INYASS COULIBALY ADAMA

Espaces vectoriels - Calcul vectoriel

Dr Vincent Kouassi KOUAKOU

7 mars 2022

Table des matières

Chapitre 1

Espaces vectoriels

Nous allons maintenant aborder une démarche classique chez le mathématicien étant donné des situations différentes, chercher leurs points communs et en déduire un cadre général dans lequel elles apparaîtront comme des cas particuliers. Ce processus s'appelle la mise en place d'une structure abstraite.

La notion d'espace vectoriel est une structure fondamentale des mathématiques modernes.

Il s'agit de dégager les propriétés communes que partagent des ensembles pourtant très différents.

Prenons deux exemples : l'ensemble des vecteurs d'origine le point O du plan et l'ensemble des fonctions continues sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$; donc les fonctions f telles que $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ pour tout $x_0 \in I$.

Quels sont les points communs ?

a) On peut ajouter deux éléments,

b) On peut multiplier un élément par un réel quelconque (pour l'agrandir ou le rétrécir),...

Même chose avec l'ensemble des polynômes, l'ensemble des matrices,...

Le but est d'obtenir des théorèmes généraux qui s'appliqueront aussi bien aux vecteurs du plan, de l'espace, aux espaces de fonctions, aux polynômes, aux matrices,...

La contrepartie de cette grande généralité de situations est que la notion d'espace vectoriel est difficile à appréhender et vous demandera une quantité conséquente de travail !

Objectif

1. Connaître les définitions de base de la théorie : K−espace vectoriel, sous-espace vectoriel, combinaisons linéaires, vecteur nul, famille libre, famille liée, famille génératrice, base, coordonnées d'un vecteur dans une base, matrice de passage ...

2. Soit E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel muni d'une base, considérons une famille de vecteurs donnés par leurs coordonnées dans cette base : Savoir décider si cette famille est libre ou si c'est une base de E.

3. Savoir déterminer une base des solutions d'un système d'équations linéaires homogènes en suivant l'algorithme de résolution.

4. Soit E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel muni de deux bases $\mathfrak{B}$ et $\mathfrak{B}'$, nous supposons que les vecteurs de la base $\mathfrak{B}'$ sont données par leurs coordonnées dans la base $\mathfrak{B}$, le quatrième objectif est de savoir déterminer les coordonnées d'un vecteur dans une base à l'aide de ses coordonnées dans l'autre base.

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne un corps commutatif.

Définition 1.0.1 *(**Espace vectoriel**)*

*Un espace vectoriel est un ensemble formé de **vecteurs**, de sorte que l'on puisse additionner (et soustraire) deux vecteurs $u; v$ pour en former un troisième $u+v$ (ou $u-v$) et aussi afin que l'on puisse multiplier chaque vecteur u par un facteur $\lambda \in \mathbb{K}$ pour obtenir un vecteur λu.*

Voici la

1.1 Définition formelle

1.1.1 Définition

Un $\mathbb{K}$-espace vectoriel est un ensemble non vide E muni d'une loi de composition interne (notée + appelée addition), c'est-à-dire d'une application de $E \times E$ dans E :

$$\begin{array}{cccc} + : & E \times E & \longrightarrow & E \\ & (u; v) & \longmapsto & u + v \end{array}$$

et d'une loi de composition externe (à gauche appelée multiplication externe notée .) dont le domaine d'opération est $\mathbb{K}$, c'est-à-dire d'une application de $\mathbb{K} \times E$ dans E :

$$\begin{array}{cccc} . : & \mathbb{K} \times E & \longrightarrow & E \\ & (\alpha, v) & \longmapsto & \alpha.v \end{array}$$

qui vérifient les propriétés suivantes :

1. $u + v = v + u$ (pour tous $u; v \in E$),
2. $u + (v + w) = (u + v) + w$ (pour tous $u; v; w \in E$),
3. Il existe un élément neutre $0_E \in E$ tel que $u + 0_E = u$ (pour tout $u \in E$),
4. Tout $u \in E$ admet un symétrique u' tel que $u + u' = 0_E$: cet élément u' est noté $-u$,
5. $1_{\mathbb{K}}.u = u$ (pour tout $u \in E$),
6. $\alpha.(\beta.u) = (\alpha\beta).u$ (pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $u \in E$),
7. $\alpha.(u + v) = \alpha.u + \alpha.v$ (pour tous $\alpha \in \mathbb{K}$, $u, v \in E$),
8. $(\alpha + \beta).u = \alpha.u + \beta.u$ (pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $u \in E$).

Remarque 1.1.1 *Les étudiants connaissant la théorie des groupes reconnaîtront, dans les quatre premiers points ci-dessus, les axiomes caractérisant un groupe commutatif.*

1.1.2 Terminologie et notations

Rassemblons les définitions déjà vues.

– On appelle les éléments de E des **vecteurs**.

– Au lieu de $\mathbb{K}-$**espace vectoriel**, on dit aussi espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

– Les éléments de $\mathbb{K}$ seront appelés des **scalaires**.

– On dit que $\mathbb{K}$ est **le corps des scalaires** ou le **corps de base du** $\mathbb{K}-$**espace vectoriel** E.

– L'élément neutre 0_E s'appelle aussi le **vecteur nul**. Il ne doit pas être confondu avec l'élément $0_{\mathbb{K}} = 0$ de $\mathbb{K}$.

Lorsqu'il n'y aura pas de risque de confusion, 0_E sera aussi noté 0.

– Le symétrique $-u$ d'un vecteur $u \in E$ s'appelle aussi l'**opposé** de u.

– La loi de composition interne sur E (notée usuellement $+$) est appelée couramment l'addition et $u + u'$ est appelée **somme des vecteurs** u et u'.

– La loi de composition externe sur E est appelée couramment multiplication par un scalaire.

La multiplication du vecteur u par le scalaire α sera souvent notée simplement αu, au lieu

de $\alpha.u$.

1.1.3 Règles de calcul dans un espace vectoriel

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel.

1) $0_{\mathbb{K}}$ étant l'élément nul de $\mathbb{K}$ et 0_E le vecteur nul de E, on a :

$i)$ Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda 0_E = 0_E$.

$ii)$ Pour tout $x \in E$, $0_{\mathbb{K}} x = 0_E$.

$iii)$ $\lambda x = 0_E$ si et seulement si $(\lambda = 0_{\mathbb{K}}$ ou $x = 0_E)$.

Ainsi :

• Si $\lambda \neq 0_{\mathbb{K}}$, alors la relation $(\lambda x - \lambda y = 0_E)$ implique $(x = y)$ pour tous $x, y \in E$.

• Si $x \neq 0_E$, alors la relation $(\lambda x = \mu x)$ implique $(\lambda = \mu)$, pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.

2) Pour tous $x, y \in E$ et pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, on a :

$i)$ $\lambda (x - y) = \lambda x - \lambda y$.

$ii)$ $(\lambda - \mu) x = \lambda x - \mu x$.

Ainsi :

• $\lambda (-y) = (-\lambda) y = -(\lambda y) = -\lambda y$.

• $(-1) x = -(1x) = -x$.

1.1.4 Exemples

1. Tout corps commutatif $\mathbb{K}$ est un espace vectoriel sur lui-même.

$$.: \begin{array}{ccc} \mathbb{K}\times\mathbb{K} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (\alpha,\mu) & \longmapsto & \alpha\mu \end{array}.$$

2. $\mathbb{K}$ étant un corps commutatif, $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathbb{K}^n$.

Alors E est un $\mathbb{K}-$espace vectoriel pour les lois suivantes :

Pour tous $(x_1, x_2, ..., x_n)$ et $(x'_1, x'_2, ..., x'_n)$ éléments de $\mathbb{K}^n$, et pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned} (x_1, ..., x_n) + (x'_1, x'_2, ..., x'_n) &= (x_1 + x'_1, ..., x_n + x'_n). \\ \alpha(x_1, x_2, ..., x_n) &= (\alpha x_1, \alpha x_2, ..., \alpha x_n). \end{aligned}$$

$\mathbb{R}^n$ est un $\mathbb{R}-$espace vectoriel.

$\mathbb{C}^n$ est un $\mathbb{C}-$espace vectoriel.

$\mathbb{Q}^n$ est un $\mathbb{Q}-$espace vectoriel.

3. Les ensembles $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \mathcal{V}_3$ des vecteurs de la droite, du plan, de l'espace de la géométrie élémentaires sont des $\mathbb{R}-$espaces vectoriels.

4. $\mathbb{K}$ étant un corps commutatif, $\mathbb{K}[X]$ est un $\mathbb{K}-$espace vectoriel.

5. Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel et X un ensemble non vide.

Posons $F = \mathcal{F}(X, E)$, alors F est un $\mathbb{K}-$espace vectoriel pour les lois suivantes :

Pour tous $f, g \in F$, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$\begin{array}{ll} 1) & f+g: \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & (f+g)(x) = f(x) + g(x) \end{array} \\ 2) & \lambda f: \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & (\lambda f)(x) = \lambda f(x) \end{array}. \end{array}$$

En particulier, si $E = \mathbb{K}$, alors $\mathcal{F}(X, \mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}-$espace vectoriel.

Pour $X = \mathbb{N}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on obtient :

$-\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R}) =$ l'ensemble des suites réelles qui est un $\mathbb{R}-$espace vectoriel.

$-\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{C}) =$ l'ensemble des suites complexes qui est un $\mathbb{C}-$espace vectoriel.

6. Soient $\mathbb{K}$ un corps commutatif et k un sous-corps de $\mathbb{K}$, alors :

$-$ $\mathbb{K}$ est un $k-$espace vectoriel.

$-$ Tout $\mathbb{K}-$espace vectoriel de E est un $k-$espace vectoriel, et les deux structures de $\mathbb{K}-$espace vectoriel et de $k-$espace vectoriel sur E sont distinctes.

En particulier

$\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}-$espace vectoriel.

$\mathbb{R}$ est un $\mathbb{Q}-$espace vectoriel.

$\mathbb{C}$ est un $\mathbb{Q}-$espace vectoriel.

7. Soient $\mathbb{K}$ un corps commutatif et $n, p \in \mathbb{N}^*$, alors l'ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ des matrices de tailles (n, p) à cœfficients dans $\mathbb{K}$ muni de l'addition des matrices et de la multiplication externe à opérateurs dans $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}-$espace vectoriel.

8. Soient $\mathbb{K}$ un corps commutatif et $n \in \mathbb{N}^*$, alors l'ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ des matrices carrées de tailles n à cœfficients dans $\mathbb{K}$ muni de l'addition des matrices et de la multiplication externe à opérateurs dans $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}-$espace vectoriel.

Exercice 1.1.1 *Justifier que les ensembles suivants ne sont pas des $\mathbb{R}-$espaces vectoriels :*

a) $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\}$; *b)* $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 1\}$; *c)* $G = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqslant 0 \text{ et } y \geqslant 0$
d) $L = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leqslant x \leqslant 1 \text{ et } -1 \leqslant y \leqslant 1\}$.

Espaces vectoriels produits

Soien $E_1, E_2, ..., E_n$ des $\mathbb{K}$- espaces vectoriels, et $E = E_1 \times E_2 \times ... \times E_n$. On considère sur E les lois suivantes :

Pour tous $(x_1, x_2, ..., x_n)$ et $(y_1, y_2, ..., y_n)$ dans E pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on a

$$(x_1, x_2, ..., x_n) + (y_1, y_2, ..., y_n) = (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n).$$

$$\lambda(x_1, x_2, ..., x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_n).$$

Alors E est encore un $\mathbb{K}$-espace vectoriel appelé l'**espace vectoriel produit** des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels $E_1, E_2, ..., E_n$.

Si $E_1 = E_2 = ... = E_n = F$, alors E se F^n. En particulier, si $E = E_2, ... = E_n = \mathbb{K}$, alors $E = \mathbb{K}^n$.

1.2 Sous espace vectoriel-sous espace vectoriel engendré par une partie ou une famille d'éléments

1.2.1 Définition d'un sous-espace vectoriel

Définition 1.2.1 *Soient E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel et F une partie non vide de E.*

On dit que F est un ***sous-espace vectoriel*** *de E si et seulement si F est un sous groupe de $(E, +)$ et F est stable pour la loi externe définie sur E.*

Autrement dit

Définition 1.2.2 *Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel, une partie non vide F de E est appelée un sous-espace vectoriel si :*

- $0_E \in F$,
- $u + v \in F$ *pour tous* $u; v \in F$,
- $\lambda u \in F$ *pour tout* $\lambda \in \mathbb{K}$ *et tout* $u \in F$.

Remarque 1.2.1 *Expliquons chaque condition.*

– La première condition signifie que le vecteur nul de E doit aussi être dans F. En fait il suffit même de prouver que F est non vide.

– La deuxième condition, c'est dire que F est stable pour l'addition : la somme $u+v$ de deux vecteurs u,v de F est bien sûr un vecteur de E (car E est un espace vectoriel), mais ici on exige que $u+v$ soit un élément de F.

– La troisième condition, c'est dire que F est stable pour la multiplication par un scalaire.

1.2.2 Caractérisation d'un sous-espace vectoriel

Théorème 1.2.1 *(**Caractérisation d'un sous-espace par la notion de combinaison linéaire**).*

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F une partie non vide de E.

F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $\alpha u+\beta v \in F$ pour tous $u,v \in F$ et tous $\alpha,\beta \in \mathbb{K}$.

Preuve 1.2.1 $\boxed{\Longrightarrow}$ *Supposons que F soit un sous-espace vectoriel de E.*

Alors F est stable par la loi externe, donc pour tous $u,v \in F$, on a bien pour tous $\alpha,\beta \in \mathbb{K}$, αu, $\beta v \in F$ et comme F est un sous groupe de E, $\alpha u+\beta v \in F$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ *Supposons que $\alpha u+\beta v \in F$ pour tous $u,v \in F$ et tous $\alpha,\beta \in \mathbb{K}$.*

- Par hypothèse $F \neq \varnothing$.

- Pour $\alpha=1$ et $\beta=1$, on a bien $u+v \in F$, ainsi F est un sous groupe de E.

Soient $u \in F$ et $\alpha \in \mathbb{K}$, en posant $v=0_E \in F$, on a $\alpha u+\beta v=\alpha u \in F$.

Donc F est stable par la loi externe définie sur E. Ainsi F est un sous espace vectoriel de E.

Remarque 1.2.2 *On peut se contenter de vérifier que pour tous $x,y \in F$ et tout $\alpha \in \mathbb{K}$, $\alpha x+y \in F$.*

1.2.3 Exemples

1. Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel, alors E et $\{0_E\}$ sont des espaces vectoriel de E appelés **sous espaces vectoriels triviaux** de E.

2. L'ensemble $F=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x+y=0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$, alors $\mathbb{K}_n[X]=\{P\in\mathbb{K}[X] : \deg P \leqslant n\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$.

4. Soient $a,b \in \mathbb{R}$ tels que $a<b$. Posons $I=[a,b]\subset\mathbb{R}$. Alors

• L'ensemble $\mathcal{C}(I,\mathbb{R})$ des fonctions continues sur I est sous espace vectoriel de $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$.

• L'ensemble $\mathcal{I}(I,\mathbb{R})$ des fonctions intégrables au sens de Riemman sur I, est sous espace vectoriel de $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$.

• L'ensemble $\mathcal{D}(I,\mathbb{R})$ des fonctions dérivables sur I est un sous espace vectoriel de $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$.

• Soit $n \in \mathbb{N}$, alors $\mathcal{C}^n(I,\mathbb{R})$ est sous espace vectoriel de $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$.

5. Posons $E = \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $\mathcal{P} = \{f \in E : f \text{ est paire}\}$ et $\mathcal{I} = \{f \in E : f \text{ est impaire}\}$, alors

$\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ sont des sous espaces vectoriels de E.

6. L'ensemble des suites réelles convergentes est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites réelles.

7. L'ensemble $\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) : A = \lambda I_n,\ n \in \mathbb{N}^*, \lambda \in \mathbb{K}\}$ des matrices scalaires est un sous espace vectoriel du $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Nota Bene :

Il est vite fatiguant de vérifier les 8 axiomes qui font d'un ensemble un espace vectoriel.

Heureusement, il existe une manière rapide et efficace de prouver qu'un ensemble est un espace vectoriel : grâce à la notion de sous-espace vectoriel.

Proposition 1.2.1 *Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel.*

Toute intersection de sous-espaces vectoriels de E est un sous espace vectoriel de E (évidemment une telle intersection est non vide puisqu'elle contient le vecteur nul).

Autres exemples

1. L'ensemble $F_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+y=2\}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$. En effet le vecteur nul $(0,0)$ n'appartient pas à F_1.

2. L'ensemble $F_2 = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \mid x=0 \text{ ou } y=0\}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$:

En effet les vecteurs $u=(1;0)$ et $v=(0;1)$ appartiennent à F_2, mais pas le vecteur $u+v=(1;1)$.

3. L'ensemble $F_3 = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leqslant 0 \text{ et } y \leqslant 0\}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

En effet le vecteur $u=(-1;-1)$ appartient à F_3 mais, le vecteur $-u=(1;1)$ n'appartient pas à F_3.

Théorème 1.2.2 *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F un sous-espace vectoriel de E. Alors F est lui-même un $\mathbb{K}$-espace vectoriel pour les lois induites par E.*

Méthodologie.

Pour répondre à une question du type «L'ensemble F est-il un espace vectoriel ?» , une façon efficace de procéder est de trouver un espace vectoriel E qui contient F, puis prouver que F est un sous-espace vectoriel de E.

Il y a seulement trois propriétés à vérifier au lieu de huit !

1.2.4 Sous-espace vectoriel engendré par une partie ou une famille d'éléments

Définitions

Définition 1.2.3 *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.*

1. *X étant une partie de E, l'intersection F de tous les sous espaces vectoriels de E contenant X est un sous espace vectoriel de E contenant X, appelé* ***le sous espace vectoriel de*** E ***engendré par*** X *et noté $F = vect\,(X)$ ou $< X >$.*

C'est le plus petit (pour l'inclusion) sous espace vectoriel contenant X.

X est appelé ***une partie génératrice*** *ou simplement* ***un système génératrateur*** *de F.*

2. *Si $(x_i)_{i\in I}$ est une famille d'éléments de E, alors le sous espace vectoriel F engendré par la famille $(x_i)_{i\in I}$ est par définition le sous espace vectoriel de E par l'ensemble $\{x_i \mid i \in I\}$. La famille $(x_i)_{i\in I}$ est appelée* ***une famille génératrice*** *de F. On note $F = vect\left((x_i)_{i\in I}\right) = vect\,(\{x_i \mid i \in I\})$.*

3. *On dit que l'espace vectoriel E est de* ***dimension finie*** *si, et seulement si E admet un système génératrateur fini i.e si, et seulement si E peut être engendré par un nombre fini de ses éléments.*

Définitions

Définition 1.2.4 1. *Soit $(x_1, x_2, ..., x_p)$ une famille de p vecteurs de l'espace vectoriel E $(p \in \mathbb{N}^*)$. On appelle* ***combinaison linéaire*** *(à cœfficients dans $\mathbb{K}$) des vecteurs $x_1, x_2, ..., x_p$ tout élément de E de la forme*

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_p x_p.$$

2. *Soit A une partie non vide de l'espace vectoriel E. On appelle* ***combinaison linéaire*** *(à cœfficients dans $\mathbb{K}$) des éléments de A tout élément de E de la forme*

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_n x_n,$$

où $n \in \mathbb{N}^*$, $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \mathbb{K}$ et $x_1, x_2, ..., x_n \in A$.

3. *Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille non vide d'éléments de E. On appelle* ***combinaison linéaire*** *(à cœfficients dans $\mathbb{K}$) de la famille $(x_i)_{i\in I}$ tout élément de E de la forme*

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_n x_n,$$

où $n \in \mathbb{N}^*$, $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \mathbb{K}$ et $(x_1, x_2, ..., x_n)$ est une sous famille finie de $(x_i)_{i\in I}$.

Théorème 1.2.3 *Soient E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel et A un sous ensemble de E.*

1. *Si $A = \varnothing$, alors $vect\,(A) = \{0_E\}$.*
2. *Si $A \neq \varnothing$, alors*

$$vect\,(A) = \{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_n x_n,\ \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \mathbb{K},\ x_1, x_2, ..., x_n \in A\}.$$

$vect\,(A) =$ l'ensemble des combinaisons linéaires des éléments de A.

Preuve 1.2.2 1. *$A = \varnothing$, alors par définition, $vect\,(A) =$ l'intersection de tous les sous espaces vectoriels de E contenant $\varnothing = \{0_E\}$.*

2. $A \neq \varnothing$, posons $F =$ l'ensemble des combinaisons linéaires des éléments de A.

• Montrons que F est un sous espace vectoriel de E contenant A.

- On sait que $A \subset F$ car pour tout $x \in A$, on a $1_{\mathbb{K}}x = x \in F \Longrightarrow F \neq \varnothing$.

- Soient $u, v \in F$, et $\alpha, \lambda \in \mathbb{K}$,

Il existe $m, n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, x_2, ..., x_m, y_1, y_2, ..., y_n \in A$, $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in \mathbb{K}$ tels que $u = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_m x_m$ et $v = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + ... + \alpha_n y_n$. On a $\alpha u + \lambda v = \alpha\lambda_1 x_1 + \alpha\lambda_2 x_2 + ... + \alpha\lambda_m x_m + \lambda\alpha_1 y_1 + \lambda\alpha_2 y_2 + ... + \lambda\alpha_n y_n$ qui est une combinaison linéaire d'éléments de A donc $\alpha u + \lambda v \in F$, donc F est un sous espace vectoriel de E contenant A.

Soit H un sous espace vectoriel de E contenant A.

• Montrons que H contient F.

H un sous espace vectoriel de E contenant A, alors H étant stable pour l'addition et la multiplication externe définies sur E, H contient toute combinaison linéaire d'éléments de A, donc $F \subset H$. Il en résulte que $F = vect\,(A)$.

Corollaire 1.2.1 *Tout sous-espace vectoriel de E contenant A contient également $vect(A)$.*

1.2.5 Exemples

Le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes

• $\mathbb{C} = \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{R}\}$, $\forall z = a + ib \in \mathbb{C}$, on a :

$$a + ib = a \times 1_{\mathbb{C}} + b \times i, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

donc $\mathbb{C} = vect\,(1, i)$ en tant que $\mathbb{R}-$espace vectoriel.

• $\mathbb{C} = vect\,(1)$ en tant que $\mathbb{C}-$espace vectoriel.

• $\mathbb{C} = \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{Q}\} = vect\,(1, i)$ en tant que $\mathbb{Q}-$espace vectoriel.

La droite vectorielle

Soient E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel, $x \in E$, $x \neq 0_E$, alors

$$vect(x) =< x >= \{\lambda x : \lambda \in \mathbb{K}\} = \mathbb{K}x.$$

Pour tout $x \in E$, $x \neq 0_E$, $\mathbb{K}x$ est appelé la droite vectorielle de E engendrée par x.

Le sous espace vectoriel $\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) : A = \lambda I_n,\ n \in \mathbb{N}^*, \lambda \in \mathbb{K}\}$ du $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est la droites vectorielle engendrée par I_n.

$$\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) : A = \lambda I_n,\ n \in \mathbb{N}^*, \lambda \in \mathbb{K}\} =< I_n > .$$

Le $\mathbb{K}-$espace vectoriel $\mathbb{K}_n[X]$

Soit la famille $\{1, X, X^2, ..., X^n\} \subset \mathbb{K}, n \in \mathbb{N}^*$, alors

$$vect(1, X, X^2, ..., X^n) = \mathbb{K}_n[X].$$

1.3 Somme et somme directe de sous espaces vectoriels-sous espaces vectoriels supplémentaires

1.3.1 Théorème et définition

Définition 1.3.1 ***(Somme de deux sous-espaces vectoriels)***

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Le sous espace vectoriel de E engendré par $F \cup G$ est l'ensemble des éléments $x_1 + x_2$ où $x_1 \in F$ et $x_2 \in G$.

Ce sous espace vectoriel est appelé la ***somme*** *des sous espaces vectoriels F et G et noté $F + G$.*

Autrement dit

$$F + G = \{u + v \mid u \in F,\ v \in G\} = vect\,(F \cup G) \subset E.$$

Théorème+Définition 1.3.1 *Soient F et G deux sous-espaces vectoriels du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.*

Les conditions suivantes sont équivalentes.

1. *Pour tout $x \in F + G$, il existe un unique $(x_1, x_2) \in F \times G$ tel que $x = x_1 + x_2$.*
2. *$F \cap G = \{0_E\}$.*

Nous disons que la somme $F + G$ est ***directe*** *lorsque l'une des deux conditions est satisfaite. Et on note $F \oplus G$.*

Définition 1.3.2 *Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.*

On dit que E_1 et E_2 sont ***supplémentaires*** *si, et seulement si*

$$E = E_1 \oplus E_2 \quad et \quad E_1 \cap E_2 = \{0_E\}.$$

Définition 1.3.3 *Soit F un sous-espace vectoriel du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.*

Tout sous-espace G de E tel que $E = F \oplus G$ est appelé un supplémentaire de F dans E.

1.4 Familles libres-familles liées-bases

1.4.1 Définitions

Définition 1.4.1 *Soient $x_1, x_2, ..., x_p$ des vecteurs d'un $\mathbb{K}-$espace vectoriel E.*

1. *Nous disons que la famille $(x_1, x_2, ..., x_p)$ est* ***libre****, ou que les vecteurs $x_1, x_2, ..., x_p$ sont* ***linéairement indépendants*** *si, et seulement si*

   Pour tous $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p \in \mathbb{K}$, la relation $(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_p x_p = 0_E)$ implique $(\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda$
2. *Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de E.*

   On dit que cette famille est libre (ou que les vecteurs de cette famille sont linéairement indépendants si, et seulement si ***toutes ses sous-familles finies*** *sont libres.*

3. *Une famille d'éléments de E qui n'est pas libre est dite* ***liée.***

Ainsi

• *Une famille $(x_1, x_2, ..., x_p)$ d'éléments de E est liée si, et seulement si*

Il existe $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p \in \mathbb{K}$ non tous nuls tels que $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_p x_p = 0_E$.

• *Une famille $(x_i)_{i \in I}$ d'éléments de E est liée si, et seulement si une de ses sous-famille finie est liée.*

4. *Les vecteurs d'une famille liée sont dits* ***linéairement dépendants.***

1.4.2 Propriétés

Propriété 1.4.1 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.*

1. *Toute sous famille libre est une famille libre.*

2. *Tous les vecteurs d'une famille libre sont deux à deux distincts et non-nuls i.e si la famille $(x_i)_{i \in I}$ est libre, alors pour tout $i \in I$, $x_i \neq 0_E$ et $\forall i, j$, $i \neq j$ implique $x_i \neq x_j$.*

La reciproque est fausse.

3. *Soit $x \in E$, (x) est libre si, et seulement si $x \neq 0_E$.*

4. *Toute famille contenant le vecteur nul est liée.*

5. *Toute sous famille d'une famille liée est une famille liée.*

1.4.3 Définition

Définition 1.4.2 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel non-nul.*

Soit $(e_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de E. On dit que $(e_i)_{i \in I}$ est ***une base*** *du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E si, et seulement si la famille $(x_i)_{i \in I}$ est libre et engendre E.*

Théorème 1.4.1 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel non-nul, $n \in \mathbb{N}^*$, $(e_1, e_2, ..., e_n)$ une famille d'éléments de E. Il y a équivalence entre :*

1. *$(e_1, e_2, ..., e_n)$ est une base de E.*

2. *Tout élément $x \in E$ s'écrit de manière unique sous la forme*

$$x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + ... + \lambda_n e_n, \quad \lambda_i \in \mathbb{K}.$$

Preuve 1.4.1 $\boxed{1. \Longrightarrow 2.}$ *Supposons que $(e_1, e_2, ..., e_n)$ soit une base de E. Alors $(e_1, e_2, ..., e_n)$ est une famille libre et $E =< e_1, e_2, ..., e_n >$, et pour tout $x \in E =< e_1, e_2, ..., e_n >$, il existe $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \mathbb{K}$ tel que $x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + ... + \lambda_n e_n$.*

Montrons l'unicité des $\lambda_i \in \mathbb{K}$.

Supposons que $x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + ... + \alpha_n e_n$, $\alpha_i \in \mathbb{K}$, alors

$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + ... + \lambda_n e_n = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + ... + \alpha_n e_n \Longrightarrow (\lambda_1 - \alpha_1) e_1 + ... + (\lambda_n - \alpha_n) e_n = 0_E$.

$(e_1, e_2, ..., e_n)$ est une famille libre implique $\lambda_1 - \alpha_1 = ... = \lambda_n - \alpha_n$ i.e $\lambda_1 = \alpha_1$ et $\lambda_2 = \alpha_2$ et ... et $\lambda_n = \alpha_n$.

$\boxed{1. \Longleftarrow 2.}$ *Supposons tout élément $x \in E$ s'écrit de manière unique sous la forme*

$$x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + ... + \lambda_n e_n, \quad \lambda_i \in \mathbb{K},$$

alors $E =< e_1, e_2, ..., e_n >$.

Montrons que la famille $(e_1, e_2, ..., e_n)$ est libre.

Soit $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + ... + \lambda_n e_n = 0_E = 0_{\mathbb{K}} e_1 + 0_{\mathbb{K}} e_2 + ... + 0_{\mathbb{K}} e_n$. Alors l'unicité de l'écriture implique que $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0_{\mathbb{K}}$. Donc la famille $(e_1, e_2, ..., e_n)$ est libre.

Ainsi la famille $(e_1, e_2, ..., e_n)$ est une base de E.

1.4.4 Exemples

La base canonique de $\mathbb{K}^n$

Les vecteurs :

$$e_1 = (1, 0, ..., 0);\ e_2 = (0, 1, 0, ..., 0); ...\ e_i = (0, ..., 0, \underset{\text{ième place}}{\overset{1}{\uparrow}}, 0, ..., 0); ...; e_n = (0, 0, ..., 0, 1)$$

de $\mathbb{K}^n$ forment une base du $\mathbb{K}-$espace vectoriel $\mathbb{K}^n$ appelée **base canonique** de $\mathbb{K}^n$.

Le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Dans le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, l'ensemble $\{e_{ij} : 1 \leqslant i \leqslant n; 1 \leqslant j \leqslant p\}$ des matrices élémentaires de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ appelée base canonique du $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{K}[X]$

Dans le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{K}[X]$, la famille $(1, X, X^2, ..., X^m, ...) = (X^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une base.

Dans le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{K}_m[X]$, la famille $(1, X, X^2, ..., X^m)$ est une base.

Exercices

Exercice 1.4.1 *Soient dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs $v_1 = (1, 1, 0)$, $v_2 = (4, 1, 4)$ et $v_3 = (2, -1, 4)$.*

La famille (v_1, v_2, v_3) est-elle libre ?

Exercice 1.4.2 *Les familles suivantes sont-elles libres ?*

1. $v_1 = (1, 0, 1)$, $v_2 = (0, 2, 2)$ *et* $v_3 = (3, 7, 1)$ *dans* $\mathbb{R}^3$.
2. $v_1 = (1, 0, 0)$, $v_2 = (0, 1, 1)$ *et* $v_3 = (1, 1, 1)$ *dans* $\mathbb{R}^3$.
3. $v_1 = (1, 2, 1, 2, 1)$, $v_2 = (2, 1, 2, 1, 2)$, $v_3 = (1, 0, 1, 1, 0)$ *et* $v_4 = (0, 1, 0, 0, 1)$ *dans* $\mathbb{R}^5$.

4. $v_1 = (2,4,3,-1,-2,1)$, $v_2 = (1,1,2,1,3,1)$ *et* $v_3 = (0,-1,0,3,6,2)$ *dans* $\mathbb{R}^6$.

5. $v_1 = (2,1,3,-1,-4,-1)$, $v_2 = (-1,1,-2,2,-3,3)$ *et* $v_3 = (1,5,0,4,-1,7)$ *dans* $\mathbb{R}^6$.

On considère dans $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, *une famille de 4 vecteurs* (e_1, e_2, e_3, e_4) *linéairement indépendants.*

Les familles suivantes sont-elles libres ?

1. $(e_1, 2e_2, e_3)$.
2. (e_1, e_3) .
3. $(e_1, 2e_1 + e_4, e_4)$.
4. $(3e_1 + e_3, e_3, e_2 + e_3)$.
5. $(2e_1 + e_2, e_1 - 3e_2, e_4, e_2 - e_1)$.

Exercice 1.4.3 *Soit* E *un espace vectoriel sur* $\mathbb{R}$ *et* (x, y, z, t) *une famille libre d'éléments de* E, *les familles suivantes sont-elles libres ?*

1. $(x, 2y, z)$.
2. (x, z) .
3. $(x, x + 2, t)$.
4. $(3x + y, z, y + z)$.
5. $(2x + y, x - 3, t, y - x)$.

1. *Est-ce que le sous-ensemble* $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ y = 2x\} \subset \mathbb{R}^2$, *muni des lois habituelles de l'espace vectoriel* $\mathbb{R}^2$, *est un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel ?*

2. *Est-ce que le sous-ensemble* $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ y^2 = 2x,\ z = 0\} \subset \mathbb{R}^3$, *muni des lois habituelles de l'espace vectoriel* $\mathbb{R}^3$, *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^3$?

Exercice 1.4.4 *Soient* $v_1 = (2,3,-1)$, $v_2 = (1,-1,-2)$, $v_3 = (3,7,0)$ *et* $v_4 = (5,0,-7)$ *dans* $\mathbb{R}^3$. *Soient* $E =< v_1, v_2 >$ *et* $F =< v_3, v_4 >$ *les sous-espaces vectoriels de* $\mathbb{R}^3$. *Montrer que* $E = F$.

Exercice 1.4.5 *Soient* $u_1 = (1,1,1), u_2 = (2,-2,-1), u_3 = (1,1,-1)$ *et les ensembles* $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y + z = 0\}$ *et* $F =< u_1, u_2 >$.

1. Montrer que E est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, puis en déterminer une base.
2. La famille (u_1, u_2, u_3) est-elle libre ?
3. A-t-on $u_3 \in F$, $u_3 \in E$?
4. Donner une base de $E \cap F$.
5. Le vecteur $v = (-1, 7, 5)$ est-il dans E, dans F?