \frac{1/6}{X-i} + \frac{1/6}{X+i} - \frac{1/6}{X-2i} - \frac{1/6}{X+2i}$ .

20.  $\frac{X^2-3}{(X^2+1)(X^2+4)} = -\frac{4/3}{X^2+1} + \frac{7/3}{X^2+4} = \frac{\frac{2}{3}i}{X-i} + \frac{-\frac{2}{3}i}{X+i} + \frac{-\frac{7}{12}i}{X-2i} + \frac{\frac{7}{12}i}{X+2i}$ .

**Correction 2** Commencer bien sûr par la division suivant les puissances décroissantes (la faire faire par les étudiants) :  $\Phi = x + 1 + \Phi_1$  avec  $\Phi_1 = \frac{4x^2-6x+1}{2x^3-x^2}$ . Puis factoriser le dénominateur et faire donner le type de décomposition de  $\Phi_1$  :

$$\Phi_1 = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x - \frac{1}{2}} \tag{1}$$

Expliquer qu'on obtient alors  $A$  en multipliant les deux membres de (1) par  $x^2$  et en passant à la limite quand  $x$  tend vers 0 ( $A = -1$ ). On obtient de même  $C$  par multiplication par  $x - \frac{1}{2}$  et calcul de la limite quand  $x$  tend vers  $\frac{1}{2}$  ( $C = -2$ ). Enfin on trouve  $B$  en identifiant pour une valeur particulière non encore utilisée, par exemple  $x = 1$ , ou mieux en multipliant les deux membres de (1) par  $x$  et en passant à la limite pour  $x \rightarrow \infty$  ( $B = 4$ ). Faire remarquer que pour un cas aussi simple, les calculs peuvent se faire *de tête* en écrivant simplement les coefficients  $A, B, C$  au fur et à mesure qu'on les obtient.

$$\frac{2x^4 + x^3 + 3x^2 - 6x + 1}{2x^3 - x^2} = x + 1 - \frac{1}{x^2} + \frac{4}{x} - \frac{2}{x - \frac{1}{2}}.$$

**Correction 3** La division suivant les puissances décroissantes donne :  $\Phi = 2 + \Phi_1$  avec

$$\Phi_1 = \frac{4x^4 - 10x^3 + 8x^2 - 4x + 1}{x^3(x-1)^2} = \frac{A}{x^3} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x} + \frac{D}{(x-1)^2} + \frac{E}{x-1}.$$

Faire remarquer que la méthode de l'exercice précédent permettrait d'obtenir facilement  $A$  et  $D$  par multiplication par  $x^3$  et par  $(x-1)^2$ , mais qu'il resterait encore 3 coefficients à déterminer. Il y a ici une méthode plus efficace : effectuer la division suivant les puissances croissantes, à l'ordre 3 (qui est l'exposant du facteur  $x$ ) du numérateur  $1 - 4x + 8x^2 - 10x^3 + 4x^4$  par  $(x-1)^2$ , ou plutôt par  $1 - 2x + x^2$  :

$$1 - 4x + 8x^2 - 10x^3 + 4x^4 = (1 - 2x + x^2) \times (1 - 2x + 3x^2) + (-2x^3 + x^4). \quad (2)$$

En divisant les deux membres de (2) par  $x^3(x-1)^2$ , on obtient  $A, B$  et  $C$  d'un seul coup :

$$\Phi_1 = \frac{1}{x^3} - \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x} + \frac{x-2}{(x-1)^2}.$$

Le calcul de  $D$  et  $E$  est alors immédiat par décomposition de  $\frac{x-2}{(x-1)^2}$  : méthode de l'exercice précédent, ou division suivant les puissances décroissantes de  $x-2$  par  $x-1$  :  $x-2 = (x-1) - 1$ .

$$\frac{2x^5 - 8x^3 + 8x^2 - 4x + 1}{x^3(x-1)^2} = 2 + \frac{1}{x^3} - \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x} - \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{x-1}.$$

Remarque : cette méthode est efficace pour un exposant assez grand (en gros à partir de 3). Elle peut être utilisée pour une fraction du type  $\frac{P(x)}{(x-a)^n Q(x)}$ , mais il faut commencer par le changement de variable  $u = x - a$  avant de faire la division, puis bien entendu revenir ensuite à la variable  $x$ .

**Correction 4** Pas de division préliminaire dans ce cas... Forme de la décomposition :

$$\Phi = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{(x^2 + 1)^3} + \frac{Dx + E}{(x^2 + 1)^2} + \frac{Fx + G}{x^2 + 1}. \quad (3)$$

La méthode du premier exercice permet d'obtenir  $A$ , puis  $B$  et  $C$  (pour ces derniers : multiplication des deux membres de (3) par  $x^2 + 1$ , puis limite quand  $x$  tend vers  $i$  ou vers  $-i$ , avec séparation des parties réelle et imaginaire), mais c'est bien insuffisant pour conclure : il faut encore soustraire  $\frac{Bx+C}{(x^2+1)^3}$ , simplifier par  $x^2 + 1$ , calculer  $D$  et  $E$ ... (le faire faire quand même à titre d'entraînement).

On va ici se contenter de trouver  $A$  ( $A = 3$ ), puis faire la soustraction  $\Phi_1 = \Phi - \frac{A}{x}$ . Faire faire le calcul aux étudiants ; leur faire remarquer que, sauf erreur de calcul, la fraction  $\Phi_1$  *doit* se simplifier par  $x$ . On trouve :

$$\Phi = \frac{3}{x} + \frac{x^5 - 2x^4 + 2x^3 - x^2 + 2x + 2}{(x^2 + 1)^3}.$$

La fin de la décomposition se fait par divisions successives suivant les puissances décroissantes : division du numérateur  $x^5 - 2x^4 + 2x^3 - x^2 + 2x + 2$  par  $x^2 + 1$ , puis du quotient obtenu par  $x^2 + 1$ .

$$\frac{4x^6 - 2x^5 + 11x^4 - x^3 + 11x^2 + 2x + 3}{x(x^2 + 1)^3} = \frac{3}{x} + \frac{x + 1}{(x^2 + 1)^3} + \frac{3}{(x^2 + 1)^2} + \frac{x - 2}{x^2 + 1}.$$

Remarque : cette méthode des divisions successives est très pratique quand la fraction à décomposer a un dénominateur *simple*, c'est à dire comportant un dénominateur du type  $Q^n$  où  $Q$  est du premier degré, ou du second degré sans racine réelle. Faire remarquer aussi comment on peut simplifier petit à petit en éliminant du dénominateur un dénominateur *simple* (méthode utilisée dans l'exercice 3 par le calcul de  $\Phi - \frac{A}{x}$ ).