Ce document est mis à disposition selon les termes de la licence Creative Commons « Attribution – Partage dans les mêmes conditions 4.0 International ». https://www.immae.eu/cours/

Chapitre 3 : Relations d'ordre

Dans tout ce qui suit, E désigne un ensemble quelconque.

I Généralités

A) Relations binaires

Définition :
Une relation binaire définie sur E est une propriété que chaque couple (x, y) d'éléments de E est susceptible d'avoir ou non. Si $\mathcal{R}$ désigne une relation binaire définie sur E, on note $x\mathcal{R}y$ pour signifier que x et y sont en relation par $\mathcal{R}$. Ainsi, se donner une relation binaire $\mathcal{R}$ sur E, c'est se donner la partie G de $E \times E$ constituée des couples (x, y) tels que $x\mathcal{R}y$.

Exemple :

- Sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels, on connaît les relations usuelles $\leqslant, <, \geqslant, >, =, \ldots$ (on peut aussi considérer les restrictions de ces relations à $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$…)
- Sur l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs, on peut penser à la relation de divisibilité $x|y \iff \exists k \in \mathbb{Z}, y = kx$. On peut aussi imaginer (sur $\mathbb{Z}$) la relation $\equiv$ définie par $x \equiv y \iff x - y$ est pair.
- Sur l'ensemble $\mathscr{P}(\Omega)$ des parties d'un ensemble Ω, on connaît la relation d'inclusion, on peut aussi imaginer la relation définie par : $A\delta B \iff A \cap B = \varnothing$.

B) Relations d'ordre

Définition :
Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire définie sur E. $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre lorsque :

- $\mathcal{R}$ est réflexive, c'est-à-dire : $\forall x \in E, x\mathcal{R}x$.
- $\mathcal{R}$ est transitive, c'est-à-dire : $\forall x \in E, \forall y \in E, \forall z \in E, (x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}z \implies x\mathcal{R}z)$.
- $\mathcal{R}$ est antisymétrique, c'est-à-dire : $\forall x \in E, \forall y \in E, (x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}x \implies x = y)$.

Exemple :
En reprenant les relations binaires précédentes,

- $\leqslant, \geqslant, =$ sont des relations d'ordre sur $\mathbb{R}$ (et sur $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$…).
- $<, >$ n'en sont pas.
- $|, \equiv$ ne sont pas des relations d'ordre sur $\mathbb{Z}$, mais $|$ en est une sur $\mathbb{N}$.
- $\subset$ est une relation d'ordre sur $\mathscr{P}(\Omega)$, mais pas δ.

C) Ordre total, ordre partiel

Soit $\mathcal{R}$ une relation d'ordre sur E. On dit que $\mathcal{R}$ définit un ordre total sur E lorsque deux éléments de E sont toujours comparables pour $\mathcal{R}$, c'est-à-dire : $\forall x \in E, \forall y \in E, (x\mathcal{R}y \text{ ou } y\mathcal{R}x)$.

Dans le cas contraire, on parle d'ordre partiel.

Exemple :

- $\leqslant$ définit un ordre total sur $\mathbb{R}$ (et sur $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$…).
- $|$ définit un ordre partiel sur $\mathbb{N}$.
- $\subset$ définit un ordre partiel sur $\mathscr{P}(\Omega)$.

II Vocabulaire dans un ensemble ordonné

Dans tout ce paragraphe, $\preceq$ désigne une relation d'ordre quelconque sur E.

A) Maximum, minimum

Proposition, définition :
Soit A une partie de E. S'il existe un élément a de A tel que $\forall x \in A, x \preceq a$, alors il n'en existe qu'un seul, et on l'appelle le maximum de A (ou le plus grand élément de A), noté $\max(A)$. La définition est analogue pour le minimum (ou plus petit élément)…

Attention, il n'y a pas nécessairement existence !

Exemple :

- Pour la relation usuelle $\leqslant$ dans $\mathbb{R}$, $]0,1[$ et $\mathbb{N}$ n'ont pas de maximum.
- Pour la relation de divisibilité dans $\mathbb{N}$, $\{1, 2, \dots, 10\}$ non plus.

B) Majorants, minorants

Définition :
Soit A une partie de E, et soit $z \in E$. On dit que z est un majorant de A (dans E) lorsque $\forall x \in A, x \preceq z$.
La définition est analogue pour le minorant.
Attention, il n'y a pas toujours existence, ni unicité ! D'ailleurs, si z majore A, alors tout élément z' de E tel que $z \preceq z'$ majore aussi A.

Remarque :
On a l'équivalence : $a = \max(A) \iff a \in A$ et a majore A.

Une partie A est dite majorée (respectivement minorée) lorsqu'elle admet au moins un majorant (respectivement minorant), et enfin est dite bornée lorsqu'elle est à la fois majorée et minorée.

C) Borne supérieure, borne inférieure

Définition :

Soit A une partie de E. Si A est majorée, et si l'ensemble des majorants de A admet un plus petit élément, celui-ci est appelé la borne supérieure de A, notée $\sup(A)$.

La définition est analogue pour l'éventuelle borne inférieure : si A est minorée, et si l'ensemble des minorants de A admet un plus grand élément, celui-ci est appelé la borne inférieure de A, notée $\inf(A)$.

Attention, il n'y a pas toujours existence.

Remarque :

Si A admet un maximum, alors A admet une borne supérieure, et $\sup(A) = \max(A)$, mais A peut très bien avoir une borne supérieure sans avoir de maximum.

Démonstration :

Supposons que A admette un maximum, disons a. On note S l'ensemble des majorants de A (S n'est pas vide puisqu'il contient a). Soit $b \in S$. Alors $a \preceq b$ puisque $a \in A$ et b est un majorant de A. Ainsi, $\forall b \in S, a \preceq b$. donc a est le minimum de S. Donc a est la borne supérieure de A.

D) Notations

Notation :

- Soit $f : D \to E$, où D est un ensemble quelconque. (E est toujours ordonné par $\preceq$). Si l'ensemble image $f(D) = \{f(x), x \in D\}$ admet une borne supérieure, on l'appelle la borne supérieure de f et on la note $\sup(f)$ ou $\sup_{x \in D} f(x)$.
- Soit $(a_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de E indexée par un ensemble I quelconque. Si l'ensemble $\{a_i, i \in I\}$ admet une borne supérieure, on la note $\sup_{i \in I} a_i$.
- Les notations sont analogues pour les éventuels max, min, inf.

E) Applications croissantes, décroissantes etc.

Ici, on considère deux ensembles ordonnés $(E, \preceq)$ et $(F, \trianglelefteq)$.

Définition :

Soit $f : E \to F$.

- f est croissante lorsque $\forall x \in E, \forall x' \in E, (x \preceq x' \implies f(x) \trianglelefteq f(x'))$.
- f est décroissante lorsque $\forall x \in E, \forall x' \in E, (x \preceq x' \implies f(x') \trianglelefteq f(x))$.

Et, en notant $x \prec x'$ pour « $x \preceq x'$ et $x \neq x'$ », $y \triangleleft y'$ pour « $y \trianglelefteq y'$ et $y \neq y'$ » :

- f est strictement croissante lorsque $\forall x \in E, \forall x' \in E, (x \prec x' \implies f(x) \triangleleft f(x'))$.
- f est strictement décroissante lorsque $\forall x \in E, \forall x' \in E, (x \prec x' \implies f(x') \triangleleft f(x))$.