Bienvenue sur le site de Henri Immediato

- **Enseignement (1e et 2e années de Sciences) : plus de 1000 exercices entièrement résolus.**

Théorie des ensembles : exercices.
Algèbre, structures : exercices.
Arithmétique : exercices.
Algèbre linéaire : exercices.
Analyse : exercices.
Probabilités : exercices.
Statistiques : cours (1e partie, 2e partie), exercices.
Manuscrits : fonctions de variable complexe (27 Mo), distributions (49 Mo)
Cours d'analyse (27 Mo).

Mise à jour : 14 février 2008, nouvel exercice

Maths - Lyon 1

- **Si le site vous a plu, téléchargez l'ensemble du site (format ZIP, 18,4 Mo).**

Théorie des ensembles

e-mail

1. Connecteurs, quantificateurs, tables de vérité.
2. Ensembles : réunion, intersection, complémentaire, différence symétrique.
3. Applications : injection, surjection, bijection.
4. Cantor, Bernstein, cardinaux.
5. Relations d'équivalence.
6. Relations d'ordre.
7. Applications d'ensembles finis.
8. Parties d'ensembles finis.
9. Coefficients binomiaux.
10. Entiers naturels, rationnels, réels.

Accueil

Exercices

Connecteurs, quantificateurs, tables de vérité : définitions.

1. **Relation : NON, OU, ET, IMPLIQUE, EQUIVAUT.**
2. **Axiomes d'une théorie logique, théorème, démonstration.**
3. **Quantificateurs universel et existentiel.**
4. **Table de vérité.**
5. **Appartenance, théorie des ensembles.**

1. Relation.

Les **signes** d'une théorie peuvent être des lettres, des signes logiques (**connecteurs**) : $\neg$, $\wedge$, $\vee$..., des symboles ou signes spécifiques τ, $\in$, $\subseteq$, $\leq$, $\forall$, $\exists$, $=$, ...
Un **assemblage** est une suite de signes : l'assemblage $\vee \neg$ se représente par $\Rightarrow$.
Un **terme** est un assemblage qui se réduit à une lettre ou qui commence par un τ (tau de Hilbert) et qui figure dans une construction formative.
Une **relation** est un **assemblage** représentant une **assertion ou proposition** que l'on peut faire sur ses objets, et qui figure dans une construction formative.

Une **construction formative** d'une théorie $\mathcal{T}$ est une suite d'assemblages (termes ou relations) telle que, pour tout assemblage de la suite, l'une des conditions suivantes est vérifiée :

a) A est une lettre ;

b) Il y a dans la suite une relation B précédant A telle que A soit $\neg B$;

c) Il y a dans la suite deux relations B et C (distinctes ou non) précédant A, telle que A soit $\vee B\, C$ (noté aussi $B \vee C$) ;

d) Il y a dans la suite une relation B précédant A et une lettre x telle que A soit $\tau_x(B)$;

Intuitivement, l'assemblage $\tau_x(B)$ représente un objet, choisi une fois pour toutes, vérifiant la relation B.

Par exemple, l'assemblage $\tau_X((\forall x)(x \notin X))$ est désigné par Ø et appelé l'**ensemble vide**.

e) Il y a un signe spécifique s de poids n de $\mathcal{T}$, et n termes $A_1, A_2, ..., A_n$, précédant A, tels que A soit $s\, A_1\, A_2 \ldots A_n$.

Les conditions a) et d) définissent les **termes**, les conditions b), c), e), définissent les **relations**.

Exemples de relations :

Si B est une relation, la relation $\neg B$ se lit **NON** B, et s'appelle la **négation** de B.

Si B et C sont des relations, la relation $B \vee C$ se lit B **OU** C et s'appelle la **disjonction** de B et C.

Si B et C sont des relations, la relation $\neg (\neg B \vee \neg C)$ se note $B \wedge C$, se lit B **ET** C et s'appelle la **conjonction** de B et C.

Si B et C sont des relations, la relation $\neg B \vee C$ se note $B \Rightarrow C$, se lit B **IMPLIQUE** C et s'appelle l'**implication** de B et C.

Si B et C sont des relations, la relation $(B \Rightarrow C) \wedge (C \Rightarrow B)$ se note $B \Leftrightarrow C$, se lit B **EQUIVAUT A** C et s'appelle l'**équivalence** de B et C.

HAUT

2. Axiomes d'une théorie logique, théorème, démonstration.

Une **théorie logique** est une théorie $\mathcal{T}$ dans laquelle les **schémas** S1 à S4 ci-dessous fournissent des axiomes implicites (un **axiome** est une assertion évidente ou une hypothèse dont on s'apprête à tirer les conséquences) :

S1. Si A est une relation de $\mathcal{T}$, (A **ou** A) $\Rightarrow A$ est un axiome de $\mathcal{T}$.
S2. Si A et B sont des relations de $\mathcal{T}$, la relation $A \Rightarrow$ (A **ou** B) est un axiome de $\mathcal{T}$.
S3. Si A et B sont des relations de $\mathcal{T}$, la relation (A **ou** B) $\Rightarrow$ (B **ou** A) est un axiome de $\mathcal{T}$.
S4. Si A, B et C sont des relations de $\mathcal{T}$, la relation ($A \Rightarrow B$) $\Rightarrow$ ((C **ou** A) $\Rightarrow$ (B **ou** A)) est un axiome de $\mathcal{T}$.

Par opposition aux axiomes, un **théorème** d'une théorie $\mathcal{T}$ est une relation figurant dans une démonstration.
Au lieu de théorème, on parle aussi de "**relation vraie**" dans $\mathcal{T}$.

Un **texte démonstratif** contient :
1°/ Une **construction formative** auxiliaire contenant des relations et des termes de $\mathcal{T}$;
2°/ Une **démonstration**.

Une **démonstration** est une suite de relations telles que, pour chaque relation R de la suite, l'une au moins des conditions suivantes est réalisée :
a) R est un axiome explicite de $\mathcal{T}$. (Exemples d'axiomes explicites : $n = 3$, E est un ensemble, f est une application de E dans F, etc.).
b) R résulte de l'application d'un schéma d'axiome à des termes ou relations figurant dans la construction formative auxiliaire.
c) Il y a dans la suite deux relations S et T, précédant R, telles que T soit $S \Rightarrow R$ (**Règle de modus ponens**).

On peut voir un exemple un peu détaillé d'une telle démonstration dans le Chapitre 2, Exercice 8, 1°.
Dans la réalité, les démonstrations complètes sont trop longues pour être écrites entièrement, il suffit de savoir qu'on peut les faire, pour pouvoir admettre le résultat des raccourcis.

HAUT

3. Quantificateurs.

Si R est un assemblage et x une lettre, l'assemblage $(\tau_x (R) \mid x)\ R$, qui se lit $\tau_x (R)$ **remplace** x dans R, se désigne par "Il existe un x tel que R", ou $(\exists\ x)\ R$.
L'assemblage $\neg\ ((\exists\ x)\ (\neg\ R))$ est noté $(\forall\ x)\ R$, ou "Pour tout x, R", ou "Quel que soit x, R".
Les symboles abréviateurs $\exists$ et $\forall$ sont appelés les **quantificateurs** (**existentiel** et **universel**, respectivement).

Si R est une relation, $(\exists\ x)\ R$ et $(\forall\ x)\ R$ sont des relations.
Les relations $(\forall\ x)\ R$ et $(\tau_x (\neg\ R) \mid x)\ R$ sont équivalentes.

Intuitivement, la relation $(\exists\ x)\ R$ signifiequ'il y a un objet possédant la propriété R,
$(\forall\ x)\ R$ signifie que tout objet possède la propriété R.

Une **théorie quantifiée** est une théorie $\mathcal{T}$ dans laquelle les schémas S1 à S4 ci-dessus, et le schéma S5 ci-dessous, fournissent des axiomes implicites.

> S5. Si R est une relation de $\mathcal{T}$, T un terme de $\mathcal{T}$, et x une lettre, la relation $(T \mid x)\ R \Rightarrow (\exists\ x)\ R$ est un axiome.

HAUT

4. Table de vérité.

Une relation d'une théorie logique peut être vraie ou fausse : on peut lui attribuer une valeur de vérité 0 (fausse) ou 1 (vraie).
La table de vérité d'une relation où figurent des **connecteurs logiques** s'obtient à partir des tables de vérité de ces connecteurs :

A	B	$\neg A$	$A \vee B$	$A \wedge B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	1	0	1	0
1	0	0	1	0	0	0
1	1	0	1	1	1	1

Deux relations équivalentes ont la même table de vérité : $A \Leftrightarrow B$ a pour valeur de vérité 1 si, et seulement si, A et B ont les mêmes valeurs de vérité 0 ou 1, en même temps.

Les théorèmes et les axiomes ont une valeur de vérité 1.

HAUT

5. Appartenance, théorie des ensembles.

La relation "*x* est un élément de l'ensemble *E*" est notée :

x ∈ ***E*** (relation d'appartenance).

Cette relation se lit aussi "*x* appartient à *E*".

∈ est un **signe** de la théorie des ensembles.

La **théorie des ensembles** est une théorie logique, quantifiée et égalitaire (existence d'un signe relationnel de poids 2 noté =, qui se lit "égale").
Elle possède donc les schémas d'axiomes S1 à S4 des théories logiques, le schéma S5 des théories quantifées, et les schémas S6 et S7 des théories égalitaires:

S1. Si *A* est une relation de $\mathcal{T}$, (A **ou** A) ⇒ *A* est un axiome de $\mathcal{T}$.

S2. Si *A* et *B* sont des relations de $\mathcal{T}$, la relation *A* ⇒ (*A* **ou** *B*) est un axiome de $\mathcal{T}$.

S3. Si *A* et *B* sont des relations de $\mathcal{T}$, la relation (*A* **ou** *B*) ⇒ (*B* **ou** *A*) est un axiome de $\mathcal{T}$.

S4. Si *A*, *B* et *C* sont des relations de $\mathcal{T}$, la relation (*A* ⇒ *B*) ⇒ ((*C* **ou** *A*) ⇒ (*B* **ou** *A*)) est un axiome de $\mathcal{T}$.

S5. Si *R* est une relation de $\mathcal{T}$, *T* un terme de $\mathcal{T}$, et *x* une lettre, la relation (*T* | *x*) *R* ⇒ (∃ *x*) *R* est un axiome de $\mathcal{T}$.

S6. Soient *x* une lettre, *T* et *U* des termes de $\mathcal{T}$, et *R* | *x*| une relation de $\mathcal{T}$; la relation (*T* = *U*) ⇒ (*R* | *T* | ⇔ *R* | *U* |) est un axiome de $\mathcal{T}$.

S7. Si *R* et *S* sont des relations de $\mathcal{T}$ et *x* une lettre, la relation ((∀*x*)(*R* ⇔ *S*) ⇒ (τ_x (*R*) = τ_x (*S*)) est un axiome de $\mathcal{T}$.

HAUT

Chapitre 1. Connecteurs, quantificateurs, tables de vérité.

Exercice 1. Relations équivalentes.
Exercice 2. Tables de vérité.
Exercice 3. Connecteurs NAND et NOR.
Exercice 4. Langage mathématique.
Exercice 5. Relations.
Exercice 6. Table de vérité d'une relation.
Exercice 7. Equivalence de deux relations.
Exercice 8. Petit problème amusant de logique.

Exercice 1. Relations équivalentes.

Soit E un ensemble, $P(x)$ et $Q(x)$ des propositions concernant les éléments de E. A-t-on les équivalences suivantes :

1°/ $(\forall x \in E)(P(x) \text{ et } Q(x)) \Leftrightarrow ((\forall x \in E)(P(x)) \text{ et } (\forall x \in E)(P(x)))$.
2°/ $(\exists x \in E)(P(x) \text{ et } Q(x)) \Leftrightarrow ((\exists x \in E)(P(x)) \text{ et } (\exists x \in E)(P(x)))$.
3°/ $(\forall x \in E)(P(x) \text{ ou } Q(x)) \Leftrightarrow ((\forall x \in E)(P(x)) \text{ ou } (\forall x \in E)(P(x)))$.
4°/ $(\exists x \in E)(P(x) \text{ ou } Q(x)) \Leftrightarrow ((\exists x \in E)(P(x)) \text{ ou } (\exists x \in E)(P(x)))$.

Solution

HAUT

Exercice 2. Tables de vérité.

Ecrire la table de vérité de $\neg\,(p \Rightarrow q)$ et la table de vérité de $p \vee (\neg\, q)$.	Solution

HAUT

Exercice 3. Connecteurs NAND et NOR.

Le connecteur NAND (non-et) est défini par $\neg\,(p \wedge q)$. 1°/ Donner sa table de vérité. 2°/ Peut-on définir $\neg$, $\wedge$ et $\vee$ en fonction uniquement de NAND ? 3°/ Mêmes questions pour le connecteur NOR (non-ou) défini par $\neg\,(p \vee q)$.	Solution

HAUT

Exercice 4. Langage mathématique.

Traduire en langage mathématique, en utilisant les quantificateurs adéquats, la proposition : "Entre deux réels distincts, on peut trouver un rationnel."	Solution

HAUT

Exercice 5. Relations.

Soient P, Q, R, des propositions. Montrer que :

1°/ $P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$ équivaut à (P et Q) $\Rightarrow R$.
2°/ (P ou Q) $\Rightarrow R$ équivaut à ($P \Rightarrow R$) et ($Q \Rightarrow R$).

Solution

HAUT

Exercice 6. Table de vérité d'une relation.

Donner la table de vérité de $(p \to q) \wedge \neg\, q$.	Solution

HAUT

Exercice 7. Equivalence de deux relations.

Sans utiliser de table de vérité, montrer que $(\neg\, p \to q) \wedge r$ équivaut à $(\neg\, p \vee \neg\, r) \to (q \wedge r)$	Solution

HAUT

Exercice 8. Petit problème amusant de logique.

HAUT

L'énigme d'Einstein.

Les faits:

1. Il y a cinq maisons de 5 couleurs différentes.
2. Dans chaque maison vit une personne de nationalité différente.
3. Chacun des 5 propriétaires boit un certain type de boisson, fume un certain type de cigares et garde un certain animal domestique.

La question:

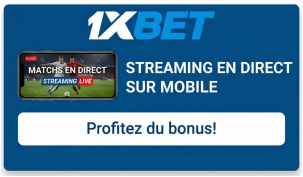
Qui a le poisson?

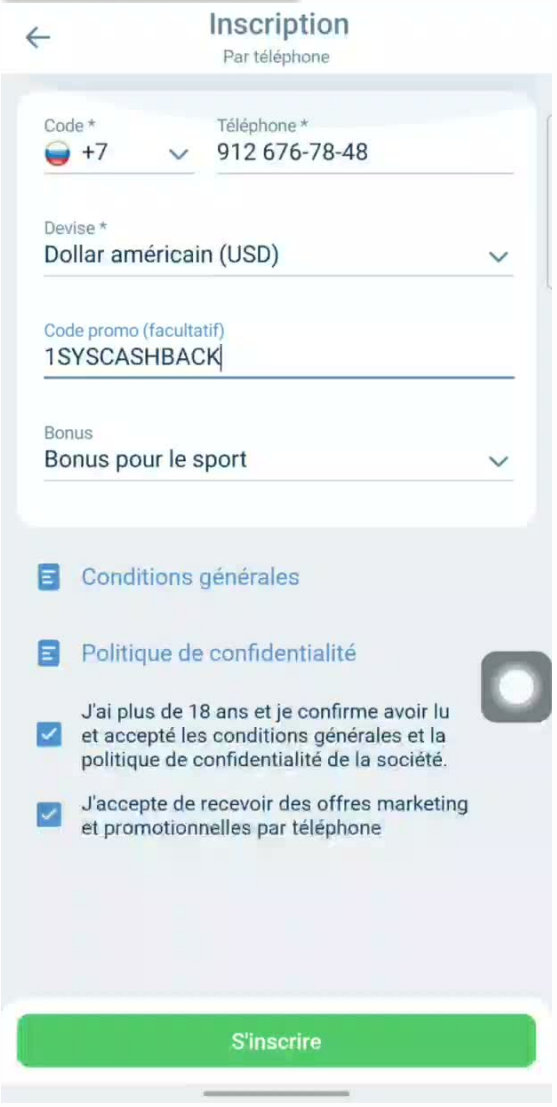
Quelques indices:

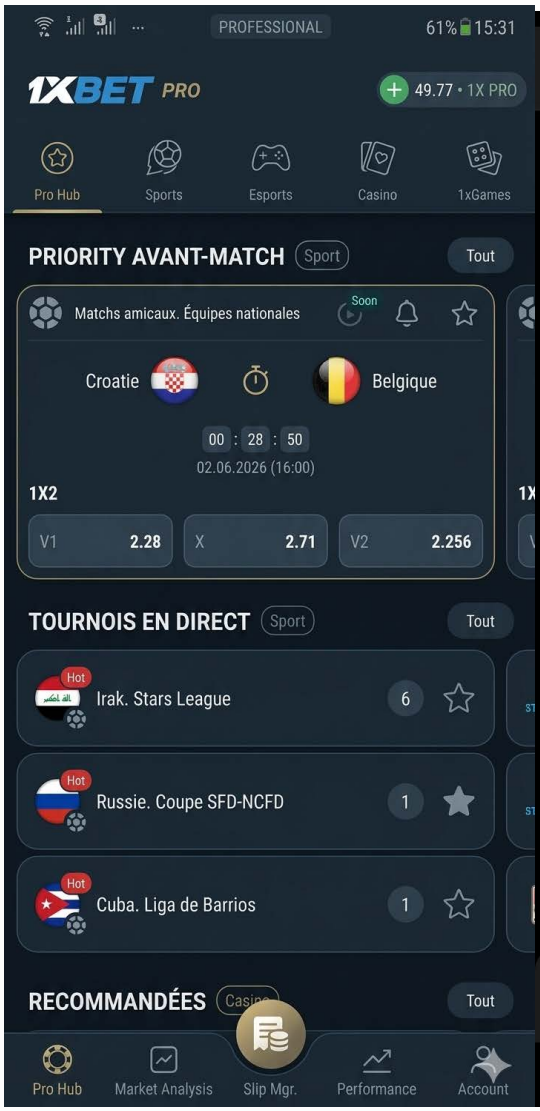
1. L'Anglais vit dans une maison rouge.
2. Le Suédois a des chiens comme animaux domestiques.
3. Le Danois boit du thé.
4. La maison verte est à gauche de la maison blanche.
5. Le propriétaire de la maison verte boit du café.
6. La personne qui fume des Pall Mall a des oiseaux.
7. Le propriétaire de la maison jaune fume des Dunhill.
8. La personne qui vit dans la maison du centre boit du lait.
9. Le Norvégien habite la première maison.
10. L'homme qui fume les Blend vit à côté de celui qui a des chats.
11. L'homme qui a un cheval est le voisin de celui qui fume des Dunhill.
12. Le propriétaire qui fume des Blue Master boit de la bière.
13. L'Allemand fume des Prince.
14. Le Norvégien vit juste à côté de la maison bleue.
15. L'homme qui fume des Blend a un voisin qui boit de l'eau.

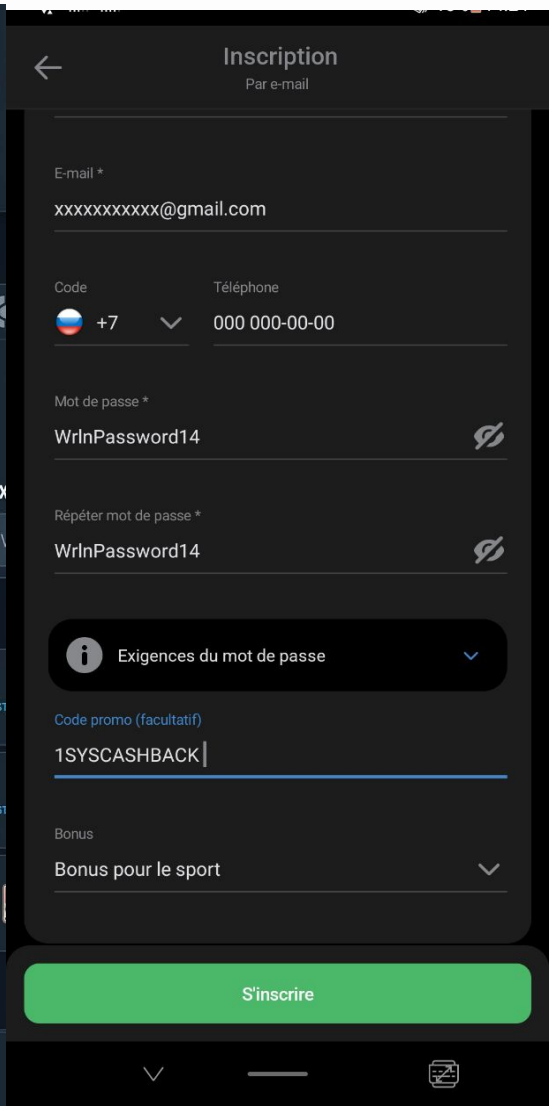
Solution

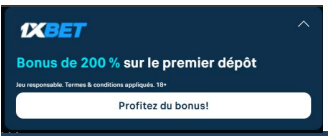
HAUT

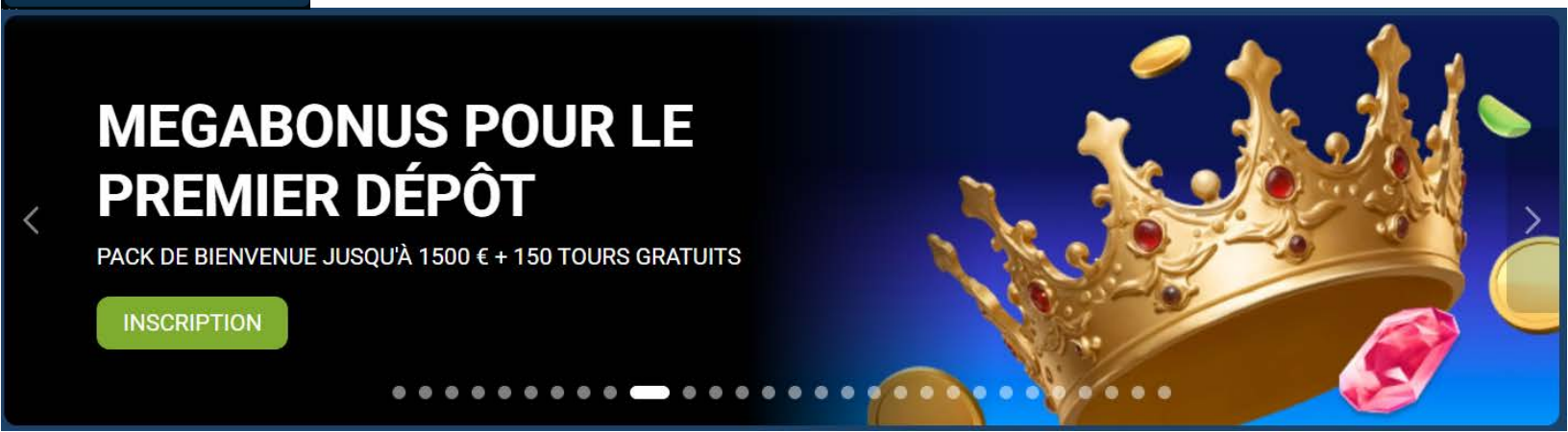

1XBET
STREAMING EN DIRECT SUR MOBILE
Profitez du bonus!


Inscription
Par téléphone
Code *
+7
Téléphone *
912 676-78-48
Devise *
Dollar américain (USD)
Code promo (facultatif)
1SYSCASHBACK
Bonus
Bonus pour le sport
Conditions générales
Politique de confidentialité
J'ai plus de 18 ans et je confirme avoir lu et accepté les conditions générales et la politique de confidentialité de la société.
J'accepte de recevoir des offres marketing et promotionnelles par téléphone
S'inscrire


PROFESSIONAL
61% 15:31
1XBET PRO
49.77 • 1X PRO
Pro Hub
Sports
Esports
Casino
1xGames
PRIORITY AVANT-MATCH
Sport
Tout
Matchs amicaux. Équipes nationales
Soon
Croatie
Belgique
00 : 28 : 50
02.06.2026 (16:00)
1X2
V1 2.28
X 2.71
V2 2.256
TOURNOIS EN DIRECT
Sport
Tout
Hot
Irak. Stars League
6
Russie. Coupe SFD-NCFD
1
Cuba. Liga de Barrios
1
RECOMMANDÉES
Casino
Tout
Pro Hub
Market Analysis
Slip Mgr.
Performance
Account


Inscription
Par e-mail
E-mail *
xxxxxxxxxx@gmail.com
Code
+7
Téléphone
000 000-00-00
Mot de passe *
WrlnPassword14
Répéter mot de passe *
WrlnPassword14
Exigences du mot de passe
Code promo (facultatif)
1SYSCASHBACK
Bonus
Bonus pour le sport
S'inscrire


1XBET
Bonus de 200 % sur le premier dépôt
Jeu responsable. Termes & conditions appliqués. 18+
Profitez du bonus!


MEGABONUS POUR LE PREMIER DÉPÔT
PACK DE BIENVENUE JUSQU'À 1500 € + 150 TOURS GRATUITS
INSCRIPTION

Chapitre 1. Connecteurs, quantificateurs, tables de vérité.

Enoncés.

Exercice 1. Relations équivalentes.

Soit E un ensemble, $P(x)$ et $Q(x)$ des propositions concernant les éléments de E. A-t-on les équivalences suivantes : 1°/ $(\forall x \in E)(P(x)$ **et** $Q(x)) \Leftrightarrow ((\forall x \in E)(P(x))$ **et** $(\forall x \in E)(Q(x)))$. 2°/ $(\exists x \in E)(P(x)$ **et** $Q(x)) \Leftrightarrow ((\exists x \in E)(P(x))$ **et** $(\exists x \in E)(Q(x)))$. 3°/ $(\forall x \in E)(P(x)$ **ou** $Q(x)) \Leftrightarrow ((\forall x \in E)(P(x))$ **ou** $(\forall x \in E)(Q(x)))$. 4°/ $(\exists x \in E)(P(x)$ **ou** $Q(x)) \Leftrightarrow ((\exists x \in E)(P(x))$ **ou** $(\exists x \in E)(Q(x)))$.	

Solution

1°/ $(\forall x \in E)(P(x)$ et $Q(x)) \Leftrightarrow ((\forall x \in E)(P(x))$ et $(\forall x \in E)(P(x)))$.

Deux relations A et B sont équivalentes si, et seulement si, $A \Rightarrow B$ et $B \Rightarrow A$ sont des théorèmes.

Soit $\mathcal{T}$ la théorie des ensembles, et $\mathcal{T}_0$ la théorie sans axiomes explicites, qui possède les mêmes signes que $\mathcal{T}$ et les seuls schémas S 1 à S 5.
La théorie $\mathcal{T}$ est plus forte que la théorie $\mathcal{T}_0$: tout théorème de la théorie $\mathcal{T}_0$ est un théorème de la théorie $\mathcal{T}$.
Il suffit donc de démontrer la propriété 1° dans la théorie $\mathcal{T}_0$ dont x n'est pas une constante pour qu'elle soit valable dans la théorie des ensembles.
Cela revient à considérer un x quelconque dans E.

Or si la relation $(P(x)$ **et** $Q(x))$ est vraie pour un x quelconque de E, alors les relations $P(x)$ et $Q(x)$ sont vraies toutes les deux, pour un x quelconque de E.
Par suite, les relations $(\forall x \in E)(P(x))$ et $(\forall x \in E)(Q(x)$ sont vraies toutes les deux, donc la relation $((\forall x \in E)(P(x))$ **et** $(\forall x \in E)(Q(x))$ est vraie.

Réciproquement, si la relation $((\forall x \in E)(P(x))$ **et** $(\forall x \in E)(Q(x))$ est vraie, alors les relations $(\forall x \in E)(P(x))$ et $(\forall x \in E)(Q(x)$ sont vraies toutes les deux, donc les relations $P(x)$ et $Q(x)$ sont vraies pour un x quelconque de E, la relation $(P(x)$ **et** $Q(x))$ est vraie pour un x quelconque de E, donc la relation $(\forall x \in E)(P(x)$ **et** $Q(x))$ est vraie.

Les relations $(\forall x \in E)(P(x)$ **et** $Q(x))$ et $((\forall x \in E)(P(x))$ **et** $(\forall x \in E)(Q(x)))$ sont donc équivalentes.
Ce résultat peut se démontrer aussi en utilisant les tables de vérité.

L'assemblage $(\exists x)\, R$ est, par définition, l'assemblage $(\tau_x(R) \mid x)\, R$, et l'assemblage $(\forall x)\, R$ est l'assemblage $\neg((\exists x)(\neg R))$.

Table de vérité des quantificateurs :

$(\exists\, x \in E)\, R\,(x)$	$\neg\,((\exists\, x \in E)\, R\,(x))$	$(\forall\, x \in E) \neg\, R\,(x)$	$(\exists\, x \in E) \neg\, R\,(x)$	$\neg\,((\exists\, x \in E) \neg\, R\,(x))$	$(\forall\, x \in E)\, R\,(x)$
0	1	1	0	1	1
0	1	1	1	0	0
1	0	0	0	1	1
1	0	0	1	0	0

On peut construire les tables de vérité suivantes, en utilisant, pour la deuxième, la **méthode de disjonction des cas** dans les 3 e et 4 e colonnes.
Lorsqu'une relation écrite ne comporte pas de quantificateur, il est sous-entendu l'expression "pour un x quelconque de E" (dans la théorie $\mathcal{T}_0$).

$(\forall x)\, P\,(x)$	$(\forall x)\, Q\,(x)$	$(\forall x)\, P\,(x)$ **et** $(\forall x)\, Q\,(x)$	$P\,(x)$	$Q\,(x)$	$P\,(x)$ **et** $Q\,(x)$	$(\forall x)\,(P\,(x)$ **et** $Q\,(x))$	$(\forall x)\, P\,(x)$ **et** $(\forall x)\, Q\,(x) \Rightarrow (\forall x)\,(P\,(x)$ **et** $Q\,(x))$
0	0	0	0	0	0	0	1
0	1	0	0	1	0	0	1
1	0	0	1	0	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

$(\forall x)\,(P\,(x)$ **et** $Q\,(x))$	$P\,(x)$ **et** $Q\,(x)$	$P\,(x)$	$Q\,(x)$	$(\forall x)\, P\,(x)$	$(\forall x)\, Q\,(x)$	$(\forall x)\, P\,(x)$ **et** $(\forall x)\, Q\,(x)$	$(\forall x)\,(P\,(x)$ **et** $Q\,(x)) \Rightarrow (\forall x)\, P\,(x)$ **et** $(\forall x)\, Q\,(x)$
0	0	0	0	0	0	0	1
0	0	0	1	0	1	0	1
0	0	1	0	1	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

2°/ $(\exists x \in E)(P\,(x)$ et $Q\,(x)) \Leftrightarrow ((\exists x \in E)(P\,(x))$ et $(\exists x \in E)(Q\,(x)))$.

Si la relation $(\exists x \in E)(P\,(x)$ **et** $Q\,(x))$ est vraie, alors, pour au moins un x de E, le relation $(P\,(x)$ **et** $Q\,(x))$ est vraie, donc les relations $P\,(x)$ et $Q\,(x)$ sont vraies toutes les deux, donc les relations $(\exists x \in E)\, P\,(x)$ et $(\exists x \in E)\, Q\,(x)$ sont vraies et la relation $((\exists x \in E)\, P\,(x)$ **et** $(\exists x \in E)\, Q\,(x))$ est vraie :

$$(\exists x \in E)(P\,(x) \text{ et } Q\,(x)) \Rightarrow ((\exists x \in E)\, P\,(x) \text{ et } (\exists x \in E)\, Q\,(x))$$

Réciproquement, si la relation $((\exists x \in E)\, P\,(x)$ **et** $(\exists x \in E)\, Q\,(x))$ est vraie, rien n'indique qu'il s'agisse du même x, de sorte que la relation $((\exists x \in E)\, P\,(x)$ **et** $(\exists x \in E)\, Q\,(x))$ n'implique pas la relation $(\exists x \in E)(P\,(x)$ **et** $Q\,(x))$.

Par exemple, la relation "Il existe un entier pair et il existe un entier impair", est vraie, mais la relation "Il

existe un entier pair et impair" n'est pas vraie, de sorte que la relation "Il existe un entier pair et il existe un entier impair" n'implique pas la relation "Il existe un entier pair et impair" .

3°/ $(\forall x \in E)(P(x)$ **ou** $Q(x)) \Leftrightarrow ((\forall x \in E)(P(x))$ **ou** $(\forall x \in E)(Q(x)))$.

La relation $(\forall x \in E)(P(x)$ ou $Q(x))$ signifie que tout élément x de E vérifie $P(x)$ ou vérifie $Q(x)$: cette propriété n'implique pas que tout élément x de E vérifie $P(x)$, ou que tout élément de E vérifie $Q(x)$.

Par exemple, ce n'est pas parce que la relation "Tout entier est pair **ou** impair" est vraie que la relation "Tout entier est pair" **ou** "Tout entier est impair" est vraie, puisqu'il existe des entiers qui ne sont pas pairs et il existe des entiers qui ne sont pas impairs.

Par contre, la relation $(\forall x \in E)(P(x))$ **ou** $(\forall x \in E)(Q(x))$ implique que, pour un x quelconque de E, la propriété $P(x)$ est vraie, ou bien la propriété $Q(x)$ est vraie, donc la propriété $P(x)$ ou $Q(x)$ est vraie, de sorte que la relation suivante est vraie :

$$(\forall x \in E)(P(x))\ \textbf{ou}\ (\forall x \in E)(Q(x)) \Rightarrow (\forall x \in E)(P(x)\ \text{ou}\ Q(x))$$

4°/ $(\exists x \in E)(P(x)$ **ou** $Q(x)) \Leftrightarrow ((\exists x \in E)(P(x))$ **ou** $(\exists x \in E)(Q(x)))$.

Dans une théorie logique, si R est une relation et x une lettre, **les relations "$\neg\,(\forall x)\,R$" et "$(\exists x)\,\neg\,R$" sont équivalentes**.
De même, **les relations "$\neg\,(\exists x)\,R$" et "$(\forall x)\,\neg\,R$" sont équivalentes**.
Les relations R et $\neg\,(\neg\,R)$ sont équivalentes.

Il en résulte que $(\exists x \in E)(P(x)$ **ou** $Q(x))$ est équivalente, successivement, à
$(\exists x \in E)($**non**$($**non**$(P(x)$ **ou** $Q(x))))$,
$(\exists x \in E)($**non**$($**non**$(P(x))$ **et non**$(Q(x))))$
non$((\forall x \in E)($**non**$(P(x))$ **et non**$(Q(x))))$

D'après la formule établie en 1° : $(\forall x \in E)($**non**$(P(x))$ **et non**$(Q(x)))$ est équivalente à $(\forall x \in E)$ **non**$(P(x))$ **et** $(\forall x \in E)$ **non**$(Q(x))$,
donc **non**$((\forall x \in E)($**non**$(P(x))$ **et non**$(Q(x))))$ est équivalente, successivement, à :
non$((\forall x \in E)$ **non**$(P(x))$ **et** $(\forall x \in E)$ **non**$(Q(x)))$
non$($**non** $((\exists x \in E)\,P(x))$ **et non** $((\exists x \in E)\,Q(x)))$,
non$($**non** $((\exists x \in E)\,P(x)$ **ou** $(\exists x \in E)\,Q(x)))$,
$(\exists x \in E)\,P(x)$ **ou** $(\exists x \in E)\,Q(x)$

Chapitre 1. Connecteurs, quantificateurs, tables de vérité.

Enoncés.

Exercice 2. Tables de vérité.

Ecrire la table de vérité de $\neg\,(p \Rightarrow q)$ et la table de vérité de $p \vee (\neg\, q)$.	

Solution

1°/ $\neg\,(p \Rightarrow q)$.

p et q sont supposées être des relations d'une théorie logique.
Elles peuvent être vraies (valeur de vérité 1) ou fausses (valeur de vérité 0).

La table de vérité du connecteur de négation $\neg$ est :

p	$\neg\, p$
0	1
1	0

La table de vérité du connecteur de disjonction $\vee$ est :

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

La table de vérité de tous les autres connecteurs s'en déduit :

p	q	$\neg\, p$	$(\neg\, p) \vee q = p \Rightarrow q$	$\neg\,(p \Rightarrow q)$
0	0	1	1	0
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	1	0	1	0

Sur cette table, on remarquera que $p \Rightarrow q$ est vraie si, et seulement si, la valeur de vérité de p est inférieure ouégale à la valeur de vérité de q.

2°/ $p \vee (\neg\, q)$.

$p \vee (\neg\, q)$ est une relation équivalente à $(\neg\, q) \vee p = q \Rightarrow p$. Sa table de vérité est donc, d'après la remarque précédente :

p	q	$p \vee (\neg\, q) = q \Rightarrow p$
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	1

Chapitre 1. Connecteurs, quantificateurs, tables de vérité.

Enoncés.

Exercice 3. Connecteurs NAND et NOR.

Le connecteur NAND (non-et) est défini par $\neg (p \wedge q)$. 1°/ Donner sa table de vérité. 2°/ Peut-on définir $\neg$, $\wedge$ et $\vee$ en fonction uniquement de NAND ? 3°/ Mêmes questions pour le connecteur NOR (non-ou) défini par $\neg (p \vee q)$.	

Solution

1°/ $\neg (p \wedge q)$.

p et q sont supposées être des relations d'une théorie logique.
Elles peuvent être vraies (valeur de vérité 1) ou fausses (valeur de vérité 0).

La table de vérité du connecteur de négation $\neg$ est :

p	$\neg p$
0	1
1	0

La table de vérité du connecteur de disjonction $\vee$ est :

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

La table de vérité de tous les autres connecteurs s'en déduit : connecteur de conjonction **et** et sa négation **NAND** :

p	q	$\neg$ p	$\neg q$	$\neg$ p $\vee \neg q$	$p \wedge q = \neg (\neg$ p $\vee \neg q)$	p NAND $q = \neg (p \wedge q)$
0	0	1	1	1	0	1
0	1	1	0	1	0	1
1	0	0	1	1	0	1
1	1	0	0	0	1	0

Sur cette table, on remarquera que *p* **NAND** *q* est vraie si, et seulement si, *p* et *q* ne sont pas tous deux vraies.
Le connecteur NAND est le connecteur de Scheffer des anneaux de Boole (voir Algèbre, Structures, Chapitre 5).

2°/ Définition des autres connecteurs à partir de NAND.

Il suffit de définir, à partir de NAND la négation et la disjonction, puisque tous les connecteurs peuvent être définis à partir de ces deux-là.

Or, d'après la table précédente :

p	*p*	*p* NAND *p*	¬ p
0	0	1	1
1	1	0	0

p NAND *p* et ¬ p ont les mêmes valeurs de vérité : ce sont donc des relations équivalentes et ¬ p est défini par *p* NAND *p*.

¬ p = *p* **NAND** *p*

De plus ¬ (*p* NAND *q*) = (*p* NAND *q*) NAND (*p* NAND *q*) a, pour table de vérité :

p	*q*	*p* NAND *q*	¬ (*p* NAND *q*)	*p* ∧ *q*
0	0	1	0	0
0	1	1	0	0
1	0	1	0	0
1	1	0	1	1

p ∧ *q* et (*p* NAND *q*) NAND (*p* NAND *q*) ont les mêmes valeurs de vérité, ce sont donc des relations équivalentes et *p* ∧ *q* est défini par (*p* NAND *q*) NAND (*p* NAND *q*).

p ∧ *q* = (*p* NAND *q*) **NAND** (*p* NAND *q*).

La disjonction est liée à la conjonction par *p* ∨ *q* = ¬ (¬ *p* ∧ ¬ *q*). On peut donc aussi la définir à partir de NAND :

p ∨ *q* = ¬ (¬ *p* ∧ ¬ *q*)
= (¬ *p* ∧ ¬ *q*) **NAND** (¬ *p* ∧ ¬ *q*)
= (((¬ *p*) NAND (¬ *q*)) **NAND** ((¬ *p*) NAND (¬ *q*))) **NAND** (((¬ *p*) NAND (¬ *q*)) **NAND** ((¬ *p*) NAND (¬ *q*)))
= (((*p* **NAND** *p*) NAND (*q* **NAND** *q*)) **NAND** ((*p* **NAND** *p*) NAND (*q* **NAND** *q*))) **NAND** (((*p* **NAND** *p*) NAND (*q* **NAND** *q*)) **NAND** ((*p* **NAND** *p*) NAND (*q* **NAND** *q*))).

Ainsi, tous les connecteurs peuvent être définis à partir du connecteur **NAND**.

3°/ ¬ (*p* ∨ *q*).

p	q	$p \vee q$	p NOR $q = \neg (p \vee q)$
0	0	0	1
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	1	0

p	p	p NOR p	$\neg$ p
0	0	1	1
1	1	0	0

p NOR p et $\neg$ p ont les mêmes valeurs de vérité : ce sont donc des relations équivalentes et $\neg$ p est défini par p NOR p.

$$\neg \text{ p} = p \textbf{ NOR } p$$

p NOR $q = \neg (p \vee q)$
$p \vee q = \neg (\neg (p \vee q)) = \neg (p$ NOR $q) = (p$ NOR $q)$ **NOR** $(p$ NOR $q)$

$$p \vee q = (p \text{ NOR } q) \textbf{ NOR } (p \text{ NOR } q)$$

Ainsi, on peut définir la négation et la conjonction à partir de NOR : on peut donc définir tous les connecteurs logiques à partir de NOR.
On remarquera la symétrie de NAND et de NOR : on passe de l'un à l'autre en échangeant $\vee$ et $\wedge$.

Par exemple la conjonction est définie à partir de NOR par :

$p \wedge q = \neg (\neg p \vee \neg q)$
= (((*p* **NOR** *p*) NOR (*q* **NOR** *q*)) **NOR** ((*p* **NOR** *p*) NOR (*q* **NOR** *q*))) **NOR** (((*p* **NOR** *p*) NOR (*q* **NOR** *q*)) **NOR** ((*p* **NOR** *p*) NOR (*q* **NOR** *q*))).

Cette formule se déduit de celle de $p \vee q$, obtenue dans la question 2°, en remplaçant NAND par NOR.

Le connecteur NOR est le connecteur de Peirce, ou NI, des anneaux de Boole (voir Algèbre, Structures, Chapitre 5).

Chapitre 1. Connecteurs, quantificateurs, tables de vérité.

Enoncés.

Exercice 4. Langage mathématique.

Traduire en langage mathématique, en utilisant les quantificateurs adéquats, la proposition : "Entre deux réels distincts, on peut trouver un rationnel."	

Solution

Si l'on voulait traduire une telle propriété par un assemblage unique, il faudrait un nombre absolument colossal de signes dans lequel tout un chacun serait perdu.

On utilise donc des abréviations :

– $\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels (**corps archimédien complet**, tous les corps archimédiens complets sont isomorphes) ;
– Complet est une abréviation pour dire que toute **suite de Cauchy** est convergente, ou que $\mathbb{R}$ vérifie l'**axiome des intervalles emboîtés** : toute suite décroissante d'intervalles fermés a une intersection non vide.
– $\mathbb{Q}$ désigne l'ensemble des nombres rationnels, plus petit corps contenant l'anneau des entiers relatifs $\mathbb{Z}$, considéré comme un **sous-corps** de $\mathbb{R}$ et qui est lui-même un corps archimédien, $\mathbb{Z}$ étant, quant à lui, le plus petit groupe additif contenant l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$.
– Notons, pour abréger, $x < y$, la relation $x \leqslant y$ et $x \neq y$.
– Pour une relation quelconque R, on note $(\forall\, x \in \mathbb{R})\ R$, la relation $(\forall\, x)\ (x \in \mathbb{R}$ et $R)$.

La propriété "Entre deux réels distincts, on peut trouver un rationnel" signifie que, quels que soient les nombres réels x et y, s'ils sont différents, il existe un nombre rationnel q strictement compris entre x et y.
A cause de la symétrie d'une telle propriété, on peut toujours supposer que x est plus petit que y, car l'ordre des nombres réels est total (on peut toujours comparer deux nombres réels).
La propriété énoncée prend alors la forme :

$$(\forall\, x \in \mathbb{R})\ (\forall\, y \in \mathbb{R})\ (x < y \Rightarrow (\exists\, q \in \mathbb{Q})\ (x < q \text{ et } q < y))$$

Cette propriété des nombres réels et des nombres rationnels est équivalente à l'**axiome d'Archimède** :

Si a et b sont des nombres réels vérifiant $0 < a < b$, il existe un entier naturel p tel que $b < p\ a$.

$$(\forall\, a \in \mathbb{R})\ (\forall\, b \in \mathbb{R})\ (0 < a \text{ et } a < b \Rightarrow (\exists\, n \in \mathbb{N})\ (b < p\ a))$$

Chapitre 1. Connecteurs, quantificateurs, tables de vérité.

Enoncés.

Exercice 5. Relations.

Soient P, Q, R, des propositions. Montrer que : 1°/ $P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$ équivaut à (P et Q) $\Rightarrow R$. 2°/ (P ou Q) $\Rightarrow R$ équivaut à ($P \Rightarrow R$) et ($Q \Rightarrow R$).	

Solution

1°/ $P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$ équivaut à (P et Q) $\Rightarrow R$.

$P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$ est l'assemblage $(\neg P) \vee ((\neg Q) \vee R)$, par définition de l'implication.
Or **la disjonction est associative**, car, si A, B, C, sont des relations, nous avons pour table de vérité :

A	B	C	$A \vee B$	$(A \vee B) \vee C$	$B \vee C$	$A \vee (B \vee C)$
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	1
1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1

Sur cette table, nous voyons que les relations $(A \vee B) \vee C$ et $A \vee (B \vee C)$ ont les mêmes valeurs de vérité, donc elles sont équivalentes, ce qu'on traduit en disant que la disjonction est associative.

La relation $(\neg P) \vee ((\neg Q) \vee R)$ est donc équivalente à $((\neg P) \vee (\neg Q)) \vee R$.
Or $(\neg P) \vee (\neg Q)$ est équivalente à $\neg (P \wedge Q)$, donc $((\neg P) \vee (\neg Q)) \vee R$ est équivalente à $(\neg (P \wedge Q)) \vee R$.
Par définition de l'implication, $(\neg (P \wedge Q)) \vee R$ est la relation $(P \wedge Q) \Rightarrow R$.
En définitive :

La relation $P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$ est équivalente à la relation $(P \wedge Q) \Rightarrow R$.

2°/ (P ou Q) $\Rightarrow R$ équivaut à ($P \Rightarrow R$) et ($Q \Rightarrow R$).

(P ou Q) $\Rightarrow R$ est l'assemblage $(\neg (P \vee Q)) \vee R$, par définition de l'implication.
Comme la relation $\neg (P \vee Q)$ est équivalente à la relation $(\neg P) \wedge (\neg Q)$, la relation $(\neg (P \vee Q)) \vee R$ est

équivalente à la relation $((\neg P) \wedge (\neg Q)) \vee R$.

Or **la disjonction est distributive par rapport à la conjonction**, car, si A, B, C, sont des relations, nous avons pour table de vérité :

A	B	C	$A \wedge B$	$(A \wedge B) \vee C$	$A \vee C$	$B \vee C$	$(A \vee C) \wedge (B \vee C)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	0
0	1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1	0	0
1	0	1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Les relations $(A \wedge B) \vee C$ et $(A \vee C) \wedge (B \vee C)$ ont les mêmes valeurs de vérité, donc elles sont équivalentes, ce qu'on traduit en disant que la disjonction est distributive par rapport à la conjonction.

Donc la relation $((\neg P) \wedge (\neg Q)) \vee R$ est équivalente à la relation $((\neg P) \vee R) \wedge ((\neg Q) \vee R)$.
Or $(\neg P) \vee R$ est l'assemblage $P \Rightarrow R$, et $(\neg Q) \vee R$ est l'assemblage $Q \Rightarrow R$.
Donc la relation $((\neg P) \vee R) \wedge ((\neg Q) \vee R)$ est l'assemblage $(P \Rightarrow R) \wedge (Q \Rightarrow R)$.
En définitive :

La relation $(P \vee Q) \Rightarrow R$ est équivalente à la relation $(P \Rightarrow R) \wedge (Q \Rightarrow R)$.

La démonstration de cette équivalence pourrait se faire aussi par la **méthode de disjonction des cas** :

a) Si P est vraie, alors P ou Q est vraie, donc si $(P \vee Q) \Rightarrow R$ est vraie, R est vraie, **par modus ponens**, donc $P \Rightarrow R$.
b) Si Q est vraie, alors P ou Q est vraie, donc si $(P \vee Q) \Rightarrow R$ est vraie, R est vraie, par modus ponens, donc $Q \Rightarrow R$.
c) De a) et b), résulte déjà que la relation $(P \vee Q) \Rightarrow R$ implique la relation $(P \Rightarrow R) \wedge (Q \Rightarrow R)$.
d) Réciproquement, si la relation la relation $(P \Rightarrow R) \wedge (Q \Rightarrow R)$ est vraie, alors les deux relations $P \Rightarrow R$ et $Q \Rightarrow R$ sont vraies.
e) Dans ce cas, si $P \vee Q$ est vraie, alors P est vraie ou Q est vraie, et, dans les deux cas, par transitivité, R est vraie.
f) De d) et e), résulte que la relation $(P \Rightarrow R) \wedge (Q \Rightarrow R)$ implique la relation $(P \vee Q) \Rightarrow R$.
g) De c) et f) résulte que, des deux relations $(P \Rightarrow R) \wedge (Q \Rightarrow R)$ et $(P \vee Q) \Rightarrow R$, chacune implique l'autre, donc elles sont équivalentes.

Chapitre 1. Connecteurs, quantificateurs, tables de vérité.

Enoncés.

Exercice 6. Table de vérité d'une relation.

Donner la table de vérité de $(p \to q) \wedge \neg q$.	

Solution

$p \to q = \neg p \vee q$
Connecteur $\neg$ (**non**): la valeur de vérité de $\neg p$ est 0 si celle de p est 1, 1 si celle de p est 0
Connecteur $\wedge$ (**et**): la valeur de vérité de $p \wedge q$ est 1 si, et seulement si, celles de p et de q sont 1.
Connecteur $\vee$ (**ou**): la valeur de vérité de $p \vee q$ est 1 si celle de p ou celle de q est 1.
Nous obtenons pour table de vérité de $(p \to q) \wedge \neg q$:

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \to q$	$(p \to q) \wedge \neg q$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0
1	0	0	1	0	0
1	1	0	0	1	0

La relation $(p \to q) \wedge \neg q$ est vraie si et seulement si p et q sont fausses : c'est la relation $\neg p \wedge \neg q$.

Chapitre 1. Connecteurs, quantificateurs, tables de vérité.

Enoncés.

Exercice 7. Equivalence de deux relations.

Sans utiliser de table de vérité, montrer que $(\neg p \to q) \wedge r$ équivaut à $(\neg p \vee \neg r) \to (q \wedge r)$	

Solution

Notons "=" la locution "équivaut à".

$\neg p \to q = \neg (\neg p) \vee q = p \vee q$.
$(\neg p \to q) \wedge r = (p \vee q) \wedge r$

$(\neg p \vee \neg r) \to (q \wedge r) = \neg (\neg p \vee \neg r) \vee (q \wedge r)$
$= (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$
$= (p \vee q) \wedge r$

Les deux relations $(\neg p \to q) \wedge r$ et $(\neg p \vee \neg r) \to (q \wedge r)$ sont toutes les deux équivalentes à une même troisième, elles sont donc équivalentes entre elles.

Chapitre 1. Connecteurs, quantificateurs, tables de vérité.

Enoncés.

Exercice 8. Petit problème amusant de logique.

L'énigme d'Einstein.

Les faits:

1. Il y a cinq maisons de 5 couleurs différentes.
2. Dans chaque maison vit une personne de nationalité différente.
3. Chacun des 5 propriétaires boit un certain type de boisson, fume un certain type de cigares et garde un certain animal domestique.

La question:

Qui a le poisson?

Quelques indices:

1. L'Anglais vit dans une maison rouge.
2. Le Suédois a des chiens comme animaux domestiques.
3. Le Danois boit du thé.
4. La maison verte est à gauche de la maison blanche.
5. Le propriétaire de la maison verte boit du café.
6. La personne qui fume des Pall Mall a des oiseaux.
7. Le propriétaire de la maison jaune fume des Dunhill.
8. La personne qui vit dans la maison du centre boit du lait.
9. Le Norvégien habite la première maison.
10. L'homme qui fume les Blend vit à côté de celui qui a des chats.
11. L'homme qui a un cheval est le voisin de celui qui fume des Dunhill.
12. Le propriétaire qui fume des Blue Master boit de la bière.
13. L'Allemand fume des Prince.
14. Le Norvégien vit juste à côté de la maison bleue.
15. L'homme qui fume des Blend a un voisin qui boit de l'eau.

Solution

1°/ Certaines positions absolues sont imposées par le texte.

	1	2	3	4	5
Nationalité	Norvégien (9)				
Maison		Bleue (14)			

Boisson				Lait (8)
Cigares				
Animal				

2°/ La configuration :

Maison	Verte (4)	Blanche (4)
Boisson	Café (5)	

ne peut être placée que dans les colonnes 4 et 5 :

	1	2	3	4	5
Nationalité	Norvégien (9)				
Maison		Bleue (14)		Verte (4)	Blanche (4)
Boisson			Lait (8)	Café (5)	
Cigares					
Animal					

3°/ La configuration :

Nationalité	Anglais (1)
Maison	Rouge (1)

ne peut être placée que dans la colonne 3 :

	1	2	3	4	5
Nationalité	Norvégien (9)		Anglais (1)		
Maison		Bleue (14)	Rouge (1)	Verte (4)	Blanche (4)
Boisson			Lait (8)	Café (5)	
Cigares					
Animal					

4°/ La configuration :

Maison	Jaune (7)
Boisson	
Cigares	Dunhill (7)

ne peut être placée que dans la colonne 1 :

	1	2	3	4	5
Nationalité	Norvégien (9)		Anglais (1)		
Maison	Jaune (7)	Bleue (14)	Rouge (1)	Verte (4)	Blanche (4)
Boisson			Lait (8)	Café (5)	
Cigares	Dunhill (7)				

Animal	

5°/ Il en résulte que le cheval est dans la colonne 2 (11) :

	1	2	3	4	5
Nationalité	Norvégien (9)		Anglais (1)		
Maison	Jaune (7)	Bleue (14)	Rouge (1)	Verte (4)	Blanche (4)
Boisson			Lait (8)	Café (5)	
Cigares	Dunhill (7)				
Animal		Cheval (11)			

6°/ La configuration :

Boisson	Bière (12)
Cigares	Blue Master (12)

peut entrer dans la colonne 2, mais dans ce cas, le danois boit du thé (3) dans la maison 5, le norvégien boit de l'eau dans la maison 1 et la condition (15) ne peut pas être satisfaite.
Donc il faut mettre Bière et Blue Master dans la colonne 5 :

	1	2	3	4	5
Nationalité	Norvégien (9)		Anglais (1)		
Maison	Jaune (7)	Bleue (14)	Rouge (1)	Verte (4)	Blanche (4)
Boisson			Lait (8)	Café (5)	Bière (12)
Cigares	Dunhill (7)				Blue Master (12)
Animal		Cheval (11)			

7°/ La configuration :

Nationalité	Danois (3)
Maison	
Boisson	Thé (3)

ne peut entrer que dans la colonne 2 :

	1	2	3	4	5
Nationalité	Norvégien (9)	Danois (3)	Anglais (1)		
Maison	Jaune (7)	Bleue (14)	Rouge (1)	Verte (4)	Blanche (4)
Boisson		Thé (3)	Lait (8)	Café (5)	Bière (12)
Cigares	Dunhill (7)				Blue Master (12)
Animal		Cheval (11)			

8°/ Le Norvégien boit donc de l'eau, et il en résulte que le Danois fume des Blend (15) :

	1	2	3	4	5
Nationalité	Norvégien (9)	Danois (3)	Anglais (1)		
Maison	Jaune (7)	Bleue (14)	Rouge (1)	Verte (4)	Blanche (4)
Boisson	Eau (15)	Thé (3)	Lait (8)	Café (5)	Bière (12)

Cigares	Dunhill (7)	Blend(15)		Blue Master (12)
Animal		Cheval (11)		

9°/ La configuration :

Nationalité	Allemand (13)
Maison	
Boisson	
Cigares	Prince (13)

ne peut entrer que dans la colonne 4 :

	1	2	3	4	5
Nationalité	Norvégien (9)	Danois (3)	Anglais (1)	Allemand (13)	
Maison	Jaune (7)	Bleue (14)	Rouge (1)	Verte (4)	Blanche (4)
Boisson	Eau (15)	Thé (3)	Lait (8)	Café (5)	Bière (12)
Cigares	Dunhill (7)	Blend(15)		Prince (13)	Blue Master (12)
Animal		Cheval (11)			

10°/ La configuration :

Cigares	Pall Mall (6)
Animal	Oiseaux (6)

ne peut entrer que dans la colonne 3 :

	1	2	3	4	5
Nationalité	Norvégien (9)	Danois (3)	Anglais (1)	Allemand (13)	
Maison	Jaune (7)	Bleue (14)	Rouge (1)	Verte (4)	Blanche (4)
Boisson	Eau (15)	Thé (3)	Lait (8)	Café (5)	Bière (12)
Cigares	Dunhill (7)	Blend(15)	Pall Mall (6)	Prince (13)	Blue Master (12)
Animal		Cheval (11)	Oiseaux (6)		

11°/ Il en résulte que le Norvégien héberge des chats (10) :

	1	2	3	4	5
Nationalité	Norvégien (9)	Danois (3)	Anglais (1)	Allemand (13)	
Maison	Jaune (7)	Bleue (14)	Rouge (1)	Verte (4)	Blanche (4)
Boisson	Eau (15)	Thé (3)	Lait (8)	Café (5)	Bière (12)
Cigares	Dunhill (7)	Blend(15)	Pall Mall (6)	Prince (13)	Blue Master (12)
Animal	Chats (10)	Cheval (11)	Oiseaux (6)		

12°/ La configuration :

Nationalité	Suédois (2)
Maison	
Boisson	
Cigares	
Animal	Chiens (2)

ne peut entrer que dans la colonne 5 :

	1	2	3	4	5
Nationalité	Norvégien (9)	Danois (3)	Anglais (1)	Allemand (13)	Suédois (2)
Maison	Jaune (7)	Bleue (14)	Rouge (1)	Verte (4)	Blanche (4)
Boisson	Eau (15)	Thé (3)	Lait (8)	Café (5)	Bière (12)
Cigares	Dunhill (7)	Blend(15)	Pall Mall (6)	Prince (13)	Blue Master (12)
Animal	Chats (10)	Cheval (11)	Oiseaux (6)		Chiens (2)

13°/ Il reste **une seule case libre pour le poisson** : la maison verte de l'Allemand dans la 4e colonne.

Position	1	2	3	4	5
Nationalité	Norvégien	Danois	Anglais	Allemand	Suédois
Maison	Jaune	Bleue	Rouge	Verte	Blanche
Boisson	Eau	Thé	Lait	Café	Bière
Cigares	Dunhill	Blend	Pall Mall	Prince	Blue Master
Animal	Chat	Cheval	Oiseaux	**Poisson**	Chiens

Chapitre 2. Ensembles : définitions et résultats.

Exercices

1. **Ensemble.**
2. **Appartenance.**
3. **Inclusion.**
4. **Partie pleine.**
5. **Ensemble vide.**
6. **Ensemble réduit à un élément.**
7. **Complémentaire.**
8. **Famille.**
9. **Réunion.**
10. **Intersection.**
11. **Produit.**
12. **Somme, différence symétrique.**

1. Ensemble.

Un *ensemble* est une collection d'*éléments* susceptibles de posséder certaines propriétés et d'avoir entre eux, ou avec des éléments d'autres ensembles, certaines relations.

HAUT

2. Appartenance.

La relation "x est un élément de l'ensemble E" est notée :

$x \in E$ (relation d'appartenance).

Cette relation se lit aussi "x appartient à E".

HAUT

3. Inclusion.

La relation "tous les éléments de l'ensemble X sont des éléments de l'ensemble E" est notée :

$X \subset E$ (relation d'inclusion).

Cette relation se lit aussi "X est une partie de E", ou encore "X est contenu dans E".

HAUT

4. Partie pleine.

Certaines propriétés, telles $x = x$, sont vraies pour tout élément d'un ensemble E.
Deux quelconques de ces propriétés sont **équivalentes** (l'une entraîne l'autre et réciproquement, ce qui se traduit par le fait qu'elles ont les mêmes **valeurs de vérité**).
La partie de E qu'elles définissent est l'ensemble E lui-même, ou *partie pleine* de E.

HAUT

5. Ensemble vide.

Certaines propriétés, telles $x \neq x$, ne sont vraies pour aucun objet (resp. aucun élément d'un ensemble E).
Deux quelconques de ces propriétés sont équivalentes.
L'ensemble qu'elles définissent est appelé l'*ensemble vide* (resp. *partie vide* de E) et noté $\varnothing$.

HAUT

6. Ensemble réduit à un élément.

Etant donné un élément *a* d'un ensemble *E*, certaines propriétés des éléments de *E*, telles $x = a$, ne sont vraies que pour l'élément *a*.
Deux quelconques de ces propriétés sont équivalentes.
La partie de *E* qu'elles définissent est appelée la *partie réduite à a*, et notée { *a* }.

Exemple : l'ensemble des parties de l'ensemble vide est réduit à un élément, {Ø}.

HAUT

7. Complémentaire.

Etant donnée une partie X d'un ensemble E, l'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à X, s'appelle le *complémentaire* de X et se note $\complement X$, ou $\overline{X}$.

$$\overline{X} = \complement X = \{ x \mid x \in E \text{ et } x \notin X \}$$

HAUT

8. Famille d'ensembles.

Etant donné un ensemble I, la donnée, pour chaque élément $i \in I$, d'un ensemble X_i, constitue ce qu'on appelle une ***famille d'ensembles indexée par I***. Une telle famille est notée $(X_i)_{i \in I}$ et I est appelé l'***ensemble d'indices*** de la famille.

Remarque : lorsque l'ensemble I est vide, on dit que la famille $(X_i)_{i \in I}$ est la ***famille vide***.

HAUT

9. Réunion.

Etant donnée une famille d'ensembles $(X_i)_{i \in I}$, l'ensemble des éléments x qui possèdent la propriété "$(\exists\, i \in I)(x \in X_i)$" s'appelle la *réunion* de la famille $(X_i)_{i \in I}$ et se note $\bigcup_{i \in I} X_i$.

$$\bigcup_{i \in I} X_i = \{ x \mid (\exists\, i \in I)(x \in X_i) \}$$

Remarque : lorsque l'ensemble I est vide, la réunion de la famille $(X_i)_{i \in I}$ est l'ensemble vide Ø.

HAUT

10. Intersection.

Etant donnée une famille d'ensembles $(X_i)_{i \in I}$, indexée par un ensemble non vide I, l'ensemble des objets x qui possèdent la propriété "$(\forall\, i \in I)(x \in X_i)$" s'appelle l'*intersection* de la famille $(X_i)_{i \in I}$ et se note $\bigcap_{i \in I} X_i$.

$$\bigcap_{i \in I} X_i = \{\, x \mid (\forall\, i \in I)(x \in X_i)\}$$

Remarque : il n'est pas possible de définir l'intersection d'une famille vide.

HAUT

11. Produit.

Etant donnée une famille d'ensembles $(X_i)_{i \in I}$, la donnée, pour chaque indice $i \in I$, d'un élément $x_i \in X_i$, constitue de qu'on appelle une famille d'éléments $(x_i)_{i \in I}$.

L'ensemble des familles d'éléments $(x_i)_{i \in I}$ s'appelle l'***ensemble produit*** de la famille d'ensembles $(X_i)_{i \in I}$.

$$\prod_{i \in I} X_i = \{ x \mid (\forall\, i \in I)(\exists\, x_i \in X_i) \text{ et } x = (x_i)_{i \in I} \}$$

Remarques :

1. Pour deux ensemble X et Y, le produit $X \times Y$ est l'ensemble des couples (x, y) avec $x \in X$ et $y \in Y$.
2. Le produit d'une famille vide est l'ensemble vide.

HAUT

12. Somme.

L'ensemble des familles de couples $((x_i, i))_{i \in I}$ s'appelle l'***ensemble somme*** de la famille d'ensembles $(X_i)_{i \in I}$.

$$\sum_{i \in I} X_i = \{ x \mid (\forall\, i \in I)(\exists\, x_i \in X_i) \text{ et } x = ((x_i, i))_{i \in I} \}$$

Remarques :

Pour une famille de parties $(X_i)_{i \in I}$ d'un ensemble E, la somme de la famille s'identifie à l'ensemble des éléments de X qui appartiennent à un X_i et à un seul. Par exemple, la somme de deux parties X et Y d'un ensemble E, s'appelle la ***différence symétrique*** de X et Y (Exercice 4).

Si la somme de la famille de parties $(X_i)_{i \in I}$ d'un ensemble E est égale à E et si aucune des parties X_i n'est vide, alors E est la réunion de la famille $(X_i)_{i \in I}$, les X_i sont deux à deux sans point commun : la famille $(X_i)_{i \in I}$ constitue de qu'on appelle une ***partition*** de E.

HAUT

Chapitre 2. Ensembles : exercices.

Définitions et résutats

Exercice 1. Appartenance et inclusion.
Exercice 2. Appartenance, inclusion, réunion.
Exercice 3. Diagrammes de Venn.
Exercice 4. Réunion, intersection et complémentaire.
Exercice 5. Différence.
Exercice 6. Distributivité de l'intersection par rapport à la différence.
Exercice 7. Propriété du complémentaire.
Exercice 8. Ensemble produit.
Exercice 9. Propriétés élémentaires pour une partie.
Exercice 10. Propriétés élémentaires pour deux parties.
Exercice 11. Propriétés élémentaires pour trois parties.
Exercice 12. Différence symétrique de deux parties.
Exercice 13. Différence symétrique de plusieurs parties.
Exercice 14. Formule d'inclusion-exclusion de Möbius.
Exercice 15. Propriété de la différence symétrique.

Exercice 1. Appartenance et inclusion.

Soit $A = \{1, 2, 3\}$. Les propositions suivantes sont-elles vraies ? 1°/ $2 \in A$. 2°/ $3 \in A$. 3°/ $A \subseteq \{ A \}$. 4°/ $\emptyset \in A$. 5°/ $\{ 1 \} \subseteq A$. 6°/ $\{ \emptyset \} \subseteq A$. 7°/ $2 \subseteq A$. 8°/ $\{ 1, 2 \} \subseteq A$. 9°/ $\{ \{ 1, 2 \}, 3 \} = A$. 10°/ $A \cup \{ \emptyset \} = A$.	Solution

HAUT

Exercice 2. Appartenance, inclusion, réunion.

Donner un exemple dans chacun des cas suivants : 1°/ $A \in B$ et $A \subset B$. 2°/ $A \bigcup B = A \bigcup C$ et $B \neq C$.	Solution

HAUT

Exercice 3. Diagrammes de Venn.

Illustrer par un diagramme de Venn chacun des cas suivants : 1°/ $A \cup B \subseteq A \cup C$ mais $B \not\subset C$. 2°/ $A \cap B \subseteq A \cap C$ mais $B \not\subset C$. 3°/ $A \cup B = C \cup B$ mais $A \neq C$. 4°/ $A \cap B = C \cap B$ mais $A \neq C$.	Solution

HAUT

Exercice 4. Réunion, intersection et complémentaire.

Soient E un ensemble, A et B des parties de E. Simplifiez les expressions suivantes :

1°/ $\overline{\overline{A} \cup \overline{B}}$.
2°/ $\overline{\overline{A} \cap \overline{B}}$.
3°/ $\overline{A} \cup (A \cap B)$.
4°/ $\overline{A} \cap (A \cup \overline{B})$.

Solution

HAUT

Exercice 5. Différence.

Soient A, B, C, D, des parties d'un ensemble E. Montrer que :

1°/ $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$.
2°/ $(A \setminus B) \cap (C \setminus D) = (A \cap C) \setminus (B \cup D)$.

Solution

HAUT

Exercice 6. Distributivité de l'intersection par rapport à la différence.

Soit E un ensemble. Montrer que, dans $\mathcal{P}(E)$, l'intersection est distributive par rapport à la différence.	Solution

HAUT

Exercice 7. Propriété du complémentaire.

Soient A, B, C, trois parties d'un ensemble non vide E.

1°/ Montrer que si $A \cup B = A \cup C$ et $A \cap B = A \cap C$, alors $B = C$.
2°/ En déduire que si $A \cup B = E$ et $A \cap B = \emptyset$, alors A et B sont complémentaires.

Solution

HAUT

Exercice 8. Ensemble produit.

Soient $E = \{ 1, 3 \}$, $F = \{ 1, 2 \}$ et $G = \{ 0, 3 \}$. Déterminer :

1°/ $E \times F$, $E \times \emptyset$, $E \times \{\emptyset\}$, $F \times (E \cap G)$, $(F \times E) \cap G$.
2°/ $\mathbb{P}(E)$, $\mathbb{P}(E \cap G)$, $\mathbb{P}(E \cup G)$, $\mathbb{P}(F \times (E \cap G))$.

Solution

HAUT

Exercice 9. Propriétés élémentaires pour une partie.

Soient X un ensemble et A une partie de X. On note $\complement A$ le complémentaire de A dans X.
Etablir les propriétés suivantes :

1°/ $\varnothing = \complement X$ et $X = \complement\varnothing$
2°/ $\complement(\complement A) = A$
3°/ $A \cup A = A$ et $A \cap A = A$
4°/ $A \cup (\complement A) = X$ et $A \cap (\complement A) = \varnothing$
5°/ $A \cup \varnothing = A$ et $A \cap X = A$
6°/ $A \cup X = X$ et $A \cap \varnothing = \varnothing$

Solution

HAUT

Exercice 10. Propriétés élémentaires pour deux parties.

Soient X un ensemble, A et B deux parties de X.
Etablir les propriétés suivantes :

1°/ $A \cup B = B \cup A$ et $A \cap B = B \cap A$ (commutativité)
2°/ $A \subseteq A \cup B$ et $A \cap B \subseteq A$
3°/ $\complement(A \cup B) = (\complement A) \cap (\complement B)$ et $\complement(A \cap B) = (\complement A) \cup (\complement B)$
4°/ Les relations suivantes sont équivalentes :
$A \subseteq B$, $\complement B \subseteq \complement A$, $A \cup B = B$, $A \cap B = A$
5°/ Les relations suivantes sont équivalentes :
$A \cap B = \varnothing$, $A \subseteq \complement B$, $B \subseteq \complement A$
6°/ Les relations suivantes sont équivalentes :
$A \cup B = X$, $\complement A \subseteq B$, $\complement B \subseteq A$

Solution

HAUT

Exercice 11. Propriétés élémentaires pour trois parties.

Soient X un ensemble, A, B et C trois parties de X.
Etablir les propriétés suivantes :

1°/ $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ et $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
(associativité)
2°/ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ et $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
(distributivité)
3°/ La relation $A \subseteq B$ entraîne les relations :
$A \cup C \subseteq B \cup C$ et $A \cap C \subseteq B \cap C$
4°/ La relation « $C \subseteq A$ et $C \subseteq B$ » est équivalente à $C \subseteq A \cap B$
5°/ La relation « $A \subseteq C$ et $B \subseteq C$ » est équivalente à $A \cup B \subseteq C$

Solution

HAUT

Exercice 12. Différence symétrique de deux parties.

Soient X un ensemble, A et B deux parties de X.
On appelle **différence symétrique** de A et B, la partie $A + B$ de X définie par :

$$A + B = (A \cap \complement B) \cup (\complement A \cap B).$$

Etablir les propriétés suivantes :

1°/ $A + B = B + A$ (commutativité)
2°/ $A + (B + C) = (A + B) + C$ (associativité)
3°/ $A + \varnothing = A$ (existence d'un élément neutre)
4°/ $A + A = \varnothing$ (nilpotence et existence d'un symétrique)
5°/ $A + X = \complement A$
6°/ $A + B = \complement A + \complement B$
7°/ $A + B = (A \cup B) \cap ((\complement A) \cup (\complement B))$

Solution

HAUT

Exercice 13. Différence symétrique de plusieurs parties.

Soient E un ensemble, A, B, C et les A_i des parties de E. La notation Δ désigne la différence symétrique.

1°/ Montrer que $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$.
2°/ Montrer que $x \in A_1 \Delta A_2 \Delta \ldots \Delta A_n$ si, et seulement si, x appartient à un nombre impair des A_i.

Solution

HAUT

Exercice 14. Formule d'inclusion-exclusion de Möbius.

Soient E un ensemble de cardinal fini, A, B, C et les A_i des parties de E. Le but de cet exercice est d'établir la *formule d'inclusion-exclusion de Möbius* énoncée en 3°. La notation $|X|$ désigne le **cardinal** de X.

1°/ Montrer que $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$.

2°/ Dans une classe de 30 élèves, 12 aiment les Mathématiques, 14 aiment la Physique, 13 aiment la Chimie, 5 aiment les Mathématiques et a Physique, 7 aiment la Physique et la Chimie, 4 aiment les Mathématiques et la Chimie. Sachant qu'il y a 3 élèves qui aiment les Mathématiques, la Physique et la Chimie, combien d'élèves n'aiment aucune de ces matières ?

3°/ Montrer, par récurrence, que, pour tout entier n :

$$\left|\bigcup_{1\le i\le n} A_i\right| = \sum_{I\in \mathcal{P}^*(\{1,\dots,n\})} (-1)^{|I|+1} \left|\bigcap_{i\in I} A_i\right|$$

où $\mathcal{P}^*(X)$ désigne l'ensemble des parties non vides de X.

Solution

HAUT

Exercice 15. Propriété de la différence symétrique.

Soient E un ensemble, A, B, C des parties de E. Sans utiliser de table de vérité, montrer que : 1°/ $A \subseteq B \bigcup (A \Delta B)$. 2°/ $A \Delta C \subseteq (A \Delta B) \bigcup (B \Delta C)$.	Solution

HAUT

Chapitre 2. Ensembles.

Enoncés.

Exercice 1. Appartenance et inclusion.

Soit $A = \{1, 2, 3\}$. Les propositions suivantes sont-elles vraies ? 1°/ $2 \in A$. 2°/ $3 \in A$. 3°/ $A \subseteq \{ A \}$. 4°/ $\emptyset \in A$. 5°/ $\{ 1 \} \subseteq A$. 6°/ $\{ \emptyset \} \subseteq A$. 7°/ $2 \subseteq A$. 8°/ $\{ 1, 2 \} \subseteq A$. 9°/ $\{ \{ 1, 2 \}, 3 \} = A$. 10°/ $A \cup \{ \emptyset \} = A$.	

Solution

1°/ $2 \in A$.

La relation $2 \in A$ signifie que 2 est un élément de A : cette relation est **vraie**, puisque les éléments de A, sont, par définition, 1, 2, et 3.

2°/ $3 \in A$.

La relation $3 \in A$ signifie que 3 est un élément de A : cette relation est **vraie**, puisque les éléments de A, sont, par définition, 1, 2, et 3.

3°/ $A \subseteq \{ A \}$.

La relation $A \subseteq \{ A \}$ signifie que A est une partie de l'ensemble réduit à la partie A : cette relation est **fausse**, puisque les éléments de A, sont, par définition, 1, 2, et 3, et aucun n'est A lui-même. $\{ A \}$ ne possède qu'un seul élément qui est A considéré comme élément de $\mathcal{P}(A)$.

4°/ $\emptyset \in A$.

La relation $\emptyset \in A$ signifie que l'ensemble vide est un élément de l'ensemble A : cette relation est **fausse**, puisque les éléments de A, sont, par définition, 1, 2, et 3. $\emptyset$ ne figure pas parmi ces éléments.

5°/ $\{ 1 \} \subseteq A$.

La relation $\{ 1 \} \subseteq A$ signifie que l'ensemble réduit à l'élément 1 est une partie de l'ensemble A : cette

relation est **vraie**, puisque le seul élément de { 1 } est 1, et c'est, par définition, un élément de *A*.

6°/ { Ø } ⊆ *A*.

La relation { Ø } ⊂ *A* signifie que l'ensemble réduit à l'ensemble vide est une partie de *A* : cette relation est **fausse**, puisque { Ø } est une partie de ℙ (*A*), et non une partie de *A*.

7°/ 2 ⊆ *A*.

La relation 2 ⊂ *A* signifie que 2 est une partie de *A* : cette relation est **fausse**, puisque 2 est un élément de *A* et non un élément de ℙ (*A*), comme le serait toute partie de *A*.

8°/ { 1, 2 } ⊆ *A*.

La relation { 1, 2 } ⊂ *A* signifie que l'ensemble ayant pour éléments 1 et 2 est une partie de *A* : cette relation est **vraie**, puisque 1 et 2 sont des éléments de *A*.

9°/ { { 1, 2 }, 3 } = *A*.

La relation { { 1, 2 }, 3 } = *A* signifie que *A* possède deux éléments : l'ensemble ayant pour éléments 1 et 2, et le nombre 3. Cette relation est **fausse**, puisque *A* possède trois éléments, et non deux.

10°/ *A* ⋃ { Ø } = *A*.

La relation *A* ⋃ { Ø } = *A* signifie que { 1, 2, 3, Ø } = *A* : cette relation est **fausse**, puisque *A* possède trois éléments, et non quatre.

Chapitre 2. Ensembles.

Enoncés.

Exercice 2. Appartenance, inclusion, réunion.

Donner un exemple dans chacun des cas suivants : 1°/ $A \in B$ et $A \subseteq B$. 2°/ $A \cup B = A \cup C$ et $B \neq C$.	

Solution

1°/ $A \in B$ et $A \subseteq B$.

La relation $A \in B$ et $A \subseteq B$ signifie que A est un élément de B et que A est une partie de B.
On obtient un exemple en prenant pour A l'ensemble vide : c'est une partie de B, pour tout ensemble B.
Pour que l'ensemble vide soit aussi un élément de B, il suffit de le préciser, en prenant, par exemple : $B = \{ \emptyset \}$.
Cet ensemble réduit à un élément possède deux parties : $\emptyset$ et B.

$$\boxed{\emptyset \in \{ \emptyset \} \text{ et } \emptyset \subseteq \{ \emptyset \}}$$

2°/ $A \cup B = A \cup C$ et $B \neq C$.

Prenons, par exemple : $A = \{ 1 \}$, $B = \{ 2 \}$, $C = \{ 1, 2 \}$.
On a $A \cup B = A \cup C = C$, avec $B \neq C$.

$$\boxed{A = \{ 1 \}, B = \{ 2 \}, C = \{ 1, 2 \}}$$

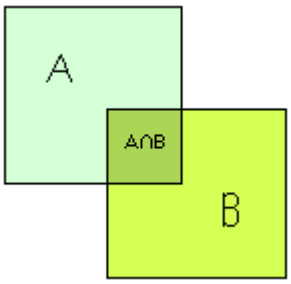
Chapitre 2. Ensembles.

Enoncés.

Exercice 3. Diagrammes de Venn.

Illustrer par un diagramme de Venn chacun des cas suivants : 1°/ $A \cup B \subseteq A \cup C$ mais $B \not\subset C$. 2°/ $A \cap B \subseteq A \cap C$ mais $B \not\subset C$. 3°/ $A \cup B = C \cup B$ mais $A \neq C$. 4°/ $A \cap B = C \cap B$ mais $A \neq C$.	

Solution



1. Si l'**on prend pour *C* la partie *B* \ *A*** = $B \cap \overline{A}$, elle est contenue dans *B* mais n'est pas égale à *B* si $A \cap B$ n'est pas vide.
   B n'est donc pas contenue dans *C*, et l'on a $A \cup B = A \cup C$, donc $A \cup B \subseteq A \cup C$, avec $B \not\subset C$.
2. Si l'**on prend pour *C* la partie *A* ∩ *B***, elle est contenue dans *B* mais n'est pas égale à *B* si $B \setminus A = B \cap \overline{A}$ n'est pas vide.
   B n'est donc pas contenue dans *C*, et l'on a $A \cap B = A \cap C$, donc $A \cap B \subseteq A \cap C$, avec $B \not\subset C$.
3. Si l'**on prend pour *C* la partie *A* \ *B*** = $A \cap \overline{B}$, elle est contenue dans *A* mais n'est pas égale à *A* si $A \cap B$ n'est pas vide.
   On a $A \cup B = C \cup B$ avec $A \neq C$.
4. Si l'**on prend pour *C* la partie *A* ∩ *B***, elle est contenue dans *A* mais n'est pas égale à *A* si $A \setminus B = A \cap \overline{B}$ n'est pas vide.
   On a $A \cap B = C \cap B$ avec $A \neq C$.

Chapitre 2. Ensembles.

Enoncés.

Exercice 4. Réunion, intersection et complémentaire.

Soient E un ensemble, A et B des parties de E. Simplifiez les expressions suivantes : 1°/ $\overline{\overline{A} \cup \overline{B}}$. 2°/ $\overline{\overline{A} \cap \overline{B}}$. 3°/ $\overline{A} \cup (A \cap B)$. 4°/ $\overline{A} \cap (A \cup \overline{B})$.	

Solution

1°/ $\overline{\overline{A} \cup \overline{B}}$**.**

$$\overline{\overline{A} \cup \overline{B}} = \overline{\overline{A}} \cap \overline{\overline{B}} = A \cap B.$$

2°/ $\overline{\overline{A} \cap \overline{B}}$**.**

$$\overline{\overline{A} \cap \overline{B}} = \overline{\overline{A}} \cup \overline{\overline{B}} = A \cup B.$$

3°/ $\overline{A} \cup (A \cap B)$**.**

$$\overline{A} \cup (A \cap B) = (\overline{A} \cup A) \cap (\overline{A} \cup B) = E \cap (\overline{A} \cup B) = \overline{A} \cup B.$$

4°/ $\overline{A} \cap (A \cup \overline{B})$**.**

$$\overline{A} \cap (A \cup \overline{B}) = (\overline{A} \cap A) \cup (\overline{A} \cap \overline{B}) = \emptyset \cup (\overline{A} \cap \overline{B}) = \overline{A} \cap \overline{B}.$$

Chapitre 2. Ensembles.

Enoncés.

Exercice 5. Différence.

Soient A, B, C, D, des parties d'un ensemble E. Montrer que : 1°/ $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$. 2°/ $(A \setminus B) \cap (C \setminus D) = (A \cap C) \setminus (B \cup D)$.	

Solution

1°/ $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$.

Par définition de la différence, $A \setminus B = A \cap \complement B$.

$$(A \setminus B) \setminus C = (A \cap \complement B) \cap \complement C = A \cap (\complement B \cap \complement C) = A \cap \complement(B \cup C) = A \setminus (B \cup C).$$

2°/ $(A \setminus B) \cap (C \setminus D) = (A \cap C) \setminus (B \cup D)$.

$$(A \setminus B) \cap (C \setminus D) = (A \cap \complement B) \cap (C \cap \complement D) = (A \cap C) \cap (\complement B \cap \complement D) = (A \cap C) \cap \complement(B \cup D) = (A \cap C) \setminus (B \cup D).$$

Chapitre 2. Ensembles.

Enoncés.

Exercice 6. Distributivité de l'intersection par rapport à la différence.

Soit E un ensemble. Montrer que, dans $\mathcal{P}(E)$, l'intersection est distributive par rapport à la différence.	

Solution

La distributivité de l'intersection par rapport à la différence s'exprime par la relation :

$$A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$$

dans laquelle A, B, C sont des parties quelconques de E.

a) Par définition de la différence :

$$A \cap (B \setminus C) = A \cap (B \cap \complement C) = (A \cap B) \cap \complement C = (A \cap B) \setminus C.$$

b) $(A \cap B) \setminus (A \cap C) = (A \cap B) \cap \complement(A \cap C) = (A \cap B) \cap (\complement A \cup \complement C) = ((A \cap B) \cap \complement A) \cup ((A \cap B) \cap \complement C)$

Or $(A \cap B) \cap \complement A$ est vide car il est contenu dans $A \cap \complement A = \emptyset$.

$$(A \cap B) \setminus (A \cap C) = \emptyset \cup ((A \cap B) \cap \complement C) = (A \cap B) \cap \complement C = (A \cap B) \setminus C.$$

D'où l'égalité :

$$A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$$

Chapitre 2. Ensembles.

Enoncés.

Exercice 7. Propriété du complémentaire.

Soient A, B, C, trois parties d'un ensemble non vide E. 1°/ Montrer que si $A \cup B = A \cup C$ et $A \cap B = A \cap C$, alors $B = C$. 2°/ En déduire que si $A \cup B = E$ et $A \cap B = \emptyset$, alors A et B sont complémentaires.	

Solution

1°/ $A \cup B = A \cup C$ et $A \cap B = A \cap C \Rightarrow B = C$.

Soit x un élément de B.
Comme B est toujours contenu dans $A \cup B$, l'élément x appartient à $A \cup B$, qui est égal à $A \cup C$.
Donc x appartient à A ou x appartient à C.
Si x n'appartient pas à C, il est dans A, donc il est dans $A \cap B$, puisqu'il est dans B par hypothèse.
Or $A \cap B$ est égal à $A \cap C$, donc x appartient à $A \cap C$, donc il appartient à C, ce qui contredit notre hypothèse $x \notin C$.
Ainsi, tout élément de B est élément de C, et B est contenu dans C.

De façon analogue, on montre que C est contenu dans B. Il en résulte que B est égal à C.

2°/ $A \cup B = E$ et $A \cap B = \emptyset \Rightarrow B = \overline{A}$.

Nous savons déjà que $C = \overline{A}$ vérifie : $A \cup \overline{A} = E$ et $A \cap \overline{A} = \emptyset$.
Nousz avons donc ici : $A \cup B = A \cup \overline{A}$ ($= E$), et $A \cap B = A \cap \overline{A}$ ($= \emptyset$).
Il résulte alors de la relation 1° que $B = \overline{A}$, B est le complémentaire de A, donc aussi A est le com) plémentaire de B.

Chapitre 2. Ensembles.

Enoncés.

Exercice 8. Ensemble produit.

Soient $E = \{ 1, 3 \}$, $F = \{ 1, 2 \}$ et $G = \{ 0, 3 \}$. Déterminer : 1°/ $E \times F$, $E \times \emptyset$, $E \times \{\emptyset\}$, $F \times (E \cap G)$, $(F \times E) \cap G$. 2°/ $\mathfrak{P}(E)$, $\mathfrak{P}(E \cap G)$, $\mathfrak{P}(E \cup G)$, $\mathfrak{P}(F \times (E \cap G))$.	

Solution

1°/ Ensembles produits.

$E \times F$ est l'ensemble des couples (x, y) avec $x \in E$ et $y \in F$:

$$\boxed{E \times F = \{ (1, 1) ; (1, 2) ; (3, 1) ; (3, 2) \}}$$

$E \times \emptyset$ est l'ensemble des couples (x, y) avec $x \in E$ et $y \in \emptyset$. Or il n'y aucun élément y dans l'ensemble vide, donc :

$$\boxed{E \times \emptyset = \emptyset}$$

$E \times \{\emptyset\}$est l'ensemble des couples (x, y) avec $x \in E$ et $y \in \{\emptyset\}$:

$$\boxed{E \times \{\emptyset\} = \{ (1, \emptyset) ; (3, \emptyset) \}}$$

$E \cap G$ est l'ensemble des éléments communs à E et à G : $E \cap G = \{ 3 \}$.
$F \times (E \cap G) = F \times \{ 3 \}$ est l'ensembles des couples (x, y) avec $x \in F$ et $y \in \{3\}$:

$$\boxed{F \times (E \cap G) = \{ (1, 3) ; (2, 3) \}}$$

$(F \times E) \cap G$ est l'ensemble des éléments communs à $F \times E$ et à G.
Or G ne contient aucun couple, donc ne contient aucun élément de $F \times E$:

$$\boxed{(F \times E) \cap G = \emptyset}$$

2°/ Ensembles de parties.

$\mathfrak{P}(E) = \{ \emptyset, \{ 1 \}, \{ 3 \}, E \}$.

$\mathfrak{P}(E \cap G) = \mathfrak{P}(\{ 3 \}) = \{ \emptyset, \{ 3 \}\}$.

$\mathfrak{P}(E \cup G) = \mathfrak{P}(\{ 0, 1, 3 \}) = \{ \emptyset, \{ 0 \}, \{ 1 \}, \{ 3 \}, \{ 0, 1 \}, \{ 0, 3 \}, \{ 1, 3 \}, \{ 0, 1, 3 \}\}$.

$\mathcal{P}(F \times (E \cap G)) = \mathcal{P}(\{ (1, 3) ; (2, 3) \}) = \{ \varnothing, \{ (1, 3) \}, \{ (2, 3) \}, \{ (1, 3) ; (2, 3) \} \}$

Chapitre 2. Ensembles.

Enoncés.

Exercice 9. Propriétés élémentaires pour une partie.

Soient X un ensemble et A une partie de X. On note $\complement A$ le complémentaire de A dans X. Etablir les propriétés suivantes : 1°/ $\varnothing = \complement X$ et $X = \complement\varnothing$ 2°/ $\complement(\complement A) = A$ 3°/ $A \cup A = A$ et $A \cap A = A$ 4°/ $A \cup (\complement A) = X$ et $A \cap (\complement A) = \varnothing$ 5°/ $A \cup \varnothing = A$ et $A \cap X = A$ 6°/ $A \cup X = X$ et $A \cap \varnothing = \varnothing$	

Solution

1°/ Complémentaire de la partie pleine et complémentaire de la partie vide.

Pour tout élément x de X :

$x \in \complement X \Leftrightarrow x \notin X$ (par définition de $\complement$)
$x \notin X \Leftrightarrow$ non $(x \in X)$ (par définition de $\notin$)
$x \in \complement X \Leftrightarrow$ non $(x \in X)$ (transitivité de $\Leftrightarrow$)
non $(x \in X) \Leftrightarrow x \in \varnothing$ (mêmes valeurs de vérité 0)
$x \in \complement X \Leftrightarrow x \in \varnothing$ (transitivité de $\Leftrightarrow$)
$\complement X = \varnothing$ (deux relations équivalentes définissent la même partie).

$x \in X$	**non** $(x \in X)$	$x \notin X$	$x \in \complement X$	$x \in \varnothing$
1	0	0	0	0

$$x \in \complement X \Leftrightarrow x \in \varnothing$$
$$\complement X = \varnothing$$

Pour tout élément x de X :

$x \in \complement\varnothing \Leftrightarrow x \notin \varnothing$ (par définition de $\complement$)
$x \notin \varnothing \Leftrightarrow$ non $(x \in \varnothing)$ (p ar définition de $\notin$)

$x \in \complement\varnothing \Leftrightarrow$ non ($x \in \varnothing$) (transitivité de $\Leftrightarrow$)
non ($x \in \varnothing$) $\Leftrightarrow x \in X$ (mêmes valeurs de vérité 1)
$x \in \complement\varnothing \Leftrightarrow x \in X$ (transitivité de $\Leftrightarrow$)
$\complement\varnothing = X$ (deux relations équivalentes définissent la même partie).

$x \in \varnothing$	**non** ($x \in \varnothing$)	$x \notin \varnothing$	$x \in \complement\varnothing$	$x \in X$
0	1	1	1	1

2°/ Complémentaire du complémentaire d'une partie.

Pour tout élément x de X :

1. $x \in \complement(\complement A) \Leftrightarrow x \notin \complement A$ (par définition de $\complement$)
2. $x \notin \complement A \Leftrightarrow$ non ($x \in \complement A$) (par définition de $\notin$)
3. $x \in \complement(\complement A) \Leftrightarrow$ non ($x \in \complement A$) (transitivité de $\Leftrightarrow$ entre 1 et 2).
4. $x \in \complement A \Leftrightarrow$ non ($x \in A$) (par définition de $\complement$)
5. $x \in \complement A$ et non ($x \in A$) ont les mêmes valeurs de vérité (deux relations équivalentes ont les mêmes valeurs de vérité, par définition)
6. non ($x \in \complement A$) et non (non ($x \in A$)) ont les mêmes valeurs de vérité (par définition de non
7. non ($x \in \complement A$) $\Leftrightarrow$ non (non ($x \in A$)) (par définition de l'équivalence et en vertu de 6)
8. $x \in \complement(\complement A) \Leftrightarrow$ non (non ($x \in A$)) (transitivité de $\Leftrightarrow$ entre 3 et 7).
9. non (non ($x \in A$)) $\Leftrightarrow x \in A$ (mêmes valeurs de vérité)
10. $x \in \complement(\complement A) \Leftrightarrow x \in A$ (transitivité de $\Leftrightarrow$ entre 8 et 9).

$x \in A$	**non** ($x \in A$)	**non** (**non** ($x \in A$))	$x \in \complement(\complement A)$
0	1	0	0
1	0	1	1

11. $\complement(\complement A) = A$ (deux relations équivalentes définissent la même partie).

3°/ Idempotence.

$A \cup A$ est, par définition de la réunion, l'ensemble des éléments de X vérifiant la relation « $x \in A$ **ou** $x \in A$ ».
Or, quelle que soit la propriété P, « P ou P » est équivalente à P, donc « $x \in A$ ou $x \in A$ » est équivalente à $x \in A$.
$x \in A \cup A \Leftrightarrow x \in A$.
Comme deux relations équivalentes définissent la même partie, $A \cup A$ est égale à A.

$x \in A$	$x \in A$ **ou** $x \in A$	$x \in A \cup A$
0	0	0
1	1	1

$A \cap A$ est, par définition de l'intersection, l'ensemble des éléments de X vérifiant la relation « $x \in A$ **et** $x \in A$ ».
Or, quelle que soit la propriété P, « P et P » est équivalente à P, donc « $x \in A$ **et** $x \in A$ » est équivalente à $x \in A$.
$x \in A \cap A \Leftrightarrow x \in A$.
Comme deux relations équivalentes définissent la même partie, $A \cap A$ est égale à A.

$x \in A$	$x \in A$ **et** $x \in A$	$x \in A \cap A$
0	0	0
1	1	1

4°/ Union et intersection d'une partie et de son complémentaire.

a) Pour tout élément x de X :

$x \in \complement A \Leftrightarrow$ **non** $(x \in A)$
$x \in A \cup (\complement A) \Leftrightarrow (x \in A$ **ou** $x \in \complement A)$

$x \in A$	**non** $(x \in A)$	$x \in \complement A$	$x \in A$ **ou** $x \in \complement A$	$x \in A \cup (\complement A)$	$x \in X$
0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1

$$x \in A \cup (\complement A) \Leftrightarrow x \in X$$
$$A \cup (\complement A) = X$$

b) Pour tout élément x de X :

$x \in A \cap (\complement A) \Leftrightarrow (x \in A$ **et** $x \in \complement A)$
$x \in \complement A \Leftrightarrow$ **non** $(x \in A)$

$x \in A$	**non** $(x \in A)$	$x \in \complement A$	$x \in A$ **et** $x \in \complement A$	$x \in A \cap (\complement A)$	$x \in \varnothing$
0	1	1	0	0	0
1	0	0	0	0	0

$$x \in A \cap (\complement A) \Leftrightarrow x \in \varnothing$$
$$A \cap (\complement A) = \varnothing$$

5°/Eléments neutres.

a) $A \cup \varnothing$ est l'ensemble des éléments de X vérifiant la relation « $x \in A$ **ou** $x \in \varnothing$ » : $x \in A \cup \varnothing \Leftrightarrow (x \in A$ **ou** $x \in \varnothing)$.
Comme la relation $x \in \varnothing$ n'est jamais vraie, la relation « $x \in A$ **ou** $x \in \varnothing$ » est équivalente à la relation $x \in A$ (*).

$x \in A \bigcup \varnothing \Leftrightarrow x \in A$.
Deux relations équivalentes définissent la même partie : la relation $A \bigcup \varnothing = A$ est donc avérée.

(*) Pour vérifier l'équivalence des relations « $x \in A$ **ou** $x \in \varnothing$ » et $x \in A$, on dresse une ***table de vérité*** : la relation $x \in A$ peut être vraie (valeur de vérité 1) ou fausse (valeur de vérité 0), la relation $x \in \varnothing$ est toujours fausse (valeur de vérité 0), **une relation "ou" (symbole $\vee$) a pour valeur de vérité la plus grande des valeurs de vérité** de ses arguments (0 si les valeurs de vérité des arguments sont toutes 0, 1 si l'une au moins des valeurs de vérité des arguments est 1). Deux relations sont équivalentes si elles ont les mêmes valeurs de vérité.

$x \in A$	$x \in \varnothing$	$x \in A$ **ou** $x \in \varnothing$
0	0	0
1	0	1

On constate que les relations $x \in A$ et « $x \in A$ **ou** $x \in \varnothing$ » ont les mêmes valeurs de vérité, donc elles sont équivalentes.

b) $A \bigcap X$ est l'ensemble des éléments de X vérifiant la relation « $x \in A$ **et** $x \in X$ » : $x \in A \bigcap X \Leftrightarrow (x \in A$ **et** $x \in X)$.
Comme la relation $x \in X$ est toujours vraie, la relation « $x \in A$ **et** $x \in X$ » est équivalente à la relation $x \in A$ (*).
$x \in A \bigcap X \Leftrightarrow x \in A$.
Deux relations équivalentes définissent la même partie : la relation $A \bigcap X = A$ est donc avérée.

(*) Pour vérifier l'équivalence des relations « $x \in A$ et $x \in X$ » et $x \in A$, on dresse une ***table de vérité*** : la relation $x \in A$ peut être vraie (valeur de vérité 1) ou fausse (valeur de vérité 0), la relation $x \in X$ est toujours vraie (valeur de vérité 1), **une relation "et" (symbole $\wedge$) a pour valeur de vérité la plus petite des valeurs de vérité** de ses arguments (1 si les valeurs de vérité des arguments sont toutes 1, 0 si l'une au moins des valeurs de vérité des arguments est 0). Deux relations sont équivalentes si elles ont les mêmes valeurs de vérité.

$x \in A$	$x \in X$	$x \in A$ **et** $x \in X$
0	1	0
1	1	1

On constate que les relations $x \in A$ et « $x \in A$ **et** $x \in X$ » ont les mêmes valeurs de vérité, donc elles sont équivalentes.

6°/Eléments absorbants.

a) $A \bigcup X$ est l'ensemble des éléments de X vérifiant la relation « $x \in A$ **ou** $x \in X$ » : $x \in A \bigcup X \Leftrightarrow (x \in A$ **ou** $x \in X)$.
Comme la relation $x \in X$ est toujours vraie, la relation « $x \in A$ **ou** $x \in X$ » est équivalente à la relation $x \in X$:

$x \in A$	$x \in X$	$x \in A$ **ou** $x \in X$	$x \in A \bigcup X$
0	1	1	1
1	1	1	1

$x \in A \bigcup X \Leftrightarrow x \in X$.

Deux relations équivalentes définissent la même partie : la relation $A \bigcup X = X$ est donc avérée.

b) $A \bigcap \varnothing$ est l'ensemble des éléments de X vérifiant la relation « $x \in A$ **et** $x \in \varnothing$ » : $x \in A \bigcap \varnothing \Leftrightarrow (x \in A$ **et** $x \in \varnothing)$.
Comme la relation $x \in \varnothing$ n'est jamais vraie, la relation « $x \in A$ **et** $x \in \varnothing$ » est équivalente à la relation $x \in \varnothing$:

$x \in A$	$x \in \varnothing$	$x \in A$ **et** $x \in \varnothing$	$x \in A \bigcap \varnothing$
0	0	0	0
1	0	0	0

$$x \in A \bigcap \varnothing \Leftrightarrow x \in \varnothing.$$

Deux relations équivalentes définissent la même partie : la relation $A \bigcap \varnothing = \varnothing$ est donc avérée.

Chapitre 2. Ensembles.

Enoncés.

Exercice 10. Propriétés élémentaires pour deux parties.

Soient X un ensemble, A et B deux parties de X.
Etablir les propriétés suivantes :

1°/ $A \cup B = B \cup A$ et $A \cap B = B \cap A$ (commutativité)
2°/ $A \subseteq A \cup B$ et $A \cap B \subseteq A$
3°/ $\complement(A \cup B) = (\complement A) \cap (\complement B)$ et $\complement(A \cap B) = (\complement A) \cup (\complement B)$
4°/ Les relations suivantes sont équivalentes :
$A \subseteq B$, $\complement B \subseteq \complement A$, $A \cup B = B$, $A \cap B = A$
5°/ Les relations suivantes sont équivalentes :
$A \cap B = \varnothing$, $A \subseteq \complement B$, $B \subseteq \complement A$
6°/ Les relations suivantes sont équivalentes :
$A \cup B = X$, $\complement A \subseteq B$, $\complement B \subseteq A$

Solution

1°/ Commutativité.

Pour la **réunion**, utilisons une ***table de vérité***, sachant que :
— la valeur de vérité de la relation **ou** est la plus grande des valeurs de vérité des deux arguments,
— pour tout élément x de X, la relation $x \in A \cup B$ est, par définition de la **réunion**, équivalente à la relation $x \in A$ **ou** $x \in B$, donc possède les mêmes valeurs de vérité.

$x \in A$	$x \in B$	$x \in A$ **ou** $x \in B$	$x \in A \cup B$	$x \in B$ **ou** $x \in A$	$x \in B \cup A$
0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1

$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in B \cup A$ (les deux relations ont les mêmes valeurs de vérité)
$A \cup B = B \cup A$ (deux relations équivalentes définissent la même partie).

Pour l'**intersection**, utilisons une ***table de vérité***, sachant que :
— la valeur de vérité de la relation **et** est la plus petite des valeurs de vérité des deux arguments,
— pour tout élément x de X, la relation $x \in A \cap B$ est, par définition de l'**intersection**, équivalente à la relation $x \in A$ **et** $x \in B$, donc possède les mêmes valeurs de vérité.

$x \in A$	$x \in B$	$x \in A$ **et** $x \in B$	$x \in A \bigcap B$	$x \in B$ **et** $x \in A$	$x \in B \bigcap A$
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1

$x \in A \bigcap B \Leftrightarrow x \in B \bigcap A$ (les deux relations ont les mêmes valeurs de vérité)
$A \bigcap B = B \bigcap A$ (deux relations équivalentes définissent la même partie).

2°/ Relations d'inclusion.

Pour démontrer la relation $A \subseteq A \bigcup B$, nous utiliserons :

1. La définition de la relation d'inclusion :
   La relation d'**inclusion** $A \subseteq C$ est, par définition, la relation $(\forall\, x \in X)(x \in A \Rightarrow x \in C)$.
   La relation d'**implication** $P \Rightarrow R$ est, par définition, la relation (non (P)) **ou** R.
   La relation $A \subseteq C$ est donc la relation $(\forall\, x \in X)$((**non** $(x \in A)$) **ou** $x \in C$).
   Nous utiliserons cette relation avec $C = A \bigcup B$.
2. La définition de la **réunion**, avec l'équivalence :
   $x \in A \bigcup B \Leftrightarrow x \in A$ ou $x \in B$.

$x \in A$	$x \in B$	**non** $(x \in A)$	$x \in A$ **ou** $x \in B$	$x \in A \bigcup B$	(**non** $(x \in A)$) **ou** $(x \in A \bigcup B)$
0	0	1	0	0	1
1	0	0	1	1	1
0	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1

Cette table de vérité montre que la relation (**non** $(x \in A)$) **ou** $(x \in A \bigcup B)$ est **vraie pour tout élément *x* de *X***.
Donc la relation $(\forall\, x \in X)$((**non** $(x \in A)$) **ou** $x \in A \bigcup B$) est un **théorème** de la théorie des ensembles.
Or la relation $(\forall\, x \in X)$((**non** $(x \in A)$) **ou** $x \in A \bigcup B$) est équivalente à la relation $A \subseteq A \bigcup B$.
Donc la relation $A \subseteq A \bigcup B$ est, elle-même, un théorème de la théorie des ensembles.

Pour raccourcir cette démonstration, nous pouvons utiliser le fait que, pour toutes relations P et R, **la relation $P \Rightarrow (P$ ou $R)$ est toujours vraie**, ainsi que le montre la table de vérité suivante, puisque les relations $P \Rightarrow (P$ **ou** $R)$ et (**non** (P)) **ou** $(P$ **ou** $R)$ sont équivalentes, par définition de l'implication.

P	R	**non** (P)	P **ou** R	(**non** (P)) **ou** $(P$ **ou** $R)$	$P \Rightarrow (P$ **ou** $R)$
0	0	1	0	1	1
1	0	0	1	1	1
0	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1

En prenant pour P la relation $x \in A$, pour R la relation $x \in B$, nous voyons que, pour tout élément x de X, la relation $x \in A \Rightarrow (x \in A$ **ou** $x \in B)$ est vraie, et la relation vraie $(\forall\, x \in X)(x \in A \Rightarrow (x \in A$ **ou** $x \in B))$ montre que la relation $A \subseteq A \cup B$ est vraie (une relation vraie s'appelle, suivant le cas, un **axiome** ou un **théorème** : c'est un axiome si on peut le mettre au début d'une démonstration, un théorème si on l'obtient au terme d'une démonstration).

De manière analogue, nous montrons que, étant données deux relations P et R, la relation **(*P* et *R*) ⇒ *P* est toujours vraie**, étant équivalente à la relation (**non** (P **et** R)) **ou** P :

P	R	P **et** R	**non** (P **et** R)	(**non** (P et R)) **ou** P	(P **et** R) ⇒ P
0	0	0	1	1	1
1	0	0	1	1	1
0	1	0	1	1	1
1	1	1	0	1	1

En prenant pour P la relation $x \in A$, pour R la relation $x \in B$, nous voyons que, pour tout élément x de X, la relation ($x \in A$ **et** $x \in B) \Rightarrow x \in A$ est vraie, et la relation vraie $(\forall\, x \in X)((x \in A$ **et** $x \in B) \Rightarrow x \in A)$ montre que la relation $A \cap B \subseteq A$ est vraie.

3°/ Relations entre complémentaire, réunion, intersection.

Pour tout élément x de X :
— la relation $x \in \complement(A \cup B)$ est équivalente à la relation **non** ($x \in A$ **ou** $x \in B$).
— la relation $x \in \complement A \cap \complement B$ est équivalente à la relation (**non** ($x \in A$)) **et** (**non** $x \in B$).

La table de vérité :

$x \in A$	$x \in B$	$x \in A$ **ou** $x \in B$	**non** ($x \in A$ **ou** $x \in B$)	$x \in \complement(A \cup B)$	**non** ($x \in A$)	**non** ($x \in B$)	(**non** ($x \in A$)) **et** (**non** $x \in B$)	$x \in \complement A \cap \complement B$
0	0	0	1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	0	1	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0	0	0

montre que les relations $x \in \complement(A \cup B)$ et $x \in \complement A \cap \complement B$ ont les mêmes valeurs de vérité, donc elles sont équivalentes et définissent la même partie de X :

$$\complement(A \cup B) = \complement A \cap \complement B.$$

De manière analogue, pour tout élément x de X :
— la relation $x \in \complement(A \cap B)$ est équivalente à la relation **non** ($x \in A$ **et** $x \in B$).
— la relation $x \in \complement A \cup \complement B$ est équivalente à la relation (**non** ($x \in A$)) **ou** (**non** $x \in B$).

La table de vérité :

$x \in A$	$x \in B$	$x \in A$ **et** $x \in B$	**non** ($x \in A$ **et** $x \in B$)	$x \in \complement(A \cap B)$	**non** ($x \in A$)	**non** ($x \in B$)	(**non** ($x \in A$)) **ou** (**non** $x \in B$)	$x \in \complement A \cup \complement B$
0	0	0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	0	1	1	1
0	1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	1	0	0	0	0	0	0

montre que les relations $x \in \complement(A \cap B)$ et $x \in \complement A \cup \complement B$ ont les mêmes valeurs de vérité, donc elles sont équivalentes et définissent la même partie de X :

$$\complement(A \cap B) = \complement A \cup \complement B.$$

4°/ Equivalence des relations $A \subseteq B$, $\complement B \subseteq \complement A$, $A \cup B = B$, $A \cap B = A$.

a) La relation $A \subseteq B$ est la relation $(\forall\, x \in X)(x \in A \Rightarrow x \in B)$, soit $(\forall\, x \in X)((\textbf{non}\ (x \in A))\ \textbf{ou}\ x \in B)$
La relation $\complement B \subseteq \complement A$ est la relation $(\forall\, x \in X)((\textbf{non}\ (x \in B)) \Rightarrow (\textbf{non}\ (x \in A)))$, soit $(\forall\, x \in X)((\textbf{non}\ (\textbf{non}\ (x \in B)))\ \textbf{ou}\ (\textbf{non}\ (x \in A)))$.
Or la relation **non** (**non** ($x \in B$))) est équivalente à la relation $x \in B$, doncla relation (**non** (**non** ($x \in B$))) **ou** (**non** ($x \in A$)) est équivalente à la relation ($x \in B$) **ou** (**non** ($x \in A$)), c'est-à-dire encore à la relation (**non** ($x \in A$)) **ou** ($x \in B$).
Les relations $A \subseteq B$ et $\complement B \subseteq \complement A$ sont donc équivalentes.

b) Montrons d'abord la relation $A \subseteq B \Rightarrow A \cup B \subseteq B$.
En effet, pour tout x de X, la relation $x \in A \cup B$ est équivalente à $x \in A$ **ou** $x \in B$.
Mais, lorsque A est contenu dans B, la relation $x \in A$ implique la relation $x \in B$, de sorte que la relation $x \in A$ **ou** $x \in B$ implique la relation $x \in B$ **ou** $x \in B$, équivalente, on l'a vu, à la relation $x \in B$.
Ainsi, la relation $x \in A \cup B$ implique la relation $x \in B$, ce qui montre que, lorsque A est contenu dans B, $A \cup B$ est contenu dans B.

Comme, par ailleurs, d'après la question 2° de l'exercice, B est toujours contenu dans $A \cup B$, nous avons, lorsque *1* est contenu dans B, à la fois $A \cup B \subseteq B$ et $B \subseteq A \cup B$. D'où la relation vraie : $A \subseteq B \Rightarrow A \cup B = B$.

Réciproquement, comme la relation $A \subseteq A \cup B$ est toujours vraie (cf la question 2°), la relation $A \cup B = B$ implique la relation $A \subseteq B$ (dans une relation, on peut remplacer un terme par un terme qui lui est égal).

Ainsi, chacune des deux relations $A \subseteq B$ et $A \cup B = B$ implique l'autre, donc les relations $A \subseteq B$ et $A \cup B = B$ sont équivalentes.

c) Montrons d'abord la relation $A \subseteq B \Rightarrow A \subseteq A \cap B$.
En effet, pour tout x de X, la relation $x \in A \cap B$ est équivalente à $x \in A$ **et** $x \in B$.
Mais, lorsque A est contenu dans B, la relation $x \in A$ implique la relation $x \in B$, de sorte que la relation $x \in A$, équivalente, on l'a vu, à la relation $x \in A$ **et** $x \in A$, implique la relation $x \in A$ **et** $x \in B$.
Ainsi, la relation $x \in A$ implique la relation $x \in A \cap B$, ce qui montre que, lorsque A est contenu dans B, A est contenu dans $A \cap B$.

Comme, par ailleurs, d'après la question 2° de l'exercice, $A \cap B$ est toujours contenu dans A, nous avons, lorsque A est contenu dans B, à la fois $A \subseteq A \cap B$ et $A \cap B \subseteq A$. D'où la relation vraie : $A \subseteq B \Rightarrow A \cap B = A$.

Réciproquement, comme la relation $A \cap B \subseteq B$ est toujours vraie (cf la question 2°), la relation $A \cap B = A$ implique la relation $A \subseteq B$ (dans une relation, on peut remplacer un terme par un terme qui lui est égal).

Ainsi, chacune des deux relations $A \subseteq B$ et $A \cap B = A$ implique l'autre, donc les relations $A \subseteq B$ et $A \cap B = A$ sont équivalentes.

5°/ Equivalence des relations $A \cap B = \varnothing$, $A \subseteq \complement B$, $B \subseteq \complement A$.

a) D'après 4°, la relation $A \subseteq \complement B$ est équivalente à la relation $A \cup (\complement B) = \complement B$, soit, par passage aux complémentaires $(\complement A) \cap (\complement(\complement B)) = (\complement(\complement B))$.
Or $(\complement(\complement B))$ est égal à B, donc $A \subseteq \complement B$ est équivalent à $(\complement A) \cap B = B$.
La relation $(\complement A) \cap B = B$, qui, on le sait, est équivalente à la relation $B \cap (\complement A) = B$, se trouve, d'après 4°, équivalente à la relation $B \subseteq \complement A$.
Ainsi, la relation $A \subseteq \complement B$ est-elle équivalente à la relation $B \subseteq \complement A$.

b) D'après l'exercice 1-1°, la relation $A \cap B = \varnothing$ est équivalente à la relation $\complement(A \cap B) = X$, c'est-à-dire à $(\complement A) \cup (\complement B) = X$, d'après 3°.
On a alors, successivement :
$A = A \cap X$ (Exercice 1-5°)
$= A \cap ((\complement A) \cup (\complement B))$ (on peut remplacer X dans la relation précédente, par le terme égal $(\complement A) \cup (\complement B)$
$= (A \cap (\complement A)) \cup (A \cap (\complement B))$ (distributivité de l'intersection par rapport à la réunion, Exercice 3-2°)
$= \varnothing \cup (A \cap (\complement B))$ $(A \cap (\complement A) = \varnothing$, Exercice 1-5°)
$= A \cap (\complement B)$ $(\varnothing \cup C = C$, Exercice 1-5°)
Or, d'après 4°, la relation $A = A \cap (\complement B)$ est équivalente à la relation $A \subseteq \complement B$.
Nous avons donc démontré la relation $A \cap B = \varnothing \Rightarrow A \subseteq \complement B$.

Réciproquement, comme la relation $A \cap B \subseteq A$ est toujours vraie, la relation $A \subseteq \complement B$ entraîne, par transitivité, que $A \cap B$ est contenue dans $\complement B$.
Comme, par ailleurs, $A \cap B$ est toujours contenue dans B, nous voyons que $A \cap B$ est contenue dans $\complement B \cap B = \varnothing$, donc $A \cap B$ est vide, $A \cap B = \varnothing$.
Nous avons donc démontré la relation $A \subseteq \complement B \Rightarrow A \cap B = \varnothing$.
Ainsi, chacune des deux relations $A \subseteq \complement B$ et $A \cap B = \varnothing$ implique l'autre, donc les relations $A \subseteq \complement B$ et $A \cap B = \varnothing$ sont équivalentes.

6°/ Equivalence des relations $A \cup B = X$, $\complement A \subseteq B$, $\complement B \subseteq A$.

La relation $A \cup B = X$ est équivalente à la relation $\complement(A \cup B) = \complement X = \varnothing$, c'est-à-dire à $(\complement A) \cap (\complement B) = \varnothing$, d'après 3°.
D'après 5°, appliqué à $\complement A$ et à $\complement B$ au lieu de A et B, respectivement, les relations :

$$(\complement A) \cap (\complement B) = \varnothing,\ \complement A \subseteq \complement(\complement B),\ \complement B \subseteq \complement(\complement A)$$

sont équivalentes.
En remplaçant $\complement(\complement B)$ par B qui lui est égal, $\complement(\complement A)$ par A qui lui est égal, $(\complement A) \cap (\complement B) = \varnothing$ par $A \cup B = X$

qui lui est équivalent, on voit que les relations :

$$A \cup B = X, \complement A \subseteq B, \complement B \subseteq A,$$

sont équivalentes.

Chapitre 2. Ensembles.

Enoncés.

Exercice 11. Propriétés élémentaires pour trois parties.

Soient X un ensemble, A, B et C trois parties de X.
Etablir les propriétés suivantes :

1°/ $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ et $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (associativité)
2°/ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ et $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (distributivité)
3°/ La relation $A \subseteq B$ entraîne les relations :
$A \cup C \subseteq B \cup C$ et $A \cap C \subseteq B \cap C$
4°/ La relation « $C \subseteq A$ et $C \subseteq B$ » est équivalente à $C \subseteq A \cap B$
5°/ La relation « $A \subseteq C$ et $B \subseteq C$ » est équivalente à $A \cup B \subseteq C$

Solution

1°/ Associativité.

$x \in A$	$x \in B$	$x \in C$	$x \in B$ **ou** $x \in C$	$x \in A$ **ou** ($x \in B$ **ou** $x \in C$)	$x \in A$ **ou** $x \in B$	($x \in A$ **ou** $x \in B$) **ou** $x \in C$
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	1	0	1
0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1

Ayant les mêmes valeurs de vérité, la relation $x \in A$ **ou** ($x \in B$ **ou** $x \in C$) et la relation ($x \in A$ **ou** $x \in B$) **ou** $x \in C$ sont équivalentes.
Elles définissent donc la même partie : $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$.

$x \in A$	$x \in B$	$x \in C$	$x \in B$ **et** $x \in C$	$x \in A$ **et** ($x \in B$ **et** $x \in C$)	$x \in A$ **et** $x \in B$	($x \in A$ **et** $x \in B$) **et** $x \in C$
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0

1	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0
1	1	0	0	0	1	0
1	1	1	1	1	1	1

Ayant les mêmes valeurs de vérité, la relation $x \in A$ **et** ($x \in B$ **et** $x \in C$) et la relation ($x \in A$ **et** $x \in B$) **et** $x \in C$ sont équivalentes.
Elles définissent donc la même partie : $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.

2°/ Distributivité.

$x \in A$	$x \in B$	$x \in C$	$x \in B$ **et** $x \in C$	$x \in A$ **ou** ($x \in B$ **et** $x \in C$)
0	0	0	0	0
0	0	1	0	0
0	1	0	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

$x \in A$	$x \in B$	$x \in C$	$x \in A$ **ou** $x \in B$	$x \in A$ **ou** $x \in C$	($x \in A$ **ou** $x \in B$) **et** ($x \in A$ **ou** $x \in C$)
0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	0
0	1	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1
1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	1	1

Ayant les mêmes valeurs de vérité, la relation $x \in A$ **ou** ($x \in B$ **et** $x \in C$) et la relation ($x \in A$ **ou** $x \in B$) **et** ($x \in A$ **ou** $x \in C$) sont équivalentes.
Elles définissent donc la même partie : $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

$x \in A$	$x \in B$	$x \in C$	$x \in B$ **ou** $x \in C$	$x \in A$ **et** ($x \in B$ **ou** $x \in C$)
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	1	0
1	0	0	0	0
1	0	1	1	1

1	1	0	1	1
1	1	1	1	1

$x \in A$	$x \in B$	$x \in C$	$x \in A$ **et** $x \in B$	$x \in A$ **et** $x \in C$	($x \in A$ **et** $x \in B$) **ou** ($x \in A$ **et** $x \in C$)
0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0
0	1	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0
1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	0	1
1	1	1	1	1	1

Ayant les mêmes valeurs de vérité, la relation $x \in A$ **et** ($x \in B$ **ou** $x \in C$) et la relation ($x \in A$ **et** $x \in B$) **ou** ($x \in A$ **et** $x \in C$) sont équivalentes.
Elles définissent donc la même partie : $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

3°/ Relations d'inclusions.

Supposons A contenu dans B.

Soit x un élément de X, appartenant à $A \cup C$: il appartient à A ou il appartient à C.
— S'il appartient à A, il est dans B puisque A est contenu dans B. Comme B est toujours contenu dans $B \cup C$, x est dans $B \cup C$.
— S'il appartient à C, il est aussi dans $B \cup C$, puisque C est toujours contenu dans $B \cup C$.
Ainsi, dès que A est contenu dans B, $A \cup C$ est contenu dans $B \cup C$.

Soit x un élément de X, appartenant à $A \cap C$: il appartient à A et il appartient à C.
— Puisqu'il appartient à A, il est dans B puisque A est contenu dans B.
— Puisqu'il appartient aussi à C, il est dans $B \cap C$.
Ainsi, dès que A est contenu dans B, $A \cap C$ est contenu dans $B \cap C$.

4°/ Inclusion et intersection.

a) Supposons $C \subseteq A$ et $C \subseteq B$.

Soit x un élément de X appartenant à C.
Comme C est contenu dans A, x appartient à A.
Comme C est contenu dans B, x appartient à B.
L'élément x, qui appartient à A et à B, appartient à $A \cap B$, par définition de l'intersection.

$$(C \subseteq A \text{ et } C \subseteq B) \Rightarrow C \subseteq A \cap B$$

b) Réciproquement, supposons $C \subseteq A \cap B$.
Soit x un élément de X appartenant à C.
Comme C est contenu dans $A \cap B$, x appartient à A et à B.
Tout élément de C est élément de A, et tout élément de C est élément de B.

$$C \subseteq A \cap B \Rightarrow (C \subseteq A \textbf{ et } C \subseteq B)$$

Les relations ($C \subseteq A$ **et** $C \subseteq B$) et ($C \subseteq A \cap B$) sont donc équivalentes.

5°/ Inclusion et réunion.

a) Supposons $A \subseteq C$ et $B \subseteq C$.

Soit x un élément de X appartenant à $A \cup B$: x appartient à A ou x appartient à B.
— si x appartient à A, la relation $A \subseteq C$ montre que A appartient à C ;
— si x appartient à B, la relation $B \subseteq C$ montre que A appartient à C.
Ainsi tout élément de $A \cup B$ est un élément de C : c'est dire que $A \cup B$ est contenu dans C.

$$(A \subseteq C \textbf{ et } B \subseteq C) \Rightarrow A \cup B \subseteq C$$

b) Réciproquement, supposons $A \cup B \subseteq C$.
Comme A est toujours contenu dans $A \cup B$, A est contenu dans C, par transitivité de l'inclusion.
Comme B est toujours contenu dans $A \cup B$, B est contenu dans C, par transitivité de l'inclusion.

$$A \cup B \subseteq C \Rightarrow (A \subseteq C \textbf{ et } B \subseteq C)$$

Les relations ($A \subseteq C$ **et** $B \subseteq C$) et ($A \cup B \subseteq C$) sont donc équivalentes.

Chapitre 2. Ensembles.

Enoncés.

Exercice 12. Différence symétrique.

Soient X un ensemble, A et B deux parties de X.
On appelle **différence symétrique** de A et B, la partie $A + B$ de X définie par :

$$A + B = (A \cap \complement B) \cup (\complement A \cap B).$$

Etablir les propriétés suivantes :

1°/ $A + B = B + A$ (commutativité)
2°/ $A + (B + C) = (A + B) + C$ (associativité)
3°/ $A + \varnothing = A$ (existence d'un élément neutre)
4°/ $A + A = \varnothing$ (nilpotence et existence d'un symétrique)
5°/ $A + X = \complement A$
6°/ $A + B = \complement A + \complement B$
7°/ $A + B = (A \cup B) \cap ((\complement A) \cup (\complement B))$

Solution

1°/ Commutativité.

La relation de définition $A + B = (A \cap \complement B) \cup (\complement A \cap B)$ montre que, pour tout élément x de X, les relations suivantes sont équivalentes :

$x \in A + B$
($x \in A$ **et** $x \notin B$) **ou** ($x \notin A$ **et** $x \in B$)

Les relations **et** et **ou** sont symétriques, de sorte que l'on obtient des relations équivalentes en échangeant les arguments des connecteurs **et** et **ou** :

($x \notin B$ **et** $x \in A$) **ou** ($x \in B$ **et** $x \notin A$)
($x \in B$ **et** $x \notin A$) **ou** ($x \notin B$ **et** $x \in A$)

La dernière relation peut sécrire $x \in (B \cap \complement A) \cup (\complement B \cap A)$.
Par définition, c'est la relation $x \in B + A$.

Ainsi, les relations $x \in A + B$ et $x \in B + A$ sont équivalentes : elles définissent donc la même partie et la différence symétrique est une opération commutative :

$$A + B = B + A.$$

2°/ Associativité.

Commençons par établir la ***table de vérité de la différence symétrique*** :

$x \in A$	$x \in B$	**non** ($x \in A$)	**non** ($x \in B$)	$x \in A$ **et** $x \notin B$	$x \notin A$ **et** $x \in B$	($x \in A$ **et** $x \notin B$) **ou** ($x \notin A$ **et** $x \in B$)
$x \in A$	$x \in B$	$x \in \complement A$	$x \in \complement B$	$x \in A \cap \complement B$	$x \in \complement A \cap B$	$x \in (A \cap \complement B) \cup (\complement A \cap B) = A + B$
0	0	1	1	0	0	0
0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	1	0	1
1	1	0	0	0	0	0

La différence symétrique de A et B est donc l'ensemble des éléments x de X qui appartiennent à A ou à B, mais pas aux deux.

On peut alors dresser la table de vérité avec trois parties :

$x \in A$	$x \in B$	$x \in C$	$x \in A + B$	$x \in (A + B) + C$	$x \in B + C$	$x \in A + (B + C)$
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	0	0	0
1	0	0	1	1	0	1
1	0	1	1	0	1	0
1	1	0	0	0	1	0
1	1	1	0	1	0	1

Les relations $x \in (A + B) + C$ et $x \in A + (B + C)$ ont les mêmes valeurs de vérité, elles sont donc équivalentes et définissent la même partie :

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

3°/ Elément neutre.

$A + \varnothing = (A \cap \complement\varnothing) \cup (\complement A \cap \varnothing)$.
$\complement\varnothing = X$, $A \cap X = A$, $\complement A \cap \varnothing = \varnothing$.
$A + \varnothing = A \cup \varnothing = A$.

4°/ Symétrique.

$A + A = (A \cap \complement A) \cup (\complement A \cap A)$
$A \cap \complement A = \complement A \cap A = \varnothing$.
$A + A = \varnothing \cup \varnothing = \varnothing$.

Les quatre propriétés précédentes (associativité, commutativité, existence d'un élément neutre, existence d'un symétrique pour chaque élément) donnent à l'ensemble des parties de X une structure qu'on appellera une structure de **groupe abélien** pour la loi + (différence symétrique, notée aussi Δ).
(Voir Algèbre, Structures, Chapitre 2, Exercice 8).

5°/ Expression du complémentaire.

$A + X = (A \cap \complement X) \cup (\complement A \cap X)$
$\complement X = \varnothing$, $A \cap \varnothing = \varnothing$, $\complement A \cap X = \complement A$, $\varnothing \cup \complement A = \complement A$.
$A + X = \complement A$.

6°/ Différence symétrique des complémentaires.

$\complement A + \complement B = (A + X) + (B + X)$ (d'après 5°)
$= A + (X + (B + X))$ (associativité)
$= A + ((X + B) + X)$ (associativité)
$= A + ((B + X) + X)$ (commutativité)
$= A + (B + (X + X))$ (associativité)
$= (A + B) + (X + X)$ (associativité)
$= (A + B) + \complement X$ (d'après 5°)
$= (A + B) + \varnothing$ (Exercice 1-1°)
$= A + B$ (d'après 3°)

7°/ Définition alternative de la somme.

$x \in A$	$x \in B$	**non** ($x \in A$)	**non** ($x \in B$)	$x \in A$ **ou** $x \in B$	$x \notin A$ **ou** $x \notin B$	($x \in A$ **ou** $x \in B$) **et** ($x \notin A$ **ou** $x \notin B$)
$x \in A$	$x \in B$	$x \in \complement A$	$x \in \complement B$	$x \in A \cup B$	$x \in \complement A \cup \complement B$	$x \in (A \cup B) \cap (\complement A \cup \complement B)$
0	0	1	1	0	1	0
0	1	1	0	1	1	1
1	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	0	0

En comparant avec le premier tableau de la question 2°, nous voyons que les relations $x \in (A \cup B) \cap (\complement A \cup \complement B)$ et $x \in (A \cap \complement B) \cup (\complement A \cap B)$ ont les mêmes valeurs de vérité. Elles sont donc équivalentes et définissent la même partie :

$$A + B = (A \cap \complement B) \cup (\complement A \cap B) = (A \cup B) \cap (\complement A \cup \complement B).$$

Chapitre 2. Ensembles.

Enoncés.

Exercice 13. Différence symétrique de plusieurs parties.

Soient E un ensemble, A, B, C et les A_i des parties de E. La notation Δ désigne la différence symétrique. 1°/ Montrer que $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$. 2°/ Montrer que $x \in A_1 \Delta A_2 \Delta \ldots \Delta A_n$ si, et seulement si, x appartient à un nombre impair des A_i.	

Solution

1°/ Associativité.

Dans l'exercice 12, la différence symétrique était notée +.
Dans Exercice 12 - 2°, nous avons montré que cette loi est associative, ce qui se traduit par la relation $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$.

2°/ Différence symétrique de plusieurs parties.

a) **Pour $n = 2$**, la propriété s'écrit :

$$x \in A_1 \Delta A_2 \text{ si et seulement si } x \text{ appartient à un nombre impair des } A_i \ (i = 1, 2)$$

Elle vérifiée puisque, par définition, un élément appartient à la différence symétrique de deux parties si, et seulement si, il appartient à l'une des deux, mais pas aux deux.

b) **Supposons que la propriété soit vraie pour un $n \geqslant 2$**, et posons $\Delta_n = A_1 \Delta A_2 \Delta \ldots \Delta A_n$.

c) $A_1 \Delta A_2 \Delta \ldots \Delta A_n \Delta A_{n+1} = \Delta_n \Delta A_{n+1}$ par associativité.

Dire qu'un élément x de E appartient à $\Delta_n \Delta A_{n+1}$, c'est dire que x appartient à Δ_n ou a A_{n+1}, pais pas aux deux.
S'il appartient à Δ_n mais pas à A_{n+1}, il appartient, d'après l'hypothèse de récurrence à un nombre impair des A_i.
S'il appartient à A_{n+1} mais pas à Δ_n, il appartient au seul A_{n+1}, donc à un nombre impair des A_i.

Réciproquement, si un élément x de E appartient à un nombre impair des A_i $(1 \leqslant i \leqslant n + 1)$:

— s'il appartient à A_{n+1}, il n'est pas dans Δ_n, sinon, d'après l'hypothèse de récurrence, il serait dans un nombre impair des A_i ($1 \leqslant i \leqslant n$), ce qui ferait qu'étant dans A_{n+1}, il serait dans un nombre pair des A_i ($1 \leqslant i \leqslant n+1$).
— s'il n'appartient pas à A_{n+1}, il est dans un nombre impair des A_i ($1 \leqslant i \leqslant n$), donc, d'après l'hypothèse de récurrence, il est dans Δ_n.
Finalement, nous avons montré que tout x appartenant à un nombre impair des A_i ($1 \leqslant i \leqslant n+1$), appartient à l'ensemble

$$(A_{n+1} \cap \complement\Delta_n) \cup (\Delta_n \cap \complement A_{n+1}) = \Delta_n \Delta A_{n+1}$$

Ce résultat, joint au précédent, montre que $A_1 \Delta A_2 \Delta \ldots \Delta A_n \Delta A_{n+1}$ est l'ensemble des éléments de E qui appartiennent à un nombre impair des A_i ($1 \leqslant i \leqslant n+1$).

La propriété est donc vraie pour $n+1$ dès qu'elle est vraie pour n.

Le principe de récurrence montre alors que la propriété est vraie pour tout entier $n \geqslant 1$.

Chapitre 2. Ensembles.

Enoncés.

Exercice 14. Formule d'inclusion-exclusion de Möbius.

Soient E un ensemble de cardinal fini, A, B, C et les A_i des parties de E. Le but de cet exercice est d'établir la *formule d'inclusion-exclusion de Möbius* énoncée en 3°. La notation $|X|$ désigne le **cardinal** de X.

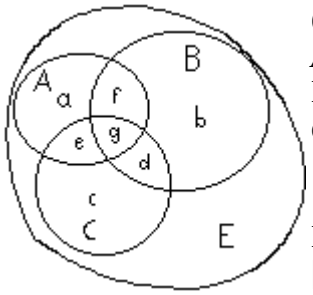
1°/ Montrer que $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$.
2°/ Dans une classe de 30 élèves, 12 aiment les Mathématiques, 14 aiment la Physique, 13 aiment la Chimie, 5 aiment les Mathématiques et a Physique, 7 aiment la Physique et la Chimie, 4 aiment les Mathématiques et la Chimie. Sachant qu'il y a 3 élèves qui aiment les Mathématiques, la Physique et la Chimie, combien d'élèves n'aiment aucune de ces matières ?
3°/ Montrer, par récurrence, que, pour tout entier n :

$$\left|\bigcup_{1\le i\le n} A_i\right| = \sum_{I\in\mathcal{P}^*(\{1,\dots,n\})} (-1)^{|I|+1} \left|\bigcap_{i\in I} A_i\right|$$

où $\mathcal{P}^*(X)$ désigne l'ensemble des parties non vides de X.

Solution

1°/ Cardinal de la réunion de trois parties d'un ensemble fini.



On peut décomposer $A \cup B \cup C$ en parties mutuellement disjointes :
$A \cup B \cup C = a \cup b \cup c \cup d \cup e \cup f \cup g$.
Le cardinal d'une réunion finie de parties mutuellement disjointes est la somme des cardinaux des parties :
$|A \cup B \cup C| = |a| + |b| + |c| + |d| + |e| + |f| + |g|$.

Le diagramme de Venn ci-contre montre que l'on a :
$|A| = |a| + |e| + |f| + |g|$.
$|B| = |b| + |d| + |f| + |g|$.
$|C| = |c| + |d| + |e| + |g|$.
$|A \cap B| = |f| + |g|$
$|A \cap C| = |e| + |g|$
$|B \cap C| = |d| + |g|$
$|A \cap B \cap C| = |g|$.

Il en résulte :

$| A | + | B | + | C | - | A \cap B | - | A \cap C | - | B \cap C | + | A \cap B \cap C | = | a | + | b | + | c | + 2 (| d | + | e | + | f |) + 3 | g | - (| d | + | e | + | f | + 3 | g |) + | g |$
$= | a | + | b | + | c | + | d | + | e | + | f | + | g | = | A \cup B \cup C |$, *quod erat demonstrandum !*

2°/ Les non-scientifiques de la classe.

Appelons A l'ensemble des élèves de la classe qui aiment les Mathématiques : $| A | = 12$.
Appelons B l'ensemble des élèves de la classe qui aiment la Physique : $| B | = 14$.
Appelons C l'ensemble des élèves de la classe qui aiment la Chimie : $| C | = 13$.

L'énoncé fournit aussi les données : $| A \cap B | = 5$, $| B \cap C | = 7$, $| A \cap C | = 4$, $| A \cap B \cap C | = 3$.

La formule établie dans la question 1° donne :

$| A \cup B \cup C | = 12 + 14 + 13 - 5 - 7 - 4 + 3 = 42 - 16 = 26$

Il y a donc 26 élèves dans la classe, qui aiment au moins l'une des trois matières Mathématiques, Physique ou Chimie.

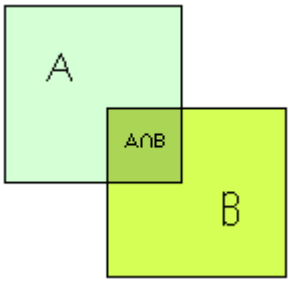
Par différence, sur les 30 élèves de la classe, il y a 4 élèves qui n'aiment ni les Mathématiques, ni la Physique, ni la Chimie.

3°/ Formule d'inclusion-exclusion de Möbius.

a) La formule :

$$\left| \bigcup_{1 \leq i \leq n} A_i \right| = \sum_{i \in \mathcal{P}^*(\{1,\dots,n\})} (-1)^{|I|+1} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right|$$

est triviale pour $n = 1$, puisqu'elle se réduit à $| A_1 | = | A_1 |$.



b) Pour $n = 2$, elle se réduit à :

$| A_1 \cup A_2 | = | A_1 | + | A_2 | - | A_1 \cap A_2 |$.

Elle est vraie, comme le montre le diagramme de Venn ci-contre, avec $A = A_1$ et $B = A_2$.
$| A | = | A \cap \complement B | + | A \cap B |$
$| B | = | B \cap \complement A | + | A \cap B |$
$| A | + | B | - | A \cap B | = | A \cap \complement B | + | B \cap \complement A | + | A \cap B |$
Comme les parties $A \cap \complement B$, $B \cap \complement A$, et $A \cap B$ sont disjointes et de réunion $A \cup B$, on a :
$| A \cup B | = | A \cap \complement B | + | B \cap \complement A | + | A \cap B | = | A | + | B | - | A \cap B |$.
De sorte que la formule est vraie pour $n = 2$.

c) Pour $n = 3$, la formule a été établie dans la question 1°.

d) Supposons la formule vraie pour un entier $n \geqslant 3$.

Considérons l'entier $n + 1$. Nous posons $A = \bigcup_{1 \le i \le n} A_i$.

$$\bigcup_{1 \le i \le n+1} A_i = A \cup A_{n+1}$$

$$\left| \bigcup_{1 \le i \le n+1} A_i \right| = |A \cup A_{n+1}| = |A| + |A_{n+1}| - |A \cap A_{n+1}|$$, puisque la formule est vraie pour $n = 2$.

$$A \cap A_{n+1} = A_{n+1} \cap A = \bigcup_{1 \le i \le n} (A_{n+1} \cap A_i)$$

$$|A| = \sum_{I \in \mathfrak{P}^*(\{1,\dots,n\})} (-1)^{|I|+1} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right|$$, d'après l'hypothèse de récurrence.

D'après l'hypothèse de récurrence, nous avons aussi :

$$|A \cap A_{n+1}| = \sum_{I \in P^*(\{1,\dots,n\})} (-1)^{|I|+1} \left| \bigcap_{i \in I} (A_{n+1} \cap A_i) \right|.$$

Considérons alors la somme $\sum_{I \in \mathfrak{P}^*(\{1,\dots,n+1\})} (-1)^{|I|+1} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right|$.

Dans cette somme, nous avons $n + 1$ familles I à un élément : elles donnent les termes

$$|A_1| + |A_2| + \dots + |A_n| + |A_{n+1}|.$$

Dans les familles I possédant au moins deux éléments, nous avons d'une part des familles I contenant $n + 1$, d'autres part, des familles ne contenant pas $n + 1$.
Les familles ne contenant pas $n + 1$ donnent les termes

$$\sum_{\substack{I \in \mathfrak{P}^*(\{1,\dots,n\}) \\ |I| \ge 2}} (-1)^{|I|+1} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right| = |A| - (|A_1| + |A_2| + \dots + |A_n|)$$

Les familles J contenant $n + 1$ donnent, avec $J = I \cup \{ n + 1 \}$, donc $|J| = |I| + 1$, les termes :

$$\sum_{I \in \mathfrak{P}^*(\{1,\dots,n\})} (-1)^{|I|+2} \left| \bigcap_{i \in I} (A_{n+1} \cap A_i) \right| = - \sum_{I \in P^*(\{1,\dots,n\})} (-1)^{|I|+1} \left| \bigcap_{i \in I} (A_{n+1} \cap A_i) \right| = - |A \cap A_{n+1}|$$

Au total, nous obtenons :

$$\sum_{I \in \mathfrak{P}^*(\{1,\dots,n+1\})} (-1)^{|I|+1} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right| = |A_1| + |A_2| + \dots + |A_n| + |A_{n+1}| + |A| - (|A_1| + |A_2| + \dots + |A_n|) -$$

$$
\begin{aligned}
&|A \cap A_{n+1}| \\
&\quad = |A_{n+1}| + |A| - |A \cap A_{n+1}| \\
&\quad = |A_{n+1} \cup A| \\
&\quad = \left| \bigcup_{1 \leq i \leq n+1} A_i \right|
\end{aligned}
$$

de sorte que la formule de l'hypothèse de récurrence est vraie pour $n + 1$.

Elle est donc vraie quelque soit l'entier $n \geqslant 1$.

Chapitre 2. Ensembles.

Enoncés.

Exercice 15. Propriété de la différence symétrique.

Soient E un ensemble, A, B, C des parties de E. Sans utiliser de table de vérité, montrer que : 1°/ $A \subseteq B \cup (A \Delta B)$. 2°/ $A \Delta C \subseteq (A \Delta B) \cup (B \Delta C)$.	Solution

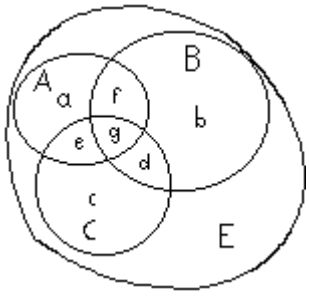
Solution

La **différence symétrique** $X \Delta Y$ de deux parties X et Y est l'ensemble des éléments qui appartiennent à l'une des parties, mais pas aux deux.

1°/ $A \subseteq B \cup (A \Delta B)$.

Considérons un élément quelconque a de A.
De deux choses l'une :
— ou bien il est dans B, donc dans $B \cup (A \Delta B)$, puisque la réunion de deux parties contient les deux parties, et il n'y a plus rien à démontrer,
— ou bien il n'est pas dans B et, dans ce cas, étant dans A, il est dans $A \Delta B$ qui est l'ensemble des éléments appartenant à A ou à B mais pas aux deux. Là encore a est dans $B \cup (A \Delta B)$.
Ainsi tout élément de A est dans $B \cup (A \Delta B)$: c'est que A est contenue dans $B \cup (A \Delta B)$, par définition.

2°/ $A \Delta C \subseteq (A \Delta B) \cup (B \Delta C)$.



Avec les notations du diagramme de Venn ci-contre, nous avons :

$A \Delta C = a \cup c \cup d \cup f$, $A \Delta B = a \cup b \cup d \cup e$, $B \Delta C = b \cup c \cup e \cup f$.

Donc $(A \Delta B) \cup (B \Delta C) = a \cup b \cup c \cup d \cup e \cup f$, qui contient évidemment $a \cup c \cup d \cup f = A \Delta C$.

Chapitre 3. Applications : définitions et résultats

Exercices

1. **Fonction (ensemble de départ, ensemble d'arrivée, ensemble de définition, image, graphe, image réciproque).**
2. **Application.**
3. **Application identique.**
4. **Injection.**
5. **Surjection.**
6. **Bijection.**
7. **Composition.**
8. **Section.**
9. **Rétraction.**
10. **Restriction.**
11. **Prolongement.**
12. **Condition nécessaire et suffisante.**

1. Fonction.

Etant donnés deux ensembles E et F et une partie X de E, on appelle ***fonction*** de E dans F définie dans X, la donnée, pour chaque élément x de X, d'un **élément unique** y de F, noté $f(x)$ et appelé l'**image**, ou le **transformé**, de x par f.

Si l'élément y n'est pas unique, on parle seulement de **correspondance**, au lieu de fonction.

Si f est une fonction de E dans F définie dans X, l'ensemble des éléments y de F tels qu'il existe un élément x de X vérifiant $y = f(x)$, est noté $f(X)$.
E est l'***ensemble de départ*** de la fonction f, F l'***ensemble d'arrivée***, X l'***ensemble de définition***, $f(X)$ l'***image*** de f.

L'ensemble des couples $(x, f(x))$, pour $x \in X$, est une partie de l'ensemble produit $E \times F$, qu'on appelle le ***graphe*** de la fonction f.

Si Y est une partie de F et $f : E \longrightarrow F$ une fonction de E dans F, définie dans $X \subseteq E$, l'ensemble des éléments x de X dont l'image par f est un élément de Y, est appelé l'***image réciproque*** de Y par f et noté $f^{-1}(Y)$.

$$f^{-1}(Y) = \{ x \in X \mid f(x) \in Y \}$$

Par abus d'écriture, l'image d'une partie $\{ y \}$ réduite à un élément y de F est notée $f^{-1}(y)$ (au lieu de $f^{-1}(\{ y \})$) :

$$f^{-1}(y) = \{ x \in X \mid f(x) = y \}$$

HAUT

2. Application.

Etant donnés deux ensembles E et F, une fonction de E dans F est appelée une ***application*** de E dans F si, et seulement si, son ensemble de définition X est égal à son ensemble de départ E.
Autrement dit, une application $f : E \longrightarrow F$ est la donnée, **pour tout élément** x de E, d'un **unique** élément y de F.

HAUT

3. Application identique.

Etant donnés un ensemble E, l'***application identique*** $Id_E : E \longrightarrow E$ est l'application qui, à chaque élément $x \in E$, fait correspondre $Id_E(x) = x$.

HAUT

4. Injection.

Etant donnée une fonction $f : E \longrightarrow F$, définie dans $X \subseteq E$, on dit que f est injective, ou que f est une ***injection de X dans F*** si, et seulement si, deux éléments distincts de X ont des images distinctes par f.

Exemple : soit X une partie de E, l'application $X \longrightarrow E$, qui, à tout élément x de X, fait correspondre le même élément x considéré comme élément de E, est injective. On l'appelle l'***injection canonique*** de X dans E.

HAUT

5. Surjection.

Etant donnée une fonction $f : E \longrightarrow F$, définie dans $X \subseteq E$, on dit que f est surjective, ou que f est une ***surjection de X dans F*** si, et seulement si, $f(X) = F$: autrement dit, f est surjective si, et seulement si, tout élément de F est l'image par f, d'au moins un élément de E.

HAUT

6. Bijection.

Etant donnée une fonction $f : E \longrightarrow F$, définie dans $X \subseteq E$, on dit que f est bijective, ou que f est une ***bijection de X sur F*** si, et seulement si, f est à la fois injective et surjective : autrement dit, f est bijective si, et seulement si, tout élément de F est l'image par f, d'un unique élément de X.

Si $f : E \longrightarrow F$ est une bijection de E sur F (l'ensemble de définition X est égal à E), l'application $g : F \longrightarrow E$, qui, à tout élément y de F fait correspondre l'unique x de E vérifiant $y = f(x)$, est appelé l'***application réciproque*** de f ; elle est notée $g = f^{-1}$.

HAUT

7. Composition.

Etant donnée une fonction $f : E \longrightarrow F$, définie dans $X \subseteq E$, et une fonction $g : F \longrightarrow G$, définie dans $Y \subseteq F$, on appelle ***composée de f et g***, la fonction $h = g \circ f : E \longrightarrow G$, définie dans $f^{-1}(Y \cap f(X))$, par :

$$h(x) = g(f(x)).$$

HAUT

8. Section.

Etant donnée une application $f : E \longrightarrow F$ et une application $g : F \longrightarrow E$, on dit que ***g est une section de f***, si, et seulement si, l'application composée $h = f \circ g : F \longrightarrow F$, est l'application identique de F.

HAUT

9. Rétraction.

Etant donnée une application $f : E \longrightarrow F$ et une application $g : F \longrightarrow E$, on dit que ***g est une rétraction de f***, si, et seulement si, l'application composée $h = g \circ f : E \longrightarrow E$, est l'application identique de E.

HAUT

10. Restriction.

Etant donnée une application $f : E \longrightarrow F$ et une partie X de E, on appelle ***restriction*** de f à X et on note $f_{|X}$, l'application $g : X \longrightarrow F$ définie par $g(x) = f_{|X}(x) = f(x)$.

HAUT

11. Prolongement.

Etant donnée une application $f : E \longrightarrow F$, une partie X de E, et une application $g : X \longrightarrow F$,on dit que f est un ***prolongement*** de g à E si, et seulement si, $f_{|X} = g$: autrement dit, f est un prolongement de g à E si, et seulement si, g est la restriction de f à X.

HAUT

12. Condition nécessaire et suffisante.

Une condition nécessaire et suffisante se traduit par une expression du type :

"Pour que R_1, il faut et il suffit que R_2"

où R_1 et R_2 sont des relations.

a) Condition nécessaire.

Pour avoir la condition nécessaire :

On remplace "*pour que*" par "**si**", et on remplace "*il faut et il suffit*" par "**alors**" :

"Si R_1, alors R_2"

$$R_1 \Rightarrow R_2$$

b) Condition suffisante.

C'est l'inverse :

$$R_2 \Rightarrow R_1$$

HAUT

Chapitre 3. Applications : exercices.

Définitions et résultats.

Exercice 1. Injection.
Exercice 2. Images réciproques.
Exercice 3. Sections et rétractions.
Exercice 4. Section d'une bijection.
Exercice 5. Rétraction d'une bijection.
Exercice 6. Définition des applications.
Exercice 7. Injection, surjection, partie entière.
Exercice 8. Composition d'injections et surjections.
Exercice 9. Critère de bijectivité.
Exercice 10. Application d'ensembles de parties.
Exercice 11. Composition de bijections.
Exercice 12. Injectivité et surjectivité d'applications particulières.

Exercice 1. Injection.

Soient X et Y deux ensembles, f une application de X dans Y.
Etablir l'équivalence des deux propriétés suivantes :

1°/ Pour toutes parties A et B de X, $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$
2°/ f est injective.

Solution

HAUT

Exercice 2. Images réciproques.

Soient X et Y deux ensembles, f une application de X dans Y.

1°/ Etablir l'équivalence des deux propriétés suivantes :

a) Pour toute partie B de Y, $f(f^{-1}(B)) = B$
b) f est surjective.

2°/ Etablir l'équivalence des deux propriétés suivantes :

a) Pour toute partie A de X, $f^{-1}(f(A)) = A$
b) f est injective.

Solution

HAUT

Exercice 3. Sections et rétractions.

Soient X et Y deux ensembles, f une application de X dans Y.
Une application s de Y dans X vérifiant $f \circ s = Id_Y$ s'appelle une **section** de f.
Une application r de Y dans X vérifiant $r \circ f = Id_X$ s'appelle une **rétraction** de f.

1°/ Montrer que, pour que f possède une section, il faut et il suffit que f soit surjective.
2°/ Montrer que toute section de f est injective.
3°/ Montrer que si f possède une rétraction, f est injective, et que, réciproquement, si X n'est pas vide et si f est injective, f possède une rétraction.
4°/ Montrer que toute rétraction est surjective.
5°/ En déduire que si f possède à la fois une section s et une rétraction r, f est bijective et r est égale à s (donc égale aussi à f^{-1}).

Solution

HAUT

Exercice 4. Section d'une bijection.

Soient X et Y deux ensembles, f une application de X dans Y. On suppose que f possède une unique section (application s, de Y dans X, telle que $f \circ s = Id_Y$). Montrer que f est bijective.	Solution

HAUT

Exercice 5. Rétraction d'une bijection.

Soient X et Y deux ensembles, f une application de X dans Y.
1°/ On suppose que X possède au moins deux éléments et que f possède une unique rétraction (application r, de Y dans X, telle que $r \circ f = Id_X$).
Montrer que f est bijective.
2°/ On suppose maintenant que X possède un seul élément.
Quelle remarque faites-vous sur une rétraction r de f ?
f est-elle nécessairement bijective ?

Solution

HAUT

Exercice 6. Définition des applications.

Les correspondances suivantes entre éléments de $\mathbb{N}$, désignés par m, et éléments de $\mathbb{Z}$, désignés par n, sont-elles des fonctions ? des applications ? des injections ? des surjections ? des bijections ?

1°/ $m\ R\ n \Leftrightarrow m = n^2$.
2°/ $m\ S\ n \Leftrightarrow m = 3n + 1$.
3°/ $m\ R\ n \Leftrightarrow n = m^2$.
4°/ $m\ S\ n \Leftrightarrow m = |n|$.

Solution

HAUT

Exercice 7. Injection, surjection, partie entière.

Soit $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ définie par $f(n) = 2n$. Soit $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ définie par $g(n) = E\left(\frac{n}{2}\right)$ où $E(x)$ désigne la partie entière de x.
Les fonctions f et g sont-elles injectives ? surjectives ? Comparer $f \circ g$ et $g \circ f$.

Solution

HAUT

Exercice 8. Composition d'injections et surjections.

Soient E, F, G, trois ensembles, et soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications.

1°/ Montrer que si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ est injective.
2°/ Montrer que si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective.
3°/ Que peut-on en conclure sur $g \circ f$ si f et g sont bijectives ?
4°/ Montrer que si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.
5°/ Montrer que si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.

Solution

HAUT

Exercice 9. Critère de bijectivité.

Démontrer que $f : E \longrightarrow F$ est bijective si, et seulement si, il existe $g : F \longrightarrow E$ telle que $f \circ g$ et $g \circ f$ sont les applications identités sur F et E respectivement.	Solution

HAUT

Exercice 10. Application d'ensembles de parties.

Soient E un ensemble non vide, A et B deux parties non vides de E et f l'application de $\mathfrak{P}(E)$ dans $\mathfrak{P}(A) \times \mathfrak{P}(B)$ définie par $f(X) = (X \cap A, X \cap B)$.

1°/ Montrer que f est injective si, et seulement si, $A \cup B = E$.
2°/ Montrer que f est surjective si, et seulement si, $A \cap B = \emptyset$.
3°/ Lorsque f est bijective, déterminer f^{-1}.

Solution

HAUT

Exercice 11. Composition de bijections.

Soient $f : E \longrightarrow F$, $g : F \longrightarrow G$ et $h : G \longrightarrow H$, des applications.

1°/ Montrer que si $g \circ f$ et $h \circ g$ sont bijectives, alors f, g et h sont bijectives.
2°/ On suppose maintenant $E = H$. Montrer que si, parmi les trois applications $h \circ g \circ f$, $f \circ h \circ g$ et $g \circ f \circ h$, deux sont injectives, la troisième étant surjective, alors f, g, h, sont bijectives.

Solution

HAUT

Exercice 12. Injectivité et surjectivité d'appliction particulières.

A étant l'ensemble des entiers naturels pairs, on considère les quatre applications $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $F : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathfrak{P}(\mathbb{N}^*)$, et $G : \mathfrak{P}(\mathbb{N}) \longrightarrow \mathfrak{P}(A)$, définies de la façon suivante : $f(x) = 4x + 1$; $g(x) = \frac{2x}{1+x^2}$; $F(n)$ est l'ensemble des multiples non nuls de n ; $G(X) = A \setminus X = A \cap \complement X$. f, g, F, G, sont -elles injectives, surjectives, bijectives ?.	Solution

HAUT

Chapitre 3. Applications.

Enoncés.

Exercice 1. Injection.

Soient X et Y deux ensembles, f une application de X dans Y. Etablir l'équivalence des deux assertions suivantes : 1°/ Pour toutes parties A et B de X, $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ 2°/ f est injective.	

Solution.

1°/ (a) $\Rightarrow$ (b).

Soient x et y des éléments de X vérifiant $f(x) = f(y)$.
Montrons que cette relation entraîne $x = y$.
$A = \{ x \}$, $B = \{ y \}$.
On a $f(A) = \{f(x) \}$ et $f(B) = \{f(y) \}$.
$f(x) = f(y) \Rightarrow f(A) = f(B)$.
$f(A) \cap f(B)$ est la partie de Y réduite à l'élément $f(x)$, ou $f(y)$, c'est le même par hypothèse. Ce n'est pas une partie vide.
Or si x était différent de y, $A \cap B = \{ x \} \cap \{ y \}$ serait vide, et $f(A \cap B) = f(\varnothing)$ serait vide, car l'image de la partie vide par une application est toujours vide.
La relation $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ avec $f(A) \cap f(B)$ non vide, montre que $f(A \cap B)$ ne peut pas être vide.
C'est donc que x est égal à y, de sorte que f est injective.

2°/ (b) $\Rightarrow$ (a).

Pour toute application f de X dans Y, et pour toutes parties A et B de X, on a déjà :

$$A \cap B \subset A \Rightarrow f(A \cap B) \subset f(A)$$
$$A \cap B \subset B \Rightarrow f(A \cap B) \subset f(B)$$
$$f(A \cap B) \subset f(A) \text{ et } f(A \cap B) \subset f(B) \Rightarrow f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B).$$

Réciproquement, considérons un élément $z \in f(A) \cap f(B)$.
z appartient à $f(A)$ et à $f(B)$.
Comme z appartient à $f(A)$, il existe un $x \in A$ tel que z soit égal à $f(a)$.
Comme z appartient à $f(B)$, il existe un $y \in B$ tel que z soit égal à $f(b)$.
On a donc $f(a) = f(b)$.
Si f est injective, il en résulte que a est égal à b, de sorte que $a = b$ appartient à $A \cap B$ et $z = f(a)$ appartient à $f(A \cap B)$.

Il en résulte bien que, si f est injective, l'égalité : $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ est vraie.

Chapitre 3. Applications.

Enoncés.

Exercice 2. Images réciproques.

Soient X et Y deux ensembles, f une application de X dans Y. 1°/ Etablir l'équivalence des deux propriétés suivantes : a) Pour toute partie B de Y, $f(f^{-1}(B)) = B$ b) f est surjective. 2°/ Etablir l'équivalence des deux propriétés suivantes : a) Pour toute partie A de X, $f^{-1}(f(A)) = A$ b) f est injective.	

Solution.

1°/ Critère de surjectivité.

(a) ⇒ (b).

Soit y un élément quelconque de Y.
$\{ y \}$ est une partie non vide de Y.
Si l'on a, pour toute partie B de Y, $f(f^{-1}(B)) = B$, on a, en particulier $f(f^{-1}(\{ y \})) = \{ y \}$.
Il en résulte que $f^{-1}(\{ y \})$ n'est pas vide, puisque l'image par f de la partie vide est vide et $\{ y \}$ n'est pas vide.
Pour un élément x quelconque de $f^{-1}(\{ y \})$, on a, par définition de l'impage réciproque d'une partie, $f(x) \in \{ y \}$, donc $f(x) = y$.
Et la relation $(\forall\, y \in Y)(\exists\, x \in X)(y = f(x))$ montre que f est surjective.

(b) ⇒ (a).

Pour toutes parties B et C de Y, et toute application f de X dans Y, la relation suivante est vraie :

$$C \subset B \Rightarrow f^{-1}(C) \subset f^{-1}(B)$$

En effet, si x appartient à $f^{-1}(C)$, c'est que, par définition, $f(x)$ appartient à C, donc à B, puisque C est contenu dans B.
Mais alors, si $f(x)$ appartient à B, c'est que x appartient à $f^{-1}(B)$, de sorte que tout élément de $f^{-1}(C)$ est dans $f^{-1}(B)$.
C'est dire que $f^{-1}(C)$ est contenue dans $f^{-1}(B)$.

Considérons une partie B quelconque de Y.

Si B est vide, il n'y a aucun x de X dont l'image par f appartienne à B, de sorte que $f^{-1}(B)$ est vide.
Comme l'image de la partie vide est vide, $f(f^{-1}(B))$ est vide, c'est la partie vide B et l'on a, pour toute application f de X dans Y :

$$\boxed{f(f^{-1}(\varnothing)) = \varnothing.}$$

Si B n'est pas vide, pour toute application f de X dans Y, on a déjà :

$$\boxed{f(f^{-1}(B)) \subset B.}$$

En effet, pour tout élément y de Y, la relation

$$y \in f(f^{-1}(B))$$

est équivalente à la relation

$$(\exists\, x \in X)(x \in f^{-1}(B) \text{ et } y = f(x))$$

Or la relation $x \in f^{-1}(B)$ équivaut à $f(x) \in B$, donc la relation "$x \in f^{-1}(B)$ et $y = f(x)$" entraîne $y \in B$.
Ainsi, la relation $y \in f(f^{-1}(B))$ entraîne la relation $y \in B$.
C'est dire que $f(f^{-1}(B))$ est contenue dans B.
Comme l'inclusion est vraie aussi lorsque B est vide, puisque, dans ce cas, on a même l'égalité, l'inclusion est **vraie pour toute partie** B de Y.

Réciproquement, considérons un élément quelconque y d'une partie non vide B de Y.
Si f est surjective, il existe un $x \in X$ dont l'image par f est y.
Cet élément x appartient donc, par définition, à l'image réciproque de $\{ y \}$: $x \in f^{-1}(\{ y \})$.
Or nous venons d'établir, plus haut, que $f(f^{-1}(\{ y \}))$ est contenu dans $\{ y \}$.
Comme $f^{-1}(\{ y \})$ contient x, elle n'est pas vide, et son image n'est pas vide.
Or $\{y \}$ contient un seul élément, c'est y, si bien que l'on a : $f(f^{-1}(\{ y \})) = \{ y \}$.
La relation $\{ y \} \subset B$ entraîne la relation $f^{-1}(\{ y \}) \subset f^{-1}(B)$, qui, elle-même, entraîne la relation : $f(f^{-1}(\{ y \})) \subset f(f^{-1}(B))$.
La relation $f(f^{-1}(\{ y \})) = \{ y \}$ entraîne alors $\{ y \} \subset f(f^{-1}(B))$, donc $y \in f(f^{-1}(B))$.
Ainsi tout élément de B appartient à $f(f^{-1}(B))$.
C'est dire très exactement que B est contenu dans $f(f^{-1}(B))$.
Et ceci achève la démonstration.

2°/ Critère d'injectivité.

(a) ⇒ (b).

Soient x et y deux éléments quelconques de X vérifiant $f(x) = f(y)$.
On a donc aussi : $\{ f(x) \} = \{ f(y) \}$.
Supposons que, pour toute partie A de X, l'égalité suivante soit vraie : $f^{-1}(f(A)) = A$.
En prenant $A = \{ x \}$, puis $A = \{ y \}$, il vient : $\{ x \} = f^{-1}(\{ f(x) \}) = f^{-1}(\{ f(y) \}) = \{ y \}$, donc $\{ x \} =$

$\{ y \}$ et $x = y$.
L'application f est donc injective.

(b) $\Rightarrow$ (a).

Soit A une partie quelconque de X.

Si A est vide, $f(A)$ est vide et $f^{-1}(f(A))$ est vide, donc égale à A.

$$\boxed{f^{-1}(f(\varnothing)) = \varnothing.}$$

Si A n'est pas vide, on sait déjà que, pour tout $x \in A$, $f(x)$ appartient à $f(A)$, donc x appartient à $f^{-1}(f(A))$.
Autrement dit, A est contenue dans $f^{-1}(f(A))$.
Comme cette propriété est vraie déjà si A est vide, elle est vraie pour toute partie A de X et pour toute application f de X dans Y.

$$\boxed{A \subset f^{-1}(f(A))}$$

Réciproquement, considérons un $x \in f^{-1}(f(A))$.
Dire que x appartient à $f^{-1}(f(A))$, c'est dire que $f(x)$ appartient à $f(A)$.
Donc il existe un y, élément de A, tel que $f(x) = f(y)$.
Si f est injective, il en résulte que $x = y$.
De sorte que x est élément de A.
Ainsi, lorsque f est injective, tout élément de $f^{-1}(f(A))$ est élément de A, donc $f^{-1}(f(A))$ est contenue dans A.
Comme l'inclusion dans l'autre sens, $A \subset f^{-1}(f(A))$, est toujours vraie, dans le cas où f est injective l'égalité $A = f^{-1}(f(A))$ est vraie.

Chapitre 3. Applications.

Enoncés.

Exercice 3. Sections et rétractions.

Soient X et Y deux ensembles, f une application de X dans Y. Une application s de Y dans X vérifiant $f \circ s = Id_Y$ s'appelle une **section** de f. Une application r de Y dans X vérifiant $r \circ f = Id_X$ s'appelle une **rétraction** de f. 1°/ Montrer que, pour que f possède une section, il faut et il suffit que f soit surjective. 2°/ Montrer que toute section de f est injective. 3°/ Montrer que si f possède une rétraction, f est injective, et que, réciproquement, si X n'est pas vide et si f est injective, f possède une rétraction. 4°/ Montrer que toute rétraction est surjective. 5°/ En déduire que si f possède à la fois une section s et une rétraction r, f est bijective et r est égale à s (donc égale aussi à f^{-1}).	

Solution.

1°/ Critère de surjectivité.

a) Condition nécessaire.

On remplace "*pour que*" par "**si**", et on supprime "*il suffit*".

Supposons donc que f possède une section et montrons que f est surjective.
Dire que f possède une section, c'est dire qu'il existe une application s de Y dans X, inverse à droite de f : $f \circ s = Id_Y$.

Soit y un élément quelconque de Y, on a : $(f \circ s)(y) = Id_Y(y)$, soit $y = f(s(y))$.
Cette égalité montre que y est l'image par f de l'élément $s(y)$ de X.
Tout élément de Y est l'image par f d'un élément de X.
Donc f est surjective.

b) Condition suffisante.

Supposons que f est surjective et montrons que f possède une section.
Pour tout élément y de Y, l'image réciproque $f^{-1}(\{ y \})$ n'est pas vide puisque f est surjective.
L'**axiome du choix** permet de choisir dans chaque partie $f^{-1}(\{ y \})$ de X, un élément $\tau_x (x \in X \text{ et } f(x) = y)$ de X que l'on note $s(y)$ tel que $f(s(y))$ soit égal à y.
L'application s de Y dans X, qui, à $y \in Y$, fait correspondre l'élément $s(y) \in X$, vérifie $f \circ s = Id_Y$.
C'est donc une section de f.

2°/ Injectivité d'une section.

Soit $s : Y \to X$ une section d'une surjection f de X sur Y.
f et s vérifient la relation $f \circ s = Id_Y$.
Soient y_1 et y_2 des éléments de Y vérifiant $s(y_1) = s(y_2)$.
Par application de f, on obtient $f(s(y_1)) = f(s(y_2))$.
La relation $f \circ s = Id_Y$ entraîne $f(s(y_1)) = y_1$ et $f(s(y_2)) = y_2$.
La relation $f(s(y_1)) = f(s(y_2))$ entraîne alors $y_1 = y_2$.
Ceci montre que s est injective.

3°/ Critère d'injectivité.

a) Si *f* possède une rétraction, *f* est injective.

Soit $f : X \to Y$, une application possédant une rétraction $r : Y \to X$.
f et r vérifient la relation $r \circ f = Id_X$.
Soient x_1 et x_2 des éléments de X vérifiant $f(x_1) = f(x_2)$.
Par application de r, on obtient $r(f(x_1)) = r(f(x_2))$.
La relation $r \circ f = Id_X$ entraîne $r(f(x_1)) = x_1$ et $r(f(x_2)) = x_2$.
La relation $r(f(x_1)) = r(f(x_2))$ entraîne alors $x_1 = x_2$.
Ceci montre que f est injective.

b) Si *X* n'est pas vide et si *f* est injective, *f* possède une rétraction.

Soit $f : X \to Y$ une injection.
Si X n'est pas vide, considérons un élément $a \in X$.
Soit $r : Y \to X$ l'application définie de la façon suivante :
- — pour $y \in f(X)$, comme f est injective, il existe un unique $x \in X$ vérifiant $y = f(x)$: on pose $r(y) = x$.
- — pour $y \notin f(X)$, on pose $r(y) = a$.

On a alors, par définition, pour tout $x \in X$, $r(f(x)) = x$, donc $r \circ f$ est l'application identique Id_X de X.
L'application r est donc une rétraction de f.

4°/ Surjectivité d'une rétraction.

Soit $r : Y \to X$ une rétraction d'une application $f : X \to Y$.
Soit x un élément quelconque de X, on a, par définition, $r \circ f = Id_X$, donc $r(f(x)) = Id_X(x) = x$.
La relation $r(f(x)) = x$ montre que x est l'image par r de l'élément $f(x)$ de Y.
Tout élément de X est l'image par r d'un élément de Y.
Cette propriété montre que r est une surjection de Y sur X.

5°/ Critère de bijectivité.

Soit $f : X \to Y$, une application possédant une section $s : Y \to X$ et une rétraction $r : Y \to X$.
f, s et r vérifient les relations $f \circ s = Id_Y$ et $r \circ f = Id_X$.
Comme f possède une section, elle est surjective d'après 1°/.
Comme f possède une rétraction, elle est injective d'après 3°/.
f, injective et surjective, est bijective.

Elle possède donc une application réciproque f^{-1}.

Pour tout $y \in Y$, il existe un unique $x = f^{-1}(y) \in X$ tel que $f(x) = y$.
On a alors : $f^{-1}(y) = x = Id_X(x) = r(f(x)) = r(y)$.
La relation $f^{-1}(y) = r(y)$, valable pour tout $y \in Y$, montre que $f^{-1} = r$.

On a aussi : $f(s(y)) = Id_Y(y) = y = f(x)$.
Comme f est injective, cette relation entraîne $s(y) = x = f^{-1}(y)$.
La relation $f^{-1}(y) = s(y)$, valable pour tout $y \in Y$, montre que $f^{-1} = s$.

Donc si f possède une section et une rétraction, elle est bijective et son application réciproque est à la fois section et rétraction de f.

Réciproquement, si f est bijective, elle possède une application réciproque et les relations $f \circ f^{-1} = Id_Y$ et $f^{-1} \circ f = Id_X$, montrent que f^{-1} est, à la fois, section et rétraction de f et que f est à la fois, section et rétraction de f^{-1}.

Il en résulte donc le critère suivant :

Pour qu'une application $f : X \to Y$, X non vide, soit une bijection, il faut et il suffit qu'elle possède une section et une rétraction.

Deux applications f et g qui sont sections et rétractions l'une de l'autre sont des bijections réciproques.

Chapitre 3. Applications.

Enoncés.

Exercice 4. Section d'une bijection.

Soient X et Y deux ensembles, f une application de X dans Y. On suppose que f possède une unique section (application s, de Y dans X, telle que $f \circ s = Id_Y$). Montrer que f est bijective.	

Solution.

Pour montrer que f est bijective, nous allons montrer successivement qu'elle est surjective et qu'elle est possède une rétraction.

1°/ f est surjective.

Une application qui possède une section est **surjective** (Exercice 3, 1°) : donc f, qui possède une section unique, est surjective.

2°/ s est rétraction de f.

Soit x un élément quelconque de X.
Soit s la section de f.
Pour $y \neq f(x)$, on pose $s_0(y) = s(y)$.
Pour $y = f(x)$, on pose $s_0(y) = x$.
On a alors $(f \circ s_0)(y) = (f \circ s)(y) = y$ pour tout $y \neq f(x)$, et $(f \circ s_0)(f(x)) = f(s_0(y)) = f(x)$.
Ceci montre que s_0 vérifie $f \circ s_0 = Id_Y$, donc s_0 est une section de f.
Comme s est l'unique section de f, on a $s = s_0$.
En particulier, $x = s(f(x))$, et cette relation est vraie pour tout élément x de X.
Ainsi, $s \circ f = Id_X$.

Cette relation montre que s est une **rétraction** de f.

Or (Exercice 3, 5°) une application qui possède à la fois une section et une rétraction est bijective et son application réciproque est sa section, égale à sa rétraction.
Donc f est bijective et sa bijection réciproque est s.

Chapitre 3. Applications.

Enoncés.

Exercice 5. Rétraction d'une bijection.

Soient X et Y deux ensembles, f une application de X dans Y. 1°/ On suppose que X possède au moins deux éléments et que f possède une unique rétraction (application r, de Y dans X, telle que $r \circ f = Id_X$). Montrer que f est bijective. 2°/ On suppose maintenant que X possède un seul élément. Quelle remarque faites-vous sur une rétraction r de f ? f est-elle nécessairement bijective ?	

Solution.

1°/ f est bijective.

Tout d'abord, f est injective puisqu'elle possède une rétraction (Exercice 3, 3°).

Supposons que X possède au moins deux éléments distincts x_1 et x_2.
Soit y un élément quelconque de Y.
Pour $y \in f(X)$, il existe un unique $x \in X$ tel que $y = f(x)$. On pose $r_1(y) = x$ et $r_2(y) = x$
Pour $y \notin f(X)$, on pose $r_1(y) = x_1$ et $r_2(y) = x_2$.

On a alors $r_1 \circ f = r_2 \circ f = Id_X$.
Donc r_1 et r_2 sont des rétractions de f.
Or f possède, par hypothèse une rétraction unique r, donc $r_1 = r_2 = r$.
Mais, pour $y \notin f(X)$, on a $r_1(y) = x_1 \neq r_2(y) = x_2$.
Ceci n'est possible que s'il n'existe pas de $y \notin f(X)$.
Autrement dit, $f(X)$ est nécessairement égal à Y et f est surjective.

Injective et surjective, f est, par définition, bijective.

2°/ Cas où X possède un seul élément.

$X = \{x\}$.
f est une application qui, à x fait correspondre un élément $y \in Y$.
$f(X)$ est réduit à un seul élément : $f(X) = \{ f(x) \} \subset Y$.
Toute application de Y dans X fait correspondre, à chaque élément de Y, le seul élément x de X.
Il y a donc une seule application de Y dans X.
Cette application est l'unique rétraction de f, puisque l'on a toujours $r(f(x)) = x$.
Comme f possède une rétraction, f est injective.
Elle ne peut être surjective que si Y lui-même est réduit à un seul élément.

Chapitre 3. Applications.

Enoncés.

Exercice 6. Définition des applications.

Les correspondances suivantes entre éléments de $\mathbb{N}$, désignés par m, et éléments de $\mathbb{Z}$, désignés par n, sont-elles des fonctions ? des applications ? des injections ? des surjections ? des bijections ? 1°/ $m\ R\ n \Leftrightarrow m = n^2$. 2°/ $m\ S\ n \Leftrightarrow m = 3n + 1$. 3°/ $m\ R\ n \Leftrightarrow n = m^2$. 4°/ $m\ V\ n \Leftrightarrow m = \lvert n \rvert$.	

Solution.

1°/ Relation *R*.

A m, élément de $\mathbb{N}$, correspondent les éléments n de $\mathbb{Z}$, vérifiant $m = n^2$.
Pour que de tels n existent, il faut que m soit le carré d'un entier, et encore, même dans ce cas, à un carré m correspondent deux entiers relatifs $n = \pm\sqrt{m}$.

La correspondance entre m et n n'est donc **pas une fonction** (qui, à chaque m ferait correspondre au plus une valeur de n) et, **encore moins une application** (qui, à chaque valeur de m ferait correspondre une et une seule valeur de n).

2°/ Relation *S*.

A m, élément de $\mathbb{N}$, correspondent les éléments n de $\mathbb{Z}$, vérifiant $m = 3n + 1$.
Pour que de tels n existent, il faut que m soit un multiple de 3 + 1, et, dans ce cas, à un entier m correspond un, et un seul entier relatif $n = \frac{m-1}{3}$.

La correspondance entre m et n n'est **pas une application** (qui, à chaque valeur de m ferait correspondre une valeur et une seule n), mais **c'est une fonction**, dont :
— l'ensemble de départ est $\mathbb{N}$,
— l'ensemble de définition est l'ensemble des entiers naturels qui sont multiples de 3 plus 1,
— l'ensemble d'arrivée est $\mathbb{Z}$.

Si l'on désigne par f cette fonction, on a, par définition $f(m) = n = \frac{m-1}{3}$.

Si m' est un entier naturel tel que $f(m) = f(m')$, on a : $\frac{m-1}{3} = \frac{m'-1}{3}$, donc, en multipliant par 3 et en ajoutant 1 : $m = m'$.

La fonction *f* est donc **injective**.

Considérons l'entier relatif $n = -1$. $3n + 1 = -2$ n'est pas un entier naturel, donc il n'existe pas d'entier naturel *m* tel que $-1 = \frac{m-1}{3}$. La fonction *f* n'est donc **pas surjective**. A fortiori, ce n'est pas une bijection.

3°/ Relation *T*.

A *m*, élément de $\mathbb{N}$, correspondent les éléments *n* de $\mathbb{Z}$, vérifiant $n = m^2$.
A chaque élément *m* on fait donc correspondre un entier unique qui est son carré.

La correspondance entre *m* et *n* est **une application** (qui, à chaque valeur de *m* fait correspondre une valeur et une seule *n*) :
— l'ensemble de départ est $\mathbb{N}$,
— l'ensemble de définition est l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ tout entier,
— l'ensemble d'arrivée est $\mathbb{Z}$.

Si l'on désigne par *f* cette fonction, on a, par définition $f(m) = m^2$.

Si *m'* est un entier naturel tel que $f(m) = f(m')$, on a : $m^2 = m'^2$, donc en extrayant les racines carrées, qui sont des nombres positifs, donc des entiers naturels : $m = m'$. L'application *f* est **injective**.

Considérons l'entier relatif $n = -1$. Ce n'est le carré d'aucun entier naturel, l'application *f* n'est **pas surjective**. A fortiori, ce n'est pas une bijection.

4°/ Relation *V*.

A *m*, élément de $\mathbb{N}$, correspondent les éléments *n* de $\mathbb{Z}$, vérifiant $m = |n|$.
A chaque élément *m* on fait donc correspondre les deux entiers relatifs *n* dont la valeur absolue est *m* : $n = \pm m$.

Comme, à chaque valeur de *m* différente de 0, correspondent deux valeurs de *n*, la correspondance *V* n'est **ni une application, ni une fonction**.

Chapitre 3. Applications.

Enoncés.

Exercice 7. Injections, surjections, partie entière.

Soit $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ définie par $f(n) = 2n$. Soit $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ définie par $g(n) = E(\frac{n}{2})$ où $E(x)$ désigne la partie entière de x. Les fonctions f et g sont-elles injectives ? surjectives ? Comparer $f \circ g$ et $g \circ f$.	

Solution.

1°/ Fonctions et applications.

La correspondance f fait correspondre à un entier naturel n l'entier naturel $f(n) = 2n$: c'est donc une application, à chaque entier naturel elle fait correspondre un autre entier naturel unique.

La correspondance g fait correspondre à un entier naturel n l'entier naturel $g(n) = E(\frac{n}{2})$: c'est donc une application, à chaque entier naturel elle fait correspondre un autre entier naturel unique.

2°/ Injections et surjections.

Soient n et n' des entiers naturels tels que $f(n) = f(n')$.
Alors $2n = 2n'$, donc, en divisant par 2, $n = n'$.
Conclusion : ***f* est injective**.

L'entier naturel 3 n'est pas le double d'un entier naturel : il n'existe aucun entier naturel n vérifiant $f(n) = 2n = 3$.
Conclusion : ***f* n'est pas surjective**.

Tout entier naturel n est la partie entière de la moitié de l'entier naturel $2n$.
Conclusion : ***g* est surjective**.

La partie entière de la moitié de 2 et de 3 est la même, 1. $g(2) = g(3)$, avec $2 \neq 3$.
Conclusion : ***g* n'est pas injective**.

3°/ Comparaison de $f \circ g$ et $g \circ f$.

Tout entier naturel n est la partie entière de la moitié de l'entier naturel $2n$: $n = E(\frac{2n}{2}) = g(f(n)) = (g \circ f)(n)$.
Conclusion : l'application composée $g \circ f$ **est l'application identique de** $\mathbb{N}$: c'est une **bijection**.
f est une section de g et g est une rétraction de f.

Calculons maintenant $(f \circ g)(n)$, pour un entier naturel n.

Nous distinguerons deux cas pour faciliter les calculs, suivants que n est pair ou impair.

$g(2n) = E(n) = n$ et $f(g(2n)) = f(n) = 2n$: $(f \circ g)(2n) = 2n$.

$g(2n+1) = E\left(n + \frac{1}{2}\right) = n$ et $f(g(2n+1)) = f(n) = 2n$: $(f \circ g)(2n+1) = 2n$.

Ainsi, **$f \circ g$ n'est ni injective**, puisque $(f \circ g)(2n) = 2n = (f \circ g)(2n+1)$, **ni surjective**, puisque les images de tout entier naturel par $f \circ g$ sont des entiers pairs et aucun entier impair n'est l'image par $f \circ g$ d'un entier naturel.

Cette propriété résulte aussi directement des propriétés établies en 2° et de Chapitre 2, Exercice 3, sur les sections et rétractions.

Chapitre 3. Applications.

Enoncés.

Exercice 8. Composition d'injections et surjections.

Soient E, F, G, trois ensembles, et soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications. 1°/ Montrer que si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ est injective. 2°/ Montrer que si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective. 3°/ Que peut-on en conclure sur $g \circ f$ si f et g sont bijectives ? 4°/ Montrer que si $g \circ f$ est injective, alors f est injective. 5°/ Montrer que si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.	

Solution.

1°/ Composition d'injections.

Hypothèses : f et g sont injectives.
Conclusion à démontrer : $g \circ f$ est injective.

Construisons, pour une fois, la démonstration développée : c'est long, mais il faut l'avoir fait au moins une fois pour comprendre l'intérêt et les sous-entendus des abréviations de langage.

Nous construisons notre démonstration dans un théorie $\mathcal{T}_0$, plus forte que la théorie des ensembles, qui a les mêmes schémas d'axiomes, et dans laquelle les lettres x, y, f, g, E, F, G, ne sont pas des constantes : les résultats obtenus dans cette théorie seront valables dans la théorie quantifiée des ensembles.
Nous mettrons à part la **construction formative auxiliaire** du **texte démonstratif** : elle contient des termes et des relations entre termes et, notamment, les définitions ou abréviations. Les autres lignes du texte démonstratif constituent la **démonstration** proprement dite : elle contient les axiomes explicites (hypothèses), les axiomes implicites (application de schémas d'axiomes de la théorie des ensembles) et les relations déduites de ces axiomes par la règle de **modus ponens**, ou par les **critères de construction** déduits de ces relations et dont nous ne referons pas la démonstration, par exemple le théorème suivant : si R est une relation, la relation $((\forall\, a \in E)(R\,(a))$ **et** $x \in E) \Rightarrow R\,(x)$ est un théorème, c'est-à-dire une ligne figurant dans une démonstration d'une théorie logique.

Construction formative auxiliaire

a) E
b) F
c) G
d) f
e) g
f) x

g) y
h) Y^X, définition de l'ensemble des applications d'un ensemble X dans un ensemble Y.
i) $(\forall f \in F^E)(\forall g \in G^F)(\exists! h \in G^E)(\forall a \in E)(\mathbf{h(a) = g(f(a))}$, définition de la **composée** $\mathbf{h = g \circ f}$ de deux applications.
j) Une application h d'un ensemble X dans un ensemble Y est dite **injective** si, et seulement si, elle vérifie la relation :
$\mathbf{(\forall a \in X)(\forall b \in X)(h(a) = h(b) \Rightarrow a = b)}$), définition d'un injection

Démonstration

a) E est un ensemble, axiome explicite (hypothèse)
b) F est un ensemble, axiome explicite (hypothèse)
c) $f \in F^E$, axiome explicite (hypothèse)
d) $g \in G^F$, axiome explicite (hypothèse)
e) $x \in E$, axiome explicite (hypothèse)
f) $y \in E$, axiome explicite (hypothèse)
g) $\mathbf{(g \circ f)(x) = (g \circ f)(y)}$, axiome explicite (hypothèse)
h) $(\forall f \in F^E)(\forall g \in G^F)(\forall a \in E)(\mathbf{(g \circ f)(a) = g(f(a))}$, par définition de la **composée** de deux applications.
i) Pour toute relation R : $(x \in E$ **et** $(\forall a \in E)(R(a))) \Rightarrow R(x)$, **théorème**.
j) (c) et (h), conjonction de (c) et (h)
k) (c) et (h) $\Rightarrow (\forall g \in E^F)(\forall a \in E)(\mathbf{(g \circ f)(a) = g(f(a))}$. Application du théorème (i)
l) $(\forall g \in E^F)(\forall a \in E)(\mathbf{(g \circ f)(a) = g(f(a))}$. (modus ponens entre (j) et (k))
m) (d) et (l), conjonction de (d) et (l)
n) (d) et (l) $\Rightarrow (\forall a \in E)(\mathbf{(g \circ f)(a) = g(f(a))}$. Application du théorème (i)
o) $(\forall a \in E)(\mathbf{(g \circ f)(a) = g(f(a))}$. (modus ponens entre (m) et (n))
p) $x \in E$ et $(\forall a \in E)(\mathbf{(g \circ f)(a) = g(f(a))}$. conjonction de (e) et (o).
q) $x \in E$ et $(\forall a \in E)(\mathbf{(g \circ f)(a) = g(f(a))} \Rightarrow (g \circ f)(x) = g(f(x))$
r) $(g \circ f)(x) = g(f(x))$
s) $g(f(x)) = (g \circ f)(x)$, symétrie de l'égalité
t) $g(f(y)) = (g \circ f)(y)$, reprise des étapes (j) à (s) pour l'élément y.
t) $g(f(x)) = (g \circ f)(x) \Rightarrow (g(f(x)) \mid (g \circ f)(x))((g \circ f)(x) = (g \circ f)(y))$, schéma d'axiome S6 des théories égalitaires (règle de substitution, on peut remplacer un terme d'une relation par un terme égal).
La relation $((g \circ f)(x) \mid g(f(x)))((g \circ f)(x) = (g \circ f)(y))$ est celle qu'on obtient en remplaçant $(g \circ f)(x)$ par $g(f(x))$ dans l'égalité $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(y)$, c'est donc la relation $g(f(x)) = (g \circ f)(y))$
u) $g(f(x)) = (g \circ f)(y))$, modus ponens entre (r) et (t).
v) $g(f(y)) = (g \circ f)(y) \Rightarrow (g(f(y)) \mid (g \circ f)(y))(g(f(x)) = (g \circ f)(y)))$, schéma d'axiome S6 des théories égalitaires.
w) $g(f(x)) = g(f(y))$, modus ponens entre (t) et (v).
x) Une application h d'un ensemble X dans un ensemble Y est dite **injective** si, et seulement si, elle vérifie la relation :
$\mathbf{(\forall a \in X)(\forall b \in X)(h(a) = h(b) \Rightarrow a = b)}$), définition d'un injection
y) g est injective de F dans E, c'est un axiome explicite, une hypothèse.
z) $\mathbf{(\forall a \in F)(\forall b \in F)(g(a) = g(b) \Rightarrow a = b)}$. Application à g de la définition d'une injection (théorème (i)).
aa) $f(x) \in F$, par définition d'une application.
ab) $f(x) \in F$ et $(\forall a \in F)(\forall b \in F)(g(a) = g(b) \Rightarrow a = b)$, conjonction de (aa) et (z)
ac) $f(x) \in F$ et $(\forall a \in F)(\forall b \in F)(g(a) = g(b) \Rightarrow a = b) \Rightarrow (\forall b \in F)(g(f(x)) = g(b) \Rightarrow f(x) = b)$, application du théorème (i).
ad) $(\forall b \in F)(g(f(x)) = g(b) \Rightarrow f(x) = b)$, modus ponens entre (ab) et (ac).
ae) $f(y) \in F$, par définition d'une application.

af) $f(y) \in F$ et $(\forall\, b \in F)(g(f(x)) = g(b) \Rightarrow f(x) = b)$, conjonction de (ad) et (ae).
ag) $f(y) \in F$ et $(\forall\, b \in F)(g(f(x)) = g(b) \Rightarrow f(x) = b) \Rightarrow g(f(x)) = g(f(y)) \Rightarrow f(x) = f(y)$
ah) $g(f(x)) = g(f(y)) \Rightarrow f(x) = f(y)$, modus ponens entre (af) et (ag)
ai) $f(x) = f(y)$, modus ponens entre (w) et (ah).
aj) f est injective de E dans F, c'est un axiome explicite, une hypothèse.
ak) $\mathbf{(\forall\, a \in E)(\forall\, b \in E)(f(a) = f(b) \Rightarrow a = b)}$. Application à f de la définition d'une injection (théorème (i)).
al) $x \in E$ et $(\forall\, a \in E)(\forall\, b \in E)(f(a) = f(b) \Rightarrow a = b)$, conjonction de (e) et (ak).
am) $x \in E$ et $(\forall\, a \in E)(\forall\, b \in E)(f(a) = f(b) \Rightarrow a = b) \Rightarrow (\forall\, b \in E)(f(x) = f(b) \Rightarrow x = b)$, application du théorème (i).
an) $(\forall\, b \in E)(f(x) = f(b) \Rightarrow x = b)$, modus ponens entre (al) et (am).
ao) $y \in E$ et $(\forall\, b \in E)(f(x) = f(b) \Rightarrow x = b)$, conjonction de (f) et (an).
ap) $y \in E$ et $(\forall\, b \in E)(f(x) = f(b) \Rightarrow x = b) \Rightarrow f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$, application du théorème (i).
aq) $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$, modus ponens entre (ao) et (ap).
ar) $x = y$, modus ponens entre (ai) et (aq).

Ainsi, la relation $x = y$ est un théorème de la théorie $\mathcal{T}_0$, dans laquelle x et y sont des éléments quelconques de l'ensemble E, f une injection quelconque de E dans F, et g une injection quelconque de F dans G, et dans laquelle la relation $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(y)$ est un axiome explicite.
La relation suivante est donc un théorème de la théorie des ensembles :

Pour tout ensemble E et tout ensemble F, pour toute application f injective de E dans F et toute application g injective de F dans E, la relation suivante est vraie:

$$(\forall\, x \in E)(\forall\, y \in E)((g \circ f)(x) = (g \circ f)(y) \Rightarrow x = y)$$

Et cette relation signifie très exactement que $(g \circ f)$ est une application injective, de E dans E, par définition d'une injection.
Donc, dans la théorie des ensembles, la composée de deux injections est une injection.

Promis, juré, **nous ne referons plus jamais une démonstration aussi détaillée** !
Nous nous contenterons de la démonstration raccourcie suivante :

> Supposons $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ injectives.
> Soient x et y des éléments quelconques de E vérifiant $\mathbf{(g \circ f)(x) = (g \circ f)(y)}$.
> Par définition de l'application composée, cela signifie que $g(f(x)) = g(f(y))$.
> Comme g est injective, $g(f(x)) = g(f(y))$ entraîne, par définition, $f(x) = f(y)$.
> Comme f est injective, $f(x) = f(y)$ entraîne, par définition, $x = y$.
> Ainsi, la relation $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(y)$ entraîne la relation $\boldsymbol{x = y}$.
> Donc $g \circ f$ est injective et **la composée de deux injections est une injection**.

Dans un tel raccourci de démonstration, nous le voyons, on sous-entend un tas de choses qui paraissent évidentes mais qu'il est bon d'avoir présentes à l'esprit (règle de substitution, modus ponens, substitutions multiples, signification intuitive des quantificateurs, introduction de théories plus fortes que la théorie des ensembles pour obtenir des théorèmes de la théorie des ensembles, etc).

2°/ Composition de surjections.

> Supposons $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ surjectives.
> Soit z un élément quelconque de G.
> Comme g est surjective, il existe un élément y de F tel que $z = g(y)$.
> Comme f est surjective, il existe un élément x de E tel que $y = f(x)$.

On a alors $z = g(f(x)) = (g \circ f)(x)$, ce qui montre que $(g \circ f)$ est surjective.
La composée de deux surjections est une surjection.

3°/ Composition de bijections.

Supposons $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ bijectives.
Alors f et g sont toutes deux injectives et surjectives.
Comme f et g sont injectives, la composée $g \circ f$ est injective, d'après 1°.
Comme f et g sont surjectives, la composée $g \circ f$ est surjective, d'après 2°.
Donc $g \circ f$ est à la fois injective et surjective, elle est bijective.
La composée de deux bijections est une bijection.

4°/ Composée injective.

Soit $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ des applications.
Supposons $g \circ f$ injective.
Soit x et y des éléments de E vérifiant $f(x) = f(y)$.
Alors $g(f(x)) = g(f(y))$, donc $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(y)$.
Comme $g \circ f$ est injective, $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(y)$ entraîne $x = y$.
Ainsi, la relation $f(x) = f(y)$ entraîne la relation $x = y$.
Donc f est injective.
***g* ∘ *f* injective ⇒ *f* injective**.

5°/ Composée surjective.

Soit $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ des applications.
Supposons $g \circ f$ surjective.
Soit z un élément de G.
Comme $g \circ f$ est surjective, il existe un élément x de E vérifiant $z = (g \circ f)(x) = g(f(x))$.
Posons $y = f(x)$, c'est un élément de F et il vérifie $z = g(y)$.
Donc, pour tout élément z de G, il existe un élément y de F vérifiant $z = g(y)$.
C'est dire que g est surjective.
***g* ∘ *f* surjective ⇒ *g* surjective**.

Chapitre 3. Applications.

Enoncés.

Exercice 9. Critère de bijectivité.

Démontrer que $f : E \longrightarrow F$ est bijective si, et seulement si, il existe $g : F \longrightarrow E$ telle que $f \circ g$ *et* $g \circ f$ sont les applications identités sur F et E respectivement.	

Solution.

1°/ Condition nécessaire.

Soit ***f* une application bijective** de E dans F.
f est, à la fois, injective et surjective.
Soit y un élément quelconque de F.
Comme f est surjective, il existe un élément x de E vérifiant $y = f(x)$.
Si x' est un autre élément de E vérifiant $y = f(x')$, on a $f(x) = f(x')$.
Comme f est injective, la relation $f(x) = f(x')$ entraîne $x = x'$.
Donc l'élément x de E vérifiant $y = f(x)$ est unique.
On peut donc définir une **application *g* de *F* dans *E*** qui, à chaque élément y de F, associe l'unique élément x de E vérifiant $y = f(x)$.
L'élément $x = g(y)$ de E est défini par la relation $x = g(y) \Leftrightarrow y = f(x)$.

Pour un x quelconque de E, calculons $(g \circ f)(x)$.
$(g \circ f)(x) = g(f(x))$
Si l'on appelle y l'élément $f(x)$ de F, nous avons donc $(g \circ f)(x) = g(y)$.
Or $y = f(x)$ équivaut à $x = g(y)$.
Nous avons donc $x = g(y) = (g \circ f)(x)$.
Et ceci montre que ***g* o *f* est l'application identique**, ou application identité, de E.

Pour un y quelconque de F, calculons $(f \circ g)(y)$.
$(f \circ g)(y) = f(g(y))$.
Si l'on appelle x l'élément $g(y)$ de E, nous avons donc $(f \circ g)(y) = f(x)$.
Or $x = g(y)$ équivaut à $y = f(x)$.
Nous avons donc $y = f(x) = (f \circ g)(y)$.
Et ceci montre que ***f* o *g* est l'application identique**, ou application identité, de F.

2°/ Condition suffisante.

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application.
Supposons qu'il existe une application $g : F \longrightarrow E$ telle que $f \circ g$ et $g \circ f$ sont les applications identités sur F et E respectivement.
Comme $g \circ f$ est l'application identique, c'est une bijection et, en particulier une injection. Donc f est injective (Exercice 8, 4°).
Comme $f \circ g$ est l'application identique, c'est une bijection et, en particulier une surjection. Donc f est surjective (Exercice 8, 5°).

f est donc, à la fois, injective et surjective, c'est une bijection.

En rapprochant les résultats obtenus en 1° et 2°, nous obtenons le **théorème** :

> Pour qu'une application $f : E \longrightarrow F$ soit bijective, il faut et il suffit qu'il existe une application $g : F \longrightarrow E$ telle que $g \circ f$ soit l'application identique de E et $f \circ g$ l'application identique de F.

Chapitre 3. Applications.

Enoncés.

Exercice 10. Application d'ensembles de parties.

Soient E un ensemble non vide, A et B deux parties non vides de E et f l'application de $\mathfrak{P}(E)$ dans $\mathfrak{P}(A) \times \mathfrak{P}(B)$ définie par $f(X) = (X \cap A, X \cap B)$. 1°/ Montrer que f est injective si, et seulement si, $A \cup B = E$. 2°/ Montrer que f est surjective si, et seulement si, $A \cap B = \emptyset$. 3°/ Lorsque f est bijective, déterminer f^{-1}.	

Solution.

1°/ Critère d'injectivité.

1. Condition nécessaire.

Supposons $A \cup B = E$.
Soient X et Y des parties de E vérifiant $f(X) = f(Y)$.
Nous avons $(X \cap A, X \cap B) = (Y \cap A, Y \cap B)$.
Par définition de l'égalité des couples, nous avons donc : $X \cap A = Y \cap A$ et $X \cap B = Y \cap B$.
Il en résulte $X = X \cap E = X \cap (A \cup B) = (X \cap A) \cup (X \cap B) = (Y \cap A) \cup (Y \cap B) = Y \cap (A \cup B) = Y \cap E = Y$.
La relation $f(X) = f(Y)$ entraîne $X = Y$. Donc **f est injective**.

2. Condition suffisante.

Supposons f injective.
Supposons qu'il existe un élément x de E qui n'appartienne ni à A ni à B.
Considérons la partie de E réduite à x, $\{x\}$.
$f(\{x\}) = (\{x\} \cap A, \{x\} \cap B)$.
Comme x n'appartient ni à A ni à B, $\{x\} \cap A$ et $\{x\} \cap B$ sont vides : $f(\{x\}) = (\emptyset, \emptyset)$.
Or $f(\emptyset) = (\emptyset \cap A, \emptyset \cap B) = (\emptyset, \emptyset)$.
Donc $f(\emptyset) = f(\{x\})$.
Comme f est injective, la relation $f(\emptyset) = f(\{x\})$ entraîne $\{x\} = \emptyset$.
Cette relation est contradictoire, puisque, par définition, l'ensemble vide ne contient aucun élément.
Il ne peut donc pas exister d'élément x de E qui n'appartienne ni à A ni à B.
C'est dire que tout élément de E appartient à A ou à B, donc **$A \cup B = E$**.

En rapprochant condition nécessaire et condition suffisante, nous obtenons le **théorème** :

> Etant données deux parties non vides A et B d'un ensemble non vide E, pour que l'application $f : \mathfrak{P}(E) \longrightarrow \mathfrak{P}(A) \times \mathfrak{P}(B)$ définie par $f(X) = (X \cap A, X \cap B)$ soit injective, il faut et il suffit que $A \cup B = E$.

1°/ Critère de surjectivité.

1. Condition nécessaire.

Supposons $A \cap B = \emptyset$.
Soit X une partie de A, Y une partie de B.
Considérons la partie $X \cup Y$ de E.
$f(X \cup Y) = ((X \cup Y) \cap A, (X \cup Y) \cap B) = ((X \cap A) \cup (Y \cap A), (X \cap B) \cup (Y \cap B))$.
Comme X est une partie de A, $X \cap A = X$.
Comme Y est une partie de B, $Y \cap A$ est contenue dans $B \cap A = \emptyset$ et $Y \cap A = \emptyset$.
Il en résulte $(X \cap A) \cup (Y \cap A) = X \cup \emptyset = X$.
Comme X est une partie de A, $X \cap B$ est contenue dans $A \cap B = \emptyset$ et $X \cap B = \emptyset$.
Comme Y est une partie de B, $Y \cap B = Y$.
Il en résulte $(X \cap B) \cup (Y \cap B) = \emptyset \cup Y = Y$.
On a donc $f(X \cup Y) = (X, Y)$.
En prenant $Z = X \cup Y$, nous voyons donc que tout couple (X, Y) formé d'une partie X de A et d'une partie Y de B est l'image par f d'une partie Z de E.
C'est dire que **f est surjective**.

2. Condition suffisante.

Supposons f surjective.
Comme f est surjective, il existe une partie X de E vérifiant $f(X) = (\emptyset, B) = (X \cap A, X \cap B)$.
$X \cap A = \emptyset$, $X \cap B = B$.
Ceci montre que X contient B, mais ne rencontre pas A.
$A \cap B$ est contenu dans A et dans B.
Comme B est contenue dans X, $A \cap B$ est contenu dans X.
Donc $A \cap B$ est contenu dans A et dans X, donc dans $X \cap A = \emptyset$.
Il en résulte que $A \cap B$est vide : **$A \cap B = \emptyset$**.

En rapprochant condition nécessaire et condition suffisante, nous obtenons le **théorème** :

> Etant données deux parties non vides A et B d'un ensemble non vide E, pour que l'application $f : \mathfrak{P}(E) \longrightarrow \mathfrak{P}(A) \times \mathfrak{P}(B)$ définie par $f(X) = (X \cap A, X \cap B)$ soit surjective, il faut et il suffit que $A \cap B = \emptyset$.

3°/ Application réciproque.

Supposons f bijective.
f est, à la fois injective et surjective.
D'après 1°, $A \cup B = E$. D'après 2°, $A \cap B = \emptyset$.
(**Rappel** : d'après Chapitre 1, Exercice 7, **A et B sont complémentaires**).

Considérons l'application g qui, à un couple (X, Y) formé d'une partie X de A et d'une partie Y de B, associe leur réunion $X \cup Y$, partie de E.
L'application $g : \mathfrak{P}(A) \times \mathfrak{P}(B) \longrightarrow \mathfrak{P}(E)$ est définie par $g(X, Y) = X \cup Y$.

Pour une partie X quelconque de E, nous avons :
$(g \circ f)(X) = g(f(X)) = g((X \cap A, X \cap B)) = (X \cap A) \cup (X \cap B) = X \cap (A \cup B) = X \cap E = X$.
Donc **$g \circ f$ est l'application identique de $\mathfrak{P}(E)$**.

Pour un couple (X, Y) formé d'une partie quelconque X de A et d'une partie quelconque Y de B, nous

avons :
$(f \circ g)(X, Y) = f(g(X, Y)) = f(X \cup Y) = ((X \cup Y) \cap A, (X \cup Y) \cap B) = ((X \cap A) \cup (Y \cap A), (X \cap B) \cup (Y \cap B))$.
$Y \cap A$ est contenu dans $B \cap A$ qui est vide, donc $Y \cap A = \emptyset$ et $(X \cap A) \cup (Y \cap A) = (X \cap A) \cup \emptyset = X \cap A = X$.
$X \cap B$ est contenu dans $A \cap B$ qui est vide, donc $X \cap B = \emptyset$ et $(X \cap B) \cup (Y \cap B) = \emptyset \cup (Y \cap B) = Y \cap B = Y$.
$((X \cap A) \cup (Y \cap A), (X \cap B) \cup (Y \cap B)) = (X, Y)$ et $(f \circ g)(X, Y) = (X, Y)$.
Donc ***f* o *g* est l'application identique de $\mathfrak{P}(A) \times \mathfrak{P}(B)$**.

Le fait que $g \circ f$ est l'application identique de $\mathfrak{P}(E)$ et que $f \circ g$ est l'application identique de $\mathfrak{P}(A) \times \mathfrak{P}(B)$ montre que ***g* est l'application réciproque de *f***.

On peut énoncer ce résultat sous forme de théorème :

> Etant données deux parties non vides A et B d'un ensemble non vide E, si l'application $f : \mathfrak{P}(E) \longrightarrow \mathfrak{P}(A) \times \mathfrak{P}(B)$ définie par
> $f(X) = (X \cap A, X \cap B)$,
> est bijective, son application réciproque f^{-1} est définie par:
> $f^{-1}(X, Y) = X \cup Y$.

Chapitre 3. Applications.

Enoncés.

Exercice 11. Composition de bijections.

Soient $f : E \longrightarrow F$, $g : F \longrightarrow G$ et $h : G \longrightarrow H$, des applications.

1°/ Montrer que si $g \circ f$ et $h \circ g$ sont bijectives, alors f, g et h sont bijectives.
2°/ On suppose maintenant $E = H$. Montrer que si, parmi les trois applications $h \circ g \circ f$, $f \circ h \circ g$ et $g \circ f \circ h$, deux sont injectives, la troisième étant surjective, alors f, g, h, sont bijectives.

Solution.

1°/ Composées bijectives.

Supposons $g \circ f$ et $h \circ g$ bijectives.
Comme $h \circ g$ est injective, g est injective (Exercice 8, 4°).
Comme $g \circ f$ est surjective, g est surjective (Exercice 8, 5°).
L'application ***g*, injective et surjective, est bijective** et possède une application réciproque g^{-1} elle-même bijective, de G dans F.
$h = h \circ 1_G = h \circ (g \circ g^{-1}) = (h \circ g) \circ g^{-1}$, composée de deux bijections est une bijection : ***h* est bijective**.
$f = 1_F \circ f = (g^{-1} \circ g) \circ f = g^{-1} \circ (g \circ f)$, composée de deux bijections est une bijection : ***f* est bijective**.

Si $g \circ f$ et $h \circ g$ sont bijectives, alors f, g et h sont bijectives.

2°/ Composées injectives ou surjectives.

Etant donné que si, l'on prend deux quelconques des trois applications composées, on peut toujours les faire suivre dans l'ordre de permutation circulaire des lettres, nous pouvons désigner par $u \circ v \circ w$ et $v \circ w \circ u$ les deux composées injectives, $w \circ u \circ v$ étant la composée surjective.

Comme $u \circ v \circ w$ est injective, ***w* est injective** et $v \circ w$ est injective.
Comme $v \circ w \circ u$ est injective, u est injective et ***w* ∘ *u* est injective**.
Comme $w \circ u \circ v$ est surjective, ***w* est surjective** et ***w* ∘ *u* est surjective**.
***w*, injective et surjective, est bijective.**
$w \circ u$, injective et surjective, est bijective.
Donc $u = w^{-1} \circ (w \circ u)$, composée de deux bijections est une bijection : ***u* est bijective.**
$v = (v \circ w \circ u) \circ (w \circ u)^{-1}$, composée de deux injections est une injection (Exercice 8, 1°).
$v = (w \circ u)^{-1} \circ (w \circ u \circ v)$, composée de deux surjections est une surjection (Exercice 8, 2°).
***v*, injective et surjective, est bijective**.
Donc **les trois applications *u*, *v*, *w*, sont bijectives**, donc les applications f, g, h, sont des bijections, quel que soit leur ordre.

Chapitre 3. Applications.

Enoncés.

Exercice 12. Injectivité et surjectivité d'appliction particulières.

A étant l'ensemble des entiers naturels pairs, on considère les quatre applications $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $F : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathfrak{P}(\mathbb{N}^*)$, et $G : \mathfrak{P}(\mathbb{N}) \longrightarrow \mathfrak{P}(A)$, définies de la façon suivante : $f(x) = 4x + 1$; $g(x) = \frac{2x}{1+x^2}$; $F(n)$ est l'ensemble des multiples non nuls de n ; $G(X) = A \setminus X = A \cap \complement X$. f, g, F, G, sont -elles injectives, surjectives, bijectives ?.	

Solution.

1°/ Application *f*.

f est bien une application, puisqu'à chaque entier x, correspond un et un seul entier $4x + 1$.

$4x + 1 = 4y + 1 \Rightarrow 4(x - y) = 0$, donc $x = y$, ce qui montre que ***f* est injective**.

L'équation $4x + 1 = 2$ n'a pas de solution dans $\mathbb{N}$, donc ***f* n'est pas surjective**.
A fortiori, ***f* n'est pas bijective**.

2°/ Application *g*.

g est bien une application, puisqu'à chaque réel x, correspond un et un seul réel $\frac{2x}{1+x^2}$.

$\frac{2x}{1+x^2} = \frac{2y}{1+y^2} \Rightarrow 2x + 2xy^2 - 2y - 2x^2y = 0$,
donc $2(x - y)(1 - xy) = 0$,
donc $y = x$, ou $y = \frac{1}{x}$, ce qui montre que ***g* n'est pas injective**.
A fortiori, ***g* n'est pas bijective**.
Il suffit de prendre $x = 2$ et $y = \frac{1}{2}$, pour avoir $g(x) = \frac{2x}{1+x^2} = \frac{4}{5} = \frac{2y}{1+y^2} = g(y)$, sans que $x = y$.

Cherchons si l'équation $\frac{2x}{1+x^2} = r$ a toujours une solution dans $\mathbb{R}$.
Si $r = 0$, il y a une solution unique $x = 0$.

Si r est différent de 0, l'équation équivaut à $x^2 - \frac{2}{r}x + 1 = 0$, $\left(x - \frac{1}{r}\right)^2 = 1 + \frac{1}{r^2}$.

Cette équation a toujours deux solutions dans $\mathbb{R}$, qui sont inverses l'une de l'autre (produit égal à 1).
donc ***g* est surjective** : pour tout $r \in \mathbb{R}$, il existe un $x \in \mathbb{R}$ tel que $g(x) = r$.

3°/ Application *F*.

L'ensemble $F(n)$ des multiples non nuls d'un entier n non nul est une partie de N*, et pour chaque entier non nul n, une telle partie est définie de façon unique. Donc F est bien une application $\mathbb{N}^* \longrightarrow \mathfrak{P}(\mathbb{N}^*)$.

On remarquera que n est le plus petit élément de $F(n)$.

Il en résulte que si $F(n) = F(m)$, ces deux parties, étant égales, ont le même plus petit élément : $n = m$, donc ***F* est injective**.

On remarquera ensuite que $F(n)$ n'est pas une partie finie de $\mathbb{N}^*$ (axiome d'Archimède).
Si grand que soit l'entier m, on trouvera toujours un entier k tel que $k\,n$ soit supérieur ou égal à m.

Donc il suffit de prendre une partie finie de $\mathbb{N}^*$ pour voir que ***F* n'est pas surjective**.
A fortiori, ***F* n'est pas bijective**.

4°/ Application *G*.

Pour tout ensemble d'entiers X, $G(X)$ est l'ensemble des entiers pairs qui ne sont pas dans X.
A chaque partie X de $\mathbb{N}$, correspond une partie bien définie de A : G est bien une application.

Il suffit de prendre deux parties X et Y qui ne diffèrent que d'un entier impair pour voir que ***G* n'est pas injective**.
Par exemple, $X = \emptyset$ et $Y = \{1\} \Rightarrow G(X) = G(Y) = A$, avec $X \neq Y$.
A fortiori, ***G* n'est pas bijective**.

Pour toute partie B de A, $G(\complement_A B)$ est l'ensemble des entiers pairs qui sont dans B, c'est B, puisque B ne contient que des entiers pairs, $B = G(\complement_A B)$. Donc ***G* est surjective**.

Exercices

Cantor, Bernstein, cardinaux.

1. Equipotence et cardinaux.
2. Lemme de Bernstein.
3. Ordre entre les cardinaux.
4. Théorèmes de Cantor.

1. Equipotence et cardinaux.

Etant donnés deux ensembles E et F, on dit qu'ils sont ***équipotents*** s'il existe une bijection de E sur F.

Dans tout ensemble d'ensembles, la relation d'équipotence est une **relation d'équivalence** (réflexive, symétrique et transitive).

On appellera ***cardinal de E*** et on notera *card* (E), un représentant, choisi une fois pour toutes, de la classe d'équivalence de E modulo la relation d'équipotence.

Exemples

— le cardinal de l'ensemble vide est noté 0 : *card* ($\varnothing$) = 0.
— le cardinal d'un ensemble réduit à un élément est noté 1 : *card* ($\{\varnothing\}$) = 1.
— le cardinal de l'ensemble $\{\varnothing;\{\varnothing\}\}$ est noté 2 : *card* ($\{\varnothing;\{\varnothing\}\}$) = 2.
Pour un ensemble fini, on peut interpréter son cardinal comme son nombre d'éléments.

Les cardinaux ne forment pas un ensemble, c'est un corollaire du **théorème de Cantor**.

HAUT

2. Lemme de Bernstein.

Soit X un ensemble, $f : X \longrightarrow X$ une application de X dans X, et Y une partie de X contenant $f(X)$.
Alors, il existe une surjection g de X sur Y qui devient bijective lorsque f est injective.

HAUT

3. Ordre entre les cardinaux.

Etant donnés deux ensembles X et Y, la relation « il existe une injection de X dans Y » ne dépend que des cardinaux de X et de Y : on la note $card\,(X) \leqslant card\,(Y)$.

La relation $card\,(X) \leqslant card\,(Y)$ est une ***relation d'ordre entre cardinaux*** (réflexive, antisymétrique, transitive).
L'antisymétrie est prouvée par le **lemme de Bernstein**.
Cet ordre est ***total*** (on peut toujours comparer deux cardinaux) et ***bon*** (tout ensemble non vide de cardinaux possède un plus petit élément).

HAUT

4. Théorèmes de Cantor.

Etant donné un ensemble X, on note $\mathbb{P}(X)$ l'ensemble des parties de X.

1. Le cardinal de X est **strictement plus petit** que le cardinal de $\mathbb{P}(X)$:
   $card\ (X) \leqslant card\ (\mathbb{P}(X)) = 2^{card\ (X)}$ et $card\ (X) \neq card\ (\mathbb{P}(X))$
2. L'ensemble de tous les cardinaux n'existe pas.

HAUT

Chapitre 4. Cantor, Bernstein, cardinaux.

Exercices

Exercice 1. Nombre d'éléments de l'ensemble des parties.
Exercice 2. Lemme de Bernstein.
Exercice 3. Théorème de Cantor.

Exercice 1. Nombre d'éléments de l'ensemble des parties.

Soient E un ensemble, A et B deux parties non vides de E.
On considère l'application f, de l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties de E, dans l'ensemble produit $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$, définie par :

$$f(X) = (X \cap A, X \cap B).$$

1°/ Si $A \cap B$ n'est pas vide, montrer qu'il n'existe pas de partie X de E vérifiant :

$$A = X \cap A \text{ et } \varnothing = X \cap B.$$

En déduire que si f est surjective, $A \cap B$ est vide.
Montrer ensuite que si $A \cap B$ est vide, f est surjective.

2°/ Montrer que f est injective si, et seulement si, $A \cup B = E$.

3°/ Lorsque f est bijective, définir l'application réciproque f^{-1}.

Application.
Montrer que, si E est un ensemble fini ayant n éléments, $\mathcal{P}(E)$ est un ensemble fini ayant 2^n éléments.

Solution

HAUT

Exercice 2. Lemme de Bernstein.

Soient E et F deux ensembles, f une application de E dans F, et g une application de F dans E.
Soit $\mathcal{M} = \{M \mid M \subset E \text{ et } M \supset [\complement_E\, g\,(F) \cup (g \circ f)\,(M)]\}$.

1°/ Montrer que $\mathcal{M}$ est non vide.
2°/ On désigne par A l'intersection de toutes les parties $M \in \mathcal{M}$ (i.e. $A = \bigcap_{M \in \mathcal{M}} M$).
Montrer que A est un élément de $\mathcal{M}$, et en déduire que $\complement_E\, g\,(F) \cup (g \circ f)\,(A)$ est un élément de $\mathcal{M}$, puis que A est égal à $\complement_E\, g\,(F) \cup (g \circ f)\,(A)$.
3°/ Montrer que $\complement_E\, A$ est égal à $g\,(\complement_F\, f\,(A))$.
4°/ On suppose que f et g sont injectives. Déduire de ce qui précède qu'il existe une application bijective de E sur F (**lemme de Bernstein**).
5°/ Montrer que la relation "Il existe une injection de E dans F" définit une **relation d'ordre** entre cardinaux.

Solution

Application.

Montrer que l'application $f : n \mapsto (n, 5)$ est une application injective de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ et que $g : (n, m) \mapsto 2^n \times 3^m$ est une application injective de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.
Conclure.

HAUT

Exercice 3. Théorème de Cantor.

Soit E un ensemble et f une application de E dans l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties de E. On désigne par A l'ensemble des $x \in E$ tels que $x \notin f(x)$. Montrer que f est *non surjective* et en déduire qu'il n'existe aucune application *bijective* de E sur $\mathcal{P}(E)$.	Solution

HAUT

Chapitre 4. Cantor, Bernstein, cardinaux.

Enoncés.

Exercice 1. Nombre d'éléments de l'ensemble des parties.

Soient E un ensemble, A et B deux parties non vides de E.
On considère l'application f, de l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties de E, dans l'ensemble produit $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$, définie par :

$$f(X) = (X \cap A, X \cap B).$$

1°/ Si $A \cap B$ n'est pas vide, montrer qu'il n'existe pas de partie X de E vérifiant :

$$A = X \cap A \text{ et } \varnothing = X \cap B.$$

En déduire que si f est surjective, $A \cap B$ est vide.
Montrer ensuite que si $A \cap B$ est vide, f est surjective.

2°/ Montrer que f est injective si, et seulement si, $A \cup B = E$.

3°/ Lorsque f est bijective, définir l'application réciproque f^{-1}.

Application.
Montrer que, si E est un ensemble fini ayant n éléments, $\mathcal{P}(E)$ est un ensemble fini ayant 2^n éléments.

Solution.

1°/ Critère de surjectivité de *f*.

Pour des parties A et X de E, la relation $A = X \cap A$ équivaut à $A \subset X$ (Chapitre 2 - Exercice 2 - 4°).
Si A est contenu dans X, $A \cap B \subset X \cap B$ (Chapitre 2 - Exercice 3 - 3°) : tout élément de $A \cap B$ est élément de $X \cap B$.
Il en résulte que si A est contenu dans X et si $A \cap B$ n'est pas vide, alors $X \cap B$ n'est pas vide.

Lorsque $A \cap B$ n'est pas vide, il n'existe pas de partie X de E vérifiant $A = X \cap A$ et $\varnothing = X \cap B$.

Supposons maintenant que l'application f définie dans l'énoncé soit surjective.
Alors tout élément de $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$ est l'image par f d'une partie X de E.
Par exemple, l'élément $(A, \varnothing)$ de $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$ est l'image par f d'une partie X de E.
Il existe donc une partie X de E telle que $(A, \varnothing) = (X \cap A, X \cap B)$, ce qui s'écrit aussi $(\exists\, X \in \mathcal{P}(E))(A = X \cap A \text{ et } \varnothing = X \cap B)$.
D'après ce qui précède, $A \cap B$ est vide.

$$\boxed{f \text{ surjective} \Rightarrow A \cap B = \emptyset}$$

Réciproquement, supposons que $A \cap B$ soit vide.
Pour tout élément (C, D) de $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$ avec $C \in \mathcal{P}(A)$ et $D \in \mathcal{P}(B)$, on peut considérer la partie $X = C \cup D$ de E.
L'image $f(X)$ de X par f est donnée, par définition de f, par la formule :

$$f(X) = (X \cap A, X \cap B) = ((C \cup D) \cap A, (C \cup D) \cap B) = ((C \cap A) \cup (D \cap A), (C \cap B) \cup (D \cap B))$$

Or :
$C \in \mathcal{P}(A)$ équivaut à $C \cap A = C$,
$D \in \mathcal{P}(B)$ équivaut à $D \cap B = D$,
$A \cap B = \emptyset$ et $D \subset B$ entraînent $A \cap D = \emptyset$,
$A \cap B = \emptyset$ et $C \subset A$ entraînent $C \cap B = \emptyset$,
donc la relation précédente s'écrit :

$$f(X) = (C \cup \emptyset, \emptyset \cup D) = (C, D).$$

Tout élément (C, D) de $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$ est l'image par f de la partie $C \cup D \in \mathcal{P}(E)$.
Ceci veut dire que f est surjective.

$$\boxed{A \cap B = \emptyset \Rightarrow f \text{ surjective}}$$

2°/ Critère d'injectivité de *f*.

A chaque élément (C, D) de $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$ avec $C \in \mathcal{P}(A)$ et $D \in \mathcal{P}(B)$, on peut associer la partie $r(C, D) = C \cup D$ de E.
Alors, pour toute partie X de E, on a $r(f(X)) = (X \cap A) \cup (X \cap B) = X \cap (A \cup B)$.

Si $A \cup B = E$, $X \cap (A \cup B) = X \cap E = X$ et $r(f(X)) = X$, donc $r \circ f = Id_{\mathcal{P}(E)}$: r est une rétraction de f, donc f est injective (Chapitre 3 - Exercice 3 - 3°).

$$\boxed{A \cup B = E \Rightarrow f \text{ injective}}$$

Réciproquement, si $f : \mathcal{P}(E) \longrightarrow \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E)$ est injective, comme $\mathcal{P}(E)$ n'est pas vide puisqu'il contient au moins la partie vide $\emptyset$ de E comme élément, f possède une rétraction r (Chapitre 3 - Exercice 3 - 3°).
Cette rétraction vérifie $r \circ f = Id_{\mathcal{P}(E)}$.
En particulier, $r(f(E)) = E = r(E \cap A, E \cap B) = r(A, B)$.
Or, pour tout $X \in \mathcal{P}(E)$, $f(X) = (X \cap A, X \cap B)$, donc, pour tout $X \in \mathcal{P}(E)$, $X = r(f(X)) = r(X \cap A, X \cap B)$.
En particulier, pour $X = A \cup B$, on obtient : $A \cup B = r((A \cup B) \cap A, (A \cup B) \cap B)$.
Or $(A \cup B) \cap A = A$ puisque A est contenu dans $A \cup B$, et $(A \cup B) \cap B = B$ puisque B est contenu dans $A \cup B$.
Donc $A \cup B = r((A \cup B) \cap A, (A \cup B) \cap B) = r(A, B) = E$.

$$\boxed{f \text{ injective} \Rightarrow A \cup B = E}$$

3°/ Application réciproque.

f injective $\Leftrightarrow A \cup B = E$, et $A \cup B = E \Leftrightarrow \complement B \subseteq A$ (Chapitre 2 - Exercice 2 - 6°).

f surjective $\Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$, et $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow A \subseteq \complement B$ (Chapitre 2 - Exercice 2 - 5°).

f est bijective $\Leftrightarrow A \cup B = E$ et $A \cap B = \emptyset$
$\Leftrightarrow A = \complement B$ (ce qui équivaut aussi à $B = \complement A$).
Dire que f est bijective, c'est dire que A et B sont complémentaires l'un de l'autre, ou encore, puisqu'ils ne sont pas vides, qu'ils forment une partition de E.

$$\boxed{f \text{ bijective} \Leftrightarrow A \text{ et } B \text{ forment une partition de } E}$$

Lorsque f est injective, nous avons vu (question 2°) que l'application $r : (C, D) \mapsto C \cup D$ de $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$ dans $\mathcal{P}(E)$ était une rétraction de f.
Lorsque f est bijective, comme $\mathcal{P}(E)$ n'est pas vide, r est également section de f et cette application est l'application réciproque de f (Chapitre 3 - Exercice 3 - 5°).

$$\boxed{f \text{ bijective} \Rightarrow f^{-1}(C, D) = C \cup D}$$

Ainsi, lorsque A et B sont complémentaires l'un de l'autre et non vides, pour toute partie X de E, $f(X)$ est formée des traces $(X \cap A, X \cap B)$ de X sur la partition $\{ A, B \}$ de E et, pour un couple (C, D) de parties de A et de B respectivement, $f^{-1}(C, D)$ est la réunion $C \cup D$ de C et D, dont les traces sur A et B sont justement C et D.

4°/ Cardinal de l'ensemble des parties.

Soit E un ensemble fini à n éléments.
Pour $n = 0$, E est vide, et $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset\}$ possède un seul élément, $Card(\mathcal{P}(E)) = 1 = 2^0 = 2^n$.
Pour $n = 1$, E est réduit à un seul élément x, et $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{x\}\}$ possède deux éléments, $Card(\mathcal{P}(E)) = 2 = 2^1 = 2^n$.

Supposons que la propriété R_n suivante soit vraie pour un $n \geq 1$:

R_n : l'ensemble des parties d'un ensemble à n éléments possède 2^n éléments.

On vient de voir que R_0 et R_1 sont vraies.

Montrons qu'alors la propriété R_{n+1} est vraie.
Considérons un ensemble E à $n + 1$ éléments, $n \geq 1$.
Cet ensemble possède au moins deux éléments, soit $x \in E$ et $y \in E$, $x \neq y$.
Soit $A = \{x\}$ et $B = \complement_E A$.
A et B sont des parties non vides de E, puisque x appartient à A et y appartient à B.
$A \cap B = \emptyset$ et $A \cup B = E$.
A possède un seul élément, x, et le complémentaire B de $\{x\}$ dans E possède n éléments, $n \geq 1$, dont y.

De la propriété 1°, résulte la surjectivité de l'application $f : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) : f(X) = (X \cap A, X \cap B)$.
De la propriété 2°, résulte l'injectivité de f.
L'application f est donc bijective.
Par définition, $\mathcal{P}(E)$ et $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$ ont donc le même cardinal, donc le même nombre d'éléments.
D'après l'hypothèse de récurrence, $\mathcal{P}(B)$ possède 2^n éléments.
$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{x\}\}$ possède deux éléments.

$\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$ possède donc $2 \times 2^n = 2^{n+1}$ éléments.
Donc $\mathcal{P}(E)$ possède 2^{n+1} éléments.
$R_n \Rightarrow R_{n+1}$.

Le principe de récurrence entraîne alors que la propriété R_n est vraie pour tout $n \geq 1$.
Comme elle est vraie aussi pour $n = 0$, elle vraie pour tout entier $n \geq 0$.

L'ensemble des parties d'un ensemble à n éléments possède 2^n éléments, pour tout entier $n \geq 0$.

Cette propriété pourra être généralisée à un ensemble quelconque : $card\,(\mathcal{P}(E)) = 2^{car\,(E)}$.

Chapitre 4. Cantor, Bernstein, cardinaux.

Enoncés.

Exercice 2. Lemme de Bernstein.

Soient E et F deux ensembles, f une application de E dans F, et g une application de F dans E.
Soit $\mathcal{M} = \{M \mid M \subset E \text{ et } M \supset [\complement_E\, g\,(F) \cup (g \circ f)\,(M)]\}$.

1°/ Montrer que $\mathcal{M}$ est non vide.
2°/ On désigne par A l'intersection de toutes les parties $M \in \mathcal{M}$ (i.e. $A = \bigcap_{M \in \mathcal{M}} M$).
Montrer que A est un élément de $\mathcal{M}$, et en déduire que $\complement_E\, g\,(F) \cup (g \circ f)\,(A)$ est un élément de $\mathcal{M}$, puis que A est égal à $\complement_E\, g\,(F) \cup (g \circ f)\,(A)$.
3°/ Montrer que $\complement_E\, A$ est égal à $g\,(\complement_F\, f\,(A))$.
4°/ On suppose que f et g sont injectives. Déduire de ce qui précède qu'il existe une application bijective de E sur F (**lemme de Bernstein**).
5°/ Montrer que la relation "Il existe une injection de E dans F" définit une **relation d'ordre** entre cardinaux.

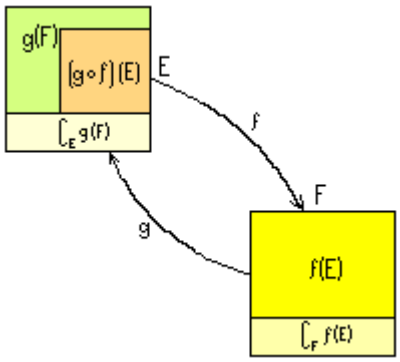
Application.

Montrer que l'application $f : n \mapsto (n, 5)$ est une application injective de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ et que $g : (n, m) \mapsto 2^n \times 3^m$ est une application injective de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.
Conclure.

Solution.

1°/ $\mathcal{M}$ n'est pas vide.

1 er exemple.



Considérons la partie pleine $M_0 = E$ de E.
$\complement_E\, g\,(F) \cup (g \circ f)\,(E)$ est une partie de E, donc contenue dans E.
Donc E est un élément de $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}$ n'est pas vide.

2 e exemple.

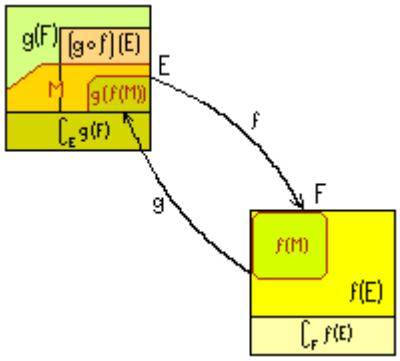
On peut donner un autre exemple d'élément de $\mathcal{M}$, moins trivial que l'exemple précédent.
$M_1 = \complement_E\, g\,(F) \cup (g \circ f)\,(E)$ est une partie de E.
Son image par f est contenue dans $f\,(E)$: $f\,(M_1) \subset f\,(E)$.

$(g \circ f)(M_1)$ est donc contenu dans $(g \circ f)(E)$.
$\complement_E g(F) \cup (g \circ f)(M_1)$ est donc contenu dans $\complement_E g(F) \cup (g \circ f)(E) = M_1$.
$M_1 = \complement_E g(F) \cup (g \circ f)(E)$ est un élément de $\mathcal{M}$.

3 e exemple.

Encore moins trivial.
Si M_n est un élément de $\mathcal{M}$, alors $M_{n+1} = \complement_E g(F) \cup (g \circ f)(M_n)$ est encore un élément de $\mathcal{M}$, contenu dans M_n.

> En effet, comme M_n est un élément de $\mathcal{M}$, $M_{n+1} = \complement_E g(F) \cup (g \circ f)(M_n)$ est contenu dans M_n, par définition de $\mathcal{M}$.
> Donc $(g \circ f)(M_{n+1})$ est contenu dans $(g \circ f)(M_n)$.
> Donc $\complement_E g(F) \cup (g \circ f)(M_{n+1})$ est contenu dans $\complement_E g(F) \cup (g \circ f)(M_n) = M_{n+1}$.
> Et cette inclusion montre que M_{n+1} est un élément de $\mathcal{M}$.



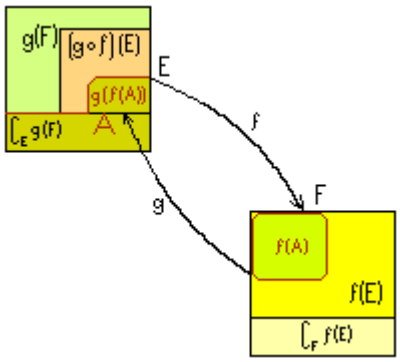
De façon générale, les éléments de $\mathcal{M}$ sont les parties de E qui contiennent à la fois le complémentaire dans E de l'image de F par G, et leur image par $g \circ f$.
Et ce qu'on va rechercher, c'est la plus petite des parties M qui vérifient cette propriété, s'il en existe une.
Notre troisième exemple montre que l'on sait construire, à partir de $M_0 = E$, une suite décroissante de parties de E qui sont toutes dans $\mathcal{M}$. On sait construire des éléments de $\mathcal{M}$ de plus en plus petits.

2°/ A est un élément de $\mathcal{M}$.

Soit A l'intersection de tous les éléments de $\mathcal{M}$.

Soit x un élément de $\complement_E g(F) \cup (g \circ f)(A)$.

Si x appartient au complémentaire dans E de $g(F)$, il appartient à tout $M \in \mathcal{M}$, par définition.
Donc il appartient à A.
Si x appartient à $(g \circ f)(A)$, il appartient à $(g \circ f)(M)$ pour tout $M \in \mathcal{M}$, puisque $A \subset M \Rightarrow (g \circ f)(A) \subset (g \circ f)(M)$.
Donc il appartient à M, pour tout $M \in \mathcal{M}$, puisque $(g \circ f)(M)$ est contenu dans M, par définition de $\mathcal{M}$.
Donc il appartient à A.



Tout élément de $\complement_E g(F) \cup (g \circ f)(A)$ appartient à A.
Donc $\complement_E g(F) \cup (g \circ f)(A)$ est contenu dans A.
Ceci montre que A est un élément de $\mathcal{M}$.
A est le plus petit élément de $\mathcal{M}$, pour l'inclusion, puisqu'il est contenu dans tous les éléments de $\mathcal{M}$.

Si on applique le procédé de notre troisième exemple, on sait alors construire un autre élément de $\mathcal{M}$, encore plus petit que A, c'est $\complement_E g(F) \cup (g \circ f)(A)$.
Comme A est minimal pour l'inclusion parmi les éléments de $\mathcal{M}$, c'est que $\complement_E g(F) \cup (g \circ f)(A)$ est égal à A.

On peut le redémontrer de façon élémentaire.
$(g \circ f)\,(\complement_E\, g\,(F) \cup (g \circ f)\,(A))$ est contenu dans $(g \circ f)\,(A)$ puisque $\complement_E\, g\,(F) \cup (g \circ f)\,(A)$ est contenu dans A.
Donc $\complement_E\, g\,(F) \cup (g \circ f)\,(\complement_E\, g\,(F) \cup (g \circ f)\,(A))$ est contenu dans $\complement_E\, g\,(F) \cup (g \circ f)\,(A)$.
Ceci montre que $\complement_E\, g\,(F) \cup (g \circ f)\,(A)$ est un élément de $\mathcal{M}$.

Comme A est l'intersection de tous les éléments de $\mathcal{M}$, A est contenu dans $\complement_E\, g\,(F) \cup (g \circ f)\,(A)$.

Comme on a déjà démontré que $\complement_E\, g\,(F) \cup (g \circ f)\,(A)$ était contenu dans A, on obtient l'égalité :

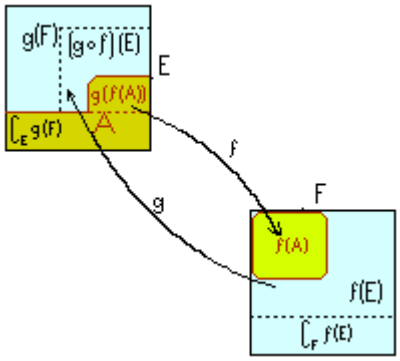
$$\boxed{A = \complement_E\, g\,(F) \cup (g \circ f)\,(A).}$$

3°/ Le complémentaire de A est l'image par g du complémentaire de $f\,(A)$.

$$\complement_E\, A = \complement_E\,(\complement_E\, g\,(F) \cup (g \circ f)\,(A)) = g\,(F) \cap \complement_E\,(g \circ f)\,(A)$$

La relation $x \in \complement_E\, A$ est donc équivalente à la relation :

$$(\exists\, y \in F\,)(x = g\,(y) \text{ et } y \notin f\,(A))$$
$$x \in g\,(\complement_F\, f\,(A))$$



On obtient donc bien l'égalité :

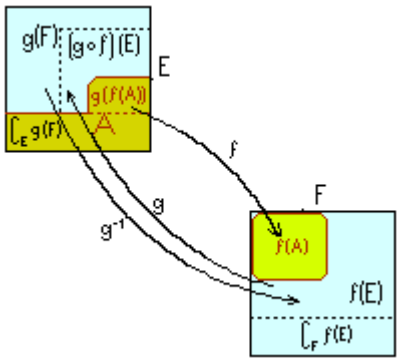
$$\complement_E\, A = g\,(\complement_F\, f\,(A))$$

Il en résulte les relations :

$$A \cup g\,(\complement_F\, f\,(A)) = E, \text{ et } A \cap g\,(\complement_F\, f\,(A)) = \varnothing.$$

4°/ Il existe une application bijective de E sur F.

Si f est injective, sa restriction à A est une bijection de A sur $f\,(A)$.
Il existe une bijection réciproque, que l'on note encore f^{-1}, de $f\,(A)$ sur A.
Si g est injective, sa restriction au complémentaire de $f\,(A)$ est une bijection de $\complement_F\, f\,(A)$ sur $g\,(\complement_F\, f\,(A)) = \complement_E\, A$.
Il existe une bijection réciproque, que l'on note encore g^{-1}, de $\complement_E\, A$ sur $\complement_F\, f\,(A)$.



On peut alors définir une application $h : E \to F$ de la façon suivante :

$$h\,(x) = \begin{cases} f(x) & \text{pour } x \in A \\ g^{-1}(x) & \text{pour } x \notin A \end{cases}$$

et une application $k : F \to E$ de la façon suivante :

$$k(x) = \begin{cases} f^{-1}(y) & \text{pour } y \in f(A) \\ g(y) & \text{pour } y \notin f(A) \end{cases}$$

Les applications h et k sont sections et rétractions l'une de l'autre : $k \circ h = Id_E$ et $h \circ k = Id_F$.
Ce sont donc des applications bijectives : h est une application bijective de E sur F.

5°/ Relation d'ordre entre les cardinaux.

Considérons la relation "Il existe une injection de A dans B" entre deux ensembles A et B.
Card (A) est un ensemble équipotent à A, donc il existe une bijection u de *Card* (A) sur A.
Card (B) est un ensemble équipotent à B, donc il existe une bijection v de *Card* (B) sur B.
Soit f une injection de A dans B, alors l'application $g = v^{-1} \circ f \circ u$ est une injection de *Card* (A) dans *Card* (B).
Inversement, si g est une injection de *Card* (A) dans *Card* (A), alors l'application $f = v \circ g \circ u^{-1}$ est une injection de A dans B.
Ceci montre que **la relation "Il existe une injection de *A* dans *B*" ne dépend que des cardinaux de *A* et de *B***.

On note *Card* (*A*) $\leqslant$ *Card* (*B*) la relation "Il existe une injection de *A* dans *B*".

Cette relation est **réflexive** puisque l'application identique de A est bijective, donc injective, de A dans A : *Card* (A) $\leqslant$ *Card* (A).
Elle est **transitive** puisque l'application composée de deux injections est évidemment une injection :
Card (A) $\leqslant$ *Card* (B) **et** *Card* (B) $\leqslant$ *Card* (C) $\Rightarrow$ *Card* (A) $\leqslant$ *Card* (C)
L'**antisymétrie** résulte du lemme de Bernstein : s'il existe une injection de A dans B et une injection de B dans A, alors il existe une bijection de A sur B, ce qui s'exprime par la relation

$$\textit{Card}(A) \leqslant \textit{Card}(B) \text{ et } \textit{Card}(B) \leqslant \textit{Card}(A) \Rightarrow \textit{Card}(A) = \textit{Card}(B)$$

6°/ Bijection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}^2$.

Soit f l'application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ définie par $f(n) = (n, 5)$.
f est injective, car $(n, 5) = (m, 5) \Rightarrow n = m$.

Soit g l'application de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ définie par $g(n, m) = 2^n \times 3^m$.
g est une application injective car $2^n \times 3^m = 2^{n'} \times 3^{m'} \Rightarrow n = n'$ et $m = m'$, par identification des facteurs premiers des deux membres de l'égalité, donc $(n, m) = (n', m')$.

D'après le résultat précédent, **il existe alors une bijection** de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.
Puisqu'il existe une bijection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, ces deux ensembles sont équipotents, ils ont le même cardinal.

$$\boxed{\textit{Card}(\mathbb{N}^2) = \textit{Card}(\mathbb{N})}$$

L'ensemble $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ a donc exactement le même cardinal que $\mathbb{N}$ soit $\aleph_0$.

L'ennui, avec cette méthode, c'est qu'on ne peut pas construire explicitement la bijection tant qu'on n'a pas construit avec précision la partie A définie dans la deuxième question : de ce point de vue, le lemme de Bernstein n'a qu'un intérêt théorique et aucun intérêt pratique.

Ramarque.

L'image de g est formée des entiers qui n'ont que 2 et 3 comme facteurs premiers.
Le complémentaire de l'image de g est l'ensemble des entiers naturels qui ont d'autres facteurs premiers que 2 et 3.

$g(f(n)) = g(n, 5) = 2^n \times 3^5$.

Une partie M de $\mathbb{N}$ appartient à $\mathcal{M}$ si elle contient tous les entiers naturels qui ont d'autres facteurs premiers que 2 et 3, et tous les entiers de la forme $2^n \times 3^5$, avec $n \in M$.

En particulier, la partie A contient l'ensemble B formé des entiers naturels qui ont d'autres facteurs premiers que 2 et 3, et des entiers de la forme $2^n \times 3^5$, avec n entier naturel ayant d'autres facteurs premiers que 2 et 3. On peut se demander si B est égal à A. Pour cela, il faudrait que B appartienne à M. Mais c'est faux, il suffit de prendre $6^5 = 2^5 \times 3^5$: c'est un élément de B, puisque l'exposant 5 de 2 a d'autres facteurs premiers que 2 et 3.

$f(6^5) = (6^5, 5)$ et $g(f(6^5)) = 2^{6^5} \times 3^5$, qui n'appartient pas à B puisque 6^5 n'a que 2 et 3 comme facteurs premiers.
De sorte que $(g \circ f)(B)$ n'est pas contenu dans B, donc B n'est pas un élément de $\mathcal{M}$.
B est strictement contenu dans A.
A est réunion de B et de quelque chose, mais on ne sait pas à quoi ressemblent les éléments de ce quelque chose.

Chapitre 4. Cantor, Bernstein, cardinaux.

Enoncés.

Exercice 3. Théorème de Cantor.

Soit E un ensemble et f une application de E dans l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties de E. On désigne par A l'ensemble des $x \in E$ tels que $x \notin f(x)$. Montrer que f est *non surjective* et en déduire qu'il n'existe aucune application *bijective* de E sur $\mathcal{P}(E)$.	

Solution.

1°/ Il n'existe pas de surjection de E sur $\mathcal{P}(E)$.

Soit f une application quelconque de E dans $\mathcal{P}(E)$.
$A = \{ x \mid x \in E$ et $x \notin f(x)\}$est une partie de E.
Si f était surjective, il existerait un élément x de E tel que $f(x) = A$.
Si x appartenait à A, on aurait, par définition de A, $x \notin f(x)$, donc $x \notin A$, ce qui serait contradictoire.
Si x n'appartient pas à A, on a $x \notin f(x)$, donc $x \in A$, ce qui est encore contradictoire.
L'élément x ne peut ni appartenir à A, ni ne pas y appartenir : c'est qu'il n'existe pas d'élément x de E tel que $f(x) = A$.
Donc f ne peut pas être surjective.

2°/ Il n'existe pas de bijection de E sur l'ensemble de ses parties.

Aucune application de E dans $\mathcal{P}(E)$ n'est surjective : a fortiori, aucune application de E dans $\mathcal{P}(E)$ ne peut être bijective.

Le **théorème de Cantor** s'en déduit.

a) $Card(\mathcal{P}(E)) = 2^{Card(E)}$.

> En effet, notons 0 et 1 les éléments du cardinal 2 : $2 = \{0 ; 1\}$.
> Pour toute partie X de E, notons 1_X l'application de E dans 2 définie par $1_X(x) =$
> $\begin{cases} 0 & \text{pour } x \notin X \\ 1 & \text{pour } x \in X \end{cases}$.
> 1_X s'appelle la ***fonction indicatrice*** de X.
> Soit u l'application $X \mapsto 1_X$ de $\mathcal{P}(E)$ dans 2^E.
>
> Inversement, à toute application g de E dans 2, faisons correspondre la partie $g^{-1}(1)$ de E.
> Soit v l'application $g \mapsto g^{-1}(1)$ de 2^E dans $\mathcal{P}(E)$.
>
> Il est clair que les applications $u \circ v$ et $v \circ u$ sont les applications identiques de 2^E et $\mathcal{P}(E)$

respectivement.
En effet, $u\,(v\,(g)) = u\,(g^{-1}\,(1)) = 1_{g^{-1}(1)}$.
Et comme on a $1_{g^{-1}(1)}\,(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x \notin g^{-1}(1) \\ 1 & \text{pour } x \in g^{-1}(1) \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{pour } g(x)=0 \\ 1 & \text{pour } g(x)=1 \end{cases} = g\,(x)$, il vient $u\,(v\,(g)) = g$,
Donc $u \circ v$ est l'application identique de 2^E.
De même, $v\,(u\,(X)) = v\,(1_X) = 1_X^{-1}\,(1) = X$, donc $v \circ u$ est l'application identique de $\mathfrak{P}(E)$.

Donc u et v, section et rétraction l'une de l'autre, sont bijectives, de sorte que 2^E et $\mathfrak{P}(E)$ ont le même cardinal.
Et comme le cardinal de 2^E est $2^{Card\,(E)}$, il vient $Card\,(\mathfrak{P}(E)) = 2^{Card\,(E)}$.

b) $Card\,(E) < Card\,(\mathfrak{P}(E)) = 2^{Card\,(E)}$ (**théorème de Cantor**).

L'application $x \mapsto \{x\}$ est une injection de E dans $\mathfrak{P}(E)$.
Donc, par définition de la relation d'ordre entre cardinaux, le cardinal de E est inférieur ou égal au cardinal de $\mathfrak{P}(E)$.
La relation "Il existe un injection de A dans B" est une relation d'ordre entre cardinaux, car elle est évidemment réflexive et transitive, et l'antisymétrie résulte du lemme de Bernstein, voir Exercice 2).

Pour montrer que le cardinal de E est strictement plus petit que le cardinal de $\mathfrak{P}(E)$, il suffit donc de montrer que le cardinal de E est différent du cardinal de $\mathfrak{P}(E)$.
C'est clair par définition, puisque, d'après 1°, il n'existe aucune surjection de E sur $\mathfrak{P}(E)$, donc aucune bijection de E sur $\mathfrak{P}(E)$.

Exercices

Relations d'équivalence.

1. **Définition d'une relation d'équivalence.**
2. **Classe d'équivalence.**
3. **Ensemble quotient.**

1 Définition d'une relation d'équivalence

Une relation d'équivalence $\mathcal{R}$ dans un ensemble E est une relation binaire $\mathcal{R}(x, y)$ vérifiant :

— **Réflexivité** : $\mathcal{R}(x, x)$, pour tout $x \in E$.
— **Symétrie** : $\mathcal{R}(x, y) \Rightarrow \mathcal{R}(y, x)$, pour tout $x \in E$ et pour tout $y \in E$.
— **Transitivité** : $\mathcal{R}(x, y)$ et $\mathcal{R}(y, z) \Rightarrow \mathcal{R}(x, z)$, pour tout $x \in E$, pour tout $y \in E$ et pour tout $z \in E$.

HAUT

2 Classe d'équivalence.

Etant donné un ensemble E et une relation d'équivalence $\mathcal{R}$ sur E, pour tout élément $x \in E$, l'ensemble $\{y \mid y \in E \text{ et } \mathcal{R}(x, y)\}$ s'appelle la **classe d'équivalence** de x modulo $\mathcal{R}$.

HAUT

3 Ensemble quotient

L'ensemble des classes d'équivalence des éléments de E, modulo $\mathcal{R}$, est un ensemble de parties de E qu'on appelle l'**ensemble quotient** de E par $\mathcal{R}$, et qu'on note $E / \mathcal{R}$.
A chaque élément $x \in E$, on peut faire correspondre sa classe d'équivalence modulo $\mathcal{R}$, définissant ainsi une surjection $E \longrightarrow E / \mathcal{R}$, appelée la **surjection canonique** de E sur $E / \mathcal{R}$.

HAUT

Chapitre 5. Relations d'équivalence.

Exercices

Exercice 1. Equivalence de parties d'un ensemble.
Exercice 2. Equivalence de nombres premiers ?.
Exercice 3. Equivalence de parties.
Exercice 4. Equipotence.
Exercice 5. Equivalence de nombres réels.
Exercice 6. Equivalence dans $\mathbb{N}^2$.

Exercice 1. Equivalence de parties d'un ensemble.

Soit E un ensemble et soit A une partie de E.
On définit dans l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties de E, la relation $\mathcal{R}$, en posant, pour tout couple (X, Y) de parties de E :

$$X \mathcal{R} Y \Leftrightarrow A \cap X = A \cap Y$$

1°/ Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence dans $\mathcal{P}(E)$.
2°/ Soit X une partie de E. On note $\overline{X}$ la classe d'équivalence de X pour la relation $\mathcal{R}$.
Expliciter $\overline{\varnothing}$, $\overline{E}$, $\overline{A}$, $\overline{\complement_E A}$.
3°/ Montrer que si $B = A \cap X$, B est l'unique représentant de $\overline{X}$ contenu dans A.
4°/ On considère l'application $f : \overline{X} \mapsto A \cap X$, de $(\mathcal{P}(E)) / \mathcal{R}$ dans $\mathcal{P}(A)$.
Montrer que f est bijective.

Solution

HAUT

Exercice 2. Equivalence de nombres premiers ?

Soit $\mathbb{P}^*$ l'ensemble des nombres premiers strictements supérieurs à 2.
On considère la relation $\mathcal{R}$ entre deux éléments de $\mathbb{P}^*$ définie par :

$$p \mathcal{R} q \Leftrightarrow \frac{p+q}{2} \in \mathbb{P}^*.$$

La relation $\mathcal{R}$ est-elle réflexive, symétrique, transitive ?

Solution

HAUT

Exercice 3. Equivalence de parties.

Soit E un ensemble.
On définit dans l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties de E, la relation $\mathcal{R}$, en posant, pour tout couple (A, B) de parties de E :

$$A \mathcal{R} B \Leftrightarrow (A \cap \complement_E B) \cup (B \cap \complement_E A) \text{ est un ensemble fini ayant un nombre pair d'éléments.}$$

Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence dans $\mathcal{P}(E)$.

Solution

HAUT

Exercice 4. Equipotence.

Soient E et F deux ensembles. On dit que E et F sont **équipotents** si, et seulement si, il existe une bijection de E sur F. Montrer que, dans tout ensemble $\mathcal{E}$ d'ensembles, la relation d'équipotence est une relation d'équivalence.	Solution

HAUT

Exercice 5. Equivalence de nombres réels.

Soit R, la relation définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$x\,R\,y \Leftrightarrow x^2 - y^2 = x - y.$$

1°/ Montrer que R est une relation d'équivalence.
2°/ Déterminer la classe d'équivalence de x pour tout téel x.
3°/ Déterminer l'ensemble quotient.

Solution

HAUT

Exercice 6. Equivalence dans $\mathbb{N}^2$.

Soit T, la relation sur $\mathbb{N}^2$ définie par :

$(a, b)\ T\ (c, d)$ si et seulement si $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$.

1°/ Montrer que T est une relation d'équivalence sur $\mathbb{N}^2$.
2°/ Déterminer les classes d'équivalence de (0, 0), (1, 0), (0, 1), (1, 2).

Solution

HAUT

Chapitre 5. Relations d'équivalence.

Enoncés.

Exercice 1. Equivalence de parties d'un ensemble.

Soit E un ensemble et soit A une partie de E. On définit dans l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties de E, la relation $\mathcal{R}$, en posant, pour tout couple (X, Y) de parties de E : $$X \mathcal{R} Y \Leftrightarrow A \cap X = A \cap Y$$ 1°/ Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence dans $\mathcal{P}(E)$. 2°/ Soit X une partie de E. On note $\overline{X}$ la classe d'équivalence de X pour la relation $\mathcal{R}$. Expliciter $\overline{\varnothing}$, $\overline{E}$, $\overline{A}$, $\overline{\complement_E A}$. 3°/ Montrer que si $B = A \cap X$, B est l'unique représentant de $\overline{X}$ contenu dans A. 4°/ On considère l'application $f : \overline{X} \mapsto A \cap X$, de $(\mathcal{P}(E)) / \mathcal{R}$ dans $\mathcal{P}(A)$. Montrer que f est bijective.	

Solution.

1°/ Relation d'équivalence.

a) Réflexivité.

Pour toute partie X de E, on a, par réflexivité de l'égalité, $A \cap X = A \cap X$, ce qui montre la relation $X \mathcal{R} X$: la relation $\mathcal{R}$ est réflexive.

b) Symétrie.

Pour tout couple (X, Y) de parties de E, la relation $A \cap X = A \cap Y$ entraîne, par symétrie de l'égalité, $A \cap Y = A \cap X$.
Ceci montre que $X \mathcal{R} Y$ entraîne $Y \mathcal{R} X$: la relation $\mathcal{R}$ est symétrique.

c) Transitivité.

Pour toutes parties X, Y, Z, de E, les relations $A \cap X = A \cap Y$ et $A \cap Y = A \cap Z$ entraînent, par transitivité de l'égalité, $A \cap X = A \cap Z$.
Ceci montre que les relations $X \mathcal{R} Y$ et $Y \mathcal{R} Z$ entraînent la relation $X \mathcal{R} Z$: la relation $\mathcal{R}$ est transitive.

Réflexive, symétrique et transitive, la relation $\mathcal{R}$ est une **relation d'équivalence** entre parties d'un même ensemble.

2°/ Classes d'équivalences particulières.

$\overline{\varnothing}$ est, par définition d'une classe d'équivalence, l'ensemble des parties Y de E qui vérifient l'égalité $A \cap \varnothing = A \cap Y$.
Comme $A \cap \varnothing$ est vide, $\overline{\varnothing}$ est l'ensemble des parties Y de E vérifiant $A \cap Y = \varnothing$.
Or $A \cap Y = \varnothing$ est équivalent à $Y \subseteq \complement_E A$ (Chapitre 2 - Exercice 2 - 5°).
Donc $\overline{\varnothing}$ est l'ensemble $\mathfrak{P}(\complement_E A)$ des parties du complémentaire de A..

$$\boxed{\overline{\varnothing} = \mathfrak{P}(\complement_E A)}$$

$\overline{E}$ est l'ensemble des parties Y de E qui vérifient l'égalité $A \cap E = A \cap Y$.
Comme $A \cap E$ est égal à A, et comme les parties Y de E qui vérifient $A = A \cap Y$ sont les parties qui contiennent A, $\overline{E}$ est l'ensemble des parties Y de E qui contiennent A.

$$\boxed{\overline{E} \text{ est l'ensemble des parties de } E \text{ qui contiennent } A.}$$

$\overline{A}$ est l'ensemble des parties Y de E qui vérifient l'égalité $A \cap A = A \cap Y$.
Comme $A \cap A$ est égal à A, et comme les parties Y de E qui vérifient $A = A \cap Y$ sont les parties qui contiennent A, $\overline{A}$ est l'ensemble des parties Y de E qui contiennent A, c'est $\overline{E}$.

$$\boxed{\overline{A} = \overline{E} \text{ est l'ensemble des parties de } E \text{ qui contiennent } A.}$$

$\overline{\complement_E A}$ est l'ensemble des parties Y de E qui vérifient l'égalité $A \cap \complement_E A = A \cap Y$.
Comme $A \cap \complement_E A$ est vide, et comme les parties Y de E qui vérifient $\varnothing = A \cap Y$ sont les parties contenues dans $\complement_E A$, $\overline{\complement_E A}$ est l'ensemble des parties Y de E qui ne rencontrent pas A, c'est l'ensemble $\mathfrak{P}(\complement_E A) = \overline{\varnothing}$.

$$\boxed{\overline{\complement_E A} = \overline{\varnothing} = \mathfrak{P}(\complement_E A)}$$

3°/ Représentant contenu dans A.

Pour une partie quelconque X de E, notons B l'intersection de A et X : $B = A \cap X$.
B est contenu dans A, puisque tout élément de B appartient à A, par définition de l'intersection.

Montrons que la relation $B \mathcal{R} X$ est vraie.

$$A \cap B = A \cap (A \cap X) = (A \cap A) \cap X = A \cap X$$

C'est la relation $B \mathcal{R} X$.
Elle montre que B et X ont la **même classe d'équivalence** modulo $\mathcal{R}$.
Cette relation peut s'écrire $\overline{B} = \overline{A \cap X} = \overline{X}$.
Donc B est un représentant de $\overline{X}$ et ce **représentant est contenu dans A**.

Montrons maintenant l'**unicité** d'un représentant de $\overline{X}$ contenu dans A.

Soit C un autre représentant de $\overline{X}$ contenu dans A.
On a :

$$C = A \cap C = A \cap X = A \cap B = B.$$

Ainsi :

$\boxed{B = A \cap X \text{ est l'unique représentant de } \overline{X} \text{ contenu dans } A.}$

4°/ Bijection.

L'application $f : \overline{X} \to A \cap X$, associe à une classe d'équivalence l'unique représentant de $\overline{X}$ contenu dans A.
C'est donc bien une application de $(\mathcal{P}(E)) / \mathcal{R}$ dans $\mathcal{P}(A)$.

Soit g l'application de $\mathcal{P}(A)$ dans $(\mathcal{P}(E)) / \mathcal{R}$ qui, à une partie de A associe sa classe d'équivalence modulo $\mathcal{R}$.

Pour toute partie B de A, on a :

$$(f \circ g)(B) = f(g(B))) = f(\overline{B}) = A \cap B = B.$$

Pour toute classe d'équivalence $\overline{X} \in (\mathcal{P}(E)) / \mathcal{R}$, on a :

$$(g \circ f)(\overline{X}) = g(f(\overline{X})) = g(A \cap X) = \overline{A \cap X} = \overline{X}.$$

Ces relations, qui peuvent s'écrire :

$$f \circ g = Id_{\mathcal{P}(A)}$$
$$g \circ f = Id_{\mathcal{P}(E)/\mathcal{R}}$$

Ces relations montrent que f et g sont sections et rétractions l'une de l'autre : ce sont donc des bijections réciproques l'une de l'autre.

$\boxed{f \text{ est une bijection de } (\mathcal{P}(E)) / \mathcal{R} \text{ sur } \mathcal{P}(A).}$

Chapitre 5. Relations d'équivalence.

Enoncés.

Exercice 2. Equivalence de nombres premiers ?

Soit $\mathbb{P}^*$ l'ensemble des nombres premiers strictements supérieurs à 2.
On considère la relation $\mathcal{R}$ entre deux éléments de $\mathbb{P}^*$ définie par :

$$p \mathcal{R} q \Leftrightarrow \frac{p+q}{2} \in \mathbb{P}^*.$$

La relation $\mathcal{R}$ est-elle réflexive, symétrique, transitive ?

Solution.

1°/ Réflexivité.

Soit $p \in \mathbb{P}^*$, alors $\frac{p+p}{2} = p \in \mathbb{P}^*$.

On a donc $p \mathcal{R} p$ et la relation $\mathcal{R}$ est réflexive.

La relation $\mathcal{R}$ est réflexive.

2°/ Symétrie.

Soient p et q des éléments de $\mathbb{P}^*$.
Par commutativité de l'addition, on obtient :

$$p \mathcal{R} q \Leftrightarrow \frac{p+q}{2} \in \mathbb{P}^* \Leftrightarrow \frac{q+p}{2} \in \mathbb{P}^* \Leftrightarrow q \mathcal{R} p$$

et ceci montre que la relation $\mathcal{R}$ est symétrique.

La relation $\mathcal{R}$ est symétrique.

3°/ Transitivité.

Soient p, q, r des éléments de $\mathbb{P}^*$ vérifiant : $\frac{p+q}{2} \in \mathbb{P}^*$ et $\frac{q+r}{2} \in \mathbb{P}^*$.

Les premiers éléments de $\mathbb{P}^*$ vérifiant $\frac{3+q}{2} \in \mathbb{P}^*$, sont {3, 7, 11, 19, 23, 31, 43}.

Les premiers éléments de $\mathbb{P}^*$ vérifiant $\frac{7+r}{2} \in \mathbb{P}^*$, sont {3, 7, 19, 31}.

11 vérifie $\frac{3+11}{2} = 7 \in \mathbb{P}^*$, mais ne vérifie pas $\frac{7+11}{2} = 9 \in \mathbb{P}^*$.
On a donc 11 $\mathcal{R}$ 3 et 3 $\mathcal{R}$ 7, mais pas 11 $\mathcal{R}$ 7.

p $\mathcal{R}$ *q* et *q* $\mathcal{R}$ *r* n'entraînent pas *p* $\mathcal{R}$ *r*.

La relation $\mathcal{R}$ est n'est pas transitive.

Chapitre 5. Relations d'équivalence.

Enoncés.

Exercice 3. Equivalence de parties.

Soit E un ensemble.
On définit dans l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties de E, la relation $\mathcal{R}$, en posant, pour tout couple (A, B) de parties de E :

$$A \mathcal{R} B \Leftrightarrow (A \cap \complement_E B) \cup (B \cap \complement_E A) \text{ est un ensemble fini ayant un nombre pair d'éléments.}$$

Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence dans $\mathcal{P}(E)$.

Solution.

Remarque préliminaire.

$(A \cap \complement_E B) \cup (B \cap \complement_E A)$ est la **somme**, ou **différence symétrique**, $A + B$, ensemble des éléments de E qui appartient à A ou à B, mais pas aux deux.

$$A + B = (A \cap \complement B) \cup (\complement A \cap B)$$

Cette différence symétrique a déjà été étudiée dans Chapitre 2 - Exercice 4.
En particulier, $A + B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \cup B) \cap ((\complement A) \cup (\complement B))$ est contenu dans $A \cup B$ (Chapitre 2 - Exercice 4 - 7°)

La relation $A \mathcal{R} B$ s'écrit alors ***A + B est un ensemble fini possédant un nombre pair d'éléments***.

1°/ Réflexivité.

$A + A = \emptyset$ (Chapitre 2 - Exercice 4 - 4°) : c'est donc un ensemble fini contenant 0 élément, donc un ensemble fini à nombre pair d'éléments.
Autrement la relation $A \mathcal{R} A$ est vraie.

La relation $\mathcal{R}$ est réflexive.

2°/ Symétrie.

$A + B = B + A$ (Chapitre 2 - Exercice 4 - 1°).
Donc dire que $A + B$ contient un nombre fini pair d'éléments, c'est la même chose que dire que $B + A$ contient un nombre fini pair d'éléments.

La relation $\mathcal{R}$ est symétrique.

3°/ Transitivité.

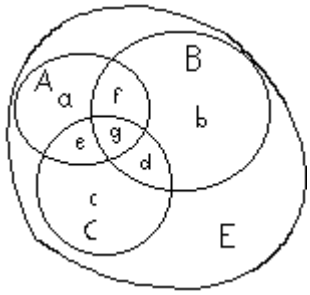
$$(A + B) + (B + C) = A + (B + B) + C = A + \emptyset + C = A + C$$

$A + C = (A + B) + (B + C)$ est contenu dans $(A + B) \cup (B + C)$ (cf Remarque préliminaire).
$A \mathcal{R} B \Rightarrow A + B$ est un ensemble fini à nombre pair d'éléments.
$B \mathcal{R} C \Rightarrow B + C$ est un ensemble fini à nombre pair d'éléments.
$(A + B) \cup (B + C)$, réunion de deux ensembles finis, est un ensemble fini.
Donc $A + C$, contenu dans $(A + B) \cup (B + C)$, est une partie d'un ensemble fini, c'est un ensemble fini.

Reste à démontrer que le nombre fini d'éléments de $A + C$ est pair.

Posons

$a = A \cap \complement_E (B \cup C)$
$b = B \cap \complement_E (C \cup A)$
$c = C \cap \complement_E (A \cup B)$
$d = B \cap C \cap \complement_E A$
$e = C \cap A \cap \complement_E B$
$f = A \cap B \cap \complement_E C$
$g = A \cap B \cap C$



$\{a, b, c, d, e, f, g\}$ forme un recouvrement de $A \cup B \cup C$ par des parties mutuellement disjointes.
Ce serait une partition si aucune de ces parties n'était vide, ce qui n'est pas assuré.

On peut décomposer chacune des trois parties A, B, C, en réunion de 4 parties mutuellement disjointes :

$$A = a \cup e \cup f \cup g$$
$$B = b \cup d \cup f \cup g$$
$$C = c \cup d \cup e \cup g$$

$$A + B = a \cup e \cup b \cup d$$
$$B + C = b \cup f \cup c \cup e$$
$$A + C = a \cup f \cup c \cup d$$

Cette décomposition des parties finies $A + B$, $B + C$, $A + C$, en parties mutuellement disjointes, montre que les parties a, b, c, d, e, f, de E sont des parties finies.
Notons n_a, n_b, n_c, n_d, n_e, n_f, leurs nombres d'éléments.

$n_a + n_b + n_d + n_e$, nombre d'éléments de $A + B$, est fini et pair
$n_b + n_c + n_e + n_f$, nombre d'éléments de $B + C$, est fini et pair

Par différence, $n_a + n_d - n_c - n_f$ est pair.
$n_a + n_d - n_c - n_f + 2\,(n_c + n_f)$, somme de deux nombres pairs, est pair.
Donc $n_a + n_d + n_c + n_f$, nombre d'éléments de $A + C$, est pair.
$A + C$ possède donc un nombre fini et pair d'éléments.

Ceci achève de prouver que la relation $A \mathcal{R} C$ est vraie.

La relation $\mathcal{R}$ est transitive.

La relation $\mathcal{R}$, réflexive, symétrique et transitive, est une relation d'équivalence.

Chapitre 5. Relations d'équivalence.

Enoncés.

Exercice 4. Equipotence.

Soient E et F deux ensembles. On dit que E et F sont **équipotents** si, et seulement si, il existe une bijection de E sur F. Montrer que, dans tout ensemble $\mathcal{E}$ d'ensembles, la relation d'équipotence est une relation d'équivalence.	

Solution.

1°/ Réflexivité.

L'application identique de E est une bijection de E sur E.
Donc E et E sont équipotents.

La relation d'équipotence est réflexive.

2°/ Symétrie.

Si f est une bijection de E sur F, l'application réciproque f^{-1} existe et c'est une bijection de F sur E.
S'il existe une bijection de E sur F, alors il existe une bijection de F sur E.

La relation d'équipotence est symétrique.

3°/ Transitivité.

L'application composée de deux bijections est une bijection.
S'il existe une bijection de E sur F et une bijection de F sur G, alors il existe une bijection de E sur G.

La relation d'équipotence est transitive.

La relation d'équipotence, réflexive, symétrique et transitive, dans tout ensemble $\mathcal{E}$ d'ensembles, est une relation d'équivalence dans cet ensemble.

Cette relation d'équivalence sert à définir les cardinaux.

Chapitre 5. Relations d'équivalence.

Enoncés.

Exercice 5. Equivalence de nombres réels.

Soit R, la relation définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$x\ R\ y \Leftrightarrow x^2 - y^2 = x - y.$$

1°/ Montrer que R est une relation d'équivalence.
2°/ Déterminer la classe d'équivalence de x pour tout réel x.
3°/ Déterminer l'ensemble quotient.

Solution.

1°/ Réflexivité.

Soit x un élément quelconque de $\mathbb{R}$.
$x^2 - x^2 = 0 = x - x$
Donc $(\forall\ x \in \mathbb{R})\ (x\ R\ x)$.

La relation R est réflexive.

2°/ Symétrie.

Soit x et y deux éléments quelconques de $\mathbb{R}$, vérifiant $x\ R\ y$.
$y^2 - x^2 = -(x^2 - y^2) = -(x - y) = y - x$.
$(\forall\ x \in \mathbb{R})(\forall\ y \in \mathbb{R})\ (x\ R\ y \Rightarrow y\ R\ x)$.

La relation R est symétrique.

3°/ Transitivité.

Soit x, y et z trois éléments quelconques de $\mathbb{R}$, vérifiant $x\ R\ y$ et $y\ R\ z$.
$x^2 - z^2 = (x^2 - y^2) + (y^2 - z^2) = (x - y) + (y - z) = x - z$.
$(\forall\ x \in \mathbb{R})(\forall\ y \in \mathbb{R})(\forall\ z \in \mathbb{R})\ (x\ R\ y$ et $y\ R\ z \Rightarrow x\ R\ z)$.

La relation R est transitive.

La relation R, réflexive, symétrique et transitive, est une **relation d'équivalence** dans $\mathbb{R}$.

4°/ Classe d'équivalence d'un nombre réel.

Pour un nombre réel x, la classe d'équivalence x modulo R est l'ensemble des nombres réels y vérifiant la relation $x^2 - y^2 = x - y$.
Cette relation est équivalente à $(x - y)(x + y) = (x - y)$, ou encore $(x - y)(x + y - 1) = 0$.
Cette équation possède deux solutions $y = x$ et $y = 1 - x$.

La classe d'équivalence d'un réel x est l'ensemble $\{x, 1 - x\}$, qui se réduit à un seul élément lorsque $x = \frac{1}{2}$.

5°/ Ensemble quotient.

L'ensemble quotient est un ensemble de représentants des classes d'équivalence.
Comme les classes d'équivalences sont formées, en général, de deux nombres réels symétriques par rapport à $\frac{1}{2}$, on peut prendre pour ensemble quotient l'intervalle fermé $[\frac{1}{2}, +\infty[$. L'intervalle doit être fermé pour inclure le seul représentant de la classe d'équivalence de $\frac{1}{2}$.

L'ensemble quotient de $\mathbb{R}$ modulo R est l'intervalle fermé $[\frac{1}{2}, +\infty[$.

Chapitre 5. Relations d'équivalence.

Enoncés.

Exercice 6. Equivalence dans $\mathbb{N}^2$.

Soit T, la relation sur $\mathbb{N}^2$ définie par : $(a, b)\ T\ (c, d)$ si et seulement si $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$. 1°/ Montrer que T est une relation d'équivalence sur $\mathbb{N}^2$. 2°/ Déterminer les classes d'équivalence de (0, 0), (1, 0), (0, 1), (1, 2).	

Solution.

1°/ Réflexivité.

Soit (a, b) un élément quelconque de $\mathbb{N}^2$.
$a^2 + b^2 = a^2 + b^2$, par réflexivité de l'égalité.
Donc $(\forall\ (a, b) \in \mathbb{N}^2)\ ((a, b)\ T\ (a, b))$.

La relation T est réflexive.

2°/ Symétrie.

Soit (a, b) et (c, d) deux éléments quelconques de $\mathbb{N}^2$, vérifiant $(a, b)\ T\ (c, d)$.
$a^2 + b^2 = c^2 + d^2$, donc $c^2 + d^2 = a^2 + b^2$, par symétrie de l'égalité.
$(\forall\ (a, b) \in \mathbb{N}^2)(\forall\ (c, d) \in \mathbb{N}^2)\ ((a, b)\ T\ (c, d) \Rightarrow (c, d)\ T\ (a, b))$.

La relation T est symétrique.

3°/ Transitivité.

Soit (a, b), (c, d) et (e, f) trois éléments quelconques de $\mathbb{N}^2$, vérifiant $(a, b)\ T\ (c, d)$ et $(c, d)\ T\ (e, f)$.
$a^2 + b^2 = c^2 + d^2$ et $c^2 + d^2 = e^2 + f^2 \Rightarrow a^2 + b^2 = e^2 + f^2$, par transitivité de l'égalité.
$(\forall\ (a, b) \in \mathbb{N}^2)(\forall\ (c, d) \in \mathbb{N}^2)(\forall\ (e, f) \in \mathbb{N}^2)\ ((a, b)\ T\ (c, d)$ et $(c, d)\ T\ (e, f). \Rightarrow (a, b)\ T\ (e, f))$.

La relation T est transitive.

La relation T, réflexive, symétrique et transitive, est une **relation d'équivalence** dans $\mathbb{N}^2$.

4°/ Classes d'équivalences de couples.

La classe d'équivalence de (0, 0) est l'ensemble des couples d'entiers (a, b) vérifiant $a^2 + b^2 = 0^2 + 0^2 = 0$.
Cet ensemble se réduit au seul couple (0, 0).

La classe d'équivalence de (1, 0) est l'ensemble des couples d'entiers (a, b) vérifiant $a^2 + b^2 = 1^2 + 0^2 = 1$.
Cet ensemble est réduit au couple (1, 0) et au couple (0, 1).

Comme (0, 1) est équivalent modulo T à (1, 0), sa classe d'équivalence est celle de (1, 0).

La classe d'équivalence de (1, 2) est l'ensemble des couples d'entiers (a, b) vérifiant $a^2 + b^2 = 1^2 + 2^2 = 5$.
Cet ensemble est réduit aux couples (1, 2) et (2, 1).

Résumons ces résultats dans un tableau :

Elément	Classe
(0,0)	{(0,0)}
(1,0)	{(1,0),(0,1)}
(0,1)	{(1,0),(0,1)}
(1,2)	{(1,2),(2,1)}

Exercices

Relations d'ordre.

1. **Définition d'une relation d'ordre.**
2. **Ordre total.**
3. **Bon ordre.**
4. **Max, Min, majorant, minorant, Sup, Inf, élément maximal, élément minimal.**
5. **Treillis.**

1 Définition d'une relation d'ordre.

Une relation d'ordre $\mathcal{R}$ dans un ensemble E est une relation binaire $\mathcal{R}(x, y)$ vérifiant :

— **Réflexivité** : $\mathcal{R}(x, x)$, pour tout $x \in E$.
— **Antisymétrie** : $\mathcal{R}(x, y)$ et $\mathcal{R}(y, x) \Rightarrow x = y$, pour tout $x \in E$ et pour tout $y \in E$.
— **Transitivité** : $\mathcal{R}(x, y)$ et $\mathcal{R}(y, z) \Rightarrow \mathcal{R}(x, z)$, pour tout $x \in E$, pour tout $y \in E$ et pour tout $z \in E$.

HAUT

2 Ordre total.

Etant donné un ensemble E et une relation d'ordre $\mathcal{R}$ sur E, on dit que $\mathcal{R}$ est un **ordre total** sur E si, et seulement si, deux éléments quelconques de E sont comparables.
La relation "$x \mathcal{R} y$ **ou** $y \mathcal{R} x$" est vraie, quels que soient x et y dans E.
Un ensemble muni d'une relation d'ordre total est dit **totalement ordonné**.

HAUT

3 Bon ordre.

Etant donné un ensemble E et une relation d'ordre $\mathcal{R}$ sur E, on dit que $\mathcal{R}$ est un **bon ordre** sur E si, et seulement si, toute partie *non vide* de E possède un **plus petit élément**.
Si $\mathcal{R}$ est un **bon ordre** sur E, on dit que E est un ensemble **bien ordonné** par $\mathcal{R}$.

HAUT

4 Max, Min, majorant, minorant, Sup, Inf, élément maximal, élément minimal.

HAUT

Etant donné un ensemble E muni d'une relation d'ordre $\mathcal{R}$ et une partie A de E :

- On appelle **maximum** de A et on note $Max\ (A)$ tout élément $x \in A$ vérifiant :
  $(\forall\ y \in E)(y \in A \Rightarrow y\ \mathcal{R}\ x)$
  S'il existe, le maximum de A est unique.

- On appelle **minimum** de A et on note $Min\ (A)$ tout élément $x \in A$ vérifiant :
  $(\forall\ y \in E)(y \in A \Rightarrow x\ \mathcal{R}\ y)$
  S'il existe, le minimum de A est unique.

- On appelle **majorant** de A tout élément $x \in E$ vérifiant :
  $(\forall\ y \in E)(y \in A \Rightarrow y\ \mathcal{R}\ x)$
  Le maximum est un majorant qui appartient à A.

- On appelle **minorant** de A tout élément $x \in E$ vérifiant :
  $(\forall\ y \in E)(y \in A \Rightarrow x\ \mathcal{R}\ y)$
  Le minimum est un minorant qui appartient à A.

- On appelle **borne supérieure** de A et on note $Sup\ (A)$ tout élément $x \in E$ vérifiant :
  $(\forall\ z \in E)((\forall\ y \in E)(y \in A \Rightarrow y\ \mathcal{R}\ z) \Rightarrow x\ \mathcal{R}\ z)$
  Si elle existe, la borne supérieure de A est unique : c'est le minimum de l'ensemble des majorants.
  Si la borne supérieure appartient à A, c'est un maximum.

- On appelle **borne inférieure** de A et on note $Inf\ (A)$ tout élément $x \in E$ vérifiant :
  $(\forall\ z \in E)((\forall\ y \in E)(y \in A \Rightarrow z\ \mathcal{R}\ y) \Rightarrow z\ \mathcal{R}\ x)$
  Si elle existe, la borne inférieure de A est unique : c'est le maximum de l'ensemble des minorants.
  Si la borne inférieure appartient à A, c'est un minimum.

- On appelle **élément maximal** de A tout élément $x \in A$ vérifiant :
  $(\forall\ y \in E)(y \in A \text{ et } x\ \mathcal{R}\ y \Rightarrow x = y)$
  Le maximum est un élément maximal.

- On appelle **élément minimal** de A tout élément $x \in A$ vérifiant :
  $(\forall\ y \in E)(y \in A \text{ et } y\ \mathcal{R}\ x \Rightarrow x = y)$
  Le minimum est un élément minimal.

HAUT

5 Treillis.

Etant donné un ensemble *E* muni d'une relation d'ordre $\mathcal{R}$, on dit que *E* est un **treillis** si, et seulement si, toute partie finie non vide de *E* admet une borne supérieure et une borne inférieure.

HAUT

Chapitre 6. Relations d'ordre.

Exercices

Exercice 1. Divisibilité.
Exercice 2. Puissance.
Exercice 3. Théorème du Minimax.

Exercice 1. Divisibilité.

On définit dans $\mathbb{N}^*$ la relation $\langle\langle$ en posant, pour tout couple $(x, y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$:

$$x \langle\langle y \Leftrightarrow \text{Il existe } k \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } y = k\,x.$$

1°/ Montrer que la relation $\langle\langle$ est une relation d'ordre dans $\mathbb{N}^*$.
On considère dans la suite que $\mathbb{N}^*$ est ordonné par la relation $\langle\langle$.
2°/ $\mathbb{N}^*$ possède-t'il un élément maximum ? un élément minimum ?
3°/ Soit $A = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. A possède-t'il un élément maximum ? un élément minimum ? une borne supérieure ? une borne inférieure ? des éléments maximaux ? des éléments minimaux ? Quands ils existent, préciser la valeur de chacun d'entre eux.
4°/ Déterminer les éléments minimaux de $\mathbb{N}^* - \{1\}$.

Solution

HAUT

Exercice 2. Puissance.

On définit dans $\mathbb{N}^*$ la relation $\langle\langle$ en posant, pour tout couple $(x, y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$:

$$x \langle\langle y \Leftrightarrow \text{Il existe } n \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } y = x^n.$$

1°/ Montrer que la relation $\langle\langle$ est une relation d'ordre dans $\mathbb{N}^*$.
On considère dans la suite que $\mathbb{N}^*$ est ordonné par la relation $\langle\langle$.
2°/ Soit $A = \{2, 4, 16\}$. Déterminer $Max\ (A)$ et $Min\ (A)$.
3°/ Soit $B = \{2, 3\}$. Montrer que B ne possède ni majorant, ni minorant.
4°/ Soit $C = \{2, 3, 4\}$. Montrer que 3 et 4 sont des éléments maximaux dans C et que 2 et 3 sont des éléments minimaux dans C.
5°/ Soit $D = \{4, 8\}$. Déterminer $Sup\ (D)$ et $Inf\ (D)$.

Solution

HAUT

Exercice 3. Théorème du Minimax.

Soit E un ensemble ordonné par une relation notée $\langle\langle$, dans lequel toute partie finie non vide admet une borne supérieure et une borne inférieure (**treillis**).
Soit $(x_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$ une famille de p n éléments de E. Montrer (théorème du MINIMAX) que :

$$\underset{1\leqslant j\leqslant n}{Sup}\left(\underset{1\leqslant i\leqslant p}{Inf}\, x_{ij}\right) \langle\langle \underset{1\leqslant i\leqslant p}{Inf}\left(\underset{1\leqslant j\leqslant n}{Sup}\, x_{ij}\right)$$

Solution

HAUT

Chapitre 6. Relations d'ordre.

Enoncés.

Exercice 1. Divisibilité.

On définit dans $\mathbb{N}^*$ la relation $\langle\langle$ en posant, pour tout couple $(x, y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$:

$$x \langle\langle y \Leftrightarrow \text{Il existe } k \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } y = k\,x.$$

1°/ Montrer que la relation $\langle\langle$ est une relation d'ordre dans $\mathbb{N}^*$.
On considère dans la suite que $\mathbb{N}^*$ est ordonné par la relation $\langle\langle$.
2°/ $\mathbb{N}^*$ possède-t'il un élément maximum ? un élément minimum ?
3°/ Soit $A = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. A possède-t'il un élément maximum ? un élément minimum ? une borne supérieure ? une borne inférieure ? des éléments maximaux ? des éléments minimaux ? Quands ils existent, préciser la valeur de chacun d'entre eux.
4°/ Déterminer les éléments minimaux de $\mathbb{N}^* - \{1\}$.

Solution.

1°/ Relation d'ordre.

a) Réflexivité.

Pour $k = 1 \in \mathbb{N}^*$, la relation $x = x$ montre que la relation $x \langle\langle x$ est vraie, pour tout $x \in \mathbb{N}^*$.

La relation $\langle\langle$ est réflexive.

b) Antisymétrie.

Les relations $x \langle\langle y$ et $y \langle\langle x$ entraînent l'existence d'un $k \in \mathbb{N}^*$ et d'un $k' \in \mathbb{N}^*$ vérifiant $y = k\,x$ et $x = k'\,y$.
De sorte que l'on a : $y = k\,k'\,y$, soit $y\,(1 - k\,k') = 0$.
La relation $\langle\langle$ n'est étudiée que dans $\mathbb{N}^*$: y est donc différent de 0.
La relation $y\,(1 - k\,k') = 0$, avec $y \neq 0$, entraîne $k\,k' = 1$.
Comme k et k' sont des entiers strictement positifs, ce n'est possible que pour $k = k' = 1$.
Si $k' = 1$, c'est que $x = y$.
Les relations $x \langle\langle y$ et $y \langle\langle x$ entraînent $x = y$.

La relation $\langle\langle$ est antisymétrique.

c) Transitivité.

Les relations $x \langle\langle y$ et $y \langle\langle z$ entraînent l'existence d'un $k \in \mathbb{N}^*$ et d'un $k' \in \mathbb{N}^*$ vérifiant $y = k\,x$ et $z = k'\,y$.

De sorte que l'on a : $z = k' k x$, soit, puisque $k' k$ est un élément de $\mathbb{N}^*$, $x \ll z$.
Les relations $x \ll y$ et $y \ll z$ entraînent $x \ll z$.

La relation $\ll$ est transitive.

Réflexive, antisymétrique et transitive, la relation "Il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $y = k x$." est une relation d'ordre dans $\mathbb{N}^*$.
Cette relation peut s'énoncer aussi : "y est un multiple de x", ou "x divise y".
On l'appelle "relation de divisibilité" et "$x \ll y$" se lit "**x divise y**".

2°/ Maximum, minimum.

Un majorant de $\mathbb{N}^*$ est un entier, élément de $\mathbb{N}^*$, qui serait multiple de tous les entiers naturels non nuls : il n'en existe pas, puisqu'il y a une infinité de nombres entiers non nuls.
S'il n'y a pas de majorant, il n'existe pas, non plus, de maximum, puisque le maximum d'un ensemble ordonné, quand il existe, est le plus petit des majorants.

Un minorant de $\mathbb{N}^*$ est un entier, élément de $\mathbb{N}^*$, dont tous les entiers naturels non nuls seraient multiples: il n'en existe qu'un, c'est 1.
Ce minorant unique est donc une borne inférieure (plus grand des minorants), et comme 1 appartient à $\mathbb{N}^*$, cette borne inférieure est un minimum.

$\mathbb{N}^*$ possède un minimum qui est 1, mais n'a pas de maximum.

3°/ Ensemble $A = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.

a) Maximum.

Les majorants de $A = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, sont les entiers multiples non nuls de tous les éléments de A.
Un maximum de A serait un majorant appartenant à A, ce serait donc un entier multiple de tous les autres.
Un maximum de A pour la relation $\ll$ serait donc aussi le plus grand élément de A pour la relation d'**ordre naturel**.
Or le plus grand élément de A pour la relation d'ordre naturel est 10.
10 n'est pas multiple de 9 : donc 10 n'est pas un maximum pour la relation de divisibilité.

A ne possède pas de maximum.

b) Minimum.

Un minimum de A serait un élément de A qui diviserait tous les autres éléments de A.
Si A possédait un minimum, ce serait donc aussi le plus petit élément de A pour l'**ordre naturel**.
Or le plus petit élément de A pour la relation d'ordre naturel est 4.
4 ne divise pas 5 : donc 4 n'est pas un minimum pour la relation de divisibilité.

A ne possède pas de minimum.

c) Borne supérieure.

La borne supérieure est le plus petit des majorants : c'est donc un entier divisant tous les entiers multiples

de tous les éléments de *A* et qui est lui-même multiple de tous les éléments de *A*.
C'est ce qu'on appelle le **plus petit multiple commun**, ou P.P.C.M.
On l'obtient en décomposant les éléments de *A* en facteurs premiers : 2^2, 5, 2×3, 7, 2^3, 3^2, 2×5.
Le PPCM s'obtient alors en prenant les puissances maxima des facteurs premiers 2, 3, 5, 7, dans les éléments de *A*

$$\text{PPCM} = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7 = 2\,520.$$

A possède une borne supérieure qui est 2 520.

d) Borne inférieure.

La borne supérieure est le plus grand des minorants : c'est donc un entier multiple de chacun des entiers qui divisent tous les éléments de *A* et qui divise lui-même tous les éléments de *A*.
Or il y a un seul entier divisant tous les éléments de *A*, c'est 1, puisque, par exemple, 5 et 7 qui appartiennent à *A*, sont premiers, donc premiers entre eux : leur seul diviseur commun est 1.

A possède une borne inférieure qui est 1.

e) Eléments maximaux.

Un élément maximal de *A* est un élément de *A* qui n'a, dans *A*, pas d'autre multiple que lui-même.
Les éléments maximaux de {4, 5, 6, 7, 8, 9, 10} sont donc {10, 9, 8, 7, 6}.

Les éléments maximaux de *A* sont {10, 9, 8, 7, 6}.

f) Eléments minimaux.

Un élément minimal de *A* est un élément de *A* qui n'a, dans *A*, pas d'autre diviseur que lui-même.
Les éléments minimaux de {4, 5, 6, 7, 8, 9, 10} sont donc {4, 5, 6, 7, 9}.

Les éléments minimaux de *A* sont {4, 5, 6, 7, 9}.

4°/ Eléments minimaux de $\mathbb{N}^* - \{1\}$.

Un élément minimal de $\mathbb{N}^* - \{1\}$ est, s'il en existe, un élément de $\mathbb{N}^* - \{1\}$ qui n'a, dans $\mathbb{N}^* - \{1\}$, pas d'autre diviseur que lui-même.
Or les entiers qui n'ont pas d'autre diviseur qu'eux-même et 1 sont les nombres premiers.
Donc :

Les éléments minimaux de $\mathbb{N}^* - \{1\}$ sont les nombres premiers.

Chapitre 6. Relations d'ordre.

Enoncés.

Exercice 2. Puissance.

On définit dans $\mathbb{N}^*$ la relation $\langle\langle$ en posant, pour tout couple $(x, y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$:

$$x \langle\langle y \Leftrightarrow \text{Il existe } n \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } y = x^n.$$

1°/ Montrer que la relation $\langle\langle$ est une relation d'ordre dans $\mathbb{N}^*$.
On considère dans la suite que $\mathbb{N}^*$ est ordonné par la relation $\langle\langle$.
2°/ Soit $A = \{2, 4, 16\}$. Déterminer $Max\ (A)$ et $Min\ (A)$.
3°/ Soit $B = \{2, 3\}$. Montrer que B ne possède ni majorant, ni minorant.
4°/ Soit $C = \{2, 3, 4\}$. Montrer que 3 et 4 sont des éléments maximaux dans C et que 2 et 3 sont des éléments minimaux dans C.
5°/ Soit $D = \{4, 8\}$. Déterminer $Sup\ (D)$ et $Inf\ (D)$.

Solution.

1°/ Relation d'ordre.

a) Réflexivité.

La relation $x = x^1$, avec $1 \in \mathbb{N}^*$ montre que l'on a $x \langle\langle x$, pour tout $x \in \mathbb{N}^*$.

La relation "Il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $y = x^n$." est réflexive.

b) Antisymétrie.

Les relations $x \langle\langle y$ et $y \langle\langle x$ entraînent l'existence d'un $n \in \mathbb{N}^*$ et d'un $n' \in \mathbb{N}^*$ vérifiant $y = x^n$ et $x = y^{n'}$.
De sorte que l'on a : $y = (y^{n'})^n = y^{n'n}$, soit $(n\,n' - 1)\ ln\ y = 0$.
Ceci est possible dans deux cas :
— soit $ln\ y = 0$, et dans ce cas $y = 1$ et $x = y^{n'} = 1^{n'} = 1 = y$.
— soit $n\,n' = 1$, ce qui n'est possible, s'agissant d'entiers strictement positifs, que si $n = n' = 1$ et, dans ce cas $x = y^{n'} = y^1 = y$.
Dans les deux cas, les relations $x \langle\langle y$ et $y \langle\langle x$ entraînent $x = y$.

La relation "Il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $y = x^n$." est antisymétrique.

c) Transitivité.

Les relations $x \langle\langle y$ et $y \langle\langle z$ entraînent l'existence d'un $n \in \mathbb{N}^*$ et d'un $n' \in \mathbb{N}^*$ vérifiant $y = x^n$ et $z = y^{n'}$.

De sorte que l'on a : $z = (x^n)^{n'} = x^{n\,n'}$.
Or $n \in \mathbb{N}^*$ et $n' \in \mathbb{N}^*$ entraînent $n\,n' \in \mathbb{N}^*$.
Donc la relation $x \langle\langle z$ est vraie dès que les relations $x \langle\langle y$ et $y \langle\langle z$ sont vraies.

La relation "Il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $y = x^n$." est transitive.

Réflexive, antisymétrique et transitive, la relation "Il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $y = x^n$." est une relation d'ordre dans $\mathbb{N}^*$.
Cette relation peut s'énoncer aussi : "*y* est une puissance entière non nulle de *x*".

2°/ Ensemble *A* = {2, 4, 16}.

a) Maximum.

Un élément maximum est une puissance entière non nulle de tous les éléments de l'ensemble, appartenant à l'ensemble.
S'il en existe un, ce ne peut donc être que le plus grand élément au sens de l'ordre naturel, puisque, puissance entière non nulle de tous les éléments de l'ensemble, c'est, en particulier, un multiple non nul de tous les éléments de l'ensemble.
$A = \{2, 4, 16\}$. $16 = 2^4 = 4^2 = 16^1$.
16 est une puissance entière non nulle de tous les éléments de *A* :

A possède un maximum qui est 16.

b) Minimum.

Un élément minimum de *A* est un élément de *A* tel que tous les éléments de *A* soient des puissances entières non nulles de cet élément.
Les relations $2 = 2^1$, $4 = 2^2$, $16 = 2^4$, montrent que tous les éléments de *A* sont des puissances entières non nulles de 2.

A possède un minimum qui est 2.

3°/ Ensemble *B* = {2, 3}.

Un majorant de $B = \{2, 3\}$ serait un nombre entier qui est, à la fois, une puissance entière non nulle de 2 et une puissance entière non nulle de 3.
Il n'en existe aucun.
En effet, s'il en existait un, on pourrait l'écrire sous deux formes : $2^n = 3^{n'}$, avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $n' \in \mathbb{N}^*$.
2^n est un nombre pair,
La **formule du binôme** donne :
$3^{n'} = (2 + 1)^{n'} = \sum_{k=0}^{k=n'} \binom{n'}{k} 2^k\, 1^{n'-k} = 1 + 2 \sum_{k=1}^{k=n'} \binom{n'}{k} 2^{k-1}$ est un nombre impair.
Un nombre pair ne peut pas être égal à un nombre impair (le reste de la division par 2 est 0 dans un cas, 1 dans l'autre).
Donc, on ne peut pas avoir $2^n = 3^{n'}$, avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $n' \in \mathbb{N}^*$.
Il n'existe donc aucun majorant de $B = \{2, 3\}$.

B ne possède aucun majorant.

Un minorant de $B = \{2, 3\}$ serait un nombre entier dont 2 et 3 seraient des puissances entières non nulles.
En particulier, un minorant serait un diviseur commun différent de 1.
Il n'en existe aucun, puisque 2 et 3 sont premiers entre eux (**étrangers**).

B ne possède aucun minorant.

Les entiers 2 et 3 ne sont pas puissance l'un de l'autre : ils ne sont pas comparables par la relation d'ordre.
L'ordre défini par cette relation n'est donc **pas un ordre total**.

4°/ Ensemble $C = \{2, 3, 4\}$.

a) Eléments maximaux.

Les éléments maximaux sont les éléments de l'ensemble n'ayant pas d'autre puissance entière non nulle d'eux-mêmes qu'eux-mêmes dans l'ensemble :

$$x \text{ maximal dans } C \Leftrightarrow x \in C \text{ et } (\forall\, y \in C)(x \langle\langle\, y \Rightarrow y = x)$$
$$x \text{ maximal dans } C \Leftrightarrow x \in C \text{ et } (\forall\, y \in C)((\exists\, n \in \mathbb{N}^*)(y = x^n) \Rightarrow y = x)$$
$$x \text{ maximal dans } C \Leftrightarrow (\forall\, y \in C)((\exists\, n \in \mathbb{N}^*)(y = x^n) \Rightarrow n = 1)$$

Dans l'ensemble $C = \{2, 3, 4\}$,

$2^2 = 4$, $(\exists\, y = 4 \in C)((\exists\, n = 2 \in \mathbb{N}^*)(y = 2^n \text{ et } n \neq 1) \Rightarrow 2$ non maximal,

2 n'est pas une puissance entière non nulle de 3,
4 n'est pas une puissance entière non nulle de 3,
3 est la seule puissance non nulle de 3, donc 3 est maximal dans C.

2 n'est pas une puissance entière non nulle de 4,
3 n'est pas une puissance entière non nulle de 4,
4 est la seule puissance entière non nulle de 4, donc 4 est maximal dans C.

Dans l'ensemble $C = \{2, 3, 4\}$, les seuls éléments maximaux sont 3 et 4.

b) Eléments minimaux.

Les éléments minimaux sont les éléments de l'ensemble qui ne sont pas une puissance entière supérieure ou égale à 2 d'un autre élément de l'ensemble.

x minimal dans $C \Leftrightarrow x \in C$ et $(\forall\, y \in C)(y \langle\langle\, x \Rightarrow y = x)$
x minimal dans $C \Leftrightarrow x \in C$ et $(\forall\, y \in C)((\exists\, n \in \mathbb{N}^*)(x = y^n) \Rightarrow y = x)$
x minimal dans $C \Leftrightarrow (\forall\, y \in C)((\exists\, n \in \mathbb{N}^*)(x = y^n) \Rightarrow n = 1)$

Dans l'ensemble $C = \{2, 3, 4\}$,

2 n'est pas une puissance entière supérieure ou égale à 2 de 3,
2 n'est pas une puissance entière supérieure ou égale à 2 de 4,
donc 2 est un élément minimal de C.

3 n'est pas une puissance entière supérieure ou égale à 2 de 2,
3 n'est pas une puissance entière supérieure ou égale à 2 de 4,
donc 3 est un élément minimal de *C*.

$4 = 2^2$, donc 4 n'est pas minimal dans *C*.

Dans l'ensemble $C = \{2, 3, 4\}$, les seuls éléments minimaux sont 2 et 3.

5°/ Ensemble $D = \{4, 8\}$.

a) Borne supérieure.

Etant donnée une partie quelconque *D* d'un ensemble ordonné *E* :

La borne supérieure de *D* est l'élément minimum de l'ensemble des majorants de tous les éléments de *D*.
La borne inférieure de *D* est l'élément maximum de l'ensemble des minorants de tous les éléments de *D*.

Si *D* possède un élément maximum, cet élément maximum est la borne supérieure de *D*.
Si *D* possède un élément minimum, cet élément minimum est la borne inférieure de *D*.

En effet, soit *M* l'élément maximum de *D*.
C'est un élément de *D* et il vérifie $x \langle\langle M$ pour tous les éléments $x \in D$.
M est donc un majorant de *D*.
Si *y* est un majorant de *D*, il vérifie $x \langle\langle y$ pour tous les éléments $x \in D$.
En particulier, pour $x = M$, on obtient $M \langle\langle y$.
Donc *M* est l'élément minimum de l'ensemble des majorants : c'est la borne supérieure de *D*.

Soit *m* l'élément maximum de *D*.
C'est un élément de *D* et il vérifie $m \langle\langle x$ pour tous les éléments $x \in D$.
m est donc un minorant de *D*.
Si *y* est un minorant de *D*, il vérifie $y \langle\langle x$ pour tous les éléments $x \in D$.
En particulier, pour $x = m$, on obtient $y \langle\langle m$.
Donc *m* est l'élément maximum de l'ensemble des minorants : c'est la borne inférieure de *D*.

Pour $D = \{4, 8\}$, 8 n'est pas une puissance de 4, donc 4 et 8 ne sont pas comparables.
4 est une puissance de 2, 8 est une puissance de 2, donc $2 \langle\langle 4$ et $2 \langle\langle 8$, 2 est un minorant de *D*.
2 est le seul minorant de *D* puisqu'il est premier donc n'est pas la puissance entière supérieure ou égale à 2 d'un nombre entier différent de lui-même.
2 est donc le plus grand minorant de *D* : c'est la borne inférieure de *D*.

D a pour borne inférieure 2.

Les majorants de *D* sont les puissances de 4 qui sont aussi des puissance de 8.
Un majorant de *D* s'écrit donc $4^n = 8^{n'}$, $2^{2n} = 2^{3n'}$, $2n = 3n'$.
3 ne divise pas 2 donc divise *n*. La plus basse valeur non nulle de *n* est 3.
2 ne divise pas 3 donc divise *n'*. La plus basse valeur non nulle de *n'* est 2.
Les majorants de *D* sont donc les nombres de la forme 2^{6k}, $k \in \mathbb{N}^*$.
Le plus petit est $2^6 = 64$.

D a pour borne supérieure 64.

Chapitre 6. Relations d'ordre.

Enoncés.

Exercice 3. Théorème du Minimax.

Soit E un ensemble ordonné par une relation notée $\langle\langle$, dans lequel toute partie finie non vide admet une borne supérieure et une borne inférieure (**treillis**).
Soit $(x_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$ une famille de p n éléments de E. Montrer (théorème du MINIMAX) que :

$$\sup_{1\leqslant j\leqslant n}\left(\inf_{1\leqslant i\leqslant p} x_{ij}\right) \langle\langle \inf_{1\leqslant i\leqslant p}\left(\sup_{1\leqslant j\leqslant n} x_{ij}\right)$$

Solution.

La démonstration va se faire en cinq points.

a) Pour tout entier naturel i, $1 \leqslant i \leqslant p$, et pour tout entier naturel j, $1 \leqslant j \leqslant n$, la famille $(x_{ij})_{1\leqslant j\leqslant n}$ est une partie finie de E, donc possède une borne supérieure $\sup_{1\leqslant j\leqslant n} x_{ij}$, qui est le plus petit des majorants de cette famille.
Pour tout indice i, $1 \leqslant i \leqslant p$, et tout indice j, $1 \leqslant j \leqslant n$, on a donc :

$$\boxed{x_{ij} \langle\langle \sup_{1\leqslant j\leqslant n} x_{ij}}$$

b) La famille $(x_{ij})_{1\leqslant i\leqslant p}$ est une partie finie de E, donc possède une borne inférieure $\inf_{1\leqslant i\leqslant p} x_{ij}$ qui est le plus grand des minorants de cette famille.
Pour tout indice i, $1 \leqslant i \leqslant p$, et tout indice j, $1 \leqslant j \leqslant n$, on a donc :

$$\boxed{\inf_{1\leqslant i\leqslant p} x_{ij} \langle\langle x_{ij}}$$

c) Les inégalités $x_{ij} \langle\langle \sup_{1\leqslant j\leqslant n} x_{ij}$ et $\inf_{1\leqslant i\leqslant p} x_{ij} \langle\langle x_{ij}$ entraînent, par transitivité,

$$\boxed{\inf_{1\leqslant i\leqslant p} x_{ij} \langle\langle \sup_{1\leqslant j\leqslant n} x_{ij}.}$$

d) La famille $\left(\sup_{1\leqslant j\leqslant n} x_{ij}\right)_{1\leqslant i\leqslant p}$ est une partie finie de E, donc possède une borne inférieure $\inf_{1\leqslant i\leqslant p}\left(\sup_{1\leqslant j\leqslant n} x_{ij}\right)$ qui est le plus grand des minorants de cette famille.

Or, pour tout indice j, $1 \leqslant j \leqslant n$, $\underset{1 \leqslant i \leqslant p}{Inf} x_{ij}$ est un minorant de la famille $\left(\underset{1 \leqslant j \leqslant n}{Sup} x_{ij} \right)_{1 \leqslant i \leqslant p}$, on a donc :

$$\underset{1 \leqslant i \leqslant p}{Inf} x_{ij} \lll \underset{1 \leqslant i \leqslant p}{Inf} \left(\underset{1 \leqslant j \leqslant n}{Sup} x_{ij} \right)$$

e) La famille $\left(\underset{1 \leqslant i \leqslant p}{Inf} x_{ij} \right)_{1 \leqslant j \leqslant n}$ est une partie finie de E, donc possède une borne supérieure $\underset{1 \leqslant j \leqslant n}{Sup} \left(\underset{1 \leqslant i \leqslant p}{Inf} x_{ij} \right)$ qui est le plus petit des majorants de la famille.

Or, $\underset{1 \leqslant i \leqslant p}{Inf} \left(\underset{1 \leqslant j \leqslant n}{Sup} x_{ij} \right)$ est un majorant de la famille $\left(\underset{1 \leqslant i \leqslant p}{Inf} x_{ij} \right)_{1 \leqslant j \leqslant n}$, donc ce majorant est plus grand que le plus petit majorant et l'on obtient l'inégalité dite du MINIMAX :

$$\underset{1 \leqslant j \leqslant n}{Sup} \left(\underset{1 \leqslant i \leqslant p}{Inf} x_{ij} \right) \lll \underset{1 \leqslant i \leqslant p}{Inf} \left(\underset{1 \leqslant j \leqslant n}{Sup} x_{ij} \right)$$

Exercices

Applications d'ensembles finis.

1. Principe de récurrence.
2. Applications d'un ensemble fini dans un ensemble fini.

1 Principe de récurrence.

Soit $\mathcal{R}_n$ une propriété qui dépend de l'entier naturel n.

a) Forme faible.

Si $\mathcal{R}_0$ est vraie et si $\mathcal{R}_n$ implique $\mathcal{R}_{n+1}$, alors $\mathcal{R}_n$ est vraie pour tout entier naturel n.

$$\boxed{(\mathcal{R}_0 \text{ et } (\forall\, n \in \mathbb{N})(\mathcal{R}_n \Rightarrow \mathcal{R}_{n+1})) \Rightarrow (\forall\, n \in \mathbb{N})(\mathcal{R}_n)}$$

b) Forme forte.

Si $\mathcal{R}_0$ est vraie, si, pour tout entier naturel n, $(\forall\, k \leqslant n)(\mathcal{R}_k)$ implique $\mathcal{R}_{n+1}$, alors $\mathcal{R}_n$ est vraie pour tout entier naturel n.

$$\boxed{(\mathcal{R}_0 \text{ et } (\forall\, n \in \mathbb{N})((\forall\, k \leqslant n)(\mathcal{R}_k) \Rightarrow \mathcal{R}_{n+1})) \Rightarrow (\forall\, n \in \mathbb{N})(\mathcal{R}_n)}$$

HAUT

2 Applications d'un ensemble fini dans un ensemble fini.

Si X est un ensemble fini à k éléments et Y un ensemble fini à n éléments :

1°/ Si $k = n$, la notion d'**injection** de X dans Y coïncide avec celle de **surjection** et avec celle de **bijection**.

2°/ Si $k = n$, le **nombre des bijections** (ou injections, ou surjections) de X dans Y, est n !.
Une bijection $\{1, \dots, n\} \longrightarrow \{1, \dots, n\}$ s'appelle une **permutation** de n éléments.

3°/ Si k et n sont des entiers quelconques, le **nombre des applications** de X dans Y est n^k.

4°/ Si k est inférieur ou égal à n, le **nombre des injections** de X dans Y est $\frac{n!}{(n-k)!}$.
Une injection $\{1, \dots, k\} \longrightarrow \{1, \dots, n\}$ s'appelle un **arrangement** de k éléments pris parmi n.
Une injection croissante $\{1, \dots, k\} \longrightarrow \{1, \dots, n\}$ s'appelle une **combinaison** de k éléments pris parmi n.

HAUT

Chapitre 7. Applications d'ensembles finis.

Exercices

Exercice 1. Applications bijectives.
Exercice 2. Nombre d'applications.
Exercice 3. Nombre d'injections, de bijections.
Exercice 4. Nombre d'applications croissantes.
Exercice 5. Nombre de couples, nombre de *n*-uples.
Exercice 6. Nombre de relations binaires, nombre d'ordres totaux.
Exercice 7. Nombre de relations binaires de types particuliers.

Exercice 1. Applications bijectives.

Soient X et Y deux ensembles finis ayant le **même nombre n d'éléments**, et f une application de X dans Y. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes : (1) f est injective. (2) f est surjective. (3) f est bijective. (on pourra utiliser - ou redémontrer - le résultat obtenu dans Chapitre 2, Exercice 3 sur les sections et rétractions).	Solution

HAUT

Exercice 2. Nombre d'applications.

Soient X et Y deux ensembles finis ayant respectivement n et p éléments.
Montrer que le nombre des applications de X dans Y est égal à p^n.

Application.
Montrer que, si E est un ensemble fini ayant n éléments, l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties de E est un ensemble fini ayant 2^n éléments.

Solution

HAUT

Exercice 3. Nombre d'injections, de bijections.

Soient X et Y deux ensembles finis ayant respectivement k et n éléments, $k \leqslant n$.
Montrer que le nombre des applications injectives de X dans Y est égal à $\frac{n!}{(n-k)!}$.

Solution

Application.
Montrer que, si E est un ensemble fini ayant n éléments, le nombre des applications bijectives de E dans lui-même (appelées encore *permutations* de E) est égal à n !.

HAUT

Exercice 4. Nombre d'applications croissantes.

1 e Partie.
Soient n et k deux entiers naturels vérifiant $1 \leqslant k \leqslant n$.
Déterminer le nombre des **applications strictement croissantes** de $\{1, \ldots, k\} \subset \mathbb{N}$ dans $\{1, \ldots, n\} \subset \mathbb{N}$.

2 e Partie.
Soient n et k deux entiers naturels non nuls.
1°/ Soit f une application croissante de $\{1, \ldots, k\}$ dans $\{1, \ldots, n\}$.
Montrer que l'application g de $\{1, \ldots, k\}$ dans $\{1, \ldots, k + n - 1\}$ définie par
$g(p) = f(p) + p - 1$, pour tout p, $1 \leqslant p \leqslant k$,
est strictement croissante.
2°/ Soit A l'(ensemble des applications croissantes de $\{1, \ldots, k\}$ dans $\{1, \ldots, n\}$.
Soit B l'ensemble des applications strictement croissantes de $\{1, \ldots, k\}$ dans $\{1, \ldots, k + n - 1\}$.
Montrer qu'il existe une bijection de A sur B et en déduire le nombre des **applications croissantes** de $\{1, \ldots, k\}$ dans $\{1, \ldots, n\}$.

Solution

HAUT

Exercice 5. Nombre de couples, nombre de n-uples.

Soit E un ensemble fini à m éléments.

1°/ Quel est le nombre de couples (x, y) constitués d'éléments x et y de E ?
2°/ Plus généralement, si n est un entier non nul, quel est le nombre de n-uples d'éléments de E ?

Solution

HAUT

Exercice 6. Nombre de relations binaires, nombre d'ordres totaux.

Soit E un ensemble fini à n éléments.

1°/ Combien y a-t-il de relations binaires sur E ?
2°/ Combien y a-t-il d'ordres totaux sur E ?

Solution

HAUT

Exercice 7. Nombre de relations binaires de types particuliers.

Soit X un ensemble fini à n éléments.
Quel est le nombre de relations binaires sur X qui sont :

1°/ Réflexives.
2°/ Symétriques.
3°/ Réflexives et symétriques.
4°/ Symétriques et antisymétriques.
5°/ Réflexives et antisymétriques.

Solution

HAUT

Chapitre 7. Applications d'ensembles finis.

Enoncés.

Exercice 1. Applications bijectives.

Soient X et Y deux ensembles finis ayant le **même nombre n d'éléments**, et f une application de X dans Y. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes : (1) f est injective. (2) f est surjective. (3) f est bijective. (on pourra utiliser - ou redémontrer - le résultat obtenu dans Chapitre 2, Exercice 3 sur les sections et rétractions).	

Solution.

La démonstration va se faire par récurrence sur l'entier naturel n.

1°/ Pour $n = 0$.

Pour $n = 0$, les ensembles X et Y sont vides.
Soit f une application de X dans Y : à rien, elle ne fait rien correspondre.
Cette application est tout ce qu'on veut qu'elle soit, injective, surjective, bijective.

Par exemple, l'injectivité d'une application f se traduit par la relation :

$$(\forall\, x)(\forall\, y)(x \in X \text{ et } y \in X \text{ et } f\,(x) \in Y \text{ et } f\,(y) \in Y \text{ et } f\,(x) = f\,(y) \Rightarrow x = y)$$

Cette relation est logiquement équivalente à la relation :

$$(\forall\, x)(\forall\, y)(\textit{non}\ (x \in X \text{ et } y \in X \text{ et } f\,(x) \in Y \text{ et } f\,(y) \in Y \text{ et } f\,(x) = f\,(y)) \text{ ou } x = y)$$
$$(\forall\, x)(\forall\, y)(\textit{non}\ (x \in X) \text{ ou } \textit{non}\ (y \in X) \text{ ou } \textit{non}\ (f\,(x) \in Y) \text{ ou } \textit{non}\ (f\,(y) \in Y) \text{ ou } \textit{non}\ (f\,(x) = f\,(y)) \text{ ou } x = y)$$

Cette relation est toujours vraie lorsque X est vide, puisque la relation $(\forall\, x)(\textit{non}\ (x \in X))$, par exemple, est vraie.
Donc toute application $f : X \to Y$ est injective.

La surjectivité d'une application $f : X \to Y$ se traduit par la relation :

$$(\forall\, y)(y \in Y \Rightarrow (\exists\, x)(x \in X \text{ et } y = f\,(x)))$$

Cette relation est logiquement équivalente à la relation :

$$(\forall\, y)(\textit{non}\ (y \in Y) \text{ ou } (\exists\, x)(x \in X \text{ et } y = f\,(x)))$$

Cette relation est toujours vraie lorsque Y est vide, puisque la relation $(\forall\, y)(non\ (y \in Y))$ est vraie.
Donc toute application $f : X \to Y$ est surjective.

Toute application $f : X \to Y$, injective et surjective, est bijective.
Il y a équivalence entre les propriétés (1), (2), (3), que possède toute application $f : X \to Y$.

Donc la propriété est vraie pour $n = 0$: il y a équivalence, pour une application $f : X \to Y$ entre injectivité, surjectivité et bijectivité.

Pour deux ensembles vides X et Y, ayant le même nombre $n = 0$ d'éléments, et toute application f de X dans Y, il y a équivalence entre les propriétés suivantes : (1) f est injective. (2) f est surjective. (3) f est bijective.

Remarquons d'ailleurs que, si f et g sont deux applications de X dans Y, la propriété suivante est vraie :

$$(\forall\, x)(non\ (x \in X))$$

Il en résulte que la propriété suivante est vraie :

$$(\forall\, x)(non\ (x \in X)\ \text{ou}\ non\ (f\,(x) \in Y)\ \text{ou}\ non\ (g\,(x) \in Y)\ \text{ou}\ f\,(x) = g\,(x))$$

qui est logiquement équivalente à :

$$(\forall\, x)(x \in X\ \text{et}\ f\,(x) \in Y\ \text{et}\ g\,(x) \in Y \Rightarrow f\,(x) = g\,(x))$$

propriété qui traduit l'égalité des applications f et g.
Autrement dit, il y a une seule application de l'ensemble vide X dans l'ensemble vide Y, c'est l'
"**application vide**" qui, à rien, ne fait rien correspondre !
Et cette application est injective, surjective, bijective !

2°/ Hypothèse de récurrence.

Supposons que, pour deux ensembles quelconques E et F ayant le même nombre fini n d'éléments, $n \geqslant 0$, et pour toute application f de E dans F, il y ait équivalence entre les propriétés suivantes :
(1) f est injective.
(2) f est surjective.
(3) f est bijective.

Nous appellerons P_n cette propriété.
La démonstration précédente montre que P_0 est vraie.
L'hypothèse de récurrence est que P_n est vraie.
Nous allons démontrer que P_n entraîne P_{n+1}.
D'après le **principe de récurrence** (forme faible) qui est l'un des axiomes des entiers naturels :

$$P_0\ \text{et}\ (\forall\, n)(n \in \mathbb{N} \Rightarrow (P_n \Rightarrow P_{n+1})) \Rightarrow (\forall\, n)(n \in \mathbb{N} \Rightarrow P_n)$$

et que l'on peut aussi écrire :

$$P_0 \text{ et } (\forall\, n \in \mathbb{N})(P_n \Rightarrow P_{n+1}) \Rightarrow (\forall\, n \in \mathbb{N})(P_n)$$

nous aurons alors :

$$(\forall\, n \in \mathbb{N})(P_n)$$

Autrement dit, la propriété P_n sera vraie pour tout entier naturel n.

3°/ $P_n \Rightarrow P_{n+1}$.

Soient X et Y deux ensembles finis ayant le même nombre $n + 1$ d'éléments, $n \geqslant 0$.
Soit f une application de X dans Y.
L'ensemble X n'est pas vide, puisqu'il possède au moins un élément. Soit a un élément de X. $f(a)$ est un élément de Y.

La restriction de f au complémentaire de $\{a\}$ est une application de $X \setminus \{a\} = \complement_X \{a\}$ dans Y.

a) f injective $\Rightarrow$ f bijective.

Supposons d'abord que f est injective.
Alors, pour tout élément $x \in X$ différent de a, $f(x)$ est différent de $f(a)$, donc $f(X \setminus \{a\}) \cap \{f(a)\} = \varnothing$.
$f(X \setminus \{a\})$ est donc contenue dans le complémentaire de $\{f(a)\}$.
Ce complémentaire de $\{f(a)\}$ est un ensemble à n éléments.
La restriction f_a de f à $X \setminus \{a\}$ est injective parce que f elle-même est injective.
Et cette restriction f_a est une application injective de l'ensemble à n éléments $\complement_X \{a\}$, dans l'ensemble à n éléments $\complement_Y \{f(a)\}$
D'après l'hypothèse de récurrence, cette restriction f_a est aussi surjective et bijective.
Comme elle est bijective, elle possède une application réciproque $h : \complement_Y \{f(a)\} \to \complement_X \{a\}$, vérifiant :

$$f_a \circ h = Id_{\complement_Y\{f(a)\}};\ h \circ f_a = Id_{\complement_X\{a\}}$$

On peut alors définir une application $g : Y \to X$ par :

$$g(y) = \begin{cases} h(y) & \text{pour } y \in \complement_Y\left(\{f(a)\}\right) \\ a & \text{pour } y = f(a) \end{cases}$$

Il vient alors :
— lorsque $y = f(a)$, $f(g(y)) = f(a) = y$,
— lorsque y n'est pas égal à $f(a)$, y appartient à $\complement_Y \{f(a)\}$, et $f(g(y)) = f(h(y))$.
Or $h(y)$ est un élément de $\complement_X \{a\}$, donc $f(h(y)) = f_a(h(y))$, par définition de la restriction f_a.
Comme h est l'application réciproque de f_a, on a $f_a \circ h = Id_{\complement_Y\{f(a)\}}$ et $f_a(h(y)) = y$, donc $f(g(y)) = f(h(y)) = y$.

Pour tout élément $y \in Y$, on a donc $f(g(y)) = y$. D'où $f \circ g = Id_Y$. Donc g est une section de f et f est une rétraction de g.

On a aussi :
— Pour $x = a$, $g(f(x)) = g(f(a)) = a = x$ par définition de g.
— Pour $x \neq a$, $f(x) = f_a(x)$ par définition de la restriction f_a de f à $\complement_X \{a\}$, donc $g(f(x)) = g(f_a(x)) = h(f_a(x))$ par définition de g.
Or $h \circ f_a = Id_{\complement_X\{a\}}$, donc $h(f_a(x)) = x$ et $g(f(x)) = x$.

Pour tout élément $x \in X$, on a donc $g(f(x)) = x$. D'où $g \circ f = Id_X$. Donc g est une rétraction de f et f est une section de g.

Les applications f et g sont donc sections et rétractions l'une de l'autre : on a vu, dans Chapitre 2, Exercice 3, que cela entraînait que f est bijective et que g est l'application réciproque de f.

Donc f injective $\Rightarrow$ f bijective.

Réciproquement, il résulte directement de la définition d'une bijection les implications :

f bijective $\Rightarrow$ f injective.
f bijective $\Rightarrow$ f surjective.

A ce stade de la démonstration, on a donc déjà :

f injective $\Leftrightarrow$ f bijective $\Rightarrow$ f surjective

Il nous manque donc seulement l'implication f surjective $\Rightarrow$ f injective, pour pouvoir affirmer l'équivalence de trois propriétés.

b) f surjective $\Rightarrow$ f bijective.

Par application de Chapitre 2, Exercice 3, si l'application f est surjective, elle possède une section g qui est une application injective de Y dans X.
$f \circ g = Id_Y$ et f est une rétraction de g.
D'après (a), toute application injective d'un ensemble à $n + 1$ éléments dans un ensemble à $n + 1$ éléments est bijective.
Donc g est bijective et f est son application réciproque, de sorte que f est aussi une bijection.

Ceci achève de montrer P_{n+1}, et, par ce fait, notre démonstration par récurrence.

Chapitre 7. Applications d'ensembles finis.

Enoncés.

Exercice 2. Nombre d'applications.

Soient X et Y deux ensembles finis ayant respectivement n et p éléments. Montrer que le nombre des applications de X dans Y est égal à p^n. **Application.** Montrer que, si E est un ensemble fini ayant n éléments, l'ensemble $\mathfrak{P}(E)$ des parties de E est un ensemble fini ayant 2^n éléments.	

Solution.

1°/ Nombre d'applications de X dans Y.

Soient X et Y deux ensembles finis ayant respectivement n et p éléments.

Une application f de X dans Y fait correspondre à chaque élément de X, un élément de Y.
Comme X possède n éléments, on peut écrire $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ et définir, pour chaque application f, un n-uplets $(y_1, \dots, y_n) \in Y^n$ avec $y_i = f(x_i) \in Y$, $1 \leqslant i \leqslant n$.
Réciproquement, chaque n-uplet $(y_1, \dots, y_n) \in Y^n$ d'éléments de Y permet de définir une application $f : X \to Y$ par $f(x_i) = y_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, et, à cette application f, est associé, le n-uplet $(y_1, \dots, y_n) \in Y^n$.

Il y a donc une **correspondance biunivoque** entre les applications $f : X \to Y$, et les n-uplets $(y_1, \dots, y_n) \in Y^n$.
Cette existence d'une correspondance biunivoque entre les applications de X dans Y et Y^n entraîne qu'il y a autant d'applications de X dans Y que d'éléments dans Y^n, soit p^n, puisque Y possède p éléments.

Il y a p^n applications de X dans Y.

2°/ Nombre de parties de E.

Soit A une partie de E, $\{0, 1\} \subset \mathbb{N}$
A la partie A de E, on peut associer l'application $1_A : E \to \{0, 1\}$, appelée **fonction indicatrice** de A, ou **fonction caractéristique** de A, définie par :

$$1_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{pour } x \in A \\ 0 & \text{pour } x \in \complement_E A \end{cases}$$

la partie A de E est l'image réciproque de $\{1\}$ par sa fonction indicatrice 1_A.

Réciproquement, à toute application $f : E \to \{0, 1\}$, on peut associer l'ensemble $A = \{x \mid x \in E \text{ et } f(x) = 1\}$, image réciproque de $\{1\}$ par f.
A est une partie de E et sa fonction indicatrice est f.

Il y a donc une correspondance biunivoque entre les parties de E et les applications de E dans l'ensemble $\{0, 1\}$ à deux éléments.

Il y a donc autant de parties dans E que d'applications de E dans $\{0, 1\}$, soit $2^{Card(E)}$ d'après 1°, puisque, par hypothèse, *Card* (E) est fini.

$Card(\mathcal{P}(E)) = 2^{Card(E)}$, lorsque *Card* ($E$) est fini.

Chapitre 7. Applications d'ensembles finis.

Enoncés.

Exercice 3. Nombre d'injections, de bijections.

Soient X et Y deux ensembles finis ayant respectivement k et n éléments, $k \leqslant n$.
Montrer que le nombre des applications injectives de X dans Y est égal à $\frac{n!}{(n-k)!}$.

Application.
Montrer que, si E est un ensemble fini ayant n éléments, le nombre des applications bijectives de E dans lui-même (appelées encore *permutations* de E) est égal à n !.

Solution.

1°/ Nombre d'applications injectives.

Raisonnons par récurrence sur n.

a. La propriété est vraie pour $n = 0$.

Pour $n = 0$, la seule valeur possible de k est 0. On sait déjà qu'il y a une seule application de X dans Y, c'est l'application vide, qui est injective.
Le nombre d'injections de X dans Y est donc $1 = \frac{0!}{(0-0)!}$, de sorte que la formule est vraie pour $n = 0$ et tout entier naturel $k \leqslant n$.

b. Hypothèse de récurrence (forte).

Supposons la formule vraie pour un $n \in \mathbb{N}$, pour tout $k \leqslant n$.

c. La propriété est vraie pour $n + 1$.

Montrons qu'elle est vraie pour $n + 1$, donc pour tout $k \leqslant n + 1$.

Soient X et Y deux ensembles finis ayant respectivement k et $n + 1$ éléments, $k \leqslant n + 1$.

Si $k = 0$, il y a une seule application de X dans Y, c'est l'application vide. Elle est injective.
Il n'y a qu'une application injective de X dans Y, soit $\frac{(n+1)!}{(n+1-0)!}$, de sorte que la formule est vraie pour $n + 1$ et $k = 0$.
Supposons la formule vraie pour $n + 1$ et k, pour un k vérifiant $0 \leqslant k \leqslant n$.
Montrons qu'elle est vraie pour $n + 1$ et $k + 1$.
Considérons donc deux ensemble X et Y ayant respectivement $k + 1$ et $n + 1$ éléments, $1 \leqslant k + 1 \leqslant n + 1$.

Comme X possède au moins un élément, il n'est **pas vide**. Soit a un élément de X.

Une injection f de X dans Y se définit de la façon suivante : on choisit d'abord $f(a)$.
Ce choix peut se faire de $n + 1$ façons.
$f(a)$ étant choisi, il reste n éléments disponibles dans Y.
On achève de définir l'injection f en prenant une injection quelconque de $\complement_X \{a\}$, ensemble à k éléments, dans $\complement_Y \{f(a)\}$, ensemble à n éléments.

Ce choix peut se faire, d'après l'hypothèse de récurrence de $\frac{n!}{(n-k)!}$ façons possibles.

Au total, il y a $(n + 1) \times \frac{n!}{(n-k)!}$ façons de définir une injection de X dans Y, soit $\frac{(n+1)!}{(n+1-(k+1))!}$.
De sorte que la formule, vraie pour $n + 1$ et k est encore vraie pour $n + 1$ et $k + 1$.
Elle est donc vraie pour $n + 1$, quel que soit k, $0 \leqslant k \leqslant n + 1$.

Ainsi, lorsque la formule est vraie pour un $n \in \mathbb{N}$, pour tout $k \leqslant n$, elle est encore vraie pour $n + 1$, pour tout $k \leqslant n + 1$.

Comme elle est vraie pour $n = 0$ et $k = 0$, elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $k \leqslant n$.

Le nombre d'injections d'un ensemble à k éléments dans un ensemble à n éléments est $\frac{n!}{(n-k)!}$, $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$, $k \leqslant n$.

2°/ Nombre d'applications bijectives.

Pour deux ensembles finis X et Y ayant le même nombre d'éléments n, l'exercice 1 a montré qu'il y avait équivalence, pour une application de l'un dans l'autre, entre injective, surjective, bijective.
Les bijections de X sur X sont donc les injections de X dans X : il y en a $\frac{n!}{(n-n)!} = n !$ d'après 1°.

Le nombre de bijections d'un ensemble à n éléments dans lui-même est $n !$, $n \in \mathbb{N}$.

Chapitre 7. Applications d'ensembles finis.

Enoncés.

Exercice 4. Nombre d'applications croissantes.

1 e Partie.
Soient n et k deux entiers naturels vérifiant $1 \leqslant k \leqslant n$.
Déterminer le nombre des **applications strictement croissantes** de $\{1, \dots, k\} \subset \mathbb{N}$ dans $\{1, \dots, n\} \subset \mathbb{N}$.

2 e Partie.
Soient n et k deux entiers naturels non nuls.
1°/ Soit f une application croissante de $\{1, \dots, k\}$ dans $\{1, \dots, n\}$.
Montrer que l'application g de $\{1, \dots, k\}$ dans $\{1, \dots, k + n - 1\}$ définie par
$g(p) = f(p) + p - 1$, pour tout p, $1 \leqslant p \leqslant k$,
est strictement croissante.
2°/ Soit A l'(ensemble des applications croissantes de $\{1, \dots, k\}$ dans $\{1, \dots, n\}$.
Soit B l'ensemble des applications strictement croissantes de $\{1, \dots, k\}$ dans $\{1, \dots, k + n - 1\}$.
Montrer qu'il existe une bijection de A sur B et en déduire le nombre des **applications croissantes** de $\{1, \dots, k\}$ dans $\{1, \dots, n\}$.

Solution.

1 e Partie. Applications strictement croissantes.

a) Application strictement croissante.

Soit $f : \{1, \dots, k\} \to \{1, \dots, n\}$ une application strictement croissante.
Alors pour tout $x \in \{1, \dots, k\}$ et tout $y \in \{1, \dots, k\}$, si x est différent de y, l'un est strictement plus petit que l'autre, par exemple $x < y$.
Dans ce cas, comme f est strictement croissante, la relation $x < y$ entraîne la relation $f(x) < f(y)$.
Si l'on avait $y < x$, on obtiendrait $f(y) < f(x)$.
Dans les deux cas, on obtient des images $f(x)$ et $f(y)$ différentes : $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$.
C'est dire que f est injective.

Toute application strictement croissante de $\{1, \dots, k\}$ dans $\{1, \dots, n\}$ est injective.

b) Nombre d'applications strictement croissantes.

Soit $f : \{1, \dots, k\} \to \{1, \dots, n\}$ une application strictement croissante.
f définit une bijection de $\{1, \dots, k\}$ sur $\{f(1), \dots, f(k)\} \subset \{1, \dots, n\}$.
Comme f est strictement croissante, on a : $f(1) < \dots < f(k)$.
On voit donc que toute injection strictement croissante de $\{1, \dots, k\}$ dans $\{1, \dots, n\}$ définit une partie de

$\{1, \dots, n\}$ à k éléments, qui est $\{f(1), \dots, f(k)\}$.

Réciproquement, étant donnée une partie A de $\{1, \dots, n\}$ à k éléments, on peut l'ordonner dans l'ordre naturel de $\mathbb{N}$.
A un élément $j \in \{1, \dots, k\}$, on peut faire correspondre le j^{e} élément de A : on définit ainsi une application strictement croissante f de $\{1, \dots, k\}$ dans $\{1, \dots, n\}$.
Cette application strictement croissante f définit la partie de $\{1, \dots, n\}$ à k éléments $\{f(1), \dots, f(k)\} = A$.
On voit donc qu'il existe une correspondance biunivoque entre les applications strictement croissantes de $\{1, \dots, k\}$ dans $\{1, \dots, n\}$ et les parties à k éléments de $\{1, \dots, n\}$.

Conclusion : il y a autant d'applications strictement croissantes de $\{1, \dots, k\}$ dans $\{1, \dots, n\}$ qu'il y a de parties à k éléments dans $\{1, \dots, n\}$, soit $\binom{n}{k}$.

Parties à *k* éléments.

Pour deux injections f et g de $\{1, \dots, k\}$ dans $\{1, \dots, n\}$, la relation :

$$f \sim g \Leftrightarrow f \text{ et } g \text{ ont la même image}$$

est une **relation d'équivalence**.
En effet, elle est réflexive ($f(\{1, \dots, k\}) = f(\{1, \dots, k\})$), symétrique ($f(\{1, \dots, k\}) = g(\{1, \dots, k\}) \Rightarrow g(\{1, \dots, k\}) = f(\{1, \dots, k\})$), transitive ($f(\{1, \dots, k\}) = g(\{1, \dots, k\})$ et $g(\{1, \dots, k\}) = h(\{1, \dots, k\}) \Rightarrow f(\{1, \dots, k\}) = h(\{1, \dots, k\})$).

A chaque classe d'équivalence, on peut faire correspondre la partie de $\{1, \dots, n\}$ à k éléments qui est l'image des injections de la classe d'équivalence.
A des parties de $\{1, \dots, n\}$ différentes correspondent des classes d'équivalence différentes.
Toute partie de $\{1, \dots, n\}$ à k éléments est l'image d'une classe d'équivalence.

Autrement dit, il y a autant de classes d'équivalence que de parties à k éléments dans $\{1, \dots, n\}$.

Dans chaque classe d'équivalence, on peut choisir un représentant, qui est une injection de $\{1, \dots, k\}$ dans $\{1, \dots, n\}$, donc une bijection de $\{1, \dots, k\}$ sur son image.
Chaque élément de la classe d'équivalence s'obtient alors par composition du représentant choisi et d'une permutation de l'image.
Il y a donc autant d'élément dans une classe d'équivalence qu'il y a de permutations dans un ensemble à k éléments.
Il y a donc k ! éléments dans chaque classe d'équivalence, d'après Chapitre 6, Exercice 3.

Le nombre $\binom{n}{k}$ de parties de X à k éléments, qui est le nombre de classes d'équivalence, multiplié par le cardinal k ! de chaque classe, donne le nombre total d'injections de $\{1, \dots, k\}$ dans $\{1, \dots, n\}$, soit $\frac{n!}{(n-k)!}$ (Chapitre 6, Exercice 3).

D'où :

Dans un ensemble à n éléments, il y a $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ parties à k éléments.

Il y a $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ applications strictement croissantes de $\{1, \dots, k\}$ dans $\{1, \dots, n\}$

2 e Partie. Applications croissantes.

a) Application *g*.

Pour tout élément x de $\{1, \dots, k\}$, $g(x) = f(x) + x - 1$ est un nombre entier somme d'un nombre entier $f(x) \in \{1, \dots, n\}$ et d'un nombre entier $x - 1$ compris entre 0 et $k - 1$.
$g(x)$ est donc un nombre entier compris entre 1 et $n + k - 1$.
g est donc une application de $\{1, \dots, k\}$ dans $\{1, \dots, n + k - 1\}$.

Soient x et y deux éléments de $\{1, \dots, k\}$ vérifiant $x < y$.
$g(x) = f(x) + x - 1$
$g(y) = f(y) + y - 1$
$x < y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y)$ et $x < y \Rightarrow g(x) = f(x) + x - 1 < f(y) + y - 1 = g(y)$
$x < y \Rightarrow g(x) < g(y)$
g est strictement croissante.

L'application g est une application strictement croissante de $\{1, \dots, k\}$ dans $\{1, \dots, n + k - 1\}$.

b) Nombre d'applications croissantes.

Soit ϕ l'application de l'ensemble A des applications croissantes de $\{1, \dots, k\}$ dans $\{1, \dots, n\}$, dans l'ensemble B des applications strictement croissantes de $\{1, \dots, k\}$ dans $\{1, \dots, n + k - 1\}$qui, à une application croissante f de $\{1, \dots, k\}$ dans $\{1, \dots, n\}$, fait correspondre l'application strictement croissante g de $\{1, \dots, k\}$ dans $\{1, \dots, n + k - 1\}$ définie par $g(x) = f(x) + x - 1$, pour tout x, $1 \leqslant x \leqslant k$.

$$\phi(f) = g.$$

Pour tout élément $g \in B$, et tout élément $x \in \{1, \dots, k\}$, posons $f(x) = g(x) - x + 1$.

$1 \leqslant g(1) < g(2) < \dots < g(k) \leqslant n + k - 1 \Rightarrow g(x) \geqslant x$, pour tout $x \in \{1, \dots, k\}$.
En effet, s'il existait un $x \in \{1, \dots, k\}$ tel que $g(x) < x$, on aurait $g(g(x)) < g(x)$ et, par itération de g, on saurait construire une suite infinie strictement décroissante d'entiers compris entre 1 et x, ce qui serait contradictoire.
Les valeurs de f sont donc toutes supérieures ou égales à 1.
f est une application de $\{1, \dots, k\}$ dans $\mathbb{N}^*$

g croît au moins aussi vite que x : $x < y \Rightarrow y - x \leqslant g(y) - g(x)$.
En effet, $x < x + 1 < \dots < x + (y - x) \Rightarrow g(x) < g(x + 1) < \dots < g(x + (y - x)) = g(y)$, ce qui signifie qu'il y a au moins autant de nombres entiers pour aller de $g(x)$ à $g(y)$ qu'il en faut pour aller de x à y. C'est dire que $g(y) - g(x)$ est supérieur ou égal à $y - x$.

Il en résulte que f est une application croissante.
En effet, $x < y \Rightarrow y - x \leqslant g(y) - g(x)$, donc $x < y \Rightarrow g(x) - x \leqslant g(y) - y$, et $x < y \Rightarrow f(x) = g(x) - x + 1 \leqslant g(y) - y + 1 = f(y)$.

$f(k) = g(k) - k + 1 \leqslant n + k - 1 - k + 1 = n$.

Donc l'image de l'application croissante f est toujours contenue dans $\{1, \dots, n\}$ et f est une application croissante de $\{1, \dots, k\}$ dans $\{1, \dots, n\}$.

Soit ψ l'application qui, à $g \in B$, fait correspondre l'élément $f \in A$, défini par $f(x) = g(x) - x + 1$ pour $x \in$

$\{1, \dots, k\}$.

$\psi(\phi(f))(x) = \phi(f)(x) - x + 1 = (f(x) + x - 1) - x + 1$
$\psi(\phi(f)) = f$

$\phi(\psi(g))(x) = \psi(g)(x) + x - 1 = (g(x) - x + 1) + x - 1 = g(x)$
$\phi(\psi(g)) = g$

Les relations $\psi(\phi(f)) = f$ et $\phi(\psi(g)) = g$, valables pour toute application croissante f de $\{1, \dots, k\}$ dans $\{1, \dots, n\}$ et toute application strictement croissante de $\{1, \dots, k\}$ dans $\{1, \dots, n + k - 1\}$, montrent que f et y, sections et rétractions l'une de l'autre, sont des bijections réciproques l'une de l'autre.

Il existe une bijection de A sur B.

Par définition des cardinaux, ***A* et *B* ont le même cardinal** donc, s'agissant d'ensembles finis, le même nombre d'éléments.

Or, d'après la première partie, il y a $\binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$ applications strictement croissantes de $\{1, \dots, k\}$ dans $\{1, \dots, n + k - 1\}$.
Donc :

Il y a $\binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$ applications croissantes de $\{1, \dots, k\}$ dans $\{1, \dots, n\}$.

Chapitre 7. Applications d'ensembles finis.

Enoncés.

Exercice 5. Nombre de couples, nombre de *n*-uples.

Soit E un ensemble fini à m éléments. 1°/ Quel est le nombre de couples (x, y) constitués d'éléments x et y de E ? 2°/ Plus généralement, si n est un entier non nul, quel est le nombre de n-uples d'éléments de E ?	

Solution.

1. Nombre de couples.

Un couple n'est finalement qu'une application de l'ensemble $\{1, 2\}$ dans l'ensemble E.
A 1, elle fait correspondre la première composante du couple, à 2 la deuxième.
Il y a donc autant de couples (x, y) constitués d'éléments x et y de E, qu'il y a d'applications de l'ensemble $\{1, 2\}$ dans l'ensemble E, soit m^2

Il y a m^2 couples (x, y) constitués d'éléments x et y de E.

2. Nombre de *n*-uples.

Un n-uple n'est finalement qu'une application de l'ensemble $\{1, \dots, n\}$ dans l'ensemble E.
A l'entier k, $1 \leqslant k \leqslant n$, une telle application fait correspondre la k-ième composante du n-uple.
Il y a donc autant de n-uples $(x_1, \dots, x_n)$ constitués d'éléments de E, qu'il y a d'applications de l'ensemble $\{1, \dots, n\}$ dans l'ensemble E, soit m^n

Il y a m^n n-uples constitués d'éléments de E.

Chapitre 7. Applications d'ensembles finis.

Enoncés.

Exercice 6. Nombre de relations binaires, nombre d'ordres totaux.

Soit E un ensemble fini à n éléments. 1°/ Combien y a-t-il de relations binaires sur E ? 2°/ Combien y a-t-il d'ordres totaux sur E ?	

Solution.

1. Nombre de relations binaires.

Une relation binaire est une application qui, à tout couple (x, y) d'éléments de E, fait correspondre une valeur de vérité.
Une relation binaire est donc une application de $E \times E$ dans $\{0, 1\}$.
Réciproquement, d'ailleurs, toute application de $E \times E$ dans $\{0, 1\}$ définit une relation binaire.
$E \times E$ possède n^2 éléments (Exercice 5).
Il y a donc autant de relations binaires sur E qu'il y a d'applications de $E \times E$ dans $\{0, 1\}$, soit 2^{n^2}. (Exercice 2).

Il existe 2^{n^2} relations binaires sur un ensemble E à n éléments.

2. Nombre d'ordres totaux.

Un ordre total est une façon de ranger les éléments de E.
C'est donc une bijection de $\{1, \dots, n\}$ sur E.
Il y a donc autant d'ordres totaux que de bijections de $\{1, \dots, n\}$ sur E, soit n ! (Exercice 1 et Exercice 3)

Il existe n ! ordres totaux sur un ensemble E à n éléments.

Chapitre 7. Applications d'ensembles finis.

Enoncés.

Exercice 7. Nombre de relations binaires de types particuliers.

Soit X un ensemble fini à n éléments. Quel est le nombre de relations binaires sur X qui sont : 1°/ Réflexives. 2°/ Symétriques. 3°/ Réflexives et symétriques. 4°/ Symétriques et antisymétriques. 5°/ Réflexives et antisymétriques.	

Solution.

1°/ Relations réflexives.

Les relations binaires lient deux éléments.
Un relation binaire est définie par sa valeur de vérité, 0 ou 1, sur les couples (i, j) d'éléments de X.
Il y a n^2 couples.
Une relation binaire est donc une application d'un ensemble à n^2 éléments dans un ensemble à 2 éléments.
Il existe autant de relations binaires sur X qu'il y a d'applications d'un ensemble à n^2 éléments dans un ensemble à 2 éléments, soit 2^{n^2} (Chapitre 6, Exercice 6, 1°).

Il existe 2^{n^2} relations binaires sur X.

Parmi ces relations binaires, les relations réflexives ont une **valeur de vérité égale à 1 pour les couples (x, x)**, $x \in X$.
Pour les $n^2 - n = n(n-1)$ autres couples, la valeur de vérité est libre, 0 ou 1.
Il existe autant de relations binaires réflexives sur X qu'il y a d'applications d'un ensemble à $n(n-1)$ éléments dans un ensemble à 2 éléments, soit 2^{n^2-n}.

Il existe 2^{n^2-n} relations binaires réflexives sur X.

2°/ Relations symétriques.

Les relations symétriques sont caractérisées par des **valeurs de vérité identiques pour les couples (x, y) et (y, x) avec $x \neq y$**.
Il existe $n(n-1)$ couples (x, y) avec $x \neq y$.
Pour la moitié d'entre eux, la valeur de vérité est libre, 0 ou 1 : pour l'autre moitié, qui sont les couples

symétriques, elle est fixée.
Pour les n couples (x, x), la valeur de vérité est libre, 0 ou 1.
Au total, nous obtenons $n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$ couples (x, y) pour lesquels la valeur de vérité est libre, 0 ou 1.
Remarquons que ce nombre de couples peut aussi être obtenu en soustrayant du nombre total n^2 de couples, le nombre $\frac{n(n-1)}{2}$ de couples pour lesquels la valeur de vérité est fixée par symétrie : $n^2 - \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$.
Il existe autant de relations binaires symétriques sur X qu'il y a d'applications d'un ensemble à $\frac{n(n+1)}{2}$ éléments dans un ensemble à 2 éléments, soit $2^{\frac{n(n+1)}{2}}$.

Il existe $2^{\frac{n(n+1)}{2}}$ relations binaires symétriques sur X.

3°/ Relations réflexives et symétriques.

Les relations réflexives et symétriques sont caractérisées par des valeurs de vérité identiques pour les couples (x, y) et (y, x) avec $x \neq y$ et par une valeur de vérité égale à 1 pour les n couples (x, x), $x \in X$.
Elle est libre seulement pour $\frac{n(n-1)}{2}$ couples d'éléments de X.
Il existe autant de relations binaires réflexives et symétriques sur X qu'il y a d'applications d'un ensemble à $\frac{n(n-1)}{2}$ éléments dans un ensemble à 2 éléments, soit $2^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

Il existe $2^{\frac{n(n-1)}{2}}$ relations binaires réflexives et symétriques sur X.

4°/ Relations symétriques et antisymétriques.

Considérons un couple (x, y). Comme la relation est symétrique, on a $x\ R\ y \Rightarrow y\ R\ x$, et comme la relation est antisymétrique, la relation $x\ R\ y$ entraîne $(x\ R\ y) \wedge (y\ R\ x)$, donc $x = y$. La valeur de vérité de $x\ R\ y$ ne peut être égale à 1 que si $x = y$. Autrement dit, pour tous les couples d'éléments distincts, la valeur de vérité de $x\ R\ y$ est 0.
La valeur de vérité de $x\ R\ y$ est libre seulement pour les n couples (x, x).

Il existe autant de relations binaires symétriques et antisymétriques sur X qu'il y a d'applications d'un ensemble à n éléments, dans un ensemble à 2 éléments, soit 2^n.

Il existe 2^n relations binaires symétriques et antisymétriques sur X.

5°/ Relations réflexives et antisymétriques.

Pour tout élément x, la valeur de vérité de $x\ R\ x$ est 1 puisque la relation est réflexive.
Considérons un couple (x, y) d'éléments distincts de X.
Supposons la valeur de vérité de $x\ R\ y$ égale à 1.
Si la valeur de vérité de $y\ R\ x$ était égale à 1, on aurait $(x\ R\ y) \wedge (y\ R\ x)$, donc $x = y$, par antisymétrie, ce qui serait contradictoire, donc la valeur de vérité de $y\ R\ x$ est 0.

Ainsi, les relations réflexives et antisymétriques sont caractérisées par des valeurs de vérité non toutes deux égales à 1 pour les couples (x, y) et (y, x) avec $x \neq y$ et par une valeur de vérité égale à 1 pour les n couples (x, x), $x \in X$.
Pour chaque couple (x, y) d'éléments distincts de X, il n'y a donc que 3 possibilités des valeurs de vérités : soit les valeurs de vérité de $x\ R\ y$ et $y\ R\ x$ sont toutes deux nulles, soit l'une vaut 1 et l'autre 0.
Or il y a $\frac{n(n-1)}{2}$ couples d'éléments distincts de X.
Il existe autant de relations binaires réflexives et antisymétriques sur X qu'il y a d'applications d'un ensemble à $\frac{n(n-1)}{2}$ éléments dans un ensemble à 3 éléments, soit $3^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

Il existe $3^{\frac{n(n-1)}{2}}$ relations binaires réflexives et antisymétriques sur X.

Le problème se pose alors de déterminer le nombre de **relations d'équivalence** sur X (réflexives, symétriques, transitives) ou le nombre de **relations d'ordre** sur X (réflexives, antisymétriques, transitives).
Pour donner une indication, il y a autant de relations d'équivalence qu'il y a de **partitions** de X (recouvrement par des parties non vides sans élément commun), puisque chaque partition définit une relation d'équivalence $(x\ R\ y) \Leftrightarrow$ (x et y appartiennent à la même partie élément de la partition), et chaque relation d'équivalence définit une partition en classes d'équivalence.
Mais le problème est là plus complexe que les calculs faits dans cet exercice. Nous pourrons y revenir dans le chapitre 8 sur le dénombrement des parties d'un ensemble fini.

Exercices

Parties d'ensembles finis.

1. **Nombre de parties d'un ensemble fini.**
2. **Nombre de parties à *k* éléments d'un ensemble fini à *n* éléments.**

1 Nombre de parties.

Un ensemble fini à n éléments possède 2^n parties. (Chapitre 6, Exercice 2).

HAUT

2 Nombre de parties à *k* éléments d'un ensemble fini à *n* éléments.

Le **coefficient binomial** d'indices *n* et *k* est le nombre de parties à *k* éléments d'un ensemble fini à *n* éléments ($k \leqslant n$) :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Propriétés fondamentales :

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$
$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}.$$

HAUT

Chapitre 8. Parties d'ensembles finis.

Exercices

Exercice 1. Nombre de parties à *k* éléments.
Exercice 2. Parties à nombre pair d'éléments.
Exercice 3. Nombre de couples.
Exercice 4. Sommes de cardinaux.
Exercice 5. Système décimal.
Exercice 6. Nombre de parties contenant une partie donnée.
Exercice 7. Nombres de parties dans un ensemble à 19 éléments.
Exercice 8. Passagers dans un avion.
Exercice 9. Nombre de partitions d'un ensemble à 7 éléments.
Exercice 10. Contrôle bidon ?
Exercice 11. Publicité dans des magazines.

Exercice 1. Nombre de parties à *k* éléments.

Soient X un ensemble fini ayant n éléments, et k un entier naturel, $k \leqslant n$.

1°/ Montrer que le nombre des parties de X ayant k éléments est égal à $\frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Ce nombre est noté $\binom{n}{k}$, il est appelé *coefficient binomial* d'indices n et k.

2°/ Montrer que $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ et que $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}$.

Solution

HAUT

Exercice 2. Parties à nombre pair d'éléments.

Soit X un ensemble fini à n éléments, $n \geqslant 1$. Montrer que le nombre de parties de X ayant un nombre pair d'éléments est égal au nombre de parties de X ayant un nombre impair d'éléments.	Solution

HAUT

Exercice 3. Nombre de couples.

Soit X un ensemble fini à n éléments. Déterminer le nombre de couples $(A, B) \in \mathfrak{P}(X) \times \mathfrak{P}(X)$ vérifiant $A \subset B$.	Solution

HAUT

Exercice 4. Sommes de cardinaux.

Soit X un ensemble fini à n éléments.
Pour toute partie $A \subset X$, on note $Card\,(A)$ le nombre d'éléments de A.

1°/ Calculer $\sum_{A \in \mathcal{P}(X)} Card\,(A)$.

(On pourra utiliser la bijection $A \mapsto \complement_X A$ de $\mathcal{P}(X)$ sur $\mathcal{P}(X)$).

2°/ Calculer $\sum_{(A,B) \in \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X)} Card\,(A \cap B)$ et $\sum_{(A,B) \in \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X)} Card\,(A \cup B)$.

Solution

HAUT

Exercice 5. Système décimal.

On considère les nombres entiers naturels dont l'écriture dans le système décimal comporte deux chiffres (c'est-à-dire les nombres de 10 à 99 inclus) et on appelle X un ensemble formé de dix d'entre eux, deux à deux distincts. Montrer qu'il existe deux parties A et B de X, non vides, sans élément commun et telles que la somme des nombres contenus dans A soit égale à la somme des nombres contenus dans B.	Solution

HAUT

Exercice 6. Nombre de parties contenant une partie donnée.

Soit E un ensemble à 40 éléments et soit A une partie de E à 7 éléments.

1°/ Combien y a-t-il de parties de E contenant A ?
2°/ Combien y a-t-il de parties de E dont l'intersection avec A n'est pas vide ?

Solution

HAUT

Exercice 7. Nombres de parties dans un ensemble à 19 éléments.

Soit E un ensemble à 19 éléments. Soient A et B des parties de E vérifiant : $Card\ (A) = 6$, $Card\ (B) = 10$, $Card\ (A \cup B) = 13$.

1°/ Déterminer le nombre d'éléments communs à A et B.
2°/ Soit X une partie de E. Montrer :
$X \cap A = \emptyset$ et $X \cap B = \emptyset \Leftrightarrow X \cap (A \cup B) = \emptyset$.
3°/ Quel est le nombre de parties de E n'ayant aucun élément commun avec A et aucun avec B ?
4°/ Quel est le nombre de parties de E contenant $A \cup B$?
5°/ Quel est le nombre de parties de E contenus à la fois dans A et dans B ?
6°/ Quel est le nombre de parties de E de cardinal pair ?

Solution

HAUT

Exercice 8. Passagers dans un avion.

Dans un avion se trouvent : — 9 enfants de sexe masculin, — 5 enfants français, — 9 hommes adultes, — 7 enfants non français de sexe masculin, — 11 français dont 6 de sexe masculin, — 12 enfants non français, — 2 femmes adultes non françaises. Combien y a-t'il de passagers dans l'avion ?	Solution

HAUT

Exercice 9. Nombre de partitions d'un ensemble à 7 éléments.

Soit E un ensemble fini de cardinal n. Soit $p\ (n; k)$ le nombre des partitions de E formées de k parties, $1 \leq k \leq n$. 1°/ Etablir la relation $p\ (n; k) = p\ (n-1; k-1) + k\ p\ (n; k-1)$. 2°/ En déduire le nombre de partitions d'un ensemble E à 7 éléments.	Solution

HAUT

Exercice 10. Contrôle bidon ?

Un contrôleur de fabrication a cherché, dans un lot de 100 pièces, le nombre de pièces présentant un défaut de solidité, un défaut de finition, ou un défaut de dimension. Ses résultats sont les suivants : – Défaut de finition : 30 pièces – Défaut de solidité : 23 pièces – Défaut de dimension : 50 pièces – Défaut de finition et de solidité : 10 pièces – Défaut de solidité et de dimension : 20 pièces. – Défaut de dimension et de finition : 8 pièces – Défaut de finition, de solidité et de dimension : 5 pièces. La direction de l'entreprise met en doute les compétences de ce contrôleur : ses doutes sont-ils justifiés ? Pourquoi ?	Solution

HAUT

Exercice 11. Publicité dans des magazines.

1°/ Soit E un ensemble.
On admet la relation, vraie pour tous sous-ensembles A et B de E :

$A \cap B = \emptyset \Rightarrow Card\,(A \cup B) = Card\,(A) + Card\,(B)$.

Démontrer que, quels que soient les sous-ensembles A et B de E, la relation suivante est vraie :

$Card\,(A \cup B) = Card\,(A) + Card\,(B) - Card\,(A \cap B)$.

Exprimer, par une relation analogue, $Card\,(A \cup B \cup C)$.

2°/ **Application.**
Une agence de publicité doit faire une campagne pour une marque d'ordinateurs. Elle a les contraintes suivantes :

a) Elle doit choisir parmi 4 magazines : *A*, *B*, *C*, *D*.
b) Dans chaque magazine choisi, elle doit faire paraître 4 pages de publicité.
c) Son budget est limité à 200 000 francs.
d) Le coût d'une page est de 25 000 francs dans *A*, 15 000 francs dans *B*, 10 000 francs dans *C*, 10 000 francs dans *D*.

Elle dispose des informations suivantes :

Nombre de lecteurs (en millions) lisant les magazines :

A	*B*	*C*	*D*	*A-B*	*A-C*	*A-D*	*B-C*	*B-D*	*C-D*	*A-B-C*	*A-B-D*	*A-C-D*	*B-C-D*
7,0	5,0	4,5	4,5	2,5	2,5	1,9	2,5	1,0	1,5	1,0	0,1	1,2	0,5

Que doit faire cette agence pour toucher le plus grand nombre possible de lecteurs ?

Solution

HAUT

Chapitre 8. Parties d'ensembles finis.

Enoncés.

Exercice 1. Nombre de parties à *k* éléments.

Soient X un ensemble fini ayant n éléments, et k un entier naturel, $k \leqslant n$.
1°/ Montrer que le nombre des parties de X ayant k éléments est égal à $\frac{n!}{k!(n-k)!}$.
Ce nombre est noté $\binom{n}{k}$, il est appelé *coefficient binomial* d'indices n et k.
2°/ Montrer que $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ et que $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}$.

Solution.

1°/ Parties à *k* éléments.

Soit Y un ensemble possédant k éléments.
La relation :

$$f \sim g \Leftrightarrow f \text{ et } g \text{ ont la même image}$$

est une **relation d'équivalence** entre les injections de Y dans X.
En effet, elle est réflexive ($f(Y) = f(Y)$), symétrique ($f(Y) = g(Y) \Rightarrow g(Y) = f(Y)$), transitive ($f(Y) = g(Y)$ et $g(Y) = h(Y) \Rightarrow f(Y) = h(Y)$).

A chaque classe d'équivalence, on peut faire correspondre la partie de X à k éléments qui est l'image des injections de la classe d'équivalence.
A des parties de X différentes correspondent des classes d'équivalence différentes.
Toute partie de X à k éléments est l'image d'une classe d'équivalence.

Autrement dit, il y a autant de classes d'équivalence que de parties à k éléments dans X.

Dans chaque classe d'équivalence, on peut choisir un représentant, qui est une injection de Y dans X, donc une bijection de Y sur son image.
Chaque élément de la classe d'équivalence s'obtient alors par composition du représentant choisi et d'une permutation de l'image.
Il y a donc autant d'éléments dans une classe d'équivalence qu'il y a de permutations dans un ensemble à k éléments.
Il y a donc k ! éléments dans chaque classe d'équivalence, d'après Chapitre 6, Exercice 3.

Le nombre $\binom{n}{k}$ de parties de X à k éléments, qui est le nombre de classes d'équivalence, multiplié par le cardinal k ! de chaque classe, donne le nombre total d'injections de Y dans X, soit $\frac{n!}{(n-k)!}$ (Chapitre 6, Exercice 3).

D'où :

Dans un ensemble à n éléments, il y a $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ parties à k éléments.

Remarquons qu'en notant $a_1, \dots, a_n$, les éléments de X, on induit sur X la relation d'ordre total des entiers naturels 1, ... , n : pour une partie à k éléments de X, il existe une seule façon de ranger les k éléments dans l'ordre croissant des indices.
De même, étant donné un ensemble Y à k éléments notés $b_1, \dots, b_k$, l'ordre des indices induit un ordre total sur Y.
Dans une classe d'équivalence d'injections de Y dans X, on peut choisir pour représentant l'injection croissante ayant pour image la partie à k éléments de X.
Le nombre des classes d'équivalence est donc le nombre d'injections croissantes de Y dans X.

Il existe $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ **injections croissantes** de $\{1, \dots, k\}$ dans $\{1, \dots, n\}$.

2°/ Relations entre coefficients binomiaux.

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k}$$

$$\begin{aligned}\binom{n}{k+1} + \binom{n}{k} &= \frac{n!}{(k+1)!(n-(k+1))!} + \frac{n!}{k!(n-k)!} \\ &= \frac{n!}{(k+1)!(n-k)!}(n-k+k+1) \\ &= \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n+1-(k+1))!} \\ &= \binom{n+1}{k+1}\end{aligned}$$

Chapitre 8. Parties d'ensembles finis.

Enoncés.

Exercice 2. Parties à nombre pair d'éléments.

Soit X un ensemble fini à n éléments, $n \geqslant 1$. Montrer que le nombre de parties de X ayant un nombre pair d'éléments est égal au nombre de parties de X ayant un nombre impair d'éléments.	

Solution.

1°/ Cas où *n* est impair.

A toute partie A de X à nombre pair d'éléments, on peut faire correspondre la partie complémentaire, qui est une partie à nombre impair d'éléments.
Comme le complémentaire du complémentaire d'une partie coïncide avec la partie, le passage au complémentaire établit une **bijection** entre les parties à nombre pair d'éléments et les parties à nombre impair d'éléments.

Il y a donc autant de parties à nombre pair d'éléments que de parties à nombre impair d'éléments.

2°/ Cas où *n* est pair.

Dans ce cas, comme n est supérieur ou égal à 1, **on peut choisir un élément *a* de *X***.
Le complémentaire de $\{a\}$ possède un nombre impair d'éléments et, d'après 1°, $\complement_X \{a\}$ possède autant de parties à nombre pair d'éléments que de parties à nombre impair d'éléments.

A toute partie A de $\complement_X \{a\}$, on peut faire correspondre $A \cup \{a\}$ qui est une partie de X contenant a.
Réciproquement, à toute partie B de X contenant a, on peut faire correspondre de façon biunivoque la partie $B \setminus \{a\}$ de $\complement_X \{a\}$.
Cette correspondance biunivoque montre qu'il autant de parties de X contenant a qu'il y a de parties dans $\complement_X \{a\}$.
Il y a équivalence entre "*Card* (A) est un entier pair" et "*Card* $(A \cup \{a\})$ est un entier impair".
Il y a équivalence entre "*Card* (A) est un entier impair" et "*Card* $(A \cup \{a\})$ est un entier pair" (donc $\geqslant 2$).
En conséquence, il y a autant de parties à nombre pair d'éléments dans $\complement_X \{a\}$ qu'il y a de parties contenant a à nombre impair d'éléments dans X, et il y a autant de parties à nombre impair d'éléments dans $\complement_X \{a\}$ qu'il y a de parties contenant a à nombre pair d'éléments dans X.

Comme $\complement_X \{a\}$ contient autant de parties à nombre pair d'éléments que de parties à nombre impair d'éléments, **il y a dans *X* autant de parties à nombre pair d'éléments contenant *a* que de parties à nombre impair d'éléments contenant *a***.

A toute partie A de $\complement_X \{a\}$, on peut faire correspondre de façon biunivoque A considéré comme partie de X

ne contenant pas a.
Qu'il soit considéré comme partie de $\complement_X \{a\}$ ou comme partie de X, A conserve le même nombre d'éléments.
La correspondance biunivoque montre qu'il y a autant de parties de X à nombre pair d'éléments ne contenant pas a qu'il y a de parties à nombre pair d'éléments dans $\complement_X \{a\}$ et qu'il y a autant de parties de X à nombre impair d'éléments ne contenant pas a qu'il y a de parties à nombre impair d'éléments dans $\complement_X \{a\}$.

Comme $\complement_X \{a\}$ contient autant de parties à nombre pair d'éléments que de parties à nombre impair d'éléments, **il y a dans *X* autant de parties à nombre pair d'éléments ne contenant pas *a* que de parties à nombre pair d'éléments ne contenant pas *a***.

Par addition des deux résultats précédents, on obtient le résultat cherché :

X contient autant de parties à nombre pair d'éléments que de parties à nombre impair d'éléments.

3°/ Solution simplifiée.

Lorsqu'on connaît la formule du binôme et les propriétés des coefficients binomiaux, la solution peut se simplifier de la façon suivante.

La **formule du binôme** s'écrit :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Pour $a = 1$ et $b = -1$, cette formule donne, avec $(a+b)^n = (1-1)^n = 0$,

$$\sum_{k=0}^{k=n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} = 0.$$

L'égalité $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ donne :

$$\sum_{k=0}^{k=n} (-1)^{n-k} \binom{n}{n-k} = 0.$$

En changeant k en $n-k$, il vient :

$$\sum_{k=0}^{k=n} (-1)^{k} \binom{n}{k} = 0.$$

En séparant les termes correspondants aux valeurs paires de k et les termes correspondants aux valeurs impaires de k, il vient :

$$\sum_m \binom{n}{2m} - \sum_m \binom{n}{2m+1} = 0$$

$$\boxed{\sum_m \binom{n}{2m} = \sum_m \binom{n}{2m+1}}$$

et cette formule signifie exactement que le nombre de parties à nombre pair d'éléments est égal au nombre de parties à nombre impair d'éléments.

La valeur commune de ces sommes est 2^{n-1}, puisque $(1 + 1)^n = 2^n$ entraîne :

$$\sum_m \binom{n}{2m} + \sum_m \binom{n}{2m+1} = 2^n$$

Chapitre 8. Parties d'ensembles finis.

Enoncés.

Exercice 3. Nombre de couples.

Soit X un ensemble fini à n éléments. Déterminer le nombre de couples $(A, B) \in \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X)$ vérifiant $A \subset B$.	

Solution.

On peut calculer le nombre de couples $(A, B) \in \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X)$ vérifiant $A \subset B$, de deux façons différentes.

1°/ Première méthode.

a) Nombre de parties contenant une partie à *k* éléments.

Si A est une partie à k éléments de X, son complémentaire $\complement_X A$ possède $n - k$ éléments.
A toute partie B de X contenant A, on peut faire correspondre, et ceci de façon biunivoque, la partie $B \setminus A = \complement_B A$ de $\complement_X A$.
Il y a donc autant de parties de X contenant A qu'il y a de parties dans un ensemble à $n - k$ éléments : il y en a 2^{n-k}.

Comme il y a dans X, $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ parties à k éléments, il y a, dans $\mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X)$, $\binom{n}{k} 2^{n-k}$ couples (A, B) vérifiant $A \subset B$ et $Card(A) = k$.

b) Nombre de couples $(A, B) \in \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X)$ vérifiant $A \subset B$.

Ce nombre de couples s'obtient en faisant la somme des nombres de couples (A, B) vérifiant $A \subset B$ et $Card(A) = k$, pour k variant de 0 à n.

$$\text{Il y a } \sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k} 2^{n-k} \text{ couples } (A, B) \in \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X) \text{ vérifiant } A \subset B.$$

Si l'on connaît la formule du binôme pour $(1 + 2)^n$, on sait que cette somme est égale à 3^n.

2°/ Deuxième méthode.

Le résultat obtenu avec la première méthode montre que l'on doit pouvoir construire, pour chaque couple (A, B) vérifiant $A \subset B$, et ceci de façon biunivoque, une application de X dans un ensemble à trois éléments. Essayons.

Soit A une partie de X, B une partie de X.
On connaît déjà la **fonction caractéristique**, ou **fonction indicatrice**, de A et la fonction indicatrice de B.
Faisons-en la somme :

$$\mathbb{1}_A(x) + \mathbb{1}_B(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \overline{A} \cap \overline{B} \\ 1 & \text{si } x \in A + B \\ 2 & \text{si } x \in A \cap B \end{cases}$$

($A + B$ est la différence symétrique, Chapitre 2, Exercice 4)

La relation $A \subset B$ est équivalente à chacune des trois relations
$A \cap B = A$,
$A + B = B \setminus A = \complement_B A$,
$\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{B}$.
Pour deux parties A et B de X vérifiant $A \subset B$, on peut considérer l'application $f_{(A, B)} : X \to \{0, 1, 2\}$ définie par :

$$f_{(A, B)}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin B \\ 1 & \text{si } x \in B \setminus A = \mathbb{1}_A(x) + \mathbb{1}_B(x) \\ 2 & \text{si } x \in A \end{cases}$$

Réciproquement, étant donnée une application $f : X \to \{0, 1, 2\}$, on pose $A = f^{-1}(\{2\})$ et $B = f^{-1}(\{1, 2\})$.
A est contenu dans B car $\{2\} \subset \{1, 2\} \Rightarrow f^{-1}(\{2\}) \subset f^{-1}(\{1, 2\})$.

On sait donc faire correspondre, à toute application $f : X \to \{0, 1, 2\}$ un couple (A, B) de parties de X vérifiant $A \subset B$.
Pour ce couple (A, B) l'application $f_{(A, B)} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B$ coïncide avec f, et c'est le seul couple (A, B) vérifiant $A \subset B$, dont le $f_{(A, B)}$ coïncide avec f.

Il y a donc une correspondance biunivoque entre les couples de parties (A, B) de X vérifiant $A \subset B$ et les applications de X dans l'ensemble $\{0, 1, 2\}$.
L'ensemble des couples de parties (A, B) de X vérifiant $A \subset B$ et l'ensemble des applications de X dans l'ensemble $\{0, 1, 2\}$, ont donc le même nombre d'éléments.

Or il y a 3^n applications de X dans $\{0, 1, 2\}$(Chapitre 6, Exercice 2), donc :

Il y a 3^n couples $(A, B) \in \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X)$ vérifiant $A \subset B$.

Les deux formes de démonstration qu'on a faites ici établissent la formule :

$$\sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k} 2^{n-k} = 3^n$$

même lorsqu'on ne connaît pas la formule du binôme de Newton dans sa forme générale.

Chapitre 8. Parties d'ensembles finis.

Enoncés.

Exercice 4. Sommes de cardinaux.

Soit X un ensemble fini à n éléments.
Pour toute partie $A \subset X$, on note $Card\ (A)$ le nombre d'éléments de A.

1°/ Calculer $\sum_{A \in \mathcal{P}(X)} Card\ (A)$.

(On pourra utiliser la bijection $A \mapsto \complement_X A$ de $\mathcal{P}(X)$ sur $\mathcal{P}(X)$).

2°/ Calculer $\sum_{(A,B) \in \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X)} Card\ (A \cap B)$ et $\sum_{(A,B) \in \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X)} Card\ (A \cup B)$.

Solution.

1°/ Somme des cardinaux.

Groupons les parties de X selon leur nombre k d'éléments.
On sait déjà qu'il y a $\binom{n}{k}$ parties à k éléments (Exercice 1), et chacune contient k éléments, ce qui fait $\binom{n}{k}$ fois k pour la somme des cardinaux des parties à k éléments.
Lorsque k varie de 0 à n, la somme des $k\binom{n}{k}$ donne la somme des cardinaux de toutes les parties de X.

$$\sum_{A \in \mathcal{P}(X)} Card\ (A) = \sum_{k=0}^{k=n} k\binom{n}{k}$$

La bijection $A \mapsto \complement_X A$ de $\mathcal{P}(X)$ sur $\mathcal{P}(X)$ montre qu'à toute partie à k éléments, on peut associer de façon biunivoque une partie à $n - k$ éléments qui est son complémentaire. Il y a donc autant de parties à k éléments que de parties à $n - k$ éléments : $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$ (Exercice 1).

Dans la formule précédente, on peut donc remplacer k par $n - k$ et écrire :

$$\sum_{A \in \mathcal{P}(X)} Card\ (A) = \sum_{k=0}^{k=n} (n-k)\binom{n}{n-k} = \sum_{k=0}^{k=n} (n-k)\binom{n}{k}$$

Il en résulte : $\sum_{k=0}^{k=n} k\binom{n}{k} = n\sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k} - \sum_{k=0}^{k=n} k\binom{n}{k}$

$$\sum_{k=0}^{k=n} k\binom{n}{k} = \frac{n}{2}\sum_{k=0}^{k=n}\binom{n}{k}$$

Or $\sum_{k=0}^{k=n}\binom{n}{k}$ est le nombre de parties d'un ensemble à n éléments, c'est 2^n (Chapitre 6, Exercice 2), donc

$$\sum_{k=0}^{k=n} k\binom{n}{k} = \frac{n}{2}\times 2^n = n\,2^{n-1}$$

$$\boxed{\sum_{A\in\mathfrak{P}(X)} Card\,(A) = \sum_{k=0}^{k=n} k\binom{n}{k} = n\,2^{n-1}}$$

2°/ Cardinaux d'intersections et cardinaux de réunions.

a) Cardinaux d'intersections.

Soit A une partie à k éléments.
Faisons la somme des cardinaux des $A\cap B$, pour tous les $B\in\mathfrak{P}(X)$.
A chaque partie B de cardinal j contenue dans A, on peut associer, de façon biunivoque, la famille des parties de X dont l'intersection avec A est B.
Cette famille contient 2^{n-k} éléments.
La somme des cardinaux de la famille est donc $2^{n-k}\,j$.
Il y a dans A, $\binom{k}{j}$ parties à j éléments.

La somme des cardinaux des familles correspondantes est $2^{n-k}\,j\binom{k}{j}$

Lorsque j varie de 0 à k, la somme des cardinaux des familles est $2^{n-k}\sum_{j=0}^{j=k} j\binom{k}{j} = k\,2^{n-k}\,2^{k-1} = k\,2^{n-1}$

Cette somme ne dépend que de k et pas de la partie A.

Lorsqu'on fait la somme de ces sommes de cardinaux, on prendra donc soin de regrouper ensemble les parties A de même cardinal k, il y en a $\binom{n}{k}$.

De sorte que la somme des cardinaux se réduit alors à :

$$\sum_{(A,B)\in\mathfrak{P}(X)\times\mathfrak{P}(X)} Card\,(A\cap B) = 2^{n-1}\sum_{k=0}^{k=n} k\binom{n}{k} = n\,2^{n-1}\times 2^{n-1} = n\,4^{n-1}$$

D'où le résultat :

$$\boxed{\sum_{(A,B)\in\mathfrak{P}(X)\times\mathfrak{P}(X)} Card\,(A\cap B) = n\,4^{n-1}}$$

b) Cardinaux de réunions.

Partons de la formule :

$$Card\,(A \cup B) = Card\,A + Card\,B - Card\,(A \cap B)$$

évidente à partir d'un **diagramme de Venn**.

$$\sum_{(A,B)\in \mathcal{P}(X)\times\mathcal{P}(X)} Card\,(A \cup B) = \sum_{(A,B)\in \mathcal{P}(X)\times\mathcal{P}(X)} Card\,A + \sum_{(A,B)\in \mathcal{P}(X)\times\mathcal{P}(X)} Card\,B - \sum_{(A,B)\in \mathcal{P}(X)\times\mathcal{P}(X)} Card\,(A \cap B)$$

$$\sum_{(A,B)\in \mathcal{P}(X)\times\mathcal{P}(X)} Card\,A = 2^n \sum_{A\in \mathcal{P}(X)} Card\,(A) = n \times 2^{n-1} \times 2^n$$

$$\sum_{(A,B)\in \mathcal{P}(X)\times\mathcal{P}(X)} Card\,B = 2^n \sum_{B\in \mathcal{P}(X)} Card\,(B) = n \times 2^{n-1} \times 2^n$$

$$\sum_{(A,B)\in \mathcal{P}(X)\times\mathcal{P}(X)} Card\,(A \cap B) = n \times 4^{n-1}$$

$$\sum_{(A,B)\in \mathcal{P}(X)\times\mathcal{P}(X)} Card\,(A \cup B) = n \times 4^n - n \times 4^{n-1} = 3\,n \times 4^{n-1}$$

Au total, on obtient :

$$\boxed{\sum_{(A,B)\in \mathcal{P}(X)\times\mathcal{P}(X)} Card\,(A \cup B) = 3\,n \times 4^{n-1}}$$

Il y a trois fois plus d'éléments dans les réunions que dans les intersections.

Chapitre 8. Parties d'ensembles finis.

Enoncés.

Exercice 5. Système décimal.

On considère les nombres entiers naturels dont l'écriture dans le système décimal comporte deux chiffres (c'est-à-dire les nombres de 10 à 99 inclus) et on appelle X un ensemble formé de dix d'entre eux, deux à deux distincts. Montrer qu'il existe deux parties A et B de X, non vides, sans élément commun et telles que la somme des nombres contenus dans A soit égale à la somme des nombres contenus dans B.	

Solution.

Soit E l'ensemble des nombres de 10 à 99. E est un ensemble à 90 éléments. X est une partie à 10 éléments de E.
Deux parties *non vides* de X, sans élément commun, ont chacune de 1 à 9 éléments.

La somme minimum d'au moins un nombre entre 10 et 99 est 10.
La somme maximum de 9 nombres entre 10 et 99 est $91 + ... + 99 = (90 + 1) + (90 + 2) + ... + (90 + 9) = 9 \times 90 + 45 = 855$.
De l'une à l'autre,

Il y a 846 valeurs possibles de la somme de 1 à 9 nombres compris entre 10 et 99.

Toute somme d'éléments d'une partie non vide et non pleine de X prend l'une des 846 valeurs possibles de somme de 1 à 9 nombres.

X contient $2^{10} - 2 = 1\,022$ parties non vides et non pleines, donc

Il y a 1 022 sommes possibles des nombres d'une partie non vide et non pleine de X.

Comme il n'y a que 846 places pour les valeurs de sommes, il y a forcément des sommes égales parmi les 1 022 sommes possibles correspondant aux parties non vides de X.
C'est ce qu'on appelle parfois le "**principe des tiroirs**", ou "**principe de non injection**" : il n'existe pas d'injection d'un ensemble à n éléments dans un ensemble à k éléments lorsque $n > k$.
Si l'on fait correspondre à une partie non vide et non pleine A de X, la somme $S(A)$ de ses éléments, l'application $S : \mathcal{P}(X) \setminus \{\varnothing, X\} \to \{10, 11, ... , 855\}$ n'est pas injective.
Donc

Il existe deux parties non vides de X qui ont la même somme.

Une partie contenue strictement dans une autre ne peut pas avoir la même somme.
Deux parties distinctes ayant la même somme ont, en commun, une partie, vide ou non, et des parties sans élément commun et non vides.

Si on appelle A et B ces parties sans élément commun et non vides, le problème est résolu :

Il existe deux parties non vides A et B sans élément commun qui ont la même somme.

Exemples.

1°/ $X = \{10 ; 11 ; 12 ; 13 ; 14 ; 95 ; 96 ; 97 ; 98 ; 99\}$
Les parties $A = \{10 ; 99\}$ et $B = \{11 ; 98\}$ de X sont sans élément commun et ont la même somme 109.

2°/ Choisissons une partie X au hasard, à l'aide d'une table de nombres au hasard : nombres à partir de la 4^e ligne, 5^e colonne, par exemple.

$X = \{50 ; 47 ; 36 ; 91 ; 19 ; 15 ; 98 ; 75 ; 60 ; 58\}$.
Rangeons ces nombres par ordre croissant.
$X = \{15 ; 19 ; 36 ; 47 ; 50 ; 58 ; 60 ; 75 ; 91 ; 98\}$
Les sommes de deux nombres différents sont :
{34 ; 51 ; 62 ; 65 ; 73 ; 75 ; ...
Inutile d'aller plus loin dans la recherche : nous trouvons une somme égale à l'un des éléments de X.
Les parties non vides $A = \{75\}$ et $B = \{15 ; 60\}$ de X, sont sans élément commun et ont la même somme.

Remarque.

Il y a 55 sommes de deux nombres différents de deux chiffres, pris dans une partie X à 10 éléments.
Avec les 10 nombres de X, cela fait déjà au plus 65 nombres possibles.
Ils peuvent être tous différents et sont compris entre 10 et 197.
Il y a 120 sommes de trois nombres différents pris dans X.
Avec les 65 précédents, cela fait au plus 185 nombres possibles, compris entre 10 et 294.
Il y a 210 sommes de quatre nombres différents pris dans X.
Avec les 185 précédents, cela fait au plus **395 nombres possibles, compris entre 10 et 390**.
Il n'y a pas assez de place pour qu'ils soient tous différents.
Le résultat de l'exercice peut donc être affiné :

Il existe deux parties A et B de X, **chacune contenant entre 1 et 4 éléments de X**, sans élément commun, et qui ont la même somme.

Chapitre 8. Parties d'ensembles finis.

Enoncés.

Exercice 6. Nombre de parties contenant une partie donnée.

Soit E un ensemble à 40 éléments et soit A une partie de E à 7 éléments. 1°/ Combien y a-t-il de parties de E contenant A ? 2°/ Combien y a-t-il de parties de E dont l'intersection avec A n'est pas vide ?	

Solution.

1°/ Nombre de parties contenant A.

L'application f qui, à une partie B contenant A, associe $B \cap \complement A$, est une application de l'ensemble $\mathfrak{P}_A(E)$ des parties de E contenant A dans l'ensemble $\mathfrak{P}(\complement A)$ des parties du complémentaire de A.

Réciproquement, l'application g qui à une partie C du complémentaire de A, associe $C \cup A$ est une application g de l'ensemble $\mathfrak{P}(\complement A)$ des parties du complémentaire de A dans l'ensemble $\mathfrak{P}_A(E)$ des parties de E contenant A.

Les applications f et g vérifient :

a) Pour toute partie C du complémentaire de A :

$(f \circ g)(C) = f(C \cup A) = (C \cup A) \cap \complement A = (C \cap \complement A) \cup (A \cap \complement A) = (C \cap \complement A) \cup \varnothing = C \cap \complement A = C$,
puisque C est une partie du complémentaire de A (Chapitre 2, Excercice 10, 4°).

2°/ Pour toute partie B de E contenant A :

$(g \circ f)(B) = g(B \cap \complement A) = (B \cap \complement A) \cup A = (B \cup A) \cap (\complement A \cup A) = (B \cup A) \cap E = B \cup A = B$,
puisque B contient A (Chapitre 2, Excercice 10, 4°).

Les égalités $(f \circ g)(C) = C$ et $(g \circ f)(B) = B$, montrent que f et g sont **sections et rétractions** l'une de l'autre : ce sont donc des bijections (Chapitre 3, Exercice 3, 5°).

Par définition des cardinaux, $\mathfrak{P}(\complement A)$ et $\mathfrak{P}_A(E)$ ont le même cardinal : il y a exactement autant de parties dans le complémentaire de A que de parties de E contenant A.

Or le complémentaire de A possède $40 - 7 = 33$ éléments, donc il a 2^{33} parties (Chapitre 4, Exercice 1):

Il existe $2^{33} = 8\ 589\ 934\ 592$ parties de E contenant A.

2°/ Nombre de parties de E dont l'intersection avec A n'est pas vide.

Les parties de E dont l'intersection avec A est vide, sont les parties du complémentaire de A.
Le nombre de parties de E dont l'intersection avec A est vide est donc $2^{Card(E) - Card(A)}$.
Le nombre de parties de E est $2^{Card(E)}$.
Par différence, le nombre de parties de E dont l'intersection avec A n'est pas vide est :

$$2^{Card(E)} - 2^{Card(E) - Card(A)} = 2^{Card(E)}\left(1 - \frac{1}{2^{Card(A)}}\right)$$

E possède $2^{40} - 2^{33} = 2^{40}\left(1 - \frac{1}{2^7}\right) = 1\ 090\ 921\ 693\ 184$ parties dont l'intersection avec A n'est pas vide.

Il y en a autant que de parties de E ne contenant pas A.

Chapitre 8. Parties d'ensembles finis.

Enoncés.

Exercice 7. Nombre de parties dans un ensemble à 19 éléments.

Soit E un ensemble à 19 éléments. Soient A et B des parties de E vérifiant :
$Card\ (A) = 6$, $Card\ (B) = 10$, $Card\ (A \cup B) = 13$.

1°/ Déterminer le nombre d'éléments communs à A et B.
2°/ Soit X une partie de E. Montrer :
$X \cap A = \emptyset$ et $X \cap B = \emptyset \Leftrightarrow X \cap (A \cup B) = \emptyset$.
3°/ Quel est le nombre de parties de E n'ayant aucun élément commun avec A et aucun avec B ?
4°/ Quel est le nombre de parties de E contenant $A \cup B$?
5°/ Quel est le nombre de parties de E contenus à la fois dans A et dans B ?
6°/ Quel est le nombre de parties de E de cardinal pair ?

Solution.

1°/ Cardinal de l'intersection.

Nous savons que $Card\ (A \cup B) = Card\ (A) + Card\ (B) - Card\ (A \cap B)$.
Donc $Card\ (A \cap B) = Card\ (A) + Card\ (B) - Card\ (A \cup B) = 6 + 10 - 13 = 3$.

A et B ont en commun trois éléments.

2°/ Intersection avec une réunion.

$X \cap A = \emptyset$ et $X \cap B = \emptyset \Rightarrow X \cap (A \cup B) = (X \cap A) \cup (X \cap B) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset$.

Réciproquement :

$X \cap (A \cup B) = (X \cap A) \cup (X \cap B) = \emptyset \Rightarrow X \cap A \subseteq (X \cap A) \cup (X \cap B) = \emptyset$ et $X \cap B \subseteq (X \cap A) \cup (X \cap B) = \emptyset$.

D'où l'équivalence :

$X \cap A = \emptyset$ et $X \cap B = \emptyset \Leftrightarrow X \cap (A \cup B) = \emptyset$.

3°/ Parties sans élément commun avec A ou B.

Les parties sans élément commun avec A et sans élément commun avec B, sont les parties du complémentaire de $A \cup B$.
Or $Card\ (A \cup B) = 13$, donc le complémentaire de $A \cup B$ possède 6 éléments et il y a 2^6 parties de E qui n'ont aucun élément commun avec A et aucun élément commun avec B.

$2^6 = 64$ parties de E sans élément commun avec A ou B.

4°/ Nombre de parties de E contenant $A \cup B$.

Une partie de E contenant $A \cup B$ est caractérisée par la réunion de $A \cup B$ avec une partie de E sans élément commun avec A ou B : il y en a donc autant que de parties ne rencontrant ni A, ni B.

$2^6 = 64$ parties de E contenant $A \cup B$.

5°/ Nombre de parties de E contenues dans A et B.

Les parties contenus dans A et dans B sont les parties de $A \cap B$.
$A \cap B$ possède 3 éléments, donc $2^3 = 8$ parties.

Il y a $2^3 = 8$ parties de E contenues à la fois dans A et dans B.

6°/ Nombre de parties de cardinal pair.

Il y a autant de parties de cardinal pair que de parties de cardinal impair (Exercice 2).
Comme E possède 2^{19} parties, il y en a la moitié, soit 2^{18}, qui sont de cardinal pair.

Il y a 2^{18} parties de E de cardinal pair.

Chapitre 8. Parties d'ensembles finis.

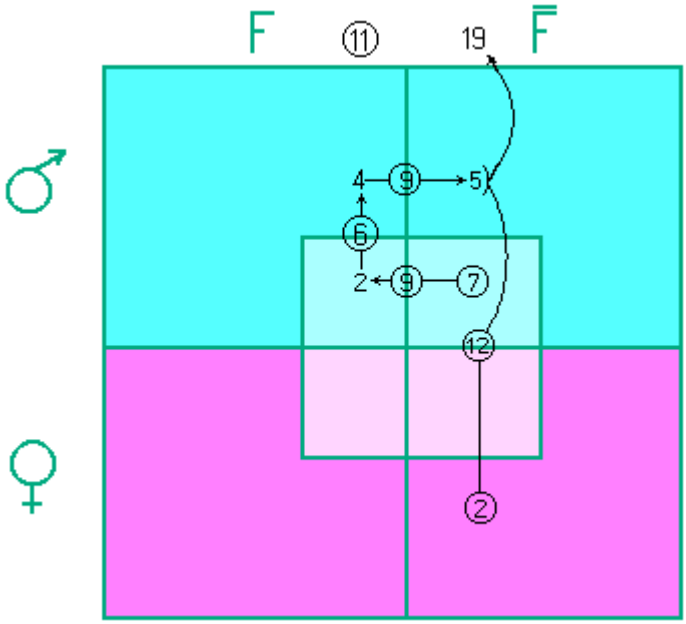
Enoncés.

Exercice 8. Passagers dans un avion.

Dans un avion se trouvent : — 9 enfants de sexe masculin, — 5 enfants français, — 9 hommes adultes, — 7 enfants non français de sexe masculin, — 11 français dont 6 de sexe masculin, — 12 enfants non français, — 2 femmes adultes non françaises. Combien y a-t'il de passagers dans l'avion ?	

Solution.

Les données peuvent être présentées dans un dessin :



Le sexe masculin est en bleu (bleu clair pour les enfants).
Le sexe féminin est en rose (rose clair pour les enfants).
Il y a des français (F) et des non français ($\overline{F}$).

La donnée de **7 enfants non français de sexe masculin**, et la donnée de **9 enfants de sexe masculin**, permettent, par différence, de trouver le nombre d'enfants français de sexe masculin : 2 (suivez la flèche).

Le nombre d'enfants français de sexe masculin (2) et la donnée de **6 français de sexe masculin**, permettent, par différence, de calculer le nombre d'adultes français de sexe masculin : 4.

Le nombre d'adultes français de sexe masculin (4) et la donnée de **9 hommes adultes**, permettent, par différence, de calculer le nombre d'adultes non français de sexe masculin : 5.

Le nombre d'adultes non français de sexe masculin (5), la donnée de **2 femmes adultes non françaises** et la donnée de **12 enfants non français**, permettent, par addition, de calculer le nombre de non français dans l'avion : 19.

Le nombre de non français dans l'avion (19) et la donnée de **11 français** permettent, par addition, de trouver le nombre de passagers dans l'avion : 30.

Il y a 30 passagers dans l'avion.

La donnée supplémentaire de **5 enfants français** permet seulement de compléter le tableau en donnant la répartition des 11 – 6 = 5 français de sexe féminin : 3 enfants et 2 adultes. Elle n'intervient pas dans le calcul du nombre total de passagers.

Chapitre 8. Parties d'ensembles finis.

Enoncés.

Exercice 9. Nombre de partitions d'un ensemble à 7 éléments.

Soit E un ensemble fini de cardinal n. Soit $p\ (n; k)$ le nombre des partitions de E formées de k parties, $1 \leq k \leq n$. 1°/ Etablir la relation $p\ (n + 1; k) = p\ (n; k - 1) + k\ p\ (n; k)$. 2°/ En déduire le nombre de partitions d'un ensemble E à 7 éléments.	

Solution.

Une partie non vide d'un ensemble fini à n éléments contient de 1 à n éléments.
Une partition P de E est une famille de parties non vides de E, deux à deux sans point commun, et dont la réunion est E.
Une telle famille contient donc au moins un élément $\{E\}$ et au plus n éléments (les parties réduites à un élément de E).

$p\ (n; 0) = 0$, puisqu'il n'y a aucune partition de E en 0 partie, chaque partition comportant au moins une partie.
$p\ (n; 1) = 1$, puisqu'il existe une partition de E en une partie, c'est la famille réduite à E.

1°/ Relation de récurrence.

Ajoutons un élément x à un ensemble fini à n éléments.

Considérons les partitions de $E + \{x\}$ formées de k parties.
Certaines de ces partitions comportent la partie $\{x\}$ comme élément : il y en a $p\ (n; k - 1)$, puisqu'on les obtient en ajoutant à une partition de E en $k - 1$ parties, la partie résuite à $\{x\}$.
Dans une autre partition de $E + \{x\}$ formées de k parties, x n'est pas tout seul dans une partie : si on enlève x, on obtient une partition de E en k parties.
Réciproquement, étant donné une partition de E en k parties, on obtient une partition de $E + \{x\}$ en k parties en ajoutant x à l'une quelconque des k parties formant la partition.
Autrement dit, à partir d'une partition de E en k parties, on peut construire k partitions de $E + \{x\}$ en k parties.
Il existe donc $k\ p\ (n; k)$ partitions de $E + \{x\}$ en k parties dans lesquelles x n'est pas seul dans une partie.

En additionnant les deux résultats, on obtient la formule de récurrence annoncée.

$$p\ (n + 1; k) = p\ (n; k - 1) + k\ p\ (n; k).$$

2°/ Nombre de partitions.

Les nombres de partitions $p\ (n; k)$ sont liés par une formule de récurrence qui fait penser à celle qui lie les

coefficient binomiaux.
On peut donc les calculer de proche en proche comme dans le triangle de Pascal, à ceci près qu'au lieu de faire la somme de deux coefficients, il faut multiplier celui qui est juste au-dessus de celui qu'on veut calculer par le numéro de sa colonne :

Tableau des $p\,(n;\,k)$

n \ k	1	2	3	4	5	6	7	Total
1	1							1
2	1	1						2
3	1	3	1					5
4	1	7	6	1				15
5	1	15	25	10	1			52
6	1	31	90	65	15	1		203
7	1	63	201	350	140	21	1	777

Un ensemble à 7 éléments possède 777 partitions.

Ce tableau présente un intérêt dans le **calcul des probabilités** car il permet d'exprimer les moments d'une variable aléatoire qui ne prend que des valeurs entières positives, en fonction des moments factoriels, faciles à calculer à partir de la fonction génératrice.

Chapitre 8. Parties d'ensembles finis.

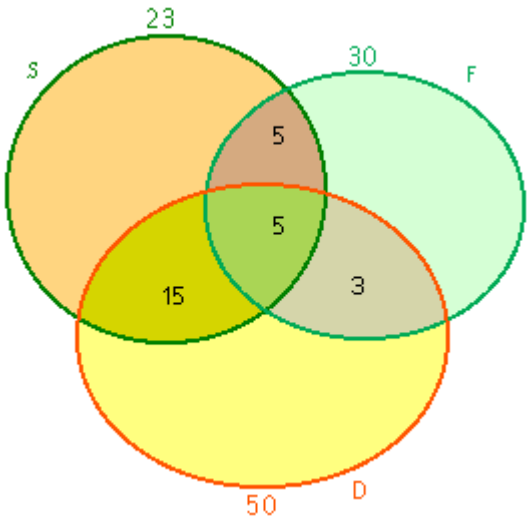
Enoncés.

Exercice 10. Contrôle bidon ?

Un contrôleur de fabrication a cherché, dans un lot de 100 pièces, le nombre de pièces présentant un défaut de solidité, un défaut de finition, ou un défaut de dimension. Ses résultats sont les suivants : – Défaut de finition : 30 pièces – Défaut de solidité : 23 pièces – Défaut de dimension : 50 pièces – Défaut de finition et de solidité : 10 pièces – Défaut de solidité et de dimension : 20 pièces. – Défaut de dimension et de finition : 8 pièces – Défaut de finition, de solidité et de dimension : 5 pièces. La direction de l'entreprise met en doute les compétences de ce contrôleur : ses doutes sont-ils justifiés ? Pourquoi ?	

Solution.

Les données peuvent être représentées dans le dessin suivant :



On voit tout de suite que **les données fournies par le contrôleur sont incohérentes** : dans l'ensemble *S* des 23 pièces présentant un défaut de solidité, il y en a déjà 25 qui présentent au moins un autre défaut ! C'est impossible.
Pour que les données soient cohérentes, il faudrait remplacer le nombre 23 par un nombre compris entre 25 (72 pièces défectueuses au total) et 53 (100 pièces défectueuses au total).
Peut-être s'agit-'il alors d'une simple erreur de frappe et non d'une erreur de comptage.

Chapitre 8. Parties d'ensembles finis.

Enoncés.

Exercice 11. Publicité dans des magazines.

1°/ Soit E un ensemble.
On admet la relation, vraie pour tous sous-ensembles A et B de E :
$A \cap B = \emptyset \Rightarrow Card\,(A \cup B) = Card\,(A) + Card\,(B)$.
Démontrer que, quels que soient les sous-ensembles A et B de E, la relation suivante est vraie :
$Card\,(A \cup B) = Card\,(A) + Card\,(B) - Card\,(A \cap B)$.
Exprimer, par une relation analogue, $Card\,(A \cup B \cup C)$.

2°/ **Application.**
Une agence de publicité doit faire une campagne pour une marque d'ordinateurs. Elle a les contraintes suivantes :
a) Elle doit choisir parmi 4 magazines : A, B, C, D.
b) Dans chaque magazine choisi, elle doit faire paraître 4 pages de publicité.
c) Son budget est limité à 200 000 francs.
d) Le coût d'une page est de 25 000 francs dans A, 15 000 francs dans B, 10 000 francs dans C, 10 000 francs dans D.
Elle dispose des informations suivantes :

Nombre de lecteurs (en millions) lisant les magazines :

A	*B*	*C*	*D*	*A-B*	*A-C*	*A-D*	*B-C*	*B-D*	*C-D*	*A-B-C*	*A-B-D*	*A-C-D*	*B-C-D*
7,0	5,0	4,5	4,5	2,5	2,5	1,9	2,5	1,0	1,5	1,0	0,1	1,2	0,5

Que doit faire cette agence pour toucher le plus grand nombre possible de lecteurs ?

Solution.

1°/ Formule de Poincaré.

$A = (A \cap \complement B) \cup (A \cap B)$ et $(A \cap \complement B) \cap (A \cap B) = \emptyset \Rightarrow Card\,(A) = Card\,((A \cap \complement B) \cup (A \cap B)) = Card\,(A \cap \complement B) + Card\,(A \cap B)$
$B = (B \cap \complement A) \cup (B \cap A)$ et $(B \cap \complement A) \cap (B \cap A) = \emptyset \Rightarrow Card\,(B) = Card\,((B \cap \complement A) \cup (B \cap A)) = Card\,(B \cap \complement A) + Card\,(B \cap A)$
$Card\,(B \cap \complement A) = Card\,(B) - Card\,(B \cap A) = Card\,(B) - Card\,(A \cap B)$
$A \cup B = A \cup (B \cap \complement A)$ et $A \cap (B \cap \complement A) = \emptyset \Rightarrow Card\,(A \cup B) = Card\,(A) + Card\,(B \cap \complement A) = Card\,(A) + Card\,(B) - Card\,(A \cap B)$

$$\boxed{Card\,(A \cup B) = Card\,(A) + Card\,(B) - Card\,(A \cap B)}$$

L'associativité de la réunion et la formule précédente permettent alors d'écrire :

$Card(A \cup (B \cup C)) = Card(A) + Card(B \cup C) - Card(A \cap (B \cup C))$
$Card(B \cup C) = Card(B) + Card(C) - Card(B \cap C)$
$Card(A \cap (B \cup C)) = Card((A \cap B) \cup (A \cap C)) = Card(A \cap B) + Card(A \cap C) - Card((A \cap B) \cap (A \cap C)) = Card(A \cap B) + Card(A \cap C) - Card(A \cap B \cap C)$
$Card(A \cup (B \cup C)) = Card(A) + Card(B) + Card(C) - Card(B \cap C) - (Card(A \cap B) + Card(A \cap C) - Card(A \cap B \cap C))$

$$Card(A \cup B \cup C) = Card(A) + Card(B) + Card(C) - Card(B \cap C) - Card(A \cap B) - Card(A \cap C) + Card(A \cap B \cap C)$$

Cette formule, comme sa généralisation à la réunion de *n* parties, est connue sous le nom de **formule de Poincaré**.

2°/ Application : agence de publicité.

On peut définir un des $2^4 = 16$ choix possibles des magazines destinés à recevoir la publicité, par une partie de l'ensemble Ω des magazines, à 4 éléments.
Notons C_A, C_B, C_C, C_D, le coût de 4 pages de publicité dans chacun des magazines :
$C_A = 100\,000$ F
$C_B = 60\,000$ F
$C_C = 40\,000$ F
$C_D = 40\,000$ F
Une simple addition montre qu'on ne peut pas choisir de faire paraître 4 pages de publicité dans chacun des magazines : le coût total serait de 240 000 F, alors qu'on ne dispose que de 200 000 F.
Par contre, il suffit de choisir 3 quelconques des 4 magazines, pour que le budget reste dans les limites fixées.
Reste à savoir lequel il faut éliminer, pour toucher le plus grand nombre de lecteurs.

A chaque partie de l'ensemble Ω des magazines, correspond une partie de l'ensemble *E* des lecteurs.
Soit *L* l'application de $\mathfrak{P}(\Omega)$ dans $\mathfrak{P}(E)$, qui, à une partie de l'ensemble Ω des magazines, fait correspondre la partie de *E* formée des lecteurs concernés.
L'énoncé donne les valeurs du cardinal de $L(G)$ pour quelques parties *G* de Ω.
Il est clair déjà qu'un lecteur de G_1 ou G_2 est un lecteur de G_1 ou un lecteur de G_2, et réciproquement : en clair, cela veut dire que l'on a la relation : $L(G_1 \cup G_2) = L(G_1) \cup L(G_2)$ pour toutes parties G_1 et G_2, de Ω.
De même, tout lecteur de G_1 et G_2 est un lecteur de G_1 et un lecteur de G_2, et réciproquement : en clair, cela veut dire que l'on a la relation : $L(G_1 \cap G_2) = L(G_1) \cap L(G_2)$ pour toutes parties G_1 et G_2, de Ω.
En particulier, il en résulte les relations :
$Card(L(B \cup C \cup D)) = Card(L(B) \cup L(C) \cup L(D))$
$Card(L(A \cup C \cup D)) = Card(L(A) \cup L(C) \cup L(D))$
$Card(L(A \cup B \cup D)) = Card(L(A) \cup L(B) \cup L(D))$
$Card(L(A \cup B \cup C)) = Card(L(A) \cup L(B) \cup L(C))$
Et nous cherchons, parmi les valeurs de $Card(L(B \cup C \cup D))$, $Card(L(A \cup C \cup D))$, $Card(L(A \cup B \cup D))$, $Card(L(A \cup B \cup C))$, laquelle est la plus grande.

La formule de Poincaré donne :

$Card\ (L\ (B \cup C \cup D)) = Card\ (L\ (B)) + Card\ (L\ (C)) + Card\ (L\ (D)) - Card\ (L\ (B \cap C)) - Card\ (L\ (B \cap D)) - Card\ (L\ (C \cap D)) + Card\ (L\ (B \cap C \cap D))$
$= 5{,}0 + 4{,}5 + 4{,}5 - 2{,}5 - 1{,}0 - 1{,}5 + 0{,}5 = 9{,}5$ (millions de lecteurs).
$Card\ (L\ (A \cup C \cup D)) = Card\ (L\ (A)) + Card\ (L\ (C)) + Card\ (L\ (D)) - Card\ (L\ (A \cap C)) - Card\ (L\ (A \cap D)) - Card\ (L\ (C \cap D)) + Card\ (L\ (A \cap C \cap D))$
$= 7{,}0 + 4{,}5 + 4{,}5 - 2{,}5 - 1{,}9 - 1{,}5 + 1{,}2 = 11{,}3$ (millions de lecteurs).
$Card\ (L\ (A \cup B \cup D)) = Card\ (L\ (A)) + Card\ (L\ (B)) + Card\ (L\ (D)) - Card\ (L\ (A \cap B)) - Card\ (L\ (A \cap D)) - Card\ (L\ (B \cap D)) + Card\ (L\ (A \cap B \cap D))$
$= 7{,}0 + 5{,}0 + 4{,}5 - 2{,}5 - 1{,}9 - 1{,}0 + 0{,}1 = 11{,}2$ (millions de lecteurs).
$Card\ (L\ (A \cup B \cup C)) = Card\ (L\ (A)) + Card\ (L\ (B)) + Card\ (L\ (C)) - Card\ (L\ (A \cap B)) - Card\ (L\ (A \cap C)) - Card\ (L\ (B \cap C)) + Card\ (L\ (A \cap B \cap C))$
$= 7{,}0 + 5{,}0 + 4{,}5 - 2{,}5 - 2{,}5 - 2{,}5 + 1{,}0 = 10{,}0$ (millions de lecteurs).

Conclusion : le meilleur choix pour toucher le maximum de lecteurs est de faire paraître 4 pages de publicité dans les magazines *A*, *C* et *D*.

Pour toucher le maximum de lecteurs, l'agence de publicité doit faire paraître 4 pages de publicité dans les magazines *A*, *C* et *D*.

Exercices

Coefficients binomiaux.

1. **Coefficients binomiaux.**
2. **Relations fondamentales entre coefficients binomiaux.**
3. **Propriétés sommatoires.**

1 Coefficients binomiaux.

Le **coefficient binomial** d'indices n et k est le nombres de parties à k éléments d'un ensemble fini à n éléments ($k \leqslant n$) :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Ce nombre est noté aussi C_n^k (ancienne notation).

HAUT

2 Relations fondamentales entre coefficients binomiaux.

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$
$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}.$$
$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n-1}{k} + \ldots + \binom{k}{k}$$

HAUT

3 Propriétés sommatoires.

HAUT

$$\sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k} = 2^n$$

$$\sum_{k=0}^{k=n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$$

$$\sum_{k=0}^{k=n} k\binom{n}{k} = n\,2^{n-1}$$

$$\sum_{k=0}^{k=n} (-1)^k\, k\binom{n}{k} = \begin{cases} -1 & \text{pour } n=1 \\ 0 & \text{pour } n\neq 1 \end{cases}$$

$$\sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{1}{n+1}\,(2^{n+1}-1)$$

$$\sum_{k=0}^{k=p} \binom{n}{k}\binom{m}{p-k} = \binom{n+m}{p}$$

$$\sum_{\substack{(n_1,\ldots,n_p)\in\{0;\ldots;n\}^p \\ n_1+\ldots+n_p=n}} \binom{N_1}{n_1}\cdots\binom{N_p}{n_p} = \binom{N_1+\cdots+N_p}{n}$$

$$\sum_{k\ impair} \binom{n}{k} = \sum_{k\ pair} \binom{n}{k} = 2^{n-1},\ n \geqslant 1.$$

$$\sum_{k=0}^{k=n} k^2 \binom{n}{k} = n\,(n+1)\,2^{n-2}$$

$(\forall\, m)(m \in \mathbb{N}$ et $m \neq 0 \Rightarrow ((\forall\, p)(p \in \mathbb{N}$ et $p \neq 0$ et $p \neq m \Rightarrow \binom{m}{p} \equiv 0$ [mod 2]) $\Leftrightarrow$ $(\exists\, k)(k \in \mathbb{N}$ et $m = 2^k)))$

(Pour un entier m différent de 0, pour que $\binom{m}{p}$ soit pair pour tout entier p différent de 0 et différent de m, il faut et il suffit que m soit une puissance de 2)

HAUT

Chapitre 9. Coefficients binomiaux.

Exercices

Exercice 1. Nombre de parties à k + 1 éléments dans un ensemble à n + 1 éléments.
Exercice 2. Sommes de coefficients binomiaux.
Exercice 3. Somme intégrale.
Exercice 4. Sommes de bornes inférieures.
Exercice 5. Calcul élémentaire de coefficients.
Exercice 6. Somme de produits de 2 coefficients binomiaux.
Exercice 7. Somme de produits de p coefficients binomiaux.
Exercice 8. Coefficients binomiaux pairs.
Exercice 9. Dénombrements divers.
Exercice 10. Relation entre 2 coefficients binomiaux particuliers.
Exercice 11. Calcul de diverses sommes de coefficients binomiaux.
Exercice 12. Somme dérivée.
Exercice 13. Somme dérivée seconde.
Exercice 14. Parité des coefficients binomiaux.

Exercice 1. Nombre de parties à k +1 éléments dans un ensemble à n + 1 éléments.

Soient n et k deux entiers naturels tels que $k \leqslant n$.
Montrer que

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n-1}{k} + \ldots + \binom{k}{k}.$$

Solution

HAUT

Exercice 2. Sommes de coefficients binomiaux.

Calculer, pour tout entier naturel n, les sommes :

$$\sum_{k=0}^{k=n}\binom{n}{k};\ \sum_{k=0}^{k=n}(-1)^k\binom{n}{k};\ \sum_{k=0}^{k=n}k\binom{n}{k};\ \sum_{k=0}^{k=n}(-1)^k k\binom{n}{k}.$$

Solution

HAUT

Exercice 3. Somme intégrale.

Soient n et k deux entiers naturels vérifiant $k \leqslant n$.

1°/ Montrer que $(n+1)\binom{n}{k} = (k+1)\binom{n+1}{k+1}$.

2°/ Calculer $\sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k}$.

Solution

HAUT

Exercice 4. Sommes de bornes inférieures.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} Inf(i, j)$.	Solution

HAUT

Exercice 5. Calcul élémentaire de coefficients.

Calculer A_8^3, C_8^3, C_8^5, C_{17}^{14}, A_9^6.	Solution

HAUT

Exercice 6. Somme de produits de 2 coefficients binomiaux.

Soient n et m des entiers naturels, et p un entier naturel inférieur ou égal à $n + m$.

1°/ Calculer $\sum_{k=0}^{k=p} \binom{n}{k}\binom{m}{p-k}$.

2°/ Calculer $\sum_{k=0}^{k=p} \binom{n}{k}\binom{n}{p-k}$.

3°/ Calculer $\sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k}^2$.

Solution

HAUT

Exercice 7. Somme de produits de *p* coefficients binomiaux.

Soient n et N des entiers naturels, N_1, ... , N_p, des entiers naturels dont la somme est N.

Calculer $\sum_{\substack{(n_1,\dots,n_p)\in\{0;\dots;n\}^p \\ n_1+\dots+n_p=n}} \binom{N_1}{n_1}\dots\binom{N_p}{n_p}$.

Solution

HAUT

Exercice 8. Coefficients binomiaux pairs.

Montrer que, si m un entier naturel de la forme $m = 2^n$, où n est un entier naturel, alors, pour tout p, entier naturel différent de 0 et de m, $\binom{m}{p}$ est pair. La réciproque est-elle vraie ?	Solution

HAUT

Exercice 9. Dénombrements divers.

1°/ Quel est le nombre de tiercés dans l'ordre que l'on peut jouer avec 10 chevaux ? 2°/ Combien peut-on former de comités composés de 3 hommes et 2 femmes choisis parmi 22 hommes et 17 femmes ? 3°/ Combien y a-t-il de nombres de 8 chiffres formés de deux 1 consécutifs, trois 2 consécutifs, les autres chiffres étant supérieurs à 2 et distincts ? 4°/ Combien y a-til de nombres de 12 chiffres formés uniquement des chiffres 1, 6 et 7, sachant que le chiffre 1 apparaît trois fois et le chiffre 6 quatre fois ? 5°/ Combien y a-t-il de nombres de11 chiffres formés uniquement des chiffres 2, 6, 7 et 9, sachant que le chiffre 2 apparaît trois fois, le chiffre 6 deux fois, le chiffre 7 une seule fois ? 6°/ La fortune de l'oncle Picsou s'élève exactement (en base dix) à cent millions de dollars (10^8 \$). Mais comme tous les personnages de Walt Disney, il n'a que quatre doigts à chaque main. Quel nombre (en base huit) va-t-il trouver exactement s'il recompte sa fortune ?	Solution

HAUT

Exercice 10. Relation entre deux coefficients binomiaux particuliers.

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 4$. Montrez $C_{C_n^2}^{2} = 3\, C_{n+1}^{4}$.	Solution

HAUT

Exercice 11. Calcul de diverses sommes de coefficients binomiaux.

Soit n un entier naturel. Calculer :

1°/ $3^2 C_n^2 + 3^3 C_n^3 + ... + 3^n C_n^n$.
2°/ $C_n^0 + C_n^2 + ... + C_n^{2p} + ...$
3°/ $C_n^1 + C_n^3 + ... + C_n^{2p+1} + ...$

Solution

HAUT

Exercice 12. Somme dérivée.

Montrez que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 :

$$\sum_{k=0}^{k=n} (k+1)\binom{n}{k} = (n+2)\,2^{n-1}.$$

Solution

HAUT

Exercice 13. Somme dérivée seconde.

Calculer en fonction de n :

$$\sum_{k=0}^{k=n} k^2 \binom{n}{k}.$$

Solution

HAUT

Exercice 14. Parité des coefficients binomiaux.

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1, d'écriture binaire $n = \sum_{k=0}^{k=m} a_k 2^k$ (tous les a_k sont égaux à 0 ou à 1).

Soit h un entier naturel compris entre 0 et n, d'écriture binaire $h = \sum_{k=0}^{k=m} b_k 2^k$ (tous les b_k sont égaux à 0 ou à 1)..

Démontrer que le coefficient binomial $\binom{n}{h}$ est impair si, et seulement si, pour tout $k = 0, \ldots, m$, $b_k = 1$ implique $a_k = 1$.

Solution

HAUT

Chapitre 9. Coefficients binomiaux.

Enoncés.

Exercice 1. Nombre de parties à *k* +1 éléments dans un ensemble à *n* + 1 éléments.

Soient n et k deux entiers naturels tels que $k \leqslant n$.
Montrer que

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n-1}{k} + \ldots + \binom{k}{k}.$$

Solution.

Raisonnons par récurrence sur n, en nous rappelant que $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ est le nombre de parties à k éléments d'un ensemble de n éléments.

1°/ Pour *n* = 0.

Pour $n = 0$, la seule valeur possible de k est 0.
Dans un ensemble vide, la seule partie à 0 élément est la partie vide, donc $\binom{n}{k} = \binom{0}{0} = 1$.

Dans un ensemble à 1 élément, il y a une seule partie à 1 élément, la partie pleine, donc $\binom{n+1}{k+1} = \binom{1}{1} = 1$ et on a bien $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} = \binom{k}{k}$, pour $n = 0$ et pour toutes les valeurs possibles de $k \leqslant n$.

2°/ Hypothèse de récurrence.

Faisons l'hypothèse de récurrence que pour un entier naturel n et pour tout entier naturel $k \leqslant n$, la formule :

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n-1}{k} + \ldots + \binom{k}{k}$$

est vraie.

3°/ Passage de *n* à *n* + 1.

a) Pour *k* ⩽ *n*, on a :

La formule (Chapitre 7, Exercice 1, 2°) :

$$\binom{n+2}{k+1} = \binom{n+1}{k+1} + \binom{n+1}{k}$$

jointe à l'hypothèse de récurrence :

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n-1}{k} + \ldots + \binom{k}{k}$$

donne :

$$\binom{n+2}{k+1} = \binom{n+1}{k} + \binom{n}{k} + \binom{n-1}{k} + \ldots + \binom{k}{k}$$

b) Pour $k = n + 1$:

$$\binom{n+2}{k+1} = 1 = \binom{n+1}{k} = \binom{k}{k}$$

de sorte que la formule est vraie pour $n + 1$, pour tout $k \leqslant n + 1$.

Elle est donc vraie, d'après le principe de récurrence (forme forte), pour tout entier naturel n et tout entier naturel $k \leqslant n$.

Chapitre 9. Coefficients binomiaux.

Enoncés.

Exercice 2. Sommes de coefficients binomiaux.

Calculer, pour tout entier naturel n, les sommes :

$$\sum_{k=0}^{k=n}\binom{n}{k};\ \sum_{k=0}^{k=n}(-1)^k\binom{n}{k};\ \sum_{k=0}^{k=n}k\binom{n}{k};\ \sum_{k=0}^{k=n}(-1)^k k\binom{n}{k}.$$

Solution.

1°/ $\sum_{k=0}^{k=n}\binom{n}{k}$ est la somme des nombres de parties à k éléments d'un ensemble de n éléments, pour toutes les valeurs possibles de k : c'est donc le nombre de parties d'un ensemble à n éléments, soit 2^n (Chapitre 6, Exercice 2).

$$\boxed{\sum_{k=0}^{k=n}\binom{n}{k}=2^n}$$

2°/ On sait qu'il y a autant de parties à nombre pair d'éléments que de parties à nombre impair d'éléments dans un ensemble à n éléments (Chapitre 7, Exercice 2). $\sum_{k\ impair}\binom{n}{k}=\sum_{k\ pair}\binom{n}{k}$,

$$\boxed{\sum_{k=0}^{k=n}(-1)^k\binom{n}{k}=0}$$

3°/ On sait que la somme des cardinaux des parties d'un ensemble à n éléments est $n\,2^{n-1}$ (Chapitre 7, Exercice 4, 1°).

$$\boxed{\sum_{k=0}^{k=n}k\binom{n}{k}=n\,2^{n-1}.}$$

4°/ $\sum_{k=0}^{k=n}(-1)^k k\binom{n}{k}=\sum_{k=0}^{k=n}(-1)^k k\frac{n!}{k!(n-k)!}$

Pour $n = 0$, la somme contient un seul terme, celui qui correspond à $k = 0$, il est nul. **La somme est nulle**.
Pour $n = 1$, la somme contient deux termes, le premier, pour $k = 0$, est nul, le deuxième, pour $k = n = 1$,

vaut – 1, **la somme vaut – 1**.
Pour *n* > 1, le terme correspondant à $k = 0$ est nul, la somme se réduit à la somme des termes de $k = 1$ à $k = n - 1$:

$$\sum_{k=0}^{k=n} (-1)^k k\binom{n}{k} = n\sum_{k=1}^{k=n} (-1)^k \frac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} = -n\sum_{k=0}^{k=n-1} (-1)^k \binom{n-1}{k}$$

Or la dernière somme, $\sum_{k=0}^{k=n-1} (-1)^k \binom{n-1}{k}$, vaut 0 d'après 2°, donc **la somme est nulle**.

En résumé :

$$\sum_{k=0}^{k=n} (-1)^k k\binom{n}{k} = \begin{cases} -1 & \text{pour } n=1 \\ 0 & \text{pour } n\neq 1 \end{cases}$$

Cette formule signifie que la somme des cardinaux des parties à nombre pair d'éléments est égal à la somme des cardinaux des parties à nombre impair d'éléments, **sauf si l'ensemble est réduit à un seul élément**.

Chapitre 9. Coefficients binomiaux.

Enoncés.

Exercice 3. Somme intégrale.

Soient n et k deux entiers naturels vérifiant $k \leqslant n$.
1°/ Montrer que $(n+1)\binom{n}{k} = (k+1)\binom{n+1}{k+1}$.
2°/ Calculer $\sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k}$.

Solution.

1°/ Première formule.

$$(k+1)\binom{n+1}{k+1} = (k+1)\frac{(n+1)!}{(k+1)!(n+1-(k+1))!}$$
$$= \frac{(n+1)!}{k!(n-k)!}$$
$$= (n+1)\frac{n!}{k!(n-k)!}$$
$$= (n+1)\binom{n}{k}$$

2°/ Somme.

$$\sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k+1} \text{ (d'après 1°)}$$
$$= \frac{1}{n+1}\sum_{h=1}^{h=n+1}\binom{n+1}{h} \text{ (en changeant } k+1 \text{ en } h)$$
$$= \frac{1}{n+1}\left(\sum_{h=0}^{h=n+1}\binom{n+1}{h} - 1\right) \text{ (en ajoutant et en retranchant le terme correspondant à } h = 0)$$
$$= \frac{1}{n+1}(2^{n+1}-1), \text{ parce que } \sum_{h=0}^{h=n+1}\binom{n+1}{h} = 2^{n+1} \text{ (nombre de parties d'un ensemble à } n+1 \text{ éléments).}$$

$$\boxed{\sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{1}{n+1}(2^{n+1}-1)}$$

Chapitre 9. Coefficients binomiaux.

Enoncés.

Exercice 4. Somme de bornes inférieures.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} Inf(i, j)$.	

Solution.

1°/ Pour $n = 1$.

Le couple (i, j) peut prendre une seule valeur, $(1, 1)$.
Le plus petit des deux nombres est 1, la somme vaut 1.

2°/ Pour n quelconque.

Parmi les n^2 couples (i, j) obtenus en faisant varier i de 1 à n et j de 1 à n, il y a :
- n couples (i, j) pour lesquels $i = j$,
- $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ couples (i, j) pour lesquels $i < j$,
- $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ couples (i, j) pour lesquels $j < i$.

Pour les n couples (i, j) pour lesquels $i = j$, la somme des plus petits des deux nombres est $\sum_{i=1}^{i=n} i = \frac{n(n+1)}{2} = \binom{n+1}{2}$

Pour les $\frac{n(n-1)}{2}$ couples (i, j) pour lesquels $i < j$, lorsque i est fixé, entre 1 et $n-1$, j varie de $i+1$ à n, ce qui fait $(n - (i + 1))$ valeurs de $Inf(i, j)$ égales à i.
La somme des i correspondants est $(n - 1 - i)\, i$.
Lorsque i varie de 1 à $n - 1$, la somme de ces termes est :

$$\sum_{i=1}^{i=n-1} (n-1-i)\, i = (n-1) \sum_{i=1}^{i=n-1} i - \sum_{i=1}^{i=n-1} i^2$$

$$\sum_{i=1}^{i=n-1} i = \frac{n(n-1)}{2} = \binom{n}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{i=n-1} i^2 = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} = \frac{1}{4}\binom{2n}{3}$$

Comment calculer la somme des carrés des premiers entiers naturels ? Par récurrence sur *n*.

Pour $n = 2$, la somme vaut $\sum_{i=1}^{i=n-1} i^2 = 1$ et $\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$ vaut 1 : la formule est vraie pour $n = 2$.

$\sum_{i=1}^{i=n} i^2 = \sum_{i=1}^{i=n-1} i^2 + n^2 = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} + n^2 = \frac{2n^3-3n^2+n+6n^2}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

de sorte que la formule est vraie pour n dès qu'elle est vraie pour $n - 1$. Par récurrence, elle est donc vraie pour $n \geqslant 2$.

Et comme la formule pour i variant de 1 à n est vraie aussi pour i variant de 0 à n et pour $n = 0$:

$$\sum_{i=0}^{i=n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \text{ pour tout } n \geqslant 0.$$

L'inconvénient que l'on peut reprocher à cette méthode rapide, mais rigoureuse, est qu'elle suppose déjà le résultat connu !

Il vient alors :

$\sum_{i=1}^{i=n-1} (n-1-i)\, i = (n-1)\frac{n(n-1)}{2} - \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} = \frac{n(n-1)}{6}(3(n-1) - (2n-1)) = \frac{n(n-1)}{6}(n-2) = \binom{n}{3}$.

Pour les $\frac{n(n-1)}{2}$ couples (i, j) pour lesquels $j < i$, le résultat est le même, par symétrie.

Au total la somme $\sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} Inf(i, j)$ vaut :

$\frac{n(n+1)}{2} + 2\binom{n}{3} = \frac{n(n+1)}{2} + 2\frac{n(n-1)}{6}(n-2) = \frac{n}{6}(2(n-1)(n-2) + 3(n+1)) = \frac{n}{6}(2n^2 - 6n + 4 + 3n + 3)$

$$\sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} Inf(i, j) = \frac{n}{6}(2n^2 - 3n + 7)$$

Pour $n = 1$, cette formule donne le résultat 1 déjà trouvé dans 1°.

Ce résultat peut être écrit sous la forme :

$$\sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} Inf(i, j) = \binom{n+1}{2} + 2\binom{n}{3}$$

En réalité, cette écriture ne présente pas, a priori, un gros intérêt, sinon de mettre en évidence son origine.

Chapitre 9. Coefficients binomiaux.

Enoncés.

Exercice 5. Calcul élémentaire de coefficients.

Calculer A_8^3, C_8^3, C_8^5, C_{17}^{14}, A_9^6.	

Solution.

A_8^3 est le nombre d'arrangements de 8 objets, 3 à 3.

C'est le nombre des injections d'un ensemble à 3 éléments dans un ensemble à 8 éléments (Chapitre 6, Exercice 3).

Sa valeur est $\frac{8!}{3!} = 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 =$ **6 720**.

C_8^3 est le nombre de combinaisons de 8 objets, 3 à 3.

C'est le nombre des injections strictement croissantes de {1, 2, 3} dans {1, ... , 8}.

Sa valeur est $\frac{8!}{3!5!} = \frac{8 \times 7 \times 6}{1 \times 2 \times 3} =$ **56**.

$C_8^5 = C_8^3 =$ **56**.

$C_{17}^{14} = \frac{17 \times 16 \times 15}{1 \times 2 \times 3} = 17 \times 8 \times 5 = 17 \times 40 =$ **680**.

$A_9^6 = 9 \times 8 \times 7 = 72 \times 7 =$ **504**.

Chapitre 9. Coefficients binomiaux.

Enoncés.

Exercice 6. Somme de produits de 2 coefficients binomiaux.

Soient n et m des entiers naturels, et p un entier naturel inférieur ou égal à $n + m$.
1°/ Calculer $\sum_{k=0}^{k=p} \binom{n}{k}\binom{m}{p-k}$.
2°/ Calculer $\sum_{k=0}^{k=p} \binom{n}{k}\binom{n}{p-k}$.
3°/ Calculer $\sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k}^2$.

Solution.

1°/ Formule générale.

Soit E un ensemble fini possédant $n + m$ éléments : $Card\ (E) = n + m$.
Soit X une partie de E possédant n éléments : $Card\ (X) = n$.

Une partie A de E à p éléments est réunion de deux parties disjointes $(A \cap X)$ et $(A \cap \complement X)$.
Soit k le cardinal de $A \cap X$.
Le cardinal de $(A \cap \complement X)$ est $p - k$.
$\binom{n}{k}$ est le nombre de parties de X qui possèdent k éléments.
Chaque partie de X possédant k éléments peut être complétée en une partie de E à p éléments, en prenant une partie de $\complement X$ à $p - k$ éléments, ce qui peut se faire de $\binom{m}{p-k}$ façons différentes.
Au total, nous trouvons donc $\binom{n}{k}\binom{m}{p-k}$ parties de E à p éléments, possédant k éléments dans X et $p - k$ éléments dans $\complement X$.

k peut prendre des valeurs de 0 à p : lorsqu'on fait la somme de ces nombres de parties, on trouve toutes les parties de E possédant p éléments, il y en a $\binom{n+m}{p}$.

$$\sum_{k=0}^{k=p} \binom{n}{k}\binom{m}{p-k} = \binom{n+m}{p}$$

Remarque (loi hypergéométrique).

Lors d'un **tirage exhaustif** (sans remise) de p individus dans une urne contenant N individus équiprobables présentant chacun une, et une seule, des **deux modalités** A_1, A_2 d'un caractère A, sachant que, dans cette urne n individus présentent la modalité A_1, et m individus présentent la modalité A_2, la probabilité que, parmi les p individus tirés, il y en ait exactement k qui présentent la modalité A_1, est donnée par la **loi hypergéométrique**, qui s'écrit, en appelant X la variable aléatoire qui représente le nombre d'individus présentant la modalité A_1, parmi les p individus tirés :

$$P\,[\,X = k\,] = \frac{\binom{n}{k}\binom{m}{p-k}}{\binom{n+m}{p}}.$$

La formule établie plus haut montre que la somme des probabilités est égale à 1 (**condition de normalisation**).

2°/ Première application : $m = n$.

La formule
$\sum_{k=0}^{k=p} \binom{n}{k}\binom{m}{p-k} = \binom{n+m}{p}$
appliquée avec $m = n$ s'écrit :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{k=p} \binom{n}{k}\binom{n}{p-k} = \binom{2n}{p}}$$

3°/ Deuxième application : $p = n$.

La formule
$\sum_{k=0}^{k=p} \binom{n}{k}\binom{n}{p-k} = \binom{2n}{p}$
appliquée avec $p = n$ s'écrit, compte tenu de la relation $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$:

$$\boxed{\sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}}$$

Chapitre 9. Coefficients binomiaux.

Enoncés.

Exercice 7. Somme de produits de *p* coefficients binomiaux.

Soient n et N des entiers naturels, N_1, ... , N_p, des entiers naturels dont la somme est N. Calculer $\sum_{\substack{(n_1,\dots,n_p)\in\{0;\dots;n\}^p \\ n_1+\dots+n_p=n}} \binom{N_1}{n_1}\dots\binom{N_p}{n_p}$.	

Solution.

Soit E un ensemble fini possédant N éléments : $Card\,(E) = N$.
Soit $(X_i)_{1\le i\le p}$ une partition de E en p parties possédant, chacune respectivement, n_i éléments : $Card\,(X_i) = n_i$, $1 \le i \le p$.

Une partie A de E à n éléments est réunion de p parties disjointes $A \cap X_i$, $1 \le i \le p$.
Soit n_i le cardinal de $A \cap X_i$.
$\binom{N_i}{n_i}$ est le nombre de parties de X_i qui possèdent n_i éléments.
Il y autant de parties à n éléments dans E qu'il y a de choix possibles d'une partie à n_1 éléments dans X_1, d'une partie à n_2 éléments dans X_2, ... , d'une partie à n_p éléments dans X_p, avec $n_1 + n_2 + ... + n_p = n$.
Au total, nous trouvons donc $\binom{N_1}{n_1}\dots\binom{N_p}{n_p}$ parties de E à n éléments, possédant n_i éléments dans X_i, $1 \le i \le p$.

Le nombre de parties de E à n éléments est la somme de ces nombres, lorsqu'on fait varier n_1, n_2, ... , n_p, dans l'intervalle $\{0 ; ... ; n\}$ de $\mathbb{N}$, avec la condition $n_1 + n_2 + ... + n_p = n$.
Or le nombre de parties de E possédant n éléments est $\binom{N}{n} = \binom{N_1+\dots+N_p}{n}$, on obtient donc la relation :

$$\sum_{\substack{(n_1,\dots,n_p)\in\{0;\dots;n\}^p \\ n_1+\dots+n_p=n}} \binom{N_1}{n_1}\dots\binom{N_p}{n_p} = \binom{N_1+\dots+N_p}{n} = \binom{N}{n}$$

Remarques.

1°/ Pour $p = 2$, nous retrouvons la relation de l'exercice 6.

2°/ Lors d'un **tirage exhaustif** (sans remise) de n individus dans une urne contenant N individus équiprobables présentant chacun une modalité A_i et une seule parmi les ***p* modalités d'un caractère *A***, sachant que, dans cette urne N_i individus présentent la modalité A_i, $1 \leq i \leq p$, la probabilité que, parmi les n individus tirés, il y en ait exactement n_i qui présentent la modalité A_i, $1 \leq i \leq p$, est donnée par la **loi hypergéométrique**, qui s'écrit, en appelant X_i la variable aléatoire qui représente le nombre d'individus présentant la modalité A_i, parmi les n individus tirés :

$$P\left[(X_1, \dots, X_p) = (n_1, \dots, n_p) \right] = \frac{\binom{N_1}{n_1} \cdots \binom{N_p}{n_p}}{\binom{N_1 + \cdots + N_p}{n}}.$$

La formule établie plus haut montre que la somme des probabilités est égale à 1 (**condition de normalisation**).

Chapitre 9. Coefficients binomiaux.

Enoncés.

Exercice 8. Coefficients binomiaux pairs.

Montrer que, si m un entier naturel de la forme $m = 2^n$, où n est un entier naturel, alors, pour tout p, entier naturel différent de 0 et de m, $\binom{m}{p}$ est pair. La réciproque est-elle vraie ?	

Solution.

1°/ Partie directe.

Dans l'anneau $\mathbb{Z}[X]$ des **polynômes à coefficients entiers**, considérons le polynôme $(X+1)^{2^n}$.
Pour $n = 0$, il s'écrit sous la forme $X + 1 = X + 1 + 2P_0[X]$, où $P_0[X] = 0 \in \mathbb{Z}[X]$ est un polynôme à coefficients entiers, de degré $2^0 - 1 = 0$, à terme constant nul.

Supposons que $(X+1)^{2^n}$ soit de la forme : $(X+1)^{2^n} = X^{2^n} + 1 + 2P_n[X]$, avec $P_n[X] \in \mathbb{Z}[X]$, polynôme à coefficients entiers, de degré $2^n - 1$, à terme constant nul.
Alors :

$$(X+1)^{2^{n+1}} = (X+1)^{2^n} \times (X+1)^{2^n}$$
$$= (X^{2^n} + 1 + 2P_n[X])^2$$
$$= (X^{2^n} + 1)^2 + 2P_n[X](X^{2^n} + 1) + 4(P_n[X])^2$$
$$= X^{2^{n+1}} + 1 + 2X^{2^n} + 2P_n[X](X^{2^n} + 1) + 4(P_n[X])^2$$
$$= X^{2^{n+1}} + 1 + 2P_{n+1}[X],$$

avec $P_{n+1}[X] = X^{2^n} + P_n[X](X^{2^n} + 1 + 2P_n[X]) \in \mathbb{Z}[X]$, polynôme à coefficients entiers, de degré $(2^n - 1) + 2^n = 2^{n+1} - 1$, à terme constant nul ($P_{n+1}[0] = 0$).

Ainsi, par récurrence, pour tout entier naturel n, $(X+1)^{2^n}$ est de la forme :

$$(X+1)^{2^n} = X^{2^n} + 1 + 2P_n[X],$$

avec $P_n[X] \in \mathbb{Z}[X]$, polynôme à coefficients entiers, de degré $2^n - 1$, à terme constant nul.

La formule du binôme $(X+1)^{2^n} = \sum_{p=0}^{p=2^n} \binom{2^n}{p} X^p$ donne, par identification, un $\binom{2^n}{p}$ pair pour tout entier p

différent de 0 et de 2^n.

Pour tout entier naturel n, $\binom{2^n}{p}$ est pair pour tout entier naturel p différent de 0 et de 2^n.

2°/ Réciproque.

Soit m un entier naturel possédant la propriété (P) suivante :

Pour tout p, entier naturel différent de 0 et de m, $\binom{m}{p}$ est pair. (**Propriété (*P*)**)

Par exemple, pour $m = 0$, $\binom{m}{p} = \binom{0}{p} = \begin{cases} 1 & \text{pour } p = 0 \\ 0 & \text{pour } p \neq 0 \end{cases}$, **l'entier $m = 0$ vérifie la propriété (P), mais ce n'est pas une puissance de 2**.
La réciproque est donc fausse dans sa généralité, **la propriété (P) n'entraîne pas que m est une puissance de 2**.

Réciproque pour $m \neq 0$.

On peut se poser la question de la vérité de la réciproque lorsqu'on impose, en plus, la condition : $m \neq 0$.

Par exemple, pour $m = 1$, $\binom{m}{p} = \binom{1}{p} = \begin{cases} 1 & \text{pour } p = 0 \\ 1 & \text{pour } p = 1 \\ 0 & \text{pour } p \neq 0 \text{ et } p \neq 1 \end{cases}$: la propriété (P) est vraie pour $m = 1 = 2^0$.
On sait déjà, par la partie directe (question 1°), que l'ensemble des entiers non nuls vérifiant la propriété (P) n'est pas vide : il contient toutes les puissances de 2.

Par ailleurs, $\binom{m}{p}$ est nul, donc pair, quels que soient les entiers naturels m et p vérifiant $m < p$: dans un ensemble à m éléments, il n'y a aucune partie possédant plus de m éléments.
Dans notre étude, il suffira d'étudier la propriété (P) restreinte aux entiers naturels ***p* compris entre 0 et *m***.

a) Coefficients binomiaux sur la ligne $m - 1$ du triangle de Pascal.

Considérons un entier $m \neq 0$, vérifiant la propriété (P).
Nous pouvons écrire, pour tout entier p compris entre 1 et $m - 1$: $\binom{m}{p} = \binom{m-1}{p} + \binom{m-1}{p-1}$, relation de récurrence des coefficients binomiaux.
$\binom{m}{p}$ est pair, pour tout entier p compris entre 1 et $m - 1$, donc $\binom{m-1}{p}$ et $\binom{m-1}{p-1}$ ont la même parité, pour tout entier p compris entre 1 et $m - 1$.
Donc, par une récurrence immédiate, $\binom{m-1}{p}$ garde toujours la même parité, pour tout entier p compris entre 0 et $m - 1$.
Or, pour $p = 0$, $\binom{m-1}{p} = \binom{m-1}{0} = 1$, est impair, donc $\binom{m-1}{p}$ est impair pour tout entier p compris entre 0 et $m - 1$.

Les coefficients binomiaux $\binom{m-1}{p}$ sont des nombres impairs, pour tout entier p vérifiant $0 \leqslant p \leqslant m-1$.

Cette propriété est équivalente à la propriété (P), puisque si tous les coefficients binomiaux $\binom{m-1}{p}$ sont des nombres impairs, $0 \leqslant p \leqslant m-1$, par addition de deux d'entre eux, on obtient toujours un entier pair, donc les $\binom{m}{p} = \binom{m-1}{p} + \binom{m-1}{p-1}$ sont tous des entiers pairs, $1 \leqslant p \leqslant m-1$.

b) *m* est une puissance de 2.

Considérons un entier $m \neq 0$, vérifiant la propriété (P).
Pour tout entier $p \in \{1, \dots, m-1\}$: $\binom{m-1}{p} = \frac{m-p}{p}\binom{m-1}{p-1}$.
$\binom{m-1}{p}$ et $\binom{m-1}{p-1}$ sont des entiers impairs, d'après (a).
Si p est un diviseur de m, compris entre 1 et $m-1$, $\frac{m-p}{p}$ est entier et, comme quotient des deux nombres impairs $\binom{m-1}{p}$ et $\binom{m-1}{p-1}$, il est impair, donc $\frac{m}{p}$ est pair.

Si p est un diviseur de m, compris entre 1 et $m-1$, $\frac{m}{p}$ est pair.

Pour $p = 1$, on retrouve le fait que m est pair, donné déjà par la propriété (P) pour $p = 1$: $\binom{m}{1} = m$ est pair.

Soit 2^n la plus grande puissance de 2 qui divise m : $\frac{m}{2^n}$ est impair, par définition de n, donc 2^n n'est pas un diviseur de m compris entre 1 et $m-1$: le seul diviseur de m non compris entre 1 et $m-1$ est m, $2^n = m$, et m est une puissance de 2.

m est une puissance de 2.

Conclusion.

Les seuls entiers naturels vérifiant la propriété (P), sont 0 et les puissances de 2.

Chapitre 9. Coefficients binomiaux.

Enoncés.

Exercice 9. Dénombrements divers.

1°/ Quel est le nombre de tiercés dans l'ordre que l'on peut jouer avec 10 chevaux ? 2°/ Combien peut-on former de comités composés de 3 hommes et 2 femmes choisis parmi 22 hommes et 17 femmes ? 3°/ Combien y a-t-il de nombres de 8 chiffres formés de deux 1 consécutifs, trois 2 consécutifs, les autres chiffres étant supérieurs à 2 et distincts ? 4°/ Combien y a-til de nombres de 12 chiffres formés uniquement des chiffres 1, 6 et 7, sachant que le chiffre 1 apparaît trois fois et le chiffre 6 quatre fois ? 5°/ Combien y a-t-il de nombres de11 chiffres formés uniquement des chiffres 2, 6, 7 et 9, sachant que le chiffre 2 apparaît trois fois, le chiffre 6 deux fois, le chiffre 7 une seule fois ? 6°/ La fortune de l'oncle Picsou s'élève exactement (en base dix) à cent millions de dollars (10^8 $). Mais comme tous les personnages de Walt Disney, il n'a que quatre doigts à chaque main. Quel nombre (en base huit) va-t-il trouver exactement s'il recompte sa fortune ?	

Solution.

1°/ Nombre de tiercés.

Un tiercé dans l'ordre est une injection de {1, 2, 3} dans {1, ... , 10}, et réciproquement, à chaque injection de {1, 2, 3} dans {1, ... , 10} correspond un tiercé dans l'ordre.
Il y a donc autant de tiercés dans l'ordre que d'injections de {1, 2, 3} dans {1, ... , 10} : c'est le nombre des arrangements de 10 objets 3 à 3, soit $A_{10}^3 = \frac{10!}{3!} = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 90 \times A_8^3 = 90 \times 6\,720 = 604\,800$ (Exercice 5).

604 800 tiercés dans l'ordre possibles avec 10 chevaux.

2°/ Nombre de comités.

Un comité est un couple d'injections croissantes : la première de {1, 2, 3} dans {1, ... , 22}, la deuxième de {1, 2} dans {1, ... , 17}.
En effet, chaque groupe de 3 hommes choisis parmi 22 est une injection croissante de {1, 2, 3} dans {1, ... , 22} (Chapitre 6, Exercice 4), et chaque groupe de 2 femmes choisies parmi 17 est une injection croissante de {1, 2} dans {1, ... , 17}.
Au total, nous obtenons donc

$$\binom{22}{3} \times \binom{17}{2} = \frac{22 \times 21 \times 20}{1 \times 2 \times 3} \times \frac{17 \times 16}{1 \times 2} = 1\,540 \times 136 = 154\,000 + 46\,200 + 9\,240 = 209\,440 \text{ comités.}$$

209 440 comités possibles en choisissant 3 hommes parmi 22, et 2 femmes parmi 17.

3°/ Nombres de huit chiffres.

Comptons d'abord les façons de mettre deux 1 consécutifs et trois 2 consécutifs en les énumérant.
Il y a d'abord les nombres où les 1 sont placés avant les 2 :
— 4 nombres où les deux 1 sont aux places 1 et 2,
— 3 nombres où les deux 1 sont aux places 2 et 3,
— 2 nombres où les deux 1 sont aux places 3 et 4,
— 1 nombre où les deux 1 sont aux places 4 et 5,
soit $4 + 3 + 2 + 1 = \binom{5}{2} = 10$ façons de placer les 1 devant les 2.
Par symétrie, il y a aussi 10 façons de placer les 1 derrière les 2.
Au total, il y a donc $10 + 10 = 20$ façons de placer deux 1 consécutifs et trois 2 consécutifs.

Pour chaque façon de placer deux 1 consécutifs et trois 2 consécutifs, les trois autres chiffres du nombre de 8 chiffres sont à choisir parmi les chiffres de 3 à 9 (pas de 0 car les nombres qu'ils représentent sont supérieurs à 2).
Chaque placement de trois chiffres est une injection de {1, 2, 3} dans {3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} : il y en a $A_7^3 = 840$.

Au total, nous obtenons $20 \times 840 =$ **16 800 nombres de huit chiffres** dans lesquels il y a deux 1 consécutifs et trois 2 consécutifs et trois autres chiffres différents choisis de 3 à 9.

16 800 nombres de huit chiffres ayant deux 1 consécutifs et trois 2 consécutifs, avec 3 autres chiffres différents choisis de 3 à 9.

4°/ Nombres de 12 chiffres.

Il y a $\binom{12}{3}$ façons de placer les trois 1 dans le nombre.

Les 1 étant placés, il y a $\binom{9}{4}$ façons de placer les quatre 6.

Les cinq autres chiffres sont des 7.
Au total, nous obtenons $\binom{12}{3} \times \binom{9}{4} = 220 \times 126 = 11 \times 2\,520 = 27\,720$ nombres remplissant les conditions imposées.

27 720 nombres de douze chiffres ayant trois 1, quatre 6, et cinq 7.

5°/ Nombres de 11 chiffres.

Il y a $\binom{11}{1}$ façons de placer le 7 dans le nombre.

Le 7 étant placé, il y a $\binom{10}{2}$ façons de placer les deux 6, dans les 10 places encores libres

Le 7 et les deux 6 étant placés, il y a $\binom{8}{3}$ façons de placer les trois 2 dans les 8 places encore libres.

Les cinq autres chiffres sont des 9.

Au total, nous obtenons $\binom{11}{1} \times \binom{10}{2} \times \binom{8}{3} = 11 \times 45 \times 56 = 616 \times 45 = 616 \times (50 - 5) = 30\,800 - 3\,080 =$ 27 720 nombres remplissant les conditions imposées.

27 720 nombres de onze chiffres ayant trois 2, deux 6, un 7 et cinq 9.

6°/ Fortune de Picsou en base huit.

Pour calculer 100 000 000 en base huit, il faut opérer comme pour la base 2 :
$100\,000\,000 = 8 \times 12\,500\,000$
$12\,500\,000 = 8 \times 1\,562\,500$
$1\,562\,500 = 8 \times 195\,312 + 4$
$195\,312 = 8 \times 24\,401 + 4$
$24\,401 = 8 \times 3\,050 + 1$
$3\,050 = 8 \times 381 + 2$
$381 = 8 \times 47 + 5$
$47 = 8 \times 5 + 7$

$100\,000\,000 = 8 \times 8 \times (8 \times 195\,312 + 4) = 8^3 \times 195\,312 + 8^2 \times 4$
$8^3 \times 195\,312 = 8^4 \times 24\,401 + 8^3 \times 4$
$8^4 \times 24\,401 = 8^5 \times 3\,050 + 8^4 \times 1$
$8^5 \times 3\,050 = 8^6 \times 381 + 8^5 \times 2$
$8^6 \times 381 = 8^7 \times 47 + 8^6 \times 5$
$8^7 \times 47 = 8^8 \times 5 + 8^7 \times 7$

$100\,000\,000 = 5 \times 8^8 + 7 \times 8^7 + 5 \times 8^6 + 2 \times 8^5 + 1 \times 8^4 + 4 \times 8^3 + 4 \times 8^2 + 0 \times 8^1 + 0 \times 8^0$

Cent millions de dollars (comptés en base dix) s'écrivent, en base huit : 575 214 400 $.

Chapitre 9. Coefficients binomiaux.

Enoncés.

Exercice 10. Relation entre deux coefficients binomiaux particuliers.

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 4$. Montrez $C_{C_n^2}^{2} = 3\, C_{n+1}^{4}$.	

Solution.

Pour un entier $n \geqslant 4$ quelconque, nous avons :

$$\binom{\frac{n(n-1)}{2}}{2} = \frac{1}{2}\frac{n(n-1)}{2}\left(\frac{n(n-1)}{2} - 1\right) = \frac{1}{4}\frac{n(n-1)}{2}(n^2 - n - 2) = \frac{1}{8}n\,(n-1)\,(n+1)\,(n-2)$$

$$\binom{\frac{n(n-1)}{2}}{2} = 3 \times \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{1\times 2\times 3\times 4} = 3\binom{n+1}{4}$$, ce qui démontre la formule, en notant C_n^k le coefficient binomial $\binom{n}{k}$.

Chapitre 9. Coefficients binomiaux.

Enoncés.

Exercice 11. Calcul de diverses sommes de coefficients binomiaux.

Soit n un entier naturel. Calculer : 1°/ $3^2 C_n^2 + 3^3 C_n^3 + ... + 3^n C_n^n$. 2°/ $C_n^0 + C_n^2 + ... + C_n^{2p} + ...$ 3°/ $C_n^1 + C_n^3 + ... + C_n^{2p+1} + ...$	

Solution.

1°/ Première somme.

La formule du binôme (Algèbre, Structures, Chapitre 4, Exercice 1) donne :

$$(1 + 3)^n = \sum_{k=0}^{k=n} 3^k C_n^k = 1 + 3n + \sum_{k=2}^{k=n} 3^k C_n^k$$

$$3^2 C_n^2 + 3^3 C_n^3 + ... + 3^n C_n^n = \sum_{k=2}^{k=n} 3^k C_n^k = 4^n - 3n - 1$$

$$\boxed{3^2 C_n^2 + 3^3 C_n^3 + ... + 3^n C_n^n = 4^n - 3n - 1}$$

Remarque.

La formule $\sum_{k=0}^{k=n} 3^k C_n^k = 4^n$ peut être établie directement, comme dans Chapitre 7, Exercice 3, en considérant, d'une part, les applications d'un ensemble E à n éléments dans l'ensemble $\{0, 1, 2, 3\}$ comme sommes des fonctions caractéristiques de trois parties de E, et en comptant, d'autre part, le nombre de triplets (A, B, C) de parties de E vérifiant $A \subseteq B \subseteq C$.

2°/ Deuxième et troisième sommes.

Dans un ensemble non vide à n éléments, il y a autant de parties à nombre pair d'éléments, que de parties à nombre impair d'éléments (Chapitre 7, Exercice 2), la somme des deux étant le nombre 2^n de parties de l'ensemble (Chapitre 6, Exercice 2).

On a donc :

$$\sum_{k\ impair} \binom{n}{k} - \sum_{k\ pair} \binom{n}{k} = 0$$
$$\sum_{k\ impair} \binom{n}{k} + \sum_{k\ pair} \binom{n}{k} = 2^n$$

On en déduit :

$$\boxed{\sum_{k\ impair} \binom{n}{k} = \sum_{k\ pair} \binom{n}{k} = 2^{n-1},\ n \geqslant 1.}$$

Chapitre 9. Coefficients binomiaux.

Enoncés.

Exercice 12. Somme dérivée.

Montrez que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 : $$\sum_{k=0}^{k=n} (k+1)\binom{n}{k} = (n+2)\,2^{n-1}.$$	

Solution.

On sait que la somme des cardinaux des parties d'un ensemble à n éléments est $n\,2^{n-1}$ (Chapitre 7, Exercice 4, 1°).

$$\boxed{\sum_{k=0}^{k=n} k\binom{n}{k} = n\,2^{n-1}.}$$

On en déduit :

$$\sum_{k=0}^{k=n} (k+1)\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{k=n} k\binom{n}{k} + \sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k} = n\,2^{n-1} + 2^n = (n+2)\,2^{n-1}.$$

$$\boxed{\sum_{k=0}^{k=n} (k+1)\binom{n}{k} = (n+2)\,2^{n-1}.}$$

Autre méthode de calcul.

Considérons le polynôme $P[X] = \sum_{k=0}^{k=n} k\,X^{k-1}\binom{n}{k}$, $n \geqslant 1$.

C'est la dérivée de $\sum_{k=0}^{k=n} X^k\binom{n}{k} = (1+X)^n$ (formule du binôme), soit :

$$\sum_{k=0}^{k=n} k\,X^{k-1}\binom{n}{k} = n\,(1+X)^{n-1}.$$

Pour $X = 1$, nous obtenons donc :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{k=n} k\binom{n}{k} = n\,2^{n-1}}$$

et $\sum_{k=0}^{k=n} (k+1)\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{k=n} k\binom{n}{k} + \sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k} = n\,2^{n-1} + 2^n = (n+2)\,2^{n-1}$

$$\boxed{\sum_{k=0}^{k=n} (k+1)\binom{n}{k} = (n+2)\,2^{n-1}}$$

Chapitre 9. Coefficients binomiaux.

Enoncés.

Exercice 13. Somme dérivée seconde.

Calculer en fonction de n : $$\sum_{k=0}^{k=n} k^2 \binom{n}{k}.$$	

Solution.

Pour $n = 0$, la somme est nulle.
Pour $n = 1$, elle vaut 1.
Pour $n = 2$, elle vaut $2 + 4 = 6$.

Considérons le polynôme $P[X] = \sum_{k=0}^{k=n} k(k-1) X^{k-2} \binom{n}{k}$, $n \geqslant 2$.

C'est la dérivée seconde de $\sum_{k=0}^{k=n} X^k \binom{n}{k} = (1+X)^n$, soit :

$$\sum_{k=0}^{k=n} k(k-1) X^{k-2} \binom{n}{k} = n(n-1)(1+X)^{n-2}.$$

Pour $X = 1$, nous obtenons donc :

$$\sum_{k=0}^{k=n} k(k-1) X^{k-2} \binom{n}{k} = n(n-1) 2^{n-2}$$

$$\sum_{k=0}^{k=n} k^2 \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{k=n} k \binom{n}{k} + n(n-1) 2^{n-2}$$

Or, nous avons établi, dans Chapitre 7, Exercice 4, 1°, la formule : $\sum_{k=0}^{k=n} k \binom{n}{k} = n 2^{n-1} = \binom{n}{1} 2^{n-1}$ rappelée dans l'Exercice 12.
En remplaçant dans la formule précédente, nous obtenons :

$$\sum_{k=0}^{k=n} k^2 \binom{n}{k} = n 2^{n-1} + n(n-1) 2^{n-2} = n 2^{n-2} (2 + n - 1) = n(n+1) 2^{n-2}$$

$$\boxed{\sum_{k=0}^{k=n} k^2 \binom{n}{k} = \binom{n+1}{2} 2^{n-1}}$$

Chapitre 9. Coefficients binomiaux.

Enoncés.

Exercice 14. Parité des coefficients binomiaux.

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1, d'écriture binaire $n = \sum_{k=0}^{k=m} a_k 2^k$ (tous les a_k sont égaux à 0 ou à 1).

Soit h un entier naturel compris entre 0 et n, d'écriture binaire $h = \sum_{k=0}^{k=m} b_k 2^k$ (tous les b_k sont égaux à 0 ou à 1)..

Démontrer que le coefficient binomial $\binom{n}{h}$ est impair si, et seulement si, pour tout $k = 0, \ldots, m$, $b_k = 1$ implique $a_k = 1$.

Solution.

1. Lemme.

Pour tout entier naturel k, $(X + 1)^{2^k}$ est de la forme :

$$(X + 1)^{2^k} = X^{2^k} + 1 + 2 P_k [X],$$

où $P_k [X]$ est un polynôme à coefficients entiers, de degré 2^{k-1} sans terme constant.

Démonstration.

Ce résultat a déjà été démontré dans l'Exercice 8.1°.

Dans l'anneau $\mathbb{Z} [X]$ des **polynômes à coefficients entiers**, considérons le polynôme $(X + 1)^{2^k}$.
Pour $k = 0$, il s'écrit sous la forme $X + 1 = X + 1 + 2 P_0 [X]$, où $P_0 [X] = 0 \in \mathbb{Z} [X]$ est un polynôme à coefficients entiers, de degré $2^0 – 1 = 0$, à terme constant nul.
Supposons que $(X + 1)^{2^k}$ soit de la forme : $(X + 1)^{2^k} = X^{2^k} + 1 + 2 P_k [X]$, avec $P_k [X] \in \mathbb{Z} [X]$, polynôme à coefficients entiers, de degré $2^k – 1$, à terme constant nul.
Alors :
$(X + 1)^{2^{k+1}} = (X + 1)^{2^k} \times (X + 1)^{2^k}$

$= (X^{2^k} + 1 + 2\,P_k[X])^2$

$= (X^{2^k} + 1)^2 + 2\,P_k[X]\,(X^{2^k} + 1) + 4\,(P_k[X])^2$

$= X^{2^{k+1}} + 1 + 2\,X^{2^k} + 2\,P_k[X]\,(X^{2^k} + 1) + 4\,(P_k[X])^2$

$= X^{2^{k+1}} + 1 + 2\,P_{k+1}[X]$,

avec $P_{k+1}[X] = X^{2^k} + P_k[X]\,(X^{2^k} + 1 + 2\,P_k[X]) \in \mathbb{Z}[X]$, polynôme à coefficients entiers, de degré $(2^k - 1) + 2^k = 2^{k+1} - 1$, à terme constant nul ($P_{k+1}[0] = 0$).

Ainsi, par récurrence, pour tout entier naturel k, $(X + 1)^{2^k}$ est de la forme :

$$(X + 1)^{2^k} = X^{2^k} + 1 + 2\,P_k[X],$$

où $P_k[X] \in \mathbb{Z}[X]$ est un polynôme à coefficients entiers, de degré $2^k - 1$, à terme constant nul.

2. Théorème.

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1, d'écriture binaire $n = \sum_{k=0}^{k=m} a_k\,2^k$.

Soit h un entier naturel compris entre 0 et n, d'écriture binaire $h = \sum_{k=0}^{k=m} b_k\,2^k$.

Le coefficient binomial $\binom{n}{h}$ est impair si, et seulement si, pour tout $k = 0, \ldots, m$, $b_k = 1$ implique $a_k = 1$.

Démonstration.

Pour $n = \sum_{k=0}^{k=m} a_k\,2^k$, on a :

$$(X + 1)^n = \prod_{\substack{0 \le k \le m \\ a_k = 1}} (X + 1)^{2^k}.$$

D'après le lemme précédent, on peut donc écrire :

$$(X + 1)^n = \prod_{\substack{0 \le k \le m \\ a_k = 1}} (X^{2^k} + 1 + 2\,P_k[X]).$$

Or, d'après la formule du binôme de Newton, on a :

$$(X+1)^n = \sum_{h=0}^{h=n} \binom{n}{h} X^h,$$

de sorte que $\binom{n}{h}$ a la parité du coefficient du terme de degré h dans le produit $\prod_{\substack{0 \leq k \leq m \\ a_k = 1}} (X^{2^k} + 1)$, compte tenu du coefficient 2 des $P_k[X]$.

Or le produit $\prod_{\substack{0 \leq k \leq m \\ a_k = 1}} (X^{2^k} + 1)$ a, pour terme de plus haut degré X^n, pour terme constant 1, et, entre les deux, figurent uniquement des monômes dont le degré est de la forme :

$\sum_k 2^k$, où les k vérifient $a_k = 1$.

Il en résulte bien que le coefficient $\binom{n}{h}$ de X^h dans $(X+1)^n$ est impair lorsque l'écriture binaire de h est extraite de l'écriture binaire de n, c'est-à-dire lorsque h est le degré d'un monôme du développement du produit $\prod_{\substack{0 \leq k \leq m \\ a_k = 1}} (X^{2^k} + 1)$, et pair lorsque h ne figure pas parmi les degrés de ces monômes. D'où le théorème.

3. Corollaire.

On retrouve, comme corollaire du théorème démontré en 2, les résultats de l'Exercice 8 :

— Tous les coefficients binomiaux $\binom{n}{h}$, $0 \leqslant h \leqslant n$, sont impairs si, et seulement si, l'écriture binaire de n ne comporte que des 1, c'est-à-dire si n est de la forme $2^k - 1$.

— Tous les coefficients binomiaux $\binom{n}{h}$, $1 \leqslant h \leqslant n-1$, sont pairs si, et seulement si, l'écriture binaire de n comporte un 1 suivi uniquement de 0, c'est-à-dire si n est de la forme 2^k.

Exercices

Entiers naturels, nombres réels.

1. Applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.
2. Réels.

1 Applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.

Il existe des applications injectives de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ qui ne sont pas des bijections.
Il existe des bijections de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}$.

HAUT

2 Réels.

Il n'existe pas de bijection de $\mathbb{N}^*$ sur $\mathbb{R}$.
$\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable : *Card* ($\mathbb{N}$) < *Card* ($\mathbb{R}$)

HAUT

Chapitre 10. Entiers naturels, rationnels, réels.

Exercices

Exercice 1. Application $n \longrightarrow n^2$.
Exercice 2. Application identique de $\mathbb{N}$.
Exercice 3. Bijections $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$.
Exercice 4. $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.
Exercice 5. Densité des rationnels.
Exercice 6. Densité des irrationnels.
Exercice 7. Encadrement de $\sqrt{ab}$.
Exercice 8. Inégalité du triangle.
Exercice 9. Expression irrationnelle d'un entier.
Exercice 10. Résolution d'équations dans $\mathbb{R}$.
Exercice 11. Irrationalité d'un radical.
Exercice 12. Irrationalité de certains nombres.
Exercice 13. Irrationalité d'une somme de radicaux.

Exercice 1. Application $n \longrightarrow n^2$.

On considère l'application $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $f(n) = n^2$.
1°/ Existe-t'il $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $f \circ g = Id_{\mathbb{N}}$?
2°/ Existe-t'il $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $h \circ f = Id_{\mathbb{N}}$?

Solution

HAUT

Exercice 2. Application identique de $\mathbb{N}$.

Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une bijection. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(n) \leqslant n$. Montrer que $f = Id_{\mathbb{N}}$.	Solution

HAUT

Exercice 3. Bijections $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$.

Montrer que les applications

$$f : (n, m) \mapsto 2^n (2m + 1) - 1 \text{ et } g : (n, m) \mapsto \frac{(n+m)(n+m+1)}{2} + m$$

sont des applications bijectives de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}$.

Solution

HAUT

Exercice 4. $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

Soit f une application de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{R}$.
On définit la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ d'entiers, de la façon suivante :

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, u_n est la n^{e} décimale du développement décimal propre de $f(n)$.

On définit alors la suite $(v_n)_{n \geq 1}$ en posant, pour $n \geqslant 1$:

$$v_n = \begin{cases} 1 & \text{si } u_n = 0 \\ 0 & \text{si } u_n \neq 0 \end{cases}$$

Montrer que f est non surjective et en déduire qu'il n'existe pas d'application bijective de $\mathbb{N}^*$ sur $\mathbb{R}$. En conclure que $\mathbb{R}$ est non dénombrable.

Solution

HAUT

Exercice 5. Densité des rationnels.

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Montrer que, si a et b sont deux nombres réels vérifiant $a < b$, il existe un nombre rationnel de la forme $\frac{m}{n^k}$, avec $m \in \mathbb{Z}$ et $k \in \mathbb{N}^*$, vérifiant $a < \frac{m}{n^k} < b$.	Solution

HAUT

Exercice 6. Densité des irrationnels.

Soit a un nombre réel strictement positif. On rappelle qu'il existe un unique $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$, tel que $r^2 = a$ (et que l'on note, d'ailleurs, $\sqrt{a}$). 1°/ Montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel. 2°/ Montrer que si a et b sont deux nombres rationnels vérifiant $a < b$, il existe c, irrationnel, vérifiant $a < c < b$. 3°/ En conclure que l'ensemble des nombres irrationnels est dense dans $\mathbb{R}$.	Solution

HAUT

Exercice 7. Encadrement de $\sqrt{ab}$.

Si a et b sont des nombres réels tels que $0 < a$ et $0 < b$, démontrer les inégalités :

$$\frac{2ab}{a+b} \leqslant \sqrt{ab} \leqslant \frac{1}{2}(a+b)$$

Solution

HAUT

Exercice 8. Inégalité du triangle.

1°/ Si a et b sont des nombres réels tels que $0 \leqslant a$ et $0 \leqslant b$, démontrer l'inégalité :

$$\frac{a+b}{1+a+b} \leqslant \frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b}$$

Solution

2°/ Pour tout nombre réel x, on pose $g(x) = \frac{|x|}{1+|x|}$.

Montrer que, pour tout couple (x, y) de nombres réels, on a : $g(x+y) \leqslant g(x) + g(y)$.

HAUT

Exercice 9. Expression irrationnelle d'un entier.

1°/ Le nombre réel $\alpha = \sqrt[3]{27+6\sqrt{21}} + \sqrt[3]{27-6\sqrt{21}}$ est-il un entier ?
2°/ Même question pour $\beta = \sqrt[3]{584+195\sqrt{3}} + \sqrt[3]{584-195\sqrt{3}}$.
3°/ Même question pour $\gamma = \sqrt[3]{26+15\sqrt{3}} + \sqrt[3]{26-15\sqrt{3}}$.
4°/ Généralisation.
5°/ Application : trouver les valeurs de $n \in \mathbb{N}$ pour lesquelles

$$\sqrt[3]{\frac{n(n+3)}{2}+\sqrt{\left(\frac{n(n+3)}{2}\right)^2+n}} + \sqrt[3]{\frac{n(n+3)}{2}-\sqrt{\left(\frac{n(n+3)}{2}\right)^2+n}}$$

est un entier. Montrer que cet entier est le carré de $n^{\frac{1}{3}}$.

Solution

HAUT

Exercice 10. Résolutions d'équations dans $\mathbb{R}$.

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

1°/ $\cos x = \frac{\pi}{3}$.

2°/ $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} = 1$.

Solution

HAUT

Exercice 11. Irrationalité d'un radical.

Soit n un entier naturel non nul. Montrer que si n n'est pas le carré d'un entier, $\sqrt{n}$ est irrationnel.	Solution

HAUT

Exercice 12. Irrationalité de certains nombres.

Montrer que les nombres $\sqrt{2}+\sqrt{7}$, $\frac{ln(2)}{ln(3)}$, $cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ sont irrationnels.	Solution

HAUT

Exercice 13. Irrationalité d'une somme de radicaux.

Soient $r \in \mathbb{Q}$, $s \in \mathbb{Q}$, $r \geqslant 0$, $s \geqslant 0$. On suppose que $\sqrt{r} \notin \mathbb{Q}$. Montrer que $\sqrt{r}+\sqrt{s} \notin \mathbb{Q}$.	Solution

HAUT

Chapitre 10. Entiers naturels, nombres réels.

Enoncés.

Exercice 1. Application $n \longrightarrow n^2$.

On considère l'application $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $f(n) = n^2$. 1°/ Existe-t'il $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $f \circ g = Id_{\mathbb{N}}$? 2°/ Existe-t'il $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $h \circ f = Id_{\mathbb{N}}$?	

Solution.

1°/ Application *g*.

S'il existait une application g telle que $f \circ g = Id_{\mathbb{N}}$, g serait, par définition, une **section** de f.

Or **toute application *f* qui possède une section est surjective** (Chapitre 2, Exercice 3, 1°), donc f serait surjective, ce qui est faux puisque, par exemple, 2 n'est le carré d'aucun nombre entier.

Il n'existe aucune application g telle que $f \circ g = Id_{\mathbb{N}}$.

2°/ Application *h*.

L'application f est injective.

En effet : $n^2 = m^2 \Rightarrow (n - m)(n + m) = 0$.

Donc si n et m ne sont pas tous deux nuls (auquel cas on aurait $n = m$), $n + m$ est différent de 0, donc $n - m = 0$ et $n = m$.

Dans tous les cas, $n^2 = m^2$ implique $n = m$, de sorte que f est injective.

$\mathbb{N}$ n'est pas vide, il contient au moins 0.

Or toute application injective dont l'ensemble de définition n'est pas vide, possède une rétraction (Chapitre 2, Exercice 3, 3°)

Donc f possède une **rétraction** et, par définition, il existe une application h telle que $h \circ f = Id_{\mathbb{N}}$.

Il existe une application h telle que $h \circ f = Id_{\mathbb{N}}$.

Chapitre 10. Entiers naturels, nombres réels.

Enoncés.

Exercice 2. Application identique de $\mathbb{N}$.

Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une bijection. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(n) \leqslant n$. Montrer que $f = Id_{\mathbb{N}}$.	

Solution.

1°/ Raisonnement par l'absurde.

Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe un $n \in \mathbb{N}$ tel que $f(n)$ ne soit pas égal à n.
Comme $f(n)$ est inférieur ou égal à n, si $f(n)$ est différent de n, c'est que l'on a $f(n) < n$.

Par application de f, on obtient $f(f(n)) \leqslant f(n) < n$.
Comme $f(n)$ est différent de n par hypothèse, et que ***f* est injective**, $f(f(n))$ est différent de $f(n)$ et on a $f(f(n)) < f(n)$.

Par itération de f, on construit ainsi une **suite infinie strictement décroissante** d'éléments de $\mathbb{N}$, ce qui est absurde, puisque $\mathbb{N}$ est bien ordonné par l'ordre naturel des entiers.

C'est donc qu'il n'existe aucun $n \in \mathbb{N}$ tel que $f(n)$ ne soit pas égal à n.

On a donc $f(n) = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $f = Id_{\mathbb{N}}$.

La seule application injective de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ qui vérifie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(n) \leqslant n$, est l'application identique $Id_{\mathbb{N}}$.

2°/ Raisonnement par récurrence.

Par définition de f : $f(0) \leqslant 0$ et $f(0) \in \mathbb{N}$.
Or **0 est le plus petit élément de $\mathbb{N}$**, donc $0 \leqslant f(0)$ et, par antisymétrie de la relation d'ordre, $f(0) = 0$.

Supposons, hypothèse de récurrence forte, que, pour un $n \in \mathbb{N}$, on ait, pour tout k de 0 à n, $f(k) = k$.

Considérons alors l'entier naturel $n + 1$.
$f(n + 1) \leqslant n + 1$, par définition de f.
Si $f(n + 1)$ était différent de $n + 1$, il existerait un k entre 0 et n tel que $f(n + 1) = k$.
D'après l'hypothèse de récurrence, k est égal à $f(k)$, donc $f(n + 1)$ serait égal à $f(k)$.
Puisque ***f* est injective**, la relation $f(n + 1) = f(k)$ entraîne $n + 1 = k$, ce qui contredit $0 \leqslant k \leqslant n < n + 1$.
On a donc nécessairement $f(n + 1) = n + 1$, et comme la relation $f(k) = k$ est vraie déjà, par hypothèse de

récurrence, pour $0 \leqslant k \leqslant n$, elle est vraie pour tout k vérifiant $0 \leqslant k \leqslant n + 1$.

Le principe de récurrence entraîne alors que la relation $f(n) = n$ est vraie pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$.

La seule application injective de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ qui vérifie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(n) \leqslant n$, est l'application identique $Id_{\mathbb{N}}$.

Chapitre 10. Entiers naturels, nombres réels.

Enoncés.

Exercice 3. Bijections $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ —> $\mathbb{N}$.

Montrer que les applications $$f : (n, m) \mapsto 2^n (2m + 1) - 1 \text{ et } g : (n, m) \mapsto \frac{(n+m)(n+m+1)}{2} + m$$ sont des applications bijectives de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}$.	

Solution.

1°/ Application *f*.

a) Construction de l'application *s*.

Soit k un entier naturel.
L'ensemble P des entiers $n \in \mathbb{N}$ tels que 2^n divise $k + 1$, n'est pas vide, il contient au moins 0.
Soit Q l'ensemble des entiers de la forme 2^n tels que 2^n divise $k + 1$.
L'application $n \mapsto 2^n$ est une bijection de P sur Q.
En effet, elle est injective parce que $2^n = 2^m \Rightarrow n = m$, et elle est surjective parce que tout élément de Q est de la forme 2^n, où n est un entier tel que 2^n divise $k + 1$.
Donc P et Q ont le même cardinal.

Tout diviseur de $k + 1$ est plus petit que $k + 1$:

> En effet, si n est un diviseur de $k + 1$, il existe un entier m tels que $k + 1 = n\,m$, on a :
>
> $$(k + 1) - n = n\,(m - 1).$$
>
> Comme $k + 1$ n'est pas nul, ni n, ni m n'est nul.
> En particulier, $m - 1$ est un entier naturel, n aussi, donc le produit $n\,(m - 1)$ est un entier naturel. 0 est le plus petit des entiers naturels, donc
>
> $$0 \leqslant n\,(m - 1) = (k + 1) - n$$
> $$n \leqslant k + 1$$

Tout élément de Q est, par définition, un diviseur de $k + 1$.
L'ensemble Q est donc une partie finie de $\mathbb{N}$ contenue dans la partie finie $\{0, 1, \ldots, k + 1\}$ de $\mathbb{N}$.
Comme Q est fini et que P et Q ont le même cardinal, P est un ensemble fini.
Tout ensemble fini d'entiers naturels possède un plus grand élément.
Donc P possède un plus grand élément.
Il existe un entier n unique tel que 2^n divise $k + 1$, et 2^{n+1} ne divise pas $k + 1$.

2^n est la plus grande puissance de 2 qui divise $k + 1$.

Le quotient de $k + 1$ par 2^n est donc un nombre impair, de la forme $2m + 1$.
m est déterminé de façon unique par la donnée de k.
On pose **$s(k) = (n, m)$**.

b) s est section et rétraction de f.

Montrons que s est section et rétraction de f.

Par définition, si $(n, m) = s(k)$, on a :

$$k + 1 = 2^n (2m + 1)$$
$$k = 2^n (2m + 1) - 1 = f(n, m) = f(s(k))$$
$$f \circ s = id_{\mathbb{N}}$$

s est une **section** de f (et f est une rétraction de s).

D'autre part, pour tout couple $(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, on a :

$$f(n, m) = 2^n (2m + 1) - 1$$
$$f(n, m) + 1 = 2^n (2m + 1)$$

$f(n, m) + 1$ est le produit d'une puissance de 2 par un nombre impair.
n est donc le plus grand entier tel que 2^n divise $f(n, m) + 1$ et tel que 2^{n+1} ne divise pas $f(n, m) + 1$.
Et m est le seul entier tel que le quotient de $f(n, m) + 1$ par 2^n soit un nombre impair de la forme $2m + 1$.
Donc

$$s(f(n, m)) = (n, m).$$
$$s \circ f = id_{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}$$

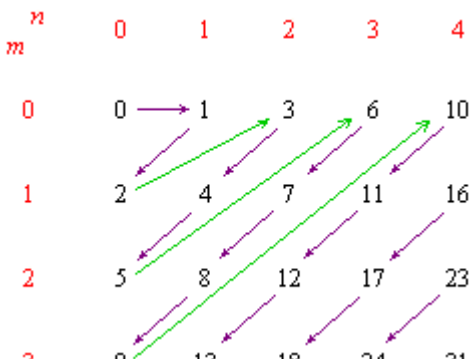
s est une **rétraction** de f (et f est une section de s).

f et s sont sections et rétractions l'une de l'autre : ce sont donc des bijections réciproques (Chapitre 2, Exercice 3, 5°).

L'application $f : (n, m) \mapsto 2^n (2m + 1) - 1$ est une application bijective de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}$.

2°/ Application g.

Pour visualiser la construction de l'application g, on peut dresser un tableau des valeurs de g pour les basses valeurs de n et m.



On voit tout de suite, sur ce tableau, comment s'organisent les valeurs de g en fonction des coordonnées n et m : il suffit d'écrire les entiers naturels successifs en remplissant les diagonales l'une après l'autre. Evidemment, cela permettra d'écrire tous les entiers naturels et de ne les écrire qu'une seule fois chacun, de sorte que l'application g sera bijective.

Reste à démontrer cette observation intuitive et inductive.

a) Application *s*.

Soit *k* un entier naturel.
Pour $k = 0$, on pose $s(0) = (0, 0)$.
Pour $k > 0$, comme l'application $h \mapsto \binom{h}{2}$ est croissante, il existe un plus grand entier *h*, qui est supérieur ou égal à 2 tel que $\binom{h}{2}$ soit inférieur ou égal à *k*, et $\binom{h+1}{2}$ strictement plus grand que *k*.
(L'entier *h* est le numéro de la diagonale sur laquelle on va placer le nombre *k* dans le tableau des valeurs de *g*. Sur la première diagonale, on a placé 0).

$$\binom{h}{2} \leqslant k < \binom{h+1}{2}$$

On pose $m = k - \binom{h}{2}$.
Comme *h* est unique, *m* est déterminé de façon univoque par *k*.

$$k < \binom{h+1}{2} \Rightarrow m = k - \binom{h}{2} < \binom{h+1}{2} - \binom{h}{2} = h.$$
$$m \leqslant h - 1$$

On pose $n = h - 1 - m$.
h et *m* étant uniques pour un *k* donné, *n* est déterminé de façon univoque par *k*.

On pose $s(k) = (n, m)$.
s est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

b) *s* est section et rétraction de *f*.

Montrons que *s* est section et rétraction de *f*.

Par définition de *s*, on a :
$0 = g(0, 0) = g(s(0))$ par définition de $s(0) = (0,0)$.
Et, pour *k* différent de 0 :
$k = \binom{h}{2} + m = \binom{n+m+1}{2} + m = \frac{(n+m)(n+m+1)}{2} + m = g(n, m) = g(s(k))$,
$g(s(k)) = k$, pour tout $k \in \mathbb{N}$.
Donc $g \circ s = id_{\mathbb{N}}$.
s est une **section** de *g* (et *g* est une rétraction de *s*).

En sens inverse, comme $g(0, 0) = 0$, on a $s(g(0, 0)) = s(0) = (0, 0)$.

Pour $(n, m) \neq (0, 0)$, si l'on a $g(n, m) = \frac{(n+m)(n+m+1)}{2} + m = \binom{n+m+1}{2} + m$, *m* est compris entre 0 et $n + m$, et :

$$\binom{n+m+1}{2} \leqslant g(n, m) \leqslant \binom{n+m+1}{2} + n + m < \binom{n+m+1}{2} + n + m + 1 = \frac{(n+m)(n+m+1)}{2} + (n + m + 1) =$$

$$\frac{(n+m+1)(n+m+2)}{2} = \binom{n+m+2}{2}$$

$$\binom{n+m+1}{2} \leqslant g(n, m) < \binom{n+m+2}{2}$$

$n + m + 1$ est donc le plus grand entier h tel que $\binom{h}{2} \leqslant g(n, m)$ et on a $m = g(n, m) - \binom{h}{2}$ et $n = h - 1 - m$.

C'est dire que (n, m) est égal à $s(g(n, m))$, pour tout couple $(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.
$s \circ g = id_{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}$
s est une **rétraction** de g (et g est une section de s).

g et s sont sections et rétractions l'une de l'autre : ce sont donc des bijections réciproques (Chapitre 2, Exercice 3, 5°).

L'application $g : (n, m) \mapsto \frac{(n+m)(n+m+1)}{2} + m$ est une application bijective de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}$.

Par définition des cardinaux, puisqu'il existe une application bijective de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}$, ces deux ensembles ont le même cardinal.

Chapitre 10. Entiers naturels, nombres réels.

Enoncés.

Exercice 4. $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

Soit f une application de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{R}$. On définit la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ d'entiers, de la façon suivante : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, u_n est la n^e décimale du développement décimal propre de $f(n)$. On définit alors la suite $(v_n)_{n \geq 1}$ en posant, pour $n \geqslant 1$: $$v_n = \begin{cases} 1 & \text{si } u_n = 0 \\ 0 & \text{si } u_n \neq 0 \end{cases}$$ Montrer que f est non surjective et en déduire qu'il n'existe pas d'application bijective de $\mathbb{N}^*$ sur $\mathbb{R}$. En conclure que $\mathbb{R}$ est non dénombrable.	

Solution.

1°/ f n'est pas surjective.

A tout nombre, on sait faire correspondre une suite $(v_n)_{n \geq 1}$, application de $\mathbb{N}^*$ dans $\{0, 1\}$.

Réciproquement, à toute suite donnée de 0 et de 1, on sait faire correspondre un nombre réel compris entre 0 et 1, dont la suite $(v_n)_{n \geq 1}$ correspondante est la suite de départ, il suffit de faire suivre 0, des chiffres $1 - v_n$.

Autrement dit, l'application de $\mathbb{R}$dans $2^{\mathbb{N}}$ qui, à un nombre réel fait correspondre sa suite $(v_n)_{n \geq 1}$, possède une section.

Cette application est donc surjective.

Toute section de cette application de $\mathbb{R}$dans $2^{\mathbb{N}}$est une application injective de $2^{\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{R}$, de sorte que le cardinal de $2^{\mathbb{N}}$ est inférieur ou égal au cardinal de $\mathbb{R}$.

Or on sait que le cardinal de $\mathbb{N}$ est strictement plus petit que le cardinal de $2^{\mathbb{N}}$ (théorème de Cantor, Chapitre 3, Exercice 3).

On a donc : $Card(\mathbb{N}) < Card(2^{\mathbb{N}}) \leqslant Card(\mathbb{R})$.

De sorte que le cardinal de $\mathbb{N}$, qui est égal au cardinal de $\mathbb{N}^*$, est strictement plus petit que le cardinal de $\mathbb{R}$.

Il n'existe donc pas de surjection de $\mathbb{N}^*$ sur $\mathbb{R}$, sinon cette surjection aurait une section, application injective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{N}^*$ et l'on aurait

Card ($\mathbb{R}$) $\leqslant$ *Card* ($\mathbb{N}$*) = *Card* ($\mathbb{N}$)
ce qui contredirait l'inégalité *Card* ($\mathbb{N}$) < *Card* ($\mathbb{R}$) qu'on vient d'obtenir.

2°/ L'ensemble des réels n'est pas dénombrable.

S'il existait une injection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{N}$, cette injection aurait une rétraction, qui serait une surjection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{R}$.
Composée avec l'injection canonique de $\mathbb{N}$* dans $\mathbb{N}$, cette application donnerait une surjection de $\mathbb{N}$* sur $\mathbb{R}$, ce qui est impossible d'après 1°.

Il n'existe donc pas d'injection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{N}$, ce qui signifie, par définition, que $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

Chapitre 10. Entiers naturels, rationnels, réels.

Enoncés.

Exercice 5. Densité des rationnels.

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Montrer que, si a et b sont deux nombres réels vérifiant $a < b$, il existe un nombre rationnel de la forme $\frac{m}{n^k}$, avec $m \in \mathbb{Z}$ et $k \in \mathbb{N}^*$, vérifiant $a < \frac{m}{n^k} < b$.	

Solution.

Soient a et b des réels vérifiant $a < b$.

$(b - a)$ est un nombre réel > 0 et puisque **la suite** $\left(\frac{1}{n^k}\right)_{k \in \mathbb{N}^*}$ **tend vers 0** , lorsque k tend vers l'infini, on peut toujours trouver une puissance de n qui soit assez grande pour que $\frac{1}{n^k}$ soit strictement plus petit que $(b - a)$.
$n^k (b - a) > 1$,
$n^k b > n^k a + 1$.
L'intervalle entre les nombres réels $n^k a$ et $n^k b$ est strictement plus grand que 1, donc il contient un entier m.
$n^k a < m < n^k b$
Il existe un entier relatif m, qui vérifie, par conséquent :

$$a < \frac{m}{n^k} < b.$$

Corollaire immédiat : entre deux nombres réels, on peut toujours trouver un nombre rationnel.

On traduit cette propriété en disant que **l'ensemble des rationnels est dense dans l'ensemble des nombres réels**.

Voir aussi (Analyse, Chapitre 4, Exercice 3) qui traite de la même question avec $n = 2$.

Chapitre 10. Entiers naturels, rationnels, réels.

Enoncés.

Exercice 6. Densité des irrationnels.

Soit a un nombre réel strictement positif. On rappelle qu'il existe un unique $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$, tel que $r^2 = a$ (et que l'on note, d'ailleurs, $\sqrt{a}$). 1°/ Montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel. 2°/ Montrer que si a et b sont deux nombres rationnels vérifiant $a < b$, il existe c, irrationnel, vérifiant $a < c < b$. 3°/ En conclure que l'ensemble des nombres irrationnels est dense dans $\mathbb{R}$.	

Solution.

1°/ $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Si $\sqrt{2}$ était rationnel, il existerait des entiers ***p* et *q*, premiers entre eux**, tels que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$.

On aurait donc $p = \sqrt{2}\, q$ et, par élévation au carré : $p^2 = 2\, q^2$.

2 divise le deuxième membre, donc divise aussi le premier.
Comme 2 est un facteur premier de p^2, il divise p, donc ***p* est pair** : $p = 2\, p'$ et $p^2 = 4\, p'^2$.
En simplifiant par 2, il reste $2\, p'^2 = q^2$ et 2 divise q^2, donc divise q : ***q* est pair**, ce qui contredit le fait que p et q sont premiers entre eux.

Donc il n'existe pas d'entiers p et q premiers entre eux tels que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$.

Comme tout rationnel peut se mettre sous la forme $\frac{p}{q}$, avec p et q premiers entre eux, on voit que $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel.

2°/ Existence d'un irrationnel entre deux rationnels.

Si a et b sont deux rationnels vérifiant $a < b$, $b - a$ est un rationnel > 0.

$c = a + \frac{b-a}{\sqrt{2}}$ est un nombre réel compris entre a et b.
Ce n'est pas un rationnel, sinon $\sqrt{2}$ serait rationnel, car $\sqrt{2} = \frac{b-a}{c-a}$.
Donc, entre tous rationnels distincts, il existe des irrationnels.

3°/ Densité des irrationnels.

Considérons deux nombres réels x et y, $x < y$.
Soit $\frac{x+y}{2}$ le milieu de x et y. C'est un nombre réel strictement compris entre x et y.
Comme les rationnels sont denses dans $\mathbb{R}$ (Exercice 5), il existe un rationnel a entre x et $\frac{x+y}{2}$ et un rationnel b entre $\frac{x+y}{2}$ et y.
Entre les rationnels a et b, il existe un irrationnel, d'après 2°. Cet irrationnel est compris entre x et y.
Donc les irrationnels sont denses dans $\mathbb{R}$.

Chapitre 10. Entiers naturels, rationnels, réels.

Enoncés.

Exercice 7. Encadrement de $\sqrt{ab}$.

Si a et b sont des nombres réels tels que $0 < a$ et $0 < b$, démontrer les inégalités : $$\frac{2ab}{a+b} \leqslant \sqrt{ab} \leqslant \frac{1}{2}(a+b)$$	

Solution.

1°/ Première inégalité.

Le carré d'un nombre réel est toujours positif :

$\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2 \geqslant 0$
$a + b - 2\sqrt{ab} \geqslant 0$
$\sqrt{ab} \leqslant \frac{1}{2}(a+b)$
Une première inégalité est établie.

2°/ Deuxième inégalité.

$0 < a$ et $0 < b \Rightarrow 0 < a + b$, donc aussi $0 < \frac{1}{2}(a+b)$

On peut diviser chaque membre de l'inégalité précédente par $\frac{1}{2}(a+b)$ sans changer le sens de l'inégalité :

$\frac{2\sqrt{ab}}{a+b} \leqslant 1$
En multipliant par $\sqrt{ab}$, qui est strictement positif, on obtient la deuxième inégalité :
$\frac{2ab}{a+b} \leqslant \sqrt{ab}$

Chapitre 10. Entiers naturels, rationnels, réels.

Enoncés.

Exercice 8. Inégalité du triangle.

1°/ Si a et b sont des nombres réels tels que $0 \leqslant a$ et $0 \leqslant b$, démontrer l'inégalité :

$$\frac{a+b}{1+a+b} \leqslant \frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b}$$

2°/ Pour tout nombre réel x, on pose $g(x) = \frac{|x|}{1+|x|}$.
Montrer que, pour tout couple (x, y) de nombres réels, on a : $g(x+y) \leqslant g(x) + g(y)$.

Solution.

1°/ Inégalité en *a* et *b*.

$$\frac{a+b}{1+a+b} = \frac{a}{1+a+b} + \frac{b}{1+a+b}$$

Comme a et b sont positifs, $1 + a + b$ est supérieur à $1 + a$ et à $1 + b$, d'où :
$\frac{a}{1+a+b} \leqslant \frac{a}{1+a}$ et $\frac{b}{1+a+b} \leqslant \frac{b}{1+b}$
Et, par addition :

$$\frac{a+b}{1+a+b} \leqslant \frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b}$$

2°/ Inégalité en *g*.

$$g(x+y) = \frac{|x+y|}{1+|x+y|}$$

Or l'application $f : t \mapsto \frac{t}{1+t}$ de $[0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ est croissante.
On peut le voir en calculant sa dérivée $\frac{1}{(1+t)^2}$: elle est strictement positive.
A défaut de notion de dérivation, on prend deux réels a et b, positifs, vérifiant $a \leqslant b$.
$f(b) - f(a) = \frac{b}{1+b} - \frac{a}{1+a} = \frac{b-a}{(1+a)(1+b)} \geqslant 0$
$a \leqslant b \Rightarrow f(a) \leqslant f(b)$, donc ***f* est croissante**.

L'**inégalité du triangle est vraie pour la valeur absolue** : $|x + y| \leqslant |x| + |y|$.
Pour le voir, il suffit de considérer les quatre cas possibles :
— $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$: $|x| = x$, $|y| = y$, $|x + y| = x + y$, l'inégalité se réduit à une égalité, elle est vraie.

— $x \leqslant 0$ et $y \leqslant 0$: $|x| = -x$, $|y| = -y$, $|x + y| = -x - y$, l'inégalité se réduit à une égalité, elle est vraie.
— $x \geqslant 0$ et $y \leqslant 0$: $|x| = x$, $|y| = -y$, $x + y$ peut être positif ou négatif, mais sa valeur absolue est de toute façon, plus petite que la plus grande des valeurs absolues de x et de y, donc plus petite que la somme des deux.
— $x \leqslant 0$ et $y \geqslant 0$: même chose.

L'ingalité $|x + y| \leqslant |x| + |y|$ et la croissance de la fonction $f : t \mapsto \frac{t}{1+t}$ de $[0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ entraînent la relation :

$$\frac{|x+y|}{1+|x+y|} \leqslant \frac{|x|+|y|}{1+|x|+|y|}$$

L'inégalité établie dans la question 1° entraîne : $\frac{|x|+|y|}{1+|x|+|y|} \leqslant \frac{|x|}{1+|x|} + \frac{|y|}{1+|y|} = g(x) + g(y)$.
De sorte que, par transitivité de la relation d'ordre des réels, nous obtenons :

$$g(x + y) \leqslant g(x) + g(y).$$

Chapitre 10. Entiers naturels, rationnels, réels.

Enoncés.

Exercice 9. Expression irrationnelle d'un entier.

1°/ Le nombre réel $\alpha = \sqrt[3]{27+6\sqrt{21}} + \sqrt[3]{27-6\sqrt{21}}$ est-il un entier ?
2°/ Même question pour $\beta = \sqrt[3]{584+195\sqrt{3}} + \sqrt[3]{584-195\sqrt{3}}$.
3°/ Même question pour $\gamma = \sqrt[3]{26+15\sqrt{3}} + \sqrt[3]{26-15\sqrt{3}}$.
4°/ Généralisation.
5°/ Application : trouver les valeurs de $n \in \mathbb{N}$ pour lesquelles

$$\sqrt[3]{\frac{n(n+3)}{2}+\sqrt{\left(\frac{n(n+3)}{2}\right)^2+n}} + \sqrt[3]{\frac{n(n+3)}{2}-\sqrt{\left(\frac{n(n+3)}{2}\right)^2+n}}$$

est un entier. Montrer que cet entier est le carré de $n^{\frac{1}{3}}$.

Solution.

1°/ Nombre réel α.

Considérons les deux nombres réels $a = \sqrt[3]{27+6\sqrt{21}}$ et $b = \sqrt[3]{27-6\sqrt{21}}$.
On a $a^3 = 27 + 6\sqrt{21}$ et $b^3 = 27 - 6\sqrt{21}$.
$a^3 + b^3 = 54$
$a^3 b^3 = 27^2 - 36 \times 21 = 729 - 756 = -27 = (-3)^3$
$a\,b = -3$

$(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3\,ab\,(a + b)$
$\alpha^3 = 54 - 9\,\alpha$.

α est une racine réelle de l'équation : $\alpha^3 + 9\,\alpha - 54 = 0$, qui s'écrit $(\alpha - 3)(\alpha^2 + 3\,\alpha + 18) = 0$.
Le discriminant de l'équation $(\alpha^2 + 3\,\alpha + 18) = 0$ est $9 - 4 \times 18 = -63$, il est négatif.
Donc les racines du polynôme $(\alpha^2 + 3\,\alpha + 18)$ ne sont pas réelles.

La seule racine réelle de l'équation $\alpha^3 + 9\,\alpha - 54 = 0$ est $\alpha = 3$.

Donc :

$$\boxed{\sqrt[3]{27+6\sqrt{21}} + \sqrt[3]{27-6\sqrt{21}} = 3.}$$

2°/ Nombre réel β.

Considérons les deux nombres réels $a = \sqrt[3]{584+195\sqrt{3}}$ et $b = \sqrt[3]{584-195\sqrt{3}}$.
On a $a^3 = 584 + 195\sqrt{3}$ et $b^3 = 584 - 195\sqrt{3}$.

$a^3 + b^3 = 1\,168$
$a^3 b^3 = 584^2 - 3 \times 195^2 = 341\,056 - 114\,075 = 226\,981 = (61)^3$
$a\,b = 61$

$(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3\,ab\,(a + b)$
$\beta^3 = 1168 + 183\,\beta.$

β est une racine réelle de l'équation : $\beta^3 - 183\,\beta - 1\,168 = 0$, qui s'écrit $(\beta - 16)(\beta^2 + 16\,\beta + 73) = 0$.
Le discriminant de l'équation $(\beta^2 + 16\,\beta + 73) = 0$ est $4 \times (64 - 73) = -36$, il est négatif.
Donc les racines du polynôme $(\beta^2 + 16\,\beta + 73)$ ne sont pas réelles.

La seule racine réelle de l'équation $\beta^3 - 183\,\beta - 1\,168 = 0$ est $\beta = 16$.

Donc :

$$\sqrt[3]{584 + 195\sqrt{3}} + \sqrt[3]{584 - 195\sqrt{3}} = 16.$$

3°/ Nombre réel γ.

Considérons les deux nombres réels $a = \sqrt[3]{26+15\sqrt{3}}$ et $b = \sqrt[3]{26-15\sqrt{3}}$.
On a $a^3 = 26 + 15\sqrt{3}$ et $b^3 = 26 - 15\sqrt{3}$.
$a^3 + b^3 = 52$
$a^3 b^3 = 26^2 - 3 \times 15^2 = 676 - 675 = 1$
$a\,b = 1$

$(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3\,ab\,(a + b)$
$\gamma^3 = 52 + 3\,\gamma.$

γ est une racine réelle de l'équation : $\gamma^3 - 3\,\gamma - 52 = 0 = (\gamma - 4)(\gamma^2 + 4\,\gamma + 13)$
$(\gamma^2 + 4\,\gamma + 13)$ n'a pas de racine réelle.

Donc :

$$\sqrt[3]{26+15\sqrt{3}} + \sqrt[3]{26-15\sqrt{3}} = 4.$$

4°/ Généralisation.

Tous ces exemples sont construits à partir des **formules de Cardan** pour la résolution par radicaux des équations algébriques de degré 3.
C'est facile à faire : on se donne une équation du type $(x - n)(x^2 + n\,x + (n^2 + 3\,k)) = 0$, avec $\mathbf{4\,k + n^2 > 0}$, et on applique les formules de Cardan pour résoudre l'équation $x^3 + 3\,k\,x - n\,(n^2 + 3\,k) = 0$.
On pose $x = a + b$.
$(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3\,a\,b\,(a + b)$
$x^3 - 3\,ab\,x - (a^3 + b^3) = 0$
D'où, par identification avec $x^3 + 3\,k\,x - n\,(n^2 + 3\,k) = 0$.
$a^3 + b^3 = n\,(n^2 + 3\,k)$, $ab = -k$, $a^3 b^3 = -k^3$
a^3 et b^3 sont les racines de l'équation $y^2 - n\,(n^2 + 3\,k)\,y - k^3 = 0$
$a^3 = \frac{1}{2}\left(n\,(n^2 + 3\,k) + \sqrt{n^2\left(n^2 + 3k\right)^2 + 4k^3}\right)$

$b^3 = \frac{1}{2}(n(n^2 + 3k) - \sqrt{n^2(n^2+3k)^2 + 4k^3})$

Pour éliminer le facteur $\frac{1}{2}$, on prendra $n(n^2 + 3k)$ pair (n pair ou (n et k impairs)).

La racine réelle s'écrit :

$$n = \sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(n(n^2+3k) + \sqrt{n^2(n^2+3k)^2 + 4k^3}\right)} + \sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(n(n^2+3k) - \sqrt{n^2(n^2+3k)^2 + 4k^3}\right)}$$

avec (n pair ou (n impair et k impair)) et ($n^2 + 4k > 0$).

Pour $k = n$, on obtient la formule, valable pour tout entier naturel n, racine réelle de l'équation :

$$x^3 + 3nx - n^2(n+3) = 0$$
$$(x-n)(x^2 + nx + n(n+3)) = 0$$
(discriminant $= n^2 - 4n^2 - 12n = -3n(n+4) \leqslant 0$)

$$n = \sqrt[3]{n\left(\frac{n(n+3)}{2} + \sqrt{\left(\frac{n(n+3)}{2}\right)^2 + n}\right)} + \sqrt[3]{n\left(\frac{n(n+3)}{2} - \sqrt{\left(\frac{n(n+3)}{2}\right)^2 + n}\right)}$$

n	Expression irrationnelle	Autre expression
1	$\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$	
2	$\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}} + \sqrt[3]{10-6\sqrt{3}}$	$\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}} + \sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}$
3	$\sqrt[3]{27+6\sqrt{21}} + \sqrt[3]{27-6\sqrt{21}}$	
4	$\sqrt[3]{56+40\sqrt{2}} + \sqrt[3]{56-40\sqrt{2}}$	$\sqrt[3]{26+15\sqrt{3}} + \sqrt[3]{26-15\sqrt{3}}$
5	$\sqrt[3]{100+45\sqrt{5}} + \sqrt[3]{100-45\sqrt{5}}$	

5°/ Application.

La formule précédente peut s'écrire :

$$n^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\frac{n(n+3)}{2} + \sqrt{\left(\frac{n(n+3)}{2}\right)^2 + n}} + \sqrt[3]{\frac{n(n+3)}{2} - \sqrt{\left(\frac{n(n+3)}{2}\right)^2 + n}}$$

C'est un entier lorsque $n^{\frac{2}{3}}$ est un entier, donc lorsque ***n* est un cube**. L'expression est alors le carré de $n^{\frac{1}{3}}$.

Chapitre 10. Entiers naturels, rationnels, réels.

Enoncés.

Exercice 10. Résolutions d'équations dans $\mathbb{R}$.

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

1°/ $\cos x = \frac{\pi}{3}$.

2°/ $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} = 1$.

Solution.

1°/ Equation en cosinus.

$\frac{\pi}{3}$ est strictement plus grand que 1.
$\cos x$ est inférieur ou égal à 1 pour tout x réel.
Donc l'équation $\cos x = \frac{\pi}{3}$ n'a **pas de racine réelle**.

2°/ Equation à radicaux.

L'équation s'écrit $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} = 1 - \sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}$.
Toute solution x vérifie l'équation obtenue en élevant au carré.
Elevons au carré :
$x + 3 - 4\sqrt{x-1} = 1 + (x + 8 - 6\sqrt{x-1}) - 2\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}$
$2\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} = 6 - 2\sqrt{x-1}$
$\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} = 3 - \sqrt{x-1}$
Toute solution x de l'équation initiale vérifie l'équation obtenue en élevant au carré.
Elevons encore au carré :
$x + 8 - 6\sqrt{x-1} = x - 1 + 9 - 6\sqrt{x-1}$
L'équation est toujours vérifiée, pourvu que les quantités sous radical soient positives.
$b = \sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} = 3 - \sqrt{x-1} \geqslant 0$, d'où $x \leqslant 10$
$a = \sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} = 1 - b = \sqrt{x-1} - 2 \geqslant 0$, d'où $x \geqslant 5$
Pour $5 \leqslant x \leqslant 10$, on a bien $x \geqslant 1$ et $\sqrt{x-1}$ est réel.
Les solutions sont donc **tous les nombres réels compris entre 5 et 10**.
Entre les deux, a et b, tous deux positifs, varient en sens inverse, entre 0 et 1, avec la relation $a + b = 1$.

Chapitre 10. Entiers naturels, rationnels, réels.

Enoncés.

Exercice 11. Irrationalité d'un radical.

Soit n un entier naturel non nul. Montrer que si n n'est pas le carré d'un entier, $\sqrt{n}$ est irrationnel.	

Solution.

Soit n un entier naturel non nul qui n'est pas le carré d'un entier : en particulier, comme 1 est un carré, n est strictement plus grand que 1.

Si $\sqrt{n}$ était rationnel, il existerait des entiers p et q, sans diviseur commun autre que 1 (entiers premiers entre eux), tels que $\sqrt{n} = \frac{p}{q}$.

Si q est égal à 1, $\frac{p}{q}$ est entier et n est le carré d'un entier, ce qui contredit l'hypothèse.

q n'est donc pas égal à 1.

Elevons au carré et multiplions par q^2 : il vient $n q^2 = p^2$.

Comme n n'est pas un carré, il existe un nombre premier h divisant n et tel que la plus grande puissance m de h divisant n soit impaire. Soit h^m le facteur primaire de k correspondant, avec m impair.

h^m divise n, donc h^m divise p^2 et comme m est impair, et h^{m+1} divise aussi $p^2 = n q^2$.

h^m divise n, mais h^{m+1} ne divise pas n, donc h divise q.

h est un facteur premier commun à p et q, ce qui contredit le fait que p et q sont premiers entre eux.

Donc $\sqrt{n}$ ne peut pas être rationnel.

Chapitre 10. Entiers naturels, rationnels, réels.

Enoncés.

Exercice 12. Irrationalité de certains nombres.

Montrer que les nombres $\sqrt{2}+\sqrt{7}$, $\frac{ln(2)}{ln(3)}$, $cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ sont irrationnels.	

Solution.

1°/ Irrationalité de $\sqrt{2}+\sqrt{7}$.

Si $\sqrt{2}+\sqrt{7}$ était rationnel, il existerait des entiers p et q, non nuls, premiers entre eux, tels que $\sqrt{2}+\sqrt{7}=\frac{p}{q}$.
On aurait alors $(-\sqrt{2}+\sqrt{7})(\sqrt{2}+\sqrt{7}) = 5 = (-\sqrt{2}+\sqrt{7})\frac{p}{q}$.

$\sqrt{7} + \sqrt{2} = \frac{p}{q}$

$\sqrt{7} - \sqrt{2} = 5\frac{q}{p}$

et $\sqrt{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{p}{q} - 5\frac{q}{p}\right)$ serait rationnel.

Or, si n n'est pas le carré d'un entier, $\sqrt{n}$ est irrationnel (Exercice 11).
Donc, comme 2 n'est pas le carré d'un entier, $\sqrt{2}$ est irrationnel.

$\sqrt{2}+\sqrt{7}$ ne peut donc pas être rationnel, il est irrationnel.

2°/ Irrationalité de $\frac{ln(2)}{ln(3)}$.

Si $\frac{ln(2)}{ln(3)}$ était rationnel, il existerait des entiers p et q non nuls, premiers entre eux, tels que $\frac{ln(2)}{ln(3)} = \frac{p}{q}$.
On aurait alors : $q\ ln\ (2) = p\ ln\ (3)$, $2^q = 3^p$, ce qui est impossible puisque 2 et 3 sont premiers.
Donc $\frac{ln(2)}{ln(3)}$ est irrationnel.

3°/ Irrationalité de $cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

Si $cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ était rationnel, il existerait des entiers p et q non nuls, premiers entre eux, tels que $cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{p}{q}$.

On aurait alors $cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\ cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) - 1 = 2\ \frac{p^2}{q^2} - 1$.

Or $cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Il en résulterait donc que $\sqrt{2} = 4\frac{p^2}{q^2} - 2$ serait rationnel, ce qui est faux.

Donc $cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ est irrationnel.

Chapitre 10. Entiers naturels, rationnels, réels.

Enoncés.

Exercice 13. Irrationalité d'une somme de radicaux.

Soient $r \in \mathbb{Q}$, $s \in \mathbb{Q}$, $r \geqslant 0$, $s \geqslant 0$. On suppose que $\sqrt{r} \notin \mathbb{Q}$. Montrer que $\sqrt{r}+\sqrt{s} \notin \mathbb{Q}$.	

Solution.

Si $\sqrt{r}+\sqrt{s}$ était rationnel, il existerait des entiers p et q, non nuls, premiers entre eux, tels que $\sqrt{r}+\sqrt{s} = \frac{p}{q}$.

On aurait alors $(-\sqrt{r}+\sqrt{s})(\sqrt{r}+\sqrt{s}) = s - r = (-\sqrt{r}+\sqrt{s})\frac{p}{q}$.

$-\sqrt{r}+\sqrt{s} = (s-r)\frac{q}{p}$

et $\sqrt{r} = \frac{1}{2}((\sqrt{r}+\sqrt{s}) - (-\sqrt{r}+\sqrt{s})) = \frac{1}{2}\left(\frac{p}{q} - (s-r)\frac{q}{p}\right)$ serait rationnel.

Or, par hypothèse, $\sqrt{r}$ est irrationnel.
Donc $\sqrt{r}+\sqrt{s}$ ne peut pas être rationnel, il est irrationnel.

Algèbre, Structures

e-mail

1. **Lois de composition**.
2. **Groupes**.
3. **Groupes de permutations**.
4. **Anneaux**.
5. **Anneaux de Boole**.
6. **Corps**.

Accueil

Exercices

Lois de composition.

1. Loi de composition interne.
2. Associativité.
3. Commutativité.
4. Elément neutre.
5. Symétrique.
6. Groupe.
7. Isomorphisme de groupes.

1 Loi de composition interne.

Une loi de composition (interne) sur un ensemble E est une application $f : E \times E \longrightarrow E$, qui, à tout couple (x, y) d'éléments de E, associe un élément $f(x, y)$ de E noté, par exemple, $x \top y$ (qui se lit "***x* truc *y***", et appelé le "**composé**" de x et y suivant la loi $\top$ (**loi *truc***).

On note généralement :

+ une loi de composition, lorsqu'on l'appelle **addition**,
× ou . une loi de composition, lorsqu'on l'appelle **multiplication**, ou produit.

D'autres signes typographiques que $\top$ peuvent être utilisés pour désigner une loi de composition interne, par exemple : Λ, $\vee$, $\cap$, $\cup$, $\oplus$, $\otimes$, $\downarrow$, $\rightarrow$, |, *, $\Diamond$, ...

HAUT

2 Associativité.

Dans un ensemble E, une loi de composition notée $\top$ est dite **associative** si l'on a, pour tous éléments x, y, z, de E :

$$x \top (y \top z) = (x \top y) \top z$$

HAUT

3 Commutativité.

Dans un ensemble E, une loi de composition notée $\top$ est dite **commutative** si l'on a, pour tous éléments x, y, de E :

$$x \top y = y \top x$$

HAUT

4 Elément neutre.

Dans un ensemble E muni d'une loi de composition notée $\top$, on dit que l'élément $e \in E$ est **élément neutre pour** $\top$ si la relation suivante est vraie, pour tout élément x de E :

$$x \top e = x \text{ **et** } e \top x = x$$

HAUT

5 Symétrique.

Dans un ensemble E muni d'une loi de composition notée $\top$ et possédant un élément neutre e, on appelle **symétrique** d'un élément x de E, tout élément y de E vérifiant la relation

$$x \top y = e \textbf{ et } y \top x = e$$

HAUT

6 Groupe.

Un **groupe** est un couple $(G, \top)$ où G est un ensemble, et $\top$ une loi de composition dans G vérifiant :

G1. $\top$ est une loi **associative**.
G2. $\top$ possède un **élément neutre**.
G3. Tout élément de G possède un **symétrique** pour $\top$.

Si $\top$ est commutative, on dit que le groupe est commutatif, ou **abélien**.
Une loi de composition vérifiant les axiomes G2, G2, G3, est appelée une **loi de groupe**.

HAUT

7 Isomorphisme de groupes.

Etant donnés deux groupes (F, T) et (G, T'), on appelle isomorphisme de (F, T) sur (G, T'), toute application $f : F \longrightarrow G$, vérifiant :

Iso1. f est une **application bijective** de F sur G.
Iso2. $\boldsymbol{f(x \mathsf{T} y) = f(x) \mathsf{T}' f(y)}$, quels que soient x et y dans F.

HAUT

Chapitre 1. Lois de composition.

Exercices

Exercice 1. Associativité et loi de groupe sur $\mathbb{R}$.
Exercice 2. Symétrique et loi de groupe sur $\mathbb{R}$.
Exercice 3. Loi * de groupe abélien sur $\mathbb{R}$.
Exercice 4. Loi T de groupe abélien sur $\mathbb{R}$.
Exercice 5. Loi de groupe abélien sur un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$.
Exercice 6. Groupe $(\mathbb{R}, *)$ isomorphe à $(\mathbb{R}, +)$.

Exercice 1. Associativité et loi de groupe sur $\mathbb{R}$.

Sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels, on définit la loi de composition interne, notée $\lozenge$, en posant, pour tout couple $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} a \lozenge b = \dfrac{a^3 + b^3}{a^2 + b^2} & \text{si } (a,b) \neq 0 \\ 0 \lozenge 0 = 0 \end{cases}$$

Solution

Cette loi est-elle commutative ? associative ?
Possède-t'elle un élément neutre ?
Un nombre réel est-il symétrisable pour cette loi ?
$\mathbb{R}$, muni de cette loi $\lozenge$, est-il un groupe ?

HAUT

Exercice 2. Symétrique et loi de groupe sur $\mathbb{R}$.

Sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels, on définit la loi de composition interne, notée *, en posant, pour tout couple $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

$$a * b = a + b - a\,b$$

1°/ Cette loi est-elle commutative ? associative ?
Possède-t'elle un élément neutre ?
$\mathbb{R}$, muni de cette loi * est-il un groupe ?
2°/ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner la valeur de $x^{*n} = x * x * \ldots * x$ (n fois).

Solution

HAUT

Exercice 3. Loi * de groupe abélien sur $\mathbb{R}$.

Soit $(\mathbb{R}, +, .)$ le corps des nombres réels.
Soit f la bijection de $\mathbb{R}$ sur lui-même définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par

$$f(x) = x^5$$

et soit f^{-1} sa bijection réciproque.
On définit la loi de composition interne, notée *, sur $\mathbb{R}$, en posant, pour tout couple $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

$$x * y = f^{-1}(f(x) + f(y))$$

Montrer que $(\mathbb{R}, *)$ est un groupe abélien, isomorphe au groupe additif $(\mathbb{R}, +)$.

Solution

HAUT

Exercice 4. Loi T de groupe abélien sur $\mathbb{R}$.

Soit $(\mathbb{R}, +, .)$ le corps des nombres réels.
On définit la loi de composition interne, notée T, sur $\mathbb{R}$, en posant, pour tout couple $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

$$a \,\mathsf{T}\, b = a\sqrt{1+b^2} + b\sqrt{1+a^2}$$

Montrer que $(\mathbb{R}, \mathsf{T})$ est un groupe abélien, isomorphe au groupe additif $(\mathbb{R}, +)$.

Solution

HAUT

Exercice 5. Loi de groupe abélien sur un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$.

Soit $(\mathbb{R}, +, .)$ le corps des nombres réels.
Soit $c \in \mathbb{R}^{*+}$. On pose $E =]-c, c[$.
Pour tout couple $(x, y) \in E \times E$, on pose

$$x * y = \frac{x+y}{1+\frac{xy}{c^2}}$$

Solution

1°/ Montrer qu'on définit ainsi une loi de composition interne sur E.
2°/ Montrer que $(E, *)$ est un groupe abélien.

HAUT

Exercice 6. Groupe (ℝ, *) isomorphe à (ℝ, +).

Dans ℝ, on définit une loi * par :

$$(\forall\, x \in \mathbb{R})\ (\forall\, y \in \mathbb{R})\ (x * y = \sqrt[3]{x^3 + y^3})$$

Montrer que (ℝ, *) est un groupe abélien isomorphe à (ℝ, +).

Solution

HAUT

Chapitre 1. Lois de composition.

Enoncés.

Exercice 1. Associativité et loi de groupe sur $\mathbb{R}$.

Sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels, on définit la loi de composition interne, notée $\lozenge$, en posant, pour tout couple $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} a \lozenge b = \dfrac{a^3+b^3}{a^2+b^2} & \text{si } (a,b) \neq 0 \\ 0 \lozenge 0 = 0 \end{cases}$$

Cette loi est-elle commutative ? associative ?
Possède-t'elle un élément neutre ?
Un nombre réel est-il symétrisable pour cette loi ?
$\mathbb{R}$, muni de cette loi $\lozenge$, est-il un groupe ?

Solution.

1°/ Commutativité.

$$b \lozenge a = \frac{b^3+a^3}{b^2+a^2} = \frac{a^3+b^3}{a^2+b^2} = a \lozenge b, \text{ pour } (a, b) \neq (0, 0),$$
$$0 \lozenge 0 = 0, \text{ donc } b \lozenge a = b \lozenge a \text{ pour } (a, b) = (0, 0).$$

La loi $\lozenge$ est commutative.

2°/ Associativité.

$$(-1) \lozenge 1 = \frac{-1+1}{1+1} = 0$$
$$1 \lozenge 1 = \frac{1+1}{1+1} = 1$$
$$0 \lozenge 1 = 1$$
$$(-1) \lozenge (1 \lozenge 1) = (-1) \lozenge 1 = 0$$
$$((-1) \lozenge 1) \lozenge 1 = 0 \lozenge 1 = 1$$
$$((-1) \lozenge 1) \lozenge 1 \neq (-1) \lozenge (1 \lozenge 1)$$

La loi $\lozenge$ n'est pas associative.

3°/ Elément neutre.

Pour $a = 0$, $a \lozenge 0 = 0 \lozenge a = 0 = a$.
Pour $a \neq 0$, $a \lozenge 0 = \frac{a^3 + 0}{a^2 + 0} = a = 0 \lozenge a$.

0 est élément neutre de la loi ◊.

4°/ Symétrique.

$a \lozenge (-a) = \frac{a^3 - a^3}{a^2 + a^2} = 0$ (= $(-a) \lozenge a$ par commutativité).

Tout nombre réel a possède un symétrique pour la loi ◊, qui est son opposé $-a$

5°/ Groupe.

($\mathbb{R}$, ◊) n'est pas un groupe car la loi ◊ n'est **pas associative**.
C'est la seule propriété qui lui manque pour en faire une loi de groupe abélien.

Chapitre 1. Lois de composition.

Enoncés.

Exercice 2. Symétrique et loi de groupe sur $\mathbb{R}$.

Sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels, on définit la loi de composition interne, notée *, en posant, pour tout couple $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$: $$a * b = a + b - a\,b$$ 1°/ Cette loi est-elle commutative ? associative ? Possède-t'elle un élément neutre ? $\mathbb{R}$, muni de cette loi * est-il un groupe ? 2°/ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner la valeur de $x^{*n} = x * x * \ldots * x$ (n fois).	

Solution.

1°/ La loi *.

a) Commutativité.

$$b * a = b + a - b\,a = a + b - a\,b = a * b$$

La loi * est commutative.

b) Associativité.

$$\begin{aligned} a * (b * c) &= a + (b * c) - a\,(b * c) \\ &= a + (b + c - b\,c) - a\,(b + c - b\,c) \\ &= a + b + c - (a\,b + b\,c + c\,a) + a\,b\,c \end{aligned}$$

Cette expression est une expression symétrique par rapport aux lettres a, b, c.
On peut donc y faire une permutation des lettres, le résultat ne change pas.
Par exemple, en permutant les lettresz a et c, on obtient :

$$a * (b * c) = c * (b * a)$$

et comme la loi * est commutative, on peut écrire :

$$a * (b * c) = c * (b * a) = (b * a) * c = (a * b) * c$$

La loi * est associative.

c) Elément neutre.

$$a * 0 = 0 * a = a$$

Le nombre réel 0 est élément neutre de la loi *.

d) Groupe.

Pour que ($\mathbb{R}$, *) soit un groupe, il manque encore le fait que tout élément soit symétrisable pour la loi *.
Pour tout $a \in \mathbb{R}$, existe-t'il un $b \in \mathbb{R}$ vérifiant $a + b - a\,b = 0$?
La réponse est non : il suffit de prendre $a = 1$ pour que cette relation se transforme en absurdité $1 = 0$.

Par contre, **tout élément *a* différent de 1 est symétrisable** et son symétrique est $b = -\frac{a}{1-a}$.

($\mathbb{R}$, *) n'est pas un groupe.
($\mathbb{R} - \{ 1 \}$, *) est un groupe.

Pour être un groupe, il manque juste à $\mathbb{R}$, que 1 possède un symétrique pour la loi *, tous les autres axiomes sont vérifiés !
L'élément 1, outre qu'il n'a pas de symétrique pour la loi *, possède aussi cette propriété particulière que $a * 1 = 1$ pour tout $a \in \mathbb{R}$: c'est un "attracteur universel", ou **élément absorbant**, de la même façon que $a \times 0 = 0$, pour la multiplication ordinaire des réels.
La loi * possède donc toutes les propriétés de la multiplication des réels considérée isolément (c'est-à-dire sans ses rapports avec l'addition des réels), 1 jouant, pour la loi *, le rôle de 0 pour la multiplication, et 0 le rôle de 1.

2°/ Puissance * n^{e} d'un élément.

Par définition :

$x^{*1} = x$,
$x^{*2} = x * x = x + x - x^2 = 2x - x^2 = 1 - (1 - x)^2$

$$x^{*n} = x + x^{*n-1} - x\,x^{*n-1} = 1 - (1 - x)\,(1 - x^{*n-1})$$
$$1 - x^{*n} = (1 - x)\,(1 - x^{*n-1})$$

Les nombres réels $1 - x^{*n}$ forment une progression géométrique de raison $(1 - x)$ et dont le premier terme est $1 - x^{*1} = 1 - x$.

$$1 - x^{*n} = (1 - x)^n$$
$$x^{*n} = 1 - (1 - x)^n$$

$$\boxed{x^{*n} = 1 - (1 - x)^n}$$

Chapitre 1. Lois de composition.

Enoncés.

Exercice 3. Loi * de groupe abélien sur $\mathbb{R}$.

Soit $(\mathbb{R}, +, .)$ le corps des nombres réels.
Soit f la bijection de $\mathbb{R}$ sur lui-même définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par

$$f(x) = x^5$$

et soit f^{-1} sa bijection réciproque.
On définit la loi de composition interne, notée *, sur $\mathbb{R}$, en posant, pour tout couple $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

$$x * y = f^{-1}(f(x) + f(y))$$

Montrer que $(\mathbb{R}, *)$ est un groupe abélien, isomorphe au groupe additif $(\mathbb{R}, +)$.

Solution.

1°/ La loi *.

L'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^5$ pour tout $x \in \mathbb{R}$:
— d'une part, est bien une "application" : à un nombre réel x, elle fait correspondre le nombre réel $x \times x \times x \times x \times x$,

— d'autre part, est bien une bijection : l'application $x \mapsto sgn(x) \mid x \mid^{\frac{1}{5}}$ en est la bijection réciproque.

a) Commutativité.

La commutativité de l'addition des nombres réels entraîne :

$$y * x = f^{-1}(f(y) + f(x)) = f^{-1}(f(x) + f(y)) = x * y$$

La loi de composition * est commutative.

b) Associativité.

$$x * (y * z) = x * (f^{-1}(f(y) + f(z))) = f^{-1}(f(x) + f(f^{-1}(f(y) + f(z)))) = f^{-1}(f(x) + f(y) + f(z))$$

La commutativité et l'associativité de l'addition des nombres réels entraînent que cette expression est symétrique par rapport aux lettres x, y, z.
On a donc, par permutation de x et z, et par commutativité de la loi * :

$$x * (y * z) = z * (y * x) = (y * x) * z = (x * y) * z$$

La loi de composition * est associative.

c) Elément neutre.

Par commutativité de la loi *, neutre à droite et neutre à gauche, c'est la même chose.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$x * 0 = f^{-1}(f(x) + f(0))$
$f(0) = 0^5 = 0$
$x * 0 = f^{-1}(f(x) + 0) = f^{-1}(f(x)) = x$

$f(0) = 0$ est élément neutre de la loi *.

d) Symétrique.

L'application f est impaire : $f(-x) = -f(x)$, car $(-x)^5 = (-1)^5 x^5 = -x^5$.

La relation $f(x) + f(-x) = 0$ entraîne, avec $0 = f(0)$, $f^{-1}(f(x) + f(-x)) = 0$, c'est-à-dire $x * (-x) = 0$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-x$ est le symétrique de x pour la loi *.

2°/ Isomorphisme de groupes.

Les propriétés démontrées dans la première question (commutativité, associativité, élément neutre, symétrique) font de $(\mathbb{R}, *)$ un groupe abélien.

Il est clair, par définition de la loi *, que l'on a, pour tous nombres réels x et y :

$$f(x * y) = f(f^{-1}(f(x) + f(y))) = f(x) + f(y)$$

Comme f est bijective, c'est un isomorphisme du groupe $(\mathbb{R}, *)$ sur le groupe $(\mathbb{R}, +)$.
Réciproquement, l'application f^{-1} est un isomorphisme de groupes abéliens de $(\mathbb{R}, +)$ sur $(\mathbb{R}, *)$.

L'application f est un isomorphisme de groupes abéliens de $(\mathbb{R}, *)$ sur $(\mathbb{R}, +)$.

En réalité, la seule propriété de f qui intervienne dans ce résultat est que f est une **bijection impaire** de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
Toute bijection impaire f de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ définit une loi * par $x * y = f^{-1}(f(x) + f(y))$: muni de cette loi, $(\mathbb{R}, *)$ est un groupe abélien isomorphe à $(\mathbb{R}, +)$.

Chapitre 1. Lois de composition.

Enoncés.

Exercice 4. Loi T de groupe abélien sur $\mathbb{R}$.

Soit $(\mathbb{R}, +, .)$ le corps des nombres réels. On définit la loi de composition interne, notée T, sur $\mathbb{R}$, en posant, pour tout couple $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$: $$a \,T\, b = a\sqrt{1+b^2} + b\sqrt{1+a^2}$$ Montrer que $(\mathbb{R}, T)$ est un groupe abélien, isomorphe au groupe additif $(\mathbb{R}, +)$.	

Solution.

1°/ La loi T.

a) Commutativité.

La symétrie de l'expression $a \,T\, b = a\sqrt{1+b^2} + b\sqrt{1+a^2}$ par rapport aux lettres a et b montre que :

La loi T est commutative.

b) Associativité.

$$a \,T\, (b \,T\, c) = a\sqrt{1+(b \,T\, c)^2} + (b \,T\, c)\sqrt{1+a^2}$$
$$= a\sqrt{1+\left(b\sqrt{1+c^2} + c\sqrt{1+b^2}\right)^2} + (b\sqrt{1+c^2} + c\sqrt{1+b^2})\sqrt{1+a^2}$$
$$= a\sqrt{1+b^2(1+c^2)+c^2(1+b^2)+2bc\sqrt{(1+b^2)(1+c^2)}} + b\sqrt{1+c^2}\sqrt{1+a^2} + c\sqrt{1+a^2}\sqrt{1+b^2}$$
$$= a\sqrt{b^2c^2+\left(\sqrt{(1+b^2)(1+c^2)}\right)^2+2bc\sqrt{(1+b^2)(1+c^2)}} + b\sqrt{1+c^2}\sqrt{1+a^2} + c\sqrt{1+a^2}\sqrt{1+b^2}$$

La quantité sous le premier radical est le carré de $(b\,c + \sqrt{1+b^2}\sqrt{1+c^2})$.
Le radical est donc égal à la valeur absolue de cette quantité.
Or cette quantité est positive, car :
$b^2c^2 < 1 + b^2 + c^2 + b^2c^2 \Rightarrow |b\,c| < \sqrt{1+b^2}\sqrt{1+c^2}$,
donc :

$$a \,T\, (b \,T\, c) = a\,(b\,c + \sqrt{1+b^2}\sqrt{1+c^2}) + b\sqrt{1+c^2}\sqrt{1+a^2} + c\sqrt{1+a^2}\sqrt{1+b^2}$$
$$= a\,b\,c + a\sqrt{1+b^2}\sqrt{1+c^2} + b\sqrt{1+c^2}\sqrt{1+a^2} + c\sqrt{1+a^2}\sqrt{1+b^2}$$

La symétrie de l'expression par rapport aux lettres a, b, c, jointe à la commutativité de l'addition et de la

multiplication des réels, et de la loi T, permet alors d'écrire, par permutation des lettres *a* et *c* :

$$a \mathrm{T} (b \mathrm{T} c) = c \mathrm{T} (b \mathrm{T} a) = (b \mathrm{T} a) \mathrm{T} c = (a \mathrm{T} b) \mathrm{T} c$$

La loi T est associative.

c) Elément neutre.

$$0 \mathrm{T} a = 0 \sqrt{1 + a^2} + a = a$$

0 est élément neutre de la loi T.

d) Symétrique.

$$a \mathrm{T} (-a) = a \sqrt{1 + a^2} - a \sqrt{1 + a^2} = 0$$

Pour tout nombre réel *a*, – *a* est le symétrique de *a* pour la loi T.

2°/ Isomorphisme de groupes.

Cherchons les applications φ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui vérifient la relation :

$$\varphi (x + y) = \varphi (x) \mathrm{T} \varphi (y)$$
$$\varphi (x + y) = \varphi (x) \sqrt{1 + (\varphi(y))^2} + \varphi (y) \sqrt{1 + (\varphi(x))^2}$$

Une telle équation est appelée une "**équation fonctionnelle**".
Pour la résoudre, on la dérive par rapport à *x*, on la dérive par rapport à *y*, le résultat doit être φ' (*x* + *y*) dans les deux cas, ce qui permet d'obtenir la relation :

$$\frac{\varphi(x)}{\sqrt{1 + (\varphi(x))^2}} = \frac{\varphi(y)}{\sqrt{1 + (\varphi(y))^2}}$$

La valeur commune d'une fonction de *x* et d'une fonction de *y* ne peut être qu'une constante *a*, ce qui amène à résoudre l'**équation différentielle** :

$$\varphi' (x) = a \sqrt{1 + (\varphi(x))^2}$$

Pour *a* = 0, φ (*x*) est une constante *b* et on a $b = 2 b \sqrt{1 + b^2}$, donc *b* = 0 et φ = 0.
Mais l'application nulle n'est pas un isomorphisme.
Si l'on veut pour φ un isomorphisme, il faudra que la constante *a* ne soit pas nulle.
Le terme en $1 + (\varphi (x))^2$ de l'équation différentielle précédente, incite à poser φ (*x*) = *sinh* (*u* (*x*)), où *u* (*x*) est une fonction numérique dérivable et *sinh* la **fonction sinus hyperbolique**.

$$\varphi' (x) = u' (x) \cosh (u (x))$$
$$\sqrt{1 + (\varphi(x))^2} = \cosh (u (x))$$
$$u' (x) = a$$
$$u (x) = a x + b.$$

$$\varphi(x) = \sinh(a\,x + b)$$

Le cas $a = b = 0$, donne à nouveau l'application nulle.

$$\varphi(x + y) = \varphi(x)\ \mathsf{T}\ \varphi(y) \Leftrightarrow (\exists\, a \in \mathbb{R})(\exists\, b \in \mathbb{R})(\varphi(x) = \sinh(a\,x + b))$$

Pour toute valeur de a non nulle, l'application φ définie par $\varphi(x) = \sinh(a\,x + b)$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
Le calcul précédent montre que φ est un isomorphisme de groupes abéliens de $(\mathbb{R}, +)$ sur $(\mathbb{R}, \mathsf{T})$ à condition que l'image par φ de l'élément neutre 0 de l'addition, soit l'élément neutre 0 de la loi T.
$\varphi(0) = 0$, donc $b = 0$.

Pour tout $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, l'application $x \mapsto \sinh(a\,x)$ est un isomorphisme de groupes abéliens de $(\mathbb{R}, +)$ sur $(\mathbb{R}, \mathsf{T})$.

En particulier, pour $a = 1$:

La fonction sinus hyperbolique est un isomorphisme de groupes abéliens de $(\mathbb{R}, +)$ sur $(\mathbb{R}, \mathsf{T})$.

Remarque.

Remarquons, comme dans l'exercice 3, que la fonction sinus hyperbolique est une **bijection impaire** de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ et que la fonction inverse *Asinh*, ou *Arg sh*, est aussi une bijection impaire de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
Pour tout couple (a, b) de nombres réels, la formule suivante est vraie (Aide-Mémoire de Mathématiques, I.N. BRONSTEIN et K.A. SEMENDIAEV, Ed. Eyrolles, Paris, 1963, p.292) :

$$Asinh\ a + Asinh\ b = Asinh\left(a\sqrt{1+b^2} + b\sqrt{1+a^2}\right)$$

ce qui permet d'écrire la loi T sous la forme :

$$a\ \mathsf{T}\ b = \sinh(Asinh\ a + Asinh\ b)$$

Sous cette forme de la loi T, le résultat obtenu dans l'exercice 3 donne immédiatement le résultat de l'exercice 4, sans calcul, simplement en remarquant que la fonction *Asinh* est une bijection impaire de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

Chapitre 1. Lois de composition.

Enoncés.

Exercice 5. Loi de groupe abélien sur un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$.

Soit $(\mathbb{R}, +, .)$ le corps des nombres réels.
Soit $c \in \mathbb{R}^{*+}$. On pose $E =]-c, c[$.
Pour tout couple $(x, y) \in E \times E$, on pose

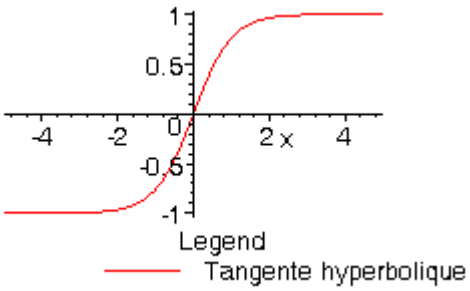
$$x * y = \frac{x + y}{1 + \frac{xy}{c^2}}$$

1°/ Montrer qu'on définit ainsi une loi de composition interne sur E.
2°/ Montrer que $(E, *)$ est un groupe abélien.

Solution.

1°/ Loi de composition *.

Pour montrer que l'application $(x, y) \mapsto x * y$ est une loi de composition interne sur E, il suffit de montrer que $x * y$ est un élément de E, donc qu'il est compris strictement entre $-c$ et c pour tout couple $(x, y) \in E \times E$.
La forme de l'expression de $x * y$ fait penser à l'expression de $\tanh(a + b)$, fonction comprise entre –1 et +1.



Pour x et y compris entre $-c$ et c, posons $\frac{x}{c} = \tanh a$, $\frac{y}{c} = \tanh b$.
$x * y = c \frac{\tanh a + \tanh b}{1 + \tanh a \times \tanh b} = c \tanh(a + b)$.
La relation $x * y = c \tanh(a + b)$ montre que $x * y$ est compris entre $-c$ et c.
Donc $x * y$ est un élément de E.

L'application $(x, y) \mapsto x * y$ est une loi de composition interne sur E.

2°/ Groupe abélien.

Considérons l'application $\varphi : x \mapsto c \tanh x$.
C'est une application de $\mathbb{R}$ dans E.
Cette application est bijective, parce que la fonction tangente hyperbolique est une bijection de $\mathbb{R}$ sur l'intervalle ouvert $]-1, 1[$.
Elle vérifie :

$$\varphi(x+y) = c\,\tanh(x+y) = c\,\frac{\tanh x + \tanh y}{1+\tanh x \times \tanh y} = \frac{\varphi(x)+\varphi(y)}{1+\dfrac{\varphi(x)\varphi(y)}{c^2}} = \varphi(x) * \varphi(y)$$

La relation $\varphi(x+y) = \varphi(x) * \varphi(y)$ montre que l'application bijective φ transporte sur E la structure de groupe abélien de $(\mathbb{R}, +)$.
$(E, *)$ est donc un groupe abélien, d'élément neutre $\varphi(0) = c\,\tanh 0 = 0$.

L'application $\varphi : x \mapsto c\,\tanh x$ est un isomorphisme de groupes abéliens de $(\mathbb{R}, +)$ sur $(E, *)$.

Dans le même esprit que dans les exercices 3 et 4, on remarquera que la fonction $f = \varphi^{-1}$, définie par $f(x) = Atanh\left(\frac{x}{c}\right)$, est une **bijection impaire** de E sur $\mathbb{R}$, et que l'on a, dans E :

$$a * b = f^{-1}(f(a) + f(b))$$

ce qui suffit à montrer que $(E, *)$ est un groupe isomorphe à $(\mathbb{R}, +)$.

Chapitre 1. Lois de composition.

Enoncés.

Exercice 6. Groupe (ℝ, *) isomorphe à (ℝ, +).

Dans ℝ, on définit une loi * par : $$(\forall\, x \in \mathbb{R})\ (\forall\, y \in \mathbb{R})\ (x * y = \sqrt[3]{x^3 + y^3})$$ Montrer que (ℝ, *) est un groupe abélien isomorphe à (ℝ, +).	

Solution.

Il suffit de reprendre l'Exercice 3, en changeant 5 en 3 dans les puissances.

1°/ La loi *.

Considérons l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^3$ pour tout $x \in \mathbb{R}$:
— d'une part, c'est bien une "application" : à un nombre réel x, elle fait correspondre le nombre réel $x \times x \times x$,
— d'autre part, c'est bien une bijection : l'application $x \mapsto sgn(x) \mid x \mid^{\frac{1}{3}}$ en est la bijection réciproque.

a) Commutativité.

La commutativité de l'addition des nombres réels entraîne :

$$y * x = f^{-1}(f(y) + f(x)) = f^{-1}(f(x) + f(y)) = x * y$$

La loi de composition * est commutative.

b) Associativité.

$$x * (y * z) = x * (f^{-1}(f(y) + f(z))) = f^{-1}(f(x) + f(f^{-1}(f(y) + f(z)))) = f^{-1}(f(x) + f(y) + f(z))$$

La commutativité et l'associativité de l'addition des nombres réels entraînent que cette expression est symétrique par rapport aux lettres x, y, z.
On a donc, par permutation de x et z, et par commutativité de la loi * :

$$x * (y * z) = z * (y * x) = (y * x) * z = (x * y) * z$$

La loi de composition * est associative.

c) Elément neutre.

Par commutativité de la loi *, neutre à droite et neutre à gauche, c'est la même chose.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$x * 0 = f^{-1}(f(x) + f(0))$
$f(0) = 0^5 = 0$
$x * 0 = f^{-1}(f(x) + 0) = f^{-1}(f(x)) = x$

$f(0) = 0$ est élément neutre de la loi *.

d) Symétrique.

L'application f est impaire : $f(-x) = -f(x)$, car $(-x)^3 = (-1)^3 x^3 = -x^3$.

La relation $f(x) + f(-x) = 0$ entraîne, avec $0 = f(0)$, $f^{-1}(f(x) + f(-x)) = 0$, c'est-à-dire $x * (-x) = 0$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-x$ est le symétrique de x pour la loi *.

2°/ Isomorphisme de groupes.

Les propriétés démontrées dans la première question (commutativité, associativité, élément neutre, symétrique) font de $(\mathbb{R}, *)$ un groupe abélien.

Il est clair, par définition de la loi *, que l'on a, pour tous nombres réels x et y :

$$f(x * y) = f(f^{-1}(f(x) + f(y))) = f(x) + f(y)$$

Comme f est bijective, c'est un isomorphisme du groupe $(\mathbb{R}, *)$ sur le groupe $(\mathbb{R}, +)$.
Réciproquement, l'application f^{-1} est un isomorphisme de groupes abéliens de $(\mathbb{R}, +)$ sur $(\mathbb{R}, *)$.

L'application f est un isomorphisme de groupes abéliens de $(\mathbb{R}, *)$ sur $(\mathbb{R}, +)$.

En réalité, la seule propriété de f qui intervienne dans ce résultat est que f est une **bijection impaire** de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
Toute bijection impaire f de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ définit une loi * par $x * y = f^{-1}(f(x) + f(y))$: muni de cette loi, $(\mathbb{R}, *)$ est un groupe abélien isomorphe à $(\mathbb{R}, +)$.

Exercices

Groupes.

1. Groupe.
2. Sous-groupe.
3. Groupes finis.

1 Groupe.

Un **groupe** est un couple $(G, \top)$ où G est un ensemble, et $\top$ une loi de composition dans G vérifiant :

G1. $\top$ est une loi **associative**.
G2. $\top$ possède un **élément neutre**.
G3. Tout élément de G possède un **symétrique** pour $\top$.

Si $\top$ est commutative, on dit que le groupe est commutatif, ou **abélien**.
Une loi de composition vérifiant les axiomes G2, G2, G3, est appelée une **loi de groupe**.

Un groupe (resp. sous-groupe) engendré par un élément s'appelle un groupe (resp. sous-groupe) **monogène**.
Un groupe (resp. sous-groupe) fini engendré par un élément s'appelle un groupe (resp. sous-groupe) **cyclique**. Un groupe cyclique est donc un groupe monogène fini.

HAUT

2 Sous-groupe.

Si (G, T) est un groupe, on appelle **sous-groupe** de G, toute partie non vide A de G **stable** pour :

— la loi de composition T : $(\forall\, x \in G)\ (\forall\, y \in G)\ (\boldsymbol{x \in A}$ **et** $\boldsymbol{y \in A \Rightarrow x\ \mathsf{T}\ y \in A})$.

— le passage à l'opposé (ou symétrique) : $(\forall\, x \in G)\ (\boldsymbol{x \in A \Rightarrow x^{\mathsf{T}^{-1}} \in A})$.

Un sous-groupe contient toujours au moins l'élément neutre de la loi de composition.

HAUT

3 Groupes finis.

Un groupe (G, T) est dit fini si, et seulement si, le cardinal de G est fini (c'est-à-dire G possède un nombre fini d'éléments).
L'**ordre** d'un groupe fini (G, T) est le cardinal de G.

L'ordre d'un sous-groupe d'un groupe fini est un diviseur de l'ordre du groupe (**théorème de Lagrange**).
Dans un groupe fini (G, T) d'ordre n, noté multiplicativement, $x^n = e$, pour tout $x \in G$ (e est l'élément neutre de la loi T) (**théorème de Fermat**).
L'**ordre d'un élément** d'un groupe fini est le plus petit entier non nul k tel que $x^k = e$.
L'ordre d'un élément d'un groupe fini est l'ordre du sous-groupe cyclique qu'il engendre : c'est un diviseur de l'ordre du groupe.

HAUT

Chapitre 2. Groupes.

Exercices

Exercice 1. Composé de deux sous-groupes.
Exercice 2. Réunion de deux sous-groupes.
Exercice 3. Groupes monogènes.
Exercice 4. Théorème de Lagrange, théorème de Fermat.
Exercice 5. Eléments d'ordre 2.
Exercice 6. Groupes d'ordre inférieur ou égal à 5.
Exercice 7. Loi de groupe non commutatif sur $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$.
Exercice 8. Groupe abélien $\mathfrak{P}(E)$ pour la différence symétrique.
Exercice 9. Groupes à 3 éléments.
Exercice 10. Morphisme de groupes de $(\mathbb{R}, +)$ dans $(\mathbb{C}^*, \times)$.
Exercice 11. Sous-groupes additifs de $\mathbb{Z}$.
Exercice 12. Groupes cycliques $\mathbb{Z} / n\mathbb{Z}$.
Exercice 13. Centre d'un groupe.

Exercice 1. Composé de deux sous-groupes.

Soit G un groupe (dont la loi est notée multiplicativement) et soient H et K deux sous-groupes de G. On rappelle que $HK = \{hk \mid h \in H \text{ et } k \in K\}$. Montrer que HK est un sous-groupe si, et seulement si, $HK = KH$.	Solution

HAUT

Exercice 2. Réunion de deux sous-groupes.

Soit G un groupe (dont la loi est notée multiplicativement).

1°/ Soient H et K deux sous-groupes de G tels que $H \bigcup K$ soit aussi un sous-groupe de G. Montrer que nécessairement $H \subset K$ ou $K \subset H$.

2°/ Soient H et K deux sous-groupes de G. Montrer :

$H \bigcup K = G \Leftrightarrow (H = G$ ou $K = G)$

Solution

HAUT

Exercice 3. Groupes monogènes.

Première Partie.
Soit G un groupe (dont la loi est notée multiplicativement).
1°/ Montrer que l'intersection d'une famille quelconque de sous-groupes de G est encore un sous-groupe de G.
2°/ Soit $X \subset G$. Montrer qu'il existe un plus petit sous-groupe (pour l'inclusion) de G, contenant X. On le note $< X >$ et on l'appelle le **sous-groupe engendré** par X.
3°/ Soit $x \in G$. Montrer que $< \{x\} > = \{x^n ; n \in \mathbb{Z}\}$.

Deuxième Partie.
On dit qu'un groupe G est **monogène** s'il existe $x \in G$ tel que $G = < \{x\} >$.
Si, de plus, G est fini, on dit que G est **cyclique**.
Soit donc G un groupe (dont la loi est notée multiplicativement) que l'on suppose monogène, et engendré par $\{x\}$, et dont l'élément neutre est noté e.
Montrer que :
1°/ S'il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $x^n = e$, et si p désigne le plus petit de ces entiers, alors G est un groupe cyclique ayant p éléments et $G = \{e, x, x^2, \dots, x^{p-1}\}$.
2°/ Si, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on a toujours $x^n \neq e$, alors l'application $n \mapsto x^n$ est un isomorphisme de $\mathbb{Z}$ sur G (d'où il résulte que G est un groupe infini dénombrable).

Solution

HAUT

Exercice 4. Théorème de Lagrange, théorème de Fermat.

Soit G un groupe (dont la loi est notée multiplicativement).

1°/ Soit H un sous-groupe de G.
Considérons la relation $\mathcal{R}_H$ définie sur G par :

$$x \mathcal{R}_H y \Leftrightarrow x^{-1} y \in H.$$

Montrer que $\mathcal{R}_H$ est une relation d'équivalence sur G, compatible à gauche avec la loi de G, c'est-à-dire telle que :

$$x \mathcal{R}_H y \Rightarrow x z \mathcal{R}_H y z, \text{ pour tout } z \in G.$$

2°/ Montrer que, réciproquement, si $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur G compatible à gauche avec la loi de G, il existe alors un sous-groupe H de G tel que :

$$x \mathcal{R} y \Leftrightarrow x^{-1} y \in H.$$

Solution

3°/ Soit H un sous-groupe de G, et $\mathcal{R}_H$ la relation d'équivalence définie dans 1°.

Soit $x \in G$. Montrer que la classe d'équivalence $\overline{x}$ de x modulo cette relation, est l'ensemble $x H$, et que l'application $y \mapsto x y$ est une bijection de H sur $x H$.

4°/ On rappelle que, lorsqu'un groupe est fini et possède n éléments, l'entier n est appelé l'**ordre** du groupe.
Déduire alors de 3° que si G est un groupe fini d'ordre n, l'ordre p d'un sous-groupe H est un diviseur de n (**Théorème de Lagrange**).

5°/ Etablir encore que si G est un groupe fini d'ordre n, alors, pour tout $x \in G$, on a $x^n = e$ (**Théorème de Fermat**).

HAUT

Exercice 5. Eléments d'ordre 2.

Soit G un groupe fini d'ordre n (dont la loi est notée multiplicativement). On suppose que tous les éléments de G distincts de e sont d'ordre 2 (l'**ordre d'un élément** est l'ordre du sous-groupe engendré par cet élément). 1°/ Montrer que G est nécessairement abélien. 2°/ Soit H un sous-groupe de G et soit $a \in G, a \notin H$. Montrer que $H \bigcup a\,H$ est encore un sous-groupe de G dont l'ordre est le double de celui de H. 3°/ Déduire de ce qui précède que l'ordre n de G est nécessairement une puissance de 2.	Solution

HAUT

Exercice 6. Groupes d'ordre inférieur ou égal à 5.

Soit G un groupe fini d'ordre n (dont la loi est notée multiplicativement).
1°/ Montrer que si n est un entier premier, G est un groupe cyclique.
2°/ Montrer que, si pour tout élément $x \in G$, on a $x^2 = e$, G est un groupe abélien.
3°/ On suppose ici que $n = 4$ et qu'il existe $x \in G$, tel que $x^2 \neq e$.
Montrer que G est un groupe cyclique engendré par x.
4°/ Déduire de ce qui précède que si n est inférieur ou égal à 5, G est nécessairement abélien.
5°/ Donner un exemple de groupe d'ordre $n = 6$, non abélien.

Solution

HAUT

Exercice 7. Loi de groupe non commutatif sur $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$.

Soit $G := \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ et $*$ la loi dans G définie par $(x, y) * (x', y') = (x\,x', x\,y' + y)$.

1°/ Montrer que $(G, *)$ est un groupe non commutatif.

2°/ Montrer que $]0, +\infty[\times \mathbb{R}, *)$ est un sous-groupe de $(G, *)$.

Solution

HAUT

Exercice 8. Groupe abélien $\mathfrak{P}(E)$ pour la différence symétrique.

Soit E un ensemble, on désigne par Δ la différence symétrique dans $\mathfrak{P}(E)$. Montrer que $(\mathfrak{P}(E), \Delta)$ est un groupe abélien.	Solution

HAUT

Exercice 9. Groupes à 3 éléments.

Quels sont les groupes à trois éléments ?	Solution

HAUT

Exercice 10. Morphisme de groupes de $(\mathbb{R}, +)$ dans $(\mathbb{C}^*, \times)$.

Montrer que l'application f définie par $f(x) = \cos x + i \sin x$ est un morphisme de groupes de $(\mathbb{R}, +)$ dans $(\mathbb{C}^*, \times)$.	Solution

HAUT

Exercice 11. Sous-groupes additifs de $\mathbb{Z}$.

De quelle forme sont les sous-groupes additifs de $\mathbb{Z}$?	Solution

HAUT

Exercice 12. Groupes cycliques $\mathbb{Z} / n \mathbb{Z}$.

Soit n un entier naturel, $n \geqslant 2$.

1°/ Montrer que l'ensemble des éléments inversibles de $\mathbb{Z} / n \mathbb{Z}$ muni de la loi produit est un groupe.
Ce groupe sera noté $(\mathbb{Z} / n \mathbb{Z})'$.
2°/ Déterminer $(\mathbb{Z} / 8 \mathbb{Z})'$, $(\mathbb{Z} / 9 \mathbb{Z})'$, $(\mathbb{Z} / 7 \mathbb{Z})'$. Ces groupes sont-ils cycliques ?

Solution

HAUT

Exercice 13. Centre d'un groupe.

Soit $(G,*)$ un groupe. Pour $x \in G$, le symétrique de x est noté x^{-1}. Soit

$$H = \{ x \in G \mid (\forall\, y \in G)(x * y = y * x)\}.$$

1°/ Montrer que si $x \in H$, alors $x^{-1} \in H$.
2°/ Montrer que $(H,*)$ est un sous-groupe de $(G,*)$.

Solution

HAUT

Chapitre 2. Groupes.

Enoncés.

Exercice 1. Composé de deux sous-groupes.

Soit G un groupe (dont la loi est notée multiplicativement) et soient H et K deux sous-groupes de G. On rappelle que $H\,K = \{h\,k \mid h \in H \text{ et } k \in K\}$. Montrer que $H\,K$ est un sous-groupe si, et seulement si, $H\,K = K\,H$.	

Solution.

1°/ Condition nécessaire.

Montrons d'abord que, si $H\,K$ est un sous-groupe, alors $H\,K = K\,H$.

a) $K\,H \subset H\,K$.

Tout élément de $H\,K$ s'écrit sous la forme $h\,k$ avec $h \in H$, $k \in K$.
Comme H et K sont des sous-groupes, $k^{-1} \in K$, $h^{-1} \in H$, et $k^{-1}\,h^{-1} \in K\,H$.
Comme $H\,K$ est un sous-groupe, il contient l'élément neutre e de G et il contient, avec chaque élément $h\,k$, son symétrique $k^{-1}\,h^{-1}$.
Donc $k^{-1}\,h^{-1} \in K\,H \bigcap H\,K$.
Or tout élément de $K\,H$ peut s'écrire sous la forme $k^{-1}\,h^{-1}$, donc tout élément de $K\,H$ est contenu dans $K\,H \bigcap H\,K$.
Donc $K\,H = K\,H \bigcap H\,K$.
$K\,H$ est contenu dans $H\,K$.

b) $H\,K \subset K\,H$.

Réciproquement, tout élément de $H\,K$ est le symétrique d'un élément de $H\,K$, puisque $H\,K$ est un sous-groupe.
Or le symétrique $k^{-1}\,h^{-1}$ d'un élément $h\,k$ de $H\,K$ est un élément de $K\,H$, puisque K et H sont des sous-groupes.
Donc tout élément de $H\,K$ est un élément de $K\,H$.

2°/ Condition suffisante.

Montrons que si $H\,K = K\,H$, alors $H\,K$ est un sous-groupe.

Comme H et K sont des sous-groupes, ils contiennent l'élément neutre e.
$e = e\,e \in H\,K$.
$H\,K$ contient l'élément neutre.
$H\,K$ n'est pas vide.

Le produit de deux éléments $h\,k$ et $h'\,k'$ de $H\,K$ est $h\,k\,h'\,k'$.
$k\,h' \in K\,H = H\,K$, donc il existe $h'' \hat{I} H$ et $k'' \hat{I} K$ tels que $k\,h' = h''\,k''$.
$h\,k\,h'\,k' = h\,h''\,k''\,k'$.
$h\,h'' \in H$, car H est un sous-groupe.
$k''\,k' \in H$, car K est un sous-groupe.
$h\,k\,h'\,k' = h\,h''\,k''\,k' = (h\,h'')\,(k''\,k') \in H\,K$.
Le composé de deux éléments de $H\,K$ est un élément de $H\,K$.
Si $h\,k$ est un élément de $H\,K$, alors $(h\,k)^{-1} = k^{-1}\,h^{-1}$ est un élément de $K\,H = H\,K$.
Tout élément de $H\,K$ a son symétrique dans $H\,K$.
$H\,K$ est donc un sous-groupe.

Chapitre 2. Groupes.

Enoncés.

Exercice 2. Réunion de deux sous-groupes.

Soit G un groupe (dont la loi est notée multiplicativement). 1°/ Soient H et K deux sous-groupes de G tels que $H \bigcup K$ soit aussi un sous-groupe de G. Montrer que nécessairement $H \subset K$ ou $K \subset H$. 2°/ Soient H et K deux sous-groupes de G. Montrer : $H \bigcup K = G \Leftrightarrow (H = G$ ou $K = G)$	

Solution.

1°/ $H \bigcup K$ est un sous-groupe de G.

Supposons que H ne soit pas contenu dans K.

Il existe un élément $h \in H$ qui n'appartient pas à K.
Soit k un élément quelconque de K.
h et k sont des éléments du sous-groupe $H \bigcup K$, donc $h\,k$ est aussi élément de $H \bigcup K$.
Donc $h\,k \in H$ ou $h\,k \in K$.
Si $h\,k \in K$, comme K est un sous-groupe, il contient aussi k^{-1} et le produit $(h\,k)\,k^{-1} = h$, ce qui contredit la définition de h.
Il n'est donc pas possible d'avoir $h\,k \in K$.
C'est donc qu'on a $h\,k \in H$.
Si $h\,k \in H$, comme H est un sous-groupe contenant h, il contient aussi h^{-1} et le produit $h^{-1}\,(h\,k) = k$, donc $k \in H$.
Tout élément de K est élément de H.
K est contenu dans H.

H non contenu dans $K \Rightarrow K$ contenu dans H.

Si la réunion de deux sous-groupes est un sous-groupe, l'un des deux contient l'autre.

Il en résulte, évidemment, que **la réunion est le plus grand des deux sous-groupes**.

2°/ $H \bigcup K = G$.

a) $H \bigcup K = G \Rightarrow (H = G$ ou $K = G)$.

Si $H \bigcup K = G$, c'est un sous-groupe de G.
D'après 1°/ l'un des deux sous-groupes contient l'autre et la réunion est le plus grand des deux.
Donc ($H = G$ ou $K = G$).

b) ($H = G$ ou $K = G) \Rightarrow H \bigcup K = G$.

Cette relation est vraie si H et K sont des parties quelconques de G : si l'une est égale à G, leur réunion est égale à G.

Chapitre 2. Groupes.

Enoncés.

Exercice 3. Groupes monogènes.

Première Partie.
Soit G un groupe (dont la loi est notée multiplicativement).
1°/ Montrer que l'intersection d'une famille quelconque de sous-groupes de G est encore un sous-groupe de G.
2°/ Soit $X \subset G$. Montrer qu'il existe un plus petit sous-groupe (pour l'inclusion) de G, contenant X. On le note $< X >$ et on l'appelle le **sous-groupe engendré** par X.
3°/ Soit $x \in G$. Montrer que $< \{x\} > = \{x^n ; n \in \mathbb{Z}\}$.

Deuxième Partie.
On dit qu'un groupe G est **monogène** s'il existe $x \in G$ tel que $G = < \{x\} >$.
Si, de plus, G est fini, on dit que G est **cyclique**.
Soit donc G un groupe (dont la loi est notée multiplicativement) que l'on suppose monogène, et engendré par $\{x\}$, et dont l'élément neutre est noté e.
Montrer que :
1°/ S'il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $x^n = e$, et si p désigne le plus petit de ces entiers, alors G est un groupe cyclique ayant p éléments et $G = \{e, x, x^2, \ldots, x^{p-1}\}$.
2°/ Si, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on a toujours $x^n \neq e$, alors l'application $n \mapsto x^n$ est un isomorphisme de $\mathbb{Z}$ sur G (d'où il résulte que G est un groupe infini dénombrable).

Solution.

1°/ Intersection d'une famille de sous-groupes.

Soit $(H_i)_{i \in I}$ une famille de sous-groupes de G indexée par un ensemble quelconque I.
Soit H l'intersection de cette famille.

Comme les H_i sont des sous-groupes, ils contiennent tous l'élément neutre e de la loi de G.
Cette relation s'écrit : $(\forall\, i)(i \in I \Rightarrow e \in H_i)$, ou encore $(\forall\, i)(i \notin I$ ou $e \in H_i)$.
Sous cette dernière forme, on voit que, pour pouvoir affirmer que e est dans tous les H_i, il faut que I ne soit pas vide : si I est vide, c'est $i \notin I$ qui est vrai.
Si l'ensemble I n'est pas vide, l'élément neutre est élément de l'intersection H des H_i.
Dans ce cas, H n'est pas vide.

Si l'on considère deux éléments a et b de H, ces deux éléments appartiennent à chacun des H_i.
Pour tout $i \in I$, comme H_i est un sous-groupe, le composé $a\,b$ appartient à H_i.
Donc $a\,b$ est un élément de H.

Enfin, pour tout élément $a \in H$, le symétrique a^{-1}, comme a, appartient à chacun des sous-groupes H_i, donc est un élément de H.

L'intersection d'une famille non vide de sous-groupes est un sous-groupe.

2°/ Sous-groupe engendré par une partie.

L'ensemble des sous-groupes contenant une partie X d'un groupe G n'est pas vide, puisque G est lui-même un sous-groupe contenant X.
On peut alors noter $< X >$ l'intersection de tous les sous-groupes de G contenant X.
D'après 1°, c'est un sous-groupe.
X est contenu dans tous les sous-groupes qui le contiennent, donc X est contenu aussi dans leur intersection $< X >$.

$< X >$ est donc lui-même un sous-groupe contenant X.
C'est le plus petit, pour l'inclusion, puisqu'il est contenu dans tous les sous-groupes contenant X.

Le sous-groupe engendré par une partie est le plus petit sous-groupe contenant cette partie.

3°/ Sous-groupe engendré par un élément.

En posant, pour l'élément x, $x^0 = e$, on voit, par récurrence, que tout sous-groupe contenant x contient aussi tous les composés x^n, $n \in \mathbb{N}$.
Tout sous-groupe contenant x contient aussi x^{-1} et tous les composés $x^{-n} = (x^{-1})^n = (x^n)^{-1}$, $n \in \mathbb{N}^*$.
Donc tout sous-groupe contenant x contient aussi tous les x^n, $n \in \mathbb{Z}$.
Tout sous-groupe contenant x contient l'ensemble $< \{x\} >$ des x^n, $n \in \mathbb{Z}$.

Or cet ensemble $< \{x\} >$ des x^n, $n \in \mathbb{Z}$, est lui-même un sous-groupe, en vertu de la relation, valable pour tout n et tout m de $\mathbb{Z}$:

$$x^n x^{-m} = x^{n-m}$$

Donc l'ensemble $< \{x\} >$ des x^n, $n \in \mathbb{Z}$, est le plus petit sous-groupe contenant x.

Le sous-groupe engendré par un élément est l'ensemble $< \{x\} >$ des x^n, $n \in \mathbb{Z}$.

Deuxième partie.

1°/ Groupe cyclique.

Soit p le plus petit des entiers $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $x^n = e$ (on dit que x est un **élément nilpotent** s'il existe un $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $x^n = e$).
L'élément neutre e est, par définition, un élément de $G = \{e, x, x^2, \dots, x^{p-1}\}$.
Soient x^h et x^k, $h \in \{1, \dots, p-1\}$, $k \in \{1, \dots, p-1\}$, des élément de G.
La division euclidienne de $h + k$ par p donne $h + k = q\,p + r$, $0 \leqslant r \leqslant p - 1$.
$x^h x^k = x^{h+k} = x^{q\,p+r} = (x^p)^q x^r = e^q x^r = e\,x^r = x^r$

Le produit de deux éléments de G est un élément de G.
Pour $h \in \{1, \dots, p-1\}$, $p-h \in \{1, \dots, p-1\}$.
$x^h x^{p-h} = x^p = e$
x^{p-h} est le symétrique de x^h.
Le symétrique de e est e, qui appartient à G.
Le symétrique d'un élément de G est un élément de G.

G est bien un groupe contenant x, donc aussi un sous-groupe de G contenant x.

Le sous-groupe engendré par x est l'ensemble $< \{x\} >$ des x^n, $n \in \mathbb{Z}$, d'après la première partie.
C'est le plus petit sous-groupe contenant x.
On a donc $< \{x\} > \subset G$.
Comme, d'autre part, les éléments de G sont des puissances de x, on a aussi $G \subset < \{x\} >$.
D'où l'égalité $< \{x\} > = G$.

Un groupe monogène engendré par un élément nilpotent d'ordre p est un groupe cyclique d'ordre p.

2°/ Isomorphisme.

L'application $n \mapsto x^n$ est une application φ de $\mathbb{Z}$ sur $G = < \{x\} >$.
Cette application est **surjective** puisque, d'après la première partie, tout élément de G est de la forme x^n, pour un $n \in \mathbb{Z}$.

Si $x^n = x^{n'}$ pour $n \in \mathbb{Z}$ et $n' \in \mathbb{Z}$, on peut supposer, par exemple $n \geqslant n'$, l'inverse de $x^{n'}$ est $x^{-n'}$.
Le composé de deux éléments de G est un élément de G : $x^n x^{-n'} = x^{n'} x^{-n'} = e$.
$x^{n-n'} = e$.
$n - n'$ est un élément de $\mathbb{N}$.
$n - n'$ ne peut pas être dans $\mathbb{N}^*$ par hypothèse, puisque, pour tout entier $m \in \mathbb{N}^*$, on a toujours $x^m \neq e$.
Donc $n - n' = 0$ et l'application φ est **injective**.

φ est donc une bijection.

$\varphi(n + n') = x^{n+n'} = x^n x^{n'} = \varphi(n)\,\varphi(n')$.
φ est donc un **morphisme**.

φ est un isomorphisme de groupe.

L'application $n \mapsto x^n$ est un isomorphisme de groupes de $\mathbb{Z}$ sur G.

Comme $\mathbb{Z}$ est un groupe infini dénombrable, il résulte de l'isomorphisme, que G est, lui aussi, un groupe infini dénombrable.

Chapitre 2. Groupes.

Enoncés.

Exercice 4. Théorème de Lagrange, théorème de Fermat.

Soit G un groupe (dont la loi est notée multiplicativement).

1°/ Soit H un sous-groupe de G.
Considérons la relation $\mathcal{R}_H$ définie sur G par :

$$x \mathcal{R}_H y \Leftrightarrow x^{-1} y \in H.$$

Montrer que $\mathcal{R}_H$ est une relation d'équivalence sur G, compatible à gauche avec la loi de G, c'est-à-dire telle que :

$$x \mathcal{R}_H y \Rightarrow x z \mathcal{R}_H y z, \text{ pour tout } z \in G.$$

2°/ Montrer que, réciproquement, si $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur G compatible à gauche avec la loi de G, il existe alors un sous-groupe H de G tel que :

$$x \mathcal{R} y \Leftrightarrow x^{-1} y \in H.$$

3°/ Soit H un sous-groupe de G, et $\mathcal{R}_H$ la relation d'équivalence définie dans 1°.

Soit $x \in G$. Montrer que la classe d'équivalence $\overline{x}$ de x modulo cette relation, est l'ensemble $x H$, et que l'application $y \mapsto x y$ est une bijection de H sur $x H$.

4°/ On rappelle que, lorsqu'un groupe est fini et possède n éléments, l'entier n est appelé l'**ordre** du groupe.
Déduire alors de 3° que si G est un groupe fini d'ordre n, l'ordre p d'un sous-groupe H est un diviseur de n (**Théorème de Lagrange**).

5°/ Etablir encore que si G est un groupe fini d'ordre n, alors, pour tout $x \in G$, on a $x^n = e$ (**Théorème de Fermat**).

Solution.

1°/ Relation d'équivalence.

Etant donné un sous-groupe H du groupe G, on considère la relation binaire $\mathcal{R}_H$ définie par :

$$(\forall x)(\forall y)(x \in G \text{ et } y \in G \text{ et } x \mathcal{R}_H y \Leftrightarrow x \in G \text{ et } y \in G \text{ et } x^{-1} y \in H)$$

a) Réflexivité.

$x^{-1} x = e \in H \Leftrightarrow x \mathcal{R}_H x$, pour tout $x \in H$.
La relation $\mathcal{R}_H$ est réflexive.

b) Symétrie.

$x \mathcal{R}_H y \Leftrightarrow x^{-1} y \in H$.
Comme H est un sous-groupe, si $x^{-1} y$ est un élément de H, son inverse $y^{-1} x$ est aussi un élément de H.
$y^{-1} x \in H \Rightarrow y \mathcal{R}_H x$.
$x \mathcal{R}_H y \Rightarrow y \mathcal{R}_H x$.
La relation $\mathcal{R}_H$ est symérique.

c) Transitivité.

$x \mathcal{R}_H y$ et $y \mathcal{R}_H z \Rightarrow x^{-1} y \in H$ et $y^{-1} z \in H$.
Comme H est un sous-groupe, le composé de deux éléments de H est un élément de H.
$x^{-1} y y^{-1} z \in H$.
$x^{-1} y y^{-1} z = x^{-1} e z = x^{-1} z \in H$, donc $x \mathcal{R}_H z$.
La relation $\mathcal{R}_H$ est transitive.

Réflexive, symétrique et transitive, la relation $\mathcal{R}_H$ est une **relation d'équivalence**.

d) Compatibilité à gauche avec la loi de *G*.

Soient x et y des éléments de G vérifiant $x \mathcal{R}_H y$ et soit z un élément quelconque de G.

On a $x^{-1} y \in H$.
Or $z^{-1} z = e$, donc $x^{-1} y = x^{-1} e y = x^{-1} z^{-1} z y = (z x)^{-1} (z y) \in H$,
donc $z x \mathcal{R}_H z y$.
Cette relation montre que la relation $\mathcal{R}_H$ est **compatible à gauche** avec la loi de composition de G.

2°/ Sous-groupe *H*.

Réciproquement, si $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence compatible à gauche avec la loi de composition de G, notons H la classe d'équivalence de l'élément neutre e.

$$H = \{x \mid x \in G \text{ et } x \mathcal{R} e\}$$
$$(x \in H) \Leftrightarrow (x \in G \text{ et } x \mathcal{R} e)$$

a) *H* est un sous-groupe.

En effet :

H n'est pas vide, il contient au moins e.

En effet, par définition de H comme classe d'équivalence de e, modulo $\mathcal{R}$, H contient tous les éléments

équivalents à e modulo $\mathcal{R}$.
Or la relation $\mathcal{R}$ est réflexive : $e \mathcal{R} e$, donc e est équivalent à e modulo $\mathcal{R}$.
Donc e est un élément de H et H n'est pas vide.

De plus, si x et y sont deux éléments quelconques de H, ils sont tous deux équivalents à e modulo $\mathcal{R}$, par définition de H, ce qui s'écrit :

$$(\forall x)(\forall y)(x \in H \text{ et } y \in H \Rightarrow x \mathcal{R} e \text{ et } y \mathcal{R} e)$$

Etant donné un quelconque élément z de G, comme $\mathcal{R}$ est compatible à gauche avec la loi de G, $z\,x$ et $z\,y$ sont tous deux équivalents à $z\,e = z$, modulo $\mathcal{R}$.

$$(\forall x)(\forall y)(\forall z)(x \in H \text{ et } y \in H \text{ et } z \in H \Rightarrow z\,x \mathcal{R} z \text{ et } z\,y \mathcal{R} z)$$

En particulier, pour $z = x^{-1}$, on obtient : $x^{-1}\,x \mathcal{R} x^{-1}$ et $x^{-1}\,y \mathcal{R} x^{-1}$.

$$(\forall x)(\forall y)(x \in H \text{ et } y \in H \Rightarrow x^{-1}\,x \mathcal{R} x^{-1} \text{ et } x^{-1}\,y \mathcal{R} x^{-1})$$
$$(\forall x)(\forall y)(x \in H \text{ et } y \in H \Rightarrow e \mathcal{R} x^{-1} \text{ et } x^{-1}\,y \mathcal{R} x^{-1})$$

Par symétrie et par transitivité de la relation $\mathcal{R}$:

$$(\forall x)(\forall y)(x \in H \text{ et } y \in H \Rightarrow x^{-1} \mathcal{R} e \text{ et } x^{-1}\,y \mathcal{R} e)$$

Par définition de H comme classe d'équivalence de e :

$$(\forall x)(\forall y)(x \in H \text{ et } y \in H \Rightarrow x^{-1} \in H \text{ et } x^{-1}\,y \in H)$$

relation qui montre que si x est un élément de H, son inverse x^{-1} est aussi un élément de H et on a :

$$\boxed{(\forall x \in G)(\forall y \in G)(x \in H \text{ et } y \in H \Rightarrow x^{-1}\,y \in H)}$$

Cette relation est un **critère pour que H, non vide, soit un sous-groupe de G**.
Donc H est un sous-groupe de G.

b) Relation d'équivalence définie par H.

Etant donnés des éléments quelconques x, y, z, de G, dire que $\mathcal{R}$ est compatible à gauche avec la loi de G, c'est dire que la relation suivante est vraie :

$$(\forall x)(\forall y)(\forall z)(x \in G \text{ et } y \in G \text{ et } z \in G \text{ et } x \mathcal{R} y \Rightarrow z\,x \mathcal{R} z\,y)$$

En particulier, pour $z = x^{-1}$, cette relation s'écrit :

$$(\forall x)(\forall y)(x \in G \text{ et } y \in G \text{ et } x \mathcal{R} y \Rightarrow x^{-1}\,x \mathcal{R} x^{-1}\,y)$$

Or $x^{-1}\,x$ est l'élément neutre e de G, donc :

$$(\forall x)(\forall y)(x \in G \text{ et } y \in G \text{ et } x \mathcal{R} y \Rightarrow e \mathcal{R} x^{-1}\,y)$$

Par symétrie de la relation d'équivalence $\mathcal{R}$, il vient :

$$(\forall\, x)(\forall\, y)(x \in G \text{ et } y \in G \text{ et } x\ \mathcal{R}\ y \Rightarrow x^{-1}\, y\ \mathcal{R}\ e)$$

Par définition de $H = \{x \mid x \in G \text{ et } x\ \mathcal{R}\ e\}$, cette relation s'écrit :

$$(\forall\, x)(\forall\, y)(x \in G \text{ et } y \in G \text{ et } x\ \mathcal{R}\ y \Rightarrow x \in G \text{ et } y \in G \text{ et } x^{-1}\, y \in H)$$

Réciproquement, soient x et y des éléments de G vérifiant $x^{-1}\, y \in H$.
Par définition de H, la relation suivante est vraie :

$$(\forall\, x)(\forall\, y)(x \in G \text{ et } y \in G \text{ et } x^{-1}\, y \in H \Rightarrow x \in G \text{ et } y \in G \text{ et } x^{-1}\, y\ \mathcal{R}\ e)$$

Comme la relation $\mathcal{R}$ est compatible à gauche avec la loi de composition de G, on peut composer à gauche $x^{-1}\, y$ et e avec x :

$$(\forall\, x)(\forall\, y)(x \in G \text{ et } y \in G \text{ et } x^{-1}\, y\ \mathcal{R}\ e \Rightarrow x\, x^{-1}\, y\ \mathcal{R}\ e\, x)$$

Les relations $x\, x^{-1} = e$, $e\, y = y$, $e\, x = x$ et la symétrie de la relation $\mathcal{R}$, entraînent alors :

$$(\forall\, x)(\forall\, y)(x \in G \text{ et } y \in G \text{ et } x^{-1}\, y \in H \Rightarrow x \in G \text{ et } y \in G \text{ et } x\ \mathcal{R}\ y)$$

D'où la relation, qu'on voulait démontrer :

$$\boxed{(\forall\, x)(\forall\, y)(x \in G \text{ et } y \in G \text{ et } x^{-1}\, y \in H \Leftrightarrow x \in G \text{ et } y \in G \text{ et } x\ \mathcal{R}\ y)}$$

Cette relation montre que la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ est la relation d'équivalence $\mathcal{R}_H$ définie par le sous-groupe H au sens de la première question.
On sait donc désormais que :

> Toute relation d'équivalence $\mathcal{R}$ sur un groupe G, compatible à gauche avec la loi de G, peut être considérée comme la relation d'équivalence $\mathcal{R}_H$ définie par le sous-groupe H des éléments $\mathcal{R}$-équivalents à l'élément neutre e.

3°/ Equipotence des classes d'équivalence.

Etant donné un sous-groupe H quelconque de G, on note $\mathcal{R}_H$ la relation binaire définie par $x\ \mathcal{R}_H\ y \Leftrightarrow x^{-1}\, y \in H$.
On sait, d'après ce qui précède, que :

— $\mathcal{R}_H$ est une relation d'équivalence compatible à gauche avec la loi de G

— H est la classe d'équivalence de l'élément neutre e modulo $\mathcal{R}_H$: $\overline{e} = H$.

a) Classe d'équivalence d'un élément.

Par définition d'une classe d'équivalence, pour tout élément $x \in G$:

$$\overline{x} = \{y \mid y \in G \text{ et } y\ \mathcal{R}_H\ x\}$$

Comme la relation $\mathcal{R}_H$ est compatible à gauche avec la loi de G :

$$y \mathcal{R}_H x \Rightarrow x^{-1} y \mathcal{R}_H x^{-1} x = e$$

et, réciproquement :

$$x^{-1} y \mathcal{R}_H e \Rightarrow x x^{-1} y = y \mathcal{R}_H x e = x$$

donc :

$$y \mathcal{R}_H x \Leftrightarrow x^{-1} y \mathcal{R}_H e$$

Or la relation $x^{-1} y \mathcal{R}_H e$ équivaut, comme on vient de le montrer, à $x^{-1} y \in H$.
Donc :

$$\overline{x} = \{y \mid y \in G \text{ et } x^{-1} y \in H\}$$

Par définition de $x H = \{y \mid y \in G \text{ et } (\exists z)(z \in H \text{ et } y = x z)\}$, la relation $x^{-1} y \in H$ peut s'écrire aussi $y \in x H$.

En effet, $x^{-1} y \in H \Rightarrow y = x x^{-1} y \in x H$ et, réciproquement, $y \in x H \Rightarrow (\exists z)(z \in H \text{ et } y = x z) \Rightarrow x^{-1} y = z \in H$

Donc :

$$\boxed{\overline{x} = x H.}$$

b) Bijection.

Pour un élément $x \in G$, notons φ_x l'application $y \mapsto x y$ de H dans $x H$.
Montrons que φ_x est bijective.

φ_x est déjà surjective puisque tout élément de $x H$ peut s'écrire sous la forme $x y$ avec un $y \in H$.
Donc tout élément de $x H$ peut s'écrire sous la forme $\varphi_x (y)$, avec un $y \in H$.

φ_x est injective car $\varphi_x (y) = \varphi_x (y') \Rightarrow x y = x y'$, et $x y = x y' \Rightarrow x^{-1} x y = x^{-1} x y'$ donc $y = y'$.

$$\boxed{\text{Pour tout élément } x \in G, \text{ l'application } y \mapsto x y \text{ est une bijection de } H \text{ sur } \overline{x} = x H.}$$

Comme H est égal à $\overline{e}$, on voit donc que toutes les classes d'équivalence modulo H ont le même cardinal, qui est le cardinal de H.

4°/ Théorème de Lagrange.

Supposons maintenant que G est un groupe fini d'ordre n (ce qui veut dire que G possède n éléments).
Alors, tout sous-groupe H de G est un ensemble fini (toute partie d'un ensemble fini est un ensemble fini).
Soit H un sous-groupe de G, d'ordre p.
Comme il existe une injection de H dans G, l'injection canonique, le cardinal de H est inférieur ou égal au cardinal de G.
p est donc un entier inférieur ou égal à n.

H définit la relation d'équivalence $\mathcal{R}_H$ de la première question.

Toutes les classes d'équivalence modulo $\mathcal{R}_H$ ont le même cardinal p, d'après le résultat 3°.

Les classes d'équivalence, modulo une relation d'équivalence $\mathcal{R}$ sur G, forment toujours une partition de G (résultat du cours).
Les classes d'équivalence modulo $\mathcal{R}_H$ forment donc une partition de G.

Tout élément de G possède une classe d'équivalence et une seule.
Le nombre des classes d'équivalence est donc un entier q inférieur ou égal au nombre d'éléments de G : $q \leqslant n$.

Il existe donc une famille finie $(x_i)_{1 \leq i \leq q}$ d'éléments de G telle que $G = \bigcup_{1 \leqslant i \leqslant q} x_i H$

$$n = Card\,(G) = Card\,(\bigcup_{1 \leqslant i \leqslant q} x_i H) = \sum_{i=1}^{i=q} Card\,(x_i H) = q\,p.$$

La relation $n = q\,p$ montre que l'ordre p du sous-groupe H est un diviseur de l'ordre n du groupe G.
C'est un **théorème de Lagrange**.

Si G est un groupe fini d'ordre n, l'ordre p d'un sous-groupe H est un diviseur de n.

5°/ Théorème de Fermat.

Soit x un élément d'un groupe G d'ordre n.
Le sous-groupe engendré par x est l'ensemble des x^k, $k \in \mathbb{Z}$.
C'est une partie de G donc il est fini.
Il existe donc un $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x^k = e$.
Si k est dans $\mathbb{N}$, il existe un $k \in \mathbb{N}$ tel que $x^k = e$.
Si k est un entier négatif, son opposé $-k$ est un entier naturel et on a $x^{-k} = (x^k)^{-1} = e^{-1} = e$.
Dans tous les cas, il existe un entier naturel $h \in \mathbb{N}$ tel que $x^h = e$.
On désigne par p le plus petit de ces entiers naturels h : $x^p = e$.
p l'ordre de $< \{x\} > = \{e, x, \ldots, x^{p-1}\}$ (Exercice 3, 2e partie, 1°)
p, ordre d'un sous-groupe de G, est un entier inférieur ou égal à n.
D'après le théorème de Lagrange précédent, p est un diviseur de n : il existe un entier q tel que $n = p\,q$.
$x^n = x^{p\,q} = (x^p)^q = e^q = e$.
C'est un **théorème de Fermat**.

Si G est un groupe fini d'ordre n, alors, pour tout $x \in G$, on a $x^n = e$.

Chapitre 2. Groupes.

Enoncés.

Exercice 5. Eléments d'ordre 2.

Soit G un groupe fini d'ordre n (dont la loi est notée multiplicativement). On suppose que tous les éléments de G distincts de e sont d'ordre 2 (l'**ordre d'un élément** est l'ordre du sous-groupe engendré par cet élément). 1°/ Montrer que G est nécessairement abélien. 2°/ Soit H un sous-groupe de G et soit $a \in G, a \notin H$. Montrer que $H \bigcup a\,H$ est encore un sous-groupe de G dont l'ordre est le double de celui de H. 3°/ Déduire de ce qui précède que l'ordre n de G est nécessairement une puissance de 2.	

Solution.

1°/ G est abélien.

Soit x un élément quelconque du groupe G.
Par hypothèse, x est un élément d'ordre 2.
Le sous-groupe engendré par x est $\{e, x\}$ et on a $x^2 = e$ (Exercice 3, 2e partie, 1°).

Soient x et y deux éléments quelconques de G.
Par hypothèse, $x\,y$ est un élément d'ordre 2.
On a, d'après ce qui précède, $(x\,y)^2 = e$.

Or $(x\,y)^2 = x\,y\,x\,y$, donc $x\,y\,x\,y = e$.
Multiplions à gauche chaque membre de l'égalité par x : $x\,x\,y\,x\,y = x\,e = x$.
Or x lui-même est un élément d'ordre 2 : on a donc $x^2 = e$.
Il reste : $y\,x\,y = x$.
Multiplions à gauche chaque membre de l'égalité par y : $y\,y\,x\,y = y\,x$.
Or y lui-même est un élément d'ordre 2 : on a donc $y^2 = e$.
Il reste : $x\,y = y\,x$.

Et cette relation montre que le groupe G est abélien.

G est un groupe abélien.

2°/ Sous-groupe $H \bigcup a\,H$.

Si H est un sous-groupe de G et a un élément de G qui n'appartient pas à H :

— $H \bigcup a\,H$ n'est pas vide puisqu'il contient H qui n'est pas vide.

— $a\,H$ est la classe d'équivalence de a, modulo la relation d'équivalence $\mathcal{R}_H$ définie sur G (Exercice 4) par :

$$x\,\mathcal{R}_H\,y \Leftrightarrow x^{-1}\,y \in H.$$

— Soient x et y des éléments de $H \bigcup a\,H$:
Si x et y sont dans H, $x\,y$ est aussi un élément de H, donc un élément de $H \bigcup a\,H$.
Si x est dans H et y dans $a\,H$, $x\,y$ est dans $H\,a\,H$.
Mais comme G est commutatif, on a $H\,a = a\,H$, $H\,a\,H = a\,H\,H \subset a\,H$, donc $x\,y$ est dans $a\,H$.
$x\,y$ est donc un élément de $H \bigcup a\,H$.
Si x est dans $a\,H$ et y dans H, $x\,y$ est dans $a\,H\,H \subset a\,H$, donc $x\,y$ est dans $a\,H$.
Si x est dans $a\,H$ et y dans $a\,H$, $x\,y$ est dans $a\,H\,a\,H = a^2\,H\,H = e\,H\,H = H\,H \subset H$, c'est donc un élément de $H \bigcup a\,H$.
Dans tous les cas, le composé de deux éléments de $H \bigcup a\,H$ est un élément de $H \bigcup a\,H$.
$H \bigcup a\,H$ est stable pour la loi de composition de G.

— Soit x un élément de $H \bigcup a\,H$.
La relation $x^2 = e$ montre que x est son propre symétrique.
Donc le symétrique de x est aussi dans $H \bigcup a\,H$.
Le symétrique d'un élément de $H \bigcup a\,H$ est un élément de $H \bigcup a\,H$.

$$\boxed{H \bigcup a\,H \text{ est un sous-groupe de } G.}$$

$H \bigcap a\,H$ est vide car s'il existait un $x = a\,y$ dans H avec $y \in H$, on aurait $x\,y = a\,y^2 = a\,e = a \in H$, ce qui n'est pas.
Donc

$$Card\,(H \bigcup a\,H) = Card\,(H) + Card\,(a\,H).$$

Or l'application $y \mapsto x\,y$ est une bijection de H sur $a\,H$ (Exercice 4. 3°), donc $Card\,(a\,H) = Card\,(H)$.
Il en résulte :

$$\boxed{Card\,(H \bigcup a\,H) = 2\,Card\,(H)}$$

3°/ Ordre de G.

Un groupe n'est pas vide, il contient au moins un élément, l'élément neutre e.
Soit H_0, le sous-groupe $\{\ e\ \}$ engendré par e.

Son cardinal est $2^0 = 1$.

Supposons que, pour un $n \in \mathbb{N}^*$, H_{n-1} soit un sous-groupe de cardinal 2^{n-1}.

Pour un $x_n \notin H_{n-1}$, on pose :

$$H_n = H_{n-1} \bigcup x_n\,H_{n-1}$$

S'il existe un tel x_n, c'est-à-dire si G n'est pas égal à H_{n-1}, auquel cas, son cardinal serait 2^{n-1}, H_n est un sous-groupe de G de cardinal $2\,Card\,(H_{n-1}) = 2^n$.

On construit ainsi, par récurrence, une suite croissante $(H_n)_{n \geq 0}$ de sous-groupes de G de cardinaux 2^n.

Comme le cardinal de G est fini, cette suite est nécessairement finie : il existe donc un $n \in \mathbb{N}$ tel que $H_n = G$.
On a alors $Card\ G = 2^n$.

L'ordre de G est une puissance de 2.

Chapitre 2. Groupes.

Enoncés.

Exercice 6. Groupes d'ordre inférieur ou égal à 5.

Soit G un groupe fini d'ordre n (dont la loi est notée multiplicativement). 1°/ Montrer que si n est un entier premier, G est un groupe cyclique. 2°/ Montrer que, si pour tout élément $x \in G$, on a $x^2 = e$, G est un groupe abélien. 3°/ On suppose ici que $n = 4$ et qu'il existe $x \in G$, tel que $x^2 \neq e$. Montrer que G est un groupe cyclique engendré par x. 4°/ Déduire de ce qui précède que si n est inférieur ou égal à 5, G est nécessairement abélien. 5°/ Donner un exemple de groupe d'ordre $n = 6$, non abélien.	

Solution.

1°/ Groupe d'ordre premier.

On sait déjà que, si G est un groupe fini d'ordre n :

— pour tout élément x de G, x^n est égal à l'élément neutre e de G (théorème de Fermat, Exercice 4, 5°).
— l'ordre d'un sous-groupe de G divise n (théorème de Lagrange, Exercice 4, 4°).

Soit n un entier premier (élément de $\mathbb{N}^*$, différent de 1 et n'ayant pas d'autre diviseur que 1 et lui-même).
Soit G un groupe fini d'ordre n.
Comme G possède au moins deux éléments ($n \in \mathbb{N}^*$ est différent de 1), soit x un élément de G différent de e.
On a $x^n = e$ (théorème de Fermat) et l'ordre du sous-groupe $H = <\{x\}>$ engendré par x divise n.
H est donc d'ordre 1 ou d'ordre n.
Comme H contient au moins e et x, il n'est pas d'ordre 1, donc il est d'ordre n.
Or le seul sous-groupe de G qui soit d'ordre $n = Card\ (G)$ est G lui-même.
Donc $H = G = \{e, x, \ldots, x^{n-1}\}$ (Exercice 3, 2e partie, 1°).
G est un groupe cyclique.

Tout groupe fini d'ordre premier est cyclique.

2°/ Groupe abélien.

On a montré dans un exercice précédent que si tout élément de G est d'ordre 2, G est un groupe abélien (Exercice 5, 1°).

G est un groupe abélien.

3°/ Groupe d'ordre 4.

D'après ce qui précède, le sous-groupe monogène H engendré par x est d'ordre 1, 2, ou 4, qui sont les seuls diviseurs de l'ordre 4 du groupe G.
Comme x est différent de e, H n'est pas d'ordre 1, il contient au moins deux éléments, e et x.
Comme x^2 est différent de e, ou bien x^2 est égal à x, ou bien H est d'ordre supérieur ou égal à 3, donc d'ordre 4.

Si x^2 était égal à x, on aurait $x^{-1} x^2 = x^{-1} x$, donc $x = e$, ce qui est faux.
C'est donc que H est d'ordre 4, donc $G = H$.

S'il existe $x \in G$, tel que $x^2 \neq e$, G est un groupe cyclique engendré par x.

4°/ Groupe d'ordre inférieur ou égal à 5.

Un groupe cyclique est abélien puisqu'on a toujours $x^n x^m = x^m x^n$.

Un groupe d'ordre 1 est réduit à l'élément neutre, il est abélien puisque $e^2 = e$, d'après 2°.
Un groupe d'ordre 2 est abélien, puisque 2 est premier, d'après 1°.
Un groupe d'ordre 3 est abélien, puisque 3 est premier, d'après 1°.
Un groupe d'ordre 5 est abélien, puisque 5 est premier, d'après 1°.

Pour un groupe d'ordre 4, de deux choses l'une :
— ou bien il existe un élément x tel que $x^2 \neq e$, et dans ce cas G est un groupe cyclique, donc abélien,
— ou bien pour tout élément x, $x^2 = e$ et, dans ce cas, G est abélien d'après 2°.
Dans tous les cas un groupe d'ordre 4 est abélien.

Tout groupe d'ordre inférieur ou égal à 5 est abélien.

5°/ Groupe d'ordre 6 non abélien.

6 = 3 !
Soit $\mathfrak{S}_6$ le groupe des permutations de l'ensemble à trois éléments {1, 2, 3}.
C'est un groupe d'ordre 6.

Soit φ_{12} la permutation qui échange les éléments situés aux places 1 et 2 en laissant inchangé le troisième élément.
Soit φ_{13} la permutation qui échange les éléments situés aux places 1 et 3 en laissant inchangé le deuxième élément.

On a φ_{12} (1, 2, 3) = (2, 1, 3), φ_{13} (2, 1, 3) = (3, 1, 2), donc $\varphi_{13} \circ \varphi_{12}$ (1, 2, 3) = (3, 1, 2).
φ_{13} (1, 2, 3) = (3, 2, 1), φ_{12} (3, 2, 1) = (2, 3, 1), donc $\varphi_{12} \circ \varphi_{13}$ (1, 2, 3) = (2, 3, 1).
$\varphi_{12} \circ \varphi_{13} \neq \varphi_{13} \circ \varphi_{12}$

Le groupe des permutations d'un ensemble à trois éléments est un groupe d'ordre 6 non abélien.

Chapitre 2. Groupes.

Enoncés.

Exercice 7. Loi de groupe non commutatif sur $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$.

Soit $G := \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ et * la loi dans G définie par $(x, y) * (x', y') = (x\,x', x\,y' + y)$. 1°/ Montrer que $(G, *)$ est un groupe non commutatif. 2°/ Montrer que $]\,0, +\infty\,[\times \mathbb{R}, *)$ est un sous-groupe de $(G, *)$.	

Solution.

1°/ Groupe non commutatif.

Il est clair déjà que si (x, y) et (x', y') sont des éléments de G, alors le couple $(x\,x', x\,y' + y)$ est aussi un élément de G, car :
$x \neq 0$ et $x' \neq 0 \Rightarrow x\,x' \neq 0$, et, d'autre part, $x\,y' + y \in \mathbb{R}$.
Donc l'application $((x, y), (x', y')) \mapsto (x\,x', x\,y' + y)$ est bien une **loi de composition** dans G.

a) Associativité.

Soient (x, y), (x', y'), (x'', y''), des éléments de G.

$((x, y) * (x', y')) * (x'', y'') = (x\,x', x\,y' + y) * (x'', y'') = ((x\,x')\,x'', (x\,x')\,y'' + (x\,y' + y))$
$(x, y) * ((x', y') * (x'', y'')) = (x, y) * (x'\,x'', x'\,y'' + y') = (x\,(x'\,x''), x\,(x'\,y'' + y') + y)$

Or $(x\,x')\,x'' = x\,(x'\,x'')$ (associativité du produit dans $\mathbb{R}^*$),
et $(x\,x')\,y'' + (x\,y' + y) = x\,x'\,y'' + x\,y' + y = x\,(x'\,y'' + y') + y$ (associativité de l'addition et de la multiplication dans $\mathbb{R}$, distributivité de la multiplication par rapport à l'addition).

On obtient : $((x, y) * (x', y')) * (x'', y'') = (x, y) * ((x', y') * (x'', y''))$, ce qui montre que la loi * est associative.

b) Elément neutre.

Cherchons s'il existe un couple (a, b) de nombres réels, $a \neq 0$, tel que, pour tout élément (x, y) de G, on ait :

$$(a, b) * (x, y) = (x, y) * (a, b) = (x, y)$$

Ces relations sont équivalentes à :

$$(a\,x, a\,y + b) = (x\,a, x\,b + y) = (x, y)$$

$a\,x = x\,a = x$ et $a\,y + b = x\,b + y = y$.

Les premières donnent $(a - 1)\,x = 0$, donc $a = 1$, puisque la relation doit être valable pour tout x.
Les deuxièmes s'écrivent alors $y + b = x\,b + y = y$, donc $b = 0$.

Le couple (1, 0) est donc élément neutre de la loi *.

c) Existence d'un symétrique.

Etant donné un élément (x, y) de G, cherchons s'il existe un élément (x', y') de G vérifiant :

$$(x', y') * (x, y) = (x, y) * (x', y') = (1, 0)$$

Ces relations sont équivalentes à :

$(x'\,x, x'\,y + y') = (x\,x', x\,y' + y) = (1, 0)$
$x'\,x = x\,x' = 1$ et $x'\,y + y' = x\,y' + y = 0$

Les premières donnent $x' = \frac{1}{x}$, ce qui est possible puisque x est différent de 0.
Les deuxièmes s'écrivent alors $\frac{y}{x} + y' = x\,y' + y = 0$, donc $y' = -\frac{y}{x}$.

Le couple $\left(\frac{1}{x}, -\frac{y}{x}\right)$ est le symétrique de (x, y) pour la loi *.

d) Commutativité.

Comme $x\,x'$ est toujours égal à $x'\,x$, pour montrer que la loi * n'est pas commutative, il faut trouver des éléments (x, y) et (x', y') de$G$ vérifiant :
$x\,y' + y \neq x'\,y + y'$.
Pour avoir $x\,y' + y \neq x'\,y + y'$, il suffit de prendre $y = y' \neq 0$ avec $x \neq x'$.
Par exemple : $(-1, 1) * (1, 1) = (-1, 0)$ et $(1, 1) * (-1, 1) = (-1, 2)$, donc $(-1, 1) * (1, 1) \neq (1, 1) * (-1, 1)$.

La loi * n'est pas commutative.

2°/ Sous-groupe.

Pour montrer que $(G', *) = (]\,0, +\infty\,[\times \mathbb{R}, *)$ est un sous-groupe de $(G, *)$, il faut montrer deux choses :

— que G' est stable pour la loi * ;
— que G' est stable par passage au symétrique.

La première propriété est évidente : le produit de deux réels strictement positifs est un nombre réel strictement positif.
La deuxième propriété est évidente : l'inverse d'un nombre réel strictement positif est un nombre réel strictement positif.

Donc $(]\,0, +\infty\,[\times \mathbb{R}, *)$ est un sous-groupe de $(G, *)$.

Chapitre 2. Groupes.

Enoncés.

Exercice 8. Groupe abélien $\mathfrak{P}(E)$ pour la différence symétrique.

Soit E un ensemble, on désigne par Δ la différence symétrique dans $\mathfrak{P}(E)$. Montrer que $(\mathfrak{P}(E), \Delta)$ est un groupe abélien.	

Solution.

Dans un précédent exercice (Théorie des ensembles, Chapitre 1, exercice12), nous avons établi les propriétés suivantes :

1°/ $A \Delta B = B \Delta A$ (commutativité)
2°/ $A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C$ (associativité)
3°/ $A \Delta \varnothing = A$ (existence d'un élément neutre)
4°/ $A \Delta A = \varnothing$ (nilpotence et existence d'un symétrique)

Il ne manquait que la définition d'un groupe abélien (groupe commutatif) pour conclure :
$(\mathfrak{P}(E), \Delta)$ est un groupe abélien.

Chapitre 2. Groupes.

Enoncés.

Exercice 9. Groupes à 3 éléments.

Quels sont les groupes à trois éléments ?	

Solution.

Un groupe G à trois éléments doit posséder un élément neutre e et deux autres éléments a et b, $a \neq b$.
$a^{*3} = b^{*3} = e$ (théorème de Fermat).

Comme 3 est premier, les sous-groupes de G sont $\{e\}$ et G (théorème de Lagrange).
Le sous-groupe engendré par a est G, donc $\{a, a^{*2}, e\} = G$ donc $a^{*2} = b$, et $a * b = b * a = a^3 = e$ (Exercice 3, 2e partie, 1°)
Le sous-groupe engendré par b est G, donc $\{b, b^{*2}, e\} = G$ donc $b^{*2} = a$.

La loi de composition * de G est donc nécessairement donnée par le tableau :

*	e	a	b
e	e	a	b
a	a	b	e
b	b	e	a

Notamment, $(G, *)$ est un groupe commutatif, et tous les groupes d'ordre 3 sont isomorphes.

Pour les avoir tous, il suffit d'en avoir un, par exemple $\mathbb{Z} / 3\,\mathbb{Z}$, groupe additif des entiers modulo 3.

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

Chapitre 2. Groupes.

Enoncés.

Exercice 10. Morphisme de groupes de (ℝ, +) dans (ℂ*, ×).

Montrer que l'application f définie par $f(x) = \cos x + i \sin x$ est un morphisme de groupes de (ℝ, +) dans (ℂ*, ×).	

Solution.

1°/ Application *f*.

$f(x) = \cos x + i \sin x$ est un nombre complexe différent de 0 puisque son module est 1, donc $f(x)$ est dans ℂ*.

L'application f envoie ℝ dans ℂ*.

On sait déjà, par ailleurs, que ℝ est un groupe pour l'addition des nombres réels, et que ℂ* est un groupe pour la multiplication des nombres complexes.

2°/ Morphisme de groupes.

Pour que f soit un morphisme de groupes de (ℝ, +) dans (ℂ*, ×), il faut et il suffit que $f(x + y) = f(x) f(y)$, pour tout couple (x, y) de nombres réels.

Considérons donc deux nombres réels x et y.

$f(x + y) = \cos(x + y) + i \sin(x + y)$

Or $\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$ et $\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$.
Donc $f(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y + i (\sin x \cos y + \cos x \sin y)$
$= \cos x (\cos y + i \sin y) + i \sin x (\cos y + i \sin y)$
$= (\cos x + i \sin x) (\cos y + i \sin y)$
$= f(x) f(y)$

Et l'égalité $f(x + y) = f(x) f(y)$ montre que f est un morphisme de groupes de (ℝ, +) dans (ℂ*, ×).

Chapitre 2. Groupes.

Enoncés.

Exercice 11. Sous-groupes additifs de $\mathbb{Z}$.

De quelle forme sont les sous-groupes additifs de $\mathbb{Z}$?	

Solution.

Soit G un sous-groupe additif de $\mathbb{Z}$.

Si x est un élément de G, comme G est stable par addition, G contient tous les multiples entiers de x, c'est-à-dire les nombres $n\,x$, avec $n \in \mathbb{N}$.
Comme G est stable par passage au symétrique, G contient aussi tous les nombres $-n\,x$, avec $n \in \mathbb{N}$.
Donc si x est un élément de G, G contient $\mathbb{Z}\,x$.

Considérons les éléments strictement positifs de G. C'est une partie G' de $\mathbb{N}$ et G est la réunion de G', de $\{0\}$, et des symétriques des éléments de G'.
Si G' est vide, c'est que G est réduit à $\{0\} = \mathbb{Z}\,0$.
Si G' n'est pas vide, comme l'ordre naturel des entiers est un **bon ordre**, G' contient un plus petit élément $a > 0$.

Soit b un élément de G'.
Soit p le PGCD (plus grand commun diviseur) de a et b : c'est un entier strictement positif, il est inférieur ou égal à a et à b, et a et b sont des multiples de p.
D'après le **théorème de Bezout**, il existe des entiers relatifs n et m tels que $n\,a + m\,b = p$.
Comme $n\,a$ et $m\,b$ appartiennent tous deux à G, p appartient à G, et il est strictement positif, donc il appartient à G'.
Comme a est le plus petit élément de G', a est inférieur ou égal à p.
Finalement $a = p$.
Comme b est un multiple de p, c'est un multiple de a.
Tous les éléments de G' sont des multiples de a.
$G' = \mathbb{N}\,a$, et $G = \mathbb{Z}\,a = a\mathbb{Z}$.

Les sous-groupes additifs de $\mathbb{Z}$ sont tous de la forme $n\,\mathbb{Z}$, où $n \in \mathbb{N}$.
— si $n = 0$, le sous-groupe se réduit à $\{0\}$.
— si $n = 1$, le sous-groupe est $\mathbb{Z}$ entier.
— dans les autres cas, le sous-groupe est formé des multiples d'un entier n.

Chapitre 2. Groupes.

Enoncés.

Exercice 12. Groupes cycliques $\mathbb{Z} / n \mathbb{Z}$.

Soit n un entier naturel, $n \geqslant 2$.

1°/ Montrer que l'ensemble des éléments inversibles de $\mathbb{Z} / n \mathbb{Z}$ muni de la loi produit est un groupe.
Ce groupe sera noté $(\mathbb{Z} / n \mathbb{Z})'$.
2°/ Déterminer $(\mathbb{Z} / 8 \mathbb{Z})'$, $(\mathbb{Z} / 9 \mathbb{Z})'$, $(\mathbb{Z} / 7 \mathbb{Z})'$. Ces groupes sont-ils cycliques ?

Solution.

1°/ Groupe.

$\mathbb{Z} / n \mathbb{Z}$ est l'ensemble des classes d'équivalence des entiers relatifs modulo la **relation d'équivalence** R définie par :

$$a \, R \, b \Leftrightarrow (a - b) \text{ est un multiple de } n.$$

ou, ce qui revient au même : $a \, R \, b \Leftrightarrow (a - b) \in n \mathbb{Z}$.

Si $(a - b)$ est un multiple de n et si $(c - d)$ est un multiple de n, alors $(a - b) + (c - d) = (a + c) - (b + d)$ est un multiple de n, ce qui montre que la relation d'équivalence est compatible avec l'addition des entiers : la classe d'équivalence de la somme de deux entiers ne dépend que des classes d'équivalence des deux entiers.
De même $ac - bd = a (c - d) + d (a - b)$ est un multiple de n, ce qui montre que la relation d'équivalence est compatible avec la multiplication des entiers. La classe d'équivalence du produit de deux entiers ne dépend que des classes d'équivalence des deux entiers.

L'addition et la multiplication des entiers induisent donc une addition et une multiplication sur l'ensemble $\mathbb{Z} / n \mathbb{Z}$ des entiers modulo n.
L'application canonique $\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} / n \mathbb{Z}$, qui, à un entier, fait correspondre sa classe d'équivalence, est un **morphisme de groupes additifs**.
C'est aussi un **morphisme de groupes multiplicatifs** de $\mathbb{Z}^*$ sur $(\mathbb{Z} / n \mathbb{Z})^*$, avec les propriétés de distributivité de la multiplication par rapport à l'addition qui font de $\mathbb{Z} / n \mathbb{Z}$, ce qu'on appelle un **anneau**.

Notons * la multiplication modulo n dans $\mathbb{Z} / n \mathbb{Z}$.
Un élément $\overline{x}$ de $\mathbb{Z} / n \mathbb{Z}$ est inversible s'il existe un élément $\overline{y}$ de $\mathbb{Z} / n \mathbb{Z}$ vérifiant :
$\overline{x} * \overline{y} = \overline{x y} = \overline{1}$,
c'est-à-dire si, étant donné un nombre x, représentant de la classe d'équivalence $\overline{x}$, il existe un nombre y tel que $x y$ soit un multiple de n, plus 1, ce qu'on écrit $x y = 1 \pmod{n}$.

a) Stabilité pour la multiplication.

Soient x et x' deux entiers tels qu'il existe y avec $x\,y = 1 \pmod n$ et $x'\,y' = 1 \pmod n$.
Alors le produit $(x\,x')\,(y\,y')$ est aussi un multiple de n, plus 1, ce qui montre que le produit de deux éléments de $(\mathbb{Z} / n\,\mathbb{Z})'$ est encore un élément de $(\mathbb{Z} / n\,\mathbb{Z})'$.

$(\mathbb{Z} / n\,\mathbb{Z})'$ est donc stable pour la multiplication modulo n.

b) Stabilité par passage à l'inverse.

Soit $\overline{x}$ un élément inversible de $\mathbb{Z} / n\,\mathbb{Z}$.
Soit x un représentant de $\overline{x}$: il existe y tel que $x\,y = 1 \pmod n$, et $\overline{x} * \overline{y} = \overline{x\,y} = \overline{1}$.
On a alors $y\,x = 1 \pmod n$, ce qui montre que $\overline{y}$ est inversible dans $\mathbb{Z} / n\,\mathbb{Z}$, donc $(\mathbb{Z} / n\,\mathbb{Z})'$ est stable par passage à l''inverse.

De (a) et (b), résulte le fait que $(\mathbb{Z} / n\,\mathbb{Z})'$ est un sous-groupe du groupe multiplicatif $(\mathbb{Z} / n\,\mathbb{Z})^*$.

2°/ Groupes cycliques ?

a) (Z / 8 Z)'.

Les éléments inversibles de $\mathbb{Z} / 8\,\mathbb{Z}$ sont les classes d'équivalence de ceux des nombres de 1 à 7 dont un multiple est multiple de 8, plus 1 : cela élimine déjà les nombres pairs 2, 4, 6. A part 1, qui est toujours inversible modulo un entier non nul, restent 3, 5, 7.
$3 \times 3 = 9 = 8 + 1$, donc 3 est inversible modulo 8, c'est un élément nilpotent d'ordre 2.
$5 \times 5 = 25 = 3 \times 8 + 1$, donc 5 est inversible modulo 8, c'est un élément nilpotent d'ordre 2.
$7 \times 7 = 49 = 6 \times 8 + 1$, donc 7 est inversible modulo 8, c'est un élément nilpotent d'ordre 2.
$(\mathbb{Z} / 8\,\mathbb{Z})' = \{1, 3, 5, 7\}$, en désignant les classes d'équivalence par un représentant.

Comme chaque élément est nilpotent d'ordre 2, les sous-groupes monogènes sont tous d'ordre 2, donc aucun élément n'engendre $(\mathbb{Z} / 8\,\mathbb{Z})'$ entier.
(Z / 8 Z)' n'est pas un groupe cyclique.

b) (Z / 9 Z)'.

Les éléments inversibles de $\mathbb{Z} / 9\,\mathbb{Z}$ sont les classes d'équivalence de ceux des nombres de 1 à 8 dont un multiple est multiple de 9, plus 1 : cela élimine déjà les diviseurs premiers de 9, soit 3, et leurs multiples, soit 6. A part 1, qui est toujours inversible modulo un entier non nul, restent 1, 2, 4, 5, 7, 8.
$2 \times 5 = 10 = 9 + 1$, donc 2 et 5 sont inversibles modulo 9.
$4 \times 7 = 28 = 3 \times 9 + 1$, donc 4 et 7 sont inversibles modulo 9.
$8 \times 8 = 64 = 7 \times 9 + 1$, donc 8 est inversible modulo 9, c'est un élément nilpotent d'ordre 2.
$(\mathbb{Z} / 9\,\mathbb{Z})' = \{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$, en désignant les classes d'équivalence par un représentant.
Le sous-groupe engendré par 2 est formé des puissances de 2, modulo 9 : $< 2 > = \{1, 2, 4, 8, 7, 5\} = (\mathbb{Z} / 9\,\mathbb{Z})'$.

(Z / 9 Z)' est un groupe cyclique.

c) (Z / 7 Z)'.

Les éléments inversibles de $\mathbb{Z} / 7\,\mathbb{Z}$ sont les classes d'équivalence de ceux des nombres de 1 à 6 dont un

multiple est multiple de 7, plus 1.
$2 \times 4 = 8 = 7 + 1$, donc 2 et 4 sont inversibles modulo 7.
$3 \times 5 = 15 = 2 \times 7 + 1$, donc 3 et 5 sont inversibles modulo 7.
$6 \times 6 = 36 = 5 \times 7 + 1$, donc 6 est inversible modulo 7, c'est un élément nilpotent d'ordre 2.
$(\mathbb{Z} / 7\ \mathbb{Z})' = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, en désignant les classes d'équivalence par un représentant.
Le sous-groupe engendré par 2 est formé des puissances de 2, modulo 7 : $< 2 > = \{1, 2, 4\}$.
Le sous-groupe engendré par 3 est formé des puissances de 3, modulo 7 : $< 3 > = \{1, 3, 2, 6, 4, 5\} = (\mathbb{Z} / 7\ \mathbb{Z})'$.

$(\mathbb{Z} / 7\ \mathbb{Z})'$ est un groupe cyclique.

On remarquera que tous les éléments non nuls de $\mathbb{Z} / 7\ \mathbb{Z}$ sont inversibles : autrement dit, $\mathbb{Z} / 7\ \mathbb{Z}$ est ce qu'on appelle un **corps**.
Cette propriété tient au fait que **7 est premier**.
$\mathbb{Z} / 7\ \mathbb{Z}$ est donc le premier **corps fini** que nous rencontrons.

Chapitre 2. Groupes.

Enoncés.

Exercice 13. Centre d'un groupe.

Soit $(G,*)$ un groupe. Pour $x \in G$, le symétrique de x est noté x^{-1}. Soit

$$H = \{ x \in G \mid (\forall\, y \in G)(x * y = y * x)\}.$$

1°/ Montrer que si $x \in H$, alors $x^{-1} \in H$.
2°/ Montrer que $(H,*)$ est un sous-groupe de $(G,*)$.

Solution.

1°/ Stabilité pour le symétrique.

Soit $x \in H$. Soit e l'élément neutre de G. Pour tout $y \in G$:

$$\begin{aligned} x^{-1} * y &= x^{-1} * y * e \\ &= x^{-1} * y * (x * x^{-1}) \\ &= x^{-1} * (y * x) * x^{-1} \text{ (associativité)} \\ &= x^{-1} * (x * y) * x^{-1} \ (x \in H) \\ &= (x^{-1} * x) * y * x^{-1} \text{ (associativité)} \\ &= e * y * x^{-1} \\ &= y * x^{-1} \end{aligned}$$

Donc $x^{-1} \in H$.

Si $x \in H$, alors $x^{-1} \in H$.

2°/ $(H,*)$ est un sous-groupe.

Pour montrer que $(H,*)$ est un sous-groupe de $(G,*)$, il reste seulement à montrer la stabilité de H pour la loi de composition, puisqu'on sait déjà (voir 1°) que H est stable pour le symétrique.

Soient x et y des éléments de G appartenant à H. Pour tout $z \in G$:

$$\begin{aligned} (x * y) * z &= (x * y) * z * e \\ &= (x * y) * z * (x * y)^{-1} * (x * y) \\ &= (x * y) * z * y^{-1} * x^{-1} * (x * y), \text{ car } (x * y)^{-1} = y^{-1} * x^{-1} \\ &= x * y * y^{-1} * z * x^{-1} * (x * y) \\ &= x * e * z * x^{-1} * (x * y) \\ &= x * z * x^{-1} * (x * y) \end{aligned}$$

$= x * x^{-1} * z * (x * y)$
$= e * z * (x * y)$
$= z * (x * y)$
Donc $x * y \in H$.

Si $x \in H$ et $y \in H$, alors $x * y \in H$.

H, stable pour la loi * et pour le symétrique, est un sous-groupe, qu'on appelle le ***centre*** de G.
(H,*) est un groupe **abélien**.

Exercices

Groupes de permutations.

1. Groupe symétrique.
2. Nombre d'inversions.
3. Signature.
4. Parité.
5. Transposition.
6. Cycle.
7. Ordre d'une permutation.

1 Groupe symétrique.

On appelle **groupe symétrique de degré *n***, l'ensemble des **permutations** (=bijection de l'ensemble sur lui-même) de {1, ... , *n*}, muni de la composition des applications. On le note $\mathfrak{S}_n$.

Le groupe symétrique $\mathfrak{S}_E$ d'un ensemble fini *E* à *n* éléments est isomorphe à $\mathfrak{S}_n$.

Plus généralement, on appelle **groupe de permutations**, tout sous-groupe du groupe symétrique.

HAUT

2 Nombre d'inversions.

Le **nombre d'inversions** d'une permutation π est le nombre de couples (i, j) vérifiant :

$$1 \leqslant i < j \leqslant n \text{ et } \pi(i) > \pi(j)$$

HAUT

3 Signature.

Si ν est le **nombre d'inversions** d'une permutation π, on appelle **signature** de la permutation π, le nombre $(-1)^{\nu}$.
La signature d'une permutation vaut +1 si son nombre d'inversions est pair.
La signature d'une permutation vaut –1 si son nombre d'inversions est impair.

HAUT

4 Parité.

On dit qu'une permutation est **paire** si sa signature vaut +1, **impaire** si sa signature vaut –1.
Une permutation a la même parité que son nombre d'inversions.

HAUT

5 Transposition.

Dans l'ensemble {1, ... , n}, on appelle **transposition** de i et j, la permutation τ qui échange i et j, en laissant les autres inchangés :
$\tau(i) = j$, $\tau(j) = i$, $\tau(h) = h$ pour $h \neq i$ et $h \neq j$.
Une transposition est impaire.
Toute permutation peut se décomposer en produit de transpositions.

Une transposition est dite **simple** si $j = i + 1$.
Toute permutation peut se décomposer en produit de transpositions simples.

HAUT

6 Cycle.

Un **cycle** est une permutation qui se réduit à une permutation circulaire sur un certain nombre d'éléments (la **longueur** du cycle), et qui laisse les autres éléments inchangés.
Pour toute permutation p de $\{1, \ldots, n\}$, il existe une **partition** de $\{1, \ldots, n\}$ pour laquelle la restriction de p à chaque élément de la partition est un cycle.

HAUT

7 Ordre d'une permutation.

On appelle **ordre d'une permutation** *p*, l'ordre du sous-groupe (nombre d'éléments) qu'elle engendre.

C'est le plus petit entier *k* tel que p^k soit la permutation identique.

HAUT

Chapitre 3. Groupes de permutations.

Exercices

Exercice 1. Groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ de degré n.
Exercice 2. Etude d'une permutation de {1, ... , 9}.
Exercice 3. Permutations paires de $\mathfrak{S}_3$.
Exercice 4. Parité d'un cycle.
Exercice 5. Décomposition d'une permutation de {1, ... , 10} en cycles.
Exercice 6. Produit de deux cycles.
Exercice 7. Ordre et signature d'une permutation de $\mathfrak{S}_8$.
Exercice 8. Nombre de transpositions et de cycles dans $\mathfrak{S}_n$.
Exercice 9. Nombre de permutations se décomposant en cycles de longueur donnée dans $\mathfrak{S}_9$.
Exercice 10. Etude d'une permutation de {1, ... , 10}.

Exercice 1. Groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ de degré n.

Soit n un entier naturel, $n \geqslant 1$. Soit $\mathfrak{S}_n$ l'ensemble des permutations de $\{1, 2, \ldots, n\}$ muni de la loi de composition $\circ$.

1°/ Montrer que $(\mathfrak{S}_n, \circ)$ est un groupe.

On dit que $\mathfrak{S}_n$ est le n-ième groupe symétrique, ou **groupe symétrique de degré n**.

2°/ Décrire tous les éléments de $\mathfrak{S}_3$.

3°/ Etablir la table de la loi de composition de $\mathfrak{S}_3$.

4°/ $\mathfrak{S}_3$ est-il isomorphe à $\mathbb{Z} / 6\mathbb{Z}$?

5°/ Déterminer les sous-groupes de $\mathfrak{S}_3$, d'ordre 2 puis d'ordre 3.

6°/ Pour quelles valeurs de n, $\mathfrak{S}_n$ est-il un groupe abélien ?

Solution

HAUT

Exercice 2. Etude d'une permutation de {1, ... , 9}.

Soit $p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 7 & 8 & 9 & 4 & 5 & 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$.

1°/ Déterminer le nombre d'**inversions** de p et la **signature** de p.
2°/ Décomposer p en produit de **cycles** disjoints.
3°/ Décomposer p en produit de **transpositions**.
4°/ On dit qu'une transposition est simple si elle est de la forme $(i, i + 1)$.
Décomposer p en produit de **transpositions simples**.
5°/ Quel est l'**ordre** de p dans $\mathfrak{S}_9$? Calculer p^{1000}.

Solution

HAUT

Exercice 3. Permutations paires de $\mathfrak{S}_3$.

Déterminer les permutations paires de $\mathfrak{S}_3$.	Solution

HAUT

Exercice 4. Parité d'un cycle.

Dans $\mathfrak{S}_n$, quelle est la parité du cycle $(1, \ldots, m)$?	Solution

HAUT

Exercice 5. Décomposition d'une permutation de {1, ... , 10} en cycles.

Soit $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 5 & 6 & 7 & 4 & 8 & 9 & 3 & 10 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

1°/ Ecrire l'inverse de σ.
2°/ Décomposer σ en cycles.
3°/ Calculer sa signature.
4°/ Quel est le plus petit entier non nul n tel que $\sigma^n = 1$, où 1 est la permutation identique ?
5°/ Calculer σ^{147}.

Solution

HAUT

Exercice 6. Produit de deux cycles.

Dans le groupe des permutations $\mathfrak{S}_n$, le produit d'un cycle de longueur 2 par un cycle de longueur 3, est-il un cycle de longueur 6 ?	Solution

HAUT

Exercice 7. Ordre et signature d'une permutation de $\mathfrak{S}_8$.

On considère, dans $\mathfrak{S}_8$, la permutation p = (2 4 3 7)(1 5 6). Déterminer l'ordre et la signature de p.	Solution

HAUT

Exercice 8. Nombre de transpositions et de cycles dans $\mathfrak{S}_n$.

Combien y a-t-il de transpositions, de cycles d'ordre 3, de cycles d'ordre p,dans le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$?	Solution

HAUT

Exercice 9. Nombre de permutations se décomposant en cycles de longueur donnée dans $\mathfrak{S}_9$.

Dans $\mathfrak{S}_9$, déterminer le nombre de permutations qui se décomposent : 1°/ En un produit de trois cycles de longueur 3 ? 2°/ En un produit de deux cycles de longueur 4 ? 3°/ En un produit de trois cycles dont deux de longueur 3 et un de longueur 2 ?	Solution

HAUT

Exercice 10. Etude d'une permutation de {1, ... , 10}.

Soit la permutation $p \in \mathfrak{S}_{10}$, définie par :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 4 & 9 & 6 & 3 & 7 & 1 & 10 & 8 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

1°/ Décomposer p en produit de cycles disjoints.
2°/ Décomposer p en produit de transpositions.
3°/ Quelle est la signature de p ?
4°/ Combien p présente-t-elle d'inversions ?
5°/ Quel est l'ordre de p ?
6°/ Calculer p^{3914}.
7°/ Combien y a-t-il de cycles de longueur 4 dans $\mathfrak{S}_{10}$?
8°/ Combien y a-t-il de permutations qui se décomposent en un produit de deux cycles disjoints, l'un de longueur 3, l'autre de longueur 6 ?

Solution

HAUT

Chapitre 3. Groupes de permutations.

Enoncés.

Exercice 1. Groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ de degré n.

Soit n un entier naturel, $n \geqslant 1$. Soit $\mathfrak{S}_n$ l'ensemble des permutations de $\{1, 2, \dots, n\}$ muni de la loi de composition $\circ$.

1°/ Montrer que $(\mathfrak{S}_n, \circ)$ est un groupe.

On dit que $\mathfrak{S}_n$ est le n-ième groupe symétrique, ou **groupe symétrique de degré n**.

2°/ Décrire tous les éléments de $\mathfrak{S}_3$.

3°/ Etablir la table de la loi de composition de $\mathfrak{S}_3$.

4°/ $\mathfrak{S}_3$ est-il isomorphe à $\mathbb{Z} / 6 \mathbb{Z}$?

5°/ Déterminer les sous-groupes de $\mathfrak{S}_3$, d'ordre 2 puis d'ordre 3.

6°/ Pour quelles valeurs de n, $\mathfrak{S}_n$ est-il un groupe abélien ?

Solution.

1°/ Groupe symétrique.

Une permutation est une bijection de $\{1, 2, \dots, n\}$ sur lui-même : la composée de deux bijections est une bijection, donc la composée de deux permutations est une permutation.
La composition des applications est donc une **loi de composition** de l'ensemble $\mathfrak{S}_n$ des permutations de l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$.

Comme la composition des applications, cette loi est associative.
L'application identique en est l'élément neutre.
Toute bijection possède une bijection réciproque, qui est le symétrique pour la loi de composition.

La composition est donc une **loi de groupe** pour $\mathfrak{S}_n$.

2°/ Le groupe $\mathfrak{S}_3$.

$\mathfrak{S}_3$ possède 3 ! = 6 éléments, qui sont les diverses façons de ranger les éléments 1, 2, 3.
σ_1 est l'application identique de $\{1, 2, 3\}$.

&ηιβαρ;	1	2	3

σ_1	1	2	3
σ_2	1	3	2
σ_3	2	1	3
σ_4	2	3	1
σ_5	3	1	2
σ_6	3	2	1

3°/ Loi de composition de $\mathfrak{S}_3$.

o	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4	σ_5	σ_6
σ_1	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4	σ_5	σ_6
σ_2	σ_2	σ_1	σ_5	σ_6	σ_3	σ_4
σ_3	σ_3	σ_4	σ_1	σ_2	σ_6	σ_5
σ_4	σ_4	σ_3	σ_6	σ_5	σ_1	σ_2
σ_5	σ_5	σ_6	σ_2	σ_1	σ_4	σ_3
σ_6	σ_6	σ_5	σ_4	σ_3	σ_2	σ_1

4°/ Isomorphisme ?

Sur le tableau précédent, on lit : $\sigma_2 \circ \sigma_3 = \sigma_5$ et $\sigma_3 \circ \sigma_2 = \sigma_4$.
Donc $\mathfrak{S}_3$ n'est pas un groupe commutatif.
Or $\mathbb{Z} / 6\mathbb{Z}$ est un groupe commutatif, donc, bien qu'ils aient le même ordre, les groupes $\mathfrak{S}_3$ et $\mathbb{Z} / 6\mathbb{Z}$ ne sont pas isomorphes.

5°/ Sous-groupes de $\mathfrak{S}_3$.

σ_2 est nilpotent d'ordre 2, car ${\sigma_2}^2 = \sigma_1$, donc σ_2 engendre un sous-groupe cyclique d'ordre 2.
σ_3 est nilpotent d'ordre 2, car ${\sigma_3}^2 = \sigma_1$, donc σ_3 engendre un sous-groupe cyclique d'ordre 2.
σ_4 est nilpotent d'ordre 3, car ${\sigma_4}^2 = \sigma_5$ et ${\sigma_4}^3 = \sigma_4 \circ \sigma_5 = \sigma_1$, donc σ_4 engendre un sous-groupe cyclique d'ordre 3.
σ_5 est nilpotent d'ordre 3, car ${\sigma_5}^2 = \sigma_4$ et ${\sigma_5}^3 = \sigma_5 \circ \sigma_4 = \sigma_1$, donc σ_4 engendre un sous-groupe cyclique d'ordre 3.
σ_6 est nilpotent d'ordre 2, car ${\sigma_6}^2 = \sigma_1$, donc σ_6 engendre un sous-groupe cyclique d'ordre 2.

L'ordre d'un sous-groupe d'un groupe fini d'ordre *n*, est un diviseur de *n* (théorème de Lagrange): les sous-groupes de $\mathfrak{S}_3$ ont donc pour ordre, 1, 2, 3, 6.
Il y a un seul sous-groupe d'ordre 1, c'est $\{\sigma_1\}$.
Il y a un seul sous-groupe d'ordre 6, c'est $\mathfrak{S}_3$.

Les sous-groupes cycliques sont :
— sous-groupes d'ordre 2 : $< \boldsymbol{\sigma_2} > = \{\sigma_1, \sigma_2\}$, $< \boldsymbol{\sigma_3} > = \{\sigma_1, \sigma_3\}$, $< \boldsymbol{\sigma_6} > = \{\sigma_1, \sigma_6\}$.
— sous-groupes d'ordre 3 : $< \boldsymbol{\sigma_4} > = < \boldsymbol{\sigma_5} > = \{\sigma_1, \sigma_4, \sigma_5\}$.

Les sous-groupes non monogènes sont tous égaux à $\mathfrak{S}_3$.

Par exemple, le sous-groupe engendré par σ_2 et σ_3, contient déjà $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$.

Il contient aussi $\sigma_2 \circ \sigma_3 = \sigma_5$ et $\sigma_3 \circ \sigma_2 = \sigma_4$.

Il contient enfin $\sigma_5 \circ \sigma_2 = \sigma_6$.

Il y a donc, au total, **six sous-groupes**, en tout et pour tout, dont **trois d'ordre 2 et un d'ordre 3**.

6°/ $\mathfrak{S}_n$ groupe abélien ?

On sait déjà que tout groupe fini d'ordre inférieur ou égal à 5 est abélien et que tout groupe fini d'ordre premier est cyclique, donc abélien (Chapitre 2, Exercice 6).

Donc $\mathfrak{S}_n$ est un groupe abélien, d'ordre n !, pour $n = 1$ ou $n = 2$.

Déjà $\mathfrak{S}_3$ n'est pas abélien.

Pour $n > 3$, appelons σ_2 la transposition de 2 et 3, σ_3 la transposition de 1 et 2, alors $\sigma_2 \circ \sigma_3$ est une permutation circulaire sur {1, 2, 3}, qui décale d'un cran vers la droite, alors que $\sigma_3 \circ \sigma_2$ est une permutation circulaire sur {1, 2, 3}, qui décale d'un cran vers la gauche.
Donc σ_2 et σ_3 ne sont pas commutables et $\mathfrak{S}_n$ n'est pas abélien.

$\mathfrak{S}_n$ groupe abélien $\Leftrightarrow n = 1$ ou $n = 2$.

Chapitre 3. Groupes de permutations.

Enoncés.

Exercice 2. Etude d'une permutation de {1, ... , 9}.

Soit $p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 7 & 8 & 9 & 4 & 5 & 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$.

1°/ Déterminer le nombre d'**inversions** de p et la **signature** de p.
2°/ Décomposer p en produit de **cycles** disjoints.
3°/ Décomposer p en produit de **transpositions**.
4°/ On dit qu'une transposition est simple si elle est de la forme $(i, i + 1)$.
Décomposer p en produit de **transpositions simples**.
5°/ Quel est l'**ordre** de p dans $\mathfrak{S}_9$? Calculer p^{1000}.

Solution.

1°/ Nombre d'inversions et signature.

Le **nombre d'inversions** est le nombre de couples (i, j) pour lesquels $i < j$ et $p(j) < p(i)$.

Partons de $(i, p(i)) = (1, 3)$: pour $j = 7$, $p(j) = 2 < 3$ et pour $j = 8$, $p(j) = 1 < 3$, soit 2 inversions.
Pour $(i, p(i)) = (2, 7)$: une inversion pour $j = 5$, $j = 6$, $j = 7$, $j = 8$, $j = 9$, soit 5 inversions.
Pour $(i, p(i)) = (3, 8)$: une inversion pour $j = 5$, $j = 6$, $j = 7$, $j = 8$, $j = 9$, soit 5 inversions.
Pour $(i, p(i)) = (4, 9)$: une inversion pour $j = 5$, $j = 6$, $j = 7$, $j = 8$, $j = 9$, soit 5 inversions.
Pour $(i, p(i)) = (5, 4)$: une inversion pour $j = 7$, $j = 8$, soit 2 inversions.
Pour $(i, p(i)) = (6, 5)$: une inversion pour $j = 7$, $j = 8$, soit 2 inversions.
Pour $(i, p(i)) = (7, 2)$: une inversion pour $j = 8$, soit 1 inversion.
Pour $(i, p(i)) = (8, 1)$: 0 inversion.

Le nombre d'inversions est donc : 2 + 5 + 5 + 5 + 2 + 2 + 1 = 22.

La **signature** de la permutation en résulte : $(-1)^{22} = 1$.
La permutattion est **paire**.

2°/ Décomposition en produit de cycles.

Un **cycle** est une permutation circulaire sur une partie de {1, 2, ... , 9} qui laisse le reste inchangé.
Des cycles disjoints commutent : on peut les ranger dans n'importe quel ordre.
Commençons par le cycle qui contient 1.

$$p = (1\ 3\ 8)\ (2\ 7)\ (4\ 9\ 6\ 5)$$

3°/ Décomposition en produit de transpositions.

Une **transposition** échange les nombres figurant en deux places, laissant le reste inchangé.
Il suffit de décomposer chaque cycle en transpositions (τ_{ij} échange les nombres figurant en places *i* et *j*):

$$p = (\tau_{18} \circ \tau_{38}) \circ \tau_{27} \circ (\tau_{45} \circ \tau_{96} \circ \tau_{65})$$

L'ordre des transpositions dans les paquets entre parenthèses ne peut être modifié, mais l'ordre d'application des paquets peut l'être :

$$p = (\tau_{45} \circ \tau_{96} \circ \tau_{65}) \circ (\tau_{18} \circ \tau_{38}) \circ \tau_{27}$$

4°/ Décomposition en transpositions simples.

Une **transposition simple** échange les nombres figurant en deux places adjacentes, laissant le reste inchangé.
Il faut ici amener séparément chaque nombre à sa place finale en le déplaçant de droite à gauche.
Pour amener le 3 en position 1, nous ferons, dans l'ordre: (3↔2), (2↔1), ce qui revient à une permutation circulaire (1 2 3) d'une place vers la droite.
Ensuite, pour amener le 7 en position 2 : (7↔6), (6↔5), (5↔4), (4↔3), (3↔2), permutation circulaire d'un cran à droite sur (2 3 4 5 6 7).
Pour amener le 8 en position 3 : (8↔7), (7↔6), (6↔5), (5↔4), (4↔3), permutation circulaire d'un cran à droite sur (3 4 5 6 7 8).
Pour amener le 9 en position 4 : (9↔8), (8↔7), (7↔6), (6↔5), (5↔4), permutation circulaire d'un cran à droite sur (4 5 6 7 8 9).
Pour amener le 4 en position 5 : (7↔6), (6↔5), permutation circulaire d'un cran à droite sur (5 6 7).
Pour amener le 5 en position 6 : (8↔7), (7↔6), permutation circulaire d'un cran à droite sur (6 7 8).
Pour amener le 2 en position 7 : (8↔7), permutation circulaire d'un cran à droite sur (7 8).
Le 1 et le 6 sont déjà en bonne place.

$p = \tau_{87} \circ (\tau_{67} \circ \tau_{78}) \circ (\tau_{56} \circ \tau_{67}) \circ (\tau_{45} \circ \tau_{56} \circ \tau_{67} \circ \tau_{78} \circ \tau_{89}) \circ (\tau_{34} \circ \tau_{45} \circ \tau_{56} \circ \tau_{67} \circ \tau_{78}) \circ (\tau_{23} \circ \tau_{34} \circ \tau_{45} \circ \tau_{56} \circ \tau_{67}) \circ (\tau_{12} \circ \tau_{23})$.

Au total, il aura fallu **22 transpositions simples**, tiens, tiens ...

5°/ Ordre de la permutation.

L'ordre est le plus petit entier non nul tel que p^n soit l'application identique.
L'ordre d'un cycle est la longueur du cycle.
L'ordre de la permutation est donc le PPCM (plus petit commun multiple) des longueurs de ses cycles.

$n = 3 \times 4 = 12$.

$1000 = 10^3 = (-2)^3 \pmod{12} = 4 \pmod{12}$
$p^{1000} = p^4 = (1\ 3\ 8)$

La permutation *p* est d'ordre 12 et p^{1000} se réduit au cycle (1 3 8).

Chapitre 3. Groupes de permutations.

Enoncés.

Exercice 3. Permutations paires de $\mathfrak{S}_3$.

Déterminer les permutations paires de $\mathfrak{S}_3$.	

Solution.

Les permutations de l'ensemble {1, 2, 3} ont déjà été décrites dans l'Exercice 1, 2°.
Ajoutons au tableau les nombres d'inversions et les signatures.
Rappelons que le **nombre d'inversions** ν d'une permutation σ est le nombre de couples (i, j), $i < j$, tels que $\sigma(j) < \sigma(i)$.
La **signature** est $(-1)^{\nu}$.

↑	1	2	3	Inversions	Signature
σ_1	1	2	3	0	1
σ_2	1	3	2	1	–1
σ_3	2	1	3	1	–1
σ_4	2	3	1	2	1
σ_5	3	1	2	2	1
σ_6	3	2	1	3	–1

Les **permutations paires** sont celles dont la signature est 1 : ce sont les 3 **permutations circulaires** de (1, 2, 3).

Chapitre 3. Groupes de permutations.

Enoncés.

Exercice 4. Parité d'un cycle.

Dans $\mathfrak{S}_n$, quelle est la parité du cycle $(1, \dots, m)$?	

Solution.

Le cycle $(1 \dots m)$ est une **permutation circulaire** des nombres $\{1, \dots, m\}$ decalant les nombres d'un cran vers la gauche.
Il est composé des transpositions $\tau_{1\,2}, \tau_{2\,3}, \dots, \tau_{(m-2)\,(m-1)}, \tau_{(m-1)\,m}$, .
Ces transpositions sont au nombre de $m - 1$.
La signature de la permutation est donc $(-1)^{m-1}$.
La parité du cycle est donc la parité de $m - 1$: pair si m est impair, impair si m est pair.

Dans $\mathfrak{S}_n$, la parité du cycle $(1, \dots, m)$ est celle de $m - 1$.

Chapitre 3. Groupes de permutations.

Enoncés.

Exercice 5. Décomposition d'une permutation de {1, ... , 10} en cycles.

Soit $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 5 & 6 & 7 & 4 & 8 & 9 & 3 & 10 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

1°/ Ecrire l'inverse de σ.
2°/ Décomposer σ en cycles.
3°/ Calculer sa signature.
4°/ Quel est le plus petit entier non nul *n* tel que $\sigma^n = 1$, où 1 est la permutation identique ?
5°/ Calculer σ^{147}.

Solution.

1°/ Permutation inverse.

La permutation inverse de σ s'obtient en faisant correspondre à chaque image σ (*i*) le nombre *i* :

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 10 & 9 & 7 & 4 & 1 & 2 & 3 & 5 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

2°/ Décomposition en cycles.

Les cycles s'obtiennent en partant d'un nombre et en suivant ses images successives par les puissances de σ.

σ = (1 5 8 10) (2 6 9) (3 7)

Il est inutile d'ajouter les cycles de longueur 1, qui correspondent à l'application identique.

3°/ Signature.

Un cycle de longueur *m* a une signature $(-1)^{m-1}$ (Exercice 4).
La signature de la permutation σ est donc $(-1)^{3+2+1+0} = (-1)^6 = 1$.
La permutation σ est paire.

4°/ Ordre de la permutation.

L'ordre d'un cycle est sa longueur.
L'ordre de la permutation est le PPCM (plus petit commun multiple) des ordres de ses cycles.
Le PPCM de 1, 2, 3, 4, est $3 \times 4 = 12$.
La permutation σ est d'ordre 12.
C'est le plus petit entier n tel que $\sigma^n = \mathbb{1}$ (permutation identique).

5°/ Calcul de σ^{147}.

$147 = 3 \pmod{12}$

$(1\ 5\ 8\ 10)^3 = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 8 & 10 \\ 5 & 8 & 10 & 1 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 8 & 10 \\ 10 & 1 & 5 & 8 \end{pmatrix} = (1\ 10\ 8\ 5)$

$(2\ 6\ 9)^3 = \mathbb{1}$ (permutation identique)

$(3\ 7)^3 = (3\ 7) = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$

$(4)^3 = \mathbb{1}$ (permutation identique)

Au total $\sigma^{147} = \sigma^3$ est la permutation :
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 10 & 2 & 7 & 4 & 1 & 6 & 3 & 5 & 9 & 8 \end{pmatrix} = (1\ 10\ 8\ 5)\ (3\ 7)$

Chapitre 3. Groupes de permutations.

Enoncés.

Exercice 6. Produit de deux cycles.

Dans le groupe des permutations $\mathfrak{S}_n$, le produit d'un cycle de longueur 2 par un cycle de longueur 3, est-il un cycle de longueur 6 ?	

Solution.

Pour des cycles disjoints, le produit de deux cycles n'est pas un cycle : a fortiori, ce n'est pas un cycle de longueur 6.

Même pour des cycles non disjoints, le résultat est faux.
Un cycle de longueur 2 est une transposition.
Un cycle de longueur 3 est le produit de deux transpositions.
Si la première transposition du cycle de longueur 3 est la transposition du cycle de longueur 2, le produit des deux cycles se réduit à la deuxième transposition du cycle de longueur 3 : la longueur du cycle produit est 2, et non 6.

Exemple dans $\mathfrak{S}_3$:

$$(\tau_{23} \circ \tau_{12}) \circ \tau_{12} = \tau_{23}$$
$$(1\ 2\ 3) \circ (1\ 2) = (2\ 3)$$

Chapitre 3. Groupes de permutations.

Enoncés.

Exercice 7. Ordre et signature d'une permutation de $\mathfrak{S}_8$.

On considère, dans $\mathfrak{S}_8$, la permutation p = (2 4 3 7)(1 5 6). Déterminer l'ordre et la signature de p.	

Solution.

L'ordre de la signature est le plus petit entier n non nul tel que $p^n = 1$ (permutation identique).
L'ordre d'un cycle de longueur m est m.
L'ordre de la permutation p est le PPCM (plus petit commun multiple) des ordres de ses cycles.
Le PPCM de 4 et 3 est 12.
L'ordre de la permutation *p* est 12.

Sa signature est le produit des signatures de ses cycles.
La signature d'un cycle de longueur m est $(-1)^{m-1}$ (Exercice 4).
La signature de la permutation p est $(-1)^{3+2} = -1$.
La permutation *p* est impaire.

Chapitre 3. Groupes de permutations.

Enoncés.

Exercice 8. Nombre de transpositions et de cycles dans $\mathfrak{S}_n$.

Combien y a-t-il de transpositions, de cycles d'ordre 3, de cycles d'ordre p,dans le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$?	

Solution.

1°/ Transpositions.

Les transpositions échangent deux nombres différents de l'ensemble $\{1, \dots, n\}$.
Ce sont les cycles d'ordre 2.
Il y en a autant que de couples (i, j), $i < j$.
C'est le nombre de parties à 2 éléments, soit $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$

Il existe $\frac{n(n-1)}{2}$ transpositions dans $\mathfrak{S}_n$.

2°/ Cycles d'ordre 3.

Un cycle d'ordre 3 est déterminé par :
— les 3 éléments différents qui composent le cycle : il y a $\binom{n}{3}$ façons de les choisir dans $\{1, \dots, n\}$;

— l'ordre dans lequel les éléments interviennent dans le cycle : il y a 2 façons de choisir l'ordre, le premier élément étant le plus petit des trois.
$2\binom{n}{3} = \frac{1}{3} n (n-1) (n-2)$
Au total :

Il existe $\frac{1}{3} n (n-1) (n-2)$ cycles d'ordre 3 dans $\mathfrak{S}_n$.

3°/ Cycles d'ordre p.

Un cycle d'ordre p est déterminé par :
— les p élémentsdifférents qui composent le cycle : il y a $\binom{n}{p}$ façons de les choisir dans $\{1, \dots, n\}$;

— l'ordre dans lequel les éléments interviennent dans le cycle : il y a $(p-1)$! façons de choisir l'ordre, le

premier élément étant le plus petit des p éléments différents choisis.
$(p-1)!\binom{n}{p} = \frac{1}{p}\frac{n!}{(n-p)!}$
Au total :

Il existe $\frac{1}{p}\frac{n!}{(n-p)!}$ cycles d'ordre p dans $\mathfrak{S}_n$, $2 \leqslant p \leqslant n$.

On peut vérifier facilement que c'est bien le résultat qu'on a obtenu directement pour $p = 2$ et $p = 3$.

Chapitre 3. Groupes de permutations.

Enoncés.

Exercice 9. Nombre de permutations se décomposant en cycles de longueur donnée dans $\mathfrak{S}_9$.

Dans $\mathfrak{S}_9$, déterminer le nombre de permutations qui se décomposent : 1°/ En un produit de trois cycles de longueur 3 ? 2°/ En un produit de deux cycles de longueur 4 ? 3°/ En un produit de trois cycles dont deux de longueur 3 et un de longueur 2 ?	

Solution.

1°/ Trois cycles de longueur 3.

Il y a $\binom{9}{3}\binom{6}{3}\binom{3}{3}$ = 16 800 façons de choisir 3 groupes de 3 nombres différents dans {1, 2, ... , 9}.

Pour chaque groupe de 3 éléments, il y a deux façons de former un cycle, le premier nombre des 3 étant le plus petit des 3.

Au total, il y a donc $2^3 \times 16\,800 = 134\,400$ façons de former trois cycles de longueur 3.

> Dans $\mathfrak{S}_9$, il y a 134 400 permutations se décomposant en un produit de trois cycles de longueur 3.

2° Deux cycles de longueur 4.

Il y a $\binom{9}{4}\binom{5}{4}$ = 630 façons de choisir 2 groupes de 4 nombres différents dans {1, 2, ... , 9}.

Pour chaque groupe de 4 éléments, il y a 3 ! = 6 façons de former un cycle, le premier nombre de 4 étant le plus petit des 4.

Au total, il y a donc $6^2 \times 630 = 22\,680$ façons de former deux cycles de longueur 4.

> Dans $\mathfrak{S}_9$, il y a 22 680 permutations se décomposant en un produit de deux cycles de longueur 4.

3°/ Un cycle de longueur 2, deux cycles de longueur 3.

Il y a $\binom{9}{2}\binom{7}{3}\binom{4}{3} = \frac{9!}{2!\,3!\,3!}$ = 5 040 façons de choisir un groupe de 2 et deux groupes de 3 nombres différents dans {1, ... , 9}.
Pour chaque groupe de 2 éléments, il y a une seule façon de former un cycle de longueur 2 (transposition).
Pour chaque groupe de 3 éléments, il y a 2 façons de former un cycle, le premier des 3 étant le plus petit.
Au total, il y a $2^2 \times 5\,040 = 20\,160$ façons de former un cycle delongueur 2 et deux cycles de longueur 3.

Dans $\mathfrak{S}_9$, il y a 20 160 permutations se décomposant en un produit de un cycle de longueur 2 et deux cycles de longueur 3.

Chapitre 3. Groupes de permutations.

Enoncés.

Exercice 10. Etude d'une permutation de {1, ... , 10}.

Soit la permutation $p \in \mathfrak{S}_{10}$, définie par :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 4 & 9 & 6 & 3 & 7 & 1 & 10 & 8 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

1°/ Décomposer p en produit de cycles disjoints.
2°/ Décomposer p en produit de transpositions.
3°/ Quelle est la signature de p ?
4°/ Combien p présente-t-elle d'inversions ?
5°/ Quel est l'ordre de p ?
6°/ Calculer p^{3914}.
7°/ Combien y a-t-il de cycles de longueur 4 dans $\mathfrak{S}_{10}$?
8°/ Combien y a-t-il de permutations qui se décomposent en un produit de deux cycles disjoints, l'un de longueur 3, l'autre de longueur 6 ?

Solution.

1°/ Décomposition en cycles disjoints.

Un **cycle** est une permutation circulaire sur une partie de {1, ... , 10} qui laisse le reste inchangé.
Des cycles disjoints commutent : on peut les ranger dans n'importe quel ordre.
Un cycle s'obtient en partant d'un élément, 1 par exemple :

(1, 4, 3, 6)

Le premier élément qui n'intervient pas dans ce cycle est 2 :

(2, 9)

L'élément non atteint suivant est 5 :

(5, 7, 10)

L'élément 8 est inchangé par p.

La permutation p se décompose donc en produit de trois cycles disjoints.

$$p = (1, 4, 3, 6) \circ (2, 9) \circ (5, 7, 10)$$

2°/ Décomposition en transpositions.

Une **transposition** échange les nombres figurant en deux places, laissant le reste inchangé.
Il suffit de décomposer chaque cycle en transpositions (τ_{ij} échange les nombres figurant en places i et j):

$$p = (\tau_{16} \circ \tau_{43} \circ \tau_{36}) \circ \tau_{29} \circ (\tau_{5\,10} \circ \tau_{7\,10})$$

L'ordre des transpositions dans les paquets entre parenthèses ne peut être modifié, mais l'ordre d'application des cycles peut l'être.

3°/ Signature.

La signature peut se calculer à partir du nombre de transpositions.
La permutation p se décompose en produit de 6 transpositions : sa signature est $(-1)^6 = 1$.

La permutation p est paire : sa signature est 1.

4°/ Nombre d'inversions.

Le **nombre d'inversions** est le nombre de couples (i, j) pour lesquels $i < j$ et $p(j) < p(i)$.

Partons de $(i, p(i)) = (1, 4)$: il y a une inversion pour $j = 4, 6, 9$, soit 3 inversions.
Pour $(i, p(i)) = (2, 9)$: il y a une inversion pour $j = 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10$, soit 7 inversions.
Pour $(i, p(i)) = (3, 6)$: il y a une inversion pour $j = 4, 6, 9, 10$, soit 4 inversions.
Pour $(i, p(i)) = (4, 3)$: il y a une inversion pour $j = 6, 9$, soit 2 inversions.
Pour $(i, p(i)) = (5, 7)$: il y a une inversion pour $j = 6, 9, 10$, soit 3 inversions.
Pour $(i, p(i)) = (6, 1)$: il y a 0 inversion.
Pour $(i, p(i)) = (7, 10)$: il y a une inversion pour $j = 8, 9, 10$, soit 3 inversions.
Pour $(i, p(i)) = (8, 8)$: il y a une inversion pour $j = 9, 10$, soit 2 inversions.
Pour $i = 9$ et $i = 10$, il n'y a pas d'inversion.

Au total, nous obtenons : $3 + 7 + 4 + 2 + 3 + 3 + 2 = 24$ inversions.
Ce nombre permet de vérifier le calcul de la signature : $(-1)^{24} = 1$.

La permutation p présente 24 inversions.

5°/ Ordre.

L'ordre est le plus petit entier non nul tel que p^n soit l'application identique.
L'ordre d'un cycle est la longueur du cycle.
L'ordre de la permutation est donc le PPCM (plus petit commun multiple) des longueurs de ses cycles.

$n = 4 \times 3 = 12$.

p est une permutation p d'ordre 12.

6°/ p^{3914}.

3914 = 2 (mod 12).

$p^{3914} = p^2$

$(1, 4, 3, 6)^2 = \tau_{46} \circ \tau_{13} = (1, 3)(4, 6)$
$(2, 9)^2 = \mathbb{1}$ (application identique).
$(5, 7, 10)^2 = (5, 10, 7)$
$p^2 = (1, 3)(4, 6)(5, 10, 7)$
C'est la permutation $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 2 & 1 & 6 & 10 & 4 & 5 & 8 & 9 & 7 \end{pmatrix}$

$$p^{3914} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 2 & 1 & 6 & 10 & 4 & 5 & 8 & 9 & 7 \end{pmatrix}$$

7°/ Cycles de longueur 4 dans $\mathfrak{S}_{10}$.

Dans $\mathfrak{S}_n$, un cycle d'ordre p est déterminé par :

— les p élémentsdifférents qui composent le cycle : il y a $\binom{n}{p}$ façons de les choisir dans {1, ... , n} ;

— l'ordre dans lequel les éléments interviennent dans le cycle : il y a $(p - 1)$! façons de choisir l'ordre, le premier élément étant le plus petit des p éléments différents choisis.

$(p - 1)\,!\binom{n}{p} = \frac{1}{p}\frac{n!}{(n-p)!}$

Au total, pour $n = 10$ et $p = 4$:

Il existe $\frac{1}{4}10 \times 9 \times 8 \times 7 = 1\,260$ cycles d'ordre 4 dans $\mathfrak{S}_{10}$.

8°/ Permutations se décomposant en produit de deux cycles.

Il y a $\binom{10}{6}\binom{4}{3} = 210 \times 4 = 820$ façons de choisir 1 groupe de 6 nombres différents dans {1, 2, ... , 10} et un groupe de 3 nombres différents dans ceux qui restent.
Pour chaque groupe de 6 éléments, il y a 5 ! façons de former un cycle, le premier nombre des 6 étant le plus petit des 6.
Pour chaque groupe de 3 éléments, il y a 2 ! façons de former un cycle, le premier nombre des 3 étant le plus petit des 3.
Au total, il y a donc $2 \times 120 \times 820 = 16\,400 \times 12 = 196\,400$ façons de former un cycle de longueur 6 et un cycle de longueur 3 disjoint du précédent.

Dans $\mathfrak{S}_{10}$, il y a 196 400 permutations se décomposant en un produit de deux cycles disjoints, l'un de longueur 3, l'autre de longueur 6.

Exercices

Anneaux.

1. **Anneau.**
2. **Anneau intègre.**

1 Anneau.

On appelle anneau tout triplet $(A, +, .)$ dans lequel :

— A est un ensemble.
— + est une loi de composition (addition) de groupe abélien.
— . est une loi de composition (multiplication) vérifiant :

- associativité
- existence d'un élément neutre (on suppose que **tout anneau est "unitaire" par définition**)
- distributivité à droite et à gauche par rapport à l'addition : $x\,(y + z) = x\,y + x\,z$, $(x + y)\,z = x\,z + y\,z$.

Si la multiplication est, de plus, commutative, on dit que **l'anneau est commutatif**.

HAUT

2 Anneau intègre.

Un **diviseur de zéro à gauche** est un élément non nul b tel qu'il existe un élément non nul a vérifiant $a\,b = 0$.
Un **diviseur de zéro à droite** est un élément non nul a tel qu'il existe un élément non nul b vérifiant $a\,b = 0$.
Un élément **régulier à gauche** est un élément a tel que l'application $x \mapsto a\,x$ soit une injection.
Un élément **régulier à droite** est un élément a tel que l'application $x \mapsto x\,a$ soit une injection.

Un **anneau intègre** est un anneau (**unitaire**) commutatif et sans diviseur de zéro.
Dans un anneau intègre, tous les éléments non nuls sont réguliers.

HAUT

Chapitre 4. Anneaux.

Exercices

Exercice 1. Formule du binôme.
Exercice 2. Anneau intègre.
Exercice 3. Anneau quotient.
Exercice 4. Anneau quotient $\mathbb{Z}$ / $n\mathbb{Z}$.
Exercice 5. Nombres duaux.

Exercice 1. Formule du binôme.

Soit A un anneau et soient a et b deux éléments de A qui commutent (c'est-à-dire tels que $a\,b = b\,a$). Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

(formule dite du binôme de Newton).

Solution

HAUT

Exercice 2. Anneau intègre.

Soit A un anneau non réduit à $\{0\}$. On rappelle que A est dit **sans diviseur de 0** si la relation $x\,y = 0$ entraîne $x = 0$ ou $y = 0$. Un anneau commutatif et sans diviseur de 0 est appelé **anneau intègre**. Montrer que, dans un anneau intègre, tout élément non nul est **régulier** pour la multiplication.	Solution

HAUT

Exercice 3. Anneau quotient.

Soit A un anneau commutatif, et I un sous-anneau de A.
Considérons la relation $\mathcal{R}_I$, définie sur A par

$$x \mathcal{R}_I y \Leftrightarrow y - x \in I.$$

1°/ Montrer que $\mathcal{R}_I$ est une relation d'équivalence sur A, compatible avec l'addition de A.
2°/ Montrer que, pour que $\mathcal{R}_I$ soit compatible avec la multiplication de A, il faut et il suffit que, pour tout $a \in A$ et tout $x \in I$, on ait $a\,x \in I$.
On est alors conduit à poser la définition suivante.
On dit qu'une partie I d'un anneau commutatif A est un **idéal** de A si I est un sous-groupe additif de A et si, pour tout $a \in A$ et tout $x \in I$, on a $a\,x \in I$.
3°/ Soit A un anneau commutatif et I un idéal de A.
On peut alors considérer le **groupe quotient** A / I, dont la loi est définie par $\overline{x} + \overline{y} = \overline{x+y}$.
Montrer que si, à tout couple $(\overline{x}, \overline{y})$ d'éléments de A / I, on associe l'élément, noté $\overline{x}.\overline{y}$, de A / I, défini par $\overline{x}.\overline{y} = \overline{xy}$, on définit bien une seconde loi de composition interne sur A / I, qui fait de A / I un anneau, appelé, par définition, l'**anneau quotient** de A par I.

Solution

HAUT

Exercice 4. Anneau quotient $\mathbb{Z} / n\,\mathbb{Z}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. On considère l'anneau quotient $\mathbb{Z} / n\,\mathbb{Z}$. 1°/ Montrer que $\overline{n-1}$ est un élément inversible de $\mathbb{Z} / n\,\mathbb{Z}$. 2°/ Déterminer l'ensemble de tous les éléments inversibles de $\mathbb{Z} / n\,\mathbb{Z}$.	Solution

HAUT

Exercice 5. Nombres duaux.

On munit $A = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ de deux lois de composition internes en posant :

$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$

$(x, y) \,.\, (x', y') = (x\,x', x\,y' + y\,x')$

1°/ Montrer que A, muni de ces deux lois, est un anneau commutatif et unitaire (appelé **anneau des nombres duaux**).

2°/ Soit X l'ensemble des éléments $(x, 0)$ de A, où $x \in \mathbb{R}$.

Montrer que X est un sous-anneau de A et que l'application qui, à tout $x \in \mathbb{R}$, associe le couple $(x, 0)$ de X est un isomorphisme de l'anneau $\mathbb{R}$ sur l'anneau X.

On identifie alors l'anneau $\mathbb{R}$ à X en posant $x = (x, 0)$.

3°/ On note ε l'élément $(0, 1)$ de A. Montrer que tout élément $z \in A$ s'écrit d'une manière et d'une seule, sous la forme $z = x + \varepsilon\, y$, avec $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$.

4°/ Pour tout entier $n \geqslant 1$, calculer ε^n, puis z^n en fonction de x et y.

Solution

HAUT

Chapitre 4. Anneaux.

Enoncés.

Exercice 1. Formule du binôme.

Soit A un anneau et soient a et b deux éléments de A qui commutent (c'est-à-dire tels que $a\,b = b\,a$). Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$ (formule dite du binôme de Newton).	

Solution.

Pour $n = 0$, la formule se réduit à

$$(a+b)^0 = 1,$$

elle est vraie par définition.

Supposons la formule vraie pour un $n \in \mathbb{N}$.
On a alors, pour $n+1 \in \mathbb{N}^*$:

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)\,(a+b)^n = (a+b) \sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Par distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, ce produit s'écrit :

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k} b\,a^k b^{n-k}$$

Comme a et b commutent, on a : $b\,a^k = a^k\,b$ et $\sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k} b\,a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1}$

$$\sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} = \sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{(n+1)-(k+1)}$$

Posons $k+1 = h$:

$$\sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} = \sum_{h=1}^{h=n+1} \binom{n}{h-1} a^h b^{(n+1)-h}$$

$$\sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} = \sum_{h=0}^{h=n} \binom{n}{h} a^h b^{(n+1)-h}$$

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{h=0}^{h=n} \binom{n}{h} a^h b^{(n+1)-h} + \sum_{h=1}^{h=n+1} \binom{n}{h-1} a^h b^{(n+1)-h}$$

$$= b^{n+1} + \sum_{h=1}^{h=n} \left(\binom{n}{h} + \binom{n}{h-1} \right) a^h b^{(n+1)-h} + a^{n+1}$$

Or $\binom{n}{h} + \binom{n}{h-1} = \binom{n+1}{h}$ (Séance 7, Exercice 1, 2°), donc :

$$(a+b)^{n+1} = b^{n+1} + \sum_{h=1}^{h=n} \binom{n+1}{h} a^h b^{(n+1)-h} + a^{n+1}$$

$$= \sum_{h=0}^{h=n+1} \binom{n+1}{h} a^h b^{(n+1)-h}$$

$$= \sum_{k=0}^{k=n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{(n+1)-k}$$

Cette relation montre que la formule est vraie pour $n + 1$ dès qu'elle vraie pour n.
Comme elle est vraie pour $n = 0$, le **principe de récurrence** entraîne alors que la formule est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

Chapitre 4. Anneaux.

Enoncés.

Exercice 2. Anneau intègre.

Soit A un anneau non réduit à $\{0\}$. On rappelle que A est dit **sans diviseur de 0** si la relation $x\,y = 0$ entraîne $x = 0$ ou $y = 0$. Un anneau commutatif et sans diviseur de 0 est appelé **anneau intègre**. Montrer que, dans un anneau intègre, tout élément non nul est **régulier** pour la multiplication.	

Solution.

Un élément x d'un anneau *commutatif* A est dit **régulier pour la multiplication** si, et seulement si, l'application $y \mapsto x\,y$ de A dans $x\,A$ est injective.
Il revient au même de dire :

$$(\forall\, y)(\forall\, z)((y \in A \text{ et } z \in A \text{ et } x\,y = x\,z) \Rightarrow y = z)$$

Soit x un élément non nul d'un anneau intègre A.

Soit z un élément de A.
Montrons que $x\,(-z)$ est le symétrique de $x\,z$ pour l'addition de A.
Par distributivité de la multiplication par rapport à l'addition : $x\,(z + (-z)) = x\,z + x\,(-z)$.
$z + (-z) = 0$ et $x\,0 = 0 \Rightarrow x\,z + x\,(-z) = 0$
Cette relation montre que $x\,(-z)$ est le symétrique $-(x\,z)$ de $x\,z$ pour l'addition de A.

Soient y et z deux éléments de A vérifiant $x\,y = x\,z$.
Si $(-(x\,z))$ désigne le symétrique de $x\,z$ pour l'addition de A, on a :

$x\,y + (-(x\,z)) = x\,z + (-(x\,z)) = 0$
$-(x\,z) = x\,(-z) \Rightarrow x\,y + (-(x\,z)) = x\,y + x\,(-z) = x\,(y + (-z))$
$x\,y + (-(x\,z)) = 0 \Rightarrow x\,(y + (-z)) = 0$

Comme A est sans diviseur de 0, la relation $x\,(y + (-z)) = 0$, avec $x \neq 0$, implique $y + (-z) = 0$.
Cette realtion montre que y est le symétrique de $(-z)$ pour l'addition de A.
Or le symétrique de $(-z)$ est z, donc $y = z$.

La relation :

$$(\forall\, x)((x \in A \text{ et } x \neq 0) \Rightarrow (\forall\, y)(\forall\, z)((y \in A \text{ et } z \in A \text{ et } x\,y = x\,z) \Rightarrow y = z))$$

montre que :

Tout élément non nul de l'anneau intègre A est régulier pour la multiplication.

Chapitre 4. Anneaux.

Enoncés.

Exercice 3. Anneau quotient.

Soit A un anneau commutatif, et I un sous-anneau de A.
Considérons la relation $\mathcal{R}_I$, définie sur A par

$$x \mathcal{R}_I y \Leftrightarrow y - x \in I.$$

1°/ Montrer que $\mathcal{R}_I$ est une relation d'équivalence sur A, compatible avec l'addition de A.
2°/ Montrer que, pour que $\mathcal{R}_I$ soit compatible avec la multiplication de A, il faut et il suffit que, pour tout $a \in A$ et tout $x \in I$, on ait $a\,x \in I$.
On est alors conduit à poser la définition suivante.
On dit qu'une partie I d'un anneau commutatif A est un **idéal** de A si I est un sous-groupe additif de A et si, pour tout $a \in A$ et tout $x \in I$, on a $a\,x \in I$.
3°/ Soit A un anneau commutatif et I un idéal de A.
On peut alors considérer le **groupe quotient** A / I, dont la loi est définie par $\overline{x} + \overline{y} = \overline{x+y}$.
Montrer que si, à tout couple $(\overline{x}, \overline{y})$ d'éléments de A / I, on associe l'élément, noté $\overline{x}.\overline{y}$, de A / I, défini par $\overline{x}.\overline{y} = \overline{xy}$, on définit bien une seconde loi de composition interne sur A / I, qui fait de A / I un anneau, appelé, par définition, l'**anneau quotient** de A par I.

Solution.

1°/ Relation d'équivalence $\mathcal{R}_I$.

D'après Chapitre 11, Exercice 4, la relation $y - x \in I$ est une relation d'équivalence $\mathcal{R}_I$ compatible avec l'addition de A :

$$x \mathcal{R}_I y \Rightarrow (\forall\, z)(z \in A \Rightarrow (z + x)\, \mathcal{R}_I\, (z + y))$$

2°/ Compatibilité avec la multiplication.

a) Condition nécessaire.

Supposons la relation $\mathcal{R}_I$ compatible avec la multiplication de A.
Cela veut dire que la relation suivante est vraie :

$$x \mathcal{R}_I y \Rightarrow (\forall z)(z \in A \Rightarrow (z\,x)\ \mathcal{R}_I\ (z\,y))$$

Considérons alors un $a \in A$ et un $x \in I$.
On sait (Chapitre 11, Exercice 4) que I est la classe d'équivalence de 0 modulo $\mathcal{R}_I$: $x \in I \Leftrightarrow x \mathcal{R}_I 0$, ce qui résulte d'ailleurs directement de la définition de la relation d'équivalence.

Comme la relation d'équivalence est compatible avec la multiplication de A, on obtient, en prenant $z = a$:

$$x \mathcal{R}_I 0 \Rightarrow a\,x \mathcal{R}_I a\,0 = 0$$

et cette relation signifie que $a\,x$ est un élément de I.
Pour tout $a \in A$ et tout $x \in I$, on a $a\,x \in I$.

b) Condition suffisante.

Supposons que, pour tout $a \in A$ et tout $x \in I$, on ait $a\,x \in I$.
Montrons que la relation $\mathcal{R}_I$ compatible avec la multiplication de A.

Considérons deux éléments x et y de A vérifiant $x \mathcal{R}_I y$ et soit z un élément quelconque de A.
La relation $x \mathcal{R}_I y$ signifie que $x - y$ est un élément de I.

$$x - y \in I \text{ et } z \in A \Rightarrow z\,(x - y) \in I.$$

De la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, et du fait que le symétrique de $z\,y$ pour l'addition de A est $z\,(-y)$, il résulte alors :

$$z\,(x - y) = z\,x - z\,y.$$
$$z\,(x - y) \in I \Rightarrow z\,x - z\,y \in I$$
$$z\,x - z\,y \in I \Rightarrow z\,x \mathcal{R}_I z\,y.$$

$$x \mathcal{R}_I y \Rightarrow (\forall z)(z \in A \Rightarrow (z\,x)\ \mathcal{R}_I\ (z\,y))$$

La relation $\mathcal{R}_I$ est compatible avec la multiplication de A.

Etant donné un sous-anneau I de A, pour que $\mathcal{R}_I$ soit compatible avec la multiplication de A, il faut et il suffit que, pour tout $a \in A$ et tout $x \in I$, on ait $a\,x \in I$.

Un sous-groupe additif de A vérifiant cette propriété est nécessairement un sous-anneau, puisqu'alors, il est stable pour la multiplication.
La condition d'être un sous-anneau n'est donc pas nécessaire à la définition d'un idéal.
Un **idéal** I est un sous-groupe additif de A vérifiant $(\forall x)(\forall a)(x \in I \text{ et } a \in A \Rightarrow a\,x \in I)$.

3°/ Anneau quotient.

a) Addition des classes d'équivalence (rappel de cours).

Etant donnés deux éléments x et y de A, la classe d'équivalence de $x + y$ ne dépend que des classes d'équivalence de x et de y.

En effet, considérons deux autres représentants x' de la classe d'équivalence de x, et y' de la classe d'équivalence de y.
Montrons que $x' + y'$ a la même classe d'équivalence que $x + y$.
Cette assertion est équivalente à $(x' + y') - (x + y) \in I$.
Or $x \mathcal{R}_I x'$ équivaut à $x - x' \in I$, et $y \mathcal{R}_I y'$ équivaut à $y - y' \in I$,
donc $x \mathcal{R}_I x'$ et $y \mathcal{R}_I y' \Rightarrow x - x' \in I$ et $y - y' \in I$.
Comme I est un sous-groupe additif de A, il est stable pour l'addition et les relations $x - x' \in I$ et $y - y' \in I$ impliquent $(x - x') + (y - y') \in I$.
La relation $(x' + y') - (x + y) = (x - x') + (y - y')$ entraîne alors $(x' + y') - (x + y) \in I$.
Cette relation montre que $x' + y'$ et $x + y$ ont la même classe d'équivalence modulo $\mathcal{R}_I$.

A un couple $(\overline{x}, \overline{y})$ de classe d'équivalence, on peut donc faire correspondre la classe d'équivalence $\overline{x+y}$, définissant ainsi une loi de composition interne dans l'ensemble des classes d'équivalence : $\overline{x} + \overline{y} = \overline{x+y}$.
Les propriétés de groupe abélien de A se retrouvent dans cet ensemble quotient (ensemble des classes d'équivalence) qui est ainsi muni d'une structure de groupe abélien appelé le **groupe quotient** de A par le sous-groupe I.
L'application $x \mapsto \overline{x}$ de A dans l'ensemble quotient A / I des classes d'équivalence apparaît alors comme un morphisme surjectif de groupes abéliens, de noyau I.

b) Multiplication des classes d'équivalence.

Etant donnés deux éléments x et y de A, la classe d'équivalence de $x\,y$ ne dépend que des classes d'équivalence de x et de y.

En effet, considérons deux autres représentants x' de la classe d'équivalence de x, et y' de la classe d'équivalence de y.
$x' - x \in I \Rightarrow (\exists\, x'')(x'' \in I$ et $x' = x + x'')$
$y' - y \in I \Rightarrow (\exists\, y'')(y'' \in I$ et $y' = y + y'')$
$x'\,y' = (x + x'')(y + y'') = x\,y + (x''\,y + x\,y'' + x''\,y'')$
$x'\,y' - x\,y = x''\,y + x\,y'' + x''\,y''$
$y \in A$ et $x'' \in I \Rightarrow x''\,y = y\,x'' \in I$
$x \in A$ et $y'' \in I \Rightarrow x\,y'' \in I$
$x'' \in I$ et $y'' \in I \Rightarrow x''\,y'' \in I$
$y\,x'' \in I$ et $x\,y'' \in I$ et $x''\,y'' \in I \Rightarrow x''\,y + x\,y'' + x''\,y'' \in I$.
$x'\,y' - x\,y = x''\,y + x\,y'' + x''\,y''$ et $x''\,y + x\,y'' + x''\,y'' \in I \Rightarrow x'\,y' - x\,y \in I$.
Cette relation montre que $x'\,y'$ et $x\,y$ sont dans la même classe d'équivalence modulo $\mathcal{R}_I$.

A un couple $(\overline{x}, \overline{y})$ de classe d'équivalence, on peut donc faire correspondre la classe d'équivalence $\overline{x\,y}$, définissant ainsi une loi de composition interne dans l'ensemble des classes d'équivalence : $\overline{x}.\,\overline{y} = \overline{x\,y}$.

Montrons que A / I, muni de cette loi de composition devient un anneau.

Tout d'abord l'application $x \mapsto \overline{x}$ de A dans l'ensemble quotient A / I des classes d'équivalence apparaît, par définition, comme un morphisme pour la multiplication dans A et la multiplication dans A / I : $\overline{x\,y} = \overline{x}.\,\overline{y}$. Les propriétés d'anneau de A / I en résultent.

1. Commutativité.

$$y.x = x.y \Rightarrow \overline{y}.\overline{x} = \overline{y.x} = \overline{x.y} = \overline{x}.\overline{y}$$

La multiplication des classes d'équivalence est commutative.

2. Associativité.

$$(x\,y)z = x(y\,z) \Rightarrow \left(\overline{x}.\overline{y}\right).\overline{z} = \overline{x.y}.\overline{z} = \overline{(x.y).z} = \overline{x.(y.z)} = \overline{x}.\overline{y.z} = \overline{x}.\left(\overline{y}.\overline{z}\right)$$

La multiplication des classes d'équivalence est associative.

3. Distributivité par rapport à l'addition.

$$x.(y+z) = x.y + y.z \Rightarrow \overline{x}.\left(\overline{y}+\overline{z}\right) = \overline{x}.\overline{y+z} = \overline{x.(y+z)} = \overline{x.y+x.z} = \overline{x.y} + \overline{x.z} = \overline{x}.\overline{y} + \overline{x}.\overline{z}$$

La multiplication est distributive par rappport à l'addition.

A / I, muni de son addition et de sa multiplication est donc un anneau commutatif, l'**anneau quotient** de *A* par l'idéal *I*.

Chapitre 4. Anneaux.

Enoncés.

Exercice 4. Anneau quotient $\mathbb{Z} / n\,\mathbb{Z}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. On considère l'anneau quotient $\mathbb{Z} / n\,\mathbb{Z}$. 1°/ Montrer que $\overline{n-1}$ est un élément inversible de $\mathbb{Z} / n\,\mathbb{Z}$. 2°/ Déterminer l'ensemble de tous les éléments inversibles de $\mathbb{Z} / n\,\mathbb{Z}$.	

Solution.

1°/ Elément inversible.

Pour un entier $n \geqslant 2$, $n\,\mathbb{Z}$ est l'idéal des multiples de n (le produit d'un multiple de n par un entier relatif est un multiple de n).
L'anneau quotient $\mathbb{Z} / n\,\mathbb{Z}$ est l'ensemble des classes d'équivalence modulo la relation d'équivalence $x - y \in n\,\mathbb{Z}$.
Autrement dit, deux entiers relatifs sont équivalents s'ils ne différent que d'un multiple de n.
Autrement dit encore, si deux entiers ne diffèrent que d'un multiple de n, ils ont la même classe d'équivalence.
Comme le reste de la division euclidienne d'un entier par n est un entier naturel de 0 à $n - 1$, $\mathbb{Z} / n\,\mathbb{Z}$ possède n éléments qui sont les classes d'équivalence des entiers naturels de 0 à $n - 1$:

$$\mathbb{Z} / n\,\mathbb{Z} = \{\,\overline{0}, \ldots, \overline{n-1}\}$$

a) L'anneau $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs possède un élément unité 1 pour le produit.
Sa classe d'équivalence modulo $n\,\mathbb{Z}$ est élément unité du produit des classes d'équivalence :

En effet, on a :

$$\overline{1}.\overline{x} = \overline{1.x} = \overline{x}.$$

b) Se demander si $\overline{n-1}$ est un élément inversible de $\mathbb{Z} / n\,\mathbb{Z}$, c'est se demander s'il existe un entier relatif z tel que $(n - 1)\,z$ soit de la forme $1 + n\,k$, où k est un entier relatif.
Lorsque n est un entier supérieur ou égal à 2, il suffit de prendre $z = n - 1$, pour voir que $(n - 1)\,z = (n - 1)^2 = 1 + n\,(n - 2)$, qui est bien de la forme 1 plus un multiple de n.

$\overline{n-1}$ est un élément inversible de $\mathbb{Z} / n\,\mathbb{Z}$ et son inverse est $\overline{n-1}$.

2°/ Ensemble des éléments inversibles.

Les éléments inversibles de $\mathbb{Z} / n\,\mathbb{Z}$ sont les classes d'équivalence des entiers p de 0 à $n - 1$ pour lesquels existe un entier q tel que $p\,q$ soit égal à 1 plus un multiple de n : $p\,q \equiv 1 \pmod{n}$, ou $p\,q = 1 + k\,n$.

Aucun diviseur de p ne divise n.
p est premier avec n (le PGCD de p et n est 1).

Réciproquement, si p est premier avec n, le PGCD de p et n est 1.
Le **théorème de Bézout** indique qu'il existe des entiers q et k tels que $q\,p + k\,n = 1$.
Cette égalité montre que p est un élément inversible de $\mathbb{Z} / n\,\mathbb{Z}$.

Les éléments inversibles de $\mathbb{Z} / n\,\mathbb{Z}$ sont les classes d'équivalence des entiers premiers avec n, compris entre 0 et $n - 1$.

Chapitre 4. Anneaux.

Enoncés.

Exercice 5. Nombres duaux.

On munit $A = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ de deux lois de composition internes en posant :

$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$

$(x, y) \,.\, (x', y') = (x\,x', x\,y' + y\,x')$

1°/ Montrer que A, muni de ces deux lois, est un anneau commutatif et unitaire (appelé **anneau des nombres duaux**).

2°/ Soit X l'ensemble des éléments $(x, 0)$ de A, où $x \in \mathbb{R}$.

Montrer que X est un sous-anneau de A et que l'application qui, à tout $x \in \mathbb{R}$, associe le couple $(x, 0)$ de X est un isomorphisme de l'anneau $\mathbb{R}$ sur l'anneau X.

On identifie alors l'anneau $\mathbb{R}$ à X en posant $x = (x, 0)$.

3°/ On note ε l'élément $(0, 1)$ de A. Montrer que tout élément $z \in A$ s'écrit d'une manière et d'une seule, sous la forme $z = x + \varepsilon\,y$, avec $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$.

4°/ Pour tout entier $n \geqslant 1$, calculer ε^n, puis z^n en fonction de x et y.

Solution.

1°/ Anneau des nombres duaux.

a) Addition.

Par définition, l'addition des couples de nombres réels est la loi produit : A est donc le groupe produit.
Le produit de deux groupes abéliens est un groupe abélien.
L'addition de A est une loi de groupe abélien, d'élément neutre $(0, 0)$.

b) Multiplication.

◊ Commutativité.

$$(x', y') \,.\, (x, y) = (x'\,x, x'\,y + y'\,x) = (x\,x', x\,y' + y\,x') = (x, y) \,.\, (x', y')$$

La multiplication de A est commutative.

◊ Associativité.

$$(x, y) \,.\, ((x', y') \,.\, (x'', y'')) = (x, y) \,.\, (x'\,x'', x'\,y'' + y'\,x'') = (x\,x'\,x'', x\,(x'\,y'' + y'\,x'') + y\,x'\,x'') = (x\,x'\,x'', x\,x'\,y'' + x\,y'\,x'' + y\,x'\,x'')$$

Dans cette expression, échangeons x et x'' et échangeons y et y'' : l'expression devient $(x''\,x'\,x, x''\,x'\,y + x''\,y'\,x + y''\,x'\,x)$, qui est égal à l'expression de départ.
On a donc :

$$(x, y) . ((x', y') . (x'', y'')) = (x'', y'') . ((x', y') . (x, y)) = ((x', y') . (x, y)) . (x'', y'') = ((x, y) . (x', y')) . (x'', y'')$$

La multiplication de A est associative.

◊ Distributivité par rapport à l'addition.

$$\begin{aligned}(x, y) . ((x', y') + (x'', y'')) &= (x, y) . (x' + x'', y' + y'') \\ &= (x (x' + x''), x (y' + y'') + y (x' + x'')) \\ &= (x x' + x x'', x y' + x y'' + y x' + y x'') \\ &= (x x' + x x'', x y' + y x' + x y'' + y x'') \\ &= (x x', x y' + y x') + (x x'', x y'' + y x'') \\ &= (x, y) . (x', y') + (x, y) . (x'', y'')\end{aligned}$$

La multiplication de A est distributive à gauche par rapport à l'addition.
Comme la multiplication est commutative, elle est distributive aussi à droite par rapport à l'addition.

◊ Elément neutre de la multiplication.

$$(1, 0) . (x, y) = (1 x, 1 y + 0 x) = (x, y)$$

L'élément (1, 0) est élément neutre de la multiplication.

◊ Produit par 0.

$$(0, 0) . (x, y) = (0 x, 0 y + 0 x) = (0, 0)$$

Les propriétés de groupe additif abélien, d'associativité, de distributivité de la multiplication font de A un anneau.
La propriété de commutativité de la multiplication en fait un anneau commutatif.
L'existe d'un élément neutre pour la multiplication en fait un anneau unitaire.

La propriété du produit par 0 est vraie dans tout anneau.

A est un anneau commutatif et un itaire pour l'addition et la multiplication des nombres duaux.

2°/ Sous-anneau des nombres réels.

L'application $x \mapsto (x, 0)$ de $\mathbb{R}$ dans A est un morphisme d'anneaux.
En effet, l'image de $x + x'$ est $(x + x', 0) = (x, 0) + (x', 0)$ et l'image de $x\,x'$ est $(x\,x', 0) = (x, 0) . (x', 0)$.

L'application $x \mapsto (x, 0)$ de $\mathbb{R}$ dans A induit donc un isomorphisme d'anneaux de $\mathbb{R}$ sur son image $X = \mathbb{R} \times \{0\}$ dans A.

Il en résulte que $X = \mathbb{R} \times \{0\}$ est un sous-anneau de A, possédant la même structure de corps que $\mathbb{R}$.

3°/ Ecriture des nombres duaux.

L'élément (1, 0) de X est identifié à l'élément unité 1 de $\mathbb{R}$.
Un produit $(1, 0)\,x$ est égal à $(1, 0) . (x, 0) = (x, 0) = x$.
Un produit $\varepsilon\,y$ est égal à $(0, 1) . (y, 0) = (0 , 0 \times 0 + 1 \times y) = (0, y)$

Tout couple (x, y) peut s'écrire sous la forme :

$$(x, y) = (1, 0) \,.\, (x, 0) + (0, 1) \,.\, (y, 0) = 1 \,.\, x + \varepsilon \,.\, y = x + \varepsilon\, y.$$

Cette écriture est unique par ce que l'on a :

$x + \varepsilon\, y = x' + \varepsilon\, y' \Rightarrow (x, 0) + (0, 1) \,.\, (y, 0) = (x', 0) + (0, 1) \,.\, (y', 0)$
$\Rightarrow (x, 0) + (0, y) = (x', 0) + (0, y')$
$\Rightarrow (x, y) = (x', y')$

Tout nombre dual s'écrit d'une manière unique sous la forme $x + \varepsilon\, y$, avec $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$.

4°/ Puissances d'un nombre dual.

La propriété du nombre dual ε qui donne la règle de multiplication des nombres duaux est $\varepsilon^2 = (0, 1) \,.\, (0, 1) = (0, 0) = 0$.

$$\varepsilon^2 = 0$$

Si le carré de ε est 0, toute puissance de ε supérieure à 2 sera égale à 0.

$$\varepsilon^n = \begin{cases} 1 & \text{pour } n = 1 \\ 0 & \text{pour } n \geqslant 2 \end{cases}$$

Posons $z^n = x_n + \varepsilon\, y_n$.
On a :

$z^{n+1} = (x + \varepsilon\, y)\,(x_n + \varepsilon\, y_n)$
$= x\, x_n + \varepsilon\,(x\, y_n + y\, x_n)$

$$x_{n+1} = x\, x_n$$
$$y_{n+1} = x\, y_n + y\, x_n$$

La première relation donne, avec $x_1 = x$: $x_n = x^n$.
La deuxième relation s'écrit alors :

$$y_{n+1} = x\, y_n + y\, x^n$$

Pour résoudre cette relation de récurrence, remarquons que, pour $n = 1$, nous avons $y_1 = y$, $y_2 = x\, y_1 + y\, x^1 = 2\, x\, y$.
$y_3 = x\, y_2 + y\, x^2 = 3\, x^2\, y$.
Ces trois premières valeurs sont de la forme : $y_n = n\, x^{n-1}\, y$.
Supposons que ce soit vrai pour une valeur de $n \geqslant 1$.
La formule de récurrence établie précédemment donne alors :

$$y_{n+1} = x\,y_n + y\,x^n = n\,x^n\,y + y\,x^n = (n+1)\,x^n\,y$$

Le principe de récurrence montre alors que la formule $y_n = n\,x^{n-1}\,y$ est vraie pour tout $n \geqslant 1$.

$$\boxed{(x+\varepsilon\,y)^n = x^n + \varepsilon\,n\,x^{n-1}\,y = x^{n-1}\,(x+\varepsilon\,n\,y)}$$

Exercices

Anneaux de Boole.

1. Anneau de Boole.
2. Treillis de Boole.

1 Anneau de Boole.

Un **anneau de Boole** est un anneau (unitaire) dont la multiplication est **idempotente** ($x^2 = x$, pour tout x).

Un tel anneau est toujours commutatif et tout élément est son propre opposé ($x + x = 0$, pour tout x).
Un anneau de Boole qui possède au moins trois éléments distincts n'est pas intègre.

On peut définir dans un anneau de Boole des opérateurs (opérateurs booléiens), unaires ou binaires :

— Négation (Non) : $\neg\, x = x + 1$.
— Conjonction (Et) : $x \wedge y = x\, y$.
— Disjonction (Ou inclusif) : $x \vee y = x + y + x\, y$.
— Ou exclusif : $x + y$
— Conditionnel : $x \rightarrow y = x + x\, y + 1$.
— Biconditionnel : $x \leftrightarrow y = x + y + 1$.
— Peirce (Ni, ou NOR) : $x \downarrow y = 1 + x + y + x\, y = (\neg\, x) \wedge (\neg\, y)$
— Scheffer (NAND) : $x \mid y = 1 + x\, y$.
— Sans : $x \wedge (\neg\, y) = x + x\, y$
— Relation d'ordre : $x \leq y \Leftrightarrow x\, y = x$.

HAUT

2 Treillis de Boole.

Un **treillis** est un ensemble ordonné dans lequel tout couple d'éléments possède une borne inférieure et une borne supérieure.
Un **treillis de Boole** est un treillis **distributif** (distributivité de *Inf* et *Sup* l'une par rapport à l'autre) et **complémenté** (existence d'un minimum (élément nul 0) et d'un maximum (élément universel 1), et tout élément x possède un **complément** $\overline{x}$, élément tel que *Inf* (x, $\overline{x}$) = 0 et *Sup* (x, $\overline{x}$) = 1).

Tout treillis de Boole peut être muni d'une structure d'anneau de Boole et, réciproquement, tout anneau de Boole peut être muni d'une structure de treillis de Boole.

HAUT

Chapitre 5. Anneaux de Boole.

Exercices

Exercice 1. Anneaux de Boole et treillis de Boole.
Exercice 2. Anneau de Boole de parties.

Exercice 1. Anneaux de Boole et treillis de Boole.

Soit A un anneau unitaire tel que, pour tout $x \in A$, on ait $x^2 = x$ (un tel anneau est appelé **anneau de Boole**).

1°/ Montrer que, pour tout $x \in A$, on a $x + x = 0$.

2°/ Montrer que A est un anneau commutatif.

3°/ Montrer que, si A possède au moins trois éléments distincts, il n'est pas intègre.

4°/ On pose, pour $x \in A$:

$\neg\, a = a + 1$.

Montrer que l'on a : $\neg\, 0 = 1$, $\neg\, 1 = 0$, et, pour tout $x \in A$:

$\neg\, (\neg\, x) = x$, $x\, (\neg\, x) = 0$, $x + (\neg\, x) = 1$.

5°/ On pose, pour tout $(x, y) \in A^2$:

$x \vee y = x + y + x\, y$.

a) Montrer que l'on a, pour tout $x \in A$, $0 \vee x = x$, $1 \vee x = 1$, $x \vee x = x$, $x \vee (\neg\, x) = 1$.

b) Montrer que l'on a, pour tout $(x, y) \in A^2$:

$x \vee y = y \vee x$, $\neg\, (x\, y) = (\neg\, x) \vee (\neg\, y)$, $\neg\, (x \vee y) = (\neg\, x).(\neg\, y)$, $x + y = (x.(\neg\, y)) \vee (y.(\neg\, x))$.

c) Montrer encore que, pour tout $(x, y, z) \in A^3$: $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$.

6°/ On pose, pour tout $(x, y) \in A^2$:

$x \to y = x + x\, y + 1$

$x \leftrightarrow y = x + y + 1$

Montrer que $x \to y = (\neg\, x) \vee y$, $x \leftrightarrow y = y \leftrightarrow x$, $x \leftrightarrow y = (x \to y).(y \to x) = \neg\, (x + y)$.

7°/ a) Etablir l'équivalence des assertions suivantes :

(i) $x \vee y = y$,

(ii) $x\, y = x$,

(iii) $x \to y = 1$,

(iv) $(\neg\, x) \vee y = 1$,

(v) $x.(\neg\, y) = 0$.

b) Montrer que l'une quelconque d'entre elles constitue une relation d'ordre sur A (que l'on notera $x \leq y$) et que cet ordre n'est pas total.

c) Montrer que l'on a, pour tout $(x, y) \in A^2$:

$x.\, y = Inf\, (x, y)$

$x \vee y = Sup\, (x, y)$.

d) Montrer que 0 est le plus petit élément de A et que 1 est le plus grand élément de A.

8°/ Montrer enfin que l'on a, pour tout $(x, y, z) \in A^3$:

$x.\, (y \vee z) = (x\, y) \vee (x\, z)$

$x \vee (y\, z) = (x \vee y).\, (x \vee z)$.

Solution

HAUT

Exercice 2. Anneau de Boole de parties.

Soit E un ensemble quelconque.

1°/ Montrer que l'ensemble $\mathcal{F}(E, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ des applications de E dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, peut être muni d'une structure d'anneau commutatif unitaire, qui est un anneau de Boole.

2°/ Si A est une partie de E, on note φ_A l'application de E dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ définie par

$$\varphi_A(x) = \begin{cases} \bar{1} & \text{si } x \in A \\ \bar{0} & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

Cette application est appelée **fonction indicatrice** de A.

Montrer que l'application φ, de $\mathcal{P}(E)$ dans $\mathcal{F}(E, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ qui, à A, associe φ_A, est bijective.

Solution

3°/ Si A et B sont deux parties de E, on pose :

$$A \Delta B = (A \cap \complement_E B) \cup (B \cap \complement_E A)$$

La partie $A \Delta B$ est appelée la **différence symétrique** de A et B.

Calculer $\varphi_{A \cap B}$, $\varphi_{A \cup B}$, $\varphi_{A \cap \complement_E B}$, $\varphi_{A \Delta B}$, en fonction de φ_A et φ_B.

4°/ Déduire de ce qui précède, que $\mathcal{P}(E)$, muni des lois Δ et $\cap$, est un anneau commutatif unitaire, qui est encore un anneau de Boole. Est-il intègre ?

HAUT

Chapitre 5. Anneaux de Boole.

Enoncés.

Exercice 1. Anneaux de Boole et treillis de Boole.

Soit A un anneau unitaire tel que, pour tout $x \in A$, on ait $x^2 = x$ (un tel anneau est appelé **anneau de Boole**).

1°/ Montrer que, pour tout $x \in A$, on a $x + x = 0$.

2°/ Montrer que A est un anneau commutatif.

3°/ Montrer que, si A possède au moins trois éléments distincts, il n'est pas intègre.

4°/ On pose, pour $x \in A$:

$\neg\, a = a + 1$.

Montrer que l'on a : $\neg\, 0 = 1$, $\neg\, 1 = 0$, et, pour tout $x \in A$:

$\neg\, (\neg\, x) = x$, $x\, (\neg\, x) = 0$, $x + (\neg\, x) = 1$.

5°/ On pose, pour tout $(x, y) \in A^2$:

$x \vee y = x + y + x\, y$.

a) Montrer que l'on a, pour tout $x \in A$, $0 \vee x = x$, $1 \vee x = 1$, $x \vee x = x$, $x \vee (\neg\, x) = 1$.

b) Montrer que l'on a, pour tout $(x, y) \in A^2$:

$x \vee y = y \vee x$, $\neg\, (x\, y) = (\neg\, x) \vee (\neg\, y)$, $\neg\, (x \vee y) = (\neg\, x).(\neg\, y)$, $x + y = (x.(\neg\, y)) \vee (y.(\neg\, x))$.

c) Montrer encore que, pour tout $(x, y, z) \in A^3$: $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$.

6°/ On pose, pour tout $(x, y) \in A^2$:

$x \rightarrow y = x + x\, y + 1$

$x \leftrightarrow y = x + y + 1$

Montrer que $x \rightarrow y = (\neg\, x) \vee y$, $x \leftrightarrow y = y \leftrightarrow x$, $x \leftrightarrow y = (x \rightarrow y).(y \rightarrow x) = \neg\, (x + y)$.

7°/ a) Etablir l'équivalence des assertions suivantes :

(i) $x \vee y = y$,

(ii) $x\, y = x$,

(iii) $x \rightarrow y = 1$,

(iv) $(\neg\, x) \vee y = 1$,

(v) $x.(\neg\, y) = 0$.

b) Montrer que l'une quelconque d'entre elles constitue une relation d'ordre sur A (que l'on notera $x \leq y$) et que cet ordre n'est pas total.

c) Montrer que l'on a, pour tout $(x, y) \in A^2$:

$x.\, y = Inf\, (x, y)$

$x \vee y = Sup\, (x, y)$.

d) Montrer que 0 est le plus petit élément de A et que 1 est le plus grand élément de A.

8°/ Montrer enfin que l'on a, pour tout $(x, y, z) \in A^3$:

$x.\, (y \vee z) = (x\, y) \vee (x\, z)$

$x \vee (y\, z) = (x \vee y).\, (x \vee z)$.

Solution.

1°/ Opposé d'un élément.

Soient x et y des éléments quelconques de l'anneau de Boole A.

$(x + y)^2 = x + y$
$x^2 + y^2 + x\,y + y\,x = x + y$
$x + y + x\,y + y\,x = x + y$
$x\,y + y\,x = 0$

Pour $y = x$:

$x^2 + x^2 = 0$
$x^2 = x$
$x + x = 0$

Dans un anneau de Boole, tout élément est son propre opposé : $x + x = 0$ ou $2\,x = 0$.

On dit qu'un anneau de Boole A est **de caractéristique 2**.

Méthode alternative.
Si l'on connaît les propriétés, vraies pour tout couple (n, m) d'entiers relatifs ($\in \mathbb{Z}$) et tout couple (x, y) d'éléments d'un anneau A :

$(-1)\,x = -x$
$(n\,m)\,x = n\,(m\,x)$
$(n\,x)\,y = n\,(x\,y)$

on peut écrire, lorsque A est un anneau de Boole :

$-x = (-x)^2 = (-1)^2\,x^2 = x^2 = x$

Donc $x = -x$ et, en ajoutant x à chaque membre, $x + x = 0$.

2°/ Commutativité.

Soient x et y des éléments quelconques de l'anneau de Boole A.

$x\,y + y\,x = 0$
$x\,y + (x\,y + y\,x) = x\,y$
$(x\,y + x\,y) + y\,x = x\,y$
$x\,y + x\,y = 0$
$0 + y\,x = x\,y$
$y\,x = x\,y$

Tout anneau de Boole est un anneau commutatif.

3°/ Intégrité.

Soit A un anneau de Boole ayant au moins trois éléments distincts : 0, 1, a.

$$a\,(a + 1) = a^2 + a = a + a = 0$$

$a + 1$ est différent de 0, sinon la relation $a + a = 0$ entraînerait $a = 1$, ce qui n'est pas.
Comme a est différent de 0, on a trouvé dans A, deux éléments non nuls, a et $a + 1$, dont le produit est nul : A n'est pas intègre.

Un anneau de Boole possédant au moins trois éléments distincts n'est pas un anneau intègre.

4°/ Négation.

Pour tout élément a d'un anneau de Boole A, on pose $\neg a = a + 1$.

$\neg 0 = 0 + 1 = 1$
$\neg 1 = 1 + 1 = 0$
$x (\neg x) = x (x + 1) = x^2 + x = x + x = 0$
$x + (\neg x) = x + (x + 1) = x + x + 1 = 0 + 1 = 1$

5°/ Disjonction.

On pose, pour tout $(x, y) \in A^2$: $x \vee y = x + y + x y$.

$0 \vee x = 0 + x + 0\ x = 0 + 0 + x = 0 + x = x$,
$1 \vee x = 1 + x + 1\ x = 1 + x + x = 1 + 0 = 1$
$x \vee x = x + x + x^2 = 0 + x^2 = x^2 = x$
$x \vee (\neg x) = x \vee (x + 1) = x + x + 1 + x (x + 1) = 0 + 1 + x^2 + x = 1 + x + x = 1 + 0 = 1$

$x \vee y = x + y + x y = y + x + y x = y \vee x$,
$(\neg x) \vee (\neg y) = (x + 1) \vee (y + 1) = x + 1 + y + 1 + (x + 1)(y + 1) = x + y + x y + x + y + 1 = x y + 1 = \neg (x y)$,
$\neg (x \vee y) = (x + y + x y + 1 = (x + 1)(y + 1) = (\neg x).(\neg y)$,
$(x.(\neg y)) \vee (y.(\neg x)) = x (y + 1) + y (x + 1) + x (y + 1)\ y (x + 1) = x y + x + y x + y + x y (1 + x + y + x y)$
$= x + y + x y + x y + x y + x^2 y + x y^2 + (x y)^2 = x + y + x y + x y + x y + x y = x + y$.

$(x \vee y) \vee z = (x + y + x y) \vee z = x + y + x y + z + (x + y + x y) z = x + y + z + x y + y z + z x + x y z$
Par commutativité de l'addition et de la multiplication, l'expression ne change pas de valeur si l'on échange x et z.
On a donc :
$(x \vee y) \vee z = (z \vee y) \vee x = x \vee (z \vee y) = x \vee (y \vee z)$

6°/ Implication et double implication.

On pose, pour tout $(x, y) \in A^2$:
$x \to y = x + x y + 1$
$x \leftrightarrow y = x + y + 1$

$(\neg x) \vee y = (x + 1) + y + (x + 1) y = x + x y + 1 = x \to y$,
$x \leftrightarrow y = x + y + 1 = y + x + 1 = y \leftrightarrow x$,
$x \leftrightarrow y = x + y + 1 = \neg (x + y)$
$(x \to y).(y \to x) = (x + x y + 1)(y + y x + 1) = x y + x^2 y + x + x y^2 + (x y)^2 + x y + y + y x + 1 = x y + 1 = \neg (x + y)$.
$x \leftrightarrow y = \neg (x + y) = (x \to y).(y \to x)$

7°/ Relation d'ordre.

a) Equivalence des assertions.

$x \vee y = y \Leftrightarrow x + y + x\,y = y \Leftrightarrow x + x\,y = 0$.
$x\,y = x \Leftrightarrow x + x\,y = x + x = 0$
$x \rightarrow y = 1 \Leftrightarrow x + x\,y + 1 = 1 \Leftrightarrow x + x\,y = 0$
$(\neg\, x) \vee y = 1 \Leftrightarrow x + 1 + y + (x + 1)\,y = 1 \Leftrightarrow x + x\,y = 0$
$x.(\neg\, y) = 0 \Leftrightarrow x\,(y + 1) = 0 \Leftrightarrow x + x\,y = 0$

Toutes les assertions sont équivalentes à $x + x\,y = 0$, elles sont donc équivalentes entre elles.

b) Relation d'ordre.

— **Réflexivité** : $x^2 = x$.
— **Antisymétrie** : $x\,y = x$ et $y\,x = y \Rightarrow x = y$ car $x\,y = y\,x$.
— **Transitivité** : $x\,y = x$ et $y\,z = y \Rightarrow x\,z = (x\,y)\,z = x\,(y\,z) = x\,y = x$

La relation $x\,y = x$ est une relation d'ordre.
Comme les cinq relations sont équivalentes, elles définissent toutes la même relation d'ordre, qu'on note $x \leq y$.

c) Ordre total.

Si A possède au moins trois éléments distincts, A est un anneau non intègre.
Il existe alors des diviseurs de 0, non nuls, a et b, tels que $a\,b = 0$ avec $a \neq 0$ et $b \neq 0$.
On ne peut avoir ni $a\,b = a$, ni $a\,b = b$.
a et b ne sont pas comparables pour la relation d'ordre.

L'ordre défini par la relation $x \leq y$ n'est pas un ordre total.

d) Treillis.

$(x\,y)\,x = x^2\,y = x\,y \Rightarrow x\,y \leq x$
$(x\,y)\,y = x\,y^2 = x\,y \Rightarrow x\,y \leq y$
$z \leq x$ et $z \leq y \Rightarrow z\,x = z$ et $z\,y = z \Rightarrow z\,(x\,y) = (z\,x)\,y = z\,y = z \Rightarrow z \leq x\,y$
Donc $x\,y = \mathit{Inf}\,(x, y)$.

$(x \vee y) \vee y = x \vee (y \vee y) = (x \vee y) \Rightarrow y \leq x \vee y$
$(x \vee y) \vee x = (x \vee x) \vee y = (x \vee y) \Rightarrow x \leq x \vee y$
$x \leq z$ et $y \leq z \Rightarrow x \vee z = z$ et $y \vee z = z \Rightarrow (x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z) = x \vee z = z \Rightarrow (x \vee y) \leq z$
Donc $x \vee y = \mathit{Sup}\,(x, y)$.

Tout couple d'éléments possède une borne supérieure et une borne inférieure : on dit que A est un **treillis**.

e) Plus petit élément, plus grand élément.

$0\,x = 0 \Rightarrow 0 \leq x$
$1\,x = x \Rightarrow x \leq 1$

$\mathit{Inf}\,(x, \neg\, x) = x\,(\neg\, x) = 0$ (d'après d et 4°)
$\mathit{Sup}\,(x, \neg\, x) = x \vee (\neg\, x) = 1$ (d'après d et 5°)

Donc $\neg x$ ($= x + 1$, par définition) est le **complément** de x.

A est un treillis pour la relation d'ordre $x \leq y$ définie par $x\ y = x$.

8°/ Distributivité des opérations.

a) $x.\ (y \vee z) = (x\ y) \vee (x\ z)$.

$x.\ (y \vee z) = x\ (y + z + y\ z) = x\ y + x\ z + x\ y\ z$
$(x\ y) \vee (x\ z) = x\ y + x\ z + x\ y\ x\ z = x\ y + x\ z + x^2\ y\ z = x\ y + x\ z + x\ y\ z$

b) $x \vee (y\ z) = (x \vee y).\ (x \vee z)$.

$x \vee (y\ z) = x + y\ z + x\ y\ z$
$(x \vee y).\ (x \vee z) = (x + y + x\ y)(x + z + xz) = x^2 + x\ z + x^2\ z + y\ x + y\ z + x\ y\ z + x^2\ y + x\ y\ z + x^2\ y\ z$
$= x + x\ z + x\ z + y\ x + y\ z + x\ y\ z + x\ y + x\ y\ z + x\ y\ z = x + y\ z + x\ y\ z$
$= x \vee (y\ z)$

En termes de relation d'ordre ces deux relations se traduisent par :

$$Inf\ (x, Sup\ (y, z)) = Sup\ (Inf\ (x, y), Inf\ (y, z))$$
$$Sup\ (x, Inf\ (y, z)) = Inf\ (Sup\ (x, y), Sup\ (y, z))$$

Ces relations sont à rapprocher du théorème du MiniMax (Chapitre 5, Exercice 3).

Chapitre 5. Anneaux de Boole.

Enoncés.

Exercice 2. Anneaux de Boole de parties.

Soit E un ensemble quelconque.
1°/ Montrer que l'ensemble $\mathcal{F}(E, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ des applications de E dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, peut être muni d'une structure d'anneau commutatif unitaire, qui est un anneau de Boole.
2°/ Si A est une partie de E, on note φ_A l'application de E dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ définie par

$$\varphi_A(x) = \begin{cases} \bar{1} & \text{si } x \in A \\ \bar{0} & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

Cette application est appelée **fonction indicatrice** de A.
Montrer que l'application φ, de $\mathcal{P}(E)$ dans $\mathcal{F}(E, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ qui, à A, associe φ_A, est bijective.
3°/ Si A et B sont deux parties de E, on pose :

$$A \Delta B = (A \cap \complement_E B) \cup (B \cap \complement_E A)$$

La partie $A \Delta B$ est appelée la **différence symétrique** de A et B.
Calculer $\varphi_{A \cap B}$, $\varphi_{A \cup B}$, $\varphi_{A \cap \complement_E B}$, $\varphi_{A \Delta B}$, en fonction de φ_A et φ_B.
4°/ Déduire de ce qui précède, que $\mathcal{P}(E)$, muni des lois Δ et $\cap$, est un anneau commutatif unitaire, qui est encore un anneau de Boole. Est-il intègre ?

Solution.

1°/ Ensemble d'applications.

$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est l'anneau des entiers modulo 2 : il se réduit à deux éléments $\{\bar{0}, \bar{1}\}$.
C'est un anneau de Boole car $x^2 = x$ pour $x = \bar{0}$ et $x = \bar{1}$.
Il en résulte que l'on a : $x + x = \bar{0}$ pour tout $x \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (Exercice 1, 1°).
L'ensemble $\mathcal{F}(E, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ des applications de E dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ peut être muni de deux lois de compositions internes :

a) Addition.

Pour $f : E \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et $g : E \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, on appelle $f + g$ l'application de E dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ définie par :

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \text{ pour tout } x \in E.$$

La structure de groupe additif abélien de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ fait de cette addition dans $\mathcal{F}(E, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ une loi de groupe abélien :
— Commutativité : $f(x) + g(x) = g(x) + f(x) \Rightarrow f + g = g + f$.
— Associativité : $f(x) + (g(x) + h(x)) = (f(x) + g(x)) + h(x) \Rightarrow f + (g + h) = (f + g) + h$.
— Elément neutre : $0(x) + f(x) = f(x) \Rightarrow 0 + f = f$, en appelant 0 l'application qui, à tout $x \in E$ associe $\bar{0}$.

— Symétrique : $f(x) + f(x) = \bar{0} \Rightarrow f + f = 0$. Tout élément de $\mathcal{F}(E, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ est son propre symétrique pour l'addition.

b) Multiplication.

Pour $f : E \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et $g : E \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, on appelle $f\,g$ l'application de E dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ définie par :

$$(f\,g)(x) = f(x)\,g(x), \text{ pour tout } x \in E.$$

La structure d'anneau de Boole de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ fait de $\mathcal{F}(E, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ un anneau de Boole :
— Associativité : $f(x)\,(g(x)\,h(x)) = (f(x)\,g(x))\,h(x) \Rightarrow f(g\,h) = (f\,g)\,h$.
— Elément unité : $1(x)\,f(x) = f(x) \Rightarrow 1\,f = f$, en appelant 1 l'application qui, à tout $x \in E$ associe $\bar{1}$.
— Distributivité : $f(x)\,(g(x) + h(x)) = f(x)\,g(x) + f(x)\,h(x) \Rightarrow f(g + h) = f\,g + f\,h$.
— Idempotence : $f(x)\,f(x) = f(x) \Rightarrow f^2 = f$.

La commutativité résulte de la commutativité de la multiplication dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, ou de l'idempotence du produit de $\mathcal{F}(E, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.

$(\mathcal{F}(E, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}), +, .)$ possède une structure d'anneau de Boole.

2°/ Bijection φ.

Soit φ l'application de $\mathcal{P}(E)$ dans $\mathcal{F}(E, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ qui, à A, associe sa fonction indicatrice φ_A.

A toute élément $f \in \mathcal{F}(E, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$, application $f : E \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, on peut associer la partie A de E formée des éléments $x \in E$ tels que $f(x) = \bar{1}$.
On définit ainsi une application $\psi : \mathcal{F}(E, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to \mathcal{P}(E)$, avec $A = \psi(f)$, soit $\varphi_A = (\varphi \circ \psi)(f)$
La fonction indicatrice de A vérifie $\varphi_A(x) = \begin{cases} \bar{1} & \text{si } x \in A \\ \bar{0} & \text{si } x \notin A \end{cases}$.
Par définition de A, on a $f(x) = \begin{cases} \bar{1} & \text{si } x \in A \\ \bar{0} & \text{si } x \notin A \end{cases}$.
On a donc $\varphi_A = f$, donc $(\varphi \circ \psi)(f) = f$.
$\varphi \circ \psi = Id_{\mathcal{F}(E, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})}$.

Réciproquement, pour une partie A quelconque de E, $\psi(\varphi_A)$ est la partie B de E telle que $\varphi_A(x) = \begin{cases} \bar{1} & \text{si } x \in B \\ \bar{0} & \text{si } x \notin B \end{cases}$.
Or on a, par définition de φ_A : $\varphi_A(x) = \begin{cases} \bar{1} & \text{si } x \in A \\ \bar{0} & \text{si } x \notin A \end{cases}$,
donc $A = B$, c'est-à-dire $\psi(\varphi_A) = A$, donc $(\psi \circ \varphi)(A) = A$.
$\psi \circ \varphi = Id_{\mathcal{P}(E)}$.

Les relations $\varphi \circ \psi = Id_{\mathcal{F}(E, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})}$ et $\psi \circ \varphi = Id_{\mathcal{P}(E)}$ montrent que φ et ψ sont des bijections réciproques l'une de l'autre.

L'application φ de $\mathcal{P}(E)$ dans $\mathcal{F}(E, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ qui, à A, associe sa fonction indicatrice φ_A, est bijective.

3°/ Propriétés de l'application φ.

$\varphi_A(x) = \begin{cases} \bar{1} & \text{si } x \in A \\ \bar{0} & \text{si } x \notin A \end{cases}$, $\varphi_B(x) = \begin{cases} \bar{1} & \text{si } x \in B \\ \bar{0} & \text{si } x \notin B \end{cases}$.

$\varphi_{\complement_E A}(x) = \begin{cases} \bar{1} & \text{si } x \notin A \\ \bar{0} & \text{si } x \in A \end{cases}$,

$\varphi_A(x) + \varphi_{\complement_E A}(x) = \bar{1}$ pour tout $x \in E \Rightarrow \varphi_A + \varphi_{\complement_E A} = 1$,

$\varphi_A + \varphi_A = 0$ et $\varphi_A + \varphi_{\complement_E A} = 1 \Rightarrow \varphi_{\complement_E A} = 1 + \varphi_A$.

$$\boxed{\varphi_{\complement_E A} = 1 + \varphi_A}$$

$\varphi_{A \cap B}(x) = \begin{cases} \bar{1} & \text{si } x \in A \cap B \\ \bar{0} & \text{si } x \notin A \cap B \end{cases}$,

$(x\,y = \bar{1} \Leftrightarrow x = \bar{1} \text{ et } y = \bar{1}) \Rightarrow \varphi_A(x)\,\varphi_B(x) = \begin{cases} \bar{1} & \text{si } x \in A \cap B \\ \bar{0} & \text{si } x \notin A \cap B \end{cases} = \varphi_{A \cap B}(x)$

$$\boxed{\varphi_{A \cap B} = \varphi_A \varphi_B}$$

$\varphi_{A \cup B} = \varphi_{\complement_E(\complement_E A \cap \complement_E B)} = 1 + \varphi_{\complement_E A \cap \complement_E B} = 1 + \varphi_{\complement_E A}\,\varphi_{\complement_E B} = 1 + (1 + \varphi_A)(1 + \varphi_B) = 1 + 1 + \varphi_A + \varphi_B + \varphi_A \varphi_B$

$$\boxed{\varphi_{A \cup B} = \varphi_A + \varphi_B + \varphi_A \varphi_B}$$

$\varphi_{A \cap \complement_E B} = \varphi_A \varphi_{\complement_E B} = \varphi_A (1 + \varphi_B) = \varphi_A + \varphi_A \varphi_B$

$$\boxed{\varphi_{A \cap \complement_E B} = \varphi_A + \varphi_A \varphi_B}$$

$\varphi_{A \Delta B} = \varphi_{(A \cap \complement_E B) \cup (B \cap \complement_E A)} = \varphi_{A \cap \complement_E B} + \varphi_{B \cap \complement_E A} + \varphi_{A \cap \complement_E B}\,\varphi_{B \cap \complement_E A}$

$= (\varphi_A + \varphi_A \varphi_B) + (\varphi_B + \varphi_B \varphi_A) + (\varphi_A + \varphi_A \varphi_B)(\varphi_B + \varphi_B \varphi_A)$

$\varphi_A \varphi_B + \varphi_A \varphi_B = 0$, $\varphi_A{}^2 = \varphi_A$, $\varphi_B{}^2 = \varphi_B$,

$\varphi_{A \Delta B} = \varphi_A + \varphi_B$

$$\boxed{\varphi_{A \Delta B} = \varphi_A + \varphi_B.}$$

4°/ Anneau de Boole des parties de *E*.

Tout $f \in \mathcal{F}(E, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ s'écrit sous la forme $f = \varphi_{\psi(f)}$.

La formule $\varphi_{A \Delta B} = \varphi_A + \varphi_B$ donne $\psi(\varphi_{A \Delta B}) = \psi(\varphi_A + \varphi_B)$.

$\psi \circ \varphi = Id_{\mathcal{P}(E)} \Rightarrow \psi(\varphi_{A \Delta B}) = A \Delta B$.

$\psi(\varphi_{A \Delta B}) = \psi(\varphi_A + \varphi_B) \Rightarrow A \Delta B = \psi(\varphi_A + \varphi_B)$

Pour $A = \psi(f)$ et $B = \psi(g)$, cette formule s'écrit : $\psi(f) \Delta \psi(g) = \psi(\varphi_{\psi(f)} + \varphi_{\psi(g)})$
$\varphi \circ \psi = Id_{\mathcal{F}(E, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})} \Rightarrow \varphi_{\psi(f)} = f$ et $\varphi_{\psi(g)} = g$.

$$\boxed{\begin{array}{c}\psi(f+g) = \psi(f) \Delta \psi(g) \\ \varphi^{-1}(f+g) = \varphi^{-1}(f) \Delta \varphi^{-1}(g)\end{array}}$$

La formule $\varphi_{A \cap B} = \varphi_A \varphi_B$ donne, pour $A = \psi(f)$ et $B = \psi(g)$, $\varphi_{\psi(f) \cap \psi(g)} = \varphi_{\psi(f)} \varphi_{\psi(g)} = f g$.
En appliquant y, compte tenu de la relation $\psi \circ \varphi = Id_{\mathfrak{P}(E)}$, il vient :

$$\boxed{\begin{array}{c}\psi(f g) = \psi(f) \cap \psi(g) \\ \varphi^{-1}(f g) = \varphi^{-1}(f) \cap \varphi^{-1}(g)\end{array}}$$

Les formules $\psi(f + g) = \psi(f) \Delta \psi(g)$ et $\psi(f g) = \psi(f) \cap \psi(g)$ avec une application $\psi = \varphi^{-1}$ bijective, montrent que ψ transporte sur $\mathfrak{P}(E)$ la structure d'anneau de Boole de $\mathcal{F}(E, \mathbb{Z} / 2\mathbb{Z})$, avec,
— pour addition, la différence symétrique,
— pour multiplication, l'intersection,
— pour élément neutre de l'addition, $\psi(0) = \emptyset$,
— pour élément neutre de la multiplication, $\psi(1) = E$.

$$\boxed{(\mathfrak{P}(E), \Delta, \cap) \text{ est un anneau de Boole isomorphe à } (\mathcal{F}(E, \mathbb{Z} / 2\mathbb{Z}), +, .).}$$

Un anneau de Boole n'est pas intègre dès qu'il a au moins trois éléments (Algèbre, Chapitre 5, Exercice 1, 3°).
En effet, soit A un anneau de Boole ayant au moins trois éléments distincts : 0, 1, a.

$$a(a + 1) = a^2 + a = a + a = 0$$

$a + 1$ est différent de 0, sinon la relation $a + a = 0$ entraînerait $a = 1$, ce qui n'est pas.
Comme a est différent de 0, on a trouvé dans A, deux éléments non nuls, a et $a + 1$, dont le produit est nul : A n'est pas intègre.

Si E est vide, $\mathfrak{P}(E)$ possède un seul élément, la partie vide.
Cet élément est le 0 de l'addition et le 1 de la multiplication.
Il n'y a pas d'élément différent de 0, donc pas d'éléments différents de 0 dont le produit soit 0 : l'anneau $(\mathfrak{P}(E), \Delta, \cap)$ est intègre.

Si E est réduit à un seul élément a, $\mathfrak{P}(E)$ possède deux éléments $\{\emptyset, E\}$.
$\emptyset$ est le 0 de l'addition, E le 1 de la multiplication. $1.1 = 1$.
Il n'y a pas deux éléments différents de 0 dont le produit soit 0 : l'anneau $(\mathfrak{P}(E), \Delta, \cap)$ est intègre.

Si E possède au moins deux éléments différents, $\mathfrak{P}(E)$ possède au moins $2^2 = 4$ éléments : l'anneau de Boole $(\mathfrak{P}(E), \Delta, \cap)$ n'est pas intègre.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{L'anneau de Boole } (\mathfrak{P}(E), \Delta, \cap) \text{ est intègre si } E \text{ possède 0 ou 1 élément,} \\ \text{il n'est pas intègre dès que } E \text{ possède au moins deux éléments distincts.}\end{array}}$$

Exercices

Corps.

1. **Corps.**
2. **Sous-corps.**

1 Corps.

Un **corps** est un anneau (unitaire) dans lequel tout élément non nul est inversible.

Un corps commutatif est un corps dans lequel la multiplication est commutative.
Un corps fini est commutatif (théorème de Wedderburn).

Le **corps $\mathbb{R}$ des nombres réels** est, par définition, un corps commutatif totalement ordonné archimédien complet : c'est la définition de **Georg Cantor (1845-1918)**.

— **totalement ordonné** : on peut toujours comparer deux nombres réels, l'un est inférieur ou égal à l'autre. De plus la relation d'ordre est compatible avec l'addition, et avec la multiplication par les réels > 0.

— **archimédien** : étant donné deux nombres réels a et b vérifiant $0 < a < b$, il existe un entier naturel non nul n tel que $b < n\,a$.

— **complet** : toute suite de Cauchy de nombres réels est convergente.

Une **suite de Cauchy** est une suite de nombres réels telle que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier N (qui dépend de ε) tel que $|x^m - x^n| < \varepsilon$, dès que les entiers n et m sont supérieurs à N.

$\mathbb{R}$ vérifie le principe des intervalles emboîtés.

— **Principe des intervalles emboîtés** : l'intersection d'une suite décroissante d'intervalles fermés dont la longueur tend vers 0 est réduite à un point.

Cette propriété est équivalente à la complétude de $\mathbb{R}$: l'une se déduit de l'autre.

HAUT

2 Sous-corps.

Un **sous-corps** est un sous-anneau d'un corps.

HAUT

Chapitre 6. Corps.

Exercices

Exercice 1. Sous-corps de R.

Encore plus d'exercices sur les nombres complexes ...

Exercice 1. Sous-corps de R.

Dans l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels, on définit les ensembles :

$\mathbb{Q}[\sqrt{7}] = \{a + b\sqrt{7} \mid (a, b) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}\}$,

$\mathbb{Q}[\sqrt{11}] = \{a + b\sqrt{11} \mid (a, b) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}\}$.

1°/ Montrer que $\mathbb{Q}[\sqrt{7}]$ et $\mathbb{Q}[\sqrt{11}]$ sont des sous-corps de $(\mathbb{R}, +, .)$.

2°/ Montrer qu'il n'existe pas d'isomorphisme de corps de $\mathbb{Q}[\sqrt{7}]$ sur $\mathbb{Q}[\sqrt{11}]$.

Solution

HAUT

Chapitre 6. Corps.

Enoncés.

Exercice 1. Sous-corps de R.

Dans l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels, on définit les ensembles : $\mathbb{Q}[\sqrt{7}] = \{a + b\sqrt{7} \mid (a, b) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}\}$, $\mathbb{Q}[\sqrt{11}] = \{a + b\sqrt{11} \mid (a, b) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}\}$. 1°/ Montrer que $\mathbb{Q}[\sqrt{7}]$ et $\mathbb{Q}[\sqrt{11}]$ sont des sous-corps de $(\mathbb{R}, +, .)$. 2°/ Montrer qu'il n'existe pas d'isomorphisme de corps de $\mathbb{Q}[\sqrt{7}]$ sur $\mathbb{Q}[\sqrt{11}]$.	

Solution.

1°/ Sous-corps.

Pour montrer que $\mathbb{Q}[\sqrt{7}]$ et $\mathbb{Q}[\sqrt{11}]$ sont des sous-corps de $(\mathbb{R}, +, .)$, il suffit de démontrer qu'ils sont stables, par addition, par multiplication et par inversion, et qu'ils contiennent 0 et 1.
Le dernier point étant évident ($a = 0$ et $b = 0$, ou $a = 1$ et $b = 0$), reste à démontrer la stabilité.

La stabilité pour l'addition et pour la multiplication est claire :

$(a + b\sqrt{7}) + (a' + b'\sqrt{7}) = (a + a') + (b + b')\sqrt{7}$, avec $(a + a', b + b') \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ dès que $(a, b) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ et $(a', b') \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$
$(a + b\sqrt{11}) + (a' + b'\sqrt{11}) = (a + a') + (b + b')\sqrt{11}$, avec $(a + a', b + b') \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ dès que $(a, b) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ et $(a', b') \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$

$(a + b\sqrt{7})(a' + b'\sqrt{7}) = (a\,a' + 7\,b\,b') + (a\,b' + b\,a')\sqrt{7}$, avec $(a\,a' + 7\,b\,b', a\,b' + b\,a') \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ dès que $(a, b) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ et $(a', b') \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$
$(a + b\sqrt{11})(a' + b'\sqrt{11}) = (a\,a' + 11\,b\,b') + (a\,b' + b\,a')\sqrt{11}$, avec $(a\,a' + 11\,b\,b', a\,b' + b\,a') \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ dès que $(a, b) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ et $(a', b') \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$

Pour la stabilité par inversion, on écrit :

$$\frac{1}{a+b\sqrt{7}} = \frac{a-b\sqrt{7}}{(a+b\sqrt{7})(a-b\sqrt{7})} = \frac{a}{a^2-7b^2} - \frac{b}{a^2-7b^2}\sqrt{7}$$
$$\frac{1}{a+b\sqrt{11}} = \frac{a-b\sqrt{11}}{(a+b\sqrt{11})(a-b\sqrt{11})} = \frac{a}{a^2-11b^2} - \frac{b}{a^2-11b^2}\sqrt{11}$$

de sorte que tout élément non nul de $\mathbb{Q}[\sqrt{7}]$ est inversible dans $\mathbb{Q}[\sqrt{7}]$, et tout élément non nul de $\mathbb{Q}[\sqrt{11}]$ est inversible dans $\mathbb{Q}[\sqrt{11}]$.

$\mathbb{Q}[\sqrt{7}]$ et $\mathbb{Q}[\sqrt{11}]$ sont des sous-corps de $(\mathbb{R}, +, .)$.

2°/ Absence d'isomorphisme.

Soit φ un isomorphisme de corps de $\mathbb{Q}[\sqrt{7}]$ sur $\mathbb{Q}[\sqrt{11}]$.
On a φ (1) = 1, φ ($x + y$) = φ (x) + φ (y), φ ($x\,y$) = φ (x) φ (y).
φ (7) = (φ ($\sqrt{7}$))^2
φ (7) = φ (1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1) = 7 φ (1) = 7
(φ ($\sqrt{7}$))^2 = 7
| φ ($\sqrt{7}$) | = $\sqrt{7}$

Mais $\sqrt{7}$ n'est pas un élément de $\mathbb{Q}[\sqrt{11}]$.

En effet, s'il existait des nombres rationnels a et b tels que $\sqrt{7} = a + b\sqrt{11}$, on aurait :

$$7 = (a^2 + 11\,b^2) + 2\,a\,b\sqrt{11}$$

et $\sqrt{11} = \frac{7 - a^2 - 11b^2}{2ab}$ serait un nombre rationnel.

Si $\sqrt{11}$ était un nombre rationnel, il existerait deux nombres entiers a et b, premiers entre eux, tels que $\sqrt{11} = \frac{a}{b}$.
On aurait alors $a^2 = 11\,b^2$.
11 divise 11 b^2, donc divise a^2.
Comme 11 est premier, c'est un facteur premier de a.
$\frac{a}{11} \times a = b^2$
Comme 11 divise a, 11 divise le premier membre, donc aussi le deuxième.
11 divise b^2.
Comme 11 est premier, c'est un facteur premier de b.
11 est donc un facteur premier de a et de b, ce qui contredit le fait que a et b sont premiers entre eux.
Donc $\sqrt{11}$ n'est pas un nombre rationnel. Il en résulte que $\sqrt{7}$ n'est pas un élément de $\mathbb{Q}[\sqrt{11}]$.

Comme φ ($\sqrt{7}$) est égal à + $\sqrt{7}$ ou à – $\sqrt{7}$, on aboutit au fait que φ ($\sqrt{7}$) n'est pas un élément de $\mathbb{Q}[\sqrt{11}]$.
Et ceci contredit l'hypothèse de départ, que φ est un isomorphisme de corps de $\mathbb{Q}[\sqrt{7}]$ sur $\mathbb{Q}[\sqrt{11}]$.

Il n'existe pas d'isomorphisme de corps de $\mathbb{Q}[\sqrt{7}]$ sur $\mathbb{Q}[\sqrt{11}]$.

NOMBRES COMPLEXES

EXERCICE 1.

Déterminer ($x + y\,i$), représentation cartésienne du nombre complexe :

1.1. $(5 - i)^2$; $(2 + 3\,i)^3$; $(1 - i\sqrt{5})^3$.

1.2. $(5 - 4\,i)(3 + 6\,i)$; $(4 + 3\,i)^3\,(4 - 3\,i)^3$.

1.3. $\dfrac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}-i}$; $\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^2$; $\left(\dfrac{1}{i}+\dfrac{i}{2}\right)^2$.

1.4. $\left(\dfrac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i}+\dfrac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i}-1-i\right)^7$.

1.5. $\dfrac{1+\alpha i}{2\,\alpha+(\alpha^2-1)\,i}$; $\dfrac{(\alpha+\beta i)^2}{\alpha+(\beta+1)\,i}$; $(\alpha,\beta) \in \mathrm{R}^2$.

EXERCICE 2.

Soit φ réel ; $z = \cos^2\varphi + i \sin\varphi \cos\varphi$.

1° Déterminer φ tel que $z = 0$.

2° Si $z \neq 0$, calculer z^{-1}, z^2, z^{-2}, z^3, z^{-3}.

EXERCICE 3.

Soit α réel ; $z = (\alpha - i)[(10 - \alpha) + (2 + \alpha)\,i\,]$.

Déterminer α tel que z soit réel.

Préciser, dans ce cas, la valeur de z.

EXERCICE 4.

A tout point $M\,(x,y)$ du plan rapporté au repère (O, u, v), on associe le nombre complexe :

$$z = [(2\,x - y) + (x - y)\,i\,][x + (x - y)\,i\,].$$

Déterminer et construire l'ensemble des points M tels que z soit réel.

EXERCICE 5.

1° Soit : α, β, réels fixés, $z_1 = \cos\alpha + i\sin\alpha$, $z_2 = \cos\beta + i\sin\beta$. Déterminer la représentation cartésienne de :

$$z_1 \times z_2 \; ; \; \frac{z_1}{z_2} \; ; \; {z_1}^n \text{ pour } n \in \mathbb{N}.$$

2° Soit $j = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$. Calculer : j^2 ; j^3 ; j^n ; $1 + j + j^2$.

EXERCICE 6.

Soit z, nombre complexe, u, nombre complexe de module 1, $u \neq 1$. Démontrer que $\frac{z - u\,\bar{z}}{1-u}$ est réel.

EXERCICE 7.

Soit : $z_1 = 4 + 4\,i$; $z_2 = 1 - i\,\sqrt{3}$. Déterminer le module et un argument de : ${z_1}^2$, $z_1 z_2$, ${z_1}^3$, $\frac{z_1}{z_2}$, $\frac{z_2}{z_1}$.

EXERCICE 8.

Déterminer le module et un argument de z :

3.1. $z = a\,\frac{1 - i\tan\alpha}{1 + i\tan\alpha}$ $\quad (a,\alpha) \in \mathbb{R}^2$

3.2. $z = \frac{5 + 11\sqrt{3}\,i}{7 - 4\sqrt{3}\,i}$.

3.3. $z = \frac{(1-i)^3}{\left(1 - i\sqrt{3}\right)^4}$.

EXERCICE 9.

Résoudre dans $\mathbb{U}$, ensemble des nombres complexes de module 1 :

$$\begin{cases} z + z' + z'' = 1 \\ z\,z'\,z'' = 1 \end{cases}$$

EXERCICE 10.

Déterminer z, complexe tel que z^2 et z^6 soient conjugués.

EXERCICE 11.

1° Soit z complexe, $z \neq 1$, et $S_n = \sum_{p=0}^{p=n} z^p$. Exprimer S_n en fonction de z et de n.

2° Soit :

$$\begin{cases} \Sigma_1 = 1 + \cos\theta + \cos 2\theta + \cdots + \cos n\theta, \\ \Sigma_2 = 0 + \sin\theta + \sin 2\theta + \cdots + \sin n\theta. \end{cases}$$

Calculer $\Sigma_1 + i\,\Sigma_2$. En déduire Σ_1 et Σ_2.

EXERCICE 12.

Soit z_1 , z_2 , z_3 , nombres complexes dans le produit est $3\sqrt{3}\,i$, dont les arguments respectifs θ_1 , θ_2 , θ_3 , forment une progression arithmétique de raison $\frac{\pi}{3}$, et les modules respectifs ρ_1 , ρ_2 , ρ_3 , une suite géométrique de raison 2. Déterminer z_1 , z_2 , z_3 , et construire leurs images dans un plan complexe.

EXERCICE 13.

Soit $a \in R$, $n \in N$, et soit, dans C :

E_1 , équation en Z : $Z^n = \dfrac{1 + a\,i}{1 - a\,i}$.

E_2 , équation en z : $\left(\dfrac{1 + z\,i}{1 - z\,i}\right)^n = \dfrac{1 + a\,i}{1 - a\,i}$.

1° Démontrer que toute solution de E_1 a pour module 1, et que toute solution de E_2 est réelle.

2° Soit $a = 0$, $n = 3$. Résoudre E_2 .

EXERCICE 14.

On se propose de résoudre dans C : $z^3 - 6\,(1 + i\,)\,z^2 + 24\,i\,z - 11 - 16\,i = 0$.

Soit H l'homothétie de rapport $\frac{1}{3}$, dont le centre est I d'affixe $(-1 - i\,)$.

Pour tout point m, d'affixe z, $H\,(m) = M$, d'affixe Z.

1° Calculer Z en fonction de z, puis z en fonction de Z.

2° Démontrer que z est solution de l'équation proposée si, et seulement si, Z est solution de : $Z^3 = 1$.

3° Résoudre la seconde équation. En déduire les solutions de la première.

EXERCICE 15.

1°/ Quel est l'ensemble (C) des points z du plan complexe vérifiant : $\left|\frac{z-1}{z+1}\right| = k$, k constante réelle positive.

2°/ Application : $k = 2$. Définir (C) .

3°/ On pose $Z = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z} \right)$. Calculer $\left| \frac{Z-1}{Z+1} \right|$ en fonction de z.

4°/ Quel est l'ensemble (C') décrit par les points Z du plan complexe lorsque z décrit le cercle (C) ?

5°/ Application : $k = 2$. Définir (C').

EXERCICE 16.

1°/ Déterminez les nombres complexes solutions de l'équation : $z^4 = 1$.
2°/ Déterminez sous forme trigonométrique les solutions de l'équation : $z^4 = 8 (1 - i \sqrt{3})$.
3°/ Soit $a = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$. Vérifiez : $a^4 = 8 (1 - i \sqrt{3})$. En déduire sous forme algébrique les résultats du 2°/.
4°/ Des questions 2°/ et 3°/, déduire les valeurs exactes de $cos \frac{11\pi}{12}$ et $sin \frac{11\pi}{12}$.

EXERCICE 17.

λ, α, β étant trois constantes données réelles ou complexes, montrez que les solutions de l'équation :

$$\lambda^n (z - \alpha)^n - (z - \beta)^n = 0$$

sont toutes sur une même circonférence. Calculez la position du centre et le rayon de cette circonférence. Exprimer l'affixe z_c du centre et le rayon t de cette circonférence en fonction de α, β et λ.

EXERCICE 1.

Déterminer ($x + y\,i$), représentation cartésienne du nombre complexe :

1.1. $(5 - i)^2$; $(2 + 3\,i)^3$; $(1 - i\sqrt{5})^3$.

1.2. $(5 - 4\,i)(3 + 6\,i)$; $(4 + 3\,i)^3\,(4 - 3\,i)^3$.

1.3. $\dfrac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}-i}$; $\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^2$; $\left(\dfrac{1}{i}+\dfrac{i}{2}\right)^2$.

1.4. $\left(\dfrac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i}+\dfrac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i}-1-i\right)^7$.

1.5. $\dfrac{1+\alpha i}{2\,\alpha+(\alpha^2-1)\,i}$; $\dfrac{(\alpha+\beta i)^2}{\alpha+(\beta+1)\,i}$; $(\alpha,\beta)\in \mathrm{R}^2$.

SOLUTION.

1.1. $(5 - i)^2$; $(2 + 3\,i)^3$;$(1 - i\sqrt{5})^3$.

1.1.1. $(5 - i)^2$.

$$(5 - i)^2 = 5^2 + i^2 - 2 \times 5\,i = 25 - 1 - 10\,i = 24 - 10\,i$$

$$\boxed{(5 - i)^2 = 24 - 10\,i}$$

1.1.2. $(2 + 3\,i)^3$.

$$\begin{aligned}(2 + 2\,i)^3 &= 2^3\,(1 + i)^3\\ &= 8\,(1^3 + 3\,i + 3 \times i^2 + i^3)\\ &= 8\,(1 + 3\,i - 3 - i)\\ &= 8\,(-2 + 2\,i)\\ &= 16\,(-1 + i)\end{aligned}$$

$$\boxed{(2 + 2\,i)^3 = -16 + 16\,i}$$

1.1.3. $(1 - i\sqrt{5})^3$.

$$\begin{aligned}(1 - i\sqrt{5})^3 &= 1^3 - 3 \times (i\sqrt{5}) + 3 \times (i\sqrt{5})^2 - (i\sqrt{5})^3\\ &= 1 - 3\,i\sqrt{5} - 75 + 5\,i\sqrt{5}\end{aligned}$$

$$\boxed{(1 - i\sqrt{5})^3 = -74 + 2\,i\sqrt{5}}$$

1.2. $(5 - 4\,i)(3 + 6\,i)$; $(4 + 3\,i)^3\,(4 - 3\,i)^3$.

1.2.1. $(5 - 4\,i)(3 + 6\,i)$.

$$\begin{aligned}(5 - 4\,i)(3 + 6\,i) &= 5 \times 3 + 5 \times 6\,i - 4\,i \times 3 - 4\,i \times 6\,i\\ &= 15 + 30\,i - 12\,i + 24\end{aligned}$$

$$\boxed{(5 - 4\,i)(3 + 6\,i) = 39 + 18\,i}$$

1.2.2. $(4 + 3\,i)^3\,(4 - 3\,i)^3$.

$$\begin{aligned}(4 + 3\,i)^3\,(4 - 3\,i)^3 &= [(4 + 3\,i)(4 - 3\,i)]^3 \\ &= (4^2 - 9\,i^2)^3 \\ &= (16 + 9)^3 \\ &= 25^3\end{aligned}$$

$$\boxed{(4 + 3\,i)^3\,(4 - 3\,i)^3 = 15\,625}$$

1.3. $\frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}-i}$; $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^2$; $\left(\frac{1}{i}+\frac{i}{2}\right)^2$.

1.3.1. $\frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}-i}$.

$$\begin{aligned}\frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}-i} &= \frac{(1+i\sqrt{3})(\sqrt{3}+i)}{(\sqrt{3}-i)(\sqrt{3}+i)} \\ &= \frac{\sqrt{3}+i+3i-\sqrt{3}}{3+1} \\ &= \frac{4i}{4}\end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}-i} = i}$$

1.3.2. $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^2$.

$$\begin{aligned}\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^2 &= \left(\frac{(1-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}\right)^2 \\ &= \left(\frac{1-2i+i^2}{1-i^2}\right)^2 \\ &= \left(\frac{-2i}{2}\right)^2 \\ &= (-i)^2\end{aligned}$$

$$\boxed{\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^2 = -1}$$

1.3.3. $\left(\frac{1}{i}+\frac{i}{2}\right)^2$.

$$\left(\frac{1}{i}+\frac{i}{2}\right)^2 = \left(\frac{2+i^2}{2i}\right)^2$$
$$= \left(\frac{1}{2i}\right)^2$$
$$= \frac{1}{-4}$$

$$\boxed{\left(\frac{1}{i}+\frac{i}{2}\right)^2 = -\frac{1}{4}}$$

1.4. $\left(\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i} + \frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i} - 1 - i\right)^7$.

$$\left(\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i} + \frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i} - 1 - i\right)^7 = \left(\frac{(\sqrt{3}-i)^2+(\sqrt{3}+i)^2}{(\sqrt{3}-i)(\sqrt{3}+i)} - 1 - i\right)^7$$
$$= \left(\frac{2-2\sqrt{3}i+2+2\sqrt{3}i}{3+1} - 1 - i\right)^7$$
$$= (-i)^7$$

$$\boxed{\left(\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i} + \frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i} - 1 - i\right)^7 = i}$$

1.5. $\frac{1+\alpha i}{2\alpha+(\alpha^2-1)i}$; $\frac{(\alpha+\beta i)^2}{\alpha+(\beta+1)i}$; $(\alpha,\beta)\in R^2$.

1.5.1. $\frac{1+\alpha i}{2\alpha+(\alpha^2-1)i}$.

$$\frac{1+\alpha i}{2\alpha+(\alpha^2-1)i} = \frac{i(\alpha-i)}{i(\alpha^2-2\alpha i-1)}$$
$$= \frac{\alpha-i}{(\alpha-i)^2}$$
$$= \frac{1}{\alpha-i}$$
$$= \frac{\alpha+i}{(\alpha-i)(\alpha+i)}$$

$$\boxed{\frac{1+\alpha i}{2\alpha+(\alpha^2-1)i} = \frac{\alpha+i}{\alpha^2+1}}$$

1.5.2. $\frac{(\alpha+\beta i)^2}{\alpha+(\beta+1)i}$.

$$\frac{(\alpha+\beta i)^2}{\alpha+(\beta+1)i} = \frac{(\alpha+\beta i)^2(\alpha-(\beta+1)i)}{(\alpha+(\beta+1)i)(\alpha-(\beta+1)i)}$$

$$= \frac{(\alpha+\beta i)^2(\alpha-\beta i-i)}{\alpha^2+(\beta+1)^2}$$

$$= \frac{(\alpha+\beta i)(\alpha^2+\beta^2-i(\alpha+\beta i))}{\alpha^2+(\beta+1)^2}$$

$$= \frac{(\alpha+\beta i)(\alpha^2+\beta^2+\beta-i\alpha)}{\alpha^2+(\beta+1)^2}$$

$$= \frac{(\alpha+\beta i)(\alpha^2+\beta^2)-i(\alpha+i\beta)^2}{\alpha^2+(\beta+1)^2}$$

$$= \frac{\alpha(\alpha^2+\beta^2)+i\beta(\alpha^2+\beta^2)-i(\alpha^2-\beta^2)+2\alpha\beta}{\alpha^2+(\beta+1)^2}$$

$$\frac{(\alpha+\beta i)^2}{\alpha+(\beta+1)i} = \frac{\alpha(\alpha^2+\beta^2)+2\alpha\beta+i(\beta(\alpha^2+\beta^2)-\alpha^2+\beta^2)}{\alpha^2+(\beta+1)^2}$$

EXERCICE 2.

Soit φ réel ; $z = \cos^2 \varphi + i \sin \varphi \cos \varphi$.

1° Déterminer φ tel que $z = 0$.

2° Si $z \neq 0$, calculer z^{-1}, z^2, z^{-2}, z^3, z^{-3}.

SOLUTION.

1°/ Détermination de φ.

L'équation $z = 0$ s'écrit, en fonction de φ :

$$\cos^2 \varphi + i \sin \varphi \cos \varphi = 0$$

$$\cos \varphi \, (\cos \varphi + i \sin \varphi \,) = 0$$

Il y a donc deux sorte de solutions possibles :

- $\cos \varphi = 0$, soit $\varphi = \frac{\pi}{2} + k\,\pi$, $k \in$ Z.
- $\cos \varphi + i \sin \varphi = 0$, soit $e^{i\varphi} = 0$, ce qui est impossible car $| e^{i\varphi} | = 1$ et un nombre complexe de module 1 ne peut jamais être égal à 0.

Les seules solutions du problème sont donc données par :

$$\varphi = \frac{\pi}{2} + k\,\pi, \; k \in \text{Z}.$$

2°/ Puissances de *z*.

De la relation :

$$z = \cos \varphi \times e^{i\varphi}$$

on tire immédiatement les résultats :

$$z^{-1} = \frac{e^{-i\varphi}}{\cos\varphi} = 1 - i \tan \varphi$$

$$z^2 = \cos^2 \varphi \, e^{2i\varphi} = \cos^2 \varphi \, (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) + 2 i \sin \varphi \cos^3 \varphi$$

$$z^{-2} = \frac{e^{-2i\varphi}}{\cos^2 \varphi} = (1 - \tan^2 \varphi) - 2 i \tan \varphi$$

$$z^3 = \cos^3 \varphi \, e^{3i\varphi} = \cos^3 \varphi \, (\cos 3\varphi + i \sin 3\varphi)$$

$$z^{-3} = \frac{e^{-3i\varphi}}{\cos^3 \varphi} = \frac{\cos 3\varphi}{\cos^3 \varphi} - i \, \frac{\sin 3\varphi}{\cos^3 \varphi}$$

EXERCICE 3.

Soit α réel ; $z = (\alpha - i)[(10 - \alpha) + (2 + \alpha)\, i\,]$.

Déterminer α tel que z soit réel.
Préciser, dans ce cas, la valeur de z.

SOLUTION.

Calculons la partie imaginaire de z :

$$\Im(z) = -(10 - \alpha) + \alpha(2 + \alpha) = \alpha^2 + 3\alpha - 10.$$

Pour que z soit réel, il faut et il suffit que sa partie imaginaire soit nulle. Cette condition s'exprime par l'équation:

$$\alpha^2 + 3\alpha - 10 = 0.$$

Les solutions de cette équation sont données par :

$$\alpha = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 40}}{2} = 2 \text{ ou } -5.$$

Il y a donc deux solutions :

- $\alpha = 2$.

  Dans ce cas, $z = \Re(z) = \alpha(10 - \alpha) + 2 + \alpha = -\alpha^2 + 11\alpha + 2 = -4 + 22 + 2 = 20$
- $\alpha = -5$.

  Dans ce cas, $z = \Re(z) = -\alpha^2 + 11\alpha + 2 = 25 - 55 + 2 = -28$.

EXERCICE 4.

A tout point $M\,(x,y)$ du plan rapporté au repère (O,u,v), on associe le nombre complexe :

$$z = [(2\,x - y) + (x - y)\,i\,][x + (x - y)\,i\,].$$

Déterminer et construire l'ensemble des points M tels que z soit réel.

SOLUTION.

Pour que z soit réel, il faut et il suffit que sa partie imaginaire soit nulle :

$$(x - y)\,x + (2\,x - y)(x - y) = 0$$
$$(x - y)(3\,x - y) = 0$$

L'ensemble de points $M\,(x,y)$ tels que z soit réel est donc formé des deux droites d'équations :

- $y = x$. C'est la première bissectrice.
- $y = 3\,x$.

EXERCICE 5.

1° Soit : α, β, réels fixés, $z_1 = cos\ \alpha + i\ sin\ \alpha$, $z_2 = cos\ \beta + i\ sin\ \beta$. Déterminer la représentation cartésienne de :

$$z_1 \times z_2 \ ; \ \frac{z_1}{z_2} \ ; \ {z_1}^n \text{ pour } n \in \mathrm{N}.$$

2° Soit $j = cos\frac{2\pi}{3} + i\ sin\frac{2\pi}{3}$. Calculer : j^2 ; j^3 ; j^n ; $1 + j + j^2$.

SOLUTION.

4.1. Représentation cartésienne de nombres complexes.

$$z_1 = cos\ \alpha + i\ sin\ \alpha = e^{i\,\alpha}$$

$$z_2 = cos\ \beta + i\ sin\ \beta = e^{i\ \beta}$$

$$z_1\, z_2 = e^{i\,\alpha}\, e^{i\,\beta} = e^{i\,(\alpha+\beta)} = cos\ (\alpha+\beta) + i\ sin\ (\alpha+\beta)$$

$$\boxed{z_1\, z_2 = cos\ (\alpha+\beta) + i\ sin\ (\alpha+\beta)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = e^{i\,\alpha}\, e^{-i\,\beta} = e^{i\,(\alpha-\beta)} = cos\ (\alpha-\beta) + i\ sin\ (\alpha-\beta)$$

$$\boxed{\frac{z_1}{z_2} = cos\ (\alpha-\beta) + i\ sin\ (\alpha-\beta)}$$

$${z_1}^n = e^{i\,n\,\alpha} = cos\ n\,\alpha + i\ sin\ n\,\alpha$$

$$\boxed{{z_1}^n = cos\ n\,\alpha + i\ sin\ n\,\alpha}$$

4.2. Puissances de *j*.

$$j = cos\frac{2\pi}{3} + i\ sin\frac{2\pi}{3} = e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

$$j^2 = e^{i\frac{4\pi}{3}} = cos\ \frac{4\pi}{3} + i\ sin\ \frac{4\pi}{3}$$

$$\boxed{j^2 = -\frac{1}{2}(1 + i\ \sqrt{3})}$$

$$j^3 = e^{i\frac{6\pi}{3}} = e^{i\,2\,\pi} = 1$$

$$j^n = e^{i\frac{2n\pi}{3}}$$

$$1 + j + j^2 = \frac{1 - j^3}{1 - j} = 0$$

EXERCICE 6.

Soit z, nombre complexe, u, nombre complexe de module 1, $u \neq 1$. Démontrer que $\dfrac{z - u\,\overline{z}}{1-u}$ est réel.

SOLUTION.

$$\frac{z-u\overline{z}}{1-u} = \frac{(z-u\overline{z})(1-\overline{u})}{(1-u)(1-\overline{u})} = \frac{z-u\overline{z}-\overline{u}z+u\overline{u}z}{1-u-\overline{u}+u\overline{u}}$$

Le dénominateur est réel, c'est le carré du module de $1 - u$.
$u\overline{z} + \overline{u}\,z$ est réel, c'est deux fois la partie réelle de $u\overline{z}$.
Reste à montrer que $z + |u|^2\ \overline{z}$ est réel, ce qui est clair puisque, par hypothèse, u est de module 1, donc :

$$z + u\ \overline{u}\ \overline{z} = z + |u|^2\ \overline{z} = z + \overline{z} = 2\ \mathrm{R}(z).$$

$$\frac{z-u\overline{z}}{1-u} = 2\,\frac{\Re(z-u\overline{z})}{|1-u|^2} \text{ est réel.}$$

EXERCICE 7.

Soit : $z_1 = 4 + 4\,i$; $z_2 = 1 - i\sqrt{3}$. Déterminer le module et un argument de : ${z_1}^2$, $z_1 z_2$, ${z_1}^3$, $\frac{z_1}{z_2}$, $\frac{z_2}{z_1}$.

SOLUTION.

$z_1 = 4\sqrt{2}\ e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $z_2 = 2\,e^{-i\frac{\pi}{3}}$ entraînent :

${z_1}^2 = 32\,e^{i\frac{\pi}{2}} = 32\,i.$

$z_1 z_2 = 8\sqrt{2}\ e^{-i\frac{\pi}{12}}$

${z_1}^3 = 144\sqrt{2}\ e^{i\frac{3\pi}{4}}$

$\frac{z_1}{z_2} = 2\sqrt{2}\ e^{i\frac{7\pi}{12}}$

$\frac{z_2}{z_1} = \frac{\sqrt{2}}{4} e^{-i\frac{7\pi}{12}}$

et ces formules donnent instantanément les modules et arguments des nombres complexes calculés.

EXERCICE 8.

Déterminer le module et un argument de z :

3.1. $z = a\,\dfrac{1-i\tan\alpha}{1+i\tan\alpha}$ $\quad (a,\alpha) \in R^2$

3.2. $z = \dfrac{5+11\sqrt{3}\,i}{7-4\sqrt{3}\,i}$.

3.3. $z = \dfrac{(1-i)^3}{\left(1-i\sqrt{3}\right)^4}$.

SOLUTION.

3.1.

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \Rightarrow z = a\,\frac{1-i\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{1+i\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}} = a\,\frac{\cos\alpha - i\sin\alpha}{\cos\alpha + i\sin\alpha} = a\,\frac{e^{-i\alpha}}{e^{+i\alpha}} = a\,e^{-2i\alpha}$$

Le module de z est donc $|a|$.
Un argument de z est :

-2α si a est positif,
$\pi - 2\alpha$ si a est négatif.

3.2.

$$z = \frac{5+11\sqrt{3}\,i}{7-4\sqrt{3}\,i} = \frac{\left(5+11\sqrt{3}\,i\right)\left(7+4\sqrt{3}\,i\right)}{\left(7-4\sqrt{3}\,i\right)\left(7+4\sqrt{3}\,i\right)} = \frac{1}{97}(35 - 132 + 97\sqrt{3}\,i) = -1 + \sqrt{3}\,i = 2\,e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

Le module de z est donc 2, et son argument est $\dfrac{2\pi}{3}$, à un multiple de 2π près.

3.3.

$1 - i = \sqrt{2}\;e^{-i\frac{\pi}{4}}$

$1 - i\sqrt{3} = 2\,e^{-i\frac{\pi}{3}}$

$$z = \frac{(1-i)^3}{(1-i\sqrt{3})^4} = 2\sqrt{2}\,e^{-i\frac{3\pi}{4}} \times \frac{1}{16} \times e^{i\frac{4\pi}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{8}\,e^{i\frac{7\pi}{12}}.$$

Le module de z est donc $\dfrac{\sqrt{2}}{8}$ et son argument est $\dfrac{7\pi}{12}$.

EXERCICE 9.

Résoudre dans $\mathbb{U}$, ensemble des nombres complexes de module 1 :

$$\begin{cases} z+z'+z''=1 \\ z\,z'\,z''=1 \end{cases}$$

SOLUTION.

z, z', z'' sont solutions de l'équation

$$(Z-z)(Z-z')(Z-z'') = 0$$

$$Z^3 - (z+z'+z'')\,Z^2 + (z\,z'+z'\,z''+z''\,z)\,Z - z\,z'\,z'' = 0$$

$$Z^3 - Z^2 + (z\,z'+z'\,z''+z''\,z)\,Z - 1 = 0$$

$$z\,z'+z'\,z''+z''\,z = \frac{zz'+z'\,z''+z''\,z}{1} = \frac{zz'+z'\,z''+z''\,z}{zz'\,z''} = \frac{1}{z''}+\frac{1}{z}+\frac{1}{z'}$$

Mais, par hypothèse, z, z' et z'' sont des nombres complexes de module 1 : ***leur conjugué est donc égal à leur inverse.***

$$\frac{1}{z} = \overline{z}\,,\ \frac{1}{z'} = \overline{z}'\,,\ \frac{1}{z''} = \overline{z}''$$

$$z\,z'+z'\,z''+z''\,z = \overline{z}+\overline{z}'+\overline{z}'' = \overline{z+z'+z''} = 1,$$ puisque $z+z'+z'' = 1$.

Ainsi, les nombres complexes z, z', z'' sont les solutions de l'équation :

$$\boxed{Z^3 - Z^2 + Z - 1 = 0}$$

L'équation $Z^3 - Z^2 + Z - 1 = 0$ peut être écrite : $Z^2(Z-1) + Z - 1 = 0$, soit $(Z-1)(Z^2+1) = 0$. D'où les racines :

$$\boxed{\{\,z\,,\,z'\,,\,z''\,\} = \{\,1\,,\,i\,,\,-i\,\}}$$

EXERCICE 10.

Déterminer z, complexe tel que z^2 et z^6 soient conjugués.

SOLUTION.

L'équation définissant z s'écrit : $z^6 = \overline{z^2}$.

Les solutions réelles sont données par :

$x^6 = x^2$
$x^2 (x^4 - 1) = 0$
$x^2 (x^2 - 1)(x^2 + 1) = 0$
$x^2 (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1) = 0$

Il y a donc trois solutions réelles : 0, 1, –1.

Cherchons les solutions dans le plan complexe.

La relation $z^6 = \overline{z^2}$ entraîne, en module : $|z|^6 = |z|^2$. Comme $|z|$ est réel positif, il y a deux solutions :
$|z| = 0$ et $|z| = 1$.

1er cas.

$|z| = 0$ entraîne $z = 0$.

$$z = 0$$

2e cas.

$|z| = 1$ entraîne $\overline{z} = \frac{1}{z}$ et la relation $z^6 = \overline{z^2}$, que l'on peut écrire aussi $z^6 = \overline{z}^2$ s'écrit $z^6 = \frac{1}{z^2}$. Comme $|z|$ est égal à 1, z ne peut pas être nul et la relation $z^6 = \frac{1}{z^2}$ est équivalente à $z^8 = 1$.

Les solutions de l'équation $z^8 = 1$, sont données par : $z = e^{\frac{2ik\pi}{8}}$, $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$.

$$z = e^{i k \frac{\pi}{4}}, k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.$$

Les solutions réelles que nous avons trouvées sont comprises dans les neuf solutions complexes. La solution $x = 0$ correspond à $z = 0$ (1er cas), la solution $x = 1$ correspond à $k = 0$ (2e cas), la solution $x = -1$ correspond à $k = 4$ (2e cas).

EXERCICE 11.

1° Soit z complexe, $z \neq 1$, et $S_n = \sum_{p=0}^{p=n} z^p$. Exprimer S_n en fonction de z et de n.

2° Soit :

$$\begin{cases} \Sigma_1 = 1 + \cos\theta + \cos 2\theta + \cdots + \cos n\theta, \\ \Sigma_2 = 0 + \sin\theta + \sin 2\theta + \cdots + \sin n\theta. \end{cases}$$

Calculer $\Sigma_1 + i\,\Sigma_2$. En déduire Σ_1 et Σ_2.

SOLUTION.

1°/ Somme d'une progression géométrique.

Considérons la somme :

$$S_n = 1 + z + z^2 + \ldots + z^n$$

Muliplions les deux membres par z, nous obtenons :

$$z\,S_n = z + z^2 + z^3 + \ldots + z^{n+1}$$

Par soustraction membre à membre, il vient :

$$S_n - z\,S_n = 1 - z^{n+1}$$

Comme, par hypothèse, z est différent de 1, $1 - z$ est différent de 0, on peut diviser les deux membres par $1 - z$, il reste :

$$S_n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$$

D'où la formule finale :

$$\boxed{1 + z + z^2 + \ldots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}}$$

2°/ Application à l'exponentielle complexe.

Considérons les sommes :

$$\Sigma_1 = 1 + \cos\theta + \cos 2\theta + \ldots + \cos n\theta$$
$$\Sigma_2 = 0 + \sin\theta + \sin 2\theta + \ldots + \sin n\theta$$

En prenant Σ_1 pour partie réelle et Σ_2 pour partie imaginaire, nous obtenons le nombre complexe :

$$\Sigma_1 + i\,\Sigma_2 = (1 + \cos\theta + \cos 2\theta + \ldots + \cos n\theta) + i\,(0 + \sin\theta + \sin 2\theta + \ldots + \sin n\theta)$$
$$\Sigma_1 + i\,\Sigma_2 = (1 + i\,0) + (\cos\theta + i\sin\theta) + (\cos 2\theta + i\sin 2\theta) + \ldots + (\cos n\theta + i\sin n\theta)$$
$$\Sigma_1 + i\,\Sigma_2 = 1 + e^{i\theta} + e^{2i\theta} + \ldots + e^{n\,i\,\theta} = 1 + z + z^2 + \ldots + z^n \text{ avec } z = e^{i\theta}.$$

La formule établie dans la question 1° donne alors la solution :

$$\Sigma_1 + i\,\Sigma_2 = \frac{1 - e^{i\,(n+1)\,\theta}}{1 - e^{i\,\theta}}$$

Pour séparer facilement la partie réelle et la partie imaginaire, nous allons transformer cette expression en mettant en facteur :

- au numérateur $e^{i\frac{n+1}{2}\theta}$
- au dénominateur $e^{i\frac{\theta}{2}}$.

Il vient :

$$\Sigma_1 + i\,\Sigma_2 = \frac{e^{i\frac{n+1}{2}\theta}}{e^{i\frac{\theta}{2}}} \times \frac{e^{-i\frac{n+1}{2}\theta} - e^{i\frac{n+1}{2}\theta}}{e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}}}$$

Les formules d'Euler donnent :

$$\sin\frac{n+1}{2}\theta = \frac{e^{i\frac{n+1}{2}\theta} - e^{-i\frac{n+1}{2}\theta}}{2i} \quad \text{et} \quad \sin\frac{\theta}{2} = \frac{e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}}}{2i}$$

d'où :

$$\Sigma_1 + i\,\Sigma_2 = \frac{e^{i\frac{n+1}{2}\theta}}{e^{i\frac{\theta}{2}}} \times \frac{\sin\frac{n+1}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

$$\Sigma_1 + i\,\Sigma_2 = e^{i\frac{n}{2}\theta} \times \frac{\sin\frac{n+1}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}} = (\cos\tfrac{n\theta}{2} + i\sin\tfrac{n\theta}{2})\frac{\sin\frac{n+1}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

En séparant partie réelle et partie imaginaire, il vient :

$$\Sigma_1 = \cos\tfrac{n\theta}{2} \times \frac{\sin\frac{n+1}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

$$\Sigma_2 = \sin\tfrac{n\theta}{2} \times \frac{\sin\frac{n+1}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

D'où les formules :

$$1 + \cos\theta + \cos 2\theta + \ldots + \cos n\theta = \cos\tfrac{n\theta}{2} \times \frac{\sin\frac{n+1}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

$$\sin\theta + \sin 2\theta + \ldots + \sin n\theta = \sin\tfrac{n\theta}{2} \times \frac{\sin\frac{n+1}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

EXERCICE 12.

Soit z_1 , z_2 , z_3 , nombres complexes dans le produit est $3\sqrt{3}\ i$, dont les arguments respectifs θ_1 , θ_2 , θ_3 , forment une progression arithmétique de raison $\frac{\pi}{3}$, et les modules respectifs ρ_1 , ρ_2 , ρ_3 , une suite géométrique de raison 2. Déterminer z_1 , z_2 , z_3 , et construire leurs images dans un plan complexe.

SOLUTION.

Les données de l'énoncé se traduisent par les relations :

$$z_1\, z_2\, z_3 = 3\sqrt{3}\ i$$

$$\theta_3 - \theta_2 = \theta_2 - \theta_1 = \frac{\pi}{3}$$

$$\frac{\rho_3}{\rho_2} = \frac{\rho_2}{\rho_1} = 2.$$

$$z_1\, z_2\, z_3 = \rho_1\, \rho_2\, \rho_3\, e^{i(\theta_1+\theta_2+\theta_3)} = 3\sqrt{3}\ i = 3\sqrt{3}\ e^{i\frac{\pi}{2}}$$

La dernière égalité montre que les modules et arguments de z_1 , z_2 , z_3 vérifient :

$$\rho_1\, \rho_2\, \rho_3 = 3\sqrt{3} \text{ et } \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi\ (k \in \mathbb{Z}).$$

Le système : $\begin{cases} \theta_3 - \theta_2 = \dfrac{\pi}{3} \\ \theta_2 - \theta_1 = \dfrac{\pi}{3} \\ \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases}$ s'écrit aussi : $\begin{cases} \theta_3 - \theta_2 = \dfrac{\pi}{3} \\ \theta_2 - \theta_1 = \dfrac{\pi}{3} \\ 2\theta_2 + \theta_3 = (\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) + (\theta_2 - \theta_1) = \dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{cases}$

Sa solution est : $\begin{cases} \theta_2 = \dfrac{1}{3}((2\theta_2 + \theta_3) - (\theta_3 - \theta_2)) = \dfrac{\pi}{6} + 2k\dfrac{\pi}{3} \\ \theta_3 = \theta_2 + \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\pi}{2} + 2k\dfrac{\pi}{3}\ . \\ \theta_1 = \theta_2 - \dfrac{\pi}{3} = -\dfrac{\pi}{6} + 2k\dfrac{\pi}{3} \end{cases}$

Les relations : $\rho_2 = 2\rho_1$; $\rho_3 = 2\rho_2$; $\rho_1\, \rho_2\, \rho_3 = 3\sqrt{3}$ donnent $8\rho_1^3 = 3\sqrt{3}$, d'où $\rho_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\rho_2 = \sqrt{3}$, $\rho_3 = 2\sqrt{3}$.

Les solutions cherchées sont donc :

- Pour $k = 0$

$$z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}\, e^{-i\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2}(\cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{4}(\sqrt{3} - i)$$

$$z_2 = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}} = \sqrt{3}(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}) = \sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt{3} + i)$$

$$z_3 = 2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}} = 2\sqrt{3}\ i\ .$$

$$z_1 = \frac{\sqrt{3}}{4}(\sqrt{3} - i)$$
$$z_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt{3} + i)$$
$$z_3 = 2\sqrt{3}\, i\,.$$

- Pour $k = 1$

$$z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} e^{i\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}\right)} = \frac{\sqrt{3}}{2}(cos\frac{\pi}{2} + i\, sin\frac{\pi}{2}) = \frac{\sqrt{3}}{2}\, i$$
$$z_2 = \sqrt{3}e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}\right)} = \sqrt{3}(-cos\frac{\pi}{6} + i\, sin\frac{\pi}{6}) = \sqrt{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt{3} - i)$$
$$z_3 = 2\sqrt{3}e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi}{3}\right)} = 2\sqrt{3}(-cos\frac{\pi}{6} - i\, sin\frac{\pi}{6}) = 2\sqrt{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right) = -\sqrt{3}(\sqrt{3} + i).$$

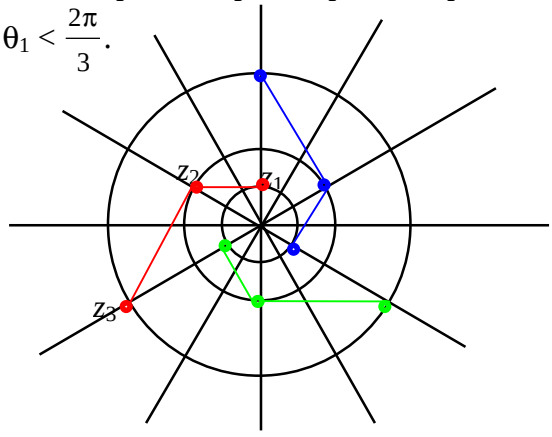
$$z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}\, i$$
$$z_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt{3} - i)$$
$$z_3 = -\sqrt{3}(\sqrt{3} + i)\,.$$

- Pour $k = 2$

$$z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} e^{i\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{4\pi}{3}\right)} = \frac{\sqrt{3}}{2}(-cos\frac{\pi}{6} - i\, sin\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{4}(\sqrt{3} + i)$$
$$z_2 = \sqrt{3}e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{4\pi}{3}\right)} = -\sqrt{3}i$$
$$z_3 = 2\sqrt{3}e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{4\pi}{3}\right)} = 2\sqrt{3}(cos\frac{\pi}{6} - i\, sin\frac{\pi}{6}) = 2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right) = \sqrt{3}(\sqrt{3} - i).$$

$$z_1 = -\frac{\sqrt{3}}{4}(\sqrt{3} + i)$$
$$z_2 = -\sqrt{3}\, i$$
$$z_3 = \sqrt{3}(\sqrt{3} - i)\,.$$

Les trois groupes de solutions peuvent être représentés dans le plan complexe : par exemple, le groupe marqué z_1 , z_2 , z_3 , est celui pour lequel $0 < \theta_1 < \frac{2\pi}{3}$.



EXERCICE 13.

Soit $a \in$ R, $n \in$ N, et soit, dans C :

E_1 , équation en Z : $Z^n = \dfrac{1+a\,i}{1-a\,i}$.

E_2 , équation en z : $\left(\dfrac{1+z\,i}{1-z\,i}\right)^n = \dfrac{1+a\,i}{1-a\,i}$.

1° Démontrer que toute solution de E_1 a pour module 1, et que toute solution de E_2 est réelle.

2° Soit $a = 0$, $n = 3$. Résoudre E_2 .

SOLUTION.

1°/ Cas général.

Comme a est réel, $\dfrac{1+a\,i}{1-a\,i}$ est le rapport de deux nombres complexes conjugués : c'est donc un nombre complexe de module 1, puisque son module est le rapport des modules de deux nombres de même module. On a alors :

$$|Z^n| = |Z|^n = \left|\frac{1+ai}{1-ai}\right| = 1 \Rightarrow |Z| = 1.$$

La résolution de l'équation E_1 ramène la résolution de l'équation E_2 à la résolution de :

$$\frac{1+zi}{1-zi} = Z$$

Lorsque Z est solution de l'équation E_1 , la solution de l'équation E_2 est donnée par :

$$z = \frac{Z-1}{i(Z+1)} = i\,\frac{1-Z}{1+Z} = i\,\frac{(1-Z)(1+\overline{Z})}{(1+Z)(1+\overline{Z})} = i\,\frac{1-Z+\overline{Z}-Z\overline{Z}}{1+Z+\overline{Z}+Z\overline{Z}} = i\,\frac{-Z+\overline{Z}}{2+Z+\overline{Z}}$$ puisque $Z\overline{Z} = |Z|^2 = 1$.

$$z = i\,\frac{-2i\,\Im(Z)}{2(1+\Re(Z))}$$

$$z = \frac{\Im(Z)}{1+\Re(Z)},$$

z est un nombre réel, puisque c'est le rapport de deux nombres réels.

2°/ Cas particulier.

Pour $a = 0$ et $n = 3$, l'équation E_1 s'écrit : $Z^3 = 1$. Ses solutions sont $\{\ 1\ ,\ e^{i\frac{2\pi}{3}}\ ,\ e^{-i\frac{2\pi}{3}}\ \}$. A chacune de ces solutions correspond une solution de l'équation E_2 : $\left(\dfrac{1+zi}{1-zi}\right)^3 = 1$. La formule $z = \dfrac{\Im(Z)}{1+\Re(Z)}$ donne les solutions :

$$z_1 = 0\ ;\ z_2 = \frac{\sin\frac{2\pi}{3}}{1+\cos\frac{2\pi}{3}} = \frac{2\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{3}}{1+2\cos^2\frac{\pi}{3}-1} = \tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}\ ;\ z_3 = -z_2 = -\sqrt{3}$$

Les solutions z_3 et z_2 sont opposées car les solutions $e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $e^{-i\frac{2\pi}{3}}$ sont conjuguées, et elles donc la même partie réelle et des parties imaginaires opposées.

Les solutions de l'équation $\left(\dfrac{1+zi}{1-zi}\right)^3 = 1$ sont $\{\ 0\ ,\ \sqrt{3}\ ,\ -\sqrt{3}\ \}$

EXERCICE 14.

On se propose de résoudre dans $\mathbb{C}$: $z^3 - 6\,(1+i)\,z^2 + 24\,i\,z - 11 - 16\,i = 0$.
Soit H l'homothétie de rapport $\frac{1}{3}$, dont le centre est I d'affixe $(-1-i)$.
Pour tout point m, d'affixe z, $H(m) = M$, d'affixe Z.

1° Calculer Z en fonction de z, puis z en fonction de Z.
2° Démontrer que z est solution de l'équation proposée si, et seulement si, Z est solution de : $Z^3 = 1$.
3° Résoudre la seconde équation. En déduire les solutions de la première.

SOLUTION.

1° Etude de l'homothétie H.

L'homothétie H est définie par la relation : $\overrightarrow{IM} = \frac{1}{3}\,\overrightarrow{Im}$. Sur les composantes, cette égalité vectorielle se traduit par les relations :

$$X - (-1) = \frac{1}{3}\,(x - (-1)) \text{ et } Y - (-1) = \frac{1}{3}\,(y - (-1))$$

$$X = -1 + \frac{1}{3}\,(x+1) \text{ et } Y = -1 + \frac{1}{3}\,(y+1)$$

$$X + i\,Y = -1 - i + -1 + \frac{1}{3}\,(x + i\,y + 1 + i)$$

soit, en posant $h = -1 - i$, affixe du centre d'homothétie I :

$$\boxed{Z - h = \frac{1}{3}\,(z - h)}$$

Un vecteur est représenté par la différence entre l'affixe de l'extrémité, moins l'affixe de l'origine.

$$Z = \frac{z}{3} + \frac{2h}{3} = \frac{z}{3} - \frac{2}{3}\,(1+i)$$

$$\boxed{Z = \frac{z}{3} - \frac{2}{3}\,(1+i)}$$

La relation réciproque donne z en fonction de Z :

$$\boxed{z = 3\,Z + 2\,(1+i)}$$

2° Transformation de l'équation proposée.

Pour aboutir à $Z^3 = 1$, calculons le cube de $3\,Z = z - 2\,(1+i)$
$(3\,Z)^2 = (z - 2\,(1+i))^2$
On a $(1+i)^2 = 2\,i$.
$(3\,Z)^2 = z^2 - 4\,(1+i)\,z + 4\,(1+i)^2$
$(3\,Z)^2 = z^2 - 4\,(1+i)\,z + 8\,i$
$(3\,Z)^3 = (z^2 - 4\,(1+i)\,z + 8\,i)(z - 2\,(1+i))$
$(3\,Z)^3 = z^3 - 4\,(1+i)\,z^2 + 8\,i\,z - 2\,(1+i)\,z^2 + 8\,(1+i)^2\,z - 16\,i\,(1+i)$
$(3\,Z)^3 = z^3 - 6\,(1+i)\,z^2 + 24\,i\,z + 16 - 16\,i$
$(3\,Z)^3 = (z^3 - 6\,(1+i)\,z^2 + 24\,i\,z - 11 - 16\,i) + 27$

$$\boxed{z^3 - 6\,(1+i)\,z^2 + 24\,i\,z - 11 - 16\,i = 27\,(Z^3 - 1)}$$

L'équation : $z^3 - 6\,(1+i)\,z^2 + 24\,i\,z - 11 - 16\,i = 0$ est donc équivalente à l'équation : $Z^3 = 1$.

3° Résolution de l'équation proposée.

Les solutions de l'équation $Z^3 = 1$ sont les $e^{i \frac{2 k \pi}{3}}$, $k = 0, 1, 2$.
Les solutions z correspondantes de l'équation : $z^3 - 6 (1 + i) z^2 + 24 i z - 11 - 16 i = 0$, sont donc données par :
$z = 3 Z + 2 (1 + i) = 3 e^{i \frac{2 k \pi}{3}} + 2 (1 + i) = 3 cos\frac{2 k \pi}{3} + 2 + i (3 sin\frac{2 k \pi}{3} + 2)$, avec $k = 0, 1, 2$.

Pour $k = 0$: $z_0 = 5 + 2 i$.

Pour $k = 1$: $z_1 = \frac{1}{2} + i (2 + 3\frac{\sqrt{3}}{2})$.

Pour $k = 2$: $z_2 = \frac{1}{2} + i (2 - 3\frac{\sqrt{3}}{2})$.

L'équation $z^3 - 6 (1 + i) z^2 + 24 i z - 11 - 16 i = 0$ admet trois solutions :

$5 + 2 i$, $\frac{1}{2} + i (2 + 3\frac{\sqrt{3}}{2})$, $\frac{1}{2} + i (2 - 3\frac{\sqrt{3}}{2})$.

EXERCICE 15.

1°/ Quel est l'ensemble (C) des points z du plan complexe vérifiant : $\left|\frac{z-1}{z+1}\right| = k$, k constante réelle positive.

2°/ Application : $k = 2$. Définir (C) .

3°/ On pose $Z = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z} \right)$. Calculer $\left| \frac{Z-1}{Z+1} \right|$ en fonction de z.

4°/ Quel est l'ensemble (C') décrit par les points Z du plan complexe lorsque z décrit le cercle (C) ?

5°/ Application : $k = 2$. Définir (C').

SOLUTION.

1°/ *Ensemble (C).*

La relation $\left|\frac{z-1}{z+1}\right| = k$, k constante réelle positive, définit l'ensemble (C) comme l'ensemble des points dont la distance aux points fixes 1 et –1 du plan complexe est une constante. Cet ensemble (C) est donc un cercle du faisceau de cercles à points limites –1 et 1.
On peut le définir de façon plus précise en établissant son équation :

$$|z-1| = \sqrt{(x-1)^2 + y^2} \; ; \; |z+1| = \sqrt{(x+1)^2 + y^2} \; ;$$

$$\frac{|z-1|}{|z+1|} = k \quad \Leftrightarrow \quad (x-1)^2 + y^2 = k^2 \left[(x+1)^2 + y^2 \right]$$

$$\Leftrightarrow \quad (k^2-1)\, x^2 + 2\,(k^2+1)\, x + (k^2-1)\, y^2 = 1 - k^2.$$

Lorsque k^2 est différent de 1, cette relation équivaut à :

$$\left(x + \frac{k^2+1}{k^2-1} \right)^2 + y^2 = \left(\frac{k^2+1}{k^2-1} \right)^2 - \frac{1}{k^2-1} = \frac{4k^2}{\left(k^2-1\right)^2}$$

C'est l'équation d'un cercle (C) de centre $\left(x = \frac{1+k^2}{1-k^2} \; ; \; y = 0 \right)$ et de rayon $r = \frac{2\,|k|}{\left|k^2-1\right|}$.

Lorsque $k^2 = 1$, c'est-à-dire lorsque $k = 1$ puisque k est une constante positive, l'équation :

$$(k^2-1)\, x^2 + 2\,(k^2+1)\, x + (k^2-1)\, y^2 = 1 - k^2$$

se réduit à :

$$x = 0$$

C'est l'équation d'une doite qui est la médiatrice du segment joignant les points –1 et +1, c'est l'axe imaginaire pur.

2°/ *Cas particulier.*

Dans le cas où $k = 2$, l'équation du cercle (C) est :

$$\left(x + \frac{5}{3} \right)^2 + y^2 = \frac{16}{9}$$

C'est l'équation d'un cercle de centre $\left(x = -\frac{5}{3} \; ; \; y = 0 \right)$ et de rayon $r = \frac{4}{3}$.

3°/ Calcul de $\left| \frac{Z-1}{Z+1} \right|$.

$$\left| \frac{Z-1}{Z+1} \right| = \left| \frac{\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)-1}{\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)+1} \right| = \left| \frac{z^2-2z+1}{z^2+2z+1} \right| = \left| \frac{(z-1)^2}{(z+1)^2} \right| = \left| \frac{z-1}{z+1} \right|^2$$

4°/ Ensemble (C').

Lorsque z décrit le cercle *(C)*, on a : $\left|\frac{z-1}{z+1}\right| = k$, d'où $\left| \frac{Z-1}{Z+1} \right| = k^2$. D'après la première question, ceci montre que les points Z sont, lorsque k est différent de 1, sur le cercle *(C')* de centre $\left(X = \frac{1+k^4}{1-k^4} \; ; \; Y = 0 \right)$ et de rayon $R = \frac{2k^2}{\left| k^4-1 \right|}$.

Réciproquement, si Z est un point de ce cercle, la relation $Z = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z} \right)$ montre que Z est l'image d'un point z vérifiant $z^2 - 2\,z\,Z + 1 = 0$. Dans $\mathbb{C}$, cette équation a deux racines z_1 et z_2 vérifiant toutes deux la relation :

$$\left|\frac{z-1}{z+1}\right| = \sqrt{\left| \frac{Z-1}{Z+1} \right|} = k$$

et l'application $z \to Z$ est une surjection de *(C)* sur *(C')*. Ceci montre que lorsque z décrit le cercle *(C)*, Z décrit le cercle *(C')* tout entier.

Dans le cas particulier où $k = 1$, on a aussi $\left| \frac{Z-1}{Z+1} \right| = 1$ et *(C')* est aussi la médiatrice du segment joignant les points -1 et $+1$, c'est-à-dire l'axe des y. On peut dire que la transformation $Z = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z} \right)$ laisse invariant dans son ensemble l'axe des y.

5°/ Application : k = 2.

Le cercle *(C')* est le cercle de centre $\left(X = -\frac{9}{7} \; ; \; Y = 0 \right)$ et de rayon $R = \frac{8}{7}$.

6°/ Remarque.

Les points d'intersection du cercle *(C')* avec l'axe des x sont définis par la relation $Y = 0$ sur le cercle *(C')*. Ils vérifient donc :

$$(k^4 - 1)\,X^2 + 2\,(k^4 + 1)\,X = 1 - k^4 \text{ soit, pour } k \text{ différent de 1, } X^2 + 2\,\frac{k^4+1}{k^4-1}\,X + 1 = 0$$

Ce sont les points :

$$\left(X = -\frac{k^4+1}{k^4-1} \pm \sqrt{\left(\frac{k^4+1}{k^4-1} \right)^2 - 1} \; ; Y = 0 \right) \text{ soit : } \left(X = -\frac{k^4+1}{k^4-1} \pm \frac{2k^2}{\left| k^4-1 \right|} \; ; \; Y = 0 \right)$$

ou $\left(X = -\dfrac{\left(k^2 \pm 1\right)^2}{\left(k^2-1\right)\left(k^2+1\right)} \; ; \; Y = 0 \right)$ ou encore $\left(X = -\dfrac{k^2+1}{k^2-1} \; ; \; Y = 0 \right)$ et $\left(X = -\dfrac{k^2-1}{k^2+1} \; ; \; Y = 0 \right)$

On voit donc que le cercle *(C')* ***passe par le centre*** du cercle *(C)* défini par $\left(x = \dfrac{1+k^2}{1-k^2} \; ; \; y = 0 \right)$.

EXERCICE 16.

1°/ Déterminez les nombres complexes solutions de l'équation : $z^4 = 1$.
2°/ Déterminez sous forme trigonométrique les solutions de l'équation : $z^4 = 8\,(1 - i\sqrt{3}\,)$.
3°/ Soit $a = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} + i\,\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$. Vérifiez : $a^4 = 8\,(1 - i\sqrt{3}\,)$. En déduire sous forme algébrique les résultats du 2°/.
4°/ Des questions 2°/ et 3°/, déduire les valeurs exactes de $\cos\dfrac{11\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{11\pi}{12}$.

SOLUTION.

1°/ Solutions de l'équation $z^4 = 1$.

L'équation $z^4 = 1$ s'écrit aussi $z^4 - 1 = 0$, soit $(z^2 - 1)(z^2 + 1) = 0$, ou $(z - 1)(z + 1)(z - i)(z + i) = 0$. Ses solutions sont :

$$z = 1 \quad z = -1 \quad z = i \quad z = -i$$

2°/ Résolution de l'équation $z^4 = 8\,(1 - i\sqrt{3}\,)$ sous forme trigonométrique.

Posons $z = \rho\, e^{i\,\theta}$. L'équation $z^4 = 8\,(1 - i\sqrt{3}\,)$ s'écrit $\rho^4\, e^{4\,i\,\theta} = 16\,(\dfrac{1}{2} - i\sqrt{3}\,) = 16\,(\cos\dfrac{\pi}{3} - i\sin\dfrac{\pi}{3})$, soit $\rho^4 = 16\; e^{-\,i\,\frac{\pi}{3}}$. Elle équivaut donc à :

$$\rho^4 = 16 \quad \text{et} \qquad e^{4\,i\,\theta} = e^{-\,i\,\frac{\pi}{3}}.$$

Ses solutions sont données par :

$$\rho = 2 \quad \text{et} \qquad \theta = -\frac{\pi}{12} + k\,\frac{\pi}{2}$$

Ces solutions correspondent à quatre nombres complexes. Pour avoir les solutions avec un argument compris entre 0 et $2\,\pi$, il faut prendre $k = 1$, $k = 2$, $k = 3$, $k = 4$. D'où les solutions :

$$z_1 = 2\,(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12})$$
$$z_2 = 2\,(\cos(\frac{5\pi}{12} + \frac{\pi}{2}) + i\sin(\frac{5\pi}{12} + \frac{\pi}{2})) = i\,z_1$$
$$z_3 = 2\,(\cos(\frac{5\pi}{12} + \pi) + i\sin(\frac{5\pi}{12} + \pi)) = -z_1$$
$$z_4 = 2\,(\cos(\frac{5\pi}{12} + 3\,\frac{\pi}{2}) + i\sin(\frac{5\pi}{12} + 3\,\frac{\pi}{2})) = -i\,z_1$$

3°/ Calcul du nombre complexe a^4.

$$a^2 = \left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} + i\,\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\right) \times \left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} + i\,\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\right)$$
$$= \left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 2\,i\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\right) \times \left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\right) + i^2\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\right)^2$$
$$= \frac{6-2\sqrt{12}+2}{4} + 2\,i\,\frac{6-2}{4} - \frac{6+2\sqrt{12}+2}{4}$$

$= -\sqrt{12} + 2i$
$= -2(\sqrt{3} - i)$

$a^4 = 4(\sqrt{3} - i)^2$
$= 4(3 - 2i\sqrt{3} + i^2)$
$= 4(2 - 2i\sqrt{3})$
$= 8(1 - i\sqrt{3})$

$$a^4 = 8(1 - i\sqrt{3})$$

Cette relation montre que le nombre complexe a est solution de l'équation $z^4 = 8(1 - i\sqrt{3})$. C'est donc l'une des quatre solutions trouvées plus haut. Comme le nombre complexe a possède une partie réelle positive et une partie imaginaire positive, il est situé dans le premier quadrant, c'est donc la solution z_1 . Les solutions de l'équation $z^4 = 8(1 - i\sqrt{3})$ peuvent alors être écrites sous forme algébrique :

$$z_1 = 2\left(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}\right) = a = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$$
$$z_2 = 2\left(\cos\left(\frac{5\pi}{12} + \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{12} + \frac{\pi}{2}\right)\right) = ia = -\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$$
$$z_3 = 2\left(\cos\left(\frac{5\pi}{12} + \pi\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{12} + \pi\right)\right) = -a = -\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$$
$$z_4 = 2\left(\cos\left(\frac{5\pi}{12} + 3\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{12} + 3\frac{\pi}{2}\right)\right) = -ia = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$$

4°/ Valeurs exactes de certains cosinus ou sinus.

La valeur de z_1 permet d'écrire :

$$\cos\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \quad \text{et} \quad \sin\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

La valeur de z_2 permet d'écrire :

$$\cos\frac{11\pi}{12} = -\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \quad \text{et} \quad \sin\frac{11\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

EXERCICE 17.

λ, α, β étant trois constantes données réelles ou complexes, montrez que les solutions de l'équation :

$$\lambda^n (z-\alpha)^n - (z-\beta)^n = 0$$

sont toutes sur une même circonférence. Calculez la position du centre et le rayon de cette circonférence. Exprimer l'affixe z_c du centre et le rayon t de cette circonférence en fonction de α, β et λ.

SOLUTION.

Remarques préliminaires.

Pour $n < 0$, on peut poser $m = -n$ et l'équation devient :
$\lambda^{-m} (z-\alpha)^{-m} - (z-\beta)^{-m} = 0$
$\lambda^{-m} (z-\alpha)^{-m} = (z-\beta)^{-m}$
$\lambda^{m} (z-\alpha)^{m} = (z-\beta)^{m}$
$\lambda^{m} (z-\alpha)^{m} - (z-\beta)^{m} = 0$
On peut donc supposer $n \geq 0$, sinon on remplacera n par $-n$.

Pour $n = 0$, avec $\lambda \neq 0$, l'équation s'écrit $1 - 1 = 0$ lorsque z est différent de α et de β. La solution est donc donnée par $z \neq \alpha$ et $z \neq \beta$. Le cas $n = 0$ et $\lambda = 0$ est indéterminé : on l'élimine d'office. On supposera désormais $n > 0$.

Si $\lambda = 0$, l'équation se réduit à $(z-\beta)^n = 0$. Sa seule solution est $z = \beta$.
Nous supposerons désormais $\lambda \neq 0$.

Si $\alpha = \beta$, l'équation se réduit à $(z-\alpha)^n (\lambda^n - 1) = 0$. Si λ est racine n-ième de l'unité, donc de la forme $e^{ik\frac{2\pi}{n}}$, l'équation est toujours vérifiée, quel que soit z : tout nombre complexe z est solution. Si λ n'est pas racine n-ième de l'unité, la seule solution est $z = \alpha = \beta$.
Dans la suite, nous supposerons donc n entier > 0, $\lambda \neq 0$, $\alpha \neq \beta$.

1° Résolution de l'équation.

L'équation $\lambda^n (z-\alpha)^n - (z-\beta)^n = 0$ s'écrit $\left(\frac{z-\beta}{\lambda(z-\alpha)} \right)^n = 1$. Sa solution est donnée par l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité : $\frac{z-\beta}{\lambda(z-\alpha)} = e^{ik\frac{2\pi}{n}}$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$. On en déduit :

$$z - \beta = \lambda (z-\alpha) e^{ik\frac{2\pi}{n}}$$
$$z (1 - \lambda e^{ik\frac{2\pi}{n}}) = \beta - \alpha \lambda e^{ik\frac{2\pi}{n}}$$

Deux cas sont alors à envisager :

- ou bien λ est l'une des racines n-ièmes de l'unité, et dans ce cas, $\lambda^n = 1$. L'équation de départ est :
$$(z-\alpha)^n = (z-\beta)^n$$
Ses solutions sont données par $\frac{z-\beta}{z-\alpha} = e^{ik\frac{2\pi}{n}}$:
$$z = \frac{\beta - \alpha e^{ik\frac{2\pi}{n}}}{1 - e^{ik\frac{2\pi}{n}}},$$
avec $k = 1, 2, \ldots, n-1$. La solution qui correspondrait à $k = 0$ est exclue par la condition $\alpha \neq \beta$.

- ou bien λ n'est pas racine n-ième de l'unité, et, dans ce cas, $1 - \lambda\, e^{i k \frac{2\pi}{n}}$ est toujours différent de 0. Les solutions sont données par :

$$z = \frac{\beta - \alpha\,\lambda\, e^{i k \frac{2\pi}{n}}}{1 - \lambda\, e^{i k \frac{2\pi}{n}}}\ ,\ k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Sous cette forme, on n'est guère renseigné sur la position des solutions de l'équation dans le plan complexe. Nous verrons que, dans certains cas, ces solutions sont alignées, dans d'autres cas, elles sont sur un même cercle.

2° Les solutions sont sur un même cercle ou sur une même droite.

Soient M, A, B, les points d'affixes respectives z, α, β.

La relation $\left(\frac{z-\beta}{\lambda(z-\alpha)} \right)^n = 1$ entraîne $\left| \frac{z-\beta}{\lambda(z-\alpha)} \right| = 1$, soit $|z-\beta| = |\lambda|\,|z-\alpha|$.

1er cas : $|\lambda| = 1$.

La relation s'écrit : $|z-\beta| = |z-\alpha|$ ou encore $BM = AM$.

Les solutions sont sur la médiatrice du segment AB.

2e cas : $|\lambda| \neq 1$.

Comme les modules sont nombres réels positifs, cette relation est équivalente à $|z-\beta|^2 = |\lambda|^2\,|z-\alpha|^2$. Sous forme géométrique, cette relation s'exprime par :

$BM^2 = |\lambda|^2\, AM^2$

$\Leftrightarrow \quad BM^2 - |\lambda|^2\, AM^2 = 0$

$\Leftrightarrow \quad (\overrightarrow{BM} + |\lambda|\ \overrightarrow{AM}).(\overrightarrow{BM} - |\lambda|\ \overrightarrow{AM}) = 0$

Introduisons le **barycentre I des points B et A affectés respectivement des coefficients 1 et $|\lambda|$.** Il est défini par :

$$(1 + |\lambda|)\ \overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OB} + |\lambda|\ \overrightarrow{OA}$$

Son affixe z_I vérifie donc :

$$(1 + |\lambda|)\, z_I = \beta + |\lambda|\,\alpha$$

$$z_I = \frac{\beta + |\lambda|\,\alpha}{1 + |\lambda|}$$

et point tout point M du plan, la propriété suivante est vraie :

$$(1 + |\lambda|)\ \overrightarrow{IM} = \overrightarrow{BM} + |\lambda|\ \overrightarrow{AM}$$

Considérons maintenant le **barycentre J des points B et A affectés respectivement des coefficients 1 et $-|\lambda|$.** Il est défini par :

$$(1 - |\lambda|)\ \overrightarrow{OJ} = \overrightarrow{OB} - |\lambda|\ \overrightarrow{OA}$$

Son affixe z_I vérifie donc :

$$(1 - |\lambda|)\, z_J = \beta - |\lambda|\,\alpha$$

Pour $|\lambda| \neq 1$, il vient :

$$z_J = \frac{\beta - |\lambda|\,\alpha}{1 - |\lambda|}$$

et, pour tout point M du plan :

$$(1 - |\lambda|)\ \overrightarrow{JM} = \overrightarrow{BM} - |\lambda|\ \overrightarrow{AM}$$

La propriété : $(\overrightarrow{BM} + |\lambda|\ \overrightarrow{AM}).(\overrightarrow{BM} - |\lambda|\ \overrightarrow{AM}) = 0$ s'écrit alors :

$$(1 - |\lambda|^2)\ \overrightarrow{IM}\ .\ \overrightarrow{JM} = 0$$

Pour $|\lambda|^2 \neq 1$, cette relation est équivalente à $\overrightarrow{IM}\ .\ \overrightarrow{JM} = 0$. Cette dernière relation montre que les vecteurs $\overrightarrow{IM}$ et $\overrightarrow{JM}$ sont perpendiculaires, donc :

Les solutions de l'équation sont, pour $|\lambda| \neq 1$, sur le cercle de diamètre IJ .

Le centre C du cercle est le milieu du segment IJ. Le rayon r du cercle est la moitié du diamètre IJ.
L'affixe de C est donnée par :

$$z_C = \frac{1}{2}(z_I + z_J) = \frac{1}{2}\left(\frac{\beta + |\lambda|\,\alpha}{1 + |\lambda|} + \frac{\beta - |\lambda|\,\alpha}{1 - |\lambda|}\right)$$

$$\boxed{z_C = \frac{\beta - |\lambda|^2\,\alpha}{1 - |\lambda|^2}}$$

Le rayon r est donné par :

$$r = \frac{1}{2}|z_I - z_J| = \frac{1}{2}\left|\frac{\beta + |\lambda|\,\alpha}{1 + |\lambda|} - \frac{\beta - |\lambda|\,\alpha}{1 - |\lambda|}\right|$$

$$\boxed{r = \frac{|\alpha - \beta|\,|\lambda|}{|1 - |\lambda|^2|}}$$

Remarques finales.

Maintenant que l'affixe du centre est connue, nous pouvons envisager de modifier la forme des solutions :

$$z = \frac{\beta - \alpha\lambda e^{ik\frac{2\pi}{n}}}{1 - \lambda e^{ik\frac{2\pi}{n}}},\ k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

$$z - z_C = \frac{\beta - \alpha\lambda e^{ik\frac{2\pi}{n}}}{1 - \lambda e^{ik\frac{2\pi}{n}}} - \frac{\beta - |\lambda|^2\,\alpha}{1 - |\lambda|^2} = \frac{\beta - \alpha + \alpha - \alpha\lambda e^{ik\frac{2\pi}{n}}}{1 - \lambda e^{ik\frac{2\pi}{n}}} - \frac{\beta - \alpha + \alpha - |\lambda|^2\,\alpha}{1 - |\lambda|^2}$$

$$z - z_C = (\beta - \alpha)\left(\frac{1}{1 - \lambda e^{ik\frac{2\pi}{n}}} - \frac{1}{1 - |\lambda|^2}\right)$$

$$z - z_C = (\beta - \alpha)\frac{1 - |\lambda|^2 - 1 + \lambda e^{i\frac{2k\pi}{n}}}{\left(1 - |\lambda|^2\right)\left(1 - \lambda e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right)} = \frac{(\alpha - \beta)\lambda}{1 - |\lambda|^2} \times \frac{1 - \overline{\lambda}\, e^{-i\frac{2k\pi}{n}}}{1 - \lambda e^{i\frac{2k\pi}{n}}} \times e^{i\frac{2k\pi}{n}}.$$

Comme le rapport $\dfrac{1 - \overline{\lambda}\, e^{-i\frac{2k\pi}{n}}}{1 - \lambda e^{i\frac{2k\pi}{n}}}$ est le rapport de deux nombres complexes conjugués, son module est 1. Le module de $e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ est 1 aussi. Donc le module de $z - z_C$ est $\dfrac{|\alpha - \beta||\lambda|}{|1 - |\lambda|^2|}$, il ne dépend pas de k, c'est le même pour toutes les solutions de l'équation. Cette propriété montre bien que les solutions sont sur un même cercle de centre z_C et de rayon $\dfrac{|\alpha - \beta||\lambda|}{|1 - |\lambda|^2|}$.

Arithmétique

e-mail

1. **Identités remarquables.**
2. **Factorisation.**
3. **Division euclidienne.**
4. **Nombres premiers.**
5. **Division euclidienne des polynômes.**

Accueil

Exercices

Identités remarquables.

1. **Carré, cube.**
2. **Formule_du binôme.**
3. **Puissances *n*.**
4. **Parties à *k* + 1 éléments dans un ensemble à *n* + 1 éléments.**

Carré, cube.

$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$
$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + a\,b + b^2)$
$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - a\,b + b^2)$

HAUT

Formule du binôme.

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$(a-b)^n = \sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k} (-1)^k a^{n-k} b^k$$

Le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ est donné par la formule : $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

HAUT

Puissances *n*.

$a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a+b) \sum_{k=0}^{k=2n} (-1)^k a^k b^{2n-k}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$a^n - b^n = (a-b) \sum_{k=0}^{k=n-1} a^k b^{n-1-k}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

HAUT

Parties à $k + 1$ éléments dans un ensemble à $n + 1$ éléments.

(Théorie des ensembles, Chapitre 8, Exercice 1)

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n-1}{k} + \ldots + \binom{k}{k}$$

HAUT

Chapitre 1. Identités remarquables.

Exercices

Exercice 1. Produit de 4 entiers consécutifs.
Exercice 2. Multiple de 7.
Exercice 3. Multiple de 13.
Exercice 4. Diviseur de $(n+1)^n - 1$.
Exercice 5. Multiple de 343.
Exercice 6. Carré parfait.
Exercice 7. Multiple de 20801.
Exercice 8. Multiple de 7.
Exercice 9. Nombres de Mersenne.
Exercice 10. Nombres de Fermat.
Exercice 11. Un petit jeu.

Exercice 1. Produit de 4 entiers consécutifs.

Montrer que le produit de quatre entiers consécutifs augmenté de 1 est le carré d'un entier.	Solution

HAUT

Exercice 2. Multiple de 7.

Montrer que $3^{512} - 2^{256}$ est un multiple de 7.	Solution

HAUT

Exercice 3. Multiple de 13.

Montrer que $2^{70} + 3^{70}$ est un multiple de 13.	Solution

HAUT

Exercice 4. Diviseur de $(n + 1)^n - 1$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que n^2 divise $(n + 1)^n - 1$.	Solution

HAUT

Exercice 5. Multiple de 343.

Montrer que 343 divise $2^{147} - 1$.	Solution

HAUT

Exercice 6. Carré parfait.

Déterminer le plus petit entier naturel n, $n \geqslant 2$, tel que $\sum_{k=0}^{k=n} k^2$ soit un carré parfait.	Solution

HAUT

Exercice 7. Multiple de 20801.

Montrer que 20 801 divise $20^{15} - 1$.	Solution

HAUT

Exercice 8. Multiple de 7.

Montrer que 7 divise $2\,222^{5\,555} + 5\,555^{2\,222}$.	Solution

HAUT

Exercice 9. Nombres de Mersenne.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $M_n = 2^n - 1$ (M_n est appelé un nombre de Mersenne).
1°/ Montrer que si $n \geqslant 2$, et si M_n est premier, alors n est premier.
2°/ Etudier la réciproque de cette propriété.

Solution

HAUT

Exercice 10. Nombres de Fermat.

Soit $a \in \mathbb{N}$, $a \geqslant 2$, et soit $m \in \mathbb{N}^*$. Montrer que si $a^m + 1$ est premier, alors m est une puissance de 2. Pour $a = 2$, les nombres $2^{2^n} + 1$ sont appelés les nombres de Fermat.	Solution

HAUT

Exercice 11. Un petit jeu.

Voici un petit jeu de société. Demandez à un volontaire de, successivement :

– écrire un nombre de 3 chiffres dont le premier et le dernier sont différents.
– écrire ce nombre à l'envers.
– soustraire le plus petit du plus grand des deux nombres ainsi obtenus.
– si le résultat de la soustraction n'a que deux chiffres, ajouter un 0 devant pour avoir un nombre de 3 chiffres.
– écrire ce résultat à 3 chiffres à l'envers.
– additionner les deux nombres obtenus.
– soustraire de cette somme l'âge qu'il a ou aura à son anniversaire cette année.
– additionner 917 (nous sommes en 2006).

Résultat de l'opération : l'année de naissance du volontaire.

Question : expliquez pourquoi.

Solution

HAUT

Chapitre 1. Identités remarquables.

Enoncés.

Exercice 1. Produit de 4 entiers consécutifs.

Montrer que le produit de quatre entiers consécutifs augmenté de 1 est le carré d'un entier.	

Solution.

Le produit de quatre entiers consécutifs peut s'écrire :

$$n\,(n+1)\,(n+2)\,(n+3)$$

$$n\,(n+3) = n^2 + 3\,n$$
$$(n+1)(n+2) = n^2 + 3\,n + 2$$

Posons $m = n\,(n+3) = (n+1)\,(n+2) - 2$

$$n\,(n+1)\,(n+2)\,(n+3) = m\,(m+2) = m^2 + 2\,m$$
$$n\,(n+1)\,(n+2)\,(n+3) + 1 = m^2 + 2\,m + 1 = (m+1)^2$$

$$\boxed{n\,(n+1)\,(n+2)\,(n+3) + 1 = (n\,(n+3) + 1)^2 = ((n+1)\,(n+2) - 1)^2}$$

Chapitre 1. Identités remarquables.

Enoncés.

Exercice 2. Multiple de 7.

Montrer que $3^{512} - 2^{256}$ est un multiple de 7.	

Solution.

$$3^{512} - 2^{256} = 9^{256} - 2^{256}$$

Lemme.

$$a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{k=n-1} a^k\, b^{n-1-k}, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*.$$

Démonstration du lemme.

$a^n - b^n = b^n\left(\left(\frac{a}{b}\right)^n - 1\right)$, pour b différent de 0.

Or la somme d'une suite géométrique finie est donnée par :

$\sum_{k=0}^{k=n-1} c^k = \frac{c^n - 1}{c-1}$, pour c différent de 1.

$c^n - 1 = (c-1)\sum_{k=0}^{k=n-1} c^k$, pour c différent de 1.

Et cette dernière formule est vraie encore pour $c = 1$, où elle se réduit à $0 = 0$.
On a donc :

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n - 1 = \left(\frac{a}{b} - 1\right)\sum_{k=0}^{k=n-1}\left(\frac{a}{b}\right)^k$$

$$a^n - b^n = b^n\left(\frac{a}{b} - 1\right)\sum_{k=0}^{k=n-1}\left(\frac{a}{b}\right)^k$$

$$= (a-b)\sum_{k=0}^{k=n-1} a^k\, b^{n-1-k}, \text{ pour } b \text{ différent de 0.}$$

Et la formule est vraie encore pour $b = 0$ puisqu'alors le seul terme éventuellement non nul de la somme est obtenu pour $k = n - 1$.

Il résulte du lemme que $a^n - b^n$ est toujours divisible par $a - b$.

Cette propriété peut aussi être déduite du fait que $a^n - b^n$ est nul pour $a = b$.

Il résulte du lemme que l'on a :

$$3^{512} - 2^{256} = 9^{256} - 2^{256} = (9-2)\sum_{k=0}^{k=255} 9^k \times 2^{255-k} = 7 \times \sum_{k=0}^{k=255} 3^{2k} \times 2^{255-k}$$

Cette décomposition montre que :

$3^{512} - 2^{256}$ est divisible par 7 et le quotient de la division de $3^{512} - 2^{256}$ par 7 est $\sum_{k=0}^{k=255} 3^{2k} \times 2^{255-k}$

Chapitre 1. Identités remarquables.

Enoncés.

Exercice 3. Multiple de 13.

Montrer que $2^{70} + 3^{70}$ est un multiple de 13.	

Solution.

$$2^{70} + 3^{70} = 4^{35} + 9^{35}$$

Lemme

$$a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a+b) \sum_{k=0}^{k=2n} (-1)^k a^k b^{2n-k}$$

Démonstration du lemme.

$$a^{2n+1} + b^{2n+1} = -((-a)^{2n+1} - b^{2n+1}) = -(-a-b) \sum_{k=0}^{k=2n} (-1)^k a^k b^{2n-k}$$

d'après la formule du lemme de l'Exercice 2.

Il résulte du lemme que l'on a :

$$4^{35} + 9^{35} = (4+9) \sum_{k=0}^{k=34} (-1)^k 4^k 9^{34-k} = 13 \times \sum_{k=0}^{k=34} (-1)^k 2^{2k} 3^{68-2k}$$

$2^{70} + 3^{70}$ est divisible par 13 et le quotient de la division de $4^{35} + 9^{35}$ par 13 est $\sum_{k=0}^{k=34} (-1)^k 2^{2k} 3^{68-2k}$

Chapitre 1. Identités remarquables.

Enoncés.

Exercice 4. Diviseur de $(n + 1)^n - 1$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que n^2 divise $(n + 1)^n - 1$.	

Solution.

Pour $n = 1$, $(n + 1)^n - 1 = 1$, $n^2 = 1$, n^2 divise $(n + 1)^n - 1$.

Pour $n \geqslant 2$, d'après la **formule du binôme de Newton** (Algèbre, Chapitre 4, Exercice 1) :

$$(n + 1)^n = \sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k} n^k$$

Le terme correspondant à $k = 0$ est 1.
Le terme correspondant à $k = 1$ est n^2.
A partir de $k = 1$, on peut mettre n^2 en facteur :

$$(n + 1)^n = 1 + n^2 \left(1 + \sum_{k=2}^{k=n} \binom{n}{k} n^{k-2} \right)$$

$$(n + 1)^n - 1 = n^2 \left(1 + \sum_{k=2}^{k=n} \binom{n}{k} n^{k-2} \right)$$

Et cette décomposition montre que :

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, n^2 divise $(n + 1)^n - 1$ et le quotient de $(n + 1)^n - 1$ par n^2 est :

$$\begin{cases} 1 & \text{pour } n = 1 \\ 1 + \displaystyle\sum_{k=2}^{k=n} \binom{n}{k} n^{k-2} & \text{pour } n > 1 \end{cases}$$

Chapitre 1. Identités remarquables.

Enoncés.

Exercice 5. Multiple de 343.

Montrer que 343 divise $2^{147} - 1$.	

Solution.

$$343 = 7^3$$
$$147 = 3 \times 7^2.$$
$$2^{147} = 8^{7^2} = (7+1)^{7^2}$$

D'après la **formule du binôme** :

$$(7+1)^{7^2} = \sum_{k=0}^{k=7^2} \binom{7^2}{k} 7^k = 1 + 7^3 + \binom{7^2}{2} 7^2 + \sum_{k=3}^{k=7^2} \binom{7^2}{k} 7^k$$
$$= 1 + 7^3 + 24 \times 7^4 + 7^3 \sum_{k=3}^{k=7^2} \binom{7^2}{k} 7^{k-3}$$
$$= 1 + 7^3 \left(1 + 24 \times 7 + \sum_{k=3}^{k=7^2} \binom{7^2}{k} 7^{k-3} \right)$$

Cette formule montre que :

$7^3 = 343$ divise $2^{147} - 1$ et le quotient de $2^{147} - 1$ par 343 est $169 + \sum_{k=3}^{k=7^2} \binom{7^2}{k} 7^{k-3}$.

Chapitre 1. Identités remarquables.

Enoncés.

Exercice 6. Carré parfait.

Déterminer le plus petit entier naturel n, $n \geqslant 2$, tel que $\sum_{k=0}^{k=n} k^2$ soit un carré parfait.	

Solution.

1°/ Calcul de la somme des carrés.

$$\sum_{k=0}^{k=n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Démonstration.

Nous utiliserons la formule (Théorie des ensembles, Chapitre 8, Exercice 1) :

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n-1}{k} + \ldots + \binom{k}{k}$$

$$\sum_{k=0}^{k=n} k^2 = \sum_{k=0}^{k=n} k(k-1) + \sum_{k=0}^{k=n} k$$

$$\sum_{k=0}^{k=n} k = \sum_{k=1}^{k=n} \binom{k}{1} = \binom{n+1}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=0}^{k=n} k(k-1) = 2\sum_{k=2}^{k=n} \binom{k}{2} = 2\binom{n+1}{3} = \frac{(n-1)n(n+1)}{3} = \frac{1}{3}(n^3 - n)$$

Cette dernière formule peut s'énoncer sous forme de proposition :

Le **produit de trois nombres entiers consécutifs** n, $n+1$, $n+2$, $n \in \mathbb{N}^*$, est divisible par 3 et le quotient est :

$$\sum_{k=2}^{k=n+1} (k-1)\,k = 1.2 + \ldots + n.(n+1)$$

Autre forme : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, 3 divise $n^3 - n$ et le quotient est :
$0.1 + 1.2 + \ldots + n.(n+1)$.

$$\sum_{k=0}^{k=n} k^2 = \binom{n+1}{2} + 2\binom{n+1}{3} = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{(n-1)n(n+1)}{3} = \frac{n(n+1)}{6}(2(n-1)+3) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

2°/ Carré parfait.

Pour $n = 0$, $\sum_{k=0}^{k=n} k^2 = 0$ est le carré de 0.

Pour $n = 1$, $\sum_{k=0}^{k=n} k^2 = 1$ est le carré de 1.

Pour $n \geqslant 2$, $\sum_{k=0}^{k=n} k^2 = \frac{1}{24} 2n(2n+1)(2n+2)$.

Comme $2n + 1$ n'a aucun facteur premier commun avec ses voisins $2n$ et $2n + 2$, pour que $\frac{1}{24} 2n(2n+1)(2n+2)$ soit un carré parfait, il faudra, de deux choses, l'une :

— ou bien $2n + 1$ est le carré d'un nombre impair : $2n + 1 = (2m + 1)^2 \Rightarrow n = 2m(m + 1)$,

— ou bien $2n + 1$ est le produit par 3 ($24 = \mathbf{3} \times 8$) du carré d'un nombre impair : $2n + 1 = 3(2m + 1)^2 \Rightarrow n = 6m^2 + 6m + 1$, puisque, si $2n + 1$ est divisible par 3, le quotient doit être un carré de nombre impair.

Regardons les premières valeurs possibles pour n et les valeurs correspondantes de $\sum_{k=0}^{k=n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

	$n = 2m(m+1)$	$\sum_{k=0}^{k=n} k^2$	$n = 6m^2 + 6m + 1$	$\sum_{k=0}^{k=n} k^2$
$m = 0$			1	1
$m = 1$	4	30	13	819
$m = 2$	12	650		
$m = 3$	24	$4\,900 = (70)^2$		

Le problème est résolu : la plus basse valeur trouvée de $n \geqslant 2$ qui donne un $\sum_{k=0}^{k=n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ carré parfait est $n = 24$.

$$\boxed{\sum_{k=0}^{k=24} k^2 = (70)^2.}$$

Pour $n = 24$, $\frac{n}{6} = 4$ est un carré, $n + 1 = 25$ est un carré, et $2n + 1 = 49$ est un carré.

Chapitre 1. Identités remarquables.

Enoncés.

Exercice 7. Multiple de 20801.

Montrer que 20 801 divise $20^{15} - 1$.	

Solution.

La première chose à faire est de décomposer 20 801 en facteurs premiers.
2 + 8 + 1 = 11, donc 20 801 est divisible par 11 et le quotient est 1 891.
1 891 = 30 × 60 + (30 + 60) + 1 = 31 × 61.
31 et 61 sont premiers.
20 801 = 11 × 31 × 61.

1°/ La méthode informatique.

Maple 6 [ifactor (20^15-1); ifactor (20801);] donne :
$20^{15} - 1 = 11 \times 19 \times 31 \times 61 \times 251 \times 421 \times 3001 \times 261\,451$
20 801 = 11 × 31 × 61.
Les trois facteurs premiers de 20 801 sont tous des diviseurs de $20^{15} - 1$.
donc leur produit 20 801 divise $20^{15} - 1$.

2°/ La méthode arithmétique.

20 801 = 11 × 31 × 61.

$10 \equiv -1\ (11) \Rightarrow 10^5 \equiv (-1)^5 = -1\ (11)$
$2^5 = 32 \equiv -1\ (11)$
$2^5 \equiv -1\ (11)$ et $10^5 \equiv -1\ (11) \Rightarrow 20^5 = 2^5 \times 10^5 \equiv (-1) \times (-1) = 1\ (11)$
$20^5 \equiv 1\ (11) \Rightarrow 20^{15} \equiv 1\ (11)$
11 divise $20^{15} - 1$.

$5^3 = 125 \equiv 3\ (61)$
$4^3 = 64 \equiv 3\ (61)$
$20^3 \equiv 3^2\ (61)$
$20^{15} \equiv 3^{10}\ (61)$
$3^5 = 243 \equiv -1\ (61)$
$3^{10} \equiv 1\ (61)$
$20^{15} \equiv 1\ (61)$
61 divise $20^{15} - 1$.

$2^5 = 32 \equiv 1\ (31)$
$4^{15} = (2^5)^3 \equiv 1\ (31)$
$20^{15} = 4^{15} \times 5^{15} \equiv 5^{15}\ (31)$.
$125 = 4 \times 31 + 1 \Rightarrow 5^3 = 125 \equiv 1\ (31)$.
$5^{15} \equiv 1\ (31)$.
$20^{15} \equiv 5^{15}\ (31)$ et $5^{15} \equiv 1\ (31)$ Þ $20^{15} \equiv 1\ (31)$
31 divise $20^{15} - 1$.

Si les nombres premiers 11, 31, 61, divisent $20^{15} - 1$, leur produit 20 801 divise $20^{15} - 1$.

20 801 divise $20^{15} - 1$.

Chapitre 1. Identités remarquables.

Enoncés.

Exercice 8. Multiple de 7.

Montrer que 7 divise $2\,222^{5\,555} + 5\,555^{2\,222}$.	

Solution.

$1\,111 = 11 \times 101$
$2\,222 = 2 \times 11 \times 101$
$5\,555 = 5 \times 11 \times 101$

$2\,222 \equiv 3\ (7)$
$3^{11} = 177\,147 \equiv 5\ (7)$
$2\,222^{11} \equiv 5\ (7)$
$5^{5} = 3\,125 \equiv 3\ (7)$
$2\,222^{55} \equiv 3\ (7)$
$2\,222^{5\,555} \equiv 3^{101}\ (7)$

$5\,555 \equiv -3\ (7)$
$5\,555^{11} \equiv -3^{11}\ (7)$
$5\,555^{11} \equiv -5\ (7)$
$5\,555^{11} \equiv 2\ (7)$
$5\,555^{22} \equiv 2^{2} = 4\ (7)$
$5\,555^{22} \equiv -3\ (7)$
$5\,555^{2\,222} \equiv -3^{101}\ (7)$

$2\,222^{5\,555} + 5\,555^{2\,222} \equiv 3^{101} - 3^{101} = 0\ (7)$

7 divise $2\,222^{5\,555} + 5\,555^{2\,222}$.

Chapitre 1. Identités remarquables.

Enoncés.

Exercice 9. Nombres de Mersenne.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $M_n = 2^n - 1$ (M_n est appelé un nombre de Mersenne). 1°/ Montrer que si $n \geqslant 2$, et si M_n est premier, alors n est premier. 2°/ Etudier la réciproque de cette propriété.	

Solution.

1°/ M_n premier $\Rightarrow$ n premier.

Raisonnons par contraposition en montrant que n non premier implique M_n non premier.

Si n n'est pas premier, n est produit de deux facteurs k et h supérieurs ou égaux à 2.
$2^n - 1 = 2^{kh} - 1$
$2^{kh} - 1$ est divisible par $2^k - 1$ qui est supérieur ou égal à 3, et par $2^h - 1$ qui est supérieur ou égal à 3, donc $2^n - 1$ n'est pas premier.

2°/ Réciproque.

$2^{11} - 1 = 2\,047 = 23 \times 89$

Le fait que n soit premier n'implique pas que $2^n - 1$ soit premier. **Exemple** : $2^{11} - 1 = 2\,047 = 23 \times 89$.

Chapitre 1. Identités remarquables.

Enoncés.

Exercice 10. Nombres de Fermat.

Soit $a \in \mathbb{N}$, $a \geqslant 2$, et soit $m \in \mathbb{N}^*$. Montrer que si $a^m + 1$ est premier, alors m est une puissance de 2. Pour $a = 2$, les nombres $2^{2^n} + 1$ sont appelés les nombres de Fermat.	

Solution.

1°/ Lemme 1.

Quels que soient les entiers naturels b et p, on a :

$$b^{2p+1} + 1 \equiv 0 \pmod{b+1}$$

Démonstration du lemme 1.

Ce résultat est une simple application du résultat plus général (Chapitre 1, Définitions) :

$$a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a+b) \sum_{k=0}^{k=2n} (-1)^k a^k b^{2n-k}, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N},$$

avec a remplacé par b, b remplacé par a, n remplacé par p.

$$b^{2p+1} + 1 = (b+1) \sum_{k=0}^{k=2p} (-1)^k b^k$$

2°/ Lemme 2.

Quels que soient les entiers naturels a, m, p, on a :

$$a^{m(2p+1)} + 1 \equiv 0 \pmod{a^m + 1}$$

Démonstration du lemme 2.

Ce résultat est un simple application du lemme précédent dans lequel on a remplacé b par a^m.

3°/ Nombres de Fermat, lemme 3.

Si $a^m + 1$ est premier, alors m est une puissance 2.

Démonstration du lemme 3.

Tout entier naturel m peut toujours écrire, de façon unique, $m = 2^n (2p + 1)$, avec $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}$.
D'après le lemme 2,

$$a^m + 1 \equiv 0 \pmod{a^{2^n} + 1}$$

Or $a^m + 1$ est premier par hypothèse, donc s'il est divisible par $a^{2^n} + 1$, c'est qu'il est égal à $a^{2^n} + 1$, donc $m = 2^n$ et $p = 0$.

En particulier, pour $a = 2$, si $2^m + 1$ est premier, alors m est une puissance 2.

Les nombres de la forme $2^{2^n} + 1$ s'appelle les **nombres de Fermat**.

La réciproque est fausse. Les nombres de Fermat ne sont pas tous premiers.
En 1732, Euler a trouvé un contre-exemple pour $n = 5$: $2^{32} + 1 = 641 \times 6\,700\,417$.

Chapitre 1. Identités remarquables.

Enoncés.

Exercice 11. Un petit jeu.

Voici un petit jeu de société. Demandez à un volontaire de, successivement :

– écrire un nombre de 3 chiffres de 1 à 9, dont le premier et le dernier sont différents.
– écrire ce nombre à l'envers.
– soustraire le plus petit du plus grand des deux nombres ainsi obtenus.
– si le résultat de la soustraction n'a que deux chiffres, ajouter un 0 devant pour avoir un nombre de 3 chiffres.
– écrire ce résultat à 3 chiffres à l'envers.
– additionner les deux nombres obtenus.
– soustraire de cette somme l'âge qu'il a ou aura à son anniversaire cette année.
– additionner 917 (nous sommes en 2006).

Résultat de l'opération : l'année de naissance du volontaire.

Question : expliquez pourquoi.

Solution.

1°/ 1089.

Un nombre de 3 chiffres de 1 à 9, dont le premier et le dernier sont différents est égal à $100\,a + 10\,b + c$, avec $a \neq c$.
L'écrire à l'envers donne le nombre $100\,c + 10\,b + a$.
Supposons, pour fixer les idées, $c < a$.
Alors $100\,c + 10\,b + a < 100\,a + 10\,b + c$.
La soustraction du plus petit du plus grand donne le résultat $100\,(a - c) + (c - a) = 99\,(a - c)$.
b est éliminé.

Si $a - c = 1$, le résultat est 99, on ajoute un 0 devant : 099.
A l'envers, cela donne 990 et la somme est 990 + 099 = 1089.

Si $a - c > 1$, le résultat possède 3 chiffres et vaut $100\,(a - c - 1) + 10 \times 9 + (10 - (a - c))$, avec :
$1 \leqslant (a - c - 1) \leqslant 7$ et $2 \leqslant (10 - (a - c)) \leqslant 8$
Lorsqu'on l'écrit à l'envers, on obtient le nombre $100 \times (10 - (a - c)) + 10 \times 9 + (a - c - 1)$.
L'addition des deux nombres précédents donne : $100 \times 10 - 100 + 2 \times 10 \times 9 + 10 - 1 = 1089$.
a et c sont éliminés.

Ainsi, quel que soit le nombre de trois chiffres de 1 à 9 choisi, avec le premier chiffre différent du troisième, le résultat des premières manipulations est toujours 1089.

2°/ Année de naissance.

L'année actuelle, ici 2006, est toujours la somme de l'âge dans l'année, et de l'année de naissance.
Pour aller de 1089 à 2006, il faut ajouter 917.
Retrancher l'âge dans l'année donne alors l'année de naissance.
Comme les opérations sont commutatives, on peut d'abord retrancher l'âge, et ensuite ajouter 917 : le résultat est l'année de naissance.

Exercices

Factorisation.

1. **Décomposition en facteurs premiers : valuations.**
2. **Lemme de Gauss.**

Décomposition en facteurs premiers.

Tout entier peut se décomposer d'une façon unique, à l'ordre près, en produit de facteurs premiers.
Un nombre premier est un entier > 1, n'ayant pas de diviseur autre que 1 et lui-même.

Dans la décomposition $n = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \ldots p_k^{n_k}$ d'un entier n en facteurs premiers distincts, les n_j s'appellent les **valuations** des facteurs premiers p_j dans n.

HAUT

Lemme de Gauss.

Si un nombre premier divise un produit de nombres, il divise l'un des nombres.

HAUT

Chapitre 2. Factorisation.

Exercices

Exercice 1. Nombres premiers.
Exercice 2. Suite de nombres premiers.
Exercice 3. Restes de division euclidienne.
Exercice 4. Suite d'entiers consécutifs.
Exercice 5. Conjecture de Goldbach.
Exercice 6. Somme des cubes de 3 entiers consécutifs.
Exercice 7. Non multiple de 121.
Exercice 8. $n^4 + 4^n$ n'est pas premier.
Exercice 9. Nombres de six chiffres.
Exercice 10. PGCD et PPCM.
Exercice 11. Inverses de carrés.
Exercice 12. Entier relatif.
Exercice 13. Valuation de 2 dans Factorielle 1000.
Exercice 14. Facteur et âges.

Exercice 1. Nombres premiers.

Le nombre 1 000 000 000 000 000 000 001 est-il premier ? Même question pour le nombre 400 000 000 000 000 000 081.	Solution

HAUT

Exercice 2. Suite de nombres premiers.

1°/ Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'un des trois nombres n, $n + 2$, $n + 4$, est un multiple de 3. 2°/ En déduire l'ensemble des entiers naturels p, tels que les trois nombres p, $p + 2$, $p + 4$, soient des nombres premiers. 3°/ Déterminer l'ensemble des entiers naturels premiers qui sont à la fois somme et différence de deux entiers naturels premiers.	Solution

HAUT

Exercice 3. Restes de division euclidienne.

1°/ Quels sont les restes de la division euclidienne de 1, 3, 7, 9, 13, et 15, par 5 ? 2°/ Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que, parmi les six nombres $n + 1$, $n + 3$, $n + 7$, $n + 9$, $n + 13$, et $n + 15$, l'un d'entre eux est divisible par 5. En déduire que si $n \geqslant 5$, l'un de ces six nombres n'est pas premier. 3°/ Déterminer tous les entiers naturels tels que les six nombres $n + 1$, $n + 3$, $n + 7$, $n + 9$, $n + 13$, et $n + 15$, soient tous premiers.	Solution

HAUT

Exercice 4. Suites d'entiers consécutifs.

1°/ Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, il existe n entiers naturels consécutifs tels qu'aucun d'entre eux ne soit un nombre premier. 2°/ Soit $n \in \mathbb{N}$. Est-il possible, en changeant au plus un chiffre de l'écriture décimale de n, de transformer n en nombre premier ?	Solution

HAUT

Exercice 5. Conjecture de Goldbach.

Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes. i) Tout entier $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 6$, est la somme de trois nombres premiers. ii) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $2n$ est la somme de deux nombres premiers (conjecture de Goldbach).	Solution

HAUT

Exercice 6. Somme des cubes de 3 entiers consécutifs.

Montrer que la somme des cubes de trois entiers naturels consécutifs est divisible par 9.	Solution

HAUT

Exercice 7. Non multiple de 121.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $n^2 + 2n + 12$ n'est pas un multiple de 121.	Solution

HAUT

Exercice 8. $n^4 + 4^n$ n'est pas premier.

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Montrer que $n^4 + 4^n$ n'est pas un nombre premier.

Solution

HAUT

Exercice 9. Nombres de six chiffres.

On appelle *E* l'ensemble de tous les nombres entiers de 6 chiffres que l'on peut écrire en base 10 avec les chiffres 1, 2, 3, 4, 5 et 6 en ne les utilisant qu'une seule fois chacun.

1°) Calculer le nombre de ces nombres, c'est-à-dire le cardinal de *E*.
2°) Calculer le somme de tous ces nombres.
3°) Déterminer le nombre de ces nombres strictement plus petits que 362145.
4°) Démontrer que dans *E* :
- aucun nombre n'est le carré d'un entier,
- aucun nombre n'est premier.

Solution

HAUT

Exercice 10. PGCD et PPCM.

Soient a et b deux éléments de $\mathbb{N}^*$ tels que $a^2 + b^2 = 5\,409$ et $PPCM(a, b) = 360$.
1°/ Déterminer $d = PGCD(a, b)$.
2°/ En déduire a et b.

Solution

HAUT

Exercice 11. Inverses de carrés.

Montrer que 1 ne peut pas s'écrire comme somme d'au moins deux inverses de carrés d'entiers deux à deux distincts.	Solution

HAUT

Exercice 12. Entier relatif.

On désigne par x un nombre réel tel que, pour tout entier k, $k \geqslant 2$, $x^k \in \mathbb{Z}$. Montrer que x est un élément de $\mathbb{Z}$.	Solution

HAUT

Exercice 13. Valuation de 2 dans Factorielle 1000.

Quel est l'exposant de 2 dans la décomposition de 1000 ! en produit de nombres premiers.	Solution

HAUT

Exercice 14. Facteur et âges.

Le facteur va porter une lettre chez une dame.
– "Bonjour, Madame, c'est bien vous qui avez trois filles ?"
– "Oui, c'est bien moi."
– "Quel âge ont-elles ?"
– "Oh, c'est bien simple :
1. Le produit de leurs âges est égal à 36.
2. La somme de leurs âges est égal au numéro de la porte d'en face".
Le facteur regarde la porte en face, réfléchit un moment puis annonce :
– "Il me manque une donnée."
– "C'est vrai : la voici, l'aînée est blonde".
Le facteur annonce alors l'âge des filles.
Question : quels sont les âges annoncés par le facteur ?

Solution

HAUT

Chapitre 2. Division euclidienne.

Enoncés.

Exercice 1. Nombres premiers.

Le nombre 1 000 000 000 000 000 000 001 est-il premier ? Même question pour le nombre 400 000 000 000 000 000 081.	

Solution.

1°/ 1 000 000 000 000 000 000 001.

$$1\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,001 = 10^{21} + 1$$

$10^{21} + 1 = 10^{21} + 1^{21}$ peut s'écrire, avec $a = 10$ et $b = 1$:

$$a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a + b) \sum_{k=0}^{k=2n} (-1)^k a^k b^{2n-k}, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Donc 1 000 000 000 000 000 000 001 est divisible par 11.

1 000 000 000 000 000 000 001 n'est pas premier, il est divisible par 11.

2°/ 400 000 000 000 000 000 081.

$400\,000\,000\,000\,000\,000\,081 = 4 \times 10^{20} + 9^2$.

Pour voir si le nombre 400 000 000 000 000 000 081 est premier, on utilise le **crible d'Eratosthène**, c'est-à-dire qu'on essaie de le diviser par les entiers premiers successifs jusqu'à $2 \times 10^{10} - 33 = 19\,999\,999\,967$, qui est le dernier nombre premier inférieur ou égal à la racine carrée de $4 \times 10^{20} + 81$.

On voit déjà immédiatement que 400 000 000 000 000 000 081 n'est divisible ni par 2, ni par 3, ni par 5, ni par 11.
Est-il divisible par 7 ?

$10 \equiv 3\ (7)$
$10^4 \equiv 3^4\ (7)$
$3^2 \equiv 2\ (7)$
$3^4 \equiv 2^2\ (7)$
$10^4 \equiv 4\ (7)$
$10^{20} \equiv 4^5\ (7)$
$4 \equiv -3\ (7)$

$4^5 \equiv -3^5$ (7)
$-3^5 \equiv -3 \times 2^2$ (7)
$-3^5 \equiv -5$ (7)
$-3^5 \equiv 2$ (7)
$10^{20} \equiv 2$ (7)
$4 \times 10^{20} \equiv 4 \times 2$ (7)
$4 \times 10^{20} \equiv 1$ (7)
$81 \equiv 4$ (7)
$4 \times 10^{20} + 81 \equiv 1 + 4 = 5$ (7)
7 ne divise pas $4 \times 10^{20} + 81$.

Le nombre 400 000 000 000 000 000 081 est-il divisible par 13 ?

$10 \equiv -3$ (13)
$10^4 \equiv 3^4$ (13)
$3^3 \equiv 1$ (13)
$3^4 \equiv 3$ (13)
$10^{20} \equiv 3^5$ (13)
$3^5 \equiv 9$ (13)
$10^{20} \equiv 9$ (13)
$4 \times 10^{20} \equiv 36$ (13)
$81 = 3^4 \equiv 3$ (13)
$4 \times 10^{20} + 81 \equiv 39 = 3 \times 13$ (13)
$4 \times 10^{20} + 81 \equiv 0$ (13)
13 divise $4 \times 10^{20} + 81$.

400 000 000 000 000 000 081 n'est pas premier, il est divisible par 13.

Chapitre 2. Division euclidienne.

Enoncés.

Exercice 2. Suite de nombres premiers.

1°/ Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'un des trois nombres n, $n + 2$, $n + 4$, est un multiple de 3. 2°/ En déduire l'ensemble des entiers naturels p, tels que les trois nombres p, $p + 2$, $p + 4$, soient des nombres premiers. 3°/ Déterminer l'ensemble des entiers naturels premiers qui sont à la fois somme et différence de deux entiers naturels premiers.	

Solution.

1°/ Multiple de 3.

La différence entre $n + 4$ et $n + 1$ est 3, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Par **définition de la relation de congruence**, on a donc :

$$(\forall\, n)\ (n \in \mathbb{N} \Rightarrow n + 4 \equiv n + 1\ (3))$$

La relation de congruence est **compatible avec la multiplication** :

$$(\forall\, n)\ (n \in \mathbb{N} \Rightarrow n + 4 \equiv n + 1\ (3)) \Rightarrow (\forall\, n)\ (n \in \mathbb{N} \Rightarrow n\,(n + 2)\,(n + 4) \equiv n\,(n + 1)\,(n + 2)\ (3))$$

Par la règle de **modus ponens** entre les deux énoncés démontrables précédents, on obtient :

$$(\forall\, n)\ (n \in \mathbb{N} \Rightarrow n\,(n + 2)\,(n + 4) \equiv n\,(n + 1)\,(n + 2)\ (3))$$

Dans une suite de trois entiers consécutifs, il y a toujours un multiple de 3 :

$$(\forall\, n)\ (n \in \mathbb{N} \Rightarrow n\,(n + 1)\,(n + 2) \equiv 0\ (3))$$

On en déduit, par **transitivité** de la relation de congruence :

$$(\forall\, n)\ (n \in \mathbb{N} \Rightarrow n\,(n + 2)\,(n + 4) \equiv 0\ (3))$$

3 divise $n\,(n + 2)\,(n + 4)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Comme 3 est premier, 3 divise l'un des nombres n, $n + 2$, $n + 4$ (conséquence du **lemme de Gauss**).

L'un des trois nombres n, $n + 2$, $n + 4$, est un multiple de 3.

2°/ Ensemble des entiers p tels que p, $p + 2$, $p + 4$, soient premiers.

a) Cas où c'est *n* qui est multiple de 3.

$n = 3k$
k ne peut qu'être égal à 1, sinon n n'est pas premier.

$n = 3$, premier.
$n + 2 = 5$, premier.
$n + 4 = 7$, premier.

D'où une première valeur $p = 3$.

b) Cas où *n* n'est pas multiple de 3.

Parmi les trois entiers n, $n + 2$, $n + 4$, l'un au moins est multiple de 3.
Comme n n'est pas multiple de 3, le multiple de 3 est l'un des deux autres.
$n + 2 = 3k$ ou $n + 4 = 3k$.
Pour que n soit premier, il faut qu'il soit supérieur ou égal à 2, donc k est au moins égal à 2.
Pour $k \geqslant 2$, n est supérieur ou égal à 4.
$n + 2$ et $n + 4$ sont strictement plus grand que 3, et l'un des deux est multiple de 3, donc il n'est pas premier.

La seule valeur de p telle que p, $p + 2$ et $p + 4$ soient premiers est $p = 3$:
3, 5, 7 sont premiers et c'est la seule suite de ce type.

3°/ Entiers premiers qui sont somme et différence de deux entiers premiers.

Soit p un entier qui est somme de deux entiers premiers a et b et qui est aussi différence de deux entiers premiers c et d.
$p = a + b$, $p = c – d$, $a + b = c – d$.
$c = a + b + d$.

Comme a et b sont premiers, ils sont tous deux supérieurs ou égaux à 2, donc p est supérieur ou égal à 4.
Comme p est premier et supérieur ou égal à 4, il est impair et supérieur ou égal à 5.
Donc l'un des nombres a ou b est 2, l'autre est impair (sinon a et b seraient tous deux impairs et p serait pair).
On peut supposer, par exemple que c'est a qui est égal à 2, alors $p = b + 2$.

Comme p est impair, c et d n'ont pas la même parité (sinon $p = c – d$ serait pair)
Comme c et d sont premiers, c'est le plus petit, d, qui est égal à 2 et l'on a : $c = p + 2 = b + 4$.

Les trois nombres b, $b + 2 = p$ et $b + 4 = c$ sont premiers.
D'après le résultat précédent, on a $b = 3$, donc $p = 5$, $c = 7$.

Le seul entier premier qui soit somme et différence de deux entiers premiers est $p = 5 = 3 + 2 = 7 – 2$.

Chapitre 2. Division euclidienne.

Enoncés.

Exercice 3. Restes de division euclidienne.

1°/ Quels sont les restes de la division euclidienne de 1, 3, 7, 9, 13, et 15, par 5 ? 2°/ Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que, parmi les six nombres $n + 1$, $n + 3$, $n + 7$, $n + 9$, $n + 13$, et $n + 15$, l'un d'entre eux est divisible par 5. En déduire que si $n \geqslant 5$, l'un de ces six nombres n'est pas premier. 3°/ Déterminer tous les entiers naturels tels que les six nombres $n + 1$, $n + 3$, $n + 7$, $n + 9$, $n + 13$, et $n + 15$, soient tous premiers.	

Solution.

1°/ Restes.

$1 \equiv 1\ (5)$
$3 \equiv 3\ (5)$
$7 \equiv 2\ (5)$
$9 \equiv 4\ (5)$
$13 \equiv 3\ (5)$
$15 \equiv 0\ (5)$

2°/ Multiple de 5.

Par compatibilité de la congruence avec l'addition et la multiplication :

$$(n + 1)\,(n + 3)\,(n + 7)\,(n + 9)\,(n + 13)\,(n + 15) \equiv (n + 1)\,(n + 3)\,(n + 2)\,(n + 4)\,(n + 3)\,n\ (5)$$

Parmi 5 nombres consécutifs, il y en a toujours un qui est multiple de 5 :

$n\,(n + 1)\,(n + 2)\,(n + 3)\,(n + 4) \equiv 0\ (5)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
$(n + 1)\,(n + 3)\,(n + 7)\,(n + 9)\,(n + 13)\,(n + 15) \equiv 0\ (5)$
5 divise le produit $(n + 1)\,(n + 3)\,(n + 7)\,(n + 9)\,(n + 13)\,(n + 15)$.

Comme 5 est premier, s'il divise le produit, il divise au moins l'un des facteurs.

Parmi les six nombres $n + 1$, $n + 3$, $n + 7$, $n + 9$, $n + 13$, et $n + 15$, l'un d'entre eux, au moins, est divisible par 5.

Il en résulte que, pour $n \geqslant 5$, comme les six nombres $n + 1$, $n + 3$, $n + 7$, $n + 9$, $n + 13$, et $n + 15$, sont tous strictement plus grands que 5 et que l'un d'eux est multiple de 5, ce multiple de 5, au moins, n'est pas premier.

3°/ Suite d'entiers premiers.

Pour rechercher une suite $n + 1$, $n + 3$, $n + 7$, $n + 9$, $n + 13$, et $n + 15$, d'entiers premiers, il faudra, d'après le résultat précédent, rechercher dans les valeurs de $n \leqslant 4$.

Pour $n = 0$, $n + 15$ n'est pas premier.
Pour $n = 1$, $n + 3$ n'est pas premier.
Pour $n = 2$, $n + 7$ n'est pas premier.
Pour $n = 3$, $n + 1$ n'est pas premier.
Pour $n = 4$, tous les entiers 5, 7, 11, 13, 17, 19, sont premiers.

La seule valeur de n telle que les entiers $n + 1$, $n + 3$, $n + 7$, $n + 9$, $n + 13$, et $n + 15$, sont tous premiers est $n = 4$.
Tous les entiers 5, 7, 11, 13, 17, 19, sont premiers et c'est la seule suite de ce type.

Chapitre 2. Division euclidienne.

Enoncés.

Exercice 4. Suites d'entiers consécutifs.

1°/ Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, il existe n entiers naturels consécutifs tels qu'aucun d'entre eux ne soit un nombre premier. 2°/ Soit $n \in \mathbb{N}$. Est-il possible, en changeant au plus un chiffre de l'écriture décimale de n, de transformer n en nombre premier ?	

Solution.

1°/ Suite d'entiers non premiers de longueur *n*.

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, un entier naturel.
Pour $2 \leqslant k \leqslant n + 1$, l'entier $(n + 1) ! + k$ est divisible par k puisque k divise $(n + 1) !$ et divise k.
Les entiers $((n + 1) ! + k)_{2 \leq k \leq n + 1}$ forment donc une suite de n entiers consécutifs non premiers.

Exemples :
Pour $n = 2$, la suite {8, 9} est une suite de deux entiers consécutifs non premiers.
Pour $n = 3$, la suite {26, 27, 28} est une suite de trois entiers consécutifs non premiers.
Pour $n = 4$, la suite {122, 123, 124, 125} est une suite de quatre entiers consécutifs non premiers.

2°/ Changement d'un chiffre de l'écriture décimale.

Changer un chiffre de l'écriture décimale, c'est choisir un autre entier dans une liste finie.
Prenons un nombre pair dans une liste de 10 nombres entiers consécutifs non premiers, par exemple entre 202 et 208.
Aucun des entiers {200, 201, 202, 203, 204, 205, 206, 207, 208, 209} n'est premier.
Une telle liste n'est pas exceptionnelle, on en compte déjà six de ce type entre 1 et 1000 (voir Nombres premiers).
Pour transformer 206, par exemple, en nombre premier, il faudrait déjà changer le nombre des unités en nombre impair.
Ce faisant, on choisit obligatoirement un nombre de la suite d'entiers non premiers.
Il n'est donc pas possible, en changeant un seul chiffre de l'écriture décimale, de pouvoir transformer ce nombre en nombre premier.

Il n'est pas toujours possible, en changeant un chiffre de l'écriture décimale, de pouvoir transformer un nombre en nombre premier.

Chapitre 2. Division euclidienne.

Enoncés.

Exercice 5. Conjecture de Goldbach.

Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes. i) Tout entier $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 6$, est la somme de trois nombres premiers. ii) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $2n$ est la somme de deux nombres premiers (conjecture de Goldbach).	

Solution.

1°/ (i) ⇒ (ii).

Supposons que tout entier naturel $n \geqslant 6$ soit somme de trois nombres premiers.

Soit n un entier naturel, $n \geqslant 2$.
$2(n + 1)$ est une entier naturel supérieur ou égal à 6.
Par hypothèse, $2(n + 1)$ est somme de trois nombres premiers a, b, c : $2(n + 1) = a + b + c$.
Les trois nombres premiers a, b, c, ne sont pas tous impairs puisque leur somme est paire, donc l'un d'entre eux vaut 2, par exemple $a = 2$.
Il reste alors $2n = b + c$, ce qui montre que tout nombre pair supérieur ou égal à 4 est somme de deux entiers premiers.

2°/ (ii) ⇒ (i).

Supposons que tout entier naturel pair supérieur ou égal à 4 soit somme de deux nombres premiers.

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 6.

Si n est pair, $n – 2$ est pair et supérieur ou égal à 4.
$n – 2$ est somme de deux nombres premiers b et c.
$n = 2 + b + c$ est somme de trois nombres premiers.

Si n est impair, il est supérieur ou égal à 7, $n – 1$ est pair et supérieur ou égal à 6.
$n – 1$ est somme de deux nombres premiers b et c : $n = 1 + b + c$.
On ne peut pas avoir $b = c = 2$ (sinon $n = 5$, ce qui contredit $n \geqslant 7$).
Donc l'un au moins des nombres premiers b et c est impair, par exemple b est impair, donc supérieur ou égal à 3.
$b + 1$ est pair et supérieur ou égal à 4.
Donc $b + 1$ est somme de deux nombres premiers d et e et $n = c + d + e$ est somme de trois nombres premiers.

Tout entier naturel supérieur ou égal à 6 est somme de trois nombres premiers.

Chapitre 2. Factorisation.

Enoncés.

Exercice 6. Somme des cubes de 3 entiers consécutifs.

Montrer que la somme des cubes de trois entiers naturels consécutifs est divisible par 9.	

Solution.

La somme des cubes de trois entiers consécutifs peut s'écrire :

$$(n-1)^3 + n^3 + (n+1)^3 = (n^3 - 3n^2 + 3n - 1) + n^3 + (n^3 + 3n^2 + 3n + 1)$$
$$= 3n^3 + 6n = 3n(n^2 + 2)$$

Si n est multiple de 3, $3n(n^2 + 2)$ est divisible par 9.
Si n n'est pas multiple de 3, n s'écrit $3k \pm 1$.
$n^2 + 2 = 9k^2 \pm 6k + 3$ est divisible par 3, donc $3n(n^2 + 2)$ est divisible par 9.

La somme des cubes de trois entiers naturels consécutifs est divisible par 9.

Chapitre 2. Factorisation.

Enoncés.

Exercice 7. Non multiple de 121.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $n^2 + 2n + 12$ n'est pas un multiple de 121.	

Solution.

$$n^2 + 2n + 12 = (n + 1)^2 + 11$$

Supposons qu'il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $n^2 + 2n + 12$ soit multiple de $121 = 11^2$.
Comme 11 divise 121, 11 divise $(n + 1)^2 + 11$.
Comme 11 divise 11, il divise la différence $(n + 1)^2 = ((n + 1)^2 + 11) - 11$.
Comme 11 est premier, s'il divise $(n + 1)^2$, il divise $n + 1$.
Donc 121 divise $(n + 1)^2$.
Si 121 divise $(n + 1)^2$ et $(n + 1)^2 + 11$, il divise aussi leur différence, 11, ce qui est impossible.
Donc il n'existe pas d'entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $n^2 + 2n + 12$ soit multiple de 121.
121 ne divise jamais $n^2 + 2n + 12$, quel que soit $n \in \mathbb{N}$.

$n^2 + 2n + 12$ n'est pas un multiple de 121.

Chapitre 2. Factorisation.

Enoncés.

Exercice 8. $n^4 + 4^n$ n'est pas premier.

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Montrer que $n^4 + 4^n$ n'est pas un nombre premier.	

Solution.

1°/ Cas où *n* est pair.

Si n est pair, supérieur ou égal à 2, n^4 est pair, multiple de 16.
4^n est pair, multiple de 16.
$n^4 + 4^n$ est pair supérieur ou égal à 32 : ce n'est pas un nombre premier, il est divisible par 16.

2°/ Cas où *n* est impair.

Reste le cas où n est impair : $n \geqslant 2$ et n impair $\Rightarrow n \geqslant 3$.
Cherchons à écrire $n^4 + 4^n$ sous forme d'un produit $p\,q$.
En posant $a = \frac{p+q}{2}$ et $b = \frac{p-q}{2}$, on obtient $p = a + b$ et $q = a - b$.
$n^4 + 4^n = (a + b)(a - b)$.
$a^2 = n^4 + 4^n + b^2$
$a^2 = (n^2 + 2^n)^2 - n^2\,2^{n+1} + b^2$

$n + 1$ est pair : pour obtenir la forme cherchée, il suffit de prendre $b = n\,2^{\frac{n+1}{2}}$ et $a = n^2 + 2^n$.
$n^4 + 4^n = (n^2 + 2^n - n\,2^{\frac{n+1}{2}})(n^2 + 2^n + n\,2^{\frac{n+1}{2}})$

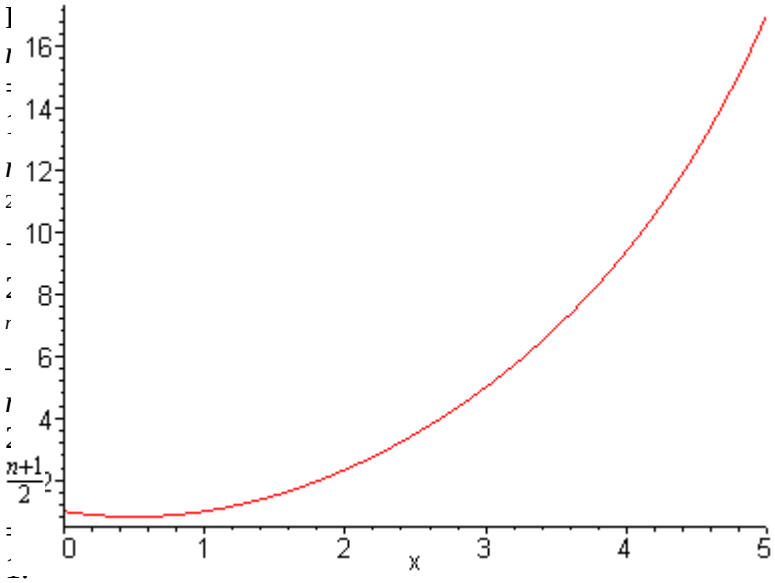
Si nous démontrons que le plus petit des facteurs n'est pas égal à 1, nous aurons démontré que le produit n'est pas un nombre premier.

$n^2 + 2^n - n\,2^{\frac{n+1}{2}} = n^2 + 2^{\frac{n}{2}}(2^{\frac{n}{2}} - n\sqrt{2})$

La fonction numérique $f : x \mapsto 2^{\frac{x}{2}} - x\sqrt{2}$ est continue et dérivable.
Sa dérivée est : $f'(x) = \frac{1}{2}(\ln 2)\,2^{\frac{x}{2}} - \sqrt{2}$.

Cette dérivée est positive lorsque $2^{\frac{x}{2}}$ est plus grand que $\frac{2\sqrt{2}}{\ln 2}$, donc dès que x est $> \frac{2}{\ln 2}\ln\left(\frac{2\sqrt{2}}{\ln 2}\right) \approx 4{,}05$.

L'application f est donc croissante au moins pour $x \geqslant 5$. $f(1) = 0$, $f(3) = -\sqrt{2}$, $f(5) = -\sqrt{2}$.
Il en résulte que $n^2 + 2^{\frac{n}{2}}(2^{\frac{n}{2}} - n\sqrt{2})$ est aussi une fonction croissante de n, au moins pour $n \geqslant 5$.



Pour $n = 3$, $n^2 + 2^n - n\,2^{\frac{n+1}{2}} = 5$ est strictement plus grand que 1.

Pour $n = 5$, $n^2 + 2^n - n\,2^{\frac{n+1}{2}} = 17$ est strictement plus grand que 1.

Pour n supérieur à 5, $n^2 + 2^n - n\,2^{\frac{n+1}{2}}$ est supérieur à 17.

En réalité, pour n impair $\geqslant 3$:

$n^2 + 2^n - n\,2^{\frac{n+1}{2}}$ est toujours strictement plus grand que 1.

Donc le produit

$n^4 + 4^n = (n^2 + 2^n - n\,2^{\frac{n+1}{2}})(n^2 + 2^n + n\,2^{\frac{n+1}{2}})$

n'est pas un nombre premier, puisqu'il a deux facteurs plus grands que 1.

> Pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $n^4 + 4^n$ n'est pas un nombre premier :
> — Si n est pair, c'est un multiple de 16 ;
> — Si n est impair, il a pour diviseurs propres $(n^2 + 2^n - n\,2^{\frac{n+1}{2}})$ et $(n^2 + 2^n + n\,2^{\frac{n+1}{2}})$.

Un problème plus ardu serait de trouver les valeurs de n pour lesquels les deux diviseurs propres trouvés sont eux-mêmes des nombres premiers !

Chapitre 2. Factorisation.

Enoncés.

Exercice 9. Nombres de six chiffres.

On appelle *E* l'ensemble de tous les nombres entiers de 6 chiffres que l'on peut écrire en base 10 avec les chiffres 1, 2, 3, 4, 5 et 6 en ne les utilisant qu'une seule fois chacun. 1°) Calculer le nombre de ces nombres, c'est-à-dire le cardinal de *E*. 2°) Calculer le somme de tous ces nombres. 3°) Déterminer le nombre de ces nombres strictement plus petits que 362145. 4°) Démontrer que dans *E* : - aucun nombre n'est le carré d'un entier, - aucun nombre n'est premier.	

Solution.

1°/ Cardinal de *E*.

Le cardinal de *E* est le nombre des permutations de l'ensemble {1, 2, 3, 4, 5, 6} à six éléments : il vaut 6 ! = 720 (Théorie des ensembles, Chapitres 6, Exercice 3).

$$\boxed{Card\,(E) = 720}$$

2°/ Somme des éléments de *E*.

Chaque élément de *E* s'écrit d'une manière unique sous la forme :

$$a \times 10^5 + b \times 10^4 + c \times 10^3 + d \times 10^2 + e \times 10^1 + f \times 10^0.$$

Soit *n* un entier compris entre 0 et 5.
Parmi les 720 éléments de *E*, il y en a 5 ! qui possèdent un 1 comme coefficient de 10^n, ce qui correspond aux 5 ! permutations des chiffres autres que 1.
De même, il y en a 5 ! qui ont un 2 comme coefficient de 10^n, etc., et enfin 5 ! qui ont un 6 comme coefficient de 10^n.

Lorsqu'on fait la somme des coefficients de 10^n, on trouve donc :

$$(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) \times (5\ !) = 21 \times (5\ !).$$

Cette somme est indépendante de *n*.
La somme des éléments de *E* est donc :

$$\sum(E) = 21 \times (5\,!) \times (10^0 + 10^1 + 10^2 + 10^3 + 10^4 + 10^5) = 21 \times (5\,!) \times 11\,111 = 35\,777\,420$$

$$\boxed{\sum(E) = 35\,777\,420}$$

3°/ Cardinal d'une partie de E.

Soit F l'ensemble des éléments de E strictement plus petits que 362 145.
Les éléments de F sont :

— Les éléments de E qui commencent par un 1 : il y en a 5 !, correspondant aux permutations des 5 chiffres restants ;
— Ceux qui commencent par un 2 : il y en a 5 ! ;
— Ceux qui commencent par 31, 32, 34, ou 35 : il y en a 4×4 ! ;
— Enfin, ceux qui commencent par 361 : il y en a 3 !.

Au total nous obtenons :

$$Card\,(F) = 2 \times 5\,! + 4 \times 4\,! + 3\,! = 240 + 96 + 6 = 342$$

$$\boxed{Card\,(F) = 342}$$

4°/ Divisibilité des éléments de E.

La somme des chiffres d'un élément de E est $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$.
Cette somme est un multiple de 3, mais pas un multiple de 9.
Comme 10 est congru à 1 modulo 9, toute puissance de 10 est congrue à 1 modulo 9, et l'on obtient :

$$a \times 10^5 + b \times 10^4 + c \times 10^3 + d \times 10^2 + e \times 10^1 + f \times 10^0 \equiv a + b + c + d + e + f \pmod 9$$
$$a \times 10^5 + b \times 10^4 + c \times 10^3 + d \times 10^2 + e \times 10^1 + f \times 10^0 \equiv 21 \pmod 9$$
$$a \times 10^5 + b \times 10^4 + c \times 10^3 + d \times 10^2 + e \times 10^1 + f \times 10^0 \equiv 3 \pmod 9$$

Ainsi, tout élément de E s'écrit sous la forme $9n + 3 = 3(3n + 1)$, où n est entier (supérieur ou égal à 13 717, puisque le plus petit élément de E est $123\,456 = 3(3 \times 13\,717 + 1)$.
Comme 9 est multiple de 3, il en résulte que tout élément de E est multiple de 3 (donc non premier).
Comme $3n + 1$ n'est pas multiple de 3, $9n + 3$ n'est pas un multiple de 9 (donc pas un carré, puisqu'un multiple de 3 qui est un carré est un multiple de 9).

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Aucun élément de } E \text{ n'est premier.}\\ \text{Aucun élément de } E \text{ n'est un carré.}\end{array}}$$

Chapitre 2. Factorisation.

Enoncés.

Exercice 10. PGCD et PPCM.

Soient a et b deux éléments de $\mathbb{N}^*$ tels que $a^2 + b^2 = 5\,409$ et $PPCM\,(a, b) = 360$. 1°/ Déterminer $d = PGCD\,(a, b)$. 2°/ En déduire a et b.	

Solution.

1°/ PGCD.

Le $PGCD\,(a, b)$ divise a et divise b.
Posons $d = PGCD\,(a, b)$: $d \mid a$ et $d \mid b$ ($d \mid a$ = "d divise a").

$d \mid a$ et $d \mid b \Rightarrow d^2 \mid a^2$ et $d^2 \mid b^2$
donc d^2 divise $a^2 + b^2 = 5\,409 = 9 \times 601$.
601 est premier.
Les seuls carrés qui divisent 5 409 sont 1 et 9.
On a donc $d = 1$ ou $d = 3$.

Lemme.

Quels que soient a et b dans $\mathbb{N}^*$,
$PGCD\,(a, b) \times PPCM\,(a, b) = a\,b$

Démonstration du lemme.

On décompose a et b en produit de puissances des facteurs premiers. Cette décomposition est unique.
Pour chaque facteur premier, la relation entre exposants :

$$Sup\,(\alpha, \beta) + Inf\,(\alpha, \beta) = \alpha + \beta$$

(la somme de deux nombres est la somme du plus grand et du plus petit) conduit à la relation du lemme.

Il résulte du lemme que le produit $a\,b$ est égal à 360 pour $d = 1$, ou à $3 \times 360 = 1\,080$, pour $d = 3$.

$a\,b = 360 \Rightarrow (a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2\,a\,b = 5\,409 + 360 = 5\,969$
Or 5 969 n'est pas un carré parfait, d'où une impossibilité.
d ne peut donc pas être égal à 1.
C'est donc que $d = 3$ et $a\,b = 1\,080$.

$PGCD\,(a, b) = 3$

2°/ Solution du problème.

Avec $a\ b = 1\ 080$, on obtient :

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2\ a\ b = 5\ 409 + 2\ 160 = 7\ 569 = 87^2$$

$$\boxed{a + b = 87}$$

a et b sont des entiers dont la somme est 87 et le produit 1 080.
Ce sont les solutions de l'équation du deuxième degré :

$$x^2 - 87\ x + 1\ 080 = 0$$
$$\Delta = 87^2 - 4 \times 1\ 080 = 7\ 569 - 4\ 320 = 3\ 249 = 57^2$$
$$a \text{ ou } b = \frac{1}{2}(87 \pm 57)$$
$$(x - 72)(x - 15) = 0$$

Le problème a une solution unique : l'un des nombres est 72, l'autre est 15.

Méthode alternative.

Le problème peut se traiter de façon élémentaire, sans faire appel à autre chose qu'aux définitions.

1°/ PGCD.

PPCM (a, b) = $360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$
$5\ 409 = 9 \times 601$ et 601 est premier.
Les diviseurs premiers du *PGCD* divisent les deux nombres, donc sont aussi des diviseurs premiers du *PPCM*.

2 divise *PPCM* (a, b) donc 2 divise a ou b, ou les deux.
$a^2 + b^2$ est impair, donc 2 divise a et ne divise pas b, ou bien 2 divise b mais ne divise pas a.
2 ne divise donc pas *PGCD* (a, b) et celuyi des deux nombres a et b qui est pair est divisible par $2^3 = 8$.

5 divise *PPCM* (a, b) donc 2 divise a ou b, ou les deux.
$a^2 + b^2$ n'est pas multiple de 5, donc 5 divise a et ne divise pas b, ou bien 5 divise b mais ne divise pas a.
5 ne divise donc pas *PGCD* (a, b).

3 divise *PPCM* (a, b) donc 3 divise a ou b, ou les deux.
$a^2 + b^2$ est multiple de 9, donc 3 divise a et divise b.
3 divise donc *PGCD* (a, b).

$3^2 = 9$ divise *PPCM* (a, b) donc 9 divise a ou b, ou les deux.
Si 9 divisait a et b, $9^2 = 81$ diviserait $a^2 + b^2$, ce qui n'est pas.
Donc 9 divise a ou b mais pas les deux.
9 ne divise donc pas *PGCD* (a, b).

En définitive, le seul diviseur commun à a et b est 3

$PGCD\ (a, b) = 3$

2°/ Solution du problème.

Appelons a le multiple de 9.
b est multiple de 3 mais pas de 9.
a ou b est multiple de 8, mais pas les deux.
a ou b est multiple de 5, mais pas les deux.
Les couples (a, b) dont le *PGCD* est 3 et dont le *PPCM* est $2^3 \times 3^2 \times 5$ et qui répondent aux conditions précédentes, sont au nombre de 4 :

$(9, 3 \times 8 \times 5) = (9, 120)$
$(9 \times 5, 3 \times 8) = (45, 24)$
$(9 \times 8, 3 \times 5) = (72, 15)$
$(9 \times 8 \times 5, 3) = (360, 3)$

Pour avoir $a^2 + b^2 = 5\,409$, il faut que a et b soient inférieurs à $\sqrt{5\,409} < 75$, ce qui élimine les couples (9, 120) et (360, 3).
Le dernier chiffre de l'écriture décimale de $45^2 + 24^2$ est un 1, ce qui élimine le couple (45, 24).
Reste alors uniquement le couple (72, 15).
On vérifie : $72^2 + 15^2 = 5\,409$. Gagné !

La seule solution dans $\mathbb{N}^*$ vérifiant $a^2 + b^2 = 5\,409$ et $PPCM\ (a, b) = 360$ est : l'un des nombres est 72, l'autre 15.

Chapitre 2. Factorisation.

Enoncés.

Exercice 11. Inverses de carrés.

Montrer que 1 ne peut pas s'écrire comme somme d'au moins deux inverses de carrés d'entiers deux à deux distincts.	

Solution.

On ne peut envisager de somme d'au moins deux inverses de carrés d'entiers deux à deux distincts égale à 1, qu'en supposant que tous les entiers concernés sont strictement plus grands que 1 : si l'un des entiers vaut 1, la somme est strictement plus grande que 1.
On suppose les entiers concernés ordonnés du plus petit au plus grand : $2 \leqslant p_1 < ... < p_n$
Ces inégalités donnent, par récurrence, $p_i > i + 1$, pour tout $i = 2$ à n.

Donc $\sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{{p_i}^2} < \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{(i+1)^2}$

Or, pour tout entier $p > 1$, nous avons :

$$\frac{1}{(p+1)^2} < \frac{1}{p(p+1)} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}$$

Donc l'inégalité précédente s'écrit :

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{{p_i}^2} < \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{(i+1)^2} < \sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} < 1$$

On ne peut donc pas avoir l'égalité : $\sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{{p_i}^2} = 1$.

Chapitre 2. Factorisation.

Enoncés.

Exercice 12. Entier relatif.

On désigne par x un nombre réel tel que, pour tout entier k, $k \geqslant 2$, $x^k \in \mathbb{Z}$. Montrer que x est un élément de $\mathbb{Z}$.	

Solution.

$x^2 \in \mathbb{Z}$.
$x^3 \in \mathbb{Z}$.
Leur rapport x est un élément de $\mathbb{Q}$ et s'écrit sous forme de fraction irréductible $\frac{p}{q}$: $p \wedge q = 1$ (PGCD = 1)
$p = q\,x$.
$p^2 = q^2 x^2$.
Comme x^2 est un entier, q^2 divise l'entier $q^2 x^2 = p^2$, donc q divise p et $p \wedge q = q$.
$p \wedge q = 1$ et $p \wedge q = q \Rightarrow q = 1$ et $x = p$ est entier.

Chapitre 2. Factorisation.

Enoncés.

Exercice 13. Valuation de 2 dans Factorielle 1000.

Quel est l'exposant de 2 dans la décomposition de 1000 ! en produit de nombres premiers.	

Solution.

Pour tout entier n, il y a :

$\left[\frac{n}{2}\right]$ nombres pairs inférieurs ou égaux à n (partie entière de $\frac{n}{2}$).

$\left[\frac{n}{2^2}\right]$ multiples de 4 inférieurs ou égaux à n.

...

$\left[\frac{n}{2^k}\right]$ multiples de 2^k inférieurs ou égaux à n, 2^k désignant la plus grande puissance de 2 inférieure ou égale à n.

Au total, n ! est divisible par 2 élevé à la puissance $\left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{n}{2^2}\right] + ... + \left[\frac{n}{2^k}\right]$, et le quotient est un nombre impair.

Pour n = 1 000, k = 9, 2^k = 512, et l'exposant de 2 dans la décomposition de 1000 ! en produit de nombres premiers est :

$$\left[\frac{1\,000}{2}\right] + \left[\frac{1\,000}{4}\right] + \left[\frac{1\,000}{8}\right] + \left[\frac{1\,000}{16}\right] + \left[\frac{1\,000}{32}\right] + \left[\frac{1\,000}{64}\right] + \left[\frac{1\,000}{128}\right] + \left[\frac{1\,000}{256}\right] + \left[\frac{1\,000}{512}\right] = 500 + 250 + 125 + 62 + 31 + 15 + 7 + 3 + 1 = 994.$$

L'exposant de 2 dans la décomposition de 1000 ! en produit de nombres premiers est 994.

Chapitre 2. Factorisation.

Enoncés.

Exercice 14. Facteur et âges.

Le facteur va porter une lettre chez une dame. – "Bonjour, Madame, c'est bien vous qui avez trois filles ?" – "Oui, c'est bien moi." – "Quel âge ont-elles ?" – "Oh, c'est bien simple : 1. Le produit de leurs âges est égal à 36. 2. La somme de leurs âges est égal au numéro de la porte d'en face". Le facteur regarde la porte en face, réfléchit un moment puis annonce : – "Il me manque une donnée." – "C'est vrai : la voici, l'aînée est blonde". Le facteur annonce alors l'âge des filles. Question : quels sont les âges annoncés par le facteur ?	

Solution.

On suppose que **les âges sont des nombres entiers**.
Les âges sont des diviseurs de 36.
Les diviseurs de 36 sont : 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36.

Ages	Somme
(1,1, 36)	38
(1, 2, 18)	21
(1, 3, 12)	16
(1, 4, 9)	14
(1, 6, 6)	13
(2, 2, 9)	13
(2, 3, 6)	11
(3, 3, 6)	12

S'il y a besoin d'une donnée supplémentaire, c'est que le numéro de la porte d'en face est 13.
L'indication "L"aînée est blonde" impose qu'il y a une seule aînée et élimine la solution (1, 6, 6), qui a deux aînées.
La seule réponse possible est donc (2, 2, 9).

L'aînée a neuf ans et les deux autres filles sont des jumelles de 2 ans.

Exercices

Division euclidienne.

1. Reste de la division euclidienne.
2. PGCD, PPCM.
3. Théorème de Bézout.

Reste de la division euclidienne.

Soit n et m deux entiers relatifs, éléments de $\mathbb{Z}$.
Il existe deux entiers relatifs uniques, éléments de $\mathbb{Z}$, q et r, vérifiant :

$$m = q\,n + r \text{ et } 0 \leqslant r \leqslant n - 1$$

q s'appelle le **quotient** de m par n, r s'appelle le **reste** de la division de m par n, ou reste de m modulo n.

Pour que la différence de deux entiers relatifs m et m' soit un multiple de n, il faut et il suffit que m et m' possèdent le même reste modulo n. Cette relation s'écrit

$$m \equiv m' \pmod{n}$$

ce qui se lit "m **congru** à m' modulo n".
La relation de congruence est une relation d'équivalence.

Cette relation d'équivalence est **compatible avec l'addition et avec la multiplication** des entiers relatifs.

HAUT

PGCD, PPCM.

La relation $x \mid y$ (x **divise** y) définie par

$$x \mid y \Leftrightarrow (\exists\, k)(k \in \mathbb{N}^* \text{ et } y = k\,x)$$

est une **relation d'ordre** sur $\mathbb{N}^*$.

Pour cet ordre, $\mathbb{N}^*$ est un **treillis** (toute couple d'éléments possède une borne supérieure et une borne inférieure).
Toute partie finie non vide de $\mathbb{N}^*$ possède une borne supérieure et une borne inférieure
La borne supérieure d'une partie finie non vide s'appelle le **PPCM (plus petit commun multiple)** de la partie.
La borne inférieure d'une partie finie non vide s'appelle le **PGCD (plus grand commun diviseur)** de la partie.
Les éléments minimaux de $\mathbb{N}^*$ pour cet ordre s'appellent les **nombres premiers**.
Deux éléments de $\mathbb{N}^*$ sont dits **étrangers** si leur PGCD vaut 1.

Le produit du PGCD et du PPCM de deux nombres est égal au produit des deux nombres.

HAUT

Théorème de Bézout.

Etant donnés deux entiers naturels *m* et *n*, éléments de $\mathbb{N}^*$, il existe deux entiers relatifs *p* et *q*, éléments de $\mathbb{Z}$, vérifiant l'égalité :

$$m\,p + n\,q = PGCD\,(m, n)$$

HAUT

Chapitre 3. Division euclidienne.

Exercices

Exercice 1. Division par 10.
Exercice 2. Division par 7.
Exercice 3. Division par 9.
Exercice 4. Division par 7.
Exercice 5. Division par 8.
Exercice 6. Reste et écriture décimale.
Exercice 7. Théorème de Bézout.
Exercice 8. Nombres étrangers.
Exercice 9. Un nombre formé de 1 n'est pas un carré.
Exercice 10. Division par 27.
Exercice 11. Equation diophantienne.
Exercice 12. Grand théorème de Fermat.
Exercice 13. Multiple ne comportant que des 1.
Exercice 14. Résolution d'un système de congruences.

Exercice 1. Division par 10.

1°/ Quel est le reste de la division euclidienne de $3^{10} + 1$ par 10 ? En déduire le reste de la division euclidienne de $7^{10} + 1$ par 10. 2°/ Soit $r \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant r \leqslant 9$. Montrer que 10 divise $r^{10} + 1$ si, et seulement si, $r \in \{3, 7\}$. 3°/ Déterminer l'ensemble des entiers naturels x tels que 10 divise $x^{10} + 1$.	Solution

HAUT

Exercice 2. Division par 7.

1°/ Soit $n \in \mathbb{N}$. Quels sont les restes possibles de la division euclidienne de n^3 par 7 ? 2°/ Existe-t'il des couples (x, y) d'entiers naturels tels que $7x - 4y^3 = 1$?	Solution

HAUT

Exercice 3. Division par 9.

1°/ Soit $n \in \mathbb{N}$. Quels sont les restes possibles de la division euclidienne de n^3 par 9 ? 2°/ Existe-t'il des quadruplets (x, y, z, t) d'entiers naturels tels que $x^3 + y^3 + z^3 = 9t + 4$?	Solution

HAUT

Exercice 4. Division par 7.

Soient m, n et p des entiers de $\mathbb{Z}$ tels que $m^3 + n^3 + p^3 \equiv 0\ (7)$. Montrer que $m\,n\,p \equiv 0\ (7)$.	Solution

HAUT

Exercice 5. Division par 8.

On se propose de déterminer tous les couples d'entiers naturels $(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, solutions de l'équation : $2^m - 3^n = 1$ (1).

1°/ Soit $k \in \mathbb{N}$.

a) Quel est le reste de la division euclidienne de 9^k par 8 ?

b) Déterminer les restes de la division euclidienne de $3^{2k} + 1$ par 8, puis de $3^{2k+1} + 1$ par 8.

2°/ Soit $(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, un couple solution de l'équation (1). Montrer, à l'aide de 1° que $m \leqslant 2$.

3°/ En déduire tous les couples $(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, solutions de l'équation (1).

Solution

HAUT

Exercice 6. Reste et écriture décimale.

1°/ Déterminer le reste de la division euclidienne de 7^2 par 4. 2°/ En déduire le chiffre des unités de l'écriture décimale de l'entier $7^{(7^7)}$.	Solution

HAUT

Exercice 7. Théorème de Bézout.

Déterminer tous les couples $(x, y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, solutions de l'équation $7x - 9y = 1$.	Solution

HAUT

Exercice 8. Nombres étrangers.

Soient a et b deux entiers naturels non nuls que l'on suppose étrangers. Soit $c \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe $x \in \mathbb{N}$, tel que $a + b\,x$ et c soient étrangers.	Solution

HAUT

Exercice 9. Un nombre formé de 1 n'est pas un carré.

1°/ Soit $k \in \mathbb{N}$. Quels sont les restes possibles de la division euclidienne de k^2 par 4 ? 2°/ Pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, on considère l'entier a_n = 111...11 (l'écriture décimale de a_n comporte n fois le chiffre 1). Montrer que a_n n'est pas un carré parfait.	Solution

HAUT

Exercice 10. Division par 27.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Quels sont les restes possibles de la division de 10^n par 27 ? Le nombre 999 888 777 666 555 444 333 222 111 est-il divisible par 27 ?	Solution

HAUT

Exercice 11. Equation diophantienne.

Montrer que l'équation $x^2 - 2y^2 + 8z = 3$ n'admet pas de solution (x, y, z) dans $\mathbb{Z}^3$.	Solution

HAUT

Exercice 12 . Grand théorème de Fermat.

Soit $n \in \mathbb{N}$, un entier naturel pair. On considère l'équation $x^n + y^n = z^n$. Montrer que cette équation n'a pas de solution (x, y, z) dans $(\mathbb{N}^*)^3$, telle que x et y soient impairs.	Solution

HAUT

Exercice 13. Multiple ne comportant que des 1.

On désigne par n un entier naturel dont l'écriture décimale se termine par 1, 3, 7 ou 9. Montrer qu'il existe toujours un multiple de n dont l'écriture décimale ne comporte que des 1.	Solution

HAUT

Exercice 14. Résolution d'un système de congruences.

On se propose de résoudre le système d'équivalences suivant :

$$(\mathscr{P}) \begin{cases} x \equiv 3 \pmod{56} \\ x \equiv 2 \pmod{99} \end{cases}$$

1°/ Ecrire l'identité de Bézout qui lie les entiers 56 et 99.

2°/ En déduire que :

$$\exists\, (u, v) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \begin{cases} 99\, u \equiv 1 \pmod{56} \\ 56\, v \equiv 1 \pmod{99} \end{cases}$$

puis que $x_0 = 3 \times 99\, u + 2 \times 56\, v$ est une solution particulière du problème $(\mathscr{P})$.

3°/ Donner la valeur de $x - x_0$, dans $\mathbb{Z} / 56\, \mathbb{Z}$ puis dans $\mathbb{Z} / 99\, \mathbb{Z}$, puis en déduire l'expression de la solution générale x.

Solution

HAUT

Chapitre 3. Division euclidienne.

Enoncés.

Exercice 1. Division par 10.

1°/ Quel est le reste de la division euclidienne de $3^{10} + 1$ par 10 ? En déduire le reste de la division euclidienne de $7^{10} + 1$ par 10. 2°/ Soit $r \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant r \leqslant 9$. Montrer que 10 divise $r^{10} + 1$ si, et seulement si, $r \in \{3, 7\}$. 3°/ Déterminer l'ensemble des entiers naturels x tels que 10 divise $x^{10} + 1$.	

Solution.

1°/ Restes.

$3^{10} + 1 = (3^2)^5 + 1$ est divisible par $3^2 + 1 = 10$, parce que $a^{2k+1} + 1$ est divisible par $(a + 1)$.

$$\boxed{3^{10} + 1 \equiv 0\ (10)}$$

$7^{10} + 1 = (7^2)^5 + 1$ est divisible par $7^2 + 1 = 50$, parce que $a^{2k+1} + 1$ est divisible par $(a + 1)$.
Comme 50 est divisible par 10, $7^{10} + 1$ est divisible par 10.

On aurait pu écrire aussi : $7 \equiv -3\ (10)$, donc $7^{10} + 1 \equiv (-3)^{10} + 1 = 3^{10} + 1 \equiv 0\ (10)$

$$\boxed{7^{10} + 1 \equiv 0\ (10)}$$

2°/ Divisibilité par 10 de $r^{10} + 1$.

a) Lemme.

$$n^{10} + 1 \equiv a\ (10) \Leftrightarrow n^{10} \equiv a - 1\ (10), \text{ lorsque } 1 \leqslant a \leqslant 9.$$

Démonstration du lemme.

> Dire que $n^{10} + 1$ est congru à a modulo 10, c'est dire que le chiffre des unités de l'écriture décimale de $n^{10} + 1$ est a.
>
> C'est donc dire que le chiffre des unités de l'écriture décimale de n^{10} est $a - 1$, puisque, par hypothèse, a est compris entre 1 et 9.

Il résulte du lemme que l'on a :

$$n^{10} + 1 \equiv a\ (10) \Rightarrow (n^2)^{10} + 1 \equiv (a - 1)^2 + 1\ (10)$$

$1^{10} + 1 = 2 \equiv 2\ (10)$.
$2^{10} + 1 = 1\ 025 \equiv 5\ (10)$.
$3^{10} + 1 \equiv 0\ (10)$.
$4^{10} + 1 = (2^2)^{10} + 1 \equiv (5 - 1)^2 + 1 \equiv 7\ (10)$.
$5^{10} + 1 \equiv 6\ (10)$, parce que le dernier chiffre de toute puissance de 5 est 5.
$6^{10} = (2^{10})(3^{10}) = (2^{10})(3^{10} + 1) - 2^{10} \equiv -5 \equiv 5\ (10)$.
$7^{10} + 1 \equiv 0\ (10)$.
$8^{10} + 1 = 2^{10} \times 4^{10} + 1 \equiv 4 \times 6 + 1 = 25 \equiv 5\ (10)$.
$9^{10} + 1 = (3^{10})^2 + 1 \equiv 9^2 + 1 = 82 \equiv 2\ (10)$.

Le chiffre des unités de l'écriture décimale de $r^{10} + 1$, $1 \leqslant r \leqslant 9$, peut être 0, 2, 5, 7.
Il est 0 si, et seulement si, $r \in \{3, 7\}$.

$$1 \leqslant r \leqslant 9 \text{ et } r^{10} + 1 \equiv 0\ (10) \Leftrightarrow r \in \{3, 7\}.$$

3°/ Résolution de l'équation $x^{10} + 1 \equiv 0\ (10)$.

x ne peut pas être multiple de 10, puisque $(10\,k)^{10}$ est multiple de 10 et on a, évidemment $(10\,k)^{10} + 1 \equiv 1\ (10)$.
Tout entier naturel non multiple de 10 s'écrit d'une façon unique sous la forme $x = 10\,k + r$, $1 \leqslant r \leqslant 9$.

$$x^{10} + 1 = (10\,k + r)^{10} + 1 \equiv r^{10} + 1$$

L'équation $x^{10} + 1 \equiv 0\ (10)$ s'écrit alors $r^{10} + 1 \equiv 0\ (10)$.
Sa solution est donnée par $r \in \{3, 7\}$.

Les solutions de l'équation $x^{10} + 1 \equiv 0\ (10)$ sont les entiers naturels dont l'écriture décimale se termine par un 3 ou par un 7.

Chapitre 3. Division euclidienne.

Enoncés.

Exercice 2. Division par 7.

1°/ Soit $n \in \mathbb{N}$. Quels sont les restes possibles de la division euclidienne de n^3 par 7 ? 2°/ Existe-t'il des couples (x, y) d'entiers naturels tels que $7x - 4y^3 = 1$?	

Solution.

1°/ Restes.

Tout entier naturel s'écrit sous l'une des formes : $7k$, $7k \pm 1$, $7k \pm 2$, $7k \pm 3$.
Les cubes des entiers naturels s'écrivent donc sous l'une des formes : $7k$, $7k \pm 1$, $7k \pm 8$, $7k \pm 27$.
Or 8 est congru à 1 module 7 et 27 est congru à -1 module 7.
-1 est congru à 6 modulo 7.
Donc les restes possibles de la division euclidienne d'un cube par 7 sont 0, 1, 6.

Les restes possibles de la division euclidienne d'un cube par 7 sont 0, 1, 6.

2°/ Equation diophantienne.

L'équation $7x - 4y^3 = 1$ montre que $-4y^3 \equiv 1\ (7)$
Or 7 est premier, donc $\mathbb{Z} / 7\mathbb{Z}$ est un corps commutatif.
$-4 \equiv 3\ (7)$
La relation $3 \times 5 = 2 \times 7 + 1$, montre que l'inverse dans $\mathbb{Z} / 7\mathbb{Z}$ de la classe d'équivalence de 3 est la classe d'équivalence de 5.
La relation $-4y^3 \equiv 1\ (7)$ est donc équivalente à $y^3 \equiv 5\ (7)$.
La question précédente montre qu'elle n'a pas de solution, car aucun cube n'est congru à 5 modulo 7.

Il n'existe aucun couple (x, y) d'entiers naturels tels que $7x - 4y^3 = 1$

Chapitre 3. Division euclidienne.

Enoncés.

Exercice 3. Division par 9.

1°/ Soit $n \in \mathbb{N}$. Quels sont les restes possibles de la division euclidienne de n^3 par 9 ? 2°/ Existe-t'il des quadruplets (x, y, z, t) d'entiers naturels tels que $x^3 + y^3 + z^3 = 9t + 4$?	

Solution.

1°/ Restes.

Les cubes des entiers de 0 à 8 sont :

r	0	1	2	3	4	5	6	7	8
r^3	0	1	8	27	64	125	216	343	512
reste modulo 9	0	1	8	0	1	8	0	1	8

Tout entier naturel s'écrit $n = 9k + r$, $0 \leqslant r \leqslant 8$.
Son cube est un multiple de 9, plus r^3.
Le reste de la division du cube par 9 est le reste de la division de r^3 par 9.

Les restes possibles de la division euclidienne d'un cube par 9 sont 0, 1, 8.

2°/ Equation diophantienne.

Pour avoir $x^3 + y^3 + z^3 = 9t + 4$, il faudrait que l'on ait $x^3 + y^3 + z^3 \equiv 4\ (9)$.
En appelant a, b, c les restes des divisions de x^3, y^3, z^3, par 9, il faudrait que l'on ait : $a + b + c \equiv 4\ (9)$.
Ce n'est pas possible, avec $a, b, c \in \{0, 1, 8\}$.

Il n'existe aucun quadruplet (x, y, z, t) d'entiers naturels tels que $x^3 + y^3 + z^3 = 9t + 4$.

Chapitre 3. Division euclidienne.

Enoncés.

Exercice 4. Division par 7.

Soient m, n et p des entiers de $\mathbb{Z}$ tels que $m^3 + n^3 + p^3 \equiv 0\ (7)$. Montrer que $m\,n\,p \equiv 0\ (7)$.	

Solution.

1°/ Restes.

Les restes de la division par 7 des cubes des entiers naturels de 0 à 6 sont donnés par le tableau suivant :

r	0	1	2	3	4	5	6
r^3	0	1	8	27	64	125	216
Reste de la division par 7	0	1	1	6	1	6	6

$$6 \equiv -1 \pmod 7$$

2°/ Congruence.

On peut avoir $m^3 + n^3 + p^3 \equiv 0\ (7)$ de deux façons :
— ou bien les trois nombres aient un cube congru à 0 modulo 7, auquel cas ils sont tous trois multiples de 7 et $m\,n\,p \equiv 0\ (7)$.
— ou bien un seul des trois nombres ait un cube congru à 0 modulo 7, un autre ait un cube congru à 1 modulo 7 et le dernier un cube congru à – 1 modulo 7.
Dans ce dernier cas encore, celui des trois nombres dont le cube est congru à 0 modulo 7 est multiple de 7 et le produit $m\,n\,p$ est encore congru à 0 modulo 7.

$$\boxed{m^3 + n^3 + p^3 \equiv 0\ (7) \Rightarrow m\,n\,p \equiv 0\ (7).}$$

Chapitre 3. Division euclidienne.

Enoncés.

Exercice 5. Division par 8.

On se propose de déterminer tous les couples d'entiers naturels $(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, solutions de l'équation : $2^m - 3^n = 1$ (1).

1°/ Soit $k \in \mathbb{N}$.

a) Quel est le reste de la division euclidienne de 9^k par 8 ?

b) Déterminer les restes de la division euclidienne de $3^{2k} + 1$ par 8, puis de $3^{2k+1} + 1$ par 8.

2°/ Soit $(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, un couple solution de l'équation (1). Montrer, à l'aide de 1° que $m \leqslant 2$.

3°/ En déduire tous les couples $(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, solutions de l'équation (1).

Solution.

1°/ Restes.

a) Reste de 9^k.

$$9 \equiv 1 \pmod 8 \Rightarrow 9^k \equiv 1^k = 1 \pmod 8.$$

b) Reste de $3^n + 1$.

Si n est pair, $n = 2k$, $3^n = 9^k \equiv 1 \pmod 8$, $3^n + 1 \equiv 2 = 2^1 \pmod 8$.
Si n est impair, $n = 2k + 1$, $3^n = 9^k \times 3 \equiv 3 \pmod 8$, $3^n + 1 \equiv 4 = 2^2 \pmod 8$.

2°/ Valeurs possibles de m.

Soit $(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, un couple solution de l'équation $2^m - 3^n = 1$.
On a alors $3^n + 1 = 2^m$.
Le reste de la division de $3^n + 1$ par 8 ne peut être que 2 ou 4.
Le reste de la division de 2^m par 8 ne peut être 2 ou 4 que si 2^m lui-même est égal à 2 ou 4, donc m est égal à 1 ou à 2.

$$\boxed{2^m - 3^n = 1 \Rightarrow m = 1 \text{ ou } m = 2.}$$

3°/ Solutions de l'équation diophantienne.

Pour $m = 1$, $2^m = 2$.
$2 - 3^n = 1 \Rightarrow 3^n = 1$, donc $n = 0$.

Pour $m = 2$, $2^m = 4$.
$4 - 3^n = 1 \Rightarrow 3^n = 3$, donc $n = 1$.

L'équation $2^m - 3^n = 1$ n'a donc, dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, que deux solutions.

$$\boxed{2^m - 3^n = 1 \Rightarrow (m, n) = (1, 0) \text{ ou } (m, n) = (2, 1).}$$

Chapitre 3. Division euclidienne.

Enoncés.

Exercice 6. Reste et écriture décimale.

1°/ Déterminer le reste de la division euclidienne de 7^2 par 4. 2°/ En déduire le chiffre des unités de l'écriture décimale de l'entier $7^{(7^7)}$.	

Solution.

1°/ Reste.

$$7^1 \equiv 3\ (4).$$
$$49 = 4 \times 12 + 1$$
$$7^2 \equiv 1\ (4).$$
$$7^4 \equiv 1\ (4).$$
$$7^6 \equiv 1\ (4).$$
$$7^7 = 7^6 \times 7^1 \equiv 3\ (4).$$

$$\boxed{7^7 \equiv 3\ (4).}$$

2°/ Chiffre des unités.

D'après le résultat précédent, 7^7 est de la forme $4k + 3$.

$$7^{(7^7)} = 7^{4k+3} = (7^4)^k \times 7^3$$

$49 = 5 \times 10 - 1$
$7^2 \equiv -1\ (10).$
$7^4 \equiv 1\ (10).$
$(7^4)^k \equiv 1\ (10).$
$7^3 = 7 \times 7^2 \equiv -7\ (10).$
$7^3 \equiv 3\ (10).$
$7^{(7^7)} = (7^4)^k \times 7^3 \equiv 3\ (10).$

$$\boxed{\begin{array}{c} 7^{(7^7)} \equiv 3\ (10). \\ \text{Le chiffre des unités de l'écriture décimale de } 7^{(7^7)} \text{ est 3.} \end{array}}$$

Chapitre 3. Division euclidienne.

Enoncés.

Exercice 7. Théorème de Bézout.

Déterminer tous les couples $(x, y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, solutions de l'équation $7x - 9y = 1$.	

Solution.

Les nombres 9 et 7 sont premiers entre eux.
Utilisons l'algorithme d'Euclide pour la détermination du PGCD.

$$\begin{gathered}
9 = 7 + 2 \\
7x - (7 + 2)y = 1. \\
7(x - y) - 2y = 1. \\
7 = 3 \times 2 + 1 \\
(3 \times 2 + 1)(x - y) - 2y = 1. \\
2 \times (3(x - y) - y) + (x - y) = 1. \\
(x - y) - 2(4y - 3x) = 1 \\
2(4y - 3x) = x - y - 1
\end{gathered}$$

Pour avoir $7x - 9y = 1$, il faudra nécessairement que y soit strictement plus petit que x.
$x - y$ doit donc être supérieur ou égal à 1.
$x - y - 1$ doit donc être positif, donc $2(4y - 3x) = x - y - 1$ doit donc être positif, et pair.
La solution du problème est alors donnée par :

$$\begin{gathered}
x - y - 1 = 2k, k \in \mathbb{N} \\
4y - 3x = k.
\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}
x - y = 2k + 1 \\
4y - 3x = k.
\end{gathered}$$

Multiplions les deux membres de la première relation par 3 et ajoutons membre à membre à la seconde :

$$\begin{gathered}
y = k + 3(2k + 1) = 7k + 3 \\
x = y + 2k + 1 = 9k + 4
\end{gathered}$$

Les couples $(x, y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, solutions de l'équation $7x - 9y = 1$ sont : $(x, y) = (7k + 3, 9k + 4), k \in \mathbb{N}$.

Méthode alternative.

Supposons qu'on ait trouvé une solution (a, b) : $7a - 9b = 1$.
Par soustraction, on doit avoir : $7(x - a) - 9(y - b) = 0$, donc $x - a$ est multiple de 9 et $y - b$ est multiple de 7.

Le tout est donc de trouver une solution particulière du problème.
Or on a 4 fois 7 égale 28, 3 fois 9 égale 27, et 28 moins 27 égale 1 :
$7 \times 4 - 9 \times 3 = 1$,
donc le couple (4, 3) est solution et c'est la plus petite solution possible, puisque 4 est plus petit que 9 et 3 plus petit que 7.
On retrouve donc la solution :

$$(x, y) = (7k + 3, 9k + 4), k \in \mathbb{N}.$$

Bien entendu, cette méthode est plus facile à écrire après avoir résolu le problème de façon systématique par la première méthode, qu'à imaginer avant de l'avoir résolu, sauf avec de l'habitude !

Chapitre 3. Division euclidienne.

Enoncés.

Exercice 8. Nombres étrangers.

Soient a et b deux entiers naturels non nuls que l'on suppose étrangers. Soit $c \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe $x \in \mathbb{N}$, tel que $a + b\,x$ et c soient étrangers.	

Solution.

Si a et c ne sont pas étrangers, soit d un diviseur premier de c.
Si d divise a, d ne divise pas b.
Dans ce cas, pour que d ne divise pas $a + b\,x$, il faut et il suffit que d ne divise pas x.
Si d divise b, il ne divise pas a donc il ne divise pas $a + b\,x$, quel que soit x.
Au total, si a et c ne sont pas étrangers, pour que $a + b\,x$ soit étranger à c, il suffit que x soit étranger au PGCD de a et c, par exemple $x = 1$.

Si a et c sont étrangers, pour que $a + b\,x$ soit étranger à c, il suffit de prendre pour x un multiple de c, par exemple $x = 0$.

Si a et b sont étrangers, pour tout $c \in \mathbb{N}^*$, on peut trouver un x tel que $a + b\,x$ et c soient étrangers.
— Si a et c ne sont pas étrangers, il suffit de prendre $x = 1$.
— Si a et c sont étrangers, il suffit de prendre $x = 0$.

Chapitre 3. Division euclidienne.

Enoncés.

Exercice 9. Un nombre formé de 1 n'est pas un carré.

1°/ Soit $k \in \mathbb{N}$. Quels sont les restes possibles de la division euclidienne de k^2 par 4 ? 2°/ Pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, on considère l'entier a_n = 111...11 (l'écriture décimale de a_n comporte n fois le chiffre 1). Montrer que a_n n'est pas un carré parfait.	

Solution.

1°/ Restes modulo 4.

Tout entier naturel est pair ou impair.
Le carré d'un nombre pair est multiple de 4 : $(2n)^2 = 4n^2$; son reste modulo 4 est 0.
Le carré d'un nombre impair est un multiple de 4 plus 1 : $(2n + 1)^2 = 4n(n + 1) + 1$; son reste modulo 4 est 1.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, le reste de la division euclidienne de k^2 par 4 est 0, si k est pair, 1, si k est impair.

2°/ a_n n'est pas un carré parfait.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, a_n est un entier impair et l'on a :
$a_{n+1} = 10\,a_n + 1$

$a_2 = 11$ est congru à 3 modulo 4.
Si a_n est congru à 3 modulo 4, $a_{n+1} = 10\,a_n + 1$ est congru à $2 \times 3 + 1 \equiv 3$ modulo 4.

On voit donc, par récurrence sur l'entier $n \geqslant 2$, que a_n est congru à 3 modulo 4.
a_n ne peut donc pas être un carré parfait, d'après le résultat de la première question.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, a_n n'est pas un carré parfait.

Chapitre 3. Division euclidienne.

Enoncés.

Exercice 10. Division par 27.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Quels sont les restes possibles de la division de 10^n par 27 ? Le nombre 999 888 777 666 555 444 333 222 111 est-il divisible par 27 ?	

Solution.

1°/ Restes.

$1 \equiv 1\ (27)$
$10 \equiv 10\ (27)$
$100 = 3 \times 27 + 19 \equiv 19\ (27)$
$10^3 \equiv 190 = 7 \times 27 + 1\ (27)$
$10^3 \equiv 1\ (27)$

Si n est multiple de 3, le reste de la division de 10^n par 27 est 1.
Si n est un multiple de 3, plus 1, le reste de la division de 10^n par 27 est 10.
Si n est un multiple de 3, plus 2, le reste de la division de 10^n par 27 est 19.

Le reste de la division de 10^{3k+h} par 27 est $(1 + 9h)$, $h = 0, 1, 2$.

2°/ Divisibilité par 27.

$111 \equiv 1 + 10 + 19 = 30\ (27)$
$111 \equiv 3\ (27)$

$$999\,888\,777\,666\,555\,444\,333\,222\,111 = 111\left(\sum_{k=1}^{k=9} k \times 10^{3\times(k-1)}\right)$$

$$999\,888\,777\,666\,555\,444\,333\,222\,111 \equiv 3 \times \sum_{k=1}^{k=9} k = 3 \times 45 = 27 \times 5 \equiv 0\ (27)$$

Le nombre 999 888 777 666 555 444 333 222 111 est divisible par 27.

Chapitre 3. Division euclidienne.

Enoncés.

Exercice 11. Equation diophantienne.

Montrer que l'équation $x^2 - 2y^2 + 8z = 3$ n'admet pas de solution (x, y, z) dans $\mathbb{Z}^3$.	

Solution.

Tout entier naturel est congru à un entier entre 0 et 7, modulo 8.

Nombre	0	1	2	3	4	5	6	7
Carré	0	1	4	9	16	25	36	49
Reste modulo 8	0	1	4	1	0	1	4	1

Modulo 8, $x^2 - 2y^2$ peut être congru à :

$$0 - 2 \times 0 = 0 \; ; \; 0 - 2 \times 1 = -2 \equiv 6 \; ; \; 0 - 2 \times 4 = -8 \equiv 0 \; ;$$
$$1 - 2 \times 0 = 1 \; ; \; 1 - 2 \times 1 = -1 \equiv 7 \; ; \; 1 - 2 \times 4 = -7 \equiv 1 \; ;$$
$$4 - 2 \times 0 = 4 \; ; \; 4 - 2 \times 1 = 2 \; ; \; 4 - 2 \times 4 = -4 \equiv 4.$$

$x^2 - 2y^2$ n'est jamais congru à 3, ni à 5 d'ailleurs, modulo 8.

L'équation $x^2 - 2y^2 + 8z = 3$ n'admet pas de solution (x, y, z) dans $\mathbb{Z}^3$.

Chapitre 3. Division euclidienne.

Enoncés.

Exercice 12. Grand théorème de Fermat.

Soit $n \in \mathbb{N}$, un entier naturel pair. On considère l'équation $x^n + y^n = z^n$. Montrer que cette équation n'a pas de solution (x, y, z) dans $(\mathbb{N}^*)^3$, telle que x et y soient impairs.	

Solution.

Soit $n \in \mathbb{N}$, un entier naturel pair, $n = 2m$.
Soit (x, y, z), une solution dans $(\mathbb{N}^*)^3$, de l'équation $x^n + y^n = z^n$, telle que x et y soient impairs.

Tout entier est congru à un nombre compris entre 0 et 7, modulo 8.
Les carrés des nombres impairs sont congrus à 1, modulo 8 :

Nombre	0	1	2	3	4	5	6	7
Carré	0	1	4	9	16	25	36	49
Reste modulo 8	0	1	4	1	0	1	4	1

$x^n + y^n = (x^2)^m + (y^2)^m$ est donc congru à $1^m + 1^m = 2$, modulo 8.
$z^n = (z^m)^2$ est donc congru à 2 modulo 8.
C'est impossible, puisqu'aucun carré n'est congru à 2 modulo 8.

L'équation $x^n + y^n = z^n$ n'a pas de solution (x, y, z) dans $(\mathbb{N}^*)^3$, telle que x et y soient impairs.

Chapitre 3. Division euclidienne.

Enoncés.

Exercice 13. Multiple ne comportant que des 1.

On désigne par n un entier naturel dont l'écriture décimale se termine par 1, 3, 7 ou 9. Montrer qu'il existe toujours un multiple de n dont l'écriture décimale ne comporte que des 1.	

Solution.

1°/ La suite $(A_k)_{1 \leq k}$ des entiers ne comportant que des 1.

Pour $k \geqslant 1$, nous notons A_k l'entier naturel dont l'écriture décimale est constituée de k chiffres 1 successifs : $A_1 = 1$, $A_2 = 11$, etc.

$9\,A_k + 1 = 10^k$.

La suite $(A_k)_{1 \leq k}$ est une suite strictement croissante d'entiers naturels.

Les entiers A_k vérifient la relation :

$$h < k \Rightarrow 9\,(A_k - A_h) = 10^k - 10^h = 10^h\,(10^{k-h} - 1) = 9 \times 10^h \times A_{k-h}$$

$$\boxed{h < k \Rightarrow A_k - A_h = 10^h \times A_{k-h}}$$

2°/ Les restes modulo n.

On désigne par n un entier naturel dont l'écriture décimale se termine par 1, 3, 7 ou 9.
Pour $k \geqslant 1$, on désigne par p_k le reste de la division de A_k par n.

La suite $(p_k)_{1 \leq k}$ est une suite d'entiers compris entre 0 et $n - 1$.

Parmi les $n + 1$ premiers éléments de la suite, il y en a forcément au moins deux qui sont égaux, puisqu'il n'existe pas d'injection d'un ensemble à $n + 1$ éléments dans un ensemble à n éléments (**Principe des tiroirs**).

Soient h et k des entiers, $h < k$, tels que $p_h = p_k$.

D'après la relation établie en 1° :

$$h < k \Rightarrow A_k - A_h = 10^h \times A_{k-h}$$

La relation :

$$A_k \equiv A_h \pmod{n}$$

entraîne que $10^h \times A_{k-h}$ est un multiple de n.
Comme ***n* se termine par 1, 3, 7, ou 9**, il n'admet ni 2 ni 5 comme facteur premier, donc n est étranger à 10^h et comme $10^h \times A_{k-h}$ est un multiple de n, n divise A_{k-h}.

Il existe un multiple de n dont l'écriture décimale ne comporte que des 1.

Pour préciser les choses, comme 10 et 9 n sont étrangers, la classe de 10 dans l'anneau $\mathbb{Z} / 9n\mathbb{Z}$ est un élément du groupe des unités de cet anneau, c'est-à-dire un élément inversible.
En appelant p le nombre de 1 du plus multiple de n ne comportant que des 1, p est l'ordre de la classe de 10 dans cet anneau : $10^p \equiv 1 \pmod{9n}$.

En pratique, pour trouver le facteur par lequel il faut multiplier n pour obtenir un nombre ne comportant que des 1, il suffit de poser la division par n, en ajoutant progressivement autant de 1 que nécessaire pour aboutir à un reste nul.

Exemple : *n* = 7.

```
11     | 7
041    | 15873
 061   |
  051  |
   021 |
     0 |
```

15 873 × 7 = 111 111
$p = 6$
$10^6 \equiv 1 \pmod{63}$.

Chapitre 3. Division euclidienne.

Enoncés.

Exercice 14. Résolution d'un système de congruences.

On se propose de résoudre le système d'équivalences suivant :

$$(\mathscr{P})\ \begin{cases} x \equiv 3 \pmod{56} \\ x \equiv 2 \pmod{99} \end{cases}$$

1°/ Ecrire l'identité de Bézout qui lie les entiers 56 et 99.

2°/ En déduire que :

$$\exists\,(u, v) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}\ \begin{cases} 99\,u \equiv 1 \pmod{56} \\ 56\,v \equiv 1 \pmod{99} \end{cases}$$

puis que $x_0 = 3 \times 99\,u + 2 \times 56\,v$ est une solution particulière du problème $(\mathscr{P})$.

3°/ Donner la valeur de $x - x_0$, dans $\mathbb{Z} / 56\,\mathbb{Z}$ puis dans $\mathbb{Z} / 99\,\mathbb{Z}$, puis en déduire l'expression de la solution générale x.

Solution.

1°/ Identité de Bézout.

L'**algorithme d'Euclide** permet de déterminer le PGCD de 56 et 99 :

$99 = 56 \times 1 + 43$
$56 = 43 \times 1 + 13$
$43 = 13 \times 3 + 4$
$13 = 4 \times 3 + 1$
$4 = 4 \times 1 + 0$

Le PGCD de 56 et 99 est le **dernier reste non nul** : c'est 1.
Autrement dit, les nombre 56 et 99 sont premiers entre eux.

L'identité de Bézout : $(\exists\,(s, t) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z})(99\,s + 56\,t = PGCD\,(99, 56))$, s'écrit ici :

$$(\exists\,(s, t) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z})(99\,s + 56\,t = 1)$$

Pour trouver un tel couple d'entiers relatifs vérifiant l'identité $99\,s + 56\,t = 1$, il suffit d'utiliser les

identités données par l'algorithme d'Euclide :

$1 = 13 - 4 \times 3$
$1 = 13 - (43 - 13 \times 3) \times 3 = 13 \times 10 - 43 \times 3$
$1 = (56 - 43) \times 10 - 43 \times 3 = 56 \times 10 - 43 \times 13$
$1 = 56 \times 10 - (99 - 56) \times 13 = 56 \times 23 - 99 \times 13$

On a donc trouvé le couple $(s, t) = (-13, 23)$ avec $99 \times (-13) + 56 \times 23 = 1$ (identité de Bézout).

$99 \times (-13) + 56 \times 23 = 1$ (identité de Bézout).

2°/ Solution particulière x_0.

Pour tout couple $(s, t) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ vérifiant l'identité de Bézout $99\,s + 56\,t = 1$, on a, dans $\mathbb{Z} / 56\,\mathbb{Z}$ puis dans $\mathbb{Z} / 99\,\mathbb{Z}$:

$99\,s \equiv 1 \pmod{56}$
$56\,t \equiv 1 \pmod{99}$

Or nous connaissons déjà un couple $(s, t) = (-13, 23)$ vérifiant l'identité de Bézout.
Si nous appelons (u, v) ce couple, nous avons répondu à la question : le couple $(u, v) = (-13, 23)$ vérifie :

$99\,u \equiv 1 \pmod{56}$
$56\,v \equiv 1 \pmod{99}$

Multiplions ces deux congruences respectivement par 3 et par 2 :

$3 \times 99\,u \equiv 3 \pmod{56}$
$2 \times 56\,v \equiv 2 \pmod{99}$

On voit donc que le nombre $x_0 = 3 \times 99\,u + 2 \times 56\,v = 297 \times (-13) + 112 \times 23 = 2\,576 - 3\,861 = -1\,285$ vérifie :

$x_0 \equiv 3 \pmod{56}$
$x_0 \equiv 2 \pmod{99}$

Le nombre $x_0 = -1\,285$ vérifie :

$x_0 \equiv 3 \pmod{56}$
$x_0 \equiv 2 \pmod{99}$

3°/ Solution générale du problème.

Si l'on a, à la fois :

$x \equiv 3 \pmod{56}$
$x \equiv 2 \pmod{99}$

et

$$x_0 \equiv 3 \pmod{56}$$
$$x_0 \equiv 2 \pmod{99}$$

il vient, par différence :

$$x - x_0 \equiv 0 \pmod{56}$$
$$x - x_0 \equiv 0 \pmod{99}$$

Donc $x - x_0$ est multiple, à la fois de 56 et de 99.
Comme 56 et 99 sont premiers entre eux, c'est-à-dire qu'ils n'ont aucun facteur premier commun, tout nombre multiple de 56 et de 99 est multiple de leur produit, et réciproquement.

La solution générale du problème ($\mathscr{P}$) s'écrit donc :

$$x = x_0 + 56 \times 99\, k,\ k \in \mathbb{Z}.$$

La solution générale du problème ($\mathscr{P}$) est $x = -1\,285 + 5\,544\, k,\ k \in \mathbb{Z}$.

En particfulier, la plus petite solution positive est $5\,544 - 1\,285 = 4\,259$.

Exercices

Nombres premiers.

1. Nombres premiers.
2. Théorème de Liouville.
3. Théorème de Lagrange.
4. Petit théorème de Fermat.
5. Théorème de Wilson.

Nombres premiers.

La relation "***x* divise *y***" est une relation d'ordre dans $\mathbb{N}^*$.
Les nombres premiers sont les nombres minimaux, pour la relation de divisibilité, dans $\mathbb{N}^* - \{1\}$.
Autrement dit, les nombres premiers sont les nombres qui ne sont divisibles que par 1 et par eux-mêmes. Si p est premier, les entiers modulo p forment un **corps fini** à p éléments.

Il y a une infinité de nombres premiers.
Tout entier naturel différent de 1 s'écrit de façon unique (à l'ordre près) sous forme de produit de nombres premiers.
Si p est un nombre premier et si p divise un produit $a\ b$ d'entiers naturels, alors p divise a ou p divise b.
Si p est un nombre premier, si p divise une somme $a + b$ d'entiers naturels, alors si p divise a, p divise b.
Si p est un nombre premier et si p divise deux entiers naturels a et b, alors p divise le PGCD de a et b.

Théorème de Wilson.
Pour que p soit premier, il faut et il suffit que p divise $(p-1)\,! + 1$.

Nombres de Mersenne.
Si $2^n - 1$ est premier, alors n est premier.
La réciproque est fausse ($n = 11$).

Nombres de Fermat.
Si $2^n + 1$ est premier, alors n est une puissance de 2.
La réciproque est fausse ($n = 2^5$).

HAUT

Théorème de Liouville.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'équation

$$(p-1)\,!\,+1 = p^n \text{ (E)}$$

ne possède pas de solution où p est un entier naturel premier, $p > 5$ (théorème de Liouville, 1844).

HAUT

Théorème de Lagrange.

L'ordre d'un sous-groupe divise l'ordre du groupe.

En particulier, si p est premier, $\mathbb{Z} / p \mathbb{Z}$ est un corps fini à p éléments, son groupe multiplicatif est simple (les seuls sous-groupes sont $\{1\}$ et $\mathbb{Z} / p \mathbb{Z} - \{0\}$) et tous les éléments sont d'ordre $p - 1$.

Petit théorème de Fermat.

Soit p un entier premier.
Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, n^{p-1} est congru à 1 modulo p : $n^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$

HAUT

Théorème de Wilson.

Pour que p soit un entier premier, il faut et il suffit que $(p-1)\,!+1$ soit divisible par p.

HAUT

Chapitre 4. Nombres premiers.

Exercices

Exercice 1. Nombres de Fermat.
Exercice 2. Multiple de 42.
Exercice 3. Théorème de Liouville.
Exercice 4. Théorème de Wilson.
Exercice 5. Puissances *p*-ièmes.
Exercice 6. *p* divise $2^p + 1$.
Exercice 7. Division par 29.
Exercice 8. Divisibilité d'une factorielle.
Exercice 9. *n* divise $2^n - 1$.

Exercice 1. Nombres de Fermat.

1°/ Soit $a \in \mathbb{N}$. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $(a-1)^{2^k} + 1 \equiv 2 \pmod{a}$.

2°/ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $F_n = 2^{2^n} + 1$ (F_n est appelé le n^e nombre de Fermat).

Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $(F_n - 1)^{2^k} + 1 = F_{n+k}$.

En déduire qu'il existe $q \in \mathbb{N}$, tel que $F_{n+k} = q F_n + 2$.

3°/ Soient n et m deux entiers naturels, $n \neq m$. Montrer que si d est un entier naturel qui divise à la fois F_n et F_m, alors $d = 1$.

Solution

HAUT

Exercice 2. Multiple de 42.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que 42 divise $n^7 - n$.	Solution

HAUT

Exercice 3. Théorème de Liouville.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On se propose de démontrer que l'équation $(p-1)! + 1 = p^n$ (E) ne possède pas de solution où p est un entier naturel premier, $p > 5$ (théorème de Liouville, 1844).

1°/ Montrer que si p est un entier naturel premier, $p > 5$, $(p-1)^2$ divise $(p-1)!$.

2°/ On suppose que p est un entier naturel premier, $p > 5$, et que p est une solution de (E).

a) Montrer que $p-1$ divise $p^{n-1} + p^{n-2} + ... + p + 1$.

b) Montrer, d'autre part, que $p^{n-1} + p^{n-2} + ... + p + 1$ et n ont le même reste dans la division euclidienne par $p-1$.

c) En déduire que $p-1$ divise n.

d) Montrer que $(p-1)^{p-1} < p^n$, puis que $(p-1)! + 1 < p^n$. Conclure.

Solution

HAUT

Exercice 4. Théorème de Wilson.

Soit $p \in \mathbb{N}^*$, p entier premier.
Montrer que p divise $(p-1)\,! + 1$. (Théorème de Wilson).
Etudier la réciproque.

Application.
Soit $p \in \mathbb{N}^*$, p entier premier.
Montrer que p^p divise $(p^2-1)\,! - p^{p-1}$.

Solution

HAUT

Exercice 5. Puissances p-ièmes.

Soit $p \in \mathbb{N}$, p premier. Montrer que $2^p + 3^p$ ne peut pas s'écrire sous la forme q^k où q est un entier premier et k un entier $\geqslant 2$.	Solution

HAUT

Exercice 6. p divise $2^p + 1$.

Déterminer tous les entiers naturels $p \geqslant 2$, p premier, tels que p divise $2^p + 1$.	Solution

HAUT

Exercice 7. Division par 29.

Quel est le reste de la division euclidienne de 26 ! par 29.	Solution

HAUT

Exercice 8. Divisibilité d'une factorielle.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geqslant 3$, n impair.
Etablir l'équivalence des deux assertions suivantes :
(i) n et $n + 2$ sont premiers.
(ii) $(n - 1)$! n'est divisible ni par n, ni par $n + 2$.

Solution

HAUT

Exercice 9. n divise $2^n - 1$.

Déterminer les entiers $n \in \mathbb{N}^*$, tels que n divise $2^n - 1$.	Solution

HAUT

Chapitre 4. Nombres premiers.

Enoncés.

Exercice 1. Nombres de Fermat.

1°/ Soit $a \in \mathbb{N}$. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $(a-1)^{2^k} + 1 \equiv 2 \pmod{a}$. 2°/ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $F_n = 2^{2^n} + 1$ (F_n est appelé le n^e nombre de Fermat). Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $(F_n - 1)^{2^k} + 1 = F_{n+k}$. En déduire qu'il existe $q \in \mathbb{N}$, tel que $F_{n+k} = q F_n + 2$. 3°/ Soient n et m deux entiers naturels, $n \neq m$. Montrer que si d est un entier naturel qui divise à la fois F_n et F_m, alors $d = 1$.	

Solution.

1°/ Congruence.

Soit $a \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}^*$.

On peut développer $(a-1)^{2^k}$ par la **formule du binôme de Newton**.

$$(a-1)^{2^k} = \sum_{i=0}^{i=2^k} \binom{2^k}{i} a^i (-1)^{2^k - i}$$

Le seul terme qui ne contient pas a comme facteur est celui qui correspond à $i = 2^k$: il vaut 1.

$$(a-1)^{2^k} \equiv 1 \pmod{a}.$$

Comme la congruence est compatible avec l'addition, il vient :

$$\boxed{(a-1)^{2^k} + 1 \equiv 2 \pmod{a}.}$$

2°/ Relation de récurrence.

Soit $F_n = 2^{2^n} + 1$.

$F_n - 1 = 2^{2^n}$

$(F_n - 1)^{2^k} = (2^{2^n})^{2^k} = 2^{2^n \times 2^k} = 2^{2^{n+k}} = F_{n+k} - 1$

$$(F_n - 1)^{2^k} + 1 = F_{n+k}.$$

La relation démontrée dans la première question montre alors, pour $a = F_n$:

$$F_{n+k} \equiv 2 \pmod{F_n}.$$

Or l'application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ qui, à un entier naturel n associe le nombre de Fermat correspondant F_n est une application croissante :
$n \leqslant m \Rightarrow F_n \leqslant F_m$,
donc, pour $k \in \mathbb{N}^*$, F_{n+k} est supérieur à F_n.
La relation $F_{n+k} \equiv 2 \pmod{F_n}$ montre alors qu'il existe un entier naturel $q \in \mathbb{N}$ tel que $F_{n+k} = q F_n + 2$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, il existe un entier naturel $q \in \mathbb{N}$ tel que $F_{n+k} = q F_n + 2$.

3°/ PGCD de deux nombres de Fermat.

Soit d un diviseur commun à F_n et à F_m, avec $n \neq m$.
On peut supposer, pour fixer les idées, que m est plus grand que n.
Posons $k = m - n$. $k \in \mathbb{N}^*$.
Le résultat précédent s'applique : il existe un entier naturel $q \in \mathbb{N}$ tel que $F_{n+k} = q F_n + 2$.
Il existe un entier naturel $q \in \mathbb{N}$ tel que $F_m = q F_n + 2$.
d divise F_n, d divise F_m, donc d divise $F_m - q F_n = 2$.
2 est premier : les seuls diviseurs de 2 sont 1 et 2.
d ne peut pas être égal à 2 parce que les nombres de Fermat sont impairs, ce sont des multiples de 2, plus 1.
donc $d = 1$.

Deux nombres de Fermat différents sont étrangers.

Chapitre 4. Nombres premiers.

Enoncés.

Exercice 2. Multiple de 42.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que 42 divise $n^7 - n$.	

Solution.

$n^7 - n = n(n^6 - 1) = n(n^3 - 1)(n^3 + 1) = n(n-1)(n^2 + n + 1)(n+1)(n^2 - n + 1)$
$n^7 - n = (n-1)\,n\,(n+1)(n^2 - n + 1)(n^2 + n + 1)$

1°/ Divisibilité par 6.

$(n-1)\,n\,(n+1)$ est divisible par 6 puisque, parmi trois entiers consécutifs, il y en un qui est multiple de 3 et au moins un qui est pair.
Donc 6 divise $n^7 - n$: $n^7 - n \equiv 0 \pmod 6$.

2°/ Divisibilité par 7.

Comme 7 est premier, $\mathbb{Z} / 7\,\mathbb{Z}$ est un **corps commutatif**.
Les classes d'équivalence des entiers de 1 à 6 forment un groupe multiplicatif d'ordre 6.
Dans ce **groupe multiplicatif d'ordre 6**, d'après le **théorème de Fermat** (Algèbre, Chapitre 2, Exercice 4), pour toute classe $\overline{x}$, $\overline{x}^6 = \overline{1}$.
Autrement dit, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, n^6 est congru à 1 modulo 7 : $n^6 \equiv 1 \pmod 7$.
En multipliant par n, $n^7 \equiv n \pmod 7$.
Plus généralement, chaque fois que p est premier, $n^p \equiv n \pmod p$.
Donc 7 divise $n^7 - n$: $n^7 - n \equiv 0 \pmod 7$

3°/ Divisibilité par 42.

Comme 6 et 7 sont étrangers (ils n'ont pas de diviseur commun), le PPCM de 6 et 7 est leur produit 42 :

$$n^7 - n \equiv 0 \pmod 7 \text{ et } n^7 - n \equiv 0 \pmod 6 \Rightarrow n^7 - n \equiv 0 \pmod{42}$$

42 divise $n^7 - n$.

Chapitre 4. Nombres premiers.

Enoncés.

Exercice 3. Théorème de Liouville.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On se propose de démontrer que l'équation $(p-1)! + 1 = p^n$ (E) ne possède pas de solution où p est un entier naturel premier, $p > 5$ (théorème de Liouville, 1844). 1°/ Montrer que si p est un entier naturel premier, $p > 5$, $(p-1)^2$ divise $(p-1)!$. 2°/ On suppose que p est un entier naturel premier, $p > 5$, et que p est une solution de (E). a) Montrer que $p-1$ divise $p^{n-1} + p^{n-2} + ... + p + 1$. b) Montrer, d'autre part, que $p^{n-1} + p^{n-2} + ... + p + 1$ et n ont le même reste dans la division euclidienne par $p-1$. c) En déduire que $p-1$ divise n. d) Montrer que $(p-1)^{p-1} < p^n$, puis que $(p-1)! + 1 < p^n$. Conclure.	

Solution.

1°/ $(p-1)^2$ divise $(p-1)!$.

Il est clair déjà que, par définition d'une factorielle, $(p-1)$ divise $(p-1)!$.
Tout le problème est donc de démontrer que $(p-2)!$ est divisible par $(p-1)$.

Mais si p est un entier naturel premier strictement plus grand que 5, il est impair, donc $(p-1)$ est pair.
$\frac{p-1}{2}$ est un entier, strictement plus petit que $p-2$ et différent de 2, puisque $p > 5$.
Dans ces conditions, $(p-2)!$ est divisible par $2 \times \frac{p-1}{2}$, donc par $p-1$.

Si p est un entier naturel premier, $p > 5$, $(p-1)^2$ divise $(p-1)!$.

$$(p-2)! \equiv 0 \pmod{(p-1)}$$

2°/ L'impossible solution.

a) $p-1$ divise $p^{n-1} + p^{n-2} + ... + p + 1$.

Si p est solution de (E), on ne peut pas avoir $n = 0$, sinon, il faudrait que $(p-1)! = 0$, ce qui n'est pas possible.
Nécessairement, n est supérieur ou égal à 1.

$$(p-1)! = p^n - 1 = (p-1)(p^{n-1} + p^{n-2} + ... + p + 1).$$

On peut simplifier par $p - 1$, qui n'est pas nul, puisque p est premier et plus grand que 5.

$$(p-2)\,! = p^{n-1} + p^{n-2} + ... + p + 1$$

Or, si p est premier supérieur à 5,n on a démontré dans la première question que $(p-2)\,!$ était divisible par $p - 1$. Donc :

$$\boxed{p - 1 \text{ divise } p^{n-1} + p^{n-2} + ... + p + 1.}$$

$$p^{n-1} + p^{n-2} + ... + p + 1 \equiv 0 \pmod{(p-1)}$$

b) Reste modulo $p - 1$.

$p \equiv 1 \pmod{(p-1)} \Rightarrow p^{n-1} + p^{n-2} + ... + p + 1 \equiv 1 + 1 + ... + 1$ (n fois) $\pmod{(p-1)}$
$p^{n-1} + p^{n-2} + ... + p + 1 \equiv n \pmod{(p-1)}$

c) $p - 1$ divise n.

$p^{n-1} + p^{n-2} + ... + p + 1 \equiv 0 \pmod{(p-1)}$ et $p^{n-1} + p^{n-2} + ... + p + 1 \equiv n \pmod{(p-1)} \Rightarrow n \equiv 0 \pmod{(p-1)}$

$$\boxed{p - 1 \text{ divise } n.}$$

d) Inégalité.

Si $p - 1$ divise n, c'est que $p - 1$ est inférieur à n.
Or l'exponentiation est une application strictement croissante :

$$p - 1 < p \Rightarrow (p-1)^{p-1} < p^{p-1} \leqslant p^n$$

On a donc bien :

$$\boxed{(p-1)^{p-1} < p^n}$$

Or les $p - 1$ facteurs, de 1 à p– 1, qui entrent dans $(p-1)\,!$ sont tous inférieurs ou égaux à $p - 1$ et il y en a au moins un qui est strictement plus petit que $p - 1$, puisque p est supérieur à 5.
Donc $(p-1)\,!$ est strictement plus petit que $(p-1)^{p-1}$ donc $(p-1)\,! + 1$ est inférieur ou égal à $(p-1)^{p-1}$.
Donc :

$$\boxed{(p-1)\,! + 1 < p^n.}$$

Cette inégalité contredit le fait que p vérifie l'équation (E) : $(p-1)\,! + 1 = p^n$.

$$\boxed{\text{L'équation } (p-1)\,! + 1 = p^n \text{ (E) ne possède pas de solution où } p \text{ est un entier naturel premier, } p > 5.}$$

Chapitre 4. Nombres premiers.

Enoncés.

Exercice 4. Théorème de Wilson.

Soit $p \in \mathbb{N}^*$, p entier premier. Montrer que p divise $(p-1)\,!+1$. (Théorème de Wilson). Etudier la réciproque. **Application.** Soit $p \in \mathbb{N}^*$, p entier premier. Montrer que p^p divise $(p^2-1)\,! - p^{p-1}$.	

Solution.

1°/ Théorème de Wilson.

Le "**théorème de Wilson**" a été publié en 1770 par Waring, et démontré par Lagrange en 1771.

Le produit $(x-1)(x-2)\ldots(x-(p-1))$ est un polynôme en x de degré $p-1$:
$(x-1)(x-2)\ldots(x-(p-1)) = x^{p-1} - A_1 x^{p-2} + \ldots + (-1)^{p-1} A_{p-1}$
$A_{p-1} = (p-1)\,!$

Multiplions par x :
$x\,(x-1)(x-2)\ldots(x-(p-1)) = x^p - A_1 x^{p-1} + \ldots + (-1)^{p-1} A_{p-1} x.$

Changeons x en $x-1$:
$(x-1)(x-2)\ldots(x-p) = (x-1)^p - A_1 (x-1)^{p-1} + \ldots + (-1)^{p-1} A_{p-1} (x-1).$

Parmi p entiers consécutifs, il y en a forcément un qui est multiple de p.
Le produit de p entiers consécutifs est un multiple de p.
Pour tout entier x :
$(x-1)^p - A_1 (x-1)^{p-1} + \ldots + (-1)^{p-1} A_{p-1} (x-1) \equiv 0 \pmod p$

Pour tout entier a compris entre 1 et $p-1$, $a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$, $a^p \equiv a \pmod p$ (**théorème de Fermat**).
On en déduit, pour tout entier x compris entre 1 et $p-1$:
$(x-1) - A_1 + \ldots + (-1)^{p-1} A_{p-1} (x-1) \equiv 0 \pmod p$
$-1 \equiv p-1 \pmod p$
$(p-1)^{p-1} \equiv 1 \pmod p$
$(-1)^{p-1} \equiv 1 \pmod p$
$-A_1 + \ldots + (A_{p-1} + 1)(x-1) \equiv 0 \pmod p$

Pour $x = 1$, il reste $-A_1 \equiv 0 \pmod{p}$
p divise A_1.

Il reste alors :
$A_2 (x-1)^{p-2} + ... + (A_{p-1} + 1)(x-1) \equiv 0 \pmod{p}$
Multiplions par $(x-1)$ en tenant compte de $(x-1)^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$
$A_2 + ... + (A_{p-1} + 1)(x-1)^2 \equiv 0 \pmod{p}$
Pour $x = 1$, il reste $A_2 \equiv 0 \pmod{p}$
p divise A_2.

Il reste :
$-A_3 (x-1)^{p-3} + ... + (A_{p-1} + 1)(x-1) \equiv 0 \pmod{p}$
On multiplie par $(x-1)^2$, etc.
On peut continuer comme ça jusqu'à A_{p-2}.
p divise A_{p-2}.

Il reste alors :
$(A_{p-1} + 1)(x-1) \equiv 0 \pmod{p}$
Pour $x = p$, comme p et $p-1$ sont étrangers, c'est que p divise $A_{p-1} + 1 = (p-1)! + 1$, ce qui établit le théorème.

Si p est un entier premier, p divise $(p-1)! + 1$.
$(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$

2°/ Réciproque.

Supposons que $(p-1)! + 1$ soit divisible par p.
Si q est un facteur premier de p strictement compris entre 1 et $p-1$, il divise p donc divise $(p-1)! + 1$.
Mais il divise aussi $(p-1)!$ et ne saurait donc diviser $(p-1)! + 1$.
Il y a donc contradiction.
p n'a pas de diviseur propre, il est premier.

Pour que p soit un entier premier, il faut et il suffit que l'on ait
$(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$

3°/ Application.

Remarque.

Du théorème de Wilson résulte que si p est un entier premier, $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$.
$(p-1) \equiv -1 \pmod{p} \Rightarrow (p-1)! \equiv p-1 \pmod{p}$.
Tout élément de $\mathbb{Z} / p\mathbb{Z}$ non égal à 0 modulo p est inversible modulo p, donc régulier pour la multiplication (on peut simplifier).
$p-1$ non congru à 0 modulo p et $(p-1)! \equiv p-1 \pmod{p}$
On peut simplifier par $p-1$, il reste :
$(p-2)! \equiv 1 \pmod{p}$.

Si p est un entier premier, p divise $(p-2)!-1$.
$(p-2)! \equiv 1 \pmod{p}$

Revenons à notre problème.

Dans la suite des entiers de 1 à p^2-1 :

$$1, \dots, p-1, p, p+1 \dots, 2p-1, 2p, 2p+1, 2(p+1), \dots, (p-1)p, \dots, (p-1)(p+1),$$

— il y a la suite des entiers de 1 à $p-1$,
— suivie de $p-1$ suites d'entiers consécutifs de longueur p commençant chacune par un multiple de p, de 1 à $(p-1)$.

$$(p^2-1)! = (p-1)! \prod_{j=1}^{j=p-1} jp(jp+1)\dots(jp+(p-1))$$

— Chaque produit $jp(jp+1)\dots(jp+(p-1))$ est le produit de jp par un multiple de p, plus $(p-1)!$:

$$jp(jp+1)\dots(jp+(p-1)) = jp(k_j p+(p-1)!)$$

$$(p^2-1)! = (p-1)! \prod_{j=1}^{j=p-1} jp(k_j p+(p-1)!)$$

$$(p^2-1)! = ((p-1)!)^2 p^{p-1} \prod_{j=1}^{j=p-1} (k_j p+(p-1)!)$$

$$(k_j p+(p-1)!) \equiv (p-1)! \pmod{p}$$

$$\prod_{j=1}^{j=p-1} (k_j p+(p-1)!) \equiv ((p-1)!)^{p-1} \pmod{p}$$

$$(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$$

Comme p est premier,

$$((p-1)!)^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$$
$$((p-1)!)^{p+1} = ((p-1)!)^{p-1} \times ((p-1)!)^2 \equiv 1 \pmod{p}$$
$$((p-1)!)^p - 1 \equiv 0 \pmod{p}$$
$$(p^2-1)! - p^{p-1} \equiv p^{p-1}(((p-1)!)^{p+1}-1) \equiv 0 \pmod{p^p}$$

$$\boxed{(p^2-1)! - p^{p-1} \equiv 0 \pmod{p^p}}$$

Chapitre 4. Nombres premiers.

Enoncés.

Exercice 5. Puissances p-ièmes.

Soit $p \in \mathbb{N}$, p premier. Montrer que $2^p + 3^p$ ne peut pas s'écrire sous la forme q^k où q est un entier premier et k un entier $\geqslant 2$.	

Solution.

Soit $p \in \mathbb{N}$, p premier.
Pour $p = 2$: $2^p + 3^p = 2^2 + 3^2 = 13$ qui n'est pas un carré.
Pour $p = 3$: $2^p + 3^p = 2^3 + 3^3 = 35$ qui n'est pas un carré.
Pour $p = 5$: $2^p + 3^p = 2^5 + 3^5 = 275$ qui n'est pas un carré.
Le résultat étant acquis pour $p = 2$, $p = 3$, $p = 5$, on peut supposer que p est un entier premier strictement plus grand que 5, donc impair.

Ecrivons $3 = 5 - 2$ et développons $3^p = (5-2)^p$ par la **formule du binôme**.

$$3^p = (5-2)^p = \sum_{k=0}^{k=p} \binom{p}{k} 5^k (-2)^{p-k} = (-2)^p + \sum_{k=1}^{k=p} \binom{p}{k} 5^k (-2)^{p-k}$$

Comme p est impair ($(-2)^p = -2^p$) et qu'on peut mettre 5 en facteur dans la somme, il reste :

$$3^p = -2^p + 5 \sum_{k=1}^{k=p} \binom{p}{k} 5^{k-1} (-2)^{p-k}$$

$$2^p + 3^p \equiv 0 \pmod 5$$

$2^p + 3^p$ est multiple de 5.

Si $2^p + 3^p$ est de la forme q^h où q est un entier premier et h un entier $\geqslant 2$, 5 divise q, donc $5^2 = 25$ divise $q^h = {}^p + 3^p$.

Donc 5 divise $\sum_{k=1}^{k=p} \binom{p}{k} 5^{k-1} (-2)^{p-k} = p \times 2^{p-1} + 5 \sum_{k=2}^{k=p} \binom{p}{k} 5^{k-2} (-2)^{p-k}$.

Il en résulte :

$$p \times 2^{p-1} \equiv 0 \pmod 5.$$

ce qui est impossible puisque p est un entier premier > 5 et que 5 ne divise pas 2, donc ne divise pas 2^{p-1}.

Donc $2^p + 3^p$ n'est pas de la forme q^h où q est un entier premier et h un entier $\geqslant 2$.

Chapitre 4. Nombres premiers.

Enoncés.

Exercice 6. p divise $2^p + 1$.

Déterminer tous les entiers naturels $p \geqslant 2$, p premier, tels que p divise $2^p + 1$.	

Solution.

Par hypothèse : $2^p + 1 \equiv 0 \pmod{p}$.
Comme p est premier : $2^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ (petit théorème de Fermat).
Multiplions par 2 : $2^p \equiv 2 \pmod{p}$.
Ajoutons 1 : $2^p + 1 \equiv 3 \pmod{p}$.
$2^p + 1 \equiv 0 \pmod{p}$ et $2^p + 1 \equiv 3 \pmod{p} \Rightarrow 3 \equiv 0 \pmod{p}$

p est premier et p divise 3, donc $p = 3$.

Le seul entier naturel $p \geqslant 2$, p premier, tel que p divise $2^p + 1$ est $p = 3$.

Chapitre 4. Nombres premiers.

Enoncés.

Exercice 7. Division par 29.

Quel est le reste de la division euclidienne de 26 ! par 29.	

Solution.

29 est premier.
Le **théorème de Wilson** (Exercice 4) dit : si p est premier, alors $(p-1)!+1$ est divisible par p.
$28! + 1 \equiv 0\ (29)$
$28! \equiv -1\ (29)$
Soit r le reste de la division de 26 ! par 29.
29 est premier, 29 ne divise pas 26 !, r est compris entre 1 et 28.
$26! \equiv r\ (29)$
$27 \equiv -2\ (29)$
$28 \equiv -1\ (29)$
$28! = 26! \times 27 \times 28 \equiv 2r\ (29)$
$2r \equiv -1\ (29)$
Comme on a $2 \times 15 = 30 \equiv 1\ (29)$, l'inverse, dans le corps $\mathbb{Z}/29\mathbb{Z}$, de la classe d'équivalence de 2 est la classe d'équivalence de 15.
$15 \times 2r \equiv 15 \times (-1)\ (29)$
$30r \equiv -15\ (29)$
$r \equiv -15\ (29)$
$r \equiv 14\ (29)$
$r \equiv 14\ (29)$ et $1 \leqslant r \leqslant 28 \Rightarrow r = 14$

Le reste de la division euclidienne de 26 ! par 29 est $r = 14$.

Contrôle : MAPLE 6 (26! mod 29;) donne pour valeur du reste : $r = 14$.

Chapitre 4. Nombres premiers.

Enoncés.

Exercice 8. Divisibilité d'une factorielle.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geqslant 3$, n impair. Etablir l'équivalence des deux assertions suivantes : (i) n et $n + 2$ sont premiers. (ii) $(n – 1)$! n'est divisible ni par n, ni par $n + 2$.	

Solution.

1°/ (i) ⇒ (ii).

Le **théorème de Wilson** (Exercice 4) dit : si n est premier, alors n divise $(n – 1) ! + 1$.
Il en résulte que, si n est premier, alors n ne divise pas $(n – 1)$!, sinon il diviserait la différence $(n – 1) ! + 1 – (n – 1) ! = 1$, ce qui est impossible.

Comme $n + 2$ est premier, toujours d'après le théorème de Wilson, $n + 2$ divise $(n + 1) ! + 1$.
$(n + 1) ! + 1 \equiv 0 \pmod{n + 2}$
Soit r le reste de la division de $(n – 1) !$ par $n + 2$.
$n + 1 \equiv – 1 \pmod{n + 2}$
$n \equiv – 2 \pmod{n + 2}$
$2\,r \equiv – 1 \pmod{n + 2}$
Dans le corps $\mathbb{Z} / (n + 2)\,\mathbb{Z}$, la relation $2 \times \frac{n+3}{2} \equiv 1\ (n + 2)$, montre que la classe d'équivalence de 2 est inversible et son inverse est la classe de $\frac{n+3}{2}$.

$r \equiv – \frac{n+3}{2} \pmod{n + 2}$
$r = (n + 2) – \frac{n+3}{2} = \frac{n+1}{2} \neq 0$
Si $n + 2$ est premier, alors $n + 2$ ne divise pas $(n – 1)$!.

Si n et $n + 2$ sont premiers, alors $(n – 1)$! n'est divisible ni par n, ni par $n + 2$.

2°/ (ii) ⇒ (i).

Si $(n – 1)$! n'est divisible ni par n, ni par $n + 2$, alors :

— Soit p un facteur premier de n. Il est supérieur ou égal à 3. Il intervient dans n avec une puissance $a \geqslant 1$.
Si a est supérieur ou égal à 2, le produit $a\,p$ est strictement plus petit que p^a.
Dans chaque intervalle de longueur p de $\{1, \ldots, n – 1\}$, on trouve un multiple de p.
Dans $\{1, \ldots, n – 1\}$, on trouve donc au moins a multiples de p, de sorte que leur produit est divisible par p

^{a}.
$(n-1)!$ est divisible par p^{a}.
Comme $(n-1)!$ n'est pas divisible par n, il existe un facteur premier p, supérieur ou égal à 3, de n qui intervient dans n seulement avec la puissance 1.
Le quotient de n par p est 1 ou un entier impair q, étranger à p, compris entre 3 et $n-1$.
Si ce quotient de n par p est un entier impair étranger à p, compris entre 3 et $n-1$, q divise $(n-1)!$
Comme q et p sont étrangers, leur produit divise $(n-1)!$, ce qui est contradictoire avec le fait que $(n-1)!$ n'est pas divisible par n.
Donc $q = 1$ et $n = p$ est premier.

n ne divise pas $(n-1)! \Rightarrow n$ est premier.

Compte tenu de la première partie de la démonstration, on obtient, au passage, le résultat suivant pour $n \geqslant 3$, n impair :

n ne divise pas $(n-1)! \Leftrightarrow n$ est premier.

— $n+2$ et n sont impairs, ils sont étrangers car un facteur premier commun diviserait leur différence qui est égale à 2, ce qui est impossible.
$n+2$ et $n+1$ sont, eux aussi, étrangers.
Dire que $(n-1)!$ n'est pas divisible par $n+2$, c'est donc dire que $(n+1)!$ n'est pas divisible par $n+2$.
D'après le résultat précédent, il en résulte que $n+2$ est premier.

Si $(n-1)!$ n'est divisible ni par n, ni par $n+2$, alors n et $n+2$ sont premiers.

Chapitre 4. Nombres premiers.

Enoncés.

Exercice 9. *n* divise $2^n - 1$.

Déterminer les entiers $n \in \mathbb{N}^*$, tels que n divise $2^n - 1$.	

Solution.

$n = 1$ est une **solution évidente** de l'équation $2^n - 1 \equiv 0 \pmod{n}$.

Supposons $n > 1$.

1°/ *n* n'est pas premier et *n* est impair.

Si n est premier, n divise $2^{n-1} - 1$ (théorème de Fermat, Algèbre, Chapitre 2, Exercice 4), donc n divise $2^n - 2$ et ne peut diviser $2^n - 1$.

Si un entier p divise n et si n divise $2^n - 1$, alors p divise $2^n - 1$:

$$2^n - 1 \equiv 0 \pmod{n} \text{ et } n \equiv 0 \pmod{p} \Rightarrow 2^n - 1 \equiv 0 \pmod{p}.$$

n ne peut pas être pair, sinon, 2 divisant n, on aurait : $2^n - 1 \equiv 0 \pmod 2$, ce qui n'est pas, une puissance > 1 de 2 ne pouvant être un nombre impair.

2°/ Décomposition de *n* en facteurs premiers.

Si n n'est pas premier, soit p le **plus petit facteur premier** de n : $n = k\,p$; p est impair et supérieur ou égal à 3, d'après ce qui précède.
$2^n - 1 = 2^{kp} - 1 = (2^k)^p - 1 \equiv 2^k - 1 \pmod{p}$.
$2^n - 1 \equiv 0 \pmod{n}$ et $n \equiv 0 \pmod{p} \Rightarrow 2^n - 1 \equiv 0 \pmod{p}$.
$2^n - 1 \equiv 2^k - 1 \pmod{p}$ et $2^n - 1 \equiv 0 \pmod{p} \Rightarrow 2^k - 1 \equiv 0 \pmod{p}$.
$2^k - 1 \equiv 0 \pmod{p}$ et $2^{p-1} - 1 \equiv 0 \pmod{p}$ (théorème de Fermat, Algèbre, Chapitre 2, Exercice 4)$\Rightarrow 2^k \equiv 2^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$
Désignons par r le plus petit entier naturel non nul vérifiant $2^r \equiv 2^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$: $r \leqslant p - 1$.

r est l'ordre de la classe de 2 dans le groupe multiplicatif $\mathbb{Z} / p\,\mathbb{Z} - \{0\}$, qui est d'ordre $p - 1$.
Or l'ordre d'un élément divise l'ordre du groupe (théorème de Lagrange, Algèbre, Chapitre 2, Exercice 4), donc r divise $p - 1$.

La division euclidienne de n par r donne deux entiers naturels s et t vérifiant : $n = r\,s + t$, $0 \leqslant t < r$.

$2^n = 2^{rs}\, 2^t$

$2^r \equiv 1 \pmod{p}$, par définition de r.

$2^{rs} \equiv 1 \pmod{p}$

$2^n = 2^{rs}\, 2^t \equiv 2^t \pmod{p}$

$2^n \equiv 1 \pmod{p} \Rightarrow 2^t \equiv 1 \pmod{p}$

Mais r est le plus petit entier naturel non nul à vérifier $2^r \equiv 1 \pmod{p}$, donc $0 \leqslant t < r$ et $2^t \equiv 1 \pmod{p} \Rightarrow t = 0$.
Donc r divise n.
Mais, par définition de p, plus petit facteur premier de n, la relation "r divise n et $r < p$" est contradictoire.
Donc n est premier, ce qui contredit le fait que n ne peut pas être premier.

Notre hypothèse $n > 1$, même donc à une contradiction et, finalement :

Le seul entier $n \in \mathbb{N}^*$, tel que n divise $2^n - 1$ est $n = 1$.

Exercices

Division euclidienne des polynômes.

1. **Polynômes.**
2. **Anneau $\mathbb{Q}[X]$.**
3. **Relation de divisibilité.**
4. **Division euclienne des polynômes.**
5. **Théorème de Bézout.**

Polynômes.

HAUT

On appelle **polynôme sur un anneau *A***, toute suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de *A* presque tous nuls, c'est-à-dire nuls à l'exception d'un nombre fini d'entre eux.
Le **degré d'un polynôme** est le plus grand entier *n* tel que a_n soit différent de 0 : a_n est appelé le coefficient directeur du polynôme.
Un polynôme de degré *n* est dit **unitaire** si son coefficient directeur est $a_n = 1$.

On définit sur l'ensemble des polynômes sur *A* une **structure d'anneau** en posant :

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} + (b_n)_{n \in \mathbb{N}} = (a_n + b_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \times (b_n)_{n \in \mathbb{N}} = \left(\sum_{i+j=n} a_i b_j \right)_{n \in \mathbb{N}}$$

L'élément neutre de l'addition des polynômes est la suite dont tous les éléments sont 0.
L'élément neutre de la multiplication des polynômes est la suite dont tous les éléments sont 0, sauf $a_0 = 1$.
On peut identifier un élément *a* de *A* avec la suite dont tous les éléments sont 0, sauf $a_0 = a$.
On note *X* le polynôme dont tous les éléments sont 0, sauf $a_1 = 1$.

Pour tout entier naturel *n*, X^n est le polynôme dont tous les éléments sont 0, sauf $a_n = 1$.

Tout polynôme de degré *n* peut s'écrire sous la forme $\sum_{k=0}^{k=n} a_k X^k$.

L'anneau des polynômes sur *A* est noté *A* [*X*].
Si *A* est un anneau commutatif unitaire, il en est de même de *A* [*X*].

HAUT

Anneau $\mathbb{Q}[X]$.

L'anneau des polynômes sur $\mathbb{Q}$ est un **anneau euclidien**, ce qui veut dire :

1. qu'il ne possède pas de diviseur de 0
2. que, pour tous polynômes x et y non nuls à coefficients entiers, il existe des polynômes q et r à coefficents rationnels, tels que :

$x = q\,y + r$, avec $r = 0$ ou *degré* $(r) <$ *degré* (y).

Tout anneau euclidien est principal : ses idéaux sont tous **monogènes**.
Tout polynôme sur $\mathbb{Q}$ de coefficient directeur 1, possède une **décomposition unique en facteurs premiers** (irréductibles).

HAUT

Relation de divisibilité.

Dans l'anneau $\mathbb{Q}[X]$, la relation de divisibilité :

$$a \mid b \Leftrightarrow (\exists\, c)(\, b = a\, c)$$

est une **relation de pré-ordre (réflexive et transitive)**.
Ce n'est pas une relation d'ordre : par exemple $1 - X$ divise $X - 1$ et $X - 1$ divise $1 - X$, sans que $1 - X = X - 1$.

La relation $a \mid b$ **et** $b \mid a$ est une relation d'équivalence : deux polynômes équivalents suivant cette relation sont dits **associés**. Dans l'ensemble des classes d'association, la relation de divisibilité induit une **relation d'ordre**.
Chaque classe d'association contient un et un seul polynôme unitaire.
On obtient donc un **ensemble de représentants des classes d'association** en ne considérant que les polynômes à coefficient directeur égal à 1 (polynômes unitaires).
Dans l'ensemble de polynômes unitaires, la relation d'ordre est compatible avec le produit : $a \mid b \Rightarrow a\, c \mid b\, c$.

Toute partie finie non vide de cet ensemble possède, pour cette relation d'ordre, une **borne inférieure** (PGCD) et une **borne supérieure** (PPCM).
Le PGCD et le PPCM de deux polynômes unitaires a et b sont liés par la relation : $\boldsymbol{a(X) \times b(X) = \mathrm{PGCD}(a, b) \times \mathrm{PPCM}(a, b)}$.

HAUT

Division euclidienne des polynômes.

Pour tous polynômes x et y non nuls, appartenant à $\mathbb{Q}[X]$, il existe des polynômes q et r tels que :

$x = q\,y + r$, avec $r = 0$ ou *degré* $(r) <$ *degré* (y).

HAUT

Théorème de Bézout.

Si a et b sont des polynômes unitaires à coefficients rationnels dont le PGCD est 1 (polynômes étrangers), alors il existe des polynômes unitaires à coefficients rationnels u et v tels que :

$$a\,u + b\,v = 1.$$

Pour construire de tels polynômes u et v, on utilise l'**algorithme d'Euclide** qui sert à déterminer le PGCD de a et b, dernier reste non nul.
Une fois qu'on a obtenu une **solution (u_0, v_0) vérifiant $a\,u_0 + b\,v_0 = 1$**, on obtient la solution générale par différence : $a\,(u - u_0) + b\,(v - v_0) = 0$.
b divise $b\,(v - v_0)$, donc il divise $a\,(u - u_0)$. Comme il ne divise pas a, c'est qu'il divise $u - u_0$, donc u est donné par $u = u_0 + c\,b$.
a divise $a\,(u - u_0)$, donc il divise $b\,(v - v_0)$. Comme il ne divise pas b, c'est qu'il divise $v - v_0$, donc v est donné par $v = v_0 + d\,a$.
La relation $a\,(u - u_0) + b\,(v - v_0) = 0$ donne alors $a\,c\,b + b\,d\,a = 0$, soit $d = -c$.
La solution générale de $a\,u + b\,v = 1$ est donc donnée par

$$u = u_0 + c\,b$$
$$v = v_0 - c\,a,$$

où c est un polynôme unitaire quelconque, à coefficients rationnels.

HAUT

Chapitre 5. Anneaux de polynômes.

Exercices

Exercice 1. Divisions euclidiennes.
Exercice 2. Division euclienne dans $\mathbb{C}[X]$.
Exercice 3. Résolution d'un système de congruences.
Exercice 4. PGCD de $x^n - 1$ et $x^p - 1$.
Exercice 5. Divisions suivant les puissances croissantes.
Exercice 6. Calculs de PGCD par l'algorithme d'Euclide.
Exercice 7. Théorème de Bézout.
Exercice 8. Polynômes étrangers dans le théorème de Bézout.
Exercice 9. Divisibilité dans $\mathbb{R}[X]$.
Exercice 10. Polynômes vérifiant une équation fonctionnelle.
Exercice 11. Reste de la division euclidienne par $X^5 - 1$.
Exercice 12. Reste de la division euclidienne par $X^2 + 1$.
Exercice 13. PGCD et PPCM de 2 ou 3 polynômes.
Exercice 14. Calculs de PGCD à l'aide des racines.
Exercice 15. Polynômes divisibles par leur dérivée.
Exercice 16. Zéros d'un polynôme de degré 4.
Exercice 17. Décomposition d'un polynôme en produit de facteurs.
Exercice 18. Polynôme ayant deux zéros doubles réels.
Exercice 19. Division euclidienne par $(X - 1)^2$.
Exercice 20. Zéro d'ordre 4.
Exercice 21. Polynôme à zéros simples dans $\mathbb{C}$.
Exercice 22. Polynômes à coefficients entiers.
Exercice 23. Polynôme irréductible sur $\mathbb{Q}$.
Exercice 24. Relations entre les zéros d'un polynôme de degré 4.

Et encore d'autres exercices avec solution ...

Exercice 1. Divisions euclidiennes.

Effectuer les divisions euclidiennes de :

$3x^5 + 2x^4 - x^2 + 1$ par $x^3 + x + 2$

$x^4 - x^3 + x - 2$ par $x^2 - 2x + 4$

Solution

HAUT

Exercice 2. Division euclidienne dans $\mathbb{C}[X]$.

Dans $\mathbb{C}[X]$, effectuer les divisions euclidiennes de :

$3x^2 - 3ix - 5(1+i)$ par $x - 1 + i$

$4x^3 + x^2$ par $x + 1 + i$

Solution

HAUT

Exercice 3. Résolution d'un système de congruences.

Trouver un polynôme de degré aussi petit que possible dont le reste de la division euclidienne par $x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 10x - 7$ soit égal à $x^3 + x + 1$, et dont le reste de la division euclidienne par $x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 13x - 10$ soit égal à $2x^2 - 3$.	Solution

HAUT

Exercice 4. PGCD de $x^n - 1$ et $x^p - 1$.

Soient n et p des entiers naturels, $1 < p < n$.

1°/ Effectuer la division euclidienne de $a = x^n - 1$ par $b = x^p - 1$.
2°/ Relation entre n et p pour que b divise a.
3°/ Prouver que le PGCD de a et b est $x^d - 1$, d étant le PGCD de n et p.

Solution

HAUT

Exercice 5. Divisions suivant les puissances croissantes.

Effectuer les divisions selon les puissances croissantes, de :

$2 - 3x^2 + x^4$	par	$1 + x + x^5$	(ordre $h = 6$)
$x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$	par	$1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$	(ordre $h = 5$)
$1 - a\,b\,x^2$	par	$1 - (a + b)\,x + a\,b\,x^2$	(ordre h)

Solution

HAUT

Exercice 6. Calculs de PGCD par l'algorithme d'Euclide.

Déterminer le PGCD des polynômes suivants : 1°/ $x^5 + 3x^4 + x^3 + x^2 + 3x + 1$ et $x^4 + 2x^3 + x + 2$, 2°/ $3x^5 + 5x^4 - 16x^3 - 6x^2 - 5x - 6$ et $3x^4 - 4x^3 - x^2 - x - 6$, 3°/ $x^5 + 5x^4 + 9x^3 + 7x^2 + x + 3$ et $x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 1$.	Solution

HAUT

Exercice 7. Théorème de Bézout.

Soient deux polynômes a et b premiers entre eux. Il existe alors deux polynômes u_0 et v_0 tels que : $a\,u_0 + b\,v_0 = 1$.

1°/ Déterminer tous les couples (u, v) de polynômes assurant l'égalité précédente.
2°/ En déduire qu'il existe un couple unique (u, v) tel que $a\,u + b\,v = 1$, avec :
$degré\,(u) < degré\,(b)$ et $degré\,(v) < degré\,(a)$.

Solution

HAUT

Exercice 8. Polynômes étrangers dans le théorème de Bézout.

Soient a et b deux polynômes de $K[X]$ ($K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), dont le PGCD est d. On choisit deux polynômes u et v tels que $au + bv = d$. Montrer que u et v sont premiers entre eux.	Solution

HAUT

Exercice 9. Divisibilité dans $\mathbb{R}[X]$.

1°/ Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $A(X) = X^{2n} + 2X^{n+1} + X^n + X^2 + X$ et $B(X) = X^n + X + 1$ deux éléments de $\mathbb{R}[X]$. Montrer que A est divisible par B.

2°/ Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour quelles valeurs de l'entier n, le polynôme de $\mathbb{R}[X]$, $A(X) = (X + 1)^n - X^n - 1$ est-il divisible par le polynôme :

a) $B_1(X) = X^2 + X + 1$?

b) $B_2(X) = (X^2 + X + 1)^2$?

3°/ Soit $P(X)$ un polynôme de R $[X]$.
On pose $F(X) = P(X) - X$ et $G(X) = P[P(X)] - X$.
Montrer que $G(X)$ est divisible par $F(X)$.

Solution

HAUT

Exercice 10. Polynômes vérifiant une équation fonctionnelle.

Soit $P(X) \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant $(X+3)P(X) = XP(X+1)$.

1°/ Montrer qu'il existe $S(X) \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(X) = XS(X)$.
2°/ Déterminer $S(-1)$ et $S(-2)$.
3°/ En déduire que $P(X)$ est de la forme $aX(X+1)(X+2)$.
4°/ Déterminer tous les polynômes $T(X) \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant $(X+3)T(X) = XT(X+1)$.

Solution

HAUT

Exercice 11. Reste de la division euclidienne par $X^5 - 1$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1°/ Déterminer le reste de la division euclidienne dans $\mathbb{R}[X]$ du polynôme $A(X) = X^{5n}$, par le polynôme $B(X) = X^5 - 1$.
2°/ Utiliser ce résultat pour déterminer le reste de la division euclidienne dans $\mathbb{R}[X]$ de :
$P(X) = X^{99} + 2X^{42} - 3X^{35} - 2X^{27} + 3$, par $B(X)$.

Solution

HAUT

Exercice 12. Reste de la division euclidienne par $X^2 + 1$.

Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère les polynômes de $\mathbb{R}[X]$:

$$A(X) = (X \sin a + \cos a)^n, \text{ où } n \in \mathbb{N},$$
$$B_1(X) = X^2 + 1 \; ; \; B_2(X) = (X^2 + 1)^2$$

1°/ Déterminer le reste $R_1(X)$ de la division euclidienne de $A(X)$ par $B_1(X)$.

2°/ Déterminer le reste $R_2(X)$ de la division euclidienne de $A(X)$ par $B_2(X)$.

Solution

HAUT

Exercice 13. PGCD et PPCM de deux ou trois polynômes.

Calculer un PGCD et un PPCM dans $\mathbb{R}[X]$ de : 1°/ $A(X) = X^4 + 3X^3 - 2X^2 - X - 1$ et $B(X) = -X^3 + 2X^2 - 4X + 3$. 2°/ $P(X) = X^2 - 1, Q(X) = X^2 - 3X + 2$, et $S(X) = X^2 - X - 2$.	Solution

HAUT

Exercice 14. Calculs de PGCD à l'aide des racines.

Déterminer un PGCD des couples $(A(X), B(X))$ de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ suivants : 1°/ $A(X) = X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$ et $B(X) = X^4 - 1$. 2°/ $A(X) = 2X^4 - 11X^3 + 13X^2 + 24X - 14$ et $B(X) = X^2 - X - 1$. 3°/ $A(X) = X^4 + 2X^3 - 11X^2 - 12X + 36$ et $B(X) = X^3 + 3X^2 - X - 3$.	Solution

HAUT

Exercice 15. Polynômes divisibles par leur dérivée.

Soit $P(X)$ un polynôme de $\mathbb{R}[X]$, de degré n, $n \geqslant 1$:

1°/ Montrer que si le polynôme dérivé $P'(X)$ divisise $P(X)$, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $n\,P(X) = (X - \alpha)\,P'(X)$.
2°/ Utiliser ce résultat pour déterminer tous les polynômes de $\mathbb{R}[X]$ qui sont divisibles par le polynôme dérivé.

Solution

HAUT

Exercice 16. Zéros d'un polynôme de degré 4.

On considère le polynôme $P(X)$ de $\mathbb{R}[X]$, qui s'écrit $P(X) = X^4 - X^3 + aX^2 + b$.

1°/ Déterminer les valeurs de a et b pour que $P(X)$ admette $1 - i$ comme zéro dans $\mathbb{C}$.
2°/ Quels sont, dans ce cas, les autres zéros de $P(X)$ dans $\mathbb{C}$.

Solution

HAUT

Exercice 17. Décomposition d'un polynôme en produit de facteurs.

1°/ Le polynôme $X^4 + X^2 + 1$ peut-il se décomposer en un produit de deux polynômes, chacun à coefficients réels et de degré moindre que 4 ? 2°/ Décomposer en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$: a) $P(X) = X^5 + 32$. b) $P(X) = X^7 + 1$.	Solution

HAUT

Exercice 18. Polynôme ayant deux zéros doubles réels.

Montrer que le polynôme $P(X) = 36X^4 + 12X^3 - 11X^2 - 2X + 1$ possède deux zéros doubles réels et les déterminer.	Solution

HAUT

Exercice 19. Division euclidienne par $(X-1)^2$.

1°/ Soit n un entier supérieur à 1. Déterminer dans $\mathbb{R}[X]$ le reste de la division euclidienne de $X^n + 3X + 1$ par $(X-1)^2$.

2°/ Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$.

a) Montrer que 1 est zéro double du polynôme $nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1$.

b) Déterminer le quotient $Q(X)$ de la division euclidienne de $P(X)$ par $(X-1)^2$.

Solution

HAUT

Exercice 20. Zéros d'ordre 4.

Déterminer les nombres réels a, b, c, de telle sorte que le polynôme $P(X)$ de $\mathbb{R}[X]$, défini par $P(X) = X^6 + aX^4 + 10X^3 + bX + c$ admette un zéro d'ordre 4.	Solution

HAUT

Exercice 21. Polynôme à zéros simples dans $\mathbb{C}$.

Montrer que le polynôme $P(X) = 1 + \frac{X}{1!} + \frac{X^2}{2!} + \cdots + \frac{X^n}{n!}$ possède, dans $\mathbb{C}$, n zéros deux à deux distincts.	Solution

HAUT

Exercice 22. Polynômes à coefficients entiers.

1°/ Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $P(X) = \sum_{k=0}^{k=n} a_k X^k$ un polynôme de degré n dont les coefficients sont dans $\mathbb{Z}$. Soit $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, tel que p et q soient étrangers.

Montrer que si $\frac{p}{q}$ est un zéro de $P(X)$, alors p divise a_0 et q divise a_n.

Solution

2°/ **Applications**.
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes où x est l'inconnue.

a) $2x^3 + 7x^2 + 2x - 3 = 0$
b) $8x^3 + 10x^2 + 15x + 9 = 0$
c) $x^5 - 34x^3 + 29x^2 + 212x - 300 = 0$

HAUT

Exercice 23. Polynôme irréductible sur $\mathbb{Q}$.

Montrer que le polynôme $2X^3 + X + 1$ est irréductible sur $\mathbb{Q}$.	Solution

HAUT

Exercice 24. Relations entre les zéros d'un polynôme de degré 4.

On considère le polynôme $P(X)$ de $\mathbb{C}[X]$ défini par :

$$P(X) = X^4 + pX^2 + qX + r, \text{ où } (p, q, r) \in \mathbb{C}^3 \text{ et } r \neq 0.$$

Soient a, b, c, d, les quatre zéros complexes de $P(X)$. Calculer :

$$A = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} \text{ et } B = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{1}{d^2}.$$

Solution

HAUT

Chapitre 5. Anneaux de polynômes.

Enoncés.

Exercice 1. Divisions euclidiennes.

Effectuer les divisions euclidiennes de :	
$3x^5+2x^4-x^2+1$ par x^3+x+2 x^4-x^3+x-2 par x^2-2x+4	

Solution.

La division euclidienne se fait suivant les **puissances décroissantes**.

1°/ Première division.

$$\begin{array}{rrrrrrr|l}
3x^5 & +2x^4 & & -x^2 & & +1 & x^3+x+2 \\
\hline
-3x^5 & & -3x^3 & -6x^2 & & & 3x^2+2x-3 \\
\hline
0 & +2x^4 & -3x^3 & -7x^2 & & & \\
 & -2x^4 & & -2x^2 & -4x & & \\
\hline
 & 0 & -3x^3 & -9x^2 & -4x & & \\
 & & +3x^3 & & +3x & +6 & \\
\hline
 & & 0 & -9x^2 & -x & +7 &
\end{array}$$

$$3x^5+2x^4-x^2+1=(x^3+x+2)\times(3x^2+2x-3)-9x^2-x+7$$

2°/ Deuxième division.

$$\begin{array}{rrrrrr|l}
x^4 & -x^3 & & +x & -2 & & x^2-2x+4 \\
\hline
-x^4 & +2x^3 & -4x^2 & & & & x^2+x-2 \\
\hline
0 & +x^3 & -4x^2 & & & & \\
 & -x^3 & +2x^2 & -4x & & & \\
\hline
 & 0 & -2x^2 & -3x & & & \\
 & & +2x^2 & -4x & +8 & & \\
\hline
 & & 0 & -7x & +6 & &
\end{array}$$

$$x^4-x^3+x-2=(x^2-2x+4)\times(x^2+x-2)-7x+6$$

Chapitre 5. Anneaux de polynômes.

Enoncés.

Exercice 2. Division euclidienne dans $\mathbb{C}[X]$.

Dans $\mathbb{C}[X]$, effectuer les divisions euclidiennes de : $x^2 - 3ix - 5(1+i)$ par $x - 1 + i$ $4x^3 + x^2$ par $x + 1 + i$	

Solution.

La division euclidienne se fait suivant les **puissances décroissantes**.

1°/ Première division.

$$\begin{array}{rrr|l} x^2 & -3ix & -5(1+i) & x-1+i \\ \hline -x^2 & +(1-i)x & & x+1-4i \\ \hline 0 & +(1-4i)x & & \\ & -(1-4i)x & +(1-i)(1-4i) & \\ \hline & 0 & -(8+10i) & \end{array}$$

$$x^2 - 3ix - 5(1+i) = (x-1+i) \times (x+1-4i) - (8+10i)$$

2°/ Deuxième division.

$$\begin{array}{rrrr|l} 4x^3 & +x^2 & & & x+1+i \\ \hline -4x^3 & -4(1+i)x^2 & & & 4x^2-(3+4i)x+(3+4i)(1+i) \\ \hline 0 & -(3+4i)x^2 & & & \\ & +(3+4i)x^2 & +(3+4i)(1+i)x & & \\ \hline & 0 & +(3+4i)(1+i)x & & \\ & & -(3+4i)(1+i)x & -(3+4i)(1+i)^2 & \\ \hline & & 0 & -(3+4i)(1+i)^2 & \end{array}$$

$$4x^3 + x^2 = (x+1+i) \times (4x^2 - (3+4i)x + (3+4i)(1+i)) - (3+4i)(1+i)^2$$

Chapitre 5. Anneaux de polynômes.

Enoncés.

Exercice 3. Résolution d'un système de congruences.

Trouver un polynôme de degré aussi petit que possible dont le reste de la division euclidienne par $x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 10x - 7$ soit égal à $x^3 + x + 1$, et dont le reste de la division euclidienne par $x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 13x - 10$ soit égal à $2x^2 - 3$.	

Solution.

Soit $P(x)$ un polynôme solution du problème. On doit avoir :

$P(x) = (x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 10x - 7) \times q_1 + (x^3 + x + 1)$
$P(x) = (x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 13x - 10) \times q_2 + (2x^2 - 3)$

Notons :

$p_1 = x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 10x - 7$
$r_1 = x^3 + x + 1$

$p_2 = x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 13x - 10$
$r_2 = 2x^2 - 3$

La solution $P(x)$ doit s'écrire :

$P(x) = p_1 q_1 + r_1 = p_2 q_2 + r_2$

Les polynômes quotients q_1 et q_2, inconnus, doivent vérifier :

$p_1 q_1 - p_2 q_2 = r_2 - r_1 = -x^3 + 2x^2 - x - 4$

1°/ Les polynômes p_1 et p_2 sont étrangers.

Pour le voir, calculons leur PGCD.
Le PGCD est le dernier reste non nul dans la suite des divisions euclidiennes par les restes.

$p_1 = x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 10x - 7$
$p_2 = x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 13x - 10$

$p_1 = p_2 \times 1 + (x^2 - 3x + 3)$

$p_2 = (x^2 - 3x + 3) \times (x^2 + x - 3) + (x - 1)$

$(x^2 - 3x + 3) = (x - 1) \times (x - 2) + 1$

$(x - 1) = 1 \times (x - 1) + 0$

Le dernier reste non nul est une constante, 1 : le PGCD de p_1 et p_2 est donc 1 et les polynômes p_1 et p_2 sont étrangers.

2°/ Théorème de Bézout.

Puisque p_1 et p_2 sont étrangers, il existe des polynômes u et v tels que $p_1 u + p_2 v = 1$.

3°/ Calcul d'une solution (u, v).

D'après les calculs faits pour montrer que p_1 et p_2 sont étrangers, on peut écrire :

$p_2 = (x^2 - 3x + 3) \times (x^2 + x - 3) + (x - 1)$

Or $(x^2 - 3x + 3) = (x - 1) \times (x - 2) + 1$, donc :
$p_2 = ((x - 1) \times (x - 2) + 1) \times (x^2 + x - 3) + (x - 1)$
$= (x - 1) \times ((x - 2) \times (x^2 + x - 3) + 1) + (x^2 + x - 3)$
$= (x - 1) \times (x^3 - x^2 - 5x + 7) + (x^2 + x - 3)$

$p_1 = p_2 \times 1 + (x^2 - 3x + 3)$
$= (x - 1) \times (x^3 - x^2 - 5x + 7) + (x^2 + x - 3) + (x - 1) \times (x - 2) + 1$
$= (x - 1) \times (x^3 - x^2 - 5x + 7 + x - 2) + x^2 + x - 3 + 1$
$= (x - 1) \times (x^3 - x^2 - 4x + 5) + (x^2 + x - 2)$

$p_1 u + p_2 v = (x - 1) \times ((x^3 - x^2 - 4x + 5) u + (x^3 - x^2 - 5x + 7) v) + (x^2 + x - 2) u + (x^2 + x - 3) v$.

La relation de Bézout : $p_1 u + p_2 v = 1$, s'écrit donc :

$(x - 1) \times [(x^3 - x^2 - 4x + 5) u + (x^3 - x^2 - 5x + 7) v] + [(x^2 + x - 2) u + (x^2 + x - 3) v] = 1$

Or, nous avons, de façon évidente :

$(x - 1) \times 0 + 1 = 1$

Pour choisir u et v vérifiant la relation de Bézout, il suffit donc de prendre u et v vérifiant :

$(x^3 - x^2 - 4x + 5) u + (x^3 - x^2 - 5x + 7) v = 0$
$(x^2 + x - 2) u + (x^2 + x - 3) v = 1$

$(x^3 - x^2 - 4x + 5) (u + v) - (x - 2) v = 0$
$(x^2 + x - 2) (u + v) - v = 1$

La deuxième relation donne : $v = (x^2 + x - 2)(u + v) - 1$.
En reportant cette expression de v dans la relation précédente, nous obtenons :

$(x^3 - x^2 - 4x + 5)(u + v) - (x - 2)((x^2 + x - 2)(u + v) - 1) = 0$
$(x^3 - x^2 - 4x + 5 - x^3 + x^2 + 4x - 4)(u + v) = -(x - 2)$
$u + v = 2 - x$

$v = (x^2 + x - 2)(u + v) - 1 = (x^2 + x - 2)(2 - x) - 1 = -x^3 + x^2 + 4x - 5$

$u = -v + 2 - x = x^3 - x^2 - 4x + 5 + 2 - x = x^3 - x^2 - 5x + 7$

$$\boxed{\begin{array}{l} u = x^3 - x^2 - 5x + 7 \\ v = -x^3 + x^2 + 4x - 5 \end{array}}$$

4°/ Calcul des quotients q_1 et q_2.

Nous avons :

$p_1 q_1 - p_2 q_2 = r_2 - r_1$
$p_1 u + p_2 v = 1$.

$p_1 u (r_2 - r_1) + p_2 v (r_2 - r_1) = r_2 - r_1$.

Nous pouvons prendre pour solution :

$q_1 = u (r_2 - r_1)$
$q_2 = -v (r_2 - r_1)$

$q_1 = (x^3 - x^2 - 5x + 7)(-x^3 + 2x^2 - x - 4)$
$q_2 = (x^3 - x^2 - 4x + 5)(-x^3 + 2x^2 - x - 4)$

$$\boxed{\begin{array}{l} q_1 = -x^6 + 3x^5 + 2x^4 - 20x^3 + 23x^2 + 13x - 28 \\ q_2 = -x^6 + 3x^5 + x^4 - 16x^3 + 18x^2 + 11x - 20 \end{array}}$$

5°/ Recherche d'une solution P.

$P(x) = p_1 q_1 + r_1$
$= (x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 10x - 7) \times (-x^6 + 3x^5 + 2x^4 - 20x^3 + 23x^2 + 13x - 28) + (x^3 + x + 1)$

$$\boxed{P(x) = -x^{10} + 5x^9 - 2x^8 - 40x^7 + 96x^6 + 6x^5 - 314x^4 + 401x^3 + 25x^2 - 370x + 197.}$$

Vérification : calcul de $p_2 q_2 + r_2$.

$p_2 q_2 + r_2 = (x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 13x - 10) \times (-x^6 + 3x^5 + x^4 - 16x^3 + 18x^2 + 11x - 20) + (2x^2 - 3)$
$= -x^{10} + 5x^9 - 2x^8 - 40x^7 + 96x^6 + 6x^5 - 314x^4 + 401x^3 + 25x^2 - 370x + 197.$

On obtient le même résultat en calculant $p_1 q_1 + r_1$ et $p_2 q_2 + r_2$.

6°/ Recherche de la solution de plus bas degré.

Si $P = p_1 q_1 + r_1 = p_2 q_2 + r_2$ et $P' = p_1 q'_1 + r_1 = p_2 q'_2 + r_2$, sont deux solutions du problème, leur différence est :
$P - P' = p_1 (q_1 - q'_1) = p_2 (q_2 - q'_2)$.
Comme p_1 et p_2 sont étrangers, la relation $p_1 (q_1 - q'_1) = p_2 (q_2 - q'_2)$ montre que $q_2 - q'_2$ est multiple de p_1 et $q_1 - q'_1$ est multiple de p_2.
Donc $P - P'$ est multiple de $p_1 p_2$.

Deux solutions P et P' du problème ne diffèrent que d'un multiple de $p_1 p_2$.

Réciproquement, si P est une solution et si $P' = P - k p_1 p_2$, où k est un polynôme quelconque, P' est congru à P modulo p_1, et congru à P modulo p_2, donc il est solution du problème.

On voit donc que **la solution de plus bas degré sera donnée par le reste de la division euclidienne de P par $p_1 p_2$**, puisque ce reste est le polynôme P' de plus bas degré tel que $P = k p_1 p_2 + P'$.
Comme $p_1 p_2$ est un polynôme de degré 8, la solution de plus bas degré sera un **polynôme de degré 7** au plus.

$$p_1 p_2 = (x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 10x - 7)(x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 13x - 10)$$
$$= x^8 - 4x^7 - x^6 + 33x^5 - 57x^4 - 22x^3 + 171x^2 - 191x + 70$$

La division euclidienne de P par $p_1 p_2$ donne :

$$P = p_1 p_2 \times (-x^2 + x + 1) + (-2x^7 + 7x^6 + 8x^5 - 64x^4 + 61x^3 + 115x^2 - 249x + 127)$$

Le polynôme de plus bas degré répondant à la question est donc :

$$P(x) = -2x^7 + 7x^6 + 8x^5 - 64x^4 + 61x^3 + 115x^2 - 249x + 127$$

Vérification.

La division euclidienne de $P(x)$ par $p_1 = x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 10x - 7$ donne :

$$P(x) = p_1 \times (-2x^3 + 3x^2 + 10x - 18) + (x^3 + x + 1)$$

La division euclidienne de $P(x)$ par $p_2 = x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 13x - 10$ donne :

$$P(x) = p_2 \times (-2x^3 + 3x^2 + 8x - 13) + (2x^2 - 3)$$

Chapitre 5. Anneaux de polynômes.

Enoncés.

Exercice 4. PGCD de $x^n - 1$ et $x^p - 1$.

Soient n et p des entiers naturels, $1 < p < n$. 1°/ Effectuer la division euclidienne de $a = x^n - 1$ par $b = x^p - 1$. 2°/ Relation entre n et p pour que b divise a. 3°/ Prouver que le PGCD de a et b est $x^d - 1$, d étant le PGCD de n et p.	

Solution.

1°/ Division euclidienne.

$a = x^n - 1$
$= (x^p - 1) \times x^{n-p} + (x^{n-p} - 1)$

Si $n - p < p$, la division euclidienne s'arrête là, sinon on continue.

Comme il existe des entiers naturels q et r tels que : $n = p\,q + r$, avec $r < q$, on peut écrire :

$$x^n - 1 = (x^p - 1) \times \frac{x^n - x^{n-qp}}{x^p - 1} + (x^r - 1)$$
$$= (x^p - 1) \times x^{n-p} \frac{x^p - x^p\, x^{-qp}}{x^p - 1} + (x^r - 1)$$
$$= (x^p - 1) \times x^{n-p} \frac{1 - x^{-qp}}{1 - x^{-p}} + (x^r - 1)$$

Or $\frac{1 - x^{-qp}}{1 - x^{-p}} = \sum_{k=0}^{k=q-1} x^{-kp}$ (somme de q termes en progression géométrique, de premier terme 1 et de raison x^{-p}), donc :

$$x^n - 1 = (x^p - 1) \times x^{n-p} \sum_{k=0}^{k=q-1} x^{-kp} + (x^r - 1)$$
$$= (x^p - 1) \times \sum_{k=1}^{k=q} x^{n-kp} + (x^r - 1)$$
$$= (x^p - 1) \times (x^{n-p} + x^{n-2p} + \ldots + x^{n-qp}) + (x^r - 1),$$

avec *degré* $(x^r - 1)$ < *degré* $(x^p - 1)$.

L'expression précédente donne donc la division euclidienne de $x^n - 1$ par $x^p - 1$.

$$x^n - 1 = (x^p - 1) \times \sum_{k=1}^{k=q} x^{n-kp} + (x^r - 1)$$

2°/ Condition pour que *b* divise *a*.

Pour que *b* divise *a*, il faut et il suffit que $x^r - 1 = 0$, c'est-à-dire $r = 0$, soit *p* divise *n*.

Pour que $x^p - 1$ divise $x^n - 1$, il faut et il suffit que *p* divise *n*.

3°/ PGCD.

Le PGCD *d* de *p* et *n* divise *p* et divise *n*, donc $x^d - 1$ divise $x^p - 1$ et divise $x^n - 1$, d'après 2°.
Donc $x^d - 1$ divise le PGCD de $x^n - 1$ et $x^p - 1$.

Réciproquement, si un polynôme *P* divise le PGCD de $x^n - 1$ et $x^p - 1$, il divise $x^r - 1$.
Effectuons la division euclidienne de $x^p - 1$ par $x^r - 1$.
Le reste de la division euclidienne de *p* par *r* est $r' < r$ et $p = q' r + r'$ et $x^p - 1 = Q'(x)(x^r - 1) + (x^{r'} - 1)$.
On remarquera que le reste est toujours de la même forme.
P divise $x^{r'} - 1$.
On peut ainsi poursuivre l'**algorithme d'Euclide** pour la détermination du PGCD de deux nombres, jusqu'au dernier reste non nul, qui est le PGCD *d* de *n* et *p*.
P divise $x^d - 1$.

Donc, s'agissant de polynômes unitaires, le PGCD de $x^n - 1$ et $x^p - 1$ est $x^d - 1$.

Si *d* est le PGCD de *n* et *p*, le PGCD de $x^n - 1$ et $x^p - 1$ est $x^d - 1$.

Chapitre 5. Anneaux de polynômes.

Enoncés.

Exercice 5. Divisions suivant les puissances croissantes.

Effectuer les divisions selon les puissances croissantes, de : $2 - 3x^2 + x^4$ par $1 + x + x^5$ (ordre $h = 6$) $x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$ par $1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$ (ordre $h = 5$) $1 - a\,b\,x^2$ par $1 - (a + b)\,x + a\,b\,x^2$ (ordre h)	

Solution.

1°/ Développement à l'ordre 6.

$$
\begin{array}{l|l}
2 - 3x^2 + x^4 & 1 + x + x^5 \\
\hline
-2 - 2x - 2x^5 & 2 - 2x - x^2 + x^3 - 2x^5 + 4x^6 \\
\cline{1-1}
-2x - 3x^2 + x^4 - 2x^5 & \\
+2x + 2x^2 + 2x^6 & \\
\cline{1-1}
-x^2 + x^4 - 2x^5 + 2x^6 & \\
+x^2 + x^3 & \\
\cline{1-1}
x^3 + x^4 - 2x^5 + 2x^6 & \\
-x^3 - x^4 & \\
\cline{1-1}
-2x^5 + 2x^6 & \\
+2x^5 + 2x^6 & \\
\cline{1-1}
4x^6 & \\
-4x^6 & \\
\cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

$$\frac{2 - 3x^2 + x^4}{1 + x + x^5} = (2 - 2x - x^2 + x^3 - 2x^5 + 4x^6) + o(x^7)$$

2°/ Développement à l'ordre 5.

Dans $x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$, on reconnaît le développement de *sin x* à l'ordre 6 au voisinage de 0.
Dans $1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$, on reconnaît le développement de *cos x* à l'ordre 5, au voisinage de 0.
La division des deux selon les puissances croissantes donnera le *développement de tan x* à l'ordre 6 au voisinage de 0.

$$\frac{x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}}{1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}} = \frac{120\,x-20\,x^3+x^5}{120-60\,x^2+5\,x^4}$$

$$\begin{array}{rr|l}
120\,x - 20\,x^3 + x^5 & & 120 - 60\,x^2 + 5\,x^4 \\
\hline
-120\,x + 60\,x^3 - 5\,x^5 & & x + 1/3\,x^3 + 2/15\,x^5 \\
\cline{1-2}
40\,x^3 - 4\,x^5 & & \\
-40\,x^3 + 20\,x^5 & + 5/3\,x^7 & \\
\cline{1-2}
16\,x^5 & + 5/3\,x^7 & \\
-16\,x^5 & + 8\,x^7 & \\
\cline{1-2}
 & 29/3\,x^7 &
\end{array}$$

$$\frac{120\,x-20\,x^3+x^5}{120-60\,x^2+5\,x^4} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}\,x^5 + o\,(x^7)$$

$$\boxed{\frac{x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}}{1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}\,x^5 + o\,(x^7)}$$

3°/ Développement à l'ordre *h*.

Posons $X = a\,x$, $Y = b\,x$.

$1 - a\,b\,x^2 = 1 - X\,Y$

$1 - (a + b)\,x + a\,b\,x^2 = (1 - X)\,(1 - Y)$

$(1 - X)\,(1 - Y) = 1 - (X + Y) + X\,Y$

$-X\,Y = 1 - (X + Y) - (1 - X)\,(1 - Y)$

$1 - X\,Y = 2 - (X + Y) - (1 - X)\,(1 - Y) = (1 - Y) + (1 - X) - (1 - X)\,(1 - Y)$

$$\frac{1-XY}{(1-X)(1-Y)} = \frac{1}{1-X} + \frac{1}{1-Y} - 1$$

$= (1 + X + X^2 + \ldots + X^h + o\,(X^{h+1})) + (1 + Y + Y^2 + \ldots + Y^h + o\,(Y^{h+1})) - 1$

$= 1 + (a + b)\,x + (a^2 + b^2)\,x^2 + \ldots + (a^h + b^h)\,x^h + o\,(x^{h+1})$

$$\boxed{\frac{1-abx^2}{1-(a+b)x+abx^2} = 1 + (a + b)\,x + (a^2 + b^2)\,x^2 + \ldots + (a^h + b^h)\,x^h + o\,(x^{h+1})}$$

Chapitre 5. Anneaux de polynômes.

Enoncés.

Exercice 6. Calculs de PGCD par l'algorithme d'Euclide.

Déterminer le PGCD des polynômes suivants : 1°/ $x^5 + 3x^4 + x^3 + x^2 + 3x + 1$ et $x^4 + 2x^3 + x + 2$, 2°/ $3x^5 + 5x^4 - 16x^3 - 6x^2 - 5x - 6$ et $3x^4 - 4x^3 - x^2 - x - 6$, 3°/ $x^5 + 5x^4 + 9x^3 + 7x^2 + x + 3$ et $x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 1$.	

Solution.

Pour déterminer le PGCD, on utilise l'**algorithme d'Euclide**.

1°/ Premier PGCD.

$$\begin{array}{rrrrrr|l}
x^5 & +3x^4 & +x^3 & +x^2 & +3x+1 & & x^4+2x^3+x+2 \\
\hline
-x^5 & -2x^4 & & -x^2 & -2x & & x+1 \\
\hline
 & x^4 & +x^3 & & +x & & \\
 & -x^4 & -2x^3 & & -x & -2 & \\
\hline
 & & -x^3 & & & -1 &
\end{array}$$

$$x^5 + 3x^4 + x^3 + x^2 + 3x + 1 = (x^4 + 2x^3 + x + 2) \times (x + 1) - (x^3 + 1)$$
$$(x^4 + 2x^3 + x + 2) = (x^3 + 1) \times (x + 2) + 0$$

Le dernier reste non nul est $-(x^3 + 1)$, le polynôme unitaire correspondant est $(x^3 + 1)$.
Donc :

Le PGCD de $x^5 + 3x^4 + x^3 + x^2 + 3x + 1$ et $x^4 + 2x^3 + x + 2$ est $x^3 + 1$.

$x^5 + 3x^4 + x^3 + x^2 + 3x + 1 = (x^3 + 1) \times (x^2 + 3x + 1)$
$x^4 + 2x^3 + x + 2 = (x^3 + 1) \times (x + 2)$

2°/ Deuxième PGCD.

$$
\begin{array}{rl|l}
3x^5+5x^4-16x^3-6x^2-5x-6 & & 3x^4-4x^3-x^2-x-6 \\
\hline
-3x^5+4x^4+x^3+x^2+6x & & x+3 \\
\hline
9x^4-15x^3-5x^2+x & & \\
-9x^4+12x^3+3x^2+3x+18 & & \\
\hline
-3x^3-2x^2+4x+12 & &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rl|l}
3x^4-4x^3-x^2-x-6 & & -3x^3-2x^2+4x+12 \\
\hline
-3x^4-2x^3+4x^2+12x & & -x+2 \\
\hline
-6x^3+3x^2+11x & & \\
+6x^3+4x^2-8x-24 & & \\
\hline
7x^2+3x-30 & &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rl|l}
-3x^3-2x^2+4x+12 & & 7x^2+3x-30 \\
\hline
3x^3+9/7\,x^2-90/7\,x & & -3/7\,x-5/49 \\
\hline
-5/7\,x^2-62/7\,x & & \\
+5/7\,x^2+15/49\,x-150/49 & & \\
\hline
-419/7\,x-438/49 & &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rl|l}
7x^2+3x-30 & & -419/7\,x-438/49 \\
\hline
-7x^2-438/419\,x & & -49/419\,x-5733/175561 \\
\hline
819/419\,x & & \\
-819/419\,x-2511054/8602489 & & \\
\hline
-260585724/8602489 & &
\end{array}
$$

Le dernier reste écrit est une constante : si l'on divise le reste précédent par cette constante, on obtient le même polynôme à une constante multiplicative près et le reste est 0.
Le dernier reste non nul est donc une constante : les deux polynômes sont étrangers, leur PGCD est 1.

Les polynômes $3x^5+5x^4-16x^3-6x^2-5x-6$ et $3x^4-4x^3-x^2-x-6$ sont étrangers.

3°/ Troisième PGCD.

On peut vérifier successivement les égalités :

$x^5+5x^4+9x^3+7x^2+x+3=(x^4+2x^3+2x^2+x+1)\times(x+3)+(x^3+x)$,
$(x^4+2x^3+2x^2+x+1)=(x^3+x)\times(x+2)+(x^2-x+1)$
$(x^3+x)=(x^2-x+1)\times(x+1)+(x-1)$
$(x^2-x+1)=(x-1)\times x+1$

Le reste est une constante : les deux polynômes sont étrangers, leur PGCD est 1.

Les polynômes $x^5+5x^4+9x^3+7x^2+x+3$ et $x^4+2x^3+2x^2+x+1$ sont étrangers.

Chapitre 5. Anneaux de polynômes.

Enoncés.

Exercice 7. Théorème de Bézout.

Soient deux polynômes a et b premiers entre eux. Il existe alors deux polynômes u_0 et v_0 tels que : $a\,u_0 + b\,v_0 = 1$.

1°/ Déterminer tous les couples (u, v) de polynômes assurant l'égalité précédente.
2°/ En déduire qu'il existe un couple unique (u, v) tel que $a\,u + b\,v = 1$, avec :
degré (u) < *degré* (b) et *degré* (v) < *degré* (a).

Solution.

1°/ Couples (u, v) assurant l'égalité de Bézout.

Si (u, v) est une solution de la relation de Bézout, autre que la solution (u_0, v_0), nous avons, à la fois :

$a\,u_0 + b\,v_0 = 1$
$a\,u + b\,v = 1$

Par différence :

$a\,(u - u_0) + b\,(v - v_0) = 0$

a divise $a\,(u - u_0) = -\,b\,(v - v_0)$
Or a est premier avec b, donc a divise $(v - v_0)$.
$v = v_0 + \alpha\,a$, où α est un polynôme quelconque.

De même, b divise $b\,(v - v_0) = -\,a\,(u - u_0)$
Or b est premier avec a, donc b divise $(u - u_0)$.
$u = u_0 + \beta\,b$, où β est un polynôme vérifiant $a\,(u - u_0) + b\,(v - v_0) = 0$, soit :
$\beta\,a\,b + \alpha\,a\,b = 0$, donc $\beta = -\,\alpha$.

Les couples (u, v) vérifiant l'identité de Bézout $a\,u + b\,v = 1$, s'obtiennent, à partir d'une solution quelconque (u_0, v_0), par :

$u = u_0 + k\,b$,
$v = v_0 - k\,a$,

avec k polynôme quelconque.

2°/ Solution de degré minimum.

Supposons que l'on connaisse une solution (u_0, v_0) de l'identité de Bézout : $a\,u_0 + b\,v_0 = 1$.
La division euclidienne de u_0 par b donne $u_0 = k\,b + u_1$, avec *degré* (u_1) < *degré* (b).
La division euclidienne de v_0 par a donne $v_0 = k'\,a + v_1$, avec *degré* (v_1) < *degré* (a).
La relation $a\,u_0 + b\,v_0 = 1$ s'écrit : $(k + k')\,ab + a\,u_1 + b\,v_1 = 1$.
Or le degré de u_1 est strictement plus petit que le degré de b, donc le degré de $a\,u_1$ est strictement plus petit que le degré de $a\,b$.
De même, le degré de v_1 est strictement plus petit que le degré de a, donc le degré de $b\,v_1$ est strictement plus petit que le degré de $a\,b$.
Par addition, le degré de $a\,u_1 + b\,v_1$ est strictement plus petit que le degré de $a\,b$.
Or $a\,u_1 + b\,v_1 = 1 - (k + k')\,ab$. Donc $(k + k')\,ab$ est de degré strictement plus petit que $a\,b$: c'est donc que $k + k' = 0$.
Il en résulte que l'on a : $a\,u_1 + b\,v_1 = 1$, avec *degré* (u_1) < *degré* (b) et *degré* (v_1) < *degré* (a).

S'il existait une autre solution (u_2, v_2) de l'identité de Bézout vérifiant *degré* (u_2) < *degré* (b) et *degré* (v_2) < *degré* (a), nous aurions, par différence :
$a\,(u_2 - u_1) + b\,(v_2 - v_1) = 0$
a divise $b\,(v_2 - v_1)$ et est étranger à b, donc a divise $v_2 - v_1$.
Mais $v_2 - v_1$ est de degré strictement plus petit que le degré de a : on a donc nécessairement $v_2 - v_1 = 0$.
De même $u_2 - u_1 = 0$, ce qui assure l'unité de la solution remplissant les conditions imposées.

Lorsque a et b sont étrangers, il existe un **couple unique** de polynômes (u, v) vérifiant la relation : $a\,u + b\,v = 1$, avec *degré* (u) < *degré* (b) et *degré* (v) < *degré* (a).

Chapitre 5. Anneaux de polynômes.

Enoncés.

Exercice 8. Polynômes étrangers dans le théorème de Bézout.

Soient a et b deux polynômes de $K[X]$ ($K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), dont le PGCD est d. On choisit deux polynômes u et v tels que $a\,u + b\,v = d$. Montrer que u et v sont premiers entre eux.	

Solution.

D'après le théorème de Bézout, si a et b sont deux polynômes dont le PGCD est d, il existe deux polynômes u et v tels que $a\,u + b\,v = d$.

d divise a et d divise b. Notons a' le polynôme $\frac{a}{d}$ et b' le polynôme $\frac{b}{d}$: a' et b' sont étrangers et l'on a : $a'\,u + b'\,v = 1$.

Soit d' le PGCD de u et v.
d' divise u et v, donc il divise $a'\,u + b'\,v = 1$.
Ceci n'est possible que si $d' = 1$.
Donc u et v sont étrangers.

Chapitre 5. Anneaux de polynômes.

Enoncés.

Exercice 9. Divisibilité dans $\mathbb{R}[X]$.

1°/ Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $A(X) = X^{2n} + 2X^{n+1} + X^n + X^2 + X$ et $B(X) = X^n + X + 1$ deux éléments de $\mathbb{R}[X]$. Montrer que A est divisible par B. 2°/ Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour quelles valeurs de l'entier n, le polynôme de $\mathbb{R}[X]$, $A(X) = (X+1)^n - X^n - 1$ est-il divisible par le polynôme : a) $B_1(X) = X^2 + X + 1$? b) $B_2(X) = (X^2 + X + 1)^2$? 3°/ Soit $P(X)$ un polynôme de $\mathbb{R}[X]$. On pose $F(X) = P(X) - X$ et $G(X) = P[P(X)] - X$. Montrer que $G(X)$ est divisible par $F(X)$.	

Solution.

1°/ Divisibilité de A par B.

Nous avons :

$$X\,B(X) = X(X^n + X + 1) = X^{n+1} + X^2 + X$$
$$A(X) - X\,B(X) = (X^{2n} + 2X^{n+1} + X^n + X^2 + X) - (X^{n+1} + X^2 + X)$$
$$= X^{2n} + X^{n+1} + X^n = X^n(X^n + X + 1) = X^n\,B(X)$$

donc :

$$A(X) = X\,B(X) + X^n\,B(X) = (X^n + X)\,B(X)$$

et cette relation montre que $A(X)$ est divible par $B(X)$: le quotient est $X^n + X$.

$$\boxed{A(X) = (X^n + X)\,B(X)}$$

2°/ Détermination de l'entier n.

1. Divisibilité par le polynôme $B_1(X) = X^2 + X + 1$.

Pour $n = 0$, $A(X) = (X+1)^n - X^n - 1 = 1 - 1 - 1 = -1$, n'est pas divisible par B_1.

Pour $n = 1$, $A(X) = (X+1)^n - X^n - 1 = (X+1) - X - 1 = 0$, est divisible par B_1.

Soit n un entier strictement plus grand que 1.

$$A(X) = (X+1)^n - X^n - 1 = \sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k} X^k - X^n - 1 = \sum_{k=1}^{k=n-1} \binom{n}{k} X^k$$

$(X-1)\,B_1(X) = X^3 - 1$.
Comme $B_1(1) = 3 \neq 0$, les racines de $B_1(X)$ dans $\mathbb{C}$ sont les deux racines cubiques de 1 différentes de 1, soit $\alpha_1 = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ et $\alpha_2 = e^{-\frac{2i\pi}{3}}$.

Pour que $A(X)$ soit divisible par $B_1(X)$, dans $\mathbb{R}[X]$, il faut et il suffit que $A(\alpha_1) = 0$ et $A(\alpha_2) = 0$.
En effet, d'un côté, si $A(X)$ est divisible par $B_1(X)$, dans $\mathbb{R}[X]$, il s'annule pour les valeurs α_1 et α_2 qui annulent B, et, réciproquement, si $A(\alpha_1) = 0$ et $A(\alpha_2) = 0$, A est divisible, dans $\mathbb{C}[X]$, par $(X - \alpha_1)$ et par $(X - \alpha_2)$, donc par leur produit $B_1(X)$. Et comme la division euclidienne de $A(X)$ par $B_1(X)$ ne fait apparaître que des coefficients réels, A est divisible par $B_1(X)$ dans $\mathbb{R}[X]$.

Comme α_2 est le nombre complexe conjugué de α_1, $A(\alpha_2)$ est le nombre complexe conjugué de $A(\alpha_1)$.
$A(\alpha_2)$ et $A(\alpha_1)$ s'annulent donc en même temps : $A(\alpha_2) = 0 \Leftrightarrow A(\alpha_1) = 0$.

$A(\alpha_1) = (\alpha_1 + 1)^n - \alpha_1^n - 1$

$\alpha_1 + 1 = e^{\frac{2i\pi}{3}} + 1 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} + 1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} + 1 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{\frac{i\pi}{3}}$
$(\alpha_1 + 1)^n = e^{\frac{ni\pi}{3}}$
$A(\alpha_1) = e^{\frac{ni\pi}{3}} - e^{\frac{2ni\pi}{3}} - 1$.

Pour que $A(\alpha_1)$ soit nul, il faut et il suffit que sa partie réelle et sa partie imaginaire soient nulles.

La partie imaginaire de $A(\alpha_1)$ est $2\,i\sin\frac{n\pi}{3} - 2\,i\sin 2\frac{n\pi}{3} = 2\,i\sin\frac{n\pi}{3}(1 - 2\cos\frac{n\pi}{3})$.
Elle est nulle pour $\sin\frac{n\pi}{3} = 0$, soit $\frac{n\pi}{3} = k\,\pi$, et pour $\cos\frac{n\pi}{3} = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$, soit $\frac{n\pi}{3} = \pm\frac{\pi}{3} + 2\,k\,\pi$.
La partie imaginaire de $A(\alpha_1)$ est donc nulle pour $\boldsymbol{n = 3\,k}$ **ou** $\boldsymbol{n = 6\,k \pm 1,\ k \in \mathbb{Z}}$.

La partie réelle de $A(\alpha_1)$ est $\cos\frac{n\pi}{3} - \cos 2\frac{n\pi}{3} - 1$.
Or $\cos 2\frac{n\pi}{3} = 2\cos^2\frac{n\pi}{3} - 1$.
Donc la partie réelle de $A(\alpha_1)$ est égale à :
$\cos\frac{n\pi}{3} - (2\cos^2\frac{n\pi}{3} - 1) - 1 = \cos\frac{n\pi}{3} - 2\cos^2\frac{n\pi}{3} = \cos\frac{n\pi}{3}(1 - 2\cos\frac{n\pi}{3})$
Elle est nulle pour $\cos\frac{n\pi}{3} = 0 = \cos\frac{\pi}{2}$, $\frac{n\pi}{3} = \pm\frac{\pi}{2} + 2\,k\,\pi$, $n = 6\,k \pm \frac{3}{2}$, qui n'est pas entier.
Elle est nulle aussi pour $\cos\frac{n\pi}{3} = \frac{1}{2}$, $n = 6\,k \pm 1$, $k \in \mathbb{Z}$.
De sorte que $A(\alpha_1)$ est nul pour $n = 6\,k \pm 1$, $k \in \mathbb{Z}$.
Et, puisque n est un entier naturel :

$A(X)$ est divisible par $B_1(X)$ si, et seulement si, $n = 1$ ou $n = 6k \pm 1$, $k \in \mathbb{N}^*$.

2. Divisibilité par le polynôme $B_2(X) = (X^2 + X + 1)^2$.

Le polynôme $B_2(X) = (X^2 + X + 1)^2$ possède deux racines doubles dans $\mathbb{C}[X]$:
$\alpha_1 = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ et $\alpha_2 = e^{-\frac{2i\pi}{3}}$, qui sont des nombres complexes conjugués.
Pour que le polynôme $A(X) = (X + 1)^n - X^n - 1$, soit divisible par $B_2(X)$ dans $\mathbb{R}[X]$, il faut et il suffit que $A(X)$ possède aussi α_1 et α_2 comme racines doubles.
Pour cela, il faut et il suffit que $A(X)$ et sa dérivée soient nuls pour α_1. En effet la nullité pour α_1 entraîne la nullité pous α_2, puisque $A(\alpha_1)$ et $A(\alpha_2)$ sont des nombres complexes conjugués, et la nullité de $A(\alpha_1)$ et de $A'(\alpha_1)$ entraîne que α_1 est racine double de $A(X)$.

D'après (1), $A(\alpha_1)$ est nul pour $n = 6k + 1$, $k \in \mathbb{N}$, ou $n = 6k - 1$, $k \in \mathbb{N}^*$.

La dérivée de $A(X)$ est $A'(X) = 0$ pour $n = 0$ et $A'(X) = n(X + 1)^{n-1} - nX^{n-1}$ pour $n > 0$.

$A'(\alpha_1) = n((\alpha_1 + 1)^{n-1} - \alpha_1^{n-1})$
$= n(e^{\frac{(n-1)i\pi}{3}} - e^{\frac{2(n-1)i\pi}{3}}) = -n e^{\frac{(n-1)i\pi}{2}}(e^{\frac{(n-1)i\pi}{6}} - e^{-\frac{(n-1)i\pi}{6}}) = 2(-1)^n i n \sin\frac{(n-1)\pi}{6}$.

$A'(\alpha_1)$ est nul pour $n = 0$ et pour $\frac{(n-1)\pi}{6} = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, soit $n = 0$ ou $n = 6k + 1$, $k \in \mathbb{Z}$.
Et, puisque n est un entier naturel :
$\{ n \in \mathbb{N} \mid n = 1 \text{ ou } (\exists k \in \mathbb{N}^*)(n = 6k \pm 1)\} \cap \{ n \in \mathbb{N} \mid n = 0 \text{ ou } (\exists k \in \mathbb{N})(n = 6k + 1)\} =$
$\{ n \in \mathbb{N} \mid (\exists k \in \mathbb{N})(n = 6k + 1)\}$

$A(X)$ est divisible par $B_2(X)$ si, et seulement si, $n = 6k + 1$, $k \in \mathbb{N}$.

3°/ Divisibilité de G par F.

Si a est une racine de $F(X)$, on a $F(a) = 0$, donc $P(a) = a$.
$G(a) = P[P(a)] - a = P[a] - a = F(a) = 0$.
Donc toutes les racines de $F(X)$ sont des racines de $G(X)$: $F(a) = 0 \Rightarrow G(a) = 0$.
Si les p racines α_i de F dans $\mathbb{C}$ sont simples, G est divisible par $F = c(X - \alpha_1) \ldots (X - \alpha_p)$.

Si a est une racine multiple d'ordre $n > 1$ de F, F et ses dérivées jusqu'à l'ordre $n - 1$, sont nulles en a :
$F(a) = 0$ et $F^{(k)}(a) = 0$, $k = 1, \ldots, n - 1$.

Calculons les dérivées successives de G jusqu'à l'ordre $n - 1$.

$G'(X) = P'(X) P'[P(X)] - 1$
$G'(a) = P'(a) P'[P(a)] - 1$
$F'(a) = 0 \Rightarrow P'(a) = 1$; $F(a) = 0 \Rightarrow P(a) = a$, donc
$G'(a) = P'(a) P'[P(a)] - 1 = P'(a) - 1 = 0$.
Si a est racine double de F, a est aussi racine double de G.

$G''(X) = P''(X)\,P'[P(X)] + (P'(X))^2\,P''[P(X)]$
$G''(a) = P''(a)\,P'[P(a)] + (P'(a))^2\,P''[P(a)]$
$F''(a) = 0 \Rightarrow P''(a) = 0$; $F'(a) = 0 \Rightarrow P'(a) = 1$; $F(a) = 0 \Rightarrow P(a) = a$, donc
$G''(a) = P''(a)\,P'[P(a)] + (P'(a))^2\,P''[P(a)] = P''(a)\,(P'[P(a)] + (P'(a))^2) = 0$.
Si a est racine triple de F, a est aussi racine triple de G.

Pour les dérivées d'ordre supérieur $G^{(k)}(X)$, il est clair, par une récurrence immédiate, que, dans chaque terme de la somme constituant $G^{(k)}(X)$, il existera un facteur de la forme $P^{(h)}(X)$ ou de la forme $P^{(h)}[P(X)]$, $2 \leqslant h \leqslant n-1$. Ces facteurs sont nuls en a :
$P^{(h)}[P(a)] = P^{(h)}(a) = F^{(h)}(a) = 0$.
Donc la somme est nulle et $G^{(k)}(a) = 0$, $2 \leqslant k \leqslant n-1$.
Il en résulte que, si a est une racine multiple d'ordre $n > 1$ de F, G et toutes ses dérivées jusqu'à l'ordre $n-1$ sont nulles.
Ceci montre que l'on peut mettre $(X-a)^n$ en facteur dans $G(X)$ considéré comme élément de $\mathbb{C}[X]$.

Or, dans $\mathbb{C}[X]$, on peut écrire $F(X)$ sous forme de produit de facteurs du premier degré, puisque $\mathbb{C}$ est un corps algébriquement clos :
$F(X) = c\,(X-\alpha_1)^{n_1} \ldots (X-\alpha_p)^{n_p}$
Donc, dans $\mathbb{C}[X]$, $G(X)$ est divisible par $F(X)$.
L'algorithme de la division euclidienne de $G(X)$ par $F(X)$ ne fait intervenir que des nombres réels, et le reste est 0, donc G est divisible par F dans $\mathbb{R}[X]$.

$P[P(X)] - X$ est divisible par $P(X) - X$.

Chapitre 5. Anneaux de polynômes.

Enoncés.

Exercice 10. Polynômes vérifiant une équation fonctionnelle.

Soit $P(X) \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant $(X+3)P(X) = XP(X+1)$. 1°/ Montrer qu'il existe $S(X) \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(X) = XS(X)$. 2°/ Déterminer $S(-1)$ et $S(-2)$. 3°/ En déduire que $P(X)$ est de la forme $aX(X+1)(X+2)$. 4°/ Déterminer tous les polynômes $T(X) \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant $(X+3)T(X) = XT(X+1)$.	

Solution.

1°/ Existence de $S(X)$.

Nous avons :

$$(X+3)P(X) = XP(X+1)$$

Le polynôme $(X+3)$ divise $(X+3)P(X)$, donc il divise $XP(X+1)$.
Comme il ne divise pas X, c'est qu'il divise $P(X+1)$.
Il existe donc un polynôme $S(X) \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(X+1) = (X+3)S(X)$.
On a alors : $(X+3)P(X) = XP(X+1) = X(X+3)S(X)$.
On peut simplifier par $(X+3)$, il reste $P(X) = XS(X)$.

Il existe $S(X) \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(X) = XS(X)$.
$S(X)$ vérifie $P(X+1) = (X+3)S(X)$.

2°/ Calcul de $S(-1)$ et $S(-2)$.

La relation $(X+3)P(X) = XP(X+1)$ montre, pour $X = 0$, que $P(0) = 0$.
Pour $X = -1$, elle donne $2P(-1) = -P(0)$. Comme $P(0) = 0$, il vient $P(-1) = 0$.
Pour $X = -2$, elle donne $P(-2) = -2P(-1) = 0$.

La relation $P(X) = XS(X)$ donne alors :
$S(-1) = -P(-1) = 0$.
$S(-2) = -\frac{1}{2}P(-2) = 0$.

$S(-1) = 0$; $S(-2) = 0$.

3°/ Forme de $P(X)$.

Les relations $S(-1) = 0$ et $S(-2) = 0$ montrent que $S(X)$ est divisible par $(X + 1)$ et par $(X + 2)$ et, comme ces polynômes sont étrangers, $S(X)$ est divisible par le produit $(X + 1)(X + 2)$.
Il existe donc un polynôme $A(X) \in \mathbb{R}[X]$ tel que $S(X) = (X + 1)(X + 2) A(X)$.

La relation $P(X) = X S(X)$ s'écrit alors $P(X) = X(X + 1)(X + 2) A(X)$, ce qui démontre notre résultat.

4°/ Solution de l'équation $(X + 3) T(X) = X T(X + 1)$.

Nous venons de démontrer, dans 3°, que tout polynôme $P(X)$ vérifiant la relation $(X + 3) P(X) = X P(X + 1)$ est de la forme :

$$P(X) = X(X + 1)(X + 2) A(X)$$

où $A(X) \in \mathbb{R}[X]$. D'où :

Les solutions de l'équation $(X + 3) T(X) = X T(X + 1)$ appartenant à $\mathbb{R}[X]$,
sont les polynômes de la forme $X(X + 1)(X + 2) A(X)$, où $A(X)$ est un élément quelconque de $\mathbb{R}[X]$.
Ce sont les polynômes divisibles par $X(X + 1)(X + 2)$.
L'ensemble de ces solutions peut s'écrire $\mathbb{R}[X] X(X + 1)(X + 2)$.

L'ensemble des solutions de l'équation $(X + 3) T(X) = X T(X + 1)$ est l'**idéal principal** de $\mathbb{R}[X]$ engendré par le polynôme $X(X + 1)(X + 2)$.

Chapitre 5. Anneaux de polynômes.

Enoncés.

Exercice 11. Reste de la division euclidienne par $X^5 - 1$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1°/ Déterminer le reste de la division euclidienne dans $\mathbb{R}[X]$ du polynôme $A(X) = X^{5n}$, par le polynôme $B(X) = X^5 - 1$.
2°/ Utiliser ce résultat pour déterminer le reste de la division euclidienne dans $\mathbb{R}[X]$ de :
$P(X) = X^{99} + 2X^{42} - 3X^{35} - 2X^{27} + 3$, par $B(X)$.

Solution.

1°/ Reste de X^{5n}.

Pour $n = 1$:

$X^5 = 1 \times (X^5 - 1) + 1$
$X^5 \equiv 1 \pmod{X^5 - 1}$

Supposons (hypothèse de récurrence) que pour un entier $n > 0$, nous ayons :
$X^{5n} \equiv 1 \pmod{X^5 - 1}$

Alors :
$X^{5(n+1)} = X^{5n} \times X^5 \equiv 1 \times 1 = 1 \pmod{X^5 - 1}$.

D'après le principe de récurrence, nous avons donc :
$X^{5n} \equiv 1 \pmod{X^5 - 1}$, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$.

2°/ Reste de $P(X)$.

$X^{99} = X^{95} \times X^4 \equiv X^4 \pmod{X^5 - 1}$
$X^{42} = X^{40} \times X^2 \equiv X^2 \pmod{X^5 - 1}$
$X^{35} \equiv 1 \pmod{X^5 - 1}$
$X^{27} = X^{25} \times X^2 \equiv X^2 \pmod{X^5 - 1}$
$1 = 0 \times (X^5 - 1) + 1 \equiv 1 \pmod{X^5 - 1}$

$P(X) = X^{99} + 2X^{42} - 3X^{35} - 2X^{27} + 3$
$\equiv X^4 + 2X^2 - 3 - 2X^2 + 3 = X^4 \pmod{X^5 - 1}$

Le reste de la division euclidienne de $P(X)$ par $B(X) = X^5 - 1$, est X^4.

De façon un peu plus précise, nous pouvons écrire :

$P(X) = X^{99} + 2(X^{42} - X^{27}) - 3(X^{35} - 1)$
$P(X) = X^{99} + 2X^{27}(X^{15} - 1) - 3(X^{35} - 1)$
$(X^{15} - 1)$ et $(X^{35} - 1)$ sont divisibles par $(X^5 - 1)$, donc le reste de la division euclidienne de $2X^{27}(X^{15} - 1) - 3(X^{35} - 1)$ par $(X^5 - 1)$ est 0.
De sorte que la division euclidienne de $P(X)$ par $(X^5 - 1)$ a le même reste que la division euclidienne de X^{99} par $(X^5 - 1)$, et l'on a vu, comme conséquence de la première question que :
$X^{99} = X^{95} \times X^4 \equiv X^4 \pmod{X^5 - 1}$.

Chapitre 5. Anneaux de polynômes.

Enoncés.

Exercice 12. Reste de la division euclidienne par $X^2 + 1$.

Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère les polynômes de $\mathbb{R}[X]$:

$$A(X) = (X \sin a + \cos a)^n, \text{ où } n \in \mathbb{N},$$
$$B_1(X) = X^2 + 1 \; ; \; B_2(X) = (X^2 + 1)^2$$

1°/ Déterminer le reste $R_1(X)$ de la division euclidienne de $A(X)$ par $B_1(X)$.
2°/ Déterminer le reste $R_2(X)$ de la division euclidienne de $A(X)$ par $B_2(X)$.

Solution.

1°/ Reste de la division par $B_1(X)$.

Pour $n = 0$:

$A_n(X) = (X \sin a + \cos a)^n = A_0(X) = (X \sin a + \cos a)^0 = 1 = X \sin 0 + \cos 0$.
$A_0(X) = 0 \times (X^2 + 1) + 1 \equiv X \sin 0 + \cos 0 \pmod{(X^2 + 1)}$.

Supposons (hypothèse de récurrence) que, pour un $n \in \mathbb{N}$, on ait :
$A_n(X) \equiv X \sin na + \cos na \pmod{(X^2 + 1)}$.

Alors :
$A_{n+1}(X) = (X \sin a + \cos a)^{n+1} = (X \sin a + \cos a)^n \times (X \sin a + \cos a)$
$\equiv (X \sin na + \cos na) \times (X \sin a + \cos a) \pmod{(X^2 + 1)}$.
$(X \sin na + \cos na) \times (X \sin a + \cos a) = X^2 \sin na \sin a + \cos na \cos a + X(\sin na \cos a + \cos na \sin a)$
$X^2 = 1 \times (X^2 + 1) - 1 \equiv -1 \pmod{(X^2 + 1)}$.
$(X \sin na + \cos na) \times (X \sin a + \cos a) \equiv (\cos na \cos a - \sin na \sin a) + X(\sin na \cos a + \cos na \sin a)$
$(\cos na \cos a - \sin na \sin a) = \cos(n + 1)a$
$(\sin na \cos a + \cos na \sin a) = \sin(n + 1)a$
Finalement : $A_{n+1}(X) \equiv X \sin(n + 1)a + \cos(n + 1)a \pmod{(X^2 + 1)}$.

D'après le principe de récurrence :

$$(X \sin a + \cos a)^n \equiv X \sin na + \cos na \pmod{(X^2 + 1)}, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Par exemple :
$(X \sin a + \cos a)^2 = X^2 \sin^2 a + 2X \sin a \cos a + \cos^2 a = (X^2 + 1) \sin^2 a + X \sin 2a + \cos 2a.$
$(X \sin a + \cos a)^3 = ((X^2 + 1) \sin^2 a + X \sin 2a + \cos 2a)(X \sin a + \cos a)$
$= (X^2 + 1) \sin^2 a (X \sin a + \cos a) + (X^2 + 1) \sin a \sin 2a + X \sin 3a + \cos 3a$
$= (X^2 + 1) \sin^2 a (X \sin a + 3 \cos a) + X \sin 3a + \cos 3a$
$(X \sin a + \cos a)^4 = ((X^2 + 1) \sin^2 a + X \sin 2a + \cos 2a)^2$
$= (X^2 + 1)^2 \sin^4 a + 2 (X^2 + 1) \sin^2 a (X \sin 2a + \cos 2a) + (X \sin 2a + \cos 2a)^2$
$= (X^2 + 1)^2 \sin^4 a + 2 (X^2 + 1) \sin^2 a (X \sin 2a + \cos 2a) + ((X^2 + 1) \sin^2 2a + X \sin 4a + \cos 4a)$
$= (X^2 + 1)^2 \sin^4 a + 2 (X^2 + 1) \sin^2 a (X \sin 2a + \cos 2a + 2 \cos^2 a) + X \sin 4a + \cos 4a$
$= (X^2 + 1)^2 \sin^4 a + 2 (X^2 + 1) \sin^2 a (X \sin 2a + 2 \cos 2a + 1) + (X \sin 4a + \cos 4a)$
$= (X^2 + 1)^2 \sin^4 a + 2 (X^2 + 1) \sin^2 a (X \sin 2a + 2 \cos 2a + 1) + (X \sin 4a + \cos 4a)$

2°/ Reste de la division par $B_2(X)$.

$A_0(X) = 0 \times (X^2 + 1)^2 + 1 \equiv 1 \pmod{(X^2 + 1)^2}$.
$A_1(X) = X \sin a + \cos a \equiv X \sin a + \cos a \pmod{(X^2 + 1)^2}$.
$A_2(X) = (A_1(X))^2 \equiv (X \sin a + \cos a)^2 \pmod{(X^2 + 1)^2}$.
$A_3(X) = (A_1(X))^3 \equiv (X \sin a + \cos a)^3 \pmod{(X^2 + 1)^2}$.

$A_n(X) = (X^2 + 1) P_n(X) + (X \sin na + \cos na)$, où $P_n(X)$ est un polynôme de degré $n - 2$, d'après le résultat de la première question.
$A_{n+1}(X) = A_n(X) \times A_1(X)$
$= ((X^2 + 1) P_n(X) + (X \sin na + \cos na))(X \sin a + \cos a)$
$= (X^2 + 1)(X \sin a + \cos a) P_n(X) + (X \sin na + \cos na))(X \sin a + \cos a)$
$(X \sin na + \cos na))(X \sin a + \cos a) = (X^2 + 1) \sin a \sin na + X \sin (n + 1)a + \cos (n + 1)a$
$A_{n+1}(X) = (X^2 + 1)((X \sin a + \cos a) P_n(X) + \sin a \sin na) + X \sin (n + 1)a + \cos (n + 1)a$

$P_{n+1}(X) = A_1(X) P_n(X) + \sin a \sin na$

$P_0(X) = 0$
$P_1(X) = 0$
$P_2(X) = \sin^2 a$
$P_3(X) = A_1(X) \sin^2 a + \sin a \sin 2a = \sin a (A_1(X) \sin a + \sin 2a)$
$P_4(X) = A_1(X) \sin a (A_1(X) \sin a + \sin 2a) + \sin a \sin 3a$
$= \sin a (A_2(X) \sin a + A_1(X) \sin 2a + \sin 3a)$

Supposons (hypothèse de récurrence) que, pour un entier $n \geqslant 2$, on ait :

$$P_n(X) = \sin a \sum_{k=0}^{k=n-2} A_k(X) \sin (n - 1 - k)a$$

Alors :

$$P_{n+1}(X) = A_1(X)\,P_n(X) + \sin a \sin n a$$
$$= \sin a \sum_{k=0}^{k=n-2} A_1(X)\,A_k(X) \sin(n-1-k)\,a + \sin a \sin n a$$

$$A_1(X)\,A_k(X) = A_{k+1}(X)$$
$$A_0(X) = 1$$
$$P_{n+1}(X) = \sin a \sum_{k=0}^{k=n-2} A_{k+1}(X) \sin(n-1-k)\,a + \sin a\,A_0(X) \sin n a$$
$$= \sin a \sum_{k=1}^{k=n-1} A_k(X) \sin(n-k)\,a + \sin a\,A_0(X) \sin n a$$
$$= \sin a \sum_{k=0}^{k=n-1} A_k(X) \sin(n-k)\,a$$

De sorte que la formule de l'hypothèse de récurrence est encore valable lorsqu'on y remplace n par n + 1 : d'après le principe de récurrence, puisque la formule est vraie pour $n = 2$, elle est vraie pour tout entier $n \geqslant 2$.
Nous obtenons donc :

$$A_n(X) = (X^2+1) \sin a \sum_{k=0}^{k=n-2} A_k(X) \sin(n-1-k)\,a + (X \sin n a + \cos n a)$$

Cette formule n'est autre que la formule que donne la division euclidienne de $A_n(X)$ par $X^2 + 1$: on connaît maintenant le quotient et le reste.

Pour $n = 0$, 1, 2, ou 3, $A_n(X)$ est un polynome de degré inférieur au degré de $(X^2+1)^2$, de sorte que le reste de la division de $A_n(X)$ par $(X^2+1)^2$ est $A_n(X)$ lui-même.

Le reste de la division de $(X^2+1)\,A_k(X)$ par $(X^2+1)^2$ est le produit par (X^2+1) du reste de la division de $A_k(X)$ par (X^2+1), soit $(X^2+1)(X \sin na + \cos na)$.
Donc le reste de la division de $A_n(X)$ par $(X^2+1)^2$ est donné, pour $n \geqslant 2$, par :

$$A_n(X) \equiv \sin a\,(X^2+1) \sum_{k=0}^{k=n-2} (X \sin k a + \cos k a) \sin(n-1-k)\,a + (X \sin n a + \cos n a),\ n \geqslant 2.$$

Pour calculer $\sum_{k=0}^{k=n-2} (X \sin k a + \cos k a) \sin(n-1-k)\,a$, calculons :

$$\sum_{k=0}^{k=n-2} (i \sin k a + \cos k a) \sin(n-1-k)\,a = \sum_{k=0}^{k=n-2} e^{i k a} \sin(n-1-k)\,a.$$

Le coefficient de X est la partie imaginaire de ce nombre complexe, et le terme constant en est la partie réelle.

$$\sum_{k=0}^{k=n-2} e^{i\,k\,a} \sin\,(n-1-k)\,a = \frac{1}{2i} \sum_{k=0}^{k=n-2} e^{i\,k\,a}\,(e^{i\,(n-1-k)\,a}) - e^{-i\,(n-1-k)\,a})$$

$$= \frac{1}{2i}\,(n-1)\,e^{i\,(n-1)\,a} - \frac{1}{2i} e^{-i\,(n-1)\,a} \sum_{k=0}^{k=n-2} e^{2\,i\,k\,a}$$

$$= \frac{1}{2i}\,(n-1)\,e^{i\,(n-1)\,a} - \frac{1}{2i} e^{-i\,(n-1)\,a}\,\frac{e^{2i(n-1)a}-1}{e^{2i\,a}-1}$$

$$= \frac{1}{2i}\,(n-1)\,e^{i\,(n-1)\,a} - \frac{1}{2i} e^{-i\,a}\,\frac{\sin(n-1)a}{\sin a}$$

$$= \frac{1}{2i}\,(n-1)\,(\cos\,(n-1)\,a + i \sin\,(n-1)\,a) - \frac{1}{2i}(\cos a - i \sin a)\,\frac{\sin(n-1)a}{\sin a}$$

La partie réelle est : $\frac{n-1}{2} \sin\,(n-1)\,a + \frac{1}{2} \sin\,(n-1)\,a = \frac{n}{2} \sin\,(n-1)\,a$.

La partie imaginaire est : $-\frac{n-1}{2} \cos\,(n-1)\,a + \frac{1}{2} \cos a\,\frac{\sin(n-1)a}{\sin a}$.

On obtient donc :

$$\sum_{k=0}^{k=n-2} (X \sin k\,a + \cos k\,a) \sin\,(n-1-k)\,a = \frac{1}{2}\,X\,(\cos a\,\frac{\sin(n-1)a}{\sin a} - (n-1) \cos\,(n-1)\,a) + \frac{n}{2} \sin\,(n-1)\,a.$$

$A_n\,(X) \equiv \frac{1}{2}\,(X^2+1)\,[X\,(\cos a \sin\,(n-1)\,a - (n-1) \sin a \cos\,(n-1)\,a) + n \sin a \sin\,(n-1)\,a] + (X \sin n\,a + \cos n\,a)$, $n \geqslant 2$.

$A_n\,(X) \equiv \frac{1}{2}\,(X^2+1)\,[X\,(\sin n\,a - n \sin a \cos\,(n-1)\,a) + n \sin a \sin\,(n-1)\,a] + (X \sin n\,a + \cos n\,a)$, $n \geqslant 2$.

Compte tenu de la relation $\sin a \cos\,(n-1)\,a = \sin n\,a - \sin\,(n-2)\,a$, on peut aussi écrire :
$\sin n\,a - n \sin a \cos\,(n-1)\,a = \sin n\,a - n\,(\sin n\,a - \sin\,(n-2)\,a) = n \sin\,(n-2)\,a - (n-1) \sin n\,a$.

$A_n\,(X) \equiv \frac{1}{2}(X^2+1)\,[X\,(n \sin\,(n-2)\,a - (n-1) \sin n\,a) + n \sin a \sin\,(n-1)\,a] + (X \sin n\,a + \cos n\,a)$, $n \geqslant 2$.

L'intérêt de cette forme n'étant guère évident, nous garderons

$A_n\,(X) \equiv \frac{1}{2}\,(X^2+1)\,[X\,(\sin n\,a - n \sin a \cos\,(n-1)\,a) + n \sin a \sin\,(n-1)\,a] + (X \sin n\,a + \cos n\,a)$, $n \geqslant 2$.

$A_0\,(X) = 1 \equiv 1 \pmod{(X^2+1)^2}$; $A_1\,(X) \equiv A_1\,(X) \pmod{(X^2+1)^2}$;
$A_2\,(X) \equiv A_2\,(X) \pmod{(X^2+1)^2}$; $A_3\,(X) \equiv A_3\,(X) \pmod{(X^2+1)^2}$.

A titre d'exemple, en partant de la formule développée obtenue plus haut, on trouve :

$A_4\,(X) \equiv \sin a\,(X^2+1)\,(\sin 3\,a + (X \sin a + \cos a) \sin 2\,a + (X \sin 2\,a + \cos 2\,a) \sin a) + X \sin 4\,a + \cos 4\,a$.

$A_4\,(X) \equiv \sin a\,(X^2+1)\,(2\,X \sin a \sin 2\,a + \sin 3\,a + \cos a \sin 2\,a + \cos 2\,a \sin a) + X \sin 4\,a + \cos 4\,a$.

$A_4\,(X) \equiv 2 \sin a\,(X^2+1)\,(X \sin a \sin 2\,a + \sin 3\,a) + X \sin 4\,a + \cos 4\,a$.

Et la formule précédente donne le reste sous la forme :

$A_4(X) \equiv \frac{1}{2}(X^2+1)\,(X\,(\sin 4a - 4 \sin a \cos 3a) + 4 \sin a \sin 3a) + (X \sin 4a + \cos 4a)$.

Le seul terme à vérifier est le coefficient de $(X^2+1)\,X$, les autres sont les mêmes dans les deux formes du reste.

Le coefficient est $2 \sin^2 a \sin 2a$, d'une part, et $\frac{1}{2}(\sin 4a - 4 \sin a \cos 3a)$ d'autre part.

Or on a, d'une part :
$2 \sin^2 a = \frac{1}{2}(1 - \cos 2a)$, donc $2 \sin^2 a \sin 2a = (1 - \cos 2a) \sin 2a = \sin 2a - \frac{1}{2} \sin 4a$
et, d'autre part :
$2 \sin a \cos 3a = \sin 4a - \sin 2a$, donc
$\frac{1}{2}(\sin 4a - 4 \sin a \cos 3a) = \frac{1}{2} \sin 4a - \sin 4a + \sin 2a = \sin 2a - \frac{1}{2} \sin 4a$
$\frac{1}{2}(\sin 4a - 4 \sin a \cos 3a) = 2 \sin^2 a \sin 2a$

Le coefficient est bien le même.

Chapitre 5. Anneaux de polynômes.

Enoncés.

Exercice 13. PGCD et PPCM de deux ou trois polynômes.

Calculer un PGCD et un PPCM dans $\mathbb{R}[X]$ de : 1°/ $A(X) = X^4 + 3X^3 - 2X^2 - X - 1$ et $B(X) = -X^3 + 2X^2 - 4X + 3$. 2°/ $P(X) = X^2 - 1, Q(X) = X^2 - 3X + 2$, et $S(X) = X^2 - X - 2$.	

Solution.

1°/ Polynômes A et B.

On remarque tout de suite que $B(1) = 0$, donc $B(X)$ est divisible par $(X - 1)$.
$B'(X) = -3X^2 + 4X - 4$, $B'(1) = -3 \neq 0$, 1 n'est pas racine double de B et $B(X)$ n'est pas divisible par $(X - 1)^2$.
$A(1) = 0$, donc $A(X)$ est divisible par $(X - 1)$.
$A'(X) = 4X^3 + 9X^2 - 4X - 1$.
$A'(1) = 8 \neq 0$, donc 1 n'est pas racine double de A.
$X^3(X - 1) = X^4 - X^3$
$A(X) - X^3(X - 1) = 4X^3 - 2X^2 - X - 1$
$4X^2(X - 1) = 4X^3 - 4X^2$
$A(X) - (X^3 + 4X^2)(X - 1) = 2X^2 - X - 1$
$2X(X - 1) = 2X^2 - 2X$
$A(X) - (X^3 + 4X^2 + 2X)(X - 1) = X - 1$
$A(X) = (X^3 + 4X^2 + 2X + 1)(X - 1)$

Ecrivons $B(X) = (X - 1)(-X^2 + aX - 3)$.
Le terme de degré 2 est $(a + 1)X^2 = 2X^2$, donc $a = 1$ et $B(X) = (X - 1)(-X^2 + X - 3)$.
Le polynôme $(-X^2 + X - 3)$ n'a pas de racine réelle puisque son discriminant est négatif.
Les facteurs premiers de $B(X)$ sont donc $(X - 1)$ et $(X^2 - X + 3)$.

$X(X^2 - X + 3) = X^3 - X^2 + 3X$.
$(X^3 + 4X^2 + 2X + 1) - X(X^2 - X + 3) = 5X^2 - X + 1$.
$5(X^2 - X + 3) = 5X^2 - 5X + 15$.
$(X^3 + 4X^2 + 2X + 1) - (X + 5)(X^2 - X + 3) = 6X - 14$
$(X^3 + 4X^2 + 2X + 1) = (X + 5)(X^2 - X + 3) + 6X - 14$
$A(X)$ n'est pas divisible par $(X^2 - X + 3)$.

Le seul facteur commun à $A(X)$ et $B(X)$ est $(X - 1)$.

Le PGCD de $A(X)$ et $B(X)$ est $(X - 1)$.

Le PPCM de A et B est donné par la formule $\boldsymbol{A(X) \times B(X) = PGCD(A, B) \times PPCM(A, B)}$
PPCM $(A, B) = (X - 1)(X^2 - X + 3)(X^3 + 4X^2 + 2X + 1)$.

Le PPCM de $A(X)$ et $B(X)$ est $(X - 1)(X^2 - X + 3)(X^3 + 4X^2 + 2X + 1)$.

2°/ Polynômes P, Q et S.

On remarque tout de suite que :
$P(X) = (X - 1)(X + 1)$
$Q(X) = (X - 1)(X - 2)$
$S(X) = (X + 1)(X - 2)$
Donc :

PGCD $(P, Q) = (X - 1)$; PGCD $(Q, S) = (X - 2)$; PGCD $(S, P) = (X + 1)$; PGCD $(P, Q, S) = 1$.
PPCM (P, Q) = PPCM (Q, S) = PPCM (S, P) = PPCM $(P, Q, S) = (X + 1)(X - 1)(X - 2)$.

Les polynômes $P(X)$, $Q(X)$, $S(X)$, sont étrangers dans leur ensemble, bien qu'ils ne soient pas étrangers deux à deux.

Chapitre 5. Anneaux de polynômes.

Enoncés.

Exercice 14. Calculs de PGCD à l'aide des racines.

Déterminer un PGCD des couples $(A(X), B(X))$ de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ suivants : 1°/ $A(X) = X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$ et $B(X) = X^4 - 1$. 2°/ $A(X) = 2X^4 - 11X^3 + 13X^2 + 24X - 14$ et $B(X) = X^2 - X - 1$. 3°/ $A(X) = X^4 + 2X^3 - 11X^2 - 12X + 36$ et $B(X) = X^3 + 3X^2 - X - 3$.	

Solution.

1°/ $B(X) = X^4 - 1$.

On remarque tout de suite que $B(X) = (X^2 + 1)(X + 1)(X - 1)$.
En groupant les termes de $A(X)$ deux à deux consécutivement, on obtient :
$A(X) = (X + 1)(X^4 + X^2 + 1)$
Le polynôme bicarré $(X^4 + X^2 + 1)$ n'a pas de racine réelle puisque le discriminant est négatif.
Ce polynôme n'est pas divisible par $(X^2 + 1)$ puisqu'il vaut $(X^4 + X^2 + 1) = X^2(X^2 + 1) + 1$.
Le PGCD de A et B est donc le seul facteur commun $(X + 1)$.

Le PGCD de $A(X) = X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$ et $B(X) = X^4 - 1$ est $(X + 1)$.

2°/ $B(X) = X^2 - X - 1$.

On remarque tout de suite que $B(X)$ possède deux racines réelles $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (nombre d'or) et $1 - \varphi = -\varphi^{-1}$ (puisque la somme des racines vaut 1 et leur produit –1). $B(X) = (X - \varphi)(X + \varphi^{-1})$
Les puissances de φ sont données par :
$\varphi^2 = 1 + \varphi$ (puisque $B(\varphi) = 0$) ; $\varphi^3 = \varphi + \varphi^2 = 2\varphi + 1$; $\varphi^4 = 2\varphi^2 + \varphi = 3\varphi + 2$.
$A(\varphi) = 2\varphi^4 - 11\varphi^3 + 13\varphi^2 + 24\varphi - 14$
$= 2(3\varphi + 2) - 11(2\varphi + 1) + 13(1 + \varphi) + 24\varphi - 14$
$= 21\varphi - 8 \neq 0$
Donc $A(X)$ n'est pas divisible par $(X - \varphi)$.
En changeant $+\sqrt{5}$ en $-\sqrt{5}$ dans le calcul et dans le résultat, on obtient :
$A(-\varphi^{-1}) = -21\varphi^{-1} - 8 \neq 0$
Donc $A(X)$ n'est pas divisible par $(X + \varphi^{-1})$.

Les polynômes $A(X)$ et $B(X)$ n'ont aucun facteur premier commun : ils sont étrangers et leur PGCD est 1.

Les polynômes $A(X) = 2X^4 - 11X^3 + 13X^2 + 24X - 14$ et $B(X) = X^2 - X - 1$ sont étrangers, leur PGCD est 1.

3°/ $B(X) = X^3 + 3X^2 - X - 3$.

On remarque tout de suite que $B(X) = (X^2 - 1)(X + 3) = (X + 3)(X + 1)(X - 1)$.

$A(-3) = (-3)^4 + 2(-3)^3 - 11(-3)^2 - 12(-3) + 36$
$= 81 - 54 - 99 + 36 + 36 = 153 - 153 = 0$
Donc $A(X)$ est divisible par $(X + 3)$.

$A(-1) = (-1)^4 + 2(-1)^3 - 11(-1)^2 - 12(-1) + 36$
$= 1 - 2 - 11 + 12 + 36 = 36 \neq 0$
Donc $A(X)$ n'est pas divisible par $(X + 1)$.

$A(1) = 1 + 2 - 11 - 12 + 36 = 16 \neq 0$
Donc $A(X)$ n'est pas divisible par $(X - 1)$.

Finalement, le seul facteur commun à $A(X)$ et $B(X)$ est $(X + 3)$.

Le PGCD de $A(X) = X^4 + 2X^3 - 11X^2 - 12X + 36$ et $B(X) = X^3 + 3X^2 - X - 3$ est $(X + 3)$.

Chapitre 5. Anneaux de polynômes.

Enoncés.

Exercice 15. Polynômes divisibles par leur dérivée.

Soit $P(X)$ un polynôme de $\mathbb{R}[X]$, de degré n, $n \geqslant 1$: 1°/ Montrer que si le polynôme dérivé $P'(X)$ divisise $P(X)$, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $n P(X) = (X - \alpha) P'(X)$. 2°/ Utiliser ce résultat pour déterminer tous les polynômes de $\mathbb{R}[X]$ qui sont divisibles par le polynôme dérivé.	

Solution.

1°/ Divisibilité par la dérivée.

$P'(X)$ est un polynôme de $\mathbb{R}[X]$, de degré $n - 1$.
Si $P'(X)$ divise $P(X)$, on peut écrire $P(X) = Q(X) P'(X)$, où $Q(X)$ est un polynôme de degré 1, de la forme $c(X - \alpha)$, $c \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.
L'identification des termes de degré n de $P(X)$ et de $Q(X) P'(X)$ conduit, en appelant a_n le coefficient directeur de $P(X)$ (coefficient de X^n), à :
$a_n = c\, n\, a_n$
Et comme, par hypothèse, a_n est différent de 0, on peut simplifier par a_n.
Il reste $c\, n = 1$, donc $n P(X) = n c (X - \alpha) P'(X) = (X - \alpha) P'(X)$.

> Si le polynôme dérivé $P'(X)$ divisise $P(X)$, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $n P(X) = (X - \alpha) P'(X)$.

2°/ Polynômes divisibles par leur dérivée.

D'après le résultat de la première question, les polynômes divisibles par leur dérivée vérifient l'équation fonctionnelle :

$$n P(X) = (X - \alpha) P'(X).$$

Réciproquement, si cette relation est vérifiée, $P'(X)$ divise le deuxième membre, donc divise le premier et $P'(X)$ divise $P(X)$.
Les solutions polynômiales de $\mathbb{R}[X]$ de l'équation différentielle $n P(X) = (X - \alpha) P'(X)$, sont donc les polynômes divisibles par leur dérivée.

Or cette équation différentielle peut s'écrire $\frac{n}{X - \alpha} = \frac{P'(X)}{P(X)}$.

Par intégration des deux membres séparément, on obtient $n \ln | X - \alpha | + \text{constante} = \ln | P(X) |$, soit $P(X) = c (X - \alpha)^n$.

Les polynômes de $\mathbb{R}[X]$ divisibles par leur dérivée sont les polynômes de la forme $P(X) = c (X - \alpha)^n$, $c \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

On remarquera que, plus généralement, toutes les fonctions vérifiant l'équation fonctionnelle $n P(X) = (X - \alpha) P'(X)$ sont de la forme $c (X - \alpha)^n$, mais les coefficients c et α peuvent être complexes, en général : on restreint ici les solutions aux polynômes à coefficients réels.

Chapitre 5. Anneaux de polynômes.

Enoncés.

Exercice 16. Zéros d'un polynôme de degré 4.

On considère le polynôme $P(X)$ de $\mathbb{R}[X]$, qui s'écrit $P(X) = X^4 - X^3 + a X^2 + b$.

1°/ Déterminer les valeurs de a et b pour que $P(X)$ admette $1 - i$ comme zéro dans $\mathbb{C}$.
2°/ Quels sont, dans ce cas, les autres zéros de $P(X)$ dans $\mathbb{C}$.

Solution.

1°/ Valeurs de *a* et *b*.

$1 - i = \sqrt{2}\, e^{-\frac{i\pi}{4}}$

$P(1-i) = 4\, e^{-i\pi} - 2\sqrt{2}\, e^{-\frac{3i\pi}{4}} + 2\, a\, e^{-\frac{i\pi}{2}} + b$
$= -4 - 2(-1-i) - 2\, i\, a + b$
$= (b-2) + 2\, i\, (1-a)$

Comme a et b sont réels par hypothèse, puisque $P(X)$ est un polynôme de R $[X]$, la partie réelle de $P(1-i)$ est $b-2$, et sa partie imaginaire est $2(1-a)$.
$P(1-i)$ est nul si sa partie imaginaire et sa partie réelle sont nulles : une seule solution, $a = 1$, $b = 2$.

$P(1-i)$ est nul si, et seulement si, $a = 1$ et $b = 2$: $P(X) = X^4 - X^3 + X^2 + 2$.

2°/ Zéros de *P* (*X*).

Si $P(1-i)$ est nul, comme P est un polynôme à coefficients réels, il admet aussi pour zéro, le nombre complexe conjugué $1 + i = \sqrt{2}\, e^{\frac{i\pi}{4}}$, de sorte que $P(X)$ est divisible par $(X-1+i)(X-1-i) = (X-1)^2 + 1 = X^2 - 2X + 2$.

$X^2(X^2 - 2X + 2) = X^4 - 2X^3 + 2X^2$
$P(X) - X^2(X^2 - 2X + 2) = X^3 - X^2 + 2$
$X(X^2 - 2X + 2) = X^3 - 2X^2 + 2X$
$P(X) - (X^2 + X)(X^2 - 2X + 2) = X^2 - 2X + 2$
$P(X) = (X^2 + X + 1)(X^2 - 2X + 2)$

Les zéros de $P(X)$ autres que $(1-i)$ et $(1+i)$ sont les zéros de $(X^2 + X + 1)$.
Multiplions $(X^2 + X + 1)$ par $(X-1)$: on ajoute au polynôme produit le zéro 1 (1 n'est pas un zéro de $(X^2 + X + 1)$).

$(X^2 + X + 1)(X-1) = X^3 - 1$. Les zéros de $X^3 - 1$ sont les racines cubiques de 1 dans $\mathbb{C}$: 1, $e^{\frac{2i\pi}{3}}$, $e^{-\frac{2i\pi}{3}}$.
Les deux zéros différents de 1, sont les zéros de $(X^2 + X + 1)$, donc des zéros de $P(X)$ dans $\mathbb{C}$.

$e^{\frac{2i\pi}{3}} = \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3})$; $e^{-\frac{2i\pi}{3}} = -\frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})$

Les zéros du polynôme $P(X) = X^4 - X^3 + X^2 + 2 = (X^2 + X + 1)(X^2 - 2X + 2)$ sont :
$(1 - i) = \sqrt{2}\ e^{-\frac{i\pi}{4}}$; $(1 + i) = \sqrt{2}\ e^{\frac{i\pi}{4}}$; $\frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3}) = e^{\frac{2i\pi}{3}}$; $-\frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3}) = e^{-\frac{2i\pi}{3}}$.

Chapitre 5. Anneaux de polynômes.

Enoncés.

Exercice 17. Décomposition d'un polynôme en produit de facteurs.

1°/ Le polynôme $X^4 + X^2 + 1$ peut-il se décomposer en un produit de deux polynômes, chacun à coefficients réels et de degré moindre que 4 ? 2°/ Décomposer en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$: a) $P(X) = X^5 + 32$. b) $P(X) = X^7 + 1$.	

Solution.

1°/ Factorisation de $X^4 + X^2 + 1$.

Le discriminant du polynôme $X^2 + X + 1$ est négatif, donc le polynôme $X^2 + X + 1$ n'a pas de racine réelle.

Il en va donc de même du polynôme $X^4 + X^2 + 1$: si c est une racine, c^2 est racine de $X^2 + X + 1$ et ne peut pas être réel, donc c non plus.

La réponse à la question posée est donc claire, sans calcul : si $a + i\,b$ est une racine de $X^4 + X^2 + 1$ dans $\mathbb{C}$, comme le polynôme est à coefficients réels, le nombre complexe conjugué $a - i\,b$ est aussi une racine du polynôme dans $\mathbb{C}$.

Et $X^4 + X^2 + 1$ est divisible par $(X - a - i\,b)(X - a + i\,b) = (X - a)^2 + b^2$, qui est un élément de $\mathbb{R}[X]$.

De sorte que **$X^4 + X^2 + 1$ se décompose en produit de deux facteurs du deuxième degré, irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.**

Cherchons quels sont ces facteurs, bien que cela ne fasse partie dela question posée.

Si l'on multiplie le polynôme $X^4 + X^2 + 1$ par $X^2 - 1$, on ajoute les racines 1 et – 1, qui ne sont pas racines de $X^4 + X^2 + 1$.

$(X^4 + X^2 + 1)(X^2 - 1) = X^6 - 1$.

Les racines du polynôme $X^6 - 1$ sont les racines sixièmes de l'unité.

Les quatres racines complexes (non réelles) sont les racines du polynôme $X^4 + X^2 + 1$. Ce sont :

$$\frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3}) = e^{\frac{i\pi}{3}};\ \frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3}) = e^{-\frac{i\pi}{3}};\ \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3}) = e^{\frac{2i\pi}{3}};\ -\frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3}) = e^{-\frac{2i\pi}{3}}.$$

Comme ces racines sont des nombres complexes conjugués par groupes de deux, le polynôme $X^4 + X^2 + 1$ peut s'crire :

$(X - e^{\frac{i\pi}{3}})(X - e^{-\frac{i\pi}{3}})(X - e^{\frac{2i\pi}{3}})(X - e^{-\frac{2i\pi}{3}}) = (X^2 - 2X\cos\frac{\pi}{3} + 1)(X^2 - 2X\cos\frac{2\pi}{3} + 1)$

$= (X^2 - X + 1)(X^2 + X + 1)$

$$\boxed{X^4 + X^2 + 1 = (X^2 - X + 1)(X^2 + X + 1)}$$

2°/ Décomposition de deux polynômes de la forme $X^{2n+1} + 1$.

Les racines du polynôme $X^{2n+1} + 1$ sont les $(2n + 1)$ racines $(2n + 1)$-ième de -1 : $c_k = e^{\frac{i(2k+1)\pi}{2n+1}}$, $k = 0, \dots, 2n$.
La seule racine réelle est celle qui correspond à $k = n$, c'est -1.
Les $2n$ autres racines peuvent se grouper par couples de nombres complexes conjugués.
Le nombre complexe conjugué de $e^{\frac{i(2k+1)\pi}{2n+1}}$, $k = 0, \dots, n-1$, est $e^{-\frac{i(2k+1)\pi}{2n+1}} = e^{2i\pi - \frac{i(2k+1)\pi}{2n+1}} = e^{\frac{i(2(2n-k)+1)\pi}{2n+1}}$, $2n - k = 2n, \dots, n + 1$.
Le polynôme $X^{2n+1} + 1$ est donc divisible par $(X - e^{\frac{i(2k+1)\pi}{2n+1}})(X - e^{\frac{i(2(2n-k)+1)\pi}{2n+1}}) = X^2 - 2X\cos\frac{(2k+1)\pi}{2n+1} + 1$, et $X^{2n+1} + 1$ s'écrit :

$$\boxed{X^{2n+1} + 1 = (X + 1)\prod_{k=0}^{k=n-1}(X^2 - 2X\cos\frac{(2k+1)\pi}{2n+1} + 1)}$$

a) $P(X) = X^5 + 32$.

On pose $Y = \frac{X}{2}$, $P(2Y) = 32(Y^5 + 1)$.
La formule précédente, pour $n = 2$, donne :

$$Y^5 + 1 = (Y + 1)(Y^2 - 2Y\cos\frac{\pi}{5} + 1)(Y^2 - 2Y\cos\frac{3\pi}{5} + 1)$$

Or on a : $\cos\frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$ $(= \frac{1}{2}\varphi$, nombre d'or) et :
$\cos\frac{3\pi}{5} = -\cos\frac{2\pi}{5} = 1 - 2\cos^2\frac{\pi}{5} = 1 - \frac{1}{2}(1 + \varphi) = -\frac{1}{2}(\varphi - 1) = -\frac{\sqrt{5}-1}{4}$

$Y^5 + 1 = (Y + 1)(Y^2 - \frac{1+\sqrt{5}}{2}Y + 1)(Y^2 + \frac{\sqrt{5}-1}{2}Y + 1)$
$32(Y^5 + 1) = 32(\frac{X}{2} + 1)(\frac{X^2}{4} - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\frac{X}{2} + 1)(\frac{X^2}{4} + \frac{\sqrt{5}-1}{2}\frac{X}{2} + 1)$
$P(X) = X^5 + 32 = (X + 2)(X^2 - (1 + \sqrt{5})X + 4)(X^2 + (\sqrt{5} - 1)X + 4)$

$$\boxed{X^5 + 32 = (X + 2)(X^2 - (1 + \sqrt{5})X + 4)(X^2 + (\sqrt{5} - 1)X + 4).}$$

b) $P(X) = X^7 + 1$.

La formule générale établie en tête de question, donne, pour $n = 3$:

$$X^7 + 1 = (X + 1)\left(X^2 - 2X\cos\frac{\pi}{7} + 1\right)\left(X^2 - 2X\cos\frac{3\pi}{7} + 1\right)\left(X^2 - 2X\cos\frac{5\pi}{7} + 1\right)$$

$$X^7 + 1 = (X + 1)\left(X^2 - 2X\cos\frac{\pi}{7} + 1\right)\left(X^2 - 2X\cos\frac{3\pi}{7} + 1\right)\left(X^2 - 2X\cos\frac{5\pi}{7} + 1\right)$$

Chapitre 5. Anneaux de polynômes.

Enoncés.

Exercice 18. Polynôme ayant deux zéros doubles réels.

Montrer que le polynôme $P(X) = 36X^4 + 12X^3 - 11X^2 - 2X + 1$ possède deux zéros doubles réels et les déterminer.	

Solution.

Les zéros doubles d'un polynôme annulent le polynôme et sa dérivée, donc aussi le PGCD de $P(X)$ et de $P'(X)$.

$P(X) = 36X^4 + 12X^3 - 11X^2 - 2X + 1$
$P'(X) = 144X^3 + 36X^2 - 22X - 2$

Effectuons la division euclidienne de $P(X)$ par $P'(X)$.

$2P(X) = 72X^4 + 24X^3 - 22X^2 - 4X + 2$
$\frac{1}{2}P'(X) = 72X^3 + 18X^2 - 11X - 1$
$X(72X^3 + 18X^2 - 11X - 1) = 72X^4 + 18X^3 - 11X^2 - X$
$2P(X) - \frac{1}{2}XP'(X) = 6X^3 - 11X^2 - 3X + 2$
$24P(X) - 6XP'(X) = 72X^3 - 132X^2 - 36X + 24$
$24P(X) - (6X + \frac{1}{2})P'(X) = -150X^2 - 25X + 25$
$48P(X) - (12X + 1)P'(X) = -50(6X^2 + X - 1) = -50(3X - 1)(2X + 1)$.
Les facteurs irréductibles du premier degré qui divisent $P(X)$ et $P'(X)$ doivent diviser aussi le produit $(3X - 1)(2X + 1)$:
ce ne peut être que $(3X - 1)$ ou $(2X + 1)$.

$12X(6X^2 + X - 1) = 72X^3 + 12X^2 - 12X$
$\frac{1}{2}P'(X) - 12X(6X^2 + X - 1) = 6X^2 + X - 1$
$\frac{1}{2}P'(X) = (12X + 1)(6X^2 + X - 1)$
$48P(X) = 2(12X + 1)^2(6X^2 + X - 1) - 50(6X^2 + X - 1)$
$48P(X) = 2((12X + 1)^2 - 25)(6X^2 + X - 1)$
$24P(X) = (12X + 6)(12X - 4)(3X - 1)(2X + 1)$
$P(X) = (2X + 1)(3X - 1)(3X - 1)(2X + 1)$
$P(X) = (2X + 1)^2(3X - 1)^2$

$$\boxed{P(X) = (2X + 1)^2(3X - 1)^2}$$

$P(X)$ possède deux zéros doubles qui sont $X = \frac{1}{3}$, $X = -\frac{1}{2}$.

Chapitre 5. Anneaux de polynômes.

Enoncés.

Exercice 19. Division euclidienne par $(X-1)^2$.

1°/ Soit n un entier supérieur à 1. Déterminer dans $\mathbb{R}[X]$ le reste de la division euclidienne de $X^n + 3X + 1$ par $(X-1)^2$. 2°/ Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$. a) Montrer que 1 est zéro double du polynôme $P(X) = nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1$. b) Déterminer le quotient $Q(X)$ de la division euclidienne de $P(X)$ par $(X-1)^2$.	

Solution.

1°/ Reste de la division euclidienne par $(X-1)^2$.

Pour tout entier n, $X^n - 1$ est nul pour $X = 1$, donc $X^n - 1$ est un multiple de $X - 1$.

$$X^n \equiv 1 \pmod{X-1}$$

Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on a :
$X^n - 1 = (X-1)(X^{n-1} + X^{n-2} + \ldots + 1)$
$X^n = (X-1)(X^{n-1} + X^{n-2} + \ldots + 1) + 1$

Le reste de la division euclidienne de X^n par $(X-1)^2$ est donc le même que le reste de la division euclidienne du produit par $(X-1)$ du reste de la division euclidienne de $(X^{n-1} + X^{n-2} + \ldots + 1)$ par $(X-1)$.
D'après la première question, chaque puissance a pour reste 1, donc le reste de X^n est $n(X-1) + 1$

Il en résulte que le reste de la division euclidienne de $X^n + 3X + 1$ par $(X-1)^2$ est $n(X-1) + 1 + 3X + 1 = (n+3)X - (n-2)$.

$$\boxed{X^n + 3X + 1 \equiv (n+3)X - (n-2) \pmod{(X-1)^2}.}$$

Application numérique.

Pour $n = 0$, la formule s'écrit : $3X + 2 \equiv 3X + 2 \pmod{(X-1)^2}$. Elle est vraie, bien qu'elle ait été établie pour $n > 0$.
Pour $n = 1$, la formule s'écrit : $4X + 1 \equiv 4X + 1 \pmod{(X-1)^2}$. Elle est vraie.
Pour $n = 2$, la formule s'écrit : $X^2 + 3X + 1 \equiv 5X \pmod{(X-1)^2}$. Elle est vraie, puisque $X^2 + 3X + 1 = (X-1)^2 + 5X$.

2°/ Quotient de la division euclidienne par $(X-1)^2$.

1. Zéro double.

Pour que 1 soit zéro double de $P(X) = n X^{n+1} - (n+1) X^n + 1$, il faut, et il suffit que $P(1) = 0$ et $P'(1) = 0$.
Or $P(1) = n - (n+1) + 1 = 0$ et $P'(X) = n(n+1) X^{n-1} (X-1) \Rightarrow P'(1) = 0$.
Donc **1 est zéro double de $P(X)$.**

2. Quotient.

$$P(X) = n X^n (X-1) - (X^n - 1)$$
$$= (X-1)(n X^n - (X^{n-1} + X^{n-2} + ... + 1))$$
$$= (X-1) \sum_{k=0}^{k=n-1} (X^n - X^k)$$
$$= (X-1) \sum_{k=0}^{k=n-1} (X^{n-k} - 1) X^k$$

En changeant l'ordre des termes, on peut écrire :

$$= (X-1) \sum_{k=1}^{k=n} (X^k - 1) X^{n-k}$$

$$X^k - 1 = (X-1) \sum_{j=0}^{j=k-1} X^j$$

$$P(X) = (X-1)^2 \sum_{k=1}^{k=n} \sum_{j=0}^{j=k-1} X^j X^{n-k}$$

$$P(X) = (X-1)^2 \sum_{k=1}^{k=n} \sum_{j=0}^{j=k-1} X^{n-k+j}$$

$$P(X) = (X-1)^2 \sum_{k=1}^{k=n} \sum_{k-j=1}^{k-j=k} X^{n-(k-j)}$$

$$P(X) = (X-1)^2 \sum_{k=1}^{k=n} \sum_{h=1}^{h=k} X^{n-h}$$

Pour h fixé entre 1 et n, k peut varier de h à n, prenant ainsi $n - (h-1)$ valeurs. On a donc :

$$P(X) = (X-1)^2 \sum_{h=1}^{h=n} \sum_{k=h}^{k=n} X^{n-h}$$

$$P(X) = (X-1)^2 \sum_{h=1}^{h=n} (n+1-h) X^{n-h}$$

$$P(X) = (X-1)^2 (n X^{n-1} + (n-1) X^{n-2} + ... + 2X + 1)$$

$$\boxed{P(X) = (X-1)^2 (n X^{n-1} + (n-1) X^{n-2} + ... + 2X + 1)}$$

La formule du développement limité de $P(X)$ à l'ordre $n+1$ au voisinage de 1 donne :

$P(X) = P(1) + P'(1)(X-1) + \frac{1}{2}P''(1)(X-1)^2 + \ldots + \frac{1}{(n+1)!}P^{(n+1)}(1)(X-1)^{n+1}$

$P(1) = P'(1) = 0$

$P(X) = (X-1)^2 \sum_{k=2}^{k=n+1} \frac{1}{k!}P^{(k)}(1)(X-1)^{k-2}$

On en déduit le quotient $Q(X)$ sous la forme $Q(X) = \sum_{k=2}^{k=n+1} \frac{1}{k!}P^{(k)}(1)(X-1)^{k-2}$.

En calculant les dérivées de P pour $X = 1$ à partir de la formule de Leibniz, et en développant les $(X-1)^{k-2}$ par la formule du binôme, on peut sans doute arriver au résultat, mais les calculs semblent plus laborieux que dans la méthode utilisée plus haut.

$P(X) = nX^n(X-1) - (X^n - 1)$

$P'(X) = n^2X^{n-1}(X-1) + nX^n - nX^{n-1}$

$P''(X) = n^2(n-1)X^{n-2}(X-1) + 2n^2X^{n-1} - n(n-1)X^{n-2}$

$P^{(k)}(X) = n\frac{n!}{(n-k)!}X^{n-k}(X-1) + kn\frac{n!}{(n+1-k)!}X^{n+1-k} - \frac{n!}{(n-k)!}X^{n-k}$

$P^{(k)}(1) = kn\frac{n!}{(n+1-k)!} - \frac{n!}{(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!}(kn(n-k)-1)$

$Q(X) = \sum_{k=2}^{k=n+1}\binom{n}{k}(kn(n-k)-1)(X-1)^{k-2}$.

Chapitre 5. Anneaux de polynômes.

Enoncés.

Exercice 20. Zéros d'ordre 4.

Déterminer les nombres réels a, b, c, de telle sorte que le polynôme $P(X)$ de $\mathbb{R}[X]$, défini par $P(X) = X^6 + a X^4 + 10 X^3 + b X + c$ admette un zéro d'ordre 4.	

Solution.

Dire que $P(X)$ admet un zéro d'ordre 4, c'est dire que $P(X)$ et ses dérivées jusqu'à l'ordre 3, sont nulles pour un $x \in \mathbb{R}$.

$P(X) = X^6 + a X^4 + 10 X^3 + b X + c$
$P'(X) = 6 X^5 + 4 a X^3 + 10 X^2 + b$
$P''(X) = 30 X^4 + 12 a X^2 + 20 X$
$P^{(3)}(X) = 120 X^3 + 24 a X + 20$

$P^{(3)}(x) = 0$ donne $120 x^3 + 24 a x + 20 = 0$, $30 x^3 + 6 a x + 5 = 0$, $6 a x = -5 (1 + 6 x^3)$
$P''(x) = 0$ donne $30 x^4 + 12 a x^2 + 20 x = 0$, donc $x = 0$ ou $15 x^3 + 6 a x + 10 = 0$, $15 x^3 - 5 (1 + 6 x^3) + 10 = 0$, $15 x^3 = 5$, $x = 3^{-\frac{1}{3}}$.
On ne peut pas avoir $x = 0$, sinon $P^{(3)}(x) = 0$ donne $20 = 0$, ce qui est absurde.
Donc, s'il y a une racine d'ordre 4, ce ne peut être que $x = 3^{-\frac{1}{3}}$.
$P^{(3)}(x) = 0$ donne alors $6 a x = -5 (1 + 6 x^3) = -15$, $2 a x = -5$, $a = -\frac{5}{2\sqrt[3]{3}}$.

$P'(x) = 0$ donne $6 x^5 + 4 a x^3 + 10 x^2 + b = 0$, $2 x^2 (4 x^3 + 5) + 4 a x^3 + b = 0$, $b = -4 a x^3 - 2 x^2 (4 x^3 + 5)$,
$b = \frac{10}{3} 3^{-\frac{1}{3}} - \frac{38}{3} 3^{-\frac{2}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{3}}(5 - 19 \times 3^{-\frac{1}{3}})$

$P(x) = 0$ donne $x^6 + a x^4 + 10 x^3 + b x + c = 0$, $c = -b x - 10 x^3 - a x^4 - x^6$,
$c = -\frac{10}{3} 3^{-\frac{2}{3}} + \frac{38}{9} - \frac{10}{3} + \frac{5}{6} - \frac{1}{9} = -\frac{10}{3} 3^{-\frac{2}{3}} + \frac{76 - 60 + 15 - 2}{18} = -\frac{10}{3} 3^{-\frac{2}{3}} + \frac{29}{18} = \frac{1}{18}(29 - 20\sqrt[3]{3})$

$P(X) = X^6 + a X^4 + 10 X^3 + b X + c$ admet un zéro d'ordre 4 si, et seulement si,
$a = -\frac{5}{2\sqrt[3]{3}}$; $b = \frac{2}{3\sqrt[3]{3}}(5 - 19 \times 3^{-\frac{1}{3}})$; $c = \frac{1}{18}(29 - 20\sqrt[3]{3})$.
Dans ce cas, $3^{-\frac{1}{3}}$ est le zéro d'ordre 4 de $P(X)$.

Chapitre 5. Anneaux de polynômes.

Enoncés.

Exercice 21. Polynôme à zéros simples dans $\mathbb{C}$.

Montrer que le polynôme $P(X) = 1 + \frac{X}{1!} + \frac{X^2}{2!} + \cdots + \frac{X^n}{n!}$ possède, dans $\mathbb{C}$, n zéros deux à deux distincts.	

Solution.

1°/ Simplicité des zéros.

$P(X) = 1 + \frac{X}{1!} + \frac{X^2}{2!} + \cdots + \frac{X^n}{n!}$

$P'(X) = 1 + \frac{X}{1!} + \frac{X^2}{2!} + \cdots + \frac{X^{n-1}}{(n-1)!}$

$P(X) - P'(X) = \frac{X^n}{n!}$

Si x est un **zéro d'ordre > 1** de $P(X)$, on a $P(x) = 0$ et $P'(x) = 0$, donc $P(x) - P'(x) = \frac{x^n}{n!} = 0$, et $x = 0$, ce qui est **impossible** puisque $P(0) = 1$.
Donc le polynôme $P(X)$ n'a pas de zéros d'ordre > 1 : tous **ses zéros sont simples**.

2°/ Existence de *n* zéros.

On pourrait se contenter de dire que, sur un corps algébriquement clos, un polynôme de degré n se décompose en produit de n polynômes de degré 1, de sorte que $P(X)$, qui n'a que des zéros simples d'après 1°, se décompose en produit de n polynômes du premier degré distincts et possède ainsi n zéros deux à deux distincts.

Mais l'énoncé demande de montrer que le polynôme $P(X)$ possède n zéros, et que ces zéros sont deux à deux distincts.
De 1°, il résulte déjà que, si $P(X)$ possède n zéros, ceux-ci sont deux à deux distincts.
Reste à démontrer l'existence de n zéros. C'est du cours !

Le principe de la démonstration est le suivant :
On appelle **extension** du corps k, tout corps K contenant k, considéré comme espace vectoriel sur k.
On dit qu'un élément x de K est **algébrique** sur k s'il existe un polynôme f de $k[X]$ tel que $f(x) = 0$.
On dit que k est **algébriquement clos** dans K si tout élément de K algébrique sur k appartient à k.
— On démontre qu'il y a équivalence, pour un corps k, entre les propriétés :
- k est algébriquement clos dans toute extension
- Tout polynôme de degré $n \geqslant 1$ de $k[X]$ possède au moins une racine dans k.
- Tout polynôme de degré $n \geqslant 1$ de $k[X]$ possède exactement n racines dans k.
- Tout polynôme de degré $n \geqslant 1$ de $k[X]$ se décompose dans $k[X]$ en facteurs du premier degré.
- Tout polynôme irréductible dans $k[X]$ est du premier degré.

Le seul point délicat de la démonstration est de démontrer que la première propriété entraîne la cinquième.
— On démontre que $\mathbb{C}$ est algébriquement clos dans toute extension (**théorème de D'Alembert**).
On appelle **corps algébriquement clos**, tout corps algébriquement clos dans toute extension.

Chapitre 5. Anneaux de polynômes.

Enoncés.

Exercice 22. Polynômes à coefficients entiers.

1°/ Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $P(X) = \sum_{k=0}^{k=n} a_k X^k$ un polynôme de degré n dont les coefficients sont dans $\mathbb{Z}$. Soit $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, tel que p et q soient étrangers.

Montrer que si $\frac{p}{q}$ est un zéro de $P(X)$, alors p divise a_0 et q divise a_n.

2°/ **Applications**.
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes où x est l'inconnue.

a) $2x^3 + 7x^2 + 2x - 3 = 0$
b) $8x^3 + 10x^2 + 15x + 9 = 0$
c) $x^5 - 34x^3 + 29x^2 + 212x - 300 = 0$

Solution.

1°/ Relation entre coefficients et zéros.

Dire que $\frac{p}{q}$ est un zéro de $P(X)$, c'est dire que $P\left(\frac{p}{q}\right) = 0$, soit $\sum_{k=0}^{k=n} a_k \left(\frac{p}{q}\right)^k = 0$.

Multiplions par q^n : $\sum_{k=0}^{k=n} a_k p^k q^{n-k} = 0$.

$a_0 q^n + a_1 p q^{n-1} + \ldots + a_{n-1} p^{n-1} q + a_n p^n = 0$
$a_0 q^n = -p(a_1 q^{n-1} + \ldots + a_{n-1} p^{n-2} q + a_n p^{n-1})$

p divise le deuxième membre, donc divise le premier.
Comme p et q sont étrangers, p et q^n sont étrangers, donc si p divise $a_0 q^n$, c'est qu'il divise a_0.

De même :
$a_n p^n = -q(a_0 q^{n-1} + a_1 p q^{n-2} + \ldots + a_{n-1} p^{n-1})$

q divise le deuxième membre, donc divise le premier.
Comme p et q sont étrangers, q et p^n sont étrangers, donc si q divise $a_n p^n$, c'est qu'il divise a_n.

Si $\frac{p}{q}$ est un zéro de $P(X)$, alors p divise a_0 et q divise a_n.

2°/ Applications.

Pour chercher un zéro d'un polynôme à coefficients entiers, on peut chercher les diviseurs de a_0 et de a_n et faire leur rapport.

1. Equation $2x^3 + 7x^2 + 2x - 3 = 0$.

Les diviseurs p de $a_0 = -3$ sont 1 et 3, au signe près.
Les diviseurs q de $a_3 = 2$ sont 1 et 2, au signe près.
S'il y a des solutions $\frac{p}{q}$ dans $\mathbb{Q}$, elles sont à chercher dans l'ensemble $\left\{1 ; 3 ; \frac{1}{2} ; \frac{3}{2}\right\}$, au signe près.

Il est clair que $x = -1$ est solution.
$2X^3 + 7X^2 + 2X - 3 = (X + 1)(2X^2 + 5X - 3)$
$2(-3)^2 + 5(-3) - 3 = 0$, $x = -3$ est solution.
$2X^3 + 7X^2 + 2X - 3 = (X + 1)(X + 3)(2X - 1)$
La troisième solution est $x = \frac{1}{2}$.

L'équation $2x^3 + 7x^2 + 2x - 3 = 0$ possède trois solutions rationnelles : -3, -1, $\frac{1}{2}$.

2. Equation $8x^3 + 10x^2 + 15x + 9 = 0$.

Les diviseurs p de $a_0 = 9$ sont 1, 3, 9 au signe près.
Les diviseurs q de $a_3 = 8$ sont 1, 2, 4, 8, au signe près.
S'il y a des solutions $\frac{p}{q}$ dans $\mathbb{Q}$, elles sont à chercher dans l'ensemble $\left\{1 ; 3 ; 9 ; \frac{1}{2} ; \frac{3}{2} ; \frac{9}{2} ; \frac{1}{4} ; \frac{3}{4} ; \frac{9}{4} ; \frac{1}{8} ; \frac{3}{8} ; \frac{9}{8}\right\}$, au signe près.

Posons $P(X) = 8X^3 + 10X^2 + 15X + 9$.
$P(-1) = -4 < 0$
$P\left(-\frac{1}{2}\right) = -1 + \frac{5}{2} - \frac{15}{2} + 9 = 3 > 0$.
Il existe un zéro entre -1 et $-\frac{1}{2}$: s'il est rationnel, ce ne peut être que $-\frac{3}{4}$.
$P\left(-\frac{3}{4}\right) = 8\left(-\frac{3}{4}\right)^3 + 10\left(-\frac{3}{4}\right)^2 + 15\left(-\frac{3}{4}\right) + 9 = -\frac{27}{8} + \frac{45}{8} - \frac{45}{4} + 9 = 0$, $-\frac{3}{4}$ est un zéro de $P(X)$.
$P(X) = (4X + 3)(2X^2 + aX + 3)$, $4a + 6 = 10$, $a = 1$, $P(X) = (4X + 3)(2X^2 + X + 3)$
Le polynôme $2X^2 + X + 3$ a un discriminant négatif : ses zéros ne sont pas réels.

L'équation $8x^3 + 10x^2 + 15x + 9 = 0$ possède une solution rationnelle : $-\frac{3}{4}$. C'est la seule solution réelle.

3. Equation $x^5 - 34x^3 + 29x^2 + 212x - 300 = 0$.

Les diviseurs p de $a_0 = 300 = 2^2 \times 3 \times 5^2$ sont 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 25, 30, 50, 75, 100, 300, au signe près.

Les diviseurs p de $a_5 = 1$, se réduisent à 1, au signe près.

Si l'équation $x^5 - 34\,x^3 + 29\,x^2 + 212\,x - 300 = 0$ a des solutions rationnelles, celles-ci sont entières et à rechercher parmi les entiers :

$$\{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 25, 30, 50, 75, 100, 300 \}, \text{ au signe près.}$$

Posons $P(X) = X^5 - 34\,X^3 + 29\,X^2 + 212\,X - 300$.
A cause du terme X^5, il est inutile de rechercher des solutions supérieures à 10 en valeur absolue.
$P(1) = -68 < 0$, $P(2) = 32 - 272 + 116 + 424 - 300 = 572 - 572 = 0$. 2 est un zéro de $P(X)$.
$P(X) = (X - 2)(X^4 + 2\,X^3 - 30\,X^2 - 31\,X + 150)$
Posons $Q(X) = X^4 + 2\,X^3 - 30\,X^2 - 31\,X + 150$.
$Q(2) = 16 + 16 - 120 - 62 + 150 = 0$. 2 est un zéro de $Q(X)$.
$Q(X) = (X - 2)(X^3 + 4\,X^2 - 22\,X - 75)$
Posons $R(X) = X^3 + 4\,X^2 - 22\,X - 75$.
$R(2)$ est impair et < 0, $R(3) = 27 + 36 - 66 - 75 < 0$, $R(4)$ est impair < 0, $R(5) = 125 + 100 - 110 - 75 > 0$, $R(6)$ est impair, $R(10) > 0$.
Il existe donc un zéro entre 4 et 5 mais il n'est certainement pas rationnel.
$R(-1) = -50 < 0$, $R(-3) = -27 + 36 + 66 - 75 = 0$, -3 est un zéro de $R(X)$.
$R(X) = (X + 3)(X^2 + X - 25)$

$$P(X) = X^5 - 34\,X^3 + 29\,X^2 + 212\,X - 300 = (X + 3)\,(X - 2)^2\,(X^2 + X - 25)$$

Les zéros de $X^2 + X - 25$ sont réels puisque le discriminant vaut $101 > 0$, mais ils ne sont pas rationnels : $\frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{101})$.

L'équation $x^5 - 34\,x^3 + 29\,x^2 + 212\,x - 300 = 0$ possède :
- Une solution rationnelle entière simple : -3,
- Une solution rationnelle entière double : 2,
- Deux solutions irrationnelles simples : $\frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{101})$

Chapitre 5. Anneaux de polynômes.

Enoncés.

Exercice 23. Polynôme irréductible sur $\mathbb{Q}$.

Montrer que le polynôme $2X^3 + X + 1$ est irréductible sur $\mathbb{Q}$.	

Solution.

Il résulte de l'exercice 22 que si le polynôme $P(X) = 2X^3 + X + 1$ possédait un zéro rationnel $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, tel que p et q soient étrangers, alors :

p est un diviseur de $a_0 = 1$: c'est 1.
q est un diviseur de $a_3 = 2$: c'est 1, ou 2, au signe près.

Or $P(1) = 4$, $P(-1) = -2$, $P\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{9}{4}$, $P\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$.
Donc $P(X)$ n'a pas de zéro rationnel : il est donc irréductible sur $\mathbb{Q}$.

Chapitre 5. Anneaux de polynômes.

Enoncés.

Exercice 24. Relations entre les zéros d'un polynôme de degré 4.

On considère le polynôme $P(X)$ de $\mathbb{C}[X]$ défini par :

$$P(X) = X^4 + pX^2 + qX + r, \text{ où } (p, q, r) \in \mathbb{C}^3 \text{ et } r \neq 0.$$

Soient a, b, c, d, les quatre zéros complexes de $P(X)$. Calculer :

$$A = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} \text{ et } B = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{1}{d^2}.$$

Solution.

Le polynôme $P(X)$, de degré 4, possède quatre zéros complexes, a, b, c, d.
Il peut donc s'écrire sous la forme:

$$P(X) = (X-a)(X-b)(X-c)(X-d)$$
$$= X^4 - (a+b+c+d)X^3 + (ab+ac+ad+bc+bd+cd)X^2 - (abc+bcd+cda+dab)X + abcd.$$

En comparant cette expression, avec l'expression $P(X) = P(X) = X^4 + pX^2 + qX + r$, nous obtenons les relations :

$$a + b + c + d = 0$$
$$ab + ac + ad + bc + bd + cd = p$$
$$abc + bcd + cda + dab = -q$$
$$abcd = r \neq 0.$$

1°/ Calcul de *A*.

Réduisons au même dénominateur :

$$A = \frac{1}{abcd}(bcd + acd + abd + abc) = -\frac{q}{r}$$

2°/ Calcul de *B*.

Elevons A au carré :

$$A^2 = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{1}{d^2} + 2\left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{ad} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{bd} + \frac{1}{cd}\right)$$
$$= B + \frac{2}{abcd}(cd + bd + bc + ad + ac + ab) = B + 2\frac{p}{r}$$

$$B = A^2 - 2\frac{p}{r} = \frac{q^2}{r^2} - 2\frac{p}{r}$$

$$\boxed{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} = -\frac{q}{r} \; ; \; \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{1}{d^2} = \frac{q^2}{r^2} - 2\frac{p}{r}}$$

POLYNÔMES

EXERCICE 1.

1° Effectuer les divisions euclidiennes de
$3x^5 + 2x^4 - x^2 + 1$ par $x^3 + x + 2$
$x^4 - x^3 + x - 2$ par $x^2 - 2x + 4$
2° Dans $\mathbb{C}[x]$, effectuer les divisions euclidiennes de
$x^2 - 3ix - 5(1 + i)$ par $x - 1 + i$
$4x^3 + x^2$ par $x + 1 + i$.

EXERCICE 2.

Décomposer la fraction rationnelle en éléments simples :

2.1. $\dfrac{x+3}{x(x-1)^3}$

2.2. $\dfrac{1}{(x-1)^2(x^2+4)}$

2.3. $\dfrac{x^4+1}{(x-1)^2(x+2)}$

2.4. $\dfrac{2x^3+x^2-5x+1}{x^2+x+1}$

2.5. $\dfrac{4}{1-x^2}$

EXERCICE 3.

1° Effectuer la division euclidienne de $a = x^n - 1$ par $b = x^p - 1$.
2° Relation entre n et p pour que b divise a ($b|a$).
3° Prouver que le P.G.C.D. de a et b est $(x^d - 1)$, d étant le P.G.C.D. de n et p.

EXERCICE 4.

Trouver un polynôme de degré aussi petit que possible dont le reste de la division euclidienne par

$$x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 10x - 7 \text{ soit égal à } x^3 + x + 1,$$

et dont le reste de la division euclidienne par

$$x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 13x - 10 \text{ soit égal à } 2x^2 - 3.$$

EXERCICE 5.

Déterminer le P.G.C.D. des polynômes suivants:

1. $x^5+3x^4+x^3+x^2+3x+1$ et x^4+2x^3+x+2
2. $3x^5+5x^4-16x^3-6x^2-5x-6$ et $3x^4-4x^3-x^2-x-6$
3. $x^5+5x^4+9x^3+7x^2+5x+3$ et $x^4+2x^3+2x^2+x+1$.

EXERCICE 6.

Effectuer les divisions selon les puissances croissantes de

$2-3x^2+x^4$ par $1+x+x^5$ (ordre $h=6$)

$x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}$ par $1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}$ (ordre h=5)

$1-abx^2$ par $1-(a+b)x+abx^2$ (ordre h)

EXERCICE 7.

1° Trouver un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant :

$$P(1)=3,\ P'(1)=4,\ P''(1)=5$$

et la dérivée P''' de P d'ordre 3 est nulle.

2° P est-il unique dans $\mathbb{R}[X]$ à vérifier les conditions précédentes ?

EXERCICE 8.

Dans $\mathbb{R}[X]$, donner un P.G.C.D. des deux polynômes :

$$P(X)=X^{10}+X^9+X^8+X^7+X^6-X^4+2X^2+2X+1$$

et

$$Q(X)=X^{10}+X^8+X^7+X^2+X+1$$

EXERCICE 9.

Soit P le polynôme de $\mathbb{R}[X]$:

$$P(X)=X^{12}+\gamma X^8+\beta X^4+X+\alpha$$

où α, β, γ sont des réels vérifiant :

$$1 \le \alpha \le \beta \text{ et } 0 \le \gamma \le \beta$$

1° Si x est une racine réelle de P, montrer que nécessairement

$$|x| > \alpha+\beta\alpha^4$$

et

$$|x| \le 1+\beta.$$

2° Montrer que P n'a pas de racine réelle.

EXERCICE 10.

Soit la fonction : $y = \frac{1}{1+x^2}$. (1)

1. Construire la courbe *(C)* représentant les variations de cette fonction.
2. Calculer les dérivées seconde et troisième y'' et y'''. Préciser la concavité de y. Calculer les tangentes aux points d'inflexion.
3. On considère le point A de la courbe, d'abscisse 2. Ecrire le développement de Taylor

$$y(2) + y'(2)\,(x-2) + y''(2)\,\frac{(x-2)^2}{2!} + y'''(2)\,\frac{(x-2)^3}{3!}$$

de la fonction (1) au voisinage de $x = 2$. On se limitera à quatre termes.
On désigne par $F(x)$ la fonction représentée par les trois premiers termes. Construire la courbe (Γ) représentative de $F(x)$. Préciser la position relative des deux courbes (Γ) et *(C)* au voisinage de A.

4. Montrer que la dérivée n-ième de y est de la forme : $y^{(n)} = \frac{P_n(x)}{(1+x^2)^{n+1}}$, $P_n\,(x)$ étant un polynôme de degré n en x. Trouver l'expression *(E)* de P_n en fonction de P_{n-1} et de P'_{n-1}. En déduire l'expression *(E_1)* de P_{n+1} en fonction de P_n et de P'_n. Montrer que P_n est une fonction paire ou impaire suivant la parité de l'entier n.
5. En raisonnant par récurrence, montrer que l'équation $P_n\,(x) = 0$ admet n racines réelles x_1 , … , x_n . Pour cela, on constatera que les racines de $P_n\,(x)$ sont les racines de l'équation $y^{(n)} = 0$, et on utilisera le théorème de Rolle (*entre deux points où la fonction est nulle, il y a un point où sa dérivée est nulle*).
6. La relation (1) s'écrit :

$$y\,(1 + x^2) = 1 \qquad (2)$$

En appliquant la formule de Leibnitz (*dérivation d'un produit de fonctions par la formule du binôme*) à la relation (2), déterminer une relation *(R)* entre $P_n\,(x)$, $P_{n-1}\,(x)$ et $P_{n-2}\,(x)$. A l'aide de la relation *(R)* et de *(E_1)*, montrer que l'on a :

$$(1 + x^2)\,P''_n\,(x) - 2\,n\,x\,P'_n\,(x) + n\,(n+1)\,P_n\,(x) = 0 \qquad (3)$$

7. A l'aide de la relation (3) et en calculant les coefficients à partir du coefficient a_n du terme de degré n, déterminer le coefficient du terme général du polynôme $P_n\,(x)$ en fonction de n et de son rang.

EXERCICE 11.

1. p étant un entier naturel égal à 1, 2, 3, 4, démontrer qu'il existe un polynôme $f(x)$ et un seul, de degré $p + 1$, qui s'annule pour $x = 0$ et qui vérifie l'identité : $f(x) - f(x-1) = x^p$.
2. Calculer $f(1)$.
3. Trouver les coefficients du polynôme $f(x)$ et vérifier que l'on a :
   $f(n) = 1^p + 2^p + 3^p + \ldots + n^p$, n étant un entier naturel quelconque.
4. Essayer de généraliser la méthode utilisée en calculant les sommes suivantes :

   $A = 1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n - 1)^2$

   $B = 1^3 + 3^3 + 5^3 + \ldots + (2n - 1)^3$

   $C = 1.2 + 2.3 + 3.4 + \ldots + n\,(n + 1)$

   Pour calculer A, on démontrera qu'il existe un polynôme $f(x)$ et un seul, de degré 3, qui s'annule pour $x = 0$, et qui vérifie l'identité : $f(x) - f(x-1) = (2x - 1)^2$, et on calculera $f(n)$.

EXERCICE 12.

Effectuer les divisions aux puissances croissantes soit de $1 - x \cos\theta$, soit de $x \sin\theta$, soit de $\cos a - x \cos(a - \theta)$ par

$$1 - 2x \cos\theta + x^2$$

de manière à obtenir les premiers termes du quotient.
Trouver le quotient et le reste à l'ordre n en raisonnant par récurrence. Déduire des résultats trouvés des expressions simples pour :

$A = 1 + \cos\theta + \cos 2\theta + \ldots + \cos n\theta$.

$B = \sin\theta + \sin 2\theta + \ldots + \sin n\theta$.

$C = \cos a + \cos(a + \theta) + \ldots + \cos(a + (n-1)\theta)$.

$D = \sin a + \sin(a + \theta) + \ldots + \sin(a + (n-1)\theta)$.

EXERCICE 13.

1. On considère 3 points non alignés (x_0 , y_0), (x_1 , y_1), (x_2 , y_2), du plan.

1° Montrez que, par ces trois points, on peut faire passer une parabole et une seule d'équation

$$y = a x^2 + b x + c.$$

2° Montrez que la parabole d'équation :

$$y = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} y_1 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} y_2$$

passe par les trois points (x_0 , y_0), (x_1 , y_1), (x_2 , y_2).

3° On suppose maintenant $x_2 - x_1 = x_1 - x_0 = h > 0$. Calculez l'intégrale $I = \int_{x_0}^{x_2} y \, dx$, en fonction de h, y_0 , y_1 , y_2.

2. On considère un ensemble de $2n + 1$ points du plan, $(x_i , y_i)_{0 \le i \le 2n}$, dont les abscisses vérifient

$$x_{i+1} - x_i = h$$

et dont les ordonnées y_i sont données par une fonction inconnue f de la variable x. En utilisant les résultats de la première partie, montrez que l'on peut trouver une valeur approchée de l'intégrale $\int_{x_0}^{x_{2n}} f(x) \, dx$ en prenant la somme

$$S = \frac{h}{3} \left((y_0 + y_{2n}) + 4 \sum_{i=0}^{i=n-1} y_{2i+1} + 2 \sum_{i=1}^{i=n-1} y_{2i} \right)$$ (Formule de **SIMPSON**)

Application numérique.

Toutes les minutes, on a relevé la vitesse d'un véhicule. Les résultats sont les suivants :

t (mn)	0	1	2	3	4	5	6
v (km/h)	0	80	120	140	110	100	130

Donnez une valeur approchée de la distance parcourue :

a) par la méthode des trapèzes.

b) par la méthode de Simpson.

EXERCICE 14.

Etant donnés $n + 1$ points quelconques du plan, montrez qu'il existe un polynôme de degré n et un seul dont la courbe représentative passe par les $n + 1$ points donnés. En vous inspirant de l'exercice précédent, exprimez ce polynôme en fonction des coordonnées des points. (Formule d'interpolation de **LAGRANGE**).

EXERCICE 1.

1° Effectuer les divisions euclidiennes de
$3x^5 + 2x^4 - x^2 + 1$ par $x^3 + x + 2$
$x^4 - x^3 + x - 2$ par $x^2 - 2x + 4$
2° Dans $\mathbb{C}[x]$, effectuer les divisions euclidiennes de
$x^2 - 3ix - 5(1 + i)$ par $x - 1 + i$
$4x^3 + x^2$ par $x + 1 + i$.

SOLUTION.

1° Divisions euclidiennes dans $\mathbb{Z}[x]$.

$3x^5$	$+2x^4$	$-x^2$		$+1$	$x^3 + x + 2$
$-3x^5$		$-3x^3$	$-6x^2$		$3x^2 + 2x - 3$
0	$+2x^4$	$-3x^3$	$-7x^2$		
	$-2x^4$		$-2x^2$	$-4x$	
	0	$-3x^3$	$-9x^2$	$-4x$	
		$+3x^3$		$+3x$	$+6$
		0	$-9x^2$	$-x$	$+7$

$$3x^5 + 2x^4 - x^2 + 1 = (x^3 + x + 2)(3x^2 + 2x - 3) - 9x^2 - x + 7$$

x^4	$-x^3$		$+x$	-2	$x^2 - 2x + 4$
$-x^4$	$+2x^3$	$-4x^2$			$x^2 + x - 2$
0	$+x^3$	$-4x^2$			
	$-x^3$	$+2x^2$	$-4x$		
	0	$-2x^2$	$-3x$		
		$+2x^2$	$-4x$	$+8$	
		0	$-7x$	$+6$	

$$(x^4 - x^3 + x - 2) = (x^2 - 2x + 4)(x^2 + x - 2) - 7x + 6$$

2° Divisions euclidiennes dans $\mathbb{C}[x]$.

	x^2	–	$3\,i$	x	–	$5\,(1+i)$		$x-1+i$
–	x^2	+	$(1-i)$	x				$x+(1-4\,i)$
	0		$(1-4\,i)$	x				
		–	$(1-4\,i)$	x	+	$(1-i)(1-4\,i)$		
				0		$-8-10\,i$		

$$x^2 - 3\,i\,x - 5\,(1+i) = (x-1+i)(x+1-4\,i) - 8 - 10\,i$$

	4	x^3	+		x^2						$x+1+i$
–	4	x^3	–	$(1+i)$	x^2						$4\,x^2-(1+i)\,x+(1+i)^2$
		0	–	$(1+i)$	x^2						
			+	$(1+i)$	x^2	+	$(1+i)^2$	x			
					0	+	$(1+i)^2$	x			
						–	$(1+i)^2$	x	–	$(1+i)^3$	
								0	–	$(1+i)^3$	

$$4\,x^3 + x^2 = (x+1+i)(4\,x^2 - (1+i)\,x + (1+i)^2) - (1+i)^3$$

EXERCICE 2.

Décomposer la fraction rationnelle en éléments simples :

2.1. $\dfrac{x+3}{x\,(x-1)^3}$

2.2. $\dfrac{1}{(x-1)^2(x^2+4)}$

2.3. $\dfrac{x^4+1}{(x-1)^2(x+2)}$

2.4. $\dfrac{2x^3+x^2-5x+1}{x^2+x+1}$

2.5. $\dfrac{4}{1-x^2}$

SOLUTION.

2.1.

$$\frac{x+3}{x\,(x-1)^3}=\frac{A}{x}+\frac{B}{(x-1)^3}+\frac{C}{(x-1)^2}+\frac{D}{(x-1)}$$

Multiplions par x et faisons $x = 0$, il reste $A = -3$.

Multiplions par $(x-1)^3$ et faisons $x = 1$, il reste $B = 4$.

$$\frac{x+3}{x\,(x-1)^3}+\frac{3}{x}-\frac{4}{(x-1)^3}=\frac{(x+3)+3(x-1)^3-4x}{x\,(x-1)^3}=\frac{x+3+3x^3-9x^2+9x-3-4x}{x\,(x-1)^3}=\frac{3x^3-9x^2+6x}{x\,(x-1)^3}$$

$$\frac{x+3}{x\,(x-1)^3}+\frac{3}{x}-\frac{4}{(x-1)^3}=\frac{3(x^2-3x+2)}{(x-1)^3}=\frac{3(x-1)(x-2)}{(x-1)^3}=\frac{3(x-2)}{(x-1)^2}$$

$$\frac{3(x-2)}{(x-1)^2}=\frac{C}{(x-1)^2}+\frac{D}{(x-1)}$$

Multiplions par $(x-1)^2$ et faisons $x = 1$, il reste $C = -3$

$$\frac{3(x-2)}{(x-1)^2}+\frac{3}{(x-1)^2}=\frac{3x-3}{(x-1)^2}=\frac{3}{(x-1)}=\frac{D}{(x-1)},\ D=3.$$

$$\boxed{\frac{x+3}{x\,(x-1)^3}=-\frac{3}{x}+\frac{4}{(x-1)^3}-\frac{3}{(x-1)^2}+\frac{3}{(x-1)}}$$

2.2. $\dfrac{1}{(x-1)^2(x^2+4)}=\dfrac{a}{(x-1)^2}+\dfrac{b}{x-1}+\dfrac{cx+d}{x^2+4}$

Pour trouver a, on multiplie par $(x-1)^2$ et on fait $x = 1$: $a=\dfrac{1}{5}$.

Pour trouver b, on calcule $\dfrac{1}{(x-1)^2(x^2+4)}-\dfrac{1}{5}\,\dfrac{1}{(x-1)^2}=\dfrac{1-x^2}{5(x-1)^2(x^2+4)}=\dfrac{1}{5}\dfrac{1+x}{(1-x)(x^2+4)}$, on multiplie par $x-1$, et on fait $x = 1$: $b=-\dfrac{2}{25}$.

$$\frac{1}{(x-1)^2(x^2+4)} - \frac{1}{5}\,\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{2}{25}\,\frac{1}{x-1} = \frac{1}{5}\,\frac{1+x}{(1-x)(x^2+4)} + \frac{2}{25}\,\frac{1}{x-1} = \frac{1}{25}\,\frac{5(1+x)-2(x^2+4)}{(1-x)(x^2+4)}$$

$$= -\frac{1}{25}\,\frac{2x^2-5x+3}{(1-x)(x^2+4)} = \frac{1}{25}\,\frac{(x-1)(2x-3)}{(x-1)(x^2+4)} = \frac{1}{25}\,\frac{2x-3}{x^2+4}$$

$$\boxed{\frac{1}{(x-1)^2(x^2+4)} = \frac{1}{5}\,\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{2}{25}\,\frac{1}{x-1} + \frac{1}{25}\,\frac{2x-3}{x^2+4}}$$

2.3. $\dfrac{x^4+1}{(x-1)^2(x+2)} = \dfrac{a}{x+2} + \dfrac{b}{(x-1)^2} + \dfrac{c}{x-1} + d\,x + e$

Pour trouver *a*, on multiplie par $x + 2$ et on fait $x = -2$: $a = \dfrac{17}{9}$.

Pour trouver *b*, on multiplie par $(x-1)^2$ et on fait $x = 1$: $b = \dfrac{2}{3}$.

Pour trouver *c*, *d*, *e*, on calcule

$$\frac{x^4+1}{(x-1)^2(x+2)} - \frac{17}{9}\,\frac{1}{x+2} - \frac{2}{3}\,\frac{1}{(x-1)^2} = \frac{9(x^4+1)-17(x-1)^2-6(x+2)}{9(x-1)^2(x+2)}$$

$$= \frac{9x^4+9-17x^2+34x-17-6x-12}{9(x-1)^2(x+2)} = \frac{9x^4-17x^2+28x-20}{9(x-1)^2(x+2)}$$

et on fait la division euclidienne de $9x^4 - 17x^2 + 28x - 20$ par

$$9(x-1)^2(x+2) = 9(x^2-2x+1)(x+2) = 9(x^3-3x+2) = 9x^3 - 27x + 18$$

	$9x^4$	–	$17x^2$	+	$28x$	–	20		$9x^3$	–	$27x$	+	18			
–	$9x^4$	+	$27x^2$	–	$18x$				x							
			$10x^2$	+	$10x$	–	20									

Puis on factorise le reste :

$$10x^2 + 10x - 20 = 10(x^2 + x - 2) = 10(x-1)(x+2)$$
$$9x^4 - 17x^2 + 28x - 20 = 9x(x-1)^2(x+2) + 10(x-1)(x+2)$$
$$\frac{9x^4-17x^2+28x-20}{9(x-1)^2(x+2)} = x + \frac{10}{9}\,\frac{1}{x-1}$$

$$\boxed{\frac{x^4+1}{(x-1)^2(x+2)} = \frac{17}{9}\,\frac{1}{x+2} + \frac{2}{3}\,\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{10}{9}\,\frac{1}{x-1} + x}$$

2.4. $\frac{2x^3+x^2-5x+1}{x^2+x+1}$.

On commence par faire la division euclidienne du numérateur $2x^3 + x^2 - 5x + 1$, par le dénominateur $x^2 + x + 1$.

	2	x^3	+		x^2	–	5	x	+	1		x^2	+		x	+	1
–	2	x^3	–	2	x^2	–	2	x			2	x	–	1			
			–		x^2	–	7	x	+	1							
			+		x^2	+		x	+	1							
						–	6	x	+	2							

$$(2x^3 + x^2 - 5x + 1) = (x^2 + x + 1)(2x - 1) + 2(1 - 3x)$$

$$\boxed{\frac{2x^3+x^2-5x+1}{x^2+x+1} = (2x - 1) - 2\frac{3x-1}{x^2+x+1}}$$

2.5. $\frac{4}{1-x^2} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1}$.

Pour trouver a, on multiplie par $(x - 1)$ et on fait $x = 1$: $a = -2$.
Pour trouver b, on multiplie par $(x + 1)$ et on fait $x = -1$: $b = 2$.

$$\boxed{\frac{4}{1-x^2} = 2\left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1}\right)}$$

Cet exercice simple doit être fait de tête, sans écrire autre chose que le résultat.

EXERCICE 3.

1° Effectuer la division euclidienne de $a = x^n - 1$ par $b = x^p - 1$.
2° Relation entre n et p pour que b divise a ($b|a$).
3° Prouver que le P.G.C.D. de a et b est $(x^d - 1)$, d étant le P.G.C.D. de n et p.

SOLUTION.

1° Division euclidienne de $x^n - 1$ par $x^p - 1$.

Il y a plusieurs cas selon les valeurs repectives de n et p.

1. $p > n$.

$x^n - 1$	$x^p - 1$
	0

$$x^n - 1 = 0 \times (x^p - 1) + (x^n - 1)$$

Le quotient est 0 et le reste $x^n - 1$.

2. $p = n$.

$x^n - 1$	$x^p - 1$
$-\ x^n + 1$	1
0	

$$x^n - 1 = 1 \times (x^p - 1) + 0$$

Le quotient est 1 et le reste 0.

3. $p < n$.

$x^n - 1$	$x^p - 1$
$-\ x^n + x^{n-p}$	$x^{n-p} + x^{n-2p}$
$x^{n-p} - 1$	
$-\ x^{n-p} + x^{n-2p}$	
$x^{n-2p} - 1$	

$$x^n - 1 = (x^p - 1) \times x^{n-p} + (x^{n-p} - 1)$$

Il existe des entiers naturels q et r tels que :

$$n = p\,q + r$$

avec $r < p$ (division euclidienne de n par p).

Il vient alors, en poursuivant la division euclidienne de $x^n - 1$ par $x^p - 1$:

$$(x^n - 1) = (x^p - 1) \times (x^{n-p} + x^{n-2p} + \ldots + x^{n-qp}) + (x^r - 1)$$

2° Relation entre n et p pour que $x^p - 1$ divise $x^n - 1$.

Pour que $b = x^p - 1$ divise $a = x^n - 1$, il faut et il suffit que le reste $x^r - 1$ de la division euclidienne de a par b soit nul, donc il faut et il suffit que r soit nul, c'est-à-dire que p divise n.

$$(x^p - 1) \mid (x^n - 1) \Leftrightarrow p \mid n$$

3° P.G.C.D. de $x^n - 1$ et $x^p - 1$.

Si le reste $x^r - 1$ de la division euclidienne de a par b n'est pas nul, pour trouver le P.G.C.D. de a et b on va continuer les divisions euclidiennes en divisant le diviseur $x^p - 1$ par le reste $x^r - 1$. On peut écrire la division euclidienne de p par r : $p = q' r + r'$.

$$(x^p - 1) = (x^r - 1) \times (x^{p-r} + x^{p-2r} + \ldots + x^{p-q'r}) + (x^{r'} - 1)$$

Et l'on peut peut continuer ainsi jusqu'au P.G.C.D. de n et q pour lequel le reste de la division est d. Ceci montre déjà que le P.G.C.D. de $(x^n - 1)$ et $(x^p - 1)$ est nécessairement de la forme $x^q - 1$ puisque c'est le reste d'une division de termes de la même forme. Soit alors $(x^q - 1)$ le P.G.C.D. de $(x^n - 1)$ et $(x^p - 1)$.
$(x^q - 1) \mid (x^n - 1) \Rightarrow q \mid n$; $(x^q - 1) \mid (x^p - 1) \Rightarrow q \mid p$; $\Rightarrow q$ divise le P.G.C.D. d de n et p.
Soit d le P.G.C.D. de n et p ; $d \mid p \Leftrightarrow (x^d - 1) \mid (x^p - 1)$; $d \mid n \Leftrightarrow (x^d - 1) \mid (x^n - 1)$
d = P.G.C.D. $(n , p) \Rightarrow (x^d - 1) \mid$ P.G.C.D. $((x^n - 1), (x^p - 1)) = (x^q - 1) \Rightarrow d$ divise q.
d divise q et q divise d , donc $d = q$. Et le P.G.C.D. de $(x^n - 1)$ et $(x^p - 1)$ est $(x^d - 1)$.

$$d = \text{P.G.C.D. } (n , p) \Leftrightarrow (x^d - 1) = \text{P.G.C.D. } ((x^n - 1) ; (x^p - 1))$$

EXERCICE 4.

Trouver un polynôme de degré aussi petit que possible dont le reste de la division euclidienne par

$$x^4 - 2\,x^3 - 2\,x^2 + 10\,x - 7 \text{ soit égal à } x^3 + x + 1,$$

et dont le reste de la division euclidienne par

$$x^4 - 2\,x^3 - 3\,x^2 + 13\,x - 10 \text{ soit égal à } 2\,x^2 - 3.$$

SOLUTION.

Soit $P(x)$ un polynôme solution du problème. On doit avoir :

$P(x) = (x^4 - 2\,x^3 - 2\,x^2 + 10\,x - 7) \times q_1 + (x^3 + x + 1)$

$P(x) = (x^4 - 2\,x^3 - 3\,x^2 + 13\,x - 10) \times q_2 + (2\,x^2 - 3)$

Notons : $p_1 = (x^4 - 2\,x^3 - 2\,x^2 + 10\,x - 7)$

$r_1 = (x^3 + x + 1)$

$p_2 = (x^4 - 2\,x^3 - 3\,x^2 + 13\,x - 10)$

$r_2 = (2\,x^2 - 3)$

On a :

$$r_2 - r_1 = -x^3 + 2\,x^2 - x - 4$$

La solution doit s'écrire $P(x) = p_1\,q_1 + r_1 = p_2\,q_2 + r_2$.

Les polynômes quotients q_1 et q_2 sont inconnus mais doivent vérifier la relation :

$$p_1\,q_1 - p_2\,q_2 = r_2 - r_1 .$$

1° Les polynômes p_1 et p_2 sont premiers entre eux.

Calculons leur P.G.C.D.

$$\begin{array}{rl}
x^4 - 2\,x^3 - 2\,x^2 + 10\,x - 7 & \big| \; x^4 - 2\,x^3 - 3\,x^2 + 13\,x - 10 \\
\hline
-\,x^4 + 2\,x^3 + 3\,x^2 - 13\,x + 10 & \big| \; 1 \\
\hline
x^2 - 3\,x + 3 &
\end{array}$$

$$p_1 = p_2 + (x^2 - 3\,x + 3)$$

$$\begin{array}{rl}
x^4 - 2\,x^3 - 3\,x^2 + 13\,x - 10 & \big| \; x^2 - 3\,x + 3 \\
\hline
-\,x^4 + 3\,x^3 - 3\,x^2 & \big| \; x^2 + x - 3 \\
\hline
x^3 - 6\,x^2 & \\
-\,x^3 + 3\,x^2 - 3\,x & \\
\hline
-\,3\,x^2 + 10\,x & \\
+\,3\,x^2 - 9\,x + 9 & \\
\hline
x - 1 &
\end{array}$$

$$p_2 = (x^2 - 3\,x + 3)(x^2 + x - 3) + (x - 1)$$

$$\begin{array}{rrrrrrr|l} & x^2 & - & 3 & x & + & 3 & x-1 \\ \cline{8-8} - & x^2 & + & & x & & & x-2 \\ \cline{1-5} & & - & 2 & x & & & \\ & & + & 2 & x & - & 2 & \\ \cline{2-7} & & & & & & 1 & \end{array}$$

$$(x^2 - 3\,x + 3) = (x-1)(x-2) + 1$$

Le dernier 1 qui reste dans cette suite de divisions euclidiennes des diviseurs par les restes est le P.G.C.D. des polynômes de départ p_1 et p_2 . On obtient ainsi p_1 sous la forme :

$p_1 = p_2 + (x^2 - 3\,x + 3)$

$p_2 = (x^2 - 3\,x + 3)(x^2 + x - 3) + (x - 1)$

$(x^2 - 3\,x + 3) = (x-1)(x-2) + 1$

$p_2 = ((x-1)(x-2) + 1)(x^2 + x - 3) + (x-1) = (x-1)[(x-2)(x^2 + x - 3) + 1] + (x^2 + x - 3)$

$p_2 = (x-1)(x^3 - x^2 - 5\,x + 7) + (x^2 + x - 3)$

$p_1 = (x-1)(x^3 - x^2 - 5\,x + 7) + (x^2 + x - 3) + (x-1)(x-2) + 1$

$p_1 = (x-1)(x^3 - x^2 - 5\,x + 7 + x - 2) + (x^2 + x - 3) + 1$

$p_1 = (x-1)(x^3 - x^2 - 4\,x + 5) + (x^2 + x - 2)$

2° Théorème de Bezout.

Le théorème de Bezout indique qu'il existe des polynômes u et v vérifant :

$$p_1\,u + p_2\,v = 1$$

3° Choix des polynômes *u* et *v*.

Compte tenu des expression obtenues pour p_1 et p_2 , le théorème de Bezout s'écrit :

$(x-1)\,[(x^3 - x^2 - 4\,x + 5)\,u + (x^3 - x^2 - 5\,x + 7)\,v\,] + [\,(x^2 + x - 2)\,u + (x^2 + x - 3)\,v\,] = 1$

Les coefficients $(x - 1)$ et 1 des crochets sont les derniers restes des divisions euclidiennes qu'on a effectuées pour montrer que p_1 et p_2 sont premiers entre eux.

Or on a, de façon évidente :

$$(x-1) \times 0 + 1 \times 1 = 1$$

et l'on ne peut pas prendre de polynômes de plus bas degré vérifiant la relation $(x - 1)\,u_1 + 1 \times v_1 = 1$. Nous choisirons donc u et v vérifiant (par identification dans le théorème de Bezout) :

$$(x^3 - x^2 - 4\,x + 5)\,u + (x^3 - x^2 - 5\,x + 7)\,v = 0$$
$$(x^2 + x - 2)\,u + (x^2 + x - 3)\,v = 1$$

La première relation s'écrit :

$$(x^3 - x^2 - 4\,x + 5)(u + v) - (x - 2)\,v = 0$$

La deuxième relation donne :

$$(x^2 + x - 2)(u + v) - v = 1$$
$$v = (x^2 + x - 2)(u + v) - 1$$

En reportant cette expression de v dans la relation $(x^3 - x^2 - 4\,x + 5)(u + v) - (x - 2)\,v = 0$, il vient :

$$(x^3 - x^2 - 4\,x + 5)(u + v) - (x - 2)[(x^2 + x - 2)(u + v) - 1] = 0$$
$$(u + v)\,[\,(x^3 - x^2 - 4\,x + 5) - (x - 2)(x^2 + x - 2)\,] + (x - 2) = 0$$

$$(u+v)\,(x^3-x^2-4\,x+5-x^3+x^2+4\,x-4)+(x-2)=0$$
$$u+v=2-x$$

Reportons cette expression dans l'expression de v :

$$v=(x^2+x-2)(2-x)-1=-(x^3-x^2-4\,x+5)$$
$$u=-v+2-x=x^3-x^2-4\,x+5+2-x=x^3-x^2-5\,x+7$$

$$u=x^3-x^2-5\,x+7$$
$$v=-x^3+x^2+4\,x-5$$

4° Calcul des quotients q_1 et q_2.

Les relations :

$$p_1\,q_1-p_2\,q_2=r_2-r_1\,.$$

et :

$$p_1\,u+p_2\,v=1$$

montrent que l'on a :

$$p_1\,u\,(r_2-r_1)+p_2\,v\,(r_2-r_1)=r_2-r_1$$

On peut donc prendre :

$$q_1=u\,(r_2-r_1)=(x^3-x^2-5\,x+7)(-x^3+2\,x^2-x-4)$$
$$q_2=-v\,(r_2-r_1)=-(-x^3+x^2+4\,x-5)(-x^3+2\,x^2-x-4)$$

$$\begin{array}{rccccccccccccccccc}
q_1= & - & x^6 & + & & x^5 & + & 5\,x^4 & - & 7\,x^3 & & & & & & & & \\
 & & & + & 2\,x^5 & - & 2\,x^4 & - & 10\,x^3 & + & 14\,x^2 & & & & & & \\
 & & & & & - & x^4 & + & x^3 & + & 5\,x^2 & - & 7\,x & & & & \\
 & & & & & & & - & 4\,x^3 & + & 4\,x^2 & + & 20\,x & - & 28 & & \\
\hline
q_1= & - & x^6 & + & 3\,x^5 & + & 2\,x^4 & - & 20\,x^3 & + & 23\,x^2 & + & 13\,x & - & 28 & & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{rccccccccccccccccc}
q_2= & - & x^6 & + & & x^5 & + & 4\,x^4 & - & 5\,x^3 & & & & & & & & \\
 & & & + & 2\,x^5 & - & 2\,x^4 & - & 8\,x^3 & + & 10\,x^2 & & & & & & \\
 & & & & & - & x^4 & + & x^3 & + & 4\,x^2 & - & 5\,x & & & & \\
 & & & & & & & - & 4\,x^3 & + & 4\,x^2 & + & 16\,x & - & 20 & & \\
\hline
q_2= & - & x^6 & + & 3\,x^5 & + & x^4 & - & 16\,x^3 & + & 18\,x^2 & + & 11\,x & - & 20 & & &
\end{array}$$

$$q_1=-x^6+3\,x^5+2\,x^4-20\,x^3+23\,x^2+13\,x-28$$
$$q_2=-x^6+3\,x^5+x^4-16\,x^3+18\,x^2+11\,x-20$$

5° Recherche d'une solution P.

$P=q_1\,p_1+(x^3+x+1)$

$P=(-x^6+3\,x^5+2\,x^4-20\,x^3+23\,x^2+13\,x-28)(x^4-2\,x^3-2\,x^2+10\,x-7)+(x^3+x+1)$

$$P = -x^{10} + 3x^9 + 2x^8 - 20x^7 + 23x^6 + 13x^5 - 28x^4$$
$$+ 2x^9 - 6x^8 - 4x^7 + 40x^6 - 46x^5 - 26x^4 + 56x^3$$
$$+ 2x^8 - 6x^7 - 4x^6 + 40x^5 - 46x^4 - 26x^3 + 56x^2$$
$$- 10x^7 + 30x^6 + 20x^5 - 200x^4 + 230x^3 + 130x^2 - 280x$$
$$+ 7x^6 - 21x^5 - 14x^4 + 140x^3 - 161x^2 - 91x + 196$$
$$+ x^3 + x + 1$$

$$\boxed{P = -x^{10} + 5x^9 - 2x^8 - 40x^7 + 96x^6 + 6x^5 - 314x^4 + 401x^3 + 25x^2 - 370x + 197}$$

Vérification. Calcul de $P = q_2 p_2 + (2x^2 - 3)$.

$P = (-x^6 + 3x^5 + x^4 - 16x^3 + 18x^2 + 11x - 20)(x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 13x - 10) + (2x^2 - 3)$

$$P = -x^{10} + 3x^9 + x^8 - 16x^7 + 18x^6 + 11x^5 - 20x^4$$
$$+ 2x^9 - 6x^8 - 2x^7 + 32x^6 - 36x^5 - 22x^4 + 40x^3$$
$$+ 3x^8 - 9x^7 - 3x^6 + 48x^5 - 54x^4 - 33x^3 + 60x^2$$
$$- 13x^7 + 39x^6 + 13x^5 - 208x^4 + 234x^3 + 143x^2 - 260x$$
$$+ 10x^6 - 30x^5 - 10x^4 + 160x^3 - 180x^2 - 110x + 200$$
$$+ 2x^2 - 3$$

$P = -x^{10} + 5x^9 - 2x^8 - 40x^7 + 96x^6 + 6x^5 - 314x^4 + 401x^3 + 25x^2 - 370x + 197$. C'est le même résultat.

6° Solution de plus bas degré.

Si $P = p_1 q_1 + r_1 = p_2 q_2 + r_2$ et $P' = p_1 q'_1 + r_1 = p_2 q'_2 + r_2$ sont deux solutions du problème, leur différence est $P - P' = p_1 (q_1 - q'_1) = p_2 (q_2 - q'_2)$. Comme p_1 et p_2 sont premiers entre eux, c'est que $(q_1 - q'_1)$ est multiple de p_2 et que $(q_2 - q'_2)$ est multiple de p_1 . On a donc $P - P' = k\, p_1\, p_2$. Ainsi P et P' ne diffèrent que d'un multiple de $p_1\, p_2$.

Réciproquement, si un polynôme P' est de la forme $P - k\, p_1\, p_2$ où k est un polynôme quelconque, il est congru à P modulo p_1 et congru à P modulo p_2 , donc il est solution du problème.

La solution de plus bas degré est donc toujours donnée par le reste de la division euclidienne d'une solution P par le produit $p_1\, p_2$. C'est donc un polynôme de degré 7 au plus.

On peut être un peu plus précis : comme $p_1 + r_1$ est différent de $p_2 + r_2$ et qu'on a affaire à des polynômes unitaires (le coefficient du terme de plus fort degré est 1), on peut être sûr que le degré de P est plus élevé que celui de p_1 et p_2 . La solution de plus bas degré est donc un polynôme de degré 5, 6, ou 7.

Nous avons trouvé la solution :

$P = -x^{10} + 5\,x^9 - 2\,x^8 - 40\,x^7 + 96\,x^6 + 6\,x^5 - 314\,x^4 + 401\,x^3 + 25\,x^2 - 370\,x + 197.$

Le produit des polynômes $p_1 = (x^4 - 2\,x^3 - 2\,x^2 + 10\,x - 7)$ et $p_2 = (x^4 - 2\,x^3 - 3\,x^2 + 13\,x - 10)$ est donné par :

$$
\begin{array}{rrrr

$$
\begin{array}{r|l}
3\,x^6 + 4\,x^5 - 44\,x^4 + 47\,x^3 + 115\,x^2 - 249\,x + 127 & \\
-3\,x^6 + 6\,x^5 + \ 6\,x^4 - 30\,x^3 + \ 21\,x^2 & \\
\hline
10\,x^5 - 38\,x^4 + 17\,x^3 + 136\,x^2 - 249\,x + 127 & \\
-10\,x^5 + 20\,x^4 + 20\,x^3 - 100\,x^2 + \ 70\,x & \\
\hline
-18\,x^4 + 37\,x^3 + \ 36\,x^2 - 179\,x + 127 & \\
+18\,x^4 - 36\,x^3 - \ 36\,x^2 + 180\,x - 126 & \\
\hline
x^3 \qquad + \qquad x + \quad 1 &
\end{array}
$$

C’est le bon résultat ! avec $q_1 = -2\,x^3 + 3\,x^2 + 10\,x - 18$.

Division par p_2 :

$-2x^7+7x^6+8x^5-64x^4+61x^3+115x^2-249x+127$	$x^4-2x^3-3x^2+13x-10$
$2x^7-4x^6-6x^5+26x^4-20x^3$	$-2x^3+3x^2+8x-13$
$3x^6+2x^5-38x^4+41x^3+115x^2-249x+127$	
$-3x^6+6x^5+9x^4-39x^3+30x^2$	
$8x^5-29x^4+2x^3+145x^2-249x+127$	
$-8x^5+16x^4+24x^3-104x^2+80x$	
$-13x^4+26x^3+41x^2-169x+127$	
$+13x^4-26x^3-39x^2+169x-130$	
$2x^2-3$	

C'est le bon résultat ! avec $q_2 = -2x^3+3x^2+8x-13$.

EXERCICE 5.

Déterminer le P.G.C.D. des polynômes suivants:
2.1. $x^5+3x^4+x^3+x^2+3x+1$ et x^4+2x^3+x+2
2.2. $3x^5+5x^4-16x^3-6x^2-5x-6$ et $3x^4-4x^3-x^2-x-6$
2.3. $x^5+5x^4+9x^3+7x^2+5x+3$ et $x^4+2x^3+2x^2+x+1$.

SOLUTION.

1° P.G.C.D. de $x^5+3x^4+x^3+x^2+3x+1$ et x^4+2x^3+x+2.

Pour trouver le P.G.C.D. de deux polynômes, il suffit de faire les divisions euclidiennes successives des quotients par les restes.

$$\begin{array}{rcl|l} x^5+3x^4+x^3+x^2+3x+1 & & & x^4+2x^3+x+2 \\ \hline -x^5-2x^4-x^2-2x & & & x+1 \\ \hline x^4+x^3+x+1 & & & \\ -x^4-2x^3-x-2 & & & \\ \hline -x^3-1 & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl|l} x^4+2x^3+x+2 & & & x^3+1 \\ \hline -x^4-x & & & x+2 \\ \hline 2x^3+2 & & & \\ -2x^3-2 & & & \\ \hline 0 & & & \end{array}$$

Le P.G.C.D. est le dernier reste non nul : c'est $-x^3-1$, ou (x^3+1), puisque le P.G.C.D. est défini à une constante multiplicative près.

> Le P.G.C.D. de $(x^5+3x^4+x^3+x^2+3x+1)$ et (x^4+2x^3+x+2) est (x^3+1).

On peut vérifier facilement les relations :

$$(x^5+3x^4+x^3+x^2+3x+1)=(x^3+1)(x+1)^2 \text{ et } (x^4+2x^3+x+2)=(x^3+1)(x+2)$$

2° P.G.C.D. de $3x^5+5x^4-16x^3-6x^2-5x-6$ et $3x^4-4x^3-x^2-x-6$.

$$\begin{array}{rcl|l} 3x^5+5x^4-16x^3-6x^2-5x-6 & & & 3x^4-4x^3-x^2-x-6 \\ \hline -3x^5+4x^4+x^3+x^2+6x & & & x+3 \\ \hline 9x^4-15x^3-5x^2+x-6 & & & \\ -9x^4+12x^3+3x^2+3x+18 & & & \\ \hline -3x^3-2x^2+4x+12 & & & \end{array}$$

Quand on calcule le P.G.C.D. de deux polynômes, on peut multiplier les diviseurs et les restes par des constantes, sans changer le P.G.C.D.

$$
\begin{array}{rl|l}
3x^4 - 4x^3 - x^2 - x - 6 & & 3x^3 + 2x^2 - 4x - 12 \\
\hline
-\,3x^4 - 2x^3 + 4x^2 + 12x & & x - 2 \\
\hline
-\,6x^3 + 3x^2 + 11x - 6 & & \\
+\,6x^3 + 4x^2 - 8x - 24 & & \\
\hline
7x^2 + 3x - 30 & &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rl|l}
21x^3 + 14x^2 - 28x - 90 & & 7x^2 + 3x - 30 \\
\hline
-\,21x^3 - 9x^2 + 90x & & 3x - 5/7 \\
\hline
5x^2 + 62x - 90 & & \\
-\,5x^2 + 15/7\,x - 150/7 & & \\
\hline
449/7\,x - 880/7 & &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rl|l}
7x^2 + 3x - 30 & & 449x - 880 \\
\hline
-\,7x^2 + 6160/449\,x & & 7/449\,x + 7507/201601 \\
\hline
7507/449\,x - 30 & & \\
-\,7507/449\,x + 6606160/201601 & & \\
\hline
-\,558130/201601 & &
\end{array}
$$

Le dernier reste est une constante : le P.G.C.D. est 1.

Les polynômes $(3x^5+5x^4-16x^3-6x^2-5x-6)$ et $(3x^4-4x^3-x^2-x-6)$ sont premiers entre eux.

3° P.G.C.D. de $x^5+5x^4+9x^3+7x^2+5x+3$ et $x^4+2x^3+2x^2+x+1$.

$$
\begin{array}{rl|l}
x^5 + 5x^4 + 9x^3 + 7x^2 + 5x + 3 & & x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 1 \\
\hline
-\,x^5 - 2x^4 - 2x^3 - x^2 - x & & x + 3 \\
\hline
3x^4 + 7x^3 + 6x^2 + 4x + 3 & & \\
-\,3x^4 - 6x^3 - 6x^2 - 3x - 3 & & \\
\hline
x^3 + x & &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rl|l}
x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 1 & & x^3 + x \\
\hline
-\,x^4 - x^2 & & x + 2 \\
\hline
2x^3 + x^2 + x + 1 & & \\
-\,2x^3 - 2x & & \\
\hline
x^2 - x + 1 & &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rrrrrr|l}
x^3 & & + & x & & & x^2 - x + 1 \\
\cline{7-7}
-x^3 & + x^2 & - & x & & & x + 1 \\
\cline{1-5}
 & x^2 & & & & & \\
 & -x^2 & + & x & - & 1 & \\
\cline{1-5}
 & & & x & - & 1 & \\
\cline{6-6}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rrrrrr|l}
 & x^2 & - & x & + & 1 & x - 1 \\
\cline{7-7}
 & -x^2 & + & x & & & x \\
\cline{1-5}
 & & & & & 1 & \\
\cline{6-6}
\end{array}
$$

Le P.G.C.D. est 1.

Les polynômes $(x^5+5x^4+9x^3+7x^2+5x+3)$ et $(x^4+2x^3+2x^2+x+1)$ sont premiers entre eux.

Cherchons des polynômes u et v vérifiant l'identité de Bezout :

$$\mathbf{(x^5+5x^4+9x^3+7x^2+5x+3)\,u + (x^4+2x^3+2x^2+x+1)\,v = 1}$$

Or $(x^5+5x^4+9x^3+7x^2+5x+3) = (x^4+2x^3+2x^2+x+1)(x + 3) + (x^3 + x)$

Donc $(x^4+2x^3+2x^2+x+1)(x + 3)\,u + (x^3 + x)\,u + (x^4+2x^3+2x^2+x+1)\,v = 1$

Posons $(x + 3)\,u + v = u_1$, la relation s'écrit : $(x^4+2x^3+2x^2+x+1)\,u_1 + (x^3 + x)\,u = 1$

Or $(x^4+2x^3+2x^2+x+1) = (x^3 + x)(x + 2) + (x^2 - x + 1)$

Donc $(x^3 + x)(x + 2)\,u_1 + (x^2 - x + 1)\,u_1 + (x^3 + x)\,u = 1$

Posons $(x + 2)\,u_1 + u = u_2$, la relation s'écrit : $(x^3 + x)\,u_2 + (x^2 - x + 1)\,u_1 = 1$.

Or $(x^3 + x) = (x^2 - x + 1)(x + 1) + (x - 1)$

Donc $(x^2 - x + 1)(x + 1)\,u_2 + (x - 1)\,u_2 + (x^2 - x + 1)\,u_1 = 1$

Posons $(x + 1)\,u_2 + u_1 = u_3$, la relation s'écrit : $(x^2 - x + 1)\,u_3 + (x - 1)\,u_2 = 1$

Or $(x^2 - x + 1) = (x - 1)\,x + 1$

Donc $(x - 1)\,x\,u_3 + u_3 + (x - 1)\,u_2 = 1$

Posons $x\,u_3 + u_2 = u_4$, la relation s'écrit : $(x - 1)\,u_4 + u_3 = 1$

On peut prendre pour solution : $u_3 = 1$, $u_4 = 0$

D'où $u_2 = -x$

$u_1 = u_3 - (x + 1)\,u_2 = 1 + x\,(x + 1) = 1 + x + x^2$

$u = u_2 - (x + 2)\,u_1 = -x - (x + 2)(1 + x + x^2) = -x - x^3 - 3\,x^2 - 3\,x - 2 = -(x^3 + 3\,x^2 + 4\,x + 2)$

$v = u_1 - (x + 3)\,u = 1 + x + x^2 + (x + 3)(x^3 + 3\,x^2 + 4\,x + 2) = (x^4 + 6\,x^3 + 14\,x^2 + 15\,x + 7)$

$u = -(x^3 + 3\,x^2 + 4\,x + 2)$; $v = (x^4 + 6\,x^3 + 14\,x^2 + 15\,x + 7)$

Vérification .

$(x^5+5x^4+9x^3+7x^2+5x+3)\ u + (x^4+2x^3+2x^2+x+1)\ v =$

$-(x^5+5x^4+9x^3+7x^2+5x+3)(x^3 + 3\ x^2 + 4\ x + 2) + (x^4+2x^3+2x^2+x+1)(x^4 + 6\ x^3 + 14\ x^2 + 15\ x + 7) =$

$$
\begin{array}{rrrr

EXERCICE 6.

Effectuer les divisions selon les puissances croissantes de

$2 - 3x^2 + x^4$ par $1 + x + x^5$ (ordre $h = 6$)

$x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$ par $1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$ (ordre $h=5$)

$1 - a\,b\,x^2$ par $1 - (a+b)x + abx^2$ (ordre h)

SOLUTION.

1° Développement à l'ordre 6.

$$
\begin{array}{rrrr

$$\begin{array}{rrrrrrrrrrrr|rrrrrrr}
 & 120 & x & - & 20 & x^3 & + & 1 & x^5 & & & & 120 & - & 60 & x^2 & + & 5 & x^4 \\
- & 120 & x & + & 60 & x^3 & - & 5 & x^5 & & & & x & + & 1/3 & x^3 & + & 2/15 & x^5 \\
\cline{1-12}
 & & & + & 40 & x^3 & - & 4 & x^5 & & & & & & & & & & \\
 & & & - & 40 & x^3 & + & 20 & x^5 & + & 5/3 & x^7 & & & & & & & \\
\cline{1-12}
 & & & & & & & 16 & x^5 & + & 5/3 & x^7 & & & & & & & \\
 & & & & & & - & 16 & x^5 & + & 8 & x^7 & & & & & & & \\
\cline{1-12}
 & & & & & & & & & & 29/3 & x^7 & & & & & & &
\end{array}$$

$$\frac{x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}}{1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}\,x^5 + \varepsilon(x)\,x^6, \text{ avec } \varepsilon(x)\to 0 \text{ si } x\to 0.$$

3° Développement à l'ordre *h*.

$$\begin{array}{rrrrrrrrrrr|rrrrrrr}
 & 1 & & & & - & ab & x^2 & & & & 1 & - & (a+b) & x & + & ab & x^2 \\
- & 1 & + & (a+b) & x & - & ab & x^2 & & & & 1 & + & (a+b) & x & & & \\
\cline{1-11}
 & & & (a+b) & x & - & 2\,ab & x^2 & & & & & & & & & & \\
 & & - & (a+b) & x & + & (a+b)^2 & x^2 & - & ab(a+b) & x^3 & & & & & & & \\
\cline{1-11}
 & & & & & & (a^2+b^2) & x^2 & - & ab(a+b) & x^3 & & & & & & &
\end{array}$$

$$(1 - a\,b\,x^2) = (1 - (a+b)x + abx^2)[1 + (a+b)\,x] + [(a^2+b^2)\,x^2 - ab\,(a+b)\,x^3]$$

Hypothèse de récurrence :

$$(1 - a\,b\,x^2) = (1 - (a+b)x + abx^2)[1 + (a+b)\,x + \ldots + (a^n+b^n)\,x^n] + (a^{n+1} + b^{n+1})\,x^{n+1} - ab\,(a^n + b^n)x^{n+2}$$

Dans le quotient vient alors le terme $(a^{n+1}+b^{n+1})\,x^{n+1}$. Le nouveau quotient est :

$q_{n+1} = 1 + (a+b)\,x + \ldots + (a^n+b^n)\,x^n + (a^{n+1}+b^{n+1})\,x^{n+1}$

et le nouveau reste est :

$r_{n+1} = r_n - (a^{n+1}+b^{n+1})\,x^{n+1} + (a+b)(a^{n+1}+b^{n+1})\,x^{n+2} - ab(a^{n+1}+b^{n+1})\,x^{n+3}$

$r_{n+1} = (a^{n+1} + b^{n+1})\,x^{n+1} - ab\,(a^n + b^n)x^{n+2} - (a^{n+1}+b^{n+1})\,x^{n+1} + (a+b)(a^{n+1}+b^{n+1})\,x^{n+2} - ab(a^{n+1}+b^{n+1})\,x^{n+3}$

$r_{n+1} = -ab\,(a^n + b^n)x^{n+2} + (a+b)(a^{n+1}+b^{n+1})\,x^{n+2} - ab(a^{n+1}+b^{n+1})\,x^{n+3}$

$r_{n+1} = [\,a^{n+1}\,(a+b-b) + b^{n+1}\,(a+b-a)\,]x^{n+2} - ab(a^{n+1}+b^{n+1})\,x^{n+3}$

$r_{n+1} = (a^{n+2} + b^{n+2})x^{n+2} - ab(a^{n+1}+b^{n+1})\,x^{n+3}$.

Reste et quotient à l'ordre $n+1$ ont donc la même forme qu'à l'ordre n. Le principe de récurrence implique que les formules de l'hypothèse de récurrence sont valables à tout ordre. On peut donc écrire :

$$\frac{1-abx^2}{1-(a+b)x+abx^2} = \sum_{k=0}^{k=n} (a+b)^k\,x^k + \frac{a^{n+1}(1-bx)+b^{n+1}(1-ax)}{(1-ax)(1-bx)}\,x^{n+1}$$

$$\frac{1-abx^2}{(1-ax)(1-bx)} = \sum_{k=0}^{k=n} (a+b)^k\,x^k + \left(\frac{a^{n+1}}{1-ax} + \frac{b^{n+1}}{1-bx}\right) x^{n+1}$$

EXERCICE 7.

1° Trouver un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant :

$$P(1) = 3,\ P'(1) = 4,\ P''(1) = 5$$

et la dérivée P''' de P d'ordre 3 est nulle.

2° P est-il unique dans $\mathbb{R}[X]$ à vérifier les conditions précédentes ?

SOLUTION.

1° Détermination du polynôme *P*.

Dire que la dérivée d'ordre 3 est nulle, c'est dire que le polynôme est de degré 2 et la formule de Taylor permet d'écrire :

$$P(X) = P(1) + P'(1)(X-1) + P''(1)\frac{(X-1)^2}{2}$$

$$P(X) = 3 + 4(X-1) + 5\frac{(X-1)^2}{2}$$

$$P(X) = 4X - 1 + \frac{5}{2}(X^2 - 2X + 1)$$

$$\boxed{P(X) = \frac{5}{2}X^2 - X + \frac{3}{2}}$$

2° Unicité du polynôme *P*.

Les conditions imposées ont déterminé le polynôme P de façon unique. On peut d'ailleurs écrire tout polynôme de degré 2 sous la forme :

$$P(X) = P(1) + P'(1)(X-1) + P''(1)\frac{(X-1)^2}{2}$$

et cette forme montre qu'un polynôme est parfaitement déterminé par sa valeur et la valeur de ses dérivées en un point.

EXERCICE 8.

Dans $R[X]$, donner un P.G.C.D. des deux polynômes :

$$P(X) = X^{10} + X^9 + X^8 + X^7 + X^6 - X^4 + 2X^2 + 2X + 1$$

et $$Q(X) = X^{10} + X^8 + X^7 + X^2 + X + 1$$

SOLUTION.

Pour calculer le P.G.C.D. de deux polynômes, on effectue la division euclidienne des deux polynômes, puis la division euclidienne des diviseurs successifs par les restes, jusqu'à obtention d'un reste nul : le P.G.C.D. est le dernier reste non nul.

$$\begin{array}{rl} X^{10}+X^9+X^8+X^7+X^6-X^4+2X^2+2X+1 & X^1_0+X^8+X^7+X^2+X+1 \\ \hline -X^{10}-X^8-X^7-X^2-X-1 & 1 \\ \hline X^9+X^6-X^4+X^2+X & \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} X^1_0+X^8+X^7+X^2+X+1 & X^9+X^6-X^4+X^2+X \\ \hline -X^1_0-X^7+X^5-X^3-X^2 & X \\ \hline X^8+X^5-X^3+X+1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} X^9+X^6-X^4+X^2+X & X^8+X^5-X^3+X+1 \\ \hline -X^9-X^6+X^4-X^2-X & X \\ \hline 0 & \end{array}$$

Le P.G.C.D. des deux polynômes est $X^8 + X^5 - X^3 + X + 1$.

$$\begin{array}{rl} X^{10}+X^9+X^8+X^7+X^6-X^4+2X^2+2X+1 & X^8+X^5-X^3+X+1 \\ \hline -X^{10}-X^7+X^5-X^3-X^2 & X^2+X+1 \\ \hline X^9+X^8+X^6+X^5-X^4-X^3+X^2+2X+1 & \\ -X^9-X^6+X^4-X^2-X & \\ \hline X^8+X^5-X^3+X+1 & \\ -X^8-X^5+X^3-X-1 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} X^{10}+X^8+X^7+X^2+X+1 & X^8+X^5-X^3+X+1 \\ \hline -X^{10}-X^7+X^5-X^3-X^2 & X^2+1 \\ \hline X^8+X^5-X^3+X+1 & \\ -X^8-X^5+X^3-X-1 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$P(X) = (X^8 + X^5 - X^3 + X + 1)(X^2 + X + 1)$$
$$Q(X) = (X^8 + X^5 - X^3 + X + 1)(X^2 + 1)$$

EXERCICE 9.

Soit P le polynôme de $R[X]$:

$$P(X) = X^{12} + \gamma X^8 + \beta X^4 + X + \alpha$$

où α, β, γ sont des réels vérifiant :

$$1 \leq \alpha \leq \beta \text{ et } 0 \leq \gamma \leq \beta$$

1° Si x est une racine réelle de P, montrer que nécessairement

$$|x| > \alpha + \beta\,\alpha^4$$

et

$$|x| \leq 1 + \beta.$$

2° Montrer que P n'a pas de racine réelle.

SOLUTION.

1° Module d'une racine réelle.

Si x est une racine réelle de $P(X)$, on a :

$$0 = x^{12} + \gamma x^8 + \beta x^4 + x + \alpha$$

$$-x = x^{12} + \gamma x^8 + \beta x^4 + \alpha$$

Au deuxième membre, il n'y a que des termes positifs, le deuxième membre est positif, donc $-x$ est positif, et x est négatif : $|x| = -x$. Remarquons que x n'est certainement pas nul, puisque α est strictement plus grand que 0.

$$|x| = x^{12} + \gamma x^8 + \beta x^4 + \alpha$$

Nous obtenons donc :

1. $|x| > \alpha$
2. $|x| > \alpha + \beta x^4 = \alpha + \beta |x|^4 > \alpha + \beta\,\alpha^4$

$$\boxed{|x| > \alpha + \beta\,\alpha^4}$$

C'est la première inégalité qu'il fallait établir.

$$|x| > \alpha \Rightarrow \frac{1}{|x|} < \frac{1}{\alpha} < 1$$

$$-x > \alpha + \beta x^4 \Rightarrow \frac{|x|}{x^2} > \frac{\alpha}{x^2} + \beta x^2 = \sqrt{\alpha\beta}\left(\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}\,x^2} + \frac{\sqrt{\beta}\,x^2}{\sqrt{\alpha}} \right)$$

$$\frac{1}{|x|} > \sqrt{\alpha\beta}\left(\left(\sqrt{\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}\,x^2}} + \sqrt{\frac{\sqrt{\beta}\,x^2}{\sqrt{\alpha}}} \right)^2 - 2 \right) > \sqrt{\alpha\beta}\left(\frac{\sqrt{\beta}\,x^2}{\sqrt{\alpha}} - 2 \right) = \beta |x|^2 - 2\sqrt{\alpha\beta}$$

$$1 > \frac{1}{|x|} > \beta |x|^2 - 2\sqrt{\alpha\beta}$$

$$\beta |x|^2 < 1 + 2\sqrt{\alpha\beta}$$

$$|x| < \sqrt{\frac{1}{\beta} + 2\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}} < \sqrt{\frac{1}{\beta} + 2\sqrt{\frac{\alpha}{\beta} + \alpha}} = \sqrt{\alpha} + \frac{1}{\sqrt{\beta}} < \sqrt{\beta} + \frac{1}{\sqrt{\beta}} < \beta + 1$$

car : $1 < \alpha < \beta \Rightarrow 1 < \sqrt{\alpha} < \sqrt{\beta} < \beta$ et $\frac{1}{\sqrt{\beta}} < 1$.

$$\boxed{|x| < 1 + \beta}$$

C’est la deuxième inégalité qu’il fallait établir.

2° Il n’y a pas de racine réelle.

S’il y a une racine réelle x, elle vérifie :
— x est négatif
— $\alpha + \beta\,\alpha^4 < |x| < 1 + \beta$
Mais comme, par hypothèse, α est strictement plus grand que 1, $\alpha + \beta\,\alpha^4$ est strictement plus grand que $1 + \beta$ et l’on arrive à :

$$1 + \beta < |x| < 1 + \beta$$

ce qui est absurde. Il ne peut donc pas y avoir de racine racine réelle.

EXERCICE 10.

Soit la fonction : $y = \frac{1}{1 ? x^2}$. (1)

1. Construire la courbe *(C)* représentant les variations de cette fonction.
2. Calculer les dérivées seconde et troisième y'' et y'''. Préciser la concavité de y. Calculer les tangentes aux points d'inflexion.
3. On considère le point A de la courbe, d'abscisse 2. Ecrire le développement de Taylor

$$y(2) + y'(2)\,(x ? 2) + y''(2)\,\frac{(x ? 2)^2}{2!} + y'''(2)\,\frac{(x ? 2)^3}{3!}$$

de la fonction (1) au voisinage de $x = 2$. On se limitera à quatre termes.
On désigne par $F(x)$ la fonction représentée par les trois premiers termes. Construire la courbe (*?*) représentative de $F(x)$. Préciser la position relative des deux courbes (*?*) et *(C)* au voisinage de A.

4. Montrer que la dérivée n-ième de y est de la forme : $y^{(n)} = \frac{P_n(x)}{(1 ? x^2)^{n?1}}$, $P_n\,(x)$ étant un polynôme de degré n en x. Trouver l'expression (E) de P_n en fonction de $P_{n\,?\,1}$ et de $P'_{n\,?\,1}$. En déduire l'expression (E_1) de P_{n+1} en fonction de P_n et de P'_n. Montrer que P_n est une fonction paire ou impaire suivant la parité de l'entier n.
5. En raisonnant par récurrence, montrer que l'équation $P_n\,(x) = 0$ admet n racines réelles $x_1 , \ldots , x_n$. Pour cela, on constatera que les racines de $P_n\,(x)$ sont les racines de l'équation $y^{(n)} = 0$, et on utilisera le théorème de Rolle (*entre deux points où la fonction est nulle, il y a un point où sa dérivée est nulle*).
6. La relation (1) s'écrit :

$$y\,(1 + x^2) = 1 \qquad (2)$$

En appliquant la formule de Leibnitz (*dérivation d'un produit de fonctions par la formule du binôme*) à la relation (2), déterminer une relation (R) entre $P_n\,(x)$, $P_{n\,?\,1}\,(x)$ et $P_{n\,?\,2}\,(x)$. A l'aide de la relation (R) et de (E_1), montrer que l'on a :

$$(1 + x^2)\,P?_n\,(x) ? 2\,n\,x\,P'_n\,(x) + n\,(n + 1)\,P_n\,(x) = 0 \quad (3)$$

7. A l'aide de la relation (3) et en calculant les coefficients à partir du coefficient a_n du terme de degré n, déterminer le coefficient du terme général du polynôme $P_n\,(x)$ en fonction de n et de son rang.

SOLUTION.

1°/ Courbe représentative *(C)*.

a) Intervalle de définition.

Le dénominateur de la fraction rationnelle $y = \frac{1}{1+x^2}$ n'est jamais nul : la fonction y est donc définie pour toute valeur réelle de x. L'intervalle de définition est l'intervalle $]-\infty ; +\infty[$.

b) Symétries.

Si l'on change x en $-x$ dans $\frac{1}{1+x^2}$, l'expression reste inchangée, y est changé en y. La fonction est donc une fonction paire, et sa courbe représentative admet l'axe Oy comme axe de symétrie. Il suffit donc d'étudier la fonction y de 0 à $+\infty$, le reste s'en déduira par symétrie.

c) Continuité.

La fonction y est une fonction continue de x pour toute valeur de x.

d) Limites aux bornes de l'intervalle de définition.

Lorsque x tend vers l'infini, $1 + x^2$ est équivalent à son terme de plus fort degré, soit x^2 et y est équivalent à $\frac{1}{x^2}$, qui tend vers 0.

e) Dérivée.

Posons $u = 1 + x^2$. On obtient, par dérivation : $\frac{du}{dx} = 2x$.

$y = \frac{1}{u}$ a pour dérivée $\frac{dy}{du} = -\frac{1}{u^2} = -\frac{1}{(1+x^2)^2}$ et la formule de dérivation des fonctions composées donne :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$$

Comme le facteur $\frac{2}{(1+x^2)^2}$ est strictement plus grand que 0 pour toute valeur de x, la dérivée a le signe de $-x$. Elle est négative pour les valeurs positives de x et, par symétrie, positive pour les valeurs négatives de x. La fonction y est donc strictement croissante pour les valeurs négatives de x et strictement décroissante pour les valeurs positives de x.

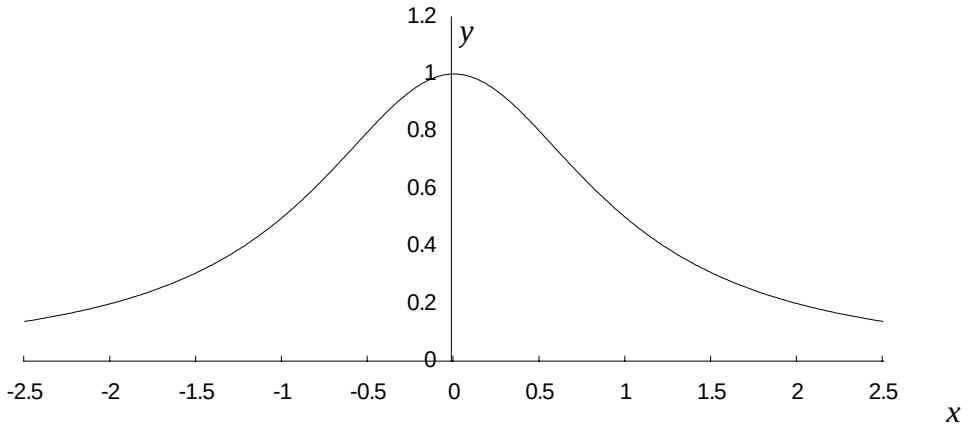
La dérivée $y' = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$ est nulle pour $x = 0$, et en ce point, la dérivée change de signe, passant de valeurs positives à des valeurs négatives lorsque x croît. C'est dire que y croît puis décroît : le point $x = 0$ est donc un maximum de y.

f) Tableau de variations.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'	0	+	0	+	0
y	0	↗	1	↘	0

g) Courbe représentative.

Compte tenu des indications précédentes, on peut tracer la courbe représentative *(C)* :



Courbe représentative (C) de la fonction $y = \dfrac{1}{1+x^2}$

2°/ Points d'inflexion.

Les points d'inflexion sont les points où la courbe traverse sa tangente : la dérivée est maximum ou minimum. Ce sont donc des points où la dérivée seconde est nulle. Pour les étudier, il faut connaître la dérivée seconde y'' et la dérivée troisième y'''. Calculons ces dérivées.

$$y' = -\frac{2x}{(1+x^2)^2} = -2\,x\,y^2$$

$$y'' = -2\,y^2 - 4\,x\,y\,y' = -2\,y^2 + 8\,x^2\,y^3 = 2\,y^2\,(4\,x^2\,y - 1)$$

$$= \frac{2}{(1+x^2)^2} \times \left(\frac{4x^2}{1+x^2} - 1 \right) = \frac{2\,(3x^2-1)}{(1+x^2)^3} = 2\,(3\,x^2 - 1)\,y^3$$

$$y''' = 2\,(6\,x\,y^3 + 3\,(3\,x^2 - 1)\,y^2\,y') = 6\,y^2\,(2\,x\,y + (3\,x^2 - 1)\,y')$$

$$= 6\,y^2\,(2\,x\,y - (3\,x^2 - 1)\,2\,x\,y^2)$$

$$y''' = 12\,x\,y^3\,(1 - (3\,x^2 - 1)\,y) = 12\,x\,y^3\,\left(1 - \frac{3x^2-1}{1+x^2}\right) = \frac{24\,x\,(1-x^2)}{(1+x^2)^4}$$

$y'' = \dfrac{2\,(3x^2-1)}{(1+x^2)^3}$	et	$y''' = \dfrac{24\,x\,(1-x^2)}{(1+x^2)^4}$

Les points d'inflexion sont les points où la dérivée seconde est nulle avec une dérivée troisième différente de 0. Les valeurs de x qui annulent la dérivée seconde sont les solutions de l'équation :

$$3\,x^2 - 1 = 0$$

Ce sont les valeurs symétriques :

$$x = \pm\,\frac{\sqrt{3}}{3}$$

En ces points, on a $3\,x^2 = 1$, $x^2 = \dfrac{1}{3}$, et la dérivée troisième vaut :

$$y''' = \pm 8\sqrt{3} \times \frac{1-\frac{1}{3}}{\left(1+\frac{1}{3}\right)^4} = \pm 8 \times 3^3 \times \frac{2}{4^4} = \pm \frac{27\sqrt{3}}{16}.$$

Elle n'est pas nulle, donc la dérivée seconde change de signe en ces points. Il s'agit bien de points d'inflexion.
Pour porter ces points d'inflexion avec précision sur la courbe (C), il faut aussi calculer la valeur de la dérivée aux points d'inflexion et la valeur de y :

$$y = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1+\frac{1}{3}} = \frac{3}{4}$$
$$y' = -\frac{2x}{(1+x^2)^2} = \mp 2\,\frac{\sqrt{3}}{3} \times \frac{9}{16} = \mp \frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

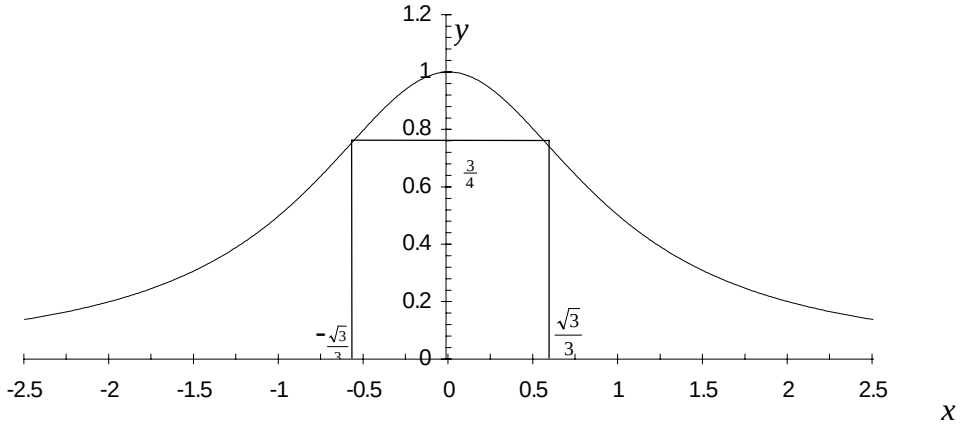
L'équation de la tangente au point d'abscisse $x = \varepsilon \frac{\sqrt{3}}{3}$, avec $\varepsilon = \pm 1$, est :

$$y - \frac{3}{4} = -\varepsilon \frac{3\sqrt{3}}{8}\left(x - \varepsilon \frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\varepsilon \frac{3\sqrt{3}}{8}\,x + \frac{3}{8}$$
$$y = -\varepsilon \frac{3\sqrt{3}}{8}\,x + \frac{9}{8} = \frac{3}{8}\,(3 - \varepsilon\sqrt{3}\,x)$$

En résumé :

> La courbe (C) a deux points d'inflexion :
> · Les coordonnées sont : $x = \varepsilon \frac{\sqrt{3}}{3}$, avec $\varepsilon = \pm 1$, et $y = \frac{3}{4}$.
> · Les tangentes à (C) en ces points sont les droites : $\frac{3}{8}\,(3 - \varepsilon\sqrt{3}\,x)$.

Le signe de $y'' = \frac{2\,(3x^2-1)}{(1+x^2)^3}$ permet aussi de préciser la concavité de la courbe (C).
Le polynôme $3x^2 - 1$ est négatif entre ses racines et positif à l'extérieur des racines : la dérivée seconde y'' est donc négative entre les points d'inflexion, et positive à l'extérieur des points d'inflexion. La courbure, déterminée par le signe de la dérivée seconde, est négative entre les points d'inflexion, et positive à l'extérieur, ce qui signifie que la concavité de la courbe est dirigée vers le bas entre les points d'inflexion, et vers le haut à l'extérieur. Entre les deux, aux points d'inflexion, la courbure est nulle et la courbe traverse sa tangente.
La dérivée seconde permet aussi de calculer le rayon de courbure R = en chaque point, et notamment au point (x = 0 ; y = 1) : R0 = = - .
Avec ces indications, la courbe (C) devient :



Courbe représentative (C) de la fonction $y = \dfrac{1}{1+x^2}$

3°/ Développement en série de Taylor.

La formule de Taylor, limitée aux quatre premiers termes s'écrit :

$$f(x) = f(a) + \frac{(x-a)}{1\,!}\,f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2\,!}\,f''(a) + \frac{(x-a)^3}{3\,!}\,f'''(a) + (x-a)^3\,\varepsilon(x-a)$$

Dans cette formule $\varepsilon(x-a)$ est un terme qui tend vers 0 lorsque x tend vers a.

Pour $a = 2$, nous obtenons :

$$y = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{5}$$

$$y' = -\frac{2x}{(1+x^2)^2} = -\frac{4}{25}$$

$$y'' = \frac{2\,(3x^2-1)}{(1+x^2)^3} = \frac{22}{125}$$

$$y''' = \frac{24\,x\,(1-x^2)}{(1+x^2)^4} = -\frac{144}{625}$$

d'où :

$$y = \frac{1}{5} - \frac{4}{25}\,\frac{x-2}{1\,!} + \frac{22}{125}\,\frac{(x-2)^2}{2\,!} - \frac{144}{625}\,\frac{(x-2)^3}{3\,!} + (x-2)^3\,\varepsilon(x-2) \text{ avec } \varepsilon(x-2) \to 0 \text{ si } x \to 2.$$

C'est le développement en série de Taylor de y au voisinage du point $x = 2$. On peut l'écrire, en simplifiant :

$$y = \frac{1}{5} - \frac{4}{25}\,(x-2) + \frac{11}{125}\,(x-2)^2 - \frac{24}{625}\,(x-2)^3 + (x-2)^3\,\varepsilon(x-2) \text{ avec } \varepsilon(x-2) \to 0 \text{ si } x \to 2.$$

Fonction *F (x)*.

La fonction *F (x)* donnée par les trois premiers termes du développement est donc le polynôme du deuxième degré :

$$F(x) = \frac{1}{5} - \frac{4}{25}\,(x-2) + \frac{11}{125}\,(x-2)^2$$

Courbe représentative (Γ).

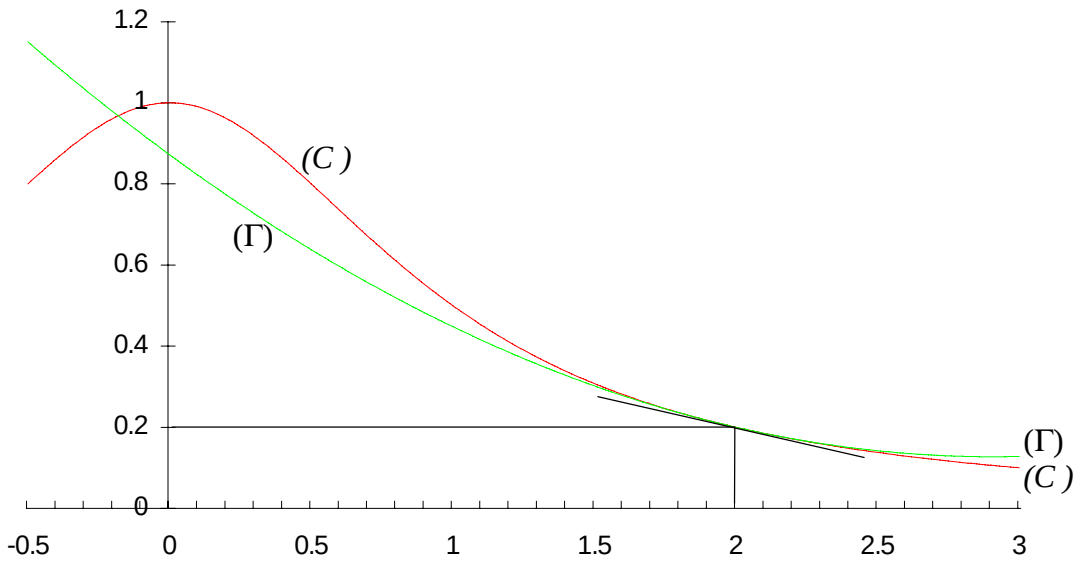
La courbe représentative (Γ) de la fonction $F(x)$ est une parabole d'axe vertical, dont la concavité est dirigée vers le haut, et dont l'axe de symétrie est à une abscisse x annulant la dérivée :

$$F'(x) = -\frac{4}{25} + \frac{22}{125}(x-2) = 0 \Rightarrow x - 2 = \frac{10}{11} \Rightarrow x = \frac{32}{11}$$

Au voisinage de $x = 2$, $y - F(x) = -\frac{22}{625}(x-2)^3 + (x-2)^3\,\varepsilon(x-2)$ avec $\varepsilon(x-2) \to 0$ si $x \to 2$.

On voit donc que $y - F(x)$ est positif si x est plus petit que 2, et négatif si x est plus grand que 2. Ceci signifie qu'au voisinage de $x = 2$, la courbe (C) est au-dessus de la courbe (Γ) pour $x < 2$ et en dessous de la courbe (Γ) pour $x > 2$. Les deux courbes sont tangentes (elles ont la même tangente) pour $x = 2$.

Ces résultats peuvent être portés sur le diagramme :



Courbes représentatives de $y = \frac{1}{1+x^2}$ *(courbe C)*
et $F(x) = \frac{1}{5} - \frac{4}{25}(x-2) + \frac{11}{125}(x-2)^2$ *(courbe Γ).*

4°/ Dérivée d'ordre *n* de *y*.

Forme de la dérivée d'ordre *n*.

Pour montrer que la dérivée d'ordre n de y est toujours de la forme :

$$y^{(n)} = \frac{P_n(x)}{\left(1+x^2\right)^{n+1}}, \text{ où } P_n(x) \text{ est un polynôme de degré } n \text{ en } x,$$

nous allons raisonner par récurrence sur l'entier n.

La propriété est vraie pour $n = 0$, puisque, par définition, on a : $y = \frac{1}{1+x^2}$ et 1 est un polynôme de degré 0.

Supposons la propriété vraie pour un entier naturel $n \geq 0$ et dérivons la fonction :

$$y^{(n)} = \frac{P_n(x)}{\left(1+x^2\right)^{n+1}}, \text{ où } P_n(x) \text{ est un polynôme de degré } n \text{ en } x,$$

On obtient, par dérivation d'un produit :

$$y^{(n+1)} = \frac{P'_n(x)}{\left(1+x^2\right)^{n+1}} - (n+1)\frac{2\,x\,P_n(x)}{\left(1+x^2\right)^{n+2}} = \frac{\left(1+x^2\right)P'_n(x) - 2\,(n+1)\,x\,P_n(x)}{\left(1+x^2\right)^{n+2}}$$

Posons $P_{n+1}(x) = (1+x^2)\,P'_n(x) - 2\,(n+1)\,x\,P_n(x)$.
La dérivée d'ordre $n+1$ est de la forme :

$$y^{(n+1)} = \frac{P_{n+1}(x)}{\left(1+x^2\right)^{n+2}}$$

Si $n = 0$, $P_n(x)$ est une constante et sa dérivée est nulle, donc
$P_{n+1}(x) = (1+x^2)\,P'_n(x) - 2\,(n+1)\,x\,P_n(x)$ est un polynôme de degré 1 : $P_1(x) = -2x$.
Ce résultat était déjà connu car on a calculé $y' = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$.
Si $n > 0$, $P_n(x)$ est un polynôme de degré n, $x\,P_n(x)$ est un polynôme de degré $n+1$, $P'_n(x)$ est un polynôme de degré $n-1$, $(1+x^2)\,P'_n(x)$ est un polynôme de degré $n+1$, de sorte que la différence :

$$P_{n+1}(x) = (1+x^2)\,P'_n(x) - 2\,(n+1)\,x\,P_n(x)$$

est un polynôme de degré inférieur ou égal à $n+1$. Pour montrer qu'il s'agit bien d'un polynôme de degré $n+1$, il reste à calculer le terme de plus fort degré.
Soit $a_n x^n$ le terme, non nul, de plus haut degré dans $P_n(x)$. Le terme de plus haut degré de $P_{n+1}(x)$ est :
$x^2 \times n\,a_n x^{n-1} - 2\,(n+1)\,x \times a_n x^n = (n - 2n - 2)\,a_n x^{n+1} = -(n+2)\,a_n x^{n+1}$
Comme n est positif, $n+2$ est strictement positif et le coefficient $a_{n+1} = -(n+2)\,a_n$ n'est pas nul, donc le polynôme $P_{n+1}(x)$ est effectivement un polynôme de degré $n+1$. La propriété est donc vraie pour $n+1$ dès qu'elle vraie pour un entier $n \geq 0$.
Le principe de récurrence permet alors d'affirmer que :

Pour tout entier naturel $n \geq 0$, la dérivée d'ordre n de y est de la forme :

$$y^{(n)} = \frac{P_n(x)}{\left(1+x^2\right)^{n+1}}, \text{ où } P_n(x) \text{ est un polynôme de degré } n \text{ en } x,$$

Au passage, nous avons démontré aussi la relation :

$$P_{n+1}(x) = (1+x^2)\,P'_n(x) - 2\,(n+1)\,x\,P_n(x) \qquad (E_1)$$

pour $n \geq 0$.
Pour $n \geq 1$, on peut donc écrire, en remplaçant n par $n-1$:

$$P_n(x) = (1+x^2)\,P'_{n-1}(x) - 2\,n\,x\,P_{n-1}(x) \qquad (E)$$

Parité du polynôme $P_n\ (x)$.

$P_0\ (x) \equiv 1$ est une fonction paire.
$P_1\ (x) \equiv -2\ x$ est une fonction impaire.

Supposons que, pour un entier $k \geq 0$, $P_{2\,k}\ (x)$ soit une fonction paire et $P_{2\,k+1}\ (x)$ soit une fonction impaire. Alors la formule (E_1) donne :

$$P_{2\,k+2}\ (x) = (1 + x^2)\ P'_{2\,k+1}\ (x) - 2\ (2\,k + 2)\ x\ P_{2k+1}\ (x)$$

En changeant x en $-x$, on obtient :

$$P_{2\,k+2}\ (-x) = (1 + x^2)\ P'_{2\,k+1}\ (-x) + 2\ (2\,k + 2)\ x\ P_{2k+1}\ (-x)$$

Or, par hypothèse, la fonction $P_{2\,k+1}\ (x)$ est une fonction impaire, donc $P_{2k+1}\ (-x) = -P_{2k+1}\ (x)$. Montrons aussi, sous forme de lemme, que la dérivée d'une fonction impaire est toujours une fonction paire.

Lemme. *La dérivée d'une fonction impaire est une fonction paire.*

> Soit f une fonction réelle de variable réelle, impaire, continue et dérivable pour tout $x \in R$: dérivons la relation $f\ (-x) = -f\ (x)$, valable pour tout x.
>
> $$-f'\ (-x) = -f'\ (x)$$
>
> et cette relation montre que l'on a : $f'\ (-x) = f'\ (x)$ pour tout x. La dérivée f' est donc une fonction paire.

D'après le lemme, comme $P_{2\,k+1}\ (x)$ est une fonction impaire, sa dérivée est une fonction paire :

$$P'_{2\,k+1}\ (-x) = P'_{2\,k+1}\ (x)$$

Il vient donc :

$$P_{2\,k+2}\ (-x) = (1 + x^2)\ P'_{2\,k+1}\ (x) - 2\ (2\,k + 2)\ x\ P_{2k+1}\ (x) = P_{2\,k+2}\ (x)$$

La fonction $P_{2\,k+2}\ (x)$ est donc une fonction paire.
La formule (E_1) donne encore :

$$P_{2\,k+3}\ (x) = (1 + x^2)\ P'_{2\,k+2}\ (x) - 2\ (2\,k + 3)\ x\ P_{2k+2}\ (x)$$

En changeant x en $-x$, on obtient :

$$P_{2\,k+3}\ (-x) = (1 + x^2)\ P'_{2\,k+2}\ (-x) + 2\ (2\,k + 3)\ x\ P_{2k+2}\ (-x)$$

Or, nous venons de voir que la fonction $P_{2\,k+2}\ (x)$ est une fonction paire, donc $P_{2k+2}\ (-x) = P_{2k+2}\ (x)$. Montrons aussi, sous forme de lemme, que la dérivée d'une fonction paire est toujours une fonction impaire.

Lemme. *La dérivée d'une fonction paire est une fonction impaire.*

> Soit f une fonction réelle de variable réelle, paire, continue et dérivable pour tout $x \in R$: dérivons la relation $f\ (-x) = f\ (x)$, valable pour tout x.
>
> $$-f'\ (-x) = f'\ (x)$$
>
> et cette relation montre que l'on a : $f'\ (-x) = -f'\ (x)$ pour tout x. La dérivée f' est donc une fonction impaire.

D'après le lemme, comme $P_{2\,k+2}\ (x)$ est une fonction paire, sa dérivée est une fonction impaire :

$$P'_{2\,k+2}\ (-x) = -P'_{2\,k+1}\ (x)$$

Il vient donc :

$$P_{2\,k+3}\ (-x) = -(1 + x^2)\ P'_{2\,k+2}\ (x) + 2\ (2\,k + 3)\ x\ P_{2k+2}\ (x) = -P_{2\,k+3}\ (x)$$

La fonction $P_{2\,k+3}\ (x)$ est donc une fonction impaire.

Le principe de récurrence permet alors d'affirmer que :

> Pour tout entier $n \geq 0$, la fonction polynômiale $P_n\,(x)$ a la parité de n :
>
> - Si n est pair, $P_n\,(x)$ est une fonction paire.
> - Si n est impaire, $P_n\,(x)$ est une fonction impaire.

5°/ Racines du polynôme $P_n\,(x)$.

La relation $y^{(n)} = \dfrac{P_n(x)}{\left(1+x^2\right)^{n+1}}$, jointe au fait que $(1 + x^2)^{n+1}$ est toujours strictement positif, montre clairement que les racine du polynôme $P_n\,(x)$ sont les valeurs de x qui annulent la dérivée d'ordre n, $y^{(n)}$.

Nous allons montrer par récurrence que :

La dérivée d'ordre n, $y^{(n)}$, s'annule n fois dans l'intervalle $]-\infty\,;+\infty[$, pour tout entier naturel $n \geq 0$.

La propriété est vraie pour $n = 0$, puisque la dérivée d'ordre 0 est la fonction $y = \dfrac{1}{1+x^2}$. Cette fonction est strictement positif pour toute valeur de x. La dérivée d'ordre 0 s'annule 0 fois dans l'intervalle $]-\infty\,;+\infty[$.

Supposons la propriété vraie pour un entier $n \geq 0$: la dérivée d'ordre n s'annule n fois dans l'intervalle de définition de y. Appelons alors $x_1\,,\ldots,\,x_n$ les n racines de $y^{(n)}$, rangées par ordre croissant. Ces n racines déterminent $n + 1$ intervalles dans R :

$$]-\infty\,;x_1\,]\,;[x_1\,;x_2\,]\,;\ldots\,;[x_n\,;+\infty[$$

Lorsque x tend vers l'infini, la dérivée $y^{(n)}$ est équivalente à $a_n \times \dfrac{x^n}{x^{2\,(n+1)}} = \dfrac{a_n}{x^{n+2}}$, a_n étant le coefficient, non nul, de x^n dans $P_n\,(x)$. Il en résulte que $y^{(n)}$ tend vers 0 lorsque x tend vers l'infini. Ainsi, pour chacun des intervalles déterminés par les racines de $y^{(n)}$, $y^{(n)}$ tend vers 0 si x tend vers l'une des bornes de l'intervalle, et la fonction $y^{(n)}$ est continue et dérivable en tout point intérieur à l'intervalle.

Pour les n racines $x_1\,,\ldots,\,x_n$ de $y^{(n)}$ qui sont à distance finie, le théorème de Rolle s'applique : il existe, dans chaque intervalle $]x_i\;;\,x_{i\,+\,1}\,[$ au moins une valeur c_i de x pour laquelle la dérivée de $y^{(n)}$ est nulle : c'est une racine de $y^{(n\,+\,1)}$.

Dans l'intervalle $]-\infty\,;\,x_1\,[$, la fonction $y^{(n)}$ ne s'annule pas. Comme elle est continue, elle garde le même signe et elle tend vers 0 vers les bornes de l'intervalle. Vers l'infini, la fonction $y^{(n)}$ est équivalente à $\dfrac{a_n}{x^{n+2}}$, c'est donc une fonction monotone, décroissante en valeur absolue et tendant vers 0 lorsque x tend vers 0 en restant dans l'intervalle $]-\infty\,;\,x_1\,[$. Vers x_1 , la fonction $y^{(n)}$ est équivalente à

$$y^{(n)}\,(x_1\,) + y^{(n+1\,)}(x_1\,)\times(x - x_1\,) = y^{(n+1\,)}(x_1\,)\times(x - x_1\,)$$

C'est donc aussi une fonction monotone, décroissante en valeur abolue et tendant vers 0 lorsque x tend vers 0 en restant dans l'intervalle $]-\infty\,;\,x_1\,[$.

On peut donc trouver, par application du théorème de Weierstrass, un $x_0 \in \,]-\infty\,;\,x_1\,[$ et un $\eta>0$ tels que l'on ait :

$y^{(n)}\,(x_0\,) = y^{(n)}\,(x_1 - \eta)$ et $y^{(n)}$ monotone décroissant en valeur absolue pour $x < x_0$ et pour $x_1 - \eta < x < x_1$.

Considérons alors la fonction $y^{(n)} - y^{(n)}\,(x_0)$. Elle est nulle aux bornes de l'intervalle fermé borné $[x_0\,;\,x_1 - \eta]$, elle est définie, continue et dérivable dans l'intervalle ouvert $]x_0\,;\,x_1 - \eta[$. Le théorème de Rolle permet alors d'affirmer que sa dérivée est nulle au moins une fois dans cet intervalle. Il existe donc une racine de $y^{(n\,+\,1)}$ dans l'intervalle $]x_0\,;\,x_1 - \eta[$, donc dans l'intervalle $]-\infty\,;\,x_1\,[$. Par symétrie, il en existera une aussi dans l'intervalle ouvert $]x_n\,;\,+\,\infty[$.

Au total, nous avons trouvé au moins une racine de $y^{(n\,+\,1)}$ dans chacun des $n + 1$ intervalles déterminé dans R par les n racines de $y^{(n)}$. Donc $y^{(n\,+\,1)}\,(1 + x^2\,)^{n\,+\,2} = P_{n\,+\,1}$ a au moins n racines réelles. Comme c'est un polynôme de degré $n + 1$, il a au plus $n + 1$ racines réelles. $P_{n\,+\,1}$ a donc exactement $n + 1$ racines réelles, et $y^{(n\,+\,1)}$ aussi. Ainsi, la propriété est vraie pour $n + 1$ dès qu'elle est vraie pour n.

Le principe de récurrence permet alors d'affirmer que :

> Pour tout entier naturel $n \geq 0$, le polynôme $P_n\,(x)$ a exactement n racines réelles.

6°/ Relation de récurrence entre les P_n .

La formule de Leibnitz appliquée au produit de fonction $y\,(1 + x^2\,) = 1$ s'écrit, pour n entier quelconque ≥ 0 :

$$[\,y\,(1 + x^2\,)\,]^{(n)} = \binom{n}{0}\,y^{(n)}\,(1 + x^2\,)^{(0)} + \binom{n}{1}\,y^{(n\,-\,1)}\,(1 + x^2\,)^{(1)} + \binom{n}{2}\,y^{(n\,-\,2)}\,(1 + x^2\,)^{(2)} + \ldots$$

Les termes suivants du développement en puissances symboliques sont toujours nuls car la dérivée troisième du polynôme de degré 2 : $(1 + x^2)$, est nulle, ainsi que les dérivées d'ordre plus élevé que 3. On a :

$$(1 + x^2\,)^{(0)} = (1 + x^2\,)\,;\,(1 + x^2\,)^{(1)} = 2\,x\,;\,(1 + x^2\,)^{(2)} = 2.$$

Dans la formule, le symbole $\binom{n}{p}$ désigne le coefficient binomial d'indices n et p, nul pour $p > n$. On a :

$$\binom{n}{0} = 1\,;\,\binom{n}{1} = n\,;\,\binom{n}{2} = \frac{n\,(n-1)}{2}.$$

La puissance symbolique $y^{(p)}$ désigne la dérivée d'ordre p, nulle pour $p < 0$.

La dérivée d'ordre n de 1 est $\delta_{n\,,\,1} = \begin{cases} 1 \text{ si } n = 1 \\ 0 \text{ si } n \neq 1 \end{cases}$ (symbole de Kronecker).

La formule de Leibnitz se réduit donc à :

$$y^{(n)}\,(1 + x^2\,) + 2\,n\,x\,y^{(n\,-\,1)} + n\,(n - 1)\,y^{(n\,-\,2)} = \delta_{n\,,\,1}$$

Compte tenu de la relation $y^{(n)} = \dfrac{P_n(x)}{\left(1+x^2\right)^{n+1}}$ valable pour tout $n \geq 0$, il vient alors, pour $n \geq 2$:

$$\frac{P_n(x)}{\left(1+x^2\right)^n} + 2\,n\,x\,\frac{P_{n-1}(x)}{\left(1+x^2\right)^n} + n\,(n-1)\,\frac{P_{n-2}(x)}{\left(1+x^2\right)^{n-1}} = 0$$

soit :

$$\boxed{P_n\,(x) + 2\,n\,x\,P_{n-1}\,(x) + n\,(n-1)\,(1+x^2)\,P_{n-2}\,(x) = 0}$$

C'est la relation *(R)* qu'il fallait démontrer.

Appliquée en remplaçant n par $n + 1$, cette relation s'écrit sous la forme (R_1) suivante :

$$P_{n+1}\,(x) + 2\,(n+1)\,x\,P_n\,(x) + (n+1)\,n\,(1+x^2)\,P_{n-1}\,(x) = 0$$

$$P_{n+1}\,(x) + 2\,(n+1)\,x\,P_n\,(x) = -\,n\,(n+1)\,(1+x^2)\,P_{n-1}\,(x) \qquad (R_1)$$

La relation (E_1) :

$$P_{n+1}\,(x) = (1+x^2)\,P'_n\,(x) - 2\,(n+1)\,x\,P'_n\,(x)$$

donnait :

$$P_{n+1}\,(x) + 2\,(n+1)\,x\,P_n\,(x) = (1+x^2)\,P'_n\,(x)$$

En reportant cette valeur dans la relation (R_1), il reste :

$$(1+x^2)\,P'_n\,(x) = -\,n\,(n+1)\,(1+x^2)\,P_{n-1}\,(x)$$

soit, en simplifiant par $(1 + x^2)$ qui n'est jamais nul :

$$P'_n\,(x) = -\,n\,(n+1)\,P_{n-1}\,(x)$$

Par dérivation, on obtient :

$$P''_n\,(x) = -\,n\,(n+1)\,P'_{n-1}\,(x)$$

La relation *(E)* :

$$P_n\,(x) = (1+x^2)\,P'_{n-1}\,(x) - 2\,n\,x\,P_{n-1}\,(x)$$

peut donc être écrite :

$$P_n\,(x) = -(1+x^2)\,\frac{P''_n(x)}{n\,(n+1)} + 2\,n\,x\,\frac{P'_n(x)}{n\,(n+1)}$$

d'où la relation (3) demandée :

$$\boxed{(1+x^2)\,P''_n\,(x) - 2\,n\,x\,P'_n\,(x) + n\,(n+1)\,P_n\,(x) = 0}$$

Cette relation est l'***équation différentielle*** des polynômes $P_n\,(x)$.

7°/ Expression des coefficients des polynômes $P_n\,(x)$.

Soient a_k le coefficient de x^k dans le polynôme $P_n\,(x)$, $k = 0, \ldots, n$.

Si n est pair, $P_n\,(x)$ est une fonction paire et n'a donc que des puissances paires de x : les coefficients d'indices impaires sont nuls. Si n est impair, $P_n\,(x)$ est une fonction impaire et n'a donc que des puissances impaires de x : les coefficients d'indices paires sont nuls.

Calculons le terme de degré k du premier membre de la relation (3) :

$$(k+2)\,(k+1)\,a_{k+2} + k\,(k-1)\,a_k - 2\,n\,k\,a_k + n\,(n+1)\,a_k = 0$$

$(k+2)\,(k+1)\,a_{k+2} = (2\,n\,k - n^2 - n - k\,(k-1))\,a_k = (\,n\,(k-1) - n\,(n-k) - k\,(k-1))\,a_k$

$= ((n-k)(k-1) - n\,(n-k))\,a_k = -\,(n-k)(n-k+1)\,a_k$

$$a_{k+2} = -\,\frac{(n-k+1)(n-k)}{(k+2)(k+1)}\,a_k$$

Dans la relation (3), le terme de degré n est donné par :

$$n\,(n-1)\,a_n - 2\,n^2\,a_n + n\,(n+1)\,a_n = 0$$

Il faut donc calculer a_n par un autre procédé.

Calcul du coefficient a_n .

Appelons b_n le coefficient du terme de plus haut degré de $P_n\,(x)$. Calculons b_n par récurrence à partir de la formule $(R\,)$:

$$P_n\,(x) + 2\,n\,x\,P_{n-1}\,(x) + n\,(n-1)\,(1+x^2\,)\,P_{n-2}\,(x) = 0$$

Dans cette formule, le terme de degré n doit être nul :

$$b_n + 2\,n\,b_{n-1} + n\,(n-1)\,b_{n-2} = 0$$

Les calculs des dérivées successives de la fonction y (question 2°) nous ont fourni :

$P_0\,(x) = 1$, d'où $b_0 = 1$;

$P_1\,(x) = -\,2\,x$, d'où $b_1 = -\,2$;

$P_2\,(x) = 2\,(3\,x^2 - 1)$, d'où $b_2 = 6$

$P_3\,(x) = 24\,x\,(1 - x^2\,)$, d'où $b_3 = -\,24$

Ceci nous amène à poser comme hypothèse de récurrence :

$$b_n = (-1)^n \times (n+1)!$$

La formule de récurrence :

$$b_{n+1} + 2\,(n+1)\,b_n + (n+1)\,n\,b_{n-1} = 0$$

donne alors :

$$b_{n+1} = -\,2\,(n+1)\,(-1)^n\,(n+1)\,! + (n+1)\,n\,(-1)^n\,n!$$

$$b_{n+1} = (-1)^n\,(n+1)!\,[\,-\,2\,n - 2 + n\,] = (-1)^{n+1}\,(n+2)!$$

C'est la formule de l'hypothèse de récurrence avec $n+1$ au lieu de n. Le principe de récurrence montre donc que pour tout n, le coefficient du terme en x^n du polynôme $P_n\,(x)$ est $(-1)^n \times (n+1)!$

$$a_n = (-1)^n \times (n+1)!$$

Calcul du coefficient a_{n-2k} .

La formule de récurrence liant les coefficients du polynôme $P_n\,(x)$

$$a_{k+2} = -\,\frac{(n-k+1)(n-k)}{(k+2)(k+1)}\,a_k$$

peut être écrite :

$$a_k = -\,\frac{(k+2)(k+1)}{(n-k+1)(n-k)}\,a_{k+2}$$

Remplaçons, dans cette formule, k par $(n - 2\,k)$, il vient :

$$a_{n-2k} = -\frac{(n-2k+2)(n-2k+1)}{2k(2k+1)}\,a_{n-2k+2}$$

et la formule est valable depuis $k = 1$, jusqu'à la partie entière de $\frac{n}{2}$.

Elle donne, pour les valeurs successives de k :

$$a_{n-2} = -\frac{n(n-1)}{2\times 3}\,a_n$$

$$a_{n-4} = -\frac{(n-2)(n-3)}{4\times 5}\,a_{n-2}$$

$$\dots$$

$$a_{n-2k} = -\frac{(n-2k+2)(n-2k+1)}{2k(2k+1)}\,a_{n-2k+2}$$

Multiplions membre à membre ces k égalités et simplifions :

$$a_{n-2k} = (-1)^k\,\frac{n!}{(n-2k)\,!\,(2k+1)\,!}\,a_n$$

En utilisant la valeur trouvée pour a_n et en introduisant le coefficient binomial $\binom{n}{2k}$, cette formule donne le coefficient a_{n-2k} et rappelons par ailleurs que la parité de $P_n\,(x)$ impose la nullité des termes qui n'ont pas la parité de n :

$$\boxed{\begin{aligned} a_{n-2k} &= (-1)^{n+k}\,\binom{n}{2k}\,\frac{(n+1)\,!}{2k+1} \\ a_{n-1-2k} &= 0 \end{aligned}}$$

Les formules sont établies pour toutes les valeurs possibles d'indices.

Vérifions ces formules pour les polynômes $P_n\,(x)$ que nous connaissons déjà :

- $n = 0$

La seule valeur possible de k est $k = 0$. La formule donne $a_0 = 1$. $P_0\,(x) = 1$

- $n = 1$

La seule valeur posible de k est $k = 0$. Les formulent donnent $a_1 = -2$ et $a_0 = 0$. $P_1\,(x) = -2\,x$.

- $n = 2$

Les seules valeurs possibles de k sont $k = 0$ et $k = 1$.

Les formules donnent : $a_2 = 6$, $a_1 = 0$, $a_0 = -2$.

$$P_2\,(x) = 6\,x^2 - 2 = 2\,(3\,x^2 - 1)$$

- $n = 3$

Les seules valeurs possibles de k sont $k = 0$ et $k = 1$.

Les formules donnent : $a_3 = -24$, $a_2 = 0$, $a_1 = 24$, $a_0 = 0$.

$$P_3\,(x) = -24\,x^3 + 24\,x = 24\,x\,(1 - x^2\,).$$

EXERCICE 11.

1. p étant un entier naturel égal à 1, 2, 3, 4, démontrer qu'il existe un polynôme $f(x)$ et un seul, de degré $p + 1$, qui s'annule pour $x = 0$ et qui vérifie l'identité : $f(x) - f(x-1) = x^p$.
2. Calculer $f(1)$.
3. Trouver les coefficients du polynôme $f(x)$ et vérifier que l'on a :
   i. $f(n) = 1^p + 2^p + 3^p + \ldots + n^p$, n étant un entier naturel quelconque.
4. Essayer de généraliser la méthode utilisée en calculant les sommes suivantes :
   $A = 1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n-1)^2$
   $B = 1^3 + 3^3 + 5^3 + \ldots + (2n-1)^3$
   $C = 1.2 + 2.3 + 3.4 + \ldots + n\,(n+1)$
   Pour calculer A, on démontrera qu'il existe un polynôme $f(x)$ et un seul, de degré 3, qui s'annule pour $x = 0$, et qui vérifie l'identité : $f(x) - f(x-1) = (2x-1)^2$, et on calculera $f(n)$.

SOLUTION.

1°/ Existence et unicité du polynôme $f(x)$.

Les relations qui définissent le polynôme $f(x)$ sont :

$f(x) = \sum_{i=0}^{i=p+1} a_i\, x^i$. ($f(x)$ est un polynôme de degré au plus égal à $p + 1$)

$a_{p+1} \neq 0$. Le degré du polynôme $f(x)$ est $p + 1$.

$f(0) = 0$. $f(x)$ est nul pour $x = 0$.

$f(x) - f(x-1) = x^p$.

La relation $f(0)=0$ indique que le terme constant du polynôme $f(x)$ doit être nul : $a_0 = 0$. Il en résulte :

$$f(x) = x \sum_{i=1}^{i=p+1} a_i\, x^{i-1}$$

$$f(x-1) = (x-1) \sum_{i=1}^{i=p+1} a_i\, (x-1)^{i-1}$$

La différence $f(x) - f(x-1)$ est donc donnée par :

$$f(x) - f(x-1) = \sum_{i=1}^{i=p+1} a_i\, [\, x^i - (x-1)^i \,].$$

$$[\, x^i - (x-1)^i \,] = x^i - \sum_{j=0}^{j=i} \binom{i}{j} x^j (-1)^{i-j} = -\sum_{j=0}^{j=i-1} \binom{i}{j} x^j (-1)^{i-j} = (-1)^{i+1} \sum_{j=0}^{j=i-1} (-1)^j \binom{i}{j} x^j .$$

$$f(x) - f(x-1) = \sum_{i=1}^{i=p+1} a_i\, (-1)^{i+1} \sum_{j=0}^{j=i-1} (-1)^j \binom{i}{j} x^j .$$

$$f(x) - f(x-1) = \sum_{j=0}^{j=p} (-1)^j \left(\sum_{i=j+1}^{i=p+1} (-1)^{i+1} \binom{i}{j} a_i \right) x^j .$$

Le terme de degré p est, par hypothèse x^p et les autres termes sont nuls :

$$(-1)^p\,(-1)^{p+2}\,\binom{p+1}{p}\,a_{p+1} = 1, \text{ d'où } a_{p+1} = \frac{1}{p+1}$$

$$\sum_{i=j+1}^{i=p+1} (-1)^{i+1}\,\binom{i}{j}\,a_i = 0, \text{ pour } j = 0, \ldots, p-1.$$

On obtient donc :

$$\boxed{a_{p+1} = \frac{1}{p+1}}$$

et l'équation :

$$\sum_{i=j+1}^{i=p+1} (-1)^{i+1}\,\binom{i}{j}\,a_i = 0, \text{ pour } j = p-1, \ldots, 0.$$

Pour $j = p-1$, l'équation s'écrit :

$$(-1)^{p+1}\,\binom{p}{p-1}\,a_p + (-1)^{p+2}\,\binom{p+1}{p-1}\,a_{p+1} = 0,$$

$$p\,a_p - \frac{p(p+1)}{2}\,a_{p+1} = 0$$

$$\boxed{a_p = \frac{1}{2}.}$$

Pour $j = p-2$, l'équation s'écrit :

$$(-1)^p\,\binom{p-1}{p-2}\,a_{p-1} + (-1)^{p+1}\,\binom{p}{p-2}\,a_p + (-1)^{p+2}\,\binom{p+1}{p-2}\,a_{p+1} = 0$$

$$(p-1)\,a_{p-1} = \frac{p(p-1)}{2}\,a_p - \frac{(p+1)p(p-1)}{6}\,a_{p+1}$$

$$a_{p-1} = \frac{p}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)$$

$$\boxed{a_{p-1} = \frac{p}{12}}$$

Pour $j = p-3$, l'équation s'écrit :

$$(-1)^{p-1}\,\binom{p-2}{p-3}\,a_{p-2} + (-1)^p\,\binom{p-1}{p-3}\,a_{p-1} + (-1)^{p+1}\,\binom{p}{p-3}\,a_p + (-1)^{p+2}\,\binom{p+1}{p-3}\,a_{p+1} = 0$$

$$(p-2)\,a_{p-2} = \frac{(p-2)(p-1)}{2}\,a_{p-1} - \frac{(p-2)(p-1)p}{6}\,a_p + \frac{(p-2)(p-1)p(p+1)}{24}\,a_{p+1}$$

$$a_{p-2} = \frac{p(p-1)}{2}\left(\frac{1}{12} - \frac{1}{6} + \frac{1}{12}\right)$$

$$\boxed{a_{p-2} = 0}$$

Pour $j = p-3$, l'équation s'écrit :

$$(-1)^{p-2}\,\binom{p-3}{p-4}\,a_{p-3} + (-1)^{p-1}\,\binom{p-2}{p-4}\,a_{p-2} + (-1)^p\,\binom{p-1}{p-4}\,a_{p-1} + (-1)^{p+1}\,\binom{p}{p-4}\,a_p + (-1)^{p+2}\,\binom{p+1}{p-4}\,a_{p+1} = 0$$

$$(p-3)\,a_{p-3} = -\frac{(p-1)(p-2)(p-3)}{6}\,a_{p-1} + \frac{p(p-1)(p-2)(p-3)}{24}\,a_p - \frac{(p+1)p(p-1)(p-2)(p-3)}{120}\,a_{p+1}$$

$$a_{p-3} = \frac{p(p-1)(p-2)}{6}\left(-\frac{1}{12} + \frac{1}{8} - \frac{1}{20}\right)$$

$$a_{p-3} = -\frac{p(p-1)(p-2)}{720}$$

Pour les exemples étudiés, $p = 1, 2, 3, 4$, il n'est pas nécessaire d'aller plus loin. Mais de façon générale, nous pouvons écrire l'équation de récurrence donnant le coefficient de $(-x)^j$ sous la forme :

$$\sum_{i=j+1}^{i=p+1} (-1)^{i+1} \binom{i}{j} a_i = 0$$

Posons $j = p - k$, $k = 1, \ldots, p$.

$$\sum_{i=p+1-k}^{i=p+1} (-1)^{i+1} \binom{i}{p-k} a_i = 0$$

$$(-1)^{p-k+2} (p-k+1)\, a_{p-k+1} = -\sum_{i=p+2-k}^{i=p+1} (-1)^{i+1} \binom{i}{p-k} a_i$$

$$a_{p-k+1} = (-1)^{p-k+1} \frac{1}{p-k+1} \sum_{i=p+2-k}^{i=p+1} (-1)^{i+1} \frac{i(i-1)\cdots(i-p+k+1)}{(p-k)!}\, a_i$$

Cette formule montre que l'on peut calculer un coefficient à partir des coefficients d'indices supérieurs. Comme on connaît déjà $a_{p+1} = \frac{1}{p+1}$, on peut calculer, par récurrence tous les coefficients du polynôme : ils sont donnés de façon unique par la formule précédente. Ceci démontre l'existence et l'unicité du polynôme $f(x)$.

Remarquons que la formule : $f(x) - f(x-1) = x^p$ donne, pour $x = 1$, $f(1) - f(0) = 1$. Comme, par hypothèse, $f(0)$ est nul, il reste :

$$f(1) = 1.$$

Cette formule équivaut ici à : $\sum_{i=1}^{i=p+1} a_i = 1$.

2°/ Calcul du polynôme $f(x)$, pour $p = 1, 2, 3, 4$.

1. $p = 1$.

$a_2 = a_{p+1} = \frac{1}{p+1} = \frac{1}{2}$; $a_1 = a_p = \frac{1}{2}$; $a_0 = 0$

$f(x) = \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{2} x$

$$f(x) = \frac{x(x+1)}{2}$$

$f(0) = 0$

$f(x-1) = \frac{x(x-1)}{2}$

$f(x) - f(x-1) = \frac{x[(x+1)-(x-1)]}{2} = x$

2. $p = 2$.

$a_3 = a_{p+1} = \frac{1}{p+1} = \frac{1}{3}$; $a_2 = a_p = \frac{1}{2}$; $a_1 = a_{p-1} = \frac{p}{12} = \frac{1}{6}$; $a_0 = 0$

$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x = \frac{2x^3+3x^2+x}{6} = \frac{x(2x^2+3x+1)}{6}$

$$f(x) = \frac{x(x+1)(2x+1)}{6}$$

$f(0) = 0$

$f(x-1) = \frac{(x-1)x(2x-1)}{6}$

$f(x) - f(x-1) = \frac{x}{6}[(x+1)(2x+1) - (x-1)(2x-1)] = \frac{x}{6}(2x^2 + 3x + 1 - 2x^2 + 3x - 1) = x^2$

3. $p = 3$.

$a_4 = a_{p+1} = \frac{1}{p+1} = \frac{1}{4}$; $a_3 = a_p = \frac{1}{2}$; $a_2 = a_{p-1} = \frac{p}{12} = \frac{1}{4}$; $a_1 = a_{p-2} = 0$; $a_0 = 0$

$f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^2 = \frac{x^2}{4}(x^2 + 2x + 1)$

$$f(x) = \frac{x^2}{4}(x+1)^2$$

$f(0)=0$

$f(x-1) = \frac{(x-1)^2}{4}x^2$

$f(x) - f(x-1) = \frac{x^2}{4}[(x+1)^2 - (x-1)^2] = \frac{x^2}{4}(2x \times 2) = x^3$

4. $p = 4$.

$a_5 = a_{p+1} = \frac{1}{p+1} = \frac{1}{5}$; $a_4 = a_p = \frac{1}{2}$; $a_3 = a_{p-1} = \frac{p}{12} = \frac{1}{3}$; $a_2 = a_{p-2} = 0$;

$a_1 = a_{p-3} = -\dfrac{p(p-1)(p-2)}{720} = -\dfrac{1}{30}$; $a_0 = 0$.

$f(x) = \dfrac{1}{5}x^5 + \dfrac{1}{2}x^4 + \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{1}{30}x = \dfrac{x}{30}(6x^4 + 15x^3 + 10x^2 - 1)$

$$\boxed{f(x) = \frac{x(x+1)(2x+1)}{30}(3x^2 + 3x - 1)}$$

ou $f(x) = \dfrac{x(x+1)(2x+1)(6x+3+\sqrt{21})(6x+3-\sqrt{21})}{360}$

$f(0)=0$

$f(x-1) = \dfrac{(x-1)x(2x-1)(6x-3+\sqrt{21})(6x-3-\sqrt{21})}{360}$

$f(x) - f(x-1) = \dfrac{x}{360}[(x+1)(2x+1)(9(2x+1)^2 - 21) - (x-1)(2x-1)(9(2x-1)^2 - 21)]$

$f(x) - f(x-1) = \dfrac{x}{120}[(x+1)(2x+1)(3(2x+1)^2 - 7) - (x-1)(2x-1)(3(2x-1)^2 - 7)]$

$f(x) - f(x-1) = \dfrac{x}{120}[(2x^2+3x+1)(12x^2+12x-4) - (2x^2-3x+1)(12x^2-12x-4)]$

$f(x) - f(x-1) = \dfrac{x}{30}[(2x^2+3x+1)(3x^2+3x-1) - (2x^2-3x+1)(3x^2-3x-1)]$

$f(x) - f(x-1) = \dfrac{x}{30}[(2x^2+1)(3x^2-1) + 3x(2x^2+1) + 3x(3x^2-1) + 9x^2$

$- (2x^2+1)(3x^2-1) + 3x(2x^2+1) + 3x(3x^2-1) - 9x^2]$

$f(x) - f(x-1) = \dfrac{x}{30}[6x(3x^2 - 1 + 2x^2 + 1)]$

$f(x) - f(x-1) = x^4$

Ainsi les polynômes trouvés vérifient bien toutes les conditions imposées.

3°/ Calcul du polynôme $f(x)$, pour $x = n$.

Soit p un entier naturel, égal ici à 1, 2, 3, ou 4, mais que l'on peut supposer quelconque ≥ 1.

Pour $n = 0$, on a $f(0) = 0 = 0^p$.

Pour $n = 1$, on $f(1) = 1 = 0^p + 1^p$.

Supposons que l'on ait, pour un entier $n \geq 0$, $f(n) = \sum_{i=0}^{i=n} i^p$.

Calculons $f(n+1)$. La formule $f(x) - f(x-1) = x^p$, valable quel que soit $x \in R$, donne pour $x = n + 1$:

$$f(n+1) = f(n) + (n+1)^p.$$

L'application de l'hypothèse de récurrence donne alors :

$$f(n+1) = \sum_{i=0}^{i=n} i^p + (n+1)^p.$$

$$f(n+1) = \sum_{i=0}^{i=n+1} i^p.$$

La formule est donc vraie pour $n+1$, dès qu'elle est vraie pour n. Comme elle est vraie déjà pour $n = 0$, le principe de récurrence permet d'affirmer qu'elle est vraie pour tout n entier naturel.

$$f(n) = \sum_{i=0}^{i=n} i^p = 0^p + 1^p + \ldots + n^p .$$

Le fait de mettre dans cette formule le terme nul 0^p a pour seul intérêt de rappeler que $f(0)=0$.

4°/ Généralisation de la méthode.

1. Calcul de la somme *A*

Montrons qu'il existe un polynôme $f(x)$ et un seul, de degré 3, qui s'annule pour $x = 0$, et qui vérifie l'identité:

$$f(x) - f(x-1) = (2x-1)^2$$

Si un tel polynôme existe, il est de la forme :

$$f(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x$$

On obtient alors, en remplaçant x par $x - 1$:

$f(x-1) = a_3 (x-1)^3 + a_2 (x-1)^2 + a_1 (x-1) = a_3 (x^3 - 3x^2 + 3x - 1) + a_2 (x^2 - 2x + 1) + a_1 (x - 1)$

$f(x-1) = a_3 x^3 + (a_2 - 3a_3) x^2 + (a_1 - 2a_2 + 3a_3) x - (a_3 - a_2 + a_1)$

$f(x) - f(x-1) = 3a_3 x^2 + (2a_2 - 3a_3) x + (a_3 - a_2 + a_1)$.

Pour que $f(x) - f(x-1)$ puisse être identique à $(2x-1)^2 = 4x^2 - 4x + 1$ quel que soit $x \in R$, il faut et il suffit qu'il existe une solution au système :

$$3a_3 = 4$$
$$2a_2 - 3a_3 = -4$$

$a_1 - a_2 + a_3 = 1$

Une telle solution existe et est unique :

$$a_3 = \frac{4}{3} \; ; \; a_2 = \frac{1}{2}\,(3\,a_3 - 4) = 0 \; ; \; a_1 = 1 + a_2 - a_3 = -\frac{1}{3}.$$

Le polynôme cherché existe donc et est unique :

$$f(x) = \frac{4}{3}\,x^3 - \frac{1}{3}\,x$$

$$\boxed{f(x) = \frac{x(4x^2-1)}{3}}$$

La relation $f(x) - f(x-1) = (2\,x - 1)^2$ donne :

$$f(1) = f(0) + 1^2 = 1^2$$

Supposons que l'on ait $f(n) = \sum_{i=1}^{i=n} (2\,i - 1)^2$ pour un entier $n \geq 1$. La relation $f(x) - f(x-1) = (2\,x - 1)^2$ donne :

$$f(n+1) = f(n) + (2\,n + 1)^2 = \sum_{i=1}^{i=n} (2\,i - 1)^2 \; + \; (2\,n + 1)^2 = \sum_{i=1}^{i=n+1} (2\,i - 1)^2 \; .$$

Ainsi la formule de l'hypothèse de récurrence est vraie pour n+1 dès qu'elle est vraie pour n. Comme elle est vraie pour n=1, le principe de récurrence permet d'affirmer qu'elle est vraie pour tout entier naturel $n \geq 1$.

$$f(n) = 1^2 + 3^2 + \ldots + (2\,n - 1)^2$$

L'expression trouvée pour le plynôme $f(x)$ donne alors la formule :

$$\boxed{1^2 + 3^2 + \ldots + (2\,n - 1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3}}$$

2. Calcul de la somme *B*.

Le raisonnement qui vient d'être fait peut être recommencé pour le degré 4. Nous allons montrer qu'il existe un polynôme unique $f(x)$ de degré 4, vérifiant les conditions : $f(0)=0$ et $f(x)-f(x-1)=(2x-1)^3$. Un tel polynôme, s'il existe, s'écrit : $f(x) = a_4\,x^4 + a_3\,x^3 + a_2\,x^2 + a_1\,x$. Il vient alors, en remplaçant x par $x-1$:

$f(x-1) = a_4\,(x-1)^4 + a_3\,(x-1)^3 + a_2\,(x-1)^2 + a_1\,(x-1)$

$f(x-1) = a_4\,(x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1) + a_3\,(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) + a_2\,(x^2 - 2x + 1) + a_1\,(x - 1)$

$f(x-1) = a_4 x^4 + (a_3 - 4a_4) x^3 + (a_2 - 3a_3 + 6a_4) x^2 + (a_1 - 2a_2 + 3a_3 - 4a_4) x + (a_4 - a_3 + a_2 - a_1)$

$f(x) - f(x-1) = 4 a_4 x^3 + (3a_3 - 6a_4) x^2 + (2a_2 - 3a_3 + 4a_4) x + (a_1 - a_2 + a_3 - a_4)$

Pour que ce polynôme soit identique au polynôme $(2x - 1)^3 = 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1$, il faut et il suffit que a_1 , a_2 , a_3 , a_4 soient solutions du système :

$4 a_4 = 8$

$3a_3 - 6a_4 = -12$

$2a_2 - 3a_3 + 4a_4 = 6$

$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 = -1$

Une telle solution existe et est unique :

$$a_4 = 2 \; ; \; a_3 = 2 (a_4 - 2) = 0 \; ; \; a_2 = \frac{1}{2} (3a_3 - 4a_4 + 6) = -1 \; ; \; a_1 = a_2 - a_3 + a_4 - 1 = 0$$

$$f(x) = 2x^4 - x^2$$

$$\boxed{f(x) = x^2 (2x^2 - 1)}$$

$f(1)=1$

Supposons $f(n) = \sum_{i=1}^{i=n} (2 i - 1)^3$ pour un entier $n \geq 1$. La relation $f(x) - f(x-1) = (2 x - 1)^3$ donne :

$$f(n+1) = f(n) + (2 n + 1)^3 = \sum_{i=1}^{i=n} (2 i - 1)^3 + (2 n + 1)^3 = \sum_{i=1}^{i=n+1} (2 i - 1)^3 .$$

Ainsi la formule de l'hypothèse de récurrence est vraie pour n+1 dès qu'elle est vraie pour n. Comme elle est vraie pour n=1, le principe de récurrence permet d'affirmer qu'elle est vraie pour tout entier naturel $n \geq 1$.

$$f(n) = 1^3 + 3^3 + \ldots + (2 n - 1)^3$$

L'expression trouvée pour le plynôme $f(x)$ donne alors la formule :

$$\boxed{1^3 + 3^3 + \ldots + (2 n - 1)^3 = n^2 (2n^2 - 1)}$$

3. Calcul de la somme *C*.

Pour calculer la somme C, nous allons montrer qu'il existe un polynôme $f(x)$ et un seul, de degré 3, qui s'annule pour $x = 0$, et qui vérifie la formule : $f(x) - f(x-1) = x (x+1)$. Si un tel polynôme existe, il est de la forme : $f(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x$ et l'on obtient, en remplaçant x par $x - 1$:

$f(x-1) = a_3 (x-1)^3 + a_2 (x-1)^2 + a_1 (x-1) = a_3 (x^3 - 3x^2 + 3x - 1) + a_2 (x^2 - 2x + 1) + a_1 (x - 1)$

$f(x-1) = a_3 x^3 + (a_2 - 3a_3) x^2 + (a_1 - 2a_2 + 3a_3) x - (a_1 - a_2 + a_3)$

$f(x) - f(x-1) = 3a_3 x^2 + (2a_2 - 3a_3) x + (a_1 - a_2 + a_3)$

Pour que ce polynôme soit identique à $x (x + 1) = x^2 + x$, il faut et il suffit qu'il existe des coefficients a_1 , a_2 , a_3 , vérifiant le système d'équations :

$3a_3 = 1$

$2a_2 - 3a_3 = 1$

$a_1 - a_2 + a_3 = 0$

Une telle solution existe et est unique :

$$a_3 = \frac{1}{3} ; a_2 = \frac{1}{2} (3a_3 + 1) = 1 ; a_1 = a_2 - a_3 = \frac{2}{3}.$$

Il existe donc un polynôme $f(x)$ et un seul vérifiant les conditions imposées, c'est :

$$f(x) = \frac{1}{3} x^3 + x^2 + \frac{2}{3} x$$

$$f(x) = \frac{x}{3} (x^2 + 3x + 2)$$

$$\boxed{f(x) = \frac{x(x+1)(x+2)}{3}}$$

$f(1)=2$

Supposons $f(n) = \sum_{i=1}^{i=n} i (i + 1)$ pour un entier $n \geq 1$. La relation $f(x) - f(x-1) = x (x + 1)$ donne :

$$f(n+1) = f(n) + (n + 1)(n + 2) = \sum_{i=1}^{i=n} i (i + 1) + (n + 1)(n + 2) = \sum_{i=1}^{i=n+1} i (i + 1).$$

Ainsi la formule de l'hypothèse de récurrence est vraie pour $n+1$ dès qu'elle est vraie pour n. Comme elle est vraie pour $n=1$, le principe de récurrence permet d'affirmer qu'elle est vraie pour tout entier naturel $n \geq 1$.

$$f(n) = 1 \times 2 + 2 \times 3 + \ldots + n (n + 1)$$

L'expression trouvée pour le polynôme $f(x)$ donne alors la formule :

$$\boxed{1 \times 2 + 2 \times 3 + \ldots + n (n + 1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}}$$

EXERCICE 12.

Effectuer les divisions aux puissances croissantes soit de $1 - x\cos\theta$, soit de $x\sin\theta$, soit de $\cos a - x\cos(a-\theta)$ par

$$1 - 2x\cos\theta + x^2$$

de manière à obtenir les premiers termes du quotient.
Trouver le quotient et le reste à l'ordre n en raisonnant par récurrence. Déduire des résultats trouvés des expressions simples pour :

$A = 1 + \cos\theta + \cos 2\theta + \ldots + \cos n\theta.$

$B = \sin\theta + \sin 2\theta + \ldots + \sin n\theta.$

$C = \cos a + \cos(a+\theta) + \ldots + \cos(a+(n-1)\theta).$

$D = \sin a + \sin(a+\theta) + \ldots + \sin(a+(n-1)\theta).$

SOLUTION.

1° Division de $1 - x\cos\theta$.

Lorsqu'on effectue la division aux puissances croissantes de $1 - x\cos\theta$ par $1 - 2x\cos\theta + x^2$, on obtient les premiers termes :

$$\begin{array}{rlll|l}
1 & - x\cos\theta & & & 1 - 2x\cos\theta + x^2 \\
\hline
-1 & + 2x\cos\theta & - x^2 & & 1 + x\cos\theta + \ldots \\
\hline
 & x\cos\theta & - x^2 & & \\
 & - x\cos\theta & + 2x^2\cos^2\theta & - x^3\cos\theta & \\
\hline
 & & x^2(2\cos^2\theta - 1) & - x^3\cos\theta & \\
= & & x^2\cos 2\theta & - x^3\cos\theta & \\
 & & \ldots & &
\end{array}$$

Le premier reste donne la relation :
$(1 - x\cos\theta) = (1 - 2x\cos\theta + x^2)\times 1 + (x\cos\theta - x^2)$

Le deuxième reste donne la relation :
$(1 - x\cos\theta) = (1 - 2x\cos\theta + x^2)\times(1 + x\cos\theta) + (x^2\cos 2\theta - x^3\cos\theta)$

Supposons que le n-ième reste donne la relation :
$(1 - x\cos\theta) = (1 - 2x\cos\theta + x^2)\times(1 + x\cos\theta + x^2\cos 2\theta + \ldots + x^n\cos n\theta) + (x^{n+1}\cos(n+1)\theta - x^{n+2}\cos n\theta)$, avec un quotient :

$$q_n = 1 + x\cos\theta + x^2\cos 2\theta + \ldots + x^n\cos n\theta$$

et un reste :

$$r_n = x^{n+1}\cos(n+1)\theta - x^{n+2}\cos n\theta.$$

Alors la division aux puissances croissantes du reste $x^{n+1}\cos(n+1)\theta - x^{n+2}\cos n\theta$ par $1 - 2x\cos\theta + x^2$ donne le terme suivant du quotient : $x^{n+1}\cos(n+1)\theta$. Le nouveau quotient est :

$$q_{n+1} = q_n + x^{n+1}\cos(n+1)\theta = 1 + x\cos\theta + x^2\cos^2\theta + \ldots + x^n\cos^n\theta + x^{n+1}\cos(n+1)\theta$$

Le nouveau reste est :

$r_{n+1} = x^{n+1}\cos(n+1)\theta - x^{n+2}\cos n\theta - x^{n+1}\cos(n+1)\theta\,(1 - 2x\cos\theta + x^2)$

$r_{n+1} = x^{n+2}(2\cos\theta\cos(n+1)\theta - \cos n\theta) - x^{n+3}\cos(n+1)\theta$

$r_{n+1} = x^{n+2}(2\cos\theta(\cos n\theta\cos\theta - \sin n\theta\sin\theta) - \cos n\theta) - x^{n+3}\cos(n+1)\theta$

$r_{n+1} = x^{n+2}(\cos n\theta(2\cos^2\theta - 1) - 2\sin\theta\cos\theta\sin n\theta) - x^{n+3}\cos(n+1)\theta$

$r_{n+1} = x^{n+2}(\cos n\theta\cos 2\theta - \sin 2\theta\sin n\theta) - x^{n+3}\cos(n+1)\theta$

$r_{n+1} = x^{n+2} \cos(n+2)\theta - x^{n+3} \cos(n+1)\theta$

Les expressions obtenues pour le nouveau quotient et le nouveau reste peuvent être obtenues en remplaçant n par $n + 1$ dans l'hypothèse de récurrence. Comme l'hypothèse de récurrence a été vérifiée, pour $n = 0$ et $n = 1$, le principe de récurrence permet d'affirmer que la formule de l'hypothèse de récurrence reste vraie pour tout entier naturel $n \geq 0$. Nous avons donc démontré la formule :

$$(1 - x\cos\theta) = (1 - 2x\cos\theta + x^2) \times (1 + x\cos\theta + x^2\cos 2\theta + \ldots + x^n \cos n\theta) + (x^{n+1}\cos(n+1)\theta - x^{n+2}\cos n\theta)$$

pour tout entier naturel $n \geq 0$.

De cette formule résulte :

$$1 + x\cos\theta + x^2\cos 2\theta + \ldots + x^n \cos n\theta = \frac{1 - x\cos\theta - x^{n+1}\cos(n+1)\theta + x^{n+2}\cos n\theta}{1 - 2x\cos\theta + x^2}$$

Pour $x = 1$, cette formule se réduit à :

$$1 + \cos\theta + \cos 2\theta + \ldots + \cos n\theta = \frac{1 - \cos\theta - \cos(n+1)\theta + \cos n\theta}{2 - 2\cos\theta}$$

Simplifions :

$$1 + \cos\theta + \cos 2\theta + \ldots + \cos n\theta = \frac{1}{2} \frac{1 - \cos\theta + \cos n\theta - \cos n\theta\cos\theta + \sin n\theta \sin\theta}{1 - \cos\theta}$$

$$1 + \cos\theta + \cos 2\theta + \ldots + \cos n\theta = \frac{1}{2} \left(1 + \cos n\theta + \sin n\theta \frac{\sin\theta}{1 - \cos\theta} \right).$$

$$1 + \cos\theta + \cos 2\theta + \ldots + \cos n\theta = \frac{1}{2} \left(1 + \cos n\theta + \sin n\theta \frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{1 - \left(\cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}\right)} \right).$$

$$1 + \cos\theta + \cos 2\theta + \ldots + \cos n\theta = \frac{1}{2} \left(1 + \cos n\theta + \sin n\theta \frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}} \right).$$

$$1 + \cos\theta + \cos 2\theta + \ldots + \cos n\theta = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta}{\sin\frac{\theta}{2}} \right).$$

$$1 + \cos\theta + \cos 2\theta + \ldots + \cos n\theta = \frac{1}{2} \frac{\sin\frac{\theta}{2} + \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

Rappelons la formule : $\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$

$$1 + \cos\theta + \cos 2\theta + \ldots + \cos n\theta = \frac{1}{2} \frac{2\sin\frac{n+1}{2}\theta \cos\frac{n}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

$$1 + \cos\theta + \cos 2\theta + \ldots + \cos n\theta = \frac{\sin\frac{n+1}{2}\theta \cos\frac{n}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

Ce résultat peut être vérifié au moyen des exponentielles complexes :

$1+ \cos\theta + \cos 2\theta + \ldots + \cos n\theta$ est la partie réelle de

$$\sum_{k=0}^{k=n} e^{ik\theta} = \frac{1-e^{i(n+1)\theta}}{1-e^{i\theta}} = \frac{e^{i\frac{n+1}{2}\theta}}{e^{i\frac{\theta}{2}}} \times \frac{e^{-i\frac{n+1}{2}\theta} - e^{i\frac{n+1}{2}\theta}}{e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}}} = e^{i\frac{n}{2}\theta} \times \frac{\sin\frac{n+1}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

d'où : $1+ \cos\theta + \cos 2\theta + \ldots + \cos n\theta = \cos\frac{n}{2}\theta \times \frac{\sin\frac{n+1}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}$.

Le calcul est bien plus rapide par ce moyen !

2° Division de $x \sin\theta$.

Lorsqu'on effectue la division aux puissances croissantes de $x \sin\theta$ par $1 - 2x\cos\theta + x^2$, on obtient les premiers termes :

$$\begin{array}{l|l}
x\sin\theta & 1 - 2x\cos\theta + x^2 \\
\hline
-x\sin\theta + 2x^2\sin\theta\cos\theta - x^3\sin\theta & x\sin\theta + x^2\sin 2\theta + \ldots \\
\hline
\quad 2x^2\sin\theta\cos\theta - x^3\sin\theta & \\
= \quad x^2\sin 2\theta - x^3\sin\theta & \\
\quad -x^2\sin 2\theta + 2x^3\cos\theta\sin 2\theta - x^4\sin 2\theta & \\
\hline
\quad x^2\sin\theta(2\cos^2\theta - 1) - x^4\sin 2\theta & \\
= \quad x^2\sin\theta\cos 2\theta - x^4\sin 2\theta & \\
\quad \ldots &
\end{array}$$

Le premier reste donne la relation :
$x\sin\theta = (1 - 2x\cos\theta + x^2)\times x\sin\theta + (x^2\sin 2\theta - x^3\sin\theta)$

Supposons que le n-ième reste donne la relation :
$x\sin\theta = (1 - 2x\cos\theta + x^2)\times (x\sin\theta + x^2\sin 2\theta + \ldots + x^n\sin n\theta) + (x^{n+1}\sin(n+1)\theta - x^{n+2}\sin n\theta)$,

avec un quotient :

$$q_n = x\sin\theta + x^2\sin 2\theta + \ldots + x^n\sin n\theta$$

et un reste :

$$r_n = x^{n+1}\sin(n+1)\theta - x^{n+2}\sin n\theta.$$

Alors la division aux puissances croissantes du reste $x^{n+1}\sin(n+1)\theta - x^{n+2}\sin n\theta$ par $1 - 2x\cos\theta + x^2$ donne un quotient $x^{n+1}\sin(n+1)\theta$ d'où :

$$q_{n+1} = q_n + x^{n+1}\sin(n+1)\theta = x\sin\theta + x^2\sin 2\theta + \ldots + x^n\sin n\theta + x^{n+1}\sin(n+1)\theta$$

qui est bien de la forme de q_n en remplaçant n par $n + 1$.

Le reste est :

$r_{n+1} = x^{n+1}\sin(n+1)\theta - x^{n+2}\sin n\theta - (1 - 2x\cos\theta + x^2)\, x^{n+1}\sin(n+1)\theta$

$r_{n+1} = x^{n+1}\sin(n+1)\theta - x^{n+2}\sin n\theta - (x^{n+1}\sin(n+1)\theta - 2x^{n+2}\sin(n+1)\theta\cos\theta + x^{n+3}\sin(n+1)\theta)$

$r_{n+1} = x^{n+2}(2\sin(n+1)\theta\cos\theta - \sin n\theta) - x^{n+3}\sin(n+1)\theta$

La formule $2\sin a\cos b = \sin(a+b) + \sin(a-b)$ donne :

$r_{n+1} = x^{n+2}(\sin(n+2)\theta + \sin n\theta - \sin n\theta) - x^{n+3}\sin(n+1)\theta$

$r_{n+1} = x^{n+2}\sin(n+2)\theta - x^{n+3}\sin(n+1)\theta$

Le reste d'ordre $n + 1$ est de la même forme que le reste d'ordre n quand on y remplace n par $n + 1$.Comme l'hypothèse de récurrence a été vérifiée, pour $n = 0$ et $n = 1$, le principe de récurrence permet d'affirmer que la formule de l'hypothèse de récurrence reste vraie pour tout entier naturel $n \geq 0$. Nous avons donc démontré la formule :

$$x \sin\theta = (1 - 2x\cos\theta + x^2) \times (x\sin\theta + x^2 \sin 2\theta + \ldots + x^n \sin n\theta) + (x^{n+1}\sin(n+1)\theta - x^{n+2}\sin n\theta).$$

De cette formule résulte l'expression :

$$x\sin\theta + x^2\sin 2\theta + \ldots + x^n \sin n\theta = \frac{x\sin\theta - x^{n+1}\sin(n+1)\theta + x^{n+2}\sin n\theta}{1 - 2x\cos\theta + x^2}$$

Pour $x = 1$, cette expression devient :

$$\sin\theta + \sin 2\theta + \ldots + \sin n\theta = \frac{\sin\theta - \sin(n+1)\theta + \sin n\theta}{2 - 2\cos\theta} = \frac{1}{2}\,\frac{\sin\theta - \sin(n+1)\theta + \sin n\theta}{1 - \cos\theta}.$$

Simplifions :

$\sin\theta + \sin 2\theta + \ldots + \sin n\theta$ est la partie imaginaire de

$$\sum_{k=0}^{k=n} e^{ik\theta} = e^{i\frac{n}{2}\theta} \times \frac{\sin\frac{n+1}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

d'où :

$$\sin\theta + \sin 2\theta + \ldots + \sin n\theta = \sin\frac{n}{2}\theta \times \frac{\sin\frac{n+1}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}.$$

3° Division de $\cos a - x\cos(a - \theta)$.

Lorsqu'on effectue la division aux puissances croissantes de $\cos a - x\cos(a - \theta)$ par $1 - 2x\cos\theta + x^2$, on obtient les premiers termes :

$$\begin{array}{rl|l}
\cos a - x\cos(a-\theta) & & 1 - 2x\cos\theta + x^2 \\
\hline
-\cos a + 2x\cos a\cos\theta - x^2\cos a & & \cos a + x\cos(a+\theta) + \ldots \\
\hline
x(2\cos a\cos\theta - \cos(a-\theta)) - x^2\cos a & & \\
= x(\cos(a+\theta) - x^2\cos a & & \\
\hline
-x(\cos(a+\theta) + 2x^2\cos\theta\cos(a+\theta) & -x^3\cos(a+\theta) & \\
\hline
x^2(2\cos\theta\cos(a+\theta) - \cos a) - x^3\cos(a+\theta) & & \\
= x^2\cos(a+2\theta) - x^3\cos(a+\theta) & & \\
\ldots & &
\end{array}$$

Le premier reste donne la relation :

$$\cos a - x\cos(a-\theta) = (1 - 2x\cos\theta + x^2) \times \cos a + (x\cos(a+\theta) - x^2\cos a)$$

Supposons que le n-ième reste donne la relation :

$$\cos a - x\cos(a-\theta) = (1 - 2x\cos\theta + x^2) \times (\cos a + x\cos(a+\theta) + \ldots + x^n\cos(a+n\theta)) + (x^{n+1}\cos(a+(n+1)\theta) - x^{n+2}\cos(a+n\theta)),$$

avec un quotient :

$$q_n = \cos a + x\cos(a+\theta) + \ldots + x^n\cos(a+n\theta)$$

et un reste :

$$r_n = x^{n+1}\cos(a+(n+1)\theta) - x^{n+2}\cos(a+n\theta).$$

Alors la division aux puissances croissantes du reste $x^{n+1}\cos(a+(n+1)\theta)-x^{n+2}\cos(a+n\theta)$ par $1-2x\cos\theta+x^2$ donne un quotient $x^{n+1}\cos(a+(n+1)\theta)$ d'où :

$$q_{n+1}=q_n+x^{n+1}\cos(a+(n+1)\theta)=\cos a+x\cos(a+\theta)+\ldots+x^n\cos(a+n\theta)+x^{n+1}\cos(a+(n+1)\theta)$$

qui est bien de la forme de q_n en remplaçant n par $n+1$.

Le reste est :

$$r_{n+1}=x^{n+1}\cos(a+(n+1)\theta)-x^{n+2}\cos(a+n\theta)-(1-2x\cos\theta+x^2)\,x^{n+1}\cos(a+(n+1)\theta)$$

$$r_{n+1}=-x^{n+2}\cos(a+n\theta)+2x^{n+2}\cos\theta\cos(a+(n+1)\theta)-x^{n+3}\cos(a+(n+1)\theta)$$

$$r_{n+1}=x^{n+2}(2\cos\theta\cos(a+(n+1)\theta)-\cos(a+n\theta))-x^{n+3}\cos(a+(n+1)\theta)$$

Or on a toujours : $\cos(a+(n+2)\theta)+\cos(a+n\theta))=2\cos\theta\cos(a+(n+1)\theta)$ en vertu de la formule :

$$\cos(a+b)+\cos(a-b)=2\cos a\cos b$$

$$r_{n+1}=x^{n+2}\cos(a+(n+2)\theta)-x^{n+3}\cos(a+(n+1)\theta)$$

Le reste d'ordre $n+1$ est de la même forme que le reste d'ordre n quand on y remplace n par $n+1$.Comme l'hypothèse de récurrence a été vérifiée pour $n=0$, le principe de récurrence permet d'affirmer que la formule de l'hypothèse de récurrence reste vraie pour tout entier naturel $n\geq 0$. Nous avons donc démontré la formule :

$$\cos a-x\cos(a-\theta)=$$
$$(1-2x\cos\theta+x^2)\times(\cos a+x\cos(a+\theta)+\ldots+x^n\cos(a+n\theta))+(x^{n+1}\cos(a+(n+1)\theta)-x^{n+2}\cos(a+n\theta)),$$

De cette formule résulte l'expression :

$$\cos a+x\cos(a+\theta)+\ldots+x^n\cos(a+n\theta)=\frac{\cos a-x\cos(a-\theta)-x^{n+1}\cos(a+(n+1)\theta)+x^{n+2}\cos(a+n\theta)}{1-2x\cos\theta+x^2}$$

Pour $x=1$, cette expression devient :

$$\cos a+\cos(a+\theta)+\ldots+\cos(a+n\theta)=\frac{\cos a-\cos(a-\theta)-\cos(a+(n+1)\theta)+\cos(a+n\theta)}{2-2\cos\theta}.$$

Simplifions.

$\cos a+\cos(a+\theta)+\ldots+\cos(a+n\theta)$ est la partie réelle de :

$$\sum_{k=0}^{k=n}e^{i(a+k\theta)}=e^{ia}\frac{1-e^{i(n+1)\theta}}{1-e^{i\theta}}=e^{ia}\frac{e^{i\frac{n+1}{2}\theta}}{e^{i\frac{\theta}{2}}}\frac{\sin\frac{n+1}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}=e^{i\left(a+\frac{n}{2}\right)\theta}\frac{\sin\frac{n+1}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

De cette formule, on déduit l'expression de la partie réelle et de la partie imaginaire :

$$\cos a+\cos(a+\theta)+\ldots+\cos(a+n\theta)=\cos\left(a+\frac{n}{2}\right)\theta\ \frac{\sin\frac{n+1}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

$$\sin a+\sin(a+\theta)+\ldots+\sin(a+n\theta)=\sin\left(a+\frac{n}{2}\right)\theta\ \frac{\sin\frac{n+1}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

EXERCICE 13.

1.1. On considère 3 points non alignés (x_0 , y_0), (x_1 , y_1), (x_2 , y_2), du plan.

1° Montrez que, par ces trois points, on peut faire passer une parabole et une seule d'équation

$$y = a\,x^2 + b\,x + c.$$

2° Montrez que la parabole d'équation :

$$y = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}\,y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}\,y_1 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}\,y_2$$

passe par les trois points (x_0 , y_0), (x_1 , y_1), (x_2 , y_2).

3° On suppose maintenant $x_2 - x_1 = x_1 - x_0 = h > 0$. Calculez l'intégrale $I = \int_{x_0}^{x_2} y\,dx$, en fonction de h, y_0 , y_1 , y_2.

1.2. On considère un ensemble de $2\,n + 1$ points du plan, $(x_i , y_i)_{0 \le i \le 2n}$, dont les abscisses vérifient

$$x_{i+1} - x_i = h$$

et dont les ordonnées y_i sont données par une fonction inconnue f de la variable x. En utilisant les résultats de la première partie, montrez que l'on peut trouver une valeur approchée de l'intégrale $\int_{x_0}^{x_{2n}} f(x)\,dx$ en prenant la somme

$$S = \frac{h}{3}\left((y_0 + y_{2n}) + 4\sum_{i=0}^{i=n-1} y_{2i+1} + 2\sum_{i=1}^{i=n-1} y_{2i} \right)$$ (Formule de **SIMPSON**)

1.3. **Application numérique.**

Toutes les minutes, on a relevé la vitesse d'un véhicule. Les résultats sont les suivants :

t (mn)	0	1	2	3	4	5	6
v (km/h)	0	80	120	140	110	100	130

Donnez une valeur approchée de la distance parcourue :

a) par la méthode des trapèzes.

b) par la méthode de Simpson.

SOLUTION.

1e Partie. Parabole passant par trois points.

1.1.1. Existence et unicité.

Soit $y = a\,x^2 + b\,x + c$ l'équation d'une parabole quelconque d'axe parallèle à l'axe Oy. Dire que la parabole passe par les trois points (x_i , y_i), $i = 1, 2, 3$, c'est dire que les trois relations suivantes sont vérifiées par les constantes a, b, c.

$$a\,x_0^2 + b\,x_0 + c = y_0$$
$$a\,x_1^2 + b\,x_1 + c = y_1$$
$$a\,x_2^2 + b\,x_2 + c = y_2$$

Le déterminant principal du système est un déterminant de Van der Monde, il est égal à :

$$\begin{vmatrix} x_0^2 & x_0 & 1 \\ x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \end{vmatrix} = -(x_0 - x_1)(x_1 - x_2)(x_2 - x_0)$$

Ce déterminant est différent de 0 si les x_i sont tous distincts. Et dans ce cas, les constantes a, b, c, sont déterminées de façon unique. Il passe alors une parabole et une seule par les trois points (x_i , y_i).

1.1.2. Equation de la parabole passant par trois points.

La relation :

$$y = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}\,y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}\,y_1 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}\,y_2$$

est l'équation d'une parabole d'axe parallèle à *Oy*. Cette parabole passe par les trois points (x_i , y_i) car :

— pour $x = x_0$, il vient $y = y_0$;
— pour $x = x_1$, il vient $y = y_1$;
— pour $x = x_2$, il vient $y = y_2$.

1.1.3. Calcul de l'intégrale.

Si $x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = h$, l'équation de la parabole passant par les trois points devient :

$$y = P_2(x) = \frac{1}{2h^2}\,[\,(x-x_1)(x-x_2)\,y_0 - 2\,(x-x_0)(x-x_2)\,y_1 + (x-x_0)(x-x_1)\,y_2\,]$$

$$\int_{x_0}^{x_2} y\,dx = \frac{y_0}{2h^2}\int_{x_0}^{x_2}(x-x_1)(x-x_2)\,dx - 2\,\frac{y_1}{2h^2}\int_{x_0}^{x_2}(x-x_0)(x-x_2)\,dx + \frac{y_2}{2h^2}\int_{x_0}^{x_2}(x-x_0)(x-x_1)\,dx$$

Pour calculer $\displaystyle\int_{x_0}^{x_2}(x-x_1)(x-x_2)\,dx = \int_{x_0}^{x_0+2h}(x-x_0-h)(x-x_0-2h)\,dx$, posons $x - x_0 - h = u$.

On a $dx = du$.

$$\int_{x_0}^{x_2}(x-x_1)(x-x_2)\,dx = \int_{-h}^{+h} u\,(u-h)\,du = \left[\,\frac{u^3}{3} - h\,\frac{u^2}{2}\,\right]_{u=-h}^{u=+h} = \frac{2h^3}{3}$$

$$\frac{y_0}{2h^2}\int_{x_0}^{x_2}(x-x_1)(x-x_2)\,dx = \frac{h}{3}\,y_0$$

Pour calculer $\displaystyle\int_{x_0}^{x_2}(x-x_0)(x-x_2)\,dx = \int_{x_0}^{x_0+2h}(x-x_0)(x-x_0-2h)\,dx$, posons $x - x_0 - h = u$.

On a $dx = du$.

$$\int_{x_0}^{x_2}(x-x_0)(x-x_2)\,dx = \int_{-h}^{+h}(u+h)(u-h)\,du = \left[\,\frac{u^3}{3} - h^2\,u\,\right]_{u=-h}^{u=+h} = \frac{2h^3}{3} - 2\,h^3 = -\,\frac{4h^3}{3}$$

$$-\,2\,\frac{y_1}{2h^2}\int_{x_0}^{x_2}(x-x_0)(x-x_2)\,dx = 4\,\frac{h}{3}\,y_1$$

Pour calculer $\displaystyle\int_{x_0}^{x_2}(x-x_0)(x-x_1)\,dx = \int_{x_0}^{x_0+2h}(x-x_0)(x-x_0-h)\,dx$, posons $x - x_0 - h = u$.

On a $dx = du$.

$$\int_{x_0}^{x_2}(x-x_0)(x-x_{11})\,dx = \int_{-h}^{+h}(u+h)\,u\,du = \left[\,\frac{u^3}{3} + h\,\frac{u^2}{2}\,\right]_{u=-h}^{u=+h} = \frac{2h^3}{3}$$

$$\frac{y_2}{2h^2}\int_{x_0}^{x_2}(x-x_0)(x-x_1)\,dx = \frac{h}{3}\,y_2$$

$$\int_{x_0}^{x_2} y\,dx = \frac{h}{3}\,y_0 + 4\,\frac{h}{3}\,y_1 + \frac{h}{3}\,y_2$$

$$\boxed{\int_{x_0}^{x_2} y\,dx = \frac{h}{3}\,(y_0 + 4\,y_1 + y_2)}$$

2e partie : Formule de Simpson.

$$\int_{x_0}^{x_{2n}} y\,dx = \sum_{k=1}^{k=n} \int_{x_{2k-2}}^{2k} y\,dx = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{h}{3}\,(y_{2k-2} + 4\,y_{2k-1} + y_{2k}) = \frac{h}{3} \sum_{k=1}^{k=n} (y_{2k-2} + 4\,y_{2k-1} + y_{2k})$$

$$\boxed{\int_{x_0}^{x_{2n}} y\,dx = \frac{h}{3}\,(y_0 + y_{2n} + 4 \sum_{k=1}^{k=n} y_{2k-1} + 2 \sum_{k=1}^{k=n-1} y_{2k})}$$

3e partie : Application numérique.

t (mn)	0	1	2	3	4	5	6
v (km/h)	0	80	120	140	110	100	130

1.3.1. Méthode des trapèzes.

$$h = \frac{1}{60} \text{ heure}$$

La surface d'un trapèze est $\frac{h}{2}$. La somme des surface des trapèzes est :

$$T = \frac{h}{2}\,(y_0 + y_n + 2 \sum_{k=1}^{k=n-1} y_i\ )$$

$$T = \frac{1}{120}\,(0 + 130 + 2\,(80 + 120 + 140 + 110 + 100)) = \frac{1}{120}\,(130 + 2 \times 550) = \frac{1230}{120} = 10{,}25 \text{ km}$$

$$\boxed{T = 10{,}25 \text{ km}}$$

1.3.2. Méthode de Simpson.

$$h = \frac{1}{60} \text{ heure}$$

$$S = \frac{h}{3}\,(y_0 + y_{2n} + 4 \sum_{k=1}^{k=n} y_{2k-1} + 2 \sum_{k=1}^{k=n-1} y_{2k})$$

$$S = \frac{1}{180}\,(0 + 130 + 4\,(80 + 140 + 100) + 2\,(120 + 110)) = \frac{1}{180}\,(130 + 4 \times 320 + 2 \times 230) = \frac{1870}{180} = 10{,}39 \text{ km}$$

$$\boxed{S = 10{,}39 \text{ km}}$$

La différence avec la méthode des trapèzes est de l'ordre de 1 %.

EXERCICE 14.

Etant donnés n + 1 points quelconques du plan, montrez qu'il existe un polynôme de degré n et un seul dont la courbe représentative passe par les n + 1 points donnés. En vous inspirant de l'exercice 13, exprimez ce polynôme en fonction des coordonnées des points.(Formule d'interpolation de LAGRANGE).

Solution.

Un polynôme de degré n est déterminé par $n + 1$ constantes, qui sont les coefficients du polynôme. La donnée de $n + 1$ points expérimentaux fournit $n + 1$ équations qui déterminent en général de façon unique les coefficients d'un polynôme de degré n. On vérifie alors immédiatement que le polynôme :

$$y = \frac{(x-x_1)(\cdots)(x-x_{2n})}{(x_0-x_1)(\cdots)(x_0-x_{2n})}\,y_0 + \ldots + \frac{(x-x_0)(\cdots)(x-x_{2n-1})}{(x_{2n}-x_0)(\cdots)(x_{2n}-x_{2n-1})}\,y_{2n}$$

prend la valeur y_0 lorsque $x = x_0$, …, y_{2n} lorsque $x = x_{2n}$.

Algèbre linéaire

e-mail

1. **Espaces vectoriels**.
2. **Familles libres**.
3. **Applications linéaires**.
4. **Calcul matriciel**.
5. **Déterminants**.
6. **Diagonalisation**.

NTE
Nouvelles Technologies Educatives

Accueil

Exercices

Espaces vectoriels.

1. Espace vectoriel réel.
2. Sous-espace vectoriel.
3. Espace vectoriel produit.
4. Espace vectoriel quotient.

1 Espace vectoriel réel.

Etant donné un ensemble E, on dit que E est un **espace vectoriel réel** si, et seulement si :

1°/ E est muni d'une loi de **groupe abélien**, notée additivement.
2°/ Il existe une "**loi de composition externe**", application $\mathbb{R} \times E \longrightarrow E$, appelée **multiplication par les scalaires**, vérifiant, pour tout x et tout y de E, pour tout λ et tout μ de $\mathbb{R}$, les quatre propriétés :

1. $x = x$
$\lambda (x + y) = \lambda x + \lambda y$
$(\lambda + \mu) x = \lambda x + \mu x$
$(\lambda \mu) x = \lambda (\mu x)$

En réalité, on pourrait aussi bien définir un espace vectoriel sur n'importe quel corps ($\mathbb{Q}$, $\mathbb{C}$, etc.), qu'on appelle le **corps de base** de l'espace vectoriel, et on parlerait d'espace vectoriel "rationnel", ou d'espace vectoriel "complexe", etc.
Et si le "corps de base" n'est pas un corps mais seulement un anneau unitaire, on parle alors de **module** au lieu d'espace vectoriel ($\mathbb{Z}$-module par exemple). Mais, attention, dans ce cas, les propriétés ne sont plus les mêmes : il n'existe pas forcément une base !

HAUT

2 Sous-espace vectoriel.

Etant donné un espace vectoriel réel *E*, on appelle **sous-espace vectoriel** de *E* toute partie *G* de *E* qui est :

– un **sous-groupe additif** de *E*
– **stable** pour la multiplication par les scalaires.

HAUT

3 Espace vectoriel produit.

Etant donnée une famille $(E_i)_{i \in I}$ d'espaces vectoriels réels, on peut définir sur l'ensemble produit $\prod_{i \in I} E_i$:

— une **loi de groupe** en posant $(x_i)_{i \in I} + (y_i)_{i \in I} = (x_i + y_i)_{i \in I}$
— une **loi de composition externe** en posant : $\lambda (x_i)_{i \in I} = (\lambda x_i)_{i \in I}$

Ces deux opérations font de $\prod_{i \in I} E_i$ un espace vectoriel réel qu'on appelle l'**espace vectoriel produit** de la famille $(E_i)_{i \in I}$ d'espaces vectoriels réels.

HAUT

4 Espace vectoriel quotient.

Etant donné un espace vectoriel réel E et un sous-espace vectoriel G de E, la relation :

$$x \mathcal{R} y \Leftrightarrow x - y \in G$$

est une **relation d'équivalence** dans E.

Dans l'ensemble E / G des classes d'équivalence modulo cette relation, on peut définir une structure d'espace vectoriel en posant :

$$\overline{x} + \overline{y} = \overline{x+y}$$
$$\lambda \overline{x} = \overline{\lambda x}$$

Muni de cette structure d'espace vectoriel, E / G s'appelle l'**espace vectoriel quotient** de E par G.

HAUT

Chapitre 1. Espaces vectoriels réels.

Exercices

Exercice 1. Espace vectoriel d'applications.
Exercice 2. Sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.
Exercice 3. Espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$.
Exercice 4. Sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$.
Exercice 5. Relations entre sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 1. Espace vectoriel d'applications.

On considère l'ensemble F des applications de l'intervalle [0 ; 1] de $\mathbb{R}$, dans $\mathbb{R}$, qui vérifient la relation :

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 2\,f\,(1)$$

1°/ F est-il un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels ?
2°/ F est-il un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels ?

Solution

HAUT

Exercice 2. Sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

Montrer que $E := \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y = 0 \text{ et } x + z + t = 0\}$ est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^4$.	Solution

HAUT

Exercice 3. Espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$.

Les ensembles suivants sont-ils des espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$?
Que sont géométriquement ces ensembles ?

1°/ $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy < 0\}$.
2°/ $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geqslant 0\}$.
3°/ $G = \{(x, y, 1) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y \in \mathbb{R}\}$.
4°/ $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1\}$.
5°/ $I = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 2y \text{ et } z = 0\}$.

Solution

HAUT

Exercice 4. Sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$.

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$.

1°/ Montrer que $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

2°/ Montrer que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ si, et seulement si, $F \subseteq G$ ou $G \subseteq F$.

3°/ Montrer que le sous-espace vectoriel engendré par $F \cup G$ est $F + G$.

4°/ Soit A le complémentaire de F.

a) A est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$?

b) Montrer que si $F \neq \mathbb{R}^n$, alors le sous-espace vectoriel engendré par A est $\mathbb{R}^n$.

Solution

HAUT

Exercice 5. Relations entre sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$.

Soient F, G, H, trois sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ tels que :
$F \cap G = F \cap H$; $F + G = F + H$; $G \subset H$.
Montrer que nécessairement $G = H$.

Solution

HAUT

Chapitre 1. Espaces vectoriels.

Enoncés.

Exercice 1. Espace vectoriel d'applications.

On considère l'ensemble F des applications de l'intervalle [0 ; 1] de $\mathbb{R}$, dans $\mathbb{R}$, qui vérifient la relation :

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 2\,f(1)$$

1°/ F est-il un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels ?
2°/ F est-il un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels ?

Solution.

1°/ Groupe additif abélien.

Soient f et g deux éléments de F. L'application $f + g : [0 ; 1] \to \mathbb{R}$, est définie par :

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \text{ pour tout } x \in [0 ; 1].$$

On a alors :

$$(f + g)\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) + g\left(\frac{1}{2}\right) = 2\,f(1) + 2\,g(1) = 2\,(f(1) + g(1)) = 2\,(f + g)(1),$$

relation qui montre que $f + g$ est un élément de F. F est **stable** pour l'addition.

L'**associativité** de cette addition résulte immédiatement de l'associativité de l'addition des nombres réels. Pour tout élément $x \in [0 ; 1]$:

$$(f + (g + h))(x) = f(x) + (g + h)(x) = f(x) + (g(x) + h(x))$$
$$= (f(x) + g(x)) + h(x) = (f + g)(x) + h(x) = ((f + g) + h)(x)$$
$$\Rightarrow f + (g + h) = (f + g) + h$$

La relation :

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = g(x) + f(x) = (g + f)(x), \text{ pour tout } x \in [0 ; 1],$$

montre que $f + g = g + f$, donc que l'addition de F est **commutative**.

Soit 0 l'application de [0 ; 1] dans $\mathbb{R}$ qui, à tout élément $x \in [0 ; 1]$ associe $0 \in \mathbb{R}$. On a alors :

$$0\left(\frac{1}{2}\right) = 0 = 2 \times 0\,(1),$$

relation qui montre que l'application 0 est un élément de F. Pour cet élément 0, on a, pour tout $f \in F$ et tout $x \in [0\,;\,1]$:

$$(0 + f)\,(x) = 0\,(x) + f\,(x) = 0 + f\,(x) = f\,(x)$$

donc $0 + f = f$, ce qui montre que l'application 0 est **élément neutre** pour l'addition dans F.

Enfin, si l'on note $-f$ l'application de $[0\,;\,1]$ dans $\mathbb{R}$ qui, à chaque $x \in [0\,;\,1]$ associe le nombre réel $-f\,(x)$, on voit immédiatement que pour tout $x \in [0\,;\,1]$, on a :

$$(f + (-f))(x) = f\,(x) + (-f\,)\,(x) = f\,(x) + (-\,f\,(x)) = f\,(x) - f\,(x) = 0 = 0\,(x),$$

ce qui montre que $f + (-f) = 0$, donc tout élément de F possède un **symétrique pour l'addition**.

Et ceci achève de montrer que F est un **groupe abélien** pour l'addition.

2°/ Multiplication par les nombres réels.

Pour tout $f \in F$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on note λf l'application de $[0\,;\,1]$ dans $\mathbb{R}$ qui, à un $x \in [0\,;\,1]$ associe le nombre réel $\lambda f\,(x)$. On a alors :

$$(\lambda f)\left(\frac{1}{2}\right) = \lambda f\left(\frac{1}{2}\right) = \lambda \times 2 f\,(1) = 2\,\lambda f\,(1) = 2\,(\lambda f)\,(1),$$

relation qui montre que l'application λf est encore un élément de F. Donc F est **stable pour la multiplication** par les nombres réels.

Les propriétés de la multiplication par les scalaires qui font de F un **espace vectoriel réel** résulte alors directement des propriétés de la multiplication des nombres réels :

$((\lambda + \mu) f)\,(x) = (\lambda + \mu)\,f\,(x) = \lambda f\,(x) + \mu f\,(x) = (\lambda f + \mu f)\,(x) \Rightarrow (\lambda + \mu)\,f = \lambda f + \mu f.$
$(\lambda\,(f + g))\,(x) = \lambda\,(f + g)\,(x) = \lambda\,(f\,(x) + g\,(x)) = \lambda f\,(x) + \lambda g\,(x) = (\lambda f + \lambda g)\,(x) \Rightarrow \lambda\,(f + g) = \lambda f + \lambda g.$
$(\lambda\,(\mu f))\,(x) = \lambda\,((\mu f)\,(x)) = \lambda\,(\mu f\,(x)) = (\lambda\,\mu)\,f\,(x) = ((\lambda\,\mu) f)\,(x) \Rightarrow \lambda\,(\mu f) = (\lambda\,\mu)\,f.$
$(1 f)\,(x) = 1 \times f\,(x) = f\,(x) \Rightarrow 1\,f = f.$

3°/ Multiplication par les nombres rationnels.

Comme les nombres rationnels sont des nombres réels particuliers, tout ce qui est vrai pour les réels est encore vrai pour les rationnels : si l'on restreint la loi externe à la multiplication par des nombres rationnels, on voit que F est **stable pour la multiplication par les rationnels** car le produit d'un élément de F par un nombre rationnel peut être considéré comme produit d'un élément de F par un nombre réel, c'est donc un élément de F.

$\mathbb{Q}$ est un **sous-corps** de $\mathbb{R}$:

— la somme de deux rationnels est un rationnel,
— le produit de deux rationnels est un rationnel,
— l'opposé d'un rationnel est un rationnel,

— l'inverse d'un rationnel non nul est un rationnel,
— 0 est un rationnel,
— 1 est un rationnel,

Les propriétés écrites pour les nombres réels sont donc encore valables si on les écrit en restreignant le choix des nombres λ et μ à des rationnels. Il en résulte que F est un **espace vectoriel** sur le corps des rationnels.

On pourrait se demander, naïvement, si F est aussi un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes, qui contient $\mathbb{R}$ comme sous-corps. La réponse est évidemment négative : le produit d'un élément de F par un nombre complexe quelconque n'est pas un élément de F puisque ce n'est pas une application de [0 ; 1] dans $\mathbb{R}$, mais une application de [0 ; 1] dans $\mathbb{C}$. La multiplication par un nombre complexe n'est donc pas une loi externe sur F.

Chapitre 1. Espaces vectoriels.

Enoncés.

Exercice 2. Sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

Montrer que $E := \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y = 0 \text{ et } x + z + t = 0\}$ est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^4$.	

Solution.

1°/ Applications linéaires.

L'application $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y, z, t) = x - y$ est linéaire :

— $f((x, y, z, t) + (x', y', z', t')) = f(x + x', y + y', z + z', t + t') = (x + x') - (y + y') = (x - y) + (x' - y')$
$= f(x, y, z, t) + f(x', y', z', t')$

— $f(\lambda (x, y, z, t)) = f(\lambda x, \lambda y, \lambda z, \lambda t) = \lambda x - \lambda y = \lambda (x - y) = \lambda f(x, y, z, t)$.

Son noyau est l'ensemble *F* des $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ tels que $x - y = 0$.

***F* est un sous-espace vectoriel** de $\mathbb{R}^4$ car il est stable par addition et stable par multiplication par les scalaires :

— $(x, y, z, t) \in F$ et $(x', y', z', t') \in F \Rightarrow f((x, y, z, t) + (x', y', z', t')) = f(x, y, z, t) + f(x', y', z', t') = 0$

— $(x, y, z, t) \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow f(\lambda (x, y, z, t)) = \lambda f(x, y, z, t) = 0$.

L'application $g : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x, y, z, t) = x + z + t$ est linéaire :

— $f((x, y, z, t) + (x', y', z', t')) = f(x + x', y + y', z + z', t + t') = x + x' + z + z' + t + t' = (x + z + t) + (x' + z' + t')$
$= f(x, y, z, t) + f(x', y', z', t')$

— $f(\lambda (x, y, z, t)) = f(\lambda x, \lambda y, \lambda z, \lambda t) = \lambda x + \lambda z + \lambda t = \lambda (x + z + t) = \lambda f(x, y, z, t)$.

Son noyau est l'ensemble *G* des $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ tels que $x + z + t = 0$.

***G* est un sous-espace vectoriel** de $\mathbb{R}^4$ car il est stable par addition et stable par multiplication par les scalaires :

— $(x, y, z, t) \in G$ et $(x', y', z', t') \in G \Rightarrow g((x, y, z, t) + (x', y', z', t')) = g(x, y, z, t) + g(x', y', z', t') = 0$

— $(x, y, z, t) \in G$ et $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow g(\lambda (x, y, z, t)) = \lambda g(x, y, z, t) = 0$.

2°/ Sous-espace vectoriel *E*.

$E = F \cap G$, ce n'est qu'une autre façon d'écrire la définition de E.

Or **l'intersection de deux sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel**.

En effet :

1. *E* est stable pour l'addition.

$x \in E$ et $x' \in E \Rightarrow (x \in F$ et $x \in G)$ et $(x' \in F$ et $x' \in G)$
$\Rightarrow (x \in F$ et $x' \in F)$ et $(x \in G$ et $x' \in G)$
$\Rightarrow (x + x' \in F)$ et $(x + x' \in G)$, puisque F et G sont stables pour l'addition.
$\Rightarrow x + x' \in F \bigcap G = E$.

2. *E* est stable pour la multiplication par les scalaires.

$x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow (x \in F$ et $x \in G)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
$\Rightarrow (x \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R})$ et $(x \in G$ et $\lambda \in \mathbb{R})$
$\Rightarrow (\lambda x \in F)$ et $(\lambda x \in G)$, puisque F et G sont stables pour la multiplication par les scalaires.
$\Rightarrow \lambda x \in F \bigcap G = E$.

Donc E, intersection de deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$, est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

Chapitre 1. Espaces vectoriels.

Enoncés.

Exercice 3. Espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$.

Les ensembles suivants sont-ils des espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$? Que sont géométriquement ces ensembles ? 1°/ $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy < 0\}$. 2°/ $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geqslant 0\}$. 3°/ $G = \{(x, y, 1) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y \in \mathbb{R}\}$. 4°/ $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1\}$. 5°/ $I = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 2y \text{ et } z = 0\}$.	

Solution.

1°/ Ensemble *E*.

E est l'ensemble des couples de nombres réels différents de 0 et de signes opposés.
E ne contient pas l'élément neutre (0, 0) de l'addition : ce ne peut donc pas être un sous-groupe additif, car un sous-groupe additif contient l'élément neutre de l'addition. A fortiori, ***E* n'est pas un sous-espace vectoriel de** $\mathbb{R}^2$.

2°/ Ensemble *F*.

F est l'ensemble des triplets de nombres réels dont le premier est positif ou nul.
F contient, par exemple, l'élément (1, 0, 0), mais il ne contient pas son opposé (–1, 0, 0) : ce ne peut donc pas être un sous-groupe additif, car un sous-groupe additif est stable par symétrisation. A fortiori, ***F* n'est pas un sous-espace vectoriel de** $\mathbb{R}^3$.

3°/ Ensemble *G*.

G est l'ensemble des triplets de nombres réels dont le troisième est 1.
G ne contient pas l'élément neutre (0, 0, 0) de l'addition : ce ne peut donc pas être un sous-groupe additif, car un sous-groupe additif contient l'élément neutre de l'addition. A fortiori, ***G* n'est pas un sous-espace vectoriel de** $\mathbb{R}^3$.

4°/ Ensemble *H*.

H est l'ensemble des triplets de nombres réels dont la somme des carrés est inférieure ou égale à 1. C'est la boule fermée de centre (0, 0, 0) et de rayon 1, pour la norme euclidienne.
H contient, par exemple, l'élément (1, 0, 0), mais il ne contient pas (2, 0, 0) = 2 (1, 0, 0) : ce n'est donc pas un sous-espace vectoriel, parce qu'un sous-espace vectoriel est stable pour la multiplication

par les scalaires. ***H* n'est pas un sous-espace vectoriel de** $\mathbb{R}^3$.

5°/ Ensemble *I*.

I est l'ensemble des triplets (x, y, z) de nombres réels vérifiant $f(x, y, z) = 0$ et $g(x, y, z) = 0$, où f et g sont les deux application linéaires (vérification immédiate) définies par :

$$f(x, y, z) = x - 2y$$
$$g(x, y, z) = z.$$

Or nous avons démontré, dans l'Exercice 2, que :
— le **noyau d'une application linéaire** est un sous-espace vectoriel,
— l'**intersection de deux sous-espaces vectoriels** est un sous-espace vectoriel.
Donc ***I* = *Ker* (*f*) ⋂ *Ker* (*g*) est un sous-espace vectoriel de** $\mathbb{R}^3$.

De façon plus précise :
Le noyau de f est le plan d'équation $x = 2y$, qui passe par $(0, 0, 0)$.
Le noyau de g est le plan d'équation $z = 0$, qui passe par $(0, 0, 0)$.
I est l'intersection de ces deux plans : c'est une droite passant par $(0, 0, 0)$, donc un sous-espace vectoriel.

Chapitre 1. Espaces vectoriels.

Enoncés.

Exercice 4. Sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$.

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$. 1°/ Montrer que $F \bigcap G$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. 2°/ Montrer que $F \bigcup G$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ si, et seulement si, $F \subseteq G$ ou $G \subseteq F$. 3°/ Montrer que le sous-espace vectoriel engendré par $F \bigcup G$ est $F + G$. 4°/ Soit A le complémentaire de F. a) A est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$? b) Montrer que si $F \neq \mathbb{R}^n$, alors le sous-espace vectoriel engendré par A est $\mathbb{R}^n$.	

Solution.

1°/ Intersection de deux sous-espaces vectoriels.

1. Stabilité pour l'addition.

$x \in F \bigcap G$ et $x' \in F \bigcap G \Rightarrow (x \in F$ et $x \in G)$ et $(x' \in F$ et $x' \in G)$
$\Rightarrow (x \in F$ et $x' \in F)$ et $(x \in G$ et $x' \in G)$
$\Rightarrow (x + x' \in F)$ et $(x + x' \in G)$, parce que F et G sont stables pour l'addition.
$\Rightarrow x + x' \in F \bigcap G$.

2. Stabilité pour la multiplication par les scalaires.

$x \in F \bigcap G$ et $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow (x \in F$ et $x \in G)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$
$\Rightarrow (x \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R})$ et $(x \in G$ et $\lambda \in \mathbb{R})$
$\Rightarrow (\lambda\, x \in F)$ et $(\lambda\, x \in G)$, parce que F et G sont stables pour la multiplication par les scalaires.
$\Rightarrow \lambda\, x \in F \bigcap G$.

Les deux propriétés précédentes montrent que ***F* ⋂ *G* est un sous-espace vectoriel**.

2°/ Réunion de deux sous-espaces vectoriels.

1. Stabilité pour la multiplication par les scalaires.

$x \in F \bigcup G$ et $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow (x \in F$ ou $x \in G)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$
$\Rightarrow (x \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R})$ ou $(x \in G$ et $\lambda \in \mathbb{R})$
$\Rightarrow (\lambda\, x \in F)$ ou $(\lambda\, x \in G)$, parce que F et G sont stables pour la multiplication par les scalaires.
$\Rightarrow \lambda\, x \in F \bigcup G$.

2. Sous-groupes additifs.

F et G sont des sous-groupes additifs de $\mathbb{R}^n$.
Pour que $F \cup G$ soit un sous-groupe additif de $\mathbb{R}^n$, il faut et il suffit que l'un soit contenu dans l'autre (Algèbre, Chapitre 2, Exercice 2).

Pour que $F \cup G$ soit un sous-espace vectoriel, il faut et il suffit qu'il soit stable pour la multiplication par les scalaires et que ce soit un sous-groupe additif. La stabilité pour la multiplication par les scalaires est toujours assurée. La propriété d'être un sous-groupe additif est assurée si, et seulement si, $F \subseteq G$ ou $G \subseteq F$.

3°/ Sous-espace vectoriel engendré par la réunion.

Le sous-espace vectoriel engendré par la réunion des sous-espaces vectoriels F et G, contient F et contient G, puisqu'il contient leur réunion. Il contient donc $F + G$ puisqu'il est stable par addition.

Or $F + G$ est un sous-espace vectoriel contenant F et G, donc contenant $F \cup G$.
$F + G$ contient donc le sous-espace vectoriel engendré par $F \cup G$, puisque le sous-espace vectoriel engendré par $F \cup G$ est le plus petit sous-espace vectoriel contenant $F \cup G$.

Contenant et contenu dans le sous-espace vectoriel engendré par $F \cup G$, **$F + G$ est le sous-espace vectoriel engendré par $F \cup G$**.

4°/ Complémentaire d'un sous-espace vectoriel.

1. A n'est pas un sous-espace vectoriel.

En effet, comme F est un sous-espace vectoriel, il contient l'élément neutre de l'addition.
Son complémentaire A ne peut donc pas contenir cet élément neutre : ce n'est pas un sous-groupe additif et, a fortiori, ce n'est pas un sous-espace vectoriel.

2. Si A n'est pas vide, le sous-espace engendré par A est $\mathbb{R}^n$.

Soit a un élément de A.
Soit G le sous-espace vectoriel engendré par A.
Soit x un élément de F.
$x + a$ n'appartient pas à F, sinon $(x + a) - x = a$ appartiendrait à F, ce qui n'est pas.
Donc $x + a$ appartient à A, donc appartient aussi à G.
Comme a appartient à A, donc à G, $-a$ appartient aussi à G (stable par symétrisation) et $(x + a) - a = x$ appartient à G.
Donc F est contenu dans G.
Ainsi, G contient F et son complémentaire A : donc G contient la réunion de F et A, qui est $\mathbb{R}^n$.
Donc $G = \mathbb{R}^n$.

Chapitre 1. Espaces vectoriels.

Enoncés.

Exercice 5. Relations entre sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$.

Soient F, G, H, trois sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ tels que : $F \cap G = F \cap H$; $F + G = F + H$; $G \subseteq H$. Montrer que nécessairement $G = H$.	

Solution.

Soit x un élément de H.
x est élément de $F + H = F + G$.
Il existe donc un $y \in F$ et un $z \in G$ tels que $x = y + z$.
Comme G est contenu dans H, z est élément de H et, par stabilité pour l'addition, $y = x - z$ est aussi élément de H.
Donc y est élément de $F \cap H = F \cap G$.
Il en résulte que y est élément de G et, par stabilité pour l'addition, $x = y + z$ est aussi élément de G.
Ainsi, tout élément de H est élément de G : H est inclus dans G.
Comme l'inclusion réciproque est une hypothèse, on obtient l'égalité $G = H$.

Exercices

Familles libres.

1. **Famille libre.**
2. **Système de générateurs.**
3. **Base.**
4. **Détermination du rang d'une famille de vecteurs.**
5. **Dimension de sous-espaces vectoriels.**

1 Famille libre.

Etant donné un **espace vectoriel** *E*, et une partie *F* de *E*, on dit que *F* est une **partie libre** si, et seulement si, toute combinaison linéaire nulle d'éléments de *F* a tous ses coefficients nuls :

Pour toute famille finie $(a_i)_{i = 1, \dots, q}$ d'éléments de *F*, et pour toute famille finie $(\lambda_i)_{i = 1, \dots, q}$ d'éléments du corps de base,

$$\sum_{i=1}^{i=q} \lambda_i a_i = 0 \Rightarrow \lambda_i = 0, \text{ pour tout } i = 1, \dots, q.$$

Si *F* est une partie finie, il suffit d'écrire la relation précédente pour $q = Card\ (F)$.
Une famille de vecteurs qui n'est pas une famille libre est dite **liée**.
Une famille libre est appelée aussi un système de **vecteurs linéairement indépendants**.

HAUT

2 Système de générateurs.

Etant donné un **espace vectoriel** *E*, et une partie *F* de *E*, on dit que *F* est un **système de générateurs** de *E*, si, et seulement si, le sous-espace vectoriel engendré par *F* est égal à *E*, c'est-à-dire si tout élément de *E* est une combinaison linéaire d'éléments de *F* :

Quel que soit l'élément *x* de *E*, il existe une famille finie $(a_i)_{i = 1, \dots, q}$ d'éléments de *F*, et une famille finie $(\lambda_i)_{i = 1, \dots, q}$ d'éléments du corps de base, telles que

$$\sum_{i=1}^{i=q} \lambda_i \, a_i = x.$$

Si *F* est une partie finie, il suffit d'écrire la relation précédente pour $q = Card\,(F)$.

HAUT

3 Base.

Etant donné un espace vectoriel réel E, on appelle **base** de E toute partie B de E qui est :

– un **système de générateurs** de E
– une **famille libre**.

Tout espace vectoriel possède des bases.
Toutes les bases d'un espace vectoriel possèdent le même cardinal, qu'on appelle la **dimension** de l'espace vectoriel.
Une base est une famille libre maximale.
Un base est un système de générateurs minimal.
Si E est de dimension finie n, toute famille libre de p éléments, $p < n$, peut être complétée en une base de E.

Etant donné un espace vectoriel de dimension finie n :
— une famille de p vecteurs, $p > n$, n'est jamais libre.
— une famille de p vecteurs, $p < n$, n'est jamais un système de générateurs.

HAUT

4 Détermination du rang d'une famille de vecteurs.

HAUT

Etant donnée une famille d'éléments de *E*, on appelle **rang** de cette famille, la dimension du sous-espace vectoriel qu'elle engendre.

Etant donnée une famille de *p* vecteurs d'un espace vectoriel réel de dimension finie *n*, on peut écrire la matrice des *p* vecteurs colonnes de la famille : c'est une matrice *A* à *p* colonnes et *n* lignes, qu'on peut considérer comme la matrice d'une application linéaire *f* de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$, relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{R}^n$.
Le rang de la famille est égal au rang de l'application linéaire *f* : c'est la dimension de l'image de *f*.
Pour déterminer le rang, on fait subir à la matrice *A* des combinaisons linéaires des colonnes (vecteurs de la famille) de telle sorte qu'apparaissent, si possible, des **colonnes de 0**.
Le nombre de colonnes de 0 donne la dimension du noyau de *f*, et le nombre de colonnes linairement indépendantes donne le rang de la famille.

Exemple : rang de la famille $\left\{\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5\\0\\-7\end{pmatrix}\right\}$**.**

$$\begin{pmatrix}2&1&5\\3&-1&0\\-1&-2&-7\end{pmatrix}=A\times\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

Soustrayons trois fois la deuxième colonne de la troisième :

$$\begin{pmatrix}2&1&2\\3&-1&3\\-1&-2&-1\end{pmatrix}=A\times\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-3\\0&0&1\end{pmatrix}$$

Soustrayons la première colonne de la troisième :

$$\begin{pmatrix}2&1&0\\3&-1&0\\-1&-2&0\end{pmatrix}=A\times\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-3\\0&0&1\end{pmatrix}$$

Soustrayons deux fois la deuxième colonne de la première :

$$\begin{pmatrix}0&1&0\\5&-1&0\\3&-2&0\end{pmatrix}=A\times\begin{pmatrix}1&0&-1\\-2&1&-3\\0&0&1\end{pmatrix}$$

Cette relation montre :
1. que les deux premières colonnes de la matrice de gauche représentent des vecteurs linéairement indépendants, donc la famille $\left\{\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5\\0\\-7\end{pmatrix}\right\}$ est de **rang 2**.

2. que le noyau de l'application linéaire *f* de matrice $A=\begin{pmatrix}2&1&2\\3&-1&3\\-1&-2&-1\end{pmatrix}$, dans la base canonique, est de dimension 1 avec la **relation linéaire** :

$$-1 \times \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} - 3 \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} + 1 \times \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

HAUT

5 Dimension de sous-espaces vectoriels.

Etant donnés deux sous-espaces vectoriels F et G d'un espace vectoriel E, on a :

$$dim\ (E) + dim\ (F) = dim\ (E + F) + dim\ (E \cap G)$$

HAUT

Chapitre 2. Familles libres.

Exercices

Exercice 1. Familles libres dans $\mathbb{R}^3$.
Exercice 2. Indépendance linéaire.
Exercice 3. Condition pour qu'un vecteur soit combinaison linéaire de deux autres.
Exercice 4. Familles libres ou liées.
Exercice 5. Rangs de 3 systèmes de vecteurs dans $\mathbb{R}^3$.
Exercice 6. Rangs de 3 systèmes de vecteurs de $\mathbb{R}^4$.
Exercice 7. Applications linéairement indépendantes.
Exercice 8. Applications formant une partie liée.
Exercice 9. Dimension de sous-espace vectoriel.
Exercice 10. Bases de sous-espaces vectoriels.
Exercice 11. Somme directe de deux sous-espaces vectoriels.
Exercice 12. Egalité de deux sous-espaces vectoriels.
Exercice 13. Comparaison de deux sous-espaces vectoriels.
Exercice 14. Supplémentaire d'un sous-espace vectoriel.
Exercice 15. Dimension de la somme et de l'intersection.
Exercice 16. Rangs de familles de vecteurs et bases.

Encore plus d'exercices corrigés sur les espaces vectoriels et les familles libres ...

Exercice 1. Familles libres dans $\mathbb{R}^3$.

Soient $a = (2, 3, -1)$, $b = (1, -1, -2)$; $c = (3, 7, 0)$; $d = (5, 0, -7)$ des vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

1°/ Le système $\{a, b, c\}$ est-il libre ?
2°/ Le système $\{a, b, d\}$ est-il libre ?
3°/ Montrer que le sous-espace vectoriel engendré par a et b est égal au sous-espace vectoriel engendré par c et d.

Solution

HAUT

Exercice 2. Indépendance linéaire.

Soient les trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$, $u^1 = (2, 3, 5)$, $u^2 = (-1, 2, -3)$, $u^3 = (4, -3, 8)$.

1°/ Examiner leur indépendance linéaire et, éventuellement, donner les dépendances linéaires.

2°/ On rajoute le vecteur $u^4 = (-4, 17, -10)$. Mêmes questions avec la famille $\{u^1, u^2, u^3, u^4\}$.

Solution

HAUT

Exercice 3. Condition pour qu'un vecteur soit combinaison linaire de deux autres.

Pour quelle valeur de k, le vecteur $u = (1, -2, k)$ de $\mathbb{R}^3$ est-il combinaison linéaire des vecteurs $a = (1, 1, 1)$ et $b = (1, 2, 3)$?	Solution

HAUT

Exercice 4. Familles libres ou liées.

Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs $e_1 = (1, 0, 1)$, $e_2 = (2, 1, -1)$, $e_3 = (1, 1, 0)$, $e_4 = (1, -1, 1)$. Les familles suivantes sont-elles libres ou liées ?

1°/ $\{e_1, e_2\}$.
2°/ $\{e_1, e_2, e_3\}$.
3°/ $\{e_1, e_2, e_4\}$.
4°/ $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$.

Solution

HAUT

Exercice 5. Rangs de 3 systèmes de vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

Déterminer, suivant les valeurs de α (ou de α, β, γ) les rangs des systèmes S_1, S_2, S_3, de vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

S_1	$a = (\alpha, 1, 1)$	$b = (1, \alpha, 1)$	$c = (1, 1, \alpha)$
S_2	$a = (\alpha, 1, 1)$	$b = (-1, -\alpha, -1)$	$c = (-1, -1, \alpha)$
S_3	$a = (0, \gamma, -\beta)$	$b = (-\gamma, 0, \alpha)$	$c = (\beta, -\alpha, 0)$

Solution

HAUT

Exercice 6. Rangs de 3 systèmes de vecteurs de $\mathbb{R}^4$.

Déterminer les rangs des systèmes S_1, S_2, S_3, de vecteurs de $\mathbb{R}^4$ et, éventuellement, les relations entre les vecteurs de S_i $(1 \leqslant i \leqslant 3)$.

S_1 $a = (1, 1, 1, 1)$ $b = (0, 1, 2, -1)$ $c = (1, 0, -2, 3)$ $d = (2, 1, 0, -1)$

S_2 $a = (1, 0, 1, 0)$ $b = (2, 1, 0, 1)$ $c = (0, 2, -1, 1)$ $d = (3, -1, 2, 0)$

S_3 $a = (1, 0, 2, 3)$ $b = (7, 4, -2, -1)$ $c = (5, 2, 4, 7)$ $d = (3, 2, 0, 1)$

Solution

HAUT

Exercice 7. Applications linéairement indépendantes.

Montrer que les fonctions f, g, h, définies par :

$$f = Id_{\mathbb{R}}, \quad g(x) = \sin x, \quad h(x) = \cos x,$$

sont linéairement indépendantes dans l'espace vectoriel $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Solution

HAUT

Exercice 8. Applications formant une partie liée.

On désigne par C l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose :

$$f_1(x) = \sin(1 + x), \quad f_2(x) = \sin(2 + x), \quad f_3(x) = \sin(3 + x).$$

Montrer que $\{f_1, f_2, f_3\}$ est une partie liée.

Solution

HAUT

Exercice 9. Dimension de sous-espace vectoriel.

On désigne par E l'ensemble $\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x = 2y - z \text{ et } t = x + y + z\}$. Montrer que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Déterminer une base de E et préciser sa dimension.	Solution

HAUT

Exercice 10. Bases de sous-espaces vectoriels.

Dans $\mathbb{R}^n$, démontrer que le sous-espace engendré par a et b, d'une part, et le sous-espace engendré par c et d, d'autre part, sont identiques et déterminer leur dimension :

1°/ $n = 3, a = (2, 3, -1), \quad b = (1, -1, -2), \quad c = (3, 7, 0), \quad d = (5, 0, -7)$.
2°/ $n = 4, a = (2, 3, -1, 0), b = (-3, 1, 0, 2), c = (-4, 5, -1, 4), d = (9, 8, -3, -2)$.

Dans chacun des cas précédents, compléter $\{a, b\}$ pour obtenir une base de $\mathbb{R}^3$ (cas 1), ou $\mathbb{R}^4$ (cas 2).

Solution

HAUT

Exercice 11. Somme directe de 2 sous-espaces vectoriels.

On considère les vecteurs du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^4$: $a_1 = (0, 1, 1, 1)$, $a_2 = (1, 0, 1, 1)$, $a_3 = (1, 1, 0, 1)$, $a_4 = (1, 1, 1, 0)$. Soit $F = Vect(\{a_1, a_2\})$ le sous-espace vectoriel engendré par $\{a_1, a_2\}$, et $G = Vect(\{a_3, a_4\})$ le sous-espace vectoriel engendré par $\{a_3, a_4\}$. Montrer que $\mathbb{R}^4 = F \oplus G$.	Solution

HAUT

Exercice 12. Egalité de 2 sous-espaces vectoriels.

On considère les vecteurs du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^4$:

$b_1 = (2, 3, -1, 0)$, $b_2 = (-3, 1, 0, 2)$, $b_3 = (-5, 9, -2, 6)$, $b_4 = (5, 2, -1, -2)$.

Soit $F = Vect(\{b_1, b_2\})$ le sous-espace vectoriel engendré par $\{b_1, b_2\}$, et $G = Vect(\{b_3, b_4\})$ le sous-espace vectoriel engendré par $\{b_3, b_4\}$.

1°/ Déterminer la dimension de F et la dimension de G.

2°/ Montrer que $F = G$.

Solution

HAUT

Exercice 13. Comparaison de 2 sous-espaces vectoriels.

On considère les vecteurs du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^3$:

$$u = (1, -1, 1), \quad v = (0, -1, 2), \quad w = (1, -2, 3).$$

1°/ $\{u, v, w\}$ est-elle libre ?
2°/ Soit $F = Vect(\{u, v, w\})$ le sous-espace engendré par $\{u, v, w\}$. Donner une base de F.
3°/ Soit $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + z = 0\}$. Montrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Déterminer une base de G.
4°/ Comparer F et G.

Solution

HAUT

Exercice 14. Supplémentaire d'un sous-espace vectoriel.

Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les vecteurs :

$$v_1 = (1, 2, 0, 1),\ v_2 = (1, 0, 2, 1),\ v_3 = (2, 0, 4, 2)$$
$$w_1 = (1, 2, 1, 0),\ w_2 = (-1, 1, 1, 1),\ w_3 = (2, -1, 0, 1),\ w_4 = (2, 2, 2, 2).$$

1°/ Montrer que les familles $\{v_1, v_2\}$, $\{w_1, w_2, w_3\}$, $\{v_1, v_2, w_1, w_2\}$, sont libres.

2°/ Soit $E \subseteq \mathbb{R}^4$, le sous-espace vectoriel engendré par $\{v_1, v_2, v_3\}$.

Déterminer une base de E. Donner un supplémentaire de E dans $\mathbb{R}^4$.

3°/ Soit $F \subseteq \mathbb{R}^4$, le sous-espace vectoriel engendré par $\{w_1, w_2, w_3\}$.

Donner une base de F.

4°/ Déterminer $E + F$.

5°/ Montrer que $v_1 + v_2 \in E \cap F$. Donner une base de $E \cap F$.

Solution

HAUT

Exercice 15. Dimension de la somme et de l'intersection.

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$, distincts, de dimension 2. Quelles sont les dimensions de $F + G$ et de $F \cap G$?	Solution

HAUT

Exercice 16. Rangs de familles de vecteurs et bases.

On considère les vecteurs du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^4$:

$$u_1 = (1, 1, 1, 1),\ u_2 = (1, -1, 1, -1),\ u_3 = (1, 3, 1, 3),$$
$$u_4 = (1, 2, 0, 2),\ u_5 = (1, 2, 1, 2),\ u_6 = (3, 1, 3, 1).$$

Soit $F = Vect(\{u_1, u_2, u_3\})$ le sous-espace vectoriel engendré par $\{u_1, u_2, u_3\}$, et $G = Vect(\{u_4, u_5, u_6\})$ le sous-espace vectoriel engendré par $\{u_4, u_5, u_6\}$.
Déterminer une base de F, de G, de $F + G$, et de $F \cap G$.

Solution

HAUT

Chapitre 2. Familles libres.

Enoncés.

Exercice 1. Familles libres dans $\mathbb{R}^3$.

Soient $a = (2, 3, -1)$, $b = (1, -1, -2)$; $c = (3, 7, 0)$; $d = (5, 0, -7)$ des vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

1°/ Le système $\{a, b, c\}$ est-il libre ?
2°/ Le système $\{a, b, d\}$ est-il libre ?
3°/ Montrer que le sous-espace vectoriel engendré par a et b est égal au sous-espace vectoriel engendré par c et d.

Solution.

1°/ Système { *a, b, c* }.

La matrice des vecteurs colonnes a, b, c s'écrit :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 7 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

La somme des deux dernières colonnes vaut deux fois la première colonne :

$$\boxed{b + c = 2\,a.}$$

Cette relation linéaire nulle à coefficients non nuls montre que la famille { a, b, c } n'est pas libre.

D'autre part, comme les deux dernières colonnes de la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 7 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ forment des vecteurs linéairement indépendants, la famille { a, b, c } est de rang 2 et le sous-espace vectoriel engendré par cette famille a pour base les vecteurs b et c, donc les vecteurs a et b forment aussi une base du sous-espace vectoriel engendré par la famille $\{a, b, c\}$.

2°/ Système { *a, b, d* }.

La matrice des vecteurs colonnes a, b, c s'écrit :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & -7 \end{pmatrix}$$

La différence entre la troisième et la première colonnes vaut trois fois la deuxième colonne :

$$\boxed{d - a = 3\,b.}$$

Cette relation linéaire nulle à coefficients non nuls montre que la famille { *a*, *b*, *d* } n'est pas libre.

D'autre part, comme les deux dernières colonnes de la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & -7 \end{pmatrix}$ forment des vecteurs linéairement indépendants, la famille { *a*, *b*, *d* } est de rang 2 et le sous-espace vectoriel engendré par cette famille a pour base les vecteurs *b* et *d*, donc les vecteurs *a* et *b* forment aussi une base du sous-espace vectoriel engendré par la famille {*a*, *b*, *d*}.

3°/ Sous-espaces engendrés.

Nous avons obtenu les relations :

$$c = 2\,a - b$$
$$d = a + 3\,b.$$

Comme le déterminant $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$ vaut 7, et n'est donc pas nul, ces formules sont inversibles :

$$3\,c + d = 7\,a$$
$$-c + 2\,d = 7\,b$$

Ces deux groupes de formules réciproques montrent que toute combinaison linéaire des vecteurs *a* et *b* peut s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs *c* et *d*, et, réciproquement, toute combinaison linéaire des vecteurs *c* et *d* peut s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs *a* et *b*.

Ce résultat montre que les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ engendrés par { *a*, *b* } d'une part, et par { *c*, *d* } d'autre part, sont égaux : chacun est contenu dans l'autre.

Les systèmes de vecteurs { *a*, *b* } et { *c*, *d* }engendrent le même sous-espace vectoriel.

De ceci, il résulte, notamment, que, comme les vecteurs *a* et *b* forment une base du sous-espace vectoriel qu'ils engendrent, les vecteurs *c* et *d* forment aussi une base de ce sous-espace vectoriel : en particulier, ils forment une famille libre.

Les systèmes de vecteurs { *a*, *b* } et { *c*, *d* }sont deux bases du même sous-espace vectoriel.

Chapitre 2. Familles libres.

Enoncés.

Exercice 2. Indépendance linéaire.

Soient les trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$, $u^1 = (2, 3, 5)$, $u^2 = (-1, 2, -3)$, $u^3 = (4, -3, 8)$.

1°/ Examiner leur indépendance linéaire et, éventuellement, donner les dépendances linéaires.
2°/ On rajoute le vecteur $u^4 = (-4, 17, -10)$. Mêmes questions avec la famille $\{u^1, u^2, u^3, u^4\}$.

Solution.

1°/ Indépendance linéaire.

Le déterminant de la matrice A des vecteurs colonnes u^1, u^2, u^3, est :

$$Dét\,(A) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -3 \\ 5 & -3 & 8 \end{vmatrix} = 32 + 15 - 36 - 40 - 18 + 24 = 71 - 94 = -23 \neq 0$$

Il n'est pas nul.
Or le déterminant de trois vecteurs est, au signe près, le volume du parallélépipède construit sur ces trois vecteurs.
S'il n'est pas nul, c'est que les trois vecteurs ne sont pas dans un même plan : donc il n'y a pas de relation linéaire entre eux.

La famille $\{u^1, u^2, u^3\}$ est donc une **famille libre** : c'est une base de $\mathbb{R}^3$, puisqu'elle a trois éléments.

2°/ Famille liée.

La famille $\{u^1, u^2, u^3, u^4\}$ possède plus d'éléments qu'une base de $\mathbb{R}^3$: c'est une **famille liée**.

Pour **trouver une relation linéaire** entre les vecteurs u^1, u^2, u^3, u^4, il suffit d'**inverser la matrice *A***, c'est-à-dire de trouver les vecteurs de la base canonique $e = \{e^1, e^2, e^3\}$ en fonction des vecteurs de la famille $u = \{u^1, u^2, u^3\}$: **la matrice *A* est la matrice de l'application identique** de $\mathbb{R}^3$ muni de la base canonique e, dans $\mathbb{R}^3$ muni de la base u. Son inverse A^{-1} est la matrice de l'application identique de $\mathbb{R}^3$ muni de la base u, dans $\mathbb{R}^3$ muni de la base canonique e.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -3 \\ 5 & -3 & 8 \end{pmatrix}, A^{-1} = \frac{1}{23}\begin{pmatrix} -7 & 4 & 5 \\ 39 & 4 & -18 \\ 19 & -1 & -7 \end{pmatrix}$$ (voir calcul plus bas).

$$A = [Id_{\mathbb{R}^3}, e, u],\ A^{-1} = [Id_{\mathbb{R}^3}, u, e]$$

$[23\ u^4, u]$ est la matrice des composantes (contravariantes) du vecteur $23\ u^4$ dans la base $u = \{u^1, u^2, u^3\}$.
La formule de **changement de base** permet d'écrire :

$$\mathbf{[23\ u^4, u] = [Id_{\mathbb{R}^3}, u, e]\ [23\ u^4, e]}$$
$$= 23\ [Id_{\mathbb{R}^3}, u, e]\ [u^4, e] = 23\ A^{-1}\ [u^4, e]$$
$$[23\ u^4, u] = \begin{pmatrix} -7 & 4 & 5 \\ 39 & 4 & -18 \\ 19 & -1 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 \\ 17 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 146 \\ -268 \\ -163 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{23\ u^4 = 146\ u^1 - 268\ u^2 - 163\ u^3.}$$

Le terme de "**composantes contravariantes**" rappelle que ces composantes varient, non avec la matrice A du changement de base, mais avec la matrice inverse A^{-1}.

Vérification.

$146\ u^1 = 146\ (2, 3, 5) = (292, 438, 730)$
$-268\ u^2 = -268\ (-1, 2, -3) = (268, -536, 804)$
$-163\ u^3 = -163\ (4, -3, 8) = (-652, 489, -1\ 304)$
$146\ u^1 - 268\ u^2 - 163\ u^3 = (292+268-652, 438-536+489, 730+804-1304) = (-92, 391, 230)$
$23\ u^4 = 23\ (-4, 17, 10) = (-92, 391, 230) = 146\ u^1 - 268\ u^2 - 163\ u^3$.

Calcul de l'inverse de la matrice *A*.

On peut écrire :

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -3 \\ 5 & -3 & 8 \end{pmatrix} = A \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A peut être interprétée, ici, comme la matrice, dans la base canonique, d'un **automorphisme** f de $\mathbb{R}^3$ défini par $f(e^i) = u^i$, $1 \leqslant i \leqslant 3$. Les e^i sont les colonnes de la matrice unité de droite, les u^i les colonnes de la matrice de gauche. Par linéarité de f, on peut combiner linéairement les colonnes de la matrice de droite : les images sont les combinaisons linéaires correspondantes des colonnes de la matrice de gauche.

Ajoutons, dans la matrice des u^i et dans la matrice des e^i, la deuxième colonne à la première :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 5 & 2 & -3 \\ 2 & -3 & 8 \end{pmatrix} = A \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ajoutons 4 fois la deuxième colonne à la troisième et ajoutons la première colonne à la deuxième :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 7 & 5 \\ 2 & -1 & -4 \end{pmatrix} = A \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Multiplions la deuxième colonne par 3 et retranchons 4 fois la troisième colonne de la deuxième :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 5 \\ 2 & 13 & -4 \end{pmatrix} = A \times \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & -10 & 4 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

Soustrayons 5 fois la deuxième colonne de la troisième, et 5 fois la deuxième colonne de la première :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -63 & 13 & -69 \end{pmatrix} = A \times \begin{pmatrix} -14 & 3 & -15 \\ 51 & -10 & 54 \\ 20 & -4 & 21 \end{pmatrix}$$

Soustrayons $\frac{63}{69}$ fois la troisième colonne de la première et ajoutons $\frac{13}{69}$ fois la troisième colonne à la deuxième :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -69 \end{pmatrix} = A \times \begin{pmatrix} -\frac{7}{23} & \frac{4}{23} & -15 \\ \frac{39}{23} & \frac{4}{23} & 54 \\ \frac{19}{23} & -\frac{1}{23} & 21 \end{pmatrix}$$

Enfin, divisons la troisième colonne par – 69 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A \times \begin{pmatrix} -\frac{7}{23} & \frac{4}{23} & \frac{5}{23} \\ \frac{39}{23} & \frac{4}{23} & -\frac{18}{23} \\ \frac{19}{23} & -\frac{1}{23} & -\frac{7}{23} \end{pmatrix} = A \times \frac{1}{23}\begin{pmatrix} -7 & 4 & 5 \\ 39 & 4 & -18 \\ 19 & -1 & -7 \end{pmatrix}$$

D'où : $A^{-1} = \frac{1}{23}\begin{pmatrix} -7 & 4 & 5 \\ 39 & 4 & -18 \\ 19 & -1 & -7 \end{pmatrix}$.

Chapitre 2. Familles libres.

Enoncés.

Exercice 3. Condition pour qu'un vecteur soit combinaison linaire de deux autres.

Pour quelle valeur de k, le vecteur $u = (1, -2, k)$ de $\mathbb{R}^3$ est-il combinaison linéaire des vecteurs $a = (1, 1, 1)$ et $b = (1, 2, 3)$?	

Solution.

Pour que le vecteur u soit combinaison linéaire des vecteurs a et b, il faut et il suffit que le volume du parallélépipède construit sur les vecteurs $\{a, b, u\}$ soit nul.
Ce volume est donné par le **déterminant de la matrice** des composantes des trois vecteurs.
Le vecteur u est donc combinaison linéaire des vecteurs a et b si, et seulement si :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & k \end{vmatrix} = 0$$

Or $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & k \end{vmatrix} = 2k - 2 + 3 - 2 + 6 - k = k + 5.$
Donc :

$$\boxed{u \text{ est combinaison linéaire de } a \text{ et } b \Leftrightarrow k = -5.}$$

Remarque.

La méthode utilisée ici ne fournit pas la combinaison linéaire de a et b donnant u.
Mais il suffit d'écrire :

$$\alpha\, a + \beta\, b = u$$

pour obtenir, par projection sur les axes, les relations :

$$\alpha + \beta = 1$$
$$\alpha + 2\beta = -2$$
$$\alpha + 3\beta = -5$$

Ces relations donnent $\beta = -3$, $\alpha = 4$, donc $\boldsymbol{u = 4a - 3b}$.

Chapitre 2. Familles libres.

Enoncés.

Exercice 4. Familles libres ou liées.

Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs $e_1 = (1, 0, 1)$, $e_2 = (2, 1, -1)$, $e_3 = (1, 1, 0)$, $e_4 = (1, -1, 1)$. Les familles suivantes sont-elles libres ou liées ? 1°/ $\{e_1, e_2\}$. 2°/ $\{e_1, e_2, e_3\}$. 3°/ $\{e_1, e_2, e_4\}$. 4°/ $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$.	

Solution.

1°/ Famille $\{e_1, e_2\}$.

Les deux vecteurs e_1 et e_2 ne sont pas proportionnels puisque $\frac{1}{2} \neq \frac{0}{1}$.
Donc il n'existe aucune relation linéaire entre ces deux vecteurs : **la famille $\{e_1, e_2\}$ est libre**.

2°/ Famille $\{e_1, e_2, e_3\}$.

Le déterminant de la famille de vecteurs $\{e_1, e_2, e_3\}$ est :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 2$$

Il n'est pas nul, donc **la famille $\{e_1, e_2, e_3\}$ est libre**.

3°/ Famille $\{e_1, e_2, e_4\}$.

Le déterminant de la famille de vecteurs $\{e_1, e_2, e_4\}$ est :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -3$$

Il n'est pas nul, donc **la famille $\{e_1, e_2, e_4\}$ est libre**.

4°/ Famille $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$.

La famille $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ comporte plus de vecteurs qu'une base : c'est donc une **famille liée**.

Chapitre 2. Familles libres.

Enoncés.

Exercice 5. Rangs de 3 systèmes de vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

Déterminer, suivant les valeurs de α (ou de α, β, γ) les rangs des systèmes S_1, S_2, S_3, de vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

S_1 $a = (\alpha, 1, 1)$ $b = (1, \alpha, 1)$ $c = (1, 1, \alpha)$

S_2 $a = (\alpha, 1, 1)$ $b = (-1, -\alpha, -1)$ $c = (-1, -1, \alpha)$

S_3 $a = (0, \gamma, -\beta)$ $b = (-\gamma, 0, \alpha)$ $c = (\beta, -\alpha, 0)$

Solution.

1°/ Rang de S_1.

Le déterminant du système S_1 est :

$$a \wedge b \wedge c = \begin{vmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{vmatrix} = (2+\alpha) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{vmatrix} = (2+\alpha) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \alpha-1 & 0 \\ 1 & 0 & \alpha-1 \end{vmatrix} = (\alpha-1)^2(\alpha+2)$$

Pour $\alpha \neq 1$ et $\alpha \neq -2$, ce déterminant n'est pas nul et S_1 est libre : comme il comporte trois vecteurs, c'est une famille libre maximale, donc une base, et S_1 est de rang 3.

Pour $\alpha = -2$, on a $a + b + c = 0$ et comme le déterminant $\begin{vmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & \alpha \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 3$ n'est pas nul, la famille est de rang 2.

Pour $\alpha = 1$, on a $a = b = c$ et $a \neq 0$, donc le sous-espace vectoriel engendré par S_1 est $\mathbb{R}a$: il est de dimension 1 et S_1 est de rang 1.

Pour $\alpha = 1$, S_1 est de rang 1.
Pour $\alpha = -2$, S_1 est de rang 2.
Pour $\alpha \neq 1$ et $\alpha \neq -2$, S_1 est de rang 3.

2°/ Rang de S_2.

Le déterminant du système S_2 est :

$$a \wedge b \wedge c = \begin{vmatrix} \alpha & -1 & -1 \\ 1 & -\alpha & -1 \\ 1 & -1 & \alpha \end{vmatrix} = -\alpha^3 + 2 - \alpha = (1-\alpha)(\alpha^2 + \alpha + 2)$$

Pour $\alpha = 1$, le déterminant est nul, $a + b = 0$, a et c sont linéairement indépendants, donc S_2 est de rang 2.
Pour $\alpha \neq 1$, le déterminant est différent de 0, le système S_2 est de rang 3.

Pour $\alpha = 1$, S_2 est de rang 2.
Pour $\alpha \neq 1$, S_2 est de rang 3.

3°/ Rang de S_3.

Le déterminant du système S_3 est :

$$a \wedge b \wedge c = \begin{vmatrix} 0 & -\gamma & \beta \\ \gamma & 0 & -\alpha \\ -\beta & \alpha & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Pour $\alpha \neq 0$, le mineur $\begin{vmatrix} 0 & -\alpha \\ \alpha & 0 \end{vmatrix} = \alpha^2$ est différent de 0, le système S_3 est de rang 2.
Pour $\beta \neq 0$, le mineur $\begin{vmatrix} 0 & \beta \\ -\beta & 0 \end{vmatrix} = \beta^2$ est différent de 0, le système S_3 est de rang 2.
Pour $\gamma \neq 0$, le mineur $\begin{vmatrix} 0 & -\gamma \\ \gamma & 0 \end{vmatrix} = \gamma^2$ est différent de 0, le système S_3 est de rang 2.
Pour $\alpha = \beta = \gamma = 0$, $a = b = c = 0$, le système S_3 est de rang 0.

Pour $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 0$, S_3 est de rang 0.
Pour $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \neq 0$, S_3 est de rang 2.

Chapitre 2. Familles libres.

Enoncés.

Exercice 6. Rangs de 3 systèmes de vecteurs de $\mathbb{R}^4$.

Déterminer les rangs des systèmes S_1, S_2, S_3, de vecteurs de $\mathbb{R}^4$ et, éventuellement, les relations entre les vecteurs de S_i $(1 \leqslant i \leqslant 3)$. S_1 $a = (1, 1, 1, 1)$ $b = (0, 1, 2, -1)$ $c = (1, 0, -2, 3)$ $d = (2, 1, 0, -1)$ S_2 $a = (1, 0, 1, 0)$ $b = (2, 1, 0, 1)$ $c = (0, 2, -1, 1)$ $d = (3, -1, 2, 0)$ S_3 $a = (1, 0, 2, 3)$ $b = (7, 4, -2, -1)$ $c = (5, 2, 4, 7)$ $d = (3, 2, 0, 1)$	

Solution.

1°/ Système S_1.

Ecrivons la matrice des vecteurs-colonnes du système S_1 :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

On peut écrire :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix} = A \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Soustrayons la première colonne de la troisième, et soustrayons deux fois la première colonne de la quatrième :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -3 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} = A \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ajoutons la deuxième colonne à la troisième et à la quatrième :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -4 \end{pmatrix} = A \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Le déterminant de la matrice de gauche vaut 4, le déterminant de la matrice de droite vaut 1, donc le déterminant de la matrice A vaut 4, il n'est pas nul, et le système S_1 est de rang 4 (dimension de l'image de l'endomorphisme de matrice A dans la base canonique, ou dimension du sous-espace engendré par le système S_1) : $< S_1 > = \mathbb{R}^4$.

Le système S_1 est de rang 4.

2°/ Système S_2.

Ecrivons la matrice des vecteurs-colonnes du système S_2 :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On peut écrire :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = B \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Soustrayons deux fois la première colonne de la deuxième, et trois fois la première colonne de la quatrième :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = B \times \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Soustrayons deux fois la deuxième colonne de la troisième et ajoutons la deuxième colonne à la quatrième :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = B \times \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & -5 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ajoutons la troisième colonne à la quatrième et à la deuxième :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = B \times \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sur la matrice de gauche, nous voyons que le système S_2 est de rang 3, puisqu'on peut extraire le déterminant non nul d'ordre 3 : $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 3$.

Sur la matrice de droite, nous voyons que $-a - b + c + d = 0$, ou $\boldsymbol{a + b = c + d}$, ce qui, a posteriori, est évident.

Le système S_2 est de rang 3.

Le sous-espace vectoriel engendré par le système S_2 est l'**hyperplan d'équation $\boldsymbol{-x - y + z + 3t = 0}$**.

En effet, si l'on désigne par $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$, la matrice de gauche de la dernière relation matricielle montre que le sous-espace vectoriel engendré par le système S_2 a pour base les vecteurs :

$e_1 + e_3$, $e_2 + e_3$, $3e_3 - e_4$,

Un vecteur du sous-espace vectoriel engendré par le système S_2 s'écrit donc :

$\lambda (e_1 + e_3) + \mu (e_2 + e_3) + \nu (3e_3 - e_4)$

$= \lambda e_1 + \mu e_2 + (\lambda + \mu + 3\nu) e_3 - \nu e_4$

En posant $x = \lambda$, $y = \mu$, $z = (\lambda + \mu + 3\nu)$, $t = -\nu$, on obtient alors :

$z + 3t = \lambda + \mu = x + y$.

$-x - y + z + 3t = 0$.

On vérifie d'ailleurs facilement que les quatre vecteurs du système S_2 satisfont cette relation.

3°/ Système S_3.

Ecrivons la matrice des vecteurs-colonnes du système S_3 :

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 5 & 3 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 4 & 0 \\ 3 & -1 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

On peut écrire :

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 5 & 3 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 4 & 0 \\ 3 & -1 & 7 & 1 \end{pmatrix} = C \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Soustrayons 7 fois la première colonne de la deuxième, 5 fois la première colonne de la troisième, trois fois la première colonne de la quatrième :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \\ 2 & -16 & -6 & -6 \\ 3 & -22 & -8 & -8 \end{pmatrix} = C \times \begin{pmatrix} 1 & -7 & -5 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Soustrayons deux fois la troisième colonne de la deuxième, et soustrayons la troisième colonne de la quatrième :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & -6 & 0 \\ 3 & -6 & -8 & 0 \end{pmatrix} = C \times \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Echangeons la deuxième et la troisième colonnes :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -6 & -4 & 0 \\ 3 & -8 & -6 & 0 \end{pmatrix} = C \times \begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice de gauche montre que le système S_3 est de rang 3, puisqu'on peut extraire le déterminant non nul d'ordre 3 : $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & -6 & -4 \end{vmatrix} = -8$.

La matrice de droite montre que $2a - c + d = 0$, $\boldsymbol{c = 2a + d}$, ce qui est évident, a posteriori.

Le système S_3 est de rang 3.

Le sous-espace vectoriel engendré par le système S_3 est l'**hyperplan d'équation $y + 3z - 2t = 0$.**

En effet, si l'on désigne par $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$, le sous-espace vectoriel engendré par le système S_3 a, pour base, les vecteurs :

$e_1 + 2e_3 + 3e_4$, $2e_2 - 6e_3 - 8e_4$, $-4e_3 - 6e_4$,

d'après la dernière relation entre matrices (trois premiers vecteurs-colonnes de la matrice de gauche).

Un vecteur du sous-espace engendré par le système S_3 est donc de la forme :

$\lambda (e_1 + 2e_3 + 3e_4) + \mu (2e_2 - 6e_3 - 8e_4) + \nu (-4e_3 - 6e_4)$

$= \lambda e_1 + 2\mu e_2 + (2\lambda - 6\mu - 4\nu) e_3 + (3\lambda - 8\mu - 6\nu) e_4$

En posant $x = l$, $y = 2\mu$, $z = (2\lambda - 6\mu - 4\nu)$, $t = (3\lambda - 8\mu - 6\nu)$, on obtient :

$3z - 2t = 3(2\lambda - 6\mu - 4\nu) - 2(3\lambda - 8\mu - 6\nu) = -2\mu = -y$,

$y + 3z - 2t = 0$.

On vérifie d'ailleurs facilement que les quatre vecteurs du système S_3 satisfont cette relation.

Chapitre 2. Familles libres.

Enoncés.

Exercice 7. Applications linéairement indépendantes.

Montrer que les fonctions f, g, h, définies par :

$$f = Id_{\mathbb{R}}, \quad g(x) = \sin x, \quad h(x) = \cos x,$$

sont linéairement indépendantes dans l'espace vectoriel $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Solution.

Soient λ, μ, ν, des nombres réels vérifiant $\lambda f + \mu g + \nu h = 0$.
Puisque la fonction $\lambda f + \mu g + \nu h$ est nulle, elle est nulle pour $x = 0$: d'où $\nu = 0$, et $\lambda f + \mu g + \nu h = \lambda f + \mu g = 0$.
Puisque $\lambda f + \mu g$ est nulle, elle est nulle pour $x = \pi$: d'où $\lambda \pi = 0$ et $\lambda = 0$.
La relation $\lambda f + \mu g + \nu h = 0$, se réduit donc à $\mu g = 0$.
Pour $x = \frac{\pi}{2}$, on obtient $\mu = 0$.
Ainsi, $\lambda f + \mu g + \nu h = 0 \Rightarrow \lambda = \mu = \nu = 0$.
C'est exactement dire que **les fonctions *f, g, h,* sont linéairement indépendantes**.

Chapitre 2. Familles libres.

Enoncés.

Exercice 8. Applications formant une partie liée.

On désigne par C l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose : $f_1(x) = \sin(1+x), \quad f_2(x) = \sin(2+x), \quad f_3(x) = \sin(3+x).$ Montrer que $\{f_1, f_2, f_3\}$ est une partie liée.	

Solution.

Pour tout nombre réel x, nous avons :

$$f_1(x) + f_3(x) = \sin(1+x) + \sin(3+x) = 2\sin(2+x) \times \cos 2 = 2\cos 2 \times f_2(x)$$

(formule $\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$)

D'où : $f_1 - 2\cos 2 \times f_2 + f_3 = 0$.

La relation $f_1 - 2\cos 2 \times f_2 + f_3 = 0$ montre qu'il existe une combinaison linéaire nulle des trois fonctions, avec des coefficients non tous nuls.
Conclusion : **$\{f_1, f_2, f_3\}$ est une partie liée**.

Chapitre 2. Familles libres.

Enoncés.

Exercice 9. Dimension de sous-espace vectoriel.

On désigne par E l'ensemble $\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x = 2y - z \text{ et } t = x + y + z\}$. Montrer que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Déterminer une base de E et préciser sa dimension.	

Solution.

1°/ Espace vectoriel.

Les applications f et g, de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}$, définies par :

$$f(x, y, z, t) = x - 2y + z$$
$$g(x, y, z, t) = x + y + z - t$$

sont des **formes linéaires** (démonstration évidente puisque ces fonctions sont homogènes de degré 1).

Leurs noyaux sont donc des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$ et E, qui est l'intersection de ces noyaux, est aussi un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$, donc un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, puisque l'intersection de deux sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel.

E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

2°/ Base et dimension.

Soit $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$.
Tout vecteur $x e_1 + y e_2 + z e_3 + t e_4$ de E vérifie les relations :
$x - 2y + z = 0$
$x + y + z - t = 0$
Donc $x + z = 2y = t - y$, soit $\boldsymbol{t = 3y}$ **et** $\boldsymbol{z = 2y - x}$.
x et y étant choisis arbitrairement, z et t sont entièrement déterminés par la donnée de x et y.
Cela montre que $\boldsymbol{E}$ **est de dimension 2** et qu'on peut prendre pour base de E, par exemple, les vecteurs, linéairement indépendants, correspondant à $(x, y) = (1, 0)$ et $(x, y) = (0, 1)$: $(1, 0, -1, 0)$ et $(0, 1, 2, 3)$.

E est de dimension 2 et engendré par les vecteurs $(1, 0, -1, 0)$ et $(0, 1, 2, 3)$.

Chapitre 2. Familles libres.

Enoncés.

Exercice 10. Bases de sous-espaces vectoriels.

Dans $\mathbb{R}^n$, démontrer que le sous-espace engendré par a et b, d'une part, et le sous-espace engendré par c et d, d'autre part, sont identiques et déterminer leur dimension : 1°/ $n = 3, a = (2, 3, -1), \quad b = (1, -1, -2), \quad c = (3, 7, 0), \quad d = (5, 0, -7)$. 2°/ $n = 4, a = (2, 3, -1, 0), b = (-3, 1, 0, 2), c = (-4, 5, -1, 4), d = (9, 8, -3, -2)$. Dans chacun des cas précédents, compléter $\{a, b\}$ pour obtenir une base de $\mathbb{R}^3$ (cas 1), ou $\mathbb{R}^4$ (cas 2).	

Solution.

1°/ $n = 3$.

On a, de façon évidente :

$$c = 2a - b$$
$$d = a + 3b$$

et, réciproquement :

$$7a = 3c + d$$
$$7b = -c + 2d$$

Donc **le sous-espace vectoriel engendré par c et d est identique au sous-espace vectoriel engendré par a et b**.
Comme a et b ne sont pas proportionnels, ils sont linéairement indépendants et forment donc une base du sous-espace vectoriels qu'ils engendrent.

Pour compléter $\{a, b\}$ en une base de $\mathbb{R}^3$, il suffit de prendre un vecteur (x, y, z) tel que le déterminant :

$$\begin{vmatrix} x & 2 & 1 \\ y & 3 & -1 \\ z & -1 & -2 \end{vmatrix} = -7x + 3y - 5z$$

ne soit pas nul, par exemple, le vecteur $(1, 0, 0) = e_1$.

$\{a, b, e_1\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

2°/ *n* = 4.

On a, de façon évidente :

$c = a + 2\,b$
$d = 3\,a - b$

et, réciproquement :

$7\,a = c + 2\,d$
$7\,b = 3\,c - d$

Donc **le sous-espace vectoriel engendré par *c* et *d* est identique au sous-espace vectoriel engendré par *a* et *b***.
Comme *a* et *b* ne sont pas proportionnels, ils sont linéairement indépendants et forment donc une base du sous-espace vectoriels qu'ils engendrent.

Pour trouver un premier vecteur linéairement indépendant de *a* et *b*, il suffit de prendre un vecteur (*x*, *y*, *z*, *t*) tel que le déterminant :

$$\begin{vmatrix} x & 2 & -3 \\ y & 3 & 1 \\ z & -1 & 0 \end{vmatrix} = x + 3\,y + 11\,z$$

ne soit pas nul, par exemple, le vecteur (1, 0, 0, 0) = e_1.

Pour trouver un deuxième vecteur linéairement indépendant de *a*, *b* et e_1, il suffit de prendre un vecteur (*x*, *y*, *z*, *t*) tel que le déterminant :

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 2 & -3 \\ y & 0 & 3 & 1 \\ z & 0 & -1 & 0 \\ t & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} y & 3 & 1 \\ z & -1 & 0 \\ t & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2\,y - 6\,z + t$$

ne soit pas nul, par exemple le vecteur (0, 1, 0, 0) = e_2.

$\{a, b, e_1, e_2\}$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

Chapitre 2. Familles libres.

Enoncés.

Exercice 11. Somme directe de 2 sous-espaces vectoriels.

On considère les vecteurs du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^4$: $a_1 = (0, 1, 1, 1)$, $a_2 = (1, 0, 1, 1)$, $a_3 = (1, 1, 0, 1)$, $a_4 = (1, 1, 1, 0)$. Soit $F = Vect(\{a_1, a_2\})$ le sous-espace vectoriel engendré par $\{a_1, a_2\}$, et $G = Vect(\{a_3, a_4\})$ le sous-espace vectoriel engendré par $\{a_3, a_4\}$. Montrer que $\mathbb{R}^4 = F \oplus G$.	

Solution.

Pour montrer que $\mathbb{R}^4$ est somme directe des sous-espaces vectoriels F et G, il faut montrer deux choses :

1. que $\mathbb{R}^4 = F + G$,
2. que $F \cap G = (0, 0, 0, 0)$.

Ces deux propriétés deviennent claires si l'on montre que le système de vecteurs $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ est une base de $\mathbb{R}^4$, puisque, dans ce cas, on peut écrire :

$$\mathbb{R}^4 = \mathbb{R}\,a_1 \oplus \mathbb{R}\,a_2 \oplus \mathbb{R}\,a_3 \oplus \mathbb{R}\,a_4$$

1°/ Le système $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

On a, par définition :

$$\begin{aligned} a_1 &= e_2 + e_3 + e_4 \\ a_2 &= e_1 + e_3 + e_4 \\ a_3 &= e_1 + e_2 + e_4 \\ a_4 &= e_1 + e_2 + e_3 \end{aligned}$$

donc :

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 3\,(e_1 + e_2 + e_3 + e_4)$$

et on peut écrire :

$$\begin{aligned} 3\,e_1 &= 3\,(e_1 + e_2 + e_3 + e_4) - 3\,(e_2 + e_3 + e_4) \\ &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 - 3\,a_1 \\ &= -2\,a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \end{aligned}$$

De même, par permutation circulaire :

$$\begin{aligned} 3\,e_2 &= a_1 - 2\,a_2 + a_3 + a_4 \\ 3\,e_3 &= a_1 + a_2 - 2\,a_3 + a_4 \\ 3\,e_4 &= a_1 + a_2 + a_3 - 2\,a_4 \end{aligned}$$

Donc les vecteurs de la base canonique peuvent s'exprimer en fonction des vecteurs a_1, a_2, a_3, a_4, ce qui suffit pour montrer que le système $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ est un système de générateurs de $\mathbb{R}^4$, donc une base de $\mathbb{R}^4$, puisqu'il possède autant d'éléments que la dimension de $\mathbb{R}^4$.

2°/ $\mathbb{R}^4$ est somme directe de *F* et *G*.

Puisque $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ est une base de $\mathbb{R}^4$, on a :

$$\mathbb{R}^4 = \mathbb{R}\,a_1 \oplus \mathbb{R}\,a_2 \oplus \mathbb{R}\,a_3 \oplus \mathbb{R}\,a_4$$

Or *F* est le sous-espace vectoriel engendré par a_1 et a_2, donc, comme a_1 et a_2 sont linéairement indépendants, on a $F = \mathbb{R}\,a_1 \oplus \mathbb{R}\,a_2$. De même, *G* est le sous-espace vectoriel engendré par a_3 et a_4, donc, comme a_3 et a_4 sont linéairement indépendants, on a $G = \mathbb{R}\,a_3 \oplus \mathbb{R}\,a_4$.

La relation $\mathbb{R}^4 = \mathbb{R}\,a_1 \oplus \mathbb{R}\,a_2 \oplus \mathbb{R}\,a_3 \oplus \mathbb{R}\,a_4$ se réduit alors à $\mathbb{R}^4 = F \oplus G$.

Chapitre 2. Familles libres.

Enoncés.

Exercice 12. Egalité de 2 sous-espaces vectoriels.

On considère les vecteurs du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^4$: $b_1 = (2, 3, -1, 0)$, $b_2 = (-3, 1, 0, 2)$, $b_3 = (-5, 9, -2, 6)$, $b_4 = (5, 2, -1, -2)$. Soit $F = Vect(\{b_1, b_2\})$ le sous-espace vectoriel engendré par $\{b_1, b_2\}$, et $G = Vect(\{b_3, b_4\})$ le sous-espace vectoriel engendré par $\{b_3, b_4\}$. 1°/ Déterminer la dimension de F et la dimension de G. 2°/ Montrer que $F = G$.	

Solution.

1°/ Dimensions de *F* et *G*.

Les vecteurs b_1 et b_2 ne sont pas proportionnels, donc ***F* est de dimension 2** et a pour base $\{b_1, b_2\}$.
Les vecteurs b_3 et b_4 ne sont pas proportionnels, donc ***G* est de dimension 2** et a pour base $\{b_3, b_4\}$.

2°/ *F* = *G*.

La dernière coordonnée de b_3 est 6, soit 3 fois la dernière coordonnée de b_2 : on regarde ce que vaut $b_3 - 3\,b_2 = (4, 6, -2, 0) = 2\,b_1$.

La dernière coordonnée de b_4 est – 2, soit – 1 fois la dernière coordonnée de b_2 : on regarde ce que vaut $b_4 + b_2 = (2, 3, -1, 0) = b_1$.

Réciproquement, des relations :

$$b_3 = 2\,b_1 + 3\,b_2$$
$$b_4 = b_1 - b_2$$

on tire :

$$5\,b_1 = b_3 + 3\,b_4$$
$$5\,b_2 = b_3 - 2\,b_4$$

et ces deux groupes de relations montrent que F et G sont tous deux engendrés par $\{b_1, b_2\}$ ou par $\{b_3, b_4\}$, donc ils sont égaux.

Chapitre 2. Familles libres.

Enoncés.

Exercice 13. Comparaison de 2 sous-espaces vectoriels.

On considère les vecteurs du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^3$:

$$u = (1, -1, 1), \quad v = (0, -1, 2), \quad w = (1, -2, 3).$$

1°/ $\{u, v, w\}$ est-elle libre ?
2°/ Soit $F = Vect(\{u, v, w\})$ le sous-espace engendré par $\{u, v, w\}$. Donner une base de F.
3°/ Soit $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + z = 0\}$. Montrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Déterminer une base de G.
4°/ Comparer F et G.

Solution.

1°/ Famille libre ?

Le déterminant des vecteurs u, v, w est :

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -3 - 2 + 1 + 4 = 0$$

Il est nul, donc **la famille $\{u, v, w\}$ est liée**.
Il y a d'ailleurs une relation linéaire évidente entre ces trois vecteurs : $u + v = w$.

2°/ Base de F.

Les vecteurs u et v ne sont pas proportionnels, donc ils forment une famille libre.
La famille $\{u, v, w\}$ est donc au moins de rang 2.
Comme on vient de voir qu'elle n'est pas de rang 3 puisqu'elle est liée, c'est qu'elle est de rang 2 et F est de dimension 2.
On peut donc prendre pour base de F, les vecteurs u et v.

Les vecteurs u et v forment une base de F.

3°/ Sous-espace vectoriel G.

L'application f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$, définie par $f(x, y, z) = x + 2y + z$, est une forme linéaire puisqu'elle est

homogène de degré 1.

Son noyau est *G*. Or le **noyau d'une application linéaire** est un sous-espace vectoriel, donc *G* est un sous-espace vectoriel.

Soit *A* la matrice de *f*. $A = (1 \quad 2 \quad 1)$. On peut écrire :

$$(1 \quad 2 \quad 1) = A \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Soustrayons deux fois la première colonne de la deuxième et une fois la première colonne de la troisième :

$$(1 \quad 0 \quad 0) = A \times \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cette relation montre que les vecteurs (– 2, 1, 0) et (– 1, 0, 1) sont dans le noyau de *f*.
Comme les vecteurs (– 2, 1, 0) et (– 1, 0, 1) ne sont pas proportionnels et sont dans le noyau de *f*, ils forment une base de ce noyau, puisque le noyau d'une forme linéaire non nulle est de dimension strictement plus petite que 3.

Les vecteurs (– 2, 1, 0) et (– 1, 0, 1) forment une base de *G*.

4°/ Comparaison de *F* et *G*.

$f(u) = f(1, -1, 1) = 0$
$f(v) = f(0, -1, 2) = 0$

Les vecteurs *u* et *v* sont donc tous deux dans $Ker(f) = G$.
Comme ils sont linéairement indépendants, ils forment une base de *G*.
F et *G* ont donc une base commune : ils sont égaux.

$F = G$.

Chapitre 2. Familles libres.

Enoncés.

Exercice 14. Supplémentaire d'un sous-espace vectoriel.

Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les vecteurs :

$$v_1 = (1, 2, 0, 1),\ v_2 = (1, 0, 2, 1),\ v_3 = (2, 0, 4, 2)$$
$$w_1 = (1, 2, 1, 0),\ w_2 = (-1, 1, 1, 1),\ w_3 = (2, -1, 0, 1),\ w_4 = (2, 2, 2, 2).$$

1°/ Montrer que les familles $\{v_1, v_2\}$, $\{w_1, w_2, w_3\}$, $\{v_1, v_2, w_1, w_2\}$, sont libres.
2°/ Soit $E \subseteq \mathbb{R}^4$, le sous-espace vectoriel engendré par $\{v_1, v_2, v_3\}$.
Déterminer une base de E. Donner un supplémentaire de E dans $\mathbb{R}^4$.
3°/ Soit $F \subseteq \mathbb{R}^4$, le sous-espace vectoriel engendré par $\{w_1, w_2, w_3\}$.
Donner une base de F.
4°/ Déterminer $E + F$.
5°/ Montrer que $v_1 + v_2 \in E \cap F$. Donner une base de $E \cap F$.

Solution.

1°/ Familles libres.

Les vecteurs v_1 et v_2 ne sont pas proportionnels : ils forment une **famille libre**.

La matrice A des vecteurs colonnes w_1, w_2, w_3, s'écrit :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

et on peut écrire :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = A \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ajoutons deux fois la deuxième colonne à la troisième et ajoutons la première colonne à la deuxième :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} = A \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Echangeons la deuxième et la troisième colonne :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} = A \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Soustrayons trois fois la deuxième colonne de la troisième :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -4 \\ 0 & 3 & -8 \end{pmatrix} = A \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Les trois vecteurs colonnes de la matrice de gauche sont linéairement indépendants.
Ceci montre que **la famille $\{w_1, w_2, w_3\}$ est libre**.

Le déterminant des vecteurs $\{v_1, v_2, w_1, w_2\}$ est :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

On obtient un déterminant égal en ajoutant la quatrième colonne aux trois premières :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Développons par rapport à la première ligne :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 9 + 4 + 6 - 18 - 12 - 1 = -12$$

Le déterminant n'est pas nul, donc **la famille $\{v_1, v_2, w_1, w_2\}$ est libre**.

2°/ Sous-espace vectoriel *E*.

$$v_3 = 2\, v_2$$

Donc le sous-espace vectoriel *E* est engendré par les vecteurs linéairement indépendants v_1 et v_2.
On peut prendre pour base de *E* les vecteurs v_1 et v_2.

Pour trouver un supplémentaire de E dans $\mathbb{R}^4$, il suffit de compléter la base $\{v_1, v_2\}$ de E en une base de $\mathbb{R}^4$.

Or la famille $\{v_1, v_2, w_1, w_2\}$ est libre, c'est donc une base de $\mathbb{R}^4$.

Le sous-espace vectoriel $\mathbb{R} w_1 \oplus \mathbb{R} w_2$ est donc un supplémentaire de E dans $\mathbb{R}^4$.

$\{v_1, v_2\}$ est une base de E et $\mathbb{R}^4 = E \oplus (\mathbb{R} w_1 \oplus \mathbb{R} w_2)$

3°/ Sous-espace vectoriel *F*.

On sait que la famille $\{w_1, w_2, w_3\}$ est libre.
C'est donc une base de F puisque, par hypothèse, c'est déjà un système de générateurs de F.

$\{w_1, w_2, w_3\}$ est une base de F.

4°/ Sous-espace vectoriel *E* + *F*.

$E + F$ contient E, donc contient $\{v_1, v_2\}$.
$E + F$ contient F, donc contient $\{w_1, w_2, w_3\}$.
Or la famille $\{v_1, v_2, w_1, w_2\}$ est une base de $\mathbb{R}^4$.
Donc $E + F = \mathbb{R}^4$.

$E + F = \mathbb{R}^4$.

5°/ Sous-espace *E* ⋂ *F*.

$v_1 + v_2 \in E$ et $v_1 + v_2 = (2, 2, 2, 2) = w_4$.
Or $w_4 = w_1 + w_2 + w_3 \in F$.
Donc $v_1 + v_2 = w_4 \in E \cap F$.

Or E est de dimension 2, F est de dimension 3, et $E + F = \mathbb{R}^4$ est de dimension 4.
La relation

$$\boldsymbol{dim\,(E) + dim\,(F) = dim\,(E + F) + dim\,(E \cap F)}$$

montre que $E \cap F$ est de dimension 1.
On peut prendre le vecteur non nul $v_1 + v_2 = w_4$ comme base de $E \cap F$.

Le vecteur $v_1 + v_2 = w_4$ est une base de $E \cap F$.

Chapitre 2. Familles libres.

Enoncés.

Exercice 15. Dimension de la somme et de l'intersection.

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$, distincts, de dimension 2. Quelles sont les dimensions de $F + G$ et de $F \cap G$?	

Solution.

Puisque les sous-espaces F et G sont distincts et de dimension 2, aucun ne contient l'autre, et $F + G = \mathbb{R}^3$.
La relation :

$$dim\,(F) + dim\,(G) = dim\,(F + G) + dim\,(F \cap G)$$

donne alors :

$$\boxed{\begin{array}{l} dim\,(F + G) = 3 \\ dim\,(F \cap G) = 1 \end{array}}$$

Chapitre 2. Familles libres.

Enoncés.

Exercice 16. Rangs de familles de vecteurs et bases.

On considère les vecteurs du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^4$: $u_1 = (1, 1, 1, 1)$, $u_2 = (1, -1, 1, -1)$, $u_3 = (1, 3, 1, 3)$, $u_4 = (1, 2, 0, 2)$, $u_5 = (1, 2, 1, 2)$, $u_6 = (3, 1, 3, 1)$. Soit $F = Vect(\{u_1, u_2, u_3\})$ le sous-espace vectoriel engendré par $\{u_1, u_2, u_3\}$, et $G = Vect(\{u_4, u_5, u_6\})$ le sous-espace vectoriel engendré par $\{u_4, u_5, u_6\}$. Déterminer une base de F, de G, de $F + G$, et de $F \cap G$.	

Solution.

1°/ Sous-espace *F*.

Les vecteurs u_1 et u_2 ne sont pas proportionnels : ils forment donc une famille libre.
$u_2 + u_3 = (2, 2, 2, 2) = 2\,u_1$
$u_3 = 2\,u_1 - u_2$.
Donc la famille $\{u_1, u_2, u_3\}$ est liée et de rang 2.
F est de dimension 2 et admet pour base le système $\{u_1, u_2\}$.
On peut prendre aussi pour base les vecteurs $u_1 + u_2 = (2, 0, 2, 0) = 2\,(e_1 + e_3)$, et $u_1 - u_2 = (0, 2, 0, 2) = 2\,(e_2 + e_4)$, ou encore les vecteurs $e_1 + e_3$ et $e_2 + e_4$.

$$F \text{ est de dimension 2 et } F = \mathbb{R}\,(e_1 + e_3) \oplus \mathbb{R}\,(e_2 + e_4)$$

2°/ Sous-espace *G*.

La matrice du système de vecteurs-colonnes $\{u_4, u_5, u_6\}$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

C'est la matrice d'une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^4$ qui donne pour image des vecteurs de base

de $\mathbb{R}^3$, les vecteurs u_4, u_5, u_6.
On peut écrire :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = A \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Soustrayons la première colonne de la deuxième, et soustrayons trois fois la première colonne de la troisième :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -5 \end{pmatrix} = A \times \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Echangeons la deuxième colonne et la troisième :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & -5 & 0 \end{pmatrix} = A \times \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Soustrayons trois fois la troisième colonne de la deuxième :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 0 \end{pmatrix} = A \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Multiplions la première colonne par 5 et ajoutons 2 fois la deuxième colonne, multiplions la troisième colonne par 5 :

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & -5 & 0 \end{pmatrix} = A \times \begin{pmatrix} 5 & 0 & -5 \\ -6 & -3 & 5 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Multiplions la deuxième colonne par –1 et mettons 5 en facteur :

$$5\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = A \times \begin{pmatrix} 5 & 0 & -5 \\ -6 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

La forme de la matrice de gauche montre que la famille $\{u_4, u_5, u_6\}$ est libre, puisque qu'on peut extraire un déterminant d'ordre 3, non nul car égal à 1.

La matrice de droite montre que l'on peut prendre pour base du sous-espace G (image de l'application linéaire de matrice A), les vecteurs :
$e_1 = (1, 0, 0, 0)$, $e_2 + e_4 = (0, 1, 0, 1)$, $e_3 = (0, 0, 1, 0)$.
Ces vecteurs sont liés aux vecteurs u_4, u_5, u_6, par des formules tirées de la relation matricielle

précédente :

$$5\,e_1 = 5\,u_4 - 6\,u_5 + 2\,u_6$$
$$5\,(e_2 + e_4) = 3\,u_5 - u_6$$
$$e_3 = -u_4 + u_5$$

$$\boxed{G \text{ est de dimension 3 et } G = \mathbb{R}\,e_1 \oplus \mathbb{R}\,e_3 \oplus \mathbb{R}\,(e_2 + e_4)}$$

3°/ Sous-espaces $F + G$ et $F \cap G$.

Les relations :

$$F = \mathbb{R}\,(e_1 + e_3) \oplus \mathbb{R}\,(e_2 + e_4)$$
$$G = \mathbb{R}\,e_1 \oplus \mathbb{R}\,e_3 \oplus \mathbb{R}\,(e_2 + e_4)$$

où $\mathbb{R}\,(e_1 + e_3) \subseteq \mathbb{R}\,e_1 \oplus \mathbb{R}\,e_3$, est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}\,e_1 \oplus \mathbb{R}\,e_3$, montrent que ***F* est contenu dans *G***.

On a donc $F + G = G$ et $F \cap G = F$.

$$\boxed{\begin{array}{c} F + G = G = \mathbb{R}\,e_1 \oplus \mathbb{R}\,e_3 \oplus \mathbb{R}\,(e_2 + e_4) \\ F \cap G = F = \mathbb{R}\,(e_1 + e_3) \oplus \mathbb{R}\,(e_2 + e_4) \end{array}}$$

E S P A C E S V E C T O R I E L S

EXERCICE 1.

On considère les vecteurs $a = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 8 \end{bmatrix}$ et $b = \begin{bmatrix} 6 \\ 10 \\ 2 \end{bmatrix}$, et la famille de vecteurs $A = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.

1° Dans $\mathbb{R}^3$, la famille A est-elle une famille libre ?
2° Dans $\mathbb{R}^3$, le vecteur a est-il combinaison linéaire des vecteurs de la famille A ?
3° Dans $\mathbb{R}^3$, le vecteur b est-il combinaison linéaire des vecteurs de la famille A ?

EXERCICE 2.

On considère le vecteur $c = \begin{bmatrix} 2 \\ 14 \\ -34 \\ 7 \end{bmatrix}$ et la famille de vecteurs $B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -5 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.

1° Dans $\mathbb{Q}^4$, la famille B est-elle une famille libre ?
2° Dans $\mathbb{Q}^4$, le vecteur c est-il combinaison linéaire des vecteurs de la famille B ?

EXERCICE 3.

On considère la famille de vecteurs $C = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ 1+i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2-i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$.

Dans $\mathbb{C}^3$, la famille C est-elle une famille libre ?

EXERCICE 4.

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n, B une base de E, $\Gamma_1 = \{w_1 , w_2 , \dots , w_p \}$ une famille finie d'éléments de E. On considère les matrices suivantes :

$$[\Gamma_1 , B] = \begin{pmatrix} w_{11} & w_{21} & \cdots & w_{p1} \\ w_{12} & w_{22} & \cdots & w_{p2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{1n} & w_{2n} & \cdots & w_{pn} \end{pmatrix}, [w_1 , B] = \begin{pmatrix} w_{11} \\ w_{12} \\ \vdots \\ w_{1n} \end{pmatrix}$$

1° Montrer que la famille de vecteurs

$$\Gamma_2 = \{ w_1 , w_2 + w_1 , \dots , w_p + w_1 \}$$

est libre si et seulement si la famille Γ_1 est libre.

2° Montrer que les familles Γ_1 et Γ_2 engendrent le même sous-espace vectoriel.

3° Lorsque la famille Γ_1 est libre, montrer que la famille de vecteurs

$$\Gamma_3 = \{\alpha_1 w_1 , \alpha_2 w_2 , \dots , \alpha_p w_p \}$$

est libre si, et seulement si, le produit $\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_p$ est différent de 0.

4° Que la famille Γ_1 soit libre ou non, montrer que, pour $\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_p \neq 0$, les familles Γ_1 et Γ_3 engendrent le même sous-espace vectoriel.

5° Calculer $[\Gamma_2 , B]$, puis écrire $[\Gamma_2 , B]$ en fonction de $[\Gamma_1 , B]$ et $[w_1 , B]$.

6° Si la famille Γ_1 est de rang q, montrer qu'il existe une famille libre de vecteurs :

$$\overline{\Gamma_1} = \{ v_1 , v_2 , \dots , v_q \}$$

engendrant le même sous-espace vectoriel que la famille Γ_1 et dont la matrice dans la base B est une « matrice en escalier » :

$$[\overline{\Gamma_1} , B] = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{21} & \cdots & v_{q1} \\ v_{12} & v_{22} & \cdots & v_{q2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{1n} & v_{2n} & \cdots & v_{qn} \end{pmatrix},$$

avec $v_{ij} = 0$ pour $j < i$.

EXERCICE 5.

Dans $\mathbb{R}^4$, pour chacune des familles suivantes, calculer le rang et déterminer les sous-familles « linéairement complètes » (sous-familles ayant la même enveloppe linéaire que la famille) :

$$\Gamma_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix} \right\} \quad \Gamma_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \quad \Gamma_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 3 \\ 10 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} .$$

EXERCICE 6.

Dans $\mathbb{R}^4$, on considère la famille de vecteurs :

$$\Gamma_\alpha = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ \alpha^2 \\ \alpha^3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha^2 \\ \alpha^3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha^2 \\ \alpha^3 \\ 1 \\ \alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha^3 \\ 1 \\ \alpha \\ \alpha^2 \end{pmatrix} \right\} (\alpha \text{ réel})$$

1. Etudier, selon les valeurs de α, le rang de la famille Γ_α.
2. Trouver les valeurs de α pour lesquelles $L(\Gamma_\alpha)$ est égal à $\mathbb{R}^4$.

EXERCICE 7.

Compléter les familles suivantes de vecteurs en une base de $\mathbb{R}^4$.

$$\Gamma_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ -6 \\ 2 \end{bmatrix} \right\} . \qquad \Gamma_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} . \qquad \Gamma_\alpha = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1+\alpha \\ \alpha+\alpha^2 \\ \alpha^2+\alpha^3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha \\ 1 \\ \alpha \end{bmatrix} \right\} \ (\alpha \text{ réel}).$$

EXERCICE 8.

1° Soit Γ_1 et Γ_2 , familles finies de vecteurs. Démontrer les propriétés suivantes :

$rg(\Gamma_1 \cap \Gamma_2) + rg(\Gamma_1 \cup \Gamma_2) \leq rg(\Gamma_1) + rg\ (\Gamma_2)$

$rg(\Gamma_1 \cup \Gamma_2) = rg(\Gamma_1) + rg(\Gamma_2) \Leftrightarrow L\ (\Gamma_1) \cap L\ (\Gamma_2) = \{0\}$

2° Soit $\Gamma_1 = \{w_1 , \dots , w_p\}$ et $\Gamma_2 = \{v_1 , \dots , v_p\}$, deux familles ayant le même nombre fini p de vecteurs. Démontrer la propriété suivante :

$$((\forall\ (\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant p} \in \mathbb{R}^p)(\Sigma_i \lambda_i w_i = 0 \Longleftrightarrow \Sigma_i \lambda_i v_i = 0)) \Longrightarrow rg\ (\Gamma_1) = rg\ (\Gamma_2)$$

EXERCICE 9.

Soit H le $\mathbb{R}$–espace vectoriel des fonctions réelles d'une variable réelle, définies et continues sur -1 , $1]$. Les parties suivantes de H sont-elles des sous-espaces vectoriels de H ?

$H_1 = \{f \in H / 2\ f(0) = f(1)\ \}$

$H_2 = \{f \in H / f(1) = f(0)+1\ \}$

$H_3 = \{f \in H / f(x)>0\ \ \forall x \in [-1 , 1]\ \}$

$H_4 = \{f \in H / f(x)=f(-x)\ \ \forall x \in [-1 , 1]\}$

$H_5 = \{f \in H / f(x)=-f(-x)\ \ \forall x \in [-1 , 1]\}$

EXERCICE 10.

Dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique, on considère les deux sous-ensembles suivants :

$$H_1 = \{\ x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} / x_1 + x_2 + x_3 = 0\ \}$$

$$H_2 = \{\ x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} / x_1 = 0\ \}$$

1° Montrer que H_1 et H_2 sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.

2° Déterminer les dimensions de H_1 et de H_2.

3° Construire une base pour chacun des sous-espaces vectoriels H_1 et H_2.

4° Calculer la dimension de $H_1 \cap H_2$ et construire une base de $H_1 \cap H_2$.

EXERCICE 11.

Soient H_1 , H_2 , deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E de dimension finie.

1° $H_1 \cup H_2$ est-il un sous-espace vectoriel de E ?

2° Comparer les sous-espaces vectoriels $H_1 + H_2$ et $L(H_1 \cup H_2)$.

3° Démontrer la propriété suivante :

$$dim\ (H_1) = dim\ (H_2)\ et\ H_1 \subset H_2 \Rightarrow H_1 = H_2\ .$$

4° Montrer que, pour tout entier naturel d inférieur ou égal à la dimension de E, il existe un sous-espace vectoriel de E dont la dimension est d.

EXERCICE 12.

Soit $(H_n)_{n\in \mathbb{N}}$ une suite de sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel réel E de dimension finie.

1° Montrer que l'intersection $\bigcap H_n$ de la famille est encore un sous-espace vectoriel de E.

2° Montrer que la dimension de l'intersection $\bigcap H_n$ est inférieure ou égale à la plus petite des dimensions des H_n.

3° Que se passe-t-il lorsque la dimension de l'intersection $\bigcap H_n$ est égale à la plus petite des dimensions des H_n ?

EXERCICE 13.

Indiquez si vous pensez que l'assertion proposée est vraie ou fausse et justifiez votre choix.

1. Si E est un $\mathbb{R}$–espace vectoriel, alors E est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel.
Vrai Faux

2. Si E est un $\mathbb{Q}$–espace vectoriel, alors E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
Vrai Faux

3. Dans un espace vectoriel E, si $a, b, c, d,$ sont des vecteurs linéairement indépendants, alors les vecteurs $a - b$, $b - c$, $c - d$, $d - a$, sont linéairement indépendants.
Vrai Faux

4. Dans un espace vectoriel E, si les vecteurs a et b sont linéairement indépendants, si les vecteurs a et c sont linéairement indépendants, alors les vecteurs $a, b, c,$ sont linéairement indépendants.
Vrai Faux

5. Un polynôme de degré n et ses n dérivées forment une famille libre.
Vrai Faux

6. Dans un espace vectoriel E de dimension finie n, si le rang d'une famille de n vecteurs est égal à n, alors cette famille est une base.
Vrai Faux

7. Un espace vectoriel de dimension finie est un ensemble fini.
Vrai Faux

E S P A C E S V E C T O R I E L S

EXERCICE 1.

On considère les vecteurs $a = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 8 \end{bmatrix}$ et $b = \begin{bmatrix} 6 \\ 10 \\ 2 \end{bmatrix}$, et la famille de vecteurs $A = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.

1° Dans $\mathbb{R}^3$, la famille A est-elle une famille libre ?
2° Dans $\mathbb{R}^3$, le vecteur a est-il combinaison linéaire des vecteurs de la famille A ?
3° Dans $\mathbb{R}^3$, le vecteur b est-il combinaison linéaire des vecteurs de la famille A ?

SOLUTION.

1°/ Réduction de la matrice des vecteurs de la famille *A*.

La méthode du ***pivot de Gauss*** permet de voir si la famille de vecteurs A est libre ou non, tout en suivant les opérations effectuées sur les ***vecteurs colonnes*** :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 1 \\ 5 & 7 & 1 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Soustraire la 2e colonne de la 1e.

$$\downarrow \qquad \downarrow$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -3 & 6 & 1 \\ -2 & 7 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Soustraire la 1e colonne de la 2e.

$$\downarrow \qquad \downarrow$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 9 & 1 \\ -2 & 9 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Soustraire 9 fois la 3e colonne de la 2e.

$$\downarrow \qquad \downarrow$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -9 & 1 \end{pmatrix}$$

Ce calcul montre :

- que la famille A n'est pas libre parce qu'il y a une colonne de zéros ;
- qu'elle est de rang 2, parce que λ_1 fois la première colonne, plus λ_2 fois la dernière colonne, ne peut être nul que si $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$;
- que le vecteur $-a_1 + 2\,a_2 - 9\,a_3$ est nul, parce que c'est la combinaison linéaire correspondant à la deuxième colonne, qui est nulle ;
- que l'on peut prendre pour base du sous-espace vectoriel engendré par la famille A deux quelconques des vecteurs de la famille A, parce que le troisième est combinaison linéaire des deux autres.

2°/ Vecteur *a* et combinaison linéaire des vecteurs de la famille *A*.

Pour voir si le vecteur $a = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 8 \end{bmatrix}$ est combinaison linéaire des vecteurs de la famille *A*, il suffit de réduire la famille des vecteurs colonnes $\{a_2 , a_3 , a\}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 6 & 1 & 1 \\ 7 & 1 & 8 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Soustraire 6 fois la 2e colonne de la 1e.

$$\downarrow \qquad \downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 8 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -6 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Soustraire 5 fois la 1e colonne et 1 fois la 2e colonne de la 3e.

$$\downarrow \qquad \downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ -6 & 1 & 29 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ce calcul montre que :

- la famille $\{a_2 , a_3 , a\}$ est libre et de rang 3, parce qu'il y a, dans la matrice finale de gauche, une diagonale de trois éléments avec un triangle de zéros au-dessus ;
- le vecteur *a* n'est pas combinaison linéaire de a_2 et a_3 , parce qu'on ne peut pas obtenir de colonne de zéros;
- par conséquent, le vecteur *a* n'est pas dans le sous-espace vectoriel engendré par la famille *A*, puisque ce sous-espace a pour base les vecteurs a_2 et a_3 .

3°/ Vecteur *b* et combinaison linéaire des vecteurs de la famille *A*.

Pour voir si le vecteur $b = \begin{bmatrix} 6 \\ 10 \\ 2 \end{bmatrix}$ est combinaison linéaire des vecteurs de la famille *A*, il suffit de réduire la famille des vecteurs colonnes $\{a_2 , a_3 , b\}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 6 & 1 & 10 \\ 7 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Soustaire 6 fois la 2e colonne de la 1e.

$$\downarrow \qquad \downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 10 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -6 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Soustraire 6 fois la 1e colonne et 10 fois la 2e colonne de la 3e.

$$\downarrow \qquad \downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -14 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -6 \\ -6 & 1 & 26 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ce calcul montre que :

- la famille $\{a_2 , a_3 , b \}$ est libre et de rang 3 parce qu'il y a, dans la matrice finale de gauche, une diagonale de trois éléments avec un triangle de zéros au-dessus ;
- le vecteur b n'est pas combinaison linéaire de a_2 et a_3 ;
- par conséquent, le vecteur b n'est pas dans le sous-espace vectoriel engendré par la famille A, puisque ce sous-espace a pour base les vecteurs a_2 et a_3 .

EXERCICE 2.

On considère le vecteur $c = \begin{bmatrix} 2 \\ 14 \\ -34 \\ 7 \end{bmatrix}$ et la famille de vecteurs $B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -5 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.

1° Dans $\mathbb{Q}^4$, la famille B est-elle une famille libre ?
2° Dans $\mathbb{Q}^4$, le vecteur c est-il combinaison linéaire des vecteurs de la famille B ?

SOLUTION.

1°/ Réduction de la matrice des vecteurs de la famille *B*.

La famille B peut être réduite par les opérations suivantes :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 2 \\ -5 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Soustraire la 1e colonne de la 2e.

$$\downarrow \qquad \downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -2 \\ -5 & 8 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ce calcul montre que :

- La famille B est libre, parce que λ_1 fois la première colonne, plus λ_2 fois la dernière colonne, ne peut être nul que si $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$;
- Les vecteurs b_1 et b_2 forment une base du sous-espace vectoriel engendré par la famille B.
- La famille B est de rang 2, puisque le sous-espace vectoriel qu'elle engendre est de dimension 2.

2°/ Vecteur *c* et combinaison linéaire des vecteurs de la famille *B*.

Pour voir si le vecteur $c = \begin{bmatrix} 2 \\ 14 \\ -34 \\ 7 \end{bmatrix}$ est, ou n'est pas, combinaison linéaire des vecteurs de la famille $B = \{ b_1 , b_2 \}$, nous allons réduire la matrice des vecteurs de la famille $B \cup \{c\} = \{ b_1 , b_2 , c \}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 14 \\ -5 & 3 & -34 \\ 2 & 1 & 7 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Soustraire la 1e colonne de la 2e.

$$\downarrow \qquad \downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 14 \\ -5 & 8 & -34 \\ 2 & -1 & 7 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Soustraire 2 fois la 1e colonne de la 3e.

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 6 \\ -5 & 8 & -24 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ajouter 3 fois la 2e colonne à la 3e.

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ -5 & 8 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ce calcul montre que :

- La famille $B \cup \{c\}$ n'est pas libre, elle est de rang 2.
- La combinaison linéaire $-5\ b_1 + 3\ b_2 + c$ est nulle : $c = 5\ b_1 - 3\ b_2$.

EXERCICE 3.

On considère la famille de vecteurs $C = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ 1+i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2-i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$.

Dans $\mathbb{C}^3$, la famille C est-elle une famille libre ?

SOLUTION.

Réduction de la matrice des vecteurs de la famille *C*.

La famille C peut être réduite par les opérations suivantes :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ i & 0 & -1 \\ 1+i & 2-i & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ajouter la 1e colonne à la 2e.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ i & i & -1 \\ 1+i & 3 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ajouter i fois la 3e colonne à la 2e.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ i & 0 & -1 \\ 1+i & 3 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & i & 1 \end{pmatrix}$$

Echanger la 2e et la 3e colonnes. Multiplier la 2e colonne par −1.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ i & 1 & 0 \\ 1+i & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & i \end{pmatrix}$$

Ce calcul montre que :

- La famille C est libre et de rang 3.

EXERCICE 4.

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n, B une base de E, $\Gamma_1 = \{w_1 , w_2 , \dots , w_p \}$ une famille finie d'éléments de E. On considère les matrices suivantes :

$$[\Gamma_1 , B] = \begin{pmatrix} w_{11} & w_{21} & \cdots & w_{p1} \\ w_{12} & w_{22} & \cdots & w_{p2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{1n} & w_{2n} & \cdots & w_{pn} \end{pmatrix}, [w_1 , B] = \begin{pmatrix} w_{11} \\ w_{12} \\ \vdots \\ w_{1n} \end{pmatrix}$$

1° Montrer que la famille de vecteurs

$$\Gamma_2 = \{ w_1 , w_2 + w_1 , \dots , w_p + w_1 \}$$

est libre si et seulement si la famille Γ_1 est libre.

2° Montrer que les familles Γ_1 et Γ_2 engendrent le même sous-espace vectoriel.

3° Lorsque la famille Γ_1 est libre, montrer que la famille de vecteurs

$$\Gamma_3 = \{\alpha_1 w_1 , \alpha_2 w_2 , \dots , \alpha_p w_p \}$$

est libre si, et seulement si, le produit $\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_p$ est différent de 0.

4° Que la famille Γ_1 soit libre ou non, montrer que, pour $\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_p \neq 0$, les familles Γ_1 et Γ_3 engendrent le même sous-espace vectoriel.

5° Calculer $[\Gamma_2 , B]$, puis écrire $[\Gamma_2 , B]$ en fonction de $[\Gamma_1 , B]$ et $[w_1 , B]$.

6° Si la famille Γ_1 est de rang q, montrer qu'il existe une famille libre de vecteurs :

$$\overline{\Gamma_1} = \{ v_1 , v_2 , \dots , v_q \}$$

engendrant le même sous-espace vectoriel que la famille Γ_1 et dont la matrice dans la base B est une « matrice en escalier » :

$$[\overline{\Gamma_1} , B] = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{21} & \cdots & v_{q1} \\ v_{12} & v_{22} & \cdots & v_{q2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{1n} & v_{2n} & \cdots & v_{qn} \end{pmatrix},$$

avec $v_{ij} = 0$ pour $j < i$.

SOLUTION.

1°/ Famille Γ_2.

1.1. Supposons libre la famille Γ_1 .

Considérons une combinaison linéaire nulle des vecteurs de la famille Γ_2 :

$$\lambda_1 w_1 + \lambda_2 (w_2 + w_1) + \dots + \lambda_p (w_p + w_1) = 0.$$

Cette relation peut s'écrire :

$$(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_p) w_1 + \lambda_2 w_2 + \dots + \lambda_p w_p = 0.$$

Comme la famille $\Gamma_1 = \{w_1 , w_2 , \dots ,w_p \}$ est libre, il en résulte :

$$(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_p) = \lambda_2 = \dots = \lambda_p = 0.$$

D'où : $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_p = 0$. Et cette relation montre que la famille Γ_2 est libre.

1.2. Supposons libre la famille Γ_2 .

Considérons une combinaison linéaire nulle des vecteurs de la famille Γ_1 :

$$\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \dots + \lambda_p w_p = 0.$$

Cette relation peut s'écrire :

$$(\lambda_1 - \lambda_2 - \dots - \lambda_p) w_1 + \lambda_2 (w_2 + w_1) + \dots + \lambda_p (w_p + w_1) = 0.$$

Comme la famille $\Gamma_2 = \{w_1 , w_2 + w_1 , \dots ,w_p + w_1 \}$ est libre, il en résulte :

$$(\lambda_1 - \lambda_2 - \dots - \lambda_p) = \lambda_2 = \dots = \lambda_p = 0.$$

D'où : $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_p = 0$. Et cette relation montre que la famille Γ_1 est libre.

Ainsi :

Γ_1 libre $\Longleftrightarrow$ Γ_2 libre

2°/ Enveloppe linéaire de la famille Γ_2.

La relation :

$$\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \ldots + \lambda_p w_p = (\lambda_1 - \lambda_2 - \ldots - \lambda_p) w_1 + \lambda_2 (w_2 + w_1) + \ldots + \lambda_p (w_p + w_1)$$

montre que l'enveloppe linéaire $L(\Gamma_1)$ de la famille Γ_1 est contenue dans l'enveloppe linéaire $L(\Gamma_2)$ de la famille Γ_2 .

La relation :

$$\lambda_1 w_1 + \lambda_2 (w_2 + w_1) + \ldots + \lambda_p (w_p + w_1) = (\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_p) w_1 + \lambda_2 w_2 + \ldots + \lambda_p w_p$$

montre que l'enveloppe linéaire $L(\Gamma_2)$ de la famille Γ_2 est contenue dans l'enveloppe linéaire $L(\Gamma_1)$ de la famille Γ_1 .

On a donc :

$$L(\Gamma_1) = L(\Gamma_2).$$

3°/ Famille Γ_3.

3.1. Supposons libre la famille Γ_3 .

Dans ce cas, aucun des vecteurs de la famille Γ_3 n'est nul, donc aucun des nombres réels α_1 , … , α_p n'est nul, donc le produit $\alpha_1 \ldots \alpha_p$ n'est pas nul.

3.2. Supposons non nul le produit $\alpha_1 \ldots \alpha_p$.

Dans ce cas, aucun des nombres réels α_1 , … , α_p n'est nul.

Considérons une combinaison linéaire nulle des vecteurs de la famille Γ_3 :

$$\lambda_1 (\alpha_1 w_1) + \lambda_2 (\alpha_2 w_2) + \ldots + \lambda_p (\alpha_p w_p) = 0.$$

Cette relation peut s'écrire :

$$(\lambda_1 \alpha_1) w_1 + (\lambda_2 \alpha_2) w_2 + \ldots + (\lambda_p \alpha_p) w_p = 0.$$

Comme la famille $\Gamma_1 = \{w_1 , w_2 , \ldots , w_p\}$ est libre, il en résulte :

$$\lambda_1 \alpha_1 = \lambda_2 \alpha_2 = \ldots = \lambda_p \alpha_p = 0.$$

Et comme aucun des nombres réels α_1 , … , α_p n'est nul, il en résulte $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_p = 0$. Et cette relation montre que la famille Γ_3 est libre.

4°/ Enveloppe linéaire de la famille Γ_3.

Supposons le produit $\alpha_1 \ldots \alpha_p$ non nul : il en résulte qu'aucun des nombres réels α_1 , … , α_p , n'est nul.

La relation

$$\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \ldots + \lambda_p w_p = \frac{\lambda_1}{\alpha_1} \alpha_1 w_1 + \frac{\lambda_2}{\alpha_2} \alpha_2 w_2 + \ldots + \frac{\lambda_p}{\alpha_p} \alpha_p w_p$$

montre que l'enveloppe linéaire de la famille Γ_1 est contenue dans l'enveloppe linéaire de la famille Γ_3 .

La relation

$$\lambda_1 (\alpha_1 w_1) + \lambda_2 (\alpha_2 w_2) + \ldots + \lambda_p (\alpha_p w_p) = (\lambda_1 \alpha_1) w_1 + (\lambda_2 \alpha_2) w_2 + \ldots (\lambda_p \alpha_p) w_p$$

montre que l'enveloppe linéaire de la famille Γ_3 est contenue dans l'enveloppe linéaire de la famille Γ_1 .

Ainsi :

$$L(\Gamma_3) = L(\Gamma_1)$$

5°/ Matrice de la famille Γ_2.

Dans la base B, la famille $\Gamma_2 = \{ w_1 , w_2 + w_1 , \dots , w_p + w_1 \}$ s'exprime par la matrice ayant pour colonnes les composantes des vecteurs de la famille sur la base :

$$[\Gamma_2 , B] = \begin{pmatrix} w_{11} & w_{21}+w_{11} & \cdots & w_{p1}+w_{11} \\ w_{12} & w_{22}+w_{12} & \cdots & w_{p2}+w_{12} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{1n} & w_{2n}+w_{1n} & \cdots & w_{pn}+w_{1n} \end{pmatrix}$$

En fonction des matrices :

$$[\Gamma_1 , B] = \begin{pmatrix} w_{11} & w_{21} & \cdots & w_{p1} \\ w_{12} & w_{22} & \cdots & w_{p2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{1n} & w_{2n} & \cdots & w_{pn} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad [w_1 , B] = \begin{pmatrix} w_{11} \\ w_{12} \\ \vdots \\ w_{1n} \end{pmatrix},$$

la matrice $[\Gamma_2 , B]$ peut s'écrire :

$$[\Gamma_2 , B] = \begin{pmatrix} w_{11} & w_{21} & \cdots & w_{p1} \\ w_{12} & w_{22} & \cdots & w_{p2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{1n} & w_{2n} & \cdots & w_{pn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & w_{11} & \cdots & w_{11} \\ 0 & w_{12} & \cdots & w_{12} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & w_{1n} & \cdots & w_{1n} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{[\Gamma_2 , B] = [\Gamma_1 , B] + [w_1 , B] \times (0 \;\; 1 \;\; 1 \dots 1)}$$

6°/ Famille $\overline{\Gamma_1}$.

Le problème de la construction de la famille $\overline{\Gamma_1}$ est celui de la réduction de la matrice $[\Gamma_1 , B]$. Nous utiliserons, dans cette réduction, uniquement les deux opérations élémentaires suivantes :

— **Ajouter la colonne *i* à la colonne *j* ($i \neq j$) :**

$$T_1 (i,j) : \{ w_1 , w_2 , \dots , w_j , \dots , w_p \} \mapsto \{ w_1 , w_2 , \dots , w_j + w_i , \dots , w_p \}$$

— **Multiplier la colonne *i* par un nombre réel $\alpha_i \neq 0$:**

$$T_2 (i,\alpha_i) : \{ w_1 , w_2 , \dots , w_i , \dots , w_p \} \mapsto \{ w_1 , w_2 , \dots , \alpha_i w_i , \dots , w_p \}$$

Ces opérations élémentaires ne changent pas l'enveloppe linéaire de la famille : elles n'ont donc pas d'influence sur le rang de la famille. La composition de ces opérations élémentaires ne changent donc pas non plus l'enveloppe linéaire ni le rang de la famille obtenue.

La composition des opérations élémentaires permet d'engendrer toutes les manipulations linéaires que l'on a le droit de faire sur les colonnes lors de la réduction de la famille :

— **Echanger les colonnes *i et j* :**

$$T_3 (i,j) = T_2 (j,-1) \circ T_1 (j,i) \circ T_2 (i,-1) \circ T_1 (i,j) \circ T_2 (i,-1) \circ T_1 (j,i)$$

On commence par l'opération de droite comme habituellement dans la composition des applications :

- Ajouter la j-ème colonne à la i-ème colonne : $[\dots, w_i , \dots , w_j , \dots] \mapsto [\dots, w_i + w_j , \dots , w_j , \dots]$
- Multiplier la i-ème colonne par -1 : $[\dots, w_i + w_j , \dots , w_j , \dots] \mapsto [\dots, -w_i - w_j , \dots , w_j , \dots]$
- Ajouter la i-ème colonne à la j-ème colonne : $[\dots, -w_i - w_j , \dots , w_j , \dots] \mapsto [\dots, -w_i - w_j , \dots , -w_i , \dots]$
- Multiplier la i-ème colonne par -1 : $[\dots, -w_i - w_j , \dots , -w_i , \dots] \mapsto [\dots, w_i + w_j , \dots , -w_i , \dots]$
- Ajouter la j-ème colonne à la i-ème colonne : $[\dots, w_i + w_j , \dots , -w_i , \dots] \mapsto [\dots, w_j , \dots , -w_i , \dots]$
- Multiplier la j-ème colonne par -1 : $[\dots, w_j , \dots , -w_i , \dots] \mapsto [\dots, w_j , \dots , w_i , \dots]$

- **Ajouter à la colonne *j*, α fois la colonne *i* ($\alpha \neq 0$) :**

$$T_2 (i,\alpha^{-1}) \circ T_1 (i,j) \circ T_2 (i,\alpha)$$

La suite des opérations élémentaires est la suivante :

- Multiplier la i-ème colonne par α : $[\dots, w_i , \dots , w_j , \dots] \mapsto [\dots, \alpha w_i , \dots , w_j , \dots]$
- Ajouter la i-ème colonne à la j-ème colonne : $[\dots, \alpha w_i , \dots , w_j , \dots] \mapsto [\dots, \alpha w_i , \dots , \alpha w_i + w_j , \dots]$
- Multiplier la i-ème colonne par α^{-1} : $[\dots, w_i , \dots , \alpha w_i + w_j , \dots]$

La méthode de réduction consiste alors en :

- Choisir la première ligne ne contenant pas uniquement des 0 : ligne *k*.
- Choisir sur cette ligne la première colonne ne contenant pas un 0 : colonne *h*.
- Multiplier cette colonne par l'inverse du premier élément non nul de la colonne : il vient un 1.
- Echanger les colonnes *h* et 1.
- Pour toutes les colonnes à partir de la 2e, si le coefficient de la ligne *k* est non nul, ôter de la colonne la première colonne multipliée par ce coefficient non nul. Dans la ligne *k*, il reste un 1 dans la première colonne et des 0 ailleurs.
- Choisir sur la première ligne après la ligne *k* ne contenant pas que des 0 dans les colonnes à partir de la 2^e .
- Choisir sur cette ligne la première colonne à partir de la 2^e ne contenant pas un 0.
- Multiplier la colonne correspondante par l'inverse du coefficient non nul : il vient un 1.
- Echanger cette colonne avec la 2^e.
- Pour toutes les colonnes différentes de la 2^e, si le coefficient figurant dans la ligne considérée n'est pas nul, ôter de la colonne la deuxième colonne multipliée par ce coefficient non nul. Dans cette ligne, il ne reste qu'un 1 dans la 2^e colonne et des 0 ailleurs.
- Continuer ainsi pour les lignes suivantes, jusqu'à la colonne *q*.

On aboutit de la sorte à une ***matrice réduite en escalier***. Dans cette matrice, quand une colonne est non nulle, elle commence éventuellement par des 0, jusqu'à un 1. Sur la ligne contenant le 1, il n'y a que des 0 dans les autres colonnes. Comme la famille Γ_1 est de rang *q*, les *q* premières colonnes forment une famille libre $\overline{\Gamma_1}$ et les $p-q$ autres colonnes sont des combinaisons linéaires des *q* premières.

EXERCICE 5.

Dans $\mathbb{R}^4$, pour chacune des familles suivantes, calculer le rang et déterminer les sous-familles « linéairement complètes » (sous-familles ayant la même enveloppe linéaire que la famille) :

$$\Gamma_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 9 \\ 5 \end{bmatrix} \right\} \quad \Gamma_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} \right\} \quad \Gamma_3 = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 3 \\ 10 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

SOLUTION.

1°/ Famille Γ_1 .

Pour calculer le rang de la famille et une base de l'enveloppe linéaire, il suffit de réduire la matrice ayant pour colonnes les vecteurs de la famille.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 4 & -2 & 3 & 9 \\ 2 & -3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Echanger la 1e et la 2e colonnes

$$\downarrow \qquad \downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 4 \\ -2 & 4 & 3 & 9 \\ -3 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Soustraire 2 fois la 1e colonne de la 2e, 3 fois la 1e de la 3e, 2 fois la 1e de la 4e

$$\downarrow \qquad \downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & -5 & 0 \\ -2 & 8 & 9 & 13 \\ -3 & 8 & 13 & 11 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Soustraire la 3e colonne de la 2e

$$\downarrow \qquad \downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -5 & 0 \\ -2 & -1 & 9 & 13 \\ -3 & -5 & 13 & 11 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ajouter 5 fois la 2e colonne à la 3e

$$\downarrow \qquad \downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 4 & 13 \\ -3 & -5 & -12 & 11 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Multiplier la 4e colonne par 4

$$\downarrow \qquad \downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 4 & 52 \\ -3 & -5 & -12 & 44 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -8 \\ 0 & -1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Soustraire 13 fois la 3e colonne de la 4e

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 4 & 0 \\ -3 & -5 & -12 & 200 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 & -65 \\ 1 & 1 & 2 & -34 \\ 0 & -1 & -4 & 52 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Ce calcul montre :
– que la famille Γ_1 est de rang 4, parce qu'on a obtenu une diagonale de 4 nombres non nuls avec un triangle de 0 au-dessus ;
– que les 4 vecteurs de la famille Γ_1 forment donc une base de $\mathbb{R}^4$.
Les sous-familles complètes de Γ_1 sont au nombre de 1 : seule Γ_1 elle-même engendre $L(\Gamma_1)$.

La seule sous-famille complète de Γ_1 est Γ_1.

Remarque.

On peut calculer, à la machine, le déterminant de la matrice de la famille Γ_1 :

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 4 & -2 & 3 & 9 \\ 2 & -3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = -200$$

Ce déterminant n'est pas nul : c'est une condition nécessaire et suffisante, dans $\mathbb{R}^4$, pour qu'une famille de 4 vecteurs forme une base.

2°/ Famille Γ_2 .

On peut calculer, à la machine, le déterminant de la matrice de la famille Γ_2 :

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & -1 & 0 \\ 2 & 6 & -3 & 4 \\ 2 & 6 & 4 & 3 \\ 1 & 5 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 24$$

Ce déterminant n'est pas nul, donc la famille Γ_2 est de rang 4 : c'est une base de $\mathbb{R}^4$.

La seule sous-famille complète de Γ_2 est Γ_2.

3°/ Famille Γ_3 .

Le déterminant de la famille Γ_3 est :

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ -5 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ 10 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

donc la famille Γ_3 n'est pas une base, son rang est inférieur à 4. Pour trouver le rang de Γ_3 et une base de $L(\Gamma_3)$, nous allons réduire la matrice ayant pour colonnes les vecteurs de la famille Γ_3 .

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ -5 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ 10 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Echanger la 1e et la 4e colonnes

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & -5 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 10 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Soustraire 1 fois la 1^{e} colonne de la 2^{e} , 3 fois la 1^{e} de la 3^{e}, 2 fois la 1^{e} de la 4^{e}

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & -7 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & 8 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

Multiplier la 4^{e} colonne par – 2

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 14 \\ 1 & 0 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & -2 & -16 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

Ajouter 7 fois la 2^{e} colonne à la 4^{e}

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

Soustraire la 3^{e} colonne de la 4^{e}

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

Ce calcul montre :

— que la famille Γ_3 est de rang 3, puisqu'on a obtenu une diagonale de 3 nombres différents de 0, avec un triangle de 0 au-dessus ;

— que les vecteurs de la famille $\Gamma_3 = \{w_1 , w_2 , w_3 , w_4 \}$ sont liés par la relation :

$$-2\, w_1 + 7\, w_2 - w_3 = 0$$

— le vecteur w_4 est linéairement indépendant des vecteurs w_1 , w_2 , w_3 puisqu'il n'y a pas de relation linéaire

$$w_4 = \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \lambda_3 w_3$$

La relation :

$$\begin{aligned} \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \lambda_3 w_3 + \lambda_4 w_4 &= \lambda_1 \left(\frac{7}{2}\, w_2 - \frac{1}{2}\, w_3\right) + \lambda_2 w_2 + \lambda_3 w_3 + \lambda_4 w_4 \\ &= \left(\frac{7}{2}\, \lambda_1 + \lambda_2\right) w_2 + \left(-\frac{1}{2}\, \lambda_1 + \lambda_3\right) w_3 + \lambda_4 w_4 \end{aligned}$$

montre que la famille $\{w_2 , w_3 , w_4 \}$ est une sous-famille complète de Γ_3 .

La relation :

$$\begin{aligned} \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \lambda_3 w_3 + \lambda_4 w_4 &= \lambda_1 w_1 + \lambda_2 \left(\frac{2}{7}\, w_1 + \frac{1}{7}\, w_3\right) + \lambda_3 w_3 + \lambda_4 w_4 \\ &= \left(\lambda_1 + \frac{2}{7}\, \lambda_2\right) w_1 + \left(\frac{1}{7}\, \lambda_2 + \lambda_3\right) w_3 + \lambda_4 w_4 \end{aligned}$$

montre que la famille $\{w_1 , w_3 , w_4 \}$ est une sous-famille complète de Γ_3 .

La relation :

$$\begin{aligned} \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \lambda_3 w_3 + \lambda_4 w_4 &= \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \lambda_3 (-2\, w_1 + 7\, w_2) + \lambda_4 w_4 \\ &= (\lambda_1 - 2\, \lambda_3)\, w_1 + (\lambda_2 + 7\, \lambda_3)\, w_2 + \lambda_4 w_4 \end{aligned}$$

montre que la famille $\{w_1 , w_2 , w_4 \}$ est une sous-famille complète de Γ_3 .

Les sous-famille complètes de Γ_3 sont $\{w_2 , w_3 , w_4 \}$, $\{w_1 , w_3 , w_4 \}$, $\{w_1 , w_2 , w_4 \}$, $\{w_1 , w_2 , w_3 , w_4 \}$.

Il n'y en a pas d'autre car $L\,(\Gamma_3)$ est de dimension 3 et l'on a :

$$L\,(\Gamma_3) = L\,(\{w_1 , w_2 , w_3 \}) \oplus L\,(\{w_4 \})$$

$L\,(\{w_1 , w_2 , w_3 \})$ est de dimension 2 et engendré par deux quelconques des vecteurs $\{w_1 , w_2 , w_3 \}$.

EXERCICE 6.

Dans R^4, on considère la famille de vecteurs :

$$\Gamma_\alpha = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \\ \alpha^2 \\ \alpha^3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha^2 \\ \alpha^3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \alpha^2 \\ \alpha^3 \\ 1 \\ \alpha \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \alpha^3 \\ 1 \\ \alpha \\ \alpha^2 \end{bmatrix} \right\} (\alpha \text{ réel})$$

1. Etudier, selon les valeurs de α, le rang de la famille Γ_α.
2. Trouver les valeurs de α pour lesquelles $L(\Gamma_\alpha)$ est égal à R^4.

SOLUTION.

1°/ Rang de la famille Γ_α .

Pour étudier le rang de la famille Γ_α , nous allons calculer le déterminant de la matrice ayant pour colonnes les vecteurs de la famille Γ_α .

$$Dét(\Gamma_\alpha) = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 & \alpha^3 \\ \alpha & \alpha^2 & \alpha^3 & 1 \\ \alpha^2 & \alpha^3 & 1 & \alpha \\ \alpha^3 & 1 & \alpha & \alpha^2 \end{vmatrix}$$

On ne change pas la valeur du déterminant en ajoutant à la première colonne la somme des trois autres :

$$Dét(\Gamma_\alpha) = \begin{vmatrix} 1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3 & \alpha & \alpha^2 & \alpha^3 \\ 1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3 & \alpha^2 & \alpha^3 & 1 \\ 1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3 & \alpha^3 & 1 & \alpha \\ 1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3 & 1 & \alpha & \alpha^2 \end{vmatrix}$$

On ne change pas la valeur du déterminant en mettant en facteur $(1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3)$ dans la 1e colonne :

$$Dét(\Gamma_\alpha) = (1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3) \begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 & \alpha^3 \\ 1 & \alpha^2 & \alpha^3 & 1 \\ 1 & \alpha^3 & 1 & \alpha \\ 1 & 1 & \alpha & \alpha^2 \end{vmatrix} = (1+\alpha)(1 + \alpha^2) \begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 & \alpha^3 \\ 1 & \alpha^2 & \alpha^3 & 1 \\ 1 & \alpha^3 & 1 & \alpha \\ 1 & 1 & \alpha & \alpha^2 \end{vmatrix}$$

On ne change pas la valeur du déterminant en soustrayant de la 2e colonne α fois la 1e, de la 3e colonne α^2 fois la 1e, de la 4e colonne α^3 fois la 1e :

$$Dét(\Gamma_\alpha) = (1+\alpha)(1 + \alpha^2) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \alpha^2-\alpha & \alpha^3-\alpha^2 & 1-\alpha^3 \\ 1 & \alpha^3-\alpha & 1-\alpha^2 & \alpha-\alpha^3 \\ 1 & 1-\alpha & \alpha-\alpha^2 & \alpha^2-\alpha^3 \end{vmatrix}$$

On ne change pas la valeur du déterminant en mettant en facteur $(1 - \alpha)$ dans la 2e colonne, dans la 3e colonne, et dans la 4e colonne :

$$Dét(\Gamma_\alpha) = (1+\alpha)(1 + \alpha^2)(1-\alpha)^3 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -\alpha & -\alpha^2 & 1+\alpha+\alpha^2 \\ 1 & -\alpha(1+\alpha) & 1+\alpha & \alpha(1+\alpha) \\ 1 & 1 & \alpha & \alpha^2 \end{vmatrix}$$

On ne change pas la valeur du déterminant en développant par rapport à la première ligne :

$$Dét(\Gamma_\alpha) = (1+\alpha)(1 + \alpha^2)(1-\alpha)^3 \begin{vmatrix} -\alpha & -\alpha^2 & 1+\alpha+\alpha^2 \\ -\alpha(1+\alpha) & 1+\alpha & \alpha(1+\alpha) \\ 1 & \alpha & \alpha^2 \end{vmatrix}$$

On ne change pas la valeur du déterminant en mettant en facteur $(1 + \alpha)$ dans la 2e ligne :

$$Dét\,(\Gamma_\alpha) = (1+\alpha)^2\,(1+\alpha^2)(1-\alpha)^3 \begin{vmatrix} -\alpha & -\alpha^2 & 1+\alpha+\alpha^2 \\ -\alpha & 1 & \alpha \\ 1 & \alpha & \alpha^2 \end{vmatrix}$$

On ne change pas la valeur du déterminant en retranchant de la 2e colonne α fois la 1e :

$$Dét\,(\Gamma_\alpha) = (1+\alpha)^2\,(1+\alpha^2)(1-\alpha)^3 \begin{vmatrix} -\alpha & 0 & 1+\alpha+\alpha^2 \\ -\alpha & 1+\alpha^2 & \alpha \\ 1 & 0 & \alpha^2 \end{vmatrix}$$

On ne change pas la valeur du déterminant en mettant en facteur $(1+\alpha^2)$ dans la 2e colonne :

$$Dét\,(\Gamma_\alpha) = (1+\alpha)^2\,(1+\alpha^2)^2\,(1-\alpha)^3 \begin{vmatrix} -\alpha & 0 & 1+\alpha+\alpha^2 \\ -\alpha & 1 & \alpha \\ 1 & 0 & \alpha^2 \end{vmatrix}$$

On ne change pas la valeur du déterminant en développant par rapport à la 2e colonne :

$$Dét\,(\Gamma_\alpha) = (1+\alpha)^2\,(1+\alpha^2)^2\,(1-\alpha)^3 \begin{vmatrix} -\alpha & 1+\alpha+\alpha^2 \\ 1 & \alpha^2 \end{vmatrix}$$

$$Dét\,(\Gamma_\alpha) = -(1+\alpha)^2\,(1+\alpha^2)^2\,(1-\alpha)^3\,(1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3)$$

$$Dét\,(\Gamma_\alpha) = -(1+\alpha)^3\,(1+\alpha^2)^3\,(1-\alpha)^3 = -(1-\alpha^4)^3$$

$$\boxed{Dét\,(\Gamma_\alpha) = (\alpha^4-1)^3}$$

Ce déterminant est différent de 0, pour α réel, lorsque α est différent de 1 et différent de -1. Dans ce cas, la famille Γ_α est de rang 4.

Lorsque $\alpha = \pm 1$, le déterminant de Γ_α est nul. Etudions ces deux cas.

1° $\alpha = 1$.

La famille Γ_α est composée de quatre vecteurs identiques $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$: elle est de rang 1.

2° $\alpha = -1$.

La famille Γ_α est composée des vecteurs :

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ w_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -w_1,\ w_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = w_1,\ w_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -w_1$$

Elle est de rang 1.

En résumé :

$$\boxed{\begin{array}{l} \alpha = \pm 1 \Longrightarrow \text{rg}\,(\Gamma_\alpha) = 1 \\ \\ \alpha \neq \pm 1 \Longrightarrow \text{rg}\,(\Gamma_\alpha) = 4 \end{array}}$$

2°/ Valeurs de α pour lesquelles $L\,(\Gamma_\alpha) = R^4$.

Les valeurs de α pour lesquelles la famille Γ_α est une base résultent de l'étude précédente : ce sont toutes les valeurs réelles différentes de -1 et différentes de $+1$.

$$\boxed{L\,(\Gamma_\alpha) = R^4 \Longleftrightarrow rg\,(\Gamma_\alpha) = 4 \Longleftrightarrow \alpha \neq \pm 1}$$

EXERCICE 7.

Compléter les familles suivantes de vecteurs en une base de $\mathbb{R}^4$.

$$\Gamma_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} . \qquad \Gamma_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} . \qquad \Gamma_\alpha = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1+\alpha \\ \alpha+\alpha^2 \\ \alpha^2+\alpha^3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \\ 1 \\ \alpha \end{pmatrix} \right\} \ (\alpha \text{ réel}).$$

SOLUTION.

1°/ Famille Γ_1 .

Comme le déterminant des premières composantes des vecteurs de la famille Γ_1 est $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 10 \neq 0$, les deux vecteurs composant la famille Γ_1 ne sont pas proportionnels et forment une famille libre. Réduisons cette famille.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 4 \\ 3 & -6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ajouter à la 1e colonne 1 fois la 2e

$$\downarrow \qquad \downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \\ -3 & -6 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ajouter à la 2e colonne 1 fois la 1e

$$\downarrow \qquad \downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 6 \\ -3 & -9 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Les deux vecteurs colonnes de la matrice de gauche engendrent le même sous-espace vectoriel que la famille Γ_1. On voit alors que l'on peut les compléter en une base de $\mathbb{R}^4$ en prenant, par exemple les vecteurs $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ puisque la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 0 & 0 \\ -3 & -9 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est de rang 4.

2°/ Famille Γ_2 .

Comme le déterminant des premières composantes des vecteurs de la famille Γ_2 est $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, la famille Γ_2 est de rang 3, c'est une famille libre, et on peut la compléter en une base en prenant n'importe quel

vecteur dont la 4e composante n'est pas nulle, par exemple le vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, puisque la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est évidemment de rang 4 (déterminant égal à 1).

3°/ Famille Γ_α .

Réduisons la famille Γ_α .

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ 1+\alpha & 0 & \alpha \\ \alpha+\alpha^2 & 2 & 1 \\ \alpha^2+\alpha^3 & 1 & \alpha \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Retrancher α fois la 2e colonne de la 3e.

$$\downarrow \qquad \downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1+\alpha & 0 & \alpha \\ \alpha+\alpha^2 & 2 & 1-2\alpha \\ \alpha^2+\alpha^3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Retrancher de la 1e colonne la somme des deux autres. Echanger la 1e et la 2e colonnes.

$$\downarrow \qquad \downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha \\ 2 & \alpha^2+3\alpha-3 & 1-2\alpha \\ 1 & \alpha^3+\alpha^2-1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1+\alpha & -\alpha \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Retrancher α fois la 2e colonne de la 3e.

$$\downarrow \qquad \downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & \alpha^2+3\alpha-3 & -\alpha^3-3\alpha^2+\alpha+1 \\ 1 & \alpha^3+\alpha^2-1 & -\alpha^4-\alpha^3+\alpha \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\alpha \\ 1 & -1+\alpha & -\alpha^2 \\ 0 & -1 & 1+\alpha \end{pmatrix}$$

Multiplier la 4e colonne par –1

$$\downarrow \qquad \downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & \alpha^2+3\alpha-3 & -1-\alpha+3\alpha^2+\alpha^3 \\ 1 & \alpha^3+\alpha^2-1 & -\alpha+\alpha^3+\alpha^4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & \alpha \\ 1 & -1+\alpha & \alpha^2 \\ 0 & -1 & -1-\alpha \end{pmatrix}$$

Les polynômes

$$P_4 = -1 - \alpha + 3\,\alpha^2 + \alpha^3 = -\alpha\,(1 - 2\,\alpha) - (1 - \alpha^2 - \alpha^3)$$

et

$$P_3 = \alpha - \alpha^3 - \alpha^4 = \alpha\,(1 - \alpha^2 - \alpha^3)$$

sont premiers entre eux, car ils n'ont pas de racine commune.

> En effet, si α était une racine commune de P_3 et P_4, on aurait :
>
> $$P_3(\alpha) = \alpha\,(1 - \alpha^2 - \alpha^3) = 0$$
>
> donc
>
> $$\alpha = 0 \text{ ou } 1 - \alpha^2 - \alpha^3 = 0$$
>
> $\alpha = 0 \qquad \Longrightarrow P_4(\alpha) = -\alpha\,(1 - 2\,\alpha) - (1 - \alpha^2 - \alpha^3) = -(1 - \alpha^2 - \alpha^3) = -1 \neq 0.$
>
> $1 - \alpha^2 - \alpha^3 = 0 \qquad \Longrightarrow P_4(\alpha) = -\alpha\,(1 - 2\,\alpha) - (1 - \alpha^2 - \alpha^3) = -\alpha\,(1 - 2\,\alpha) \neq 0,$
>
> puisque les racines du polynôme $\alpha\,(1 - 2\,\alpha)$ sont $\alpha = 0$ et $\alpha = \frac{1}{2}$, qui ne sont pas racines de $1 - \alpha^2 - \alpha^3$.

La dernière colonne de la matrice n'est donc jamais nulle et la famille Γ_α est toujours une famille libre, de rang 3. On peut la compléter en une base de $\mathbb{R}^4$ de la façon suivante :

— Si $P_4(\alpha) = 0$, on prend le vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & \alpha^2+3\alpha-3 & 0 & 1 \\ 1 & \alpha^3+\alpha^2-1 & -\alpha+\alpha^3+\alpha^4 & 0 \end{pmatrix}$ est de rang 4 (déterminant égal à $P_3(\alpha) = \alpha - \alpha^3 - \alpha^4 \neq 0$).

— Si $P_4(\alpha) \neq 0$, on prend le vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & \alpha^2+3\alpha-3 & -\alpha^3-3\alpha^2+\alpha+1 & 0 \\ 1 & \alpha^3+\alpha^2-1 & -\alpha^4-\alpha^3+\alpha & 1 \end{pmatrix}$ est de rang 4 (déterminant égal à $P_4(\alpha) = 1 + \alpha - 3\alpha^2 - \alpha^3 \neq 0$).

Complément.

Considérons le vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha-\alpha^3-\alpha^4 \\ -1-\alpha+3\alpha^2+\alpha^3 \end{pmatrix}$. Le déterminant de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & \alpha^2+3\alpha-3 & -1-\alpha+3\alpha^2+\alpha^3 & \alpha-\alpha^3-\alpha^4 \\ 1 & \alpha^3+\alpha^2-1 & -\alpha+\alpha^3+\alpha^4 & -1-\alpha+3\alpha^2+\alpha^3 \end{pmatrix}$$

est égal à $P_4^2(\alpha) + P_3^2(\alpha)$, il n'est donc jamais nul, de sorte que,

Pour toute valeur de α, le vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha-\alpha^3-\alpha^4 \\ -1-\alpha+3\alpha^2+\alpha^3 \end{pmatrix}$ complète la famille Γ_α en une base de R^4.

EXERCICE 8.

1° Soit Γ_1 et Γ_2 , familles finies de vecteurs. Démontrer les propriétés suivantes :
$rg(\Gamma_1 \cap \Gamma_2) + rg(\Gamma_1 \cup \Gamma_2) \leq rg(\Gamma_1) + rg(\Gamma_2)$
$rg(\Gamma_1 \cup \Gamma_2) = rg(\Gamma_1) + rg(\Gamma_2) \Leftrightarrow L(\Gamma_1) \cap L(\Gamma_2) = \{0\}$

2° Soit $\Gamma_1 = \{w_1 , \dots , w_p\}$ et $\Gamma_2 = \{v_1 , \dots , v_p\}$, deux familles ayant le même nombre fini p de vecteurs. Démontrer la propriété suivante :

$$((\forall (\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant p} \in \mathbb{R}^p)(\Sigma_i \lambda_i w_i = 0 \Longleftrightarrow \Sigma_i \lambda_i v_i = 0)) \Longrightarrow rg(\Gamma_1) = rg(\Gamma_2)$$

SOLUTION.

Le rang d'une partie A d'un espace vectoriel est la dimension du sous-espace vectoriel $L(A)$ qu'elle engendre.
Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E, ils vérifient la « relation de Grassmann » :

$$dim(F \cap G) + dim(F + G) = dim(F) + dim(G)$$

1°/ Propriétés des rangs.

- $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 \subseteq \Gamma_1 \Rightarrow L(\Gamma_1 \cap \Gamma_2) \subseteq L(\Gamma_1)$
- $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 \subseteq \Gamma_2 \Rightarrow L(\Gamma_1 \cap \Gamma_2) \subseteq L(\Gamma_2)$
- $L(\Gamma_1 \cap \Gamma_2) \subseteq L(\Gamma_1)$ et $L(\Gamma_1 \cap \Gamma_2) \subseteq L(\Gamma_2) \Rightarrow L(\Gamma_1 \cap \Gamma_2) \subseteq L(\Gamma_1) \cap L(\Gamma_2)$
- $\Gamma_1 \subseteq \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \Rightarrow L(\Gamma_1) \subseteq L(\Gamma_1 \cup \Gamma_2)$
- $\Gamma_2 \subseteq \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \Rightarrow L(\Gamma_2) \subseteq L(\Gamma_1 \cup \Gamma_2)$
- $L(\Gamma_1) \subseteq L(\Gamma_1 \cup \Gamma_2)$ et $L(\Gamma_2) \subseteq L(\Gamma_1 \cup \Gamma_2) \Rightarrow L(\Gamma_1) + L(\Gamma_2) \subseteq L(\Gamma_1 \cup \Gamma_2)$
- Réciproquement, si $x \in L(\Gamma_1 \cup \Gamma_2)$, x est combinaison linéaire d'éléments de $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$: $x = \Sigma_i \lambda_i y_i$. En séparant les y_i en deux sous-familles, ceux qui appartiennent à Γ_1 , notés y'_i , et ceux qui n'y appartiennent pas (mais qui, dans ce cas, appartiennent à Γ_2), notés y_i'', on voit que x s'écrit sous la forme

$$x = \sum \lambda_i' y_i' + \sum \lambda_i'' y_i''$$

il est donc somme d'un élément de $L(\Gamma_1)$ et d'un élément de $L(\Gamma_2)$, $x \in L(\Gamma_1) + L(\Gamma_2)$ et l'on a :

$$L(\Gamma_1 \cup \Gamma_2) \subseteq L(\Gamma_1) + L(\Gamma_2)$$

d'où l'égalité :

$$\boxed{L(\Gamma_1 \cup \Gamma_2) = L(\Gamma_1) + L(\Gamma_2)}$$

- La relation de Grassmann s'écrit, pour $F = L(\Gamma_1)$ et $G = L(\Gamma_2)$:
$$dim(L(\Gamma_1) \cap L(\Gamma_2)) + dim(L(\Gamma_1) + L(\Gamma_2)) = dim(L(\Gamma_1)) + dim(L(\Gamma_2))$$
- Compte tenu de la relation $L(\Gamma_1 \cup \Gamma_2) = L(\Gamma_1) + L(\Gamma_2)$, on obtient :
$$dim(L(\Gamma_1) \cap L(\Gamma_2)) + dim(L(\Gamma_1 \cup \Gamma_2)) = dim(L(\Gamma_1)) + dim(L(\Gamma_2))$$

$$\boxed{dim(L(\Gamma_1) \cap L(\Gamma_2)) = dim(L(\Gamma_1)) + dim(L(\Gamma_2)) - dim(L(\Gamma_1 \cup \Gamma_2))}$$

- La relation $L(\Gamma_1 \cap \Gamma_2) \subseteq L(\Gamma_1) \cap L(\Gamma_2)$ entraîne alors :
$$dim(L(\Gamma_1 \cap \Gamma_2)) \leq dim(L(\Gamma_1) \cap L(\Gamma_2)) = dim(L(\Gamma_1)) + dim(L(\Gamma_2)) - dim(L(\Gamma_1 \cup \Gamma_2))$$
$$dim(L(\Gamma_1 \cap \Gamma_2)) \leq dim(L(\Gamma_1)) + dim(L(\Gamma_2)) - dim(L(\Gamma_1 \cup \Gamma_2))$$

$$\boxed{rg(\Gamma_1 \cap \Gamma_2) \leq rg(\Gamma_1) + rg(\Gamma_2) - rg(\Gamma_1 \cup \Gamma_2)}$$

- La relation $dim(L(\Gamma_1) \cap L(\Gamma_2)) = dim(L(\Gamma_1)) + dim(L(\Gamma_2)) - dim(L(\Gamma_1 \cup \Gamma_2))$ entraîne :
$$dim(L(\Gamma_1 \cup \Gamma_2)) = dim(L(\Gamma_1)) + dim(L(\Gamma_2)) \Leftrightarrow dim(L(\Gamma_1) \cap L(\Gamma_2)) = 0$$
$$rg(\Gamma_1 \cup \Gamma_2) = rg(\Gamma_1) + rg(\Gamma_2) \Leftrightarrow dim(L(\Gamma_1) \cap L(\Gamma_2)) = 0$$

Or le seul sous-espace vectoriel dont la dimension est 0 est le sous-espace réduit à 0, donc :

$$\boxed{rg(\Gamma_1 \cup \Gamma_2) = rg(\Gamma_1) + rg(\Gamma_2) \Leftrightarrow L(\Gamma_1) \cap L(\Gamma_2) = \{0\}}$$

2°/ Familles finies et rangs.

Soient $(\Gamma_1) = (w_i)_{1 \le i \le p}$ et $(\Gamma_2) = (v_i)_{1 \le i \le p}$ deux familles finies de vecteurs vérifiant la propriété :

Pour toute famille $(\lambda_i)_{1 \le i \le p}$ de scalaires, la relation $\sum_{i=1}^{i=p} \lambda_i w_i = 0$ est équivalente à la relation $\sum_{i=1}^{i=p} \lambda_i v_i = 0$.

Montrons que les deux familles ont le même rang. $rg\ (\Gamma_1)$ est la dimension du sous-espace vectoriel $L\ (\Gamma_1)$ engendré par la famille Γ_1 , $rg\ (\Gamma_2)$ est la dimension de $L\ (\Gamma_2)$. Il revient donc au même de démontrer que $L\ (\Gamma_1)$ et $L\ (\Gamma_2)$ ont la même dimension.

Définition d'une application f de $L\ (\Gamma_1)$ dans $L\ (\Gamma_2)$.

Pour tout élément x de $L\ (\Gamma_1)$, il existe une famille (λ_i) de scalaires tels que $x = \sum \lambda_i w_i$. Considérons l'élément $y = \sum \lambda_i v_i$ de $L\ (\Gamma_2)$. S'il existe une autre famille (λ_i') de scalaires tels que $x = \sum \lambda_i' w_i$, on obtient un autre élément $y' = \sum \lambda_i' v_i$ de $L\ (\Gamma_2)$. Mais la relation $\sum \lambda_i w_i = \sum \lambda_i' w_i$ s'écrit aussi $\sum (\lambda_i - \lambda_i') w_i = 0$. Par hypothèse, cette relation entraîne la relation $\sum (\lambda_i - \lambda_i') v_i = 0$, donc $\sum \lambda_i v_i = \sum \lambda_i' v_i$ et $y = y'$. Ainsi le fait d'associer à un x de $L\ (\Gamma_1)$, $x = \sum \lambda_i w_i$, l'élément $y = \sum \lambda_i v_i$ de $L\ (\Gamma_2)$, définit une application f de $L\ (\Gamma_1)$ dans $L\ (\Gamma_2)$.

$$f(\sum \lambda_i w_i) = \sum \lambda_i v_i$$

L'application f est linéaire.

Soit $x = \sum \lambda_i w_i$ et $x' = \sum \lambda_i' w_i$ deux éléments de $L\ (\Gamma_1)$ et λ un scalaire. On a :

$$f(x + x') = f(\sum \lambda_i w_i + \sum \lambda_i' w_i) = f(\sum (\lambda_i + \lambda_i') w_i) = \sum (\lambda_i + \lambda_i') v_i = \sum \lambda_i v_i + \sum \lambda_i' v_i = f(x) + f(x')$$

$$f(\lambda x) = f(\lambda \sum \lambda_i w_i) = f(\sum (\lambda \lambda_i) w_i) = \sum (\lambda \lambda_i) v_i = \lambda \sum \lambda_i v_i = \lambda f(x)$$

Ces deux propriétés,

$$f(x + x') = f(x) + f(x') \text{ et } f(\lambda x) = \lambda f(x)$$

font de f ce qu'on appelle une application linéaire.

L'application f est injective.

Pour une application linéaire, le critère d'injectivité

$$f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$$

peut s'écrire simplement :

$$f(x) = 0 \Rightarrow x = 0$$

Or si $x = \sum \lambda_i w_i$ vérifie $f(x) = 0$, on a, par définition de f , $f(x) = \sum \lambda_i v_i = 0$. Par l'hypothèse, on a alors :

$$\sum \lambda_i w_i = 0,$$

donc $x = 0$ et l'application linéaire f est injective. Une application linéaire injective s'appelle un monomorphisme d'espaces vectoriels.

L'application f est surjective.

Soit $y = \sum \lambda_i v_i$ un élément de $L\ (\Gamma_2)$. Cet élément est l'image par f d'un élément $x = \sum \lambda_i w_i$ de $L\ (\Gamma_1)$, par définition de f . Une application linéaire surjective s'appelle un épimorphisme. Une application linéaire qui est à la fois injective et surjective s'appelle un isomorphisme. L'application f est un isomorphisme de $L\ (\Gamma_1)$ sur $L\ (\Gamma_2)$.

Deux espaces vectoriels isomorphes ont la même dimension.

Il est en effet facile de vérifier que l'image d'une base est une base.

Les familles Γ_1 et Γ_2 ont le même rang.

Les espaces vectoriels isomorphes $L\ (\Gamma_1)$ et $L\ (\Gamma_2)$ ont la même dimension. Les familles Γ_1 et Γ_2 ont donc le même rang, par définition du rang.

EXERCICE 9.

Soit H le $\mathbb{R}$–espace vectoriel des fonctions réelles d'une variable réelle, définies et continues sur $-1\ ,\ 1]$. Les parties suivantes de H sont-elles des sous-espaces vectoriels de H ?

$H_1 = \{f \in H \,/\, 2\ f(0) = f(1)\ \}$
$H_2 = \{f \in H \,/\, f(1) = f(0)+1\ \}$
$H_3 = \{f \in H \,/\, f(x)>0\ \ \forall x \in [-1\ ,\ 1]\ \}$
$H_4 = \{f \in H \,/\, f(x)=f(-x)\ \ \forall x \in [-1\ ,\ 1]\}$
$H_5 = \{f \in H \,/\, f(x)=-f(-x)\ \ \forall x \in [-1\ ,\ 1]\}$

SOLUTION.

Pour voir si une partie A d'un espace vectoriel est un sous espace vectoriel, il suffit de vérifier deux propriétés :

- $x \in A$ et $y \in A \Rightarrow x-y \in A$
- $x \in A$ et $\lambda \in R \Rightarrow \lambda x \in A$

1°/ $H_1 = \{f \in H \,/\, 2\ f(0) = f(1)\ \}$

Considérons deux éléments f et g de H_1. La fonction $f-g$ définie par $(f-g)(x)=f(x)-g(x)$ vérifie :

$$2\ (f-g)(0) = 2(f(0)-g(0))=2f(0)-2g(0)=f(1)-g(1))=(f-g)(1)$$

donc $f-g$ est un élément de H_1 .

Soit λ un réel. $\lambda\ f$ est défini par $(\lambda\ f)(x)=\lambda\ f(x)$. On a :

$$2\ (\lambda\ f\ )(0) = 2 \times \lambda\ f(0) = \lambda \times 2\ f(0) = \lambda\ f(1) = (\lambda\ f\ )(1)$$

donc $\lambda\ f$ est un élément de H_1 .

H_1 est un sous-espace vectoriel de H.

2°/ $H_2 = \{f \in H \,/\, f(1) = f(0)+1\ \}$

Considérons deux éléments f et g de H_2. La fonction $f-g$ définie par $(f-g)(x)=f(x)-g(x)$ vérifie :

$$(f-g)(1) = (f(0)+1)-(g(0)+1)=f(0)-g(0)=(f-g)(0) \neq (f-g)(0)+1$$

donc $f-g$ n'est jamais un élément de H_2 .

H_2 n'est pas un sous-espace vectoriel de H.

3°/ $H_3 = \{f \in H \,/\, f(x) > 0,\ \ \forall x \in [-1,1]\ \}$

Considérons deux éléments f et g de H_3. La fonction $f-g$ définie par $(f-g)(x)=f(x)-g(x)$ vérifie :

$$(f-g)(0) = f(0)-g(0)$$

mais on peut très bien avoir affaire à deux fonctions positives dont la différence n'est pas positive. Il suffit de prendre $f(x)=1$, $g(x)=2$ pout tout x : la différence $f-g$ est égale à -1 pour tou x.

H_3 n'est pas un sous-espace vectoriel de H.

4°/ $H_4 = \{f \in H \,/\, f(-x) = f(x),\ \ \forall x \in [-1,1]\ \}$

Considérons deux éléments f et g de H_1. La fonction $f-g$ définie par $(f-g)(x)=f(x)-g(x)$ vérifie :

$$(f-g)(-x) = f(-x)-g(-x))=f(x)-g(x))=(f-g)(x)$$

donc $f-g$ est un élément de H_4 .

Soit λ un réel. $\lambda\ f$ est défini par $(\lambda\ f)(x)=\lambda\ f(x)$. On a :

$$(\lambda\ f\ )(-x) = \lambda\ f(-x) = \lambda\ f(x) = (\lambda\ f\ )(x)$$

donc λf est un élément de H_1 .

H_4 est un sous-espace vectoriel de H.

Les éléments de H_4 sont appelées les fonctions paires.

5°/ $H_5 = \{f \in H / f(-x) = -f(x), \quad \forall x \in [-1,1] \}$

Considérons deux éléments f et g de H_5. La fonction $f-g$ définie par $(f-g)(x)=f(x)-g(x)$ vérifie :

$$(f-g)(-x) = f(-x)-g(-x))=-f(x)+g(x))=-(f-g)(x)$$

donc $f-g$ est un élément de H_5 .

Soit λ un réel. λf est défini par $(\lambda f)(x)=\lambda f(x)$. On a :

$$(\lambda f)(-x) = \lambda f(-x) = -\lambda f(x) =(-\lambda f)(x)$$

donc λf est un élément de H_5 .

H_5 est un sous-espace vectoriel de H.

Les éléments de H_5 sont appelées les fonctions impaires.

EXERCICE 10.

Dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique, on considère les deux sous-ensembles suivants :

$$H_1 = \{ x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} / x_1 + x_2 + x_3 = 0 \}$$

$$H_2 = \{ x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} / x_1 = 0 \}$$

1° Montrer que H_1 et H_2 sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.
2° Déterminer les dimensions de H_1 et de H_2.
3° Construire une base pour chacun des sous-espaces vectoriels H_1 et H_2.
4° Calculer la dimension de $H_1 \cap H_2$ et construire une base de $H_1 \cap H_2$.

SOLUTION.

1°/ Sous-espaces vectoriels.

Pour montrer qu'une partie A d'un espace vectoriel est un sous-espace vectoriel, il suffit de montrer que :

1. $a \in A$ et $b \in A \Rightarrow a - b \in A$
2. $a \in A$ et $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda\, a \in A$

a) Prenons deux éléments a et b de H_1. Par définition, les trois composantes a_1 , a_2 , a_3 de a vérifient :

$$a_1 + a_2 + a_3 = 0$$

Par définition, les trois composantes b_1 , b_2 , b_3 de b vérifient :

$$b_1 + b_2 + b_3 = 0$$

Par soustraction, on a :

$$(a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) + (a_3 - b_3) = 0$$

ce qui signifie que $a - b$ est dans H_1.
Prenons maintenant un $\lambda \in R$. On a :

$$\lambda\, a_1 + \lambda\, a_2 + \lambda\, a_3 = \lambda\, (a_1 + a_2 + a_3) = 0$$

ce qui signifie que $\lambda\, a$ est dans H_1 .
Donc H_1 est un sous-espace vectoriel.

b) Prenons deux éléments a et b de H_2. Par définition, les trois composantes a_1 , a_2 , a_3 de a vérifient :

$$a_1 = 0$$

Par définition, les trois composantes b_1 , b_2 , b_3 de b vérifient :

$$b_1 = 0$$

Par soustraction, on a :

$$(a_1 - b_1) = 0$$

ce qui signifie que $a - b$ est dans H_2.
Prenons maintenant un $\lambda \in R$. On a :

$$\lambda\, a_1 = 0$$

ce qui signifie que $\lambda\, a$ est dans H_2 .
Donc H_2 est un sous-espace vectoriel.

2°/ Dimension des sous-espaces vectoriels.

Chaque sous-espace vectoriel est défini par une seule relation linéaire entre les trois composantes : chaque sous-espace vectoriel est donc de dimension 3 – 1 = 2.

a) De façon plus précise, soit a un élément de H_1 . En appelant $\{ e_1 , e_2 , e_3 \}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, on peut écrire a sous la forme :

$$a = a_1\, e_1 + a_2\, e_2 + a_3\, e_3$$

La relation $a_1 + a_2 + a_3 = 0$ montre que a est de la forme :

$$a = a_1\, e_1 + a_2\, e_2 - (a_1 + a_2)\, e_3 = a_1 (e_1 - e_3) + a_2 (e_2 - e_3)$$

donc tout élément de H_1 est combinaison linéaire des éléments $(e_1 - e_3)$ et $(e_2 - e_3)$. Ces éléments appartiennent à H_1 puisque leurs composantes $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ vérifient de façon évidente la relation de définition de H_1.

La famille $\{ e_1 - e_3 , e_2 - e_3 \}$apparaît donc comme une famille totale, ou système de générateurs de H_1 . De plus cette famille est libre, puisque les deux premières lignes de leurs composantes forment une matrice unité de $\mathbb{R}^2$. Donc le sous-espace vectoriel H_1 est de **dimension 2** et a pour base la famille:

$$\boxed{\{ e_1 - e_3 , e_2 - e_3 \}.}$$

b) Soit a un élément de H_2 .

$$a = a_1\, e_1 + a_2\, e_2 + a_3\, e_3$$

La relation $a_1 = 0$ montre que a est de la forme :

$$a = a_2\, e_2 + a_3\, e_3$$

donc tout élément de H_2 est combinaison des éléments e_2 et e_3 . Ces éléments appartiennent à H_2 , puisque, par définition, leur première composante est nulle. De plus, ce système de générateurs de H_2 est une famille libre puisque c'est une partie d'une base de $\mathbb{R}^3$. Donc le sous-espace vectoriel H_2 est de **dimension 2** et a pour base la famille :

$$\boxed{\{ e_2 , e_3 \}.}$$

3°/ Intersection de deux sous-espaces vectoriels

L'intersection des deux sous-espaces vectoriels H_1 et H_2 est un sous-espace vectoriel. Elle est définie par deux relations linéaires entre les trois composantes : c'est donc un sous-espace vectoriel de dimension 1.

Plus précisément, soit $a \in H_1 \bigcap H_2$, $a = a_1\, e_1 + a_2\, e_2 + a_3\, e_3$.

$a \in H_2 \Rightarrow a_1 = 0 \Rightarrow a = a_2\, e_2 + a_3\, e_3$.

$a \in H_1 \Rightarrow a_1 + a_2 + a_3 = 0 \Rightarrow a_2 + a_3 = 0 \Rightarrow a = a_2\, e_2 - a_2\, e_3 = a_2\, (e_2 - e_3)$

donc tout élément de $H_1 \bigcap H_2$ est proportionnel à $e_2 - e_3$. La famille réduite au seul élément non nul $e_2 - e_3$ est un système de générateurs de $H_1 \bigcap H_2$. De plus, c'est une famille libre, c'est donc une base de $H_1 \bigcap H_2$, lequel est donc un sous-espace vectoriel de dimension 1, ayant pour base :

$$\boxed{\{e_2 - e_3 \}.}$$

EXERCICE 11.

Soient H_1 , H_2 , deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E de dimension finie.

1° $H_1 \cup H_2$ est-il un sous-espace vectoriel de E ?

2° Comparer les sous-espaces vectoriels $H_1 + H_2$ et $L(H_1 \cup H_2)$.

3° Démontrer la propriété suivante :

$$dim\ (H_1) = dim\ (H_2)\ et\ H_1 \subset H_2 \Rightarrow H_1 = H_2\ .$$

4° Montrer que, pour tout entier naturel d inférieur ou égal à la dimension de E, il existe un sous-espace vectoriel de E dont la dimension est d.

SOLUTION.

1°/ Réunion de deux sous-espaces vectoriels.

La réunion de deux sous-espaces vectoriels n'est en général pas un sous-espace vectoriel. Par exemple, si l'on prend $E = \mathbb{R}^3$, $H_1 = \mathbb{R}\, e_1$, $H_2 = \mathbb{R}\, e_2$, { e_1 , e_2 , e_3 } étant la base canonique de $\mathbb{R}^3$, la réunion de H_1 et H_2 est l'ensemble des éléments qui sont proportionnels à e_1 ou à e_2. Considérons l'élément $e_1 - e_2$: il n'est ni proportionnel à e_1 , ni proportionnel à e_2 , sinon la famille $\{e_1 , e_2\}$ ne serait pas libre, ce qui contredit le fait que c'est une partie de base. L'élément $e_1 - e_2$ n'est donc pas dans $H_1 \cup H_2$, bien que l'on ait $e_1 \in H_1 \subset H_1 \cup H_2$ et $e_2 \in H_2 \subset H_1 \cup H_2$: ceci montre que $H_1 \cup H_2$ n'est pas un sous-groupe de $\mathbb{R}^3$. $H_1 \cup H_2$ ne peut donc pas, dans ce cas, être un sous-espace vectoriel .

2°/ Sous-espace vectoriel engendré par la réunion de deux sous-espaces vectoriels.

L'enveloppe linéaire $< H_1 \cup H_2 >$ de la réunion de H_1 et de H_2 est l'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments qui appartiennent soit à H_1 soit à H_2. Ces combinaisons linéaires peuvent s'écrire comme somme d'une combinaison linéaire d'éléments de H_1 et d'une combinaison linéaire d'éléments de H_2 :

$$< H_1 \cup H_2 > \subset < H_1 > + < H_2 >$$

Inversement, il est clair que la somme d'une combinaison linéaire d'éléments de H_1 et d'une combinaison linéaire d'éléments de H_2 est la combinaison linéaire d'éléments qui appartiennent soit à H_1 , soit à H_2 :

$$< H_1 > + < H_2 > \subset < H_1 \cup H_2 >$$

Ces deux sous-espaces vectoriels sont donc identiques :

$$< H_1 \cup H_2 > = < H_1 > + < H_2 >.$$

Comme H_1 est un sous-espace vectoriel, on a $H_1 = < H_1 >$. De même : $H_2 = < H_2 >$. D'où l'égalité :

$$\boxed{< H_1 \cup H_2 > = H_1 + H_2\ .}$$

3°/ Dimension d'un sous-espace vectoriel et dimension de l'espace vectoriel.

$H_1 \subset H_2$ et $H_1 \neq H_2 \Rightarrow \exists\ H_3$, sous-espace vectoriel de H_2 tel que $H_1 \oplus H_3 = H_2$ et $H_3 \neq 0$.
Une base de H_1 peut donc être complétée par une base du supplémentaire H_3 de H_1 en une base de H_2 . On a donc $dim\ (H_1) < dim\ (H_2)$. D'où la propriété :

$$H_1 \subset H_2 \text{ et } H_1 \neq H_2 \Rightarrow dim\ (H_1) < dim\ (H_2),$$

Cette propriété est logiquement équivalente à :

$$H_1 \subset H_2 \text{ et } dim\ (H_1) = dim\ (H_2) \Rightarrow H_1 = H_2\ ,$$

4° Sous-espace vectoriel de dimension donnée.

Soit E un espace vectoriel de dimension n. Il existe une base { e_1 , … , e_n } de E.
Pour chaque entier d, de 1 à n, on peut considérer la famille { e_1 , … , e_d }. C'est une partie d'une base, donc c'est une famille libre. Elle engendre un sous-espace vectoriel de dimension d.
Pour $d = 0$, le sous-espace vectoriel {0} est de dimension 0. Il est engendré par la partie vide.
Ainsi, pour chaque entier naturel d inférieur ou égal à n, il existe un sous-espace vectoriel de dimension d.

EXERCICE 12.

Soit $(H_n)_{n\in N}$ une suite de sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel réel E de dimension finie.
1° Montrer que l'intersection $\bigcap H_n$ de la famille est encore un sous-espace vectoriel de E.
2° Montrer que la dimension de l'intersection $\bigcap H_n$ est inférieure ou égale à la plus petite des dimensions des H_n.
3° Que se passe-t-il lorsque la dimension de l'intersection $\bigcap H_n$ est égale à la plus petite des dimensions des H_n ?

SOLUTION.

1°/ Intersection de sous-espaces vectoriels.

Soit $a \in \bigcap H_n$ et $b \in \bigcap H_n$. Pour tout $n\in N$, $a \in H_n$ et $b \in H_n$. Comme H_n est un sous-espace vectoriel :

$$a-b \in H_n$$

Comme $a-b$ appartient à toous les H_n, il appartient à leur intersection. L'intersection de la famille de ous-espaces vectoriels est déjà un sous-groupe additif.
Soit $\lambda \in R$. Pour tout entier > 0, $a\in H_n$, donc λa appartient aussi à H_n, donc il apprtient à l'intersection des H_n. L'intersection de la famille de sous-espaces veectoriels est donc un sous-espace vectoriel.

2°/ Dimension de l'intersection d'une famille de sous-espaces vectoriels.

$$(\bigcap H_n \subset H_n \ \forall n) \Rightarrow (\forall n, dim(\bigcap H_n) \leq dim(H_n) \Rightarrow dim(\bigcap H_n) \leq Inf(dim(H_n)) = Min(dim(H_n))).$$

3°/ Cas où $dim(\bigcap H_n) = Min(dim(H_n))$.

Dans ce cas, comme les dimensions des H_n forment une famille finie d'entiers $\leq n$, dimension de l'espace vectoriel entier E, on peut trouver un entier m tel que $dim(H_m) = Min(dim(H_n))$. On a :

$$dim(H_m) = Min(dim(H_n)) = dim(\bigcap H_n)$$

L'intersection des H_n, qui est un sous-espace vectoriel de H_m a la même dimension que H_m : il en résulte que l'intersection des H_n est égale à H_m. Ainsi :

> Lorsque $dim(\bigcap H_n) = Min(dim(H_n))$, $\bigcap H_n$ est le plus petit des H_n : il est contenu dans tous les éléments de la famille.

EXERCICE 13.

Indiquez si vous pensez que l'assertion proposée est vraie ou fausse et justifiez votre choix.

1. Si E est un $\mathbb{R}$–espace vectoriel, alors E est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel.
Vrai Faux

2. Si E est un $\mathbb{Q}$–espace vectoriel, alors E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
Vrai Faux

3. Dans un espace vectoriel E, si $a, b, c, d,$ sont des vecteurs linéairement indépendants, alors les vecteurs $a-b$, $b-c$, $c-d$, $d-a$, sont linéairement indépendants.
Vrai Faux

4. Dans un espace vectoriel E, si les vecteurs a et b sont linéairement indépendants, si les vecteurs a et c sont linéairement indépendants, alors les vecteurs $a, b, c,$ sont linéairement indépendants.
Vrai Faux

5. Un polynôme de degré n et ses n dérivées forment une famille libre.
Vrai Faux

6. Dans un espace vectoriel E de dimension finie n, si le rang d'une famille de n vecteurs est égal à n, alors cette famille est une base.
Vrai Faux

7. Un espace vectoriel de dimension finie est un ensemble fini.
Vrai Faux

SOLUTION.

1. Espace vectoriel sur un sous-corps.

L'assertion est VRAIE.
Si l'on restreint la multiplication par les nombres réels à la multiplication par les nombres rationnels, toutes les propriétés restent vraies puisque les rationnels ne sont que des réels particuliers.

2. Espace vectoriel sur une extension du corps de base.

L'assertion est FAUSSE.
Si la multiplication par les rationnels est définie, il n'en résulte pas automatiquement une définition de la multiplication par les réels.
EXEMPLE : $\mathbb{Q}$ est un $\mathbb{Q}$–espace vectoriel : ce n'est jamais un $\mathbb{R}$–espace vectoriel, puisque le produit d'un nombre réel quelconque, par exemple π, par un nombre rationnel n'est pas un nombre rationnel.

3. Familles équivalentes.

L'assertion est FAUSSE.
On a toujours :

$$(a-b) + (b-c) + (c-d) + (d-a) = 0$$

combinaison linéaire nulle de la famille $\{ (a-b) ; (b-c) ; (c-d) ; (d-a) \}$à coefficients non nuls, quelle que soit la famille $\{a , b , c , d \}$. Donc la famille $\{ (a-b) ; (b-c) ; (c-d) ; (d-a) \}$ n'est ***jamais libre***.

4. Transitivité de l'indépendance linéaire.

L'assertion est FAUSSE.
Il suffit de prendre $c = b$, pour le voir.

5. Famille libre dérivée d'un polynôme.

L'assertion est VRAIE pour $n \geq 1$.
Pour le voir, on va raisonner par récurrence sur n.
Pour $n = 0$, $P_0\,(x)$ est une constante a. La relation $\lambda\, a = 0$ n'entraîne $\lambda = 0$ que si a est différent de 0. Il faut donc supposer le polynôme différent de 0 pour que l'assertion soit vraie.
Pour $n = 1$, $P_1\,(x)$ est de la forme $a\,x + b$. Comme le degré est 1, c'est que a est différent de 0. La dérivée de $P_1\,(x)$ est a. Supposons que l'on ait une combinaison linéaire nulle :

$$\lambda_1\, P_1\,(x) + \lambda_0\, P_0\,(x) = 0$$

Cette relation s'écrit :

$$\lambda_1\,(a\,x + b) + \lambda_0\, a = 0$$
$$\lambda_1\, x + (\lambda_1\, b + \lambda_0\, a\,) = 0$$

Pour que cette relation soit vraie quel que soit x, il faut que les coefficients du polynôme soient nuls :

$$\lambda_1 = 0 \text{ et } \lambda_1\, b + \lambda_0\, a = 0$$

Il en résulte $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_0\, a = 0$. Comme a n'est pas nul, c'est que λ_0 est nul. Ainsi $\lambda_1 = \lambda_0 = 0$, et la famille $\{\, P_1\,(x)\,;\, P_0\,(x)\,\}$ est libre.
Supposons la propriété vraie pour une certaine valeur $n \geq 1$.
Considérons un polynôme $P_{n+1}\,(x)$ de degré $n + 1$, et ses dérivées jusqu'à l'ordre $n + 1$. Le terme de degré $n + 1$ n'est pas nul par définition. Il est de la forme $a\,x^{n+1}$ avec $a \neq 0$. Considérons une combinaison linéaire nulle de cette famille :

$$\lambda_{n+1}\; P_{n+1}\,(x) + \lambda_n\; P_{n+1}{}'\,(x) + \ldots + \lambda_0\, P_{n+1}{}^{(n+1)}\,(x) = 0$$

Le premier membre est un polynôme de degré $n + 1$. Pour qu'il soit identiquement nul, il faut que son terme de degré $n + 1$ soit nul. On a donc : $\lambda_{n+1}\, a = 0$. La relation $a \neq 0$ entraîne $\lambda_{n+1} = 0$ et l'identité précédente s'écrit :

$$\lambda_n\; P_{n+1}{}'\,(x) + \ldots + \lambda_0\, P_{n+1}{}^{(n+1)}\,(x) = 0$$

Mais $P_{n+1}{}'\,(x)$ est un polynôme de degré $\leq n$ dont le terme de plus haut degré est $(n + 1)\, a\, x^n$. Comme a n'est pas nul, $P_{n+1}{}'\,(x)$ est un polynôme de degré n . L'hypothèse de récurrence entraîne alors :

$$\lambda_n = \ldots = \lambda_0 = 0$$

de sorte que la famille $\{\, P_{n+1}\,(x)\,;\; P_{n+1}{}'\,(x)\,;\, \ldots\,;\, P_{n+1}{}^{(n+1)}\,(x)\,\}$ est libre.
Le principe de récurrence entraîne alors que la propriété est vraie pour tout entier $n \geq 1$.

6. Famille libre maximale.

L'assertion est VRAIE.
Le rang de la famille est la dimension du sous-espace vectoriel qu'elle engendre (enveloppe linéaire de la famille). Dire que la famille est de rang n, c'est dire que le sous-espace vectoriel qu'elle engendre est de dimension n. Or le seul sous-espace vectoriel de dimension n est l'espace E tout entier. Donc la famille libre engendre l'espace vectoriel : par définition, c'est une base.

7. Espace vectoriel fini.

L'assertion est FAUSSE.
Pour le voir, il suffit de prendre $\mathbb{R}$: c'est un espace vectoriel de dimension 1 sur lui-même. Mais ce n'est pas un ensemble fini.
Remarque : il existe des corps finis ; de tels corps sont des espaces vectoriels finis sur eux-mêmes.

Exercices

Applications linéaires.

1. Application linéaire.
2. Forme linéaire.
3. Matrice d'une application linéaire.
4. Produit de deux matrices.
5. Algèbre des matrices carrées.
6. Valeurs propres et vecteurs propres.
7. Déterminant d'un endomorphisme.
8. Polynôme caractéristique d'un endomorphisme.
9. Polynôme minimal et théorème de Cailey-Hamilton.

1 Application linéaire.

Etant donné deux espaces vectoriels réels E et F, on dit qu'une application f de E dans F est une **application linéaire** si, et seulement si, pour tout x et tout y de E, pour tout λ de $\mathbb{R}$, les deux propriétés suivantes sont vérifiées :

$f(x + y) = f(x) + f(y)$

$f(\lambda x) = \lambda f(x)$

Les applications linéaires de E dans F forment un ensemble $\mathcal{L}(E, F)$, qu'on peut munir d'une structure d'**espace vectoriel réel** en posant, pour tout f et tout g dans $\mathcal{L}(E, F)$, tout x dans E et tout λ dans $\mathbb{R}$:

$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$

$(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$

Pour une application linéaire $f : E \longrightarrow F$:

l'image d'un sous-espace vectoriel est un sous-espace vectoriel,

l'image réciproque d'un sous-espace vectoriel est un sous-espace vectoriel.

$f(E)$ est un sous-espace vectoriel de F qu'on appelle l'**image de *f*** et qu'on note $Im(f)$.

$f^{-1}(0)$ est un sous-espace vectoriel de E qu'on appelle le **noyau de *f*** et qu'on note $Ker(f)$.

f surjective $\Leftrightarrow Im(f) = F$

f injective $\Leftrightarrow Ker(f) = 0$

La **composée de deux applications linéaires** est une application linéaire.

Pour une application linéaire $f : E \longrightarrow F$: ***dim* (*Ker* (*f*)) + *dim* (*Im* (*f*)) = *dim* (*E*)**

Une application linéaire de E dans E s'appelle un **endomorphisme** de E.

En dimension finie, pour un endomorphisme : **injectif = bijectif = surjectif**.

On appelle **rang** d'un endomorphisme la dimension de son image.

HAUT

2 Forme linéaire.

Une application linéaire d'un espace vectoriel E dans $\mathbb{R}$, considéré comme espace vectoriel sur lui-même, s'appelle une **forme linéaire** sur E.

L'espace vectoriel $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ des formes linéaires sur E est appelé l'**espace vectoriel dual** de E. Si E est de dimension finie, il a la même dimension que son dual.

Etant donnée une base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ d'un espace vectoriel E de dimension finie, les formes linéaires e'^j, $j = 1, \ldots, n$, définies par :

$$e'^j\left(\sum_{k=1}^{k=n} x^k e_k\right) = x^j$$

s'appellent les **formes coordonnées**. Elles forment une base $\{e'^1, \ldots, e'^n\}$ du dual E^* de E, qu'on appelle la **base duale** de la base $\{e_1, \ldots, e_n\}$.

HAUT

3 Matrice d'une application linéaire.

HAUT

Etant donnée une application linéaire h d'un espace vectoriel réel E de dimension finie n, de base $\{e\} = \{e_1, \dots, e_n\}$, dans un espace vectoriel réel F de dimension finie m, de base $\{f\} = \{f_1, \dots, f_m\}$, on appelle **matrice de l'application linéaire** h, relativement aux bases e et f, le tableau de nombres réels, à n colonnes et m lignes, qu'on obtient en mettant dans la i-ème colonne les m composantes du vecteurs $h(e_i)$, qu'on note $h^j{}_i$ (h indice supérieur j, indice inférieur i). La matrice $[h, \{e\}, \{f\}]$ est notée aussi $[h^j{}_i]$ (matrice des $h^j{}_i$).

Matrice de h relativement aux bases $\{e\}$ et $\{f\}$ = $[h, \{e\}, \{f\}]$ =

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} h(e_1) & & h(e_i) & & h(e_n) \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} h^1{}_1 & \cdots & h^1{}_i & \cdots & h^1{}_n \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h^j{}_1 & \cdots & h^j{}_i & \cdots & h^j{}_n \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h^m{}_1 & \cdots & h^m{}_i & \cdots & h^m{}_n \end{pmatrix} \begin{matrix} f_1 \\ \\ f_j \\ \\ f_m \end{matrix} \end{array}$$

Soit $\{f'^1, \dots, f'^m\}$ la base duale de $\{f_1, \dots, f_m\}$. On a : $h^j{}_i = f'^j(h(e_i))$ et $h(e_i) = \sum_{j=1}^{j=m} h^j{}_i f_j$.

Dans la **convention d'Einstein**, on sous-entend la somme lorsqu'elle porte sur un indice qui figure en position supérieure et en position inférieure. La formule précédente s'écrit alors à : $h(e_i) = h^j{}_i f_j$ (la somme sur j est sous-entendue).

Etant donnée une base de E et une base de F, on peut identifier une application linéaire à sa matrice relativement à ces bases, transportant ainsi dans l'ensemble des matrices à n colonnes et m lignes la **structure d'espace vectoriel** de $\mathcal{L}(E, F)$:

$$[h^j{}_i] + [h'^j{}_i] = [h^j{}_i + h'^j{}_i]$$
$$\lambda [h^j{}_i] = [\lambda h^j{}_i]$$

Règles :
Pour additionner deux matrices, on additionne les composantes correspondantes.
Pour multiplier une matrice par un scalaire, on multiplie chaque composante par le scalaire.

HAUT

4 Produit de deux matrices.

HAUT

Soient E, F, G, des espaces vectoriels de dimensions finies n, m, p, de bases respectives :
$\{e\} = \{e_1, \dots, e_n\}$, $\{f\} = \{f_1, \dots, f_m\}$, $\{g\} = \{g_1, \dots, g_p\}$
Soit $h : E \longrightarrow F$ et $h' : F \longrightarrow G$ deux applications linéaires.

La matrice de l'application linéaire $h' \circ h : F \longrightarrow G$, relativement aux bases $\{e\}$et $\{g\}$, s'appelle le **produit des matrices** $[\, h', \{f\}, \{g\}\,]$ et $[\, h, \{e\}, \{f\}\,]$:

$$[\, h', \{f\}, \{g\}\,] \times [\, h, \{e\}, \{f\}\,] = [\, h' \circ h, \{e\}, \{g\}\,]$$

Pour que la multiplication de deux matrices soit possible, il faut (et il suffit) que le nombre de colonnes de la première soit égal au nombre de lignes de la deuxième.

L'élément de la i-ème colonne, j-ème ligne de la matrice produit est la composante de $(h' \circ h)(e_i)$ sur le vecteur de base g_j :

$$h(e_i) = \sum_{k=1}^{k=p} h_{ki} f_k \; ; \; h'(h(e_i)) = \sum_{k=1}^{k=p} h_{ki} h'(f_k)$$

La composante sur g_j est : $(h' \circ h)_{ji} = \sum_{k=1}^{k=p} h'_{jk} h_{ki}$.

On l'obtient en prenant les éléments de la j-ème ligne de $[\, h', \{f\}, \{g\}\,]$, les éléments de la i-ème colonne de $[\, h, \{e\}, \{f\}\,]$, en les multipliant terme à terme et en additionnant.

Si $E = F = G$, les matrices des endomorphismes sont des matrices carrées : le produit des matrices qu'on vient de définir, donne à l'ensemble des matrices carrées à n colonnes et n lignes, une **structure d'algèbre** (anneau unitaire + espace vectoriel). L'élément unité de cette algèbre est la matrice de l'application identique (matrice comportant des 0 partout, sauf sur la diagonale principale, où il y a des 1), qu'on appelle, bien sûr, la **matrice unité**.

HAUT

5 Algèbre des matrices carrées.

Les **matrices des endomorphismes** d'un espace vectoriel relativement à une base, sont des **matrices carrées** : le produit de deux matrices carrées à *n* colonnes et *n* lignes existe toujours, c'est une matrice carrée ayant *n* colonnes et *n* lignes. La multiplication des matrices donne à l'ensemble des matrices carrées à *n* colonnes et *n* lignes, une **structure d'algèbre** (anneau unitaire + espace vectoriel).

L'élément unité de cette algèbre est la matrice de l'application identique (matrice comportant des 0 partout, sauf sur la diagonale principale, où il y a des 1), qu'on appelle, bien sûr, la **matrice unité**.

Cette algèbre possède des **éléments inversibles** qui sont les matrices des bijections linéaires de *E* dans *E* (isomorphismes).

HAUT

6 Valeurs propres et vecteurs propres.

Si f est un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie n, on appelle **vecteur propre** associé à la **valeur propre** λ, tout vecteur **non nul** v vérifiant :

$$f(v) = \lambda v.$$

Les vecteurs propres associés à une valeur propre λ engendrent un sous-espace vectoriel appelé le **sous-espace propre** associé à la valeur propre λ.
La dimension du sous-espace propre associé à une valeur propre λ est appelée l'**ordre de multiplicité de la valeur propre** λ.
Le sous-espace propre associé à la valeur propre λ est le noyau de l'endomorphisme $f - \lambda Id_E$.
Si f n'est pas injective, le noyau de f est le sous-espace propre associé à la valeur propre 0.
La restriction de f au sous-espace propre associé à la valeur propre λ, est une homothétie de rapport λ.

S'il existe une **base formée de vecteurs propres**, **la matrice de *f* est diagonalisable**.

HAUT

7 Déterminant d'un endomorphisme.

HAUT

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie n, de base $\{e_1, \ldots, e_n\}$, de base duale $\{e'^1, \ldots, e'^n\}$, et soit $\mathfrak{S}_n$ le groupe symétrique de degré n.

Soit $\{x_1, \ldots, x_n\}$ une famille de n vecteurs de E.
On appelle **déterminant de la famille de vecteurs**, le nombre

$$[x_1, \ldots, x_n] = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} sgn\,(\sigma)\, e'^{\sigma(1)}(x_1) \ldots e'^{\sigma(n)}(x_n)$$

Ce nombre ne dépend pas de la base choisie, et, pour rappeler la liaison avec le produit vectoriel de deux vecteurs, on note :

$$x_1 \wedge \ldots \wedge x_n = [x_1, \ldots, x_n]\, e_1 \wedge \ldots \wedge e_n.$$

Si f est un endomorphisme de E, on appelle **déterminant de l'endomorphisme** f, le nombre réel

$$dét\,(f) = [\,f(e_1), \ldots, f(e_n)\,]$$
$$f(x_1) \wedge \ldots \wedge f(x_n) = dét\,(f)\, x_1 \wedge \ldots \wedge x_n.$$

Le déterminant d'un endomorphisme est égal au **produit des valeurs propres** (avec leurs ordres de multiplicité). Un endomorphisme est bijectif si, et seulement si, son déterminant est différent de 0.

Si A est une matrice carrée $n \times n$, on appelle **déterminant de la matrice** A, le déterminant de la famille de vecteurs représentés par les colonnes de la matrice A : c'est aussi le déterminant de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$, dont A est la matrice dans la base canonique. Une matrice est inversible si, et seulement si, son déterminant est différent de 0.

HAUT

8 Polynôme caractéristique d'un endomorphisme.

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie n.
Soit λ un nombre réel et soit Id_E l'application identique de E.
Le déterminant de $f - \lambda\, Id_E$ est la valeur pour $X = \lambda$, d'un polynôme $P[X]$ de degré n qu'on appelle le **polynôme caractéristique** de f.

Les valeurs propres de f sont les racines de son polynôme caractéristique.

Pour qu'un endomorphisme f soit **triangulaire**, c'est-à-dire pour qu'il existe une base dans laquelle la matrice de f ne comporte que des 0 en dessous de la diagonale, il faut et il suffit que son polynôme caractéristique soit produit de facteurs du premier degré (c'est toujours le cas dans les espaces vectoriels complexes).

Pour un endomorphisme triangulaire, le polynôme caractéristique s'écrit sous la forme :

$$P[X] = \prod_{i=1}^{i=k} (X - \lambda_i)^{n_i}$$

où les λ_i, $i = 1, \ldots, k$, sont les valeurs propres de f et les n_i les ordres de multiplicité correspondants.

HAUT

9 Polynôme minimal et théorème de Cailey-Hamilton.

HAUT

Si $P\,[X]$ est le polynôme caractéristique d'un endomorphisme f d'un espace vectoriel E de dimension finie n, le **théorème de Cailey-Hamilton** affirme alors que ***f* est solution de son polynôme caractéristique** :

$$P\,(f\,) = 0$$

L'anneau des polynômes est un **anneau principal** (tout idéal est monogène).
L'ensemble des polynômes dont f est solution est un idéal.
Donc il existe un polynôme de degré minimal dont f est solution : ce polynôme est appelé le **polynôme minimal** de f.

Lorsque f est triangulaire, le polynôme caractéristique de f est produit de facteurs du premier degré :

$$P\,[X] = \prod_{i=1}^{i=k} (X - \lambda_{i})^{n_i}.$$

Il existe des nombres minimaux $m_i \leqslant n_i$, $i = 1, \ldots, k$, tels que :

$$\prod_{i=1}^{i=k} (f - \lambda_i\, Id_E)^{m_i} = 0$$

Le polynôme $\prod_{i=1}^{i=k} (X - \lambda_{i})^{m_i}$ est le **polynôme minimal** de f.

$$E = \bigoplus_{i=1}^{i=k} Ker\,((f - \lambda_i\, Id_E)^{n_i})$$

HAUT

Chapitre 3. Applications linéaires.

Exercices

Exercice 1. Application linéaire, matrice, noyau.
Exercice 2. Inversion de deux matrices 3 × 3.
Exercice 3. Endomorphisme de $\mathbb{R}^4$.
Exercice 4. Dimensions du noyau et de l'image.
Exercice 5. Noyau d'une forme linéaire.
Exercice 6. Surjectivité d'une application linéaire.
Exercice 7. Endomorphisme et automorphisme.
Exercice 8. Sous-espace vectoriel et image d'endomorphisme.
Exercice 9. Endomorphisme dont le noyau et l'image coïncident.
Exercice 10. Noyau et image supplémentaires.
Exercice 11. Noyaux et images supplémentaires.
Exercice 12. Endomorphismes de rangs complémentaires.
Exercice 13. Projecteurs.

Encore plus d'exercices ...

Exercice 1. Application linéaire, matrice, noyau.

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application définie par $f(x, y, z) = (x + 3y - 5z, 3x - 7y + 15z, 2x - 6y + 12z)$.

1°/ Vérifier que f est une application linéaire.
2°/ Donner la matrice M de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
3°/ Soit $g = f - 2\,id_{\mathbb{R}^3}$. Donner une base de $Ker\ g$.
4°/ Soit I_3 la matrice unité de $\mathcal{M}_3[\mathbb{R}]$. Calculer $(M - 2I_3)^2$.
5°/ Trouver un vecteur $u \in \mathbb{R}^3$ vérifiant : $u \in Ker(g \circ g)$ et $u \notin Ker(g)$.
6°/ Pour le vecteur u de la question 5, montrer que $(g(u), u)$ est un système libre.
7°/ Trouver un vecteur $v \in Ker(g)$ tel que $(g(u), u, v)$ soit une base de $\mathbb{R}^3$.
8°/ Donner, sans calcul, la matrice de g dans la base $(g(u), u, v)$.
9°/ Montrer que la matrice de f dans la base $\{g(u), u, v\}$ est $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
10°/ Soit $id_{\mathbb{R}^3}$ l'application identique de $\mathbb{R}^3$. Montrer que, pour tout nombre réel λ différent de 2, $f - \lambda\,id_{\mathbb{R}^3}$ est une application injective.
11°/ Démontrer, par récurrence sur n, que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$

Solution

HAUT

Exercice 2. Inversion de deux matrices 3 × 3.

Déterminer si les matrices suivantes sont inversibles et, si oui, donner leur inverse :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} ; B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 5 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

Solution

HAUT

Exercice 3. Endomorphisme de $\mathbb{R}^4$.

Soit f l'application définie par :

$$f(x, y, z, t) = (x + y + t, x - z + 2t, y + z - t, y + z - t).$$

1°/ Montrer que l'application f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^4$.
2°/ Ecrire la matrice A de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$.
3°/ Déterminer une base (v_1, v_2) de $Ker\ f$ et en déduire sa dimension.
4°/ En déduire le rang de f.
5°/ Montrer que $\mathbb{R}^4 = Im\ f \oplus Ker\ f$.
6°/ Montrer qu'il existe $(v_3, v_4) \in Im\ f \times Im\ f$ tel que :
$f(v_3) = -v_3$ et $f(v_4) = 2v_4$.
7°/ Montrer que $\{v\} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ forme une base de $\mathbb{R}^4$.

8°/ On note $\underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ fois}} = f^n$ la composée n^e de l'application f.
Calculer les matrices de f^2 et f^3 dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$.
En déduire que $f^3 = f^2 + 2f$.

Solution

HAUT

Exercice 4. Dimensions du noyau et de l'image.

On définit l'application f de $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^5$, en posant, pour tout vecteur $x := (\alpha, \beta)$ de $\mathbb{R}^2$:

$$f(x) = (\alpha + 2\beta, -2\alpha + 3\beta, \alpha + \beta, 3\alpha + 5\beta, -\alpha + 2\beta)$$

1°/ Montrer que f est une application linéaire.
2°/ Déterminer *Ker* (f) ainsi que sa dimension.
2°/ Déterminer *Im* (f) ainsi que sa dimension.

Solution

HAUT

Exercice 5. Noyau d'une forme linéaire.

Soit f l'application de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 3x_1 + x_2$. Quelle est la dimension du noyau de f ?	Solution

HAUT

Exercice 6. Surjectivité d'une application linéaire.

Soit f l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y, z) = (x - y + z, y + z)$. 1°/ Montrer que f est linéaire. 2°/ Déterminer le noyau de f. 3°/ f est-elle injective ? surjective ? un isomorphisme ?	Solution

HAUT

Exercice 7. Endomorphisme et automorphisme.

Soit f et g les applications de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définies par :

$$f(x, y) = (2x - 4y, x - 2y),\ g(x, y) = (3x - 4y, x - y)$$

1°/ Montrer que f est un endomorphisme.
2°/ Déterminer $Ker(f)$ et $Im(f)$.
3°/ Montrer que g est un automorphisme.

Solution

HAUT

Exercice 8. Sous-espace vectoriel et image d'endomorphisme.

On considère les vecteurs $u = (2, 1, -1)$, $v = (1, -1, 3)$, $w = (3, 3, -5)$ du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^3$. Soit $F = Vect(\{u, v, w\})$ le sous-espace vectoriel engendré par $\{u, v, w\}$.

1°/ Déterminer une base de F.
2°/ On définit l'application f de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ dans lui-même, en posant, pour tout vecteur $x = (\alpha, \beta, \gamma)$ de $\mathbb{R}^3$:
$f(x) = (3\alpha + \gamma, \alpha - \beta + \gamma, -3\alpha - 3\beta + \gamma)$
Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
3°/ Déterminer une base de $Ker(f)$ et une base de $Im(f)$.
4°/ A-t-on $\mathbb{R}^3 = Ker(f) \oplus Im(f)$?
5°/ Les vecteurs u, v, w, sont-ils des éléments de $Im(f)$?
6°/ Déterminer une base et la dimension de $F \cap Im(f)$.

Solution

HAUT

Exercice 9. Endomorphisme dont le noyau et l'image coïncident.

On désigne par f un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ tel que :

$$(i) \quad Ker\,(f) = Im\,(f)$$

1°/ Donner un exemple d'un tel endomorphisme.
2°/ Montrer que l'asssertion (i) est équivalente à l'assertion :

$$(ii) \quad f \circ f = 0 \text{ et } n = 2 \times rang\,(f)$$

Solution

HAUT

Exercice 10. Noyau et image supplémentaires.

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$. Etablir l'équivalence des deux assertions suivantes: (*i*) $Im\,(f \circ f) = Im\,(f)$ (*ii*) $\mathbb{R}^n = Ker\,(f) \oplus Im\,(f)$.	Solution

HAUT

Exercice 11. Noyaux et images supplémentaires.

Soit f une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$, et g une application linéaire de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$. On suppose $f \circ g \circ f = f$ et $g \circ f \circ g = g$. Montrer que $\mathbb{R}^n = Im\,(g) \oplus Ker\,(f)$ et $\mathbb{R}^p = Im\,(f) \oplus Ker\,(g)$.	Solution

HAUT

Exercice 12. Endomorphismes de rangs complémentaires.

Soient u et v des endomorphismes de $\mathbb{R}^n$ tels que $u \circ v = O_{L(\mathbb{R}^n)}$ et $u + v \in GL(\mathbb{R}^n)$. Montrer que $rg(u) + rg(v) = n$. On pourra montrer que $Im(v) \subset Ker(u)$ et que $Im(u + v) \subset Im(u) + Im(v)$.	Solution

HAUT

Exercice 13. Projecteurs.

On pose $E := \mathbb{R}^n$.
On dit qu'un endomorphisme p est un **projecteur** de E si, et seulement si, $p \circ p = p$.

1°/ Montrer que p est un projecteur de E si, et seulement si, $Id_E - p$ est un projecteur de E.
2°/ Montrer que si p est un projecteur de E, alors :
$Im\,(Id_E - p) = Ker\,(p)$ et $Ker\,(Id_E - p) = Im\,(p)$
3°/ Montrer que si p est un projecteur de E, alors $E = Im\,(p) \oplus Ker\,(p)$.
4°/ Montrer qu'un projecteur p de E commute avec un endomorphisme u de E pour la loi $\circ$ si, et seulement si, $u\,(Ker\,(p)) \subset Ker\,(p)$ et $u\,(Im\,(p)) \subset Im\,(p)$.

Solution

HAUT

Chapitre 3. Applications linéaires.

Enoncés.

Exercice 1. Application linéaire, matrice, noyau.

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application définie par $f(x, y, z) = (x + 3y - 5z, 3x - 7y + 15z, 2x - 6y + 12z)$.

1°/ Vérifier que f est une application linéaire.
2°/ Donner la matrice M de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
3°/ Soit $g = f - 2\,id_{\mathbb{R}^3}$. Donner une base de $Ker\ g$.
4°/ Soit I_3 la matrice unité de $\mathcal{M}_3[\mathbb{R}]$. Calculer $(M - 2I_3)^2$.
5°/ Trouver un vecteur $u \in \mathbb{R}^3$ vérifiant : $u \in Ker(g \circ g)$ et $u \notin Ker(g)$.
6°/ Pour le vecteur u de la question 5, montrer que $(g(u), u)$ est un système libre.
7°/ Trouver un vecteur $v \in Ker(g)$ tel que $(g(u), u, v)$ soit une base de $\mathbb{R}^3$.
8°/ Donner, sans calcul, la matrice de g dans la base $(g(u), u, v)$.
9°/ Montrer que la matrice de f dans la base $\{g(u), u, v\}$ est $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
10°/ Soit $id_{\mathbb{R}^3}$ l'application identique de $\mathbb{R}^3$. Montrer que, pour tout nombre réel λ différent de 2, $f - \lambda\,id_{\mathbb{R}^3}$ est une application injective.
11°/ Démontrer, par récurrence sur n, que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^n =$

$$\begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

Solution.

1°/ Linéarité.

Soit $\{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
On a :

$f(e_1) = f(1, 0, 0) = (1, 3, 2)$
$f(e_2) = f(0, 1, 0) = (3, -7, -6)$
$f(e_3) = f(0, 0, 1) = (-5, 15, 12)$
$f(x, y, z) = (x + 3y - 5z, 3x - 7y + 15z, 2x - 6y + 12z) = x(1, 3, 2) + y(3, -7, -6) + z(-5, 15,$

12) = $x\,f(e_1) + y\,f(e_2) + z\,f(e_3)$.

$$\boxed{f(x\,e_1 + y\,e_2 + z\,e_3) = x\,f(e_1) + y\,f(e_2) + z\,f(e_3)}$$

La linéarité de f résulte alors immédiatement de cette formule :

— Pour deux vecteurs $u = x\,e_1 + y\,e_2 + z\,e_3$ et $u' = x'\,e_1 + y'\,e_2 + z'\,e_3$ de $\mathbb{R}^3$, on a :

$u + u' = (x + x')\,e_1 + (y + y')\,e_2 + (z + z')\,e_3$
$f(u + u') = (x + x')\,f(e_1) + (y + y')\,f(e_2) + (z + z')\,f(e_3) = (x\,f(e_1) + y\,f(e_2) + z\,f(e_3)) + (x'\,f(e_1) + y'\,f(e_2) + z'\,f(e_3)) = f(u) + f(u')$.

— Pour un vecteur $u = x\,e_1 + y\,e_2 + z\,e_3$ et un scalaire λ, on a :

$\lambda\,u = (\lambda\,x)\,e_1 + (\lambda\,y)\,e_2 + (\lambda\,z)\,e_3$
$f(\lambda\,u) = (\lambda\,x)\,f(e_1) + (\lambda\,y)\,f(e_2) + (\lambda\,z)\,f(e_3) = \lambda\,(x\,f(e_1) + y\,f(e_2) + z\,f(e_3)) = \lambda\,f(u)$.

Les relations $f(u + u') = f(u) + f(u')$ et $f(\lambda\,u) = \lambda\,f(u)$, valables quels que soient u et u' dans $\mathbb{R}^3$ et quel que soit λ dans $\mathbb{R}$, montrent que :

$$\boxed{f \text{ est une application linéaire de } \mathbb{R}^3 \text{ dans } \mathbb{R}^3.}$$

2°/ Matrice de *f* dans la base canonique.

La matrice de f dans la base canonique $\{e\} = \{e_1, e_2, e_3\}$ a, pour colonnes les composantes sur la base canonique des images $f(e_1)$, $f(e_2)$, $f(e_1)$, des vecteurs de la base canonique par f :

$$\boxed{M = [\,f\,, \{e\}, \{e\}] = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 3 & -7 & 15 \\ 2 & -6 & 12 \end{pmatrix}}$$

3°/ Noyau de *g*.

La matrice de $g = f - 2\,id_{\mathbb{R}^3}$ est $[\,g\,, \{e\}, \{e\}] = M - 2\,I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 3 & -7 & 15 \\ 2 & -6 & 12 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -5 \\ 3 & -9 & 15 \\ 2 & -6 & 10 \end{pmatrix}$.

La première colonne donne $g(e_1) = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, la deuxième $g(e_2) = \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \\ -6 \end{pmatrix}$, la troisième $g(e_3) = \begin{pmatrix} -5 \\ 15 \\ 10 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & -5 \\ 3 & -9 & 15 \\ 2 & -6 & 10 \end{pmatrix} = [\,g\,, \{e\}, \{e\}] \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On voit tout de suite que les deux dernières colonnes de la matrice de g sont proportionnelles à la première, de sorte que si l'on ajoute, à la deuxième colonne, trois fois la première, et si l'on retranche,

de la troisième colonne cinq fois la première, on obtient, la matrice $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Par linéarité, ces opérations doivent être faites aussi sur la matrice unité du deuxième membre de sorte que l'on obtient la relation :

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = [\, g\, , \{e\}, \{e\}] \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cette relation montre que les vecteurs $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, qui sont linéairement indépendants puisque leurs composantes ne sont pas proportionnelles, forment une **base du noyau** de g et le vecteur $g\,(e_1) = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ forme une **base de l'image** de g.

Le noyau de $g = f - 2\, id_{\mathbb{R}^3}$ a, pour base, les deux vecteurs (3, 1, 0) et (– 5, 0, 1). L'image de g a pour base le vecteur (–1, 3, 2) = $g\,(e_1)$.

4°/ $(M - 2\, I_3)^2$.

La dimension de l'image de g est 1 : g est de rang 1, le noyau de g a pour dimension 2.
Le déterminant des vecteurs $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est –1 + 10 – 9 = 0, donc les trois vecteurs ne sont pas linéairement indépendants, d'où $Im\,(g) \subseteq Ker\,(g)$ et $g^2 = 0$, ce qu'on peut vérifier sur les matrices :

$$[\, g\, , \{e\}, \{e\}] = (M - 2\, I_3) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 3 & -7 & 15 \\ 2 & -6 & 12 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -5 \\ 3 & -9 & 15 \\ 2 & -6 & 10 \end{pmatrix}$$

$$[\, g \circ g\, , \{e\}, \{e\}] = (M - 2\, I_3)^2 = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -5 \\ 3 & -9 & 15 \\ 2 & -6 & 10 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 3 & -5 \\ 3 & -9 & 15 \\ 2 & -6 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(M - 2\, I_3)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Cette relation montre que la matrice de $g \circ g$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est nulle.
Elle est donc nulle aussi dans toute base de $\mathbb{R}^3$, de sorte que $g \circ g$ est l'endomorphisme nul.
La relation $g \circ g = 0$ montre que, pour tout vecteur $u \in \mathbb{R}^3$, on a $g\,(g\,(u)) = 0$.

Remarquons que les vecteurs $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, qui forment aussi une base du noyau de g, sont orthogonaux pour le produit scalaire euclidien de $\mathbb{R}^3$.

5°/ Vecteur *u*.

Les relations $g\,(g\,(u)) = 0$ et $g\,(u) \neq 0$ montrent que $g\,(u)$ est un vecteur non nul appartenant au noyau de g.
Comme $g\,(u)$ est un vecteur non nul de l'image de g, il est proportionnel au vecteur $g\,(e_1) = (-1, 3, 2)$.
Or, pour tout vecteur $u \in \mathbb{R}^3$, on a : $g\,(g\,(u)) = 0$.
Donc la relation "$g\,(g\,(u)) = 0$ et $g\,(u) \neq 0$" se réduit à $g\,(u) \neq 0$, et elle équivaut à :

$$(\exists\, k \in \mathbb{R})(k \neq 0 \text{ et } u - k\,e_1 \in ker\,(g))$$

Comme on cherche seulement un vecteur u particulier remplissant cette condition, on peut prendre $k = 1$ et $u = e_1$.

$$\boxed{u = (1, 0, 0)}$$

Pour ce vecteur, on a $g\,(u) = g\,(e_1) = (-1, 3, 2)$.

6°/ (*g* (*u*), *u*) est un système libre.

$u = e_1$ et $g\,(u) = g\,(e_1) = (-1, 3, 2)$.
Les vecteurs (1, 0, 0) et (–1, 3, 2) ne sont pas proportionnels, ils forment une famille libre.

$$\boxed{(\,g\,(u), u\,) \text{ est un système libre.}}$$

7°/ Vecteur *v*.

Pour compléter le système libre $(g\,(u), u)$ en une base de $\mathbb{R}^3$, il faut choisir un vecteur non nul v qui ne soit pas combinaison linéaire de u et $g\,(u)$.
u n'est pas dans le noyau de g, $g\,(u)$ est dans le noyau de g puisque $g\,(g\,(u)) = 0$.
Pour compléter le système libre $(g\,(u), u)$ en une base de $\mathbb{R}^3$, avec un vecteur v appartenant au noyau de g, il suffit de choisir, dans le noyau de g, n'importe quel vecteur non nul et non proportionnel à $g\,(u)$.
On peut choisir, par exemple, le vecteur $v = (3, 1, 0)$ du noyau de g.
La famille $\{\,g\,(u), u, v\} = \left\{\begin{pmatrix}-1\\3\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$ a pour déterminant 2 : elle est libre.
Comme elle est formée de trois vecteurs, c'est une base.
Dans cette famille, $g\,(u)$ et v sont orthogonaux (pour le produit scalaire euclidien) et forment donc une base orthogonale du noyau de g.

$$\boxed{\text{La famille } \{\,g\,(u), u, v\} = \left\{\begin{pmatrix}-1\\3\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}\right\} \text{ est une } \textbf{base} \text{ de } \mathbb{R}^3.}$$

Remarque.

Le vecteur $u = e_1$ qui complète la base $\{g\,(u), v\}$ du noyau de g en une base de $\mathbb{R}^3$, n'est orthogonal

ni à *v*, ni à *g* (*u*).
On pourrait envisager de prendre pour *u* un vecteur orthogonal aux vecteurs (3, 1, 0) et (–1, 3, 2), par exemple le vecteur *u* = (1, –3, 5), auquel cas *g* (*u*) = 35 (–1, 3, 2) et :

La famille $\{ g(u), u, v\} = \left\{\begin{pmatrix}-35\\105\\70\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-3\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$ est une **base orthogonale** de $\mathbb{R}^3$.

8°/ Matrice de *g*.

Notons {ε} la base (*g* (*u*), *u* , *v*) de $\mathbb{R}^3$ que nous venons de définir.
La matrice [*g*, {ε}, {ε}] de *g* dans la base {ε} a,
— pour première colonne, le vecteur *g* (*g* (*u*)) = 0,
— pour deuxième colonne, le vecteur *g* (*u*), de composantes (1, 0, 0) dans la base {ε},
— pour troisième colonne, le vecteur *g* (*v*) = 0.

$$[g, \{\varepsilon\}, \{\varepsilon\}] = \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

Ce résultat ne dépend ni du choix de *u*, ni du choix de *v*, pour vu que :
— *u* n'appartienne pas au noyau de *g*,
— *v* appartienne au noyau de *g* sans appartenir à l'image de *g*.

9°/ Matrice de *f*.

$$f = g + 2\, id_{\mathbb{R}^3}.$$

Dans toute base de $\mathbb{R}^3$, l'application identique a, pour matrice, la matrice unité $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

La matrice de *f* dans la base {ε} = (*g* (*u*), *u* , *v*) est donc :

$$[f, \{\varepsilon\}, \{\varepsilon\}] = [g, \{\varepsilon\}, \{\varepsilon\}] + 2\, [id_{\mathbb{R}^3}, \{\varepsilon\}, \{\varepsilon\}] = \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2&1&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$$

$$[f, \{\varepsilon\}, \{\varepsilon\}] = \begin{pmatrix}2&1&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$$

C'est une matrice triangulaire. Elle a une valeur propre, 2, dont l'ordre de multiplicité est 3.

10°/ Injectivité de $f - \lambda\, id_{\mathbb{R}^3}$.

Dans la base {ε}, la matrice de $f - \lambda\, id_{\mathbb{R}^3} = g + (2 - \lambda)\, id_{\mathbb{R}^3}$ s'écrit $\begin{pmatrix}2-\lambda&1&0\\0&2-\lambda&0\\0&0&2-\lambda\end{pmatrix}$.

L'application est injective si, et seulement si, son déterminant $(2 - \lambda)^3$ est différent de 0, donc si, et seulement si, λ est différent de 2.

Pour le voir, on peut aussi considérer deux vecteurs $w = \alpha\, g\,(u) + \beta\, u + \gamma\, v$ et $w' = \alpha'\, g\,(u) + \beta'\, u + \gamma'\, v$ vérifiant :

$$(f - \lambda\, id_{R^3})\,(w) = (f - \lambda\, id_{R^3})\,(w')$$
$$(g + (2 - \lambda)\, id_{R^3})\,(w) = (g + (2 - \lambda)\, id_{R^3})\,(w')$$
$$g\,(w) + (2 - \lambda)\, w = g\,(w') + (2 - \lambda)\, w'$$
$$\beta\, g\,(u) + (2 - \lambda)\, w = \beta'\, g\,(u) + (2 - \lambda)\, w'$$

En identifiant les composantes des deux membres dans la base $\{\varepsilon\} = (g\,(u), u, v)$, il vient :

$$\beta + (2 - \lambda)\,\alpha = \beta' + (2 - \lambda)\,\alpha'$$
$$(2 - \lambda)\,\beta = (2 - \lambda)\,\beta'$$
$$(2 - \lambda)\,\gamma = (2 - \lambda)\,\gamma'$$

Si λ est différent de 2, les deux dernières égalités donnent $\beta = \beta'$ et $\gamma = \gamma'$, et la première donne alors $\alpha = \alpha'$, donc $w = w'$ et l'application $f - \lambda\, id_{R^3}$ est injective.

Si λ est égal à 2, le système d'équations se réduit à $\beta = \beta'$ et il suffit de prendre $\alpha \neq \alpha'$ ou $\gamma \neq \gamma'$ pour voir que l'application $f - \lambda\, id_{R^3}$ n'est pas injective.

D'ailleurs si $\lambda = 2$, $f - \lambda\, id_{R^3}$ est g et l'on sait déjà que g n'est pas injective, puisque son noyau est de dimension 2 (g est de rang 1, voir question 3).

L'application $f - \lambda\, id_{R^3}$ est injective si, et seulement si, λ est différent de 2.

11°/ Puissance n^{e} de f.

La relation $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$ est vraie pour $n = 1$, puisqu'elle se réduit alors à $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

La relation $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$ s'écrit, en termes d'endomorphismes, sous la forme :

$$f^n = n\, 2^{n-1}\, g + 2^n\, id_{R^3}.$$

Supposons que cette relation soit vraie pour n, et appliquons une nouvelle fois f : on obtient

$$f^{n+1} = n\, 2^{n-1}\, g \circ f + 2^n\, id_{R^3} \circ f$$

Or on a $g \circ f = g \circ (g + 2\, id_{R^3}) = g \circ g + 2\, g = 2\, g$, donc :

$$f^{n+1} = n\,2^{n-1}\,2\,g + 2^n f = n\,2^n g + 2^n (g + 2\,id_{\mathbb{R}^3}) = (n+1)\,2^n g + 2^{n+1}\,id_{\mathbb{R}^3}$$
$$f^{n+1} = (n+1)\,2^n g + 2^{n+1}\,id_{\mathbb{R}^3}$$

La formule est donc vraie pour $n + 1$, dès qu'elle est vraie pour n.
Le principe de récurrence montre qu'elle est vraie pour tout $n \geqslant 1$.

Pour $n = 0$, la formule se réduit à $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On peut considérer qu'elle est vraie, par définition d'une puissance 0.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a :
$$f^n = n\,2^{n-1}\,g + 2^n\,id_{\mathbb{R}^3}.$$
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

Chapitre 3. Applications linéaires.

Enoncés.

Exercice 2. Inversion de deux matrices 3 × 3.

Déterminer si les matrices suivantes sont inversibles et, si oui, donner leur inverse : $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 5 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}$	

Solution.

1°/ Matrice *A*.

La première colonne, $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$, de la matrice *A* est l'image du vecteur de base $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ par l'endomorphisme *f* de $\mathbb{R}^3$ dont *A* est la matrice dans la base canonique. C'est le produit de la matrice *A* par la matrice $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

De même, la deuxième colonne de *A* est le produit de *A* par la matrice $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, et la troisième colonne de *A* est $A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Par linéarité le produit de *A* par un vecteur $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ donne un vecteur colonne égal à *a* fois la première colonne de *A*, plus *b* fois la seconde, plus *c* fois la troisième.

Quand on écrit $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, on obtiendra, dans la matrice de gauche, des 0 sur la première ligne en additionnant, à la deuxième et à la troisième colonnes, deux fois la première, opération qu'il faut faire aussi, par linéarité, sur la matrice de droite, pour que reste valable l'égalité :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & -6 \\ -2 & -6 & -3 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Soustrayons maintenant deux fois la deuxième colonne de la troisième colonne, dans les deux matrices :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & 0 \\ -2 & -6 & 9 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice de gauche est triangulaire, elle n'a que des 0 au-dessus de la diagonale et elle n'a pas de 0 sur la diagonale.
Les trois vecteurs colonnes de la matrice de gauche forment donc une famille libre de trois vecteurs, donc une base de $\mathbb{R}^3$.
Les trois vecteurs colonnes de la matrice à droite de *A* forment aussi une famille libre, donc une base de $\mathbb{R}^3$.
Ainsi, l'image par *A* d'une base de $\mathbb{R}^3$ est une base de $\mathbb{R}^3$: *A* est donc la **matrice d'un automorphisme**, *A* est inversible.

La matrice *A* est inversible.

Pour trouver l'inverse de la matrice *A*, il faut poursuivre les opérations entreprises jusqu'à obtenir, dans le membre de gauche, la matrice unité.

Divisons par – 3 la deuxième colonne, et par 9 la troisième colonne :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{9} \\ 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{9} \\ 0 & 0 & \frac{1}{9} \end{pmatrix}$$

Ajoutons, à la première colonne, 2 fois la deuxième colonne :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{9} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{9} \\ 0 & 0 & \frac{1}{9} \end{pmatrix}$$

Enfin, soustrayons, de la première et de la deuxième colonnes, deux fois la troisième colonne :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} & -\frac{2}{9} \\ -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} \\ -\frac{2}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix} = \frac{1}{9} A \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} = A \times \frac{1}{9} A.$$

La matrice *A* est inversible, son inverse est $\frac{1}{9} A$.

Remarque.

Le déterminant de la matrice *A* est – 27 : il n'est pas nul, donc la matrice *A* est inversible.
On pourrait calculer l'inverse par la méthode des déterminants, en remplaçant dans la transposée de *A*, chaque élément par le mineur correspondant affecté du signe correspondant à sa position.

2°/ Matrice *B*.

Opérons, pour la matrice *B*, comme nous l'avons fait pour la matrice *A* :

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 5 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ajoutons à la deuxième colonne deux fois la première :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 5 \\ 2 & 8 & 8 \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Soustrayons la deuxième colonne de la troisième :

$$\boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 2 & 8 & 0 \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

Cette égalité montre :

— que le vecteur $\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ forme une **base du noyau** de l'endomorphisme *g* de matrice *B* dans la base canonique,

— que les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}$ qui forment, évidemment, une famille libre, forment une **base de l'image** de *g*.

Ainsi ***g* est de rang 2** : ce n'est pas un automorphisme et sa matrice *B* n'est pas inversible.

La matrice *B* n'est pas inversible, elle est de rang 2.

La famille de vecteurs $\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}$, a pour déterminant $-15 \neq 0$: c'est une base et $\mathbb{R}^3 = Ker\,(g) \oplus Im\,(g)$.

Chapitre 3. Applications linéaires.

Enoncés.

Exercice 3. Endomorphisme de $\mathbb{R}^4$.

Soit f l'application définie par :

$$f(x, y, z, t) = (x + y + t, x - z + 2t, y + z - t, y + z - t).$$

1°/ Montrer que l'application f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^4$.
2°/ Ecrire la matrice A de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$.
3°/ Déterminer une base (v_1, v_2) de $Ker\ f$ et en déduire sa dimension.
4°/ En déduire le rang de f.
5°/ Montrer que $\mathbb{R}^4 = Im\ f \oplus Ker\ f$.
6°/ Montrer qu'il existe $(v_3, v_4) \in Im\ f \times Im\ f$ tel que :
$f(v_3) = -v_3$ et $f(v_4) = 2\,v_4$.
7°/ Montrer que $\{v\} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ forme une base de $\mathbb{R}^4$.

8°/ On note $\underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ fois}} = f^n$ la composée n^{e} de l'application f.
Calculer les matrices de f^2 et f^3 dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$.
En déduire que $f^3 = f^2 + 2f$.

Solution.

1°/ Endomorphisme.

Tout d'abord, f est bien une application de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^4$: à tout élément de $\mathbb{R}^4$, elle fait correspondre un élément et un seul de $\mathbb{R}^4$.
Cette application est linéaire parce que, si l'on considère les vecteurs de la base canonique :

$e_1 = (1, 0, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1, 0)$, $e_4 = (0, 0, 0, 1)$,

on a :

$f(e_1) = (1, 1, 0, 0)$, $f(e_2) = (1, 0, 1, 1)$, $f(e_3) = (0, -1, 1, 1)$, $f(e_4) = (1, 2, -1, -1)$

et $f(x, y, z, t)$ s'écrit alors :

$$\begin{aligned} f(x, y, z, t) &= (x + y + t, x - z + 2t, y + z - t, y + z - t) \\ &= x(1, 1, 0, 0) + y(1, 0, 1, 1) + z(0, -1, 1, 1) + t(1, 2, -1, -1) \\ &= x f(e_1) + y f(e_2) + z f(e_3) + t f(e_4) \end{aligned}$$

De cette formule, résulte la linéarité de f, car, pour tout $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$, tout $(x', y', z', t') \in \mathbb{R}^4$, et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} f((x, y, z, t) + (x', y', z', t')) &= f(x + x', y + y', z + z', t + t') \\ &= (x + x') f(e_1) + (y + y') f(e_2) + (z + z') f(e_3) + (t + t') f(e_4) \\ &= (x f(e_1) + y f(e_2) + z f(e_3) + t f(e_4)) + (x' f(e_1) + y' f(e_2) + z' f(e_3) + t' f(e_4)) \\ &= f(x, y, z, t) + f(x', y', z', t') \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(\lambda (x, y, z, t)) &= f(\lambda x, \lambda y, \lambda z, \lambda t) \\ &= \lambda x f(e_1) + \lambda y f(e_2) + \lambda z f(e_3) + \lambda t f(e_4) \\ &= \lambda (x f(e_1) + y f(e_2) + z f(e_3) + t f(e_4)) \\ &= \lambda f(x, y, z, t) \end{aligned}$$

2°/ Matrice *A* de *f*.

La matrice de f dans la base canonique $\{e\} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ a, pour colonnes, les composantes, dans la base canonique, des images par f des vecteurs de la base canonique :

$$A = [f, \{e\}, \{e\}] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

3°/ Noyau et image de *f*.

Comme dans l'Exercice 2, on peut transformer la matrice unité de $\mathbb{R}^4$ de façon que son produit par A possède des colonnes de 0.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Soustrayons, dans les deux matrices, la première colonne de la deuxième et de la quatrième :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ajoutons la quatrième colonne à la deuxième et à la troisième :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Cette égalité montre :

— que le noyau de *f* a pour base les vecteurs $\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\1\end{pmatrix}$, il est de dimension 2.

— que l'image de *f* a pour base les vecteurs $\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} = f(e_1)$ et $\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\-1\end{pmatrix} = f(-e_1 + e_4)$, elle est de dimension 2.

On pourrait prendre aussi, pour base de l'image de *f*, les vecteurs $f(e_1) = \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$ et $f(e_1) + f(-e_1 + e_4) = f(e_4) = \begin{pmatrix}1\\2\\-1\\-1\end{pmatrix}$

Le noyau de *f* a pour base les vecteurs $v_1 = (-2, 1, 0, 1)$ et $v_2 = (-1, 0, 1, 1)$.
L'image de *f* a pour base les vecteurs $f(e_1) = (1, 1, 0, 0) = e_1 + e_2$ et $f(e_4) = (1, 2, -1, -1) = e_1 + 2e_2 - e_3 - e_4$

4°/ Rang de *f*.

Comme l'image de *f* est de dimension 2, *f* est, par définition, de rang 2, puisque le rang est la dimension de l'image.

f est de rang 2.

5°/ Somme directe.

Considérons les vecteurs $v_1 = (-2, 1, 0, 1)$, $v_2 = (-1, 0, 1, 1)$, $w_1 = (1, 1, 0, 0)$ et $w_2 = (0, 1, -1, -1)$.
La matrice *B* de leurs composantes dans la base canonique est la matrice d'un endomorphisme *g* de $\mathbb{R}^4$.
La famille $\{v_1, v_2, w_1, w_2\}$ est libre si, et seulement si, l'endomorphisme *g* est un automorphisme, car cette famille est l'image par *g* de la base canonique $\{e\} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ et l'on sait que *g* est un automorphisme si, et seulement si, l'image d'une base de $\mathbb{R}^4$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

Ecrivons donc :

$$\begin{pmatrix}-2 & -1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ 1 & 1 & 0 & -1\end{pmatrix} = B\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Commençons par échanger la première et la troisième colonnes :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Additionnons la première colonne à la deuxième et deux fois la première colonne à la troisième colonne :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Soustrayons trois fois la deuxième colonne de la troisième, et une fois la deuxième colonne de la quatrième :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ajoutons la quatrième colonne à la troisième :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Enfin, ajoutons deux fois la troisième colonne à la quatrième :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & -9 \\ 1 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Comme les vecteurs colonnes de la matrice de gauche forment évidemment une famille libre, l'image de B est de dimension 4, donc B est la matrice d'un automorphisme et la matrice B est inversible : ses vecteurs colonnes forment donc une famille libre, donc une base de $\mathbb{R}^4$.

Ainsi, nous avons trouvé une base de $\mathbb{R}^4$ formée de la réunion d'une base de *Ker* (*f*) et d'une base de *Im* (*f*) et nous avons, s'agissant d'une famille libre :

$$\mathbb{R}^4 = \mathbb{R}\, v_1 \oplus \mathbb{R}\, v_2 \oplus \mathbb{R}\, w_1 \oplus \mathbb{R}\, w_2 = (\mathbb{R}\, w_1 \oplus \mathbb{R}\, w_2) \oplus (\mathbb{R}\, v_1 \oplus \mathbb{R}\, v_2) = Im\,(f) \oplus Ker\,(f)$$
$$\mathbb{R}^4 = Im\,(f) \oplus Ker\,(f)$$

Remarque.

En utilisant les déterminants, nous aurions pu calculer le déterminant de la famille de vecteurs $\{v_1, v_2, w_1, w_2\}$, qui est le déterminant de la matrice $B = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Le calcul du déterminant peut se

faire en combinant linéairement les colonnes comme nous venons de le faire : le déterminant de *B* est égal au déterminant de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \end{pmatrix}$, soit – 4.

Comme ce déterminant n'est pas nul, nous en aurions conclu que les vecteurs $\{v_1, v_2, w_1, w_2\}$ forment une base, d'où la même conclusion $\mathbb{R}^4 = Im\,(f) \oplus Ker\,(f)$.

6°/ Vecteurs propres.

Chercher des vecteurs v_3 et v_4 appartenant à *Im f* et vérifiant $f(v_3) = -v_3$ et $f(v_4) = 2\,v_4$, revient à trouver, dans *Im* (*f*), des vecteurs v_3 et v_4 appartenant l'un au noyau de $f + Id_{\mathbb{R}^4}$, l'autre au noyau de $f - 2\,Id_{\mathbb{R}^4}$.

Ecartons tout d'abord les solutions $v_3 = 0$ et $v_4 = 0$, triviales et sans intérêt.

a) Cherchons d'abord un vecteur non nul, s'il en existe, appartenant au noyau de $f + Id_{\mathbb{R}^4}$:

La matrice de $f + Id_{\mathbb{R}^4}$ dans la base canonique est $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Réduisons la matrice *C* par la méthode devenue maintenant usuelle :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Echangeons la première et la deuxième colonnes :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Retranchons deux fois la première colonne de la deuxième, et retranchons la première colonne de la quatrième :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Multiplions la deuxième colonne par –1 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ajoutons la deuxième colonne à la troisième, et retranchons la deuxième colonne de la quatrième :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & -4 \\ 1 & 2 & 3 & -3 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Enfin, ajoutons la troisième colonne à la quatrième :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cette égalité montre que le noyau de l'endomorphisme $f + Id_{\mathbb{R}^4}$, de matrice C, est de dimension 1 et qu'il est engendré par le vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = - w_2$.

On pourrait aussi bien prendre pour base le vecteur $v_3 = w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et l'on sait que ce vecteur appartient à l'image de f (voir la question 3), puisqu'il est égal à $f(- e_1 + e_4)$.

b) Cherchons maintenant, s'il en existe, un vecteur non nul appartenant au noyau de $f - 2\, Id_{\mathbb{R}^4}$.

La matrice de $f - 2\, Id_{\mathbb{R}^4}$ dans la base canonique est $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

Histoire de changer un peu de méthode, on peut déterminer directement le vecteur $v_4 = \alpha\, w_1 + \beta\, w_2$, en cherchant α et β, non tous deux simultanément nuls, tels que
$D(\alpha\, w_1 + \beta\, w_2) = 0$, soit $\alpha\, D\, w_1 + \beta\, D\, w_2 = 0$.

$$\alpha \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\alpha \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(\alpha + 3\, \beta) \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Il faut prendre $\alpha = -3\beta$, par exemple $\beta = -1$, $\alpha = 3$:

$$v_4 = \alpha w_1 + \beta w_2 = 3 w_1 - w_2 = 3\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\1\\-1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\2\\1\\1\end{pmatrix} = 3 f(e_1) - f(-e_1 + e_4) = f(4 e_1 - e_4)$$

On peut prendre, pour vecteurs propres de f :

$$v_3 = \begin{pmatrix}0\\1\\-1\\-1\end{pmatrix} = f(-e_1 + e_4).$$

$$f(v_3) = -v_3$$

$$v_4 = \begin{pmatrix}3\\2\\1\\1\end{pmatrix} = f(4 e_1 - e_4).$$

$$f(v_4) = 2 v_4$$

7°/ Base propre.

La famille $\{v_3, v_4\}$ est évidemment libre car les vecteurs $v_3 = \begin{pmatrix}0\\1\\-1\\-1\end{pmatrix} = f(-e_1 + e_4)$ et $v_4 = \begin{pmatrix}3\\2\\1\\1\end{pmatrix} = f(4 e_1 - e_4)$ ne sont pas proportionnels.
Comme ils sont tous deux dans l'image de *f*, ils forment une base de *Im* (*f*).

Comme, par ailleurs, la famille $\{v_1, v_2\}$ est une base de *Ker* (*f*) et que l'on a $\mathbb{R}^4 = Im(f) \oplus Ker(f)$, la famille $\{v\} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ forme une base de $\mathbb{R}^4$.

La famille $\{v\} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ forme une base de $\mathbb{R}^4$.

Compte tenu des relations :

$f(v_1) = 0$,
$f(v_2) = 0$,
$f(v_3) = -v_3$,
$f(v_4) = 2 v_4$.

nous dirons, en langage algébrique, que les vecteurs v_1 et v_2 sont vecteurs propres pour la valeur propre 0, que le vecteur v_3 est vecteur propre pour la valeur propre –1 et que le vecteur v_4 est vecteur propre pour la valeur propre 2.
Comme les vecteurs propres forment une base de $\mathbb{R}^4$, la matrice *A* est diagonalisable.

Dans la base $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, l'endomorphisme f a, pour matrice, la matrice diagonale $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

8°/ Théorème de Cailey-Hamilton.

$$\mathbb{R}^4 = \mathbb{R}\, v_1 \oplus \mathbb{R}\, v_2 \oplus \mathbb{R}\, v_3 \oplus \mathbb{R}\, v_4$$

Tout élément v de $\mathbb{R}^4$ s'écrit de façon unique sous la forme $v = x_1\, v_1 + x_2\, v_2 + x_3\, v_3 + x_4\, v_4$, avec des nombres réels x_1, x_2, x_3, x_4.

On a alors

$f(v) = x_1\, f(v_1) + x_2\, f(v_2) + x_3\, f(v_3) + x_4\, f(v_4)$
$f(v) = -x_3\, v_3 + 2\, x_4\, v_4$
$f(f(v)) = -x_3\, f(v_3) + 2\, x_4\, f(v_4)$
$f(f(v)) = x_3\, v_3 + 4\, x_4\, v_4$
$f(f(f(v))) = x_3\, f(v_3) + 4\, x_4\, f(v_4)$
$f(f(f(v))) = -x_3\, v_3) + 8\, x_4\, v_4$
$f(f(f(v))) - f(f(v)) = -x_3\, v_3) + 8\, x_4\, v_4 - x_3\, v_3 - 4\, x_4\, v_4$
$f(f(f(v))) - f(f(v)) = -2\, x_3\, v_3) + 4\, x_4\, v_4$
$f(f(f(v))) - f(f(v)) = 2\, f(v)$
$f^3 = f^2 + 2\, f.$

$$\boxed{f^3 - f^2 - 2\, f = 0}$$

Cette relation, qu'on peut écrire aussi, en modifiant éventuellement l'ordre des facteurs : $f \circ (f + Id_{\mathbb{R}^4}) \circ (f - 2\, Id_{\mathbb{R}^4}) = 0$, exprime une conséquence du **théorème de Cailey-Hamilton**, l'endomorphisme f est solution de son polynôme minimal.

Cette relation peut se retrouver en calculant les matrices des puissances successives de f :

$$[f^2, \{e\}, \{e\}] = [f, \{e\}, \{e\}]^2 = A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$[f^2 + 2\, f, \{e\}, \{e\}] = A^2 + 2\, A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$[f^3, \{e\}, \{e\}] = [f, \{e\}, \{e\}]^3 = A^3 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On voit que A^3 est égal à $A^2 + 2\, A$, ce qui veut dire que f^3 est égal à $f^2 + 2\, f$.

Chapitre 3. Applications linéaires.

Enoncés.

Exercice 4. Dimensions du noyau et de l'image.

On définit l'application f de $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^5$, en posant, pour tout vecteur $x := (\alpha, \beta)$ de $\mathbb{R}^2$:

$$f(x) = (\alpha + 2\beta, -2\alpha + 3\beta, \alpha + \beta, 3\alpha + 5\beta, -\alpha + 2\beta)$$

1°/ Montrer que f est une application linéaire.
2°/ Déterminer *Ker* (f) ainsi que sa dimension.
2°/ Déterminer *Im* (f) ainsi que sa dimension.

Solution.

1°/ Application linéaire.

Une application $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ est linéaire si, et seulement si, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, tout $y \in \mathbb{R}^n$, et tout $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \text{ et } f(\lambda x) = \lambda f(x).$$

Pour $x = (a, b) \in \mathbb{R}^2$, $y = (c, d) \in \mathbb{R}^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$, nous avons, par définition : $x + y = (a + c, b + d)$ et $\lambda x = (\lambda a, \lambda b)$.

$f(x + y) = ((a + c) + 2(b + d), -2(a + c) + 3(b + d), (a + c) + (b + d), 3(a + c) + 5(b + d), -(a + c) + 2(b + d))$
$= ((a + 2b) + (c + 2d), (-2a + 3b) + (-2c + 3d), (a + b) + (c + d), (3a + 5b) + (3c + 5d), (-a + 2b) + (-c + 2d))$
$= (a + 2b, -2a + 3b, a + b, 3a + 5b, -a + 2b) + (c + 2d, -2c + 3d, c + d, 3c + 5d, -c + 2d)$
$= f(x) + f(y)$

$f(\lambda x) = (\lambda a + 2\lambda b, -2\lambda a + 3\lambda b, \lambda a + \lambda b, 3\lambda a + 5\lambda b, -\lambda a + 2\lambda b)$
$= (\lambda(a + 2b), \lambda(-2a + 3b), \lambda(a + b), \lambda(3a + 5b), \lambda(-a + 2b))$
$= \lambda(a + 2b, -2a + 3b, a + b, 3a + 5b, -a + 2b)$
$= \lambda f(x)$

Donc f est une application linéaire.

2°/ Noyau et image.

Soit $\{e_1, e_2\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$: $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$.
$f(e_1) = (1, -2, 1, 3, -1)$, $f(e_2) = (2, 3, 1, 5, 2)$.

Soit $\{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^5$.
La matrice de f, de la base canonique de $\mathbb{R}^2$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^5$ a, pour colonnes, les composantes des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^2$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^5$:

$$[f] = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \\ 1 & 1 \\ 3 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Les deux colonnes, $f(e_1)$ et $f(e_2)$, ne sont pas proportionnelles, par exemple : $\frac{1}{2} \neq -\frac{2}{3}$.
Donc les vecteurs $f(e_1)$ et $f(e_2)$ de $\mathbb{R}^5$ sont linéairement indépendants.
Si l'on a $f(x) = 0$, avec $x = a\,e_1 + b\,e_2$, on obtient, par linéarité :

$$a\,f(e_1) + b\,f(e_2) = 0$$

Comme les vecteurs $f(e_1)$ et $f(e_2)$ de $\mathbb{R}^5$ sont linéairement indépendants, il en résulte $a = b = 0$, donc $x = (0, 0)$: le noyau de f est réduit à (0, 0), ce qui veut dire que f est injective.

Il en résulte que :
— le noyau de f est de dimension 0 : sa base est vide.
— l'image de f est de dimension 2 et on peut prendre pour base de $Im(f)$ la famille $\{f(e_1), f(e_2)\}$

L'application linéaire f est injective :
• $Ker(f) = 0$, $dim(Ker(f)) = 0$.
• $Im(f) = \mathbb{R}\,f(e_1) \oplus \mathbb{R}\,f(e_2) = \mathbb{R}(1, -2, 1, 3, -1) \oplus \mathbb{R}(2, 3, 1, 5, 2)$, $dim(Im(f)) = 2$.

Chapitre 3. Applications linéaires.

Enoncés.

Exercice 5. Noyau d'une forme linéaire.

Soit f l'application de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 3x_1 + x_2$. Quelle est la dimension du noyau de f ?	

Solution.

1°/ Application linéaire.

L'application f est évidemment linéaire car, pour $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, $y = (y_1, y_2, y_3, y_4)$, et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$f(x + y) = 3(x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) = (3x_1 + x_2) + (3y_1 + y_2) = f(x) + f(y)$$
$$f(\lambda x) = 3(\lambda x_1) + (\lambda x_2) = \lambda(3x_1) + x_2) = \lambda f(x)$$

Une application linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}$ s'appelle une **forme linéaire** sur $\mathbb{R}^4$.

2°/ Noyau.

Le noyau de f est l'ensemble des $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ qui vérifient $f(x) = 3x_1 + x_2 = 0$.
L'image de f n'est pas réduite à 0 : par exemple $f(1, -1, 0, 0) = 1$, donc $Im(f)$ contient $\mathbb{R}1 = \mathbb{R}$ et $Im(f)$ est de dimension 1. f est surjective.

La relation $dim(Ker(f)) + dim(Im(f)) = dim(\mathbb{R}^4)$ valable pour tout application linéaire définie dans $\mathbb{R}^4$, montre alors que :

$$dim(Ker(f)) = 4 - 1 = 3$$

Le noyau d'une forme linéaire non nulle définie sur $\mathbb{R}^4$ est de dimension 3.

Plus généralement, le même type de raisonnement montre que le noyau d'une forme linéaire non nulle définie sur $\mathbb{R}^n$ est de dimension $n - 1$.

Chapitre 3. Applications linéaires.

Enoncés.

Exercice 6. Surjectivité d'une application linéaire.

Soit f l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y, z) = (x - y + z, y + z)$. 1°/ Montrer que f est linéaire. 2°/ Déterminer le noyau de f. 3°/ f est-elle injective ? surjective ? un isomorphisme ?	

Solution.

1°/ Application linéaire.

$f(x + x', y + y', z + z') = ((x + x') - (y + y') + (z + z'), (y + y') + (z + z')) = ((x - y + z) + (x' - y' + z'), (y + z) + (y' + z'))$
$= (x - y + z, y + z) + (x' - y' + z', y' + z') = f(x, y, z) + f(x', y', z')$
$f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = (\lambda x - \lambda y + \lambda z, \lambda y + \lambda z) = \lambda (x - y + z, y + z) = \lambda f(x, y, z)$

Les relations $f(x + x', y + y', z + z') = f(x, y, z) + f(x', y', z')$ et $f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda f(x, y, z)$, montrent que f est une application linéaire.

2°/ Noyau.

La matrice de f de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ a, pour colonnes les images des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^3$:

$$[f] = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = [f] \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ajoutons la troisième colonne à la deuxième :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = [f] \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Multiplions la troisième colonne par 2 et soustrayons-en deux fois la première colonne et une fois la deuxième colonne :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = [f] \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Cette relation montre que :

a) Le noyau de *f* est de dimension 1 et a pour base le vecteur (– 2, – 1, 1) : *f* (– 2, – 1, 1) = (0, 0)
b) L'image de *f* est de dimension 2 et a pour base les vecteurs *f* (1, 0, 0) = (1, 0) et *f* (0, 1, 1) = (0, 2).

3°/ Injectivité, surjectivité, isomorphie.

Ker (*f*) = $\mathbb{R}$ (– 2, – 1, 1) ≠ (0, 0, 0), donc ***f* n'est pas injective**.
Im (*f*) est un sous-espace vectoriel de dimension 2 de $\mathbb{R}^2$: c'est donc $\mathbb{R}^2$ tout entier, ***f* est surjective**.
Un isomorphisme est une application linéaire bijective, donc injective et surjective. Comme *f* n'est pas injective, **ce n'est pas un isomorphisme**.

Cependant, si l'on considère le sous-espace vectoriel $\mathbb{R}$ (1, 0, 0) $\oplus$ $\mathbb{R}$ (0, 1, 1) de $\mathbb{R}^3$, la relation matricielle précédente montre que la restriction de *f* à ce sous-espace vectoriel est un isomorphisme de ce sous-espace vectoriel sur $\mathbb{R}^2$.

Chapitre 3. Applications linéaires.

Enoncés.

Exercice 7. Endomorphisme et automorphisme.

Soit f et g les applications de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définies par : $f(x, y) = (2x - 4y, x - 2y)$, $g(x, y) = (3x - 4y, x - y)$ 1°/ Montrer que f est un endomorphisme. 2°/ Déterminer *Ker* (f) et *Im* (f). 3°/ Montrer que g est un automorphisme.	

Solution.

1°/ Endomorphisme.

Un endomorphisme d'un espace vectoriel est une application linéairede l'espace vectoriel dans lui-même.

Comme f est, par définition, une application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$, pour montrer que c'est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$, il suffit de vérifier que f est une application linéaire, ce qui est évident :

$f(x + x', y + y') = (2(x + x') - 4(y + y'), (x + x') - 2(y + y')) = ((2x - 4y) + (2x' - 4y'), (x - 2y) + (x' - 2y'))$
$= (2x - 4y, x - 2y) + (2x' - 4y', x' - 2y') = f(x, y) + f(x', y')$
$f(\lambda x, \lambda y) = (2\lambda x - 4\lambda y, \lambda x - 2\lambda y) = (\lambda(2x - 4y), \lambda(x - 2y)) = \lambda(2x - 4y, x - 2y) = \lambda f(x, y)$.

2°/ Noyau et image de *f*.

La matrice de f dans la base canonique est :

$$[f] = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = [f] \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ajoutons deux fois la première colonne à la deuxième :

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = [f] \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cette relation montre :

a) que le noyau de f est de dimension 1 et a pour base le vecteur (2, 1) : $f(2, 1) = (0, 0)$.
b) que l'image de f est de dimension 1 et a pour base le vecteur (2, 1) = $f(1, 0)$.

Autrement dit, nous avons $Ker\ (f) = Im\ (f) = \mathbb{R}\ (2, 1)$

$$\boxed{Ker\ (f) = Im\ (f) = \mathbb{R}\ (2, 1)}$$

$Im\ (f \circ f) = f\ (Im\ (f)) = f\ (Ker\ (f)) = 0$, donc $f \circ f = 0$, f est un endomorphisme nilpotent de degré 2.

3°/ Automorphisme.

Un automorphisme est, par définition, un endomorphisme bijectif.

Il est clair, déjà, que, comme f, g est une application linéaire.
$g\ (1, 0) = (3, 1)$, $g\ (0, 1) = (– 4, – 1)$

Les vecteurs $g\ (1, 0)$ et $g\ (0, 1)$ ne sont pas proportionnels, ils forment donc, à la fois, une base de $\mathbb{R}^2$ et une base de l'image de g : l'image de g est donc $\mathbb{R}^2$ et g est surjective.
Il est équivalent de dire que g est injective puisque, pour les endomorphismes d'un espace vectoriel E de dimension finie, injectif = surjectif = bijectif, à cause de la relation $dim\ (Im\ (f)) + dim\ (Ker\ (f)) = dim\ (E)$.

$$\boxed{g \text{ est un automorphisme}}$$

Chapitre 3. Applications linéaires.

Enoncés.

Exercice 8. Sous-espace vectoriel et image d'endomorphisme.

On considère les vecteurs $u = (2, 1, -1)$, $v = (1, -1, 3)$, $w = (3, 3, -5)$ du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^3$. Soit $F = Vect(\{u, v, w\})$ le sous-espace vectoriel engendré par $\{u, v, w\}$.

1°/ Déterminer une base de F.
2°/ On définit l'application f de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ dans lui-même, en posant, pour tout vecteur $x = (\alpha, \beta, \gamma)$ de $\mathbb{R}^3$:
$f(x) = (3\alpha + \gamma, \alpha - \beta + \gamma, -3\alpha - 3\beta + \gamma)$
Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
3°/ Déterminer une base de $Ker(f)$ et une base de $Im(f)$.
4°/ A-t-on $\mathbb{R}^3 = Ker(f) \oplus Im(f)$?
5°/ Les vecteurs u, v, w, sont-ils des éléments de $Im(f)$?
6°/ Déterminer une base et la dimension de $F \cap Im(f)$.

Solution.

1°/ Base de F.

Soit $\{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
Soit g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par $g(e_1) = u$, $g(e_2) = v$, $g(e_3) = w$.
F est l'image de g et le rang de g est le rang de la famille $\{u, v, w\}$.
La matrice de g dans la base canonique a, pour colonnes, les vecteurs u, v, w :

$$[g] = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & -5 \end{pmatrix} = [g] \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Soustrayons deux fois la deuxième colonne de la première, et trois fois la deuxième colonne de la troisième :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 6 \\ -7 & 3 & -14 \end{pmatrix} = [g] \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Soustrayons deux fois la première colonne de la troisième :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ -7 & 3 & 0 \end{pmatrix} = [\,g\,] \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cette relation montre que :

a) Le noyau de g est de dimension 1 et engendré par le vecteur $(-2, 1, 1)$: $g(-2, 1, 1) = 0$, donc $-2u + v + w = 0$.
b) L'image de g est de dimension 2 : on peut prendre pour base de $Im(g) = F$, les vecteurs $u = g(e_1)$ et $v = g(e_2)$, qui ne sont pas proportionnels.

Les vecteurs u et v forment une base de F.

2°/ Endomorphisme *f*.

Les composantes de f sont des **formes linéaires** : f est donc produit d'applications linéaires, c'est une application linéaire.
Comme f est une application de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même, c'est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

3°/ Noyau et image de *f*.

La matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est :

$$[\,f\,] = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -3 & -3 & 1 \end{pmatrix} = [\,f\,] \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Soustrayons 3 fois la troisième colonne de la première :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ -6 & -3 & 1 \end{pmatrix} = [\,f\,] \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Soustrayons deux fois la deuxième colonne de la première :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} = [\,f\,] \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cette relation montre que :

a) Le noyau de f est de dimension 1 et engendré par le vecteur $(1, -2, -3)$: $f(1, -2, -3) = (0, 0, 0) = 0$.
b) L'image de f est de dimension 2 et engendrée par les vecteurs linéairement indépendants $f(e_2) = (0, -1, -3)$ et $f(e_3) = (1, 1, 1)$.

$Ker(f) = \mathbb{R}(1, -2, -3)$

$$\boxed{Im\,(f) = \mathbb{R}\,(0, -1, -3) \oplus \mathbb{R}\,(1, 1, 1)}$$

4°/ *Ker* (*f*) + *Im* (*f*).

Considérons les vecteurs $x = (1, -2, -3)$, $y = (0, -1, -3)$, $z = (1, 1, 1)$, et l'endomorphisme h défini par $h(e_1) = x$, $h(e_2) = y$, $h(e_3) = z$.
Le sous-espace vectoriel engendré par la famille $\{x, y, z\}$ est l'image de h : il est égal à *Ker* (*f*) + *Im* (*f*).
La matrice de h dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est :

$$[h] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ -3 & -3 & 1 \end{pmatrix} = [h] \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Soustrayons la troisième colonne de la première :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & 1 \\ -4 & -3 & 1 \end{pmatrix} = [h] \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Soustrayons trois fois la deuxième colonne de la première :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 5 & -3 & 1 \end{pmatrix} = [h] \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Et comme les vecteurs colonnes de la matrice de gauche sont linéairement indépendants, cette relation montre que h est de rang 3.
Donc $\mathbb{R}^3 = Im\,(h) = Ker\,(f) + Im\,(f)$.
Comme $dim\,(Ker\,(f)) = 1$ et $dim\,(Im\,(f)) = 2$, la somme est directe : $Ker\,(f) \cap Im\,(f)$ est de dimension 0.

$$\boxed{\mathbb{R}^3 = Ker\,(f) \oplus Im\,(f)}$$

5°/ *u*, *v*, *w*, éléments de *Im* (*f*) ?

Comme les vecteurs $y = (0, -1, -3)$ et $z = (1, 1, 1)$ forment une base de *Im* (*f*), il faut regarder si les familles $\{u, y, z\}$, $\{v, y, z\}$, $\{w, y, z\}$, sont libres ou non.

La matrice de la famille $\{u, y, z\}$ est :

$$[\{u, y, z\}] = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix} = [\{u, y, z\}] \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Soustrayons deux fois la troisième colonne de la première :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -3 & -3 & 1 \end{pmatrix} = [\{u, y, z\}] \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Soustrayons la deuxième colonne de la première :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} = [\{u, y, z\}] \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cette relation montre que la famille $\{u, y, z\}$ est liée par la relation $u - y - 2z = 0$: $u = y + 2z$, le vecteur u est dans l'image de f,
$u = f(e_2) + 2f(e_3) = f(e_2 + 2e_3) = f(0, 1, 2)$.

La matrice de la famille $\{v, y, z\}$ est :

$$[\{v, y, z\}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix} = [\{v, y, z\}] \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Soustrayons la troisième colonne de la première :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} = [\{v, y, z\}] \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Soustrayons deux fois la deuxième colonne de la première :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 8 & -3 & 1 \end{pmatrix} = [\{v, y, z\}] \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Et comme les vecteurs colonnes de la matrice de gauche sont linéairement indépendants, cette relation montre que la famille $\{v, y, z\}$ est de rang 3, le vecteur v est linéairement indépendant de y et z, v n'appartient pas à l'image de f.

Il en résulte que le vecteur $w = 2u - v$ n'appartient pas non plus à l'image de f (sinon $v = 2u - w$ appartiendrait aussi à l'image de f).

$u = f(0, 1, 2)$ appartient à l'image de f, v et w n'appartiennent pas à l'image de f.

6°/ Intersection de F et $Im\ (f)$.

Nous savons déjà, d'après 5°, que u appartient à F et à $Im\ (f)$.
F est engendré par u et v, d'après 2°.
v n'appartient pas à $Im\ (f)$, d'après 5°.

F et $Im\ (f)$ sont deux sous-espaces vectoriels de dimension 2.
Leur intersection, qui contient le vecteur non nul u, est de dimension 1 ou 2.
Si leur intersection était de dimension 2, on aurait $F \cap Im\ (f) = F = Im\ (f)$, ce qui est impossible puisque $v \in F$ et $v \notin Im\ (f)$.
Donc $F \cap Im\ (f)$ est de dimension 1, tout vecteur non nul en est une base, et $F \cap Im\ (f) = \mathbb{R}\ u$

$F \cap Im\ (f) = \mathbb{R}\ u$ est un sous-espace vectoriel de dimension 1.

Au total, nous avons obtenu :

$F = \mathbb{R}\, u \oplus \mathbb{R}\, v$
$Im\,(f) = \mathbb{R}\, y \oplus \mathbb{R}\, z = \mathbb{R}\, u \oplus \mathbb{R}\, z$, puisque $y = u - 2\, z$.
$Ker\,(f) = \mathbb{R}\, x$

La matrice de la famille $\{x, u, v\}$ est :

$$[\{x, u, v\}] = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 3 \end{pmatrix} = [\{x, u, v\}] \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Soustrayons la première colonne de la troisième et deux fois la première colonne de la deuxième :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 1 \\ -3 & 5 & 0 \end{pmatrix} = [\{x, u, v\}] \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Soustrayons cinq fois la troisième colonne de la deuxième :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ -3 & 5 & 0 \end{pmatrix} = [\{x, u, v\}] \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$

Et comme les vecteurs colonnes de la matrice de gauche sont linéairement indépendants, cette relation montre que la famille $\{x, u, v\}$ est de rang 3, le vecteur x est linéairement indépendant de u et v : $\mathbb{R}\, x = Ker\,(f)$ est donc un supplémentaire de $F = \mathbb{R}\, u \oplus \mathbb{R}\, v$.

Pour compléter le tableau, il reste seulement à établir la relation linéaire qui existe entre les vecteurs u, v, x, z.
La matrice de la famille $\{u, v, x, z\}$ est :

$$[\{u, v, x, z\}] = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{pmatrix} = [\{u, v, x, z\}] \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Soustrayons deux fois la quatrième colonne de la première, une fois la quatrième colonne de la deuxième et de la troisième :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -3 & 1 \\ -3 & 2 & -4 & 1 \end{pmatrix} = [\{u, v, x, z\}] \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Soustrayons deux fois la première colonne de la deuxième et trois fois la première colonne de la troisième :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & 8 & 5 & 1 \end{pmatrix} = [\{u, v, x, z\}] \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Multiplions la deuxième colonne par 5 et soustrayons 8 fois la troisième colonne de la deuxième :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} = [\{u, v, x, z\}] \begin{pmatrix} 1 & 14 & -3 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 1 & 0 \\ -2 & -25 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Cette relation montre qu'entre les vecteurs u, v, x, z, existe la relation linéaire : $14\,u + 5\,v - 8\,x - 25\,z = 0$.

$u = (2, 1, -1)$, $v = (1, -1, 3)$, $x = (1, -2, -3)$, $z = (1, 1, 1)$
$\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}\,x \oplus \mathbb{R}\,u \oplus \mathbb{R}\,z = \mathbb{R}\,x \oplus \mathbb{R}\,u \oplus \mathbb{R}\,v$
$Ker\,(f) = \mathbb{R}\,x$, $Im\,(f) = \mathbb{R}\,u \oplus \mathbb{R}\,z$, $F = \mathbb{R}\,u \oplus \mathbb{R}\,v$, $F \cap Im\,(f) = \mathbb{R}\,u$.
Les vecteurs u, v, x, z, sont liés par : $14\,u + 5\,v - 8\,x - 25\,z = 0$.

Chapitre 3. Applications linéaires.

Enoncés.

Exercice 9. Endomorphisme dont le noyau et l'image coïncident.

On désigne par f un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ tel que :

$$(i) \quad Ker\,(f) = Im\,(f)$$

1°/ Donner un exemple d'un tel endomorphisme.
2°/ Montrer que l'asssertion (i) est équivalente à l'assertion :

$$(ii) \quad f \circ f = 0 \text{ et } n = 2 \times rang\,(f)$$

Solution.

1°/ Exemple d'endomorphisme tel que *Ker* (*f*) = *Im* (*f*).

Pour $n = 0$, $\mathbb{R}^n$, de dimension 0, est réduit à 0.
La seule application de {0} dans {0} est l'application nulle, qui est linéaire : son image est égale à son noyau.

Exemple à peine moins trivial, pour $n = 2$.
$f(x, y) = (y, 0)$
$Ker\,(f) = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0 \} = \mathbb{R}\,(1, 0)$
$Im\,(f) = \{ (y, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in \mathbb{R} \} = \mathbb{R}\,(1, 0) = Ker\,(f)$

2°/ Caractérisation.

1. Condition nécessaire.

Supposons $Ker\,(f) = Im\,(f)$.
On a alors, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $f(x) \in Im\,(f) = Ker\,(f)$, donc $f(f(x)) = 0$, ce qui montre que $f \circ f = 0$.
La relation $dim\,(Ker\,(f)) + dim\,(Im\,(f)) = dim\,(\mathbb{R}^n)$ montre que l'on a : $2\,dim\,(Im\,(f)) = n$, donc $n = 2 \times rang\,(f)$, puisque le rang de f est la dimension de son image.

2. Condition suffisante.

Supposons $f \circ f = 0$ et $n = 2 \times rang\,(f)$ (endomorphisme nilpotent).
La relation $f \circ f = 0$ montre que tout $y = f(x)$ de l'image de f vérifie $f(y) = f(f(x)) = 0$, donc $Im\,(f) \subset Ker\,(f)$.
La relation $dim\,(Ker\,(f)) + dim\,(Im\,(f)) = dim\,(\mathbb{R}^n) = n = 2\,dim\,(Im\,(f))$, montre que l'on a : $dim\,(Im\,(f)) = dim\,(Ker\,(f))$.
Les relations $Im\,(f) \subset Ker\,(f)$ et $dim\,(Im\,(f)) = dim\,(Ker\,(f))$ montrent que l'on a $Im\,(f) = Ker\,(f)$.

Pour que $Ker\,(f) = Im\,(f)$, il faut et il suffit que l'on ait : $f \circ f = 0$ et $n = 2\,rang\,(f)$.

Chapitre 3. Applications linéaires.

Enoncés.

Exercice 10. Noyau et image supplémentaires.

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$. Etablir l'équivalence des deux assertions suivantes: (*i*) $Im\,(f \circ f) = Im\,(f)$ (*ii*) $\mathbb{R}^n = Ker\,(f) \oplus Im\,(f)$.	

Solution.

1°/ (*i*) $\Rightarrow$ (*ii*).

Supposons $Im\,(f \circ f) = Im\,(f)$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $f\,(x - f\,(x)) \in Im\,(f) = Im\,(f \circ f)$, donc il existe un $z \in \mathbb{R}^n$ tel que $f\,(x - f\,(x)) = f\,(f\,(z))$.
On a alors $f\,(x - f\,(x) - f\,(z)) = 0$, donc $x - f\,(x) - f\,(z) \in Ker\,(f)$ et $x \in Ker\,(f) + Im\,(f)$.
Ainsi, $\mathbb{R}^n = Ker\,(f) + Im\,(f)$.
La relation $dim\,(Ker\,(f)) + dim\,(Im\,(f)) = dim\,(\mathbb{R}^n)$ implique alors que la somme est directe.

2°/ (*ii*) $\Rightarrow$ (*i*).

Supposons $\mathbb{R}^n = Ker\,(f) \oplus Im\,(f)$.
Soit $x \in Im\,(f)$: il existe un $y \in \mathbb{R}^n$ tel que $x = f\,(y)$.
$\mathbb{R}^n = Ker\,(f) \oplus Im\,(f) \Rightarrow$ il existe z et t dans $\mathbb{R}^n$ tels que $y = z + f\,(t)$ avec $z \in Ker\,(f) : f\,(z) = 0$.
On a alors $x = f\,(y) = f\,(z + f\,(t)) = f\,(z) + f\,(f\,(t)) = f\,(f\,(t))$, donc $Im\,(f) \subset Im\,(f \circ f)$.
L'inclusion réciproque est évidente puisque, pour tout x de $\mathbb{R}^n$, $(f \circ f)\,(x)$ est l'image par f de l'élément $f\,(x)$ de $\mathbb{R}^n$.
On a donc l'égalité $Im\,(f \circ f) = Im\,(f)$.

Chapitre 3. Applications linéaires.

Enoncés.

Exercice 11. Noyaux et images supplémentaires.

Soit f une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$, et g une application linéaire de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$. On suppose $f \circ g \circ f = f$ et $g \circ f \circ g = g$. Montrer que $\mathbb{R}^n = Im\,(g) \oplus Ker\,(f)$ et $\mathbb{R}^p = Im\,(f) \oplus Ker\,(g)$.	

Solution.

1°/ Décomposition de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$.

Soit x un élément quelconque de $\mathbb{R}^n$.
$f\,(x - (g \circ f)\,(x)) = f\,(x) - (f \circ g \circ f)\,(x) = f\,(x) - f\,(x) = 0$
donc $x - (g \circ f)\,(x) \in Ker\,(f)$ et $x \in Ker\,(f) + Im\,(g \circ f)$.
Ceci montre que $\mathbb{R}^n = Im\,(g \circ f) + Ker\,(f)$.

De même, pour un élément quelconque y de $\mathbb{R}^p$:
$g\,(y - (f \circ g)\,(y)) = g\,(y) - (g \circ f \circ g)\,(y) = g\,(y) - g\,(y) = 0$
donc $y - (f \circ g)\,(y) \in Ker\,(g)$ et $y \in Ker\,(g) + Im\,(f \circ g)$.
Ceci montre que $\mathbb{R}^p = Im\,(f \circ g) + Ker\,(g)$.

2°/ Sommes directes.

Pour un élément $x \in Im\,(g \circ f) \cap Ker\,(f)$, il existe un $y \in \mathbb{R}^n$ tel que $x = g\,(f\,(y))$ et on a $f\,(x) = 0$, donc
$(f \circ g \circ f)\,(y) = y = 0$ et $x = g\,(f\,(y)) = 0$.
La somme $\mathbb{R}^n = Im\,(g \circ f) + Ker\,(f)$ est donc directe : $\mathbb{R}^n = Im\,(g \circ f) \oplus Ker\,(f)$.

De même, pour un élément $y \in Im\,(f \circ g) \cap Ker\,(g)$, il existe un $x \in \mathbb{R}^p$ tel que $y = f\,(g\,(x))$ et on a $g\,(y) = 0$,
donc $(g \circ f \circ g)\,(x) = x = 0$ et $y = f\,(g\,(x)) = 0$.
La somme $\mathbb{R}^p = Im\,(f \circ g) + Ker\,(g)$ est donc directe : $\mathbb{R}^p = Im\,(f \circ g) \oplus Ker\,(g)$.

3°/ Images de $g \circ f$ et de $f \circ g$.

Pour achever la démonstration, il reste à montrer les relations : $Im\,(g \circ f) = Im\,(g)$ et $Im\,(f \circ g) = Im\,(f)$.
Or on a déjà toujours $Im\,(g \circ f) \subset Im\,(g)$ et $Im\,(f \circ g) \subset Im\,(f)$.

Réciproquement, les relations $f \circ g \circ f = f$ et $g \circ f \circ g = g$ montrent que l'on aussi $Im\,(f) \subset Im\,(f \circ g)$ et $Im\,(g) \subset Im\,(g \circ f)$.
Les sommes directes obtenues dans 2° s'écrivent donc :

$$\boxed{\mathbb{R}^n = Im\,(g) \oplus Ker\,(f) \text{ et } \mathbb{R}^p = Im\,(f) \oplus Ker\,(g).}$$

Chapitre 3. Applications linéaires.

Enoncés.

Exercice 12. Endomorphismes de rangs complémentaires.

Soient u et v des endomorphismes de $\mathbb{R}^n$ tels que $u \circ v = O_{L(\mathbb{R}^n)}$ et $u + v \in GL(\mathbb{R}^n)$. Montrer que $rg(u) + rg(v) = n$. On pourra montrer que $Im(v) \subset Ker(u)$ et que $Im(u + v) \subset Im(u) + Im(v)$.	

Solution.

1°/ Relations préliminaires.

La relation $u \circ v = O_{L(\mathbb{R}^n)}$ signifie que l'application $u \circ v$ est l'application nulle.

Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a donc $u(v(x)) = 0$, donc $u(Im(v)) = 0$ et $Im(v)$ est contenu dans le noyau $Ker(u)$: $\boldsymbol{Im(v) \subset Ker(u)}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $x \in Im(u + v) \Rightarrow (\exists\, y\ \mathbb{R}^n)(x = (u + v)(y))$.
On a donc $x = u(y) + v(y)$ par définition de $u + v$, donc $x \in Im(u) + Im(v)$.
Finalement, $\boldsymbol{Im(u + v) \subset Im(u) + Im(v)}$.

2°/ Somme des rangs de *u* et *v*.

$u \circ (u + v) = u \circ u + u \circ v$, $u \circ v = O_{L(\mathbb{R}^n)} \Rightarrow u \circ (u + v) = u \circ u$.
$u + v \in GL(\mathbb{R}^n) \Rightarrow Im(u + v) = \mathbb{R}^n$, donc $Im(u \circ (u + v)) = Im(u)$, d'où $\boldsymbol{Im(u) = Im(u \circ u)}$.

D'après l'exercice 10, il en résulte :

$$\mathbb{R}^n = Im(u) \oplus Ker(u)$$

$\mathbb{R}\mathbb{R}^n = Im(u + v) \subset Im(u) + Im(v) \Rightarrow \mathbb{R}^n = Im(u) + Im(v)$
$Im(v) \subset Ker(u)$ et $\mathbb{R}^n = Im(u) \oplus Ker(u) \Rightarrow Im(u) \cap Im(v) = 0$,
donc la somme $\mathbb{R}^n = Im(u) + Im(v)$ est directe et l'on a :

$$\mathbb{R}^n = Im(u) \oplus Im(v)$$

Il en résulte immédiatement $n = rg(u) + rg(v)$.

Chapitre 3. Applications linéaires.

Enoncés.

Exercice 13. Projecteurs.

On pose $E := \mathbb{R}^n$.
On dit qu'un endomorphisme p est un **projecteur** de E si, et seulement si, $p \circ p = p$.

1°/ Montrer que p est un projecteur de E si, et seulement si, $Id_E - p$ est un projecteur de E.
2°/ Montrer que si p est un projecteur de E, alors :
$Im\,(Id_E - p) = Ker\,(p)$ et $Ker\,(Id_E - p) = Im\,(p)$
3°/ Montrer que si p est un projecteur de E, alors $E = Im\,(p) \oplus Ker\,(p)$.
4°/ Montrer qu'un projecteur p de E commute avec un endomorphisme u de E pour la loi $\circ$ si, et seulement si, $u\,(Ker\,(p)) \subset Ker\,(p)$ et $u\,(Im\,(p)) \subset Im\,(p)$.

Solution.

1°/ Projecteur supplémentaire.

Pour tout endomorphisme p, on a : $(Id_E - p) \circ (Id_E - p) = Id_E - 2\,p + p \circ p$
$p \circ p = p \Leftrightarrow (Id_E - p) \circ (Id_E - p) = Id_E - 2\,p + p = Id_E - p$.
Donc dire que p est un projecteur, c'est dire que $Id_E - p$ est un projecteur (=endomorphisme idempotent).

2°/ Image et noyau d'un projecteur.

Pour tout élément $x \in \mathbb{R}^n$ et tout endomorphisme p de $\mathbb{R}^n$, $p\,(x - p\,(x)) = p\,(x) - (p \circ p)\,(x)$.
$p \circ p = p \Leftrightarrow (\forall\, x \in \mathbb{R}^n)\,(p\,(x - p\,(x)) = 0)$
$\Leftrightarrow (\forall\, x \in \mathbb{R}^n)\,(x - p\,(x) \in Ker\,(p))$
$\Leftrightarrow (\forall\, x \in \mathbb{R}^n)\,((Id_E - p)\,(x) \in Ker\,(p))$
$\Leftrightarrow Im\,(Id_E - p) \subset Ker\,(p)$

Si p est un projecteur, $p \circ p = p$ et $Im\,(p \circ p) = Im\,(p)$.
D'après l'exercice 10, il en résulte $\mathbb{R}^n = Ker\,(p) \oplus Im\,(p)$

Or tout $x \in \mathbb{R}^n$ peut s'écrire sous la forme $(x - p\,(x)) + p\,(x)$, donc $\mathbb{R}^n = Im\,(Id_E - p) + Im\,(p)$.
Les relations $Im\,(Id_E - p) \subset Ker\,(p)$ et $\mathbb{R}^n = Ker\,(p) \oplus Im\,(p)$, impliquent $Im\,(Id_E - p) \cap Im\,(p) = 0$,
donc la somme $\mathbb{R}^n = Im\,(Id_E - p) + Im\,(p)$ est directe et $\mathbb{R}^n = Im\,(Id_E - p) \oplus Im\,(p)$.
Les sous-espaces vectoriels $Im\,(Id_E - p)$ et $Ker\,(p)$ ont donc la même dimension et la relation $Im\,(Id_E$

$– p) \subset Ker\ (p)$ entraîne l'égalité :

$$Im\ (Id_E – p) = Ker\ (p).$$

En refaisant le même raisonnement pour le projecteur supplémentaire $Id_E – p$, on arrive à la relation :

$$Im\ (p) = Ker\ (Id_E – p)$$

3°/ Relation $E = Im\ (p) \oplus Ker\ (p)$.

Cette relation a déjà été établie dans 2° comme conséquence, suivant l'exercice 10, de la relation $Im\ (p \circ p) = Im\ (p)$.

4°/ Commutation d'un projecteur et d'un endomorphisme.

Soit p un projecteur et u un endomorphisme.

1. Supposons d'abord que p et u commutent.

Considérons un $x \in Ker\ (p)$. Par définition, $p\ (x) = 0$.
Si p et u commutent, $p\ (u\ (x)) = (p \circ u)\ (x) = (u \circ p)\ (x) = u\ (0) = 0$ et $u\ (x) \in Ker\ (p)$.
Donc $x \in Ker\ (p) \Rightarrow u\ (x) \in Ker\ (p)$, c'est dire que $u\ (Ker\ (p)) \subset Ker\ (p)$.

Considérons maintenant un $x \in Im\ (p) = Ker\ (Id_E – p)$, on $x = p\ (x)$ et $u\ (x) = u\ (p\ (x)) = p\ (u\ (x))$,
donc $(Id_E – p)(u\ (x)) = 0$ et $u\ (x) \in Ker\ (Id_E – p) = Im\ (p)$.
Donc $x \in Im\ (p) \Rightarrow u\ (x) \in Im\ (p)$, c'est dire que $u\ (Im\ (p)) \subset Im\ (p)$.

2. Réciproquement, supposons $u\ (Ker\ (p)) \subset Ker\ (p)$ et $u\ (Im\ (p)) \subset Im\ (p)$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $p\ (x – p\ (x)) = p\ (x) – (p \circ p)\ (x) = 0$, donc $x – p\ (x) \in Ker\ (p)$.
$u\ (Ker\ (p)) \subset Ker\ (p)$ et $x – p\ (x) \in Ker\ (p) \Rightarrow u\ (x – p\ (x)) \in Ker\ (p)$
Donc $p\ (u\ (x – p\ (x))) = 0$, $(p \circ u)\ (x) = (p \circ u \circ p)\ (x)$
D'autre part, comme $u\ (p\ (x))$ est dans $u\ (Im\ (p)) \subset Im\ (p)$, il existe un $y \in \mathbb{R}^n$ tel que $u\ (p\ (x)) = p\ (y)$.
On a alors $(p \circ u)\ (x) = (p \circ u \circ p)\ (x) = p\ (p\ (y)) = p\ (y) = (u \circ p)\ (x)$.
C'est dire que $p \circ u = u \circ p$, donc u et p commutent.

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un endomorphisme u et un projecteur p commutent est que l'on ait : $u\ (Ker\ (p)) \subset Ker\ (p)$ et $u\ (Im\ (p)) \subset Im\ (p)$.

A L G E B R E L I N E A I R E

EXERCICE 1.

Soit E un $\mathbb{R}$–espace vectoriel de dimension n . On considère deux applications linéaires ϕ et ψ de E dans $\mathbb{R}$. Soient u et v deux vecteurs de E linéairement indépendants. On considère les trois applications de E dans E suivantes :

$\forall x \in E,\ f(x) = \phi(x)\, u$

$\forall x \in E,\ g(x) = \psi(x)\, v$

$\forall x \in E,\ h(x) = \psi(x)\, u - \phi(x)\, v$

1 Montrer que les trois applications f, g , h, sont des endomorphismes de E.

2. Déterminer les rangs et les défauts des applications f, g, h.

3. Donner une base des noyaux des applications f, g, h.

4. Comparer chacun des noyaux des applications f et g à celui de l'application h.

EXERCICE 2.

Soit E un K–espace vectoriel de dimension n. Soit f un endomorphisme de E. Montrer l'équivalence suivante :

$$Ker(f) \cap Im(f) = \{0_E\} \Leftrightarrow Ker\,(f^2) = Ker\,(f)$$

EXERCICE 3.

Soit E un K–espace vectoriel de dimension n. Soit f un endomorphisme de E. On pose :

$$f^0 = id_E\ ,\ f^k = f^{k-1} \circ f\ \ \forall k \geq 1,$$

$$N_k = Ker\,(f^k),\ I_k = Im\,(f^k).$$

L'endomorphisme f^k est appelé « puissance k–ième de f ».

1. Montrer que $N_k \subseteq N_{k+1}$ et $I_k \supseteq I_{k+1}\ \ \forall k \in \mathbb{N}$.

2. En déduire qu'il existe $p \in N$ tel que :

$$k < p \Rightarrow N_k \subset N_{k+1} \text{ et } k \geq p \Rightarrow N_k = N_p\ .$$

3. En déduire que :

$$k < p \Rightarrow I_k \supseteq I_{k+1} \text{ et } k \geq p \Rightarrow I_k = I_p\ .$$

4. Montrer alors que $E = N_p \oplus I_p$.

EXERCICE 4.

1. Quel est le rang des matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & -1 \\ 2 & 5 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 6 & 13 \\ -2 & -6 & 8 & 10 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} ?$$

2. Donner, quand c'est possible, une base de leur noyau.

EXERCICE 5.

1. Quel est le rang des matrices :

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -i & 3i \\ i & -1 & 0 & -2-i \\ 1+i & 0 & 2-i & 3i-5 \\ -i & 1 & 1+i & -i \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} x & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x \end{pmatrix}$$

2. Donner, quand c'est possible, une base de leur noyau.

EXERCICE 6.

1. Quel est le rang de la matrice $G = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1+i}{2} & \frac{1-i}{2} \\ i & -\frac{1-i}{2} & -\frac{1-i}{2} \\ -i & -\frac{1+i}{2} & -\frac{1+i}{2} \end{pmatrix}$?

2. Calculer G^2, G^3, G^4. Que peut-on en déduire ?

EXERCICE 7.

Quel est le rang des matrices X, $X\,X^t$ et $X^t\,X$ avec :

$$X = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} ?$$

X^t désigne la matrice transposée de X.

EXERCICE 8.

Calculer les déterminants : $\begin{vmatrix} 16 & 5 & -9 \\ 16 & 9 & -11 \\ -13 & -6 & -14 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -5 & 4 \\ -5 & 2 & 8 & -5 \\ -2 & 4 & 7 & -3 \\ 2 & -3 & -5 & 8 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+c & a+c & a+b \\ bc & ac & ab \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} x & a & b & c \\ a & x & b & c \\ a & b & x & c \\ a & b & c & x \end{vmatrix}$.

EXERCICE 9.

Calculer les déterminants : $\begin{vmatrix} p+q & q & q & \cdots & q \\ q & p+q & q & \cdots & q \\ q & q & p+q & \cdots & q \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q & q & q & \cdots & p+q \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1+x^2 & -x & 0 & \cdots & 0 \\ -x & 1+x^2 & -x & \cdots & 0 \\ 0 & -x & 1+x^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1+x^2 \end{vmatrix}$.

EXERCICE 10.

$E = \mathbb{R}^3$ est rapporté à sa base canonique $e = \{e_1 , e_2 , e_3 \}$, f est l'endomorphisme de matrice M dans cette base :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On choisit une nouvelle base $a = \{a_1 , a_2 , a_3 \}$ définie par :

$$[\, id_E , \{e\}, \{a\} \,] = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Donner la matrice de f dans la base a.
2. On pose :
   $b_1 = -4\, e_1 + 3\, e_2 + 2\, e_3$
   $b_2 = -4\, e_1 + e_3$
   $b_3 = 2\, e_1 + e_2$
   Montrer que $b = \{b_1 , b_2 , b_3 \}$ est une nouvelle base de E.
3. Calculer les matrices $[\, f ,\{b\},\{b\}]$, $[\, f ,\{b\},\{e\}]$, $[\, f ,\{e\},\{b\}]$.

EXERCICE 11.

$E = \mathbb{R}^4$ est rapporté à sa base canonique $e = \{e_1 , e_2 , e_3 , e_4 \}$.

1. On donne les quatre vecteurs définis par :
   $a_1 = e_1$
   $a_2 = e_1 + e_2$
   $a_3 = e_1 + e_2 + e_3$
   $a_4 = e_1 + e_2 + e_3 + e_4$

Montrer que $a = \{a_1 , a_2 , a_3 , a_4 \}$ est une nouvelle base de E.

2. Calculer la matrice $[\, id_E , \{a\}, \{e\} \,]$.
3. Inverser la matrice $[\, id_E , \{a\}, \{e\} \,]$.
4. On considère l'endomorphisme de E défini par son action sur les quatre vecteurs de la base $a = \{a_1 , a_2 , a_3 , a_4 \}$:
   $f(a_1) = a_2 - a_1$,
   $f(a_2) = a_2 - a_1$,
   $f(a_3) = a_4 - a_1$,
   $f(a_4) = a_4$.

Calculer les matrices $[\, f , \{a\} , \{a\} \,]$ et $[\, f , \{e\} , \{e\} \,]$.

5. Vérifier le calcul en calculant directement les images $f(e_1)$, $f(e_2)$, $f(e_3)$, $f(e_4)$.

EXERCICE 12.

$E = \mathbb{R}^3$ est rapporté à sa base canonique $e = \{e_1 , e_2 , e_3 \}$, f est l'endomorphisme de matrice M dans cette base :

$$M = \begin{pmatrix} -7 & 3 & 3 \\ -6 & 2 & 3 \\ -12 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

1. Vérifier que le noyau de $f + id_E$ admet pour base $a_1 = (1,0,2)$ et $a_2 = (0,1,-1)$.
2. Vérifier que le noyau de $f - 2\, id_E$ admet pour base $a_3 = (1,1,2)$.
3. Montrer que $a = \{ a_1 , a_2 , a_3 \}$ est une base de E.
4. Donner la matrice de id_E de la base a dans la base e.
5. Montrer que la matrice M est inversible.
6. Calculer l'inverse de la matrice M par la méthode du pivot.
7. Calculer l'inverse de la matrice M par le changement de base.
8. Calculer l'inverse de la matrice M par la méthode des déterminants.

EXERCICE 13.

$E = \mathbb{R}^3$ est rapporté à sa base canonique $e = \{e_1 , e_2 , e_3 \}$, f est l'endomorphisme de matrice A dans cette base :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

1. Utiliser la méthode du pivot pour montrer que cette matrice n'est pas inversible.
2. Déduire une valeur de λ pour laquelle :
$$Ker\,(f - \lambda\, id_E) \neq \{0\}.$$
3. Donner deux autres valeurs de λ vérifiant cette propriété.
4. Donner la dimension et une base de chacun de ces trois noyaux.

EXERCICE 14.

Pour chacune des propositions suivantes 1 à 13, indiquez si vous pensez que l'assertion proposée est vraie ou fausse et donnez une justification de votre choix.

1. La matrice A définie par
$$A = \begin{pmatrix} \cos a \cos b & -\sin a & -\cos a \sin b \\ \sin a \cos b & \cos a & -\sin a \sin b \\ \sin b & 0 & \cos b \end{pmatrix}$$
est toujours inversible.

2. L'image et le noyau d'une application linéaire forment une somme directe.

3. Si f est un endomorphisme de E, alors le noyau de f^k ($k > 1$) contient le noyau de f.

4. Le rang d'une application linéaire de E dans F est égal à la dimension de F si f est injective.

5. Le rang d'une application linéaire de E dans F est égal à la dimension de E si f est injective.

6. Le rang d'une application linéaire de E dans F est égal à la dimension de E si f est surjective.

7. Une matrice à n lignes et p colonnes de nombres réels peut être la matrice d'une application linéaire de $\mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{C}^p$ ($n > p$).

8. Le rang de la matrice A^k, avec $A = \begin{pmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{pmatrix}$ est égal à 2, pour $k \geq 1$.

9. La matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ donne un contre-exemple de l'assertion : le noyau et l'image d'un endomorphisme forment une somme directe.

10. L'application identique n'a pas toujours pour matrice la matrice unité.

11. On note A^t la transposée de la matrice A. Si A est réelle, la trace de la matrice $A\,A^t$ est positive.

12. Si une matrice à éléments dans un corps K est inversible, il en est de même de sa transposée.

13. Si f et g sont des endomorphismes d'un espace vectoriel E sur un corps K tels que $f \circ g = g \circ f$, alors $f\,(Im\,(g))$ est un sous-espace vectoriel de E contenu dans l'image de g.

A P P L I C A T I O N S L I N E A I R E S

EXERCICE 1.

Soit E un $\mathbb{R}$–espace vectoriel de dimension n . On considère deux applications linéaires ϕ et ψ de E dans $\mathbb{R}$. Soient u et v deux vecteurs de E linéairement indépendants. On considère les trois applications de E dans E suivantes :

$\forall x \in E,\ f(x) = \phi(x)\, u$

$\forall x \in E,\ g(x) = \psi(x)\, v$

$\forall x \in E,\ h(x) = \psi(x)\, u - \phi(x)\, v$

1 Montrer que les trois applications f, g , h, sont des endomorphismes de E.

2. Déterminer les rangs et les défauts des applications f, g, h.

3. Donner une base des noyaux des applications f, g, h.

4. Comparer chacun des noyaux des applications f et g à celui de l'application h.

SOLUTION.

Remarque préliminaire.

u et v sont linéairement indépendants d'après l'énoncé du problème. Ce sont donc des vecteurs non nuls de E qui forment une famille libre de E. La dimension de E est donc supérieure ou égale à 2 :

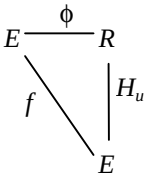
$$\boxed{dim(E) = n \geq 2}$$

On peut compléter la famille libre $\{u\ ,\ v\}$ en une base $\{u,v,e_3\ ,\ \ldots,\ e_n\}$ de E.

1°/ Endomorphismes.

Un ***endomorphisme*** est, par définition, une application linéaire de E dans E.

a) *f* est un endomorphisme.



Soit H_u l'application qui, à un $\lambda \in R$, associe le vecteur $\lambda\, u$ de E. Cette application H_u est une application linéaire de R dans E. En effet, on a:

$(\lambda + \mu)\, u = \lambda\, u + \mu\, u$ donc $H_u(\lambda + \mu) = H_u(\lambda) + H_u(\mu)$

$(\lambda\mu)\, u = \lambda\, (\mu\, u)$ donc $H_u(\lambda\mu) = \lambda\, H_u(\mu)$

L'application f de E dans E est la composée de ϕ et H_u : composée de deux applications linéaires, c'est une application linéaire.

$$f = H_u \circ \phi$$

b) *g* est un endomorphisme.

$$g = H_v \circ \psi$$

g , composée de deux applications linéaires est une application linéaire.

c) *h* est un endomorphisme.

$$h = H_u \circ \psi - H_v \circ \phi$$

$H_u \circ \psi$, composée de deux applications linéaires est une application linéaire. $H_v \circ \phi$, composée de deux applications linéaires est une application linéaire. Leur différence est encore un élément de $L\ (E)$. C'est une application linéaire.

2° Rangs et défauts.

a) Endomorphisme *f*.

$$Im\ (f) = f\ (E) = H_u\ (\phi\ (E)) = H_u\ (Im(\phi)).$$

Comme $\mathbb{R}$ est de dimension 1, $Im\ (\phi)$ est soit de dimension 0, auquel cas $\phi = 0$, soit de dimension 1, auquel cas $Im\ (\phi) = \mathbb{R}$. Donc $Im(f)$ est égal soit à $H_u\ (0)=0$, soit à $H_u\ (\mathbb{R}) = \mathbb{R}\ u$.

$$Im\ (f) = \begin{cases} \{ 0_E \} & \text{si } \phi = 0 \\ \mathbb{R}\ u & \text{si } \phi \neq 0 \end{cases}$$

Le « *rang* » de *f* est la dimension de son image : c'est donc 0 ou 1, 0 si $\phi = 0$, 1 si $\phi \neq 0$.

$$rg\ (f) = \begin{cases} 0 & \text{si } \phi = 0 \\ 1 & \text{si } \phi \neq 0 \end{cases}$$

Le « *défaut* » de *f* est la dimension du noyau de *f*, $Ker\ (f) = \{ x \in E \mid f(x) = 0 \} = \{ x \in E \mid \phi\ (x)\ u = 0 \}$. Comme *u* n'est pas nul, pour que $\phi(x)\ u = 0$, il faut et il suffit que $\phi(x) = 0$, soit $x \in Ker\ (\phi)$. On en déduit :

$$Ker\ (f) = Ker\ (\phi)$$

Le défaut, dimension du noyau, est donc donné par : $déf\ (f) = déf\ (\phi)$.

L'image de ϕ , $Im\ (\phi)$, est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}$. Il est de dimension 0 si $\phi = 0$, sinon, il est de dimension 1, donc égal à $\mathbb{R}$. La relation :

$$dim(Ker(\phi)) + dim(Im(\phi)) = dim(E)$$

montre alors que l'on a :

$$déf(\phi) + rg(\phi) = dim(E) = n$$

donc $déf(\phi) = n - rg(\phi)$. Le défaut de *f* est donc égal à *n* si $\phi = 0$, ce qui veut dire que *f* est nul, ou égal à $n - 1$ si $\phi \neq 0$.

$$déf\ (f) = \begin{cases} n & \text{si } \phi = 0 \\ n - 1 & \text{si } \phi \neq 0 \end{cases}$$

b) Endomorphisme *g*.

$$Im\ (g) = g\ (E) = H_v\ (\psi\ (E)) = H_v\ (Im(\psi)).$$

Comme $\mathbb{R}$ est de dimension 1, $Im\ (\psi)$ est soit de dimension 0, auquel cas $\psi = 0$, soit de dimension 1, auquel cas $Im\ (\psi) = \mathbb{R}$. Donc $Im(f)$ est égal soit à $H_v\ (0)=0$, soit à $H_v\ (\mathbb{R}) = \mathbb{R}\ v$.

$$Im\ (g) = \begin{cases} \{ 0_E \} & \text{si } \psi = 0 \\ \mathbb{R}\ v & \text{si } \psi \neq 0 \end{cases}$$

Le « *rang* » de *g* est la dimension de son image : c'est donc 0 ou 1, 0 si $\psi = 0$, 1 si $\psi \neq 0$.

$$rg\ (g) = \begin{cases} 0 & \text{si } \psi = 0 \\ 1 & \text{si } \psi \neq 0 \end{cases}$$

Le « *défaut* » de *g* est la dimension du noyau de *g*, $Ker\ (g) = \{ x \in E \mid g(x) = 0 \} = \{ x \in E \mid \psi\ (x)\ v = 0 \}$. Comme *v* n'est pas nul, pour que $\psi(x)\ u = 0$, il faut et il suffit que $\psi(x) = 0$, soit $x \in Ker\ (\psi)$. On en déduit :

$$\boxed{Ker\ (g) = Ker\ (\psi)}$$

Le défaut, dimension du noyau est donc donné par : $déf\ (g) = déf\ (\psi)$.

L'image de ψ , $Im\ (\psi)$, est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}$. Il est de dimension 0 si $\psi = 0$, sinon, il est de dimension 1, donc égal à $\mathbb{R}$. La relation :

$$dim(Ker(\psi)) + dim(Im(\psi)) = dim(E)$$

montre alors que l'on a :

$$déf(\psi) + rg(\psi) = dim(E) = n$$

donc $déf(\psi) = n - rg(\psi)$. Le défaut de g est donc égal à n si $\psi = 0$, ce qui veut dire que g est nul, ou égal à $n - 1$ si $\psi \neq 0$.

$$\boxed{déf\ (g) = \begin{cases} n & \text{si } \psi = 0 \\ n-1 & \text{si } \psi \neq 0 \end{cases}}$$

c) Endomorphisme *h*.

$$Im\ (h) = h\ (E) = H_u\ (\psi\ (E)) + H_v\ (\phi\ (E)) = H_u\ (Im(\psi)) + H_v\ (Im\ (\phi))$$

Si ϕ et ψ sont tous deux non nuls, cette image est $\mathbb{R}u + \mathbb{R}v = \mathbb{R}u \oplus \mathbb{R}v$. Sa dimension est 2, et le rang de h est 2.

$$\boxed{Im\ (h) = \mathbb{R}u \oplus \mathbb{R}v.}$$

Le rang de h est la dimension de l'image de h : c'est 2 si ϕ et ψ sont tous deux non nuls, c'est 1 si ϕ ou ψ est nul, c'est 0 si ϕ et ψ sont tous deux nuls.

$$Ker\ (h) = \{\ x \in E \mid \psi(x)\ u - \phi\ (x)\ v = 0\ \}.$$

Comme u et v sont linéairement indépendants, l'égalité $\psi(x)\ u - \phi\ (x)\ v = 0$ est équivalente à $\psi\ (x) = \phi\ (x) = 0$, c'est-à-dire à $x \in Ker\ (\psi) \cap Ker\ (\phi)$.

$$\boxed{Ker\ (h) = Ker\ (\psi) \cap Ker\ (\phi).}$$

Le défaut de h résulte de cette égalité :

$$déf\ (h) = dim\ (Ker\ (\psi) \cap Ker\ (\phi)).$$

La relation $déf\ (h) + rg\ (h) = n$ donne la valeur de $déf\ (h)$: c'est $n - 2$ si ϕ et ψ sont tous deux non nuls, c'est $n - 1$ si ϕ ou ψ est nul, c'est n si ϕ et ψ sont tous deux nuls.

3° Base des noyaux.

Comme u et v forment une famille libre, on peut compléter la famille $\{\ u\ ,\ v\ \}$ en une base $\{\ u\ ,\ v\ ,\ e_1\ ,\ \ldots\ ,\ e_{n-2}\ \}$ de E.

a) Endomorphisme *f*.

$$Ker\ (f) = Ker(\phi).$$

Une base du noyau de f est constituée d'une base du noyau de ϕ.

Si ϕ est nul, le noyau de ϕ est l'espace E entier : une base quelconque de E est une base du noyau de f. On peut peut prendre pour base la famille $\{\ u\ ,\ v\ ,\ e_3\ ,\ \ldots\ ,\ e_n\ \}$.

Si ϕ n'est pas nul, il existe un élément e_ϕ de E dont l'image par ϕ n'est pas nulle. $E = \mathbb{R}e_\phi \oplus Ker\ \phi$ car s'il existait un x non nul dans $\mathbb{R}e_\phi \cap Ker\ \phi$, il existerait un λ non nul tel que $\phi\ (\lambda\ e_\phi) = \lambda\ \phi\ (e_\phi) = 0$, ce qui est impossible avec $\lambda \neq 0$ et $\phi\ (e_\phi) \neq 0$.

b) Endomorphisme *g*.

$$Ker\ (g) = Ker(\psi).$$

Une base du noyau de *g* est constituée d'une base du noyau de ψ.
Si ψ est nul, le noyau de ψ est l'espace *E* entier : une base quelconque de *E* est une base du noyau de *g*. On peut peut prendre pour base la famille { u , v , e_3 , … , e_n }.

Si ψ n'est pas nul, il existe un élément e_ψ de *E* dont l'image par ψ n'est pas nulle. $E = \mathbb{R}\, e_\psi \oplus Ker\ \psi$ car s'il existait un *x* non nul dans $\mathbb{R}\, e_\psi \cap Ker\ \psi$, il existerait un λ non nul tel que ψ (λ e_ψ) = λ ϕ (e_ψ) = 0, ce qui est impossible avec λ ≠ 0 et ψ (e_ψ) ≠ 0.

c) Endomorphisme *h*.

$$Ker\ (h) = Ker\ (\psi) \cap Ker\ (\phi).$$

Une base du noyau de *h* est constituée d'une base de l'intersection du noyau de ψ et du noyau de ϕ.

4° Comparaison des noyaux.

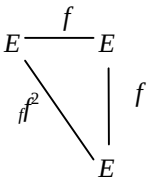
$$Ker\ (h) = Ker\ (\psi) \cap Ker\ (\phi) = Ker\ (f) \cap Ker\ (g)$$

EXERCICE 2.

Soit E un K–espace vectoriel de dimension n. Soit f un endomorphisme de E. Montrer l'équivalence suivante :

$$Ker(f) \cap Im(f) = \{0_E\} \Leftrightarrow Ker(f^2) = Ker(f)$$

SOLUTION.



Remarques préliminaires.

$Ker(f) \cap Im(f) = \{0_E\} \quad \Leftrightarrow (\forall x \in E)((f(x) = 0 \text{ et } (\exists y \in E)(x = f(y))) \Rightarrow x = 0)$.

Si $f(x) = 0$, alors $f(f(x)) = 0$, donc ***Ker (f) est toujours contenu dans Ker (f^2)***.

$Ker(f^2) = Ker(f) \quad \Leftrightarrow Ker(f^2) \subseteq Ker(f)$

$\Leftrightarrow (\forall x \in E)(f(f(x)) = 0 \Rightarrow f(x) = 0)$.

1° Supposons que $Ker(f) \cap Im(f) = \{0_E\}$.

Soit $x \in Ker(f^2)$. On a $f(f(x)) = 0$, donc $f(x) \in Ker(f)$ et $f(x) \in Im(f)$, $f(x) \in Ker(f) \cap Im(f) = \{0_E\}$, donc $f(x) = 0$, donc $x \in Ker(f)$. Le noyau de f^2 est donc contenu dans le noyau de f. Le noyau de f^2 est donc égal au noyau de f.

2° Réciproquement, supposons $Ker(f^2) = Ker(f)$.

Soit $x \in Ker(f) \cap Im(f)$. On a : $f(x) = 0$ et $(\exists y \in E)(x = f(y))$. Alors $f(f(y)) = f(x) = 0$, d'où $y \in Ker(f^2) = Ker(f)$. On a donc $x = f(y) = 0$. D'où $Ker(f) \cap Im(f) = 0$.

EXERCICE 3.

Soit E un K–espace vectoriel de dimension n. Soit f un endomorphisme de E. On pose :

$$f^0 = id_E\ ,\ f^k = f^{k-1} \circ f\ \ \forall k \geq 1,$$
$$N_k = Ker\ (f^k)\ ,\ I_k = Im\ (f^k)\ .$$

L'endomorphisme f^k est appelé « puissance k–ième de f ».

1. Montrer que $N_k \subseteq N_{k+1}$ et $I_k \supseteq I_{k+1}\ \ \forall\ k \in N$.
2. En déduire qu'il existe $p \in N$ tel que :

$$k < p \Rightarrow N_k \subset N_{k+1} \text{ et } k \geq p \Rightarrow N_k = N_p\ .$$

3. En déduire que :

$$k < p \Rightarrow I_k \supseteq I_{k+1} \text{ et } k \geq p \Rightarrow I_k = I_p\ .$$

4. Montrer alors que $E = N_p \oplus I_p$.

SOLUTION.

1°/ Chaînes des noyaux et des images.

$(\forall x \in E)(x \in N_k \Leftrightarrow f^k\ (x) = 0)$
$(\forall x \in E)(x \in N_k\ \Rightarrow f^{k+1}\ (x) = f\ (\ f^k\ (x)) = f\ (0) = 0)$
$(\forall x \in E)(x \in N_k\ \Rightarrow x \in N_{k+1}\ )$
$N_k\ \subseteq N_{k+1}$

$(\forall x \in E)(x \in I_{k+1} \Leftrightarrow (\exists y \in E)(x = f^{k+1}\ (y) = f^k\ (f(y))\ )$
$(\forall x \in E)(x \in I_{k+1} \Rightarrow (\exists z = f(y) \in E)(x = f^k\ (z)\ )$
$(\forall x \in E)(x \in I_{k+1} \Rightarrow x \in I_k\ )$
$I_{k+1} \subseteq I_k$.

2°/ La chaîne des noyaux est finie.

Lemme.

Pour tout entier naturel $k \geq 0$:

$$N_k = N_{k+1}\ \Rightarrow (\forall h \in N)(N_{k+h} = N_k\ )$$

Démonstration du lemme.

Comme la chaîne des noyaux des itérées de f est une chaîne croissante de sous-espaces vectoriels, il suffit de montrer que N_{k+h} est contenu dans N_k . La propriété est vraie déjà pour $h = 0$, c'est trivial, et pour $h = 1$, c'est l'hypothèse. Supposons qu'elle soit vraie pour un $h \geq 1$: $N_{k+h} \subseteq N_k$. Soit $x \in N_{k+h+1}$. Il résulte de la définition :
$f^{k+h+1}\ (x) = 0 \Rightarrow f^{k+1}\ (f^h\ (x)) = 0 \Rightarrow f^h\ (x) \in N_{k+1} = N_k \Rightarrow f^k\ (f^h\ (x)) = 0 \Rightarrow f^{k+h}\ (x) = 0 \Rightarrow x \in N_{k+h}\ \subseteq N_k$
donc $x \in N_{k+h+1} \Rightarrow x \in N_k$. C'est dire que $N_{k+h+1} \subseteq N_k$.

Propriété.

La chaîne $(N_k\ )_{k \in N}$ des noyaux est une chaîne finie.

Les noyaux N_k forment une chaîne croissante de sous-espaces vectoriels de E. Leurs dimensions forment donc une chaîne croissante d'entiers naturels, majorée par la dimension n de E. Toute suite croissante bornée d'entiers naturels est convergente et stationnaire. Donc il existe un entier k tel que $N_k = N_{k+1}$.
On peut donc considérer l'ensemble des entiers naturels k qui vérifient $N_k = N_{k+1}$. Cet ensemble n'est pas vide. Comme l'ordre des entiers naturels est un bon ordre, cet ensemble possède un plus petit élément. Notons p ce plus petit élément. On a : $N_p = N_{p+1}$. Le lemme précédent implique que pour $h \geq p$, on a $N_h = N_p$. Et comme p est le plus petit entier tel que $N_p = N_{p+1}$, pour tout entier $h < p$, on a $N_h\ \subset N_{h+1} \subseteq N_p$.

Il existe un entier $p \leq n$ tel que si k est strictement plus petit que p, N_k est strictement inclus dans N_{k+1} et si k est supérieur ou égal à p, N_k est égal à N_p .

Pour les dimensions, il en résulte la suite d'inégalités : $dim\ (N_1) < \ldots < dim\ (N_p) = dim\ (N_{p+1}) = \ldots$.

3°/ La chaîne des images est finie.

Pour tout endomorphisme g, on a :

$$dim\ (Ker\ (g)) + dim\ (Im\ (g)) = dim\ (E).$$

Pour les puissances d'un endomorphime f, on a donc :

$$dim\ (Ker\ (f^k)) + dim\ (Im\ (f^k)) = dim\ (E).$$

$(\exists p \leq n)(\forall k \in \mathbb{N}^*)((k<p \Rightarrow N_k \subset N_p)$ et $(k \geq p \Rightarrow N_k = N_p))$

$\Rightarrow (\forall k \in \mathbb{N}^*)((k<p \Rightarrow dim\ (N_k) < dim(N_p))$ et $(k \geq p \Rightarrow dim\ (N_k) = dim\ (N_p)))$

$\Rightarrow (\forall k \in \mathbb{N}^*)((k<p \Rightarrow dim\ (I_k) > dim(I_p))$ et $(k \geq p \Rightarrow dim\ (I_k) = dim\ (I_p)))$

Comme la suite des images des puissances croissantes de l'endomorphisme f est une suite décroissante d'espaces vectoriels, il en résulte la propriété analogue des sous-espaces vectoriels :

$$(\forall k \in \mathbb{N}^*)((k<p \Rightarrow I_k \supset I_p) \text{ et } (k \geq p \Rightarrow I_k = I_p))$$

4°/ E est somme directe de N_p et de I_p.

Cas particulier.

Si f est injective, $Ker\ (f^1) = 0 = Ker\ (f^0) = N_0$. Ainsi, pour les monomorphismes, $p = 0$. La propriété est alors triviale puisque l'image de l'application identique est l'espace vectoriel E tout entier : $E = N_0 \oplus I_0$

Cas général.

Supposons que f ne soit pas un monomorphisme. Son noyau n'est pas réduit à 0. La relation

$$dim\ (Ker\ (f^p)) + dim\ (Im\ (f^p)) = dim\ (E)$$

s'écrit aussi

$$dim\ (N_p) + dim\ (I_p) = dim\ (E).$$

Pour montrer que les sous-epaces N_p et I_p sont supplémentaires, il suffit de montrer que leur intersection est réduite à 0. De façon équivalente, d'après l'exercice 2, il suffit de montrer que le noyau de $f^{2p} = f^p \circ f^p$ est contenu dans le noyau de f^p. Or ceci est clair d'après la propriété 3.2 : $2\ p \geq p \Rightarrow N_{2p} = N_p$. On a donc $N_p \cap I_p = 0$ et :

$$\boxed{E = N_p \oplus I_p}$$

Cette propriété montre que, pour tout endomorphisme f de l'espace vectoriel E, il existe un entier p tel que tout x de E s'écrive d'une façon unique sous la forme $x = y + t$ avec $f^p\ (y) = 0$ et $t = f^p\ (z)$ pour un $z \in E$.

$$\boxed{(\forall f \in L(E))(\exists p \in \mathbb{N}^*)(\forall x \in E)(\exists! y \in E)(\exists z \in E)(x = y + f^p\ (z) \text{ et } f^p\ (y) = 0)}$$

On a alors $f^p\ (x) = f^{2p}\ (z)$. Pour un x donné, z n'est pas forcément unique, mais $f^p\ (z)$ est unique.

EXERCICE 4.

1. Quel est le rang des matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & -1 \\ 2 & 5 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 6 & 13 \\ -2 & -6 & 8 & 10 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} ?$$

2. Donner, quand c'est possible, une base de leur noyau.

SOLUTION.

1. Matrice *A*.

Le déterminant de *A* est nul. La matrice *A* n'est pas de rang 4.

Le déterminant $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & 1 & 6 \end{vmatrix}$ est égal à – 4, il n'est pas nul. La matrice *A* est de rang 3.

Réduisons la matrice pour connaître son rang. La matrice représente un endomorphisme f de R^4 : les colonnes de *A* sont les images des vecteurs de la base canonique.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & -1 \\ 2 & 5 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 6 & 13 \\ -2 & -6 & 8 & 10 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Soustraire 3 fois la 1e colonne de la 2e. Additionner 2 fois la 1e colonne à la 3e. Additionner la 1e colonne à la 4e.

$$\downarrow \qquad \downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 8 & 14 \\ -2 & 0 & 4 & 8 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ajouter 2 fois la 2e colonne à la 3e. Ajouter 3 fois la 2e colonne à la 4e. Multiplier la 2e colonne par –1.

$$\downarrow \qquad \downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ -2 & 0 & 4 & 8 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & -8 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Retrancher 2 fois la 3e colonne de la 4e.

$$\downarrow \qquad \downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La colonne de zéros dans la matrice de gauche, montre, avec les coefficients de la matrice de droite, la relation :

$$f(-e_2 - 2\,e_3 + e_4) = 0$$

De cette relation, nous déduisons que :

- ***f* est de rang 3** puisque son image est de dimension 3.
- **Le noyau de *f*** est un sous-espace vectoriel de dimension 1, engendré par le vecteur $\boldsymbol{e_2 + 2\,e_3 - e_4}$.

La matrice *A* est une matrice de rang 3 car le rang de la matrice et égal au rang de l'application linéaire *f*.

2. Matrice *B*.

Le déterminant de la matrice B vaut -8, il n'est pas nul, la matrice B est de rang 4. Son noyau est réduit à 0, il n'a pas de base non vide.

EXERCICE 5.

1. Quel est le rang des matrices :

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -i & 3i \\ i & -1 & 0 & -2-i \\ 1+i & 0 & 2-i & 3i-5 \\ -i & 1 & 1+i & -i \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} x & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x \end{pmatrix}$$

2. Donner, quand c'est possible, une base de leur noyau.

SOLUTION.

1. Matrice *C*.

Le déterminant de la matrice *C* est égal à 0.

Le déterminant $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -i \\ i & -1 & 0 \\ 1+i & 0 & 2-i \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & -i \\ 1+i & 2-i \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & -i \\ i & 2 \end{vmatrix} = -1$ n'est pas nul, la matrice *C* est de rang 3.

Réduisons la famille des vecteurs colonnes de la matrice *C*.

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -i & 3i \\ i & -1 & 0 & -2-i \\ 1+i & 0 & 2-i & 3i-5 \\ -i & 1 & 1+i & -i \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ajouter 3 fois la 3e colonne à la 4e. Ajouter *i* fois la 1e colonne à la 3e. Multiplier la 2e colonne par –1

$$\downarrow \qquad \downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ i & 1 & -1 & -2-i \\ 1+i & 0 & 1 & 1 \\ -i & -1 & 2+i & 3+2i \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & i & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ajouter la 2e colonne à la 3e. Ajouter (2 + *i*) fois la 2e colonne à la 4e.

$$\downarrow \qquad \downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ i & 1 & 0 & 0 \\ 1+i & 0 & 1 & 1 \\ -i & -1 & 1+i & 1+i \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & i & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2-i \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Retrancher la 3e colonne de la 4e.

$$\downarrow \qquad \downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ i & 1 & 0 & 0 \\ 1+i & 0 & 1 & 0 \\ -i & -1 & 1+i & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & i & -i \\ 0 & -1 & -1 & -1-i \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ce calcul montre que la matrice *C* est de rang 3 et que son noyau est le sous-espace vectoriel :

$$Ker\ (f) = \mathbb{C} \times (-i\ e_1 - (1+i)\ e_2 + 2\ e_3 + e_4)$$

(Le « *noyau* » d'une matrice est le sous-espace propre engendré par les vecteurs propres relativement à la valeur propre 0 ; c'est aussi le noyau de l'endomorphisme de matrice *C* dans la base canonique).

2. Matrice *D*.

Le déterminant de la matrice *D* est 1 : la matrice *D* est de rang 2. Son noyau est réduit à 0.

3. Matrice *E*.

Le déterminant de la matrice *E* est un déterminant de Van der Monde. Il est égal à $(a-b)(b-c)(c-a)$. D'où le résultat :

- Si $a = b = c$, les trois lignes de *E* sont identiques, la matrice est de rang 1. Son noyau est de dimension 2 et a pour base les vecteurs : $e_2 - a\,e_1$ et $e_3 - a^2\,e_1$.
- Si $a = b \neq c$, ou $a = c \neq b$, ou $b = c \neq a$, deux lignes sont identiques, la matrice est de rang 2. Son noyau est de dimension 1 et est engendré par le vecteur $ab\,e_1 - (a + b)\,e_2 + e_3$, comme on le voit en réduisant la matrice *E*.
- Si *a*, *b*, *c*, sont différents, la matrice est de rang 3. Son noyau est réduit à 0.

4. Matrice *F*.

Le déterminant de la matrice *F* est x^5 : il est nul si et seulement si *x* est nul.
Si $x = 0$, la matrice *F* se réduit à :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

C'est une matrice de rang 4. Son noyau est de dimension 1 et engendré par le vecteur e_1 .
Si $x \neq 0$, la matrice, de déterminant non nul, est une matrice de rang 5. Son noyau est réduit à 0.

EXERCICE 6.

1. Quel est le rang de la matrice $G = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1+i}{2} & \frac{1-i}{2} \\ i & -\frac{1-i}{2} & -\frac{1-i}{2} \\ -i & -\frac{1+i}{2} & -\frac{1+i}{2} \end{pmatrix}$?

2. Calculer G^2, G^3, G^4. Que peut-on en déduire ?

SOLUTION.

1. Matrice *G*.

Le déterminant de G est égal à -1. Il n'est pas nul, donc la matrice G est de rang 3.

2. Calcul de G^2.

$$G^2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice G^2 est réelle. Donc G^4 est réelle aussi :

$$G^4 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

3. Calcul de G^3.

De la relation $G^4 = I$, résulte la relation $G \times G^3 = G^3 \times G = I$, qui montre que G^3 est l'inverse de la matrice G.

$$G^3 = G^2 \times G = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & \frac{1+i}{2} & \frac{1-i}{2} \\ i & -\frac{1-i}{2} & -\frac{1-i}{2} \\ -i & -\frac{1+i}{2} & -\frac{1+i}{2} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1+i}{2}+\frac{1-i}{2}+\frac{1+i}{2} & -\frac{1-i}{2}+\frac{1-i}{2}+\frac{1+i}{2} \\ -i & -\frac{1+i}{2} & -\frac{1+i}{2} \\ i & -\frac{1-i}{2} & -\frac{1-i}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1-i}{2} & \frac{1+i}{2} \\ -i & -\frac{1+i}{2} & -\frac{1+i}{2} \\ i & -\frac{1-i}{2} & -\frac{1-i}{2} \end{pmatrix} = \overline{G}$$

Nous voyons donc que G^2 est réelle et que $G^3 = \overline{G}$, matrice conjuguée de G. Comme $G^3 = G^{-1}$, on obtient

$$\boxed{G^{-1} = \overline{G} = G^3}$$

L'inverse de G est la matrice conjuguée de G.

G est la matrice d'un opérateur (automorphisme) racine quatrième de l'unité.
$G^2 \times G^2 = I$, donc $G^2 = (G^2)^{-1}$; G^2 est son propre inverse : c'est une involution.

EXERCICE 7.

Quel est le rang des matrices X, $X\,X^t$ et $X^t\,X$ avec :

$$X = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} ?$$

X^t désigne la matrice transposée de X.

SOLUTION.

Comme X a quatre lignes, c'est une matrice de rang 4 au plus.
Réduisons la famille des vecteurs colonnes :

$$X = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$[\,id_{\mathbb{R}^7}\,,\{e\},\{e\}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Permutations de colonnes

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Le déterminant $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ est égal à 2 (développement par rapport à la 4^{e} ligne, puis développement par rapport à la 1^{e} ligne). Donc la famille des vecteurs colonnes de la matrice X est de rang 4, donc la matrice X est de rang 4.
La matrice X^t transposée de X est donc aussi de rang 4.

EXERCICE 8.

Calculer les déterminants : $\begin{vmatrix} 16 & 5 & -9 \\ 16 & 9 & -11 \\ -13 & -6 & -14 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -5 & 4 \\ -5 & 2 & 8 & -5 \\ -2 & 4 & 7 & -3 \\ 2 & -3 & -5 & 8 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+c & a+c & a+b \\ bc & ac & ab \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} x & a & b & c \\ a & x & b & c \\ a & b & x & c \\ a & b & c & x \end{vmatrix}$.

SOLUTION.

Règles de calcul :

Règle 1a. On ne change pas la valeur du déterminant en ajoutant à une colonne une combinaison linéaire des autres colonnes.

Règle 1b. On ne change pas la valeur du déterminant en ajoutant à une ligne une combinaison linéaire des autres lignes.

Règle 2a. On peut mettre en facteur dans un déterminant un facteur commun à une colonne.

Règle 2b. On peut mettre en facteur dans un déterminant un facteur commun à une ligne.

Règle 3a. La permutation de deux colonnes adjacentes change le signe du déterminant.

Règle 3b. La permutation de deux lignes adjacentes change le signe du déterminant.

Règle 4a. On peut développer un déterminant par rapport à une colonne quelconque.

Règle 4b. On peut développer un déterminant par rapport à une ligne quelconque.

1°/ Premier déterminant

On ne change pas la valeur du déterminant en retranchant la 2e ligne de la 1e (Règle 1b) :

$$D = \begin{vmatrix} 16 & 5 & -9 \\ 16 & 9 & -11 \\ -13 & -6 & -14 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -4 & 2 \\ 16 & 9 & -11 \\ -13 & -6 & -14 \end{vmatrix}$$

On ne change pas la valeur du déterminant en ajoutant 2 fois la 3e colonne à la 2e (Règle 1a) :

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 16 & -13 & -11 \\ -13 & -34 & -14 \end{vmatrix}$$

On peut développer le déterminant par rapport à la 1e ligne (Règle 4b) :

$$D = 2 \begin{vmatrix} 16 & -13 \\ -13 & -34 \end{vmatrix}$$

On calcule le déterminant d'ordre 2 (Règle 4a) :

$D = 2\,(-16 \times 34 - 13 \times 13) = -2\,((25-9) \times (25+9) + 169)$

$D = -2\,(625 - 81 + 169) = -2\,(625 + 170 - 1 - 81) = -2 \times (794 - 81) = -2 \times 713 = -1\,426.$

2°/ Deuxième déterminant.

On ne change pas la valeur du déterminant en soustrayant la 2e colonne de la 1e (Règle 1a) :

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -5 & 4 \\ -5 & 2 & 8 & -5 \\ -2 & 4 & 7 & -3 \\ 2 & -3 & -5 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -5 & 4 \\ -7 & 2 & 8 & -5 \\ -6 & 4 & 7 & -3 \\ 5 & -3 & -5 & 8 \end{vmatrix}$$

On ne change pas la valeur du déterminant en soustrayant 2 fois la 1e colonne de la 2e (Règle 1a) :

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -5 & 4 \\ -7 & 16 & 8 & -5 \\ -6 & 16 & 7 & -3 \\ 5 & -13 & -5 & 8 \end{vmatrix}$$

On ne change pas la valeur du déterminant en ajoutant 5 fois la 1e colonne à la 3e :

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ -7 & 16 & -27 & -5 \\ -6 & 16 & -23 & -3 \\ 5 & -13 & 20 & 8 \end{vmatrix}$$

On ne change pas la valeur du déterminant en retranchant 4 fois la 1e colonne de la 4e (Règle 1a) :

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -7 & 16 & -27 & 23 \\ -6 & 16 & -23 & 21 \\ 5 & -13 & 20 & -12 \end{vmatrix}$$

On peut développer le déterminant par rapport à la 1e ligne (Règle 4b) :

$$D = \begin{vmatrix} 16 & -27 & 23 \\ 16 & -23 & 21 \\ -13 & 20 & -12 \end{vmatrix}$$

On ne change pas la valeur du déterminant en retranchant la 2e ligne de la 1e (Règle 1b) :

$$D = \begin{vmatrix} 0 & -4 & 2 \\ 16 & -23 & 21 \\ -13 & 20 & -12 \end{vmatrix}$$

On ne change pas la valeur du déterminant en ajoutant 2 fois la 3e colonne à la 2e (Règle 1a) :

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 16 & 19 & 21 \\ -13 & -4 & -12 \end{vmatrix}$$

On peut développer le déterminant par rapport à la 1e ligne (Règle 4b) :

$$D = 2 \begin{vmatrix} 16 & 19 \\ -13 & -4 \end{vmatrix}$$

On ne change pas la valeur du déterminant en retranchant la 1e colonne de la 2e (Règle 1a) :

$$D = 2 \begin{vmatrix} 16 & 3 \\ -13 & 9 \end{vmatrix}$$

On peut mettre en facteur dans le déterminant le facteur commun 3 de la 2e colonne (Règle 2a) :

$$D = 6 \begin{vmatrix} 16 & 1 \\ -13 & 3 \end{vmatrix}$$

En calculant le déterminant d'ordre 2 (Règle 4a), il vient :

$D = 6 \times (3 \times 16 + 13) = 6 \times (48 + 13) = 6 \times 61 = 366$

3°/ Troisième déterminant.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+c & a+c & a+b \\ bc & ac & ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b+c & a-b & a-c \\ bc & c(a-b) & b(a-c) \end{vmatrix} = (a-b)(a-c) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b+c & 1 & 1 \\ bc & c & b \end{vmatrix} =$$

$$(a-b)(a-c) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b+c & 1 & 0 \\ bc & c & b-c \end{vmatrix} = (a-b)(a-c)(b-c)$$ (déterminant de Vandermonde).

4°/ Quatrième déterminant.

$$\begin{vmatrix} x & a & b & c \\ a & x & b & c \\ a & b & x & c \\ a & b & c & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+a+b+c & a & b & c \\ a+x+b+c & x & b & c \\ a+b+x+c & b & x & c \\ a+b+c+x & b & c & x \end{vmatrix} = (x+a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & a & b & c \\ 1 & x & b & c \\ 1 & b & x & c \\ 1 & b & c & x \end{vmatrix} =$$

$$(x+a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x-a & 0 & 0 \\ 1 & b-a & x-b & 0 \\ 1 & b-a & c-b & x-c \end{vmatrix} = (x+a+b+c)(x-a)(x-b)(x-c)$$

EXERCICE 9.

Calculer les déterminants : $\begin{vmatrix} p+q & q & q & \cdots & q \\ q & p+q & q & \cdots & q \\ q & q & p+q & \cdots & q \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q & q & q & \cdots & p+q \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1+x^2 & -x & 0 & \cdots & 0 \\ -x & 1+x^2 & -x & \cdots & 0 \\ 0 & -x & 1+x^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1+x^2 \end{vmatrix}$.

SOLUTION.

1°/ Premier déterminant.

Le déterminant $\begin{vmatrix} p+q & q & q & \cdots & q \\ q & p+q & q & \cdots & q \\ q & q & p+q & \cdots & q \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q & q & q & \cdots & p+q \end{vmatrix}$ a n lignes et n colonnes. Notons-le D_n .

Pour $n = 1$, $D_1 = p + q$.
Pour $n = 2$, $D_2 = (p + q)^2 - q^2 = p\,(p + 2\,q)$
Pour $n = 3$, $D_3 = (p + q)^2 + 2\,q^3 - 3\,q^2\,(p + q) = p^3 + 3\,p^2\,q = p^2\,(p + 3\,q)$
Pour $n \geq 3$, calculons D_n . Lorsqu'on ajoute à la première colonne la somme des $(n-1)$ autres colonnes, on obtient :

$$D_n = \begin{vmatrix} p+nq & q & q & \cdots & q \\ p+nq & p+q & q & \cdots & q \\ p+nq & q & p+q & \cdots & q \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p+nq & q & q & \cdots & p+q \end{vmatrix} = (p + n\,q) \begin{vmatrix} 1 & q & q & \cdots & q \\ 1 & p+q & q & \cdots & q \\ 1 & q & p+q & \cdots & q \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & q & q & \cdots & p+q \end{vmatrix}$$

Enlevons q fois la première colonne de chacune des suivantes, il vient :

$$D_n = (p + n\,q) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & p & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & p & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & p \end{vmatrix} = p^{n-1}\,(p + n\,q).$$

$$\begin{vmatrix} p+q & q & q & \cdots & q \\ q & p+q & q & \cdots & q \\ q & q & p+q & \cdots & q \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q & q & q & \cdots & p+q \end{vmatrix} = p^{n-1}\,(p + n\,q).$$

La formule est valable pour $n \geqslant 1$.

2°/ Deuxième déterminant.

Le déterminant $\begin{vmatrix} 1+x^2 & -x & 0 & \cdots & 0 \\ -x & 1+x^2 & -x & \cdots & 0 \\ 0 & -x & 1+x^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1+x^2 \end{vmatrix}$ a n lignes et n colonnes. Notons-le D_n .

Pour $n = 1$, $D_1 = 1 + x^2$

Pour $n = 2$, $D_2 = (1 + x^2)^2 - x^2 = 1 + x^2 + x^4$

Pour $n = 3$, $D_3 = (1 + x^2)\, D_2 + x \begin{vmatrix} -x & -x \\ 0 & 1+x^2 \end{vmatrix} = (1 + x^2)\, D_2 - x^2\,(1 + x^2)$

$D_3 = (1 + x^2)(1 + x^2 + x^4) - x^2\,(1 + x^2) = (1 + x^2)(1 + x^4) = 1 + x^2 + x^4 + x^6$

Hypothèse de récurrence :

Supposons que tous ces déterminants successifs, jusqu'à l'ordre n soient donnés par la formule :

$$D_k = 1 + x^2 + x^4 + \ldots + x^{2k} = \frac{1 - x^{2k+2}}{1 - x^2}$$

Formule de récurrence :

Calculons D_{n+1} . On développe le déterminant par rapport à la première ligne :

$$D_{n+1} = (1 + x^2)\, D_n + x \begin{vmatrix} -x & -x & \cdots & 0 \\ 0 & 1+x^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1+x^2 \end{vmatrix} .$$

Pour calculer le déterminant qui reste, on le développe par rapport à la première colonne :

$$\begin{vmatrix} -x & -x & \cdots & 0 \\ 0 & 1+x^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1+x^2 \end{vmatrix} = -x\, D_{n-1}$$

On obtient la formule de récurrence :

$$D_{n+1} = (1 + x^2)\, D_n - x^2\, D_{n-1}$$
$$D_{n+1} = D_n + x^2\,(D_n - D_{n-1})$$

D'après l'hypothèse de récurrence :

$$D_n = \sum_{k=0}^{k=n} x^{2k} \qquad \text{et} \qquad D_{n-1} = \sum_{k=0}^{k=n-1} x^{2k}$$

d'où :

$$D_n - D_{n-1} = x^{2n}$$

et :

$$D_{n+1} = \sum_{k=0}^{k=n} x^{2k} + x^{2n+2} = \sum_{k=0}^{k=n+1} x^{2k}$$

Ainsi, la formule de l'hypothèse de récurrence est encore valable quand on remplace n par $n + 1$. Le principe de récurrence implique alors que la formule est valable pour tout entier $n \geq 2$. Comme elle est valable aussi pour $n = 1$, elle est valable pour tout entier $n \geq 1$.

$$\boxed{D_n = \sum_{k=0}^{k=n} x^{2k}}$$

EXERCICE 10.

$E = \mathbb{R}^3$ est rapporté à sa base canonique $e = \{e_1 , e_2 , e_3 \}$, f est l'endomorphisme de matrice M dans cette base :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On choisit une nouvelle base $a = \{a_1 , a_2 , a_3 \}$ définie par :

$$[\, id_E , \{e\}, \{a\} \,] = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Donner la matrice de f dans la base a.
2. On pose :

$b_1 = -4\, e_1 + 3\, e_2 + 2\, e_3$

$b_2 = -4\, e_1 + e_3$

$b_3 = 2\, e_1 + e_2$

Montrer que $b = \{b_1 , b_2 , b_3 \}$ est une nouvelle base de E.

3. Calculer les matrices $[\, f ,\{b\},\{b\}]$, $[\, f ,\{b\},\{e\}]$, $[\, f ,\{e\},\{b\}]$.

SOLUTION.

1°/ Matrice de *f* dans la base *a*.

La matrice de l'application composée de deux applications linéaires est le produit des matrices :

$$M_{f \circ g} = M_f \, M_g$$

Le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} E\,(e) & \xrightarrow{\quad [f,e,e] \quad} & E\,(e) \\ {\scriptstyle [id_E\,,\,a,e]}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle [id_E\,,\,e,a]} \\ E\,(a) & \xrightarrow[\quad [f,a,a] \quad]{} & E\,(a) \end{array}$$

résume la formule :

$$\boxed{[\, f , a , a \,] = [\, id_E , e , a \,] \times [\, f , e , e \,] \times [\, id_E , a , e \,]}$$

La matrice $[\, id_E , a , e \,]$ exprime les vecteurs de la base a en fonction des ecteurs de la base e : les formules sont les inverses des formules exprimant les vecteurs de la base e en fonction des vecteurs de la base a, d'où :

$$[\, id_E , a , e \,] = [\, id_E , e , a \,]^{-1}$$

et l'on obtient :

$$[\, f , a , a \,] = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 39 & -25 & 17 \\ 31 & -15 & 13 \\ 2 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

2°/ Détermination d'une nouvelle base de *E*.

La matrice des composantes des vecteurs b_1 , b_2 , b_3 sur la base canonique est la matrice de l'application qui, au vecteur de la base canonique e_i , fait correspondre le vecteur b_i . Pour que la famille $b = \{b_1 , b_2 , b_3 \}$ soit une base, il faut et il suffit que la matrice soit de rang 3, donc il faut et il suffit que le déterminant des composantes :

$$\begin{vmatrix} -4 & -4 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

soit différent de 0. Ce déterminant vaut 2. La famille $\{b\}$ est de rang 3.

La famille $b = \{b_1 , b_2 , b_3 \}$ est une base car le déterminant des composantes est $2 \neq 0$.

3°/ Matrice de f selon diverses bases.

La matrice des composantes des vecteurs de la famille $b = \{b_1 , b_2 , b_3 \}$ est l'inverse de la matrice $[id_E , \{e\},\{b\}]$. L'inverse de la matrice $[id_E , \{b\},\{e\}]$ des composantes des vecteurs de la famille b dans la base canonique est la matrice $[id_E , \{e\},\{b\}] = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 2 & -4 \\ 2 & -4 & 10 \\ 3 & -4 & 12 \end{pmatrix}$ des composantes des vecteurs de la base canonique dans la base b.

La matrice de l'endomorphisme f selon la base b est :

$$[f,\{b\},\{b\}] = [id_E , \{e\},\{b\}][f,\{e\},\{e\}][id_E , \{e\},\{b\}]^{-1} = [id_E , \{e\},\{b\}][f,\{e\},\{e\}][id_E , \{b\},\{e\}]$$

$$[f,\{b\},\{b\}] = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 2 & -4 \\ 2 & -4 & 10 \\ 3 & -4 & 12 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 & -4 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \\ 1 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$[f,\{b\},\{b\}] = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \\ 1 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

Un diagramme commutatif permet de calculer la matrice de f dans les diverses bases, à partir de la matrice M de f dans la base canonique $[f, \{e\}, \{e\}]$:

$$[f, \{b\}, \{e\}] = [f, \{e\}, \{e\}][id_E , \{b\}, \{e\}]$$
$$[f, \{e\}, \{b\}] = [id_E , \{e\}, \{b\}][f, \{e\}, \{e\}]$$

Numériquement, on obtient :

$$[f, \{b\}, \{e\}] = [f, \{e\}, \{e\}][id_E , \{b\}, \{e\}] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 & -4 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -4 & 3 \\ 5 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$[f, \{e\}, \{b\}] = [id_E , \{e\}, \{b\}][f, \{e\}, \{e\}] = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 2 & -4 \\ 2 & -4 & 10 \\ 3 & -4 & 12 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 6 \\ 3 & -1 & 8 \end{pmatrix}$$

EXERCICE 11.

$E = \mathbb{R}^4$ est rapporté à sa base canonique $e = \{e_1 , e_2 , e_3 , e_4 \}$.

1. On donne les quatre vecteurs définis par :

$a_1 = e_1$

$a_2 = e_1 + e_2$

$a_3 = e_1 + e_2 + e_3$

$a_4 = e_1 + e_2 + e_3 + e_4$

Montrer que $a = \{a_1 , a_2 , a_3 , a_4 \}$ est une nouvelle base de E.

2. Calculer la matrice $[id_E , \{a \}, \{ e \}]$.

3. Inverser la matrice $[id_E , \{a \}, \{ e \}]$.

4. On considère l'endomorphisme de E défini par son action sur les quatre vecteurs de la base $a = \{a_1 , a_2 , a_3 , a_4 \}$:

$f (a_1) = a_2 - a_1$,

$f (a_2) = a_2 - a_1$,

$f (a_3) = a_4 - a_1$,

$f (a_4) = a_4$.

Calculer les matrices $[f , \{ a \} , \{ a \}]$ et $[f , \{ e \} , \{ e \}]$.

5. Vérifier le calcul en calculant directement les images $f(e_1), f(e_2), f(e_3), f(e_4)$.

SOLUTION.

1°/ La famille *a* est une base de *E*.

Soit $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 + \lambda_4 a_4 = 0$ une combinaison linéaire nulle des vecteurs de la famille a. Compte tenu de la définition des vecteurs de la famille a, cette combinaison linéaire s'écrit :

$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 (e_1 + e_2) + \lambda_3 (e_1 + e_2 + e_3) + \lambda_4 (e_1 + e_2 + e_3 + e_4) = 0$

$(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4) e_1 + (\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4) e_2 + (\lambda_3 + \lambda_4) e_3 + \lambda_4 e_4 = 0.$

Comme la famille $\{e_1 , e_2 , e_3 , e_4\}$ est une base de E, cette relation est équivalente au système d'équations :

$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0$

$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$

$\lambda_1 + \lambda_2 = 0$

$\lambda_1 = 0$

En remontant depuis la dernière égalité, on voit que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$. Donc la famille a est libre. Comme elle est de rang 4, c'est une base de $E = \mathbb{R}^4$.

2°/ Matrice du changement de base.

La matrice du changement de base est la matrice $[id_E ,\{a\},\{e\}]$. Elle a pour colonnes les composantes sur la base canonique {e}, des vecteurs de la base a :

$$[id_E ,\{a\},\{e\}] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3°/ Inverse de la matrice du changement de base.

On peut calculer les vecteurs de la base canonique en fonction des vecteurs de la base $\{a\}$:

$e_1 = a_1$; $e_2 = a_2 - a_1$; $e_3 = a_3 - a_2$; $e_4 = a_4 - a_3$

Les composantes des vecteurs de la base canonique $\{e\}$ sur la base $\{a\}$ donnent la matrice $[id_E ,\{e\},\{a\}]$ inverse de la matrice $[id_E ,\{a\},\{e\}]$:

$$[id_E, \{e\}, \{a\}] = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4°/ Matrice d'endomorphisme et changement de base.

En ordonnant les valeurs des images dans l'ordre des vecteurs de la base *a*, on a :

$f(a_1) = -a_1 + a_2$,
$f(a_2) = -a_1 + a_2$,
$f(a_3) = -a_1 + a_4$,
$f(a_4) = a_4$.

La matrice de *f* dans la base *a* a pour colonnes les composantes des images des vecteurs de base relativement à cette base :

$$[f, \{a\}, \{a\}] = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$[f, \{e\}, \{e\}] = [id_E, \{a\}, \{e\}][f, \{a\}, \{a\}][id_E, \{e\}, \{a\}]$$

$$[f, \{e\}, \{e\}] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

5°/ Images des vecteurs de la base canonique.

$e_1 = a_1$
$e_2 = a_2 - a_1$
$e_3 = a_3 - a_2$
$e_4 = a_4 - a_3$
$f(e_1) = f(a_1) = a_2 - a_1 = e_2$
$f(e_2) = f(a_2 - a_1) = f(a_2) - f(a_1) = (a_2 - a_1) - (a_2 - a_1) = 0$
$f(e_3) = f(a_3 - a_2) = f(a_3) - f(a_2) = (a_4 - a_1) - (a_2 - a_1) = (a_4 - a_2) = e_3 + e_4$
$f(e_4) = f(a_4 - a_3) = f(a_4) - f(a_3) = a_4 - (a_4 - a_1) = a_1 = e_1$

La matrice de *f* dans la base *e* a pour colonnes les composantes des images des vecteurs de la base *e* :

$$[f, \{e\}, \{e\}] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

EXERCICE 12.

$E = \mathbb{R}^3$ est rapporté à sa base canonique $e = \{e_1 , e_2 , e_3 \}$, f est l'endomorphisme de matrice M dans cette base :

$$M = \begin{pmatrix} -7 & 3 & 3 \\ -6 & 2 & 3 \\ -12 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

1. Vérifier que le noyau de $f + id_E$ admet pour base $a_1 = (1,0,2)$ et $a_2 = (0,1,-1)$.
2. Vérifier que le noyau de $f - 2\ id_E$ admet pour base $a_3 = (1,1,2)$.
3. Montrer que $a = \{ a_1 , a_2 , a_3 \}$ est une base de E.
4. Donner la matrice de id_E de la base a dans la base e.
5. Montrer que la matrice M est inversible.
6. Calculer l'inverse de la matrice M par la méthode du pivot.
7. Calculer l'inverse de la matrice M par le changement de base.
8. Calculer l'inverse de la matrice M par la méthode des déterminants.

SOLUTION.

1. Noyau de $f + id_E$.

$f + id_E$ a pour matrice dans la base E :

$$M + I = \begin{pmatrix} -6 & 3 & 3 \\ -6 & 3 & 3 \\ -12 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

Réduisons cette matrice :

$$\begin{pmatrix} -6 & 3 & 3 \\ -6 & 3 & 3 \\ -12 & 6 & 6 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Soustraire la 2e colonne de la 3e

$$\begin{pmatrix} -6 & 3 & 0 \\ -6 & 3 & 0 \\ -12 & 6 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Multiplier la 2e colonne par 2

$$\begin{pmatrix} -6 & 6 & 0 \\ -6 & 6 & 0 \\ -12 & 12 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ajouter la 1e colonne à la 2e

$$\begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 0 \\ -12 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pour trouver les vecteurs a_1 et a_2 , il reste seulement à faire des transformations sur les deux dernières colonnes :

Ajouter 2 fois la 3e colonne à la 2e

$$\begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 0 \\ -12 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Multiplier la 3e colonne par –1

$$\begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 0 \\ -12 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Ce calcul montre que la matrice $M + I$ est de rang 1, donc que son noyau est de dimension 2. Le noyau contient les deux vecteurs linéairement indépendants $a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $a_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Ces deux vecteurs forment donc une base du noyau de $M + I$.

2. Noyau de $f - 2\ id_E$.

$f - 2\ id_E$ a pour matrice dans la base canonique e :

$$M - 2\ I = \begin{pmatrix} -9 & 3 & 3 \\ -6 & 0 & 3 \\ -12 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

Réduisons cette matrice :

$$\begin{pmatrix} -9 & 3 & 3 \\ -6 & 0 & 3 \\ -12 & 6 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ajouter à la 1e colonne 1 fois la 2e et 2 fois la 3e

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 6 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Retrancher la 2e colonne de la 3e

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 6 & -3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ce calcul montre que la matrice $M - 2\ I$ est de rang 2, donc que son noyau est de dimension 1. Comme le vecteur $a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ est dans ce noyau, il forme à lui seul une base du noyau de $M - 2\ I$, donc du noyau de l'endomorphisme $f - 2\ id_E$.

3. Base formée de vecteurs propres.

Considérons la famille $a = \{a_1 , a_2 , a_3 \}$. Le déterminant des composantes est $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 1$. Il n'est pas nul, donc la famille a est de rang 3, c'est une base de $E = \mathbb{R}^3$.

4. Matrice du changement de base.

La matrice de l'application identique de $\mathbb{R}^3$ de la base a dans la base e a pour colonnes les vecteurs de la base a rapportés à la base e :

$$[id_E ,\{a\},\{e\}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

5. La matrice *M* est inversible.

On ne change pas la valeur du déterminant en ajoutant à la première colonne la somme des deux autres colonnes :

$$Dét\ (M) = \begin{vmatrix} -7 & 3 & 3 \\ -6 & 2 & 3 \\ -12 & 6 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 3 \\ -1 & 2 & 3 \\ -1 & 6 & 5 \end{vmatrix}$$

On ne change pas la valeur du déterminant en soustrayant la première ligne des deux autres :

$$Dét\ (M) = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 3 \\ -1 & 2 & 3 \\ -1 & 6 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

On peut développer le déterminant par rapport à la première colonne :

$$Dét\ (M) = -\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$$

On développe le déterminant par rapport à la première ligne :

$$Dét\ (M) = 2$$

Le déterminant de la matrice *M* vaut 2, il n'est pas nul, donc la matrice *M* est inversible.

La matrice *M*, de déterminant non nul, est inversible.

6. Calcul de l'inverse par la méthode du pivot de Gauss.

La méthode du pivot de Gauss consiste à faire sur la matrice unité les mêmes transformations que l'on fait sur la matrice *M* pour réduire la famille des vecteurs colonnes à la matrice unité.

$$M = \begin{pmatrix} -7 & 3 & 3 \\ -6 & 2 & 3 \\ -12 & 6 & 5 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ajouter à la première colonne la somme des deux autres

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 \\ -1 & 2 & 3 \\ -1 & 6 & 5 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Multiplier la 1e colonne par −1. Soustraire de la 2e colonne la 3e.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ajouter à la 1e colonne la 2e. Multiplier la 2e colonne par −1.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Soustraire de la 3e colonne 3 fois la somme des deux autres.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Soustraire de la 1e colonne la 3e. Diviser la 3e colonne par 2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -4 & 0 & 1{,}5 \\ -3 & -1 & 1{,}5 \\ -6 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Ajouter à la 2e colonne la 3e.

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -4 & 1{,}5 & 1{,}5 \\ -3 & 0{,}5 & 1{,}5 \\ -6 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$M^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -8 & 3 & 3 \\ -6 & 1 & 3 \\ -12 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

7. Inversion de la matrice *M* par la méthode du changement de base.

$$[f,\{a\},\{a\}] = [id_E,\{e\},\{a\}][f,\{e\},\{e\}][id_E,\{a\},\{e\}]$$

$$[id_E,\{a\},\{e\}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$a_1 = e_1 + 2\,e_3$
$a_2 = e_2 - e_3$
$a_3 = e_1 + e_2 + 2\,e_3$
$a_3 = a_1 + e_2$
$e_2 = -a_1 + a_3$
$e_3 = e_2 - a_2 = -a_1 - a_2 + a_3$
$e_1 = a_1 - 2\,e_3 = a_1 - 2\,(-a_1 - a_2 + a_3) = 3\,a_1 + 2\,a_2 - 2\,a_3$

$$[id_E,\{e\},\{a\}] = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[f,\{a\},\{a\}] = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -7 & 3 & 3 \\ -6 & 2 & 3 \\ -12 & 6 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$[f,\{a\},\{a\}]^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}5 \end{pmatrix} = [id_E,\{e\},\{a\}][f,\{e\},\{e\}]^{-1}[id_E,\{a\},\{e\}]$$

$$[f,\{e\},\{e\}]^{-1} = [id_E,\{a\},\{e\}][f,\{a\},\{a\}]^{-1}[id_E,\{e\},\{a\}]$$

$$[f,\{e\},\{e\}]^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 1{,}5 & 1{,}5 \\ -3 & 0{,}5 & 1{,}5 \\ -6 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$M^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -8 & 3 & 3 \\ -6 & 1 & 3 \\ -12 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

8. Calcul de l'inverse par la méthode des déterminants.

Pour inverser la matrice $M = \begin{pmatrix} -7 & 3 & 3 \\ -6 & 2 & 3 \\ -12 & 6 & 5 \end{pmatrix}$. On commence par calculer le déterminant. Il vaut 2. Puis on écrit la transposée :

$$M^t = \begin{pmatrix} -7 & -6 & -12 \\ 3 & 2 & 6 \\ 3 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

On calcule ensuite l'adjointe de la transposée, en remplaçant chaque élément de la transposée par le cofacteur correspondant (mineur affecté du signe correspondant à la place $(-1)^{\text{n° ligne + n° colonne}}$).

$$M^t* = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -6 & -12 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -7 & -12 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -7 & -6 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -6 & -12 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -7 & -12 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -7 & -6 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 3 & 3 \\ -6 & 1 & 3 \\ -12 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

L'inverse est l'adjointe de la transposée, divisée par le déterminant :

$$M^{-1} = \frac{1}{Dét(M)} M^t* = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -8 & 3 & 3 \\ -6 & 1 & 3 \\ -12 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{M^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -8 & 3 & 3 \\ -6 & 1 & 3 \\ -12 & 6 & 4 \end{pmatrix}}$$

Remarque finale.

Il y a d'autres méthodes pour calculer l'inverse d'une matrice. La plus rapide et la plus sûre est d'utiliser une calculette ou un logiciel de math ! Aux erreurs d'arrondi près, on trouve le même résultat, instantanément. Cela permet de vérifier facilement l'exactitude des calculs effectués.

EXERCICE 13.

$E = \mathbb{R}^3$ est rapporté à sa base canonique $e = \{e_1 , e_2 , e_3 \}$, f est l'endomorphisme de matrice A dans cette base :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

1. Utiliser la méthode du pivot pour montrer que cette matrice n'est pas inversible.
2. Déduire une valeur de λ pour laquelle :

$$Ker\,(f - \lambda\, id_E) \neq \{0\}.$$

3. Donner deux autres valeurs de λ vérifiant cette propriété.
4. Donner la dimension et une base de chacun de ces trois noyaux.

SOLUTION.

1°/ La matrice *A* n'est pas inversible.

La « *méthode du pivot* » consiste à faire des transformations sur les colonnes et à suivre ces transformations sur la matrice unité, jusqu'à l'obtention éventuelle d'une colonne de zéros, ou de la matrice unité.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ajouter la 2e colonne à la 3e. Ajouter 2 fois la 1e colonne à la 2e.

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 8 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Retrancher 4 fois la 2e colonne de la 3e.

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -8 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La colonne de zéros dans la matrice de droite montre que la matrice A n'est pas inversible. Elle est de rang 2.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \text{ n'est pas inversible.}$$

Le déterminant de la matrice A est 0, ce qui confirme que la matrice A n'est pas inversible.

2°/ Valeur propre λ_1.

Le noyau de l'endomorphisme f n'est pas réduit à 0, il est de dimension 1 et le calcul précédent montre que l'on a

$$f\,(-8\, e_1 - 3\, e_2 + e_3\,) = 0$$

$\lambda_1 = 0$ est valeur propre de la matrice A.

3°/ Autres valeurs propres.

La matrice de l'endomorphisme $f - \lambda\, id_E$ est $A - \lambda I = \begin{pmatrix} 2-\lambda & -4 & 4 \\ 3 & -4-\lambda & 12 \\ 1 & -1 & 5-\lambda \end{pmatrix}$.

Pour que le noyau de l'endomorphisme $f - \lambda\, id_E$ ne soit pas réduit à 0, il faut et il suffit que la matrice $A - \lambda I$ ne soit pas inversible, donc il faut et il suffit que son déterminant soit nul :

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -4 & 4 \\ 3 & -4-\lambda & 12 \\ 1 & -1 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(\lambda+4)(\lambda-5) - 48 - 12 + 4(4+\lambda) + 12(2-\lambda) + 12(5-\lambda)$$

$$P(\lambda) = -(\lambda-2)(\lambda^2 - \lambda - 20) + (4 - 12 - 12)\lambda - 48 - 12 + 16 + 24 + 60$$

$$P(\lambda) = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda^2 - 2\lambda + 20\lambda - 40 - 20\lambda + 40 = -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 2\lambda = -\lambda(\lambda^2 - 3\lambda + 2)$$

$$\boxed{P(\lambda) = -\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)}$$

L'équation $P(\lambda) = 0$ a donc trois racines simples $\lambda_1 = 0$, déjà trouvée, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 2$.

Les autres valeurs propres de la matrice A sont :
$\lambda_2 = 1$ et $\lambda_3 = 2$

Pour ces valeurs de λ, le noyau de l'endomorphisme $f - \lambda\, id_E$ n'est pas réduit à 0, car il n'est pas bijectif, sa matrice n'ayant pas un déterminant non nul.

4°/ Dimension et base des noyaux.

Notons un instant g_1 l'endomorphisme $f - \lambda_1\, id_E$, g_2 l'endomorphisme $f - \lambda_2\, id_E$, g_3 l'endomorphisme $f - \lambda_3\, id_E$. Les noyaux des endomorphismes g_1 , g_2 , g_3 sont linéairement indépendants : l'intersection de deux quelconques de ces noyaux est réduite à 0. En effet, pour tout $x \in Ker\, g_i \cap Ker\, g_j$ avec $i \neq j$:

$$x \in Ker\, g_i \cap Ker\, g_j \Rightarrow g_i(x) = 0 \text{ et } g_j(x) = 0 \Rightarrow f(x) = \lambda_i x \text{ et } f(x) = \lambda_j x \Rightarrow (\lambda_i - \lambda_j)\, x = 0$$

$$i \neq j \Rightarrow \lambda_i \neq \lambda_j$$

$$\lambda_i \neq \lambda_j \text{ et } (\lambda_i - \lambda_j)\, x = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$Ker\, g_i \cap Ker\, g_j = \{0\}$$

La somme $Ker\, g_1 + Ker\, g_2 + Ker\, g_3$ est directe et comme aucun de ces noyaux n'est réduit à 0, chacun est de dimension supérieure ou égale à 1. $Ker\, g_1 \oplus Ker\, g_2 \oplus Ker\, g_3$, somme directe de sous-espaces vectoriels non nuls, est au moins de dimension 3. Comme $Ker\, g_1 \oplus Ker\, g_2 \oplus Ker\, g_3$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, il est au plus de dimension 3. Donc $Ker\, g_1 \oplus Ker\, g_2 \oplus Ker\, g_3$ est de dimension 3. Donc les trois noyaux $Ker\, g_1$, $Ker\, g_2$, $Ker\, g_3$, sont de dimension 1.

$$\boxed{dim\,(Ker\,(f - \lambda_1\, id_E)) = dim\,(Ker\,(f - \lambda_2\, id_E)) = dim\,(Ker\,(f - \lambda_3\, id_E)) = 1}$$

Pour trouver une base dans chacun des trois noyaux, il suffit de prendre, dans chaque noyau un vecteur non nul. Cette recherche peut se faire par la méthode du pivot.

4.1. Vecteur propre pour la valeur propre $\lambda_1 = 0$.

La méthode du pivot nous a déjà indiqué que $Ker\,(f) = \mathbb{R} \times (-8\, e_1 - 3\, e_2 + e_3)$. Donc le sous-espace propre pour la valeur propre 0 a pour base le vecteur $-8\, e_1 - 3\, e_2 + e_3 = \begin{pmatrix} -8 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

4.2. Vecteur propre pour la valeur propre $\lambda_2 = 1$.

La méthode du pivot conduit à :

$$A - I = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 4 \\ 3 & -5 & 12 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Retrancher 4 fois la 1e colonne de la 3e. Ajouter 4 fois la 1e colonne à la 2e.

$$\downarrow \qquad \downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 4 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ce calcul montre que la matrice $A - I$ est de rang 2, donc le noyau de $f - id_E$ est de dimension 1. Le noyau de l'endomorphisme $f - id_E$ est engendré par le vecteur $-4\, e_1 + e_3 = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

4.3. Vecteur propre pour la valeur propre $\lambda_3 = 2$.

La méthode du pivot conduit à :

$$A - 2\, I = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 4 \\ 3 & -6 & 12 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ajouter la 3e colonne à la 2e.

$$\downarrow \qquad \downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 3 & 6 & 12 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Retrancher 2 fois la 1e colonne de la 2e.

$$\downarrow \qquad \downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 12 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ce calcul montre :

- que la matrice $A - 2\, I$ est de rang 2,
- que le noyau de l'endomorphisme $f - 2\, id_E$ et de dimension 1 et engendré par le vecteur $-2\, e_1 + e_2 + e_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

EXERCICE 14.

Pour chacune des propositions suivantes 1 à 13, indiquez si vous pensez que l'assertion proposée est vraie ou fausse et donnez une justification de votre choix.

1. La matrice A définie par

$$A = \begin{pmatrix} \cos a \cos b & -\sin a & -\cos a \sin b \\ \sin a \cos b & \cos a & -\sin a \sin b \\ \sin b & 0 & \cos b \end{pmatrix}$$

est toujours inversible.

2. L'image et le noyau d'une application linéaire forment une somme directe.

3. Si f est un endomorphisme de E, alors le noyau de f^k ($k > 1$) contient le noyau de f.

4. Le rang d'une application linéaire de E dans F est égal à la dimension de F si f est injective.

5. Le rang d'une application linéaire de E dans F est égal à la dimension de E si f est injective.

6. Le rang d'une application linéaire de E dans F est égal à la dimension de E si f est surjective.

7. Une matrice à n lignes et p colonnes de nombres réels peut être la matrice d'une application linéaire de $\mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{C}^p$ ($n > p$).

8. Le rang de la matrice A^k, avec $A = \begin{pmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{pmatrix}$ est égal à 2, pour $k \geq 1$.

9. La matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ donne un contre-exemple de l'assertion : le noyau et l'image d'un endomorphisme forment une somme directe.

10. L'application identique n'a pas toujours pour matrice la matrice unité.

11. On note A^t la transposée de la matrice A. Si A est réelle, la trace de la matrice $A A^t$ est positive.

12. Si une matrice à éléments dans un corps K est inversible, il en est de même de sa transposée.

13. Si f et g sont des endomorphismes d'un espace vectoriel E sur un corps K tels que $f \circ g = g \circ f$, alors $f(Im(g))$ est un sous-espace vectoriel de E contenu dans l'image de g.

SOLUTION.

1. Matrice inversible.

Vrai.

Le déterminant de la matrice A vaut $\cos^2 a \cos^2 b + \sin^2 a \sin^2 b + \cos^2 a \sin^2 b + \sin^2 a \cos^2 b = 1$, la matrice est inversible.

2. Somme du noyau et de l'image d'un endomorphisme.

Faux.

La somme du noyau et de l'image d'un endomorphisme n'est directe que si le noyau de f^2 est égal au noyau de f. (Voir Séance 7, Exercice 2).

3. Noyau de la puissance k-ième d'un endomorphisme.

Vrai.

Nous avons démontré (Séance 8, Exercice 1) que les noyaux des f^k forment une chaîne croissante de sous-espaces vectoriels : $f(x) = 0 \Rightarrow f^k(x) = f^{k-1}(f(x)) = f^{k-1}(0) = 0$.

4. Rang d'un monomorphisme.

Faux.

L'image d'un monomorphisme est isomorphe à l'espace vectoriel de définition : le rang, dimension de l'image, est donc égal à la dimension de l'espace de définition E, et non à la dimension de l'espace d'arrivée F.

5. Rang d'un monomorphisme.

Vrai.

L'image d'un monomorphisme est isomorphe à l'espace vectoriel de définition : le rang, dimension de l'image, est donc égal à la dimension de l'espace de définition E.

6. Rang d'un épimorphisme.

Faux.

L'image d'un épimorphisme est égal à l'espace vectoriel d'arrivée F : le rang, dimension de l'image, est donc égal à la dimension de l'espace d'arrivée F, et non à la dimension de l'espace de départ E.

7. Application linéaire définie par une matrice.

Faux.

La matrice a pour colonne les composantes des images des vecteurs de la base de l'espace de départ dans la base de l'espace d'arrivée : une matrice à p colonnes donne donc les images des p vecteurs de base de l'espace de départ, les n lignes correspondent aux composantes sur les n vecteurs de l'espace d'arrivée. Une matrice à n lignes et p colonnes représente donc une application linéaire de $\mathbb{C}^p$ dans $\mathbb{C}^n$ et non une application linéaire de $\mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{C}^p$.

8. Rang de la matrice A^k.

Vrai.

La matrice A a pour déterminant 1, elle est donc de rang 2. L'image de R^2 par A est donc R^2 : on pourra appliquer A autant de fois qu'on le désire, l'image restera R^2. La matrice A^k est donc de rang 2.

9. Somme du noyau et de l'image d'un endomorphisme.

Vrai.

La deuxième colonne est l'image du vecteur de base e_2 : $A\ e_2 = f(e_2) = 0$. La première colonne est l'image du vecteur de base e_1 : $A\ e_1 = f(e_1) = e_2$. Les relations $f(e_2) = 0$ et $f(e_1) = e_2$ montrent que le vecteur e_2 appartient à la fois au noyau de l'endomorphisme f de matrice A et à son image. Cette intersection n'est donc pas réduite à 0. La somme du noyau et de l'image n'est pas une somme directe : $Ker(f) \cap Im(f) \neq \{0\}$.

10. Matrice de l'application identique.

Vrai.

L'application identique n'a pour matrice la matrice unité que si l'on prend, au départ et à l'arrivée, la même base. Mais si l'on change de base, la matrice de l'application identique $[id_E, \{b\}, \{a\}]$ est la matrice du changement de base : elle a pour colonnes les composantes des vecteurs de la base b dans la base a.

11. Trace d'une matrice $A\ A^t$.

Vrai.

Soient a_{ij} , $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq p$, les éléments de la matrice A à n lignes et p colonnes.
Les éléments de A^t sont a_{ij} , $1 \leq j \leq p$, $1 \leq i \leq n$. A^t est une matrice à p lignes et n colonnes.
Le produit $A\ A^t$ possède n lignes et n colonnes. L'élément b_{hk} de la h-ième ligne et k-ième colonne est donné par : $b_{hk} = \sum_{j=1}^{j=p} a_{hj}\ a_{kj}$. En particulier, les éléments de la diagonale sont $b_{hh} = \sum_{j=1}^{j=p} (a_{hj})^2$: ils sont positifs. La trace de la matrice $A\ A^t$, qui est la somme des éléments de la diagonale, est, elle aussi, positive.

12. Inverse de la transposée (contragrédient).

Vrai.

L’inverse de la transposée d’une matrice *A*, qui s’appelle le *contragrédient* de *A*, est la transposée de l’inverse de la matrice *A* :

$$A\,A^{-1} = I \Rightarrow (A\,A^{-1})^t = I^t = I.$$
$$(A\,A^{-1})^t = (A^{-1})^t A^t \Rightarrow (A^{-1})^t A^t = I \Rightarrow (A^{-1})^t = (A^t)^{-1}.$$

13. Endomorphismes qui commutent.

Vrai.

$$f(Im(g)) = \{x \in E \mid (\exists y \in E)(x = f(g(y))\} = Im(f \circ g) = Im(g \circ f) = g(Im(f)) \subset Im\, g = g(E).$$

Exercices

Calcul matriciel.

1. Définition.
2. Interprétation.
3. Somme de deux matrices.
4. Produit de deux matrices.
5. Algèbre des matrices carrées.
6. Valeurs propres et vecteurs propres.
7. Déterminant.
8. Polynôme caractéristique.
9. Polynôme minimal et théorème de Cailey-Hamilton.

1 Définition d'une matrice.

Une matrice à éléments réels (resp. complexes) est un tableau (à *n* colonnes et *m* lignes) de nombres réels (resp. complexes).

HAUT

2 Interprétation d'une matrice.

HAUT

Une matrice M à n colonnes et m lignes peut toujours s'interpréter comme une **application linéaire** h de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$.

Etant donnée une base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de $\mathbb{R}^n$ et une base $\{f_1, \ldots, f_m\}$ de $\mathbb{R}^m$, la i^e colonne de la matrice M est formée des m coordonnées de l'image $h(e_i)$ du vecteur e_i dans la base $\{f_1, \ldots, f_m\}$ de $\mathbb{R}^m$.

Pour $x = \sum_{i=1}^{i=n} x_i e_i$, $h(x) = \sum_{i=1}^{i=n} x_i h(e_i)$.
En notant $h_{ij} = \langle h(e_i), f_j \rangle$, la coordonnée du vecteur $h(e_i)$ sur le vecteur de base f_j de $\mathbb{R}^m$, on a :

$$h(e_i) = \sum_{j=1}^{j=m} h_{ij} f_j .$$

$$h(x) = \sum_{i=1}^{i=n} x_i h(e_i) = \sum_{i=1}^{i=n} x_i \sum_{j=1}^{j=m} h_{ij} f_j$$

$$= \sum_{j=1}^{j=m} \left(\sum_{i=1}^{i=n} h_{ij} x_i \right) f_j ,$$

de sorte que si l'on identifie le vecteur x avec la matrice $1 \times n$ $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ de ses coordonnées x_i dans la base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de $\mathbb{R}^n$, le vecteur $h(x)$ avec la matrice $1 \times m$ $\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{i=n} h_{i1} x_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{i=n} h_{im} x_i \end{pmatrix}$ de ses coordonnées dans la base $\{f_1, \ldots, f_m\}$ de $\mathbb{R}^m$, on obtient la relation :

$$h(x) = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{i=n} h_{i1} x_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{i=n} h_{im} x_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{11} & \cdots & h_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{1m} & \cdots & h_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = M\,x.$$

La matrice M s'appelle la matrice de h relativement aux bases

$\{e\} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ de $\mathbb{R}^n$ et $\{f\} = \{f_1, \ldots, f_m\}$ de $\mathbb{R}^m$:

$$M = [h, \{e\}, \{f\}].$$

L'image de h est appelée l'**image** de M, le noyau de h est appelé le **noyau** de M.
Le rang de h (dimension de son image) est appelé le **rang** de M.

HAUT

3 Somme de deux matrices.

HAUT

Etant données une base de $\mathbb{R}^n$ et une base de $\mathbb{R}^m$, on peut identifier une application linéaire à sa matrice relativement à ces bases, transportant ainsi dans l'ensemble des matrices à *n* colonnes et *m* lignes la **structure d'espace vectoriel** de $\mathcal{L}(E, F)$:

$$[h^j_i] + [h'^j_i] = [h^j_i + h'^j_i]$$

$$\lambda [h^j_i] = [\lambda h^j_i]$$

Règles :
Pour additionner deux matrices, on additionne les composantes correspondantes.
Pour multiplier une matrice par un scalaire, on multiplie chaque composante par le scalaire.

HAUT

4 Produit de deux matrices.

HAUT

Soient E, F, G, des espaces vectoriels de dimensions finies n, m, p, de bases respectives :
$\{e\} = \{e_1, \dots, e_n\}$, $\{f\} = \{f_1, \dots, f_m\}$, $\{g\} = \{g_1, \dots, g_p\}$
Soit $h : E \longrightarrow F$ et $h' : F \longrightarrow G$ deux applications linéaires.

La matrice de l'application linéaire $h' \circ h : E \longrightarrow G$, relativement aux bases $\{e\}$et $\{g\}$, s'appelle le **produit des matrices** $[\, h', \{f\}, \{g\}\,]$ et $[\, h, \{e\}, \{f\}\,]$:

$$[\, h', \{f\}, \{g\}\,] \times [\, h, \{e\}, \{f\}\,] = [\, h' \circ h, \{e\}, \{g\}\,]$$

Pour que la multiplication de deux matrices soit possible, il faut (et il suffit) que le nombre de colonnes de la première soit égal au nombre de lignes de la deuxième.

L'élément de la i-ème colonne, j-ème ligne de la matrice produit est la composante de $(h' \circ h)(e_i)$ sur le vecteur de base g_j :

$$h(e_i) = \sum_{k=1}^{k=p} h_{ki} f_k \; ; \; h'(h(e_i)) = \sum_{k=1}^{k=p} h_{ki} h'(f_k)$$

La composante sur g_j est : $(h' \circ h)_{ji} = \sum_{k=1}^{k=p} h'_{jk} h_{ki}$.

On l'obtient en prenant les éléments de la j-ème ligne de $[\, h', \{f\}, \{g\}\,]$, les éléments de la i-ème colonne de $[\, h, \{e\}, \{f\}\,]$, en les multipliant terme à terme et en additionnant.

Si $E = F = G$, les matrices des endomorphismes sont des matrices carrées : le produit des matrices qu'on vient de définir, donne à l'ensemble des matrices carrées à n colonnes et n lignes, une **structure d'algèbre** (anneau unitaire + espace vectoriel). L'élément unité de cette algèbre est la matrice de l'application identique (matrice comportant des 0 partout, sauf sur la diagonale principale, où il y a des 1), qu'on appelle, bien sûr, la **matrice unité**.

HAUT

5 Algèbre des matrices carrées.

Les **matrices des endomorphismes** d'un espace vectoriel relativement à une base, sont des **matrices carrées** : le produit de deux matrices carrées à *n* colonnes et *n* lignes existe toujours, c'est une matrice carrée ayant *n* colonnes et *n* lignes. La multiplication des matrices donne à l'ensemble des matrices carrées à *n* colonnes et *n* lignes, une **structure d'algèbre** (anneau unitaire + espace vectoriel).

L'élément unité de cette algèbre est la matrice de l'application identique (matrice comportant des 0 partout, sauf sur la diagonale principale, où il y a des 1), qu'on appelle, bien sûr, la **matrice unité**.

Cette algèbre possède des **éléments inversibles** qui sont les matrices des bijections linéaires de *E* dans *E* (isomorphismes).

HAUT

6 Valeurs propres et vecteurs propres.

Si f est un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie n, on appelle **vecteur propre** associé à la **valeur propre** λ, tout vecteur **non nul** v vérifiant :

$$f(v) = \lambda v.$$

On appelle **valeur propre d'une matrice carrée** M, toute valeur propre de l'endomorphisme qui lui est associé, et vecteur propre de M, tout vecteur propre de l'endomorphisme qui lui est associé.

Les vecteurs propres associés à une valeur propre λ engendrent un sous-espace vectoriel appelé le **sous-espace propre** associé à la valeur propre λ.
La dimension du sous-espace propre associé à une valeur propre λ est appelée l'**ordre de multiplicité de la valeur propre** λ.
Le sous-espace propre associé à la valeur propre λ est le noyau de l'endomorphisme $f - \lambda Id_E$.
Si f n'est pas injective, le noyau de f est le sous-espace propre associé à la valeur propre 0.
La restriction de f au sous-espace propre associé à la valeur propre λ, est une homothétie de rapport λ.

S'il existe une **base formée de vecteurs propres**, **la matrice de *f* est diagonalisable**.

HAUT

7 Déterminant d'un endomorphisme.

HAUT

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie n, de base $\{e_1, \dots, e_n\}$, de base duale $\{e'^1, \dots, e'^n\}$, et soit $\mathfrak{S}_n$ le groupe symétrique de degré n.

Soit $\{x_1, \dots, x_n\}$ une famille de n vecteurs de E.
On appelle **déterminant de la famille de vecteurs**, le nombre

$$[x_1, \dots, x_n] = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} sgn\,(\sigma)\, e'^{\sigma(1)}(x_1) \dots e'^{\sigma(n)}(x_n)$$

Ce nombre ne dépend pas de la base choisie, et, pour rappeler la liaison avec le produit vectoriel de deux vecteurs, on note :

$$x_1 \wedge \dots \wedge x_n = [x_1, \dots, x_n]\, e_1 \wedge \dots \wedge e_n.$$

Si f est un endomorphisme de E, on appelle **déterminant de l'endomorphisme** f, le nombre réel

$$dét\,(f) = [\,f(e_1), \dots, f(e_n)\,]$$
$$f(x_1) \wedge \dots \wedge f(x_n) = dét\,(f)\, x_1 \wedge \dots \wedge x_n.$$

Le déterminant d'un endomorphisme est égal au **produit des valeurs propres** (avec leurs ordres de multiplicité). Un endomorphisme est bijectif si, et seulement si, son déterminant est différent de 0.

Si A est une matrice carrée $n \times n$, on appelle **déterminant de la matrice** A, le déterminant de la famille de vecteurs représentés par les colonnes de la matrice A : c'est aussi le déterminant de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$, dont A est la matrice dans la base canonique. Une matrice est inversible si, et seulement si, son déterminant est différent de 0.

HAUT

8 Polynôme caractéristique d'un endomorphisme.

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie n.
Soit λ un nombre réel et soit Id_E l'application identique de E.
Le déterminant de $f - \lambda\, Id_E$ est la valeur pour $X = \lambda$, d'un polynôme $P[X]$ de degré n qu'on appelle le **polynôme caractéristique** de f.

Les valeurs propres de f sont les racines de son polynôme caractéristique.

Pour qu'un endomorphisme f soit **triangulaire**, c'est-à-dire pour qu'il existe une base dans laquelle la matrice de f ne comporte que des 0 en dessous de la diagonale, il faut et il suffit que son polynôme caractéristique soit produit de facteurs du premier degré (c'est toujours le cas dans les espaces vectoriels complexes).

Pour un endomorphisme triangulaire, le polynôme caractéristique s'écrit sous la forme :

$$P[X] = \prod_{i=1}^{i=k} (X - \lambda_i)^{n_i}$$

où les λ_i, $i = 1, \ldots, k$, sont les valeurs propres de f et les n_i les ordres de multiplicité correspondants.

HAUT

9 Polynôme minimal et théorème de Cailey-Hamilton.

HAUT

Si $P\,[X]$ est le polynôme caractéristique d'un endomorphisme f d'un espace vectoriel E de dimension finie n, le **théorème de Cailey-Hamilton** affirme alors que ***f* est solution de son polynôme caractéristique** :

$$P\,(f\,) = 0$$

L'anneau des polynômes est un **anneau principal** (tout idéal est monogène).
L'ensemble des polynômes dont f est solution est un idéal.
Donc il existe un polynôme de degré minimal dont f est solution : ce polynôme est appelé le **polynôme minimal** de f.

Lorsque f est triangulaire, le polynôme caractéristique de f est produit de facteurs du premier degré :

$$P\,[X] = \prod_{i=1}^{i=k} (X - \lambda_{i})^{n_i}.$$

Il existe des nombres minimaux $m_i \leqslant n_i$, $i = 1, \ldots, k$, tels que :

$$\prod_{i=1}^{i=k} (f - \lambda_i\, Id_E)^{m_i} = 0$$

Le polynôme $\prod_{i=1}^{i=k} (X - \lambda_{i})^{m_i}$ est le **polynôme minimal** de f.

$$E = \bigoplus_{i=1}^{i=k} Ker\,((f - \lambda_i\, Id_E)^{n_i})$$

HAUT

Chapitre 4. Calcul matriciel.

Exercices

Exercice 1. Matrice d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$.
Exercice 2. Inversion de deux matrices 3×3.
Exercice 3. Matrice d'une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$.
Exercice 4. Matrice d'une forme linéaire.
Exercice 5. Produit de deux matrices parmi 5.
Exercice 6. Puissance n-ième d'une matrice 3×3.
Exercice 7. Puissance 100 d'une matrice 2×2.
Exercice 8. Rang d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
Exercice 9. Rang d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^4$.
Exercice 10. Puissance n-ième d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^4$.
Exercice 11. Noyau et image d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
Exercice 12. Puissance n-ième d'un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.
Exercice 13. Somme directe du noyau et de l'image d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 1. Matrice d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$.

Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ l'endomorphisme dont la matrice par rapport à la base canonique $\{e_1, e_2\}$ de $\mathbb{R}^2$ est $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Si $u = x\,e_1 + y\,e_2$, que vaut $f(u)$?	Solution

HAUT

Exercice 2. Inversion de deux matrices 3 × 3.

Déterminer si les matrices suivantes sont inversibles et, si oui, donner leur inverse :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} ; B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 5 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

Solution

HAUT

Exercice 3. Matrice d'une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$.

Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'application définie par

$$f(x_1, x_2) = (2x_1 + x_2, x_1, 3x_1 + x_2).$$

Vérifier que f est linéaire.
Ecrire la matrice de f par rapport aux bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.

Solution

HAUT

Exercice 4. Matrice d'une forme linéaire.

Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une forme linéaire. Ecrire la matrice de f par rapport aux bases canoniques de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}$. Si $x = (x_1, \ldots, x_n)$, que vaut $f(x)$?	Solution

HAUT

Exercice 5. Produit de deux matrices parmi cinq.

Calculer tous les produits possibles de deux matrices choisies parmi les cinq suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, D = (1 \quad 1 \quad -1), E = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Solution

HAUT

Exercice 6. Puissance n-ième d'une matrice 3×3.

On considère dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ les deux matrices définies par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Solution

1°/ Calculer B^3.

2°/ En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3°/ Montrer que A est inversible et calculer A^{-1}.

4°/ Vérifier que la formule trouvée en 2° est encore vraie pour $n = -1$.

HAUT

Exercice 7. Puissance 100 d'une matrice 2 × 2.

Soit A la matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}.$$

Calculer A^{100}.

Solution

HAUT

Exercice 8. Rang d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\{e_1, e_2, e_3\}$ est :

$$A = \begin{pmatrix} -11 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 11 \\ 1 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

Solution

1°/ Calculer $7\,u(e_1) + 11\,u(e_2)$. En déduire que $\{u(e_1), u(e_2)\}$ constitue une base de $Im(u)$. Quel est le rang de u ?
2°/ Quelle est la dimension de $Ker(u)$? Déterminer une base de $Ker(u)$.

HAUT

Exercice 9. Rang d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^4$.

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 5 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 6 & 10 \\ 3 & 0 & -6 & -3 \end{pmatrix}.$$

Solution

1°/ Calculer $u(e_1) + u(e_2) + u(e_3)$. En déduire que $\{u(e_1), u(e_2), u(e_3)\}$ constitue une base de $Im(u)$. Quel est le rang de u ?
2°/ On pose $x_0 = e_1 + e_2 + e_3 - e_4$. Calculer $u(x_0)$. En déduire $Ker(u)$.

HAUT

Exercice 10. Puissance *n*-ième d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^4$.

On désigne par f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice par rapport à la base canonique de $\mathbb{R}^4$ est :

$$M = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 1 & 2 \\ -3 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Solution

1°/ Quelle est l'application $f^3 + 2f^2 - f - 2\,Id_{\mathbb{R}^4}$?

2°/ Montrer que f est bijective et donner la matrice de f^{-1}.

3°/ Montrer que $\{Id_{\mathbb{R}^4}, f, f^2\}$ est une famille libre dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$.

4°/ Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe des nombres réels α_n, β_n, γ_n, tels que $f^n = \alpha_n f^2 + \beta_n f + \gamma_n Id_{\mathbb{R}^4}$.

HAUT

Exercice 11. Noyau et image d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

On désigne par $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ une base de $\mathbb{R}^3$.

On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base B est :

$$A = \begin{pmatrix} -8 & -8 & -12 \\ -2 & 0 & -2 \\ 9 & 8 & 13 \end{pmatrix}.$$

1°/ Déterminer *Ker* (f); Donner la dimension et une base de *Ker* (f).
2°/ Quel est le rang de f ? Donner une base de *Im* (f).
3°/ Montrer que $\mathbb{R}^3 = Im(f) \oplus Ker(f)$.
4°/ On considère les 3 vecteurs :

$$v_1 = e_1 - e_2 + e_3,\ v_2 = -6\,e_1 + 3\,e_3,\ v_3 = 2\,e_1 + e_2 - 2\,e_3.$$

Montrer que $\{v_1, v_2, v_3\}$ est une base B' de $\mathbb{R}^3$.
5°/ a) On pose $w = -4\,e_1 - 6\,e_2 + 7\,e_3$.
Calculer $f(w)$ en fonction de w.
b) Exprimer $f(v_1)$, $f(v_2)$, $f(v_3)$, en fonction de v_1, v_2, v_3.
Donner la matrice A' de f dans la base B'.
6°/ Ecrire la matrice de passage P de la base B à la base B'. Calculer P^{-1}.
7°/ Retrouver A' en utilisant P et P^{-1}.

Solution

HAUT

Exercice 12. Puissance *n*-ième d'un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.

E est un espace vectoriel de dimension 3 sur $\mathbb{R}$ dont on désigne par B la base $\{e_1, e_2, e_3\}$.
On considère un endomorphisme f de E dont la matrice dans la base B est :

$$A = \begin{pmatrix} -7 & -4 & 4 \\ 8 & 5 & -4 \\ -12 & -6 & 7 \end{pmatrix}.$$

1°/ Montrer que $f \circ f = 4f - 3\,Id_E$.

2°/ Montrer que f est un automorphisme de E et exprimer f^{-1} en fonction de f et Id_E.

3°/ a) Montrer que $Ker\,(f - Id_E) \cap Ker\,(f - 3\,Id_E) = \{0_E\}$.

b) Montrer que $Ker\,(f - Id_E)$ et $Ker\,(f - 3\,Id_E)$ sont supplémentaires dans E.

4°/ On pose

$v_1 = e_1 - e_2 + e_3$, $v_2 = 2e_1 - e_2 + 3e_3$, $v_3 = 2e_1 - 2e_2 + 3e_3$.

Montrer que $\{v_1, v_2, v_3\}$ est une base de E que l'on notera B'.

5°/ Déterminer la matrice A' de f dans la base B'.

6°/ Ecrire la matrice P de passage de la base B à la base B'. Calculer P^{-1}.

7°/ Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Solution

HAUT

Exercice 13. Somme directe du noyau et de l'image d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^4$.

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Solution

1°/ On pose $a = u(e_3)$, $b = u(e_4)$. Montrer que $\{a, b\}$ est une base de $Im(u)$.
En déduire la dimension, ainsi qu'une base de $Ker(u)$.
2°/ Calculer A^2; On pose $a' = u^2(e_3)$, $b' = u^2(e_4)$. Montrer que $\{a', b'\}$ est une base de $Im(u^2)$.
3°/ Montrer que $Ker(u) = Ker(u^2)$.
4°/ En déduire que $Ker(u) \cap Im(u) = \{0\}$.
5°/ Montrer que $\mathbb{R}^4 = Ker(u) \oplus Im(u)$.

HAUT

Chapitre 4. Calcul matriciel.

Enoncés.

Exercice 1. Matrice d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$.

Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ l'endomorphisme dont la matrice par rapport à la base canonique $\{e_1, e_2\}$ de $\mathbb{R}^2$ est $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Si $u = x\,e_1 + y\,e_2$, que vaut $f(u)$?	

Solution.

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ u = x\,e_1 + y\,e_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Dans la matrice A, la première colonne, $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, est l'image de e_1 par f :

$$f(e_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = A\,e_1,$$

Dans la matrice A, la deuxième colonne, $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, est l'image de e_2 par f :

$$f(e_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = A\,e_2.$$

Par linéarité de f :

$$f(u) = f(x\,e_1 + y\,e_2) = x\,f(e_1) + y\,f(e_2) = A(x\,e_1 + y\,e_2) = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$f(u) = A\,u = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + 2y \\ x + 3y \end{pmatrix} = (2x + 2y)\,e_1 + (x + 3y)\,e_2.$$

Chapitre 4. Calcul matriciel.

Enoncés.

Exercice 2. Inversion de deux matrices 3 × 3.

Déterminer si les matrices suivantes sont inversibles et, si oui, donner leur inverse : $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 5 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}$	

Solution.

1°/ Matrice *A*.

La première colonne, $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$, de la matrice *A* est l'image du vecteur de base $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ par l'endomorphisme *f* de $\mathbb{R}^3$ dont *A* est la matrice dans la base canonique. C'est le produit de la matrice *A* par la matrice $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

De même, la deuxième colonne de *A* est le produit de *A* par la matrice $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, et la troisième colonne de *A* est *A* $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Par linéarité le produit de *A* par un vecteur $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ donne un vecteur colonne égal à *a* fois la première colonne de *A*, plus *b* fois la seconde, plus *c* fois la troisième.

Quand on écrit $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, on obtiendra, dans la matrice de gauche, des 0 sur la première ligne en additionnant, à la deuxième et à la troisième colonnes, deux fois la première, opération qu'il faut faire aussi, par linéarité, sur la matrice de droite, pour que reste valable l'égalité :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & -6 \\ -2 & -6 & -3 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Soustrayons maintenant deux fois la deuxième colonne de la troisième colonne, dans les deux matrices :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & 0 \\ -2 & -6 & 9 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice de gauche est triangulaire, elle n'a que des 0 au-dessus de la diagonale et elle n'a pas de 0 sur la diagonale.
Les trois vecteurs colonnes de la matrice de gauche forment donc une famille libre de trois vecteurs, donc une base de $\mathbb{R}^3$.
Les trois vecteurs colonnes de la matrice à droite de *A* forment aussi une famille libre, donc une base de $\mathbb{R}^3$.
Ainsi, l'image par *A* d'une base de $\mathbb{R}^3$ est une base de $\mathbb{R}^3$: *A* est donc la **matrice d'un automorphisme**, *A* est inversible.

La matrice *A* est inversible.

Pour trouver l'inverse de la matrice *A*, il faut poursuivre les opérations entreprises jusqu'à obtenir, dans le membre de gauche, la matrice unité.

Divisons par – 3 la deuxième colonne, et par 9 la troisième colonne :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{9} \\ 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{9} \\ 0 & 0 & \frac{1}{9} \end{pmatrix}$$

Ajoutons, à la première colonne, 2 fois la deuxième colonne :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{9} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{9} \\ 0 & 0 & \frac{1}{9} \end{pmatrix}$$

Enfin, soustrayons, de la première et de la deuxième colonnes, deux fois la troisième colonne :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} & -\frac{2}{9} \\ -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} \\ -\frac{2}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix} = \frac{1}{9} A \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} = A \times \frac{1}{9} A.$$

La matrice *A* est inversible, son inverse est $\frac{1}{9} A$.

Remarque.

Le déterminant de la matrice *A* est – 27 : il n'est pas nul, donc la matrice *A* est inversible.
On pourrait calculer l'inverse par la méthode des déterminants, en remplaçant dans la transposée de *A*, chaque élément par le mineur correspondant affecté du signe correspondant à sa position.

2°/ Matrice *B*.

Opérons, pour la matrice *B*, comme nous l'avons fait pour la matrice *A* :

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 5 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ajoutons à la deuxième colonne deux fois la première :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 5 \\ 2 & 8 & 8 \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Soustrayons la deuxième colonne de la troisième :

$$\boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 2 & 8 & 0 \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

Cette égalité montre :

— que le vecteur $\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ forme une **base du noyau** de l'endomorphisme *g* de matrice *B* dans la base canonique,

— que les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}$ qui forment, évidemment, une famille libre, forment une **base de l'image** de *g*.

Ainsi ***g* est de rang 2** : ce n'est pas un automorphisme et sa matrice *B* n'est pas inversible.

La matrice *B* n'est pas inversible, elle est de rang 2.

La famille de vecteurs $\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}$, a pour déterminant $-15 \neq 0$: c'est une base et $\mathbb{R}^3 = Ker\,(g) \oplus Im\,(g)$.

Chapitre 4. Calcul matriciel.

Enoncés.

Exercice 3. Matrice d'une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$.

Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'application définie par

$$f(x_1, x_2) = (2x_1 + x_2, x_1, 3x_1 + x_2).$$

Vérifier que f est linéaire.
Ecrire la matrice de f par rapport aux bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.

Solution.

1°/ Linéarité.

Soit $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ et λ un nombre réel.

$$\begin{aligned} f(x + \lambda y) &= f(x_1 + \lambda y_1, x_2 + \lambda y_2) \\ &= (2(x_1 + \lambda y_1) + (x_2 + \lambda y_2), x_1 + \lambda y_1, 3(x_1 + \lambda y_1) + (x_2 + \lambda y_2)) \\ &= (2x_1 + x_2 + \lambda(2y_1 + y_2), x_1 + \lambda y_1, 3x_1 + x_2 + \lambda(3y_1 + y_2)) \\ &= (2x_1 + x_2, x_1, 3x_1 + x_2) + \lambda(2y_1 + y_2, y_1, 3y_1 + y_2) \\ &= f(x) + \lambda f(y) \end{aligned}$$

Et la relation $f(x + \lambda y) = f(x) + \lambda f(y)$, pour tout x, tout y et tout λ, montre que f est linéaire.

2°/ Matrice.

$$\begin{aligned} f(e_1) &= f(1, 0) = (2, 1, 3) \\ f(e_2) &= f(0, 1) = (1, 0, 1) \end{aligned}$$

La première colonne de la matrice de f est formée des coordonnées de $f(e_1)$,
la deuxième colonne de la matrice de f est formée des coordonnées de $f(e_2)$.

La matrice de f par rapport aux bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ est donc :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Chapitre 4. Calcul matriciel.

Enoncés.

Exercice 4. Matrice d'une forme linéaire.

Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une forme linéaire. Ecrire la matrice de f par rapport aux bases canoniques de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}$. Si $x = (x_1, \ldots, x_n)$, que vaut $f(x)$?	

Solution.

Soit $\{e_1, \ldots, e_n\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Pour tout i, $1 \leq i \leq n$, $f(e_i)$ est un nombre réel.

Pour tout i, $1 \leq i \leq n$, la matrice de f possède, pour i-ème colonne, les coordonnées de $f(e_i)$ sur la base canonique de $\mathbb{R}$. La base canonique de $\mathbb{R}$ est le nombre réel 1. Or $f(e_i)$ a pour coordonnée $f(e_i)$ sur 1.

Donc la matrice de la forme linéaire f par rapport aux bases canoniques de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}$ est :

$$A = (f(e_1) \quad \ldots \quad f(e_n))$$

et, pour un $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $f(x)$ est donné par :

$$f(x) = \sum_{i=1}^{i=n} x_i f(e_i) = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Chapitre 4. Calcul matriciel.

Enoncés.

Exercice 5. Produit de deux matrices parmi cinq.

Calculer tous les produits possibles de deux matrices choisies parmi les cinq suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, D = (1 \quad 1 \quad -1), E = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Solution.

1°/ Produits possibles.

La matrice A possède 2 colonnes et 3 lignes : c'est donc la matrice d'une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$: $A : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$.
De même $B : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $C : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $D : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, $E : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$.

Le produit de deux matrices est la matrice de l'application composée.
Les produits possibles de deux matrices prises parmi les cinq matrices proposées sont donc :

$B\,A : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$. $B\,A$ est une matrice à 2 colonnes et 2 lignes.
$C\,A : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$. $C\,A$ est une matrice à 2 colonnes et 3 lignes.
$D\,A : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$. $D\,A$ est une matrice à 2 colonnes et 1 ligne.
$A\,B : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$. $A\,B$ est une matrice à 3 colonnes et 3 lignes.
$B\,C : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$. $B\,C$ est une matrice à 3 colonnes et 2 lignes.
$C\,C : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$. $C\,C$ est une matrice à 3 colonnes et 3 lignes.
$D\,C : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$. $D\,C$ est une matrice à 3 colonnes et 1 ligne.
$E\,D : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$. $E\,D$ est une matrice à 3 colonnes et 3 lignes.
$B\,E : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$. $B\,E$ est une matrice à 1 colonne et 2 lignes.
$C\,E : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$. $C\,E$ est une matrice à 1 colonne et 3 lignes.
$D\,E : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$. $D\,E$ est une matrice à 1 colonne et 1 ligne, donc un nombre réel.

2°/ Matrices produits.

Calculons les 11 produits possibles.

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$CA = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ -2 & -2 \\ 14 & 2 \end{pmatrix}$$

$$DA = (1 \quad 1 \quad -1)\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = (0 \quad -2)$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

$$BC = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -2 & -3 & -5 \end{pmatrix}$$

$$CC = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 4 \\ 1 & -1 & -2 \\ 7 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

$$DC = (1 \quad 1 \quad -1)\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = (2 \quad -1 \quad -3)$$

$$ED = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}(1 \quad 1 \quad -1) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$BE = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$CE = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$DE = (1 \quad 1 \quad -1)\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = -3.$$

Chapitre 4. Calcul matriciel.

Enoncés.

Exercice 6. Puissance *n*-ième d'une matrice 3 × 3.

On considère dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ les deux matrices définies par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1°/ Calculer B^3.
2°/ En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3°/ Montrer que A est inversible et calculer A^{-1}.
4°/ Vérifier que la formule trouvée en 2° est encore vraie pour $n = -1$.

Solution.

1°/ Calcul de B^3.

Commençons par calculer B^2.

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2°/ Calcul de A^n.

Soit $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice unité : $A = I + B$.

$$A^0 = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ par convention.}$$

$$A^1 = A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = (I+B)^2 = I^2 + 2B + B^2 = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}0&1&2\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&2&5\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$A^3 = (I+B)^3 = I^3 + 3B + 3B^2 + B^3 = I + 3B + 3B^2 = \begin{pmatrix}1&3&9\\0&1&3\\0&0&1\end{pmatrix}$$

et, par récurrence, en limitant la formule du binôme aux trois premiers termes, les seuls qui ne soient pas nuls :

$$A^n = I + nB + \frac{n(n-1)}{2}B^2 = \begin{pmatrix}1&n&2n+\frac{n(n-1)}{2}\\0&1&n\\0&0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&n&\frac{n(n+3)}{2}\\0&1&n\\0&0&1\end{pmatrix}$$

Et comme la formule est vraie pour $n = 0$, elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{A^n = \begin{pmatrix}1&n&\frac{n(n+3)}{2}\\0&1&n\\0&0&1\end{pmatrix},\ n \in \mathbb{N}.}$$

3°/ Inverse de *A*.

A est une matrice triangulaire supérieure (il n'y a que des 0 en-dessous de la diagonale principale).
Le déterminant de *A* est donc le produit des éléments de la diagonale : il vaut 1 et n'est pas nul.
Pour qu'une matrice soit inversible, il faut et il suffit que son déterminant ne soit pas nul.
Donc **la matrice *A* est inversible**.

On peut raisonner autrement pour atteindre le même résultat.
Comme la matrice *A* est une matrice triangulaire supérieure avec des éléments non nuls sur la diagonale principale, aucune combinaison linéaire des colonnes de *A* ne peut donner une colonne de 0. Autrement dit, les images par *A* de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ forment une famille libre, donc une base de $\mathbb{R}^3$.
L'image par *A* d'une base de $\mathbb{R}^3$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
Cela montre que ***A* est de rang 3**, c'est donc la matrice d'un automorphisme de $\mathbb{R}^3$ et *A* est inversible.

La matrice inverse de *A* est la matrice de l'automorphisme inverse.
Soit *f* l'automorphisme dont *A* est la matrice dans la base canonique $\{e_1, e_2, e_3\}$ de $\mathbb{R}^3$.
$f(e_1)$ a, pour coordonnées les éléments de la première colonne de *A* : $f(e_1) = e_1$.
$f(e_2)$ a, pour coordonnées les éléments de la deuxième colonne de *A* : $f(e_2) = e_1 + e_2$.
$f(e_3)$ a, pour coordonnées les éléments de la troisième colonne de *A* : $f(e_3) = 2e_1 + e_2 + e_3$.

Appliquons f^{-1} :
$f^{-1}(f(e_1)) = f^{-1}(e_1)$.

$f^{-1}(f(e_2)) = f^{-1}(e_1) + f^{-1}(e_2)$.
$f^{-1}(f(e_3)) = 2\,f^{-1}(e_1) + f^{-1}(e_2) + f^{-1}(e_3)$.

$e_1 = f^{-1}(e_1)$.
$e_2 = f^{-1}(e_1) + f^{-1}(e_2) = e_1 + f^{-1}(e_2)$.
$e_3 = 2\,f^{-1}(e_1) + f^{-1}(e_2) + f^{-1}(e_3) = 2\,e_1 + (e_2 - e_1) + f^{-1}(e_3)$.

$f^{-1}(e_1) = e_1$.
$f^{-1}(e_2) = -e_1 + e_2$.
$f^{-1}(e_3) = -e_1 - e_2 + e_3$.

La matrice A^{-1} a, pour colonne i, $i \in \{1, 2, 3\}$, les coordonnées de $f^{-1}(e_i)$:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4°/ Extension de la formule donnant A^n.

Pour $n = -1$, la formule $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n+3)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ s'écrit $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

La formule reste vraie pour $n = -1$.

Généralisation.

A et A^{-1} commutent : $A \times A^{-1} = A^{-1} \times A = I$.
Donc $A^n \times A^{-n} = (A \times A^{-1})^n = I^n = I$.
L'inverse de A^n est $A^{-n} = (A^{-1})^n$.

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$f^n(e_1) = e_1$.
$f^n(e_2) = n\,e_1 + e_2$.
$f^n(e_3) = \frac{n(n+3)}{2}\,e_1 + n\,e_2 + e_3$.

Donc :

$e_1 = f^{-n}(e_1)$,
$e_2 = n\,f^{-n}(e_1) + f^{-n}(e_2) = n\,e_1 + f^{-n}(e_2)$.

$$e_3 = \frac{n(n+3)}{2} f^{-n}(e_1) + n f^{-n}(e_2) + f^{-n}(e_3) = \frac{n(n+3)}{2} e_1 + n e_2 - n^2 e_1 + f^{-n}(e_3).$$

$$f^{-n}(e_1) = e_1$$
$$f^{-n}(e_2) = -n e_1 + e_2$$
$$f^{-n}(e_3) = \frac{n(n-3)}{2} e_1 - n e_2 + e_3$$

$$A^{-n} = \begin{pmatrix} 1 & -n & \frac{n(n-3)}{2} \\ 0 & 1 & -n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & (-n) & \frac{(-n)((-n)+3)}{2} \\ 0 & 1 & (-n) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ce qui est exactement la formule $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n+3)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ dans laquelle on remplace n par $-n$. Ainsi :

$$\boxed{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n+3)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \forall\, n \in \mathbb{Z}.}$$

Chapitre 4. Calcul matriciel.

Enoncés.

Exercice 7. Puissance 100 d'une matrice 2 × 2.

Soit A la matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}.$$

Calculer A^{100}.

Solution.

1°/ Puissances successives de A.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -8 \\ 8 & -7 \end{pmatrix} = 2A - I,$$

$$(A - I)^2 = 0$$

en appelant I la matrice unité $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

$A^0 = I$.

$A = I + 4\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

$(A - I)^2 = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Supposons (hypothèse de récurrence) que l'on ait : $A^n = I + 4n\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Alors :

$A^{n+1} = A + 4n\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}A = I + 4\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + 4n\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\left(I + 4\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right) = I + 4(n+1)\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + 16n$

$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^2$.

$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{n+1} = I + 4(n+1)\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

et la formule de récurrence est vraie pour $n + 1$ dès qu'elle est vraie pour n.
Comme elle est vraie pour $n = 0$, elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$$\boxed{A^n = I + 4n\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1+4n & -4n\\ 4n & 1-4n\end{pmatrix}.}$$

2°/ Application : $n = 100$.

La formule obtenue dans 1° donne, pour $n = 100$:

$$A^{100} = I + 400\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}401 & -400\\ 400 & -399\end{pmatrix}$$

$$\boxed{A^{100} = \begin{pmatrix}401 & -400\\ 400 & -399\end{pmatrix}}$$

Chapitre 4. Calcul matriciel.

Enoncés.

Exercice 8. Rang d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\{e_1, e_2, e_3\}$ est :

$$A = \begin{pmatrix} -11 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 11 \\ 1 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

1°/ Calculer $7\,u(e_1) + 11\,u(e_2)$. En déduire que $\{u(e_1), u(e_2)\}$ constitue une base de $Im(u)$. Quel est le rang de u ?
2°/ Quelle est la dimension de $Ker(u)$? Déterminer une base de $Ker(u)$.

Solution.

1°/ Rang de *u*.

$7\,u(e_1) + 11\,u(e_2)$, c'est 7 fois la première colonne de A, plus 11 fois la deuxième colonne de A, ça donne :

$7\,u(e_1) + 11\,u(e_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 11 \\ 7 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire la troisième colonne de A, soit $u(e_3)$.

$$\boxed{7\,u(e_1) + 11\,u(e_2) = (0, 11, 7) = u(e_3).}$$

Comme les vecteurs $u(e_1)$ et $u(e_2)$ ne sont pas proportionnels, ils forment une famille libre, de sorte que l'image de u est au moins de dimension 2.

La relation $7\,u(e_1) + 11\,u(e_2) = u(e_3)$, qui s'écrit aussi $u(7\,e_1 + 11\,e_2 - e_3) = 0$ montre que le noyau de u est au moins de dimension 1.

La relation $dim(Im(u)) + dim(Ker(u)) = dim(\mathbb{R}^3) = 3$ montre alors que $dim(Im(u)) = 2$ et $dim(Ker(u)) = 1$.

Comme $\{u(e_1), u(e_2)\}$ est une famille libre dans $Im(u)$ qui est de dimension 2,

$$\boxed{u(e_1) \text{ et } u(e_2) \text{ forment une base de l'image de } u.}$$

Le rang de u est, par définition, la dimension de son image.

$$\boxed{\boxed{rang\ (u) = 2.}}$$

2°/ Noyau de u.

Le noyau $Ker\ (u)$ est un sous-espace vectoriel de dimension 1, comme on vient de le voir dans 1°.
Il est engendré par n'importe quel vecteur non nul dont l'image par u est 0.
En particulier, la relation $u\ (7\ e_1 + 11\ e_2 - e_3) = 0$ montre que :

$$\boxed{\boxed{(7, 11, -1) \text{ est une base de } Ker\ (u).}}$$

Chapitre 4. Calcul matriciel.

Enoncés.

Exercice 9. Rang d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^4$.

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 5 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 6 & 10 \\ 3 & 0 & -6 & -3 \end{pmatrix}.$$

1°/ Calculer $u(e_1) + u(e_2) + u(e_3)$. En déduire que $\{u(e_1), u(e_2), u(e_3)\}$ constitue une base de $Im(u)$. Quel est le rang de u ?
2°/ On pose $x_0 = e_1 + e_2 + e_3 - e_4$. Calculer $u(x_0)$. En déduire $Ker(u)$.

Solution.

1°/ Rang de u.

$u(e_1) + u(e_2) + u(e_3)$, c'est la somme des trois premières colonnes de A, ça donne $\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 10 \\ -3 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire la quatrième colonne de A, soit $u(e_4)$.

$$\boxed{u(e_1) + u(e_2) + u(e_3) = (5, 1, 10, -4) = u(e_4).}$$

Considérons la famille des trois vecteurs $u(e_1)$, $u(e_2)$ et $u(e_3)$.
De la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 6 \\ 3 & 0 & -6 \end{pmatrix}$ des composantes de ces trois vecteurs, on peut extraire le déterminant $\begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 6 \\ 3 & 0 & -6 \end{vmatrix} = 48 \neq 0$, ce qui montre que la famille est de rang 3 et forment donc une famille libre dans l'image de u. L'image de u est au moins de dimension 3.

La relation $u(e_1) + u(e_2) + u(e_3) = u(e_4)$, qui s'écrit aussi $u(e_1 + e_2 + e_3 - e_4) = 0$ montre que le noyau de u n'est pas réduit à 0, donc la dimension du noyau de u est au moins 1.

La relation $dim(Im(u)) + dim(Ker(u)) = dim(\mathbb{R}^4) = 4$ montre alors que $dim(Im(u)) = 3$ et dim

($Ker\ (u)$) = 1.
La famille libre $\{u(e_1), u(e_2), u(e_3)\}$ constitue donc une base de $Im\ (u)$.

$$\boxed{\{u(e_1), u(e_2), u(e_3)\} \text{ constitue une base de } Im\ (u).}$$

Le rang de u est la dimension de son image :

$$\boxed{rang\ (u) = 3.}$$

2°/ Noyau de *u*.

Soit $x_0 = e_1 + e_2 + e_3 - e_4$.
$u(x_0) = u(e_1 + e_2 + e_3 - e_4) = 0$, ainsi qu'on l'a établi dans 1°.
Comme le noyau de u est de dimension 1, n'importe quel vecteur non nul dont l'image par u est nulle, constitue une base de $Ker\ (u)$.

$$\boxed{Ker\ (u) = \mathbb{R}\, x_0.}$$

Chapitre 4. Calcul matriciel.

Enoncés.

Exercice 10. Puissance *n*-ième d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^4$.

On désigne par f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice par rapport à la base canonique de $\mathbb{R}^4$ est :

$$M = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 1 & 2 \\ -3 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

1°/ Quelle est l'application $f^3 + 2f^2 - f - 2\,Id_{\mathbb{R}^4}$?

2°/ Montrer que f est bijective et donner la matrice de f^{-1}.

3°/ Montrer que $\{Id_{\mathbb{R}^4}, f, f^2\}$ est une famille libre dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$.

4°/ Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe des nombres réels α_n, β_n, γ_n, tels que $f^n = \alpha_n f^2 + \beta_n f + \gamma_n Id_{\mathbb{R}^4}$.

Solution.

1°/ Polynôme en *f*.

$f^3 + 2f^2 - f - 2\,Id_{\mathbb{R}^4} = f(f^2 - Id_{\mathbb{R}^4}) + 2(f^2 - Id_{\mathbb{R}^4}) = (f + 2\,Id_{\mathbb{R}^4})(f^2 - Id_{\mathbb{R}^4})$
$= (f + 2\,Id_{\mathbb{R}^4})(f + Id_{\mathbb{R}^4})(f - Id_{\mathbb{R}^4})$.

Les trois applications $(f + 2\,Id_{\mathbb{R}^4})$, $(f + Id_{\mathbb{R}^4})$ et $(f - Id_{\mathbb{R}^4})$ commutent deux à deux.
La matrice de l'application $f^3 + 2f^2 - f - 2\,Id_{\mathbb{R}^4}$ est donc le produit des matrices des applications $(f + 2\,Id_{\mathbb{R}^4})$, $(f + Id_{\mathbb{R}^4})$ et $(f - Id_{\mathbb{R}^4})$.

La matrice de $(f + 2\,Id_{\mathbb{R}^4})$ est $\begin{pmatrix} -2 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 3 & 2 \\ -3 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$.

La matrice de $(f + Id_{\mathbb{R}^4})$ est $\begin{pmatrix} -3 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 2 & 2 \\ -3 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

La matrice de $(f - Id_{\mathbb{R}^4})$ est $\begin{pmatrix} -5 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 2 \\ -3 & 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

La matrice de $f^3 + 2f^2 - f - 2\,Id_{\mathbb{R}^4}$ est :

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 3 & 2 \\ -3 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 2 & 2 \\ -3 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -5 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 2 \\ -3 & 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 3 & 2 \\ -3 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

donc :

L'application $f^3 + 2f^2 - f - 2\,Id_{\mathbb{R}^4}$ est l'application nulle 0.

2°/ *f* est bijective.

La relation $f^3 + 2f^2 - f - 2\,Id_{\mathbb{R}^4} = 0$ s'écrit aussi

$f(f^2 + 2f - Id_{\mathbb{R}^4}) = 2\,Id_{\mathbb{R}^4}$.
$(f^2 + 2f - Id_{\mathbb{R}^4})f = 2\,Id_{\mathbb{R}^4}$.

Ces relations montrent que *f* est inversible, donc bijective, et que son inverse est :
$f^{-1} = \frac{1}{2}(f^2 + 2f - Id_{\mathbb{R}^4}) = \frac{1}{2}(f + Id_{\mathbb{R}^4})^2 - Id_{\mathbb{R}^4}$.

f est bijective et l'application réciproque est $f^{-1} = \frac{1}{2}(f^2 + 2f - Id_{\mathbb{R}^4})$.

La matrice de $(f + Id_{\mathbb{R}^4})$ est $\begin{pmatrix} -3 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 2 & 2 \\ -3 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

La matrice de $(f + Id_{\mathbb{R}^4})^2$ est $\begin{pmatrix} -3 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 2 & 2 \\ -3 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 2 & 2 \\ -3 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 4 & 4 & 4 \\ -3 & 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

La matrice de $f^{-1} = \frac{1}{2}[(f + Id_{\mathbb{R}^4})^2 - 2\,Id_{\mathbb{R}^4}]$ est $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -5 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ -4 & 4 & 2 & 4 \\ -3 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

La matrice de f^{-1} est $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -5 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ -4 & 4 & 2 & 4 \\ -3 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

3°/ Famille libre dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$.

Pour montrer que $\{Id_{\mathbb{R}^4}, f, f^2\}$ est une famille libre dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$, considérons une combinaison linéaire nulle :

$$a_2 f^2 + a_1 f + a_0 Id_{\mathbb{R}^4} = 0.$$

La matrice de f^2 est $M^2 = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 1 & 2 \\ -3 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 1 & 2 \\ -3 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$.

Les éléments de la première colonne de la matrice de $a_2 f^2 + a_1 f + a_0 Id_{\mathbb{R}^4} = 0$ sont :

$4 a_2 - 4 a_1 + a_0 = 0$
$0 = 0$
$-2 a_1 = 0$
$3 a_2 - 3 a_1 = 0.$

La troisième relation donne $a_1 = 0$, la quatrième donne alors $a_2 = 0$, et la première se réduit maintenant à $a_0 = 0$.
Ceci montre que la famille $\{Id_{\mathbb{R}^4}, f, f^2\}$ est une famille libre dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$.

$$\boxed{\{Id_{\mathbb{R}^4}, f, f^2\} \text{ est une famille libre dans } \mathcal{L}(\mathbb{R}^4).}$$

4°/ Puissance *n*-ième de *f*.

La relation $f^3 + 2 f^2 - f - 2 Id_{\mathbb{R}^4} = 0$ établie dans la première question, montre que f^3 appartient au sous-espace vectoriel F de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$ engendré par la famille libre $\{Id_{\mathbb{R}^4}, f, f^2\}$.

Il en résulte par récurrence que toute puissance de f est aussi dans ce sous-espace vectoriel.
En effet, si $f^n \in F$, alors f^n est combinaison linéaire des vecteurs de base $\{Id_{\mathbb{R}^4}, f, f^2\}$ de F.
Donc f^{n+1} est combinaison linéaire de $\{f, f^2, f^3\}$, et comme f, f^2 et f^3 sont éléments de F, f^{n+1} est encore un élément de f.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^n \in F$.

Comme $\{Id_{\mathbb{R}^4}, f, f^2\}$ est une base de F (famille libre et système de générateurs), pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique triplet $(\alpha_n, \beta_n, \gamma_n) \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$\boxed{f^n = \alpha_n f^2 + \beta_n f + \gamma_n Id_{\mathbb{R}^4}.}$$

Remarquons que la relation $f^{-1} = \frac{1}{2}(f^2 + 2 f - Id_{\mathbb{R}^4})$ entraîne aussi $f^{-1} \in F$, donc, par récurrence $f^{-n} \in F$.
De sorte que la relation :
"il existe un unique triplet $(\alpha_n, \beta_n, \gamma_n) \in \mathbb{R}^3$ tel que $f^n = \alpha_n f^2 + \beta_n f + \gamma_n Id_{\mathbb{R}^4}$"
est vraie pour tout $n \in \mathbb{Z}$, et pas seulement pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Chapitre 4. Calcul matriciel.

Enoncés.

Exercice 11. Noyau et image d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

On désigne par $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ une base de $\mathbb{R}^3$.
On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base B est :

$$A = \begin{pmatrix} -8 & -8 & -12 \\ -2 & 0 & -2 \\ 9 & 8 & 13 \end{pmatrix}.$$

1°/ Déterminer *Ker* (f); Donner la dimension et une base de *Ker* (f).
2°/ Quel est le rang de f ? Donner une base de *Im* (f).
3°/ Montrer que $\mathbb{R}^3 = Im(f) \oplus Ker(f)$.
4°/ On considère les 3 vecteurs :

$$v_1 = e_1 - e_2 + e_3,\ v_2 = -6\,e_1 + 3\,e_3,\ v_3 = 2\,e_1 + e_2 - 2\,e_3.$$

Montrer que $\{v_1, v_2, v_3\}$ est une base B' de $\mathbb{R}^3$.
5°/ a) On pose $w = -4\,e_1 - 6\,e_2 + 7\,e_3$.
Calculer $f(w)$ en fonction de w.
b) Exprimer $f(v_1)$, $f(v_2)$, $f(v_3)$, en fonction de v_1, v_2, v_3.
Donner la matrice A' de f dans la base B'.
6°/ Ecrire la matrice de passage P de la base B à la base B'. Calculer P^{-1}.
7°/ Retrouver A' en utilisant P et P^{-1}.

Solution.

Chapitre 4. Calcul matriciel.

Enoncés.

Exercice 12. Puissance *n*-ième d'un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.

E est un espace vectoriel de dimension 3 sur $\mathbb{R}$ dont on désigne par B la base $\{e_1, e_2, e_3\}$.
On considère un endomorphisme f de E dont la matrice dans la base B est :

$$A = \begin{pmatrix} -7 & -4 & 4 \\ 8 & 5 & -4 \\ -12 & -6 & 7 \end{pmatrix}.$$

1°/ Montrer que $f \circ f = 4f - 3\,Id_E$.
2°/ Montrer que f est un automorphisme de E et exprimer f^{-1} en fonction de f et Id_E.
3°/ a) Montrer que $Ker\,(f - Id_E) \cap Ker\,(f - 3\,Id_E) = \{0_E\}$.
b) Montrer que $Ker\,(f - Id_E)$ et $Ker\,(f - 3\,Id_E)$ sont supplémentaires dans E.
4°/ On pose

$v_1 = e_1 - e_2 + e_3$, $v_2 = 2e_1 - e_2 + 3e_3$, $v_3 = 2e_1 - 2e_2 + 3e_3$.

Montrer que $\{v_1, v_2, v_3\}$ est une base de E que l'on notera B'.
5°/ Déterminer la matrice A' de f dans la base B'.
6°/ Ecrire la matrice P de passage de la base B à la base B'. Calculer P^{-1}.
7°/ Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Solution.

1°/ Expression de f^2.

La matrice de f^2 est $A^2 = \begin{pmatrix} -7 & -4 & 4 \\ 8 & 5 & -4 \\ -12 & -6 & 7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -7 & -4 & 4 \\ 8 & 5 & -4 \\ -12 & -6 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -31 & 16 & 16 \\ 32 & 17 & -16 \\ -48 & -24 & 25 \end{pmatrix}$.

La matrice de $f^2 - Id_E$ est donc $A^2 - I = \begin{pmatrix} -32 & 16 & 16 \\ 32 & 16 & -16 \\ -48 & -24 & 24 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} -8 & 4 & 4 \\ 8 & 4 & -4 \\ -12 & -6 & 6 \end{pmatrix} = 4\,(A - I)$

On a donc $A^2 = 4A - 3I$ et $f^2 = 4f - 3\,Id_E$.

$$\boxed{f^2 = 4\,f - 3\,Id_E.}$$

2°/ *f* est un automorphisme.

La relation $f^2 = 4\,f - 3\,Id_E$ s'écrit aussi : $f\,(f - 4\,Id_E) = -3\,Id_E = (f - 4\,Id_E)\,f$.
On en déduit que *f* est inversible et que son inverse est $f^{-1} = -\frac{1}{3}\,(f - 4\,Id_E) = \frac{1}{3}\,(4\,Id_E - f)$.

$$\boxed{f^{-1} = \frac{1}{3}\,(4\,Id_E - f)}$$

Il en résulte que la matrice *A* est inversible et que son inverse est donnée par la formule :

$$A^{-1} = \frac{1}{3}\,(4\,I - A)$$

3°/ Noyaux de $(f - Id_E)$ et de $(f - 3\,Id_E)$.

a) Intersection des noyaux.

Soit $x \in Ker\,(f - Id_E) \cap Ker\,(f - 3\,Id_E)$.
On a $(f - Id_E)\,(x) = 0$ et $(f - 3\,Id_E)\,(x) = 0$, donc $f\,(x) = x$ et $f\,(x) = 3\,x$, d'où, par soustraction : $2\,x = 0$, donc $x = 0$.
Ceci montre que :

$$\boxed{Ker\,(f - Id_E) \cap Ker\,(f - 3\,Id_E) = \{0_E\}.}$$

b) Somme des noyaux.

La relation $f^2 = 4\,f - 3\,Id_E$ établie dans la première question s'écrit aussi : $f^2 - 4\,f + 3\,Id_E = 0$.
On a donc :

$$(f - Id_E)\,(f - 3\,Id_E) = (f - 3\,Id_E)\,(f - Id_E) = f^2 - 4\,f + 3\,Id_E = 0.$$

La relation $(f - Id_E)\,(f - 3\,Id_E) = 0$ montre que l'image de $f - 3\,Id_E$ est contenue dans le noyau de $f - Id_E$.
La relation $(f - 3\,Id_E)\,(f - Id_E) = 0$ montre que l'image de $f - Id_E$ est contenue dans le noyau de $f - 3\,Id_E$.

Soit $x \in E$.

On peut écrire $x = \frac{1}{2}\,[(f\,(x) - x) - (f\,(x) - 3\,x)]$.
$(f\,(x) - x) = (f - Id_E)\,(x) \in Im\,(f - Id_E) \subseteq Ker\,(f - 3\,Id_E)$.
$(f\,(x) - 3\,x) = (f - 3\,Id_E)\,(x) \in Im\,(f - 3\,Id_E) \subseteq Ker\,(f - Id_E)$.

Donc $x \in Ker\,(f - 3\,Id_E) + Ker\,(f - Id_E)$.

Et ceci montre que $Ker\,(f - 3\,Id_E) + Ker\,(f - Id_E) = E$.
Comme l'intersection de $Ker\,(f - 3\,Id_E)$ et $Ker\,(f - Id_E)$ est réduite à 0 d'après (*a*), la somme $Ker\,(f - 3\,Id_E) + Ker\,(f - Id_E)$ est directe et les sous-espace $Ker\,(f - 3\,Id_E)$ et $Ker\,(f - Id_E)$ sont supplémentaires :

$$\boxed{E = Ker\,(f - 3\,Id_E) \oplus Ker\,(f - Id_E).}$$

4°/ Base propre.

Remarquons tout de suite que :

$$f(v_1) = A\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-7 & -4 & 4\\8 & 5 & -4\\-12 & -6 & 7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} = v_1,\ v_1 \in Ker\,(f - Id_E).$$

$$f(v_2) = A\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-7 & -4 & 4\\8 & 5 & -4\\-12 & -6 & 7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix} = v_2,\ v_2 \in Ker\,(f - Id_E).$$

$$f(v_3) = A\begin{pmatrix}2\\-2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-7 & -4 & 4\\8 & 5 & -4\\-12 & -6 & 7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-2\\3\end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix}2\\-2\\3\end{pmatrix} = 3\,v_3,\ v_3 \in Ker\,(f - 3\,Id_E).$$

Comme les sous-espaces vectoriels $Ker\,(f - 3\,Id_E)$ et $Ker\,(f - Id_E)$ sont supplémentaires, v_3 est linéairement indépendant de v_1 et v_2.
Comme v_1 et v_2 ne sont pas proportionnels, ils sont linéairement indépendants.
Donc la famille $\{v_1, v_2, v_3\}$ est libre, et comme E est de dimension 3, **la famille $\{v_1, v_2, v_3\}$ est une base de E**.
Elle est formée de vecteurs propres de f.

On en déduit notamment :

$$\boxed{\begin{array}{c}Ker\,(f - Id_E) = \mathbb{R}\,v_1 \oplus \mathbb{R}\,v_2\\ Ker\,(f - 3\,Id_E) = \mathbb{R}\,v_3\end{array}}$$

5°/ Matrice de *f* dans la base propre.

Comme la base $B' = \{v_1, v_2, v_3\}$ est formée de vecteurs propres correspondant, respectivement, aux valeurs propres 1, 1, 3, la matrice de f dans la base $\{v_1, v_2, v_3\}$ est diagonale :

$$A' = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 3\end{pmatrix}.$$

En effet, $f(x\,v_1 + y\,v_2 + z\,v_3) = x\,f(v_1) + y\,f(v_2) + z\,f(v_3) = x\,v_1 + y\,v_2 + 3\,z\,v_3$.
Remarquons que A et A' ont les mêmes valeurs propres, qui sont les valeurs propres de f.

Donc le déterminant de *f*, qui est aussi le déterminant de *A* et de *A* ' et le produit des valeurs propres, vaut 3.
En particulier, le déterminant de la matrice *A* est égal à 3.

6°/ Matrice de passage.

La matrice de passage de l'ancienne base à la nouvelle est la matrice des coordonnées de v_1, v_2, v_3, dans la base { e_1, e_2, e_3 } : c'est la **matrice des vecteurs propres v_1, v_2, v_3**.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

La matrice inverse P^{-1} s'obtient en exprimant les e_i en fonction des v_j, à partir des relations de définition :

$v_1 = e_1 - e_2 + e_3$,
$v_2 = 2\,e_1 - e_2 + 3\,e_3$,
$v_3 = 2\,e_1 - 2\,e_2 + 3\,e_3$.

$v_2 - v_3 = e_2$
$e_2 = v_2 - v_3$
$v_2 - 2\,v_1 = e_2 + e_3$,
$e_3 = v_2 - 2\,v_1 - e_2 = v_2 - 2\,v_1 - (v_2 - v_3) = -2\,v_1 + v_3$,
$e_1 = v_1 + e_2 - e_3 = v_1 + v_2 - v_3 + 2\,v_1 - v_3 = 3\,v_1 + v_2 - 2\,v_3$.

$e_1 = 3\,v_1 + v_2 - 2\,v_3$.
$e_2 = v_2 - v_3$.
$e_3 = -2\,v_1 + v_3$.

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

7°/ Puissance *n*-ième de *A*.

$$P^{-1} A P = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7 & -4 & 4 \\ 8 & 5 & -4 \\ -12 & -6 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ -1 & -1 & -6 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = A'$$

$$A = P\,A'\,P^{-1}$$
$$A^n = P\,A'^n\,P^{-1}$$

Or on a, de façon évidente, s'agissant d'une matrice diagonale :

$$A'^{n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} = I + (3^n - 1)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Il vient alors :

$$A^n = I - P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}P^{-1} + 3^n P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}P^{-1}$$

$$P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 2 \\ 4 & 2 & -2 \\ -6 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A^n = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -2 \\ -4 & -1 & 2 \\ 6 & 3 & -2 \end{pmatrix} + 3^n \begin{pmatrix} -4 & -2 & 2 \\ 4 & 2 & -2 \\ -6 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

Si l'on note momentanément C la matrice $C = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 2 \\ 4 & 2 & -2 \\ -6 & -3 & 3 \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}P^{-1}$, on obtient :

$$A^n = I - C + 3^n C$$
$$A^n - I = (3^n - 1)\,C$$

En particulier, pour $n = 1$: $A - I = 2\,C$, donc $C = \frac{1}{2}(A - I)$, et $A^n - I = \frac{3^n - 1}{2}(A - I)$.

$$A^n = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -2 \\ -4 & -1 & 2 \\ 6 & 3 & -2 \end{pmatrix} + 3^n \begin{pmatrix} -4 & -2 & 2 \\ 4 & 2 & -2 \\ -6 & -3 & 3 \end{pmatrix} = \frac{3^n - 1}{2} A - \frac{3^n - 3}{2} I, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Pour $n = -1$, cette formule s'écrit :

$$A^{-1} = -\frac{1}{3} A + \frac{4}{3} I = \frac{1}{3}(4\,I - A),$$

ce qui correspond bien à la formule établie dans la question 2°.
Ainsi, la formule $A^n = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -2 \\ -4 & -1 & 2 \\ 6 & 3 & -2 \end{pmatrix} + 3^n \begin{pmatrix} -4 & -2 & 2 \\ 4 & 2 & -2 \\ -6 & -3 & 3 \end{pmatrix} = \frac{3^n - 1}{2} A - \frac{3^n - 3}{2} I$, est vraie encore pour $n = -1$.

Supposons que l'on ait $A^{-n} = \frac{3^{-n} - 1}{2} A - \frac{3^{-n} - 3}{2} I$ pour un entier $n \geq 0$ (cette formule est vraie déjà pour $n = 0$ et pour $n = 1$).
On obtient alors :

$$A^{-(n+1)} = A^{-n} \times A^{-1} = \left(\frac{3^{-n} - 1}{2} A - \frac{3^{-n} - 3}{2} I\right) \times \left(-\frac{1}{3} A + \frac{4}{3} I\right)$$
$$= -\frac{3^{-n} - 1}{6} A^2 + \left(4 \times \frac{3^{-n} - 1}{6} + \frac{3^{-n} - 3}{6}\right) A - 4 \times \frac{3^{-n} - 3}{6} I$$

$$= -\frac{3^{-n}-1}{6}\left(4A-3I\right)+\left(4\times\frac{3^{-n}-1}{6}+\frac{3^{-n}-3}{6}\right)A-4\times\frac{3^{-n}-3}{6}I$$
$$= \frac{3^{-n}-3}{6}A+\left(\frac{3^{-n}-1}{2}-4\times\frac{3^{-n}-3}{6}\right)I$$
$$= \frac{3^{-(n+1)}-1}{2}A+\left(-\frac{1}{6}\times 3^{-n}+\frac{3}{2}\right)I$$
$$= \frac{3^{-(n+1)}-1}{2}A-\frac{3^{-(n+1)}-3}{2}I,$$

ce qui montre que la formule de récurrence est vraie pour $n + 1$ dès qu'elle est vraie pour n.
Comme elle est vraie pour $n = 0$ et pour $n = 1$, elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'après le principe de récurrence.
Et ceci achève de démontrer la relation :

$$A^n=\begin{pmatrix}5&2&-2\\-4&-1&2\\6&3&-2\end{pmatrix}+3^n\begin{pmatrix}-4&-2&2\\4&2&-2\\-6&-3&3\end{pmatrix}=\frac{3^n-1}{2}A-\frac{3^n-3}{2}I, \text{ pour tout } n\in\mathbb{Z}.$$

Chapitre 4. Calcul matriciel.

Enoncés.

Exercice 13. Somme directe du noyau et de l'image d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^4$.

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

1°/ On pose $a = u(e_3)$, $b = u(e_4)$. Montrer que $\{a, b\}$ est une base de $Im(u)$.
En déduire la dimension, ainsi qu'une base de $Ker(u)$.
2°/ Calculer A^2; On pose $a' = u^2(e_3)$, $b' = u^2(e_4)$. Montrer que $\{a', b'\}$ est une base de $Im(u^2)$.
3°/ Montrer que $Ker(u) = Ker(u^2)$.
4°/ En déduire que $Ker(u) \cap Im(u) = \{0\}$.
5°/ Montrer que $\mathbb{R}^4 = Ker(u) \oplus Im(u)$.

Solution.

1°/ Base de l'image de *u*.

$a = u(e_3)$ est la troisième colonne de A : $a = (1, 3, 0, 3)$.
$b = u(e_4)$ est la quatrième colonne de A : $b = (2, 1, 3, -2)$.

Ces deux vecteurs sont linéairement indépendants, puisqu'ils ne sont pas proportionnels : ils forment donc une famille libre.
L'image de u est donc au moins de dimension 2.

Comme, d'autre part, on a, de façon évidente :
$u(e_2) = (0, 0, 0, 0)$
$u(e_1 - e_3 - e_4) = (0, 0, 0, 0)$, puisque la première colonne est la somme des colonnes 3 et 4 de A,
et que les vecteurs e_2 et $e_1 - e_3 - e_4$ ne sont pas proportionnels,
le noyau de u est au moins de dimension 2.

La relation $dim(Im(u)) + dim(Ker(u)) = dim(\mathbb{R}^4) = 4$ montre alors que $Im(u)$ et $Ker(u)$ sont exactement de dimension 2.

La famille libre $\{a, b\}$ possède alors autant d'éléments qu'une base de *Im* (*u*) : c'est donc une famille libre maximum, donc une base de *Im* (*u*).

$\boxed{\{a, b\} \text{ est une base de } Im\ (u).}$

Comme le noyau de *u* est aussi de dimension 2 et que la famille $\{e_2, e_1 - e_3 - e_4\}$ est une famille libre de *Ker* (*u*), cette famille forme une base du noyau de *u*.

$\boxed{\{e_2, e_1 - e_3 - e_4\} \text{ est une base de } Ker\ (u).}$

2°/ Base de l'image de u^2.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 0 & 9 & 5 \\ 22 & 0 & 7 & 15 \\ 12 & 0 & 12 & 0 \\ 10 & 0 & -5 & 15 \end{pmatrix}$$

A^2 est la matrice de u^2 dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$.
Sur cette matrice, comme sur *A*, on voit que :

— $a' = u^2(e_3) = (9, 7, 12, -5) = a + 4b$,
— $b' = u^2(e_4) = (5, 15, 0, 15) = 5a$,
— a' et b' ne sont pas proportionnels, donc ils forment une famille libre, de sorte que $dim\ (Im\ (u^2)) \geq 2$,
— $Im\ (u^2) \subseteq Im\ (u)$ et $dim\ (Im\ (u^2)) \geq 2$ et $dim\ (Im\ (u)) = 2 \Rightarrow dim\ (Im\ (u^2)) = 2$,
— donc $\{a', b'\}$ est une base de $Im\ (u^2)$.

$\boxed{\{a', b'\} \text{ est une base de } Im\ (u^2).}$

Im (u^2), sous-espace vectoriel de dimension 2 de *Im* (*u*) qui est lui-même de dimension 2, est donc égal à *Im* (*u*) :

$$Im\ (u^2) = Im\ (u)$$

3°/ Noyau de u^2.

— $dim\ (Im\ (u^2)) + dim\ (Ker\ (u^2)) = 4$ et $dim\ (Im\ (u^2)) = 2 \Rightarrow dim\ (Ker\ (u^2)) = 2$.
— $Ker\ (u) \subseteq Ker\ (u^2)$ et $dim\ (Ker\ (u)) = 2 = dim\ (Ker\ (u^2)) \Rightarrow Ker\ (u) = Ker\ (u^2)$.
— $\{e_2, e_1 - e_3 - e_4\}$ est une base de $Ker\ (u) = Ker\ (u^2)$.

$\boxed{Ker\ (u) = Ker\ (u^2).}$

4°/ Intersection de l'image et du noyau de *u*.

Soit $y = u\ (x)$ un élément de $Ker\ (u) \cap Im\ (u)$.
$y \in Ker\ (u) \Rightarrow u\ (y) = 0$,
$u\ (y) = u\ (u\ (x)) = u^2\ (x) = 0 \Rightarrow x \in Ker\ (u^2) = Ker\ (u)$
$x \in Ker\ (u) \Rightarrow y = u\ (x) = 0$.

donc $Ker\,(u) \cap Im\,(u) = \{0\}$.

$$\boxed{Ker\,(u) \cap Im\,(u) = \{0\}.}$$

5°/ L'image et du noyau de *u* sont supplémentaires.

Par définition, la somme $Ker\,(u) + Im\,(u)$ est une somme directe puisque l'intersection de ces deux sous-espaces est réduite à 0.
La dimension d'une somme directe est la somme des dimensions des facteurs.
$Ker\,(u) \oplus Im\,(u)$ est donc un sous-espace vectoriel de dimension 2 + 2 = 4 de $\mathbb{R}^4$: il est donc égal à $\mathbb{R}^4$.

$$\boxed{\mathbb{R}^4 = Ker\,(u) \oplus Im\,(u).}$$

Ce résultat est d'ailleurs équivalent à l'égalité $Im\,(u^2) = Im\,(u)$ établie dans la question 2°, ainsi qu'il a été démontré dans l'exercice 10 du Chapitre 3.
Il ne tient donc pas à l'expression particulière de la matrice *A* considérée dans cet exercice.

Exercices

Déterminants.

1. Définition.
2. Interprétation.
3. Calcul d'un déterminant.
4. Produit de deux déterminants.

1 Définition du déterminant d'un endomorphisme.

HAUT

Si u est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$, dont $A = [[a_{ij}]]$ est la matrice par rapport à la base canonique, on appelle déterminant de u, ou déterminant de A, le nombre :

$$Dét\,(u) = Dét\,(A) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} sign\,(\sigma) \left(\prod_{i=1}^{i=n} a_{i\,\sigma\,(i)} \right),$$

où $\mathfrak{S}_n$ est le groupe symétrique d'ordre n (ensemble des permutations de l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$) et $sign\,(\sigma)$ la signature de la permutation σ.

HAUT

2 Interprétations d'un déterminant.

HAUT

1. Tout endomorphisme *u* de $\mathbb{R}^n$ possède un antisymétrisé d'ordre *n*, qui se linéarise en une application linéaire de la puissance extérieure $\Lambda^n(\mathbb{R}^n)$ dans elle-même. Comme la dimension de $\Lambda^n(\mathbb{R}^n)$ est 1, cette application linéaire se réduit à une homothétie : le déterminant de *u* est le rapport de cette homothétie.

$u(e_1) \wedge ... \wedge u(e_n) = Dét(u)\, e_1 \wedge ... \wedge e_n$

2. Le déterminant d'un endomorphisme est le produit de ses valeurs propres.

HAUT

3 Calcul d'un déterminant.

La formule de définition sert rarement au calcul d'un déterminant.

Règles : les règles résultent de la multilinéarité de l'antisymétrisation et de l'antisymétrie.
On ne change pas la valeur d'un déterminant en ajoutant à une colonne de la matrice, une combinaison linéaire des autres colonnes.
On ne change pas la valeur d'un déterminant en ajoutant à une ligne de la matrice, une combinaison linéaire des autres lignes.
Le déterminant d'une matrice possédant une colonne de 0 est 0.
Le déterminant d'une matrice possédant une ligne de 0 est 0.
Le déterminant d'une matrice est égal au déterminant de la matrice transposée.
On ne change pas la valeur d'un déterminant en mettant en facteur, un facteur commun aux éléments d'une ligne.
On ne change pas la valeur d'un déterminant en mettant en facteur, un facteur commun aux éléments d'une colonne.
On change le signe d'un déterminant en permutant deux colonnes adjacentes (transposition).
On change le signe d'un déterminant en permutant deux lignes adjacentes (transposition).
Une permutation quelconque des colonnes multiplie le déterminant par la signature de la permutation.
Une permutation quelconque des lignes multiplie le déterminant par la signature de la permutation.
Le déterminant d'un endomorphisme u ne dépend pas de la base choisie pour représenter u par une matrice.

Mineur :
On appelle mineur d'un déterminant relativement à l'élément a_{ij} d'une matrice A, le déterminant de la matrice qui reste quand on enlève de la matrice A la colonne i et la ligne j contenant a_{ij}.

On peut développer un déterminant par rapport à une colonne, ou par rapport à une ligne :
Si A_{ij} désigne le mineur d'une matrice A par rapport à l'élément a_{ij}, on a :

Développement par rapport à la ligne j : $Dét\,(A) = \sum_{i=1}^{i=n} (-1)^{i+j} a_{ij} A_{ij}$.

Développement par rapport à la colonne i : $Dét\,(A) = \sum_{j=1}^{j=n} (-1)^{i+j} a_{ij} A_{ij}$.

HAUT

4 Produit de deux déterminants.

Le déterminant du produit de deux matrices carrées $n \times n$ (ou des endomorphismes correspondants) est le produit des déterminants des deux matrices.

HAUT

Chapitre 5. Déterminants.

Exercices

Exercice 1. Calcul de 10 déterminants numériques.
Exercice 2. Calcul de 3 déterminants littéraux.
Exercice 3. Calcul d'un déterminant $n \times n$ symétrique.
Exercice 4. Déterminant d'une matrice 10×10.
Exercice 5. Déterminant d'une matrice $n \times n$ non symétrique.
Exercice 6. Rang d'une matrice 4×4.
Exercice 7. Puissance n-ième d'une matrice 3×3.

Exercice 1. Calcul de 10 déterminants numériques.

Calculer les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} -2 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -6 & -11 \\ 3 & -14 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & -3 & 7 \\ 3 & 6 & -4 \\ 4 & 7 & 9 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & -3 & 7 \\ 0 & 6 & -4 \\ 0 & 7 & 9 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 23 & 17 \\ 0 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 11 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -12 & 3 & 0 \\ -11 & 7 & -3 \\ -7 & -5 & 2 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 & 11 \\ 1 & -6 & 43 \\ -4 & 8 & 29 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 5 & 13 \\ 2 & -6 & -10 \\ 1 & 9 & 19 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 & 10 \\ 2 & 5 & 9 & 13 \\ 4 & 8 & 12 & 15 \\ 7 & 11 & 14 & 16 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 9 & 18 & 30 \\ 6 & 15 & 27 & 39 \\ 12 & 24 & 36 & 45 \\ 21 & 33 & 42 & 48 \end{vmatrix}.$$

Solution

HAUT

Exercice 2. Calcul de 3 déterminants littéraux.

Soient a, b, c, des nombres réels. Calculer :

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 4 & 2a & 2a^2 \\ 2 & b & b^2 \\ 4 & 2c & 2c^2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \cos c & \cos b \\ 1 & \cos c & 1 & \cos a \\ 1 & \cos b & \cos a & 1 \end{vmatrix}.$$

Solution

HAUT

Exercice 3. Calcul d'un déterminant $n \times n$ symétrique.

Soient $n \geq 2$ un entier, a et b deux nombres réels.
Calculer la valeur du déterminant d'ordre n :

$$\begin{vmatrix} a+b & b & b & \cdots & b & b \\ b & a+b & b & \cdots & b & b \\ b & b & a+b & \cdots & b & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a+b & b \\ b & b & b & \cdots & b & a+b \end{vmatrix}.$$

Solution

HAUT

Exercice 4. Déterminant d'une matrice 10 × 10.

Soit σ la permutation des entiers de 1 à 10 définie par :

$$\sigma := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 4 & 6 & 8 & 2 & 3 & 1 & 5 & 10 & 9 & 7 \end{pmatrix}.$$

Soit $P_\sigma := (p_{ij})_{1 \le i,j \le 10}$ la matrice 10 × 10 telle que :

$$p_{ij} = 1 \text{ si } \sigma(j) = i, \; p_{ij} = 0 \text{ sinon.}$$

Quel est le déterminant de P_σ ?

Solution

HAUT

Exercice 5. Déterminant d'une matrice $n \times n$ non symétrique.

Soient $n \geq 2$ un entier, et $x_1, \ldots, x_n$, a, b, des nombres réels, avec $a \neq b$.

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose :

$$D(x) = \begin{vmatrix} x_1+x & a+x & a+x & \cdots & a+x & a+x \\ b+x & x_2+x & a+x & \cdots & a+x & a+x \\ b+x & b+x & x_3+x & \cdots & a+x & a+x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b+x & b+x & b+x & \cdots & x_{n-1}+x & a+x \\ b+x & b+x & b+x & \cdots & b+x & x_n+x \end{vmatrix}.$$

Solution

1°/ Montrer que $D(x)$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à 1.
2°/ En déduire la valeur du déterminant :

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & a & a & \cdots & a & a \\ b & x_2 & a & \cdots & a & a \\ b & b & x_3 & \cdots & a & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & x_{n-1} & a \\ b & b & b & \cdots & b & x_n \end{vmatrix}.$$

HAUT

Exercice 6. Rang d'une matrice 4 × 4.

Soit $a \in \mathbb{R}$. Discuter, suivant la valeur de a, le rang de la matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & a & a & a \\ a & 2 & a & a \\ a & a & 2 & a \\ a & a & a & 2 \end{pmatrix}$.

Solution

HAUT

Exercice 7. Puissance *n*-ième d'une matrice 3 × 3.

Soit E un espace vectoriel de dimension 3 sur $\mathbb{R}$.
On désigne par $B = \{e_1, e_2, e_3\}$, une base de E et on considère l'endomorphisme f de E dont la matrice dans la base B est :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1°/ Montrer que f est un automorphisme de E.
2°/ Calculer A^2.
En déduire que $f \circ f = 3f - 2\,Id_E$, où Id_E désigne l'automorphisme identique de E.
3°/ En utilisant 2°, exprimer f^{-1} en fonction de f et Id_E.
4°/ On considère les trois vecteurs de E :

$v_1 = e_1 - e_2$, $v_2 = e_2 - e_3$, $v_3 = e_1 + e_2 - e_3$.

Vérifier que $B' = \{v_1, v_2, v_3\}$ est une base de E.
5°/ Déterminer la matrice A' de f dans la base B'.
6°/ Ecrire la matrice de passage P de la base B à la base B'.
7°/ Calculer le déterminant de la matrice A et le déterminant de la matrice A'.
Remarquer que $Dét(A) = Dét(A')$ et justifier cette égalité.
8°/ Déterminer A'^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Solution

HAUT

Chapitre 5. Déterminants.

Enoncés.

Exercice 1. Calcul de 10 déterminants numériques.

Calculer les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} -2 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -6 & -11 \\ 3 & -14 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & -3 & 7 \\ 3 & 6 & -4 \\ 4 & 7 & 9 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & -3 & 7 \\ 0 & 6 & -4 \\ 0 & 7 & 9 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 23 & 17 \\ 0 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 11 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -12 & 3 & 0 \\ -11 & 7 & -3 \\ -7 & -5 & 2 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 & 11 \\ 1 & -6 & 43 \\ -4 & 8 & 29 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 5 & 13 \\ 2 & -6 & -10 \\ 1 & 9 & 19 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 & 10 \\ 2 & 5 & 9 & 13 \\ 4 & 8 & 12 & 15 \\ 7 & 11 & 14 & 16 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 9 & 18 & 30 \\ 6 & 15 & 27 & 39 \\ 12 & 24 & 36 & 45 \\ 21 & 33 & 42 & 48 \end{vmatrix}.$$

Solution.

1°/ Premier déterminant.

$\mathfrak{S}_2$, ensemble des permutations de l'ensemble {1, 2} possède deux éléments :

— la permutation identique $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, de signature égale à 1,

— la permutation $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, de signature égale à – 1.

Le déterminant d'une matrice $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$, défini par $Dét\,(A) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_2} sign\,(\sigma) \left(\prod_{i=1}^{i=2} a_{i\,\sigma(i)} \right)$, est donc donné par la formule :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21}.$$

Application :

$$\begin{vmatrix} -2 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = (-2) \times 9 - 7 \times 6 = -18 - 42 = -60$$

$$\boxed{\begin{vmatrix} -2 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = -60}$$

2°/ Deuxième déterminant.

La formule :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21}.$$

donne :

$$\begin{vmatrix} -6 & -11 \\ 3 & -14 \end{vmatrix} = (-6) \times (-14) - 3 \times (-11) = 84 + 33 = 117$$

$$\boxed{\begin{vmatrix} -6 & -11 \\ 3 & -14 \end{vmatrix} = 117}$$

3°/ Troisième déterminant.

Le groupe symétrique $\mathfrak{S}_3$ est formé des six permutations de l'ensemble {1, 2, 3} :

— Les permutations paires : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, de signatures égales à 1,

— Les permutations impaires : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, de signatures égales à – 1.

Le déterminant d'une matrice $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$, défini par $Dét\,(A) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_3} sign\,(\sigma) \left(\prod_{i=1}^{i=3} a_{i\,\sigma\,(i)} \right)$,

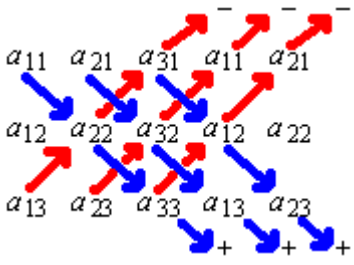
est donc donné par la formule :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\,a_{22}\,a_{33} + a_{13}\,a_{21}\,a_{32} + a_{12}\,a_{23}\,a_{31} - a_{13}\,a_{22}\,a_{31} - a_{11}\,a_{23}\,a_{32} - a_{12}\,a_{21}\,a_{33}.$$

En pratique, on récrira, à droite du tableau de nombres, les deux premières colonnes :

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{13} & a_{23} \end{matrix},$$

puis, partant du premier élément de la première colonne, on fera les produits de trois éléments en descendant vers la droite en les affectant du signe +,
puis, partant du troisième élément de la première colonne, on fera les produits de trois éléments en montant vers la droite, en les affectant du signe –.



Application :

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 7 \\ 3 & 6 & -4 \\ 4 & 7 & 9 \end{vmatrix} = + [2 \times 6 \times 9] + [(-3) \times (-4) \times 4] + [7 \times 3 \times 7] - [4 \times 6 \times 7] - [7 \times (-4) \times 2] - [9 \times 3 \times (-3)]$$

$$= 108 + 48 + 147 - 168 + 56 + 81 = 440 - 168 = 272.$$

$$\boxed{\begin{vmatrix} 2 & -3 & 7 \\ 3 & 6 & -4 \\ 4 & 7 & 9 \end{vmatrix} = 272.}$$

Méthode alternative.

On ne change pas la valeur du déterminant en ajoutant la troisième colonne à la deuxième :

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 7 \\ 3 & 6 & -4 \\ 4 & 7 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 3 & 2 & -4 \\ 4 & 16 & 9 \end{vmatrix}.$$

On ne change pas la valeur du déterminant en mettant 2 en facteur dans la deuxième colonne :

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 3 & 2 & -4 \\ 4 & 16 & 9 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 2 & 2 & 7 \\ 3 & 1 & -4 \\ 4 & 8 & 9 \end{vmatrix}.$$

On ne change pas la valeur du déterminant en soustrayant la deuxième colonne de la première :

$$2 \begin{vmatrix} 2 & 2 & 7 \\ 3 & 1 & -4 \\ 4 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 0 & 2 & 7 \\ 2 & 1 & -4 \\ -4 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

On ne change pas la valeur du déterminant en mettant 2 en facteur dans la première colonne :

$$2 \begin{vmatrix} 0 & 2 & 7 \\ 2 & 1 & -4 \\ -4 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 0 & 2 & 7 \\ 1 & 1 & -4 \\ -2 & 8 & 9 \end{vmatrix}.$$

On ne change pas la valeur du déterminant en soustrayant la première colonne de la deuxième :

$$4 \begin{vmatrix} 0 & 2 & 7 \\ 1 & 1 & -4 \\ -2 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 0 & 2 & 7 \\ 1 & 0 & -4 \\ -2 & 10 & 9 \end{vmatrix}$$

On ne change pas la valeur du déterminant en mettant 2 en facteur dans la deuxième colonne :

$$4 \begin{vmatrix} 0 & 2 & 7 \\ 1 & 0 & -4 \\ -2 & 10 & 9 \end{vmatrix} = 8 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & -4 \\ -2 & 5 & 9 \end{vmatrix}$$

On ne change pas la valeur du déterminant en ajoutant 4 fois la première colonne à la troisième :

$$8\begin{vmatrix} 0 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & -4 \\ -2 & 5 & 9 \end{vmatrix} = 8\begin{vmatrix} 0 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 1 \end{vmatrix}$$

On peut développer le déterminant par rapport à la deuxième ligne :

$$8\begin{vmatrix} 0 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = -8\begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}$$

Le déterminant $\begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}$ vaut $1 - 35 = -34$, d'où $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 7 \\ 3 & 6 & -4 \\ 4 & 7 & 9 \end{vmatrix} = (-8) \times (-34) = 272$. On retrouve le même résultat.

4°/ Quatrième déterminant.

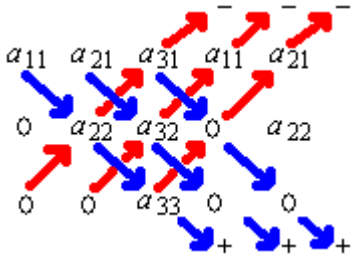
On peut calculer le déterminant $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 7 \\ 0 & 6 & -4 \\ 0 & 7 & 9 \end{vmatrix}$ en développant par rapport à la première colonne :

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 7 \\ 0 & 6 & -4 \\ 0 & 7 & 9 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 6 & -4 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = 2 \times (6 \times 9 - 7 \times (-4)) = 2 \times (54 + 28) = 2 \times 82 = 164.$$

$$\boxed{\begin{vmatrix} 2 & -3 & 7 \\ 0 & 6 & -4 \\ 0 & 7 & 9 \end{vmatrix} = 164.}$$

5°/ Cinquième déterminant.

Le déterminant $\begin{vmatrix} 2 & 23 & 17 \\ 0 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 11 \end{vmatrix}$ est le déterminant d'une **matrice triangulaire** supérieure, les éléments en dessous de la diagonale principale sont nuls.
Dans la formule du développement complet du déterminant, tous les termes sont nuls, sauf celui qui correspond à la permutation identique.
La valeur du déterminant est donc le produit des éléments de la diagonale principale :



$$\begin{vmatrix} 2 & 23 & 17 \\ 0 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 11 \end{vmatrix} = 2 \times 6 \times 11 = 132$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 23 & 17 \\ 0 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 11 \end{vmatrix} = 132$$

6°/ Sixième déterminant.

On ne change pas la valeur du déterminant en ajoutant 2 fois la troisième colonne à la deuxième :

$$\begin{vmatrix} -12 & 3 & 0 \\ -11 & 7 & -3 \\ -7 & -5 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -12 & 3 & 0 \\ -11 & 1 & -3 \\ -7 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

On ne change pas la valeur du déterminant en ajoutant 4 fois la deuxième colonne à la première :

$$\begin{vmatrix} -12 & 3 & 0 \\ -11 & 1 & -3 \\ -7 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 \\ -7 & 1 & -3 \\ -11 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

On peut développer le déterminant par rapport à la première ligne :

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 \\ -7 & 1 & -3 \\ -11 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} -7 & -3 \\ -11 & 2 \end{vmatrix}$$

On peut mettre – 1 en facteur dans la première colonne :

$$-3 \begin{vmatrix} -7 & -3 \\ -11 & 2 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 7 & -3 \\ 11 & 2 \end{vmatrix}$$

Le déterminant $\begin{vmatrix} 7 & -3 \\ 11 & 2 \end{vmatrix}$ vaut $7 \times 2 + 11 \times 3 = 14 + 33 = 47$.

$$\begin{vmatrix} -12 & 3 & 0 \\ -11 & 7 & -3 \\ -7 & -5 & 2 \end{vmatrix} = 3 \times 47 = 141.$$

$$\begin{vmatrix} -12 & 3 & 0 \\ -11 & 7 & -3 \\ -7 & -5 & 2 \end{vmatrix} = 141.$$

7°/ Septième déterminant.

On ne change pas la valeur du déterminant en ajoutant deux fois la première colonne à la deuxième :

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 & 11 \\ 1 & -6 & 43 \\ -4 & 8 & 29 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 11 \\ 1 & -4 & 43 \\ -4 & 0 & 29 \end{vmatrix}$$

On peut développer le déterminant par rapport à la deuxième colonne :

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 11 \\ 1 & -4 & 43 \\ -4 & 0 & 29 \end{vmatrix} = -4 \begin{vmatrix} 2 & 11 \\ -4 & 29 \end{vmatrix}$$

On peut mettre 2 en facteur dans la première colonne :

$$-4 \begin{vmatrix} 2 & 11 \\ -4 & 29 \end{vmatrix} = -8 \begin{vmatrix} 1 & 11 \\ -2 & 29 \end{vmatrix}$$

Le déterminant $\begin{vmatrix} 1 & 11 \\ -2 & 29 \end{vmatrix}$ vaut $29 + 2 \times 11 = 51$

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 & 11 \\ 1 & -6 & 43 \\ -4 & 8 & 29 \end{vmatrix} = -8 \times 51 = -408$$

$$\boxed{\begin{vmatrix} 2 & -4 & 11 \\ 1 & -6 & 43 \\ -4 & 8 & 29 \end{vmatrix} = -408.}$$

8°/ Huitième déterminant.

On ne change pas la valeur du déterminant en ajoutant deux fois la deuxième colonne à la première :

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 13 \\ 2 & -6 & -10 \\ 1 & 9 & 19 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 13 & 5 & 13 \\ -10 & -6 & -10 \\ 19 & 9 & 19 \end{vmatrix}$$

Le déterminant $\begin{vmatrix} 13 & 5 & 13 \\ -10 & -6 & -10 \\ 19 & 9 & 19 \end{vmatrix}$ a deux colonnes identiques : il est nul.

$$\boxed{\begin{vmatrix} 3 & 5 & 13 \\ 2 & -6 & -10 \\ 1 & 9 & 19 \end{vmatrix} = 0.}$$

9°/ Neuvième déterminant.

On ne change pas la valeur du déterminant en retranchant la somme des colonnes 1, 2 et 3 de la colonne 4 :

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 & 10 \\ 2 & 5 & 9 & 13 \\ 4 & 8 & 12 & 15 \\ 7 & 11 & 14 & 16 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 & 0 \\ 2 & 5 & 9 & -3 \\ 4 & 8 & 12 & -9 \\ 7 & 11 & 14 & -20 \end{vmatrix}$$

On ne change pas la valeur du déterminant en retranchant deux fois la deuxième colonne de la troisième :

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 & 0 \\ 2 & 5 & 9 & -3 \\ 4 & 8 & 12 & -9 \\ 7 & 11 & 14 & -20 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & -1 & -3 \\ 4 & 8 & -4 & -9 \\ 7 & 11 & -8 & -20 \end{vmatrix}$$

On peut mettre en facteur – 1 dans la troisième colonne et dans la quatrième :

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & -1 & -3 \\ 4 & 8 & -4 & -9 \\ 7 & 11 & -8 & -20 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 1 & 3 \\ 4 & 8 & 4 & 9 \\ 7 & 11 & 8 & 20 \end{vmatrix}$$

On peut retrancher 3 fois la première colonne de la deuxième :

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 1 & 3 \\ 4 & 8 & 4 & 9 \\ 7 & 11 & 8 & 20 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 4 & -4 & 4 & 9 \\ 7 & -10 & 8 & 20 \end{vmatrix}$$

On peut développer le déterminant par rapport à la première ligne :

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 4 & -4 & 4 & 9 \\ 7 & -10 & 8 & 20 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -4 & 4 & 9 \\ -10 & 8 & 20 \end{vmatrix}$$

On ne change pas la valeur du détemrinant en ajoutant la deuxième colonne à la première :

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -4 & 4 & 9 \\ -10 & 8 & 20 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 9 \\ -2 & 8 & 20 \end{vmatrix}$$

On peut développer le déterminant par rapport à la première colonne :

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 9 \\ -2 & 8 & 20 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 9 \end{vmatrix}$$

Le déterminant $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 9 \end{vmatrix}$ vaut 9 – 12 = – 3.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 & 10 \\ 2 & 5 & 9 & 13 \\ 4 & 8 & 12 & 15 \\ 7 & 11 & 14 & 16 \end{vmatrix} = (-2) \times (-3) = 6.$$

$$\boxed{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 & 10 \\ 2 & 5 & 9 & 13 \\ 4 & 8 & 12 & 15 \\ 7 & 11 & 14 & 16 \end{vmatrix} = 6.}$$

10°/ Dixième déterminant.

On peut mettre 3 en facteur dans toutes les colonnes :

$$\begin{vmatrix} 3 & 9 & 18 & 30 \\ 6 & 15 & 27 & 39 \\ 12 & 24 & 36 & 45 \\ 21 & 33 & 42 & 48 \end{vmatrix} = 3^4 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 & 10 \\ 2 & 5 & 9 & 13 \\ 4 & 8 & 12 & 15 \\ 7 & 11 & 14 & 16 \end{vmatrix} = 81 \times 6 = 486, \text{ d'après 9°.}$$

$$\boxed{\begin{vmatrix} 3 & 9 & 18 & 30 \\ 6 & 15 & 27 & 39 \\ 12 & 24 & 36 & 45 \\ 21 & 33 & 42 & 48 \end{vmatrix} = 486.}$$

Chapitre 5. Déterminants.

Enoncés.

Exercice 2. Calcul de 3 déterminants littéraux.

Soient a, b, c, des nombres réels. Calculer :

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 4 & 2a & 2a^2 \\ 2 & b & b^2 \\ 4 & 2c & 2c^2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \cos c & \cos b \\ 1 & \cos c & 1 & \cos a \\ 1 & \cos b & \cos a & 1 \end{vmatrix}.$$

Solution.

1°/ Premier déterminant.

On ne change pas la valeur du déterminant en retranchant la première ligne de la deuxième et de la troixième :

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b-a & b^2-a^2 \\ 0 & c-a & c^2-a^2 \end{vmatrix}$$

On peut développer le déterminant par rapport à la première colonne, en mettant $(b - a)$ en facteur dans la deuxième ligne, et $(c - a)$ en facteur dans la troisième ligne :

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b-a & b^2-a^2 \\ 0 & c-a & c^2-a^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & b+a \\ 1 & c+a \end{vmatrix}$$

Le déterminant $\begin{vmatrix} 1 & b+a \\ 1 & c+a \end{vmatrix}$ vaut $(c + a) – (b + a) = c – b$.

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b) = (a-b)(b-c)(c-a) \text{ (Van der Monde).}$$

$$\boxed{\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a).}$$

2°/ Deuxième déterminant.

On peut mettre 2 en facteur dans la première ligne, et 2 en facteur dans la troisième ligne :

$$\begin{vmatrix} 4 & 2a & 2a^2 \\ 2 & b & b^2 \\ 4 & 2c & 2c^2 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 2 & a & a^2 \\ 2 & b & b^2 \\ 2 & c & c^2 \end{vmatrix}$$

On peut mettre 2 en facteur dans la première colonne :

$$4 \begin{vmatrix} 2 & a & a^2 \\ 2 & b & b^2 \\ 2 & c & c^2 \end{vmatrix} = 8 \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = 8\,(a-b)\,(b-c)\,(c-a)$$, d'après la question précédente.

$$\boxed{\begin{vmatrix} 4 & 2a & 2a^2 \\ 2 & b & b^2 \\ 4 & 2c & 2c^2 \end{vmatrix} = 8\,(a-b)\,(b-c)\,(c-a).}$$

3°/ Troisième déterminant.

On ne change pas la valeur du déterminant en retranchant la première colonne de chacune des suivantes :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \cos c & \cos b \\ 1 & \cos c & 1 & \cos a \\ 1 & \cos b & \cos a & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cos c - 1 & \cos b - 1 \\ 1 & \cos c - 1 & 0 & \cos a - 1 \\ 1 & \cos b - 1 & \cos a - 1 & 0 \end{vmatrix}$$

On peut développer le déterminant par rapport à la première ligne :

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cos c - 1 & \cos b - 1 \\ 1 & \cos c - 1 & 0 & \cos a - 1 \\ 1 & \cos b - 1 & \cos a - 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \cos c - 1 & \cos b - 1 \\ \cos c - 1 & 0 & \cos a - 1 \\ \cos b - 1 & \cos a - 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Dans la formule du développement complet du déterminant, les trois permutations impaires (signature égale à – 1) donnent des produits contenant un 0, il reste :

$$\begin{vmatrix} 0 & \cos c - 1 & \cos b - 1 \\ \cos c - 1 & 0 & \cos a - 1 \\ \cos b - 1 & \cos a - 1 & 0 \end{vmatrix} = 2\,(\cos a - 1)\,(\cos b - 1)\,(\cos c - 1) = -2\,(1 - \cos a)\,(1 - \cos b)\,(1 - \cos c)$$

$$\boxed{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \cos c & \cos b \\ 1 & \cos c & 1 & \cos a \\ 1 & \cos b & \cos a & 1 \end{vmatrix} = -2\,(1 - \cos a)\,(1 - \cos b)\,(1 - \cos c).}$$

Chapitre 5. Déterminants.

Enoncés.

Exercice 3. Calcul d'un déterminant $n \times n$ symétrique.

Soient $n \geq 2$ un entier, a et b deux nombres réels.
Calculer la valeur du déterminant d'ordre n :

$$\begin{vmatrix} a+b & b & b & \cdots & b & b \\ b & a+b & b & \cdots & b & b \\ b & b & a+b & \cdots & b & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a+b & b \\ b & b & b & \cdots & b & a+b \end{vmatrix}.$$

Solution.

On ne change pas la valeur du déterminant en ajoutant à la première colonne la somme des autres colonnes :

$$\begin{vmatrix} a+b & b & b & \cdots & b & b \\ b & a+b & b & \cdots & b & b \\ b & b & a+b & \cdots & b & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a+b & b \\ b & b & b & \cdots & b & a+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+nb & b & b & \cdots & b & b \\ a+nb & a+b & b & \cdots & b & b \\ a+nb & b & a+b & \cdots & b & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a+nb & b & b & \cdots & a+b & b \\ a+nb & b & b & \cdots & b & a+b \end{vmatrix}$$

On peut mettre $a = n\,b$ en facteur dans la première colonne :

$$\begin{vmatrix} a+nb & b & b & \cdots & b & b \\ a+nb & a+b & b & \cdots & b & b \\ a+nb & b & a+b & \cdots & b & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a+nb & b & b & \cdots & a+b & b \\ a+nb & b & b & \cdots & b & a+b \end{vmatrix} = (a + n\,b) \begin{vmatrix} 1 & b & b & \cdots & b & b \\ 1 & a+b & b & \cdots & b & b \\ 1 & b & a+b & \cdots & b & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & b & b & \cdots & a+b & b \\ 1 & b & b & \cdots & b & a+b \end{vmatrix}$$

On ne change pas la valeur du déterminant en retranchant la première ligne de chacune des autres :

$$(a + n\,b) \begin{vmatrix} 1 & b & b & \cdots & b & b \\ 1 & a+b & b & \cdots & b & b \\ 1 & b & a+b & \cdots & b & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & b & b & \cdots & a+b & b \\ 1 & b & b & \cdots & b & a+b \end{vmatrix} = (a + n\,b) \begin{vmatrix} 1 & b & b & \cdots & b & b \\ 0 & a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}$$

Le déterminant d'une matrice triangulaire est égal au produit des éléments de la diagonale :

$$(a + n\,b)\begin{vmatrix} 1 & b & b & \cdots & b & b \\ 0 & a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix} = (a + n\,b)\,a^{n-1}$$

$$\begin{vmatrix} a+b & b & b & \cdots & b & b \\ b & a+b & b & \cdots & b & b \\ b & b & a+b & \cdots & b & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a+b & b \\ b & b & b & \cdots & b & a+b \end{vmatrix} = (a + n\,b)\,a^{n-1}.$$

Chapitre 5. Déterminants.

Enoncés.

Exercice 4. Déterminant d'une matrice 10 × 10.

Soit σ la permutation des entiers de 1 à 10 définie par :

$$\sigma := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 4 & 6 & 8 & 2 & 3 & 1 & 5 & 10 & 9 & 7 \end{pmatrix}.$$

Soit $P_\sigma := (p_{ij})_{1 \le i, j \le 10}$ la matrice 10 × 10 telle que :

$$p_{ij} = 1 \text{ si } \sigma(j) = i,\ p_{ij} = 0 \text{ sinon.}$$

Quel est le déterminant de P_σ ?

Solution.

Dans la i-ème colonne, seul l'élément de la j-ème ligne avec $j = \sigma^{-1}(i)$, vaut 1, les autres sont nuls.
Appliquons aux lignes de P_σ la permutation σ : le déterminant est multiplié par la signature de σ.

Dans cette permutation des lignes, le 1 de la i-ème colonne se retrouve à la $\sigma(\sigma^{-1}(i)) = i$-ème ligne.
La matrice à lignes permutées est donc la matrice unité : son déterminant vaut 1.
Au total :

$$\boxed{Dét(P_\sigma) = sign(\sigma).}$$

Chapitre 5. Déterminants.

Enoncés.

Exercice 5. Déterminant d'une matrice $n \times n$ non symétrique.

Soient $n \geq 2$ un entier, et $x_1, \ldots, x_n$, a, b, des nombres réels, avec $a \neq b$.

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose :

$$D(x) = \begin{vmatrix} x_1+x & a+x & a+x & \cdots & a+x & a+x \\ b+x & x_2+x & a+x & \cdots & a+x & a+x \\ b+x & b+x & x_3+x & \cdots & a+x & a+x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b+x & b+x & b+x & \cdots & x_{n-1}+x & a+x \\ b+x & b+x & b+x & \cdots & b+x & x_n+x \end{vmatrix}.$$

1°/ Montrer que $D(x)$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à 1.
2°/ En déduire la valeur du déterminant :

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & a & a & \cdots & a & a \\ b & x_2 & a & \cdots & a & a \\ b & b & x_3 & \cdots & a & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & x_{n-1} & a \\ b & b & b & \cdots & b & x_n \end{vmatrix}.$$

Solution.

1°/ Degré du polynôme $D(x)$.

On ne change pas la valeur du déterminant en retranchant la première colonne de chacune des autres colonnes :

$$\begin{vmatrix} x_1+x & a+x & a+x & \cdots & a+x & a+x \\ b+x & x_2+x & a+x & \cdots & a+x & a+x \\ b+x & b+x & x_3+x & \cdots & a+x & a+x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b+x & b+x & b+x & \cdots & x_{n-1}+x & a+x \\ b+x & b+x & b+x & \cdots & b+x & x_n+x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1+x & a-x_1 & a-x_1 & \cdots & a-x_1 & a-x_1 \\ b+x & x_2-b & a-b & \cdots & a-b & a-b \\ b+x & 0 & x_3-b & \cdots & a-b & a-b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b+x & 0 & 0 & \cdots & x_{n-1}-b & a-b \\ b+x & 0 & 0 & \cdots & 0 & x_n-b \end{vmatrix}$$

Les colonnes 2 à n ne contiennent plus de x.
Lorsqu'on développe le déterminant par rapport à la première colonne, on trouve une somme de polynômes du premier degré en x : c'est un polynôme en x, de degré 1 ou 0 (lorsque le coefficient de x est nul).

$D(x)$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à 1.

2°/ Valeur du déterminant Δ.

$\Delta = D(0)$.
Si l'on écrit $D(x) = \alpha x + \Delta$, on a $D(-b) = -\alpha b + \Delta$.
Or $D(-b) = (x_1 - b)(x_2 - b) \dots (x_n - b)$.
Donc $\Delta = \alpha b + (x_1 - b)(x_2 - b) \dots (x_n - b)$.

Mais, d'autre part, on ne change pas non plus la valeur d'un déterminant en retranchant la première ligne de chacune des autres lignes.
On obtient donc, par symétrie :
$\Delta = \alpha a + (x_1 - a)(x_2 - a) \dots (x_n - a)$.

Par soustraction : $\alpha (b - a) + (x_1 - b)(x_2 - b) \dots (x_n - b) - (x_1 - a)(x_2 - a) \dots (x_n - a) = 0$.
Comme a est différent de b, on peut diviser par $b - a$ et écrire :

$$\alpha = \frac{1}{b-a}[(x_1 - a)(x_2 - a) \dots (x_n - a) - (x_1 - b)(x_2 - b) \dots (x_n - b)]$$

En portant cette valeur dans la relation $\Delta = \alpha a + (x_1 - a)(x_2 - a) \dots (x_n - a)$, on obtient :

$$\Delta = \frac{a}{b-a}[(x_1 - a)(x_2 - a) \dots (x_n - a) - (x_1 - b)(x_2 - b) \dots (x_n - b)] + (x_1 - a)(x_2 - a) \dots (x_n - a).$$
$$= \frac{1}{b-a}[b(x_1 - a)(x_2 - a) \dots (x_n - a) - a(x_1 - b)(x_2 - b) \dots (x_n - b)].$$

$$\boxed{\Delta = \frac{1}{b-a}[b(x_1 - a)(x_2 - a) \dots (x_n - a) - a(x_1 - b)(x_2 - b) \dots (x_n - b)].}$$

Chapitre 5. Déterminants.

Enoncés.

Exercice 6. Rang d'une matrice 4 × 4.

Soit $a \in \mathbb{R}$. Discuter, suivant la valeur de a, le rang de la matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & a & a & a \\ a & 2 & a & a \\ a & a & 2 & a \\ a & a & a & 2 \end{pmatrix}$.

Solution.

Calculons d'abord le déterminant de M.
On ne change pas la valeur du déterminant en ajoutant à la première colonne la somme des trois autres :

$$Dét\,(M) = \begin{vmatrix} 2+3a & a & a & a \\ 2+3a & 2 & a & a \\ 2+3a & a & 2 & a \\ 2+3a & a & a & 2 \end{vmatrix}$$

On peut mettre $2 + 3\,a$ en facteur dans la première colonne :

$$Dét\,(M) = (2 + 3\,a) \begin{vmatrix} 1 & a & a & a \\ 1 & 2 & a & a \\ 1 & a & 2 & a \\ 1 & a & a & 2 \end{vmatrix}.$$

On ne change pas la valeur du déterminant en retranchant la première ligne de chacune des autres :

$$Dét\,(M) = (2 + 3\,a) \begin{vmatrix} 1 & a & a & a \\ 0 & 2-a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2-a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2-a \end{vmatrix}$$

Le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit des éléments de la diagonale principale :

$$Dét\,(M) = (2 + 3\,a)\,(2 - a)^3$$

Lorsque a est différent de $-\frac{2}{3}$ et différent de 2, le déterminant de M n'est pas nul, M est inversible, c'est la matrice d'un automorphisme.
L'image est donc de dimension 4 et M est de rang 4.

$$\begin{pmatrix} 2 & a & a & a \\ a & 2 & a & a \\ a & a & 2 & a \\ a & a & a & 2 \end{pmatrix} = M \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2+3a & a & a & a \\ 2+3a & 2 & a & a \\ 2+3a & a & 2 & a \\ 2+3a & a & a & 2 \end{pmatrix} = M \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pour $2 + 3\,a = 0$:

$$\begin{pmatrix} 0 & a & a & a \\ 0 & 2 & a & a \\ 0 & a & 2 & a \\ 0 & a & a & 2 \end{pmatrix} = M \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 3a & 3a & 3a \\ 0 & 6 & 3a & 3a \\ 0 & 3a & 6 & 3a \\ 0 & 3a & 3a & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 6 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & -2 & 6 \end{pmatrix} = M \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Retranchons la deuxième colonne de la troisième et de la quatrième :

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -8 & -8 \\ 0 & -2 & 8 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 8 \end{pmatrix} = M \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -3 & -3 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Les vecteurs $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, proportionnels aux colonnes de la matrice de gauche, forment une famille libre, donc une base de l'image de M : la matrice M est donc de rang 3 lorsque $a = -\frac{2}{3}$. Le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, dont l'image est nulle, forme une base du noyau, qui est donc de dimension 1.

Pour $a = 2$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = M \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Soustrayons la première colonne des trois autres :

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = M \times \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, proportionnel à la première colonne de la matrice de gauche, forme une base de

l'image de M, qui est donc de dimension 1, et les vecteurs $\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$, de la matrice de droite, dont l'image est nulle, forment une base du noyau, qui est donc de dimension 3.
Donc M est de rang 1 lorsque $a = 2$.

En résumé :

Pour $a = 2$, M est de rang 1. Pour $a = -\frac{2}{3}$, M est de rang 3. Pour $a \neq -\frac{2}{3}$ et $a \neq 2$, M est de rang 4.

Chapitre 5. Déterminants.

Enoncés.

Exercice 7. Puissance *n*-ième d'une matrice 3 × 3.

Soit E un espace vectoriel de dimension 3 sur $\mathbb{R}$.
On désigne par $B = \{e_1, e_2, e_3\}$, une base de E et on considère l'endomorphisme f de E dont la matrice dans la base B est :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1°/ Montrer que f est un automorphisme de E.
2°/ Calculer A^2.
En déduire que $f \circ f = 3f - 2\,Id_E$, où Id_E désigne l'automorphisme identique de E.
3°/ En utilisant 2°, exprimer f^{-1} en fonction de f et Id_E.
4°/ On considère les trois vecteurs de E :

$v_1 = e_1 - e_2$, $v_2 = e_2 - e_3$, $v_3 = e_1 + e_2 - e_3$.

Vérifier que $B' = \{v_1, v_2, v_3\}$ est une base de E.
5°/ Déterminer la matrice A' de f dans la base B'.
6°/ Ecrire la matrice de passage P de la base B à la base B'.
7°/ Calculer le déterminant de la matrice A et le déterminant de la matrice A'.
Remarquer que $Dét(A) = Dét(A')$ et justifier cette égalité.
8°/ Déterminer A'^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Solution.

1°/ Automorphisme.

Le déterminant de $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ est $-1 - 1 + 2 + 2 = 2$. Il est différent de 0, donc A est inversible;
Donc f est inversible aussi et **f est un automorphisme**.

2°/ Hamilton-Cailey.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 3 \\ -3 & -3 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$\boxed{A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 3 \\ -3 & -3 & -2 \end{pmatrix}.}$$

A^2 est la matrice de $f^2 = f \circ f$.

$3f$ a pour matrice $3A = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 3 \\ 3 & 6 & 3 \\ -3 & -3 & 0 \end{pmatrix}$.

$$3A - 2I = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 3 \\ 3 & 6 & 3 \\ -3 & -3 & 0 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 3 \\ -3 & -3 & -2 \end{pmatrix} = A^2.$$

donc $3f - 2\,Id_E$ et f^2 ont la même matrice : ces deux endomorphismes coïncident.

$$\boxed{f^2 = 3f - 2\,Id_E.}$$

3°/ Inverse de *f*.

La relation $f^2 = 3f - 2\,Id_E$ s'écrit aussi :

$$f \circ (f - 3\,Id_E) = -2\,Id_E.$$

Multiplions par f^{-1} :

$$-2\,f^{-1} = f - 3\,Id_E$$

$$\boxed{f^{-1} = \frac{1}{2}(3\,Id_E - f)}$$

En termes de matrice, cette formule s'écrit :

$$A^{-1} = \frac{1}{2}(3I - A) = I - \frac{1}{2}(A - I).$$

4°/ Base propre.

$f(v_1) = f(e_1 - e_2) = f(e_1) - f(e_2)$.
Donc $f(v_1)$ s'obtient en retranchant la deuxième colonne de A de la première :

$$f(v_1) = A\,v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = e_1 - e_2 = v_1.$$

La relation $f(v_1) = v_1$ montre que **v_1 est vecteur propre de *f* pour la valeur propre 1**.

$f(v_2) = f(e_2 - e_3) = f(e_2) - f(e_3)$.
Donc $f(v_2)$ s'obtient en retranchant la troisième colonne de A de la deuxième :

$$f(v_2) = A\,v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = e_2 - e_3 = v_2 .$$

La relation $f(v_2) = v_2$ montre que **v_2 est vecteur propre de *f* pour la valeur propre 1**.

$f(v_3) = f(e_1 + e_2 - e_3) = f(e_1) + f(e_2) - f(e_3)$.
Donc $f(v_3)$ s'obtient en retranchant la troisième colonne de A de la somme des deux premières :

$$f(v_3) = A\,v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 2\,(e_1 + e_2 - e_3) = 2\,v_3 .$$

La relation $f(v_3) = 2\,v_3$ montre que **v_3 est vecteur propre de *f* pour la valeur propre 2**.

Le déterminant de la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ des vecteurs propres (v_1, v_2, v_3) est 1.
Il est différent de 0, donc la famille $\{v_1, v_2, v_3\}$ est libre : c'est une base de E.

$B' = \{v_1, v_2, v_3\}$ est une base de E.

5°/ Matrice *A* '.

Les relations :

$f(v_1) = v_1$
$f(v_2) = v_2$
$f(v_3) = 2\,v_3$

montrent que la matrice A' de f dans la base $B' = \{v_1, v_2, v_3\}$ est :

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

6°/ Matrice de passage *P*.

La matrice de passage P de la base B à la base B', est la matrice des coordonnées des vecteurs $\{v_1, v_2, v_3\}$ dans la base B :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

7°/ Déterminants de *A* et de *A* '.

Les relations de définition :

$v_1 = e_1 - e_2$,
$v_2 = e_2 - e_3$,
$v_3 = e_1 + e_2 - e_3$,

donnent :

$e_1 = v_3 - (e_2 - e_3) = v_3 - v_2 = -v_2 + v_3$,
$e_2 = e_1 - v_1 = -v_1 - v_2 + v_3$,
$e_3 = e_2 - v_2 = -v_1 - 2\,v_2 + v_3$,

de sorte que l'inverse de la matrice de passage *P*, qui est la matrice des coordonnées des vecteurs $\{e_1, e_2, e_3\}$ dans la base *B* ' est :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice *A* de l'automorphisme *f* dans la base *B* est liée à la matrice *A* ' de *f* dans la base *B* ' par la relation :

$$A = P\,A'\,P^{-1}\,.$$

Or nous avons vu que :
— le déterminant de *A* est 2 (question 1°),
— le déterminant de *P* est 1 (question 4°).
Il en résulte que le déterminant de P^{-1} , qui est l'inverse du déterminant de *P*, est 1 et :

$$Dét\,(A) = Dét\,(P\,A'\,P^{-1}) = Dét\,(P) \times Dét\,(A') \times Dét\,(P^{-1}) = Dét\,(A'),$$

ce qui se vérifie facilement puisque *A* ' est une matrice diagonale : son déterminant est le produit des éléments de la diagonale.

De façon générale, le déterminant de la matrice d'un endomorphisme est le produit des valeurs propres de l'endomorphisme : il ne dépend donc pas de la base choisie dans *E*. C'est le "déterminant de l'endomorphisme".

8°/ Puissances de *A*.

Comme *A* ' est une matrice diagonale, il est facile de calculer A'^{n} : il suffit d'élever chaque élément de *A* ' à la puissance *n*.

$$A'^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Par associativité du produit des matrices, la relation $A = P\,A'\,P^{-1}$ donne :

$$A^n = P\,A'^n\,P^{-1}.$$

On peut écrire : $A'^n = I + (2^n - 1)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, d'où :

$$A^n = P\,I\,P^{-1} + (2^n - 1)\,P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}P^{-1}$$
$$= I + (2^n - 1)\,P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}P^{-1}$$

Pour $n = 1$, cette formule s'écrit : $A = I + P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}P^{-1}$, ce qui montre que :

$$P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}P^{-1} = A - I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

et la formule $A^n = I + (2^n - 1)\,P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}P^{-1}$ s'écrit :

$$A^n = I + (2^n - 1)\,(A - I) = (2\,I - A) + 2^n\,(A - I)$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} + 2^n \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^n = I + (2^n - 1)\,(A - I) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} + 2^n \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

En particulier, pour $n = 2$, on retrouve : $A^2 = I + (2^2 - 1)\,(A - I) = 3\,A - 2\,I$ (question 2°).
Pour $n = -1$, la formule s'écrit $A^{-1} = I - \frac{1}{2}\,(A - I)$, elle est vraie (question 3°).

Remarque : en réalité, la formule $A^n = I + (2^n - 1)\,(A - I)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{Z}$, comme on peut le voir par récurrence pour les valeurs négatives de n.

D I A G O N A L I S A T I O N

EXERCICE 1.

$E = R^3$ est rapporté à sa base canonique $e = \{e_1 , e_2 , e_3 \}$. f est l'endomorphisme de matrice M dans cette base :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer son polynôme caractéristique.
2. Calculer ses valeurs propres.
3. Donner une base des sous-espaces propres.
4. Décider si f est diagonalisable.
5. Donner éventuellement l'expression diagonalisée.
6. Vérifier en utilisant les matrices de changement de base.

EXERCICE 2.

Faire, pour la matrice A suivante, une étude semblable à celle de l'exercice 1 pour la matrice M :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -5 \\ -5 & -7 & 5 \\ -5 & -5 & 3 \end{pmatrix}$$

EXERCICE 3.

$E = R^3$ est rapporté à sa base canonique $e = \{e_1 , e_2 , e_3 \}$. f est l'endomorphisme de matrice B dans cette base :

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer son polynôme caractéristique.
2. Calculer ses valeurs propres.
3. Donner une base des sous-espaces propres.
4. Décider si f est diagonalisable.
5. Donner éventuellement l'expression diagonalisée.
6. Vérifier en utilisant les matrices de changement de base.

EXERCICE 4.

Faire, pour la matrice C suivante, une étude semblable à celle de l'exercice 3 pour la matrice B :

$$C = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

EXERCICE 5.

Soit M une matrice 5×5 réelle dont le polynôme caractéristique est :

$$P(X) = (X + 1)^2 (X - 2)^3.$$

1. Quelles sont les valeurs propres de M ?
2. M est-elle diagonalisable ?
3. On suppose de plus que les sous-espaces propres sont de dimension 2. Que conclure ?

EXERCICE 6.

$E = \mathbb{R}^4$ est rapporté à sa base canonique $e = \{e_1 , e_2 , e_3 , e_4\}$. f est l'endomorphisme de matrice M dans cette base :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -6 & 4 & 4 \\ 4 & -4 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Quelle est la matrice de $g = f^2$ dans la base $\{e\}$?
2. Quels sont les vecteurs propres et les valeurs propres de g ?
3. Montrer que si λ est une valeur propre de f, alors $\mu = \lambda^2$ est valeur propre de g.
4. En déduire les seules valeurs propres possibles pour f.
5. Pour un vecteur x quelconque de E, montrer que :

$$f(x) + 2x \in Ker\,(f - 2\,id_E)$$
$$f(x) - 2x \in Ker\,(f + 2\,id_E)$$

6. Construire un système de générateurs de E formé de vecteurs propres de f.
7. Diagonaliser f, soit directement, soit en utilisant ce qui précède.

EXERCICE 7.

Etudier le rang, l'image, le noyau, les sous-espaces propres, le polynôme caractéristique et le polynôme minimal de l'opérateur associé à :

$$A = \begin{pmatrix} -1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Peut-on diagonaliser cette matrice ?

EXERCICE 8.

Etudier le rang, l'image, le noyau, les sous-espaces propres, le polynôme caractéristique et le polynôme minimal de l'opérateur associé à :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Peut-on diagonaliser cette matrice ?

EXERCICE 9.

Etudier le rang, l'image, le noyau, les sous-espaces propres, le polynôme caractéristique et le polynôme minimal de l'opérateur associé à :

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 7 & -6 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Peut-on diagonaliser cette matrice ?

EXERCICE 10.

Etudier le rang, l'image, le noyau, les sous-espaces propres, le polynôme caractéristique et le polynôme minimal de l'opérateur associé à :

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -4 & 0 & 8 & 2 \end{pmatrix}.$$

Peut-on diagonaliser cette matrice ?

EXERCICE 11.

Etudier la matrice à n lignes et n colonnes :

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

EXERCICE 12.

Etudier la matrice à n lignes et n colonnes :

$$G = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

EXERCICE 13.

Etudier la matrice à n lignes et n colonnes :

$$H = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \cdots & \beta \\ \beta & \alpha & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \beta \\ \beta & \cdots & \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

EXERCICE 14.

Soit A une matrice symétrique réelle à n lignes et n colonnes telle qu'il existe un entier k vérifiant $A^k = I_n$ .Montrer que $A^2 = I_n$.

EXERCICE 15.

Vrai ou Faux.

E est un espace vectoriel de dimension finie sur un corps de nombres complexes *K*. Soit f un endomorphisme de *E*. *Id* est l'application identique. Donnez votre opinion sur les assertions suivantes (à justifier par une démonstration).

01. Si $f^2 = f$, alors f est inversible.
02. Si f est inversible, alors f^{-1} est diagonalisable.
03. Si f est diagonalisable, alors f est inversible.
04. Si f est inversible, alors f^2 l'est aussi.
05. Si f est diagonalisable, alors f^2 l'est aussi.
06. Si $f^2 = f$, alors f est diagonalisable.
07. Si $f^2 = Id$, alors f est inversible.
08. Si f est inversible et diagonalisable, alors f^{-1} est diagonalisable.
09. Si la matrice de f par rapport à une base $\{u\}$ est symétrique, alors f est diagonalisable.
10. Le noyau de f est un sous-espace propre de f.
11. L'image et le noyau d'un endomorphisme diagonalisable et non inversible forment une somme directe.
12. Si une matrice à éléments dans $\mathbb{R}$ est diagonalisable et inversible, son inverse est diagonalisable.
13. La somme de deux endomorphismes diagonalisables dans $\mathbb{R}^2$ n'est pas forcément diagonalisable.
14. La matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & 1 & -6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

est diagonalisable.

D I A G O N A L I S A T I O N

EXERCICE 1.

$E = R^3$ est rapporté à sa base canonique $e = \{e_1 , e_2 , e_3 \}$. f est l'endomorphisme de matrice M dans cette base :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer son polynôme caractéristique.
2. Calculer ses valeurs propres.
3. Donner une base des sous-espaces propres.
4. Décider si f est diagonalisable.
5. Donner éventuellement l'expression diagonalisée.
6. Vérifier en utilisant les matrices de changement de base.

SOLUTION.

1°/ Polynôme caractéristique.

Le polynôme caractéristique de la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

est le déterminant de la matrice $M - \lambda\, id_E$.

$$P(\lambda) = Dét(M - \lambda\, id_E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ -2 & -\lambda & -1 \\ -2 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} .$$

On ne change pas la valeur du déterminant en ajoutant la 2^e ligne à la 1^e :

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ -2 & -\lambda & -1 \\ -2 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1-\lambda & -1-\lambda & 0 \\ -2 & -\lambda & -1 \\ -2 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

On peut mettre $-(1+\lambda)$ en facteur dans la 1^e ligne :

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ -2 & -\lambda & -1 \\ -2 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -(1+\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -\lambda & -1 \\ -2 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

On ne change pas la valeur du déterminant en retranchant la 1^e colonne de la 2^e.

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ -2 & -\lambda & -1 \\ -2 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -(1+\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2-\lambda & -1 \\ -2 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

On peut développer le déterminant par rapport à la 1^e ligne.

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ -2 & -\lambda & -1 \\ -2 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -(1+\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

On peut développer le déterminant par rapport à la 1^e colonne.

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ -2 & -\lambda & -1 \\ -2 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -(1+\lambda)(2-\lambda)(1-\lambda)$$

Le polynôme caractéristique de la matrice M est $P(\lambda) = -(\lambda+1)(\lambda-1)(\lambda-2)$

2°/ Valeurs propres.

Les valeurs propres de la matrice M sont les racines du polynôme caractéristique : -1, 1, 2. Ces racines sont toutes trois réelles et simples.

Les valeurs propres de la matrice M sont $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 2$.

3°/ Sous-espaces propres.

Comme les valeurs propres sont réelles et distinctes, chaque sous-espace propre est de dimension 1 et engendré par un vecteur propre quelconque pour la valeur propre correspondante.
Le sous-espace propre pour une valeur propre λ est le noyau de la matrice $M - \lambda I$.

- pour la valeur propre $\lambda_1 = -1$, $M - \lambda_1 I = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$. Réduisons cette matrice :

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ajoutons la 2e colonne à la 3e, et ajoutons deux fois la 2e colonne à la 1e

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -6 & -2 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice $M - \lambda_1 I$ est de rang 2 (les deux premières colonnes de la matrice réduite forment une famille libre de vecteurs), et son noyau a pour base par le vecteur $a_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- pour la valeur propre $\lambda_2 = 1$, $M - \lambda_2 I = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. Réduisons cette matrice :

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Soustrayons de la 1e colonne la somme des deux autres, puis ajoutons à la 2e colonne la 3e :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice $M - \lambda_2 I$ est de rang 2 (les deux dernières colonnes de la matrice réduite forment une famille libre de vecteurs), et son noyau a pour base par le vecteur $a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

- pour la valeur propre $\lambda_3 = 2$, $M - \lambda_3 I = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -2 & -2 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$. Réduisons cette matrice :

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -2 & -2 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Soustrayons de la 1e colonne la 2e, puis ajoutons à la 2e colonne la 3e :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice $M - \lambda_3 I$ est de rang 2 (les deux dernières colonnes de la matrice réduite forment une famille libre de vecteurs), et son noyau a pour base par le vecteur $a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

4°/ Diagonalisation.

Le ***polynôme minimal*** de M est $(\lambda + 1)(\lambda - 1)(\lambda - 2)$. Ses racines sont réelles et d'ordre 1 : la matrice M est donc diagonalisable.

Soit $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ la matrice des vecteurs propres $\{a_1 , a_2 , a_3 \}$: $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. On a :

$$P^{-1} M P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

La matrice P est la matrice du changement de base $[id_E ,\{a\},\{e\}]$. La relation précédente montre que l'on a :

$$[f ,\{a\},\{a\}] = [id_E ,\{e\},\{a\}][f ,\{e\},\{e\}][id_E ,\{a\},\{e\}] = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

L'endomorphisme f se décompose donc en :

- une homothétie de rapport −1 (symétrie) sur l'axe défini $a_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = e_2 + e_3$;
- une homothétie de rapport 1 (identité) sur l'axe défini par $a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = e_1 - e_2 - e_3$;
- une homothétie de rapport 2 sur l'axe défini par $a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = e_1 - e_2$.

Les vecteurs de la base canonique sont donnés, en fonction de la base propre, par :

$$e_1 = a_1 + a_2$$
$$e_2 = a_1 + a_2 - a_3$$
$$e_3 = a_3 - a_2$$

EXERCICE 2.

Faire, pour la matrice A suivante, une étude semblable à celle de l'exercice 1 pour la matrice M :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -5 \\ -5 & -7 & 5 \\ -5 & -5 & 3 \end{pmatrix}$$

SOLUTION.

1°/ Polynôme caractéristique.

$$P^{¨}(\lambda) = Dét\,(A - \lambda\, I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 5 & -5 \\ -5 & -7-\lambda & 5 \\ -5 & -5 & 3-\lambda \end{vmatrix}.$$

On ne change pas la valeur du déterminant en ajoutant la 3e colonne à la 2e.

$$P^{¨}(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & -5 \\ -5 & -2-\lambda & 5 \\ -5 & -2-\lambda & 3-\lambda \end{vmatrix}.$$

On peut mettre en facteur dans le déterminant le facteur commun $-(2 + \lambda)$ de la 2e colonne.

$$P^{¨}(\lambda) = -(2+\lambda) \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & -5 \\ -5 & 1 & 5 \\ -5 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix}.$$

On ne change pas la valeur du déterminant en ajoutant 5 fois la 2e colonne à la 1e colonne.

$$P^{¨}(\lambda) = -(2+\lambda) \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix}.$$

On ne change pas la valeur du déterminant en retranchant la 2e ligne de la 3e.

$$P^{¨}(\lambda) = -(2+\lambda) \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix}.$$

On peut développer le déterminant par rapport à la 1e colonne.

$$P^{¨}(\lambda) = -(2+\lambda)(3-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -2-\lambda \end{vmatrix}.$$

On peut développer le déterminant par rapport à la 1e colonne.

$P^{¨}(\lambda) = (2 + \lambda)(3 - \lambda)(2 + \lambda)$.

$$\boxed{P\,(\lambda) = -(\lambda + 2)^2\,(\lambda - 3)}$$

2°/ Polynôme minimal.

Le théorème de Hamilton-Cailey donne : $(A + 2\,I\,)^2\,(A - 3\,I\,) = 0$. On a, en fait : $(A + 2\,I\,)(A - 3\,I\,) = 0$. Ceci signifie que le ***polynôme minimal*** de la matrice A est $(\lambda + 2)(\lambda - 3)$. Les racines du polynôme minimal sont simples et réelles. Il en résulte que la matrice A est diagonalisable.

3°/ Valeurs propres.

Les valeurs propres de la matrice A sont les racines de son polynôme caractéristique : $\lambda_1 = -2$ et $\lambda_2 = 3$. Le ***spectre*** de A est $\{-2\ ;\ 3\}$.

4°/ Vecteurs propres.

- Le sous-espace propre relativement à la valeur propre $\lambda_1 = -2$ est le noyau de la matrice

$$A + 2I = 5\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Réduisons cette matrice :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ajoutons la 3e colonne à la 1e et à la 2e :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ce calcul montre que la matrice $A + 2I$ est de rang 1, et que les vecteurs $a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $a_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ forment une base de son noyau. On peut donc prendre les vecteurs a_1 et a_2 comme base du sous-espace propre pour la valeur propre $\lambda_1 = -2$.

- Le sous-espace propre relativement à la valeur propre $\lambda_1 = 3$ est le noyau de la matrice

$$A - 3I = 5\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Réduisons cette matrice :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Retranchons de la 1e colonne, la somme des deux autres, puis ajoutons à la 2e colonne la 3e :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ce calcul montre que la matrice $A - 3I$ est de rang 2, et que le vecteur $a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ forme une base de son noyau. On peut donc prendre le vecteur a_3 comme base du sous-espace propre pour la valeur propre $\lambda_2 = 3$.

5°/ Diagonalisation.

Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ une matrice de vecteurs propres de A. Son inverse est $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 5 & -5 \\ -5 & -7 & 5 \\ -5 & -5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

C'est la matrice diagonale des valeurs propres de la matrice A. La matrice A est donc diagonalisable, ce qui résulte aussi du fait qu'il existe une base formée de vecteurs propres.

EXERCICE 3.

$E = R^3$ est rapporté à sa base canonique $e = \{e_1 , e_2 , e_3 \}$. f est l'endomorphisme de matrice B dans cette base :

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer son polynôme caractéristique.
2. Calculer ses valeurs propres.
3. Donner une base des sous-espaces propres.
4. Décider si f est diagonalisable.
5. Donner éventuellement l'expression diagonalisée.
6. Vérifier en utilisant les matrices de changement de base.

SOLUTION.

1°/ Polynôme caractéristique.

$$P(\lambda) = Dét(B - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 \\ -1 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}.$$

On peut développer le déterminant par rapport à la 1e colonne :

$$P(\lambda) = (3-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(1-\lambda)^2 + (1-\lambda) = (1-\lambda)[(3-\lambda)(1-\lambda)+1]$$

$$P(\lambda) = (1-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 4) = -(\lambda-1)(\lambda-2)^2$$

$$\boxed{P(\lambda) = -(\lambda-1)(\lambda-2)^2}$$

2°/ Polynôme minimal.

Le théorème de Hamilton-Cailey donne : $(B - I)(B - 2I)^2 = 0$. On a : $(B - I)(B - 2I) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

donc le polynôme minimal de la matrice B est le polynôme $(\lambda - 1)(\lambda - 2)^2$. Les racines du polynôme minimal sont réelles, mais ne sont pas simples. Il en résulte que la matrice B n'est pas diagonalisable.

3°/ Valeurs propres.

Les valeurs propres de la matrice B sont les racines de son polynôme caractéristique : 1 et 2. Le spectre est l'ensemble {1 ; 2}.

4°/ Vecteurs propres.

- Les vecteurs propres pour la valeur propre $\lambda_1 = 1$ forment le noyau de la matrice $B - \lambda_1 I = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

  Réduisons cette matrice :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Retranchons de la 1e colonne la somme des deux autres ; retranchons de la 3e colonne, la 2e :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ce calcul montre que la matrice $B - I$ est de rang 2 et que son noyau, de dimension 1, est engendré par le vecteur propre

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

- Les vecteurs propres pour la valeur propre $\lambda_2 = 2$ forment le noyau de la matrice $B - \lambda_2 I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Réduisons cette matrice :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Retranchons de la 1e colonne la 2e , puis retranchons de la 2e colonne la 3e:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ce calcul montre que la matrice $B - 2\ I$ est de rang 2 et que son noyau, de dimension 1, est engendré par le vecteur propre

$$a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

5°/ Diagonalisation.

Comme $E = \mathbb{R}^3$ n'est pas somme directe de sous-espace propres, la matrice B n'est pas diagonalisable. On peut cependant la trianguliariser en prenant, pour compléter la famille $\{a_1 , a_2 \}$ de vecteur propres en une base de E, un vecteur a_3 dans l'image de $B - I$ mais n'appartenant pas au noyau de $B - 2\ I$, par exemple, le vecteur $a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

6°/ Triangularisation.

Soit $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ la matrice des vecteurs de la famille $a = \{a_1 , a_2 , a_3 \}$. Comme la famille a est une base de E, la matrice P est inversible, son inverse est $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et l'on a :

$$P^{-1} B P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Le résultat n’est pas une matrice diagonale, mais une matrice dont la restriction au sous-espace engendré par les vecteurs $\{a_2 , a_3 \}$ est triangulaire.

EXERCICE 4.

Faire, pour la matrice C suivante, une étude semblable à celle de l'exercice 3 pour la matrice B :

$$C = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

SOLUTION.

1°/ Polynôme caractéristique.

$$P(\lambda) = Dét(C - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ -4 & 2 & -1-\lambda & 2 \\ -2 & 1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix}.$$

On ne change pas la valeur du déterminant en ajoutant la 3e colonne à la 2e et à la 4e.

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ -4 & 1-\lambda & -1-\lambda & 1-\lambda \\ -2 & 0 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix}.$$

On peut mettre en facteur $(1 - \lambda)$ dans la 2e colonne et dans la 4e colonne.

$$P(\lambda) = (1-\lambda)^2 \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & -1-\lambda & 1 \\ -2 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

On ne change pas la valeur du déterminant en retranchant la 2e ligne de la 3e.

$$P(\lambda) = (1-\lambda)^2 \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & -1-\lambda & 1 \\ -2 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

On peut développer le déterminant par rapport à la 2e colonne.

$$P(\lambda) = (1-\lambda)^2 \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 0 \\ -4 & -1-\lambda & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

On ne change pas la valeur du déterminant en retranchant la 3e ligne de la 2e.

$$P(\lambda) = (1-\lambda)^2 \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 0 \\ -2 & -\lambda & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

On peut développer le déterminant par rapport à la 3e colonne.

$$P(\lambda) = (1-\lambda)^2 \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ -2 & -\lambda \end{vmatrix}.$$

On peut développer le déterminant par rapport à la 1e colonne.

$P(\lambda) = (1-\lambda)^2(-\lambda(3-\lambda)+2) = (\lambda-1)^2(\lambda^2-3\lambda+2) = (\lambda-1)^3(\lambda-2)$

$$\boxed{P(\lambda) = (\lambda-1)^3(\lambda-2)}$$

2°/ Polynôme minimal.

Le théorème de Hamilton-Cailey donne : $(C-I)^3(C-2I) = 0$. Le produit $(C-I)(C-2I)$ est nul, donc le polynôme minimal de la matrice C est $(\lambda-1)(\lambda-2)$. Ses racines sont réelles et simples. Il en résulte que :

1. la matrice C est diagonalisable,
2. il existe une base formée de vecteurs propres.
3. la matrice $C-2I$ est de rang 3 ; son noyau, sous-espace propre pour la valeur propre 2, est de dimension 1, c'est l'image de la matrice $C-I$: $Im(C-2I) = Ker(C-I)$
4. la matrice $C-I$ est de rang 1 : son noyau, sous-espace propre pour la valeur propre 1, est de dimension 3, c'est l'image de la matrice $C-2I$: $Im(C-I) = Ker(C-2I)$.
5. $\mathbb{R}^4 = Ker(C-2I) \oplus Ker(C-I)$

3°/ Valeurs propres.

Les valeurs propres de la matrice C sont les racines du polynôme caractéristique $P(\lambda)$: $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 2$. Le spectre de C est $\{1 ; 2\}$.

4°/ Vecteurs propres.

- $(C-I) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. On peut la réduire de la façon suivante :

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ajouter à la 1e colonne 2 fois la 2e, ajouter à la 2e colonne la 3e, ajouter à la 4e colonne la 3e :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ce calcul montre que la matrice $C-I$ est de rang 1. Son noyau a pour base les vecteurs :

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad a_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad a_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ces vecteurs sont vecteurs propres pour la valeur propre triple 1.

Son image a pour base le vecteur $a_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Ce vecteur est vecteur propre pour la valeur propre simple 2.

- La famille $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ forme une base de E constituée de vecteurs propres. $E = \mathbb{R}^4$ est somme directe de sous-espaces propres de dimension 1.

5°/ Diagonalisation.

Comme il existe une base formée de vecteurs propres, la matrice C est diagonalisable. Soit P la matrice des vecteurs propres $\{a_1 , a_2 , a_3 , a_4 \}$:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Comme la famille $a = \{a_1 , a_2 , a_3 , a_4 \}$ est une base, la matrice P est la matrice de changement de base :

$$P = [id_E , \{a\},\{e\}]$$

Cette matrice est inversible, son inverse est :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

et l'on a :

$$P^{-1} C P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

C'est la matrice diagonale des valeurs propres. Cette diagonalisation montre que l'endomorphisme f de matrice C sur la base canonique de $\mathbb{R}^4$ peut se décomposer en :

— application identique dans le sous-espace propre engendré par les vecteurs $\{a_1 , a_2 , a_3 \}$,

— homothétie de rapport 2 dans le sous-espace propre engendré par le vecteur a_4.

EXERCICE 5.

Soit M une matrice 5×5 réelle dont le polynôme caractéristique est :

$$P(X) = (X + 1)^2 (X - 2)^3.$$

1. Quelles sont les valeurs propres de M ?
2. M est-elle diagonalisable ?
3. On suppose de plus que les sous-espaces propres sont de dimension 2. Que conclure ?

SOLUTION.

1°/ Valeurs propres.

La matrice M a, par hypothèse, pour polynôme caractéristique : $P(\lambda) = (\lambda + 1)^2 (\lambda - 2)^3$. Les valeurs propres de la matrice M sont les racines du polynôme caractéristique, ce sont donc les nombres −1 et 2. La valeur propre −1 est d'ordre de multiplicité 2, la valeur propre 2 est d'ordre de multiplicité 3. La matrice M possède donc un sous-espace propre pour la valeur propre −1 et un sous-espace propre pour la valeur propre 2.

2°/ Diagonalisation.

Cependant le polynôme caractéristique ne permet pas de conclure quand au caractère diagonalisable ou non de la matrice M. Pour que la matrice M soit diagonalisable, il faudrait que le polynôme minimal de la matrice M soit

$$P_u(\lambda) = (\lambda + 1)(\lambda - 2)$$

de telle sorte que la matrice $(M + I)$ soit de rang 3 et la matrice $(M - 2I)$ de rang 2. Dans ce cas, le noyau de la matrice $(M + I)$, c'est-à-dire le sous-espace propre relativement à la valeur propre −1, serait de dimension 2 et le noyau de la matrice $(M - 2I)$, c'est-à-dire le sous-espace propre relativement à la valeur propre 2, serait de dimension 3.

3°/ Dimension des sous-espaces propres.

La matrice M n'est diagonalisable que si, pour toute valeur propre, la dimension du sous-espace propre correspondant est égale à l'ordre de multiplicité de la valeur propre dans le polynôme caractéristique de la matrice.

Dans le cas où les sous-espaces propres sont tous deux de dimension 2, la dimension du sous-espace propre relatif à la valeur propre −1 est égale à l'ordre de multiplicité de cette valeur propre dans le polynôme caractéristique, de sorte que la restriction de M à ce sous-espace propre est diagonalisable et sa diagonalisée comportera uniquement des −1 sur la diagonale.

La dimension du sous-espace propre relatif à la valeur propre 2, par contre, n'est pas égale à l'ordre de multiplicité de la valeur propre 2 dans le polynôme caractéristique et la restriction de M au noyau de la matrice $(M + I)^2$ conservera une partie triangulaire.

Le polynôme minimal de la matrice M est $(\lambda + 1)^2 (\lambda - 2)^2$ et il est possible de trouver une base de $\mathbb{R}^5$ dans laquelle la matrice de l'endomorphisme de matrice M dans la base canonique prend la forme :

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

EXERCICE 6.

$E = \mathbb{R}^4$ est rapporté à sa base canonique $e = \{e_1 , e_2 , e_3 , e_4\}$. f est l'endomorphisme de matrice M dans cette base :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -6 & 4 & 4 \\ 4 & -4 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Quelle est la matrice de $g = f^2$ dans la base $\{e\}$?
2. Quels sont les vecteurs propres et les valeurs propres de g ?
3. Montrer que si λ est une valeur propre de f, alors $\mu = \lambda^2$ est valeur propre de g.
4. En déduire les seules valeurs propres possibles pour f.
5. Pour un vecteur x quelconque de E, montrer que :
$$f(x) + 2x \in Ker\,(f - 2\,id_E)$$
$$f(x) - 2x \in Ker\,(f + 2\,id_E)$$
6. Construire un système de générateurs de E formé de vecteurs propres de f.
7. Diagonaliser f, soit directement, soit en utilisant ce qui précède.

SOLUTION.

1°/ Carré de la matrice *M*.

Si f est l'endomorphisme de matrice M dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$, l'endomorphisme $g = f^2$ a pour matrice dans la base canonique le carré M^2 de la matrice M.

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -6 & 4 & 4 \\ 4 & -4 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & 4 & 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad M^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = 4\,I.$$

$$\boxed{M^2 = 4\,I.}$$

Cette relation montre que l'on a : $(M - 2\,I\,)(M + 2\,I\,) = 0$, donc le polynôme minimal de la matrice M est :

$$P_u\,(X) = (X - 2)(X + 2)$$

2°/ Valeurs propres du carré de *M*.

Les valeurs propres de M^2 sont les racines du polynôme caractéristique $(X - 4)^4$ de M^2. Il y en a une seule, 4, d'ordre de multiplicité 4.

La matrice M^2 a une seule valeur propre, 4.

3°/ Valeurs propres de la matrice *M*.

Soit λ une valeur propre de M. Pour tout vecteur propre x relativement à cette valeur propre on a $f(x) = \lambda x$, donc $g(x) = f(f(x)) = f(\lambda x) = \lambda f(x) = \lambda^2 x$. Il en résulte que $\mu = \lambda^2$ est valeur propre de g, donc de la matrice M^2 et que x est vecteur propre pour cette valeur propre.

Comme la seule valeur propre de M^2 est 4, les valeurs propres de M vérifient $\lambda^2 = 4$. Les seules valeurs propres possibles de M sont donc -2 et 2.

On a déjà observé que le polynôme minimal de la matrice M est

$$P_u\,(X) = (X - 2)(X + 2)$$

Les racines du polynôme minimal de M sont aussi des racines du polynôme caractéristique de M, de sorte que les deux valeurs -2 et 2 sont des racines du polynôme caractéristique de M : ce sont toutes deux des valeurs propres de M. Comme ce sont les seules valeurs possibles pour les valeurs propres, on en conclue :

Les valeurs propres de la matrice M sont -2 et 2.

4°/ Sous-espaces propres.

Pour tout vecteur x de E, on a :

$$(f - 2\,id_E)(f(x) + 2x) = (M - 2I)(M + 2I)\,x = 0$$
$$(f + 2\,id_E)(f(x) - 2x) = (M + 2I)(M - 2I)\,x = 0$$

puisque $(M - 2I)(M + 2I) = (M + 2I)(M - 2I)\,x = 0$.
d'où les relations :

$$f(x) + 2x \in Ker\,(f - 2\,id_E)$$
$$f(x) - 2x \in Ker\,(f + 2\,id_E)$$

Ces relations montrent que l'image de $(f + 2\,id_E)$ est dans le noyau de $(f - 2\,id_E)$ et inversement, l'image de $(f - 2\,id_E)$ est dans le noyau de $(f + 2\,id_E)$.
Considérons alors, par exemple, la matrice $M - 2I$. On peut réduire cette matrice pour calculer son rang. On arrivera à une matrice comportant un certain nombre de colonnes de zéros qui définissent le noyau de $(f - 2\,id_E)$, c'est-à-dire le sous-espace propre pour la valeur propre 2. Les autres colonnes donnent l'image de $(f - 2\,id_E)$, c'est-à-dire le sous-espace complémentaire du sous-espace propre pour la valeur propre 2. Ce sous-espace est le noyau de $(f + 2\,id_E)$, c'est-à-dire le sous-espace propre pour la valeur propre –2.

5°/ Base de vecteurs propres.

Comme le polynôme minimal de la matrice M ne comporte que des racines simples, la matrice M est diagonalisable et l'on peut trouver une base formée de vecteurs propres. Pour déterminer une telle base, réduisons la matrice $M - 2I$.

$$M - 2I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -8 & 4 & 4 \\ 4 & -4 & 0 & 4 \\ 0 & -4 & 4 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Soustraire la 1e colonne de la 4e. Ajouter la somme de la 1e et de la 3e colonnes à la 2e.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ce calcul montre que :

- La matrice $M - 2I$ est de rang 2 : son image est de dimension 2, son noyau est de dimension 2.
- On peut prendre pour vecteurs propres relativement à la valeur propre 2 les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
- On peut prendre pour vecteurs propres pour la valeur propre –2 les vecteurs $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
- Les valeurs propres –2 et 2 sont toutes deux des valeurs propres doubles. Le polynôme caractéristique de la matrice M est donc $P(\lambda) = (\lambda^2 - 4)^2 = (\lambda - 2)^2\,(\lambda + 2)^2$.

Les vecteurs $a_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $a_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ forment une base de vecteurs propres.

6°/ Diagonalisation de la matrice *M*.

Soit $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice formée des vecteurs propres. $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$P^{-1} M P = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

La matrice obtenue est diagonale, avec, sur la diagonale, les valeurs propres avec leurs ordres de multiplicité.

EXERCICE 7.

Etudier le rang, l'image, le noyau, les sous-espaces propres, le polynôme caractéristique et le polynôme minimal de l'opérateur associé à :

$$A = \begin{pmatrix} -1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Peut-on diagonaliser cette matrice ?

SOLUTION.

1°/ Réduction de la matrice *A*.

Réduisons la matrice *A*.

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ajouter la 1e colonne à la 2e et à la 3e.

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Multiplier par –2 la 1e colonne. Multiplier par –1 la 2e colonne. Retrancher la 2e colonne de la 1e.

Echanger la 1e et la 2e colonnes.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ce calcul montre que :

- La matrice *A* est de rang 3 : son image est $\mathbb{R}^3$, son noyau est {0}.
- La matrice *A* est inversible et son inverse est $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2°/ Polynôme caractéristique.

$$P(\lambda) = Dét(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -0{,}5-\lambda & -0{,}5 & 0{,}5 \\ -0{,}5 & 0{,}5-\lambda & 0{,}5 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}.$$

On peut développer le déterminant par rapport à la 3e ligne.

$$P(\lambda) = (1-\lambda)\begin{vmatrix} -0{,}5-\lambda & -0{,}5 \\ -0{,}5 & 0{,}5-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\,[\,(\lambda - 0{,}5)(\lambda + 0{,}5) - 0{,}5^2\,]$$

$$P(\lambda) = (1-\lambda)(\lambda^2 - 2\times 0{,}5^2) = -(\lambda-1)(\lambda^2 - 0{,}5)$$

$$P(\lambda) = -(\lambda + \frac{\sqrt{2}}{2})(\lambda - \frac{\sqrt{2}}{2})(\lambda - 1)$$

3°/ Valeurs propres.

La matrice A a trois valeurs propres simples distinctes, $-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 1.

4°/ Polynôme minimal.

Comme le polynôme caractéristique est produit de facteurs de premier degré distincts, ces facteurs forment aussi le polynôme minimal de la matrice, c'est-à-dire le polynôme unitaire de degré minimal tel que $P_u(A) = 0$.

$$P_u(\lambda) = (\lambda + \frac{\sqrt{2}}{2})(\lambda - \frac{\sqrt{2}}{2})(\lambda - 1)$$

5°/ Vecteurs propres.

Les trois valeurs propres sont réelles et distinctes. Les sous-espaces propres sont donc de dimension 1, leur somme est directe et égale à $\mathbb{R}^3$.

- Pour vecteur propre relativement à la valeur propre $-\frac{\sqrt{2}}{2}$, on peut prendre n'importe quelle combinaison linéaire non nulle des colonnes de la matrice

$$(A - \frac{\sqrt{2}}{2} I)(A - I) = A(A - I) - \frac{\sqrt{2}}{2}(A - I) = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

par exemple 2 fois la différence entre la 1e et la 2e colonnes :

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \sqrt{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Pour vecteur propre relativement à la valeur propre $\frac{\sqrt{2}}{2}$, on peut prendre n'importe quelle combinaison linéaire non nulle des colonnes de la matrice

$$(A + \frac{\sqrt{2}}{2} I)(A - I) = A(A - I) + \frac{\sqrt{2}}{2}(A - I) = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

par exemple 2 fois la différence entre la 1e et la 2e colonnes :

$$a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \sqrt{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Pour vecteur propre relativement à la valeur propre 1, on peut prendre n'importe quelle combinaison linéaire non nulle des colonnes de la matrice

$$(A + \frac{\sqrt{2}}{2} I)(A - \frac{\sqrt{2}}{2} I) = A^2 - \frac{1}{2} I = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

par exemple le vecteur $a_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

6°/ Diagonalisation.

Soit P la matrice des vecteurs propres,

$$P = \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} & 1-\sqrt{2} & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; P^{-1} = \frac{\sqrt{2}}{4} \begin{pmatrix} 1 & -1+\sqrt{2} & 1-\sqrt{2} \\ -1 & 1+\sqrt{2} & -1-\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 2\sqrt{2} \end{pmatrix} ;$$

$$P^{-1} A P = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

EXERCICE 8.

Etudier le rang, l'image, le noyau, les sous-espaces propres, le polynôme caractéristique et le polynôme minimal de l'opérateur associé à :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Peut-on diagonaliser cette matrice ?

SOLUTION.

1°/ Réduction de la matrice *B*.

Réduisons la matrice *B*.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ajouter la somme de 1^{e} et de la 2^{e} colonnes à la 3^{e}.

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ce calcul montre que :

- La matrice *B* est de rang 2 : son image est de dimension 2, son noyau est de dimension 1.
- L'image de *B* est engendrée par la famille libre $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$, tirée de la la matrice de gauche.
- Le noyau de *B* est engendré par le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, tiré de la matrice de droite.
- Si *f* est l'endomorphisme de matrice *B* dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, on a :

$$f(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, f(e_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, f(e_3) = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$f^2(e_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, f^2(e_2) = f(e_2) - f(e_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, f^2(e_3) = -f(e_1) - 2f(e_2) = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow B^3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 0 & 6 & -6 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} = 2B^2.$
- $B^2(B - 2I) = 0$
- $B(B - 2I) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$

2°/ Polynôme caractéristique.

$$P(\lambda) = Dét(B - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -1 \\ 1 & 1-\lambda & -2 \\ 1 & -1 & -\lambda \end{vmatrix}.$$

On peut développer le déterminant par rapport à la 1e ligne.

$$P(\lambda) = (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1-\lambda \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = (1-\lambda)(\lambda^2 - \lambda - 2) - (\lambda - 2) = -\lambda^3 + 2\lambda^2 = -\lambda^2(\lambda - 2)$$

$$\boxed{P(\lambda) = -\lambda^2(\lambda - 2)}$$

Ce résultat confirme le résultat obtenu pour la matrice B : $B^2 (B - 2I) = 0$, c'est le théorème de Hamilton-Cailey.

3°/ Valeurs propres.

Les valeurs propres de la matrice B sont les racines du polynôme caractéristique, 0 et 2. La valeur propre 0 est racine double. La valeur propre 2 est racine simple.

4°/ Polynôme minimal.

La relation $B(B - 2I) \neq 0$ confirme que le polynôme minimal de la matrice B est $\lambda^2(\lambda - 2)$.

5°/ Vecteurs propres.

- Pour vecteur propre pour la valeur propre 0, on peut prendre n'importe quelle combinaison linéaire non nulle des colonnes de la matrice $B(B - 2I) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, par exemple le vecteur $a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

  Le noyau de la matrice $B(B - 2I)$ est un sous-espace vectoriel de dimension 2, mais le noyau de B est de dimension 1, comme on l'a vu plus haut.
- Pour vecteur propre relativement à la valeur propre 2, on peut prendre n'importe quelle combinaison linéaire non nulle des colonnes de la matrice $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, par exemple le vecteur $a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$. La matrice B^2 est de rang 1, son noyau est de dimension 2, engendré par les vecteurs e_1 et $e_2 + e_3$, comme on le voit en faisant la somme des 2e et 3e colonnes de la matrice B^2.
- Comme le vecteur $a_2 = e_1$ est linéairement indépendant des vecteurs a_1 et a_3, on peut compléter la famille libre $\{a_1, a_3\}$ en une base de R^3 avec le vecteur $a_2 = e_1$.
- Les vecteurs propres $\{a_1, a_2, a_3\}$ forment une base de R^3, mais ce n'est pas une matrice de vecteurs propres, de sorte que la matrice B n'est pas diagonalisable.

6°/ Triangularisation.

Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, la matrice de la base a. $P^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 4 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

$$P^{-1} B P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

La matrice obtenue comporte sur la diagonale les valeurs propres de B avec leur ordre de multiplicité : double pour 0, simple pour 2.

Dans le sous-espace de base $\{a_1 , a_2 \}$, la restriction de l'endomorphisme f défini par la matrice B n'est pas diagonal, il a pour matrice sur $\{a_1 , a_2 \}$ $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$: pour un $x = x_1 a_1 + x_2 a_2$ du plan engendré par a_1 et a_2 ,

$$B x = x_2 a_1 .$$

Dans le sous-espace de base a_3 , la restriction de l'endomorphisme f défini par la matrice B est une homothétie de rapport 2.

$$\mathbb{R}^3 = Ker\ B \oplus \mathbb{R} e_1 \oplus Ker\ (B - 2\ I)$$

EXERCICE 9.

Etudier le rang, l'image, le noyau, les sous-espaces propres, le polynôme caractéristique et le polynôme minimal de l'opérateur associé à :

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 7 & -6 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Peut-on diagonaliser cette matrice ?

SOLUTION.

1°/ Déterminant.

$\begin{vmatrix} 0 & 7 & -6 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{vmatrix}$ = 12 – 14 = – 2 ≠ 0. La matrice C est inversible. 0 n'est pas valeur propre. La matrice C est de rang 3, son image est $\mathbb{R}^3$ tout entier, son noyau est réduit à 0.

2°/ Polynôme caractéristique.

$$P(\lambda) = Dét\,(C - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 7 & -6 \\ -1 & 4-\lambda & 0 \\ 0 & 2 & -2-\lambda \end{vmatrix}$$

On peut développer le déterminant par rapport à la première colonne :

$P(\lambda) = -\lambda(\lambda - 4)(\lambda + 2) + (-14 - 7\lambda + 12) = -\lambda(\lambda^2 - 2\lambda - 8) - 2 - 7\lambda = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda - 2$

$P(\lambda) = -\lambda^2(\lambda - 2) + (\lambda - 2) = (\lambda - 2)(1 - \lambda^2) = -(\lambda + 1)(\lambda - 1)(\lambda - 2)$

$$\boxed{P(\lambda) = (\lambda - 2)(1 - \lambda^2)}$$

3°/ Valeurs propres.

Les valeurs propres de la matrice C sont les racines du polynôme caractéristique : – 1, 1, 2. Il y a trois valeurs propres réelles simples distinctes.

4°/ Vecteurs propres.

Comme les trois valeurs propres sont distinctes, il y a trois sous-espaces propres de dimension 1.

$$(C - I)(C - 2I) = \begin{pmatrix} -5 & -5 & 30 \\ -1 & -1 & 6 \\ -2 & -2 & 12 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Sous-espace propre pour } \lambda_1 = -1 : \mathbb{R} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$$(C + I)(C - 2I) = \begin{pmatrix} -9 & 9 & 18 \\ -3 & 3 & 6 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Sous-espace propre pour } \lambda_2 = 1 : \mathbb{R} \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$$(C + I)(C - I) = \begin{pmatrix} -8 & 16 & 12 \\ -4 & 8 & 6 \\ -2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Sous-espace propre pour } \lambda_3 = 2 : \mathbb{R} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

5°/ Diagonalisation.

Les vecteurs $a_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $a_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, forment une base. Dans cette base, la matrice de l'endomorphisme f, de matrice C dans la base canonique, est diagonale car $f(a_1) = -a_1$, $f(a_2)=a_2$, $f(a_3)=2a_3$.

$$[f,\{a\},\{a\}] = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 9 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 7 & -6 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 9 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{6} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 6 \\ 3 & -3 & -6 \\ -4 & 8 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 7 & -6 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 9 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

EXERCICE 10.

Etudier le rang, l'image, le noyau, les sous-espaces propres, le polynôme caractéristique et le polynôme minimal de l'opérateur associé à :

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -4 & 0 & 8 & 2 \end{pmatrix}.$$

Peut-on diagonaliser cette matrice ?

SOLUTION.

1°/ Déterminant.

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -4 & 0 & 8 & 2 \end{vmatrix} = 0$$ car la 1^e et la 4^e colonnes sont proportionnelles.

2°/ Polynôme caractéristique.

$$P(\lambda) = Dét(D - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 4 & 0 \\ -2 & 1-\lambda & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 0 \\ -4 & 0 & 8 & 2-\lambda \end{vmatrix}.$$

Développons par rapport à la 2^e colonne :

$$P(\lambda) = (1-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & 4 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ -4 & 8 & 2-\lambda \end{vmatrix}.$$

Développons par rapport à la 3^e colonne :

$$P(\lambda) = (1-\lambda)(2-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & 4 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda-1)(2-\lambda)^2$$

$$\boxed{P(\lambda) = \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)^2}$$

3°/ Valeurs propres.

Les valeurs propres de la matrice D sont les racines du polynôme caractéristique : 0, 1, 2 (racine double).

4°/ Vecteurs propres.

$$D(D-I)(D-2I) = 0$$

Donc le polynôme minimal de la matrice D est $\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)$.

$$(D-I)(D-2I) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -8 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$ est vecteur propre pour la valeur propre 0.

Réduisons la matrice D.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -4 & 0 & 8 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ajouter 2 fois la 4e colonne à la 1e. Retrancher la 2e colonne de la 4e.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ce calcul montre que la matrice D est de rang 3. Son noyau, qui est le sous-espace propre pour la valeur propre 0, est de dimension 1, donc la vecteur a_1 forme à lui seul une base du sous-espace propre pour la valeur propre 0.

$D\,(D-2I) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow a_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est une base du sous-espace propre pour la valeur propre 1.

$D\,(D-I) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 0 \\ -4 & 0 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -4 & 0 & 8 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow a_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $a_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ forment une base du sous-espace propre pour la valeur propre 2, qui est de dimension 2.

5°/ Diagonalisation.

Comme il existe une base $a = \{a_1 , a_2 , a_3 , a_4 \}$ formée de vecteur propres, la matrice D est diagonalisable :

$$[f,\{a\},\{a\}] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

La matrice du changement de base est :

$$[id_E ,\{a\},\{e\}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ceci traduit les formules :

$a_1 = e_1 + 2\,e_4$
$a_2 = e_2$
$a_3 = e_2 + e_4$
$a_4 = 2\,e_1 + e_3$

On a alors :

$e_2 = a_2$
$e_4 = a_3 - e_2 = a_3 - a_2$
$e_1 = a_1 - 2\,e_4 = a_1 - 2\,(a_3 - a_2)$
$e_3 = a_4 - 2\,e_1 = a_4 - 2\,(a_1 + 2\,a_2 - 2\,a_3)$

$$[id_E ,\{e\},\{a\}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -4 & -1 \\ -2 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = [id_E ,\{a\},\{e\}]^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -4 & -1 \\ -2 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -4 & 0 & 8 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

EXERCICE 11.

Etudier la matrice à n lignes et n colonnes :

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

SOLUTION.

La matrice F, à n lignes et n colonnes, est de rang 1. Son noyau est donc de dimension $n - 1$. et a pour base la famille $\{e_2 - e_1 , e_3 - e_1 , \ldots , e_n - e_1 \}$. Dans la base $a = \{e_1 , e_2 - e_1 , e_3 - e_1 , \ldots , e_n - e_1 \}$, la matrice de l'endomorphisme f de matrice F dans la base canonique est donnée par les images des vecteurs de base :

$f (e_1) = e_1 + e_2 + \ldots + e_n = n\, e_1 + (e_2 - e_1) + \ldots + (e_n - e_1)$

$f (e_i - e_1) = 0$

$$[f ,\{a\},\{a\}] = \begin{pmatrix} n & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique est $P (\lambda) = (n - \lambda)(-\lambda)^{n-1}$

Les valeurs propres de f sont donc 0 (valeur propre d'ordre $n - 1$) et n, valeur propre simple.

La relation :

$$f (e_1) = n\, e_1 + (e_2 - e_1) + \ldots + (e_n - e_1)$$

donne

$$f (f(e_1)) = f (ne_1) + f (e_2 - e_1) + \ldots + f (e_n - e_1) = n\, f (e_1)$$

et cette relation montre que le vecteur non nul :

$$f (e_1) = n\, e_1 + (e_2 - e_1) + \ldots + (e_n - e_1) = e_1 + e_2 + \ldots + e_n$$

est vecteur propre pour la valeur propre n.

Dans la base $b = \{e_1 + e_2 + \ldots + e_n , e_2 - e_1 , e_3 - e_1 , \ldots , e_n - e_1 \}$, la matrice de l'endomorphisme f de matrice F dans la base canonique est diagonale :

$$[f ,\{b\},\{b\}] = \begin{pmatrix} n & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

et la matrice du changement de base est :

$$[\, id_E \,,\{b\},\{e\}] = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \ldots & -1 \\ 1 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Son inverse est la matrice des composantes des e_i sur la base b :

$b_1 - (b_2 + \ldots + b_n) = n\, e_1$

$$e_1 = \frac{1}{n}\, b_1 - \frac{1}{n}\, b_2 - \ldots - \frac{1}{n}\, b_n$$

$$e_i = b_i + e_1 = b_i + \frac{1}{n}(b_1 - b_2 - \ldots - b_n) = \frac{1}{n}\, b_1 - \frac{1}{n}\, b_2 - \ldots + \frac{n-1}{n}\, b_i - \ldots - \frac{1}{n}\, b_n$$

$$[\, id_E \,,\{e\},\{b\}] = \frac{1}{n} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ -1 & n-1 & \ldots & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & \cdots & n-1 \end{pmatrix}$$

Diagonalisation.

$$\frac{1}{n}\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & n-1 & \dots & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & \cdots & n-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & \dots & -1 \\ 1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

EXERCICE 12.

Etudier la matrice à n lignes et n colonnes :

$$G = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

SOLUTION.

Remarques générales.

G est une matrice réelle symétrique. Son déterminant est $(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$, comme on le voit par récurrence :

$Dét\ (G_1) = 1$

$Dét\ (G_n) = (-1)^n\ Dét\ (G_{n-1})$

On remarque aussi que $G^2 = I$.

Soit f l'endomorphisme de matrice G dans la base canonique. Le changement de base $a_i = e_{n+1-i}$, soit

$$[id_E, \{a\}, \{e\}] = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} = G$$

donne :

$$f(a_i) = f(e_{n+1-i}) = e_i$$

d'où :

$$[f, \{a\}, \{e\}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \iddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

La relation $G^2 = I$ montre que $G^{-1} = G$, donc :

$$[id_E, \{e\}, \{a\}] = [id_E, \{a\}, \{e\}] = G$$

$$[f, \{a\}, \{a\}] = [id_E, \{e\}, \{a\}][f, \{a\}, \{e\}] = G$$

La matrice de G est invarante dans ce changement de base.

On a aussi $(G - I)(G + I) = 0$, donc le polynôme minimal de G est $P_u(\lambda) = (\lambda + 1)(\lambda - 1)$. Les valeurs propres de G sont donc -1 et 1.

On a

$$f(e_1 + e_2 + \ldots + e_n) = e_1 + e_2 + \ldots + e_n,$$

donc $e_1 + e_2 + \ldots + e_n$ est toujours vecteur propre pour la valeur propre 1.

Polynôme caractéristique et valeurs propres.

1er cas : n est pair, $n = 2k$.

Dans ce cas, il n'y a pas de 1 sur la diagonale de G. Le polynôme caractéristique de G est :

$$P(\lambda) = Dét(G - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & -\lambda & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 1 & -\lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & -\lambda \end{vmatrix}$$

On ne change pas la valeur du déterminant en ajoutant λ fois la dernière colonne à la première :

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & -\lambda & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 1 & -\lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1-\lambda^2 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & -\lambda \end{vmatrix}$$

On peut développer le déterminant par rapport à la 1e colonne, puis le déterminant restant par rapport à la 1e ligne :

$$P_n(\lambda) = (-1)^n (1-\lambda^2) \times (-1)^{n-1} P_{n-2}(\lambda) = -(1-\lambda^2) P_{n-2}(\lambda) .$$

Avec $P_2(\lambda) = (\lambda^2 - 1) = -(1-\lambda^2)$, il vient par récurrence :

$$P_n(\lambda) = (-1)^k (1-\lambda^2)^k = (\lambda+1)^k (\lambda-1)^k$$

Les valeurs propres de G sont donc −1 et 1, avec, pour chacune un ordre de multiplicité égal à $k = \frac{n}{2}$.

2e cas : *n* est impair, *n* = 2 *k* + 1.

Dans ce cas, il y a un 1 sur la diagonale de G.

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & -\lambda & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1-\lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & -\lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & -\lambda \end{vmatrix}$$

On ne change pas la valeur du déterminant en ajoutant à la 1e colonne λ fois la dernière colonne :

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & -\lambda & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1-\lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & -\lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1-\lambda^2 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & -\lambda \end{vmatrix}$$

Développons le déterminant par rapport à la 1e colonne, puis le déterminant restant par rapport à la 1e ligne :

$$P_n(\lambda) = (-1)^n (1-\lambda^2) \times (-1)^{n-1} P_{n-2}(\lambda) = -(1-\lambda^2) P_{n-2}(\lambda)$$

Avec $P_1(\lambda) = (1-\lambda)$, il vient par récurrence :

$$P_n(\lambda) = (-1)^k (1-\lambda^2)(1-\lambda) = (-1)^k (1+\lambda)^k (1-\lambda)^{k+1} = -(\lambda+1)^k (\lambda-1)^{k+1} .$$

Les valeurs propres de G sont −1 et 1, −1 est d'ordre $k = \frac{n-1}{2}$, 1 est d'ordre $k+1 = \frac{n+1}{2}$.

Vecteurs propres.

En raison de la symétrie de la matrice de G, nous allons considérer les vecteurs $e_i + e_{n+1-i}$.

$$f(e_i + e_{n+1-i}) = f(e_i) + f(e_{n+1-i}) = e_{n+1-i} + e_i = e_i + e_{n+1-i}$$

Le vecteur $e_i + e_{n+1-i}$ est toujours vecteur propre pour la valeur propre 1, pour tout i de 1 à $\left[\frac{n}{2}\right]$ (partie entière de $\frac{n}{2}$). Nous obtenons ainsi k vecteurs propres si $n = 2k$ ou si $n = 2k+1$. A ces k vecteurs, il convient d'ajouter le vecteur d'indice central e_{k+1} lorsque n est impair : ce vecteur est invariant par la matrice G, il correspond au 1 de la diagonale de G, donc il est vecteur propre pour la valeur propre 1.

Ces k ou $k+1$ vecteurs forment une famille libre de façon évidente car la matrice de leurs composantes sur la base canonique comporte une diagonale de 1 avec des 0 au-dessus.

Si l'on considère maintenant les vecteurs $e_i - e_{n+1-i}$, il vient :

$$f(e_i - e_{n+1-i}) = f(e_i) - f(e_{n+1-i}) = e_{n+1-i} - e_i = -(e_i - e_{n+1-i})$$

Le vecteur $e_i - e_{n+1-i}$ est vecteur propre pour la valeur propre –1, pour tout i de 1 à $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$.

Nous obtenons ainsi k vecteurs propres si $n = 2k$ ou si $n = 2k + 1$. Les k vecteurs obtenus forment aussi une famille libre.
Les n vecteurs ainsi définis forment une base de vecteurs propres.

Diagonalisation.

Comme il existe une base formée de vecteurs propres, la matrice G est diagonalisable, avec, sur la diagonale, k fois la valeur propre –1 et k (n pair) ou $k + 1$ (n impair) fois la valeur propre 1.

EXERCICE 13.

Etudier la matrice à n lignes et n colonnes :

$$H = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \cdots & \beta \\ \beta & \alpha & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \beta \\ \beta & \cdots & \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

SOLUTION.

La matrice H est une matrice symétrique. Ses valeurs propres sont donc réelles.

Déterminant.

On ne change pas la valeur du déterminant en ajoutant à la 1e colonne la somme des $n-1$ autres colonnes :

$$Dét\ (H) = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \cdots & \beta \\ \beta & \alpha & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \beta \\ \beta & \cdots & \beta & \alpha \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha+(n-1)\,\beta & \beta & \cdots & \beta \\ \alpha+(n-1)\,\beta & \alpha & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \beta \\ \alpha+(n-1)\,\beta & \cdots & \beta & \alpha \end{vmatrix}$$

On peut mettre en facteur $\alpha + (n-1)\,\beta$ dans la 1e colonne :

$$Dét\ (H) = (\alpha + (n-1)\,\beta) \begin{vmatrix} 1 & \beta & \cdots & \beta \\ 1 & \alpha & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \beta \\ 1 & \cdots & \beta & \alpha \end{vmatrix}$$

On ne change pas la valeur du déterminant en retranchant β fois la 1e colonne de chacune des $(n-1)$ autres :

$$Dét\ (H) = (\alpha + (n-1)\,\beta) \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \alpha-\beta & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & \alpha-\beta \end{vmatrix}.$$

On peut développer le déterminant par rapport à la 1e ligne :

$$Dét\ (H) = (\alpha + (n-1)\,\beta)\,(\alpha-\beta)^{n-1}$$

Polynôme caractéristique.

$P(\lambda) = Dét\ (H - \lambda I)$ s'obtient en remplaçant α par $(\alpha - \lambda)$ dans le déterminant de H :

$$\boxed{P(\lambda) = (\alpha + (n-1)\,\beta - \lambda)\,(\alpha - \beta\ - \lambda)^{n-1}}$$

Valeurs propres.

La matrice H a 2 valeurs propres :

— $\lambda_1 = \alpha + (n-1)\,\beta$, d'ordre 1.

— $\lambda_2 = \alpha - \beta$, d'ordre $n-1$.

Polynôme minimal.

$$H - (\alpha-\beta)\,I = \begin{pmatrix} \beta & \beta & \cdots & \beta \\ \beta & \beta & \cdots & \beta \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta & \beta & \cdots & \beta \end{pmatrix}.$$

Or $H \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ est le vecteur dont les composantes sont les sommes des lignes de la matrice H, donc :

$H \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = (\alpha + (n-1)\,\beta) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$, soit $(H - (\alpha + (n-1)\,\beta)\, I) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ et, par conséquent, comme toutes les colonnes de la matrice $H - (\alpha - \beta) I$ sont proportionnelles au vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$, le produit de matrices $(H - (\alpha + (n-1)\,\beta)\, I)(H - (\alpha - \beta)\, I)$ est nul. Le polynôme minimal de la matrice H est donc :

$$\boxed{P_u(\lambda) = (\lambda - (\alpha + (n-1)\,\beta))(\lambda - (\alpha - \beta))}$$

Vecteurs propres.

Réduisons la matrice $H - (\alpha + (n-1)\,\beta)\, I = \begin{pmatrix} -(n-1)\,\beta & \beta & \cdots & \beta \\ \beta & -(n-1)\,\beta & \cdots & \beta \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta & \beta & \cdots & -(n-1)\,\beta \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} -(n-1)\,\beta & \beta & \cdots & \beta \\ \beta & -(n-1)\,\beta & \cdots & \beta \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta & \beta & \cdots & -(n-1)\,\beta \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Ajouter à la 1e colonne la somme des $(n-1)$ autres colonnes

$$\begin{pmatrix} 0 & \beta & \cdots & \beta \\ 0 & -(n-1)\,\beta & \cdots & \beta \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \beta & \cdots & -(n-1)\,\beta \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Ce calcul montre que le vecteur $a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ est dans le noyau de $H - (\alpha + (n-1)\,\beta)\, I$. Comme la valeur propre $(\alpha + (n-1)\,\beta)$ est simple, le sous-espace propre correspondant est de dimension 1 : le vecteur a_1 est donc une base du noyau de $H - (\alpha + (n-1)\,\beta)\, I$.

La matrice $H - (\alpha - \beta)\, I$ a toutes ses colonnes identiques. Pour $\beta \neq 0$, on voit, en soustrayant la 1e colonne de chacune des autres que :

— cette matrice est de rang 1,

— son noyau a pour base la famille de vecteurs $\{e_2 - e_1\ ,\ e_3 - e_1\ ,\ \ldots\ ,\ e_n - e_1\}$: ces vecteurs sont donc des vecteurs propres de la matrice H pour la valeur propre $\alpha - \beta$. On note $a_i = e_i - e_1$, pour $i \geq 2$.

Diagonalisation.

Les vecteurs $\{a_1\ ,\ a_2\ ,\ \ldots\ ,\ a_n\}$ forment (comme pour la matrice F) une base de R^n. Dans cette base, la matrice de l'endomorphisme f de matrice H dans la base canonique est diagonale :

$$[f,\{a\},\{a\}] = \begin{pmatrix} \alpha+(n-1)\beta & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha-\beta & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha-\beta \end{pmatrix}.$$

EXERCICE 14.

Soit A une matrice symétrique réelle à n lignes et n colonnes telle qu'il existe un entier k vérifiant $A^k = I_n$ .Montrer que

$$A^2 = I_n .$$

SOLUTION.

Soit A une matrice réelle symétrique à n lignes et n colonnes telle qu'il existe un entier $k > 1$ vérifiant $A^k = I_n$. A est la matrice d'une endomorphisme f de $\mathbb{R}^n$. On sait qu'alors existe dans R^n une base formée de vecteurs propres. Soit $a = \{a_1 , \dots , a_n \}$ une telle base. On sait aussi que toutes les racines du polynôme caractéristique sont réelles, donc toutes les valeurs propres sont réelles. Soit λ_i ces valeurs propres, $i = 1, \dots , n$. Certaines des valeurs propres peuvent être multiples.

Soit $x = \sum_{i=1}^{i=n} x_i a_i$ un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^n$. On a :

$$f^k (x) = x \text{ donc } \sum_{i=1}^{i=n} x_i \lambda_i^k a_i = \sum_{i=1}^{i=n} x_i a_i$$

Comme les a_i forment une base, on obtient , pour tout i ,

$$\lambda_i^k = 1.$$

Comme λ_i est réel, c'est que $\lambda_i = \pm 1$, donc

$$\lambda_i^2 = 1.$$

On a alors :

$$f^2 (x) = \sum_{i=1}^{i=n} x_i \lambda_i^2 a_i = \sum_{i=1}^{i=n} x_i a_i = x$$

d'où $f^2 = id_E$ et

$$A^2 = I_n .$$

EXERCICE 15.

Vrai ou Faux.

E est un espace vectoriel de dimension finie sur un corps de nombres complexes *K*. Soit f un endomorphisme de *E*. *Id* est l'application identique. Donnez votre opinion sur les assertions suivantes (à justifier par une démonstration).

01. Si $f^2 = f$, alors f est inversible.
02. Si f est inversible, alors f^{-1} est diagonalisable.
03. Si f est diagonalisable, alors f est inversible.
04. Si f est inversible, alors f^2 l'est aussi.
05. Si f est diagonalisable, alors f^2 l'est aussi.
06. Si $f^2 = f$, alors f est diagonalisable.
07. Si $f^2 = Id$, alors f est inversible.
08. Si f est inversible et diagonalisable, alors f^{-1} est diagonalisable.
09. Si la matrice de f par rapport à une base $\{u\}$ est symétrique, alors f est diagonalisable.
10. Le noyau de f est un sous-espace propre de f.
11. L'image et le noyau d'un endomorphisme diagonalisable et non inversible forment une somme directe.
12. Si une matrice à éléments dans $\mathbb{R}$ est diagonalisable et inversible, son inverse est diagonalisable.
13. La somme de deux endomorphismes diagonalisables dans $\mathbb{R}^2$ n'est pas forcément diagonalisable.
14. La matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & 1 & -6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

est diagonalisable.

SOLUTION.

01. Endomorphisme idempotent.

Faux.

Soit f un endomorphisme de *E* vérifiant $f^2 = f$. On a alors $Dét(f^2) = Dét(f)$, soit :

$$(Dét(f))^2 = Dét(f)$$

d'où $Dét(f) = 0$ ou $Dét(f) = 1$. Si $Dét(f) = 1$, f est inversible, mais si $Dét(f) = 0$, f n'est pas inversible.
Par exemple, si l'on prend pour f le projecteur sur le premier axe canonique :

$$f : (x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto (x_1, 0, \dots, 0)$$

on a bien :

$$f^2(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(f(x_1, x_2, \dots, x_n)) = f(x_1, 0, \dots, 0) = (x_1, 0, \dots, 0) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

donc $f^2 = f$, mais le noyau de f est l'ensemble des vecteurs dont la première composante est nulle : c'est un sous-espace vectoriel de dimension $n - 1$: il n'est pas réduit à 0 dès que n est strictement plus grand que 1. Comme le noyau n'est pas réduit à 0, f n'est pas inversible.

$$f^2 = f \not\Longrightarrow f \text{ est inversible}$$

02. Endomorphisme inversible.

Faux.

L'endomorphisme inverse f^{-1} possède les mêmes sous-espaces propres que f avec pour valeurs propres les inverses des valeurs propres de f, ce qui résulte de :

$$f(x) = \lambda x \Longleftrightarrow f^{-1}(x) = \lambda^{-1} x$$

Dire que *E* possède une base formée de vecteurs propres pour f est donc équivalent à dire que *E* possède une base formée de vecteurs propres pour f^{-1}. Donc, pour un endomorphisme inversible, f^{-1} est diagonalisable si et seulement si, f est diagonalisable. Or il existe des endomorphismes inversibles non diagonalisables, par exemple une rotation d'angle θ dans $\mathbb{R}^2$, donc :

$$f \text{ inversible} \not\Longrightarrow f^{-1} \text{ diagonalisable}$$

03. Endomorphisme diagonalisable.

Faux.

Il existe des endomorphismes diagonalisables non inversibles. Exemple : le projecteur sur l'axe des x dans R^2. Sa matrice dans la base canonique est $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Cette matrice est diagonale, mais comme 0 est valeur propre (le déterminant est nul), elle n'est pas inversible.

$$f \text{ diagonalisable} \not\Longrightarrow f \text{ inversible}$$

04. Carré d'un endomorphisme inversible.

Vrai.

$$f \text{ inversible} \Longleftrightarrow Dét\, f \neq 0 \Longleftrightarrow (Dét\, f)^2 \neq 0 \Longleftrightarrow Dét\, f^2 \neq 0 \Longleftrightarrow f^2 \text{ inversible}$$

$$f \text{ inversible} \Longleftrightarrow f^2 \text{ inversible}$$

05. Carré d'un endomorphisme diagonalisable.

Vrai.

$$f(x) = \lambda x \Longrightarrow f^2(x) = f(\lambda x) = \lambda f(x) = \lambda^2 x$$

Tout vecteur propre pour f est vecteur propre pour f^2. Donc s'il existe une base formée de vecteurs propres pour f, cette base est formée de vecteurs propres pour f^2. Il en résulte que :

$$f \text{ diagonalisable} \Longrightarrow f^2 \text{ diagonalisable}$$

06. Endomorphisme idempotent.

Vrai.

Un endomorphisme idempotent est, par définition, un projecteur. Tout projecteur f est diagonalisable car E est somme directe du noyau et de l'image du projecteur, et, dans le noyau, f est nul, et, dans l'image, f est l'application identique, donc

$$f^2 = f \Longrightarrow f \text{ est diagonalisable}$$

07. Endomorphisme involutif.

Vrai.

$$f^2 = Id \Longleftrightarrow f \circ f = Id \Longleftrightarrow f = f^{-1} \Longrightarrow f \text{ est inversible}$$

$$f^2 = Id \Longrightarrow f \text{ est inversible}$$

08. Endomorphisme inversible et diagonalisable.

Vrai.

Dans 3.02, nous avons vu que, pour un endomorphisme inversible, f^{-1} est diagonalisable si et seulement si, f est diagonalisable. Donc

$$f \text{ inversible et diagonalisable} \Longrightarrow f^{-1} \text{ diagonalisable}$$

09. Endomorphisme symétrique.

Faux.

On sait que toute matrice réelle symétrique est diagonalisable, mais que dire des matrices complexes symétriques ? L'extension des matrices réelles symétriques au cas complexe est constitué par les matrices hermitiennes (c'est-à-dire dont la transposée est égale à la conjuguée) : toute matrice hermitienne est diagonalisable, et, plus généralement, tout endomorphisme normal est diagonalisable (un endomorphisme est normal si, et seulement si, il commute avec son adjoint ; tout endomorphisme unitaire, c'est-à-dire inversible et de déterminant 1, est normal ; tout endomorphisme hermitien est normal)

Considérons par exemple la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 2 \end{pmatrix}$. C'est une matrice symétrique. Son polynôme caractéristique est $-\lambda(2-\lambda) - i^2 = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2$. Il y a donc une seule valeur propre $\lambda = 1$. On a :

$$A - I = \begin{pmatrix} -1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$$

Cette matrice est de rang 1 et son noyau a pour base le vecteur $e_1 - i\, e_2$. Le sous-espace propre pour la valeur propre 1, est de dimension 1, différente de l'ordre de multiplicité 2 de la valeur propre dans le polynôme caractéristique : donc la matrice A n'est pas diagonalisable, et on a construit un exemple de matrice symétrique non diagonalisable.

$$\boxed{f \text{ symétrique} \not\Longrightarrow f \text{ diagonalisable}}$$

10. Noyau d'un endomorphisme.

Faux.

$$x \in Ker\, f \Longleftrightarrow f(x) = 0 \Longleftrightarrow f(x) = 0.x$$

On voit donc que, pour que *Ker f* soit sous-espace propre pour la valeur propre 0, il faut et il suffit qu'il ne soit pas réduit à 0, donc il faut et il suffit que *Dét f* = 0.

$$\boxed{Ker\, f \text{ sous-espace propre de } f \Longleftrightarrow Dét\, f = 0}$$

Comme il existe évidement des endomorphismes dont le déterminant n'est pas nul, il existe des endomorphismes dont le noyau n'est pas un sous-espace propre.

11. Somme directe de l'image et du noyau d'un endomorphisme.

Vrai.

$x \in Ker\, f \cap Im\, f \Longrightarrow (f(x) = 0$ et $(\exists\, y \in E)(x = f(y))$

f diagonalisable $\Longrightarrow$ Il existe une base $a = \{a_1, \ldots, a_n\}$ formée de vecteurs propres

$y \in E \Longrightarrow y = \Sigma_i\ y_i\, a_i$

$x = f(y) = \Sigma_i\ y_i\ f(a_i) = \Sigma_i\ y_i\ \lambda_i\, a_i \Longrightarrow f(x) = \Sigma_i\ y_i\ \lambda_i f(a_i) = \Sigma_i\ y_i\ \lambda_i^2\, a_i$

$f(x) = 0 \Longrightarrow (\forall i)(y_i\ \lambda_i^2 = 0) \Longrightarrow (\forall i)(y_i = 0$ ou $\lambda_i = 0) \Longrightarrow (\forall i)(y_i\ \lambda_i = 0) \Longrightarrow x = 0.$

L'image et le noyau de f forment donc une somme directe.

12. Inverse d'une matrice diagonalisable.

Vrai.

Soit M une matrice inversible et diagonalisable. Elle est semblable à une matrice diagonale : il existe donc une matrice P telle que :

$$M = P^{-1} A\, P$$

où A est une matrice diagonale, ayant pour éléments de la diagonale principale, les valeurs propres de M. Comme M est inversible, son déterminant, produit des valeurs propres, n'est pas nul, donc 0 n'est pas valeur propre : aucun élément de la diagonale principale de A n'est nul. Alors A est inversible et son inverse est la matrice diagonale dont les éléments de la diagonale principale sont les inverses des éléments de la diagonale principale de A.

$$M^{-1} = (P^{-1} A P)^{-1} = P^{-1} A^{-1} P$$

Comme la matrice A^{-1} est une matrice diagonale, la matrice M^{-1} est diagonalisable.

13. Somme de deux endomorphismes diagonalisables.

Vrai.

Considérons par exemple l'endomorphisme f_1 , de matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ dans la base canonique, et l'endomorphisme f_2 , de matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ dans la base canonique.

Le polynôme caractéristique de f_1 est $P_1(\lambda) = \lambda(\lambda - 1)$: f_1 a deux valeurs propres réelles distinctes, c'est un endomorphisme diagonalisable.
Le polynôme caractéristique de f_2 est $P_2(\lambda) = \lambda(\lambda - 1)$: f_2 a deux valeurs propres réelles distinctes, c'est un endomorphisme diagonalisable.
La somme $f = f_1 + f_2$ a pour matrice dans la base canonique $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Son polynôme caractéristique est $P(\lambda) = (1 - \lambda)^2 + 1$. Il n'est jamais nul, donc f n'a pas de valeur propre réelle et n'est donc pas diagonalisable.

14. Matrice diagonalisable ?

Vrai.

Le polynôme caractéristique de la matrice A est :

$$P(\lambda) = (3 - \lambda)(1 - \lambda)(-5 - \lambda) + 16(1 - \lambda) = (1 - \lambda)((3 - \lambda)(-5 - \lambda) + 16) = (1 - \lambda)(\lambda^2 + 2\lambda + 1)$$

$$P(\lambda) = -(\lambda + 1)^2 (\lambda - 1)$$

Le polynôme minimal est donné par :

$$(A + I)(A - I) \neq 0 \Longrightarrow P_u(\lambda) = (\lambda + 1)^2 (\lambda - 1)$$

La matrice $A + I$ est de rang 2, le sous-espace propre pour la valeur propre -1 est de dimension 2,
La matrice $A - I$ est de rang 1, le sous-espace propre pour la valeur propre 1 est de dimension 1,
donc la matrice A est diagonalisable.

Analyse

e-mail

1. Sommes, récurrence, partie entière.
2. Limites de fonctions numériques d'une variable réelle.
3. Continuité de fonctions numériques d'une variable réelle.
4. Suites de nombres réels.
5. Bornes, suites croissantes ou décroissantes.
6. Suites et fonctions continues.
7. Dérivabilité des fonctions numériques d'une variable réelle.
8. Théorème des accroissements finis.
9. Développements limités.
10. Réels, séries numériques.
11. Intégration dans $\mathbb{R}$.
12. Séries entières.
13. Equations différentielles linéaires.
14. Distances.
15. Normes.
16. Dualité dans $\mathbb{R}^p$.
17. Ouverts et fermés de $\mathbb{R}^p$.
18. Limites dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$.
19. Applications continues dans $\mathbb{R}^p$.
20. Formes linéaires continues.
21. Continuité partielle.
22. Dérivées partielles, dérivée totale.
23. Gradient.
24. Applications de classe C^1.
25. Equations aux dérivées partielles d'ordre 1.
26. Dérivées partielles successives, laplacien.
27. Différentielle d'application composée, fonction homogène, difféomorphisme.
28. Points critiques, matrice hessienne.
29. Extrema relatifs dans $\mathbb{R}^2$.
30. Intégrales propres dépendant d'un paramètre.
31. Fonctions implicites.
32. Changements de variables implicites.
33. Extrema liés - Conditions du premier ordre.
34. Optimisation avec contraintes égalités - Conditions du deuxième ordre.
35. Formes différentielles exactes.
36. Intégrales curvilignes.
37. Intégrales doubles.
38. Changements de variables dans les intégrales doubles.
39. Compléments de Math en 2e année de Pharmacie.

NTE
Nouvelles Technologies Educatives

Accueil

Exercices

Sommes, récurrence, partie entière.

1. **Dans ce chapitre, on calcule des sommes d'expressions à nombre fini de termes.**
2. **Termes en progression arithmétique.**
3. **Termes en progression géométrique.**
4. **Borne supérieure, borne inférieure.**
5. **Partie entière d'un nombre réel.**

Termes en progression arithmétique.

$$a_1 + (a_1 + r) + ... + (a_1 + (n-1)\,r) = n\,a_1 + r \sum_{k=0}^{k=n-1} k = n\,a_1 + r\,\frac{n(n-1)}{2}$$

HAUT

Termes en progression géométrique.

$$a_1 + r\,a_1 + r^2\,a_1 + \ldots + r^{n-1}\,a_1 = a_1 \sum_{k=0}^{k=n-1} r^k = a_1 \frac{1-r^n}{1-r}$$

HAUT

Borne supérieure, borne inférieure.

Etant donnée une partie *A* d'un ensemble ordonné *X*, on appelle **borne supérieure** de *A*, le plus petit des majorants de *A*, quand il existe.
On appelle **borne inférieure** de *A*, le plus grand des minorants de *A*, quand il existe.

Tout majorant de *A* est supérieur ou égal à la borne supérieure de *A*.
Tout minorant de *A* est inférieur ou égal à la borne inférieure de *A*.

HAUT

Partie entière d'un nombre réel.

Pour tout nombre réel x, il existe un unique entier relatif $n = E(x)$ vérifiant :

$$E(x) \leqslant x < E(x) + 1$$

C'est cet entier unique qu'on appelle la **partie entière** de x (fonction "floor" dans Maple 6).
Il est entièrement défini par les relations :

$$E(x) \in \mathbb{Z} \textbf{ et } E(x) \leqslant x < E(x) + 1$$

La relation $x - 1 < E(x) \leqslant x$ est équivalente à la relation $E(x) \leqslant x < E(x) + 1$.

Pour tout nombre réel x, $E(x)$ le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x : c'est la **borne supérieure** des minorants entiers de x.
$E(x) + 1$ est le plus petit entier relatif strictement plus grand que x. C'est la **borne inférieure** des majorants stricts entiers de x.

HAUT

Chapitre 1. Sommes, récurrence, partie entière.

Exercices

Exercice 1. Somme des entiers de 1 à *n*.
Exercice 2. Somme des carrés de 1 à *n*.
Exercice 3. Somme des cubes de 1 à *n*.
Exercice 4. Somme des inverses de produits de 2 entiers impairs consécutifs.
Exercice 5. Somme des inverses des puissances de 2.
Exercice 6. Majoration de *n* !.
Exercice 7. Multiple de 225.
Exercice 8. Partie entière d'un réel.
Exercice 9. Partie entière de $(2+\sqrt{3})^n$.
Exercice 10. Partie entière de la somme des inverses des racines carrées.
Exercice 11. Un réel est défini par la partie entière de ses multiples.
Exercice 12. Partie entière des multiples d'un réel.

Exercice 1. Somme des entiers de 1 à *n*.

1°/ Démontrer que pour tout entier $n > 0$, on a : $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$. 2°/ En déduire la valeur de : $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1)$.	Solution

HAUT

Exercice 2. Somme des carrés de 1 à *n*.

Démontrer que, pour tout entier $n > 0$, on a : $$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$	Solution

HAUT

Exercice 3. Somme des cubes de 1 à *n*.

Démontrer que, pour tout entier $n > 0$, on a :

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

Solution

HAUT

Exercice 4. Somme des inverses de produits de 2 entiers impairs consécutifs.

Démontrer que, pour tout entier $n > 0$, on a :

$$\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+\frac{1}{5.7}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}$$

Solution

HAUT

Exercice 5. Somme des inverses des puissances de 2.

Démontrer que, pour tout entier $n > 0$, on a : $$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^n} < 1$$	Solution

HAUT

Exercice 6. Majoration de n !.

Démontrer que, pour tout entier $n > 1$, on a :

$$n ! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$$

Solution

HAUT

Exercice 7. Multiple de 225.

Démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $4^{2n+2} - 15n + 16$ est un multiple de 225.	Solution

HAUT

Exercice 8. Partie entière d'un réel.

Pour tout nombre réel x, on désigne par $E(x)$ le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x (que l'on appelle partie entière de x). Montrer que :

1°/ $(\forall\, x \in \mathbb{Z})\ (E(x) + E(-x) = 0)$.
2°/ $(\forall\, x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z})\ (E(x) + E(-x) = -1)$.
3°/ $(\forall\, x \in \mathbb{R})\ \left(E\left(\frac{x}{2}\right) + E\left(\frac{x+1}{2}\right) = E(x)\right)$.

Solution

HAUT

Exercice 9. Partie entière de $(2+\sqrt{3})^n$.

Soit n un entier naturel non nul.

1°/ Montrer que $(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n$ est un entier pair.

2°/ En déduire que $E\left((2+\sqrt{3})^n\right)$ est un entier impair.

Solution

HAUT

Exercice 10. Partie entière de la somme des inverses des racines carrées.

Soit n un entier naturel non nul.

1°/ Montrer que $2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} < \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n} - 2\sqrt{n-1}$.

2°/ En déduire la partie entière du nombre $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{10\,000}}$.

Solution

HAUT

Exercice 11. Un réel est défini par la partie entière de ses multiples.

Soient x et y deux nombres réels. On suppose que, pour tout entier naturel non nul n, $E(n\,x) = E(n\,y)$. Montrer que $x = y$.	Solution

HAUT

Exercice 12. Partie entière des multiples d'un réel.

Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

1°/ Montrer que $n\,E(x) \leqslant E(n\,x)$.
2°/ En déduire que $E\left(\frac{1}{n}E(n\,x)\right) = E(x)$.

Solution

HAUT

Chapitre 1. Sommes, récurrence, partie entière.

Enoncés.

Exercice 1. Somme des entiers de 1 à *n*.

1°/ Démontrer que pour tout entier $n > 0$, on a : $1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$. 2°/ En déduire la valeur de : $1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1)$.	

Solution.

1°/ Somme des entiers.

Appelons S_n la somme $1 + 2 + 3 + ... + n$.
L'addition est commutative et nous pouvons écrire :

$$S_n = 1 + 2 + 3 + ... + n.$$
$$S_n = n + (n-1) + ... + 2 + 1.$$

En additionnant, nous trouvons :

$$2 S_n = n \times (n+1)$$

D'où la formule :

$$\boxed{S_n = 1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}}$$

2°/ Somme des entiers impairs.

La formule précédente donne, en remplaçant n par $2n$:

$$S_{2n} = n (2n + 1)$$

Or $S_{2n} = 1 + 2 + 3 + ... + 2n = (1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1)) + 2 (1 + 2 + 3 + ... + n)$.
Nous obtenons donc :

$$1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = S_{2n} - 2 S_n = n (2n + 1) - n (n + 1) = n^2$$

$$\boxed{1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2}$$

Chapitre 1. Sommes, récurrence, partie entière.

Enoncés.

Exercice 2. Somme des carrés de 1 à *n*.

Démontrer que, pour tout entier $n > 0$, on a : $$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$	

Solution.

1°/ Pour $n = 1$.

La formule se réduit à : $1 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6}$, elle est vraie.

2°/ Hypothèse de récurrence.

Supposons que la formule soit vraie pour un entier $n > 0$:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

3°/ Vérification pour $n + 1$.

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = (n+1)\left(\frac{n(2n+1)}{6} + (n+1)\right)$$

$$= \frac{1}{6}(n+1)(2n^2 + 7n + 6) = \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2n+3)$$

La formule est donc vraie pour $n + 1$, dès qu'elle est vraie pour n.
D'après le principe de récurrence, la formule est vraie pour tout entier $n > 0$, puisqu'elle est vérifiée pour $n = 1$.

Chapitre 1. Sommes, récurrence, partie entière.

Enoncés.

Exercice 3. Somme des cubes de 1 à *n*.

Démontrer que, pour tout entier $n > 0$, on a : $$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$	

Solution.

1°/ Pour *n* = 1.

La formule se réduit à : $1 = 1^2$, elle est vraie.

2°/ Hypothèse de récurrence.

Supposons que la formule soit vraie pour un entier $n > 0$:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

3°/ Vérification pour *n* + 1.

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 + (n+1)^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^3 = (n+1)^2\left(\frac{n^2}{4} + (n+1)\right)$$

$$= \frac{1}{4}(n+1)^2(n^2 + 4n + 4) = \frac{1}{4}(n+1)^2(n+2)^2$$

La formule est donc vraie pour $n + 1$, dès qu'elle est vraie pour n.
D'après le principe de récurrence, la formule est vraie pour tout entier $n > 0$, puisqu'elle est vérifiée pour $n = 1$.

Chapitre 1. Sommes, récurrence, partie entière.

Enoncés.

Exercice 4. Somme des inverses de produits de 2 entiers impairs consécutifs.

Démontrer que, pour tout entier $n > 0$, on a : $$\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+\frac{1}{5.7}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}$$	

Solution.

1°/ Pour $n = 1$.

La formule se réduit à : $\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$, elle est vraie.

2°/ Hypothèse de récurrence.

Supposons que la formule soit vraie pour un entier $n > 0$:

$$\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+\frac{1}{5.7}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}$$

3°/ Vérification pour $n + 1$.

$$\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+\frac{1}{5.7}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}+\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}=\frac{n}{2n+1}+\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}=\frac{1}{2n+1}\left(n+\frac{1}{2n+3}\right)$$
$$=\frac{1}{2n+1}\frac{2n^2+3n+1}{2n+3}=\frac{1}{2n+1}\frac{(n+1)(2n+1)}{2n+3}=\frac{n+1}{2n+3}$$

La formule est donc vraie pour $n + 1$, dès qu'elle est vraie pour n.
D'après le principe de récurrence, la formule est vraie pour tout entier $n > 0$, puisqu'elle est vérifiée pour $n = 1$.

Chapitre 1. Sommes, récurrence, partie entière.

Enoncés.

Exercice 5. Somme des inverses des puissances de 2.

Démontrer que, pour tout entier $n > 0$, on a : $$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^n} < 1$$	

Solution.

1°/ Progression géométrique.

Posons $S_n = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^n}$.

Les termes de la somme sont en progression géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

2°/ Somme d'une progression géométrique.

Multiplions S_n par la raison $\frac{1}{2}$:

$$\frac{1}{2}S_n = \frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^{n+1}}$$

Soustrayons de S_n, il reste :

$$\frac{1}{2}S_n = \frac{1}{2}-\frac{1}{2^{n+1}}$$

$$\boxed{S_n = 1-\frac{1}{2^n}}$$

Et cette formule montre que S_n est strictement plus petit que 1.

Chapitre 1. Sommes, récurrence, partie entière.

Enoncés.

Exercice 6. Majoration de *n* !.

Démontrer que, pour tout entier $n > 1$, on a : $$n ! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$$	

Solution.

1°/ Pour *n* = 2.

La formule se réduit à $2 < \frac{9}{4}$, elle est vraie.

2°/ Hypothèse de récurrence.

Supposons la formule vraie pour un entier $n > 1$: $n ! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$.

3°/ Formule pour *n* + 1.

Multiplions la formule précédente par $n + 1$: $(n + 1) ! < 2\left(\frac{n+1}{2}\right)^{n+1}$.

Reste à montrer que $2 \left(\frac{n+1}{2}\right)^{n+1}$ est plus petit que $\left(\frac{n+2}{2}\right)^{n+1}$, ou, ce qui revient au même, $2 (n + 1)^{n+1} < (n + 2)^{n+1}$.

La formule du binôme donne $(n + 2)^{n+1} = ((n + 1) + 1)^{n+1} = (n + 1)^{n+1} + \frac{n(n+1)}{2}(n + 1)^n + ...$

Donc $(n + 2)^{n+1} > (n + 1)^{n+1} + \frac{n(n+1)}{2}(n + 1)^n = (n + 1)^{n+1}\left(1+\frac{n}{2}\right)$

$(n + 2)^n > \frac{1}{2} (n + 1)^{n+1}$

$2 (n + 1)^{n+1} < (2 + 2) (n + 2)^n \leqslant (n + 2) (n + 2)^n = (n + 2)^{n+1}$, puisque n est supérieur ou égal à 2.

On obtient donc $2 (n + 1)^{n+1} < (n + 2)^{n+1}$ et, par conséquent, $2 \left(\frac{n+1}{2}\right)^{n+1} < \left(\frac{n+2}{2}\right)^{n+1}$, d'où $(n + 1) ! < \left(\frac{n+2}{2}\right)^{n+1}$.

La formule est donc vraie pour $n + 1$ dès qu'elle vraie pour $n > 1$.

Le principe de récurrence entraîne qu'elle est vraie pour tout entier $n > 1$.

Chapitre 1. Sommes, récurrence, partie entière.

Enoncés.

Exercice 7. Multiple de 225.

Démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $4^{2n+2} - 15n - 16$ est un multiple de 225.	

Solution.

1°/ Pour $n = 1$.

La formule se réduit à $4^4 - 15 - 16 = 0 \pmod{225}$, elle est vraie, puisque $4^4 = 16^2 = 256$ et $256 - 31 = 225$.

2°/ Hypothèse de récurrence.

Supposons la formule vraie pour un entier $n \geqslant 1$: $4^{2n+2} - 15n - 16 = 0 \pmod{225}$.

3°/ Formule pour $n + 1$.

$4^{2n+4} - 15(n+1) - 16 = 16 \times 4^{2n+2} - 15n - 16 - 15$.

$4^{2n+2} - 15n - 16 = 0 \pmod{225} \Rightarrow 4^{2n+2} = 15n + 16 \pmod{225}$.

$16 \times 4^{2n+2} - 15n - 16 - 15 = 16(15n + 16) - 15n - 16 - 15 \pmod{225}$.
$= 15(15n + 16) - 15 \pmod{225}$
$= 15(15n + 15) \pmod{225}$
$= 225(n + 1) \pmod{225}$
$= 0 \pmod{225}$

La formule est donc vraie pour $n + 1$ dès qu'elle vraie pour $n > 1$.

Le principe de récurrence entraîne qu'elle est vraie pour tout entier $n > 1$.

Chapitre 1. Sommes, récurrence, partie entière.

Enoncés.

Exercice 8. Partie entière d'un réel.

Pour tout nombre réel x, on désigne par $E(x)$ le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x (que l'on appelle partie entière de x). Montrer que : 1°/ $(\forall x \in \mathbb{Z})\ (E(x) + E(-x) = 0)$. 2°/ $(\forall x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z})\ (E(x) + E(-x) = -1)$. 3°/ $(\forall x \in \mathbb{R})\ \left(E\left(\frac{x}{2}\right) + E\left(\frac{x+1}{2}\right) = E(x)\right)$.	

Solution.

1°/ Partie entière d'un entier relatif.

La partie entière d'un entier relatif est l'entier relatif lui-même.
On a donc, pour tout $x \in \mathbb{Z}$, $E(x) = x$, $E(-x) = -x$, donc $E(x) + E(-x) = x - x = 0$.

2°/ Partie entière d'un réel non entier.

Pour tout réel x, on a :

$$E(x) \leqslant x < E(x) + 1$$

Si x n'est pas entier, l'inégalité de gauche est stricte : $E(x) < x < E(x) + 1$.
On peut multiplier ces inégalités par –1, en changeant le sens des inégalités : $-E(x) - 1 < -x < -E(x)$.
Cette relation montre que $-E(x) - 1$ est le plus grand entier inférieur ou égal à $-x$: c'est la partie entière de $-x$.
$E(-x) = -E(x) - 1$ et $E(x) + E(-x) = -1$.

3°/ Partie entière de la moitié d'un réel.

Soit x un réel quelconque.

Si $E(x)$ est un entier pair : $E(x) = 2n$, $n \in \mathbb{Z}$.
$x = 2n + \varepsilon$, $0 \leqslant \varepsilon < 1$.
$\frac{x}{2} = n + \frac{\varepsilon}{2}$, $0 \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < 1$, $E\left(\frac{x}{2}\right) = n = \frac{1}{2} E(x)$.
$\frac{x+1}{2} = n + \frac{1+\varepsilon}{2}$, $0 \leqslant \frac{1+\varepsilon}{2} < 1$, $E\left(\frac{x+1}{2}\right) = n\ \frac{1}{2} E(x)$.
$E\left(\frac{x}{2}\right) + E\left(\frac{x+1}{2}\right) = E(x)$.

Si $E(x)$ est un entier impair : $E(x) = 2n + 1$, $n \in \mathbb{Z}$.
$x = 2n + 1 + \varepsilon$, $0 \leqslant \varepsilon < 1$.
$\frac{x}{2} = n + \frac{1+\varepsilon}{2}$, $0 \leqslant \frac{1+\varepsilon}{2} < 1$, $E\left(\frac{x}{2}\right) = n = \frac{1}{2}(E(x) - 1)$
$\frac{x+1}{2} = n + 1 + \frac{\varepsilon}{2}$, $0 \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < 1$, $E\left(\frac{x+1}{2}\right) = n + 1 = \frac{1}{2}(E(x) + 1)$
$E\left(\frac{x}{2}\right) + E\left(\frac{x+1}{2}\right) = E(x)$.

Chapitre 1. Sommes, récurrence, partie entière.

Enoncés.

Exercice 9. Partie entière de $(2+\sqrt{3})^n$.

Soit n un entier naturel non nul. 1°/ Montrer que $(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n$ est un entier pair. 2°/ En déduire que $E\left((2+\sqrt{3})^n\right)$ est un entier impair.	

Solution.

1°/ Entier pair.

Pour $n = 0$, $(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n = 2$, qui est pair.
Pour $n = 1$, $(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n = 4$, qui est pair.
Pour $n = 2$, $(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n = 14$, qui est pair.

Supposons que $(2+\sqrt{3})^k + (2-\sqrt{3})^k$ soit un entier pair, pour tout entier k, $0 \leqslant k \leqslant n$, avec un $n \geqslant 2$.

$(2+\sqrt{3})^{n+1} + (2-\sqrt{3})^{n+1} = (2+\sqrt{3})^n (2+\sqrt{3}) + (2-\sqrt{3})^n (2-\sqrt{3})$
$= (2+\sqrt{3})\left((2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n\right) + (2-\sqrt{3})\left((2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n\right) - (2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})^n - (2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})^n$
$= 4\left((2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n\right) - \left((2+\sqrt{3})^{n-1} + (2-\sqrt{3})^{n-1}\right)$

$4\left((2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n\right)$ est pair,
$\left((2+\sqrt{3})^{n-1} + (2-\sqrt{3})^{n-1}\right)$ est pair,
donc leur différence est un entier pair et $(2+\sqrt{3})^{n+1} + (2-\sqrt{3})^{n+1}$ est un entier pair.

D'après le principe de récurrence forte, $(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n$ est un entier pair pour tout entier $n \geqslant 0$, donc, a fortiori, pour tout entier naturel non nul.

Pour tout entier naturel n, $(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n$ est un entier pair.

2°/ Partie entière.

Pour $n = 0$, $(2+\sqrt{3})^n = 1$. Sa partie entière est 1, nombre impair.
Pour $n = 1$, comme $\sqrt{3}$ est compris entre 1 et 2, $2+\sqrt{3}$ est compris entre 3 et 4 et sa partie entière est 3. C'est bien un entier impair.

$(2+\sqrt{3})^n = \left((2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n\right) - (2-\sqrt{3})^n$

$((2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n)$ est un entier pair, $2k$.

$(2-\sqrt{3})^n = \frac{1}{(2+\sqrt{3})^n}$ est strictement compris entre à et 1, dès que $n > 0$.

On peut donc écrire :

$(2+\sqrt{3})^n = 2k - 1 + (1 - (2-\sqrt{3})^n)$ avec $0 < (1 - (2-\sqrt{3})^n) < 1$.

Ceci montre que la partie entière de $(2+\sqrt{3})^n$ est $2k - 1$, entier impair.

Et comme la propriété est vraie aussi pour $n = 0$, nous pouvons énoncer :

Pour tout entier naturel n, la partie entière de $(2+\sqrt{3})^n$ est un entier impair.

Chapitre 1. Sommes, récurrence, partie entière.

Enoncés.

Exercice 10. Partie entière de la somme des inverses des racines carrées.

Soit n un entier naturel non nul.

1°/ Montrer que $2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} < \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n} - 2\sqrt{n-1}$.

2°/ En déduire la partie entière du nombre $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{10\,000}}$.

Solution.

1°/ Encadrement.

Le carré d'un nombre réel non nul est strictement positif.

$(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})^2 > 0$.
$2n + 1 - 2\sqrt{n+1}\sqrt{n} > 0$
$2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} < \frac{1}{\sqrt{n}}$

$(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})^2 > 0$.
$2n - 1 - 2\sqrt{n-1}\sqrt{n} > 0$
$\frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n} - 2\sqrt{n-1}$

2°/ Partie entière de la somme.

Ecrivons les inégalités précédentes pour n variant de 1 à 10 000 :

$2\sqrt{2} - 2 < 1 = 2 - 1$
$2\sqrt{3} - 2\sqrt{2} < \frac{1}{\sqrt{2}} < 2\sqrt{2} - 2$
$2\sqrt{4} - 2\sqrt{3} < \frac{1}{\sqrt{3}} < 2\sqrt{3} - 2\sqrt{2}$
...
$2\sqrt{10001} - 2\sqrt{10000} < \frac{1}{\sqrt{10000}} < 2\sqrt{10000} - 2\sqrt{9999}$

On additionne membre à membre en simplifiant, il reste :

$$2\sqrt{10001} - 2 < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{10\,000}} < 2\sqrt{10000} - 1$$

$\sqrt{10000} = 100$
$\sqrt{10001} = 100 + \varepsilon,$
$2\sqrt{10001} - 2 = 198 + 2\,\varepsilon,$
$198 < 198 + 2\,\varepsilon < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{10\,000}} < 199$

La partie entière de la somme est donc 198.

$$\boxed{E\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{10\,000}}\right) = 198}$$

Chapitre 1. Sommes, récurrence, partie entière.

Enoncés.

Exercice 11. Un réel est défini par la partie entière de ses multiples.

Soient x et y deux nombres réels. On suppose que, pour tout entier naturel non nul n, $E(n\,x) = E(n\,y)$. Montrer que $x = y$.	

Solution.

Supposons $x < y$.
Le nombre réel $y - x$ est strictement plus grand que 0, 1 est strictement plus grand que 0.
Comme $\mathbb{R}$ est un **corps archimédien**, il existe un entier naturel n tel que $n\,(y - x) > 1$.
Pour cet entier, on a donc :

$n\,x + 1 < n\,y$
$E(n\,x + 1) \leqslant E(n\,y)$
$E(n\,x) < E(n\,x) + 1 = E(n\,x + 1) \leqslant E(n\,y)$
$E(n\,x) < E(n\,y)$
ce qui contredit l'hypothèse.

On ne peut donc pas avoir $x < y$: c'est que $y \leqslant x$, puisque l'ordre des réels est un ordre total.

De la même façon, $x \leqslant y$. D'où finalement $x = y$, par antisymétrie de la relation d'ordre.

Chapitre 1. Sommes, récurrence, partie entière.

Enoncés.

Exercice 12. Partie entière des multiples d'un réel.

Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. 1°/ Montrer que $n\,E(x) \leqslant E(nx)$. 2°/ En déduire que $E\left(\frac{1}{n}E(nx)\right) = E(x)$.	

Solution.

1°/ Partie entière d'un multiple.

Soit x un réel et n un entier naturel non nul.
Par définition de la partie entière :

$$E(x) \leqslant x < E(x) + 1$$

En multipliant par n, il vient :

$$n\,E(x) \leqslant n\,x.$$

Or la partie entière de $n\,x$ est le plus entier inférieur ou égal à $n\,x$.
Donc $E(nx)$ est supérieur ou égal à $n\,E(x)$.

$$\boxed{n\,E(x) \leqslant E(nx)}$$

2°/ Partie entière d'un sous-multiple.

De la relation :

$$n\,E(x) \leqslant E(nx),$$

nous déduisons, en divisant par n :

$$E(x) \leqslant \frac{1}{n}\,E(nx)$$

Comme la partie entière de $\frac{1}{n}\,E(nx)$ est le plus grand des entiers minorant $\frac{1}{n}\,E(nx)$, nous avons donc :

$$E(x) \leqslant E\left(\frac{1}{n} E(nx)\right)$$

De la relation :

$$x < E(x) + 1,$$

nous déduisons :

$$nx < nE(x) + n$$

donc $E(nx) + 1$, qui est le plus petit entier strictement plus grand que nx, est inférieur ou égal à $nE(x) + n$.

$$E(nx) + 1 \leqslant nE(x) + n.$$
$$\frac{1}{n} E(nx) + \frac{1}{n} \leqslant E(x) + 1.$$
$$\frac{1}{n} E(nx) < E(x) + 1$$

Nous obtenons ainsi, compte tenu de l'inégalité $E(x) \leqslant E\left(\frac{1}{n} E(nx)\right)$ déjà obtenue :

$$E(x) \leqslant E\left(\frac{1}{n} E(nx)\right) \leqslant \frac{1}{n} E(nx) < E(x) + 1$$

Et ces inégalités montrent que $E(x)$ est la partie entière de $\frac{1}{n} E(nx)$.

$$\boxed{E\left(\frac{1}{n} E(nx)\right) = E(x)}$$

Exercices

Limites de fonctions numériques d'une variable réelle.

1. Limite finie.
2. Limite infinie.
3. Règles de calcul des limites.

Limite finie.

On dit qu'une fonction numérique f d'une variable réelle x tend vers une **limite finie** ℓ lorsque x tend vers x_0 si, et seulement si :

pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un réel $\eta > 0$ tel que $|x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$.

Lorsque la fonction f tend vers une limite ℓ, lorsque x tend vers x_0, on dit que f "**possède**" **une limite** ℓ en x_0.

HAUT

Limite infinie.

On dit qu'une fonction numérique f d'une variable réelle x **tend vers l'infini** lorsque x tend vers x_0 si, et seulement si :

pour tout $A > 0$, il existe un réel $\eta > 0$ tel que $| x - x_0 | < \eta \Rightarrow | f(x) | > A$.

Une fonction f qui tend vers l'infini, lorsque x tend vers x_0, n'a pas de limite finie en x_0.

HAUT

Règles de calcul des limites.

1. **L'exponentielle l'emporte sur la puissance** : lorsque l'exponentielle tend vers 0 ou vers l'infini, le produit d'une fraction rationnelle par l'exponentielle a la même limite que l'exponentielle (Exercice 4).

$\lim_{x \to +\infty} x^s e^{-x} = 0$, pour tout $s > 0$.

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^s} = 0$, pour tout $s > 0$.

2. **La puissance l'emporte sur le logarithme** : lorsqu'une fraction rationnelle tend vers 0 ou vers l'infini, le produit de la fraction rationnelle par un logarithme a la même limite que la fraction rationnelle (Exercice 3).

$\lim_{x \to 0} x^s \ln x = 0$, pour tout $s > 0$.

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^s} = +\infty$, pour tout $s > 0$.

Mais attention ! cette règle ne s'applique pas si l'on a autre chose que $\ln x$, par exemple : $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

3. **Théorème des gendarmes**. Si, **au voisinage de *a***, une fonction f est minorée par une fonction qui tend vers ℓ, lorsque x tend vers a, et majorée par une fonction qui tend aussi vers ℓ, lorsque x tend vers a, alors la fonction f tend aussi vers ℓ, lorsque x tend vers a.

$\lim_{x \to a} g(x) = \ell$ et $\lim_{x \to a} h(x) = \ell$ et $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x) \Rightarrow \lim_{x \to a} f(x) = \ell$.

La limite d'une fonction constante est la valeur de cette constante.

4. Le **passage à la limite est compatible** avec la somme, avec le produit, avec l'inverse :

$\lim_{x \to a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x)$;

$\lim_{x \to a} (f(x) \times g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) \times \lim_{x \to a} g(x)$; $\lim_{x \to a} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\lim_{x \to a} f(x)}$

HAUT

Chapitre 2. Limites de fonctions numériques d'une variable réelle.

Exercices

Exercice 1. Limite de 14 fonctions.
Exercice 2. Fonction périodique possédant une limite.
Exercice 3. Limite de $x \ln x$ et $(\ln x) / x$.
Exercice 4. Limite de $x e^{-x}$ et e^{x} / x.
Exercice 5. Limite de $e^{\sqrt{x}-x}$ et $2 \ln (1 + x) - \ln (1 + x^2)$.

Exercice 1. Limite de 14 fonctions.

HAUT

Etudier l'existence des limites suivantes et, le cas échéant, les calculer.

1°/ $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$ 2°/ $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$

3°/ $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} (1 - \sin x) \tan x$ 4°/ $\lim\limits_{x \to 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

5°/ $\lim\limits_{x \to 0} x\, E\left(\frac{1}{x}\right)$ 6°/ $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln\left(1+x^2\right)}{x^2}$

7°/ $\lim\limits_{x \to 0}\left(\frac{2}{\sin^2 x} - \frac{1}{1-\cos x}\right)$ 8°/ $\lim\limits_{x \to 0} \frac{2\tan x - \tan 2x}{x \sin^2 x}$

9°/ $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{3}} \frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{1-2\cos x}$ 10°/ $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\sin x}{x}$

11°/ $\lim\limits_{x \to +\infty} x\, E\left(\frac{1}{x}\right)$ 12°/ $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln\left(3x^2\right)}{x^2}$

13°/ $\lim\limits_{x \to +\infty} (1 + x^2)\, e^{-x^2}$ 14°/ $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} - \sqrt{x}$

Solution

HAUT

Exercice 2. Fonction périodique possédant une limite.

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application admettant $t > 0$ pour période et telle qu'il existe $a \in \mathbb{R}$, avec $\lim_{x \to +\infty} f(x) = a$. Montrer que f est une constante sur $\mathbb{R}$. En déduire que la fonction $sin : x \mapsto sin\ x$ n'a pas de limite pour x tendant vers l'infini.	Solution

HAUT

Exercice 3. Limite de *x ln x* et (*ln x*) / *x*.

1°/ Calculer $\lim_{x \to 0} x \ln x$. 2°/ En déduire $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x}$.	Solution

HAUT

Exercice 4. Limite de $x\,e^{-x}$ et e^{x}/x.

1°/ Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} x\,e^{-x}$. 2°/ En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{x}}{x}$.	Solution

HAUT

Exercice 5. Limite de $e^{\sqrt{x}-x}$ et $2\ln(1+x)-\ln(1+x^2)$.

Calculer :

1°/ $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\sqrt{x}-x}$.

2°/ $\lim\limits_{x\to+\infty} (2\ln(1+x)-\ln(1+x^2))$.

Solution

HAUT

Chapitre 2. Limites de fonctions numériques d'une variable réelle.

Enoncés.

Exercice 1. Limite de 14 fonctions.

Etudier l'existence des limites suivantes et, le cas échéant, les calculer.

1°/ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$ 2°/ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$

3°/ $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}(1-\sin x)\tan x$ 4°/ $\lim\limits_{x\to 0} x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$

5°/ $\lim\limits_{x\to 0} x\,E\left(\dfrac{1}{x}\right)$ 6°/ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+x^2\right)}{x^2}$

7°/ $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2}{\sin^2 x}-\dfrac{1}{1-\cos x}\right)$ 8°/ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\tan x-\tan 2x}{x\sin^2 x}$

9°/ $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}}\dfrac{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{1-2\cos x}$ 10°/ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin x}{x}$

11°/ $\lim\limits_{x\to+\infty} x\,E\left(\dfrac{1}{x}\right)$ 12°/ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\left(3x^2\right)}{x^2}$

13°/ $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+x^2)\,e^{-x^2}$ 14°/ $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}$

Solution.

1°/ (*sin x*) / *x*.

Comme ***cos x* tend vers 1 lorsque *x* tend vers 0** :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\times\frac{1}{\cos x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\times\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\times\frac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$$

L'inégalité : ***sin x* < *x* < *tan x***, au voisinage de 0, pour $x > 0$, entraîne $\dfrac{\sin x}{x} < 1 < \dfrac{\tan x}{x}$ et, par passage à la limite :

$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin x}{x}\leqslant 1\leqslant\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\tan x}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin x}{x}$, donc $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

Comme la fonction $\dfrac{\sin x}{x}$ est paire, on a, par symétrie : $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sin x}{x}=1$, d'où $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

2°/ (1 – *cos x*) / *x* ².

$1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2}$

$$\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{2}{x^2} \sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2$$

Lorsque x tend vers 0, $\frac{x}{2}$ tend vers 0, donc, d'après 1°, $\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}$ tend vers 1, $\left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2$ tend vers $1^2 = 1$, et

$$\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

3°/ (1 – *sin x*) *tan x*.

Posons $u = \frac{\pi}{2} - x$.

Lorsque x tend vers $\frac{\pi}{2}$, u tend vers 0 : $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} (1 - \sin x) \tan x = \lim_{u \to 0} \left(1 - \sin\left(\frac{\pi}{2} - u\right)\right) \tan\left(\frac{\pi}{2} - u\right)$.

$\sin\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \cos u$ et $\tan\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \frac{\cos u}{\sin u}$.

$$\left(1 - \sin\left(\frac{\pi}{2} - u\right)\right) \tan\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = (1 - \cos u) \frac{\cos u}{\sin u} = \frac{1-\cos u}{u^2} \times \frac{u}{\sin u} \times \cos u \times u$$

Lorsque u tend vers 0 :

$\lim_{u \to 0} \frac{1-\cos u}{u^2} = \frac{1}{2}$ (2°)

$\lim_{u \to 0} \frac{u}{\sin u} = \frac{1}{\lim_{u \to 0} \frac{\sin u}{u}} = 1$ (1°)

$\lim_{u \to 0} \cos u = 1$

$\lim_{u \to 0} u = 0$.

Au total, par produit :

$$\lim_{u \to 0} \left(\frac{1-\cos u}{u^2} \times \frac{u}{\sin u} \times \cos u \times u \right) = 0.$$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} (1 - \sin x) \tan x = 0.$$

4°/ $x^2 \sin (1 / x)$.

Lorsque x tend vers 0, $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ est majoré en module par 1 et x^2 tend vers 0.

$0 \leqslant x^2 \left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leqslant x^2$

D'après le théorème des gendarmes, $x^2 \left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right|$ tend vers 0.

$-x^2 \left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leqslant x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leqslant x^2 \left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right|$

$x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ est encadrée par deux fonctions qui tendent vers 0, donc $x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ tend vers 0 (théorème des gendarmes).

$$\lim_{x \to 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

5°/ $x E (1 / x)$.

Lorsque x tend vers 0, $\frac{1}{x}$ tend vers l'infini.

$\frac{1}{x} - 1 < E\left(\frac{1}{x}\right) \leqslant \frac{1}{x} < E\left(\frac{1}{x}\right) + 1$

Pour $x > 0$, on peut multiplier par x sans changer le sens des inégalités :

$(1 - x) < x E\left(\frac{1}{x}\right) \leqslant 1$

Or $\lim_{x \to 0} (1 - x) = 1$ et $\lim_{x \to 0} 1 = 1$, donc, théorème des gendarmes, $\lim_{x \to 0^+} x E\left(\frac{1}{x}\right) = 1$.

Pour $x < 0$, on peut multiplier par x en changeant le sens des inégalités :

$1 \leqslant x E\left(\frac{1}{x}\right) < (1 - x)$ et, là encore, $\lim_{x \to 0^-} x E\left(\frac{1}{x}\right) = 1$.

La limite à droite est égale à la limite à gauche, d'où :

$$\lim_{x \to 0} x E\left(\frac{1}{x}\right) = 1$$

6°/ $(\ln (1 + x^2)) / x^2$.

Posons $u = x^2$.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln\left(1+x^2\right)}{x^2} = \lim_{u \to 0^+} \frac{\ln(1+u)}{u} = \lim_{u \to 0} \frac{\ln(1+u)}{u} = 1.$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)}{x^2}=1.}$$

7°/ 2 / $\sin^2 x - 1 / (1 - \cos x)$.

Posons $\tan\frac{x}{2} = t$, on a (formules bien connues, sinon on les vérifie) $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$.

Au voisinage de $x = 0$, pour $x \neq 0$, on a $t \neq 0$.

$$\left(\frac{2}{\sin^2 x}-\frac{1}{1-\cos x}\right)=\frac{1}{2}\frac{(1+t^2)^2}{t^2}-\frac{1}{2}\frac{1+t^2}{t^2}=\frac{1}{2}\frac{1+t^2}{t^2}t^2=\frac{1}{2}(1+t^2)$$

Lorsque x tend vers 0 en étant différent de 0, $t = \tan\frac{x}{2}$ tend aussi vers 0 et $\left(\frac{2}{\sin^2 x}-\frac{1}{1-\cos x}\right)=\frac{1}{2}(1+t^2)$ tend vers $\frac{1}{2}$

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{\sin^2 x}-\frac{1}{1-\cos x}\right)=\frac{1}{2}}$$

8°/ (2 $\tan x - \tan 2x$) / ($x \sin^2 x$).

Posons $\tan x = t$.
Lorsque x tend vers 0, t tend vers 0.

$$2\tan x-\tan 2x = 2t-\frac{2t}{1-t^2} = -2t\frac{t^2}{1-t^2}$$

$$\frac{1}{\sin^2 x}=\frac{1+t^2}{t^2}$$

$$\frac{2\tan x-\tan 2x}{x\sin^2 x} = -2t\frac{1+t^2}{1-t^2}\frac{1}{x} = -2\frac{\tan x}{x}\frac{1}{\cos x} = -2\frac{\sin x}{x}\frac{1}{\cos^2 x}$$

Lorsque x tend vers 0, $\frac{\sin x}{x}$ tend vers 1, $\frac{1}{\cos^2 x}$ tend vers 1, donc $-2\frac{\sin x}{x}\frac{1}{\cos^2 x}$ tend vers – 2.

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{2\tan x-\tan 2x}{x\sin^2 x}=-2}$$

9°/ ($\sin (x - \pi / 3)$)/(1 – 2 $\cos x$).

Posons $u = x - \frac{\pi}{3}$.
Lorsque x tend vers $\frac{\pi}{3}$, u tend vers 0.

$$1-2\cos x = 2\left(\cos\frac{\pi}{3}-\cos x\right) = -4\sin\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\sin\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{3}+x\right) = 4\sin\frac{u}{2}\sin\left(\frac{u}{2}+\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right) = \sin u = 2\sin\frac{u}{2}\cos\frac{u}{2}$$

$$\frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{1-2\cos x} = \frac{\cos\frac{u}{2}}{2\sin\left(\frac{u}{2}+\frac{\pi}{3}\right)}$$

Lorsque u tend vers 0, $\cos\frac{u}{2}$ tend vers 1, $\sin\left(\frac{u}{2}+\frac{\pi}{3}\right)$ tend vers $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, donc $\frac{\cos\frac{u}{2}}{2\sin\left(\frac{u}{2}+\frac{\pi}{3}\right)}$ tend vers $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{1-2\cos x} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

10°/ (*sin x*) / *x*.

Lorsque x tend vers $+\infty$, $\frac{1}{x}$ tend vers 0^+, $\sin x$ est majoré, en module, par 1, donc $\frac{\sin x}{x}$ tend vers 0 :

$0 \leqslant \left|\frac{\sin x}{x}\right| = \frac{1}{x}\,|\sin x| \leqslant \frac{1}{x}$ et $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\left|\frac{\sin x}{x}\right| = 0$ (théorème des gendarmes).

$-\left|\frac{\sin x}{x}\right| \leqslant \frac{\sin x}{x} \leqslant \left|\frac{\sin x}{x}\right|$ et $\lim_{x\to+\infty}\left|\frac{\sin x}{x}\right| = 0 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{x} = 0$ (théorème des gendarmes).

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{x} = 0.$$

11°/ *x E* (1 / *x*).

Pour $x > 1$, $0 < \frac{1}{x} < 1 \Rightarrow E\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ et $x\,E\left(\frac{1}{x}\right) = 0$.

La fonction est constante et égale à 0 pour $x > 1$.

Sa limite à l'infini reste donc 0.

$$\lim_{x\to+\infty} x\,E\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

12°/ (*ln* (3 *x* ²)) / *x* ².

Lorsque x tend vers l'infini, $\ln(3x^2)$ tend vers l'infini, $\frac{1}{x^2}$ tend vers 0.

La puissance l'emporte sur le logarithme : le produit tend vers 0.(Exercice 3)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(3x^2\right)}{x^2} = 0.$$

13°/ (1 + *x* ²) *e* $^{-x^2}$.

Lorsque x tend vers l'infini, $(1 + x^2)$ tend vers l'infini, e^{-x^2} tend vers 0.
L'exponentielle l'emporte sur la puissance : le produit tend vers 0. (Exercice 4)

$$\lim_{x \to +\infty} (1 + x^2)\, e^{-x^2} = 0.$$

14°/ $\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} - \sqrt{x}$.

$$\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} - \sqrt{x} = \sqrt{x}\left(\sqrt{1+\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{x}} - 1\right)$$

$$\sqrt{1+\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{x}} = \left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Lorsque x tend vers l'infini, $\frac{1}{\sqrt{x}}$ tend vers 0, posons $\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

$\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}} = (1 + \varepsilon)^{\frac{1}{2}}$ est équivalent à $1 + \frac{\varepsilon}{2}$, premiers termes de la **formule du binôme généralisée** :

$(1 + u)^s = 1 + s\,u + \frac{s(s-1)}{2}\,u^2 + \frac{s(s-1)(s-2)}{3!}\,u^3 + \ldots$

$\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}\right)^{\frac{1}{2}}$ est donc équivalent à $(1 + \varepsilon + \frac{1}{2}\times \varepsilon^2)^{\frac{1}{2}}$, lui-même équivalent à $1 + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon^2}{8}$ (même formule, avec $u = \varepsilon + \frac{1}{2}\times \varepsilon^2$, et en limitant aux termes en ε^2).

$\left(\sqrt{1+\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{x}} - 1\right)$ est donc équivalent à $\frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon^2}{8}$

et $\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} - \sqrt{x} = \sqrt{x}\left(\sqrt{1+\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{x}} - 1\right)$ est équivalent à $\frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{8}$, qui tend vers $\frac{1}{2}$ lorsque ε tend vers 0.

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} - \sqrt{x} = \frac{1}{2}$$

Chapitre 2. Limites de fonctions numériques d'une variable réelle.

Enoncés.

Exercice 2. Fonction périodique possédant une limite.

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application admettant $t > 0$ pour période et telle qu'il existe $a \in \mathbb{R}$, avec $\lim_{x \to +\infty} f(x) = a$. Montrer que f est une constante sur $\mathbb{R}$. En déduire que la fonction $sin : x \mapsto sin\ x$ n'a pas de limite pour x tendant vers l'infini.	

Solution.

1°/ *f* est constante.

Dire que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = a$, c'est dire que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $A > 0$ tel que :

$$x > A \Rightarrow | f(x) - a | < \varepsilon.$$

Comme f est périodique de période t, cette relation est valable pour tout $x \in \mathbb{R}$.

> En effet, quel que soit $x \in \mathbb{R}$, l'intervalle $\left]\frac{A-x}{t} ; \frac{A-x}{t}+1\right]$ est de longueur 1, donc il contient un entier k :
> $\frac{A-x}{t} < k \leqslant \frac{A-x}{t} + 1$
> $A < x + k\,t \leqslant A + t$
> Il existe un entier relatif k tel que $x + k\,t$ appartienne à l'intervalle $] A ; A + t]$.
> Pour être plus précis, k est la partie entière de $\frac{A-x}{t} + 1$: $k = E\left(\frac{A-x}{t}\right) + 1$.

Pour cet entier k, on a : $x + k\,t > A$ et :
$f(x) = f(x + k\,t)$ donc $| f(x) - a | = | f(x + k\,t) - a | < \varepsilon$.

On voit donc que, quel que soit $\varepsilon > 0$ et quel que soit $x \in \mathbb{R}$, $0 \leqslant | f(x) - a | < \varepsilon$.
Lorsqu'on fait tendre ε vers 0, le théorème des gendarmes entraîne, puisqu'il n'y a pas de ε dans $| f(x) - a |$, que $| f(x) - a | = 0$, donc $f(x) = a$ et f est constante.

Une fonction périodique qui possède une limite lorsque x tend vers l'infini, est une constante.

2°/ Limite de *sin x*.

Du résultat 1°, on déduit qu'une fonction périodique qui n'est pas une constante, ne possède pas de limite lorsque x tend vers l'infini. Or la fonction périodique *sin* : $x \mapsto \sin x$, n'est pas une constante. Donc :

La fonction *sinus* n'a pas de limite lorsque x tend vers l'infini.

Chapitre 2. Limites de fonctions numériques d'une variable réelle.

Enoncés.

Exercice 3. Limite de *x ln x* et (*ln x*) / *x*.

1°/ Calculer $\lim\limits_{x \to 0} x \ln x$. 2°/ En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x}$.	

Solution.

Le but de cet exercice est de justifier la règle : "**La puissance l'emporte sur le logarithme**".

1°/ *x ln x*.

La fonction $f : x \mapsto x \ln x$ est négative pour $x < 1$.
La dérivée de f est $1 + \ln x$, elle est strictement négative au voisinage de 0.
Donc, lorsque x décroît en tendant vers 0, $f(x)$ croît, en restant majorée par 0 : strictement croissante et majorée, elle a une limite b.

$$f(x^2) = x^2 \ln x^2 = 2x \times x \ln x = 2x f(x)$$

Lorsque x tend vers 0, x^2 tend vers 0 et $f(x^2)$ tend vers b, $f(x)$ tend vers b, $2x$ tend vers 0.
Par prolongement des égalités par passage à la limite : $b = 0 \times b = 0$.

$$\boxed{\lim_{x \to 0} x \ln x = 0.}$$

2°/ (*ln x*) / *x*.

Posons $u = \frac{1}{x}$. Lorsque x tend vers $+\infty$, u tend vers 0, et réciproquement.

$\frac{\ln x}{x} = -u \ln u$ et l'on a : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = -\lim\limits_{u \to 0^+} (u \ln u) = 0$ d'après 1°.

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0}$$

Chapitre 2. Limites de fonctions numériques d'une variable réelle.

Enoncés.

Exercice 4. Limite de $x\,e^{-x}$ et e^x / x.

1°/ Calculer $\lim_{x\to+\infty} x\,e^{-x}$. 2°/ En déduire $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x}$.	

Solution.

Cet exercice vise à justifier la règle "**L'exponentielle l'emporte sur la puissance**".

1°/ $x\,e^{-x}$.

$ln\,(x\,e^{-x}) = ln\,x - x$.
Posons $u = \frac{1}{x}$. Lorsque x tend vers $+\infty$, u tend vers 0, et réciproquement.
$ln\,x - x = -\,ln\,u - \frac{1}{u} = -\,\frac{1}{u}\,(1 + u\,ln\,u)$.
Lorsque u tend vers 0, $u\,ln\,u$ tend vers 0 (Exercice 3), donc $(1 + u\,ln\,u)$ tend vers 1, et $-\frac{1}{u}\,(1 + u\,ln\,u)$ a la même limite que $-\frac{1}{u}$, c'est $-\infty$.
Le logarithme de $x\,e^{-x}$ tend vers $-\infty = ln\,0$, lorsque x tend vers $+\infty$.
Donc $x\,e^{-x}$ tend vers 0.

$$\lim_{x\to+\infty} x\,e^{-x} = 0^+$$

2°/ e^x / x.

L'inverse de $\frac{e^x}{x}$ est $\frac{x}{e^x} = x\,e^{-x}$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = \frac{1}{\lim_{x\to+\infty}\left(x\,e^{-x}\right)} = +\infty, \text{ d'après 1°.}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty,$$

Chapitre 2. Limites de fonctions numériques d'une variable réelle.

Enoncés.

Exercice 5. Limite de $e^{\sqrt{x}-x}$ et $2\,ln\,(1+x) - ln\,(1+x^2)$.

Calculer : 1°/ $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{\sqrt{x}-x}$. 2°/ $\lim\limits_{x \to +\infty} (2\,ln\,(1+x) - ln\,(1+x^2))$.	

Solution.

1°/ $e^{\sqrt{x}-x}$.

$e^{\sqrt{x}-x} = e^{x\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-1\right)}$

Lorsque x tend vers $+\infty$, $\frac{1}{\sqrt{x}}$ tend vers 0, $\frac{1}{\sqrt{x}} - 1$ tend vers -1, donc $x\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-1\right)$ tend vers $-\infty$.

$e^{-\infty} = 0$, donc $e^{\sqrt{x}-x}$ tend vers 0.

$$\lim_{x \to +\infty} e^{\sqrt{x}-x} = 0.$$

2°/ $2\,ln\,(1+x) - ln\,(1+x^2)$.

$$2\,ln\,(1+x) - ln\,(1+x^2) = ln\,\frac{(1+x)^2}{1+x^2} = ln\,\frac{x^2\left(\frac{1}{x}+1\right)^2}{x^2\left(\frac{1}{x^2}+1\right)} = ln\,\frac{\left(\frac{1}{x}+1\right)^2}{\frac{1}{x^2}+1}$$

Lorsque x tend vers l'infini, $\frac{1}{x}$ tend vers 0, $\frac{1}{x^2}$ tend vers 0, donc $\frac{1}{x} + 1$ tend vers 1, $\left(\frac{1}{x}+1\right)^2$ tend vers 1, $\frac{1}{x^2} + 1$ tend vers 1, et le rapport $\frac{\left(\frac{1}{x}+1\right)^2}{\frac{1}{x^2}+1}$ tend vers 1, son logarithme tend vers $ln\ 1 = 0$.

$$\lim_{x \to +\infty} (2\,ln\,(1+x) - ln\,(1+x^2)) = 0.$$

Exercices

Continuité de fonctions numériques d'une variable réelle.

1. Continuité en un point.
2. Continuité.
3. Propriétés des fonctions continues.
4. Fonction logarithme neperien.
5. Fonction exponentielle.
6. Fonction cosinus.

Continuité en un point.

On dit qu'une fonction numérique f d'une variable réelle x en **continue en x_0** si, et seulement si :

pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un réel $\eta > 0$ tel que $|x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Autrement dit la fonction f en continue en x_0, si elle possède une limite en x_0 et si cette limite est $f(x_0)$.

HAUT

Continuité.

On dit qu'une fonction numérique *f* d'une variable réelle *x* **est continue dans un intervalle *A*** de $\mathbb{R}$ si, et seulement si elle est continue en chaque point de *A*.
Une fonction *f* qui est continue en chaque point de $\mathbb{R}$ est dite **continue**.

HAUT

Propriétés des fonctions continues.

1. **La continuité est compatible** avec la somme, avec le produit, avec l'inverse :
Si f et g sont des fonctions continues en un point $x_0 \in \mathbb{R}$, alors :

$f + g$ est continue en x_0.
fg est continue en x_0.
$\frac{f}{g}$ est continue en x_0 si $g(x_0) \neq 0$.

2. L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle (théorème de Weierstrass).
3. Toute bijection continue d'un intervalle sur lui-même possède un point fixe (théorème du point fixe).
4. Toute application croissante d'un intervalle sur lui-même possède un point fixe.

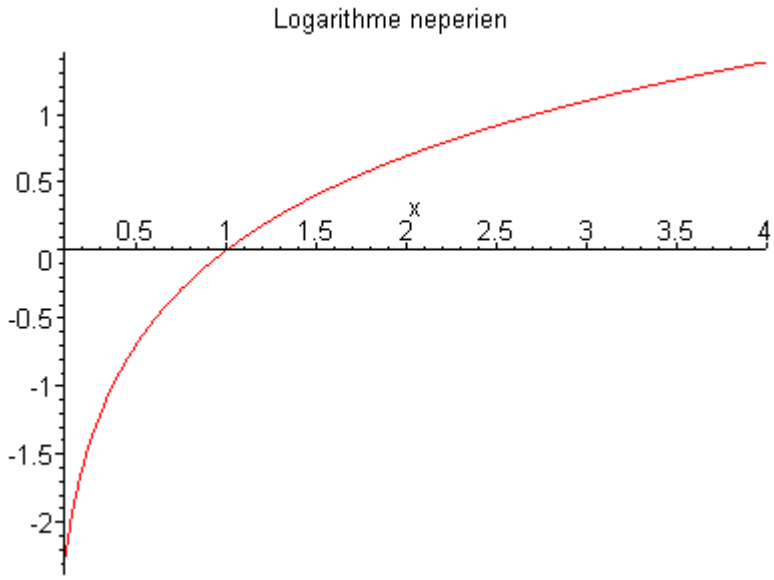
HAUT

Fonction logarithme neperien.

HAUT

La "fonction logarithme neperien" est l'application ln :] 0, + ∞ [→ ℝ, définie par l'**intégrale** :

$$ln\,(x) = \int_1^x \frac{dy}{y}.$$



Pour $x = 1$, on a donc $ln\ 1 = 0$.
C'est une application strictement croissante car, pour $x > a$, on peut écrire :

$$ln\ x - ln\ a = \int_1^x \frac{dy}{y} - \int_1^a \frac{dy}{y} = \int_a^x \frac{dy}{y}.$$

La fonction à intégrer $\frac{1}{y}$ est strictement positive sur l'intervalle d'intégration : son intégrale est strictement positive, $ln\ x > ln\ a$.

L'application logarithme neperien est strictement croissante.

Etant strictement croissante, elle réalise une injection de] 0, + ∞ [sur son image.
Elle n'est pas bornée inférieurement, la limite de $ln\ (x)$ lorsque x tend vers 0 est – ∞.
Elle n'est pas bornée supérieurement, la limite de $ln\ (x)$ lorsque x tend vers + ∞ est + ∞.

Cette application est continue et dérivable.

En effet, soit $a \in$] 0, + ∞ [.

a) Continuité.

Pour tout $x \in$] 0, + ∞ [, on peut écrire :

$$ln\ x - ln\ a = \int_1^x \frac{dy}{y} - \int_1^a \frac{dy}{y} = \int_a^x \frac{dy}{y}.$$

Pour calculer l'intégrale, faisons un changement de variable $t = \frac{y}{a}$.

$dt = \frac{dy}{a}$, $dy = a\ dt$, $y = a\ t$, $\frac{dy}{y} = \frac{dt}{t}$
Pour $y = a$, $t = 1$. Pour $y = x$, $t = \frac{x}{a}$.

$$ln\ x - ln\ a = \int_1^{\frac{x}{a}} \frac{dt}{t} = ln\ \frac{x}{a}$$

Remarquons que, pour $x = 1$, cette relation s'écrit $ln\ \frac{1}{a} = -\ ln\ a$ et qu'avec $b = \frac{1}{a}$, elle devient $ln\ (b\ x)$

$= \ln b + \ln x$.

Sur l'intervalle $\left[1, \frac{x}{a}\right]$ ou $\left[\frac{x}{a}, 1\right]$, l'application $t \mapsto \frac{1}{t}$ est décroissante.
Elle atteint donc son maximum pour la borne inférieure de l'intervalle.
Ce maximum est le plus grand des deux nombres 1 et $\frac{a}{x}$: il est positif.
La valeur absolue de l'intégrale est inférieure ou égale au produit de la longueur de l'intervalle par le maximum de la fonction à intégrer :

$$| \ln x - \ln a | \leqslant \left|\frac{x}{a} - 1\right| \times Max\left(\frac{a}{x}, 1\right) = Max\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{a}\right) \times | x - a |$$

Lorsque x tend vers a, comme l'application $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue, $\frac{1}{x}$ tend vers $\frac{1}{a}$, donc $Max\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{a}\right)$ tend vers $\frac{1}{a}$.
Le produit $Max\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{a}\right) \times | x - a |$ tend donc vers 0 et $| \ln x - \ln a |$ tend vers 0.
La fonction logarithme est continue en a, pour tout $a \in]0, +\infty[$.

La fonction logarithme neperien est continue.

Comme cette application est continue, et que son image n'est bornée ni inférieurement, ni supérieurement, étant donné un nombre réel positif A aussi grand qu'on veut, on peut toujours trouver un $x \in]0, +\infty[$ tel que $\ln(x) < -A$ et un $y \in]0, +\infty[$ tel que $\ln(y) > A$.
Comme f est continue, elle passe par toutes les valeurs intermédiaires entre 0 et $f(x)$ et entre 0 et $f(y)$.
Donc $-A$ et A sont les images par $\ln$ d'éléments de $]0, +\infty[$, de sorte que $\ln$ est surjective et son image est $\mathbb{R}$ tout entier.
La fonction logarithme neperien réalise donc une **bijection continue** de $]0, +\infty[$ sur $\mathbb{R}$.

b) Dérivabilité.

Pour x différent de a, on peut écrire :

$$\frac{\ln x - \ln a}{x - a} = \frac{1}{x - a}\int_a^x \frac{dy}{y}$$

$\frac{1}{x-a}\int_a^x \frac{dy}{y}$ est la valeur moyenne de la fonction $\frac{1}{y}$ entre a et x.
Comme la fonction $\frac{1}{y}$ est continue strictement décroissante, la valeur moyenne est un nombre compris entre $\frac{1}{a}$ et $\frac{1}{x}$ (**théorème de la moyenne**).
Il existe un c strictement compris entre a et x tel que $\frac{\ln x - \ln a}{x - a} = \frac{1}{c}$ soit compris entre $\frac{1}{a}$ et $\frac{1}{x}$.
Lorsque x tend vers a, $\frac{1}{x}$ tend vers $\frac{1}{a}$, donc $\frac{\ln x - \ln a}{x - a}$ tend lui aussi vers $\frac{1}{a}$ ("**théorème des gendarmes**").
Par définition, la dérivée de $\ln$ en a est donc $\frac{1}{a}$.
La fonction logarithme neperien est dérivable en a, pour tout $a \in]0, +\infty[$.

La fonction logarithme neperien est dérivable.
Sa dérivée est l'application $x \mapsto \frac{1}{x}$.

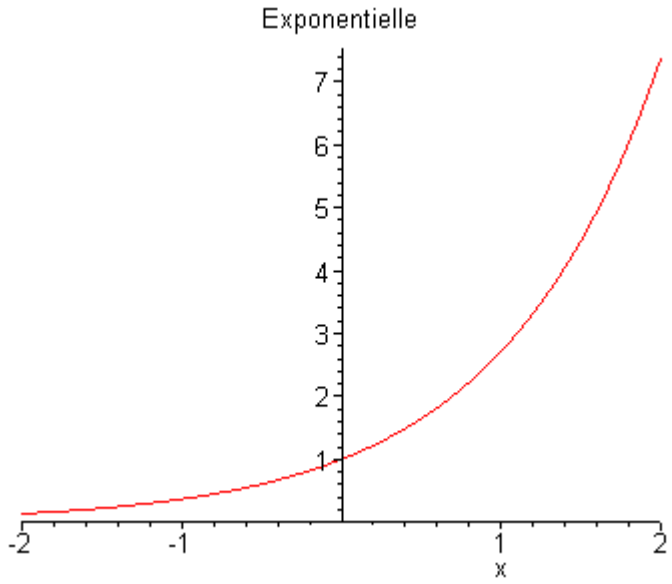
Comme la dérivée est continue, la fonction logarithme neperien est de **classe C^1**.
C'est une bijection continue de classe C^1.

HAUT

Fonction exponentielle.

HAUT

Soit $exp : x \mapsto e^x$ la fonction exponentielle.
Cette application est définie sur $\mathbb{R}$ comme **application réciproque de la fonction logarithme neperien**.
C'est donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0, +\infty[$.
Par définition, e^x est donc le seul nombre réel $t \in]0, +\infty[$ solution de l'équation $x = \int_1^t \frac{dy}{y}$, avec $x \in \mathbb{R}$.



$$\int_1^{e^x} \frac{dy}{y} = x$$

$$t = e^x \Leftrightarrow x = \ln t$$

La propriété $\ln 1 = 0$ s'écrit $e^0 = 1$.
La propriété $\ln(x\,y) = \ln x + \ln y$ s'écrit $e^{x+y} = e^x\,e^y$.
La propriété $\ln \frac{1}{x} = -\ln x$ s'écrit $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$.

a) Continuité.

Nous avons démontré que, lorsque x tend vers a, alors $\ln x$ tend vers $\ln a$ (**continuité du logarithme**).
Il faut démontrer qu'inversement, lorsque $\ln x$ tend vers $\ln a$, alors x tend vers a.
Or dire que $\ln x$ tend vers $\ln a$, c'est dire que $|\ln x - \ln a|$ tend vers 0, c'est donc dire que $\left|\ln \frac{x}{a}\right|$ tend vers $0 = \ln 1$.
Or $\ln \frac{x}{a} = \int_1^{\frac{x}{a}} \frac{dt}{t}$ ne peut tendre vers 0 que si $\frac{x}{a}$ tend vers 1, puisque la fonction $\frac{1}{t}$ est strictement positive.
Donc lorsque $\ln x$ tend vers $\ln a$, x tend vers a.
La fonction exponentielle est continue en a, pour tout $a \in]0, +\infty[$.

La fonction exponentielle est continue.

b) Dérivabilité.

Montrons que, lorsque x tend vers a, alors $\frac{e^x - e^a}{x-a}$ tend vers e^a.
Il revient au même de dire que, lorsque $\ln x$ tend vers $\ln a$, alors $\frac{x-a}{\ln x - \ln a}$ tend vers a.
Or on sait déjà que si $\ln x$ tend vers $\ln a$, alors x tend vers a (continuité de l'exponentielle) et que si x tend vers a, alors $\frac{\ln x - \ln a}{x-a}$ tend vers $\frac{1}{a}$ (dérivée du logarithme), donc, par continuité de l'inverse,

$\frac{x-a}{\ln x - \ln a}$ tend vers a.

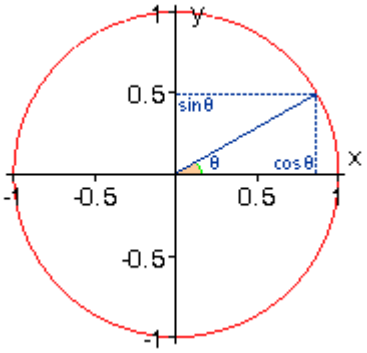
La fonction exponentielle est dérivable en a, pour tout $a \in]0, +\infty[$.

La fonction exponentielle est dérivable. Sa dérivée est la fonction exponentielle.

HAUT

Fonction cosinus.

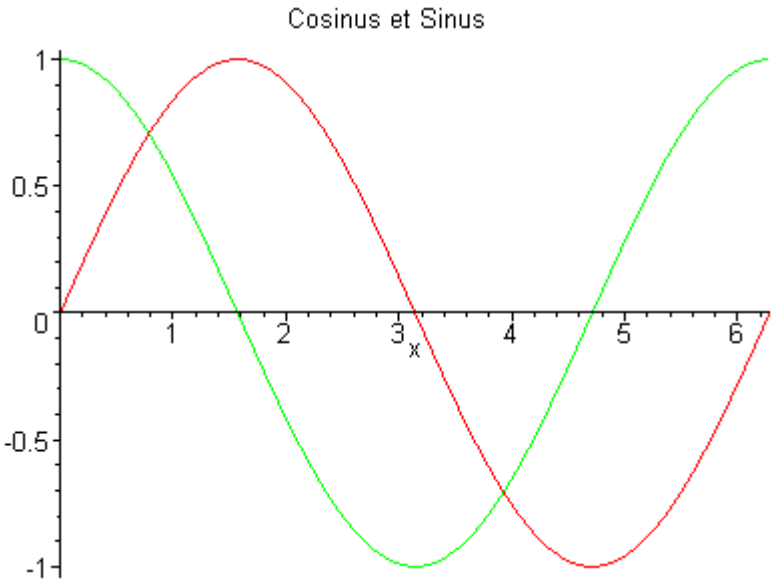
HAUT



A un point (x, y) du cercle unité de $\mathbb{R}^2$, on sait fait correspondre sa **première projection**.
A un $\theta \in \mathbb{R}$, on sait faire correspondre un point (x, y) du cercle unité de $\mathbb{R}^2$, de coordonnées polaires $(1, \theta)$.
La fonction *cosinus* est l'application composée des deux précédentes : à un $\theta \in \mathbb{R}$, elle fait correspondre la projection sur *Ox* du vecteur d'angle polaire θ par rapport à *x*, et de longueur 1.

$$cos : \mathbb{R} \to [-1, 1].$$

Cette application est continue et dérivable.
Sa dérivée est l'application $\mathbb{R} \to [-1, 1]$ qui, à $\theta \in \mathbb{R}$, fait correspondre $-sin\ \theta = cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$.



De même, l'application *sinus* (**deuxième projection**) est dérivable et sa dérivée est $cos\ \theta = sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$.

Si l'on appelle $e^{i\theta}$ le nombre complexe $cos\ \theta + i\ sin\ \theta$, on a $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$ et la dérivée de $e^{i\theta}$ est

$$cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) + i\ sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = e^{i\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)} =$$

$$-sin\ \theta + i\ cos\ \theta = i\ e^{i\theta} = e^{i\frac{\pi}{2}}\ e^{i\theta}.$$

Cette fonction $e^{i\theta}$ se comporte tout à fait comme une exponentielle, sauf que son argument est complexe.
La multiplication par $e^{i\theta}$ dans le plan complexe est une rotation d'angle θ.
La dérivée de la rotation d'angle θ est la rotation d'angle $\theta + \frac{\pi}{2}$.

HAUT

Chapitre 3. Continuité de fonctions numériques d'une variable réelle.

Exercices

Exercice 1. Fonctions avec Partie entière.
Exercice 2. Fonction $x\,E\,(1/x)$.
Exercice 3. Fonction périodique majorée.
Exercice 4. Point fixe d'une application continue.
Exercice 5. Une application continue périodique est bornée.
Exercice 6. Une application monotone surjective est continue.
Exercice 7. Application définie par intervalles.
Exercice 8. Application continue en un point.
Exercice 9. Continuité des fonctions contractantes.
Exercice 10. Prolongement par continuité.
Exercice 11. Application non continue de module continu.
Exercice 12. Application non continue bijective sur [0,1].
Exercice 13. Fonction doublement périodique.
Exercice 14. Continuité du maximum de deux fonctions continues.
Exercice 15. Fonction constante sur $\mathbb{Q}$ et sur $\mathbb{C}\mathbb{Q}$, continue en 0.

Exercice 1. Fonctions avec Partie entière.

Pour tout nombre réel x, on désigne par $E(x)$ la partie entière de x.
Soient $D : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, l'application définie, pour $x \in \mathbb{R}$, par $D(x) = x - E(x)$, et
$F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, l'application définie, pour $x \in \mathbb{R}$, par $F(x) = E(x) + [x - E(x)]^2$.
Etudier les propriétés des fonctions E, D, F. Tracer leur graphe. Déterminer en particulier l'ensemble des points $x \in \mathbb{R}$ où elles sont continues.

Mêmes questions pour $G : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, définie, pour $x \in \mathbb{R}$, par
$G(x) = E(x) + \sqrt{x - E(x)}$

Solution

HAUT

Exercice 2. Fonction $x\,E\,(1/x)$.

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, l'application définie de la façon suivante :

$$f(x) = \begin{cases} x\,E\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Déterminer l'ensemble des points $x \in \mathbb{R}$ où f est continue. Tracer sommairemant son graphe.

Solution

HAUT

Exercice 3. Fonction périodique majorée.

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, une application telle que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $\quad\quad \lvert f(x) - f(y) \rvert \leqslant 3 \lvert \sin x - \sin y \rvert$ 1°/ Montrer que 2π est période de f. 2°/ Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.	Solution

HAUT

Exercice 4. Point fixe d'une application continue.

Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$, et soit f une application **continue** de l'intervalle $[\, a, b \,]$ dans lui-même. Montrer qu'il existe $\alpha \in [\, a, b \,]$ tel que $f(\alpha) = \alpha$.	Solution

HAUT

Exercice 5. Une application continue périodique est bornée.

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, une application continue sur $\mathbb{R}$, admettant $t > 0$ pour période. Montrer que f est bornée.	Solution

HAUT

Exercice 6. Une application monotone surjective est continue.

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, une application que l'on suppose monotone et surjective. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.	Solution

HAUT

Exercice 7. Application définie par intervalles.

Soit la fonction f définie par :

$$x \mapsto \begin{cases} e^x - x & \text{si } x < 0, \\ \cos^2(\pi x) & \text{si } x \in [0,1], \\ \dfrac{\ln(x^2)}{x-1} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Déterminer l'ensemble des points $x \in \mathbb{R}$ où f est continue.

Solution

HAUT

Exercice 8. Application continue en un point.

1°/ Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application dont les restrictions à $\mathbb{Q}$ et à $\complement_{\mathbb{R}}\,\mathbb{Q}$.

On suppose, de plus, que f est continue en 0. Montrer que f est constante sur $\mathbb{R}$.

2°/ L'application $f : x \mapsto f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ est-elle continue en 0 ?

Solution

HAUT

Exercice 9. Continuité des fonctions contractantes.

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$ vérifiant :

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R},\ |f(x) - f(y)| \leqslant r\,|x - y|.$$

Montrer que f est continue pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Solution

HAUT

Exercice 10. Prolongement par continuité.

On considère les applications f et g de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}$, définies de la façon suivante :

$$f(x) = x\left|1+\frac{1}{x}\right|, \; g(x) = \left|\frac{x^2+|x|}{x^2-|x|}\right|.$$

Examiner si f et g peuvent être prolongées par continuité en 0.

Solution

HAUT

Exercice 11. Application non continue de module continu.

Construire une application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, non continue en tout point de $\mathbb{R}$ et telle que $\lvert f \rvert$ soit continue sur $\mathbb{R}$.	Solution

HAUT

Exercice 12. Application non continue bijective sur [0,1].

Construire une application $f : [0 ; 1] \to [0 ; 1]$, non continue en tout point de $[0 ; 1]$ et qui soit bijective.	Solution

HAUT

Exercice 13. Fonction doublement périodique.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, une application admettant 1 et $\sqrt{2}$ comme périodes.
1°/ Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{Z}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p\,(\sqrt{2}-1)^n$ est une période de f.
2°/ On suppose, de plus, que f est continue en 0. Montrer que f est constante sur $\mathbb{R}$.

Solution

HAUT

Exercice 14. Continuité du maximum de deux fonctions continues.

1°/ Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que f est continue en x_0 et que $f(x_0)$ est > 0. Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout $x \in]\, x_0 - \alpha\, ,\, x_0 + \alpha\, [$, $f(x) > 0$. 2°/ Soient f et g deux applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et soit h l'application définie, pour $x \in \mathbb{R}$, par $h(x) = Max\,(f(x), g(x))$. Montrer que h est continue sur $\mathbb{R}$.	Solution

HAUT

Exercice 15. Fonction constante sur $\mathbb{Q}$ et sur $\complement\mathbb{Q}$, continue en 0.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, une application dont les restrictions à $\mathbb{Q}$ et à $\complement_{\mathbb{R}}\,\mathbb{Q}$ sont constantes. On suppose, de plus, que f est continue en 0. Montrer que f est constante sur $\mathbb{R}$.	Solution

HAUT

Chapitre 3. Continuité de fonctions numériques d'une variable réelle.

Enoncés.

Exercice 1. Fonctions avec Partie entière.

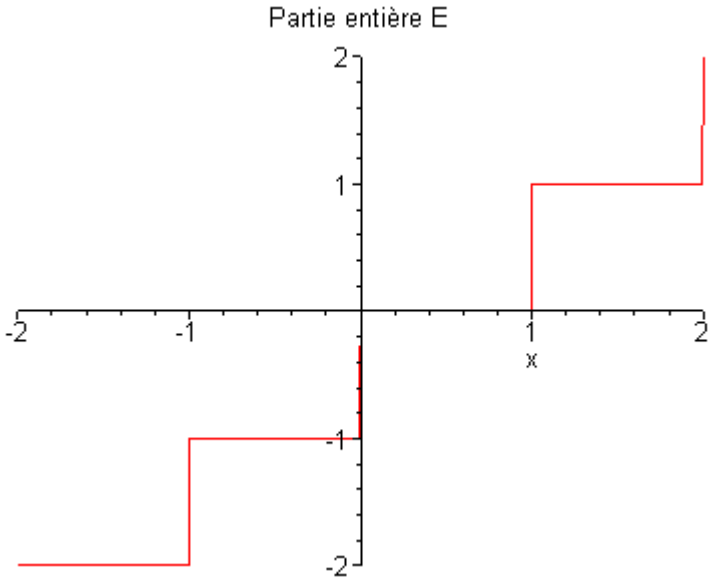
Pour tout nombre réel x, on désigne par $E(x)$ la partie entière de x.
Soient $D : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, l'application définie, pour $x \in \mathbb{R}$, par $D(x) = x - E(x)$, et
$F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, l'application définie, pour $x \in \mathbb{R}$, par $F(x) = E(x) + [x - E(x)]^2$.
Etudier les propriétés des fonctions E, D, F. Tracer leur graphe. Déterminer en particulier l'ensemble des points $x \in \mathbb{R}$ où elles sont continues.

Mêmes questions pour $G : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, définie, pour $x \in \mathbb{R}$, par
$G(x) = E(x) + \sqrt{x - E(x)}$

Solution.

1°/ Application *E*.

Par définition, $E(x)$ est le plus grand entier inférieur ou égal à x.
Pour tout entier $k \in \mathbb{Z}$, $E(x)$ est constante sur l'intervalle $[k, k+1[$.
Les fonctions constantes sont continues.
Donc E est continue sur tout intervalle ouvert $]k, k+1[$.



Si x est entier ($x \in \mathbb{Z}$), $E(x) = x$ et pour tout $y < x$, $E(y) \leqslant E(x) - 1$.
En particulier $\lim_{y \to x} E(y) = E(x) - 1 \neq E(x)$, donc l'application E n'est pas continue en x.

Le domaine de continuité de l'application E est $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$.

2°/ Application *D*.

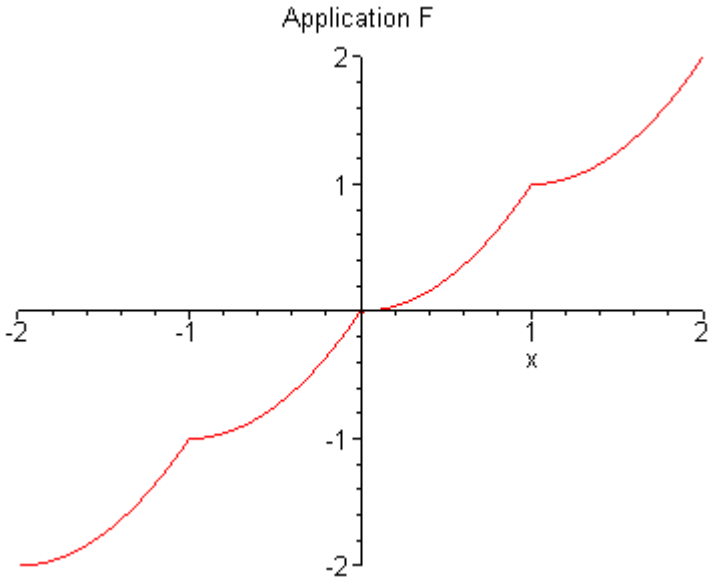
$D(x) = x - E(x)$

L'application identique $x \mapsto x$ est
continue sur $\mathbb{R}$.
La somme de deux fonctions continues est continue.
Donc l'application D est continue déjà partout où E est continue.

Soit x un entier. $\lim_{y \to x^+} D(y) = 0$, $\lim_{y \to x^-} D(y) = 1$, donc l'application D n'est pas continue en x.

Le domaine de continuité de l'application D est $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$.

3°/ Application *F*.



$F(x) = E(x) + [x - E(x)]^2 = E(x) + (D(x))^2 = x - D(x) + (D(x))^2$
$F(x) = x + D(x)(D(x) - 1)$
F est donc continue déjà partout où D est continue, donc dans $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$.

Si x est entier, $\lim_{y \to x^+} D(y) = 0 = D(x)$

et $\lim_{y \to x^+} F(y) = x = F(x)$

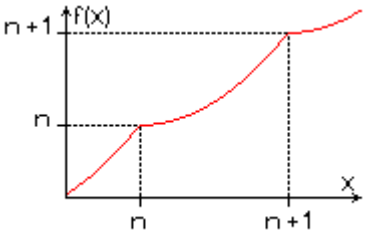
$\lim_{y \to x^-} D(y) = 1$, $\lim_{y \to x^-} (D(y) - 1) = 0$ et

$\lim_{y \to x^-} F(y) = \lim_{y \to x^-} y = x = F(x)$.

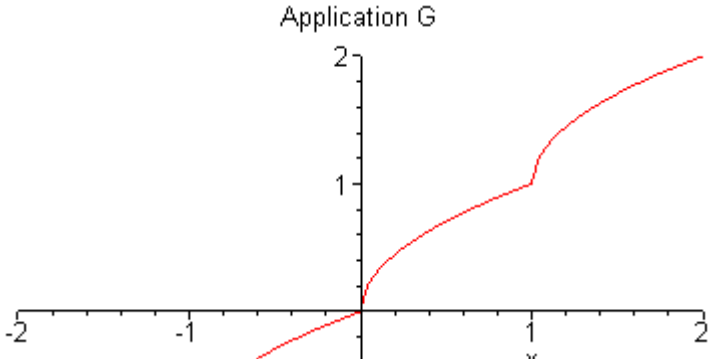
Donc F est continue en x.

F est continue sur $\mathbb{R}$.

Entre deux entiers n et $n + 1$, $f(x) = n + (x - n)^2$ a pour graphe un arc de la parabole de sommet (n, n) passant par le point $(n + 1, n + 1)$.
Le graphe de F est périodique de période $(1, 1)$ dans $\mathbb{R}^2$: il est inchangé par la translation de vecteur $(1, 1)$.



4°/ Application *G*.



$G(x) = E(x) + \sqrt{x - E(x)} = E(x) + \sqrt{D(x)}$
F est donc continue déjà partout où D et E sont continues, donc dans $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$.

Si x est entier, $\lim_{y \to x^+} D(y) = 0 = \sqrt{D(x)}$

et $\lim_{y \to x^+} G(y) = \lim_{y \to x^+} E(y) = E(x) = G(x)$

$\lim_{y \to x^-} D(y) = 1$, $\lim_{y \to x^-} E(y) = E(x) - 1$,

$\lim_{y \to x^-} G(y) = 1 + E(x) - 1 = E(x) = G(x)$.

Donc G est continue en x.

G est continue sur $\mathbb{R}$.

Chapitre 3. Continuité de fonctions numériques d'une variable réelle.

Enoncés.

Exercice 2. Fonction $x\,E\,(1/x)$.

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, l'application définie de la façon suivante :

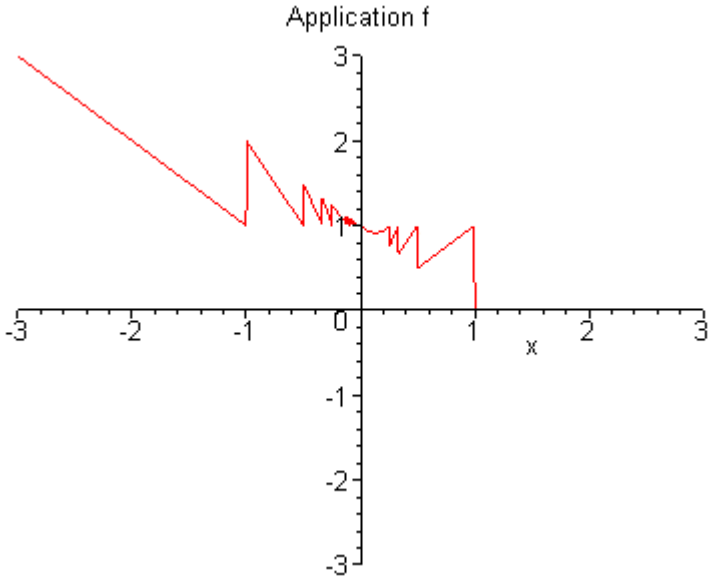
$$f(x) = \begin{cases} x\,E\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Déterminer l'ensemble des points $x \in \mathbb{R}$ où f est continue. Tracer sommairemant son graphe.

Solution.

1°/ Pour $x > 1$.

$0 < \frac{1}{x} < 1$, donc $E\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ et $f(x) = 0$.
f est constante et égale à 0 sur l'intervalle ouvert $]\,1, +\infty\,[$.
f est donc continue sur cet intervalle.



2°/ Pour $x < -1$.

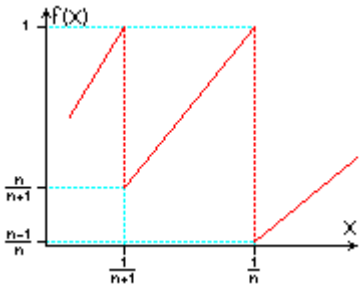
$-1 < \frac{1}{x} < 0$, donc $E\left(\frac{1}{x}\right) = -1$ et $f(x) = -x$.
f est égale à $-x$ sur l'intervalle ouvert $]\,-\infty, -1\,[$.
f est donc continue sur cet intervalle.

3°/ Soit k un entier > 0.

Considérons l'intervalle $\left]\frac{1}{k+1}; \frac{1}{k}\right[$.

Pour un $x \in \left]\frac{1}{k+1}; \frac{1}{k}\right[$, $\frac{1}{x}$ est compris strictement entre k et $k+1$, donc $E\left(\frac{1}{x}\right) = k$ et $f(x) = x\,E\left(\frac{1}{x}\right) = k\,x$.

L'homothétie $x \mapsto k\,x$ étant continue, f est continue sur l'intervalle ouvert $\left]\frac{1}{k+1}; \frac{1}{k}\right[$.



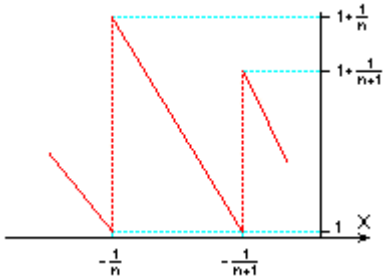
Dans cet intervalle : $\lim\limits_{x \to \frac{1}{k}^-} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x \to \frac{1}{k+1}^+} f(x) = \frac{k}{k+1}$

Dans l'intervalle suivant $\left]\frac{1}{k+2}; \frac{1}{k+1}\right[$, on a $\lim\limits_{x \to \frac{1}{k+1}^-} f(x) = 1 \neq \lim\limits_{x \to \frac{1}{k+1}^+} f(x) = \frac{k}{k+1}$, donc f n'est pas continue en $\frac{1}{k+1}$.

Pour $k = -1$, $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 1$, et on a vu que f était constante et égale à 0 pour $x > 1$, donc $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 0$, f n'est pas continue en 1.

4°/ Soit *k* un entier < 0.

Considérons l'intervalle $\left]\frac{1}{k}; \frac{1}{k+1}\right[$.



Pour un $x \in \left]\frac{1}{k}; \frac{1}{k+1}\right[$, $\frac{1}{x}$ est compris strictement entre k et $k + 1$, donc $E\left(\frac{1}{x}\right) = k$ et $f(x) = x\,E\left(\frac{1}{x}\right) = k\,x$.

L'homothétie $x \mapsto k\,x$ étant continue, f est continue sur l'intervalle ouvert $\left]\frac{1}{k}; \frac{1}{k+1}\right[$.

Dans cet intervalle : $\lim\limits_{x \to \frac{1}{k}^+} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x \to \frac{1}{k+1}^-} f(x) = \frac{k}{k+1}$

Dans l'intervalle suivant $\left]\frac{1}{k+1}; \frac{1}{k+2}\right[$, on a $\lim\limits_{x \to \frac{1}{k+1}^+} f(x) = 1 \neq \lim\limits_{x \to \frac{1}{k+1}^-} f(x) = \frac{k}{k+1}$, donc f n'est pas continue en $\frac{1}{k+1}$.

Pour $k = -2$, $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = 2$, et on a vu que f était égale à $-x$ pour $x < -1$, donc $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = 1$, f n'est pas continue en -1.

Donc, quel que soit l'entier naturel k, f n'est pas continue en $-\frac{1}{k+1}$.

5°/ En 0.

Lorsque x tend vers 0, $\frac{1}{x}$ tend vers l'infini.

$$\frac{1}{x} - 1 < E\left(\frac{1}{x}\right) \leqslant \frac{1}{x} < E\left(\frac{1}{x}\right) + 1$$

Pour $x > 0$, on peut multiplier par x sans changer le sens des inégalités :

$(1 - x) < x\,E\left(\frac{1}{x}\right) \leqslant 1$

Or $\lim\limits_{x \to 0} (1 - x) = 1$ et $\lim\limits_{x \to 0} 1 = 1$, donc, théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x \to 0^+} x\,E\left(\frac{1}{x}\right) = 1$.

Pour $x < 0$, on peut multiplier par x en changeant le sens des inégalités :

$1 \leqslant x\,E\left(\frac{1}{x}\right) < (1 - x)$ et, là encore, $\lim\limits_{x \to 0^-} x\,E\left(\frac{1}{x}\right) = 1$.

La limite à droite est égale à la limite à gauche, d'où : $\lim\limits_{x \to 0} x\,E\left(\frac{1}{x}\right) = 1$.

Or $f(0) = 1$, par définition. Donc f est continue en 0.

Ce résultat a déjà été établi en Chapitre 2, Exercice 1, 5°.

Rassemblons les résultats obtenus.

L'application f est discontinue aux points $\frac{1}{k}$, $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$.
Elle est continue partout ailleurs, y compris en 0.

Chapitre 3. Continuité de fonctions numériques d'une variable réelle.

Enoncés.

Exercice 3. Fonction périodique majorée.

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, une application telle que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $\quad \lvert f(x) - f(y) \rvert \leqslant 3 \lvert \sin x - \sin y \rvert$ 1°/ Montrer que 2π est période de f. 2°/ Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.	

Solution.

1°/ Période.

Soit x un réel quelconque.
La relation $\lvert f(x) - f(y) \rvert \leqslant 3 \lvert \sin x - \sin y \rvert$, valable pour tout $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, entraîne :

$\lvert f(x) - f(x + 2\pi) \rvert \leqslant 3 \lvert \sin x - \sin(x + 2\pi) \rvert = 0$, car $\sin x - \sin(x + 2\pi) = 0$.

On a donc $f(x + 2\pi) = f(x)$, ce qui montre que f est périodique de période 2π.

2π est période de f.

2°/ Continuité.

Soient x un nombre réel quelconque et $\varepsilon > 0$ un nombre réel strictement positif.

Comme la fonction *sinus* est continue sur $\mathbb{R}$ et, en particulier, en x, il existe un nombre réel $\eta > 0$, tel que $\lvert x - y \rvert < \eta \Rightarrow \lvert \sin x - \sin y \rvert < \frac{\varepsilon}{3}$.
On a alors, $\lvert x - y \rvert < \eta \Rightarrow \lvert f(x) - f(y) \rvert \leqslant 3 \lvert \sin x - \sin y \rvert < \varepsilon$, ce qui montre que la fonction f est continue en x.
Comme x est quelconque, f est continue sur $\mathbb{R}$.

f est continue sur $\mathbb{R}$.

Chapitre 3. Continuité de fonctions numériques d'une variable réelle.

Enoncés.

Exercice 4. Point fixe d'une application continue.

Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$, et soit f une application **continue** de l'intervalle $[\,a, b\,]$ dans lui-même. Montrer qu'il existe $\alpha \in [\,a, b\,]$ tel que $f(\alpha) = \alpha$.	

Solution.

Soit i l'injection canonique de $[\,a, b\,]$ dans $\mathbb{R}$. C'est une application continue.
Si f est une application continue de $[\,a, b\,]$ dans $[\,a, b\,]$, $i \circ f$, **composée de deux applications continues**, est une application continue de $[\,a, b\,]$ dans $\mathbb{R}$.
L'application $j : x \mapsto -x$ de $[\,a, b\,]$ dans $\mathbb{R}$, est une application continue (application contractante de rapport de contraction 1).

L'application $g : x \mapsto f(x) - x$, **somme de deux applications continues** $i \circ f$ et j, est une application continue de $[\,a, b\,]$ dans $\mathbb{R}$.

$f(a) \in [\,a, b\,] \Rightarrow a \leqslant f(a)$, soit $g(a) \geqslant 0$.
$f(b) \in [\,a, b\,] \Rightarrow f(b) \leqslant b$, soit $g(b) \leqslant 0$.
$g(b) \leqslant 0 \leqslant g(a)$

L'image, par une application continue, d'un intervalle fermé est un intervalle fermé (**théorème de Weierstrass**).
L'image, par l'application g, de l'intervalle fermé $[\,a, b\,]$ est donc un intervalle fermé de $\mathbb{R}$, contenant $g(a)$ et $g(b)$, donc contenant l'intervalle fermé $[\,g(b), g(a)]$, qui lui-même contient 0.
Comme 0 appartient à l'image de g, **il existe, entre a et b, un point α tel que $g(\alpha) = f(\alpha) - \alpha = 0$** : c'est un point fixe de f.

Chapitre 3. Continuité de fonctions numériques d'une variable réelle.

Enoncés.

Exercice 5. Une application continue périodique est bornée.

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, une application continue sur $\mathbb{R}$, admettant $t > 0$ pour période. Montrer que f est bornée.	

Solution.

Soit [0, t] un intervalle fermé ayant une longueur d'une période t.
Comme l'application f est continue, l'image par f de cet intervalle fermé est un intervalle fermé (**théorème de Weierstrass**) [a, b].

Pour tout nombre réel x, il existe un entier k tel que $0 \leqslant x + k\,t < t$.
En effet, cette relation équivaut à $-x \leqslant k\,t < t - x$, ou encore $-\frac{x}{t} \leqslant k < -\frac{x}{t} + 1$.
et l'intervalle $\left[-\frac{x}{t} ; -\frac{x}{t} + 1 \right[$ de longueur 1, contient nécessairement un entier k.

Comme f est périodique de période t, on a alors : $f(x) = f(x + k\,t) \in [\, a, b \,]$, soit $a \leqslant f(x) \leqslant b$.
Et cette relation montre que f est bornée.

Chapitre 3. Continuité de fonctions numériques d'une variable réelle.

Enoncés.

Exercice 6. Une application monotone surjective est continue.

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, une application que l'on suppose monotone et surjective. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.	

Solution.

Pour fixer les idées, supposons f monotone croissante.
Soit a un nombre réel.

$f(]\, a\, , +\infty\, [)$ possède une borne inférieure b qui est la limite de $f(x)$, lorsque x tend vers a par valeurs supérieures : $b = \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a^+)$.

Si b était strictement plus grand que $f(a)$, il existerait un y strictement compris entre b et $f(a)$: $f(a) < y < b$.
Comme ***f* est surjective**, il existerait un x tel que $y = f(x)$.
$a > x \Rightarrow f(a) \geqslant f(x)$, ce qui contredit la définition de y.
Donc x est supérieur ou égal à a.
Mais alors b est inférieur ou égal à $f(x) = y$ par **définition d'une borne inférieure**.
Et ceci contredit la définition de y.

Donc on ne peut pas avoir $b > f(a)$, c'est que b est inférieur ou égal à $f(a)$.
Si b était strictement plus petit que $f(a)$, il existerait un x strictement plus grand que a avec $f(x) < f(a)$, par définition de la borne inférieure de $f(]\, a\, , +\infty\, [)$.
Mais ceci contredit le fait que ***f* est croissante**.
On a donc nécessairement $b = f(a)$.

De même, $f(]\, -\infty\, , a\, [)$ possède une borne supérieure $c = \lim\limits_{x \to a^-} f(x) = f(a^-) = f(a)$.

La limite à droite et la limite à gauche étant égales, f est continue en a.
f est donc continue sur $\mathbb{R}$.

Si la fonction f est monotone décroissante, il suffit de prendre la relation d'ordre symétrique pour en faire une fonction monotone croissante et la même démonstration s'applique.

Remarque : si l'on n'impose que la condition de monotonie, la fonction numérique f monotone est **réglée** (elle n'a que des points de discontinuité de première espèce et en a au plus une infinité dénombrable). C'est la surjectivité qui entraîne la continuité, avec $f(a^+) = f(a^-) = f(a)$.

Chapitre 3. Continuité de fonctions numériques d'une variable réelle.

Enoncés.

Exercice 7. Application définie par intervalles.

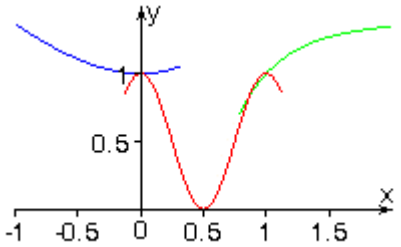
Soit la fonction f définie par :

$$x \mapsto \begin{cases} e^x - x & \text{si } x < 0, \\ \cos^2(\pi x) & \text{si } x \in [0, 1], \\ \dfrac{\ln(x^2)}{x-1} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Déterminer l'ensemble des points $x \in \mathbb{R}$ où f est continue.

Solution.

1°/ Continuité hors des points 0 et 1.



Pour $x < 0$, $e^x - x$ est un fonction numérique continue, donc f est **continue**.
Pour $0 < x < 1$, $\cos^2 \pi x$ est une fonction numérique continue, donc f est **continue**.
Pour $x > 1$, $\dfrac{\ln x^2}{x-1}$ est une fonction numérique continue, donc f est **continue**.

2°/ Continuité en 0.

$f(0^-) = e^0 - 0 = 1$.
$f(0^+) = \cos^2 \pi\, 0 = 1$.
$f(0^-) = f(0^+) = f(0)$

Donc f est **continue en 0**.

3°/ Continuité en 1.

$f(1^-) = \cos^2 \pi = 1$.

$f(1^+) = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{\ln x^2}{x-1} = +\infty \neq f(1^-)$

Donc f n'est **pas continue en 1**.

L'ensemble des points où f est continue est $\mathbb{R} - \{1\}$.

Chapitre 3. Continuité de fonctions numériques d'une variable réelle.

Enoncés.

Exercice 8. Application continue en un point.

1°/ Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application dont les restrictions à $\mathbb{Q}$ et à $\complement_{\mathbb{R}}\,\mathbb{Q}$ sont constantes.

On suppose, de plus, que f est continue en 0. Montrer que f est constante sur $\mathbb{R}$.

2°/ L'application $f : x \mapsto f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ est-elle continue en 0 ?

Solution.

1°/ Constance.

Comme f prend la même valeur pour tous les rationnels, si x est rationnel, $f(x) = f(0)$.
Comme f est continue en 0, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que $|x| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(0)| < \varepsilon$.

Les irrationnels forment un ensemble dense dans R, donc l'intervalle d'amplitude h autour de 0 contient au moins un irrationnel x_0.

f prend la valeur $f(x_0)$ pour tous les irrationnels.

On a $|f(x_0) - f(0)| < \varepsilon$, pour tout $\varepsilon > 0$.

Donc $f(x_0) = f(0)$.

Un nombre réel est soit rationnel, soit irrationnel : dans chaque cas, la valeur de $f(x)$ est $f(0)$.
L'application *f* est donc une constante.

2°/ Continuité.

Si l'application f était continue en 0, comme elle est constante sur $\mathbb{Q}$ et constante sur $\complement_{\mathbb{R}}\,\mathbb{Q}$, ce serait une application constante d'après 1°.
Ce n'est pas le cas, puisqu'elle peut prendre deux valeurs 0 ou 1 : donc **l'application *f* n'est pas continue en 0**.

Chapitre 3. Continuité de fonctions numériques d'une variable réelle.

Enoncés.

Exercice 9. Continuité des fonctions contractantes.

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$ vérifiant : $\forall\, x, y \in \mathbb{R}, \mid f(x) - f(y) \mid \leqslant r \mid x - y \mid.$ Montrer que f est continue pour tout $x \in \mathbb{R}$.	

Solution.

Soit $x \in \mathbb{R}$ et soit ε un nombre réel, $\varepsilon > 0$.
Posons $\eta = \frac{\varepsilon}{r}$. Alors, pour tout $y \in \mathbb{R}$, $\mid x - y \mid < \eta \Rightarrow \mid f(x) - f(y) \mid \leqslant r \mid x - y \mid < r\, \eta = \varepsilon$.
Donc, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $\eta > 0$ tel que $(\forall\, y \in \mathbb{R})(\mid x - y \mid < \eta \Rightarrow \mid f(x) - f(y) \mid < \varepsilon)$.
C'est la définition-même de la continuité de f en x.
Donc f est continue pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Une application vérifiant la propriété : $\forall\, x, y \in \mathbb{R}, \mid f(x) - f(y) \mid \leqslant r \mid x - y \mid$, est appelée une application contractante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Si le rapport de contraction r est < 1, on parle de "contraction" au lieu d'application contractante.

L'application f est continue pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Chapitre 3. Continuité de fonctions numériques d'une variable réelle.

Enoncés.

Exercice 10. Prolongement par continuité.

On considère les applications f et g de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}$, définies de la façon suivante :

$$f(x) = x\left|1+\frac{1}{x}\right|,\ g(x) = \left|\frac{x^2+|x|}{x^2-|x|}\right|.$$

Examiner si f et g peuvent être prolongées par continuité en 0.

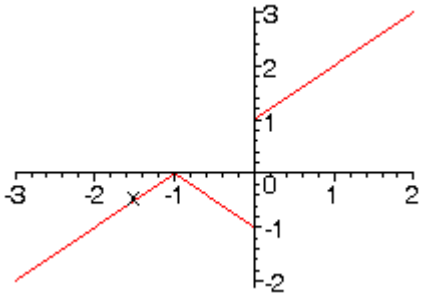
Solution.

1°/ Application *f*.

a) Continuité en dehors de 0.

1. — Pour $x > 0$.

$1 + \frac{1}{x}$ est > 0, $\left|1+\frac{1}{x}\right| = 1 + \frac{1}{x}$, $f(x) = x\left|1+\frac{1}{x}\right| = 1 + x$ est continue.
Lorsque x tend vers 0, $1 + x$ tend vers 1.



2. — Pour $x < 0$.

$$f(x) = x\frac{|x+1|}{|x|}.$$

Pour $x < -1$, $x + 1 < 0$, $|x + 1| = -x - 1$, $|x| = -x$, $f(x) = 1 + x$ = est continue.
Lorsque x tend vers -1, $1 + x$ tend vers 0.
Pour $x > -1$, $x + 1 > 0$, $|x + 1| = x + 1$, $|x| = -x$, $f(x) = -1 - x$ = est continue.
Lorsque x tend vers -1, $-1 - x$ tend vers 0.
La limite à droite en -1 étant égale à la limite à gauche en -1, f est continue en -1.
Lorsque x tend vers 0, $-1 - x$ tend vers -1.

En dehors de 0, l'application f est continue.

b) Limite en 0.

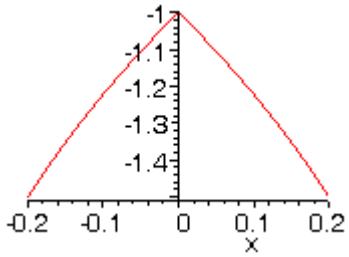
Pour $x > 0$, la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 0 est 1.
Pour $x < 0$, la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 0 est -1.
La limite à droite n'est pas égale à la limite à gauche : f ne peut pas être prolongée par continuité en

0.

L'application *f* ne peut pas être prolongée par continuité en 0.

2°/ Application *g*.

g est une fonction paire : $g(-x) = g(x)$.
Pour $x > 0$, $g(x) = \frac{x^2+x}{x^2-x} = \frac{x+1}{x-1}$ tend vers – 1 lorsque *x* tend vers 0.
Par symétrie de parité, $g(x)$ tend vers – 1 lorsque *x* tend vers 0 par valeurs inférieures.
On peut donc prolonger *g* par continuité en 0 : il suffit de poser $g(0) = -1$.



L'application *g* peut être prolongée par continuité en 0, il suffit de poser $g(0) = -1$.

Une remarque s'impose.
Bien que l'énoncé affirme que *g* est une application de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}$, il ne faut pas prendre cette affirmation pour argent comptant.
En effet, lorsque *x* tend vers 1, $g(x)$ tend vers $+\infty$ à droite et vers $-\infty$ à gauche : le point $x = 1$ est un point de discontinuité où *g* devient infinie, $g(1)$ n'est pas un nombre réel.
Par symétrie de parité, le point – 1 est, lui aussi un point où *g* n'est pas définie.

Chapitre 3. Continuité de fonctions numériques d'une variable réelle.

Enoncés.

Exercice 11. Application non continue de module continu.

Construire une application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, non continue en tout point de $\mathbb{R}$ et telle que $\lvert f \rvert$ soit continue sur $\mathbb{R}$.	

Solution.

La **fonction indicatrice** $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ de $\mathbb{Q}$, est égale, par définition, à 1 si x est rationnel, à 0 si x n'est pas rationnel.
Considérons l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définie par $f = 2 \times \mathbb{1}_{\mathbb{Q}} - 1$.
$f(x)$ est égal à 1 si x est rationnel, à – 1 si x n'est pas rationnel.

Cette application f n'est continue en aucun point de $\mathbb{R}$.

> En effet, les rationnels sont partout denses dans $\mathbb{R}$, et les non rationnels aussi : dans tout intervalle ouvert non vide, si petit soit-il, il y a toujours une infinité de rationnels et de non rationnels.
> Il n'existe donc aucun intervalle ouvert entourant un quelconque $x \in \mathbb{R}$ dans lequel $f(y)$ reste égal à 1 ou reste égal à – 1.

$\lvert f \rvert$ est l'application constante et égale à 1 : elle est continue sur $\mathbb{R}$.

L'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définie par $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ -1 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$, n'est continue en aucun point de $\mathbb{R}$.
$\lvert f \rvert$, cependant, est constante, donc continue, sur $\mathbb{R}$.

Chapitre 3. Continuité de fonctions numériques d'une variable réelle.

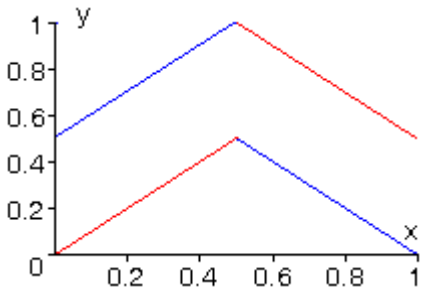
Enoncés.

Exercice 12. Application non continue bijective sur [0,1].

Construire une application $f : [0 ; 1] \to [0 ; 1]$, non continue en tout point de $[0 ; 1]$ et qui soit bijective.	

Solution.

Considérons l'application $f : [0 ; 1] \to [0 ; 1]$ définie de la façon suivante.



- Si x est rationnel, et s'il est compris entre 0 et $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$ exclu, on pose $f(x) = x$.
- Si x est rationnel, et s'il est compris entre $\frac{1}{2}$ et 1, $\frac{1}{2}$ inclus, on pose $f(x) = \frac{3}{2} - x$.
- Si x n'est pas rationnel, et s'il est compris entre 0 et $\frac{1}{2}$, on pose $f(x) = x + \frac{1}{2}$.
- Si x n'est pas rationnel, et s'il est compris entre $\frac{1}{2}$ et 1, on pose $f(x) = 1 - x$.

Cette application f remplit visiblement les conditions imposées :
— elle n'est continue en aucun point de $[0 ; 1]$, puisque tout intervalle centré sur un réel contient à la fois des rationnels et des non rationnels, donc des points x et y tels que $|f(x) - f(y)|$ soit aussi proche qu'on veut de $\frac{1}{2}$.
— elle est bijective, parce que l'application $g : [0 ; 1] \to [0 ; 1]$ définie de la façon suivante :

- Si y est rationnel, et s'il est compris entre 0 et $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$ exclu, on pose $g(y) = y$.
- Si y est rationnel, et s'il est compris entre $\frac{1}{2}$ et 1, $\frac{1}{2}$ inclus, on pose $g(y) = \frac{3}{2} - y$.
- Si y n'est pas rationnel, et s'il est compris entre 0 et $\frac{1}{2}$, on pose $g(y) = 1 - y$.
- Si y n'est pas rationnel, et s'il est compris entre $\frac{1}{2}$ et 1, on pose $f(x) = y - \frac{1}{2}$.

est à la fois section et rétraction de f : $f \circ g = Id_{[0,1]}$ et $g \circ f = Id_{[0,1]}$.

Chapitre 3. Continuité de fonctions numériques d'une variable réelle.

Enoncés.

Exercice 13. Fonction doublement périodique.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, une application admettant 1 et $\sqrt{2}$ comme périodes. 1°/ Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{Z}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p\,(\sqrt{2}-1)^n$ est une période de f. 2°/ On suppose, de plus, que f est continue en 0. Montrer que f est constante sur $\mathbb{R}$.	

Solution.

1°/ Périodes.

Si 1 est une période de f, tout entier relatif $z \in \mathbb{Z}$ est aussi une période de f : $f(x+z) = f(x)$.
Si $\sqrt{2}$ est une période de f, pour tout entier relatif $z \in \mathbb{Z}$, $z\sqrt{2}$ est aussi une période de f : $f(x + z\sqrt{2}) = f(x)$.
Si 1 et $\sqrt{2}$ sont des périodes de f, toute combinaison linéaire de 1 et $\sqrt{2}$, à coefficients dans $\mathbb{Z}$ est aussi une période de f :
$f(x + z + z'\sqrt{2}) = f(x)$.

Or, pour tout $p \in \mathbb{Z}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p\,(\sqrt{2}-1)^n$ est, d'après la formule du binôme de Newton, une combinaison linéaire de 1 et $\sqrt{2}$, à coefficients dans $\mathbb{Z}$. Donc :

Pour tout $p \in \mathbb{Z}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p\,(\sqrt{2}-1)^n$ est une période de f.

2°/ Constance.

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$.
Pour tout $p \in \mathbb{Z}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p\,(\sqrt{2}-1)^n$ est une période de f : $f(x_0 + p\,(\sqrt{2}-1)^n) = f(x_0)$.
Comme f est continue en 0, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$, tel que $|x| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(0)| < \varepsilon$.

Comme $\sqrt{2} - 1$ est < 1, on peut trouver un n suffisamment grand pour que $(\sqrt{2}-1)^n)$ soit $< \eta$.
Il suffit de prendre $n > \dfrac{\ln \eta}{\ln(\sqrt{2}-1)}$.
$|x_0|$ est compris entre deux multiples de $(\sqrt{2}-1)^n$.
Comme la distance entre ces deux multiples est inférieure à η, il existe donc au moins un $p \in \mathbb{Z}$ tel que $x_0 + p\,(\sqrt{2}-1)^n$ soit compris entre $-\eta$ et $+\eta$.

Comme $p\,(\sqrt{2}-1)^n$ est une période de f : $f(x_0 + p\,(\sqrt{2}-1)^n) = f(x_0)$.
La relation $|x_0 + p\,(\sqrt{2}-1)^n| < \eta$ entraîne alors $|f(x_0 + p\,(\sqrt{2}-1)^n) - f(0)| = |f(x_0) - f(0)| < \varepsilon$.

On a donc $|f(x_0) - f(0)| < \varepsilon$, pour tout $\varepsilon > 0$.
C'est dire que $f(x_0) = f(0)$.

Une application admettant 1 et $\sqrt{2}$ comme périodes et continue en 0 est constante.

Chapitre 3. Continuité de fonctions numériques d'une variable réelle.

Enoncés.

Exercice 14. Continuité du maximum de deux fonctions continues.

1°/ Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que f est continue en x_0 et que $f(x_0)$ est > 0. Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout $x \in]\, x_0 - \alpha\, ,\, x_0 + \alpha\, [$, $f(x) > 0$. 2°/ Soient f et g deux applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et soit h l'application définie, pour $x \in \mathbb{R}$, par $h(x) = Max\,(f(x), g(x))$. Montrer que h est continue sur $\mathbb{R}$.	

Solution.

1°/ Positivité dans un intervalle.

Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continue en x_0 et telle que $f(x_0)$ soit > 0.
Comme $f(x_0)$ est strictement plus grand que 0, il existe un nombre réel a strictement compris entre 0 et $f(x_0)$: $0 < a < f(x_0)$.

Comme f est continue en x_0 :

$$(\forall\, \varepsilon)(\varepsilon \in \mathbb{R} \text{ et } \varepsilon > 0 \Rightarrow (\exists\, \eta)(\eta \in \mathbb{R} \text{ et } \eta > 0 \text{ et } (\forall\, x)(x \in \mathbb{R} \text{ et } |\, x - x_0\, | < \eta \Rightarrow |\, f(x) - f(x_0)\, | < \varepsilon)))$$

Pour $\varepsilon = f(x_0) - a > 0$, il existe donc un $\alpha > 0$ tel que, pour tout $x \in]\, x_0 - \alpha\, ,\, x_0 + \alpha\, [$, on ait :

$$|\, f(x) - f(x_0)\, | < f(x_0) - a$$
$$f(x_0) - f(x) < f(x_0) - a$$
$$f(x) > a > 0$$

$$\boxed{(\exists\, \alpha)(\alpha \in \mathbb{R} \text{ et } \alpha > 0 \text{ et } (\forall\, x)(x \in \mathbb{R} \text{ et } |\, x - x_0\, | < \alpha \Rightarrow f(x) > 0))}$$

2°/ Continuité du maximum.

Soit x_0 un élément quelconque de $\mathbb{R}$.

Si $f(x_0) > g(x_0)$, on a $(f - g)(x_0) > 0$.

Dans ce cas, d'après 1°, comme $f - g$ est continue en x_0, $(f - g)$ reste strictement positive dans un intervalle ouvert centré sur x_0.
Dans cet intervalle, la restriction de h coïncide avec la restriction de f : elle est continue.
Donc h est continue en x_0.

De façon symétrique, si $g(x_0) > f(x_0)$, h est continue en x_0 parce qu'elle coïncide avec g dans un intervalle ouvert centré sur x_0.

Si $f(x_0) = g(x_0)$, $h(x_0) = f(x_0)$.

$$| h(x) - h(x_0) | = | h(x) - f(x_0) | = | h(x) - f(x) + f(x) - f(x_0) | \leqslant | h(x) - f(x) | + | f(x) - f(x_0) |$$
$$| h(x) - f(x) | \leqslant | g(x) - f(x) | \leqslant | g(x) - g(x_0) + f(x_0) - f(x) | \leqslant | g(x) - g(x_0) | + | f(x_0) - f(x) |$$
$$| h(x) - h(x_0) | \leqslant | g(x) - g(x_0) | + | f(x_0) - f(x) | + | f(x) - f(x_0) |$$

Comme f et g sont continues en x_0, pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver un $\eta > 0$ tel que :

$$| x - x_0 | < \eta \Rightarrow | g(x) - g(x_0) | < \frac{\varepsilon}{3} \text{ et } | f(x) - f(x_0) | < \frac{\varepsilon}{3}$$

On a alors :

$$| x - x_0 | < \eta \Rightarrow | h(x) - h(x_0) | \leqslant | g(x) - g(x_0) | + | f(x_0) - f(x) | + | f(x) - f(x_0) | < \varepsilon.$$

Cette relation montre que h est continue en x_0.

Dans tous les cas h est continue en x_0.

L'application $h = Max(f, g)$ est une application continue.

Chapitre 3. Continuité de fonctions numériques d'une variable réelle.

Enoncés.

Exercice 15. Fonction constante sur $\mathbb{Q}$ et sur $\complement_{\mathbb{R}}\mathbb{Q}$, continue en 0.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, une application dont les restrictions à $\mathbb{Q}$ et à $\complement_{\mathbb{R}}\mathbb{Q}$ sont constantes. On suppose, de plus, que f est continue en 0. Montrer que f est constante sur $\mathbb{R}$.	

Solution (Exercice 8).

Soit $f(0) = a$, la valeur de f en 0.
0 est rationnel, donc $f(x) = a$ pour tout rationnel x.
Soit b la valeur de $f(x)$ lorsque x n'est pas rationnel.

Comme f est continue en 0, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $\eta > 0$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x| < \eta \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$.
Comme η est > 0, on peut trouver entre 0 et η un nombre réel de la forme $\frac{\pi}{n}$, il suffit de prendre un entier n supérieur à $\frac{\pi}{\eta}$.
$\frac{\pi}{n}$ n'est pas rationnel, donc $f\left(\frac{\pi}{n}\right) = b$.
$\left|\frac{\pi}{n}\right| = \frac{\pi}{n} < \eta \Rightarrow \left|f\left(\frac{\pi}{n}\right) - a\right| = |b - a| < \varepsilon$.
On a donc $|b - a| < \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$.
C'est dire que $b = a$.
Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = a = b$.

Une application dont les restrictions à $\mathbb{Q}$ et à $\complement_{\mathbb{R}}\mathbb{Q}$ sont constantes, continue en 0, est constante sur $\mathbb{R}$.

Exercices

Suites de nombres réels.

1. Suite convergente.
2. Suite de Cauchy.
3. Règles de convergence.
4. Règle de Cauchy pour les séries numériques.

Suite convergente.

On dit qu'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres réels tend vers une **limite** ℓ si, et seulement si :

pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier N tel que $n \geqslant N \Rightarrow | u_n - \ell | < \varepsilon$.

On dit qu'une suite qui tend vers une limite ℓ, "**possède**" **une limite** ℓ.
Une suite qui possède une limite est appelée "**suite convergente**", ou "suite convergente vers ℓ" si on précise la limite ℓ.

HAUT

Suite de Cauchy.

On dit qu'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres réels est une **suite de Cauchy** si, et seulement si :

pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier N tel que $n \geqslant N$ et $m \geqslant N \Rightarrow |u_n - u_m| < \varepsilon$.

Dans $\mathbb{R}$, qui est **complet**, toute suite de Cauchy possède une limite.
Une suite de Cauchy de nombres rationnels s'appelle une **suite régulière**.
Pour tout nombre réel x, il existe une suite régulière qui converge vers x.

HAUT

Règles de convergence.

1. Lorsque ε est très petit, et $s \in \mathbb{R}$,
   - $(1 + \varepsilon)^s$ est équivalent à $1 + s\,\varepsilon$.
   - $ln\ (1 + \varepsilon)$ est équivalent à ε.
   - e^{ε} est équivalent à $1 + \varepsilon$.
2. **L'exponentielle l'emporte sur la puissance** : lorsque l'exponentielle tend vers 0 ou vers l'infini, le produit d'une fraction rationnelle par l'exponentielle a la même limite que l'exponentielle.
3. **La puissance l'emporte sur le logarithme** : lorsqu'une fraction rationnelle tend vers 0 ou vers l'infini, le produit de la fraction rationnelle par un logarithme a la même limite que la fraction rationnelle.
4. **Théorème des gendarmes**. Si le terme général de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est minoré par le terme général d'une suite qui converge vers ℓ, et majoré par le terme général d'une suite qui converge aussi vers ℓ, alors la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ converge vers ℓ.
5. Lorsque le **nombre réel positif *r* est < 1**, r^n tend vers 0 lorsque $n \in \mathbb{N}$ tend vers l'infini.

   Lorsque le nombre réel positif r est > 1, r^n tend vers l'infini lorsque $n \in \mathbb{N}$ tend vers l'infini.
6. Une **suite croissante majorée** est convergente.
7. Une **suite décroissante minorée** est convergente.

HAUT

Règle de Cauchy pour les séries numériques.

Pour une série numérique à termes positifs

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n$$

si la suite de terme général

$$u_n^{\frac{1}{n}}$$

tend vers une limite L, finie ou infinie, lorsque n tend vers l'infini, alors :

1. Si $L < 1$, la série est convergente ;
2. Si $L > 1$, la série est divergente ;
3. Pour $L = 1$, on ne peut pas conclure, sauf s'il existe entre 1 et $1 + \varepsilon$ une infinité de valeurs de u_n, auquel cas la série est divergente.

HAUT

Chapitre 4. Suites de nombres réels.

Exercices

Exercice 1. Convergence de 14 suites.
Exercice 2. Convergence de 3 suites.
Exercice 3. Densité des rationnels.
Exercice 4. Suite définie par un développement décimal.
Exercice 5. Suite de factorielles.
Exercice 6. Suite de factorielles sur puissances.
Exercice 7. Suites liées avec produit.
Exercice 8. Suites liées avec polynôme.
Exercice 9. Suites liées avec logarithme.
Exercice 10. Suites liées avec fonction homographique.
Exercice 11. Suite convergeant vers 3/2.
Exercice 12. Suite définie par un maximum de deux suites.

Exercice 1. Convergence de 14 suites.

HAUT

Etudier la convergence des suites de nombres réels dont le terme général u_n est défini ci-dessous et, le cas échéant, préciser leur limite.

1°/ $u_n = \frac{n-(-1)^n}{n+(-1)^n}$ $(n \geqslant 2)$.

2°/ $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ $(n \geqslant 0)$.

3°/ $u_n = \frac{10^n}{n^{10}} (n \geqslant 1)$.

4°/ $u_n = \frac{3^n - 2^n}{2^n - 3^n}$ $(n \geqslant 0)$.

5°/ $u_n = \frac{1+\sin n}{n}$ $(n \geqslant 1)$.

6°/ $u_n = \frac{2n - \sqrt{n^2+1}}{3n - \sqrt{4n^2+n}}$ $(n \geqslant 1)$.

7°/ $u_n = \ln n - \sin n$ $(n \geqslant 1)$.

8°/ $u_n = \sqrt[n]{n}$ $(n \geqslant 1)$.

9°/ $u_n = \frac{n}{n+1} \cos n$ $(n \geqslant 0)$.

10°/ $u_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{n}{\sqrt{n^4+k}}$ $(n \geqslant 1)$.

11°/ $u_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{k=n} E(k\pi)$ $(n \geqslant 1)$.

12°/ $u_n = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{\binom{n}{k}}$ $(n \geqslant 0)$.

13°/ $u_n = \left(2 \sin \frac{1}{n} + \frac{3}{4} \cos n\right)^n$ $(n \geqslant 1)$.

14°/ $u_n = \cos[\pi (2+\sqrt{3})^n]$ $(n \geqslant 0)$.

Solution

HAUT

Exercice 2. Convergence de trois suites.

Etudier la convergence et trouver la limite, si elle existe, des suites de terme d'ordre n :

1°/ $u_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{2n}{n^2+k}$.

2°/ $v_n = \frac{2n^2}{3n^2+1}\left(\sin\frac{1}{n}\right)\cos n$.

3°/ $w_n = \frac{n^3+2^n}{3^n}$

Solution

HAUT

Exercice 3. Densité des rationnels.

1°/ En utilisant la définition de la limite d'une suite, montrer que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$.

2°/ Soient a et b deux nombres réels avec $a < b$. Montrer que :

$$\exists\, k \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } \frac{1}{2^k} < b - a.$$

3°/ Montrer qu'il existe un nombre rationnel de la forme $\frac{p}{2^k}$, avec $p \in \mathbb{Z}$, tel que :

$$a < \frac{p}{2^k} < b.$$

Solution

HAUT

Exercice 4. Suite définie par un développement décimal.

On considère la suite de nombres réels dont le terme général u_n est défini par la donnée de son développement décimal propre :

u_n = 0,111...1 (n chiffres 1 après la virgule). ($n \geqslant 1$)

1°/ Exprimer u_n en fonction de n. La suite de terme général u_n est-elle convergente ?
2°/ Calculer $s_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$. La suite de terme général s_n est-elle convergente ?

Solution

HAUT

Exercice 5. Suite de factorielles.

On considère la suite de nombres réels dont le terme général u_n est défini par :

$$u_n = 1 \,.\, 1\,! + 2 \,.\, 2\,! + 3 \,.\, 3\,! + \ldots + n \,.\, n\,! \quad (n \geqslant 1).$$

1°/ Calculer u_n.

2°/ Pour $n \geqslant 1$, on pose $v_n = \frac{u_n}{(n+1)!}$. La suite de terme général v_n est-elle convergente ?

Solution

HAUT

Exercice 6. Suite de factorielles sur puissances.

1°/ Etablir, pour tout entier $n \geqslant 1$, l'inégalité $\frac{n^n}{(n+1)^n} \leqslant \frac{1}{2}$.

2°/ En déduire, en raisonnant par récurrence, que pour tout entier $n \geqslant 1$, $\frac{n!}{n^n} \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}$.

3°/ Montrer que la suite de nombres réels dont le terme général u_n est défini par : $u_n = \frac{n!}{n^n}$ est convergente,et préciser sa limite.

Solution

HAUT

Exercice 7. Suites liées avec produit.

On désigne par $(x_n)_{n\geq 0}$ et $(y_n)_{n\geq 0}$ deux suites de nombres réels telles que, pour tout entier n, on ait $0 \leqslant x_n \leqslant 1$ et $0 \leqslant y_n \leqslant 1$ et que la suite $(z_n)_{n\geq 0}$, définie en posant

$z_n = x_n y_n$,

converge vers 1.

Montrer que les suites $(x_n)_{n\geq 0}$ et $(y_n)_{n\geq 0}$ convergent et préciser leurs limites.

Solution

HAUT

Exercice 8. Suites liées avec polynôme.

On désigne par $(x_n)_{n\geq 0}$ et $(y_n)_{n\geq 0}$ deux suites de nombres réels telles que la suite $(z_n)_{n\geq 0}$, définie en posant

$z_n = x_n^2 + x_n y_n + y_n^2$,

converge vers 0.

Montrer que les suites $(x_n)_{n\geq 0}$ et $(y_n)_{n\geq 0}$ convergent et préciser leurs limites.

Solution

HAUT

Exercice 9. Suites liées avec logarithme.

Soit $(x_n)_{n \geq 0}$ une suite de nombres réels telles que la suite $(z_n)_{n \geq 0}$, définie en posant $z_n = \frac{n\, x_n}{ln(n+2)}$, converge vers 0.

1°/ Montrer qu'il existe un entier n_0 tel que, pour $n \geqslant n_0$, on ait $n \mid x_n \mid \leqslant ln\,(n+2)$.

2°/ Montrer que la suite $(x_n)_{n \geq 0}$ converge et préciser sa limite.

Solution

HAUT

Exercice 10. Suites liées avec fonction homographique.

Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres réels qui converge vers 0.

1°/ Montrer qu'il existe un entier n_0 tel que, pour $n \geqslant n_0$, on ait $x_n \neq \frac{2}{3}$.

2°/ Soit $(y_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres réels positifs. Pour tout entier n, $n \geqslant 0$, on pose

$$z_n = \frac{2y_n}{3y_n+1},$$

et on suppose que la suite $(z_n)_{n\geq 0}$ converge vers 0.

Montrer que la suite $(y_n)_{n\geq 0}$ est convergente et préciser sa limite.

Solution

HAUT

Exercice 11. Suite convergeant vers 3/2.

On considère la suite de nombres réels dont le terme général u_n est défini par

$$u_n = \frac{2+3\times 10^n}{3+2\times 10^n}.$$

Montrer que cette suite converge vers $\frac{3}{2}$, et calculer le rang n_0 à partir duquel $\left|u_{n_0} - \frac{3}{2}\right| < \frac{1}{100}$.

Solution

HAUT

Exercice 12. Suite définie par un maximum de deux suites.

On désigne par $(x_n)_{n\geq 0}$ et $(y_n)_{n\geq 0}$ deux suites convergentes de nombres réels de limites respectives x et y. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $z_n = Max(x_n, y_n)$. Etudier la convergence de la suite $(z_n)_{n\geq 0}$.	Solution

HAUT

Chapitre 4. Suites de nombres réels.

Enoncés.

Exercice 1. Convergence de 14 suites.

Etudier la convergence des suites de nombres réels dont le terme général u_n est défini ci-dessous et, le cas échéant, préciser leur limite.

1°/ $u_n = \frac{n-(-1)^n}{n+(-1)^n}$ $(n \geqslant 2)$.

2°/ $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ $(n \geqslant 0)$.

3°/ $u_n = \frac{10^n}{n^{10}} (n \geqslant 1)$.

4°/ $u_n = \frac{3^n - 2^n}{2^n - 3^n}$ $(n \geqslant 0)$.

5°/ $u_n = \frac{1+\sin n}{n}$ $(n \geqslant 1)$.

6°/ $u_n = \frac{2n - \sqrt{n^2+1}}{3n - \sqrt{4n^2+n}}$ $(n \geqslant 1)$.

7°/ $u_n = \ln n - \sin n$ $(n \geqslant 1)$.

8°/ $u_n = \sqrt[n]{n}$ $(n \geqslant 1)$.

9°/ $u_n = \frac{n}{n+1} \cos n$ $(n \geqslant 0)$.

10°/ $u_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{n}{\sqrt{n^4+k}}$ $(n \geqslant 1)$.

11°/ $u_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{k=n} E(k\pi)$ $(n \geqslant 1)$.

12°/ $u_n = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{\binom{n}{k}}$ $(n \geqslant 0)$.

13°/ $u_n = \left(2 \sin \frac{1}{n} + \frac{3}{4} \cos n\right)^n$ $(n \geqslant 1)$.

14°/ $u_n = \cos[\pi (2+\sqrt{3})^n]$ $(n \geqslant 0)$.

Solution.

1°/ Suite $u_n = \frac{n-(-1)^n}{n+(-1)^n}$.

Le terme général u_n s'écrit, pour $n > 0$: $u_n = \frac{1 - \frac{(-1)^n}{n}}{1 + \frac{(-1)^n}{n}}$.

Lorsque n tend vers l'infini, $\frac{(-1)^n}{n}$, majoré en module par $\frac{1}{n}$, tend vers 0, de sorte que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ converge vers 1.

2°/ Suite $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

Lorsque ε est petit, et que s est un nombre réel, $(1+\varepsilon)^s$ est équivalent à $1 + s\,\varepsilon$.

$\sqrt{n+1} = \sqrt{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}}$ est équivalent, lorsque *n* augmente indéfiniment, à $\sqrt{n}\left(1+\frac{1}{2n}\right)$

$u_n = \sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ est donc équivalent à $\frac{\sqrt{n}}{2n} = \frac{1}{2\sqrt{n}}$, qui tend vers 0 lorsque *n* tend vers l'infini.
La suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers 0.

3°/ Suite $u_n = \frac{10^n}{n^{10}}$.

L'exponentielle l'emporte sur la puissance : $\frac{10^n}{n^{10}}$ a la même limite que 10^n : c'est l'infini.
La suite $(u_n)_{n\geq 0}$ n'est pas convergente.

4°/ Suite $u_n = \frac{3^n-2^n}{2^n-3^n}$.

$\frac{3^n-2^n}{2^n-3^n} = -1$.
La suite est constante et égale à – 1.
La suite converge vers – 1.

5°/ Suite $u_n = \frac{1+\sin n}{n}$.

$\frac{1+\sin n}{n}$ est majoré en module par $\frac{2}{n}$ qui tend vers 0.
La suite converge vers 0.

6°/ Suite $u_n = \frac{2n-\sqrt{n^2+1}}{3n-\sqrt{4n^2+n}}$.

$$\frac{2n-\sqrt{n^2+1}}{3n-\sqrt{4n^2+n}} = \frac{2-\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}{3-\sqrt{4+\frac{1}{n}}}$$

$\frac{1}{n}$ et $\frac{1}{n^2}$ tendent vers 0 lorsque *n* tend vers l'infini, donc la suite converge vers $\frac{2-\sqrt{1}}{3-\sqrt{4}} = 1$.
La suite converge vers 1.

7°/ Suite $u_n = \ln n - \sin n$.

Lorsque *n* tend vers l'infini, *ln n* tend vers l'infini, *sin n* est majoré en module par 1. La suite tend vers l'infini.
La suite n'est pas convergente.

8°/ Suite $u_n = \sqrt[n]{n}$.

Le logarithme de u_n est $\frac{\ln n}{n}$.
La puissance l'emporte sur le logarithme : la suite des logarithmes tend vers 0 = *ln* 1.

La suite converge vers 1.

9°/ Suite $u_n = \frac{n}{n+1} cos\ n$.

Lorsque n tend vers l'infini, $\frac{n}{n+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}}$ tend vers 1, u_n est équivalent à $cos\ n$, qui oscille entre – 1 et 1.
La suite n'est pas convergente.

10°/ Suite $u_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{n}{\sqrt{n^4+k}}$.

u_n est compris entre $n \frac{n}{\sqrt{n^4+n}}$ et $n \frac{n}{\sqrt{n^4+1}}$ qui tendent tous deux vers 1.
La suite converge vers 1.

11°/ Suite $u_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{k=n} E(k\,\pi)$.

$E(k\,\pi)$ est compris entre $k\,\pi - 1$ et $k\,\pi$.
$\sum_{k=1}^{k=n} E(k\,\pi)$ est compris entre $\pi \sum_{k=1}^{k=n} k - n$ et $\pi \sum_{k=1}^{k=n} k = \pi \frac{n(n+1)}{2}$
u_n est compris entre $\pi \frac{n(n+1)}{2n^2} - \frac{1}{n}$ et $\pi \frac{n(n+1)}{2n^2}$, qui tendent tous deux vers $\frac{\pi}{2}$.
La suite converge vers $\frac{\pi}{2}$.

12°/ Suite $u_n = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{\binom{n}{k}}$.

$u_0 = 1$
$u_1 = 2$
$u_2 = \frac{5}{2}$
$u_3 = \frac{8}{3}$

On peut regrouper ensemble les termes symétriques :

$$u_n - 2 = 2 \sum_{k=1}^{k=E\left(\frac{n}{2}\right)} \frac{k!}{n(n-1)\dots(n-k+1)} = 2\left(\frac{1}{n} + \frac{2}{n(n-1)} + \dots + \frac{E\left(\frac{n}{2}\right)!}{n(n-1)\dots\left(n-E\left(\frac{n}{2}\right)+1\right)}\right)$$

$$0 \leqslant u_n - 2 \leqslant \frac{2}{n} + 2\left(E\left(\frac{n}{2}\right)-1\right)\frac{2}{n(n-1)}$$

Lorsque n tend vers l'infini, $E\left(\frac{n}{2}\right) - 1$ est équivalent à $\frac{n}{2}$ et $2\left(E\left(\frac{n}{2}\right)-1\right)\frac{2}{n(n-1)}$ est équivalent à $\frac{2}{n-1}$, qui tend vers 0.
$\frac{2}{n}$ tend aussi vers 0, de sorte que $\frac{2}{n} + 2\left(E\left(\frac{n}{2}\right)-1\right)\frac{2}{n(n-1)}$ tend vers 0.

La suite converge vers 2.

13°/ Suite $u_n = \left(2\sin\frac{1}{n} + \frac{3}{4}\cos n\right)^n$.

Lorsque n tend vers l'infini, $\frac{1}{n}$ tend vers 0 et $2\sin\frac{1}{n}$ tend vers 0, $\cos n$ est majoré en module par 1, de sorte que $2\sin\frac{1}{n} + \frac{3}{4}\cos n$ est majoré, en module, par $\left|2\sin\frac{1}{n}\right| + \frac{3}{4}$ qui tend vers $\frac{3}{4} < 1$. De sorte que u_n tend vers 0.
La suite converge vers 0.

14°/ Suite $u_n = \cos\left[\pi\left(2+\sqrt{3}\right)^n\right]$.

Dans un exercice précédent (Chapitre 1, Exercice 9), nous avons vu que $(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n$ était un entier pair, soit $2k$.
$\cos\left[\pi(2+\sqrt{3})^n\right] = \cos\left[2k\pi - \pi(2-\sqrt{3})^n\right] = \cos\left[\pi(2-\sqrt{3})^n\right]$.
Or $(2-\sqrt{3}) < 1$ entraîne que $(2-\sqrt{3})^n$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini.
Donc u_n tend vers $\cos 0 = 1$.
La suite converge vers 1.

Chapitre 4. Suites de nombres réels.

Enoncés.

Exercice 2. Convergence de trois suites.

Etudier la convergence et trouver la limite, si elle existe, des suites de terme d'ordre n :

1°/ $u_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{2n}{n^2+k}$.

2°/ $v_n = \frac{2n^2}{3n^2+1}\left(\sin\frac{1}{n}\right) \cos n$.

3°/ $w_n = \frac{n^3+2^n}{3^n}$

Solution.

1°/ Suite $u_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{2n}{n^2+k}$.

Le terme général u_n est compris entre n fois le terme le plus petit de la somme et n fois le plus grand :

$n\frac{2n}{n^2+n} \leqslant u_n \leqslant n\frac{2n}{n^2+1}$

Lorsque n tend vers l'infini, $n\frac{2n}{n^2+n}$ et $n\frac{2n}{n^2+1}$ tendent tous deux vers 2.

La suite converge vers 2.

2°/ Suite $v_n = \frac{2n^2}{3n^2+1}\left(\sin\frac{1}{n}\right) \cos n$.

Lorsque n augmente indéfiniment, $\frac{2n^2}{3n^2+1}$ tend vers $\frac{2}{3}$, $\left(\sin\frac{1}{n}\right)$ tend vers 0 et $\cos n$ est majoré, en module, par 1.

Au total, le produit tend vers 0.

La suite $(v_n)_{n\geq 0}$ converge vers 0.

3°/ Suite $w_n = \frac{n^3+2^n}{3^n}$.

L'exponentielle l'emporte sur la puissance : $\frac{n^3}{3^n}$ a la même limite que $\frac{1}{3^n}$: c'est 0.

$\frac{2}{3} < 1$, donc $\frac{2^n}{3^n}$ tend vers 0, et $w_n = \frac{n^3+2^n}{3^n} = \frac{n^3}{3^n} + \frac{2^n}{3^n}$ tend vers 0 + 0 = 0.

La suite $(w_n)_{n\geq 0}$ converge vers 0.

Chapitre 4. Suites de nombres réels.

Enoncés.

Exercice 3. Densité des rationnels.

1°/ En utilisant la définition de la limite d'une suite, montrer que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$. 2°/ Soient a et b deux nombres réels avec $a < b$. Montrer que : $\exists\, k \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{2^k} < b - a$. 3°/ Montrer qu'il existe un nombre rationnel de la forme $\frac{p}{2^k}$, avec $p \in \mathbb{Z}$, tel que : $a < \frac{p}{2^k} < b$.	

Solution.

1°/ Limite d'une suite.

Soit $\varepsilon > 0$ un nombre réel.

Si ε est $\geqslant 1$, il suffit de prendre $N_\varepsilon = 1$ pour avoir $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$, pour tout entier $n \geqslant N_\varepsilon$.

Si ε est < 1. $\frac{1}{\varepsilon}$ est plus grand que 1 et son logarithme est positif. De même, $ln\ 2$ est positif.

Le nombre réel $\frac{ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}{ln\,2}$ est > 0, et 1 est > 0.

D'après l'axiome d'Archimède, il existe un entier N_ε supérieur à $\frac{ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}{ln\,2}$: $ln\ \frac{1}{\varepsilon} < N_\varepsilon\ ln\ 2$; $\frac{1}{\varepsilon} < 2^{N_\varepsilon}$;

$\frac{1}{2^{N_\varepsilon}} < \varepsilon$.

et, pour tout $n \geqslant N_\varepsilon$, on aura $ln\ \frac{1}{\varepsilon} < N_\varepsilon\ ln\ 2 < n\ ln\ 2$, donc $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$.

Nous avons donc démontré la relation :

$$(\forall\, \varepsilon > 0)(\exists\, N_\varepsilon \in \mathbb{N})(\forall\, n \in \mathbb{N})(n \geqslant N_\varepsilon \Rightarrow \left|\frac{1}{2^n} - 0\right| = \frac{1}{2^n} < \varepsilon)$$

Cette relation montre que la limite, lorsque n tend vers l'infini, de $\frac{1}{2^n}$ est 0.

2°/ Application avec $\varepsilon = b - a$.

Si l'on applique le résultat précédent avec $\varepsilon = b - a$, on voit qu'il existe un entier k tel que $\frac{1}{2^n} < \varepsilon = b - a$, pour tout entier $n \geqslant k$.
En particulier, pour $n = k$, nous obtenons : $\frac{1}{2^k} < b - a$.

3°/ Densité des rationnels.

Pour l'entier k déterminé dans la question 2°, nous avons : $2^k (b - a) > 1$, $2^k b - 2^k a > 1$.
L'intervalle entre $2^k a$ et $2^k b$ est strictement plus grand que 1, donc il contient strictement un entier $p \in \mathbb{Z}$.
Il existe un entier relatif p vérifiant : $2^k a < p < 2^k b$.
Nous obtenons, en divisant par 2^k :

$$\boxed{a < \frac{p}{2^k} < b.}$$

Quels que soient les réels a et b distincts, on peut trouver un nombre rationnel qui est strictement compris entre les deux.

Cet exercice est à rapprocher de (Théorie des ensembles - Chapitre 9 - Exercice 5) qui traite de la même question, avec un entier $n \geqslant 2$, au lieu de 2.

Chapitre 4. Suites de nombres réels.

Enoncés.

Exercice 4. Suite définie par un développement décimal.

On considère la suite de nombres réels dont le terme général u_n est défini par la donnée de son développement décimal propre :

u_n = 0,111...1 (n chiffres 1 après la virgule). ($n \geqslant 1$)

1°/ Exprimer u_n en fonction de n. La suite de terme général u_n est-elle convergente ?
2°/ Calculer $s_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$. La suite de terme général s_n est-elle convergente ?

Solution.

1°/ Expression de u_n.

$u_n = \sum_{k=1}^{k=n} 10^{-k} = 10^{-1}\frac{1-10^{-n}}{1-10^{-1}}$ (somme d'une progression géométrique de raison 10^{-1} et de premier terme 10^{-1}).

Lorsque n tend vers l'infini, 10^{-n} tend vers 0, et u_n tend vers $\frac{10^{-1}}{1-10^{-1}} = \frac{1}{9}$.

La suite de terme général u_n converge vers $\frac{1}{9}$.

2°/ Convergence de la suite $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

$$s_n = \sum_{k=1}^{k=n} 10^{-1}\frac{1-10^{-k}}{1-10^{-1}} = \frac{1}{9}(n - u_n)$$

Lorsque n tend vers l'infini, u_n tend vers $\frac{1}{9}$ et la suite de terme général s_n a la même limite que $\frac{1}{9}n$, elle tend vers l'infini.

La suite de terme général s_n n'est pas convergente.

Chapitre 4. Suites de nombres réels.

Enoncés.

Exercice 5. Suite de factorielles.

On considère la suite de nombres réels dont le terme général u_n est défini par :

$$u_n = 1 \,.\, 1\,! + 2 \,.\, 2\,! + 3 \,.\, 3\,! + \ldots + n \,.\, n\,! \quad (n \geqslant 1).$$

1°/ Calculer u_n.

2°/ Pour $n \geqslant 1$, on pose $v_n = \frac{u_n}{(n+1)!}$. La suite de terme général v_n est-elle convergente ?

Solution.

1°/ Expression de u_n.

$$u_n = \sum_{k=1}^{k=n} k.\, k! = \sum_{k=1}^{k=n} (k+1).\, k\,! - \sum_{k=1}^{k=n} k\,! = \sum_{k=1}^{k=n} (k+1)\,! - \sum_{k=1}^{k=n} k\,!$$

$$= \sum_{k=2}^{k=n+1} k\,! - \sum_{k=1}^{k=n} k\,! = (n+1)\,! - 1$$

$$\boxed{u_n = (n+1)\,! - 1.}$$

2°/ Suite de terme général v_n.

$$v_n = 1 - \frac{1}{(n+1)!}.$$

Lorsque n tend vers l'infini, $(n+1)\,!$ tend vers l'infini, $\frac{1}{(n+1)!}$ tend vers 0 et v_n tend vers 1.

$$\boxed{\text{La suite de terme général } v_n \text{ converge vers 1.}}$$

Chapitre 4. Suites de nombres réels.

Enoncés.

Exercice 6. Suite de factorielles sur puissances.

1°/ Etablir, pour tout entier $n \geqslant 1$, l'inégalité $\frac{n^n}{(n+1)^n} \leqslant \frac{1}{2}$. 2°/ En déduire, en raisonnant par récurrence, que pour tout entier $n \geqslant 1$, $\frac{n!}{n^n} \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}$. 3°/ Montrer que la suite de nombres réels dont le terme général u_n est défini par : $u_n = \frac{n!}{n^n}$ est convergente,et préciser sa limite.	

Solution.

1°/ Inégalité.

D'après la formule du binôme, pour tout entier $n \geqslant 1$:
$(n+1)^n = n^n + n \times n^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} n^{n-2} + \ldots \geqslant 2\, n^n$.
L'inégalité est stricte dès que $n \geqslant 2$.
On a donc $\frac{n^n}{(n+1)^n} \leqslant \frac{1}{2}$, pour tout entier $n \geqslant 1$.

2°/ Majoration.

Pour $n = 1$, l'inégalité $\frac{n!}{n^n} \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}$ se réduit à $1 \leqslant 1$: elle est vérifiée.
Supposons l'inégalité vraie pour un entier naturel $n \geqslant 1$.

Alors $\frac{n!}{n^n} \frac{n^n}{(n+1)^n} \leqslant \frac{1}{2^{n-1}} \times \frac{1}{2}$, et $\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} = \frac{n!}{(n+1)^n} \leqslant \frac{1}{2^n}$.
L'inégalité est donc vraie pour $n + 1$, dès qu'elle est vraie pour n.
Comme elle est vraie déjà pour $n = 1$, elle est vraie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, d'après le principe de récurrence.

3°/ Suite de terme général u_n.

Le terme général u_n est positif et majoré par $\frac{1}{2^{n-1}}$ qui tend vers 0.
D'après le "théorème des gendarmes", la suite de terme général u_n converge vers 0.

La suite de terme général u_n converge vers 0.

Remarques.

1. L'inverse de $\frac{n^n}{(n+1)^n}$ est $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, son logarithme est $n\ ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$.

Lorsque n tend vers l'infini, $\frac{1}{n}$ tend vers 0 et $ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ est équivalent à $\frac{1}{n}$, donc $n\ ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ est équivalent à 1.
Donc $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ est équivalent à e et $\frac{n^n}{(n+1)^n}$ est équivalent à $\frac{1}{e}$: la suite de terme général $\frac{n^n}{(n+1)^n}$ converge vers $\frac{1}{e}$.

2. La **formule de Stirling** indique que, pour n très grand, n ! est équivalent à $\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}$, donc $\frac{n!}{n^n}$ est équivalent à $\frac{\sqrt{2\pi n}}{e^n}$.
Lorsque n tend vers l'infini, l'exponentielle l'emporte sur la puissance et $\frac{\sqrt{2\pi n}}{e^n}$ tend vers 0, donc $\frac{n!}{n^n}$ tend vers 0.

Chapitre 4. Suites de nombres réels.

Enoncés.

Exercice 7. Suites liées avec produit.

On désigne par $(x_n)_{n\geq 0}$ et $(y_n)_{n\geq 0}$ deux suites de nombres réels telles que, pour tout entier n, on ait $0 \leqslant x_n \leqslant 1$ et $0 \leqslant y_n \leqslant 1$ et que la suite $(z_n)_{n\geq 0}$, définie en posant $z_n = x_n y_n$, converge vers 1. Montrer que les suites $(x_n)_{n\geq 0}$ et $(y_n)_{n\geq 0}$ convergent et préciser leurs limites.	

Solution.

Dire que la suite $(z_n)_{n\geq 0}$ converge vers 1, c'est dire que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier naturel N tel que $n \geqslant N$ entraîne $| z_n - 1 | < \varepsilon$.
D'ailleurs, comme x_n et y_n sont compris entre 0 et 1, $z_n = x_n y_n$ est, lui aussi compris entre 0 et 1, de sorte que $| z_n - 1 | = 1 - z_n$.
A partir du rang N, tous les z_n sont proches de 1 : cela n'est possible que si x_n et y_n sont tous deux proches de 1, donc les suites $(x_n)_{n\geq 0}$ et $(y_n)_{n\geq 0}$ convergent toutes les deux vers 1.

Pour être rigoureux, supposons qu'il en soit autrement, par exemple supposons que la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ ne converge pas vers 1.
Ceci se traduit par le fait que, pour tout $\eta > 0$, et pour tout entier N, il existe un entier $m \geqslant N$, tel que $1 - x_m > \eta$.
On a alors, en multipliant par y_m, qui est positif : $y_m - z_m > \eta\, y_m$, soit $(1 - \eta)\, y_m > z_m$.
D'où $\varepsilon > 1 - z_m > 1 - (1 - \eta)\, y_m$, et $(1 - \eta)\, y_m > 1 - \varepsilon$.
En particulier, pour $\eta = \varepsilon$, avec $0 < \varepsilon < 1$, il existe un entier m tel que $y_m > 1$, ce qui est contradictoire avec $0 \leqslant y_n \leqslant 1$.
Donc la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ converge vers 1.

Un raisonnement symétrique montre que la suite $(y_n)_{n\geq 0}$ converge vers 1.

Les suites $(x_n)_{n\geq 0}$ et $(y_n)_{n\geq 0}$ convergent vers 1.

Chapitre 4. Suites de nombres réels.

Enoncés.

Exercice 8. Suites liées avec polynôme.

On désigne par $(x_n)_{n\geq 0}$ et $(y_n)_{n\geq 0}$ deux suites de nombres réels telles que la suite $(z_n)_{n\geq 0}$, définie en posant $z_n = x_n^2 + x_n y_n + y_n^2$, converge vers 0. Montrer que les suites $(x_n)_{n\geq 0}$ et $(y_n)_{n\geq 0}$ convergent et préciser leurs limites.	

Solution.

Dire que la suite $(z_n)_{n\geq 0}$ converge vers 0, c'est dire que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier naturel N tel que $n \geqslant N$ entraîne $|z_n| < \varepsilon$.
A partir du rang N, tous les z_n sont proches de 0 : cela n'est possible que si x_n et y_n sont tous deux proches de 0, donc les suites $(x_n)_{n\geq 0}$ et $(y_n)_{n\geq 0}$ convergent toutes les deux vers 0.

Pour être rigoureux, supposons qu'il en soit autrement, par exemple supposons que la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ ne converge pas vers 0.
Ceci se traduit par le fait que, pour tout $\eta > 0$, et pour tout entier N, il existe un entier $m \geqslant N$, tel que $|x_m| > \eta$, soit $-\eta < x_m < \eta$.
En multipliant par y_m, qui est positif ou négatif, on voit que $x_m y_m$ est compris entre $-\eta |y_m|$ et $\eta |y_m|$
$z_m = x_m^2 + y_m^2 + x_m y_m$
$\varepsilon > z_m > y_m^2 - \eta |y_m| + \eta^2$.
$y_m^2 - \eta |y_m| + (\eta^2 - \varepsilon) < 0$.
$|y_m|^2 - \eta |y_m| + (\eta^2 - \varepsilon) < 0$.
$|y_m|$ doit être compris entre les racines du polynôme de degré 2.
Or le discriminant de ce polynôme de degré 2 en $|y_m|$ est $\eta^2 - 4(\eta^2 - \varepsilon) = -3\eta^2 + \varepsilon$.
Il suffit de prendre $\eta > \sqrt{\frac{\varepsilon}{3}}$, pour que le polynôme n'ait pas de racine réelle et soit toujours > 0, amenant ainsi une contradiction.
Donc la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ ne peut que converger vers 0.

Un raisonnement symétrique montre que la suite $(y_n)_{n\geq 0}$ converge vers 0.

Les suites $(x_n)_{n\geq 0}$ et $(y_n)_{n\geq 0}$ convergent vers 0.

Chapitre 4. Suites de nombres réels.

Enoncés.

Exercice 9. Suites liées avec logarithme.

Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres réels telles que la suite $(z_n)_{n\geq 0}$, définie en posant $z_n = \frac{n\,x_n}{ln(n+2)}$, converge vers 0.

1°/ Montrer qu'il existe un entier n_0 tel que, pour $n \geqslant n_0$, on ait $n\,|x_n| \leqslant ln\,(n+2)$.
2°/ Montrer que la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ converge et préciser sa limite.

Solution.

1°/ Majoration.

Dire que la suite $(z_n)_{n\geq 0}$ converge vers 0, c'est dire que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier naturel N tel que $n \geqslant N$ entraîne $|z_n| < \varepsilon$.
Pour $\varepsilon = 1$, cette définition de la convergence vers 0, entraîne qu'il existe un entier n_0 tel que $n \geqslant n_0$ entraîne $|z_n| < 1$, c'est-à-dire $n\,|x_n| < ln\,(n+2)$.
L'inégalité stricte entraîne l'inégalité $n\,|x_n| \leqslant ln\,(n+2)$.

2°/ Convergence.

La suite $(x_n)_{n\geq 0}$ est majorée en module, à partir du rang n_0, par la suite $\left(\frac{ln(n+2)}{n}\right)_{n\geq 0}$.
Comme **la puissance l'emporte sur le logarithme**, cette suite converge vers 0.
Donc la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ converge vers 0.

Chapitre 4. Suites de nombres réels.

Enoncés.

Exercice 10. Suites liées avec fonction homographique.

Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres réels qui converge vers 0.

1°/ Montrer qu'il existe un entier n_0 tel que, pour $n \geqslant n_0$, on ait $x_n \neq \frac{2}{3}$.
2°/ Soit $(y_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres réels positifs. Pour tout entier n, $n \geqslant 0$, on pose

$$z_n = \frac{2y_n}{3y_n+1},$$

et on suppose que la suite $(z_n)_{n\geq 0}$ converge vers 0.
Montrer que la suite $(y_n)_{n\geq 0}$ est convergente et préciser sa limite.

Solution.

1°/ Existence de n_0.

Dire que la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ converge vers 0, c'est dire que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier naturel N tel que $n \geqslant N$ entraîne $|x_n| < \varepsilon$.

Pour $\varepsilon = \frac{2}{3}$, cette définition de la convergence vers 0, entraîne qu'il existe un entier n_0 tel que $n \geqslant n_0$ entraîne $|x_n| < \frac{2}{3}$, c'est-à-dire en particulier, $x_n \neq \frac{2}{3}$.

2°/ Convergence de la suite $(y_n)_{n\geq 0}$.

Nous avons :

$$3y_n z_n + z_n = 2y_n$$
$$y_n(2 - 3z_n) = z_n$$
$$y_n\left(z_n - \frac{2}{3}\right) = -\frac{1}{3}z_n$$

Comme la suite $(z_n)_{n\geq 0}$ converge vers 0, d'après 1°, il existe un entier n_0 tel que $n \geqslant n_0$ entraîne $z_n \neq \frac{2}{3}$.

Pour $n \geqslant n_0$, nous pouvons donc écrire $y_n = \frac{z_n}{2-3z_n}$.

Lorsque n tend vers l'infini, z_n tend vers 0, $2 - 3z_n$ tend vers 2, et le rapport tend vers 0.

Donc la suite $(y_n)_{n\geq 0}$ converge vers 0.

Chapitre 4. Suites de nombres réels.

Enoncés.

Exercice 11. Suite convergeant vers 3/2.

On considère la suite de nombres réels dont le terme général u_n est défini par

$$u_n = \frac{2+3\times 10^n}{3+2\times 10^n}.$$

Montrer que cette suite converge vers $\frac{3}{2}$, et calculer le rang n_0 à partir duquel $\left|u_{n_0} - \frac{3}{2}\right| < \frac{1}{100}$.

Solution.

Nous pouvons écrire :

$$u_n = \frac{3\times 10^n\left(\frac{2}{3}\times 10^{-n}+1\right)}{2\times 10^n\left(\frac{3}{2}\times 10^{-n}+1\right)} = \frac{3}{2}\frac{1+\frac{2}{3}\times 10^{-n}}{1+\frac{3}{2}\times 10^{-n}}$$

Lorsque n tend vers l'infini, 10^{-n} tend vers 0, donc $\frac{1+\frac{2}{3}\times 10^{-n}}{1+\frac{3}{2}\times 10^{-n}}$ tend vers 1 et u_n tend vers $\frac{3}{2}$.

La suite de terme général u_n converge vers $\frac{3}{2}$.

Pour avoir $\left|u_{n_0} - \frac{3}{2}\right| < \frac{1}{100}$, il faut que l'on ait : $\frac{3}{2}\left|\frac{1+\frac{2}{3}\times 10^{-n_0}}{1+\frac{3}{2}\times 10^{-n_0}} - 1\right| < \frac{1}{100}$,

$\frac{3}{2}\times\frac{5}{6}10^{-n_0} < \frac{1}{100}\left(1+\frac{3}{2}\times 10^{-n_0}\right)$

$100\left(\frac{5}{4}-\frac{3}{200}\right) < 10^{n_0}$

$125 - \frac{3}{2} < 10^{n_0}$

123,5 est compris entre 10^2 et 10^3,

La plus basse valeur de n_0 à partir de laquelle $\left|u_{n_0} - \frac{3}{2}\right| < \frac{1}{100}$ est donc $n_0 = 3$.

La plus basse valeur de n_0 à partir de laquelle $\left|u_{n_0} - \frac{3}{2}\right| < \frac{1}{100}$ est $n_0 = 3$.

Chapitre 4. Suites de nombres réels.

Enoncés.

Exercice 12. Suite définie par un maximum de deux suites.

On désigne par $(x_n)_{n\geq 0}$ et $(y_n)_{n\geq 0}$ deux suites convergentes de nombres réels de limites respectives x et y. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $z_n = Max\,(x_n, y_n)$. Etudier la convergence de la suite $(z_n)_{n\geq 0}$.	

Solution.

1°/ Cas où $x = y$.

Si les suites $(x_n)_{n\geq 0}$ et $(y_n)_{n\geq 0}$ convergent vers la même limite x, pour tout $\varepsilon > 0$:

— il existe un entier n_x tel que $n \geqslant n_x$ entraîne $|x_n - x| < \varepsilon$,

— il existe un entier n_y tel que $n \geqslant n_y$ entraîne $|y_n - x| < \varepsilon$.

Il suffit de prendre $N = Max\,(n_x, n_y)$ pour voir que $n \geqslant N$ entraîne $|x_n - x| < \varepsilon$ et $|y_n - x| < \varepsilon$.

Dans ce cas, comme $z_n = Max\,(x_n, y_n)$ est le plus grand des deux nombres x_n et y_n, nous avons aussi $|z_n - x| < \varepsilon$.

Et ceci montre que la suite $(z_n)_{n\geq 0}$ converge vers x.

> Si les suites $(x_n)_{n\geq 0}$ et $(y_n)_{n\geq 0}$ convergent vers la même limite, alors la suite $(z_n)_{n\geq 0}$ converge vers cette limite commune

2°/ Cas où $x \neq y$.

Supposons, pour fixer les idées, $y > x$.

Dans ce cas, pour tout $\varepsilon > 0$, et en particulier pour $\varepsilon = \frac{y-x}{2}$:

— il existe un entier n_x tel que $n \geqslant n_x$ entraîne $|x_n - x| < \frac{y-x}{2}$,

— il existe un entier n_y tel que $n \geqslant n_y$ entraîne $|y_n - y| < \frac{y-x}{2}$.

Il suffit de prendre $N = Max\,(n_x, n_y)$ pour voir que $n \geqslant N$ entraîne $|x_n - x| < \frac{y-x}{2}$ et $|y_n - y| < \frac{y-x}{2}$.

$y_n - x_n = (y_n - y) + (y - x) + (x - x_n) > -\frac{y-x}{2} + (y - x) - \frac{y-x}{2} = 0$.

Autrement dit, à partir du rang N, tous les x_n sont à une distance de x inférieure à $\frac{y-x}{2}$, tous les y_n

sont à une distance de y inférieure à $\frac{y-x}{2}$, donc tous les y_n sont supérieurs aux x_n : en particulier, la relation $y_n > x_n$ entraîne $z_n = Max(x_n, y_n) = y_n$.

Comme $(y_n)_{n \geq 0}$ converge vers y, la suite $(z_n)_{n \geq 0}$ converge aussi vers y.

De la même façon, si l'on avait $x > y$, on montrerait que la suite $(z_n)_{n \geq 0}$ converge vers x.

En définitive, en rassemblant ce résultat avec le résultat précédent (1°) :

Lorsque les suites $(x_n)_{n \geq 0}$ et $(y_n)_{n \geq 0}$ convergent vers x et y, respectivement, la suite $(Max(x_n, y_n))_{n \geq 0}$ converge vers $Max(x, y)$.

Exercices

Bornes, suites croissantes ou décroissantes.

1. Borne supérieure.
2. Borne inférieure.
3. Règles de convergence.
4. Limite d'une suite définie par récurrence.

Borne supérieure.

Etant donné un ensemble ordonné E et une partie A de E, on appelle **borne supérieure** de A le plus petit des majorants de A, lorsqu'il en existe un.

Dans l'ensemble des nombres réels, toute partie non vide majorée possède une borne supérieure.

HAUT

Borne inférieure.

Etant donné un ensemble ordonné *E* et une partie *A* de *E*, on appelle **borne inférieure** de *A* le plus grand des minorants de *A*, quand il en existe un.

Dans l'ensemble des nombres réels, toute partie non vide minorée possède une borne inférieure.

Règles de convergence.

1. Une **suite croissante majorée** de nombres réels est convergente.
2. Une **suite décroissante minorée** de nombres réels est convergente.

HAUT

Limite d'une suite définie par récurrence.

Lorsqu'une suite de nombres réels est définie par une formule du type $u_{n+1} = f(u_n)$, la limite de la suite, si la suite est convergente, vérifie la relation $f(x) = x$: c'est un **point fixe de la fonction numérique *f***.

On sait déjà qu'un tel point fixe existe lorsque la fonction *f* est une application monotone d'un intervalle sur lui-même, ou lorsque la fonction *f* est une application continue d'un intervalle sur lui-même.

HAUT

Chapitre 5. Bornes, suites croissantes ou décroissantes.

Exercices

Exercice 1. Bornes de 4 ensembles de nombres réels.
Exercice 2. Plus grand élément et suite convergente.
Exercice 3. Série 1 / *n*^*n*.
Exercice 4. Série ζ (2).
Exercice 5. Série exponentielle.
Exercice 6. Série *n* / 2^*n*.
Exercice 7. Règle de D'Alembert.
Exercice 8. 13 Suites définies par récurrence.
Exercice 9. Point fixe d'une application croissante.
Exercice 10. Suite $u_{n+1} = \frac{1-\sqrt{1-u_n}}{3}$.
Exercice 11. Borne supérieure et borne inférieure d'un ensemble.
Exercice 12. Bornes de 4 ensembles de nombres réels.

Encore plus d'exercices résolus ...

Exercice 1. Bornes de 4 ensembles de nombres réels.

1°/ Soit $X = \left\{ \frac{p}{pq+1} \;\middle|\; p \in \mathbb{N}^*, q \in \mathbb{N}^* \right\}$. Montrer que X possède une borne supérieure et une borne inférieure et les déterminer.

2°/ Soit $Y = \left\{ \frac{p}{p^2+q^2+1} \;\middle|\; p \in \mathbb{N}^*, q \in \mathbb{N}^* \right\}$. Montrer que Y possède une borne supérieure et une borne inférieure et les déterminer.

3°/ Soit $C = \left\{ \sin\frac{n\pi}{2} + \frac{1}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}^* \right\}$. Montrer que C possède une borne supérieure et une borne inférieure et les déterminer.

4°/ Soit $A = \{ x^2 + y^2 \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, xy = 1 \}$.

a) Montrer que A possède une borne inférieure.

b) A possède-t-il une borne supérieure ?

Solution

HAUT

Exercice 2. Plus grand élément et suite convergente.

Soit $x \in \mathbb{R}$, $x \geqslant 0$, et soit $p \in \mathbb{N}$, $p \geqslant 2$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère l'ensemble

$$E_n(x) = \left\{ q \in \mathbb{N} \;\middle|\; \frac{q}{p^n} \leq x \right\}.$$

1°/ Montrer que $E_n(x)$ possède un plus grand élément, que l'on notera $q_n(x)$.
2°/ On considère la suite dont le terme général $u_n(x)$ est défini, pour $n \geqslant 0$, par $u_n(x) = \frac{q_n(x)}{p^n}$. Montrer que $p\, q_n(x)$ est un élément de $E_{n+1}(x)$ et en déduire que la suite $(u_n(x))_{n \geq 0}$ est croissante.
3°/ Montrer que la suite $(u_n(x))_{n \geq 0}$ est convergente et déterminer sa limite.

Solution

HAUT

Exercice 3. Série 1 / *n*^*n*.

Etudier la convergence des suites de nombres réels dont le terme général u_n est défini ci-dessous, et, le cas, échéant, déterminer leur limite.

1°/ $u_n = \dfrac{5.7.9.\cdots.(5+2n)}{4.7.10.\cdots.(4+3n)}$ $(n \geqslant 0)$.

2°/ $u_n = 1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^3}+\cdots+\dfrac{1}{n^n}$ $(n \geqslant 1)$.

Solution

HAUT

Exercice 4. Série ζ (2).

On considère les suites de nombres réels, de terme général u_n et v_n défini par :

$$u_n = 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}, \qquad v_n = u_n + \frac{1}{n} \quad (n \geqslant 1).$$

Montrer que ces suites sont convergentes et ont même limite (que l'on ne cherchera pas à calculer).

Solution

HAUT

Exercice 5. Série exponentielle.

On considère les suites de nombres réels, de terme général u_n et v_n défini par :

$$u_n = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}, \qquad v_n = u_n + \frac{1}{n!} \quad (n \geqslant 1).$$

1°/ Montrer que ces suites sont convergentes et ont même limite. Cette limite est notée e.
2°/ Montrer que e est un nombre irrationnel.

Solution

HAUT

Exercice 6. Série *n* / 2^*n*.

On considère la suite de nombres réels de terme général u_n défini par :

$$u_n = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \cdots + \frac{n}{2^n} \qquad (n \geqslant 1)$$

1°/ Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est strictement croissante.

2°/ Montrer que pour tout entier n, $n \geqslant 1$: $2u_{n+1} - u_n = \frac{2^{n+1} - 1}{2^n}$.

En déduire que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est majorée.

3°/ Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est convergente et calculer sa limite.

Solution

HAUT

Exercice 7. Règle de D'Alembert.

Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres réels non nuls tels que la suite $(z_n)_{n\geq 0}$ définie en posant $z_n = \frac{x_{n+1}}{x_n}$ converge vers $\frac{3}{4}$. Montrer que la suite $(\lvert x_n \rvert)_{n\geq 0}$ est décroissante et que la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ converge vers 0.	Solution

HAUT

Exercice 8. 13 suites définies par récurrence.

HAUT

Etudier les suites de nombres réels dont le terme général u_n est défini par récurrence en posant :

1°/ $u_0 = \sqrt{3}$ et $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$

2°/ $u_0 = 8$ et $u_{n+1} = 6 + \sqrt{u_n}$

3°/ $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt[3]{3u_n + 1}$

4°/ $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = u_n^2 + \frac{3}{16}$

5°/ $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 6 + u_n^3$

6°/ $u_0 = \frac{\pi}{4}$ et $u_{n+1} = \sin u_n$

7°/ $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \ln(1 + u_n)$

8°/ $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = u_n + \frac{4}{u_n}$

9°/ $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = 2\frac{u_n - 1}{u_n}$

10°/ $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{4u_n - 1}{2 + u_n}$

11°/ $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right)$

12°/ $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = (1 - u_n)^2$

13°/ $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{n + u_n}{n+1}$

Solution

HAUT

Exercice 9. Point fixe d'une application croissante.

Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$, et soit f une application **croissante** de l'intervalle $[\,a, b\,]$ dans lui-même. Montrer qu'il existe $\alpha \in [\,a, b\,]$ tel que $f(\alpha) = \alpha$.	Solution

HAUT

Exercice 10. Suite $u_{n+1} = \frac{1-\sqrt{1-u_n}}{3}$.

Soit la suite numérique $(u_n)_n$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = \frac{1-\sqrt{1-u_n}}{3} \end{cases}$$

Solution

1°/ Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}, u_n \in]\,0, 1\,[$.

2°/ Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \leqslant \frac{u_n}{3}$.

3°/ Montrer que la suite $(u_n)_n$ est convergente et préciser sa limite.

4°/ Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = \frac{u_n}{u_{n-1}}$. Montrer que la suite $(v_n)_n$ est convergente et calculer sa limite.

HAUT

Exercice 11. Borne supérieure et borne inférieure d'un ensemble.

Soit $A = \{\sqrt{p} - E(\sqrt{p}) \; ; \; p \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$, où $E(x)$ désigne la partie entière de x.

1°/ Montrer que A possède une borne inférieure et une borne supérieure.
2°/ Déterminer la borne inférieure de A.
3°/ Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $p_n = n^2 + 2n$.

a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $E(\sqrt{p_n}) = n$.

b) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} (\sqrt{p_n} - E(\sqrt{p_n}))$.

c) En déduire la valeur de la borne supérieure de A.

Solution

HAUT

Exercice 12. Bornes de 4 ensembles de nombres réels.

Montrer que chacun des ensembles suivants possède une borne inférieure et une borne supérieure et les déterminer.

1°/ $X = \left\{ \frac{p+q}{2p+q+1} \; ; p \in \mathbb{N}^*, q \in \mathbb{N}^* \right\} \subset \mathbb{R}$.

2°/ $Y = \left\{ \frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2} - \frac{1}{pq} \; ; p \in \mathbb{N}^*, q \in \mathbb{N}^* \right\} \subset \mathbb{R}$.

3°/ $A = \{ x \ln x + y \ln y \; ; x \in \mathbb{R}_+^*, y \in \mathbb{R}_+^*, x + y = 1 \} \subset \mathbb{R}$.

4°/ $B = \{ x y \; ; x \in \mathbb{R}_+^*, y \in \mathbb{R}_+^*, x^2 + y^2 \leqslant 2 \} \subset \mathbb{R}$.

Solution

HAUT

Chapitre 5. Bornes, suites croissantes ou décroissantes.

Enoncés.

Exercice 1. Bornes de 4 ensembles de nombres réels.

1°/ Soit $X = \left\{ \frac{p}{pq+1} \;\middle|\; p \in \mathbb{N}^*, q \in \mathbb{N}^* \right\}$. Montrer que X possède une borne supérieure et une borne inférieure et les déterminer.

2°/ Soit $Y = \left\{ \frac{p}{p^2+q^2+1} \;\middle|\; p \in \mathbb{N}^*, q \in \mathbb{N}^* \right\}$. Montrer que Y possède une borne supérieure et une borne inférieure et les déterminer.

3°/ Soit $C = \left\{ \sin\frac{n\pi}{2} + \frac{1}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}^* \right\}$. Montrer que C possède une borne supérieure et une borne inférieure et les déterminer.

4°/ Soit $A = \{ x^2 + y^2 \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, xy = 1 \}$.

a) Montrer que A possède une borne inférieure.

b) A possède-t-il une borne supérieure ?

Solution.

1°/ Ensemble X.

Pour tous entiers p et q, $p > 0$, $q > 0$, nous avons les inégalités :

$$0 < p < p\,q + 1$$

En divisant par $p\,q + 1$, il vient :

$$0 < \frac{p}{pq+1} < 1$$

L'ensemble X est borné : il possède une borne inférieure et une borne supérieure.

1 est un majorant de X.
Or, pour q fixé, si p tend vers l'infini, $\frac{p}{pq+1}$ tend vers $\frac{1}{q+1}$, et si q tend vers l'infini, $\frac{1}{q+1}$, tend vers 1.
On peut donc trouver des éléments de X aussi proches qu'on veut de 1.
Autrement dit, 1 est la borne supérieure de X.

0 est un minorant de X.
Or, pour p fixé, si q tend vers l'infini, $\frac{p}{pq+1}$ tend vers 0.

On peut donc trouver des éléments de X aussi proches de 0 qu'on veut.
Autrement dit, 0 est la borne inférieure de X.

La borne inférieure de X est 0. La borne supérieure de X est 1.

2°/ Ensemble *Y*.

Pour tous entiers p et q, $p > 0$, $q > 0$, nous avons les inégalités :

$$0 < p < p^2 + q^2 + 1$$

En divisant par $p^2 + q^2 + 1$, il vient :

$$0 < \frac{p}{p^2+q^2+1} < 1$$

L'ensemble Y est borné : il possède une borne inférieure et une borne supérieure.

0 est un minorant de Y.
Or, pour p fixé, si q tend vers l'infini, $\frac{p}{p^2+q^2+1}$ tend vers 0.
On peut donc trouver des éléments de Y aussi proches qu'on veut de 0.
Autrement dit, 0 est la borne inférieure de Y.

D'autre part, pour $p = 1$, $\frac{p}{p^2+q^2+1} = \frac{1}{q^2+2} \leqslant \frac{1}{3}$, puisque q est supérieur ou égal à 1.
Pour $p = 2$, $\frac{p}{p^2+q^2+1} = \frac{2}{q^2+5} \leqslant \frac{1}{3}$, puisque q est supérieur ou égal à 1.
Pour $p \geqslant 3$, $p > 2 + \frac{1}{p-1} \Rightarrow (p-1)^2 > p$, donc $3p - 1 - p^2 < 0 < q^2$ et $\frac{p}{p^2+q^2+1} < \frac{1}{3}$.
Donc $\frac{1}{3}$ est toujours un majorant de $\frac{p}{p^2+q^2+1}$, et comme $\frac{p}{p^2+q^2+1}$ atteint la valeur $\frac{1}{3}$ pour $p = q = 1$, $\frac{1}{3}$ est élément de Y et c'est le plus grand élément de Y : la borne supérieure de Y est $\frac{1}{3}$.

La borne inférieure de Y est 0. La borne supérieure de Y est $\frac{1}{3}$.

3°/ Ensemble *C*.

Si n est pair, $\sin \frac{n\pi}{2} = 0$ et $\sin \frac{n\pi}{2} + \frac{1}{n} = \frac{1}{n}$, compris entre 0 et 1.
Si n est impair, $\sin \frac{n\pi}{2} = \pm 1$ et $\sin \frac{n\pi}{2} + \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \pm 1 = -\frac{n-1}{n}$ ou $1 + \frac{1}{n}$, compris entre –1 et 2.

C est borné, il possède une borne inférieure et une borne supérieure.

Pour tout entier $n > 0$, $\sin \frac{n\pi}{2} + \frac{1}{n}$ est toujours compris entre $-\frac{n-1}{n}$ et 2, donc entre – 1 et 2.

La valeur 2 est atteinte pour $n = 1$, pour laquelle $sin \frac{n\pi}{2} + \frac{1}{n} = 2$.
Donc 2, plus grand élément de *C*, est la borne supérieure de *C*.

Lorsque *n* tend vers l'infini, on peut trouver des entiers impairs, multiples de 4, moins 1, aussi grands qu'on veut, de telle sorte que $-\frac{n-1}{n}$ soit aussi proche qu'on veut de – 1 : – 1 est la borne inférieure de *C*.

La borne inférieure de *C* est – 1.
La borne supérieure de *C* est 2.

4°/ Ensemble *A*.

Les éléments de *A* sont les carrés des distances au centre O (0, 0) des points de l'hyperbole équilatère d'équation $x\,y = 1$.
Le carré de la distance de *O* à un point de l'hyperbole est minimum lorsque $x = y = 1$ ou $x = y = -1$, auquel cas, il vaut 2.
En effet, en fonction de *x*, le carré de la distance est $x^2 + \frac{1}{x^2}$. Sa dérivée par rapport à *x* est $2x - 2\frac{1}{x^3}$. Elle est nulle pour $x^2 = 1$ et comme la dérivée seconde est positive, il s'agit bien d'un minimum.

D'autre part, le carré de la distance peut être rendu aussi grand qu'on veut en prenant un *x* assez grand, ou un *x* assez proche de 0.

La borne inférieure de *A* est 2.
A n'a pas de borne supérieure.

Chapitre 5. Bornes, suites croissantes ou décroissantes.

Enoncés.

Exercice 2. Plus grand élément et suite convergente.

Soit $x \in \mathbb{R}$, $x \geqslant 0$, et soit $p \in \mathbb{N}$, $p \geqslant 2$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère l'ensemble

$$E_n(x) = \left\{ q \in \mathbb{N} \;\middle|\; \frac{q}{p^n} \leq x \right\}.$$

1°/ Montrer que $E_n(x)$ possède un plus grand élément, que l'on notera $q_n(x)$.
2°/ On considère la suite dont le terme général $u_n(x)$ est défini, pour $n \geqslant 0$, par $u_n(x) = \frac{q_n(x)}{p^n}$. Montrer que $p\, q_n(x)$ est un élément de $E_{n+1}(x)$ et en déduire que la suite $(u_n(x))_{n \geq 0}$ est croissante.
3°/ Montrer que la suite $(u_n(x))_{n \geq 0}$ est convergente et déterminer sa limite.

Solution.

1°/ Ensemble $E_n(x)$.

n est fixé, p est fixé, x est fixé, $E_n(x)$ est l'ensemble des entiers q qui sont inférieurs ou égaux à $p^n x$. Cet ensemble possède un plus grand élément $q_n(x)$ qui est la partie entière de $p^n x$, par définition de la partie entière.

$$\boxed{q_n(x) = E(p^n x) \text{ est le plus grand élément de } E_n(x).}$$

2°/ La suite $(u_n(x))_{n \geq 0}$ est croissante.

$q_n(x) = E(p^n x) \leqslant p^n x \Rightarrow p\, q_n(x) \leqslant p^{n+1} x$

$p\, q_n(x)$ est donc une entier inférieur ou égal à $p^{n+1} x$.

Comme $q_{n+1}(x) = E(p^{n+1} x)$ est le plus grand entier inférieur ou égal à $p^{n+1} x$, $p\, q_n(x)$ est inférieur ou égal à $q_{n+1}(x)$.

Or $E_{n+1}(x)$ est constitué de tous les entiers qui sont inférieurs ou égaux à $q_{n+1}(x)$, donc $p\, q_n(x)$ est un élément de $E_{n+1}(x)$.

$$u_n(x) = \frac{q_n(x)}{p^n} = \frac{pq_n(x)}{p^{n+1}} \leqslant \frac{q_{n+1}(x)}{p^{n+1}} = u_{n+1}(x)$$

La relation $u_n(x) \leqslant u_{n+1}(x)$ montre que la suite $(u_n(x))_{n \geq 0}$ est croissante.

La suite $(u_n(x))_{n \geq 0}$ est croissante.

3°/ La suite $(u_n(x))_{n \geq 0}$ est convergente.

Pour tout entier $n \geqslant 0$:

$u_n(x) = \frac{q_n(x)}{p^n} = \frac{E(p^n x)}{p^n} \leqslant \frac{p^n x}{p^n} = x$

La relation $u_n(x) \leqslant x$ montre que la suite $(u_n(x))_{n \geq 0}$ est majorée par x.

La suite $(u_n(x))_{n \geq 0}$ est donc croissante et majorée : elle est convergente.

Comme $q_n(x)$ est la partie entière de $p^n x$, on a :

$p^n x - 1 \leqslant q_n(x) \leqslant p^n x$

$x - \frac{1}{p^n} \leqslant u_n(x) = \frac{q_n(x)}{p^n} \leqslant x.$

Lorsque n tend vers l'infini, $\frac{1}{p^n}$ tend vers 0 puisque p est supérieur ou égal à 2.

Le théorème des gendarmes entraîne alors que la suite $(u_n(x))_{n \geq 0}$ converge vers x.

La suite $(u_n(x))_{n \geq 0}$ converge vers x.

Ce résultat est intéressant car il montre que tout nombre réel x peut être considéré comme la limite d'une suite croissante de nombres rationnels, à savoir la suite $\left(\frac{E(p^n x)}{p^n}\right)_{n \geq 0}$, où p est un entier quelconque supérieur ou égal à 2.

Cette suite converge assez vite puisque $x - u_n(x)$ est compris entre 0 et $\frac{1}{p^n}$.

Chapitre 5. Bornes, suites croissantes ou décroissantes.

Enoncés.

Exercice 3. Série 1 / *n*^*n*.

Etudier la convergence des suites de nombres réels dont le terme général u_n est défini ci-dessous, et, le cas, échéant, déterminer leur limite. 1°/ $u_n = \frac{5.7.9.\cdots.(5+2n)}{4.7.10.\cdots.(4+3n)}$ $(n \geqslant 0)$. 2°/ $u_n = 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots+\frac{1}{n^n}$ $(n \geqslant 1)$.	

Solution.

1°/ Première suite.

$$0 \leqslant \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{7+2n}{7+3n} \leqslant 1$$

La suite est décroissante et minorée, donc convergente.

Lorsque n tend vers l'infini, le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ tend vers $\frac{2}{3} < 1$.

Donc la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ se rapproche d'une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$: elle converge vers 0.

La suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est une suite décroissante qui converge vers 0.

2°/ Deuxième suite.

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^{n+1}} > 0.$$

La suite est croissante.

$$u_n = 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots+\frac{1}{n^n} < 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n} = \frac{1-\frac{1}{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} = 2 - \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2} < \frac{3}{2}.$$

La suite est majorée par $\frac{3}{2}$. Comme elle est croissante, **elle est convergente**.

Soit ℓ sa limite.

$$\ell - u_n = \frac{1}{(n+1)^{n+1}} + \ldots < \frac{1}{(n+1)^{n+1}}\frac{n+1}{n} = \frac{1}{n(n+1)^n} < \frac{1}{n^{n+1}}$$

$$\boxed{u_n < \ell < u_n + \frac{1}{n^{n+1}}, \text{ pour tout entier } n > 0.}$$

Calcul numérique de la limite.

Pour $n = 1$: $1 < \ell < 2$.

Pour $n = 2$: $1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4} < \ell < \frac{5}{4} + \frac{1}{8} = \frac{11}{8}$; $1{,}2500 < \ell < 1{,}3750$.

Pour $n = 3$: $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{27} = \frac{139}{108} < \ell < \frac{139}{108} + \frac{1}{81} = \frac{421}{324}$; $1{,}2870 < \ell < 1{,}2994$.

Pour $n = 4$: $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{27} + \frac{1}{256} = \frac{8923}{6912} < \ell < \frac{8923}{6912} + \frac{1}{1024} = \frac{35719}{27648}$; $1.2909 < \ell < 1.2920$

Avec $n = 10$, la précision atteint 10^{-11}, elle est bien suffisante : la limite est $\ell = 1,\ 291\ 285\ 997...$

Chapitre 5. Bornes, suites croissantes ou décroissantes.

Enoncés.

Exercice 4. Série ζ (2).

On considère les suites de nombres réels, de terme général u_n et v_n défini par :

$u_n = 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}$, $v_n = u_n + \frac{1}{n}$ $(n \geqslant 1)$.

Montrer que ces suites sont convergentes et ont même limite (que l'on ne cherchera pas à calculer).

Solution.

$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$

La suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est croissante.

$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{-1}{n(n+1)^2} < 0$

La suite $(v_n)_{n\geq 0}$ est décroissante.

La formule $v_n = u_n + \frac{1}{n}$, avec $u_1 < u_n$ et $v_1 > v_n$, montre que la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ est minorée par $u_1 = 1$ et que la suite$(u_n)_{n\geq 0}$ est majorée par $v_1 = 2$.

La suite $(u_n)_{n\geq 0}$, croissante et majorée, est convergente.
La suite $(v_n)_{n\geq 0}$, décroissante et minorée, est convergente.

Lorsque n tend vers l'infini, la formule $v_n = u_n + \frac{1}{n}$, où $\frac{1}{n}$ tend vers 0, montre que les suites $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ ont la même limite, comprise entre 1 et 2.

La suite $(u_n)_{n\geq 0}$, croissante, et la suite $(v_n)_{n\geq 0}$, décroissante, convergent vers la même limite.

Remarque, pour information.

La série $\zeta(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}$ s'appelle la **série de Riemann**. Elle converge pour $s > 1$ et diverge pour $s \leqslant 1$.

$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ est la limite commune des suites $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$.

Curiosité : on démontre que $\zeta(s) = \prod_{p \text{ premier}} \frac{1}{1-p^{-s}}$, le produit étant étendu à l'ensemble des nombres premiers (voir **Cours de Mathématiques**, Jean Bass, *Masson éditeur, Paris, 1956, p.671*, Exercice 42).

Chapitre 5. Bornes, suites croissantes ou décroissantes.

Enoncés.

Exercice 5. Série exponentielle.

On considère les suites de nombres réels, de terme général u_n et v_n défini par :

$u_n = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}$, $v_n = u_n + \frac{1}{n!}$ $(n \geqslant 1)$.

1°/ Montrer que ces suites sont convergentes et ont même limite. Cette limite est notée *e*.
2°/ Montrer que *e* est un nombre irrationnel.

Solution.

1°/ Convergence.

$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0$

La suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est croissante.

$v_{n+1} - v_n = 2\frac{1}{(n+1)!} - 2\frac{1}{n!} = -2\,n\frac{1}{(n+1)!} < 0$

La suite $(v_n)_{n\geq 0}$ est décroissante.

La formule $v_n = u_n + \frac{1}{n!}$, avec $u_1 < u_n$ et $v_1 > v_n$, montre que la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ est minorée par $u_1 = 2$ et que la suite$(u_n)_{n\geq 0}$ est majorée par $v_1 = 3$.

La suite $(u_n)_{n\geq 0}$, croissante et majorée, est convergente.
La suite $(v_n)_{n\geq 0}$, décroissante et minorée, est convergente.

Lorsque *n* tend vers l'infini, la formule $v_n = u_n + \frac{1}{n!}$, où $\frac{1}{n!}$ tend vers 0, montre que les suites $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ ont la même limite, comprise entre 2 et 3.

La suite $(u_n)_{n\geq 0}$, croissante, et la suite $(v_n)_{n\geq 0}$, décroissante, convergent vers la même limite.

2°/ Irrationalité de la limite *e*.

Si *e* était rationnel, il existerait un entier naturel $q > 0$, tel que $q!$ *e* soit un entier strictement compris

entre 2 $q!$ et 3 $q!$.
$q!\, u_q$ est aussi un entier compris entre 2 $q!$ et 3 $q!$, donc $q!\,(e - u_q)$ est un entier, compris entre 0 et $q!$

Or $q!\,(e - u_q) = \frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \ldots \leqslant \frac{1}{q+1}\left(1 + \frac{1}{(q+1)} + \frac{1}{(q+1)^2} + \cdots\right) = \frac{1}{q+1}\frac{1}{1-\frac{1}{q+1}} = \frac{1}{q}$

$q = 1 \Rightarrow e$ est un entier strictement compris entre 2 et 3 : impossible.
$q > 1 \Rightarrow e - u_q = 0$, impossible car la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est strictement croissante.

Donc e ne peut pas être rationnel.

Chapitre 5. Bornes, suites croissantes ou décroissantes.

Enoncés.

Exercice 6. Série *n* / 2^*n*.

On considère la suite de nombres réels de terme général u_n défini par :

$$u_n = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \cdots + \frac{n}{2^n} \qquad (n \geqslant 1)$$

1°/ Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est strictement croissante.

2°/ Montrer que pour tout entier n, $n \geqslant 1$: $2u_{n+1} - u_n = \frac{2^{n+1} - 1}{2^n}$.

En déduire que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est majorée.

3°/ Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est convergente et calculer sa limite.

Solution.

1°/ Croissance.

$$u_{n+1} - u_n = \frac{n+1}{2^{n+1}} > 0$$

La suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est strictement croissante.

2°/ Majoration.

$$\begin{aligned} 2u_{n+1} - u_n &= 2\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \cdots + \frac{n}{2^n} + \frac{n+1}{2^{n+1}}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \cdots + \frac{n}{2^n}\right) \\ &= 1 + \frac{2}{2} + \frac{3}{2^2} + \cdots + \frac{n}{2^{n-1}} + \frac{n+1}{2^n} - \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \cdots + \frac{n}{2^n}\right) \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^n} = \frac{1 - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 - \frac{1}{2^n} = \frac{2^{n+1} - 1}{2^n} \end{aligned}$$

Des relations : $u_{n+1} - u_n = \frac{n+1}{2^{n+1}}$ et $2u_{n+1} - u_n = 2 - \frac{1}{2^n}$, on déduit, par soustraction :

$$u_{n+1} = 2 - \frac{1}{2^n} - \frac{n+1}{2^{n+1}} < 2.$$

$$u_n = 2 - \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{n}{2^n} < 2.$$

La suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est majorée par 2.

3°/ Convergence.

La suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est strictement croissante et majorée : elle est donc convergente.

La formule $u_n = 2 - \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{n}{2^n}$ montre que, lorsque n tend vers l'infini, la suite tend vers 2.

En effet, lorsque n tend vers l'infini, $\frac{n}{2^n}$ tend vers 0, car l'exponentielle l'emporte sur la puissance, et $\frac{1}{2^{n-1}}$ tend vers 0.

La suite $(u_n)_{n \geq 1}$ converge vers 2.

Chapitre 5. Bornes, suites croissantes ou décroissantes.

Enoncés.

Exercice 7. Règle de D'Alembert.

Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres réels non nuls tels que la suite $(z_n)_{n\geq 0}$ définie en posant $z_n = \frac{x_{n+1}}{x_n}$ converge vers $\frac{3}{4}$. Montrer que la suite $(\mid x_n \mid)_{n\geq 0}$ est décroissante et que la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ converge vers 0.	

Solution.

1°/ Décroissance.

Dire que la suite $(z_n)_{n\geq 0}$ converge vers $\frac{3}{4}$, c'est dire que, pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un entier naturel N tel que, pour tout entier naturel n, $n \geqslant N \Rightarrow \mid z_n - \frac{3}{4} \mid < \varepsilon$, donc $\frac{3}{4} - \varepsilon < z_n < \frac{3}{4} + \varepsilon$.
Pour $n \geqslant N$, on a alors $\frac{3}{4} - \varepsilon < \frac{x_{n+1}}{x_n} < \frac{3}{4} + \varepsilon$ et $\mid x_n \mid \left(\frac{3}{4} - \varepsilon\right) < \mid x_{n+1} \mid < \mid x_n \mid \left(\frac{3}{4} + \varepsilon\right)$.

Il suffit de prendre un $\varepsilon < \frac{1}{4}$, pour être certain d'avoir $\mid x_{n+1} \mid < \mid x_n \mid$ à partir d'un certain rang N.

La suite $(x_n)_{n\geq 0}$ est strictement décroissante en module à partir d'un certain rang.

2°/ Convergence.

La suite $(\mid x_n \mid)_{n\geq 0}$, strictement décroissante, et minorée par 0, est convergente.

Pour e = $\frac{1}{8}$, par exemple, on a $\mid x_{n+1} \mid < \frac{7}{8} \mid x_n \mid$, à partir d'un certain rang N.
Donc, par une récurrence immédiate, $\mid x_{n+k} \mid < \left(\frac{7}{8}\right)^k \mid x_n \mid$ et, lorsque k tend vers l'infini, $\mid x_{n+k} \mid$ tend vers 0, puisque $\left(\frac{7}{8}\right)^k$ tend vers 0.

Donc la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ tend, en module, vers 0.
La relation
$-\mid x_n \mid < x_n < \mid x_n \mid$, pour tout entier n,
montre (théorème des gendarmes), que la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ elle-même converge aussi vers 0, puisqu'elle est comprise entre deux suites qui tendent vers 0.

La suite $(x_n)_{n \geq 0}$ converge vers 0.

Remarque.

La **série entière** de coefficient général x_n, $\sum_{n=0}^{\infty} x_n x^n$, définit une **fonction analytique** lorsqu'elle est convergente.
La **règle de D'Alembert** dit que la série est convergente pour tout x de module inférieur à R avec

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{x_{n+1}}{x_n} \right| .$$

Dans le cas présent, $\lim_{n \to +\infty} \left| \frac{x_{n+1}}{x_n} \right| = \frac{3}{4}$ donc $R = \frac{4}{3}$.
La série est convergente pour tout x, réel ou imaginaire, de module $< \frac{4}{3}$.

En particulier, pour $x = 1$, la suite de terme général $u_n = \sum_{k=0}^{k=n} x_k$, $n \geqslant 0$, est convergente.

On ne connaît cependant pas sa limite, car elle dépend des premiers termes de la suite.

Chapitre 5. Bornes, suites croissantes ou décroissantes.

Enoncés.

Exercice 8. 13 suites définies par récurrence.

Etudier les suites de nombres réels dont le terme général u_n est défini par récurrence en posant :

1°/ $u_0 = \sqrt{3}$ et $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$

2°/ $u_0 = 8$ et $u_{n+1} = 6 + \sqrt{u_n}$

3°/ $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt[3]{3u_n + 1}$

4°/ $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = u_n^2 + \frac{3}{16}$

5°/ $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 6 + u_n^3$

6°/ $u_0 = \frac{\pi}{4}$ et $u_{n+1} = \sin u_n$

7°/ $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \ln(1 + u_n)$

8°/ $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = u_n + \frac{4}{u_n}$

9°/ $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = 2\frac{u_n - 1}{u_n}$

10°/ $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{4u_n - 1}{2 + u_n}$

11°/ $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right)$

12°/ $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = (1 - u_n)^2$

13°/ $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{n + u_n}{n+1}$

Solution.

1°/ $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$.

HAUT

$1 < 3^{\frac{1}{4}} = (u_0)^{\frac{1}{2}} < u_1 = \sqrt{1+\sqrt{3}} < 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} = 1 + \frac{1}{2}u_0 < u_0 < 2$

Supposons $1 < (u_{n-1})^{\frac{1}{2}} < u_n < 1 + \frac{1}{2}u_{n-1} < u_{n-1} < 2$.

La formule $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$ montre alors que u_{n+1} est compris entre $(u_n)^{\frac{1}{2}}$ et $1 + \frac{1}{2}u_n < 2$, avec $(u_n)^{\frac{1}{2}} > 1$.

La suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est croissante et majorée par 2. Elle converge.

Sa limite u vérifie $u = \sqrt{1+u}$, $u^2 - u - 1 = 0$, avec $u \geqslant 1$, donc $u = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

La suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est croissante et converge vers $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

2°/ $u_{n+1} = 6 + \sqrt{u_n}$.

HAUT

$u_0 = 8 < 6 + \sqrt{8} = u_1 < 9$.

Supposons $u_{n-1} < u_n < 9$.

Alors $u_{n+1} = 6 + \sqrt{u_n}$ est inférieur à 9 et on a :

$$u_{n+1} - u_n = 6 + \sqrt{u_n} - u_n = -\left(\sqrt{u_n} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} + 6 = \frac{25}{4} - \left(\sqrt{u_n} - \frac{1}{2}\right)^2 = (\sqrt{u_n} + 2)(3 - \sqrt{u_n}) > 0.$$

Donc la suite est strictement croissante et majorée par 9 : elle converge.

La limite u vérifie $(u-6)^2 = u$, $u^2 - 13u + 36 = 0$, avec $u \geqslant u_0 = 8$, $u = 9$.

La suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est croissante et converge vers 9.

3°/ $u_{n+1} = \sqrt[3]{3u_n + 1}$.

HAUT

On voit tout de suite, par récurrence, que u_n est strictement compris entre 1 et 2, pour $n \geqslant 1$, car $7 < 8$.

La limite, si elle existe, est une racine réelle de $u^3 - 3u - 1 = 0$.
Pour $u = 1$, le trinôme est négatif, pour $u = 2$, il est positif : il y a une racine réelle entre 1 et 2.
La dérivée est nulle pour $u = 1$ et $u = -1$.
Pour $u = -1$, le trinôme est positif, il y a une racine réelle entre -1 et $+1$.
Pour $u = -2$, le trinôme est négatif, il y a une racine réelle entre -1 et -2.
Donc la limite de la suite, si elle existe, est la racine comprise entre 1 et 2.
On pose $u = a + b$.
$u^3 - 3u - 1 = (a+b)^3 - 3(a+b) - 1 = 3(ab - 1)(a+b) + (a^3 + b^3 - 1) = 0$
L'équation est vérifiée si $ab = 1$ et $a^3 + b^3 = 1$, a^3 et b^3 vérifient $X^2 - X + 1 = 0$.
$(X^2 - X + 1)(X + 1) = X^3 + 1$

a^3 et b^3 sont les deux racines cubiques complexes de – 1 : $a^3 = e^{\frac{i\pi}{3}}$; $b^3 = e^{-\frac{i\pi}{3}}$; $u = 2\cos\frac{\pi}{9}$.

$u_{n+1} - u_n = \sqrt[3]{3u_n + 1} - u_n$
Comme u_n est compris entre 1 et 2, $u_{n+1} - u_n$ a le signe de $(3u_n + 1) - u_n^3$.
Le signe est celui de $2\cos\frac{\pi}{9} - u_n$, positif pour $u_n < 2\cos\frac{\pi}{9}$.

Pour $n = 0$, $u_0 = 1 < 2\cos\frac{\pi}{9}$.
Pour $n = 1$, $u_1 = 4\frac{1}{3} < 2\cos\frac{\pi}{9}$, car $8\cos^3\frac{\pi}{9} = 6\cos\frac{\pi}{9} + 1 > 4$, donc $u_2 - u_1 > 0$.
Pour $n = 2$, $u_2 = \sqrt[3]{3u_1 + 1} < \sqrt[3]{6\cos\frac{\pi}{9} + 1} = 2\cos\frac{\pi}{9}$.

Supposons que, pour un $n \geqslant 1$, $u_n < 2\cos\frac{\pi}{9}$.
Alors $u_{n+1} = \sqrt[3]{3u_n + 1} < \sqrt[3]{6\cos\frac{\pi}{9} + 1} = 2\cos\frac{\pi}{9}$.

On voit donc que la suite est croissante : comme elle est majorée, elle est convergente et sa limite est $2\cos\frac{\pi}{9}$.

La suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est croissante et converge vers $2\cos\frac{\pi}{9}$.

HAUT

4°/ $u_{n+1} = u_n^2 + \frac{3}{16}$.

HAUT

$u_0 = \frac{1}{2}$.
$u_1 = \frac{1}{4} + \frac{3}{16} = \frac{7}{16} < u_0$.
$u_2 = \frac{97}{256} < u_1$.

La suite est faite de nombres rationnels plus grands que $\frac{3}{16}$.

En fait, u_0, u_1, u_2, sont tous plus grands que $\frac{1}{4}$.
La suite décroît, au moins jusqu'à $n = 2$.

Si elle a une limite, cette limite vérifie $u = u^2 + \frac{3}{16}$, $u^2 - u + \frac{3}{16} = 0$, $\left(u - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{16}$, $u = \frac{1}{4}$ ou $u = \frac{3}{4}$.

Pour l'instant, on prend plutôt la direction de $\frac{1}{4}$ que celle de $\frac{3}{4}$.

Supposons que, pour un entier $n \geqslant 1$, on ait $\frac{1}{4} < u_n < u_{n-1} < \ldots < u_1 < u_0 < \frac{3}{4}$.

Alors $u_{n+1} = u_n^2 + \frac{3}{16} > \frac{1}{16} + \frac{3}{16} = \frac{1}{4}$ et $u_{n+1} - u_n = u_n^2 - u_n + \frac{3}{16}$.
Comme u_n est entre les racines du trinôme $u^2 - u + \frac{3}{16}$, $u_n^2 - u_n + \frac{3}{16}$ est négatif : la suite est décroissante et l'on a : $\frac{1}{4} < u_{n+1} < u_n < u_{n-1} < ... < u_1 < u_0 < \frac{3}{4}$.

Cette propriété est donc vraie pour tout entier naturel : la suite est décroissante et minorée par $\frac{1}{4}$.

La suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est décroissante et converge vers $\frac{1}{4}$.

HAUT

5°/ $u_{n+1} = 6 + u_n^3$.

HAUT

$u_0 = 1$;
$u_1 = 7$;
$u_2 = 349$.

Pas de doute, la suite va diverger assez vite.

A partir de u_1, u_n est un entier strictement plus grand que 6, donc u_{n+1} est strictement plus grand que u_n, la suite est formée d'entiers et elle est strictement croissante. Conclusion, elle croît à l'infini.

La suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est croissante et diverge.

6°/ $u_{n+1} = \sin u_n$.

HAUT

Si la suite converge, sa limite u vérifie $u = \sin u$. La seule solution est $u = 0$.

$u_0 = \frac{\pi}{4} > 0$

$u_0 > 0 \Rightarrow 0 < u_1 = \sin u_0 < u_0$.

Supposons $0 < u_n < u_{n-1} < ... < u_0$.

Alors $u_{n+1} = \sin u_n$ est > 0 et $< u_n$.
Donc, par récurrence, on a toujours $0 < u_n < u_{n-1} < ... < u_0$, pour tout entier naturel n.

La suite est décroissante et minorée par 0 : elle est convergente.

Nous avons vu qu'alors, la limite est 0.

La suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est décroissante et converge vers 0.

7°/ $u_{n+1} = ln\,(1 + u_n)$.

HAUT

Si la suite converge, sa limite u vérifie $u = ln\,(1 + u)$. La seule solution est $u = 0$.

$u_0 = 1$
$0 < u_1 = ln\,2 < u_0$

Comme $ln\,(1 + u)$ est toujours plus petit que u, on voit tout de suite par récurrence, que, pour tout entier naturel n, on a :

$0 < u_n < u_{n-1} < ... < u_0$

La suite est décroissante et minorée par 0 : elle est convergente.
Nous avons vu qu'alors, la limite est 0.

La suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est décroissante et converge vers 0.

8°/ $u_{n+1} = u_n + \frac{4}{u_n}$.

HAUT

Si la suite converge, sa limite u vérifie $u = u + \frac{4}{u}$: il n'y a pas de solution.

Comme on a toujours, à partir de $u_0 = 2$, $u_{n+1} > u_n$:

La suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est croissante et diverge.

9°/ $u_{n+1} = 2\,\frac{u_n - 1}{u_n}$.

HAUT

Si la suite converge, sa limite u vérifie $u = 2\left(1 - \frac{1}{u}\right)$, $u^2 - 2u + 2 = 0$, $(u - 1)^2 + 1 = 0$.
Il n'y a pas de solution réelle. La suite ne peut pas converger.

A partir de $u_0 = 3$, on obtient :
$u_1 = \frac{4}{3}$, $u_2 = \frac{1}{2}$, $u_3 = -2$, $u_4 = 3 = u_0$.
Comme on retombe sur la valeur initiale, la suite est périodique de période 4 :

$u_{4n} = u_0 = 3$
$u_{4n+1} = u_1 = \frac{4}{3}$
$u_{4n+2} = u_2 = \frac{1}{2}$
$u_{4n+3} = u_3 = -2.$

Partons d'un u_0 quelconque :
$u_1 = 2\left(1-\frac{1}{u_0}\right) = 2\,\frac{u_0-1}{u_0}$
$u_2 = 2\left(1-\frac{1}{u_1}\right) = 2 - \frac{u_0}{u_0-1} = \frac{u_0-2}{u_0-1}$
$u_3 = 2\left(1-\frac{1}{u_2}\right) = 2 - 2\frac{u_0-1}{u_0-2} = -2\,\frac{1}{u_0-2}$
$u_4 = 2\left(1-\frac{1}{u_3}\right) = 2 + u_0 - 2 = u_0$
La suite est toujours périodique de période 4, quelque soit la valeur de u_0.

La suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est périodique de période 4, elle n'est pas convergente.

HAUT

10°/ $u_{n+1} = \frac{4u_n - 1}{2+u_n}$.

HAUT

Si la suite converge, sa limite u vérifie $u = \frac{4u-1}{2+u}$, $u^2 - 2u + 1 = 0$, $(u-1)^2 = 0$, $u = 1$.
Si la suite converge, sa limite est 1.

$u_{n+1} - u_n = \frac{4u_n - 1}{2+u_n} - u_n = -\frac{1}{2+u_n}(u_n - 1)^2$

A partir de $u_0 = 2$, nous obtenons :

$1 < u_1 = \frac{7}{4} < u_0 = 2$

Supposons qu'on ait : $1 < u_n < u_{n-1} < \ldots < u_0$, pour un entier naturel n.
Alors $u_{n+1} - u_n = -\frac{1}{2+u_n}(u_n - 1)^2 < 0 \Rightarrow u_{n+1} < u_n$.
$1 < u_n \Rightarrow u_{n+1} = \frac{4u_n - 1}{2+u_n} = 4 - \frac{9}{2+u_n} > 4 - 3 = 1.$
On a donc $1 < u_{n+1} < u_n < u_{n-1} < \ldots < u_0$.
De sorte que, par récurrence, la propriété $1 < u_n < u_{n-1} < \ldots < u_0$, est vraie pour tout entier naturel n.

La suite est décroissante et minorée par 1 : elle est donc convergente, et sa limite est 1, comme on l'a vu plus haut.

La suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est décroissante et converge vers 1.

HAUT

11°/ $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right)$.

HAUT

Si la suite converge, sa limite u vérifie $u = \frac{1}{2}\left(u + \frac{2}{u}\right)$, $u^2 = 2$, $u = \pm\sqrt{2}$.

En partant d'un $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$, donc positif, tous les u_n sont positifs, donc si la suite converge, sa limite est $\sqrt{2}$.

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right) - u_n = \frac{1}{2u_n}(2 - u_n^2)$$

Cette formule montre que :
$0 < u_0 < \sqrt{2} \Rightarrow$ par récurrence, $0 < u_n < \sqrt{2}$ et la suite est croissante et majorée par $\sqrt{2}$, donc convergente : sa limite, on l'a vu, est $\sqrt{2}$.
$\sqrt{2} < u_0 \Rightarrow$ la suite est décroissante et minorée par 0, donc convergente : sa limite est, on l'a vu, $\sqrt{2}$.
$u_0 = \sqrt{2} \Rightarrow$ la suite est constante donc convergente : sa limite est $\sqrt{2}$.

La suite $(u_n)_{n \geq 0}$ converge toujours vers $\sqrt{2}$.
Elle est décroissante si $u_0 > \sqrt{2}$.
Elle est croissante si $0 < u_0 < \sqrt{2}$.
Elle est constante si $u_0 = \sqrt{2}$.

HAUT

12°/ $u_{n+1} = (1 - u_n)^2$.

HAUT

Si la suite converge, sa limite u vérifie $u = (1 - u)^2$, $u^2 - u + 1 = 0$.
Cette équation n'a pas de racine réelle, la suite n'est jamais convergente.

En partant de $u_0 = \frac{1}{2}$, nous obtenons :

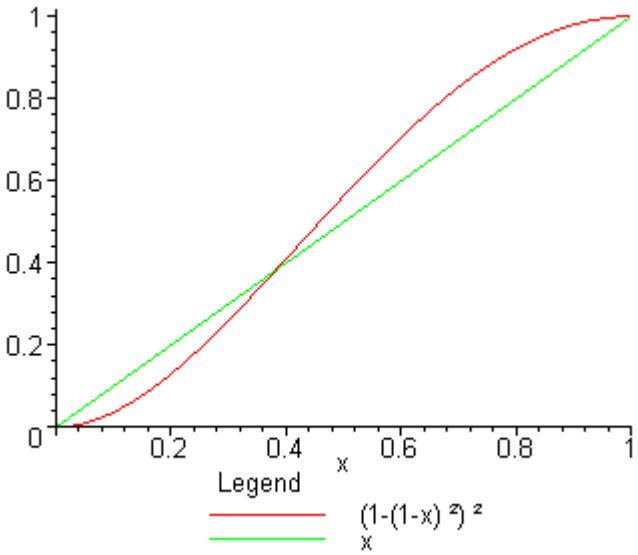
$u_1 = \frac{1}{4} < u_0$,
$u_2 = \frac{9}{16} > u_0$,
$u_3 = \frac{49}{256} < u_1$,

$u_4 = \frac{42\,849}{65\,536} > u_2$.

Nous voyons se détacher deux suites extraites, suivant la parité de n.
— La suite $(u_{2n+1})_{n \geq 0}$ commence par décroître, en restant minorée par 0.
— La suite $(u_{2n})_{n \geq 0}$ commence par croître, en restant majorée par 1.
Voyons si cette remarque se confirme pour des valeurs plus élevées de n.

$u_{n+2} = (1 - u_{n+1})^2 = (1 - (1 - u_n)^2)^2$.
$u_{n+2} - u_n = (1 - (1 - u_n)^2)^2 - u_n$.

Etudions le graphe de la fonction $f(x) = (1 - (1 - x)^2)^2$ entre 0 et 1. $f(0) = 0$, $f(1) = 1$.
$f'(x) = 4(1 - (1 - x)^2)(1 - x) \geqslant 0$.
La dérivée est nulle pour $x = 0$ et $x = 1$.
Entre 0 et 1, il y a un point d'inflexion lorsque la dérivée seconde est nulle.
$f''(x) = 8(1 - x)^2 - 4(1 - (1 - x)^2)$
$f''(x) = 4(3(x - 1)^2 - 1)$
$f''(x) = 0$ pour $x = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$.



Comme la fonction f est strictement croissante et continue entre 0 et 1, c'est une bijection continue de [0, 1] sur lui-même, il y a donc des points fixes tels que $f(x) = x$. (voir, par exemple, Exercice 9, ou Chapitre 3, Exercice 4).

Cherchons ces points fixes. Ils sont solutions de l'équation : $(1 - (1 - x)^2)^2 = x$.
$x^2 (2 - x)^2 = x$.
Cette équation admet déjà, dans l'intervalle [0, 1], les solutions évidentes $x = 0$ et $x = 1$.
$x(2 - x)^2 = 1$.
$x(4 - 4x + x^2) - 1 = 0$
$x^3 - 4x^2 + 4x - 1 = 0$
$(x - 1)(x^2 - 3x + 1) = 0$
$x^2 - 3x + 1 = 0$
Nous trouvons un autre point fixe entre 0 et 1 : $x = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$.

Entre 0 et $\frac{3 - \sqrt{5}}{2}$, $f(x) - x$ est négatif ; entre $\frac{3 - \sqrt{5}}{2}$ et 1, $f(x) - x$ est positif.

$0 < u_n < \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \Rightarrow u_{n+2} < u_n$.
$\frac{3 - \sqrt{5}}{2} < u_n < 1 \Rightarrow u_{n+2} > u_n$.

Or $0 < u_1 = \frac{1}{4} < \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$, donc la suite $(u_{2n+1})_{n \geq 0}$ est décroissante, en restant minorée par 0.
Elle est donc convergente et sa limite est 0, puisque 0 est racine de l'équation : $(1 - (1 - x)^2)^2 = x$.

De même $u_2 = \frac{9}{16} > \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$ et la suite $(u_{2n})_{n \geq 0}$ est croissante, en restant majorée par 1.
Elle est donc convergente et sa limite est 1, puisque 1 est racine de l'équation : $(1 - (1 - x)^2)^2 = x$.

La suite $(u_n)_{n \geq 0}$ ne converge pas. Cependant :
— La suite extraite $(u_{2n+1})_{n \geq 0}$ est décroissante et converge vers 0.
— La suite extraite $(u_{2n})_{n \geq 0}$ est croissante et converge vers 1.

HAUT

13°/ $u_{n+1} = \frac{n+u_n}{n+1}$.

HAUT

Si la suite converge, sa limite u vérifie $u = \frac{n+u}{n+1}$, pour tout n : $u = 1$.

En partant de $u_0 = 2$, nous obtenons :
$u_1 = \frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2}$; $u_2 = \frac{7}{6} = 1 + \frac{1}{6}$; $u_3 = \frac{25}{24} = 1 + \frac{1}{24}$.
Supposons qu'on ait, pour un entier n : $u_n = 1 + \frac{1}{n!}$.
Cette formule est vraie déjà pour $n = 0, 1, 2, 3$.
Alors la formule de récurrence $u_{n+1} = \frac{n+u_n}{n+1}$ donne immédiatement $u_{n+1} = 1 + \frac{1}{(n+1)!}$, de sorte que la formule est vraie pour tout entier naturel n.

Comme $\frac{1}{(n+1)!}$ est plus petit que $\frac{1}{n!}$, la suite est décroissante, et puisqu'elle est minorée par 1, elle converge.
Comme $\frac{1}{n!}$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini, on a la confirmation que la limite de la suite est 1.

La suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est décroissante et converge vers 1.

Chapitre 5. Bornes, suites croissantes ou décroissantes.

Enoncés.

Exercice 9. Point fixe d'une application croissante.

Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$, et soit f une application **croissante** de l'intervalle $[\,a, b\,]$ dans lui-même. Montrer qu'il existe $\alpha \in [\,a, b\,]$ tel que $f(\alpha) = \alpha$.	

Solution.

Soient $A = \{\, x \in [\,a, b\,] \mid x \leqslant f(x) \,\}$.
***A* n'est pas vide**, il contient a, puisque $f(a) \in [\,a, b\,] \Rightarrow a \leqslant f(a) \leqslant b$.

Comme A est une partie de $[\,a, b\,]$, ***b* est un majorant de *A***.
Dans $\mathbb{R}$, toute partie non vide majorée possède une borne supérieure, donc ***A* possède une borne supérieure α**.
α est le plus petit des majorants de A : c'est la **borne inférieure de l'ensemble des majorants de *A***.

Si α n'appartient pas à A, on a $\alpha > f(\alpha)$.
Dans ce cas, il existe un nombre réel y strictement compris entre α et $f(\alpha)$: $\alpha < y < f(\alpha)$.
Comme ***f* est croissante**, $\alpha < y \Rightarrow f(\alpha) \leqslant f(y)$. Alors $y < f(\alpha) \Rightarrow y < f(y)$, donc $y \in A$.
Comme α est la borne supérieure de A, on aurait donc $y \leqslant \alpha$, ce qui contredit la définition de y, avec $\alpha < y$.
Donc α est un élément de A et $\alpha \leqslant f(\alpha)$.

Ainsi **α est le plus grand élément de *A*** et le plus petit des majorants de A.
L'intervalle $[\,a, b\,]$ est donc divisé en deux morceaux : $[\,a, \alpha\,]$ qui contient A et $[\,\alpha, b\,]$, ensemble des majorants de A.

Si $[\,\alpha, b\,]$ est réduit à b, comme $f(b)$ est un élément de $[\,a, b\,]$, on a $f(b) \leqslant b$.
Dans ce cas, $\alpha = b$ et $\alpha \in A \Rightarrow b \in A$, donc $b \leqslant f(b)$, d'où $b = f(b)$ et b est un point fixe de f.
Sinon, pour tout majorant x de A, qui n'appartient pas à A, on a $f(x) < x$.
Or α, borne inférieure de $]\,\alpha, b\,]$, est limite d'une suite d'éléments de $]\,\alpha, b\,]$ qui converge vers α.
Par **prolongement des inégalités par passage à la limite**, on a donc $f(\alpha) \leqslant \alpha$.
D'où l'égalité $f(\alpha) = \alpha$.

Et **α est un point fixe de *f***.

Remarque.

On aurait un résultat identique si f était une application décroissante.
Ce qui compte, c'est donc que f soit une application **monotone**.

Chapitre 5. Bornes, suites croissantes ou décroissantes.

Enoncés.

Exercice 10. Suite $u_{n+1} = \frac{1-\sqrt{1-u_n}}{3}$.

Soit la suite numérique $(u_n)_n$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = \frac{1-\sqrt{1-u_n}}{3} \end{cases}$$

1°/ Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}, u_n \in]0, 1[$.

2°/ Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \leqslant \frac{u_n}{3}$.

3°/ Montrer que la suite $(u_n)_n$ est convergente et préciser sa limite.

4°/ Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = \frac{u_n}{u_{n-1}}$. Montrer que la suite $(v_n)_n$ est convergente et calculer sa limite.

Solution.

1°/ La suite $(u_n)_n$ est bornée.

Hypothèse de récurrence : pour un $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]0, 1[$ $(0 < u_n < 1)$.

$0 < u_n < 1 \Rightarrow 0 < 1 - u_n < 1$,
$0 < 1 - u_n < 1 \Rightarrow 0 < \sqrt{1-u_n} < 1$,
$0 < \sqrt{1-u_n} < 1 \Rightarrow 0 < 1 - \sqrt{1-u_n} < 1$,
$0 < 1 - \sqrt{1-u_n} < 1 \Rightarrow 0 < u_{n+1} = \frac{1-\sqrt{1-u_n}}{3} < 1$.

Par transitivité de l'implication $[\ ((A \to B) \wedge (B \to C)) \to (A \to C)\ ]$:
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]0, 1[\Rightarrow u_{n+1} = \frac{1-\sqrt{1-u_n}}{3} \in]0, 1[$.

Comme $u_0 = \frac{1}{2} \in]0, 1[$, le **principe de récurrence** entraîne que : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]0, 1[$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]0, 1[$.

2°/ $u_{n+1} \leq u_n / 3$.

$$3\,u_{n+1} = 1 - \sqrt{1-u_n}$$

Pour tout nombre réel $x \in]\,0, 1\,[$, nous avons $x^2 < x$, car le trinôme du deuxième degré $x^2 - x + 0$ est strictement négatif entre les racines 0 et 1.

Donc $\sqrt{1-u_n} \in]\,0, 1\,[\Rightarrow 1 - u_n < \sqrt{1-u_n}$.
Or $u_n \in]\,0, 1\,[$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc $\sqrt{1-u_n} \in]\,0, 1\,[$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Par modus ponens, $1 - u_n < \sqrt{1-u_n}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit : $1 - \sqrt{1-u_n} < u_n$
Et $3\,u_{n+1} = 1 - \sqrt{1-u_n} < u_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
$3\,u_{n+1} < u_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} < \frac{u_n}{3}.}$$

A fortiori, nous pouvons écrire aussi : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \leqslant \frac{u_n}{3}$.

3°/ Convergence de la suite $(u_n)_n$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} \leqslant \frac{u_n}{3}$ et $u_n \in]\,0, 1\,[\Rightarrow u_{n+1} \leqslant u_n$.
La suite $(u_n)_n$ est décroissante.
Comme elle est minorée par 0, elle est convergente.
Comme elle est majorée par $u_0 = \frac{1}{2}$, sa limite est inférieure à $\frac{1}{2}$.

La limite ℓ vérifie : $\ell = \frac{1-\sqrt{1-\ell}}{3}$, donc $(3\,\ell - 1)^2 = 1 - \ell$, $9\,\ell^2 - 5\,\ell = 0$, $\ell = 0$ ou $\ell = \frac{5}{9}$.

La seule solution inférieure à $\frac{1}{2}$ est $\ell = 0$.

$$\boxed{\text{La suite } (u_n)_n \text{ est convergente et sa limite est 0.}}$$

Bien entendu, on aurait pu utiliser aussi la méthode suggérée par l'énoncé en montrant, par récurrence en utilisant le résultat de la question 2°, que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n \leqslant \left(\frac{1}{3}\right)^n u_0 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3^n}$, de sorte que la suite $(u_n)_n$ est encadrée par :

$$0 < u_n \leqslant \frac{1}{2} \times \frac{1}{3^n}$$

Lorsque n tend vers l'infini, $\frac{1}{3^n}$ tend vers 0, donc (**théorème des gendarmes**), u_n tend vers 0.

Mais ce qui est plaisant dans notre méthode, c'est qu'on voit tout de suite qu'avec $u_0 = \frac{1}{2}$, et $u_{n+1} = \frac{1+\sqrt{1-u_n}}{3}$, on aurait obtenu une suite croissante dont la limite est $\frac{5}{9}$.

4°/ Convergence de la suite $(v_n)_n$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \frac{u_n}{u_{n-1}}$, avec $v_1 = \frac{u_1}{u_0} = 2\,u_1 = \frac{2-\sqrt{2}}{3}$.

La relation : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} < \frac{u_n}{3}$, établie dans la question 2°, montre que l'on a : $v_n < \frac{1}{3}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.
Comme, d'autre part, v_n, rapport de deux nombres strictement plus grands que 0, est > 0, nous avons :
$0 < v_n < \frac{1}{3}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.
La suite $(v_n)_n$ est donc **bornée**.

Pour voir si la suite $(v_n)_n$ est croissante ou décroissante, étudions le signe de $\frac{v_{n+1}}{v_n} - 1$.

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{u_{n+1}}{u_n} \times \frac{u_{n-1}}{u_n}$$

$u_{n+1} = \frac{1-\sqrt{1-u_n}}{3}$, $u_{n-1} = 1 - (1 - 3\,u_n)^2$

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{1}{3u_n{}^2}(1-\sqrt{1-u_n})(1-(1-3\,u_n)^2) = \frac{1}{u_n}(1-\sqrt{1-u_n})(2-3\,u_n)$$

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} - 1 = \frac{1}{u_n}((1-\sqrt{1-u_n})(2-3\,u_n) - u_n).$$

Comme u_n est > 0, le signe de $\frac{v_{n+1}}{v_n} - 1$ est celui de $(1-\sqrt{1-u_n})(2-3\,u_n) - u_n$.

$0 < (1-\sqrt{1-u_n}) < 1 \Rightarrow (1-\sqrt{1-u_n})\,u_n < u_n$ et $-u_n > -(1-\sqrt{1-u_n})\,u_n$

$(1-\sqrt{1-u_n})(2-3\,u_n) - u_n > (1-\sqrt{1-u_n})(2-3\,u_n-u_n)$

$(1-\sqrt{1-u_n})(2-3\,u_n-u_n) = 4\,(1-\sqrt{1-u_n})(\frac{1}{2}-u_n) > 0$

Donc $\frac{v_{n+1}}{v_n} - 1 > 0$ et la suite $(v_n)_n$ est **croissante**.
Comme elle est majorée par $\frac{1}{3}$, elle est **convergente**.

Lorsque n tend vers l'infini, u_n tend vers 0, donc $\sqrt{1-u_n}$ est équivalent à $1 - \frac{1}{2}u_n$ et $1 - \sqrt{1-u_n}$ est équivalent à $\frac{1}{2}u_n$, donc $u_{n+1} = \frac{1-\sqrt{1-u_n}}{3}$ est équivalent à $\frac{1}{6}u_n$, donc $v_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{u_n}$ est équivalent à $\frac{1}{6}$.

La suite $(v_n)_n$ est convergente et sa limite est $\frac{1}{6}$.

Chapitre 5. Bornes, suites croissantes ou décroissantes.

Enoncés.

Exercice 11. Borne supérieure et borne inférieure d'un ensemble.

Soit $A = \{\sqrt{p} - E(\sqrt{p})\ ;\ p \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$, où $E(x)$ désigne la partie entière de x. 1°/ Montrer que A possède une borne inférieure et une borne supérieure. 2°/ Déterminer la borne inférieure de A. 3°/ Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $p_n = n^2 + 2n$. a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $E(\sqrt{p_n}) = n$. b) Déterminer $\lim_{n \to +\infty} (\sqrt{p_n} - E(\sqrt{p_n}))$. c) En déduire la valeur de la borne supérieure de A.	

Solution.

1°/ A est borné.

Pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\sqrt{p} - E(\sqrt{p})$ est la partie fractionnaire de $\sqrt{p}$: c'est un nombre compris entre 0 et 1.
En effet, par définition de la partie entière d'un nombre (plus grand entier inférieur ou égal au nombre), nous avons :

$E(\sqrt{p}) \leqslant \sqrt{p} < E(\sqrt{p}) + 1$

D'ailleurs, tout entier qui vérifie ces inégalités est égal à la partie entière de $\sqrt{p}$.

On en déduit les inégalités : $\sqrt{p} - E(\sqrt{p}) \geqslant 0$ et $\sqrt{p} - E(\sqrt{p}) < 1$, donc $A \subseteq [\,0, 1\,[$, ce qui montre que A est borné.
Or, dans $\mathbb{R}$, tout ensemble borné possède une borne inférieure et une borne supérieure, donc A possède une borne inférieureet une borne supérieure.

$A \subseteq [\,0, 1\,[$ possède une borne inférieure et une borne supérieure.

2°/ Borne inférieure de A.

Pour $p = 0$, $\sqrt{p} = 0$, $E(\sqrt{p}) = 0$, $\sqrt{p} - E(\sqrt{p}) = 0$, donc $0 \in A$.
Comme la borne inférieure de A est un minorant de A, donc de tous les éléments de A, il en résulte

Inf (*A*) $\leqslant$ 0.
D'autre part, 0 est un minorant de *A*, puisque tous les éléments de *A* sont positifs.
Donc 0 est inférieur à la borne inférieure de *A*, qui est le plus grand des minorants de *A* : 0 $\leqslant$ *Inf* (*A*).
On a donc l'égalité *Inf* (*A*) = 0.

La borne inférieure de *A* est 0.

3°/ Borne supérieure de *A*.

Comme *A* est contenu dans [0, 1 [, pour montrer que la borne supérieure de *A* est égale à 1, il suffit d'exhiber une suite d'éléments de *A* qui tend vers 1.

a) Partie entière de $\sqrt{p_n}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $p_n = n^2 + 2n$.

Donc $p_n > n^2$ et comme la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est croissante, $\sqrt{p_n} > n$.
D'autre part, $p_n = n^2 + 2n < n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2 \Rightarrow \sqrt{p_n} < n + 1$.
Finalement, on obtient : $n < \sqrt{p_n} < n + 1$, donc aussi $n \leqslant \sqrt{p_n} < n + 1$, ce qui montre, comme on l'a remarqué plus haut, que *n* est la partie entière de $\sqrt{p_n}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $E(\sqrt{p_n}) = n$.

b) $\lim_{n \to +\infty} (\sqrt{p_n} - E(\sqrt{p_n}))$.

$$\sqrt{p_n} - E(\sqrt{p_n}) = \sqrt{p_n} - n = \sqrt{n^2 + 2n} - n = n\left(\sqrt{1 + \frac{2}{n}} - 1\right).$$

Lorsque *n* tend vers l'infini, $\frac{2}{n}$ tend vers 0, donc $\sqrt{1 + \frac{2}{n}}$ est équivalent à $1 + \frac{1}{2}\frac{2}{n} = 1 + \frac{1}{n}$, et $\left(\sqrt{1 + \frac{2}{n}} - 1\right)$ est équivalent à $\frac{1}{n}$, donc $n\left(\sqrt{1 + \frac{2}{n}} - 1\right)$ tend vers 1.

$$\lim_{n \to +\infty} (\sqrt{p_n} - E(\sqrt{p_n})) = 1.$$

c) Borne supérieure de *A*.

Comme les $\sqrt{p_n} - E(\sqrt{p_n})$ sont des éléments de *A*, ils sont tous inférieurs à la borne supérieure de *A* : $\sqrt{p_n} - E(\sqrt{p_n}) \leqslant Sup\ (A)$.

Par **prolongement des inégalités par passage à la limite**, nous obtenons : $1 = \lim_{n \to +\infty} (\sqrt{p_n} - E(\sqrt{p_n})) \leqslant Sup\ (A)$.
Comme, d'autre part, 1 est un majorant de *A*, il est plus grand que la borne supérieure de *A*, qui est le plus petit des majorants de *A* : *Sup* (*A*) $\leqslant$ 1.
D'où l'égalité *Sup* (*A*) = 1.

La borne supérieure de A est 1.

Chapitre 5. Bornes, suites croissantes ou décroissantes.

Enoncés.

Exercice 12. Bornes de 4 ensembles de nombres réels.

Montrer que chacun des ensembles suivants possède une borne inférieure et une borne supérieure et les déterminer.

1°/ $X = \left\{ \frac{p+q}{2p+q+1} \; ; \; p \in \mathbb{N}^*, q \in \mathbb{N}^* \right\} \subset \mathbb{R}$.

2°/ $Y = \left\{ \frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2} - \frac{1}{pq} \; ; \; p \in \mathbb{N}^*, q \in \mathbb{N}^* \right\} \subset \mathbb{R}$.

3°/ $A = \{ x \ln x + y \ln y \; ; \; x \in \mathbb{R}_+^* , y \in \mathbb{R}_+^* , x + y = 1 \} \subset \mathbb{R}$.

4°/ $B = \{ x y \; ; \; x \in \mathbb{R}_+^* , y \in \mathbb{R}_+^* , x^2 + y^2 \leqslant 2 \} \subset \mathbb{R}$.

Solution.

1°/ Ensemble *X*.

a) Majorant, minorant.

$$\frac{p+q}{2p+q+1} = \frac{p+q}{(p+q)+(p+1)} = \frac{1}{1+\frac{p+1}{p+q}}$$

$p \in \mathbb{N}^*$ et $q \in \mathbb{N}^* \Rightarrow 2 \leqslant p+1 \leqslant p+q$

$\Rightarrow 0 < \frac{p+1}{p+q} \leqslant 1$

$\Rightarrow 1 < 1 + \frac{p+1}{p+q} \leqslant 2$

$\Rightarrow \frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{1+\frac{p+1}{p+q}} < 1$

$$\boxed{\frac{1}{2} \leqslant \frac{p+q}{2p+q+1} < 1, \forall \, p \in \mathbb{N}^*, \forall \, q \in \mathbb{N}^*.}$$

Il en résulte que l'ensemble *X* est contenu dans l'intervalle $\left[\frac{1}{2} ; 1 \right[$ de $\mathbb{R}$.

$$\boxed{X \subset [\ \tfrac{1}{2}\ ;\ 1\ [\subset \mathbb{R}.}$$

b) Existence de bornes.

Toute partie majorée de $\mathbb{R}$ possède une borne supérieure.
X est une partie de $\mathbb{R}$ majorée par 1.
X possède donc une borne supérieure.

Toute partie minorée de $\mathbb{R}$ possède une borne inférieure.
X est une partie de $\mathbb{R}$ minorée par $\frac{1}{2}$.
X possède donc une borne inférieure.

c) Calcul des bornes.

1. Borne supérieure.

Soit a un majorant de X : $\frac{p+q}{2p+q+1} \leqslant a$, $\forall\ p \in \mathbb{N}^*$, $\forall\ q \in \mathbb{N}^*$.

Pour $p = 1$, nous obtenons : $\frac{p+q}{2p+q+1} = \frac{q+1}{q+3} \leqslant a$, $\forall\ q \in \mathbb{N}^*$.

Par **conservation des inégalités par passage à la limite**, nous obtenons : $1 = \lim\limits_{q \to +\infty} \frac{q+1}{q+3} \leqslant a$.

La relation $1 \leqslant a$ montre que 1 est **le plus petit des majorants** de X : c'est donc, par définition, la **borne supérieure** de X.
Remarquons, cependant, que la relation $\frac{p+q}{2p+q+1} < 1$, $\forall\ p \in \mathbb{N}^*$, $\forall\ q \in \mathbb{N}^*$, implique qu'il n'existe aucun $p \in \mathbb{N}^*$, ni aucun $q \in \mathbb{N}^*$, tel que $\frac{p+q}{2p+q+1} = 1$, ce qui veut dire que 1 n'est pas un élément de X : X ne possède **pas de plus grand élément** (le plus grand élément d'une partie, s'il existe, est toujours borne supérieure de la partie, de sorte que s'il existe un plus grand élément, la borne supérieure est élément de la partie).

$$\boxed{Sup\ (X) = 1 \notin X.}$$

2. Borne inférieure.

Pour $q = 1$, nous obtenons : $\frac{p+q}{2p+q+1} = \frac{1}{2}$, $\forall\ p \in \mathbb{N}^*$.
Cette relation montre que $\frac{1}{2}$ est élément de X.
La relation $\frac{1}{2} \leqslant \frac{p+q}{2p+q+1}$, $\forall\ p \in \mathbb{N}^*$, $\forall\ q \in \mathbb{N}^*$, montre alors que $\frac{1}{2}$ est **le plus petit élément** de X : c'est donc la **borne inférieure** de X.

$$\boxed{Inf\ (X) = \frac{1}{2} \in X.}$$

2°/ Ensemble *Y*.

a) Majorant, minorant.

Pour $p \in \mathbb{N}^*$ et $q \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2} - \frac{1}{pq} = \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)^2 + \frac{1}{pq} > 0$$

Pour $p \in \mathbb{N}^*$, $q \in \mathbb{N}^*$ et $p \leqslant q$:

$$\frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2} - \frac{1}{pq} = \frac{1}{p^2} - \frac{q-p}{pq^2} \leqslant \frac{1}{p^2} \leqslant 1$$

Pour $p \in \mathbb{N}^*$, $q \in \mathbb{N}^*$ et $q \leqslant p$:

$$\frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2} - \frac{1}{pq} = \frac{1}{q^2} - \frac{p-q}{qp^2} \leqslant \frac{1}{q^2} \leqslant 1$$

Dans tous les cas, nous avons :

$$\boxed{0 < \frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2} - \frac{1}{pq} \leqslant 1, \forall\, p \in \mathbb{N}^*, \forall\, q \in \mathbb{N}^*.}$$

Il en résulte que l'ensemble Y est contenu dans l'intervalle] 0 ; 1] de $\mathbb{R}$.

$$\boxed{Y \subset]\,0\,;\,1\,] \subset \mathbb{R}.}$$

b) Existence de bornes.

Toute partie majorée de $\mathbb{R}$ possède une borne supérieure.
Y est une partie de $\mathbb{R}$ majorée par 1.
Y possède donc une borne supérieure.

Toute partie minorée de $\mathbb{R}$ possède une borne inférieure.
Y est une partie de $\mathbb{R}$ minorée par 0.
Y possède donc une borne inférieure.

c) Calcul des bornes.

1. Borne supérieure.

Pour $p = q = 1$, nous obtenons $\frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2} - \frac{1}{pq} = 1$.
Cette relation montre que 1 est élément de X.
La relation $\frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2} - \frac{1}{pq} \leqslant 1, \forall\, p \in \mathbb{N}^*, \forall\, q \in \mathbb{N}^*$, montre alors que 1 est **le plus grand élément** de X : c'est donc la **borne supérieure** de X.

$$\boxed{Sup\,(X) = 1 \in X.}$$

2. Borne inférieure.

Soit a un minorant de X : $a \leqslant \frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2} - \frac{1}{pq}$, $\forall\, p \in \mathbb{N}^*$, $\forall\, q \in \mathbb{N}^*$.

Pour $p = q$, nous obtenons : $a \leqslant \frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2} - \frac{1}{pq} = \frac{1}{p^2}$, $\forall\, p \in \mathbb{N}^*$.

Par **conservation des inégalités par passage à la limite**, nous obtenons : $a \leqslant \lim\limits_{p \to +\infty} \frac{1}{p^2} = 0$.

La relation $a \leqslant 0$ montre que 0 est **le plus grand des majorants** de X : c'est donc, par définition, la **borne inférieure** de X.
Remarquons, cependant, que la relation $0 < \frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2} - \frac{1}{pq}$, $\forall\, p \in \mathbb{N}^*$, $\forall\, q \in \mathbb{N}^*$, implique qu'il n'existe aucun $p \in \mathbb{N}^*$, ni aucun $q \in \mathbb{N}^*$, tel que $\frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2} - \frac{1}{pq} = 0$, ce qui veut dire que 0 n'est pas un élément de X : X ne possède **pas de plus petit élément** (le plus petit élément d'une partie, s'il existe, est toujours borne inférieure de la partie, de sorte que s'il existe un plus petit élément, la borne inférieure est élément de la partie).

$$\boxed{Inf\,(X) = 0 \notin X.}$$

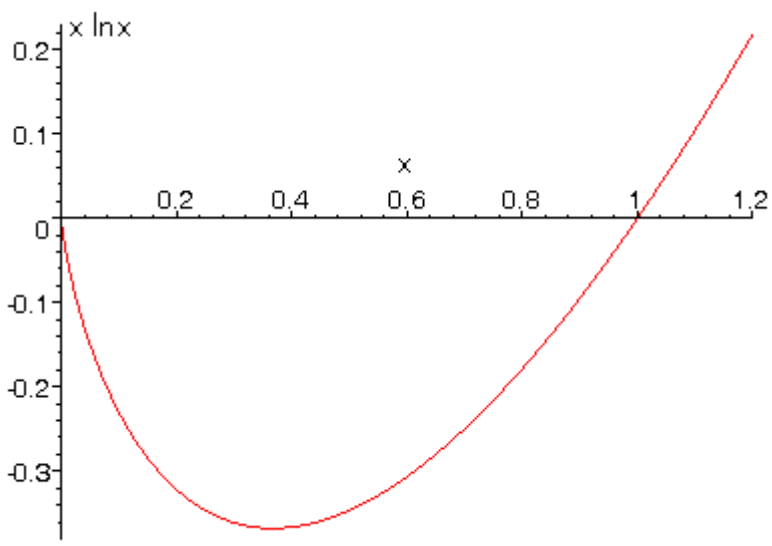
3°/ Ensemble *A*.

a) Limite de *x ln x* lorsque *x* tend vers 0.

Appelons f l'application de $\mathbb{R}_+^*$ dans R qui, à $x \in \mathbb{R}_+^*$, fait correspondre le nombre réel $x \ln x$.

Produit d'applications continues et dérivables, f est continue et dérivable.
La dérivée de f en $x \in \mathbb{R}_+^*$, est $f'(x) = \ln x + 1$.

Cette dérivée est nulle pour $\ln x = -1$, $x = e^{-1}$.
La dérivée est négative pour $\ln x < -1$, positive pour $\ln x > -1$.
Comme la fonction logarithme est une fonction strictement croissante, la dérivée est négative pour $x < e^{-1}$, positive pour $x > e^{-1}$.
Lorsque x tend vers 0, par valeurs supérieures, la dérivée $\ln x + 1$ tend vers $-\infty$.
La dérivée seconde de f est $f''(x) = \frac{1}{x} > 0$, donc la dérivée f' est strictement croissante.



Les valeurs de $x \ln x$, lorsque x est compris entre 0 et e^{-1}, sont négatives : comme f est monotone et continue, ces valeurs forment un intervalle I contenu dans l'intervalle $[\, f(e^{-1}) = -e^{-1} ; 0\, [$.
I est un intervalle borné : il possède une borne supérieure $\lambda \leqslant 0$.
Cette borne supérieure λ est la limite, lorsque x tend vers 0, de $f(x) = x \ln x$.

λ est aussi la limite de $f(x^2)$ lorsque x tend vers 0.
On a donc :

$$\lambda = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} (x \ln x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} (x^2 \ln (x^2))$$

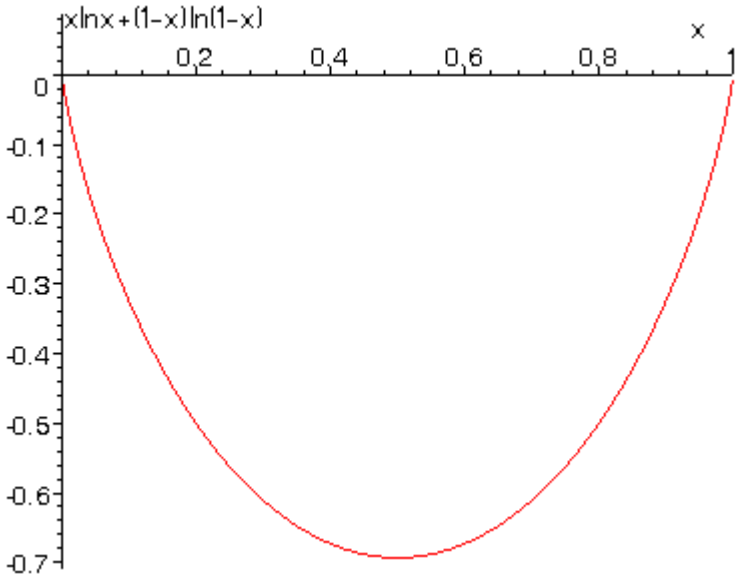
$= 2 \lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} x \lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} (x \ln x) = 0 \; \lambda = 0$

$$\boxed{\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} (x \ln x) = 0.}$$

En changeant x en $1 - x$, on obtient :

$$\boxed{\lim_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} [(1 - x) \ln (1 - x)] = 0.}$$

b) Bornes de *A*.



A est l'image de l'intervalle] 0 ; 1 [par l'application continue f définie sur [0 ; 1] par :

$$f(x) = x \ln x + (1 - x) \ln (1 - x),$$
$$f(0) = f(1) = 0.$$

L'image d'un intervalle par une application continue est un intervalle.
L'image d'un compact par une application continue est un compact.

L'image de [0, 1] par f est donc un intervalle compact, c'est-à-dire un intervalle fermé et borné.
Comme toutes les valeurs de f sont négatives, cet intervalle fermé borné est contenu dans l'intervalle [0 ; – ∞ [.

f est symétrique par rapport à $\frac{1}{2}$ car si l'on change x en $1 - x$, $f(x)$ ne change pas :

$$f(x) = f(1 - x).$$

La dérivée de f est $f'(x) = \ln x + 1 - \ln (1 - x) - 1 = \ln x - \ln (1 - x)$.
La dérivée seconde est $f''(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} > 0$, donc la dérivée est strictement croissante.
La limite de la dérivée lorsque x tend vers 0 est – ∞ .
La limite de la dérivée lorsque x tend vers 1 est + ∞ .
Comme elle est strictement croissante entre 0 et 1, la dérivée s'annule une seule fois entre 0 et 1.
Comme elle est nulle pour $x = \frac{1}{2}$, ce point est un minimum de f et A est l'intervalle [$f(\frac{1}{2}) = - \ln 2$; 0 [.

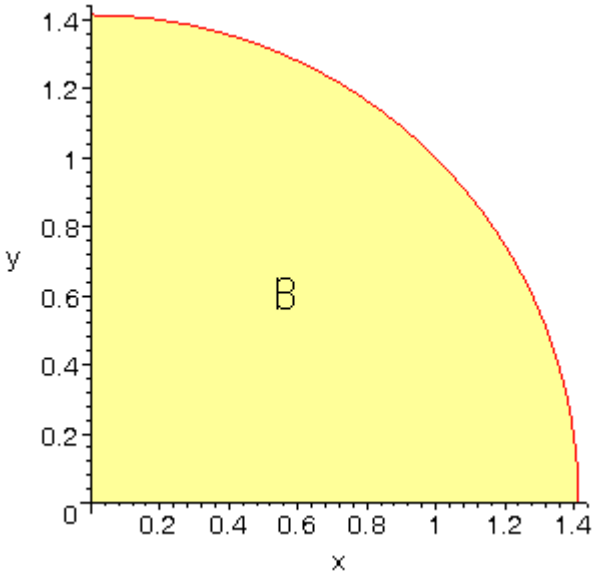
$$\boxed{A = [- \ln 2 ; 0 [.}$$

Ce résultat montre que *A* possède

- un plus petit élément qui est – *ln* 2, qui est aussi sa borne inférieure,
- une borne supérieure qui est 0.

4°/ Ensemble *B*.

a) *B* est borné.



L'ensemble $C \subset \mathbb{R}^2$ défini par les couples (x, y) vérifiant : $x \in \mathbb{R}_+^*$, $y \in \mathbb{R}_+^*$, $x^2 + y^2 \leqslant 2$, est borné et connexe.

B est l'image de *C* par l'application continue
$f : (x, y) \mapsto x\,y$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

L'image d'un connexe borné par une application continue est un connexe borné.
Un connexe borné de $\mathbb{R}$ est un intervalle.
B est un intervalle.
B possède donc une borne supérieure et une borne inférieure, qui sont les limites de l'intervalle.

b) Bornes de *B*.

Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $y \in \mathbb{R}_+^*$, le produit $x\,y$ est strictement positif, donc 0 est un **minorant strict** de *B*.

Or 0 est la limite du produit $x\,y$, lorsque (x, y) tend vers (0, 0) en restant dans *C*.
Donc 0 est le plus grand minorant de *B* : c'est la borne inférieure de *B*.

Lorsque $(x, y) \in C$, la différentielle de *f* est $y\,dx + x\,dy$.
Elle n'est jamais nulle sur *C* : *f* n'a donc pas d'extremum libre à l'intérieur de *C*.
La valeur maximum de *f* est donc atteinte sur la frontière de *C*.
Sur les axes, *f* est nulle.
Le maximum de *f* dans *C* est donc atteint sur le quart de cercle d'équation $x^2 + y^2 = 2$, avec $x > 0$ et $y > 0$.

$f(x, y) = x\,y$ maximum et $x^2 + y^2 = 2 \Rightarrow x^2 + y^2 - 2\,x\,y$ minimum, soit $(x - y)^2$ minimum, donc $x = y = 1$.
La borne supérieure de *B* est donc atteinte pour $x = y = 1$: c'est 1.

B =] 0, 1] a pour borne inférieure 0 et pour borne supérieure 1.

SUITES DE NOMBRES REELS

EXERCICE 1.

1. Soit a un nombre réel strictement positif. On définit par récurrence une suite de nombres réels au moyen de :

$$u_0 > 0 \quad \text{et} \qquad u_{n+1} = \frac{1}{2}\left[\, u_n + \frac{a}{u_n} \,\right].$$

Démontrer que l'on a : $u_{n+1} - \sqrt{a} = \dfrac{(u_n - \sqrt{a})^2}{2u_n}$ (1)

En déduire que la suite u_0 , u_1 , … , u_n , … est décroissante soit dès le début, soit à partir de u_1 selon la valeur de u_0. Montrer que la suite (u_n) a une limite finie que l'on calculera.

2. On prend $a = u_0 = 2$. Calculer u_1 , u_2 , u_3 , u_4 , sous forme de fractions. Montrer que u_3 approche $\sqrt{2}$ à 10^{-4} près et que u_4 approche $\sqrt{2}$ à 10^{-8} près. Calculer u_3 avec 4 décimales, u_4 avec 8 décimales.

3. On prend toujours $a = u_0 = 2$. On définit par récurrence deux suites (a_n) et (b_n) de nombres entiers au moyen de $a_1 = 3$, $b_1 = 2$, et

$a_{n+1} = a_n^2 + 2\, b_n^2$

$b_{n+1} = 2\, a_n\, b_n$

Montrer que, pour $n \geq 1$, on a $u_n = \dfrac{a_n}{b_n}$. Montrer que $a_n^2 = 2\, b_n^2 + 1$ et que a_n et b_n sont premiers entre eux. Etablir une relation de récurrence entre $(a_{n+1} - b_{n+1}\sqrt{2})$ et $(a_n - b_n\sqrt{2})$. Comparer avec (1). En déduire une relation explicite de $a_n + b_n\sqrt{2}$ et en déduire de formules donnant a_n , b_n et u_n .

4. On revient au cas général $a > 0$ quelconque. Construire la courbe représentative de $y = \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{a}{x} \right)$ et inerpréter géométriquement les résultats du 1°. Par quelle transformation géométrique simple les courbes (C_a) se déduisent-elles de l'une d'entre elles ? Forme de la courbe $y = \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{b}{x} \right)$, $b < 0$?

5. Former une relation indépendante de a entre y et y' $\left[\, \text{équation } y = \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{a}{x} \right) \,\right]$. Retrouver sur celle-ci le lieu des points où la tangente à (C_a) est parallèle à Ox. Que donne la recherche au moyen de l'équation $y = \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{a}{x} \right)$ du lieu des points d'inflexion des courbes (C_a). Expliquer.

EXERCICE 2.

Soient a et b deux constantes données telles que $0 < a < b$. On forme les quantités : $a_1 = \sqrt{ab}$, $b_1 = \frac{a+b}{2}$, puis $a_2 = \sqrt{a_1 b_1}$, $b_2 = \frac{a_1+b_1}{2}$, et, d'une façon générale, $a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$, $b_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$.

1. Montrer que la suite (a_n) est croissante, que la suite (b_n) est décroissante, et que la suite (a_n) est plus petite que la suite (b_n).
2. Montrer que $a_p < b_q$, quels que soient p et q strictement positifs. Etablir que les suites de termes généraux a_n et b_n sont adjacentes. Soit $m(a,b)$ la limite commune, appelée ***moyenne arithmético-géométrique*** de a et b, que l'on ne cherchera pas à calculer.
3. On pose $\rho_n = \sqrt{\frac{a_n}{b_n}}$. Exprimer ρ_{n+1} en fonction de ρ_n . En utilisant cette expression, établir l'inégalité suivante :

$$\frac{{b_{n+1}}^2 (b_{n+1} - a_{n+1})}{(b_{n+1} + a_{n+1})^3} < \left[\frac{{b_n}^2 (b_n - a_n)}{(b_n + a_n)^3} \right]^2 .$$

Déduire de cette inégalité une estimation de l'erreur relative que l'on commet en prenant a_n comme valeur approchée de $m(a,b)$, estimation qui est de la forme $4 \left[\frac{b^2(b-a)}{(b+a)^3} \right]^{2^n}$.

EXERCICE 3.

On considère les quatre suites de termes généraux u_n , v_n , x_n , y_n , définies par les relations suivantes :

$u_0 = v_0 = 1$; $2\,n\,u_n = (2\,n-1)\,u_{n-1}$; $(2\,n+1)\,v_n = 2\,n\,v_{n-1}$; $x_n\,v_n = u_n$; $y_n\,v_n = u_{n+1}$.

1. Montrer que les suites de termes généraux u_n et v_n sont convergentes.
2. Montrer que les suites de termes généraux respectifs x_n et y_n sont convergentes et qu'elles ont la même limite λ.
3. Calculer une valeur approchée de λ à 0,05 près.
4. Calculer, en fonction de n la valeur du produit $u_n\,v_n$. En déduire que les deux expressions $n\,{v_n}^2$ et $n\,{u_n}^2$ ont des limites que l'on calculera. En déduire les limites de u_n et v_n .
5. Démontrer que $C_{2n}^{n} = 4^n\,u_n$. Etudier, quand n tend vers l'infini, l'expression :

$$w_n = \frac{n \left[C_{2n}^{n} \right]^2}{16^n}.$$

En déduire un infiniment grand équivalent à C_{2n}^{n} .

EXERCICE 4.

On considère la suite (u_n) telle que :

$$2\,u_0 = 1$$
$$2\,u_1 - 3\,u_0 = a$$
$$2\,u_2 - 3\,u_1 + u_0 = a^2$$
$$\dots$$
$$2\,u_n - 3\,u_{n-1} + u_{n-2} = a^n$$

où a est un nombre réel quelconque.

1. Calculer en fonction de n et de a :

   $v_n = 2\,u_n - u_{n-1}$

   $w_n = u_n - u_{n-1}$.

Etudier les deux suites v_n et w_n .

2. Calculer u_n en fonction de n. Etudier la nature de la suite de terme général u_n et calculer éventuellement sa limite. Cas particuliers : $a = 1$; $a = \frac{1}{2}$.

EXERCICE 5.

Soient a et b deux nombres réels vérifiant $0 < b < a$.

On définit deux suites $(u_n)_{n \geq 0}$ et $(v_n)_{n \geq 0}$ de nombres réels par la donnée de leurs premiers termes u_0 et v_0 tels que $0 < u_0 < v_0$, et des relations de récurrence :

$$u_{n+1} = \frac{a\,u_n + b\,v_n}{a+b} \qquad \text{et} \qquad v_{n+1} = \frac{b\,u_n + a\,v_n}{a+b}$$

2.1. Montrer que, pour tout entier $n \geq 0$, $v_n - u_n$ est strictement plus grand que 0. En déduire que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est croissante et que la suite $(v_n)_{n \geq 0}$ est décroissante.

2.2. Montrer que les suites $(u_n)_{n \geq 0}$ et $(v_n)_{n \geq 0}$ sont convergentes et ont la même limite ℓ que l'on calculera.

EXERCICE 6.

1. On considère la fonction f de la variable réelle t définie par

$$f(t) = \frac{t}{1+t} - \ln(1+t) \qquad \text{pour } t > -1$$

a) Montrer que la fonction f est décroissante pour $t \geq 0$.

b) En déduire le signe de $f(t)$ pour $t \geq 0$.

2. On considère la fonction g de la variable réelle x définie par

$$g(x) = \frac{1}{e^x} \ln(1+e^x)$$

a) Calculer $\lim_{x\to+\infty} g(x)$ et $\lim_{x\to-\infty} g(x)$.

b) Calculer la dérivée de $g(x)$ et l'exprimer en fonction de $f(e^x)$.

c) En déduire les variations de la fonction g.

d) Tracer la courbe représentative de la fonction g (on ne cherchera pas à démontrer l'existence de point d'inflexion et on prendra $\ln 2 = 0{,}69$.

3. a) Montrer que $g(x)$ vérifie l'équation (E) :

$$g'(x) + g(x) = \frac{1}{1+e^x}.$$

b) On pose

$$g(x) = a + b\,x + c\,x^2 + d\,x^3 + x^3\,\varepsilon(x), \text{ avec } \lim_{x\to0} \varepsilon(x) = 0.$$

Calculer a. En utilisant l'équation (E), calculer les coefficients b, c, d. En déduire les valeurs de $g''(0)$ et de $g'''(0)$. Préciser la forme de la courbe au voisinage de $x = 0$.

4. Soit a un nombre réel.

a) Calculer $\int_0^a \frac{dt}{1+e^t}$ (on pourra faire un changement de variable).

b) On pose $G(a) = \int_0^a g(x)\,dx$.

De l'équation (E), déduire que $g(a) - g(0) + G(a) = \int_0^a \frac{dx}{1+e^x}$ et donner la valeur de $G(a)$.

5. On pose

$$u_n = \frac{1}{e}\ln(1+e) + \frac{1}{e^2}\ln(1+e^2) + \ldots + \frac{1}{e^n}\ln(1+e^n).$$

Comparer u_n et $G(n)$.

Montrer que la suite u_n est convergente et que sa limite est inférieure ou égale à $2\ln 2$.

EXERCICE 7.

Soient *a, b, c,* des nombres réels (ou complexes). On considère une suite $(u_n)_{n \geq 0}$ de nombres réels (ou complexes) définie par récurrence par la donnée des deux premiers termes u_0 et u_1 et de la relation de récurrence:

$$u_{n+2} = a\, u_{n+1} + b\, u_n$$

1. On suppose $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$, calculer u_n en fonction de *a, b , n*. On notera $P_n\,(a,b)$ la solution u_n obtenue. Montrer que la solution $P_n\,(a,b)$ est un polynôme en *a* et *b* qu'on peut obtenir à partir du triangle de Pascal des développements des puissances successives de $(a + b)$, en prenant les diagonales ascendantes de ce triangle. Calculer $P_n\,(a,b)$ en fonction des racines de l'équation $x^2 = a\,x + b$.
2. On suppose maintenant u_0 et u_1 quelconques. Calculer u_n en fonction de u_0 , u_1 , b , $P_n\,(a,b)$, $P_{n-1}\,(a,b)$.
3. On considère une suite $(u_n)_{n \geq 0}$ de nombres réels (ou complexes) définie par récurrence par la donnée des deux premiers termes u_0 et u_1 et de la relation de récurrence :

   $$u_{n+2} = a\, u_n + b\, u_{n+1} + c$$

   Calculer u_n en fonction de u_0 , u_1 , $P_n\,(a,b)$, $P_{n-1}\,(a,b)$, b, c.
4. Pour *a, b,* réels, étudier, dans le plan (a,b), la convergence de la suite $(P_n\,(a,b))_{n \geq O}$.
5. Pour *a, b, c,* réels, étudier, dans le plan (a,b), la convergence de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie dans la question 3, suivant les valeurs de *c*.
6. Démontrer, par l'étude des polynômes $P_n\,(a,b)$, les formules :

6.1. $\displaystyle\prod_{k=1}^{k=n} \cos \frac{k\pi}{n+1} = \frac{1}{2^n} \sin (n+1)\frac{\pi}{2}$

6.2. $\displaystyle\prod_{k=1}^{k=n} \sin \frac{k\pi}{n+1} = \frac{n+1}{2^n}$

6.3. $\displaystyle\prod_{k=1}^{k=n} \cos \frac{(2k-1)\pi}{2n} = \frac{1}{2^{n-1}} \cos n\frac{\pi}{2}$

6.4. $\displaystyle\prod_{k=1}^{k=n} \sin \frac{(2k-1)\pi}{2n} = \frac{1}{2^{n-1}}$

6.5. $\displaystyle\prod_{k=1}^{k=n} \cos \frac{k\pi}{2(n+1)} = \frac{\sqrt{n+1}}{2^n}$

6.6. $\displaystyle\prod_{k=1}^{k=n} \sin \frac{k\pi}{2(n+1)} = \frac{\sqrt{n+1}}{2^n}$

6.7. $\displaystyle\prod_{k=1}^{k=n} \cos \frac{(2k-1)\pi}{4n} = \frac{\sqrt{2}}{2^n}$

6.8. $\displaystyle\prod_{k=1}^{k=n} \sin \frac{(2k-1)\pi}{4n} = \frac{\sqrt{2}}{2^n}$

6.9. $\displaystyle\prod_{k=1}^{k=n} \cos \frac{k\pi}{2n+1} = \frac{1}{2^n}$

6.10. $\displaystyle\prod_{k=1}^{k=n} \sin \frac{k\pi}{2n+1} = \frac{\sqrt{2n+1}}{2^n}$

6.11. $\displaystyle\prod_{k=1}^{k=n} \cos \frac{(2k-1)\pi}{2(2n+1)} = \frac{\sqrt{2n+1}}{2^n}$

6.12. $\displaystyle\prod_{k=1}^{k=n} \sin \frac{(2k-1)\pi}{2(2n+1)} = \frac{1}{2^n}$

EXERCICE 1.

1. Soit a un nombre réel strictement positif. On définit par récurrence une suite de nombres réels au moyen de :

$$u_0 > 0 \qquad \text{et} \qquad u_{n+1} = \frac{1}{2}\left[\ u_n + \frac{a}{u_n}\ \right].$$

Démontrer que l'on a : $u_{n+1} - \sqrt{a} = \dfrac{(u_n - \sqrt{a})^2}{2u_n}$ (1)

En déduire que la suite u_0 , u_1 , … , u_n , … est décroissante soit dès le début, soit à partir de u_1 selon la valeur de u_0. Montrer que la suite (u_n) a une limite finie que l'on calculera.

2. On prend $a = u_0 = 2$. Calculer u_1 , u_2 , u_3 , u_4 , sous forme de fractions. Montrer que u_3 approche $\sqrt{2}$ à 10^{-4} près et que u_4 approche $\sqrt{2}$ à 10^{-8} près. Calculer u_3 avec 4 décimales, u_4 avec 8 décimales.

3. On prend toujours $a = u_0 = 2$. On définit par récurrence deux suites (a_n) et (b_n) de nombres entiers au moyen de $a_1 = 3$, $b_1 = 2$, et
$a_{n+1} = a_n^2 + 2\,b_n^2$
$b_{n+1} = 2\,a_n\,b_n$

Montrer que, pour $n \geq 1$, on a $u_n = \dfrac{a_n}{b_n}$. Montrer que $a_n^2 = 2\,b_n^2 + 1$ et que a_n et b_n sont premiers entre eux.

Etablir une relation de récurrence entre $(a_{n+1} - b_{n+1}\sqrt{2})$ et $(a_n - b_n\sqrt{2})$. Comparer avec (1). En déduire une relation explicite de $a_n + b_n\sqrt{2}$ et en déduire de formules donnant a_n , b_n et u_n .

4. On revient au cas général $a > 0$ quelconque. Construire la courbe représentative de $y = \dfrac{1}{2}\left(\ x + \dfrac{a}{x}\ \right)$ et inerpréter géométriquement les résultats du 1°. Par quelle transformation géométrique simple les courbes (C_a) se déduisent-elles de l'une d'entre elles ? Forme de la courbe $y = \dfrac{1}{2}\left(\ x + \dfrac{b}{x}\ \right)$, $b < 0$?

5. Former une relation indépendante de a entre y et y' $\left[\ \text{équation } y = \dfrac{1}{2}\left(\ x + \dfrac{a}{x}\ \right)\ \right]$. Retrouver sur celle-ci le lieu des points où la tangente à (C_a) est parallèle à Ox. Que donne la recherche au moyen de l'équation $y = \dfrac{1}{2}\left(\ x + \dfrac{a}{x}\ \right)$ du lieu des points d'inflexion des courbes (C_a). Expliquer.

SOLUTION.

1° Etude de la suite u_n .

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\left[\ u_n + \frac{a}{u_n}\ \right] = \frac{u_n^2 + a}{2u_n}$$

$$\Rightarrow \qquad u_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{u_n^2 + a}{2u_n} - \sqrt{a} = \frac{u_n^2 - 2u_n\sqrt{a} + a}{2u_n} = \frac{(u_n - \sqrt{a})^2}{2u_n}$$

$$\boxed{u_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{(u_n - \sqrt{a})^2}{2u_n}}$$

Par hypothèse, u_0 est strictement plus grand que zéro. Supposons u_n strictement plus grand que zéro. Alors u_{n+1} , donné par la formule $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2 + a}{2u_n}$, avec $a > 0$, est aussi un nombre strictement plus grand que zéro.

$$\boxed{\forall\, n \geq 0,\ u_n > 0}$$

Pour tout $n \geq 0$, $(u_n - \sqrt{a})^2$ est un nombre positif, $2\,u_n$ est strictement plus grand que zéro, donc le rapport $\dfrac{(u_n - \sqrt{a})^2}{2u_n}$ est positif et pour tout $n \geq 0$, la différence $u_{n+1} - \sqrt{a}$ est positive.

$$\boxed{\forall\, n \geq 0,\ u_{n+1} \geq \sqrt{a}}$$

La suite u_n est minorée par $\sqrt{a}$, au moins à partir de $n = 1$.

Même si u_0 est inférieur à $\sqrt{a}$, $u_1 - \sqrt{a} = \dfrac{(u_0 - \sqrt{a})^2}{2u_0}$ est positif et u_1 est supérieur à $\sqrt{a}$.

$$u_{n+1} - u_n = \frac{{u_n}^2 + a}{2u_n} - u_n = \frac{a - {u_n}^2}{2u_n} \leq 0\ ,\ \forall n \geq 1.$$

$\Rightarrow \qquad \forall n \geq 1,\ u_{n+1} \leq u_n$.

A partir de u_1, la suite est toujours décroissante.

Si u_0 est supérieur à $\sqrt{a}$, $a - {u_0}^2$ est négatif et $u_1 - u_0 = \dfrac{a - {u_0}^2}{2u_0}$ est négatif, donc u_1 est inférieur à u_0.

La suite est décroissante à partir de u_0 si u_0 est supérieur à $\sqrt{a}$, à partir de u_1 si u_0 est inférieur à $\sqrt{a}$.

Comme la suite u_n est décroissante et minorée par $\sqrt{a}$, elle admet une limite λ qui est sa borne inférieure et qui vérifie : $\lambda = \dfrac{1}{2}\left(\lambda + \dfrac{a}{\lambda} \right)$, soit $2\,\lambda^2 = \lambda^2 + a$, ou $\lambda^2 = a$. Comme la suite est minorée par $\sqrt{a}$, sa borne inférieure λ est supérieure ou égale à $\sqrt{a}$, donc positive et la seule racine acceptable de l'équation $\lambda^2 = a$ est $\sqrt{a}$.

La limite de la suite u_n est $\lambda = \sqrt{a}$.

2° Calcul des premiers termes de la suite.

Pour $a = 2$ et $u_0 = a = 2$, il vient, avec la formule $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{a}{u_n} \right)$:

$$u_1 = \frac{1}{2}\left(u_0 + \frac{a}{u_0} \right) = \frac{1}{2}\left(2 + \frac{2}{2} \right) = \frac{3}{2}$$

$$u_2 = \frac{1}{2}\left(u_1 + \frac{a}{u_1} \right) = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} + \frac{2}{\frac{3}{2}} \right) = \frac{17}{12}$$

$$u_3 = \frac{1}{2}\left(u_2 + \frac{a}{u_2} \right) = \frac{1}{2}\left(\frac{17}{12} + \frac{2}{\frac{17}{12}} \right) = \frac{17^2 + 2 \times 12^2}{2 \times 12 \times 17} = \frac{577}{408}$$

$$u_4 = \frac{1}{2}\left(u_3 + \frac{a}{u_3} \right) = \frac{1}{2}\left(\frac{577}{408} + \frac{2}{\frac{577}{408}} \right) = \frac{577^2 + 2 \times 408^2}{2 \times 408 \times 577} = \frac{665\,857}{470\,832}$$

$$u_3 - \sqrt{2} = \frac{(u_2 - \sqrt{2})^2}{2u_2} = \frac{\left(\frac{17}{12} - \sqrt{2}\right)^2}{2 \times \frac{17}{12}} = \frac{\left(\sqrt{289} - \sqrt{288}\right)^2}{2 \times 12 \times 17} = \frac{12}{17}\left(\sqrt{\frac{289}{288}} - 1 \right)^2$$

$$\sqrt{\frac{289}{288}} = \left(1 + \frac{1}{288} \right)^{\frac{1}{2}} \approx 1 + \frac{1}{576} \Rightarrow \left(\sqrt{\frac{289}{288}} - 1 \right)^2 \approx \frac{1}{576^2} \Rightarrow u_3 - \sqrt{2} \approx \frac{12}{17 \times 576^2} = \frac{1}{470\ 016} < 10^{-5}$$

$$u_4 - \sqrt{2} = \frac{(u_3 - \sqrt{2})^2}{2u_3} = \frac{\left(\frac{577}{408} - \sqrt{2}\right)^2}{2 \times \frac{577}{408}} = \frac{408}{577}\left(\sqrt{\frac{332929}{332928}} - 1 \right)^2 \approx \frac{408}{577 \times 665856^2} = \frac{1}{627\ 012\ 624\ 384}$$

$u_4 - \sqrt{2} < 10^{-11}$
On peut donc dire que :

u_3 approche $\sqrt{2}$ à 10^{-5} près et u_4 approche $\sqrt{2}$ à 10^{-11} près.

L'approximation est donc, en fait, encore meilleure que celle qui est annoncée par l'énoncé du problème.

$$u_3 = \frac{577}{408} = 1,414\ 22\ldots \quad u_4 = \frac{665\ 857}{470\ 832} = 1,414\ 213\ 562\ 37\ldots$$

3° Etude des suites a_n et b_n .

Pour n= 1, on a, par hypothèse, $a_1 = 3$ et $b_1 = 2$, donc $\frac{a_1}{b_1} = \frac{3}{2} = u_1$.

Supposons que pour un $n \geq 1$, on ait $u_n = \frac{a_n}{b_n}$. On a alors :

$$\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} = \frac{a_n^2 + 2b_n^2}{2a_n b_n} = \frac{1}{2}\left(\frac{a_n}{b_n} + \frac{2}{\frac{a_n}{b_n}} \right) = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n} \right) = u_{n+1}$$

Le principe de récurrence montre alors que

pour tout entier n supérieur ou égal à 1, $u_n = \frac{a_n}{b_n}$.

Pour n = 1, on a : $a_1 = 3$ et $b_1 = 2$, par hypothèse. La relation $3^2 = 2 \times 2^2 + 1$ montre que l'on a : $a_1^2 = 2\ b_1^2 + 1$.
Supposons que l'on ait, pour un entier $n \geq 1$: $a_n^2 = 2\ b_n^2 + 1$. On a alors :

$$a_{n+1}^2 = (a_n^2 + 2\ b_n^2)^2 = (4\ b_n^2 + 1)^2 = 16\ b_n^4 + 8\ b_n^2 + 1 = 8\ b_n^2\ (2\ b_n^2 + 1) + 1 = 8\ b_n^2\ a_n^2 + 1 = 2\ (2\ a_n\ b_n)^2 + 1$$

$$a_{n+1}^2 = 2\ b_{n+1}^2 + 1$$

L'hypothèse de récurrence est donc vérifiée aussi quand on remplace n par n + 1. Le principe de récurrence permet alors d'affirmer que

la relation $a_n^2 = 2\ b_n^2 + 1$ est vraie pour tout entier $n \geq 1$.

Soit p un facteur premier de b_n , $p > 1$. Le nombre p divise b_n donc divise $2\ b_n^2$:

$$b_n \equiv 0\ [\ p\ ] \Rightarrow 2\ b_n^2 \equiv 0\ [\ p\ ] \Rightarrow a_n^2 = 2\ b_n^2 + 1 \equiv 1\ [\ p\ ] \Rightarrow a_n \text{ n'est pas divisible par } p.$$

Il en résulte que a_n et b_n n'ont aucun facteur premier commun strictement plus grand que 1. Ils sont premiers entre eux.

Pour tout entier $n \geq 1$, a_n et b_n sont premiers entre eux.

La relation de définition $a_{n+1} = a_n^2 + 2\, b_n^2$ peut s'écrire :

$$a_{n+1} = (a_n - b_n \sqrt{2})^2 + 2\, a_n\, b_n \sqrt{2} = (a_n - b_n \sqrt{2})^2 + b_{n+1} \sqrt{2}$$

$$a_{n+1} - b_{n+1} \sqrt{2} = (a_n - b_n \sqrt{2})^2$$

Cette relation peut aussi s'écrire :

$$b_{n+1} \left(\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} - \sqrt{2} \right) = b_n^2 \left(\frac{a_n}{b_n} - \sqrt{2} \right)^2$$

$$u_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} - \sqrt{2} = \frac{b_n^2}{b_{n+1}} \left(\frac{a_n}{b_n} - \sqrt{2} \right)^2 = \frac{b_n^2}{2a_n b_n} (u_n - \sqrt{2})^2 = \frac{(u_n - \sqrt{2})^2}{2u_n}$$

$$u_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{(u_n - \sqrt{2})^2}{2u_n}$$

C'est la relation (1) : $u_{n+1} - \sqrt{a} = \dfrac{(u_n - \sqrt{a})^2}{2u_n}$ trouvée dans la première question, appliquée au cas où $a = 2$.

La relation $a_{n+1} - b_{n+1} \sqrt{2} = (a_n - b_n \sqrt{2})^2$ donne, par récurrence :

$$a_n - b_n \sqrt{2} = (a_1 - b_1 \sqrt{2})^{2^{n-1}} \quad , \forall\, n \geq 1$$

En effet, la formule est vraie pour $n = 1$, où elle se réduit à $a_1 - b_1 \sqrt{2} = (a_1 - b_1 \sqrt{2})^1$. Si elle est vraie pour un entier $n \geq 1$, alors la relation $a_{n+1} - b_{n+1} \sqrt{2} = (a_n - b_n \sqrt{2})^2$ s'écrit

$$a_{n+1} - b_{n+1} \sqrt{2} = ((a_1 - b_1 \sqrt{2})^{2^{n-1}})^2 = (a_1 - b_1 \sqrt{2})^{2^{n-1}} \times (a_1 - b_1 \sqrt{2})^{2^{n-1}} = (a_1 - b_1 \sqrt{2})^{2^n}$$

et la relation est vraie pour $n + 1$. Elle est donc valable pour tout $n \geq 1$.

La relation $a_n^2 = 2\, b_n^2 + 1$ peut s'écrire : $a_n^2 - 2\, b_n^2 = 1$ ou $(a_n + b_n \sqrt{2})(a_n - b_n \sqrt{2}) = 1$. On en déduit :

$$a_n + b_n \sqrt{2} = \frac{1}{a_n - b_n \sqrt{2}} = \frac{1}{(a_1 - b_1 \sqrt{2})^{2^{n-1}}} = (a_1 + b_1 \sqrt{2})^{2^{n-1}}$$

$$a_n + b_n \sqrt{2} = (a_1 + b_1 \sqrt{2})^{2^{n-1}} \quad , \forall\, n \geq 1.$$

Des relations :

$$a_n - b_n \sqrt{2} = (a_1 - b_1 \sqrt{2})^{2^{n-1}}$$

$$a_n + b_n \sqrt{2} = (a_1 + b_1 \sqrt{2})^{2^{n-1}}$$

on tire, par addition :

$$a_n = \frac{1}{2} \left[(a_1 - b_1 \sqrt{2})^{2^{n-1}} + (a_1 + b_1 \sqrt{2})^{2^{n-1}} \right]$$

$$\boxed{a_n = \frac{1}{2}\left[(3-2\sqrt{2})^{2^{n-1}} + (3+2\sqrt{2})^{2^{n-1}} \right]}$$

Par soustraction :

$$b_n = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[(a_1 + b_1\sqrt{2})^{2^{n-1}} - (a_1 - b_1\sqrt{2})^{2^{n-1}} \right]$$

$$\boxed{b_n = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[(3+2\sqrt{2})^{2^{n-1}} - (3-2\sqrt{2})^{2^{n-1}} \right]}$$

En comparant ces deux expressions, on obtient :

$$u_n = \frac{a_n}{b_n} = \sqrt{2}\,\frac{(3+2\sqrt{2})^{2^{n-1}} + (3-2\sqrt{2})^{2^{n-1}}}{(3+2\sqrt{2})^{2^{n-1}} - (3-2\sqrt{2})^{2^{n-1}}} = \sqrt{2}\,\frac{1+(3-2\sqrt{2})^{2^n}}{1-(3-2\sqrt{2})^{2^n}}$$

$$\boxed{u_n = \sqrt{2}\,\frac{1+(3-2\sqrt{2})^{2^n}}{1-(3-2\sqrt{2})^{2^n}},\ \forall\, n \geq 1.}$$

Cette formule synthétique ne met guère en évidence le fait que u_n est, par construction, une fraction rationnelle.

4° Etude des courbes C_a .

Si l'on change x en $-x$, y est changé en $-y$: la fonction $y = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x} \right)$ est impaire. Elle est partout définie, sauf pour $x = 0$. A cause de la symétrie par rapport à l'origine O des coordonnées, on peut se contenter d'étudier y lorsque x varie de 0 à $+\infty$.

La dérivée de $y = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x} \right)$ est $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{a}{x^2} \right)$

Comme, par hypothèse, a est positif, cette dérivée peut être écrite : $\frac{dy}{dx} = \frac{(x+\sqrt{a})(x-\sqrt{a})}{2x^2}$. Pour $x > 0$, la dérivée s'annule seulement pour $x = \sqrt{a}$.

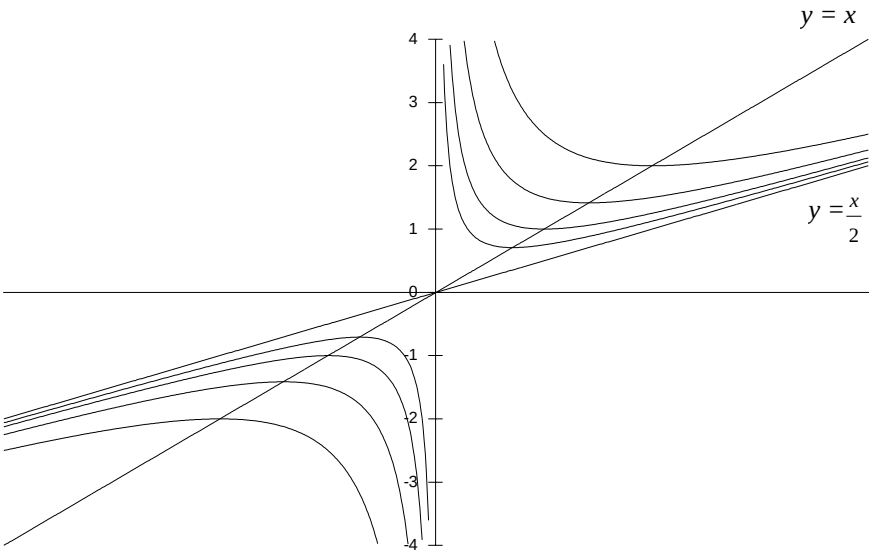
La dérivée seconde est $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{a}{x^3}$, avec $a > 0$ et $x > 0$, elle est positive : la concavité de la courbe est dirigée vers le haut et il n'y a pas de point d'inflexion. On peut donc dresser le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		$-\sqrt{a}$		0		$\sqrt{a}$		$+\infty$
y'	$\frac{1}{2}$	+	0	–	$-\infty \Vert -\infty$	–	0	+	$\frac{1}{2}$
y	$-\infty$	↗	$-\sqrt{a}$	↘	$-\infty \Vert +\infty$	↘	$\sqrt{a}$	↗	$+\infty$

Vers l'infini, $y - \frac{x}{2} = \frac{a}{2x}$ tend vers 0 avec le signe de x : il y a donc une asymptote oblique d'équation $y = \frac{x}{2}$ et la courbe est en dessous de son asymptote lorsque x tend vers $-\infty$, et au-dessus de son asymptote lorsque x tend vers $+\infty$.

Vers 0, $y \approx \frac{a}{2x}$ tend vers l'infini avec le signe de x. Il y a donc une asymptote verticale d'équation $x = 0$.

Les courbes C_a ont alors l'allure suivante :



Allure des courbes C_a pour diverses valeurs de a > 0.

Comme on a pour toutes les courbes C_a $y - \frac{x}{2} = \frac{a}{2x}$, la distance verticale d'une courbe C_a à son asymptote d'équation $y = \frac{x}{2}$ est proportionnelle à a. Cette remarque permet de déduire les courbes C_a les unes des autres. Ces courbes sont des hyperboles (fonction homographique). L'axe de l'hyperbole joint, pour une courbe C_a les points de courbure maximum. Le rayon de courbure R est donné par la formule : $R = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}$. On a donc :

$$R = \frac{\left(1+\frac{x^2-a}{2x^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{a}{x^3}} = \frac{1}{2a\sqrt{2}}\,(3x^2-a)^{\frac{3}{2}}$$

Sa dérivée est :

$$\frac{dR}{dx} = \frac{1}{2a\sqrt{2}}\,\frac{3}{2}\,6x\sqrt{3x^2-a} = \frac{9x}{2a\sqrt{2}}\sqrt{3x^2-a}$$

Elle est nulle pour $x = 0$, qui ne fait pas partie de l'intervalle de définition, et pour $x = \pm\sqrt{\frac{a}{3}}$. En ces points, l'ordonnée $y = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right)$ vaut $y = \pm\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{a}{3}} + \sqrt{3a}\right) = \pm 2\sqrt{\frac{a}{3}} = 2x$. Toutes les hyperboles C_a ont donc le même ***axe de symétrie*** qui est la droite $y = 2x$. L'autre axe de symétrie est la droite perpendiculaire à la droite $y = 2x$, c'est la droite $y = -\frac{x}{2}$.

L'***axe réel*** de l'hyperbole C_a est la distance qui sépare les deux points de l'hyperbole situés sur l'axe de symétrie : $2\alpha = 2\sqrt{\frac{a}{3}+4\frac{a}{3}} = 2\sqrt{\frac{5a}{3}}$.

La tangente à l'hyperbole en un point situé sur l'axe de symétrie $y = 2x$ coupe les asymptotes en deux points dont la distance donne l'axe imaginaire 2β de l'hyperbole. L'équation de la tangente au point $(\sqrt{\frac{a}{3}}, 2\sqrt{\frac{a}{3}})$ est

$$y = -\frac{1}{2}(x - \sqrt{\frac{a}{3}}) + 2\sqrt{\frac{a}{3}} = \frac{5}{2}\sqrt{\frac{a}{3}} - \frac{x}{2}.$$

Pour $x = 0$, $y = \frac{5}{2}\sqrt{\frac{a}{3}}$. Et l'on a $y = \frac{x}{2}$ pour $\frac{x}{2} = \frac{5}{2}\sqrt{\frac{a}{3}} - \frac{x}{2}$, soit $x = \frac{5}{2}\sqrt{\frac{a}{3}}$ et $y = \frac{5}{4}\sqrt{\frac{a}{3}}$. La distance qui sépare ces deux points est l'***axe imaginaire***: $2\beta = \sqrt{\frac{25a}{12} + \frac{25a}{48}} = \frac{5\sqrt{5}}{4}\sqrt{\frac{a}{3}}$.

La distance entre les deux foyers de l'hyperbole est donnée par :

$$2\gamma = 2\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = \frac{5\sqrt{13}}{4}\sqrt{\frac{a}{3}}$$

Les foyers ont donc pour coordonnées $x_1 = \frac{\sqrt{65}}{8}\sqrt{\frac{a}{3}}$ et $y_1 = \frac{\sqrt{65}}{4}\sqrt{\frac{a}{3}}$; $x_2 = -\frac{\sqrt{65}}{8}\sqrt{\frac{a}{3}}$ et $y_2 = -\frac{\sqrt{65}}{4}\sqrt{\frac{a}{3}}$.

L'excentricité des hyperboles est toujours $e = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\sqrt{65}}{8}$. Elle ne dépend pas de a, ce qui montre que ***les hyperboles se déduisent l'une de l'autre par un homothétie de centre O***, dont le rapport est la racine carrée du rapport des valeurs du paramètre a (rapport des distances de l'origine au point de rencontre de l'hyperbole avec son axe réel).

Ce dernier résultat peut se montrer directement. Prenons une droite $y = k\,x$ coupant l'hyperbole ($k > \frac{1}{2}$). Cette droite coupe la courbe C_a au point d'abscisse $x > 0$ vérifiant l'équation aux abscisses : $kx = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x} \right)$, soit :

$(2k - 1)\,x^2 = a$

$$x = \sqrt{\frac{a}{2k-1}}\ ;\ y = \frac{k}{\sqrt{2k-1}}\sqrt{a}\,.$$

La droite coupe la $C_{a'}$ au point d'abscisse $x' > 0$ vérifiant :

$$x' = \sqrt{\frac{a'}{2k-1}}\ ;\ y' = \frac{k}{\sqrt{2k-1}}\sqrt{a'}\,.$$

On a bien $\frac{y'}{y} = \frac{x'}{x} = \sqrt{\frac{a'}{a}}$ et

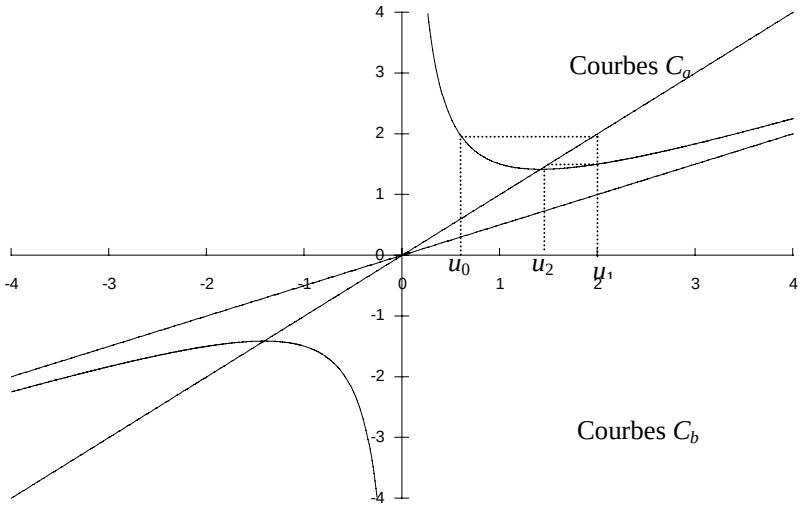
La courbe $C_{a'}$ se déduit de la courbe C_a par une homothétie de centre O et de rapport $\sqrt{\frac{a'}{a}}$.

La courbe C_a permet aussi de retrouver géométriquement les résultats de la première question. Partons d'une valeur $x = u_0 > 0$. la droite $x = u_0$ coupe la courbe C_a en un point d'ordonnée

$$y = u_1 = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x} \right) = \frac{1}{2}\left(u_0 + \frac{a}{u_0} \right)$$

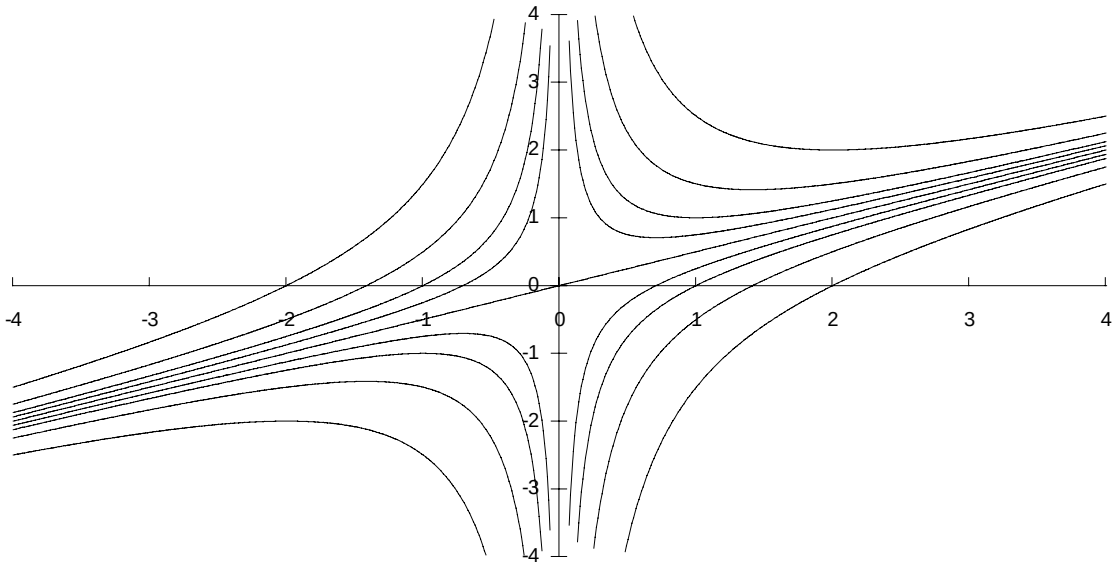
La droite $y = u_1$ coupe la première bissectrice $y = x$ au point d'abscisse $x = u_1$. Comme la droite $y = x$ passe par le minimum de la courbe C_a , et que u_1 est forcément au-dessus du minimum, le point d'abscisse u_1 est forcément à droite du minimum : $u_1 > \sqrt{a}$.

La droite $x = u_1$ coupe la courbe C_a en un point d'ordonnée $u_2 = \frac{1}{2}\left(u_1 + \frac{a}{u_1} \right)$, puis la droite d'ordonnée $y = u_1$ coupe la droite $y = x$ en un point d'abscisse u_2. En continuant cette construction, on voit qu'on construit la suite u_n décroissante et ayant pour limite le minimum $\sqrt{a}$ de la courbe.



La suite u_n tend rapidement vers le minimum de la courbe C_a.

Les courbes C_b d'équation $y = \frac{1}{2}\left(x + \frac{b}{x} \right)$ avec $b < 0$, sont les hyperboles conjuguées des courbes C_a : elles ont les mêmes asymptotes, mais sont situées de l'autre côté des asymptotes. Elles ne présentent donc pas de minimum ou de maximum.



Les courbes C_a et C_b forment deux faisceaux d'hyperboles conjuguées.

5° Points à tangente horizontale, points d'inflexion.

On peut éliminer a entre l'expression de $y = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x} \right)$ et sa dérivée $y' = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{a}{x^2} \right)$. On a, en effet :

$$2\,x\,y = x^2 + a$$

$$2\,(x\,y' + y) = 2\,x$$

$$\boxed{y = x\,(1 - y')}$$

L'ensemble des points où la tangente est parallèle à l'axe des x vérifie $y' = 0$: il reste $y = x$ dans la relation précédente.

Les points à tangente horizontale des courbes C_a sont sur la première bissectrice, d'équation $y = x$.

La recherche des points d'inflexion à l'aide de l'équation $y'' = 0$ ne conduit à aucune solution car l'équation s'écrit $\frac{a}{x^3} = 0$, elle n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$. On peut résumer ce résultat par la formule :

Point de point d'inflexion pour les courbes C_a , $a > 0$.

EXERCICE 2.

Soient a et b deux constantes données telles que $0 < a < b$. On forme les quantités : $a_1 = \sqrt{ab}$, $b_1 = \dfrac{a+b}{2}$, puis $a_2 = \sqrt{a_1 b_1}$, $b_2 = \dfrac{a_1+b_1}{2}$, et, d'une façon générale, $a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$, $b_{n+1} = \dfrac{a_n+b_n}{2}$.

1. Montrer que la suite (a_n) est croissante, que la suite (b_n) est décroissante, et que la suite (a_n) est plus petite que la suite (b_n).
2. Montrer que $a_p < b_q$, quels que soient p et q strictement positifs. Etablir que les suites de termes généraux a_n et b_n sont adjacentes. Soit $m(a,b)$ la limite commune, appelée ***moyenne arithmético-géométrique*** de a et b, que l'on ne cherchera pas à calculer.
3. On pose $\rho_n = \sqrt{\dfrac{a_n}{b_n}}$. Exprimer ρ_{n+1} en fonction de ρ_n . En utilisant cette expression, établir l'inégalité suivante :

$$\frac{b_{n+1}^2(b_{n+1}-a_{n+1})}{(b_{n+1}+a_{n+1})^3} < \left[\frac{b_n^2(b_n-a_n)}{(b_n+a_n)^3} \right]^2 .$$

Déduire de cette inégalité une estimation de l'erreur relative que l'on commet en prenant a_n comme valeur approchée de $m(a,b)$, estimation qui est de la forme $4\left[\dfrac{b^2(b-a)}{(b+a)^3} \right]^{2^n}$.

SOLUTION.

1°/ Etude de la croissance des suites a_n et b_n .

Pour $n = 1$, a_1 et b_1 sont des nombres strictement plus grands que 0, vérifiant $0 < a_1 = a < b = b_1$.
Supposons que cette propriété soit vraie jusqu'à l'ordre $n-1$, pour un entier $n \geq 2$: $0 < a_k < b_k \ \forall\, k \leq n-1$.

$$b_n - a_n = \frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2} - \sqrt{a_{n-1}b_{n-1}} = \frac{\left(\sqrt{a_{n-1}} - \sqrt{b_{n-1}}\right)^2}{2} \text{ et } a_n = \sqrt{a_{n-1}b_{n-1}} > 0$$

Pour $n = 2$, on obtient $b_2 - a_2 = \dfrac{\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2}{2} > 0$, donc, par récurrence sur n,

$$\boxed{0 < a_n < b_n.}$$

La suite (a_n) est plus petite que la suite (b_n).

1.1. Suite a_n .

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \sqrt{\frac{b_n}{a_n}} > 1$$

La suite a_n est une suite strictement croissante.

1.2. Suite b_n .

$$b_{n+1} - b_n = \frac{a_n - b_n}{2} < 0$$

La suite b_n est strictement décroissante.

2°/ Relation entre les suites a_n et b_n .

La suite a_n vérifie : $a_n < b_n < b_1 = b$. C'est une suite croissante majorée. Elle admet donc une limite supérieure λ_a .

La suite b_n vérifie : $a = a_1 < a_n < b_n$. C'est une suite décroissante minorée. Elle admet donc une limite inférieure λ_b .

Lorsque n tend vers l'infini, a_n tend vers λ_a , b_n tend vers λ_b , alors $a_n < b_n \Rightarrow \lambda_a \leq \lambda_b$. On a alors :

$$\forall p, \forall q, a_p < \lambda_a \leq \lambda_b < b_q$$

$$\boxed{a_p < b_q \ , \forall p, \forall q}$$

D'utre part, si λ_a est la limite de a_n quand n tend vers l'infini, et si λ_b est la limite de b_n quand n tend vers l'infini, on doit avoir :

$$\lambda_a = \sqrt{\lambda_a \lambda_b} \text{ et } \lambda_b = \frac{\lambda_a + \lambda_b}{2}$$

Chacune de ces deux relations est équivalente, pour des nombres positifs, à $\lambda_a = \lambda_b$. Elles sont donc compatibles. Les deux suites a_n et b_n convergent vers la même limite, qu'on notera $m(a,b)$, l'une par valeurs supérieures, l'autre par valeurs inférieures, ce qu'on exprime par :

Les suites a_n et b_n sont adjacentes et ont la même limite $m(a,b)$.

La limite commune $m(a,b)$ est appelée la « ***moyenne arithmético-géométrique*** » de a et b.

3°/ Appréciation de l'erreur relative commise en prenant a_n comme valeur approchée de $m(a,b)$.

L'erreur relative est de la forme $\frac{\Delta m}{m} = \frac{m(a,b) - a_n}{m(a,b)} = 1 - \frac{a_n}{m(a,b)}$.

Comme $m(a,b)$ est inférieur à b_n , cette erreur relative est inférieure à $1 - \frac{a_n}{b_n}$ car

$$m(a,b) < b_n \Rightarrow \frac{1}{b_n} < \frac{1}{m(a,b)} \Rightarrow \frac{a_n}{b_n} < \frac{a_n}{m(a,b)} \Rightarrow -\frac{a_n}{m(a,b)} < -\frac{a_n}{b_n} \Rightarrow 1 - \frac{a_n}{m(a,b)} < 1 - \frac{a_n}{b_n}$$

On pose $\rho_n = \sqrt{\frac{a_n}{b_n}}$. C'est un nombre positif pour tout n et il est strictement compris entre 0 et 1, pour tout $n \geq 1$.

Il vient alors :

$$\rho_{n+1}{}^2 = \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} = \frac{2\sqrt{a_n b_n}}{a_n + b_n} = 2\,\frac{b_n\sqrt{\frac{a_n}{b_n}}}{b_n\left(\frac{a_n}{b_n}+1\right)} = \frac{2\rho_n}{\rho_n{}^2 + 1}$$

$$\boxed{\rho_{n+1}{}^2 = \frac{2\rho_n}{\rho_n{}^2 + 1}}$$

$$\frac{b_{n+1}{}^2(b_{n+1} - a_{n+1})}{(b_{n+1} + a_{n+1})^3} = \frac{b_{n+1}{}^3\left(1 - \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}\right)}{b_{n+1}{}^3\left(1 + \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}\right)^3} = \frac{1 - \rho_{n+1}{}^2}{(1 + \rho_{n+1}{}^2)^3} = \frac{1 - \frac{2\rho_n}{1+\rho_n{}^2}}{\left(1 + \frac{2\rho_n}{1+\rho_n{}^2}\right)^3} = (1 + \rho_n{}^2)^2 \times \frac{(1-\rho_n)^2}{(1+\rho_n)^6}$$

$$\frac{b_{n+1}{}^2(b_{n+1} - a_{n+1})}{(b_{n+1} + a_{n+1})^3} = (1 + \rho_n{}^2)^2 \times \frac{(1-\rho_n{}^2)^2}{(1+\rho_n)^8} = \frac{(1-\rho_n{}^4)^2}{(1+\rho_n)^8}$$

$$\frac{{b_n}^2(b_b-a_n)}{(b_n+a_n)^3}=\frac{1-\frac{a_n}{b_n}}{\left(1+\frac{a_n}{b_n}\right)^3}=\frac{1-{\rho_n}^2}{(1+{\rho_n}^2)^3}=\frac{1-{\rho_n}^4}{(1+{\rho_n}^2)^4}$$

$$\left(\frac{{b_n}^2(b_b-a_n)}{(b_n+a_n)^3}\right)^2=\frac{(1-{\rho_n}^4)^2}{(1+{\rho_n}^2)^8}$$

$$0<\rho_n<1\Rightarrow {\rho_n}^2<\rho_n\Rightarrow 1+{\rho_n}^2<1+\rho_n\Rightarrow\frac{1}{1+\rho_n}<\frac{1}{1+{\rho_n}^2}\Rightarrow\frac{(1-{\rho_n}^4)^2}{(1+\rho_n)^8}<\frac{(1-{\rho_n}^4)^2}{(1+{\rho_n}^2)^8}$$

On obtient donc pour tout $n \geq 1$:

$$\boxed{\frac{{b_{n+1}}^2(b_{n+1}-a_{n+1})}{(b_{n+1}+a_{n+1})^3}<\left(\frac{{b_n}^2(b_b-a_n)}{(b_n+a_n)^3}\right)^2}$$

Par récurrence, cette relation donne :

$$\frac{{b_n}^2(b_b-a_n)}{(b_n+a_n)^3}<\left(\frac{b^2(b-a)}{(b+a)^3}\right)^{2^{n-1}}$$

On en déduit :

$$\frac{{b_n}^2(b_b-a_n)}{(b_n+a_n)^3}=\frac{1-{\rho_n}^4}{(1+{\rho_n}^2)^4}<\left(\frac{b^2(b-a)}{(b+a)^3}\right)^{2^{n-1}}$$

$$\frac{1-{\rho_n}^2}{(1+{\rho_n}^2)^3}<\left(\frac{b^2(b-a)}{(b+a)^3}\right)^{2^{n-1}}\Rightarrow\quad 1-{\rho_n}^2<(1+{\rho_n}^2)^3\times\left(\frac{b^2(b-a)}{(b+a)^3}\right)^{2^{n-1}}<8\left(\frac{b^2(b-a)}{(b+a)^3}\right)^{2^{n-1}}$$

Or l'erreur relative que l'on commet en prenant la valeur a_n pour valeur approchée de *m(a,b)* est, on l'a vu, majorée par $1-\frac{a_n}{b_n}=1-{\rho_n}^2$. Donc l'incertitude relative est majorée par $8\left(\frac{b^2(b-a)}{(b+a)^3}\right)^{2^{n-1}}$:

$$\boxed{\frac{\Delta m}{m}<8\left(\frac{b^2(b-a)}{(b+a)^3}\right)^{2^{n-1}}}$$

EXERCICE 3.

On considère les quatre suites de termes généraux u_n , v_n , x_n , y_n , définies par les relations suivantes :

$$u_0 = v_0 = 1 \; ; \; 2\,n\,u_n = (2\,n-1)\,u_{n-1} \; ; \; (2\,n+1)\,v_n = 2\,n\,v_{n-1} \; ; \; x_n\,v_n = u_n \; ; \; y_n\,v_n = u_{n+1} \; .$$

1. Montrer que les suites de termes généraux u_n et v_n sont convergentes.
2. Montrer que les suites de termes généraux respectifs x_n et y_n sont convergentes et qu'elles ont la même limite λ.
3. Calculer une valeur approchée de λ à 0,05 près.
4. Calculer, en fonction de n la valeur du produit $u_n\,v_n$. En déduire que les deux expressions $n\,v_n^{\,2}$ et $n\,u_n^{\,2}$ ont des limites que l'on calculera. En déduire les limites de u_n et v_n .
5. Démontrer que $C_{2n}^{\,n} = 4^n\,u_n$. Etudier, quand n tend vers l'infini, l'expression :

$$w_n = \frac{n\left[C_{2n}^{n}\right]^2}{16^n}.$$

   En déduire un infiniment grand équivalent à $C_{2n}^{\,n}$.

SOLUTION.

1°/ Convergence des suites u_n et v_n .

1.1. Suite u_n .

1.1.1. Les termes de la suite u_n sont tous positifs.

En effet, $u_0 = 1$ est positif et la relation $2\,n\,u_n = (2\,n-1)\,u_{n-1}$ montre que u_n a le même signe que u_{n-1} dès que n et supérieur ou égal à 1. Donc, par récurrence, tous les u_n , pour $n \geq 0$, ont le même signe et sont donc tous positifs.

1.1.2. La suite u_n est décroissante.

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} = \frac{2n-1}{2n} < 1 \Rightarrow u_n < u_{n-1}$$ et la suite u_n est décroissante.

1.1.3. La suite u_n est convergente.

La suite u_n est une suite strictement décroissante et minorée par 0 : c'est donc une suite convergente.

1.2. Suite v_n .

1.2.1. Les termes de la suite v_n sont tous positifs.

En effet, $v_0 = 1$ est positif et la relation $(2\,n+1)\,v_n = 2\,n\,v_{n-1}$ montre que v_n a le même signe que v_{n-1} dès que n et supérieur ou égal à 1. Donc, par récurrence, tous les v_n , pour $n \geq 0$, ont le même signe et sont donc tous positifs.

1.2.2. La suite v_n est décroissante.

$$\frac{v_n}{v_{n-1}} = \frac{2n}{2n+1} < 1 \Rightarrow v_n < v_{n-1}$$ et la suite v_n est décroissante.

1.2.3. La suite v_n est convergente.

La suite v_n est une suite strictement décroissante et minorée par 0 : c'est donc une suite convergente.

2°/ Convergence des suites x_n et y_n .

2.1. Suite x_n .

2.1.1. Les termes de la suite x_n sont tous positifs.

En effet, $x_0 = \frac{u_0}{v_0} = 1$ est positif et la relation $x_n\, v_n = u_n$ montre que x_n a toujours le même signe que le rapport $\frac{u_n}{v_n}$ qui est positif puisque u_n et v_n sont tous deux positifs. Donc tous les x_n , pour $n \geq 0$, ont le même signe et sont positifs.

2.1.2. La suite x_n est décroissante.

$\frac{x_n}{x_{n-1}} = \frac{u_n}{v_n} \times \frac{v_{n-1}}{u_{n-1}} = \frac{u_n}{u_{n-1}} \times \frac{v_{n-1}}{v_n} = \frac{2n-1}{2n} \times \frac{2n+1}{2n} = \frac{4n^2-1}{4n^2} < 1 \Rightarrow x_n < x_{n-1}$ et la suite x_n est décroissante.

2.1.3. La suite x_n est convergente.

La suite x_n est une suite strictement décroissante et minorée par 0 : c'est donc une suite convergente.

2.2. Suite y_n .

2.2.1. Les termes de la suite y_n sont tous positifs.

En effet, $y_0 = \frac{u_1}{v_0}$ est positif et la relation $y_n\, v_n = u_{n+1}$ montre que y_n a toujours le même signe que le rapport $\frac{u_{n+1}}{v_n}$ qui est positif puisque u_{n+1} et v_n sont tous deux positifs. Donc tous les y_n , pour $n \geq 0$, ont le même signe et sont positifs.

2.2.2. La suite y_n est croissante.

$\frac{y_n}{y_{n-1}} = \frac{u_{n+1}}{v_n} \times \frac{v_{n-1}}{u_n} = \frac{u_{n+1}}{u_n} \times \frac{v_{n-1}}{v_n} = \frac{2n+1}{2n+2} \times \frac{2n+1}{2n} = \frac{4n^2+4n+1}{4n^2+4n} > 1 \Rightarrow y_n > y_{n-1}$ et la suite y_n est croissante.

2.2.3. La suite y_n est convergente.

La suite y_n est une suite strictement croissante et l'on a $y_n = \frac{u_{n+1}}{v_n} = \frac{u_{n+1}}{u_n} \times \frac{u_n}{v_n} = \frac{u_{n+1}}{u_n} \times x_n < x_n < x_0 = 1$. La suite y_n est donc croissante et majorée : c'est une suite convergente.

2.3. Les suites x_n et y_n ont la même limite.

La suite x_n est décroissante et tend vers une limite λ_x . La suite y_n est croissante et tend vers une limite λ_y . La relation $x_n > y_n$ implique $\lambda_x \geq \lambda_y$. Si λ_x était différent de λ_y , la différence entre les deux serait finie, on ne pourrait pas rendre la différence entre x_n et y_n aussi petite que l'on voudrait. Et ceci est contredit par le rapport $\frac{x_n}{y_n} = \frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{2n+2}{2n+1} = 1 + \frac{1}{2n+1}$ qui tend vers 1 lorsque n tend vers l'infini et qui indique, de ce fait, qu'on peut rendre x_n et y_n aussi proches qu'on veut.

Les suites x_n et y_n ont la même limite λ : ce sont des suites adjacentes.

3°/ Calcul de la limite λ à 0,05 près.

x_n est supérieur à y_n . La suite x_n est décroissante, la suite y_n est croissante. Pour connaître la valeur de la limite commune λ avec une erreur inférieure à 0,05, nous allons calculer x_n et y_n de telle sorte que la différence soit inférieure à 0,1 et nous prendrons pour valeur de λ la moyenne arithmétique entre x_n et y_n . Or on a :

$$x_n - y_n = \frac{u_n - u_{n+1}}{v_n} = \frac{u_n}{v_n}\left(1 - \frac{2n+1}{2n+2}\right) = \frac{x_n}{2n+2}$$

$$x_n - y_n < 0{,}05 \Leftrightarrow \frac{x_n}{2n+2} < 0{,}1 \Leftrightarrow x_n < 0{,}2\,(n+1)$$

Comme la suite x_n est décroissante, il suffit de prendre un n tel que 0,2 $(n + 1)$ soit supérieur à $x_0 = 1$, soit $n \geq 4$, pour être assuré que x_n est inférieur à x_0 donc à 0,2 $(n + 1)$. En prenant $n = 4$, on trouve :

$$x_4 = \frac{4\times4^2-1}{4\times4^2}\; x_3 = \frac{63}{64}\times\frac{4\times3^2-1}{4\times3^2} x_2 = \frac{63}{64}\times\frac{35}{36}\times\frac{4\times2^2-1}{4\times2^2}\; x_1 = \frac{63}{64}\times\frac{35}{36}\times\frac{15}{16}\times\frac{4\times1^2-1}{4\times1^2}\; x_0 = \frac{63}{64}\times\frac{35}{36}\times\frac{15}{16}\times\frac{3}{4} = \frac{3^2\times5^2\times7^2}{2^{14}} \approx 0{,}673$$

$$y_4 = \frac{(2\times4+1)^2}{(2\times4+1)^2-1} y_3 = \frac{81}{80}\times\frac{(2\times3+1)^2}{(2\times3+1)^2-1}\; y_2 = \frac{81}{80}\times\frac{49}{48}\times\frac{(2\times2+1)^2}{(2\times2+1)^2-1}\; y_1$$

$$= \frac{81}{80}\times\frac{49}{48}\times\frac{25}{24}\times\frac{(2\times1+1)^2}{(2\times1+1)^2-1}\; y_0 = \frac{81}{80}\times\frac{49}{48}\times\frac{25}{24}\times\frac{9}{8}\times y_0 = \frac{81}{80}\times\frac{49}{48}\times\frac{25}{24}\times\frac{9}{8}\times\frac{u_1}{v_0} = \frac{81}{80}\times\frac{49}{48}\times\frac{25}{24}\times\frac{9}{8}\times\frac{1}{2} \approx 0{,}606$$

Les valeurs 0,606 et 0,673 encadrent la valeur exacte de λ. La valeur moyenne arithmétique donne une approximation de λ à moins de 0,05 près :

$$\boxed{\lambda = 0{,}64 \pm 0{,}04}$$

4°/ Produit $u_n\, v_n$. Limites de u_n et v_n.

$u_n = u_{n-1}\times\frac{2n-1}{2n}$ et $v_n = v_{n-1}\times\frac{2n}{2n+1} \Rightarrow u_n\, v_n = u_{n-1}\, v_{n-1}\times\frac{2n-1}{2n+1}$

Pour $n = 1$, on donc : $u_1\, v_1 = u_0\, v_0 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$.

Faisons l'hypothèse de récurrence $u_n\, v_n = \frac{1}{2n+1}$. Alors $u_{n+1}\, v_{n+1} = u_n\, v_n \times \frac{2n+1}{2n+3} = \frac{1}{2n+3}$ et la formule de l'hypothèse de récurrence est vérifiée lorsqu'on remplace n par $n + 1$. Le principe de récurrence implique que pour tout $n \geq 1$, on a :

$$\boxed{u_n\, v_n = \frac{1}{2n+1}.}$$

$$n\, v_n^2 = u_n\, v_n \times \frac{n}{x_n} = \frac{n}{2n+1}\times\frac{1}{x_n}$$

Lorsque n tend vers l'infini, $n\, v_n^2$ a même limite que $\frac{n}{2nx_n} = \frac{1}{2x_n}$ qui tend vers $\frac{1}{2\lambda}$.

$$\boxed{n\, v_n^2 \text{ tend vers } \frac{1}{2\lambda} \text{ lorsque } n \text{ tend vers l'infini.}}$$

$$n\,u_n^{\,2} = u_n\,v_n \times n\,x_n = \frac{n}{2n+1} \times x_n$$

Lorsque n tend vers l'infini, $n\,u_n^{\,2}$ a même limite que $\frac{nx_n}{2n} = \frac{x_n}{2}$ qui tend vers $\frac{\lambda}{2}$.

$n\,u_n^{\,2}$ tend vers $\frac{\lambda}{2}$ lorsque n tend vers l'infini.

Si $n\,v_n^{\,2}$ tend vers $\frac{1}{2\lambda}$ lorsque n tend vers l'infini, $v_n^{\,2}$ est équivalent à $\frac{1}{2\lambda n}$ pour n assez grand, et v_n est équivalent à $\sqrt{\frac{1}{2\lambda n}}$ qui tend vers 0.

La suite v_n tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini.

Si $n\,u_n^{\,2}$ tend vers $\frac{\lambda}{2}$ lorsque n tend vers l'infini, $u_n^{\,2}$ est équivalent à $\frac{\lambda}{2n}$ pour n assez grand, et u_n est équivalent à $\sqrt{\frac{\lambda}{2n}}$ qui tend vers 0.

La suite u_n tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini.

5°/ Etude de la suite w_n . Equivalent de C_{2n}^n.

$$u_1 = \frac{1}{2}\,u_0 = \frac{1}{2} = \frac{1}{4}\,C_2^1\,.$$

Faisons l'hypothèse de récurrence $C_{2n}^n = 4^n\,u_n$. Cette hypothèse est vérifiée pour $n = 1$. Si elle est vérifiée pour un $n \geq 1$, il vient : $u_{n+1} = \frac{2n+1}{2n+2}\,u_n = \frac{1}{4^n}\,C_{2n}^n\,\frac{2n+1}{2n+2}$.

Or on a $C_{2n+2}^{n+1} = \frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!} = \frac{(2n)!(2n+1)(2n+2)}{(n!)^2(n+1)^2} = 4\,C_{2n}^n\,\frac{2n+1}{2n+2}$, donc $u_{n+1} = \frac{1}{4^{n+1}}\,C_{2n+2}^{n+1}$ et la formule de l'hypothèse de récurrence est vérifiée quand on remplace n par $n + 1$. Le principe de récurrence entraîne que la formule de l'hypothèse de récurrence est valable quel que soit $n \geq 1$.

$C_{2n}^n = 4^n\,u_n.\,,\ \forall\ n \geq 1.$

$$w_n = \frac{n\left(C_{2n}^n\right)^2}{16^n} = \frac{n\left(4^n u_n\right)^2}{16^n} = n\,u_n^{\,2}\,.$$

Lorsque n tend vers l'infini, $w_n = n\,u_n^{\,2}$ tend vers $\frac{\lambda}{2}$.

Si $\frac{n\left(C_{2n}^n\right)^2}{16^n}$ tend vers $\frac{\lambda}{2}$ lorsque n tend vers l'infini, c'est que, pour n assez grand, $\left(C_{2n}^n\right)^2$ est équivalent à $\frac{16^n\lambda}{2n}$. Donc :

Pour n très grand, C_{2n}^n est équivalent à $4^n\sqrt{\frac{\lambda}{2n}}$.

Remarque finale : valeur de λ.

En comparant la formule obtenue $C_{2n}^{n} \approx 4^{n}\sqrt{\frac{\lambda}{2n}}$ avec la formule de Stirling : $n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^{n}\sqrt{2\pi n}$, on obtient :

$$C_{2n}^{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^{2}} \approx \frac{4^{n}}{\sqrt{\pi n}}$$

On en tire la valeur de la limite λ.

$$\boxed{\lambda = \frac{2}{\pi}}$$

La démonstration de la formule de Stirling repose sur la notion de développement asymptotique de la fonction Γ d'Euler (voir, par exemple, ″Les fonctions de la Physique Mathématique″, H.HOCHSTADT, Masson, Paris, 1973, p.65).

EXERCICE 4.

On considère la suite (u_n) telle que :

$$\begin{aligned} 2\,u_0 &= 1 \\ 2\,u_1 - 3\,u_0 &= a \\ 2\,u_2 - 3\,u_1 + u_0 &= a^2 \\ &\dots \\ 2\,u_n - 3\,u_{n-1} + u_{n-2} &= a^n \end{aligned}$$

où a est un nombre réel quelconque.

1. Calculer en fonction de n et de a :
   $v_n = 2\,u_n - u_{n-1}$
   $w_n = u_n - u_{n-1}$.
   Etudier les deux suites v_n et w_n .
2. Calculer u_n en fonction de n. Etudier la nature de la suite de terme général u_n et calculer éventuellement sa limite. Cas particuliers : $a = 1$; $a = \frac{1}{2}$.

SOLUTION.

1°/ Etude des suites v_n et w_n .

1.1. Suite v_n .

En additionnant membre à membre les égalités :

$$\begin{aligned} 2\,u_0 &= 1 \\ 2\,u_1 - 3\,u_0 &= a \\ 2\,u_2 - 3\,u_1 + u_0 &= a^2 \\ &\dots \\ 2\,u_n - 3\,u_{n-1} + u_{n-2} &= a^n \end{aligned}$$

il vient : $2\,u_n - u_{n-1} = 1 + a + a^2 + \dots + a^n$.

Soit : $v_n = 1 + a + a^2 + \dots + a^n$.

Si a est égal à 1, cette relation donne $v_n = n + 1$.

Si a est différent de 1, elle donne $v_n = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$.

$$v_n = \begin{cases} n+1 & \text{si } a = 1 \\ \dfrac{1-a^{n+1}}{1-a} & \text{si } a \neq 1 \end{cases}$$

En particulier, pour $a = -1$, $v_n = 0$ si n est impair, 1 si n est pair. Ces formules permettent d'étudier la convergence de la suite v_n .

La suite est divergente pour $|a| > 1$, à cause du terme a^{n+1} qui n'est pas borné. Elle est positive et décroissante si a est positif, alternée (termes alternativement positifs et négatifs suivant la parité de n) si a est négatif.

La suite est oscillante pour $a = -1$, les termes valant alternativement 0 et 1 suivant la parité de n.

La suite est positive, monotone croissante et divergente pour $a = 1$, car le terme $v_n = n + 1$ n'est pas borné.

La suite est convergente pour $|a| < 1$ et sa limite est $\frac{1}{1-a}$. Elle est monotone croissante si a est positif. Elle est oscillante autour de sa limite si a est négatif.

Ces résultats peuvent être résumés en un tableau :

a	v_n	*Positivité pour n assez grand*	*Convergence*	*Limite*
$a < -1$	$\frac{1-a^{n+1}}{1-a}$	Suite alternée (>0 pour n pair, <0 pour n impair)	Suite divergente	Pas de limite
$a = -1$	$\frac{1+(-1)^n}{2}$	Suite oscillant entre 0 (n impair) et 1 (n pair)	Suite non convergente	Pas de limite
$-1 < a < 0$	$\frac{1-a^{n+1}}{1-a}$	Suite positive	Suite convergente	$\frac{1}{1-a}$
$a = 0$	1	Suite positive	Suite constante	1
$0 < a < 1$	$\frac{1-a^{n+1}}{1-a}$	Suite positive	Suite convergente	$\frac{1}{1-a}$
$a = 1$	$n + 1$	Suite positive	Suite divergente	$+\infty$
$1 < a$	$\frac{1-a^{n+1}}{1-a}$	Suite positive	Suite divergente	$+\infty$

1.2. Suite w_n .

$$w_1 = u_1 - u_0 = \frac{a+u_0}{2}$$
$$2\,w_1 = a + u_0 = a + \frac{1}{2}$$
$$4\,w_1 = 2\,a + 1$$
$$2^2\,w_1 = 2a + 1$$

Pour tout $n \geq 2$, on a :

$$2\,u_n - 3\,u_{n-1} + u_{n-2} = a^n \Leftrightarrow 2\,u_n - 2\,u_{n-1} = a^n + u_{n-1} - u_{n-2} \Leftrightarrow 2\,w_n = a^n + w_{n-1}\,.$$

Pour $n = 2$, cette égalité donne :

$$2\,w_2 = a^2 + w_1 = a^2 + \frac{2a+1}{4}$$
$$2^3\,w_2 = (2a)^2 + 2a + 1$$

Faisons l'hypothèse de récurrence :

$$2^{n+1}\,w_n = 1 + (2a) + \ldots + (2a)^n\,.$$

Alors la formule précédente $w_n = a^n + w_{n-1}$ valable pour tout $n \geq 2$, donne, pour $n + 1$:

$$2\,w_{n+1} = a^{n+1} + w_n\,.$$

Multiplions les deux membres par 2^{n+1}, il vient :

$$2^{n+2}\,w_{n+1} = (2a)^{n+1} + 2^{n+1}\,w_n$$

et l'hypothèse de récurrence entraîne :

$$2^{n+2}\,w_{n+1} = (2a)^{n+1} + 1 + (2a) + \ldots + (2a)^n = 1 + (2a) + \ldots + (2a)^n + (2a)^{n+1}\,.$$

Cette formule est la formule de l'hypothèse de récurrence dans laquelle on remplace n par $n + 1$. Le principe de récurrence montre alors que la formule de l'hypothèse de récurrence est valable pour tout $n \geq 2$. Comme elle est déjà valable pour $n = 1$, elle est valable pour tout $n \geq 1$.

$$\boxed{2^{n+1}\,w_n = 1 + (2a) + \ldots + (2a)^n\,,\ \forall\ n \geq 1}$$

$$\frac{1}{2^{n+1}} \times \frac{1-(2a)^{n+1}}{1-2a} = \frac{1}{1-2a}\left(\frac{1}{2^{n+1}} - a^{n+1} \right).$$

On en tire, suivant la valeur de a, l'expression de w_n :

$$w_n = \begin{cases} \dfrac{n+1}{2^{n+1}} & \text{si } a = \dfrac{1}{2}, \forall\, n \geq 1. \\ \dfrac{1}{1-2a}\left(\dfrac{1}{2^{n+1}} - a^{n+1} \right) & \text{si } a \neq \dfrac{1}{2}, \forall\, n \geq 1. \\ 0 & \text{si } a = -\dfrac{1}{2}, \forall\, n \text{ impair} \\ \dfrac{1}{2^{n+1}} & \text{si } a = -\dfrac{1}{2}, \forall\, n \text{ pair} \end{cases}$$

Le terme $\frac{1}{2^{n+1}}$ tend vers 0. La convergence de la suite dépend donc du terme a^{n+1} uniquement : la suite converge vers 0 si $|a| < 1$, elle diverge si $|a| > 1$.

Pour $a = 1$, w_n est donné par $w_n = \frac{1}{1-2a}\left(\frac{1}{2^{n+1}} - a^{n+1} \right) = 1 - \frac{1}{2^{n+1}}$, la suite converge vers 1.

Pour $a = -1$, w_n est donné par $w_n = \frac{1}{1-2a}\left(\frac{1}{2^{n+1}} - a^{n+1} \right) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2^{n+1}} + (-1)^n \right)$, la suite est alternée et oscille de valeurs proches de $\frac{1}{3}$ (n pair) à des valeurs proches de $-\frac{1}{3}$ (n impair).

Rassemblons ces résultats dans un tableau :

a	w_n	*Positivité pour n assez grand*	*Convergence*	*Limite*
$a < -1$	$\frac{1}{1-2a}\left(\frac{1}{2^{n+1}} - a^{n+1} \right)$	Suite alternée	Suite divergente	Pas de limite
$a = -1$	$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2^{n+1}} + (-1)^n \right)$	Suite alternée	Suite non convergente	Pas de limite
$-1 < a < -\frac{1}{2}$	$\frac{1}{1-2a}\left(\frac{1}{2^{n+1}} - a^{n+1} \right)$	Suite alternée	Suite convergente	0
$a = -\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2^{n+1}} \times \frac{1+(-1)^n}{2}$	Suite oscillant entre 0 (n impair) et $\frac{1}{2^{n+1}}$ (n pair)	Suite convergente	0
$-\frac{1}{2} < a < 0$	$\frac{1}{1-2a}\left(\frac{1}{2^{n+1}} - a^{n+1} \right)$	Suite positive	Suite convergente	0
$a = 0$	$\frac{1}{2^{n+1}}$	Suite positive	Suite convergente	0

$0 < a < \frac{1}{2}$	$\frac{1}{1-2a}\left(\frac{1}{2^{n+1}} - a^{n+1}\right)$	Suite positive	Suite convergente	0
$a = \frac{1}{2}$	$\frac{n+1}{2^{n+1}}$	Suite positive	Suite convergente	0
$\frac{1}{2} < a < 1$	$\frac{1}{2a-1}\left(a^{n+1} - \frac{1}{2^{n+1}}\right)$	Suite positive	Suite convergente	0
$a = 1$	$1 - \frac{1}{2^{n+1}}$	Suite positive	Suite convergente	1
$a > 1$	$\frac{1}{2a-1}\left(a^{n+1} - \frac{1}{2^{n+1}}\right)$	Suite positive	Suite divergente	Pas de limite

2°/ Limite de la suite u_n .

Cas général :

$$v_n - w_n = \frac{1-a^{n+1}}{1-a} - \frac{1}{2a-1}\left(a^{n+1} - \frac{1}{2^{n+1}}\right) = -a^{n+1}\left(\frac{1}{2a-1} + \frac{1}{1-a}\right) - \frac{1}{a-1} + \frac{1}{2^{n+1}} \times \frac{1}{2a-1}$$

$$= (-1)^n\ (-a)^{n+2} \times \frac{1}{(-a+1)(-2a+1)} + \frac{1}{-a+1} - \frac{1}{2^{n+1}} \times \frac{1}{-2a+1} \text{ pour } a < -1$$

$$= \frac{1}{-a+1} + (-1)^n\ (-a)^{n+2} \times \frac{1}{(-a+1)(-2a+1)} - \frac{1}{2^{n+1}} \times \frac{1}{-2a+1} \text{ pour } -1 < a < -\frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{-a+1} - \frac{1}{2^{n+1}} \times \frac{1}{-2a+1} + (-1)^n\ (-a)^{n+2} \times \frac{1}{(-a+1)(-2a+1)} \text{ pour } -\frac{1}{2} < a < 0$$

$$= \frac{1}{1-a} - \frac{1}{2^{n+1}} \times \frac{1}{1-2a} + a^{n+2} \times \frac{1}{(1-a)(1-2a)} \text{ pour } 0 < a < \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{1-a} + \frac{1}{2^{n+1}} \times \frac{1}{2a-1} - a^{n+2} \times \frac{1}{(1-a)(2a-1)} \text{ pour } \frac{1}{2} < a < 1$$

$$= a^{n+2} \times \frac{1}{(a-1)(2a-1)} - \frac{1}{a-1} + \frac{1}{2^{n+1}} \times \frac{1}{2a-1} \text{ pour } 1 < a$$

Cas particuliers :

$$v_n - w_n = \frac{1+(-1)^n}{2} + \frac{1}{3}\left((-1)^{n+1} - \frac{1}{2^{n+1}}\right) = \frac{1}{2} + \frac{(-1)^n}{6} - \frac{1}{3\times 2^{n+1}} \text{ pour } a = -1$$

$$v_n - w_n = \frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} - \frac{1}{2^{n+1}} \times \frac{1+(-1)^n}{2} = \frac{2}{3}\left(1 + \frac{(-1)^n}{2^{n+1}}\right) - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^{n+1}} - \frac{(-1)^n}{2^{n+1}}$$

$$= \frac{2}{3} - \frac{1}{2^{n+1}}\left(\frac{1}{2} + \frac{(-1)^n}{3}\right) \text{ pour } a = -\frac{1}{2}$$

$v_n - w_n = 1 - \frac{1}{2^{n+1}}$ pour $a = 0$

$v_n - w_n = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} - \frac{n+1}{2^{n+1}} = 2 - \frac{n+3}{2^{n+1}}$ pour $a = \frac{1}{2}$

$v_n - w_n = n + 1 - \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}} \right) = n + \frac{1}{2^{n+1}}$ pour $a = 1$.

On peut dresser maintenant le tableau des valeurs de u_n en fonction de n et a :

a	$u_n = v_n - w_n$	*Positivité pour n assez grand*	*Convergence*	*Limite*
$a < -1$	$a^{n+2} \times \frac{1}{(-a+1)(-2a+1)} + \frac{1}{-a+1} - \frac{1}{2^{n+1}} \times \frac{1}{-2a+1}$	Suite alternée (>0 si n pair, <0 si n impair)	Suite divergente	Pas de limite
$a = -1$	$\frac{1}{2} + \frac{(-1)^n}{6} - \frac{1}{3 \times 2^{n+1}}$	Suite positive	Suite oscillante de termes proches de $\frac{1}{3}$ (n impair) à des termes proches de $\frac{2}{3}$ (n pair)	Pas de limite
$-1 < a < -\frac{1}{2}$	$\frac{1}{-a+1} + \frac{a^{n+2}}{(-a+1)(-2a+1)} - \frac{1}{2^{n+1}} \times \frac{1}{-2a+1}$	Suite positive	Suite oscillante convergente	$\frac{1}{-a+1}$
$a = -\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3} - \frac{1}{2^{n+1}} \left(\frac{1}{2} + \frac{(-1)^n}{3} \right)$	Suite positive	Suite oscillante convergente	$\frac{2}{3}$
$-\frac{1}{2} < a < 0$	$\frac{1}{-a+1} - \frac{1}{2^{n+1}} \times \frac{1}{-2a+1} + \frac{(-1)^n (-a)^{n+2}}{(-a+1)(-2a+1)}$	Suite positive	Suite convergente	$\frac{1}{-a+1}$
$a = 0$	$1 - \frac{1}{2^{n+1}}$	Suite positive	Suite convergente	1
$0 < a < \frac{1}{2}$	$\frac{1}{1-a} - \frac{1}{2^{n+1}} \times \frac{1}{1-2a} + \frac{a^{n+2}}{(1-a)(1-2a)}$	Suite positive	Suite convergente	$\frac{1}{1-a}$
$a = \frac{1}{2}$	$2 - \frac{n+3}{2^{n+1}}$	Suite positive	Suite convergente	2

$\frac{1}{2} < a < 1$	$\frac{1}{1-a} + \frac{1}{2^{n+1}} \times \frac{1}{2a-1} - \frac{a^{n+2}}{(1-a)(2a-1)}$	Suite positive	Suite convergente	$\frac{1}{1-a}$
$a = 1$	$n + \frac{1}{2^{n+1}}$	Suite positive	Suite divergente	$+\infty$
$a > 1$	$a^{n+2} \times \frac{1}{(a-1)(2a-1)} - \frac{1}{a-1} + \frac{1}{2^{n+1}} \times \frac{1}{2a-1}$	Suite positive	Suite divergente	$+\infty$

Le tableau résumé se réduit à :

$\lvert a \rvert < 1$, y compris le cas $a = \frac{1}{2}$		Suite positive	Suite convergente	$\frac{1}{1-a}$ (2 si $a = \frac{1}{2}$)
$a = 1$	$n + \frac{1}{2^{n+1}}$	Suite positive	Suite divergente	$+\infty$
$a = -1$	$\frac{1}{2} + \frac{(-1)^n}{6} - \frac{1}{3 \times 2^{n+1}}$	Suite positive	Suite oscillante	Pas de limite
$\lvert a \rvert > 1$	$\frac{a^{n+2}}{(a-1)(2a-1)} - \frac{1}{a-1} + \frac{1}{2^{n+1}} \times \frac{1}{2a-1}$	Suite positive ($a > 0$) ou alternée ($a < 0$)	Suite divergente	Pas de limite

EXERCICE 5.

Soient a et b deux nombres réels vérifiant $0 < b < a$. On définit deux suites $(u_n)_{n \geq 0}$ et $(v_n)_{n \geq 0}$ de nombres réels par la donnée de leurs premiers termes u_0 et v_0 tels que $0 < u_0 < v_0$, et des relations de récurrence :

$$u_{n+1} = \frac{a\,u_n + b\,v_n}{a+b} \qquad \text{et} \qquad v_{n+1} = \frac{b\,u_n + a\,v_n}{a+b}$$

2.1. Montrer que, pour tout entier $n \geq 0$, $v_n - u_n$ est strictement plus grand que 0. En déduire que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est croissante et que la suite $(v_n)_{n \geq 0}$ est décroissante.

2.2. Montrer que les suites $(u_n)_{n \geq 0}$ et $(v_n)_{n \geq 0}$ sont convergentes et ont la même limite ℓ que l'on calculera.

SOLUTION.

1. Croissance des suites $(u_n)_{n \geq 0}$ et $(v_n)_{n \geq 0}$.

1.1. $0 < u_n < v_n$.

$$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{b\,u_n + a\,v_n}{a+b} - \frac{a\,u_n + b\,v_n}{a+b} = \frac{a-b}{a+b}\,(v_n - u_n)$$

$$0 < b < a \Rightarrow \frac{a-b}{a+b} > 0$$

La formule $v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{a-b}{a+b}\,(v_n - u_n)$ entraîne alors, par récurrence, que pour tout $n \geq 0$, $(v_n - u_n)$ est du signe de $(v_0 - u_0)$.

$$0 < u_0 < v_0 \Rightarrow u_n < v_n$$

D'autre part, il est clair que si u_n est strictement plus grand que zéro, alors v_n , qui est strictement plus grand que u_n est aussi strictement plus grand que 0 et les formules de récurrence :

$$u_{n+1} = \frac{a\,u_n + b\,v_n}{a+b} \qquad \text{et} \qquad v_{n+1} = \frac{b\,u_n + a\,v_n}{a+b}$$

avec $0 < b < a$, entraînent que u_{n+1} et v_{n+1} sont strictement plus grand que 0.
Nous voyons donc ainsi, par récurrence, que :

$$0 < u_0 < v_0 \Rightarrow 0 < u_n < v_n\,,\ \forall\ n \geq 0.$$

1.2. La suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est croissante.

$$u_{n+1} = \frac{a\,u_n + b\,v_n}{a+b} \text{ et } 0 < u_n < v_n \Rightarrow u_{n+1} = \frac{a\,u_n + b\,v_n}{a+b} > \frac{au_n + bu_n}{a+b} = u_n\,.$$

La suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est strictement croissante.

1.3. La suite $(v_n)_{n \geq 0}$ est décroissante.

$$v_{n+1} = \frac{b\,u_n + a\,v_n}{a+b} \text{ et } 0 < u_n < v_n \Rightarrow v_{n+1} = \frac{b\,u_n + a\,v_n}{a+b} < \frac{bv_n + av_n}{a+b} = v_n\,.$$

La suite $(v_n)_{n \geq 0}$ est strictement décroissante.

2. Limite des suites $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$.

Comme la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est strictement croissante et la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ est strictement décroissante, on a :

$$0 < u_0 < u_n < v_n < v_0$$

Il en résulte que :

— La suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est une suite croissante, majorée par v_0 , donc convergente.

— La suite $(v_n)_{n\geq 0}$ est une suite décroissante, minorée par u_0 , donc convergente.

Les suites $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ sont convergentes.

Soit λ_u la limite de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ et λ_v la limite de la suite $(v_n)_{n\geq 0}$.

$$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{a-b}{a+b}(v_n - u_n) \Rightarrow v_n - u_n = \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^n (v_0 - u_0)$$

$$0 < b < a \Rightarrow a - b < a < a + b \Rightarrow \frac{a-b}{a+b} < 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^n = 0$$

Par passage à la limite dans la formule $v_n - u_n = \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^n (v_0 - u_0)$, on obtient :

$$\lambda_v - \lambda_u = \lim_{n\to\infty} v_n - \lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}(v_n - u_n) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^n (v_0 - u_0) = 0$$

Les suites $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ ont la même limite ℓ.

Les formules de récurrence :

$$u_{n+1} = \frac{a\,u_n + b\,v_n}{a+b} \qquad \text{et} \qquad v_{n+1} = \frac{b\,u_n + a\,v_n}{a+b}$$

donnent, par addition :

$$u_{n+1} + v_{n+1} = u_n + v_n$$

et, par récurrence, on obtient :

$$u_n + v_n = u_0 + v_0$$

Les formules $v_n - u_n = \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^n (v_0 - u_0)$ et $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^n = 0$ donnent le résultat :

$$u_n = \frac{u_0+v_0}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^n (v_0 - u_0)$$

$$v_n = \frac{u_0+v_0}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^n (v_0 - u_0)$$

Les suites $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ ont la même limite $\ell = \frac{u_0+v_0}{2}$.

EXERCICE 6.

1. On considère la fonction f de la variable réelle t définie par

$$f(t) = \frac{t}{1+t} - \ln(1+t) \qquad \text{pour } t > -1$$

a) Montrer que la fonction f est décroissante pour $t \geq 0$.
b) En déduire le signe de $f(t)$ pour $t \geq 0$.

2. On considère la fonction g de la variable réelle x définie par

$$g(x) = \frac{1}{e^x} \ln(1+e^x)$$

a) Calculer $\lim_{x\to+\infty} g(x)$ et $\lim_{x\to-\infty} g(x)$.
b) Calculer la dérivée de $g(x)$ et l'exprimer en fonction de $f(e^x)$.
c) En déduire les variations de la fonction g.
d) Tracer la courbe représentative de la fonction g (on ne cherchera pas à démontrer l'existence de point d'inflexion et on prendra $\ln 2 = 0{,}69$.

3. a) Montrer que $g(x)$ vérifie l'équation (E) :

$$g'(x) + g(x) = \frac{1}{1+e^x}.$$

b) On pose

$$g(x) = a + b\,x + c\,x^2 + d\,x^3 + x^3\,\varepsilon(x), \text{ avec } \lim_{x\to0} \varepsilon(x) = 0.$$

Calculer a. En utilisant l'équation (E), calculer les coefficients b, c, d. En déduire les valeurs de $g''(0)$ et de $g'''(0)$. Préciser la forme de la courbe au voisinage de $x = 0$.

4. Soit a un nombre réel.

a) Calculer $\int_0^a \frac{dt}{1+e^t}$ (on pourra faire un changement de variable).

b) On pose $G(a) = \int_0^a g(x)\,dx$.

De l'équation (E), déduire que $g(a) - g(0) + G(a) = \int_0^a \frac{dx}{1+e^x}$ et donner la valeur de $G(a)$.

5. On pose

$$u_n = \frac{1}{e}\ln(1+e) + \frac{1}{e^2}\ln(1+e^2) + \ldots + \frac{1}{e^n}\ln(1+e^n).$$

Comparer u_n et $G(n)$.
Montrer que la suite u_n est convergente et que sa limite est inférieure ou égale à $2\ln 2$.

SOLUTION.

1° Sens de variation d'une fonction.

1.a. Sens de variation pour $t \geq 0$.

La dérivée de la fonction

$$f\ (t) = \frac{t}{1+t} - ln\ (\ 1 + t\ ) = 1 - \frac{1}{1+t} - ln\ (\ 1 + t\ )$$

est :

$$\frac{df}{dt} = \frac{1}{(1+t)^2} - \frac{1}{1+t} = -\frac{t}{(1+t)^2}$$

Cette dérivée a le signe de $-\ t$:
— Elle est positive lorsque t est négatif.
— Elle est négative lorsque t est positif.
— Elle est nulle pour $t = 0$.
La fonction $f\ (t)$ est donc :
— Croissante lorsque t est négatif.
— Décroissante lorsque t est positif.
— Maximum pour $t = 0$.

1.b. Signe de *f (t)*.

La fonction est maximum pour $t = 0$. Or $f\ (0) = 0$, donc la fonction $f\ (t)$ est toujours négative ou nulle. En particulier, pour $t > 0$, elle est strictement plus petite que 0.

2° Limites, dérivées, courbe représentative.

2.a. Limites de *g* à l'infini.

Si x tend vers $-\infty$, e^x tend vers 0 par valeurs supérieures, $\frac{1}{e^x}$ tend vers $+\infty$, $ln\ (1 + e^x\ )$ tend vers $ln\ 1 = 0$ et $g(x)$ est une forme indéterminée $\frac{0}{0}$. On peut lever l'indétermination par la règle de L'Hopital : $g(x)$ a la même limite que le rapport des dérivées $\frac{1}{e^x} \times \frac{e^x}{1+e^x} = \frac{1}{1+e^x}$ qui tend vers 1.

$$\lim_{x \to -\infty} g\ (x) = 1$$

Si x tend vers $+\infty$, e^x tend vers $+\infty$, $ln\ (1 + e^x\ )$ tend vers $+\infty$, et $g(x)$ est une forme indéterminée $\frac{\infty}{\infty}$. Mais l'exponentielle l'emporte sur la puissance et sur le logarithme, donc le rapport a la même limite que $\frac{1}{e^x}$, il tend vers 0.

$$\lim_{x \to +\infty} g\ (x) = 0$$

2.b. Dérivée de la fonction *g*.

La fonction $g(x) = e^{-x}\ ln\ (1 + e^x\ )$ peut être considérée comme le produit de deux fonctions de x :
$u = e^{-x}$, d'où $u' = -u$
$v = ln\ (1 + e^x\ )$, d'où $v' = \frac{e^x}{1+e^x}$
La règle $g' = u'\ v + u\ v'$ donne :

$$\frac{dg}{dx} = -e^{-x}\ ln\,(1+e^{x}) + \frac{1}{1+e^{x}} = -\left(\ \frac{ln\ (1+e^{x})}{e^{x}} - \frac{1}{1+e^{x}}\ \right).$$

$$\boxed{\frac{dg}{dx} = -\left(\ \frac{ln\ (1+e^{x})}{e^{x}} - \frac{1}{1+e^{x}}\ \right).}$$

Remarquons que :

$$f(e^{x}) = \frac{e^{x}}{1+e^{x}} - ln\,(1+e^{x}) = -e^{x}\left(\ \frac{ln\ (1+e^{x})}{e^{x}} - \frac{1}{1+e^{x}}\ \right)$$

La dérivée de la fonction *g* peut donc s'écrire :

$$\boxed{\frac{dg}{dx} = \frac{f(e^{x})}{e^{x}}}$$

2.c. Sens de variation de la fonction *g*.

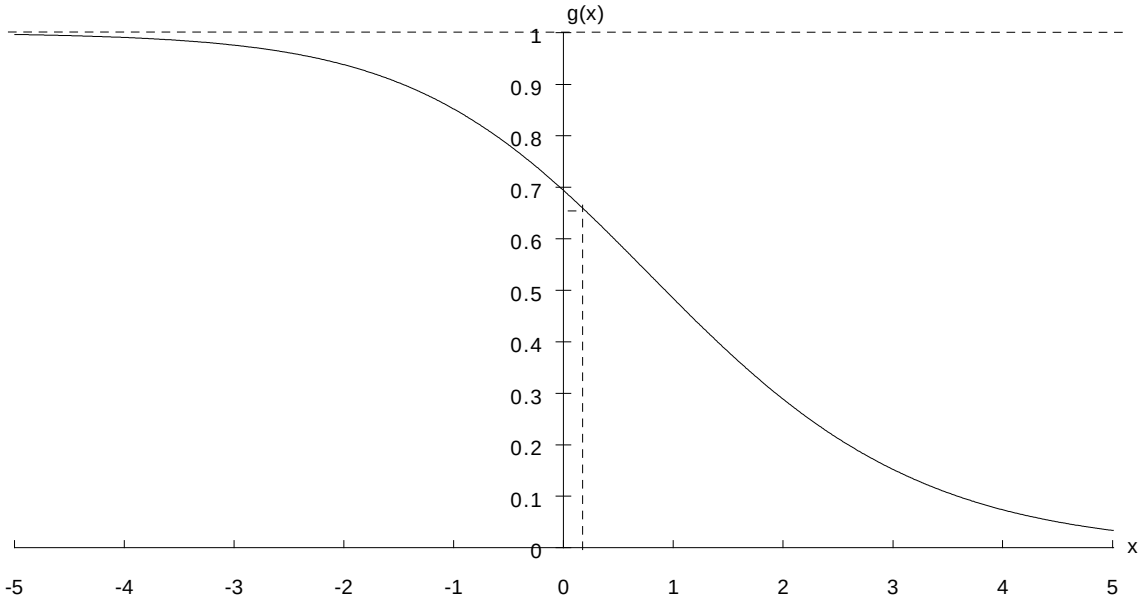
$$\frac{dg}{dx} = \frac{f(e^{x})}{e^{x}}$$

Comme e^{x} est toujours strictement plus grand que 0, $f(e^{x})$ est toujours strictement négatif, et la dérivée de *g* est toujours strictement négative : la fonction *g* est toujours strictement décroissante.

Tableau de variations :

x	$-\infty$		0		0,1976		$+\infty$
g''	0	–		–	0	+	0
g'	0	–		–		–	0
g	1	↘	$ln\ 2$	↘	0,6540	↘	0

2.d. Courbe représentative.



Courbe représentative de la fonction $g(x) = e^{-x}\ ln\,(1+e^{x})$.

3. Développement limité au voisinage de 0.

3.a. Equation différentielle de *g*.

La relation :

$$\frac{dg}{dx} = -e^{-x}\ ln\,(1+e^{x}) + \frac{1}{1+e^{x}}$$

obtenue dans la question 2.b permet d'écrire, puisque $g(x) = e^{-x}\ ln\,(1+e^{x})$:

$$\boxed{g'(x) + g(x) = \frac{1}{1+e^{x}}} \quad (E)$$

C'est une équation différentielle de la fonction $g(x)$.

3.b. Développement limité de *g*.

Quand on écrit le développement limité de $g(x)$ au voisinage de $x = 0$, on obtient :

$$g(x) = g(0) + g'(0)\,x + g''(0)\,\frac{x^2}{2} + g'''(0)\,\frac{x^3}{6} + x^3\,\varepsilon\,(x) \text{ avec } \lim_{x\to 0} \varepsilon\,(x) = 0.$$

et $g(x)$ s'écrit de façon unique sous cette forme. Dans le dé veloppement :

$$g\,(x) = a + b\,x + c\,x^2 + d\,x^3 + x^3\,\varepsilon\,(x), \text{ avec } \lim_{x\to 0} \varepsilon\,(x) = 0.$$

nous avons donc :

$a = g(0) = ln\ 2$

$b = g'(0) = -g(0) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - ln\ 2$

$c = \frac{1}{2}\ g''(0)$

$d = \frac{1}{6}\ g'''(0)$

L'équation (E) donne, par dérivation :

$$g''(x) + g'(x) = -\frac{e^{x}}{(1+e^{x})^2} = -\frac{1}{1+e^{x}} + \frac{1}{(1+e^{x})^2}$$

$g''(0) = -g'(0) - \frac{1}{4} = ln\ 2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}$

$c = \frac{1}{2}\ ln\ 2 - \frac{1}{4} - \frac{1}{8}$

$$g'''(x) + g''(x) = \frac{e^{x}}{(1+e^{x})^2} - 2\,\frac{e^{x}}{(1+e^{x})^3}$$

$g'''(0) + g''(0) = \frac{1}{4} - 2 \times \frac{1}{8} = 0$

$g'''(0) = -g''(0) = -ln\ 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$

$d = -\frac{1}{6}\ ln\ 2 + \frac{1}{12} + \frac{1}{24}$

$$\boxed{g\,(x) = ln\ 2 - \left(\ ln\ 2 - \frac{1}{2}\ \right) x + \left(\ ln\ 2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\ \right) \frac{x^2}{2} - \left(\ ln\ 2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\ \right) \frac{x^3}{6} + x^3\,\varepsilon\,(x), \text{ où } \lim_{x\to 0} \varepsilon\,(x) = 0.}$$

Au point $x = 0$, l'ordonnée est $g(0) = ln\ 2$, la tangente a une pente négative $g'(0) = \frac{1}{2} - ln\ 2$, la concavité de la courbe est dirigée vers les y décroissants et le rayon de courbure est $R = \frac{(1+(g'(0))^2)^{\frac{3}{2}}}{g''(0)} = -\frac{4+(2\,ln\,2-1)^2}{3-4\,ln\,2}$.

4. Primitive d'une fonction.

4.a. Intégrale de *g'* + *g*.

Pour calculer l'intégrale $I = \int_0^a \frac{dt}{1+e^t}$, faisons le changement de variable défini par $e^t = u$.

Elément différentiel : $e^t\,dt = du \Rightarrow dt = \frac{du}{u}$

Fonction à intégrer : $\frac{1}{1+e^t} = \frac{1}{1+u}$

Bornes de l'intégrale : $t = 0 \Rightarrow u = 1$; $t = a \Rightarrow u = e^a$.

$I = \int_1^{e^a} \frac{du}{u\,(1+u)}$

On est ramené à l'intégration d'une fraction rationnelle. On la décompose en éléments simples de première espèce :

$\frac{1}{u\,(1+u)} = \frac{\alpha}{u} + \frac{\beta}{1+u}$

Pour calculer α, on multiplie par u et on fait $u = 0$: $\alpha = 1$.

Pour calculer β, on multiplie par $1 + u$ et on fait $u = -1$: $\beta = -1$.

$\frac{1}{u\,(1+u)} = \frac{1}{u} - \frac{1}{1+u}$

$I = \int_1^{e^a} \frac{du}{u} - \int_1^{e^a} \frac{du}{1+u} = \left[\ln \left| \frac{u}{1+u} \right| \right]_{u=1}^{u=e^a} = \ln \frac{e^a}{1+e^a} - \ln \frac{1}{2} = \ln \frac{2\,e^a}{1+e^a}$

$$\boxed{\int_0^a \frac{dt}{1+e^t} = \ln \frac{2\,e^a}{1+e^a}}$$

4.b. Primitive de *g*.

L'équation *(E)* donne :

$$g'(x) + g(x) = \frac{1}{1+e^x}$$

Par intégration de 0 à *a*, il vient :

$\int_0^a g'(x)\,dx + \int_0^a g(x)\,dx = \int_0^a \frac{dx}{1+e^x}$

$g(a) - g(0) + G(a) = \ln \frac{2\,e^a}{1+e^a}$

$G(a) = g(0) - g(a) + \ln \frac{2\,e^a}{1+e^a} = \ln 2 - \frac{\ln\,(1+e^a)}{e^a} + \ln \frac{2\,e^a}{1+e^a}$

$G(a) = \ln 2 - \frac{\ln\,(1+e^a)}{e^a} + \ln 2 + \ln e^a - \ln\,(1 + e^a) = 2 \ln 2 + a - \frac{\ln\,(1+e^a)}{e^a} - \ln\,(1 + e^a)$

$$\boxed{G(a) = \int_0^a g(x)\,dx = 2 \ln 2 + a - \ln\,(1 + e^a) - \frac{\ln\,(1+e^a)}{e^a}}$$

Lorsque *a* tend vers $+\infty$, *G(a)* tend vers $2 \ln 2$.

Lorsque *a* tend vers $-\infty$, $G(a) - a$ tend vers $2 \ln 2 - 1$ car $\ln\,(1 + e^a) \approx e^a$.

La dérivée de *G* est *g* : elle est positive. *G* est une fonction croissante, elle est donc majorée par $2 \ln 2$.

5. Etude d'une suite.

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{e^{n+1}}\ ln\ (1 + e^{n+1}) > 0$$

La suite u_n est croissante.

$$G(n) = \int_0^n g(x)\,dx = \sum_{k=0}^{k=n-1} \int_k^{k+1} g(x)\,dx$$

Comme la fonction g est décroissante, l'intégrale $\int_k^{k+1} g(x)\,dx$ est supérieure ou égale à

$$g(k+1) = \frac{ln\ (1+e^{k+1})}{e^{k+1}}$$

$$\frac{ln\ (1+e^{k+1})}{e^{k+1}} \leq \int_k^{k+1} g(x)\,dx$$

et l'on a :

$$u_n = \sum_{k=0}^{k=n-1} \frac{ln\ (1+e^{k+1})}{e^{k+1}} \leq G(n)$$

$$\boxed{u_n \leq G(n) \leq 2\ ln\ 2}$$

La suite u_n est donc une suite croissante majorée par $2\ ln\ 2$. C'est une suite convergente et sa limite λ vérifie :

$$\lambda \leq 2\ ln\ 2$$

EXERCICE 7.

Soient a, b, c, des nombres réels (ou complexes). On considère une suite $(u_n)_{n \geq 0}$ de nombres réels (ou complexes) définie par récurrence par la donnée des deux premiers termes u_0 et u_1 et de la relation de récurrence:

$$u_{n+2} = a\, u_{n+1} + b\, u_n$$

1. On suppose $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$, calculer u_n en fonction de a, b , n. On notera $P_n\,(a,b)$ la solution u_n obtenue. Montrer que la solution $P_n\,(a,b)$ est un polynôme en a et b qu'on peut obtenir à partir du triangle de Pascal des développements des puissances successives de $(a + b)$, en prenant les diagonales ascendantes de ce triangle. Calculer $P_n\,(a,b)$ en fonction des racines de l'équation $x^2 = a\,x + b$.
2. On suppose maintenant u_0 et u_1 quelconques. Calculer u_n en fonction de u_0 , u_1 , b , $P_n\,(a,b)$, $P_{n-1}\,(a,b)$.
3. On considère une suite $(u_n)_{n \geq 0}$ de nombres réels (ou complexes) définie par récurrence par la donnée des deux premiers termes u_0 et u_1 et de la relation de récurrence :

   $$u_{n+2} = a\, u_n + b\, u_{n+1} + c$$

   Calculer u_n en fonction de u_0 , u_1 , $P_n\,(a,b)$, $P_{n-1}\,(a,b)$, b, c.
4. Pour a, b, réels, étudier, dans le plan (a,b), la convergence de la suite $(P_n\,(a,b))_{n \geq O}$.
5. Pour a, b, c, réels, étudier, dans le plan (a,b), la convergence de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie dans la question 3, suivant les valeurs de c.
6. Démontrer, par l'étude des polynômes $P_n\,(a,b)$, les formules :

6.1. $$\prod_{k=1}^{k=n} \cos \frac{k\pi}{n+1} = \frac{1}{2^n} \sin (n+1)\frac{\pi}{2}$$

6.2. $$\prod_{k=1}^{k=n} \sin \frac{k\pi}{n+1} = \frac{n+1}{2^n}$$

6.3. $$\prod_{k=1}^{k=n} \cos \frac{(2k-1)\pi}{2n} = \frac{1}{2^{n-1}} \cos n\frac{\pi}{2}$$

6.4. $$\prod_{k=1}^{k=n} \sin \frac{(2k-1)\pi}{2n} = \frac{1}{2^{n-1}}$$

6.5. $$\prod_{k=1}^{k=n} \cos \frac{k\pi}{2(n+1)} = \frac{\sqrt{n+1}}{2^n}$$

6.6. $$\prod_{k=1}^{k=n} \sin \frac{k\pi}{2(n+1)} = \frac{\sqrt{n+1}}{2^n}$$

6.7. $$\prod_{k=1}^{k=n} \cos \frac{(2k-1)\pi}{4n} = \frac{\sqrt{2}}{2^n}$$

6.8. $$\prod_{k=1}^{k=n} \sin \frac{(2k-1)\pi}{4n} = \frac{\sqrt{2}}{2^n}$$

6.9. $$\prod_{k=1}^{k=n} \cos \frac{k\pi}{2n+1} = \frac{1}{2^n}$$

6.10. $$\prod_{k=1}^{k=n} \sin \frac{k\pi}{2n+1} = \frac{\sqrt{2n+1}}{2^n}$$

6.11. $$\prod_{k=1}^{k=n} \cos \frac{(2k-1)\pi}{2(2n+1)} = \frac{\sqrt{2n+1}}{2^n}$$

6.12. $$\prod_{k=1}^{k=n} \sin \frac{(2k-1)\pi}{2(2n+1)} = \frac{1}{2^n}$$

SOLUTION.

1. Calcul de $P_n\ (a,b)$.

1.1. Première expression des polynômes P_n .

Par hypothèse, on a :

$P_0\ (a,b) = 0$

$P_1\ (a,b) = 1$

La formule de récurrence :

$$P_{n+2}\ (a,b) = a\ P_{n+1}\ (a,b) + b\ P_n\ (a,b)$$

donne successivement :

$P_2\ (a,b) = a\ P_1\ (a,b) + b\ P_0\ (a,b) = a$

$P_3\ (a,b) = a\ P_2\ (a,b) + b\ P_1\ (a,b) = a^2 + b$

$P_4\ (a,b) = a\ P_3\ (a,b) + b\ P_2\ (a,b) = a^3 + a\ b + b\ a = a^3 + 2\ a\ b$

Dressons le triangle de Pascal pour les premières puissances de $(a + b)$:

$(a + b)^0 =$ 1

$(a + b)^1 =$ a $+ b$

$(a + b)^2 =$ a^2 $+ 2\ a\ b$ $+ b^2$

$(a + b)^3 =$ a^3 $+ 3\ a^2\ b$ $+ 3\ a\ b^2$ $+ b^3$

$(a + b)^4 =$

On voit déjà ici comment on obtient les premiers polynômes $P_n\ (a,b)$ à partir des diagonales ascendantes du triangle de Pascal. Encore faut-il démontrer que ce procédé est général ! Pour cela, nous allons raisonner par récurrence, en supposant que le polynôme $P_n\ (a,b)$ est donné par la formule traduisant les diagonales ascendantes du triangle de Pascal.

On note $ENT\ (x)$ la partie entière du nombre réel x, c'est-à-dire le plus grand entier inférieur ou égal à x. C'est ainsi qu'est notée la même fonction dans le tableur Excel de Microsoft, par exemple.

On note $\begin{pmatrix} m-1-k \\ k \end{pmatrix}$ le coefficient binomial d'indices $m - 1 - k$ et k :

— Ce coefficient est égal à $\dfrac{(m-1-k)!}{k!(m-1-2k)!}$ si $m - 1 - k$ est supérieur ou égal à k ;

— Il est égal à 0 si $m - 1 - k$ est strictement plus petit que k.

Hypothèse de récurrence :

La formule $P_m\ (a,b) = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=ENT\left(\frac{m-1}{2}\right)} \begin{pmatrix} m-1-k \\ k \end{pmatrix} a^{m-1-2k}\ b^k$ est vraie pour tout entier m de 1 à n.

L'hypothèse de récurrence est vraie déjà pour les valeurs de n de 1 à 4.

Montrons que si l'hypothèse de récurrence est vraie pour n, **elle est vraie aussi pour $n + 1$**.

La formule :

$$P_m\ (a,b) = \sum_{k=0}^{k=ENT\left(\frac{m-1}{2}\right)} \begin{pmatrix} m-1-k \\ k \end{pmatrix} a^{m-1-2k}\ b^k$$

est déjà vraie pour $1 \leq m \leq n$ d'après l'hypothèse de récurrence. Il reste donc seulement à la démontrer pour $m = n + 1$. Or on a :

$$P_{n+1}\ (a,b) = a\ P_n\ (a,b) + b\ P_{n-1}\ (a,b)$$

donc, d'après l'hypothèse de récurrence :

$$P_{n+1}(a,b) = a \sum_{k=0}^{k=ENT\left(\frac{n-1}{2}\right)} \binom{n-1-k}{k} a^{n-1-2k} b^k + b \sum_{k=0}^{k=ENT\left(\frac{n-2}{2}\right)} \binom{n-2-k}{k} a^{n-2-2k} b^k$$

$$P_{n+1}(a,b) = \sum_{k=0}^{k=ENT\left(\frac{n-1}{2}\right)} \binom{n-1-k}{k} a^{n-2k} b^k + \sum_{k=0}^{k=ENT\left(\frac{n-2}{2}\right)} \binom{n-2-k}{k} a^{n-2-2k} b^{k+1}$$

$$P_{n+1}(a,b) = \sum_{k\geq 0} \binom{n-1-k}{k} a^{n-2k} b^k + \sum_{k\geq 1} \binom{n-1-k}{k+1} a^{n-2k} b^k$$

$$P_{n+1}(a,b) = \binom{n-1}{0} a^n b^0 + \sum_{k\geq 1} \left(\binom{n-1-k}{k} + \binom{n-1-k}{k+1} \right) a^{n-2k} b^k$$

$$P_{n+1}(a,b) = a^n + \sum_{k\geq 1} \binom{n-k}{k} a^{n-2k} b^k = \sum_{k\geq 0} \binom{n-k}{k} a^{n-2k} b^k$$

et comme les coefficients binomiaux sont nuls pour $k > ENT\left(\frac{n}{2}\right)$, il reste :

$$P_{n+1}(a,b) = \sum_{k=0}^{k=ENT\left(\frac{n}{2}\right)} \binom{n-k}{k} a^{n-2k} b^k$$

et cette formule achève le raisonnement par récurrence. L'application du principe de récurrence nous dit que, pour tout entier $n \geq 1$, le polynôme $P_n(a,b)$ est donné par la formule :

$$P_n(a,b) = \sum_{k=0}^{k=ENT\left(\frac{n-1}{2}\right)} \binom{n-1-k}{k} a^{n-1-2k} b^k$$

Ce polynôme s'obtient en prenant les termes de la diagonale ascendante du triangle de Pascal à partir de $(a+b)^n$.

1.2. Deuxième expression des polynômes P_n .

La solution dans $\mathbb{C}$, de l'équation de récurrence :

$$P_{n+2}(a,b) = a\, P_{n+1}(a,b) + b\, P_n(a,b)$$

avec $P_0(a,b) = 0$ et $P_1(a,b) = 1$, est donnée, pour $n \geq 2$, par :

$$P_n(a,b) = \begin{cases} 0 & \text{si } a = b = 0 \\ n \left(\frac{a}{2} \right)^{n-1} & \text{si } a^2 + 4b = 0, \text{ avec } a \neq 0 \\ \dfrac{\left(\frac{a+\sqrt{a^2+4b}}{2} \right)^n - \left(\frac{a-\sqrt{a^2+4b}}{2} \right)^n}{\sqrt{a^2+4b}} & \text{si } a^2 + 4b \neq 0 \end{cases}$$

Démonstration.

1.2.1. Pour $a = b = 0$.

La relation de récurrence se réduit à :

$$P_{n+2}(a,b) = 0$$

1.2.2. Pour $a^2 + 4\,b \neq 0$.

Dans ce cas, l'équation :

$$x^2 = a\,x + b$$

a deux racines distinctes :

$$x_1 = \frac{a+\sqrt{a^2+4b}}{2} \text{ et } x_2 = \frac{a-\sqrt{a^2+4b}}{2}$$

avec $\sqrt{a^2+4b} = i\,\sqrt{-a^2-4b}$ si $a^2 + 4\,b < 0$. La différence des racines est :

$$x_1 - x_2 = \sqrt{a^2+4b} \neq 0$$

On a :

$$x_1^{\,2} = a\,x_1 + b \quad \text{et} \quad x_2^{\,2} = a\,x_2 + b$$
$$x_1^{\,n+2} = a\,x_1^{\,n+1} + b\,x_1^{\,n} \quad \text{et} \quad x_2^{\,n+2} = a\,x_2^{\,n+1} + b\,x_2^{\,n}$$

Par soustraction membre à membre et division par $x_1 - x_2$, il vient :

$$\frac{x_1^{\,n+2} - x_2^{\,n+2}}{x_1 - x_2} = a\,\frac{x_1^{\,n+1} - x_2^{\,n+1}}{x_1 - x_2} + b\,\frac{x_1^{\,n} - x_2^{\,n}}{x_1 - x_2}$$

avec $\frac{x_1^{\,n} - x_2^{\,n}}{x_1 - x_2} = 0$ pour $n = 0$ et $\frac{x_1^{\,n} - x_2^{\,n}}{x_1 - x_2} = 1$ pour $n = 1$. Le rapport $\frac{x_1^{\,n} - x_2^{\,n}}{x_1 - x_2}$ est donc la solution de l'équation de récurrence et l'on a :

$$P_n\,(a,b) = \frac{x_1^{\,n} - x_2^{\,n}}{x_1 - x_2} = \frac{\left(\frac{a+\sqrt{a^2+4b}}{2}\right)^n - \left(\frac{a-\sqrt{a^2+4b}}{2}\right)^n}{\sqrt{a^2+4b}} \text{ si } a^2 + 4\,b \neq 0.$$

1.2.3. Pour $a^2 + 4\,b = 0$ avec $a \neq 0$.

Si $a^2 + 4\,b$ tend vers 0, x_1 et x_2 tendent vers $\frac{a}{2}$ et $P_n\,(a,b) = \frac{x_1^{\,n} - x_2^{\,n}}{x_1 - x_2}$ tend vers la dérivée de x^n pour $x = \frac{a}{2}$.

Donc $P_n\,(a,b)$ tend vers $n\left(\frac{a}{2}\right)^{n-1}$.

Comme $P_n\,(a,b)$ est un polynôme en a et b, il est continu et a des dérivées par rapport à a et b continues. Par continuité, lorsque $a^2 + 4\,b = 0$, on a donc :

$$P_n\,(a,b) = n\left(\frac{a}{2}\right)^{n-1},$$

au moins pour $a \neq 0$ et $n \geq 1$. On pourrait aussi montrer ce résultat par récurrence sur n.

2. Résolution de l'équation de récurrence.

La solution dans $\mathbb{C}$, de l'équation de récurrence $u_{n+2} = a\,u_{n+1} + b\,u_n$ est donnée, pour $n \geq 1$, par
$u_n = P_n\,(a,b)\,u_1 + b\,P_{n-1}\,(a,b)\,u_0$

Démonstration.

Pour $n = 1$, la formule se réduit à $u_1 = P_1\,(a,b)\,u_1 + b\,P_0\,(a,b)\,u_0 = u_1$: elle est triviale.
La formule est vraie pour $n = 2$, où elle se réduit à $u_2 = P_2\,(a,b)\,u_1 + b\,P_1\,(a,b)\,u_0 = a\,u_1 + b\,u_0$.
Supposons la formule vraie depuis 2 jusqu'à un entier $n \geq 2$.
Montrons qu'alors elle vraie aussi pour $n + 1$.
La relation de récurrence donne :

$$u_{n+1} = a\,u_n + b\,u_{n-1} = a\,(P_n\,(a,b)\,u_1 + b\,P_{n-1}\,(a,b)\,u_0) + b\,(P_{n-1}\,(a,b)\,u_1 + b\,P_{n-2}\,(a,b)\,u_0)$$
$$u_{n+1} = (a\,P_n\,(a,b) + b\,P_{n-1}\,(a,b))\,u_1 + (a\,b\,P_{n-1}\,(a,b) + b^2\,P_{n-2}\,(a,b))\,u_0$$

Or on a :

$$a\,P_n\,(a,b) + b\,P_{n-1}\,(a,b) = P_{n+1}\,(a,b)$$

$$a\ b\ P_{n-1}(a,b) + b^2\ P_{n-2}(a,b) = b\ (a\ P_{n-1}(a,b) + b\ P_{n-2}(a,b)) = b\ P_n(a,b)$$

donc :

$$u_{n+1} = P_{n+1}(a,b)\ u_1 + b\ P_n(a,b)\ u_0$$

ce qui achève la démonstration par récurrence.

3. Résolution de l'équation de récurrence généralisée.

3.1. Lemme.

Le polynôme $S_n(a,b) = \sum_{k=0}^{k=n-1} P_k(a,b)$ est donné, pour $n \geq 1$, par :

$$S_n(a,b) = \begin{cases} \dfrac{1 - P_n(a,b) - b\ P_{n-1}(a,b)}{1-a-b} & \text{si } a + b \neq 1 \\ \dfrac{n - P_n(a,b)}{1+b} & \text{si } a + b = 1 \text{ et } b \neq -1 \\ \dfrac{n\,(n-1)}{2} & \text{si } a = 2 \text{ et } b = -1 \end{cases}$$

Démonstration du lemme.

La formule $P_k(a,b) = a\ P_{k-1}(a,b) + b\ P_{k-2}(a,b)$, valable pour $k \geq 2$, donne :

$$\sum_{k=2}^{k=n} P_k(a,b) = a \sum_{k=2}^{k=n} P_{k-1}(a,b) + b \sum_{k=2}^{k=n} P_{k-2}(a,b)$$

$$P_n(a,b) + \sum_{k=0}^{k=n-1} P_k(a,b) - P_1(a,b) - P_0(a,b) = a \sum_{k=1}^{k=n-1} P_k(a,b) + b \sum_{k=0}^{k=n-2} P_k(a,b)$$

$$S_n(a,b) + P_n(a,b) - P_1(a,b) - P_0(a,b) = a\ S_n(a,b) + b\ (S_n(a,b) - P_{n-1}(a,b))$$

$$(1 - a - b)\ S_n(a,b) = P_1(a,b) + P_0(a,b) - P_n(a,b) - b\ P_{n-1}(a,b) = 1 - P_n(a,b) - b\ P_{n-1}(a,b)$$

$$\boxed{(1 - a - b)\ S_n(a,b) = 1 - P_n(a,b) - b\ P_{n-1}(a,b)}$$

Pour $a + b \neq 1$, on obtient :

$$S_n(a,b) = \frac{1 - P_n(a,b) - b\ P_{n-1}(a,b)}{1-a-b}$$

Pour $a + b = 1$, il reste :

$$P_n(a,b) + b\ P_{n-1}(a,b) = 1$$

et cette formule est valable pour tout $n \geq 1$.

$$P_k(a,b) + b\ P_{k-1}(a,b) = 1$$

$$\sum_{k=1}^{k=n} P_k(a,b) + b \sum_{k=1}^{k=n} P_{k-1}(a,b) = \sum_{k=1}^{k=n} 1 = n$$

$$P_n(a,b) + S_n(a,b) + b\ S_n(a,b) = n$$

$$\boxed{(1 + b)\ S_n(a,b) = n - P_n(a,b)}$$

— pour $b \neq -1$, on obtient :

$$S_n(a,b) = \frac{n - P_n(a,b)}{1+b}$$

— Pour $b = -1$, on a $a = 1 - b = 2$ et il reste :

$$\boxed{P_n(a,b) = n}$$

d'où :

$$S_n(a,b) = \sum_{k=0}^{k=n-1} P_k(a,b) = \frac{n(n-1)}{2}$$

3.2. Proposition.

La solution dans $\mathbb{C}$, de l'équation de récurrence
$u_{n+2} = a\,u_n + b\,u_{n+1} + c$
est donnée, pour $n \geq 1$, par la formule :
$u_n = P_n(a,b)\,u_1 + b\,P_{n-1}(a,b)\,u_0 + c\,S_n(a,b)$

Démonstration de la proposition.

Posons $v_n = u_{n+1} - u_n$, pour $n \geq 0$. On a :

$$v_{n+2} = u_{n+3} - u_{n+2} = (a\,u_{n+2} + b\,u_{n+1}) - (a\,u_{n+1} + b\,u_n) = a\,(u_{n+2} - u_{n+1}) + b\,(u_{n+1} - u_n)$$

$$v_{n+2} = a\,v_{n+1} + b\,v_n$$

Le résultat de la question 2 montre alors que l'on a :

$$v_n = P_n(a,b)\,v_1 + b\,P_{n-1}(a,b)\,v_0 \text{ , pour } n \geq 1$$

$$v_k = P_k(a,b)\,v_1 + b\,P_{k-1}(a,b)\,v_0 \text{ , pour } k \geq 1$$

$$\sum_{k=1}^{k=n-1} v_k = \sum_{k=1}^{k=n-1} P_k(a,b)\,v_1 + b \sum_{k=1}^{k=n-1} P_{k-1}(a,b)\,v_0$$

$$u_n - u_1 = S_n(a,b)\,(u_2 - u_1) + b\,(S_n(a,b) - P_{n-1}(a,b))\,(u_1 - u_0)$$

$$u_n - u_1 = S_n(a,b)\,(a\,u_1 + b\,u_0 + c - u_1 + b\,u_1 - b\,u_0) - b\,P_{n-1}(a,b)(u_1 - u_0)$$

$$u_n = S_n(a,b)\,((a + b - 1)\,u_1 + c) + (1 - b\,P_{n-1}(a,b))\,u_1 + b\,P_{n-1}(a,b)\,u_0$$

$$u_n = c\,S_n(a,b) - (1 - P_n(a,b) - b\,P_{n-1}(a,b))\,u_1 + (1 - b\,P_{n-1}(a,b))\,u_1 + b\,P_{n-1}(a,b)\,u_0$$

$$u_n = c\,S_n(a,b) + P_n(a,b)\,u_1 + b\,P_{n-1}(a,b)\,u_0$$

Corollaire.

L'expression de $S_n(a,b)$ donnée par le lemme précédent montre que l'on peut écrire la solution, dans $\mathbb{C}$, de l'équation de récurrence $u_{n+2} = a\,u_n + b\,u_{n+1} + c$, sous la forme :

$$u_n = \begin{cases} P_n(a,b)\left(u_1 - \dfrac{c}{1-a-b}\right) + b\,P_{n-1}(a,b)\left(u_0 - \dfrac{c}{1-a-b}\right) + \dfrac{c}{1-a-b} & \text{si } a + b \neq 1 \\ P_n(a,b)\left(u_1 - \dfrac{c}{1+b}\right) + b\,P_{n-1}(a,b)\,u_0 + n\,\dfrac{c}{1+b} & \text{si } a + b = 1 \text{ et } b \neq -1 \\ n\,u_1 - (n-1)\,u_0 + \dfrac{n(n-1)}{2}\,c & \text{si } a = 2 \text{ et } b = -1 \end{cases}$$

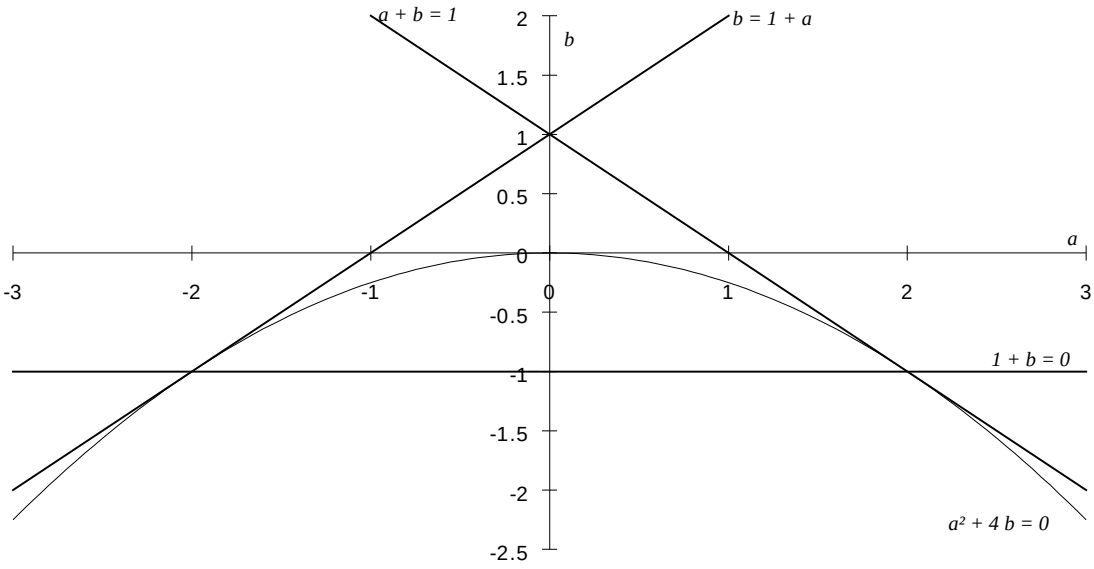
On a, en effet, $P_n(2,-1) = n$.

4. Convergence de la suite $(P_n(a,b))_{n \geq 0}$.

Les conditions que nous avons déjà fait intervenir :

$a + b \neq 1$
$a + b = 1$ et $b \neq -1$
$a = 2$ et $b = -1$
$a^2 + 4\,b = 0$
$a = 0$ et $b = 0$

permettent de partager le plan (a,b) en plusieurs régions.



Les différentes régions du plan (a,b).

4.1. Intérieur du triangle.

L'intérieur du triangle est défini par les relations :

$$| b | < 1 \text{ et } | a | < 1 - b$$

ou encore :

$$-1 < b < 1 \text{ et } b - 1 < a < 1 - b$$

Les racines x_1 et x_2 de l'équation $x^2 = a\,x + b$ vérifient :

$$x_1 + x_2 = a$$
$$x_1\,x_2 = -b$$

A l'intérieur du triangle ainsi défini, on a donc :

$$-1 < x_1\,x_2 < 1 \quad \text{et} \quad -1 - x_1\,x_2 < x_1 + x_2 < 1 + x_1\,x_2$$

Il en résulte :

$$(x_1 - 1)(x_2 - 1) = x_1\,x_2 - (x_1 + x_2) + 1 > 0$$
$$(x_1 - 1) + (x_2 - 1) = (x_1 + x_2) - 2 = a - 2 < 0$$

Les deux nombres $(x_1 - 1)$ et $(x_2 - 1)$ sont de même signe et leur somme est négative. Ils sont donc tous deux négatifs et l'on a :

$$x_1 < 1 \text{ et } x_2 < 1$$
$$(x_1 + 1)(x_2 + 1) = x_1\,x_2 + (x_1 + x_2) + 1 > 0$$
$$(x_1 + 1) + (x_2 + 1) = (x_1 + x_2) + 2 = a + 2 > 0$$

Les deux nombres $(x_1 + 1)$ et $(x_2 + 1)$ sont de même signe et leur somme est positive. Ils sont donc tous deux positifs et l'on a :

$$x_1 > -1 \text{ et } x_2 > -1$$

En définitive, on a :

$$| x_1 | < 1 \text{ et } | x_2 | < 1$$

Lorsque $x_1 \neq x_2$, $P_n\,(a,b) = \dfrac{{x_1}^n - {x_2}^n}{x_1 - x_2}$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini.

Lorsque $x_1 = x_2$, $P_n\,(a,b) = n\,{x_1}^{n-1}$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini.

C'est le cas aussi lorsque $x_1 = x_2 = 0$ ($a = b = 0$), car, dans ce cas, on a $P_n\,(a,b) = 0$ pour tout $n \geq 2$.

On voit donc que, dans tous les cas :

A l'intérieur du triangle, la suite $(P_n\,(a,b))_{n \geq 0}$ converge vers 0.

4.2. Extérieur du triangle.

L'extérieur du triangle est défini par la relation :

$$(-1 \le b \le 1) \Rightarrow (b + a > 1 \text{ ou } b - a > 1)$$

Toujours avec $x_1 + x_2 = a$ et $x_1 x_2 = -b$, cette relation s'écrit :

$$(-1 \le x_1 x_2 \le 1) \Rightarrow (-x_1 x_2 + x_1 + x_2 > 1 \text{ ou } -x_1 x_2 - x_1 - x_2 > 1)$$

Si $| x_1 x_2 |$ est supérieur à 1, c'est que l'une des racines, au moins, a un module supérieur à 1, et dans ce cas, $P_n(a,b)$ diverge puisque, en dehors de la parabole $a^2 + 4b = 0$, on a $P_n(a,b) = \dfrac{{x_1}^n - {x_2}^n}{x_1 - x_2} \to \infty$, et, sur la parabole, $P_n(a,b) = n\,{x_1}^{n-1} \to \infty$

Si $| x_1 x_2 |$ est inférieur ou égal à 1, on a alors :

$$(x_1 - 1)(x_2 - 1) = x_1 x_2 - (x_1 + x_2) + 1 < 0 \text{ ou } (x_1 + 1)(x_2 + 1) = x_1 x_2 + (x_1 + x_2) + 1 < 0$$

Les deux nombres $(x_1 - 1)$ et $(x_2 - 1)$ sont de signes contraires, ou bien les deux nombres $(x_1 + 1)$ et $(x_2 + 1)$ sont de signes contraires. On a donc :

$$(| x_1 | < 1 \Rightarrow | x_2 | > 1) \text{ et } (| x_2 | < 1 \Rightarrow | x_1 | > 1)$$

Il en résulte que si l'une des racines a un module strictement plus petit que 1, l'autre a un module strictement plus grand que 1 et $P_n(a,b) = \dfrac{{x_1}^n - {x_2}^n}{x_1 - x_2} \to \infty$, la suite diverge.

Reste le cas hypothétique où les deux racines auraient un module égal à 1 : $| x_1 | = | x_2 | = 1$. On aurait alors la relation ${x_1}^2 = {x_2}^2$. Comme on est ici au-dessus de la parabole, les racines sont réelles et distinctes. On a donc forcément $x_1 + x_2 = 0$, $a = 0$. C'est impossible puisqu'on est à l'extérieur du triangle dans la bande $| b | < 1$.

Ainsi, dans tous les cas :

> A l'extérieur du triangle, la suite $(P_n(a,b))_{n \ge 0}$ diverge.

4.3. Frontière du triangle.

Sur la frontière du triangle, tous les cas se rencontrent.

4.3.1. Sommets du triangle.

4.3.1.1. $P_n(0,1)$.

$x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $P_n(0,1) = \dfrac{1-(-1)^n}{2} = sin^2\,(n+1)\dfrac{\pi}{2}$. $P_n(a,b)$ oscille entre les valeurs 0 (n impair) et 1 (n pair). La suite ne converge pas mais reste bornée.

4.3.1.2. $P_n(-2,-1)$.

$x_1 = x_2 = -1$, $P_n(-2,-1) = n\,(-1)^{n-1}$. La suite n'est pas bornée, elle diverge, sautant de valeurs négatives à des valeurs positives, et inversement, de plus en plus grandes en valeurs absolues.

4.3.1.3. $P_n(2,-1)$.

$x_1 = x_2 = 1$, $P_n(2,-1) = n$. La suite est croissante, non bornée, elle diverge.

4.3.2. Milieux des côtés du triangle.

4.3.2.1. $P_n(-1,0)$.

$x_1 = 0$, $x_2 = -1$, $P_n(-1,0) = (-1)^{n-1}$, suite oscillante, non convergente, passant alternativement de -1 (n pair) à 1 (n impair).

4.3.2.2. $P_n(1,0)$.

$x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $P_n(1,0) = 1$. La suite est constante et égale à 1, donc convergente vers 1.

4.3.2.3. P_n (0,–1).

$x_1 = i$, $x_2 = -i$, $P_n(0,-1) = \dfrac{i^n - (-i)^n}{2i} = \dfrac{e^{in\frac{\pi}{2}} - e^{-in\frac{\pi}{2}}}{2i} = \sin n\dfrac{\pi}{2}$. La suite oscille entre les valeurs 0, 1, –1, suivant le reste de n modulo 4. Elle reste bornée, mais n'est pas convergente.

4.3.3. Côtés du triangle.

4.3.3.1. P_n (a,–1), avec $a \neq 0$ et $|a| \neq 2$.

$x_1 = \dfrac{a + i\sqrt{4-a^2}}{2} = e^{i\theta}$, avec $\theta = A\cos\dfrac{a}{2}$, $x_2 = \dfrac{1}{x_1} = \overline{x}_1 = e^{-i\theta}$, $x_1 - x_2 = 2i \sin\theta$, $x_1 + x_2 = a = 2\cos\theta$.

$$P_n(2\cos\theta,-1) = \frac{e^{in\theta} - e^{-in\theta}}{e^{i\theta} - e^{-i\theta}} = \frac{\sin n\theta}{\sin\theta}$$

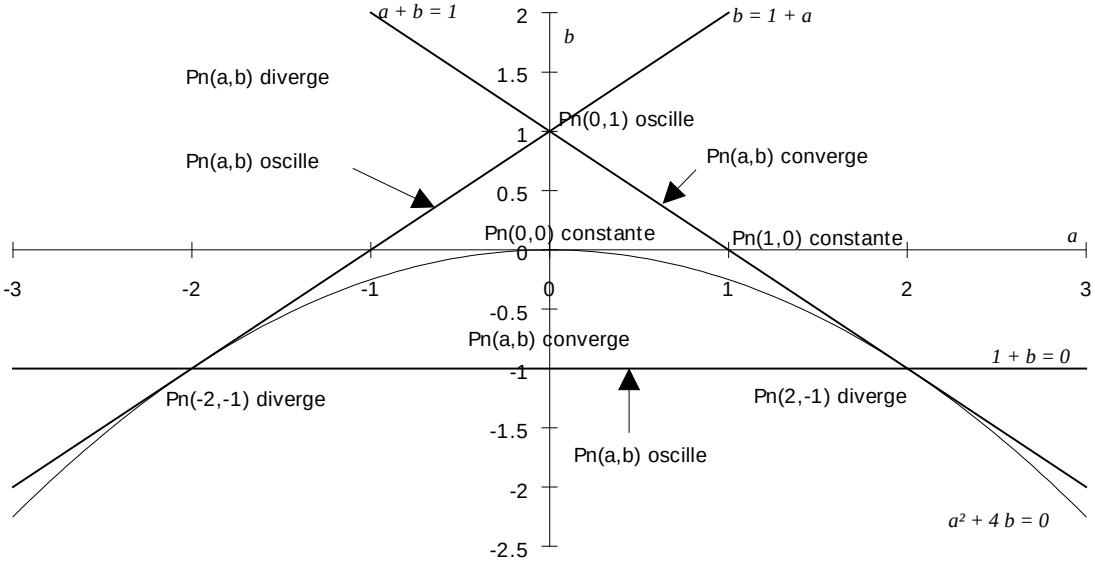
La suite oscille, reste bornée, mais n'est pas convergente.

4.3.3.2. P_n (a,1–a), avec $a \neq 0$, $a \neq -1$, $a \neq -2$.

$x_1 = 1$, $x_2 = a - 1$, $|x_2| > 1$, $P_n(a,b) = \dfrac{{x_1}^n - {x_2}^n}{x_1 - x_2} \to \infty$, la suite diverge.

4.3.3.3. P_n (a,1+a), avec $a \neq 0$, $a \neq 1$, $a \neq 2$.

$x_1 = a + 1$, $x_2 = -1$, $|x_1| > 1$, $P_n(a,b) = \dfrac{{x_1}^n - {x_2}^n}{x_1 - x_2} \to \infty$, la suite diverge.



Convergence et divergence de P_n (a,b), selon les diverses régions du plan.

5. Convergence de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$.

La suite $(u_n)_{n \geq 0}$ dépend de la suite $(P_n(a,b))_{n \geq 0}$ et de la constante c :

$$u_n = \begin{cases} P_n(a,b)\left(u_1 - \dfrac{c}{1-a-b}\right) + b\,P_{n-1}(a,b)\left(u_0 - \dfrac{c}{1-a-b}\right) + \dfrac{c}{1-a-b} & \text{si } a+b \neq 1 \\ P_n(a,b)\left(u_1 - \dfrac{c}{1+b}\right) + b\,P_{n-1}(a,b)\,u_0 + n\,\dfrac{c}{1+b} & \text{si } a+b=1 \text{ et } b \neq -1 \\ n\,u_1 - (n-1)\,u_0 + \dfrac{n(n-1)}{2}\,c & \text{si } a=2 \text{ et } b=-1 \end{cases}$$

A l'extérieur du triangle défini par $(-1 \leq b \leq 1) \Rightarrow (b + a > 1$ ou $b - a > 1)$, la suite $(P_n(a,b))_{n \geq 0}$ diverge. A l'intérieur de ce triangle, la suite $(P_n(a,b))_{n \geq 0}$ converge vers 0.

5.1. Hors de la droite $a + b = 1$.

$$u_n = P_n(a,b)\left(u_1 - \frac{c}{1-a-b}\right) + b\,P_{n-1}(a,b)\left(u_0 - \frac{c}{1-a-b}\right) + \frac{c}{1-a-b}$$

Si l'on a : $u_1 = u_0 = \dfrac{c}{1-a-b}$, alors la formule donnant u_n montre que, pour tout $n \geq 0$, on a :

$$u_n = \frac{c}{1-a-b}$$

donc la suite est constante et converge donc vers $\dfrac{c}{1-a-b}$, partout en dehors de la droite $a + b = 1$.

$$u_1 = u_0 = \frac{c}{1-a-b} \Rightarrow u_n = \frac{c}{1-a-b}\ \forall n \geq 0, \text{ suite constante.}$$

Lorsque la suite $(P_n(a,b))_{n \geq 0}$ converge, sa limite est 0, et la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ converge aussi. Donc :

A l'intérieur du triangle, la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ converge et sa limite est $\dfrac{c}{1-a-b}$

Si la suite $(P_n(a,b))_{n \geq 0}$ diverge, il y a nécessairement au moins une racine de l'équation $x^2 = a\,x + b$ dont le module est strictement plus grand que 1. Dans ce cas, hormis le cas exceptionnel où $u_1 = u_0 = \dfrac{c}{1-a-b}$, la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ diverge.

A l'extérieur du triangle, la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ diverge.

Reste à voir comment se comporte la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ sur la ***frontière du triangle de convergence***.

- **Pour $b = -1$ et $a^2 \neq 4$.**

  On pose $a = 2\cos\theta$. $P_n(a,b) = \dfrac{\sin n\theta}{\sin\theta}$; $1 - a - b = 2(1 - \cos\theta) \neq 0$.

  $$u_n = \frac{\sin n\theta}{\sin\theta}\left(u_1 - \frac{c}{2(1-\cos\theta)}\right) - \frac{\sin(n-1)\theta}{\sin\theta}\left(u_0 - \frac{c}{2(1-\cos\theta)}\right) + \frac{c}{2(1-\cos\theta)}$$

  $\sin(n-1)\theta = \sin n\,\theta\cos\theta - \sin\theta\cos n\,\theta$

  $$u_n = \frac{\sin n\theta}{\sin\theta}\left(u_1 - \frac{c}{2(1-\cos\theta)} - \cos\theta\left(u_0 - \frac{c}{2(1-\cos\theta)}\right)\right) + \cos n\,\theta\left(u_0 - \frac{c}{2(1-\cos\theta)}\right) + \frac{c}{2(1-\cos\theta)}$$

Posons $r\,e^{i\varphi} = \left(u_1 - \dfrac{c}{2(1-\cos\theta)} - \cos\theta \left(u_0 - \dfrac{c}{2(1-\cos\theta)} \right) \right) + i \sin\theta \left(u_0 - \dfrac{c}{2(1-\cos\theta)} \right)$

On a alors :

$u_n = \dfrac{\sin n\theta}{\sin\theta} r \cos\varphi + \cos n\,\theta \times r\,\dfrac{\sin\varphi}{\sin\theta} + \dfrac{c}{2(1-\cos\theta)} = r\,\dfrac{\sin(n\theta+\varphi)}{\sin\theta} + \dfrac{c}{2(1-\cos\theta)}$

et cette formule montre que la suite u_n oscille, soit périodiquement si θ est une fraction rationnelle de π, soit, en cas contraire, en s'approchant d'aussi près qu'on veut de toute valeur de l'intervalle

$$\left[\frac{c}{2(1-\cos\theta)} - \frac{r}{\sin\theta} ; \frac{c}{2(1-\cos\theta)} + \frac{r}{\sin\theta} \right]$$

- **Pour $b = -1$ et $a = 2$.**

  $P_n(2,-1) = n$

  $u_n = n\,u_1 - (n-1)\,u_0 + \dfrac{n(n-1)}{2}\,c = n^2\,\dfrac{c}{2} + n\left(u_1 - u_0 - \dfrac{c}{2} \right) + u_0$

  et la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ converge si et seulement si l'on a $c = 0$ et $u_1 = u_0$, auquel cas la suite est constante : $u_n = u_0$. Si l'on n'a pas $c = 0$ et $u_1 = u_0$, la suite diverge.

- **Pour $b = -1$ et $a = -2$.**

  $P_n(-2,-1) = (-1)^{n-1} n$

  $u_n = (-1)^{n-1} n \left(u_1 - \dfrac{c}{4} \right) - (-1)^{n-2} (n-1) \left(u_0 - \dfrac{c}{4} \right) + \dfrac{c}{4}$

  $u_n = (-1)^{n-1} n \left(u_1 + u_0 - \dfrac{c}{2} \right) + (-1)^n \left(u_0 - \dfrac{c}{4} \right) + \dfrac{c}{4}$

  Pour $u_1 + u_0 = \dfrac{c}{2}$, la suite se réduit à $u_n = (-1)^n \left(u_0 - \dfrac{c}{4} \right) + \dfrac{c}{4}$. C'est une suite dont les valeurs alternent de u_0 (n pair) à u_1 (n impair), et la suite est constante si $u_0 = u_1 = \dfrac{c}{4}$.

  Pour $u_1 + u_0 \neq \dfrac{c}{2}$, la suite est divergente.

- **Pour $a + b = 1$, avec $|b| \neq 1$.**

  $x_1 = 1$, $x_2 = a - 1 = -b$, avec $|b| < 1$; $P_n(a,b) = \dfrac{1-(-b)^n}{1+b}$

  $u_n = \dfrac{1-(-b)^n}{1+b} \left(u_1 - \dfrac{c}{1+b} \right) + b\,\dfrac{1-(-b)^{n-1}}{1+b}\,u_0 + n\,\dfrac{c}{1+b}$

  Pour que la suite converge, il faut et il suffit que $c = 0$.

- **Pour $a = 0$ et $b = 1$.**

  $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $P_n(a,b) = \dfrac{1-(-1)^n}{2}$

  $u_n = \dfrac{1-(-1)^n}{2} \left(u_1 - \dfrac{c}{2} \right) + \dfrac{1-(-1)^{n-1}}{2}\,u_0 + n\,\dfrac{c}{2} = \dfrac{u_1+u_0}{2} - (-1)^n\,\dfrac{u_1-u_0}{2} + n\,\dfrac{c}{2}$

  Si $c \neq 0$, la suite diverge. Si $c = 0$, la suite alterne de u_0 (n pair) à u_1 (n impair) : elle est constante si $u_1 = u_0$.

- **Pour $b - a = 1$, avec $|b| < 1$.**

  $x_1 = b$, $x_2 = -1$, $P_n(a,b) = \dfrac{b^n-(-1)^n}{1+b} = -(-1)^n\,\dfrac{1-(-b)^n}{1+b}$, $1 - a - b = -2\,a$

  $u_n = \dfrac{b^n-(-1)^n}{1+b} \left(u_1 + \dfrac{c}{2a} \right) + b\,\dfrac{b^{n-1}-(-1)^{n-1}}{1+b} \left(u_0 + \dfrac{c}{2a} \right) + \dfrac{c}{2a}$

  Les termes en b^n tendent vers 0, lorsque n tend vers l'infini. Pour que la suite converge, il faut et il suffit que le terme en $(-1)^n$ soit nul, sinon la suite est alternée. La condition de convergence s'écrit :

$$u_1 + \frac{c}{2a} = b\left(u_0 + \frac{c}{2a} \right) ; u_1 - b\, u_0 = \frac{b-1}{2a}\, c = \frac{c}{2}.$$

5.2. Sur la droite $a + b = 1$.

Comme nous avons vu déjà comment se comportait la suite pour $| b | \leq 1$, il reste seulement à examiner le cas où $| b | > 1$. Le discriminant $a^2 + 4\, b$ vaut $a^2 + 4\,(1 - a) = (a - 2)^2 = (1 + b)^2$.

- Pour $a > 2$, ou $b < -1$, $\sqrt{a^2 + 4b} = a - 2$, $\frac{a + \sqrt{a^2 + 4b}}{2} = a - 1 = -b$, $\frac{a - \sqrt{a^2 + 4b}}{2} = 1$.
- Pour $a < 0$, ou $b > 1$, $\sqrt{a^2 + 4b} = 2 - a$, $\frac{a + \sqrt{a^2 + 4b}}{2} = 1$, $\frac{a - \sqrt{a^2 + 4b}}{2} = a - 1 = -b$.

Dans les deux cas, les racines de l'équation $x^2 = a\, x + b$ sont donc 1 et $-b$ et $P_n\,(a,b) = \frac{1-(-b)^n}{1+b}$.

$$u_n = P_n\,(a,b)\left(u_1 - \frac{c}{1+b} \right) + b\, P_{n-1}\,(a,b)\, u_0 + n\, \frac{c}{1+b}$$

$$u_n = \frac{1-(-b)^n}{1+b}\left(u_1 - \frac{c}{1+b} \right) + b\, \frac{1-(-b)^{n-1}}{1+b}\, u_0 + n\, \frac{c}{1+b}$$

Pour que la suite converge, il faut et il suffit que :

- $c = 0$ (terme en n)
- $u_1 - u_0 = \frac{c}{1+b} = 0$ (terme en b^n)

Si ces deux conditions sont remplies, la suite est constante $u_n = u_0$.
Si l'une des deux conditions n'est pas remplie, la suite diverge.

6. Formules de trigonométrie.

On a vu intervenir déjà les fonctions trigonométriques sur le côté inférieur du triangle de convergence de la suite $(P_n\,(a,b))_{n \geq 0}$:

$$\boxed{P_n\,(2\cos\theta, -1) = \frac{\sin n\theta}{\sin\theta}}$$

Compte tenu de l'expression de $P_n\,(a,b)$ sous forme de polynôme obtenue dans la première question, cette formule peut s'écrire :

$$\sin n\,\theta = \sin\theta \sum_{k=0}^{k=ENT\left(\frac{n-1}{2}\right)} (-1)^k \begin{pmatrix} n-1-k \\ k \end{pmatrix} (2\cos\theta)^{n-1-2k}$$

C'est déjà un résultat intéressant, puisqu'il nous donne sous forme explicite un développement de $\sin n\,\theta$ en fonction de $\sin\theta$ et de $\cos\theta$, que n soit pair ou impair.
Considérons le polynôme de degré $n - 1$ défini par : $R_{n-1}\,(x) = P_n\,(2\,x, -1)$

$$R_{n-1}\,(x) = \sum_{k=0}^{k=ENT\left(\frac{n-1}{2}\right)} (-1)^k \begin{pmatrix} n-1-k \\ k \end{pmatrix} (2\,x)^{n-1-2k}$$

Ce polynôme est nul pour les valeurs de x de la forme $x = \cos\theta$, avec un θ non nul vérifiant $\sin n\,\theta = 0$. Ces racines sont les $\cos k\frac{\pi}{n}$, $k = 1, \ldots, n-1$, puisque $\sin\left(n \times k\,\frac{\pi}{n} \right) = \sin k\,\pi = 0$, sans que $\sin k\frac{\pi}{n}$ soit nul. On obtient ainsi $(n - 1)$ racines du polynôme $R_{n-1}\,(x)$. Comme ce polynôme est de degré $(n - 1)$, il a au plus $(n - 1)$ racines. On les connaît toutes.

Le polynôme $R_{n-1}(x) = \sum_{k=0}^{k=ENT\left(\frac{n-1}{2}\right)} (-1)^k \binom{n-1-k}{k} (2x)^{n-1-2k}$

possède exactement $(n-1)$ racines, toutes distinctes, qui sont : $x_k = \cos k\frac{\pi}{n}$, $k = 1, \dots, n-1$.

Le terme de plus haut degré de $R_{n-1}(x)$ est le terme correspondant à $k = 0$: il a pour coefficient 2^{n-1}. On peut donc écrire :

$$R_{n-1}(x) = 2^{n-1} \times \prod_{k=1}^{n-1} \left(x - \cos k\frac{\pi}{n} \right)$$

Le terme de plus bas degré de $R_{n-1}(x)$ est

- un terme constant si n est impair.
- un terme en x si n est pair.

6.1. n impair : $n = 2m + 1$.

Les formules s'écrivent :

$$R_{n-1}(x) = \sum_{k=0}^{k=m} (-1)^k \binom{2m-k}{k} (2x)^{2m-2k} = 2^{2m} \times \prod_{k=1}^{k=2m} \left(x - \cos k\frac{\pi}{2m+1} \right)$$

L'égalité des termes constants donne :

$$(-1)^m = 4^m \times \prod_{k=1}^{k=2m} \cos k\frac{\pi}{2m+1}$$

$$\prod_{k=1}^{k=2m} \cos k\frac{\pi}{2m+1} = \frac{(-1)^m}{2^{2m}}$$

Si l'on tient compte du fait que $(-1)^m = \sin (2m+1)\frac{\pi}{2}$, cette formule s'écrit :

$$\prod_{k=1}^{k=2m} \cos k\frac{\pi}{2m+1} = \frac{1}{2^{2m}} \sin (2m+1)\frac{\pi}{2}$$

C'est la formule 6.1. dans le cas où $n = 2m$.

En fait, les $k\frac{\pi}{2m+1}$, pour k variant de 1 à $2m$, forment deux ensembles symétriques autour de $\frac{\pi}{2}$, donc de cosinus opposés : on peut regrouper les racines par 2.

$$\cos k\frac{\pi}{2m+1} = -\cos \left(\pi - k\frac{\pi}{2m+1} \right) = -\cos (2m+1-k)\frac{\pi}{2m+1}$$

$$\prod_{k=1}^{k=2m} \cos k\frac{\pi}{2m+1} = \prod_{k=1}^{k=m} \cos k\frac{\pi}{2m+1} \times \prod_{k=m+1}^{k=2m} \cos k\frac{\pi}{2m+1}$$

$$\prod_{k=1}^{k=2m} \cos k\frac{\pi}{2m+1} = \prod_{k=1}^{k=m} \cos k\frac{\pi}{2m+1} \times \prod_{k=1}^{k=m} \cos (2m+1-k)\frac{\pi}{2m+1}$$

$$\prod_{k=1}^{k=2m} \cos k\frac{\pi}{2m+1} = (-1)^m \left(\prod_{k=1}^{k=m} \cos k\frac{\pi}{2m+1} \right)^2 = \frac{(-1)^m}{2^{2m}}$$

$$\boxed{\prod_{k=1}^{k=m} \cos k\frac{\pi}{2m+1} = \frac{1}{2^m}}$$

C'est la formule 6.9.

6.2. *n* pair : *n* = 2 *m* + 2.

Les formules s'écrivent :

$$R_{2m+1}(x) = \sum_{k=0}^{k=m} (-1)^k \begin{pmatrix} 2m+1-k \\ k \end{pmatrix} (2x)^{2m+1-2k} = 2^{2m+1} \times \prod_{k=1}^{k=2m+1} \left(x - \cos k\frac{\pi}{2m+2} \right)$$

$x = 0$ est racine de $R_{2m+1}(x)$: cette racine correspond à la valeur $k = m + 1$. Quand on divise par 2 x, il reste :

$$\sum_{k=0}^{k=m} (-1)^k \begin{pmatrix} 2m+1-k \\ k \end{pmatrix} (2x)^{2m-2k}$$

$$= 2^{2m} \times \prod_{k=1}^{k=m} \left(x - \cos k\frac{\pi}{2m+2} \right) \times \prod_{k=m+2}^{k=2m+1} \left(x - \cos k\frac{\pi}{2m+2} \right)$$

$$= 2^{2m} \times \prod_{k=1}^{k=m} \left(x - \cos k\frac{\pi}{2m+2} \right) \times \prod_{k=1}^{k=m} \left(x - \cos (m+1+k)\frac{\pi}{2m+2} \right)$$

$$= 2^{2m} \times \prod_{k=1}^{k=m} \left(x - \cos k\frac{\pi}{2m+2} \right) \times \prod_{k=1}^{k=m} \left(x - \cos (2m-k)\frac{\pi}{2m+2} \right)$$

$$= 2^{2m} \times \prod_{k=1}^{k=m} \left(x - \cos k\frac{\pi}{2m+2} \right) \left(x + \cos k\frac{\pi}{2m+2} \right)$$

$$= 2^{2m} \times \prod_{k=1}^{k=m} \left(x^2 - \cos^2 k\frac{\pi}{2m+2} \right)$$

L'identification des termes constants donne :

$$(-1)^m \begin{pmatrix} m+1 \\ m \end{pmatrix} = 2^{2m} (-1)^m \prod_{k=1}^{k=m} \cos^2 k\frac{\pi}{2m+2} = (-1)^m \times 2^{2m} \left(\prod_{k=1}^{k=m} \cos k\frac{\pi}{2m+2} \right)^2$$

$$\frac{m+1}{2^{2m}} = \left(\prod_{k=1}^{k=m} \cos k\frac{\pi}{2m+2} \right)^2$$

$$\boxed{\prod_{k=1}^{k=m} \cos k\frac{\pi}{2m+2} = \frac{\sqrt{m+1}}{2^m}}$$

C'est la formule 6.5.

6.3. Intervention des polynômes de Tchebichef.

La formule $P_n(2\cos\theta, -1) = \dfrac{\sin n\theta}{\sin\theta}$ et la formule de récurrence de définition de $P_n(a,b)$:

$$P_{n+1}(2\cos\theta, -1) = 2\cos\theta\, P_n(2\cos\theta, -1) - P_{n-1}(2\cos\theta, -1)$$

donnent la formule bien connue $\sin(n+1)\theta + \sin(n-1)\theta = 2\cos\theta \sin n\theta$, qui résulte de la formule générale :

$$\sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}.$$

La formule :

$$\sin p - \sin q = 2 \sin \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2}$$

s'écrit, pour $p = (n+1)\,\theta$ et $q = (n-1)\,\theta$:

$$\sin (n+1)\,\theta - \sin (n-1)\,\theta = 2 \sin \theta \cos n\,\theta$$

$$\cos n\,\theta = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin (n+1)\theta}{\sin \theta} - \frac{\sin (n-1)\theta}{\sin \theta} \right)$$

$$\boxed{\cos n\,\theta = \frac{1}{2} \left[P_{n+1} (2 \cos \theta, -1) - P_{n-1} (2 \cos \theta, -1) \right]}$$

Cette formule permet le développement de $\cos\, n\,\theta$ en fonction de $\cos\,\theta$. Pour écrire explicitement ce développement, nous sommes amenés à introduire les polynômes $Q_n\,(a,b)$ définis à partir des polynômes $P_n\,(a,b)$ par la formule :

$$\boxed{Q_n\,(a,b) = \frac{1}{2} \left[P_{n+1}\,(a,b) + b\, P_{n-1}\,(a,b) \right]}$$

pour $n \geq 1$. On a, notamment $Q_1\,(a,b) = \frac{1}{2}\, P_2\,(a,b) + b\, P_0\,(a,b) = \frac{a}{2}$.

Comme $P_{n+1}\,(a,b)$ est donné par la formule de récurrence :

$$P_{n+1}\,(a,b) = a\, P_n\,(a,b) + b\, P_{n-1}\,(a,b)$$

il vient :

$$Q_n\,(a,b) = \frac{a}{2}\, P_n\,(a,b) + b\, P_{n-1}\,(a,b)$$

En comparant ce résutat avec la formule

$$u_n = P_n\,(a,b)\, u_1 + b\, P_{n-1}\,(a,b)\, u_0$$

démontrée dans la question 2, on voit qu'il suffit donc de poser $Q_0\,(a,b) = 1$ pour que la suite $(Q_n\,(a,b))_{n \geq 0}$ puisse être définie par récurrence par la formule :

$$\boxed{Q_{n+2}\,(a,b) = a\, Q_{n+1}\,(a,b) + b\, Q_n\,(a,b)}$$

à partir des valeurs $Q_0\,(a,b) = 1$ et $Q_1\,(a,b) = \frac{a}{2}$.

La formule $Q_n\,(a,b) = \frac{1}{2} \left[P_{n+1}\,(a,b) + b\, P_{n-1}\,(a,b) \right]$, avec $P_n\,(a,b) = \sum_{k \geq 0} \binom{n-1-k}{k} a^{n-1-2k} b^k$, donne :

$$Q_n\,(a,b) = \frac{1}{2} \left(\sum_{k \geq 0} \binom{n-k}{k} a^{n-2k} b^k + b \sum_{k \geq 0} \binom{n-2-k}{k} a^{n-2-2k} b^k \right)$$

$$Q_n\,(a,b) = \frac{1}{2} \left(a^n + \sum_{k \geq 1} \binom{n-k}{k} a^{n-2k} b^k + \sum_{k \geq 0} \binom{n-2-k}{k} a^{n-2-2k} b^{k+1} \right)$$

$$Q_n\,(a,b) = \frac{1}{2} \left(a^n + \sum_{k \geq 1} \binom{n-k}{k} a^{n-2k} b^k + \sum_{k \geq 1} \binom{n-1-k}{k-1} a^{n-2k} b^k \right)$$

$$Q_n\,(a,b) = \frac{1}{2} \left(a^n + \sum_{k \geq 1} \left(\binom{n-k}{k} + \binom{n-1-k}{k-1} \right) a^{n-2k} b^k \right)$$

$$Q_n\,(a,b) = \frac{1}{2} \left(a^n + \sum_{k \geq 1} \left(1 + \frac{k}{n-k} \right) \binom{n-k}{k} a^{n-2k} b^k \right)$$

$$Q_n(a,b) = \frac{1}{2}\left(a^n + \sum_{k\geq 1} \frac{n}{n-k}\binom{n-k}{k} a^{n-2k} b^k \right)$$

$$\boxed{Q_n(a,b) = \frac{1}{2}\sum_{k\geq 0} \frac{n}{n-k}\binom{n-k}{k} a^{n-2k} b^k}$$

La formule est valable à partir de $n = 1$. Le dernier terme non nul correspond à $k = \text{ENT}(\frac{n}{2})$.

En particulier, on obtient, pour $a = 2\cos\theta$ et $b = -1$:

$$\boxed{2\cos n\theta = \sum_{k\geq 0} (-1)^k \frac{n}{n-k}\binom{n-k}{k} (2\cos\theta)^{n-2k}}$$

C'est la formule explicite donnant $\cos n\theta$ en fonction de $\cos\theta$.
On peut alors considérer le polynôme, appelé ***polynôme de Tchebichef*** :

$$\boxed{\begin{aligned} T_n(x) &= \frac{1}{2}\sum_{k\geq 0} (-1)^k \frac{n}{n-k}\binom{n-k}{k} (2x)^{n-2k} \\ &= 2^{n-1}\sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{4^k}\frac{n}{n-k}\binom{n-k}{k} x^{n-2k} \end{aligned}}$$

Ce polynôme est nul pour les valeurs de x données par $x = \cos\theta$, lorsque θ vérifie $\cos n\theta = 0$, c'est-à-dire pour $\theta = (2k-1)\frac{\pi}{2n}$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Les n racines $\cos(2k-1)\frac{\pi}{2n}$ sont distinctes. Comme le polynôme $T_n(x)$ est de degré n, il a exactement n racines : on les connaît donc toutes.
Le terme de degré n de $T_n(x)$ est $2^{n-1}x^n$, le polynôme $T_n(x)$ est donné par :

$$T_n(x) = 2^{n-1}\prod_{k=1}^{k=n}\left(x - \cos(2k-1)\frac{\pi}{2n} \right)$$

et l'on a :

$$\boxed{\prod_{k=1}^{k=n}\left(x - \cos(2k-1)\frac{\pi}{2n} \right) = \sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{4^k}\frac{n}{n-k}\binom{n-k}{k} x^{n-2k}}$$

Il y a un terme constant ou non suivant que n est pair ou impair.

- **1er cas : n pair, $n = 2m$.**

$$\prod_{k=1}^{k=2m}\left(x - \cos(2k-1)\frac{\pi}{4m} \right) = \sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{4^k}\frac{2m}{2m-k}\binom{2m-k}{k} x^{2m-2k}$$

L'identification des termes constants donne l'égalité :

$$\prod_{k=1}^{k=2m}\cos(2k-1)\frac{\pi}{4m} = \frac{(-1)^m}{2^{2m-1}}$$

On peut regrouper les termes du produit par symétrie autour de $\frac{\pi}{2}$:

$$(-1)^m\prod_{k=1}^{k=m}\cos^2(2k-1)\frac{\pi}{4m} = \frac{(-1)^m}{2^{2m-1}} = (-1)^m \times \frac{2}{2^{2m}}$$

$$\prod_{k=1}^{k=m} \cos(2k-1)\frac{\pi}{4m} = \frac{\sqrt{2}}{2^m}$$

C'est la formule 6.7.

- **2e cas : *n* impair, *n* = 2 *m* + 1.**

$$\prod_{k=1}^{k=2m+1} \left(x - \cos(2k-1)\frac{\pi}{4m+2} \right) = \sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{4^k} \frac{2m+1}{2m+1-k} \binom{2m+1-k}{k} x^{2m+1-2k}$$

Dans le premier membre, le facteur correspondant à $k = m + 1$ est $x - \cos\frac{\pi}{2} = x$. Il n'y a donc pas de terme constant dans le développement du produit. L'identification des termes en x donne :

$$(-1)^m \prod_{k=1}^{k=m} \cos(2k-1)\frac{\pi}{4m+2} \times (-1)^m \prod_{k=m+2}^{k=2m+1} \cos(2k-1)\frac{\pi}{4m+2} = \frac{(-1)^m}{4^m} \frac{2m+1}{m+1} \binom{m+1}{m}$$

et comme les cosinus d'arguments symétriques par rapport à $\frac{\pi}{2}$ sont opposés, cette formule s'écrit :

$$(-1)^m \prod_{k=1}^{k=m} \cos^2(2k-1)\frac{\pi}{4m+2} = (-1)^m \frac{2m+1}{2^{2m}}$$

$$\prod_{k=1}^{k=m} \cos(2k-1)\frac{\pi}{4m+2} = \frac{\sqrt{2m+1}}{2^m}$$

C'est la formule 6.11.

Dernière remarque sur les polynômes de Tchebichef.

La dérivée de $\cos n\,\theta$ par rapport à θ est $-n \sin n\,\theta$. La formule :

$$\cos n\,\theta = 2^{n-1} \sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{4^k} \frac{n}{n-k} \binom{n-k}{k} \cos^{n-2k}\theta$$

donne, par dérivation par rapport à θ :

$$-n \sin n\,\theta = -\sin\theta \times 2^{n-1} \sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{4^k} (n-2k) \frac{n}{n-k} \binom{n-k}{k} \cos^{n-1-2k}\theta$$

$$\frac{\sin n\theta}{\sin\theta} = 2^{n-1} \sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{4^k} \frac{n-2k}{n-k} \binom{n-k}{k} \cos^{n-1-2k}\theta = 2^{n-1} \sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{4^k} \binom{n-1-k}{k} \cos^{n-1-2k}\theta$$

ce qui redonne la formule

$$R_{n-1}(\cos\theta) = P_n(2\cos\theta, -1) = \frac{\sin n\theta}{\sin\theta}$$

On voit donc que

> Il y a un lien très étroit entre les polynômes $P_n(a,b)$ donnant la solution d'une équation de récurrence
> $u_{n+2} = a\,u_{n+1} + b\,u_n$
> et les polynômes de Tchebichef.

Jusque là, un tel lien n'avait, semble-t-il, jamais été mis en évidence.

En ce sens, la solution de l'exercice original proposé ici pourrait faire l'objet d'une publication, d'autant plus que l'on peut en donner des prolongements aussi bien en analyse combinatoire qu'en théorie des équations diophantiennes, en passant par les transformations du plan intervenant dans la compression des images numériques !

6.4. Le point sur les formules démontrées.

A ce point, nous avons démontré les formules suivantes :

- La formule 6.1 $\prod_{k=1}^{k=n} cos\ \frac{k\,\pi}{n+1} = \frac{1}{2^n}\ sin\ (n+1)\ \frac{\pi}{2}$ résulte de l'identification des termes constants dans la formule $\sum_{k=0}^{k=ENT\left(\frac{n}{2}\right)} \frac{(-1)^k}{4^k} \begin{pmatrix} n-k \\ k \end{pmatrix} x^{n-1-2k} = \prod_{k=1}^{k=n} \left(x - cos\ \frac{k\,\pi}{n+1} \right)$. La formule est démontrée dans 6.1 dans le cas ou $n = 2\,m$. Dans le cas où $n = 2\,m + 1$, la formule se réduit à $0 = 0$, il n'y a rien à démontrer.
- La formule 6.9 $\prod_{k=1}^{k=n} cos\ \frac{k\,\pi}{2n+1} = \frac{1}{2^n}$ résulte de la formule 6.1 dans le cas où l'on prend n pair.
- La formule 6.5 $\prod_{k=1}^{k=n} cos\ \frac{k\,\pi}{2(n+1)} = \frac{\sqrt{n+1}}{2^n}$ résulte aussi de l'identification des termes constants dans la formule $\sum_{k=0}^{k=ENT\left(\frac{n}{2}\right)} \frac{(-1)^k}{4^k} \begin{pmatrix} n-k \\ k \end{pmatrix} x^{n-1-2k} = \prod_{k=1}^{k=n} \left(x - cos\ \frac{k\,\pi}{n+1} \right)$ en prenant n impair.
- La formule 6.3 $\prod_{k=1}^{k=n} cos\ \frac{(2k-1)\,\pi}{2n} = \frac{1}{2^{n-1}}\ cos\ n\ \frac{\pi}{2}$ résulte de l'identification des termes constants dans la formule $\prod_{k=1}^{k=n} \left(x - cos\ (2\,k-1)\frac{\pi}{2n} \right) = \sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{4^k}\ \frac{n}{n-k} \begin{pmatrix} n-k \\ k \end{pmatrix} x^{n-2k}$. Ce terme constant est nul lorsque n est impair.
- La formule 6.7 $\prod_{k=1}^{k=n} cos\ \frac{(2k-1)\,\pi}{4n} = \frac{\sqrt{2}}{2^n}$ résulte de l'identification des termes constants dans la formule $\prod_{k=1}^{k=n} \left(x - cos\ (2\,k-1)\frac{\pi}{2n} \right) = \sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{4^k}\ \frac{n}{n-k} \begin{pmatrix} n-k \\ k \end{pmatrix} x^{n-2k}$ lorsque n est pair.
- La formule 6.11 $\prod_{k=1}^{k=n} cos\ \frac{(2k-1)\,\pi}{2(2n+1)} = \frac{\sqrt{2n+1}}{2^n}$ résulte de l'identification des termes en x dans la formule $\prod_{k=1}^{k=n} \left(x - cos\ (2\,k-1)\frac{\pi}{2n} \right) = \sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{4^k}\ \frac{n}{n-k} \begin{pmatrix} n-k \\ k \end{pmatrix} x^{n-2k}$ lorsque n est impair.
- Ainsi ont été démontrées toutes les formules en cosinus de l'énoncé. Le passage aux formules en sinus peut se faire par passage au complémentaire à $\frac{\pi}{2}$, car $sin \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) = cos\ \theta$

6.5. Les formules en sinus.

Nous allons transformer les formules en cosinus en remplaçant les arguments par les complémentaires à $\frac{\pi}{2}$ de leurs complémentaires à $\frac{\pi}{2}$.

6.5.1. Transformation de la formule 6.1.

La formule 6.1 $\prod_{k=1}^{k=n} \cos \frac{k\pi}{n+1} = \frac{1}{2^n} \sin (n+1) \frac{\pi}{2}$ donne

$$\prod_{k=1}^{k=n} \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{k\pi}{n+1} \right) = \frac{1}{2^n} \cos \left(\frac{\pi}{2} - (n+1) \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\prod_{k=1}^{k=n} \sin (n+1-2k) \frac{\pi}{2n+2} = \frac{1}{2^n} \cos n\frac{\pi}{2}$$

Lorsque k varie de 1 à n, $(n+1-2k)$ varie de $(n-1)$ à $-(n-1)$ par pas de -2. Il passe par 0 si $n-1$ est pair, donc si n est impair, et dans ce cas, le produit est nul. Il ne passe pas par 0, si $n-1$ est impair, donc si n est pair.
Si $n = 2m$, on peut regrouper ensemble les termes du produit correspondant aux valeurs symétriques : $(2m+1-2k)$ et $(2m+1-2(2m+1-k)) = 2k-2m-1 = -(2m+1-2k)$. Pour deux termes symétriques, les sinus sont opposés.

$$(-1)^m \prod_{k=1}^{k=m} \sin^2 (2m+1-2k) \frac{\pi}{4m+2} = \frac{1}{2^{2m}} \cos m\pi$$

Lorsque k varie de 1 à m, $(2m+1-2k)$ prend toutes valeurs impaires de $2m-1$ à 1 par pas de -2.

$$\prod_{k=1}^{k=m} \sin^2 (2k-1) \frac{\pi}{4m+2} = \frac{1}{2^{2m}}$$

Les racines carrées de chaque membre sont égales.

$$\prod_{k=1}^{k=m} \sin (2k-1) \frac{\pi}{4m+2} = \frac{1}{2^m}$$

$$\boxed{\prod_{k=1}^{k=n} \sin (2k-1) \frac{\pi}{4n+2} = \frac{1}{2^n}}$$

C'est la formule 6.12.

Pour $n = 1$, elle donne $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, formule bien connue.

Pour $n = 2$, elle donne $\sin \frac{\pi}{10} \times \sin \frac{3\pi}{10} = \frac{1}{4}$, formule peu connue, mais facile à établir à partir de $\sin \frac{\pi}{10} = \frac{1}{\sqrt{5}+1}$.

Pour $n = 3$, elle donne $\sin \frac{\pi}{14} \times \sin \frac{3\pi}{14} \times \sin \frac{5\pi}{14} = \frac{1}{8}$, formule pas du tout connue.

Si l'on multiplie membre à membre les relations :

$$6.12 \prod_{k=1}^{k=n} \sin \frac{(2k-1)\pi}{2(2n+1)} = \frac{1}{2^n} \quad \text{et} \quad 6.11 \prod_{k=1}^{k=n} \cos \frac{(2k-1)\pi}{2(2n+1)} = \frac{\sqrt{2n+1}}{2^n},$$

il vient :

$$\prod_{k=1}^{k=n} \sin \frac{(2k-1)\,\pi}{2n+1} = \frac{\sqrt{2n+1}}{2^n}$$

La relation est nouvelle, elle n'est même pas citée dans l'énoncé !

Pour $n = 1$, elle donne $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, formule bien connue.

Pour $n = 2$, elle donne $\sin \frac{\pi}{5} \sin \frac{3\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}}{4}$.

Pour $n = 3$, elle donne $\sin \frac{\pi}{7} \sin 3\frac{\pi}{7} \sin 5\frac{\pi}{7} = \frac{\sqrt{7}}{8}$

6.5.2. Transformation de la formule 6.3.

La formule 6.3 $\prod_{k=1}^{k=n} \cos \frac{(2k-1)\,\pi}{2n} = \frac{1}{2^{n-1}} \cos n \frac{\pi}{2}$ donne :

$$\prod_{k=1}^{k=n} \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{(2k-1)\,\pi}{2n} \right) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos n \frac{\pi}{2}$$

$$\prod_{k=1}^{k=n} \sin (n + 1 - 2k) \frac{\pi}{2n} = \frac{1}{2^{n-1}} \cos n \frac{\pi}{2}$$

Lorsque k varie de 1 à n, $(n + 1 - 2k)$ prend toutes les valeurs de même parité que $n + 1$, ou $n - 1$, comprises entre $-(n-1)$ et $+(n-1)$. Si $n - 1$ est pair, $(n + 1 - 2k)$ passe par la valeur 0 et le produit est nul. Si $n - 1$ est impair, donc si n est pair $(n = 2m)$, $(n + 1 - 2k)$ ne prend que des valeurs impaires et ne passe pas par la valeur 0. On peut regrouper les termes symétriques :

$$(-1)^m \prod_{k=1}^{k=m} \sin^2 (2k-1)\frac{\pi}{4m} = \frac{2}{2^{2m}} \cos m\pi$$

$$\prod_{k=1}^{k=m} \sin^2 (2k-1)\frac{\pi}{4m} = \frac{2}{2^{2m}}$$

$$\prod_{k=1}^{k=m} \sin (2k-1)\frac{\pi}{4m} = \frac{\sqrt{2}}{2^m}$$

$$\prod_{k=1}^{k=n} \sin (2k-1)\frac{\pi}{4n} = \frac{\sqrt{2}}{2^n}$$

C'est la formule 6.8.

Pour $n = 1$, elle donne $\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, formule bien connue.

Pour $n = 2$, elle donne $\sin \frac{\pi}{8} \times \sin \frac{3\pi}{8} = \frac{\sqrt{2}}{4}$, formule moins connue, mais facile à établir à partir de $\sin \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.

Pour $n = 3$, elle donne $\sin\frac{\pi}{12} \times \sin\frac{3\pi}{12} \times \sin\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}}{8}$, formule facile à obtenir à partir de $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ et $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Dans la formule $\prod_{k=1}^{k=n} \sin(2k-1)\frac{\pi}{4n} = \frac{\sqrt{2}}{2^n}$, on peut regrouper ensemble les termes symétriques par rapport à $\frac{\pi}{4}$, c'est-à-dire les termes symétriques par rapport à $\frac{n}{2}$.

Si n est pair, aucun des termes $(2k-1)\frac{\pi}{4n}$ n'est égal à $\frac{\pi}{4}$ et il vient :

$$\prod_{k=1}^{k=m} \sin(2k-1)\frac{\pi}{8m}\cos(2k-1)\frac{\pi}{8m} = \frac{\sqrt{2}}{2^{2m}}$$

$$\frac{1}{2^m}\prod_{k=1}^{k=m} \sin(2k-1)\frac{\pi}{4m} = \frac{\sqrt{2}}{2^{2m}}$$

$$\prod_{k=1}^{k=m} \sin(2k-1)\frac{\pi}{4m} = \frac{\sqrt{2}}{2^m}$$

On retombe sur la formule 6.8.

Si n est impair ($n = 2m + 1$), le terme $(2k-1)\frac{\pi}{4n}$ est égal à $\frac{\pi}{4}$ pour $k = \frac{n+1}{2} = m + 1$.

La formule $\prod_{k=1}^{k=n} \sin(2k-1)\frac{\pi}{4n} = \frac{\sqrt{2}}{2^n}$ devient :

$$\sin\frac{\pi}{4} \times \prod_{k=1}^{k=m} \sin(2k-1)\frac{\pi}{4(2m+1)}\cos(2k-1)\frac{\pi}{4(2m+1)} = \frac{\sqrt{2}}{2^{2m+1}}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2^m} \times \prod_{k=1}^{k=m} \sin(2k-1)\frac{\pi}{2(2m+1)} = \frac{\sqrt{2}}{2^{2m+1}}$$

$$\prod_{k=1}^{k=m} \sin(2k-1)\frac{\pi}{2(2m+1)} = \frac{1}{2^m}$$

On retombe sur la formule 6.12. Ces regroupements de termes n'ont rien apporté de neuf.
Quand on multiplie membre à membre les relations :

6.8. $\prod_{k=1}^{k=n} \sin\frac{(2k-1)\pi}{4n} = \frac{\sqrt{2}}{2^n}$ et 6.7. $\prod_{k=1}^{k=n} \cos\frac{(2k-1)\pi}{4n} = \frac{\sqrt{2}}{2^n}$

on obtient, après simplification :

$$\boxed{\prod_{k=1}^{k=n} \sin\frac{(2k-1)\pi}{2n} = \frac{1}{2^{n-1}}}$$

C'est la relation 6.4.

6.5.3. Transformation de la formule 6.5.

La formule 6.5 $\prod_{k=1}^{k=n} \cos\frac{k\pi}{2(n+1)} = \frac{\sqrt{n+1}}{2^n}$ donne :

$$\prod_{k=1}^{k=n} \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{k\pi}{2(n+1)}\right) = \frac{\sqrt{n+1}}{2^n}$$

$$\prod_{k=1}^{k=n} \sin(n+1-k)\frac{\pi}{2n+2} = \frac{\sqrt{n+1}}{2^n}$$

$$\boxed{\prod_{k=1}^{k=n} \sin k\frac{\pi}{2n+2} = \frac{\sqrt{n+1}}{2^n}}$$

C'est la formule 6.6.

Quand on multiplie cette formule avec la formule 6.5 $\prod_{k=1}^{k=n} \cos\frac{k\pi}{2(n+1)} = \frac{\sqrt{n+1}}{2^n}$, on obtient :

$$\prod_{k=1}^{k=n} \sin\frac{k\pi}{2(n+1)}\cos\frac{k\pi}{2(n+1)} = \frac{\sqrt{n+1}}{2^n} \times \frac{\sqrt{n+1}}{2^n} = \frac{n+1}{2^{2n}}$$

$$\frac{1}{2^n}\prod_{k=1}^{k=n} \sin\frac{k\pi}{n+1} = \frac{n+1}{2^{2n}}$$

$$\boxed{\prod_{k=1}^{k=n} \sin\frac{k\pi}{n+1} = \frac{n+1}{2^n}}$$

C'est la formule 6.2.

Lorsque n est pair, $n = 2m$, cette formule s'écrit :

$$\prod_{k=1}^{k=2m} \sin\frac{k\pi}{2m+1} = \frac{2m+1}{2^{2m}}$$

En regroupant ensemble les termes symétriques par rapport à $\frac{\pi}{2}$, qui ont le même sinus, il vient :

$$\prod_{k=1}^{k=m} \sin^2\frac{k\pi}{2m+1} = \frac{2m+1}{2^{2m}}$$

$$\prod_{k=1}^{k=m} \sin\frac{k\pi}{2m+1} = \frac{\sqrt{2m+1}}{2^m}$$

$$\boxed{\prod_{k=1}^{k=n} \sin\frac{k\pi}{2n+1} = \frac{\sqrt{2n+1}}{2^n}}$$

C'est la relation 6.10, ce qui achève notre démonstration.

Remarquons enfin, puisqu'il faut bien en terminer, que le produit des relations 6.9 et 6.10, et la relation 6.2 fournissent, conformément à la nouvelle relation établie plus haut :

$$\boxed{\prod_{k=1}^{k=n} \sin\frac{2k\pi}{2n+1} = \prod_{k=1}^{k=n} \sin\frac{(2k-1)\pi}{2n+1} = \frac{\sqrt{2n+1}}{2^n}}$$

Le sujet est inépuisable !

Exercices

Suites et fonctions continues.

1. **Théorème de Weierstrass.**
2. **Théorème des valeurs intermédiaires pour la dérivée.**
3. **Règles de convergence.**

Théorème de Weierstrass.

L'image d'un compact par une application continue est un compact.

Dans $\mathbb{R}$, les ensembles connexes sont les intervalles.
Dans $\mathbb{R}$, les intervalles fermés sont les compacts connexes.
L'image d'un connexe par une application continue est un connexe (**théorème de Bolzano**).
L'image d'un intervalle fermé est un intervalle fermé.
Le théorème de Bolzano est ce qu'on appelle aussi le **théorème des valeurs intermédiaires** : si une application continue passe sur un intervalle, d'une valeur *a* à une valeur *b*, elle passe, sur l'intervalle, par toutes les valeurs intermédiaires entre *a* et *b*.

HAUT

Théorème des valeurs intermédiaires pour la dérivée.

Si *f* est une fonction continue et dérivable sur un intervalle, sa dérivée sur cet intervalle ne peut prendre deux valeurs sans passer par toutes les valeurs intermédiaires.

C'est un corollaire du théorème des accroissements finis.
C'est vrai même si la dérivée n'est pas continue.

HAUT

Règles de convergence.

1. Une **suite croissante majorée** de nombres réels est convergente.
2. Une **suite décroissante minorée** de nombres réels est convergente.

HAUT

Chapitre 6. Suites et fonctions continues.

Exercices

Exercice 1. Suite de polynômes, suite des racines.
Exercice 2. Suite d'applications, suite des racines.
Exercice 3. Suite de racines.
Exercice 4. Suite définie par le rapport de deux applications continues.
Exercice 5. Théorème des valeurs intermédiaires pour la dérivée.

Exercice 1. Suite de polynômes, suite des racines.

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$.
On considère l'application polynomiale $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$f_n(x) = x^n + x^{n-1} + ... + x^2 + x - 1.$$

1°/ Montrer qu'il existe un unique élément $\xi_n \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $f_n(\xi_n) = 0$.
2°/ On considère la suite $(\xi_n)_{n \geq 2}$ de nombres réels. Montrer qu'elle est convergente et calculer sa limite.

Solution

HAUT

Exercice 2. Suite d'applications, suite des racines.

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$.
On considère l'application $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$f_n(x) = x - \cos\frac{x}{n}.$$

1°/ Montrer que f_n est strictement croissante.
2°/ Montrer qu'il existe un unique élément $\lambda_n \in \mathbb{R}$, tel que $f_n(\lambda_n) = 0$ et que $0 < \lambda_n < 1$.
3°/ On considère la suite $(\lambda_n)_{n \geq 2}$ de nombres réels. Montrer qu'elle est convergente et calculer sa limite.

Solution

HAUT

Exercice 3. Suite de racines.

Soit $f : [\,0, 1\,] \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue sur $[\,0, 1\,]$, telle que $f(0) = f(1)$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $x_n \in [\,0, 1\,]$ tel que l'on ait $f(x_n) = f\left(x_n + \frac{1}{n}\right)$.	Solution

HAUT

Exercice 4. Suite définie par le rapport de deux applications continues.

Soient f et g deux applications continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$, telles que, pour tout $x \in [0, 1]$, on ait $0 < f(x) < g(x)$.

1°/ Pour $x \in [0, 1]$, on pose $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$. Montrer que $h([0, 1]) \subset]0, 1[$.

2°/ En déduire qu'il existe deux nombres réels, m et M, $m \in]0, 1[$, $M \in]0, 1[$, tels que, pour tout $x \in [0, 1]$, on ait $m \leqslant h(x) \leqslant M$.

3°/ Soit $(x_n)_{n \geq 0}$, une suite quelconque d'éléments de $[0, 1]$. Pour tout entier $n \geqslant 0$, on pose $y_n = (h(x_n))^n$. Montrer que la suite $(y_n)_{n \geq 0}$ est convergente et préciser sa limite.

Solution

HAUT

Exercice 5. Théorème des valeurs intermédiaires pour la dérivée.

Soient a et b deux nombres réels, $a < b$, et soit $f : [\, a, b\,] \to \mathbb{R}$, une application dérivable sur $[\, a, b\,]$ telle que $f\,'(a) > 0$ et $f\,'(b) < 0$.

1°/ Montrer qu'il existe $x_1 \in]\, a, b\, [$ tel que $f(x_1) > f(a)$.

Montrer qu'il existe $x_2 \in]\, a, b\, [$ tel que $f(x_2) > f(b)$.

2°/ Montrer qu'il existe $c \in]\, a, b\, [$ tel que $f\,'(c) = 0$.

Solution

HAUT

Chapitre 6. Suites et fonctions continues.

Enoncés.

Exercice 1. Suite de polynômes, suite des racines.

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$.
On considère l'application polynomiale $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$f_n(x) = x^n + x^{n-1} + ... + x^2 + x - 1.$$

1°/ Montrer qu'il existe un unique élément $\xi_n \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $f_n(\xi_n) = 0$.
2°/ On considère la suite $(\xi_n)_{n \geq 2}$ de nombres réels. Montrer qu'elle est convergente et calculer sa limite.

Solution.

1°/ Elément ξ_n.

Pour $n = 2$, $f_2(x) = x^2 + x - 1$ s'annule, dans $\mathbb{R}_+^*$, une seule fois, pour $\xi_2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2} < 1$.
Dans l'intervalle [0, 1 [, la relation : $f_n(x) = x^n + x^{n-1} + ... + x^2 + x - 1$ peut être écrite :

$$f_n(x) = -2 + (1 + x + x^2 + ... + x^{n-1} + x^n).$$

$f_n(0) = -1$, $f_n(1) = n - 1 > 0$, pour $n \geqslant 2$.
Donc comme la fonction $f_n(x)$ est continue, elle s'annule **au moins une fois** dans l'intervalle] 0, 1 [.
Lorsque x est différent de 1, la progression géométrique entre parenthèse peut se calculer. On obtient :

$$f_n(x) = -2 + \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \frac{x^{n+1} - 2x + 1}{x-1}$$

Dans $\mathbb{R}_+^* - \{1\}$, $f_n(x)$, s'annule chaque fois que $x^{n+1} - (2x - 1)$ s'annule.

Or la dérivée $(n + 1) x^n - 2$, de $x^{n+1} - (2x - 1)$, est une fonction strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, puisque sa dérivée $n(n + 1) x^{n-1}$ est > 0.

Cette dérivée part de la valeur – 2 pour $x = 0$, passe par la valeur 0 pour $x = \left(\frac{2}{n+1}\right)^{\frac{1}{n}}$, vaut $n - 1$ pour $x = 1$, puis reste toujours positive.
On en déduit le sens de variation de $x^{n+1} - (2x - 1)$.
Cette fonction décroît à partir de sa valeur 1 pour $x = 0$, elle diminue jusqu'à une valeur minimum en $x = \left(\frac{2}{n+1}\right)^{\frac{1}{n}} < 1$, pour $n \geqslant 2$.

Puis elle augmente en passant par la valeur 0 pour $x = 1$ (mais, rappelons-le, $f_n(1) = n - 1 \neq 0$ pour $n \geqslant 2$).
Ensuite, pour $x > 1$, elle reste strictement positive.

On en déduit que **la valeur minimum de $x^{n+1} - (2x - 1)$ est négative**.
Donc la fonction $x^{n+1} - (2x - 1)$ s'annule, d'une part pour $x = 1$, ce qui ne donne pas une valeur nulle de $f_n(x)$, et, d'autre part, pour une unique valeur ξ_n vérifiant $0 < \xi_n < \left(\frac{2}{n+1}\right)^{\frac{1}{n}} < 1$.

Et, bien entendu, on a aussi $f_n(\xi_n) = 0$, alors que $f_n(1) = n - 1 \neq 0$ pour $n \geqslant 2$.

> Il existe un unique élément $\xi_n \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $f_n(\xi_n) = 0$.
>
> Cet élément vérifie les relations : $0 < \xi_n < \left(\frac{2}{n+1}\right)^{\frac{1}{n}} < 1$, pour $n \geqslant 2$.

2°/ Convergence.

Pour tout $x < 1$, x^{n+1} est strictement plus petit que x^n, donc $x^{n+1} - (2x - 1) < x^n - (2x - 1)$.
Pour $x = \xi_n$, ${\xi_n}^n - (2\xi_n - 1) = 0$, donc ${\xi_n}^{n+1} - (2\xi_n - 1) < 0$.
La fonction $x^{n+1} - (2x - 1)$ s'annule donc une fois entre 0 et ξ_n de sorte que l'on a : $\xi_{n+1} < \xi_n$.

La suite $(\xi_n)_{n \geq 2}$ est décroissante et comme elle est minorée par 0, elle est convergente.

$$ {\xi_n}^n - (2\xi_n - 1) = 0 $$

Lorsque n tend vers l'infini, ${\xi_n}^n$ tend vers 0 puisque $\xi_n \leqslant \xi_2 < 1$.
Donc, par **prolongement des égalités par passage à la limite**, nous avons :
$0 - (2 \lim\limits_{n \to +\infty} \xi_n - 1) = 0$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \xi_n = \frac{1}{2}$.

> La suite $(\xi_n)_{n \geq 2}$ est décroissante et converge vers $\frac{1}{2}$.

Chapitre 6. Suites et fonctions continues.

Enoncés.

Exercice 2. Suite d'applications, suite des racines.

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$.
On considère l'application $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$f_n(x) = x - \cos \frac{x}{n}.$$

1°/ Montrer que f_n est strictement croissante.
2°/ Montrer qu'il existe un unique élément $\lambda_n \in \mathbb{R}$, tel que $f_n(\lambda_n) = 0$ et que $0 < \lambda_n < 1$.
3°/ On considère la suite $(\lambda_n)_{n \geq 2}$ de nombres réels. Montrer qu'elle est convergente et calculer sa limite.

Solution.

1°/ Croissance.

La dérivée de f_n est $1 + \frac{1}{n} \sin \frac{x}{n}$.
Avec $n \geqslant 2$, et $\sin \frac{x}{n} > -1$, on obtient $1 + \frac{1}{n} \sin \frac{x}{n} > 1 - \frac{1}{n} > 0$.
Si la dérivée de f_n est strictement plus grande que 0, c'est que **f_n est strictement croissante** sur $\mathbb{R}$.

2°/ Racine.

$f_0 = -1$, $f_1 = 1 - \cos \frac{1}{n} > 0$.
Comme f_n est continue, il en résulte que f_n s'annule une fois au moins entre 0 et 1.
Mais comme f_n est strictement croissante, elle est injective, donc elle s'annule au plus une fois entre 0 et 1.
Au total, **f_n s'annule une fois et une seule entre 0 et 1**.

3°/ Suite des racines.

$$f_{n+1}(\lambda_{n+1}) = 0 = \lambda_{n+1} - \cos \frac{\lambda_{n+1}}{n+1}$$

$0 < \frac{\lambda_n+1}{n+1} < \frac{\lambda_n+1}{n} \Rightarrow 1 > cos\ \frac{\lambda_n+1}{n+1} > cos\ \frac{\lambda_n+1}{n}$, donc $0 = \lambda_{n+1} - cos\ \frac{\lambda_n+1}{n+1} < \lambda_{n+1} - cos\ \frac{\lambda_n+1}{n}$

Cette relation montre que $f_n(\lambda_{n+1}) = \lambda_{n+1} - cos\ \frac{\lambda_n+1}{n} > 0$.

Donc, puisque $f_0 = -1$, f_n s'annule entre 0 et λ_{n+1} : autrement dit, on a $\lambda_n < \lambda_{n+1}$ et la suite est croissante.

Comme la suite est majorée par 1, elle est convergente.

Par prolongement des égalités par passage à la limite, la limite λ vérifie : $\lim_{n\to+\infty} \lambda_n - cos\left(\lim_{n\to+\infty} \frac{\lambda_n}{n}\right) = 0$.

Or $\lim_{n\to+\infty} \frac{\lambda_n}{n} \leqslant \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$, puisque $\lambda_n < 1$.

Donc $cos\left(\lim_{n\to+\infty} \frac{\lambda_n}{n}\right) = 1$ et $\lambda = \lim_{n\to+\infty} \lambda_n = 1$.

La suite $(\lambda_n)_{n\geq 2}$ est croissante et converge vers 1.

Chapitre 6. Suites et fonctions continues.

Enoncés.

Exercice 3. Suite de racines.

Soit f : [0, 1] $\longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue sur [0, 1], telle que $f(0) = f(1)$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $x_n \in$ [0, 1] tel que l'on ait $f(x_n) = f\left(x_n + \frac{1}{n}\right)$.	

Solution.

1°/ $n = 1$.

Pour $n = 1$, l'équation s'écrit : $f(x_1) = f(x_1 + 1)$.
Elle est vérifiée, par hypothèse, pour $x_1 = 0$, et seulement pour $x_1 = 0$, sinon on ne pourrait pas avoir, à la fois, $x_1 \in$ [0, 1] et $x_1 + 1 \in$ [0, 1].

2°/ $n \geqslant 2$.

Soit n un entier naturel, $n \geqslant 2$.

a) Cas limite.

Supposons qu'il n'existe aucun élément y dans l'intervalle $\left[0, 1 - \frac{1}{n}\right]$ tel que $f\left(y + \frac{1}{n}\right) > f(y)$ (inégalité stricte).
Alors $f\left(1 - \frac{1}{n}\right) \leqslant f(1)$ et, pour tout entier k de 1 *à* n, $f\left(1 - \frac{k}{n}\right) \leqslant f\left(1 - \frac{k-1}{n}\right)$.
On peut construire ainsi, à partir de $1 - \frac{1}{n}$, par récurrence, une suite décroissante de n termes, vérifiant
$f\left(y - \frac{1}{n}\right) \leqslant f(y)$, le dernier terme étant 0 :

$$f(1) \geqslant f\left(1 - \frac{1}{n}\right) \geqslant \ldots \geqslant f\left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \geqslant f\left(1 - \frac{k}{n}\right) \geqslant \ldots \geqslant f\left(\frac{1}{n}\right) \geqslant f(0).$$

Mais comme $f(0) = f(1)$, tous les termes de la suite sont égaux : pour tout entier k de 1 *à* n, $f\left(1 - \frac{k}{n}\right) = f(0)$.

En particulier, pour $k = n - 1$, on obtient : $f(0) = f\left(\frac{1}{n}\right)$ et il suffit de prendre $x_n = 0$ pour avoir :

$$f(x_n) = f\left(x_n + \frac{1}{n}\right).$$

b) Cas général.

Il existe, dans l'intervalle $\left[0,1-\frac{1}{n}\right]$, un élément y tel que $f\left(y+\frac{1}{n}\right) > f(y)$.
L'image de l'intervalle fermé [0, 1] par l'application continue f, est un intervalle fermé [a, b], $a < b$ (**théorème de Weierstrass**).

Comme f est continue, elle atteint sa borne supérieure b en un point x_b.

1er sous-cas. $x_b \in \left[0,1-\frac{1}{n}\right]$.

Dans ce cas $f\left(x_b+\frac{1}{n}\right) \leqslant b = f(x_b)$.
Considérons l'application $f_n : \left[0,1-\frac{1}{n}\right] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :
$f_n(x) = f\left(x+\frac{1}{n}\right) - f(x)$.
$f_n(x_b) \leqslant 0$.
$f_n(y) > 0$
Comme f est une application continue, f_n est une application continue.
Comme f_n est continue, il existe, entre x_b et y, un élément x_n tel que $f_n(x_n) = 0$, donc tel que $f(x_n) = f\left(x_n+\frac{1}{n}\right)$.

2e sous-cas. $x_b \in \left[\frac{1}{n}, 1\right]$.

$f\left(x_b-\frac{1}{n}\right) \leqslant b = f(x_b)$.
Considérons l'application $g_n : \left[\frac{1}{n}, 1\right] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :
$g_n(x) = f\left(x-\frac{1}{n}\right) - f(x)$.
$g_n(x_b) \leqslant 0$
Comme f est une application continue, g_n est une application continue.
S'il n'existait aucun élément de l'intervalle $\left[\frac{1}{n}, 1\right]$ vérifiant $g_n(y) \geqslant 0$, on pourrait construire, à partir de $\frac{1}{n}$, une suite strictement croissante de n éléments de $\left[\frac{1}{n}, 1\right]$, vérifiant $g_n(y) < 0$, le dernier terme étant 1 :
$f(0) < f\left(\frac{1}{n}\right) < .. < f\left(\frac{k-1}{n}\right) < f\left(\frac{k}{n}\right) < ... < f\left(\frac{n-1}{n}\right) < f(1)$, ce qui est impossible, puisque $f(1) = f(0)$.
Donc il existe un élément $y \in \left[\frac{1}{n}, 1\right]$ vérifiant $g_n(y) \geqslant 0$.
Comme g_n est continue, il existe, entre x_b et y, un élément x tel que $g_n(x) = 0$, donc tel que $f(x) = f\left(x-\frac{1}{n}\right)$.
Il suffit alors de prendre $x_n = x - \frac{1}{n}$, pour avoir $f(x_n) = f\left(x_n+\frac{1}{n}\right)$.

Chapitre 6. Suites et fonctions continues.

Enoncés.

Exercice 4. Suite définie par le rapport de deux applications continues.

Soient f et g deux applications continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$, telles que, pour tout $x \in [0, 1]$, on ait $0 < f(x) < g(x)$.

1°/ Pour $x \in [0, 1]$, on pose $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$. Montrer que $h([0, 1]) \subset]0, 1[$.

2°/ En déduire qu'il existe deux nombres réels, m et M, $m \in]0, 1[$, $M \in]0, 1[$, tels que, pour tout $x \in [0, 1]$, on ait $m \leqslant h(x) \leqslant M$.

3°/ Soit $(x_n)_{n \geq 0}$, une suite quelconque d'éléments de $[0, 1]$. Pour tout entier $n \geqslant 0$, on pose $y_n = (h(x_n))^n$. Montrer que la suite $(y_n)_{n \geq 0}$ est convergente et préciser sa limite.

Solution.

1°/ Image de *h*.

Comme f et g sont strictement plus grands que 0, on a $h(x) > 0$.
Comme f est strictement plus petit que g, on a $h(x) < 1$.
Donc $h([0, 1]) \subset]0, 1[$.

2°/ Bornes de *h*.

L'image, par une application continue, d'un intervalle fermé est un intervalle fermé (**théorème de Weierstrass**).
Or h, rapport de deux applications continues dont le dénominateur ne s'annule jamais dans l'intervalle de définition, est une application continue.
Donc l'image par h de l'intervalle fermé $[0, 1]$ est un intervalle fermé, contenu dans l'intervalle ouvert $]0, 1[$, d'après 1°.
Cet intervalle fermé possède un plus petit élément m et un plus grand élément M, strictement compris entre 0 et 1.

On a donc, pour tout $x \in [0, 1]$, $m \leqslant h(x) \leqslant M$, avec $m \in]0, 1[$, $M \in]0, 1[$.

3°/ Image d'une suite quelconque par *h*.

La suite $(y_n)_{n \geq 0}$ est bornée, tous ses éléments sont compris entre 0 et 1.

$0 < m \leqslant h(x_n) \leqslant M < 1 \Rightarrow 0 < m^n \leqslant (h(x_n))^n = y_n \leqslant M^n < 1$

Lorsque n tend vers l'infini, m^n tend vers 0 et M^n tend vers 0, puisque m et M sont tous deux compris strictement entre 0 et 1.
Donc, **théorème des gendarmes**, y_n tend vers 0.

La suite $(y_n)_{n \geq 0}$ est convergente et sa limite est 0.

Chapitre 6. Suites et fonctions continues.

Enoncés.

Exercice 5. Théorème des valeurs intermédiaires pour la dérivée.

Soient a et b deux nombres réels, $a < b$, et soit $f : [\, a, b\,] \to \mathrm{R}$, une application dérivable sur $[\, a, b\,]$ telle que $f'(a) > 0$ et $f'(b) < 0$. 1°/ Montrer qu'il existe $x_1 \in]\, a, b\, [$ tel que $f(x_1) > f(a)$. Montrer qu'il existe $x_2 \in]\, a, b\, [$ tel que $f(x_2) > f(b)$. 2°/ Montrer qu'il existe $c \in]\, a, b\, [$ tel que $f'(c) = 0$.	

Solution.

1°/ Existence de x_1 et x_2.

Dire que f possède une dérivée $f'(a) > 0$, c'est dire que le rapport $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ a pour limite $f'(a) > 0$ lorsque x tend vers a.
Donc, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $\eta > 0$ tel que :

$$|\, x - a\, | < \eta \Rightarrow \left| \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a) \right| < \varepsilon.$$

$$a < x < a + \eta \Rightarrow f'(a) - \varepsilon < \frac{f(x)-f(a)}{x-a} < f'(a) + \varepsilon.$$

Comme $f'(a)$ est strictement plus grand que 0, on peut choisir un $\varepsilon > 0$ vérifiant $0 < \varepsilon < 2\,\varepsilon < f'(a)$.
On peut choisir le η correspondant suffisamment petit pour que $a + \eta$ soit $< b$.
Comme η est > 0, il existe un x_1 vérifiant $a < x_1 < a + \eta < b$.

On peut prendre, par exemple, $x_1 = a + \frac{3}{4}\eta$.

$x_1 \in]\, a, b\, [$.
On a alors

$$0 < f'(a) - \varepsilon < \frac{f(x_1)-f(a)}{x_1-a} < f'(a) + \varepsilon.$$

Et comme $x_1 - a$ est > 0, il en résulte $f(x_1) - f(a) > 0$.

Il existe $x_1 \in]\, a, b\, [$ tel que $f(x_1) > f(a)$.

Cette inégalité est vérifiée pour tout $x \in]\, a,\, a + \eta\, [$ et, en particulier, pour tout $x \in]\, a,\, x_1\, [$.

Dire que f possède une dérivée $f'(b) < 0$, c'est dire que le rapport $\frac{f(x)-f(b)}{x-b}$ a pour limite $f'(b) < 0$ lorsque x tend vers b.
Donc, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $\eta > 0$ tel que :

$$|\, x - b\, | < \eta \Rightarrow \left| \frac{f(x)-f(b)}{x-b} - f'(b) \right| < \varepsilon.$$

$$b - \eta < x < b \Rightarrow f'(b) - \varepsilon < \frac{f(x)-f(b)}{x-b} < f'(b) + \varepsilon.$$

Comme $f'(b)$ est strictement plus petit que 0, on peut choisir un $\varepsilon > 0$ vérifiant $0 < \varepsilon < -f'(b)$.
On peut choisir le η correspondant suffisamment petit pour que $b - \eta$ soit $> x_1$ (le x_1 qui a été choisi plus haut !).
Comme η est > 0, il existe un x_2 vérifiant $a < x_1 < b - \eta < x_2 < b$.
$x_2 \in]\, a,\, b\, [$.
On a alors

$$f'(b) - \varepsilon < \frac{f(x_2)-f(b)}{x_2-b} < f'(b) + \varepsilon < 0$$

Et comme $x_2 - b$ est < 0, il en résulte $f(x_2) - f(b) > 0$.

Il existe $x_2 \in]\, a,\, b\, [$ tel que $f(x_2) > f(b)$.

Cette inégalité est vérifiée pour tout $x \in]\, b - \eta,\, b\, [$ et, en particulier, pour tout $x \in]\, x_2,\, b\, [$.

2°/ Existence de *c*.

Comme f est dérivable sur $[\, a,\, b\,]$, l'image par f de l'intervalle fermé borné $[\, a,\, x_1\,]$ est un intervalle fermé borné.
Il existe un $d \in [\, a,\, x_1\,]$ tel que $f(d)$ soit la borne supérieure de $f([\, a,\, x_1\,])$.
d n'est pas égal à a puisqu'on a $f(d) \geqslant f(x_1) > f(a)$.
$d \in]\, a,\, b\, [$.
Pour tout $x \in [\, a,\, d\,]$, on a $f(d) \geqslant f(x)$.

Comme f est dérivable sur $[\, a,\, b\,]$, l'image par f de l'intervalle fermé borné $[\, x_2,\, b\,]$ est un intervalle fermé borné.
Il existe un $e \in [\, x_2,\, b\,]$ tel que $f(e)$ soit la borne supérieure de $f([\, x_2,\, b\,])$.
e n'est pas égal à b puisqu'on a $f(e) \geqslant f(x_2) > f(b)$.
$e \in]\, a,\, b\, [$.
Pour tout $x \in [\, e,\, b\,]$, on a $f(e) \geqslant f(x)$.

Comme f est dérivable sur $[\, a,\, b\,]$, l'image par f de l'intervalle fermé borné $[\, d,\, e\,]$ est un intervalle fermé borné.
Il existe un $c \in [\, d,\, e\,]$ tel que $f(c)$ soit la borne supérieure de $f([\, d,\, e\,])$.

$c \in]\, a, b\, [$.
Pour tout $x \in [\, d, e\,]$, on a $f(c) \geqslant f(x)$.
Pour tout $x \in]\, a, d\,]$, on a $f(c) \geqslant f(d) \geqslant f(x)$.
Pour tout $x \in [\, e, b\, [$, on a $f(c) \geqslant f(e) \geqslant f(x)$.
Donc, pour tout $x \in]\, a, b\, [$, on a $f(c) \geqslant f(x)$.
En c, f possède un maximum absolu (ou maximum global).
Comme c est intérieur à $]\, a, b\, [$, ce maximum absolu est aussi un maximum relatif (ou maximum local).
Comme f est dérivable sur $[\, a, b\,]$, donc dérivable en c, c est un point critique de f : $f'(c) = 0$.

Il existe $c \in]\, a, b\, [$ tel que $f'(c) = 0$.

Exercices

Dérivabilité des fonctions numériques d'une variable réelle.

1. Dérivabilité en un point.
2. Dérivée d'une fonction composée.
3. Application continûment dérivable.
4. Propriétés de la dérivée.
5. Dérivée d'une application réciproque.

Dérivabilité en un point.

On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est **dérivable en un point** x_0, si le rapport $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ tend vers une limite finie lorsque x tend vers x_0 en étant différent de x_0. La limite du rapport s'appelle la dérivée de f en x_0. On la note $f'(x_0)$.

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Si le rapport $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ possède une limite à gauche $\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ et une limite à droite $\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, la fonction f est dérivable en x_0 si ces deux limites sont égales.

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Une application dérivable en chaque point est dite **dérivable**.

HAUT

Dérivée d'une fonction composée.

Soient u et g des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
On suppose que u est dérivable en un point x_0, et que g est dérivable en $u(x_0)$.
Alors $g \circ u$ est dérivable en x_0 et sa dérivée en x_0 est donnée par la formule :

$$(g \circ u)'(x_0) = u'(x_0) \times g'(u(x_0))$$

ce qu'on note aussi, par abus de notation :

$$\frac{dg}{dx} = \frac{dg}{du} \times \frac{du}{dx}$$

HAUT

Application continûment dérivable.

Une application dérivable en un point est dite continûment dérivable en ce point si **sa dérivée est continue** en ce point.

HAUT

Propriétés de la dérivée.

Dérivée d'une somme : $(f + g)' = f' + g'$.
Dérivée d'un produit : $(f\,g)' = f'\,g + f\,g'$.
Dérivée d'un quotient : $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - f\,g'}{g^2}$, en tout point où g n'est pas nulle.

Dérivées des fonctions usuelles :

$(e^x)' = e^x$.
$(\sin x)' = \cos x$.
$(\cos x)' = -\sin x$.
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$.
$(x^s)' = s\,x^{s-1}$, pour tout nombre réel s et $x \neq 0$.
Dérivée d'une fonction constante : 0.

HAUT

Dérivée d'une application réciproque.

Si l'application f possède une application réciproque f^{-1} et si f^{-1} est dérivable en $f(x)$, alors f est dérivable en x et sa dérivée est donnée par :

$$f'(x) = \frac{1}{(f^{-1})'(f(x))}$$

Mnémotechniquement, on écrit cette formule : $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$.

HAUT

Chapitre 7. Dérivabilité des fonctions numériques d'une variable réelle.

Exercices

Exercice 1. Dérivée de 6 fonctions numériques.
Exercice 2. Fonction (e^x)/(x^e).
Exercice 3. Dérivabilité de 3 fonctions en 0.
Exercice 4. Continuité, dérivabilité, continuité de la dérivée.
Exercice 5. Intersection d'une courbe et d'une corde.
Exercice 6. Racines réelles de X^n+pX+q.
Exercice 7. Solutions réelles d'une équation transcendante.
Exercice 8. Plus grand élément de $f(x)/x$.
Exercice 9. Fonction *Arc sin* $(1-x)$.
Exercice 10. Dérivabilité d'une fonction définie par intervalles.

Exercice 1. Dérivée de 6 fonctions numériques.

Calculer, lorsqu'elles existent, les dérivées des fonctions suivantes :

$1°/\ x \mapsto ln\,(3 + sin\,x)$ $2°/\ x \mapsto ln\,(\sqrt{1+x^2})$

$3°/\ x \mapsto ln\,\frac{2+cos\,x}{2-cos\,x}$ $4°/\ x \mapsto x^{x+1}$

$5°/\ x \mapsto sin\,((e^x)^2)$ $6°/\ x \mapsto x^{\frac{sin\,x}{x}}$

Solution

HAUT

Exercice 2. Fonction (*e*^*x*)/(*x*^*e*).

Soit $f :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x) = \frac{e^x}{x^e}$ pour $x > 0$.

1°/ Etudier les variations de f.

2°/ Comparer les réels e^π et π^e.

Solution

HAUT

Exercice 3. Dérivabilité de 3 fonctions en 0.

Les fonctions $f, g, h, \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définies par :

$$f(x) = x\,|\,x\,| \qquad g(x) = x^{\frac{3}{5}} \qquad h(x) = \cos\sqrt{|x|}$$

sont-elles dérivables en 0 ?

Solution

HAUT

Exercice 4. Continuité, dérivabilité, continuité de la dérivée.

Pour chacune des applications f, g, h, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définies de la façon suivante :

$$f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} x\sin\frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad h(x) = \begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Déterminer l'ensemble des points $x \in \mathbb{R}$ où l'application est **continue**, puis l'ensemble des points $x \in \mathbb{R}$ où elle est **dérivable**, et l'ensemble des points $x \in \mathbb{R}$ où elle est **continûment dérivable**.

Solution

HAUT

Exercice 5. Intersection d'une courbe et d'une corde.

Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$. Soit $f : [\, a, b\,] \longrightarrow \mathbb{R}$, une application continue sur $[\, a, b\,]$ telle que $f(a) \neq f(b)$. On suppose de plus que f est dérivable aux points a et b et que $f'(a) = f'(b) = 0$. Montrer qu'il existe $c \in]\, a, b\, [$ tel que :

$$\frac{f(c)-f(a)}{c-a} = \frac{f(c)-f(b)}{c-b} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Solution

HAUT

Exercice 6. Racines réelles de X^n+pX+q.

Soient p et q deux nombres réels non nuls et n un entier > 0. Montrer que le polynôme $P(X) = X^n + pX + q$ ne peut avoir plus de deux racines réelles si n est pair, et plus de trois racines réelles si n est impair.	Solution

HAUT

Exercice 7. Solutions réelles d'une équation transcendante.

Soit $P(X)$ un polynôme à coefficients réels de degré $n \geqslant 1$. Montrer que l'équation $P(x) = e^x$ n'a qu'un nombre fini de solutions réelles.	Solution

HAUT

Exercice 8. Plus grand élément de $f(x) / x$.

On désigne par f une application dérivable de [0, 1] dans $\mathbb{R}$, telle que :
$f(0) = 0$, $f(1) = 1$, et $f'(0) = f'(1) = 0$.
On définit l'application g de [0, 1] dans $\mathbb{R}$, en posant :

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1°/ Montrer que g est continue sur [0, 1].
En déduire que l'ensemble g ([0, 1]) possède un plus grand élément que l'on notera $g(c)$.
2°/ Montrer que g est dérivable sur [0, 1] et calculer $g'(x)$ pour $0 < x \leqslant 1$. En déduire que $c \neq 1$.
3°/ Montrer que $c \neq 0$. En déduire que $f'(c) = \dfrac{f(c)}{c}$.

Solution

HAUT

Exercice 9. Fonction *Arc sin* (1 – *x*).

Soit la fonction $f(x) = Arc\ sin\ (1 - x)$. 1°/ Quel est son domaine de définition. 2°/ Calculer sa dérivée.	Solution

HAUT

Exercice 10. Dérivabilité d'une fonction définie par intervalles.

Soit la fonction f définie par :

$$x \mapsto \begin{cases} e^x - x & \text{si } x < 0, \\ \cos^2(\pi x) & \text{si } x \in [0,1], \\ \dfrac{\ln(x^2)}{x-1} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Déterminer l'ensemble des points $x \in \mathbb{R}$ où f est dérivable.

Solution

HAUT

Chapitre 7. Dérivabilité des fonctions numériques d'une variable réelle.

Enoncés.

Exercice 1. Dérivée de 6 fonctions numériques.

Calculer, lorsqu'elles existent, les dérivées des fonctions suivantes :	

$$1°/\ x \mapsto ln\ (3 + sin\ x) \qquad 2°/\ x \mapsto ln\ (\sqrt{1+x^2})$$
$$3°/\ x \mapsto ln\ \frac{2+cos\ x}{2-cos\ x} \qquad 4°/\ x \mapsto x^{x+1}$$
$$5°/\ x \mapsto sin\ ((e^x)^2) \qquad 6°/\ x \mapsto x^{\frac{sin\ x}{x}}$$

Solution.

1°/ *ln* (3 + *sin x*).

La fonction *sinus* est partout dérivable.
La fonction *logarithme* est dérivable lorsque son argument est strictement positif.
3 + *sin x* est toujours strictement positif.

La fonction $x \mapsto ln\ (3 + sin\ x)$ est dérivable dans $\mathbb{R}$ tout entier.

2°/ *ln* ($\sqrt{1+x^2}$).

La fonction $x \mapsto x^2$ est partout dérivable.
La fonction *racine carrée* est dérivable lorsque son argument est strictement positif.
La fonction *logarithme* est dérivable lorsque son argument est strictement positif.

$1 + x^2$ est toujours strictement positif.
$\sqrt{1+x^2}$ est toujours strictement positif.

La fonction $x \mapsto ln\ (\sqrt{1+x^2})$ est dérivable dans $\mathbb{R}$ tout entier.

3°/ *ln* $\frac{2+cos\ x}{2-cos\ x}$.

La fonction *cosinus* est partout dérivable.
Si *f* et *g* sont dérivables, la fonction $\frac{f}{g}$ est dérivable partout où *g* n'est pas nulle.
La fonction $x \mapsto 2 - cos\ x$ n'est jamais nulle.
La fonction *logarithme* est dérivable lorsque son argument est strictement positif.

$\frac{2+\cos x}{2-\cos x}$ est toujours strictement positif.

La fonction $x \mapsto \ln \frac{2+\cos x}{2-\cos x}$ est dérivable dans $\mathbb{R}$ tout entier.

4°/ x^{x+1}.

$x^{x+1} = e^{(x+1)\ln x}$.

La fonction *exponentielle* est partout dérivable.
La fonction $x \mapsto x + 1$ est partout dérivable.
La fonction *logarithme* est définie et dérivable lorsque son argument est strictement positif.

La fonction $x \mapsto x^{x+1}$ est définie et dérivable pour $x > 0$.

5°/ $\sin((e^x)^2)$.

La fonction *exponentielle* est partout dérivable.
La fonction $x \mapsto x^2$ est partout dérivable.
La fonction *sinus* est partout dérivable.

La fonction $x \mapsto \sin((e^x)^2)$ est dérivable dans $\mathbb{R}$ tout entier.

6°/ $x^{\frac{\sin x}{x}}$.

$x^{\frac{\sin x}{x}} = e^{\frac{\sin x}{x}\ln x}$

La fonction *exponentielle* est partout dérivable.
La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est dérivable lorsque son argument est différent de 0.
La fonction *sinus* est partout dérivable.
La fonction *logarithme* est définie et dérivable lorsque son argument est strictement positif.

La fonction $x \mapsto x^{\frac{\sin x}{x}}$ est définie et dérivable pour $x > 0$.

Chapitre 7. Dérivabilité des fonctions numériques d'une variable réelle.

Enoncés.

Exercice 2. Fonction (e^x)/(x^e).

Soit f :] 0, + ∞ [⟶ ℝ l'application définie par $f(x) = \frac{e^x}{x^e}$ pour $x > 0$. 1°/ Etudier les variations de f. 2°/ Comparer les réels e^π et π^e.	

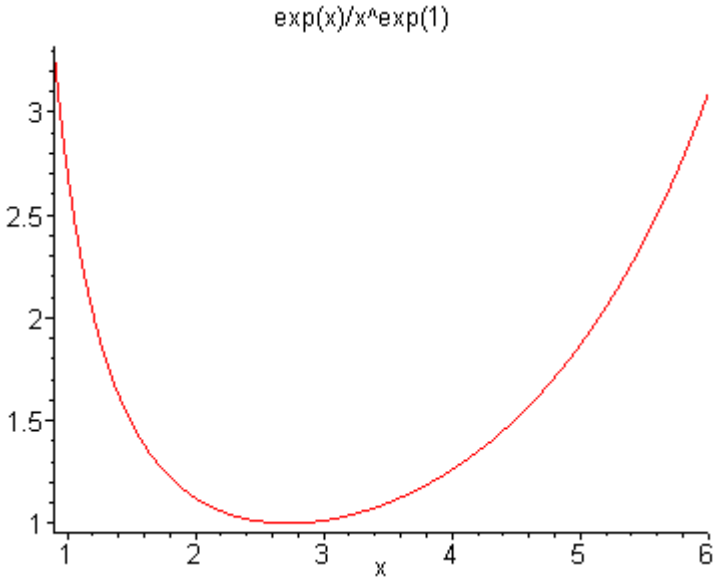
Solution.

1°/ Etude des variations de *f*.

$x^e = e^{e \ln x}$ est définie lorsque $\ln x$ est défini, c'est-à-dire pour $x > 0$.
Pour $x > 0$, le logarithme est dérivable, x^e n'est pas nul et l'exponentielle est dérivable, donc l'application f est dérivable en chaque $x > 0$.
Comme e^x et x^e sont tous deux strictement positifs, $f(x)$ est strictement positif pour tout $x > 0$.

La dérivée de x^e est $e\,x^{e-1}$.
La dérivée de e^x est e^x.

La dérivée de f est donnée par sa **dérivée logarithmique**:



$$\frac{f'(x)}{f(x)} = 1 - \frac{e}{x}$$

$$f'(x) = \frac{e^x}{x^e}\left(1 - \frac{e}{x}\right)$$

Comme $f(x)$ est toujours strictement positif pour $x > 0$, la dérivée est du signe de $(x - e)$: négative si x est inférieur à e, positive si x est supérieur à e et nulle si $x = e$.

La fonction f présente donc un minimum absolu pour $x = e$, où sa valeur est $f(e) = 1$.

Lorsque x tend vers 0, x^e tend vers 0, e^x tend vers 1, donc $\frac{e^x}{x^e}$ tend vers l'infini : le graphe présente

donc une asymptote verticale en $x = 0$.

2°/ Comparaison de e^{π} et π^{e}.

Comme e est l'abscisse du minimum de f, nous avons :

$\pi \neq e \Rightarrow f(\pi) > 1$, donc $e^{\pi} > \pi^{e}$.

$$\boxed{e^{\pi} > \pi^{e}.}$$

Chapitre 7. Dérivabilité des fonctions numériques d'une variable réelle.

Enoncés.

Exercice 3. Dérivabilité de 3 fonctions en 0.

Les fonctions f, g, h, $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définies par :

$f(x) = x\,|x|$ $\qquad$ $g(x) = x^{\frac{3}{5}}$ $\qquad$ $h(x) = \cos\sqrt{|x|}$

sont-elles dérivables en 0 ?

Solution.

1°/ Fonction *f*.

Pour $x < 0$, $|x| = -x$, $f(x) = -x^2$, $f'(x) = -2x$. $\lim\limits_{x \to 0^-} f'(x) = 0$.

Pour $x > 0$, $|x| = x$, $f(x) = x^2$, $f'(x) = 2x$. $\lim\limits_{x \to 0^+} f'(x) = 0$.

La limite à gauche est égale à la limite à droite : ***f* est dérivable en 0**.

2°/ Fonction *g*.

Comme 3 et 5 sont impairs, la fonction g peut être définie, pour $x < 0$, par : $g(x) = -|x|^{\frac{3}{5}}$.

La dérivée de g est $g'(x) = \frac{3}{5}x^{-\frac{2}{5}}$ pour $x > 0$.

Lorsque x tend vers 0 par valeurs supérieures, cette dérivée tend vers l'infini : la fonction ***g* n'est pas dérivable pour *x* = 0**.

3°/ Fonction *h*.

$\lim\limits_{u \to 0} \frac{\sin u}{u} = 1$

Pour $x > 0$, $h(x) = \cos\sqrt{x}$. Sa dérivée est : $h'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{x}}\sin\sqrt{x}$, qui tend vers $-\frac{1}{2}$ lorsque x tend vers 0.

Pour $x < 0$, $h(x) = \cos\sqrt{-x}$. Sa dérivée est : $h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{-x}}\sin\sqrt{-x}$, qui tend vers $\frac{1}{2}$ lorsque x tend vers 0.

La limite à gauche n'est pas égale à la limite à droite : ***h* n'est pas dérivable en 0**.

Chapitre 7. Dérivabilité des fonctions numériques d'une variable réelle.

Enoncés.

Exercice 4. Continuité, dérivabilité, continuité de la dérivée.

Pour chacune des applications f, g, h, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définies de la façon suivante :

$$f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} x\sin\frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad h(x) = \begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Déterminer l'ensemble des points $x \in \mathbb{R}$ où l'application est **continue**, puis l'ensemble des points $x \in \mathbb{R}$ où elle est **dérivable**, et l'ensemble des points $x \in \mathbb{R}$ où elle est **continûment dérivable**.

Solution.

1°/ Fonction *f*.

Lorsque x tend vers 0, $\frac{1}{x}$ tend vers l'infini et $\sin\frac{1}{x}$ n'a pas de limite, puisque la fonction *sinus* est périodique.
Donc la fonction f n'est pas continue en 0.
Elle n'est donc ni dérivable en 0, ni, a fortiori, continûment dérivable en 0.

2°/ Fonction *g*.

Lorsque x tend vers 0, comme la fonction $\sin\frac{1}{x}$ est majorée par 1, $x\sin\frac{1}{x}$ tend vers 0, la fonction g est continue en 0.
$\frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \sin\frac{1}{x}$ n'a pas de limite lorsque x tend vers 0, donc g n'est pas dérivable en 0.
A fortiori, g n'est pas continûment dérivable en 0.

3°/ Fonction *h*.

Lorsque x tend vers 0, comme la fonction $\sin\frac{1}{x}$ est majorée par 1, $x^2\sin\frac{1}{x}$ tend vers 0, la fonction h est continue en 0.
$\frac{h(x)-h(0)}{x-0} = x\sin\frac{1}{x}$ tend vers 0 lorsque x tend vers 0, donc h est dérivable en 0, et $h'(0) = 0$.

Pour $x \neq 0$, la dérivée de h est : $h'(x) = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$.
Lorsque x tend vers 0, cette dérivée n'a pas de limite, puisque, si $2x\sin\frac{1}{x}$ tend bien vers 0, la fonction *cosinus* est périodique.
Donc la fonction h n'est pas continûment dérivable en 0.

Chapitre 7. Dérivabilité des fonctions numériques d'une variable réelle.

Enoncés.

Exercice 5. Intersection d'une courbe et d'une corde.

Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$. Soit f : [a, b] $\longrightarrow \mathbb{R}$, une application continue sur [a, b] telle que $f(a) \neq f(b)$. On suppose de plus que f est dérivable aux points a et b et que $f'(a) = f'(b) = 0$. Montrer qu'il existe $c \in]\, a, b\, [$ tel que :

$$\frac{f(c)-f(a)}{c-a} = \frac{f(c)-f(b)}{c-b} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Solution.

Soit g l'application de] a, b [dans $\mathbb{R}$, définie par :

$$g(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - \frac{f(x)-f(b)}{x-b}$$

Comme f est une application continue et que $(x - a)$ et $(x - b)$ ne s'annulent pas dans l'intervalle ouvert] a, b [, g est aussi une application continue.

f est dérivable en a. Sa dérivée en a est :

$0 = f'(a) = \lim\limits_{x \to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

On a donc :

$$\lim_{x \to a^+} \left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - \frac{f(x)-f(b)}{x-b} \right) = -\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Comme $f(b)$ est différent de $f(a)$ et $a < b$, ce nombre réel est différent de 0.
Il existe donc un $x_a \in]\, a, b\, [$, suffisamment proche de a et différent de a, tel que :

$\frac{f(x_a)-f(a)}{x_a-a} - \frac{f(x_a)-f(b)}{x_a-b} = g(x_a)$ ait le même signe que $-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

f est dérivable en b. Sa dérivée en b est :

$0 = f'(b) = \lim\limits_{x \to b^-} \frac{f(x)-f(b)}{x-b}$.

On a donc :

$$\lim_{x \to b^-} \left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - \frac{f(x)-f(b)}{x-b} \right) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Comme $f(b)$ est différent de $f(a)$ et $a < b$, ce nombre réel est différent de 0.
Il existe donc un $x_b \in]a, b[$, suffisamment proche de b et différent de b, tel que :
$\frac{f(x_b) - f(a)}{x_b - a} - \frac{f(x_b) - f(b)}{x_b - b} = g(x_b)$ ait le même signe que $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Comme l'application g est continue sur $]a, b[$, donc sur $[x_a, x_b]$, elle prend toutes les valeurs intermédiaires entre $g(x_a)$ et $g(x_b)$. Notamment, elle prend la valeur 0.

Il existe, entre x_a et x_b, un réel $c \in]a, b[$, tel que
$\frac{f(c) - f(a)}{c - a} - \frac{f(c) - f(b)}{c - b} = 0$
On a alors :
$\frac{f(c) - f(a)}{c - a} = \frac{f(c) - f(b)}{c - b} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ (par soustraction des numérateurs et des dénominateurs).

Chapitre 7. Dérivabilité des fonctions numériques d'une variable réelle.

Enoncés.

Exercice 6. Racines réelles de *X*^*n*+*pX*+*q*.

Soient p et q deux nombres réels non nuls et n un entier > 0. Montrer que le polynôme $P(X) = X^n + pX + q$ ne peut avoir plus de deux racines réelles si n est pair, et plus de trois racines réelles si n est impair.	

Solution.

La dérivée de l'application $P : x \mapsto x^n + px + q$ est $nx^{n-1} + p$.

Si n est pair, $n - 1$ est impair. L'équation $nx^{n-1} + p = 0$ possède une seule racine réelle, $x = -\left(\frac{p}{n}\right)^{n-1}$.

Si la valeur de P pour cette racine est négative, $P(x)$ s'annule deux fois lorsque x varie de $-\infty$ à $+\infty$. Dans ce cas, $P(X)$ a deux racines réelles.
Si la valeur de P pour cette racine est nulle, $P(X)$ a une racine réelle double.
Si la valeur de P pour cette racine est positive, $P(x)$ est toujours positif, $P(X)$ n'a aucune racine réelle.

Si n est pair, $P(X)$ possède au plus deux racines réelles.

Si n est impair, $n - 1$ est pair.
L'équation $nx^{n-1} + p = 0$ possède 0 racine réelle si $p < 0$, et 2 racines réelles si $p > 0$ (le cas $p = 0$ est exclu par hypothèse).

Si $p < 0$, la dérivée ne s'annule jamais, la fonction P est strictement croissante, de $-\infty$ à $+\infty$. Elle s'annule 1 seule fois.
Si $p > 0$, la dérivée s'annule deux fois, la fonction P est d'abord croissante jusqu'à un maximum relatif : elle peut s'annuler une fois. Puis elle est décroissante entre les deux racines réelles de la dérivée : elle peut s'annuler une nouvelle fois. Ensuite elle est croissante et peut, à nouveau s'annuler une fois. Au total, la fonction P s'annule au plus trois fois, de sorte que $P(X)$ possède au plus trois racines réelles.

Si n est impair, $P(X)$ possède au plus trois racines réelles.

Chapitre 7. Dérivabilité des fonctions numériques d'une variable réelle.

Enoncés.

Exercice 7. Solutions réelles d'une équation transcendante.

Soit $P(X)$ un polynôme à coefficients réels de degré $n \geqslant 1$. Montrer que l'équation $P(x) = e^x$ n'a qu'un nombre fini de solutions réelles.	

Solution.

Lorsque x tend vers $+\infty$, l'exponentielle l'emporte sur la puissance et $e(x) > P(x)$.
Il existe un $A \in \mathbb{R}$, tel que $e(x) > P(x)$ pour tout $x > A$.

Lorsque x tend vers $-\infty$, l'exponentielle tend vers 0 et $P(x)$ tend vers l'infini.
Il existe un $B \in \mathbb{R}$, tel que $e(x) < |P(x)|$ pour tout $x < B$.

Les solutions de l'équation $P(x) = e^x$ sont donc toutes situées à distance finie, dans l'intervalle $[B, A]$.

Pour $n = 1$, $y = P(X)$ est l'équation d'une droite : elle rencontre l'exponentielle au plus deux fois.

Hypothèse de récurrence : Supposons que pour un $n \geqslant 1$, l'équation $P(x) = e^x$ n'ait qu'un nombre fini de solutions réelles.

Soit Q un polynôme de degré $n + 1$. Sa dérivée est un polynôme de degré $n - 1$. La dérivée de e^x est e^x.
La dérivée de $Q(x) - e^x$ est de la forme $P(x) - e^x$.
D'après l'hypothèse de récurrence, elle s'annule un nombre fini de fois.
Entre deux racines de la dérivée de $Q(x) - e^x$, la fonction est monotone, croissante ou décroissante : elle ne peut s'annuler qu'une seule fois au maximum.
Entre $-\infty$ et la première racine de la dérivée de $Q(x) - e^x$, la fonction est monotone, elle ne peut s'annuler qu'une seule fois au maximum.
Entre la dernière racine de la dérivée de $Q(x) - e^x$, et $+\infty$, la fonction est décroissante, elle ne peut s'annule qu'une seule fois au maximum.
Au total, **le nombre de racines de l'équation $Q(x) = e^x$ est fini**.

D'après le principe de récurrence, la propriété "$P(x) = e^x$ n'a qu'un nombre fini de solutions réelles" est vraie pour tout entier naturel $\geqslant 1$.

Chapitre 7. Dérivabilité des fonctions numériques d'une variable réelle.

Enoncés.

Exercice 8. Plus grand élément de $f(x) / x$.

On désigne par f une application dérivable de [0, 1] dans $\mathbb{R}$, telle que :
$f(0) = 0$, $f(1) = 1$, et $f'(0) = f'(1) = 0$.
On définit l'application g de [0, 1] dans $\mathbb{R}$, en posant :

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1°/ Montrer que g est continue sur [0, 1].
En déduire que l'ensemble g ([0, 1]) possède un plus grand élément que l'on notera $g(c)$.
2°/ Montrer que g est dérivable sur [0, 1] et calculer $g'(x)$ pour $0 < x \leqslant 1$. En déduire que $c \neq 1$.
3°/ Montrer que $c \neq 0$. En déduire que $f'(c) = \dfrac{f(c)}{c}$.

Solution.

1°/ Continuité.

Comme f est dérivable, elle est continue.
Pour $x \neq 0$, $\dfrac{f(x)}{x}$ est donc continue, et g est continue.

$g(0) = 0 = f'(0) = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to 0^+} g(x)$
donc g est continue aussi en 0.

L'application g est donc continue sur [0, 1].
Remarquons aussi que l'on a : $g(0) = 0$, $g(1) = 1$.

L'image d'un intervalle fermé par une application continue est un intervalle fermé (**théorème deWeierstrass**).
Donc ***g* ([0, 1]) possède un plus grand élément** que l'on notera $g(c)$, qui est la borne supérieure de l'image de l'intervalle fermé [0, 1] par l'application continue g.

2°/ Dérivabilité.

Pour $x \neq 0$, $\dfrac{f(x)}{x}$ est dérivable, et ***g* est dérivable**.

La dérivée de g pour $x \neq 0$, est $g'(x) = \frac{f'(x)}{x} - \frac{f(x)}{x^2}$.

$$\boxed{g'(x) = \frac{f'(x)}{x} - \frac{f(x)}{x^2}.}$$

Pour $x = 1$, $g'(1) = f'(1) - f(1) = -1 = \lim_{x \to 1^-} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1}$

Comme $x - 1$ est strictement négatif, on peut trouver un élément x voisin de 1, pour lequel $g(x) - g(1)$ soit strictement positif, puisque la limite du rapport est -1.
Ceci montre que $g(1) = f(1) = 1$, n'est pas la plus grande valeur de g, donc $c \neq 1$.

3°/ Dérivée de *f* en *c*.

Nous avons trouvé un x voisin de 1 pour lequel $g(x) - g(1) > 0$.
Or $g(1) = f(1) = 1$, donc $g(x) > 1 > g(0) = 0$
Donc $g(0)$ n'est pas non plus la plus grande valeur de g : c est différent de 0.

Il en résulte que $c \in]0, 1[$.

Or dans l'intervalle ouvert $]0, 1[$, g est continue et dérivable.
Sa plus grande valeur est un maximum absolu : la dérivée $g'(c)$ est nulle.

$g'(x) = \frac{f'(x)}{x} - \frac{f(x)}{x^2}$ et $g'(c) = 0 \Rightarrow f'(c) = \frac{f(c)}{c}$.

$$\boxed{f'(c) = \frac{f(c)}{c}.}$$

Chapitre 7. Dérivabilité des fonctions numériques d'une variable réelle.

Enoncés.

Exercice 9. Fonction *Arc sin* (1 – *x*).

Soit la fonction $f(x) = Arc\ sin\ (1 - x)$. 1°/ Quel est son domaine de définition. 2°/ Calculer sa dérivée.	

Solution.

1°/ Domaine de définition.

Si l'on pose $y = f(x)$, nous avons, par définition :

$$1 - x = sin\ y$$
$$-\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

Comme *sin y* doit être un nombre réel compris entre – 1 et 1, la fonction *f* est définie lorsque $1 - x$ est compris entre – 1 et 1.
$-1 \leqslant 1 - x \leqslant 1$, soit $0 \leqslant x \leqslant 2$.

Le domaine de définition de la fonction *Arc sin* (1 – *x*) est l'intervalle fermé [0, 2].

2°/ Dérivée.

La fonction $f(x) = Arc\ sin\ (1 - x)$ est une bijection de [0, 2] sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, donc la bijection réciproque est $x = 1 - sin\ y = f^{-1}(y)$.
Le **théorème de dérivation des fonctions réciproques** donne :

$$f'(x) = \frac{1}{\left(f^{-1}\right)'\left(f(x)\right)},$$

ce qu'on peut écrire, par abus de notation, mais qui fournit un moyen mnémotechnique facile, $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$.
Or la dérivée en *y* de $f^{-1}(y) = 1 - sin\ y$ est $(f^{-1})'(y) = -cos\ y = -\sqrt{1 - sin^2 y}$ puisque dans l'intervalle

$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, le cosinus est positif.

Donc, avec $1 - x = \sin y$, $(f^{-1})'(f(x)) = -\sqrt{1-(1-x)^2}$ et la dérivée de f est donnée par la formule :

$$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-(1-x)^2}}$$

Chapitre 7. Dérivabilité des fonctions numériques d'une variable réelle.

Enoncés.

Exercice 10. Dérivabilité d'une fonction définie par intervalles.

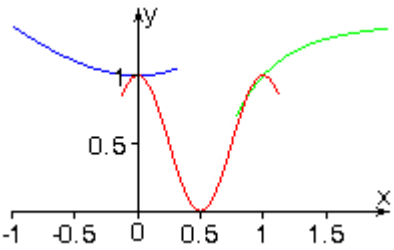
Soit la fonction f définie par :

$$x \mapsto \begin{cases} e^x - x & \text{si } x < 0, \\ \cos^2(\pi x) & \text{si } x \in [0, 1], \\ \dfrac{\ln(x^2)}{x-1} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Déterminer l'ensemble des points $x \in \mathbb{R}$ où f est dérivable.

Solution.

La continuité de cette fonction a été étudiée dans Chapitre 3, Exercice 7 :
f est continue sur $\mathbb{R}$.



1°/ $x < 0$.

Pour $x < 0$, $e^x - x$ est continue et dérivable, comme somme d'applications dérivables.
Sa limite lorsque x tend vers 0 est 1.
Sa dérivée est $e^x - 1$: elle est continue et tend vers 0 lorsque x tend vers 0.

2°/ $0 < x < 1$.

Pour x compris entre 0 et 1, $\cos^2(\pi x)$ est continue et dérivable, comme composée d'applications dérivables.
Sa limite lorsque x tend vers 0 est 1, donc f est continue en 0.
Sa dérivée est $-2\pi \sin(\pi x)\cos(\pi x) = -\pi \sin(2\pi x)$: elle est continue et tend vers 0 lorsque x tend vers 0.
Donc f est dérivable et a pour dérivée 0 en 0, et la dérivée de f est continue en 0.
La limite de $\cos^2(\pi x)$, lorsque x tend vers 1, est 1.
La limite de sa dérivée, lorsque x tend vers 1, est 0.

3°/ $x > 1$.

Pour $x > 1$, $1 + \dfrac{\ln x}{x}$ est continue et dérivable, comme somme et produit d'applications dérivables.
Sa limite lorsque x tend vers 1 est 1, donc f est continue en 1.

Sa dérivée est $\frac{1-\ln x}{x^2}$, elle tend vers 1 lorsque x tend vers 1.

4°/ Dérivée en 0.

La dérivée à gauche de 0 est 0.
La dérivée à droite de 0 est 0.
Ces dérivées sont égales : la fonction f est dérivable en 0 et sa dérivée en 0 est $f'(0) = 0$.

5°/ Dérivée en 1.

La limite à droite de la dérivée de f n'est pas égale à la limite à gauche : il en résulte que f n'est pas dérivable en 1.

Vérifions-le à partir de la définition de la dérivée.

Le rapport $\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ vaut $\frac{\cos^2(\pi x)-1}{x-1} = \frac{\sin^2(\pi x)}{1-x} = \frac{\sin^2(\pi(1-x))}{1-x} = \sin(\pi(1-x)) \times \pi \frac{\sin(\pi(1-x))}{\pi(1-x)}$, pour $x < 1$.

Ce rapport tend vers 0 lorsque x tend vers 1, puisque $\frac{\sin(\pi(1-x))}{\pi(1-x)} = \frac{\sin u}{u}$, avec un u qui tend vers 0, tend vers 1, et $\sin(\pi(1-x))$ tend vers 0.
Donc f possède en 1 une dérivée à gauche qui est 0.

Le rapport $\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ vaut $\frac{1}{x-1}\left(1+\frac{\ln x}{x}-1\right) = \frac{1}{x-1}\frac{\ln x}{x} = \frac{\ln x-\ln 1}{x-1} \times \frac{1}{x}$ pour $x > 1$.
Lorsque x tend vers 1, $\frac{\ln x-\ln 1}{x-1}$ tend vers 1 (dérivée de $\ln x$ pour $x = 1$), $\frac{1}{x}$ tend vers 1, le produit tend vers 1.
Donc f possède en 1 une dérivée à droite qui est 1.

La dérivée à droite n'est pas égale à la dérivée à gauche : f n'a pas de dérivée en 1.

L'application f est continue sur $\mathbb{R}$.
Elle est dérivable sur $\mathbb{R} - \{1\}$.

Exercices

Théorème des accroissements finis.

1. Théorème des accroissements finis.
2. Application aux suites divergentes.
3. Exemples de suites divergentes.
4. Application aux suites convergentes.
5. Exemples de suites convergentes.

Théorème des accroissements finis.

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction numérique :

— continue sur un intervalle fermé [a, b],

— dérivable sur l'intervalle ouvert] a, b [.

Alors il existe un $c \in]\, a, b\, [$ tel que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

HAUT

Application aux suites divergentes.

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction numérique :

— continue et positive sur $[\ 1, +\infty\ [$,

— continûment dérivable sur l'intervalle ouvert $]\ 1, +\infty\ [$.

— dont la dérivée f' est positive décroissante sur $[\ N, +\infty\ [$, $N \in \mathbb{N}^*$ et tendant vers 0 lorsque x tend vers l'infini.

D'après le théorème des accroissements finis, pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un $c_n \in]\ n, n + 1\ [$ tel que :

$$\boldsymbol{f'(c_n) = f(n+1) - f(n)}.$$

Pour $n \geqslant N$, on a (décroissance de f'):

$$f'(n+1) \leqslant f'(c_n) = f(n+1) - f(n) \leqslant f'(n)$$

et, par addition de N à n :

$$\boldsymbol{f'(N+1) + \ldots + f'(n+1) \leqslant f(n+1) - f(N) \leqslant f'(N) + \ldots + f'(n)}$$

Considérons la suite $(u_n)_n$ définie par :

$$\boldsymbol{u_n = f'(1) + f'(2) + \ldots + f'(n)}$$

Pour $n \geqslant N$, on a :

$$u_{n+1} - u_N \leqslant f(n+1) - f(N) \leqslant u_n - u_{N-1}$$

$$\boxed{f(n+2) + u_{N-1} - f(N) \leqslant u_{n+1} \leqslant f(n+1) + u_N - f(N)}$$

La suite $(u_n)_n$ est croissante. Elle diverge si $f(n)$ tend vers l'infini lorsque n tend vers l'infini.

HAUT

Exemples de suites divergentes.

$f(x) = ln(x)$: la suite $u_n = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}$ diverge.

$f(x) = ln(ln(x))$: la suite $u_n = 1 + \frac{1}{2ln2} + \frac{1}{3ln3} + \cdots + \frac{1}{nlnn}$ diverge.

$f(x) = \sqrt{x}$: la suite $u_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge.

HAUT

Application aux suites convergentes.

Soit $f :]\,0,\,1\,] \longrightarrow \mathbb{R}$ une application dérivable sur] 0, 1].
On suppose de plus qu'il existe $A \in \mathbb{R}_+$ tel que, pour tout $x \in]\,0,\,1\,]$, on ait $|f'(x)| \leqslant A$.

Alors la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ définie par $u_n = f\left(\frac{1}{n}\right)$ est convergente (Exercice 10).

Et toute suite $(u_n)_{n \geq 1}$ vérifiant $u_n \leqslant f\left(\frac{1}{n}\right)$ est convergente.

HAUT

Exemples de suites convergentes.

$f(x) = x^{\frac{3}{2}}$: la suite $u_n = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{n\sqrt{n+1}}$ est convergente ($n \geqslant 1$).

HAUT

Chapitre 8. Théorème des accroissements finis.

Exercices

Exercice 1. Dérivée de *sin* 2 x – 3 *cos x*.
Exercice 2. Dérivée logarithmique.
Exercice 3. Minoration d'une application continûment dérivable.
Exercice 4. Image d'une suite convergente par une application dérivable.
Exercice 5. Série 1 / *n ln n*.
Exercice 6. Série 1 / $n^{½}$.
Exercice 7. Accroissements finis et fonction puissance 1/3.
Exercice 8. Majorations et minorations de fonctions.
Exercice 9. Tangente à la parabole.
Exercice 10. Injectivité d'une application continue, dérivable, à dérivée non nulle.
Exercice 11. Dérivabilité et croissance de *f* (*x*) / *x*.
Exercice 12. Constante d'Euler-Mascheroni.
Exercice 13. Fonction *Arc sin*.

Exercice 1. Dérivée de *sin* 2 *x* – 3 *cos x*.

Soit la fonction $f(x) = \sin 2x - 3\cos x$.

1°/ Justifier le fait que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et calculer $f'(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

2°/ Montrer, en utilisant le théorème des accroissements finis (que l'on énoncera avec précision) qu'il existe une constante $c \in \left]\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right[$ telle que :

$$2\cos 2c + 3\sin c = \frac{9-3\sqrt{3}}{\pi}.$$

Solution

HAUT

Exercice 2. Dérivée logarithmique.

Soit f une application d'un intervalle $[\,a, b\,]$ dans $\mathbb{R}$.
On suppose que f est continue sur $[\,a, b\,]$, est dérivable en tout point de $]\,a, b\,[$, et que, pour tout $x \in [\,a, b\,]$, on a $f(x) > 0$.

Montrer qu'il existe $c \in]\,a, b\,[$ tel que $\frac{f(b)}{f(a)} = e^{(b-a)\frac{f'(c)}{f(c)}}$.

Solution

HAUT

Exercice 3. Minoration d'une application continûment dérivable.

Soit $f : [\,0, 1\,] \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continûment dérivable sur $[\,0, 1\,]$. On suppose de plus que $f(0) = 0$ et que, pour tout $x \in [\,0, 1\,]$, on ait $f'(x) > 0$. Montrer qu'il existe un nombre réel $m > 0$, tel que, pour tout $x \in [\,0, 1\,]$, on ait : $f(x) \geqslant m\,x$.	Solution

HAUT

Exercice 4. Image d'une suite convergente par une application dérivable.

Soit $f :]\,0,\,1\,] \longrightarrow \mathbb{R}$ une application dérivable sur] 0, 1].
On suppose de plus qu'il existe $A \in \mathbb{R}_+$ tel que, pour tout $x \in]\,0,\,1\,]$, on ait $|f'(x)| \leqslant A$.
On considère alors la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ définie par $u_n = f\left(\frac{1}{n}\right)$. Montrer qu'elle est convergente.

Solution

HAUT

Exercice 5. Série 1 / *n ln n*.

On considère la suite $(u_n)_{n \geq 2}$ de nombres réels dont le terme général u_n est défini, pour $n \geqslant 2$, par :

$$u_n = \frac{1}{2\ln 2} + \frac{1}{3\ln 3} + \cdots + \frac{1}{n \ln n}.$$

Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

Solution

HAUT

Exercice 6. Série 1 / $n^{½}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}$.

1°/ Montrer que $(u_n)_{n \geq 1}$ est une suite divergente.

2°/ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = \frac{1}{\sqrt{n}} u_n$.

a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\frac{1}{\sqrt{n+1}} \leqslant 2\,(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}$.

b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $2\sqrt{n+1} - 2 \leqslant u_n \leqslant 2\sqrt{n} - 1$.

c) Montrer alors que $(v_n)_{n \geq 1}$ est une suite convergente et préciser sa limite.

Solution

HAUT

Exercice 7. Accroissements finis et fonction puissance 1/3.

Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$.
Soit f : [a, b] $\to \mathbb{R}$ une application continue sur [a, b] et dérivable sur] a, b [.
Montrer qu'il existe $c \in$] a, b [tel que :

$$[\, f(b) - f(a) \,]\, 3\, c^2 = (b^3 - a^3)\, f'(c)$$

Solution

HAUT

Exercice 8. Majorations et minorations de fonctions.

1°/ Soit $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$. En utilisant le théorème des accroissements finis, démontrer les inégalités :

a) $\frac{x}{x+1} < ln\,(1 + x) < x$

b) $\frac{x}{1+x^2} < Atan\,x < x$

2°/ Soient $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$. Démontrer l'inégalité : $|\,sin\,x - sin\,y\,| \leqslant |\,x - y\,|$.

Solution

HAUT

Exercice 9. Tangente à la parabole.

On considère l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$f(x) = a\,x^2 + b\,x + c, \ (a \in \mathbb{R}, a \neq 0, b \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}).$$

Soit $h \in \mathbb{R}$, $h > 0$, et soit $x \in \mathbb{R}$. Démontrer qu'il existe un $\theta \in \mathbb{R}$, unique, $0 < \theta < 1$, vérifiant :

$$f(x + h) - f(x) = h\,f'(x + \theta\,h).$$

Interprétation géométrique.

Solution

HAUT

Exercice 10. Injectivité d'une application continue, dérivable, à dérivée non nulle.

Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ une application continue sur [0, 1], dérivable dans]0, 1[, telle que $f(0) = 0$. On suppose que, pour tout x de]0, 1[, $f'(x) \neq 0$.

1°/ Montrer que f est injective.

2°/ En déduire que f garde un signe constant sur]0, 1].

Solution

HAUT

Exercice 11. Dérivabilité et croissance de $f(x)/x$.

Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une application continue sur $[0, +\infty[$, dérivable dans $]0, +\infty[$, telle que $f(0) = 0$. On désigne par g l'application de $]0, +\infty[$ dans R, définie, pour tout $x > 0$, par $g(x) = \frac{f(x)}{x}$

1°/ Montrer que g est dérivable sur $]0, +\infty[$ et exprimer $g'(x)$ pour tout $x > 0$.

2°/ Montrer que si f' est croissante sur $]0, +\infty[$, il en est de même de g.

Solution

HAUT

Exercice 12. Constante d'Euler-Mascheroni.

1°/ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer, en utilisant le théorème des accroissements finis :

$$\frac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln n < \frac{1}{n}.$$

2°/ On définit la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ de nombres réels, en posant, pour $n \geqslant 1$:

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n.$$

Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est strictement décroissante.

En déduire qu'elle est convergente et que si $\gamma = \lim_{n \to +\infty} u_n$, on a $0 \leqslant \gamma < 1$.

(γ s'appelle la constante d'Euler-Mascheroni : on ignore encore si elle est ou non rationnelle !).

Solution

HAUT

Exercice 13. Fonction *Arc sin*.

1°/ On considère l'application f :] 0, 1 [$\to \mathbb{R}$, définie, pour $0 < x < 1$, par :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Etudier les variations de f et en dresser le tableau.

Solution

2°/ En appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction *Arc sin* sur un intervalle convenable, établir les inégalités :

$$\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{15} < Arc\ sin\ \frac{3}{5} < \frac{\pi}{6} + \frac{1}{8}$$

HAUT

Chapitre 8. Théorème des accroissements finis.

Enoncés.

Exercice 1. Dérivée de *sin* 2 *x* – 3 *cos x*.

Soit la fonction $f(x) = \sin 2x - 3\cos x$.

1°/ Justifier le fait que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et calculer $f'(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.
2°/ Montrer, en utilisant le théorème des accroissements finis (que l'on énoncera avec précision) qu'il existe une constante $c \in \left]\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right[$ telle que :

$$2\cos 2c + 3\sin c = \frac{9-3\sqrt{3}}{\pi}.$$

Solution.

1°/ Dérivabilité de *f*.

L'application $x \mapsto 2x$ est une **homothétie** : elle est continue et dérivable pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Sa dérivée est l'application constante $x \mapsto 2$.
L'application $x \mapsto \sin x$ est continue et dérivable pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Sa dérivée est l'application $x \mapsto \cos x$.
Donc l'application composée des deux précédentes, qui est l'application $x \mapsto \sin 2x$ est continue et dérivable pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Le **théorème de dérivation des applications composées** donne sa dérivée : $x \mapsto 2\cos 2x$

L'application $x \mapsto \cos x$ est continue et dérivable pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Sa dérivée est l'application $x \mapsto -\sin x$.
L'application $x \mapsto -3x$ est une **homothétie** : elle est continue et dérivable pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Sa dérivée est l'application constante $x \mapsto -3$.
Donc l'application composée des deux précédentes, qui est l'application $x \mapsto -3\cos x$ est continue et dérivable pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Le **théorème de dérivation des applications composées** donne sa dérivée : $x \mapsto 3\sin x$

La somme de deux applications continues est une application continue.
La somme de deux applications dérivables est une application dérivable.
Donc la somme des applications $x \mapsto \sin 2x$ et $x \mapsto -3\cos x$, qui est l'application f est continue et dérivable pour tout $x \in \mathbb{R}$.
La **dérivée d'une somme est la somme des dérivées** :

$$\boxed{f'(x) = 2\cos 2x + 3\sin x.}$$

2°/ Théorème des accroissements finis.

Si f est continue sur l'intervalle fermé [a, b], dérivable sur l'intervale ouvert] a , b [, il existe un $c \in$] a , b [tel que l'on ait :

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Or notre fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, donc sur l'intervalle fermé $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$, dérivable sur $\mathbb{R}$, donc sur l'intervalle ouvert $\left]\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Le théorème des accroissements finis permet alors d'affirmer qu'il existe $c \in \left]\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right[$ tel que :

$$f'(c) = \frac{f\left(\frac{\pi}{2}\right) - f\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}}.$$

D'après le résultat de la question 1°, $f'(c) = 2\,cos\,2\,c + 3\,sin\,c$.

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = sin\,2\left(\frac{\pi}{2}\right) - 3\,cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = sin\,2\left(\frac{\pi}{3}\right) - 3\,cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - 3 \times \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}(3 - \sqrt{3})$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) - f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}(3 - \sqrt{3})$$

$$\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$$

$$\frac{f\left(\frac{\pi}{2}\right) - f\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}} = \frac{3}{\pi}(3 - \sqrt{3}) = \frac{9 - 3\sqrt{3}}{\pi}.$$

Il existe $c \in \left]\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right[$ tel que : $2\,cos\,2\,c + 3\,sin\,c = \frac{9 - 3\sqrt{3}}{\pi}$.

Chapitre 8. Théorème des accroissements finis.

Enoncés.

Exercice 2. Dérivée logarithmique.

Soit f une application d'un intervalle $[\,a, b\,]$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que f est continue sur $[\,a, b\,]$, est dérivable en tout point de $]\,a, b\,[$, et que, pour tout $x \in [\,a, b\,]$, on a $f(x) > 0$. Montrer qu'il existe $c \in]\,a, b\,[$ tel que $\frac{f(b)}{f(a)} = e^{(b-a)\frac{f'(c)}{f(c)}}$.	

Solution.

Si f est continue sur $[\,a, b\,]$, dérivable en tout point de $]\,a, b\,[$, et strictement positive pour tout $x \in [\,a, b\,]$, on peut considérer la fonction $\boldsymbol{g(x) = ln(f(x))}$.
C'est une fonction continue sur $[\,a, b\,]$, dérivable en tout point de $]\,a, b\,[$.

Le **théorème des accroissements finis** affirme qu'il existe un $c \in]\,a, b\,[$ tel que $g'(c) = \frac{g(b)-g(a)}{b-a}$.

Or $g'(c) = \frac{f'(c)}{f(c)}$ et $\frac{g(b)-g(a)}{b-a} = \frac{ln(f(b))-ln(f(a))}{b-a} = \frac{1}{b-a} ln \frac{f(b)}{f(a)}$

On obtient donc $ln \frac{f(b)}{f(a)} = (b-a)\frac{f'(c)}{f(c)}$ et $\frac{f(b)}{f(a)} = e^{(b-a)\frac{f'(c)}{f(c)}}$.

Chapitre 8. Théorème des accroissements finis.

Enoncés.

Exercice 3. Minoration d'une application continûment dérivable.

Soit f : [0, 1] $\longrightarrow \mathbb{R}$ une application continûment dérivable sur [0, 1]. On suppose de plus que $f(0) = 0$ et que, pour tout $x \in$ [0, 1], on ait $f'(x) > 0$. Montrer qu'il existe un nombre réel $m > 0$, tel que, pour tout $x \in$ [0, 1], on ait : $f(x) \geqslant m\,x$.	

Solution.

Comme la dérivée de f est une application continue (f est continûment dérivable) sur [0, 1], f'([0, 1]) est un intervalle fermé (**théorème de Weierstrass**). La borne inférieure m de cet intervalle fermé est son plus petit élément : il existe un élément $c \in$ [0, 1], tel que $m = f'(c) > 0$ (puisque f' est strictement positive sur [0, 1]).
Pour tout élément $x \in$ [0, 1], on a : $f'(x) \geqslant m > 0$

Soit x un nombre réel > 0, $x \in$] 0, 1].
D'après le **théorème des accroissements finis**, il existe un $\theta \in$] 0, 1 [tel que :
$f'(\theta\, x) = \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{f(x)}{x} \geqslant m$ (puisque m est la borne inférieure de f').
Donc l'inégalité $f(x) \geqslant m\,x$ est vraie pour tout $x \in$] 0, 1].
Comme elle est vraie aussi pour $x = 0$, où elle se réduit à une égalité puisque $f(0) = 0$, on a trouvé un nombre réel $m > 0$, tel que, pour tout $x \in$ [0, 1], on ait $f(x) \geqslant m\,x$.

Chapitre 8. Théorème des accroissements finis.

Enoncés.

Exercice 4. Image d'une suite convergente par une application dérivable.

Soit f :] 0, 1] $\longrightarrow \mathbb{R}$ une application dérivable sur] 0, 1].
On suppose de plus qu'il existe $A \in \mathbb{R}_+$ tel que, pour tout $x \in$] 0, 1], on ait $|f'(x)| \leqslant A$.
On considère alors la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ définie par $u_n = f\left(\frac{1}{n}\right)$. Montrer qu'elle est convergente.

Solution.

La fonction f est continue et dérivable sur $\left[\frac{1}{n}, 1\right]$. Le théorème des accroissements finis affirme alors l'existence, dans l'intervalle ouvert $\left]\frac{1}{n}, 1\right[$, d'un élément c tel que $f'(c) = \frac{f\left(\frac{1}{n}\right) - f(1)}{\frac{1}{n} - 1}$, de sorte que l'on a :

$$u_n = f\left(\frac{1}{n}\right) = f(1) - \frac{n-1}{n} f'(c)$$

Or $|f'(x)| \leqslant A$, pour tout $x \in$] 0, 1]. Donc, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$:

$$f(1) - \frac{n-1}{n}A \leqslant u_n \leqslant f(1) + \frac{n-1}{n}A$$

ce qui montre que **la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est bornée**.

On peut même être un peu plus précis dans la majoration de $|u_n - f(1)|$
La fonction f est continue et dérivable sur $\left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$. Le théorème des accroissements finis affirme alors l'existence, dans l'intervalle ouvert $\left]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right[$, d'un élément c tel que $f'(c) = \frac{f\left(\frac{1}{n+1}\right) - f\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}}$, de sorte que l'on a : $u_{n+1} - u_n = -\frac{1}{n(n+1)} f'(c)$, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.

Or $|f'(x)| \leqslant A$, pour tout $x \in$] 0, 1]. Donc, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$:

$$|u_{n+1} - u_n| \leqslant \frac{1}{n(n+1)} A$$

Et, par addition à partir de $|u_2 - u_1|$, avec $u_1 = f(1)$:

$$\sum_{k=1}^{k=n} |u_{k+1} - u_k| \leqslant A \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k(k+1)} \leqslant A \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k^2}$$

Posons $v_n = u_{n+1} - u_n$:

$$u_{n+1} - u_1 = \sum_{k=1}^{k=n} v_k$$

$$u_{n+1} = u_1 + \sum_{k=1}^{k=n} v_k = f(1) + \sum_{k=1}^{k=n} v_k$$

$|v_n| \leqslant \frac{1}{n(n+1)} A$ et $\sum_{k=1}^{k=n} |v_k| \leqslant A \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k^2}$.

Or on sait que la suite de terme général $\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k^2}$ est convergente (sa limite est $\frac{\pi^2}{6}$) (Chapitre 5, Exercice 4).

Donc la suite de terme général $\sum_{k=1}^{k=n} |v_k|$ est convergente : on dit que la **série** de terme général v_n est **absolument convergente**.

La suite de terme général $\sum_{k=1}^{k=n} v_k$ est alors convergente (une série absolument convergente est convergente) :

Il en résulte que la suite de terme général $u_{n+1} = f(1) + \sum_{k=1}^{k=n} v_k$ est convergente.

Donc la suite de terme général u_n est convergente et sa limite est inférieure, en module, à $|f(1)| + \frac{\pi^2}{6} A$.

La suite de terme général u_n est convergente et sa limite est inférieure, en module, à $\|f(1)\| + \frac{\pi^2}{6} A$.

Chapitre 8. Théorème des accroissements finis.

Enoncés.

Exercice 5. Série 1 / *n ln n*.

On considère la suite $(u_n)_{n \geq 2}$ de nombres réels dont le terme général u_n est défini, pour $n \geqslant 2$, par : $u_n = \frac{1}{2 ln 2} + \frac{1}{3 ln 3} + \cdots + \frac{1}{n ln n}$. Montrer que $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.	

Solution.

1°/ Expression de u_n.

Considérons la fonction $f(x) = ln(ln(x))$.
Elle continue et dérivable partout où $ln(x)$ est > 0, donc sur l'intervalle] 1, + ∞ [.
Comme f est de la forme $f(x) = ln(u(x))$, avec $u(x) = ln(x)$, sa dérivée dans cet intervalle est :

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{1}{x ln x}$$

f' est elle-même continue et dérivable sur l'intervalle] 1, + ∞ [et sa dérivée est :

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2 ln x} - \frac{1}{x^2 (ln x)^2} = -\frac{1}{x^2 (ln x)^2}(ln x + 1) < 0$$

f' est une fonction décroissante de x, puisque sa dérivée est négative.

u_n est donné par la formule :

$$u_n = f'(2) + f'(3) + ... + f'(n)$$

2°/ Divergence de la suite.

D'après le **théorème des accroissements finis**, entre n et $n + 1$, il existe un réel c_n tel que :

$$f'(c_n) = \frac{f(n+1) - f(n)}{(n+1) - n} = f(n + 1) - f(n)$$

Comme f' est décroissante $f'(n) \leqslant f'(c_n) = f(n + 1) - f(n) \leqslant f'(n + 1)$
Par addition :
$u_n \leqslant f(n + 1) - f(2) \leqslant u_{n+1} - f'(2)$

$$u_{n+1} \geqslant f(n + 1) - f(2) + f'(2) = ln(ln(n + 1)) - ln(ln 2) + \frac{1}{2 ln 2}$$

Comme on a aussi $u_2 = f'(2) = \frac{1}{2 ln 2}$, il vient, pour tout entier $n \geqslant 2$:

$$u_n \geqslant \ln(\ln n) - \ln(\ln 2) + \frac{1}{2\ln 2}, \forall\, n \geqslant 2.$$

Lorsque n tend vers $+\infty$, $\ln(\ln n)$ tend vers $+\infty$, donc la suite $(u_n)_{n \geq 2}$ est divergente.

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty.$$

Chapitre 8. Théorème des accroissements finis.

Enoncés.

Exercice 6. Série 1 / $n^{½}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}$.

1°/ Montrer que $(u_n)_{n \geq 1}$ est une suite divergente.

2°/ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = \frac{1}{\sqrt{n}} u_n$.

a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\frac{1}{\sqrt{n+1}} \leqslant 2\,(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}$.

b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $2\sqrt{n+1} - 2 \leqslant u_n \leqslant 2\sqrt{n} - 1$.

c) Montrer alors que $(v_n)_{n \geq 1}$ est une suite convergente et préciser sa limite.

Solution.

1°/ La suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est divergente.

La divergence de la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ résulte de la formule 2°,b. Etablissons cette formule.

1ère méthode.

Considérons la fonction $f(x) = \sqrt{x}$. Elle est continue et dérivable sur] 0 , + ∞ [. Sa dérivée est $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

$\frac{1}{2} u_n = f'(1) + f'(2) + \ldots + f'(n)$

f' est une fonction dérivable sur] 0 , + ∞ [. Sa dérivée est $-\frac{1}{4 x^{\frac{3}{2}}} < 0$.

La fonction ***f '* est une fonction décroissante**, puisque sa dérivée est négative.

Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, puisque f est dérivable entre n et $n + 1$, d'après le **théorème des accroissements finis**, il existe, entre n et $n + 1$, un réel c_n tel que :

$$f'(c_n) = \frac{f(n+1) - f(n)}{(n+1) - n} = f(n + 1) - f(n)$$

Comme f' est décroissante, on a :

$$f'(n + 1) \leqslant f'(c_n) = f(n + 1) - f(n) \leqslant f'(n)$$

Et, par addition pour k variant de 1 à n :

$\frac{1}{2}u_{n+1} - f'(1) \leqslant f(n+1) - f(1) \leqslant \frac{1}{2}u_n$

Et comme on a aussi $\frac{1}{2}u_1 = \frac{1}{2} \leqslant f(1) - f(1) + f'(1) = \frac{1}{2}$, on peut écrire, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$:

$f(n+1) - f(1) \leqslant \frac{1}{2}u_n \leqslant f(n) - f(1) + f'(1)$

$\sqrt{n+1} - 1 \leqslant \frac{1}{2}u_n \leqslant \sqrt{n} - 1 + \frac{1}{2}$.

Multiplions par 2 :

$$\boxed{2\sqrt{n+1} - 2 \leqslant u_n \leqslant 2\sqrt{n} - 1}$$

2ème méthode.

Le carré d'un nombre réel non nul est strictement positif.

$(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})^2 > 0$.
$2n + 1 - 2\sqrt{n+1}\sqrt{n} > 0$
$2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} < \frac{1}{\sqrt{n}}$

$(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})^2 > 0$.
$2n - 1 - 2\sqrt{n-1}\sqrt{n} > 0$
$\frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n} - 2\sqrt{n-1}$

$$2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} < \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n} - 2\sqrt{n-1}$$

Additionnons ces inégalités pour k variant de 1 à n :

$$2\sqrt{n+1} - 2 < u_n < 2\sqrt{n}$$

Il nous manque le –1 dans le dernier membre : ça ne gêne par pour la divergence de la suite, qui ne fait appel qu'au premier membre.

Lorsque n tend vers l'infini, $2\sqrt{n+1} - 2$ tend vers l'infini, donc la suite $(u_n)_{n \geq 1}$, minorée par une suite tendant vers l'infini, tend vers l'infini.

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty.}$$

Bien entendu, un autre raisonnement peut conduire au même résultat :

— Premier exemple de raisonnement : $\frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{n}$ pour tout $n \geqslant 1$, donc $u_n > 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}$.

Si l'on sait que **la suite de terme général** $1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}$ **est divergente**, la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est divergente.

— De même, si l'on sait que **la série de Riemann ζ (*s*) est divergente pour *s* ⩽ 1**, la suite $(u_n)_{n \geq 1}$,

qui correspond à $s = \frac{1}{2}$, est divergente.
L'inconvénient de ces raisonnements est qu'ils font appel à un résultat dont on n'est pas certain qu'il ait été établi.

2°/ La suite $(v_n)_{n \geq 1}$ est convergente.

a) Pour tout entier $n \geqslant 1$, la relation : $f'(n+1) \leqslant f'(c_n) = f(n+1) - f(n) \leqslant f'(n)$, établie plus haut (1ère méthode), s'écrit, en multipliant par 2 :

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}} \leqslant 2\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}$$

b) La relation $2\sqrt{n+1} - 2 \leqslant u_n \leqslant 2\sqrt{n} - 1$ qui s'en déduit, a déjà été établie.

c) En divisant chaque membre des inégalités de cette relation par $\sqrt{n}$ qui est positif, on obtient :

$$2\sqrt{1+\frac{1}{n}} - \frac{2}{\sqrt{n}} \leqslant v_n = \frac{1}{\sqrt{n}} u_n \leqslant 2 - \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Lorsque n tend vers l'infini, $\sqrt{1+\frac{1}{n}}$ tend vers 1, $\frac{2}{\sqrt{n}}$ tend vers 0, donc $2\sqrt{1+\frac{1}{n}} - \frac{2}{\sqrt{n}}$ tend vers 2. $\frac{1}{\sqrt{n}}$ tend vers 0, $2 - \frac{1}{\sqrt{n}}$ tend vers 2, donc (**théorème des gendarmes**), la suite $(v_n)_{n \geq 1}$ est convergente et sa limite est 2.

La suite $(v_n)_{n \geq 1}$ est convergente et sa limite est 2.

Remarquons que l'inégalité :

$$2\sqrt{n+1} - 2 < u_n < 2\sqrt{n}$$

établie **sans faire appel au théorème des accroissements finis**, donne le même résultat :

$$2\sqrt{1+\frac{1}{n}} - \frac{2}{\sqrt{n}} \leqslant v_n = \frac{1}{\sqrt{n}} u_n \leqslant 2$$

Comme $2\sqrt{1+\frac{1}{n}} - \frac{2}{\sqrt{n}}$ tend vers 2 lorsque n tend vers l'infini, la suite $(v_n)_{n \geq 1}$ est convergente et sa limite est 2.
Le seul intérêt du théorème des accroissements finis, dans cet exercice, est de donner une majoration un tout petit peu plus fine de u_n et de v_n.

Chapitre 8. Théorème des accroissements finis.

Enoncés.

Exercice 7. Accroissements finis et fonction puissance 1/3.

Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$. Soit f : [a, b] $\to \mathbb{R}$ une application continue sur [a, b] et dérivable sur] a, b [. Montrer qu'il existe $c \in$] a, b [tel que : $[f(b) - f(a)] \, 3 c^2 = (b^3 - a^3) f'(c)$	

Solution.

Tout nombre réel peut s'écrire comme cube d'un nombre réel.
Soit g l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui, à $x \in \mathbb{R}$, fait correspondre $f(x^{\frac{1}{3}})$.
Sa dérivée par rapport à x est $g'(x) = f'(x^{\frac{1}{3}}) \times \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}}$.

$$f'(x^{\frac{1}{3}}) = 3 x^{\frac{2}{3}} g'(x)$$

f est continue sur] a, b [, $x \mapsto x^{\frac{1}{3}}$ est continue sur $\mathbb{R}$, g, composée des deux précédentes est continue sur l'intervalle] a^3, b^3 [.
D'après le théorème des accroissements finis, il existe donc un élément, que l'on peut noter $c^3 \in$] a^3, b^3 [tel que :

$$g'(c^3) = \frac{g(b^3) - g(a^3)}{b^3 - a^3} = \frac{f(b) - f(a)}{b^3 - a^3}$$
$$3 c^2 g'(c^3) = 3 c^2 \frac{f(b) - f(a)}{b^3 - a^3} = f'(c)$$

Il existe $c \in$] a, b [tel que : $[f(b) - f(a)] \, 3 c^2 = (b^3 - a^3) f'(c)$

Chapitre 8. Théorème des accroissements finis.

Enoncés.

Exercice 8. Majorations et minorations de fonctions.

1°/ Soit $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$. En utilisant le théorème des accroissements finis, démontrer les inégalités : a) $\frac{x}{x+1} < ln\,(1+x) < x$ b) $\frac{x}{1+x^2} < Atan\,x < x$ 2°/ Soient $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$. Démontrer l'inégalité : $\lvert \sin x - \sin y \rvert \leqslant \lvert x - y \rvert$.	

Solution.

1°/ Applications du théorème des accroissements finis.

a) Logarithme.

Le **théorème des accroissements finis** indique qu'entre deux points a et b distincts tels que f soit continue sur l'intervalle fermé [a, b] et dérivable sur l'intervalle ouvert] a, b [, il existe un point $c \in$] a, b [tel que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Appliquons ce théorème à la fonction numérique $f(x) = ln\,(1+x)$ entre les points 0 et x, $x \in$] 0, + ∞ [.
Il existe un c strictement compris entre 0 et x, tel que $f'(c) = \frac{ln(1+x)-ln1}{(1+x)-1} = \frac{ln(1+x)}{x}$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}$$
$$f'(c) = \frac{1}{1+c}$$

$\frac{1}{1+c}$ est compris strictement entre $\frac{1}{1+x}$ et 1, car f' est décroissante et :
$x > c > 0 \Rightarrow f'(x) < f'(c) < f'(0) = 1$

$$\frac{1}{1+x} < \frac{ln(1+x)}{x} < 1.$$
$$x > 0 \Rightarrow \frac{x}{x+1} < ln\,(1+x) < x.$$

$$\boxed{\frac{x}{x+1} < ln\,(1+x) < x}$$

b) Arc tangente.

L'application *Arc tangente* : $t \mapsto Atan\ t$ est continue sur l'intervalle [0, x] et dérivable sur l'intervalle] 0, x [, pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}\ ,\ +\frac{\pi}{2}\right[$.

Appliquons le théorème des accroissements finis à la fonction numérique $f(x) = Atan\ (x)$ entre les points 0 et x, $x \in \left]-\frac{\pi}{2}\ ,\ +\frac{\pi}{2}\right[$.

Il existe un c strictement compris entre 0 et x, tel que $f'(c) = \frac{Atan\ x - Atan\ 0}{x-0} = \frac{Atan\ x}{x}$

$$f'(t) = \frac{1}{1+t^2}$$
$$f'(c) = \frac{1}{1+c^2}$$

$\frac{1}{1+c^2}$ est strictement compris entre $\frac{1}{1+x^2}$ et 1, car f' est strictement décroissante et $0 < c < x$:

$$\frac{1}{1+x^2} < \frac{Atan\ x}{x} < 1.$$

Pour $x > 0$, multiplier par x ne change pas le sens des inégalités : $\frac{x}{1+x^2} < Atan\ x < x$.

$$\boxed{\frac{x}{1+x^2} < Atan\ x < x}$$

2°/ Fonction sinus.

L'application $x \mapsto sin\ x$ est continue sur tout intervalle fermé et dérivable sur tout intervalle ouvert de $\mathbb{R}$.
Le théorème des accroissements finis appliqué à la "fonction" sinus, f, sur un intervalle ouvert non vide] x , y [, $x < y$, assure l'existence d'un $c \in$] x, y [tel que :

$$f'(c) = \frac{sin\ x - sin\ y}{x-y}$$

$$f'(x) = cos\ x$$
$$f'(c) = cos\ c$$

$$cos\ c = \frac{sin\ x - sin\ y}{x-y}$$

La relation | $cos\ c$ | $\leqslant 1$ s'écrit alors :

$$\left|\frac{sin\ x - sin\ y}{x-y}\right| \leqslant 1$$
$$| sin\ x - sin\ y | \leqslant | x - y |.$$

Cette relation est vraie évidemment lorsque $x = y$, puisqu'elle se réduit alors à $0 = 0$.
Elle reste vraie, par symétrie entre x et y, aussi lorsque y est plus petit que x.
Elle est donc vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $y \in \mathbb{R}$.

$$\boxed{|\sin x - \sin y| \leqslant |x - y|.}$$

Chapitre 8. Théorème des accroissements finis.

Enoncés.

Exercice 9. Tangente à la parabole.

On considère l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$f(x) = a x^2 + b x + c$, ($a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $b \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$).

Soit $h \in \mathbb{R}$, $h > 0$, et soit $x \in \mathbb{R}$. Démontrer qu'il existe un $\theta \in \mathbb{R}$, unique, $0 < \theta < 1$, vérifiant :

$f(x + h) - f(x) = h f'(x + \theta h)$.

Interprétation géométrique.

Solution.

1°/ Théorème des accroissements finis.

Le **théorème des accroissements finis** indique qu'entre deux points a et b distincts tels que f soit continue sur l'intervalle fermé [a, b] et dérivable sur l'intervalle ouvert] a, b [, il existe un point $c \in]\, a, b\, [$ tel que $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Appliquons ce théorème à la fonction numérique $f(x) = a x^2 + b x + c$ entre les points x et $x + h$, $h \in]\, 0, +\infty\, [$.

Il existe un $c \in]\, x, x + h\, [$ tel que $f'(c) = \frac{f(x+h) - f(x)}{(x+h) - x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$, soit $f(x + h) - f(x) = h f'(c)$.

Or tout $c \in]\, x, x + h\, [$ peut s'écrire de façon unique sous la forme $c = x + \theta h$, avec un $\theta \in]\, 0, 1\, [$, donc il existe un $\theta \in]\, 0, 1\, [$, tel que $f(x + h) - f(x) = h f'(x + \theta h)$.

$f(x + h) - f(x) = (a (x + h)^2 + b (x + h) + c) - (a x^2 + b x + c)$

$= a h^2 + 2 a x h + b h$

$a h^2 + 2 a x h + b h = h f'(x + \theta h)$.

Comme h est différent de 0, on peut simplifier par h.
Il reste :

$$a h + 2 a x + b = f'(x + \theta h).$$

Or l'application $x \mapsto f'(x) = 2 a x + b$ est une injection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ puisque a est différent de 0, donc il existe au plus une solution de l'équation $f'(x + \theta h) = a h + 2 a x + b$.
Comme on sait qu'il en existe une, celle-ci est donc unique.
La solution est donnée par :

$$2\,a\,(x + \theta\,h) + b = a\,h + 2\,a\,x + b.$$
$$2\,a\,\theta\,h = a\,h.$$

Avec $a \neq 0$ et $h > 0$, il reste, après simplification, $\theta = \frac{1}{2}$

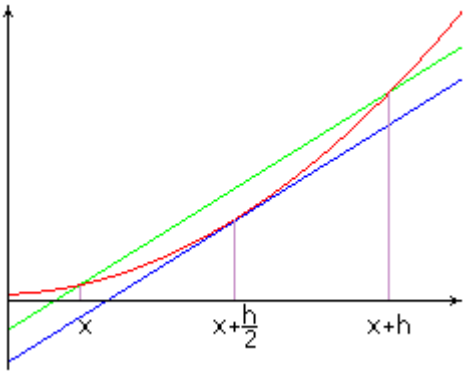
$$\boxed{f(x + h) - f(x) = h\,f'\left(x + \frac{h}{2}\right).}$$

2°/ Interprétation géométrique.

Pour une parabole d'équation :

$$y = a\,x^2 + b\,x + c,\ (a \in \mathbb{R},\ a \neq 0,\ b \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R}),$$

entre deux points d'abscisses x et $x + h$, il existe un point et un seul de la parabole pour lequel la tangente à la parabole est parallèle au segment joignant les deux points d'abscisses x et $x + h$: c'est celui qui a pour abscisse le milieu du segment $[\,x, x + h\,]$.



Chapitre 8. Théorème des accroissements finis.

Enoncés.

Exercice 10. Injectivité d'une application continue, dérivable, à dérivée non nulle.

Soit f : [0, 1] $\to \mathbb{R}$ une application continue sur [0, 1], dérivable dans]0, 1[, telle que $f(0) = 0$. On suppose que, pour tout x de]0, 1[, $f'(x) \neq 0$. 1°/ Montrer que f est injective. 2°/ En déduire que f garde un signe constant sur]0, 1].	

Solution.

1°/ Injectivité.

Le **théorème des accroissements finis** indique qu'entre deux points a et b distincts tels que f soit continue sur l'intervalle fermé [a, b] et dérivable sur l'intervalle ouvert] a, b [, il existe un point $c \in$] a, b [tel que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Appliquons ce théorème à la fonction numérique f, avec un x et un y quelconques dans [0, 1].
Si x et y sont distincts, f est continue sur l'intervalle fermé [x, y] et dérivable sur l'intervalle ouvert]x, y[, donc il existe un c dans l'intervalle ouvert]x, y[tel que $f(y) = f(x) + (y - x) f'(c)$.

Comme y est différent de x, $y - x$ est différent de 0.
$0 \leqslant x < c < y \leqslant 1 \Rightarrow c \in$]0, 1[. Par hypothèse, on a donc $f'(c) \neq 0$.
Le produit $(y - x) f'(c)$ est donc différent de 0 et il en résulte que $f(y) - f(x) = (y - x) f'(c)$ est différent de 0, donc $f(y)$ est différent de $f(x)$.

La relation $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$ signifie que f est injective.

2°/ Signe de *f*.

Si f n'avait pas toujours le même signe sur] 0, 1], il existerait un x et un y dans] 0, 1] tels que $f(x) > 0$ et $f(y) < 0$.
Comme f est continue, il existerait (**théorème des valeurs intermédiaires**), entre x et y, un z tel que :
$\boldsymbol{f(z) = 0}$ avec $0 < x < z < y \leqslant 1$ **ou** $0 < y < z < x \leqslant 1$.
Alors, comme ***f* est injective** et que $\boldsymbol{f(0) = 0}$, on aurait $\boldsymbol{z = 0}$, ce qui est en contradiction la relation : $0 < x < z < y < 1$ **ou** $0 < y < z < x < 1$.

f garde donc toujours le même signe sur l'intervalle] 0, 1].

Chapitre 8. Théorème des accroissements finis.

Enoncés.

Exercice 11. Dérivabilité et croissance de $f(x) / x$.

Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une application continue sur $[0, +\infty[$, dérivable dans $]0, +\infty[$, telle que $f(0) = 0$. On désigne par g l'application de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$, définie, pour tout $x > 0$, par $g(x) = \frac{f(x)}{x}$

1°/ Montrer que g est dérivable sur $]0, +\infty[$ et exprimer $g'(x)$ pour tout $x > 0$.

2°/ Montrer que si f' est croissante sur $]0, +\infty[$, il en est de même de g.

Solution.

1°/ Dérivabilité.

Pour voir si g est dérivable au point x, étudions le rapport $\frac{g(y)-g(x)}{y-x}$ et cherchons s'il possède une limite lorsque y tend vers x en restant différent de x.

$$\frac{g(y)-g(x)}{y-x} = \frac{1}{y-x}\left(\frac{f(y)}{y} - \frac{f(x)}{x}\right) = \frac{1}{xy(y-x)}(x f(y) - y f(x))$$
$$= \frac{1}{xy(y-x)}(x(f(y) - f(x) + f(x)) - y f(x))$$
$$= \frac{1}{xy(y-x)}(x(f(y) - f(x)) + (x-y) f(x))$$
$$= \frac{1}{y}\frac{f(y)-f(x)}{y-x} - \frac{1}{xy} f(x)$$

Lorsque y tend vers x, $\frac{f(y)-f(x)}{y-x}$ tend vers $f'(x)$, puisque f est dérivable en x.

$\frac{1}{y}$ tend vers $\frac{1}{x}$, et $\frac{1}{xy}$ tend vers $\frac{1}{x^2}$, de sorte que $\lim_{y \to x} \frac{g(y)-g(x)}{y-x} = \frac{1}{x} f'(x) - \frac{1}{x^2} f(x)$.

Cette formule montre que g possède en x une dérivée qui est :

$$\boxed{g'(x) = \frac{1}{x} f'(x) - \frac{1}{x^2} f(x).}$$

2°/ Croissance.

Soient x et y des éléments quelconques de $]0, +\infty[$, vérifiant $x < y$.

Comme g est continue sur $[x, y]$ et dérivable sur $]x, y[$, le **théorème des accroissements finis**

indique qu'il existe un c tel que :

$$g(y) = g(x) + (y - x)\, g'(c), \text{ avec } x < c < y.$$
$$= g(x) + (y - x)\, \frac{1}{c}(f'(c) - g(c))$$
$$= g(x) + \frac{1}{c}(y - x)\left(f'(c) - \frac{f(c)}{c}\right)$$

Comme f est continue sur [0, c] et dérivable sur] 0, c [, et que $f(0) = 0$, le **théorème des accroissements finis** indique qu'il existe un d tel que :

$$f'(d) = \frac{f(c)}{c}, \text{ avec } 0 < d < c.$$
$$\text{et } g(y) = g(x) + \frac{1}{c}(y - x)\,(f'(c) - f'(d))$$

Comme f' est croissante sur] 0, + ∞ [: $0 < d < c \Rightarrow f'(d) \leqslant f'(c)$.
Il en résulte :

$$\frac{1}{c}(y - x)\,(f'(c) - f'(d)) \geqslant 0 \text{ (produit de trois nombres positifs).}$$
$$\text{et } g(y) = g(x) + \frac{1}{c}(y - x)\,(f'(c) - f'(d)) \geqslant g(x)$$

Ainsi la relation $0 < x < y$ implique, lorsque f' est croissante sur] 0, + ∞ [, la relation $g(x) \leqslant g(y)$.
C'est dire que g est croissante sur] 0, + ∞ [.

Chapitre 8. Théorème des accroissements finis.

Enoncés.

Exercice 12. Constante d'Euler-Mascheroni.

1°/ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer, en utilisant le théorème des accroissements finis :

$$\frac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln n < \frac{1}{n}.$$

2°/ On définit la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ de nombres réels, en posant, pour $n \geqslant 1$:

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n.$$

Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est strictement décroissante.

En déduire qu'elle est convergente et que si $\gamma = \lim_{n \to +\infty} u_n$, on a $0 \leqslant \gamma < 1$.

(γ s'appelle la constante d'Euler-Mascheroni : on ignore encore si elle est ou non rationnelle !).

Solution.

1°/ Majoration.

Considérons l'application $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \ln x$.
f est continue et dérivable sur $]0, +\infty[$.
Par restriction, f est continue sur $[n, n+1]$ et dérivable sur $]n, n+1[$. On peut donc appliquer le théorème des accroissements finis : il existe un réel c, $n < c < n+1$, tel que $f'(c) = \ln(n+1) - \ln n$.

Or la dérivée de f est $f'(x) = \frac{1}{x}$, fonction strictement décroissante. On a donc :

$$n < c < n+1 \Rightarrow f'(n+1) < f'(c) < f'(n)$$
$$\frac{1}{n+1} < f'(c) < \frac{1}{n}.$$
$$\frac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln n < \frac{1}{n}.$$

2°/ Constante d'Euler.

1. Décroissance de la suite $(u_n)_{n \geq 1}$.

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln n.$$

La relation $\frac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln n$ montre que $u_{n+1} - u_n$ est < 0.
Donc la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est strictement décroissante.

2. Minoration et majoration de la suite.

Par addition membre à membre des relations :

$$\frac{1}{k+1} < \ln(k+1) - \ln k < \frac{1}{k}$$

pour k variant de 1 à n, il vient :

$$\frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln 1 < 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$$
$$\frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n+1} < \ln(n+1) < 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$$

On a donc :

$$\frac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln n < 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n$$
$$\frac{1}{n+1} < 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n = u_n.$$

et

$$\frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) < 0$$
$$1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) < 1$$

Comme on a aussi $u_1 = 1 \leqslant 1$, on peut écrire, pour tout $n \geqslant 1$:

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n \leqslant 1$$

soit, encore, en tenant compte de la décroissance stricte de la suite :

$$\boxed{\frac{1}{n+1} < u_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n < u_1 = 1,\ n \geqslant 2.}$$

Comme $\frac{1}{n+1}$ est > 0, on a aussi : $0 < u_n < u_1 = 1$.

3. Convergence de la suite.

La suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est strictement décroissante et minorée par 0 : elle est donc convergente et possède une limite γ.

4. Encadrement de la limite.

La relation $0 < u_n < u_1 = 1$, vraie pour $n \geqslant 2$, donne, par passage à la limite : $0 \leqslant \gamma < 1$.

Chapitre 8. Théorème des accroissements finis.

Enoncés.

Exercice 13. Fonction *Arc sin*.

1°/ On considère l'application f :] 0, 1 [$\to \mathbb{R}$, définie, pour $0 < x < 1$, par :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Etudier les variations de f et en dresser le tableau.

2°/ En appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction *Arc sin* sur un intervalle convenable, établir les inégalités :

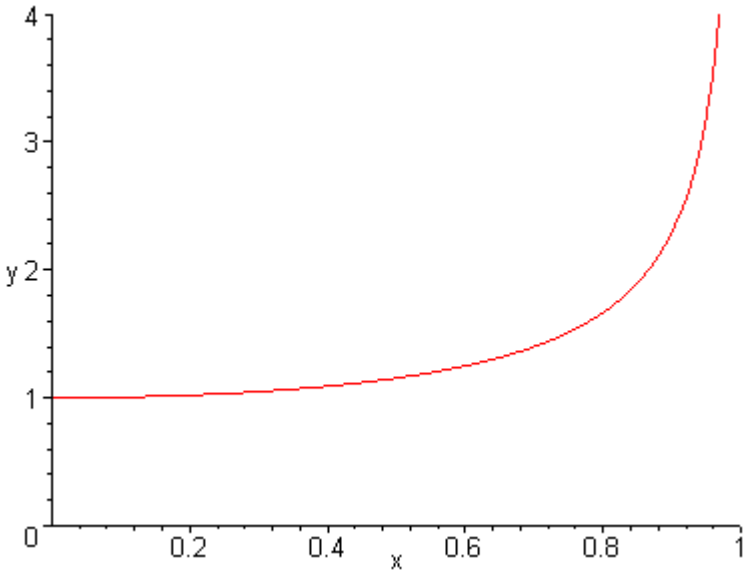
$$\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{15} < Arc\ sin\ \frac{3}{5} < \frac{\pi}{6} + \frac{1}{8}$$

Solution.

1°/ Tableau de variations.

Sur l'intervalle] 0, 1 [, $1 - x^2$ est > 0, donc $\sqrt{1-x^2}$ est défini et c'est un nombre > 0.

La fonction $u : x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ est continue sur [0, 1], dérivable sur] 0, 1 [, jamais nulle sur] 0, 1 [, donc la fonction $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ est continue et dérivable sur l'intervalle ouvert] 0, 1 [.



Sa dérivée s'obtient, par exemple, par : $f = \frac{1}{u}$, $\frac{df}{f} = -\frac{du}{u}$.

$u^2 = 1 - x^2$,

$2\,u\,du = -2\,x\,dx$, $\frac{du}{u} = -\frac{x}{u^2}dx = -\frac{x}{1-x^2}dx = -\frac{df}{f}$

$f'(x) = \frac{df}{dx} = \frac{x}{1-x^2} f(x) = \frac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$.

Cette dérivée est strictement positive sur l'intervalle] 0, 1 [, donc f est strictement croissante sur

l'intervalle] 0, 1 [.

x	0		1
$f'(x)$	0	+	$+\infty$
$f(x)$	1	↗	$+\infty$

2°/ Inégalités.

La dérivée de *Arc sin x* est $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Arc sin est une fonction continue sur [0, 1], dérivable sur] 0, 1 [et on a $\frac{\pi}{6} = Arc\ sin\ \frac{1}{2}$.

C'est aussi une fonction continue sur l'intervalle fermé $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{5}\right]$ et dérivable sur l'intervalle ouvert $\left]\frac{1}{2}, \frac{3}{5}\right[$.

Le **théorème des accroissements finis** indique alors l'existence d'un *c* réel vérifiant :

$$\frac{1}{\sqrt{1-c^2}} = \frac{Arc\ sin\left(\frac{3}{5}\right) - Arc\ sin\left(\frac{1}{2}\right)}{\frac{3}{5}-\frac{1}{2}} = 10\ (Arc\ sin\ \frac{3}{5} - \frac{\pi}{6}), \text{ avec } \frac{1}{2} < c < \frac{3}{5}$$

Comme la dérivée $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ est strictement croissante sur l'intervalle] 0, 1 [, on a :

$$\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}} < \frac{1}{\sqrt{1-c^2}} < \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}}$$

$$\frac{2\sqrt{3}}{3} < 10\ (Arc\ sin\ \frac{3}{5} - \frac{\pi}{6}) < \frac{5}{4}$$

$$\boxed{\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{15} < Arc\ sin\ \frac{3}{5} < \frac{\pi}{6} + \frac{1}{8}}$$

Exercices

Développements limités.

1. **Formule de Taylor-Lagrange.**
2. **Formule de Mac-Laurin.**
3. **Formule des accroissements finis : $n = 0$.**
4. **Propriétés, règle de L'Hôpital.**

Formule de Taylor-Lagrange.

Hypothèses:
f est une fonction réelle de classe C^n sur l'**intervalle fermé** [a, b], $a \neq b$,
f est $n + 1$ fois dérivable sur l'**intervalle ouvert**] a, b [,

Conclusion: il existe un $c \in]\, a, b\, [$ tel que :

$$f(b) = f(a) + f'(a)\frac{(b-a)}{1!} + f''(a)\frac{(b-a)^2}{2!} + \ldots + f^{(n)}(a)\frac{(b-a)^n}{n!} + f^{(n+1)}(c)\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

Remarques.

$f(a) + f'(a)\frac{(b-a)}{1!} + f''(a)\frac{(b-a)^2}{2!} + \cdots + f^{(n)}(a)\frac{(b-a)^n}{n!}$ est le **développement limité** de f à l'ordre n + 1, au voisinage de a.

$f^{(n+1)}(c)\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$ est le **reste de Lagrange** d'ordre $n + 1$.

Lorsque le reste est écrit sous la forme $o\left((b-a)^{(n+1)}\right)$, la formule s'appelle **formule de Taylor-Young**.
Pour $a = 0$, la formule de Taylor-Lagrange s'appelle **formule de Mac-Laurin**.

HAUT

Formule de Mac-Laurin.

C'est la formule de Taylor-Lagrange pour $a = 0$, $b = x$: il existe un c, $0 < c < x$, vérifiant :

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

Conditions : $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^n sur le segment [0, x], et $n + 1$ fois dérivable sur] 0, x [.

HAUT

Formule des accroissements finis.

C'est la formule de Taylor-Lagrange, pour $n = 0$. Il existe c, $a < c < b$, vérifiant :

$$f(b) = f(a) + f'(c)(b - a)$$

Conditions : $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue sur [a, b], et dérivable sur] a, b [.

HAUT

3. Règle de L'Hôpital.

Lorsque $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$ et $\lim_{x \to 0} g(x) = 0$, le rapport $\frac{f(x)}{g(x)}$ a, lorsque x tend vers 0, la même limite que le rapport $\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

HAUT

Chapitre 9. Développements limités.

Exercices

Exercice 1. Valeur approchée de *cos* (1/2).
Exercice 2. Limite d'une fonction.
Exercice 3. Cosinus hyperbolique.
Exercice 4. Puissance un tiers.
Exercice 5. Calcul de limites de 4 fonctions.
Exercice 6. Fonction $x^2 \ln x$.
Exercice 7. Fonction $x^3 \sin(1/x)$.
Exercice 8. Graphe de $(\ln|x-2|)/\ln|x|$.
Exercice 9. Développement limité d'une fonction de sinus et cosinus.
Exercice 10. Développement limité avec fonction en $1/x^2$.
Exercice 11. Calcul approché de racine carrée de 26.
Exercice 12. Calcul approché de racine carrée de *e*.
Exercice 13. Majoration de la dérivée d'une fonction deux fois dérivable.
Exercice 14. Série définie à partir d'une fonction deux fois dérivable.
Exercice 15. Série harmonique alternée.
Exercice 16. Partie entière de $n!\,e$.
Exercice 17. Irrationalité de cos (1).
Exercice 18. Développement limité à l'ordre 4 de 8 fonctions, au voisinage de 0.
Exercice 19. Développement limité à l'ordre 4 de 4 fonctions, au voisinage de 0.
Exercice 20. Développement limité à l'ordre 3 de 2 fonctions au voisinage de $\pi/2$.
Exercice 21. Développement limité à l'ordre 3 de 2 fonctions au voisinage de l'infini.
Exercice 22. Développement limité à l'ordre 2005 au voisinage de 0.
Exercice 23. Limite, en 0 ou l'infini, de 8 fonctions.
Exercice 24. Limite en 0 de 5 fonctions bien tordues.
Exercice 25. Graphe de $\exp(1/x) \times \sqrt{x(x+2)}$.

Encore plus d'exercices sur le calcul différentiel ...

Exercice 1. Valeur approchée de *cos* (1/2).

1°/ Soit $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Ecrire la formule de Taylor-Lagrange pour la fonction cosinus, sur l'intervalle [0, a], avec le reste à l'ordre 5.
Montrer que, pour a exprimé en radians :

$$\left| \cos a - 1 + \frac{a^2}{2!} - \frac{a^4}{4!} \right| \leqslant \frac{a^5}{5!}$$

Solution

2°/ En déduire :

$$\frac{337}{384} - \frac{1}{3840} \leqslant \cos\frac{1}{2} \leqslant \frac{337}{384} + \frac{1}{3840}$$

HAUT

Exercice 2. Limite d'une fonction.

1°/ Etablir le développement limité à l'ordre 3, en 0, des applications :

$f : x \mapsto f(x) = x\sqrt{1+x}$

$g : x \mapsto g(x) = x\,[\,\cosh x\,]^{\frac{1}{x}}$.

2°/ En déduire :

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \left(\frac{4\left(x\sqrt{1+x} - x(\cosh x)^{\frac{1}{x}} \right)}{\left(e^x - 1\right)^3} \right).$$

Solution

HAUT

Exercice 3. Cosinus hyperbolique.

Soit x un nombre réel, $0 < x < 1$. Montrer, en utilisant le théorème de Taylor-Lagrange, que : $\cosh x < 1 + x^2$.	Solution

HAUT

Exercice 4. Puissance un tiers.

Démontrer que, pour tout $x \in]\,0\,,+\infty\,[$, on a :

$$0 < (1+x)^{\frac{1}{3}} - 1 - \frac{x}{3} + \frac{x^2}{9} < 5\,\frac{x^3}{81}.$$

Solution

HAUT

Exercice 5. Calcul de limites de 4 fonctions.

Calculer, en utilisant les équivalents donnés par les développements limités usuels des fonctions élémentaires :

a) $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{2x+1}{2x-1} \right)^{2x}$

b) $\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \left(\frac{x}{\sin x} \right)^{\frac{\sin x}{x - \sin x}}$

c) $\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \frac{1 - \cos(\operatorname{Arc}\sin x)}{\ln(1+x^2)}$

d) $\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{e^{\sin x} - e^{\tan x}}{\sin x - \tan x}$

Solution

HAUT

Exercice 6. Fonction $x^2 \ln x$.

1°/ Montrer que l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \ln x & \text{pour } x \neq 0 \\ 0 & \text{pour } x = 0 \end{cases}$$

est dérivable en 0 et possède un développement limité à l'ordre 2 relatif à 0, que l'on déterminera.

2°/ Montrer que f n'est pas deux fois dérivable en 0 et ne possède pas de développement limité à l'ordre 3, relatif à 0.

Solution

HAUT

Exercice 7. Fonction $x^3 \sin(1/x)$.

1°/ Montrer que l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \sin\frac{1}{x} & \text{pour } x \neq 0 \\ 0 & \text{pour } x = 0 \end{cases}$$

est dérivable en 0 et, par conséquent, possède un développement limité à l'ordre 2 relatif à 0, que l'on déterminera.

2°/ Montrer que f n'est pas deux fois dérivable en 0 et possède cependant un développement limité à l'ordre 3, relatif à 0, que l'on déterminera.

Solution

HAUT

Exercice 8. Graphe de ($ln\,|\,x-2\,|$) / $ln\,|\,x\,|$.

Soit $X = \{x \in \mathbb{R} |\ x \neq -1, x \neq 1, x \neq 2\}$, et $f : X \to \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$f(x) = \frac{ln|x-2|}{ln|x|}.$$

Etudier les propriétés de f et tracer son graphe.

Solution

HAUT

Exercice 9. Développement limité d'une fonction de sinus et cosinus.

Soit f la fonction réelle définie par $f(x) = 9\ sin\ x - 11\ x\ cos\ x + 2\ x\ cos\ (2\ x)$.
1°/ Donner les développements limités en 0, à l'ordre 5, des fonctions $sin\ x$, $cos\ x$ et $cos\ (2\ x)$.
2°/ En déduire la limite, lorsque x tend vers 0 ($x \neq 0$), de l'expression $\frac{f(2x)}{f(x)}$.

Solution

HAUT

Exercice 10. Développement limité avec fonction en 1 / x^2.

Ecrire le développement limité à l'ordre 3, en 0, de $\frac{\cos x}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}$ et en déduire la limite en 0.	Solution

HAUT

Exercice 11. Calcul approché de racine carrée de 26.

1°/ Ecrire la formule de Taylor-Lagrange pour la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ sur l'intervalle [25, 26]. 2°/ En déduire : 5,099 < $\sqrt{26}$ < 5,100.	Solution

HAUT

Exercice 12. Calcul approché de racine carrée de *e*.

1°/ Montrer que $\frac{1}{2} < ln\ 2$. 2°/ Ecrire la formule de Taylor-Lagrange pour la fonction exponentielle sur l'intervalle $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, avec un reste à l'ordre 4. 3°/ En déduire : $\frac{79}{48} < \sqrt{e} < \frac{79}{48} + \frac{1}{192}$.	Solution

HAUT

Exercice 13. Majoration de la dérivée d'une fonction deux fois dérivable.

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. On suppose que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $\lvert f(x) \rvert \leqslant 1$ et $\lvert f''(x) \rvert \leqslant 1$. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lvert f'(x) \rvert \leqslant 2$.	Solution

HAUT

Exercice 14. Série définie à partir d'une fonction deux fois dérivable.

Soit $f : [\,0, 1\,] \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continûment dérivable sur [0, 1], deux fois dérivable sur] 0, 1 [.
On suppose de plus que $f(0) = 0$ et que, pour tout $x \in]\,0, 1\,[$, on a $|f''(x)| \leqslant 1$.
On considère alors la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ de nombres réels définie par :

$$u_n = \sum_{k=1}^{k=n} f\left(\frac{k}{n^2}\right)$$

Montrer qu'elle est convergente et calculer sa limite.

Solution

HAUT

Exercice 15. Série harmonique alternée.

On considère la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ de nombres réels dont le terme général u_n est défini, pour $n \geqslant 1$, par :

$$u_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n}.$$

Montrer qu'elle est convergente et calculer sa limite.

Solution

HAUT

Exercice 16. Partie entière de $n\,!\,e$.

Montrer que, pour n entier, $n \geqslant 2$:

$$n\,!\,e - E(n\,!\,e) \leqslant \frac{e}{n+1}.$$

Conclusion ?

Solution

HAUT

Exercice 17. Irrationalité de *cos* (1).

Montrer que *cos* (1) est irrationnel. En déduire que *tan* $\left(\frac{1}{2}\right)$ est aussi irrationnel.	Solution

HAUT

Exercice 18. Développement limité à l'ordre 4 de 8 fonctions, au voisinage de 0.

Justifier l'existence et calculer le développement limité à l'ordre 4, relatif à 0, des applications $f : V \longrightarrow \mathbb{R}$ (où V est un voisinage de 0 que l'on précisera) définies, pour $x \in V$, par:

$1°/ f(x) = \cosh 2x \sinh 3x$

$2°/ f(x) = [\ \ln(1+x)\ ]^2$

$3°/ f(x) = \sqrt{1+\sin x}$

$4°/ f(x) = \sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}$

$5°/ f(x) = e^{\sin x}$

$6°/ f(x) = e^{\cos x}$

$7°/ f(x) = \ln(1+x+\sqrt{1+x})$

$8°/ f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{(1+x)^2}$

Solution

HAUT

Exercice 19. Développement limité à l'ordre 4 de 4 fonctions, au voisinage de 0.

Justifier l'existence et calculer le développement limité à l'ordre 4, relatif à 0, des applications $f : V^* \longrightarrow \mathbb{R}$ (où V^* est un voisinage de 0, privé de 0, que l'on précisera) définies, pour $x \in V^*$, par:

$1°/ f(x) = \frac{x}{\sin x}$ $\quad$ $2°/ f(x) = \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\sinh^2 x}$

$3°/ f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$ $\quad$ $4°/ f(x) = (\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}}$

Solution

HAUT

Exercice 20. Développement limité à l'ordre 3 de 2 fonctions, au voisinage de $\pi/2$.

Justifier l'existence et calculer le développement limité à l'ordre 3, relatif à $\frac{\pi}{2}$, des applications $f : V \longrightarrow \mathbb{R}$ (où V est un voisinage de $\frac{\pi}{2}$ que l'on précisera) définies, pour $x \in V$, par: 1°/ $f(x) = ln\,(sin\,x)$ 2°/ $f(x) = (1 + cos\,x)^{\frac{1}{x}}$	Solution

HAUT

Exercice 21. Développement limité à l'ordre 3 de 2 fonctions, au voisinage de l'infini.

Ecrire un développement jusqu'au terme en $\frac{1}{x^3}$, relatif à $+\infty$, de chacune des applications $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$, définies, pour $x \in \mathbb{R}^+$, par :

1°/ $f(x) = \sqrt{x^4 + x + 1}$
2°/ $f(x) = Arctan \sqrt{\frac{x+1}{x+2}}$

Solution

HAUT

Exercice 22. Développement limité à l'ordre 2005 au voisinage de 0.

Montrer que l'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, définie par $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ possède un développement limité à l'ordre 2005, relatif à 0, et l'écrire.	Solution

HAUT

Exercice 23. Limite, en 0 ou l'infini, de 8 fonctions.

Déterminer

1°/ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \dfrac{(1-\cos x)\,Arc\tan x}{\sinh x \sin x \tan x}$

2°/ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x\,(\sin x)^{\tan x}$

3°/ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} (1+\sin x)^{\frac{1}{x}}$

4°/ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \dfrac{ln(\cos 2x)}{ln(\cos 3x)}$

5°/ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{x^{(x^x)}\ln x}{x^x-1}$

6°/ $\lim\limits_{x\to+\infty} (\tanh x)^{x^2}$

7°/ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} ln\,\dfrac{e^x-1}{x}$

8°/ $\lim\limits_{x\to+\infty} \sinh x\, e^{-x\tanh x}$

Solution

HAUT

Exercice 24. Limite en 0 de 5 fonctions bien tordues.

Montrer l'existence et calculer les limites suivantes :

1°/ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \dfrac{Arctan\left(x^2-x^2\cos x\right)}{\left(1-\sqrt{\cos x}\right)\ln\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)}$

2°/ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \dfrac{\ln(\cosh x)-\ln(\cos x)}{\sqrt{\cosh x}+\sqrt{\cos x}-2}$

3°/ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x}\,e^x+x^{1515}-1789\ln x}{x+\left(\sqrt{x^3+x^2}-\sqrt{x^3}\right)\cosh x}$

4°/ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \dfrac{2(1-\cos x)\sin x-x^3\sqrt[4]{1-x^2}}{\sin^5 x-x^5}$

5°/ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \left[\dfrac{x^2-\sin^2 x}{(\sin x-x\cos x)^2}-\dfrac{3}{x^2}\right]$

Solution

HAUT

Exercice 25. Graphe de *exp*(1/*x*) × *sqrt*(*x*(*x*+2)).

Soit $X = \{ x \in \mathbb{R}^* \mid x(x+2) \geqslant 0 \}$ et $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, l'application définie par :
$f(x) = e^{\frac{1}{x}} \sqrt{x(x+2)}$. Etudier les propriétés de f et tracer son graphe.

Solution

HAUT

Chapitre 9. Développements limités.

Enoncés.

Exercice 1. Valeur approchée de *cos* (1/2).

1°/ Soit $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Ecrire la formule de Taylor-Lagrange pour la fonction cosinus, sur l'intervalle [0, a], avec le reste à l'ordre 5.
Montrer que, pour a exprimé en radians :

$$\left| \cos a - 1 + \frac{a^2}{2!} - \frac{a^4}{4!} \right| \leqslant \frac{a^5}{5!}$$

2°/ En déduire :

$$\frac{337}{384} - \frac{1}{3840} \leqslant \cos\frac{1}{2} \leqslant \frac{337}{384} + \frac{1}{3840}$$

Solution.

1°/ Formule de Taylor-Lagrange pour le cosinus.

Le théorème de Taylor-Lagrange s'énonce :

Si f est une fonction réelle de classe C^n sur le segment [a, b], $a \neq b$, et $n + 1$ fois dérivable sur le segment] a, b [, il existe un $c \in]\, a, b\, [$ tel que :

$$f(b) = f(a) + f'(a)\frac{(b-a)}{1!} + f''(a)\frac{(b-a)^2}{2!} + \ldots + f^{(n)}(a)\frac{(b-a)^n}{n!} + f^{(n+1)}(c)\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

$f^{(n+1)}(c)\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$ est le **reste de Lagrange** à l'ordre n+1.

La fonction cosinus est indéfiniment dérivable.

Sa dérivée d'ordre k est, pour x exprimé en radians, $\frac{d^k(\cos x)}{dx^k} = \begin{cases} (-1)^{\frac{k}{2}} \cos x & \text{si } k \text{ est pair} \\ (-1)^{\frac{k+1}{2}} \sin x & \text{si } k \text{ est impair} \end{cases}$

La formule de Taylor-Lagrange, avec reste à l'ordre 5 s'écrit, pour la fonction cosinus cinq fois continûment dérivable sur l'intervalle] 0, a [:

$$\cos a = \cos 0 - \sin 0 \times \frac{a}{1!} - \cos 0 \times \frac{a^2}{2!} + \sin 0 \times \frac{a^3}{3!} + \cos 0 \times \frac{a^4}{4!} - \sin(c) \times \frac{a^5}{5!},\ 0 < c < a.$$

$$\boxed{\cos a = 1 - \frac{a^2}{2!} + \frac{a^4}{4!} - \sin(c)\,\frac{a^5}{5!},\ 0 < c < a.}$$

On déduit de $|\sin c| \leqslant 1$:

$$\left|\cos a - 1 + \frac{a^2}{2!} - \frac{a^4}{4!}\right| \leqslant \frac{a^5}{5!}$$

2°/ Application numérique.

Pour $a = \frac{1}{2}$, la formule de Taylor-Lagrange s'écrit :

$$\cos\frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{8} + \frac{1}{384} - \sin c \times \frac{1}{3840} = \frac{337}{384} - \sin c \times \frac{1}{3840}$$

On déduit de $|\sin c| \leqslant 1$:

$$-\frac{1}{3840} < \left|\cos\frac{1}{2} - \frac{337}{384}\right| < \frac{1}{3840}.$$

$$\boxed{\frac{337}{384} - \frac{1}{3840} \leqslant \cos\frac{1}{2} \leqslant \frac{337}{384} + \frac{1}{3840}}$$

Chapitre 9. Développements limités.

Enoncés.

Exercice 2. Limite d'une fonction.

1°/ Etablir le développement limité à l'ordre 4, en 0, des applications :

$f : x \mapsto f(x) = x\sqrt{1+x}$

$g : x \mapsto g(x) = x\,[\,\cosh x\,]^{\frac{1}{x}}$.

2°/ En déduire :

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \left(\frac{4\left(x\sqrt{1+x} - x(\cosh x)^{\frac{1}{x}} \right)}{\left(e^x - 1\right)^3} \right).$$

Solution.

1°/ Développements limités à l'ordre 4.

Pour calculer le développement limité à l'ordre 4, il faut calculer les dérivées jusqu'à l'ordre 4 si l'on veut écrire le reste sous la forme de Lagrange.

a) Développement limité de *f*.

Pour avoir le développement limité de f à l'ordre 4, il suffit de multiplier par x le développement limité de $\sqrt{1+x}$ à l'ordre 3.

$$\sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2!}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 1\right)x^2 + o(x^3)$$

$$\boxed{f(x) = x\sqrt{1+x} = x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{8} + o(x^4)}$$

b) Développement limité de *g*.

Pour avoir le développement limité de g à l'ordre 4, il suffit de multiplier par x le développement limité de $[\,\cosh x\,]^{\frac{1}{x}}$ à l'ordre 3.

$$[\,\cosh x\,]^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{\ln(\cosh x)}{x}}$$

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5)$$

$$ln\,(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + o\,(u^3)$$

$$u = \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o\,(x^5)$$

$$ln\,(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o\,(x^5)) = \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^4}{8} + o\,(x^5)$$

$$ln\,(cosh\,x) = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{12}x^4 + o\,(x^5)$$

$$\frac{ln(cosh\,x)}{x} = \frac{1}{2}\,x - \frac{1}{12}x^3 + o\,(x^4)$$

$$e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + o\,(u^4)$$

Pour $u = \frac{ln(cosh\,x)}{x}$, il vient :

$$[\,cosh\,x\,]^{\frac{1}{x}} = 1 + \left(\frac{1}{2}\,x - \frac{1}{12}\,x^3\right) + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{8} + o\,(x^4)$$

$$[\,cosh\,x\,]^{\frac{1}{x}} = 1 + \frac{1}{2}\,x + \frac{1}{8}\,x^2 + \frac{1}{24}x^3 + o\,(x^4)$$

$$g\,(x) = x\,[\,cosh\,x\,]^{\frac{1}{x}} = x + \frac{1}{2}\,x^2 + \frac{1}{8}\,x^3 + o\,(x^4)$$

$$\boxed{g\,(x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{8} + o\,(x^4)}$$

2°/ Limite.

$$f\,(x) - g\,(x) = x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{8} - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{8} + o\,(x^4)$$

$$f\,(x) - g\,(x) = -\frac{1}{4}x^3 + o\,(x^4)$$

$$e^x - 1 = x + o\,(x^2)$$

$$(e^x - 1)^3 = x^3 + o\,(x^4)$$

$$\frac{4}{(e^x - 1)^3}[\,f\,(x) - g\,(x)\,] = -1 + o\,(x)$$

$$\boxed{\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \left(\frac{4\left(x\sqrt{1+x} - x(cosh\,x)^{\frac{1}{x}}\right)}{(e^x - 1)^3} \right) = -1}$$

Chapitre 9. Développements limités.

Enoncés.

Exercice 3. Cosinus hyperbolique.

Soit x un nombre réel, $0 < x < 1$. Montrer, en utilisant le théorème de Taylor-Lagrange, que : $\cosh x < 1 + x^2$.	

Solution.

Le théorème de Taylor-Lagrange assure que, si f est une fonction réelle de classe C^n sur le segment $[a, b]$, $a \neq b$, et $n + 1$ fois dérivable sur le segment $]a, b[$, il existe un $c \in]a, b[$ tel que :

$$f(b) = f(a) + f'(a)\frac{(b-a)}{1!} + f''(a)\frac{(b-a)^2}{2!} + \ldots + f^{(n)}(a)\frac{(b-a)^n}{n!} + f^{(n+1)}(c)\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

$f^{(n+1)}(c)\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$ est le **reste de Lagrange** à l'ordre $n + 1$.

La fonction cosinus hyperbolique, définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$: elle est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$, toutes ses dérivées successives sont continues et dérivables.

$$\cosh^{(n)}(x) = \begin{cases} \sinh x & \text{lorsque } n \text{ est impair} \\ \cosh x & \text{lorsque } n \text{ est pair} \end{cases}$$

Il en est de même de l'application $x \mapsto 1 + x^2$.
Il en est donc de même de la différence $f(x) = \cosh x - (1 + x^2)$.
On peut donc appliquer à f le théorème de Taylor-Lagrange à l'ordre 3, sur le segment $[0, x]$, $0 < x < 1$:

il existe un $c \in]0, x[$ tel que :

$$\cosh x - (1 + x^2) = [\cosh 0 - (1 + 0)] + [(\sinh 0 - 2 \times 0)] \times x + [(\cosh 0 - 2)] \times \frac{x^2}{2} + [(\sinh c - 0)] \times \frac{x^3}{6}$$

$$\cosh x - (1 + x^2) = -\frac{x^2}{2} + \sinh c \times \frac{x^3}{6}$$

Reste à montrer que le reste de Lagrange à l'ordre 3, $\sinh c \times \frac{x^3}{6}$, est strictement plus petit que $\frac{x^2}{2}$, ou, ce qui revient au même, que $\frac{1}{6}\, x \sinh c < \frac{1}{2}$, ou $\sinh c < \frac{3}{x}$.

La fonction sinus hyperbolique est une fonction **strictement croissante** (sa dérivée, le cosinus hyperbolique, est une fonction strictement positive) :

$$c < x \Rightarrow \sinh c < \sinh x.$$

Montrons que $\sinh x$ est strictement plus petit que $\frac{3}{x}$, pour tout $x \in]0, 1[$.

$\sinh x$ est une fonction strictement croissante (sa dérivée $\cosh x$ est strictement positive).

Lorsque x varie de 0 à 1, elle varie de 0 à $\sinh 1 = \frac{1}{2}(e - e^{-1}) < \frac{e}{2} < 3$.

$\frac{3}{x}$ est une fonction strictement décroissante (sa dérivée $\frac{-3}{x^2}$ est strictement négative).

Lorsque x varie de 0 à 1, elle varie de $+\infty$ à 3.

On a donc, pour tout $x \in]0, 1[$:

$$\sinh x < \frac{e}{2} < 3 < \frac{3}{x}.$$

$$\cosh x - (1 + x^2) = -\frac{x^2}{2} + \sinh c \times \frac{x^3}{6} < -\frac{x^2}{2} + \sinh x \times \frac{x^3}{6} < -\frac{x^2}{2} + \frac{3}{x} \times \frac{x^3}{6} = 0$$

$$\cosh x - (1 + x^2) < 0$$

$$\cosh x < 1 + x^2$$

Pour tout $x \in]0, 1[$: $\cosh x < 1 + x^2$.

Chapitre 9. Développements limités.

Enoncés.

Exercice 4. Puissance un tiers.

Démontrer que, pour tout $x \in]\,0\,,+\infty\,[$, on a : $0 < (1+x)^{\frac{1}{3}} - 1 - \frac{x}{3} + \frac{x^2}{9} < 5\,\frac{x^3}{81}$.	

Solution.

Le **théorème de Taylor-Lagrange** entre 0 et x, fournit, à l'ordre 3, l'existence d'un $c \in]\,0,\,x\,[$ vérifiant :

$$(1+x)^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{3}\,x + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\frac{x^2}{2} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)(1+c)^{-\frac{5}{3}}\,\frac{x^3}{6}$$

$$(1+x)^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + 5\,(1+c)^{-\frac{5}{3}}\,\frac{x^3}{81}$$

$$(1+x)^{\frac{1}{3}} - 1 - \frac{x}{3} + \frac{x^2}{9} = 5\,(1+c)^{-\frac{5}{3}}\,\frac{x^3}{81}$$

Or, pour $c > 0$, $(1+c)^{-\frac{5}{3}}$ est strictement compris entre 0 et 1, donc : $0 < 5\,(1+c)^{-\frac{5}{3}}\,\frac{x^3}{81} < 5\,\frac{x^3}{81}$.

Il en résulte :

$$\boxed{\text{Pour tout } x \in]\,0\,,+\infty\,[\,:\, 0 < (1+x)^{\frac{1}{3}} - 1 - \frac{x}{3} + \frac{x^2}{9} < 5\,\frac{x^3}{81}.}$$

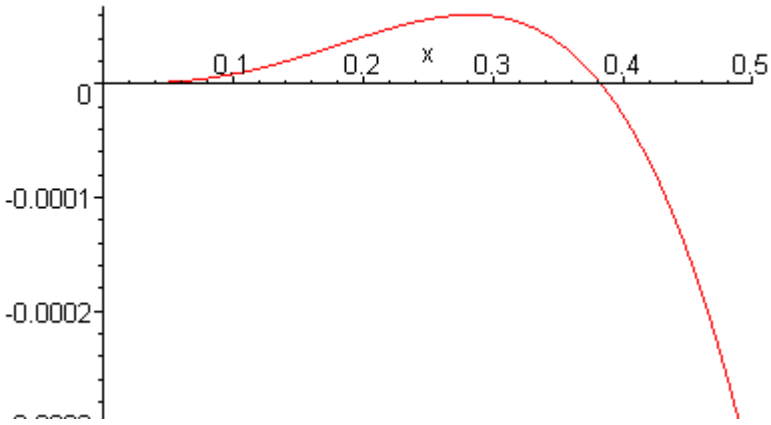
En particulier, pour $x = 1$, $0 < \sqrt[3]{2} < 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \frac{5}{81} = \frac{104}{81}$.

Ce n'est pas la plus fine des majorations avec 81 au dénominateur, puisqu'on a, en fait :

$$\frac{102}{81} < \sqrt[3]{2} < \frac{103}{81},$$

soit

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \frac{3}{81} < \sqrt[3]{2} < 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \frac{4}{81}$$



De façon générale, on a, pour tout $x \in]$
$0{,}4 , + \infty [$:
$0 < (1 + x)^{\frac{1}{3}} - 1 - \frac{x}{3} + \frac{x^2}{9} < 4\,\frac{x^3}{81}$, comme le montre la représentation graphique ci-contre de la fonction $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{3}} - 1 - \frac{x}{3} + \frac{x^2}{9} - 4\frac{x^3}{81}$.

Chapitre 9. Développements limités.

Enoncés.

Exercice 5. Calcul de limites de 4 fonctions.

Calculer, en utilisant les équivalents donnés par les développements limités usuels des fonctions élémentaires : a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{2x+1}{2x-1}\right)^{2x}$ b) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \left(\frac{x}{\sin x}\right)^{\frac{\sin x}{x - \sin x}}$ c) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \frac{1 - \cos(Arc \sin x)}{ln(1+x^2)}$ d) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{e^{\sin x} - e^{\tan x}}{\sin x - \tan x}$	

Solution.

1°/ Première limite.

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{2x+1}{2x-1}\right)^{2x}$$

On peut ramener le calcul de la limite à une limite lorsque u tend vers 0 par valeurs positives en posant $u = \frac{1}{2x}$.

$$\left(\frac{2x+1}{2x-1}\right)^{2x} = \left(\frac{1+u}{1-u}\right)^{\frac{1}{u}}$$

Calculons la limite, lorsque u tend vers 0 en restant différent de 0 (sans qu'il soit besoin de préciser si u est positif ou négatif), de $(1 + u)^{\frac{1}{u}}$.

Le logarithme de $(1 + u)^{\frac{1}{u}}$ est $\frac{1}{u} ln\,(1 + u) \sim \frac{1}{u}(u - \frac{u^2}{2}) = 1 - \frac{u}{2}$.

Le logarithme tend vers 1, donc $(1 + u)^{\frac{1}{u}}$ tend vers e.

$$\lim_{\substack{u \to 0 \\ u \neq 0}} (1 + u)^{\frac{1}{u}} = e.$$

Cette limite reste la même si l'on change u en $-u$: $(1-u)^{-\frac{1}{u}}$ tend vers e.

$\left(\frac{1+u}{1-u}\right)^{\frac{1}{u}} = (1+u)^{\frac{1}{u}} \times (1-u)^{-\frac{1}{u}}$ tend vers e^2.

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{2x+1}{2x-1}\right)^{2x} = e^2.}$$

2°/ Deuxième limite.

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \left(\frac{x}{\sin x}\right)^{\frac{\sin x}{x - \sin x}}$$

Posons $u = \frac{x - \sin x}{\sin x} = \frac{x}{\sin x} - 1$.
Lorsque x tend vers 0, $\frac{x}{\sin x}$ tend vers 1 et u tend vers 0.

$$\frac{x}{\sin x} = 1 + u.$$
$$\left(\frac{x}{\sin x}\right)^{\frac{\sin x}{x - \sin x}} = (1+u)^{\frac{1}{u}}$$

$(1+u)^{\frac{1}{u}}$ tend vers e lorsque u tend vers 0 (voir 1°).

$$\boxed{\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \left(\frac{x}{\sin x}\right)^{\frac{\sin x}{x - \sin x}} = e.}$$

3°/ Troisième limite.

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \frac{1 - \cos(Arc \sin x)}{\ln(1 + x^2)}$$

a) Développement limité de *Asin x*.

La fonction *Arc sinus* est une bijection de l'intervalle [– 1, 1] sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

$$\boxed{y = Arcsin\, x \Leftrightarrow x = \sin y \text{ et } -\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}.}$$

Elle est continue et dérivable sur cet intervalle.

$\frac{dx}{dy} = \cos y = \sqrt{1 - x^2}$.

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; $y'(0) = 1$.

$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$; $y''(0) = 0$.

$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{1}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} + 3\frac{x^2}{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}}$; $y'''(0) = 1$.

Lorsque x tend vers 0, $Arcsin\ x = x + \frac{x^3}{6} + o(x^4)$

b) Limite.

$$\cos u = 1 - \frac{u^2}{2} + o(u^3)$$

$$\cos(Arcsin\ x) = 1 - \frac{1}{2}\left(x + \frac{x^3}{6}\right)^2 \sim 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$$

$$\ln(1 + x^2) = x^2 + o(x^3)$$

$$\frac{1-\cos(Arc\sin x)}{\ln(1+x^2)} \sim \frac{1}{2} + o(x)$$

$$\boxed{\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \frac{1-\cos(Arc\sin x)}{\ln(1+x^2)} = \frac{1}{2}.}$$

4°/ Quatrième limite.

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{e^{\sin x} - e^{\tan x}}{\sin x - \tan x}$$

$$e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + o(u^4)$$

$$e^{\sin x} = 1 + \sin x + \frac{1}{2}\sin^2 x + \frac{1}{6}\sin^3 x + o(\sin^4 x)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$$

$$\sin^2 x = x^2 + o(x^4)$$

$$\sin^3 x = x^3 + o(x^4)$$

$$o(\sin^4 x) = o(x^4)$$

$$e^{\sin x} = 1 + x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^4) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^4)$$

$$e^{\tan x} = 1 + \tan x + \frac{1}{2}\tan^2 x + \frac{1}{6}\tan^3 x + o(\tan^4 x)$$

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^4)$$

$$\tan^2 x = x^2 + o(x^4)$$

$$\tan^3 x = x^3 + o(x^4)$$

$$o(\tan^4 x) = o(x^4)$$

$$e^{\tan x} = 1 + x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^4) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} + o(x^4)$$

$$\sin x - \tan x = x - \frac{x^3}{6} - x - \frac{x^3}{3} + o(x^4) = -\frac{x^3}{2} + o(x^4)$$

$$e^{\sin x} - e^{\tan x} = -\frac{x^3}{2} + o(x^4)$$

$$\frac{e^{\sin x} - e^{\tan x}}{\sin x - \tan x} = \frac{-\frac{x^3}{2} + o\left(x^4\right)}{-\frac{x^3}{2} + o\left(x^4\right)}$$

Pour x différent de 0, on peut simplifier par $-\frac{x^3}{2}$: $\frac{e^{\sin x} - e^{\tan x}}{\sin x - \tan x} = \frac{1 + o(x)}{1 + o(x)} = 1 + o(x)$.

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{e^{\sin x} - e^{\tan x}}{\sin x - \tan x} = 1.$$

Chapitre 9. Développements limités.

Enoncés.

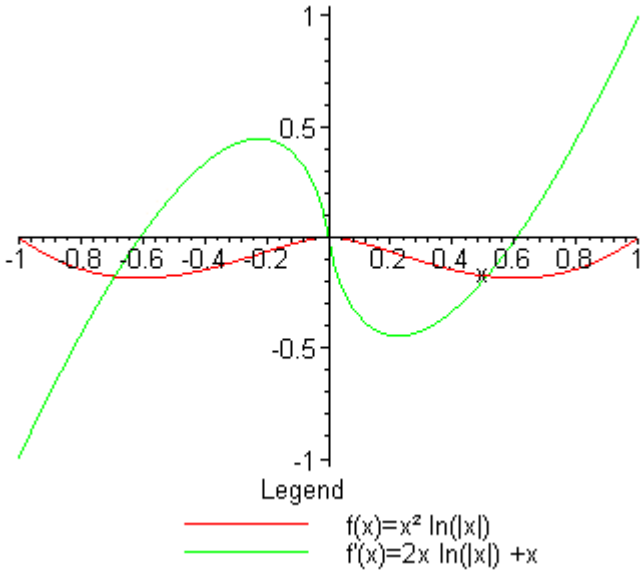
Exercice 6. Fonction $x^2 \ln x$.

1°/ Montrer que l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par : $f(x) = \begin{cases} x^2 \ln x & \text{pour } x \neq 0 \\ 0 & \text{pour } x = 0 \end{cases}$ est dérivable en 0 et possède un développement limité à l'ordre 2 relatif à 0, que l'on déterminera. 2°/ Montrer que f n'est pas deux fois dérivable en 0 et ne possède pas de développement limité à l'ordre 3, relatif à 0.	

Solution.

1°/ Dérivabilité en 0.

Lorsque $|x|$ tend vers 0 (par valeurs positives, obligatoirement), la puissance l'emporte sur le logarithme (Chapitre 2, Exercice 3) et $x^2 \ln |x|$ tend vers $0 = f(0)$.
L'application f est donc continue en 0.
La dérivée, si elle existe, de f en 0, est la limite du rapport $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = x \ln |x|$.
Or $x \ln |x|$ tend vers 0 lorsque x tend vers 0, donc l'application f possède une dérivée en 0 : cette dérivée est 0.



f est dérivable en 0 : sa dérivée en 0 est 0.

La dérivée première de f est :

$$f'(x) = \begin{cases} x\left(2 \ln |x| + 1\right) & \text{pour } x \neq 0 \\ 0 & \text{pour } x = 0 \end{cases}$$

Pour x différent de 0, cette fonction est dérivable en x.
On peut donc appliquer le théorème de Taylor-Lagrange entre 0 et x : il existe un c, $0 < c < x$, tel que :

$$f(x) = f(0) + f'(0)\, x + \frac{x^2}{2} f''(c)$$

$$f(0) = f'(0) = 0$$

f possède donc un développement limité à l'ordre 2 en 0 : $f(0) + f'(0)\,x$.

Le développement limité à l'ordre 2 de f en 0 est 0.

2°/ Dérivée seconde et développement limité à l'ordre 3.

La dérivée seconde en 0, si elle existe, est la limite en 0 du rapport $\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0} = 2\,ln\,|x| + 1$.
Mais $2\,ln\,|x| + 1$ n'est pas borné au voisinage de 0 et n'a donc pas de limite dans $\mathbb{R}$ en 0.

f n'a pas de dérivée seconde en 0.

Si f avait un développement limité d'ordre 3 en 0, ce développement s'écrirait :

$$f(x) = a\,x^2 + o(x^3),\ a \in \mathbb{R}.$$

de sorte que $\frac{f(x)}{x^2} = ln\,|x|$ aurait une limite finie a, ce qui contredit le fait que $ln\,|x|$ n'est pas borné au voisinage de 0.

f n'a pas de développement limité à l'ordre 3.

Chapitre 9. Développements limités.

Enoncés.

Exercice 7. Fonction $x^3 \sin(1/x)$.

1°/ Montrer que l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par : $f(x) = \begin{cases} x^3 \sin\frac{1}{x} & \text{pour } x \neq 0 \\ 0 & \text{pour } x = 0 \end{cases}$ est dérivable en 0 et possède un développement limité à l'ordre 2 relatif à 0, que l'on déterminera. 2°/ Montrer que f n'est pas deux fois dérivable en 0 et possède cependant un développement limité à l'ordre 3, relatif à 0, que l'on déterminera.	

Solution.

1°/ Dérivabilité en 0.

Lorsque x tend vers 0, $\sin\frac{1}{x}$ est borné par 1, et $x^3 \sin\frac{1}{x}$ tend vers $0 = f(0)$.

L'application f est donc continue en 0.

La dérivée, si elle existe, de f en 0, est la limite du rapport $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = x^2 \sin\frac{1}{x}$.

Or $x^2 \sin\frac{1}{x}$ tend vers 0 lorsque x tend vers 0, donc l'application f possède une dérivée en 0 : cette dérivée est 0.

f est dérivable en 0 : sa dérivée en 0 est 0.

Hors du point $x = 0$, la fonction numérique $f(x) = x^3 \sin\frac{1}{x}$, composée de fonctions de classe C^∞, est de classe C^∞. Elle possède donc, dans tout intervalle ouvert] 0, x [, une dérivée seconde en tout point.

f possède donc un développement limité à l'ordre 2 en 0 : il existe, entre 0 et x, un c vérifiant :

$$f(x) = f(0) + f'(0)\,x + f''(c)\,\frac{x^2}{2}$$

$$f(0) = f'(0) = 0$$

Le développement limité à l'ordre 2 de f en 0 est $f(x) = 0 + o(x^2)$.

2°/ Dérivée seconde en 0.

La dérivée première de f est :

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 \sin\frac{1}{x} - x\cos\frac{1}{x} & \text{pour } x \neq 0 \\ 0 & \text{pour } x = 0 \end{cases}$$

La dérivée seconde en 0, si elle existe, est la limite en 0, si elle existe, du rapport $\frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = 3x \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$, lorsque x tend vers 0.
Lorsque x tend vers 0, $3x \sin\frac{1}{x}$ tend vers 0, mais $\cos\frac{1}{x}$ n'a pas de limite, donc $\frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0}$ n'a pas de limite.

f ne possède pas de dérivée seconde en 0.

L'application f est paire.
Comme on a, pour $x > 0$,

$$f'(x) = 3x^2 \sin\frac{1}{x} - x\cos\frac{1}{x}$$

et que cette fonction est dérivable pour x différent de 0, la fonction f est de classe C^1 sur le segment $(0, x)$ et dérivable entre 0 et x : d'après le **théorème de Taylor-Lagrange**, il existe un c, strictement compris entre 0 et x, tel que :

$$f(x) = f(0) + f'(0)\,x + f''(c)\,\frac{x^2}{2} = \frac{x^2}{2}\left(6c\sin\frac{1}{c} + \frac{1}{c}\sin\frac{1}{c} - 4\cos\frac{1}{c}\right)$$

Cette expression constitue le développement limité de f **à l'ordre 2**, avec le reste de Taylor-Lagrange à l'ordre 2.

$|f(x)|$ est majoré par $|x^3|$, donc $\left|\frac{f(x)}{x^2}\right|$ est majoré par $|x|$, qui tend vers 0 lorsque x tend vers 0.
On peut donc écrire :

$$f(x) = o(x^3)$$

ce qui constitue un développement limité de $f(x)$ à l'ordre 3, bien qu'il n'existe pas de dérivée seconde en 0.

f possède un développement limité à l'ordre 3 : $f(x) = 0 + o(x^3)$.

Chapitre 9. Développements limités.

Enoncés.

Exercice 8. Graphe de ($ln\,|\,x-2\,|$) / $ln\,|\,x\,|$.

Soit $X = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -1, x \neq 1, x \neq 2\}$, et $f : X \to \mathbb{R}$ l'application définie par : $f(x) = \frac{ln\,\lvert x-2\rvert}{ln\,\lvert x\rvert}$. Etudier les propriétés de f et tracer son graphe.	Continuité et dérivabilité. Dérivée. Variations. Graphe.

Solution.

1°/ Continuité et dérivabilité.

Les points singuliers sont ceux qui annulent
— l'argument du logarithme du numérateur : $x = 2$,
— l'argument du logarithme du dénominateur : $x = 0$,
— la valeur du logarithme du dénominateur : $x = -1$, $x = 1$.

En dehors de ces points, la fonction numérique est de classe C^∞, puisqu'elle est composée d'applications de classe C^∞ :
soit X l'ensemble $\mathbb{R} - \{-1, 0, 1, 2\}$.

$x \mapsto x - 2$ est de classe C^∞.
$x \mapsto |\,x\,|$ est de classe C^∞ pour $x \neq 0$.
$x \mapsto |\,x-2\,|$ est de classe C^∞ pour $x \neq 2$.
$x \mapsto ln\,x$ est de classe C^∞ pour $x > 0$.
$x \mapsto ln\,|\,x-2\,|$ est de classe C^∞ pour $x \neq 2$.
$x \mapsto ln\,|\,x\,|$ est de classe C^∞ pour $x \neq 0$.
$x \mapsto \frac{1}{x}$ est de classe C^∞ pour $x \neq 0$.
$x \mapsto \frac{1}{ln\,\lvert x\rvert}$ est de classe C^∞ pour $x \neq 0$ et $|\,x\,| \neq 1$.
$x \mapsto \frac{ln\,\lvert x-2\rvert}{ln\,\lvert x\rvert}$ est dérivable pour $x \neq 0$, $|\,x\,| \neq 1$, $x \neq 2$.

L'application f est de classe C^∞ sur X.

2°/ Dérivée.

Pour dresser le tableau de variations de f, il faut calculer la dérivée f'.

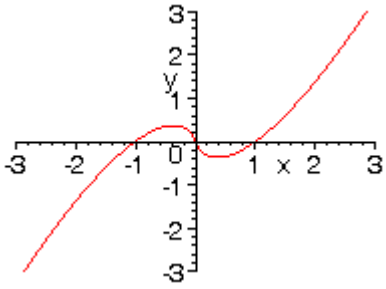
$f(x) = \frac{ln\,\lvert x-2\rvert}{ln\,\lvert x\rvert}$

$$f'(x) = \frac{1}{(x-2)\ln|x|} - \frac{\ln|x-2|}{x(\ln|x|)^2}$$

$$= \frac{1}{x(x-2)(\ln|x|)^2}(x \ln|x| - (x-2)\ln|x-2|)$$

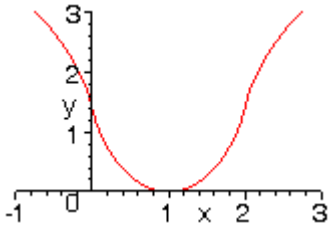
$$f''(x) = -\frac{1}{(x-2)^2\ln|x|} - \frac{2}{x(x-2)(\ln|x|)^2} + \frac{\ln|x-2|}{x^2(\ln|x|)^2} + 2\frac{\ln|x-2|}{x^2(\ln|x|)^3}$$

Pour étudier la dérivée, il faut étudier $x \ln|x|$ et $x \ln|x| - (x-2)\ln|x-2|$.

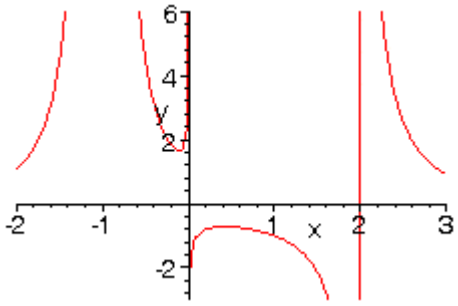


La fonction $x \ln|x|$ est impaire. Il suffit de l'étudier dans l'intervalle $[0, +\infty[$.
Cette étude a été fait antérieurement : la fonction est négative entre 0 et 1, positive pour $x > 1$.
Sa dérivée est $\ln|x| + 1$.

Dans $x \ln|x| - (x-2)\ln|x-2|$, changeons x en $2-x$: la fonction est inchangée.
Elle est symétrique par rapport à $x = 1$.
Or la fonction $x \ln|x|$ est strictement croissante de 1 à $+\infty$:
Donc $x > x-2 \Rightarrow x \ln|x| > (x-2)\ln|x-2|$.
Par symétrie autour de 1, la fonction $x \ln|x| - (x-2)\ln|x-2|$ est partout positive.
Elle est nulle pour $x = 1$, strictement positive ailleurs.



x	$-\infty$		-1		0		1		2		$+\infty$
$x(x-2)$		$+$		$+$	0	$-$	-1	$-$	0	$+$	
$x\ln\|x\| - (x-2)\ln\|x-2\|$		$+$		$+$		$+$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$	0	$+$	$+\infty$	$+$	$+\infty \parallel -\infty$	$-$		$-$	$-\infty \parallel +\infty$	$+$	0



La dérivée possède deux extrema locaux : un minimum entre – 1 et 0, un maximum entre 0 et 1.

Limites de la dérivée.

a) Limite pour $x = 1$.

Lorsque x tend vers 1, posons $x = 1 + \varepsilon$.

$$f'(x) = \frac{1}{x(x-2)\left(ln|x|\right)^2}(x\ ln|x| - (x-2)\ ln|x-2|) = -\frac{1}{(1-\varepsilon^2)\left(ln(1+\varepsilon)\right)^2}((1+\varepsilon)\ ln(1+\varepsilon) - (1-\varepsilon)\ ln(1-\varepsilon))$$

$$f'(x) \sim -\frac{1}{(1-\varepsilon^2)\varepsilon^2}((1+\varepsilon)(\varepsilon - \frac{\varepsilon^2}{2}) - (1-\varepsilon)(\varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{2})) \sim -\frac{1}{1-\varepsilon^2} \to -1.$$

Lorsque x tend vers 1, $f'(x)$ tend vers – 1.

b) Limite pour $x = -1$.

Lorsque x tend vers – 1, posons $x = -1 + \varepsilon$.

$$f'(x) = \frac{1}{x(x-2)\left(ln|x|\right)^2}(x\ ln|x| - (x-2)\ ln|x-2|) = -\frac{1}{(1-\varepsilon)(3-\varepsilon)\left(ln(1-\varepsilon)\right)^2}(-(1-\varepsilon)\ ln(1-\varepsilon) + (3-\varepsilon)\ ln(3-\varepsilon))$$

$$f'(x) \sim \frac{1}{3\varepsilon^2}((1-\varepsilon)(\varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{2}) + (3-\varepsilon)\ ln\ 3 + (3-\varepsilon)\ ln(1-\frac{\varepsilon}{3})) \sim \frac{1}{3\varepsilon^2} 3\ ln\ 3 \to +\infty.$$

Lorsque x tend vers – 1, $f'(x)$ tend vers $+\infty$.

c) Limite pour $x = 0$.

Lorsque x tend vers 0, posons $x = \varepsilon$.

$$f'(x) = \frac{1}{x(x-2)\left(ln|x|\right)^2}(x\ ln|x| - (x-2)\ ln|x-2|)$$

$$= -\frac{1}{\varepsilon(2-\varepsilon)\left(ln|\varepsilon|\right)^2}(\varepsilon\ ln|\varepsilon| + (2-\varepsilon)\ ln(2-\varepsilon))$$

$$f'(x) \sim \frac{ln\ 2}{\varepsilon\left(ln|\varepsilon|\right)^2}$$

D'après la règle "**la puissance l'emporte sur le logarithme**", $\varepsilon\ (ln|\varepsilon|)^2$ tend vers 0, avec le signe de ε.

En effet, la fonction $x\ (ln|x|)^2$ est impaire.

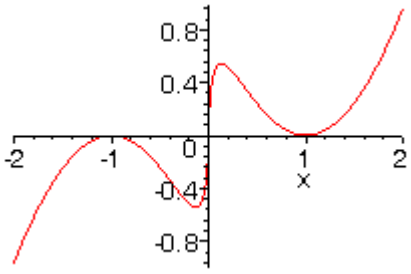
Sa dérivée est $(ln|x|)^2 + 2\ ln|x| = (ln|x|)^2\left(1 + \frac{2}{ln|\varepsilon|}\right)$.

La dérivée est positive et tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers 0.

Les valeurs de $x\ (ln|x|)^2$ sont négatives et croissantes lorsque x est négatif et tend vers 0, positives et décroissantes lorsque x est positif et tend vers 0.

Comme la dérivée est strictement positive au voisinage de 0, $x\ (ln|x|)^2$ est monotone et a donc une limite à gauche et une limite à droite en 0.

$x^2\ (ln|x^2|)^2$ possède la même limite à droite lorsque x^2 tend vers 0.



La relation $x^2 (ln | x^2 |)^2 = 4 x \times x (ln | x |)^2$ montre que cette limite à droite ne peut être que 0.
Comme la fonction $x (ln | x |)^2$ est impaire, la limite à gauche est nulle aussi.

Il en résulte que $f'(x) \sim \frac{ln\,2}{\varepsilon\left(ln|\varepsilon|\right)^2}$ tend vers l'infini avec le signe de ε.

Lorsque x tend vers 0, $f'(x)$ tend vers l'infini avec le signe de x.

d) Limite pour $x = 2$.

Lorsque x tend vers 2, posons $x = 2 + \varepsilon$.

$$f'(x) = \frac{1}{x(x-2)\left(ln|x|\right)^2}(x\,ln\,|x| - (x-2)\,ln\,|x-2|) = \frac{1}{(2+\varepsilon)\varepsilon\left(ln\,2 + ln\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)\right)}((2+\varepsilon)\,ln\,(2+\varepsilon) - \varepsilon$$

$ln\,|\varepsilon|) \sim \frac{1}{\varepsilon}$

Il en résulte que lorsque ε tend vers 0, $f'(x)$ tend vers l'infini avec le signe de ε.
Lorsque x tend vers 2, $f'(x)$ tend vers l'infini avec le signe de $x - 2$.

3°/ Variations de *f*.

a) Limites aux bornes.

Lorsque x tend vers moins l'infini :

$| x-2 | = -x + 2 = -x\left(1+\frac{2}{-x}\right)$, $ln\,|x-2| = ln\,(-x) + ln\left(1+\frac{2}{-x}\right) \sim ln\,(-x)$
$| x | = -x$, $ln\,|x| = ln\,(-x)$
$f(x) = \frac{ln|x-2|}{ln|x|} \sim 1$

Lorsque x tend vers moins l'infini, $f(x)$ tend vers 1.

Lorsque x tend vers – 1, on pose $x = -1 + \varepsilon$.

$| x-2 | = 3 - \varepsilon$, $ln\,|x-2| = ln\,3 + ln\left(1-\frac{\varepsilon}{3}\right) \sim ln\,3 - \frac{\varepsilon}{3}$
$| x | = 1 - \varepsilon$, $ln\,|x| = ln\,(1-\varepsilon) \sim -\varepsilon$.
$f(x) = \frac{ln|x-2|}{ln|x|} \sim -\frac{ln\,3}{\varepsilon}$

Lorsque ε tend vers 0, $f(x)$ tend vers l'infini avec le signe de $-\varepsilon$.
Lorsque x tend vers – 1, $f(x)$ tend vers l'infini avec le signe de $x + 1$.

Lorsque x tend vers 0, on pose $x = \varepsilon$.

$| x-2 | = 2 - \varepsilon$, $ln\,|x-2| = ln\,2 + ln\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right) \sim ln\,2 - \frac{\varepsilon}{2} \to ln\,2$.

$| x | = | \varepsilon |$, $ln | x | = ln | \varepsilon | \to - \infty$.
$f(x) = \frac{ln|x-2|}{ln|x|} \sim \frac{ln 2}{ln|\varepsilon|} \to 0$ par valeurs négatives.

Lorsque x tend vers 0, $f(x)$ tend vers 0.
Il est donc possible de **prolonger f par continuité en 0** en posant $f(0) = 0$.
Mais la dérivée à gauche de 0 tend vers $+ \infty$ et la dérivée à droite de 0 tend vers $- \infty$.
f ainsi prolongée par continuité n'est **pas dérivable en 0**.
Le point (0, 0) est un point de **rebroussement** à tangente verticale.

Lorsque x tend vers 1, on pose $x = 1 + \varepsilon$.

$| x - 2 | = 1 - \varepsilon$, $ln | x - 2 | = ln (1 - \varepsilon) \sim - \varepsilon$.
$| x | = 1 + \varepsilon$, $ln | x | = ln (1 + \varepsilon) \sim \varepsilon$.
$f(x) = \frac{ln|x-2|}{ln|x|} \sim - 1 \to - 1$.

Lorsque x tend vers 1, $f(x)$ tend vers $- 1$.
On peut donc **prolonger f par continuité en 1** en posant $f(1) = - 1$.
Dans ce cas, comme la dérivée a une limite à droite qui vaut $- 1$ et une limite à gauche qui vaut $- 1$, la fonction f prolongée par continuité est **dérivable en 1** et sa dérivée en 1 vaut $- 1$.

Lorsque x tend vers 2, on pose $x = 2 + \varepsilon$.

$| x - 2 | = | \varepsilon |$, $ln | x - 2 | = ln | \varepsilon | \to - \infty$.
$| x | = | 2 + \varepsilon |$, $ln | x | = ln 2 + ln \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right) \sim ln 2 + \frac{\varepsilon}{2} \to ln 2$
$f(x) = \frac{ln|x-2|}{ln|x|} \to - \infty$.

Lorsque x tend vers 2, $f(x)$ tend vers $- \infty$.

Lorsque x tend vers plus l'infini :

$| x - 2 | = x - 2 = x \left(1 - \frac{2}{x}\right)$, $ln | x - 2 | = ln x + ln \left(1 - \frac{2}{x}\right) \sim ln x$
$| x | = x$, $ln | x | = ln x$
$f(x) = \frac{ln|x-2|}{ln|x|} \sim 1$

Lorsque x tend vers moins l'infini, $f(x)$ tend vers 1.

b) Tableau de variations.

L'étude de la dérivée et des limites de f, permet de construire le tableau de variations de f.

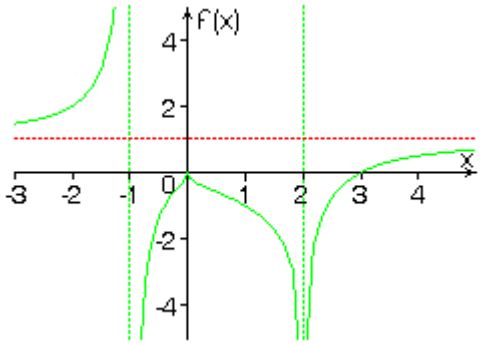
x	$- \infty$		$- 1$		0		1		2		$+ \infty$
$f'(x)$	0	$+$	$+ \infty$	$+$	$+ \infty \,\|\|\, - \infty$	$-$		$-$	$- \infty \,\|\|\, + \infty$	$+$	0

$f(x)$	1	↗	$+\infty \,\|\|\, -\infty$	↗	0	↘	-1	↘	$-\infty$	↗	1

Ce tableau montre que f s'annule pour une valeur supérieure à 2 : $f(3) = 0$.

4°/ Graphe.

Le tableau de variations établi permet de tracer le graphe de f.



Il y a **deux asymptotes verticales**, pour $x = -1$ et pour $x = 2$, et **une asymptote horizontale**, pour $y = 1$.
f peut être prolongée par continuité en $x = 0$ et en $x = 1$.
Le point (0, 0) est un **point de rebroussement à tangente verticale**.
Au point (1, – 1), la courbe représentant le graphe possède une tangente de pente –1.
$f(x) = 0$ pour $x = 3$.
Les deux points d'inflexion correspondent aux extrema locaux de la dérivée : ce sont les points où la dérivée seconde est nulle.

Chapitre 9. Développements limités.

Enoncés.

Exercice 9. Développement limité d'une fonction de sinus et cosinus.

Soit f la fonction réelle définie par $f(x) = 9 \sin x - 11 x \cos x + 2 x \cos(2x)$. 1°/ Donner les développements limités en 0, à l'ordre 6, des fonctions $\sin x$, $\cos x$ et $\cos(2x)$. 2°/ En déduire la limite, lorsque x tend vers 0 ($x \neq 0$), de l'expression $\frac{f(2x)}{f(x)}$.	

Solution.

1°/ Développements limités.

On connaît déjà les développements limités de $\sin x$ et de $\cos x$, à l'ordre 6 :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^6)$$
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^6)$$

En changeant x en $2x$ dans le développement limité de $\cos x$, on obtient le développement limité de $\cos(2x)$:

$$\cos(2x) = 1 - 2x^2 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^6).$$

2°/ Limite du rapport.

D'après la première question, le développement limité à l'ordre 6 de f en 0 est :

$$\begin{aligned} f(x) &= 9 \sin x - 11 x \cos x + 2 x \cos(2x) \\ &= 9\left(x - + \frac{x^5}{5!} + o(x^6)\right) - 11x\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^6)\right) + 2x\left(1 - 2x^2 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^6)\right) \\ &= \left(9 - 11 + 2\right)x + \left(-\frac{9}{6} + \frac{11}{2} - 4\right)x^3 + \left(\frac{9}{120} - \frac{11}{24} + \frac{4}{3}\right)x^5 + o(x^6) \\ &= \frac{9 - 55 + 160}{120}x^5 + o(x^6) = \frac{114}{120}x^5 + o(x^6) = \frac{19}{20}x^5 + o(x^6) \end{aligned}$$

$$\frac{f(x)}{x^5} = \frac{19}{20} + o(x)$$

Changeons x en $2x$:

$$f(2x) = \frac{19}{20} \times 2^5 \times x^5 + o(x^6)$$

$$\frac{f(2x)}{x^5} = \frac{19}{20} \times 32 + o(x)$$

de sorte que le rapport $\frac{f(2x)}{f(x)} = \frac{f(2x)}{x^5} \times \frac{x^5}{f(x)}$ tend vers 32 lorsque x tend vers 0 en étant différent de 0.

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \frac{f(2x)}{f(x)} = 2^5 = 32$$

Chapitre 9. Développements limités.

Enoncés.

Exercice 10. Développement limité avec fonction en 1 / x^2.

Ecrire le développement limité à l'ordre 3, en 0, de $\frac{\cos x}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}$ et en déduire la limite en 0.	

Solution.

1°/ Développement limité.

On connaît déjà le développement limité de *cos x*, à l'ordre 7 :

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + o(x^7)$$
$$= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + o(x^7)$$
$$\cos 2x = 1 - 2x^2 + \frac{2}{3}x^4 - \frac{4}{45}x^6 + o(x^7)$$
$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) = x^2 - \frac{x^4}{3} + \frac{2}{45}x^6 + o(x^7)$$

$$\frac{\cos x}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 \cos x - \sin^2 x}{x^2 \sin^2 x} = \frac{x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{24} + o(x^7) - x^2 + \frac{x^4}{3} - \frac{2}{45}x^6 + o(x^7)}{x^4 - \frac{x^6}{3} + o(x^7)}$$
$$= \frac{-\frac{x^4}{6} - \frac{x^6}{360} + o(x^7)}{x^4 - \frac{x^6}{3} + o(x^7)} = \frac{-\frac{1}{6} - \frac{x^2}{360} + o(x^3)}{1 - \frac{x^2}{3} + o(x^3)}$$

Or on a :

$$\frac{1}{1 - \frac{x^2}{3} + o(x^3)} = 1 + \frac{x^2}{3} + o(x^3)$$

Il vient donc :

$$\frac{\cos x}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} = \left(-\frac{1}{6} - \frac{x^2}{360} + o(x^3)\right) \times \left(1 + \frac{x^2}{3} + o(x^3)\right)$$

$$= -\frac{1}{6} - \left(\frac{1}{18} + \frac{1}{360} \right) x^2 + o\left(x^3\right)$$

$$\boxed{\frac{\cos x}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} = -\frac{1}{6} - \frac{7}{120} x^2 + o\left(x^3\right)}$$

2°/ Limite.

Lorsque x tend vers 0 en restant différent de 0, l'expression précédente montre que la limite de $\frac{\cos x}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}$ est $-\frac{1}{6}$.

$$\boxed{\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \left(\frac{\cos x}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} \right) = -\frac{1}{6}}$$

Chapitre 9. Développements limités.

Enoncés.

Exercice 11. Calcul approché de racine carrée de 26.

1°/ Ecrire la formule de Taylor-Lagrange pour la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ sur l'intervalle [25, 26]. 2°/ En déduire : 5,099 < $\sqrt{26}$ < 5,100.	

Solution.

1°/ Formule de Taylor-Lagrange.

Le **théorème de Taylor-Lagrange** s'énonce :

Si f est une fonction réelle de classe C^n sur le segment [a, b], $a \neq b$, et $n + 1$ fois dérivable sur le segment] a, b [, il existe un $c \in]\, a, b\, [$ tel que :

$$f(b) = f(a) + f'(a)\frac{(b-a)}{1!} + f''(a)\frac{(b-a)^2}{2!} + \ldots + f^{(n)}(a)\frac{(b-a)^n}{n!} + f^{(n+1)}(c)\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est de classe C^n sur le segment [25, 26], et $n + 1$ fois dérivable sur le segment] 25, 26 [, pour tout entier naturel n. Donc, **pour tout entier naturel *n***, il existe un réel c vérifiant :

$$f(26) = f(25) + f'(25) + \frac{1}{2}f''(25) + \ldots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(25) + \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c), \text{ avec } 25 < c < 26.$$

$f(25) + f'(25) + \frac{1}{2}f''(25) + \ldots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(25)$ est le **développement limité d'ordre *n* + 1**,

$\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)$ est le **reste de Lagrange d'ordre *n* + 1**.

2°/ Valeur approchée de $\sqrt{26}$.

La dérivée d'ordre 0 est $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$: $f(25) = 5$.

La dérivée d'ordre 1 est $f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$: $f'(25) = \frac{1}{10}$

La dérivée d'ordre 2 est $f''(x) = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}$: c'est une **fonction négative croissante** et

$\frac{1}{2}f''(25) = -\frac{1}{1\,000}$.

Le **développement limité d'ordre 2**, avec reste de Lagrange d'ordre 2, donne :

$$f(26) = f(25) + f'(25) + \frac{1}{2} f''(c), \text{ avec } 25 < c < 26.$$

$$25 < c < 26 \text{ et } f'' \text{ croissante} \Rightarrow f''(25) < f''(c) < f''(26).$$

$$\frac{1}{2} f''(25) < \frac{1}{2} f''(c) < \frac{1}{2} f''(26) < 0$$
$$-\frac{1}{1\,000} < f(26) - f(25) - f'(25) < 0$$
$$-\frac{1}{1\,000} < \sqrt{26} - 5 - 0{,}1 < 0$$
$$5{,}1 - \frac{1}{1\,000} < \sqrt{26} < 5{,}1$$

$$\boxed{5{,}099 < \sqrt{26} < 5{,}100}$$

Chapitre 9. Développements limités.

Enoncés.

Exercice 12. Calcul approché de racine carrée de *e*.

1°/ Montrer que $\frac{1}{2} < ln\ 2$. 2°/ Ecrire la formule de Taylor-Lagrange pour la fonction exponentielle sur l'intervalle $\left[0,\ \frac{1}{2}\right]$, avec un reste à l'ordre 4. 3°/ En déduire : $\frac{79}{48} < \sqrt{e} < \frac{79}{48} + \frac{1}{192}$.	

Solution.

1°/ Minoration de *ln* 2.

La relation de définition $ln\ x = \int_1^x \frac{d\ x}{x}$ donne $ln\ 2 = \int_1^2 \frac{d\ x}{x}$.

Comme la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est strictement décroissante pour $x > 0$, on a, entre 1 et 2 :

$$1 < x < 2 \Rightarrow \frac{1}{2} < \frac{1}{x} < 1.$$

L'application $f \mapsto \int_1^2 f(x)\ dx$ est une application **strictement croissante** (*) de l'ensemble des fonctions **continues** intégrables sur l'intervalle [1, 2] dans $\mathbb{R}$.

La relation $\frac{1}{2} < \frac{1}{x} < 1$ implique alors la relation $\int_1^2 \frac{1}{2}\ dx < \int_1^2 \frac{d\ x}{x} < \int_1^2 dx$, soit $\frac{1}{2} < ln\ 2 < 1$.

$$\boxed{\frac{1}{2} < ln\ 2 < 1.}$$

(*) En effet, si, pour tout $x \in [\ 1, 2\ ]$, on a $f(x) < g(x)$, la fonction $g - f$ est strictement positive sur [1, 2].
Si f et g sont continues sur [1, 2], $g - f$ est continue sur [1, 2].
Etant donné un x quelconque de l'intervalle] 1, 2 [, il existe un $\delta > 0$ tel que $0 < \delta < g(x) - f(x)$.
Comme $g - f$ est continue, il existe $\eta > 0$ tel que $| y - x | < \eta \Rightarrow | (g(y) - f(y)) - (g(x) - f(x)) | < g(x) - f(x) - \delta$.
(On peut prendre $\eta > 0$ suffisamment petit pour que tous les y vérifiant $| y - x | < \eta$ soient dans l'intervalle] 1, 2 [ ).
Pour $| y - x | < \eta$, on a alors :

$$- g(x) + f(x) + \delta < (g(y) - f(y)) - (g(x) - f(x)) < g(x) - f(x) - \delta.$$

$\delta < g(y) - f(y) < 2(g(x) - f(x)) - \delta$

Et comme l'intégrale d'une fonction positive est un nombre positif :
$\int_{x-\eta}^{x+\eta} \delta \, dy \leqslant \int_{x-\eta}^{x+\eta} (g(y) - f(y)) \, dy \leqslant \int_{x-\eta}^{x+\eta} (2(g(x) - f(x)) - \delta) \, dy$
D'où il résulte :
$0 < 2\delta\eta \leqslant \int_{x-\eta}^{x+\eta} (g(y) - f(y)) \, dy.$

Il vient alors : $\int_1^2 (g(y) - f(y)) \, dy = \int_1^{x-\eta} (g(y) - f(y)) \, dy + \int_{x-\eta}^{x+\eta} (g(y) - f(y)) \, dy + \int_{x+\eta}^2 (g(y) - f(y)) \, dy$,
avec $\int_1^{x-\eta} (g(y) - f(y)) \, dy \geqslant 0$, $\int_{x-\eta}^{x+\eta} (g(y) - f(y)) \, dy > 0$, $\int_{x+\eta}^2 (g(y) - f(y)) \, dy \geqslant 0$.
Finalement : $\int_1^2 (g(y) - f(y)) \, dy > 0$.

Ainsi, lorsque f et g sont continues sur $[1, 2]$, $f < g \Rightarrow \int_1^2 f(y) \, dy < \int_1^2 g(y) \, dy$.

On remarquera qu'en fait, il suffit de connaître seulement un $x \in]1, 2[$ tel que $f(x) < g(x)$, pour que l'inégalité stricte $\int_1^2 f(y) \, dy < \int_1^2 g(y) \, dy$ reste valable.

2°/ Formule de Taylor-Lagrange.

Le **théorème de Taylor-Lagrange** s'énonce :

Si f est une fonction réelle de classe C^n sur l'intervalle $[a, b]$, $a \neq b$, et $n + 1$ fois dérivable sur l'intervalle $]a, b[$, il existe un $c \in]a, b[$ tel que :

$$f(b) = f(a) + f'(a)\frac{(b-a)}{1!} + f''(a)\frac{(b-a)^2}{2!} + \ldots + f^{(n)}(a)\frac{(b-a)^n}{n!} + f^{(n+1)}(c)\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

$f(a) + f'(a)\frac{(b-a)}{1!} + f''(a)\frac{(b-a)^2}{2!} + \cdots + f^{(n)}(a)\frac{(b-a)^n}{n!}$ est le **développement limité** de f à l'ordre $n + 1$, au voisinage de a.
$f^{(n+1)}(c)\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$ est le **reste de Lagrange** à l'ordre $n + 1$.

La fonction exponentielle $x \mapsto e^x$ est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$, elle est donc de classe C^n sur l'intervalle $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ et elle est $n + 1$ fois dérivable sur l'intervalle $\left]0, \frac{1}{2}\right[$, pour tout entier naturel n.

La dérivée d'ordre n de e^x est e^x.

La **formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 4** dans l'intervalle $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ s'écrit donc, avec $e^0 = 1$:

$$\boxed{\sqrt{e} = e^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{48} + \frac{1}{384} e^c, \text{ avec } 0 < c < \frac{1}{2}.}$$

3°/ Valeur approchée de $\sqrt{e}$.

Comme la fonction exponentielle est une fonction strictement croissante (sa dérivée est strictement positive), la relation
$0 < c < \frac{1}{2}$ implique la relation $1 = e^0 < e^c < e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$.

D'après le résultat de la première question, nous avons $\frac{1}{2} < \ln 2$, donc $e^{\frac{1}{2}} < e^{\ln 2} = 2$.

Finalement, e^c est compris strictement entre 1 et 2 : $1 < e^c < 2$.

La relation :

$$\sqrt{e} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{48} + \frac{1}{384}e^c,$$

donne alors :

$$\frac{1}{384} < \sqrt{e} - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{8} - \frac{1}{48} < \frac{1}{192}$$
$$\frac{1}{384} < \sqrt{e} - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{8} - \frac{1}{48} < \frac{1}{192}$$
$$\frac{1}{384} < \sqrt{e} - \frac{79}{48} < \frac{1}{192}$$
$$\frac{79}{48} + \frac{1}{384} < \sqrt{e} < \frac{79}{48} + \frac{1}{192}$$

$$\boxed{\frac{79}{48} + \frac{1}{384} < \sqrt{e} < \frac{79}{48} + \frac{1}{192}}$$

A fortiori :

$$\frac{79}{48} < \sqrt{e} < \frac{79}{48} + \frac{1}{192}.$$

Chapitre 9. Développements limités.

Enoncés.

Exercice 13. Majoration de la dérivée d'une fonction deux fois dérivable.

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. On suppose que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $\lvert f(x) \rvert \leqslant 1$ et $\lvert f''(x) \rvert \leqslant 1$. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lvert f'(x) \rvert \leqslant 2$.	

Solution.

Si f est deux fois dérivable, elle est de classe C^1 et possède une dérivée seconde.
On peut donc lui appliquer la **formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 2**. Il existe un réel c tel que :
$f(y) = f(x) + f'(x)(y-x) + \frac{1}{2}(y-x)^2 f''(c)$, avec c strictement compris entre x et y.

Par définition, $f'(x)$ est la limite, lorsque y tend vers x, du rapport $\frac{f(y)-f(x)}{y-x}$.

Par hypothèse, $f''(c)$ est compris entre –1 et 1.
Quels que soient x et y dans $\mathbb{R}$, $x < y$, on a donc:

$$-\frac{1}{2}(y-x)^2 < f(y) - f(x) - f'(x)(y-x) < \frac{1}{2}(y-x)^2$$

$$\lvert f(y) - f(x) - f'(x)(y-x) \rvert < \frac{1}{2}(y-x)^2$$

$$\left\lvert \frac{f(y)-f(x)}{y-x} - f'(x) \right\rvert < \frac{1}{2}\lvert y-x \rvert$$

$$-\frac{1}{2}\lvert y-x \rvert < \frac{f(y)-f(x)}{y-x} - f'(x) < \frac{1}{2}\lvert y-x \rvert$$

$$-\frac{1}{2}\lvert y-x \rvert - \frac{f(y)-f(x)}{y-x} < f'(x) < \frac{1}{2}\lvert y-x \rvert + \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$$

$$0 < \lvert f'(x) \rvert < \frac{1}{2}\lvert y-x \rvert + \left\lvert \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \right\rvert$$

En particulier, pour $y = x + \varepsilon$, avec un ε quelconque > 0 :

$$0 < \lvert f'(x) \rvert < \frac{\varepsilon}{2} + \lvert f(x+\varepsilon) - f(x) \rvert \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \lvert f(x+\varepsilon) \rvert + \lvert f(x) \rvert \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + 2.$$

Lorsque ε tend vers 0, on obtient, par prolongement des inégalités par passage à la limite :

$$\boxed{0 < \lvert f'(x) \rvert \leqslant 2.}$$

Chapitre 9. Développements limités.

Enoncés.

Exercice 14. Série définie à partir d'une fonction deux fois dérivable.

Soit $f : [\,0, 1\,] \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continûment dérivable sur [0, 1], deux fois dérivable sur] 0, 1 [.
On suppose de plus que $f(0) = 0$ et que, pour tout $x \in]\,0, 1\,[$, on a $|f''(x)| \leqslant 1$.
On considère alors la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ de nombres réels définie par :

$$u_n = \sum_{k=1}^{k=n} f\left(\frac{k}{n^2}\right)$$

Montrer qu'elle est convergente et calculer sa limite.

Solution.

Comme $f : [\,0, 1\,] \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continûment dérivable sur [0, 1], deux fois dérivable sur] 0, 1 [, on peut lui appliquer la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 entre 0 et $\frac{k}{n^2}$, $1 \leqslant k \leqslant n$.

$$f\left(\frac{k}{n^2}\right) = f(0) + \frac{k}{n^2} f'(0) + \frac{1}{2}\left(\frac{k}{n^2}\right)^2 f''(c_k), \text{ avec un } c_k \text{ vérifiant } 0 < c_k < \frac{k}{n^2}.$$

$f(0) = 0$

$$f\left(\frac{k}{n^2}\right) = \frac{k}{n^2} f'(0) + \frac{1}{2}\left(\frac{k}{n^2}\right)^2 f''(c_k), \text{ avec un } c_k \text{ vérifiant } 0 < c_k < \frac{k}{n^2}.$$

Pour tout $x \in]\,0, 1\,[$, on a $|f''(x)| \leqslant 1$.

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{k}{n^2}\right)^2 \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{k}{n^2}\right)^2 f''(c_k) \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{k}{n^2}\right)^2$$
$$-\frac{1}{2}\left(\frac{k}{n^2}\right)^2 \leqslant f\left(\frac{k}{n^2}\right) - \frac{k}{n^2} f'(0) \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{k}{n^2}\right)^2$$

Par addition pour k variant de 1 à n, il vient :

$$-\frac{1}{2n^4}\sum_{k=1}^{k=n} k^2 \leqslant u_n - \frac{1}{n^2} f'(0) \sum_{k=1}^{k=n} k \leqslant \frac{1}{2n^4}\sum_{k=1}^{k=n} k^2$$

$$-\frac{1}{2n^4}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \leqslant u_n - \frac{1}{n^2}f'(0)\,\frac{n(n+1)}{2} \leqslant \frac{1}{2n^4}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$
$$\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)f'(0) - \frac{(n+1)(2n+1)}{12n^3} \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)f'(0) + \frac{(n+1)(2n+1)}{12n^3}$$

Lorsque *n* tend vers l'infini, $\frac{(n+1)(2n+1)}{12n^3}$, équivalent à $\frac{1}{6n}$, tend vers 0 ;

$\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)f'(0)$ tend vers $\frac{1}{2}f'(0)$.

Donc, **théorème des gendarmes**, u_n, coincé entre deux termes qui tendent vers $\frac{1}{2}f'(0)$, tend lui aussi, vers $\frac{1}{2}f'(0)$.

La suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est convergente et sa limite est $\frac{1}{2}f'(0)$.

Chapitre 9. Développements limités.

Enoncés.

Exercice 15. Série harmonique alternée.

On considère la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ de nombres réels dont le terme général u_n est défini, pour $n \geqslant 1$, par :

$$u_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n}.$$

Montrer qu'elle est convergente et calculer sa limite.

Solution.

Considérons la fonction $f : [\,0, +\infty\,[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = ln\,(1 + x)$.
C'est une fonction de classe C^∞.

Les dérivées successives sont données par $f^{(k)}(x) = (-1)^{(k-1)} \frac{(k-1)!}{(1+x)^k}$.

Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on peut lui appliquer la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre $n + 1$, entre 0 et x : il existe un c vérifiant

$$f(x) = f(0) + \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(0)\, x^k + \frac{1}{(n+1)!} x^{n+1} f^{(n+1)}(c), \text{ avec } 0 < c < x.$$

En particulier, pour $x = 1$, on obtient :

$$ln\,2 = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} + \frac{(-1)^n}{n+1} \frac{1}{(1+c)^{n+1}},\ 0 < c < 1.$$

$$ln\,2 = u_n + \frac{(-1)^n}{n+1} \frac{1}{(1+c)^{n+1}}$$

$$0 < c < 1 \Rightarrow 0 < \frac{1}{(1+c)^{n+1}} < 1$$

$$0 \leqslant |\, u_n - ln\,2\,| = \frac{1}{n+1} \frac{1}{(1+c)^{n+1}} \leqslant \frac{1}{n+1}$$

Lorsque n tend vers l'infini, $\frac{1}{n+1}$ tend vers 0, donc :

La suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est convergente et sa limite est $ln\,2$.

Chapitre 9. Développements limités.

Enoncés.

Exercice 16. Partie entière de *n* ! *e*.

Montrer que, pour n entier, $n \geqslant 2$: $$n\,!\,e - E(n\,!\,e) \leqslant \frac{e}{n+1}.$$ Conclusion ?	

Solution.

La fonction exponentielle $x \mapsto e^x$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, puisqu'elle possède des dérivées de tout ordre.
Pour tout entier naturel n, la **formule de Taylor-Young** (=Taylor-Lagrange pour $a = 0$) lui est applicable : il existe un c, $0 < c < x$, vérifiant :

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

Pour tout entier naturel n, $f^{(n)}(x) = e^x$, donc :

$$e^x = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{x^k}{k!} + e^c \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

Pour $x = 1$, il existe donc un réel c, $0 < c < 1$, vérifiant :

$$e = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{k!} + \frac{e^c}{(n+1)!}$$

Multiplions par n ! :

$$n\,!\,e = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{n!}{k!} + \frac{e^c}{n+1}$$

Pour tout k, $0 \leqslant k \leqslant n$, $\frac{n!}{k!}$ est entier, donc $\sum_{k=0}^{k=n} \frac{n!}{k!}$ est aussi un entier, et c'est un entier inférieur ou égal à n ! e.
La fonction exponentielle est strictement croissante puisque sa dérivée est strictement positive, donc $0 < c < 1$ implique $1 < e^c < e$.

Pour $n \geqslant 2$, $\frac{e^c}{n+1}$ est inférieur à $\frac{e}{n+1} \leqslant \frac{e}{3} < 1$, donc $0 < \frac{e^c}{n+1} < \frac{e}{n+1} < 1$.

$n\,!\,e$ est donc la somme de l'entier $\sum_{k=0}^{k=n} \frac{n!}{k!}$ et d'un nombre réel $\frac{e^c}{n+1}$, strictement compris entre 0 et 1.

Il en résulte que $\sum_{k=0}^{k=n} \frac{n!}{k!}$ est la partie entière de $n\,!\,e$, de sorte que l'on a :

$$E(n\,!\,e) = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{n!}{k!}$$
$$0 < n\,!\,e - E(n\,!\,e) = \frac{e^c}{n+1} < \frac{e}{n+1} < 1.$$

Conclusion.

Lorsque n augmente indéfiniment, $\frac{e}{n+1}$ devient aussi petit qu'on veut.
Donc on peut toujours choisir un n assez grand pour que $n\,!\,e$ s'écarte d'aussi peu qu'on veut d'un entier :

Quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe un entier N tel que $n > N \Rightarrow n\,!\,e - E(n\,!\,e) < \varepsilon$.

On peut dire aussi que **plus *n* est grand, plus *n* ! *e* est proche d'un entier**.

Chapitre 9. Développements limités.

Enoncés.

Exercice 17. Irrationalité de *cos* (1).

Montrer que *cos* (1) est irrationnel. En déduire que *tan* $\left(\frac{1}{2}\right)$ est aussi irrationnel.	

Solution.

1°/ Irrationalité de *cos* 1.

La fonction *cosinus* est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$. On peut donc lui appliquer la **formule de Taylor-Young** à tous les ordres.
Pour tout entier naturel n, il existe un réel c, $0 < c < x$ tel que :

$$\cos x = \sum_{k=0}^{k=n} \cos^{(k)}(0)\,\frac{x^k}{k!} + \cos^{(n+1)}(c)\,\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

Pour $x = 1$, il existe un réel c, $0 < c < 1$, tel que :

$$\cos 1 = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{\cos^{(k)}(0)}{k!} + \frac{\cos^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}$$

Multiplions par n !

$$n!\cos 1 = \sum_{k=0}^{k=n} \cos^{(k)}(0)\,\frac{n!}{k!} + \frac{\cos^{(n+1)}(c)}{n+1}$$

Pour tout entier naturel k, la dérivée d'ordre k de *cos x* est un sinus ou un cosinus, suivant la parité de k.

Donc $|\cos^{(k)}(0)|$ vaut 0 ou 1. Comme, pour $0 \leqslant k \leqslant n$, $\frac{n!}{k!}$ est un entier, $\sum_{k=0}^{k=n} \cos^{(k)}(0)\,\frac{n!}{k!}$ est entier.

$0 < c < 1 < \frac{\pi}{2} \Rightarrow c \neq 0$ et $c \neq \frac{\pi}{2}$. Donc $\cos^{(n+1)}(c) \neq 0$, puisque les fonctions *sinus* et *cosinus* ne s'annulent pas dans l'intervalle ouvert $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

Comme le module de $\cos^{(n+1)}(c)$ est inférieur à 1, on a :

$$-\frac{1}{n+1} \leqslant \frac{\cos^{(n+1)}(c)}{n+1} \leqslant \frac{1}{n+1}$$

Si *cos* 1 était rationnel, il existerait des entiers *m* et *n* tels que $cos\ 1 = \frac{m}{n}$.

Dans ce cas, $n\ !\ cos\ 1 - \sum_{k=0}^{k=n} cos^{(k)}(0)\ \frac{n!}{k!} = \frac{cos^{(n+1)}(c)}{n+1}$ serait entier, ce qui, compte tenu des inégalités précédentes n'est possible que si $\frac{cos^{(n+1)}(c)}{n+1} = 0$, donc $cos^{(n+1)}(c) = 0$, ce qui est impossible, comme on vient de le voir plus haut.
Il est donc impossible que *cos* 1 soit rationnel : c'est que *cos* 1 est irrationnel.

cos 1 est irrationnel.

2°/ Irrationalité de *tan* (1/2).

Pour tout nombre réel *a*, en posant $t = tan\ a$, on a toujours $cos\ 2\ a = \frac{1-t^2}{1+t^2}$.

Pour $a = \frac{1}{2}$, $t = tan\left(\frac{1}{2}\right)$.

Si *t* était rationnel, $cos\ 1 = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ serait rationnel.

On vient de voir que ce n'était pas le cas, donc $t = tan\left(\frac{1}{2}\right)$ n'est pas rationnel.

$tan\left(\frac{1}{2}\right)$ est irrationnel.

Chapitre 9. Développements limités.

Enoncés.

Exercice 18. Développement limité à l'ordre 4 de 8 fonctions, au voisinage de 0.

Justifier l'existence et calculer le développement limité à l'ordre 4, relatif à 0, des applications $f : V \longrightarrow \mathbb{R}$ (où V est un voisinage de 0 que l'on précisera) définies, pour $x \in V$, par:

$1°/ f(x) = \cosh 2x \sinh 3x$ $\quad$ $2°/ f(x) = [\ \ln(1+x)\ ]^2$

$3°/ f(x) = \sqrt{1+\sin x}$ $\quad$ $4°/ f(x) = \sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}$

$5°/ f(x) = e^{\sin x}$ $\quad$ $6°/ f(x) = e^{\cos x}$

$7°/ f(x) = \ln(1+x+\sqrt{1+x})$ $\quad$ $8°/ f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{(1+x)^2}$

Solution.

1°/ $f(x) = \cosh 2x \sinh 3x$.

La fonction ***cosinus hyperbolique***, notée *cosh*, est définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :
$\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$.
La fonction ***sinus hyperbolique***, notée *sinh*, est définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :
$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$.

Les applications $x \mapsto -x$, $x \mapsto \frac{1}{2}x$, $x \mapsto 2x$ et $x \mapsto 3x$, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, sont des homothéties, linéaires, donc de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.
La ***fonction exponentielle*** $x \mapsto e^x$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$: ses dérivées de tous ordres sont la fonction exponentielle elle-même.
L'application $x \mapsto e^{-x}$, composée de deux applications de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.
L'application $x \mapsto -e^{-x}$, composée de deux applications de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.
Les applications $x \mapsto (e^x + e^{-x})$ et $x \mapsto (e^x - e^{-x})$, sommes de deux applications de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.
Les applications $x \mapsto \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ et $x \mapsto \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$, composées de deux applications de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$: les fonctions *cosh* et *sinh*, sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Les applications $x \mapsto \cosh 2x$ et $x \mapsto \sinh 3x$, composées de deux applications de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$,

sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.
Or le produit de deux applications de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, est une application de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, donc l'application $f : x \mapsto \cosh 2x \sinh 3x$, produit de deux applications de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, est une application de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

En particulier, f est trois fois continûment dérivable sur tout intervalle fermé $[0, x]$ de $\mathbb{R}$ et sa dérivée quatrième existe sur l'intervalle ouvert $]0, x[$ de $\mathbb{R}$, de sorte que, pour tout x de $\mathbb{R}$, le théorème de Taylor-Lagrange s'applique : il existe un c strictement compris entre 0 et x, tel que l'on ait :

$$f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{1}{2} x^2 f''(0) + \frac{1}{6} x^3 f'''(0) + \frac{1}{24} x^4 f^{(4)}(c)$$

En réalité, la forme du reste de Lagrange ne nous intéresse pas ici et on se contentera d'écrire :

$$f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{1}{2} x^2 f''(0) + \frac{1}{6} x^3 f'''(0) + o(x^4)$$

où $o(x^4)$ désigne un terme en x^4, et qui tend donc vers 0 comme x^4, lorsque x tend vers 0.

<u>Remarque importante</u> : la fonction f est impaire, **son développement limité n'aura que des puissance impaires**.

Comme ce développement est unique, on peut le calculer à partir du développement de l'exponentielle, valable, au voisinage de 0, pour tout $x \in \mathbb{R}$ (**à encadrer et à savoir par coeur, exponentielle au voisinage de 0**) :

$$\boxed{e^x = 1 + x + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{6} x^3 + o(x^4), \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.}$$

$e^{-x} = 1 - x + \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{6} x^3 + o(x^4)$
$e^x + e^{-x} = 2 + x^2 + o(x^4)$
$\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = 1 + \frac{1}{2} x^2 + o(x^4)$
$\cosh 2x = 1 + 2 x^2 + o(x^4)$

$e^x - e^{-x} = 2x + \frac{1}{3} x^3 + o(x^4)$
$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = x + \frac{1}{6} x^3 + o(x^4)$
$\sinh 3x = 3x + \frac{9}{2} x^3 + o(x^4)$

$\cosh 2x \sinh 3x = (1 + 2 x^2 + o(x^4)) \times (3x + \frac{9}{2} x^3 + o(x^4)) = 3x + (6 + \frac{9}{2}) x^3 + o(x^4)$

$$\boxed{\cosh 2x \sinh 3x = 3x + \frac{21}{2} x^3 + o(x^4), \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.}$$

2°/ $f(x) = [\, ln\,(1 + x)\,]^{\,2}$.

L'application $x \mapsto 1 + x$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et elle est strictement positive sur $]-1, +\infty[$.
L'application $x \mapsto ln\ x$ est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$.
L'application $x \mapsto ln\,(1 + x)$ est donc de classe C^∞ sur $]-1, +\infty[$.

L'application $x \mapsto x^{\,2}$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.
L'application $f : x \mapsto [ln\,(1 + x)]^{\,2}$ est donc de classe C^∞ sur $]-1, +\infty[$.
Pour tout $x \in]-1, +\infty[$, on peut appliquer le théorème de Taylor-Young entre 0 et x et écrire :

$$f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{1}{2} x^{\,2} f''(0) + \frac{1}{6} x^{\,3} f'''(0) + o(x^4)$$

$f(x) = [ln\,(1 + x)]^{\,2}$, $f(0) = 0$.
$f'(x) = 2\ ln\,(1 + x) \times \frac{1}{1+x}$, $f'(0) = 0$.
$f''(x) = \frac{2}{(1+x)^2} - 2\ ln\,(1 + x) \times \frac{1}{(1+x)^2}$, $f''(0) = 2$.
$f'''(x) = -\frac{4}{(1+x)^3} - \frac{2}{(1+x)^3} + 2\ ln\,(1 + x) \times \frac{2}{(1+x)^3}$, $f'''(0) = -6$.

$f(x) = x^{\,2} - x^{\,3} + o(x^4)$

$$[\, ln\,(1 + x)\,]^{\,2} = x^{\,2} - x^{\,3} + o(x^4),$$
pour tout $x \in]-1, +\infty[$.

3°/ $f(x) = \sqrt{1+\sin x}$.

L'application $x \mapsto 1 + x$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et elle est strictement positive sur $]-1, +\infty[$.
L'application $x \mapsto sin\ x$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et elle est strictement plus grande que -1 dans le voisinage $V =]-\pi, +\pi[$ de 0.
L'application $x \mapsto 1 + sin\ x$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et elle est strictement positive dans le voisinage $V =]-\pi, +\pi[$ de 0.
L'application $x \mapsto \sqrt{x}$ est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$.
L'application $f : x \mapsto \sqrt{1+\sin x}$ est de classe C^∞ dans le voisinage $V =]-\pi, +\pi[$ de 0.

Pour tout $x \in]-\pi, +\pi[$, on peut appliquer le théorème de Taylor-Young entre 0 et x et écrire :

$$f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{1}{2} x^{\,2} f''(0) + \frac{1}{6} x^{\,3} f'''(0) + o(x^4)$$

$f(x) = \sqrt{1+\sin x}$, $f(0) = 1$.
$f'(x) = \frac{\cos x}{2\sqrt{1+\sin x}}$, $f'(0) = \frac{1}{2}$.
$f''(x) = -\frac{\sin x}{2\sqrt{1+\sin x}} - \frac{1}{4}\frac{\cos^2 x}{(1+\sin x)^{\frac{3}{2}}}$, $f''(0) = -\frac{1}{4}$.

$f'''(x) = -\frac{\cos x}{2\sqrt{1+\sin x}} + \frac{1}{4}\frac{\sin x \cos x}{(1+\sin x)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{2}\frac{\sin x \cos x}{(1+\sin x)^{\frac{3}{2}}} + \frac{3}{8}\frac{\cos^3 x}{(1+\sin x)^{\frac{5}{2}}}$, $f'''(0) = -\frac{1}{2} + \frac{3}{8} = -\frac{1}{8}$.

$$f(x) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{48}x^3 + o(x^4)$$

$$\sqrt{1+\sin x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{48}x^3 + o(x^4),$$
pour tout $x \in]-\pi, +\pi[$.

4°/ $f(x) = \sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}$.

L'application $x \mapsto 1 + x^2$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et elle est strictement positive sur $\mathbb{R}$.
L'application $x \mapsto \sqrt{x}$ est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$ et elle est strictement positive sur $]0, +\infty[$.
Donc l'application $x \mapsto \sqrt{1+x^2}$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et elle est strictement positive sur $\mathbb{R}$.
L'application $x \mapsto 1 + \sqrt{1+x^2}$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et elle est strictement positive sur $\mathbb{R}$.
Donc l'application $f : x \mapsto \sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.
Remarque importante : la fonction f est paire, donc **son développement limité n'aura que des puissances paires**.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on peut appliquer la formule de Mac-Laurin entre 0 et x et écrire :

$$f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{1}{2}x^2 f''(0) + \frac{1}{6}x^3 f'''(0) + o(x^4)$$

$f(x) = f(0) + \frac{1}{2}x^2 f''(0) + o(x^4)$, puisqu'il n'y a que des puissances paires.

$f(x) = \sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}$, $f(0) = \sqrt{2}$.
On peut écrire : $(f(x))^2 = 1 + \sqrt{1+x^2}$, $((f(x))^2 - 1)^2 = 1 + x^2$,

$$(f(x))^4 - 2(f(x))^2 = x^2.$$

Dérivons :

$4 f'(x) (f(x))^3 - 4 f'(x) f(x) = 2x$.
$2 f'(x) (f(x))^3 - 2 f'(x) f(x) = x$.
$2 f'(x) ((f(x))^3 - f(x)) = x$.
Pour $x = 0$, et $f(0) = \sqrt{2}$, $(f(0))^3 - f(0) = \sqrt{2}$, nous obtenons $\sqrt{2} f'(0) = 0$, $f'(0) = 0$: il n'y a pas de terme en x dans le développement limité.

Dérivons une nouvelle fois :

$2 f''(x) ((f(x))^3 - f(x)) + 4 (f'(x))^2 (3 (f(x))^2 - 1) = 1$.
Pour $x = 0$, avec $f(0) = \sqrt{2}$ et $f'(0) = 0$, nous obtenons $2\sqrt{2}\ f''(0) = 1$, $f''(0) = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

Dérivons une nouvelle fois :

$2 f'''(x) ((f(x))^3 - f(x)) + 10 f'(x) f''(x) (3 (f(x))^2 - 1) + 24 f(x) (f'(x))^3 = 0$.

Pour $x = 0$, avec $f(0) = \sqrt{2}$ et $f'(0) = 0$, nous obtenons $2\sqrt{2}\ f'''(0) = 0$, $f'''(0) = 0$: il n'y a pas de terme en x^3 dans le développement limité.

La formule de Mac-Laurin s'écrit donc :

$$f(x) = \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{8} x^2 + o(x^4)$$

$$\boxed{\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}} = \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{8} x^2 + o(x^4), \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.}$$

5°/ $f(x) = e^{\sin x}$.

A encadrer et à savoir par coeur, développement du sinus au voisinage de 0 :

$$\boxed{\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4), \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.}$$

$\sin^2 x = x^2 + o(x^4)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.
$\sin^3 x = x^3 + o(x^4)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.
$\sin^4 x = o(x^4)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.
$e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + o(u^4)$, pour tout $u \in \mathbb{R}$.
$e^{\sin x} = 1 + \sin x + \frac{1}{2}\sin^2 x + \frac{1}{6}\sin^3 x + o(\sin^4 x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.
$e^{\sin x} = 1 + (x - \frac{x^3}{6}) + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{6} x^3 + o(x^4)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.
$e^{\sin x} = 1 + x + \frac{1}{2} x^2 + o(x^4)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

$$\boxed{e^{\sin x} = 1 + x + \frac{1}{2} x^2 + o(x^4), \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.}$$

6°/ $f(x) = e^{\cos x}$.

<u>Remarque préliminaire</u> : f est paire, son développement limité n'aura que des puissances paires de x.
A encadrer et à savoir par coeur, développement du cosinus au voisinage de 0:

$$\boxed{\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^4), \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.}$$

$\cos x - 1 = -\frac{x^2}{2} + o(x^4)$
$(\cos x - 1)^2 = o(x^4)$
$f(x) = e^{\cos x} = e \times e^{\cos x - 1}$
$e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + o(u^4)$, pour tout $u \in \mathbb{R}$.

$f(x) = e \times e^{\cos x - 1} = e \times (1 + (\cos x - 1) + \frac{1}{2}(\cos x - 1)^2 + o(x^4)) = e \times (1 + (\cos x - 1) + o(x^4))$.

$e^{\cos x} = e\,(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^4)) = e - \frac{e}{2}x^2 + o(x^4)$

$$\boxed{e^{\cos x} = e - \frac{e}{2}x^2 + o(x^4), \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.}$$

7°/ $f(x) = \ln(1 + x + \sqrt{1+x})$.

L'application $x \mapsto \sqrt{1+x}$ est de classe C^∞ sur $]-1, +\infty[$ et elle est strictement positive sur $]-1, +\infty[$.
$f(x) = \ln(1 + x + \sqrt{1+x}) = \ln(\sqrt{1+x}(1 + \sqrt{1+x})) = \ln\sqrt{1+x} + \ln(1 + \sqrt{1+x}) = \frac{1}{2}\ln(1+x) + \ln(1 + \sqrt{1+x})$.

Pour tout $x \in]-1, +\infty[$, on a (**à encadrer et à savoir par coeur, logarithme de (1 + *x*) au voisinage de 0**) :

$$\boxed{\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^4), \text{ pour } x \in]-1, +\infty[.}$$

$\frac{1}{2}\ln(1+x) = \frac{x}{2} - \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{6} + o(x^4)$
et (**à encadrer et à savoir par coeur, (1 + *x*) à la puissance *n*, au voisinage de 0**) :

$$\boxed{\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + o(x^4), \text{ pour } x \in]-1, +\infty[.}$$

$\sqrt{1+x} - 1 = \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + o(x^4)$
$1 + \sqrt{1+x} = 2 + (\sqrt{1+x} - 1) = 2\,(1 + \frac{1}{2}(\sqrt{1+x} - 1))$, car il faut se ramener au voisinage de 0.
$\ln(1 + \sqrt{1+x}) = \ln 2 + \ln(1 + \frac{1}{2}(\sqrt{1+x} - 1))$.

Pour $|\sqrt{1+x} - 1| < 2$, c'est-à-dire $0 < \sqrt{1+x} < 3$, soit $0 < 1 + x < 9$, $-1 < x < 8$:
$\ln(1 + \sqrt{1+x}) = \ln 2 + \frac{1}{2}(\sqrt{1+x} - 1) - \frac{1}{8}(\sqrt{1+x} - 1)^2 + \frac{1}{24}(\sqrt{1+x} - 1)^3 + o((\sqrt{1+x} - 1)^4)$
$\ln(1 + \sqrt{1+x}) = \ln 2 + \frac{1}{2}(\frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3) - \frac{1}{8}(\frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3)^2 + \frac{1}{24}(\frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3)^3 + o(x^4)$
$\ln(1 + \sqrt{1+x}) = \ln 2 + \frac{1}{2}(\frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3) - \frac{1}{8}(\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{8}x^3) + \frac{1}{24}(\frac{1}{8}x^3) + o(x^4)$
$\ln(1 + \sqrt{1+x}) = \ln 2 + \frac{1}{4}x - \frac{3}{32}x^2 + \frac{5}{96}x^3 + o(x^4)$

Donc, pour $|x| < 1$:

$f(x) = \frac{1}{2} ln(1+x) + ln(1+\sqrt{1+x}) = \frac{x}{2} - \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{6} + o(x^4) + ln\,2 + \frac{1}{4}x - \frac{3}{32}x^2 + \frac{5}{96}x^3 + o(x^4)$.

$f(x) = ln\,2 + \frac{3}{4}x - \frac{11}{32}x^2 + \frac{21}{96}x^3 + o(x^4)$

$$ln(1+x+\sqrt{1+x}) = ln\,2 + \frac{3}{4}x - \frac{11}{32}x^2 + \frac{21}{96}x^3 + o(x^4),$$
pour $x \in]-1, 8[$.

8°/ $f(x) = \frac{ln(1+x)}{(1+x)^2}$.

$1 + x$ est > 0 pour $x \in]-1, +\infty[$.

Au voisinage de 0 : $ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^4)$.

A encadrer et à savoir par coeur, développement de $(1+x)^n$, $n \in \mathbb{R}$, au voisinage de 0 :

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{6}x^3 + o(x^4),$$
pour $x \in]-1, +\infty[$.

Pour $n = -2$: $\frac{1}{(1+x)^2} = (1+x)^{-2} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + o(x^4)$.

$f(x) = \frac{ln(1+x)}{(1+x)^2} = (x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^4))\,(1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + o(x^4))$

$f(x) = (x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}) + (-2x^2 + x^3) + 3x^3 + o(x^4))$

$f(x) = x - \frac{5}{2}x^2 + \frac{13}{3}x^3 + o(x^4))$

$$\frac{ln(1+x)}{(1+x)^2} = x - \frac{5}{2}x^2 + \frac{13}{3}x^3 + o(x^4)),$$
pour $x \in]-1, +\infty[$.

Chapitre 9. Développements limités.

Enoncés.

Exercice 19. Développement limité à l'ordre 4 de 4 fonctions, au voisinage de 0.

Justifier l'existence et calculer le développement limité à l'ordre 4, relatif à 0, des applications $f : V^* \longrightarrow \mathbb{R}$ (où V^* est un voisinage de 0, privé de 0, que l'on précisera) définies, pour $x \in V^*$, par:

$1°/ f(x) = \frac{x}{\sin x}$ $\quad 2°/ f(x) = \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\sinh^2 x}$

$3°/ f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$ $\quad 4°/ f(x) = (\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}}$

Solution.

1°/ $f(x) = \frac{x}{\sin x}$.

f est une fonction paire : son développement limité n'aura que des puissances paires de x.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^6) = x\left(1 - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{120}x^4 + o(x^5)\right)$$

Pour x différent de 0, on peut diviser par x :

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{120}x^4 + o(x^5) = 1 - \frac{1}{6}x^2 + o(x^4)$$
$$u = \frac{\sin x}{x} - 1 = -\frac{1}{6}x^2 + o(x^4)$$
$$u^2 = o(x^4)$$
$$o(u^2) = o(x^4)$$
$\frac{x}{\sin x} = \frac{1}{1+u} = 1 - u + o(u^2)$, $u > -1$, c'est-à-dire $\frac{\sin x}{x} > 0$, donc $x \in V^*$, avec $V =]-\pi, +\pi[$.
$$\frac{x}{\sin x} = 1 + \frac{1}{6}x^2 + o(x^4)$$

$$\boxed{\frac{x}{\sin x} = 1 + \frac{1}{6}x^2 + o(x^4), \text{ pour } x \in V^*, \text{ avec } V =]-\pi, +\pi[.}$$

2°/ $f(x) = \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\sinh^2 x}$.

f est une fonction paire : son développement limité n'aura que des puissances paires de x.

$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + o(x^8)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

$\sin^2 x = x^2 - \frac{1}{3}x^4 + \frac{13}{360}x^6 + o(x^8)$

$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + o(x^8)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

$\sinh^2 x = x^2 + \frac{1}{3}x^4 + \frac{13}{360}x^6 + o(x^8)$

$\sinh^2 x - \sin^2 x = \frac{2}{3}x^4 + o(x^8) = x^4(\frac{2}{3} + o(x^4))$

$\sinh^2 x \times \sin^2 x = x^4 + o(x^8) = x^4(1 + o(x^4))$

$f(x) = \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\sinh^2 x} = \frac{\sinh^2 x - \sin^2 x}{\sinh^2 x \times \sin^2 x}$

Pour x différent de 0, on peut simplifier par x^4 le numérateur et le dénominateur :

$\frac{1}{1+o(x^4)} = 1 - o(x^4)$

$f(x) = (\frac{2}{3} + o(x^4))(1 - o(x^4)) = \frac{2}{3} + o(x^4)$

$\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\sinh^2 x} = \frac{2}{3} + o(x^4)$,
pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$.

3°/ $f(x) = (1 + x)^{\frac{1}{x}}$.

La fonction est définie pour $1 + x > 0$ et $x \neq 0$, par $f(x) = e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}$.

Au voisinage de 0, pour $x > -1$: $\ln(1 + x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + o(x^5)$

$\ln(1 + x) = x(1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{4}x^3 + o(x^4))$

Pour x différent de 0, on peut simplifier par x :

$\frac{1}{x}\ln(1 + x) = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{4}x^3 + o(x^4)$

$u = \frac{1}{x}\ln(1 + x) - 1 = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{4}x^3 + o(x^4)$

u tend vers 0 lorsque x tend vers 0.

$f(x) = e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)} = e^{1+u} = e \times e^u$

Au voisinage de 0 : $e^u = 1 + u + \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{6}u^3 + o(u^4)$

$1 + u = \frac{1}{x}\ln(1 + x) = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{4}x^3 + o(x^4)$

$u^2 = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + o(x^4)$

$u^3 = -\frac{1}{8}x^3 + o(x^4)$

$e^u = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{2}(\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{3}x^3) + \frac{1}{6}(-\frac{1}{8}x^3) + o(x^4)$

$e^u = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{11}{24}x^2 - \frac{7}{16}x^3 + o(x^4)$

$f(x) = e \times e^u = e - \frac{e}{2}x + \frac{11}{24}e\,x^2 - \frac{7}{16}e\,x^3 + o(x^4)$

$$(1+x)^{\frac{1}{x}} = e - \frac{e}{2}x + \frac{11}{24}e\,x^2 - \frac{7}{16}e\,x^3 + o(x^4),$$
pour $x > -1$ et $x \neq 0$.

4°/ $f(x) = (\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}}$.

$f(x)$ est définie, pour $\cos 2x > 0$, et $x \neq 0$, par : $f(x) = e^{\frac{3}{x^2}\ln(\cos 2x)}$.
Partout où f est définie, f est de classe C^∞.
C'est une fonction paire, son développement limité au voisinage de 0, n'aura que des puissance paires de x.
Au voisinage de 0, on a $\cos 2x > 0$ pour $x \in \left]-\frac{\pi}{4}, +\frac{\pi}{4}\right[$.

$\cos u = 1 - \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{24}u^4 + o(u^6)$

$\cos 2x = 1 - 2x^2 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^6)$

Pour $u = \cos 2x - 1 = -2x^2 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^6)$, on a $\ln(1+u) = \ln(\cos 2x)$, avec un u qui tend vers 0 lorsque x tend vers 0.

$\ln(1+u) = u - \frac{1}{2}u^2 + o(u^3)$

$u = -2x^2 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^6)$

$u^2 = 4x^4 + o(x^6)$

$o(u^3) = o(x^6)$

$\ln(\cos 2x) = \ln(1+u) = -2x^2 + \frac{2}{3}x^4 - \frac{1}{2}(4x^4) + o(x^6) = -2x^2 - \frac{4}{3}x^4 + o(x^6)$.

Pour x différent de 0, on peut diviser par x^2 et multiplier par 3 :

$\frac{3}{x^2}\ln(\cos 2x) = -6 - 4x^2 + o(x^4)$

$f(x) = e^{\frac{3}{x^2}\ln(\cos 2x)} = e^{-6-4x^2+o(x^4)} = e^{-6} \times e^{-4x^2+o(x^4)}$.

Pour $u = -4x^2 + o(x^4)$, $e^u = 1 + u + o(u^2) = 1 - 4x^2 + o(x^4)$

Finalement : $f(x) = e^{-6} \times (1 - 4x^2 + o(x^4)) = e^{-6} \times (1 - 4x^2) + o(x^4)$

$$(\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}} = e^{-6} \times (1 - 4x^2) + o(x^4),$$
pour $x \in \left]-\frac{\pi}{4}, +\frac{\pi}{4}\right[$, $x \neq 0$.

Chapitre 9. Développements limités.

Enoncés.

Exercice 20. Développement limité à l'ordre 3 de 2 fonctions, au voisinage de π/2.

Justifier l'existence et calculer le développement limité à l'ordre 3, relatif à $\frac{\pi}{2}$, des applications $f : V \longrightarrow \mathbb{R}$ (où V est un voisinage de $\frac{\pi}{2}$ que l'on précisera) définies, pour $x \in V$, par: 1°/ $f(x) = ln\ (sin\ x)$ 2°/ $f(x) = (1 + cos\ x)^{\frac{1}{x}}$	

Solution.

1°/ $f(x) = ln\ (sin\ x)$.

Au voisinage de $x = \frac{\pi}{2}$, où $sin\ x$ prend la valeur 1, $sin\ x$ reste > 0 pour $x \in]\ 0, \pi\ [$.

Dans cet intervalle, f est composée de fonctions numériques de classe C^∞, elle est de classe C^∞ et possède donc un développement limité en $\frac{\pi}{2}$, valable pour tout $x \in]\ 0, \pi\ [$.

Posons $y = x - \frac{\pi}{2}$, $sin\ x = cos\ y$, avec un $y \in \left]-\frac{\pi}{2}\ ,\ +\frac{\pi}{2}\right[$ qui tend vers 0, lorsque x tend vers $\frac{\pi}{2}$.

$cos\ y = 1 - \frac{1}{2}\ y^2 + o\ (y^3)$, au voisinage de 0.

$ln\ (sin\ x) = ln\ (cos\ y) = ln\ (1 - u)$, avec un $u = \frac{1}{2}\ y^2 + o\ (y^3)$ qui tend vers 0, lorsque y tend vers 0, donc lorsque x tend vers $\frac{\pi}{2}$.

$ln\ (1 - u) = - u + o\ (u^2)$

$- u = -\frac{1}{2}\ y^2 + o\ (y^3)$

$o\ (u^2) = o\ (y^3)$

$ln\ (cos\ y) = -\frac{1}{2}\ y^2 + o\ (y^3)$

$$ln\ (sin\ x) = -\frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 + o\left(\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^3\right)$$

Au voisinage de $\frac{\pi}{2}$, $ln\ (sin\ x) = -\frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 + o\left(\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^3\right)$, pour tout $x \in]\ 0, \pi\ [$.

2°/ $f(x) = (1 + \cos x)^{\frac{1}{x}}$.

La fonction numérique f est définie pour $1 + \cos x > 0$ et $x \neq 0$, par $f(x) = e^{\frac{1}{x}\ln(1+\cos x)}$
Au voisinage de $\frac{\pi}{2}$, le *cosinus* est voisin de 0, et $1 + \cos x$ reste > 0 pour $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, +\frac{3\pi}{2}\right[$.

Pour tout x dans l'intervalle $\left]0, \frac{3\pi}{2}\right[$, la fonction f est de classe C^∞ sur l'intervalle fermé compris entre x et $\frac{\pi}{2}$.
On peut donc appliquer la formule de Taylor-Lagrange entre $\frac{\pi}{2}$ et x et calculer un développement limité de tout ordre au voisinage de $\frac{\pi}{2}$.

$$\ln(1+\cos x) = \cos x - \frac{1}{2}(\cos x)^2 + \frac{1}{3}(\cos x)^3 - \frac{1}{4}(\cos x)^4 + o((\cos x)^5)$$

Posons $y = x - \frac{\pi}{2}$, $\cos x = -\sin y$, avec un $y \in]-\pi, +\pi[$ qui tend vers 0, lorsque x tend vers $\frac{\pi}{2}$.

$$\ln(1+\cos x) = \ln(1-\sin y) = -\sin y - \frac{1}{2}(\sin y)^2 - \frac{1}{3}(\sin y)^3 - \frac{1}{4}(\sin y)^4 + o((\sin y)^5)$$

$$\sin y = y - \frac{1}{3}y^3 + o(y^5)$$

$$\sin^2 y = y^2 - \frac{2}{3}y^4 + o(y^5)$$

$$\sin^3 y = y^3 + o(y^5)$$

$$\sin^4 y = y^4 + o(y^5)$$

$$\ln(1-\sin y) = -\left(y - \frac{1}{3}y^3\right) - \frac{1}{2}\left(y^2 - \frac{2}{3}y^4\right) - \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4 + o(y^5)$$

$$\ln(1-\sin y) = -y - \frac{1}{2}y^2 - \frac{2}{3}y^3 + \frac{1}{12}y^4 + o(y^5)$$

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{y+\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}\frac{1}{\frac{2y}{\pi}+1} = \frac{2}{\pi}\left(1 - \frac{2y}{\pi} + \left(\frac{2y}{\pi}\right)^2 - \left(\frac{2y}{\pi}\right)^3 + \left(\frac{2y}{\pi}\right)^4\right) + o(y^5)$$

$$\frac{1}{x}\ln(1+\cos x) = -\frac{2}{\pi}\left(1 - \frac{2y}{\pi} + \left(\frac{2y}{\pi}\right)^2 - \left(\frac{2y}{\pi}\right)^3 + \left(\frac{2y}{\pi}\right)^4\right)\left(y + \frac{y^2}{2} + \frac{2y^3}{3} + \frac{y^4}{12}\right) + o(y^5)$$

$$\frac{1}{x}\ln(1+\cos x) = -\frac{2}{\pi}\left(y + \left(\frac{2}{\pi}+\frac{1}{2}\right)y^2 + \left(\frac{4}{\pi^2} - \frac{1}{\pi} + \frac{2}{3}\right)y^3 + \left(-\frac{8}{\pi^3} + \frac{2}{\pi^2} - \frac{4}{3\pi} + \frac{1}{12}\right)y^4\right) + o(y^5)$$

Si on limite le développement à un ordre de moins, il reste :

$$\frac{1}{x}\ln(1+\cos x) = -\frac{2}{\pi}\left(y + \left(\frac{2}{\pi}+\frac{1}{2}\right)y^2 + \left(\frac{4}{\pi^2} - \frac{1}{\pi} + \frac{2}{3}\right)y^3\right) + o(y^4)$$

$f(x) = e^{\frac{1}{x}\ln(1+\cos x)}$ est de la forme e^u, avec un $u = -\frac{2}{\pi}\left(y + \left(\frac{2}{\pi}+\frac{1}{2}\right)y^2 + \left(\frac{4}{\pi^2} - \frac{1}{\pi} + \frac{2}{3}\right)y^3\right) + o(y^4)$ qui tend vers 0 lorsque x tend vers $\frac{\pi}{2}$.

$$e^u = 1 + u + \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{6}u^3 + o(u^4)$$

$$u = -\frac{2}{\pi}\left(y+\left(\frac{2}{\pi}+\frac{1}{2}\right)y^2+\left(\frac{4}{\pi^2}-\frac{1}{\pi}+\frac{2}{3}\right)y^3\right)+o\,(y^4)$$

$$u^2 = \frac{4}{\pi^2}\,y^2+\frac{4}{\pi^2}\left(\frac{4}{\pi}+1\right)y^3+o\,(y^4)$$

$$u^3 = \frac{8}{\pi^3}y^3+o\,(y^4)$$

$$e^u = 1-\frac{2}{\pi}y-\frac{2+\pi}{\pi^2}\,y^2+\frac{4}{3\pi^3}(1+3\pi-\pi^2)\,y^3+o\,(y^4)$$

$$f(x) = 1-\frac{2}{\pi}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)-\frac{2+\pi}{\pi^2}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2+\frac{4}{3\pi^3}(1+3\pi-\pi^2)\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^3+o\left(\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^4\right)$$

$$f(x) = 1-\frac{2}{\pi}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)-\frac{2+\pi}{\pi^2}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2+o\left(\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^3\right)$$

Au voisinage de $\frac{\pi}{2}$, $(1+\cos x)^{\frac{1}{x}} = 1-\frac{2}{\pi}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)-\frac{2+\pi}{\pi^2}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2+o\left(\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^3\right)$,

pour tout $x \in \left]0,\ \frac{3\pi}{2}\right[$.

Chapitre 9. Développements limités.

Enoncés.

Exercice 21. Développement limité à l'ordre 3 de 2 fonctions, au voisinage de l'infini.

Ecrire un développement jusqu'au terme en $\frac{1}{x^3}$, relatif à $+\infty$, de chacune des applications $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$, définies, pour $x \in \mathbb{R}^+$, par : 1°/ $f(x) = \sqrt{x^4 + x + 1}$ 2°/ $f(x) = Arctan\ \sqrt{\frac{x+1}{x+2}}$	

Solution.

1°/ $f(x) = \sqrt{x^4 + x + 1}$.

Posons $u = \frac{1}{x}$. Lorsque x tend vers $+\infty$, u tend vers 0 par valeurs positives. u est défini pour $x \neq 0$.

La dérivée de $x^4 + x + 1$ est $4x^3 + 1$, elle s'annule une fois dans R, pour $x = -2^{-\frac{2}{3}}$:
en ce point, $x^4 + x + 1 = x(x^3 + 1) + 1 = 1 + \frac{3}{4}x = 1 - \frac{3}{4}2^{-\frac{2}{3}}$ est du signe de $4^{\frac{4}{3}} - 3 > 0$.

Le point $x = -2^{-\frac{2}{3}}$ est donc un minimum pour la fonction $x^4 + x + 1$, de sorte que cette fonction est > 0 pour tout $x \in \mathbb{R}$.

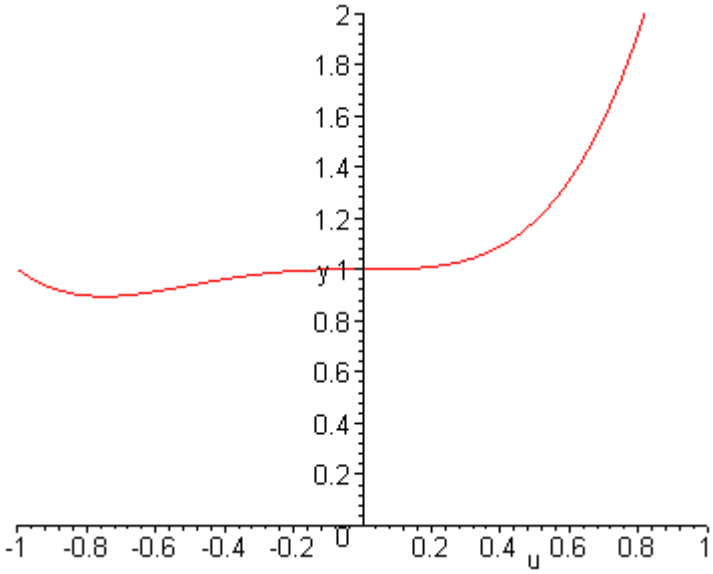
$f(x) = \sqrt{\frac{1}{u^4} + \frac{1}{u} + 1} = \frac{1}{u^2}\sqrt{1 + u^3 + u^4}$.

La dérivée de la fonction $1 + u^3 + u^4$ est nulle pour $u = 0$ et pour $u = -\frac{3}{4}$.

La dérivée seconde est nulle pour $u = 0$, donc 0 est un point d'inflexion à tangente horizontale où la fonction $1 + u^3 + u^4$ vaut 1.

Au point $u = -\frac{3}{4}$, la fonction présente donc un minimum qui vaut $\frac{229}{256} > 0$.

La fonction $1 + u^3 + u^4$ est donc strictement positive pour toute valeur de u, donc pour toute valeur de x.



Elle est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et on peut la développer suivant la formule de Taylor-Lagrange sur tout intervalle $[0, u]$, $u > 0$.

$\sqrt{1+u^3+u^4}$ est de la forme $(1+v)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}v - \frac{1}{8}v^2 + \frac{3}{8}v^3 + o(v^4)$, avec un $v = u^3 + u^4$, qui tend vers 0 par valeurs positives, lorsque x tend vers $+\infty$, et le développement existe dès que $v > -1$, soit $1 + u^3 + u^4 > 0$. Il existe donc toujours pour $u > 0$.

$v = u^3 + u^4$

$v^2 = u^6 + o(u^7)$

$\sqrt{1+u^3+u^4} = 1 + \frac{1}{2}u^3 + \frac{1}{2}u^4 - \frac{1}{8}u^6 + o(u^7)$

$f(x) = \frac{1}{u^2}\sqrt{1+u^3+u^4} = \frac{1}{u^2} + \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}u^2 - \frac{1}{8}u^4 + o(u^5)$

$\sqrt{x^4+x+1} = x^2 + \frac{1}{2x} + \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{8x^4} + o\left(\frac{1}{x^5}\right)$.

Si l'on veut, comme le demande l'énoncé, s'arrêter au terme en $\frac{1}{x^3}$, on écrira simplement :

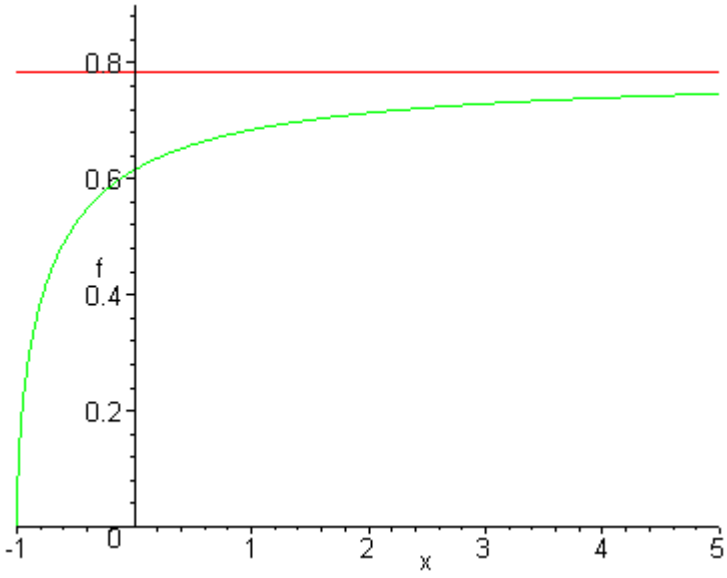
Au voisinage de $+\infty$, $\sqrt{x^4+x+1} = x^2 + \frac{1}{2x} + \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^4}\right)$, pour toute valeur $x > 0$.

2°/ $f(x) = Arctan\ \sqrt{\frac{x+1}{x+2}}$.

Lorsque x tend vers $+\infty$, $f(x)$ tend vers $\frac{\pi}{4}$.

Lorsque x tend vers -1, $f(x)$ tend vers 0.

La fonction est définie pour $x \in [-1, +\infty[$.



$\frac{\pi}{4} - f(x) = Arctan\ 1 - Arctan\ \sqrt{\frac{x+1}{x+2}}$

$= Arctan\ \frac{1-\sqrt{\frac{x+1}{x+2}}}{1+\sqrt{\frac{x+1}{x+2}}}$

$= Arctan\ \frac{\left(1-\sqrt{\frac{x+1}{x+2}}\right)^2}{1-\frac{x+1}{x+2}}$

$= Arctan\ (x+2)\left(1-2\sqrt{\frac{x+1}{x+2}}+\frac{x+1}{x+2}\right)$

$= Arctan\ (2x+3-2\sqrt{(x+1)(x+2)})$

$= Arctan\ (2x+3-2\sqrt{x^2+3x+2})$

Pour $x > 0$:

$\sqrt{x^2+3x+2} = x\left(1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}} = x$

$$\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)-\frac{1}{8}\left(\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)^2+\frac{1}{16}\left(\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)^3-\frac{5}{64}\left(\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)^4+o\left(\left(\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)^5\right)\right)$$

$$\sqrt{x^2+3x+2}=x\left(1+\frac{3}{2x}+\frac{1}{x^2}\left(1-\frac{9}{8}\right)+\frac{1}{x^3}\left(-\frac{4}{3}+\frac{27}{16}\right)+\frac{1}{x^4}\left(\frac{1}{2}+\frac{27}{8}-\frac{405}{64}\right)+o\left(\frac{1}{x^5}\right)\right)$$

$$\sqrt{x^2+3x+2}=x+\frac{3}{2}-\frac{1}{8}\frac{1}{x}+\frac{17}{48}\frac{1}{x^2}-\frac{157}{64}\frac{1}{x^3}+o\left(\frac{1}{x^4}\right).$$

$$2x+3-2\sqrt{x^2+3x+2}=2x+3-2x-3+\frac{1}{4}\frac{1}{x}-\frac{17}{24}\frac{1}{x^2}+\frac{157}{32}\frac{1}{x^3}+o\left(\frac{1}{x^4}\right).$$

$$2x+3-2\sqrt{x^2+3x+2}=\frac{1}{4}\frac{1}{x}-\frac{17}{24}\frac{1}{x^2}+\frac{157}{32}\frac{1}{x^3}+o\left(\frac{1}{x^4}\right).$$

Si l'on pose $u = 2x+3-2\sqrt{x^2+3x+2}$, alors u tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$, et $f(x) = \frac{\pi}{4} - \mathit{Arctan}\ u$.

La dérivée par rapport à u de *Arctan u* est $\frac{1}{1+u^2}$. Pour $u = 0$, elle vaut 1.

La dérivée seconde est $-\frac{2u}{(1+u^2)^2}$. Pour $u = 0$, elle est nulle.

La dérivée troisième est $-\frac{2}{(1+u^2)^2}+\frac{8u^2}{(1+u^2)^2}$. Pour $u = 0$, elle vaut -2.

On a donc : $\mathit{Arctan}\ u = u-\frac{1}{3}u^3+o(u^4)$, pour tout $u \in \mathbb{R}$.

Pour $u=\frac{1}{4}\frac{1}{x}-\frac{17}{24}\frac{1}{x^2}+\frac{157}{32}\frac{1}{x^3}+o\left(\frac{1}{x^4}\right)$,

$$u^3=\frac{1}{64}\frac{1}{x^3}+o\left(\frac{1}{x^4}\right).$$

$$o(u^4)=o\left(\frac{1}{x^4}\right).$$

$$\mathit{Arctan}\ u=\frac{1}{4}\frac{1}{x}-\frac{17}{24}\frac{1}{x^2}+\left(\frac{157}{32}-\frac{1}{3\times 64}\right)\frac{1}{x^3}+o\left(\frac{1}{x^4}\right).$$

$$\frac{\pi}{4}-f(x)=\mathit{Arctan}\ u=\frac{1}{4}\frac{1}{x}-\frac{17}{24}\frac{1}{x^2}+\frac{943}{192}\frac{1}{x^3}+o\left(\frac{1}{x^4}\right).$$

$$f(x)=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{4}\frac{1}{x}+\frac{17}{24}\frac{1}{x^2}-\frac{943}{192}\frac{1}{x^3}+o\left(\frac{1}{x^4}\right).$$

Au voisinage de l'infini, $\mathit{Arctan}\sqrt{\frac{x+1}{x+2}}=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{4}\frac{1}{x}+\frac{17}{24}\frac{1}{x^2}-\frac{943}{192}\frac{1}{x^3}+o\left(\frac{1}{x^4}\right)$, pour $x \in]0, +\infty[$.

Chapitre 9. Développements limités.

Enoncés.

Exercice 22. Développement limité à l'ordre 2005 au voisinage de 0.

Montrer que l'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, définie par $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ possède un développement limité à l'ordre 2005, relatif à 0, et l'écrire.	

Solution.

1°/ Continuité.

Lorsque x tend vers 0, $-\frac{1}{x^2}$ tend vers $-\infty$ et $e^{-\frac{1}{x^2}}$ tend vers $0 = f(0)$.

L'application f est donc continue en 0.

2°/ Dérivabilité.

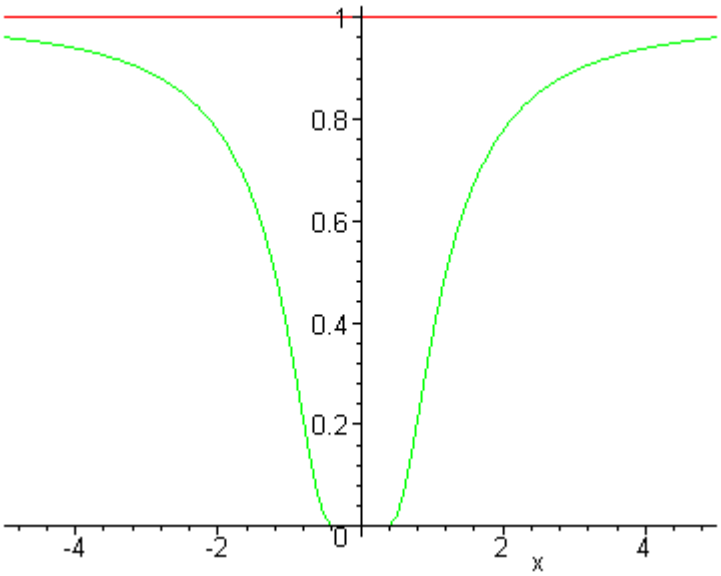
Pour $x \neq 0$, $-\frac{1}{x^2}$ est de classe C^∞ et $e^{-\frac{1}{x^2}}$ est aussi de classe C^∞.

La dérivée de $e^{-\frac{1}{x^2}}$ est $\frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}}$.

Lorsque x tend vers 0, l'exponentielle l'emporte sur la puissance et la dérivée tend vers 0.

Supposons que la dérivée d'ordre n soit le produit d'un polynôme de $\frac{1}{x}$ et de $e^{-\frac{1}{x^2}}$.

Alors, par la règle de dérivation d'un produit, la dérivée d'ordre $n+1$ est aussi le produit d'un polynôme de $\frac{1}{x}$ et de $e^{-\frac{1}{x^2}}$.



Donc, par récurrence, la dérivée d'ordre n soit le produit d'un polynôme de $\frac{1}{x}$ et de $e^{-\frac{1}{x^2}}$.

Comme l'exponentielle l'emporte sur la puissance, la dérivée d'ordre n tend vers 0 lorsque x tend vers 0.

C'est vrai à droite comme à gauche. Donc f est indéfiniment dérivable en 0 et $f^{(n)}(0) = 0$.

3°/ Développement limité à l'ordre 2005.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, le théorème de Taylor-Lagrange s'applique entre 0 et x à l'ordre n, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

On peut écrire un développement limité de la fonction $f(x)$ à n'importe quel ordre, notamment à l'ordre 2005, au voisinage de 0 :

$$f(x) = o\left(x^{2006}\right)$$

Au voisinage de 0, $f(x) = o\left(x^{2006}\right)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Chapitre 9. Développements limités.

Enoncés.

Exercice 23. Limite, en 0 ou l'infini, de 8 fonctions.

Déterminer

1°/ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \dfrac{(1-\cos x)\,Arctan\,x}{\sinh x \sin x \tan x}$

2°/ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x\,(\sin x)^{\tan x}$

3°/ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} (1+\sin x)^{\frac{1}{x}}$

4°/ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \dfrac{ln(\cos 2x)}{ln(\cos 3x)}$

5°/ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{x^{(x^x)}\,\ln x}{x^x-1}$

6°/ $\lim\limits_{x\to+\infty} (\tanh x)^{x^2}$

7°/ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} ln\,\dfrac{e^x-1}{x}$

8°/ $\lim\limits_{x\to+\infty} \sinh x\, e^{-x\tanh x}$

Solution.

1°/ Première limite.

HAUT

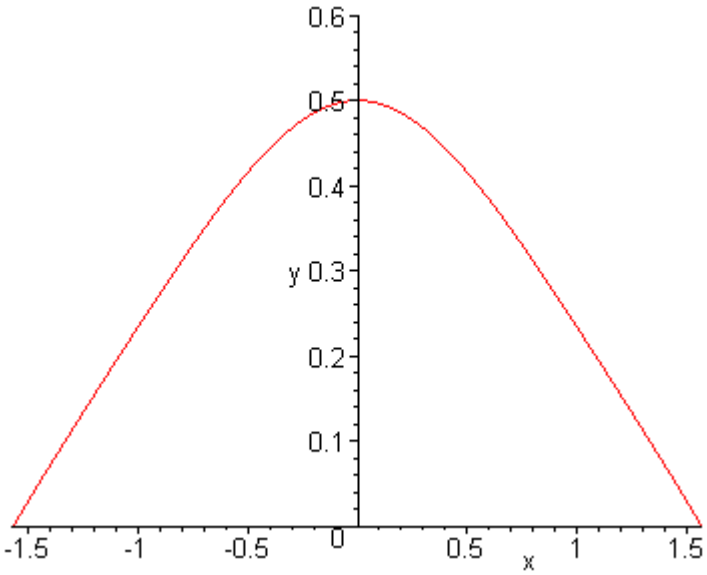
Nous avons déjà rencontré les développement limités :

$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^4)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

$Arctan\,x = x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^4)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

$\sinh x = x + \frac{1}{6}x^3 + o(x^4)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^4)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.



On en déduit :

$\frac{1}{\cos x} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + o(x^4)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

$$\tan x = \sin x \times \frac{1}{\cos x} = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^3 + o(x^4) = x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^4).$$

Il vient alors :

$(1 - \cos x)\,\mathrm{Arctan}\, x = \frac{1}{2}x^2\left(x - \frac{1}{3}x^3\right) + o(x^4)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

$(1 - \cos x)\,\mathrm{Arctan}\, x = \frac{1}{2}x^3 + o(x^4)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

$(1 - \cos x)\,\mathrm{Arctan}\, x = x^3\left(\frac{1}{2} + o(x)\right)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

$\sinh x \sin x \tan x = x^3 + o(x^4) = x^3(1 + o(x))$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

On en déduit, en simplifiant numérateur et dénominateur par x^3 :

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \frac{(1-\cos x)\,\mathrm{Arctan}\, x}{\sinh x \sin x \tan x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \frac{\frac{1}{2} + o(x)}{1 + o(x)} = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \frac{(1-\cos x)\,\mathrm{Arctan}\, x}{\sinh x \sin x \tan x} = \frac{1}{2}}$$

HAUT

2°/ Deuxième limite.

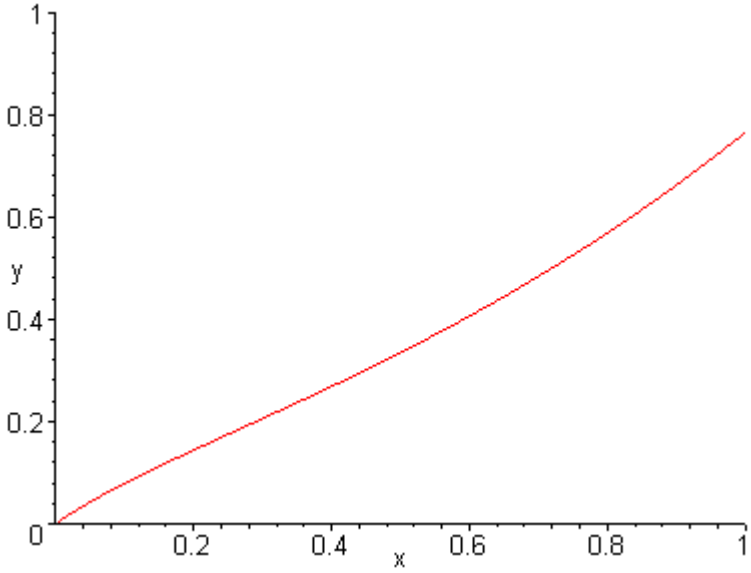
HAUT

Nous avons déjà rencontré les développement limités, au voisinage de 0 :

$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^4)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^4)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

$\ln(1 + u) = u - \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{3}u^3 + o(u^4)$, pour tout $u \in]-1, +1[$.



$x(\sin x)^{\tan x} = x\, e^{\tan x \ln(\sin x)}$

$\ln(\sin x) = \ln\left(x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^4)\right) = \ln x + \ln\left(1 - \frac{1}{6}x^2 + o(x^3)\right)$

$\ln\left(1 - \frac{1}{6}x^2 + o(x^3)\right) = -\frac{1}{6}x^2 + o(x^3)$

$\tan x \ln(\sin x) = x\left(\ln x - \frac{1}{6}x^2\right) + o(x^3)$

$\tan x \ln(\sin x) = x \ln x + o(x^3)$

Lorsque x tend vers 0, la puissance l'emporte sur le logarithme, $x \ln x$ tend vers 0, $e^{\tan x \ln(\sin x)}$ tend vers $e^0 = 1$, et $x\, e^{\tan x \ln(\sin x)}$ tend vers 0.

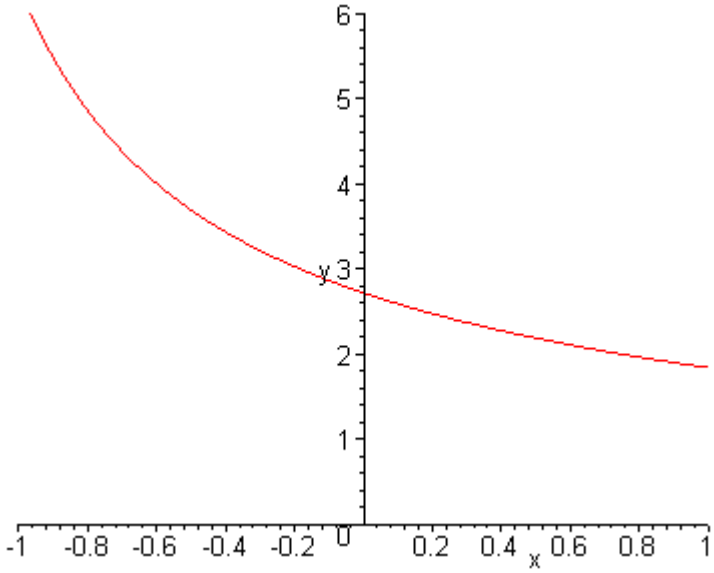
$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} x (\sin x)^{\tan x} = 0.$$

HAUT

3°/ Troisième limite.

HAUT

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} (1 + \sin x)^{\frac{1}{x}}$$



La fonction $(1 + \sin x)^{\frac{1}{x}}$ est définie, au voisinage de 0, lorsque $1 + \sin x > 0$ et $x \neq 0$, par $(1 + \sin x)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x} \ln(1 + \sin x)}$.
Lorsque x tend vers 0, $\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^4)$.
$\ln(1 + u) = u - \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{3}u^3 + o(u^4)$,
pour tout $u \in]-1, +1[$.
$\ln(1 + \sin x) = \sin x - \frac{1}{2}\sin^2 x + \frac{1}{3}\sin^3 x + o(\sin^4 x)$.
$\sin^2 x = x^2 + o(x^4)$.
$\sin^3 x = x^3 + o(x^4)$.
$\ln(1 + \sin x) = x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^4) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^4)$.

Lorsque x est différent de 0, on peut diviser par x :

$\frac{1}{x}\ln(1 + \sin x) = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{6}x^2 + o(x^3)$.
$e^{\frac{1}{x}\ln(1 + \sin x)} = e^{1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + o(x^3)} = e \times e^{-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + o(x^3)}$
$e^{-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + o(x^3)}$ est de la forme e^u, avec un $u = -\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + o(x^3)$ qui tend vers 0 lorsque x tend vers 0.
$e^u = 1 + u + \frac{1}{2}u^2 + o(u^3)$
$u^2 = \frac{1}{4}x^2 + o(x^3)$
$o(u^3) = o(x^3)$
$e^u = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^2}{8} + o(x^3) = 1 - \frac{x}{2} + \frac{5}{24}x^2 + o(x^3)$
On obtient donc : $(1 + \sin x)^{\frac{1}{x}} = e - \frac{e}{2}x + \frac{5e}{24}x^2 + o(x^3)$

et, lorsque x tend vers 0,

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} (1 + \sin x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

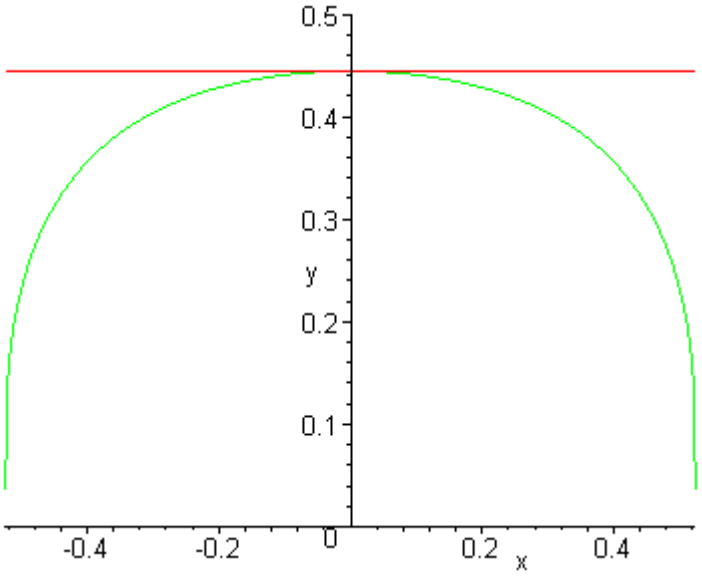
Remarquons qu'on aurait pu écrire tout de suite : $\sin x$ est équivalent à x, donc $(1 + \sin x)^{\frac{1}{x}}$ est équivalent à $(1 + x)^{\frac{1}{x}}$, qui tend vers e lorsque x tend vers 0, puisque son logarithme, $\frac{1}{x} \ln(1 + x) = 1 - \frac{x}{2} + o(x^3)$, tend vers 1.

HAUT

4°/ Quatrième limite.

HAUT

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \frac{\ln(\cos 2x)}{\ln(\cos 3x)}.$$



Au voisinage de 0, $\cos u = 1 - \frac{u^2}{2} + o(u^3)$.
$\cos 2x = 1 - 2x^2 + o(x^3)$
$\cos 3x = 1 - \frac{9}{2}x^2 + o(x^3)$
$\ln(1 + u) = u + o(u^2)$
$\ln(1 - 2x^2 + o(x^3)) = -2x^2 + o(x^3)$
$\ln(1 - \frac{9}{2}x^2 + o(x^3)) = -\frac{9}{2}x^2 + o(x^3)$

$$\frac{\ln(\cos 2x)}{\ln(\cos 3x)} = \frac{-2x^2 + o(x^3)}{-\frac{9}{2}x^2 + o(x^3)}$$

Pour x différent de 0, on peut simplifier numérateur et dénominateur par x^2. Avec $\frac{1}{1+u} = 1 - o(u)$, il reste :

$$\frac{\ln(\cos 2x)}{\ln(\cos 3x)} = \frac{4}{9} + o(x)$$

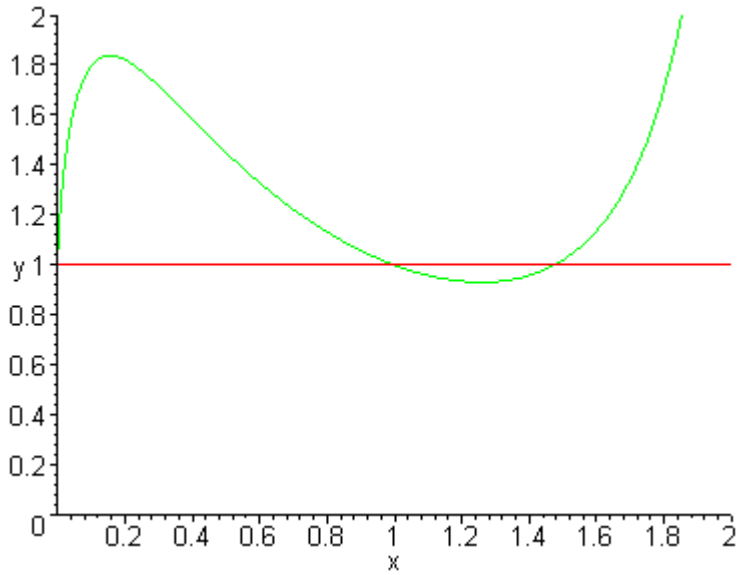
$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \frac{\ln(\cos 2x)}{\ln(\cos 3x)} = \frac{4}{9}.$$

HAUT

5°/ Cinquième limite.

HAUT

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{x^{(x^x)} \ln x}{x^x - 1}$$



Lorsque x tend vers 0 (par valeurs supérieures), $\ln(x^x) = x \ln x$ tend vers 0 (par valeurs inférieures), donc x^x tend vers $e^0 = 1$ (par valeurs inférieures).
Posons $u = x^x - 1$. u tend vers 0 par valeurs inférieures lorsque x tend vers 0 par valeurs supérieures et on a : $x \ln x = \ln(1 + u) = v$.

$1 + u = e^v = 1 + v + \frac{1}{2}v^2 + o(v^3)$

$u = v + \frac{1}{2}v^2 + o(v^3)$

$= (x \ln x) + \frac{1}{2}(x \ln x)^2 + o((x \ln x)^3)$

Comme le logarithme l'emporte sur la puissance, on peut écrire :

$u = x \ln x + \frac{1}{2}(x \ln x)^2 + o(x^3)$

$\frac{x^{(x^x)} \ln x}{x^x - 1} = \frac{1}{u}(x^u \times x \ln x) = \frac{1}{u}(x^u \times \ln(1 + u)) = \frac{1}{u}\ln(1 + u)\, x^u$.

Lorsque u tend vers 0, $\frac{1}{u}\ln(1 + u) = 1 + o(u)$ tend vers 1, donc $\frac{x^{(x^x)} \ln x}{x^x - 1}$ a la même limite que x^u.

$\ln(x^u) = u \ln x = \frac{1}{x}u\, x \ln x = \frac{1}{x}u \ln(1 + u) = \frac{1}{x}(u^2 + o(u^3)) = x(\ln x)^2 + o(x^2)$

$x^u = e^{\ln(x^u)} = 1 + x(\ln x)^2 + o(x^2)$

$\frac{x^{(x^x)} \ln x}{x^x - 1} = \frac{1}{u}\ln(1 + u)\, x^u = (1 - \frac{1}{2}u + o(u^2))(1 + x(\ln x)^2 + o(x^2)) = (1 - \frac{1}{2}x \ln x)(1 + x(\ln x)^2) + o(x^2)$

$\frac{x^{(x^x)} \ln x}{x^x - 1} = 1 - \frac{1}{2}x \ln x + x(\ln x)^2 + o(x^2)$

Lorsque x tend vers 0, $x \ln x$ tend vers 0, $x(\ln x)^2$ tend vers 0, $o(x^2)$ tend vers 0 et il reste :

$$\boxed{\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{x^{(x^x)} \ln x}{x^x - 1} = 1.}$$

On obtient aussi, du même coup, en écrivant $\frac{x^{(x^x)} \ln x}{x^x - 1} - 1 = -\frac{1}{2}x \ln x + x(\ln x)^2 + o(x^2)$, et en divisant par $2x(\ln x)^2 - x \ln x$: $\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{x^{(x^x)} \ln x - x^x + 1}{x \ln x (2 \ln x - 1)} = \frac{1}{2}$, ce qui est aussi pas mal, dans le genre fonction tordue.

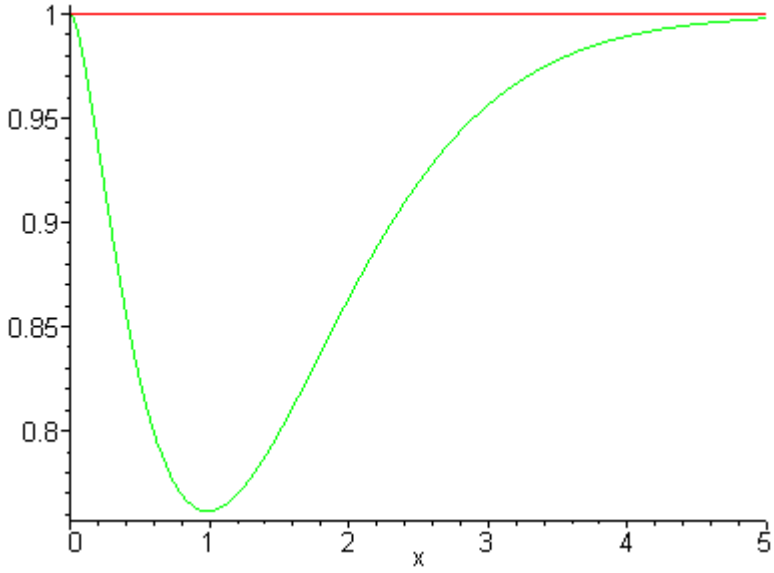
HAUT

6°/ Sixième limite.

HAUT

$\lim_{x \to +\infty} (\tanh x)^{x^2}$

$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$



Lorsque x tend vers l'infini, $u = e^{-2x}$ tend vers 0, $\tanh x = \frac{1-u}{1+u}$.

$\frac{1}{1+u} = 1 - u + o(u^2)$

$\frac{1-u}{1+u} = (1-u)^2 + o(u^2) = 1 - 2u + o(u^2) = 1 - 2e^{-2x} + o(e^{-4x})$

$-2x = \ln u$, $x^2 = \frac{1}{4}(\ln u)^2$

$(\tanh x)^{x^2} = (1 - 2u + o(u^2))^{\frac{1}{4}(\ln u)^2}$

$= e^{\frac{1}{4}(\ln u)^2 \ln(1 - 2u + o(u^2))}$

$\ln(1 - 2u + o(u^2)) = -2u + o(u^2)$

$\frac{1}{4}(\ln u)^2 \ln(1 - 2u + o(u^2)) = -\frac{1}{2}u(\ln u)^2 + o(u^2)$

$(\tanh x)^{x^2} = e^{-\frac{1}{2}u(\ln u)^2 + o(u^2)} = 1 - \frac{1}{2}u(\ln u)^2 + o(u^2)$

Lorsque x tend vers l'infini, $u = e^{-2x}$ tend vers 0, $u(\ln u)^2$ tend vers 0 et $o(u^2)$ tend vers 0, donc :

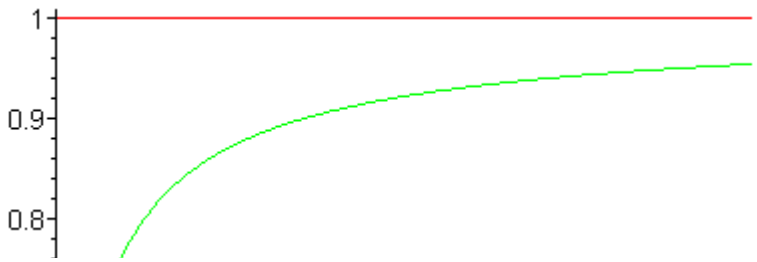
$$\lim_{x \to +\infty} (\tanh x)^{x^2} = 1$$

HAUT

7°/ Septième limite.

HAUT

$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} \ln \frac{e^x - 1}{x}$



Lorsque x tend vers plus l'infini, $u = e^{-x}$ tend vers 0 par valeurs supérieures, $x = -\ln u$.

Et $v = -u \ln u = x e^{-x}$ tend vers 0 par valeurs supérieures.

$\frac{e^x - 1}{x} = -\frac{1-u}{u \ln u}$

$\ln \frac{e^x - 1}{x} = -\ln \frac{x}{e^x - 1} = -\ln(-u \ln u) + \ln(1-u)$

$\frac{1}{x} \ln \frac{e^x - 1}{x} = \frac{\ln(-u \ln u) - \ln(1-u)}{\ln u} = 1 - \frac{\ln(-\ln u)}{(-\ln u)} - \frac{\ln(1-u)}{\ln u}$

Lorsque u tend vers 0, $\ln(1-u) = -u + o(u^2)$ tend vers 0, $\ln u$ tend vers $-\infty$.

$-\frac{\ln(1-u)}{\ln u}$ tend donc aussi vers 0, par valeurs inférieures.

$\frac{\ln(-\ln u)}{(-\ln u)}$ tend vers 0 (la puissance $-\ln u$ l'emporte sur le logarithme), par valeurs supérieures,

donc finalement, $\frac{1}{x} \ln \frac{e^x - 1}{x}$ tend vers 1, par valeurs inférieures.

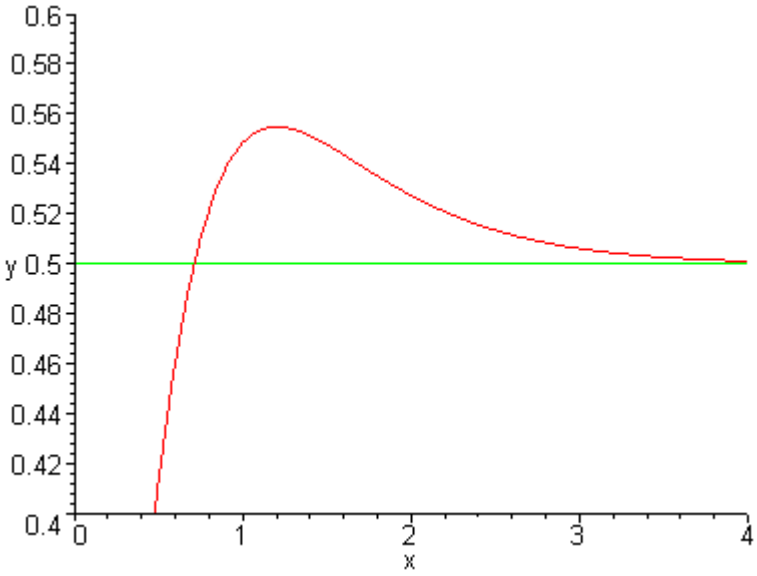
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} \ln \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

HAUT

8°/ Huitième limite.

HAUT

$\lim_{x \to +\infty} \sinh x \, e^{-x \tanh x}$



$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \frac{1}{2} e^x (1 - e^{-2x})$

$\tanh x = 1 - 2 e^{-2x} + o(e^{-4x})$ (Voir sixième limite)

$-x \tanh x = -x + 2 x e^{-2x} + o(x e^{-4x})$

Lorsque x tend vers plus l'infini, $x e^{-2x}$ tend vers 0 (l'exponentielle l'emporte sur la puissance), $x e^{-4x}$ tend vers 0.

$e^{-x \tanh x} = e^{-x} e^{2 x e^{-2x} + o(x e^{-4x})}$

$\sinh x \, e^{-x \tanh x} = \frac{1}{2} e^x (1 - e^{-2x}) e^{-x} e^{2 x e^{-2x} + o(x e^{-4x})} = \frac{1}{2}(1 - e^{-2x}) e^{2 x e^{-2x} + o(x e^{-4x})}$

Lorsque x tend vers plus l'infini, e^{-2x} tend vers 0, $e^{2 x e^{-2x} + o(x e^{-4x})}$ tend vers $e^0 = 1$, donc $\sinh x \, e^{-x \tanh x}$ tend vers $\frac{1}{2}$.

$$\lim_{x \to +\infty} \sinh x \, e^{-x \tanh x} = \frac{1}{2}$$

HAUT

Chapitre 9. Développements limités.

Enoncés.

Exercice 24. Limite en 0 de 5 fonctions bien tordues.

Montrer l'existence et calculer les limites suivantes :

1°/ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \dfrac{Arctan\left(x^2-x^2\cos x\right)}{\left(1-\sqrt{\cos x}\right)\ln\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)}$

2°/ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \dfrac{\ln(\cosh x)-\ln(\cos x)}{\sqrt{\cosh x}+\sqrt{\cos x}-2}$

3°/ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x}\,e^x+x^{1515}-1789\ln x}{x+\left(\sqrt{x^3+x^2}-\sqrt{x^3}\right)\cosh x}$

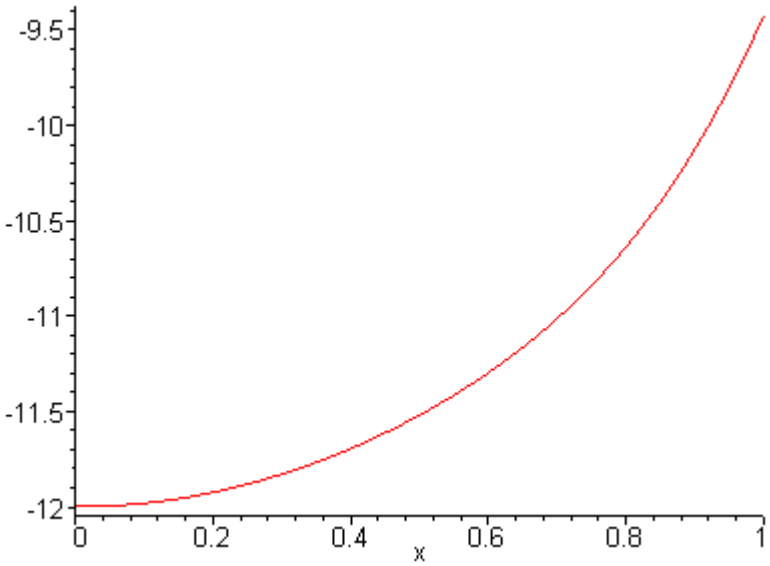
4°/ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \dfrac{2(1-\cos x)\sin x-x^3\sqrt[4]{1-x^2}}{\sin^5 x-x^5}$

5°/ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \left[\dfrac{x^2-\sin^2 x}{(\sin x-x\cos x)^2}-\dfrac{3}{x^2}\right]$

Solution.

1°/ Première limite.

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \dfrac{Arctan\left(x^2-x^2\cos x\right)}{\left(1-\sqrt{\cos x}\right)\ln\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)}$



La fonction dont on cherche la limite en 0 est paire : s'il y a une limite en 0, c'est la même à droite et à gauche.
Pour $x > 0$, et au voisinage de 0, toutes les fonctions qui interviennent dans l'expression, sont de classe C^∞. On peut donc les développer suivant la formule de Taylor-Lagrange à n'importe quel ordre.
On connaît déjà les développements limités au voisinage de 0 :

$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^4)$; $x^2(1 - \cos x) = \frac{1}{2}x^4 + o(x^6)$

$\text{Arctan}\, x = x + o(x^3)$; $\text{Arctan}\,(x^2(1 - \cos x)) = x^2(1 - \cos x) + o((x^2(1 - \cos x))^3)$

$\text{Arctan}\,(x^2(1 - \cos x)) = \frac{1}{2}x^4 + o(x^6)$

$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + o(x^2)$; $\sqrt{\cos x} = \sqrt{1 - \frac{x^2}{2} + o(x^4)} = 1 - \frac{1}{4}x^2 + o(x^4)$; $1 - \sqrt{\cos x} = \frac{1}{4}x^2 + o(x^4)$

$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^5)$; $\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{1}{6}x^2 + o(x^4)$

$\ln(1 + x) = x + o(x^2)$; $\ln(1 - \frac{1}{6}x^2 + o(x^4)) = -\frac{1}{6}x^2 + o(x^4)$

$(1 - \sqrt{\cos x})\ln\frac{\sin x}{x} = (\frac{1}{4}x^2 + o(x^4))(-\frac{1}{6}x^2 + o(x^4)) = -\frac{1}{24}x^4 + o(x^6)$

$$\frac{\text{Arctan}\left(x^2 - x^2\cos x\right)}{\left(1-\sqrt{\cos x}\right)\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)} = \frac{\frac{1}{2}x^4 + o\left(x^6\right)}{-\frac{1}{24}x^4 + o\left(x^6\right)}$$

Lorsque x est diffrérent de 0, on peut simplifier numérateur et dénominateur par x^4.
Avec $\frac{1}{1+u} = 1 + o(u)$, il reste :

$$\frac{\text{Arctan}\left(x^2 - x^2\cos x\right)}{\left(1-\sqrt{\cos x}\right)\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)} = -12 + o(x^2)$$

Lorsque x tend vers 0, on obtient donc :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{\text{Arctan}\left(x^2 - x^2\cos x\right)}{\left(1-\sqrt{\cos x}\right)\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)} = -12.$$

2°/ Deuxième limite.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{\ln(\cosh x) - \ln(\cos x)}{\sqrt{\cosh x} + \sqrt{\cos x} - 2}$$

Au voisinage de 0 :

$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^6)$

$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^6)$

$\ln(1 + u) = u + o(u^2)$

$\ln(\cosh x) = \frac{x^2}{2} + o(x^4)$

$\ln(\cos x) = -\frac{x^2}{2} + o(x^4)$

$\ln(\cosh x) - \ln(\cos x) = x^2 + o(x^4) = x^2(1 + o(x^2))$

$\sqrt{1+u} = 1 + \frac{1}{2}u - \frac{1}{8}u^2 + o(u^3)$

$u = -(1 - \cos x) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^6) \Rightarrow \sqrt{\cos x} = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}\right) - \frac{1}{8}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}\right)^2 + o(x^6)$

$\sqrt{\cos x} = 1 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{96}x^4 + o(x^6)$

$u = \cosh x - 1 = \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^6) \Rightarrow \sqrt{\cosh x} = 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right) - \frac{1}{8}\left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right)^2 + o(x^6)$

$\sqrt{\cosh x} = 1 + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{96}x^4 + o(x^6)$

$\sqrt{\cos x} + \sqrt{\cosh x} - 2 = -\frac{1}{48}x^4 + o(x^6) = -\frac{1}{48}x^4(1 + o(x^2))$

$\frac{1}{1+o(x^2)} = 1 + o(x^2)$

$\frac{\ln(\cosh x) - \ln(\cos x)}{\sqrt{\cosh x} + \sqrt{\cos x} - 2} = -\frac{48}{x^2}(1 + o(x^2))$

Lorsque x tend vers 0, $-\frac{48}{x^2}$ tend vers moins l'infini et $\frac{\ln(\cosh x) - \ln(\cos x)}{\sqrt{\cosh x} + \sqrt{\cos x} - 2}$ n'a pas de limite finie :

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \frac{\ln(\cosh x) - \ln(\cos x)}{\sqrt{\cosh x} + \sqrt{\cos x} - 2} = -\infty.$$

3°/ Troisième limite.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x}\, e^x + x^{1515} - 1789 \ln x}{x + \left(\sqrt{x^3 + x^2} - \sqrt{x^3}\right)\cosh x}$$

Lorsque x tend vers plus l'infini, $\sqrt{x}\, e^x + x^{1515} - 1789 \ln x$ est équivalent à $\sqrt{x}\, e^x$ (l'exponentielle l'emporte sur la puissance et sur le logarithme).

$\sqrt{x^3 - x^2} = \sqrt{x^3}\sqrt{1 - \frac{1}{x}} = \sqrt{x^3}\left(1 - \frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)$

$\sqrt{x^3 - x^2} - \sqrt{x^3} = -\frac{1}{2}\sqrt{x} + o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ est équivalent à $-\frac{1}{2}\sqrt{x}$

$\cosh x = \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{-2x}$ est équivalent à $\frac{1}{2}e^x$

$(\sqrt{x^3 - x^2} - \sqrt{x^3})\cosh x$ est équivalent à $-\frac{1}{4}\sqrt{x}\, e^x$.

Comme l'exponentielle l'emporte sur la puissance, $x + (\sqrt{x^3 - x^2} - \sqrt{x^3})\cosh x$ est équivalent à $-\frac{1}{4}\sqrt{x}\, e^x$.

Donc $\frac{\sqrt{x}\, e^x + x^{1515} - 1789 \ln x}{x + \left(\sqrt{x^3 + x^2} - \sqrt{x^3}\right)\cosh x}$ est équivalent à $-\frac{1}{4}$:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x}\, e^x + x^{1515} - 1789 \ln x}{x + \left(\sqrt{x^3 + x^2} - \sqrt{x^3}\right)\cosh x} = -\frac{1}{4}$$

4°/ Quatrième limite.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{2(1-\cos x)\sin x - x^3\sqrt[4]{1-x^2}}{\sin^5 x - x^5}$$

Au voisinage de 0, toutes les fonctions qui interviennent sont indéfiniment dérivables :

$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^7)$

$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + o(x^8)$

$2(1-\cos x)\sin x = 2\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \frac{x^6}{720}\right)\left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}\right) + o(x^9) = x^3 - \frac{1}{4}x^5 + \frac{1}{40}x^7 + o(x^9)$

$(1-u)^{\frac{1}{4}} = 1 - \frac{1}{4}u - \frac{3}{16}u^2 + o(u^3)$

$(1-x^2)^{\frac{1}{4}} = 1 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{16}x^4 + o(x^6)$

$x^3(1-x^2)^{\frac{1}{4}} = x^3 - \frac{1}{4}x^5 - \frac{3}{16}x^7 + o(x^9)$

$2(1-\cos x)\sin x - x^3(1-x^2)^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{40}x^7 + \frac{3}{16}x^7 + o(x^9) = \frac{17}{80}x^7 + o(x^9)$

$\sin^5 x = \left(x - \frac{x^3}{6}\right)^5 + o(x^9) = x^5 - \frac{5}{6}x^7 + o(x^9)$

$$\frac{2(1-\cos x)\sin x - x^3\sqrt[4]{1-x^2}}{\sin^5 x - x^5} = \frac{\frac{17}{80}x^7 + o(x^9)}{-\frac{5}{6}x^7 + o(x^9)}$$

Pour x différent de 0, on peut simplifier par x^7 le numérateur et le dénominateur. Il reste, avec $\frac{1}{1+u} = 1 + o(u)$:

$$\frac{2(1-\cos x)\sin x - x^3\sqrt[4]{1-x^2}}{\sin^5 x - x^5} = -\frac{17}{80}\times\frac{6}{5} + o(x^2) = -\frac{51}{200} + o(x^2)$$

Et lorsque x tend vers 0 :

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{2(1-\cos x)\sin x - x^3\sqrt[4]{1-x^2}}{\sin^5 x - x^5} = -\frac{51}{200}}$$

5°/ Cinquième limite.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \left[\frac{x^2 - \sin^2 x}{(\sin x - x\cos x)^2} - \frac{3}{x^2}\right]$$

Au voisinage de 0, pour x différent de 0, toutes les fonctions qui interviennent sont indéfiniment

dérivables:

$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5\,040} + o(x^9)$

$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + o(x^8)$

$\sin x - x\cos x = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{30}x^5 + \frac{1}{840}x^7 + o(x^9) = \frac{x^3}{3}\left(1 - \frac{1}{10}x^2 + \frac{1}{280}x^4 + o(x^6)\right)$

$(\sin x - x\cos x)^2 = \frac{1}{9}x^6\left(1 - \frac{1}{5}x^2 + \frac{1}{100}x^4 + \frac{1}{140}x^4 + o(x^6)\right)$

$(\sin x - x\cos x)^2 = \frac{1}{9}x^6\left(1 - \frac{1}{5}x^2 + \frac{3}{175}x^4 + o(x^6)\right)$

$3(\sin x - x\cos x)^2 = \frac{1}{3}x^6\left(1 - \frac{1}{5}x^2 + \frac{3}{175}x^4 + o(x^6)\right)$

$3(\sin x - x\cos x)^2 = \frac{1}{3}x^6 - \frac{1}{15}x^8 + \frac{1}{175}x^{10} + o(x^{12})$

$x^2(\sin x - x\cos x)^2 = \frac{1}{9}x^8 - \frac{1}{45}x^{10} + \frac{1}{525}x^{12} + o(x^{14})$

$\sin x = x\left(1 - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{120}x^4 - \frac{1}{5\,040}x^6 + o(x^8)\right)$

$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{120}x^4 - \frac{1}{5\,040}x^6 + o(x^8)$

$\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 = \left(1 - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{120}x^4 - \frac{1}{5040}x^6\right)^2 + o(x^8)$

$\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 = 1 - \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{36}x^4 + \frac{1}{60}x^4 - \frac{1}{2\,520}x^6 - \frac{1}{360}x^6 + o(x^8)$

$\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 = 1 - \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{45}x^4 - \frac{1}{315}x^6 + o(x^8)$

$\sin^2 x = x^2 - \frac{1}{3}x^4 + \frac{2}{45}x^6 - \frac{1}{315}x^8 + o(x^{10})$

$x^2\sin^2 x = x^4 - \frac{1}{3}x^6 + \frac{2}{45}x^8 - \frac{1}{315}x^{10} + o(x^{12})$

$x^4 - x^2\sin^2 x = \frac{1}{3}x^6 - \frac{2}{45}x^8 + \frac{1}{315}x^{10} + o(x^{12})$

$x^4 - x^2\sin^2 x - 3(\sin x - x\cos x)^2 = -\frac{2}{45}x^8 + \frac{1}{15}x^8 + \frac{1}{315}x^{10} - \frac{1}{175}x^{10} + o(x^{12})$

$x^4 - x^2\sin^2 x - 3(\sin x - x\cos x)^2 = \frac{1}{45}x^8 - \frac{4}{1575}x^{10} + o(x^{12})$

$$\frac{x^2 - \sin^2 x}{(\sin x - x\cos x)^2} - \frac{3}{x^2} = \frac{x^4 - x^2\sin^2 x - 3(\sin x - x\cos x)^2}{x^2(\sin x - x\cos x)^2} = \frac{\frac{1}{45}x^8 - \frac{4}{1575}x^{10} + o(x^{12})}{\frac{1}{9}x^8 - \frac{1}{45}x^{10} + o(x^{12})}$$

Lorsque x est différent de 0, on peut simplifier par $\frac{1}{45}x^8$:

$$\frac{x^2 - \sin^2 x}{(\sin x - x\cos x)^2} - \frac{3}{x^2} = \frac{1}{5}\frac{1 - \frac{4}{35}x^2 + o(x^4)}{1 - \frac{1}{5}x^2 + o(x^4)} = \frac{1}{5}\left(1 - \frac{4}{35}x^2\right)\left(1 + \frac{1}{5}x^2\right) + o(x^4) \text{ car } \frac{1}{1-u} = 1 + u + o(u^2).$$

$$\frac{x^2 - \sin^2 x}{(\sin x - x\cos x)^2} - \frac{3}{x^2} = \frac{1}{5}\left(1 + \frac{3}{35}x^2\right) + o(x^4)$$

$$\frac{x^2 - \sin^2 x}{(\sin x - x\cos x)^2} - \frac{3}{x^2} = \frac{1}{5} + \frac{3}{175}x^2 + o(x^4))$$

Lorsque x tend vers 0, $\dfrac{x^2 - \sin^2 x}{(\sin x - x\cos x)^2} - \dfrac{3}{x^2}$ tend vers $\dfrac{1}{5}$.

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \left[\frac{x^2 - \sin^2 x}{(\sin x - x\cos x)^2} - \frac{3}{x^2} \right] = \frac{1}{5}.$$

Chapitre 9. Développements limités.

Enoncés.

Exercice 25. Graphe de *exp*(1/*x*) × *sqrt*(*x*(*x*+2)).

Soit $X = \{ x \in \mathbb{R}^* \mid x(x+2) \geqslant 0 \}$ et $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, l'application définie par : $f(x) = e^{\frac{1}{x}} \sqrt{x(x+2)}$. Etudier les propriétés de f et tracer son graphe.	

Solution.

1°/ Ensemble de définition.

La fonction f est définie pour $x \neq 0$ et $x(x+2) \geqslant 0$, c'est-à-dire dans la réunion d'intervalles: $]-\infty, -2] \cup]0, +\infty[$.

2°/ Continuité et dérivabilité.

Dans l'ouvert $]-\infty, -2[\cup]0, +\infty[$, f est composée d'applications de classe C^∞. Elle est donc de classe C^∞.

3°/ Valeur aux bornes.

Lorsque x tend vers l'infini, $\frac{1}{x}$ tend vers 0, $e^{\frac{1}{x}}$ tend vers 1, $x(x+2)$ est équivalent à x^2,

et $f(x)$ est équivalent à $\sqrt{x^2} = |x|$, qui tend vers plus l'infini.

Lorsque x tend vers 0 par valeurs supérieures, $\frac{1}{x}$ tend vers plus l'infini, $e^{\frac{1}{x}}$ tend vers plus l'infini, $x(x+2)$ est équivalent à $2x$.

$f(x)$ est équivalent à $e^{\frac{1}{x}}\sqrt{2x}$, qui tend vers plus l'infini (l'exponentielle l'emporte sur la puissance).
Asymptote verticale en $x = 0$.

$f(-2) = 0$.

4°/ Développement limité au voisinage de l'infini.

Posons $u = \frac{1}{x}$, $f(x) = e^u \sqrt{x^2}(1+2u)^{\frac{1}{2}} = |x| [(1 + u + \frac{1}{2}u^2)(1 + u - \frac{1}{2}u^2) + o(u^3)] = |x| [1 + 2u + u^2 + o(u^3)]$

$f(x) = |x| + 2\,sgn(x) + \frac{1}{|x|} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$

Pour x tendant vers plus l'infini : $f(x) = x + 2 + \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$,
asymptote oblique d'équation $y = x + 2$, la courbe est au-dessus de l'asymptote.
Pour x tendant vers moins l'infini : $f(x) = -x - 2 - \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$,
asymptote oblique d'équation $y = -x - 2$, la courbe est au-dessus de l'asymptote.

5°/ Dérivée.

$ln(f(x)) = \frac{1}{x} + \frac{1}{2} ln|x| + \frac{1}{2} ln|x+2|$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2x} + \frac{1}{2(x+2)} = \frac{-2(x+2)+x(x+2)+x^2}{2x^2(x+2)} = \frac{x^2-2}{x^2(x+2)}$$

$$f'(x) = \frac{x^2-2}{x^2(x+2)} f(x) = e^{\frac{1}{x}} \frac{x^2-2}{x^2(x+2)} \sqrt{x(x+2)}.$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{x^2-2}{x\sqrt{x(x+2)}} e^{\frac{1}{x}}.}$$

Lorsque x tend vers -2 par valeur inférieure, $\frac{1}{x}$ tend vers $-\frac{1}{2} < 0$, $e^{\frac{1}{x}}$ tend vers $\frac{1}{\sqrt{e}}$, $x^2 - 2$ tend vers 2, $f'(x)$ tend vers moins l'infini.
Le point $(-2, 0)$ est un **point à tangente verticale**.

Lorsque x tend vers 0 par valeurs supérieures, $e^{\frac{1}{x}}$ tend vers plus l'infini, $x^2 - 2$ tend vers -2, $(x+2)^{-\frac{1}{2}}$ tend vers $\frac{1}{\sqrt{2}}$, $x^{-\frac{3}{2}}$ tend vers plus l'infini.

Au total, $f'(x)$ tend vers moins l'infini, ce qui confirme l'**asymptote verticale en $x = 0$**.

Lorsque x tend vers moins l'infini, $f(x) = -x - 2 - \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ montre que la dérivée tend vers -1 et que la courbe est au-dessus de l'asymptote, donc la dérivée tend vers -1 par valeurs inférieures, elle diminue.
Or à partir de -2, où la dérivée vaut moins l'infini, la dérivée augmente lorsque x diminue : si elle finit par diminuer, c'est qu'elle atteint, par continuité des dérivées, entre -2 et moins l'infini, un maximum.
La dérivée seconde est nulle pour $x^2 + 4x + 2 = 0$, $(x+2)^2 = 2$, $x = -(2 + \sqrt{2})$ (en $x = -2 + \sqrt{2}$, f n'est pas définie).
Il y a donc un **point d'inflexion** en $x = -(2 + \sqrt{2})$, qui correspond à un **maximum de la dérivée** (dérivée troisième négative).

Hors ce point d'inflexion, la dérivée seconde ne s'annule pas : elle conserve le même signe négatif de moins l'infini à $-(2 + \sqrt{2})$, puis positif de $-(2 + \sqrt{2})$ à -2, puis positif à nouveau de 0 à plus l'infini.

Lorsque x tend vers plus l'infini, $f(x) = x + 2 + \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ montre que la dérivée tend vers 1.

Entre $x = 0$, où la dérivée vaut moins l'infini, et $x = +\infty$, où la dérivée vaut 1, il existe donc un point

où la dérivée est nulle.

$f'(x) = 0$ pour $x^2 = 2$, donc $x = \sqrt{2}$ (pour $x = -\sqrt{2}$, f n'est pas définie).
$f(\sqrt{2}) = e^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\sqrt{2+2\sqrt{2}}$.
Pour connaître la nature de ce **point critique**, il faut étudier la **dérivée seconde** :

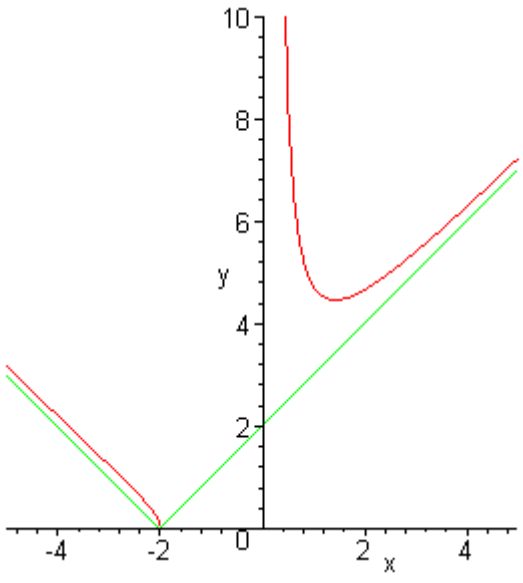
$$f''(x) = 2\,\frac{x^2+4x+2}{x^3(x+2)\sqrt{x(x+2)}}e^{\frac{1}{x}}$$

En $x = \sqrt{2}$, la dérivée seconde vaut $f''(\sqrt{2}) = \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}e^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$, elle est positive, la concavité de la courbe est dirigée vers le haut.

Il y a donc un **minimum**, à tangente horizontale, d'abscisse $x = \sqrt{2}$. C'est le seul point critique dans l'ouvert $]-\infty, -2[\cup]0, +\infty[$.

6°/ Tableau de variations.

x	$-\infty$		$-(2+\sqrt{2})$		-2		0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$	-1	<0	$f''(x) = 0$	<0	$-\infty$	non définie	$-\infty$	<0	0	>0	$+1$
$f(x)$	$+\infty$	décroît	inflexion	décroît	0	non définie	$+\infty$	décroît	minimum	croît	$+\infty$



CALCUL DIFFERENTIEL

EXERCICE 1.

1.1. Pour $y = 3x^2 - 12x + 4$, trouver le point où la tangente à la courbe au point $x = 1$, $y = -5$ coupe l'axe des x.

1.2. Pour $y = 2x^3 - 7x + 2$, trouver le point où la tangente à la courbe au point $x = 2$, $y = 4$ coupe l'axe des x.

1.3. Déterminer la fonction $x^3 + \lambda x^2 + \mu x$ de façon qu'elle soit maximum pour $x = a$ et minimum pour $x = b$.

EXERCICE 2.

Calculer la dérivée de la fonction y par rapport à la variable x.

2.1. $y = e^{\cos\sqrt{x}}$.

2.2. $y = \sin(\ln|x|)$.

2.3. $y = \ln\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{1+x^2}+1}$.

2.4. $y = \ln\left|\cos\dfrac{1}{x}\right|$.

2.5. $y = \dfrac{1}{(3x^4-2x^2+1)^2}$.

2.6. $y = \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x+1}$

2.7. $y = 3^{x^2+1}$

2.8. $y = \log_{10} x \times \log_{10}\dfrac{1}{x}$

2.9. $y = \ln(3x - \sin x)$

EXERCICE 3.

3.1. Calculer la dérivée n-ième de $y = \dfrac{1}{x+a}$.

3.2. Montrer que l'on peut écrire : $\dfrac{1}{x^2-1} = \dfrac{\lambda}{x-1} + \dfrac{\mu}{x+1}$, λ et μ étant des constantes convenables.

3.3. En déduire la dérivée n-ième de $\dfrac{1}{x^2-1}$.

EXERCICE 4.

Etude de la fonction $y = Atan\ \frac{1-x^2}{2x}$.

- Rappel: la fonction $x \mapsto Atan\ x$ fait correspondre à un $x \in R$, le nombre réel y de l'intervalle ouvert $]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[$ tel que $tan\ y = x$.
- Domaine de définition de la fonction.
- Symétries.
- Limites aux bornes du domaine de définition.
- Dérivée quand elle existe.
- Dérivée seconde. Inflexions. Concavité.
- Tableau de variations.
- Courbe représentative (sur papier millimétré, ou à l'aide d'un tableur).

EXERCICE 5.

Appliquer la formule des accroissements finis à $\sqrt{x}$ dans l'intervalle [0 , x].
On posera $c = \theta x$. Exprimer θ en fonction de x, étudier ses variations et tracer la courbe représentative.

EXERCICE 6.

Etudier au voisinage de l'infini la fonction $y = 2\ x\ Atan\ x + \frac{x-1}{x^2+1}$. Courbe représentative.

EXERCICE 7.

Courbe représentative de $y = \sqrt[3]{x^2(x-3)}$ et étude au voisinage de l'infini.

EXERCICE 8.

Soit la courbe *(C)* représentant les variations de $y = \sqrt{a\,x}$, $a > 0$, dans un système d'axes rectangulaires *Ox, Oy*. Soit *M* un point de *(C)* dont la projection orthogonale sur *x'x* est *H*. On porte sur *Oy*, à partir de *O* une longueur *OP* égale à la longueur de la corde *OM*. La droite *PM* rencontre *x'x* en *Q*.

1. Montrer que *Q* tend vers une limite *A* quand *M* tend vers *O*.
2. Calculer la limite vers laquelle tend, dans les mêmes conditions, $\frac{\overline{AQ}}{\overline{OH}}$.
3. On pose $\overline{OH} = x$. Calculer, *x* étant l'infiniment petit principal, la partie principale de l'infiniment petit

$$u = \overline{AQ} - \frac{3}{2}\,\overline{OH}.$$

EXERCICE 9.

Calculer les trois premiers termes non nuls des parties principales du développement limité au voisinage de 0, des fonctions: $\frac{x}{\sin x}$, $\frac{x^2}{\sin^2 x}$, $\cos^2 x$, $\tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$, $Asin\left(x + \frac{1}{2}\right)$,$\sqrt{5\,x+3}$.

EXERCICE 10.

Calculer le développement limité au voisinage de 0 de la fonction *y*.

1. $y = \sin x$.
2. $y = \cos x$.
3. $y = \ln(1 + x)$
4. $y = a^x$, $a > 0$.

EXERCICE 11.

Trouver la limite, lorsque *x* tend vers zéro, de la fonction *y*.

1. $y = (\cos x)^{\frac{1}{x}}$
2. $y = x^x$
3. $y = \frac{\ln(1-\cos x)}{\ln x}$
4. $y = \left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$

EXERCICE 12.

1. On considère la famille de fonctions de x définies pour $x > 0$ par $f_\alpha(x) = x^{1-x^\alpha}$, le paramètre α pouvant prendre toutes les valeurs réelles. A chaque valeur de α correspond une courbe C_α d'équation $y = f_\alpha(x)$.

   1° Etudier la fonction $f_\alpha(x)$, α étant fixe et x variable.

   a) Continuité, existence et calcul de la dérivée, variations.
   b) Etude au voisinage de $x = 0$.
   c) Etude de la branche infinie de C_α pour x tendant vers l'infini. Pour quelles valeurs de α, cette branche infinie a-t-elle une asymptote ?

2° x étant fixe, la valeur de $f_\alpha(x)$ est une fonction de α. Etudier cette fonction. En déduire la région du premier quadrant ($x > 0$, $y > 0$) balayée par les courbes C_α . Préciser les points communs à deux courbes C_{α_1} et C_{α_2} pour $\alpha_1 \neq \alpha_2$.

3° Déduire de l'étude précédente les différents types de courbes C_α suivant la valeur de α et construire sur une même figure une courbe de chaque type.

2. On se donne un point $M(x,y)$ du premier quadrant et l'on veut résoudre le problème de savoir si une courbe C_α passe par M en calculant la valeur de α pour qu'il en soit ainsi. Discuter soigneusement la possibilité de ce calcul. Montrer que si α existe, il est donné par la formule :

$$\alpha = \frac{1}{\ln x}\left[\ \ln\left|\ \ln\frac{x}{y}\ \right| - \ln|\ln x|\ \right].$$

Où doit se trouver M pour que α soit plus grand que 0 ? Comparer les résultats trouvés avec ceux du 2° de la 1^{e} partie.

EXERCICE 13.

I. On considère la fonction f définie, pour $x > 0$, par :

$$f(x) = \frac{3}{4}\, ln\, \frac{x}{2} + \frac{1}{8}\, ln\, \frac{x^2+4}{8} - 2\, Atan\, \frac{x}{2} + \frac{\pi}{2}.$$

Vérifier que $f(2) = 0$. Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$. Montrer que, pour $x > 0$, le signe de $f''(x)$ est lié à celui de $\varphi(x) = -x^4 + 8x^3 - 5x^2 - 12$. Montrer que l'équation $f''(x) = 0$ admet deux racines positives α et β que l'on ne cherchera pas à calculer. Vérifier que l'une d'elles, α, est comprise entre 1 et 2, et que l'autre, β, est comprise entre 7 et 8.

II. Montrer que, lorsque x tend vers l'infini, $\Delta x = f(x) - ln\, x$ tend vers une limite finie λ que l'on précisera. On pose $x = \frac{1}{t}$. Donner le développement limité au 2e ordre inclus de $\Delta(\frac{1}{t})$ en prenant t pour infiniment petit principal, $t > 0$. Former le développement limité au 2e ordre inclus de $e^{\Delta\left(\frac{1}{t}\right)}$.

III. Le plan étant rapporté à deux axes de coordonnées rectangulaires :

a) Construire la courbe (C) d'équation $y = f(x)$. Etudier sa concavité.

b) Construire la courbe (Γ) d'équation $y = e^{f(x)}$. Préciser la position de la branche infinie de (Γ) par rapport à l'asymptote rectiligne correspondante. On n'étudiera pas la concavité mais on déterminera la tangente au point d'arrêt.

IV. Calculer l'intégrale définie $G(u) = \int_2^u (\Delta(x) - \lambda)\, dx$ avec $u > 0$. Déterminer la constante k telle que la différence $G(u) - k\, ln\, u$ ait une limite finie lorsque u tend vers l'infini. Quelle est cette limite ?

EXERCICE 14.

1. Etudier, pour $0 < x < 1$, les variations de la fonction $u = x + \frac{x^3}{3} - A\sin x$. On montrera que, à l'intérieur de l'intervalle considéré, la dérivée de u s'annule pour une seule valeur de x. Déduire de cette étude que le rapport $\frac{A\sin x - x}{x^2}$ a pour limite 0 quand x tend vers 0.
2. On considère la fonction $f(x) = (x^2 - 1)\, A\sin \frac{1}{x}$. Pour quelles valeurs de x, cette fonction est-elle définie ? Variations et courbe représentative. On déterminera l'asymptote de *(C)* et on étudiera la concavité de *(C)*. La position de la courbe par rapport à son asymptote sera déduite du sens de la concavité.
3. On se propose de calculer, pour $x > 1$, l'intégrale indéfinie :

$$I = \int (x^2 - 1)\, A\sin \frac{1}{x}\, dx$$

On se ramènera d'abord, par une intégration par parties à une intégrale où ne figure plus le symbole *Asin*. Pour calculer cette nouvelle intégrale, on pourra faire le changement de variable $\theta = Ach\, x$, ou bien la mettre sous la forme d'une somme d'intégrales $\int \frac{A\, dx}{\sqrt{x^2 - 1}} + \int B\, dx \sqrt{x^2 - 1}$ où A et B sont des constantes.

Déterminer, si possible sans nouveau calcul, la valeur de I pour $x < -1$.

4. Etudier les variations de la fonction $\varphi(x) = x + \alpha \frac{x^3}{3} - A\sin x$, lorsque x croît de 0 à 1. En se limitant aux valeurs positives du paramètre α, on montrera que, pour $\alpha > \frac{1}{2}$, la dérivée $\varphi'(x)$ s'annule une seule fois dans l'intervalle $0 < x < 1$ et que, pour $\alpha \leq \frac{1}{2}$, elle ne s'annule pas dans cet intervalle. Déduire des variations de $\varphi(x)$ que le rapport $\frac{A\sin x - x}{x^3}$ a pour limite $\frac{1}{6}$ lorsque x tend vers 0.

   A partir de ce dernier résultat, retrouver la position par rapport à l'asymptote des arcs infinis de la courbe *(C)* étudiée dans la question 2.

EXERCICE 15.

Variations de la fonction $y = \ln(ch\, x - m\, sh\, x)$. Discuter suivant les valeurs de m les allures de la courbe. Asymptotes. On montrera qu'on ne réduit pas le problème en supposant $m > 0$.

EXERCICE 16.

On désigne par λ un nombre réel. On considère en axes rectangulaires la courbe C_λ d'équation

$$x\,(\lambda - e^{\frac{x}{y}}) + e^{\frac{x}{y}} = 0$$

1. Calculer y en fonction de x et discuter suivant les valeurs de λ l'intervalle de définition de $f(x)$. Discuter suivant les valeurs de λ, la limite de $\frac{y}{x}$ quand x tend vers l'infini. Si cette limite m existe, déterminer la limite, si elle existe, de $y - m\,x$, quand x tend vers l'infini.
2. Lieu géométrique des points de C_λ où la tangente est parallèle à Ox. Tracer ce lieu.
3. Lieu géométrique des points de C_λ où $y'' = 0$.
4. Tracer les diverses courbes C_λ . On ne cherchera pas à déterminer avec précision les valeurs des extrema si elles existent. On précisera les tangentes aux points d'arrêt.

EXERCICE 17.

On considère les deux fonctions :

$$x = a\left(t - \tanh t + \frac{\sinh\varphi}{\cosh t} \right)$$

$$y = a\left(\frac{1}{\cosh t} + \sinh\varphi \tanh t \right)$$

de la variable réelle t et où φ est une constante réelle quelconque et a une longueur donnée.

1. On pose $t = \varphi + u$ et on prend u comme infiniment petit principal. Calculer les trois premiers termes des développements des fonction x et y suivant les puissances entières de u. Calculer la partie principale de l'infiniment petit $y - a\cosh\varphi + \frac{x - a\varphi}{\sinh\varphi}$.
2. Construire la courbe C_φ dont les équations paramétriques ont été données plus haut. Suivre la déformation de C_φ quand φ varie. Quel est le lieu Γ de son point de rebroussement ? Préciser l'orientation relative de la tangente à C_φ en son point de rebroussement et de la tangente à Γ en ce même point.

EXERCICE 18.

1. Dans un système d'axes rectangulaires, on construit la courbe (C_1) de coordonnées :
   $x = cos\ 4\ \theta$
   $y = sin\ 3\ \theta$
2. Pente de la tangente au point $\theta = \frac{\pi}{2}$.
3. Coordonnées des points doubles de (C_1). Pente des tangentes en ces points.
4. Construire (C_2) de coordonnées : $x = cosh\ 4\ \varphi$
   $y = sinh\ 3\ \varphi$

Etudier la branche infinie de (C_2).

5. Monter que (C_1) et (C_2) sont deux arcs d'une même courbe *C*. On donnera la représentation de cette courbe complète au moyen d'un nouveau paramètre *t* prenant sur (C_1) et (C_2) des valeurs différentes d'expression très simple en fonction des paramètres θ et φ.
6. Trouver les relations qui existent entre les *t* des points alignés sur la courbe *C*.

EXERCICE 19.

On considère la fonction $y = 1 + x + \frac{2x\ ln|x|}{1-x}$.

1. Pour quelles valeurs de *x* la fonction est-elle définie ?
2. Etudier *y* pour *x* infiniment grand, plus grand que 0 ou plus petit que 0. La courbe a-t-elle une direction asymptotique ? une asymptote ?
3. Calculer $\frac{dy}{dx}$. On écrit $\frac{dy}{dx} = \frac{F(x)}{(1-x)^2}$. Etudier les variations de $F(x)$ et en déduire celles de *y*.
4. *y* et *y'* tendent-elles vers des limites quand *x* tend vers zéro, ou quand *x* tend vers un.
5. On écrit :
   $F(x) = k\ ln\ |x| - G(x)$.

Placer, à l'aide des résultats précédents les courbes représentant les fonctions :

$W_1 = k\ ln\ |x|$
$W_2 = G(x)$

6. Déterminer les deux premiers termes non nuls du développement limité de *y* suivant les puissances de $x - 1 = h$, et $x + 1 = k$.
7. Construire avec soin, en précisant les points et tangentes remarquables, la courbe représentant les variations de *y* en fonction de *x*.

EXERCICE 20.

1. Représentez graphiquement le fonction $y = f(x) = 3\pi - 5{,}1 + 6\,x - 12\,Atan\,x$.
2. Ecrire le développement de Taylor de $f(x)$ limité à l'ordre 3, au voisinage du point $x = 1$. On note $g(x)$ le polynôme de degré 3 apparaissant dans le développement de Taylor ci-dessus. Préciser la position relative des courbes représentatives de $f(x)$ et de $g(x)$ au voisinage de $x = 1$.
3. On considère la suite définie par récurrence par $x_0 = 1$, $x_n = g(x_{n-1})$. Montrer que la suite de terme général x_n est convergente et calculer sa limite.

EXERCICE 21.

Trouver un développement limité généralisé de

$$f(x) = \frac{ch\,x}{sin\,x}$$

au voisinage de 0, à l'ordre 2.

EXERCICE 22.

1° Au voisinage de 0 et à l'ordre 4, donner un développement limité de

$$f(x) = 1 - cos\,x + ln\,(cos\,x)$$

2° Au voisinage de 0 et à l'ordre 1, donner, en justifiant, le développement limité de

$$g(x) = \frac{f(x)}{x^4}$$

EXERCICE 23.

1° Donner un développement limité à l'ordre 1 de

$$f(y) = \sqrt{1+\sqrt{1+y}}$$

pour y au voisinage de 0.

2° En déduire un développement limité, pour x tendant vers $+\infty$, de

$$g(x) = \sqrt{x^2+\sqrt{x^4+1}} - x\sqrt{2}$$

ainsi que la valeur

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)$$

EXERCICE 24.

Calculer les limites des fonctions suivantes lorsque x tend vers 0 :

1. $\frac{(1-\cos x)\,A\tan x}{sh\,x\ \sin x \tan x}$
2. $(1+\sin x)^{\frac{1}{x}}$
3. $\frac{1-\cos(A\sin x)}{\ln(1+x^2)}$
4. $\left(\frac{x}{\sin x}\right)^{\frac{\sin x}{x-\sin x}}$

EXERCICE 1.

1.1. Pour $y = 3x^2 - 12x + 4$, trouver le point où la tangente à la courbe au point $x = 1$, $y = -5$ coupe l'axe des x.

1.2. Pour $y = 2x^3 - 7x + 2$, trouver le point où la tangente à la courbe au point $x = 2$, $y = 4$ coupe l'axe des x.

1.3. Déterminer la fonction $x^3 + \lambda x^2 + \mu x$ de façon qu'elle soit maximum pour $x = a$ et minimum pour $x = b$.

SOLUTION.

1.1. Point commun à une tangente et à l'axe des x.

$$y' = 6x - 12 = 6(x - 2)$$

L'équation de la tangente est :

$$(Y - y) = y'(X - x)$$

Pour $x = 1$, on a : $y = 3 - 12 + 4 = -5$; $y' = -6$; $Y + 5 = -6X + 6$; $Y = -6X + 1$.
Cette tangente coupe l'axe des X au point d'ordonnée $Y = 0$. L'abscisse de ce point est donnée par :

$$0 = -6X + 1 \; ; \; X = \frac{1}{6}.$$

La tangente au point $(1 ; -5)$ coupe l'axe des x au point $(\frac{1}{6} ; 0)$

1.2. Point commun à une tangente et à l'axe des x.

$$y' = 6x^2 - 7$$

L'équation de la tangente est :

$$(Y - y) = y'(X - x)$$

Pour $x = 2$: $y = 16 - 14 + 2 = 4$; $y' = 24 - 7 = 17$; $Y - 4 = 17X - 34$; $Y = 17X - 30$.
Cette tangente coupe l'axe des X au point d'ordonnée $Y = 0$. L'abscisse de ce point est donnée par :

$$0 = 17X - 30 \; ; \; X = \frac{30}{17}.$$

La tangente au point $(2 ; 4)$ coupe l'axe des x au point $(\frac{30}{17} ; 0)$

1.3. Maximum et minimum d'une fonction.

La fonction est maximum ou minimum si sa dérivée est nulle.

$$y' = 3x^2 + 2\lambda x + \mu = 0$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - 3\mu}}{3}$$

Pour qu'il y ait un maximum et un minimum, il faut donc que le discriminant $\lambda^2 - 3\mu$ soit strictement positif. De plus, vers l'infini, y est équivalent au terme de plus haut degré x^3 : il tend vers $+\infty$ si x tend vers $+\infty$, et vers $-\infty$ si x tend vers $-\infty$. Pour qu'il y ait un maximum pour $x = a$ et un minimum pour $x = b$, il faut donc que a soit strictement plus petit que b. Sous ces conditions, on doit avoir :

$$a = \frac{-\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 3\mu}}{3} \text{ et } b = \frac{-\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 3\mu}}{3}$$

$$3(a + b) = -2\lambda \; ; \; \lambda = -\frac{3}{2}(a + b)$$

$$3a \times 3b = 3\mu \; ; \; \mu = 3ab.$$

$$x^3 + \lambda x^2 + \mu x = x^3 - \frac{3}{2}(a + b) x^2 + 3 a b x$$

La fonction $x^3 + \lambda x^2 + \mu x$ qui présente un maximum pour $x = a$ et un minimum pour $x = b$, est la fonction

$$x^3 - \frac{3}{2}(a + b) x^2 + 3 a b x$$

avec la condition supplémentaire $a < b$.

EXERCICE 2.

Calculer la dérivée de la fonction y par rapport à la variable x.

2.1. $y = e^{\cos\sqrt{x}}$.

2.2. $y = \sin(\ln|x|)$.

2.3. $y = \ln\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{1+x^2}+1}$.

2.4. $y = \ln\left|\cos\dfrac{1}{x}\right|$.

2.5. $y = \dfrac{1}{(3x^4-2x^2+1)^2}$.

2.6. $y = \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x+1}$

2.7. $y = 3^{x^2+1}$

2.8. $y = \log_{10} x \times \log_{10}\dfrac{1}{x}$

2.9. $y = \ln(3x - \sin x)$

SOLUTION.

2.1. $y = e^{\cos\sqrt{x}}$.

Posons $u = \sqrt{x}$ et $v = \cos u$. On a : $y = e^v$ et :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dv} \times \frac{dv}{du} \times \frac{du}{dx}$$

$$\frac{dy}{dv} = e^v ; \frac{dv}{du} = -\sin u ; \frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

$$\frac{dy}{dx} = e^v \times (-\sin u) \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = -\frac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}\, e^{\cos\sqrt{x}}$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = -\frac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}\, e^{\cos\sqrt{x}}}$$

2.2. $y = \sin(\ln|x|)$.

Posons $u = \ln|x|$. On a : $y = \sin u$ et :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} = \cos u \times \frac{1}{x}$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{\cos(\ln|x|))}{x}}$$

2.3. $y = ln \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{1+x^2}+1}$.

On a $e^y = \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{1+x^2}+1}.\sqrt{1+x^2} = -\frac{e^y+1}{e^y-1} = -\frac{e^{\frac{y}{2}}+e^{-\frac{y}{2}}}{e^{\frac{y}{2}}-e^{-\frac{y}{2}}} = -\frac{ch\frac{y}{2}}{sh\frac{y}{2}}$

$$tanh^2\frac{y}{2} = \frac{1}{1+x^2}$$

Par dérivation de chaque membre, il vient :

$$2\,tanh\frac{y}{2}\,(1-tanh^2\frac{y}{2})\times\frac{1}{2}\frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$$

$$-\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)\frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}{x^2(1+x^2)^2} = \frac{2}{x\sqrt{1+x^2}}$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{2}{x\sqrt{1+x^2}}}$$

2.4. $y = ln\,|\,cos\,\frac{1}{x}\,|$.

Posons $u = \frac{1}{x}$, $v = cos\,u$. On a : $y = ln\,|\,v\,|$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dv}\times\frac{dv}{du}\times\frac{du}{dx}$$

$$\frac{dy}{dv} = \frac{1}{v}\,;\,\frac{dv}{du} = -\sin u\,;\,\frac{du}{dx} = -\frac{1}{x^2}.$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^2}\times\sin u\times\frac{1}{v} = \frac{1}{x^2}\times\sin\frac{1}{x}\times\frac{1}{\cos u}$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^2}\times tan\frac{1}{x}}$$

2.5. $y = \frac{1}{(3x^4-2x^2+1)^2}$.

y est de la forme u^{-2} avec $u = 3x^4 - 2x^2 + 1$; $u' = 12x^3 - 4x$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = -2\,u^{-3}\,u' = -8\,x\,\frac{x^2-1}{(3x^4-2x^2+1)^3}$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = -8\,x\,\frac{x^2-1}{(3x^4-2x^2+1)^3}}$$

2.6. $y = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x+1}$.

$y = \sqrt{\frac{(x-1)(x+1)}{(x+1)^2}} = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$ est de la forme $y = u^{1/2}$ avec $u = \frac{x-1}{x+1} = 1 - \frac{2}{x+1}$; $u' = \frac{2}{(x+1)^2}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\,\frac{du}{dx} = \frac{u'}{2\sqrt{u}} = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} \times \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)\sqrt{x^2-1}}$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{1}{(x+1)\sqrt{x^2-1}}}$$

2.7. $y = 3^{x^2+1}$.

$y = 3^{x^2+1}$ est de la forme $y = e^u$ avec $u = (x^2 + 1)\ ln\ 3$; $u' = 2\ x\ ln\ 3$.

$$\frac{dy}{dx} = u'\ e^u = 2\ x\ ln\ 3 \times 3^{x^2+1}$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = 2\ x\ ln\ 3 \times 3^{x^2+1}}$$

2.8. $y = log_{10}\ x \times log_{10}\ \frac{1}{x}$.

$$y = log_{10}\ x \times log_{10}\ \frac{1}{x} = -\,(log_{10}\ x)^2 = -\left(\frac{ln\ x}{ln 10}\right)^2 = -\,\frac{1}{(ln 10)^2} \times (ln\ x)^2$$

$$\frac{dy}{dx} = -\,\frac{2\ ln\ x}{x\ (ln 10)^2} = -\,2\,\frac{log_{10}\ x}{x\ ln 10}$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = -\,2\,\frac{log_{10}\ x}{x\ ln 10}}$$

2.9. $y = ln\ (3x - sin\ x)$.

$y = ln\ (3x - sin\ x)$ est de la forme $y = ln\ u$ avec $u = 3\ x - sin\ x$; $u' = 3 - cos\ x$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{u'}{u} = \frac{3 - cos\ x}{3x - sin\ x}$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{3 - cos\ x}{3x - sin\ x}}$$

EXERCICE 3.

3.1. Calculer la dérivée *n*-ième de $y = \dfrac{1}{x+a}$.

3.2. Montrer que l'on peut écrire : $\dfrac{1}{x^2-1} = \dfrac{\lambda}{x-1} + \dfrac{\mu}{x+1}$, λ et μ étant des constantes convenables.

3.3. En déduire la dérivée *n*-ième de $\dfrac{1}{x^2-1}$.

SOLUTION.

3.1. Dérivée *n*-ième de *y*.

$$y^{(0)} = y = \frac{1}{x+a} \; ; y' = -\frac{1}{(x+a)^2}$$

Hypothèse de récurrence : $y^{(n)} = (-1)^n \dfrac{n!}{(x+a)^{n+1}}$

$$y^{(n+1)} = -(-1)^n \frac{n!(n+1)}{(x+a)^{n+2}} = (-1)^{n+1} \frac{(n+1)!}{(x+a)^{n+2}}$$

Le principe de récurrence implique que pour tout entier $n \geq 0$, on a :

$$\boxed{y^{(n)} = (-1)^n \frac{n!}{(x+a)^{n+1}}}$$

3.2. Décomposition en éléments simples.

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{\lambda}{x-1} + \frac{\mu}{x+1}$$

Pour calculer λ, on multiplie par $x - 1$ et on fait $x = 1$: $\lambda = \dfrac{1}{2}$.

Pour calculer μ, on multiplie par $x + 1$ et on fait $x = -1$: $\mu = -\dfrac{1}{2}$.

$$\boxed{\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right)}$$

3.3. Dérivée *n*-ième de $\dfrac{1}{x^2-1}$.

$$\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{1}{x^2-1} \right) = \frac{1}{2}\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{1}{x-1} \right) - \frac{1}{2}\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{1}{x+1} \right) = (-1)^n \frac{n!}{2}\left(\frac{1}{(x-1)^{n+1}} - \frac{1}{(x+1)^{n+1}} \right)$$

$$\boxed{\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{1}{x^2-1} \right) = (-1)^n \frac{n!}{2}\left(\frac{1}{(x-1)^{n+1}} - \frac{1}{(x+1)^{n+1}} \right)}$$

EXERCICE 4.

Etude de la fonction $y = Atan\ \frac{1-x^2}{2x}$.

- Rappel: la fonction $x \mapsto Atan\ x$ fait correspondre à un $x \in R$, le nombre réel y de l'intervalle ouvert $]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[$ tel que $tan\ y = x$.
- Domaine de définition de la fonction.
- Symétries.
- Limites aux bornes du domaine de définition.
- Dérivée quand elle existe.
- Dérivée seconde. Inflexions. Concavité.
- Tableau de variations.
- Courbe représentative (sur papier millimétré, ou à l'aide d'un tableur).

SOLUTION.

1°/ Définition de la fonction.

$$y = Atan\ \frac{1-x^2}{2x} \Leftrightarrow \frac{1-x^2}{2x} = tan\ y \text{ et } -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}.$$

La fonction *Atan* , lue « *arc tangente* », est définie pour toutes les valeurs réelles finies de son argument. Comme la fonction $\frac{1-x^2}{2x}$ est définies pour toutes les valeurs réelles finies autres que 0, la fonction $y = Atan\ \frac{1-x^2}{2x}$ est définie dans les intervalles $]-\infty ; 0[$ et $]0 ; \infty[$.

2°/ Symétries.

Changeons x en $-x$, $y = Atan\ \frac{1-x^2}{2x}$ est changé en $Atan\left(-\frac{1-x^2}{2x}\right) = -Atan\ \frac{1-x^2}{2x} = -y$.

La fonction y est donc une fonction impaire de x. Le point origine O des coordonnées est un centre de symétrie de la courbe représentative. Il suffit donc d'étudier la courbe pour x variant de 0 à $+\infty$: la courbe de $-\infty$ à 0 s'en déduira par symétrie par rapport au point O.

3°/ Limites aux bornes de l'intervalle de définition.

Limites à l'infini.

Si x tend vers l'infini, le terme $1 - x^2$ est équivalent à sont terme de plus fort degré $-x^2$, si bien que $\frac{1-x^2}{2x}$ varie comme $\frac{-x^2}{2x} = -\frac{x}{2}$, il tend vers $+\infty$ si x tend vers $-\infty$, et il tend vers $-\infty$ si x tend vers $+\infty$. Or $tan\ y$ a pour limite $-\infty$ seulement lorsque y tend vers $-\frac{\pi}{2}$, et pour limite $+\infty$ seulement lorsque y tend vers $+\frac{\pi}{2}$. On voit donc que si x tend vers $-\infty$, y tend vers $+\frac{\pi}{2}$, et si x tend vers $+\infty$, y tend vers $-\frac{\pi}{2}$. On retrouve bien, dans la symétrie de ces limites, la symétrie de la fonction impaire.

Limites vers 0.

Lorsque x tend vers 0, $1 - x^2$ est équivalent à 1, son terme de plus bas degré. De sorte que $\frac{1-x^2}{2x}$ varie comme $\frac{1}{2x}$, il tend vers $-\infty$ si x tend vers 0 par valeurs négatives, et il tend vers $+\infty$ si x tend vers 0 par valeurs positives. Comme plus haut, on voit donc que y tend vers $-\frac{\pi}{2}$ si x tend vers 0 par valeurs négatives, et y tend vers $+\frac{\pi}{2}$ si x tend vers 0 par valeurs positives. Là encore, on retrouve la symétrie de la fonction impaire.

Lorsque x varie de valeurs négatives à des valeurs positives, la fonction $y = Atan\ \frac{1-x^2}{2x}$ présente donc une discontinuité de première espèce au point 0 : il y a une limite à gauche et une limite à droite, mais elles ne sont pas égales.

4°/ Dérivée.

La dérivée n'existe que lorsque la fonction est continue, c'est-à-dire pour $x \neq 0$.

Pour calculer la dérivée pour $x \neq 0$, posons $u = \frac{1-x^2}{2x}$. On a :

$$u = tan\ y \Rightarrow \frac{du}{dy} = 1 + tan^2\ y = 1 + u^2 \Rightarrow \frac{dy}{du} = \frac{1}{1+u^2} = \frac{1}{1+\left(\frac{1-x^2}{2x}\right)^2} = \frac{4x^2}{4x^2+(1-x^2)^2} = \frac{4x^2}{(1+x^2)^2}$$

$$u = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} - x\right) \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{x^2} - 1\right) = -\frac{1+x^2}{2x^2}.$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} = -\frac{4x^2}{(1+x^2)^2} \times \frac{1+x^2}{2x^2}$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{-2}{1+x^2}.}$$

Le dénominateur de la dérivée est strictement positif pour tout x. Le numérateur est strictement négatif pour tout x, donc le quotient est strictement négatif pour tout x. La dérivée de y par rapport à x est toujours strictement négative, la fonction est toujours strictement décroissante.

Lorsque x tend vers 0, par valeurs négatives ou par valeurs positives, la dérivée tend vers -2, ce qui donne la pente des tangentes au point de discontinuité 0.

5°/ Tableau de variations.

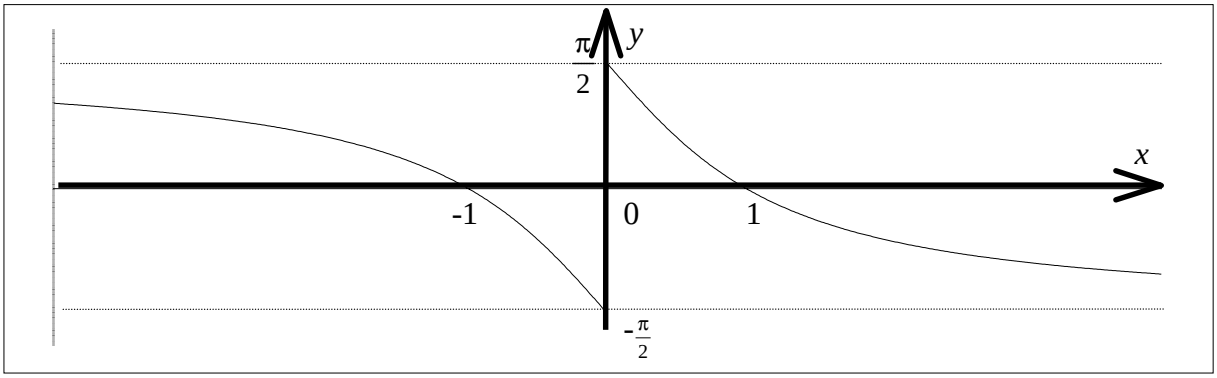
Le signe de la dérivée étant connu, on peut dresser le tableau de variations de y :

x	$-\infty$		-1		0		$+1$		$+\infty$
y	$+\frac{\pi}{2}$	↘	0	↘	$-\frac{\pi}{2} \parallel \frac{\pi}{2}$	↘	0	↘	$-\frac{\pi}{2}$

Pour $x = \pm 1$, la fonction y vaut $Atan\ 0 = 0$ et sa dérivée vaut -1.

6°/ Courbe représentative.

Compte tenu des indications précédentes, la courbe représentative de la fonction a l'allure suivante :



Courbe représentative de la fonction $y = Atan\ \frac{1-x^2}{2x}$

Remarques finales.

La dérivée de la fonction $Atan\ x$ est $\frac{1}{1+x^2}$. La dérivée de la fonction $Atan\ \frac{1-x^2}{2x}$ est $\frac{-2}{1+x^2}$. On a donc :

$$Atan\ \frac{1-x^2}{2x} = -\,2\ Atan\ x + \text{Constante}$$

Si x tend vers 0 par valeurs positives, $Atan\ \frac{1-x^2}{2x}$ tend vers $+\ \frac{\pi}{2}$, $Atan\ x$ tend vers 0. La constante d'intégration vaut donc $+\ \frac{\pi}{2}$. Il vient alors :

$$Atan\ \frac{1-x^2}{2x} = \frac{\pi}{2} - 2\ Atan\ x \text{ pour } x > 0.$$

Si x tend vers 0 par valeurs négatives, $Atan\ \frac{1-x^2}{2x}$ tend vers $-\ \frac{\pi}{2}$, $Atan\ x$ tend vers 0. La constante d'intégration vaut donc $-\ \frac{\pi}{2}$. Il vient alors :

$$Atan\ \frac{1-x^2}{2x} = 2\ Atan\ (-x) - \frac{\pi}{2} \text{ pour } x < 0.$$

EXERCICE 5.

Appliquer la formule des accroissements finis à $\sqrt{x}$ dans l'intervalle [0 , x].
On posera $c = \theta x$. Exprimer θ en fonction de x, étudier ses variations et tracer la courbe représentative.

SOLUTION.

La formule des accroissements finis

$$f(b) = f(a) + (b - a)\, f'(c), \text{ avec } c = a + \theta(b - a),\ 0 < \theta < 1$$

appliquée avec $b = x$, $a = 0$, $c = \theta x$, donne :

$$\sqrt{x} = x\, f'(c)$$

soit :

$$f'(c) = \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

On on a toujours $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, donc $f'(c)$ est égal à $\frac{1}{2\sqrt{c}}$, d'où l'égalité :

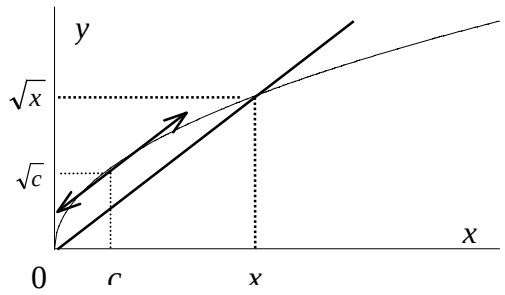
$$\frac{1}{2\sqrt{c}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

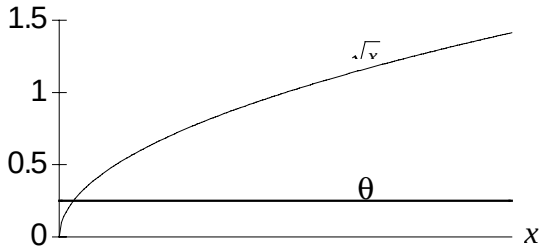
$$c = \frac{x}{4}$$

Si l'on pose $c = \theta x$, on voit que l'on a, pour tout x :

$$\boxed{\theta = \frac{1}{4}}$$

La courbe représentative de cette fonction de x est une droite parallèle à l'axe des x, d'ordonnée $\frac{1}{4}$.





EXERCICE 6.

Etudier au voisinage de l'infini la fonction $y = 2\,x\,Atan\,x + \frac{x-1}{x^2+1}$. Courbe représentative.

SOLUTION.

1° Domaine de définition.

La fonction *Atan x* est définie pour tout $x \in R$. La fonction $\frac{x-1}{x^2+1}$ est définie pour tout $x \in R$. La fonction :

$$y = 2x\,Atan\,x + \frac{x-1}{x^2+1}$$

est donc définie pour tout $x \in R$. Le domaine de définition de y est donc l'intervalle $]-\infty , +\infty[$.

2° Dérivée.

$$y' = 2\,Atan\,x + \frac{2x}{1+x^2} + \frac{1}{1+x^2} - \frac{2x\,(x-1)}{(1+x^2)^2} = 2\,Atan\,x + \frac{(2x+1)(1+x^2)-2x^2+2x}{(1+x^2)^2}$$

$$y' = 2\,Atan\,x + \frac{2x^3-x^2+4x+1}{(1+x^2)^2}$$

L'équation $y' = 0$ est une équation transcendante. On peut la résoudre par approximations successives à la machine. On trouve une seule solution : – 0, 158876990168….
Pour $x = 0$, $y' = 1$.
Si $x \to +\infty$, $y' \to \pi$
Si $x \to -\infty$, $y' \to -\pi$.

3° Dérivée seconde.

$$y'' = \frac{2}{1+x^2} + \frac{(6x^2-2x+4)(x^2+1)-4x(2x^3-x^2+4x+1)}{(x^2+1)^3}$$

$$y'' = \frac{2(x^2+1)^2+6x^4-2x^3+4x^2+6x^2-2x+4-8x^4+4x^3-16x^2-4x}{(x^2+1)^3}$$

$$y'' = \frac{2x^4+4x^2+2-2x^4-6x^2+4+2x^3-6x}{(x^2+1)^3}$$

$$y'' = \frac{2x^3-2x^2-6x+6}{(x^2+1)^3} = 2\,\frac{(x-1)(x^2-3)}{(x^2+1)^3}$$

La dérivée seconde est nulle pour $x = -\sqrt{3}$, $x = 1$, $x = \sqrt{3}$. Comme la fonction est continue et dérivable en ces points, il s'agit de points d'inflexion. Il y a donc trois points d'inflexion :

$x = -\sqrt{3}$, $\quad y = -2\,\sqrt{3}\,Atan\,(-\sqrt{3}) + \frac{-\sqrt{3}-1}{4} = \frac{2\pi\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}+1}{4} \approx 2,94$

$x = 1$, $\quad y = \frac{\pi}{2} \approx 1,57$

$x = \sqrt{3}$, $\quad y = 2\,\sqrt{3}\,Atan\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}-1}{4} = \frac{2\pi\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{3}-1}{4} = 3,81$

4° Etude au voisinage de l'infini.

Si $x \to \varepsilon \infty$ ($\varepsilon = \pm 1$), $y \approx 2\,x\,\varepsilon\,\frac{\pi}{2} = \varepsilon\,x\,\pi \to +\infty$.

$y - \varepsilon\,\pi\,x = 2\,x\,Atan\,x + \frac{x-1}{x^2+1} - \varepsilon\,\pi\,x$

Vers l'infini, le développement en série de *Atan x* s'obtient à partir du développement de la dérivée :

$$\frac{1}{x^2+1} = \frac{1}{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} = \frac{1}{x^2}\left(1 - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4} - \frac{1}{x^6} + \dots\right) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^6} - \dots$$

En intégrant terme à terme, il vient :

$$Atan\,x = -\frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{5x^5} + \dots + \text{constante}$$

En faisant tendre x vers $\pm\infty = \varepsilon\infty$, on voit que la constante doit être égale à $\varepsilon\,\frac{\pi}{2}$ (ε = signe de x)

$$Atan\,x = \varepsilon\frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{5x^5} + \dots$$

$$2x\,Atan\,x = \varepsilon\,\pi\,x - 2 + \frac{2}{3x^2} - \frac{2}{5x^4} + \dots$$

$$\frac{x-1}{x^2+1} = \frac{x}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+1} = \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} + \dots\right) - \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^4} + \dots\right)$$

$$2x\,Atan\,x + \frac{x-1}{x^2+1} - \varepsilon\,\pi\,x = -2 + \frac{1}{x} + \frac{2}{3x^2} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} - \frac{2}{5x^4} + \frac{1}{x^4} + \dots$$

Lorsque x tend vers $\varepsilon\infty$ ($\varepsilon = \pm 1$), $y - \varepsilon\,\pi\,x = 2x\,Atan\,x + \frac{x-1}{x^2+1} - \varepsilon\,\pi\,x$ tend vers -2.

Vers $+\infty$, la droite $y = \pi x - 2$ est asymptote oblique.
Vers $-\infty$, la droite $y = -\pi x - 2$ est asymptote oblique.

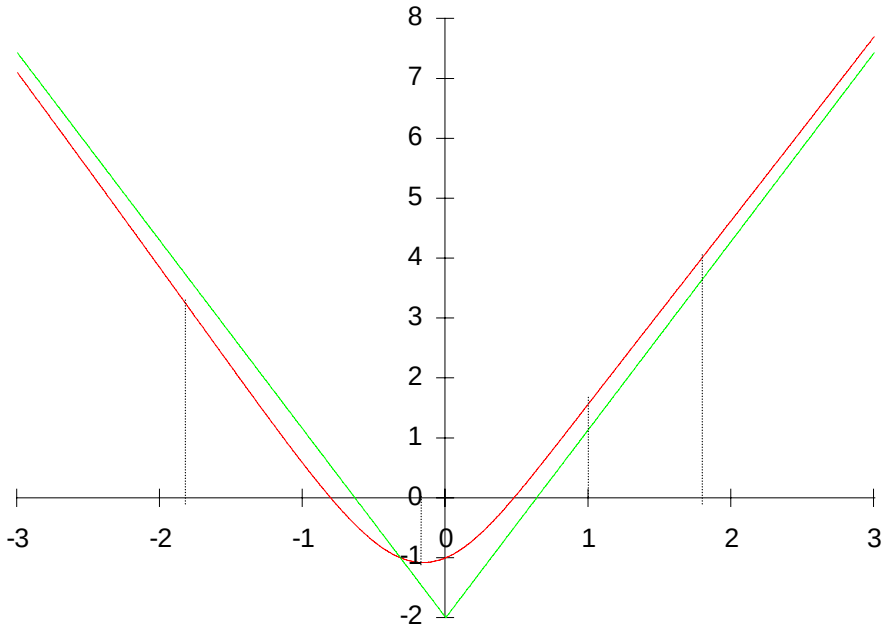
5° Courbe représentative.

La courbe est au-dessus de son asymptote lorsque x tend vers $+\infty$, car $y - \pi x + 2 \approx \frac{1}{x}$.

La courbe est en dessous de son asymptote lorsque x tend vers $-\infty$, car $y + \pi x + 2 \approx \frac{1}{x}$. Il y a donc nécessairement un point d'inflexion d'abscisse négative : on ne traverse pas impunément son asymptote !

Tableau de variations.

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		$-0,159$		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
y''	0	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	0
y'	$-\pi$	$-$	$\frac{\pi}{3}-\frac{5\sqrt{3}+1}{8}$	$-$	0	$+$	1	$+$	$\frac{\pi}{3}+\frac{5\sqrt{3}-1}{8}$	$+$	$+\pi$
y	$+\infty$	↘	$\frac{\pi}{\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{3}+1}{4}$	↘	$-1,080$	↗	$\frac{\pi}{2}$	↗	$\frac{\pi}{\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{3}-1}{4}$	↗	$+\infty$



Courbe représentative de la fonction $y = 2x\,\mathrm{Atan}\,x + \frac{x-1}{x^2+1}$

EXERCICE 7.

Courbe représentative de $y = \sqrt[3]{x^2(x-3)}$ et étude au voisinage de l'infini.

SOLUTION.

La fonction $y = \sqrt[3]{x^2(x-3)}$ est définie et continue pour tout $x \in]-\infty ; +\infty[$. La fonction dérivée est :

$$y' = \frac{1}{3}\,\frac{3x^2-6x}{(x^2(x-3))^{\frac{2}{3}}} = \frac{x-2}{\sqrt[3]{x(x-3)^2}}$$

Elle est définie pour x différent de 0 et x différent de 3.

Si x tend vers 0 par valeurs négatives, y tend vers 0 et y' tend vers $+\infty$. Si x tend vers 0 par valeurs positives, y tend vers 0 et y' tend vers $-\infty$. Le point (0,0) est donc un point de rebroussement à tangente verticale.

Si x tend vers 3 par valeurs inférieures, y tend vers 0 et y' tend vers $+\infty$. Si x tend vers 3 par valeurs supérieures, y tend vers 0 et y' tend vers $+\infty$. Le point (3,0) est donc un point d'inflexion à tangente verticale.

La dérivée est nulle pour $x = 2$, ce qui correspond à $y = -\sqrt[3]{4}$. En ce point, la dérivée est nulle, la dérivée seconde donnée par :

$$y'' = \frac{\sqrt[3]{x(x-3)^2} - \frac{1}{3}(x-2)\frac{3x^2-12x+9}{\left(x(x-3)^2\right)^{\frac{2}{3}}}}{\left(x(x-3)^2\right)^{\frac{4}{3}}} = \frac{x(x-3)^2-(x-2)(x^2-4x+3)}{x^2(x-3)^4} = \frac{x(x-3)-(x-2)(x-1)}{x^2(x-3)^3}$$

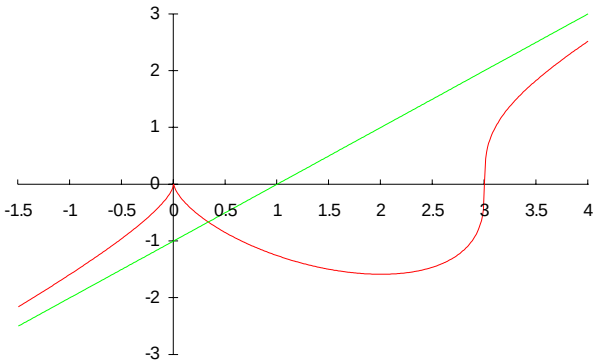
$$y'' = -\frac{2}{x^2(x-3)^3}$$

La dérivée seconde est du signe opposé à celui de $x - 3$: elle est négative pour $x > 3$, elle est positive pour $x < 3$ ($x \neq 0$). La dérivée seconde n'est jamais nulle, elle passe par des valeurs infinies pour changer de signe.

Tableau de variations :

x	$-\infty$		0		2		3		$+\infty$
y'		+	‖	–	0	+	‖	+	
y	$-\infty$		0		$-\sqrt[3]{4}$		0		$+\infty$

Courbe représentative :



Courbe représentative de la fonction $y = \sqrt[3]{x^2(x-3)}$

Etude au voisinage de l'infini.

Lorsque x tend vers l'infini, $\sqrt[3]{x^2(x-3)}$ est équivalent à x, donc tend vers l'infini. La courbe présente des branches infinies.

La formule du binôme donne le développement en série de la fonction :

$$y - x = \sqrt[3]{x^2(x-3)} - x = (x^3 - 3x^2)^{1/3} - x \approx (x^3)^{1/3} - \frac{1}{3}(x^3)^{-2/3}(3x^2) - \frac{1}{9}(x^3)^{-5/3}(3x^2)^2 - \ldots - x$$

$$y - x \approx -1 - \frac{1}{x}$$

$$y \approx x - 1 - \frac{1}{x}$$

Lorsque x tend vers plus l'infini, $-\frac{1}{x}$ est négatif, la courbe est en dessous de son asymptote.

Lorsque x tend vers moins l'infini, $-\frac{1}{x}$ est positif, la courbe est au-dessus de son asymptote.

EXERCICE 8.

Soit la courbe *(C)* représentant les variations de $y = \sqrt{a\,x}$, $a > 0$, dans un système d'axes rectangulaires *Ox*, *Oy*. Soit *M* un point de *(C)* dont la projection orthogonale sur *x'x* est *H*. On porte sur *Oy*, à partir de *O* une longueur *OP* égale à la longueur de la corde *OM*. La droite *PM* rencontre *x'x* en *Q*.

1.1. Montrer que *Q* tend vers une limite *A* quand *M* tend vers *O*.

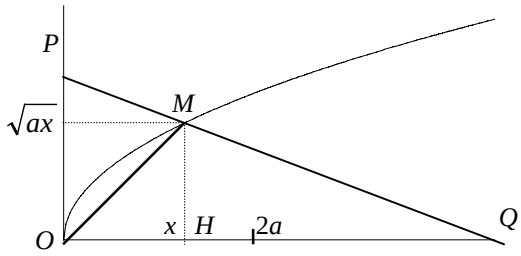
1.2. Calculer la limite vers laquelle tend, dans les mêmes conditions, $\dfrac{\overline{AQ}}{\overline{OH}}$.

1.3. On pose $\overline{OH} = x$. Calculer, *x* étant l'infiniment petit principal, la partie principale de l'infiniment petit

$$u = \overline{AQ} - \frac{3}{2}\,\overline{OH}.$$

SOLUTION.

1° *Q* tend vers une limite *A*.



Dans les triangles semblables *OPQ* et *HMQ*, on a :

$$\frac{\overline{OQ}}{\overline{HQ}} = \frac{\overline{OP}}{\overline{HM}}$$

Or :

$$\overline{HQ} = \overline{OQ} - \overline{OH}$$

donc :

$$\frac{\overline{OQ}}{\overline{OQ} - \overline{OH}} = \frac{\overline{OP}}{\overline{HM}}$$

On en tire : $\overline{OQ} = \dfrac{\overline{OH}\,.\,\overline{OP}}{\overline{OP} - \overline{HM}}$. Avec $\overline{OH} = x$, $\overline{OP} = OM = \sqrt{x^2 + ax}$, $\overline{HM} = \sqrt{ax}$, il vient :

$$\overline{OQ} = \frac{x\sqrt{x^2 + ax}}{\sqrt{x^2 + ax} - \sqrt{ax}}$$

Puisqu'on veut faire tendre *x* vers 0, c'est qu'on suppose que *x* est différent de 0. Avec $a > 0$, *x* est forcément strictement plus grand que 0, sinon la fonction *y* de *x* n'est pas définie dans le champ réel. On peut alors simplifier l'expression par $\sqrt{x}$ et il reste :

$$\overline{OQ} = \frac{x\sqrt{x+a}}{\sqrt{x+a} - \sqrt{a}} = \frac{x\sqrt{x+a}\,(\sqrt{x+a} + \sqrt{a}\,)}{(\sqrt{x+a} - \sqrt{a}\,)(\sqrt{x+a} + \sqrt{a}\,)}$$

$$\overline{OQ} = x + a + \sqrt{a}\,\sqrt{x+a}$$

Sur cette expression, on voit bien que si *x* tend vers 0, $\overline{OQ}$ tend vers $\overline{OA} = 2a$.

$$\lim_{M \to O} Q = A\,(\,2a\,,\,0\,)$$

2° Limite du rapport *AQ/OH*.

$$\overline{AQ} = \overline{OQ} - \overline{OA} = (x + a + \sqrt{a}\,\sqrt{x+a}) - 2a = x - a + \sqrt{a}\,\sqrt{x+a}$$

$$\overline{OH} = x$$

$$\frac{\overline{AQ}}{\overline{OH}} = \frac{x - a + \sqrt{a(x+a)}}{x}$$

Lorsque x tend vers 0, l'indétermination est de la forme $\frac{0}{0}$. On la lève par la règle de L'HOPITAL : si $f(0)=g(0)=0$, le rapport $\frac{f(x)}{g(x)}$ a la même limite que le rapport des dérivées $\frac{f'(x)}{g'(x)}$. Ici, avec :

$f(x) = x - a + \sqrt{a(x+a)}$, $g(x) = x$, $f'(x) = 1 + \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{x+a}}$, $g'(x) = 1$, on trouve : $f'(0) = \frac{3}{2}$, $g'(0) = 1$, d'où :

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(0)}{g'(0)} = \frac{3}{2}$$

> Lorsque x tend vers 0, le rapport $\frac{\overline{AQ}}{\overline{OH}}$ tend vers $\frac{3}{2}$.

3° Partie principale de l'infiniment petit *u*.

$$u = \overline{AQ} - \frac{3}{2}\,\overline{OH} = x - a + \sqrt{a(x+a)} - \frac{3}{2}\,x = -a - \frac{x}{2} + \sqrt{a}\,\sqrt{x+a}\,.$$

La formule du binôme généralisée donne le développement de $\sqrt{x+a}$ en série de Taylor au voisinage de 0 :

$$\sqrt{x+a} = (a+x)^{1/2} = a^{1/2} + \frac{1}{2}\,a^{-1/2}\,x + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}\,a^{-3/2}\,x^2 + \varepsilon(x)\,x^2, \text{ avec } \varepsilon(x) \to 0 \text{ si } x \to 0.$$

Avec ce développement, il vient :

$$u = \overline{AQ} - \frac{3}{2}\,\overline{OH} = -a - \frac{x}{2} + \sqrt{a}\,(\sqrt{a} + \frac{1}{2\sqrt{a}}\,x - \frac{1}{8a\sqrt{a}}\,x^2) + \sqrt{a}\;\varepsilon(x)\,x^2$$

$$u = -\frac{x^2}{8a} + \sqrt{a}\;\varepsilon(x)\,x^2, \text{ avec } \varepsilon(x) \to 0 \text{ si } x \to 0.$$

> La partie principale de l'infiment petit u est $-\frac{x^2}{8a}$.

EXERCICE 9.

Calculer les trois premiers termes non nuls des parties principales du développement limité au voisinage de 0, des fonctions: $\frac{x}{\sin x}$, $\frac{x^2}{\sin^2 x}$, $\cos^2 x$, $\tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$, $\text{Asin}\left(x + \frac{1}{2}\right)$, $\sqrt{5x+3}$.

SOLUTION.

1° Développement de $\frac{x}{\sin x}$.

On connaît le développement de la fonction *sin x* en série de Taylor au voisinage de 0 :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots$$

La division aux puissances croissantes de *x* par ce développement, donne les premiers termes du développement de la fonction $\frac{x}{\sin x}$ en série de Taylor :

x	$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots$
$-x + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots$	$1 + \frac{x^2}{3!} + \left(\frac{1}{(3!)^2} - \frac{1}{5!}\right) x^4$
$\frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots$ $-\frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{(3!)^2} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{3!(2n-1)!} + \ldots$	
$\left(\frac{1}{(3!)^2} - \frac{1}{5!}\right) x^5 + \ldots$ $-\left(\frac{1}{(3!)^2} - \frac{1}{5!}\right) x^5 - \ldots$	
$0\,(x^7)$	

$$x = \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots\right)\left(1 + \frac{x^2}{3!} + \left(\frac{1}{(3!)^2} - \frac{1}{5!}\right) x^4\right) + 0\,(x^7)$$

$$\frac{x}{\sin x} = \frac{x}{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots} = 1 + \frac{x^2}{3!} + \left(\frac{1}{(3!)^2} - \frac{1}{5!}\right) x^4 + 0\,(x^6)$$

Les trois premiers termes non nuls de la partie principale du développement limité de la fonction $\frac{x}{\sin x}$ sont donc: $1 + \frac{x^2}{3!} + \left(\frac{1}{(3!)^2} - \frac{1}{5!}\right) x^4 = 1 + \frac{x^2}{6} + \frac{7x^4}{360}$

$$\frac{x}{\sin x} \approx 1 + \frac{x^2}{6} + \frac{7x^4}{360}$$

2° Développement de $\frac{x^2}{\sin^2 x}$.

$$\frac{x^2}{\sin^2 x} = \left(\frac{x}{\sin x} \right)^2 \approx \left(1 + \frac{x^2}{6} + \frac{7x^4}{360} \right)^2 \approx 1 + 2\,\frac{x^2}{6} + \left(\frac{x^2}{6} \right)^2 + 2\,\frac{7x^4}{360} = 1 + \frac{x^2}{3} + \left(\frac{1}{36} + \frac{7}{180} \right) x^4$$

$$\boxed{\frac{x^2}{\sin^2 x} \approx 1 + \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{15}}$$

3° Développement de $\cos^2 x$.

Le développement en série de Taylor de la fonction $\cos x$ est : $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots$.

$$\cos^2 x \approx \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \right)^2 \approx 1 - 2\,\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{(2!)^2} + 2\,\frac{x^4}{4!} = 1 - x^2 + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{12} \right) x^4$$

$$\boxed{\cos^2 x \approx 1 - x^2 + \frac{x^4}{3}}$$

4° Développement de $\tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

Posons $y(x) = \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$. Le développement limité de $y(x)$ au voisinage de 0 est donnée par :

$y(x) = y(0) + y'(0)\,x + y''(0)\,\frac{x^2}{2} + \ldots$

$y(0) = 1$

$y'(x) = 1 + \tan^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

$y'(0) = 2$

$y''(x) = 2\tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \times \left(1 + \tan^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right)$

$y''(0) = 4$

$y(x) \approx 1 + 2\,x + 4\,\frac{x^2}{2}$

$$\boxed{\tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \approx 1 + 2\,x + 2\,x^2}$$

5° Développement de $A\sin\left(x + \frac{1}{2}\right)$.

La dérivée de $y(x) = A\sin\left(x + \frac{1}{2}\right)$ est $y'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(x + \frac{1}{2}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{2} - x\right)\left(\frac{3}{2} + x\right)}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4} - x - x^2}}$

$y(0) = A\sin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$

$y'(0) = \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4}}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

$y''(x) = (-2x-1)\times\frac{-1}{2}\times\frac{1}{\left(\frac{3}{4}-x-x^2\right)^{\frac{3}{2}}}$

$y''(0) = \frac{1}{2\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{4\sqrt{3}}{9}$

Le développement limité de y est $y = y(0) + y'(0)\,x + y''(0)\,\frac{x^2}{2} + \ldots$

$$Asin\left(x+\frac{1}{2}\right) \approx \frac{\pi}{6} + \frac{2\sqrt{3}}{3}x + \frac{2\sqrt{3}}{9}x^2$$

6° Développement de $\sqrt{5x+3}$.

$\sqrt{5x+3} = (3+5x)^{1/2}$ peut se développer par la formule du binôme :

$(3+5x)^{1/2} = 3^{1/2} + \frac{1}{2}3^{-1/2}(5x) + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2}3^{-3/2}(5x)^2 + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{2\times 3}3^{-5/2}(5x)^3 + \ldots$

$(3+5x)^{1/2} = \sqrt{3} + \frac{5\sqrt{3}}{6}x - \frac{25\sqrt{3}}{72}x^2 + \ldots$

$$(3+5x)^{1/2} \approx \sqrt{3} + \frac{5\sqrt{3}}{6}x - \frac{25\sqrt{3}}{72}x^2$$

EXERCICE 10.

Calculer le développement limité au voisinage de 0 de la fonction y.

1. $y = \sin x$.
2. $y = \cos x$.
3. $y = \ln(1 + x)$
4. $y = a^x$, $a > 0$.

SOLUTION.

1. $y = \sin x$.

$y' = \cos x$
$y'' = -\sin x$
$y''' = -\cos x$
$y^{(4)} = \sin x$
$y^{(4k)} = \sin x$
$y^{(4k+1)} = \cos x$
$y^{(4k+2)} = -\sin x$
$y^{(4k+3)} = -\cos x$
$y^{(4k)}(0) = 0$
$y^{(4k+1)}(0) = 1$
$y^{(4k+2)}(0) = 0$
$y^{(4k+3)}(0) = -1$

$$y = \sum_{h=0}^{\infty} y^{(h)}(0)\frac{x^h}{h!} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

2. $y = \cos x$.

$y' = -\sin x$
$y'' = -\cos x$
$y''' = \sin x$
$y^{(4)} = \cos x$
$y^{(4k)} = \cos x$
$y^{(4k+1)} = -\sin x$
$y^{(4k+2)} = -\cos x$
$y^{(4k+3)} = \sin x$
$y^{(4k)}(0) = 1$
$y^{(4k+1)}(0) = 0$
$y^{(4k+2)}(0) = -1$
$y^{(4k+3)}(0) = 0$

$$y = \sum_{h=0}^{\infty} y^{(h)}(0)\frac{x^h}{h!} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

$$\boxed{\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}}$$

3. $y = \ln(1 + x)$.

$$y' = \frac{1}{1+x}$$

$$y^{(k)} = (-1)^{k-1} \frac{(k-1)!}{(1+x)^k}, \; k > 0.$$

$$y = \sum_{h=0}^{\infty} y^{(h)}(0) \frac{x^h}{h!} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{(k-1)!}{k!} x^k = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k}$$

$$\boxed{\ln(1 + x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k}}$$

4. $y = a^x$.

$$y = e^{x \ln a}$$

$$y^{(k)} = (\ln a)^k e^{x \ln a} = (\ln a)^k a^x$$

$$y^{(k)}(0) = (\ln a)^k$$

$$y = \sum_{h=0}^{\infty} y^{(h)}(0) \frac{x^h}{h!} = \sum_{h=0}^{\infty} (\ln a)^h \frac{x^h}{h!}$$

$$\boxed{a^x = \sum_{h=0}^{\infty} (\ln a)^h \frac{x^h}{h!}}$$

EXERCICE 11.

Trouver la limite, lorsque x tend vers zéro, de la fonction y.

1. $y = (\cos x)^{\frac{1}{x}}$
2. $y = x^x$
3. $y = \dfrac{\ln(1-\cos x)}{\ln x}$
4. $y = \left(\dfrac{a^x + b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$

SOLUTION.

1.

$(\cos x)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{\ln(\cos x)}{x}}$

$\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2} + x^3\, 0(x)$; $\ln(\cos x) = \ln\left(1 - \dfrac{x^2}{2} + x^3\, 0(x)\right)$

$\ln(1-u) = -u + \dfrac{u^2}{2} - u^2\, 0(u)$; $\ln\left(1 - \dfrac{x^2}{2} + x^3\, 0(x)\right) = -\dfrac{x^2}{2} + x^3\, 0(x)$; $\dfrac{\ln(\cos x)}{x} = -\dfrac{x}{2} + x^2\, 0(x)$

$e^u = 1 + u + u\, 0(u)$

$e^{\frac{\ln(\cos x)}{x}} = 1 - \dfrac{x}{2} + x\, 0(x)$

$$\lim_{x \to 0} e^{\frac{\ln(\cos x)}{x}} = 1$$

2.

$$x^x = e^{x \ln x}$$

Lorsque x tend vers 0, la puissance l'emporte sur le logarithme, $x \ln x$ tend vers 0, et $e^{x \ln x}$ tend vers 1.

$$\lim_{x \to 0} x^x = 1$$

Démonstration du lemme « La puissance l'emporte sur le logarithme ».

La dérivée de $x \ln x$ est $\ln x + 1$: elle tend vers $-\infty$ si x tend vers 0. Donc la fonction $x \ln x$ augmente à mesure que x tend vers 0 par valeurs supérieures. Or la fonction $x \ln x$ est majorée par 0 puisqu'elle est négative lorsque x est assez petit (inférieur à 1). Comme cette fonction $x \ln x$ est monotone, elle a une limite finie ℓ lorsque x tend vers 0. La règle de L'Hospital, appliquée à la fonction $\dfrac{x}{\frac{1}{\ln x}}$, indique alors que $x \ln x$ a la même limite que le rapport des dérivées $-x\,(\ln x)^2$. Cette fonction est négative et a pour limite la limite de $-\ell \ln x$. Si ℓ était différent de 0, la limite $-\ell \ln x$ serait infinie, ce qui n'est pas. On a donc nécessairement $\ell = 0$.

Ceci montre déjà que la limite, lorsque x tend vers 0, de $x\ (\ln x)^n$ est 0, lorsque $n = 0$ et lorsque $n = 1$. Si ce résultat est vrai aussi pour n, la règle de L'Hospital appliquée à $\dfrac{x}{\left(\dfrac{1}{\ln x}\right)^n}$ dit que le résultat est vrai encore pour $n + 1$. Il est donc vrai pour tout entier $n \geq 0$.

$$\lim_{x\to 0} x\ (\ln x)^n = 0,\ \forall n \geq 0$$

3.

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + x^3\, 0(x)$$

$$1 - \cos x = \frac{x^2}{2} - x^3\, 0(x) = \frac{x^2}{2}\ (1 - 2\, x\, 0\ (x)\ )$$

$$\ln\ (1 - \cos x) = \ln \frac{x^2}{2} + \ln\ (1 - 2\, x\, 0\ (x)\ ) = 2\, \ln x - \ln 2 - 2\, x\, 0(x)$$

$$\frac{\ln(1-\cos x)}{\ln x} = 2 - \frac{\ln 2}{\ln x} - 2\, \frac{x}{\ln x}\, 0(x)$$

Lorsque x tend vers 0, $\ln x$ tend vers l'infini, $\dfrac{\ln 2}{\ln x}$ tend vers 0, $\dfrac{x}{\ln x}$ tend vers 0 et, finalement :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1-\cos x)}{\ln x} = 2$$

4.

$$a^x = e^{x \ln a} = 1 + x \ln a + x\, 0(x)$$
$$b^x = e^{x \ln b} = 1 + x \ln b + x\, 0(x)$$

$$\frac{a^x + b^x}{2} = 1 + x\, \frac{\ln a + \ln b}{2} + x\, 0(x) = 1 + x \ln \sqrt{ab} + x\, 0(x)$$

$$\ln \frac{a^x + b^x}{2} = x \ln \sqrt{ab} + x\, 0(x)$$

$$\left(\frac{a^x + b^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x} \ln \left(\frac{a^x + b^x}{2} \right)} = e^{\ln \sqrt{ab} + 0(x)} = \sqrt{ab}\ (1 + 0(x)\ )$$

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{a^x + b^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}} = \sqrt{ab}$$

EXERCICE 12.

1. On considère la famille de fonctions de x définies pour $x > 0$ par $f_\alpha(x) = x^{1-x^\alpha}$, le paramètre α pouvant prendre toutes les valeurs réelles. A chaque valeur de α correspond une courbe C_α d'équation $y = f_\alpha(x)$.
   1° Etudier la fonction $f_\alpha(x)$, α étant fixe et x variable.
   a) Continuité, existence et calcul de la dérivée, variations.
   b) Etude au voisinage de $x = 0$.
   c) Etude de la branche infinie de C_α pour x tendant vers l'infini. Pour quelles valeurs de α, cette branche infinie a-t-elle une asymptote ?

   2° x étant fixe, la valeur de $f_\alpha(x)$ est une fonction de α. Etudier cette fonction. En déduire la région du premier quadrant ($x > 0$, $y > 0$) balayée par les courbes C_α. Préciser les points communs à deux courbes C_{α_1} et C_{α_2} pour $\alpha_1 \neq \alpha_2$.

   3° Déduire de l'étude précédente les différents types de courbes C_α suivant la valeur de α et construire sur une même figure une courbe de chaque type.

2. On se donne un point $M(x,y)$ du premier quadrant et l'on veut résoudre le problème de savoir si une courbe C_α passe par M en calculant la valeur de α pour qu'il en soit ainsi. Discuter soigneusement la possibilité de ce calcul. Montrer que si α existe, il est donné par la formule :

$$\alpha = \frac{1}{\ln x}\left[\ \ln\left|\ \ln\frac{x}{y}\ \right| - \ln|\ln x|\ \right].$$

   Où doit se trouver M pour que α soit plus grand que 0 ? Comparer les résultats trouvés avec ceux du 2° de la 1e partie.

SOLUTION.

1°/ Courbes C_α .

1.1. Etude de la fonction f_α .

La fonction $f_\alpha = x^{1-x^\alpha}$, comme la fonction x^α, est définie pour $x > 0$.

Intervalle de définition :] 0 , + ∞ [

La fonction est continue pour toute valeur de x où elle est définie.Lorsque x tend vers 0 par valeurs supérieures, la limite de x^α dépend du signe de α :

- Si α est négatif, x^α tend vers l'infini.
- Si α est positif, x^α tend vers 0 et f_α est équivalent à x, donc tend vers 0.
- Entre les deux, si $\alpha = 0$, x^α est égal à 1 et $f_\alpha(x) = 1$ pour tout x de l'intervalle de définition.

Dans le premier cas, où α est négatif, x^α tend vers + ∞, $1 - x^\alpha$ tend vers – ∞ et $f_\alpha(x)$ est indéterminé, de la forme $0^{-\infty}$. Pour lever l'indétermination, nous allons étudier la dérivée de f_α . La dérivée de $x^u = e^{u \ln x}$ est $e^{u \ln x}$ ($u' \ln x + \frac{u}{x}$).

Ici, $u = 1 - x^\alpha$ et $u' = -\alpha x^{\alpha-1}$, d'où :

$$\frac{df_\alpha}{dx} = f_\alpha\left(\ -\alpha\, x^{\alpha-1}\ln x + \frac{1-x^\alpha}{x}\ \right)$$

$$\frac{df_\alpha}{dx} = \frac{1-x^\alpha(1+\alpha \ln x)}{x^{x^\alpha}}$$

L'étude du signe de la dérivée se ramène à l'étude de la fonction

$$z = \frac{1}{x^\alpha} - 1 - \alpha \ln x.$$

La dérivée de cette fonction est :

$$\frac{dz}{dx} = \frac{-\alpha}{x^{\alpha+1}} - \frac{\alpha}{x} = -\frac{\alpha}{x}(1 + x^\alpha)$$

$\frac{1+x^\alpha}{x}$ est positif, donc $\frac{dz}{dx}$ est du signe de $-\alpha$ pour tout x. La fonction z est croissante vers $x = 0$, si α est négatif, décroissante si α est positif. Comme $z = 0$ pour $x = 1$, z est négatif lorsque x est compris entre 0 et 1. Donc si α est positif, la fonction f_α est décroissante entre 0 et 1. Si α est négatif, la fonction f_α est croissante entre 0 et 1.
On peut rassembler ces résultats dans les tableaux de variations suivants.

- **$\alpha > 0$.**

x	0		1		$+\infty$
z'		–		–	
y'		+	0	–	
y	0	↗	1	↘	0

Il y a une asymptote horizontale $y = 0$.
La fonction est définie en 0 par $f_\alpha(0)=0$.

- **$\alpha = 0$.**

La fonction f_α est constante et égale à 1.

- **$\alpha < 0$.**

x	0		1		$+\infty$
z'		+		+	
y'		–	0	+	
y	$+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

Il y a une asymptote verticale $x = 0$.

Lorsque α est positif, il y a lieu d'étudier la tangente à la courbe au point (0,0). Lorsque x tend vers 0, x^α tend vers 0, et $x^\alpha \ln x$ tend vers 0, $x^{x^\alpha} = e^{x^\alpha \ln x}$ tend vers 1. Donc f_α tend vers 1.

Si $\alpha > 0$, la courbe C_α est tangente à la droite $y = x$.

Lorsque α est négatif, il y a lieu d'étudier s'il y a une asymptote oblique. Pour cela, il faut étudier la limite du rapport $\frac{f_\alpha}{x}$ lorsque x tend vers l'infini. Or

$\frac{f_\alpha}{x} = \frac{1}{x^{x^\alpha}}$. x^α tend vers 0, puisque α est négatif, donc $x^\alpha \ln x$ tend aussi vers 0, puisque la puissance l'emporte sur le logarithme et $\frac{f_\alpha}{x} = \frac{1}{e^{x^\alpha \ln x}}$ tend vers 1. Reste à étudier la limite de

$$f_\alpha - x = x\left(\frac{1}{x^{x^\alpha}} - 1\right).$$

$$\frac{1}{x^{x^\alpha}} = \frac{1}{e^{x^\alpha \ln x}} = e^{-x^\alpha \ln x} \approx 1 - x^\alpha \ln x$$

$$f_\alpha - x \approx - x^{\alpha+1} \ln x$$

$f_\alpha - x \to 0$ si $\alpha + 1 < 0$, ou $\alpha < -1$.
$f_\alpha - x \to - \infty$ si $\alpha + 1 \geq 0$, ou $-1 \leq \alpha < 0$.

Les courbes C_α pour α négatif ont :
- une asymptote oblique $y = x$ lorsque α est inférieur à -1.
- une branche parabolique de direction parallèle à l'axe des x lorsque $-1 \leq \alpha < 0$.

Points d'inflexion.

La forme des courbes C_α montre déjà qu'il y aura deux points d'inflexion pour $\alpha > 0$, et un point d'inflexion pour $\alpha < 0$.
La dérivée seconde de f_α est la dérivée de :

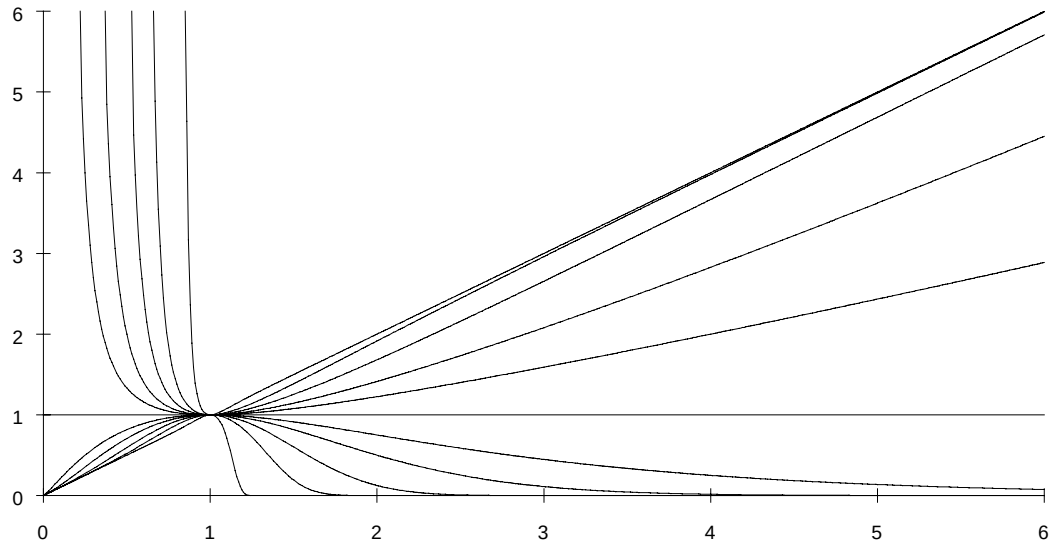
$$\frac{df_\alpha}{dx} = \frac{1 - x^\alpha (1 + \alpha \ln x)}{x^{x^\alpha}}$$

$$\frac{d^2 f_\alpha}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v} \right) = \frac{u'v - u\,v'}{v^2}$$

avec $u = 1 - x^\alpha (1 + \alpha \ln x)$ et $v = x^{x^\alpha} = e^{x^\alpha \ln x}$.
$u' = - \alpha x^{\alpha-1} (1 + \alpha \ln x) - \alpha x^{\alpha-1}$
$u' = - \alpha x^{\alpha-1} (2 + \alpha \ln x)$
$v' = x^{x^\alpha} (\alpha x^{\alpha-1} \ln x + x^{\alpha-1})$
$v' = x^{x^\alpha + \alpha - 1} (1 + \alpha \ln x)$
$u'v + u\,v' = - \alpha x^{x^\alpha + \alpha - 1} (2 + \alpha \ln x)$
$- x^{x^\alpha + \alpha - 1} (1 + \alpha \ln x) (1 - x^\alpha (1 + \alpha \ln x))$
$u'v + u\,v' = - x^{x^\alpha + \alpha - 1} [\, 2\alpha + \alpha^2 \ln x + 1 + \alpha \ln x - x^\alpha (1 + \alpha \ln x)^2 \,]$
Il y a un point d'inflexion lorsque x vérifie l'équation :

$$2\alpha + \alpha^2 \ln x + 1 + \alpha \ln x - x^\alpha (1 + \alpha \ln x)^2 = 0$$
$$\alpha + (1 + \alpha \ln x)(1 + \alpha - x^\alpha (1 + \alpha \ln x)) = 0$$

Courbes représentatives.



Courbes représentatives des fonctions $f_\alpha = x^{1 - x^\alpha}$ pour diverses valeurs de α.

1.2. f_α comme fonction de α.

$$\ln f_\alpha = (1 - x^\alpha) \ln x$$

Pour toute valeur de $x > 0$, cette fonction de α est définie quel que soit $\alpha \in R$. Toutes ses valeurs sont strictement positives. Elle est continue et dérivable par rapport à α. Sa dérivée par rapport à α est donnée par :

$$\frac{d(\ln f_\alpha)}{d\alpha} = \frac{1}{f_\alpha}\frac{df_\alpha}{d\alpha} = -\ln x \frac{d(x^\alpha)}{d\alpha}$$

$$\frac{d(\ln f_\alpha)}{d\alpha} = -\ln x \frac{d(e^{\alpha \ln x})}{d\alpha} = -(\ln x)^2 x^\alpha$$

$$\boxed{\frac{df_\alpha}{d\alpha} = -(\ln x)^2 x^\alpha f_\alpha}$$

Pour $x \neq 1$, $\ln x$ est différent de 0, la dérivée de f_α est strictement plus petite que 0 : la fonction est une fonction strictement décroissante de α pour chaque valeur de x.
Sur le graphique des courbes C_α , cela se traduit par le fait que pour chaque valeur de x différente de 1, sur une parallèle à Oy, plus α est grand, plus f_α est petit, donc plus la courbe est proche de l'axe des x. La stricte décroissance se traduit par le fait qu'à deux valeurs de α, pour le même x, correspondent deux valeurs distinctes de f_α , donc deux ordonnées différentes, donc deux points différents du premier quadrant.
Pour $x = 1$, on a $f_\alpha(x) = f_\alpha(1) = 1, \forall \alpha \in R$. Toutes les courbes C_α passent par le point (1,1).
Or nous avons vu, au 1°, que les courbes C_α étaient toute au-dessus de leur tangente à l'origine pour les valeurs de α positives. Il n'y a donc aucune branche de courbe C_α dans le triangle délimité par la droite $y = x$, tangente à toutes les courbes C_α de paramètre α positif, au point (0,0), l'axe des x, la droite $x = 1$.
Pour les x supérieurs à 1, toutes les courbes C_α correspondant aux valeurs négatives de α sont en dessous de leur asymptote commune $y = x$. Il n'y a donc aucune branche de courbe C_α au-dessus de la droite $y = x$, lorsque x est supérieur à 1.
Les points communs à deux courbes C_{α_1} et C_{α_2} avec $\alpha_1 < \alpha_2$ se déduisent de cette étude :

- $\alpha_1 \leq 0$ et $\alpha_1 < \alpha_2$: le seul point commun aux courbes C_{α_1} et C_{α_2} est (1,1).
- $\alpha_1 > 0$ et $\alpha_1 < \alpha_2$: les courbes C_{α_1} et C_{α_2} ont deux points communs, (0,0) et (1,1).

1.3. Courbes représentatives C_α.

Elles ont été représentées ci-dessus.

2°/ Courbe C_α passant par un point.

Soit $M(x,y)$ un point du plan, avec $x > 0$ et $y > 0$. L'étude précédente montre que :

- Si $0 < y < x < 1$, il n'existe aucune courbe C_α passant par M.
- Si $x = y = 1$, toutes les courbes C_α passent par M.
- Si $y = 1$ et $x \neq 1$, seule la courbe C_0, qui est la droite $y = 1$, correspondant à $\alpha = 0$, passe par M.
- Si $x = 1$ et $y \neq 1$, aucune courbe C_α ne passe par M.
- Si $1 < x < y$, aucune courbe C_α ne passe par M.
- Dans les autres régions, il existe au plus une valeur de α telle que C_α passe par M.

Considérons alors le point $M(x,y)$. Pour qu'il existe une valeur de α telle que la courbe C_α passe par M, il faut et il suffit que l'équation :

$$y = x^{1 - x^\alpha}$$

$$\frac{y}{x} = \frac{1}{x^{x^\alpha}} = e^{-x^\alpha \ln x}$$

$$-x^\alpha \ln x = \ln \frac{y}{x}$$

$$x^{\alpha} \ln x = \ln \frac{x}{y}$$

ait une solution.
Comme le cas $x = 1$ est déjà réglé, on peut supposer $x \neq 1$. Alors $\ln x$ est différent de 0.

Si $x < 1$, $\ln x$ est négatif, $x^{\alpha} \ln x$ est négatif. Pour qu'il y ait une solution, il faut donc que $\ln\frac{x}{y}$ soit négatif, donc que $\frac{x}{y}$ soit plus petit que 1. On retrouve la condition $y > x$. Si cette condition est réalisée, il vient :

$$x^{\alpha} = e^{\alpha \ln x} = \frac{\left|\ln\frac{x}{y}\right|}{|\ln x|}$$

$$\alpha = \frac{1}{\ln x}(\ln | \ln\frac{x}{y} | - \ln | \ln x |)$$

Si $x > 1$, $\ln x$ est positif, $x^{\alpha} \ln x$ est positif. Pour qu'il y ait une solution, il faut que $\ln\frac{x}{y}$ soit positif, donc que $\frac{x}{y}$ soit plus grand que 1. On retrouve la condition $y < x$. Si cette condition est réalisée, il vient :

$$x^{\alpha} = e^{\alpha \ln x} = \frac{\ln\frac{x}{y}}{\ln x} = \frac{\left|\ln\frac{x}{y}\right|}{|\ln x|}$$

$$\boxed{\alpha = \frac{1}{\ln x}(\ln | \ln\frac{x}{y} | - \ln | \ln x |)}$$

Pour que α soit positif, il faut que

$$\ln | \ln\frac{x}{y} | - \ln | \ln x |$$

soit du signe de $\ln x$.

Si x est plus petit que 1, $\ln x$ est négatif, il faut que $\ln | \ln\frac{x}{y} | - \ln | \ln x | < 0$

$$| \ln\frac{x}{y} | < | \ln x |$$
$$- \ln \frac{x}{y} < - \ln x$$
$$- \ln x + \ln y < - \ln x$$
$$\ln y < 0$$
$$y < 1$$
$$x < y < 1$$

Si x est plus grand que 1, $\ln x$ est positif, il faut que $\ln | \ln\frac{x}{y} | - \ln | \ln x | > 0$

$$\ln \frac{x}{y} < \ln x$$
$$\ln x - \ln y < \ln x$$
$$\ln y > 0$$
$$y > 1$$
$$1 < y < x$$

Pour qu'il existe une courbe C_{α} avec $\alpha \geq 0$, passant par le point $M(x,y)$, il faut et il suffit que les coordonnées x et y du point M vérifient la condition :

y est compris entre 1 et x : $x < y \leq 1$ ou $1 \leq y < x$.

3°/ Equation différentielle des f_α .

Si (x,y) est une solution de $y = f_\alpha(x)$, on a :

$$y = x^{1-x^\alpha}$$

$$x^{x^\alpha} = \frac{x}{y}$$

$$x^\alpha = \frac{1}{\ln x} \times \ln \frac{x}{y}$$

$$\alpha = \frac{1}{\ln x} \times \ln \left(\frac{\ln \frac{x}{y}}{\ln x} \right)$$

Pour éliminer la constante α, il suffit de dériver les deux membres par rapport à x :

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\ln x} \times \ln \left(\frac{\ln \frac{x}{y}}{\ln x} \right) \right) = 0$$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\ln x} \times \ln \left(1 - \frac{\ln y}{\ln x} \right) \right) = 0$$

C'est l'équation différentielle des fonctions f_α . On peut la transformer pour faire apparaître la dérivée de y par rapport à x.

$$-\frac{1}{x(\ln x)^2} \ln \left(1 - \frac{\ln y}{\ln x} \right) + \frac{1}{\ln x} \frac{\frac{d}{dx}\left(1 - \frac{\ln y}{\ln x}\right)}{1 - \frac{\ln y}{\ln x}} = 0.$$

$$-\frac{1}{x(\ln x)^2} \ln \left(1 - \frac{\ln y}{\ln x} \right) - \frac{1}{\ln x - \ln y} \frac{d}{dx} \left(\frac{\ln y}{\ln x} \right) = 0$$

$$-\frac{1}{x(\ln x)^2} \ln \left(1 - \frac{\ln y}{\ln x} \right) - \frac{1}{\ln x - \ln y} \left(\frac{\ln y}{x} + \frac{y'}{y \ln x} \right) = 0$$

$$\frac{y'}{y \ln x} + \frac{\ln y}{x} + \frac{1}{x(\ln x)^2} \ln \frac{x}{y} \ln \left(1 - \frac{\ln y}{\ln x} \right) = 0$$

$$\boxed{x y' + y \ln x \ln y + y \frac{\ln \frac{x}{y}}{\ln x} \ln \left(\frac{\ln \frac{x}{y}}{\ln x} \right) = 0}$$

4°/ Tangentes à la courbe C_α passant par O.

La contemplation réfléchie des courbes représentatives des fonctions $f_\alpha = x^{1-x^\alpha}$ conduit intuitivement à la solution : hormis la tangente à l'origine pour les courbes correspondant aux valeurs $\alpha > 0$, on ne peut mener à chaque courbe C_α qu'une seule tangente à partir du point O.

La dérivée en un point $M(x,y)$ d'une courbe C_α est donnée par :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 - x^\alpha (1 + \alpha \ln x)}{x^{x^\alpha}}$$

Pour que la tangente passe par le point O, il faut et il suffit que la dérivée soit égale au rapport $\frac{y}{x}$:

$$\frac{y}{x} = \frac{1 - x^\alpha (1 + \alpha \ln x)}{x^{x^\alpha}}$$

$$\frac{1}{x^{x^\alpha}} = \frac{1 - x^\alpha (1 + \alpha \ln x)}{x^{x^\alpha}}$$

$$x^\alpha (1 + \alpha \ln x) = 0$$
$$x^\alpha = 0 \text{ ou } 1 + \alpha \ln x = 0$$

x^α ne peut être nul que pour $x = 0$ et $\alpha > 0$ et, dans ce cas, il s'agit de la tangente au point O, d'équation $y = x$.
La relation $1 + \alpha \ln x = 0$ donne la solution :

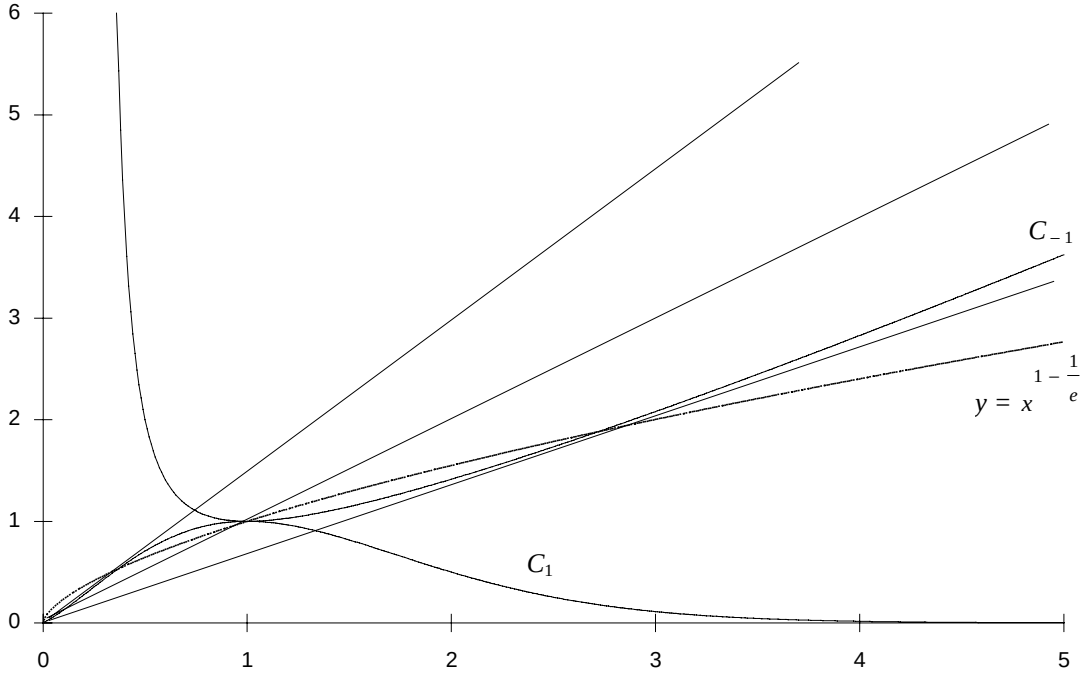
$$\alpha \ln x = -1$$
$$x^\alpha = \frac{1}{e}$$
$$x = e^{-\frac{1}{\alpha}}$$

Elle existe toujours, quelle que soit la valeur de α. L'ordonnée correspondante est :

$$y = x^{1-x^\alpha} = x^{1-\frac{1}{e}} = e^{-\frac{1}{\alpha}\left(1-\frac{1}{e}\right)}$$

et la courbe indépendante de α qui joint les points de contact des tangentes issues de O a point équation :

$$\boxed{y = x^{1-\frac{1}{e}}}$$



Tangentes aux courbe C_α issues du point O.

EXERCICE 13.

I. On considère la fonction f définie, pour $x > 0$, par :

$$f(x) = \frac{3}{4}\, ln\, \frac{x}{2} + \frac{1}{8}\, ln\, \frac{x^2+4}{8} - 2\, Atan\, \frac{x}{2} + \frac{\pi}{2}.$$

Vérifier que $f(2) = 0$. Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$. Montrer que, pour $x > 0$, le signe de $f''(x)$ est lié à celui de $\varphi(x) = -x^4 + 8x^3 - 5x^2 - 12$. Montrer que l'équation $f''(x) = 0$ admet deux racines positives α et β que l'on ne cherchera pas à calculer. Vérifier que l'une d'elles, α, est comprise entre 1 et 2, et que l'autre, β, est comprise entre 7 et 8.

II. Montrer que, lorsque x tend vers l'infini, $\Delta x = f(x) - ln\, x$ tend vers une limite finie λ que l'on précisera. On pose $x = \frac{1}{t}$. Donner le développement limité au 2e ordre inclus de $\Delta(\frac{1}{t})$ en prenant t pour infiniment petit principal, $t > 0$. Former le développement limité au 2e ordre inclus de $e^{\Delta\left(\frac{1}{t}\right)}$.

III. Le plan étant rapporté à deux axes de coordonnées rectangulaires :
   a) Construire la courbe (C) d'équation $y = f(x)$. Etudier sa concavité.
   b) Construire la courbe (Γ) d'équation $y = e^{f(x)}$. Préciser la position de la branche infinie de (Γ) par rapport à l'asymptote rectiligne correspondante. On n'étudiera pas la concavité mais on déterminera la tangente au point d'arrêt.

IV. Calculer l'intégrale définie $G(u) = \int_2^u (\Delta(x) - \lambda)\, dx$ avec $u > 0$. Déterminer la constante k telle que la différence $G(u) - k\, ln\, u$ ait une limite finie lorsque u tend vers l'infini. Quelle est cette limite ?

SOLUTION.

I. Fonctions f et dérivées.

a) Calcul de $f(2)$.

$$f(x) = \frac{3}{4}\, ln\, \frac{x}{2} + \frac{1}{8}\, ln\, \frac{x^2+4}{8} - 2\, Atan\, \frac{x}{2} + \frac{\pi}{2}$$

$$f(2) = \frac{3}{4}\, ln\, 1 + \frac{1}{8}\, ln\, 1 - 2\, Atan\, 1 + \frac{\pi}{2} = 0$$

car $ln\, 1 = 0$ et $Atan\, 1 = \frac{\pi}{4}$.

$$\boxed{f(2) = 0}$$

b) Dérivée $f'(x)$.

$$ln\, \frac{x}{2} = ln\, x - ln\, 2$$

$$ln\, \frac{x^2+4}{8} = ln\,(x^2+4) - ln\, 8$$

$$f'(x) = \frac{3}{4x} + \frac{1}{8} \times \frac{2x}{x^2+4} - 2\, \frac{\frac{1}{2}}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}$$

$$f'(x) = \frac{3}{4x} + \frac{1}{4} \times \frac{x}{x^2+4} - \frac{4}{x^2+4}$$

$$f'(x) = \frac{3(x^2+4)+x^2-16x}{4x(x^2+4)}$$

$$f'(x) = \frac{x^2-4x+3}{x(x^2+4)} = \frac{(x-1)(x-3)}{x(x^2+4)}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{(x-1)(x-3)}{x(x^2+4)}}$$

c) Calcul de la dérivée seconde.

Posons $u = (x-1)(x-3)$. Sa dérivée est :

$$u' = (x-3) + (x-1) = 2(x-2).$$

Posons $v = x(x^2+4)$. Sa dérivée est :

$$v' = (x^2+4) + x \times 2x = 3x^2 + 4$$

$$f'(x) = \frac{u}{v}$$

$$f''(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$f''(x) = \frac{2(x-2)x(x^2+4) - (x-1)(x-3)(3x^2+4)}{x^2(x^2+4)^2}$$

$$f''(x) = \frac{(2x^2-4x)(x^2+4) - (x^2-4x+3)(3x^2+4)}{x^2(x^2+4)^2}$$

$$f''(x) = \frac{2x^4-4x^3+8x^2-16x-3x^4+12x^3-13x^2+16x-12}{x^2(x^2+4)^2}$$

$$\boxed{f''(x) = \frac{-x^4+8x^3-5x^2-12}{x^2(x^2+4)^2}}$$

Le dénominateur de cette expression de la dérivée seconde est un carré : il est toujours positif. Le signe de la dérivée seconde ne dépend que du signe du numérateur.

Le signe de la dérivée seconde ne dépend que du signe du polynôme $-x^4 + 8x^3 - 5x^2 - 12$.

d) Zéros de la dérivée seconde.

Les valeurs de x qui annulent la dérivée seconde sont les valeurs de x qui annulent le numérateur :

$$\varphi(x) = -x^4 + 8x^3 - 5x^2 - 12.$$

Pour calculer les racines de ce polynôme, étudions la fonction $\varphi(x)$, pour $x > 0$ puisque la fonction $f(x)$ n'est définie que pour $x > 0$.

$$\varphi'(x) = -4x^3 + 24x^2 - 10x$$

$$\varphi'(x) = -2x(2x^2 - 12x + 5)$$

$\varphi'(x)$ est nul pour $x = 0$ et $x = \frac{6 \pm \sqrt{26}}{2}$, d'où le tableau de variations :

x	0		$3-\frac{\sqrt{26}}{2}$		$3+\frac{\sqrt{26}}{2}$		$+\infty$
φ'	0	–	0	+	0	–	
φ	–12	↘	–12,32	↗	252,82	↘	$-\infty$

Comme φ est une fonction continue, monotone par morceaux, on voit sur le tableau de variations qu'elle doit s'annuler une fois lorsque x varie de $3-\frac{\sqrt{26}}{2}$ à $3+\frac{\sqrt{26}}{2}$, et une fois lorsque x varie de $3+\frac{\sqrt{26}}{2}$ à $+\infty$, et pour ces deux valeurs seulement. L'énoncé permet de préciser un peu ces racines de φ (x).

φ (1) = – 10

φ (2) = 16

Il y a donc une première racine α entre x=1 et x=2.

φ (7) = 86

φ (8) = – 332

Il y a donc une deuxième racine β entre 7 et 8.

Le calcul à la machine donne les valeurs :

α = 1, 549 761 786 97

β = 7, 282 335 029 87

et les deux autres racines sont complexes conjuguées.

L'équation $f''(x) = 0$ admet deux racines positives:
α comprise entre 1 et 2, et β comprise entre 7 et 8.

II. Etude de $f(x) - \ln x$ à l'infini.

a) Limite λ de Δ(x).

On pose $\Delta(x) = f(x) - \ln x$.

$$\Delta(x) = \frac{3}{4}\ln\frac{x}{2} + \frac{1}{8}\ln\frac{x^2+4}{8} - 2\,Atan\frac{x}{2} + \frac{\pi}{2} - \ln x$$

$$\Delta(x) = -\frac{1}{4}\ln x + \frac{1}{8}\ln(x^2+4) - 2\,Atan\frac{x}{2} + \frac{\pi}{2} - \frac{9}{8}\ln 2$$

Lorsque x tend vers $+\infty$,

$$-\frac{1}{4}\ln x + \frac{1}{8}\ln(x^2+4) = \frac{1}{8}\ln\left(1+\frac{4}{x^2}\right) \to 0$$

$$-2\,Atan\frac{x}{2} \text{ tend vers } -2\frac{\pi}{2} = -\pi$$

Lorsque x tend vers l'infini,
$\Delta(x) = f(x) - \ln x$
tend vers une limite
$\lambda = -\frac{\pi}{2} - \frac{9}{8}\ln 2$

b) Développement limité de $\Delta\left(\frac{1}{t}\right)$.

$$\Delta(x) = \frac{1}{8}\ln\left(1+\frac{4}{x^2}\right) - 2\,Atan\frac{x}{2} + \frac{\pi}{2} - \frac{9}{8}\ln 2$$

$$\Delta\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{1}{8}\ln(1+4t^2) - 2\,Atan\frac{1}{2t} + \frac{\pi}{2} - \frac{9}{8}\ln 2$$

Lorsque t tend vers 0, par valeurs supérieures,

$\ln(1+4t^2) = 4t^2 + \varepsilon_1(t)\,t^3$, avec $\varepsilon_1(t) \to 0$ si $t \to 0$.

$Atan\frac{1}{2t} = \frac{\pi}{2} - 2t + \varepsilon_2(t)\,t^2$, avec $\varepsilon_2(t) \to 0$ si $t \to 0$, car $Atan\frac{1}{2t} = \frac{\pi}{2} - Atan\,2t$ et $Atan\,2t \approx 2t$

$$\Delta\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{t^2}{2} - \pi + 4t + \frac{\pi}{2} - \frac{9}{8}\ln 2 + \varepsilon(t)\,t^2$$

$$\Delta\left(\frac{1}{t}\right) = -\frac{\pi}{2} - \frac{9}{8}\ln 2 + 4t + \frac{t^2}{2} + \varepsilon(t)\,t^2$$

c) Développement limité de $e^{\Delta\left(\frac{1}{t}\right)}$.

$$e^{\Delta\left(\frac{1}{t}\right)} = e^{-\frac{\pi}{2} - \frac{9}{8}\ln 2 + 4t + \frac{t^2}{2} + \varepsilon(t)\,t^2}$$

$$e^{\Delta\left(\frac{1}{t}\right)} = e^{-\frac{\pi}{2} - \frac{9}{8}\ln 2} \times e^{4t + \frac{t^2}{2} + \varepsilon(t)\,t^2}$$

Or $e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + \varepsilon\, u^2$, donc avec

$$u = 4t + \frac{t^2}{2} + \varepsilon(t)\,t^2$$

il vient :

$$1 + u + \frac{u^2}{2} = 1 + 4t + (\frac{1}{2} + \frac{16}{2})\,t^2 + \varepsilon_1(t)\,t^2$$

$$e^{\Delta\left(\frac{1}{t}\right)} = e^{-\frac{\pi}{2} - \frac{9}{8}\ln 2}\left(1 + 4t + \frac{17}{2}\,t^2\right) + \varepsilon_2(t)\,t^2$$

III. Courbes représentatives.

a) Courbe *(C)*.

$$f(x) = \frac{3}{4}\ln\frac{x}{2} + \frac{1}{8}\ln\frac{x^2+4}{8} - 2\,Atan\frac{x}{2} + \frac{\pi}{2}.$$

$$f'(x) = \frac{(x-1)(x-3)}{x(x^2+4)}$$

$$f''(x) = \frac{-x^4 + 8x^3 - 5x^2 - 12}{x^2(x^2+4)^2}$$

La fonction *f(x)* est définie et continue pour toute valeur de $x > 0$. Dans l'ensemble de définition] 0 , +∞ [la fonction *f(x)* est dérivable en tout point. Sa dérivée est continue et s'annule pour $x = 1$ et pour $x = 3$: entre ces deux valeurs, elle est négative. La dérivée est positive à l'extérieur de l'intervalle limité par ses racines.

La dérivée seconde a deux racines. Elle est positive entre ses racines et négative à l'extérieur. La courbe a donc deux points d'inflexion, l'un pour $x = \alpha$, l'autre pour $x = \beta$. La concavité de la courbe est tournée vers les *y* négatifs pour $x < \alpha$ et pour $x > \beta$, et elle est tournée vers les *y* positifs lorsque *x* est entre α et β.

Lorsque *x* tend vers 0, *f(x)* est équivalent à $\frac{3}{4}\ln x$ qui tend vers $-\infty$. La courbe est donc asymptote à l'axe *Oy* d'équation $x = 0$.

L'étude de $\Delta(x) = f(x) - \ln x$ faite en a) montre que *f(x)* est asymptote à la courbe d'équation :

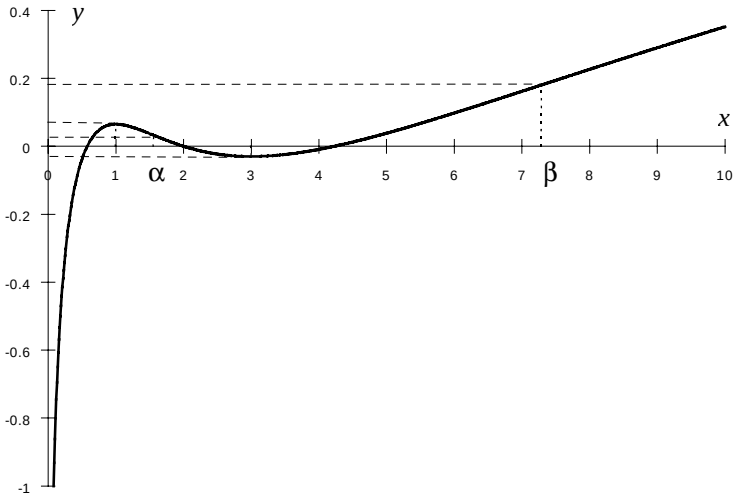
$$y = \ln x - \frac{\pi}{2} - \frac{9}{8}\ln 2$$

et la courbe *(C)* présente donc une branche parabolique de direction asymptotique parallèle à l'axe *Ox*. L'étude à l'infini montre que *(C)* est au-dessus de l'asymptote.
Ces indications permettent de construire le tableau de variations de *f(x)* et la courbe représentative *(C)*.

Tableau de variations.

x	0		$3-\frac{\sqrt{26}}{2}$		1		α		2		3		$3+\frac{\sqrt{26}}{2}$		β		$+\infty$
φ'	0	$-$	0	$+$	$+$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	$-$			
f''	$\|$	$-$		$-$	$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	0	$-$		
f'	$\|$	$+$		$+$	0	$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
f	$\|-\infty$	↗		↗	$f(1)$	↘		↘	0	↘	$f(3)$	↗		↗		↗	$+\infty$

Courbe représentative.



Courbe représentative de la fonction $f(x) = \frac{3}{4}\, ln\, \frac{x}{2} + \frac{1}{8}\, ln\, \frac{x^2+4}{8} - 2\, Atan\, \frac{x}{2} + \frac{\pi}{2}$.

b) Courbe (Γ).

La courbe (Γ) se déduit aisément de la courbe *(C)* en considérant que $e^{-\infty} = 0$, que $e^0 = 1$, que l'exponentielle est toujours positive et que sa dérivée est :

$$\frac{d(e^{f(x)})}{dx} = \frac{df(x)}{dx}\, e^{f(x)I}$$

La fonction $e^{f(x)I}$ admet les mêmes extrema que la fonction $f(x)$.

Etude au voisinage de l'infini.

Lorsque x tend vers l'infini, $f(x)$ tend vers l'infini et $e^{f(x)}$ tend aussi vers l'infini.

$$f(x) \approx ln\, x - \frac{\pi}{2} - \frac{9}{8} = ln\, x + \lambda$$

avec $\lambda = -\frac{\pi}{2} - \frac{9}{8}$.

$$e^{f(x)} \approx x\, e^{\lambda}$$

$$e^{f(x)} - x\, e^{\lambda} \approx e^{(\Delta(x) + ln\, x)} - x\, e^{\lambda}$$

$$e^{f(x)} - x\,e^{\lambda} \approx x\,e^{\lambda} \times \left(\frac{4}{x} + \frac{17}{2x^2} \right) = e^{\lambda} \left(4 + \frac{17}{2x} \right)$$

$$e^{f(x)} - x\,e^{\lambda} \to 4\,e^{\lambda}$$

La courbe (Γ) possède une asymptote oblique d'équation : $y = e^{-\frac{\pi}{2} - \frac{9}{8}} (x + 4) = e^{\lambda} (x + 4)$

$$y - e^{-\frac{\pi}{2} - \frac{9}{8}} (x + 4) = e^{-\frac{\pi}{2} - \frac{9}{8}} \times \frac{17}{2x} > 0.$$

La courbe (Γ) est au-dessus de son asymptote au voisinage de l'infini.

Point d'arrêt.

Le point $x = 0$, $y = 0$, est le point où s'arrête la courbe (Γ). C'est un « point d'arrêt ». Lorsque x tend vers 0 :

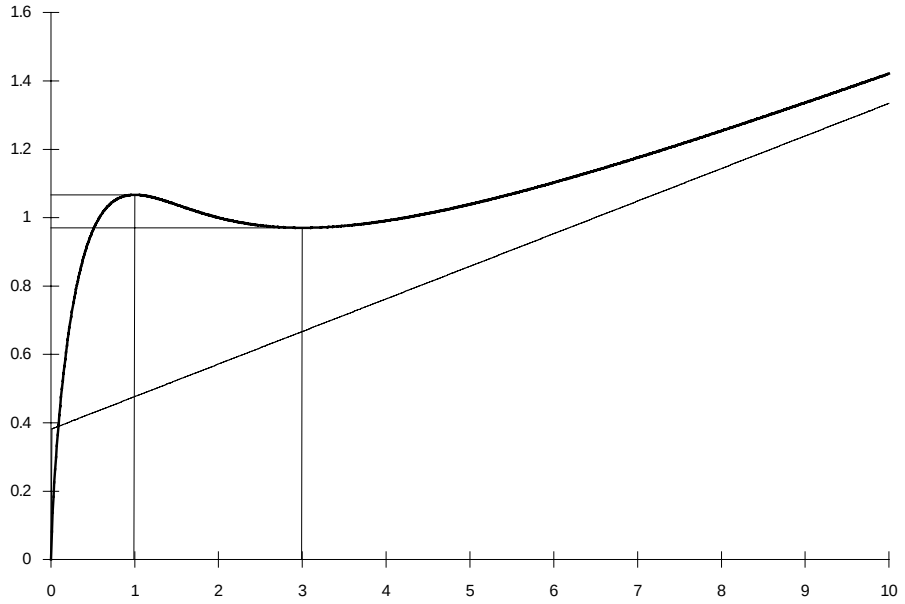
$$f(x) \approx \frac{3}{4} \ln x + \frac{\pi}{2} - \frac{7}{8} \ln 2 - x$$

$$e^{f(x)} \approx x^{\frac{3}{4}}\, e^{\frac{\pi}{2}}\, 2^{-\frac{7}{8}}\, e^{-x} \approx x^{\frac{3}{4}}\, e^{\frac{\pi}{2}}\, 2^{-\frac{7}{8}}.$$

La dérivée tend donc vers l'infini avec $x^{-\frac{1}{4}}$.

Au point d'arrêt (0,0), la tangente est verticale, son équation est $x = 0$.

Courbe représentative.



Courbe représentative de la fonction $e^{f(x)} = e^{\frac{3}{4} \ln \frac{x}{2} + \frac{1}{8} \ln \frac{x^2+4}{8} - 2\,Atan \frac{x}{2} + \frac{\pi}{2}}$.

IV. Intégrale.

a) Calcul de l'intégrale *G(u)*.

$$G(u) = \int_2^u (\Delta(x) - \lambda)\, dx \quad (u > 0)$$

$$G(u) = \int_2^u \left(\frac{1}{8} \ln\left(1 + \frac{4}{x^2} \right) - 2\, Atan \frac{x}{2} + \pi \right) dx$$

$$G(u) = \frac{1}{8} \int_2^u \ln\left(1 + \frac{4}{x^2} \right) dx - 2 \int_2^u Atan \frac{x}{2}\, dx + \pi \int_2^u dx.$$

On pose :

$$I_1 = \int_2^u \ln\left(1 + \frac{4}{x^2} \right) dx \qquad I_2 = \int_2^u Atan \frac{x}{2}\, dx \qquad I_3 = \int_2^u dx$$

$$G(u) = \frac{1}{8} I_1 - 2 I_2 + \pi I_3$$

- Calcul de I_1.

  Pour calculer $I_1 = \int_2^u \ln\left(1 + \frac{4}{x^2} \right) dx$, intégrons par parties en posant : $w = \ln\left(1 + \frac{4}{x^2} \right)$, $v = x$.

  Par différenciation, nous obtenons :

$$dw = -\frac{\frac{8}{x^3}}{\frac{4+x^2}{x^2}} = -\frac{8}{x(x^2+4)} dx \qquad dv = dx$$

$$I_1 = \int w\, dv = w\, v - \int v\, dw = \left[x \ln\left(1 + \frac{4}{x^2} \right) \right]_{x=2}^{x=u} + 8 \int_2^u \frac{dx}{x^2+4}$$

$$I_1 = u \ln\left(1 + \frac{4}{u^2} \right) - 2 \ln 2 + 4 \left[Atan \frac{x}{2} \right]_{x=2}^{x=u}$$

$$I_1 = u \ln\left(1 + \frac{4}{u^2} \right) - 2 \ln 2 + 4\, Atan \frac{u}{2} - \pi$$

- Calcul de I_2.

$$I_2 = \int_2^u Atan \frac{x}{2}\, dx$$

On intègre par parties en posant : $w = Atan \frac{x}{2}$ et $v = x$.

Par différenciation, il vient :

$$dw = \frac{2dx}{4+x^2} \text{ et } dv = dx$$

$$I_2 = \int w\, dv = w\, v - \int v\, dw$$

$$I_2 = \left[x\, Atan \frac{x}{2} \right]_{x=2}^{x=u} - \int_2^u \frac{2x dx}{4+x^2} = u\, Atan \frac{u}{2} - \frac{\pi}{2} - \left[\ln(4 + x^2) \right]_{x=2}^{x=u}$$

$$I_2 = u\, Atan \frac{u}{2} - \frac{\pi}{2} - \ln(4 + u^2) + 3 \ln 2$$

- Calcul de I_3.

$$I_3 = \int_2^u dx = (u - 2)$$

- $G(u) = \frac{1}{8} I_1 - 2 I_2 + \pi I_3$

$$= \frac{1}{8}\left(u\, ln\left(1+\frac{4}{u^2} \right) - 2\, ln\, 2 + 4\, Atan\frac{u}{2} - \pi \right) - 2\left(u\, Atan\frac{u}{2} - \frac{\pi}{2} - ln\,(4+u^2) + 3\, ln\, 2 \right) + \pi\,(u-2).$$

$$= \left(\frac{u}{8} + 2 \right) ln\,(4+u^2) - \frac{u}{4}\, ln\, u + \left(\frac{1}{2} - 2\,u \right) Atan\frac{u}{2} + \pi\, u - \left(\frac{1}{4} + 6 \right) ln\, 2 + \left(1 - \frac{1}{8} \right)\pi$$

$$G(u) = \frac{u+16}{8}\, ln\,(4+u^2) - \frac{u}{4}\, ln\, u + \frac{1-4u}{2}\, Atan\frac{u}{2} + \pi\left(u + \frac{7}{8} \right) - \frac{25}{4}\, ln\, 2.$$

b) Détermination de la constante *k*.

$$G(u) - k\, ln\, u = \frac{u+16}{8}\, ln\,(4+u^2) - \left(\frac{u}{4} + k \right) ln\, u + \frac{1-4u}{2}\, Atan\frac{u}{2} + \pi\left(u + \frac{7}{8} \right) - \frac{25}{4}\, ln\, 2.$$

Lorsque *u* tend vers l'infini :

$$\frac{u+16}{8}\, ln\,(4+u^2) \approx \frac{u+16}{4}\, ln\, u$$

$$\left(\frac{u}{4} + k \right) ln\, u \approx \frac{u+4k}{4}\, ln\, u$$

$$\frac{1-4u}{2}\, Atan\frac{u}{2} \approx -\pi\, u + \frac{\pi}{4}$$

$$G(u) - k\, ln\, u \approx \frac{16-4k}{4}\, ln\, u + \pi\left(\frac{1}{4} + \frac{7}{8} \right) - \frac{25}{4}\, ln\, 2$$

$$G(u) - k\, ln\, u \approx (4-k)\, ln\, u + \pi\left(\frac{1}{4} + \frac{7}{8} \right) - \frac{25}{4}\, ln\, 2$$

Pour que $G(u) - k\, ln\, u$ tende vers une limite finie, il faut et il suffit que $(4-k)\, ln\, u$ soit nul.

Pour que $G(u) - k\, ln\, u$ tende vers une limite finie, il faut et il suffit que $k = 4$.

c) Limite de l'expression *G(u)–4 ln u*.

$$G(u) - 4\, ln\, u = \frac{u+16}{8}\, ln\,(4+u^2) - \left(\frac{u}{4} + 4 \right) ln\, u + \frac{1-4u}{2}\, Atan\frac{u}{2} + \pi\left(u + \frac{7}{8} \right) - \frac{25}{4}\, ln\, 2.$$

Lorsque *u* tend vers l'infini :

$$\frac{u+16}{8}\, ln\,(4+u^2) = \frac{u+16}{8}\, ln\, u^2\left(1+\frac{4}{u^2} \right) = \frac{u+16}{4}\, ln\, u + \frac{u+16}{8}\, ln\left(1+\frac{4}{u^2} \right)$$

$$\approx \frac{u+16}{4}\, ln\, u + \frac{u+16}{8} \times \frac{4}{u^2} \approx \frac{u+16}{4}\, ln\, u + \frac{1}{2u}$$

$$\frac{u+16}{8}\, ln\,(4+u^2) - \left(\frac{u}{4} + 4 \right) ln\, u \approx \frac{1}{2u} \to 0$$

$$Atan\frac{u}{2} \approx \frac{\pi}{2} - \frac{2}{u}$$

$$\frac{1-4u}{2}\, Atan\frac{u}{2} \approx \frac{\pi}{4} - \pi\, u + 4 - \frac{1}{u} \qquad \frac{1-4u}{2}\, Atan\frac{u}{2} + \pi\, u \approx \frac{\pi}{4} + 4 - \frac{1}{u} \to \frac{\pi}{4} + 4$$

$$G(u) - 4\, ln\, u \approx \frac{1}{2u} - \frac{1}{u} + \frac{\pi}{4} + 4 + \frac{7\pi}{8} - \frac{25}{4}\, ln\, 2 = -\frac{1}{2u} + 4 + \frac{9\pi}{8} - \frac{25}{4}\, ln\, 2$$

Lorsque *u* tend vers l'infini, $G(u) - 4\, ln\, u$ tend vers $4 + \frac{9\pi}{8} - \frac{25}{4}\, ln\, 2$

EXERCICE 14.

1. Etudier, pour $0 < x < 1$, les variations de la fonction $u = x + \frac{x^3}{3} - A\sin x$. On montrera que, à l'intérieur de l'intervalle considéré, la dérivée de u s'annule pour une seule valeur de x. Déduire de cette étude que le rapport $\frac{A\sin x - x}{x^2}$ a pour limite 0 quand x tend vers 0.
2. On considère la fonction $f(x) = (x^2 - 1)\, A\sin \frac{1}{x}$. Pour quelles valeurs de x, cette fonction est-elle définie ? Variations et courbe représentative. On déterminera l'asymptote de *(C)* et on étudiera la concavité de *(C)*. La position de la courbe par rapport à son asymptote sera déduite du sens de la concavité.
3. On se propose de calculer, pour $x > 1$, l'intégrale indéfinie :
$$I = \int (x^2 - 1)\, A\sin \frac{1}{x}\, dx$$
On se ramènera d'abord, par une intégration par parties à une intégrale où ne figure plus le symbole *Asin*. Pour calculer cette nouvelle intégrale, on pourra faire le changement de variable $\theta = Ach\, x$, ou bien la mettre sous la forme d'une somme d'intégrales $\int \frac{A\, dx}{\sqrt{x^2 - 1}} + \int B\, dx \sqrt{x^2 - 1}$ où A et B sont des constantes.
Déterminer, si possible sans nouveau calcul, la valeur de I pour $x < -1$.
4. Etudier les variations de la fonction $\varphi(x) = x + \alpha \frac{x^3}{3} - A\sin x$, lorsque x croît de 0 à 1. En se limitant aux valeurs positives du paramètre α, on montrera que, pour $\alpha > \frac{1}{2}$, la dérivée $\varphi'(x)$ s'annule une seule fois dans l'intervalle $0 < x < 1$ et que, pour $\alpha \leq \frac{1}{2}$, elle ne s'annule pas dans cet intervalle. Déduire des variations de $\varphi(x)$ que le rapport $\frac{A\sin x - x}{x^3}$ a pour limite $\frac{1}{6}$ lorsque x tend vers 0.
A partir de ce dernier résultat, retrouver la position par rapport à l'asymptote des arcs infinis de la courbe *(C)* étudiée dans la question 2.

SOLUTION.

I^e Partie. Etude de la fonction $u = x + \frac{x^3}{3} - A\sin x$.

Ensemble de définition.

La fonction est définie pour toute valeur de x comprise entre 0 et 1 (notre étude se borne à l'intervalle] 0 , 1 [). Dans cet intervalle, la fonction u est continue et dérivable.

Valeurs limites aux bornes de l'intervalle de définition.

Lorsque x tend vers 0, u tend vers 0. Lorsque x tend vers 1, u tend vers $\frac{4}{3} - \frac{\pi}{2} = -\frac{3\pi - 8}{6} \approx -0{,}237$

Dérivée.

La dérivée est : $u' = 1 + x^2 - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{(1+x^2)\sqrt{1-x^2} - 1}{\sqrt{1-x^2}}$

Signe de la dérivée.

La dérivée s'annule pour les valeurs de x vérifiant l'équation $(1 + x^2)\sqrt{1-x^2} = 1$, équivalente, dans l'intervalle]0,1[, à $(1 + x^2)^2 (1 - x^2) = 1$, soit $(1 - x^4)(1 + x^2) = 1$, ou $1 + x^2 - x^4 - x^6 = 1$, $x^2 (1 - x^2 - x^4) = 0$. Comme la valeur $x = 0$, qui annule la dérivée est exclue de l'intervalle de notre étude, la dérivée ne s'annule, dans l'intervalle] 0 , 1 [, que si x est solution de $x^4 + x^2 - 1 = 0$, soit $\left(x^2 + \frac{1}{2} \right)^2 = \frac{5}{4}$, $x^2 + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$, $x^2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

> Dans l'intervalle] 0 , 1 [, la dérivée s'annule seulement pour $x = \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$.

Pour cette valeur de x, voisine de 0,786, la fonction u vaut $u_{max} = \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} + \frac{\sqrt{5}-1}{6}\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} - A\sin\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \approx 4{,}36 \times 10^{-2}$.

Entre 0 et $\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$, la dérivée est positive ; entre $\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$ et 1, la dérivée est négative. Lorsque u tend vers 0, la dérivée tend vers 0. Lorsque u tend vers 1, la dérivée tend vers $-\infty$.

Tableau de variations.

x	0		$\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$		1
u'	0	+	0	–	$-\infty$
u	0	↗	u_{max}	↘	$-\frac{3\pi-8}{6}$

Points d'inflexion.

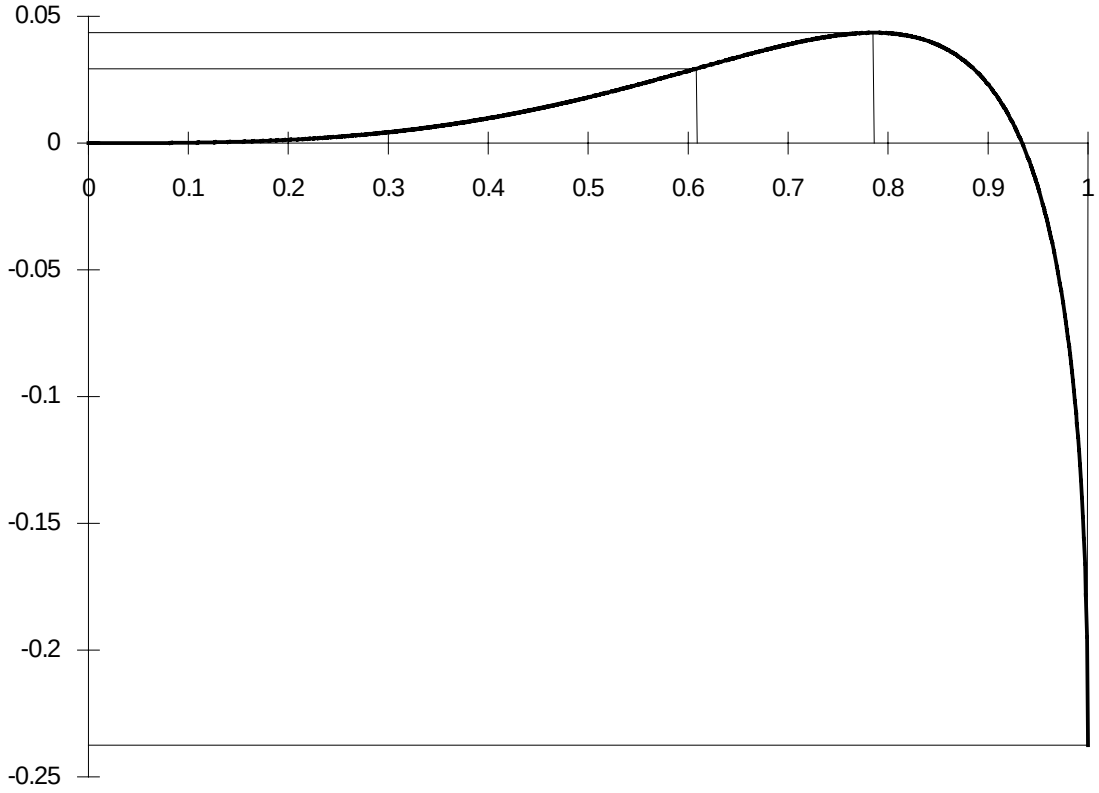
La dérivée seconde est : $u'' = 2x - \frac{x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$. Elle s'annule pour $x = 0$ et pour $2(1 - x^{2^\circ})\sqrt{1-x^2} = 1$.

$$4\,(1-x^2)^3 = 1 \Leftrightarrow 1-x^2 = 2^{-\frac{2}{3}} \Leftrightarrow x^2 = 1-2^{-\frac{2}{3}} \Leftrightarrow x = \sqrt{1-2^{-\frac{2}{3}}} \approx 0{,}608.$$

Compte tenu de la continuité de la fonction *u*, cette valeur de *x* correspond à un point d'inflexion.

Entre 0 et 1, la fonction *u* possède un point d'inflexion pour $x = \sqrt{1-2^{-\frac{2}{3}}}$

Courbe représentative.



Courbe représentative de la fonction $u = x + \frac{x^3}{3} - A\sin x$

Limite du rapport $\frac{A\sin x - x}{x^2}$ lorsque *x* tend vers 0.

Ce rapport présente une forme indéterminée $\frac{0}{0}$. Pour calculer la limite, on peut utiliser le calcul des dérivées de *u* que l'on a fait pour l'étude de la fonction *u.* Au voisinage de 0, les premiers termes du développement limité de *u* sont, pour $x > 0$:

$u(x) = u(0) + u'(0)\,x + u''(0)\,\frac{x^2}{2} + \varepsilon(x)\,x^2 = \varepsilon(x)\,x^2$ avec $\varepsilon(x)$ tend vers 0 lorsque *x* tend vers 0.

$$x + \frac{x^3}{3} - A\sin x = \varepsilon(x)\,x^2$$

Il en résulte : $\frac{A\sin x - x}{x^2} = \frac{x}{3} - \varepsilon(x)$. On voit alors que :

Lorsque x tend vers 0, $\frac{A\sin x - x}{x^2}$ tend vers 0.

II^e Partie. Etude de la fonction $f(x) = (x^2 - 1)\, Asin\, \frac{1}{x}$.

Ensemble de définition.

Pour que la fonction *Asin* soit définie, il faut que son argument soit inférieur ou égal à 1 en valeur absolue. La fonction $x^2 - 1$ est toujours définie. Autotal, la fonction $f(x)$ est définie pour $|x| \geq 1$.

Symétries.

$f(-x) = -(x^2 - 1)\, Asin\, \frac{1}{x} = -f(x)$. La fonction f est impaire. On peut se contenter de l'étudier sur l'intervalle [1, +∞ [. Le reste s'en déduira par symétrie par rapport à l'origine O des coordonnées.

Dérivée.

Dans l'intervalle ouvert] 1 , + ∞ [, la fonction est continue et dérivable. Sa dérivée est :

$$f'(x) = 2x\, Asin\, \frac{1}{x} - \frac{x^2-1}{x^2}\, \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{x}\right)^2}} = 2x\, Asin\, \frac{1}{x} - \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$$

Comme x est positif dans l'intervalle étudié, la dérivée est du signe de $y = Asin\, \frac{1}{x} - \frac{\sqrt{x^2-1}}{2x^2}$. La dérivée de y est

$$y' = -\frac{1}{x^2} \times \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{x}\right)^2}} + \frac{\sqrt{x^2-1}}{2x^3} - \frac{1}{2x\sqrt{x^2-1}} = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} - \frac{1}{2x\sqrt{x^2-1}} + \frac{\sqrt{x^2-1}}{2x^3}$$

$$y' = \frac{-3x^2 + x^2 - 1}{2x^3\sqrt{x^2-1}} = -\frac{2x^2+1}{2x^3\sqrt{x^2-1}}$$

Comme x est positif, y' est négatif et y décroît dans tout l'intervalle] 1 , + ∞ [. Or $y(1) = \frac{\pi}{2}$ et lorsque x tend vers l'infini, y tend vers 0, donc y est positif pour tout x de l'intervalle] 1 , + ∞ [. La dérivée $f'(x)$, ayant le signe de y est strictement positive et la fonction $f(x)$ est strictement croissante.

Limites aux bornes de l'intervalle] 1 , + ∞ [.

Lorsque x tend vers 1 par valeurs supérieures, $Asin\, \frac{1}{x}$ tend vers $\frac{\pi}{2}$, et $f(x) = (x^2 - 1)\, Asin\, \frac{1}{x}$ tend vers 0.

Lemme: développement limité d'ordre 4 de $Asin\, x$ au voisinage de 0.

$$Asin\, x = x + \frac{x^3}{6} + \varepsilon(x)\, x^4$$

Démonstration. La formule de Taylor donne pour la fonction indéfiniment dérivable $Asin\, x$ le développement

$$Asin\, x = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{d^k (A\sin x)}{dx^k} \right]_{x=0} \frac{x^k}{k!}$$

Comme la fonction $Asin\, x$ est une fonction impaire, elle n'a que des termes d'indices impairs dans son développement : les termes d'indices pairs sont tous nuls. Calculons les dérivées successives de $y = Asin\, x$.

$$y = Asin\, x \Leftrightarrow x = \sin y \text{ et } -\frac{\pi}{2} < y < +\frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dy} = \cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1-x^2}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

Pour $x = 0$, cette dérivée vaut 1.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{3}{2}} \times (-2x) = x(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}$$

Pour $x = 0$, la dérivée seconde, comme on le savait déjà d'après la symétrie de y, est nulle.

$$\frac{d^3y}{dx^3} = (1-x^2)^{-\frac{3}{2}} + x \times \left(-\frac{3}{2}\right) \times (1-x^2)^{-\frac{5}{2}} \times (-2x) = (1-x^2)^{-\frac{5}{2}}(1-x^2+3x^{2^\circ})$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = (1-x^2)^{-\frac{5}{2}}(1+2x^{2^\circ})$$

Pour $x = 0$, la dérivée troisième vaut 1.

Le développement limité de la fonction *Asin x* est donc :

$$Asin\ x = x + \frac{x^3}{6} + \varepsilon(x)\,x^4 \text{ avec } \varepsilon(x) \to 0 \text{ si } x \to 0.$$

Lorsque x tend vers l'infini, $\frac{1}{x}$ tend vers 0, $Asin\ \frac{1}{x}$ a pour développement limité :

$$Asin\ \frac{1}{x} = \frac{1}{x} + \frac{1}{2\times 3} \times \frac{1}{x^3} + \varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)\frac{1}{x^4} \text{ avec } \varepsilon\left(\frac{1}{x}\right) \to 0 \text{ si } x \to \infty$$

$$f(x) = (x^2-1)\,Asin\ \frac{1}{x} \approx x + \frac{1}{2\times 3} \times \frac{1}{x} - \frac{1}{x} = x - \frac{5}{6x}$$

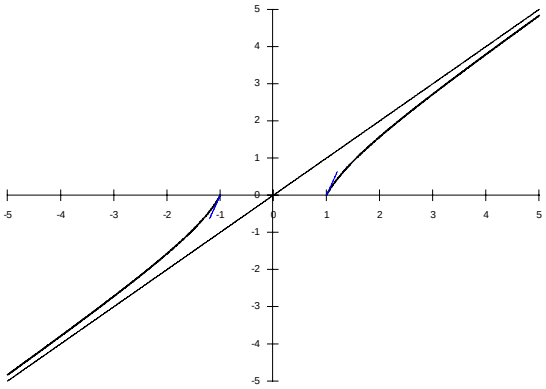
$f(x)$ tend vers l'infini. $\frac{f(x)}{x}$ tend vers 1, et $f(x) - x$ tend vers 0.

La droite d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe représentative de la fonction $f(x) = (x^2-1)\,Asin\ \frac{1}{x}$.

Tableau de variations.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		+				+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	0		0	↗	$+\infty$

Courbe représentative.



Courbe représentative de la fonction $f(x) = (x^2-1)\,Asin\ \frac{1}{x}$.

Concavité.

La concavité de la courbe s'étudie par le signe de la dérivée seconde.

$$f'(x) = 2x\,Asin\,\frac{1}{x} - \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$$

$$f''(x) = 2\,Asin\,\frac{1}{x} - \frac{2}{x}\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{x}\right)^2}} + \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^2} - \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} = 2\,Asin\,\frac{1}{x} - \frac{2}{\sqrt{x^2-1}} - \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-1}}$$

$$f''(x) = 2\,Asin\,\frac{1}{x} - \frac{2x^2+1}{x^2\sqrt{x^2-1}}$$

Pour étudier le signe de $f''(x)$, étudions sa variation pour $x > 0$. La dérivée troisième de $f(x)$ est :

$$f'''(x) = -\frac{2}{x^2}\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{x}\right)^2}} - \frac{4x^3\sqrt{x^2-1} - (2x^2+1)\left[2x\sqrt{x^2-1} + x^2 \times \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right]}{x^4(x^2-1)}$$

$$f'''(x) = -\frac{2}{x\sqrt{x^2-1}} - \frac{\left(4x^2 - 2(2x^2+1)\right)(x^2\text{-}1) - x^2(2x^2+1)}{x^3(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}$$

$$f'''(x) = -\frac{2x^2(x^2-1) - 2(x^2-1) - x^2(2x^2+1)}{x^3(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}$$

$$f'''(x) = \frac{5x^2-2}{x^3(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}$$

Pour $x > 1$, cette dérivée troisième est toujours positive, donc la dérivée seconde est croissante. Lorsque x tend vers 1, la valeur de $f''(x)$ tend vers $-\infty$. Lorsque x tend vers $+\infty$, la valeur de $f''(x)$ tend vers 0. Entre les deux, $f''(x)$ est strictement croissante, donc $f''(x)$ reste toujours négative, la concavité de la courbe est tournée vers les y négatifs.

> La concavité de $f(x)$ est tournée vers les $y < 0$ lorsque x est dans l'intervalle $]1, +\infty[$. Elle est, par symétrie, tournée vers les $y > 0$ lorsque x est dans l'intervalle $]-\infty , 1[$.

Position par rapport à l'asymptote.

Comme la fonction $f(x)$ n'a pas d'inflexion, elle reste toujours du même côté que son asymptote. Or au voisinage de $x = 1$, ou $f(x)$ est voisin de 0, la courbe est sous son asymptote, donc lorsque x est entre 1 et $+\infty$, la courbe est sous son asymptote. Par symétrie, lorsque x est inférieur à -1, la courbe est toujours au-dessus de son asymptote.

III^e Partie. Primitive de la fonction $f(x) = (x^2 - 1)\,Asin\,\frac{1}{x}$.

Soit $I = \int (x^2 - 1)\,Asin\,\frac{1}{x}\,dx$. On peut intégrer par parties en posant :

$u = Asin\,\frac{1}{x}$, d'où $du = -\frac{1}{x^2}\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{x}\right)^2}}\,dx = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx$

Pour avoir $dv = (x^2 - 1)\,dx$, prenons $v = \frac{x^3}{3} - x$.

$$I = \int u\,dv = uv - \int v\,du = Asin\,\frac{1}{x} \times \left(\frac{x^3}{3} - x \right) + \int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} \left(\frac{x^3}{3} - x \right) dx$$

$$I = \frac{1}{3}\,x\,(x^2-1)\,Asin\,\frac{1}{x} + \frac{1}{3}\int \frac{x^2-3}{\sqrt{x^2-1}}\,dx = \frac{1}{3}\,x\,(x^2-1)\,Asin\,\frac{1}{x} + \frac{1}{3}\int \sqrt{x^2-1}\,dx - \frac{2}{3}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$$

Les intégrales peuvent être calculées par changement de variable. Pour $x \geq 1$, posons $x = cosh\ \theta$. On obtient $dx = sinh\ \theta\,d\theta$. La relation $cosh^2\,\theta - sinh^2\,\theta = 1$ donne $\sqrt{x^2-1} = sinh\ \theta$.

$$\frac{1}{3}\int \sqrt{x^2-1}\,dx - \frac{2}{3}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{3}\int sinh^2\,\theta\,d\theta - \frac{2}{3}\int d\theta = \frac{1}{3}\int \frac{cosh\,2\theta - 1}{2}\,d\theta - \frac{2}{3}\int d\theta$$

$$= \frac{1}{6}\int cosh\,2\theta\,d\theta - \frac{5}{6}\int d\theta = \frac{1}{12}\,sinh\,2\theta - \frac{5}{6}\,\theta + \text{constante} = \frac{1}{6}\,sinh\,\theta\,cosh\,\theta - \frac{5}{6}\,\theta + \text{constante}$$

$$= \frac{1}{6}\,x\sqrt{x^2-1} - \frac{5}{6}\,Acosh\,x + \text{constante}$$

$$\boxed{\int (x^2-1)\,Asin\,\frac{1}{x}\,dx = \frac{1}{3}\,x\,(x^2-1)\,Asin\,\frac{1}{x} + \frac{1}{6}\,x\sqrt{x^2-1} - \frac{5}{6}\,Acosh\,x + \text{constante}}$$

La formule est vraie quel que soit x supérieur ou égal à 1. On peut modifier cette formule pour la rendre valable quel que soit le signe de x : nous avons posé $x = cosh\ \theta$. Si x est négatif, nous poserons $x = -cosh\ \theta$ avec θ négatif. Alors $dx = -sinh\ \theta\,d\theta$ et $\sqrt{x^2-1} = -sinh\ \theta$. Il vient :

$$\frac{1}{3}\int \sqrt{x^2-1}\,dx - \frac{2}{3}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{3}\int sinh^2\,\theta\,d\theta - \frac{2}{3}\int d\theta = \frac{1}{3}\int \frac{cosh\,2\theta - 1}{2}\,d\theta - \frac{2}{3}\int d\theta$$

$$\int (x^2-1)\,Asin\,\frac{1}{x}\,dx = \frac{1}{3}\,x\,(x^2-1)\,Asin\,\frac{1}{x} + \frac{1}{6}\,x\sqrt{x^2-1} - \frac{5}{6}\,Acosh\,x + \text{constante}$$

$\theta \geq 0$ et $x = \dfrac{e^{\theta} + e^{-\theta}}{2} \Rightarrow e^{2\theta} - 2\,x\,e^{\theta} + 1 = 0 \Rightarrow (e^{\theta} - x)^2 = x^2 - 1 \Rightarrow \theta = ln\,(x + \sqrt{x^2-1})$

$\theta \leq 0$ et $-x = \dfrac{e^{\theta} + e^{-\theta}}{2} \Rightarrow e^{-2\theta} + 2\,x\,e^{-\theta} + 1 = 0 \Rightarrow (e^{-\theta} + x)^2 = x^2 - 1 \Rightarrow \theta = -ln\,(-x - \sqrt{x^2-1})$

L'intégrale prend alors la forme suivante :

$$\int (x^2-1)\,Asin\,\frac{1}{x}\,dx = \begin{cases} \dfrac{1}{3}\,x\,(x^2-1)\,Asin\,\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{6}\,x\sqrt{x^2-1} - \dfrac{5}{6}\,ln\,(x + \sqrt{x^2-1}) + \text{constante si } x \geq 1 \\ \dfrac{1}{3}\,x\,(x^2-1)\,Asin\,\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{6}\,x\sqrt{x^2-1} + \dfrac{5}{6}\,ln\,(-x - \sqrt{x^2-1}) + \text{constante si } x \leq -1 \end{cases}$$

IV^e Partie. Etude des fonctions $\varphi\,(x) = x + \alpha\dfrac{x^3}{3} - Asin\,x$.

Ensemble de définition.

Pour toute valeur du paramètre α, la fonction $\varphi\,(x)$ est définie pour toute valeur de $x \in\ ]0,1[$, intervalle auquel nous bornons notre étude.

Dérivée.

Dans l'intervalle de définition, la fonction $\varphi\,(x)$ est continue et dérivable. Sa dérivée est :

$$\frac{d\varphi}{dx} = 1 + \alpha\,x^2 - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{(1+\alpha x^2)\sqrt{1-x^2} - 1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Signe de la dérivée.

La dérivée a le signe du numérateur $(1 + \alpha x^2)\sqrt{1-x^2} - 1$.

Ce numérateur est nul si $(1 + \alpha x^2)\sqrt{1-x^2} = 1$. Comme il n'y a que des termes positifs ($\alpha>0$ par hypothèse), on peut élever au carré et écrire cette éégalité sous la forme : $(1 + \alpha x^2)^2 (1 - x^2) = 1$, ce qui équivaut à :

$(1 + 2\alpha x^2 + \alpha^2 x^4)(1 - x^2) = 1$

$1 + 2\alpha x^2 + \alpha^2 x^4 - x^2 - 2\alpha x^4 - \alpha^2 x^6 = 1$

$-x^2 (\alpha^2 x^4 - (\alpha^2 - 2\alpha) x^2 + (1 - 2\alpha)) = 0$

La dérivée est donc nulle pour $x = 0$, quelle que soit la valeur de α.

Pour $\alpha = \frac{1}{2}$, $1 - 2\alpha = 0$ et l'équation se réduit à $-x^4 (\frac{x^2}{4} + \frac{3}{4}) = 0$. Sa seule racine réelle est $x = 0$.

Pour $0 < \alpha < \frac{1}{2}$, $1 - 2\alpha > 0$, $\alpha^2 - 2\alpha < 0$ car α est entre 0 et 2. La somme des racines de l'équation

$$\alpha^2 X^2 - (\alpha^2 - 2\alpha) X + (1 - 2\alpha) = 0$$

est négative et leur produit est positif. Les deux racines sont donc négatives, elles ne fournissent aucune valeur de x réelle annulant la dérivée. Dans ce cas, la seule valeur de x qui annule la dérivée est $x = 0$.

Pour $\alpha > \frac{1}{2}$, $1 - 2\alpha < 0$, le produit des racines de l'équation $\alpha^2 X^2 - (\alpha^2 - 2\alpha) X + (1 - 2\alpha) = 0$ est négatif, les racines sont de signes contraires, leur somme est négative si $\alpha < 2$, positive si $\alpha > 2$, nulle si $\alpha = 2$. La racine positive est $X = \frac{\alpha^2 - 2\alpha + \sqrt{(\alpha^2 - 2\alpha)^2 - 4\alpha^2(1-2\alpha)}}{2\alpha^2} = \frac{\alpha - 2 + \sqrt{(\alpha-2)^2 - 4(1-2\alpha)}}{2\alpha} = \frac{\alpha - 2 + \sqrt{\alpha(\alpha+4)}}{2\alpha}$. Pour $\alpha = 2$, elle vaut $\frac{\sqrt{3}}{2}$. La seule valeur possible de x qui annule la dérivée dans l'intervalle ouvert]0,1[est la racine carrée de X : $x = \sqrt{\frac{\alpha - 2 + \sqrt{\alpha(\alpha+4)}}{2\alpha}}$. Encore faut-il vérifier que cette valeur est inférieure à 1.

$$\sqrt{\frac{\alpha - 2 + \sqrt{\alpha(\alpha+4)}}{2\alpha}} < 1 \Leftrightarrow \frac{\alpha - 2 + \sqrt{\alpha(\alpha+4)}}{2\alpha} < 1 \Leftrightarrow \sqrt{\alpha(\alpha+4)} < \alpha + 2 \Leftrightarrow \alpha^2 + 4\alpha < \alpha^2 + 4\alpha + 4,$$

ce qui est toujours vérifié.

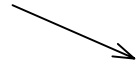
On peut résumer ces résultats dans le tableau suivant :

- Lorsque x tend vers 0, la dérivée de φ tend vers 0 quelle que soit la valeur de α.
- Pour $\alpha \leq \frac{1}{2}$, aucune valeur de x dans l'intervalle de définition] 0 , 1[n'annule la dérivée.
- Pour $\alpha > \frac{1}{2}$, une seule valeur de x ($x = \sqrt{\frac{\alpha - 2 + \sqrt{\alpha(\alpha+4)}}{2\alpha}}$) dans l'intervalle de définition annule la dérivée.

Tableau de variations.

Les résultats précédents permettent de dresser le tableau de variations suivant.

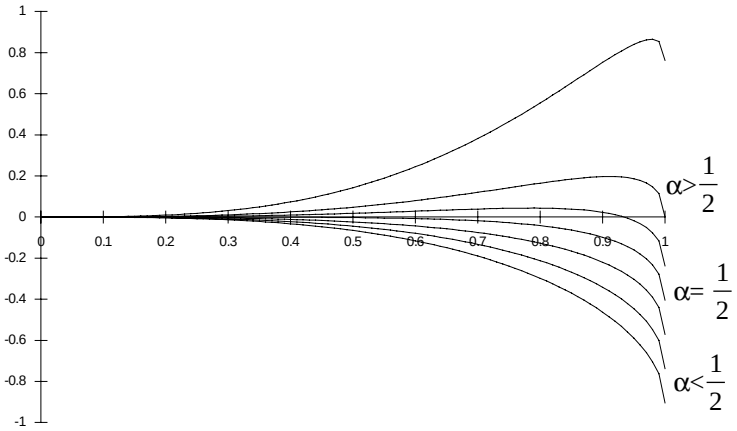
- $\alpha \leq \frac{1}{2}$.

x	0		1
$\varphi'(x)$	0	–	$-\infty$
$\varphi(x)$	0		$1 + \frac{\alpha}{3} - \frac{\pi}{2}$

- $\alpha > \frac{1}{2}$.

x	0		$\sqrt{\frac{\alpha-2+\sqrt{\alpha(\alpha+4)}}{2\alpha}}$		1
$\varphi'(x)$	0	+	0	–	$-\infty$
$\varphi(x)$	0	↗		↘	$1+\frac{\alpha}{3}-\frac{\pi}{2}$

Courbes représentatives.



Courbes représentatives des fonctions $\varphi(x) = x + \frac{\alpha}{3} x^3 - A\sin x$, $(\alpha > 0)$.

Limite du rapport $\frac{A\sin x - x}{x^3}$

La fonction $\frac{A\sin x - x}{x^3}$ est égale à $\frac{\alpha}{3} - \frac{\varphi(x)}{x^3}$. Au voisinage de 0, on peut développer $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ par la formule du binôme.

$\varphi'(x) = 1 + \alpha x^2 - (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \approx 1 + \alpha x^2 - (1 + \frac{x^2}{2} - \frac{3x^4}{8}) = (\alpha - 1/2)\, x^2 + \frac{3x^4}{8}$

$\varphi''(x) \approx (2\alpha - 1)\, x + \frac{3}{2} x^3$

$\varphi'''(x) \approx (2\alpha - 1) + \frac{9}{2} x^2$

$\varphi^{(4)}(x) \approx 9\, x$

$\varphi(x) \approx \varphi(0) + \varphi'(0)\, x + \varphi''(0) \frac{x^2}{2} + \varphi'''(0) \frac{x^3}{6} = \frac{2\alpha - 1}{6} x^3$

$$\frac{A\sin x - x}{x^3} = \frac{\alpha}{3} - \frac{\varphi(x)}{x^3} \approx \frac{1}{6}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{A\sin x - x}{x^3} = \frac{1}{6}$$

Application : position de la courbe *(C)* par rapport à son asymptote.

La position de la courbe *(C)* par rapport à son asymptote oblique $y = x$ est donnée par le signe de $x - f(x)$.

$$f(x) - x = (x^2 - 1)\, A\sin \frac{1}{x} - x.$$

Lorsque x tend vers l'infini, $\frac{1}{x}$ tend vers 0, $A\sin\frac{1}{x}$ tend vers 0 et $f(x) - x$ est équivalent à $x^2 A\sin\frac{1}{x} - x$.

Posons $t = \frac{1}{x}$. On a :

$f(x) - x \approx \frac{A\sin t}{t^2} - \frac{1}{t} = \frac{A\sin t - t}{t^3}\ t \approx \frac{t}{6} = \frac{1}{6x}$

$x - f(x) \approx -\frac{1}{6x}$

$x - f(x)$ a donc le signe opposé de celui de $\frac{1}{6x}$: négatif si x est positif, positif si x est négatif.

La courbe (C) est en dessous de son aymptote lorsque x tend vers $+\infty$.
La courbe (C) est au-dessus de son aymptote lorsque x tend vers $-\infty$.

EXERCICE 15.

Variations de la fonction $y = ln\ (ch\ x - m\ sh\ x)$. Discuter suivant les valeurs de m les allures de la courbe. Asymptotes. On montrera qu'on ne réduit pas le problème en supposant $m > 0$.

SOLUTION.

Remarque préliminaire.

Lorsque, dans la fonction $y = ln\ (cosh\ x - m\ sinh\ x)$, on remplace m par $-m$ et x par $-x$, y reste inchangé. Nous pourrons donc borner notre étude au cas $m \geq 0$. Les courbes pour $m \leq 0$ se déduiront des précédentes par symétrie par rapport à l'axe des y.

On ne réduit pas le problème en supposant $m \geq 0$.

1. Etude de la fonction $y = ln\ (ch\ x - m\ sh\ x)$, $m \geq 0$.

Ensemble de définition de la fonction.

La fonction est définie pour $cosh\ x - m\ sinh\ x > 0$.

- Si $m = 0$, cette condition est toujours réalisée. La fonction y se réduit à $y = ln\ (cosh\ x)$.
- Comme les valeurs de la fonction $tanh\ x = \dfrac{sinh\ x}{cosh\ x}$ sont toujours comprises entre -1 et $+1$, la condition $tanh\ x < \dfrac{1}{m}$ est toujours réalisée lorsque m est inférieur à 1.
- Lorsque m est supérieur à 1, la condition n'est réalisée que pour $x < Atanh\ \dfrac{1}{m}$.
- Lorsque m est égal à 1, la condition $cosh\ x - m\ sinh\ x > 0$ se réduit à $cosh\ x > sinh\ x$. Elle est toujours réalisée, mais, dans ce cas, la fonction y se réduit à $y = ln\ (cosh\ x - sinh\ x) = ln(e^{-x}) = -x$.

En résumé :

- Pour $0 \leq m \leq 1$, l'ensemble de définition de y est l'intervalle $]-\infty, +\infty[$.
- Pour $m > 1$, l'ensemble de définition de y est l'intervalle $]-\infty, Atanh\ \dfrac{1}{m}$.

Remarque :

$$Atanh\ \frac{1}{m} = \frac{1}{2}\ ln\left(\frac{m+1}{m-1}\right) \text{ pour } m > 1.$$

Dérivée.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{sinh\ x - m\ cosh\ x}{cosh\ x - m\ sinh\ x} = \frac{tanh\ x - m}{1 - m\ tanh\ x}$$

La dérivée est nulle si $tanh\ x = m$. Pour qu'il y ait un point à dérivée nulle, il faut donc que m soit inférieur à 1. Si m est supérieur ou égal à 1, il n'y a pas de point à tangente horizontale.

Lorsque m est inférieur à 1, l'ordonnée du point à tangente horizontale est $y = ln\ (cosh\ x - m\ sinh\ x)$ avec $tanh\ x = m$, donc $sinh\ x = m\ cosh\ x$, $y = ln\ (cosh\ x\ (1 - m^2)) = ln\ cosh\ x + ln\ (1 - m^2)$. Or la relation $cosh^2\ x - sinh^2\ x = 1$ entraîne $\dfrac{1}{cosh^2\ x} = 1 - tanh^2\ x = 1 - m^2$ donc $-2\ ln\ (cosh\ x) = ln\ (1 - m^2)$ et $y = \dfrac{1}{2}\ ln\ (1 - m^2)$.

Etude à l'infini.

- Pour $m \leq 1$, lorsque x tend vers $+\infty$, $\cosh x \approx \frac{e^x}{2}$, $\sinh x \approx \frac{e^x}{2}$, $\cosh x - m \sinh x \approx \frac{e^x}{2}(1-m)$, $y \approx x + \ln \frac{1-m}{2}$ et y tend vers l'infini avec x.
  $y - x$ tend vers $\ln \frac{1-m}{2}$, il y a une asymptote oblique d'équation $y = x + \ln \frac{1-m}{2}$.
- Pour $m > 1$, il n'y a pas de branche infinie du côté des x positifs, puisque y n'est défini que pour $x < \text{Atanh}\frac{1}{m}$
- Pour toute valeur positive ou nulle de m, lorsque x tend vers $-\infty$, $\cosh x \approx \frac{e^{-x}}{2}$, $\sinh x \approx -\frac{e^{-x}}{2}$, $\cosh x - m \sinh x \approx \frac{e^{-x}}{2}(1+m)$, $y \approx -x + \ln \frac{1+m}{2}$, et y tend vers l'infini avec $-x$. $y + x$ tend vers $\ln \frac{1+m}{2}$, il y a une asymptote oblique d'équation $y = -x + \ln\frac{1+m}{2}$.

Etude vers $x = \text{Atanh}\ \frac{1}{m}$, pour $m > 1$.

Lorsque x tend vers $\text{Atanh}\ \frac{1}{m}$ par valeurs inférieures, $\tanh x$ tend vers $\frac{1}{m}$ par valeurs inférieures, $\cosh x - m \sinh x$ tend vers 0 par valeurs supérieures et $y = \ln(\cosh x - m \sinh x)$ tend vers $-\infty$. Il y a donc dans ce cas, une asymptote verticale d'équation $x = \text{Atanh}\ \frac{1}{m}$.

Tableau de variations.

L'étude précédente permet de dresser le tableau de variations de la fonction, suivant les valeurs du paramètre m.

- $0 \leq m < 1$.

x	$-\infty$		0		$\text{Atanh}\ m$		$+\infty$
y'		$-$	$-m$	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	0	↘	$\ln\sqrt{1-m^2}$	↗	$+\infty$

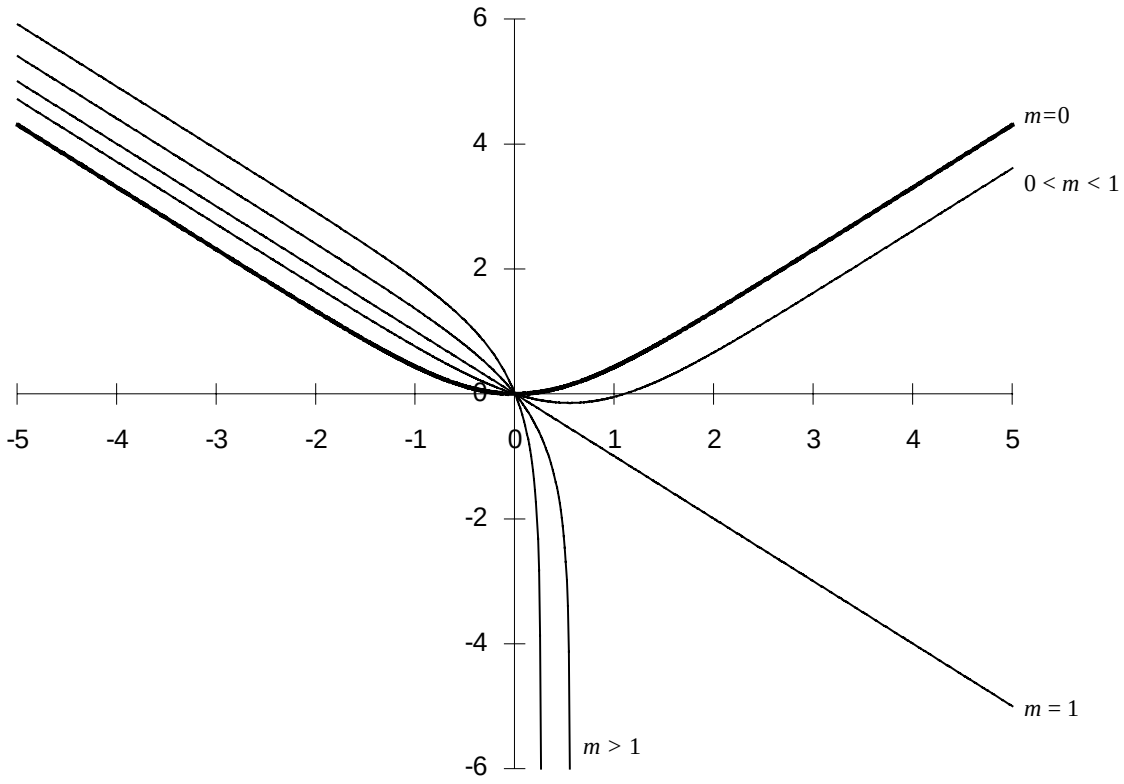
- $m = 1$.

$y = -x$. C'est l'équation de la deuxième bissectrice.

- $m > 1$.

x	$-\infty$		0		$\text{Atanh}\ \frac{1}{m}$	
y'		$-$	$-m$	$-$		
y	$+\infty$	↘	0	↘	$-\infty$	

2. Courbes représentatives.



Courbes représentatives des fonctions $y = \ln(\cosh x - m \sinh x)$ pour diverses valeurs positives de m. Les courbes pour $m \leq 0$, se déduisent par symétrie par rapport à l'axe $x = 0$.

Ensemble des points à tangente horizontale.

Les points à tangente horizontale n'existent, pour $m \geq 0$, que pour $m < 1$. Leur abscisse est $x = Atanh\ m$. Leur ordonnée est $y = \ln(\cosh x - m \sinh x) = \ln \cosh x + \ln(1 - m^2) = \ln(\cosh x) + \ln(1 - \tanh^2 x)$.

$$y = \ln(\cosh x) - 2 \ln(\cosh x) = -\ln(\cosh x).$$

C'est le symétrique de la courbe correspondant à m = 0.

EXERCICE 16.

On désigne par λ un nombre réel. On considère en axes rectangulaires la courbe C_λ d'équation :

$$x\,(\lambda - e^{\frac{x}{y}}) + e^{\frac{x}{y}} = 0$$

1. Calculer y en fonction de x et discuter suivant les valeurs de λ l'intervalle de définition de $f(x)$. Discuter suivant les valeurs de λ, la limite de $\frac{y}{x}$ quand x tend vers l'infini. Si cette limite m existe, déterminer la limite, si elle existe, de $y - m\,x$, quand x tend vers l'infini.
2. Lieu géométrique des points de C_λ où la tangente est parallèle à Ox. Tracer ce lieu.
3. Lieu géométrique des points de C_λ où $y'' = 0$.
4. Tracer les diverses courbes C_λ . On ne cherchera pas à déterminer avec précision les valeurs des extrema si elles existent. On précisera les tangentes aux points d'arrêt.

SOLUTION.

1° Etude de la fonction *y*.

La relation liant x et y peut être écrite :

$$x\,\lambda = (x-1)\,e^{\frac{x}{y}}\ .$$

Pour λ = 0, la solution est la droite $x = 1$.

$$e^{\frac{x}{y}} = \lambda\,\frac{x}{x-1} \qquad \frac{x}{y} = ln\left(\frac{\lambda\,x}{x-1}\right)$$

$$\boxed{y = \frac{x}{ln\left(\frac{\lambda\,x}{x-1}\right)}}$$

Ensemble de définition.

Pour que y existe, il faut que l'argument du logarithme ne soit pas nul ou infini : $x \neq 0$, $x \neq 1$. Il faut aussi

- que le dénominateur $ln\left(\frac{\lambda\,x}{x-1}\right)$ ne soit pas nul : $\lambda\,x \neq x - 1$, ou $(1-\lambda)\,x \neq 1$. Si λ = 1, la condition est toujours réalisée. Si λ ≠ 1, la condition est réalisée pour $x \neq \frac{1}{1-\lambda}$
- que l'argument du logarithme soit positif : $\frac{\lambda\,x}{x-1} > 0 \Leftrightarrow \lambda\,x\,(x-1) > 0$. Donc si λ est positif, x doit être négatif ou supérieur à 1. Si λ est négatif, x doit être entre 0 et 1.

En résumé :

Ensemble de définition :

- Pour λ = 0, la solution est la droite $x = 1$.
- Pour λ < 0, l'ensemble de définition de y est l'intervalle $]\,0\,,\,\frac{1}{1-\lambda}[\,\cup\,]\frac{1}{1-\lambda}\,,\,1\,[$
- Pour λ > 0, l'ensemble de définition est l'extérieur de l'intervalle [0 , 1], moins le point $\frac{1}{1-\lambda}$

Le point $\frac{1}{1-\lambda}$ peut être à droite de 1 (0 < λ < 1), ou à gauche de 0 (λ > 1). Il est entre 0 et 1 si λ < 0.

Dérivée

$x\,\lambda = (x-1)\,e^{\frac{x}{y}}$

$\lambda\,dx = dx\,e^{\frac{x}{y}} + (x-1)\,d\left(e^{\frac{x}{y}}\right)$

$d\left(e^{\frac{x}{y}}\right) = e^{\frac{x}{y}}\;d\left(\frac{x}{y}\right) = e^{\frac{x}{y}}\;\frac{y\,dx - x\,dy}{y^2}$

$\lambda\,dx = dx\,e^{\frac{x}{y}} + (x-1)\,e^{\frac{x}{y}}\;\frac{y\,dx - x\,dy}{y^2} = dx\,e^{\frac{x}{y}} + (x-1)\,e^{\frac{x}{y}}\;\frac{dx}{y} - x\,(x-1)\,e^{\frac{x}{y}}\;\frac{dy}{y^2}$

$x\,(x-1)\,e^{\frac{x}{y}}\;\frac{dy}{y^2} = \left(\;e^{\frac{x}{y}} + \frac{x-1}{y}\,e^{\frac{x}{y}} - \lambda\;\right)dx$

$e^{\frac{x}{y}}\;\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x\,(x-1)}\left(\;(y+x-1)\,e^{\frac{x}{y}} - \lambda\,y\;\right)$

$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x\,(x-1)}\left(\;(y+x-1) - \lambda\,y\,e^{-\frac{x}{y}}\;\right) = \frac{y}{x\,(x-1)}\left(\;(y+x-1) - \lambda\,y\frac{x-1}{\lambda x}\;\right)$

$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x^2\,(x-1)}\,(\,x\,y + x^2 - x - x\,y + y\,) = \frac{y(x(x-1)+y)}{x^2\,(x-1)} = \frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^2\,(x-1)}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{ln\left(\frac{\lambda x}{x-1}\right)} + \frac{1}{(x-1)\left(ln\left(\frac{\lambda x}{x-1}\right)\right)^2}$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{1}{(x-1)\left(ln\left(\frac{\lambda x}{x-1}\right)\right)^2}\left(\;(x-1)\,ln\left(\;\frac{\lambda\,x}{x-1}\;\right) + 1\;\right)}$$

La dérivée $\frac{dy}{dx} = \frac{y(x(x-1)+y)}{x^2\,(x-1)}$ est nulle lorsque $y = 0$ ou lorsque $y = x\,(1-x)$.

$y = x\,(1-x)$ correspond à une abscisse vérifiant $x\,\lambda = (x-1)\,e^{\frac{x}{y}}$, $\lambda\,x = (x-1)\,e^{\frac{1}{1-x}}$.
La relation :

$$\boxed{x^2\,(x-1)\,\frac{dy}{dx} - x\,(x-1)\,y - y^2 = 0}$$

ne contient plus la constante λ, c'est l'***équation différentielle de la famille*** de courbes.
Elle a pour solutions la droite $y = 0$ et les courbes C_λ .

Limites aux bornes de l'ensemble de définition.

- **Limite vers 0.**

La relation $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{ln\left(\frac{\lambda x}{x-1}\right)} + \frac{1}{(x-1)\left(ln\left(\frac{\lambda x}{x-1}\right)\right)^2}$ montre que si x tend vers 0, la dérivée tend vers 0.

La relation $x^2\,(x-1)\,\frac{dy}{dx} - x\,(x-1)\,y - y^2 = 0$ montre alors que si x tend vers 0, y tend vers 0.
Le point $x = 0$, $y = 0$, est un point d'arrêt de la courbe.
Le point d'arrêt (0,0) est un point à tangente horizontale.

- **Limite vers 1.**

La relation $(x-1)\,\frac{dy}{dx} = \frac{x-1}{ln\left(\frac{\lambda x}{x-1}\right)} + \frac{1}{\left(ln\left(\frac{\lambda x}{x-1}\right)\right)^2}$ montre que si x tend vers 1, $(x-1)\,\frac{dy}{dx}$ tend vers 0.

La relation $x^2\,(x-1)\,\frac{dy}{dx} - x\,(x-1)\,y - y^2 = 0$ montre alors que si x tend vers 1, y tend vers 0.
Le point $x = 1$, $y = 0$, est un point d'arrêt de la courbe.
Comme la limite de $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{ln\left(\frac{\lambda x}{x-1}\right)} + \frac{1}{(x-1)\left(ln\left(\frac{\lambda x}{x-1}\right)\right)^2}$ lorsque x tend vers 1 est infinie, la tangente au point d'arrêt (1,0) est verticale.

- **Limite vers $\frac{1}{1-\lambda}$.**

Si $x = \frac{1}{1-\lambda} + \varepsilon$, $x - 1 = \frac{1}{1-\lambda} - 1 + \varepsilon = \frac{\lambda}{1-\lambda} + \varepsilon$

$$\frac{\lambda x}{x-1} = \lambda\,\frac{1+(1-\lambda)\varepsilon}{\lambda+(1-\lambda)\varepsilon} = [1+(1-\lambda)\,\varepsilon\,]\times\frac{1}{1+\frac{1-\lambda}{\lambda}\varepsilon}$$

$$\frac{\lambda x}{x-1} \approx [1+(1-\lambda)\,\varepsilon\,]\times\left(1-\frac{1-\lambda}{\lambda}\,\varepsilon\right) \approx 1+(1-\lambda)(1-\frac{1}{\lambda})\,\varepsilon = 1-(1-\lambda)^2\,\frac{\varepsilon}{\lambda}.$$

$$ln\,\frac{\lambda x}{x-1} \approx -(1-\lambda)^2\,\frac{\varepsilon}{\lambda}$$

$$y = \frac{x}{ln\left(\frac{\lambda x}{x-1}\right)} \approx \frac{\lambda}{(\lambda-1)^3\varepsilon}$$

Si ε tend vers 0, y tend vers l'infini, avec le signe de $-\varepsilon$ si λ est compris entre 0 et 1, avec le signe de ε si λ est à l'extérieur de l'intervalle [0 , 1]. Il y a donc une **asymptote verticale** pour $x = \frac{1}{1-\lambda}$**.**

- **Limite vers l'infini.**

Pour $\lambda > 0$, la courbe C_λ a des branches infinies.

♦ Pour $\lambda = 1$,

$ln\left(\frac{\lambda x}{x-1}\right) = ln\left(\frac{x}{x-1}\right) = ln\left(1+\frac{1}{x-1}\right) \approx \frac{1}{x-1}$, $y \approx x\,(x-1)$, donc y présente une branche parabolique d'axe parallèle à Oy. Il n'y a pas d'asymptote oblique dans ce cas. Vers l'infini, la courbe C_1 a des branches paraboliques d'axe parallèle à Oy.

$$ln\left(1-\frac{1}{x}\right) \approx -\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{3x^3}$$

$$y \approx x^2 \times \frac{1}{1+\frac{1}{2x}+\frac{1}{3x^2}} \approx x^2 \times \left(1-\left(\frac{1}{2x}+\frac{1}{3x^2}\right)+\left(\frac{1}{2x}-\frac{1}{3x^2}\right)^2\right) \approx x^2 \times \left(1-\frac{1}{2x}-\frac{1}{12x^2}\right)$$

La courbe est donc asymptote à la parabole d'équation $y = x^2 - \frac{x}{2} - \frac{1}{12} = \frac{1}{2}\,x\,(2\,x-1) - \frac{1}{12}$.

♦ Pour λ positif différent de 1.

Si x tend vers l'infini, posons $x = \frac{1}{t}$ et faisons tendre t vers 0.

$$y = \frac{x}{ln\left(\frac{\lambda x}{x-1}\right)} = \frac{1}{t\left(ln\lambda + ln\left(\frac{1}{t\left(\frac{1}{t}-1\right)}\right)\right)} = \frac{1}{t\left(ln\lambda - ln\ (1-t)\right)}$$

Lorsque t tend vers 0, $ln\ (1-t) \approx -\left(\ t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3}\ \right)$

$$y \approx \frac{1}{t\ ln\lambda} \times \frac{1}{1+\frac{1}{ln\lambda}\left(t+\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}\right)}$$

$$y \approx \frac{1}{t\ ln\lambda} \times \left(\ 1 - \frac{1}{ln\lambda}\left(\ t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3}\ \right) + \frac{1}{(ln\lambda)^2}\left(\ t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3}\ \right)^2 - \frac{1}{(ln\lambda)^3}\left(\ t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3}\ \right)^3\ \right)$$

$$y \approx \frac{1}{t\ ln\lambda} \times \left(\ 1 - \frac{t}{ln\lambda} + t^2\left(\ -\frac{1}{2\ ln\lambda} + \frac{1}{(ln\lambda)^2}\ \right) + t^3\left(\ -\frac{1}{3\ ln\lambda} + \frac{1}{(ln\lambda)^2} - \frac{1}{(ln\lambda)^3}\ \right)\ \right)$$

$$y \approx \frac{1}{t\ ln\lambda} - \frac{1}{(ln\lambda)^2} - \frac{ln\lambda - 2}{2\,(ln\lambda)^3}\ t - \frac{(ln\lambda)^2 - 3ln\lambda + 3}{3\,(ln\lambda)^4}\ t^2$$

$$y \approx \frac{x}{ln\lambda} - \frac{1}{(ln\lambda)^2} - \frac{ln\lambda - 2}{2\,(ln\lambda)^3}\ \frac{1}{x} - \frac{(ln\lambda)^2 - 3ln\lambda + 3}{3\,(ln\lambda)^4}\ \frac{1}{x^2}$$

Ce développement de y au voisinage de l'infini indique que

> Pour $\lambda > 0$, la courbe possède une asymptote oblique d'équation $y = \frac{x}{ln\lambda} - \frac{1}{(ln\lambda)^2}$

et permet d'étudier la position de la courbe par rapport à son asymptote.

$$\frac{x}{ln\lambda} - \frac{1}{(ln\lambda)^2} - y \approx \frac{ln\lambda - 2}{2\,(ln\lambda)^3}\ \frac{1}{x} + \frac{(ln\lambda)^2 - 3ln\lambda + 3}{3\,(ln\lambda)^4}\ \frac{1}{x^2}$$

Plusieurs cas sont à distinguer :

- Pour $ln\ \lambda = 2$,

$\lambda = e^2$, $\frac{x}{ln\lambda} - \frac{1}{(ln\lambda)^2} - y \approx \frac{(ln\lambda)^2 - 3ln\lambda + 3}{3\,(ln\lambda)^4}\ \frac{1}{x^2} > 0$.

La courbe est en dessous de son asymptote vers $+\infty$ et vers $-\infty$.

- Pour $0 < \lambda < 1 < e^2$,

$ln\ \lambda < 0 < 2$, $\frac{x}{ln\lambda} - \frac{1}{(ln\lambda)^2} - y \approx \frac{ln\lambda - 2}{2\,(ln\lambda)^3}\ \frac{1}{x}$ est du signe de x.

La courbe est au-dessus de son asymptote lorsque x tend vers $-\infty$. La courbe est en dessous de son asymptote lorsque x tend vers $+\infty$.

- Pour $1 < \lambda < e^2$,

$ln\ \lambda > 0$, $ln\ \lambda < 2$, $\frac{x}{ln\lambda} - \frac{1}{(ln\lambda)^2} - y \approx \frac{ln\lambda - 2}{2\,(ln\lambda)^3}\ \frac{1}{x}$ est du signe de $-x$.

La courbe est en dessous de son asymptote lorsque x tend vers $-\infty$. La courbe est au-dessus de son asymptote lorsque x tend vers $+\infty$.

- Pour $\lambda > e^2$,

$ln\ \lambda > 0$, $ln\ \lambda > 2$, $\frac{x}{ln\lambda} - \frac{1}{(ln\lambda)^2} - y \approx \frac{ln\lambda - 2}{2\,(ln\lambda)^3}\ \frac{1}{x}$ est du signe de x.

La courbe est au-dessus de son asymptote lorsque x tend vers $-\infty$. La courbe est en dessous de son asymptote lorsque x tend vers $+\infty$.

Inflexions.

La dérivée seconde est :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{ln\left(\frac{\lambda x}{x-1}\right)} + \frac{1}{(x-1)\left(ln\left(\frac{\lambda x}{x-1}\right)\right)^2} \right)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\left(\frac{1}{\left(ln\left(\frac{\lambda x}{x-1}\right)\right)^2} + \frac{2}{(x-1)\left(ln\left(\frac{\lambda x}{x-1}\right)\right)^3} \right) \frac{d}{dx}\left(ln\left(\frac{\lambda x}{x-1} \right) \right) - \frac{1}{(x-1)^2\left(ln\left(\frac{\lambda x}{x-1}\right)\right)^2}$$

$$\frac{d}{dx}\left(ln\left(\frac{\lambda x}{x-1} \right) \right) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} = -\frac{1}{x(x-1)}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{x(x-1)}\left(\frac{1}{\left(ln\left(\frac{\lambda x}{x-1}\right)\right)^2} + \frac{2}{(x-1)\left(ln\left(\frac{\lambda x}{x-1}\right)\right)^3} \right) - \frac{1}{(x-1)^2\left(ln\left(\frac{\lambda x}{x-1}\right)\right)^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{x(x-1)^2\left(ln\left(\frac{\lambda x}{x-1}\right)\right)^3}\left((x-1)\, ln\left(\frac{\lambda x}{x-1} \right) + 2 - x\, ln\left(\frac{\lambda x}{x-1} \right) \right)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{x(x-1)^2\left(ln\left(\frac{\lambda x}{x-1}\right)\right)^3}\left(- ln\left(\frac{\lambda x}{x-1} \right) + 2 \right)$$

Elle est nulle si $ln\left(\frac{\lambda x}{x-1} \right) = 2$. D'où $\lambda x = (x-1)\, e^2$, $x = \frac{e^2}{e^2-\lambda}$

$$y = \frac{x}{ln\left(\frac{\lambda x}{x-1}\right)} = \frac{x}{2}.$$

Dans le cas particulier où $\lambda = e^2$, le point d'inflexion est rejeté à l'infini car l'asymptote, d'équation $y = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}$ est parallèle à la droite contenant les points d'inflexion, et, hormis la portion décroissante comprise entre les abscisses $\frac{1}{1-\lambda} = -\frac{1}{e^2-1}$ et 0, la courbe est toute entière sous son asymptote. Cette valeur de λ correspond au passage des points d'inflexion à abscisses supérieures à 1 aux points d'inflexion à abscisses inférieures à 0.

Tableaux de variations.

- $\lambda < 0$

La fonction est nulle pour $x = 0$ et pour $x = 1$.

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{1-\lambda}$		1		$+\infty$
y'			0	–	$-\infty \parallel -\infty$	–	$-\infty \parallel$		
y			0	↘	$-\infty \parallel +\infty$	↘	0		

- $\lambda = 0$

L'équation se réduit à $x = 1$: c'est la droite parallèle à l'axe des y passant par le point (1,0).

- $0 < \lambda < 1$

x	$-\infty$		0		1		$\frac{1}{1-\lambda}$				$+\infty$
y'		$-$	0		$+\infty$	$+$	$+\infty \parallel +\infty$	$+$		$-$	
y	$+\infty$	↘	0		0	↗	$+\infty \parallel -\infty$	↗		↘	$-\infty$

- $\lambda = 1$

$$y = \frac{x}{\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)} = -\frac{x}{\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)}$$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'	$-\infty$	$-$	0		$+\infty$	$+$	$+\infty$
y	$+\infty$	↘	0		0	↗	$+\infty$

- $\lambda > 1$

x	$-\infty$				$\frac{1}{1-\lambda}$		0		1		$+\infty$
y'		$+$		$-$	$-\infty \parallel -\infty$	$+$	0		$+\infty$	$+$	
y	$-\infty$	↗		↘	$-\infty \parallel +\infty$	↘	0		0	↗	$+\infty$

2° Points à tangente horizontale.

$$x\,(\lambda - e^{\frac{x}{y}}) + e^{\frac{x}{y}} = 0$$

$$(\lambda - e^{\frac{x}{y}})\,dx - x\,e^{\frac{x}{y}}\,d(\frac{x}{y}) + e^{\frac{x}{y}}\,d(\frac{x}{y}) = 0$$

$$d(\frac{x}{y}) = \frac{dx}{y} - \frac{x}{y^2}\,dy$$

$$(\lambda - e^{\frac{x}{y}})\,dx + (1-x)\,e^{\frac{x}{y}}\left(\frac{dx}{y} - \frac{x}{y^2}\,dy\right) = 0$$

$$\frac{x(1-x)}{y^2}\,e^{\frac{x}{y}}\,dy = \left(\lambda - e^{\frac{x}{y}} + \frac{1-x}{y}\,e^{\frac{x}{y}}\right)dx$$

$$\frac{x(1-x)}{y}\,e^{\frac{x}{y}}\,\frac{dy}{dx} = \lambda y + (1-x-y)\,e^{\frac{x}{y}}$$

Pour x différent de 0 et de 1, la relation $y' = 0$ est équivalente à la relation :

$$\lambda y + (1-x-y)\,e^{\frac{x}{y}} = 0$$

$$y\,(\lambda - e^{\frac{x}{y}}) = (x-1)\,e^{\frac{x}{y}}$$

$$y = \frac{(x-1)\, e^{\frac{x}{y}}}{\lambda - e^{\frac{x}{y}}}$$

Or $e^{\frac{x}{y}} = \frac{\lambda x}{x-1}$, donc les points à tangente horizontale vérifient $y = \frac{\lambda x}{\lambda - \frac{\lambda x}{x-1}} = -x\,(x-1)$. C'est l'équation d'une parabole, d'axe parallèle à l'axe des *y*.

Les points à tangente horizontale sont sur la parabole $y = x\,(1-x)$.

3° Points d'inflexion.

De l'équation différentielle des courbes C_λ :

$$x^2\,(x-1)\,\frac{dy}{dx} - x\,(x-1)\,y - y^2 = 0$$

on déduit, pour *x* différent de 0 et de 1 :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^2\,(x-1)}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{y}{x}\right) + 2\,\frac{y}{x\,(x-1)}\,\frac{d}{dx}\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y^2}{x^2\,(x-1)^2} = \left(1 + 2\,\frac{y}{x\,(x-1)}\right)\frac{d}{dx}\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y^2}{x^2\,(x-1)^2}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{1}{x}\,\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x^2} = \frac{y^2}{x^3\,(x-1)}$$

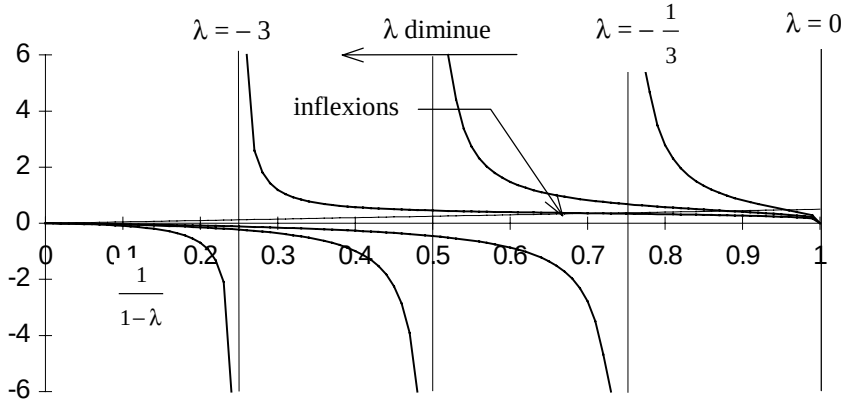
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left(1 + 2\,\frac{y}{x\,(x-1)}\right)\left(\frac{y^2}{x^3\,(x-1)}\right) - \frac{y^2}{x^2\,(x-1)^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{y^2}{x^4\,(x-1)^2}\,(x\,(x-1) + 2\,y - x^2) = \frac{y^2}{x^4\,(x-1)^2}\,(-x + 2\,y)$$

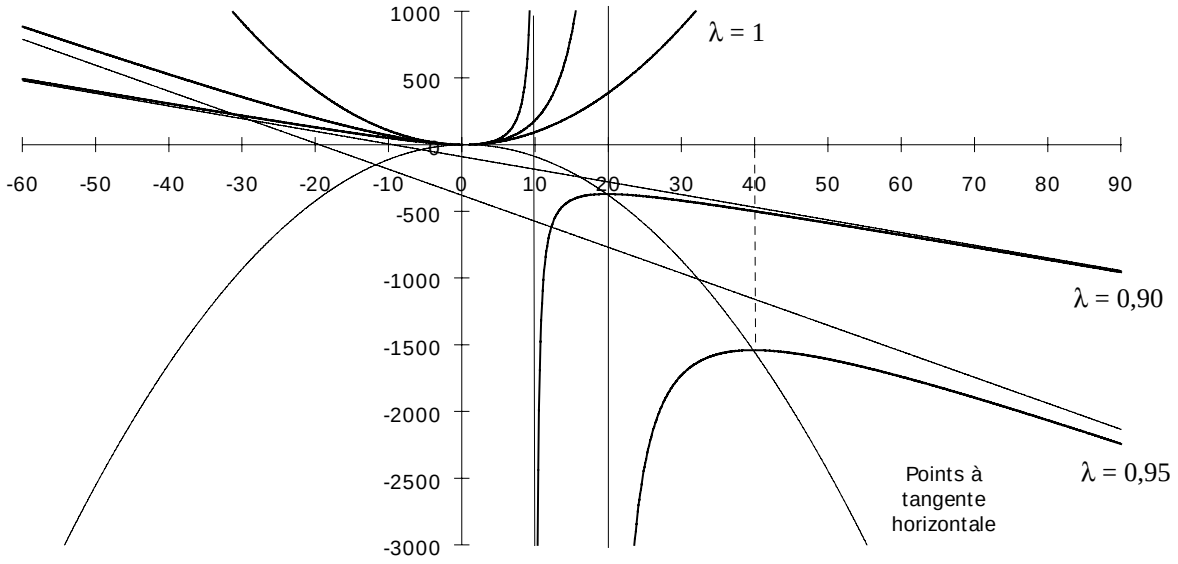
Les points d'inflexion sont sur la droite $2\,y - x = 0$.

Au-dessus de cette droite, la dérivée seconde est toujours positive, en dessous, elle est toujours négative.

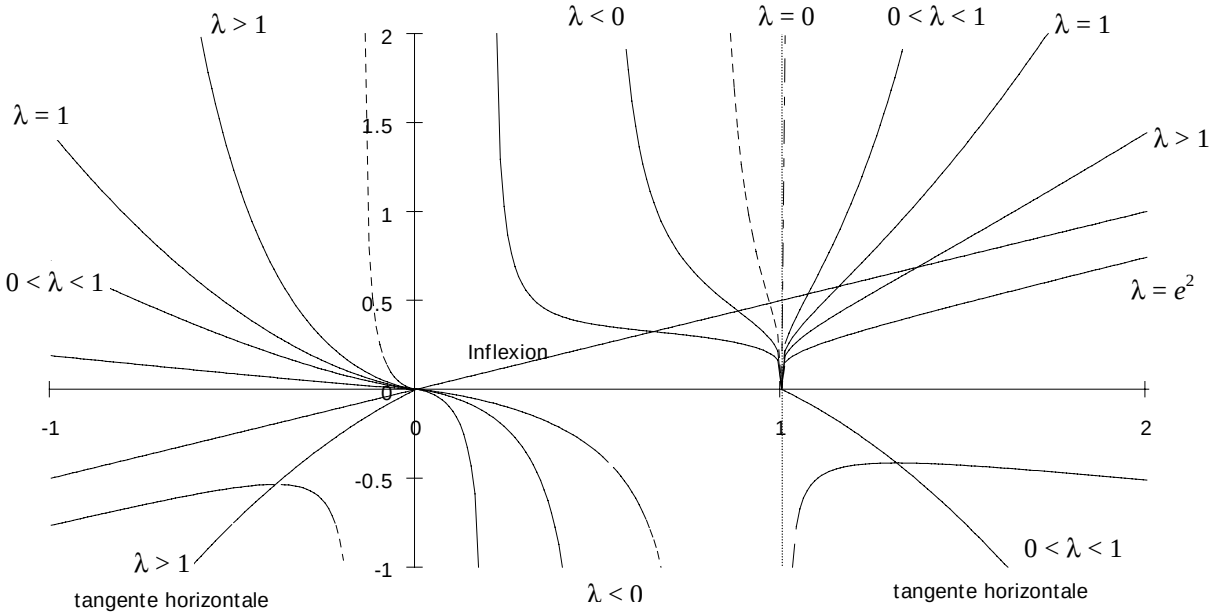
4° Courbes représentatives.



Courbes représentatives des fonctions $x\,(\lambda - e^{\frac{x}{y}}) + e^{\frac{x}{y}} = 0$ *pour des valeurs de* λ *négatives.*



Courbes représentatives des fonctions $x\left(\lambda - e^{\frac{x}{y}}\right) + e^{\frac{x}{y}} = 0$ *pour des valeurs de* λ *entre 0 et 1.*



Courbes représentatives des fonctions $x\left(\lambda - e^{\frac{x}{y}}\right) + e^{\frac{x}{y}} = 0$ *pour diverses valeurs de* λ*.*
(détail au voisinage de l'intervalle [0 , 1])

EXERCICE 17.

On considère les deux fonctions :

$$x = a\left(t - \tanh t + \frac{\sinh\varphi}{\cosh t} \right)$$

$$y = a\left(\frac{1}{\cosh t} + \sinh\varphi \tanh t \right)$$

de la variable réelle t et où φ est une constante réelle quelconque et a une longueur donnée.

1. On pose $t = \varphi + u$ et on prend u comme infiniment petit principal. Calculer les trois premiers termes des développements des fonction x et y suivant les puissances entières de u. Calculer la partie principale de l'infiniment petit $y - a\cosh\varphi + \frac{x - a\varphi}{\sinh\varphi}$.
2. Construire la courbe C_φ dont les équations paramétriques ont été données plus haut. Suivre la déformation de C_φ quand φ varie. Quel est le lieu Γ de son point de rebroussement ? Préciser l'orientation relative de la tangente à C_φ en son point de rebroussement et de la tangente à Γ en ce même point.

SOLUTION.

1° Partie principale d'un infiniment petit.

a) Développements limités de *x* et *y*.

Nous appliquons la formule :

$$f(u) = f(0) + f'(0)\,u + f''(0)\frac{u^2}{2} + f'''(0)\frac{u^3}{6} + \varepsilon(u)\,u^3 \text{ avec } \lim_{u\to 0}\varepsilon(u) = 0$$

à la fonction :

$$x(t) = f(u) = a\left((\varphi + u) - th(\varphi + u) + \frac{sh\,\varphi}{ch(\varphi+u)} \right)$$

$$f(0) = a\,\varphi - th\,\varphi + \frac{sh\,\varphi}{ch\,\varphi} = a\,\varphi$$

$$f'(u) = a\left(1 - \frac{1}{ch^2(\varphi+u)} - \frac{sh\,\varphi\,sh(\varphi+u)}{ch^2(\varphi+u)} \right)$$

$$f'(u) = a\,\frac{ch^2(\varphi+u) - 1 - sh\,\varphi\,sh(\varphi+u)}{ch^2(\varphi+u)} = a\,\frac{sh^2(\varphi+u) - sh\,\varphi\,sh(\varphi+u)}{ch^2(\varphi+u)}$$

$$f'(u) = a\,sh(\varphi+u)\,\frac{sh(\varphi+u) - sh\,\varphi}{ch^2(\varphi+u)}$$

$f'(0) = 0$

$$f''(u) = a\,\frac{\left(2\,sh(\varphi+u)\,ch(\varphi+u) - sh\,\varphi\,ch(\varphi+u)\right)ch^2(\varphi+u) - 2\,sh(\varphi+u)\,ch(\varphi+u)\left(sh^2(\varphi+u) - sh\,\varphi\,sh(\varphi+u)\right)}{ch^4(\varphi+u)}$$

$$f''(u) = a\,\frac{\left(2\,sh(\varphi+u) - sh\,\varphi\right)ch^2(\varphi+u) - 2\,sh^2(\varphi+u)\left(sh(\varphi+u) - sh\,\varphi\right)}{ch^3(\varphi+u)}$$

$$f''(u) = a\,\frac{2\,sh(\varphi+u)\left(ch^2(\varphi+u) - sh^2(\varphi+u)\right) - sh\,\varphi\left(ch^2(\varphi+u) - 2\,sh^2(\varphi+u)\right)}{ch^3(\varphi+u)}$$

$$f''(u) = a\,\frac{2\,sh\,(\varphi+u) - sh\,\varphi\left(1 - sh^2\,(\varphi+u)\right)}{ch^3\,(\varphi+u)} = a\,\frac{sh\,\varphi\,sh^2\,(\varphi+u) + 2\,sh\,(\varphi+u) - sh\,\varphi}{ch^3\,(\varphi+u)}$$

$f''(0) = a\,th\,\varphi$

$$f'''(u) = a\,\frac{2\,ch^2\,(\varphi+u)\left(sh\,\varphi\,sh\,(\varphi+u)+1\right) - 3\,sh\,(\varphi+u)\left(sh\,\varphi\,sh^2\,(\varphi+u) + 2\,sh\,(\varphi+u) - sh\,\varphi\right)}{ch^4\,(\varphi+u)}$$

$$f'''(u) = a\,\frac{sh\,\varphi\,sh\,(\varphi+u)\left(2\,ch^2\,(\varphi+u) - 3\,sh^2\,(\varphi+u)\right) + 2\,ch^2\,(\varphi+u) - 6\,sh^2\,(\varphi+u) + 3sh\,\varphi\,sh\,(\varphi+u)}{ch^4\,(\varphi+u)}$$

$$f'''(u) = a\,\frac{sh\,\varphi\,sh\,(\varphi+u)\left(5 - sh^2\,(\varphi+u)\right) + 2 - 4\,sh^2\,(\varphi+u)}{ch^4\,(\varphi+u)}$$

$$f'''(u) = a\,\frac{-sh\,\varphi\,sh^3\,(\varphi+u) - 4\,sh^2\,(\varphi+u) + 5\,sh\,\varphi\,sh\,(\varphi+u) + 2}{ch^4\,(\varphi+u)}$$

$$f'''(0) = a\,\frac{-sh^4\varphi + sh^2\varphi + 2}{ch^4\varphi} = a\left(\frac{-sh^4\varphi + ch^2\varphi + 1}{ch^4\varphi}\right) = a\left(\frac{(1-sh^2\varphi)\,(1+sh^2\varphi)}{ch^4\varphi} + \frac{1}{ch^2\varphi}\right)$$

$$f'''(0) = a\left(\frac{1-sh^2\varphi}{ch^2\varphi} + \frac{1}{ch^2\varphi}\right) = a\left(\frac{2}{ch^2\varphi} - th^2\,\varphi\right) = a\,(2(1 - th^2\,\varphi) - th^2\,\varphi) = a\,(2 - 3\,th^2\,\varphi)$$

$$x(t) = f(u) = f(0) + f'(0)\,u + f''(0)\,\frac{u^2}{2} + f'''(0)\,\frac{u^3}{6} + \varepsilon(u)\,u^3$$

$$x(t) = f(u) = a\,\varphi + a\,th\,\varphi\,\frac{u^2}{2} + a\,(2 - 3\,th^2\,\varphi)\,\frac{u^3}{6} + \varepsilon(u)\,u^3$$

$$\boxed{x(\varphi+u) = a\,\varphi + a\,th\,\varphi\,\frac{u^2}{2} + a\,(2 - 3\,th^2\,\varphi)\,\frac{u^3}{6} + \varepsilon(u)\,u^3}$$

$$y(t) = a\left(\frac{1}{ch\,t} + sh\,\varphi\,th\,t\right)$$

$$y(\varphi) = a\left(\frac{1}{ch\,\varphi} + sh\,\varphi\,th\,\varphi\right) = a\,\frac{1+sh^2\varphi}{ch\,\varphi} = a\,ch\,\varphi$$

$$y'(t) = a\left(-\frac{sh\,t}{ch^2 t} + sh\,\varphi\,(1 - th^2\,t)\right) = a\,\frac{sh\,\varphi - sh\,t}{ch^2 t}$$

$y'(\varphi) = 0$

$$y''(t) = a\,\frac{-ch^2\,t - 2\,sh\,t\,(sh\,\varphi - sh\,t)}{ch^3 t} = a\,\frac{sh^2 t - 2\,sh\,\varphi\,sh\,t - 1}{ch^3 t}$$

$$y''(\varphi) = -\,a\,\frac{1+sh^2\varphi}{ch^3\varphi} = -\,\frac{a}{ch\,\varphi}$$

$$y'''(t) = a\,\frac{(2\,sh\,t\,ch\,t - 2\,sh\,\varphi\,ch\,t)\,ch\,t - 3\,sh\,t\,(sh^2 t - 2\,sh\,\varphi\,sh\,t - 1)}{ch^4 t}$$

$$y'''(t) = a\,\frac{2\,ch^2\,t\,(sh\,t - sh\,\varphi) - 3\,sh\,t\,(sh^2 t - 2\,sh\,\varphi\,sh\,t - 1)}{ch^4 t}$$

$$y'''(\varphi) = a\,\frac{3\,sh\,\varphi\,(sh^2\varphi + 1)}{ch^4\varphi} = 3\,a\,\frac{sh\,\varphi}{ch^2\,\varphi}$$

$$y(\varphi+u) = y(\varphi) + y'(\varphi)\,u + y''(\varphi)\,\frac{u^2}{2} + y'''(\varphi)\,\frac{u^3}{6} + \varepsilon(u)\,u^3$$

$$y(\varphi+u) = a\,ch\,\varphi - \frac{a}{ch\,\varphi}\frac{u^2}{2} + a\frac{sh\,\varphi}{ch^2\,\varphi}\frac{u^3}{2} + \varepsilon(u)\,u^3$$

b) Partie principale d'un infiniment petit.

$$\begin{aligned}
&y - a\,ch\,\varphi + \frac{x - a\,\varphi}{sh\,\varphi} \\
&= \left(-\frac{a}{ch\,\varphi}\frac{u^2}{2} + a\frac{sh\,\varphi}{ch^2\,\varphi}\frac{u^3}{2} + \varepsilon_y(u)\,u^3 \right) + \frac{1}{sh\,\varphi}\left(a\,th\,\varphi\,\frac{u^2}{2} + a(2 - 3\,th^2\,\varphi)\frac{u^3}{6} + \varepsilon_x(u)\,u^3 \right) \\
&= + a\frac{sh\,\varphi}{ch^2\,\varphi}\frac{u^3}{2} + \frac{1}{sh\,\varphi}\,a(2 - 3\,th^2\,\varphi)\frac{u^3}{6} + \varepsilon(u)\,u^3 \\
&\approx \frac{a\,u^3}{6\,sh\,\varphi}\left(3\frac{sh^2\varphi}{ch^2\varphi} + 2 - 3\,th^2\,\varphi\right) \\
&\approx \frac{a\,u^3}{6\,sh\,\varphi}\left(3\frac{sh^2\,\varphi}{ch^2\,\varphi} + 2 - 3\,th^2\,\varphi \right) \\
&\approx \frac{a\,u^3}{3\,sh\,\varphi}
\end{aligned}$$

$$y - a\,ch\,\varphi + \frac{x - a\,\varphi}{sh\,\varphi} \approx \frac{a\,u^3}{3\,sh\,\varphi}$$

2° Courbe C_φ.

$$x = a\left(t - th\,t + \frac{sh\,\varphi}{ch\,t} \right)$$
$$y = a\left(\frac{1}{ch\,t} + sh\,\varphi\,th\,t \right)$$

Ensemble de définition.

Les fonctions x et y sont définies pour toutes valeurs réelles de t.

Symétries.

Si l'on change t en $-t$ et φ en $-\varphi$, x est changé en $-x$ et y est inchangé : les courbes C_φ et $C_{-\varphi}$ sont symétriques l'une de l'autre par rapport à l'axe Oy. On peut donc, en pratique, ***limiter l'étude aux valeurs positives de φ***: les courbes pour les valeurs négatives s'en déduiront par symétrie par rapport à Oy.

Si l'on change a en $-a$, x est changé en $-x$, y est changé en $-y$: les courbes C_φ correspondant à des valeurs opposées de a sont symétriques l'une de l'autre par rapport à O. On pourra donc ***limiter l'étude aux valeurs positives de a***. Les courbes pour les valeurs négatives s'en déduiront par symétrie par rapport à O.

Sens de variations.

Nous avons déjà calculé les dérivées de x et y par rapport à t :

$$x'(t) = a\,sh\,t\,\frac{sh\,t - sh\,\varphi}{ch^2 t}$$
$$y'(t) = -a\,\frac{sh\,t - sh\,\varphi}{ch^2 t}$$

Le sens de variation de x et de y s'en déduit :

- si t est entre 0 et φ, $x'(t)$ et négatif et x diminue ; à l'extérieur de cet intervalle, $x'(t)$ est positif et x augmente.
- si t est plus petit que φ, $y'(t)$ est négatif et y diminue. Si t est plus grand que φ, $y'(t)$ est positif et y augmente.

- Pour $t = 0$, $x = a\ sh\ \varphi$, $y = a$, $x'(0) = 0$, $y'(0) = a\ sh\ \varphi$. Si φ n'est pas nul, la tangente est verticale, car son coefficient angulaire $\frac{y'(0)}{x'(0)}$ est infini. Les points à tangente verticale sont tous sur la droite $y = a$.
- Si φ est nul, les points $t = 0$ et $t = \varphi$ sont confondus : $x = 0$, $y = a$, $x'(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $x''(0) = 0$, $y''(0) = -a$. La règle de L'Hopital donne, dans ce cas, la limite du rapport $\frac{y'(t)}{x'(t)}$ lorsque t tend vers $0 = \varphi$, cette limite est infinie : la tangente au point $(0,a)$ est verticale. Comme $x'(t)$ ne change pas de signe pour $t = 0$, alors que $y'(t)$ change de signe, le point $t = 0 = \varphi$ correspond à un maximum à tangente verticale : c'est un point de rebroussement à tangente verticale.

Tableaux de variations.

$\varphi < 0$

t	$-\infty$		φ		0		$+\infty$
x'		+	0	–	0	+	
x	$-\infty$	↗	$a\ \varphi$	↘	$a\ sh\ \varphi$	↗	$+\infty$
y'		+	0	–	‖	–	
y	$-a\ sh\ \varphi$	↗	$a\ ch\ \varphi$	↘	a	↘	$a\ sh\ \varphi$

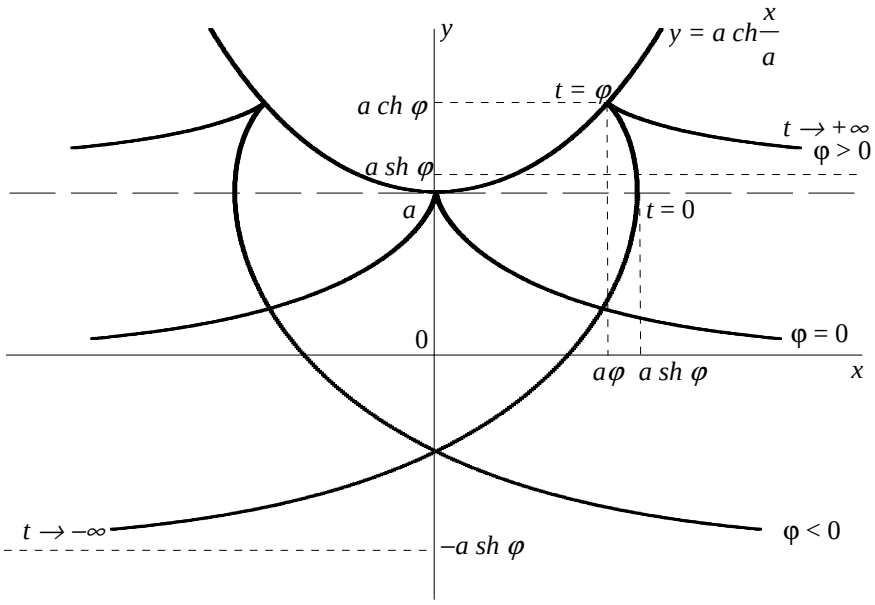
$\varphi > 0$

t	$-\infty$		0		φ		$+\infty$
x'		+	0	–	0	+	
x	$-\infty$	↗	$a\ sh\ \varphi$	↘	$a\ \varphi$	↗	$+\infty$
y'		+	‖	+	0	–	
y	$-a\ sh\ \varphi$	↗	a	↗	$a\ ch\ \varphi$	↘	$a\ sh\ \varphi$

$\varphi = 0$

t	$-\infty$		0		$+\infty$
x'		+	0	+	
x	$-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$
y'		+	0	–	
y	$-a\ sh\ \varphi$	↗	a	↘	$a\ sh\ \varphi$

Courbes représentatives.



Courbes C_φ pour diverses valeurs de φ.

Lieu du point de rebroussement.

Le point de rebroussement de C_φ correspond à $t = \varphi$. Il a pour coordonnées :

$$x = a\,\varphi$$
$$y = a\,ch\,\varphi$$

L'équation du lieu Γ du point de rebroussement est donc

$$\boxed{y = a\,ch\,\frac{x}{a}}$$

Tangente au point de rebroussement.

La tangente à C_φ au point de rebroussement a pour pente la limite, lorsque t tend vers φ du rapport $\dfrac{y'(t)}{x'(t)}$. Cette limite est une forme indéterminée $\dfrac{0}{0}$. On peut lever l'indétermination par la règle de L'Hopital :

$$\lim_{t\to\varphi}\frac{y'(t)}{x'(t)} = \lim_{t\to\varphi}\frac{y''(t)}{x''(t)} = \frac{y''(\varphi)}{x''(\varphi)} = \frac{-\dfrac{a}{ch\,\varphi}}{a\,th\,\varphi} = -\frac{1}{sh\,\varphi}$$

La tangente à Γ au point d'abscisse $x = a\,\varphi$ a pour pente la valeur de la dérivée de $a\,ch\,\dfrac{x}{a}$, soit $sh\,\dfrac{x}{a} = sh\,\varphi$.

Le produit des deux pentes est -1 : les droites sont perpendiculaires.

La tangente au point de rebroussement de C_φ est perpendiculaire à la tangente à Γ.

Position de la courbe par rapport à la tangente au point de rebroussement.

L'équation de la tangente au point de rebroussement ($a\varphi$, $a\ ch\ \varphi$) est :

$$Y - a\ ch\ \varphi = -(X - a\ \varphi) \times \frac{1}{sh\ \varphi}$$

Soit *M (x,y)* un point de la courbe C_φ voisin du point de rebroussement, correspondant à $t = \varphi + u$. La position relative de la courbe et de la tangente s'étudie par la différence entre *y* et *Y* pour la même abscisse $X = x$.
Pour $\varphi \neq 0$:

$$y - Y = y - a\ ch\ \varphi + (x - a\ \varphi) \times \frac{1}{sh\ \varphi}$$

Lorsque *u* tend vers 0, cet infiniment petit a pour partie principale $\frac{a\ u^3}{3\ sh\ \varphi}$ d'après les résultats de la première question.

Pour $\varphi > 0$, l'infiniment petit $\frac{a\ u^3}{3\ sh\ \varphi}$ est du signe de *u* :

- si *t* tend vers φ par valeurs inférieures, *u* est négatif, $y - Y$ est négatif, la courbe est sous la tangente ;
- si *t* tend vers φ par valeurs supérieures, *u* est positif, $y - Y$ est positif, la courbe est au-dessus de la tangente.

Pour $\varphi < 0$, l'infiniment petit $\frac{a\ u^3}{3\ sh\ \varphi}$ est du signe de $-u$:

- si *t* tend vers φ par valeurs inférieures, *u* est négatif, $y - Y$ est positif, la courbe est au-dessus de la tangente ;
- si *t* tend vers φ par valeurs supérieures, *u* est positif, $y - Y$ est négatif, la courbe est sous la tangente.

Pour $\varphi = 0$, la courbe traverse sa tangente verticale en passant des *x* négatifs aux *x* positifs.

Asymptotes.

x tend vers l'infini lorsque *t* tend vers l'infini : $x \approx a\ t$, $y \approx a\ sh\ \varphi\ th\ t$.
Si *t* tend vers moins l'infini, *th t* tend vers − 1, *y* tend vers $-a\ sh\ \varphi$. Il y a une asymptote horizontale d'équation $y = -a\ sh\ \varphi$.
Si *t* tend vers plus l'infini, *th t* tend vers + 1, *y* tend vers $+a\ sh\ \varphi$. Il y a une asymptote horizontale d'équation $y = a\ sh\ \varphi$.
Pour toute valeur réelle de *t* , *y* reste borné, compris entre $-|a\ sh\ \varphi|$ et $|a\ ch\ \varphi|$. Il n'y a donc pas d'autre asymptote que les deux asymptotes horizontales étudiées plus haut.

EXERCICE 18.

1. Dans un système d'axes rectangulaires, on construit la courbe (C_1) de coordonnées :
   $x = \cos 4\theta$
   $y = \sin 3\theta$
2. Pente de la tangente au point $\theta = \frac{\pi}{2}$.
3. Coordonnées des points doubles de (C_1). Pente des tangentes en ces points.
4. Construire (C_2) de coordonnées : $x = \cosh 4\varphi$
   $y = \sinh 3\varphi$
   Etudier la branche infinie de (C_2).
5. Monter que (C_1) et (C_2) sont deux arcs d'une même courbe C. On donnera la représentation de cette courbe complète au moyen d'un nouveau paramètre t prenant sur (C_1) et (C_2) des valeurs différentes d'expression très simple en fonction des paramètres θ et φ.
6. Trouver les relations qui existent entre les t des points alignés sur la courbe C.

SOLUTION.

1. Courbe (C_1).

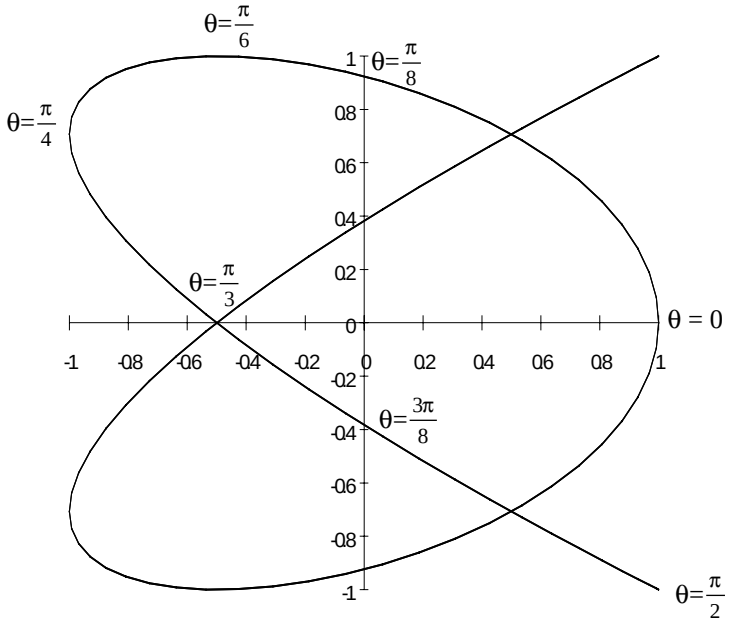
Période : les fonctions $x(t)$ et $y(t)$ sont périodiques de période 2π. On peut restreindre l'intervalle d'étude à l'intervalle $[-\pi ; +\pi]$.

Symétries : Si l'on change θ en $-\theta$, x est inchangé, y est changé en $-y$: symétrie par rapport à l'axe Ox. On peut restreindre l'intervalle d'étude à l'intervalle $[0 ; \pi]$. Le reste de la courbe se déduit par symétrie par rapport à l'axe Ox.
Si l'on change θ en $\pi - \theta$, x et y sont inchangés. On peut restreindre l'intervalle d'étude à l'intervalle $[0 ; \frac{\pi}{2}]$. Lorsque θ varie de $\frac{\pi}{2}$ à π, la courbe est inchangée dans son ensemble, le point courant repasse au même endroit.

Tableau de variations.

θ	0		$\frac{\pi}{8}$		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{3}$		$3\frac{\pi}{8}$		$\frac{\pi}{2}$
x'	0	–		–		–	0	+		+		+	0
x	1	↘	0	↘	$-\frac{1}{2}$	↘	-1	↗	$-\frac{1}{2}$	↗	0	↗	1
y'		+		+	0	–		–		–		–	0
y	0	↗	$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$	↗	1	↘	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	↘	0	↘	$-\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$	↘	-1

Courbe représentative.



Courbe de Lissajous (C_1) d'équations paramétriques $x = \cos 4\,\theta$ et $y = \sin 3\,\theta$.

2. Pente de la tangente.

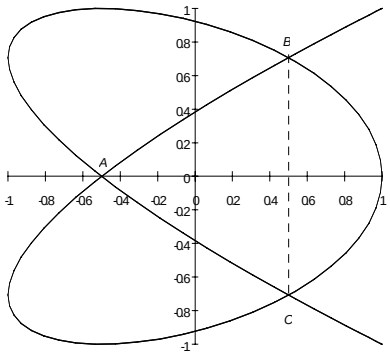
$$\frac{dx}{d\theta} = -4\sin 4\,\theta \qquad \frac{dy}{d\theta} = 3\cos 3\,\theta \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = -\frac{3}{4}\frac{\cos 3\theta}{\sin 4\theta}$$

Lorsque θ tend vers $\frac{\pi}{2}$, le rapport $\frac{dy}{dx}$ tend vers une forme indéterminée $\frac{0}{0}$. On peut lever l'indétermination par la rège de L'Hospital. Le rapport a la même limite que le rapport des dérivées :

$$\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}} \frac{dy}{dx} = -\frac{3}{4}\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 3\theta}{\sin 4\theta} = -\frac{3}{4}\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}} \frac{-3\sin 3\theta}{4\cos 4\theta} = \frac{9}{16}\times\frac{\sin\frac{3\pi}{2}}{\cos\frac{4\pi}{2}} = -\frac{9}{16}$$

La tangente à la courbe au point de paramètre $\theta = \frac{\pi}{2}$ a pour pente $\frac{dy}{dx} = -\frac{9}{16}$

3. Points doubles de la courbe (C_1).



Les points doubles *A, B, C,* de la courbe (C_1) correspondent à des valeurs θ' et θ du paramètre, vérifiant :

$$-\frac{\pi}{2} \leq \theta' \leq 0 \text{ et } 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

$$cos\ 4\,\theta = cos\ 4\,\theta'$$

$$sin\ 3\,\theta = sin\ 3\,\theta'$$

On doit donc avoir :

$4\,\theta = 4\,\theta' + 2\,k\,\pi$ ou $4\,\theta = -4\,\theta' + 2\,k\,\pi$

et :

$3\,\theta = 3\,\theta' + 2\,k\,\pi$ ou $3\,\theta = \pi - 3\,\theta' + 2\,k\,\pi$

La première équation s'écrit $\theta = \theta' + k\,\frac{\pi}{2}$ ou $\theta = -\theta' + k\,\frac{\pi}{2}$. Compte tenu des relations

$$-\frac{\pi}{2} \leq \theta' \leq 0 \text{ et } 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

ceci n'est possible que pour :

$$\theta = \theta' + \frac{\pi}{2} \qquad \text{ou } \theta = -\theta'$$

La deuxième équation s'écrit $\theta = \theta' + 2\,k\,\frac{\pi}{3}$ ou $\theta = \frac{\pi}{3} - \theta' + 2\,k\,\frac{\pi}{3}$. Compte tenu des relations

$$-\frac{\pi}{2} \leq \theta' \leq 0 \text{ et } 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

ceci n'est possible que pour :

$$\theta = \theta' + 2\,\frac{\pi}{3} \qquad \text{ou } \theta = \frac{\pi}{3} - \theta' \qquad \text{ou } \theta = \frac{\pi}{3} - \theta' - \frac{2\pi}{3}$$

Les paramètres θ et θ' sont donc les solutions des trois systèmes possibles :

$\theta = \theta' + \frac{\pi}{2}$ et $\theta = \frac{\pi}{3} - \theta'$ $\qquad$ $\theta = \theta' + \frac{\pi}{2}$ et $\theta = \frac{\pi}{3} - \theta' - \frac{2\pi}{3}$ $\qquad$ $\theta = -\theta'$ et $\theta = \theta' + 2\,\frac{\pi}{3}$

Le premier système donne :

$$\theta - \theta' = \frac{\pi}{2}$$

$$\theta + \theta' = \frac{\pi}{3}$$

$$\theta = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{5\pi}{12} \text{ et } \theta' = \theta - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{12}$$

Le deuxième système donne :

$$\theta - \theta' = \frac{\pi}{2}$$

$$\theta + \theta' = -\frac{\pi}{3}$$

$$\theta = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{12} \text{ et } \theta' = \theta - \frac{\pi}{2} = -\frac{5\pi}{12}$$

Le troisième système donne

$$\theta + \theta' = 0$$

$$\theta - \theta' = \frac{2\pi}{3}$$

$$\theta = \frac{1}{2}\,\frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3} \text{ et } \theta' = -\frac{\pi}{3}.$$

La première solution correspond au point C de coordonnées $x = cos\,\frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2}$, $y = sin\,\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

La deuxième solution correspond au point B de coordonnées $x = cos\,\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, $y = sin\,\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

La troisième solution correspond au point A de coordonnées $x = cos\,\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2}$, $y = sin\,\pi = 0$.

Il y a trois points doubles $A\,(-\frac{1}{2}, 0)$, $B\,(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$, $C\,(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$.

En ces points, la tangente à la courbe (C_1) a pour pente :

- En C : $\theta = \frac{5\pi}{12}$; $\frac{dy}{dx} = -\frac{3}{4}\frac{\cos 3\theta}{\sin 4\theta} = -\frac{3}{4}\frac{\cos\frac{5\pi}{4}}{\sin\frac{5\pi}{3}} = -\frac{3}{4}\frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{\sqrt{6}}{4} = -\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$

  $\theta' = -\frac{\pi}{12}$; $\frac{dy}{dx} = -\frac{3}{4}\frac{\cos 3\theta'}{\sin 4\theta'} = -\frac{3}{4}\frac{\cos\frac{\pi}{4}}{-\sin\frac{\pi}{3}} = \frac{3}{4}\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$

  Les tangentes sont symétriques par rapport à une parallèle à l'axe Ox passant par le point C.

- En B : $\theta = \frac{\pi}{12}$; $\frac{dy}{dx} = -\frac{3}{4}\frac{\cos 3\theta}{\sin 4\theta} = -\frac{3}{4}\frac{\cos\frac{\pi}{4}}{\sin\frac{\pi}{3}} = -\frac{3}{4}\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{\sqrt{6}}{4} = -\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$

  $\theta' = -\frac{5\pi}{12}$; $\frac{dy}{dx} = -\frac{3}{4}\frac{\cos 3\theta'}{\sin 4\theta'} = \frac{3}{4}\frac{\cos\frac{5\pi}{4}}{\sin\frac{5\pi}{3}} = = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$

  Les tangentes en B sont parallèles aux tangentes en C.

- En A : $\theta = \frac{\pi}{3}$; $\frac{dy}{dx} = -\frac{3}{4}\frac{\cos 3\theta}{\sin 4\theta} = -\frac{3}{4}\frac{\cos\pi}{\sin\frac{4\pi}{3}} = -\frac{3}{4}\frac{-1}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

  $\theta' = -\frac{\pi}{3}$; $\frac{dy}{dx} = -\frac{3}{4}\frac{\cos 3\theta'}{\sin 4\theta'} = \frac{3}{4}\frac{\cos\pi}{\sin\frac{4\pi}{3}} = \frac{3}{4}\frac{-1}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

  Les tangentes en A sont symétriques par rapport à Ox et font avec Ox un angle de $\frac{\pi}{6}$.

4. Courbe (C_2).

$x = ch\ 4\varphi \Rightarrow \frac{dx}{d\varphi} = 4\ sh\ 4\varphi$

$y = sh\ 3\varphi \Rightarrow \frac{dy}{d\varphi} = 3\ ch\ 3\varphi$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\varphi}}{\frac{dx}{d\varphi}} = \frac{3}{4}\frac{ch\ 3\varphi}{sh\ 4\varphi}$$

Symétries : Si on change φ en $-\varphi$, x est inchangé, y est changé en $-y$: symétrie par rapport à Ox.

On peut restreindre l'étude à l'intervalle [0 ; + ∞ [. Le reste de la courbe se déduira par symétrie par rapport à l'axe Ox.

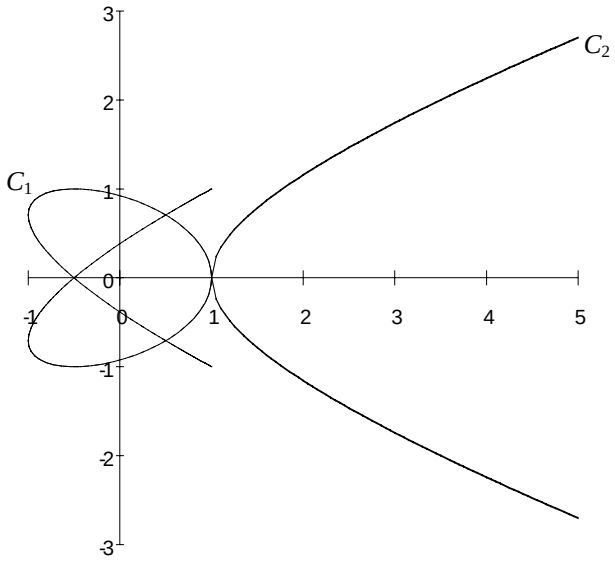
Tableau de variations :

φ	0		+∞
x'	0	+	+∞
x	1	→	+∞
y'	3	+	+∞
y	0	→	+∞

Branche infinie :

Lorsque φ tend vers l'infini : $x \approx \frac{1}{2}e^{4\varphi}$, $y \approx \frac{1}{2}e^{3\varphi}$, $\frac{y}{x} \approx e^{-\varphi} \to 0$. Lorsque φ tend vers l'infini, il y a donc une branche parabolique de direction asymptotique parallèle à l'axe Ox, mais pas d'asymptote oblique.

Courbe représentative :



Courbe (C_2) d'équations paramétriques $x = ch\ 4\ \varphi$, $y = sh\ 3\ \varphi$.

5. Représentation commune de (C_1) et (C_2).

La définition de l'exponentielle complexe permet d'étendre la définition du cosinus ou du sinus, ou du cosinus hyperbolique ou du sinus hyperbolique, à des arguments complexes :

$ch\ iz = coz\ z$ et $cos\ iz = ch\ z$ et $sh\ iz = i\ sin\ z$ et $sin\ iz = i\ sh\ z$

Considérons, dans $\mathbb{C}^2$, la courbe complexe *(C)* d'équations paramétriques ($t \in \mathbb{C}$) :

$X = ch\ 4\ t$

$Y = sh\ 3\ t$

Si $t = \varphi$ est réel, la courbe *(C)* est réelle : c'est la courbe (C_2). $X = (ch\ 4\ \varphi\ ,\ 0)$; $Y = (sh\ 3\ \varphi\ ,\ 0)$

Si $t = i\ \theta$ est imaginaire pur, la courbe *(C)* est imaginaire pure : sa partie imaginaire est la courbe (C_1). $X = (cos\ 4\ \theta\ ,\ 0)$; $Y = (0\ ,\ sin\ 3\ \theta)$.

Dans $\mathbb{C}$, la relation $(e^{4t})^3 = (e^{3t})^4$ donne :

$$(ch\ 4\ t + sh\ 4\ t)^3 = (ch\ 3\ t + sh\ 3\ t)^4$$

On peut en tirer l'équation cartésienne de la courbe *(C)*.

6. Relations entre points alignés de la courbe *(C)*.

Trois points *A, B, C,* de la courbe *(C)* sont alignés si et seulement si la relation $\frac{Y_C - Y_B}{X_C - X_B} = \frac{Y_B - Y_A}{X_B - X_A}$ est vérifiée. Cette relation s'écrit :

$$\frac{sh\,3t_C - sh\,3t_B}{ch\,4t_C - ch\,4t_B} = \frac{sh\,3t_B - sh\,3t_A}{ch\,4t_B - ch\,4t_A}$$

EXERCICE 19.

On considère la fonction $y = 1 + x + \frac{2x\ ln|x|}{1-x}$.

1. Pour quelles valeurs de x la fonction est-elle définie ?
2. Etudier y pour x infiniment grand, plus grand que 0 ou plus petit que 0. La courbe a-t-elle une direction asymptotique ? une asymptote ?
3. Calculer $\frac{dy}{dx}$. On écrit $\frac{dy}{dx} = \frac{F(x)}{(1-x)^2}$. Etudier les variations de $F(x)$ et en déduire celles de y.
4. y et y' tendent-elles vers des limites quand x tend vers zéro, ou quand x tend vers un.
5. On écrit :

   $$F(x) = k\ ln\ |x| - G(x).$$

   Placer, à l'aide des résultats précédents les courbes représentant les fonctions :

   $W_1 = k\ ln\ |x|$

   $W_2 = G(x)$
6. Déterminer les deux premiers termes non nuls du développement limité de y suivant les puissances de $x - 1 = h$, et $x + 1 = k$.
7. Construire avec soin, en précisant les points et tangentes remarquables, la courbe représentant les variations de y en fonction de x.

SOLUTION.

1. Ensemble de définition.

La fonction $y = 1 + x + \frac{2x\ ln|x|}{1-x}$ est définie si $|x|$ est différent de 0 et si $1 - x$ est différent de 0.

L'ensemble de définition est $]-\infty , 0[\cup]0 , 1[\cup]1 , +\infty[$.

2. Etude à l'infini.

$$\frac{y}{x} = \frac{1}{x} + 1 + 2\frac{ln|x|}{1-x}$$

Si x tend vers l'infini, la puissance l'emporte sur le logarithme : $\frac{ln|x|}{1-x}$ tend vers 0, $\frac{1}{x}$ tend vers 0, et $\frac{y}{x}$ tend vers 1.

Quand x tend vers l'infini, il y a une direction asymptotique parallèle à la première bissectrice.

$$y - x = 1 + \frac{2x\ ln|x|}{1-x} \approx 1 - 2\ ln\ |x|$$

Lorsque x tend vers l'infini, $y - x$ tend vers $-\infty$.

Quand x tend vers l'infini, il n'y a pas d'asymptote oblique car $(y - x)$ tend vers $-\infty$.

3. Variations de *F* et de *y*.

$$\frac{dy}{dx} = 1 + 2\frac{(ln|x|+1)(1-x)+x\,ln|x|}{(1-x)^2} = \frac{2\,ln|x|+(1-x)^2+2(1-x)}{(1-x)^2}$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{2\ln|x| + (1-x)(3-x)}{(1-x)^2}}$$

On pose $F(x) = 2\ln|x| + (1-x)(3-x)$. On a alors $\frac{dy}{dx} = \frac{F(x)}{(1-x)^2}$. Pour étudier le signe de la dérivée $\frac{dy}{dx}$, il suffit donc d'étudier le signe de la fonction $F(x)$. Pour cela, nous allons étudier les variations de $F(x)$.

3.1. Etude de *F(x)*.

Ensemble de définition.

$F(x) = 2\ln|x| + (1-x)(3-x)$ est définie pour $x \neq 0$.

Sens de variation.

Sa dérivée est $\frac{dF}{dx} = \frac{2}{x} - 2(1-x) - 2 = 2\frac{(x-1)^2}{x}$. La dérivée de F a donc le signe de x. F est décroissante pour $x < 0$, et croissante pour $x > 0$.

Zéros de *F (x)*.

$F(x)$ s'annule pour une valeur négative a de x vérifiant $2\ln|a| + (1-a)(3-a) = 0$, et pour $x = 1$. La résolution à la machine donne :

$$a \approx -0,159\,974\,016\,243\ldots$$

Limites aux bornes de l'ensemble de définition.

Si x tend vers 0, $F(x) \approx 2\ln|x| + 3$ tend vers $-\infty$. Il y a donc une asymptote verticale d'équation $x = 0$.

Si x tend vers l'infini, $\frac{F(x)}{x} = 2\frac{\ln|x|}{x} + \frac{x^2-4x+3}{x} \approx x - 4$ tend vers l'infini. Il y a une branche parabolique de direction asymptotique parallèle à Oy mais pas d'asymptote oblique.

Points d'inflexion.

$$\frac{dF}{dx} = 2\frac{(x-1)^2}{x} = 2\left(x - 2 + \frac{1}{x}\right) \Rightarrow \frac{d^2F}{dx^2} = 2\left(1 - \frac{1}{x^2}\right).$$

La dérivée seconde est nulle pour $x^2 = 1$, c'est-à-dire pour $x = -1$ ($y = 8$) et pour $x = 1$ ($y = 0$). Il y a donc deux points d'inflexion : $(-1, 8)$ et $(1, 0)$.

Tangentes aux points d'inflexion.

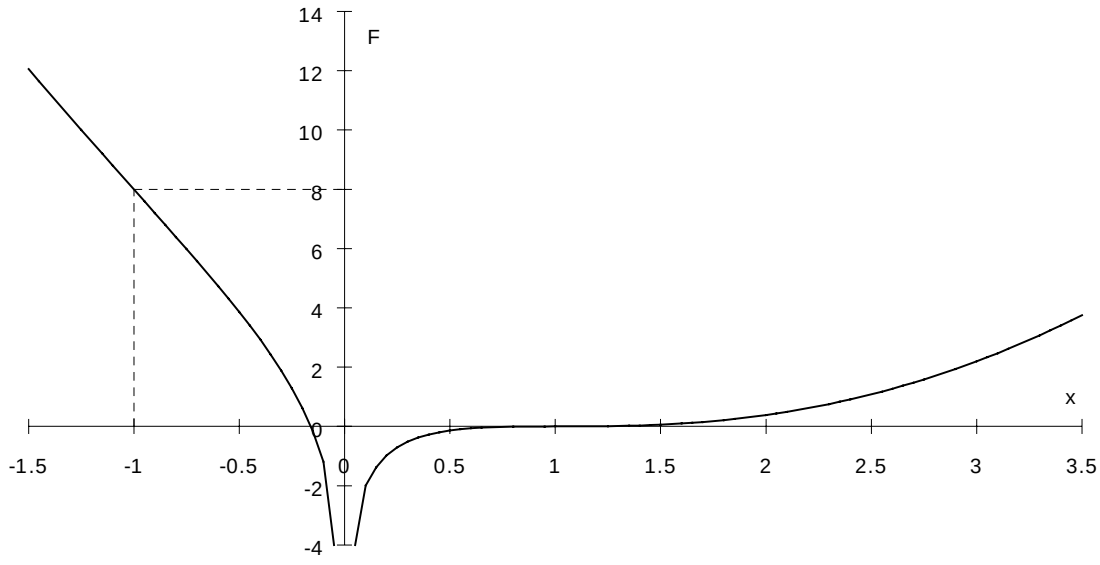
Pour $x = -1$, $\frac{dF}{dx} = 2\frac{(x-1)^2}{x} = -8$, tangente passant par le point O.

Pour $x = 1$, $\frac{dF}{dx} = 0$, tangente horizontale.

Tableau de variations.

x	$-\infty$		-1		a		0		1		$+\infty$
F''			0				‖		0		
F'		–	–8	–		–	‖	+	0	+	
F	$+\infty$	↘	8	↘	0	↘	$-\infty$ ‖ $-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$

Courbe représentative.



Courbe représentative de la fonction F (x) = 2 ln | x | + (1 − x)(3 − x).

3.2. Tableau de variations de *y*.

x	$-\infty$		-1		a		0		1		$+\infty$
F	$+\infty$	↘	8	↘	0	↘	$-\infty \,\|\|\, -\infty$	↗	0	↗	$+\infty$
y'		+		+	0	−	‖	−	‖	+	
y	$-\infty$	↗	0	↗	$(a-1)^2$	↘	‖	↘	‖	↗	$+\infty$

4. Limites de *y* et *y'* lorsque *x* tend vers 0 ou 1.

- Si x tend vers 0,

  $x \ln|x|$ tend vers 0, et $y = 1 + x + \dfrac{2x \ln|x|}{1-x}$ tend vers 1.

  $y' = \dfrac{2\ln|x| + (1-x)(3-x)}{(1-x)^2} \approx 2 \ln|x| \to -\infty$

- Si x tend vers 1,

  $\ln|x| = \ln x \approx (x-1) - \dfrac{(x-1)^2}{2}$; $y \approx 1 + x - 2x = 1 - x \to 0$

  $y' \approx \dfrac{2(x-1) - (x-1)^2 + (1-x)(3-x)}{(1-x)^2} = 0$

$$x \to 0 \Rightarrow y \to 1 \text{ et } y' \to -\infty$$
$$x \to 1 \Rightarrow y \to 0 \text{ et } y' \to 0$$

5. Position des courbes W_1 et W_2 .

Quand on écrit $F(x) = k \ln|x| - G(x)$, on prend : $k = 2$ et $G(x) = (3 - x)(x - 1)$.
Au voisinage de 1, on a :

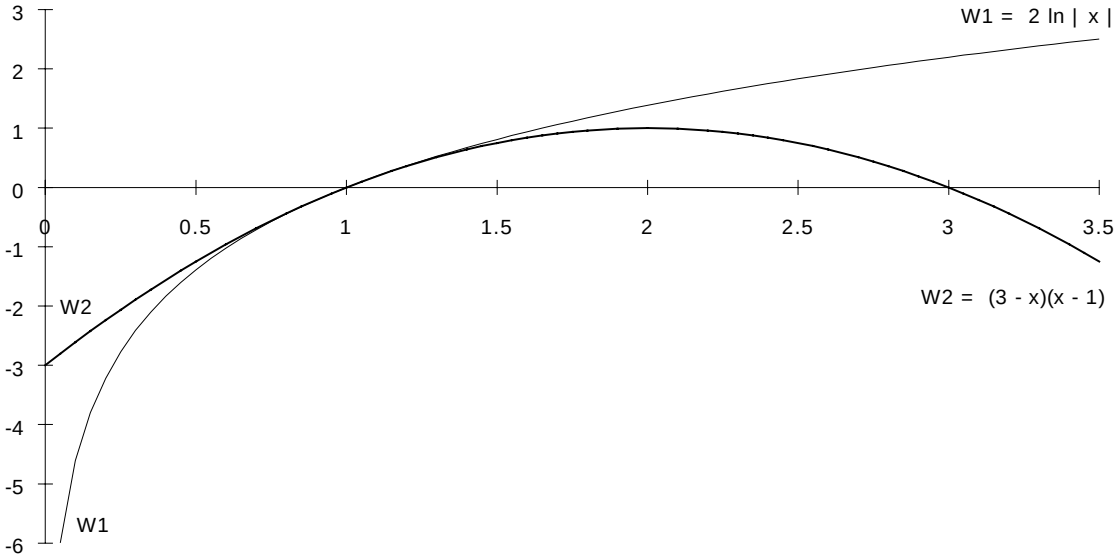
$$2 \ln|x| = 2 \ln x \approx 2(x-1) - (x-1)^2 = G(x).$$

La différence entre $2 \ln|x|$ et $G(x)$ est égale à $F(x)$.
Or, au voisinage de 1, $F(x)$ est négative pour $x < 1$, et positive pour $x > 1$, donc :

Au voisinage de 1 :

- la courbe $W_1 = 2\ ln\ |x|$ est en dessous de la courbe $W_2 = G(x)$ pour $x < 1$,
- la courbe $W_1 = 2\ ln\ |x|$ est au-dessus de la courbe $W_2 = G\ (x)$ pour $x > 1$.

Courbes représentatives.



Position relative des courbes W_1 et W_2 au voisinage de 1.

6. Développements limités de y au voisinage de $x = -1$ et au voisinage de $x = 1$.

6.1. Au voisinage de + 1 : $x = 1 + h$.

$$ln\ |x| = ln\ x = ln\ (1 + h) = h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} - \frac{h^4}{4} + h^4\ \varepsilon\ (h)$$

$$y = 1 + x + \frac{2x\ ln|x|}{1-x} = 2 + h - 2\ (1 + h)(1 - \frac{h}{2} + \frac{h^2}{3} - \frac{h^3}{4} + h^3\ \varepsilon\ (h))$$

$$y = 2 + h - 2 + h - \frac{2}{3}\ h^2 + \frac{1}{2}\ h^3 - 2\ h + h^2 - \frac{2}{3}\ h^3 + \frac{1}{2}\ h^4 + h^3\ \varepsilon\ (h)$$

$$\boxed{y = \frac{h^2}{3} - \frac{h^3}{6} + h^3\ \varepsilon\ (h)}$$

6.2. Au voisinage de – 1 : $x = -1 + k$.

$$y = 1 + x + \frac{2x\ ln|x|}{1-x} \Rightarrow y\ (-1) = 0$$

$$y' = \frac{F(x)}{(x-1)^2} \Rightarrow y'\ (-1) = \frac{1}{4}\ F\ (-1) = 2, \text{ car } F\ (-1) = 8$$

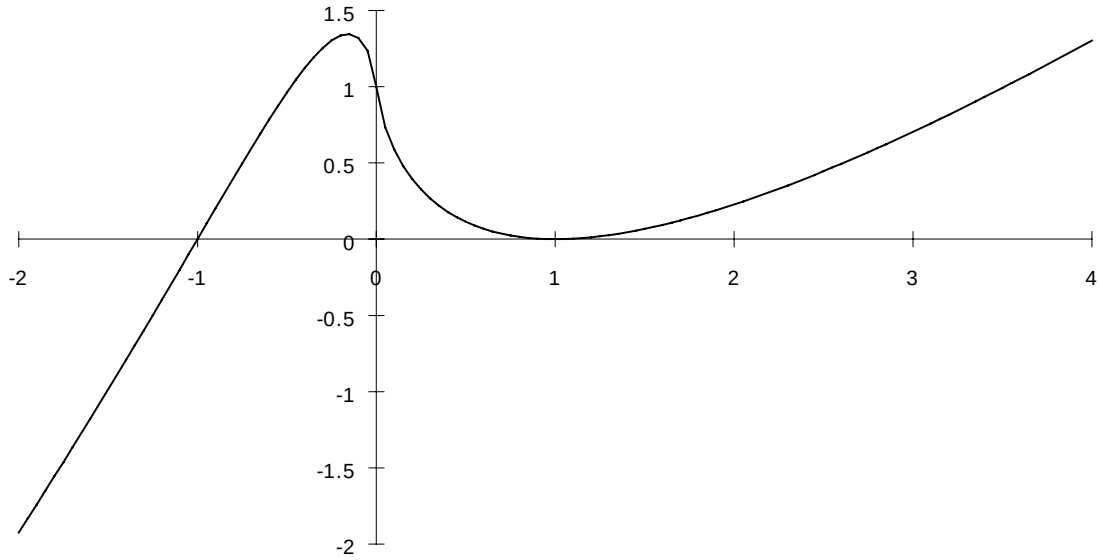
$$y'' = \frac{(x-1)F'(x) - 2F(x)}{(x-1)^3} \Rightarrow y''\ (-1) = \frac{1}{4}(\ F'\ (-1) + F\ (-1)\ ) = 0, \text{ car } F'\ (-1) = -8 \text{ et } F\ (-1) = 8$$

$$y''' = \frac{(x-1)^2 F''(x) - 4(x-1)F'(x) + 6F(x)}{(x-1)^4} \Rightarrow y'''\ (-1) = -1, \text{ car } F''\ (-1) = 0.$$

Le développement limité de y s'écrit alors :

$$y = 2\,k - \frac{k^3}{6} + k^3\,\varepsilon\,(k)$$

7. Courbe représentant les variations de *y*.



Courbe représentative de la fonction $y = 1 + x + \frac{2x\ ln|x|}{1-x}$.

Ensemble de définition.

Initialement, la fonction n'était pas définie pour $x = 0$. On peut la définir, par continuité, par :

$$y\,(0) = 1.$$

Le point (0, 1) est un point d'inflexion à tangente verticale.
La fonction n'était pas définie non plus pour $x = 1$. On peut la définir par continuité par :

$$y\,(1) = 0.$$

Le point (1, 0) est un minimum de *y*, à tangente horizontale.

Points d'inflexion.

Le point (– 1, 0) est un point d'inflexion. En ce point, la dérivée vaut $y'\,(-1) = 2$ et l'équation de la tangente est:

$$y = 2\,(x + 1)$$

Maximum.

y possède un maximum pour $x = a \approx -0{,}16$. La valeur maximum de *y* est $(a - 1)^2 \approx 1,\ 345\ 5$.

EXERCICE 20.

1. Représentez graphiquement le fonction $y = f(x) = 3\pi - 5{,}1 + 6\,x - 12\,Atan\,x$.
2. Ecrire le développement de Taylor de $f(x)$ limité à l'ordre 3, au voisinage du point $x = 1$. On note $g(x)$ le polynôme de degré 3 apparaissant dans le développement de Taylor ci-dessus. Préciser la position relative des courbes représentatives de $f(x)$ et de $g(x)$ au voisinage de $x = 1$.
3. On considère la suite définie par récurrence par $x_0 = 1$, $x_n = g(x_{n-1})$. Montrer que la suite de terme général x_n est convergente et calculer sa limite.

SOLUTION.

1. Représentation graphique.

$$y = 3\pi - 5{,}1 + 6\,x - 12\,Atan\,x.$$

La fonction y est définie pour toute valeur réelle de x.

$$y' = 6 - \frac{12}{1+x^2} = 6\,\frac{x^2-1}{x^2+1}$$

$y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$. La fonction y possède deux extrema.

$$y'' = \frac{24x}{(1+x^2)^2}$$

$y'' = 0 \Leftrightarrow x = 0$. La fonction y possède un point d'inflexion.

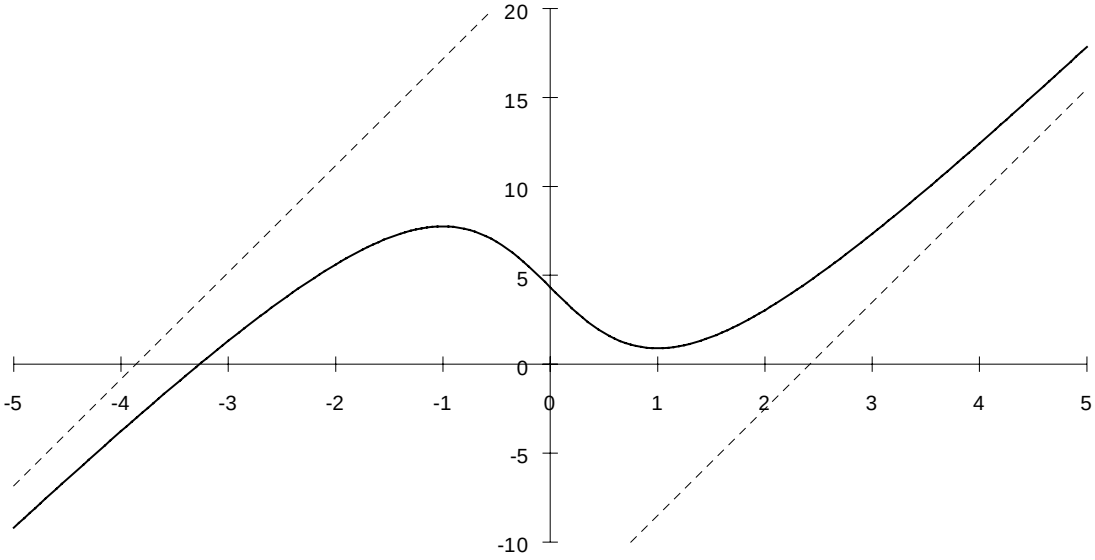
Si x tend vers $+\infty$, $Atan\,x \approx \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x}$; $y \approx 3\pi - 5{,}1 + 6\,x - 6\,\pi + \frac{12}{x} = 6\,x - 3\,\pi - 5{,}1 + \frac{12}{x}$. Il y a donc une asymptote oblique d'équation $y = 6\,x - 3\,\pi - 5{,}1$ et la courbe est au-dessus de son asymptote.

Si x tend vers $-\infty$, $Atan\,x \approx -\frac{\pi}{2} - \frac{1}{x}$; $y \approx 3\pi - 5{,}1 + 6\,x + 6\,\pi - \frac{12}{x} = 6\,x + 9\,\pi - 5{,}1 - \frac{12}{x}$. Il y a donc une asymptote oblique d'équation $y = 6\,x + 9\,\pi - 5{,}1$ et la courbe est au-dessus de son asymptote.

Tableau de variations.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y''		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
y'		$+$	0	$-$	-6	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	$6\,\pi - 11{,}1$	↘	$3\,\pi - 5{,}1$	↘	$0{,}9$	↗	$+\infty$

Courbe représentative.



Courbe représentative de la fonction y = 3π – 5,1 + 6 x – 12 Atan x.

2. Développement limité.

$$y\,(1) = 0{,}9$$

$$y' = 6 - \frac{12}{1+x^2} \qquad y'\,(1) = 0$$

$$y'' = \frac{24x}{(1+x^2)^2} \qquad y''\,(1) = 6$$

$$y'''\,(x) = 24\,\frac{(1+x^2)-4x^2}{(1+x^2)^3} = 24\,\frac{1-3x^2}{(1+x^2)^3} \qquad y'''\,(1) = -9$$

$$y^{(4)}\,(x) = \frac{24}{(1+x^2)^4}\,[-6\,x\,(1+x^2) - 6\,x\,(1-3\,x^2)\,] = -288\,\frac{x(1-x^2)}{(1+x^2)^4} \qquad y^{(4)}\,(1) = 0$$

$$y^{(5)}\,(x) = -\frac{288}{(1+x^2)^5}[\,(-3\,x^2+1)(1+x^2) - 8\,x^2\,(1-x^2)\,] = -\frac{288}{(1+x^2)^5}[\,5\,x^4 - 10\,x^2 + 1\,]$$

$$y^{(5)}\,(x) = -\frac{288}{(1+x^2)^5}[\,5\,(x^2-1)^2 - 4\,] \qquad y^{(5)}\,(1) = 72$$

$$y = 0{,}9 + 6\,\frac{(x-1)^2}{2!} - 9\,\frac{(x-1)^3}{3!} + 72\,\frac{(x-1)^5}{5!} + (x-1)^5\,\varepsilon\,(x-1)$$

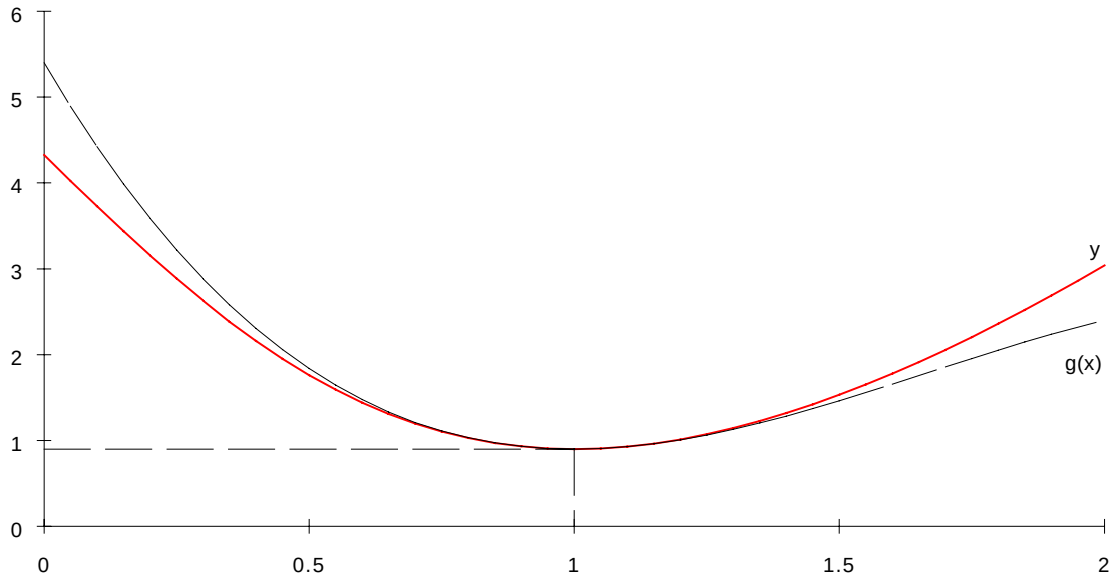
Si on limite le développement à l'ordre 3, il reste :

$$\boxed{y = 0{,}9 + 3\,(x-1)^2 - \frac{3}{2}\,(x-1)^3 + (x-1)^3\,\varepsilon\,(x-1)}$$

$$g(x) = 0{,}9 + 3\,(x-1)^2 - \frac{3}{2}\,(x-1)^3$$

$$y - g(x) = 72\,\frac{(x-1)^5}{5!} + (x-1)^5\,\varepsilon\,(x-1)$$

$y - g(x)$ est du signe de $(x-1)$: au voisinage de 1, la courbe représentant les variations de y est en dessous de la courbe représentant les variations de $g(x)$, si $x < 1$, et au-dessus si $x > 1$.



Position relative des courbes $y = 3\pi - 5{,}1 + 6x - 12\,\mathrm{Atan}\,x$ *et* $g(x) = 0{,}9 + 3(x-1)^2 - \frac{3}{2}(x-1)^3$ *au voisinage de* 1.

3. Limite d'une suite.

La limite λ de la suite, si elle existe, vérifie :

$$g(\lambda) = \lambda$$

C'est donc le point de rencontre de la courbe représentative des variations de *g(x)* avec la première bissectrice, d'équation *y = x*. Or ce point de rencontre existe sur la figure : la suite est donc convergente et sa limite λ vérifie l'équation :

$$\lambda = 0{,}9 + 3(\lambda - 1)^2 - \frac{3}{2}(\lambda - 1)^3$$

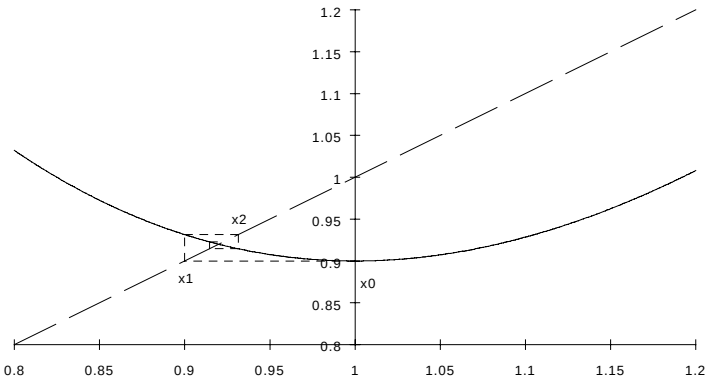
$$\frac{3}{2}(\lambda - 1)^3 - 3(\lambda - 1)^2 + (\lambda - 1) + 0{,}1 = 0$$

Cette équation a trois racines réelles :

$\lambda - 1 = 1,538\,517\,956\,1\ldots$ $\lambda - 1 = -0{,}080\,021\,207\,907\ldots$ $\lambda - 1 = 0,541\,503\,251\,812\ldots$

D'après la représentation graphique, la racine qui correspond à la limite de la suite est la deuxième :

$$\lambda = 0,919\,978\,792\,093\ldots$$



EXERCICE 21.

Trouver un développement limité généralisé de

$$f(x) = \frac{ch\,x}{\sin x}$$

au voisinage de 0, à l'ordre 2.

SOLUTION.

Pour trouver un développement limité de $f(x) = \dfrac{ch\,x}{\sin x}$, il suffit de diviser par puissances croissantes, un développement de $ch\,x$ et un développement de $\sin x$.

$$ch\,x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots$$

$$\begin{array}{rrrrrrrrr|rrrrr}
 & 1 & + & \frac{1}{2} & x^2 & + & \frac{1}{24} & x^4 & + \ldots & x & - & \frac{1}{6} & x^3 & + \ldots \\
\cline{10-14}
- & 1 & + & \frac{1}{6} & x^2 & & & & & \frac{1}{x} & + & \frac{2}{3} & x & + \ldots \\
\cline{1-5}
 & & & \frac{2}{3} & x^2 & & & & & & & & & \\
 & & - & \frac{2}{3} & x^2 & + & \frac{2}{9} & x^4 & & & & & & \\
\cline{3-8}
 & & & & & & \frac{19}{72} & x^4 & + \ldots & & & & &
\end{array}$$

$$f(x) = \frac{ch\,x}{\sin x} = \frac{1}{x} + \frac{2}{3}\,x + x^2\,\varepsilon(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$$

EXERCICE 22.

1° Au voisinage de 0 et à l'ordre 4, donner un développement limité de

$$f(x) = 1 - \cos x + \ln(\cos x)$$

2° Au voisinage de 0 et à l'ordre 1, donner, en justifiant, le développement limité de

$$g(x) = \frac{f(x)}{x^4}$$

SOLUTION.

1° Développement limité de *f (x)*.

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots \quad \forall x \in R.$$

$$\ln(1+\varepsilon) = \varepsilon - \frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{\varepsilon^3}{3} - \ldots + (-1)^{n+1}\frac{\varepsilon^n}{n} + \ldots \text{ avec } |\varepsilon| < 1$$

$$\ln(\cos x) = \ln\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots\right) \text{ avec } |1 - \cos x| < 1, \text{ c'est-à-dire } \forall x \in R^*.$$

$$= \left(-\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots\right)^2 + \ldots$$

$$= -\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{1}{2}\frac{x^4}{(2!)^2} + \ldots$$

$$f(x) = 1 - \cos x + \ln(\cos x) = \left(\frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!}\right) + \left(-\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{1}{2}\frac{x^4}{(2!)^2}\right) + x^5\varepsilon(x)$$

$$\boxed{f(x) = -\frac{x^4}{8} + x^5\varepsilon(x)}$$

Ce développement est valable pour tout $x \in R$.

2° Développement limité de *g (x)*.

$$\boxed{g(x) = \frac{f(x)}{x^4} = -\frac{1}{8} + x\varepsilon(x) \text{ avec } \varepsilon(x) \to 0 \text{ si } x \to 0}$$

Ce développement, comme celui de *f (x)* est valable pour tout $x \in R$.

EXERCICE 23.

1° Donner un développement limité à l'ordre 1 de

$$f(y) = \sqrt{1+\sqrt{1+y}}$$

pour y au voisinage de 0.

2° En déduire un développement limité, pour x tendant vers $+\infty$, de

$$g(x) = \sqrt{x^2+\sqrt{x^4+1}} - x\sqrt{2}$$

ainsi que la valeur

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)$$

SOLUTION.

1° Développement limité de *f (y)*.

$f(y) = \sqrt{1+\sqrt{1+y}}$ est de la forme $\sqrt{1+u}$ avec $u = \sqrt{1+y}$

$$\frac{df}{dy} = \frac{df}{du}\frac{du}{dy} = \frac{1}{2\sqrt{1+u}} \times \frac{1}{2\sqrt{1+y}} = \frac{1}{4f(y)} \times \frac{1}{\sqrt{1+y}}$$

$f(0) = \sqrt{2}$

$$f'(0) = \frac{1}{4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{8}$$

$$f(y) = f(0) + f'(0)\, y + y\,\varepsilon(y) = \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{8}\, y + y\,\varepsilon(y)$$

$$\boxed{f(y) = \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{8}\, y + y\,\varepsilon(y)}$$

2° Développement limité de *g (x)*.

$g(x) = \sqrt{x^2+\sqrt{x^4+1}} - x\sqrt{2}$ Le radical est toujours positif.

$$= x\left(sgn(x)\sqrt{1+\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}} - \sqrt{2} \right)$$ car $|x| = sgn(x)\, x$

Si x tend vers $+\infty$:

$$g(x) = x\left(\frac{\sqrt{2}}{8} \times \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^4}\,\varepsilon\left(\frac{1}{x^4}\right) \right)$$

$$\boxed{g(x) = \frac{\sqrt{2}}{8}\,\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^3}\,\varepsilon\left(\frac{1}{x^3}\right) \quad x\to+\infty}$$

Si x tend vers $+\infty$, $g(x)$ tend vers 0 par valeurs supérieures.

Remarque :

Si x tend vers moins l'infini, $g(x) = -x\left(\sqrt{1+\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}} + \sqrt{2} \right) \approx 2\sqrt{2}\,|x|$ tend vers $+\infty$.

EXERCICE 24.

Calculer les limites des fonctions suivantes lorsque x tend vers 0 :

1. $\dfrac{(1-\cos x)\,A\tan x}{sh\,x\,\sin x\tan x}$
2. $(1+\sin x)^{\frac{1}{x}}$
3. $\dfrac{1-\cos(A\sin x)}{\ln(1+x^2)}$
4. $\left(\dfrac{x}{\sin x}\right)^{\frac{\sin x}{x-\sin x}}$

SOLUTION.

1°/

$$y = \frac{(1-\cos x)\,A\tan x}{sh\,x\,\sin x\tan x}$$

Lorsque x tend vers 0, la limite de y est une forme indéterminée de la forme $\frac{0}{0}$. On peut lever l'indétermination par la règle de L'Hospital. Soit $u = (1 - \cos x)\,Atan\,x$ et $v = sh\,x\,\sin x\tan x$. On a :

$u' = \sin x\,A\tan x + \dfrac{1-\cos x}{1+x^2}$; $u'(0) = 0$.

$u'' = \cos x\,Atan\,x + 2\dfrac{\sin x}{1+x^2} - 2x\dfrac{1-\cos x}{(1+x^2)^2}$; $u''(0) = 0$.

$u''' = -\sin x\,Atan\,x + 3\dfrac{\cos x}{1+x^2} - 6x\dfrac{\sin x}{(1+x^2)^2} - 2\dfrac{1-\cos x}{(1+x^2)^2} + 8x^2\dfrac{1-\cos x}{(1+x^2)^3}$; $u'''(0) = 3$.

$v' = ch\,x\sin x\tan x + sh\,x\cos x\tan x + shx\sin x\,(1+\tan^2 x)$; $v'(0) = 0$.

$v'' = sh\,x\sin x\tan x + ch\,x\cos x\tan x + ch\,x\sin x\,(1+\tan^2 x)$
$- sh\,x\sin x\tan x + ch\,x\cos x\tan x + sh\,x\cos x\,(1+\tan^2 x)$
$2\,sh\,x\sin x\tan x\,(1+\tan^2 x) + ch\,x\sin x\,(1+\tan^2 x) + sh\,x\cos x\,(1+\tan^2 x)$

$v'' = 2\,(chx\sin x + sh\,x\cos x + sh\,x\sin x\tan x)\,(1+\tan^2 x)$; $v''(0) = 0$.

$v''' = 2\,(2\,ch\,x\cos x + v')(1+\tan^2 x) + 4\,(chx\sin x + sh\,x\cos x + v)\tan x\,(1+\tan^2 x)$; $v'''(0) = 4$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)\,A\tan x}{sh\,x\,\sin x\tan x} = \frac{u'''(0)}{v'''(0)} = \frac{3}{4}$$

2°/

$$y = (1+\sin x)^{\frac{1}{x}}$$

$$\ln y = \frac{\ln(1+\sin x)}{x} \approx \frac{\sin x}{x} - \frac{\sin^2 x}{2x} \approx 1 - \frac{x}{2} \to 1$$

$$\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{x}} = e$$

3°/

$$y = \frac{1-\cos(A\sin x)}{\ln(1+x^2)}$$

Posons $u = A\sin x$; $u' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; $u'' = \frac{x}{\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}}$; $u''' = \frac{1}{\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}} + 3\frac{x^2}{\left(1-x^2\right)^{\frac{5}{2}}}$

$u \approx x + \frac{x^3}{6}$

$1 - \cos u \approx \frac{u^2}{2} - \frac{u^4}{24} \approx \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{3} - \frac{x^4}{24} = \frac{x^2}{2} + \frac{7x^4}{24}$

$\ln(1+x^2) \approx x^2 - \frac{x^4}{2}$

$y \approx \left(\frac{1}{2} + \frac{7x^2}{24}\right)\left(1 + \frac{x^2}{2}\right) \approx \frac{1}{2} + \frac{13x^2}{24} \to \frac{1}{2}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(A\sin x)}{\ln(1+x^2)} = \frac{1}{2}$$

4°/

$$y = \left(\frac{x}{\sin x}\right)^{\frac{\sin x}{x-\sin x}}$$

$\ln y = \frac{\sin x}{x-\sin x} \ln\left(\frac{x}{\sin x}\right)$.

Posons $u = \frac{\sin x}{x}$. Lorsque $x \to 0$, $u \approx 1 - \frac{x^2}{6} \to 1$

$\ln y = -\frac{u \ln u}{1-u}$

Lorsque u tend vers 1, $\ln u \approx u - 1 \approx -\frac{x^2}{6}$; $\ln y \approx u \to 1$; $y \to e$.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sin x}\right)^{\frac{\sin x}{x-\sin x}} = e$$

EXERCICE 25.

Calculer les limites des fonctions suivantes lorsque x tend vers $+\infty$:

1. $\frac{1}{x}\, ln\, \frac{e^x - 1}{x}$
2. $\frac{ch\left(\sqrt{x^2+1}\right)}{e^x}$
3. $sh\, x\, e^{-x\, th\, x}$
4. $\left(\frac{ln(chx)}{x} \right)^x$

SOLUTION.

1°/

$$y = \frac{1}{x}\, ln\, \frac{e^x - 1}{x}$$

$e^x - 1 = e^x\,(1 - e^{-x})$

$ln\,(e^x - 1) = ln\, e^x + ln\,(1 - e^{-x}) = x + ln\,(1 - e^{-x}) \approx x - e^{-x}$

$y \approx \frac{x - e^{-x} - ln\, x}{x}$

Lorsque x tend vers $+\infty$, $\frac{x}{x} = 1$, $\frac{e^{-x}}{x} \to 0$, $\frac{ln\, x}{x} \to 0$ car la puissance l'emporte sur le logarithme, $y \to 1$.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x}\, ln\, \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

2°/

$$y = \frac{ch\left(\sqrt{x^2+1}\right)}{e^x}$$

Lorsque x tend vers $+\infty$, $\sqrt{x^2+1} \approx x + \frac{1}{2x} \to +\infty$

$ch\,\sqrt{x^2+1} \approx e^{\sqrt{x^2+1}} \approx e^x$

$y \to 1$.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{ch\left(\sqrt{x^2+1}\right)}{e^x} = 1$$

3°/

$$y = sh\, x\, e^{-x\, th\, x}$$

Lorsque $x \to +\infty$, $sh\, x \approx e^x$; $y \approx e^{x\,(1\, -\, th\, x)}$; $1 - th\, x = 1 - \frac{shx}{chx} = 1 - \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = 2\, \frac{e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = 2\, \frac{e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$;

$x\,(1 - th\, x) = \frac{2\, x\, e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} \to 0$ car l'exponentielle l'emporte sur la puissance, $y \to e^0 = 1$.

$$\lim_{x \to +\infty} sh\, x\, e^{-x\, th\, x} = 1$$

4°/

$$y = \left(\frac{ln(chx)}{x} \right)^x$$

$$ln\, y = x\, ln \left(\frac{ln(chx)}{x} \right)$$

$$ch\, x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}\, e^x (1 + e^{-2x})$$

$$ln\, (ch\, x) = x - ln\, 2 + ln\, (1 + e^{-2x}) \approx x - ln\, 2 + e^{-2x}$$

$$\frac{ln(chx)}{x} \approx 1 - \frac{ln 2}{x} + \frac{e^{-2x}}{x}$$

$$ln \left(\frac{ln(chx)}{x} \right) \approx - \frac{ln 2}{x} + \frac{e^{-2x}}{x}$$

$$ln\, y = x\, ln \left(\frac{ln(chx)}{x} \right) \approx - ln\, 2 + e^{-2x} \to - ln\, 2$$

$$y \to \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{ln(chx)}{x} \right)^x = \frac{1}{2}$$

Exercices

Réels, séries numériques.

1. **Sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$.**
2. **Réels modulo 1.**

3. **Critères de convergence d'une série numérique :**
   — Critère de D'Alembert.
   — Critère de Cauchy.
   — Critère d'Abel.
   — Une série équivalente à une série convergente est convergente.
   — Une série de terme général $f(n) > 0$ est convergente en même temps que l'intégrale de f à l'infini.

Sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$.

Les sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$ non réduits à 0, sont les $\mathbb{Z}$-modules monogènes (ils n'ont alors que des points isolés), ou bien des sous-groupes partout denses (c'est le cas des $\mathbb{Z}$-modules engendrés par deux réels dont le rapport n'est pas rationnel, c'est le cas aussi des $\mathbb{Q}$-espaces vectoriels).

HAUT

Réels modulo 1.

Le corps des réels modulo 1 est isomorphe au cercle trigonométrique.

Pour tout nombre réel r **non rationnel**, pour tout nombre réel s, pour tout nombre réel $\varepsilon > 0$:
il existe un entier $n \in \mathbb{N}$, il existe un entier $k \in \mathbb{Z}$, tels que $| n\,r + k - s | < \varepsilon$.

HAUT

Convergence d'une série numérique.

Une série numérique de terme général u_n, $n \in \mathbb{N}$, est dite **convergente** si la suite de terme général :

$$S_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k, n \in \mathbb{N},$$

est convergente.
La limite S de la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est appelée la **somme de la série**.

HAUT

Critère de D'Alembert.

Une série numérique de terme général u_n, $n \in \mathbb{N}$, est convergente si le rapport $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|$ a une limite strictement plus petite que 1 lorsque n augmente indéfiniment.

$$\lim_{n \to +\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| < 1.$$

HAUT

Critère de Cauchy.

Une série numérique de terme général u_n, $n \in \mathbb{N}$, est convergente si $|u_n|^{\frac{1}{n}}$ a une limite strictement plus petite que 1 lorsque n augmente indéfiniment.

$$\lim_{n \to +\infty} |u_n|^{\frac{1}{n}} < 1.$$

HAUT

Critère d'Abel.

Une série numérique de terme général $u_n = a_n v_n$, $n \in \mathbb{N}$, est convergente si :

1°/ la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite strictement décroissante à termes positifs, convergeant vers 0,

2°/ il existe une constante $A > 0$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left| \sum_{k=0}^{k=n} v_k \right| < A$.

Comme corollaire, on obtient le **théorème des séries alternées** :
Pour qu'une série alternée soit convergente, il suffit que son terme général tende vers 0 et que la valeur absolue de chacun de ses termes soit supérieure à la valeur absolue du terme suivant. Et, dans ce cas, le reste à l'ordre n est inférieur à la valeur absolue du premier terme négligé.

HAUT

Chapitre 10. Réels, séries numériques.

Exercices

Exercice 1. Sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$.
Exercice 2. Réels modulo 1.
Exercice 3. Etude de 8 séries numériques.
Exercice 4. Série $u_n = a\,v_{n+2} + b\,v_{n+1} + c\,v_n$.
Exercice 5. Séries $1/n!$, $n^2/n!$, $n^3/n!$, irrationnalité de e.
Exercice 6. Série $f(n)$ et intégrale de f.
Exercice 7. Série $1/(n(\ln n)^2)$.
Exercice 8. Série $(-a)^n/n$.
Exercice 9. Série $n^{(-\alpha)}(\ln(n))^{\beta}$.
Exercice 10. Etude de 12 séries numériques.
Exercice 11. Etude de 7 séries numériques.

Exercice 1. Sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$.

Soit G un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$, non réduit à 0. On désigne par G' l'ensemble des éléments strictement positifs de G. On pose $m = Inf(G')$. 1°/ Démontrer que $m \geqslant 0$. 2°/ Démontrer que G appartient à l'un des deux types suivants : — Type 1 : $m \in G'$, alors $m > 0$ et $G = m\mathbb{Z}$. — Type 2 : $m \notin G'$, alors $m = 0$ et, pour tout réel x et tout réel strictement positif ε, il existe au moins un élément de G dans l'intervalle $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$. 3°/ (u, v) décrivant $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, et a et b étant deux réels donnés, démontrer que l'ensemble décrit par $u\,a + v\,b$ est un sous-groupe de $\mathbb{R}$. Quelle propriété de (a, b) permet de décider si G est du type 1 ou du type 2 ?	Solution

HAUT

Exercice 2. Réels modulo 1.

1°/ Etant donné un nombre réel r, montrer que la suite des multiples $n\,r$, $n \in \mathbb{N}$, de r modulo 1, est finie ou partout dense dans $\mathbb{R} / \mathbb{Z}$:

— elle est finie et discrète si et seulement si r est rationnel.

— elle est infinie et partout dense si et seulement si r n'est pas rationnel.

2°/ Lorsque le nombre réel r n'est pas rationnel, montrer que tout élément de $\mathbb{R} / \mathbb{Z}$ est point d'accumulation de la suite $(n\,r + \mathbb{Z})_{n \in \mathbb{N}}$ des multiples de r modulo 1.

3°/ Soit $z = e^{i\theta}$, $0 \leqslant \theta < 2\pi$, un nombre complexe de module 1.
Montrer que la suite $(z^n)_{n \in \mathbb{N}}$ des puissances de z représentées par des points du cercle trigonométrique :

— est constante et égale à 1 lorsque $\theta = 0$ ($z = 1$) ;

— oscille périodiquement sur le cercle trigonométrique lorsque θ est une fraction rationnelle de 2π ;

— se rapproche d'aussi près qu'on veut de tout point du cercle trigonométrique lorsque θ n'est pas une fraction rationnelle de 2π.

Solution

HAUT

Exercice 3. Etude de 8 séries numériques.

Etudier les séries numériques suivantes:

a) $\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{1}{\sum_{k=1}^{k=n} k}\right)$;

b) $\sum_{n\geqslant 1}\frac{9}{(3n+1)(3n+4)}$

c) $\sum_{n\geqslant 3}\frac{2n-1}{n(n^2-4)}$

d) $\sum_{n\geqslant 1}\frac{\sin\left(\frac{1}{n(n+1)}\right)}{\cos\left(\frac{1}{n}\right)\cos\left(\frac{1}{n+1}\right)}$

e) $\sum_{n\geqslant 1} Arctan\,\frac{1}{n^2+n+1}$

f) $\sum_{n\geqslant 2}(-1)^n \ln\frac{n+1}{n-1}$

g) $\sum_{n\geqslant 0} e^{-n}$

h) $\sum_{n\geqslant 1}\frac{n^n}{n!}$

Solution

HAUT

Exercice 4. Série $u_n = a\,v_{n+2} + b\,v_{n+1} + c\,v_n$.

Soient a, b, c, trois nombres réels tels que $a + b + c = 0$, et (v_n) une suite de nombres réels convergeant vers 0. On considère la suite (u_n) définie, pour $n \geq 1$, par $u_n = a\,v_{n+2} + b\,v_{n+1} + c\,v_n$.

Démontrer que la série de terme général u_n converge et calculer sa somme.

Solution

Applications : étudier les deux séries suivantes.

a) $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^3 + 3n^2 + 2n}$ b) $\sum_{n \geqslant 1} \ln\left(1 - \frac{1}{(n+2)^2}\right)$

HAUT

Exercice 5. Séries $1/n!$, $n^2/n!$, $n^3/n!$, irrationnalité de e.

a) En appliquant la formule de Taylor-Lagrange à la fonction exponentielle entre 0 et 1, démontrer que l'on a :

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}, \text{ où } e = exp\,(1).$$

b) Etudier les séries numériques :

$$\sum_{n \geqslant 0} \frac{n^2}{n!} \text{ et } \sum_{n \geqslant 0} \frac{n^3}{n!}.$$

c) Soit $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!}$ (pour tout $n \in \mathbb{N}$). Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $R_n < \frac{1}{n!\,n}$. En déduire que e est irrationnel.

Solution

HAUT

Exercice 6. Série $f(n)$ et intégrale de f.

1°/ Soit $f :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, continue, strictement positive et strictement décroissante. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$u_n = f(n)$ et $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$.

Démontrer, pour tout $n \geq 2$, les inégalités suivantes :

$$\int_1^{n+1} f(x)\,dx < S_n < u_1 + \int_1^n f(x)\,dx.$$

Montrer l'existence de $C \in \mathbb{R}$ vérifiant, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$S_n = \int_1^n f(x)\,dx + C + \varepsilon(n), \text{ avec } \lim_{n\to+\infty} \varepsilon(n) = 0.$$

Dans le cas où $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ diverge, démontrer que l'on a :

$$S_n \sim \int_1^n f(x)\,dx.$$

Solution

2°/ Démontrer que, pour tout $n \geq 2$, on a :

$$\ln(n+1) < 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} < 1 + \ln(n)$$

et que l'on a $1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} \sim \ln(n)$.

3°/ Calculer $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ en appliquant le résultat du 1° et déterminer $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $n \geq n_0$, on ait :

$$\left| \ln(2) - \sum_{k=1}^{k=n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right| < 10^{-2}.$$

4°/ Etudier la suite $x_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}$.

HAUT

Exercice 7. Série $1/(n(\ln n)^2)$.

1°/ Expliciter une primitive de $f : x \mapsto \dfrac{1}{x(\ln x)^2}$ sur $]1, +\infty[$.

2°/ Soit $a > 1$. Démontrer que l'intégrale généralisée $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ converge.

3°/ On considère la série numérique $\sum_{n \geqslant 2} u_n$ avec $u_n = f(n)$. Donner un majorant de $S_n = u_2 + ... + u_n$ indépendant de n; En déduire que $\sum_{n \geqslant 2} u_n$ est convergente.

Solution

4°/ On note S la somme $\sum_{n \geqslant 2} u_n$ et $R_n = S - S_n$ pour $n \geq 2$. Donner un encadrement de R_n et démontrer que pour que S_n approche S de moins de 10^{-2}, il faut que $n \geq 10^{43}$.

HAUT

Exercice 8. Série (-*a*)^*n*/*n*.

Soit $a \in [\,0, 1\,]$. En appliquant la formule de Taylor-Lagrange à $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = ln\,(1 + t\,a)$, démontrer que $ln\,(1 + a) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{a^n}{n}$.

Retrouver ainsi les résultats de l'exercice 6.3°.

Solution

HAUT

Exercice 9. Série $n^{(-\alpha)}(\ln(n))^{\beta}$.

Quelle est la nature de la série de terme général $u_n = n^{-\alpha} (\ln (n))^{\beta}$, où $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}$? (Distinguer trois cas : $\alpha = 1$, $\alpha < 1$, $\alpha > 1$).	Solution

HAUT

Exercice 10. Etude de 12 séries numériques.

Préciser la nature des séries numériques de termes généraux respectifs :

a) $\frac{1}{n^2+421}$

b) $\frac{1}{ln(n)}$

c) $\frac{1}{\sqrt{(n+1)(n^2+2)}}$

d) $\frac{(ln(n))^n}{n!}$

e) $\frac{1}{n^{2-cos\left(\frac{1}{n}\right)}}$

f) $\frac{\sqrt{(n+1)(n+2)}}{n^2-\sqrt{n}+ln(n)}$

g) $\frac{cos\, n}{n(n+1)}$

h) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{t^n}{1+\sqrt{t}}\, dt$

i) $\int_0^1 \frac{t^n}{1+\sqrt{t}}\, dt$

j) $\sqrt[3]{n^3+2n}-\sqrt{n^2-1}$

k) $\frac{n!}{n^n}$

l) $sin\,(n)$

Solution

HAUT

Exercice 11. Etude de 7 séries numériques.

Etudier la nature des séries numériques de termes généraux respectifs :

a) $\left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^{n\ln(n)}$ b) $\left(1+\frac{x}{n}\right)^{-n^2}$ $(x \in \mathbb{R})$

c) $\cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+2}\right)$ d) $\frac{1}{n}e^{in\theta}$, avec $n \geq 1$.

e) $\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}\,dx$ f) $\frac{(-1)^n}{(\ln(n))^2}$

g) $\frac{(-1)^n}{\ln(n)+(-1)^n}$

Solution

HAUT

Chapitre 10. Réels, séries numériques.

Enoncés.

Exercice 1. Sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$.

Soit G un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$, non réduit à 0. On désigne par G' l'ensemble des éléments strictement positifs de G. On pose $m = Inf(G')$. 1°/ Démontrer que $m \geqslant 0$. 2°/ Démontrer que G appartient à l'un des deux types suivants : — Type 1 : $m \in G'$, alors $m > 0$ et $G = m\mathbb{Z}$. — Type 2 : $m \notin G'$, alors $m = 0$ et, pour tout réel x et tout réel strictement positif ε, il existe au moins un élément de G dans l'intervalle $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$. 3°/ (u, v) décrivant $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, et a et b étant deux réels donnés, démontrer que l'ensemble décrit par $u\,a + v\,b$ est un sous-groupe de $\mathbb{R}$. Quelle propriété de (a, b) permet de décider si G est du type 1 ou du type 2 ?	

Solution.

1°/ m est positif.

Pour tout $x \in G'$, on a $0 < x$.
Donc 0 est un minorant de G'.
Or, par définition, la borne inférieure est le plus grand des minorants.
Donc $m = Inf(G')$ est supérieur ou égal au minorant 0.

2°/ Les deux types de sous-groupes additifs.

La borne inférieure de G' peut être ou ne pas être un élément de G'.

a) Type 1 : $m \in G'$.

Dans ce cas, comme tout élément de G', m est strictement positif : $m > 0$.

Comme m appartient à G, $m\mathbb{Z}$ est, par stabilité de l'addition et de la symétrie, contenu dans G : $m\mathbb{Z} \subset G$.

Réciproquement, s'il existait un $x \in G$, $x \notin m\mathbb{Z}$, $|x|$, qui peut être égal à x ou à $-x$, est aussi un élément de G.
Puisque $x \notin m\mathbb{Z}$ et $0 \in m\mathbb{Z}$, x est différent de 0 et $|x| \in G'$.
$m = Inf(G') \Rightarrow m \leqslant |x|$.
$|x| \notin m\mathbb{Z}$ et $m \in m\mathbb{Z} \Rightarrow |x| \neq m$.
$m \leqslant |x|$ et $|x| \neq m \Rightarrow m < |x|$.
On peut écrire, de façon unique : $|x| = k\,m + m'$, avec $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 1$, et $0 < m' < m$.

$m' = |x| - k\,m > 0$ et $|x| \in G'$ et $k\,m \in G' \Rightarrow m' \in G'$.
Or m est le plus petit élément de G', donc m', qui est strictement plus petit que m, ne peut pas appartenir à G' : on a là une contradiction.
C'est que notre hypothèse est fausse : il n'existe pas d'élément x de G qui n'appartienne pas à $m\,\mathbb{Z}$.
C'est donc que G est contenu dans $m\,\mathbb{Z}$.
D'où l'égalité : $G = m\,\mathbb{Z}$.

C'est notre premier type de sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$: les sous-groupes qui sont les sous-$\mathbb{Z}$-modules monogènes, engendrés par un élément $m > 0$.
Comme ils sont formés des multiples entiers d'un nombre réel, ils forment un **ensemble discret** dans $\mathbb{R}$: $m\,\mathbb{Z}$ n'a que des **points isolés**.

b) Type 2 : $m \notin G'$.

Dans ce cas, $m = 0$, car, on vient de le voir, $m \neq 0 \Rightarrow G = m\,\mathbb{Z}$ et $m \in G'$, ce qui est faux puisque, par hypothèse, m n'est pas un élément de G'.

Pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver dans l'intervalle $]\,0, \varepsilon\,[$ un élément a de G', sinon ε serait un minorant de G' et, comme tel, devrait être inférieur ou égal à $Inf\,(G') = 0$, ce qui n'est pas.
Pour tout nombre réel x, l'intervalle $]\,x - \varepsilon, x + \varepsilon\,[$ est de longueur $2\,\varepsilon$: il contient donc forcément au moins un multiple de a puisque la distance entre deux multiples successifs de a est $a < \varepsilon$.

En effet, soit N la partie entière du réel $\frac{x}{a}$: c'est un nombre entier positif vérifiant la relation :

$$N \leqslant \frac{x}{a} < N + 1, \text{ pour } x \geqslant 0 \text{ (ou } N \leqslant -\frac{x}{a} < N + 1, \text{ pour } x \leqslant 0).$$

Par symétrie, on peut se limiter à l'étude du cas où x est positif.

$$N\,a \leqslant x < (N + 1)\,a,$$
$$0 \leqslant x - N\,a < a < \varepsilon.$$
$$x - \varepsilon < x - a < N\,a \leqslant x$$
$$x - \varepsilon < N\,a \leqslant x < (N + 1)\,a < N\,a + a \leqslant x + a < x + \varepsilon.$$

L'intervalle $]\,x - \varepsilon, x + \varepsilon\,[$ contient donc les 2 multiples $N\,a$ et $(N + 1)\,a$ de a.
Par symétrie, lorsque x est négatif, l'intervalle $]\,x - \varepsilon, x + \varepsilon\,[$ contient les 2 multiples $-N\,a$ et $-(N + 1)\,a$ de a.

Comme tout multiple entier de a est un élément de G, **il existe, dans l'intervalle $]\,x - \varepsilon, x + \varepsilon\,[$, au moins un élément de G**.

C'est notre deuxième type de sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$: les **sous-groupes denses** dans $\mathbb{R}$.

Notre étude montre que tous les sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$ sont de l'un ou l'autre de ces deux types.

3°/ Sous-groupe engendré par deux nombres réels.

Pour deux réels a et b, $G = a\,\mathbb{Z} + b\,\mathbb{Z}$ est un sous-$\mathbb{Z}$-module de $\mathbb{R}$: c'est donc, en particulier, un sous-groupe additif.
On suppose qu'il n'est pas réduit à 0, donc que a ou b n'est pas nul.
On supposera même que les deux, a et b, sont différents de 0 car si l'un est nul, et l'autre non nul, G

est monogène, donc de type I et le problème est résolu.

Soit G', l'ensemble des éléments strictement positifs de G, et soit m la borne inférieure de G'.

a) Type 1.

Si $m \in G'$, alors, d'après 2°, $G = m\,\mathbb{Z}$ et $m > 0$.
Dans ce cas, $m\,\mathbb{Z} = a\,\mathbb{Z} + b\,\mathbb{Z}$, donc a et b appartiennent à $m\,\mathbb{Z}$: a et b sont des multiples entiers d'un même nombre réel $m > 0$, et leur rapport est un nombre rationnel.
Réciproquement, d'ailleurs, si $\frac{a}{b}$ est un nombre rationnel, on peut écrire ce rapport sous forme de fraction irréductible $\frac{p}{q}$, où p et q sont des entiers étrangers (c'est-à-dire premiers entre eux, de PGCD, plus grand diviseur commun, égal à 1).
$\frac{a}{b} = \frac{p}{q} \Rightarrow \frac{a}{p} = \frac{b}{q}$.
Appelons m la valeur commune des rapports $\frac{a}{p}$ et $\frac{b}{q}$.
Il existe donc un $m \in \mathbb{R}$ vérifiant $a = p\,m$ et $b = q\,m$.
m est différent de 0, sinon $a = b = 0$, cas exclu.
En prenant éventuellement p ou q négatif, on peut toujours supposer m positif.
$a = p\,m$ et $b = q\,m \Rightarrow a \in m\,\mathbb{Z}$ et $b \in m\,\mathbb{Z}$
$a \in m\,\mathbb{Z}$ et $b \in m\,\mathbb{Z} \Rightarrow a\,\mathbb{Z} + b\,\mathbb{Z} \subset m\,\mathbb{Z}$.

Inversement, d'après le théorème de Bézout, il existe des entiers r et s vérifiant $p\,r + q\,s = 1$.
On a alors $p\,r\,m + q\,s\,m = m$, donc $m = a\,r + b\,s$ et m est un élément de $a\,\mathbb{Z} + b\,\mathbb{Z}$, de sorte que $m\,\mathbb{Z}$ est contenu dans $a\,\mathbb{Z} + b\,\mathbb{Z}$.

D'où l'égalité $m\,\mathbb{Z} = a\,\mathbb{Z} + b\,\mathbb{Z}$ et $m > 0$ est la borne inférieure de G'.

Ainsi, la propriété "le rapport de a et b est un nombre rationnel" caractérise les sous-groupes $a\,\mathbb{Z} + b\,\mathbb{Z}$ de type I.
Si a ou b est nul, mais pas les deux, on peut dire que leur rapport est rationnel (et égal à 0) et le sous-groupe engendré est monogène, donc de type I.

b) Type 2.

Si $m \notin G'$, alors, d'après 2°, $G = a\,\mathbb{Z} + b\,\mathbb{Z}$ est un ensemble dense dans $\mathbb{R}$ et $m = Inf\,(G') = 0$.
Puisque la propriété "le rapport de a et b est un nombre rationnel" caractérise les sous-groupes $a\,\mathbb{Z} + b\,\mathbb{Z}$ de type I, la propriété "le rapport de a et b n'est pas un nombre rationnel" caractérise les sous-groupes $a\,\mathbb{Z} + b\,\mathbb{Z}$ de type II.

Cas particulier.

Pour $a \notin \mathbb{Q}$ et $b = 1$, le sous-groupe additif $a\,\mathbb{Z} + \mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
Quel que soit le nombre réel x et quel que soit le nombre réel strictement positif ε, il existe des entiers n et k tels que $n\,a + k \in]\,x - \varepsilon, x + \varepsilon\,[$.

Chapitre 10. Réels, séries numériques.

Enoncés.

Exercice 2. Réels modulo 1.

1°/ Etant donné un nombre réel r, montrer que la suite des multiples $n\,r$, $n \in \mathbb{N}$, de r modulo 1, est finie ou partout dense dans $\mathbb{R} / \mathbb{Z}$: — elle est finie et discrète si et seulement si r est rationnel. — elle est infinie et partout dense si et seulement si r n'est pas rationnel. 2°/ Lorsque le nombre réel r n'est pas rationnel, montrer que tout élément de $\mathbb{R} / \mathbb{Z}$ est point d'accumulation de la suite $(n\,r + \mathbb{Z})_{n \in \mathbb{N}}$ des multiples de r modulo 1. 3°/ Soit $z = e^{i\theta}$, $0 \leqslant \theta < 2\,\pi$, un nombre complexe de module 1. Montrer que la suite $(z^n)_{n \in \mathbb{N}}$ des puissances de z représentées par des points du cercle trigonométrique : — est constante et égale à 1 lorsque $\theta = 0$ ($z = 1$) ; — oscille périodiquement sur le cercle trigonométrique lorsque θ est une fraction rationnelle de $2\,\pi$; — se rapproche d'aussi près qu'on veut de tout point du cercle trigonométrique lorsque θ n'est pas une fraction rationnelle de $2\,\pi$.	

Solution.

1°/ Multiples d'un réel modulo 1.

a) Identification de $\mathbb{R} / \mathbb{Z}$ à un compact.

Pour un nombre réel r, la partie entière de r est l'entier $E\,[r]$ défini par $E\,[r] \leqslant r < E\,[r] + 1$, et la partie fractionnaire de r est le réel positif $F\,[r] = r - E\,[r]$:

$$r = E\,[r] + F\,[r].$$

La partie fractionnaire d'un réel est un réel appartenant à l'intervalle [0, 1 [.
Pour un nombre réel r, $F\,[r]$ ne dépend que de la classe de r modulo 1 : deux réels qui ont la même partie fractionnaire ne diffèrent que d'un entier.
Réciproquement, deux réels qui ne diffèrent que d'un entier, ont la même partie fractionnaire.
L'intervalle [0, 1 [constitue un ensemble de représentants des nombres réels modulo 1.
En tant qu'espace métrique, l'ensemble $\mathbb{R} / \mathbb{Z}$ des entiers modulo 1 est homéomorphe au cercle de longueur 1 muni de la distance définie par la longueur du plus petit arc joignant deux points sur le cercle.
La plus grande distance entre deux points est la longueur du demi-cercle, soit $\frac{1}{2}$. C'est le diamètre de $\mathbb{R} / \mathbb{Z}$.
$\mathbb{R} / \mathbb{Z}$ est un espace métrique borné : il est compact. C'est une façon d'exprimer le **théorème de Weierstrass**.

b) Propriété d'un compact.

Dire qu'un espace métrique est compact, c'est dire, d'une autre façon, que toute suite infinie bornée possède un point d'accumulation, ou valeur d'adhérence, c'est-à-dire un point duquel tout voisinage contient des termes de la suite, d'indices aussi grands qu'on veut.

c) Multiples entiers d'un réel, modulo 1.

Soit r un réel. Il est congru à sa partie fractionnaire, modulo 1, ce qui veut dire que sa classe modulo $\mathbb{Z}$ est représentée par un point du cercle de longueur 1.
De deux choses l'une :

— ou bien la suite des multiples de r modulo 1 est finie : dans ce cas, il existe deux multiples de r qui diffèrent d'un entier et r est rationnel.
Réciproquement, si r est rationnel, il existe une fraction irréductible $\frac{p}{q}$ qui est égale à r, et les multiples de r modulo 1 sont les rationnels $k\frac{p}{q}$, $0 \leqslant k \leqslant q-1$: ils sont en nombre fini.
Quand la suite des multiples modulo 1 est finie, ses points sont isolés, la suite forme un ensemble discret.

— ou bien la suite des multiples de r modulo 1 est infinie et, d'après le critère précédent, r n'est pas rationnel et, réciproquement, si r n'est pas rationnel, la suite de ses multiples modulo 1 est infinie.
L'application $n \mapsto n\,r + \mathbb{Z}$ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R} / \mathbb{Z}$ est alors une injection : la différence de deux multiples différents du réel r n'est pas un entier, sinon r serait rationnel.

2°/ Densité des multiples d'un réel non rationnel.

D'après 1°.b , si r n'est pas rationnel, la suite de ses multiples modulo 1, possède une valeur d'adhérence, point du cercle de longueur 1 dans tout voisinage duquel se trouve une infinité de termes de la suite.
Il en résulte que, pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver deux entiers positifs différents, n_1 aussi grand qu'on veut, et n_2, tels que $(n_1 - n_2)\,r$, modulo 1, soit inférieur à $2\,\varepsilon$.
Les multiples $m\,(n_1 - n_2)\,r$, modulo 1, pour $m \in \mathbb{N}$, découpent le cercle de longueur 1 en intervalles de longueur inférieure à $2\,\varepsilon$.
Tout point du cercle se trouve à une distance inférieure à ε de l'un de ces multiples aussi grand qu'on veut.
Tout point du cercle est donc un point d'accumulation de la suite.
En particulier, la suite $(n\,r + \mathbb{Z})_{n \in \mathbb{N}}$ des multiples de r modulo 1 est partout dense sur le cercle, c'est-à-dire dans $\mathbb{R} / \mathbb{Z}$.

3°/ Puissances de $z = e^{i\theta}$.

a) Cas où $z = 1$.

Pour $z = 1$, ou $\theta = 0$, $1^n = 1$, la suite $(z^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante, donc convergente, et son terme général est $z^n = e^{i\,n\,\theta} = 1$.

b) Cas où θ est une fraction rationnelle de $2\,\pi$.

Pour $\theta = \frac{p}{q} \times 2\,\pi$, $q\,\theta = 2\,p\,\pi$:

$$z^{n+q} = e^{i(n+q)\theta} = e^{in\theta + 2ip\pi} = e^{in\theta}\, e^{2ip\pi} = z^n \times 1^p = z^n$$
$$z^{n+q} = z^n$$

Cette formule montre que la suite tourne périodiquement sur le cercle trigonométrique : la puissance de *z* reprend la même valeur quand *n* augmente de *q*, où *q* est le dénominateur de la fraction rationnelle $\frac{\theta}{2\,\pi}$.

La plus petite période s'obtient en prenant pour *q* le dénominateur d'une fraction irréductible $\frac{p}{q}$.

c) Cas où θ n'est pas une fraction rationnelle de 2 π.

Lorsque θ n'est pas une fraction rationnelle de 2 π, l'ensemble des nombres de la forme $q\,\frac{\theta}{2\,\pi} + p$, $q \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{Z}$, est un ensemble dense dans $\mathbb{R}$, d'après le résultat précédent.

Quel que soit le nombre réel $\psi \in [\,0,\, 2\,\pi\,[$, et quel que soit le nombre réel $\eta > 0$, il existe des entiers $q \geqslant 0$ et *p*, tels que $q\,\theta + 2\,p\,\pi \in]\,\psi - \eta,\, \psi + \eta\,[$, et l'on peut toujours trouver un entier *q*, aussi grand qu'on veut, tel que z^q soit aussi proche qu'on veut d'un point arbitraire $e^{i\psi}$ choisi sur le cercle trigonométrique.

Chapitre 10. Réels, séries numériques.

Enoncés.

Exercice 3. Etude de 8 séries numériques.

Etudier les séries numériques suivantes:

a) $\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{1}{\sum_{k=1}^{k=n} k}\right)$; b) $\sum_{n\geqslant 1}\frac{9}{(3n+1)(3n+4)}$

c) $\sum_{n\geqslant 3}\frac{2n-1}{n(n^2-4)}$ d) $\sum_{n\geqslant 1}\frac{\sin\left(\frac{1}{n(n+1)}\right)}{\cos\left(\frac{1}{n}\right)\cos\left(\frac{1}{n+1}\right)}$

e) $\sum_{n\geqslant 1} Arctan\frac{1}{n^2+n+1}$ f) $\sum_{n\geqslant 2}(-1)^n \ln\frac{n+1}{n-1}$

g) $\sum_{n\geqslant 0} e^{-n}$ h) $\sum_{n\geqslant 1}\frac{n^n}{n!}$

Solution.

1°/ Première série.

HAUT

Soit $u_n = \frac{1}{\sum_{k=1}^{k=n} k}$ et $S_n = \sum_{k=1}^{k=n} u_k$.

$\sum_{k=1}^{k=n} k = \frac{n(n+1)}{2}$, $u_n = \frac{2}{n(n+1)} = 2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$,

$S_n = 2\left(1-\frac{1}{2}\right)+2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\ldots+2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=2\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$

Lorsque n augmente indéfiniment, $\frac{1}{n+1}$ tend vers 0 et S_n tend vers 2.
Donc la série de terme général u_n est convergente et sa somme est 2.

$$\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{1}{\sum_{k=1}^{k=n} k}\right) = 2.$$

HAUT

2°/ Deuxième série.

HAUT

Décomposons $\frac{9}{(3n+1)(3n+4)}$ en éléments simples :

$$u_n = \frac{9}{(3n+1)(3n+4)} = 3\left(\frac{1}{3n+1} - \frac{1}{3n+4}\right)$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{k=n} u_k = 3\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{7}\right) + 3\left(\frac{1}{7} - \frac{1}{10}\right) + \ldots + 3\left(\frac{1}{3n+1} - \frac{1}{3n+4}\right) = 3\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3n+4}\right).$$

Lorsque n augmente indéfiniment, $\frac{1}{3n+4}$ tend vers 0 et S_n tend vers $\frac{3}{4}$.
Donc la série de terme général u_n est convergente et sa somme est $\frac{3}{4}$.

$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{9}{(3n+1)(3n+4)} = \frac{3}{4}.$$

HAUT

3°/ Troisième série.

HAUT

$$\sum_{n\geqslant 3}\frac{2n-1}{n\left(n^2-4\right)}.$$

Décomposons $\frac{2n-1}{n\left(n^2-4\right)}$ en éléments simples :

$$u_n = \frac{2n-1}{n\left(n^2-4\right)} = \left(\frac{3}{8}\times\frac{1}{n-2} - \frac{5}{8}\times\frac{1}{n+2} + \frac{1}{4}\times\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{8}\left(\frac{3}{n-2} + \frac{2}{n} - \frac{5}{n+2}\right)$$

$$u_{4k-1} + u_{4k+1} = \frac{1}{8}\left(\frac{3}{4k-3} + \frac{2}{4k-1} - \frac{5}{4k+1}\right) + \frac{1}{8}\left(\frac{3}{4k-1} + \frac{2}{4k+1} - \frac{5}{4k+3}\right)$$

$$= \frac{1}{8}\left(\frac{3}{4k-3} + \frac{5}{4k-1} - \frac{3}{4k+1} - \frac{5}{4k+3} \right)$$

$$\sum_{k=1}^{k=n} (u_{4k-1} + u_{4k+1}) = \frac{3}{8}\sum_{k=1}^{k=n} \left(\frac{1}{4k-3} - \frac{1}{4k+1} \right) + \frac{5}{8}\sum_{k=1}^{k=n} \left(\frac{1}{4k-1} - \frac{1}{4k+3} \right)$$

$$= \frac{3}{8}\left(1 - \frac{1}{4n+1} \right) + \frac{5}{8}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4n+3} \right) = \frac{1}{6} - \frac{1}{8}\left(\frac{3}{4n+1} + \frac{5}{4n+3} \right)$$

$$u_{4k} + u_{4k+2} = \frac{1}{8}\left(\frac{3}{4k-2} + \frac{2}{4k} - \frac{5}{4k+2} \right) + \frac{1}{8}\left(\frac{3}{4k} + \frac{2}{4k+2} - \frac{5}{4k+4} \right)$$

$$= \frac{1}{8}\left(\frac{3}{4k-2} + \frac{5}{4k} - \frac{3}{4k+2} - \frac{5}{4k+4} \right)$$

$$\sum_{k=1}^{k=n} (u_{4k} + u_{4k+2}) = \frac{3}{8}\sum_{k=1}^{k=n} \left(\frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k+2} \right) + \frac{5}{8}\sum_{k=1}^{k=n} \left(\frac{1}{4k} - \frac{1}{4k+4} \right)$$

$$= \frac{3}{8}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4n+2} \right) + \frac{5}{8}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4n+4} \right) = \frac{11}{32} - \frac{1}{8}\left(\frac{3}{4n+2} + \frac{5}{4n+4} \right)$$

Posons :

$$\Sigma_n = \sum_{k=1}^{k=n} (u_{4k-1} + u_{4k} + u_{4k+1} + u_{4k+2})$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{11}{32} - \frac{1}{8}\left(\frac{3}{4n+1} + \frac{3}{4n+2} + \frac{5}{4n+3} + \frac{5}{4n+4} \right)$$

$$= \frac{19}{96} - \frac{1}{8}\left(\frac{3}{4n+1} + \frac{3}{4n+2} + \frac{5}{4n+3} + \frac{5}{4n+4} \right)$$

Lorsque n augmente indéfiniment, $-\frac{1}{8}\left(\frac{3}{4n+1} + \frac{3}{4n+2} + \frac{5}{4n+3} + \frac{5}{4n+4} \right)$ tend vers 0 et Σ_n tend vers $\frac{19}{96}$.

Posons $S_n = \sum_{k=3}^{k=n} u_k$ et soit m la partie entière de $\frac{n+1}{4}$.

Comme les u_k sont positifs pour $k \geq 3$, S_n est compris entre Σ_m et Σ_{m+1} : $\Sigma_m \leq S_n < \Sigma_{m+1}$.

Lorsque n augmente indéfiniment, m tend vers l'infini, Σ_m tend vers $\frac{19}{96}$, Σ_{m+1} tend vers $\frac{19}{96}$, donc S_n tend vers $\frac{19}{96}$ (théorème des gendarmes).

Donc la série de terme général u_n, $n \geq 3$, est convergente et sa somme est $\frac{19}{96}$.

$$\boxed{\sum_{n \geqslant 3} \frac{2n-1}{n\left(n^2-4\right)} = \frac{19}{96}.}$$

HAUT

4°/ Quatrième série.

HAUT

$$\sum_{n \geqslant 1} \frac{\sin\left(\frac{1}{n(n+1)}\right)}{\cos\left(\frac{1}{n}\right)\cos\left(\frac{1}{n+1}\right)}.$$

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$\sin\left(\frac{1}{n(n+1)}\right) = \sin\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \sin\frac{1}{n}\cos\frac{1}{n+1} - \sin\frac{1}{n+1}\cos\frac{1}{n}.$$

$$u_n = \frac{\sin\left(\frac{1}{n(n+1)}\right)}{\cos\left(\frac{1}{n}\right)\cos\left(\frac{1}{n+1}\right)} = \tan\frac{1}{n} - \tan\frac{1}{n+1}.$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{k=n} u_k = \left(\tan 1 - \tan\frac{1}{2}\right) + \left(\tan\frac{1}{2} - \tan\frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\tan\frac{1}{n} - \tan\frac{1}{n+1}\right) = \tan 1 - \tan\frac{1}{n+1}$$

Lorsque n augmente indéfiniment, $\frac{1}{n+1}$ tend vers 0.

Puisque la fonction tangente est continue en 0, $\tan\frac{1}{n+1}$ tend vers $\tan 0 = 0$, et S_n tend vers $\tan 1$.

Donc la série de terme général u_n est convergente et sa somme est $\tan 1$.

$$\boxed{\sum_{n \geqslant 1} \frac{\sin\left(\frac{1}{n(n+1)}\right)}{\cos\left(\frac{1}{n}\right)\cos\left(\frac{1}{n+1}\right)} = \tan 1.}$$

HAUT

5°/ Cinquième série.

HAUT

$$\sum_{n \geqslant 1} \operatorname{Arctan}\frac{1}{n^2+n+1}.$$

De la formule $\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$, nous déduisons, avec $a = \operatorname{Arctan} x$ et $b = \operatorname{Arctan} y$, la formule :

$$\operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} y = \operatorname{Arctan}\frac{x+y}{1-xy}$$

Pour $x = n+1$ et $y = -n$, cette formule devient :

$$\operatorname{Arctan}(n+1) - \operatorname{Arctan} n = \operatorname{Arctan}\frac{1}{n^2+n+1}.$$

$S_n = \sum_{k=1}^{k=n} u_k = (Arctan\ 2 - Arctan\ 1) + (Arctan\ 3 - Arctan\ 2) + ... + (Arctan\ (n+1) - Arctan\ n)$

$= Arctan\ (n+1) - Arctan\ 1 = Arctan\ (n+1) - \frac{\pi}{4}.$

Lorsque n augmente indéfiniment, $Arctan\ (n+1)$ tend vers $\frac{\pi}{2}$ et S_n tend vers $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$.

$$\sum_{n \geq 1} Arctan \frac{1}{n^2 + n + 1} = \frac{\pi}{4}.$$

HAUT

6°/ Sixième série.

HAUT

$$\sum_{n \geq 2} (-1)^n \ln \frac{n+1}{n-1}.$$

$u_n = (-1)^n \ln \frac{n+1}{n-1} = (-1)^n (\ln (n+1) - \ln (n-1))$

Soit $P_n = \sum_{k=1}^{k=n} u_{2k} = \ln (2n+1)$

Soit $I_n = \sum_{k=1}^{k=n} u_{2k+1} = -\ln (2n+2) + \ln 2$

Soit m la partie entière de $\frac{n}{2}$.

Lorsque n est pair ($n = 2m$), $S_n = \sum_{k=1}^{k=n} u_k$ est égal à $P_m + I_{m-1}$:

$S_n = \ln (2m+1) - \ln (2m) + \ln 2 = \ln 2 + \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)$

Lorsque n est impair ($n = 2m+1$), $S_n = \sum_{k=1}^{k=n} u_k$ est égal à $P_m + I_m$:

$S_n = \ln (2m+1) - \ln (2m+2) + \ln 2 = \ln 2 + \ln \left(1 - \frac{1}{n}\right)$

Que n soit pair ou impair, on a toujours :

$$\ln 2 + \ln \left(1 - \frac{1}{n}\right) \leq S_n \leq \ln 2 + \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

Lorsque n augmente indéfiniment, $\frac{1}{n}$ tend vers 0, $1 + \frac{1}{n}$ tend vers 1, $1 - \frac{1}{n}$ tend vers 1.

Comme la fonction logarithme neperien est continue en 1, $\ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)$ tend vers $\ln 1 = 0$, $\ln \left(1 - \frac{1}{n}\right)$

tend vers $ln\ 1 = 0$.
$ln\ 2 + ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)$ tend vers $ln\ 2$, $ln\ 2 + ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ tend vers $ln\ 2$, donc S_n tend vers $ln\ 2$ (théorème des gendarmes).
Donc la série de terme général u_n est convergente et sa somme est $ln\ 2$.

$$\sum_{n \geqslant 2} (-1)^n\ ln\ \frac{n+1}{n-1} = ln\ 2.$$

HAUT

7°/ Septième série.

HAUT

$$\sum_{n \geqslant 0} e^{-n}$$

C'est une série géométrique de premier terme 1 et de raison $e^{-1} < 1$.
Elle est donc convergente et sa somme est $\frac{1}{1-e^{-1}} = \frac{e}{e-1}$.

$$\sum_{n \geqslant 0} e^{-n} = \frac{e}{e-1}.$$

HAUT

8°/ Huitième série.

HAUT

$$\sum_{n \geqslant 1} \frac{n^n}{n!}$$

$u_n = \frac{n^n}{n!} = \frac{n}{n} \times \frac{n}{n-1} \times \ldots \times \frac{n}{2} \times \frac{n}{1}$.
Tous les termes du produit sont supérieurs ou égaux à 1 : le produit u_n est donc supérieur ou égal à 1 et la série de terme général $u_n = \frac{n^n}{n!}$ est divergente parce que ce terme général ne tend pas vers 0.

La série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{n^n}{n!}$ est divergente.

HAUT

Chapitre 10. Réels, séries numériques.

Enoncés.

Exercice 4. Série $u_n = a\,v_{n+2} + b\,v_{n+1} + c\,v_n$.

Soient a, b, c, trois nombres réels tels que $a + b + c = 0$, et (v_n) une suite de nombres réels convergeant vers 0. On considère la suite (u_n) définie, pour $n \geq 1$, par $u_n = a\,v_{n+2} + b\,v_{n+1} + c\,v_n$.
Démontrer que la série de terme général u_n converge et calculer sa somme.

Applications : étudier les deux séries suivantes.

a) $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^3 + 3n^2 + 2n}$ b) $\sum_{n \geqslant 1} ln\left(1 - \frac{1}{(n+2)^2}\right)$

Solution.

1°/ Série u_n.

Posons $S_n = \sum_{k=1}^{k=n} u_k = \sum_{k=1}^{k=n} (a\,v_{n+2} + b\,v_{n+1} + c\,v_n)$.

Pour $n \geq 3$:

$S_n = (a\,v_3 + b\,v_2 + c\,v_1) + (a\,v_4 + b\,v_3 + c\,v_2) + (a\,v_5 + b\,v_4 + c\,v_3) + ... + (a\,v_{n+2} + b\,v_{n+1} + c\,v_n)$

$= (b + c)\,v_2 + c\,v_1 + (a + b + c) \sum_{k=3}^{k=n} v_k + (b + c)\,v_{n+1} + a\,v_{n+2}$

$= (b + c)\,v_2 + c\,v_1 + (b + c)\,v_{n+1} + a\,v_{n+2}$.

Lorsque n augmente indéfiniment, v_{n+1} tend vers 0, v_{n+2} tend vers 0, donc S_n tend vers $(b + c)\,v_2 + c\,v_1 = c\,v_1 - a\,v_2$. Donc la série de terme général u_n converge et sa somme est $c\,v_1 - a\,v_2$.

$$\sum_{n \geqslant 1} u_n = c\,v_1 - a\,v_2.$$

2°/ Applications.

a) $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^3 + 3n^2 + 2n}$.

$$n^3 + 3n^2 + 2n = n(n^2 + 3n + 2) = n(n+1)(n+2)$$

$$\frac{1}{n^3 + 3n^2 + 2n} = \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{n} \right)$$

On est dans le cas précédent avec $a = \frac{1}{2}$, $b = -1$, $c = \frac{1}{2}$, $v_n = \frac{1}{n}$.

$c\,v_1 - a\,v_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

Conclusion :

$$\boxed{\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^3 + 3n^2 + 2n} = \frac{1}{4}.}$$

b) $\sum_{n \geqslant 1} ln\left(1 - \frac{1}{(n+2)^2}\right)$.

$$1 - \frac{1}{(n+2)^2} = \frac{(n+2)^2 - 1}{(n+2)^2} = \frac{(n+1)(n+3)}{(n+2)^2}$$

$$ln\left(1 - \frac{1}{(n+2)^2}\right) = ln(n+3) - 2\,ln(n+2) + ln(n+1).$$

On est dans le cas précédent avec $a = 1$, $b = -2$, $c = 1$, $v_n = ln(n+1)$.

$c\,v_1 - a\,v_2 = ln\,2 - ln\,3 = ln\,\frac{2}{3}$.

Conclusion :

$$\boxed{\sum_{n \geqslant 1} ln\left(1 - \frac{1}{(n+2)^2}\right) = ln\,\frac{2}{3}.}$$

Chapitre 10. Réels, séries numériques.

Enoncés.

Exercice 5. Séries $1/n!$, $n^2/n!$, $n^3/n!$, irrationnalité de e.

a) En appliquant la formule de Taylor-Lagrange à la fonction exponentielle entre 0 et 1, démontrer que l'on a :

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}, \text{ où } e = exp\,(1).$$

b) Etudier les séries numériques :

$$\sum_{n \geqslant 0} \frac{n^2}{n!} \text{ et } \sum_{n \geqslant 0} \frac{n^3}{n!}.$$

c) Soit $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!}$ (pour tout $n \in \mathbb{N}$). Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $R_n < \frac{1}{n!\,n}$. En déduire que e est irrationnel.

Solution.

1°/ Série $1/k!$.

La fonction exponentielle $x \mapsto exp\,(x)$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, est la **fonction réciproque** de la fonction logarithme $x \mapsto ln\,x = \int_1^x \frac{du}{u}$ $(x > 0)$.

C'est une fonction de classe C^∞.
Elle est égale à sa dérivée d'ordre n, quel que soit $n \in \mathbb{N}$.
En particulier, elle est continue sur tout intervalle ouvert I contenant strictement [0, 1] et dérivable jusqu'à l'ordre $n + 1$ sur I, quel que soit $n \in \mathbb{N}$, de sorte que l'on peut lui appliquer la formule de Taylor-Lagrange entre 0 et 1 : il existe un $c \in]\,0, 1\,[$ tel que

$$exp\,(1) = \sum_{k=0}^{k=n} \left(\frac{d^k}{dx^k}(exp\,(x)) \right)_{x=0} \times \frac{(1-0)^k}{k!} + \frac{(1-0)^{n+1}}{(n+1)!} \left(\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\,(exp\,(x)) \right)_{x=c}$$

$$= \sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{k!} + \frac{e^c}{(n+1)!}$$

$$e = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{k!} + \frac{e^c}{(n+1)!}$$

Si l'on considère la série de terme général $u_n = \frac{1}{n!}$, $n \geq 0$, on obtient, en posant $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k$:

$| S_n - e | = \frac{e^c}{(n+1)!}$, avec un $c \in]\,0, 1\,[$.

Comme la fonction exponentielle est une fonction croissante, e^c est inférieur à $e^1 = e$ et $| S_n - e | \leq \frac{e}{(n+1)!}$.

Lorsque n augmente indéfiniment, $\frac{e}{(n+1)!}$ tend vers 0, donc S_n tend vers e et la série de terme général u_n est convergente et sa somme est e.

$$\boxed{\sum_{n \geqslant 0} \frac{1}{n!} = e.}$$

2°/ Etudes de séries numériques dérivées de l'exponentielle.

a) Série $\sum_{n \geqslant 0} \frac{n}{n!}$.

0 ! = 1, donc $\frac{0}{0!} = 0$.

Si l'on pose $u_n = \frac{n}{n!}$, on a donc $u_0 = 0$.

Pour $n > 0$, $u_n = \frac{1}{(n-1)!}$ et $\sum_{n \geqslant 0} \frac{n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e$.

$$\boxed{\sum_{n \geqslant 0} \frac{n}{n!} = e.}$$

b) Série $\sum_{n \geqslant 0} \frac{n^2}{n!}$.

Si l'on pose $u_n = \frac{n^2}{n!}$, on a $u_0 = 0$, $u_1 = 1$.

$\frac{n^2}{n!} = \frac{n(n-1)}{n!} + \frac{n}{n!}$

La série de terme général $\frac{n(n-1)}{n!}$ a ses deux premiers termes nuls et il reste : $\sum_{n \geqslant 0} \frac{n(n-1)}{n!} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-2)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e$.

Au total :

$\sum_{n \geqslant 0} \frac{n^2}{n!} = \sum_{n \geqslant 0} \left(\frac{n(n-1)}{n!} + \frac{n}{n!} \right) = \sum_{n \geqslant 0} \frac{n(n-1)}{n!} + \sum_{n \geqslant 0} \frac{n}{n!}$ (parce que les deux séries à termes positifs sont convergentes),

$= e + e = 2\,e$.

$$\boxed{\sum_{n \geqslant 0} \frac{n^2}{n!} = 2\,e.}$$

c) Série $\sum_{n \geqslant 0} \frac{n^3}{n!}$.

$n^3 = n\,(n-1)\,(n-2) + n^2 - 2\,n + 2\,n^2 - 2\,n = n\,(n-1)\,(n-2) + 3\,n^2 - 4\,n$.

$\sum_{n \geqslant 0} \frac{n^3}{n!} = \sum_{n \geqslant 0} \frac{n(n-1)(n-2)}{n!} + 3 \sum_{n \geqslant 0} \frac{n^2}{n!} - 4 \sum_{n \geqslant 0} \frac{n}{n!} = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(n-3)!} + 3 \times 2\,e - 4\,e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} + 2\,e =$ $3\,e$.

$$\boxed{\sum_{n \geqslant 0} \frac{n^3}{n!} = 3\,e.}$$

3°/ Irrationalité de *e*.

$R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \ldots = \frac{1}{(n+1)!} \left(1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \ldots \right)$

$< \frac{1}{(n+1)!} \left(1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \ldots \right) = \frac{1}{(n+1)!} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{n+1}} = \frac{1}{n!\,n}$.

$$\boxed{R_n < \frac{1}{n!\,n}.}$$

$e = \sum_{n \geqslant 0} \frac{1}{n!}$ est un nombre réel supérieur à $2 = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!}$.

Si e était rationnel, il existerait un entier naturel $q > 0$, et un entier naturel $p > 0$, tel que $p = q\,e$.
$q!\,e = p\,(q-1)!$ serait un entier > 0.
$q!\,S_q$ serait aussi un entier > 0.
$q!\,(e - S_q) = q!\,R_q$ serait aussi un entier > 0.
Or $0 < q!\,(e - S_q) = q!\,R_q < \frac{1}{q}$ et il n'existe pas d'entier > 0 strictement compris entre 0 et $\frac{1}{q}$.
Donc ***e* ne peut pas être rationnel**.

(Voir aussi Chapitre 5, Exercice 5).

Chapitre 10. Réels, séries numériques.

Enoncés.

Exercice 6. Série $f(n)$ et intégrale de f.

1°/ Soit $f :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, continue, strictement positive et strictement décroissante. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$u_n = f(n)$ et $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$.

Démontrer, pour tout $n \geq 2$, les inégalités suivantes :

$$\int_1^{n+1} f(x)\,dx < S_n < u_1 + \int_1^n f(x)\,dx.$$

Montrer l'existence de $C \in \mathbb{R}$ vérifiant, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$S_n = \int_1^n f(x)\,dx + C + \varepsilon(n), \text{ avec } \lim_{n\to+\infty} \varepsilon(n) = 0.$$

Dans le cas où $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ diverge, démontrer que l'on a :

$$S_n \sim \int_1^n f(x)\,dx.$$

2°/ Démontrer que, pour tout $n \geq 2$, on a :

$$\ln(n+1) < 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} < 1 + \ln(n)$$

et que l'on a $1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} \sim \ln(n)$.

3°/ Calculer $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ en appliquant le résultat du 1° et déterminer $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $n \geq n_0$, on ait :

$$\left| \ln(2) - \sum_{k=1}^{k=n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right| < 10^{-2}.$$

4°/ Etudier la suite $x_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}$.

Solution.

1°/ Série $u_n = f(n)$.

a) Inégalités.

On suppose que $f :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, est continue, strictement positive et strictement décroissante.
On a alors $f(k+1) < f(x) < f(k)$, pour tout x strictement compris entre k et $k+1$.

$$\int_k^{k+1} f(k+1)\,dx < \int_k^{k+1} f(x)\,dx < \int_k^{k+1} f(k)\,dx.$$

$$f(k+1) < \int_k^{k+1} f(x)\,dx < f(k).$$

$$u_{k+1} < \int_k^{k+1} f(x)\,dx < u_k.$$

Faisons la somme de ces relations pour k variant de 1 à n :

$$S_{n+1} - u_1 = \sum_{k=1}^{k=n} u_{k+1} < \sum_{k=1}^{k=n} \int_k^{k+1} f(x)\,dx < \sum_{k=1}^{k=n} u_k = S_n,\ n \geq 1.$$

$$S_{n+1} - u_1 < \int_1^{n+1} f(x)\,dx < S_n.$$

La relation $S_{n+1} - u_1 < \int_1^{n+1} f(x)\,dx$ s'écrit aussi, en remplaçant n par $n-1$:

$$S_n < u_1 + \int_1^n f(x)\,dx,\ n \geq 2.$$

D'où :

$$\int_1^{n+1} f(x)\,dx < S_n < u_1 + \int_1^n f(x)\,dx,\ n \geq 2.$$

b) Existence de *C*.

La relation :

$$\int_1^{n+1} f(x)\,dx < S_n < u_1 + \int_1^n f(x)\,dx,\ n \geq 2.$$

s'écrit aussi :

$$\int_1^{n+1} f(x)\,dx - \int_1^n f(x)\,dx < S_n - \int_1^n f(x)\,dx < u_1,\ n \geq 2.$$

$$\int_n^{n+1} f(x)\,dx < S_n - \int_1^n f(x)\,dx < u_1,\ n \geq 2.$$

D'après le théorème de la moyenne, il existe un $c(n) \in]n, n+1[$ tel que $\int_n^{n+1} f(x)\,dx = f(c(n))$.

Lorsque n tend vers l'infini, $f(c(n))$ décroît strictement et tend vers $\lambda = \lim_{x \to +\infty} f(x)$, par valeurs

supérieures.
De sorte que l'on peut écrire $\int_n^{n+1} f(x)\,dx = \lambda + \delta(n)$ avec un $\delta(n) > 0$ qui tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini.

$$\lambda < \lambda + \delta(n) < S_n - \int_1^n f(x)\,dx < u_1,\ n \geq 2.$$

Or $\left(S_{n+1} - \int_1^{n+1} f(x)\,dx\right) - \left(S_n - \int_1^n f(x)\,dx\right) = (S_{n+1} - S_n) - \left(\int_1^{n+1} f(x)\,dx - \int_1^n f(x)\,dx\right)$

$= u_{n+1} - \int_n^{n+1} f(x)\,dx = \int_n^{n+1} (f(n+1) - f(x))\,dx < 0$

La suite de terme général $S_n - \int_1^n f(x)\,dx$ est donc **strictement décroissante** et on sait qu'elle est minorée par $\lambda = \lim_{x \to +\infty} f(x) \geq 0$.
C'est donc une suite convergente et sa limite est un nombre réel $C \geq \lambda \geq 0$.
Et l'on peut écrire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$S_n = \int_1^n f(x)\,dx + C + \varepsilon(n), \text{ avec } \lim_{n \to +\infty} \varepsilon(n) = 0.$$

c) Cas où l'intégrale de *f* diverge.

L'intégrale $\int_1^n f(x)\,dx$ est une fonction strictement croissante de n puisque f est une fonction strictement positive.
Si l'intégrale $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ diverge, alors l'intégrale $\int_1^n f(x)\,dx$ tend vers $+\infty$ avec n.
Dans ce cas, on peut écrire :

$$S_n = \int_1^n f(x)\,dx \left(1 + \frac{C + \varepsilon(n)}{\int_1^n f(x)\,dx}\right).$$

Lorsque n tend vers l'infini, $C + \varepsilon(n)$ tend vers C, $\int_1^n f(x)\,dx$ tend vers l'infini, donc $\frac{C + \varepsilon(n)}{\int_1^n f(x)\,dx}$ tend vers 0,
de sorte que S_n est équivalent à $\int_1^n f(x)\,dx$, et la suite de terme général S_n est divergente.

Réciproquement, si l'intégrale $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ converge, alors l'intégrale $\int_1^n f(x)\,dx$ a une limite finie lorsque n tend vers l'infini,

de sorte que $S_n = \int_1^n f(x)\,dx + C + \varepsilon(n)$, avec $\lim_{n\to+\infty} \varepsilon(n) = 0$, a une limite finie lorsque n tend vers l'infini.

Autrement dit, dans les conditions de l'énoncé ($f :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, continue, strictement positive et strictement décroissante) :

La série de terme général

$$u_n = f(n)$$

est convergente en même temps que l'intégrale $\int_1^\infty f(x)\,dx$.

2°/ Application à la fonction 1/*x*.

La fonction numérique $f :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, définie par $f(x) = \frac{1}{x}$, est continue, strictement positive et strictement décroissante.
La relation :

$$\int_1^{n+1} f(x)\,dx < S_n < u_1 + \int_1^n f(x)\,dx,\ n \geq 2.$$

s'écrit :

$$\int_1^{n+1} \frac{dx}{x} < 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} < 1 + \int_1^n \frac{dx}{x},\ n \geq 2.$$

$$\ln(n+1) < 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} < 1 + \ln(n),\ n \geq 2.$$

De plus, comme l'intégrale $\int_1^\infty f(x)\,dx$ diverge, 1° (b) montre que $1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$ est équivalent à $\ln(n)$ lorsque n augmente indéfiniment, et que la suite de terme général $1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln(n)$ a une limite finie C (**constante d'Euler-Mascheroni**).

$$1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} = \ln(n) + C + \varepsilon(n), \text{ avec } \lim_{n\to+\infty} \varepsilon(n) = 0.$$

Remarque.

La constante d'Euler-Mascheroni C peut se calculer sous forme d'intégrale :

$$C = -\int_0^\infty e^{-t} \ln t\,dt.$$

3°/ Série harmonique alternée.

a) Convergence.

La fonction numérique $f :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, définie par $f(x) = \frac{1}{x}$, est continue, strictement positive et strictement décroissante.
D'après le résultat de la question 2° :

$$1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} = ln\,(n) + C + \varepsilon\,(n), \text{ avec } \lim_{n \to +\infty} \varepsilon\,(n) = 0.$$

$$1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + ... + \frac{1}{2n} = ln\,(2n) + C + \varepsilon\,(2n), \text{ avec } \lim_{n \to +\infty} \varepsilon\,(2n) = 0.$$

$$1 + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}\right) = ln\,(2n) + C + \varepsilon\,(2n), \text{ avec } \lim_{n \to +\infty} \varepsilon\,(2n) = 0.$$

$$1 + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{2n-1} = ln\,(2n) + C + \varepsilon\,(2n) - \frac{1}{2}\,(ln\,(n) + C + \varepsilon\,(n))$$

$$= ln\,2 + \frac{1}{2}\,ln\,n + \frac{C}{2} + \varepsilon\,(2n) - \frac{1}{2}\,\varepsilon\,(n)$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}\,(ln\,(n) + C + \varepsilon\,(n)) = \frac{1}{2}\,ln\,n + \frac{C}{2} + \frac{1}{2}\,\varepsilon\,(n)$$

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - ... + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = ln\,2 + \varepsilon\,(2n) - \varepsilon\,(n)$$

Lorsque n tend vers l'infini,

$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - ... + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = ln\,2 + \varepsilon\,(2n) - \varepsilon\,(n)$ est équivalent à $ln\,2$,
$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - ... - \frac{1}{2n-2} + \frac{1}{2n-1} = ln\,2 + \varepsilon\,(2n) - \varepsilon\,(n) + \frac{1}{2n}$ est équivalent à $ln\,2 + \frac{1}{2n} \sim ln\,2$.

Donc la série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ est convergente et sa somme est $ln\,2$.

$$\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = ln\,2.}$$

b) Majoration du reste.

Soit n un entier > 0, et soit $S_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$.

Nous avons :

$$|\,ln\,2 - S_n\,| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right| < \frac{1}{n+1}$$

Pour être assuré d'avoir :

$$\left| \ln 2 - \sum_{k=1}^{k=n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right| < 10^{-2},$$

il suffit donc de prendre un n vérifiant

$$\frac{1}{n+1} < 10^{-2}$$
$$n + 1 > 100$$
$$n > 99.$$

Pour tout $n \geq 100$, on a :
$$\left| \ln (2) - \sum_{k=1}^{k=n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right| < 10^{-2}.$$

4°/ Suite des inverses des racines carrées.

Si l'on prend, dans la question 1°, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, on voit que l'intégrale $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ diverge et la suite de terme général

$$S_n - \int_1^n f(x)\,dx = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n} + 2.$$

est **strictement décroissante** minorée par $\lambda = \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

C'est donc une suite convergente et sa limite est un nombre réel $C \geq 0$.
Il en résulte que la suite de terme général :

$$x_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n} = S_n - 2$$

est une suite convergente strictement décroissante et minorée par – 2 : sa limite est donc un nombre réel supérieur ou égal à – 2.

Comme le premier terme de la suite est – 1, la limite λ de la suite vérifie : $-2 \leq \lambda < -1$.
Pour $n = 10^6$, $x_n = -1{,}45980064$ (MAPLE).

Chapitre 10. Réels, séries numériques.

Enoncés.

Exercice 7. Série $1/(n(ln\ n)^2)$.

1°/ Expliciter une primitive de $f : x \mapsto \frac{1}{x(\ln x)^2}$ sur] 1, + ∞ [. 2°/ Soit $a > 1$. Démontrer que l'intégrale généralisée $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ converge. 3°/ On considère la série numérique $\sum_{n \geqslant 2} u_n$ avec $u_n = f(n)$. Donner un majorant de $S_n = u_2 + ... + u_n$ indépendant de n; En déduire que $\sum_{n \geqslant 2} u_n$ est convergente. 4°/ On note S la somme $\sum_{n \geqslant 2} u_n$ et $R_n = S - S_n$ pour $n \geq 2$. Donner un encadrement de R_n et démontrer que pour que S_n approche S de moins de 10^{-2}, il faut que $n \geq 10^{43}$.	

Solution.

1°/ Primitive.

La dérivée de $\frac{1}{\ln x}$ est $-\frac{1}{x(\ln x)^2}$.

La fonction numérique f définie sur] 1, + ∞ [par $f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^2}$, admet donc pour primitive :

$$\boxed{F(x) = -\frac{1}{\ln x}.}$$

2°/ Convergence de l'intégrale.

Soit a un nombre réel > 1 et A un nombre réel > a.

$$\int_a^A f(x)\,dx = F(A) - F(a) = \frac{1}{\ln a} - \frac{1}{\ln A}.$$

Lorsque A tend vers l'infini, $\ln A$ tend vers l'infini et $\frac{1}{\ln A}$ tend vers 0.

Donc l'intégrale $\int_a^A f(x)\,dx$ a une limite finie $\frac{1}{\ln a}$.

Ceci montre que l'intégrale généralisée $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ converge.

$$\boxed{\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \frac{1}{\ln a}.}$$

3°/ Série numérique $f(n)$.

a) Majorant de S_n.

La fonction numérique $x\,(\ln x)^2$, produit de fonctions numériques continues, strictement croissantes et strictement positives, est continue, strictement croissante et strictement positive, sur] 1, + ∞ [.

Donc la fonction numérique f définie sur] 1, + ∞ [par $f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^2}$ est continue, strictement décroissante et strictement positive sur] 1, + ∞ [.

Il en résulte que, pour tout entier $k \geq 2$, on peut écrire :

$$f(k+1) < f(x) < f(k), \text{ pour tout } x \in]\,k, k+1\,[,$$

$$f(k+1) = \int_k^{k+1} f(k+1)\,dx < \int_k^{k+1} f(x)\,dx < \int_k^{k+1} f(k)\,dx = f(k).$$

$$\sum_{k=2}^{k=n} f(k+1) < \sum_{k=2}^{k=n} \int_k^{k+1} f(x)\,dx < \sum_{k=2}^{k=n} f(k)$$

$$\sum_{k=2}^{k=n} f(k) - f(2) + f(n+1) < \int_2^{n+1} f(x)\,dx < \sum_{k=2}^{k=n} f(k)$$

$$\sum_{k=2}^{k=n} f(k) - f(2) + f(n+1) < \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln(n+1)} < \sum_{k=2}^{k=n} f(k)$$

De ces inégalités, résulte l'inégalité :

$$\sum_{k=2}^{k=n} f(k) < f(2) - f(n+1) + \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln(n+1)} = \frac{1}{2(\ln 2)^2} + \frac{1}{\ln 2} - \left(\frac{1}{(n+1)(\ln(n+1))^2} + \frac{1}{\ln(n+1)} \right)$$

Et comme le terme $\frac{1}{(n+1)(\ln(n+1))^2} + \frac{1}{\ln(n+1)}$ est positif,

$\frac{1}{2(ln\,2)^2} + \frac{1}{ln\,2} - \left(\frac{1}{(n+1)(ln(n+1))^2} + \frac{1}{ln(n+1)} \right)$ est plus petit que $\frac{1}{2(ln\,2)^2} + \frac{1}{ln\,2}$:

$$S_n = \sum_{k=2}^{k=n} f(k) < \frac{1}{2(ln\,2)^2} + \frac{1}{ln\,2}$$

b) Convergence de la série numérique *f* (*n*).

f est une fonction strictement positive sur] 1, + ∞ [,
donc $S_{n+1} - S_n = u_{n+1} = f(n+1)$ est strictement positif.
La suite de terme général S_n est donc strictement croissante.

Comme elle est majorée par $\frac{1}{2(ln\,2)^2} + \frac{1}{ln\,2}$, elle est convergente.
Il en résulte, par définition, que :

La série numérique de terme général u_n est convergente, et sa somme *S* est inférieure à $\frac{1}{2(ln\,2)^2} + \frac{1}{ln\,2}$.

4°/ Reste d'ordre *n*.

$R_n = S - S_n$ est toujours positif puisque la suite de terme général S_n est croissante et a pour limite *S*.

L'inégalité :

$$f(k+1) < \int_k^{k+1} f(x)\,dx < f(k)$$

entraîne, par addition, d'une part :

$$0 < R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} f(k) < \sum_{k=n+1}^{\infty} \int_{k-1}^{k} f(x)\,dx = \int_n^{+\infty} f(x)\,dx = \frac{1}{ln(n)}$$

et, d'autre part :

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \int_k^{k+1} f(x)\,dx < R_n$$

$$\int_{n+1}^{+\infty} f(x)\,dx < R_n$$

Finalement, en rassemblant les deux inégalités :

$$\boxed{\frac{1}{\ln(n+1)} < R_n < \frac{1}{\ln(n)}.}$$

Lorsque n est grand,

$\ln(n+1) = \ln n + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \sim \ln n \left(1 + \frac{1}{n \ln n}\right)$.

$\frac{1}{\ln(n+1)} \sim \frac{1}{\ln(n)}\left(1 - \frac{1}{n \ln n}\right)$.

Or $\frac{1}{n \ln n}$ est tout petit, donc R_n, compris entre $\frac{1}{\ln(n+1)}$ et $\frac{1}{\ln(n)}$ est très voisin de $\frac{1}{\ln(n)}$.

Pour avoir $R_n < 10^{-2}$, il faut prendre :

$\frac{1}{\ln(n+1)} < 10^{-2}$,

$\ln(n+1) > 100$

soit $n + 1 > e^{100} \sim 2{,}688 \times 10^{43}$.

Il faut donc prendre, à coup sûr, un $n > 10^{43}$.
Et encore, ça ne suffit pas tout à fait, puisqu'il faut prendre, en toute rigueur,

$$\boxed{n > e^{100} - 1.}$$

La différence est minime : pour $n = 10^{43}$, on obtient $\frac{1}{\ln(n)} = 1{,}009987 \times 10^{-2} \sim \frac{1}{\ln(n+1)}$.

Chapitre 10. Réels, séries numériques.

Enoncés.

Exercice 8. Série (-*a*)^*n*/*n*.

Soit $a \in [\,0, 1\,]$. En appliquant la formule de Taylor-Lagrange à $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = ln\,(1 + t\,a)$, démontrer que $ln\,(1 + a) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{a^n}{n}$. Retrouver ainsi les résultats de l'exercice 6.3°.	

Solution.

1°/ Taylor-Lagrange.

La fonction numérique $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = ln\,(1 + a\,x)$, où a est un nombre réel compris entre 0 et 1, est continue et indéfiniment dérivable sur [0, 1].
On peut donc lui appliquer la formule de Taylor-Lagrange entre 0 et 1 :
pour tout ordre de dérivation $n \in \mathbb{N}$, il existe un $c \in]0, 1[$ tel que :

$$f(1) = \sum_{k=0}^{k=n} \left[\frac{d^k f}{dx^k} \right]_{x=0} \frac{(1-0)^k}{k!} + \frac{1}{(n+1)!} \left[\frac{d^{n+1} f}{dx^{n+1}} \right]_{x=c}$$

Calculons la dérivée d'ordre k : $\frac{d^k f}{dx^k}$.

Pour $k = 0$: $\frac{d^k f}{dx^k}(x) = f(x) = ln\,(1 + a\,x)$.
Pour $k = 1$: $\frac{d^k f}{dx^k}(x) = f'(x) = \frac{a}{1+ax}$.

Hypothèse de récurrence : $\frac{d^k f}{dx^k}(x) = (-1)^{k-1}\,(k-1)\,! \frac{a^k}{(1+ax)^k}$ pour un $k \geq 1$.

Dérivons :

$$\frac{d^{k+1} f}{dx^{k+1}}(x) = \frac{d}{dx}\left[\frac{d^k f}{dx^k}(x) \right] = \frac{d}{dx}\left[(-1)^{k-1}\,(k-1)\,! \frac{a^k}{(1+ax)^k} \right]$$

$$= (-1)^{k-1}\,(k-1)\,!\, a^k \times (-k) \times \frac{a}{(1+ax)^{k+1}} = (-1)^k\, k\,! \frac{a^{k+1}}{(1+ax)^{k+1}}.$$

La formule de l'hypothèse de récurrence est vraie pour $k + 1$, dès qu'elle est vraie pour k.
Or cette formule est vraie pour $k = 1$, donc, d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout $k \in \mathbb{N}$ *.

$f(1) = ln(1 + a)$
$f(0) = ln\ 1 = 0$.

La formule de Taylor-Lagrange devient :

$$ln(1 + a) = \sum_{k=1}^{k=n} (-1)^{k-1} (k-1)! \frac{a^k}{k!} + (-1)^n n! \times \frac{1}{(n+1)!} \times \frac{a^{n+1}}{(1+ac)^{n+1}}$$

$$\boxed{ln(1 + a) = \sum_{k=1}^{k=n} (-1)^{k-1} \frac{a^k}{k} + \frac{(-1)^n}{n+1} \frac{a^{n+1}}{(1+ac)^{n+1}}}$$

2°/ Série numérique.

Considérons alors la série numérique de terme général $u_n = (-1)^{n-1} \frac{a^n}{n}$, $n \geq 1$.

Posons $S_n = \sum_{k=1}^{k=n} u_k$.

La formule de Taylor-Lagrange indique, pour tout $n \in \mathbb{N}$ *, l'existence d'un $c \in]0, 1[$ tel que :

$$| ln(1 + a) - S_n | = \frac{1}{n+1} \frac{a^{n+1}}{(1+ac)^{n+1}}.$$

La fonction numérique $x \mapsto 1 + a\,x$ est croissante sur [0, 1], donc la fonction $x \mapsto \frac{a^{n+1}}{(1+ax)^{n+1}}$ est décroissante et l'on a :

$$\frac{a^{n+1}}{(1+ac)^{n+1}} < a^{n+1}.$$

D'où : $| ln(1 + a) - S_n | < \frac{a^{n+1}}{n+1} < \frac{1}{n+1}$, puisque $a \in [0, 1]$.

$$\boxed{0 < | ln(1 + a) - S_n | < \frac{1}{n+1}}$$

Lorsque n tend vers l'infini, $\frac{1}{n+1}$ tend vers 0, donc $| ln(1 + a) - S_n |$ (théorème des gendarmes).

Ceci montre que la suite de terme général S_n, $n \geq 1$, est convergente et que sa limite est $ln(1 + a)$.
Donc, par définition, la série numérique de terme général u_n est convergente et sa somme est $ln(1 + a)$.

$$\ln(1+a) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{a^n}{n},\ a \in [0, 1].$$

En particulier, pour $a = 1$, on retrouve la **série harmonique alternée** (Exercice 6.3°) :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2.$$

Chapitre 10. Réels, séries numériques.

Enoncés.

Exercice 9. Série *n*^(-α)(*ln*(*n*))^β.

Quelle est la nature de la série de terme général $u_n = n^{-\alpha} (ln\ (n))^{\beta}$, où $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}$? (Distinguer trois cas : $\alpha = 1$, $\alpha < 1$, $\alpha > 1$).	

Solution.

1°/ Pour α = 1.

$u_n = \frac{(ln(n))^{\beta}}{n}$.

Lorsque *n* tend vers l'infini, la puissance l'emporte sur le logarithme et u_n tend vers 0.
La fonction *ln x* est croissante.

Lorsque $\beta \geq 0$, $(ln\ (n))^{\beta}$ est ≥ 1 dès que *n* est $\geq 3 > e$, donc $\frac{(ln(n))^{\beta}}{n} \geq \frac{1}{n}$.

La série de terme général u_n est donc minorée par la série harmonique $\frac{1}{n}$ divergente : elle est donc divergente.

Lorsque $\beta < 0$, $x \times \frac{(ln(x))^{\beta}}{x} = (ln\ (x))^{\beta}$ tend vers 0 lorsque *x* tend vers l'infini.

Donc l'intégrale $\int_a^{+\infty} \frac{(ln(x))^{\beta}}{x}\, dx$ converge pour $a > 1$, et il en est de même de la série de terme général $u_n = f(n)$, $n \geq 2$.

La série numérique de terme général $u_n = \frac{(ln(n))^{\beta}}{n}$ est convergente pour $\beta < 0$, divergente pour $\beta \geq 0$.

2°/ Pour α < 1.

$u_n = \frac{(ln(n))^{\beta}}{n^{\alpha}}$.

$x \times \frac{(ln(x))^{\beta}}{x^{\alpha}} = x^{1-\alpha} (ln(x))^{\beta}$, avec $1 - \alpha > 0$.

Lorsque x tend vers l'infini, la puissance l'emporte sur le logarithme, $x^{1-\alpha} (ln(x))^{\beta}$ tend vers l'infini.

Donc l'intégrale $\int_a^{+\infty} \frac{(ln(x))^{\beta}}{x^{\alpha}} dx$ est divergente quel que soit $\beta \in \mathbb{R}$.

Il en est donc de même de la série numérique de terme général $u_n = f(n)$, $n \geq 2$.

La série numérique de terme général $u_n = \frac{(ln(n))^{\beta}}{n^{\alpha}}$, $\alpha < 1$, est divergente quel que soit $\beta \in \mathbb{R}$.

3°/ Pour $\alpha > 1$.

$u_n = \frac{(ln(n))^{\beta}}{n^{\alpha}}$.

$x \times \frac{(ln(x))^{\beta}}{x^{\alpha}} = \frac{(ln(x))^{\beta}}{x^{\alpha-1}}$, avec $\alpha - 1 > 0$.

Lorsque x tend vers l'infini, la puissance l'emporte sur le logarithme, $\frac{(ln(x))^{\beta}}{x^{\alpha-1}}$ tend vers 0.

Donc l'intégrale $\int_a^{+\infty} \frac{(ln(x))^{\beta}}{x^{\alpha}} dx$ est convergente quel que soit $\beta \in \mathbb{R}$.

Il en est donc de même de la série numérique de terme général $u_n = f(n)$, $n \geq 2$.

La série numérique de terme général $u_n = \frac{(ln(n))^{\beta}}{n^{\alpha}}$, $\alpha > 1$, est convergente quel que soit $\beta \in \mathbb{R}$.

Chapitre 10. Réels, séries numériques.

Enoncés.

Exercice 10. Etude de 12 séries numériques.

Préciser la nature des séries numériques de termes généraux respectifs :

a) $\frac{1}{n^2+421}$ b) $\frac{1}{ln(n)}$

c) $\frac{1}{\sqrt{(n+1)(n^2+2)}}$ d) $\frac{(ln(n))^n}{n!}$

e) $\frac{1}{n^{2-cos\left(\frac{1}{n}\right)}}$ f) $\frac{\sqrt{(n+1)(n+2)}}{n^2-\sqrt{n}+ln(n)}$

g) $\frac{cos\, n}{n(n+1)}$ h) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{t^n}{1+\sqrt{t}}\, dt$

i) $\int_0^1 \frac{t^n}{1+\sqrt{t}}\, dt$ j) $\sqrt[3]{n^3+2n}-\sqrt{n^2-1}$

k) $\frac{n!}{n^n}$ l) $sin\,(n)$

Solution.

1°/ Première série.

$u_n = \frac{1}{n^2+421}$.

La série numérique u_n est majorée par la série convergente $\frac{1}{n^2}$, donc elle est convergente.

La série numérique de terme général $u_n = \frac{1}{n^2+421}$ est convergente.

HAUT

2°/ Deuxième série.

$u_n = \frac{1}{ln(n)}$.

Pour $n \geq 1$, $ln\,(n) \leq n \Rightarrow \frac{1}{ln(n)} \geq \frac{1}{n}$.

La série numérique u_n est minorée par la série divergente $\frac{1}{n}$, donc elle est divergente.

La série numérique de terme général $u_n = \frac{1}{ln(n)}$ est divergente.

HAUT

3°/ Troisième série.

$u_n = \frac{1}{\sqrt{(n+1)(n^2+2)}}$.

Lorsque n tend vers l'infini, $n\,u_n$ est équivalent à $\frac{1}{\sqrt{n}}$ et tend vers 0.

Donc la série numérique de terme général u_n est convergente.

La série numérique de terme général $u_n = \frac{1}{\sqrt{(n+1)(n^2+2)}}$ est convergente.

HAUT

4°/ Quatrième série.

$u_n = \frac{(ln(n))^n}{n!}$.

Lorsque n tend vers l'infini, n ! est équivalent à $\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$ (formule de Stirling).

$\frac{(ln(n))^n}{n!}$ est équivalent à $\frac{1}{\sqrt{2n\pi}}\left(\frac{e\,ln(n)}{n}\right)^n$,

$n\,u_n$ est équivalent à $\frac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\frac{(e\,ln(n))^n}{n^{n-\frac{1}{2}}}$.

La puissance l'emporte sur le logarithme, donc $n\,u_n$ tend vers 0 et la série de terme général u_n est convergente.

La série numérique de terme général $u_n = \frac{(ln(n))^n}{n!}$ est convergente.

HAUT

5°/ Cinquième série.

$u_n = \frac{1}{n^{2-cos\left(\frac{1}{n}\right)}}$.

Lorsque n tend vers l'infini, $\frac{1}{n}$ tend vers 0, $cos\left(\frac{1}{n}\right)$ est équivalent à $1 - \frac{1}{2n^2}$.

$2 - cos\left(\frac{1}{n}\right)$ est équivalent à $1 + \frac{1}{2n^2}$.

$n\,u_n$ est équivalent à $n^{-\frac{1}{2n^2}} = e^{-\frac{ln(n)}{2n^2}}$

La puissance l'emporte sur le logarithme, donc $-\frac{ln(n)}{2n^2}$ tend vers 0 et $n\,u_n$ tend vers 1.

u_n est équivalent à $\frac{1}{n}$, série harmonique, divergente.
Donc la série numérique de terme général u_n est divergente.

La série numérique de terme général $u_n = \frac{1}{n^{2-cos\left(\frac{1}{n}\right)}}$ est divergente.

HAUT

6°/ Sixième série.

$u_n = \frac{\sqrt{(n+1)(n+2)}}{n^2 - \sqrt{n} + ln(n)}$.

Lorsque n tend vers l'infini, $\frac{\sqrt{(n+1)(n+2)}}{n^2 - \sqrt{n} + ln(n)}$ est équivalent à $\frac{1}{n}$, série harmonique, divergente.
Donc la série numérique de terme général u_n est divergente.

La série numérique de terme général $u_n = \frac{\sqrt{(n+1)(n+2)}}{n^2 - \sqrt{n} + ln(n)}$ est divergente.

HAUT

7°/ Septième série.

$u_n = \frac{\cos n}{n(n+1)}$.

Lorsque n tend vers l'infini, $\left|\frac{\cos n}{n(n+1)}\right| \leq \frac{1}{n(n+1)} < \frac{1}{n^2}$.

La série numérique u_n est majorée en module par la série convergente $\frac{1}{n^2}$, donc elle est convergente.

La série numérique de terme général $u_n = \frac{\cos n}{n(n+1)}$ est convergente.

HAUT

8°/ Huitième série.

$u_n = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{t^n}{1+\sqrt{t}}\, dt$.

u_n est majoré par $\int_0^{\frac{1}{2}} t^n\, dt = \frac{1}{n+1} \times \frac{1}{2^{n+1}}$.

$n\, u_n$ est majoré par $\frac{n}{n+1} \times \frac{1}{2^{n+1}} < \frac{1}{2^{n+1}}$, qui tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini.
Donc $n\, u_n$ tend vers 0 et la série numérique u_n est convergente.

La série numérique de terme général $u_n = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{t^n}{1+\sqrt{t}}$ est convergente.

HAUT

9°/ Neuvième série.

$u_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+\sqrt{t}}\, dt$.

$$u_n = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{t^n}{1+\sqrt{t}}\, dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{t^n}{1+\sqrt{t}}\, dt > \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{t^n}{1+\sqrt{t}}\, dt + \frac{2}{2+\sqrt{2}} \int_{\frac{1}{2}}^1 t^n\, dt$$

$$u_n > \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{t^n}{1+\sqrt{t}}\, dt + \frac{2}{2+\sqrt{2}} \frac{1}{n+1}\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) > 0.$$

La série de terme général $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{t^n}{1+\sqrt{t}}\, dt$ est convergente (voir 8°),

la série de terme général $\frac{1}{n+1} \times \frac{1}{2^{n+1}}$ est convergente (voir 8°),

la série de terme général $\frac{1}{n+1}$ est divergente (série harmonique).

Donc la série de terme général $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{t^n}{1+\sqrt{t}}\,dt + \frac{2}{2+\sqrt{2}}\frac{1}{n+1}\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right) > 0$ est divergente.

La série de terme général u_n est minorée par une série divergente à termes positifs.
Donc elle est divergente.

La série numérique de terme général $u_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+\sqrt{t}}\,dt$ est divergente.

HAUT

10°/ Dixième série.

$u_n = \sqrt[3]{n^3+2n} - \sqrt{n^2-1}$.

Lorsque n tend vers l'infini, $(n^3+2n)^{\frac{1}{3}} = n\left(1+\frac{2}{n^2}\right)^{\frac{1}{3}}$ est équivalent à $n\left(1+\frac{2}{3n^2}\right)$,

$\sqrt{n^2-1} = (n^2-1)^{\frac{1}{2}} = n\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}$ est équivalent à $n\left(1-\frac{1}{2n^2}\right)$,

$u_n = \sqrt[3]{n^3+2n} - \sqrt{n^2-1}$ est équivalent à $n\left(1+\frac{2}{3n^2}-1+\frac{1}{2n^2}\right) = \frac{7}{6n}$.

Comme la série de terme général $\frac{7}{6n}$ est divergente (série harmonique), la série de terme général u_n est divergente.

La série numérique de terme général $u_n = \sqrt[3]{n^3+2n} - \sqrt{n^2-1}$ est divergente.

HAUT

11°/ Onzième série.

$u_n = \frac{n!}{n^n}$.

Lorsque n tend vers l'infini, n ! est équivalent à $\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$ (formule de Stirling).

$\frac{n!}{n^n}$ est équivalent à $\sqrt{2\pi n}\,e^{-n}$,
$n\,u_n$ est équivalent à $\sqrt{2\pi}\,n^{\frac{3}{2}}e^{-n}$.
L'exponentielle l'emporte sur la puissance, donc $n\,u_n$ tend vers 0 et la série de terme général u_n est convergente.

La série numérique de terme général $u_n = \frac{n!}{n^n}$ est convergente.

HAUT

12°/ Douzième série.

$u_n = sin\ (n)$.

Soit r un nombre réel compris entre – 1 et 1.
r est un *point d'accumulation* (i.e. *valeur d'adhérence*) de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
Ce qui veut dire que, pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver des entiers n, aussi grands qu'on veut, tels que $|sin\ (n) - r| < \varepsilon$.
C'est une conséquence de l'Exercice 2.3°.
Il en résulte que u_n ne tend pas vers 0 : donc la série de terme général u_n n'est pas convergente.

La série numérique de terme général $u_n = sin\ (n)$ est divergente.

HAUT

Chapitre 10. Réels, séries numériques.

Enoncés.

Exercice 11. Etude de 7 séries numériques.

Etudier la nature des séries numériques de termes généraux respectifs :

a) $\left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^{n\ln(n)}$ b) $\left(1+\frac{x}{n}\right)^{-n^2}$ $(x \in \mathbb{R})$

c) $\cos(\pi\sqrt{n^2+n+2})$ d) $\frac{1}{n}e^{in\theta}$, avec $n \geq 1$.

e) $\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}\,dx$ f) $\frac{(-1)^n}{(\ln(n))^2}$

g) $\frac{(-1)^n}{\ln(n)+(-1)^n}$

Solution.

1°/ Première série.

$u_n = \left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^{n\ln(n)}$.

Lorsque n tend vers l'infini, $\frac{n+1}{2n+1}$ est équivalent à $\frac{1}{2}$, u_n est équivalent à $\frac{1}{2^{n\ln n}} < \frac{1}{2^n}$.

Or la série de terme général $\frac{1}{2^n}$ est une série géométrique de raison $\frac{1}{2} < 1$, donc convergente.

Donc la série de terme général $\frac{1}{2^{n\ln n}} > 0$, majorée par une série convergente, est convergente,

et la série de terme général u_n, équivalente à une série convergente, est convergente.

La série numérique de terme général $u_n = \left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^{n\ln(n)}$ est convergente.

HAUT

2°/ Deuxième série.

$u_n = \left(1+\frac{x}{n}\right)^{-n^2}$.

$ln\,(u_n) = -n^2\, ln\left(1+\frac{x}{n}\right)$.

Lorsque n tend vers l'infini, $ln\left(1+\frac{x}{n}\right)$ est équivalent à $\frac{x}{n}$, et $ln\,(u_n)$ est équivalent à $-n\,x$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Pour que la série de terme général u_n converge, il faut que u_n tende vers 0, donc que son logarithme tende vers moins l'infini : il faut donc que x soit > 0. Pour $x \leq 0$, la série diverge.

Lorsque $x > 0$ et lorsque n devient très grand, u_n est équivalent à $e^{-nx} = (e^{-x})^n$, série géométrique de raison $e^{-x} < 1$, donc convergente.

La série de terme général u_n est équivalente à une série convergente : elle converge.

La série numérique de terme général $u_n = \left(1+\frac{x}{n}\right)^{-n^2}$ est convergente pour $x > 0$, divergente pour $x \leq 0$.

HAUT

3°/ Troisième série.

$u_n = cos\,(\pi \sqrt{n^2+n+2}\,)$.

Lorsque n tend vers l'infini, $\sqrt{n^2+n+2}$ est équivalent à n, u_n est équivalent à $cos\,(n\,\pi) = (-1)^n$.

$S_n = \sum_{k=0}^{k=n} (-1)^k$, vaut 1 pour n pair, et -1 pour n impair, et n'a donc pas de limite.

Donc la série de terme général $(-1)^n$ est divergente, et il en est de même de la série équivalente u_n.

La série numérique de terme général $u_n = cos\,(\pi \sqrt{n^2+n+2}\,)$ est divergente.

HAUT

4°/ Quatrième série.

$u_n = \frac{1}{n}\, e^{i\,n\,\theta}$.

Posons $z = e^{i\,\theta}$ et considérons la série entière de terme général $u_n = a_n\, z^n = \frac{1}{n}\, z^n$.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{n+1}.$$

Lorsque n tend vers l'infini, $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ tend vers 1, donc le rayon de convergence de la série entière est 1.

Elle converge pour $|z| < 1$, elle diverge pour $|z| > 1$.

Pour un θ de la forme $\theta = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, $z = e^{i\theta} = 1$, la série u_n est la série harmonique $\frac{1}{n}$, elle diverge.

Pour $|z| < 1$, on a $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} = -\ln(1-z)$ en prenant la **détermination principale du logarithme**.

Or la fonction analytique $-\ln(1-z)$ a un seul point singulier, $z = 1$, qui est un point singulier essentiel.

On peut donc écrire $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = -\ln(1-z)$ pour tout z différent de 1.

En particulier, pour $z = e^{i\theta}$, si θ qui n'est pas un multiple pair de 2π, il existe un θ_0 vérifiant $0 < \theta_0 < 2\pi$ et $z = e^{i\theta_0}$.

$$1 - z = (1 - \cos\theta_0) - i\sin\theta_0 = 2\sin^2\frac{\theta_0}{2} - 2i\sin\frac{\theta_0}{2}\cos\frac{\theta_0}{2} = 2\sin\frac{\theta_0}{2}\left(\sin\frac{\theta_0}{2} - i\cos\frac{\theta_0}{2}\right)$$

$$|1 - z| = 2\sin\frac{\theta_0}{2} > 0.$$

$$Arg(1-z) = \frac{\theta_0 - \pi}{2}, \quad -\frac{\pi}{2} < \frac{\theta_0 - \pi}{2} < \frac{\pi}{2}.$$

$$\ln(1-z) = \ln\left(2\sin\frac{\theta_0}{2}\right) + i\frac{\theta_0 - \pi}{2}.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{in\theta} = -\ln\left(2\sin\frac{\theta_0}{2}\right) + i\frac{\pi - \theta_0}{2}, \text{ avec } 0 < \theta_0 < 2\pi \text{ et } e^{i\theta} = e^{i\theta_0}.$$

La série numérique de terme général $u_n = \frac{1}{n} e^{in\theta}$ est divergente lorsque θ est un multiple pair de π. Elle converge dans tous les autres cas.

En séparant partie réelle et partie imaginaire, on trouve, avec $0 < \theta_0 < 2\pi$ et $e^{i\theta} = e^{i\theta_0}$ (θ_0 est congru à θ modulo 2π) :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\theta)}{n} = -\ln\left(2\sin\frac{\theta_0}{2}\right).$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\theta)}{n} = \frac{\pi - \theta_0}{2}.$$

En particulier, pour $\theta = \pi$, on retrouve la série harmonique alternée : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$.

HAUT

5°/ Cinquième série.

$u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}\, dx.$

Pour $n = 0$, $u_0 = \int_0^{\pi} \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}\, dx.$

Au voisinage de 0, *sin x* est équivalent à *x*, donc $\frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}$ est équivalent à $\sqrt{x}$ qui tend vers 0, donc l'intégrale converge.

Posons $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k = \int_0^{(n+1)\pi} \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}\, dx.$

Lorsque *n* tend vers l'infini, S_n tend vers $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}\, dx.$

Si l'on sait que cette intégrale est convergente $\left(\text{et vaut } \sqrt{\frac{\pi}{2}} \right)$, on voit que la série de terme général u_n est convergente $\left(\text{et que sa somme est } \sqrt{\frac{\pi}{2}} \right)$.

Evidemment, la difficulté est de démontrer la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}\, dx$ à l'infini.

Lorsque *x* varie de $n\,\pi$ à $(n + 1)\,\pi$, *sin x* garde le même signe, donc $\frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}$ aussi.

La fonction $\frac{1}{\sqrt{x}}$ est strictement décroissante :

$$\left| \frac{\sin x}{\sqrt{(n+1)\,\pi}} \right| < \left| \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}} \right| < \left| \frac{\sin x}{\sqrt{n\,\pi}} \right|$$

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \left| \frac{\sin x}{\sqrt{(n+1)\,\pi}} \right| dx < \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \left| \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}} \right| dx < \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \left| \frac{\sin x}{\sqrt{n\,\pi}} \right| dx$$

$$\frac{1}{\sqrt{(n+1)\,\pi}} \left| \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \sin x\, dx \right| < \left| \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}\, dx \right| < \frac{1}{\sqrt{n\,\pi}} \left| \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \sin x\, dx \right|$$

$$\left| \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \sin x\, dx \right| = |\cos(n+1)\,\pi - \cos n\,\pi| = |-2\cos n\,\pi| = 2\,|(-1)^{n+1}| = 2,$$

$$\frac{2}{\sqrt{(n+1)\,\pi}} < \left| \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}\, dx \right| < \frac{2}{\sqrt{n\,\pi}}$$

Lorsque *n* est pair, *sin x* reste positif pour $n\,\pi < x < (n + 1)\,\pi$, donc $\frac{2}{\sqrt{(n+1)\,\pi}} < \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}\, dx < \frac{2}{\sqrt{n\,\pi}}$.

Lorsque *n* est impair, *sin x* reste négatif pour $n\,\pi < x < (n + 1)\,\pi$, donc $-\frac{2}{\sqrt{n\,\pi}} < \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}\, dx < -\frac{2}{\sqrt{(n+1)\,\pi}}$.

Or, pour n très grand, $\frac{2}{\sqrt{(n+1)\,\pi}}$ est équivalent à $\frac{2}{\sqrt{n\,\pi}}$.

Il résulte alors des inégalités précédentes que, lorsque n devient très grand, u_n est équivalent à $(-1)^n \frac{2}{\sqrt{n\,\pi}}$.

La convergence de la série de terme général $(-1)^n \frac{2}{\sqrt{n\,\pi}}$ résulte du **théorème des séries alternées**.

Le terme général tend vers 0 et la valeur absolue d'un terme est supérieure à la valeur absolue du terme suivant.

La série de terme général u_n, équivalente à une série convergente, est convergente.

Sa somme est la valeur de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}\,dx$: cette intégrale est donc convergente.

La série numérique de terme général $u_n = \int_{n\,\pi}^{(n+1)\,\pi} \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}\,dx$ est convergente.

Le calcul de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ peut se faire en montrant, plus généralement, l'égalité :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t\,x)}{x^{\alpha}}\,dx = \frac{\pi}{2} \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)\sin\frac{\alpha\,\pi}{2}}$$

et en prenant $t = 1$ et $\alpha = \frac{1}{2}$, compte tenu de la valeur $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ de la fonction Gamma d'Euler.

Voir, par exemple : **J. Bass**, *Exercices de Mathématiques*, Masson éd., Paris, 1965, p.219.

HAUT

6°/ Sixième série.

$u_n = \frac{(-1)^n}{(\ln(n))^2}$.

Il s'agit d'une série alternée.
Le terme général tend vers 0 et la valeur absolue d'un terme est supérieure à la valeur absolue du terme suivant.
Donc la série converge.

La série numérique de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{(\ln(n))^2}$ est convergente.

HAUT

7°/ Septième série.

$u_n = \frac{(-1)^n}{ln(n)+(-1)^n}$.

$u_{2n} + u_{2n+1} = \frac{1}{ln(2n)+1} - \frac{1}{ln(2n+1)-1}$

Lorsque n tend vers l'infini,
$\frac{1}{ln(2n)+1}$ est équivalent à $\frac{1}{ln(2n)}\left(1 - \frac{1}{ln(2n)}\right)$,
$ln(2n+1)$ est équivalent à $ln(2n) + ln\left(1+\frac{1}{2n}\right) \sim ln(2n)\left(1+\frac{1}{2n\,ln(2n)}\right)$
$ln(2n+1) - 1$ est équivalent à $ln(2n)\left(1 - \frac{1}{ln(2n)} + \frac{1}{2n\,ln(2n)}\right)$
$\frac{1}{ln(2n+1)-1}$ est équivalent à $\frac{1}{ln(2n)}\left(1 + \frac{1}{ln(2n)} + \frac{1}{(ln(2n))^2}\right)$
$\frac{1}{ln(2n)+1} - \frac{1}{ln(2n+1)-1}$ est équivalent à $-\frac{1}{(ln(2n))^2}$.

$\frac{1}{(ln(2n))^2} > \frac{1}{n}$ (la puissance l'emporte sur le logarithme).
Donc la série de terme général $v_n = u_{2n} + u_{2n+1}$, qui est de signe constant, est divergente.
Il en résulte que la suite de terme général $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k$ est divergente, donc que la série de terme général u_n est divergente.

La série numérique de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{ln(n)+(-1)^n}$ est divergente.

HAUT

Exercices

Intégration.

1. Intégrale de Riemann.
   a) Fonction en escalier à support compact.
   b) Intégrale d'une fonction en escalier à support compact.
   c) Approximation d'une fonction numérique continue sur un intervalle fermé par une fonction en escalier à support compact.
   d) Intégrale d'une fonction numérique continue sur un intervalle fermé.
   e) Fonction intégrable.
2. Propriétés.
   a) Linéarité.
   b) Produit.
   c) Croissance.
   d) Convergence.
   e) Premier théorème de la moyenne.
3. Valeur moyenne.
4. Primitive. Tableau de quelques primitives.
5. Changement de variable.
6. Intégration par parties.
7. Deuxième théorème de la moyenne (théorème de Bonnet).
6. Intégrale propre dépendant d'un paramètre.
7. Intégrale généralisée.

HAUT

Intégrale de Riemann.

a) Fonction en escalier à support compact.

HAUT

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application.
On dit que f est une **fonction en escalier** à support compact si
a) il existe un intervalle fermé borné $[a, b]$ de $\mathbb{R}$, $a < b$, en dehors duquel f est nulle,
b) il existe une suite strictement croissante finie $a = c_0 < ... < c_n = b$ de nombres réels telle que, si $c_{k-1} < c_k$,
la restriction de f à l'intervalle ouvert $]\, c_{k-1}, c_k\, [$ soit constante, pour tout $k = 1, ... , n$.
On note f_k la valeur constante de f sur l'intervalle $]\, c_{k-1}, c_k\, [$.

Exemple : la fonction nulle sur $\mathbb{R}$ est une fonction en escalier à support compact.
En effet, cette fonction est nulle en dehors de l'intervalle fermé [0, 1] par exemple, et quelle que soit la suite finie $0 = c_0 < ... < c_n = 1$ de nombres réels, la restriction de f à l'intervalle ouvert $]\, c_{k-1}, c_k\, [$ est constante (et nulle), pour tout $k = 1, ... , n$.

Les fonctions en escalier à support compact forment un **espace vectoriel réel**.

b) Intégrale d'une fonction en escalier à support compact.

HAUT

Etant donnée une fonction en escalier à support compact, nulle en dehors d'un intervalle $[a, b]$, et une suite strictement croissante finie $(c_k)_{1 \leq k \leq n}$ de nombres réels vérifiant :

— $c_0 = a$, $c_n = b$,

— $f(x) = f_k$, pour tout $x \in]\, c_{k-1}, c_k\, [$,

on appelle **intégrale de *f*** la somme $\sum_{k=1}^{k=n} (c_k - c_{k-1})\, f_k$, notée $\int f(x)\, dx$ ou $\int_a^b f(x)\, dx$

Cette somme ne dépend pas de la suite finie $(c_k)_{1 \leq k \leq n}$ choisie (ce qu'on appelle aussi une "décomposition admissible" de *f*)

Donc, par définition :

$$\int f(x)\, dx = \sum_{k=1}^{k=n} (c_k - c_{k-1})\, f_k.$$

L'intégrale d'une fonction en escalier positive à support compact est un nombre positif.

c) Approximation d'une fonction numérique continue sur un intervalle fermé par une fonction en escalier à support compact.

HAUT

Toute fonction numérique continue f sur un intervalle fermé $[a, b]$ peut être approchée d'aussi près qu'on veut par une fonction en escalier à support compact supérieure à f.
Autrement dit, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction en escalier f_ε à support compact contenu dans $[a, b]$ tel que :

a) $f(x) \leq f_\varepsilon(x)$, pour tout $x \in [a, b]$,

b) $\underset{x \in [a,b]}{\mathrm{Sup}} (f_\varepsilon(x) - f(x)) < \varepsilon$.

De même, toute fonction numérique continue f sur un intervalle fermé $[a, b]$ peut être approchée d'aussi près qu'on veut par une fonction en escalier à support compact inférieure à f.
Autrement dit, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction en escalier g_ε à support compact contenu dans $[a, b]$ tel que :

a) $f(x) \geq g_\varepsilon(x)$, pour tout $x \in [a, b]$,

b) $\underset{x \in [a,b]}{\mathrm{Sup}} (f(x) - g_\varepsilon(x)) < \varepsilon$.

d) Intégrale de Riemann d'une fonction numérique continue sur un intervalle fermé.

HAUT

Etant donnée une fonction numérique continue f sur un intervalle fermé $[a, b]$, on appelle **intégrale de *f*** la borne inférieure des $\int f_\varepsilon(x)\,dx$, pour les $\varepsilon > 0$, où les f_ε sont des fonctions en escalier à support compact supérieures à f, qui est aussi la borne supérieure des $\int g_\varepsilon(x)\,dx$, pour les $\varepsilon > 0$, où les g_ε sont des fonctions en escalier à support compact inférieures à f.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \inf_{\varepsilon>0}\left(\int_a^b f_\varepsilon(x)\,dx\right) = \sup_{\varepsilon>0}\left(\int_a^b g_\varepsilon(x)\,dx\right)$$

e) Fonction intégrable.

HAUT

Etant donnée une fonction numérique *f* définie sur un intervalle fermé [*a*, *b*], et bornée dans cet intervalle, on dit que *f* est intégrable (au sens de Riemann) sur l'intervalle [*a*, *b*], si lorsqu'on divise l'intervalle [*a*, *b*] en *n* segments partiels par des points $c_1, \ldots, c_{n-1}$, vérifiant les relations $c_0 = a < c_1 < \ldots < c_{n-1} < b = c_n$, et lorsqu'on désigne par ξ_k un point quelconque du segment $[c_{k-1}, c_k]$, la somme (dire somme de Cauchy-Riemann)

$S = (c_1 - a)\, f(\xi_1) + (c_2 - c_1)\, f(\xi_2) + \ldots + (b - c_{n-1})\, f(\xi_n)$

possède une limite *I* lorsque *n* tend vers l'infini et que $\sup_{1 \le k \le n} (c_k - c_{k-1})$ tend vers 0.

On appelle **intégrale de *f*** cette limite *I*, qu'on note $\int_a^b f(x)\, dx$.

L'intégrale de *f* sur [*a*, *b*] mesure la **surface comprise entre la courbe *y* = *f* (*x*) et l'axe des *x*** (avec le signe + pour ce qui est au-dessus de l'axe et le signe – pour ce qui est en-dessous).

Théorème de Lebesgue.
Pour qu'une fonction numérique bornée *f* soit intégrable sur un intervalle fermé, il faut et il suffit que l'ensemble de ses points de discontinuité soit de mesure nulle.

Corollaires.
Une fonction est intégrable dans tout intervalle où elle est continue.
Une fonction bornée et continue dans un intervalle, sauf peut-être en un nombre fini de points, est intégrable.
Une fonction monotone bornée est intégrable.
Une fonction à variation bornée est intégrable.

HAUT

Propriétés des fonctions intégrables sur un intervalle fermé borné.

a) Linéarité.

HAUT

Si f est intégrable et λ un nombre réel, λf est intégrable.
Si f et g sont intégrables, $f + g$ est intégrable.
$\int_a^b (\lambda f)(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx$; $\int_a^b (f+g)(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$.
Les fonctions intégrables sur $[a, b]$ forment un espace vectoriel réel.
L'intégration est une fonctionnelle linéaire sur l'espace vectoriel des fonctions intégrables sur $[a, b]$.
$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$

b) Produit.

HAUT

Si f et g sont intégrables sur $[a, b]$, le produit $f\,g$ est intégrable sur $[a, b]$.
Si f est intégrable et reste comprise entre deux bornes non nulles de même signe, $\frac{1}{f}$ est intégrable.
Si f est intégrable, $|f|$ est intégrable.
Les fonctions intégrables sur $[a, b]$ forment un anneau commutatif.

Inégalité de Schwarz.

$$\left|\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx\right| \leq \left(\int_a^b |f(x)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \times \left(\int_a^b |g(x)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

c) Croissance.

HAUT

1. L'intégrale d'une fonction positive est positive.
2. $f \leq g \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$.
3. $\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$.

d) Convergence.

HAUT

Si une suite $(f_n)_{n \geq 0}$ de fonctions intégrables converge uniformément vers f, alors f est intégrable et la suite $\left(\int_a^b f_n(x)\,dx \right)_{n \geq 0}$ converge vers $\int_a^b f(x)\,dx$.

e) Premier théorème de la moyenne.

HAUT

Si f et g sont deux fonctions numériques intégrables sur l'intervalle fermé $[a, b]$, si g est **positive** et si $m \leq f(x) \leq M$ pour tout $x \in [a, b]$, alors :

$$m \int_a^b g(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx \leq M \int_a^b g(x)\,dx.$$

Si, de plus, f est continue, d'après le **théorème des valeurs intermédiaires**, il existe un $\xi \in [a, b]$ tel que :

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = f(\xi) \int_a^b g(x)\,dx.$$

Cette relation s'appelle le **premier théorème de la moyenne**.
Si $g = 1$, la relation signifie qu'il existe un rectangle de côté $b - a$ dont la surface est l'aire entre la courbe $y = f(x)$ et l'axe des x.

HAUT

Valeur moyenne.

HAUT

Etant donnée une fonction numérique f, intégrable sur un intervalle fermé $[a, b]$, on appelle **moyenne de f dans l'intervalle $[a, b]$**, le nombre

$$\mathcal{M}(f ; [a, b]) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

Propriétés de la moyenne d'une fonction continue.

1. $\inf\limits_{x \in [a,b]} f(x) \leq \mathcal{M}(f ; [a, b]) \leq \sup\limits_{x \in [a,b]} f(x)$.
2. Il existe un $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = \mathcal{M}(f ; [a, b])$.
3. $\mathcal{M}(f ; [a, b]) = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} \sum\limits_{k=0}^{k=n} f\left(a + k\,\frac{b-a}{n}\right)$.

HAUT

Primitive.

HAUT

Soit a un nombre réel appartenant à un intervalle I et soit f une fonction numérique intégrable bornée dans I.

Pour $x \in I$, on pose $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$.

L'application $F : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue sur I (cela résulte du fait que f est bornée).
Si f est continue dans un voisinage de x_0 intérieur à I, alors F est dérivable en x_0, et sa dérivée en x_0 est $f(x_0)$ (c'est une conséquence du premier théorème de la moyenne).

On appelle **primitive de *f*** toute fonction continue F qui, en un point de continuité x de f, admet $f(x)$ pour dérivée, et qui, en un point x_0 de discontinuité de f admet une dérivée à gauche égale à $f(x_0 - 0)$ et une dérivée à droite égale à $f(x_0 + 0)$.

Deux primitives de f différent d'une constante.

Si F est une primitive de f, $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$.

Tableau de quelques primitives.

HAUT

Tableau de quelques primitives.

HAUT

c désigne une constante réelle arbitraire.

Fonction	*Primitive*
x^n, n entier $\neq -1$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + c$
$\frac{1}{x}$	$\ln \lvert x \rvert + c$
e^x	$e^x + c$
e^{-x}	$-e^{-x} + c$
$\sin x$	$-\cos x + c$
$\cos x$	$\sin x + c$
$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x + c$
$1 + \mathrm{cotan}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$	$-\mathrm{cotan}\, x + c$
$\sinh x$	$\cosh x + c$
$\cosh x$	$\sinh x + c$
$1 - \tanh^2 x = \frac{1}{\cosh^2 x}$	$\tanh x + c$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\mathrm{Arcsin}\, x + c$

HAUT

Changement de variable.

HAUT

Soit f une fonction intégrable sur $[a, b]$ et φ une **bijection de classe C^1** de $[a, b]$ sur un intervalle fermé borné $[\alpha, \beta]$.
La formule du changement de variable s'écrit :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$$

Si f est une **fraction rationnelle de sinus et cosinus de x**, le changement de variable $t = \tan\frac{x}{2}$ ramène l'intégration à celle d'une fraction rationnelle de t.

Si f est une **fraction rationnelle de sinus hyperbolique et cosinus hyperbolique de x**, le changement de variable $t = \tanh\frac{x}{2}$ ramène l'intégration à celle d'une fraction rationnelle de t.

HAUT

Intégration par parties.

HAUT

Si u et v sont des applications de classe C^1 sur $[a, b]$, la formule d'intégration par parties s'écrit :

$$\int_a^b u(x)\, v'(x)\, dx = u(b)\, v(b) - u(a)\, v(a) - \int_a^b u'(x)\, v(x)\, dx$$

ou, en abrégé :

$$\int u\, dv = u\, v - \int v\, du$$

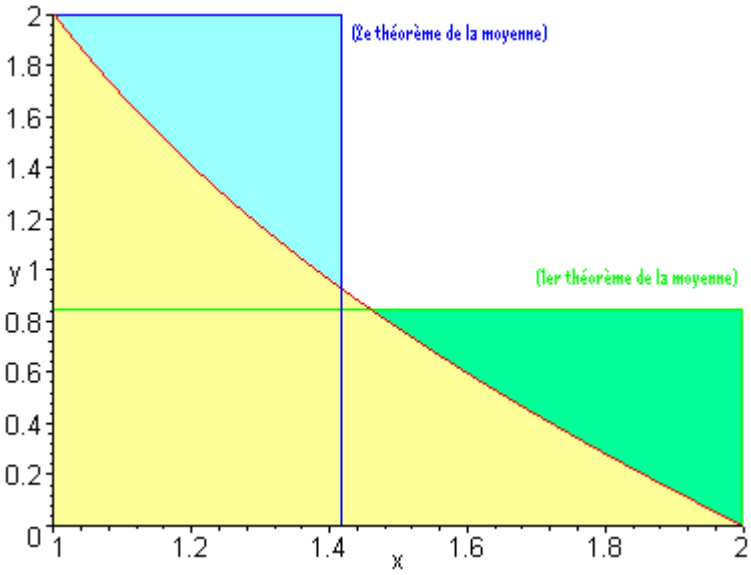
HAUT

Deuxième théorème de la moyenne (théorème de Bonnet).

HAUT

Soit f une fonction numérique intégrable sur un intervalle $[a, b]$, $a < b$.
Soit g une fonction numérique non croissante sur $[a, b]$.
Alors, il existe $\xi \in [a, b]$ tel que

$$\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx = g(a) \int_a^\xi f(x)\, dx + g(b) \int_\xi^b f(x)\, dx$$



surface entre la courbe et l'axe des x dans l'intervalle $[a, b]$.

En particulier, si g est non croissante, non négative et si $g(b) = 0$:

$$\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx = g(a) \int_a^\xi f(x)\, dx$$

Par exemple, pour $f = 1$ ($f(x) = 1$, $\forall\, x \in [a, b]$) :

$$\int_a^b g(x)\, dx = (\xi - a)\, g(a)$$

relation qui signifie qu'il existe entre a et b, un ξ tel que le rectangle de côtés $(\xi - a)$ et $g(a)$ ait pour surface la

HAUT

Intégrale propre dépendant d'un paramètre.

HAUT

Hypothèses :

- X est un intervalle d'intérieur non vide,
- a et b sont des nombres réels vérifiant $a < b$,
- f est une application continue de $X \times [a, b]$ dans $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$,

Conclusions :

1. **Continuité**. L'application $F : X \to K$ définie par $F(x) = \int_a^b f(x, t)\, dt$ est continue sur X.

2. **Dérivabilité**. Si, de plus,

- L'application partielle $f_x : t \mapsto f(x, t)$ est continue sur $[a, b]$ pour tout $x \in X$,
- $\frac{\partial f}{\partial x}$ existe et c'est une application continue de $X \times [a, b]$ dans K,

alors l'application $F : X \to K$ définie par $F(x) = \int_a^b f(x, t)\, dt$ est de classe C^1 sur X et, pour tout $x \in X$, sa dérivée est l'intégrale de la dérivée partielle de f par rapport à x :

$$F'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)\, dt$$

3. **Intégrabilité**. L'application $F : X \to K$ définie par $F(x) = \int_a^b f(x, t)\, dt$ est intégrable sur tout intervalle $[\alpha, \beta]$ contenu dans X et son intégrale sur l'intervalle $[\alpha, \beta]$ est :

$$\int_\alpha^\beta F(x)\, dx = \int_a^b \left(\int_\alpha^\beta f(x, t)\, dx \right) dt$$

HAUT

Intégrale généralisée.

HAUT

On dit qu'une intégrale $\int_a^b f(x)\,dx$ est une **intégrale généralisée** (ou *intégrale impropre*) dans l'un des deux cas suivants :

1°/ La fonction $f(x)$ n'est pas bornée sur l'intervalle fermé borné $[a, b]$,
2°/ L'un au moins des deux nombres a et b est infini.

Si a et b sont des nombres réels :

1°/ Si c est un nombre réel, $a < c < b$, dans un voisinage duquel f n'est pas bornée, on dit que l'intégrale $\int_a^b f(x)\,dx$ est **convergente** si la somme

$$\int_a^{c-\alpha} f(x)\,dx + \int_{c+\beta}^b f(x)\,dx$$

tend vers une limite finie lorsque α et β tendent vers 0 indépendamment l'un de l'autre.

2°/ Si c est l'une des bornes, par exemple $c = b$, donc si f n'est pas bornée au voisinage de b, on dit que l'intégrale $\int_a^b f(x)\,dx$ est **convergente** si l'intégrale $\int_a^{b-\alpha} f(x)\,dx$ tend vers une limite finie lorsque α tend vers 0.

3°/ On dit que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ est **convergente** si $\int_a^b f(x)\,dx$ tend vers une limite finie lorsque b tend vers $+\infty$.

4°/ On dit que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ est **convergente** si $\int_a^b f(x)\,dx$ tend vers une limite finie lorsque a tend vers $-\infty$ et b vers $+\infty$, indépendamment l'un de l'autre. Si $a = -b$, la limite de $\int_{-b}^b f(x)\,dx$ lorsque b tend vers $+\infty$, s'appelle la **valeur principale de l'intégrale, au sens de Cauchy**.

Théorème de Cauchy.
L'intégrale $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ et la série de terme général $f(n)$ sont simultanément convergentes ou divergentes.

Intégrale absolument convergente.
On dit que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ est **absolument convergente** si l'intégrale $\int_a^b |f(x)|\,dx$ est convergente.
Une intégrale absolument convergente est convergente.

Théorème.
Si f est une fonction définie sur $[a, +\infty[$, positive et décroissante à partir d'une certaine valeur, et

tendant vers 0 avec $\frac{1}{x}$, alors l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(x) \sin x \, dx$ est convergente

Théorème.
Si f et g sont des fonctions de carré intégrable, alors l'intégrale $\int f(x) \, g(x) \, dx$ est absolument convergente (conséquence de l'inégalité de Schwarz).

HAUT

Chapitre 11. Intégration.

Exercices

Exercice 1. Equation du 2e degré ayant pour coefficient une intégrale.
Exercice 2. Encadrement de π à l'aide d'intégrales.
Exercice 3. Norme en moyenne quadratique d'une fonction de classe C^1.
Exercice 4. Fonctions dont la norme en moyenne égale le carré de la norme en moyenne quadratique.
Exercice 5. Intégration et théorème des valeurs intermédiaires.
Exercice 6. Limite d'une intégrale propre dépendant d'un paramètre.
Exercice 7. Etude de deux fonctions définies par une intégrale.
Exercice 8. Norme de convergence uniforme d'une fonction de classe C^2.
Exercice 9. Convergence d'une suite définie par une intégrale.
Exercice 10. Calcul de 21 primitives.
Exercice 11. Primitives de 6 fractions rationnelles.
Exercice 12. Primitives de 3 fonctions trigonométriques.
Exercice 13. Primitive d'une fraction rationnelle de fonctions trigonométriques.
Exercice 14. Convergence à l'infini de 8 intégrales.
Exercice 15. Convergence et valeur de 8 intégrales.
Exercice 16. Convergence de l'intégrale de $f(t)/t$.
Exercice 17. Limite en 0 de $x f(x)$.
Exercice 18. Convergence et valeur de 2 intégrales.

Exercice 1. Equation du 2e degré ayant pour coefficient une intégrale.

L'équation du deuxième degré:

$$x^2 - \left(\int_0^2 e^{-t^2}\, dt \right) x + 1 = 0$$

possède-t-elle des solutions réelles ?

Solution

HAUT

Exercice 2. Encadrement de π à l'aide d'intégrales.

1°/ Calculer les intégrales $I = \int_0^1 t^4 (1-t)^4 \, dt$ et $J = \int_0^1 \frac{t^4 (1-t)^4}{1+t^2} \, dt$.

2°/ Montrer que $\frac{I}{2} \leq J \leq I$.

3°/ En déduire l'encadrement : $\frac{22}{7} - \frac{1}{630} \leq \pi \leq \frac{22}{7} - \frac{1}{1260}$.

Solution

HAUT

Exercice 3. Norme en moyenne quadratique d'une fonction de classe C^1.

Soit $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continûment dérivable sur $[0, 1]$ telle que $f(1) = 0$.

1°/ Calculer $\int_0^1 [f'(t) + (\tan t) f(t)]^2 \, dt$.

2°/ En déduire l'inégalité $\int_0^1 [f(t)]^2 \, dt \leq \int_0^1 [f'(t)]^2 \, dt$.

Solution

HAUT

Exercice 4. Fonction dont la norme en moyenne égale le carré de la norme en moyenne quadratique.

On se propose de déterminer l'ensemble K des applications continues de [0, 1] dans [0, 1] telles que :

$$\int_0^1 f(t)\,dt = \int_0^1 [f(t)]^2\,dt.$$

1°/ Soit $f \in K$. Montrer que, pour tout $t \in [0, 1]$, $f(t) \in [0, 1]$.
2°/ En déduire K.

Solution

HAUT

Exercice 5. Intégration et théorème des valeurs intermédiaires.

Soit $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue sur [0, 1], dérivable sur]0, 1[et telle que :

$$\int_0^1 f(t)\,dt = f(1).$$

Montrer qu'il existe $c \in]0, 1[$ tel que $f'(c) = 0$.

Solution

HAUT

Exercice 6. Limite d'une intégrale propre dépendant d'un paramètre.

Montrer l'existence et calculer $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \int_x^{3x} \frac{\cos t}{t}\, dt$.	Solution

HAUT

Exercice 7. Etude de deux fonctions définies par une intégrale.

Etudier l'application $f : \mathrm{R} \longrightarrow \mathrm{R}$, définie, pour tout $x \in \mathrm{R}$ par la relation suivante, et tracer son graphe.

1°/ $f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{t^4+t^2+1}}\,dt.$

2°/ $f(x) = \displaystyle\int_0^{\sin^2 x} Arcsin\,(\sqrt{t})\,dt + \int_0^{\cos^2 x} Arccos\,(\sqrt{t})\,dt.$

Solution

HAUT

Exercice 8. Norme de convergence uniforme d'une fonction de classe C^2.

Soit $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$, une application deux fois continûment dérivable sur $[0, 1]$, telle que $f(0) = f(1) = 0$.

1°/ Montrer que, pour tout $x \in [0, 1]$:

$$f(x) = (x-1)\int_0^x t\,f''(t)\,dt + x\int_x^1 (t-1)\,f''(t)\,dt.$$

Solution

2°/ On suppose de plus que, pour tout $t \in [0, 1]$, $|f''(t)| \leq 1$.

Justifier l'existence de $M = \sup_{t \in [0,1]} |f(t)|$, et montrer que $M \leq \frac{1}{8}$.

HAUT

Exercice 9. Convergence d'une suite définie par une intégrale.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{n!} e^{1-t}\, dt$.

1°/ Calculer I_0.

2°/ Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$0 \leq I_n \leq \frac{1}{n!} I_0.$$

En déduire que la suite $(I_n)_{n \geq 0}$ est convergente et préciser sa limite.

Solution

3°/ Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$I_n = I_{n-1} - \frac{1}{n!}.$$

4°/ Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{k!}$.

Montrer que $I_n = e - S_n$.

En déduire que la suite $(S_n)_{n \geq 0}$ est convergente et déterminer sa limite.

HAUT

Exercice 10. Calcul de 21 primitives.

Calculer les primitives suivantes :

a) $\int \frac{x^2}{1+x^2}\,dx$ b) $\int \frac{2x+1}{x^2(x+1)^2}\,dx$ c) $\int \sin^2 x\,dx$

d) $\int \frac{1+x+x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ e) $\int \frac{dx}{\cos^2 x \sin^2 x}$ f) $\int \frac{dx}{\sin x}$

g) $\int \frac{dx}{5\cosh x + 3\sinh x + 4}$ h) $\int \frac{e^{Arc\sin x}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ i) $\int \frac{\left(\ln\left|\ln|x|\right|\right)^2}{x\ln|x|}\,dx$

j) $\int \frac{1-\cos\frac{x}{3}}{\sin\frac{x}{2}}\,dx$ k) $\int \frac{\sqrt{x^{10}+1}}{x}\,dx$ l) $\int \frac{\tan x}{2+\tan^2 x}\,dx$

m) $\int x^4 \ln|x|\,dx$ n) $\int (x^3+1)\,e^{-x}\,dx$ o) $\int (Arcsin\,x)^2\,dx$

p) $\int \sinh x \sin x\,dx$ q) $\int \sinh^2 x \sin^2 x\,dx$ r) $\int \ln(x^2+4x+5)\,dx$

s) $\int x\sqrt{-x^2+3x-2}\,dx$ t) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+x+2}}\,dx$ u) $\int \frac{dx}{\sin x\sqrt{1-\cos x}}$

Solution

HAUT

Exercice 11. Primitives de 6 fractions rationnelles.

Calculer les primitives suivantes :

a) $\int \frac{x}{x^3-3x+2}\,dx$ *b)* $\int \frac{1}{(1+x^3)^2}\,dx$ *c)* $\int \frac{1}{x^4+4}\,dx$

d) $\int \frac{x}{(x^2+x+1)^3}\,dx$ *e)* $\int \frac{7}{(x+1)^7-x^7-1}\,dx$ *f)* $\int \frac{x^5}{(x^3+1)(x^3+8)}\,dx$

Solution

HAUT

Exercice 12. Primitives de 3 fonctions trigonométriques.

Calculer les primitives suivantes :

a) $\int \cos^5 x \sin^4 x \, dx$

b) $\int \frac{1}{2+\sin x} \, dx$

c) $\int \frac{1}{\cos^4 x + \sin^4 x} \, dx$

Solution

HAUT

Exercice 13. Primitive d'une fraction rationnelle de fonctions trigonométriques.

a, b, c, d désignant 4 nombres réels non nuls, calculer la primitive : $$\int \frac{a\cos x + b\sin x}{c\cos x + d\sin x}\,dx$$	Solution

HAUT

Exercice 14. Convergence à l'infini de 8 intégrales.

Etudier la convergence des intégrales suivantes :

a) $\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^2\sqrt{\ln t}}\,dt$ b) $\int_1^{+\infty} \operatorname{Arctan}\frac{1}{\sqrt{2t}}\,dt$ c) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\,e^{\sin t}\,dt$

d) $\int_1^{+\infty} \frac{t^4+1}{t^4\tanh t}\,dt$ e) $\int_1^{+\infty} \frac{t^2\operatorname{Arctan} t}{1+t^2}\,dt$ f) $\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{\sqrt{t}}\,dt$

g) $\int_1^{+\infty} \cos(t^2)\,dt$ h) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t(t^4+1)}\,dt$

Solution

HAUT

Exercice 15. Convergence et valeur de 8 intégrales.

Montrer la convergence et calculer la valeur des intégrales suivantes :

a) $\int_0^{+\infty} t^3 e^{-t}\,dt$ b) $\int_0^1 (\ln t)^2\,dt$ c) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t\sqrt{1+t^2}}\,dt$

d) $\int_0^{+\infty} \frac{t \ln t}{(t^2+1)^2}\,dt$ e) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\tan t}\,dt$ f) $\int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{1+e^t}{e^{2t}-2e^t+1}\,dt$

g) $\int_0^{\frac{1}{2}} \ln \frac{1}{1-3t+2t^2}\,dt$ h) $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+t^4}\,dt$

Solution

HAUT

Exercice 16. Convergence de l'intégrale de $f(t) / t$.

Soit $f : [1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue sur $[1, +\infty[$ telle que l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(t)\,dt$ converge.

Montrer l'existence et calculer la valeur de l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,dt$.

Solution

HAUT

Exercice 17. Limite en 0 de $x\,f\,(x)$.

Soit $f :]0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une application décroissante sur $]0, 1]$ telle que l'intégrale $\int_0^1 f\,(t)\,dt$ converge.

Montrer l'existence et déterminer la valeur de $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} x\,f\,(x)$.

Solution

HAUT

Exercice 18. Convergence et valeur de 2 intégrales.

Etudier la convergence et calculer la valeur des intégrales :

a) $\int_0^{+\infty} \left(2 + (t+3) \ln \frac{t+2}{t+4} \right) dt$ b) $\int_0^1 \frac{1}{t^2} \ln (1 - t^2)\, dt$

Solution

HAUT

Chapitre 11. Intégration.

Enoncés.

Exercice 1. Equation du 2e degré ayant pour coefficient une intégrale.

L'équation du deuxième degré: $$x^2 - \left(\int_0^2 e^{-t^2}\, dt \right) x + 1 = 0$$ possède-t-elle des solutions réelles ?	

Solution.

La fonction numérique $t \mapsto e^{-t^2}$ est positive et bornée. Elle est comprise entre e^{-4} et 1, lorsque t varie entre 0 et 2.

Soit I la valeur de l'intégrale $\int_0^2 e^{-t^2}\, dt$.

Le discriminant de l'équation du deuxième degré est $I^2 - 4$.

Sa valeur est comprise entre $e^{-8} - 4$ (qui est strictement plus petit que $1 - 4 = -3$, donc < 0), et $1 - 4 = -3 < 0$: $I^2 - 4 < 0$.

Comme le discriminant de l'équation du deuxième degré est strictement plus petit que 0, l'équation ne possède aucune racine réelle.

L'équation $x^2 - \left(\int_0^2 e^{-t^2}\, dt \right) x + 1 = 0$ ne possède aucune racine réelle.

Chapitre 11. Intégration.

Enoncés.

Exercice 2. Encadrement de π à l'aide d'intégrales.

1°/ Calculer les intégrales $I = \int_0^1 t^4 (1-t)^4 \, dt$ et $J = \int_0^1 \frac{t^4 (1-t)^4}{1+t^2} \, dt$. 2°/ Montrer que $\frac{I}{2} \leq J \leq I$. 3°/ En déduire l'encadrement : $\frac{22}{7} - \frac{1}{630} \leq \pi \leq \frac{22}{7} - \frac{1}{1260}$.	

Solution.

1°/ Calcul des intégrales.

$(1-t)^4 = 1 - 4t + 6t^2 - 4t^3 + t^4$

$t^4 (1-t)^4 = t^4 - 4t^5 + 6t^6 - 4t^7 + t^8$

$$\int_0^1 t^4 (1-t)^4 \, dt = \frac{1}{5} [t^5]_0^1 - \frac{4}{6} [t^6]_0^1 + \frac{6}{7} [t^7]_0^1 - \frac{4}{8} [t^8]_0^1 + \frac{1}{9} [t^9]_0^1$$

$$= \frac{1}{5} - \frac{4}{6} + \frac{6}{7} - \frac{4}{8} + \frac{1}{9} = \frac{6\times7\times8\times9 - 4\times5\times7\times8\times9 + 6\times5\times6\times8\times9 - 4\times5\times6\times7\times9 + 5\times6\times7\times8}{5\times6\times7\times8\times9}$$

$$= \frac{6\times7\times9 - 4\times5\times7\times9 + 6\times5\times6\times9 - 5\times3\times7\times9 + 5\times6\times7}{5\times6\times7\times9}$$

$$= \frac{378 - 1260 + 1620 - 945 + 210}{5\times6\times7\times9} = \frac{3}{5\times6\times7\times9} = \frac{1}{630}$$

$$\boxed{I = \frac{1}{630}}$$

$$\frac{t^4 (1-t)^4}{1+t^2} = \frac{t^8 - 4t^7 + 6t^6 - 4t^5 + t^4}{t^2+1} = t^6 - 4t^5 + 5t^4 - 4t^2 + 4 - \frac{4}{1+t^2}$$

$$\int_0^1 \frac{t^4 (1-t)^4}{1+t^2} \, dt = \frac{1}{7} [t^7]_0^1 - \frac{4}{6} [t^6]_0^1 + [t^5]_0^1 - \frac{4}{3} [t^3]_0^1 + 4 [t]_0^1 - 4 \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}$$

$$= \frac{1}{7} - \frac{4}{6} + 1 - \frac{4}{3} + 4 - 4 [\mathit{Arctan}\, t]_0^1 = 3 + \frac{1}{7} - \pi.$$

$$\boxed{J = \frac{22}{7} - \pi.}$$

2°/ Encadrement de *J*.

Lorsque t varie de 0 à 1, $\frac{1}{1+t^2}$ reste compris entre $\frac{1}{2}$ et 1, donc $\frac{t^4(1-t)^4}{1+t^2}$ reste compris entre $\frac{1}{2}t^4(1-t)^4$ et $t^4(1-t)^4$.
Comme l'intégration est une application croissante, il vient, quand on intègre de 0 à 1 :

$$\int_0^1 \frac{1}{2}t^4(1-t)^4\,dt \leq \int_0^1 \frac{t^4(1-t)^4}{1+t^2}\,dt \leq \int_0^1 t^4(1-t)^4\,dt$$

$$\boxed{\frac{I}{2} \leq J \leq I.}$$

3°/ Encadrement de π.

Compte tenu des valeurs de I et J obtenues dans la premiière question, la relation $\frac{I}{2} \leq J \leq I$ obtenue dans la deuxième question devient :

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{630} \leq \frac{22}{7} - \pi \leq \frac{1}{630}$$

La première inégalité donne $\pi \leq \frac{22}{7} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{630}$.
La deuxième inégalité donne $\frac{22}{7} - \frac{1}{630} \leq \pi$.
Rassemblons ces deux inégalités :

$$\boxed{\frac{22}{7} - \frac{1}{630} \leq \pi \leq \frac{22}{7} - \frac{1}{1260}.}$$

Chapitre 11. Intégration.

Enoncés.

Exercice 3. Norme en moyenne quadratique d'une fonction de classe C^1.

Soit $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continûment dérivable sur [0, 1] telle que $f(1) = 0$. 1°/ Calculer $\int_0^1 [f'(t) + (\tan t) f(t)]^2 \, dt$. 2°/ En déduire l'inégalité $\int_0^1 [f(t)]^2 \, dt \leq \int_0^1 [f'(t)]^2 \, dt$.	

Solution.

1°/ Calcul de l'intégrale.

Développons le carré : $[f'(t) + (\tan t) f(t)]^2 = [f'(t)]^2 + 2 (\tan t) f'(t) f(t) + (\tan t)^2 [f(t)]^2$

$$\int_0^1 [f'(t) + (\tan t) f(t)]^2 \, dt = \int_0^1 [f'(t)]^2 \, dt + \int_0^1 2 (\tan t) f'(t) f(t) \, dt + \int_0^1 (\tan t)^2 [f(t)]^2 \, dt.$$

Pour calculer $\int_0^1 2 (\tan t) f'(t) f(t) \, dt$, intégrons par parties en posant :

$u = \tan t$, $du = (1 + \tan^2 t) \, dt$
$dv = 2 f'(t) f(t) \, dt$, $v = [f(t)]^2$

La formule d'intégration par parties $\int u \, dv = u v - \int v \, du$, donne ici :

$$\int_0^1 2 (\tan t) f'(t) f(t) \, dt = [\tan t \times (f(t))^2]_0^1 - \int_0^1 (1 + \tan^2 t) [f(t)]^2 \, dt$$

Par hypothèse, $f(1) = 0$, et on a $\tan 0 = 0$, donc le terme tout intégré est nul et il reste :

$$\int_0^1 2 (\tan t) f'(t) f(t) \, dt = - \int_0^1 [f(t)]^2 \, dt - \int_0^1 \tan^2 t [f(t)]^2 \, dt$$

D'où, en reportant dans l'expression de $\int_0^1 [f'(t) + (\tan t) f(t)]^2 \, dt$:

$$\boxed{\int_0^1 [f'(t) + (\tan t)\, f(t)]^2\, dt = \int_0^1 [f'(t)]^2\, dt - \int_0^1 [f(t)]^2\, dt.}$$

2°/ Inégalité.

La relation obtenue dans la première question s'écrit aussi :

$$\int_0^1 [f'(t)]^2\, dt = \int_0^1 [f(t)]^2\, dt + \int_0^1 [f'(t) + (\tan t)\, f(t)]^2\, dt.$$

Comme l'intégrale d'une fonction positive est positive, $\int_0^1 [f'(t) + (\tan t)\, f(t)]^2\, dt$ est un nombre réel positif et l'on a :

$$\int_0^1 [f'(t)]^2\, dt \geq \int_0^1 [f(t)]^2\, dt$$

$$\boxed{\int_0^1 [f(t)]^2\, dt \leq \int_0^1 [f'(t)]^2\, dt.}$$

Remarquons que l'égalité ne peut se produire que si $\int_0^1 [f'(t) + (\tan t)\, f(t)]^2\, dt$ est nulle, ce qui veut dire que la fonction numérique $f'(t) + (\tan t)\, f(t)$ est identiquement nulle sur $]0, 1[$: $\frac{f'(t)}{f(t)} = -\frac{\sin t}{\cos t}$, soit $f(t) = k \cos t$.
La valeur de la constante k est fixée par la condition $f(1) = 0$, soit $k = 0$, d'où $f = 0$.
On peut donc affiner légèrement le résultat obtenu :

Si $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ est une application continûment dérivable **non identiquement nulle** sur $[0, 1]$ telle que $f(1) = 0$,
alors $\int_0^1 [f(t)]^2\, dt < \int_0^1 [f'(t)]^2\, dt$.

Chapitre 11. Intégration.

Enoncés.

Exercice 4. Fonction dont la norme en moyenne égale le carré de la norme en moyenne quadratique.

On se propose de déterminer l'ensemble K des applications continues de [0, 1] dans [0, 1] telles que : $$\int_0^1 f(t)\,dt = \int_0^1 [f(t)]^2\,dt.$$ 1°/ Soit $f \in K$. Montrer que, pour tout $t \in [0, 1]$, $f(t) \in [0, 1]$. 2°/ En déduire K.	

Solution.

1°/ Image de *f*.

Par hypothèse, $f \in K$ signifie que f est une application continue de [0, 1] dans [0, 1].
Donc pour tout $t \in [0, 1]$, $f(t) \in [0, 1]$.

2°/ Ensemble *K*.

Soit $f \in K$.
Nous avons $\int_0^1 f(t)\,dt = \int_0^1 [f(t)]^2\,dt$, donc $\int_0^1 f(t)\,(1 - f(t))\,dt = 0$.
Pour tout $t \in [\,0, 1\,]$, $f(t)$ est compris entre 0 et 1, donc positif, $1 - f(t)$ est compris entre 0 et 1, donc positif, et le produit est positif.
L'intégrale sur $[\,a, b\,]$, $a < b$, d'une fonction positive est un nombre positif, donc $\int_0^1 f(t)\,(1 - f(t))\,dt \geq 0$.
S'agissant d'application continue, l'intégrale ne peut être nulle que si l'application est identiquement nulle sur] 0, 1 [.
Donc pour tout $t \in\ ]\,0, 1\,[$, on a $f(t) = 0$ ou $f(t) = 1$, ce qui s'exprime par la relation :

$$\mathbf{(\forall\, t \in [\,0, 1\,])(\, f(t) = 0 \text{ ou } f(t) = 1)}$$

Supposons qu'il existe un $u \in\ ]\,0, 1\,[$ tel que $f(u)$ ne soit pas nul.
D'après ce qui précède, $f(u)$ vaut 1.

Comme f est continue, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $\eta > 0$, tel que $| t - u | < \eta \Rightarrow | f(t) - f(u) | < \varepsilon$.
Il suffit de prendre $\varepsilon = 1$, pour voir que dans l'intervalle $] u - \eta, u + \eta [$, $f(t)$ est constante et égale à 1.
Par continuité, f est constante et égale à 1 sur l'intervalle fermé $[u - \eta, u + \eta]$ dès que cet intervalle est inclus dans l'intervalle fermé [0, 1].
Soit **A le plus grand intervalle ouvert contenu dans] 0, 1 [, contenant u, et tel que f soit constante et égale à 1 dans un tel intervalle**.
Comme f est continue sur [0, 1], $f(t) = 1$ pour tout t adhérent à A.
Soit a la borne inférieure de A. a est adhérent à A, donc, par continuité de f, $f(a) = 1$.
Si a était différent de 0, on pourrait trouver un intervalle centré sur a, contenu dans] 0, 1 [, tel que f soit égal à 1 sur cet intervalle, ce qui contredit la définition de a. Conclusion : $a = 0$.
De même, la borne supérieure de A est égale à 1.
Autrement dit, f est constante et égale à 1 sur [0, 1].

On a donc $f = 0$ ou $f = 1$, ce qui s'exprime par la relation :

$$(\forall\, t \in [\,0, 1\,])(\, f(t) = 0) \text{ ou } (\forall\, t \in [\,0, 1\,])(\, f(t) = 1)$$

L'ensemble K est réduit à la fonction nulle et à la fonction constante et égale à 1 sur [0, 1].

Chapitre 11. Intégration.

Enoncés.

Exercice 5. Intégration et théorème des valeurs intermédiaires.

Soit $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue sur [0, 1], dérivable sur]0, 1[et telle que :

$$\int_0^1 f(t)\,dt = f(1).$$

Montrer qu'il existe $c \in]0, 1[$ tel que $f'(c) = 0$.

Solution.

L'intégration par parties $\int_0^1 f'(t)\,t\,dt = [\,t\,f(t)\,]_0^1 - \int_0^1 f(t)\,dt = f(1) - \int_0^1 f(t)\,dt$.

montre que la relation : $\int_0^1 f(t)\,dt = f(1)$, est équivalente à la relation $\int_0^1 f'(t)\,t\,dt = 0$.

Soit m la borne inférieure de $f'(t)$ sur] 0, 1 [, M sa borne supérieure.

On a $m \int_0^1 t\,dt \leq \int_0^1 f'(t)\,t\,dt \leq M \int_0^1 t\,dt$, donc, en multipliant par 2,

$$\boxed{m \leq 0 \leq M.}$$

1°/ Si $m = 0$, toutes les valeurs de f' sur] 0, 1 [sont positives ou nulles.

Si elles étaient toutes strictement positives, l'intégrale $\int_0^1 f'(t)\,t\,dt$ serait strictement positive, ce qui n'est pas.

Donc **il existe au moins un $c \in]0, 1[$ pour lequel la valeur $f'(c)$ est nulle** et le problème est résolu.

Si $m < 0$, il existe un $a \in]0, 1[$ tel que $f'(a) < 0$, par définition d'une borne inférieure.

2°/ Si $M = 0$, toutes les valeurs de f' sur] 0, 1 [sont négatives ou nulles.

Si elles étaient toutes strictement négatives, l'intégrale $\int_0^1 f'(t)\,t\,dt$ serait strictement négative, ce qui n'est pas.

Donc **il existe au moins un $c \in]0, 1[$ pour lequel la valeur $f'(c)$ est nulle** et le problème est résolu.

Si $M < 0$, il existe un $b \in]\,0, 1\,[$ tel que $f'(b) > 0$, par définition d'une borne supérieure.

3°/ Dans le cas où $m < 0$ et $M > 0$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires pour la dérivée (Chapitre 6, Exercice 5), il existe un $c \in]\,a, b\,[$ tel que $f'(c) = 0$. **Il existe donc un $c \in]\,0, 1\,[$ tel que $f'(c) = 0$**.

Chapitre 11. Intégration.

Enoncés.

Exercice 6. Limite d'une intégrale propre dépendant d'un paramètre.

Montrer l'existence et calculer $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \int_x^{3x} \frac{\cos t}{t}\, dt$.	

Solution.

Si x est positif et voisin de 0, lorsque t varie de x à $3x$, $\cos t$ reste compris entre $\cos 3x$ et $\cos x$.

$$\cos 3x \int_x^{3x} \frac{dt}{t} \leq \int_x^{3x} \frac{\cos t}{t}\, dt \leq \cos x \int_x^{3x} \frac{dt}{t}$$

$$\cos 3x \ln 3 \leq \int_x^{3x} \frac{\cos t}{t}\, dt \leq \cos x \ln 3$$

Lorsque x tend vers 0 par valeurs positives, $\cos 3x \ln 3$ tend vers $\ln 3$, $\cos x \ln 3$ tend vers $\ln 3$.
Donc, théorème des gendarmes, $\int_x^{3x} \frac{\cos t}{t}\, dt$ tend vers $\ln 3$.

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \int_x^{3x} \frac{\cos t}{t}\, dt = \ln 3.}$$

Chapitre 11. Intégration.

Enoncés.

Exercice 7. Etude de deux fonctions définies par une intégrale.

Etudier l'application $f : \mathrm{R} \longrightarrow \mathrm{R}$, définie, pour tout $x \in \mathrm{R}$ par la relation suivante, et tracer son graphe.

1°/ $f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{t^4+t^2+1}}\,dt$.

2°/ $f(x) = \displaystyle\int_0^{\sin^2 x} Arcsin\,(\sqrt{t})\,dt + \int_0^{\cos^2 x} Arccos\,(\sqrt{t})\,dt$.

Solution.

1°/ Première application.

L'application F définie par l'intégrale $F(u) = \displaystyle\int_0^u \frac{1}{\sqrt{t^4+t^2+1}}\,dt$ est une application continue et dérivable de R dans R.
Sa dérivée est $F'(u) = \dfrac{1}{\sqrt{u^4+u^2+1}}$.
F est une application impaire parce que $F(-u) = \displaystyle\int_0^{-u} \frac{1}{\sqrt{t^4+t^2+1}}\,dt = -\int_0^u \frac{1}{\sqrt{s^4+s^2+1}}\,ds$, comme on le voit en posant $s = -t$.
Donc $F(-u) = -F(u)$.
L'application f est liée à F par $f(x) = F(2x) - F(x)$: donc **f est une application continue et dérivable** de R dans R et sa dérivée est :

$$f'(x) = 2F'(2x) - F'(x) = \frac{2}{\sqrt{16x^4+4x^2+1}} - \frac{1}{\sqrt{x^4+x^2+1}}.$$

Comme F est impaire, **f est impaire** : $f(-x) = F(-2x) - F(-x) = -F(2x) + F(x) = -f(x)$.

Lorsque x tend vers 0, $F(x)$ tend vers 0, $F(2x)$ tend vers 0, donc $f(x)$ tend vers 0.
Lorsque x tend vers 0, $f'(x)$ tend vers 1 : $f'(x) \sim 2(1-2x^2) - (1 - \frac{1}{2}x^2) = 1 - \frac{7}{2}x^2$.

Lorsque x tend vers $+\infty$, $\dfrac{1}{\sqrt{t^4+t^2+1}} = \frac{1}{t^2}\left(1 + \frac{1}{t^2} + \frac{1}{t^4}\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{t^2} - \frac{1}{2t^4} + o\left(\frac{1}{t^6}\right)$.

$$f(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{t^4+t^2+1}}\,dt = -\left[\frac{1}{t}\right]_x^{2x} + \frac{3}{2}\left[\frac{1}{t^3}\right]_x^{2x} + o\left(\frac{1}{x^5}\right)$$
$$= \frac{1}{2x} - \frac{21}{16x^3} + o\left(\frac{1}{x^5}\right)$$

Donc $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0^+$.

Par symétrie, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0^-$.

$f'(x)$ est nul lorsque $\frac{2}{\sqrt{16x^4+4x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^4+x^2+1}}$,

soit $4x^4 + x^2 + \frac{1}{4} = x^4 + x^2 + 1$, $3x^4 = \frac{3}{4}$, $x^4 = \frac{1}{4}$, $x^2 = \frac{1}{2}$,

$x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Pour $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $f(x)$ prend la valeur $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{t^4+t^2+1}}\,dt = -f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

La valeur numérique peut être obtenue à l'aide de tables de fonctions elliptiques :

MAPLE 6 donne la valeur $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) =$ 0,389 990 045.

D'après le théorème de Rolle, il y a un point d'inflexion ($f''(x) = 0$) entre $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et l'infini (points où $f'(x) = 0$).

Symétriquement, il en existe un aussi entre $-\infty$ et $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

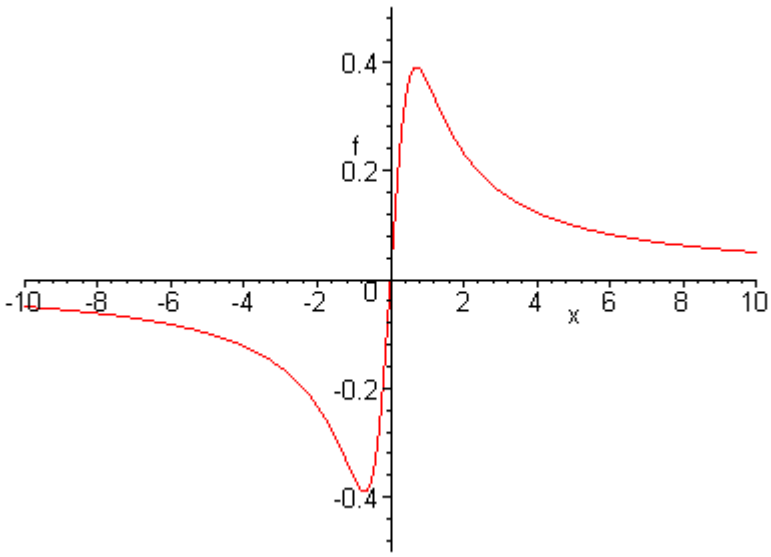


Tableau de variation.

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		0		$+\frac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$	0	–	0	+	1	+	0	–	0
$f(x)$	0	↘	$-$ 0,390	↗	0	↗	0,390	↘	0

La formule qui permet à MAPLE de construire la courbe représentative est :
> **plot(signum(x)*abs(int(1/sqrt(t^4+t^2+1),t=x..2*x)),x,f=-0.5..0.5);**
La fonction "**abs**" est nécessaire car MAPLE calcule l'intégrale sous forme complexe.
La fonction "**signum**" est alors nécessaire pour tenir compte de la parité de *f*.

2°/ Deuxième application.

Remarquons déjà que x intervient dans $f(x)$ par $\sin^2 x$ et par $\cos^2 x$, donc $f(x + \pi) = f(x)$, **la fonction *f* est périodique de période π**.

a) Première intégrale.

Dans l'intégrale $\int_0^{\sin^2 x} Arcsin\,(\sqrt{t})\,dt$, si l'on change x en $-x$, l'intégrale n'est pas modifiée, c'est une **fonction paire de x**.
Il suffit donc d'étudier l'intégrale lorsque x varie de 0 à $\frac{\pi}{2}$.
La valeur entre $-\frac{\pi}{2}$ et 0 s'en déduit par symétrie et la valeur en un x quelconque s'en déduit par périodicité.
Posons $u = Arcsin\,(\sqrt{t})$.
Comme t varie entre 0 et $\sin^2 x \leq 1$, $\sqrt{t}$ reste lui aussi entre 0 et 1 et u reste compris entre 0 et $Arcsin\ 1 = \frac{\pi}{2}$.
$t = \sin^2 u$, $dt = 2 \sin u \cos u\,du$, $t = 0 \Rightarrow u = 0$, $t = \sin^2 x \Rightarrow u = x$.

$$\int_0^{\sin^2 x} Arcsin\,(\sqrt{t})\,dt = \int_0^{x} 2\,u \sin u \cos u\,du.$$

b) Deuxième intégrale.

On peut faire une étude analogue pour l'intégrale $\int_0^{\cos^2 x} Arccos\,(\sqrt{t})\,dt$.
C'est une fonction périodique de x, de période p.
C'est une fonction paire de x.
Donc on peut restreindre l'étude à l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, le reste s'en déduira par symétrie et périodicité.

Posons $u = Arcos\,(\sqrt{t})$.
Comme t varie entre 0 et $\cos^2 x \leq 1$, $\sqrt{t}$ reste lui aussi entre 0 et 1 et u reste compris entre $Arcos\ 0 = \frac{\pi}{2}$ et $Arcos\ 1 = 0$.

$$t = \cos^2 u,\ dt = -2 \sin u \cos u\,du,\ t = 0 \Rightarrow u = \frac{\pi}{2},\ t = \cos^2 x \Rightarrow u = x.$$

$$\int_0^{\cos^2 x} Arccos\,(\sqrt{t})\,dt = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{x} 2\,u \sin u \cos u\,du = \int_x^{\frac{\pi}{2}} 2\,u \sin u \cos u\,du$$

$$\int_0^{\cos^2 x} Arccos\,(\sqrt{t})\,dt = \int_x^{\frac{\pi}{2}} 2\,u \sin u \cos u\,du.$$

c) Application *f*.

Au total, par addition des deux résultats précédents, nous obtenons, pour $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$:

$$f(x) = \int_0^{\sin^2 x} Arcsin(\sqrt{t})\, dt + \int_0^{\cos^2 x} Arccos(\sqrt{t})\, dt = \int_0^{x} 2\, u \sin u \cos u\, du + \int_x^{\frac{\pi}{2}} 2\, u \sin u \cos u\, du$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\, u \sin u \cos u\, du.$$

Nous voyons donc que f est une constante, sa valeur ne dépend pas de x.

Pour calculer la valeur de l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\, u \sin u \cos u\, du$, intégrons par parties :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\, u \sin u \cos u\, du = -\frac{1}{2}\left[u \cos 2u \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2u\, du = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}\left[\sin 2u \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.$$

Par parité dans l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ et périodicité de période π :

$$\boxed{f(x) = \frac{\pi}{4},\ \forall\, x \in \mathrm{R}.}$$

Chapitre 11. Intégration.

Enoncés.

Exercice 8. Norme de convergence uniforme d'une fonction de classe C^2.

Soit $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$, une application deux fois continûment dérivable sur $[0, 1]$, telle que $f(0) = f(1) = 0$.

1°/ Montrer que, pour tout $x \in [0, 1]$:

$$f(x) = (x-1)\int_0^x t\,f''(t)\,dt + x\int_x^1 (t-1)\,f''(t)\,dt.$$

2°/ On suppose de plus que, pour tout $t \in [0, 1]$, $|f''(t)| \leq 1$.

Justifier l'existence de $M = \sup_{t \in [0,1]} |f(t)|$, et montrer que $M \leq \frac{1}{8}$.

Solution.

1°/ Relation liant f et f''.

Pour $x \in]0, 1[$, l'intégrale $\int_x^1 (t-1)\,f''(t)\,dt$ se décompose en deux morceaux :

$$\int_x^1 (t-1)\,f''(t)\,dt = \int_x^1 t\,f''(t)\,dt - \int_x^1 f''(t)\,dt.$$

On a donc :

$$(x-1)\int_0^x t\,f''(t)\,dt + x\int_x^1 (t-1)\,f''(t)\,dt = x\left(\int_0^x t\,f''(t)\,dt + \int_x^1 t\,f''(t)\,dt\right) - \int_0^x t\,f''(t)\,dt - x\int_x^1 f''(t)\,dt.$$

$$\int_0^x t\,f''(t)\,dt + \int_x^1 t\,f''(t)\,dt = \int_0^1 t\,f''(t)\,dt.$$

Pour calculer l'intégrale $\int_0^x t\,f''(t)\,dt$, intégrons par parties :

$$\int_0^x t\,f''(t)\,dt = [\,t\,f'(t)\,]_0^x - \int_0^x f'(t)\,dt = x\,f'(x) - [\,f(t)\,]_0^x = x\,f'(x) - f(x) + f(0)$$

Comme f est deux fois continûment dérivable sur [0, 1], la formule reste valable pour $x = 1$.
Pour $x = 1$, cette formule donne $\int_0^1 t\,f''(t)\,dt = f'(1) - f(1) + f(0)$.

$$\int_x^1 f''(t)\,dt = [\,f'(t)\,]_x^1 = f'(1) - f'(x)$$

Il reste donc, en rassemblant ces résultats :

$$(x-1)\int_0^x t\,f''(t)\,dt + x\int_x^1 (t-1)\,f''(t)\,dt = x\,(f'(1) - f(1) + f(0)) - (x\,f'(x) - f(x) + f(0)) - x\,(f'(1) - f'(x))$$
$$= x\,(f'(1) - f(1) + f(0) - f'(x) - f'(1) + f'(x)) + f(x)$$
$$= f(x) - x\,(f(1) - f(0))$$

Dans l'hypothèse où $f(0) = f(1)$, il reste :

$$\boxed{f(x) = (x-1)\int_0^x t\,f''(t)\,dt + x\int_x^1 (t-1)\,f''(t)\,dt.}$$

Et comme $f(0) = f(1) = 0$, la formule reste encore valable pour $x = 0$ et pour $x = 1$.

2°/ Majoration de *f* en module.

Si l'on suppose que, pour tout $t \in [0, 1]$, $|f''(t)| \leq 1$, la formule précédente permet de majorer $|f(x)|$:

$$|f(x)| = \left|(x-1)\int_0^x t\,f''(t)\,dt + x\int_x^1 (t-1)\,f''(t)\,dt\right|$$
$$\leq \left|(x-1)\int_0^x t\,f''(t)\,dt\right| + \left|x\int_x^1 (t-1)\,f''(t)\,dt\right| \text{ (inégalité du triangle).}$$

Le module d'une intégrale est inférieur ou égal à l'intégrale du module, et l'intégration est une application croissante :

$$\left|(x-1)\int_0^x t\,f''(t)\,dt\right| = (1-x)\left|\int_0^x t\,f''(t)\,dt\right| \leq (1-x)\int_0^x t\,|f''(t)|\,dt \leq (1-x)\int_0^x t\,dt$$
$$\left|x\int_x^1 (t-1)\,f''(t)\,dt\right| = x\left|\int_x^1 (t-1)\,f''(t)\,dt\right| \leq x\int_x^1 |t-1|\,|f''(t)|\,dt \leq x\int_x^1 (1-t)\,dt.$$

Par addition, il reste :

$$|f(x)| \leq (1-x)\int_0^x t\,dt + x\int_x^1 (1-t)\,dt = \frac{1}{2}x^2(1-x) + \frac{1}{2}x(1-x)^2 = \frac{1}{2}x(1-x)$$

Or l'application $x \mapsto x\,(1 - x)$ possède un maximum $\frac{1}{4}$ pour $x = \frac{1}{2}$, donc :

$$\boxed{|f(x)| \leq \frac{1}{8},\ \forall\, x \in [\,0, 1\,].}$$

Chapitre 11. Intégration.

Enoncés.

Exercice 9. Convergence d'une suite définie par une intégrale.

Pour tout entier $n \in \mathrm{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{n!} e^{1-t}\, dt$.

1°/ Calculer I_0.

2°/ Montrer que, pour tout $n \in \mathrm{N}$, on a :

$$0 \leq I_n \leq \frac{1}{n!} I_0.$$

En déduire que la suite $(I_n)_{n \geq 0}$ est convergente et préciser sa limite.

3°/ Montrer que, pour tout entier $n \in \mathrm{N}^*$, on a :

$$I_n = I_{n-1} - \frac{1}{n!}.$$

4°/ Pour tout entier $n \in \mathrm{N}$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{k!}$.

Montrer que $I_n = e - S_n$.

En déduire que la suite $(S_n)_{n \geq 0}$ est convergente et déterminer sa limite.

Solution.

1°/ Calcul de I_0.

$$I_0 = \int_0^1 e^{1-t}\, dt = -e\,[\,e^{-t}\,]_0^1 = e - 1$$

$$\boxed{I_0 = e - 1}$$

2°/ Convergence de la suite $(I_n)_{n \geq 0}$.

a) Majoration de I_n.

Pour tout entier n, I_n est l'intégrale d'une fonction positive sur l'intervalle [0, 1] : c'est donc un nombre positif.
Lorsque t varie entre 0 et 1, t^n est majoré par 1, donc :

$$I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{n!} e^{1-t}\, dt \leq \int_0^1 \frac{1}{n!} e^{1-t}\, dt = \frac{1}{n!} I_0.$$

On obtient bien la relation :

$$\boxed{0 \leq I_n \leq \frac{1}{n!} I_0.}$$

b) Limite de la suite $(I_n)_{n \geq 0}$.

Lorsque n augmente indéfiniment, $\frac{1}{n!}$ tend vers 0, donc $\frac{1}{n!} I_0$ tend vers 0.
La suite $(I_n)_{n \geq 0}$ est une suite à termes positifs, majorée par une suite tendant vers 0.
D'après le théorème des gendarmes, la suite $(I_n)_{n \geq 0}$ est convergente et sa limite est 0.

3°/ Relation de récurrence.

Pour un entier $n \geq 1$, calculons l'intégrale $I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{n!} e^{1-t}\, dt$ en intégrant par parties.

On pose : $u = \frac{t^n}{n!}$, donc $du = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\, dt$. Pour avoir $dv = e^{1-t}\, dt$, on prend $v = -e^{1-t}$.

L'intégrale s'écrit $I_n = \int u\, dv = uv - \int v\, du = \left[-\frac{t^n}{n!} e^{1-t} \right]_{t=0}^{t=1} + \int_0^1 \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{1-t}\, dt.$

$$\boxed{I_n = -\frac{1}{n!} + I_{n-1}.}$$

4°/ Suite $(S_n)_{n \geq 0}$.

La relation de récurrence $I_k = I_{k-1} - \frac{1}{k!}$ donne, par sommation de $k = 1$ à $k = n$:

$$I_1 + \ldots + I_n = I_0 + \ldots + I_{n-1} - \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k!}$$

Simplifions par les termes communs à droite et à gauche, il reste :

$$I_n = I_0 - (S_n - 1)$$
$$I_n = e - 1 - (S_n - 1)$$
$$I_n = e - S_n$$

Lorsque n augmente indéfiniment, I_n tend vers 0, donc $e - S_n$ tend vers 0 et S_n tend vers e.

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k!} = e.$$

Ce résultat s'écrit aussi : $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e$: c'est la "série de l'exponentielle", à encadrer et à savoir par coeur !

Chapitre 11. Intégration.

Enoncés.

Exercice 10. Calcul de 21 primitives.

Calculer les primitives suivantes :

a) $\int \frac{x^2}{1+x^2}\,dx$ b) $\int \frac{2x+1}{x^2(x+1)^2}\,dx$ c) $\int \sin^2 x\,dx$

d) $\int \frac{1+x+x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ e) $\int \frac{dx}{\cos^2 x \sin^2 x}$ f) $\int \frac{dx}{\sin x}$

g) $\int \frac{dx}{5\cosh x + 3\sinh x + 4}$ h) $\int \frac{e^{Arc\sin x}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ i) $\int \frac{\left(\ln\left|\ln|x|\right|\right)^2}{x\ln|x|}\,dx$

j) $\int \frac{1-\cos\frac{x}{3}}{\sin\frac{x}{2}}\,dx$ k) $\int \frac{\sqrt{x^{10}+1}}{x}\,dx$ l) $\int \frac{\tan x}{2+\tan^2 x}\,dx$

m) $\int x^4 \ln|x|\,dx$ n) $\int (x^3+1)\,e^{-x}\,dx$ o) $\int (Arcsin\,x)^2\,dx$

p) $\int \sinh x \sin x\,dx$ q) $\int \sinh^2 x \sin^2 x\,dx$ r) $\int \ln(x^2+4x+5)\,dx$

s) $\int x\sqrt{-x^2+3x-2}\,dx$ t) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+x+2}}\,dx$ u) $\int \frac{dx}{\sin x\sqrt{1-\cos x}}$

Solution.

a) Fraction rationnelle.

HAUT

$$\frac{x^2}{1+x^2} = 1 - \frac{1}{1+x^2}$$

$$\int \frac{x^2}{1+x^2}\,dx = \int dx - \int \frac{dx}{1+x^2} = x - Arctan\,x + constante.$$

$$\boxed{\int \frac{x^2}{1+x^2}\,dx = x - Arctan\,x + constante.}$$

HAUT

b) Fraction rationnelle.

HAUT

$$\frac{2x+1}{x^2(x+1)^2} = \frac{a}{x^2} + \frac{b}{x} + \frac{c}{(x+1)^2} + \frac{d}{x+1}$$

Pour calculer a, multiplions par x^2 et faisons $x = 0$: $a = 1$.
Pour calculer c, multiplions par $(x + 1)^2$ et faisons $x = -1$: $c = -1$.

Pour calculer b, calculons $\frac{2x+1}{x^2(x+1)^2} - \frac{a}{x^2} = -\frac{1}{(x+1)^2}$, puis multiplions par x et faisons $x = 0$: $b = 0$.

Pour calculer d, calculons $\frac{2x+1}{x^2(x+1)^2} - \frac{c}{(x+1)^2} = \frac{1}{x^2}$, puis multiplions par $x + 1$ et faisons $x = -1$: $d = 0$.

D'où : $\frac{2x+1}{x^2(x+1)^2} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x+1)^2}$.

$$\int \frac{2x+1}{x^2(x+1)^2}\,dx = \int \frac{1}{x^2}\,dx - \int \frac{1}{(x+1)^2}\,dx = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + constante = -\frac{1}{x(x+1)} + constante.$$

$$\boxed{\int \frac{2x+1}{x^2(x+1)^2}\,dx = -\frac{1}{x(x+1)} + constante.}$$

HAUT

c) Fonction trigonométrique.

HAUT

$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$
$\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$
$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$

$$\int \sin^2 x\,dx = \int \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)\,dx = \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos 2x\,dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x + constante.$$

$$\boxed{\int \sin^2 x\,dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x + constante.}$$

HAUT

d) Fonction avec radical de $1 - x^2$.

HAUT

$$\frac{1+x+x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \sqrt{1-x^2}.$$

$$\int \frac{1+x+x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx + \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx - \int \sqrt{1-x^2}\,dx.$$

$$\int \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = 2\,Arcsin\,x + constante$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{1-u}} = -\sqrt{1-u} + constante = -\sqrt{1-x^2} + constante.$$

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \int \sqrt{1-\cos^2 u}\,(-\sin u)\,du = -\int \sin^2 u\,du = \frac{u}{2} - \frac{1}{4}\sin 2u + \text{constante} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Arcos } x - \frac{1}{2}\,x\sqrt{1-x^2} + \text{constante}$$

$$\int \frac{1+x+x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = 2\,\text{Arcsin } x - \sqrt{1-x^2} - \frac{1}{2}\,\text{Arcos } x + \frac{1}{2}\,x\sqrt{1-x^2} + \text{constante.}$$

$$\text{Arcos } x + \text{Arcsin } x = \text{constante}$$

$$\boxed{\int \frac{1+x+x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{5}{2}\,\text{Arcsin } x + \frac{1}{2}\,(x-2)\sqrt{1-x^2} + \text{constante.}}$$

HAUT

e) Fonctions trigonométriques.

HAUT

$$\frac{1}{\cos^2 x \sin^2 x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x \sin^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x}$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x \sin^2 x} = \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x} = \tan x - \text{cotan } x + \text{constante} = \frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\cos x}{\sin x} + \text{constante}$$

$$= -2\,\frac{\cos 2x}{\sin 2x} + \text{constante.}$$

Méthode alternative.

$$\frac{1}{\cos^2 x \sin^2 x} = \frac{4}{\sin^2 2x}$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x \sin^2 x} = 2\int \frac{d(2x)}{\sin^2 2x} = -2\,\text{cotan } 2x + \text{constante.}$$

$$\boxed{\int \frac{dx}{\cos^2 x \sin^2 x} = -2\,\text{cotan } 2x + \text{constante.}}$$

HAUT

f) Fraction rationnelle de fonctions trigonométriques.

HAUT

$$t = \tan\frac{x}{2},\ dt = \frac{1}{2}\,(1+t^2)\,dx,\ dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt,\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2}.$$

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + \text{constante} = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + \text{constante.}$$

$$\boxed{\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + \text{constante.}}$$

HAUT

g) Fraction rationnelle de fonctions hyperboliques.

HAUT

$t = \tanh \frac{x}{2}$, $dt = \frac{1}{2}(1 - t^2)\,dx$, $dx = \frac{2}{1-t^2}\,dt$.

$\cosh x = \frac{1+t^2}{1-t^2}$, $\sinh x = \frac{2t}{1-t^2}$

$$\frac{1}{5\cosh x + 3\sinh x + 4} = \frac{1-t^2}{5(1+t^2) + 3\times 2t + 4(1-t^2)} = \frac{1-t^2}{t^2+6t+9} = \frac{1-t^2}{(t+3)^2}$$

$$\int \frac{dx}{5\cosh x + 3\sinh x + 4} = 2\int \frac{dt}{(t+3)^2} = -\frac{2}{t+3} + \text{constante} = -\frac{2\cosh\frac{x}{2}}{\sinh\frac{x}{2} + 3\cosh\frac{x}{2}} + \text{constante}.$$

$$\boxed{\int \frac{dx}{5\cosh x + 3\sinh x + 4} = -\frac{2\cosh\frac{x}{2}}{\sinh\frac{x}{2} + 3\cosh\frac{x}{2}} + \text{constante}.}$$

HAUT

h) Fonction de *Arc sin x*.

HAUT

$u = \text{Arc sin } x$, $du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

$$\int \frac{e^{\text{Arc sin } x}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int e^u\,du = e^u + \text{constante} = e^{\text{Arc sin } x} + \text{constante}.$$

$$\boxed{\int \frac{e^{\text{Arc sin } x}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = e^{\text{Arc sin } x} + \text{constante}.}$$

HAUT

i) Fonction de *ln | x |*.

HAUT

$u = \ln|x|$, $du = \frac{dx}{x}$.

$$\int \frac{(\ln|\ln|x||)^2}{x\ln|x|}\,dx = \int \frac{(\ln|u|)^2}{u}\,du$$

$v = \ln|u|$, $dv = \frac{du}{u}$.

$$\int \frac{(\ln|u|)^2}{u}\,du = \int v^2\,dv = \frac{1}{3}v^3 + \text{constante} = \frac{1}{3}(\ln|u|)^3 + \text{constante} = \frac{1}{3}(\ln|\ln|x||)^3 + \text{constante}$$

$$\boxed{\int \frac{(\ln|\ln|x||)^2}{x\ln|x|}\,dx = \frac{1}{3}(\ln|\ln|x||)^3 + \text{constante}.}$$

HAUT

j) Fraction rationnelle de sinus et cosinus.

HAUT

$t = \tan \frac{x}{6}$, $dt = \frac{1}{6}(1 + t^2)\, dx$, $dx = 6 \frac{dt}{1+t^2}$.

$\cos \frac{x}{3} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $1 - \cos \frac{x}{3} = 1 - \frac{1-t^2}{1+t^2} = \frac{2t^2}{1+t^2} = t \sin \frac{x}{3}$

$\tan \frac{x}{3} = \frac{2t}{1-t^2}$

$\sin \frac{x}{2} = \sin\left(\frac{x}{3} + \frac{x}{6}\right) = \sin \frac{x}{3} \cos \frac{x}{6} + \cos \frac{x}{3} \sin \frac{x}{6}$

$\cos \frac{x}{6} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$, $\sin \frac{x}{6} = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$

$\frac{1-\cos\frac{x}{3}}{\sin\frac{x}{2}} = t \tan \frac{x}{3} \times \frac{1}{\tan\frac{x}{3}\cos\frac{x}{6} + \sin\frac{x}{6}} = 2t^2 \times \frac{\sqrt{1+t^2}}{2t + t(1-t^2)} = 2t \frac{\sqrt{1+t^2}}{3-t^2}$

$\int \frac{1-\cos\frac{x}{3}}{\sin\frac{x}{2}}\, dx = 12 \int \frac{1}{3-t^2} \frac{t\, dt}{\sqrt{1+t^2}}$

$u = \sqrt{1+t^2} = \frac{1}{\cos\frac{x}{6}}$, $du = \frac{t\, dt}{\sqrt{1+t^2}}$,

$t^2 = u^2 - 1$, $3 - t^2 = 3 - (u^2 - 1) = 4 - u^2$.

$12 \int \frac{1}{3-t^2} \frac{t\, dt}{\sqrt{1+t^2}} = 12 \int \frac{du}{4-u^2}$

$\frac{1}{4-u^2} = \frac{a}{2-u} + \frac{b}{2+u}$

Pour calculer a, on multiplie par $2 - u$ et on prend $u = 2$: $a = \frac{1}{4}$.

Pour calculer b, on multiplie par $2 + u$ et on prend $u = -2$: $b = \frac{1}{4}$.

$\frac{1}{4-u^2} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2-u} + \frac{1}{2+u}\right)$

$12 \int \frac{du}{4-u^2} = \frac{1}{3}\int \frac{du}{2-u} + \frac{1}{3}\int \frac{du}{2+u} = -\frac{1}{3} \ln|2-u| + \frac{1}{3} \ln|2+u| + \text{constante}$

$= \frac{1}{3} \ln\left|\frac{2+u}{2-u}\right| + \text{constante} = \frac{1}{3} \ln\left|\frac{2\cos\frac{x}{6}+1}{2\cos\frac{x}{6}-1}\right| + \text{constante}.$

$$\int \frac{1-\cos\frac{x}{3}}{\sin\frac{x}{2}}\,dx = \frac{1}{3}\,\ln\left|\frac{2\cos\frac{x}{6}+1}{2\cos\frac{x}{6}-1}\right| + \text{constante}.$$

HAUT

k) Fonction avec racine de $x^{10} + 1$.

HAUT

$u = x^5$, $\frac{du}{u} = 5\,\frac{dx}{x}$.

$$\int \frac{\sqrt{x^{10}+1}}{x}\,dx = \frac{1}{5}\int \sqrt{1+u^2}\,\frac{du}{u}$$

$t = u^2 + 1$, $dt = 2\,u\,du = 2\,u^2\,\frac{du}{u} = 2\,(t-1)\,\frac{du}{u}$

$$\frac{du}{u} = \frac{1}{2}\,\frac{dt}{t-1}$$

$$\frac{1}{5}\int \sqrt{1+u^2}\,\frac{du}{u} = \frac{1}{10}\int \sqrt{t}\,\frac{dt}{t-1}$$

$v = \sqrt{t}$, $\frac{dv}{v} = \frac{1}{2}\,\frac{dt}{t}$, $dt = 2\,v\,dv$

$$\frac{1}{10}\int \sqrt{t}\,\frac{dt}{t-1} = \frac{1}{5}\int \frac{v^2}{v^2-1}\,dv$$

$$\frac{v^2}{v^2-1} = 1 + \frac{1}{v^2-1} = 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{v-1} - \frac{1}{v+1}\right)$$

$$\frac{1}{5}\int \frac{v^2}{v^2-1}\,dv = \frac{1}{5}\int dv + \frac{1}{10}\int \frac{dv}{v-1} - \frac{1}{10}\int \frac{dv}{v+1}$$

$$\int \frac{\sqrt{x^{10}+1}}{x}\,dx = \frac{1}{5}\,v + \frac{1}{10}\,\ln|v-1| - \frac{1}{10}\,\ln|v+1| + \text{constante}.$$

$$= \frac{1}{5}\,v + \frac{1}{10}\,\ln|(v-1)(v+1)| - \frac{1}{5}\,\ln|v+1| + \text{constante}.$$

$v = \sqrt{t} = \sqrt{1+u^2} = \sqrt{x^{10}+1} > 0$

$(v-1)(v+1) = v^2 - 1 = t - 1 = u^2 = x^{10} > 0$; $\ln(x^{10}) = 10\,\ln|x|$.

$v + 1 = \sqrt{x^{10}+1} + 1 > 0$

$$\int \frac{\sqrt{x^{10}+1}}{x}\,dx = \frac{1}{5}\,\sqrt{x^{10}+1} - \frac{1}{5}\,\ln\left(\sqrt{x^{10}+1}+1\right) + \ln|x| + \text{constante}.$$

$$\int \frac{\sqrt{x^{10}+1}}{x}\,dx = \frac{1}{5}\,\sqrt{x^{10}+1} - \frac{1}{5}\,\ln\left(\sqrt{x^{10}+1}+1\right) + \ln|x| + \text{constante}.$$

HAUT

l) Fonction avec *tan x*.

HAUT

$$\frac{\tan x}{2+\tan^2 x} = \frac{\sin x \cos x}{2\cos^2 x + \sin^2 x} = \frac{\sin x \cos x}{\cos^2 x + 1}$$

$u = \cos^2 x + 1$, $du = -2 \sin x \cos x \, dx$

$$\int \frac{\tan x}{2+\tan^2 x} dx = -\frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = -\frac{1}{2} \ln |u| + \text{constante} = -\frac{1}{2} \ln (\cos^2 x + 1) + \text{constante}.$$

$$\boxed{\int \frac{\tan x}{2+\tan^2 x} dx = -\frac{1}{2} \ln (\cos^2 x + 1) + \text{constante}.}$$

HAUT

m) Produit de puissance et de logarithme.

HAUT

Pour calculer $\int x^4 \ln |x| \, dx$, on intégre par parties, en posant :

$u = \ln |x|$, $du = \frac{dx}{x}$.

Pour avoir $dv = x^4 \, dx$, on prend $v = \frac{x^5}{5}$.

$$\int x^4 \ln |x| \, dx = \int u \, dv = uv - \int v \, du = \frac{1}{5} x^5 \ln |x| - \frac{1}{5} \int x^4 \, dx$$
$$= \frac{1}{5} x^5 \ln |x| - \frac{1}{25} x^5 + \text{constante}.$$
$$= \frac{x^5}{25} (5 \ln |x| - 1) + \text{constante}.$$

$$\boxed{\int x^4 \ln |x| \, dx = \frac{x^5}{25} (5 \ln |x| - 1) + \text{constante}.}$$

HAUT

n) Produit d'un polynôme et d'une exponentielle.

HAUT

Pour calculer $\int (x^3 + 1) e^{-x} \, dx$, **on intégre par parties**, en posant :

$u = x^3 + 1$, $du = 3x^2 \, dx$.

Pour avoir $dv = e^{-x} \, dx$, on prend $v = -e^{-x}$.

$$\int (x^3 + 1)\, e^{-x}\, dx = \int u\, dv = u\, v - \int v\, du = -(x^3 + 1)\, e^{-x} + 3 \int x^2\, e^{-x}\, dx.$$

On a ainsi abaissé d'une unité le degré du polynôme.

Pour calculer $\int x^2\, e^{-x}\, dx$, on **intègre par parties** en posant :

$u = x^2$, $dx = 2\, x\, dx$.
Pour avoir $dv = e^{-x}\, dx$, on prend $v = -e^{-x}$.

$$\int x^2\, e^{-x}\, dx = \int u\, dv = u\, v - \int v\, du = -x^2\, e^{-x} + 2 \int x\, e^{-x}\, dx.$$
$$\int (x^3 + 1)\, e^{-x}\, dx = -(x^3 + 1)\, e^{-x} - 3\, x^2\, e^{-x} + 6 \int x\, e^{-x}\, dx.$$
$$\int (x^3 + 1)\, e^{-x}\, dx = -(x^3 + 3\, x^2 + 1)\, e^{-x} + 6 \int x\, e^{-x}\, dx.$$

On a encore abaissé d'une unité le polynôme figurant dans l'intégrale.

Pour calculer $\int x\, e^{-x}\, dx$, on **intègre par parties** en posant :

$u = x$, $du = dx$.
Pour avoir $dv = e^{-x}\, dx$, on prend $v = -e^{-x}$.

$$\int x\, e^{-x}\, dx = \int u\, dv = u\, v - \int v\, du = -x\, e^{-x} + \int e^{-x}\, dx$$
$$= -x\, e^{-x} - e^{-x} + constante.$$

$$\int (x^3 + 1)\, e^{-x}\, dx = -(x^3 + 3\, x^2 + 1)\, e^{-x} - 6\, x\, e^{-x} - 6\, e^{-x} + constante.$$
$$\int (x^3 + 1)\, e^{-x}\, dx = -(x^3 + 3\, x^2 + 6\, x + 7)\, e^{-x} + constante.$$

$$\boxed{\int (x^3 + 1)\, e^{-x}\, dx = -(x^3 + 3\, x^2 + 6\, x + 7)\, e^{-x} + constante.}$$

HAUT

o) Fonction avec *Arc sin*.

HAUT

Si l'on pose $t = Arc\ sin\ x$, on obtient $x = sin\ t$, $dx = cos\ t\ dt$

$$\int (Arcsin\ x)^2\, dx = \int t^2\, cos\ t\, dt.$$

Pour calculer $\int t^2\, cos\ t\, dt$, **on intègre par parties**, en posant :

$u = t^2$, $du = 2\,t\,dt$.
Pour avoir $dv = \cos t\,dt$, on prend $v = \sin t$.

$$\int t^2 \cos t\,dt = \int u\,dv = u\,v - \int v\,du = t^2 \sin t - 2\int t \sin t\,dt.$$

On a ainsi abaissé d'une unité le polynôme figurant dans l'intégrale.

Pour calculer $\int t \sin t\,dt$, on **intègre par parties** en posant :

$u = t$, $du = dt$.
Pour avoir $dv = \sin t\,dt$, on prend $v = -\cos t$.

$$\int t \sin t\,dt = \int u\,dv = u\,v - \int v\,du = -t\cos t + \int \cos t\,dt = -t\cos t + \sin t + constante.$$

$$\int t^2 \cos t\,dt = t^2 \sin t - 2\,(-t\cos t + \sin t) + constante.$$
$$= (t^2 - 2)\sin t + 2\,t\cos t + constante.$$

$t = Arc\sin x$, $\sin t = x$, $\cos t = \sqrt{1-x^2}$.

$$\int (Arcsin\,x)^2\,dx = ((Arc\sin x)^2 - 2)\,x + 2\sqrt{1-x^2}\,Arc\sin x + constante.$$

$$\boxed{\int (Arcsin\,x)^2\,dx = ((Arc\sin x)^2 - 2)\,x + 2\sqrt{1-x^2}\,Arc\sin x + constante.}$$

HAUT

p) Fonction avec *sin* et *sinh*.

HAUT

$\sin x$ est la partie imaginaire de e^{ix}.
$\sinh x \sin x$ est la partie imaginaire de :

$$\sinh x \times e^{ix} = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})\,e^{ix}$$
$$= \frac{1}{2}(e^{(i+1)x} - e^{(i-1)x}).$$

Par intégration, $\int \sinh x \sin x\,dx$ est donc la partie imaginaire de

$$\frac{1}{2}\int e^{(i+1)x}\,dx - \frac{1}{2}\int e^{(i-1)x}\,dx = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+i}\,e^{(i+1)x} + \frac{1}{1-i}e^{(i-1)x}\right) + constante$$
$$= \frac{1}{4}((1-i)\,e^{(i+1)x} + (1+i)\,e^{(i-1)x}) + constante$$
$$= \frac{1}{4}((1-i)\,e^x + (1+i)\,e^{-x})(\cos x + i\sin x) + constante$$

$= \frac{1}{4}(2\cosh x - 2i\sinh x)(\cos x + i\sin x) + constante$

$= \frac{1}{2}(\cosh x - i\sinh x)(\cos x + i\sin x) + constante$

$= \frac{1}{2}((\cosh x \cos x + \sinh x \sin x) + i(\cosh x \sin x - \sinh x \cos x)) + constante$

D'où :

$$\int \sinh x \sin x\, dx = \frac{1}{2}(\cosh x \sin x - \sinh x \cos x) + constante.$$

HAUT

q) Fonction avec *sin* ² et *sinh* ².

HAUT

$\sinh^2 x = \frac{1}{4}(e^x - e^{-x})^2 = \frac{1}{4}(e^{2x} + e^{-2x} - 2) = \frac{1}{2}(\cosh 2x - 1)$

$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$
$\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$
$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$

$\sin^2 x$ est la partie réelle de $\frac{1}{2}(1 - e^{2ix})$

$\sinh^2 x \sin^2 x$ est la partie réelle de

$$\frac{1}{8}(e^{2x} + e^{-2x} - 2)(1 - e^{2ix}) = \frac{1}{4}(\cosh 2x - 1) - \frac{1}{8}(e^{2(i+1)x} + e^{2(i-1)x}) + \frac{1}{4}e^{2ix}$$

Comme la partie réelle de e^{2ix} est $\cos 2x$, $\sinh^2 x \sin^2 x$ est la partie réelle de :

$$\frac{1}{4}(\cosh 2x + \cos 2x - 1) - \frac{1}{8}(e^{2(i+1)x} + e^{2(i-1)x})$$

Et $\int \sinh^2 x \sin^2 x\, dx$ est la partie réelle de :

$$\frac{1}{4}\int (\cosh 2x + \cos 2x - 1)\, dx - \frac{1}{8}\left(\int e^{2(i+1)x}\, dx + \int e^{2(i-1)x}\, dx\right)$$

$$= \frac{1}{8}(\sinh 2x + \sin 2x - x) - \frac{1}{16}\left(\frac{1}{1+i}e^{2(i+1)x} - \frac{1}{1-i}e^{2(i-1)x}\right) + constante$$

$$= \frac{1}{8}(\sinh 2x + \sin 2x - x) - \frac{1}{32}\left((1-i)e^{2(i+1)x} - (1+i)e^{2(i-1)x}\right) + constante$$

$(1-i)e^{2(i+1)x} - (1+i)e^{2(i-1)x} = ((1-i)e^{2x} - (1+i)e^{-2x})(\cos 2x + i\sin 2x)$
$= 2(\sinh 2x - i\cosh 2x)(\cos 2x + i\sin 2x)$
$= 2(\sinh 2x \cos 2x + \cosh 2x \sin 2x) + 2i(\sinh 2x \sin 2x - \cosh 2x \cos 2x)$

Donc :

$$\int \sinh^2 x \sin^2 x \, dx = \frac{1}{8}(\sinh 2x + \sin 2x - x) - \frac{1}{16}(\sinh 2x \cos 2x + \cosh 2x \sin 2x) + \text{constante}$$

$$\boxed{\int \sinh^2 x \sin^2 x \, dx = \frac{1}{8}(\sinh 2x + \sin 2x - x) - \frac{1}{16}(\sinh 2x \cos 2x + \cosh 2x \sin 2x) + \text{constante}.}$$

HAUT

r) Fonction avec *logarithme* d'un polynôme.

HAUT

$x^2 + 4x + 5 = (x + 2)^2 + 1$
$t = x + 2$, $dt = dx$.

$$\int \ln (x^2 + 4x + 5) \, dx = \int \ln (t^2 + 1) \, dt$$

Intégrons par parties pour faire disparaître le logarithme.
$u = \ln (t^2 + 1)$, $du = 2t \frac{dt}{1+t^2}$
Pour avoir $dv = dt$, on prend $v = t$.

$$\int \ln (t^2 + 1) \, dt = \int u \, dv = uv - \int v \, du = t \ln (t^2 + 1) - 2 \int t^2 \frac{dt}{1+t^2}$$

$$\frac{t^2}{1+t^2} = 1 - \frac{1}{1+t^2}$$
$$\int t^2 \frac{dt}{1+t^2} = \int dt - \int \frac{dt}{1+t^2} = t - \text{Arctan } t + \text{constante}$$
$$\int \ln (x^2 + 4x + 5) \, dx = t \ln (t^2 + 1) - 2 (t - \text{Arctan } t) + \text{constante}$$
$$= (x + 2) \ln (x^2 + 4x + 5) - 2 (x + 2 - \text{Arctan } (x + 2)) + \text{constante}.$$

$$\boxed{\int \ln (x^2 + 4x + 5) \, dx = (x + 2) [\ln (x^2 + 4x + 5) - 2] + 2 \, \text{Arctan } (x + 2) + \text{constante}.}$$

HAUT

s) Fonction avec *radical* d'un trinôme du deuxième degré.

HAUT

$-x^2 + 3x - 2$ est nul pour $x = 1$: $-x^2 + 3x - 2 = (x - 1)(2 - x)$
et le trinôme est positif lorsque x est compris entre les racines 1 et 2.
Par souci de symétrie, nous posons $x = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} t$, avec un t qui reste compris entre – 1 et + 1, lorsque x

reste compris entre 1 et 2.

$x - 1 = \frac{1}{2}(t + 1)$; $2 - x = \frac{1}{2}(1 - t)$

$-x^2 + 3x - 2 = \frac{1}{4}(1 - t^2)$

$dx = \frac{1}{2}\,dt$

$$\int x\sqrt{-x^2+3x-2}\,dx = \frac{1}{8}\int (t+3)\sqrt{1-t^2}\,dt = \frac{1}{8}\int t\sqrt{1-t^2}\,dt + \frac{3}{8}\int \sqrt{1-t^2}\,dt$$

Pour calculer $\int t\sqrt{1-t^2}\,dt$, on pose $u = \sqrt{1-t^2}$, $u^2 = 1 - t^2$, $u\,du = -t\,dt$.

$$\int t\sqrt{1-t^2}\,dt = -\int u^2\,du = -\frac{1}{3}u^3 + constante$$

$$= -\frac{1}{3}(1-t^2)^{\frac{3}{2}} + constante = -\frac{8}{3}(-x^2+3x-2)^{\frac{3}{2}} + constante.$$

Pour calculer $\int \sqrt{1-t^2}\,dt$, nous posons $t = \sin u$, $dt = \cos u\,du$, $\sqrt{1-t^2} = \cos u$,

$$\int \sqrt{1-t^2}\,dt = \int \cos^2 u\,du = \frac{1}{2}\int (1 + \cos 2u)\,du = \frac{u}{2} + \frac{1}{4}\sin 2u + constante$$

$$= \frac{1}{2}\,Arc\sin t + \frac{1}{2}\,t\sqrt{1-t^2} + constante$$

$$= \frac{1}{2}Arc\sin(2x-3) + (2x-3)\sqrt{-x^2+3x-2} + constante.$$

Au total, il vient :

$$\int x\sqrt{-x^2+3x-2}\,dx = \frac{1}{8}\left(-\frac{8}{3}(-x^2+3x-2)^{\frac{3}{2}}\right) + \frac{3}{8}\left(\frac{1}{2}Arc\sin(2x-3) + (2x-3)\sqrt{-x^2+3x-2}\right) + constante$$

$$= -\frac{1}{3}(-x^2+3x-2)^{\frac{3}{2}}) + \frac{3}{16}Arc\sin(2x-3) + \frac{3}{8}(2x-3)\sqrt{-x^2+3x-2} + constante$$

$$\int x\sqrt{-x^2+3x-2}\,dx = -\frac{1}{3}(-x^2+3x-2)^{\frac{3}{2}}) + \frac{3}{16}Arc\sin(2x-3) + \frac{3}{8}(2x-3)\sqrt{-x^2+3x-2} + constante$$

HAUT

t) Fonction avec *radical* d'un trinôme du deuxième degré.

HAUT

$$x^2 + x + 2 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} = \frac{7}{4}\left(\left(\frac{2x+1}{\sqrt{7}}\right)^2 + 1\right)$$

Posons $t = \frac{2x+1}{\sqrt{7}}$, $x = \frac{1}{2}(t\sqrt{7} - 1)$, $dx = \frac{\sqrt{7}}{2}\,dt$.

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+x+2}}dx = \frac{\sqrt{7}}{2}\frac{t\,dt}{\sqrt{1+t^2}} - \frac{1}{2}\frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+x+2}}dx = \frac{\sqrt{7}}{2}\int \frac{t\,dt}{\sqrt{1+t^2}} - \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}$$

Pour calculer $\int \frac{t\,dt}{\sqrt{1+t^2}}$, on pose $u = \sqrt{1+t^2}$, $u^2 = 1 + t^2$, $u\,du = t\,dt$,

$$\int \frac{t\,dt}{\sqrt{1+t^2}} = \int du = u + constante = \sqrt{1+t^2} + constante = \frac{2}{\sqrt{7}}\sqrt{x^2+x+2} + constante.$$

Pour calculer $\int \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}$, on pose $t = \sinh u$, $dt = \cosh u\,du = \sqrt{1+t^2}\,du$.

$$\int \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = \int du = u + constante = Arg\sinh t + constante = Arg\sinh\frac{2x+1}{\sqrt{7}} + constante$$

Au total,

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+x+2}}dx = \frac{\sqrt{7}}{2}\times\frac{2}{\sqrt{7}}\sqrt{x^2+x+2} - \frac{1}{2}Arg\sinh\frac{2x+1}{\sqrt{7}} + constante.$$

$$\boxed{\int \frac{x}{\sqrt{x^2+x+2}}dx = \sqrt{x^2+x+2} - \frac{1}{2}Arg\sinh\frac{2x+1}{\sqrt{7}} + constante.}$$

HAUT

u) Fonctions trigonométriques.

HAUT

$1 - \cos x = 2\sin^2\frac{x}{2}$

$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$

$$\frac{1}{\sin x\sqrt{1-\cos x}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\times\frac{1}{\sin^2\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}$$

Posons $u = \sin\frac{x}{2}$, $du = \frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}\,dx$.

$$\frac{dx}{\sin x\sqrt{1-\cos x}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sin^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}} \times \cos\frac{x}{2}\,dx = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{u^2(1-u^2)}\,du.$$

$$\frac{1}{u^2(1-u^2)} = \frac{1}{u^2} - \frac{1}{1-u^2} = \frac{1}{u^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-u} + \frac{1}{1+u}\right)$$

$$\int \frac{dx}{\sin x\sqrt{1-\cos x}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\int \frac{1}{u^2(1-u^2)}\,du = \frac{\sqrt{2}}{2}\int \frac{du}{u^2} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\int \frac{du}{1-u} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\int \frac{du}{1+u}$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{u} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln|1-u| - \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln|1+u| + \text{constante} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{u} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{1-u}{1+u}\right| + \text{constante}$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{\sin\frac{x}{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{1-\sin\frac{x}{2}}{1+\sin\frac{x}{2}}\right| + \text{constante}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{1-\cos x}} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left(\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1-\cos x}}{\sqrt{2}+\sqrt{1-\cos x}}\right) + \text{constante}$$

$$\boxed{\int \frac{dx}{\sin x\sqrt{1-\cos x}} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos x}} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left(\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1-\cos x}}{\sqrt{2}+\sqrt{1-\cos x}}\right) + \text{constante}.}$$

HAUT

Chapitre 11. Intégration.

Enoncés.

Exercice 11. Primitives de 6 fractions rationnelles.

Calculer les primitives suivantes :

a) $\int \frac{x}{x^3-3x+2}\,dx$ b) $\int \frac{1}{(1+x^3)^2}\,dx$ c) $\int \frac{1}{x^4+4}\,dx$

d) $\int \frac{x}{(x^2+x+1)^3}\,dx$ e) $\int \frac{7}{(x+1)^7-x^7-1}\,dx$ f) $\int \frac{x^5}{(x^3+1)(x^3+8)}\,dx$

Solution.

a) Première fraction.

HAUT

1°/ Décomposition du dénominateur en produit de facteurs irréductibles.

$x^3 - 3x + 2$ est nul pour $x = 1$.
$x^3 - 3x + 2 = (x-1)(x^2 + ax - 2)$
$a - 1 = -3$, $a = -2$.
$x^3 - 3x + 2 = (x-1)(x^2 - 2x - 2)$
$x^2 - 2x - 2 = (x-1)^2 - 3$
$x^3 - 3x + 2 = (x-1)(x-1-\sqrt{3})(x-1+\sqrt{3})$

2°/ Décomposition de la fraction rationnelle en éléments simples.

$$\frac{x}{x^3-3x+2} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-1-\sqrt{3}} + \frac{c}{x-1+\sqrt{3}}$$

Pour calculer a, on multiplie par $x - 1$:

$$\frac{x}{x^2-2x-2} = a + (x-1)\left(\frac{b}{x-1-\sqrt{3}} + \frac{c}{x-1+\sqrt{3}}\right)$$

et on prend $x = 1$; $a = -\frac{1}{3}$.

Pour calculer b, on multiplie par $x - 1 - \sqrt{3}$:

$$\frac{x}{(x-1)(x-1+\sqrt{3})} = b + (x-1-\sqrt{3})\left(\frac{a}{x-1} + \frac{c}{x-1+\sqrt{3}}\right)$$

et on prend $x = 1 + \sqrt{3}$; $b = \frac{1+\sqrt{3}}{6}$

Pour calculer c, on multiplie par $x - 1 + \sqrt{3}$:

$$\frac{x}{(x-1)(x-1-\sqrt{3})} = c + (x-1+\sqrt{3})\left(\frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-1-\sqrt{3}}\right)$$

et on prend $x = 1 - \sqrt{3}$; $c = \frac{1-\sqrt{3}}{6}$.

Au total :

$$\frac{x}{x^3-3x+2} = -\frac{1}{3}\frac{1}{x-1} + \frac{1+\sqrt{3}}{6}\frac{1}{x-1-\sqrt{3}} + \frac{1-\sqrt{3}}{6}\frac{1}{x-1+\sqrt{3}}$$

3°/ Intégration des éléments simples.

$$\int \frac{x}{x^3-3x+2}\,dx = -\frac{1}{3}\int \frac{1}{x-1}\,dx + \frac{1+\sqrt{3}}{6}\int \frac{1}{x-1-\sqrt{3}}\,dx + \frac{1-\sqrt{3}}{6}\int \frac{1}{x-1+\sqrt{3}}\,dx$$
$$= -\frac{1}{3}\ln|x-1| + \frac{1+\sqrt{3}}{6}\ln|x-1-\sqrt{3}| + \frac{1-\sqrt{3}}{6}\ln|x-1+\sqrt{3}| + \text{constante}.$$

$$\boxed{\int \frac{x}{x^3-3x+2}\,dx = -\frac{1}{3}\ln|x-1| + \frac{1+\sqrt{3}}{6}\ln|x-1-\sqrt{3}| + \frac{1-\sqrt{3}}{6}\ln|x-1+\sqrt{3}| + \text{constante}.}$$

HAUT

b) Deuxième fraction rationnelle.

HAUT

1°/ Décomposition du dénominateur en produit de facteurs irréductibles.

Les racines de $1 + x^3$ sont les racines cubiques de -1.
$(1 + x^3)^2 = (x + 1)^2 (x^2 - x + 1)^2$

2°/ Décomposition de la fraction rationnelle en éléments simples.

$$\frac{1}{(1+x^3)^2} = \frac{a}{(x+1)^2} + \frac{b}{x+1} + \frac{P(x)}{(x^2-x+1)^2}$$

Pour calculer *a*, on multiplie par $(x + 1)^2$ et on prend $x = -1$; $a = \frac{1}{9}$.

Pour calculer *b*, on calcule

$$\frac{1}{(1+x^3)^2} - \frac{1}{9}\frac{1}{(x+1)^2} = \frac{9-(x^2-x+1)^2}{9(x+1)^2(x^2-x+1)^2} = \frac{(3-(x^2-x+1))(3+(x^2-x+1))}{9(x+1)^2(x^2-x+1)^2}$$
$$= \frac{(1+x)(2-x)(4+x^2-x)}{9(x+1)^2(x^2-x+1)^2} = \frac{(2-x)(x^2-x+4)}{9(x+1)(x^2-x+1)^2},$$

on multiplie par $x + 1$ et on prend $x = -1$: $b = \frac{2}{9}$.

Nous utiliserons alors la **division euclidienne des polynômes** pour calculer :

$$\frac{1}{(1+x^3)^2} - \frac{1}{9}\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{2}{9}\frac{1}{x+1} = \frac{1}{9}\frac{1}{(1+x^3)^2}(9-(x^2-x+1)^2-2(x^2-x+1)(1+x^3))$$

$9-(x^2-x+1)^2-2(x^2-x+1)(1+x^3) = (3-x^2+x-1)(3+x^2-x+1)-2(x^2-x+1)^2(x+1)$
$= -(x^2-x+4)(x^2-x-2)-2(x^2-x+1)^2(x+1)$
$= -(x^2-x+4)(x+1)(x-2)-2(x^2-x+1)^2(x+1)$
$= -(x+1)[(x^2-x+4)(x-2)+2(x^2-x+1)^2]$
$= -(x+1)[x^3-3x^2+6x-8+2(x^4-2x^3+3x^2-2x+1)]$
$= -(x+1)[x^3-3x^2+6x-8+2x^4-4x^3+6x^2-4x+2]$
$= -(x+1)[2x^4-3x^3+3x^2+2x-6]$
$= -(x+1)^2(2x^3-5x^2+8x-6)$

$$\frac{1}{(1+x^3)^2} - \frac{1}{9}\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{2}{9}\frac{1}{x+1} = -\frac{1}{9}\frac{1}{(1+x^3)^2}(x+1)^2(2x^3-5x^2+8x-6)$$
$$= -\frac{1}{9}\frac{2x^3-5x^2+8x-6}{(x^2-x+1)^2}$$

$P(x) = -\frac{1}{9}(2x^3-5x^2+8x-6)$

$$2x^3-5x^2+8x-6 = (x^2-x+1)(2x-3)+3(x-1)$$

$$\frac{1}{(1+x^3)^2} - \frac{1}{9}\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{2}{9}\frac{1}{x+1} = -\frac{1}{9}\frac{2x-3}{x^2-x+1} - \frac{1}{3}\frac{x-1}{(x^2-x+1)^2}$$

Faisons alors apparaître la dérivée $2x - 1$ de $x^2 - x + 1$:

$$\frac{1}{(1+x^3)^2} - \frac{1}{9}\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{2}{9}\frac{1}{x+1} = -\frac{1}{9}\frac{2x-1}{x^2-x+1} + \frac{2}{9}\frac{1}{x^2-x+1} - \frac{1}{6}\frac{2x-1}{(x^2-x+1)^2} + \frac{1}{6}\frac{1}{(x^2-x+1)^2}$$

De sorte que nous obtenons $\frac{1}{(1+x^3)^2}$ sous la forme :

$$\frac{1}{(1+x^3)^2} = \frac{1}{9}\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{2}{9}\frac{1}{x+1} - \frac{1}{9}\frac{2x-1}{x^2-x+1} + \frac{2}{9}\frac{1}{x^2-x+1} - \frac{1}{6}\frac{2x-1}{(x^2-x+1)^2} + \frac{1}{6}\frac{1}{(x^2-x+1)^2}$$

3°/ Intégration des éléments simples.

L'intégrale s'écrit :

$$\int \frac{1}{(1+x^3)^2}\,dx = \frac{1}{9}\int \frac{1}{(x+1)^2}\,dx + \frac{2}{9}\int \frac{1}{x+1}\,dx - \frac{1}{9}\int \frac{2x-1}{x^2-x+1}\,dx - \frac{1}{6}\int \frac{2x-1}{(x^2-x+1)^2}\,dx + \frac{2}{9}\int \frac{1}{x^2-x+1}\,dx + \frac{1}{6}\int \frac{1}{(x^2-x+1)^2}\,dx$$

Dans la somme de six intégrales du deuxième membre, les quatres premières sont faciles à calculer :

$\int \frac{1}{(x+1)^2}\,dx = -\frac{1}{x+1} + constante$;
$\int \frac{1}{x+1}\,dx = ln\,|x+1| + constante$;
$\int \frac{2x-1}{x^2-x+1}\,dx = ln\,|x^2-x+1| + constante = ln\,(x^2-x+1) + constante$, car $x^2-x+1 > 0$.
$\int \frac{2x-1}{(x^2-x+1)^2}\,dx = -\frac{1}{x^2-x+1} + constante.$

Il reste alors :

$$\int \frac{1}{(1+x^3)^2}\,dx = -\frac{1}{9}\frac{1}{x+1} + \frac{2}{9}ln\,|x+1| - \frac{1}{9}ln\,(x^2-x+1) + \frac{1}{6}\frac{1}{x^2-x+1} + \frac{2}{9}\int \frac{1}{x^2-x+1}\,dx + \frac{1}{6}\int \frac{1}{(x^2-x+1)^2}\,dx.$$

Pour calculer $\int \frac{1}{x^2-x+1}\,dx$, remarquons que l'on a :

$$x^2-x+1 = \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = \frac{3}{4}\left(\left(\frac{1}{\sqrt{3}}(2x-1)\right)^2 + 1\right)$$

Posons $t = \frac{1}{\sqrt{3}}(2x-1)$, $dx = \frac{\sqrt{3}}{2}\,dt$.
$\frac{1}{x^2-x+1}\,dx = \frac{4}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{dt}{1+t^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\frac{dt}{1+t^2}$
$\int \frac{1}{x^2-x+1}\,dx = \frac{2\sqrt{3}}{3}\int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\,Arc\,tan\,t + constante = \frac{2\sqrt{3}}{3}\,Arc\,tan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}(2x-1)\right) + constante$.

$$\boxed{\int \frac{1}{x^2-x+1}\,dx = \frac{2\sqrt{3}}{3}\,Arc\,tan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}(2x-1)\right) + constante.}$$ (Retour à (f))

On peut aussi **intègrer** $\int \frac{1}{x^2-x+1}\,dx$ **par parties** avec $u = \frac{1}{x^2-x+1}$, $du = -\frac{2x-1}{(x^2-x+1)^2}\,dx$, $dv = dx$, $v = x$,
$\int \frac{1}{x^2-x+1}\,dx = \int u\,dv = uv - \int v\,du = \frac{x}{x^2-x+1} + \int \frac{2x^2-x}{(x^2-x+1)^2}\,dx = \frac{x}{x^2-x+1} + 2\int \frac{1}{x^2-x+1}\,dx + \int \frac{x-2}{(x^2-x+1)^2}\,dx$

$$= \frac{x}{x^2-x+1} + 2\int \frac{1}{x^2-x+1}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{2x-1}{(x^2-x+1)^2}\,dx - \frac{3}{2}\int \frac{1}{(x^2-x+1)^2}\,dx.$$
$$= \frac{x}{x^2-x+1} - \frac{1}{2}\frac{1}{x^2-x+1} + 2\int \frac{1}{x^2-x+1}\,dx - \frac{3}{2}\int \frac{1}{(x^2-x+1)^2}\,dx.$$

D'où :

$$\frac{3}{2}\int \frac{1}{(x^2-x+1)^2}\,dx = \int \frac{1}{x^2-x+1}\,dx + \frac{1}{2}\frac{2x-1}{x^2-x+1}$$
$$\int \frac{1}{(x^2-x+1)^2}\,dx = \frac{2}{3}\int \frac{1}{x^2-x+1}\,dx + \frac{1}{3}\frac{2x-1}{x^2-x+1}$$

Il vient alors :

$$\frac{2}{9}\int \frac{1}{x^2-x+1}\,dx + \frac{1}{6}\int \frac{1}{(x^2-x+1)^2}\,dx = \frac{2}{9}\int \frac{1}{x^2-x+1}\,dx + \frac{1}{9}\int \frac{1}{x^2-x+1}\,dx + \frac{1}{18}\frac{2x-1}{x^2-x+1}$$
$$= \frac{1}{3}\int \frac{1}{x^2-x+1}\,dx + \frac{1}{18}\frac{2x-1}{x^2-x+1}$$
$$= \frac{2\sqrt{3}}{9}\,Arc\tan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}(2x-1)\right) + \frac{1}{18}\frac{2x-1}{x^2-x+1} + constante.$$

Portons cette valeur dans l'expression obtenue pour $\int \frac{1}{(1+x^3)^2}\,dx$.

$$\int \frac{1}{(1+x^3)^2}\,dx = -\frac{1}{9}\frac{1}{x+1} + \frac{2}{9}ln\,|x+1| - \frac{1}{9}ln\,(x^2-x+1) + \frac{1}{6}\frac{1}{x^2-x+1} + \frac{2\sqrt{3}}{9}\,Arc\tan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}(2x-1)\right)$$
$$+ \frac{1}{18}\frac{2x-1}{x^2-x+1} + constante.$$
$$= -\frac{1}{9}\frac{1}{x+1} + \frac{1}{9}\frac{x+1}{x^2-x+1} + \frac{2}{9}ln\,|x+1| - \frac{1}{9}ln\,(x^2-x+1) + \frac{2\sqrt{3}}{9}\,Arc\tan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}(2x-1)\right) +$$
$$constante.$$
$$= \frac{1}{9}\frac{(x+1)^2-(x^2-x+1)}{1+x^3} + \frac{1}{9}\,ln\,\frac{(x+1)^3}{1+x^3} + \frac{2\sqrt{3}}{9}\,Arc\tan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}(2x-1)\right) + constante.$$

$$\boxed{\int \frac{1}{(1+x^3)^2}\,dx = \frac{1}{3}\frac{x}{1+x^3} + \frac{1}{9}\,ln\,\frac{(x+1)^3}{1+x^3} + \frac{2\sqrt{3}}{9}\,Arc\tan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}(2x-1)\right) + constante.}$$

HAUT

c) Troisième fraction rationnelle.

HAUT

1°/ Décomposition du dénominateur en produit de facteurs irréductibles.

$$(x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2) = (x^2 + 2)^2 - 4x^2 = x^4 + 4$$

2°/ Décomposition de la fraction rationnelle.

$$\frac{1}{x^4+4} = \frac{a\,x+b}{x^2-2\,x+2} - \frac{c\,x+d}{x^2+2\,x+2}$$

Réduisons au même dénominateur et identifions :

$1 = (a\,x + b)(x^2 + 2\,x + 2) - (c\,x + d)(x^2 - 2\,x + 2)$

Terme en x^3 : $a - c = 0 \Rightarrow a = c$.

Terme en x^2 : $2\,a + b + 2\,c - d = 0 \Rightarrow 2\,(a + c) = d - b \Rightarrow 4\,a = 4\,c = d - b$

Terme en x : $2\,a + 2\,b - 2\,c + 2\,d = 0 \Rightarrow b + d = 0 \Rightarrow d = -b$.

Terme constant : $2\,(b - d) = 1 \Rightarrow 4\,b = 1 \Rightarrow b = \frac{1}{4}$

On obtient donc $b = \frac{1}{4}$, $d = -\frac{1}{4}$, $a = c = -\frac{1}{8}$:

$$\frac{1}{x^4+4} = -\frac{1}{8}\frac{x-2}{x^2-2\,x+2} + \frac{1}{8}\frac{x+2}{x^2+2\,x+2}$$

Faisons apparaître les dérivées des dénominateurs :

$$\frac{1}{x^4+4} = \frac{1}{16}\frac{2\,x+2}{x^2+2\,x+2} + \frac{1}{8}\frac{1}{x^2+2\,x+2} - \frac{1}{16}\frac{2\,x-2}{x^2-2\,x+2} + \frac{1}{8}\frac{1}{x^2-2\,x+2}$$

3°/ Intégration des éléments simples.

$$\int \frac{1}{x^4+4}\,dx = \frac{1}{16}\int \frac{2\,x+2}{x^2+2\,x+2}\,dx + \frac{1}{8}\int \frac{1}{x^2+2\,x+2}\,dx - \frac{1}{16}\int \frac{2\,x-2}{x^2-2\,x+2}\,dx + \frac{1}{8}\int \frac{1}{x^2-2\,x+2}\,dx$$

$$\int \frac{2\,x+2}{x^2+2\,x+2}\,dx = \ln\,(x^2 + 2\,x + 2) + \text{constante}.$$

$$\int \frac{2\,x-2}{x^2-2\,x+2}\,dx = \ln\,(x^2 - 2\,x + 2) + \text{constante}.$$

$$\frac{1}{16}\int \frac{2\,x+2}{x^2+2\,x+2}\,dx - \frac{1}{16}\int \frac{2\,x-2}{x^2-2\,x+2}\,dx = \frac{1}{16}\ln\frac{x^2+2\,x+2}{x^2-2\,x+2} + \text{constante}.$$

Pour calculer $\int \frac{1}{x^2+2\,x+2}\,dx$, remarquons que l'on a :

$x^2 + 2\,x + 2 = (x + 1)^2 + 1$

Donc si l'on pose $t = x + 1$, $dx = dt$ et l'intégrale s'écrit :

$$\int \frac{1}{x^2+2\,x+2}\,dx = \int \frac{dt}{1+t^2} = \text{Arc tan}\,t + \text{constante} = \text{Arc tan}\,(x + 1) + \text{constante}.$$

De même, $x^2 - 2\,x + 2 = (x - 1)^2 + 1$, donc, avec $t = x - 1$,

$$\int \frac{1}{x^2-2\,x+2}\,dx = \int \frac{dt}{1+t^2} = \text{Arc tan}\,t + \text{constante} = \text{Arc tan}\,(x - 1) + \text{constante}.$$

Finalement :

$$\int \frac{1}{x^4+4}\,dx = \frac{1}{16}\ln\frac{x^2+2\,x+2}{x^2-2\,x+2} + \frac{1}{8}\,(\text{Arc tan}\,(x + 1) + \text{Arc tan}\,(x - 1)) + \text{constante}.$$

La formule *Arc tan a + Arc tan b = Arc tan* $\frac{a+b}{1-a\,b}$ + *constante* (0, π, ou – π), permet d'écrire :

Arc tan $(x+1)$ + *Arc tan* $(x-1)$ = *Arc tan* $\frac{2\,x}{2-x^2}$ + *constante*.

$$\boxed{\int \frac{1}{x^4+4}\,dx = \frac{1}{16}\,ln\,\frac{x^2+2\,x+2}{x^2-2\,x+2} + \frac{1}{8}\,Arc\,tan\,\frac{2\,x}{2-x^2} + constante.}$$

HAUT

d) Quatrième fraction rationnelle.

HAUT

1°/ Intégrations par parties.

En premier lieu, pour calculer $\int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx$, remarquons que l'on a :

$$x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = \frac{3}{4}\left(\left(\frac{1}{\sqrt{3}}(2\,x+1)\right)^2 + 1\right)$$

Posons $t = \frac{1}{\sqrt{3}}(2\,x+1)$, $dx = \frac{\sqrt{3}}{2}\,dt$.

$\frac{1}{x^2+x+1}\,dx = \frac{4}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{dt}{1+t^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\frac{dt}{1+t^2}$

$\int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx = \frac{2\sqrt{3}}{3}\int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\,Arc\,tan\,t + constante = \frac{2\sqrt{3}}{3}\,Arc\,tan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}(2\,x+1)\right) +$ *constante*.

D'où, première intégrale :

$$\boxed{\int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx = \frac{2\sqrt{3}}{3}\,Arc\,tan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}(2\,x+1)\right) + constante.}$$

On peut aussi **intègrer** $\int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx$ **par parties** avec $u = \frac{1}{x^2+x+1}$, $du = -\frac{2\,x+1}{(x^2+x+1)^2}\,dx$, $dv = dx$, $v = x$,

$\int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx = \int u\,dv = uv - \int v\,du = \frac{x}{x^2+x+1} + \int \frac{2\,x^2+x}{(x^2+x+1)^2}\,dx = \frac{x}{x^2+x+1} + 2\int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx - \int \frac{x+2}{(x^2+x+1)^2}\,dx$

$= \frac{x}{x^2+x+1} + 2\int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{2\,x+1}{(x^2+x+1)^2}\,dx - \frac{3}{2}\int \frac{1}{(x^2+x+1)^2}\,dx.$

$= \frac{x}{x^2+x+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{x^2+x+1} + 2\int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx - \frac{3}{2}\int \frac{1}{(x^2+x+1)^2}\,dx.$

D'où :

$$\frac{3}{2}\int \frac{1}{(x^2+x+1)^2}\,dx = \int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx + \frac{1}{2}\,\frac{2\,x+1}{x^2+x+1}$$

$$\int \frac{1}{(x^2+x+1)^2}\,dx = \frac{2}{3}\int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx + \frac{1}{3}\,\frac{2x+1}{x^2+x+1}$$

Et, deuxième intégrale :

$$\boxed{\int \frac{1}{(x^2+x+1)^2}\,dx = \frac{4\sqrt{3}}{9}\,Arc\tan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}(2x+1)\right) + \frac{1}{3}\,\frac{2x+1}{x^2+x+1} + constante.}$$

On peut enfin **intègrer** $\int \frac{1}{(x^2+x+1)^2}\,dx$ **par parties** avec $u = \frac{1}{(x^2+x+1)^2}$, $du = -2\frac{2x+1}{(x^2+x+1)^3}\,dx$, $dv = dx$, $v = x$,

$$\int \frac{1}{(x^2+x+1)^2}\,dx = \int u\,dv = uv - \int v\,du = \frac{x}{(x^2+x+1)^2} + 2\int \frac{2x^2+x}{(x^2+x+1)^3}\,dx$$
$$= \frac{x}{(x^2+x+1)^2} + 4\int \frac{1}{(x^2+x+1)^2}\,dx - 2\int \frac{x+2}{(x^2+x+1)^3}\,dx$$
$$= \frac{x}{(x^2+x+1)^2} + 4\int \frac{1}{(x^2+x+1)^2}\,dx - \int \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^3}\,dx - 3\int \frac{1}{(x^2+x+1)^3}\,dx.$$
$$= \frac{x}{(x^2+x+1)^2} + \frac{1}{(x^2+x+1)^2} + 4\int \frac{1}{(x^2+x+1)^2}\,dx - 3\int \frac{1}{(x^2+x+1)^3}\,dx.$$

D'où :

$$3\int \frac{1}{(x^2+x+1)^3}\,dx = 3\int \frac{1}{(x^2+x+1)^2}\,dx + \frac{x+1}{(x^2+x+1)^2}$$
$$\int \frac{1}{(x^2+x+1)^3}\,dx = \frac{2}{3}\int \frac{1}{(x^2+x+1)^2}\,dx + \frac{1}{3}\,\frac{x+1}{(x^2+x+1)^2}$$

Et, troisième intégrale :

$$\boxed{\int \frac{1}{(x^2+x+1)^3}\,dx = \frac{8\sqrt{3}}{27}\,Arc\tan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}(2x+1)\right) + \frac{2}{9}\,\frac{2x+1}{x^2+x+1} + \frac{1}{3}\,\frac{x+1}{(x^2+x+1)^2} + constante.}$$

2°/ Calcul de l'intégrale proposée.

Munis du résultat précédent, nous pouvons maintenant calculer l'intégrale proposée :

$$\frac{x}{(x^2+x+1)^3} = \frac{1}{2}\left(\frac{2x+1}{(x^2+x+1)^3} - \frac{1}{(x^2+x+1)^3}\right)$$

$$\int \frac{x}{(x^2+x+1)^3}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^3}\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{(x^2+x+1)^3}\,dx$$

Pour calculer $\int \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^3}\,dx$, on pose $u = x^2 + x + 1$, $du = (2x+1)\,dx$,

$$\int \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^3}\,dx = \int \frac{du}{u^3} = -\frac{1}{2}\frac{1}{u^2} + constante = -\frac{1}{2}\frac{1}{(x^2+x+1)^2}$$

$$\int \frac{x}{(x^2+x+1)^3}\,dx = -\frac{1}{4}\frac{1}{(x^2+x+1)^2} - \frac{4\sqrt{3}}{27}Arc\tan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}(2x+1)\right) - \frac{1}{9}\,\frac{2x+1}{x^2+x+1} - \frac{1}{6}\,\frac{x+1}{(x^2+x+1)^2} +$$

constante.

$$= -\frac{1}{4}\frac{1}{(x^2+x+1)^2} - \frac{1}{6}\frac{x+1}{(x^2+x+1)^2} - \frac{1}{9}\frac{2x+1}{x^2+x+1} - \frac{4\sqrt{3}}{27}\,Arc\,tan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}(2x+1)\right) + constante.$$

$$= -\frac{1}{12}\frac{2x+5}{(x^2+x+1)^2} - \frac{1}{9}\frac{2x+1}{x^2+x+1} - \frac{4\sqrt{3}}{27}\,Arc\,tan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}(2x+1)\right) + constante.$$

$$= -\frac{1}{36}\frac{1}{(x^2+x+1)^2}(6x+15+4(2x+1)(x^2+x+1)) - \frac{4\sqrt{3}}{27}\,Arc\,tan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}(2x+1)\right) + constante.$$

$$= -\frac{1}{36}\frac{8x^3+12x^2+18x+19}{(x^2+x+1)^2} - \frac{4\sqrt{3}}{27}\,Arc\,tan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}(2x+1)\right) + constante.$$

$$\int \frac{x}{(x^2+x+1)^3}\,dx = -\frac{1}{36}\frac{8x^3+12x^2+18x+19}{(x^2+x+1)^2} - \frac{4\sqrt{3}}{27}\,Arc\,tan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}(2x+1)\right) + constante.$$

HAUT

e) Cinquième fraction rationnelle.

HAUT

1°/ Décomposition en éléments simples.

Le dénominateur s'annule pour $(x+1)^7 = x^7 + 1$, **$\underline{x = -1}$**

$(x+1)^7 - x^7 - 1 = (x+1)((x+1)^6 - x^6 + x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1)$

$= (x+1)(6x^5 + 15x^4 + 20x^3 + 15x^2 + 6x + x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x)$

$= x(x+1)(6x^4 + 15x^3 + 20x^2 + 15x + 6 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)$

$= x(x+1)(7x^4 + 14x^3 + 21x^2 + 14x + 7)$

$= 7x(x+1)(x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1)$

Or $(x^2+x+1)^2 = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1$

donc : $(x+1)^7 - x^7 - 1 = 7x(x+1)(x^2+x+1)^2$

$$\frac{7}{(x+1)^7 - x^7 - 1} = \frac{1}{x(x+1)(x^2+x+1)^2} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{P(x)}{(x^2+x+1)^2}$$

$a = 1$; $b = -1$

$$\frac{P(x)}{(x^2+x+1)^2} = \frac{1}{x(x+1)(x^2+x+1)^2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} = \frac{1-(x+1)(x^2+x+1)^2 + x(x^2+x+1)^2}{x(x+1)(x^2+x+1)^2}$$

$$= \frac{1-(x^2+x+1)^2}{x(x+1)(x^2+x+1)^2} = \frac{(1-(x^2+x+1))(1+(x^2+x+1))}{x(x+1)(x^2+x+1)^2}$$

$$= -\frac{x^2+x+2}{(x^2+x+1)^2} = -\frac{1}{x^2+x+1} - \frac{1}{(x^2+x+1)^2}$$

$$\frac{7}{(x+1)^7 - x^7 - 1} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x^2+x+1} - \frac{1}{(x^2+x+1)^2}$$

2°/ Intégration des éléments simples.

$$\int \frac{7}{(x+1)^7 - x^7 - 1}\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx - \int \frac{1}{x+1}\,dx - \int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx - \int \frac{1}{(x^2+x+1)^2}\,dx$$

$$\int \frac{1}{(x^2+x+1)^2}\,dx = \frac{2}{3}\int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx + \frac{1}{3}\frac{2x+1}{x^2+x+1}$$
$$\int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx = \frac{2\sqrt{3}}{3}\,Arc\tan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}(2x+1)\right) + constante.$$

$$\int \frac{7}{(x+1)^7-x^7-1}\,dx = ln|x| - ln|x+1| - \frac{10\sqrt{3}}{9}\,Arc\tan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}(2x+1)\right) - \frac{1}{3}\frac{2x+1}{x^2+x+1} + constante.$$
$$= -\frac{1}{3}\frac{2x+1}{x^2+x+1} + ln\left|\frac{x}{x+1}\right| - \frac{10\sqrt{3}}{9}\,Arc\tan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}(2x+1)\right) + constante.$$

$$\boxed{\int \frac{7}{(x+1)^7-x^7-1}\,dx = -\frac{1}{3}\frac{2x+1}{x^2+x+1} + ln\left|\frac{x}{x+1}\right| - \frac{10\sqrt{3}}{9}\,Arc\tan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}(2x+1)\right) + constante.}$$

HAUT

f) Sixième fraction rationnelle.

HAUT

1°/ Décomposition en éléments simples.

Nous cherchons à décomposer $\frac{x^5}{(x^3+1)(x^3+8)}$.

La dérivée de $(x^3+1)(x^3+8) = x^6+9x^3+8$ est $6x^5+27x^2$.
On peut écrire :

$$\frac{x^5}{(x^3+1)(x^3+8)} = \frac{1}{6}\frac{6x^5+27x^2}{(x^3+1)(x^3+8)} - \frac{9}{2}\frac{x^2}{(x^3+1)(x^3+8)}$$

$(x^3+1)(x^3+8) = (x+1)(x^2-x+1)(x+2)(x^2-2x+4)$

$$\frac{x^2}{(x^3+1)(x^3+8)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x+2} + \frac{cx+d}{x^2-x+1} + \frac{fx+g}{x^2-2x+4}$$

Pour calculer a, on multiplie par $(x+1)$ et on prend $x=-1$: $a = \frac{1}{21}$.
Pour calculer b, on multiplie par $(x+2)$ et on prend $x=-2$: $b = -\frac{1}{21}$.

$$\frac{x^2}{(x^3+1)(x^3+8)} - \frac{1}{21}\frac{1}{x+1} - \frac{1}{21}\frac{1}{x+2} = \frac{1}{21}\frac{1}{(x^3+1)(x^3+8)}\,(21x^2-(x+2)(x^2-x+1)(x^2-2x+4)-(x+1)(x^2-x+1)(x^2-2x+4))$$

$21x^2-(x+2)(x^2-x+1)(x^2-2x+4) = 21x^2-(x+2)(x^4-3x^3+7x^2-6x+4)$
$= 21x^2-(x^5-x^4+x^3+8x^2-8x+8)$
$= -(x^5-x^4+x^3-13x^2-8x+8)$
$= -(x+1)(x^4-2x^3+3x^2-16x+8)$

$21x^2-(x+2)(x^2-x+1)(x^2-2x+4)-(x+1)(x^2-x+1)(x^2-2x+4) = -(x+1)(x^4-2x^3+3x^2-16x+8-(x^4-3x^3+7x^2-6x+4))$

$= -(x+1)(x^3 - 4x^2 - 10x + 4)$
$= -(x+1)(x+2)(x^2 - 6x + 2)$

$$\frac{x^2}{(x^3+1)(x^3+8)} - \frac{1}{21}\frac{1}{x+1} - \frac{1}{21}\frac{1}{x+2} = -\frac{1}{21}\frac{x^2-6x+2}{(x^2-x+1)(x^2-2x+4)}$$

$$\frac{cx+d}{x^2-x+1} + \frac{fx+g}{x^2-2x+4} = -\frac{1}{21}\frac{x^2-6x+2}{(x^2-x+1)(x^2-2x+4)}$$

Pour trouver c, d, f, g, réduisons au même dénominateur et identifions :

$$(cx+d)(x^2-2x+4) + (fx+g)(x^2-x+1) = -\frac{1}{21}(x^2-6x+2)$$

Terme en x^3 : $c + f = 0$.
Terme en x^2 : $d - 2c + f - g = -\frac{1}{21}$
Terme en x : $4c - 2d + f - g = \frac{2}{7}$
Terme constant : $4d + g = -\frac{2}{21}$

Portons les valeurs $f = -c$ et $g = -\frac{2}{21} - 4d$, dans les deuxième et troisième relations :

$$d - 2c - c + \frac{2}{21} + 4d = -\frac{1}{21}$$
$$4c - 2d - c + \frac{2}{21} + 4d = \frac{2}{7}$$

$$3c - 5d = \frac{1}{7}$$
$$3c + 2d = \frac{4}{21}$$

$$7d = \frac{1}{21} \; ; \; d = \frac{1}{147}$$

$$3c = \frac{1}{7} + 5d = \frac{26}{147} \; ; \; c = \frac{26}{441}$$

$$cx + d = \frac{1}{441}(26x + 3)$$

$$f = -c = -\frac{26}{441}$$
$$g = -\frac{2}{21} - 4d = -\frac{6}{49}.$$

$$fx + g = -\frac{1}{441}(26x + 54)$$

$$\frac{x^2}{(x^3+1)(x^3+8)} = \frac{1}{21}\frac{1}{x+1} + \frac{1}{21}\frac{1}{x+2} + \frac{1}{441}\left(\frac{26x+3}{x^2-x+1} - \frac{26x+54}{x^2-2x+4}\right)$$

Là encore, on peut faire apparaître les dérivées des dénominateurs du deuxième degré :

$$\frac{x^2}{(x^3+1)(x^3+8)} = \frac{1}{21}\frac{1}{x+1} + \frac{1}{21}\frac{1}{x+2} + \frac{1}{441}\left(13\,\frac{2x-1}{x^2-x+1} + 10\,\frac{1}{x^2-x+1} - 13\,\frac{2x-2}{x^2-2x+4} - 80\,\frac{1}{x^2-2x+4}\right)$$

Finalement :

$$\frac{x^5}{(x^3+1)(x^3+8)} = \frac{1}{6}\frac{6x^5+27x^2}{(x^3+1)(x^3+8)} - \frac{9}{2}\left(\frac{1}{21}\frac{1}{x+1} + \frac{1}{21}\frac{1}{x+2} + \frac{1}{441}\left(13\,\frac{2x-1}{x^2-x+1} + 10\,\frac{1}{x^2-x+1} - 13\,\frac{2x-2}{x^2-2x+4} - 80\,\frac{1}{x^2-2x+4}\right)\right)$$

2°/ Intégration des éléments simples.

L'intégrale s'écrit :

$$\int \frac{x^5}{(x^3+1)(x^3+8)}\,dx = \frac{1}{6}\ln|(x^3+1)(x^3+8)| - \frac{3}{14}\ln|(x+1)(x+2)| - \frac{13}{98}\ln\frac{x^2-x+1}{x^2-2x+4} - \frac{5}{49}\left(\int \frac{1}{x^2-x+1}\,dx - 8\int \frac{1}{x^2-2x+4}\,dx\right)$$

Reste à calculer les deux intégrales $\int \frac{1}{x^2-x+1}\,dx$ et $\int \frac{1}{x^2-2x+4}\,dx$.

Nous avons déjà trouvé en (*b*) : $\int \frac{1}{x^2-x+1}\,dx = \frac{2\sqrt{3}}{3}\,Arc\,tan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}(2x-1)\right) + constante.$

Dans $\int \frac{1}{x^2-2x+4}\,dx$, posons $x = 2t$, $dx = 2\,dt$.

$$\int \frac{1}{x^2-2x+4}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{t^2-t+1}\,dt = \frac{\sqrt{3}}{3}Arc\,tan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}(2t-1)\right) + constante = \frac{\sqrt{3}}{3}Arc\,tan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}(x-1)\right) + constante.$$

$$\int \frac{x^5}{(x^3+1)(x^3+8)}\,dx = \frac{1}{6}\ln|(x^3+1)(x^3+8)| - \frac{3}{14}\ln|(x+1)(x+2)| - \frac{13}{98}\ln\frac{x^2-x+1}{x^2-2x+4} - \frac{10\sqrt{3}}{147}\left(Arc\,tan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}(2x-1)\right) - 4\,Arc\,tan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}(x-1)\right)\right) + constante.$$

HAUT

Chapitre 11. Intégration.

Enoncés.

Exercice 12. Primitives de 3 fonctions trigonométriques.

Calculer les primitives suivantes :	
a) $\int \cos^5 x \sin^4 x \, dx$ *b*) $\int \frac{1}{2+\sin x} \, dx$ *c*) $\int \frac{1}{\cos^4 x + \sin^4 x} \, dx$	

Solution.

a) Première intégrale.

Dans $\cos^5 x \sin^4 x$, le sinus apparaît avec une puissance paire, le cosinus avec une puissance impaire : on pose $u = \sin x$, donc $du = \cos x \, dx$.

$\cos^5 x \sin^4 x \, dx = (1 - u^2)^2 u^4 \, du = u^4 (u^4 - 2u^2 + 1) \, du = (u^8 - 2u^6 + u^4) \, du$

$$\int \cos^5 x \sin^4 x \, dx = \int (u^8 - 2u^6 + u^4) \, du = \frac{1}{9} u^9 - \frac{2}{7} u^7 + \frac{1}{5} u^5 + \text{constante}.$$

$$= \frac{1}{9} \sin^9 x - \frac{2}{7} \sin^7 x + \frac{1}{5} \sin^5 x + \text{constante}.$$

$$\boxed{\int \cos^5 x \sin^4 x \, dx = \sin^5 x \left(\frac{1}{9} \sin^4 x - \frac{2}{7} \sin^2 x + \frac{1}{5} \right) + \text{constante}.}$$

b) Deuxième intégrale.

Posons $t = \tan \frac{x}{2}$, $x = 2 \operatorname{Arc\,tan} t$, $dx = 2 \frac{dt}{1+t^2}$, $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$

$$\frac{1}{2+\sin x} \, dx = \frac{1}{t^2 + t + 1} \, dt.$$

$$\int \frac{1}{2+\sin x} \, dx = \int \frac{1}{t^2 + t + 1} \, dt.$$

$$t^2 + t + 1 = \left(t + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{4} = \frac{3}{4} \left(\left(\frac{2\sqrt{3}}{3} \left(t + \frac{1}{2} \right) \right)^2 + 1 \right)$$

Posons $u = \frac{2\sqrt{3}}{3}\left(t + \frac{1}{2}\right)$, $dt = \frac{\sqrt{3}}{2}\,du$, $\frac{1}{t^2+t+1} = \frac{4}{3}\frac{1}{1+u^2}$

$$\int \frac{1}{t^2+t+1}\,dt = \frac{2\sqrt{3}}{3}\int \frac{du}{1+u^2}$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{3}\,Arc\tan u + constante = \frac{2\sqrt{3}}{3}\,Arc\tan\frac{\sqrt{3}}{3}(2t+1) + constante$$

$$\boxed{\int \frac{1}{2+\sin x}\,dx = \frac{2\sqrt{3}}{3}\,Arc\tan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\left(2\tan\frac{x}{2}+1\right)\right) + constante.}$$

c) Troisième intégrale.

$\cos^4 x + \sin^4 x = (\cos^2 x + \sin^2 x)^2 - 2\sin^2 x\cos^2 x = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x = \frac{1}{2}(2 - \sin^2 2x) = \frac{1}{2}(\sqrt{2} - \sin 2x)(\sqrt{2} + \sin 2x)$

$\frac{1}{2-u^2} = \frac{a}{\sqrt{2}-u} + \frac{b}{\sqrt{2}+u}$; $a = \frac{1}{2\sqrt{2}}$; $b = \frac{1}{2\sqrt{2}}$; $\frac{1}{2-u^2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}-u} + \frac{1}{\sqrt{2}+u}\right)$

$$\frac{1}{\cos^4 x + \sin^4 x} = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}-\sin 2x} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sin 2x}\right)$$

$$\int \frac{1}{\cos^4 x + \sin^4 x}\,dx = \sqrt{2}\int \frac{1}{\sqrt{2}-\sin 2x}\,dx + \sqrt{2}\int \frac{1}{\sqrt{2}+\sin 2x}\,dx$$

Posons $t = \tan x$, $dx = \frac{dt}{1+t^2}$, $\sin 2x = \frac{2t}{1+t^2}$,

$$\int \frac{1}{\cos^4 x + \sin^4 x}\,dx = \int \frac{1}{t^2-\sqrt{2}\,t+1}\,dt + \int \frac{1}{t^2+\sqrt{2}\,t+1}\,dt$$

$t^2 \pm \sqrt{2}\,t + 1 = \left(t \pm \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = \frac{3}{4}\left(\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\left(t \pm \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)^2 + 1\right)$

Posons $u = \frac{2\sqrt{3}}{3}\left(t \pm \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $dt = \frac{\sqrt{3}}{2}\,du$, $\frac{1}{t^2 \pm \sqrt{2}\,t+1} = \frac{4}{3}\frac{1}{1+u^2}$

$$\int \frac{1}{t^2-\sqrt{2}\,t+1}\,dt = \frac{2\sqrt{3}}{3}\int \frac{du}{1+u^2}$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{3}\,Arc\tan u + constante = \frac{2\sqrt{3}}{3}\,Arc\tan\frac{\sqrt{3}}{3}(2t-\sqrt{2}) + constante.$$

$$\int \frac{1}{t^2+\sqrt{2}\,t+1}\,dt = \frac{2\sqrt{3}}{3}\int \frac{du}{1+u^2}$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{3}\,Arc\tan u + constante = \frac{2\sqrt{3}}{3}\,Arc\tan\frac{\sqrt{3}}{3}(2t+\sqrt{2}) + constante.$$

$$\int \frac{1}{t^2-\sqrt{2}\,t+1}\,dt + \int \frac{1}{t^2+\sqrt{2}\,t+1}\,dt = \frac{2\sqrt{3}}{3}\left(Arc\ tan\ \frac{\sqrt{3}}{3}(2\,t-\sqrt{2}) + Arc\ tan\ \frac{\sqrt{3}}{3}(2\,t+\sqrt{2}) \right) + constante.$$

$$Arc\ tan\ a + Arc\ tan\ b = Arc\ tan\ \frac{a+b}{1-a\,b}$$

$$Arc\ tan\ \frac{\sqrt{3}}{3}(2\,t-\sqrt{2}) + Arc\ tan\ \frac{\sqrt{3}}{3}(2\,t+\sqrt{2}) = Arc\ tan\left(\frac{4\sqrt{3}\,t}{5-4\,t^2} \right)$$

$$\int \frac{1}{t^2-\sqrt{2}\,t+1}\,dt + \int \frac{1}{t^2+\sqrt{2}\,t+1}\,dt = \frac{2\sqrt{3}}{3} Arc\ tan\left(\frac{4\sqrt{3}\,t}{5-4\,t^2} \right) + constante.$$

$$\boxed{\int \frac{1}{\cos^4 x+\sin^4 x}\,dx = \frac{2\sqrt{3}}{3} Arc\ tan\left(\frac{4\sqrt{3}\,\tan x}{5-4\,\tan^2 x} \right) + constante.}$$

Chapitre 11. Intégration.

Enoncés.

Exercice 13. Primitive d'une fraction rationnelle de fonctions trigonométriques.

a, b, c, d désignant 4 nombres réels non nuls, calculer la primitive : $$\int \frac{a\cos x+b\sin x}{c\cos x+d\sin x}\,dx$$	

Solution.

1°/ Cas particuliers : $c = 0$ ou $d = 0$.

Si $c = d = 0$, $\frac{a\cos x+b\sin x}{c\cos x+d\sin x}$ n'est pas définie, l'intégrale n'existe pas.

a) Pour $c = 0$, on a $d \neq 0$.

$$\int \frac{a\cos x+b\sin x}{c\cos x+d\sin x}\,dx = \frac{a}{d}\int \frac{\cos x}{\sin x}dx + \frac{b}{d}\int dx = \frac{1}{d}\,(a\ ln\,|\sin x\,| + b\,x) + constante.$$

b) Pour $d = 0$, on a $c \neq 0$.

$$\int \frac{a\cos x+b\sin x}{c\cos x+d\sin x}\,dx = \frac{a}{c}\int dx + \frac{b}{c}\int \frac{\sin x}{\cos x}dx = \frac{1}{c}\,(a\,x - b\ ln\,|\cos x\,|) + constante.$$

2°/ Cas général : $c \neq 0$ et $d \neq 0$.

Posons $t = tan\,\frac{x}{2}$, $dx = 2\,\frac{dt}{1+t^2}$, $sin\,x = \frac{2t}{1+t^2}$, $cos\,x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$,

$$\frac{a\cos x+b\sin x}{c\cos x+d\sin x} = \frac{a(1-t^2)+2bt}{c(1-t^2)+2dt} = \frac{a}{c}\frac{t^2-2\frac{b}{a}t-1}{t^2-2\frac{d}{c}t-1} = \frac{a}{c}\left(1+\frac{2\left(\frac{d}{c}-\frac{b}{a}\right)t}{t^2-2\frac{d}{c}t-1}\right) = \frac{a}{c}\left(1+\frac{1}{a}\frac{2(ad-bc)t}{ct^2-2dt-c}\right)$$

$$\frac{a\cos x+b\sin x}{c\cos x+d\sin x} = \frac{1}{c}\left(a+\frac{2(ad-bc)t}{ct^2-2dt-c}\right)$$

$$\int \frac{a\cos x+b\sin x}{c\cos x+d\sin x}\,dx = 2\,\frac{a}{c}\int \frac{dt}{1+t^2} + \frac{4}{c}\,(a\,d-b\,c)\int \frac{t}{(ct^2-2dt-c)(1+t^2)}\,dt.$$

$$\int \frac{a\cos x+b\sin x}{c\cos x+d\sin x}\,dx = 2\,\frac{a}{c}\,Arc\,tan\,t + \frac{4}{c}\,(a\,d-b\,c)\int \frac{t}{(ct^2-2dt-c)(1+t^2)}\,dt.$$

$$\int \frac{a\cos x + b\sin x}{c\cos x + d\sin x}\,dx = \frac{a}{c}x + \frac{4}{c}(a\,d - b\,c)\int \frac{t}{(c\,t^2 - 2\,d\,t - c)(1+t^2)}\,dt.$$

Les racines de $c\,t^2 - 2\,d\,t - c$ sont réelles et disctinctes, puisque le discriminant $c^2 + d^2$ est strictement positif.

Elles sont données par $t = \frac{1}{c}(d \pm \sqrt{d^2+c^2})$

$c\,(c\,t^2 - 2\,d\,t - c)\,(1 + t^2) = (ct - d + \sqrt{d^2+c^2})(ct - d - \sqrt{d^2+c^2})(1 + t^2)$

$$\frac{1}{c}\frac{t}{(c\,t^2 - 2\,d\,t - c)(1+t^2)} = \frac{\alpha}{c\,t - d + \sqrt{d^2+c^2}} + \frac{\beta}{c\,t - d - \sqrt{d^2+c^2}} + \frac{\gamma\,t + \delta}{1+t^2}$$

Pour calculer α, on multiplie par $(c\,t - d + \sqrt{d^2+c^2})$ et on prend $t = \frac{1}{c}(d - \sqrt{d^2+c^2})$, soit $c\,t - d = -\sqrt{d^2+c^2}$.

$$\alpha = \frac{\frac{1}{c}\left(d - \sqrt{d^2+c^2}\right)}{-2\sqrt{d^2+c^2}\left(1 + \frac{1}{c^2}\left(d - \sqrt{d^2+c^2}\right)^2\right)}$$

$$\alpha = -\frac{c}{2}\frac{d - \sqrt{d^2+c^2}}{\sqrt{d^2+c^2}\left(c^2 + \left(d - \sqrt{d^2+c^2}\right)^2\right)} = -\frac{c}{4}\frac{d - \sqrt{d^2+c^2}}{(d^2+c^2)\left(\sqrt{d^2+c^2} - d\right)} = \frac{1}{4}\frac{c}{c^2+d^2}$$

Pour avoir β à partir de α, on change $-\sqrt{d^2+c^2}$ en $+\sqrt{d^2+c^2}$: $\beta = \alpha = \frac{1}{4}\frac{c}{c^2+d^2}$

$$\frac{\alpha}{c\,t - d + \sqrt{d^2+c^2}} + \frac{\beta}{c\,t - d - \sqrt{d^2+c^2}} = \frac{1}{4}\frac{c}{c^2+d^2}\left(\frac{1}{c\,t - d + \sqrt{d^2+c^2}} + \frac{1}{c\,t - d - \sqrt{d^2+c^2}}\right)$$
$$= \frac{1}{4}\frac{c}{c^2+d^2}\frac{2(c\,t-d)}{(c\,t-d)^2 - d^2 - c^2} = \frac{1}{2}\frac{c\,t-d}{(c^2+d^2)(c\,t^2 - 2\,d\,t - c)}$$

$$\frac{\gamma\,t + \delta}{1+t^2} = \frac{1}{c}\frac{t}{(c\,t^2 - 2\,d\,t - c)(1+t^2)} - \frac{\alpha}{c\,t - d + \sqrt{d^2+c^2}} - \frac{\beta}{c\,t - d - \sqrt{d^2+c^2}}$$
$$= \frac{1}{c}\frac{t}{(c\,t^2 - 2\,d\,t - c)(1+t^2)} - \frac{1}{2}\frac{c\,t-d}{(c^2+d^2)(c\,t^2 - 2\,d\,t - c)}$$
$$= \frac{2(c^2+d^2)t - c(1+t^2)(c\,t-d)}{2c(c^2+d^2)(c\,t^2 - 2\,d\,t - c)(1+t^2)}$$

$2\,(c^2 + d^2)\,t - c\,(1 + t^2)\,(c\,t - d) = -c^2\,t^3 + c\,d\,t^2 + (2\,c^2 + 2\,d^2 - c^2)\,t + c\,d = -(c\,t + d)\,(c\,t^2 - 2\,d\,t - c)$

$$\frac{\gamma\,t + \delta}{1+t^2} = -\frac{1}{2c(c^2+d^2)}\frac{c\,t + d}{1+t^2}$$

$$\frac{1}{c}\frac{t}{(c\,t^2 - 2\,d\,t - c)(1+t^2)} = \frac{1}{4(c^2+d^2)}\left(\frac{2c\,t - 2d}{c\,t^2 - 2\,d\,t - c} - \frac{2t}{1+t^2}\right) - \frac{d}{2c(c^2+d^2)}\frac{1}{1+t^2}$$

$$\frac{1}{c}\int \frac{t}{(c\,t^2 - 2\,d\,t - c)(1+t^2)}\,dt = \frac{1}{4(c^2+d^2)}\ln\left|\frac{c\,t^2 - 2\,d\,t - c}{1+t^2}\right| - \frac{d}{2c(c^2+d^2)}\,Arc\tan t + constante.$$

$$= \frac{1}{4\left(c^2+d^2\right)}\left(ln \mid c\ cos\ x + d\ sin\ x \mid - \frac{d}{c}\ x \right) + constante.$$

$$\int \frac{a\cos x + b\sin x}{c\cos x + d\sin x}\ dx = \frac{a}{c}x + 4\ (a\ d - b\ c)\ \frac{1}{4\left(c^2+d^2\right)}\left(ln \mid c\ cos\ x + d\ sin\ x \mid - \frac{d}{c}\ x \right) + constante.$$

$$= \frac{1}{c^2+d^2}\ ((a\ c + b\ d)\ x + (a\ d - b\ c)\ ln \mid c\ cos\ x + d\ sin\ x \mid) + constante.$$

$$\boxed{\int \frac{a\cos x + b\sin x}{c\cos x + d\sin x}\ dx = \frac{1}{c^2+d^2}\ ((a\ c + b\ d)\ x + (a\ d - b\ c)\ ln \mid c\ cos\ x + d\ sin\ x \mid) + constante.}$$

En résumé :

$$\int \frac{a\cos x + b\sin x}{c\cos x + d\sin x}\ dx = \begin{cases} \frac{1}{c^2+d^2}\ ((a\ c + b\ d)\ x + (a\ d - b\ c)\ ln \mid c\ cos\ x + d\ sin\ x \mid) + constante. & \text{pour } c^2 + d^2 \neq 0 \\ \frac{1}{d}\ (a\ ln \mid sin\ x \mid + b\ x) + constante. & \text{pour } c = 0 \text{ et } d \neq 0 \\ \frac{1}{c}\ (a\ x - b\ ln \mid cos\ x \mid) + constante. & \text{pour } d = 0 \text{ et } c \neq 0 \end{cases}$$

Chapitre 11. Intégration.

Enoncés.

Exercice 14. Convergence à l'infini de 8 intégrales.

Etudier la convergence des intégrales suivantes :

a) $\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^2\sqrt{\ln t}}\,dt$ b) $\int_1^{+\infty} Arctan\,\frac{1}{\sqrt{2t}}\,dt$ c) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\,e^{\sin t}\,dt$

d) $\int_1^{+\infty} \frac{t^4+1}{t^4\,\tanh t}\,dt$ e) $\int_1^{+\infty} \frac{t^2\,Arctant}{1+t^2}\,dt$ f) $\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{\sqrt{t}}\,dt$

g) $\int_1^{+\infty} \cos(t^2)\,dt$ h) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t\left(t^4+1\right)}\,dt$

Solution.

a) Première intégrale.

HAUT

Vers 2, la fonction $\frac{1}{t^2\sqrt{\ln t}}$ est bornée.

Vers l'infini, $\frac{1}{t^2\sqrt{\ln t}}$ est majorée par $\frac{1}{t^2}$ qui est intégrable.

(On peut dire aussi que le produit $t\,f(t)$ tend vers 0 à l'infini : c'est suffisant pour assurer la convergence de l'intégrale).

Donc

L'intégrale $\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^2\sqrt{\ln t}}\,dt$ est convergente.

Pour **calculer la valeur de l'intégrale**, on va poser $\sqrt{\ln t} = v$, $t = e^{v^2}$, $dt = 2\,v\,e^{v^2}\,dv$

$\frac{1}{t^2\sqrt{\ln t}}\,dt = \frac{2\,v\,e^{v^2}}{v\,e^{2v^2}}\,dv = 2\,e^{-v^2}\,dv.$

$\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^2\sqrt{\ln t}}\,dt = 2\int_{\sqrt{\ln 2}}^{\infty} e^{-v^2}\,dv.$

La fonction de répartition de la variable aléatoire normale centrée réduite F est définie par :

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du$$

Posons $u = v\sqrt{2}$, $du = \sqrt{2}\, dv$.

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x}{\sqrt{2}}} e^{-v^2}\, dv$$

$$\int_{\sqrt{\ln 2}}^{\infty} e^{-v^2}\, dv = \sqrt{\pi}\,(F(\infty) - F(\sqrt{2\ln 2}))$$

$$2\int_{\sqrt{\ln 2}}^{\infty} e^{-v^2}\, dv = 2\sqrt{\pi}\,(F(\infty) - F(\sqrt{2\ln 2})) = 2\sqrt{\pi}\,(1 - F(\sqrt{2\ln 2}))$$

$$\int_{2}^{+\infty} \frac{1}{t^2\sqrt{\ln t}}\, dt = 2\sqrt{\pi}(1 - F(\sqrt{2\ln 2}))$$

La table de la fonction de répartition de la variable normale centrée réduite donne, par interpolation linéaire : $F(1{,}177) = 0{,}8801$, d'où la valeur approximative de l'intégrale :

$$\int_{2}^{+\infty} \frac{1}{t^2\sqrt{\ln t}}\, dt = 2\sqrt{\pi}(1 - F(\sqrt{2\ln 2})) \approx 0{,}425.$$

MAPLE donne la valeur 0,423672996 pour l'intégrale :

```
> evalf(int(t^(-2)/sqrt(ln(t)),t=2..infinity));
.423672996
```

b) Deuxième intégrale.

HAUT

De $t = 1$ à l'infini, $\frac{1}{\sqrt{2t}}$ varie, de façon monotone, de $\frac{1}{\sqrt{2}}$ à 0, donc $Arc\ tan\frac{1}{\sqrt{2t}}$ varie, de façon monotone, de $Arc\ tan\ \frac{1}{\sqrt{2}}$ à $Arc\ tan\ 0 = 0$.

La fonction numérique $Arc\ tan\frac{1}{\sqrt{2t}}$ est donc bornée sur l'intervalle d'intégration.

Au voisinage de l'infini, $t \times Arc\ tan\frac{1}{\sqrt{2t}}$ est équivalent à $\frac{t}{\sqrt{2t}} = \sqrt{\frac{t}{2}}$ qui tend vers l'infini, donc :

L'intégrale $\int_{1}^{+\infty} Arctan\ \frac{1}{\sqrt{2t}}\, dt$ n'est pas convergente.

c) Troisième intégrale.

HAUT

Au voisinage de 1, $\frac{1}{t}\, e^{\sin t}$ reste borné.

Au voisinage de l'infini, $t \times \frac{1}{t}\, e^{\sin t} = e^{\sin t}$ ne tend pas vers 0 car c'est une fonction périodique:

$\frac{1}{t}\, e^{-1} \leq \frac{1}{t}\, e^{\sin t} \Rightarrow e^{-1} \int_1^a \frac{1}{t}\, dt = \frac{\ln a}{e} \leq \int_1^a \frac{1}{t}\, e^{\sin t}\, dt.$

Lorsque a tend vers l'infini, $\frac{\ln a}{e}$ tend vers l'infini, donc :

L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\, e^{\sin t}\, dt$ n'est pas convergente.

d) Quatrième intégrale.

HAUT

Au voisinage de 1, $\frac{t^4+1}{t^4 \tanh t}$ est borné, donc il n'y a pas de problème de convergence en 1.

Vers l'infini, $\frac{t^4+1}{t^4 \tanh t}$ tend vers $1 \neq 0$, puisque $\frac{t^4+1}{t^4}$ tend vers 1 et $\tanh t = \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}}$ tend vers 1, donc l'intégrale n'est pas convergente :

L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{t^4+1}{t^4 \tanh t}\, dt$ n'est pas convergente.

e) Cinquième intégrale.

HAUT

Au voisinage de 1, $\frac{t^2\, Arctant}{1+t^2}$ est équivalent à $\frac{\pi}{8}$, il est borné, donc il n'y a pas de problème de convergence de l'intégrale en 1.

Vers l'infini, l'application $t \mapsto \frac{t^2\, Arctant}{1+t^2}$, équivalente à $Arc\ tan\ t \times \left(1 - \frac{1}{t^2}\right)$, est monotone croissante et tend vers $\frac{\pi}{2} \neq 0$, donc l'intégrale ne saurait être convergente.

L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{t^2\, Arctant}{1+t^2}\, dt$ n'est pas convergente.

f) Sixième intégrale.

HAUT

Au voisinage de 1, $\frac{\cos t}{\sqrt{t}}$ reste borné et il n'y a pas de problème de convergence de l'intégrale en 1.

Nous savons, comme conséquence du théorème de Cauchy, que :

> Si f est une fonction définie sur $[a, +\infty[$, positive et décroissante à partir d'une certaine valeur, et tendant vers 0 avec $\frac{1}{x}$,
> alors l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(x) \sin x\, dx$ est convergente.

Ici, pour $t > 0$, la fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ est positive, décroissante et tend vers 0 lorsque t tend vers l'infini.

Donc :

L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{\sqrt{t}}\,dt$ est convergente.

MAPLE donne la valeur approchée :
> **evalf(int(cos(t)/sqrt(t),t=1..infinity));**
-.555734339

g) Septième intégrale.

HAUT

Dans l'intégrale convergente $\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{\sqrt{t}}\,dt$, posons $u = \sqrt{t}$, $du = \frac{dt}{2\sqrt{t}}$, $t = u^2$, $\frac{\cos t}{\sqrt{t}}\,dt = 2\cos u^2\,du$.

$$\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{\sqrt{t}}\,dt = 2\int_1^{+\infty} \cos u^2\,du.$$

L'intégrale $\int_1^{+\infty} \cos(t^2)\,dt = \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{\sqrt{t}}\,dt$ est convergente.

MAPLE donne la valeur approchée :
> **evalf(int(cos(t^2),t=1..infinity));**
-.2778671695

h) Huitième intégrale.

HAUT

Vers 0, $\frac{\sin^2 t}{t(t^4+1)}$, équivalent à $t(1-t^4)$ tend vers 0 : il n'y a donc pas de problème de convergence en 0.

Vers l'infini, $\frac{\sin^2 t}{t(t^4+1)}$ est positif et majoré par $\frac{1}{t(t^4+1)} \le \frac{1}{t^5}$, qui est intégrable, donc :

L'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t(t^4+1)}\,dt$ est convergente.

MAPLE donne la valeur approchée :
> **evalf(int((sin(t))^2/t/(t^4+1),t=0..infinity));**
.4841995433 + 0. I

Chapitre 11. Intégration.

Enoncés.

Exercice 15. Convergence et valeur de 8 intégrales.

Montrer la convergence et calculer la valeur des intégrales suivantes :

a) $\int_0^{+\infty} t^3 e^{-t}\,dt$ b) $\int_0^1 (\ln t)^2\,dt$ c) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t\sqrt{1+t^2}}\,dt$

d) $\int_0^{+\infty} \frac{t \ln t}{(t^2+1)^2}\,dt$ e) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\tan t}\,dt$ f) $\int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{1+e^t}{e^{2t}-2e^t+1}\,dt$

g) $\int_0^{\frac{1}{2}} \ln \frac{1}{1-3t+2t^2}\,dt$ h) $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+t^4}\,dt$

Solution.

a) Première intégrale.

HAUT

Soit I_n l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\,dt$, n entier ≥ 0.

L'exponentielle l'emporte sur la puissance, donc à l'infini, $t \times t^n e^{-t}$ tend vers 0 et l'intégrale converge.

$$I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt = [-e^{-t}]_0^{\infty} = 1$$

Intégrons $I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\,dt$, pour $n \geq 1$, par parties en posant $u = t^n$, $du = n\,t^{n-1}\,dt$.

Pour avoir $dv = e^{-t}\,dt$, on prend $v = -e^{-t}$.

$$\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\,dt = \int u\,dv = uv - \int v\,du = [-t^n e^{-t}]_0^{\infty} + n \int_0^{+\infty} t^{n-1} e^{-t}\,dt = n\,I_{n-1}.$$

$$I_n = n\,I_{n-1}, \text{ avec } I_0 = 1.$$

Par une récurrence immédiate, nous voyons donc que I_n converge pour tout entier n, et sa valeur est donnée par :

$$\boxed{I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\, dt = n\,!,\ n \in \mathrm{N}.}$$

En particulier, pour $n = 3$: $\int_0^{+\infty} t^3 e^{-t}\, dt = 6$.

b) Deuxième intégrale.

HAUT

Nous pouvons relier le calcul de l'intégrale $\int_0^1 (\ln t)^n\, dt$ à celui de l'intégrale précédente

$$I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\, dt$$

en posant :

$t = e^{-x}$, $dt = -e^{-x}\, dx$.
$(\ln t)^n = (-1)^n x^n$.

Pour $t = 0$, x est infini.
Pour $t = 1$, $x = 0$.

$$\int_0^1 (\ln t)^n\, dt = -(-1)^n \int_{\infty}^0 x^n e^{-x}\, dx = (-1)^n \int_0^{+\infty} x^n e^{-x}\, dx.$$

$$\boxed{\int_0^1 (\ln t)^n\, dt = (-1)^n\, n\,!,\ n \in \mathrm{N}.}$$

En particulier, pour $n = 2$: $\int_0^1 (\ln t)^2\, dt = (-1)^2\, 2\,! = 2$.

c) Troisième intégrale.

HAUT

A l'infini, $t \times \frac{1}{t\sqrt{1+t^2}}$ tend vers 0, donc l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t\sqrt{1+t^2}}\, dt$ converge.

Vers 1, $\frac{1}{t\sqrt{1+t^2}}$ reste fini et il n'y a pas de problème de convergence.

On pose $t = \sinh u$, $1 + t^2 = \cosh^2 u$, $dt = \cosh u\, du$.
Pour $t = 1$, $u = Arg\sinh 1$.
Pour t infini, u est infini.

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t\sqrt{1+t^2}}\, dt = \int_{Arg\sinh 1}^{+\infty} \frac{du}{\sinh u}$$

On ramène l'intégration à celle d'une fraction rationnelle en posant $\tanh \frac{u}{2} = x$.

$\sinh u = \frac{2x}{1-x^2}$; $u = 2\ Arg\ \tanh x$, $du = 2\ \frac{dx}{1-x^2}$.

Pour u infini, x tend vers 1.

$$\int_{Arg\sinh 1}^{+\infty} \frac{du}{\sinh u} = \int_{\tanh\left(\frac{1}{2}\ Arg\sinh 1\right)}^{1} \frac{dx}{x} = -\ln\left|\tanh\left(\frac{1}{2}\ Arg\sinh 1\right)\right|$$

Si $\sinh u = 1$, $\frac{1}{2}(e^u - e^{-u}) = 1$, $e^u - e^{-u} = 2$.

Avec $y = e^u > 0$: $y - \frac{1}{y} = 2$, $y^2 - 2y - 1 = 0$, $(y-1)^2 = 2$, $y = 1 + \sqrt{2}$, $u = \ln(y) = \ln(1+\sqrt{2})$.

$$\tanh\left(\frac{1}{2}\ Arg\sinh 1\right) = \tanh\left(\frac{u}{2}\right) = \frac{\sqrt{1+\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{2}}}}{\sqrt{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{2}}}} = \frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} = \frac{1}{1+\sqrt{2}}$$

$$-\ln\left|\tanh\left(\frac{1}{2}\ Arg\sinh 1\right)\right| = \ln(1+\sqrt{2}).$$

$$\boxed{\int_1^{+\infty} \frac{1}{t\sqrt{1+t^2}}\ dt = \ln(1+\sqrt{2}).}$$

d) Quatrième intégrale.

HAUT

Vers 0, la puissance l'emporte sur le logarithme et la fonction est bornée : il n'y a pas de problème de convergence.

Vers l'infini, la puissance l'emporte sur le logarithme et $t \times \frac{t\ln t}{(t^2+1)^2}$ tend vers 0, donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{t\ln t}{(t^2+1)^2}\ dt$ converge.

$$\int_0^{+\infty} \frac{t\ln t}{(t^2+1)^2}\ dt = \int_0^1 \frac{t\ln t}{(t^2+1)^2}\ dt + \int_1^{+\infty} \frac{t\ln t}{(t^2+1)^2}\ dt.$$

Dans $\int_1^{+\infty} \frac{t\ln t}{(t^2+1)^2}\ dt$, posons $u = \frac{1}{t}$. Il vient $t = \frac{1}{u}$, $dt = -\frac{du}{u^2}$;

$\frac{t\ln t}{(t^2+1)^2}\ dt = \frac{u^4 \ln u}{u(1+u^2)^2}\ \frac{du}{u^2} = \frac{u\ln u}{(1+u^2)^2}\ du$

$\int_1^{+\infty} \frac{t\ln t}{(t^2+1)^2}\ dt = \int_1^0 \frac{u\ln u}{(1+u^2)^2}\ du = -\int_0^1 \frac{u\ln u}{(1+u^2)^2}\ du = -\int_0^1 \frac{t\ln t}{(t^2+1)^2}\ dt$ (en changeant de u en t le nom de la variable muette).

$\int_0^1 \frac{t\ln t}{(t^2+1)^2}\ dt + \int_1^{+\infty} \frac{t\ln t}{(t^2+1)^2}\ dt = 0$

D'où le résultat :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{t\,\ln t}{(t^2+1)^2}\,dt = 0.}$$

e) Cinquième intégrale.

HAUT

Le changement de variable $\tan t = u$ transforme l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\tan t}\,dt$ en $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{u}}{1+u^2}\,du$.

Vers 0, $\frac{\sqrt{u}}{1+u^2}$ reste borné, il n'y a pas de problème de convergence.
Vers l'infini, $u \times \frac{\sqrt{u}}{1+u^2}$ tend vers 0, donc l'intégrale converge.

Pour calculer la valeur de l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\tan t}\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{u}}{1+u^2}\,du$, posons $u = x^2$, $x \geq 0$.

$du = 2x\,dx$, $\sqrt{u} = x$.
$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{u}}{1+u^2}\,du = 2\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4}\,dx$.

$1 + x^4 = (x^2+1)^2 - 2x^2 = (x^2 - \sqrt{2}\,x + 1)(x^2 + \sqrt{2}\,x + 1)$
$2\frac{x^2}{1+x^4} = \frac{a\,x+b}{x^2-\sqrt{2}\,x+1} + \frac{c\,x+d}{x^2+\sqrt{2}\,x+1}$
On trouve les coefficients a, b, c, d, en réduisant au même dénominateur et en identifiant :

$(a\,x + b)(x^2 + \sqrt{2}\,x + 1) + (c\,x + d)(x^2 - \sqrt{2}\,x + 1) = 2x^2$

Terme en x^3 : $a + c = 0$.
Terme en x^2 : $b + a\sqrt{2} + d - c\sqrt{2} = 2$.
Terme en x : $b\sqrt{2} + a - d\sqrt{2} + c = 0$.
Terme constant : $b + d = 0$.

$b + a\sqrt{2} + d - c\sqrt{2} = 2$ et $b + d = 0 \Rightarrow a - c = \sqrt{2}$.
$a + c = 0$ et $a - c = \sqrt{2} \Rightarrow a = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $c = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$b\sqrt{2} + a - d\sqrt{2} + c = 0$ et $a + c = 0 \Rightarrow b - d = 0$.
$b - d = 0$ et $b + d = 0 \Rightarrow b = d = 0$.

$$2\frac{x^2}{1+x^4} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{x}{x^2-\sqrt{2}\,x+1} - \frac{x}{x^2+\sqrt{2}\,x+1}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\frac{2x-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}\,x+1} - \frac{2x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}\,x+1}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2-\sqrt{2}\,x+1} - \frac{1}{x^2+\sqrt{2}\,x+1}\right)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\tan t}\, dt = 2\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4}\, dx = \frac{\sqrt{2}}{4}\left[\ln\left(\frac{x^2-\sqrt{2}\,x+1}{x^2+\sqrt{2}\,x+1}\right)\right]_0^{\infty} + \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2-\sqrt{2}\,x+1} - \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+\sqrt{2}\,x+1}$$

Le terme tout intégré est nul et il reste :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\tan t}\, dt = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2-\sqrt{2}\,x+1} - \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+\sqrt{2}\,x+1}$$

$x^2 \pm \sqrt{2}\,x + 1 = \left(x \pm \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}((\sqrt{2}\,x \pm 1)^2 + 1)$

On pose $u = \sqrt{2}\,x \pm 1$: il vient $dx = \frac{\sqrt{2}}{2}\,du$, $\frac{1}{x^2 \pm \sqrt{2}\,x+1} dx = \sqrt{2}\,\frac{du}{1+u^2}$

Pour $x = 0$, $u = \pm 1$. Pour x infini, u est infini.

$$\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2-\sqrt{2}\,x+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}\int_{-1}^{+1} \frac{du}{1+u^2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\int_1^{+\infty} \frac{du}{1+u^2}$$

$$\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+\sqrt{2}\,x+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}\int_1^{+\infty} \frac{du}{1+u^2}$$

$$\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2-\sqrt{2}\,x+1} - \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+\sqrt{2}\,x+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}\int_{-1}^{+1} \frac{du}{1+u^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\,(Arc\tan 1 - Arc\tan(-1)) = \sqrt{2}\,\frac{\pi}{4}$$

$$\boxed{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\tan t}\, dt = \sqrt{2}\,\frac{\pi}{4}.}$$

f) Sixième intégrale.

HAUT

Pour $t = \ln 2$, la fonction $\frac{1+e^t}{e^{2t}-2e^t+1}$ est bornée, il n'y a pas de problème de convergence de l'intégrale.

Pour t infini, la fonction $t \times \frac{1+e^t}{e^{2t}-2e^t+1}$ est équivalente à $t\,e^{-t}$: l'exponentielle l'emporte sur la puissance, le produit tend vers 0 et l'intégrale converge.

On ramène le calcul de l'intégrale $\int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{1+e^t}{e^{2t}-2e^t+1}\, dt$ à l'intégration de fractions rationnelles en posant

$u = \tanh \frac{t}{4}$: $\sinh \frac{t}{2} = \frac{2u}{1-u^2}$, $\cosh \frac{t}{2} = \frac{1+u^2}{1-u^2}$, $dt = 4\,\frac{du}{1-u^2}$.

Pour $t = \ln 2$, $u = \frac{e^{\frac{\ln 2}{4}} - e^{-\frac{\ln 2}{4}}}{e^{\frac{\ln 2}{4}} + e^{-\frac{\ln 2}{4}}} = 3 - 2\sqrt{2}$.

Pour t infini, $u = 1$.

$$\frac{1+e^t}{e^{2t}-2e^t+1} = \frac{1+e^t}{(e^t-1)^2} = e^{-\frac{t}{2}}\frac{2\cosh\frac{t}{2}}{4\sinh^2\frac{t}{2}} = \frac{1}{2}\left(\cosh\frac{t}{2}-\sinh\frac{t}{2}\right)\frac{\cosh\frac{t}{2}}{\sinh^2\frac{t}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{(1-u)^2}{1-u^2}\frac{1+u^2}{1-u^2}\frac{(1-u^2)^2}{4u^2} = \frac{1}{8}(1-u)^2\frac{1+u^2}{u^2}$$

$$\int_{\ln 2}^{+\infty}\frac{1+e^t}{e^{2t}-2e^t+1}\,dt = \int_{\ln 2}^{+\infty}\frac{1}{2}\left(\cosh\frac{t}{2}-\sinh\frac{t}{2}\right)\frac{\cosh\frac{t}{2}}{\sinh^2\frac{t}{2}}\,dt = \int_{3-2\sqrt{2}}^{1}\frac{1}{8}(1-u)^2\frac{1+u^2}{u^2}4\,\frac{du}{1-u^2}$$

$$= \frac{1}{2}\int_{3-2\sqrt{2}}^{1}\frac{1-u}{1+u}\frac{1+u^2}{u^2}\,du$$

$$\frac{1-u}{1+u}\frac{1+u^2}{u^2} = \left(\frac{2}{1+u}-1\right)\left(1+\frac{1}{u^2}\right) = \frac{2}{u^2(1+u)}+\frac{2}{1+u}-\frac{1}{u^2}-1$$

$$\frac{2}{u^2(1+u)} = \frac{2}{u^2}+\frac{2}{1+u}+\frac{a}{u}$$

$$\frac{a}{u} = \frac{2}{u^2(1+u)}-\frac{2}{u^2}-\frac{2}{1+u} = \frac{2-2(1+u)-2u^2}{u^2(1+u)} = -\frac{2}{u},\ a = -2.$$

$$\frac{1-u}{1+u}\frac{1+u^2}{u^2} = \frac{2}{u^2}+\frac{2}{1+u}-\frac{2}{u}+\frac{2}{1+u}-\frac{1}{u^2}-1 = \frac{1}{u^2}-\frac{2}{u}+\frac{4}{1+u}-1$$

$$\int_{\ln 2}^{+\infty}\frac{1+e^t}{e^{2t}-2e^t+1}\,dt = \frac{1}{2}\int_{3-2\sqrt{2}}^{1}\left(\frac{1}{u^2}-\frac{2}{u}+\frac{4}{1+u}-1\right)du$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{u}\right]_{3-2\sqrt{2}}^{1} - \left[\ln u\right]_{3-2\sqrt{2}}^{1} + 2\left[\ln(1+u)\right]_{3-2\sqrt{2}}^{1} - \frac{1}{2}\left[u\right]_{3-2\sqrt{2}}^{1}$$

$$= -\frac{1}{2}(1-(3+2\sqrt{2})) + \ln(3-2\sqrt{2}) + 2(\ln 2 - \ln(4-2\sqrt{2})) - \frac{1}{2}(1-(3-2\sqrt{2}))$$

$$= -\frac{1}{2}(-2-2\sqrt{2})) + \ln(3-2\sqrt{2}) - 2\ln(2-\sqrt{2}) - \frac{1}{2}(-2+2\sqrt{2}))$$

$$= 2 - 2\ln 2$$

$$\boxed{\int_{\ln 2}^{+\infty}\frac{1+e^t}{e^{2t}-2e^t+1}\,dt = 2-2\ln 2}$$

g) Septième intégrale.

HAUT

$1 - 3t + 2t^2 = (2t-1)(t-1)$ est positif à l'extérieur de l'intervalle fermé $\left[\frac{1}{2}\,;\,1\right]$.

Dans l'intervalle $\left]0\,;\,\frac{1}{2}\right[$, $1 - 3t + 2t^2 = (1-2t)(1-t)$, avec $1-2t > 0$ et $1-t > 0$

Dans cet intervalle, on peut donc écrire : $\ln\frac{1}{1-3t+2t^2} = -\ln(1-2t) - \ln(1-t)$

$\ln(1-t)$ varie de 0 à $-\ln 2$, il reste borné, il n'y a pas de problème de convergence de l'intégrale.

On peut calculer $\int_0^{\frac{1}{2}} ln\,(1-2\,t)\,dt$ en faisant d'abord la changement de variable $u = 1-2\,t$, $dt = -\frac{1}{2}\,du$.
Pour $t = 0$, $u = 1$.
Pour $t = \frac{1}{2}$, $u = 0$.

$$\int_0^{\frac{1}{2}} ln\,(1-2\,t)\,dt = -\frac{1}{2}\int_1^0 ln\,u\,du = \frac{1}{2}\int_0^1 ln\,u\,du.$$

Au voisinage de 1, $ln\,u$ reste borné, il n'y a pas de problème de convergence.
Au voisinage de 0, $u\,ln\,u$ tend vers 0, donc l'intégrale est convergente.

Pour calculer $\int_0^1 ln\,u\,du$, on intègre par parties :

$$\int_0^1 ln\,u\,du = [\,u\,ln\,u\,]_0^1 - \int_0^1 du = -1.$$

Finalement, il reste :

$$\int_0^{\frac{1}{2}} ln\,\frac{1}{1-3t+2t^2}\,dt = -\int_0^{\frac{1}{2}} ln\,(1-2\,t)\,dt - \int_0^{\frac{1}{2}} ln\,(1-t)\,dt$$
$$= \frac{1}{2} + \left[\,\frac{1}{1-t}\,\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}$$

$$\boxed{\int_0^{\frac{1}{2}} ln\,\frac{1}{1-3t+2t^2}\,dt = \frac{3}{2}.}$$

h) Huitième intégrale.

HAUT

Comme l'application $t \mapsto \frac{1}{1+t^4}$ est une application paire de R dans R, on peut écrire (changement de variable $t \mapsto -t$):

$$\int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+t^4}\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^4}\,dt$$

Vers 0, $\frac{1}{1+t^4}$ est borné, il n'y a pas de problème de convergence de l'intégrale.
Vers l'infini, $t \times \frac{1}{1+t^4}$ tend vers 0 : l'intégrale est convergente.

$$1 + t^4 = (1 + t^2)^2 - 2\,t^2 = (t^2 - \sqrt{2}\,t + 1)(t^2 + \sqrt{2}\,t + 1)$$

Les deux facteurs du produit restent constamment strictement positifs dans l'intervalle d'intégration.

$$\frac{1}{1+t^4} = \frac{a\,t+b}{t^2-\sqrt{2}\,t+1} + \frac{c\,t+d}{t^2+\sqrt{2}\,t+1}$$

Pour trouver les coefficients a, b, c, d, on réduit au même dénominateur et on identifie :
$(a\,t + b)(t^2 + \sqrt{2}\,t + 1) + (c\,t + d)(t^2 - \sqrt{2}\,t + 1) = 1$

Terme en t^3 : $a + c = 0$.
Terme en t^2 : $\sqrt{2}\,a + b - \sqrt{2}\,c + d = 0$.
Terme en t : $\sqrt{2}\,b + a - \sqrt{2}\,d + c = 0$.
Terme constant : $b + d = 1$.

$b + d = 1$ et $\sqrt{2}\,a + b - \sqrt{2}\,c + d = 0 \Rightarrow a - c = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.
$a - c = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $a + c = 0 \Rightarrow a = -\frac{\sqrt{2}}{4}$ et $c = \frac{\sqrt{2}}{4}$.
$a + c = 0$ et $\sqrt{2}\,b + a - \sqrt{2}\,d + c = 0 \Rightarrow b - d = 0$.
$b - d = 0$ et $b + d = 1 \Rightarrow b = \frac{1}{2}$ et $d = \frac{1}{2}$.

Finalement :

$$\frac{1}{1+t^4} = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\frac{t+\sqrt{2}}{t^2+\sqrt{2}\,t+1} - \frac{t-\sqrt{2}}{t^2-\sqrt{2}\,t+1}\right),$$

soit, en faisant apparaître aux numérateurs, les dérivées des dénominateurs :

$$\frac{1}{1+t^4} = \frac{\sqrt{2}}{8}\left(\frac{2t+\sqrt{2}}{t^2+\sqrt{2}\,t+1} - \frac{2t-\sqrt{2}}{t^2-\sqrt{2}\,t+1}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{t^2+\sqrt{2}\,t+1} + \frac{1}{t^2-\sqrt{2}\,t+1}\right)$$

En intégrant de 0 à l'infini, il vient :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^4}\,dt = \frac{\sqrt{2}}{8}\left[\ \ln\frac{t^2+\sqrt{2}\,t+1}{t^2-\sqrt{2}\,t+1}\ \right]_0^{\infty} + \frac{1}{4}\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2+\sqrt{2}\,t+1} + \frac{1}{4}\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2-\sqrt{2}\,t+1}$$

Lorsque t tend vers l'infini, $\frac{t^2+\sqrt{2}\,t+1}{t^2-\sqrt{2}\,t+1}$ tend vers 1 et son logarithme tend vers 0.

Lorsque $t = 0$, $\frac{t^2+\sqrt{2}\,t+1}{t^2-\sqrt{2}\,t+1} = 1$ et son logarithme est nul.
Conclusion : le terme tout intégré est nul.
Il reste :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^4}\,dt = \frac{1}{4}\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2+\sqrt{2}\,t+1} + \frac{1}{4}\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2-\sqrt{2}\,t+1},$$

Dans l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2-\sqrt{2}\,t+1}$, changeons t en $-t$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2-\sqrt{2}\,t+1} = -\int_0^{-\infty} \frac{dt}{t^2+\sqrt{2}\,t+1} = \int_{-\infty}^{0} \frac{dt}{t^2+\sqrt{2}\,t+1}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^4}\,dt = \frac{1}{4}\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2+\sqrt{2}\,t+1} + \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{0} \frac{dt}{t^2+\sqrt{2}\,t+1} = \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{t^2+\sqrt{2}\,t+1}$$

$$t^2+\sqrt{2}\,t+1 = \left(t+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}((\sqrt{2}\,t+1)^2+1)$$

Posons $u = \sqrt{2}\,t + 1$, $dt = \frac{\sqrt{2}}{2}\,du$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{t^2+\sqrt{2}\,t+1} = \sqrt{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{1+u^2} = \sqrt{2}\,[\,Arc\ tan\ u\,]_{-\infty}^{+\infty} = \sqrt{2}\,\pi.$$

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^4}\,dt = \sqrt{2}\,\frac{\pi}{4}.}$$

HAUT

Chapitre 11. Intégration.

Enoncés.

Exercice 16. Convergence de l'intégrale de *f* (*t*) / *t*.

Soit f : [1, + ∞ [⟶ R une application continue sur [1, + ∞ [telle que l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(t)\,dt$ converge. Montrer l'existence et calculer la valeur de l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,dt$.	

Solution.

1°/ Existence.

D'après le théorème de Cauchy, l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ et la série de terme général $f(n)$ sont simultanément convergentes ou divergentes.
Donc si l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(t)\,dt$ converge, la série $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ est convergente et, en particulier, la suite $(f(n))_{n \in N^*}$ converge vers 0.
Comme la fonction f est continue sur [1, + ∞ [, dire que la suite $(f(n))_{n \in N^*}$ converge vers 0, implique que $f(t)$ tend vers 0 lorsque t tend vers l'infini, puisqu'on peut extraire une suite $(n)_{n \in N^*}$ de valeurs de t, telle que la suite $(f(n))_{n \in N^*}$ converge vers 0.

Alors la limite de $t \times \frac{f(t)}{t} = f(t)$ lorsque t tend vers l'infini est 0, donc :

L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,dt$ est convergente.

2°/ Valeur.

Supposons que f soit une fonction entière (f possède, en tout point de R, un développement en série entière de rayon de convergence infini).
On peut alors écrire, pour tout t :

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} t^k \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$$

$$\frac{f(t)}{t} = \sum_{k=0}^{\infty} t^{k-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$$

Soit $F : x \mapsto \int_1^x \frac{f(t)}{t}\, dt$, définie sur [1 , + ∞ [, la primitive de $\frac{f(t)}{t}$ nulle pour $t = 1$: $F(1) = 0$.

On a $\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\, dt = \lim_{x \to +\infty} F(x)$ et, d'après 1°/, cette limite existe.

$$F(x) = \int_1^x \frac{f(t)}{t}\, dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \left(\int_1^x t^{k-1}\, dt \right)$$

$$= f(0) \ln x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \frac{x^k - 1}{k}$$

$$\boxed{\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\, dt = \lim_{x \to +\infty} F(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(f(0) \ln x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \frac{x^k - 1}{k} \right)}$$

Chapitre 11. Intégration.

Enoncés.

Exercice 17. Limite en 0 de $x\,f\,(x)$.

Soit f :]0, 1] ⟶ R une application décroissante sur]0, 1] telle que l'intégrale $\int_0^1 f\,(t)\,dt$ converge. Montrer l'existence et déterminer la valeur de $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} x\,f\,(x)$.	

Solution.

1er cas. Si $f\,(x)$ est bornée au voisinage de 0, il est clair que la limite $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} x\,f\,(x)$ existe et vaut 0.

2e cas. Si $f\,(x)$ n'est pas bornée au voisinage de 0, comme f est décroissante, c'est que $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f\,(x) = +\infty$.

On pourra donc supposer que ***f* est positive dans un voisinage de 0**.

Dans ce cas, dire que l'intégrale $\int_0^1 f\,(t)\,dt$ converge, c'est dire que $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \int_x^1 f\,(t)\,dt$ existe et que cette limite est la valeur de l'intégrale $\int_0^1 f\,(t)\,dt$.

Donc, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe un $\eta > 0$ tel que, pour tout x vérifiant $0 < x < \eta \Rightarrow \left| \int_x^1 f\,(t)\,dt - \int_0^1 f\,(t)\,dt \right| < \varepsilon$.

Or $\int_x^1 f\,(t)\,dt - \int_0^1 f\,(t)\,dt = \int_0^x f\,(t)\,dt > 0$, en restreignant au besoin l'intervalle] 0, η] à un intervalle] 0, η'] ⊆] 0, η] dans lequel f est positive.

Comme f est décroissante, $f\,(t) \geq f\,(x)$, pour tout $t \in$] 0, x] et $\int_0^x f\,(t)\,dt \geq x\,f\,(x) > 0$.

On a donc $x < \eta \Rightarrow | x\,f\,(x) | \leq \left| \int_x^1 f\,(t)\,dt - \int_0^1 f\,(t)\,dt \right| < \varepsilon$.

La relation $(\forall\ \varepsilon > 0)(\exists\ \eta > 0)(\forall\ x)(0 < x < \eta \Rightarrow | x\,f\,(x) | < \varepsilon)$ signifie très exactement que la limite

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} x\,f(x)$ existe et vaut 0.

Dans tous les cas :

La limite $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} x\,f(x)$ existe et vaut 0.

Chapitre 11. Intégration.

Enoncés.

Exercice 18. Convergence et valeur de 2 intégrales.

Etudier la convergence et calculer la valeur des intégrales : a) $\int_0^{+\infty}\left(2+(t+3)\,ln\,\frac{t+2}{t+4}\right)dt$ b) $\int_0^1 \frac{1}{t^2}\,ln\,(1-t^2)\,dt$	

Solution.

a) Première intégrale.

Lorsque t tend vers l'infini, $2+(t+3)\,ln\,\frac{t+2}{t+4} \approx 2+(t+3)\,ln\,(1+\frac{2}{t})(1-\frac{4}{t}) \approx 2+(t+3)\,ln\,(1-\frac{2}{t}) \approx 2+t\,ln\,(1-\frac{2}{t})$ qui a pour limite 0.

Etudions la limite à l'infini de $t\times\left(2+(t+3)\,ln\,\frac{t+2}{t+4}\right)$

Lorsque u est voisin de 0, $ln\,(1+u)=u-\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{3}-...$

$$ln\,(t+2)=ln\,t+ln\left(1+\frac{2}{t}\right)=ln\,t+\left(\frac{2}{t}-\frac{2}{t^2}+\frac{8}{3t^3}-...\right)$$
$$ln\,(t+4)=ln\,t+ln\left(1+\frac{4}{t}\right)=ln\,t+\left(\frac{4}{t}-\frac{8}{t^2}+\frac{64}{3t^3}-...\right)$$
$$ln\,\frac{t+2}{t+4}=ln\,(t+2)-ln\,(t+4)=\left(\frac{2}{t}-\frac{2}{t^2}+\frac{8}{3t^3}-...\right)-\left(\frac{4}{t}-\frac{8}{t^2}+\frac{64}{3t^3}-...\right)=-\frac{2}{t}+\frac{6}{t^2}-\frac{56}{3t^3}+o\left(\frac{1}{t^4}\right)$$
$$(t+3)\,ln\,\frac{t+2}{t+4}=t\left(1+\frac{3}{t}\right)\left(-\frac{2}{t}+\frac{6}{t^2}-\frac{56}{3t^3}+o\left(\frac{1}{t^4}\right)\right)$$
$$(t+3)\,ln\,\frac{t+2}{t+4}=\left(1+\frac{3}{t}\right)\left(-2+\frac{6}{t}-\frac{56}{3t^2}+o\left(\frac{1}{t^3}\right)\right)$$
$$(t+3)\,ln\,\frac{t+2}{t+4}=-2-\frac{2}{3t^2}+o\left(\frac{1}{t^3}\right)$$
$$2+(t+3)\,ln\,\frac{t+2}{t+4}=-\frac{2}{3t^2}+o\left(\frac{1}{t^3}\right)$$

$$t \times \left(2 + (t+3)\, ln\, \frac{t+2}{t+4} \right) = -\frac{2}{3t} + o\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

Donc, lorsque t tend vers l'infini, $t \times \left(2 + (t+3)\, ln\, \frac{t+2}{t+4} \right)$ tend vers 0, ce qui veut dire que

L'intégrale $\int_0^{+\infty} \left(2 + (t+3)\, ln\, \frac{t+2}{t+4} \right) dt$ est convergente.

Pour calculer la valeur de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \left(2 + (t+3)\, ln\, \frac{t+2}{t+4} \right) dt$, nous allons calculer la primitive nulle pour $x = 0$:

$$F(x) = \int_0^x \left(2 + (t+3)\, ln\, \frac{t+2}{t+4} \right) dt = 2\int_0^x dt + \int_0^x (t+2)\, ln\,(t+2)\, dt + \int_0^x ln\,(t+2)\, dt - \int_0^x (t+4)\, ln\,(t+4)\, dt + \int_0^x ln\,(t+4)\, dt.$$

1°/ $2\int_0^x dt = 2x.$

2°/ $\int_0^x (t+2)\, ln\,(t+2)\, dt = \int_2^{x+2} u\, ln\, u\, du.$

On intègre par parties :

$$\int_2^{x+2} u\, ln\, u\, du = \frac{1}{2}\left[u^2\, ln\, u \right]_2^{x+2} - \frac{1}{2}\int_2^{x+2} u\, du = \frac{1}{2}\left[u^2\, ln\, u \right]_2^{x+2} - \frac{1}{4}\left[u^2 \right]_2^{x+2}$$

$$= \frac{1}{2}(x+2)^2\, ln\,(x+2) - 2\, ln\, 2 - \frac{1}{4}(x+2)^2 + 1$$

$$\int_0^x (t+2)\, ln\,(t+2)\, dt = \frac{1}{2}(x+2)^2\, ln\,(x+2) - \frac{x^2}{4} - x - 2\, ln\, 2$$

3°/ $\int_0^x ln\,(t+2)\, dt = \int_2^{x+2} ln\, u\, du.$

On intègre par parties :

$$\int_2^{x+2} ln\, u\, du = \left[u\, ln\, u \right]_2^{x+2} - \int_2^{x+2} du = (x+2)\, ln\,(x+2) - 2\, ln\, 2 - x.$$

Au total :

$$\int_0^x (t+2)\, ln\,(t+2)\, dt + \int_0^x ln\,(t+2)\, dt = \left(\frac{1}{2}(x+2)^2 + (x+2) \right) ln\,(x+2) - \frac{x^2}{4} - 2x - 4\, ln\, 2$$

$$\int_0^x (t+3)\, ln\,(t+2)\, dt = \frac{1}{2}\left((x+3)^2 - 1\right) ln\,(x+2) - \frac{1}{4}(x+4)^2 + 4 - 4\, ln\, 2.$$

$4°/ \int_0^x (t+4)\, ln\,(t+4)\, dt = \int_4^{x+4} u\, ln\, u\, du = \frac{1}{2}\,[\, u^2\, ln\, u\,]_4^{x+4} - \frac{1}{4}\,[\, u^2\,]_4^{x+4}$

$= \frac{1}{2}\,(x+4)^2\, ln\,(x+4) - 16\, ln\, 2 - \frac{1}{4}\,(x+4)^2 + 4.$

$5°/ \int_0^x ln\,(t+4)\, dt = \int_4^{x+4} ln\, u\, du = [\, u\, ln\, u - u\,]_4^{x+4}$

$= (x+4)\, ln\,(x+4) - 8\, ln\, 2 - x.$

Au total :

$\int_0^x (t+4)\, ln\,(t+4)\, dt - \int_0^x ln\,(t+4)\, dt = \frac{1}{2}\,(x+4)^2\, ln\,(x+4) - 16\, ln\, 2 - \frac{1}{4}\,(x+4)^2 + 4 - (x+4)\, ln\,(x+4) + 8\, ln\, 2 + x.$

$= \left(\frac{1}{2}\,(x+4)^2 - (x+4)\right) ln\,(x+4) - \frac{1}{4}\,(x+4)^2 + 4 - 8\, ln\, 2 + x$

$\int_0^x (t+3)\, ln\,(t+4)\, dt = \frac{1}{2}((x+3)^2 - 1)\, ln\,(x+4) - \frac{1}{4}\,(x+4)^2 + 4 - 8\, ln\, 2 + x.$

Rassemblons ces résultats :

$F\,(x) = 2\,x + \frac{1}{2}((x+3)^2 - 1)\, ln\,(x+2) - \frac{1}{4}\,(x+4)^2 + 4 - 4\, ln\, 2 - \frac{1}{2}((x+3)^2 - 1)\, ln\,(x+4) + \frac{1}{4}\,(x+4)^2 - 4 + 8\, ln\, 2 - x)$

$= x + \frac{1}{2}((x+3)^2 - 1)\, ln\, \frac{x+2}{x+4} + 4\, ln\, 2$

$$\boxed{F\,(x) = x + \frac{1}{2}((x+3)^2 - 1)\, ln\, \frac{x+2}{x+4} + 4\, ln\, 2.}$$

On retrouve bien $F\,(0) = 0$.
Et lorsque x tend vers l'infini :

$ln\, \frac{x+2}{x+4} = -\frac{2}{x} + \frac{6}{x^2} - \frac{56}{3x^3} + o\left(\frac{1}{x^4}\right)$

$(x+3)\, ln\, \frac{x+2}{x+4} = -2 - \frac{2}{3x^2} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)$

$(x+3)^2\, ln\, \frac{x+2}{x+4} = x\left(1 + \frac{3}{x}\right)\left(-2 - \frac{2}{3x^2} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)$

$= \left(1 + \frac{3}{x}\right)\left(-2x - \frac{2}{3x} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)$

$= -2x - 6 - \frac{2}{3x} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$

$((x+3)^2 - 1)\, ln\, \frac{x+2}{x+4} = -2x - 6 - \frac{2}{3x} + \frac{2}{x} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) = -2\left(x + 3 - \frac{2}{3x}\right) + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$

$F\,(x) = x + \frac{1}{2}((x+3)^2 - 1)\, ln\, \frac{x+2}{x+4} + 4\, ln\, 2 = x - \left(x + 3 - \frac{2}{3x}\right) + o\left(\frac{1}{x^2}\right) + 4\, ln\, 2 = 4\, ln\, 2 - 3 + \frac{2}{3x}$

$+ o\left(\frac{1}{x^2}\right)$

$$\lim_{x \to +\infty} F(x) = \int_0^{+\infty} \left(2 + (t+3) \ln \frac{t+2}{t+4}\right) dt = 4 \ln 2 - 3.$$

b) Deuxième intégrale.

Au voisinage de 0, $\ln (1 - t^2) \approx - t^2$ et $\frac{1}{t^2} \ln (1 - t^2)$ tend vers 1 : la fonction est bornée, il n'y a pas de problème de convergence vers 0.

Lorsque t tend vers 1, $\frac{1}{t^2} \ln (1 - t^2) \approx \ln (1 - t) + \ln 2$ tend vers $- \infty$ et $(1 - t) \times \frac{1}{t^2} \ln (1 - t^2) \approx (1 - t) \ln (1 - t)$ tend vers 0 (la puissance l'emporte sur le logarithme), donc :

$$\text{L'intégrale } \int_0^1 \frac{1}{t^2} \ln (1 - t^2)\, dt \text{ est convergente.}$$

Pour calculer la valeur de l'intégrale, cherchons une primitive de $\frac{1}{t^2} \ln (1 - t^2)$:

$$F(x) = \int_0^x \frac{1}{t^2} \ln (1 - t^2)\, dt,\ 0 \leq x < 1, \text{ avec } F(0) = 0.$$

Posons $t = \sin u$, $dt = \cos u\, du$.
Lorsque t varie de 0 à x, u varie de 0 à $Arc \sin x$.
$\frac{1}{t^2} \ln (1 - t^2) = \frac{1}{\sin^2 u} \ln (\cos^2 u) = 2 \frac{1}{\sin^2 u} \ln (\cos u)$, puisque $\cos u$ est positif.
$\int_0^x \frac{1}{t^2} \ln (1 - t^2)\, dt = 2 \int_0^{Arc \sin x} \frac{\cos u}{\sin^2 u} \ln (\cos u)\, du$.

Intégrons par parties avec : $v = \ln (\cos u)$, $dv = - \frac{\sin u}{\cos u} du$, $dw = \frac{\cos u}{\sin^2 u} du$, $w = - \frac{1}{\sin u}$. $\int v\, dw = v\, w - \int w\, dv$.

$$\int_0^{Arc \sin x} \frac{\cos u}{\sin^2 u} \ln (\cos u)\, du = - \left[\frac{\ln (\cos u)}{\sin u} \right]_0^{Arc \sin x} - \int_0^{Arc \sin x} \frac{du}{\cos u}$$

Lorsque u tend vers 0, $\sin u \approx u$ tend vers 0, $\cos u \approx 1 - \frac{u^2}{2}$ tend vers 1 et $\ln (\cos u) \approx - \frac{u^2}{2}$ tend vers 0.
$\frac{\ln (\cos u)}{\sin u} \approx - \frac{u}{2}$ tend vers 0. Il reste :
$- \left[\frac{\ln (\cos u)}{\sin u} \right]_0^{Arc \sin x} = - \frac{1}{x} \ln \sqrt{1 - x^2} = - \frac{1}{x} \ln \sqrt{1 - x} - \frac{1}{x} \ln \sqrt{1 + x}$,
puisque $\sin (Arc \sin x) = x$ et $\cos (Arc \sin x) = \sqrt{1 - x^2} = \sqrt{1 - x} \sqrt{1 + x}$

Pour calculer $\int_0^{Arc\sin x} \frac{du}{\cos u}$, on pose $y = \tan\frac{u}{2}$, $u = 2\,Arc\tan y$, $du = 2\frac{dy}{1+y^2}$, $\cos u = \frac{1-y^2}{1+y^2}$;

$\frac{du}{\cos u} = 2\frac{dy}{1-y^2}$

Lorsque u varie de 0 à $Arc\sin x$, $y = \tan\frac{u}{2}$ varie de 0 à $\tan\left(\frac{1}{2}Arc\sin x\right) = \frac{1}{x}(1-\sqrt{1-x^2})$

$$\int_0^{Arc\sin x} \frac{du}{\cos u} = 2\int_0^{\tan\left(\frac{1}{2}Arc\sin x\right)} \frac{dy}{1-y^2}$$

$$2\frac{1}{1-y^2} = \frac{1}{1-y} + \frac{1}{1+y}$$

$$2\int_0^{\tan\left(\frac{1}{2}Arc\sin x\right)} \frac{dy}{1-y^2} = \left[\ ln\left|\frac{1+y}{1-y}\right|\ \right]_0^{\tan\left(\frac{1}{2}Arc\sin x\right)} = ln\left|\frac{1+\tan\left(\frac{1}{2}Arc\sin x\right)}{1-\tan\left(\frac{1}{2}Arc\sin x\right)}\right|$$

$$\int_0^{Arc\sin x} \frac{du}{\cos u} = ln\left|\frac{x+1-\sqrt{1-x^2}}{x-1+\sqrt{1-x^2}}\right| = ln\,(1+x-\sqrt{1-x^2}) - ln\,(\sqrt{1-x^2}-(1-x))$$

$$= ln\sqrt{1+x} + ln\,(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}) - ln\sqrt{1-x} - ln\,(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})$$
$$= ln\sqrt{1+x} - ln\sqrt{1-x}$$

$$\int_0^{Arc\sin x} \frac{\cos u}{\sin^2 u}\,ln\,(\cos u)\,du = -\frac{1}{x}\,ln\sqrt{1-x} - \frac{1}{x}\,ln\sqrt{1+x} - (ln\sqrt{1+x} - ln\sqrt{1-x})$$

$$\int_0^x \frac{1}{t^2}\,ln\,(1-t^2)\,dt = 2\,(1-\frac{1}{x})\,ln\sqrt{1-x} - 2\,(1+\frac{1}{x})\,ln\sqrt{1+x}$$

$F(x) = -\frac{1}{x}((1-x)\,ln\,(1-x) + (1+x)\,ln\,(1+x))$

$$\boxed{\int_0^x \frac{1}{t^2}\,ln\,(1-t^2)\,dt = -\frac{1}{x}((1-x)\,ln\,(1-x) + (1+x)\,ln\,(1+x)).}$$

Lorsque x tend vers 0 :
$-\frac{1}{x}((1-x)\,ln\,(1-x) + (1+x)\,ln\,(1+x)) \approx -\frac{1}{x}(-x\,(1-x) + x\,(1+x)) = -2\,x.$
On retrouve $F(0) = 0$.

Lorsque x tend vers 1, $(1-x)\,ln\,(1-x)$ tend vers 0 (la puissance l'emporte sur le logarithme), donc $F(x) = \int_0^x \frac{1}{t^2}\,ln\,(1-t^2)\,dt$ tend vers $-2\,ln\,2$, et, puisque F est continue, $F(1) = -2\,ln\,2$.

$$\boxed{\int_0^1 \frac{1}{t^2}\,ln\,(1-t^2)\,dt = -2\,ln\,2.}$$

Exercices

Séries entières.

1. Série entière.
2. Rayon de convergence.
3. Règle de d'Alembert.
4. Règle de Cauchy.
5. Série géométrique.
6. Série entière de l'exponentielle.
7. Dérivation d'une série entière.
8. 4 moyens de développer une fonction analytique en série entière.

Série entière.

On appelle série entière complexe, de centre a et de coefficients a_n, où a et les a_n sont des nombres complexes, toute série, fonction de la variable complexe z , de la forme :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n.$$

- **Le nombre complexe a s'appelle le centre de la série entière.**
- **Les nombres complexes a_n s'appellent les coefficients de la série entière : a_n est le coefficient d'indice n. Les coefficients sont des nombres, en général complexes, quelconques, pas néssairement des entiers.**
- **Toute série entière possède un rayon de convergence qui est un nombre positif, éventuellement nul ou infini.**
- **Une série entière ne converge pour tout complexe z que si son rayon de convergence est infini.**

HAUT

Rayon de convergence.

HAUT

Etant donnée une série entière complexe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$, il existe toujours un nombre positif R (éventuellement nul ou infini) tel que

- **la série converge absolument à l'intérieur du disque de centre a et de rayon R (ce qui veut dire que la série des modules converge pour $|z-a| < R$)**
- **la série diverge à l'extérieur de ce disque (c'est-à-dire pour $|z-a| > R$).**

Le nombre R est appelé le rayon de convergence de la série

Pour calculer le rayon de convergence d'une série entière, on peut toujours essayer d'utiliser, quand c'est possible, la règle de d'Alembert ou la règle de Cauchy.
A défaut, on calculera la distance au centre du point singulier le plus proche : cette distance est égale au rayon de convergence.

Le disque ouvert de centre a et de rayon R est appelé le disque de convergence de la série : il peut être vide ($R = 0$), ou égal au plan complexe (R infini).

- **Pour tout nombre réel $r < R$, la série est normalement convergente dans le disque fermé de centre a et de rayon r (ce qui veut dire que la série des modules converge uniformément pour $|z-a| \leqslant r$).**
- **Sur la frontière du disque de convergence, la série peut être, suivant les cas ou suivant les points, convergente ou divergente.**

HAUT

Règle de d'Alembert.

HAUT

Si $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ tend vers une limite λ, finie ou infinie, quand n tend vers l'infini, alors la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$ a, pour rayon de convergence, l'inverse de cette limite : $R = \frac{1}{\lambda}$.

Cette règle ne permet de calculer le rayon de convergence que si le module du rapport de deux coefficients successifs possède une limite.

Démonstration.

Pour simplifier l'écriture, nous posons $Z = z - a$. La série entière s'écrit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n Z^n$. Par hypothèse, la limite, lorsque n tend vers l'infini, de $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$, est un nombre positif, réel ou infini, qui peut, éventuellement, être nul. Nous appelons R le nombre, réel ou infini, éventuellement nul, défini par :

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n \to +\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|}$$

1°/ Pour *R* fini et | *Z* | > *R*,

$\frac{1}{R} = \lim\limits_{n \to +\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ est strictement plus grand que $\frac{1}{|Z|}$, donc il existe un entier N tel que, pour tout n supérieur ou égal à N, on ait :

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > \frac{1}{|Z|}$$

et cette inégalité peut être écrite sous la forme :

$$\left|\frac{a_{n+1} Z^{n+1}}{a_n Z^n}\right| > 1, \text{ pour tout } n \text{ supérieur ou égal à } N.$$

Sous cette forme, elle montre que le terme général de la série des modules est strictement croissant lorsque n augmente, donc le terme général de la série entière ne peut tendre vers 0 et la série entière est divergente.

2°/ Pour *R* différent de 0 et | *Z* | < *R*,

On peut trouver deux nombres réels r et ρ strictement positifs vérifiant $|Z| \leqslant r < \rho < R$.
La relation $\frac{1}{R} = \lim\limits_{n \to +\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < \frac{1}{\rho}$ entraîne alors, par définition d'une limite, l'existence d'un nombre

M tel que, pour tout *n* supérieur ou égal à *M*, on ait $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < \frac{1}{\rho}$. On peut écrire :

$$\left|\frac{a_{n+2}}{a_n}\right| = \left|\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}\right|\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < \frac{1}{\rho^2}$$

et, par récurrence,

$$\left|\frac{a_{n+p}}{a_n}\right| < \frac{1}{\rho^p}, \text{ avec } n \geqslant M, \text{ et } \rho \geqslant 0.$$

S'en déduisent les relations :

$$\left|a_{n+p} Z^{n+p}\right| \leqslant \left|a_{n+p}\right| r^{n+p} = \left|a_{n+p}\right| \rho^{n+p} \frac{r^{n+p}}{\rho^{n+p}} < \left|a_n\right| \rho^n \frac{r^{n+p}}{\rho^{n+p}},$$

et, par conséquent :

$$\sum_{n=M}^{\infty} \left|a_n Z^n\right| < \left|a_M\right| \rho^M \sum_{n=M}^{\infty} \left(\frac{r}{\rho}\right)^n.$$

La dernière série est une série géométrique, elle converge puisque sa raison $\frac{r}{\rho}$ est strictement plus petite que 1. Il en résulte que la série entière est **absolument** convergente pour tout *z* vérifiant $|z - a| < R$, **et uniformément** convergente, donc **normalement** convergente, dans tout disque fermé de centre *a* et de rayon $r < R$.

HAUT

Règle de Cauchy.

HAUT

Pour une série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$, si la suite de terme général

$$|a_n|^{\frac{1}{n}}$$

tend vers une limite, finie ou infinie, lorsque n tend vers l'infini,
alors le rayon de convergence R de la série entière est l'inverse de cette limite :

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n \to +\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}}$$

Cette règle ne permet de calculer le rayon de convergence que si la puissance $\frac{1}{n}$ du module du coefficient d'indice n a une limite lorsque n tend vers l'infini.

Démonstration.

Soit R le nombre, fini ou infini, défini par :

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n \to +\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}}$$

1°/ Pour $|z - a| < R$.

Il existe un ρ vérifiant $|z - a| < \rho < R$ et l'on a :

$$|a_n (z-a)^n| < |a_n| \rho^n = u_n < |a_n| R^n$$
$$u_n^{\frac{1}{n}} = |a_n|^{\frac{1}{n}} \rho < |a_n|^{\frac{1}{n}} R$$

Il résulte alors de la définition de R que l'on a :

$$\lim_{n \to +\infty} (u_n^{\frac{1}{n}}) = \lim_{n \to +\infty} (|a_n|^{\frac{1}{n}}) \rho = \frac{\rho}{R} < 1$$

D'après la règle de Cauchy pour les séries numériques, la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n$$

est convergente. Le "**théorème de convergence dominée**" indique alors que la série entière, majorée en module par une série numérique convergente, est elle-même convergente.

2°/ Pour $|z - a| > R$.

Un argument analogue montre que la série n'est pas convergente (pour au moins une valeur de z). De sorte que, par définition, R est bien égal au rayon de convergence de la série entière.

HAUT

Série géométrique.

HAUT

$$\sum_{k=0}^{k=n} u^k = \frac{1-u^{n+1}}{1-u} \text{ pour } u \neq 1,$$
$$\sum_{k=0}^{\infty} u^k = \frac{1}{1-u}, \text{ pour } |u| < 1.$$

Démonstration.

1°/ Somme finie.

Notons S la somme des puissances successives de u, jusqu'à la puissance n : $S = 1 + u + u^2 + ... + u^n$.
Multiplions S par u : $S\,u = u + u^2 + ... + u^{n+1}$.
D'où, par différence : $S - S\,u = 1 - u^{n+1}$.
Et, pour $\boldsymbol{u}$ **différent de 1**, on peut diviser par $1 - u$:

$$S = \sum_{k=0}^{k=n} u^k = \frac{1-u^{n+1}}{1-u}.$$

2°/ Somme infinie : série géométrique.

Quand u^{n+1} tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini, c'est-à-dire quand $|\boldsymbol{u}|$ **est strictement plus petit que 1**, il vient, par prolongement des égalités par passage à la limite :

$$\sum_{k=0}^{\infty} u^k = \frac{1}{1-u}.$$

HAUT

Série entière de l'exponentielle.

HAUT

$$e^u = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{n!}$$

Démonstration.

La formule de Taylor, pour une fonction indéfiniment dérivable f :

$$f(u) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^n f}{du^n}(0)\,\frac{u^n}{n!}$$

et l'égalité, valable pour tout entier naturel n :

$$\frac{d^n\left(e^u\right)}{du^n} = e^u$$

donnent le résultat, compte tenu du fait que $e^0 = 1$.
La règle de d'Alembert indique que le rayon de convergence de la série entière est infini : la formule reste donc valable si l'on y remplace la variable u par n'importe quelle fonction d'une variable z.

La formule :

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

sert de **définition de l'exponentielle** de la variable complexe z.
Elle peut aussi servir à la définition de l'**exponentielle d'une matrice** carrée réelle z.

HAUT

Dérivation d'une série entière.

HAUT

A l'intérieur du disque de convergence, on peut dériver terme à terme une série entière.

Cette propriété résulte du fait que pour tout nombre réel $r > 0$, strictement plus petit que le rayon de convergence R, la série entière de centre a est **normalement convergente** (c'est-à-dire absolument et uniformément convergente) dans le disque fermé de centre a et de rayon r.

- Autrement dit, en tout point z du disque de convergence, si :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$$

alors le développement en série entière de la dérivée de f est :

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n (z-a)^{n-1}$$

- Le rayon de convergence de la série dérivée est le même que celui de la série entière de f. Comme on peut toujours dériver une série entière terme à terme, on voit que toute fonction définie par **une série entière est indéfiniment dérivable dans le disque de convergence**.

HAUT

4 moyens de développer une fonction analytique en série entière.

- La formule de Taylor.
- La division euclidienne des polynômes par puissances croissantes.
- La dérivation terme à terme.
- La composition des applications avec un des procédés précédents.

Le quatrième procédé consiste à remplacer u, dans le développement en série entière d'une fonction $g(u)$, par une fonction $f(z)$: il ne donne le développement en série entière de $g(f(z))$ que si :

— $f(z)$ appartient au disque de convergence de $g(u)$;

— $f(z)$ s'exprime en fonction des puissances de z.

Quel que soit le moyen utilisé, le résultat est le même : le développement en série entière est unique.

Exemples :

1. Dans le développement en série entière de l'exponentielle de u, on peut remplacer u par $-u^2$: on obtient le développement en série entière de l'exponentielle de $-u^2$.
2. Dans le développement en série entière de l'inverse de $1-u$, on peut remplacer u par u^2 : on obtient le développement en série entière de l'inverse de $1-u^2$.

HAUT

Chapitre 12. Séries entières.

Exercices

Exercice 1. Rayon de convergence de 3 séries entières.
Exercice 2. Domaine de convergence de 2 séries entières.
Exercice 3. Séries dérivées de la série géométrique.
Exercice 4. Développement en série entière, dérivation.
Exercice 5. Développement d'une exponentielle, dérivée.
Exercice 6. Séries dérivées de l'exponentielle.
Exercice 7. Série exponentielle complexe.
Exercice 8. Série oscillante.
Exercice 9. Série à terme général logarithmique.
Exercice 10. Etude de deux séries entières.

Exercice 1. Rayon de convergence de 3 séries entières.

Calculer le rayon de convergence des séries entières :

1°/ $\sum_{n=0}^{\infty} n\,!\,z^n$.

2°/ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$.

3°/ $\sum_{n=0}^{\infty} n^{\alpha} z^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Solution

HAUT

Exercice 2. Domaine de convergence de 2 séries entières.

Déterminer le domaine de convergence des séries entières :

1°/ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{1+5^n}$.

2°/ $1 + 2\,z + z^2 + 2\,z^3 + \ldots + z^{2n} + 2\,z^{2n+1} + \ldots$

Solution

HAUT

Exercice 3. Séries dérivées de la série géométrique.

Démontrer que, pour $|z| < 1$, les égalités suivantes sont vraies :

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}; \sum_{n=1}^{\infty} n\, z^n = \frac{z}{(1-z)^2}; \sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^n = \frac{z(z+1)}{(1-z)^3}.$$

Solution

HAUT

Exercice 4. Développement en série entière, dérivation.

- Développer en série entière la fonction $f(z) = \frac{p}{1-(1-p)z}$ au voisinage de $z = 0$.
- Quel est le rayon de convergence de cette série entière ?
- Quelle est la valeur de la série entière pour $z = 0$? pour $z = 1$?
- Calculer la somme de la dérivée terme à terme de cette série entière.
- Quel est le rayon de convergence de cette série dérivée ?
- Calculer sa valeur pour $z = 0$ et pour $z = 1$.

Solution

HAUT

Exercice 5. Développement d'une exponentielle, dérivée.

- Développer en série entière la fonction $f(z) = e^{\lambda(z-1)}$, au voisinage de $z = 0$.
- Quel est le rayon de convergence de cette série entière ?
- Quelle est la valeur de la série entière pour $z = 0$? pour $z = 1$?
- Calculer la somme de la dérivée terme à terme de cette série entière.
- Quel est le rayon de convergence de cette série dérivée ?
- Calculer sa valeur pour $z = 0$ et pour $z = 1$.

Solution

HAUT

Exercice 6. Séries dérivées de l'exponentielle.

Démontrer que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, les égalités suivantes sont vraies :

$$\sum_{k=0}^{\infty} k \frac{u^k}{k!} = u\, e^u \; ; \; \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \frac{u^k}{k!} = u\,(u+1)\, e^u$$

Solution

HAUT

Exercice 7. Série exponentielle complexe.

Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| < 1$ et $\theta \in \mathbb{R}$.
Etudier les séries suivantes :

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k \cos(k\theta) \; ; \; \sum_{k=0}^{\infty} x^k \sin(k\theta)$$

Solution

HAUT

Exercice 8. Série oscillante.

Etudier la série numérique de terme général : $u_n = \left(1 + \frac{(-1)^n}{2}\right) a^n$, où $a \in \mathbb{R}$.	Solution

HAUT

Exercice 9. Série à terme général logarithmique.

On considère la série numérique de terme général :

$$u_n = ln\left(1 + \frac{a^n}{n+2}\right), \text{ où } a \in \mathbb{R}.$$

1°/ Si $a > 0$, étudier la convergence de $\sum_{n \geqslant 0} u_n$.

2°/ Si $a = -1$, démontrer que $\sum_{n \geqslant 0} u_n$ converge et calculer sa somme.

Solution

HAUT

Exercice 10. Etude de deux séries entières.

Etudier la nature des séries entières de termes généraux respectifs :

a) $\frac{n}{n^2+1}x^n$, $(x \in \mathbb{R})$.

b) $\frac{(n+1)!}{1\times 4\times 7\times \ldots \times(3n+1)}x^n$, $(x \in \mathbb{R})$.

Solution

HAUT

Chapitre 12. Séries entières.

Enoncés.

Exercice 1. Rayon de convergence de 3 séries entières.

Calculer le rayon de convergence des séries entières :

1°/ $\sum_{n=0}^{\infty} n\,!\,z^n$.

2°/ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$.

3°/ $\sum_{n=0}^{\infty} n^{\alpha} z^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Solution.

1°/ Première série entière.

- La série $\sum_{n=0}^{\infty} n\,!\,z^n$ est une série entière de la forme $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$ avec $a = 0$ et $a_n = n!$.
- Le module du rapport de deux coefficients successifs $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ est égal à $n + 1$. Il a une limite λ infinie lorsque n tend vers l'infini.
- Par application de la Règle de d'Alembert :

Le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} n\,!\,z^n$ est $R = \frac{1}{\lambda} = 0$.

2°/ Deuxième série entière.

- La série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ est une série entière de la forme $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$ avec $a = 0$ et $a_n = \frac{1}{n!}$.
- Le module du rapport de deux coefficients successifs $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ est égal à $\frac{1}{n+1}$. Il a une limite λ =

0 lorsque n tend vers l'infini.

- Par application de la Règle de d'Alembert :

Le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ est $R = \frac{1}{\lambda} = +\infty$.

La série entière est donc convergente pour tout $z \in \mathbb{C}$.
Sa somme est une fonction analytique appelée l'**exponentielle complexe**, notée e^z.

3°/ Troisième série entière.

- La série $\sum_{n=0}^{\infty} n^{\alpha} z^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$, est une série entière de la forme $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$ avec $a = 0$ et $a_n = n^{\alpha}$.

Par définition, l'égalité suivante est vérifiée :

$$n^{\alpha} = e^{\alpha \ln n}$$

En élevant le module à la puissance $1/n$, on obtient l'égalité :

$$|n^{\alpha}|^{\frac{1}{n}} = e^{\alpha \frac{\ln n}{n}}$$

Lorsque n tend vers l'infini, le rapport $\frac{\ln n}{n}$ tend vers 0, si bien que, quelle que soit la valeur du nombre réel α, le produit

$$\alpha \frac{\ln n}{n}$$

tend vers 0 et son exponentielle tend vers 1. D'où l'égalité, valable pour tout α réel :

$$\lim_{n \to +\infty} |n^{\alpha}|^{\frac{1}{n}} = 1$$

D'après la règle de Cauchy :

Le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} n^{\alpha} z^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$, est égal à 1.

Chapitre 12. Séries entières.

Enoncés.

Exercice 2. Domaine de convergence de 2 séries entières.

Déterminer le domaine de convergence des séries entières : 1°/ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{1+5^n}$. 2°/ $1 + 2\,z + z^2 + 2\,z^3 + \ldots + z^{2n} + 2\,z^{2n+1} + \ldots$	

Solution.

1°/ Première série entière.

- La série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{1+5^n}$ est une série entière de la forme $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$ avec $a = 0$ et $a_n = \frac{1}{1+5^n}$.
- Le module du rapport de deux coefficients successifs $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ est égal à $\frac{1+5^n}{1+5^{n+1}}$. Il a une limite $\lambda = \frac{1}{5}$ lorsque n tend vers l'infini.
- Par application de la Règle de d'Alembert :

> Le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{1+5^n}$ est $R = \frac{1}{\lambda} = 5$.

Le domaine de convergence de la série entière est le disque ouvert $|z| < 5$.

2°/ Deuxième série entière.

- La série$1 + 2\,z + z^2 + 2\,z^3 + \ldots + z^{2n} + z^{2n+1} + \ldots$ est une série entière de la forme $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$ avec $a = 0$ et $a_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est pair} \\ 2 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$.
- Lorsque n tend vers l'infini, $\frac{1}{n}$ tend vers 0 et $\lim_{n \to +\infty} (|a_n|^{\frac{1}{n}}) = 1^0 = 2^0 = 1$

- Par application de la règle de Cauchy :

Le rayon de convergence de la série entière $1 + 2z + z^2 + 2z^3 + \ldots + z^{2n} + 2z^{2n+1} + \ldots$ est $R = \frac{1}{\lambda} = 1$.

La série entière est donc convergente pour tout z tel que $|z| < 1$.
Le **domaine de convergence** de la série entière est le disque défini par $|z| < 1$.
Sa somme, dans le domaine de convergence, est une fonction analytique que l'on peut calculer en regroupant les termes d'ordre pair et d'ordre impair consécutifs (ce regroupement est possible parce que, dans son domaine de convergence, une série entière est **uniformément convergente**).

$$1 + 2z + z^2 + 2z^3 + \ldots + z^{2n} + 2z^{2n+1} + \ldots = (1 + 2z)(1 + z^2 + z^4 + \ldots + z^{2n} + \ldots) = \frac{1+2z}{1-z^2}$$

On constate que cette fonction a, pour points singuliers, les points $z = 1$ et $z = -1$ (ces points singuliers sont des **pôles**).
Le rayon de convergence de la série entière est la distance qui sépare le centre $a = 0$, du point singulier le plus proche : il est donc égal à 1.

Chapitre 12. Séries entières, développement, dérivation.

Enoncés.

Exercice 3. Séries dérivées de la série géométrique.

Démontrer que, pour $\|z\| < 1$, les égalités suivantes sont vraies : $$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}; \sum_{n=1}^{\infty} n\, z^n = \frac{z}{(1-z)^2}; \sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^n = \frac{z(z+1)}{(1-z)^3}.$$	

Solution.

1°/ Série géométrique.

Dans la série $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$, le rapport de deux coefficients consécutifs vaut 1, il a pour limite 1, et, d'après la règle de d'Alembert, le rayon de convergence de la série vaut 1. La somme $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} z^k$ des termes jusqu'à l'indice n vaut $\frac{1-z^{n+1}}{1-z}$ et, lorsque n tend vers l'infini, pour $|z| < 1$, $|z|^{n+1}$ tend vers 0, donc z^{n+1} tend vers 0, la somme S_n tend vers $\frac{1}{1-z}$. D'où le résultat :

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}}$$

2°/ Deuxième série.

Dans la série $\sum_{n=1}^{\infty} n\, z^n$, le rapport de deux coefficients consécutifs vaut $\frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n}$, il a pour limite 1 lorsque n tend vers l'infini, et, d'après la règle de d'Alembert, le rayon de convergence de la série vaut 1. Pour $|z| < 1$, la série s'écrit :

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\, z^n = z \sum_{n=1}^{\infty} n\, z^{n-1}$$

Or la dérivée de la fonction analytique définie par une série entière a, pour série entière, la dérivée

terme à terme de la série entière de la fonction analytique (on peut dériver terme à terme une série entière à l'intérieur du domaine de convergence). Donc :

$$z\sum_{n=1}^{\infty} n\,z^{n-1} = z\,\frac{d}{dz}\left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right) = z\,\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{1-z}\right) = \frac{z}{(1-z)^2}$$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} n\,z^n = \frac{z}{(1-z)^2}}$$

3°/ Troisième série.

Dans la série $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^n$, le rapport de deux coefficients consécutifs vaut $\left(\frac{n+1}{n}\right)^2$, il a pour limite 1, et, d'après la règle de d'Alembert, le rayon de convergence de la série vaut 1. Pour $|z| < 1$, la série s'écrit :

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^n = \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1) z^n + \sum_{n=1}^{\infty} n z^n = z^2 \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) z^{n-2} + z \sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1}$$

$$= z^2 \frac{d^2}{dz^2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right) + z\,\frac{d}{dz}\left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right) = z^2 \frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{1}{1-z}\right) + z\,\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{1-z}\right)$$

$$= \frac{2z^2}{(1-z)^3} + \frac{z}{(1-z)^2} = \frac{z(z+1)}{(1-z)^3}$$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^n = \frac{z(z+1)}{(1-z)^3}}$$

Chapitre 12. Séries entières, développement, dérivation.

Enoncés.

Exercice 4. Développement en série entière, dérivation.

- Développer en série entière la fonction $f(z) = \frac{p}{1-(1-p)z}$ au voisinage de $z = 0$.
- Quel est le rayon de convergence de cette série entière ?
- Quelle est la valeur de la série entière pour $z = 0$? pour $z = 1$?
- Calculer la somme de la dérivée terme à terme de cette série entière.
- Quel est le rayon de convergence de cette série dérivée ?
- Calculer sa valeur pour $z = 0$ et pour $z = 1$.

Solution.

1°/ Développement en série entière.

Pour $p = 0$, la fonction $f(z)$ est constante et égale à 0 ; son développement en série entière au voisinage de 0 se réduit à $\boldsymbol{f(z) = 0}$.

Pour $p = 1$, la fonction $f(z)$ est constante et égale à 1 ; son développement en série entière au voisinage de 0 se réduit à $\boldsymbol{f(z) = 1}$.

Supposons donc p différent de 0 et de 1.

Calculons le développement en série entière de la fonction $g(u) = \frac{1}{1-u}$ au voisinage de $u = 0$. Pour cela, nous pouvons utiliser, indifféremment, la **division euclidienne par puissances croissantes** des polynômes ou la **formule de Taylor** : on sait, en effet, que

le développement en série entière est unique,

on obtiendra donc le même résultat quelle que soit la méthode utilisée pour y parvenir. Utilisons, par exemple, la formule de Taylor

$$g(u) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^n g}{du^n}(0)\,\frac{u^n}{n!}$$

On vérifie immédiatement par récurrence que la dérivée d'ordre n de g est donnée par la formule :

$$\frac{d^n g}{du^n}(u) = \frac{n!}{(1-u)^{n+1}}$$

La valeur pour $u = 0$ est donc égale à n ! et la formule de Taylor donne :

$$\frac{1}{1-u} = \sum_{n=0}^{\infty} u^n$$

Pour $u = (1 - p)\, z$, cette formule s'écrit, en multipliant par p :

$$f(z) = \frac{p}{1-(1-p)z} = p \sum_{n=0}^{\infty} (1-p)^n z^n$$

2°/ Rayon de convergence.

Le coefficient d'indice n, $a_n = p\,(1-p)^n$, du développement précédent vérifie :

$$a_n^{\frac{1}{n}} = p^{\frac{1}{n}}\,(1-p).$$

$$|\, a_n \,|^{\frac{1}{n}} = |\, p \,|^{\frac{1}{n}}\, |\, 1-p \,|.$$

Lorsque n tend vers l'infini, $\frac{1}{n}$ tend vers 0, le module de p à la puissance $\frac{1}{n}$ tend vers 1, et il reste :

$$\lim_{n \to +\infty} |\, a_n \,|^{\frac{1}{n}} = |\, 1-p \,|$$

La règle de Cauchy donne alors le rayon de convergence de la série entière :

$$R = \frac{1}{|1-p|}$$

3°/ Valeur de la série entière pour diverses valeurs de z.

On sait que la série entière converge absolument et uniformément à l'intérieur du cercle de convergence, et qu'elle diverge à l'extérieur de ce cercle : le point $z = 0$ est toujours à l'intérieur du cercle de convergence, donc, pour $z = 0$, la valeur de la série entière est la valeur de $f(0) = p$:

$$\left(p \sum_{n=0}^{\infty} (1-p) z^n \right)_{z=0} = p$$

Pour $z = 1$, la série entière est convergente lorsque 1 est strictement plus petit que $R = \frac{1}{|1-p|}$, c'est-à-dire lorsque p est à l'intérieur du disque de centre 1 et de rayon 1, et, dans ce cas, sa valeur est égale à $f(1) = 1$.

La série est divergente si 1 est strictement plus grand que R, c'est-à-dire si p est à l'extérieur du

disque de centre 1 et de rayon 1.
Lorsque | 1 – *p* | est égal à 1, toujours dans le cas où *p* est différent de 0, la série entière est une série d'exponentielles $e^{i n \theta}$, elle est divergente (au sens des fonctions).

$$\left(p \sum_{n=0}^{\infty} (1-p) z^n \right)_{z=1} = \begin{cases} 1 \quad \text{pour } |1-p| < 1 \\ \text{non convergente ailleurs} \end{cases}$$

4°/ Dérivée.

A l'intérieur du cercle de convergence, la série entière peut être dérivée terme à terme : **la somme de la série dérivée est la dérivée de la somme de la série**. De plus, **le rayon de convergence de la série dérivée est égal au rayon de convergence de la série**. Ainsi, toujours dans le cas où *p* est différent de 0 et de 1, avec $f'(z) = \frac{p(1-p)}{(1-(1-p)z)^2}$:

$$p \sum_{n=0}^{\infty} n (1-p)^n z^{n-1} = \begin{cases} f'(z) = \dfrac{p(1-p)}{(1-(1-p)z)^2} \quad \text{pour } |z| < \dfrac{1}{|1-p|} \\ \text{non convergente ailleurs} \end{cases}$$

Le premier terme de la série, correspondant à *n* = 0, est nul, on peut donc faire partir la série depuis *n* = 1. En remplaçant *n* – 1 par *k*, il reste :

$$p (1-p) \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) (1-p)^k z^k = \begin{cases} f'(z) = \dfrac{p(1-p)}{(1-(1-p)z)^2} \quad \text{pour } |z| < \dfrac{1}{|1-p|} \\ \text{non convergente ailleurs} \end{cases}$$

Ce résultat peut aussi s'établir comme corollaire du résultat établi dans l'Exercice 1.

5°/ Valeurs de la série dérivée pour diverses valeurs de *z*.

Le point *z* = 0 est toujours situé à l'intérieur du cercle de convergence, la valeur de la série dérivée pour *z* = 0 est donc donnée par :

$$\left(p(1-p) \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)(1-p)^k z^k \right)_{z=0} = p (1-p)$$

Le point *z* = 1 n'est à l'intérieur du cercle de convergence que si 1 est strictement plus petit que $\frac{1}{|1-p|}$, d'où le résultat (toujours pour *p* différent de 0 et de 1) :

$$\left(p(1-p) \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)(1-p)^k z^k \right)_{z=1} = \begin{cases} 1-p & \text{pour } |1-p| < 1 \\ \text{divergente} & \text{pour } |1-p| \geqslant 1 \end{cases}$$

Chapitre 12. Séries entières, développement, dérivation.

Enoncés.

Exercice 5. Développement d'une exponentielle, dérivée.

• Développer en série entière la fonction $f(z) = e^{\lambda(z-1)}$, au voisinage de $z = 0$. • Quel est le rayon de convergence de cette série entière ? • Quelle est la valeur de la série entière pour $z = 0$? pour $z = 1$? • Calculer la somme de la dérivée terme à terme de cette série entière. • Quel est le rayon de convergence de cette série dérivée ? • Calculer sa valeur pour $z = 0$ et pour $z = 1$.	

Solution.

1°/ Développement en série entière.

La relation $f(z) = e^{-\lambda} e^{\lambda z}$ montre que le développement en série entière de $f(z)$ sera le produit par $e^{-\lambda}$ du développement en série entière de $e^{\lambda z}$. Le problème revient donc à calculer le **développement en série entière de l'exponentielle**. Or, par définition, l'exponentielle d'une variable complexe quelconque u est donnée par la formule (à encadrer et à savoir par coeur) :

$$e^u = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{n!}$$

Pour $u = \lambda z$, cette formule devient :

$$e^{\lambda z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda z)^n}{n!}$$

On en déduit le développement en série entière de $f(z)$:

$$f(z) = e^{\lambda(z-1)} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} z^n$$

2°/ Rayon de convergence.

Le module du rapport de deux coefficients successifs est :

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{\lambda}{n+1}.$$

Il tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini. La règle de d'Alembert montre alors que :

Le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}z^n$ est infini.

3°/ Valeur de la série entière pour différentes valeurs de *z*.

Comme le rayon de convergence de la série entière est infiini, la somme de la série entière est égale à $f(z)$ pour tout nombre complexe z. En particulier, pour $z = 0$ et pour $z = 1$, on obtient :

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}z^n\right)_{z=0} = f(0) = e^{-\lambda} \qquad \left(\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}z^n\right)_{z=1} = f(1) = 1$$

4°/ Dérivée.

Le résultat fondamental que l'on applique ici s'énonce sous forme de **théorème** :

1. Une série entière et la série obtenue en la dérivant terme à terme ont le **même rayon de convergence**.
2. La somme $f(z)$ de la série entière est une fonction dérivable à l'intérieur de son disque de convergence ; sa dérivée $f'(z)$ est la somme de la série entière obtenue en la **dérivant terme à terme**.

De ce théorème résulte que la dérivée terme à terme de la série entière est égale à la dérivée de $f(z)$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}n\,z^{n-1} = f'(z) = \lambda\, e^{\lambda(z-1)} = \lambda\, f(z).$$

La série dérivée est égale à $\lambda\, f(z)$.

Le premier terme de la série dérivée, correspondant à $n = 0$, est nul. On peut donc faire partir les valeurs de n de 1 et écrire :

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{(n-1)!}z^{n-1} = \lambda\, e^{\lambda(z-1)}.$$

Et cette formule ne nous apprend strictement rien, puisqu'on peut mettre λ en facteur dans le premier membre et y remplacer $n - 1$ par k ; la formule se réduit alors à :

$$\lambda \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}z^k = \lambda\, f(z),$$

résultat que l'on connaissait déjà depuis la première question.

Il n'est même pas besoin du théorème cité plus haut pour affirmer que la série dérivée, égale à λ fois le développement en série entière de $f(z)$, possède le même rayon de convergence infini que la série entière de $f(z)$. Ses valeurs pour $z = 0$ et pour $z = 1$, s'en déduisent :

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{(n-1)!} z^{n-1}\right)_{z=0} = \lambda f(0) = \lambda e^{-\lambda}$$

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{(n-1)!} z^{n-1}\right)_{z=1} = \lambda f(1) = \lambda$$

Chapitre 12. Séries entières, développement, dérivation.

Enoncés.

Exercice 6. Séries dérivées de l'exponentielle.

Démontrer que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, les égalités suivantes sont vraies : $$\sum_{k=0}^{\infty} k \frac{u^k}{k!} = u\, e^u \; ; \; \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \frac{u^k}{k!} = u\,(u+1)\, e^u$$	

Solution.

1°/ Premier développement en série entière.

Par définition, l'exponentielle d'une variable complexe quelconque u est donnée par la formule (à encadrer et à savoir par coeur) :

$$e^u = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{n!}$$

Le rayon de convergence de cette série entière est infini.
Donc, dans tout le plan complexe, on peut faire toutes opérations terme à terme sur la série.
Multiplions par u :

$$u\, e^u = u \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{n!}$$

$= \sum_{n=0}^{\infty} u\frac{u^n}{n!}$ parce qu'on peut multiplier terme à terme une série entière par un facteur, à l'intérieur du cercle de convergence.

$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^{n+1}}{n!}$ parce que $u \times u^n = u^{n+1}$

$= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \frac{u^{n+1}}{(n+1)!}$ parce que $\frac{1}{n!} = \frac{n+1}{(n+1)!}$ pour tout $n \geqslant 0$

$= \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{u^k}{k!}$ en posant $k = n + 1$

$= \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{u^k}{k!}$ parce que la somme ne change pas si l'on rajoute un terme nul

correspondant à $k = 0$.

2°/ Deuxième développement en série entière.

Dérivons la fonction obtenue dans 1°.
La série entière de la fonction dérivée est la dérivée terme à terme de la série entière.
La dérivée du terme constant de la série entière, correspondant à $k = 0$, est nulle.
Il reste :

$$(u + 1)\, e^{u} = \sum_{k=1}^{\infty} k^{2}\, \frac{u^{k-1}}{k!}$$

Multiplions par u :

$$u\,(u + 1)\, e^{u} = u \sum_{k=1}^{\infty} k^{2}\, \frac{u^{k-1}}{k!}$$

$= \sum_{k=1}^{\infty} k^{2}\, u\, \frac{u^{k-1}}{k!}$ parce que la série entière, uniformément convergente, peut être multipliée terme à terme.

$= \sum_{k=1}^{\infty} k^{2}\, \frac{u^{k}}{k!}$ parce que $u \times u^{k-1} = u^{k}$

$= \sum_{k=0}^{\infty} k^{2}\, \frac{u^{k}}{k!}$ parce que la somme ne change pas si l'on rajoute un terme nul correspondant à $k = 0$.

Chapitre 12. Séries entières, développement, dérivation.

Enoncés.

Exercice 7. Série exponentielle complexe.

Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| < 1$ et $\theta \in \mathbb{R}$.
Etudier les séries suivantes :

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k \cos(k\theta) \; ; \; \sum_{k=0}^{\infty} x^k \sin(k\theta)$$

Solution.

Considérons la série de terme général :

$u_n = x^n e^{in\theta} = (x e^{i\theta})^n$

C'est une série géométrique.

$$S_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k = \frac{1-(x e^{i\theta})^{n+1}}{1-x e^{i\theta}}.$$

$|1 - x e^{i\theta}| = \sqrt{(1-x\cos\theta)^2 + (x\sin\theta)^2}$ est nul pour $x = \frac{1}{\cos\theta}$ et $\tan\theta = 0$, ce qui est impossible puisque, par hypothèse, $|x| < 1$.

Lorsque n tend vers l'infini, $|e^{i(n+1)\theta}|$ est majoré par 1, $|x^{n+1}|$ tend vers 0, donc :

$$\left| S_n - \frac{1}{1-x e^{i\theta}} \right| = \left| \frac{(x e^{i\theta})^{n+1}}{1-x e^{i\theta}} \right|$$

tend vers 0.

Ceci montre que la suite de terme général S_n est convergente et a pour limite $\frac{1}{1-x e^{i\theta}}$.

$$\frac{1}{1-x e^{i\theta}} = \frac{1-x e^{-i\theta}}{|1-x e^{i\theta}|^2} = \frac{(1-x\cos\theta)+i\,x\sin\theta}{(1-x\cos\theta)^2+(x\sin\theta)^2} = \frac{1-x\cos\theta}{1-2x\cos\theta+x^2} + i\,\frac{x\sin\theta}{1-2x\cos\theta+x^2}$$

La partie réelle $\sum_{k=0}^{k=n} x^k \cos(k\theta)$ de S_n a pour limite $\frac{1-x\cos\theta}{1-2x\cos\theta+x^2}$.

La partie imaginaire $\sum_{k=0}^{k=n} x^k \sin(k\theta)$ de S_n a pour limite $\frac{x \sin\theta}{1-2x\cos\theta+x^2}$.

Donc :

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k \cos(k\theta) = \frac{1-x\cos\theta}{1-2x\cos\theta+x^2}.$$
$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k \sin(k\theta) = \frac{x\sin\theta}{1-2x\cos\theta+x^2}.$$

Chapitre 12. Séries entières, développement, dérivation.

Enoncés.

Exercice 8. Série oscillante.

Etudier la série numérique de terme général : $u_n = \left(1 + \frac{(-1)^n}{2}\right) a^n$, où $a \in \mathbb{R}$.	

Solution.

Pour $|a| \geq 1$, u_n ne tend pas vers 0 et la série diverge.

Pour $|a| < 1$, posons :

$$S_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k.$$

$$\begin{aligned} S_{2n} &= \frac{3}{2}\sum_{k=0}^{k=n} a^{2k} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{k=n} a^{2k-1} \\ &= \frac{3}{2}(1 + a^2 + \ldots + (a^2)^n) + \frac{a}{2}(1 + a^2 + \ldots + (a^2)^{n-1}) \\ &= \frac{3}{2}\frac{1-a^{2n+2}}{1-a^2} + \frac{a}{2}\frac{1-a^{2n}}{1-a^2} \\ &= \frac{1}{2}\frac{3+a}{1-a^2} - \frac{1}{2}\frac{3a+1}{1-a^2}a^{2n+1} \end{aligned}$$

$$S_{2n-1} = S_{2n} - u_{2n} = \frac{1}{2}\frac{3+a}{1-a^2} - \frac{1}{2}\frac{3a+1}{1-a^2}a^{2n+1} - \frac{3}{2}a^{2n} < S_{2n}.$$

Pour tout entier $m \in \mathbb{N}^*$, il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ vérifiant $2n - 1 \leq m \leq 2n$.
On a $m = 2n - 1$ ou $m = 2n$.
$S_m = S_{2n-1}$ ou $S_m = S_{2n}$.
$S_{2n-1} < S_{2n} \Rightarrow S_{2n-1} \leq S_m \leq S_{2n}$.

Lorsque m tend vers l'infini, n tend vers l'infini, S_{2n-1} tend vers $\frac{1}{2}\frac{3+a}{1-a^2}$, S_{2n} tend vers $\frac{1}{2}\frac{3+a}{1-a^2}$, donc (théorème des gendarmes), S_m tend vers $\frac{1}{2}\frac{3+a}{1-a^2}$.

Il en résulte, par définition, que la série de terme général u_n est convergente, sa somme est $\frac{1}{2}\frac{3+a}{1-a^2}$.

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty}\left(1 + \frac{(-1)^n}{2}\right)a^n = \frac{1}{2}\frac{3+a}{1-a^2}, \; |a| < 1.}$$

Chapitre 12. Séries entières, développement, dérivation.

Enoncés.

Exercice 9. Série à terme général logarithmique.

On considère la série numérique de terme général :

$$u_n = ln\left(1 + \frac{a^n}{n+2}\right), \text{ où } a \in \mathbb{R}.$$

1°/ Si $a > 0$, étudier la convergence de $\sum_{n \geqslant 0} u_n$.

2°/ Si $a = -1$, démontrer que $\sum_{n \geqslant 0} u_n$ converge et calculer sa somme.

Solution.

1°/ Cas où *a* est > 0.

La série de terme général u_n ne peut converger que si u_n tend vers $0 = ln\ 1$ lorsque n tend vers l'infini.

Il faut donc que $\frac{a^n}{n+2}$ tende vers 0. C'est évidemment le cas si $a = 0$, car alors $u_n = 0$, pour tout n.

Si a est positif mais pas nul, comme l'exponentielle l'emporte sur la puissance, $\frac{a^n}{n+2}$ ne peut tendre vers 0 que si a est inférieur ou égal à 1.

Pour $a = 1$, $u_n = ln\left(1 + \frac{1}{n+2}\right)$ est équivalent, pour les grandes valeurs de n à $\frac{1}{n+2}$ (série harmonique divergente), donc la série de terme général u_n est divergente.

Pour $a < 1$, $u_n = ln\left(1 + \frac{a^n}{n+2}\right)$ est équivalent, pour les grandes valeurs de n à $\frac{a^n}{n+2}$, et $n\,u_n$ est équivalent à $\frac{n}{n+2}\,a^n \sim a^n$, donc $n\,u_n$ tend vers 0 et la série de terme général u_n est convergente.

La série $\sum_{n \geqslant 0} u_n$ converge pour $0 \leq a < 1$.

Elle diverge pour $a \geq 1$.

2°/ Cas où $a = -1$.

$$u_n = ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n+2}\right).$$

Lorsque n tend vers l'infini, u_n est équivalent à $\frac{(-1)^n}{n+2}$ (série harmonique alternée, convergente).

Donc la série de terme général u_n est convergente.

La série $\sum_{n \geq 0} ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n+2}\right)$ converge

$$S_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k = ln\frac{3}{2} + ln\frac{2}{3} + ln\frac{5}{4} + ln\frac{4}{5} + ... + ln\frac{n+3}{n+2} \text{ (si } n \text{ est pair)}$$

$$S_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k = ln\frac{3}{2} + ln\frac{2}{3} + ln\frac{5}{4} + ln\frac{4}{5} + ... + ln\frac{n+1}{n+2} \text{ (si } n \text{ est impair)}$$

Si on groupe les termes par deux :

$$ln\left(1 + \frac{(-1)^{2n}}{2n+2}\right) + ln\left(1 + \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+3}\right) = ln\frac{2n+3}{2n+2} + ln\frac{2n+2}{2n+3} = 0$$

Donc $S_n = 0$ si n est pair, et $S_n = ln\frac{n+1}{n+2} < 0$ si n est impair.

Dans tous les cas :

$$ln\frac{n+1}{n+2} \leq S_n \leq 0.$$

Lorsque n tend vers l'infini, $\frac{n+1}{n+2}$ tend vers 1 et $ln\frac{n+1}{n+2}$ tend vers 0.

Donc S_n tend vers 0 (théorème des gendarmes).

La série de terme général u_n est convergente et sa somme est 0.

$$\sum_{n \geq 0} ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n+2}\right) = 0.$$

Chapitre 12. Séries entières, développement, dérivation.

Enoncés.

Exercice 10. Etude de deux séries entières.

Etudier la nature des séries entières de termes généraux respectifs : a) $\frac{n}{n^2+1}x^n$, ($x \in \mathbb{R}$). b) $\frac{(n+1)!}{1\times 4\times 7\times \ldots \times(3n+1)}x^n$, ($x \in \mathbb{R}$).	

Solution.

1°/ Première série.

Posons $a_n = \frac{n}{n^2+1}$.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{n} \times \frac{(n+1)^2+1}{n^2+1}.$$

Lorsque n tend vers l'infini, $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ tend vers 1.

D'après la **règle de D'Alembert**, le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ est égal à 1.

Donc pour $|x| < 1$, la série est convergente, et, pour $|x| > 1$, elle est divergente.
Reste à étudier ce qui se passe pour $x = 1$ et pour $x = -1$.

Pour $x = 1$, lorsque n devient très grand, $\frac{n}{n^2+1}$ est équivalent à $\frac{1}{n}$, terme général d'une série harmonique divergente : la série de terme général $\frac{n}{n^2+1}$ est divergente.

Pour $x = -1$, lorsque n devient très grand, $\frac{n}{n^2+1}x^n$ est équivalent à $\frac{(-1)^n}{n}$, terme général d'une série harmonique alternée, convergente : la série de terme général $(-1)^n \frac{n}{n^2+1}$ est convergente.

La série entière $\sum_{n\geqslant 0} \frac{n}{n^2+1}x^n$ converge pour $x \in [-1, 1[$ et diverge ailleurs.

2°/ Deuxième série.

Posons $a_n = \dfrac{(n+1)!}{1\times 4\times 7\times \ldots \times (3n+1)}$.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+2)!}{(n+1)!} \times \frac{1\times 4\times 7\times \ldots \times (3n+1)}{1\times 4\times 7\times \ldots \times (3n+1)\times (3n+4)} = \frac{n+2}{3n+4}$$

Lorsque n tend vers l'infini, $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ tend vers $\dfrac{1}{3}$.

D'après la **règle de D'Alembert**, le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ est égal à 3.

Donc pour $|x| < 3$, la série est convergente, et, pour $|x| > 3$, elle est divergente.
Reste à étudier ce qui se passe pour $x = 3$ et pour $x = -3$.

$$a_n = \frac{(n+1)!}{1\times 4\times 7\times \ldots \times (3n+1)} = \frac{1}{1}\times\frac{2}{4}\times\frac{3}{7}\times \ldots \times \frac{n+1}{3n+1} = \prod_{k=0}^{k=n} \frac{k+1}{3k+1}.$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\dfrac{k+1}{3k+1} > \dfrac{1}{3} = \dfrac{k+1}{3k+3}$, donc $a_n > \dfrac{1}{3^{n+1}}$ et pour $|x| = 3$:

$$|a_n x^n| = a_n 3^n > \frac{1}{3}.$$

Pour $|x| = 3$, le terme général de la série ne tend pas vers 0, la série est divergente.

La série entière $\sum_{n\geqslant 0} \dfrac{(n+1)!}{1\times 4\times 7\times \ldots \times (3n+1)} x^n$ converge pour $x \in]-3, 3[$ et diverge ailleurs.

Exercices

Equations différentielles linéaires.

1. Equation différentielle linéaire.
2. Résolution d'une équation différentielle linéaire.

Equation différentielle linéaire.

Une équation différentielle d'ordre n est une relation entre une fonction inconnue $y(x)$ et ses dérivées jusqu'à l'ordre n :

$$F(y, y', \dots, y^{(n)}) = f(x)$$

La fonction numérique $f(x)$ s'appelle le **second membre** de l'équation différentielle.
L'équation différentielle est dite **linéaire** si l'application $y \mapsto F(y, y', \dots, y^{(n)})$ est linéaire.
Une équation différentielle linéaire est dite **sans second membre** si $f(x) = 0$, sinon elle est dite "**avec second membre**".

HAUT

Résolution d'une équation différentielle linéaire.

HAUT

Principe.

Les solutions d'une équation différentielle linéaire d'ordre *n* sans second membre forment un **espace vectoriel de dimension *n***.
La résolution d'une équation différentielle linéaire d'ordre *n* sans second membre consiste à rechercher une base de l'espace vectoriel des solutions : la solution générale est une combinaison linéaire quelconque des solutions de la base, elle dépend donc de *n* constantes arbitraires.

La solution générale d'une équation différentielle linéaire avec second membre (SGEASM) s'obtient en ajoutant à la solution générale de l'équation sans second membre (SGESSM), une solution particulière de l'équation avec second membre (SPEASM) :

$$SGEASM = SGESSM + SPEASM$$

Solution générale de l'équation sans second membre.

1. Si les coefficients de *y* et ses dérivées sont constants, on utilise le polynôme caractéristique, obtenu en cherchant des solutions exponentielles $y = e^{rx}$, $r \in \mathbb{C}$.
Chaque racine simple de l'équation caractéristique donne une solution e^{rx}.
Chaque racine multiple d'ordre *m* donne *m* solutions $x^k e^{rx}$, $k = 0, \ldots, m-1$.

2. Si les coefficients de *y* et ses dérivées ne sont pas tous constants, on pose $u = \frac{y'}{y}$, ce qui abaisse l'ordre de l'équation différentielle d'une unité.
Si on arrive à la résoudre, la recherche de *y* se ramène à une simple quadrature : $y = c\, e^{\int u(x)\,dx}$.

Solution particulière de l'équation avec second membre.

La méthode générale est la méthode de variation des constantes de Lagrange.
On remplace les constantes d'intégration de la solution générale de l'équation sans second membre par des fonctions de *x*.
Par exemple, pour une équation différentielle linéaire du premier ordre, la recherche d'une solution particulière se ramène à une quadrature.

On peut aussi essayer de trouver une solution particulière qui tient compte de la forme du deuxième membre : méthode qui peut être rapide mais qui ne conduit pas forcément à un résultat.

HAUT

Chapitre 13. Equations différentielles linéaires.

Exercices

Exercice 1. 10 équations différentielles linéaires du 1er ordre.
Exercice 2. Solution unique sur $\mathbb{R}$ d'une équation différentielle linéaire du 1er ordre.
Exercice 3. 8 équations différentielles linéaires du 2e ordre à coefficients constants.
Exercice 4. 2 équations différentielles linéaires d'ordre > 2 à coefficients constants.

Encore plus d'exercices avec solution ...

Exercice 1. 10 équations différentielles linéaires du 1er ordre.

Déterminer la solution générale des équations différentielles suivantes, en choisisssant pour chacune d'elles un intervalle adapté au calcul :

1) $x\,y' + 2\,y = x^2 - 3$

2) $(1 + x^2)\,y' + x\,y = 2\,x^2 + 1$

3) $y' + y\,\tan x = \dfrac{1}{\cos x}$

4) $x\,y' - x\,y = e^x$

5) $x\,y' - 2\,y = \ln x$

6) $y' + \dfrac{6}{x+2}\,y = \dfrac{1}{(x+2)^2}$

7) $x\,(x^2 + 1)\,y' - (x^2 - 1)\,y = -2\,x$

8) $x\,(x - 1)\,y' - 2\,y = x - 1$

9) $x\,y' - (x + 1)\,y = -(x^2 + 1)\,e^x$

10) $y' + \dfrac{y}{\sqrt{1+x^2}} = 1$

Solution

HAUT

Exercice 2. Solution unique sur $\mathbb{R}$ d'une équation différentielle linéaire du 1er ordre.

1°/ Déterminer la solution générale sur l'ensemble $\mathbb{R}_+^*$, puis sur l'ensemble $\mathbb{R}_-^*$ de l'équation différentielle $\sqrt{\lvert x \rvert}\, y' - y = x$. 2°/ Montrer qu'il existe une unique solution sur $\mathbb{R}$.	Solution

HAUT

Exercice 3. 8 équations différentielles linéaires du 2e ordre à coefficients constants.

Déterminer la solution générale sur l'ensemble des nombres réels des équations différentielles suivantes :

1) $y'' + y' - 6y = 2e^{3x}$

2) $y'' - 4y' + 3y = 6x + 1 + 4e^{x} + 8e^{-x}$

3) $y'' - 2y' + y = (x^2 + 1)e^{x}$

4) $y'' - 4y' + 13y = 10\cos 2x + 25\sin 2x$

5) $y'' + y = \cos^3 x$

6) $y'' - 2y' + 5y = \cosh x \cos 2x$

7) $y'' - 2y' + 2y = e^{x}\sin x$

8) $y'' - 4y' + 13y = e^{-2x}\cos x$

Solution

HAUT

Exercice 4. 2 équations différentielles linéaires d'ordre > 2 à coefficients constants.

Déterminer la solution générale sur l'ensemble des nombres réels des équations différentielles suivantes : 1) $y'''' - y = 0$ 2) $y''' + 3y'' + 3y' + y = (x^2 + x + 1)e^{-x}$	Solution

HAUT

Chapitre 13. Equations différentielles linéaires.

Enoncés.

Exercice 1. 10 équations différentielles linéaires du 1er ordre.

Déterminer la solution générale des équations différentielles suivantes, en choisisssant pour chacune d'elles un intervalle adapté au calcul :

1) $x\,y' + 2\,y = x^2 - 3$

2) $(1 + x^2)\,y' + x\,y = 2\,x^2 + 1$

3) $y' + y \tan x = \frac{1}{\cos x}$

4) $x\,y' - x\,y = e^x$

5) $x\,y' - 2\,y = \ln x$

6) $y' + \frac{6}{x+2}\,y = \frac{1}{(x+2)^2}$

7) $x\,(x^2 + 1)\,y' - (x^2 - 1)\,y = -2\,x$

8) $x\,(x - 1)\,y' - 2\,y = x - 1$

9) $x\,y' - (x + 1)\,y = -(x^2 + 1)\,e^x$

10) $y' + \frac{y}{\sqrt{1+x^2}} = 1$

Solution.

1°/ Première équation.

HAUT

L'équation différentielle est une équation différentielle linéaire du premier ordre, avec second membre.
Sa solution générale s'obtient en ajoutant, à la solution générale de l'équation sans second membre (SG ESSM), une solution particulière de l'équation avec second membre (SP EASM).

a) SG ESSM.

L'équation sans second membre est $x\,y' + 2\,y = 0$.
Les solutions non nulles vérifient $\frac{y'}{y} = -\frac{2}{x}$, $\frac{dy}{y} = -2\,\frac{dx}{x}$.
Intégrons les deux membres de cette équation à variables séparées : $\ln|y| = -2\ln|x| + \text{constante}$, soit $y = \frac{k}{x^2}$, où k est une constante réelle arbitraire.

$$\boxed{y = \frac{k}{x^2},\ x \neq 0.}$$

b) SP EASM.

L'équation avec second membre est $x\,y' + 2\,y = x^2 - 3$.

Le second membre est un polynôme du deuxième degré. Cherchons une solution particulière polynôme du deuxième degré : $y = a\,x^2 + b\,x + c$.

$y' = 2\,a\,x + b$,
$x\,y' + 2\,y = x\,(2\,a\,x + b) + 2\,(a\,x^2 + b\,x + c) = 4\,a\,x^2 + 3\,b\,x + 2\,c$.

Par identification :

$4\,a\,x^2 + 3\,b\,x + 2\,c = x^2 - 3$.
$4\,a = 1,\ 3\,b = 0,\ 2\,c = -3$,
$a = \frac{1}{4},\ b = 0,\ c = -\frac{3}{2}$.

$$\boxed{y = \frac{x^2}{4} - \frac{3}{2}.}$$

c) SG EASM.

La solution générale de l'équation avec second membre s'obtient par addition de la solution générale de l'équation sans second membre et d'une solution particulière de l'équation avec second membre.

$$\boxed{y = \frac{k}{x^2} + \frac{x^2}{4} - \frac{3}{2},\ k \in \mathbb{R},\ x \neq 0.}$$

HAUT

2°/ Deuxième équation.

HAUT

a) SG ESSM.

$(1 + x^2)\,y' + x\,y = 0$

$\frac{y'}{y} = -\frac{x}{1+x^2}$, $\frac{dy}{y} = -\frac{x}{1+x^2}\,dx$,
$\ln|y| = -\frac{1}{2}\ln(1 + x^2) + \text{constante}$,

$$\boxed{y = \frac{k}{\sqrt{1+x^2}},\ k \in \mathbb{R}.}$$

b) SP EASM.

$(1 + x^2)\,y' + x\,y = 2\,x^2 + 1$

Le second membre est un polynôme du deuxième degré.
S'il y a une solution y polynôme, $x\,y$ et $x^2\,y'$ sont des polynômes de même degré.
Pour que $(1 + x^2)\,y' + x\,y$ soit un polynôme du deuxième degré lorsque y est un polynôme, cherchons une solution particulière polynôme du premier degré :

$y = a\,x + b$.

$y' = a$,
$(1 + x^2)\,y' + x\,y = a\,(1 + x^2) + x\,(a\,x + b) = 2\,a\,x^2 + b\,x + a$.

Par identification :

$2\,a\,x^2 + 3\,b\,x + a = 2\,x^2 + 1$.
$2\,a = 2$, $b = 0$, $a = 1$,

$$\boxed{y = x.}$$

c) SG EASM.

La solution générale de l'équation avec second membre s'obtient par addition de la solution générale de l'équation sans second membre et d'une solution particulière de l'équation avec second membre.

$$\boxed{y = \frac{k}{\sqrt{1+x^2}} + x,\ k \in \mathbb{R}.}$$

HAUT

3°/ Troisième équation.

HAUT

a) SG ESSM.

$y' + y\,\tan x = 0$

$\frac{y'}{y} = -\tan x$, $\frac{dy}{y} = -\frac{\sin x}{\cos x}\,dx$,
$\ln |y| = \ln |\cos x| + \text{constante}$,

$$\boxed{y = k\,\cos x,\ k \in \mathbb{R}.}$$

b) SP EASM.

$$y' + y\,\tan x = \frac{1}{\cos x}$$

$y'\,\cos x + y\,\sin x = 1$

Cette équation possède la solution particulière évidente $y = \sin x$, puisque la dérivée de $\sin x$ est $\cos x$ et $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

$$\boxed{y = \sin x.}$$

Mais ce qui paraît évident à certains ne l'est pas pour d'autres !
Nous allons donc utiliser la **méthode générale de variation de la constante, de Lagrange,** pour trouver une solution particulière.
Cette méthode consiste à rechercher une solution particulière de la forme $y = k\,\cos x$, dans laquelle k

n'est plus une constante comme dans la solution générale de l'équation sans second membre, mais une fonction de x.

En dérivant, on obtient :

$$y' = k'(x)\cos x - k(x)\sin x.$$

L'équation $y' \cos x + y \sin x = 1$ devient alors :

$$k'(x)\cos^2 x - k(x)\sin x \cos x + k(x)\sin x \cos x = 1,$$
$$k'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = (\tan(x))'$$

Comme on ne cherche qu'une solution particulière, on peut prendre $k(x) = \tan x$, donc $y = k(x)\cos x = \sin x$.

c) SG EASM.

La solution générale de l'équation avec second membre s'obtient par addition de la solution générale de l'équation sans second membre et d'une solution particulière de l'équation avec second membre.

$$\boxed{y = k\cos x + \sin x,\ k \in \mathbb{R}.}$$

HAUT

4°/ Quatrième équation.

HAUT

a) SG ESSM.

$y' - y = 0$

$$\frac{y'}{y} = 1,\ \frac{dy}{y} = dx,$$
$$\ln|y| = x + \text{constante},$$

$$\boxed{y = k\,e^x,\ k \in \mathbb{R}.}$$

b) SP EASM.

Suivant la méthode de variation de la constante, cherchons une solution particulière de la forme $y = k(x)\,e^x$.

$$y' = k'(x)\,e^x + k(x)\,e^x$$
$$y' - y = k'(x)\,e^x + k(x)\,e^x - k(x)\,e^x = k'(x)\,e^x.$$

L'équation avec second membre $y' - y = \frac{e^x}{x}$ se réduit à $k'(x) = \frac{1}{x}$.

On peut prendre pour solution particulière $k(x) = \ln|x|$, donc $y = e^x \ln|x|$.

$$\boxed{y = e^x \ln|x|,\ x \neq 0.}$$

c) SG EASM.

La solution générale de l'équation avec second membre s'obtient par addition de la solution générale de l'équation sans second membre et d'une solution particulière de l'équation avec second membre.

$$\boxed{y = (k + ln\,|\,x\,|)\,e^{x},\ k \in \mathbb{R},\ x \neq 0.}$$

HAUT

5°/ Cinquième équation.

HAUT

a) SG ESSM.

$x\,y' - 2\,y = 0.$

$\frac{y'}{y} = \frac{2}{x}$, $\frac{dy}{y} = 2\,\frac{d\,x}{x}$,
$ln\,|\,y\,| = 2\,ln\,|\,x\,| + constante,$

$$\boxed{y = k\,x^{2},\ k \in \mathbb{R}.}$$

b) SP EASM.

$x\,y' - 2\,y = ln\,x.$

La fonction logarithme est définie pour un argument positif : $x > 0$.

Le deuxième membre est $ln\,x$, dont la dérivée est $\frac{1}{x}$.
On peut chercher une solution particulière de la forme $y = a\,ln\,x + b$, où a et b sont des constantes.

$y' = \frac{a}{x}$,
$x\,y' - 2\,y = a - 2\,a\,ln\,x - 2\,b.$

Par identification :

$-2\,a\,ln\,x + (a - 2\,b) = ln\,x$
$a = -\frac{1}{2}$, $b = \frac{a}{2} = -\frac{1}{4}$, $y = -\frac{1}{4}\,(1 + 2\,ln\,x).$

$$\boxed{y = -\frac{1}{4}\,(1 + 2\,ln\,x),\ x > 0.}$$

Méthode de Lagrange.

Suivant la méthode de variation de la constante, cherchons une solution particulière de la forme $y = k\,(x)\,x^{2}$.

$y' = k'\,(x)\,x^{2} + 2\,k\,(x)\,x,$
$x\,y' - 2\,y = x\,(k'\,(x)\,x^{2} + 2\,k\,(x)\,x) - 2\,k\,(x)\,x^{2} = k'\,(x)\,x^{3}.$

L'équation avec second membre $x\,y' - 2\,y = ln\,x$ se réduit à $k'(x) = \frac{ln\,x}{x^3}$, $k(x) = \int \frac{ln\,x}{x^3}\,dx$.

Pour trouver une solution, on intègre par parties en posant $u = ln\,x$, $du = \frac{d\,x}{x}$, $dv = \frac{d\,x}{x^3}$, $v = -\frac{1}{2\,x^2}$.

$$\int \frac{ln\,x}{x^3}\,dx = \int u\,dv = u\,v - \int v\,du = -\frac{ln\,x}{2\,x^2} + \frac{1}{2}\int \frac{d\,x}{x^3} = -\frac{ln\,x}{2\,x^2} - \frac{1}{4\,x^2} + constante.$$

Comme on ne cherche qu'une solution particulière, on peut prendre pour constante 0 et $k(x) = -\frac{1}{4\,x^2}(1 + 2\,ln\,x)$, $y = -\frac{1}{4}(1 + 2\,ln\,x)$.

c) SG EASM.

La solution générale de l'équation avec second membre s'obtient par addition de la solution générale de l'équation sans second membre et d'une solution particulière de l'équation avec second membre.

$$\boxed{y = k\,x^2 - \frac{1}{4}(1 + 2\,ln\,x),\ k \in \mathbb{R},\ x > 0.}$$

HAUT

6°/ Sixième équation.

HAUT

a) SG ESSM.

$y' + \frac{6}{x+2}\,y = 0.$

$\frac{y'}{y} = -\frac{6}{x+2}$, $\frac{dy}{y} = -6\,\frac{d\,x}{x+2}$,
$ln\,|y| = -6\,ln\,|x+2| + constante,$

$$\boxed{y = \frac{k}{(x+2)^6},\ k \in \mathbb{R},\ x \neq -2.}$$

b) SP EASM.

$y' + \frac{6}{x+2}\,y = \frac{1}{(x+2)^2}.$

Suivant la méthode de variation de la constante, cherchons une solution particulière de la forme $y = \frac{k(x)}{(x+2)^6}$.

$$y' = \frac{k'(x)}{(x+2)^6} - 6\,\frac{k(x)}{(x+2)^7}$$

$$y' + \frac{6}{x+2}\,y = \frac{k'(x)}{(x+2)^6} = \frac{1}{(x+2)^2}$$
$$k'(x) = (x+2)^4$$
$$k(x) = \frac{1}{5}(x+2)^5$$

$$\boxed{y = \frac{1}{5}\,\frac{1}{x+2},\ x \neq -2.}$$

c) SG EASM.

La solution générale de l'équation avec second membre s'obtient par addition de la solution générale de l'équation sans second membre et d'une solution particulière de l'équation avec second membre.

$$\boxed{y = \frac{k}{(x+2)^6} + \frac{1}{5}\,\frac{1}{x+2},\ k \in \mathbb{R},\ x \neq -2.}$$

HAUT

7°/ Septième équation.

HAUT

a) SG ESSM.

$x(x^2+1)\,y' - (x^2-1)\,y = 0.$

$$\frac{y'}{y} = \frac{x^2-1}{x(x^2+1)}$$

Décomposons la fraction rationnelle du deuxième membre en éléments simples :

$$\frac{x^2-1}{x(x^2+1)} = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{x^2+1}$$

En multipliant par x et en faisant $x = 0$, on trouve : $a = -1$.

$$\frac{x^2-1}{x(x^2+1)} + \frac{1}{x} = \frac{2x}{x^2+1}$$
$$\frac{y'}{y} = -\frac{1}{x} + \frac{2x}{x^2+1}$$
$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x} + \frac{2x}{x^2+1}\,dx$$

$ln\,|y| = -ln\,|x| + ln\,(x^2+1) + constante.$

$$\boxed{y = k\left(x + \frac{1}{x}\right),\ k \in \mathbb{R},\ x \neq 0.}$$

b) SP EASM.

$x\,(x^2+1)\,y' - (x^2-1)\,y = -2\,x$.

Cette équation différentielle admet la solution particulière évidente $y = -x$.
En effet, avec $y = -x$, $y' = -1$, et $x\,(x^2+1)\,y' - (x^2-1)\,y = -x\,(x^2+1) + x\,(x^2-1) = -2\,x$.

$$\boxed{y = -x.}$$

c) SG EASM.

La solution générale de l'équation avec second membre s'obtient par addition de la solution générale de l'équation sans second membre et d'une solution particulière de l'équation avec second membre.

$$\boxed{y = k\left(x+\frac{1}{x}\right) - x,\ k \in \mathbb{R},\ x \neq 0.}$$

HAUT

8°/ Huitième équation.

HAUT

a) SG ESSM.

$x\,(x-1)\,y' - 2\,y = 0$.

$$\frac{y'}{y} = \frac{2}{x\,(x-1)} = -\frac{2}{x} + \frac{2}{x-1}$$
$$\frac{dy}{y} = -2\,\frac{d\,x}{x} + 2\,\frac{d\,x}{x-1}$$
$ln\,|\,y\,| = -2\,ln\,|\,x\,| + 2\,ln\,|\,x-1\,| + constante.$

$$\boxed{y = k\left(1-\frac{1}{x}\right)^2,\ k \in \mathbb{R},\ x \neq 0,\ x \neq 1.}$$

b) SP EASM.

$x\,(x-1)\,y' - 2\,y = x-1$.

Suivant la méthode de variation de la constante, cherchons une solution particulière de la forme $y = k\,(x)\left(1-\frac{1}{x}\right)^2$.

$$y' - \frac{2}{x\,(x-1)}\,y = k'\,(x)\left(1-\frac{1}{x}\right)^2$$

L'équation avec second membre $y' - \frac{2}{x\,(x-1)}\,y = \frac{1}{x}$ devient $k'\,(x)\left(1-\frac{1}{x}\right)^2 = \frac{1}{x}$; $k'\,(x) = \frac{x}{(x-1)^2} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}$.

On peut prendre pour solution : $k(x) = ln\,|x-1| - \frac{1}{x-1}$.

$$\boxed{y = \left(1-\frac{1}{x}\right)^2\left(ln\,|x-1| - \frac{1}{x-1}\right),\ x \neq 0,\ x \neq 1.}$$

c) SG EASM.

La solution générale de l'équation avec second membre s'obtient par addition de la solution générale de l'équation sans second membre et d'une solution particulière de l'équation avec second membre.

$$\boxed{y = \left(1-\frac{1}{x}\right)^2\left(k + ln\,|x-1| - \frac{1}{x-1}\right),\ k \in \mathbb{R},\ x \neq 0,\ x \neq 1.}$$

HAUT

9°/ Neuvième équation.

HAUT

a) SG ESSM.

$x\,y' - (x+1)\,y = 0$.

$$\frac{y'}{y} = 1 + \frac{1}{x}$$
$$\frac{dy}{y} = dx + \frac{d\,x}{x}$$
$$ln\,|y| = x + ln\,|x| + constante.$$

$$\boxed{y = k\,x\,e^x,\ k \in \mathbb{R},}$$

b) SP EASM.

$x\,y' - (x+1)\,y = -(x^2+1)\,e^x$.

Suivant la méthode de variation de la constante, cherchons une solution particulière de la forme $y = k(x)\,x\,e^x$.

$$y' - \left(1+\frac{1}{x}\right)y = k'(x)\,x\,e^x = -\left(x+\frac{1}{x}\right)e^x.$$
$$k'(x) = -1 - \frac{1}{x^2}.$$
$$k(x) = -x + \frac{1}{x}$$
$$x\,k(x) = 1 - x^2.$$

$$\boxed{y = (1-x^2)\,e^x.}$$

c) SG EASM.

La solution générale de l'équation avec second membre s'obtient par addition de la solution générale de l'équation sans second membre et d'une solution particulière de l'équation avec second membre.

$$\boxed{y = (1 + k\,x - x^2)\,e^x,\ k \in \mathbb{R}.}$$

HAUT

10°/ Dixième équation.

HAUT

a) SG ESSM.

$$y' + \frac{y}{\sqrt{1+x^2}} = 0.$$

$$\frac{y'}{y} = -\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$
$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$$
$$ln\,|y| = -\,arg\,sinh\,x + constante = -\,ln\,(x + \sqrt{1+x^2}) + constante$$

$$\boxed{y = \frac{k}{x+\sqrt{1+x^2}},\ k \in \mathbb{R}.}$$

b) SP EASM.

$$y' + \frac{y}{\sqrt{1+x^2}} = 1.$$

Suivant la méthode de variation de la constante, cherchons une solution particulière de la forme $y = \frac{k(x)}{x+\sqrt{1+x^2}}$.

$$y' + \frac{y}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{k'(x)}{x+\sqrt{1+x^2}} = 1.$$
$$k'(x) = x + \sqrt{1+x^2}$$
$$k(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}(x\sqrt{1+x^2} + ln\,(x + \sqrt{1+x^2})) = \frac{x}{2}(x + \sqrt{1+x^2}) + \frac{1}{2}\,ln\,(x + \sqrt{1+x^2}).$$

$$\boxed{y = \frac{1}{2}\left(x + \frac{ln\,(x+\sqrt{1+x^2})}{x+\sqrt{1+x^2}}\right).}$$

c) SG EASM.

La solution générale de l'équation avec second membre s'obtient par addition de la solution générale de l'équation sans second membre et d'une solution particulière de l'équation avec second membre.
En changeant le nom de la constante d'intégration :

$$y = \frac{1}{2}\left(x + \frac{k + ln\,(x + \sqrt{1+x^2})}{x + \sqrt{1+x^2}}\right), k \in \mathbb{R}.$$

HAUT

Chapitre 13. Equations différentielles linéaires.

Enoncés.

Exercice 2. Solution unique sur $\mathbb{R}$ d'une équation différentielle linéaire du 1er ordre.

1°/ Déterminer la solution générale sur l'ensemble $\mathbb{R}_+^*$, puis sur l'ensemble $\mathbb{R}_-^*$ de l'équation différentielle $\sqrt{\lvert x \rvert}\, y' - y = x$. 2°/ Montrer qu'il existe une unique solution sur $\mathbb{R}$.	

Solution.

1°/ Solution générale.

a) SG ESSM.

$\sqrt{\lvert x \rvert}\, y' - y = 0$

Sur $\mathbb{R}_+^*$, $x > 0$: $\frac{y'}{y} = \frac{1}{\sqrt{x}}$; $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{\sqrt{x}}$; $\ln \lvert y \rvert = 2\sqrt{x} + \text{constante}$; $y = k\, e^{2\sqrt{x}}$.
Sur $\mathbb{R}_-^*$, $x < 0$: $\frac{y'}{y} = \frac{1}{\sqrt{-x}}$; $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{\sqrt{-x}}$; $\ln \lvert y \rvert = -2\sqrt{-x} + \text{constante}$; $y = k\, e^{-2\sqrt{-x}}$.

b) SP EASM.

$\sqrt{\lvert x \rvert}\, y' - y = x$.

Sur $\mathbb{R}_+^*$, $x > 0$: cherchons une solution particulière de la forme $y = k(x)\, e^{2\sqrt{x}}$.
$y' = k'(x)\, e^{2\sqrt{x}} + \frac{k(x)}{\sqrt{x}} e^{2\sqrt{x}}$
$\sqrt{x}\, y' - y = k'(x)\, \sqrt{x}\, e^{2\sqrt{x}} = x$
$k'(x) = \sqrt{x}\, e^{-2\sqrt{x}}$.

On peut prendre pour solution particulière :

$k(x) = \int_0^x \sqrt{t}\, e^{-2\sqrt{t}}\, dt + c$, ou c est une constante réelle, a priori quelconque, mais qu'on choisira en fonction du résultat de l'intégration.

Pour calculer l'intégrale, posons $2\sqrt{t} = u$, $4t = u^2$, $4\, dt = 2\, u\, du$, $dt = \frac{u}{2} du$, $\sqrt{t}\, dt = \frac{u^2}{4} du$.

$$k(x) = \frac{1}{4}\int_0^{2\sqrt{x}} u^2 e^{-u}\, du + c$$

Il reste à intégrer le produit d'un polynôme par une exponentielle. Ça se fait en intégrant par parties pour abaisser le degré du polynôme.
On pose $U = u^2$, $dU = 2\,u\,du$, et, pour avoir $dV = e^{-u}\,du$, on prend $V = -e^{-u}$.
L'intégrale est de la forme $\int U\,dV = U\,V - \int V\,dU$.

$$\frac{1}{4}\int_0^{2\sqrt{x}} u^2 e^{-u}\, du = -\frac{1}{4}\left[u^2 e^{-u}\right]_0^{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2}\int_0^{2\sqrt{x}} u\, e^{-u}\, du = -x\, e^{-2\sqrt{x}} + \frac{1}{2}\int_0^{2\sqrt{x}} u\, e^{-u}\, du.$$

Intégrons à nouveau par parties en posant $U = u$, $dU = du$, et, pour avoir $dV = e^{-u}\,du$, on prend $V = -e^{-u}$.
L'intégrale est de la forme $\int U\,dV = U\,V - \int V\,dU$.

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\sqrt{x}} u\, e^{-u}\, du = -\frac{1}{2}\left[u\, e^{-u}\right]_0^{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2}\int_0^{2\sqrt{x}} e^{-u}\, du = -\sqrt{x}\, e^{-2\sqrt{x}} + \frac{1}{2}\int_0^{2\sqrt{x}} e^{-u}\, du.$$

L'intégrale est la variation d'une primitive.

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\sqrt{x}} e^{-u}\, du = -\frac{1}{2}\left[e^{-u}\right]_0^{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}\left(1 - e^{-2\sqrt{x}}\right)$$

Au total :

$$k(x) = -x\, e^{-2\sqrt{x}} - \sqrt{x}\, e^{-2\sqrt{x}} + \frac{1}{2}\left(1 - e^{-2\sqrt{x}}\right) + c.$$

Prenons la solution particulière correspondant à $c = -\frac{1}{2}$:

$$y = k(x)\, e^{2\sqrt{x}} = -\frac{1}{2} - \sqrt{x} - x.$$

Sur $\mathbb{R}^*_-$, $x < 0$: cherchons une solution particulière de la forme $y = k(x)\, e^{-2\sqrt{-x}}$.

$$y' = k'(x)\, e^{-2\sqrt{-x}} + \frac{k(x)}{\sqrt{-x}}\, e^{-2\sqrt{-x}}$$
$$\sqrt{-x}\, y' - y = k'(x)\sqrt{-x}\, e^{-2\sqrt{-x}} = x$$
$$k'(x) = -\sqrt{-x}\, e^{2\sqrt{-x}}$$

On peut prendre pour solution particulière :

$$k(x) = -\int_0^x \sqrt{-t}\, e^{2\sqrt{-t}}\, dt + c,$$ où c est une constante réelle, a priori quelconque, mais qu'on choisira en fonction du résultat de l'intégration.

Pour calculer l'intégrale, posons $2\sqrt{-t} = u$, $-4t = u^2$, $-4\,dt = 2u\,du$, $dt = -\frac{u}{2}\,du$, $-\sqrt{-t}\,dt = \frac{u^2}{4}\,du$.

$$k(x) = \frac{1}{4}\int_0^{2\sqrt{-x}} u^2 e^u\,du + c.$$

Il reste à intégrer le produit d'un polynôme par une exponentielle. Ça se fait en intégrant par parties pour abaisser le degré du polynôme.
On pose $U = u^2$, $dU = 2u\,du$, et, pour avoir $dV = e^u\,du$, on prend $V = e^u$.
L'intégrale est de la forme $\int U\,dV = UV - \int V\,dU$.

$$\frac{1}{4}\int_0^{2\sqrt{-x}} u^2 e^u\,du = \frac{1}{4}\left[u^2 e^u\right]_0^{2\sqrt{-x}} - \frac{1}{2}\int_0^{2\sqrt{-x}} u\,e^u\,du = -x\,e^{2\sqrt{-x}} - \frac{1}{2}\int_0^{2\sqrt{-x}} u\,e^u\,du.$$

Intégrons à nouveau par parties en posant $U = u$, $dU = du$, et, pour avoir $dV = e^u\,du$, on prend $V = e^u$.
L'intégrale est de la forme $\int U\,dV = UV - \int V\,dU$.

$$-\frac{1}{2}\int_0^{2\sqrt{-x}} u\,e^u\,du = -\frac{1}{2}\left[u\,e^u\right]_0^{2\sqrt{-x}} + \frac{1}{2}\int_0^{2\sqrt{-x}} e^u\,du = -\sqrt{-x}\,e^{2\sqrt{-x}} + \frac{1}{2}\int_0^{2\sqrt{-x}} e^u\,du.$$

L'intégrale est la variation d'une primitive.

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\sqrt{-x}} e^u\,du = \frac{1}{2}\left[e^u\right]_0^{2\sqrt{-x}} = \frac{1}{2}\left(e^{2\sqrt{-x}} - 1\right)$$

Au total :

$$k(x) = -x\,e^{2\sqrt{-x}} - \sqrt{-x}\,e^{2\sqrt{-x}} - \frac{1}{2}\left(1 - e^{2\sqrt{-x}}\right) + c.$$

Prenons la solution particulière correspondant à $c = \frac{1}{2}$:

$$y = k(x)\,e^{-2\sqrt{-x}} = \frac{1}{2} - \sqrt{-x} - x.$$

c) SG EASM.

La solution générale d'une équation différentielle linéaire avec second membre (SG EASM) s'obtient par addition de la solution générale de l'équation sans second membre (SG ESSM) et d'une solution particulière de l'équation avec second membre (SP EASM) :

Sur $\mathbb{R}_+^*$, $x > 0$: $y = k\,e^{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2} - \sqrt{x} - x$, $k \in \mathbb{R}$.
Sur $\mathbb{R}_-^*$, $x < 0$: $y = k\,e^{-2\sqrt{-x}} + \frac{1}{2} - \sqrt{-x} - x$, $k \in \mathbb{R}$.

2°/ Solution sur $\mathbb{R}$.

Une solution sur $\mathbb{R}$ doit être **continue et dérivable** sur $\mathbb{R}$.

Sa restriction à $\mathbb{R}_+^*$ est de la forme $k_1 e^{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2} - \sqrt{x} - x$, continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Sa restriction à $\mathbb{R}_-^*$ est de la forme $k_2 e^{-2\sqrt{-x}} + \frac{1}{2} - \sqrt{-x} - x$, continue et dérivable sur $\mathbb{R}_-^*$.

Pour $x > 0$, la dérivée est $y' = \frac{y}{\sqrt{x}} = k_1 \frac{e^{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x}} - 1 - \sqrt{x}$.

Lorsque x tend vers 0, $e^{2\sqrt{x}}$ est équivalent à $1 + 2\sqrt{x} + o(x)$, donc y' est équivalent à $\frac{1}{\sqrt{x}}\left(k_1 - \frac{1}{2}\right) + (2k_1 - 1) + o(\sqrt{x})$.

La dérivée n'a une limite finie que si $k_1 = \frac{1}{2}$, et dans ce cas, la limite à droite de y' en 0 est 0, et la limite à droite de y est 0.

Pour $x < 0$, la dérivée est $y' = \frac{y}{\sqrt{-x}} = k_2 \frac{e^{-2\sqrt{-x}}}{\sqrt{-x}} + \frac{1}{2\sqrt{-x}} - 1 + \sqrt{-x}$.

Lorsque x tend vers 0, $e^{-2\sqrt{-x}}$ est équivalent à $1 - 2\sqrt{-x} + o(x)$, donc y' est équivalent à $\frac{1}{\sqrt{-x}}\left(k_2 + \frac{1}{2}\right) - (2k_2 + 1) + o(\sqrt{-x})$.

La dérivée n'a une limite finie que si $k_2 = -\frac{1}{2}$, et dans ce cas, la limite à gauche de y' en 0 est 0, et la limite à droite de y est 0.

Il y a donc une seule solution sur $\mathbb{R}$, donnée par :

$y = \frac{1}{2}(e^{2\sqrt{x}} - 1) - \sqrt{x} - x$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

$y = -\frac{1}{2}(e^{-2\sqrt{-x}} - 1) - \sqrt{-x} - x$ sur $\mathbb{R}_-^*$.

Sur $\mathbb{R}$, l'équation différentielle $\sqrt{|x|}\, y' - y = x$ possède une solution unique donnée par :

$$y = \begin{cases} \frac{1}{2}(e^{2\sqrt{x}} - 1) - \sqrt{x} - x & \text{pour } x \geq 0, \\ -\frac{1}{2}(e^{-2\sqrt{-x}} - 1) - \sqrt{-x} - x & \text{pour } x < 0. \end{cases}$$

Chapitre 13. Equations différentielles linéaires.

Enoncés.

Exercice 3. 8 équations différentielles linéaires du 2e ordre à coefficients constants.

Déterminer la solution générale sur l'ensemble des nombres réels des équations différentielles suivantes :

1) $y'' + y' - 6y = 2e^{3x}$ 2) $y'' - 4y' + 3y = 6x + 1 + 4e^{x} + 8e^{-x}$

3) $y'' - 2y' + y = (x^2 + 1)e^{x}$ 4) $y'' - 4y' + 13y = 10\cos 2x + 25\sin 2x$

5) $y'' + y = \cos^3 x$ 6) $y'' - 2y' + 5y = \cosh x \cos 2x$

7) $y'' - 2y' + 2y = e^{x}\sin x$ 8) $y'' - 4y' + 13y = e^{-2x}\cos x$

Solution.

La solution générale d'une équation différentielle linéaire avec second membre (SG EASM) s'obtient par addition de la solution générale de l'équation sans second membre (SG ESSM) et d'une solution particulière de l'équation avec second membre (SP EASM).
La solution générale d'une équation différentielle linéaire du second ordre sans second membre est combinaison linéaire de deux solutions particulières linéairement lindépendantes de l'équation sans second membre.
Lorsque les coefficients d'une équation différentielle linéaire sont constants, on recherche des solutions particulières exponentielles de l'équation sans second membre : e^{rx}. r doit vérifier l'équation caractéristique.

1°/ Première équation.

HAUT

$y'' + y' - 6y = 2e^{3x}$

a) SG ESSM.

Equation caractéristique : $r^2 + r - 6 = 0$.

$(r - 2)(r + 3) = 0$.

Racines de l'équation caractéristique : deux racines distinctes réelles $r_1 = 2$, $r_2 = -3$.

Solutions particulières de l'équation sans second membre $y'' + y' - 6y = 0$: e^{2x} et e^{-3x}.

Solution générale de l'équation sans second membre :

$$y = k_1 e^{2x} + k_2 e^{-3x}, k_1 \in \mathbb{R}, k_2 \in \mathbb{R}.$$

b) SP EASM.

Le second membre est une exponentielle : $e^{kx}, k \notin \{r_1, r_2\}$.

On recherche une solution particulière de la forme $y = a\, e^{kx}$.

$y = a\, e^{3x}$.
$y' = 3\, a\, e^{3x}$.
$y'' = 9\, a\, e^{3x}$.
$y'' + y' - 6\, y = (9 + 3 - 6)\, a\, e^{3x} = 6\, a\, e^{3x}$.

Pour que $y = a\, e^{3x}$ soit solution particulière de l'équation avec second membre $y'' + y' - 6\, y = 2\, e^{3x}$, il faut donc que a vérifie : $6\, a = 2$, $a = \frac{1}{3}$.

$$y = \frac{1}{3} e^{3x}.$$

c) SG EASM.

La solution générale de l'équation avec second membre (SG EASM) s'obtient par addition de la solution générale de l'équation sans second membre (SG ESSM) et d'une solution particulière de l'équation avec second membre (SP EASM).

$$y = \frac{1}{3} e^{3x} + k_1 e^{2x} + k_2 e^{-3x}, k_1 \in \mathbb{R}, k_2 \in \mathbb{R}.$$

HAUT

2°/ Deuxième équation.

HAUT

$y'' - 4\, y' + 3\, y = 6\, x + 1 + 4\, e^{x} + 8\, e^{-x}$

a) SG ESSM.

Equation caractéristique : $r^2 - 4\, r + 3 = 0$.

$(r - 3)(r - 1) = 0$.

Racines de l'équation caractéristique : deux racines distinctes réelles $r_1 = 3$, $r_2 = 1$.

Solutions particulières de l'équation sans second membre $y'' - 4\, y' + 3\, y = 0$: e^{3x} et e^{x}.

Solution générale de l'équation sans second membre :

$$y = k_1 e^{3x} + k_2 e^{x}, k_1 \in \mathbb{R}, k_2 \in \mathbb{R}.$$

b) SP EASM.

Le second membre est somme de :
— un polynôme du premier degré, $6\,x + 1$,
— une exponentielle : $e^{k_1 x}$, $k_1 = 1 \in \{r_1, r_2\} = \{3, 1\}$,
— une exponentielle : $e^{k_2 x}$, $k_2 = -1 \notin \{r_1, r_2\} = \{3, 1\}$.

Nous allons rechercher une solution particulière y qui soit somme de :
— une solution particulière $y_1 = a\,x + b$ de l'équation avec second membre $y'' - 4\,y' + 3\,y = 6\,x + 1$,
— une solution particulière $y_2 = a\,x\,e^x$ de l'équation avec second membre $y'' - 4\,y' + 3\,y = 4\,e^x$,
— une solution particulière $y_3 = a\,e^{-x}$ de l'équation avec second membre $y'' - 4\,y' + 3\,y = 8\,e^{-x}$.

$y_1 = a\,x + b$,
$y'_1 = a$,
$y''_1 = 0$,
$y''_1 - 4\,y'_1 + 3\,y_1 = -4\,a + 3\,(a\,x + b) = 3\,a\,x + (3\,b - 4\,a) = 6\,x + 1$.
$3\,a = 6$, $a = 2$, $3\,b = 4\,a + 1 = 9$, $b = 3$,
$y_1 = 2\,x + 3$.

$y_2 = a\,x\,e^x$,
$y'_2 = a\,(x + 1)\,e^x$,
$y''_2 = a\,(x + 2)\,e^x$,
$y''_2 - 4\,y'_2 + 3\,y_2 = -2\,a\,e^x = 4\,e^x$,
$a = -2$,
$y_2 = -2\,x\,e^x$.

$y_3 = a\,e^{-x}$,
$y'_3 = -a\,e^{-x}$,
$y''_3 = a\,e^{-x}$,
$y''_3 - 4\,y'_3 + 3\,y_3 = 8\,a\,e^{-x} = 8\,e^{-x}$,
$a = 1$,
$y_3 = e^{-x}$.

SP EASM : $y = y_1 + y_2 + y_3 = 2\,x + 3 - 2\,x\,e^x + e^{-x}$

$$\boxed{y = 2\,x + 3 - 2\,x\,e^x + e^{-x}}$$

c) SG EASM.

La solution générale de l'équation avec second membre (SG EASM) s'obtient par addition de la solution générale de l'équation sans second membre (SG ESSM) et d'une solution particulière de l'équation avec second membre (SP EASM).

$$y = 2x + 3 - 2x e^{x} + e^{-x} + k_1 e^{3x} + k_2 e^{x},\ k_1 \in \mathbb{R},\ k_2 \in \mathbb{R}.$$

HAUT

3°/ Troisième équation.

HAUT

$y'' - 2y' + y = (x^2 + 1) e^{x}$

a) SG ESSM.

Equation caractéristique : $r^2 - 2r + 1 = 0$.

$(r - 1)^2 = 0$.

Racines de l'équation caractéristique : une racine réelle double $r = 1$.

Solutions particulières de l'équation sans second membre $y'' - 2y' + y = 0$: e^{x} et $x e^{x}$.

Solution générale de l'équation sans second membre :

$$y = (k_1 x + k_2) e^{x},\ k_1 \in \mathbb{R},\ k_2 \in \mathbb{R}.$$

b) SP EASM.

Le second membre $(x^2 + 1) e^{x}$ est produit d'un polynôme de degré 2 et de l'exponentielle de x. Comme le produit d'un polynôme de degré 1 par l'exponentielle de x est solution de l'équation sans second membre, posons :

$$y = (a x^4 + b x^3 + c x^2) e^{x}.$$

$y = (a x^4 + b x^3 + c x^2) e^{x}$.
$y' = (a x^4 + (4a + b) x^3 + (3b + c) x^2 + 2c x) e^{x}$.
$y'' = (a x^4 + (8a + b) x^3 + (12a + 6b + c) x^2 + (6b + 4c) x + 2c) e^{x}$.
$y'' - 2y' + y = (12a x^2 + 6b x + 2c) e^{x}$.

Pour $a = \frac{1}{12}$, $b = 0$, $c = \frac{1}{2}$, on obtient $y'' - 2y' + y = (x^2 + 1) e^{x}$.

D'où la solution particulière de l'équation avec second membre :

$$y = \left(\frac{x^4}{12} + \frac{x^2}{2}\right) e^{x}.$$

c) SG EASM.

La solution générale de l'équation avec second membre (SG EASM) s'obtient par addition de la solution générale de l'équation sans second membre (SG ESSM) et d'une solution particulière de l'équation avec second membre (SP EASM).

$$y = \left(\frac{x^4}{12} + \frac{x^2}{2} + k_1 x + k_2 \right) e^x, k_1 \in \mathbb{R}, k_2 \in \mathbb{R}.$$

HAUT

4°/ Quatrième équation.

HAUT

$y'' - 4y' + 13y = 10 \cos 2x + 25 \sin 2x$

a) SG ESSM.

Equation caractéristique : $r^2 - 4r + 13 = 0$ (voir 8°).

$(r - 2)^2 + 9 = 0.$
$(r - 2 - 3i)(r - 2 + 3i) = 0$

Racines de l'équation caractéristique : deux racines complexes distinctes : $r_1 = 2 + 3i$, $r_2 = 2 - 3i$.

Solutions particulières de l'équation sans second membre $y'' - 4y' + 13y = 0$: $e^{2x} \cos 3x$ et $e^{2x} \sin 3x$.

Solution générale de l'équation sans second membre :

$$y = (k_1 \cos 3x + k_2 \sin 3x) e^{2x}, k_1 \in \mathbb{R}, k_2 \in \mathbb{R}.$$

b) SP EASM.

Le second membre $10 \cos 2x + 25 \sin 2x$ est combinaison linéaire de $\cos 2x$ et $\sin 2x$.
Cherchons une solution particulière de la forme $y = a \cos 2x + b \sin 2x$.

$y = a \cos 2x + b \sin 2x.$
$y' = -2a \sin 2x + 2b \cos 2x.$
$y'' = -4a \cos 2x - 4b \sin 2x.$
$y'' - 4y' + 13y = (-4a - 8b + 13a) \cos 2x + (-4b + 8a + 13b) \sin 2x = 10 \cos 2x + 25 \sin 2x$
$9a - 8b = 10, 8a + 9b = 25,$
$9(9a - 8b) = 90, 8(8a + 9b) = 200,$
$(81 + 64)a = 290, a = 2.$
$9b = 25 - 16 = 9, b = 1.$
$y = 2 \cos 2x + \sin 2x.$

$$y = 2 \cos 2x + \sin 2x.$$

c) SG EASM.

La solution générale de l'équation avec second membre (SG EASM) s'obtient par addition de la solution générale de l'équation sans second membre (SG ESSM) et d'une solution particulière de l'équation avec second membre (SP EASM).

$$y = 2 \cos 2x + \sin 2x + (k_1 \cos 3x + k_2 \sin 3x) e^{2x}, k_1 \in \mathbb{R}, k_2 \in \mathbb{R}.$$

HAUT

5°/ Cinquième équation.

HAUT

$y'' + y = \cos^3 x$

a) SG ESSM.

Equation caractéristique : $r^2 + 1 = 0$.

$(r - i)(r + i) = 0$

Racines de l'équation caractéristique : deux racines complexes distinctes : $r_1 = i$, $r_2 = -i$.

Solutions particulières de l'équation sans second membre $y'' + y = 0$: $\cos x$ et $\sin x$.

Solution générale de l'équation sans second membre :

$$y = k_1 \cos x + k_2 \sin x, k_1 \in \mathbb{R}, k_2 \in \mathbb{R}.$$

b) SP EASM.

Le second membre $\cos^3 x$ est combinaison linéaire de $\cos 3x$ et $\cos x$:

$\cos^3 x = \frac{1}{8}(e^{ix} + e^{-ix})^3 = \frac{1}{8}(e^{3ix} + e^{-3ix} + e^{ix}e^{-ix}(e^{ix} + e^{-ix}))$

$= \frac{1}{4}(\cos 3x + \cos x)$

Cherchons une solution particulière de la forme $y = a \cos 3x + (bx + c)\cos x + (dx + e)\sin x$.

$y = a \cos 3x + (bx + c)\cos x + (dx + e)\sin x$.

$y' = -3a \sin 3x + (b + dx + e)\cos x + (d - bx - c)\sin x = -3a \sin 3x + (dx + (b + e))\cos x + (-bx + (d - c))\sin x$.

$y'' = -9a \cos 3x + (-bx + (2d - c))\cos x + (-(dx + (b + e)) - b)\sin x = -9a \cos 3x + (-bx + (2d - c))\cos x - (dx + (2b + e))\sin x$

$y'' + y = -8a \cos 3x + 2d \cos x - 2b \sin x = \frac{1}{4}(\cos 3x + \cos x)$.

$a = -\frac{1}{32}$, $d = \frac{1}{8}$, $b = 0$, c et e quelconques, par exemple $c = 0$, $e = 0$.

$y = -\frac{1}{32}\cos 3x + \frac{1}{8}x \sin x = -\frac{1}{32}(4\cos^3 x - \cos x) + \frac{1}{8}x \sin x$

$$y = -\frac{1}{8}\cos^3 x + \frac{1}{8}x \sin x + \frac{1}{32}\cos x.$$

c) SG EASM.

La solution générale de l'équation avec second membre (SG EASM) s'obtient par addition de la solution générale de l'équation sans second membre (SG ESSM) et d'une solution particulière de l'équation avec second membre (SP EASM). On peut la mettre sous la forme :

$$\boxed{y = \frac{1}{8}(x \sin x - \cos^3 x) + k_1 \cos x + k_2 \sin x, k_1 \in \mathbb{R}, k_2 \in \mathbb{R}.}$$

HAUT

6°/ Sixième équation.

HAUT

$y'' - 2y' + 5y = \cosh x \cos 2x$

a) SG ESSM.

Equation caractéristique : $r^2 - 2r + 5 = 0$.

$(r-1)^2 + 4$
$(r - 1 - 2i)(r - 1 + 2i) = 0$

Racines de l'équation caractéristique : deux racines complexes distinctes : $r_1 = 1 + 2i$, $r_2 = 1 - 2i$.

Solutions particulières de l'équation sans second membre $y'' - 2y' + 5y = 0$: $e^x \cos 2x$ et $e^x \sin 2x$.

Solution générale de l'équation sans second membre :

$$\boxed{y = (k_1 \cos 2x + k_2 \sin 2x) e^x, k_1 \in \mathbb{R}, k_2 \in \mathbb{R}.}$$

b) SP EASM.

Le second membre $\cosh x \cos 2x$ est combinaison linéaire de $e^x \cos 2x$ et $e^{-x} \cos 2x$:
$\cosh x \cos 2x = \frac{1}{2}(e^x \cos 2x + e^{-x} \cos 2x)$
Dans cette expression, $\frac{1}{2} e^x \cos 2x$ est solution de l'équation sans second membre.
Cherchons une solution particulière de la forme $y = (a \cos 2x + b \sin 2x) x e^x + (c \cos 2x + d \sin 2x) e^{-x}$

$y = (a \cos 2x + b \sin 2x) x e^x + (c \cos 2x + d \sin 2x) e^{-x}$.
$y' = (a \cos 2x + b \sin 2x) x e^x + (a \cos 2x + b \sin 2x) e^x + (-2a \sin 2x + 2b \cos 2x) x e^x$
$\quad - (c \cos 2x + d \sin 2x) e^{-x} + (-2c \sin 2x + 2d \cos 2x) e^{-x}$
$y' = ((a + 2b) \cos 2x + (b - 2a) \sin 2x) x e^x + (a \cos 2x + b \sin 2x) e^x + ((2d - c) \cos 2x - (2c + d) \sin 2x) e^{-x}$
$y'' = ((a + 2b) \cos 2x + (b - 2a) \sin 2x) x e^x + ((a + 2b) \cos 2x + (b - 2a) \sin 2x) e^x + (-2(a + 2b) \sin 2x + 2(b - 2a) \cos 2x) x e^x$
$\quad + (a \cos 2x + b \sin 2x) e^x + (-2a \sin 2x + 2b \cos 2x) e^x$
$\quad - ((2d - c) \cos 2x - (2c + d) \sin 2x) e^{-x} - (2(2d - c) \sin 2x + 2(2c + d) \cos 2x) e^{-x}$
$y'' = ((4b - 3a) \cos 2x - (3b + 4a) \sin 2x) x e^x + 2((a + 2b) \cos 2x + (b - 2a) \sin 2x) e^x + ((-3c - 4d) \cos 2x + (4c - 3d) \sin 2x) e^{-x}$
$y'' - 2y' + 5y = ((4b - 3a - 2a - 4b + 5a) \cos 2x + (-3b - 4a - 2b + 4a + 5b) \sin 2x) x e^x$
$\quad + ((2a + 4b - 2a) \cos 2x + (2b - 4a - 2b) \sin 2x) e^x$
$\quad + ((-3c - 4d - 4d + 2c + 5c) \cos 2x + (4c - 3d + 4c + 2d + 5d) \sin 2x) e^{-x}$

$y'' - 2y' + 5y = 4(b\cos 2x - a\sin 2x)e^x + 4((c-2d)\cos 2x + (2c+d)\sin 2x)e^{-x} = \frac{1}{2}(e^x\cos 2x + e^{-x}\cos 2x)$

$b = \frac{1}{8}$, $a = 0$, $c - 2d = \frac{1}{8}$, $2c + d = 0$.

$a = 0$, $b = \frac{1}{8}$, $c = \frac{1}{40}$, $d = -\frac{1}{20}$.

$y = \frac{1}{8}xe^x\sin 2x + \frac{1}{40}(\cos 2x - 2\sin 2x)e^{-x}$

$$\boxed{y = \frac{1}{8}xe^x\sin 2x + \frac{1}{40}(\cos 2x - 2\sin 2x)e^{-x}.}$$

c) SG EASM.

La solution générale de l'équation avec second membre (SG EASM) s'obtient par addition de la solution générale de l'équation sans second membre (SG ESSM) et d'une solution particulière de l'équation avec second membre (SP EASM).

$$\boxed{y = \frac{1}{40}(\cos 2x - 2\sin 2x)e^{-x} + \left(k_1\cos 2x + \left(\frac{x}{8} + k_2\right)\sin 2x\right)e^x,\ k_1 \in \mathbb{R},\ k_2 \in \mathbb{R}.}$$

HAUT

7°/ Septième équation.

HAUT

$y'' - 2y' + 2y = e^x\sin x$

a) SG ESSM.

Equation caractéristique : $r^2 - 2r + 2 = 0$.

$(r-1)^2 + 1 = 0$.
$(r - 1 - i)(r - 1 + i) = 0$.

Racines de l'équation caractéristique : deux racines complexes distinctes : $r_1 = 1 + i$, $r_2 = 1 - i$.

Solutions particulières de l'équation sans second membre $y'' - 2y' + 2y = 0$: $e^x\cos x$ et $e^x\sin x$.

Solution générale de l'équation sans second membre :

$$\boxed{y = (k_1\cos x + k_2\sin x)e^x,\ k_1 \in \mathbb{R},\ k_2 \in \mathbb{R}.}$$

b) SP EASM.

Le second membre $e^x\sin x$ est solution de l'équation sans second membre.
Cherchons une solution particulière de la forme $y = xe^x(a\cos x + b\sin x)$

$y = xe^x(a\cos x + b\sin x)$.

$y' = x\,e^x\,(a\cos x + b\sin x) + e^x\,(a\cos x + b\sin x) + x\,e^x\,(-a\sin x + b\cos x)$

$= x\,e^x\,((a+b)\cos x + (b-a)\sin x) + e^x\,(a\cos x + b\sin x)$

$y'' = x\,e^x\,((a+b)\cos x + (b-a)\sin x) + e^x\,((a+b)\cos x + (b-a)\sin x) + x\,e^x\,(-(a+b)\sin x + (b-a)\cos x)$

$+ e^x\,(a\cos x + b\sin x) + e^x\,(-a\sin x + b\cos x)$

$= x\,e^x\,(2b\cos x - 2a\sin x) + 2\,e^x\,((a+b)\cos x + (b-a)\sin x)$

$y'' - 2y' + 2y = x\,e^x\,((2b - 2a - 2b + 2a)\cos x + (-2a - 2b + 2a + 2b)\sin x) + e^x\,((2a + 2b - 2a)\cos x + (2b - 2a - 2b)\sin x)$

$= 2\,e^x\,(b\cos x - a\sin x) = e^x \sin x.$

$b = 0,\ a = -\frac{1}{2}.$

$y = -\frac{1}{2}\,x\,e^x \cos x$

$$\boxed{y = -\frac{x}{2}\,e^x \cos x.}$$

c) SG EASM.

La solution générale de l'équation avec second membre (SG EASM) s'obtient par addition de la solution générale de l'équation sans second membre (SG ESSM) et d'une solution particulière de l'équation avec second membre (SP EASM).

$$\boxed{y = \left(\left(k_1 - \frac{x}{2}\right)\cos x + k_2 \sin x\right) e^x,\ k_1 \in \mathbb{R},\ k_2 \in \mathbb{R}.}$$

HAUT

8°/ Huitième équation.

HAUT

$y'' - 4y' + 13y = e^{-2x} \cos x$

a) SG ESSM.

Equation caractéristique : $r^2 - 4r + 13 = 0$ (voir 4°).

$(r-2)^2 + 9 = 0.$
$(r - 2 - 3i)(r - 2 + 3i) = 0.$

Racines de l'équation caractéristique : deux racines complexes distinctes : $r_1 = 2 + 3i,\ r_2 = 2 - 3i.$

Solutions particulières de l'équation sans second membre $y'' - 4y' + 13y = 0$: $e^{2x}\cos 3x$ et $e^{2x}\sin 3x$.

Solution générale de l'équation sans second membre :

$$\boxed{y = (k_1 \cos 3x + k_2 \sin 3x)\,e^{2x},\ k_1 \in \mathbb{R},\ k_2 \in \mathbb{R}.}$$

b) SP EASM.

Le second membre est $e^{-2x} \cos x$.
Cherchons une solution particulière de la forme $y = e^{-2x} (a \cos x + b \sin x)$.

$y = e^{-2x} (a \cos x + b \sin x)$.
$y' = -2 e^{-2x} (a \cos x + b \sin x) + e^{-2x} (-a \sin x + b \cos x) = e^{-2x} ((b - 2a) \cos x - (a + 2b) \sin x)$.
$y'' = -2 e^{-2x} ((b - 2a) \cos x - (a + 2b) \sin x) - e^{-2x} ((b - 2a) \sin x + (a + 2b) \cos x) = e^{-2x} ((3a - 4b) \cos x + (4a + 3b) \sin x)$.
$y'' - 4y' + 13y = e^{-2x} ((3a - 4b - 4b + 8a + 13a) \cos x + (4a + 3b + 4a + 8b + 13b) \sin x)$.
$= 8 e^{-2x} ((3a - b) \cos x + (a + 3b) \sin x) = e^{-2x} \cos x$.
$3a - b = \frac{1}{8}$, $a + 3b = 0$.
$3(3a - b) + (a + 3b) = \frac{3}{8}$, $a = \frac{3}{80}$, $b = -\frac{a}{3} = -\frac{1}{80}$,
$y = \frac{1}{80} e^{-2x} (3 \cos x - \sin x)$.

$$\boxed{y = \frac{1}{80} e^{-2x} (3 \cos x - \sin x).}$$

c) SG EASM.

La solution générale de l'équation avec second membre (SG EASM) s'obtient par addition de la solution générale de l'équation sans second membre (SG ESSM) et d'une solution particulière de l'équation avec second membre (SP EASM).

$$\boxed{y = \frac{1}{80} e^{-2x} (3 \cos x - \sin x) + (k_1 \cos 3x + k_2 \sin 3x) e^{2x}, k_1 \in \mathbb{R}, k_2 \in \mathbb{R}.}$$

HAUT

Chapitre 13. Equations différentielles linéaires.

Enoncés.

Exercice 4. 2 équations différentielles linéaires d'ordre > 2 à coefficients constants.

Déterminer la solution générale sur l'ensemble des nombres réels des équations différentielles suivantes : 1) $y'''' - y = 0$ 2) $y''' + 3y'' + 3y' + y = (x^2 + x + 1)e^{-x}$	

Solution.

La solution générale d'une équation différentielle linéaire avec second membre (SG EASM) s'obtient par addition de la solution générale de l'équation sans second membre (SG ESSM) et d'une solution particulière de l'équation avec second membre (SP EASM).
La solution générale d'une équation différentielle linéaire du second ordre sans second membre est combinaison linéaire de deux solutions particulières linéairement lindépendantes de l'équation sans second membre.
Lorsque les coefficients d'une équation différentielle linéaire sont constants, on recherche des solutions particulières exponentielles de l'équation sans second membre : e^{rx}. r doit vérifier l'équation caractéristique.

1°/ Première équation.

$y'''' - y = 0$.

L'équation est sans second membre.

Equation caractéristique : $r^4 = 1$.

$(r - 1)(r + 1)(r - i)(r + i) = 0$.
2 racines réelles distinctes 1 et – 1, 2 racines imaginaires pures conjugées i et $-i$.

Solutions particulières de l'équation sans second membre $y'''' - y = 0$: e^x, e^{-x}, $\cos x$, $\sin x$.

La solution générale de l'équation différentielle est combinaison linéaire de ces quatre solutions :

$y = a\,e^x + b\,e^{-x} + c\cos x + d\sin x$, où $a, b, c, d,$ sont des nombres réels arbitraires.

2°/ Deuxième équation.

$y''' + 3\,y'' + 3\,y' + y = (x^2 + x + 1)\,e^{-x}$

a) SG ESSM.

Equation caractéristique : $r^3 + 3\,r^2 + 3\,r + 1 = 0$.

$(r + 1)^3 = 0$

Une racine réelle triple $r = -1$.

Solutions particulières de l'équation sans second membre : e^{-x}, $x\,e^{-x}$, $x^2\,e^{-x}$.

Solution générale de l'équation sans second membre :

$y = (a\,x^2 + b\,x + c)\,e^{-x}$, où a, b, c, sont des nombres réels arbitraires.

b) SP EASM.

Le second membre $(x^2 + x + 1)\,e^{-x}$ est solution de l'équation sans second membre.

Regardons ce qui se passe pour $a\,x^3\,e^{-x}$.

$y = a\,x^3\,e^{-x}$.
$y' = -a\,x^3\,e^{-x} + 3\,a\,x^2\,e^{-x}$.
$y'' = a\,x^3\,e^{-x} - 6\,a\,x^2\,e^{-x} + 6\,a\,x\,e^{-x}$.
$y''' = -a\,x^3\,e^{-x} + 9\,a\,x^2\,e^{-x} - 18\,a\,x\,e^{-x} + 6\,a\,e^{-x}$.
$y''' + 3\,y'' + 3\,y' + y = ((-1 + 3 - 3 + 1)\,x^3 + (9 - 18 + 9)\,x^2 + (-18 + 18)\,x + 6)\,a\,e^{-x} = 6\,a\,e^{-x}$.

Le degré du polynôme a été abaissé de 3 unités.

Nous allons donc chercher une solution particulière de la forme $y = (a\,x^5 + b\,x^4 + c\,x^3)\,e^{-x}$.

$y = (a\,x^5 + b\,x^4 + c\,x^3)\,e^{-x}$.
$y' = -(a\,x^5 + b\,x^4 + c\,x^3)\,e^{-x} + (5\,a\,x^4 + 4\,b\,x^3 + 3\,c\,x^2)\,e^{-x}$
$= (-a\,x^5 + (5\,a - b)\,x^4 + (4\,b - c)\,x^3 + 3\,c\,x^2)\,e^{-x}$
$y'' = -(-a\,x^5 + (5\,a - b)\,x^4 + (4\,b - c)\,x^3 + 3\,c\,x^2)\,e^{-x} + (-5\,a\,x^4 + 4\,(5\,a - b)\,x^3 + 3\,(4\,b - c)\,x^2 + 6\,c\,x)\,e^{-x}$
$= (a\,x^5 + (-10\,a + b)\,x^4 + (20\,a - 8\,b + c)\,x^3 + (12\,b - 6\,c)\,x^2 + 6\,c\,x)\,e^{-x}$.
$y''' = -(a\,x^5 + (-10\,a + b)\,x^4 + (20\,a - 8\,b + c)\,x^3 + (12\,b - 6\,c)\,x^2 + 6\,c\,x)\,e^{-x} + (5\,a\,x^4 + 4\,(-10\,a + b)\,x^3 + 3\,(20\,a - 8\,b + c)\,x^2 + 2\,(12\,b - 6\,c)\,x + 6\,c)\,e^{-x}$
$= (-a\,x^5 + (15\,a - b)\,x^4 + (-60\,a + 12\,b - c)\,x^3 + (60\,a - 36\,b + 9\,c)\,x^2 + (24\,b - 18\,c)\,x + 6\,c)\,e^{-x}$
$y''' + 3\,y'' + 3\,y' + y = [(-1 + 3 - 3 + 1)\,x^5 + (15\,a - b - 30\,a + 3\,b + 15\,a - 3\,b + b)\,x^4 + (-60\,a + 12\,b - c + 60\,a - 24\,b + 3\,c + 12\,b - 3\,c + c)\,x^3 + (60\,a - 36\,b + 9\,c + 36\,b - 18\,c + 9\,c)\,x^2 + (24\,b - 18\,c + 18\,c)\,x + 6\,c]\,e^{-x}$
$= (60\,a\,x^2 + 24\,b\,x + 6\,c)\,e^{-x} = (x^2 + x + 1)\,e^{-x}$
$a = \frac{1}{60}$, $b = \frac{1}{24}$, $c = \frac{1}{6}$,

$$y = \left(\frac{x^5}{60} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^3}{6} \right) e^{-x}.$$

$$\boxed{y = \left(\frac{x^5}{60} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^3}{6} \right) e^{-x}.}$$

c) SG EASM.

La solution générale de l'équation avec second membre (SG EASM) s'obtient par addition de la solution générale de l'équation sans second membre (SG ESSM) et d'une solution particulière de l'équation avec second membre (SP EASM).

$\boxed{y = \left(\frac{x^5}{60} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^3}{6} + a\,x^2 + b\,x + c \right) e^{-x}}$, où a, b, c, sont des nombres réels arbitraires.

EQUATIONS DIFFERENTIELLES

EXERCICE 1.

Résoudre les équations différentielles :

1.1. $y' \, y = e^{x-y}$

1.2. $\sqrt{y} = x \, y'$

1.3. $y' = (2x + 3x^2)(1 + y)$

1.4. $\frac{e_y - 1}{e_y - 2} \, y' = \frac{1}{x}$

EXERCICE 2.

Résoudre les équations différentielles :

2.1. $(3y + x) - (3x + y) \, y' = 0$

2.2. $(x \, y' - y)(\ln y - \ln x) = x$

2.3. $y' = \frac{xy}{x^2 + y^2}$

EXERCICE 3.

Résoudre les équations différentielles :

3.1. $x \, y' - y = \frac{1}{x}$

3.2. $x \, y' - y = 1 + x^2$

3.3. $x \, y' - 2y = \ln x$

3.4. $x \, y' + y(1 + x) = e^x$

3.5. $y' \sin x - y \cos x + 1 = 0$

3.6. $y' - 3\frac{y}{x} = x$

3.7. $y' + 2xy = 4x$

3.8. $x \, y' = y + x^3 + 3x^2 - 2x$

3.9. $(x - 2) \, y' = y + 2(x - 2)^3$

3.10. $\frac{y'}{x} = -2ky$

EXERCICE 4.

Résoudre les équations différentielles :

4.1. $x' + \dfrac{x}{y \ln y} = \dfrac{1}{y}$

4.2. $y' + y + 2 = 0$

4.3. $\dfrac{dQ}{dt} + k_1 Q = k_2 (t - e^{-\alpha t})$

4.4. $L \dfrac{di}{dt} + R i = \dfrac{1}{C} (e^{-2t} + t^2)$, avec $t = 0 \Rightarrow i = 0$.

EXERCICE 5.

Résoudre les équations différentielles :

5.1. $y' + 2 y = e^x y^2$

5.2. $y' - \dfrac{y}{2x} = 5 x^2 y^5$

5.3. $(x^2 + 1) y' + y (x + y^2) = 0$

5.4. $y' (x + x^2 y) = y - x y^2$

EXERCICE 6.

Trouver les équations différentielles du premier ordre admettant pour solutions la famille de courbes (c constante) :

6.1. $y = \ln (x + c)$

6.2. $y = \ln x + c$

6.3. $y = c \ln x$

6.4. $y = e^{c x}$

6.5. $y = c e^x$

6.6. $y = e^x + c$

EXERCICE 7.

Séparer les variables et résoudre l'équation différentielle :

7.1. $f_1 (x) g_2 (y) dx + f_2 (x) g_1 (y) dy = 0$
où $f_1 (x)$ et $f_2 (x)$ sont deux fonctions de x et $g_1 (y)$ et $g_2 (y)$ sont deux fonctions de y.

7.2. $(3 x^2 y - x y) dx + (2 x^3 y^2 + x^3 y^4) dy = 0$

7.3. $x dy - y dx = 0$

7.4. $4 x dy - y dx = x^2 dy$

7.5. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{4y}{x(y-3)}$

7.6. $(x^2 - 1) y dx + x^2 (y - 1) dy = 0$

7.7. $(3 y e^{xy} + 1) dx + 3 x e^{xy} dy = 0$

7.8. $x\,y\,dy = 4\,y\,dx + 3\,x\,dy$
7.9. $(1 + x^3)\,dy - x^2\,y\,dx = 0$, avec $x = 1 \Rightarrow y = 2$.
7.10. $(x^3 + y^3)\,dx - 3\,x\,y^2\,dy = 0$.
7.11. $(x + y)\,dx + (3\,x + 3\,y - 4)\,dy = 0$.
7.12. $(y - xy)^2\,dx - (x^2 + x^2\,y)\,dy = 0$.
7.13. $(x^2 - y)\,dx + (y^2 - x)\,dy = 0$.
7.14. $(3\,e^{3x}\,y - 2\,x)\,dx + e^{3x}\,dy = 0$.

EXERCICE 8.

On donne l'équation différentielle : $x\,y' - y = 1 + x^2$.
8.1. Résoudre l'équation.
8.2. Calculer la solution particulière satisfaisant à la condition : $x = 1 \Rightarrow y = 2$.
8.3. Résoudre l'équation différentielle :

$$-2\,x\,y' - y = (1 + x^2)\,y^3$$

EXERCICE 9.

On donne l'équation différentielle : $y' = 2\,x\,y^2 - x\,y - x$.
9.1. Vérifier que la fonction $y = 1$ est solution particulière de l'équation.
9.2. Résoudre l'équation différentielle.

EXERCICE 10.

Déterminer les trajectoires orthogonales des courbes $C(\lambda)$ d'équation $y\,x^2 - \lambda = 0$.

EXERCICE 11.

Résoudre l'équation différentielle : $y = x\,(y' + m) + y'^2$, où m est un paramètre donné, différent de 0.

EXERCICE 12.

Un circuit électrique contient en série un générateur de force électromotrice $V = 100$ volts et de résistance intérieure négligeable, une résistance $R = 1$ ohm, une inductance $L = 10$ henrys et un interrupteur. Au temps $t = 0$, on ferme l'interrupteur. Donner l'expression de l'intensité i du courant en fonction du temps, ainsi que sa valeur au temps $t = 0{,}1$ s, à 1 % près. On sait que i est donné par la solution de l'équation différentielle :

$$L\,\frac{di}{dt} + R\,i = V$$

satisfaisant aux conditions initiales $i = 0$ pour $t = 0$.

EXERCICE 13.

Un condensateur de capacité C se décharge dans une résistance R . On rappelle que la charge q de ce condensateur vérifie l'équation différentielle : $RC\,\dfrac{dq}{dt} + q = 0$ (t : temps).

13.1. Quelle est la charge du condensateur à l'instant t, la charge initiale étant q_0 au temps $t = 0$?

13.2. Au bout de combien de temps, la charge du condensateur aura-t-elle diminué de moitié, le condensateur de capacité $C = 2$ µF se déchargeant dans une résistance $R = 10^5\ \Omega$?

EXERCICE 14.

Un corps à la température θ se trouve placé dans une enceinte dont la température α est supposée constante. La variation $d\theta$ de la température de ce corps pendant un temps infiniment petit dt est proportionnelle à dt et à la différence $\theta - \alpha$: $d\theta = -k\,(\theta - \alpha)\,dt$, avec k constante positive.

14.1. Pour $t = 0$, $\theta = \theta_0$. Exprimer θ en fonction de t.

14.2. On suppose :
— $\alpha = 2 \times 10^1$ °C, $\theta_0 = 7 \times 10^1$ °C
— au bout d'un temps $t = 5$ mn, $\theta = 6 \times 10^1$ °C.

Calculer k et exprimer θ en fonction de t. Calculer la température du corps aux instants :
$t = 10$ mn, $t = 20$ mn, $t = 30$ mn.

EXERCICE 15.

Dans un milieu de culture, le taux de multiplication (par minute) de certains micro-organismes est proportionnel au nombre de micro-organismes présents.

15.1. Ecrire l'équation différentielle traduisant cette loi.

15.2. t étant mesuré en minutes, évaluer le nombre de micro-organismes présents à l'instant $t = 215$ mn, sachant que leur nombre double toutes les 60 minutes.

EXERCICE 16.

On étudie l'hydrolyse du fumarate d'atropine en fonction du temps. C_0 désigne la concentration en fumarate d'atropine au temps $t_0 = 0$; $C(t)$ désigne la cconcentration en fumarate d'atropine au temps t. On veut déterminer l'ordre α de la réaction. On suppose que la vitesse de réaction d'hydrolyse au temps t est proportionnelle à la puissance α de la concentration de fumarate d'atropine.

16.1. Ecrire l'équation différentielle traduisant cette loi.

16.2. Résoudre cette équation pour les trois modèles testés : $\alpha = 0$, $\alpha = 1$, $\alpha = 2$.

EXERCICE 17.

On étudie la concentration d'un produit administré par voie orale. Soient :

— G la concentration dans le tractus gastro-intestinal,

— F la concentration sanguine,

— U la concentration urinaire.

On utilise les hypothèses de travail suivantes :

— Le passage intestin-sang s'effectue suivant une réaction d'ordre 1 et de vitesse

$$-\frac{dG}{dt} = k_a G$$

— Le passage du sang dans l'urine s'effectue selon une réaction d'ordre 1 et de vitesse

$$\frac{dU}{dt} = k_b F$$

17.1. Ecrire l'équation différentielle de F.

17.2. Résoudre cette équation différentielle.

EXERCICE 18.

On met en culture $Y_0 = 10^{12}$ bactéries. Lorsqu'elles se reproduisent librement, leur nombre double toutes les 30 heures.

18.1. Ecrire l'équation différentielle de Y et la résoudre.

18.2. En fait, on prélève toutes les 6 heures dans cette culture un nombre X de bactéries, toujours le même. Calculer le nombre de bactéries présentes au bout des 6 premières heures (Y_1). Au bout du 8^e prélèvement, on s'aperçoit qu'il ne reste aucune bactérie. Combien en a-t-on prélevé chaque fois ?

EXERCICE 19.

19.1. Exprimer en fonction du temps la valeur d'un placement P_0 dont le taux d'intérêt est de 5 %. Trouver la période.

19.2. Le radium se désintègre en quantité proportionnelle à la quantité non encore désintégrée. Si la moitié de la quantité initiale disparaît en 1 600 ans, quel pourcentage aura disparu en 100 ans ?

19.3. Dans une culture d'Escherichia Coli, le nombre de bactéries croît proportionnellement à leur nombre et double en une heure. Au bout de conbien de temps leur nombre est-il multiplié par 10 ?

19.4. L'équation différentielle d'un circuit contenant une résistance R, une capacité C et un générateur e force électromotrice $e = E \sin \omega t$ est :

$$R\frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = \frac{de}{dt}$$

Trouver comment varie l'intensité i au cours du temps.

19.5. Dans une culture de Giardia intestinalis, la vitesse de multiplication est proportionnelle au nombre N de protozoaires présents.

a) Ecrire l'équation différentielle de N et la résoudre, en sachant que, pour $t = 0$, on a $N = 10^8$ protozoaires.

b) Si le nombre de Giardia intestinalis quadruple en deux heures, au bout de combien de temps leur nombre est-il multiplié par 8 ?

EXERCICE 20.

Le bromure d'éthylène $C_2\ H_4\ Br_2$ dans le méthanol réagit avec l'iodure de potassium $K\ I$ selon la réaction stoechiométrique :

$$C_2\ H_4\ Br_2 + 3\ K\ I \rightarrow C_2\ H_4 + 2\ K\ Br + K\ I_3$$

La réaction est suivie au cours du temps en mesurant la quantité de $K\ I_3$ formée, exprimée en concentration molaire $[K\ I_3\ ] = x\ (mol.l^{-1}\ )$. On a obtenu les résultats suivants :

$t\ (mn)$	1,0	2,5	5,0	7,5	10,0
$x\ (mol.l^{-1})$	0,571	0,642	0,820	0,881	0,895

On suppose la réaction d'ordre 2, définie par :

$$\frac{d\ [\ KI_3\ ]}{dt} = \frac{dx}{dt} = k\ [\ C_2\ H_4\ Br_2\ ][\ K\ I\ ]$$

où k est une constante.

20.1. Sachant que pour t = 0,0 mn, on a :

$[\ C_2\ H_4\ Br_2\ ]$ = 1,000 mol.l^{-1} ,

$[\ K\ I\ ]$ = 3,000 mol.l^{-1} ,

$[\ K\ I_3\ ]$ = 0,000 mol.l^{-1},

montrer que l'équation différentielle de $[\ K\ I_3\ ]$ peut se mettre sous la forme :

$$\frac{dx}{dt} - 3\ k\ (1 - x^2\ ) = 0$$

20.2. Résoudre l'équation différentielle en x en tenant compte des conditions initiales.

20.3. Effectuer sur les données expérimentales le changement de variable $y = \frac{x}{1{,}000 - x}$ en respectant les règles des chiffres significatifs et des arrondis.

20.4 Représenter graphiquement y en fonction de t.

20.5 Par ajustement graphique, calculer la valeur de la constante k et préciser les unités.

EXERCICE 21.

Résoudre le système d'équations différentielles, où x et y sont deux fonctions de t :

21.1. $x' - x + y' - 2\ t + 1 = 0$

$x' + x + 2\ y' - t = 0$

21.2. $x' - x + y' = 2\ t - 1$

$2\ x' + x + 2\ y' = t$

EXERCICE 22.

Une molécule A se décompose en une molécule B instable qui se décompose à son tour pour donner une molécule C ($A \rightarrow B \rightarrow C$). En désignant respectivement par N_A , N_B , N_C , le nombre de moles de A, B, C, au temps t et sachant que les vitesses de chacune des deux réactions sont données par :

$$\frac{dN_A}{dt} = -\ k_A\ N_A \text{ et } \qquad \frac{dN_C}{dt} = k_B\ N_B$$

où k_A et k_B sont des constantes.

22.1. Ecrire l'équation différentielle de N_B . Préciser sa nature.

22.2. Résoudre l'équation différentielle de N_B sachant que, pour t = 0, on a N_B = 0 et N_A = 1.

EXERCICE 23.

Résoudre l'équation différentielle : $y'' + 2\,y' + m\,y = 0$. Discuter suivant les valeurs de m.

EXERCICE 24.

Résoudre les équations différentielles :

24.1. $y'' + 2\,y' + 4\,y = 0$
24.2. $y'' + 2\,y' - 15\,y = 0$
24.3. $y'' + 6\,y' + 9\,y = 0$
24.4. $y'' - 3\,y' + 2\,y = 0$
24.5. $y'' - 4\,y' + 13\,y = 0$
24.6. $y'' - 3\,y' + 2\,y = x^3$
24.7. $y'' - 4\,y' + 3\,y = 6\,x + 1.$
24.8. $y'' + y' - 6\,y = 2\,e^{3x}$
24.9. $y'' - 2\,y' = e^x \ sin\ x$
24.10. $y'' - 2\,y' + 3\,y = sin\ x$
24.11. $y'' + 4\,y = sin\ 3x$
24.12. $y'' + y = \frac{1}{4}\ cos\ 3x.$
24.13. $y'' + 2\,y' + y = 0$

EXERCICE 25.

Résoudre les équations différentielles :

25.1. $\frac{d^2y}{dx^2} \times \frac{d^2x}{dy^2} = 1$
25.2. $y'' = x\,y'^2$

EXERCICE 26.

Résoudre le système d'équations différentielles, où x et y sont deux fonctions de t.

26.1. $x' + 2\,x + 3\,y = 0$
$3\,x + y' + 2\,y = 2\,e^{2t}$

26.2. $x' - y' - y = e^{-t}$
$x + y' - y = e^{2t}$

EXERCICE 27.

On considère un condensateur de capacité C initialement chargé sous une tension V_0. Ce condensateur se décharge dans une bobine d'inductance L et de résistance négligeable.

27.1. Donner l'expression de la charge en fonction du temps (on sait que la charge q vérifie l'équation différentielle $\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{LC} = 0$).

27.2. Donner l'expression de l'intensité i du courant en fonction du temps.

27.3. Au bout de combien de temps, la charge du condensateur aura-t-elle diminué de moitié ?

EXERCICE 28.

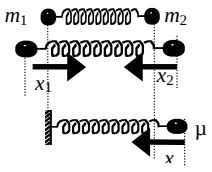
On pose à la surface d'un liquide, au repos, une bille de masse m supposée ponctuelle. Sachant que la résistance au mouvement, due au fluide, est proportionnelle à la vitesse, étudier le mouvement de la bille. En notant O le point de départ de la bille et $\overrightarrow{Ox}$ la verticale descendante, on vérifiera que si x est l'abscisse de la bille sur l'axe $\overrightarrow{Ox}$, on a l'équation différentielle :

$$m\,g - k\,\frac{dx}{dt} = m\,\frac{d^2x}{dt^2}.$$

On résoudra cette équation différentielle du 2e ordre. On s'intéressera au mouvement de la bille lorsque t augmente indéfiniment.

EXERCICE 29. OSCILLATEUR HARMONIQUE.

Le mouvement d'une molécule diatomique peut être représenté par le modèle suivant :



Modèle au repos : masses m_1 et m_2 des atomes. Le ressort modèlise la liaison chimique

Modèle en mouvement : $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$. La force de rappel est due à l'élasticité de la liaison chimique. Elle est proportionnelle à la distance (Loi de Hooke).

Modèle équivalent : $\vec{F} = \vec{F}_2$ et $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$

1° Ecrire le principe fondamental de la dynamique pour les particules m_1 , m_2 , μ.

2° En posant $x = x_2 - x_1$, que vaut alors $\frac{d^2x}{dt^2}$? L'exprimer en fonction de x ,m_1 ,m_2 . Que peut-on conclure ?

3° Vérifier que la fonction $x = x_0 \sin \omega t$ vérifie le principe fondamental pour la particule μ. Quelle est la valeur de ω ? Quels sont les mouvements des particules 1 et 2 ?

4° Calculer dans ces conditions l'énergie cinétique E_c de la molécule.

5° Calculer l'énergie potentielle E_p de la molécule.

6° Calculer l'énergie totale de vibration :

$$E_{vib} = E_c + E_p$$

Que peut-on en conclure ?

7° Sachant que l'énergie E_{vib} est quantifiée, c'est-à-dire ne peut prendre que des valeurs discrètes et caractéristiques de la molécule, que peut-on en conclure pour le mouvement ?

8° Tracer la courbe représentative des variations de l'énergie en fonctioon de la distance entre atomes.

9° En fait, la loi de Hooke n'est qu'approchée, l'énergie totale est donnée par la fonction de Morse :

$$E_{vib} = k\,(1 - e^{-\frac{x^2}{2}})$$

Trouver la loi de force correspondante.

10° Tracer sur le graphique du 8° cette fonction de Morse.

N.B. Ce problème sert d'introduction mathématique à l'étude de la spectroscopie infrarouge.

EXERCICE 30.

Le mouvement d'oscillation d'une balance à deux plateaux peut s'écrire, en considérant le principe fondamental de la dynamique relatif aux rotations :

$$\vec{\Gamma} = \frac{d\,\vec{\sigma}}{dt} = I\,\frac{d^2\theta}{dt^2}\,\overrightarrow{u_N}$$

avec : I = moment d'inertie,

$\vec{\sigma}$ = moment cinétique,

θ = angle de rotation du fléau par rapport à la verticale,

$\overrightarrow{u_N}$ = vecteur unitaire perpendiculaire au plan de la figure, orienté comme le vecteur vitesse angulaire $\vec{\omega}$,

$\vec{\Gamma}$ = moment résultant des forces par rapport à l'axe O de rotation du fléau. Ce moment résultant comprend :

– le moment $\vec{\Gamma}_1$ du poids $\vec{F}$ de la balance, appliqué au centre de gravité G :

$$\vec{\Gamma}_1 = -\,|\,\overrightarrow{OG}\,||\,\vec{F}\,|\,\sin\theta\,\overrightarrow{u_N}$$

$$\vec{\Gamma}_1 \approx -\,|\,\overrightarrow{OG}\,||\,\vec{F}\,|\,\theta\,\overrightarrow{u_N} \text{ si } \theta \text{ est petit.}$$

– Le moment $\vec{\Gamma}_2$ de la force de frottement $\vec{F}'$ qui s'oppose au déplacement et qui est donné par

$$\vec{\Gamma}_2 = -\,k\,\frac{d\theta}{dt}\,\overrightarrow{u_N}\ .$$

Ecrire l'équation différentielle des petits mouvements, la résoudre et discuter selon les valeurs de k.

EXERCICE 1.

Résoudre les équations différentielles :

1.1. $y' y = e^{x-y}$

1.2. $\sqrt{y} = x y'$

1.3. $y' = (2x + 3x^2)(1 + y)$

1.4. $\frac{e^y - 1}{e^y - 2} y' = \frac{1}{x}$

SOLUTION.

1.1. $y' y = e^{x-y}$.

L'équation, ***à variables séparées***, peut être écrite :

$$y e^y dy = e^x dx$$

On peut intégrer chaque membre séparément :

$$\int y e^y dy = \int e^x dx$$

$\int e^x dx = e^x + c$, où c est une constante arbitraire.

Pour trouver une primitive de $y e^y$, on opère par ***intégration par parties*** en posant :
$y = u$, d'où $du = dy$;
Pour avoir $dv = e^y dy$, posons $v = e^y$.
La formule d'intégration par parties $\int u\, dv = uv - \int v\, du$ s'écrit :
$\int y e^y dy = y e^y - \int e^y dy = (y - 1) e^y$ à une constante additive près. D'où la solution de l'équation :

$$\boxed{(y - 1) e^y = e^x + c}$$

1.2. $\sqrt{y} = x y'$.

L'équation, ***à variables séparées,*** s'écrit, en séparant les variables :

$$\frac{dy}{\sqrt{y}} = \frac{dx}{x}$$

Par intégration de chaque membre, il vient :

$$\int \frac{dy}{\sqrt{y}} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\boxed{2\sqrt{y} = \ln|x| + c}$$

où c est une constante arbitraire.

1.3. $y' = (2x + 3x^2)(1 + y)$.

L'équation, à variables séparées, peut être écrite, en séparant les variables :

$$\frac{dy}{1+y} = (2x + 3x^2)\, dx$$

En intégrant séparément chaque membre, on obtient la solution :

$$\int \frac{dy}{1+y} = \int (2x + 3x^2)\, dx$$

$$\ln|1 + y| = x^2 + x^3 + \text{Constante}$$

$$y = -1 + c\, e^{x^2+x^3}$$

1.4. $\dfrac{e^y - 1}{e^y - 2}\, y' = \dfrac{1}{x}$.

L'équation, ***à variables séparées***, s'écrit, en séparant les variables :

$$\frac{e^y - 1}{e^y - 2}\, dy = \frac{dx}{x}$$

En intégrant séparément chaque membre, on obtient la solution :

$$\int \frac{e^y - 1}{e^y - 2}\, dy = \int \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{dx}{x} = ln\,|\,x\,| + \text{constante}$$

Pour intégrer $\int \dfrac{e^y - 1}{e^y - 2}\, dy$, on opère par ***changement de variable***.

On pose $e^y = u$, d'où $e^y\, dy = du$, soit $dy = \dfrac{du}{u}$, et l'intégrale s'écrit :

$$\int \frac{e^y - 1}{e^y - 2}\, dy = \int \frac{u-1}{u-2}\frac{du}{u}$$

Il reste à ***intégrer une fraction rationnelle***. Pour cela, on décompose la fraction rationnelle en éléments simples :

$$\frac{u-1}{u(u-2)} = \frac{a}{u} + \frac{b}{u-2}$$

Pour trouver a, on multiplie par u et on fait $u = 0$, d'où $a = \dfrac{-1}{-2} = \dfrac{1}{2}$.

Pour trouver b, on multiplie par $u - 2$ et on fait $u = 2$, d'où $b = \dfrac{1}{2}$.

$$\int \frac{u-1}{u-2}\frac{du}{u} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} + \frac{1}{2}\int \frac{du}{u-2} = \frac{1}{2}\,(\,ln\,|\,u\,| + \,ln\,|\,u-2\,|\,)$$

à une constante additive près. En remplaçant u par e^y, on obtient :

$$\int \frac{e^y - 1}{e^y - 2}\, dy = \frac{1}{2}\,(\,y + ln\,|\,e^y - 2\,|\,)$$

à une constante additive près. D'où la solution de l'équation :

$$\frac{1}{2}\,(\,y + ln\,|\,e^y - 2\,|\,) = \,ln\,|\,x\,| + \text{constante}$$

$$e^y\,(e^y - 2) = c\,x^2$$

EXERCICE 2.

Résoudre les équations différentielles :

2.1. $(3\,y + x) - (3\,x + y)\,y' = 0$

2.2. $(x\,y' - y)(ln\,y - ln\,x) = x$

2.3. $y' = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$

SOLUTION.

2.1. $(3\,y + x) - (3\,x + y)\,y' = 0$.

L'équation différentielle s'écrit :

$$y' = \frac{3y + x}{3x + y} = \frac{3\frac{y}{x} + 1}{3 + \frac{y}{x}}$$

C'est une ***équation homogène*** (y' est fonction de $\frac{y}{x}$). Pour la résoudre, on pose :

$$y = t\,x.$$
$$y' = t'\,x + t$$
$$t'\,x + t = \frac{3t + 1}{3 + t}$$
$$t'\,x = \frac{3t + 1}{3 + t} - t = \frac{1 - t^2}{3 + t}$$

Cette nouvelle équation est ***à variables séparées***. Elle s'écrit, en séparant les variables :

$$\frac{3 + t}{1 - t^2}\,dt = \frac{dx}{x}$$

On intègre séparément chaque membre :

$$\int \frac{3 + t}{1 - t^2}\,dt = \int \frac{dx}{x}$$
$$\int \frac{dx}{x} = ln\,|\,x\,| + \text{constante}$$

Pour intégrer $\int \frac{3 + t}{1 - t^2}\,dt$, on décompose la ***fraction rationnelle*** en éléments simples :

$$\frac{3 + t}{1 - t^2} = \frac{a}{t + 1} + \frac{b}{t - 1}$$

Pour calculer a, on multiplie par $t + 1$ et on fait $t = -1$: $a = 1$.

Pour calculer b, on multiplie par $t - 1$ et on fait $t = 1$: $b = -\dfrac{4}{2} = -2$.

$$\frac{3 + t}{1 - t^2} = \frac{1}{t + 1} - \frac{2}{t - 1}$$

$$\int \frac{3 + t}{1 - t^2}\,dt = \int \frac{dt}{t + 1} - 2\int \frac{dt}{t - 1} = ln\,|\,t + 1\,| - 2\,ln\,|\,t - 1\,| = ln\left(\frac{|t + 1|}{(t - 1)^2}\right)$$

à une constante additive près. On obtient ainsi pour solution :

$$ln\,|\,x\,| + \text{constante} = ln\left(\frac{|t + 1|}{(t - 1)^2}\right)$$
$$c\,x = \frac{t + 1}{(t - 1)^2}$$

$$cx = \frac{\frac{y}{x}+1}{\left(\frac{y}{x}-1\right)^2} = x\,\frac{y+x}{(y-x)^2}$$

On voit émerger ici l'***intégrale singulière*** $x = 0$, qui correspond au point solution

$$\boxed{x = 0,\ y = 0}$$

Ce point solution avait été écarté implicitement lorsqu'on a divisé par x. L'*intégrale générale* de l'équation est :

$$\boxed{c\,(y-x)^2 = y + x}$$

L'intégrale singulière est l'enveloppe de l'intégrale générale : toutes les paraboles de l'intégrale générale passent par le point O. Ce sont les paraboles tangentes en O à la droite $y = x$, d'équation $Y = c\,X^2$, avec $Y = y + x$ et $X = y - x$.

2.2. $(x\,y' - y)(\ln y - \ln x) = x$.

L'équation peut être écrite :

$$y' = \frac{y}{x} + \frac{1}{\ln\frac{y}{x}}$$

C'est une équation homogène. Pour la résoudre, on pose $y = tx$.

$$y' = t'\,x + t = t + \frac{1}{\ln t}$$

$$t'\,x = \frac{1}{\ln t}$$

$$\ln t\,dt = \frac{dx}{x}$$

$$\int \ln t\,dt = \int \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + \text{constante}$$

Pour calculer $\int \ln t\,dt$, on procède par intégration par parties en posant :

$u = \ln t$, d'où $du = \frac{dt}{t}$.

Pour avoir $dv = dt$, on pose $v = t$.

La formule d'intégration par partie $\int u\,dv = u\,v - \int v\,du$ donne :

$$\int \ln t\,dt = t\ln t - \int dt = t\ln t - t$$

à une constante additive près. La solution de l'équation différentielle est donc :

$$\ln|x| + \text{constante} = t\ln t - t = \frac{y}{x}\ln\frac{y}{x} - \frac{y}{x}$$

$$\boxed{cx = \left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{y}{x}} e^{-\frac{y}{x}}}$$

2.3. $y' = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$.

L'équation s'écrit :

$$y' = \frac{xy}{x^2 + y^2} = \frac{\frac{y}{x}}{1 + \frac{y^2}{x^2}}.$$

C'est une ***équation homogène***. Pour la résoudre, on pose :

$$y = t\,x$$
$$y' = t'\,x + t$$
$$t'\,x + t = \frac{t}{1+t^2}$$
$$t'\,x = \frac{t}{1+t^2} - t = -\frac{t^3}{1+t^2}$$

L'équation est ***à variables séparées***. Elle s'écrit, en séparant les variables :

$$-\frac{1+t^2}{t^3}\,dt = \frac{dx}{x}$$
$$-\frac{dt}{t^3} - \frac{dt}{t} = \frac{dx}{x}$$

Intégrons chaque membre séparément :

$$-\int \frac{dt}{t^3} - \int \frac{dt}{t} = \int \frac{dx}{x}$$
$$\frac{1}{2}\,\frac{1}{t^2} - ln\,|\,t\,| = ln\,|\,x\,| + \text{constante}$$
$$\frac{1}{2}\,\frac{1}{t^2} = ln\,|\,t\,x\,| + \text{constante}$$

$$\boxed{y = c\,e^{\frac{x^2}{2y^2}}}$$

EXERCICE 3.

Résoudre les équations différentielles :

3.1. $x\,y' - y = \dfrac{1}{x}$

3.2. $x\,y' - y = 1 + x^2$

3.3. $x\,y' - 2\,y = \ln x$

3.4. $x\,y' + y\,(1 + x) = e^x$

3.5. $y' \sin x - y \cos x + 1 = 0$

3.6. $y' - 3\,\dfrac{y}{x} = x$

3.7. $y' + 2\,x\,y = 4\,x$

3.8. $x\,y' = y + x^3 + 3\,x^2 - 2\,x$

3.9. $(x - 2)\,y' = y + 2\,(x - 2)^3$

3.10. $\dfrac{y'}{x} = -2\,k\,y$

SOLUTION.

Toutes les équations proposées dans cet exercice sont des équations différentielles linéaires :

SG EASM = SG ESSM + SP EASM

3.1. $x\,y' - y = \dfrac{1}{x}$.

Divisons par x^2 :

$$\frac{y'}{x} - \frac{y}{x^2} = \frac{1}{x^3}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{1}{x^3}$$

$$\frac{y}{x} = -\frac{1}{2x^2} + c$$

$$\boxed{y = c\,x - \frac{1}{2x}}$$

3.2. $x\,y' - y = 1 + x^2$.

Divisions par x^2 :

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{1}{x^2} + 1$$

$$\frac{y}{x} = -\frac{1}{x} + x + c$$

$$\boxed{y = cx + x^2 - 1}$$

3.3. $x\,y' - 2\,y = \ln x$

Divisons par x^3 :

$$\frac{y'}{x^2} - 2\,\frac{y}{x^3} = \frac{\ln x}{x^3}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y}{x^2}\right) = \frac{\ln x}{x^3}$$

$$\frac{y}{x^2} = \int \frac{\ln x}{x^3}\,dx$$

On intègre par parties en posant : $u = \ln x$ d'où $du = \frac{dx}{x}$. Pour avoir $dv = \frac{dx}{x^3}$, on pose $v = -\frac{1}{2x^2}$. La formule

$$\int u\,dv = u\,v - \int v\,du$$

donne :

$$\int \frac{\ln x}{x^3}\,dx = -\frac{\ln x}{2x^2} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^3} = -\frac{\ln x}{2x^2} - \frac{1}{4x^2} + \text{constante}$$

$$\frac{y}{x^2} = -\frac{\ln x}{2x^2} - \frac{1}{4x^2} + c$$

$$\boxed{y = c\,x^2 - \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\ln x}$$

3.4. $x\,y' + y\,(1 + x) = e^x$

$$(xy)' + (xy) = e^x$$

SG ESSM : $xy = c\,e^{-x}$

SP EASM : $xy = \frac{1}{2}\,e^x$

SG EASM : $xy = c\,e^{-x} + \frac{1}{2}\,e^x$

$$\boxed{y = c\,\frac{e^{-x}}{x} + \frac{1}{2x}\,e^x}$$

3.5. $y'\sin x - y\cos x + 1 = 0$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y}{\sin x}\right) = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$\frac{y}{\sin x} = \operatorname{cotan} x + c$$

$$\boxed{y = c\sin x + \cos x}$$

3.6. $y' - 3\,\frac{y}{x} = x$

Divisons par x^3 :

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y}{x^3}\right) = \frac{1}{x^2}$$

$$\frac{y}{x^3} = -\frac{1}{x} + c$$

$$\boxed{y = c\,x^3 - x^2}$$

3.7. $y' + 2\,x\,y = 4\,x$

Multiplions par e^{x^2} :

$$\frac{d(ye^{x^2})}{dx} = 4\,x\,e^{x^2}$$

$$y\,e^{x^2} = 2\,e^{x^2} + c$$

$$\boxed{y = 2 + c\, e^{-x^2}}$$

3.8. $x\, y' = y + x^3 + 3\, x^2 - 2\, x$
Divisons par x^2 :

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y}{x} \right) = x + 3 - \frac{2}{x}$$

$$\frac{y}{x} = \frac{x^2}{2} + 3\, x - 2\, ln\, |\, x\, | + c$$

$$\boxed{y = c\, x + 3\, x^2 + \frac{x^3}{2} - 2\, x\, ln\, |\, x\, |}$$

3.9. $(x - 2)\, y' = y + 2\, (x - 2)^3$
Divisons par $(x - 2)^2$:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y}{x-2} \right) = 2\, (x - 2)$$

$$\frac{y}{x-2} = (x - 2)^2 + c$$

$$\boxed{y = c\, (x - 2) + (x - 2)^3}$$

3.10. $\frac{y'}{x} = -\, 2\, k\, y$

$$\frac{dy}{y} = -\, 2\, k\, x\, dx$$

$$ln\, |\, y\, | = -\, k\, x^2 + \text{constante}$$

$$\boxed{y = c\, e^{-k\, x^2}}$$

EXERCICE 4.

Résoudre les équations différentielles :

4.1. $x' + \dfrac{x}{y \ln y} = \dfrac{1}{y}$

4.2. $y' + y + 2 = 0$

4.3. $\dfrac{dQ}{dt} + k_1 Q = k_2 (t - e^{-\alpha t})$

4.4. $L \dfrac{di}{dt} + R i = \dfrac{1}{C} (e^{-2t} + t^2)$, avec $t = 0 \Rightarrow i = 0$.

SOLUTION.

Toutes les équations proposées dans cet exercice sont des équations différentielles linéaires :

SG EASM = SG ESSM + SP EASM

4.1. $x' + \dfrac{x}{y \ln y} = \dfrac{1}{y}$

Multiplions par $\ln y$:

$$\frac{d(x \ln y)}{dy} = \frac{\ln y}{y}$$

$$x \ln y = \frac{1}{2} (\ln y)^2 + c$$

$$\boxed{x = \frac{1}{2} \ln y + \frac{c}{\ln y}}$$

4.2. $y' + y + 2 = 0$

$$\frac{dy}{y+2} = - dx$$

$$\ln | y + 2 | = - x + \text{constante}$$

$$\boxed{y + 2 = c\, e^{-x}}$$

4.3. $\dfrac{dQ}{dt} + k_1 Q = k_2 (t - e^{-\alpha t})$

SG ESSM : $Q = A\, e^{-k_1 t}$

SP EASM : $\dfrac{dQ_1}{dt} + k_1 Q_1 = k_2 t$.

Cherchons une solution $Q_1 = a t + b$; $\dfrac{dQ_1}{dt} = a$; $\dfrac{dQ_1}{dt} + k_1 Q_1 = k_1 a t + k_1 b + a \equiv k_2 t$. Pour $k_1 \neq 0$, on prendra :

$$a = \frac{k_2}{k_1} \; ; \; b = - \frac{a}{k_1} = - \frac{k_2}{{k_1}^2} \; ; \; Q_1 = \frac{k_2}{k_1} t - \frac{k_2}{{k_1}^2} = \frac{k_2}{{k_1}^2} (k_1 t - 1)$$

SP EASM : $\dfrac{dQ_2}{dt} + k_1 Q_2 = - k_2 e^{-\alpha t}$.

Cherchons une solution $Q_2 = a\, e^{-\alpha t}$; $\dfrac{dQ_2}{dt} = - \alpha a\, e^{-\alpha t}$; $\dfrac{dQ_2}{dt} + k_1 Q_2 = (k_1 - \alpha)\, a\, e^{-\alpha t} = - k_2 e^{-\alpha t}$. Pour $k_1 \neq \alpha$:

$$a = - \frac{k_2}{k_1 - \alpha} \; ; \; Q_2 = - \frac{k_2}{k_1 - \alpha} e^{-\alpha t}$$

SG EASM :

$$Q = Q = A\, e^{-k_1 t} + \frac{k_2}{{k_1}^2}\,(k_1\, t - 1) - \frac{k_2}{k_1 - \alpha}\, e^{-\alpha t}$$

4.4. $L\,\dfrac{di}{dt} + R\,i = \dfrac{1}{C}\,(\,e^{-2t} + t^2\,)$, avec $t = 0 \Rightarrow i = 0$.

SG ESSM. $i = A\, e^{-\frac{R}{L}t}$

SP EASM : $L\,\dfrac{di_1}{dt} + R\,i_1 = \dfrac{1}{C}\,e^{-2t}$

$i_1 = a\, e^{-2t}$; $\dfrac{di_1}{dt} = -2\,a\,e^{-2t}$; $L\,\dfrac{di_1}{dt} + R\,i_1 = a\,(-2\,L + R)\,e^{-2t} = \dfrac{1}{C}\,e^{-2t}$;

$a = \dfrac{1}{C(R-2L)}$; $i_1 = \dfrac{1}{C(R-2L)}\,e^{-2t}$

SP EASM : $L\,\dfrac{di_2}{dt} + R\,i_2 = \dfrac{1}{C}\,t^2$

$i_2 = a\,t^2 + b\,t + c$; $\dfrac{di_2}{dt} = 2\,a\,t + b$; $L\,\dfrac{di_2}{dt} + R\,i_2 = R\,a\,t^2 + (R\,b + 2\,a\,L)\,t + (R\,c + L\,b) = \dfrac{1}{C}\,t^2$

$a = \dfrac{1}{RC}$; $b = -2\,a\,\dfrac{L}{R} = -2\,\dfrac{L}{R^2C}$; $c = -b\,\dfrac{L}{R} = 2\,\dfrac{L^2}{R^3C}$; $i_2 = \dfrac{1}{RC}\,t^2 - 2\,\dfrac{L}{R^2C}\,t + 2\,\dfrac{L^2}{R^3C}$

SG EASM :

$$i = A\, e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{1}{C(R-2L)}\,e^{-2t} + \frac{1}{RC}\,t^2 - 2\,\frac{L}{R^2C}\,t + 2\,\frac{L^2}{R^3C}$$

Solution du problème.

$t = 0 \Rightarrow i = 0 = A + \dfrac{1}{C(R-2L)} + 2\,\dfrac{L^2}{R^3C}$

$$i = \frac{e^{-2t} - e^{-\frac{R}{L}t}}{C(R-2L)} + 2\,\frac{L^2}{R^3C}\,(1 - e^{-\frac{R}{L}t}) + \frac{1}{RC}\,t^2 - 2\,\frac{L}{R^2C}\,t$$

EXERCICE 5.

Résoudre les équations différentielles :

5.1. $y' + 2\,y = e^x\ y^2$

5.2. $y' - \dfrac{y}{2x} = 5\,x^2\,y^5$

5.3. $(x^2 + 1)\,y' + y\,(x + y^2) = 0$

5.4. $y'\,(x + x^2\,y) = y - x\,y^2$

SOLUTION.

5.1. $y' + 2\,y = e^x\ y^2$.

L'équation différentielle est une ***équation de Bernoulli*** $y' = B(x)\,y + C(x)\,y^{\alpha}$.

Pour la résoudre, on pose $z = \dfrac{1}{y^{\alpha-1}}$, d'où $z' = -(\alpha - 1)\,\dfrac{y'}{y^{\alpha}}$ et $-\dfrac{z'}{\alpha-1} = B(x)\,z + C(x)$, ***équation linéaire***.

Nous obtenons ici, avec $\alpha = 2$:

$$-z' + 2\,z = e^x$$
$$z' - 2\,z = -e^x$$

SG ESSM : $z = c\,e^{2x}$

SP EASM : $z = a\,e^x$; $z' = a\,e^x$; $-a\,e^x = -e^x$; $a = 1$; $z = e^x$.

SG EASM : $z = c\,e^{2x} + e^x$

$$\boxed{y = \frac{e^{-x}}{1 + ce^x}}$$

5.2. $y' - \dfrac{y}{2x} = 5\,x^2\,y^5$.

L'équation différentielle est une ***équation de Bernoulli***. Pour la résoudre, on pose $z = \dfrac{1}{y^4}$, d'où $z' = -4\,\dfrac{y'}{y^5}$ et l'équation devient :

$$-\frac{1}{4}\,z' - \frac{1}{2x}\,z = 5\,x^2$$
$$x\,z' + 2\,z = -20\,x^3$$

On est ramené à la résolution d'une équation linéaire. Multiplions par x :

$$x^2\,z' + 2\,x\,z = -20\,x^4$$
$$\frac{d(x^2 z)}{dx} = -20\,x^4$$
$$x^2\,z = -4\,x^5 + c$$
$$z = -4\,x^3 + \frac{c}{x^2}$$

$$\boxed{y^4 = \frac{1}{z} = \frac{x^2}{c - 4x^5}}$$

5.3. $(x^2 + 1)\,y' + y\,(x + y^2) = 0$.

L'équation différentielle est une ***équation de Bernoulli***. Pour la résoudre, on pose $z = \frac{1}{y^2}$, d'où $z' = -2\,\frac{y'}{y^3}$.

L'équation devient :

$$-\frac{1}{2}\,(x^2+1)\,z' + z\,x + 1 = 0$$

$$(x^2+1)\,z' - 2\,x\,z = 2$$

et nous avons à résoudre une ***équation linéaire***. Divisons par $(1+x^2)^2$:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{z}{1+x^2}\right) = \frac{2}{(1+x^2)^2}$$

$$\frac{z}{1+x^2} = 2\int \frac{dx}{(1+x^2)^2}$$

Pour calculer l'intégrale $\int \frac{dx}{(1+x^2)^2}$, on peut utiliser plusieurs méthodes : décomposition de fraction rationnelle, intégration par parties, changement de variable.

5.3.1. Décomposition de fraction rationnelle.

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{x-i} - \frac{1}{x+i}\right)$$

$$\left(\frac{1}{1+x^2}\right)^2 = -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{(x-i)^2} + \frac{1}{(x+i)^2} - \frac{2}{1+x^2}\right)$$

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x-i} + \frac{1}{x+i}\right) + \frac{1}{2}\,Atan\,x + c = \frac{1}{2}\,\frac{x}{1+x^2} + \frac{1}{2}\,Atan\,x + c$$

5.3.2. Intégration par parties.

Dans l'intégrale $\int \frac{dx}{1+x^2} = Atan\,x + constante$, posons $u = \frac{1}{1+x^2}$, on a $du = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}\,dx$. Pour avoir $dv = dx$, on prend $v = x$. La formule d'intégration par parties donne :

$$\int u\,dv = u\,v - \int v\,du$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \frac{x}{1+x^2} + 2\int \frac{x^2}{(1+x^2)^2}\,dx$$

$$\int \frac{x^2}{(1+x^2)^2}\,dx = \int \frac{1+x^2-1}{(1+x^2)^2}\,dx = \int \frac{dx}{1+x^2} - \int \frac{dx}{(1+x^2)^2} = Atan\,x - \int \frac{dx}{(1+x^2)^2}$$

$$Atan\,x + constante = \frac{x}{1+x^2} + 2\left(Atan\,x - \int \frac{dx}{(1+x^2)^2}\right)$$

d'où la formule :

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{2}\,\frac{x}{1+x^2} + \frac{1}{2}\,Atan\,x + c$$

5.3.3. Changement de variable.

Dans l'intégrale $\int \frac{dx}{(1+x^2)^2}$, posons $x = tan\,\varphi$, avec $-\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$. On a : $dx = (1 + tan^2\,\varphi)\,d\varphi$

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \int \frac{1+tan^2\,\varphi}{(1+tan^2\,\varphi)^2}\,d\varphi = \int \frac{d\varphi}{1+tan^2\,\varphi} = \int cos^2\,\varphi\,d\varphi = \frac{1}{2}\int (1+cos\,2\varphi)\,d\varphi$$

$$= \frac{\varphi}{2} + \frac{1}{4}\,sin\,2\varphi + c = \frac{\varphi}{2} + \frac{1}{2}\,\frac{tan\,\varphi}{1+tan^2\,\varphi} + c = \frac{1}{2}\,Atan\,x + \frac{1}{2}\,\frac{x}{1+x^2} + c$$

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{2}\,Atan\,x + \frac{1}{2}\,\frac{x}{1+x^2} + c$$

Il vient alors :

$$\frac{z}{1+x^2} = 2\int \frac{dx}{(1+x^2)^2} = Atan\,x + \frac{x}{1+x^2} + constante$$

$$z = (1 + x^2)\, Atan\, x + x + k\,(1 + x^2) = \frac{1}{y^2}$$

$$\boxed{y^2 = \frac{1}{x + (1 + x^2)(k + Atan\, x)}}$$

5.4. $y'\,(x + x^2\, y) = y - x\, y^2$.

Si l'on pose $xy = u$, il vient $y = \frac{u}{x}$; $y' = \frac{u'}{x} - \frac{u}{x^2}$; $\left(\frac{u'}{x} - \frac{u}{x^2} \right) x\,(1 + u) = \frac{u}{x}\,(1 - u)$

$$u'\,(1 + u) = \frac{u}{x}\,(1 + u + 1 - u) = 2\,\frac{u}{x}$$

$$\frac{du}{u} + du = 2\,\frac{dx}{x}$$

$$ln\,|\,u\,| + u = 2\,ln\,|\,x\,| + \text{constante}$$

$$u\, e^u = c\, x^2$$

$$xy\, e^{xy} = c\, x^2$$

$$\boxed{y\, e^{xy} = c\, x^2}$$

EXERCICE 6.

Trouver les équations différentielles du premier ordre admettant pour solutions la famille de courbes (c constante) :

6.1. $y = \ln (x + c)$

6.2. $y = \ln x + c$

6.3. $y = c \ln x$

6.4. $y = e^{c\,x}$

6.5. $y = c\, e^{x}$

6.6. $y = e^{x} + c$

SOLUTION.

6.1. $y = \ln (x + c)$.

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x+c} \; ; \; x + c = \frac{y}{y'} = e^{y} \; ;$$

$$\boxed{y' = y\, e^{-y}}$$

6.2. $y = \ln x + c$.

$$dy = \frac{dx}{x}$$

$$\boxed{xy' = 1}$$

6.3. $y = c \ln x$.

$$dy = c\,\frac{dx}{x} \; ; \; c = xy' \; ;$$

$$\boxed{x\,y' \ln x = y}$$

6.4. $y = e^{c\,x}$.

$$\ln y = c\,x$$

$$\frac{dy}{y} = c\,dx \; ; \; c = \frac{y'}{y} = \frac{\ln y}{x}$$

$$\boxed{x\,y' = y \ln y}$$

6.5. $y = e^{x} + c$.

$$\boxed{y' = e^{x}}$$

EXERCICE 7.

Séparer les variables et résoudre l'équation différentielle :

7.1. $f_1(x)\, g_2(y)\, dx + f_2(x)\, g_1(y)\, dy = 0$
où $f_1(x)$ et $f_2(x)$ sont deux fonctions de x et $g_1(y)$ et $g_2(y)$ sont deux fonctions de y.

7.2. $(3x^2 y - x y)\, dx + (2x^3 y^2 + x^3 y^4)\, dy = 0$

7.3. $x\, dy - y\, dx = 0$

7.4. $4x\, dy - y\, dx = x^2\, dy$

7.5. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{4y}{x(y-3)}$

7.6. $(x^2 - 1)\, y\, dx + x^2 (y - 1)\, dy = 0$

7.7. $(3y\, e^{xy} + 1)\, dx + 3x\, e^{xy}\, dy = 0$

7.8. $x y\, dy = 4y\, dx + 3x\, dy$

7.9. $(1 + x^3)\, dy - x^2 y\, dx = 0$, avec $x = 1 \Rightarrow y = 2$.

7.10. $(x^3 + y^3)\, dx - 3x y^2\, dy = 0$.

7.11. $(x + y)\, dx + (3x + 3y - 4)\, dy = 0$.

7.12. $(y - xy)^2\, dx - (x^2 + x^2 y)\, dy = 0$.

7.13. $(x^2 - y)\, dx + (y^2 - x)\, dy = 0$.

7.14. $(3e^{3x} y - 2x)\, dx + e^{3x}\, dy = 0$.

SOLUTION.

7.1. $f_1(x)\, g_2(y)\, dx + f_2(x)\, g_1(y)\, dy = 0$.

Dans le cas où les fonctions ne sont pas nulles, la solution est donnée par :

$$\frac{g_1(y)}{g_2(y)}\, dy = -\frac{f_1(x)}{f_2(x)}\, dx$$

$$\boxed{\int \frac{g_1(y)}{g_2(y)}\, dy = -\int \frac{f_1(x)}{f_2(x)}\, dx}$$

7.2. $(3x^2 y - x y)\, dx + (2x^3 y^2 + x^3 y^4)\, dy = 0$.

$$x y\,(3x - 1)\, dx = -x^3 y^2\,(2 + y^2)\, dy$$

$$(2y + y^3)\, dy = \frac{1 - 3x}{x^2}\, dx$$

$$y^2 + \frac{y^4}{4} = -\frac{1}{x} - 3\, ln\,|x| + \text{constante}$$

$$\boxed{(y^2 + 2)^2 = c - \frac{4}{x} - \frac{3}{4}\, ln\,|x|}$$

7.3. $x\,dy - y\,dx = 0$.

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$$

$$ln\,|y| = ln\,|x| + \text{constante}$$

$$\boxed{y = c\,x}$$

7.4. $4\,x\,dy - y\,dx = x^2\,dy$.

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x(x-4)}$$

$$ln\,|y| = -\int \frac{dx}{x(x-4)}$$

Pour calculer l'intégrale, on décompose la fraction rationnelle en éléments simples :

$$\frac{1}{x(x-4)} = -\frac{1}{4}\,\frac{1}{x} + \frac{1}{4}\,\frac{1}{x-4}$$

$$-\int \frac{dx}{x(x-4)} = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x} - \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x-4} = \frac{1}{4}\,ln\,|x| - \frac{1}{4}\,ln\,|x-4| + \text{constante}$$

$$ln\,|y| = \frac{1}{4}\,ln\,|x| - \frac{1}{4}\,ln\,|x-4| + \text{constante}$$

$$\boxed{\frac{x}{x-4} = k\,y^4}$$

7.5. $\frac{dy}{dx} = \frac{4y}{x(y-3)}$.

$$\frac{y-3}{y}\,dy = 4\,\frac{dx}{x}$$

$$y - 3\,ln\,|y| = 4\,ln\,|x| + \text{constante}$$

$$\boxed{\frac{e^y}{y^3} = k\,x^4}$$

7.6. $(x^2 - 1)\,y\,dx + x^2\,(y-1)\,dy = 0$.

$$\frac{y-1}{y}\,dy = -\frac{x^2-1}{x^2}\,dx$$

$$y - ln\,|y| = -x - \frac{1}{x} + \text{constante}$$

$$\boxed{\frac{e^y}{y} = c\,e^{-\frac{1+x^2}{x}}}$$

7.7. $(3\,y\,e^{x\,y} + 1)\,dx + 3\,x\,e^{x\,y}\,dy = 0$.

$$3\,e^{xy}\,(x\,dy + y\,dx) + dx = 0$$

Posons $xy = u$; $du = x\,dy + y\,dx$;

$$3\,e^u\,du + dx = 0$$

$$3\,e^u + x = constante$$

$$u = ln\,\frac{c-x}{3}$$

$$\boxed{y = \frac{1}{x}\, ln\, \frac{c-x}{3}}$$

7.8. $x\,y\,dy = 4\,y\,dx + 3\,x\,dy$.

$$\frac{y-3}{y}\, dy = 4\, \frac{dx}{x}$$

$$\boxed{\frac{e^y}{y^3} = k\, x^4}$$

7.9. $(1 + x^3)\, dy - x^2\, y\, dx = 0$.

$$\frac{dy}{y} = \frac{x^2}{1+x^3}\, dx$$

$$ln\,|\,y\,| = \frac{1}{3}\, ln\,|\,1 + x^3\,| + \text{constante}$$

$$\boxed{1 + x^3 = c\, y^3}$$

7.10. $(x^3 + y^3)\, dx - 3\, x\, y^2\, dy = 0$.

On pose $y = u\, x$; $dy = x\, du + u\, dx$

$$(x^3 + x^3\, u^3)\, dx - 3\, x^3\, u^2\, (x\, du + u\, dx) = 0$$

$$(1 + u^3)\, dx - 3\, x\, u^2\, du - 3\, u^3\, dx = 0$$

$$(1 - 2\, u^3)\, dx = 3\, x\, u^2\, du$$

$$\frac{3u^2}{1-2u^3}\, du = \frac{dx}{x}$$

$$\frac{1}{2}\, ln\,|\,1 - 2\, u^3\,| = ln\,|\,x\,| + \text{constante}$$

$$1 - 2\, u^3 = c\, x^2$$

$$1 - 2\, \frac{y^3}{x^3} = c\, x^2$$

$$\boxed{y^3 = \frac{1}{2}\, x^3\, (1 + k\, x^2)}$$

7.11. $(x + y)\, dx + (3\, x + 3\, y - 4)\, dy = 0$.

Posons $x + y = u$. On a : $du = dx + dy$; $u\, du + (2\, u - 4)\, dy = 0$; $\frac{u\, du}{u-2} = -2\, dy$; $du + \frac{2}{u-2}\, du = -2\, dy$;

$$u + 2\, ln\,|\,u - 2\,| = -2\, y + \text{constante}$$

$$x + y + 2\, ln\,|\,x + y - 2\,| = -2\, y + \text{constante}$$

$$\boxed{(x + y - 2)^2 = x\, e^{-x-3y}}$$

7.12. $(y - xy)^2\, dx - (x^2 + x^2\, y)\, dy = 0$.

$$y^2\, (1 - x)^2\, dx = x^2\, (1 + y)\, dy$$

$$\frac{(1-x)^2}{x^2}\, dx = \frac{1+y}{y^2}\, dy$$

$$\frac{dx}{x^2} - 2\,\frac{dx}{x} + dx = \frac{dy}{y^2} + \frac{dy}{y}$$

$$-\frac{1}{y} + ln\,|\,y\,| = -\frac{1}{x} - 2\,ln\,|\,x\,| + x + constante$$

$$\boxed{y\,e^{-\frac{1}{y}} = c\,\frac{e^{x-\frac{1}{x}}}{x^2}}$$

7.13. $(x^2 - y)\,dx + (y^2 - x)\,dy = 0.$

$$x^2\,dx + y^2\,dy - (x\,dy + y\,dx) = 0$$

$$\frac{1}{3}\,(x^3 + y^3) - xy = \text{constante}$$

$$\boxed{x^3 + y^3 = 3\,x\,y + c}$$

7.14. $(3\,e^{3x}\,y - 2\,x)\,dx + e^{3x}\,dy = 0.$

$$d\,(y\,e^{3x} - x^2) = 0$$

$$y\,e^{3x} - x^2 = \text{constante}$$

$$\boxed{y = (c + x^2)\,e^{-3x}}$$

EXERCICE 8.

On donne l'équation différentielle : $x\,y' - y = 1 + x^2$.

8.1. Résoudre l'équation.

8.2. Calculer la solution particulière satisfaisant à la condition : $x = 1 \Rightarrow y = 2$.

8.3. Résoudre l'équation différentielle :

$$-2\,x\,y' - y = (1 + x^2)\,y^3$$

SOLUTION.

8.1. Résolution de l'équation $x\,y' - y = 1 + x^2$.

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du premier ordre avec second membre. Pour trouver la solution, on peut diviser l'équation par x^2 :

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{1}{x^2} + 1$$

$$\frac{y}{x} = -\frac{1}{x} + x + 2\,c$$

$$\boxed{y = x^2 + 2\,cx - 1}$$

8.2. Solution particulière.

Pour $x = 1$, on doit avoir $y = 2$. Cette condition fixe la constante $2\,c$:

$$2 = 2\,c + 1 - 1$$

$$2\,c = 2$$

$$y = 2\,x + x^2 - 1 = (x + 1)^2 - 3$$

$$\boxed{y = x^2 + 2\,x - 1}$$

8.3. Résolution de l'équation $-2\,x\,y' - y = (1 + x^2)\,y^3$.

C'est une ***équation différentielle de Bernoulli***. Pour la résoudre, on divise par y^3 et on pose $u = \frac{1}{y^2}$;

$$u' = -2\,\frac{y'}{y^3}\ ;\ x\,u' - u = 1 + x^2$$

On retombe sur l'équation résolue dans la première question : la solution est un polynôme du 2e degré.

$$u = x^2 + c\,x - 1 = \frac{1}{y^2}$$

$$\boxed{y^2 = \frac{1}{x^2 + 2cx - 1}}$$

EXERCICE 9.

On donne l'équation différentielle : $y' = 2\,x\,y^2 - x\,y - x$.

9.1. Vérifier que la fonction $y = 1$ est solution particulière de l'équation.

9.2. Résoudre l'équation différentielle.

SOLUTION.

L'équation différentielle proposée est une ***équation de Ricatti***. Pour la résoudre, on cherche une solution particulière y_1 puis on pose $y = z + y_1$.

9.1. Solution particulière.

La fonction constante $y_1 = 1$ a une dérivée nulle. Elle vérifie :

$$y_1' - 2\,x\,y_1^2 + x\,y_1 + x = 0 - 2\,x + x + x = 0.$$

La fonction $y_1 = 1$ vérifie l'équation différentielle : $y' = 2\,x\,y^2 - x\,y - x$.

9.2. Solution générale.

Posons $y = z + 1$. La dérivée est $y' = z'$. L'équation différentielle devient :

$$z' = 2\,x\,(z+1)^2 - x\,(z+1) - x = 2\,x\,z^2 + 2\,x\,z + 2\,x - x\,z - x - x = x\,z\,(2\,z+1)$$

C'est une ***équation à variables séparées***.

$$\frac{dz}{z(2z+1)} = x\,dx$$

$$\frac{dz}{z} - 2\,\frac{dz}{2z+1} = x\,dx$$

$$ln\,|\,z\,| - ln\,|\,2\,z+1\,| = \frac{x^2}{2} + \text{constante}$$

$$\frac{z}{2z+1} = c\,e^{\frac{x^2}{2}} = \frac{y-1}{2(y-1)+1} = \frac{y-1}{2y+1}$$

$$(2\,y-1)\,c\,e^{\frac{x^2}{2}} - y = -1$$

$$y\,(2\,c\,e^{\frac{x^2}{2}} - 1) = c\,e^{\frac{x^2}{2}} - 1$$

$$\boxed{y = \frac{c\,e^{\frac{x^2}{2}} - 1}{2\,c\,e^{\frac{x^2}{2}} - 1}}$$

EXERCICE 10.

Déterminer les trajectoires orthogonales des courbes $C(\lambda)$ d'équation $y\,x^2 - \lambda = 0$.

SOLUTION.

Pour déterminer les trajectoires orthogonales à une famille de courbe, on écrit l'équation différentielle de la famille de courbes et on remplace dans cette équation, la dérivée y' par $-\frac{1}{y'}$.

L'équation différentielle des courbes C (λ) est $\frac{d(yx^2)}{dx} = 0$, soit $y'\,x^2 + 2\,x\,y = 0$.

L'équation différentielle des trajectoires orthogonales est donc :

$$-\frac{x^2}{y'} + 2\,x\,y = 0$$

$$2\,y\,y' = x$$

$$y^2 = \frac{x^2}{2} + \text{constante}$$

$$\boxed{y^2 - \frac{x^2}{2} = c}$$

C'est une famille d'hyperboles.

EXERCICE 11.

Résoudre l'équation différentielle : $y = x\,(y' + m) + y'^2$, où m est un paramètre donné, différent de 0.

SOLUTION.

L'équation différentielle proposée est une équation de Lagrange : $y = x\,f(y') + g(y')$.
Pour la résoudre, on pose $y' = t$, d'où :

$$y = x\,(t + m) + t^2$$
$$dy = (t + m)\,dx + x\,dt + 2\,t\,dt = t\,dx$$
$$m\,dx + (x + 2\,t)\,dt = 0$$
$$m\,\frac{dx}{dt} + x = -2\,t$$

On est ramené à la résolution d'une équation linéaire à coefficients constants, avec second membre.

SG ESSM : $x = c\,e^{-\frac{t}{m}}$
SP EASM : $x = a\,t + b$; $x' = a$; $am + at + b = -2\,t$; $a = -2$; $b = -a\,m = 2\,m$; $x = -2\,t + 2\,m = 2\,(m - t)$
SG EASM : $x = 2\,(m - t) + c\,e^{-\frac{t}{m}}$

$y = x\,(t + m) + t^2 = 2\,(m^2 - t^{2°}) + t^2 + c\,(m + t)\,e^{-\frac{t}{m}} = 2\,m^2 - t^2 + c\,(m + t)\,e^{-\frac{t}{m}}$
La solution est donnée sous forme paramétrique par les relations :

$$x = 2\,(m - t) + c\,e^{-\frac{t}{m}}$$
$$y = 2\,m^2 - t^2 + c\,(m + t)\,e^{-\frac{t}{m}}$$

Les points à tangente horizontale ($y' = t = 0$), ont pour coordonnées :

$x = 2\,m + c$
$y = 2\,m^2 + c\,m = m\,(2\,m + c)$

Ils sont sur la droite d'équation $y = m\,x$. Cette relation était déjà claire à partir de l'équation différentielle.

EXERCICE 12.

Un circuit électrique contient en série un générateur de force électromotrice V = 100 volts et de résistance intérieure négligeable, une résistance R = 1 ohm, une inductance L = 10 henrys et un interrupteur. Au temps t = 0, on ferme l'interrupteur. Donner l'expression de l'intensité i du courant en fonction du temps, ainsi que sa valeur au temps t = 0,1 s, à 1 % près. On sait que i est donné par la solution de l'équation différentielle :

$$L \frac{di}{dt} + R\, i = V$$

satisfaisant aux conditions initiales $i = 0$ pour $t = 0$.

SOLUTION.

L'équation différentielle $L \frac{di}{dt} + R\, i = V$ est une équation linéaire à coefficients constants, avec second membre.

SG ESSM : $i = c\, e^{-\frac{R}{L} t}$

SP EASM : $i = \frac{V}{R}$

SG EASM : $i = \frac{V}{R} + c\, e^{-\frac{R}{L} t}$

SOLUTION PARTICULIERE :

Pour t = 0, i doit être nul. Cette condition fixe la constante d'intégration c :

$$0 = \frac{V}{R} + c$$

$$\boxed{i = \frac{V}{R} (1 - e^{-\frac{R}{L} t})}$$

APPLICATION NUMERIQUE.

V = 100 V, R = 1 Ω, L = 10 H, t = 0,1 s :

$$\boxed{i = 100\, (1 - e^{-10^{-2}}) \approx 1 \text{ A}}$$

EXERCICE 13.

Un condensateur de capacité C se décharge dans une résistance R . On rappelle que la charge q de ce condensateur vérifie l'équation différentielle : $RC\,\dfrac{dq}{dt} + q = 0$ (t : temps).

13.1. Quelle est la charge du condensateur à l'instant t, la charge initiale étant q_0 au temps $t = 0$?

13.2. Au bout de combien de temps, la charge du condensateur aura-t-elle diminué de moitié, le condensateur de capacité $C = 2$ µF se déchargeant dans une résistance $R = 10^5\ \Omega$?

SOLUTION.

13.1. Résolution de l'équation différentielle.

L'équation est à variables séparées : $\dfrac{dq}{q} = -\dfrac{1}{RC}\,dt$

$$\boxed{q = q_0\, e^{-\frac{1}{RC}t}}$$

13.2. Temps mis pour une décharge de moitié.

Soit T le temps que met le condensateur pour perdre la moitié de sa charge. Ce temps T vérifie :

$$\frac{q_0}{2} = q_0\, e^{-\frac{1}{RC}T}$$

$$\frac{T}{RC} = \ln 2$$

$$\boxed{T = RC \ln 2}$$

Avec $R = 10^5\ \Omega$ et $C = 2$ µF $= 2 \times 10^{-6}$ F, il vient :

$$T = 0{,}2 \times \ln 2 = 0{,}14 \text{ s}$$

$$\boxed{T = 0{,}14 \text{ s}}$$

EXERCICE 14.

Un corps à la température θ se trouve placé dans une enceinte dont la température α est supposée constante. La variation $d\theta$ de la température de ce corps pendant un temps infiniment petit dt est proportionnelle à dt et à la différence $\theta - \alpha$: $d\theta = -k\,(\theta - \alpha)\,dt$, avec k constante positive.

14.1. Pour $t = 0$, $\theta = \theta_0$. Exprimer θ en fonction de t.

14.2. On suppose :

— $\alpha = 2 \times 10^1$ °C, $\theta_0 = 7 \times 10^1$ °C

— au bout d'un temps $t = 5$ mn, $\theta = 6 \times 10^1$ °C.

Calculer k et exprimer θ en fonction de t. Calculer la température du corps aux instants :

$t = 10$ mn, $t = 20$ mn, $t = 30$ mn.

SOLUTION.

14.1. Résolution de l'équation différentielle.

$$\frac{d\theta}{\theta - \alpha} = -k\,dt$$

$$ln\,|\,\theta - \alpha\,| = -k\,t + constante$$

$$\theta - \alpha = (\theta_0 - \alpha)\,e^{-k\,t}$$

14.2. Application numérique.

$\theta - 20 = (70 - 20)\,e^{-k\,t}$

$\theta = 20 + 50\,e^{-k\,t}$

Pour $t = 5$ mn, $\theta = 60$: $40 = 50\,e^{-5\,k}$; $5\,k = ln\,\frac{5}{4}$.

$$\theta = 20 + 50\left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{t}{5}}$$

t (mn)	0	5	10	20	30
θ (°C)	70	60	52	40	33

EXERCICE 15.

Dans un milieu de culture, le taux de multiplication (par minute) de certains micro-organismes est proportionnel au nombre de micro-organismes présents.

15.1. Ecrire l'équation différentielle traduisant cette loi.

15.2. t étant mesuré en minutes, évaluer le nombre de micro-organismes présents à l'instant t = 215 mn, sachant que leur nombre double toutes les 60 minutes.

SOLUTION.

15.1. Equation différentielle.

En supposant que le nombre de micro-organismes est grand, on peut approcher la loi de multiplication des micro-organismes par une loi continue. On appelle $N\ (t)$ le nombre de micro-organismes présents à l'instant t dans le milieu de culture. Pendant le temps dt, infiniment petit, l'accroissement dN du nombre de micro-organisme est proportionnel au nombre de micro-organismes présents N :

$$\boxed{dN = k\,N\,dt}$$

$\frac{dN}{dt}$, proportionnel à N est le taux d'accroissement des micro-organismes.

15.2. Résolution et application numérique.

L'équation différentielle est à variables séparées :

$$\frac{dN}{N} = k\,dt$$

$$\boxed{N = N_0\,e^{k\,t}}$$

La période de doublement T est liée à la constante k par la relation : $k\,T = ln\ 2$, car la relation $N\ (t + T) = 2\ N\ (t)$, se traduit par $N_0\,e^{k\,(t\,+\,T)} = 2\,N_0\,e^{k\,t}$, d'où $e^{k\,T} = 2$. Ici, T = 60 mn $\Rightarrow e^{60\,k} = 2$

$$\boxed{N = N_0\,2^{\frac{t}{60}}}$$

Pour t = 215, il vient :

$$\boxed{N = N_0\,2^{\frac{215}{60}} \approx 12\,N_0}$$

EXERCICE 16.

On étudie l'hydrolyse du fumarate d'atropine en fonction du temps. C_0 désigne la concentration en fumarate d'atropine au temps $t_0 = 0$; *C(t)* désigne la cconcentration en fumarate d'atropine au temps *t*. On veut déterminer l'ordre α de la réaction. On suppose que la vitesse de réaction d'hydrolyse au temps *t* est proportionnelle à la puissance α de la concentration de fumarate d'atropine.

16.1. Ecrire l'équation différentielle traduisant cette loi.

16.2. Résoudre cette équation pour les trois modèles testés : $\alpha = 0$, $\alpha = 1$, $\alpha = 2$.

SOLUTION.

16.1. Equation différentielle.

La vitesse de réaction d'hydrolyse est le nombre de moles transformées par unité de temps. Le nombre de moles présentes dans la solution est proportionnelle à la concentration *C (t)* au temps *t*, donc la vitesse de réaction est, à un facteur près, la dérivée de la concentration. Dire que la vitesse de réaction est proportionnelle à la puissance α de la concentration, c'est donc dire que la dérivée de la concentration est proportionnelle à la puissance α de la concentration . Cette loi se traduit par la relation :

$$\boxed{\frac{dC}{dt} = k\, C^{\alpha}}$$

16.2. Résolution dans les cas étudiés.

16.2.1. $\alpha = 0$.

$$dC = k\, dt$$

$$\boxed{C = k\, t + C_0}$$

16.2.2. $\alpha = 1$.

$$\frac{dC}{C} = k\, dt \; ; \; \ln C = k\, t + \text{constante}$$

$$\boxed{C = C_0\, e^{k\, t}}$$

16.2.3. $\alpha = 2$.

$$\frac{dC}{C^2} = k\, dt \; ; \; -\frac{1}{C} = k\, t - \frac{1}{C_0}$$

$$\boxed{C = \frac{C_0}{1 - C_0\, k\, t}}$$

EXERCICE 17.

On étudie la concentration d'un produit administré par voie orale. Soient :

— G la concentration dans le tractus gastro-intestinal,

— F la concentration sanguine,

— U la concentration urinaire.

On utilise les hypothèses de travail suivantes :

— Le passage intestin-sang s'effectue suivant une réaction d'ordre 1 et de vitesse

$$-\frac{dG}{dt} = k_a\, G$$

— Le passage du sang dans l'urine s'effectue selon une réaction d'ordre 1 et de vitesse

$$\frac{dU}{dt} = k_b\, F$$

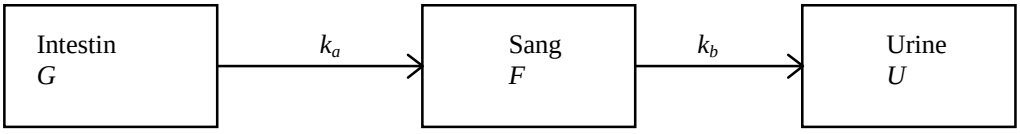
17.1. Ecrire l'équation différentielle de F.

17.2. Résoudre cette équation différentielle.

SOLUTION.

17.1. Equation différentielle.

Le système peut être assimilé à un système à trois compartiments :



Ce système a pour équations différentielles :

$$\frac{dG}{dt} = -k_a\, G$$

$$\frac{dF}{dt} = k_a\, G - k_b\, F$$

$$\frac{dU}{dt} = k_b\, F$$

L'équation $\frac{dG}{dt} = -k_a\, G$ est à variables séparées. Sa solution est donnée par :

$$\frac{dG}{G} = -k_a\, dt\ ;\ ln\, G = -k_a\, t + constante\ ;$$

$$\boxed{G = G_0\, e^{-k_a\, t}}$$

L'équation différentielle du 2e compartiment s'écrit alors :

$$\boxed{\frac{dF}{dt} + k_b\, F = k_a\, G_0\, e^{-k_a\, t}}$$

17.2. Résolution de l'équation différentielle.

SG ESSM : $F = c\, e^{-k_b\, t}$

SP EASM : $F = a\, e^{-k_a\, t}$; $\frac{dF}{dt} = -a\, k_a\, e^{-k_a\, t}$; $\frac{dF}{dt} + k_b\, F = a\,(k_b - k_a)e^{-k_a\, t} = k_a\, G_0\, e^{-k_a\, t}$;

$a = \frac{k_a\, G_0}{k_b - k_a}$; $F = \frac{k_a\, G_0}{k_b - k_a} e^{-k_a\, t}$

SG EASM :

$$F = \frac{k_a\, G_0}{k_b - k_a} e^{-k_a t} + c\, e^{-k_b t}$$

Si l'on suppose qu'à l'instant initial $t = 0$, la concentration sanguine en produit absorbé était nulle, la solution est donnée par la valeur de la constante :

$$0 = \frac{k_a\, G_0}{k_b - k_a} + c$$

$$F = \frac{k_a\, G_0}{k_b - k_a} \left(e^{-k_a t} - e^{-k_b t}\right)$$

EXERCICE 18.

On met en culture $Y_0 = 10^{12}$ bactéries. Lorsqu'elles se reproduisent librement, leur nombre double toutes les 30 heures.

18.1. Ecrire l'équation différentielle de Y et la résoudre.

18.2. En fait, on prélève toutes les 6 heures dans cette culture un nombre X de bactéries, toujours le même. Calculer le nombre de bactéries présentes au bout des 6 premières heures (Y_1). Au bout du 8^e prélèvement, on s'aperçoit qu'il ne reste aucune bactérie. Combien en a-t-on prélevé chaque fois ?

SOLUTION.

18.1. Equation différentielle.

Dire que le nombre double toutes les T = 30 heures, c'est dire que le nombre $N(t)$ de bactéries présentes à l'instant t vérifie l'équation fonctionnelle :

$$N(t + T) = 2\,N(t)$$

La différentielle logarithmique de chaque membre donne :

$$\frac{dN(t+T)}{N(t+T)} = \frac{dN(t)}{N(t)}$$

et, par récurrence :

$$\frac{dN(t)}{N(t)} = \frac{dN(t+kT)}{N(t+kT)} \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}.$$

Montrons que le rapport $\frac{1}{N(t)}\frac{dN(t)}{dt}$ est une constante. Il prend déjà la même valeur lorsque t augmente d'un nombre entier de fois T. Si k tend vers l'infini, la valeur de t devient négligeable devant $k\,T$, de sorte que le rapport $\frac{1}{N(t+kT)}\frac{dN(t+kT)}{dt}$ ne dépend plus de t : c'est donc une constante α. L'équation différentielle de $N(t)$ s'écrit donc :

$$\boxed{\frac{dN(t)}{N(t)} = \alpha\, dt}$$

La solution de l'équation différentielle est :

$$N(t) = A\, e^{\alpha t}$$

Comme le nombre de bactéries double toutes les 30 heures, $30\,\alpha = ln\ 2$ et la solution s'écrit :

$$N(t) = A\, 2^{\frac{t}{30}}$$

Si, au temps t_0 , le nombre de bactéries présentes est $N(t_0)$, on a :

$$N(t_0) = A\, 2^{\frac{t_0}{30}}$$

D'où la solution :

$$\boxed{N(t) = N(t_0)\, 2^{\frac{t-t_0}{30}}}$$

18.2. Prélèvement périodique.

Soit Y_0 le nombre de bactéries initialement présentes dans la culture. Au bout de 6 heures, le nombre de bactéries présentes est :

$$Y_1 = Y_0\, 2^{\frac{1}{5}}$$

Si, à cet instant, on en prélève X, il en reste $Y_1 - X$. Six heures plus tard, il y en a :

$$Y_2 = (Y_1 - X)\, 2^{\frac{1}{5}}$$

et ainsi de suite. Si, avant le k-ième prélèvement, il y en a Y_k , on en prélève X, il en reste $Y_k - X$ et, avant le $(k + 1)$-ième prélèvement il y en a :

$$Y_{k+1} = (Y_k - X)\, 2^{\frac{1}{5}}$$

On a :

$$Y_2 = (Y_1 - X)\, 2^{\frac{1}{5}} = Y_1\, 2^{\frac{1}{5}} - X\, 2^{\frac{1}{5}} = Y_0\, 2^{\frac{2}{5}} - X\, 2^{\frac{1}{5}}$$

Supposons que Y_k soit donné par la formule :

$$Y_k = Y_0\, 2^{\frac{k}{5}} - X\,(2^{\frac{1}{5}} + \ldots + 2^{\frac{k-1}{5}})$$

Alors :

$$Y_{k+1} = (Y_k - X)\, 2^{\frac{1}{5}} = Y_0\, 2^{\frac{k+1}{5}} - X\,(2^{\frac{2}{5}} + \ldots + 2^{\frac{k}{5}}) - X\, 2^{\frac{1}{5}} = Y_0\, 2^{\frac{k+1}{5}} - X\,(2^{\frac{1}{5}} + \ldots + 2^{\frac{k}{5}})$$

ce qui montre que Y_{k+1} est donné par la même formule que Y_k en changeant k en $k + 1$. Le principe de récurrence montre alors que la formule donnant Y_k est valable pour tout entier $k \geq 2$.

$$Y_k = Y_0\, 2^{\frac{k}{5}} - X\,(2^{\frac{1}{5}} + \ldots + 2^{\frac{k-1}{5}}) = Y_0 \times 2^{\frac{k}{5}} - X \times 2^{\frac{1}{5}} \times \frac{1 - 2^{\frac{k-1}{5}}}{1 - 2^{\frac{1}{5}}}$$

$$\boxed{Y_k = Y_0 \times 2^{\frac{k}{5}} - X \times 2^{\frac{1}{5}} \times \frac{1 - 2^{\frac{k-1}{5}}}{1 - 2^{\frac{1}{5}}}}$$

Pour $k = 8$, on a exactement $Y_8 = X$. Le nombre X de bactéries prélevées toutes les 6 heures vérifie donc la relation :

$$X = Y_0 \times 2^{\frac{8}{5}} - X \times 2^{\frac{1}{5}} \times \frac{1 - 2^{\frac{7}{5}}}{1 - 2^{\frac{1}{5}}}$$

$$X\left(1 + 2^{\frac{1}{5}} \times \frac{1 - 2^{\frac{7}{5}}}{1 - 2^{\frac{1}{5}}}\right) = Y_0 \times 2^{\frac{8}{5}}$$

$$X \times \frac{1 - 2^{\frac{8}{5}}}{1 - 2^{\frac{1}{5}}} = Y_0 \times 2^{\frac{8}{5}}$$

$$\boxed{X = Y_0 \times 2^{\frac{8}{5}} \times \frac{1 - 2^{\frac{1}{5}}}{1 - 2^{\frac{8}{5}}}}$$

Avec $Y_0 = 10^{12}$ bactéries, on trouve :

$$\boxed{X = 0,22 \times 10^{12} \text{ bactéries}}$$

EXERCICE 19.

19.1. Exprimer en fonction du temps la valeur d'un placement P_0 dont le taux d'intérêt est de 5 %. Trouver la période.

19.2. Le radium se désintègre en quantité proportionnelle à la quantité non encore désintégrée. Si la moitié de la quantité initiale disparaît en 1 600 ans, quel pourcentage aura disparu en 100 ans ?

19.3. Dans une culture d'Escherichia Coli, le nombre de bactéries croît proportionnellement à leur nombre et double en une heure. Au bout de conbien de temps leur nombre est-il multiplié par 10 ?

19.4. L'équation différentielle d'un circuit contenant une résistance R, une capacité C et un générateur e force électromotrice $e = E \sin \omega t$ est :

$$R \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = \frac{de}{dt}$$

Trouver comment varie l'intensité i au cours du temps.

19.5. Dans une culture de Giardia intestinalis, la vitesse de multiplication est proportionnelle au nombre N de protozoaires présents.

a) Ecrire l'équation différentielle de N et la résoudre, en sachant que, pour $t = 0$, on a $N = 10^8$ protozoaires.

b) Si le nombre de Giardia intestinalis quadruple en deux heures, au bout de combien de temps leur nombre est-il multiplié par 8 ?

SOLUTION.

19.1. Placement à intérêts composés.

$$\frac{dP}{dt} = \tau P \Rightarrow \frac{dP}{P} = \tau\, dt \Rightarrow P = P_0\, e^{\pi}.$$

La période est donnée par :

$$\boxed{T = \frac{ln\, 2}{\tau} = 14 \text{ ans}}$$

19.2. Désintégration du radium.

$dR = -k R\, dt \Rightarrow R = R_0\, e^{-k t}$ avec $k = \frac{ln\, 2}{T} \Rightarrow R = R_0\, 2^{-\frac{t}{T}}$. Ici, $T = 1\,600$ ans, $t = 100$ ans, $\frac{R}{R_0} = 2^{-\frac{1}{16}}$ et le pourcentage qui s'est désintégré est :

$$\boxed{\frac{R_0 - R}{R_0} = 1 - 2^{-\frac{1}{16}} \approx 4{,}23\ \%}$$

19.3. Culture d'Escherichia Coli.

$$N = N_0\, e^{k t} = N_0\, 2^t$$

$$10\, N_0\, 2^t = N_0\, 2^{(t+x)} \Rightarrow 2^x = 10 \Rightarrow x = log_2\, 10 = \frac{1}{log_{10}\, 2} = \frac{1}{0{,}30103} \approx 3 \text{ h } 20 \text{ mn}$$

Le nombre est multiplié par 10 en 3 h 20 mn.

19.4. Intensité du courant dans un circuit.

$$R\frac{di}{dt}+\frac{i}{C}=\frac{de}{dt}=\omega E\cos\omega t$$

SG ESSM : $i = I\,e^{-\frac{t}{RC}}$

SP EASM : $i = a\cos\omega t + b\sin\omega t$

$$\frac{di}{dt}=-a\,\omega\sin\omega t+b\,\omega\cos\omega t$$

$$R\frac{di}{dt}+\frac{i}{C}=-R\,a\,\omega\sin\omega t+R\,b\,\omega\cos\omega t+\frac{a}{C}\cos\omega t+\frac{b}{C}\sin\omega t=\omega E\cos\omega t$$

$$R\,b\,\omega+\frac{a}{C}=\omega E$$

$$-R\,a\,\omega+\frac{b}{C}=0$$

$$b=a\,\omega RC$$

$$a\,(1+\omega^2R^2C^2)=\omega CE$$

$$a=\frac{\omega CE}{1+(RC\omega)^2}\;;\;b=\frac{R\omega^2C^2E}{1+(RC\omega)^2}\;;\;i=\frac{\omega CE}{1+(RC\omega)^2}\cos\omega t+\frac{R\omega^2C^2E}{1+(RC\omega)^2}\sin\omega t$$

SG EASM :

$$i=I\,e^{-\frac{t}{RC}}+\frac{\omega CE}{1+(RC\omega)^2}\cos\omega t+\frac{R\omega^2C^2E}{1+(RC\omega)^2}\sin\omega t$$

Si, au temps $t = 0$, l'intensité du courant est i_0 , on a :

$$i_0=I+\frac{\omega CE}{1+(RC\omega)^2}$$

$$\boxed{i=i_0\,e^{-\frac{t}{RC}}+\frac{\omega CE}{1+(RC\omega)^2}\left(\cos\omega t-e^{-\frac{t}{RC}}\right)+\frac{R\omega^2C^2E}{1+(RC\omega)^2}\sin\omega t}$$

19.5. Culture de Giardia intestinalis.

La vitesse de multiplication est l'augmentation du nombre N de protozoaires par unité de temps. Pendant le temps dt, le nombre de protozoaires augmente de dN. La vitesse de multiplication est $\frac{dN}{dt}$. Par hypothèse, cette vitesse de multiplication est proportionnelle à N. Soit k le coefficient de proportionnalité. L'équation différentielle de N est :

$$\boxed{\frac{dN}{dt}=k\,N}$$

La solution de cette équation est $N = N_0\,e^{k\,t}$, avec ici $N_0 = 10^8$.

Dire que le nombre de Giardia intestinalis quadruple en deux heures, c'est dire que l'on a la relation :

$$4\,N_0\,e^{k\,t}=N_0\,e^{k\,(t+2)}$$

$$4=e^{2k}$$

$$2\,k=2\,\ln 2$$

$$k=\ln 2$$

$$\boxed{N=N_0\,2^t}$$

$N = 8\,N_0$ si $2^t = 8$, donc $t = 3$ heures.

Le nombre de Giardia intestinalis est multiplié par 8 au bout de 3 heures.

On remarquera que le nombre initial de protozoaires n’intervient pas dans ce calcul.

EXERCICE 20.

Le bromure d'éthylène $C_2\ H_4\ Br_2$ dans le méthanol réagit avec l'iodure de potassium $K\ I$ selon la réaction stoechiométrique :

$$C_2\ H_4\ Br_2 + 3\ K\ I \rightarrow C_2\ H_4 + 2\ K\ Br + K\ I_3$$

La réaction est suivie au cours du temps en mesurant la quantité de $K\ I_3$ formée, exprimée en concentration molaire $[K\ I_3\ ] = x\ (mol.l^{-1}\ )$. On a obtenu les résultats suivants :

$t\ (mn)$	1,0	2,5	5,0	7,5	10,0
$x\ (mol.l^{-1})$	0,571	0,642	0,820	0,881	0,895

On suppose la réaction d'ordre 2, définie par :

$$\frac{d\ [\ KI_3\ ]}{dt} = \frac{dx}{dt} = k\ [\ C_2\ H_4\ Br_2\ ][\ K\ I\ ]$$

où k est une constante.

20.1. Sachant que pour t = 0,0 mn, on a :

$[\ C_2\ H_4\ Br_2\ ]$ = 1,000 mol.l^{-1} ,

$[\ K\ I\ ]$ = 3,000 mol.l^{-1} ,

$[\ K\ I_3\ ]$ = 0,000 mol.l^{-1},

montrer que l'équation différentielle de $[\ K\ I_3\ ]$ peut se mettre sous la forme :

$$\frac{dx}{dt} - 3\ k\ (1 - x^2\ ) = 0$$

20.2. Résoudre l'équation différentielle en x en tenant compte des conditions initiales.

20.3. Effectuer sur les données expérimentales le changement de variable $y = \frac{x}{1{,}000 - x}$ en respectant les règles des chiffres significatifs et des arrondis.

20.4 Représenter graphiquement y en fonction de t.

20.5 Par ajustement graphique, calculer la valeur de la constante k et préciser les unités.

SOLUTION.

20.1. Equation différentielle.

La réaction :

$$C_2\ H_4\ Br_2 + 3\ K\ I \rightarrow C_2\ H_4 + 2\ K\ Br + K\ I_3$$

montre qu'il y a autant de moles KI_3 formées qu'il y a de moles $C_2\ H_4\ Br_2$ utilisées. Si, au temps t = 0, il y a x_0 = 1,000 mole de $C_2\ H_4\ Br_2$ par litre de solution et si, au temps t, il y a x moles de KI_3 par litre de solution alors qu'il y en avait 0 au temps t = 0, c'est que x moles de $C_2\ H_4\ Br_2$ ont été utilisées par litre. La concentration restante de $C_2\ H_4\ Br_2$ est donc de $(x - x_0\ )$ moles par litre de solution.

Pour une mole de $C_2\ H_4\ Br_2$ utilisée, il y a 3 moles de KI utilisées, donc pour x moles de $C_2\ H_4\ Br_2$ utilisées, il y 3 x moles de KI utilisées. Si, à l'instant t = 0, il y avait 3 moles de KI présentes par litre de solution, il en reste, à l'instant t : $3 - 3\ x = 3\ (1 - x)$.

La relation :

$$\frac{d\ [\ KI_3\ ]}{dt} = \frac{dx}{dt} = k\ [\ C_2\ H_4\ Br_2\ ][\ K\ I\ ]$$

peut donc s'écrire :

$$\frac{dx}{dt} = k\ (1 - x\ ) \times 3\ (1 - x)$$

$$\boxed{\frac{dx}{dt} - 3\ k\ (1 - x)^2 = 0}$$

20.2. Résolution de l'équation différentielle.

L'équation est à variables séparées :

$$\frac{dx}{(1-x)^2} = 3\,k\,dt$$

$$\frac{1}{1-x} = 3\,k\,t + constante$$

Pour $t = 0$, $x = 0$, donc la constante d'intégration vaut 1 et la solution du problème est donné par la formule :

$$\frac{1}{1-x} = 3\,k\,t + 1$$

$$1 - x = \frac{1}{1+3kt}$$

$$x = 1 - \frac{1}{1+3kt} = \frac{3kt}{1+3kt}$$

$$\boxed{x = \frac{3kt}{1+3kt}}$$

20.3. Changement de variable sur les données.

$$y = \frac{x}{x_0 - x} = 1 - \frac{1}{x_0 - x}$$

$$dy = -\frac{d(x - x_0)}{(x_0 - x)^2} = -\frac{1}{(x_0 - x)^2}\,dx + \frac{1}{(x_0 - x)^2}\,dx_0$$

L'incertitude sur la valeur de y est donc majorée par :

$$\Delta y \leq \frac{1}{(x_0 - x)^2}\,(\Delta x + \Delta x_0)$$

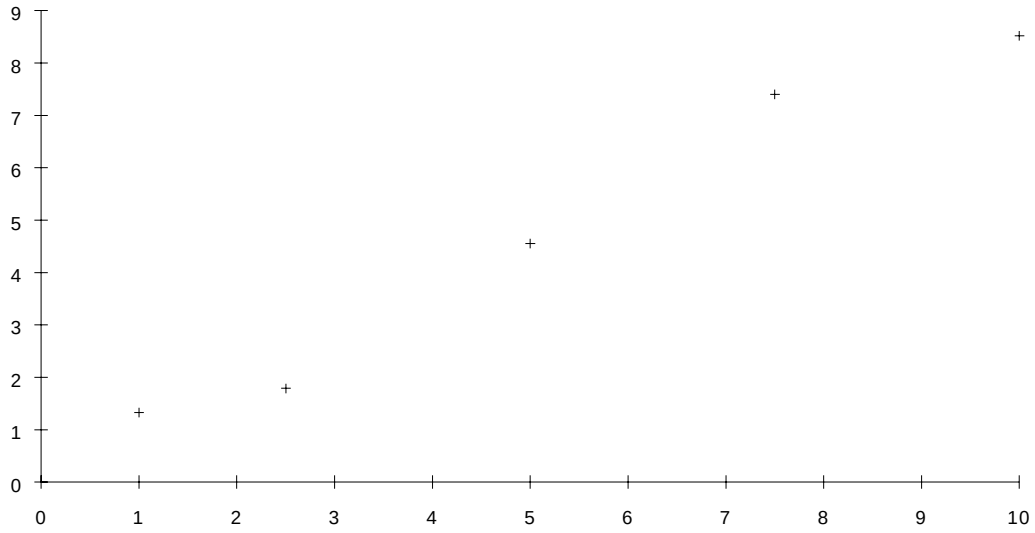
$$\Delta x = \Delta x_0 = 10^{-3}$$

$$\frac{1}{(x_0 - x)^2} \text{ varie de } \frac{1}{0{,}429^2} \approx \frac{1}{0{,}184} \approx 6 \text{ à } \frac{1}{0{,}105^2} \approx 100$$

donc, suivant les valeurs de x, Δy est majoré par un nombre de $12 \times 10^{-3} < 0{,}1$ à $200 \times 10^{-3} < 1$. Pour chaque valeur de x, il faut donc calculer $\frac{2\times10^{-3}}{(1-x)^2}$ pour le comparer à 0,1. Si ce rapport est inférieur ou égal à 0,1, on gardera un chiffre après la virgule pour y. S'il est supérieur à 0,1, on ne mettra aucun chiffre après la virgule à la valeur de y.

t (mn)	1,0	2,5	5,0	7,5	10,0
x (mol.l^{-1})	0,571	0,642	0,820	0,881	0,895
$\frac{2\times10^{-3}}{(1-x)^2}$	0,011	0,016	0,062	0,142	0,182
y	0,2	1,8	4,6	7	9

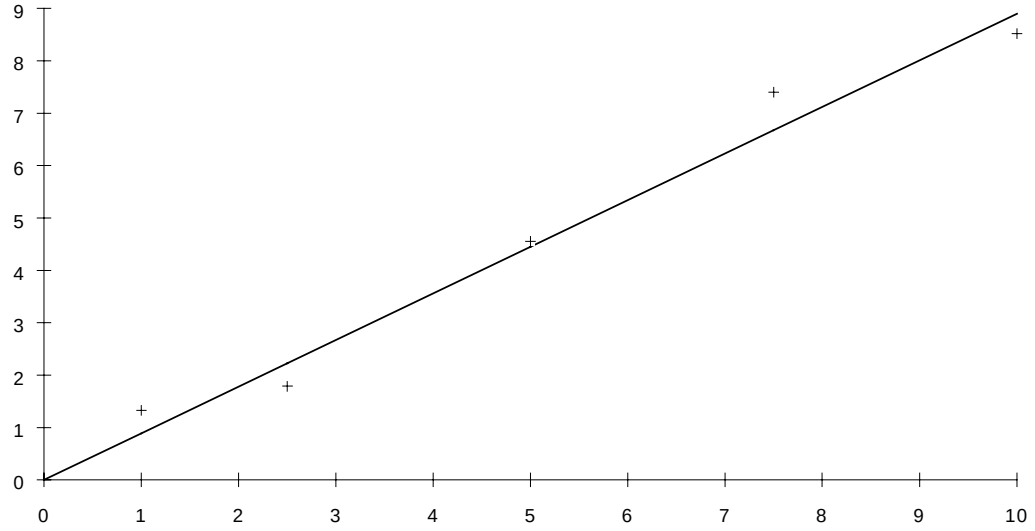
20.4. Représentation graphique.



20.5. Droite ajustée.

$$y = \frac{x}{1-x} = \frac{1}{1-x} - 1 = 3\,k\,t$$

Nous ajustons donc une droite passant par l'origine.



Pour t = 10 mn, le point de la droite a pour ordonnée 0,89. On a donc 3 k = 0,89 ; k = 0,297.

$$\frac{\Delta k}{k} \leq \frac{\Delta Y}{Y} + \frac{\Delta t}{t} \leq \frac{2\times10^{-3}}{x\,(1-x)} + 0{,}1 < 0{,}122 \Rightarrow \Delta k < 0{,}04.$$

$$\boxed{k = 0{,}30 \pm 0{,}04\ \text{mn}^{-1}}$$

EXERCICE 21.

Résoudre le système d'équations différentielles, où x et y sont deux fonctions de t :

21.1. $x' - x + y' - 2t + 1 = 0$
$x' + x + 2y' - t = 0$

21.2. $x' - x + y' = 2t - 1$
$2x' + x + 2y' = t$

SOLUTION.

21.1. Premier système d'équations.

$x' - x + y' - 2t + 1 = 0$
$x' + x + 2y' - t = 0$

Le système s'écrit :

$x' + y' = x + 2t - 1$
$x' + 2y' = -x + t$

Comme les seconds membres ne contiennent que x et t, nous allons éliminer y' pour avoir l'équation différentielle de x.

On multiplie la première équation par 2, la deuxième par −1 et on additionne :

$$x' = 3x + 3t - 2$$

$$\boxed{x' - 3x = 3t - 2}$$

SG ESSM : $x = c\,e^{3t}$

SP EASM : $x = at + b$; $x' = a$; $x' - 3x = a - 3at - 3b = 3t - 2$

$$-3a = 3 \Rightarrow a = -1$$

$$a - 3b = -2 \Rightarrow a + 2 = 3b = 1 \Rightarrow b = \frac{1}{3} \; ; \; x = \frac{1}{3} - t$$

SG EASM :

$$x = c\,e^{3t} + \frac{1}{3} - t$$

Si l'on note x_0 la valeur de x pour $t = 0$, il vient :

$$x_0 = c + \frac{1}{3}$$

$$c = x_0 - \frac{1}{3}$$

$$\boxed{x = x_0\,e^{3t} + \frac{1}{3}(1 - e^{3t}) - t}$$

La fonction y est donnée par l'une des deux équations :

$$x' + y' = x + 2t - 1$$

$$y' = -x' + x + 2t - 1 = -3x_0\,e^{3t} + e^{3t} + 1 + x_0\,e^{3t} + \frac{1}{3}(1 - e^{3t}) - t + 2t - 1$$

$$\boxed{y' = -2x_0\,e^{3t} + \frac{2}{3}\,e^{3t} + t + \frac{1}{3}}$$

$$y = -\frac{2}{3}x_0\,e^{3t} + \frac{2}{9}\,e^{3t} + \frac{t^2}{2} + \frac{t}{3} + \textit{constante}$$

Pour $t = 0$, y prend la valeur y_0 :

$$y_0 = -\frac{2}{3}\,x_0 + \frac{2}{9} + constante$$

$$constante = y_0 + \frac{2}{3}\,x_0 - \frac{2}{9}$$

$$\boxed{y = y_0 + \left(\frac{2}{3}\,x_0 - \frac{2}{9} \right)(1 - e^{3\,t}) + \frac{t^2}{2} + \frac{t}{3}}$$

21.2. Deuxième système d'équations.

$$x' - x + y' = 2\,t - 1$$
$$2\,x' + x + 2\,y' = t$$

Le système s'écrit :

$$x' + y' = x + 2\,t - 1$$
$$2\,x' + 2\,y' = -x + t$$

Multiplions la première équation par 2, la deuxième par – 1 et additionnons :

$$0 = 3\,x + 3\,t - 2$$

$$\boxed{x = \frac{2}{3} - t}$$

$$x' = -1$$

$$y' = -x' + x + 2\,t - 1 = 1 + \frac{2}{3} - t + 2\,t - 1 = \frac{2}{3} + t$$

$$\boxed{y = \frac{2}{3}\,t + \frac{t^2}{2} + c}$$

où c est une constante arbitraire.

EXERCICE 22.

Une molécule A se décompose en une molécule B instable qui se décompose à son tour pour donner une molécule C ($A \rightarrow B \rightarrow C$). En désignant respectivement par N_A , N_B , N_C , le nombre de moles de A, B, C, au temps t et sachant que les vitesses de chacune des deux réactions sont données par :

$$\frac{dN_A}{dt} = -k_A\ N_A \text{ et} \qquad \frac{dN_C}{dt} = k_B\ N_B$$

où k_A et k_B sont des constantes.

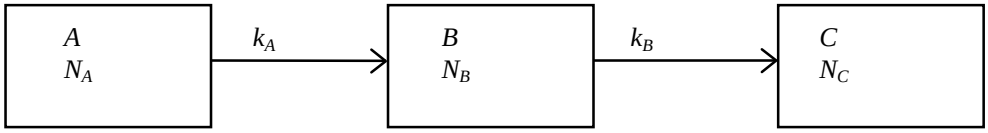
22.1. Ecrire l'équation différentielle de N_B . Préciser sa nature.

22.2. Résoudre l'équation différentielle de N_B sachant que, pour $t = 0$, on a $N_B = 0$ et $N_A = 1$.

SOLUTION.

22.1. Equation différentielle.

Le système peut être représenté par un sytème à trois compartiments :



Les équations différentielles du système sont :

$dN_A = -k_A\ N_A\ dt$

$dN_B = k_A\ N_A\ dt - k_B\ N_B\ dt$

$dN_C = k_B\ N_B\ dt$

La première équation s'écrit :

$$\frac{dN_A}{N_A} = -k_A\ dt$$

Elle a pour solution :

$$N_A = N_{A_0}\ e^{-k_A t}$$

L'équation différentielle du deuxième compartiment s'écrit alors :

$$\frac{dN_B}{dt} + k_B\ N_B = k_A\ N_{A_0}\ e^{-k_A t}$$

C'est une équation différentielle du premier ordre, linéaire, à coefficients constants, avec second membre.

22.2. Résolution de l'équation différentielle.

SG ESSM : $N_B = A\, e^{-k_B t}$

SP EASM : $N_B = a\, e^{-k_A t}$

$$\frac{dN_B}{dt} = -k_A\, a\, e^{-k_A t}$$

$$\frac{dN_B}{dt} + k_B\, N_B = -k_A\, a\, e^{-k_A t} + a\, k_B\, e^{-k_A t} = k_A\, N_{A_0}\, e^{-k_A t}$$

$$a\,(k_B - k_A) = N_{A_0}$$

$$N_B = \frac{N_{A_0}}{k_B - k_A}\, e^{-k_A t}$$

SG EASM :

$$N_B = A\, e^{-k_B t} + \frac{N_{A_0}}{k_B - k_A}\, e^{-k_A t}$$

Pour $t = 0$, on doit avoir $N_B = N_{B_0}$:

$$N_{B_0} = A + \frac{N_{A_0}}{k_B - k_A}$$

$$N_B = N_{B_0}\, e^{-k_B t} + \frac{N_{A_0}}{k_B - k_A}\,(e^{-k_A t} - e^{-k_B t})$$

Avec $N_{A_0} = 1$ et $N_{B_0} = 0$, il reste :

$$\boxed{N_B = \frac{e^{-k_A t} - e^{-k_B t}}{k_B - k_A}}$$

EXERCICE 23.

Résoudre l'équation différentielle : $y'' + 2\,y' + m\,y = 0$. Discuter suivant les valeurs de m.

SOLUTION.

S'agissant d'une équation différentielle linéaire du 2e ordre, sans second membre, les solutions forment un espace vectoriel de dimension 2 et il suffit d'avoir deux solutions linéairement indépendantes pour avoir la solution générale par combinaison linéaire.
La recherche de solutions exponentielles $e^{r\,x}$ conduit à la résolution de l'équation caractéristique :

$$r^2 + 2\,r + m = 0$$
$$(r+1)^2 = 1 - m.$$

Plusieurs cas sont donc à envisager suivant la valeur du paramètre m.

1er cas : $m < 1$

Dans ce cas, $1 - m$ est strictement plus grand que 0, les solutions de l'équation caractéristique sont données par :

$$r = -1 \pm \sqrt{1-m}$$

Il y a deux solutions exponentielles

$$y_1 = e^{-(1-\sqrt{1-m})\,t}$$
$$y_2 = e^{-(1+\sqrt{1-m})\,t}$$

Ces solutions sont linéairement indépendantes car leur wronskien $\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1\,y_2' - y_1'\,y_2$ n'est pas nul.

En effet :

$$y_1' = -(1-\sqrt{1-m})\,e^{-(1-\sqrt{1-m})\,t}$$
$$y_2' = -(1+\sqrt{1-m})\,e^{-(1+\sqrt{1-m})\,t}$$
$$y_1\,y_2' - y_1'\,y_2 = -(1+\sqrt{1-m})\,e^{-(1+\sqrt{1-m})\,t}\,e^{-(1-\sqrt{1-m})\,t} + (1-\sqrt{1-m})\,e^{-(1-\sqrt{1-m})\,t}\,e^{-(1+\sqrt{1-m})\,t}$$
$$y_1\,y_2' - y_1'\,y_2 = -2\sqrt{1-m}\;e^{-2t} \neq 0$$

Toute combinaison linéaire de ces deux solutions exponentielles est encore une solution. C'est le cas des fonctions :

$$e^{-t}\,ch\,(\sqrt{1-m}\;t) = \frac{y_1 + y_2}{2}$$
$$e^{-t}\,sh\,(\sqrt{1-m}\;t) = \frac{y_1 - y_2}{2}$$

Comme le déterminant des coefficients : $\frac{1}{4}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}$ n'est pas nul, le wronskien de ces deux nouvelles solutions, égal à $-\frac{1}{2} \times (-2\sqrt{1-m}\;e^{-2t}) = \sqrt{1-m}\;e^{-2t}$, n'est pas nul. Ces deux solutions forment encore une base de l'epace vectoriel des solutions et la solution générale peut être écrite :

$$\boxed{y = (A\,ch\,(\sqrt{1-m}\;t) + B\,sh\,(\sqrt{1-m}\;t))\,e^{-t}}$$

2e cas : $m > 1$

Dans ce cas, $1 - m$ est strictement négatif, l'équation caractéristique a deux racines complexes distinctes :

$$r = -1 \pm i\sqrt{m-1}$$

L'équation différentielle a deux solutions exponentielles :

$$y_1 = e^{-(1-i\sqrt{m-1})\,t}$$

$$y_2 = e^{-(1+i\sqrt{m-1})\,t}$$

Les dérivées de ces fonctions sont :

$$y_1' = -(1 - i\sqrt{m-1})\, e^{-(1-i\sqrt{m-1})\,t}$$

$$y_2' = -(1 + i\sqrt{m-1})\, e^{-(1+i\sqrt{m-1})\,t}$$

Toute combinaison linéaire de ces solutions est encore une solution, notamment les fonctions :

$$e^{-t} \cos(\sqrt{m-1}\; t) = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

$$e^{-t} \sin(\sqrt{m-1}\; t) = \frac{y_1 - y_2}{2i}$$

Le wronskien de ces deux solutions est :

$$\frac{1}{4i}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \frac{y_1 y_2' - y_1' y_2}{-2i} = -\frac{1}{2i} \times (-2\, i\sqrt{m-1}\;) \times e^{-2t} = \sqrt{m-1}\; e^{-2t} \neq 0.$$

Comme le Wronskien est différent de 0, les deux solutions sont linéairement indépendantes et la solution générale de l'équation peut s'écrire :

$$\boxed{y = (A \cos(\sqrt{m-1}\; t) + B \sin(\sqrt{m-1}\; t)) \times e^{-t}}$$

3e cas : $m = 1$

Dans ce cas, l'équation caractéristique possède une seule racine : $r = -1$. L'équation différentielle a une seule solution exponentielle : $y_1 = e^{-t}$.

Cherchons une fonction z de la variable t telle que la fonction $y_2 = z\, e^{-t}$ soit encore une solution de l'équation.

$$\frac{dy_2}{dt} = (z' - z)\, e^{-t} ; \frac{d^2 y_2}{dt^2} = (z'' - 2z' + z)\, e^{-t} ;$$

$$\frac{d^2 y_2}{dt^2} + 2\frac{dy_2}{dt} + y_2 = (z'' - 2z' + z)\, e^{-t} + 2(z' - z)\, e^{-t} + z\, e^{-t} = 0$$

$$z'' = 0$$

z est donc un polynôme quelconque de degré 1. On peut prendre, par exemple la solution $y_2 = t\, e^{-t}$

La solution générale s'écrit alors :

$$\boxed{y = (A\, t + B)\, e^{-t}}$$

EXERCICE 24.

Résoudre les équations différentielles :

24.1. $y'' + 2\,y' + 4\,y = 0$
24.2. $y'' + 2\,y' - 15\,y = 0$
24.3. $y'' + 6\,y' + 9\,y = 0$
24.4. $y'' - 3\,y' + 2\,y = 0$
24.5. $y'' - 4\,y' + 13\,y = 0$
24.6. $y'' - 3\,y' + 2\,y = x^3$
24.7. $y'' - 4\,y' + 3\,y = 6\,x + 1.$
24.8. $y'' + y' - 6\,y = 2\,e^{3x}$
24.9. $y'' - 2\,y' = e^x \ sin\ x$
24.10. $y'' - 2\,y' + 3\,y = sin\ x$
24.11. $y'' + 4\,y = sin\ 3x$
24.12. $y'' + y = \frac{1}{4}\ cos\ 3x.$
24.13. $y'' + 2\,y' + y = 0$

SOLUTION.

Toutes les équations proposées sont des équations différentielles du deuxième ordre, linéaires, à coefficients constants. Certaines ont un deuxième membre, d'autre pas. La solution générale d'une telle équation sans second membre s'obtient par combinaison linéaire de deux solutions linéairement indépendantes, c'est-à-dire deux solutions y_1 et y_2 vérifiant :

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \neq 0.$$

24.1. $y'' + 2\,y' + 4\,y = 0.$

Equation caractéristique : $r^2 + 2\,r + 4 = 0$

$$(r + 1)^2 + 3 = 0$$
$$r = -1 \pm i\,\sqrt{3}$$

SG ESSM :

$$y = (A\ cos\ \sqrt{3}x\ + B\ sin\ \sqrt{3}x\ )\ e^{-x}$$

24.2. $y'' + 2\,y' - 15\,y = 0.$

Equation caractéristique : $r^2 + 2\,r - 15 = 0$

$$(r + 1)^2 - 16 = 0$$
$$r = -1 \pm 4$$

SG ESSM :

$$y = A\,e^{-5x} + B\,e^{3x}$$

24.3. $y'' + 6\,y' + 9\,y = 0.$

Equation caractéristique : $r^2 + 6\,r + 9 = 0$

$$(r + 3)^2 = 0$$
$$r = -3$$

Il y a une seule solution exponentielle. On sait qu'alors la fonction $x\,e^{-3x}$ est aussi solution.

SG ESSM :

$$y = (A\,x + B)\,e^{-3\,x}$$

24.4. $y'' - 3\,y' + 2\,y = 0.$

Equation caractéristique : $r^2 - 3\,r + 2 = 0$

$$(r - 2)(r - 1) = 0$$
$$r = 1 \text{ ou } r = 2$$

SG ESSM :

$$y = A\,e^{x} + B\,e^{2\,x}$$

24.5. $y'' - 4\,y' + 13\,y = 0.$

Equation caractéristique : $r^2 - 4\,r + 13 = 0$

$$(r - 2)^2 + 9 = 0$$
$$r = 2 \pm 3\,i$$

SG ESSM :

$$y = (A\,cos\,3\,x + B\,sin\,3\,x)\,e^{2\,x}$$

24.6. $y'' - 3\,y' + 2\,y = x^3.$

Equation caractéristique : $r^2 - 3\,r + 2 = 0$

$$(r - 2)(r - 1) = 0$$
$$r = 1 \text{ ou } r = 2$$

SG ESSM :

$$y = A\,e^{x} + B\,e^{2\,x}$$

SP EASM :

Comme le 2e membre est un polynôme du 3e degré, on peut chercher une solution particulière polynôme du 3e degré :

$y = a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d$

$y' = 3\,a\,x^2 + 2\,b\,x + c$

$y'' = 6\,a\,x + 2\,b$

$y'' - 3\,y' + 2\,y = 6\,a\,x + 2\,b - 3(3\,a\,x^2 + 2\,b\,x + c) + 2\,(a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d)$

$= 2\,a\,x^3 + (2\,b - 9\,a)\,x^2 + 2\,(c - 3\,b + 3\,a)\,x + 2\,d - 3\,c + 2\,b$

Ce polynôme ne peut être solution que si l'on a :

$2\,a = 1$, d'où $a = \frac{1}{2}$

$2\,b = 9\,a$, d'où $b = \frac{9}{4}$

$c = 3\,(b - a)$, d'où $c = \frac{21}{4}$

$2\,d = 3\,c - 2\,b$, d'où $d = \frac{45}{8}$

$$y = \frac{1}{8}\,(4\,x^3 + 18\,x^2 + 42\,x + 45)$$

SG EASM :

$$y = A\,e^{x} + B\,e^{2\,x} + \frac{1}{8}\,(4\,x^3 + 18\,x^2 + 42\,x + 45)$$

24.7. $y'' - 4\,y' + 3\,y = 6\,x + 1.$

Equation caractéristique : $r^2 - 4\,r + 3 = 0$

$$(r-3)(r-1) = 0$$
$$r = 3 \text{ ou } r = 1$$

SG ESSM : $y = A\,e^{x} + B\,e^{3\,x}$

SP EASM : $y = a\,x + b$; $y' = a$; $y'' = 0$; $y'' - 4\,y' + 3\,y\,) = 3\,a\,x + 3\,b - 4\,a = 6\,x + 1$; $a = 2$; $b = 3$; $y = 2x+3$.

SG EASM :

$$\boxed{y = A\,e^{x} + B\,e^{3\,x} + 2\,x + 3}$$

24.8. $y'' + y' - 6\,y = 2\,e^{3\,x}$.

Equation caractéristique : $r^2 + r - 6 = 0$

$$(r+3)(r-2) = 0$$
$$r = -3 \text{ ou } r = 2$$

SG ESSM : $y = A\,e^{-3\,x} + B\,e^{2\,x}$

SP EASM : $y = a\,e^{3\,x}$; $y' = 3\,a\,e^{3\,x}$; $y'' = 9\,a\,e^{3\,x}$; $y'' + y' - 6\,y = 6\,a\,e^{3\,x} = 2\,e^{3\,x}$; $a = \frac{1}{3}$; $y = \frac{1}{3}\,e^{3\,x}$.

SG EASM :

$$\boxed{y = A\,e^{-3\,x} + B\,e^{2\,x} + \frac{1}{3}\,e^{3\,x}.}$$

24.9. $y'' - 2\,y' = e^{x}\ \sin x$.

Equation caractéristique : $r^2 - 2\,r = 0$

$$r\,(r-2) = 0$$
$$r = 0 \text{ ou } r = 2$$

SG ESSM : $y = A + B\,e^{2\,x}$

SP EASM : $y = (a\,\cos x + b\,\sin x)\,e^{x}$;

$$y' = (-a\,\sin x + b\,\cos x + a\,\cos x + b\,\sin x)\,e^{x} = ((a+b)\,\cos x + (b-a)\,\sin x)\,e^{x}$$
$$y'' = (2\,b\,\cos x - 2\,a\,\sin x)\,e^{x}$$
$$y'' - 2\,y' = ((2\,b - 2\,(a+b))\,\cos x - (2\,a + 2\,(b-a))\,\sin x)\,e^{x} = -2\,(a\,\cos x + b\,\sin x)\,e^{x} = e^{x}\,\sin x\ ;$$
$$a = 0\ ;\ b = -\frac{1}{2}\ ;\ y = -\frac{1}{2}\,e^{x}\,\sin x.$$

SG EASM :

$$\boxed{y = A + B\,e^{2\,x} - \frac{1}{2}\,e^{x}\,\sin x.}$$

24.10. $y'' - 2\,y' + 3\,y = \sin x$.

Equation caractéristique : $r^2 - 2\,r + 3 = 0$

$$(r-1)^2 + 2 = 0$$
$$r = 1 \pm i\,\sqrt{2}$$

SG ESSM : $y = (A\,\cos\sqrt{2}\,x + B\,\sin\sqrt{2}\,x)\,e^{x}$

SP EASM : $y = a\,\cos x + b\,\sin x$; $y' = -a\,\sin x + b\,\cos x$; $y'' = -a\,\cos x - b\,\sin x$;

$$y'' - 2\,y' + 3\,y = (-a - 2\,b + 3\,a)\,\cos x + (-b + 2\,a + 3\,b)\,\sin x = \sin x$$
$$2\,(a-b) = 0 \Rightarrow a = b$$
$$2\,(a+b) = 1 \Rightarrow a = b = \frac{1}{4}$$
$$y = \frac{1}{4}\,(\cos x + \sin x)$$

SG EASM :

$$\boxed{y = (A \cos \sqrt{2}\, x + B \sin \sqrt{2}\, x)\, e^{x} + \frac{1}{4}\,(\cos x + \sin x)}$$

24.11. $y'' + 4\,y = \sin 3x$.

Equation caractéristique : $r^2 + 4 = 0$

$$r = \pm 2\, i$$

SG ESSM : $y = A \cos 2\, x + B \sin 2\, x$

SP EASM : $y = a \cos 3\, x + b \sin 3\, x$; $y' = -3\, a \sin 3\, x + 3\, b \cos 3\, x$; $y'' = -9\, a \cos 3\, x - 9\, b \sin 3\, x$;

$$y'' + 4\, y = -5\, a \cos 3\, x - 5\, b \sin 3\, x = \sin 3\, x$$

$$a = 0\ ;\ b = -\frac{1}{5}\ ;\ y = -\frac{1}{5} \sin 3\, x$$

SG EASM :

$$\boxed{y = A \cos 2\, x + B \sin 2\, x - \frac{1}{5} \sin 3\, x}$$

24.12. $y'' + y = \frac{1}{4} \cos 3x$.

Equation caractéristique : $r^2 + 1 = 0$.

$$r = \pm\, i$$

SG ESSM : $y = A \cos x + B \sin x$

SP EASM : $y = a \cos 3\, x$; $y' = -3\, a \sin 3\, x$; $y'' = -9\, a \cos 3\, x$; $y'' + y = -8\, a \cos 3\, x = \frac{1}{4} \cos 3\, x$; $a = -\frac{1}{32}$

$$y = -\frac{1}{32} \cos 3\, x$$

SG EASM :

$$\boxed{y = A \cos x + B \sin x - \frac{1}{32} \cos 3\, x}$$

24.13. $y'' + 2\,y' + y = 0$.

Equation caractéristique : $r^2 + 2\, r + 1 = 0$; $(r + 1)^2 = 0$; $r = -1$.

SG ESSM :

$$\boxed{y = (A\, x + B)\, e^{-x}}$$

EXERCICE 25.

Résoudre les équations différentielles :

25.1. $\frac{d^2y}{dx^2} \times \frac{d^2x}{dy^2} = 1$

25.2. $y'' = x\, y'^2$

SOLUTION.

25.1. $\frac{d^2y}{dx^2} \times \frac{d^2x}{dy^2} = 1.$

Posons $u = y' = \frac{dy}{dx}$. On a :

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{u} ;$$

$$\frac{d^2x}{dy^2} = \frac{d}{dy}\left(\frac{1}{u} \right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{u} \right) \times \frac{dx}{dy} = -\frac{u'}{u^2} \times \frac{1}{u} = -\frac{u'}{u^3} ;$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = u'.$$

L'équation s'écrit : $-\frac{u'^2}{u^3} = 1.$

Cette relation montre que u est négatif, et que l'on a : $u' = \pm(-u)^{3/2} = \varepsilon\,(-u)^{3/2}$ avec $\varepsilon = \pm 1$. Posons $-u = v$.

L'équation devient : $-\varepsilon \frac{dv}{v^{\frac{3}{2}}} = dx$

$$\frac{2\varepsilon}{\sqrt{v}} = x + a$$

$$v = \frac{4}{(x+a)^2} = -y'$$

$$y = \frac{4}{x+a} + \text{constante}$$

$$\boxed{(x + a)(y + b) = 4}$$

25.2. $y'' = x\,y'^2$.

$$\frac{y''}{y'^2} = x$$

$$-\frac{1}{y'} = \frac{x^2}{2} + \text{constante}$$

$$y' = -\frac{2}{x^2 + a}$$

1er cas : $a > 0$.

$$\boxed{y = -\frac{2}{a}\,Atan\,\frac{x}{\sqrt{a}} + b}$$

où a et b sont des constantes arbitraires, $a > 0$.

2e cas : $a < 0$.

Dans ce cas, on décompose la fraction rationnelle $-\frac{2}{x^2 + a}$ en éléments simples :

$$-\frac{2}{x^2 + a} = \frac{\alpha}{x - \sqrt{-a}} + \frac{\beta}{x + \sqrt{-a}}$$

Pour calculer α, on multiplie par $x - \sqrt{-a}$ et on fait $x = \sqrt{-a}$; d'où $\alpha = -\frac{1}{\sqrt{-a}}$.

Pour calculer β, on multiplie par $x + \sqrt{-a}$ et on fait $x = -\sqrt{-a}$; d'où $\beta = \frac{1}{\sqrt{-a}}$.

$$-\frac{2}{x^2 + a} = \frac{1}{\sqrt{-a}}\left(\frac{1}{x + \sqrt{-a}} - \frac{1}{x - \sqrt{-a}}\right)$$

$$\boxed{y = \frac{1}{\sqrt{-a}}\,ln\left|\frac{x + \sqrt{-a}}{x - \sqrt{-a}}\right| + b}$$

où a et b sont des constantes arbitraires, $a < 0$.

3e cas : $a = 0$.

$$y = \frac{2}{x} - b$$

$$\boxed{x\,(y + b) = 2}$$

où b est une constante arbitraire.

EXERCICE 26.

Résoudre le système d'équations différentielles, où x et y sont deux fonctions de t.

26.1. $x' + 2x + 3y = 0$
$3x + y' + 2y = 2e^{2t}$

26.2. $x' - y' - y = e^{-t}$
$x + y' - y = e^{2t}$

SOLUTION.

26.1. Premier système.

$x' + 2x + 3y = 0$
$3x + y' + 2y = 2e^{2t}$

Dériver la première équation donne :

$$x'' + 2x' + 3y' = 0$$

Multiplier la deuxième équation par 3 donne :

$$9x + 3y' + 6y = 6e^{2t}$$

On remplace $3y$ par $-x' - 2x$, $3y'$ par $-x'' - 2x'$ et on obtient :

$$9x - x'' - 2x' + 2(-x' - 2x) = 6e^{2t}$$

$$\boxed{x'' + 4x' - 5x = -6e^{2t}}$$

Equation caractéristique : $r^2 + 4r - 5 = 0$

$$(r + 5)(r - 1) = 0$$
$$r = -5 \text{ ou } r = 1$$

SG ESSM : $x = Ae^{-5t} + Be^{t}$

SP EASM : $x = ae^{2t}$; $x' = 2ae^{2t}$; $x'' = 4ae^{2t}$; $x'' + 4x' - 5x = 7ae^{2t} = -6e^{2t}$; $a = -\frac{6}{7}$; $x = -\frac{6}{7}e^{2t}$.

SG EASM :

$$\boxed{x = Ae^{-5t} + Be^{t} - \frac{6}{7}e^{2t}.}$$

$$x' = -5Ae^{-5t} + Be^{t} - \frac{12}{7}e^{2t}$$

$$3y = -x' - 2x = 5Ae^{-5t} - Be^{t} + \frac{12}{7}e^{2t} - 2Ae^{-5t} - 2Be^{t} + \frac{12}{7}e^{2t}.$$

$$\boxed{y = Ae^{-5t} - Be^{t} + \frac{8}{7}e^{2t}}$$

Autre méthode :
$x' + 2x + 3y = 0$
$y' + 3x + 2y = 2e^{2t}$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 0 \\ e^{2t} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{Y' + AY = B}$$

avec $Y = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$; $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$; $B = 2\begin{pmatrix} 0 \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

Polynôme caractéristique de A : $P(\lambda) = (2-\lambda)^2 - 9 = (\lambda + 1)(\lambda - 5)$
Diagonalisation de A.
$A + I = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$. Cette matrice est de rang 1, son noyau, sous-espace propre pour la valeur propre – 1, est donc de dimension 1 et le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est une base du sous-espace propre pour la valeur propre – 1.

$A - 5I = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$. Cette matrice est de rang 1, son noyau, sous-espace propre pour la valeur propre 5, est donc de dimension 1 et le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est une base du sous-espace propre pour la valeur propre 5.

La matrice A est diagonalisable puisqu'il existe une base de R^2 formée de vecteurs propres de A et la matrice P qui diagonalise A est $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$; $P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = D$;

$$\boxed{A = P\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}P^{-1}.}$$

L'équation s'écrit :

$$Y' + PDP^{-1}Y = B$$
$$P^{-1}Y' + P^{-1}PDP^{-1}Y = P^{-1}B$$
$$P^{-1}Y' + DP^{-1}Y = P^{-1}B$$

Posons $Z = P^{-1}Y$. L'équation devient :

$$Z' + DZ = P^{-1}B$$
$$Z' + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} Z = P^{-1}B$$

SG ESSM : $Z = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{5t} \end{pmatrix} C$ où C est un vecteur constant arbitraire : $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$.
SP EASM : $Z = EP^{-1}B$, où E est une matrice constante ; $Z' = EP^{-1}B'$, avec $B' = 2B$;
$Z' + DZ = (D + 2I)EP^{-1}B = P^{-1}B$

$$E = (D + 2I)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Z = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ e^{2t} \end{pmatrix}$$

SG EASM : $Z = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{5t} \end{pmatrix} C + \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ e^{2t} \end{pmatrix} = P^{-1}Y$

$$Y = PZ = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{5t} \end{pmatrix} C + \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ e^{2t} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} & e^{5t} \\ -e^{-t} & e^{5t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \frac{2}{7} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ e^{2t} \end{pmatrix}$$

26.2. Deuxième système.

$x' - y' - y = e^{-t}$
$x + y' - y = e^{2t}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$$

On pose : $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$; $Y = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$; $D = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$. On a :

$$A\,Y' + B\,Y = D$$
$$Y' + A^{-1}\,B\,Y = A^{-1}\,D$$

$A^{-1}\,B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. La matrice est triangulaire, elle n'est pas diagonalisable. Il n'y a pas de base propre.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \; ; \; \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$$

SG ESSM : $Y' + A^{-1}\,B\,Y = 0$
$y' + y = 0 \Rightarrow y = c_2\,e^{-t}$
$x' + x = 2\,y = 2\,c_2\,e^{-t}$
$x = c_1\,e^{-t} + a\,t\,e^{-t}$; $x' = -c_1\,e^{-t} + a\,e^{-t} - a\,t\,e^{-t}$; $x' + x = a\,e^{-t} = 2\,c_2\,e^{-t}$; $a = 2\,c_2$; $x = c_1\,e^{-t} + 2\,c_2\,t\,e^{-t}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} & 2te^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

$Y = E\,C$, avec $E' + A^{-1}\,B\,E = 0$

SP EASM : $Y = \begin{pmatrix} e^{-t} & 2te^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{pmatrix} = E\,C$; $E = \begin{pmatrix} e^{-t} & 2te^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$; $Y' = E'\,C + E\,C'$.

$$Y' + A^{-1}\,B\,Y = E'\,C + E\,C' + A^{-1}\,B\,E\,C = (E' + A^{-1}\,B\,E)\,C + E\,C' = E\,C' = A^{-1}\,D$$
$$Dét\,(E) = e^{-2t}$$

$$C' = E^{-1}\,A^{-1}\,B = \frac{1}{Dét\,(E)} \begin{pmatrix} e^{-t} & -2te^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} A^{-1}\,D = \begin{pmatrix} e^{t} & -2te^{t} \\ 0 & e^{t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$$

$$C' = e^{t} \begin{pmatrix} 1+2t & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-t} \\ e^{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2t & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ e^{3t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2t+e^{3t} \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$C = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3t+3t^2+e^{3t} \\ -3t \end{pmatrix}$$

$$Y = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} e^{-t} & 2te^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3t+3t^2+e^{3t} \\ -3t \end{pmatrix} =$$

$$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3\,t\,(1-t)\,e^{-t}+e^{2t} \\ -3te^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t-t^2 & 1/3 \\ -t & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$$

SG EASM :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} & 2te^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3\,t\,(1-t)\,e^{-t}+e^{2t} \\ -3te^{-t} \end{pmatrix}$$

EXERCICE 27.

On considère un condensateur de capacité C initialement chargé sous une tension V_0. Ce condensateur se décharge dans une bobine d'inductance L et de résistance négligeable.

27.1. Donner l'expression de la charge en fonction du temps (on sait que la charge q vérifie l'équation différentielle $\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{LC} = 0$).

27.2. Donner l'expression de l'intensité i du courant en fonction du temps.

27.3. Au bout de combien de temps, la charge du condensateur aura-t-elle diminué de moitié ?

SOLUTION.

27.1. Résolution de l'équation différentielle.

Equation caractéristique : $r^2 + \frac{1}{LC} = 0$

SG ESSM : $q = A \cos \frac{t}{\sqrt{LC}} + B \sin \frac{t}{\sqrt{LC}}$

Pour $t = 0$, les conditions initiales sont : $q\,(0) = C\,V_0$; $i\,(0) = 0$. On en déduit la valeur des constantes d'intégration A et B.

$$q\,(0) = A = C\,V_0$$

$$i\,(0) = \left(\frac{dq}{dt}\right)_{t=0} = \frac{B}{\sqrt{LC}} = 0$$

$$\boxed{q = C\,V_0 \cos \frac{t}{\sqrt{LC}}}$$

27.2. Courant.

$$\boxed{i = \frac{dq}{dt} = -\,V_0 \sqrt{\frac{C}{L}} \sin \frac{t}{\sqrt{LC}}}$$

27.3. Décharge de moitié.

$$\cos \frac{t}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{t}{\sqrt{LC}} = \frac{\pi}{3}$$

$$\boxed{t = \frac{\pi}{3} \sqrt{LC}}$$

EXERCICE 28.

On pose à la surface d'un liquide, au repos, une bille de masse m supposée ponctuelle. Sachant que la résistance au mouvement, due au fluide, est proportionnelle à la vitesse, étudier le mouvement de la bille. En notant O le point de départ de la bille et $\overrightarrow{Ox}$ la verticale descendante, on vérifiera que si x est l'abscisse de la bille sur l'axe $\overrightarrow{Ox}$, on a l'équation différentielle :

$$m\,g - k\,\frac{dx}{dt} = m\,\frac{d^2x}{dt^2}.$$

On résoudra cette équation différentielle du 2e ordre. On s'intéressera au mouvement de la bille lorsque t augmente indéfiniment.

SOLUTION.

28.1. Equation du mouvement.

Le principe fondamental de la dynamique donne l'égalité $\vec{F} = m\,\vec{\gamma}$. La résultante $\vec{F}$ des forces extérieures appliquée au centre de gravité a pour composante sur l'axe $\overrightarrow{Ox}$ la somme du poids $m\,g$ et de la force de résistance au mouvement (amortissement) $-k\,v = -k\,\frac{dx}{dt}$. L'accélération $\vec{\gamma}$ a pour composante sur l'axe $\overrightarrow{Ox}$ la dérivée seconde de x, $\frac{d^2x}{dt^2}$. La projection de l'égalité $\vec{F} = m\,\vec{\gamma}$ sur l'axe $\overrightarrow{Ox}$ donne donc l'équation différentielle du mouvement :

$$m\,g - k\,\frac{dx}{dt} = m\,\frac{d^2x}{dt^2}.$$

28.2. Résolution de l'équation différentielle.

L'équation différentielle $m\,\frac{d^2x}{dt^2} + k\,\frac{dx}{dt} = m\,g$ est une équation différentielle du deuxième ordre, linéaire, à coefficients constants, avec second membre. Posons $u = \frac{dx}{dt} - \frac{m}{k}\,g$. L'équation devient :

$$m\,u' + k\,u = 0$$

$$\frac{du}{u} = -\frac{k}{m}\,dt$$

$$ln\,|\,u\,| = -\frac{k}{m}\,t + constante$$

$$u = u_0\,e^{-\frac{k}{m}t}$$

$$u_0 = \left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=0} - \frac{m}{k}\,g = -\frac{m}{k}\,g$$

$$u = -\frac{m}{k}\,g\,e^{-\frac{k}{m}t}$$

$$\frac{dx}{dt} - \frac{m}{k}\,g = -\frac{m}{k}\,g\,e^{-\frac{k}{m}t}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{m}{k}\,g\,(1 - e^{-\frac{k}{m}t})$$

$$x = \frac{m}{k}\, g\, t + \left(\frac{m}{k}\right)^2 e^{-\frac{k}{m} t}$$

28.3. Mouvement limite.

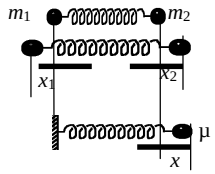
Au bout d'un certain temps, c'est-à-dire lorsque t devient suffisamment grand, le terme exponentiel décroissant de la solution devient négligeable devant le terme en t de sorte que le mouvement est donné par :

$$x = \frac{m}{k}\, g\, t$$

C'est un **mouvement uniforme** de vitesse $\frac{m}{k}\, g$.

EXERCICE 29. OSCILLATEUR HARMONIQUE.

Le mouvement d'une molécule diatomique peut être représenté par le modèle suivant :



Modèle au repos : masses m_1 et m_2 des atomes. Le ressort modèlise la liaison chimique

Modèle en mouvement : $\vec{F_1} = -\vec{F_2}$. La force de rappel est due à l'élasticité de la liaison chimique. Elle est proportionnelle à la distance (Loi de Hooke).

Modèle équivalent : $\vec{F} = \vec{F_2}$ et $\mu = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$

1° Ecrire le principe fondamental de la dynamique pour les particules m_1 , m_2 , μ.

2° En posant $x = x_2 - x_1$, que vaut alors $\dfrac{d^2x}{dt^2}$? L'exprimer en fonction de x ,m_1 ,m_2 . Que peut-on conclure ?

3° Vérifier que la fonction $x = x_0 \sin \omega t$ vérifie le principe fondamental pour la particule μ. Quelle est la valeur de ω ? Quels sont les mouvements des particules 1 et 2 ?

4° Calculer dans ces conditions l'énergie cinétique E_c de la molécule.

5° Calculer l'énergie potentielle E_p de la molécule.

6° Calculer l'énergie totale de vibration :

$$E_{vib} = E_c + E_p$$

Que peut-on en conclure ?

7° Sachant que l'énergie E_{vib} est quantifiée, c'est-à-dire ne peut prendre que des valeurs discrètes et caractéristiques de la molécule, que peut-on en conclure pour le mouvement ?

8° Tracer la courbe représentative des variations de l'énergie en fonction de la distance entre atomes.

9° En fait, la loi de Hooke n'est qu'approchée, l'énergie totale est donnée par la fonction de Morse :

$$E_{vib} = k\,(1 - e^{-\frac{x^2}{2}})$$

Trouver la loi de force correspondante.

10° Tracer sur le graphique du 8° cette fonction de Morse.

N.B. Ce problème sert d'introduction mathématique à l'étude de la spectroscopie infrarouge.

SOLUTION.

29.1. Equation fondamentale de la dynamique.

On oriente l'axe des x de gauche à droite : soient M_1 et M_2 les positions des atomes 1 et 2. On a :

$$\vec{F_1} = k\,\Delta\,\overrightarrow{M_1M_2} \qquad \vec{F_2} = k\,\Delta\,\overrightarrow{M_2M_1} \qquad \vec{F} = \vec{F}_2 = k\,\Delta\,\overrightarrow{M_2M_1}$$

L'équation fondamentale de la dynamique $\vec{F} = m\,\vec{\gamma}$ s'écrit alors :

$$k\,\Delta\,\overrightarrow{M_1M_2} = m_1 \frac{d^2\overrightarrow{M_1}}{dt^2}$$

$$k\,\Delta\,\overrightarrow{M_2M_1} = m_2 \frac{d^2\overrightarrow{M_2}}{dt^2}$$

$$-k\,\Delta\,\overrightarrow{M} = \mu \frac{d^2\overrightarrow{M}}{dt^2}$$

soit :

$$k\,(x_2 - x_1) = m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} \qquad (1)$$

$$k\,(x_1 - x_2) = m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} \qquad (2)$$

$$-k\,x = \mu \frac{d^2 x}{dt^2} \qquad (3)$$

29.2. Equation du modèle équivalent.

Si l'on pose $x = x_2 - x_1$, on a :

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{d^2 (x_2 - x_1)}{dt^2} = \frac{d^2 x_2}{dt^2} - \frac{d^2 x_1}{dt^2} = \frac{k}{m_2}(x_1 - x_2) - \frac{k}{m_1}(x_2 - x_1) = -k\,(x_2 - x_1)\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -k\,(x_2 - x_1)\frac{m_1 + m_2}{m_1\,m_2} = -\frac{k}{\mu}(x_2 - x_1) = -\frac{k}{\mu}x$$

L'équation $\frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{k}{\mu}x$ est l'équation (3). La quantité $(x_2 - x_1)$ suit la même loi que le modèle.

29.3. Solution particulière de l'équation.

Cherchons à quelle condition la fonction $x = x_0 \sin \omega t$ est solution de l'équation $\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k}{\mu}x = 0$, avec $\omega \geq 0$.

$$x = x_0 \sin \omega t \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \omega x_0 \cos \omega t \Rightarrow \frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega^2 x_0 \sin \omega t \Rightarrow \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k}{\mu}x = \left(\frac{k}{\mu} - \omega^2\right) x_0 \sin \omega t$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k}{\mu}x = 0 \ \forall t \Leftrightarrow \frac{k}{\mu} - \omega^2 = 0 \text{ ou } x_0 = 0$$

La fonction $x = x_0 \sin \omega t$ est solution de l'équation $\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k}{\mu}x = 0$

si et seulement si $x_0 = 0$ (solution triviale de repos : $x_1 = x_2$), ou si $\omega = \sqrt{\frac{k(m_1+m_2)}{m_1\,m_2}}$.

Dans le cas où $x = x_2 - x_1 = x_0 \sin \omega t$ est solution de l'équation (3), on a alors :

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = k\,(x_2 - x_1) = k\,x_0 \sin \omega t$$

Par intégration, il vient :

$$m_1 \frac{dx_1}{dt} = -\frac{k}{\omega} x_0 \cos \omega t + \left(m_1 x'_{10} + \frac{k}{\omega} x_0\right)$$

Une nouvelle intégration donne :

$$m_1 x_1 = -\frac{k}{\omega^2} x_0 \sin \omega t + \left(m_1 x'_{10} + \frac{k}{\omega} x_0\right) t + m_1 x_{10}$$

Pour que l'atome 1 reste autour de sa position d'équilibre, il faudra prendre des conditions initiales vérifiant :

$$m_1 x'_{10} + \frac{k}{\omega} x_0 = 0$$

$$m_1 x'_{10} + \omega \mu x_0 = 0$$

De même :

$$m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} = k\,(x_1 - x_2) = -\,k\,x_0 \sin \omega t$$

$$m_2 \frac{dx_2}{dt} = \frac{k}{\omega} x_0 \cos \omega t + \left(m_2 x'_{20} - \frac{k}{\omega} x_0 \right)$$

$$m_2 x_2 = \frac{k}{\omega^2} x_0 \sin \omega t + \left(m_2 x'_{20} - \frac{k}{\omega} x_0 \right) t + m_2 x_{20}$$

et pour que l'atome 2 reste autour de sa position d'équilibre, il faudra prendre des conditions initiales vérifiant :

$$m_2 x'_{20} - \frac{k}{\omega} x_0 = 0$$

$$m_2 x'_{20} - \omega \mu x_0 = 0$$

Les conditions : $m_1 x'_{10} + \omega \mu x_0 = 0$ et $m_2 x'_{20} - \omega \mu x_0 = 0$ donnent :

$$\boxed{-\,m_1 x'_{10} = m_2 x'_{20} = \omega \mu x_0 = \sqrt{\frac{k\, m_1\, m_2}{m_1 + m_2}}\, x_0}$$

et $x_{20} - x_{10} = 0$.

Dans ces conditions, on a :

$$\boxed{x_1 = -\frac{\mu}{m_1} x_0 \sin \omega t + x_{10} \qquad x_2 = \frac{\mu}{m_2} x_0 \sin \omega t + x_{10}}$$

et l'on a : $x_{10} = 0$ si la position moyenne est celle de repos. Les atomes 1 et 2 sont alors animés de mouvements sinusoïdaux en opposition de phase, d'amplitudes inversement proportionnelles aux masses des atomes.

29.4. Energie cinétique de la molécule.

$$E_c = \frac{1}{2} m_1 \left(\frac{dx_1}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(\frac{dx_2}{dt} \right)^2$$

$$E_c = \frac{1}{2} \left(\frac{\mu^2 \omega^2}{m_1} x_0^2 \cos^2 \omega t + \frac{\mu^2 \omega^2}{m_2} x_0^2 \cos^2 \omega t \right)$$

$$E_c = \frac{1}{2} \mu\, \omega^2 x_0^2 \cos^2 \omega t$$

$$\boxed{E_c = \frac{1}{2} k\, x_0^2 \cos^2 \omega t}$$

Cette énergie cinétique est aussi l'énergie cinétique du modèle équivalent.

29.5. Energie potentielle de la molécule.

L'énergie potentielle E_p est définie par :

$$\vec{F} = -\,\overrightarrow{grad}\, E_p = -\frac{dE_p}{dx}\, \vec{i}$$

Or $\vec{F} = -\,k\,x\,\vec{i}$, donc $\frac{dE_p}{dx} = k\,x$, $E_p = \frac{1}{2} k\, x^2$ + constante. Si l'on choisit le zéro de l'énergie potentielle pour un allongement nul de la distance entre les deux atomes ($x = 0$), la constante d'intégration est nulle et il reste :

$$E_p = \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} k x_0^2 \sin^2 \omega t$$

$$\boxed{E_p = \frac{1}{2} k x_0^2 \sin^2 \omega t.}$$

29.6. Energie totale de vibration.

$$E_{vib} = E_c + E_p = \frac{1}{2} k x_0^2 \cos^2 \omega t + \frac{1}{2} k x_0^2 \sin^2 \omega t = \frac{1}{2} k x_0^2$$

$$\boxed{E_{vib} = \frac{1}{2} k x_0^2}$$

L'énergie totale est constante, elle ne dépend que de x_0 , élongation maximale.

29.7. Quantification du mouvement.

Si l'énergie totale du mouvement est quantifiée, il est clair que $x_0 = \sqrt{\frac{2E_{vib}}{k}}$ est quantifié et ne peut prendre que certaines valeurs discrètes.

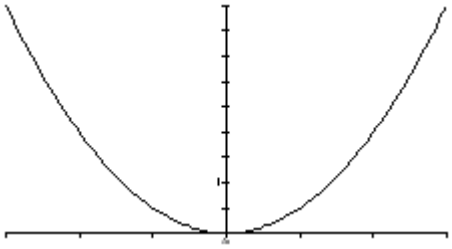
29.8. Variations de l'énergie totale avec la distance.

La distance entre les deux atomes est $d = x_2 + \ell_0 - x_1 = \ell_0 + x$.
On a vu que l'énergie totale de vibration ne dépendait pas de la distance entre les atomes, mais seulement de l'élongation maximum x_0 :

$E_{vib} = \frac{1}{2} k x_0^2$.
Lorsque l'élongation $x = x_2 - x_1$ est maximum, la distance entre les atomes est $d_0 = x_0 + \ell_0$.
On peut étudier les variations de E_{vib} en fonction de d_0 :

$$\boxed{E_{vib} = \frac{1}{2} k (d_0 - \ell_0)^2.}$$

Courbe représentative.



Courbe représentative de la fonction $E_{vib} = \frac{1}{2} k (d_0 - \ell_0)^2$**.**

29.9. Energie potentielle et force selon la loi de Morse.

Si E_{vib} est donnée par la formule : $E_{vib} = k\,(1 - e^{-\frac{{x_0}^2}{2}})$, le terme $\frac{1}{2}\,k\,{x_0}^2$ n'en est que la partie principale du développement limité d'ordre 2. Tout revient alors à changer dans les formules déjà établies, $\frac{{x_0}^2}{2}$ en $(1 - e^{-\frac{{x_0}^2}{2}})$. Ainsi l'énergie potentielle devient :

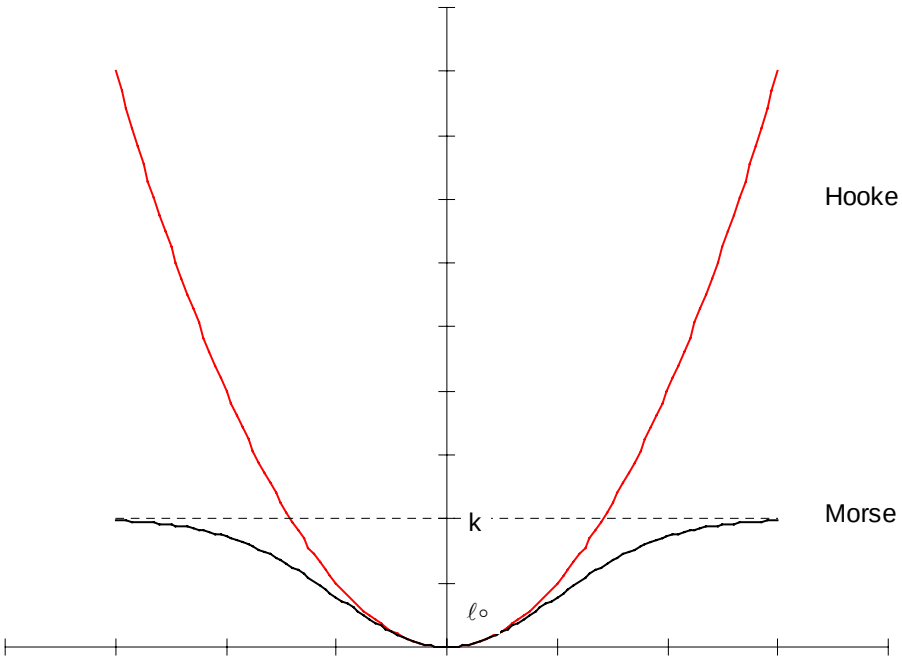
$$E_p = k\,(1 - e^{-\frac{x^2}{2}})$$

et la force $\vec{F}$ est donnée par :

$$\vec{F} = -\overrightarrow{grad}\,E_p = k\,x\,e^{-\frac{x^2}{2}}\,\vec{i}$$

29.10. Energie potentielle de la loi de Morse.

$$E_p = k\,(1 - e^{-\frac{x^2}{2}})$$



Comparaison entre l'énergie potentielle de la loi de Hooke et celle de la la loi de Morse.

Les deux courbes restent très voisines tant que les déplacements des atomes restent petits.

EXERCICE 30.

Le mouvement d'oscillation d'une balance à deux plateaux peut s'écrire, en considérant le principe fondamental de la dynamique relatif aux rotations :

$$\vec{\Gamma} = \frac{d\,\vec{\sigma}}{dt} = I\,\frac{d^2\theta}{dt^2}\,\overrightarrow{u_N}$$

avec : I = moment d'inertie,

$\vec{\sigma}$ = moment cinétique,

θ = angle de rotation du fléau par rapport à la verticale,

$\overrightarrow{u_N}$ = vecteur unitaire perpendiculaire au plan de la figure, orienté comme le vecteur vitesse angulaire $\vec{\omega}$,

$\vec{\Gamma}$ = moment résultant des forces par rapport à l'axe O de rotation du fléau. Ce moment résultant comprend :

– le moment $\vec{\Gamma}_1$ du poids $\vec{F}$ de la balance, appliqué au centre de gravité G :

$$\vec{\Gamma}_1 = -\,|\,\overrightarrow{OG}\,||\,\vec{F}\,|\,sin\,\theta\,\overrightarrow{u_N}$$

$$\vec{\Gamma}_1 \approx -\,|\,\overrightarrow{OG}\,||\,\vec{F}\,|\,\theta\,\overrightarrow{u_N} \text{ si } \theta \text{ est petit.}$$

– Le moment $\vec{\Gamma}_2$ de la force de frottement $\vec{F}'$ qui s'oppose au déplacement et qui est donné par

$$\vec{\Gamma}_2 = -\,k\,\frac{d\theta}{dt}\,\overrightarrow{u_N}\ .$$

Ecrire l'équation différentielle des petits mouvements, la résoudre et discuter selon les valeurs de k.

SOLUTION.

1. Equation différentielle des petits mouvements.

La relation fondamentale de la dynamique donne :

$$\vec{\Gamma}_1 + \vec{\Gamma}_2 = I\,\frac{d^2\theta}{dt^2}\,\overrightarrow{u_N}$$

Pour les petits mouvements, elle se réduit à :

$$-\,|\,\overrightarrow{OG}\,||\,\vec{F}\,|\,\theta\,\overrightarrow{u_N} - k\,\frac{d\theta}{dt}\,\overrightarrow{u_N} = I\,\frac{d^2\theta}{dt^2}\,\overrightarrow{u_N}$$

soit :

$$\boxed{I\,\frac{d^2\theta}{dt^2} + k\,\frac{d\theta}{dt} + |\,\overrightarrow{OG}\,||\,\vec{F}\,|\,\theta = 0} \qquad \textit{(Equation (1))}$$

2. Solution de l'équation différentielle.

L'équation caractéristique associée à l'équation différentielle est :

$$\boxed{I\,r^2 + k\,r + |\,\overrightarrow{OG}\,||\,\vec{F}\,| = 0} \qquad \textit{(Equation (2))}$$

Le discriminant est :

$$\Delta = k^2 - 4\,I\,|\,\overrightarrow{OG}\,||\,\vec{F}\,|$$

1er cas : $k > 2\sqrt{I\,|\overrightarrow{OG}|\,|\vec{F}|}$

Dans ce cas, l'équation (2) a deux racines réelles distinctes :

$$r_1 = \frac{-k + \sqrt{k^2 - 4\,I\,|\overrightarrow{OG}|\,|\vec{F}|}}{2\,I}$$

$$r_2 = \frac{-k - \sqrt{k^2 - 4\,I\,|\overrightarrow{OG}|\,|\vec{F}|}}{2\,I}$$

et la solution générale de l'équation (1) est :

$$\theta = (A\,e^{\frac{\sqrt{k^2-4\,I\,|\overrightarrow{OG}|\,|\vec{F}|}}{2\,I}\,t} + B\,e^{-\frac{\sqrt{k^2-4\,I\,|\overrightarrow{OG}|\,|\vec{F}|}}{2\,I}\,t})\,e^{-\frac{k}{2\,I}\,t}$$

et les constantes d'intégrations A et B se calculent à partir des conditions initiales par :

$$A + B = \theta_0$$

$$A - B = \left(\theta_0' - \frac{k}{2\,I}\,\theta_0 \right) \frac{2\,I}{\sqrt{k^2 - 4\,I\,|\overrightarrow{OG}|\,|\vec{F}|}}$$

2e cas : $k < 2\sqrt{I\,|\overrightarrow{OG}|\,|\vec{F}|}$.

Dans ce cas, l'équation (2) a deux racines complexes distinctes :

$$r_1 = \frac{-k + i\sqrt{4\,I\,|\overrightarrow{OG}|\,|\vec{F}| - k^2}}{2\,I}$$

$$r_2 = \frac{-k - i\sqrt{4\,I\,|\overrightarrow{OG}|\,|\vec{F}| - k^2}}{2\,I}$$

et la solution générale de l'équation (1) est :

$$\theta = A\cos\left(\frac{\sqrt{4\,I\,|\overrightarrow{OG}|\,|\vec{F}| - k^2}}{2\,I}\,t - \varphi \right) e^{-\frac{k}{2\,I}\,t}$$

C'est un mouvement sinusoïdal amorti. En fonction des conditions initiales, on a :

$$A\cos\varphi = \theta_0$$

$$\theta_0' = A\left(\frac{\sqrt{4\,I\,|\overrightarrow{OG}|\,|\vec{F}| - k^2}}{2\,I}\sin\varphi - \frac{k}{2\,I}\cos\varphi \right)$$

3e cas : $k = 2\sqrt{I\,|\overrightarrow{OG}|\,|\vec{F}|}$ (amortissement critique).

Dans ce cas, l'équation (2) a une racine double $r = -\frac{k}{2\,I}$, et la solution générale de l'équation (1) est :

$$\theta = (A + B\,t)\,e^{-\frac{k}{2\,I}\,t}$$

$$A = \theta_0$$

$$B = \theta_0' + \frac{k}{2\,I}\,\theta_0$$

En effet, on peut vérifier que si le discriminant $\Delta = k^2 - 4\,I\,|\,\overrightarrow{OG}\,|\,|\,\vec{F}\,|$ est nul, la fonction $\theta = t\,e^{-\frac{k}{2\,I}\,t}$ est elle-même solution de l'équation (1) :

$$\frac{d\theta}{dt} = \left(1 - \frac{k}{2\,I}\,t \right) e^{-\frac{k}{2\,I}\,t}$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \left(-\frac{k}{I} + \frac{k^2}{4I^2}\, t \right) e^{-\frac{k}{2I}t}$$

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} + k\frac{d\theta}{dt} + |\overrightarrow{OG}||\vec{F}|\theta = \left(-k + \frac{k^2}{4I}\, t + k - \frac{k^2}{2I}\, t + |\overrightarrow{OG}||\vec{F}|\, t \right) e^{-\frac{k}{2I}t}$$

$$= \left(|\overrightarrow{OG}||\vec{F}| - \frac{k^2}{4I} \right) t\, e^{-\frac{k}{2I}t} = 0$$

Les solutions particulières $e^{-\frac{k}{2I}t}$ et $t\, e^{-\frac{k}{2I}t}$ fournissent alors, par combinaison linéaire, la solution générale de l'équation sns second membre (1).

Exercices

Distances.

1. Définition d'une distance.
2. Relation de finesse.

Définition d'une distance.

Etant donné un ensemble E, et une application $d : E \times E \to \mathbb{R}$, on dit que d est une **distance** sur E, et que (E, d) est un **espace métrique**, si, et seulement si, d possède les propriétés suivantes :

D1. $d(x, y) \geqslant 0$ (positivité).
D2. $d(x, y) = d(y, x)$ (symétrie).
D3. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (non dégénérescence).
D4. $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$ (inégalité du triangle).

HAUT

Relation de finesse.

HAUT

Finesse.

Etant donné un ensemble E et deux distances d_1 et d_2 sur E, on dit que la distance d_1 est **plus fine** que la distance d_2, relation notée

$$d_1 \prec d_2,$$

si et seulement si, pour tout x de E, toute boule ouverte de centre x et de rayon r non nul pour la distance d_2, contient une boule ouverte de centre x et de rayon r' non nul pour la distance d_1.

Boule ouverte.

Cette définition fait appel à la notion de **boule ouverte** de centre x et de rayon r : la boule ouverte de centre x et de rayon r est, par définition, l'ensemble $B(x, r)$ des points $y \in E$, dont la distance à x est strictement plus petite que r :

$$B(x, r) = \{y \mid y \in E \text{ et } d(x, y) < r\}.$$

Propriétés de la relation de finesse.

La relation

$$d_1 \prec d_2,$$

est réflexive et transitive :
$d_1 \prec d_1$
$d_1 \prec d_2$ et $d_2 \prec d_3 \Rightarrow d_1 \prec d_3$.
Ce n'est pas une relation d'ordre car elle n'est pas antisymétrique : la relation
$d_1 \prec d_2$ et $d_2 \prec d_1$
n'implique pas $d_1 = d_2$

Equivalence de deux distances.

La relation

$$d_1 \prec d_2 \text{ et } d_2 \prec d_1$$

est une **relation d'équivalence** (réflexive, symétrique et transitive) entre les distances sur E.

On dit que d_1 et d_2 sont des **distances équivalentes** si, et seulement si, elles vérifient cette relation d'équivalence.

HAUT

Chapitre 14. Distances.

Exercices

Exercice 1. Distance définie par une borne inférieure.
Exercice 2. Distance définie par une fonction homographique.
Exercice 3. Distances d'applications continues.
Exercice 4. Distance définie par *Arctan*.

Exercice 1. Distance définie par une borne inférieure.

Soit d une distance sur un ensemble non vide X. Montrer que l'application e de $X \times X$ dans $\mathbb{R}$, définie par

$$e(a, b) = Inf(1, d(a, b))$$

est également une distance sur X.

Solution

HAUT

Exercice 2. Distance définie par une fonction homographique.

a) Soit $f : [\,0\,,+\infty\,[\to \mathbb{R}$, l'application $t \mapsto f(t) = \frac{t}{1+t}$. Montrer que f est croissante sur $[\,0\,,+\infty\,[$.

b) Soit (E,d) un espace métrique, d étant une distance sur l'ensemble E.
Soit $D : E \times E \to \mathbb{R}$, l'application définie par $D(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$.
Montrer que D est une distance sur E.

Solution

HAUT

Exercice 3. Distances d'applications continues.

Soit $E = C([a,b], \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des applications continues de l'intervalle fermé borné $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$, $a < b$. On considère les applications d_∞ et d_1 de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ définies par :

$$d_\infty(f, g) = \sup_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)|$$

$$d_1(f, g) = \int_a^b |f(x) - g(x)| \, dx$$

1°/ Montrez que d_1 et d_∞ sont des distances sur E.

2°/ L'une de ces deux distances est-elle plus fine que l'autre ? Sont-elles équivalentes ?

Solution

HAUT

Exercice 4. Distance définie par *Arctan*.

Soit $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ l'application définie par :

$$d(x, y) = |\, Arctan\,(x) - Arctan\,(y)\,|.$$

Démontrer que d est une distance sur $\mathbb{R}$.

Solution

HAUT

Chapitre 14. Distances.

Enoncés.

Exercice 1. Distance définie par une borne inférieure.

Soit d une distance sur un ensemble non vide X. Montrer que l'application e de $X \times X$ dans $\mathbb{R}$, définie par $$e(a, b) = Inf(1, d(a, b))$$ est également une distance sur X.	

Solution.

Il suffit de vérifier les quatre axiomes des distances.

· $d(a,b) = d(b,a) \Rightarrow Inf(1, d(a,b)) = Inf(1, d(b,a)) \Rightarrow e(a,b) = e(b,a)$.
· $d(a,b) \geqslant 0$ et $1 > 0 \Rightarrow Inf(1, d(a,b)) \geqslant 0 \Rightarrow e(a,b) \geqslant 0$
· $e(a,b) = 0$ et $1 > 0 \Rightarrow d(a,b) = 0 \Rightarrow a = b$.
· Inégalité du triangle.
$e(a,b) = Inf(1, d(a,b)) \leqslant 1$
$e(a,b) = Inf(1, d(a,b)) \leqslant d(a,b) \leqslant d(a,c) + d(c,b)$
$e(a,b) \leqslant Inf(1, d(a,c) + d(c,b))$

Lemme.

$$\boxed{x \geqslant 0 \text{ et } y \geqslant 0 \Rightarrow Inf(1, x + y) \leqslant Inf(1, x) + Inf(1, y)}$$

Démonstration du lemme.

$x \leqslant 1$ et $y \leqslant 1 \Rightarrow Inf(1, x) = x$ et $Inf(1, y) = y \Rightarrow Inf(1, x + y) \leqslant x + y = Inf(1, x) + Inf(1, y)$.
$x \leqslant 1$ et $y > 1 \Rightarrow Inf(1, x) = x$ et $Inf(1, y) = 1 \Rightarrow Inf(1, x + y) = 1 \leqslant x + 1 = Inf(1, x) + Inf(1, y)$.
$x > 1$ et $y > 1 \Rightarrow Inf(1, x) = 1$ et $Inf(1, y) = 1 \Rightarrow Inf(1, x + y) = 1 < 2 = Inf(1, x) + Inf(1, y)$.
Ainsi, dans tous les cas, l'inégalité est vérifiée.

Du lemme résulte l'inégalité :

$$Inf(1, d(a,c) + d(c,b)) \leqslant Inf(1, d(a,c)) + Inf(1, d(c,b))$$

De sorte que l'inégalité :

$$e(a,b) \leqslant Inf(1, d(a,c) + d(c,b))$$

entraîne, par transitivité de la relation d'ordre :

$$e(a,b) \leqslant Inf(1, d(a,c)) + Inf(1, d(c,b)) = e(a,c) + e(c,b)$$

Donc e est une distance.

Chapitre 14. Distances.

Enoncés.

Exercice 2. Distance définie par une fonction homographique.

a) Soit f : [0 , + ∞ [→ ℝ, l'application $t \mapsto f(t) = \frac{t}{1+t}$. Montrer que f est croissante sur [0 , + ∞ [.

b) Soit (E,d) un espace métrique, d étant une distance sur l'ensemble E.
Soit $D : E \times E \to \mathbb{R}$, l'application définie par $D(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$.
Montrer que D est une distance sur E.

Solution.

1°/ Application croissante.

Pour qu'une application dérivable soit croissante, il faut et il suffit que sa dérivée soit positive.
Or, l'application f est dérivable sur [0 , + ∞ [et sa dérivée est $\frac{df}{dt}(t) = \frac{1}{(1+t)^2} > 0$, donc f est strictement croissante sur l'intervalle [0 , + ∞ [.

2°/ Distance *D*.

D1. $d(x, y) \geqslant 0 \Rightarrow 1 + d(x, y) > 0 \Rightarrow \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} = D(x, y) \geqslant 0$.

D2. $D(x, y) = 0 \Leftrightarrow \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} = 0 \Leftrightarrow d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.

D3. $d(x, y) = d(y, x) \Rightarrow \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} = \frac{d(y,x)}{1+d(y,x)} \Rightarrow D(x, y) = D(y, x)$.

D4. **Inégalité du triangle**.

Posons $t = d(x, y)$, $t_1 = d(x, z)$, $t_2 = d(z, y)$. L'inégalité du triangle vérifiée par la distance d s'écrit :

$$t \leqslant t_1 + t_2.$$

Comme, d'après 1°, l'application $t \mapsto \frac{t}{1+t}$ est croissante, la relation $t \leqslant t_1 + t_2$ entraîne la relation

$$\frac{t}{1+t} \leqslant \frac{t_1+t_2}{1+t_1+t_2}$$

c'est-à-dire, par définition de *D* et de *t* :

$$D(x, y) \leqslant \frac{t_1+t_2}{1+t_1+t_2}.$$

Lemme.

$$\boxed{t_1 \geqslant 0 \text{ et } t_2 \geqslant 0 \Rightarrow \frac{t_1+t_2}{1+t_1+t_2} \leqslant \frac{t_1}{1+t_1} + \frac{t_2}{1+t_2}}$$

Démonstration du lemme.

En écrivant :

$$\frac{t_1+t_2}{1+t_1+t_2} = 1 - \frac{1}{1+t_1+t_2} \text{ et } \frac{t_1}{1+t_1} = 1 - \frac{1}{1+t_1},$$

il vient :

$$\frac{t_1}{1+t_1} + \frac{t_2}{1+t_2} - \frac{t_1+t_2}{1+t_1+t_2} = \frac{t_2}{1+t_2} + 1 - \frac{1}{1+t_1} - 1 + \frac{1}{1+t_1+t_2} = \frac{t_2}{1+t_2} - \frac{t_2}{(1+t_1)(1+t_1+t_2)}$$

Or :

$$\begin{aligned} t_1 \geqslant 0 &\Rightarrow 1 + t_1 \geqslant 1 \text{ et } 1 + t_1 + t_2 \geqslant 1 + t_2 \\ &\Rightarrow (1 + t_1)(1 + t_1 + t_2) \geqslant 1 + t_2 \\ &\Rightarrow \frac{1}{(1+t_1)(1+t_1+t_2)} \leqslant \frac{1}{1+t_2} \end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{aligned} t_2 \geqslant 0 &\Rightarrow \frac{t_2}{(1+t_1)(1+t_1+t_2)} \leqslant \frac{t_2}{1+t_2} \\ &\Rightarrow \frac{t_1}{1+t_1} + \frac{t_2}{1+t_2} - \frac{t_1+t_2}{1+t_1+t_2} = \frac{t_2}{1+t_2} - \frac{t_2}{(1+t_1)(1+t_1+t_2)} \geqslant 0 \end{aligned}$$

ce qui démontre le lemme.

Par transitivité, il résulte du lemme et de l'inégalité $D(x, y) \leqslant \frac{t_1+t_2}{1+t_1+t_2}$, l'inégalité :

$$D(x, y) \leqslant \frac{t_1}{1+t_1} + \frac{t_2}{1+t_2} = D(x, z) + D(z, y).$$

C'est l'inégalité du triangle pour l'application *D*, qui est donc ainsi une distance sur *E*.

Remarquons, pour terminer, que, si *E* est un espace vectoriel, l'on a, pour tout $x \in E$, $D(0, x) = \frac{d(0, x)}{1+d(0, x)} < 1$ et cette relation implique que la distance ***D* ne peut pas être définie par une norme**.

Chapitre 14. Distances.

Enoncés.

Exercice 3. Distances d'applications continues.

Soit $E = C([a,b], \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des applications continues de l'intervalle fermé borné $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$, $a < b$. On considère les applications d_∞ et d_1 de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ définies par :

$$d_\infty (f, g) = \sup_{x \in [a,b]} | f(x) - g(x) |$$

$$d_1 (f, g) = \int_a^b | f(x) - g(x) | dx$$

1°/ Montrez que d_1 et d_∞ sont des distances sur E.

2°/ L'une de ces deux distances est-elle plus fine que l'autre ? Sont-elles équivalentes ?

Solution.

1°/ Distances sur *E*.

Les applications continues d'un intervalle fermé borné $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ sont bornées car leur image est un intervalle fermé borné (théorèmes de Weierstrass (l'image d'un compact est un compact) et de Bolzano (l'image d'un intervalle est un intervalle)).

On suppose ici que a est strictement plus petit que b.

a) Distance d_∞.

• $d_\infty (f, g)$, borne supérieure de nombres réels positifs bornés, est toujours un nombre réel positif.

• $d_\infty (f, g)$ est nul si, et seulement si,

$$\sup_{x \in [a,b]} | f(x) - g(x) | = 0$$

ce qui est équivalent au fait que, pour tout x de l'intervalle $[a ; b]$, on a $| f(x) - g(x) | = 0$, donc $f(x) = g(x)$, soit $f = g$.

• $d_\infty (f, g) = \sup_{x \in [a,b]} | f(x) - g(x) | = \sup_{x \in [a,b]} | g(x) - f(x) | = d_\infty (g, F)$

• $\sup_{x \in [a,b]} | f(x) - h(x) | = \sup_{x \in [a,b]} | f(x) - g(x) + g(x) - h(x) |$

$\leqslant \sup_{x \in [a,b]} (| f(x) - g(x) | + | g(x) - h(x) |)$

$\leqslant \sup_{x \in [a,b]} | f(x) - g(x) | + \sup_{x \in [a,b]} | g(x) - h(x) |$

Cette inégalité s'écrit aussi : $d_\infty (f, h) \leqslant d_\infty (f, g) + d_\infty (g, h)$. C'est l'inégalité du triangle pour d_∞.

b) Distance d_1.

• $d_1 (f, g)$, intégrale d'une fonction numérique positive continue est un nombre réel positif.

• $d_1 (f, g) = \int_a^b | f(x) - g(x) | dx = 0 \Leftrightarrow | f(x) - g(x) | = 0, \forall x \Leftrightarrow f = g.$

• $d_1 (f, g) = \int_a^b | f(x) - g(x) | dx = \int_a^b | g(x) - f(x) | dx = d_1 (g, f).$

• $d_1 (f, h) = \int_a^b | f(x) - h(x) | dx = \int_a^b | f(x) - g(x) + g(x) - h(x) | dx$

$\leqslant \int_a^b (| f(x) - g(x) | + | g(x) - h(x) |) dx$

$\leqslant \int_a^b | f(x) - g(x) | dx + \int_a^b | g(x) - h(x) | dx = d_1 (f, g) + d_1 (g, h)$

2°/ Relation de finesse.

On a toujours, quels que soient les éléments f et g de E :

$$d_1 (f, g) = \int_a^b | f(x) - g(x) | dx \leqslant \int_a^b \sup_{x \in [a,b]} | f(x) - g(x) | dx = \sup_{x \in [a,b]} | f(x) - g(x) | \int_a^b dx$$

$$\boxed{d_1 (f, g) \leqslant (b - a)\, d_\infty (f, g)}$$

Cette relation montre que **la distance d_∞ est plus fine que la distance d_1**.

En effet, étant donnée une boule ouverte $B_1 (f, r)$ de centre f et de rayon r non nul, pour la distance d_1, considérons la boule ouverte $B_\infty \left(f, \frac{r}{b-a} \right)$ de centre f et de rayon $\frac{r}{b-a}$, pour la distance d_∞. Si g est un élément de la boule ouverte $B_\infty \left(f, \frac{r}{b-a} \right)$, on a, par définition :

$$d_\infty (f, g) < \frac{r}{b-a}$$

donc, en vertu de la relation établie précédemment :

$$d_1 (f , g) \leqslant (b - a)\, d_\infty (f, g) < r$$

ce qui montre que g appartient à la boule $B_1 (f , r)$.
Ainsi toute boule ouverte de centre f et de rayon non nul, pour la distance d_1, contient une boule ouverte de centre f et de rayon non nul, pour la distance d_∞. C'est exactement dire que la distance d_∞ est plus fine que la distance d_1, par définition de la relation de finesse.

Remarques.

1. Le **théorème de la moyenne** affirme que toute fonction continue f sur un intervalle fermé borné $[a, b]$ atteint sa valeur moyenne en un point c de cet intervalle :

$$\text{il existe un } c \in [a, b] \text{ tel que } f (c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f (x)\, dx.$$

Or si f et g sont des fonctions numériques continues sur l'intervalle $[a, b]$, $| f - g |$ est aussi une fonction numérique continue sur $[a, b]$: le théorème de la moyenne s'applique donc à la fonction $| f - g |$, il existe un $c \in [a, b]$ tel que

$$| f (c) - g (c) | = \frac{1}{b-a}\int_a^b | f (x) - g (x) |\, dx.$$

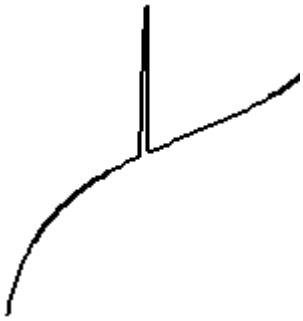
Et comme $| f (c) - g (c) |$ est inférieur à $\sup_{x \in [a,b]} | f (x) - g (x) | = d_\infty (f, g)$, on en déduit :

$$d_1 (f , g) = \int_a^b | f (x) - g (x) |\, dx \leqslant (b - a)\, d_\infty (f, g)$$

relation qu'on a déjà obtenue par un autre moyen et qui montre que la distance d_∞ est plus fine que la distance d_1.

2. **Les distances d_1 et d_∞ ne sont pas équivalentes** parce que, pour toute $f \in E$, on peut toujours trouver une fonction continue g aussi grande qu'on veut en un point, bien que l'intégrale de $| f - g |$ soit bornée, par exemple une fonction qui se rapproche de $f + \sqrt{n}$ sur un intervalle de longueur $\frac{1}{n}$, donc il n'existe pas de constante A telle que l'on ait :

$$d_\infty (f, g) \leqslant A\, d_1 (f, g).$$



Chapitre 14. Distances.

Enoncés.

Exercice 4. Distance définie par *Arctan*.

Soit $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ l'application définie par :

$$d(x, y) = |\, Arctan\,(x) - Arctan\,(y)\,|.$$

Démontrer que d est une distance sur $\mathbb{R}$.

Solution.

Vérifions les quatre axiomes de définition d'une distance :

*D*1 : **positivité**. Pour tout couple (x, y) de nombres réels, $d(x, y)$, égal à la valeur absolue du nombre réel $Arctan\, x - Arctan\, y$, est un nombre réel positif ou nul.

*D*2 : **non dégénérescence**. Pour tout couple (x, y) de nombres réels, la relation $d(x, y) = 0$ équivaut à la relation $Arctan\, x = Arctan\, y$.

En effet, l'application *Arctan* est une bijection de $\mathbb{R}^2$ sur l'intervalle ouvert $\left]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right[$,

donc la relation $Arctan\, x = Arctan\, y$ est équivalente à la relation $x = y$.

*D*3 : **symétrie**. La symétrie de la valeur absolue entraîne $d(y, x) = |\, Arctan\, y - Arctan\, x\,| = |\, Arctan\, x - Arctan\, y\,| = d(x, y)$, pour tout couple (x, y) de nombres réels.

*D*4 : **inégalité du triangle**. L'inégalité du triangle pour la valeur absolue entraîne l'inégalité du triangle pour d :

$$d(x, z) = |\, Arctan\, x - Arctan\, z\,| = |\, (Arctan\, x - Arctan\, y) + (Arctan\, y - Arctan\, z)\,|$$
$$\leqslant |\, Arctan\, x - Arctan\, y\,| + |\, Arctan\, y - Arctan\, z\,|$$

pour tous nombres réels x, y, z.

Les quatre axiomes de définition d'une distance sont vérifiées par l'application d : d est donc une distance sur $\mathbb{R}$.

Exercices

Normes.

1. Définition d'une norme.
2. Produit scalaire euclidien.
3. Normes équivalentes.
4. Continuité.
5. Norme d'une fonction numérique continue.

a) Différentes normes d'une fonction numérique continue.
b) Non équivalence des normes d'une fonction numérique continue.
c) Convergence d'une suite de fonctions numériques continues.

Définition d'une norme.

Etant donnés un espace vectoriel réel E et une application $N : E \to \mathbb{R}$, on dit que N est une **norme** sur E, et que E, muni de cette norme, est un **espace normé réel**, ou espace vectoriel réel normé, si l'application N possède les propriétés suivantes, pour tout x et tout y de E, et pour tout λ de $\mathbb{R}$:

N1 : $N(x) \geqslant 0$.
N2 : $N(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
N3 : $N(x + y) \leqslant N(x) + N(y)$.
N4 : $N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$.

HAUT

Produit scalaire euclidien.

HAUT

Etant donné l'espace vectoriel réel $\mathbb{R}^p$, p entier supérieur ou égal à 2, on appelle **produit scalaire euclidien**, ou produit scalaire standard, la forme bilinéaire symétrique positive non dégénérée $(x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$ définie par :

$$\langle (x_1, x_2, \dots, x_p), (y_1, y_2, \dots, y_p) = \sum_{k=1}^{k=p} x_k y_k.$$

Propriétés.

- $x \mapsto \langle x, y \rangle$ est linéaire
- $y \mapsto \langle x, y \rangle$ est linéaire
- $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$
- $\langle x, x \rangle \geqslant 0$
- $\langle x, x \rangle = 0 \Rightarrow x = 0$

Remarques :

1. Au lieu de "*positive non dégénérée*", on dit aussi, suivant la terminologie ancienne, "*définie positive*".

2. Une "*forme*" est une application à valeurs dans $\mathbb{R}$.

3. Rappelons que toute **forme quadratique positive non dégénérée** Q, définit
— un produit scalaire (forme bilinéaire symétrique positive non dégénérée) ϕ par :
$\phi(x, y) = \frac{1}{2}(Q(x + y) - Q(x) - Q(y))$
— une norme par :
$\| x \| = \sqrt{\phi(x, x)} = \sqrt{Q(x)}$
Un produit scalaire et la norme associée sont liés par l'**inégalité de Schwartz** :
$| \phi(x, y) | \leqslant \| x \| . \| y \|$
La norme définie par le produit scalaire euclidien est appelée la **norme euclidienne**.

4. Rappelons enfin qu'une forme bilinéaire symétrique positive non dégénérée est définie par une **matrice symétrique** à valeurs propres strictement positives dont tous les éléments de la diagonale principale sont strictement positifs. Cette matrice a pour éléments les produits scalaires des vecteurs de base (base quelconque, pas forcément la base canonique).

HAUT

Normes équivalentes.

HAUT

Relation de finesse.

Une norme $\| . \|_1$ est dite **plus fine** qu'une norme $\| . \|_2$, relation notée $\| . \|_1 \prec \| . \|_2$, si, et seulement si, toute boule ouverte non vide pour la norme $\| . \|_2$ contient une boule ouverte non vide de même centre pour la norme $\| . \|_1$.

Il revient au même de dire que la norme $\| . \|_1$ est plus fine que la norme $\| . \|_2$, si, et seulement si, la distance définie par la norme $\| . \|_1$ est plus fine que la distance définie par la norme $\| . \|_2$.

Relation d'équivalence.

Une norme $\| . \|_1$ est dite **équivalente** à une norme $\| . \|_2$, si, et seulement si :

- la norme $\| . \|_1$ est plus fine que la norme $\| . \|_2$
- la norme $\| . \|_2$ est plus fine que la norme $\| . \|_1$

Propriétés.

Si deux normes sont équivalentes,

- toute application continue pour une norme est continue pour l'autre norme ;
- toute suite convergente pour une norme est convergente pour l'autre norme.

Pour tout entier $p \geqslant 1$, toutes les normes de $\mathbb{R}^p$ sont équivalentes.

HAUT

Continuité.

Etant donnés deux espaces normés $(E, \| \, . \, \|_E)$ et $(F, \| \, . \, \|_F)$ et une application $f : E \to F$, on dit que f est **continue en un point** $x \in E$ si, et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $\eta > 0$ tel que l'image par f de la boule ouverte de centre x et de rayon η soit contenue dans la boule ouverte de centre $f(x)$ et de rayon ε :

$$f(B_E(x, \eta)) \subset B_F(f(x), \varepsilon)$$
$$(\forall\, y \in E)\ (\| x - y \|_E < \eta \Rightarrow \| f(x) - f(y) \|_F < \varepsilon)$$

On dit que f est **continue sur E** si, et seulement si, elle est continue en tout point x de E.

Lorsque $E = F$ est égal à $\mathbb{R}$, muni de la norme définie par la valeur absolue, cette notion de continuité coïncide avec celle qu'on a déjà définie pour les fonctions numériques réelles (Chapitre 3, Définitions).

HAUT

Différentes normes d'une fonction numérique continue.

Soit $E = C([0,1],\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des applications continues de l'intervalle fermé $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.
Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on définit une norme sur E en posant :

$$\| f \|_n = \left(\int_0^1 | f(t) |^n \, dt \right)^{\frac{1}{n}}$$

Pour $n = 1$, on obtient une norme appelée la **norme de convergence en moyenne**.
Pour $n = 2$, on obtient une norme appelée la **norme de convergence en moyenne quadratique**.

On définit aussi une norme en posant :

$$\| f \|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} | f(x) |$$

Cette norme est appelée la **norme de convergence uniforme**.

HAUT

Non équivalence des normes d'une fonction continue.

HAUT

Dans l'espace vectoriel $E = C([0, 1], \mathbb{R})$ des fonctions numériques continues de l'intervalle fermé [0, 1] dans $\mathbb{R}$, les normes définies, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, par :

$$\| f \|_n = \left(\int_0^1 | f(t) |^n \, dt \right)^{\frac{1}{n}}$$

ne sont pas équivalentes.
Pour $n \leqslant m$, la norme d'indice m est plus fine que la norme d'indice n :

$$\| \cdot \|_m \prec \| \cdot \|_n,$$

ce qui veut dire que toute boule ouverte pour la norme d'indice n contient une boule ouverte pour la norme d'indice m.
Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, la norme de convergence uniforme est plus fine que la norme d'indice n :

$$\| \cdot \|_\infty \prec \| \cdot \|_n.$$

HAUT

Convergence d'une suite de fonctions continues.

Etant donnée une suite $(f_k)_{k \geq 0}$ d'applications continues de l'intervalle fermé [0, 1] dans $\mathbb{R}$, on dit que cette **suite converge vers une limite *f*** pour la norme $\| \, . \, \|_n$, $n \geqslant 1$, si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $A \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $k \geqslant A$, $\| f_k - f \|_n < \varepsilon$.
Autrement dit, la suite $(f_k)_{k \geq 0}$ converge au sens de la norme $\| \, . \, \|_n$ si toute boule ouverte non vide (pour la norme $\| \, . \, \|_n$), centrée sur *f*, contient tous les f_k à partir d'un certain rang.

Pour $n \leqslant m$, la norme $\| \, . \, \|_m$ est plus fine que la norme $\| \, . \, \|_n$, donc tout suite convergente pour la norme $\| \, . \, \|_m$ est convergente aussi pour la norme $\| \, . \, \|_n$.
Par exemple, toute suite de fonctions continues sur [0, 1] qui converge en moyenne quadratique (n = 2) vers une fonction *f* continue sur [0, 1], converge en moyenne (n = 1) vers *f*.

Toute **suite uniformément convergente (*n* infini)** $(f_k)_{k \geq 0}$ de fonctions numériques continues sur l'intervalle fermé [0, 1], est convergente pour la norme $\| \, . \, \|_n$, quel que soit l'entier naturel $n \geqslant 1$.

HAUT

Chapitre 15. Normes.

Exercices

Exercice 1. Normes de $\mathbb{R}^2$.
Exercice 2. Continuité de la norme.
Exercice 3. Transport d'une norme par application linéaire.
Exercice 4. Différentes normes d'une fonction continue.
Exercice 5. Maximum et minimum d'une fonction continue positive.
Exercice 6. Produit scalaire et base orthonormée.
Exercice 7. Angle de deux vecteurs.

Encore plus d'exercices corrigés sur les produits scalaires et les normes ...

Exercice 1. Normes de $\mathbb{R}^2$.

Dans $\mathbb{R}^2$, on définit, pour tout vecteur $u = (u_1 , u_2)$ les trois "normes" suivantes :

$$\begin{cases} \| u \|_1 = | u_1 | + | u_2 | \\ \| u \|_2 = \sqrt{u_1^2 + u_2^2} \\ \| u \|_\infty = Sup\ (| u_1 | , | u_2 |) \end{cases}$$

1°/ Vérifiez que ce sont bien des normes.
2°/ Démontrez qu'elles sont équivalentes.
3°/ Dessinez dans le plan les trois boules ouvertes de centre O et de rayon 1.
4°/ Déduire de la propriété 2° que si une suite $(u_n)_{n \geq 0}$ converge vers (ℓ_1 , ℓ_2) pour une norme, alors la limite de la suite existe pour les deux autres normes et coïncide avec (ℓ_1 , ℓ_2).

5°/ Peut-on généraliser ce résultat à $\mathbb{R}^p$, pour p entier $\geqslant 1$.

Solution

HAUT

Exercice 2. Continuité de la norme.

Soit $(E, \|.\|)$ un espace normé.
1°/ Montrez que, pour tout $x \in E$ et tout $y \in E$, on a : $|\, \|x\| - \|y\| \,| \leqslant \|x - y\|$
2°/ En déduire que l'application $x \mapsto \|x\|$ est une application continue de $(E, \|.\|)$ dans $\mathbb{R}$.

Solution

HAUT

Exercice 3. Transport d'une norme par application linéaire.

Soit f une application linéaire de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^p$. Pour tout $u \in \mathbb{R}^p$, on pose :

$$N(u) = \| f(u) \|.$$

Donnez une condition nécessaire et suffisante pour que N soit une norme sur $\mathbb{R}^p$.

Solution

HAUT

Exercice 4. Différentes normes d'une fonction continue.

Soit $E = C([0,1],\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des applications continues de l'intervalle fermé $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. On définit trois applications de E dans $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} \|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\,dt \\ \|f\|_2 = \left(\int_0^1 |f(t)|^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}} \\ \|f\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)| \end{cases}$$

1°/ Montrez que les trois applications ainsi définies sont des normes sur E.
2°/ On considère la suite $(P_n)_{n\geq 0}$ de polynômes définie par $P_n = t^n$, pour $n \geqslant 0$.
Etudiez la limite de cette suite pour $\|\,.\,\|_1$ lorsque n augmente indéfiniment.
3°/ Etudiez la limite de la suite $(P_n)_{n\geq 0}$ définie dans 2° pour $\|\,.\,\|_\infty$. Conclusion ?

Solution

HAUT

Exercice 5. Maximum et minimum d'une fonction continue positive.

1°/ Soit f une fonction numérique continue et positive dans l'intervalle fermé [0, 1]. f admet un maximum M atteint en un point $x_0 \in [0, 1]$.Montrer que :

$$M = \lim_{n \to +\infty} \left(\int_0^1 (f(x))^n \, dx \right)^{\frac{1}{n}}$$

2°/ Si f est strictement positive sur [0, 1], f admet un minimum m. Montrer que :

$$m = \lim_{n \to -\infty} \left(\int_0^1 (f(x))^n \, dx \right)^{\frac{1}{n}}$$

Solution

HAUT

Exercice 6. Produit scalaire et base orthonormée.

Dans $\mathbb{R}^3$, muni de la base canonique, on considère l'application $\Phi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, définie, pour $X = (x_1, x_2, x_3)$ et $Y = (y_1, y_2, y_3)$ par :

$$\Phi(X, Y) = x_1 y_1 + 2 x_2 y_2 + 3 x_3 y_3$$

Solution

1°/ Démontrer que Φ est un produit scalaire.
2°/ Calculer la Φ-norme des vecteurs de la base canonique.
3°/ Construire, à partir de la base canonique, une base Φ-orthonormée.

HAUT

Exercice 7. Angle de deux vecteurs.

Dans l'espace R^3, muni de la base canonique et du produit scalaire canonique, on considère les vecteurs $X = (1, 0, 0)$, $Y = (1, 1, 0)$ et $Z = (1, 1, 1)$.

1°/ Calculer $\| X \|$, $\| Y \|$ et $\| Z \|$.
2°/ Calculer les produits scalaires $< X \mid Y >$, $< X \mid Z >$, $< Y \mid Z >$.
3°/ Calculer l'angle des vecteurs X et Y, l'angle des vecteurs Y et Z, l'angle des vecteurs X et Z.
4°/ Calculer le projeté orthogonal Y_0 de Y sur le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs X et Z.
5°/ Calculer l'angle de Y avec son projeté orthogonal Y_0.

Solution

HAUT

Chapitre 15. Normes.

Enoncés.

Exercice 1. Normes de $\mathbb{R}^2$.

Dans $\mathbb{R}^2$, on définit, pour tout vecteur $u = (u_1, u_2)$ les trois "normes" suivantes :

$$\begin{cases} \| u \|_1 = | u_1 | + | u_2 | \\ \| u \|_2 = \sqrt{u_1^2 + u_2^2} \\ \| u \|_\infty = Sup\ (| u_1 |, | u_2 |) \end{cases}$$

1°/ Vérifiez que ce sont bien des normes.
2°/ Démontrez qu'elles sont équivalentes.
3°/ Dessinez dans le plan les trois boules ouvertes de centre O et de rayon 1.
4°/ Déduire de la propriété 2° que si une suite $(u_n)_{n \geq 0}$ converge vers (ℓ_1, ℓ_2) pour une norme, alors la limite de la suite existe pour les deux autres normes et coïncide avec (ℓ_1, ℓ_2).
5°/ Peut-on généraliser ce résultat à $\mathbb{R}^p$, pour p entier $\geqslant 1$.

Solution.

1°/ Normes.

Les axiomes des normes sont les suivants.

1. $\| V \| \geqslant 0$
2. $\| V \| = 0 \Leftrightarrow V = 0$
3. $\| \lambda V \| = | \lambda | \| V \|$
4. $\| V + V' \| \leqslant \| V \| + \| V' \|$

a) Norme 1.

· $\| u \|_1 = | u_1 | + | u_2 |$ est somme de deux nombres réels positifs, c'est un nombre réel positif.

· $\| u \|_1 = 0 \Leftrightarrow | u_1 | + | u_2 | = 0$. La somme de deux nombres réels positifs est nulle si, et seulement si, chacun des nombres est nul, donc $\| u \|_1 = 0 \Leftrightarrow | u_1 | = | u_2 | = 0 \Leftrightarrow u_1 = u_2 = 0 \Leftrightarrow u = (0,0)$.

· $\| \lambda u \|_1 = | \lambda u_1 | + | \lambda u_2 | = | \lambda | | u_1 | + | \lambda | | u_2 | = | \lambda | (| u_1 | + | u_2 |) = | \lambda | \| u \|_1$.

· $\| u + v \|_1 = | u_1 + v_1 | + | u_2 + v_2 | \leqslant | u_1 | + | v_1 | + | u_2 | + | v_2 | = \| u \|_1 + \| v \|_1$.

Les quatre axiomes sont vérifiés par la norme 1 : c'est bien une norme.

b) Norme 2 (norme euclidienne).

· $\| u \|_2 = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$ est, par définition d'un radical, un nombre réel positif.

· $\| u \|_2 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{u_1^2 + u_2^2} = 0 \Leftrightarrow u_1^{\,2} + u_2^{\,2} = 0$.
La somme de deux nombres réels positifs est nulle si, et seulement si, chacun des nombres est nul, donc
$\| u \|_2 = 0 \Leftrightarrow u_1^{\,2} = u_2^{\,2} = 0 \Leftrightarrow u_1 = u_2 = 0 \Leftrightarrow u = (0,0)$.

· $\| \lambda u \|_2 = \sqrt{(\lambda u_1)^2 + (\lambda u_2)^2} = \sqrt{\lambda^2 (u_1 + u_2)^2} = | \lambda | \sqrt{u_1^2 + u_2^2} = | \lambda | \, \| u \|_2$.

· $\| u + v \|_2 = \sqrt{(u_1 + v_1)^2 + (u_2 + v_2)^2} = \sqrt{u_1^{\,2} + u_2^{\,2} + v_1^{\,2} + v_2^{\,2} + 2(u_1 v_1 + u_2 v_2)}$
$\| u + v \|_2 = \sqrt{\|u\|_2^{\,2} + \|v\|_2^{\,2} + 2(u_1 v_1 + u_2 v_2)}$
Or l'inégalité de Schwarz, que nous allons démontrer plus bas, donne :

$$(u_1 v_1 + u_2 v_2) \leqslant \| u \|_2 \| v \|_2$$

On obtient alors :

$$\| u + v \|_2 \leqslant \sqrt{\|u\|_2^{\,2} + \|v\|_2^{\,2} + 2 \|u\|_2 \|v\|_2} = \sqrt{(\|u\|_2 + \|v\|_2)^2} = \| u \|_2 + \| v \|_2 .$$

Reste à démontrer l'**inégalité de Schwarz**.

Pour cela, on remarque que, pour tout scalaire λ, $\| V + \lambda V' \|_2^{\,2}$ est positif ou nul. Or :

$$\| V + \lambda V' \|_2^{\,2} = (x + \lambda x')^2 + (y + \lambda y')^2 = (x^2 + y^2) + 2 \lambda (x x' + y y') + \lambda^2 (x'^2 + y'^2)$$

Pour que ce polynôme en λ soit toujours positif ou nul, il faut et il suffit que le discriminant soit négatif ou nul (pas de racine réelle autre que 0) :

$$0 \leqslant (x x' + y y')^2 \leqslant (x^2 + y^2) (x'^2 + y'^2)$$

Or le polynôme est toujours positif, puisque c'est c'est le carré d'une norme, on a donc l'inégalité de Schwarz :

$$(x x' + y y') \leqslant | x x' + y y' | \leqslant \sqrt{x^2 + y^2} \times \sqrt{x'^2 + y'^2} .$$

Le produit scalaire est inférieur au produit des normes.

Les quatre axiomes sont vérifiés par la norme 2 : c'est bien une norme.

c) Norme ∞ (norme produit).

· $\| u \|_\infty = Sup\ (\ | u_1 |\ ,\ | u_2 |\ )$ est borne supérieure de deux nombres réels positifs, c'est un nombre réel positif.

· $\| u \|_\infty = 0 \Leftrightarrow Sup\ (\ | u_1 |\ ,\ | u_2 |\ ) = 0$. Le plus grand de deux nombres réels positifs est nul si, et seulement si, chacun des nombres est nul, donc
$\| u \|_\infty = 0 \Leftrightarrow | u_1 | = | u_2 | = 0 \Leftrightarrow u_1 = u_2 = 0 \Leftrightarrow u = (0,0)$.

· $\| \lambda\, u \|_\infty = Sup\ (\ | \lambda\, u_1 |\ ,\ | \lambda\, u_2 |\ ) = \text{Sup}\ (\ | \lambda |\, | u_1 |\ ,\ | \lambda |\, | u_2 |\ ) = | \lambda |\ Sup\ (\ | u_1 |\ ,\ | u_2 |\ ) = | \lambda |\, \| u \|_\infty$.

· $\| u + v \|_\infty = Sup\ (\ | u_1 + v_1 |\ ,\ | u_2 + v_2 |\ )$.
Or on a :
$| u_1 + v_1 | \leqslant | u_1 | + | v_1 | \leqslant Sup\ (\ | u_1 |\ ,\ | u_2 |\ ) + Sup\ (\ | v_1 |\ ,\ | v_2 |\ )$
et :
$| u_2 + v_2 | \leqslant | u_2 | + | v_2 | \leqslant Sup\ (\ | u_1 |\ ,\ | u_2 |\ ) + Sup\ (\ | v_1 |\ ,\ | v_2 |\ )$
donc
$Sup\ (\ | u_1 + v_1 |\ ,\ | u_2 + v_2 |\ ) \leqslant Sup\ (\ | u_1 |\ ,\ | u_2 |\ ) + Sup\ (\ | v_1 |\ ,\ | v_2 |\ )$
Et cette relation s'écrit aussi :

$$\| u + v \|_\infty \leqslant \| u \|_\infty + \| v \|_\infty$$

Les quatre axiomes sont vérifiés par la norme 3 : c'est bien une norme.

2°/ Equivalence des normes.

Dire que les normes sont équivalentes, c'est dire qu'elles définissant la même topologie. Dans un cours, pour démontrer cette propriété, on démontrerait que tout espace normé de dimension finie sur $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, est homéomorphe à K^n, ce qui se fait assez facilement par récurrence à partir de $n = 1$. En fait, il suffit de montrer, ici, que toute boule ouverte pour l'une des normes contienne une boule ouverte pour l'une quelconque des deux autres normes.

a) $\| \cdot \|_1 \prec \| \cdot \|_2$.

Montrons qu'une boule ouverte pour la norme 2 contient une boule ouverte pour la norme 1.
Soit B_2 la boule ouverte de centre $u = (u_1\ ,\ u_2\ )$ et de rayon r pour la norme 2. Elle est définie par :

$$v = (v_1\ ,\ v_2\ ) \in B_2 \Leftrightarrow \sqrt{(v_1 - u_1)^2 + (v_2 - u_2)^2} < r.$$

Soit B_1 la boule ouverte de centre $u = (u_1\ ,\ u_2\ )$ et de même rayon r pour la norme 1. Elle est définie par :

$$v = (v_1\ ,\ v_2\ ) \in B_1 \Leftrightarrow | v_1 - u_1 | + | v_2 - u_2 | < r.$$

Montrons que B_1 est contenue dans B_2 .
Soit $v = (v_1\ ,\ v_2\ ) \in B_1$. Sa norme 1 est inférieure à r : $\| v \|_1 < r$, et il vient :

$$\| v-u \|_2 = \sqrt{(v_1-u_1)^2+(v_2-u_2)^2} \leqslant \sqrt{(v_1-u_1)^2+(v_2-u_2)^2+2|v_1-u_1||v_2-u_2|} = |v_1-u_1|+|v_2-u_2| = \| v-u \|_1 < r$$

$$\| v-u \|_2 < r$$

donc v est dans B_2. Toute boule B_2 contient donc la boule B_1 de même rayon.La norme 1 est plus fine que la norme 2.

b) $\| \cdot \|_2 \prec \| \cdot \|_\infty$.

Montrons qu'une boule ouverte pour la norme ∞ contient une boule ouverte pour la norme 2.
Soit B_∞ la boule ouverte de centre $u = (u_1 , u_2)$ et de rayon r pour la norme ∞. Elle est définie par :

$$v = (v_1 , v_2) \in B_\infty \Leftrightarrow Sup\,(|v_1-u_1|, |v_2-u_2|) < r$$

Soit B_2 la boule ouverte de centre $u = (u_1 , u_2)$ et de même rayon r pour la norme 2. Elle est définie par :

$$v = (v_1 , v_2) \in B_2 \Leftrightarrow \sqrt{(v_1-u_1)^2+(v_2-u_2)^2} < r.$$

Montrons que B_2 est contenue dans B_∞ .
Soit $v = (v_1 , v_2) \in B_2$. Sa norme 2 est inférieure à r : $\| v \|_2 < r$, et il vient :

$$|v_1-u_1| \leqslant \sqrt{(v_1-u_1)^2+(v_2-u_2)^2} < r.$$
$$|v_2-u_2| \leqslant \sqrt{(v_1-u_1)^2+(v_2-u_2)^2} < r.$$

$$Sup\,(|v_1-u_1|, |v_2-u_2|) < r$$

donc v appartient à B_∞ . Ainsi toute boule ouverte pour la norme 2, est contenue dans la boule ouverte de même rayon pour la norme ∞. La norme 2 est plus fine que la norme ∞.

c) $\| \cdot \|_\infty \prec \| \cdot \|_1$.

Soit B_1 la boule ouverte de centre $u = (u_1 , u_2)$ et de rayon r pour la norme 1. Elle est définie par :

$$v = (v_1 , v_2) \in B_1 \Leftrightarrow |v_1-u_1| + |v_2-u_2| < r.$$

Soit B'_∞ la boule ouverte de centre $u = (u_1 , u_2)$ et de rayon $\frac{r}{2}$ pour la norme ∞. Elle est définie par :

$$v = (v_1 , v_2) \in B_\infty \Leftrightarrow Sup\,(|v_1-u_1|, |v_2-u_2|) < \frac{r}{2}.$$

Montrons que B'_∞ est contenue dans B_1. Soit $v = (v_1 , v_2) \in B_\infty$. On a :

$$| v_1 - u_1 | \leqslant Sup\ (| v_1 - u_1 |, | v_2 - u_2 |) < \frac{r}{2}.$$
$$| v_2 - u_2 | \leqslant Sup\ (| v_1 - u_1 |, | v_2 - u_2 |) < \frac{r}{2}.$$

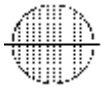
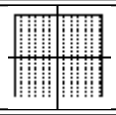
Par addition :

$$| v_1 - u_1 | + | v_2 - u_2 | < r.$$
$$|| v - u ||_1 | < r.$$

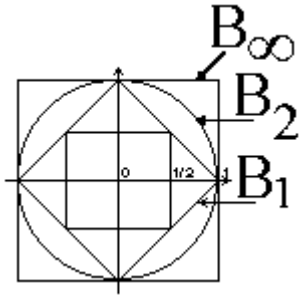
donc v appartient à B_1. Ainsi toute boule ouverte de rayon r pour la norme 1, contient la boule ouverte de rayon $\frac{r}{2}$ pour la norme ∞. La norme ∞ est plus fine que la norme 1.

Nous avons montré que la norme 1 est plus fine que la norme 2, que la norme 2 est plus fine que la norme ∞, et que la norme ∞ est plus fine que la norme 1. Ceci achève de démontrer que les trois normes sont équivalentes.
Il en résulte que toute application continue pour l'une des normes est continue pour les deux autres.

3°/ Boules unités.

		
$\|\| u \|\|_1 = \| u_1 \| + \| u_2 \| < 1$	$\|\| u \|\|_2 = \sqrt{u_1^2 + u_2^2} < 1$	$\|\| u \|\|_\infty = Sup\ (\| u_1 \|, \| u_2 \|) < 1$

Sur un même dessin, la boule unité B_1 est contenue dans la boule unité B_2, qui, elle-même, est contenue dans la boule unité B_∞. La boule unité B_1, à son tour, contient la boule de rayon $\frac{1}{2}$ pour la norme ∞.



4°/ Suites convergentes.

La construction des boules ouvertes unités pour les trois normes montre que, étant données deux des trois normes, soient $\|\ .\ \|_a$ et $\|\ .\ \|_b$, la boule de centre u et de rayon r pour la norme a, contient toujours la boule de centre u et de rayon $\frac{r}{2}$ pour la norme b.

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}^2$ convergeant vers $\lambda = (\ell_1, \ell_2)$ pour la norme a ($a = 1, 2, \infty$). Pour une autre des trois normes, par exemple pour la norme b, on sait, comme on vient de le rappeler, que la boule B_b de centre λ et de rayon ε contient une boule B_a de centre λ et de rayon $\frac{\varepsilon}{2}$.

Par hypothèse, puisque la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers $\lambda = (\ell_1, \ell_2)$ pour la norme a, il existe un entier n_0 tel que la boule B_a de centre λ et de rayon $\frac{\varepsilon}{2}$ pour la norme a contienne tous les éléments de la suite à partir de n_0. Donc la boule B_b, qui contient la boule B_a, contient, elle aussi, tous les éléments de la suite à partir de n_0. C'est dire que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers $\lambda = (\ell_1, \ell_2)$ pour la norme b.

5°/ Généralisation à $\mathbb{R}^p$.

Pour tout entier $p \geqslant 1$, on peut définir trois normes :

$$\begin{cases} \| u \|_1 = | u_1 | + | u_2 | + \ldots + | u_p | \\ \| u \|_2 = \sqrt{{u_1}^2 + {u_2}^2 + \cdots + {u_p}^2} \\ \| u \|_\infty = Sup\ (| u_1 | , | u_2 | , \ldots , | u_p |) \end{cases}$$

Ce sont bien des normes comme on le voit facilement : l'inégalité du triangle pour la norme euclidienne 2 résulte encore de l'inégalité de Schwarz.

Pour $p = 1$, ces trois normes coïncident :

$$\| u \|_1 = \| u \|_2 = \| u \|_\infty = | u_1 | = | u |.$$

Pour $p = 2$, on vient de voir que les trois normes sont équivalentes.

Pour p quelconque, plus grand que 2, tout espace normé sur $K = \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) de dimension finie p est homéomorphe à K^p, muni de la norme produit $\| . \|_\infty$. Homéomorphe, cela veut dire, en fait, qu'il existe une bijection qui est continue ainsi que la bijection réciproque. Dans l'identification des bases canoniques, l'application identique, de $\mathbb{R}^p$ muni de la norme a, dans $\mathbb{R}^p$ muni de la norme b est une application continue, ainsi que la bijection réciproque, de sorte qu'une boule ouverte de centre u et de rayon $\varepsilon > 0$ pour la norme a, contient une boule ouverte de centre u et de rayon $\eta > 0$ pour la norme b. Les trois normes de $\mathbb{R}^p$ sont donc équivalentes.

Comme les normes sont équivalentes, toute suite qui converge vers une limite λ pour l'une des normes converge aussi vers λ pour les deux autres normes.
Il revient au même de dire que toute application continue pour l'une des normes est continue pour les deux autres.

Chapitre 15. Normes.

Enoncés.

Exercice 2. Continuité de la norme.

Soit $(E, \|.\|)$ un espace normé. 1°/ Montrez que, pour tout $x \in E$ et tout $y \in E$, on a : $\| \|x\| - \|y\| \| \leqslant \|x - y\|$ 2°/ En déduire que l'application $x \mapsto \|x\|$ est une application continue de $(E, \|.\|)$ dans $\mathbb{R}$.	

Solution.

1°/ Inégalité.

L'inégalité du triangle donne :

$$\|x\| = \|(x-y)+y\| \leqslant \|x-y\| + \|y\|$$

donc :

$$\|x\| - \|y\| \leqslant \|x-y\|$$

Par symétrie, on a aussi :

$$\|y\| = \|(y-x)+x\| \leqslant \|y-x\| + \|x\|$$

donc :

$$\|y\| - \|x\| \leqslant \|y-x\| = \|x-y\|$$

On en déduit :

$$\| \|x\| - \|y\| \| = Sup\,(\|x\| - \|y\|\,,\, \|y\| - \|x\|\,) \leqslant \|x-y\|$$

2°/ Continuité de la norme.

Dire que la norme $N : x \mapsto N(x) = \|x\|$ est une application continue de $(E, \|\,.\,\|)$ dans $\mathbb{R}$, c'est dire que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $\eta > 0$ tel que :

$$\|x-y\| < \eta \Rightarrow |N(x) - N(y)| < \varepsilon$$

D'après la propriété 1°, il suffit de prendre $\eta = \varepsilon$, pour avoir :

$$\|x-y\| < \varepsilon \Rightarrow \| \|x\| - \|y\| \| = Sup\,(\|x\| - \|y\|\,,\, \|y\| - \|x\|\,) \leqslant \|x-y\| < \varepsilon$$
$$\|x-y\| < \varepsilon \Rightarrow |N(x) - N(y)| < \varepsilon$$

Donc **la norme est une application continue**.

Chapitre 15. Normes.

Enoncés.

Exercice 3. Transport d'une norme par application linéaire.

Soit f une application linéaire de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^p$. Pour tout $u \in \mathbb{R}^p$, on pose : $N(u) = \| f(u) \|$. Donnez une condition nécessaire et suffisante pour que N soit une norme sur $\mathbb{R}^p$.	

Solution.

Comme toutes les normes de $\mathbb{R}^p$ sont équivalentes, on peut prendre pour norme de $\mathbb{R}^p$, pour fixer les idées, la norme produit $\| u \|_\infty = Sup (| u_1 | , \dots , | u_n |)$.

Pour tout $u \in \mathbb{R}^p$, $\| f(u) \|$ est un nombre réel positif. $N(u)$ est un nombre réel positif.
Comme f est linéaire, on a toujours :
$N(\lambda u) = \| f(\lambda u) \| = \| \lambda f(u) \| = | \lambda | \| f(u) \| = | \lambda | N(u)$
$N(u + u') = \| f(u + u') \| = \| f(u) + f(u') \| \leqslant \| f(u) \| + \| f(u') \| = N(u) + N(u')$

Enfin :
$N(u) = 0 \Leftrightarrow \| f(u) \| = 0 \Leftrightarrow f(u) = 0$.

Pour que N soit une norme, il faut et il suffit que la condition $f(u) = 0$ entraîne $u = 0$.
Comme f est linéaire, la relation :
$f(u) = 0 \Rightarrow u = 0$
est équivalente à "u est injective".

Pour que $u \mapsto \| f(u) \|$ soit une norme sur $\mathbb{R}^p$, il faut et il suffit que f soit injective.

On sait, par ailleurs, que les applications linéaires injectives de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^p$ sont aussi les applications linéaires surjectives, ou les applications linéaires bijectives. De plus, toute application linéaire de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^p$ est continue, et même, de façon plus générale, toute application linéaire définie dans un espace normé de dimension finie, et à valeurs dans un espace normé quelconque, est continue (voir *Cours d'Analyse* de Laurent Schwartz, Hermann, Paris, 1995, théorème 2.11.1, p.279).
D'où la propriété des applications linéaires de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^p$:

f injective $\Leftrightarrow$ f homéomorphisme

Il en résulte que la condition précédente peut s'énoncer :

Pour que $u \mapsto \| f(u) \|$ soit une norme sur $\mathbb{R}^p$, il faut et il suffit que f soit un homéomorphisme.

Chapitre 15. Normes.

Enoncés.

Exercice 4. Différentes normes d'une fonction continue.

Soit E = C ([0 , 1] , $\mathbb{R}$) l'espace vectoriel des applications continues de l'intervalle fermé [0 , 1] dans $\mathbb{R}$. On définit trois applications de E dans $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} \| f \|_1 = \int_0^1 | f(t) | \, dt \\ \| f \|_2 = \left(\int_0^1 | f(t) |^2 \, dt \right)^{\frac{1}{2}} \\ \| f \|_\infty = \sup_{t \in [0,1]} | f(t) | \end{cases}$$

1°/ Montrez que les trois applications ainsi définies sont des normes sur E.
2°/ On considère la suite $(P_n)_{n \geq 0}$ de polynômes définie par $P_n = t^n$, pour $n \geqslant 0$.
Etudiez la limite de cette suite pour $\| \cdot \|_1$ lorsque n augmente indéfiniment.
3°/ Etudiez la limite de la suite $(P_n)_{n \geq 0}$ définie dans 2° pour $\| \cdot \|_\infty$. Conclusion ?

Solution.

1°/ Normes.

Remarquons d'abord que les applications continues de l'intervalle fermé borné [0 , 1] dans $\mathbb{R}$ sont nécessairement bornées, puisque :
1. l'image d'un intervalle par une application continue est un intervalle (théorème de Bolzano),
2. l'image de [0,1] par une application continue est un intervalle fermé de $\mathbb{R}$ (théorème de Weierstrass) donc, en particulier, f est bornée.
Comme les applications continues de [0 , 1] dans $\mathbb{R}$ sont bornées, les trois applications définies dans l'énoncé sont bien définies pour tout $f \in E$.

Il est clair ensuite, comme on le voit en écrivant les formules de définition, que la multiplication de f par λ, multiplie l'image de f par $| \lambda |$ pour les trois applications.

a) Norme $\| \cdot \|_1$.

· $\| f \|_1 = \int_0^1 | f(t) | \, dt$ est un nombre réel positif, puisue c'est l'intégrale d'une fonction positive bornée sur un intervalle borné.

· $\| \lambda f \|_1 = \int_0^1 | \lambda f(t) | dt = | \lambda | \int_0^1 | f(t) | dt = | \lambda | \| f \|_1$.

· $\| f \|_1 = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 | f(t) | dt = 0 \Leftrightarrow | f(t) | = 0$ pour tout $t \in [0,1] \Leftrightarrow f(t) = 0$ pour tout $t \in [0,1]$ $\Leftrightarrow f = 0$.

· Inégalité du triangle.

$\| f + g \|_1 = \int_0^1 | f(t) + g(t) | dt \leqslant \int_0^1 (| f(t) | + | g(t) |) dt = \int_0^1 | f(t) | dt + \int_0^1 | g(t) | dt = \| f \|_1 + \| g \|_1$.

Donc $f \mapsto \| f \|_1$ est une norme. On l'appelle la **norme de convergence en moyenne**.

b) Norme $\|.\|_2$.

· $\| f \|_2 = \left[\int_0^1 | f(t) |^2 dt \right]^{\frac{1}{2}}$ est un nombre réel positif, puisque l'intégrale d'une fonction positive bornée sur un intervalle borné est un nombre réel positif, et, par définition, sa racine carrée est un nombre réel positif.

· $\| \lambda f \|_2 = \left[\int_0^1 | \lambda f(t) |^2 dt \right]^{\frac{1}{2}} = | \lambda | \left[\int_0^1 | f(t) |^2 dt \right]^{\frac{1}{2}} = | \lambda | \| f \|_2$.

· $\| f \|_2 = 0 \Leftrightarrow \left[\int_0^1 | f(t) |^2 dt \right]^{\frac{1}{2}} = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 | f(t) |^2 dt = 0 \Leftrightarrow | f(t) |^2 = 0$ pour tout $t \in [0,1] \Leftrightarrow f(t) = 0$ pour tout $t \in [0,1] \Leftrightarrow f = 0$.

· Inégalité du triangle.

$$\| f + g \|_2 = \left[\int_0^1 | f(t) + g(t) |^2 dt \right]^{\frac{1}{2}} = \left[\int_0^1 [| f(t) |^2 + | g(t) |^2 + 2 f(t) g(t)] dt \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left[\int_0^1 | f(t) |^2 dt + \int_0^1 | g(t) |^2 dt + 2 \int_0^1 f(t) g(t) dt \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left[\| f \|_2^2 + \| g \|_2^2 + 2 \int_0^1 f(t) g(t) dt \right]^{\frac{1}{2}}$$

Or, l'inégalité de Schwarz donne :

$$\int_0^1 f(t) g(t) dt \leqslant \left[\int_0^1 | f(t) |^2 dt \right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_0^1 | g(t) |^2 dt \right]^{\frac{1}{2}} = \| f \|_2 \times \| g \|_2$$

Donc : $\| f + g \|_2 \leqslant \left[\| f \|_2^2 + \| g \|_2^2 + 2 \| f \|_2 \times \| g \|_2 \right]^{\frac{1}{2}} = \left[(\| f \|_2 + \| g \|_2)^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \| f \|_2 + \| g \|_2$.

Tout le problème revient ici à démontrer l'**inégalité de Schwarz**. Rappelons comment se fait la démonstration:

$\| f + \lambda g \|_2$ est un nombre réel positif pour toute valeur réelle de λ. Or :

$$\| f + \lambda g \|_2 = \left[\int_0^1 | f(t) + \lambda g(t) |^2 dt \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left[\int_0^1 (f(t) + \lambda g(t))^2 dt \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left[\| f \|_2^2 + \lambda^2 \| g \|_2^2 + 2 \lambda \int_0^1 f(t) g(t) dt \right]^{\frac{1}{2}}$$

Pour que $\| f \|_2^{\,2} + \lambda^2 \| g \|_2^{\,2} + 2\lambda \int_0^1 f(t)\, g(t)\, dt$ soit positif pour toute valeur de λ, il faut et il suffit que le discriminant de ce polynôme du deuxième degré en λ, soit négatif, ce qui donne :

$$\left[\int_0^1 f(t)\, g(t)\, dt\right]^2 \leqslant \| f \|_2^{\,2} \times \| g \|_2^{\,2}$$

$$\int_0^1 f(t)\, g(t)\, dt \leqslant \left| \int_0^1 f(t)\, g(t)\, dt \right| \leqslant \| f \|_2 \times \| g \|_2 .$$

Donc $f \mapsto \| f \|_2$ est une norme. On l'appelle la **norme de convergence en moyenne quadratique**.

c) Norme $\| . \|_\infty$.

· $\| f \|_\infty = \underset{t \in [0,1]}{Sup} | f(t) |$, borne supérieure d'un ensemble de nombres réels positifs bonés, est un nombre réel positif.

· $\| \lambda f \|_\infty = \underset{t \in [0,1]}{Sup} | \lambda f(t) | = | \lambda | \underset{t \in [0,1]}{Sup} | f(t) | = | \lambda | \, \| f \|_\infty$.

· $\| f \|_\infty = 0 \Leftrightarrow \underset{t \in [0,1]}{Sup} | f(t) | = 0 \Leftrightarrow | f(t) | = 0$, pour tout $t \in [\,0\,,\,1\,] \Leftrightarrow f(t) = 0$, pour tout $t \in [\,0\,,\,1\,]$ $\Leftrightarrow f = 0$.

· La relation, vraie pour tout $t \in [\,0,\,1\,]$:

$$| f(t) + g(t) | \leqslant | f(t) | + | g(t) | \leqslant \underset{t \in [0,1]}{Sup} | f(t) | + \underset{t \in [0,1]}{Sup} | g(t) |$$

entraîne la relation :

$$\| f + g \|_\infty = \underset{t \in [0,1]}{Sup} | f(t) + g(t) | \leqslant \underset{t \in [0,1]}{Sup} | f(t) | + \underset{t \in [0,1]}{Sup} | g(t) | = \| f \|_\infty + \| g \|_\infty .$$

Donc $f \mapsto \| f \|_\infty$ est une norme. On l'appelle la **norme de convergence uniforme**.

2°/ Convergence en moyenne d'une suite de monômes.

$$\| P_n \|_1 = \int_0^1 | t^n | \, dt = \int_0^1 t^n \, dt = \frac{1}{n+1} \left[t^{n+1} \right]_{t=0}^{t=1} = \frac{1}{n+1}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} (\| P_n \|_1) = 0$$

$$\lim_{n \to +\infty} (\| P_n - 0 \|_1) = 0$$

La suite $(P_n)_{n \geq 0}$ converge en moyenne vers 0.

3°/ Convergence uniforme d'une suite de monômes.

$$\| P_n \|_\infty = \underset{t \in [0,1]}{Sup} | P_n(t) | = \underset{t \in [0,1]}{Sup} | t^n | = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} (\| P_n \|_\infty) = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} (\| P_n - 0 \|_\infty) = 1 \neq 0.$$

La suite $(P_n)_{n \geq 0}$ ne converge pas uniformément vers 0.

Remarquons que la relation $\lim_{n \to +\infty} (\| P_n \|_\infty) = 1$ ne signifie pas que la suite $(P_n)_{n \geq 0}$ converge uniformément vers 1. En effet, la convergence uniforme vers 1 se traduirait par la relation :

$$\lim_{n \to +\infty} (\| P_n - 1 \|_\infty) = 0$$

Elle est fausse puisque, pour t = 0, on a $P_n(t) = 0$, donc $| P_n(0) - 1 | = 1$ et l'on a :

$$\| P_n - 1 \|_\infty = \sup_{t \in [0,1]} | t^n - 1 | = 1$$

donc

$$\lim_{n \to +\infty} (\| P_n - 1 \|_\infty) = 1 \neq 0.$$

4°/ Conclusion.

La norme de convergence en moyenne et la norme de convergence uniforme ne sont pas équivalentes, puisqu'il existe au moins une suite dont la limite pour la convergence en moyenne est 0, et que 0 n'est certainement pas la limite de la suite pour la norme de convergence uniforme. En réalité, la suite $(P_n)_{n \geq 0}$ n'a pas de limite pour la norme de convergence uniforme, car s'il y en avait une, ce serait la limite de la suite pour la convergence simple, c'est-à-dire une fonction égale à 0 pour $x \neq 1$ et égale à 1 pour $x = 1$, mais cette fonction n'est pas une fonction continue et ne peut donc être limite de la suite dans E.

D'après le résultat qu'on a rappelé dans Chapitre 15, Exercice 1 (équivalence des normes dans un espace vectoriel de dimension finie), l'espace vectoriel **C ([0,1], ℝ) n'est pas un espace vectoriel de dimension finie**, puisqu'on a pu trouver des normes non équivalentes.

Remarque.

Les résultats de l'étude seraient légèrement différents si, au lieu d'étudier les fonctions définies et continues sur un intervalle fermé, on étudiait les fonctions définies sur un intervalle ouvert, parce qu'alors les fonctions continues ne sont pas nécessairement bornées. Il y aurait lieu alors d'étudier séparément les fonctions continues de module intégrable, les fonctions continues de carré intégrable, les fonctions continues bornées, ce qui donne naissance à trois espaces normés strictement différents, emboîtés, ayant une partie commune, les fonctions continues bornées, dans laquelle on peut comparer les trois normes $\| . \|_1$, $\| . \|_2$, $\| . \|_\infty$. On verrait encore que la convergence uniforme entraîne la convergence en moyenne quadratique, qui entraîne elle-même la convergence en moyenne, et l'inverse est faux : toutes ces normes sont différentes.

Chapitre 15. Normes.

Enoncés.

Exercice 5. Maximum et minimum d'une fonction continue positive.

1°/ Soit f une fonction numérique continue et positive dans l'intervalle fermé [0, 1]. f admet un maximum M atteint en un point $x_0 \in [0, 1]$.Montrer que :

$$M = \lim_{n \to +\infty} \left(\int_0^1 (f(x))^n \, dx \right)^{\frac{1}{n}}$$

2°/ Si f est strictement positive sur [0, 1], f admet un minimum m. Montrer que :

$$m = \lim_{n \to -\infty} \left(\int_0^1 (f(x))^n \, dx \right)^{\frac{1}{n}}$$

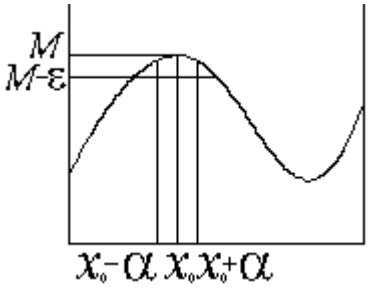
Solution.

1°/ Maximum.

Par hypothèse, la fonction f est continue et positive sur l'intervalle fermé [0, 1]. Elle atteint son maximum au moins une fois sur [0, 1], en un point x_0 . Supposons d'abord que x_0 soit différent de 0 et de 1. Donnons-nous un nombre $\varepsilon > 0$. Il est alors possible de trouver un nombre α inférieur à $x_0 - 0 = x_0$ et à $1 - x_0$ tel que la condition :

$$| x - x_0 | < \alpha$$

entraîne $M - \varepsilon \leqslant f(x) \leqslant M$.



Appelons E la réunion des intervalles $[0, x_0 - \alpha]$ et $[x_0 + \alpha, 1]$. On peut écrire l'égalité :

$$\int_0^1 (f(x))^n\,dx = \int_{x_0-\alpha}^{x_0+\alpha} (f(x))^n\,dx + \int_E (f(x))^n\,dx$$

Par suite, s'agissant de fonctions positives, on a $\int_E (f(x))^n\,dx \geqslant 0$ et :

$$\int_0^1 (f(x))^n\,dx \geqslant \int_{x_0-\alpha}^{x_0+\alpha} (f(x))^n\,dx \geqslant 2\,\alpha\,(M-\varepsilon)^n.$$

D'autre part, l'inégalité $f(x) \geqslant M$ entraîne :

$$\int_0^1 (f(x))^n\,dx \leqslant M^n.$$

On a donc :

$$(2\,\alpha)^{\frac{1}{n}}\,(M-\varepsilon) \leqslant \left[\int_0^1 (f(x))^n\,dx\right]^{\frac{1}{n}} \leqslant M.$$

Quand n augmente indéfiniment, $(2\,\alpha)^{\frac{1}{n}}$ tend vers $(2\,\alpha)^0 = 1$, de sorte que l'on a :

$$M-\varepsilon \leqslant \lim_{n\to+\infty}\left[\int_0^1 (f(x))^n\,dx\right]^{\frac{1}{n}} \leqslant M,$$

pour tout $\varepsilon > 0$. C'est dire que :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\left[\int_0^1 (f(x))^n\,dx\right]^{\frac{1}{n}} = M}$$

Si, maintenant, le point x_0 est confondu avec l'une des extrémités, 0 ou 1, de l'intervalle [0, 1], il suffira de remplacer l'intervalle $[x_0 - \alpha\,;\, x_0 + \alpha]$ par l'intervalle $[0, \alpha]$, ou par l'intervalle $[1 - \alpha, 1]$, pour avoir le résultat.

2°/ Minimum.

Si $f(x)$ n'est jamais nul, on peut calculer $\frac{1}{f(x)}$ pour tout $x \in [0, 1]$. Cette fonction est maximum pour une valeur de x qui rend minimum $f(x)$: $Max\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{Min(f(x))}$, d'où :

$$m = Min\,(f(x)) = \frac{1}{Max\left(\frac{1}{f(x)}\right)}$$

Posons $n' = -n$. On a :

$$\lim_{n \to -\infty} \left[\int_0^1 (f(x))^n \, dx \right]^{\frac{1}{n}} = \lim_{n' \to +\infty} \left[\int_0^1 (f(x))^{-n'} \, dx \right]^{\frac{-1}{n'}}$$

$$= \lim_{n' \to +\infty} \frac{1}{\left(\int_0^1 \frac{1}{(f(x))^{n'}} \, dx \right)^{\frac{1}{n'}}} = \frac{1}{\lim_{n' \to +\infty} \left(\int_0^1 \frac{1}{(f(x))^{n'}} \, dx \right)^{\frac{1}{n'}}}$$

$$= \frac{1}{Max\left(\frac{1}{f(x)} \right)} = m$$

$$\boxed{\lim_{n \to -\infty} \left[\int_0^1 (f(x))^n \, dx \right]^{\frac{1}{n}} = m}$$

Remarques.

1. Ces formules permettent de rechercher le maximum et le minimum d'une fonction continue, même si celle-ci n'est pas dérivable. Evidemment, lorsque la fonction est dérivable, il est parfois plus aisé de rechercher un zéro de la dérivée, ou une valeur aux bornes de l'intervalle.

2. L'application $\| \, . \, \|_n : f \mapsto \left[\int_0^1 | f(x) |^n \, dx \right]^{\frac{1}{n}}$, $n \geqslant 1$, définit, en fait, une norme sur l'espace vectoriel des fonctions continues sur l'intervalle fermé [0, 1].
Le maximum M de $| f(x) |$ correspond à une valeur infinie de n : il est donc logique de noter $\| \, . \, \|_\infty$ la **norme de convergence uniforme** définie par :

$$\| f \|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} | f(x) | = M$$

Chapitre 15. Normes.

Enoncés.

Exercice 6. Produit scalaire et base orthonormée.

Dans R^3, muni de la base canonique, on considère l'application $\Phi : R^3 \times R^3 \to R$, définie, pour $X = (x_1, x_2, x_3)$ et $Y = (y_1, y_2, y_3)$ par :

$$\Phi(X, Y) = x_1 y_1 + 2 x_2 y_2 + 3 x_3 y_3$$

1°/ Démontrer que Φ est un produit scalaire.
2°/ Calculer la Φ-norme des vecteurs de la base canonique.
3°/ Construire, à partir de la base canonique, une base Φ-orthonormée.

Solution.

1°/ Produit scalaire.

Un produit scalaire est une forme bilinéaire, symétrique, positive, non dégénérée.
L'application Φ a, pour ensemble d'arrivée, l'ensemble R des nombres réels : c'est donc ce qu'on appelle une **forme** (réelle).

a) Symétrie.

$$\Phi(Y, X) = y_1 x_1 + 2 y_2 x_2 + 3 y_3 x_3 = x_1 y_1 + 2 x_2 y_2 + 3 x_3 y_3 = \Phi(X, Y)$$

b) Bilinéarité.

Montrons d'abord que Φ est linéaire par rapport à la première variable :

$$\begin{aligned}\Phi(\alpha X_1 + \beta X_2, Y) &= (\alpha x_{11} + \beta x_{21}) y_1 + 2 (\alpha x_{12} + \beta x_{22}) y_2 + 3 (\alpha x_{13} + \beta x_{23}) y_3 \\ &= \alpha (x_{11} y_1 + 2 x_{12} y_2 + 3 x_{13} y_3) + \beta (x_{21} y_1 + 2 x_{22} y_2 + 3 x_{23} y_3) \\ &= \alpha \Phi(X_1, Y) + \beta \Phi(X_2, Y)\end{aligned}$$

A cause de la symétrie, il suffit de montrer que Φ est linéaire par rapport à la première variable.
En effet, en changeant le nom des variables, la relation $\Phi(\alpha X_1 + \beta X_2, Y) = \alpha \Phi(X_1, Y) + \beta \Phi(X_2, Y)$ s'écrit aussi :

$$\Phi(\alpha Y_1 + \beta Y_2, X) = \alpha \Phi(Y_1, X) + \beta \Phi(Y_2, X)$$

et, par symétrie de Φ :

$$\Phi (X, \alpha Y_1 + \beta Y_2) = \alpha \Phi (X, Y_1) + \beta \Phi (X, Y_2)$$

relation qui montre que Φ est linéaire aussi par rapport à la deuxième variable.

c) Positivité.

Toute somme de nombres réels positifs est un nombre réel positif.
Tout carré de nombre réel est un nombre réel positif.
Tout produit de nombres réels positifs est un nombre réel positif.
Il en résulte :

$$\Phi (X, X) = x_1 ^2 + 2 x_2 ^2 + 3 x_3 ^2 \geq 0$$

d) Non dégénérescence.

$$\Phi (X, X) = 0 \Rightarrow x_1 ^2 + 2 x_2 ^2 + 3 x_3 ^2 = 0$$

$2 x_2 ^2 + 3 x_3 ^2$, somme de nombres réels positifs, est un nombre réel positif.
Son opposé $– (2 x_2 ^2 + 3 x_3 ^2)$ est un nombre réel négatif.
La relation $x_1 ^2 + 2 x_2 ^2 + 3 x_3 ^2 = 0$ montre que l'opposé de $2 x_2 ^2 + 3 x_3 ^2$ est $x_1 ^2$.
$x_1 ^2 = – (2 x_2 ^2 + 3 x_3 ^2)$ est, à la fois un nombre positif et un nombre négatif, il est donc nul et $x_1 = 0$.

La relation $x_1 ^2 + 2 x_2 ^2 + 3 x_3 ^2 = 0$ se réduit alors à $2 x_2 ^2 + 3 x_3 ^2 = 0$.
$2 x_2 ^2 = – (3 x_3 ^2)$ est, à la fois, positif et négatif, donc nul et $x_2 = 0$.

La relation $x_1 ^2 + 2 x_2 ^2 + 3 x_3 ^2 = 0$ se réduit alors à $3 x_3 ^2 = 0$, donc $x_3 = 0$.

Ainsi, la relation $\Phi (X, X) = 0$ entraîne $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$.
Donc $X = (x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 0)$, qui est l'élément neutre 0 de l'addition de $\mathbb{R}^3$.

$$\Phi (X, X) = 0 \Rightarrow X = 0$$

Et ceci achève de montrer que Φ est un **produit scalaire** sur $\mathbb{R}^3$.

2°/ Norme des vecteurs de la base canonique.

$e_1 = (1, 0, 0)$

$$\| e_1 \| _\Phi ^2 = \Phi (e_1, e_1) = 1^2 + 2 \times 0^2 + 3 \times 0^2 = 1$$
$$\| e_1 \| _\Phi = 1.$$

$e_2 = (0, 1, 0)$

$$\| e_2 \| _\Phi ^2 = \Phi (e_2, e_2) = 0^2 + 2 \times 1^2 + 3 \times 0^2 = 2$$

$\| e_2 \|_\Phi = \sqrt{2}$.

$e_3 = (0, 0, 1)$

$\| e_3 \|_\Phi{}^2 = \Phi(e_3, e_3) = 0^2 + 2 \times 0^2 + 3 \times 1^2 = 3$
$\| e_3 \|_\Phi = \sqrt{3}$.

3°/ Base orthonormée.

a) Les vecteurs e_1, e_2, e_3, sont orthogonaux deux à deux.

$\Phi(e_1, e_2) = 1 \times 0 + 2 \times 0 \times 1 + 3 \times 0 \times 0 = 0$
$\Phi(e_1, e_3) = 1 \times 0 + 2 \times 0 \times 0 + 3 \times 0 \times 1 = 0$
$\Phi(e_2, e_3) = 0 \times 0 + 2 \times 1 \times 0 + 3 \times 0 \times 1 = 0$

Ces relations montrent que les vecteurs e_1, e_2, e_3, sont orthogonaux deux à deux.
Ils forment donc déjà une base orthogonale.
Pour construire une base orthonormale, il suffit donc de diviser les vecteurs e_1, e_2, e_3, par leur Φ-norme.

b) Famille $\{u_1, u_2, u_3\}$.

Posons :

$$u_1 = \frac{e_1}{\| e_1 \|_\Phi} = e_1 = (1, 0, 0),$$

$$u_2 = \frac{e_2}{\| e_2 \|_\Phi} = \frac{\sqrt{2}}{2} e_2 = \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right),$$

$$u_3 = \frac{e_3}{\| e_3 \|_\Phi} = \frac{\sqrt{3}}{3} e_2 = \left(0, 0, \frac{\sqrt{3}}{3} \right).$$

c) La famille $\{u_1, u_2, u_3\}$ est une base.

Montrons d'abord que la famille $\{u_1, u_2, u_3\}$ est une **base** de $\mathbb{R}^3$.
Une base est une famille de vecteurs formant un système de générateurs et une famille libre.

1. Système de générateurs.

Comme la famille $\{e_1, e_2, e_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$, tout vecteur

$$X = (x_1, x_2, x_3) = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$$

s'écrit aussi :

$$X = x_1\, u_1 + x_2\, \sqrt{2}\, u_2 + x_3\, \sqrt{3}\, u_3$$

ce qui montre déjà que la famille $\{u_1, u_2, u_3\}$ est un **système de générateurs** de R^3.

2. Famille libre.

D'autre part, la relation :

$$\lambda_1\, u_1 + \lambda_2\, u_2 + \lambda_3\, u_3 = 0$$

où $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, sont des nombres réels, s'écrit aussi :

$$\lambda_1\, e_1 + \lambda_2\, \frac{\sqrt{2}}{2}\, e_2 + \lambda_3\, \frac{\sqrt{3}}{3}\, e_3 = 0.$$

Comme la famille $\{e_1, e_2, e_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$, cette relation entraîne :

$$\lambda_1 = \lambda_2\, \frac{\sqrt{2}}{2} = \lambda_3\, \frac{\sqrt{3}}{3} = 0.$$

Donc :

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0,$$

et la relation : $\lambda_1\, u_1 + \lambda_2\, u_2 + \lambda_3\, u_3 = 0$ Þ $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, montre que la famille $\{u_1, u_2, u_3\}$ est une **famille libre**, ce qui achève de montrer que $\{u_1, u_2, u_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

d) La famille $\{u_1, u_2, u_3\}$ est Φ-orthonormée.

Nous avons :

$\| u_1 \|_\Phi{}^2 = \| e_1 \|_\Phi{}^2 = 1.$

$$\| u_2 \|_\Phi{}^2 = \left\| \frac{\sqrt{2}}{2}\, e_2 \right\|_\Phi^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 \| e_2 \|_\Phi{}^2 = \frac{2}{4} \times 2 = 1.$$

$$\| u_3 \|_\Phi{}^2 = \left\| \frac{\sqrt{3}}{3}\, e_3 \right\|_\Phi^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{3} \right)^2 \| e_3 \|_\Phi{}^2 = \frac{3}{9} \times 3 = 1.$$

$$\Phi(u_1, u_2) = \Phi\left(e_1, \frac{\sqrt{2}}{2}\, e_2 \right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\, \Phi(e_1, e_2) = 0.$$

$$\Phi(u_1, u_3) = \Phi\left(e_1, \frac{\sqrt{3}}{3}\, e_3 \right) = \frac{\sqrt{3}}{3}\, \Phi(e_1, e_3) = 0.$$

$$\Phi(u_2, u_3) = \Phi\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\, e_2, \frac{\sqrt{3}}{3}\, e_3 \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{3}\, \Phi(e_2, e_3) = 0.$$

Ces relations montrent que la famille $\{u_1, u_2, u_3\}$ est Φ-orthonormée.
Elle forme donc une base Φ-orthonormée de R^3.

Chapitre 15. Normes.

Enoncés.

Exercice 7. Angle de deux vecteurs.

Dans l'espace $\mathbb{R}^3$, muni de la base canonique et du produit scalaire canonique, on considère les vecteurs $X = (1, 0, 0)$, $Y = (1, 1, 0)$ et $Z = (1, 1, 1)$. 1°/ Calculer $\|\| X \|\|$, $\|\| Y \|\|$ et $\|\| Z \|\|$. 2°/ Calculer les produits scalaires $< X \mid Y >$, $< X \mid Z >$, $< Y \mid Z >$. 3°/ Calculer l'angle des vecteurs X et Y, l'angle des vecteurs Y et Z, l'angle des vecteurs X et Z. 4°/ Calculer le projeté orthogonal Y_0 de Y sur le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs X et Z. 5°/ Calculer l'angle de Y avec son projeté orthogonal Y_0.	

Solution.

1°/ Normes.

$X = (1, 0, 0)$

$$\|\| X \|\|^2 = 1 \times 1 + 0 \times 0 + 0 \times 0 = 1$$
$$\|\| X \|\| = 1$$

$Y = (1, 1, 0)$

$$\|\| Y \|\|^2 = 1 \times 1 + 1 \times 1 + 0 \times 0 = 2$$
$$\|\| Y \|\| = \sqrt{2}$$

$Z = (1, 1, 1)$

$$\|\| Z \|\|^2 = 1 \times 1 + 1 \times 1 + 1 \times 1 = 3$$
$$\|\| Z \|\| = \sqrt{3}$$

2°/ Produits scalaires.

$X = (1, 0, 0)$
$Y = (1, 1, 0)$
$Z = (1, 1, 1)$

$$< X \mid Y > = (1\ 0\ 0) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \times 1 + 0 \times 1 + 0 \times 0 = 1$$

$$< X \mid Z > = (1\ 0\ 0) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \times 1 + 0 \times 1 + 0 \times 1 = 1$$

$$< Y \mid Z > = (1\ 1\ 0) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \times 1 + 1 \times 1 + 0 \times 1 = 2$$

3°/ Angles.

$$cos\ (X, Y) = \frac{\langle X \mid Y \rangle}{\| X \| \| Y \|} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = cos\ \frac{\pi}{4}$$

$(X, Y) = \frac{\pi}{4}$ radians = 45°

$$cos\ (X, Z) = \frac{\langle X \mid Z \rangle}{\| X \| \| Z \|} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} = cos\ 0{,}9553$$

(X, Z) = 0,9533 rd = 54° 44' 08" 2

$$cos\ (Y, Z) = \frac{\langle Y \mid Z \rangle}{\| Y \| \| Z \|} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{2}{3}} = cos\ 0{,}6155$$

(Y, Z) = 0,6155 rd = 35° 15' 51" 8

4°/ Projeté orthogonal.

Rappel.

Le projeté orthogonal de Y sur X est $Y_X = \frac{\langle Y \mid X \rangle}{\| X \|^2} X = X$.

Le projeté orthognal de Y sur Z est $Y_Z = \frac{\langle Y \mid Z \rangle}{\| Z \|^2} Z = \frac{2}{3} Z$.

Projeté orthogonal sur un plan.

Le projeté orthogonal Y_0 de Y sur le sous-espace vectoriel vectoriel engendré par X et Z, est le seul vecteur de la forme

$$Y_0 = a\ X + b\ Z$$

tel que $Y - Y_0$ soit orthogonal à X et à Z.

$$< Y - Y_0 \mid X > = 0 \Leftrightarrow < Y_0 \mid X > = < Y \mid X >$$
$$\Leftrightarrow < a\ X + b\ Z \mid X > = < Y \mid X >$$
$$\Leftrightarrow a \| X \|^2 + b < Z \mid X > = < Y \mid X >$$

$$< Y - Y_0 \mid Z > = 0 \Leftrightarrow < Y_0 \mid Z > = < Y \mid Z >$$
$$\Leftrightarrow < a\ X + b\ Z \mid Z > = < Y \mid Z >$$
$$\Leftrightarrow a < X \mid Z > + b \| Z \|^2 = < Y \mid Z >$$

Les coefficients a et b sont donc les solutions du système d'équations :

$$a \| X \|^2 + b < Z | X > = < Y | X >$$
$$a < X | Z > + b \| Z \|^2 = < Y | Z >$$

Solution générale.

Le déterminant du système est $\| X \|^2 \| Z \|^2 - (< X | Z >)^2$.
Dire qu'il est nul pour des vecteurs X et Z non nuls, c'est dire que le cosinus de l'angle de X et Z est ±1, c'est donc dire que les vecteurs X et Z sont colinéaires.
La solution générale du système est donnée, lorsque le déterminant n'est pas nul, par :

$$a = \frac{< X | Y > < Z | Z > - < X | Z > < Y | Z >}{< X | X > < Z | Z > - < X | Z > < X | Z >} = \frac{< X | Y > \| Z \|^2 - < X | Z > < Y | Z >}{\| X \|^2 \| Z \|^2 - < X | Z >^2}$$
$$b = \frac{< Z | Y > < X | X > - < X | Z > < Y | X >}{< X | X > < Z | Z > - < X | Z > < X | Z >} = \frac{< Z | Y > \| X \|^2 - < X | Z > < Y | X >}{\| X \|^2 \| Z \|^2 - < X | Z >^2}$$

$$\boxed{Y_0 = \frac{< X | Y > \| Z \|^2 - < X | Z > < Y | Z >}{\| X \|^2 \| Z \|^2 - < X | Z >^2} X + \frac{< Z | Y > \| X \|^2 - < X | Z > < Y | X >}{\| X \|^2 \| Z \|^2 - < X | Z >^2} Z}$$

Lorsque les vecteurs X et Z sont colinéaires, le sous-espace vectoriel engendré par X et Z est le sous-espace vectoriel engendré par X, ou par Z, et l'on est ramené au projeté orthogonal de Y sur X : $Y_X = \frac{\langle Y | X \rangle}{\| X \|^2} X = \frac{\langle Y | Z \rangle}{\| Z \|^2} Z$.

Solution particulière.

Dans notre cas particulier, le système d'équations s'écrit :

$$a + b = 1$$
$$a + 3b = 2$$

$$a = b = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{Y_0 = \frac{1}{2}(X + Z)}$$

5°/ Angle de Y et de Y_0.

$$< Y | Y_0 > = < Y | \frac{1}{2}(X + Z) > = \frac{1}{2}(< Y | X > + < Y | Z >) = \frac{1}{2}(1 + 2) = \frac{3}{2}$$
$$\| Y \| = \sqrt{2}$$
$$\| Y_0 \|^2 = \frac{1}{4} \| X + Z \|^2 = \frac{1}{4}(\| X \|^2 + \| Z \|^2 + 2 < X | Z >) = \frac{1}{4}(1 + 3 + 2 \times 1) = \frac{3}{2}$$
$$\| Y_0 \| = \sqrt{\frac{3}{2}}$$
$$\| Y \| \| Y_0 \| = \sqrt{\frac{3}{2}} \times \sqrt{2} = \sqrt{3}$$

$$\cos(Y, Y_0) = \frac{\langle Y | Y_0 \rangle}{\|Y\| \|Y_0\|} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$$

$$\boxed{(Y, Y_0) = \frac{\pi}{3} \text{ rd} = 60°}$$

E S P A C E S E U C L I D I E N S

EXERCICE 1.

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ est rapporté à sa base canonique. On considère les applications suivantes :

$\phi_1 : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $\phi_1 (x,y) = x_1 y_1 + 2 x_2 y_2 + 3 x_3 y_3$

$\phi_2 : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $\phi_2 (x,y) = x_1 y_1 + 2 x_2 y_2 + 3 (x_2 + x_3)(y_2 + y_3)$

$\phi_3 : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $\phi_3 (x,y) = 2 x_1 y_1 + 5 x_2 y_2 + 5 x_3 y_3 - x_2 y_3 - x_3 y_2$

$\phi_4 : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $\phi_4 (x,y) = (x_1 - 2 x_2)(y_1 - 2 y_2) + x_2 y_2 + (x_2 + x_3)(y_2 + y_3)$

1. Vérifier que les applications ϕ_i (i = 1, 2, 3, 4) définissent des produits scalaires.
2. Dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, calculer la matrice A_{Φ_i} associée à ces produits scalaires.
3. On considère les deux applications suivantes :

$\psi_1 : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $\psi_1 (x,y) = \phi_2 (x,y) + \phi_3 (x,y) + \phi_4 (x,y)$

$\psi_2 : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $\psi_2 (x,y) = ln\,(0,5)\, \phi_1 (x,y)$

Montrer que les applications ψ_i (i = 1, 2) sont des formes bilinéaires.

4. Vérifier si les applications ψ_i (i = 1, 2) définissent des produits scalaires.

EXERCICE 2.

On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Déterminer, parmi les matrices ci-dessus, celles qui sont associées à des produits scalaires.

EXERCICE 3.

1. Pour quels produits scalaires de l'Exercice 1, la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est-elle normée ?
2. Pour quels produits scalaires de l'Exercice 1, la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est-elle orthogonale ?
3. Pour quels produits scalaires de l'Exercice 1, la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est-elle orthonormée ?
4. Donner une base de R^3, puis orthonormaliser cette base pour chacun des produits scalaires de l'Exercice 1.

EXERCICE 4.

1. Donner un produit scalaire dans $\mathbb{R}^5$. Expliciter la norme associée.
2. Minimiser en λ les quantités :

$$\left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|, \left\| \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\|, \left\| \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\|$$

3. Donner une interprétation géométrique.

EXERCICE 5.

Soient x et y deux vecteurs d'un espace vectoriel E muni d'un produit scalaire ϕ.

1. Montrer les deux équivalences suivantes :

$$\| x + y \|^2_\phi = \| x \|^2_\phi + \| y \|^2_\phi \quad \Leftrightarrow \quad (x,y)_\phi = 0$$
$$\| x - y \|^2_\phi = \| x \|^2_\phi + \| y \|^2_\phi \quad \Leftrightarrow \quad (x,y)_\phi = 0$$

2. Etablir des équivalences analogues pour plus de deux vecteurs.

EXERCICE 6.

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ est rapporté à sa base canonique. On considère le produit scalaire ϕ, la matrice X, et le vecteur u suivants :

$$\phi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$
$$(x,y) \mapsto x_1 y_1 + 2 x_2 y_2 + 3 x_3 y_3$$

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \; u = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculer la matrice A_ϕ associée au produit scalaire ϕ.
2. On note respectivement x_1 , x_2 , x_3 les trois vecteurs lignes de X. On note C la matrice :

$$C = \begin{pmatrix} (x_1,x_1)_\phi & (x_1,x_2)_\phi & (x_1,x_3)_\phi \\ (x_2,x_1)_\phi & (x_2,x_2)_\phi & (x_2,x_3)_\phi \\ (x_3,x_1)_\phi & (x_3,x_2)_\phi & (x_3,x_3)_\phi \end{pmatrix}$$

Calculer la matrice C, le rang de la matrice C, le rang de la matrice X, et le vecteur $X A_\phi u$.

3. La matrice C est-elle associée à un produit scalaire ?
4. Exprimer la matrice C en fonction des deux matrices X et A_ϕ.
5. Minimiser chacune des quantités suivantes :

$$\| x_i - \lambda u \|_\phi \qquad (i = 1, 2, 3)$$

6. Exprimer $X A_\phi u$ en fonction de x_1 , x_2 , x_3 , u et A_ϕ .
7. Donner une interprétation géométrique.
8. Exprimer $C u$ en fonction des colonnes de X et du vecteur u.

EXERCICE 7.

On considère un nuage des 5 vecteurs $\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, les poids associés sont tous égaux à 1.

On cherche à ajuster à ce nuage une droite (P_1) par la méthode des moindres carrés :
$(P_1) : y = a x + b$.

1. Exprimer le critère des moindres carrés pour cet ajustement.
2. Calculer a et b, puis représenter dans le repère canonique le nuage et la droite d'ajustement.
3. On considère les matrices suivantes : $A = \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_5 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_5 \end{pmatrix}$; $x = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. Calculer A, B.
4. Exprimer le critère des moindres carrés en fonction de A, B, x.
5. Calculer x.

EXERCICE 8.

On considère un nuage des 5 vecteurs $\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, les poids associés sont tous égaux à 1.

On cherche à ajuster à ce nuage une parabole (P_2) par la méthode des moindres carrés :

$(P_2) : y = a x^2 + b x + c$.

1. Exprimer le critère des moindres carrés pour cet ajustement.
2. On note : $A = \begin{pmatrix} {x_1}^2 & x_1 & 1 \\ {x_2}^2 & x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ {x_5}^2 & x_5 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_5 \end{pmatrix}$; $x = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. Montrer que si x et y sont des vecteurs colonnes de $\mathbb{R}^3$ et λ un élément de $\mathbb{R}$, alors : $\| A (x + \lambda y) - B \|^2 = \| A x - B \|^2 + 2 \lambda y^t A^t (A x - B) + \lambda^2 \| A y \|^2$.
3. Déduire que les solutions du problème sont solutions de $A^t A x = A^t B$.
4. Montrer que si x est solution du problème, on a : $\| A x - B \|^2 = \| B \|^2 - x^t A^t B$.
5. Mêmes questions, avec les équations des paraboles suivantes :

$(P_3) : y = a x^2 + c$

$(P_4) : y = a x^2 + b x$

EXERCICE 9.

VRAI ou FAUX.

Pour les questions 1 à 10, indiquez si vous pensez que l'assertion proposée est vraie ou fausse et donnez une justification de votre choix.

1. L'angle de deux vecteurs est compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$.
2. Si x et y sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$, et si $\| x \| = 1$ et $\| y \| = 1$, alors $(x , y) \leq 1$.
3. La variance de la statistique formée par les n premiers entiers $(1, 2, \ldots , n)$ est $\frac{n^2 - 1}{4}$.
4. Si P est un projecteur orthogonal de $E = \mathbb{R}^n$, il existe une base pour laquelle sa matrice est diagonale.
5. Si P est un projecteur orthogonal de $E = \mathbb{R}^n$, alors $\forall x \in E$, $\|P(x)\|^2 \geq \| x \|^2$.
6. Dans un espace vectoriel de dimension finie, pour une base quelconque, il existe un produit scalaire pour lequel cette base est orthogonale.
7. Pour deux variables centrées et de variances non nulles, le nuage des points est sur une droite si et seulement si le carré du coefficient de corrélation est égal à 1.
8. L'écart-type de la somme de deux variables aléatoires est inférieur ou égal à la somme des écarts-types de ces deux variables.
9. [Matrice de projecteur]. Si P est un projecteur orthogonal de $E = R^n$, il existe une base pour laquelle sa matrice ne contient que des valeurs égales à 0 ou à 1.
10. La matrice associée à un produit scalaire est inversible.

E S P A C E S E U C L I D I E N S

EXERCICE 1.

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ est rapporté à sa base canonique. On considère les applications suivantes :

$\phi_1 : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $\phi_1 (x,y) = x_1 y_1 + 2 x_2 y_2 + 3 x_3 y_3$

$\phi_2 : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $\phi_2 (x,y) = x_1 y_1 + 2 x_2 y_2 + 3 (x_2 + x_3)(y_2 + y_3)$

$\phi_3 : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $\phi_3 (x,y) = 2 x_1 y_1 + 5 x_2 y_2 + 5 x_3 y_3 - x_2 y_3 - x_3 y_2$

$\phi_4 : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $\phi_4 (x,y) = (x_1 - 2 x_2)(y_1 - 2 y_2) + x_2 y_2 + (x_2 + x_3)(y_2 + y_3)$

1. Vérifier que les applications ϕ_i ($i = 1, 2, 3, 4$) définissent des produits scalaires.
2. Dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, calculer la matrice A_{Φ_i} associée à ces produits scalaires.
3. On considère les deux applications suivantes :

$\psi_1 : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $\psi_1 (x,y) = \phi_2 (x,y) + \phi_3 (x,y) + \phi_4 (x,y)$

$\psi_2 : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $\psi_2 (x,y) = ln\,(0,5)\, \phi_1 (x,y)$

Montrer que les applications ψ_i ($i = 1, 2$) sont des formes bilinéaires.

4. Vérifier si les applications ψ_i ($i = 1, 2$) définissent des produits scalaires.

SOLUTION.

1°/ Produits scalaires.

Un ***produit scalaire*** est une application :

— symétrique : $f(y,x) = f(x,y)$

— bilinéaire : $f(x + x',y) = f(x,y) + f(x',y)$

$f(\lambda x,y) = \lambda f(x,y)$.

— positive : $f(x,x) \geq 0$

— non dégénérée : $f(x,x) = 0 \Rightarrow x = 0$

1.1. Application ϕ_1 .

$\phi_1 (y,x) = y_1 x_1 + 2 y_2 x_2 + 3 y_3 x_3$

$= x_1 y_1 + 2 x_2 y_2 + 3 x_3 y_3$

$= \phi_1 (x,y)$

L'aplication ϕ_1 est donc symétrique.

$\phi_1 (x + x',y) = (x_1 + x'_1) y_1 + 2 (x_2 + x'_2) y_2 + 3 (x_3 + x'_3) y_3$

$= x_1 y_1 + 2 x_2 y_2 + 3 x_3 y_3 + x'_1 y_1 + 2 x'_2 y_2 + 3 x'_3 y_3$

$= \phi_1 (x,y) + \phi_1 (x',y)$

$\phi_1 (\lambda x,y) = \lambda x_1 y_1 + 2 \lambda x_2 y_2 + 3 \lambda x_3 y_3$

$= \lambda (x_1 y_1 + 2 x_2 y_2 + 3 x_3 y_3)$

$= \lambda \phi_1 (x,y)$

L'application ϕ_1 est donc bilinéaire.

$\phi_1 (x,x) = x_1 x_1 + 2 x_2 x_2 + 3 x_3 x_3$

$= x_1^2 + 2 x_2^2 + 3 x_3^2$

≥ 0

L'application ϕ_1 est donc positive.

$\phi_1 (x,x) = 0 \Rightarrow x_1^2 + 2 x_2^2 + 3 x_3^2 = 0$

$\Rightarrow x_1 = x_2 = x_3 = 0$

$\Rightarrow x = (x_1 , x_2 , x_3) = 0$

L'application ϕ_1 est donc non dégénérée. C'est un produit scalaire.

1.2. Application ϕ_2 .

$\phi_2 (y,x) = y_1 x_1 + 2 y_2 x_2 + 3 (y_2 + y_3)(x_2 + x_3)$
$= x_1 y_1 + 2 x_2 y_2 + 3 (x_2 + x_3)(y_2 + y_3)$
$= \phi_2 (x,y)$

L'application ϕ_2 est donc symétrique.

$\phi_2 (x + x',y) = (x_1 + x'_1) y_1 + 2 (x_2 + x'_2) y_2 + 3 ((x_2 + x'_2) + (x_3 + x'_3))(y_2 + y_3)$
$= x_1 y_1 + 2 x_2 y_2 + 3 (x_2 + x_3)(y_2 + y_3) + x'_1 y_1 + 2 x'_2 y_2 + 3 (x'_2 + x'_3)(y_2 + y_3)$
$= \phi_2 (x,y) + \phi_2 (x',y)$

$\phi_2 (\lambda x,y) = \lambda x_1 y_1 + 2 \lambda x_2 y_2 + 3 (\lambda x_2 + \lambda x_3)(y_2 + y_3)$
$= \lambda (x_1 y_1 + 2 x_2 y_2 + 3 (x_2 + x_3)(y_2 + y_3))$
$= \lambda \phi_2 (x,y)$

L'application ϕ_2 est donc bilinéaire.

$\phi_2 (x,x) = x_1 x_1 + 2 x_2 x_2 + 3 (x_2 + x_3)(x_2 + x_3)$
$= x_1^2 + 2 x_2^2 + 3 (x_2 + x_3)^2$
≥ 0

L'application ϕ_2 est donc positive.

$\phi_2 (x,x) = 0 \Rightarrow x_1^2 + 2 x_2^2 + 3 (x_2 + x_3)^2 = 0$
$\Rightarrow x_1 = x_2 = x_3 = 0$
$\Rightarrow x = (x_1 , x_2 , x_3) = 0$

L'application ϕ_2 est donc non dégénérée. C'est un produit scalaire.

1.3. Application ϕ_3 .

$\phi_3 (y,x) = 2 y_1 x_1 + 5 y_2 x_2 + 5 y_3 x_3 - y_2 x_3 - y_3 x_2$
$= 2 x_1 y_1 + 5 x_2 y_2 + 5 x_3 y_3 - x_2 y_3 - x_3 y_2$
$= \phi_3 (x,y)$

L'application ϕ_3 est donc symétrique.

$\phi_3 (x + x',y) = 2 (x_1 + x'_1) y_1 + 5 (x_2 + x'_2) y_2 + 5 (x_3 + x'_3) y_3 - (x_2 + x'_2) y_3 - (x_3 + x'_3) y_2$
$= 2 x_1 y_1 + 5 x_2 y_2 + 5 x_3 y_3 - x_2 y_3 - x_3 y_2 + 2 x'_1 y_1 + 5 x'_2 y_2 + 5 x'_3 y_3 - x'_2 y_3 - x'_3 y_2$
$= \phi_3 (x,y) + \phi_3 (x',y)$

$\phi_3 (\lambda x,y) = 2 \lambda x_1 y_1 + 5 \lambda x_2 y_2 + 5 \lambda x_3 y_3 - \lambda x_2 y_3 - \lambda x_3 y_2$
$= \lambda (2 x_1 y_1 + 5 x_2 y_2 + 5 x_3 y_3 - x_2 y_3 - x_3 y_2)$
$= \lambda \phi_3 (x,y)$

L'application ϕ_3 est donc bilinéaire.

$\phi_3 (x,x) = 2 x_1 x_1 + 5 x_2 x_2 + 5 x_3 x_3 - x_2 x_3 - x_3 x_2$
$= 2 x_1^2 + 5 x_2^2 + 5 x_3^2 - 2 x_2 x_3$
$= 2 x_1^2 + (x_2 - x_3)^2 + 4 x_2^2 + 4 x_3^2$
≥ 0

L'application ϕ_3 est donc positive.

$\phi_3 (x,x) = 0 \Rightarrow 2 x_1^2 + (x_2 - x_3)^2 + 4 x_2^2 + 4 x_3^2 = 0$
$\Rightarrow x_1 = x_2 = x_3 = 0$
$\Rightarrow x = (x_1 , x_2 , x_3) = 0$

L'application ϕ_3 est donc non dégénérée. C'est un produit scalaire.

1.4. Application ϕ_4 .

$\phi_4 (y,x) = (y_1 - 2 y_2)(x_1 - 2 x_2) + y_2 x_2 + (y_2 + y_3)(x_2 + x_3)$
$= (x_1 - 2 x_2)(y_1 - 2 y_2) + x_2 y_2 + (x_2 + x_3)(y_2 + y_3)$
$= \phi_4 (x,y)$

L'application ϕ_4 est donc symétrique.

$\phi_4 (x + x',y) = ((x_1 + x'_1) - 2 (x_2 + x'_2))(y_1 - 2 y_2) + (x_2 + x'_2) y_2 + ((x_2 + x'_2) + (x_3 + x'_3))(y_2 + y_3)$
$= (x_1 - 2 x_2)(y_1 - 2 y_2) + x_2 y_2 + (x_2 + x_3)(y_2 + y_3) + (x'_1 - 2 x'_2)(y_1 - 2 y_2) + x'_2 y_2 + (x'_2 + x'_3)(y_2 + y_3)$
$= \phi_4 (x,y) + \phi_4 (x',y)$

$\phi_4 (\lambda x,y) = (\lambda x_1 - 2 \lambda x_2)(y_1 - 2 y_2) + \lambda x_2 y_2 + (\lambda x_2 + \lambda x_3)(y_2 + y_3)$
$= \lambda ((x_1 - 2 x_2)(y_1 - 2 y_2) + x_2 y_2 + (x_2 + x_3)(y_2 + y_3))$
$= \lambda \phi_4 (x,y)$

L'application ϕ_4 est donc bilinéaire.

$\phi_4(x,x) = (x_1 - 2x_2)(x_1 - 2x_2) + x_2 x_2 + (x_2 + x_3)(x_2 + x_3)$
$= (x_1 - 2x_2)^2 + x_2^2 + (x_2 + x_3)^2$
≥ 0

L'application ϕ_4 est donc positive.

$\phi_4(x,x) = 0 \Rightarrow (x_1 - 2x_2)^2 + x_2^2 + (x_2 + x_3)^2 = 0$
$\Rightarrow x_1 = x_2 = x_3 = 0$
$\Rightarrow x = (x_1, x_2, x_3) = 0$

L'application ϕ_4 est donc non dégénérée. C'est un produit scalaire.

2°/ Matrices associées aux produits scalaires.

La ***matrice associée*** à un produit scalaire *f* est la matrice $(f(e_i, e_j))_{i,j}$ ayant pour éléments les produits scalaires des vecteurs de base. Comme *f* est symétrique, la matrice A_f est symétrique.

2.1. Produit scalaire ϕ_1 .

$\phi_1(e_1, e_1) = 1$
$\phi_1(e_1, e_2) = 0$
$\phi_1(e_1, e_3) = 0$
$\phi_1(e_2, e_2) = 2$
$\phi_1(e_2, e_3) = 0$
$\phi_1(e_3, e_3) = 3$

$$A_{\phi_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

2.2. Produit scalaire ϕ_2 .

$\phi_2(e_1, e_1) = 1$
$\phi_2(e_1, e_2) = 0$
$\phi_2(e_1, e_3) = 0$
$\phi_2(e_2, e_2) = 5$
$\phi_2(e_2, e_3) = 3$
$\phi_2(e_3, e_3) = 3$

$$A_{\phi_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

2.3. Produit scalaire ϕ_3 .

$\phi_3(e_1, e_1) = 2$
$\phi_3(e_1, e_2) = 0$
$\phi_3(e_1, e_3) = 0$
$\phi_3(e_2, e_2) = 5$
$\phi_3(e_2, e_3) = -1$
$\phi_3(e_3, e_3) = 5$

$$A_{\phi_3} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

1.2.4. Produit scalaire ϕ_4 .

$\phi_4(e_1, e_1) = 1$
$\phi_4(e_1, e_2) = -2$

$\phi_4 (e_1 , e_3)$ = 0
$\phi_4 (e_2 , e_2)$ = 6
$\phi_4 (e_2 , e_3)$ = 1
$\phi_4 (e_3 , e_3)$ = 1

$$A_{\phi_4} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1.2.5. Remarque importante : formule de changement de base.

Si A_ϕ est la matrice d'un produit scalaire ϕ dans une base $\{a\}$, si $[x , \{a\}]$ et $[y , \{a\}]$ sont les matrices-colonnes des composantes des vecteurs x et y dans la base $\{a\}$, le produit scalaire $\phi (x,y)$ s'exprime par :

$$\boxed{\phi (x,y) = [x , \{a\}]^t \ A_\phi [y , \{a\}]}$$

en identifiant une matrice réelle à une ligne et une colonne avec un nombre réel. En particulier, si l'on change de base, par une matrice de changement de base $[id_E , \{b\}, \{a\}]$, les composantes des vecteurs sont changées par :

$$[x , \{a\}] = [id_E , \{b\}, \{a\}][x , \{b\}] \text{ et } [y , \{a\}] = [id_E , \{b\}, \{a\}][y , \{b\}]$$

et la formule précédente devient :

$$\phi (x,y) = ([id_E , \{b\}, \{a\}][x , \{b\}])^t \ A_\phi ([id_E , \{b\}, \{a\}][y , \{b\}])$$

$$\phi (x,y) = [x , \{a\}]^t \ ([id_E , \{b\}, \{a\}]^t A_\phi [id_E , \{b\}, \{a\}]) [y , \{b\}]$$

et cette formule, valable quels que soient x et y, montre que la matrice du produit scalaire ϕ dans la base $\{b\}$ est :

$$\boxed{B_\phi = [id_E , \{b\}, \{a\}]^t A_\phi [id_E , \{b\}, \{a\}]}$$

C'est la formule de changement de base pour une matrice de produit scalaire. On a :

$$\boxed{\phi (x,y) = [x , \{a\}]^t \ A_\phi [y , \{a\}] = [x , \{b\}]^t \ B_\phi [y , \{b\}]}$$

3°/ Formes bilinéaires.

3.1. Forme ψ_1.

$\psi_1 = \phi_2 + \phi_3 + \phi_4$ est somme de formes bilinéaires symétrique : c'est une forme bilinéaire symétrique.

3.2. Forme ψ_2.

$\psi_2 = ln\ (0,5)\ \phi_1$ est produit d'une forme bilinéaire symétrique par un scalaire: c'est une forme bilinéaire symétrique.

Les formes bilinéaires forment un espace vectoriel, les formes bilinéaires symétriques forment un sous-espace vectoriel de cet espace vectoriel.

4°/ Produits scalaires définis par ψ_1 et ψ_2.

4.1. Forme ψ_1.

$\psi_1 (x,x) = \phi_2 (x,x) + \phi_3 (x,x) + \phi_4 (x,x)$ est somme de nombres positifs, c'est un nombre positif, ψ_1 est une forme positive.
$\psi_1 (x,x) = 0 \Rightarrow \phi_2 (x,x) + \phi_3 (x,x) + \phi_4 (x,x) = 0 \Rightarrow \phi_2 (x,x) = \phi_3 (x,x) = \phi_4 (x,x) = 0 \Rightarrow x = 0$
ψ_1 est une forme non dégénérée : c'est un produit scalaire.

$$A_{\psi_1} = A_{\phi_2} + A_{\phi_3} + A_{\phi_4} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 3 \\ 0 & 3 & 11 \end{pmatrix}$$

4.2. Forme ψ_2.

$\psi_2(x,x) = ln(0,5)\,\phi_1(x,x) = -ln\,2\,\phi_1(x,x)$ est un nombre négatif, ψ_2 n'est pas une forme positive.
$\psi_2(x,x) = 0 \Rightarrow -ln\,2\,\phi_1(x,x) = 0 \Rightarrow \phi_1(x,x) = 0 \Rightarrow x = 0$
ψ_2 est une forme non dégénérée, ce n'est pas un produit scalaire puisqu'elle est négative, mais $-\psi_2$ est un produit scalaire.

$$A_{\psi_2} = -ln\,2\,A_{\phi_1} = -ln\,2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

EXERCICE 2.

On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Déterminer, parmi les matrices ci-dessus, celles qui sont associées à des produits scalaires.

SOLUTION.

Remarques préliminaires.

A quoi reconnaît-on la ***matrice A_ϕ d'un produit scalaire ϕ***?

Par définition, les éléments de la matrice A_ϕ d'un produit scalaire ϕ dans une base $\{a\}$ sont les produits scalaires des vecteurs de base : $A_\phi = (\phi(a_i , a_j))_{i,j}$.

ϕ est symétrique $\Longrightarrow$ $\phi(a_i , a_j) = \phi(a_j , a_i) \Longrightarrow$ la matrice A_ϕ est symétrique.

ϕ est positive $\Longrightarrow \phi(a_i , a_i) \geqslant 0 \Longrightarrow$ les éléments de la diagonale principale de A_ϕ sont $\geqslant 0$.

ϕ est non dégénérée $\Longrightarrow \phi(a_i , a_i) > 0 \Longrightarrow$ les éléments de la diagonale principale de A_ϕ sont > 0.

De plus, soit x un vecteur tel que $A_\phi\, x = 0$. On a alors $x^t\, A_\phi\, x = 0$, donc $\phi\,(x,x) = 0$ et $x = 0$. Ceci montre que l'endomorphisme de matrice A_ϕ est injectif, son noyau est réduit à 0. Son déterminant est donc différent de 0.

ϕ est non dégénérée $\Longrightarrow$ *Dét* $A_\phi \neq 0$.

De plus, soit λ une valeur propre de la matrice A_ϕ et x un vecteur propre pour la valeur propre λ. On a $\lambda \neq 0$ et $x \neq 0$; $\phi\,(x,x) = x^t\, A_\phi\, x = x^t\, (\lambda x) = \lambda\, x^t\, x = \lambda\, (\Sigma_i\ x_i{}^2) > 0 \Longrightarrow \lambda > 0$. Toutes les valeurs propres de A_ϕ sont réelles et strictement positives. Leur produit, qui est le déterminant de A_ϕ est donc aussi réel strictement positif.

En résumé :

> Si A_ϕ est la matrice d'un produit scalaire ϕ dans une base $\{a\}$:
>
> 1. La matrice est symétrique ;
> 2. Les éléments de la diagonale principale sont > 0 ;
> 3. Le déterminant est > 0 ;
> 4. Toutes les valeurs propres sont réelles > 0.

Les conditions nécessaires 1 et 4 sont en réalité suffisantes : toute matrice réelle symétrique dont les valeurs propres sont réelles et >0 définit un produit scalaire. Le démontrer sortirait du cadre de cet exercice. La démonstration repose sur le fait que toute matrice réelle symétrique de dimension finie est diagonalisable dans une base propre, orthogonale pour le produit scalaire canonique.

1°/ Matrice *A*.

La matrice *A* n'est pas symétrique : ce n'est pas la matrice d'un produit scalaire.

2°/ Matrice *B*.

La matrice *B* est symétrique, mais n'a pas sur sa diagonale que des nombres positifs : ce n'est pas la matrice d'un produit scalaire.

3°/ Matrice *C*.

La matrice *C* est symétrique et a des éléments positifs sur sa diagonale. Son déterminant est nul : ce n'est pas la matrice d'un produit scalaire.

4°/ Matrice *D*.

La matrice *D* n’est pas symétrique : ce n’est pas la matrice d’un produit scalaire.

5°/ Matrice *E*.

La matrice *E* est symétrique, n’a que des éléments positifs sur la diagonale, mais son déterminant est nul : ce n’est pas la matrice d’un produit scalaire.

6°/ Matrice *F*.

La matrice *F* est symétrique, n’a que des éléments positifs sur la diagonale, son déterminant est – 4, il n’est pas strictement plus grand que 0. La matrice *F* ne définit donc pas un produit scalaire.

EXERCICE 3.

1. Pour quels produits scalaires de l'Exercice 1, la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est-elle normée ?
2. Pour quels produits scalaires de l'Exercice 1, la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est-elle orthogonale ?
3. Pour quels produits scalaires de l'Exercice 1, la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est-elle orthonormée ?
4. Donner une base de R^3, puis orthonormaliser cette base pour chacun des produits scalaires de l'Exercice 1.

SOLUTION.

1°/ Base normée.

La base est ***normée*** si la norme de chaque vecteur de base est 1, donc si les éléments de la diagonale de la matrice du produit scalaire sont tous égaux à 1.
La question 2 et la question 4 de l'Exercice 1 montrent que la base canonique n'est normée pour aucun des produits scalaires ϕ_1 , ϕ_2 , ϕ_3 , ϕ_4 , ψ_1 de cet exercice.

2°/ Base orthogonale.

La base est ***orthogonale*** si le produit scalaire de deux vecteurs de base différents est 0, donc si les éléments hors de la diagonale de la matrice du produit scalaire sont tous égaux à 0.
La question 2 et la question 4 de l'Exercice 1 montrent que la base canonique est orthogonale seulement pour le produit scalaire ϕ_1 .

3°/ Base orthonormée.

La base est ***orthonormée*** si elle est à la fois normée et orthogonale, donc si la matrice du produit scalaire est la matrice unité.
La question 2 et la question 4 de l'Exercice 1 montrent que la base canonique n'est orthonormée pour aucun des produits scalaires ϕ_1 , ϕ_2 , ϕ_3 , ϕ_4 , ψ_1 de cet exercice.

4°/ Orthonormalisation.

Remarques.

— Lorsqu'on connaît une base orthogonale, on peut la normer de façon évidente en divisant chaque vecteur de base par sa norme.
— La matrice d'un produit scalaire étant symétrique, positive, non dégénérée, il existe une base orthogonale formée de vecteurs propres.
— On peut toujours construire une base orthonormée pour un produit scalaire : il suffit de prendre la base normée correspondant à une base de vecteurs propres.

Procédure d'orthogonalisation d'Hilbert-Schmidt.

Partons, par exemple, de la ***base canonique*** de R^3. On construit une base orthogonale de la façon suivante.

$$b_1 = e_1$$

$$b_2 = e_2 - \frac{\phi(e_2, b_1)}{\phi(b_1, b_1)} b_1$$

On a bien $\phi(b_2 , b_1) = \phi(e_2 , b_1) - \frac{\phi(e_2, b_1)}{\phi(b_1, b_1)} \phi(b_1 , b_1) = 0$

$$b_3 = e_3 - \frac{\phi(e_3, b_1)}{\phi(b_1, b_1)} b_1 - \frac{\phi(e_3, b_2)}{\phi(b_2, b_2)} b_2$$

On a bien $\phi(b_3 , b_1) = \phi(e_3 , b_1) - \frac{\phi(e_3, b_1)}{\phi(b_1, b_1)} \phi(b_1 , b_1) - \frac{\phi(e_3, b_2)}{\phi(b_2, b_2)} \phi(b_2 , b_1) = 0$

$$\phi(b_3, b_2) = \phi(e_3, b_2) - \frac{\phi(e_3,b_1)}{\phi(b_1,b_1)}\,\phi(b_1, b_2) - \frac{\phi(e_3,b_2)}{\phi(b_2,b_2)}\,\phi(b_2, b_2) = 0$$

On peut continuer ainsi, de proche en proche, la formule de définition par récurrence étant :

$$b_p = e_p - \frac{\phi(e_p,b_1)}{\phi(b_1,b_1)}\,b_1 - \ldots - \frac{\phi(e_p,b_{p-1})}{\phi(b_{p-1},b_{p-1})}\,b_{p-1}$$

Applications.

— Produit scalaire ϕ_1.

$b_1 = e_1$
$b_2 = e_2 - 0\,e_1 = e_2$
$b_3 = e_3 - 0\,e_1 - 0\,e_2 = e_3$

On obtient la base orthogonale $\{e_1, e_2, e_3\}$. Pour avoir une base orthonormée, il suffit de diviser chaque vecteur par sa norme.

La base $\left\{ e_1, \frac{e_2}{\sqrt{2}}, \frac{e_3}{\sqrt{3}} \right\}$ est orthonormée pour le produit scalaire ϕ_1.

— Produit scalaire ϕ_2.

$b_1 = e_1$
$b_2 = e_2 - 0\,e_1 = e_2$
$b_3 = e_3 - 0\,e_1 - \frac{3}{5}\,e_2 = e_3 - \frac{3}{5}\,e_2$

On obtient la base orthogonale $\{ e_1, e_2, e_3 - \frac{3}{5}\,e_2 \}$. Pour avoir une base orthonormée, il suffit de diviser chaque vecteur de cette base par sa norme :

$\| e_1 \| = 1$; $\| e_2 \| = \sqrt{5}$; $\| e_3 - \frac{3}{5}\,e_2 \|^2 = \| e_3 \|^2 + \frac{9}{25}\,\| e_2 \|^2 - \frac{6}{5}\,\phi_2(e_2, e_3) = \frac{25\times3+9\times5-6\times5\times3}{25} = \frac{6}{5}$

$\sqrt{\frac{5}{6}}(e_3 - \frac{3}{5}\,e_2) = \sqrt{\frac{5}{6}}e_3 - \frac{3}{5}\sqrt{\frac{5}{6}}\,e_2 = \sqrt{\frac{5}{6}}e_3 - \sqrt{\frac{3}{10}}\,e_2$

La base $\left\{ e_1, \frac{e_2}{\sqrt{5}}, \sqrt{\frac{5}{6}}\,e_3 - \sqrt{\frac{3}{10}}\,e_2 \right\}$ est orthonormée pour le produit scalaire ϕ_2.

— Produit scalaire ϕ_3.

$b_1 = e_1$
$b_2 = e_2 - 0\,e_1 = e_2$
$b_3 = e_3 - 0\,e_1 + \frac{1}{5}\,e_2 = \frac{1}{5}\,(5\,e_3 + e_2)$

$\| b_1 \| = \| e_1 \| = \sqrt{2}$; $\| b_2 \| = \| e_2 \| = \sqrt{5}$; $\| b_3 \|^2 = \frac{1}{25}\,\| 5\,e_3 + e_2 \|^2 = \frac{1}{25}\,(25\times5 + 5 - 10) = \frac{24}{5}$

La base $\left\{ \frac{e_1}{\sqrt{2}}, \frac{e_2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{6}}\,(e_3 + \frac{1}{5}\,e_2) \right\}$ est orthonormée pour le produit scalaire ϕ_3.

— Produit scalaire ϕ_4.

$b_1 = e_1$
$\| b_1 \|^2 = \| e_1 \|^2 = 1 \Rightarrow \| b_1 \| = 1.$
$b_2 = e_2 + 2\,e_1$
$\| b_2 \|^2 = \| e_2 + 2\,e_1 \|^2 = \| e_2 \|^2 + 4\,\| e_1 \|^2 + 4\,\phi_4(e_1, e_2) = 6 + 4 - 8 = 2 \Rightarrow \| b_2 \| = \sqrt{2}$

$b_3 = e_3 - 0\, e_1 - \frac{1}{2}\, \phi_4 (e_3 , e_2 + 2\, e_1)\, (e_2 + 2\, e_1) = e_3 - \frac{1}{2}(1 + 2 \times(-2))(e_2 + 2\, e_1) = 3\, e_1 + \frac{3}{2}\, e_2 + e_3$

$\| b_3 \|^2 = 9 \times 1 + \frac{9}{4} \times 6 + 1 + 9 \times (-2) + 6 \times 0 + 3 \times 1 = \frac{27}{2} + 9 + 1 - 18 + 3 = \frac{17}{2}$

La base $\left\{ e_1 , \frac{1}{\sqrt{2}}\, (e_2 + 2\, e_1) , \sqrt{\frac{2}{17}}(3\, e_1 + \frac{3}{2}\, e_2 + e_3) \right\}$ est orthonormée pour le produit scalaire ϕ_4.

Remarque.

Dans une base orthonormée pour le produit scalaire ϕ, la matrice du produit scalaire ϕ est toujours la matrice unité !

EXERCICE 4.

1. Donner un produit scalaire dans R^5. Expliciter la norme associée.
2. Minimiser en λ les quantités :

$$\left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|, \quad \left\| \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\|, \quad \left\| \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\|$$

3. Donner une interprétation géométrique.

SOLUTION.

1°/ Produit scalaire dans R^5.

Nous pouvons prendre pour produit scalaire dans R^5 le ***produit scalaire canonique***, défini par :

$$\phi\,(x,y) = x_1\,y_1 + x_2\,y_2 + x_3\,y_3 + x_4\,y_4 + x_5\,y_5\ .$$

C'est évidemment une forme bilinéaire, symétrique, positive, non dégénérée. Sa matrice dans la base canonique est la matrice unité. La norme associée est définie par :

$$\| x \|^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2$$

$$\| x \| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2}$$

2°/ Minimum de la norme de $x - \lambda u$.

Soit x et u deux vecteurs de R^5, λ un scalaire (nombre réel).
Le carré de la norme du vecteur $x - \lambda u$ est défini par :

$$\| x - \lambda u \|^2 = \phi\,(x - \lambda u, x - \lambda u) = \phi\,(x,x) + \lambda^2\,\phi\,(u,u) - 2\,\lambda\,\phi\,(x,u) = \lambda^2 \| u \|^2 - 2\,\lambda\,\phi\,(x,u) + \| x \|^2$$

C'est une fonction réelle de la variable réelle λ. Cette fonction est un polynôme de degré 2, dont le terme de plus haut degré a un coefficient positif. Le polynôme est donc minimum pour la valeur de λ qui annule la dérivée :

$$\frac{d\left(\lambda^2 \|u\|^2 - 2\,\lambda\,\Phi(x,u) + \|x\|^2\right)}{d\lambda} = 0 \quad \hat{e} \quad \ddot{e} \quad 2\,[\,\lambda \| u \|^2 - \phi\,(x,u)] = 0 \quad \hat{e} \quad \ddot{e} \quad \lambda = \frac{\Phi(x,u)}{\|u\|^2} = \frac{\Phi(x,u)}{\Phi(u,u)}$$

Pour cette valeur de λ, la valeur minimum du polynôme est

$$Min\ (\ \| x - \lambda u \|^2\ ) = \left(\frac{\Phi(x,u)}{\Phi(u,u)} \right)^2 \| u \|^2 - 2\,\frac{\Phi(x,u)}{\Phi(u,u)}\,\phi\,(x,u) + \| x \|^2 = \phi\,(x,x) - \frac{\left(\Phi(x,u)\right)^2}{\Phi(u,u)}$$

Le résultat est donc le suivant :

$\| x - \lambda u \|$ est minimum lorsque $\lambda = \dfrac{\Phi(x,u)}{\Phi(u,u)}$.

Pour cette valeur de λ, $\| x - \lambda u \| = \sqrt{\Phi(x,x) - \dfrac{\left(\Phi(x,u)\right)^2}{\Phi(u,u)}}$

3°/ Interprétation géométrique.

$\phi\,(x,x) - \dfrac{\left(\Phi(x,u)\right)^2}{\Phi(u,u)}$ est le produit scalaire de x par le vecteur $x - \dfrac{\Phi(x,u)}{\Phi(u,u)}\,u = x - \lambda\,u$:

$$\phi\left(x - \frac{\Phi(x,u)}{\Phi(u,u)}\, u, x - \frac{\Phi(x,u)}{\Phi(u,u)}\, u \right) = \phi\left(x, x - \frac{\Phi(x,u)}{\Phi(u,u)}\, u \right)$$

d'où il résulte :

$$\phi\left(\frac{\Phi(x,u)}{\Phi(u,u)}\, u, x - \frac{\Phi(x,u)}{\Phi(u,u)}\, u \right) = 0$$

Le vecteur $x - \frac{\Phi(x,u)}{\Phi(u,u)}\, u$ est ϕ-orthogonal à u.

A tout vecteur $x \in E$, on peut faire correspondre le vecteur $\frac{\Phi(x,u)}{\Phi(u,u)}\, u \in \mathbb{R}\, u$. Comme ϕ est une application bilinéaire, l'application $x \mapsto \frac{\Phi(x,u)}{\Phi(u,u)}\, u$ est linéaire. Cette application est appelée le *projecteur* ϕ-*orthogonal* de E sur le sous-espace vectoriel $\mathbb{R}\, u$. Le vecteur $\frac{\Phi(x,u)}{\Phi(u,u)}\, u$ s'appelle la *projection* ϕ-*orthogonale* de x sur u.. Il vérifie le *théorème de Pythagore* :

$$\boxed{\| x \|^2 = \left\| \frac{\Phi(x,u)}{\Phi(u,u)}\, u \right\|^2 + \left\| x - \frac{\Phi(x,u)}{\Phi(u,u)}\, u \right\|^2}$$

On peut dire aussi que le minimum de $\| x - \lambda\, u \|$ est la « *distance* » du point défini par le vecteur x à la droite définie par le vecteur u.

4°/ Applications numériques.

4.1.

$x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\| x \|^2 = \phi(x,x) = 2$; $\| u \|^2 = \phi(u,u) = 5$; $\phi(x,u) = 0$.

Les vecteurs x et u sont ϕ-orthogonaux, la projection ϕ-orthogonale $\frac{\Phi(x,u)}{\Phi(u,u)}\, u$ de x sur u est nulle,

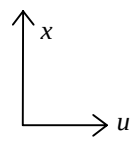
$$\boxed{Min\,(\| x - \lambda\, u \|) = \| x \| = \sqrt{2}\,.}$$

4.2.

$x = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$; $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\| x \|^2 = \phi(x,x) = 27$; $\| u \|^2 = \phi(u,u) = 19$; $\phi(x,u) = 0$.

Les vecteurs x et u sont ϕ-orthogonaux, la projection ϕ-orthogonale $\frac{\Phi(x,u)}{\Phi(u,u)}\, u$ de x sur u est nulle,

$$\boxed{Min\,(\| x - \lambda\, u \|) = \| x \| = 3\sqrt{3}\,.}$$



4.3.

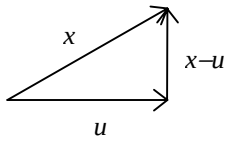
$x = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$; $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\| x \|^2 = \phi(x,x) = 46$; $\| u \|^2 = \phi(u,u) = 19$; $\phi(x,u) = 19 = \phi(u,u)$; $\phi(u, x-u) = 0$.

La projection ϕ-orthogonale de x sur u est :

$$\frac{\Phi(x,u)}{\Phi(u,u)}\, u = u$$

$\lambda_x = \frac{\Phi(x,u)}{\Phi(u,u)} = 1$; $x - \lambda_x u = x - u = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$; $\| x - \lambda_x u \|^2 = = \| x - u \|^2 = \phi(x-u, x-u) = 27 = \| x \|^2 - \| u \|^2$

$$Min\,(\| x - \lambda u \|) = \| x - u \| = 3\sqrt{3}.$$



EXERCICE 5.

Soient x et y deux vecteurs d'un espace vectoriel E muni d'un produit scalaire ϕ.

1. Montrer les deux équivalences suivantes :

$$\| x + y \|^2_\phi = \| x \|^2_\phi + \| y \|^2_\phi \quad \Leftrightarrow \quad (x,y)_\phi = 0$$
$$\| x - y \|^2_\phi = \| x \|^2_\phi + \| y \|^2_\phi \quad \Leftrightarrow \quad (x,y)_\phi = 0$$

2. Etablir des équivalences analogues pour plus de deux vecteurs.

SOLUTION.

1°/ Théorème de Pythagore.

1.1. Somme de vecteurs.

$$\| x + y \|^2_\phi = (x + y, x + y)_\phi = (x,x)_\phi + (y,y)_\phi + 2\,(x,y)_\phi = \| x \|^2_\phi + \| y \|^2_\phi + 2\,(x,y)_\phi$$

donc :

$$\| x + y \|^2_\phi = \| x \|^2_\phi + \| y \|^2_\phi \quad \Leftrightarrow \quad (x,y)_\phi = 0$$

1.2. Différence de vecteurs.

$$\| x - y \|^2_\phi = (x - y, x - y)_\phi = (x,x)_\phi + (y,y)_\phi - 2\,(x,y)_\phi = \| x \|^2_\phi + \| y \|^2_\phi - 2\,(x,y)_\phi$$

donc :

$$\| x - y \|^2_\phi = \| x \|^2_\phi + \| y \|^2_\phi \quad \Leftrightarrow \quad (x,y)_\phi = 0$$

2°/ Généralisation.

$$\| \sum_{i=1}^{i=n} x_i \|_\phi^2 = (\sum_{i=1}^{i=n} x_i \, , \sum_{i=1}^{i=n} x_i \,)_\phi = \sum_{i=1}^{i=n} \| x_i \|^2 + 2 \sum_{1 \le i < j \le n} (x_i , x_j)_\phi$$

donc :

$$\| \sum_{i=1}^{i=n} x_i \|_\phi^2 = \sum_{i=1}^{i=n} \| x_i \|^2 \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{1 \le i < j \le n} (x_i , x_j)_\phi = 0$$

EXERCICE 6.

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ est rapporté à sa base canonique. On considère le produit scalaire ϕ, la matrice X, et le vecteur u suivants :

$$\phi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$
$$(x,y) \mapsto x_1 y_1 + 2 x_2 y_2 + 3 x_3 y_3$$

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad u = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculer la matrice A_ϕ associée au produit scalaire ϕ.
2. On note respectivement x_1 , x_2 , x_3 les trois vecteurs lignes de X. On note C la matrice :

$$C = \begin{pmatrix} (x_1,x_1)_\phi & (x_1,x_2)_\phi & (x_1,x_3)_\phi \\ (x_2,x_1)_\phi & (x_2,x_2)_\phi & (x_2,x_3)_\phi \\ (x_3,x_1)_\phi & (x_3,x_2)_\phi & (x_3,x_3)_\phi \end{pmatrix}$$

Calculer la matrice C, le rang de la matrice C, le rang de la matrice X, et le vecteur $X\, A_\phi\, u$.
3. La matrice C est-elle associée à un produit scalaire ?
4. Exprimer la matrice C en fonction des deux matrices X et A_ϕ.
5. Minimiser chacune des quantités suivantes :

$$\| x_i - \lambda u \|_\phi \qquad (i = 1, 2, 3)$$

6. Exprimer $X\, A_\phi\, u$ en fonction de x_1 , x_2 , x_3 , u et A_ϕ .
7. Donner une interprétation géométrique.
8. Exprimer $C\, u$ en fonction des colonnes de X et du vecteur u.

SOLUTION.

1°/ Matrice associée au produit scalaire.

La matrice A_ϕ a pour élément de la i-ème ligne dans la j-ème colonne, le produit scalaire $(e_i , e_j)_\phi = (e_j , e_i)_\phi$.
On a $(e_1 , e_1)_\phi = 1$, $(e_2 , e_2)_\phi = 2$, $(e_3 , e_3)_\phi = 3$, $(e_i , e_j)_\phi = 0$ pour $i \neq j$. D'où :

$$A_\phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

2°/ Matrices et dualité.

2.1. Matrice *C*.

$$x_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} ; \; x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} ; \; x_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(x_1 , x_1)_\phi = (2 \;\; 3 \;\; 1) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 1\times2\times2 + 2\times3\times3 + 3\times1\times1 = 25$$

$$(x_1\,,\,x_2\,)_\phi = (2\ \ 3\ \ 1)\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix} = 1\times2\times0 + 2\times3\times(-1) + 3\times1\times1 = -3$$

$$(x_1\,,\,x_3\,)_\phi = (2\ \ 3\ \ 1)\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\4\\0\end{pmatrix} = 1\times2\times1 + 2\times3\times4 + 3\times1\times0 = 26$$

$$(x_2\,,\,x_2\,)_\phi = (0\ \ -1\ \ 1)\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix} = 1\times0\times0 + 2\times(-1)\times(-1) + 3\times1\times1 = 5$$

$$(x_2\,,\,x_3\,)_\phi = (0\ \ -1\ \ 1)\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\4\\0\end{pmatrix} = 1\times0\times1 + 2\times(-1)\times4 + 3\times1\times0 = -8$$

$$(x_3\,,\,x_3\,)_\phi = (1\ \ 4\ \ 0)\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\4\\0\end{pmatrix} = 1\times1\times1 + 2\times4\times4 + 3\times0\times0 = 33$$

$$C = \begin{pmatrix}(x_1,x_1)_\phi & (x_1,x_2)_\phi & (x_1,x_3)_\phi\\(x_2,x_1)_\phi & (x_2,x_2)_\phi & (x_2,x_3)_\phi\\(x_3,x_1)_\phi & (x_3,x_2)_\phi & (x_3,x_3)_\phi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}25&-3&26\\-3&5&-8\\26&-8&33\end{pmatrix}$$

$$\boxed{C = \begin{pmatrix}25&-3&26\\-3&5&-8\\26&-8&33\end{pmatrix}}$$

2.2. Rang de la matrice *C*.

Le déterminant de la matrice *C* vaut 96, il n'est pas nul, la matrice *C* est de rang 3.

$$\boxed{Dét\ (C) = 96 \Rightarrow rg\ (C) = 3.}$$

Le déterminant de la matrice *X* est –4, donc la matrice *X* est de rang 3.

$$\boxed{Dét\ (X) = -4 \Rightarrow rg\ (X) = 3.}$$

$$X\,u = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}2&3&1\\0&-1&1\\1&4&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-1\\1\\-3\end{pmatrix}.$$

$$X\,A_\phi\,u = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}2&3&1\\0&-1&1\\1&4&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-4\\2\\-7\end{pmatrix}.$$

3°/ Matrice *C* et produit scalaire.

Par définition de la matrice d'un produit scalaire, la matrice $C = \begin{pmatrix} 25 & -3 & 26 \\ -3 & 5 & -8 \\ 26 & -8 & 33 \end{pmatrix}$ est la matrice du produit scalaire ϕ quand on rapporte l'espace à la base $\{x_1 , x_2 , x_3 \}$, puisque ses éléments sont les produits scalaires des vecteurs de base. *C* est symétrique, tous les éléments de la diagonale sont strictement positifs. Le déterminant de *C* est strictement positif. Pour $v = v_1 x_1 + v_2 x_2 + v_3 x_3$ et $w = w_1 x_1 + w_2 x_2 + w_3 x_3$, on a :

$$(v,w)_\phi = (v_1 \ v_2 \ v_3) \begin{pmatrix} 25 & -3 & 26 \\ -3 & 5 & -8 \\ 26 & -8 & 33 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = (v_1 \ v_2 \ v_3) \begin{pmatrix} 25 \ w_1 & -3 \ w_2 & +26 \ w_3 \\ -3 \ w_1 & +5 \ w_2 & -8 \ w_3 \\ 26 \ w_1 & -8 \ w_2 & +33 \ w_3 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{(v,w)_\phi = 25\, v_1 w_1 - 3\,(v_1 w_2 + v_2 w_1) + 26\,(v_1 w_3 + v_3 w_1) + 5\, v_2 w_2 - 8\,(v_2 w_3 + v_3 w_2) + 33\, v_3 w_3}$$

4°/ Matrices *C, X* et A_ϕ.

On peut vérifier à la machine l'égalité :

$$\begin{pmatrix} 25 & -3 & 26 \\ -3 & 5 & -8 \\ 26 & -8 & 33 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

soit :

$$\boxed{C = X\, A_\phi\, X^t}$$

La matrice X^t est la matrice du changement de base : $X^t = [id_E \ , \{x\},\{e\}]$. La formule précédente n'est autre que la formule du changement de base pour un produit scalaire :

$$\boxed{[\,\phi\,, \{x\},\{x\}] = [id_E \ , \{x\},\{e\}]^t \ [\,\phi\,, \{e\},\{e\}]\,[id_E \ , \{x\},\{e\}]}$$

Pour un vecteur *v*, les composantes de *v* sur la base canonique $\{e\}$ forment une matrice $[v,\{e\}]$ à une colonne et trois lignes. Les composantes de *v* sur la base $\{x\}$ forment une matrice $[v,\{x\}]$ donnée par :

$$[v,\{e\}] = [id_E \ , \{x\},\{e\}]\,[v,\{x\}] = X^t\,[v,\{x\}]$$

$$[v,\{x\}] = [id_E \ , \{e\},\{x\}][v,\{e\}] = [id_E \ , \{x\},\{e\}]^{-1}\,[v,\{e\}]$$

La puissance −1 traduit le fait que les composantes de *v* sont, comme on dit, des composantes « contravariantes ». Elles varient en sens inverse de la matrice du changement de base.

Pour deux vecteurs *v* et *w*, le produit scalaire $\phi\,(v,w)$ s'écrit, indifféremment :

$$\phi\,(v,w) = [v,\{x\}]^t \ C\,[w,\{x\}] = [v,\{x\}]^t \ X\, A_\phi\, X^t\,[w,\{x\}] = (X^t\,[v,\{x\}])^t \ A_\phi\,(X^t\,[w,\{x\}]) = [v,\{e\}]^t\, A_\phi\,[w,\{e\}]$$

On peut se poser la question de savoir si la matrice *C* définit un produit scalaire relativement à la base canonique. Comme la matrice *C* est symétrique, la forme bilinéaire :

$$(v,w) \mapsto [v,\{e\}]^t\, C\,[w,\{e\}]$$

est symétrique. On a :

$$[v,\{e\}]^t\, C\,[w,\{e\}] = [v,\{e\}]^t\, X\, A_\phi\, X^t\,[w,\{e\}] = (X^t\,[v,\{e\}])^t \ A_\phi\,(X^t\,[w,\{e\}]) = \phi\,(X^t\, v, X^t\, w)$$

et comme la matrice X^t définit un isomorphisme, on voit bien que la forme bilinéaire symétrique définie par la matrice *C* dans la base canonique est positive et non dégénérée : la matrice *C* définit donc un produit scalaire relativement à la base canonique.Si l'on note ψ ce produit scalaire, on a :

$$\boxed{\psi\,(v,w) = \phi\,(X^t\, v, X^t\, w)}$$

5°/ Projection orthogonale des vecteurs x_i sur u.

Minimiser chacune des quantités suivantes :

$$\| x_i - \lambda u \|_\phi \qquad (i = 1, 2, 3)$$

c'est choisir, pour chaque i, une valeur λ_i telle que la norme pour ϕ du vecteur $x_i - \lambda_i u$ soit la plus petite possible : cette valeur annule la dérivée de $\| x_i - \lambda u \|_\phi$, ou la dérivée de $\| x_i - \lambda u \|_\phi^2$.

$$\| x_i - \lambda u \|_\phi^2 = \lambda^2 \| u \|_\phi^2 - 2 \lambda (x_i , u)_\phi + \| x_i \|_\phi^2$$

$$2 \| x_i - \lambda u \|_\phi \frac{d\left(\left\| x_i - \lambda u \right\|_\phi\right)}{d\lambda} = 2 (\lambda \| u \|_\phi^2 - (x_i , u)_\phi)$$

La dérivée $\dfrac{d\left(\left\| x_i - \lambda u \right\|_\phi\right)}{d\lambda}$ est nulle pour

$$\boxed{\lambda_i = \frac{\left(x_i , u\right)_\phi}{\left\|u\right\|_\phi^2} = \frac{\Phi\left(x_i , u\right)}{\Phi\left(u,u\right)}}$$

et la valeur correspondante de $\| x_i - \lambda u \|_\phi$ est donnée par :

$$\| x_i - \lambda_i u \|_\phi^2 = \| x_i \|_\phi^2 - \frac{\left(x_i , u\right)_\phi^2}{\left\|u\right\|_\phi^2} = \| x_i \|_\phi^2 - \lambda_i^2 \| u \|_\phi^2$$

$$\boxed{\| x_i - \lambda_i u \|_\phi^2 = \| x_i \|_\phi^2 - \lambda_i^2 \| u \|_\phi^2}$$

Les $\lambda_i u$ sont les projections ϕ-orthogonales des x_i sur le vecteur u et la relation précédente traduit le théorème de Pythagore. $\| x_i - \lambda_i u \|_\phi$ est la distance de x_i au sous-espace $\mathbb{R} u$.

Application :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\left\|u\right\|_\phi^2} \begin{pmatrix} \left(x_1 , u\right)_\phi \\ \left(x_2 , u\right)_\phi \\ \left(x_3 , u\right)_\phi \end{pmatrix} = \frac{1}{\left\|u\right\|_\phi^2} \begin{pmatrix} x_1{}^t A_\phi u \\ x_2{}^t A_\phi u \\ x_3{}^t A_\phi u \end{pmatrix} = \frac{1}{\left\|u\right\|_\phi^2} X A_\phi u$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} \| u \|_\phi^2 = X A_\phi u$$

$$\| u \|_\phi^2 = u^t A_\phi u = 1$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = X A_\phi u = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1{}^2 \\ \lambda_2{}^2 \\ \lambda_3{}^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 16 \\ 4 \\ 49 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} \left\| x_1 \right\|_\phi^2 \\ \left\| x_2 \right\|_\phi^2 \\ \left\| x_3 \right\|_\phi^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 \\ 5 \\ 33 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \left\| x_1 \right\|_\phi^2 \\ \left\| x_2 \right\|_\phi^2 \\ \left\| x_3 \right\|_\phi^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda_1{}^2 \\ \lambda_2{}^2 \\ \lambda_3{}^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 59 \\ 11 \\ 50 \end{pmatrix}$$

Les valeurs minimales des $\| x_i - \lambda u \|_\phi^2$ sont $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 59 \\ 11 \\ 50 \end{pmatrix}$

Ce vecteur donne les carrés des distances des vecteurs x_i au sous-espace vectoriel défini par le vecteur u.

6°/ Expression de $X A_\phi u$.

$$X A_\phi u = \begin{pmatrix} (x_1,u)_\phi \\ (x_2,u)_\phi \\ (x_3,u)_\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1{}^t A_\phi u \\ x_2{}^t A_\phi u \\ x_3{}^t A_\phi u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} \quad u^t A_\phi u = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}$$

7°/ Interprétation géométrique.

Les produits scalaires des vecteurs lignes de la matrice X par un vecteur unitaire u donnent les projections ϕ-orthogonales des vecteurs lignes sur le sous-espace vectoriel engendré par le vecteur u.

8°/ Expression de $C u$.

$$C u = X A_\phi (X^t u)$$

Le produit $C u$ permet donc de calculer les projections orthogonales des vecteurs lignes de X sur le sous-espace vectoriel engendré par le vecteur $X^t u$.

$$\| X^t u \|_\phi^2 = (X^t u)^t A_\phi (X^t u) = u^t X A_\phi X^t u = u^t C u = \| u \|_\psi^2$$

où ψ est le produit scalaire de matrice C dans la base canonique.

$$C u = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{pmatrix} \quad u^t C u = \phi(X^t u, X^t u) \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{pmatrix}$$

Les valeurs de μ_1 , μ_2 , μ_3 minimisent les quantités $\| x_i - \mu X^t u \|_\phi$ et permettent donc de calculer le projeté ϕ-orthogonal des vecteurs x_i sur le sous-espace vectoriel engendré par $X^t u$.

EXERCICE 7.

On considère un nuage des 5 vecteurs $\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, les poids associés sont tous égaux à 1. On cherche à ajuster à ce nuage une droite (P_1) par la méthode des moindres carrés : $(P_1) : y = a\,x + b$.

1. Exprimer le critère des moindres carrés pour cet ajustement.
2. Calculer a et b, puis représenter dans le repère canonique le nuage et la droite d'ajustement.
3. On considère les matrices suivantes : $A = \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_5 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_5 \end{pmatrix}$; $x = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. Calculer A, B.
4. Exprimer le critère des moindres carrés en fonction de A, B, x.
5. Calculer x.

SOLUTION.

1°/ Méthode des moindres carrés.

La distance du nuage à la droite (P_1) se mesure par la somme des carrés des écarts (S.C.E.) :

$$S = \sum_{i=1}^{i=5} ((a\,x_i + b) - y_i)^2$$

Pour minimiser cette quantité, on annule les dérivées partielles par rapport à a et par rapport à b :

$$\frac{1}{2}\frac{\partial S}{\partial a} = \sum_{i=1}^{i=5} ((a\,x_i + b) - y_i)\,x_i = 0$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial S}{\partial b} = \sum_{i=1}^{i=5} ((a\,x_i + b) - y_i) = 0$$

$$\boxed{\begin{aligned} a\sum_{i=1}^{i=5} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{i=5} x_i &= \sum_{i=1}^{i=5} x_i\,y_i \\ a\sum_{i=1}^{i=5} x_i\,y_i + n\,b &= \sum_{i=1}^{i=5} y_i \end{aligned}}$$

$n = 5$ (nombre de points).

2°/ Calcul des coefficients.

Le critère des moindres carrés peut s'écrire :

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{i=5} x_i^2 & \sum_{i=1}^{i=5} x_i \\ \sum_{i=1}^{i=5} x_i y_i & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{i=5} x_i y_i \\ \sum_{i=1}^{i=5} y_i \end{pmatrix}$$

Pour trouver a et b, il suffit d'inverser la matrice $M = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{i=5} x_i^2 & \sum_{i=1}^{i=5} x_i \\ \sum_{i=1}^{i=5} x_i y_i & 5 \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{i=5} x_i^2 & \sum_{i=1}^{i=5} x_i \\ \sum_{i=1}^{i=5} x_i y_i & 5 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{i=5} x_i y_i \\ \sum_{i=1}^{i=5} y_i \end{pmatrix} = \frac{1}{dé\ tM} \begin{pmatrix} 5 & -\sum_{i=1}^{i=5} x_i \\ -\sum_{i=1}^{i=5} x_i y_i & \sum_{i=1}^{i=5} x_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{i=5} x_i y_i \\ \sum_{i=1}^{i=5} y_i \end{pmatrix}$$

$$dét\ M = 5 \sum_{i=1}^{i=5} x_i^2 - \sum_{i=1}^{i=5} x_i \times \sum_{i=1}^{i=5} x_i\ y_i$$

$\sum_{i=1}^{i=5} x_i^2 = 4 + 1 + 0 + 1 + 4 = 10$

$\sum_{i=1}^{i=5} x_i = -2 - 1 + 0 + 1 + 2 = 0$

$\sum_{i=1}^{i=5} x_i\ y_i = 6 - 1 + 0 + 1 - 6 = 0$

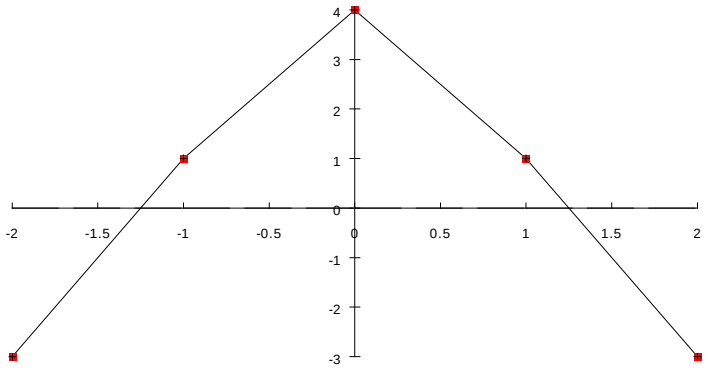
$\sum_{i=1}^{i=5} y_i = -3 + 1 + 4 + 1 - 3 = 0$

$dét\ M = 50$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{1}{50} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La droite (P_1) est l'axe des x, d'équation $y = 0$.

Représentation graphique du nuage de vecteurs.



3°/ Matrices *A* et *B*.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

4°/ Ecriture matricielle du critère des moindres carrés.

Les écarts $((a\ x_i + b) - y_i\ )$ sont les composantes du vecteur $A\ x - B$. La somme des carrés des écarts est le carré de la norme de ce vecteur pour le produit scalaire euclidien:

$$S = \| A\,x - B \|^2$$

Les conditions :

$$\frac{1}{2}\frac{\partial S}{\partial a} = \sum_{i=1}^{i=5} ((a\,x_i + b) - y_i)\,x_i = 0$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial S}{\partial b} = \sum_{i=1}^{i=5} ((a\,x_i + b) - y_i) = 0$$

s'écrivent :

$$A^t\,(A\,x - B) = 0$$

$$\boxed{A^t\,A\,x = A^t\,B}$$

5°/ Calcul de *x*.

La formule précédente peut s'inverser :

$$\boxed{x = (A^t\,A)^{-1}\,A^t\,B}$$

Application numérique.

$$A^t\,B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A^t\,A = 5\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ; (A^t\,A)^{-1} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

EXERCICE 8.

On considère un nuage des 5 vecteurs $\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, les poids associés sont tous égaux à 1. On cherche à ajuster à ce nuage une parabole (P_2) par la méthode des moindres carrés : $(P_2) : y = a\,x^2 + b\,x + c$.

1. Exprimer le critère des moindres carrés pour cet ajustement.

2. On note : $A = \begin{pmatrix} {x_1}^2 & x_1 & 1 \\ {x_2}^2 & x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ {x_5}^2 & x_5 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_5 \end{pmatrix}$; $x = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. Montrer que si x et y sont des vecteurs colonnes de $\mathbb{R}^3$ et λ un élément de $\mathbb{R}$, alors : $\| A\,(x + \lambda\,y) - B \|^2 = \| A\,x - B \|^2 + 2\,\lambda\,y^t\,A^t\,(A\,x - B) + \lambda^2 \| A\,y \|^2$.

3. Déduire que les solutions du problème sont solutions de $A^t\,A\,x = A^t\,B$.

4. Montrer que si x est solution du problème, on a : $\| A\,x - B \|^2 = \| B \|^2 - x^t\,A^t\,B$.

5. Mêmes questions, avec les équations des paraboles suivantes :

$$(P_3) : y = a\,x^2 + c$$
$$(P_4) : y = a\,x^2 + b\,x$$

SOLUTION.

1°/ Critère d'ajustement des moindres carrés.

La méthode des moindres carrés consiste à minimiser la somme des carrés des écarts (S.C.E.) :

$$S = \sum_{i=1}^{i=5} ((a\,{x_i}^2 + b\,x_i + c) - y_i)^2$$

Pour cela, on choisit les valeurs de a, b, c, annulant les dérivées partielles de S par rapport à a, b, c.

$$\frac{1}{2}\frac{\partial S}{\partial a} = \sum_{i=1}^{i=5} ((a\,{x_i}^2 + b\,x_i + c) - y_i)\,{x_i}^2 = 0$$
$$\frac{1}{2}\frac{\partial S}{\partial b} = \sum_{i=1}^{i=5} ((a\,{x_i}^2 + b\,x_i + c) - y_i)\,x_i = 0$$
$$\frac{1}{2}\frac{\partial S}{\partial c} = \sum_{i=1}^{i=5} ((a\,{x_i}^2 + b\,x_i + c) - y_i) = 0$$

On obtient un système de trois équations du premier degré à trois inconnues, qu'on sait résoudre par des méthodes classiques (Cramer).

2°/ Expression matricielle de la norme.

Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$; $x = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. Si x et y sont des vecteurs colonnes de $\mathbb{R}^5$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\| A\,(x + \lambda\,y) - B \|^2 = \| A\,x - B + \lambda\,A\,y \|^2 = \| A\,x - B \|^2 + \lambda^2 \| A\,y \|^2 + 2\,\lambda\,(A\,x - B, A\,y)$$
$$\| A\,(x + \lambda\,y) - B \|^2 = \| A\,x - B \|^2 + \lambda^2 \| A\,y \|^2 + 2\,\lambda\,y^t\,A^t\,(A\,x - B)$$

$$\boxed{\| A\,(x + \lambda\,y) - B \|^2 = \| A\,x - B \|^2 + 2\,\lambda\,y^t\,A^t\,(A\,x - B) + \lambda^2 \| A\,y \|^2}$$

3°/ Expression matricielle du critère d'ajustement des moindres carrés.

Les quantités $((a\,x_i^2 + b\,x_i + c) - y_i)$ sont les composantes du vecteur $A\,x - B$ et la somme S des carrés des écarts est la norme de ce vecteur :

$$S = \| A\,x - B \|^2$$

Les trois conditions du critère d'ajustement des moindres carrés peuvent s'exprimer sous la forme :

$$A^t\,(A\,x - B) = 0$$

$$\boxed{A^t\,A\,x = A^t\,B}$$

4°/ Expression matricielle de la somme des carrés des écarts.

Si x est solution de l'équation $A^t\,A\,x = A^t\,B$, on a :

$$\boxed{x = (A^t\,A)^{-1}\,A^t\,B}$$

d'où :

$$S = \| A\,x - B \|^2 = \| A\,x \|^2 + \| B \|^2 - 2\,(A\,x, B) = \| A\,x \|^2 + \| B \|^2 - 2\,x^t\,A^t\,B$$

$$\| A\,x \|^2 = \| A\,(A^t\,A)^{-1}\,A^t\,B \|^2 = B^t\,A\,((A^t\,A)^{-1})^t\,A^t \times A\,(A^t\,A)^{-1}\,A^t\,B = B^t\,A\,((A^t\,A)^{-1})^t\,A^t\,B$$

$$x^t\,A^t\,B = B^t\,A\,((A^t\,A)^{-1})^t \times A^t\,B = \| A\,x \|^2$$

$$\boxed{S = \| A\,x - B \|^2 = \| B \|^2 - x^t\,A^t\,B}$$

Et l'on peut calculer cette expression par la formule :

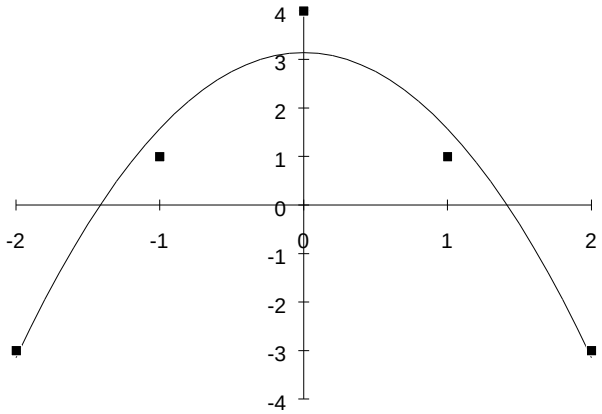
$$S = \| A\,x - B \|^2 = B^t\,B - B^t\,A\,((A^t\,A)^{-1})^t\,A^t\,B$$

Application numérique :

$$A^t\,A = \begin{pmatrix} 34 & 0 & 10 \\ 0 & 10 & 0 \\ 10 & 0 & 5 \end{pmatrix} ; (A^t\,A)^{-1} = \frac{1}{70}\begin{pmatrix} 5 & 0 & -10 \\ 0 & 7 & 0 \\ -10 & 0 & 34 \end{pmatrix} ; x = \frac{11}{7}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} ;$$

$$\| B \|^2 = 36 ; A^t\,B = -22\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; x^t\,A^t\,B = \frac{242}{7} ; S = \| A\,x - B \|^2 = 36 - \frac{242}{7} = \frac{10}{7}.$$

Représentation graphique.



Ajustement d'une parabole $y = a\,x^2 + b\,x + c$ par la méthode des moindres carrés

5°/ Ajustement d'autres paraboles.

5.1. Parabole (P_3).

La parabole (P_2) ajustée précédemment par la méthode des moindres carrés au nuage de vecteurs (x_i , y_i) a pour équation :

$$\boxed{y = \frac{11}{7}\,(-x^2 + 2)}$$

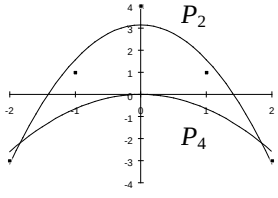
Elle est de la forme $y = a\,x^2 + c$. La parabole (P_3) coïncide donc avec la parabole (P_2).

5.2. Parabole (P_4).

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} ; B = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} ;$$

$$x = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = (A^t A)^{-1} A^t B = \begin{pmatrix} 34 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -22 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{34} \begin{pmatrix} -22 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(P_4) : y = -\frac{11}{17}\,x^2$$



EXERCICE 9.

VRAI ou FAUX.

Pour les questions 1 à 10, indiquez si vous pensez que l'assertion proposée est vraie ou fausse et donnez une justification de votre choix.

1. L'angle de deux vecteurs est compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$.
2. Si x et y sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$, et si $\| x \| = 1$ et $\| y \| = 1$, alors $(x , y) \leq 1$.
3. La variance de la statistique formée par les n premiers entiers $(1, 2, \dots , n)$ est $\frac{n^2 - 1}{4}$.
4. Si P est un projecteur orthogonal de $E = \mathbb{R}^n$, il existe une base pour laquelle sa matrice est diagonale.
5. Si P est un projecteur orthogonal de $E = \mathbb{R}^n$, alors $\forall x \in E$, $\|P(x)\|^2 \geq \| x \|^2$.
6. Dans un espace vectoriel de dimension finie, pour une base quelconque, il existe un produit scalaire pour lequel cette base est orthogonale.
7. Pour deux variables centrées et de variances non nulles, le nuage des points est sur une droite si et seulement si le carré du coefficient de corrélation est égal à 1.
8. L'écart-type de la somme de deux variables aléatoires est inférieur ou égal à la somme des écarts-types de ces deux variables.
9. [Matrice de projecteur]. Si P est un projecteur orthogonal de $E = R^n$, il existe une base pour laquelle sa matrice ne contient que des valeurs égales à 0 ou à 1.
10. La matrice associée à un produit scalaire est inversible.

SOLUTION.

1. Angle de deux vecteurs.

Faux.

L'angle de deux vecteurs est défini à partir du produit scalaire euclidien ϕ par :

$$cos\ (\overrightarrow{V_1}\ ,\ \overrightarrow{V_2}) = \frac{\left(\overrightarrow{V_1}\ ,\ \overrightarrow{V_2}\right)_\phi}{\left\|\overrightarrow{V_1}\right\|_\phi . \left\|\overrightarrow{V_2}\right\|_\phi}$$

Comme l'angle est défini à partir de son cosinus, il est défini à $k\,\pi$ près. La détermination principale est comprise entre 0 et π.

2. Produit scalaire de vecteurs unitaires.

Vrai.

$$(\overrightarrow{V_1}\ ,\ \overrightarrow{V_2})_\phi = \| \overrightarrow{V_1} \|_\phi . \| \overrightarrow{V_2} \|_\phi . cos\ (\overrightarrow{V_1}\ ,\ \overrightarrow{V_2}) \leq \| \overrightarrow{V_1} \|_\phi . \| \overrightarrow{V_2} \|_\phi$$

$$\| \overrightarrow{V_1} \|_\phi \leq 1 \text{ et } \| \overrightarrow{V_2} \|_\phi \leq 1 \Rightarrow (\overrightarrow{V_1}\ ,\ \overrightarrow{V_2})_\phi \leq 1.$$

3. Variance.

Faux.

La variance d'une statistique $(x_1 , \dots , x_n)$ peut se calculer par la formule :

$$Var\ X = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{i=n} x_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{i=n} x_i \right)^2 \right)$$

Pour $n = 2$, on obtient :

$$Var\ X = \frac{1}{2}\,(1 + 4 - \frac{1}{2}\,(1 + 2)^2\,) = \frac{1}{2}\,(5 - \frac{9}{2}) = \frac{1}{4}$$

La formule de l'énoncé donne $\frac{n^2-1}{4} = \frac{3}{4}$. Elle est fausse. Pour établir la vraie formule, établissons d'abord un lemme.

Lemme.

$$\sum_{k=1}^{k=n} k = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=1}^{k=n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Démonstration du lemme.

1° Somme des *n* premiers entiers.

Posons $S = \sum_{k=1}^{k=n} k$. On peut écrire les n premiers entiers en ordre décroissant : $S = \sum_{k=1}^{k=n} (n + 1 - k)$. Par addition, on obtient alors :

$$2\,S = \sum_{k=1}^{k=n} (n + 1 - k + k) = \sum_{k=1}^{k=n} (n + 1).$$

Comme il y a n termes égaux à $(n + 1)$ dans la somme, la somme $2\,S$ vaut $n\,(n + 1)$ et $S = \frac{n(n+1)}{2}$.

2° Somme des carrés des *n* premiers entiers.

Le polynôme $f\,(x) = \frac{x(x+1)(2x+1)}{6}$ est un polynôme de degré 3 (le seul, en réalité) vérifiant les conditions :

$f\,(0) = 0$

$f\,(x) - f\,(x - 1) = x^2$

et on a : $f\,(n) = f\,(n - 1) + n^2$, donc, par récurrence, $f\,(n) = \sum_{k=1}^{k=n} k^2$, d'où le résultat.

On obtient alors :

$$Var\,X = \frac{1}{n}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{1}{n}\left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 \right)$$

$$Var\,X = \frac{n+1}{12}(2(2\,n + 1) - 3(n + 1)) = \frac{(n+1)(n-1)}{12} = \frac{n^2-1}{12}$$

$$\boxed{Var\,X = \frac{n^2-1}{12}}$$

4. Matrice d'un projecteur orthogonal.

Vrai.

Un projecteur est, par définition, un endomorphisme f tel que $f^2 = f$. On sait qu'alors $E = Ker\,f \oplus Im\,f$ (Exercice 2 du Chapitre 2). Le projecteur est dit orthogonal si, de plus, $(\forall x \in Ker\,f)(\forall y \in Im\,f)((x,y)_\phi = 0)$, c'est-à-dire si les sous-espaces vectoriels $Ker\,f$ et $Im\,f$ sont orthogonaux : $(Ker\,f)^\circ = Im\,f$ et $(Im\,f)^\circ = Ker\,f$.

La restriction de f à $Ker\,f$ est l'*application nulle* : quelle que soit la base choisie dans $Ker\,f$, la matrice de la restriction de f au sous-espace $Ker\,f$ est nulle.

Tout vecteur y de $Im\,f$ s'écrit sous la forme $y = f\,(x)$ pour au moins un x de E, et l'on a : $f\,(y) = f\,(f(x)) = f(x) = y$. La restriction de f au sous-espace vectoriel $Im\,f$ est donc l'*application identique*.

Comme on peut choisir pour base de E la réunion d'une base de $Ker\,f$ et d'une base de $Im\,f$, la matrice de f par rapport à cette base aura des zéros partout sauf sur la diagonale, où il y aura autant de 1 que la dimension de $Im\,f$, ou autant que le rang de f.

5. Norme de la projection orthogonale d'un vecteur.

Faux.

Si P est un projecteur orthogonal de $E = \mathbb{R}^n$, tout vecteur x s'écrit d'une façon unique sous la forme :

$$x = P(x) + y$$

avec $P(x) \in Im\ P$ et $y \in Ker\ P$. Les vecteurs $P(x)$ et y sont orthogonaux. Le théorème de Pythagore donne alors :

$$\| x \|^2 = \| P(x) \|^2 + \| y \|^2$$

Cette relation montre que l'on a, pour tout x de E, $\| P(x) \|^2 \leq \| x \|^2$, et non $\| P(x) \|^2 \geq \| x \|^2$.

6. Définition d'un produit scalaire à partir d'une base.

Vrai.

Pour définir une application bilinéaire, il suffit de connaître son action sur les vecteurs de la base. La matrice unité définit un produit scalaire pour lequel deux vecteurs distincts de la base sont orthogonaux et pour lequel chaque vecteur de la base est normé (de norme 1).

7. Coefficient de corrélation linéaire et relation linéaire.

Vrai.

Le coefficient de corrélation linéaire est le rapport

$$\rho = \frac{cov\ (X,Y)}{\sigma_X\ \sigma_Y}$$

La covariance de X et Y est la moyenne du produit $(X - E(X))(Y - E(Y)) = XY$, puisque X et Y sont centrées :

$$cov\ (X,Y) = E\ (X,Y) - E(X)\ E(Y) = E(XY)$$

L'écart-type σ_X est la racine carrée de la variance de X , l'écart-type σ_Y est la racine carrée de la variance de Y:

$$Var\ X = E(X^2)\ ;\ Var\ Y = E(Y^2)$$

Ainsi, pour deux variables centrées, le coefficient de corrélation linéaire vérifie :

$$\boxed{\rho^2\ E(X^2)\ E(Y^2) = (E(X,Y))^2}$$

Si le nuage de points est sur une droite, on a une relation linéaire $Y = a\ X + b$ et dans ce cas $\rho^2 = 1$, car :

$E(Y) = a\ E(X) + b = 0$ (car Y est centrée)

$E(X) = 0$ (car X est centrée)

donc $b = 0$

$$E(Y^2) = E(a^2\ X^2 + 2\ a\ b\ X + b^2) = a^2\ E(X^2)$$

$$E(X^2)\ E(Y^2) = a^2\ (E(X^2))^2$$

$$E(XY) = E\ (aX^2 + bX) = a\ E(X^2)$$

$$(E(XY))^2 = a^2\ (E(X^2))^2 = E(X^2)\ E(Y^2)$$

$$\rho^2 = \frac{(E(XY))^2}{E(X^2)E(Y^2)} = 1$$

Inversement, si $\rho^2 = 1$, notons a^2 le rapport $\frac{E(Y^2)}{E(X^2)}$.

$Var(Y - a\ X) = Var\ Y + a^2\ Var\ X - 2\ a\ E(XY) = E(Y^2) + a^2\ E(X^2) - 2\ a\ E(XY) = 2\ a\ (a\ E(X^2) - E(XY))$

$Var\ (Y + a\ X) = Var\ Y + a^2\ Var\ X + 2\ a\ E(XY) = E(Y^2) + a^2\ E(X^2) + 2\ a\ E(XY) = 2\ a\ (a\ E(X^2) + E(XY))$

$\rho^2 = 1 \quad \Rightarrow (E(XY))^2 = a^2\ (E(X^2))^2 \Rightarrow (E(XY) - a\ E(X^2))(E(XY) + a\ E(X^2)) = 0$

$\Rightarrow E(XY) - a\ E(X^2) = 0$ ou $E(XY) + a\ E(X^2) = 0$

Si $E(XY) - a\ E(X^2) = 0$, on a $Var(Y - a\ X) = 0 \Rightarrow Y = a\ X$.

Si $E(XY) + a\ E(X^2) = 0$, on a $Var(Y + a\ X) = 0 \Rightarrow Y = -a\ X$.

Dans les deux cas, on a une relation linéaire entre X et Y.

8. Ecart-type d'une somme de variables aléatoires.

L'assertion est ***vraie***.

$$Var\ (X + Y) = Var\ X + Var\ Y + 2\ Cov\ (X,Y).$$

$$\sigma_{X+Y}^2 = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2 + 2\,Cov\,(X,Y) = (\sigma_X + \sigma_Y)^2 + 2\,(Cov\,(X,Y) - \sigma_X\ \sigma_Y)$$

Le coefficient de corrélation linéaire ρ est définie par $\rho = \dfrac{cov\ (X,Y)}{\sigma_X\ \sigma_Y}$, et il est compris entre -1 et 1. Donc :

$$\sigma_{X+Y}^2 = (\sigma_X + \sigma_Y)^2 - 2\,\sigma_X\ \sigma_Y\ (1-\rho)$$

$$\left(\frac{\sigma_{X+Y}}{\sigma_X + \sigma_Y}\right)^2 = 1 - 2\,(1-\rho)\frac{\sigma_X \sigma_Y}{\sigma_X + \sigma_Y} \leq 1$$

car $(1-\rho)$ est positif et les écart-types sont positifs.

9. Matrice d'un projecteur orthogonal.

L'assertion est ***vraie***.
On a déjà répondu à la question 9 dans la question 4.

10. Matrice associée à un produit scalaire.

L'assertion est ***vraie***.
Un produit scalaire est une forme bilinéaire symétrique, positive, non dégénérée : le fait qu'elle soit non dégénérée équivaut au fait que la matrice associée est inversible.

Exercices

Dualité dans $\mathbb{R}^p$.

1. Définition d'une norme.
2. Produit scalaire euclidien.
3. Notion de dualité.

Définition d'une norme.

Etant donnés un espace vectoriel réel E et une application $N : E \to \mathbb{R}$, on dit que N est une **norme** sur E, et que E, muni de cette norme, est un **espace normé réel**, ou espace vectoriel réel normé, si l'application N possède les propriétés suivantes, pour tout x et tout y de E, et pour tout λ de $\mathbb{R}$:

N1 : $N(x) \geqslant 0$.
N2 : $N(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
N3 : $N(x + y) \leqslant N(x) + N(y)$.
N4 : $N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$.

HAUT

Produit scalaire euclidien.

HAUT

Etant donné l'espace vectoriel réel $\mathbb{R}^p$, p entier supérieur ou égal à 2, on appelle **produit scalaire euclidien**, ou produit scalaire standard, la forme bilinéaire symétrique positive non dégénérée $(x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$ définie par :

$$\langle (x_1, x_2, \dots, x_p), (y_1, y_2, \dots, y_p) = \sum_{k=1}^{k=p} x_k y_k.$$

Propriétés.

- $x \mapsto \langle x, y \rangle$ est linéaire
- $y \mapsto \langle x, y \rangle$ est linéaire
- $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$
- $\langle x, x \rangle \geqslant 0$
- $\langle x, x \rangle = 0 \Rightarrow x = 0$

Remarques :

1. Au lieu de "*positive non dégénérée*", on dit aussi, suivant la terminologie ancienne, "*définie positive*".

2. Une "*forme*" est une application à valeurs dans $\mathbb{R}$.

3. Rappelons que toute forme quadratique Q positive non dégénérée, définit
— un produit scalaire (forme bilinéaire symétrique positive non dégénérée) ϕ par :
$\phi(x, y) = \frac{1}{2}(Q(x + y) - Q(x) - Q(y))$
— une norme par :
$\| x \| = \sqrt{\phi(x, x)} = \sqrt{Q(x)}$

4. Rappelons enfin qu'une forme bilinéaire symétrique positive non dégénérée est définie par une **matrice symétrique** à valeurs propres strictement positives dont tous les éléments de la diagonale principale sont strictement positifs. Cette matrice a pour éléments les produits scalaires des vecteurs de base (base quelconque, pas forcément la base canonique).

HAUT

Notion de dualité.

HAUT

Etant donné l'espace vectoriel réel $\mathbb{R}^p$, p entier supérieur ou égal à 1, on appelle **forme linéaire** sur $\mathbb{R}^p$ toute application linéaire de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$. L'ensemble des formes linéaires sur $\mathbb{R}^p$ forme un espace vectoriel réel, qu'on appelle le **dual** de $\mathbb{R}^p$ et qu'on note $\mathbb{R}^p$*, pour les opérations définies de la façon suivante :

Addition.
Si f et g sont des formes linéaires sur $\mathbb{R}^p$, $f + g$ est la forme linéaire définie par :
$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, pour tout x de $\mathbb{R}^p$.

Multiplication par les scalaires.
Si f est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^p$ et λ un nombre réel, λf est la forme linéaire définie par :
$(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$, pour tout x de $\mathbb{R}^p$.

Etant donnée une base $\{f_1, f_2, \ldots, f_p\}$ de $\mathbb{R}^p$, on appelle **forme coordonnée** d'indice j, pour $1 \leqslant j \leqslant p$, l'application de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$ qui, à un vecteur $x = \sum_{k=1}^{k=p} x^k f_k$ fait correspondre sa coordonnée d'indice j, x^j.

Propriétés.

1. L'espace vectoriel $\mathbb{R}^p$* est encore de dimension p et les formes coordonnées en forment une base.

2. L'application φ qui, à tout y de $\mathbb{R}^p$, fait correspondre la forme linéaire $\varphi(y)$ définie par $\varphi(y)(x) = \langle x, y \rangle$ (produit scalaire euclidien de x et de y), est un isomorphisme (application linéaire bijective) de $\mathbb{R}^p$ sur son dual.

3. **Pour toute forme linéaire f sur $\mathbb{R}^p$, il existe un unique vecteur $y = \varphi^{-1}(f)$ de $\mathbb{R}^p$ tel que, pour tout x de $\mathbb{R}^p$, on ait :**
$$\langle x, y \rangle = \langle x, \varphi^{-1}(f) \rangle = f(x).$$

4. L'isomorphisme φ permet de transporter la norme euclidienne de $\mathbb{R}^p$ dans son dual : on appelle **norme euclidienne d'une forme linéaire** f, la norme euclidienne de $\varphi^{-1}(f)$:
$\| f \|^2 = \| \varphi^{-1}(f) \|^2 = \langle \varphi^{-1}(f), \varphi^{-1}(f) \rangle = f(\varphi^{-1}(f))$.
En particulier, on a :
$\| \varphi(y) \|^2 = \| y \|^2$, pour tout y de $\mathbb{R}^p$.

HAUT

Chapitre 16. Dualité dans $\mathbb{R}^p$.

Exercices

Exercice 1. Dualité et norme.

Exercice 1. Dualité et norme.

Soient :
$\{e\} = \{e_1, e_2\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$;
$\{f\} = \{f_1, f_2\}$ une base quelconque de $\mathbb{R}^2$;
θ^j la forme coordonnée d'indice j associée à la base $\{f\}$, définie par
$\theta^j (x^1 f_1 + x^2 f_2) = x^j, j = 1, 2.$

1°/ Montrer que θ^1 et θ^2 sont des formes linéaires sur $\mathbb{R}^2$, qu'on appelle les **formes coordonnées** associées à la base $\{f\}$.

2°/ Montrer que $\{\theta^1, \theta^2\}$ est une base du dual $\mathbb{R}^{2*}$ de $\mathbb{R}^2$, qu'on appelle la **base duale** de la base $\{f\}$.

3°/ A tout vecteur y de $\mathbb{R}^2$, on associe la forme linéaire $\varphi(y)$ définie par
$\varphi(y)(x) = < x, y >, \forall x \in \mathbb{R}^2$.
Montrer que l'application φ de $\mathbb{R}^2$ dans son dual est un **isomorphisme** d'espaces vectoriels.

4°/ Pour $j \in \{1 ; 2\}$, on pose $f^j = \varphi^{-1}(\theta^j)$. Montrer que $\{f^1, f^2\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$, qu'on appelle la **base d'origine duale** associée à la base $\{f_1, f_2\}$.

5°/ On prend :
$f_1 = e_1 - e_2$
$f_2 = e_1 + 2\, e_2$.
Vérifier que $\{f\} = \{f_1, f_2\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$ et calculer la base d'origine duale $\{f^1 ; f^2\}$. Exprimer la **matrice du changement de base**, de $\{f\}$ vers la base d'origine duale, en fonction du produit scalaire euclidien.

Solution

6°/ On prend pour base $\{f\}$ une base orthonormée (pour le produit scalaire euclidien) de $\mathbb{R}^2$. Calculer la base d'origine duale associée à $\{f\}$.

7°/ Pour toute forme linéaire ψ sur $\mathbb{R}^2$, on pose $N(\psi) = \| \varphi^{-1}(\psi) \|$ (norme euclidienne). Montrer que l'application N ainsi définie, de $\mathbb{R}^{2*}$ dans $\mathbb{R}$, est une norme sur $\mathbb{R}^{2*}$ (**norme euclidienne** d'une forme linéaire).

8°/ Les coordonnées d'une vecteur x de $\mathbb{R}^2$ sur la base $\{f\}$ s'appellent les **composantes contravariantes** de x. Ses coordonnées sur la base d'origine duale s'appellent ses **composantes covariantes**. Exprimer le produit scalaire euclidien de deux vecteurs x et y de $\mathbb{R}^2$ en fonction des composantes covariantes de x et des composantes contravariantes de y sur une base quelconque $\{f\}$ de $\mathbb{R}^2$.

9°/ Soit ψ une forme linéaire sur $\mathbb{R}^2$. Calculer les composantes covariantes et les composantes contravariantes de $\varphi^{-1}(\psi)$ sur une base $\{f\}$ de $\mathbb{R}^2$ en fonction des coordonnées ψ^1 et ψ^2 de ψ sur la base duale de $\{f\}$. A l'aide de ces composantes, exprimer la norme euclidienne de ψ.

HAUT

Chapitre 16. Dualité dans $\mathbb{R}^p$.

Enoncés.

Exercice 1. Dualité et norme.

Soient :
$\{e\} = \{e_1, e_2\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$;
$\{f\} = \{f_1, f_2\}$ une base quelconque de $\mathbb{R}^2$;
θ^j la forme coordonnée d'indice j associée à la base $\{f\}$, définie par
$\theta^j (x^1 f_1 + x^2 f_2) = x^j$, $j = 1, 2$.

1°/ Montrer que θ^1 et θ^2 sont des formes linéaires sur $\mathbb{R}^2$, qu'on appelle les **formes coordonnées** associées à la base $\{f\}$.

2°/ Montrer que $\{\theta^1, \theta^2\}$ est une base du dual $\mathbb{R}^{2*}$ de $\mathbb{R}^2$, qu'on appelle la **base duale** de la base $\{f\}$.

3°/ A tout vecteur y de $\mathbb{R}^2$, on associe la forme linéaire $\varphi(y)$ définie par
$\varphi(y)(x) = < x, y >$, $\forall x \in \mathbb{R}^2$.
Montrer que l'application φ de $\mathbb{R}^2$ dans son dual est un **isomorphisme** d'espaces vectoriels.

4°/ Pour $j \in \{1 ; 2\}$, on pose $f^j = \varphi^{-1}(\theta^j)$. Montrer que $\{f^1, f^2\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$, qu'on appelle la **base d'origine duale** associée à la base $\{f_1, f_2\}$.

5°/ On prend :
$f_1 = e_1 - e_2$
$f_2 = e_1 + 2\, e_2$.
Vérifier que $\{f\} = \{f_1, f_2\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$ et calculer la base d'origine duale $\{f^1 ; f^2\}$. Exprimer la **matrice du changement de base**, de $\{f\}$ vers la base d'origine duale, en fonction du produit scalaire euclidien.

6°/ On prend pour base $\{f\}$ une base orthonormée (pour le produit scalaire euclidien) de $\mathbb{R}^2$. Calculer la base d'origine duale associée à $\{f\}$.

7°/ Pour toute forme linéaire ψ sur $\mathbb{R}^2$, on pose $N(\psi) = \| \varphi^{-1}(\psi) \|$ (norme euclidienne). Montrer que l'application N ainsi définie, de $\mathbb{R}^{2*}$ dans $\mathbb{R}$, est une norme sur $\mathbb{R}^{2*}$ (**norme euclidienne** d'une forme linéaire).

8°/ Les coordonnées d'une vecteur x de $\mathbb{R}^2$ sur la base $\{f\}$ s'appellent les **composantes contravariantes** de x. Ses coordonnées sur la base d'origine duale s'appellent ses **composantes covariantes**. Exprimer le produit scalaire euclidien de deux vecteurs x et y de $\mathbb{R}^2$ en fonction des composantes covariantes de x et des

composantes contravariantes de y sur une base quelconque $\{f\}$ de $\mathbb{R}^2$.

9°/ Soit ψ une forme linéaire sur $\mathbb{R}^2$. Calculer les composantes covariantes et les composantes contravariantes de $\varphi^{-1}(\psi)$ sur une base $\{f\}$ de $\mathbb{R}^2$ en fonction des coordonnées ψ^1 et ψ^2 de ψ sur la base duale de $\{f\}$. A l'aide de ces composantes, exprimer la norme euclidienne de ψ.

Solution.

1°/ Formes coordonnées.

Adoptons tout de suite la **Convention d'Einstein** :

"Dans une expression comportant des indices, placés en haut ou placés en bas, si le même indice figure une fois en haut et une fois en bas dans un monôme, il est sous-entendu qu'il faut faire la somme des monômes pour toutes les valeurs de cet indice".

Par exemple, au lieu d'écrire :

$$x = \sum_{j=1}^{j=p} x^j f_j$$

on écrira simplement :

$$x = x^j f_j.$$

Dans cette écriture, j est un indice muet, il ne figure pas dans le résultat : par exemple, dans le cas de $\mathbb{R}^2$, l'expression

$$x = x^j f_j$$

est une écriture condensée de l'expression :

$$x = x^1 f_1 + x^2 f_2,$$

il n'y a pas d'indice j dans le résultat ! Ainsi, pour éviter les confusions, il ne faut pas écrire :

$$\theta^j (x^j f_j) = x^j,$$

en sous-entendant la somme sur l'indice j dans $x^j f_j$. Il faudra écrire, par exemple :

$$\theta^j (x^k f_k) = x^j,$$

en appelant k l'indice muet de sommation.

Avec cette convention d'Einstein, pour $x = x^j f_j$, $y = y^j f_j$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a, par définition :

$$x + y = (x^j + y^j)\, f_j,$$

$$\lambda\, x = (\lambda\, x^j)\, f_j.$$

Si θ^j est l'application qui, à $x = x^k\, f_k$, fait correspondre le nombre

$$\theta^j\,(x) = \theta^j\,(x^k\, f_k) = x^j,$$

on obtient immédiatement :

$$\theta^j\,(x + y) = x^j + y^j = \theta^j\,(x) + \theta^j\,(y)$$

$$\theta^j\,(\lambda\, x) = \lambda\, x^j = \lambda\, \theta^j\,(x)$$

relations qui montrent que θ^j est une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, donc, par définition, une forme linéaire sur $\mathbb{R}^2$.

2°/ Base duale.

Pour une forme linéaire ψ sur $\mathbb{R}^2$, posons $\psi_j = \psi\,(f_j)$. On a alors, par linéarité, pour tout $x = x^j\, f_j$ de $\mathbb{R}^2$:

$$\psi\,(x) = \psi\,(x^j\, f_j) = x^j\, \psi\,(f_j) = x^j\, \psi_j = \psi_j\, \theta^j\,(x) = (\psi_j\, \theta^j)\,(x),$$

relation qui montre que $\psi = \psi_j\, \theta^j$. Donc $\{\theta^1\,;\, \theta^2\}$ est un **système de générateurs** de $\mathbb{R}^2{}^*$.

$$\boxed{\psi = \psi\,(f_j)\, \theta^j}$$

Considérons maintenant une combinaison linéaire nulle de θ^1 et θ^2 : $\psi_j\, \theta^j = 0$. Pour montrer que $\{\theta^1\,;\, \theta^2\}$ est une famille libre, il faut montrer que la relation $\psi_j\, \theta^j = 0$ entraîne $\psi_1 = \psi_2 = 0$. La relation

$$\psi_j\, \theta^j = 0$$

entraîne la relation

$$\psi_j\, \theta^j\,(f_k) = 0,\ k \in \{1\,;\, 2\}.$$

Le nombre $\theta^j\,(f_k)$ est la coordonnée de f_k sur le vecteur de base f_j : il est égal à 1 si j est égal à k, et à 0 si j est différent de k, de sorte que l'on peut écrire, en introduisant le **symbole de Kronecker** $\delta^j{}_k$, égal à 1 si $j = k$, à 0 si $j \neq k$:

$$\theta^j\,(f_k) = \delta^j{}_k.$$

En reportant cette expression dans la précédente, on obtient :

$$\psi_j \, \delta^j_{\ k} = 0, \, k \in \{1 ; 2\},$$

soit encore, puisque la somme $\psi_j \, \delta^j_{\ k}$ se réduit à ψ_k :

$$\psi_k = 0, \, k \in \{1 ; 2\}.$$

La relation :

$$\psi_j \, \theta^j = 0 \Rightarrow \psi_k = 0, \, k \in \{1 ; 2\}.$$

montre que $\{\theta^1 ; \theta^2\}$ est une **famille libre** de $\mathbb{R}^2{}^*$.

Système de générateurs et famille libre de $\mathbb{R}^2{}^*$, la famille $\{\theta^1 ; \theta^2\}$ est donc une **base** de $\mathbb{R}^2{}^*$.

En particulier, ce résultat entraîne que $\mathbb{R}^2{}^*$ est un espace vectoriel réel de **dimension 2**, tout comme $\mathbb{R}^2$.

3°/ Isomorphisme canonique.

a) φ est linéaire.

$\varphi (y + y') (x) = < x , y + y' > = < x , y > + < x , y' > = \varphi (y) (x) + \varphi (y') (x) = (\varphi (y) + \varphi (y')) (x), \forall x \in \mathbb{R}^2$

$\Rightarrow \varphi (y + y') = \varphi (y) + \varphi (y')$

$\varphi (\lambda y) (x) = < x , \lambda y > = \lambda < x , y > = \lambda \varphi (y) (x) = (\lambda \varphi (y)) (x), \forall x \in \mathbb{R}^2$

$\Rightarrow \varphi (\lambda y) = \lambda \varphi (y).$

b) φ est injective.

$\varphi (y) = 0 \Rightarrow (\forall x \in \mathbb{R}^2)(\varphi (y) (x) = 0)$
$\Rightarrow \varphi (y) (y) = 0$
$\Rightarrow < y , y > = 0$
$\Rightarrow \| y \|^2 = 0$ (norme euclidienne dans $\mathbb{R}^2$)
$\Rightarrow y = 0.$

c) φ est surjective.

Pour toute application linéaire, la dimension de l'espace de départ est égal à la dimension du noyau plus la dimension de l'image. Ici, la dimension du noyau est 0, donc la dimension de l'image est la dimension de $\mathbb{R}^2$, c'est 2, c'est-à-dire la dimension de $\mathbb{R}^2{}^*$, espace d'arrivée de φ. Or le seul sous-espace vectoriel de dimension 2 d'un espace vectoriel de dimension 2, est l'espace vectoriel entier, donc l'image de φ est $\mathbb{R}^2{}^*$, et φ est surjective.

φ, application linéaire injective et surjective de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2{}^*$, est donc un isomorphisme d'espace vectoriels de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2{}^*$. On l'appelle l'**isomorphisme canonique** de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2{}^*$. Il permet

d'identifier $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^2$*. Chaque vecteur y définit une forme linéaire $x \mapsto < y , x >$ et chaque forme linéaire ψ définit un unique vecteur $y = \varphi^{-1}(\psi)$ tel que, pour tout vecteur x de $\mathbb{R}^2$, on ait

$$\psi(x) = < y , x > = < \varphi^{-1}(\psi) , x > = \varphi(y)(x)$$

4°/ Base d'origine duale.

L'image, par un isomorphisme d'espaces vectoriels, d'une base de l'espace de départ, est une base de l'espace d'arrivée. Or φ^{-1} est l'application réciproque d'un isomorphisme d'espaces vectoriels, c'est donc un isomorphisme de $\mathbb{R}^2$* sur $\mathbb{R}^2$. Donc l'image par φ^{-1} de la base duale de la base $\{f\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$. Cette base, que l'on note $\{f'\} = \{f^1, f^2\}$, est une base de $\mathbb{R}^2$. C'est elle qu'on appelle la **base d'origine duale** associée à la base $\{f_1, f_2\}$.

$$\varphi^{-1}(\theta^j) = f^j, j \in \{1 ; 2\} \text{ et } \psi = \psi(f_j)\,\theta^j \Rightarrow \varphi^{-1}(\psi) = \psi(f_j)\,\varphi^{-1}(\theta^j) = \psi(f_j)\,f^j$$

Tout y de $\mathbb{R}^2$ peut s'écrire sous la forme $\varphi^{-1}(\psi)$, on a donc

$$y = y_j f^j \text{ avec } y_j = \psi(f_j) = < y , f_j >$$

$$\boxed{y = < y , f_j > f^j}$$

Autrement dit, les composantes d'un vecteur sur la base d'origine duale associée à la base $\{f\}$ s'obtiennent par produit scalaire du vecteur avec les vecteurs de la base $\{f\}$.

5°/ Matrice du changement de base.

Le déterminant de la matrice des composantes des vecteurs

$$f_1 = e_1 - e_2$$
$$f_2 = e_1 + 2\,e_2,$$

est $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3$. Il n'est pas nul, donc la famille $\{f_1 , f_2\}$ est libre : comme elle comporte autant d'éléments qu'une base, c'est une **famille libre maximale**, donc une base de $\mathbb{R}^2$.

Remarque : matrice de l'application identique.

Avec :

$$f_1 = e_1 - e_2$$
$$f_2 = e_1 + 2\,e_2,$$

la matrice de l'application identique, de $\mathbb{R}^2$ muni de la base $\{f\}$ dans $\mathbb{R}^2$ muni de la base $\{e\}$, notée $[id, \{f\}, \{e\}]$, est la matrice des coordonnées des nouveaux vecteurs de base dans l'ancienne base, c'est donc la matrice :

$$[id,\{f\},\{e\}] = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

La première colonne, image, par l'application identique, du premier vecteur de base de l'espace de départ, f_1, de composantes $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ dans la base $\{f\}$, est la matrice des composantes de f_1 dans la base $\{e\}$ de l'espace d'arrivée. La deuxième colonne, image, par l'application identique, du deuxième vecteur de base de l'espace de départ, f_2, de composantes $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ dans la base $\{f\}$, est la matrice des composantes de f_2 dans la base $\{e\}$ de l'espace d'arrivée.

La matrice inverse permet de calculer la base $\{e\}$ en fonction de la base $\{f\}$:

$$[id,\{e\},\{f\}] = ([id,\{f\},\{e\}])^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2 & -1\\1 & 1\end{pmatrix}$$

Ces deux matrices permettent de calculer les nouvelles composantes d'un vecteur en fonction des anciennes, et réciproquement, suivant le schéma :

$$\left(\mathbb{R}^2,\{e\}\right) \underset{[id,\{f\},\{e\}]}{\overset{[id,\{e\},\{f\}]}{\rightleftarrows}} \left(\mathbb{R}^2,\{f\}\right)$$

$$[x,\{f\}] = [id,\{e\},\{f\}]\,[x,\{e\}]$$
$$[x,\{e\}] = [id,\{f\},\{e\}]\,[x,\{f\}]$$

Le raisonnement pourrait s'appliquer pour n'importe quelles bases $\{e\}$ et $\{f\}$, de sorte que les résultats littéraux s'appliquent en fait pour n'importe quelles bases $\{e\}$ et $\{f\}$. En particulier, ils s'appliquent en remplaçant la base canonique $\{e\}$ par la base d'origine duale $\{f'\}$.

$$[x,\{f\}] = [id,\{f'\},\{f\}]\,[x,\{f'\}]$$
$$[x,\{f'\}] = [id,\{f\},\{f'\}]\,[x,\{f\}]$$

On voit donc que le passage des composantes covariantes aux composantes contravariantes, ainsi que le passage inverse, revient à calculer la matrice de l'application identique, donc la matrice du changement de base.

Par définition, pour $k \in \{1\,;\,2\}$ et $j \in \{1\,;\,2\}$, on a :

$$< f^j\,,\,f_k > = < \varphi^{-1}(\theta^j)\,,\,f_k > = \theta^j(f_k) = \delta^j{}_k.$$

Ces relations montrent que le vecteur f^j est orthogonal au vecteur f_k pour $k \neq j$ et que son produit scalaire euclidien avec le vecteur f_j est égal à 1.

Pour calculer la matrice du changement de base donnant la base $\{f'\}$ en fonction de la base $\{f\}$, posons :

$$f^j = f^{j\,k}\,f_k$$

Ces relations peuvent s'exprimer en disant que la matrice de l'application identique de la base $\{f'\}$ vers la base $\{f\}$ est la matrice des $f^{j\,k}$:

$$[id,\{f'\},\{f\}] = (f^{j\,k})$$

Les relations :

$$< f^j , f_i > = \delta^j{}_i.$$

établies plus haut, s'écrivent :

$$< f^{j\,k} f_k , f_i > = \delta^j{}_i.$$

$$f^{j\,k} < f_k , f_i > = \delta^j{}_i.$$

Notons $f_{k\,i}$ le produit scalaire $< f_k , f_i >$. Les relations :

$$f^{j\,k} f_{k\,i} = \delta^j{}_i$$

montrent que la matrice des $f^{j\,k}$ est l'inverse de la matrice des $f_{k\,i}$, et réciproquement, de sorte que la matrice des $f_{k\,i}$ est la matrice des composantes des vecteurs de la base $\{f\}$ sur la base $\{f'\}$. On a donc aussi :

$$[id,\{f\},\{f'\}] = ([id,\{f'\},\{f\}])^{-1} = (f_{k\,i}) = \begin{pmatrix} \langle f_1 , f_1 \rangle & \langle f_1 , f_2 \rangle \\ \langle f_2 , f_1 \rangle & \langle f_2 , f_2 \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

C'est la matrice du changement de base : elle permet de calculer les composantes d'un vecteur x sur la base d'origine duale en fonction des composantes de x sur la base $\{f\}$, par la formule :

$$\boxed{[x,\{f'\}] = [id,\{f\},\{f'\}]\,[x,\{f\}]}$$

Si l'on remarque que l'on a :

$$< f^j , f^k > = < f^j , f^{k\,i} f_i > = f^{k\,i} < f^j , f_i > = f^{k\,i}\,\delta^j{}_i = f^{k\,j} = < f^k , f^j > = f^{j\,k},$$

on peut écrire :

$$[id,\{f'\},\{f\}] = ([id,\{f\},\{f'\}])^{-1} = (f^{j\,k}) = \begin{pmatrix} \langle f^1 , f^1 \rangle & \langle f^1 , f^2 \rangle \\ \langle f^2 , f^1 \rangle & \langle f^2 , f^2 \rangle \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Cette matrice est la matrice des composantes des vecteurs de la base $\{f'\}$ sur la base $\{f\}$. Elle permet de calculer les composantes d'un vecteur x sur la base $\{f\}$ quand on connaît ses composantes sur la base d'origine duale, par la formule :

$$\boxed{[x,\{f\}] = [id,\{f'\},\{f\}]\,[x,\{f'\}]}$$

La matrice des composantes des vecteurs de la base $\{f'\}$ sur la base $\{e\}$ s'en déduit, grâce au diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \left(\mathbb{R}^2,\{e\}\right) & \xrightarrow{[id,\{e\},\{f\}]} & \left(\mathbb{R}^2,\{f\}\right) \\ & \xleftarrow[[id,\{f\},\{e\}]]{} & \\ [id,\{e\},\{e\}]\uparrow\downarrow[id,\{e\},\{e\}] & & [id,\{f'\},\{f\}]\uparrow\downarrow[id,\{f\},\{f'\}] \\ \left(\mathbb{R}^2,\{e\}\right) & \xrightarrow{[id,\{e\},\{f'\}]} & \left(\mathbb{R}^2,\{f'\}\right) \\ & \xleftarrow[[id,\{f'\},\{e\}]]{} & \end{array}$$

$$[id,\{f'\},\{e\}] = [id,\{f\},\{e\}]\,[id,\{f'\},\{f\}] = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \times \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Cette matrice est la transposée de la matrice $[id,\{e\},\{f\}] = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, et ce n'est pas un hasard !

$$\boxed{[id,\{f'\},\{e\}] = {}^t[id,\{e\},\{f\}]}$$

La formule

$$[id,\{f'\},\{e\}] = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

s'écrit aussi :

$$f^1 = \frac{2}{3}\,e_1 - \frac{1}{3}\,e_2$$
$$f^2 = \frac{1}{3}\,e_1 + \frac{1}{3}\,e_2$$

Elle donne les composantes canoniques de la base d'origine duale.

6°/ Base d'origine duale associée à une base orthonormée.

Si la base $\{f\}$ est orthonormée, la base d'origine duale $\{f'\}$ coïncide avec la base $\{f\}$ car, comme on l'a vu, f^1, par exemple, est le vecteur orthogonal à f_2 dont le produit scalaire avec f_1 est égal à 1 : c'est le vecteur f_1. De même, le vecteur f^2 coïncide avec le vecteur f_2.

$$\boxed{\{f'\} = \{f\}}$$

7°/ Norme euclidienne d'une forme linéaire.

L'application N définit une norme, parce que :

— Ses valeurs sont positives ou nulles : $N(\psi) = \| \varphi^{-1}(\psi) \| \geqslant 0$
— $N(\psi) = 0 \Rightarrow (N(\psi))^2 = \| \varphi^{-1}(\psi) \|^2 = 0 \Rightarrow \varphi^{-1}(\psi) = 0 \Rightarrow \psi = \varphi(\varphi^{-1}(\psi)) = 0.$
— $N(\psi + \psi') = \| \varphi^{-1}(\psi + \psi') \| = \| \varphi^{-1}(\psi) + \varphi^{-1}(\psi') \| \leqslant \| \varphi^{-1}(\psi) \| + \| \varphi^{-1}(\psi') \| = N(\psi) + N(\psi').$
— $N(\lambda\,\psi) = \| \varphi^{-1}(\lambda\,\psi) \| = \| \lambda\,\varphi^{-1}(\psi) \| = | \lambda | \, \| \varphi^{-1}(\psi) \| = | \lambda | \, N(\psi).$

8°/ Produit scalaire de deux vecteurs.

On a vu que les coordonnées d'un vecteur y sur la base d'origine duale sont données par la formule :

$$y = y_k f^k = < y , f_k > f^k$$

Cette formule permet de calculer les composantes d'un vecteur y sur la base d'origine duale à partir des produits scalaires du vecteur avec les vecteurs de la base $\{f\}$.

De même, pour tout vecteur $y = y^k f_k$ de $\mathbb{R}^2$, le produit scalaire de y par le vecteur d'indice k de la base d'origine duale est la coordonnées de y sur le vecteur de base d'indice k :

$$< y , f^k > = < y^j f_j , f^k > = y^j < f_j , f^k > = y^j \delta_j{}^k = y^k$$

$$\boxed{y = < y , f^k > f_k}$$

Cette formule permet de calculer les composantes d'un vecteur y sur la base $\{f\}$ à partir des produits scalaires du vecteur avec les vecteurs de la base d'origine duale.

Les relations :

$$y = < y , f^k > f_k = y^k f_k$$
$$y = < y , f_k > f^k = y_k f^k$$

donnent, par produit scalaire avec x :

$$< x , y > = < x , y^k f_k > = y^k < x , f_k > = x_k y^k$$
$$< x , y > = < x , y_k f^k > = y_k < x , f^k > = x^k y_k$$

$$\boxed{< x , y > = x_k y^k = x^k y_k}$$

9°/ Norme euclidienne d'une forme linéaire.

La norme d'un vecteur y se calcule par :

$$\| y \|^2 = < y , y > = y_k y^k = < y , f_k > < y , f^k >$$

Pour $y = \varphi^{-1}(\psi)$, les composantes covariantes de y (composantes sur la base d'origine duale) sont :

$y_k = < y , f_k > = < \varphi^{-1}(\psi) , f_k > = \psi (f_k)$.

Les composantes contravariantes de y (composantes sur la base $\{f\}$) sont :

$y^k = < y , f^k > = < \varphi^{-1}(\psi) , f^k > = \psi (f^k)$.

On obtient :

$$(N(\psi))^2 = \| y \|^2 = y_k y^k = \psi(f_k)\,\psi(f^k).$$

$$\boxed{(N(\psi))^2 = y_k y^k = \psi(f_k)\,\psi(f^k).}$$

Exercices

Ouverts et fermés de $\mathbb{R}^p$.

1. **Boule ouverte.**
2. **Ouvert.**
3. **Voisinage.**
4. **Boule fermée.**
5. **Fermé.**
6. **Intérieur.**
7. **Point adhérent.**
8. **Adhérence.**
9. **Frontière.**

Boule ouverte.

Dans un espace normé E, on appelle **boule ouverte** de centre a et de rayon r l'ensemble $B(a, r) = \{ x \in E \mid \| x - a \| < r \}$.

HAUT

Ouvert.

Dans un espace normé E, on appelle **ouvert** de E, toute partie de E qui, pour chacun de ses points, contient une boule ouverte de rayon non nul centrée sur ce point.

Propriétés des ouverts.

— Toute intersection finie d'ouverts est un ouvert.
— Toute réunion d'ouverts est un ouvert.
— $\varnothing$ est un ouvert.
— E est un ouvert.

HAUT

Voisinage.

Dans un espace normé E, on appelle **voisinage** d'un point a, toute partie de E qui contient un ouvert contenant a.

HAUT

Boule fermée.

Dans un espace normé E, on appelle **boule fermée** de centre a et de rayon r l'ensemble $B'(a, r) = \{ x \in E \mid \| x - a \| \leqslant r \}$.

HAUT

Fermé.

Dans un espace normé E, on appelle **fermé** toute partie dont le complémentaire est ouvert.

Propriétés des fermés.

— Toute réunion finie de fermés est un fermé.
— Toute intersection de fermés est un fermé.
— E est un fermé.
— $\varnothing$ est un fermé.

HAUT

Intérieur.

On appelle **intérieur** d'une partie A d'un espace normé E, l'ensemble $\mathring{A}$ (qui se lit "***A* rond**") des éléments a de E tels qu'il existe une boule ouverte de centre a et de rayon $r > 0$ contenue dans A.

L'intérieur de A est le plus grand ouvert contenu dans A.
L'intérieur de A est la réunion des ouverts contenus dans A.
Pour que A soit un **ouvert**, il faut et il suffit que $A = \mathring{A}$.

HAUT

Point adhérent.

Dans un espace normé E, on dit qu'un point a est **adhérent** à une partie A de E si, et seulement si, toute boule ouverte de centre a et de rayon non nul contient au moins un point de A.

HAUT

Adhérence.

On appelle **adhérence d'une partie** *A* de *E*, et on note $\overline{A}$ (qui se lit "***A* barre**") l'ensemble des points de *E* adhérents à *A*.

L'adhérence de *A* est le plus petit fermé contenant *A*.
L'adhérence de *A* est l'intersection des fermés contenant *A*.
Pour que *A* soit un **fermé**, il faut et il suffit que $A = \overline{A}$.

Propriété.

Le complémentaire de l'adhérence de *A* est l'intérieur du complémentaire de *A*, pour toute partie *A* de *E*.

HAUT

Frontière.

On appelle **frontière** d'une partie A d'un espace normé E, l'intersection de l'adhérence de A et de l'adhérence du complémentaire de A.

Propriété.

Intersection de deux fermés, **une frontière est toujours fermée**.

HAUT

Chapitre 17. Ouverts et fermés de $\mathbb{R}^p$.

Exercices

Exercice 1. Ouverts et fermés pour la norme euclidienne.
Exercice 2. Intersection de boules ouvertes et de boules fermées.
Exercice 3. Suite décroissante de boules fermées et convergence d'une suite.
Exercice 4. Condition pour qu'une réunion de boules fermées soit fermée.
Exercice 5. Convergence d'une suite dans $\mathbb{R}^3$.
Exercice 6. Norme d'une application linéaire.
Exercice 7. Adhérence d'une partie de $\mathbb{R}^p$.
Exercice 8. Suite décroissante de fermés non vides.

Exercice 1. Ouverts et fermés pour la norme euclidienne.

Soit $\mathbb{R}^p$ muni de la norme euclidienne.

1°/ Montrer que toute boule ouverte de $\mathbb{R}^p$ est une partie ouverte.

2°/ Montrer que pour qu'un point a d'une partie A de $\mathbb{R}^p$ soit adhérent à A, il faut et il suffit qu'il existe une suite $(a_n)_{n \geq 0}$ de points de A convergeant vers a.

3°/ Montrer que l'adhérence d'une boule ouverte de centre $a \in \mathbb{R}^p$ et de rayon $r > 0$, est la boule fermée de centre a et de rayon r.

4°/ Montrer que l'intérieur d'une boule fermée de centre $a \in \mathbb{R}^p$ et de rayon $r > 0$, est la boule ouverte de centre a et de rayon r.

Solution

HAUT

Exercice 2. Intersection de boules ouvertes et de boules fermées.

Soit $\{e_1, \dots, e_p\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^p$ muni de la norme $\| \cdot \|_\infty$ définie par :

$$\| \sum_{j=1}^{j=p} x^j e_j \|_\infty = Sup\ (|x^1|, \dots, |x^p|)$$

La somme $\sum_{j=1}^{j=p} x^j e_j$ sera notée simplement $x^j e_j$ (**convention d'Einstein**).

Solution

1°/ On note B_j la boule ouverte de centre e_j et de rayon 1.

Quelle est l'intersection $\bigcap_{j=1}^{j=p} B_j$? Quelle est la réunion $\bigcup_{j=1}^{j=p} B_j$?

2°/ On note B'_j la boule fermée de centre e_j et de rayon 1.

Quelle est l'intersection $\bigcap_{j=1}^{j=p} B'_j$? Quelle est la réunion $\bigcup_{j=1}^{j=p} B'_j$?

HAUT

Exercice 3. Suite décroissante de boules fermées et convergence d'une suite.

On considère une suite décroissante $(B_n)_{n \geq 1}$ de boules fermées de $\mathbb{R}^p$ avec :

$$B_n = B\left(x_n, \frac{1}{n}\right) = \left\{ y \in \mathbb{R}^p \mid \| y - x_n \|_2 \leq \frac{1}{n} \right\},$$

où $\| \cdot \|_2$ désigne la norme euclidienne standard sur $\mathbb{R}^p$.

Solution

1°/ Démontrer que la suite $(x_n)_{n \geq 1}$ de $\mathbb{R}^p$ converge.

2°/ Démontrer que l'on a : $\bigcap_{n \geqslant 1} B_n = \{ \lim_{n \to +\infty} x_n \}$.

HAUT

Exercice 4. Condition pour qu'une réunion de boules fermées soit fermée.

Soit λ un nombre réel > 0.
Dans $\mathbb{R}^2$, on considère, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$\omega_k(\lambda) = B\left(a_k, \frac{\lambda}{k}\right)$, avec $a_k = \left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right)$.

A quelle condition nécessaire et suffisante doit satisfaire λ pour que $\Omega(\lambda) = \bigcup_{k \geqslant 1} \omega_k(\lambda)$ soit fermé ?

Solution

HAUT

Exercice 5. Convergence d'une suite dans $\mathbb{R}^3$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère dans $\mathbb{R}^3$:

$$x_n = \left(\sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{i(i+1)}, n^2 - n^3 \tan \frac{1}{n}, \sum_{i=0}^{i=n} \frac{2^i}{i!} \right).$$

Etudier la convergence de la suite $(x_n)_{n \geq 1}$ de $\mathbb{R}^3$.

Solution

HAUT

Exercice 6. Norme d'une application linéaire.

Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$ une application linéaire de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^q$.
Démontrer que si u est bornée par M sur la boule ouverte
$B(0, 1) = \{x \in \mathbb{R}^p \mid \| x \|_2 < 1\}$,
alors u est encore bornée par M sur :
$S = \{x \in \mathbb{R}^p \mid \| x \|_2 = 1\}$.

Solution

HAUT

Exercice 7. Adhérence d'une partie de $\mathbb{R}^p$.

1°/ Rappeler la définition de l'adhérence $\overline{A}$ d'une partie A de $\mathbb{R}^p$.
2°/ Démontrer que si A et B sont deux parties de $\mathbb{R}^p$, alors $\overline{A \cap B}$ est contenu dans $\overline{A} \cap \overline{B}$. A-t-on l'égalité ?
3°/ Si $p = 1$ et $d(x, y) = |x - y|$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $y \in \mathbb{R}$, déterminer l'adhérence de la partie :
$A = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots \right\}$ de $\mathbb{R}$.

Solution

HAUT

Exercice 8. Suite décroissante de fermés non vides.

Soit $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite décroissante de fermés non vides de $\mathbb{R}^p$.

1°/ Donner un exemple où l'on a $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_k = \emptyset$.

2°/ Démontrer que si A_0 est borné, alors $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_k \neq \emptyset$.

Solution

HAUT

Chapitre 17. Ouverts et fermés de $\mathbb{R}^p$.

Enoncés.

Exercice 1. Ouverts et fermés pour la norme euclidienne.

Soit $\mathbb{R}^p$ muni de la norme euclidienne.

1°/ Montrer que toute boule ouverte de $\mathbb{R}^p$ est une partie ouverte.

2°/ Montrer que pour qu'un point a d'une partie A de $\mathbb{R}^p$ soit adhérent à A, il faut et il suffit qu'il existe une suite $(a_n)_{n \geq 0}$ de points de A convergeant vers a.

3°/ Montrer que l'adhérence d'une boule ouverte de centre $a \in \mathbb{R}^p$ et de rayon $r > 0$, est la boule fermée de centre a et de rayon r.

4°/ Montrer que l'intérieur d'une boule fermée de centre $a \in \mathbb{R}^p$ et de rayon $r > 0$, est la boule ouverte de centre a et de rayon r.

Solution.

1°/ Ouvert.

Soit B la boule ouverte de centre a et de rayon r. Soit $x \in \mathbb{R}^p$ un point de cette boule, il vérifie la relation :

$$|| a - x || < r.$$

Soit $\rho = r - || a - x ||$. Considérons la boule de centre x et de rayon ρ. Tout point y de cette boule vérifie la relation :

$$|| x - y || < \rho.$$

On a alors, par inégalité du triangle :

$$|| a - y || \leqslant || a - x || + || x - y || < || a - x || + \rho = r$$

de sorte que la boule de centre x et de rayon ρ est entièrement contenue dans la boule de centre a et de rayon r. Donc la boule $B(a, r)$ contient, pour chacun de ses points x, une boule ouverte de centre x. C'est un ouvert de $\mathbb{R}^p$. Toute boule ouverte est un ouvert.

2°/ Critère d'adhérence.

a) Condition nécessaire.

Soit a un point adhérent à A. Pour tout entier $n \geqslant 1$, la boule ouverte de centre a et de rayon $\frac{1}{n}$ rencontre A, par définition d'un point adhérent. Il existe donc un point $a_n \in A$ tel que

$$\| a - a_n \| < \frac{1}{n}.$$

La suite $(a_n)_{n \geq 1}$ est une suite de points de A qui converge vers a puisque, par prolongement des inégalités par passage à la limite, la relation

$$\| a - a_n \| < \frac{1}{n}$$

donne :

$$\lim_{n \to +\infty} \| a - a_n \| = 0.$$

b) Condition suffisante.

Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ une suite de points de A ayant une limite a dans $\mathbb{R}^p$. Par définition de la limite d'une suite, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier n_0 tel que, pour tout entier $n \geqslant n_0$, on ait $\| a - a_n \| < \varepsilon$. C'est dire que la boule de centre a et de rayon ε contient tous les a_n, pour $n \geqslant n_0$. L'intersection de cette boule avec A n'est donc pas vide. Donc toute boule de centre a et de rayon $\varepsilon > 0$ rencontre A : c'est dire, par définition, que a est adhérent à A.

3°/ Adhérence d'une boule ouverte.

Soit $B = B(a, r)$ la boule ouverte de centre a et de rayon $r > 0$.
Soit $B' = B'(a, r)$ la boule fermée de centre a et de rayon $r > 0$.
Soit x un point adhérent à B.
D'après le résultat 2°, il existe une suite $(x_n)_{n \geq 0}$ de points de B qui converge vers x.
Puisque la suite $(x_n)_{n \geq 0}$ converge vers x, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier n_0 tel que, pour tout entier $n \geqslant n_0$, on ait $\| x - x_n \| < \varepsilon$.
L'inégalité du triangle :

$$\| x - a \| \leqslant \| x - x_n \| + \| x_n - a \| < r + \varepsilon$$

donne, en faisant tendre ε vers 0 :

$$\| x - a \| \leqslant r$$

C'est dire que x appartient à la boule fermée de centre a et de rayon r. Donc l'adhérence de la boule ouverte B est contenue dans la boule fermée de centre a et de rayon r :

$$\overline{B(a, r)} \subseteq B'(a, r)$$

Réciproquement, soit x un point de la boule fermée $B'(a, r)$ de centre a et de rayon r. Il vérifie :

$$\| x - a \| \leqslant r.$$

Si $\| x - a \|$ est strictement plus petit que r, il n'y a plus rien à démontrer, x appartient à la boule ouverte $B(a, r)$, donc aussi à son adhérence, puisque tout point d'une partie est adhérent à cette partie.
Si la norme $\| x - a \|$ est égale à r, pour tout $\eta > 0$, il existe un nombre réel θ strictement compris entre 0 et $Inf\left(1; \frac{\eta}{r}\right)$:

$$0 < \theta < Inf\left(1; \frac{\eta}{r}\right)$$

Soit z le point défini par

$$z = a + (1 - \theta)(x - a) = x - \theta\,(x - a)$$

Ce point z vérifie la relation

$$\| z - a \| = (1 - \theta) \| x - a \| = (1 - \theta)\, r < r,$$

donc z est dans la boule ouverte de centre a et de rayon r.
Et comme z vérifie aussi

$$\| z - x \| = \theta \| x - a \| = \theta\, r < \eta,$$

il est dans la boule ouverte de centre x et de rayon η. Donc toute boule ouverte de centre x et de rayon $\eta > 0$ rencontre la boule ouverte de centre a et de rayon r. C'est dire que x est adhérent à B.
Donc la boule fermée B' de centre a est de rayon r est contenue dans l'adhérence de la boule ouverte de centre a et de rayon r :

$$B'(a, r) \subseteq \overline{B(a, r)}$$

On a donc l'égalité :

$$\boxed{B'(a, r) = \overline{B(a, r)}}$$

Cette relation montre, en particulier, que la boule fermée de centre a et de rayon r est une partie fermée de $\mathbb{R}^p$, puisque l'adhérence est toujours un fermé.

4°/ Intérieur d'une boule fermée.

Soit $B = B(a, r)$ la boule ouverte de centre a et de rayon $r > 0$.
Soit $B' = B'(a, r)$ la boule fermée de centre a et de rayon $r > 0$.
L'intérieur de B' est le plus grand ouvert contenu dans B'.
Comme B est un ouvert contenu dans B', il est contenu dans le plus grand ouvert contenue dans B' et l'on a déjà :

$$B \subseteq \mathring{B'}$$

Réciproquement, soit $x \in \mathring{B'}$.

Si $x = a$, il n'y a plus rien à démontrer, $x \in B$.

Si x est différent de a, alors $\| x - a \|$ est strictement plus grand que 0.
Comme x est intérieur à B', il existe, par définition de l'intérieur, un $\varepsilon > 0$, tel que la boule ouverte $B(x, \varepsilon)$ de centre x et de rayon ε soit contenue dans B' :
$B(x, \varepsilon) \subseteq B'(a, r)$.
L'adhérence de cette boule ouverte $B(x, \varepsilon)$ est, d'après la question précédente, la boule fermée $B'(x, \varepsilon)$ de centre x et de rayon ε : $\overline{B(x, \varepsilon)} = B'(x, \varepsilon)$.

$\overline{B(x, \varepsilon)}$ est contenue dans l'adhérence de B ', qui est B ', parce que :

— $B(x, \varepsilon) \subset B'(a, r) \Rightarrow \overline{B(x, \varepsilon)} \subseteq \overline{B'(a, r)}$

— Une boule fermée est une partie fermée de $\mathbb{R}^p$: $B'(a, r)$ est un fermé.
— Tout fermé est égal à son adhérence : $\overline{B'(a, r)} = B'(a, r)$, puisque l'adhérence d'une partie est le plus petit fermé contenant la partie.
Donc la boule fermée $B'(x, \varepsilon)$ de centre x et de rayon ε est, elle aussi, contenue dans $B'(a, r)$.
$B'(x, \varepsilon) \subseteq B'(a, r)$.
Considérons le point y défini par :

$$y = x + \frac{\varepsilon}{\|x - a\|}(x - a)$$

On a $\| y - x \| = \varepsilon$, donc

$$y \in B'(x, \varepsilon) \subset B'(a, r) \Rightarrow \| y - a \| \leqslant r$$

La relation :

$$y - a = \frac{\|x - a\| + \varepsilon}{\|x - a\|}(x - a)$$

s'écrit aussi :

$$x - a = \frac{\|x - a\|}{\|x - a\| + \varepsilon}(y - a)$$

On en déduit :

$$\| x - a \| \leqslant \frac{\|x - a\|}{\|x - a\| + \varepsilon} \| y - a \| < \| y - a \| \leqslant r$$

donc

$$\| x - a \| < r$$

Et ceci montre que x appartient à la boule ouverte $B = B(a, r)$ de centre a et de rayon r.

$$\mathring{B'} \subseteq B$$

d'où l'égalité :

$$\mathring{B}'(a, r) = B(a, r)$$

Chapitre 17. Ouverts et fermés de $\mathbb{R}^p$.

Enoncés.

Exercice 2. Intersection de boules ouvertes et de boules fermées.

Soit $\{e_1, \dots, e_p\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^p$ muni de la norme $\| \cdot \|_\infty$ définie par :

$$\| \sum_{j=1}^{j=p} x^j e_j \|_\infty = Sup\ (\ |x^1|\ , \dots , |x^p|\ )$$

La somme $\sum_{j=1}^{j=p} x^j e_j$ sera notée simplement $x^j e_j$ (**convention d'Einstein**).

1°/ On note B_j la boule ouverte de centre e_j et de rayon 1.

Quelle est l'intersection $\bigcap_{j=1}^{j=p} B_j$? Quelle est la réunion $\bigcup_{j=1}^{j=p} B_j$?

2°/ On note B'_j la boule fermée de centre e_j et de rayon 1.

Quelle est l'intersection $\bigcap_{j=1}^{j=p} B'_j$? Quelle est la réunion $\bigcup_{j=1}^{j=p} B'_j$?

Solution.

1°/ Boules ouvertes.

Pour $p = 1$, $e_1 = 1$, B_1 est l'ensemble des nombres réels x vérifiant $\| x - 1 \|_\infty = | x - 1 | < 1$. C'est l'intervalle ouvert de centre 1 et d'amplitude 1.

$$p = 1 : B_1 =]\ 0\ ;\ 2\ [$$

Pour $p = 2$, $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$.

B_1 est l'ensemble des couples de nombres réels (x^1, x^2) vérifiant $Sup\ (\ |x^1 - 1|\ , |x^2|\ ) < 1$, soit $0 < x^1 < 2$ et $-1 < x^2 < 1$. $B_1 =]\ 0\ ;\ 2\ [\times]\ -1\ ;\ 1\ [$.

De même $B_2 =]\ -1\ ;\ 1\ [\times]\ 0\ ;\ 2\ [$.

D'où $B_1 \cap B_2 = (\ ]\ 0\ ;\ 2\ [\cap]\ -1\ ;\ 1\ [\ ) \times (\ ]\ 0\ ;\ 2\ [\cap]\ -1\ ;\ 1\ [\ ) =]\ 0\ ;\ 1\ [\times]\ 0\ ;\ 1\ [$.

Pour p quelconque, supérieur ou égal à 2, et pour tout entier j compris entre 1 et p, e_j est le p-uple (x^1 , ... , x^p) dont toutes les coordonnées sont 0 à l'exception de la j-ème, qui vaut 1.
La boule ouverte B_j de centre e_j et de rayon 1 est l'ensemble des $x = (x^1 , ... , x^p) = x^k e_k$ vérifiant :

$$\| x - e_j) \|_\infty = Sup (| x^1 | , ... , | x^j - 1 | , ... , | x^p |) < 1$$

C'est le produit des intervalles ouverts d'amplitude 1, centrés sur 0 à l'exception du j-ème qui est centré sur 1.
L'intersection des boules ouvertes B_j pour $j = 1$ à p, est donc le produit des intersections de ces intervalles : c'est

$$\bigcap_{j=1}^{j=p} B_j =]\,0\,;\,1\,[^p, \forall\, p \geqslant 2$$

On peut interpréter cette intersection comme la boule ouverte de centre $\frac{1}{2}(e_1 + ... + e_p)$ et de rayon $\frac{1}{2}$.

$$\bigcap_{j=1}^{j=p} B_j = B\left(\frac{1}{2}(e_1 + ... + e_p) ; \frac{1}{2} \right)$$

La réunion $\bigcup_{j=1}^{j=p} B_j$ est le produit des réunions des intervalles constituant les B_j, c'est :

$$\bigcup_{j=1}^{j=p} B_j =]\,-1\,;\,2\,[^p, \forall\, p \geqslant 2$$

On peut interpréter cette réunion comme la boule ouverte de centre $(e_1 + ... + e_p)$ et de rayon $\frac{3}{2}$.

$$\bigcup_{j=1}^{j=p} B_j = B\left(e_1 + ... + e_p ; \frac{3}{2} \right)$$

2°/ Boules fermées.

Comme p est fini, tout ce qui vient d'être dit pour les boules ouvertes peut être redit, mutatis mutandi, pour les boules fermées :

$$\bigcap_{j=1}^{j=p} B'_j = B'\left(\frac{1}{2}(e_1 + ... + e_p) ; \frac{1}{2} \right);$$
$$\bigcup_{j=1}^{j=p} B'_j = B'\left(e_1 + ... + e_p ; \frac{3}{2} \right).$$

Chapitre 17. Ouverts et fermés de $\mathbb{R}^p$.

Enoncés.

Exercice 3. Suite décroissante de boules fermées et convergence d'une suite.

On considère une suite décroissante $(B_n)_{n\geq 1}$ de boules fermées de $\mathbb{R}^p$ avec :

$$B_n = B(x_n, \frac{1}{n}) = \left\{ y \in \mathbb{R}^p \mid \| y - x_n \|_2 \leq \frac{1}{n} \right\},$$

où $\| . \|_2$ désigne la norme euclidienne standard sur $\mathbb{R}^p$.

1°/ Démontrer que la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ de $\mathbb{R}^p$ converge.

2°/ Démontrer que l'on a : $\bigcap_{n\geq 1} B_n = \{ \lim_{n\to+\infty} x_n \}$.

Solution.

1°/ Convergence de la suite $(x_n)_{n\geq 1}$.

Soit ε un nombre réel > 0.
Soit N la partie entière de $\frac{2}{\varepsilon}$: $\frac{2}{\varepsilon} \leq N < \frac{2}{\varepsilon} + 1$. N est un entier supérieur ou égal à 0, et $N + 1$ un entier supérieur ou égal à 1.
On a : $N - 1 < \frac{2}{\varepsilon} \leq N$ donc $\frac{1}{N+1} < \frac{1}{N} \leq \frac{\varepsilon}{2} < \frac{1}{N-1}$.

Comme la suite $(B_n)_{n\geq 1}$ est décroissante, la boule fermée B_n est contenue dans B_{N+1} pour tout $n \geq N + 1$.
Or le centre d'une boule appartient à la boule, donc pour tout $n \geq N + 1$, $x_n \in B_n$ donc $x_n \in B_{N+1}$.

Soient n et m deux entiers quelconques supérieurs à $N + 1$.
D'après l'inégalité du triangle :
$\| x_n - x_m \|_2 = \| (x_n - x_{N+1}) + (x_{N+1} - x_m) \|_2 \leq \| x_n - x_{N+1} \|_2 + \| x_{N+1} - x_m \|_2$.
Puisque x_n et x_m appartiennent tous deux à la boule B_{N+1}, on a :
$\| x_n - x_{N+1} \|_2 \leq \frac{1}{N+1} < \frac{1}{N} \leq \frac{\varepsilon}{2}$ et $\| x_m - x_{N+1} \|_2 = \| x_{N+1} - x_m \|_2 \leq \frac{1}{N+1} < \frac{1}{N} \leq \frac{\varepsilon}{2}$.
D'où :
$\| x_n - x_m \|_2 < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

La relation :

$$(\forall\ \varepsilon > 0)(\exists\ N+1 \in \mathbb{N}^*)(\forall\ n \geq N+1)(\forall\ m \geq N+1)(\ \| x_n - x_m \|_2 < \varepsilon\ )$$

montre que la suite $(x_n)_{n \geq 1}$ est une **suite de Cauchy**.

Or, dans $\mathbb{R}^p$, toute suite de Cauchy est une suite convergente, donc :

La suite $(x_n)_{n \geq 1}$ est convergente.

2°/ Intersection des B_n.

a) La limite de la suite appartient à l'intersection des B_n.

Soit λ la limite de la suite $(x_n)_{n \geq 1}$.
Soit n un entier supérieur ou égal à 1.
Soit ε un nombre réel > 0.
Par définition de la limite d'une suite, il existe un entier $N \geq 1$ tel que, pour tout $m \geq N$, $\| x_m - \lambda \|_2 < \varepsilon$.
Soit m un entier supérieur à N et supérieur à n.
$\| x_m - \lambda \|_2 < \varepsilon$.
B_m est contenue dans B_n, puisque la suite de boules est décroissante.
L'inégalité du triangle donne :

$$\| x_n - \lambda \|_2 = \| (x_n - x_m) + (x_m - \lambda) \|_2 \leq \| x_n - x_m \|_2 + \| x_m - \lambda \|_2.$$

Comme m est supérieur à n, x_m appartient à la boule B_m qui est contenue dans B_n, donc $\| x_n - x_m \|_2 \leq \frac{1}{n}$.
D'où :

$$\| x_n - \lambda \|_2 < \frac{1}{n} + \varepsilon.$$

Faisons tendre ε vers 0, $\frac{1}{n} + \varepsilon$ tend vers $\frac{1}{n}$.
Par prolongement des inégalités par passage à la limite, nous obtenons : $\| x_n - \lambda \|_2 \leq \frac{1}{n}$.
Et cette relation montre que λ appartient à la boule fermée B_n, de centre x_n et de rayon $\frac{1}{n}$, quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Ainsi l'intersection $\bigcap_{n \geq 1} B_n$ n'est pas vide, elle contient au moins la limite $\lambda = \lim_{n \to +\infty} x_n$ de la suite $(x_n)_{n \geq 1}$.

b) L'intersection des B_n est réduite à la limite de la suite.

Soit μ un élément de $\bigcap_{n \geq 1} B_n$.

Pour tout entier $n \geq 1$, μ appartient à B_n, donc $0 \leq \| x_n - \mu \|_2 \leq \frac{1}{n}$.
Faisons tendre n vers l'infini. $\frac{1}{n}$ tend vers 0.

Par continuité de la norme, puisque la limite $\lim_{n \to +\infty} x_n$ existe, $\lim_{n \to +\infty} \| x_n - \mu \|_2 = \| \lim_{n \to +\infty} x_n - \mu \|_2 = \| \lambda - \mu \|_2$.
D'après le "théorème des gendarmes", on a donc : $\| \lambda - \mu \|_2 = 0$, ce qui montre que $\mu = \lambda$.

D'où :

$$\bigcap_{n \geq 1} B_n = \{ \lim_{n \to +\infty} x_n \}.$$

Chapitre 17. Ouverts et fermés de $\mathbb{R}^p$.

Enoncés.

Exercice 4. Condition pour qu'une réunion de boules fermées soit fermée.

Soit λ un nombre réel > 0.
Dans $\mathbb{R}^2$, on considère, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$\omega_k(\lambda) = B\left(a_k, \frac{\lambda}{k}\right)$, avec $a_k = \left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right)$.

A quelle condition nécessaire et suffisante doit satisfaire λ pour que $\Omega(\lambda) = \bigcup_{k \geq 1} \omega_k(\lambda)$ soit fermé ?

Solution.

1°/ Condition nécessaire.

Supposons que $\Omega(\lambda) = \bigcup_{k \geq 1} \omega_k(\lambda)$ soit fermé : il est égal à son adhérence.

Considérons la suite de points $b_k = a_k - \left(\frac{\lambda}{k}\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\lambda}{k}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $k \geq 1$.

$b_k \in \omega_k(\lambda)$.
Donc la suite $(b_k)_{k \geq 1}$ est une suite de points de $\Omega(\lambda)$ et cette suite converge vers (0, 0) lorsque k tend vers l'infini.
Donc (0, 0) est adhérent à $\Omega(\lambda)$: comme $\Omega(\lambda)$ est fermé, (0, 0) appartient à $\Omega(\lambda)$.
Il existe donc un k entier tel que $(0, 0) \in \omega_k(\lambda)$.

On a alors $\| a_k - (0, 0) \|_2 = \| a_k \|_2 \leq \frac{\lambda}{k}$, soit $\frac{\sqrt{2}}{k} \leq \frac{\lambda}{k}$ et $\lambda \geq \sqrt{2}$.

$$\boxed{\Omega(\lambda) \text{ fermé} \Rightarrow \lambda \geq \sqrt{2}.}$$

2°/ Condition suffisante.

Réciproquement, supposons que λ soit supérieur ou égal à $\sqrt{2}$.
Dans ce cas, pour tout entier k supérieur ou égal à 1 :

$\| a_k - (0, 0) \|_2 = \| a_k \|_2 = \frac{\sqrt{2}}{k} \leq \frac{\lambda}{k}$,

ce qui montre que (0, 0) appartient à tous les $\omega_k(\lambda)$, donc aussi à $\Omega(\lambda)$.

Donc la distance de (0, 0) à tout point de $\omega_k(\lambda)$ est inférieure au diamètre $2\frac{\lambda}{k}$ de $\omega_k(\lambda)$.
Il en résulte que, pour tout entier k supérieur ou égal à 1, la boule fermée $\omega_k(\lambda)$ est contenue dans la boule fermée $B_k(\lambda)$ de centre (0, 0) et de rayon $2\frac{\lambda}{k}$.
La suite $(B_k(\lambda))_{k\geq 1}$ est une suite décroissante de boules fermées.
Etant donné un entier $K \geq 1$, pour tout entier $k \geq K$, $\omega_k(\lambda) \subseteq B_k(\lambda) \subseteq B_K(\lambda)$

et la réunion $\bigcup_{k\geqslant K} \omega_k(\lambda)$ est contenue dans $B_K(\lambda)$.

Soit b un point adhérent à $\Omega(\lambda)$ et soit $(b_n)_{n\geq 1}$ une suite de points de $\Omega(\lambda)$ convergeant vers b.
Si $b = (0, 0)$, il est dans $\Omega(\lambda)$.
Si b est différent de (0, 0), sa norme vérifie $\| b \|_2 \neq 0$.

Etant donné un nombre réel ε vérifiant $0 < \varepsilon < \frac{\|b\|_2}{2}$, on a $0 < \varepsilon < \frac{\|b\|_2}{2} < \| b \|_2 - \varepsilon < \| b \|_2$.

On peut toujours trouver un entier K tel que $2\frac{\lambda}{K} < \| b \|_2 - \varepsilon$.
Il suffit de prendre $K = \left[4\frac{\lambda}{\|b\|_2} \right] + 2 > \left[4\frac{\lambda}{\|b\|_2} \right] + 1 \geq \left[2\frac{\lambda}{\|b\|_2 - \varepsilon} \right] + 1$.
En fait le K choisi, égal à $\left[4\frac{\lambda}{\|b\|_2} \right] + 2$, ne dépend pas de ε, pourvu que ε soit inférieur à $\frac{\|b\|_2}{2}$.

On a alors $\bigcup_{k\geqslant K} \omega_k(\lambda) \subseteq B_K(\lambda)$ et la distance de b à $B_K(\lambda)$ est $\| b \|_2 - 2\frac{\lambda}{K} > \varepsilon$.
Donc la distance de b à chacun des $\omega_k(\lambda)$, pour $k \geq K$, est supérieure à ε.
Il en est donc de même de la distance de b à chaque point de chaque $\omega_k(\lambda)$, pour $k \geq K$.

Mais comme la suite $(b_n)_{n\geq 1}$ converge vers b, il existe aussi un entier N tel que $\| b_n - b \|_2 < \varepsilon$, pour tout $n \geq N$.
Chaque b_n appartient à un $\omega_{k(n)}(\lambda)$ avec $k(n)$ qui ne peut pas être supérieur ou égal à K (sinon on aurait $\| b_n - b \|_2 > \varepsilon$, comme on vient de le voir).
Pour tout $n \geq N$, b_n appartient à $\bigcup_{k=1}^{k=K-1} \omega_k(\lambda)$.

La limite b de la suite $(b_n)_{n\geq 1}$ est donc adhérente à $\bigcup_{k=1}^{k=K-1} \omega_k(\lambda)$ qui est un fermé, puisque la

réunion d'une famille finie de fermés est un fermé. Donc $b \in \bigcup_{k=1}^{k=K-1} \omega_k(\lambda) \subseteq \Omega(\lambda)$.

Ainsi b appartient dans tous les cas à $\Omega(\lambda)$.
Tout point adhérent à $\Omega(\lambda)$ appartient à $\Omega(\lambda)$. C'est dire que $\Omega(\lambda)$ est fermé.

$$\boxed{\lambda \geq \sqrt{2} \Rightarrow \Omega(\lambda) \text{ fermé.}}$$

Conclusion : pour que $\Omega(\lambda) = \bigcup_{k \geqslant 1} \omega_k(\lambda)$ soit fermé, il faut et il suffit que λ soit supérieur ou égal à $\sqrt{2}$.
Cette condition est équivalente à $(0, 0) \in \Omega(\lambda)$.

Chapitre 17. Ouverts et fermés de $\mathbb{R}^p$.

Enoncés.

Exercice 5. Convergence d'une suite dans $\mathbb{R}^3$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère dans $\mathbb{R}^3$:

$$x_n = \left(\sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{i(i+1)}, n^2 - n^3 \tan\frac{1}{n}, \sum_{i=0}^{i=n} \frac{2^i}{i!} \right).$$

Etudier la convergence de la suite $(x_n)_{n \geq 1}$ de $\mathbb{R}^3$.

Solution.

Comme les projecteurs de $\mathbb{R}^3$ sont linéaires, donc continus, il est équivalent de dire que la suite $(x_n)_{n \geq 1}$ converge et de dire que les suites coordonnées convergent.

1°/ Première coordonnée.

Considérons la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ de nombres réels, définie par son terme général $u_n = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{i(i+1)}$.

$$\frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}$$

$$u_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Lorsque n tend vers l'infini, $\frac{1}{n+1}$ tend vers 0 et u_n tend vers 1.

2°/ Deuxième coordonnée.

Considérons la suite $(v_n)_{n \geq 1}$ de nombres réels, définie par son terme général $v_n = n^2 - n^3 \tan\frac{1}{n}$.

$$n^2 - n^3 \tan\frac{1}{n} = n^2 - n^3\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^5}\right)\right) = -\frac{1}{3} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Lorsque n tend vers l'infini, $\frac{1}{n^2}$ tend vers 0 et v_n tend vers $-\frac{1}{3}$.

3°/ Troisième coordonnée.

Considérons la suite $(w_n)_{n \geq 1}$ de nombres réels, définie par son terme général $w_n = \sum_{i=0}^{i=n} \frac{2^i}{i!}$.

Lorsque n tend vers l'infini, w_n tend vers $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{2^i}{i!} = e^2$.

4°/ Convergence de la suite $(x_n)_{n \geq 1}$.

Les trois suites coordonnées convergent donc la suite $(x_n)_{n \geq 1}$ converge et sa limite est

$$\lambda = \left(\lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{i(i+1)}, \lim_{n \to +\infty} (n^2 - n^3 \tan \frac{1}{n}), \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=0}^{i=n} \frac{2^i}{i!} \right) = \left(1, -\frac{1}{3}, e^2 \right)$$

On peut le vérifier directement en utilisant la norme $\| \, . \, \|_1$, par exemple (toutes les normes de $\mathbb{R}^3$ sont équivalentes).

Considérons un nombre réel $\varepsilon > 0$.

Il existe un entier N_1 tel que $n \geq N_1 \Rightarrow \left| \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{i(i+1)} - 1 \right| < \varepsilon$.

Il existe un entier N_2 tel que $n \geq N_2 \Rightarrow \left| n^2 - n^3 \tan \frac{1}{n} + \frac{1}{3} \right| < \varepsilon$.

Il existe un entier N_3 tel que $n \geq N_3 \Rightarrow \left| \sum_{i=0}^{i=n} \frac{2^i}{i!} - e^2 \right| < \varepsilon$.

Soit $N = Sup\,(N_1, N_2, N_3)$.

Pour tout $n \geq N$, on a :

$$\| x_n - \lambda \|_1 = Sup \left(\left| \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{i(i+1)} - 1 \right|, \left| n^2 - n^3 \tan \frac{1}{n} + \frac{1}{3} \right|, \left| \sum_{i=0}^{i=n} \frac{2^i}{i!} - e^2 \right| \right) < \varepsilon.$$

Et ceci montre que la suite $(x_n)_{n \geq 1}$ converge et que sa limite est λ.

Chapitre 17. Ouverts et fermés de $\mathbb{R}^p$.

Enoncés.

Exercice 6. Norme d'une application linéaire.

Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$ une application linéaire de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^q$. Démontrer que si u est bornée par M sur la boule ouverte $B(0, 1) = \{x \in \mathbb{R}^p \mid \| x \|_2 < 1\}$, alors u est encore bornée par M sur : $S = \{x \in \mathbb{R}^p \mid \| x \|_2 = 1\}$.	

Solution.

Soit $x \in S$ et soit ε un nombre réel > 0.

$\| x \|_2 = 1$ et $\left\| \frac{x}{1+\frac{\varepsilon}{M}} \right\|_2 = \frac{1}{1+\frac{\varepsilon}{M}} < 1$, donc $\frac{x}{1+\frac{\varepsilon}{M}} \in B(0, 1)$ et $\left\| u\left(\frac{x}{1+\frac{\varepsilon}{M}} \right) \right\|_2 \leq M$, par hypothèse.

Comme u est linéaire, $u\left(\frac{x}{1+\frac{\varepsilon}{M}} \right) = \frac{1}{1+\frac{\varepsilon}{M}} u(x)$,

donc $\left\| u\left(\frac{x}{1+\frac{\varepsilon}{M}} \right) \right\|_2 = \left\| \frac{1}{1+\frac{\varepsilon}{M}} u(x) \right\|_2 = \frac{1}{1+\frac{\varepsilon}{M}} \| u(x) \|_2 \leq M$.

Il en résulte $\| u(x) \|_2 \leq M\left(1 + \frac{\varepsilon}{M} \right) = M + \varepsilon$.

Ainsi, pour tout $x \in S$ et tout $\varepsilon > 0$, on a $\| u(x) \|_2 \leq M + \varepsilon$.
Par prolongement des inégalités par passage à la limite, en faisant tendre ε vers 0, il reste : $\| u(x) \|_2 \leq M$.

Donc u est encore bornée par M sur S.

L'avantage, cette fois, c'est que S est fermé : donc l'image de S par u (qui est linéaire, donc continue) est un fermé.
L'image de S par l'application continue $x \mapsto \| u(x) \|_2$ est un intervalle fermé.
Il existe donc un point de S en lequel $\| u(x) \|_2$ atteint son maximum, noté $\| u \|_2$ et appelé la **norme de *u***.
Pour tout x non nul de $\mathbb{R}^p$, $\frac{x}{\|x\|} \in S$ et $\left\| u\left(\frac{x}{\|x\|} \right) \right\|_2 \leq \| u \|_2$

$$\| u(x) \|_2 \leq \| x \|_2 \| u \|_2.$$

En particulier, si $x \in B(0, 1)$, $\| x \|_2 < 1$ et $\| u(x) \|_2 < \| u \|_2$.

Chapitre 17. Ouverts et fermés de $\mathbb{R}^p$.

Enoncés.

Exercice 7. Adhérence d'une partie de $\mathbb{R}^p$.

1°/ Rappeler la définition de l'adhérence $\overline{A}$ d'une partie A de $\mathbb{R}^p$. 2°/ Démontrer que si A et B sont deux parties de $\mathbb{R}^p$, alors $\overline{A \cap B}$ est contenu dans $\overline{A} \cap \overline{B}$. A-t-on l'égalité ? 3°/ Si $p = 1$ et $d(x, y) = \lvert x - y \rvert$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $y \in \mathbb{R}$, déterminer l'adhérence de la partie : $A = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots \right\}$ de $\mathbb{R}$.	

Solution.

1°/ Adhérence.

L'adhérence d'une partie A est, par définition, l'ensemble des points adhérents à A.
Rappelons qu'un point a est dit adhérent à A si tout voisinage de a contient des points de A.

Propriétés

L'adhérence d'une partie A est le plus petit fermé contenant A : c'est aussi l'intersection des fermés contenant A.

2°/ Adhérence d'une intersection.

Soit a un point adhérent à $A \cap B$.
Tout voisinage V de a contient au moins un point $b \in A \cap B$.
$b \in A$, donc V contient un point de A et a est adhérent à A : $a \in \overline{A}$.
$b \in B$, donc V contient un point de B et a est adhérent à B : $a \in \overline{B}$.

$a \in \overline{A \cap B} \Rightarrow a \in \overline{A} \cap \overline{B}$.

$\overline{A \cap B}$ est donc contenu dans $\overline{A} \cap \overline{B}$.

En général, on n'a pas l'égalité.

3°/ Adhérence d'une partie discrète.

Considérons la partie $A = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots \right\}$ de $\mathbb{R}$.

Cette partie possède une seule valeur d'adhérence, ou point d'accumulation, c'est 0, qui n'appartient pas à A.
En effet, tout voisinage de 0 contient des $\frac{1}{n}$, avec un n aussi grand qu'on veut.
Or toute valeur d'ahérence est un point adhérent à A, donc 0 appartient à l'adhérence de A.
L'adhérence de A contient donc $A \cup \{0\}$.

Le complémentaire de $A \cup \{0\}$ est ouvert.
En effet, soit x est un nombre réel non nul qui n'est pas l'inverse d'un entier, c'est-à-dire un nombre n'appartenant pas à $A \cup \{0\}$.
Il existe un entier $k \geq 0$ tel que $\frac{1}{k+1} < x < \frac{1}{k}$. On prend $+\infty$ à la place de $\frac{1}{k}$ lorsque x est supérieur à 1 ($k = 0$).
Soit alors ε un nombre réel > 0, strictement plus petit que le plus petit des deux nombres $\frac{1}{k} - x > 0$ et $x - \frac{1}{k+1} > 0$.
La boule ouverte de centre x et de rayon ε est entièrement contenue dans l'intervalle ouvert $\left]\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\right[$.
C'est un voisinage de x qui ne contient aucun point de A et qui ne contient pas 0 : il est donc entièrement contenu dans le complémentaire de $A \cup \{0\}$.
Le complémentaire de $A \cup \{0\}$ contient donc un voisinage de chacun de ses points, c'est un voisinage de chacun de ses points, c'est un ouvert.

Donc $A \cup \{0\}$, complémentaire d'un ouvert, est fermé.

Un fermé est égal à son adhérence.
Donc l'adhérence de $A \cup \{0\}$ est $A \cup \{0\}$: $\overline{A \cup \{0\}} = A \cup \{0\}$

Or l'adhérence de A est contenue dans l'adhérence de $A \cup \{0\}$ puisque A est contenu dans $A \cup \{0\}$.

On a donc d'une part $A \cup \{0\} \subseteq \overline{A}$ donc $\overline{A \cup \{0\}} \subseteq \overline{A}$
et, d'autre part, $\overline{A} \subseteq \overline{A \cup \{0\}}$.

D'où l'égalité : $\overline{A} = \overline{A \cup \{0\}} = A \cup \{0\}$

L'adhérence de A est $A \cup \{0\}$.

Chapitre 17. Ouverts et fermés de $\mathbb{R}^p$.

Enoncés.

Exercice 8. Suite décroissante de fermés non vides.

Soit $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite décroissante de fermés non vides de $\mathbb{R}^p$.

1°/ Donner un exemple où l'on a $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_k = \emptyset$.

2°/ Démontrer que si A_0 est borné, alors $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_k \neq \emptyset$.

Solution.

1°/ Exemple.

La question 2° oriente la recherche d'un exemple : il faut que A_0 ne soit pas borné.

En identifiant $\mathbb{R}$ avec la première composantes de $\mathbb{R}^p$, on voit qu'il suffit de trouver un exemple dans $\mathbb{R}$ pour en avoir un dans $\mathbb{R}^p$.

Pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, posons $A_k = \{ n \in \mathbb{N} \mid n \geq k \}$.

A_k est fermé, puisque son complémentaire est ouvert.

$\bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_k$ est vide, puisqu'il n'existe aucun entier qui soit supérieur à tous les autres.

On obtient un exemple dans $\mathbb{R}^p$ en prenant les parties $A_k \times \{0\} \times ... \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^p$.
Ce sont des fermés pour la topologie produit et ils forment une suite décroissante de fermés non vides dont l'intersection est vide.

2°/ Cas où A_0 est borné.

Dans ce cas, comme la suite est décroissante, tous les A_k sont fermés et bornés : ce sont des compacts de $\mathbb{R}^p$.
Comme les projecteurs sont des applications linéaires continues, les projections des A_k sur les axes $\mathbb{R}$ sont des compacts de $\mathbb{R}$ (**théorème de Weierstrass** : l'image d'un compact par une application continue est un compact).
Chaque projection de A_k est donc formée d'un nombre fini > 0 d'intervalles fermés bornés.

Lorsque k augmente, ces intervalles fermés bornés forment une suite décroissante sur chaque composante de $\mathbb{R}^p$ et leur nombre forme une suite décroissante d'entiers ≥ 1.
Puisque les nombres d'intervalles forment une suite décroissante d'entiers minorée par 1, cette suite a une limite.
Et comme le nombre varie de façon entière, la limite est atteinte pour un entier K fini.
Il existe donc un entier K au-delà duquel, le nombre d'intervalles fermés de chaque projection des A_k, pour $k \geq K$, ne varie plus.

D'après le **principe des intervalles emboîtés**, l'intersection d'une suite décroissante d'intervalles fermés bornés n'est pas vide. Le produit de ces intersections non vides est contenu dans l'intersection des A_k, de sorte que cette intersection n'est pas vide.

Exercices

Limites dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$.

1. **Limite dans un espace normé.**
2. **Pour montrer qu'il n'y a pas de limite.**
3. **Pour montrer qu'il y a une limite.**

Limite dans un espace normé.

HAUT

Soient E et F des espaces normés, X une partie de E, X' une partie de X, a un point adhérent à X', f une application de X dans F, on dit que ***f* tend vers *b* dans *F* lorsque *x* tend vers *a* en restant dans *X* '**, si, et seulement si, pour tout nombre réel $\varepsilon > 0$, il existe un nombre réel $\eta > 0$ tel que, pour tout élément x de X', la relation $\| x - a \| < \eta$ entraîne la relation $\| f(x) - b \| < \varepsilon$.

On dit aussi, dans ce cas, que ***f* admet *b* comme limite en *a* sur *X* '**. On écrit cette propriété :

$$b = \lim_{\substack{x \to a \\ x \in X'}} f(x)$$

Lorsque a est un élément de X, on l'écrit simplement :

$$b = \lim_{x \to a} f(x)$$

Remarquons que lorsque $f(x)$ tend vers b si x tend vers a, **on ne sait pas si *b* est l'image d'un élément de *E***.

Propriétés d'une limite.

1. Quand elle existe, la limite est unique.
2. Quand la limite existe, l'image d'une suite de points convergeant vers a est une suite convergeant vers b.
3. $b = \lim_{\substack{x \to a \\ x \in X'}} f(x) \Leftrightarrow \lim_{\substack{x \to a \\ x \in X'}} \| f(x) - b \| = 0.$
4. La limite de $f(x)$ est un point adhérent à $f(X')$.
5. La limite d'une combinaison linéaire est la combinaison linéaire des limites.
6. La limite de la norme de $f(x)$ est la norme de la limite de $f(x)$.
7. L'image d'une limite par une application continue est la limite de l'application composée :

$$g\left(\lim_{x \to a} f(x)\right) = \lim_{x \to a} g(f(x))$$

HAUT

Pour montrer qu'il n'y a pas de limite.

1er moyen.

- trouver deux suites de points tendant vers *a* pour lesquelles les suites images n'ont **pas la même limite**.

2e moyen.

- trouver une suite de points tendant vers *a* pour laquelle la suite des images n'est **pas bornée**.

3e moyen.

- trouver une suite de points tendant vers *a* pour laquelle la suite des images n'a **pas de limite**.

HAUT

Pour montrer qu'il y a une limite.

1er moyen.

- montrer que la fonction est **lipschitzienne** en a : il existe un k tel que, pour tout x assez voisin de a, la relation suivante soit vérifiée :
  $\| f(x) - b \| \leqslant k \| x - a \|$.

2e moyen.

- montrer que la fonction est **hölderienne** en a : il existe un k et un $\alpha > 0$, tels que, pour tout x assez voisin de a, la relation suivante soit vérifiée :
  $\| f(x) - b \| \leqslant k \| x - a \|^{\alpha}$.

3e moyen.

- utiliser, si possible, un **développement limité**.

HAUT

Chapitre 18. Limites dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$.

Exercices

Exercice 1. Limites dans $\mathbb{R}^2$ de 9 fonctions en (0,0).
Exercice 2. Limite dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 1. Limites dans $\mathbb{R}^2$ de 9 fonctions en (0,0).

HAUT

Les fonctions suivantes définies dans $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, ont-elles une limite lorsque (x, y) tend vers $(0, 0)$ en restant dans $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$?

1°/ $f(x,y) = \dfrac{x \sin y}{x^2+y^2}$.

2°/ $f(x,y) = \dfrac{x^3+y^3}{|x|+|y|}$.

3°/ $f(x,y) = (x^2+y^2)\sin\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right)$.

4°/ $f(x,y) = \dfrac{2x}{x^2+y^2}\left((x^2+y^2)\sin\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right) - \cos\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right)\right)$.

5°/ $f(x,y) = \dfrac{2y}{x^2+y^2}\left((x^2+y^2)\sin\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right) - \cos\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right)\right)$.

6°/ $f(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{x-y}$.

7°/ $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} e^{-\frac{1}{6}(x^2+y^2)}$.

8°/ $f(x,y) = \dfrac{x \sin y - y \sin x}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

9°/ $f(x,y) = \dfrac{y^2}{x^2} \ln\left(1+\dfrac{y}{x}\right)$.

Solution

HAUT

Exercice 2. Limite dans $\mathbb{R}^3$.

Soit $f : \mathbb{R}^3 - \{(0, 0, 0)\} \to \mathbb{R}$, définie par :

$$f(x, y, z) = \frac{x+y}{x^2+y^2+z^2}.$$

L'application f admet-elle une limite en $A = (2, -2, 0)$?

Solution

HAUT

Chapitre 18. Limites dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$.

Enoncés.

Exercice 1. Limites dans $\mathbb{R}^2$ de 9 fonctions en (0,0).

Les fonctions suivantes définies dans $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, ont-elles une limite lorsque (x, y) tend vers $(0, 0)$ en restant dans $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$?

1°/ $f(x, y) = \dfrac{x \sin y}{x^2 + y^2}$.

2°/ $f(x, y) = \dfrac{x^3 + y^3}{|x| + |y|}$.

3°/ $f(x, y) = (x^2 + y^2) \sin\left(\dfrac{1}{x^2 + y^2}\right)$.

4°/ $f'_1(x, y) = \dfrac{2x}{x^2 + y^2}\left((x^2 + y^2) \sin\left(\dfrac{1}{x^2 + y^2}\right) - \cos\left(\dfrac{1}{x^2 + y^2}\right)\right)$.

5°/ $f'_2(x, y) = \dfrac{2y}{x^2 + y^2}\left((x^2 + y^2) \sin\left(\dfrac{1}{x^2 + y^2}\right) - \cos\left(\dfrac{1}{x^2 + y^2}\right)\right)$.

6°/ $f(x, y) = \dfrac{x^2 + y^2}{x - y}$.

7°/ $f(x, y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} e^{-\frac{1}{6}(x^2 + y^2)}$.

8°/ $f(x, y) = \dfrac{x \sin y - y \sin x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

9°/ $f(x, y) = \dfrac{y^2}{x^2} \ln\left(1 + \dfrac{y}{x}\right)$.

Solution.

1°/ Première limite.

HAUT

$$f(x, y) = \frac{x \sin y}{x^2 + y^2}$$

Considérons la suite de terme général $(x_n, y_n) = \left(0, \dfrac{\pi}{n}\right)$.

Cette suite tend vers (0,0) lorsque n augmente indéfiniment.
Son image par f est la suite de terme général $f(x_n, y_n) = 0$: sa limite est 0.

Considérons maintenant la suite de terme général $(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$.

Cette suite tend aussi vers (0, 0) lorsque n augmente indéfiniment.
Son image par f est la suite de terme général $f(x_n, y_n) = \frac{1}{2}\frac{\sin x_n}{x_n}$: sa limite est $\frac{1}{2}$ lorsque n augmente indéfiniment, puisque $x_n = \frac{1}{n}$ tend vers 0.

On a donc trouvé, dans $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$, **deux suites convergeant vers (0, 0), dont les images par *f* n'ont pas la même limite dans $\mathbb{R}$**. Il en résulte que f n'a pas de limite en (0, 0), car s'il y avait une limite λ, celle-ci serait unique et l'image par f de toute suite de points de $\mathbb{R}^2$ convergeant vers (0, 0) serait une suite convergeant vers cette limite λ de f en (0,0).

f n'a pas de limite en (0, 0).

2°/ Deuxième limite.

HAUT

$$f(x, y) = \frac{x^3 + y^3}{|x| + |y|}.$$

Dans $\mathbb{R}$, pour $|x| + |y| \neq 0$, on a :

$$0 \leqslant |f(x, y)| = \left|\frac{x^3 + y^3}{|x| + |y|}\right| \leqslant \frac{|x|^3 + |y|^3}{|x| + |y|} = |x|^2 + |y|^2 - |x||y| \leqslant (|x| + |y|)^2 = \|(x, y)\|_1^2$$

(Voir Chapitre 15, Exercice 1, pour la définition de la norme $\|\ .\ \|_1$)
Comme **toutes les normes de $\mathbb{R}^2$ sont équivalentes**, dire que (x, y) tend vers (0, 0), c'est dire que $\|(x, y)\|_1$ tend vers 0, donc, d'après le **théorème des gendarmes**, $|f(x, y)|$ tend vers 0, de sorte que :

$f(x, y)$ admet 0 pour limite lorsque (x, y) tend vers (0, 0).

3°/ Troisième limite.

HAUT

$$0 \leqslant f(x, y) = (x^2 + y^2)\sin\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right) \leqslant x^2 + y^2 = \|(x, y)\|_2^2.$$

(Voir Chapitre 15, Exercice 1, pour la définition de la norme $\|\ .\ \|_2$)
Comme **toutes les normes de $\mathbb{R}^2$ sont équivalentes**, dire que (x, y) tend vers (0, 0), c'est dire que $\|(x, y)\|_2$ tend vers 0, donc, d'après le **théorème des gendarmes**, $f(x, y)$ tend vers 0, de sorte que :

$f(x, y)$ admet 0 pour limite lorsque (x, y) tend vers (0, 0).

4°/ Quatrième limite.

HAUT

$$f'_1(x, y) = \frac{2x}{x^2 + y^2}\left((x^2 + y^2)\sin\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right) - \cos\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right)\right)$$

Considérons la suite de points définie par :

$$(x, y) = \left(\frac{1}{2\sqrt{n\pi}}, \frac{1}{2\sqrt{n\pi}} \right),$$

soit, en coordonnées polaires du plan : $\theta = \frac{\pi}{4}$, $r = \frac{1}{\sqrt{2n\pi}}$.

Cette suite de points tend vers (0, 0) lorsque n augmente indéfiniment. Et la suite des images :

$$f'_1(x, y) = -2\sqrt{n\pi}$$

n'est pas bornée.

L'application f'_1 n'a pas de limite en (0, 0).

Nous verrons plus tard que l'application f'_1 est la dérivée partielle par rapport à x de l'application f de la 3e question: cette dérivée partielle par rapport à x existe néanmoins et est nulle en (0,0), bien que f'_1 n'ait pas de limite en (0,0).

5°/ Cinquième limite.

HAUT

$$f'_2(x, y) = \frac{2y}{x^2+y^2}\left((x^2 + y^2) \sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) - \cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\right)$$

Considérons la suite de points définie par :

$$(x, y) = \left(\frac{1}{2\sqrt{n\pi}}, \frac{1}{2\sqrt{n\pi}} \right),$$

soit, en coordonnées polaires du plan : $\theta = \frac{\pi}{4}$, $r = \frac{1}{\sqrt{2n\pi}}$.

Cette suite de points tend vers (0, 0) lorsque n augmente indéfiniment. Et la suite des images :

$$f'_2(x, y) = -2\sqrt{n\pi}$$

n'est pas bornée.

L'application f'_2 n'a pas de limite en (0, 0).

Nous verrons plus tard que l'application f'_2 est la dérivée partielle par rapport à y de l'application f de la 3e question: cette dérivée partielle par rapport à y existe néanmoins et est nulle en (0,0), bien que f'_2 n'ait pas de limite en (0,0).

6°/ Sixième limite.

HAUT

Considérons la suite de points de $\mathbb{R}^2 - \{ (0, 0) \}$ de terme général $\left(\frac{1}{n}, 0\right)$.

Cette suite a pour limite (0, 0) lorsque *n* augmente indéfiniment.
L'image de cette suite par *f* est la suite de terme général $f(x, 0) = x = \frac{1}{n}$.

Sa limite est 0 lorsque *n* augmente indéfiniment.

Si *f* a une limite en (0, 0), celle-ci ne peut être que 0.

Nous allons montrer que, pour tout $\eta > 0$, aussi petit qu'on veut, et pour toute constante réelle *A*, aussi grande qu'on veut, on peut trouver, dans la boule de centre (0,0) et de rayon η un point (x, y) tel que $| f(x, y) |$ soit supérieur à *A* : cela montrera que *f* n'est pas bornée au voisinage de (0, 0), donc que

f n'a pas de limite en (0, 0).

Principe de la démonstration.

Comme toutes les normes de $\mathbb{R}^2$ sont équivalentes, nous utiliserons la **norme produit** $\| . \|_\infty$ définie par :

$$\| (x, y) \|_\infty = Sup (| x | , | y |),$$

pour laquelle les boules sont carrées.

Dans la formule :

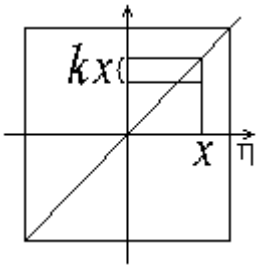
$$f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{x - y}$$

on voit bien que le problème vient de la droite d'équation $y = x$.

Dans une boule *B* de centre (0, 0) et de rayon η, nous allons considérer un point (x, y) avec $x > 0$ constant :

$y = (1 - k) x$, où *k* est une constante réelle strictement positive à déterminer

Pour $x > 0$ fixé, lorsque $k > 0$ diminue à partir de 1 et tend vers 0, le point (x, y) se rapproche du point (x, x) en restant sur la droite parallèle à l'axe des *y* située à l'abscisse *x* : tous les points (x, y) de la forme $(x, (1 - k) x)$ avec $0 < k < 1$, sont dans la boule *B*, puisque leur norme est $\| (x, (1 - k) x) \|_\infty = Sup (| x | , | (1 - k) x |) = x < \eta$.



Nous allons montrer que, lorsque *k* tend vers 0, c'est-à-dire lorsque le point (x, y) se rapproche du

point (x, x), on peut rendre $f(x, y)$ aussi grand qu'on veut et, en particulier, plus grand qu'une constante arbitraire A fixée à l'avance.

Réalisation de la démonstration.

Pour $x > 0$ et $y = (1 - k)\,x$ avec $1 > k > 0$, $f(x, y)$ prend la forme :

$$f(x, (1-k)\,x) = \frac{x^2 + y^2}{x - y} = \frac{1 + (1-k)^2}{k}\,x > 0$$

On a alors :

$$|\,f(x, y)\,| = f(x, y) = \frac{1 + (1-k)^2}{k}\,x = \frac{1 + (1-k)^2}{k}\,\|\,(x, y)\,\|_\infty$$

On s'intéresse aux points d'abscisse x fixée inférieure à η :

$$x < \eta.$$

Pour avoir $|\,f(x, y)\,| > A$, avec $y = (1 - k)\,x$, il suffira de prendre un k vérifiant :

$$|\,f(x, y)\,| = \frac{1 + (1-k)^2}{k}\,x > A$$

$$k\,(\,|\,f(x, y)\,| - A) = k^2 - \left(2 + \frac{A}{x}\right)k + 2 > 0$$

Comme on a choisi un $x > 0$, $2 + \frac{A}{x}$ est positif. Donc si le trinôme $k^2 - \left(2 + \frac{A}{x}\right)k + 2$ a des racines réelles, leur somme est positive et leur produit 2 est positif : les deux racines sont positives, et même strictement positives puisque leur produit vaut 2.

Pour qu'il y ait des racines réelles, il faut et il suffit que le discriminant du trinôme soit positif :

$$\left(2 + \frac{A}{x}\right)^2 - 8 \geqslant 0$$

$$\frac{A}{x} \geqslant 2\,(\sqrt{2} - 1)$$

$$x \leqslant \frac{A}{2\,(\sqrt{2} - 1)} = \frac{A}{2}(\sqrt{2} + 1)$$

Si ce n'est pas le cas, le trinôme est toujours positif, quel que soit $k > 0$, et $k\,(\,|\,f(x, y)\,| - A)$ est strictement positif.
Comme k est choisi strictement plus grand que 0, il en résulte que $|\,f(x, y)\,|$ est strictement plus grand que A.

Si x, choisi strictement inférieur à η, est aussi inférieur ou égal à $\frac{A}{2}(\sqrt{2} + 1)$, le trinôme est strictement positif lorsque $k > 0$ est strictement inférieur à la plus petite des deux racines réelles :

$$0 < k < k_1 = \frac{1}{2}\left(2 + \frac{A}{x} - \sqrt{\left(2 + \frac{A}{x}\right)^2 - 8}\right).$$

Pour être sûr de prendre un k inférieur à 1, on choisira un nombre k strictement compris entre 0 et $Inf\,(1, k_1)$.

Ainsi, pour tout $x < \eta$, il existe un k strictement compris entre 0 et 1 telle que $| f(x, (1 - k)\,x) |$ soit strictement plus grand que A.

$$(\forall\, A > 0)(\forall\, \eta > 0)(\exists\, (x, y) \in B((0, 0), \eta))(\,| f(x, y) | > A\,)$$

C'est dire que f n'est pas bornée au voisinage de (0, 0).

f n'a pas de limite en (0,0).

7°/ Septième limite.

HAUT

Nous allons démontrer que f n'est pas bornée au voisinage de (0,0) donc n'a pas de limite dans $\mathbb{R}^2 - \{ (0, 0) \}$ en (0,0).

Comme les normes de $\mathbb{R}^2$ sont équivalentes, nous utiliserons, compte-tenu de la forme de f, la norme euclidienne définie par :

$$\| (x, y) \| = \sqrt{x^2 + y^2} = r.$$

$$f(x, y) = \frac{1}{r} e^{-\frac{r^2}{6}}$$

C'est l'application composée de la norme et de la fonction numérique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$r \mapsto \frac{1}{r} e^{-\frac{r^2}{6}}$$

Soit $A > 0$ une constante réelle donnée, aussi grande que l'on veut. Nous allons montrer qu'il existe un $\eta > 0$ tel que, pour tout $r < \eta$, on ait :

$$| f(x, y) | = f(x, y) > A.$$

L'exponentielle $x \mapsto e^x$ est une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (Chapitre 3, Définitions).
L'application polynôme $r \mapsto -\frac{r^2}{6}$ est, comme on le verra plus loin (Chapitre 19, Exercice 1), également une fonction continue dans $\mathbb{R}$, donc l'application composée, qui est la fonction exponentielle

$$r \mapsto e^{-\frac{r^2}{6}}$$

est continue dans $\mathbb{R}_+$ et, de plus, elle est bornée par $1 = f(0)$.

Alors, pour tout $\varepsilon = \frac{1}{A+1} > 0$, il existe un $\eta_A > 0$, que l'on peut choisir inférieur à $\frac{1}{A+1}$, tel que :

$$0 \leqslant r < \eta_A \Rightarrow (1-\varepsilon) < \frac{1}{r} e^{-\frac{r^2}{6}} \leqslant 1$$

Comme l'exponentielle n'atteint la valeur 1 que pour $r = 0$, on peut aussi écrire :

$$0 < r < \eta_A \Rightarrow (1-\varepsilon) < \frac{1}{r} e^{-\frac{r^2}{6}} < 1$$

$$\frac{1}{r} > \frac{1}{\eta A} \Rightarrow \frac{1}{r} e^{-\frac{r^2}{6}} > \frac{1-\varepsilon}{\eta A} > (A+1)\left(1-\frac{1}{A+1}\right) = A$$

On voit donc que, pour tout $A > 0$, aussi grand qu'on veut, il existe un $\eta_A > 0$, tel que

$$0 < r < \eta_A \Rightarrow \frac{1}{r} e^{-\frac{r^2}{6}} > A.$$

C'est dire que la fonction numérique

$$r \mapsto \frac{1}{r} e^{-\frac{r^2}{6}}$$

n'est pas bornée au voisinage de 0.
Il en résulte que l'application $f : \mathbb{R}^2 - \{ (0, 0) \} \to \mathbb{R}$, définie par :

$$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} e^{-\frac{1}{6}(x^2+y^2)}$$

n'est pas bornée au voisinage de (0,0).

f n'a pas de limite en (0,0).

8°/ Huitième limite.

HAUT

Dire que (x, y) tend vers (0,0), c'est dire que x tend vers 0 et que y tend vers 0, parce que toutes les normes de $\mathbb{R}^2$ sont équivalentes, donc on peut utiliser sur $\mathbb{R}^2$ la **norme produit** de normes de $\mathbb{R}$ définie par

$$\| (x, y) \| = Sup (| x | , | y |).$$

Pour trouver une limite de f en (0, 0), on peut utiliser le **développement de Taylor-Mac Laurin** d'une fonction numérique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$:

$$\sin y \sim y - \frac{y^3}{6}$$
$$\sin x \sim x - \frac{x^3}{6}$$

$$x \sin y - y \sin x \sim x y - x \frac{y^3}{6} - x y + y \frac{x^3}{6} = \frac{x y}{6}(x^2 - y^2)$$

$$\frac{x\sin y - y\sin x}{\sqrt{x^2+y^2}} \sim \frac{xy}{6}\frac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\left|\frac{x\sin y - y\sin x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \sim \left|\frac{xy}{6}\frac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| = \left|\frac{xy}{6}\right|\left|\frac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \leqslant \left|\frac{xy}{6}\right|\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \left|\frac{xy}{6}\right|\sqrt{x^2+y^2}$$

Lorsque $\| (x, y) \|$ tend vers 0, $\sqrt{x^2+y^2}$ tend vers 0, $| x\,y |$ tend vers 0 et le produit $\left|\frac{xy}{6}\right|\sqrt{x^2+y^2}$ tend vers 0, donc $\frac{x\sin y - y\sin x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ tend vers 0.

f admet 0 comme limite en (0,0).

9°/ Neuvième limite.

HAUT

Pour un entier $k \geqslant 0$, considérons la suite de points de $\mathbb{R}^2$ définie par :

$$(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{k}{n}\right).$$

$$y_n = k\,x_n.$$

$$f(x_n, y_n) = k^2 \ln(1+k)$$

$f(x_n, y_n)$ ne dépend pas de n.
La suite $f(x_n, y_n)_{n \geq 0}$ est constante.
Sa limite lorsque n augmente indéfiniment est donc encore $k^2 \ln(1+k)$.
Elle prend des valeurs différentes si k prend des valeurs différentes.

Si f admettait une limite en (0,0), toute suite de points tendant vers (0,0) aurait pour image par f une suite de nombres réels convergeant vers cette limite. La limite serait donc la même pour toute suite image d'une suite tendant vers (0,0) : ce n'est pas le cas.

f n'a pas de limite en (0,0).

Chapitre 18. Limites dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$.

Enoncés.

Exercice 2. Limite dans $\mathbb{R}^3$.

Soit $f : \mathbb{R}^3 - \{(0, 0, 0)\} \to \mathbb{R}$, définie par :

$$f(x, y, z) = \frac{x+y}{x^2+y^2+z^2}.$$

L'application f admet-elle une limite en $A = (2, -2, 0)$?

Solution.

$$f(2, -2, 0) = 0.$$

Le dénominateur $x^2 + y^2 + z^2$ de f est un polynôme. Sa valeur en A est 8, donc non nulle. Nous allons montrer qu'il existe une boule ouverte de centre A tel que pour tout point (x, y, z) de cette boule, $x^2 + y^2 + z^2$ soit non nul. Cette propriété est équivalente au fait que le point (0, 0, 0) n'appartient pas à la boule.

Comme toutes les normes de $\mathbb{R}^3$ sont équivalentes, on peut utiliser dans $\mathbb{R}^3$ la norme euclidienne définie dans la base canonique par :

$$\| (x, y, z) \| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

Soit B la boule ouverte de centre $A = (2, -2, 0)$ et de rayon r, $0 < r < 2\sqrt{2}$.
Soit $O = (0, 0, 0)$.
Pour tout point $M = (x, y, z)$ de la boule B, on a :

$$| \| O - M \| - \| O - A \| | \leqslant \| M - A \| < r$$
$$\| O - A \| - r < \| O - M \| < \| O - A \| + r$$

Et comme $\| O - A \| - r = \| A \| - r = 2\sqrt{2} - r$ est strictement plus grand que 0, $\| O - M \| = \| M \|$ est strictement plus grand qu'un nombre indépendant de M , $2\sqrt{2} - r$, qui est strictement plus grand que 0. Donc, dans la boule B, la norme de M n'est jamais nulle : c'est dire que O n'appartient pas à B.

Pour tout r vérifiant $0 < r < 2\sqrt{2}$, le polynôme $x^2 + y^2 + z^2$ ne s'annule en aucun point de la boule B de centre A et de rayon r.

Or nous savons que la limite d'un rapport est égal au rapport des limites, donc :

$$\lim_{\substack{(x,y,z)\to(2,-2,0)\\(x,y,z)\in B}} f(x,y,z) = \lim_{\substack{(x,y,z)\to(2,-2,0)\\(x,y,z)\in B}} \frac{x+y}{x^2+y^2+z^2} = \frac{\lim\limits_{\substack{(x,y,z)\to(2,-2,0)\\(x,y,z)\in B}} (x+y)}{\lim\limits_{\substack{(x,y,z)\to(2,-2,0)\\(x,y,z)\in B}} (x^2+y^2+z^2)} = \frac{0}{8} = 0$$

Considérons alors une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ quelconque de points de $\mathbb{R}^3$ qui converge vers $A = (2,-2, 0)$: pour tout $\varepsilon > 0$, aussi petit qu'on veut, et en particulier plus petit que $2\sqrt{2}$, il existe un entier n_0 tel que, pour tout n supérieur à n_0, le terme d'indice n de la suite appartienne à la boule B de centre A et de rayon ε. Comme $f(x, y, z)$ possède 0 pour limite en A dans B, la suite $(f(u_n)_{n\geq 0}$ tend vers 0 lorsque n augmente indéfiniment.

Donc l'image par f de toute suite qui converge vers A dans $\mathbb{R}^3$ est une suite qui converge vers 0 dans $\mathbb{R}$.
Ceci veut dire que f possède 0 comme limite en A.

$$\lim_{(x,y,z)\to(2,-2,0)} f(x,y,z) = 0.$$

De plus, 0 est la valeur de f en $(2, -2, 0)$, donc, par définition d'une fonction continue en un point, f est continue en ce point $A = (2,-2, 0)$.

Quand on aura acquis les théorèmes relatifs aux **applications continues**, la démonstration du résultat sera beaucoup plus rapide :

f est le rapport de deux polynômes.
Les polynômes sont des fonctions numériques continues.
Le dénominateur de f n'est pas nul en $A = (2, -2, 0)$.
Le rapport f est alors une **fonction continue en *A***, de sorte que l'on a :

$$\lim_{(x,y,z)\to(2,-2,0)} f(x,y,z) = f(2,-2,0) = 0$$

Exercices

Applications continues dans $\mathbb{R}^p$.

1. Application continue en un point.
2. Critères pratiques de continuité en un point.
3. Critères de non continuité en un point.

Application continue en un point.

Une application f d'une partie X d'un espace normé E dans un espace normé F est dite **continue en un point a** de X si, et seulement si :

- la limite de f en a existe,
- cette limite est $f(a)$.

HAUT

Critères pratiques de continuité en un point.

HAUT

Soient E et F des espaces normés, X une partie de E, a un point de X, f une application de X dans F. Pour voir si f est **continue** en a, on peut utiliser l'un des critères suivants :

1°/ f est **composée** d'applications qu'on sait être continues.

2°/ f est **combinaison linéaire** d'applications continues en a.

3°/ **Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $\eta > 0$**, tel que
$\| x - a \| < \eta \Rightarrow \| f(x) - f(a) \| < \varepsilon$.

4°/ L'image par f d'une **suite quelconque** de points de X convergeant vers a est une suite de points de F convergeant vers $f(a)$.

5°/ f est **lipschitzienne** en a : il existe un k tel que, dans un voisinage de a,
$\| f(x) - f(a) \| \leqslant k \| x - a \|$.

6°/ f est **hölderienne** en a : il existe un k et un $\alpha > 0$, tels que, dans un voisinage de a,
$\| f(x) - f(a) \| \leqslant k \| x - a \|^{\alpha}$.

7°/ L'**image réciproque par f d'un ouvert** de F est la trace sur X d'un ouvert de E.

8°/ L'**image réciproque par f d'un fermé** de F est la trace sur X d'un fermé de E.

9°/ Les **applications composantes** de f sont continues en a.

HAUT

Critères de non continuité.

A contrario, pour montrer qu'une application $f : X \to F$ n'est **pas continue** en a, il suffit d'appliquer l'un des critères suivants :

1°/ On trouve **deux suites de points** de X convergeant vers a, dont les images par f n'ont **pas la même limite** dans F.

2°/ On trouve **une suite de points** de X convergeant vers a, dont l'image par f n'a **pas de limite** dans F.

3°/ On trouve **une suite de points** de X convergeant vers a, dont **l'image par f n'est pas $f(a)$**.

HAUT

Chapitre 19. Applications continues dans $\mathbb{R}^p$.

Exercices

Exercice 1. Applications continues.
Exercice 2. Continuité dans $\mathbb{R}^2$.
Exercice 3. Application multilinéaire continue.

Exercice 1. Applications continues.

HAUT

Démontrer les propriétés suivantes :

R1. Les **projections** $p_1 : (x, y) \mapsto x$ et $p_2 : (x, y) \mapsto y$ sont des applications continues de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

R2. La **composée** de deux applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Solution

R3. Pour qu'une **application produit**

$$x \mapsto (f(x), g(x))$$

de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$ soit continue en un point a, il faut et il suffit que chacune de ses composantes f et g le soit.

R4. Les **opérations d'espace vectoriel** de $\mathbb{R}$ sont continues :

- $(x , y) \mapsto x + y$ est une application continue de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$
- $(x , y) \mapsto x\, y$ est une application continue de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

HAUT

Exercice 2. Continuité dans $\mathbb{R}^2$.

Soit $S = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geqslant 0 \}$. Soit $f : S \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \frac{\sqrt{y}}{1 + x^4 + y^6}.$$

Montrer que f est continue en tout point $(a, b) \in S$.

Solution

HAUT

Exercice 3. Application multilinéaire continue.

Soit n un entier naturel $\geqslant 1$, $E_1, \dots, E_n$, des espaces normés réels, F un espace normé réel, $f : E_1 \times \dots \times E_n \to F$ une application multilinéaire (linéaire par rapport à chacune des variables). On munit $E = E_1 \times \dots \times E_n$ de la topologie produit.
Démontrez que, pour que f soit continue, il faut et il suffit qu'il existe une constante $\lambda \geqslant 0$, telle que pour tout $x = (x_1, \dots, x_n)$ de E, on ait :

$$\| f(x_1, \dots, x_n) \| \leqslant \lambda \| x_1 \| \dots \| x_n \|.$$

Solution

HAUT

Chapitre 19. Applications continues dans $\mathbb{R}^p$.

Enoncés.

Exercice 1. Applications continues.

Démontrer les propriétés suivantes :

R1. Les **projections** $p_1 : (x, y) \mapsto x$ et $p_2 : (x, y) \mapsto y$ sont des applications continues de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

R2. La **composée** de deux applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

R3. Pour qu'une **application produit**
$x \mapsto (f(x), g(x))$
de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$ soit continue en un point a, il faut et il suffit que chacune de ses composantes f et g le soit.

R4. Les **opérations d'espace vectoriel** de $\mathbb{R}$ sont continues :
- $(x, y) \mapsto x + y$ est une application continue de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$
- $(x, y) \mapsto x\,y$ est une application continue de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

Solution.

1°/ Projections.

HAUT

Pour tout (x, y) de $\mathbb{R}^2$ et tout voisinage ouvert V de $x = p_1(x, y)$, $p_1^{-1}(V) = V \times \mathbb{R}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ puisqu'il est produit de deux ouverts. Cet ouvert $V \times \mathbb{R}$ contient (x, y) : c'est donc un voisinage de (x, y). L'image réciproque d'un voisinage ouvert de $x = p_1(x, y)$ est un voisinage ouvert de (x, y) : c'est dire que p_1 est continue.

On voit, de même, que l'image réciproque d'un voisinage ouvert W de $y = p_2(x, y)$ est un voisinage ouvert $p_2^{-1}(W) = \mathbb{R} \times W$ de (x, y), donc p_2 est continue.

2°/ Application composée.

HAUT

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application continue en a, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application continue en $b = f(a)$.
Soit V un voisinage de $g(f(a)) = g(b)$.
Comme g est continue en $f(a)$, l'image réciproque de V par g est un voisinage W de $f(a)$.
Comme f est continue en a, l'image réciproque de W par f est un voisinage X de a.
On a :

$$f(X) \subset W \Rightarrow g(f(X)) \subset g(W) \subset V$$

$(g \circ f)^{-1}(V)$ contient donc X, c'est donc un voisinage de a : l'image réciproque par $g \circ f$ d'un voisinage de $(g \circ f)(a)$ est un voisinage de a. C'est dire que ***g ∘ f* est continue**, par définition.

3°/ Application produit.

HAUT

$$f = (f_1, f_2) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$$

Condition nécessaire.

On a $f_1 = p_1 \circ f$, donc si f est continue, f_1 est continue, d'après R1 et R2.
De même, si f est continue, $f_2 = p_2 \circ f$, composée de deux applications continues, est continue.

Condition suffisante.

Réciproquement, supposons f_1 et f_2 continues en $a \in \mathbb{R}$.
Soit V un voisinage de $(f_1(a), f_2(a))$.
Par définition de la topologie produit, V contient un voisinage de la forme $V_1 \times V_2$ où V_1 est un voisinage de $f_1(a)$ et V_2 un voisinage de $f_2(a)$.
Comme f_1 est continue, $f_1^{-1}(V_1)$ est un voisinage de a.
Comme f_2 est continue, $f_2^{-1}(V_2)$ est un voisinage de a.
L'intersection des deux, $W = f_1^{-1}(V_1) \cap f_2^{-1}(V_2)$ est encore un voisinage de a.
L'image de W par f est $f_1(W) \times f_2(W) \subset V_1 \times V_2 \subset V$.
Donc $f^{-1}(V)$ contient un voisinage W de a.
C'est donc lui-même un voisinage de a. Et f est continue.

4°/ Opérations d'espace vectoriel.

HAUT

a) Addition.

Considérons quatre points x, y, x', y', de $\mathbb{R}$.
L'inégalité du triangle donne :

$$\| (x + y) - (x' + y') \| = \| (x - x') + (y - y') \| \leqslant \| x - x' \| + \| y - y' \|$$

Etant donné un voisinage de $(x + y)$, ce voisinage contient une boule ouverte de centre $(x + y)$ et de rayon ε.
L'image réciproque de cette boule par l'addition $(x, y) \mapsto x + y$ contient, d'après l'inégalité précédente, le produit des boules ouvertes de centres x et y et de rayon $\frac{\varepsilon}{2}$, parce que :

$$\| x - x' \| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ et } \| y - y' \| < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow \| (x + y) - (x' + y') \| \leqslant \| x - x' \| + \| y - y' \| < \varepsilon$$

Cette image réciproque est donc un voisinage de (x , y) et **l'addition est continue**.

b) Multiplication par les scalaires.

Soient $x , x', \lambda, \lambda'$, des éléments de R.

L'inégalité du triangle donne :

$$\begin{aligned} \| \lambda' x' - \lambda x \| &= \| \lambda (x' - x) + (\lambda - \lambda')(x - x') + (\lambda' - \lambda) x \| \\ &\leqslant | \lambda | \| x' - x \| + | \lambda - \lambda' | \| x - x' \| + | \lambda' - \lambda | \| x \| \end{aligned}$$

Etant donné un voisinage de λx, il contient une boule ouverte de centre λx et de rayon ε.
L'image réciproque de cette boule par l'application $(\lambda , x) \mapsto \lambda x$, contiendra un produit de boules ouvertes :

$$B (\lambda , \eta) \times B (x , \eta)$$

dès que l'on a :

$$| \lambda - \lambda' | < \eta \text{ et } \| x - x' \| = | x - x' | < \eta \Rightarrow \| \lambda' x' - \lambda x \| < \varepsilon$$

D'après l'inégalité établie plus haut, c'est le cas lorsque l'on a :

$$| \lambda | \eta + \eta^2 + \eta \| x \| < \varepsilon$$

puisque les inégalités $| \lambda - \lambda' | < \eta$ et $\| x - x' \| = | x - x' | < \eta$ entraînent :

$$\| \lambda' x' - \lambda x \| \leqslant | \lambda | \| x' - x \| + | \lambda - \lambda' | \| x - x' \| + | \lambda' - \lambda | \| x \| < | \lambda | \eta + \eta^2 + \eta \| x \|$$

La condition (suffisante) que doit vérifier η pour que l'image réciproque de la boule ouverte de centre λx et de rayon ε par l'application $(\lambda , x) \mapsto \lambda x$, contienne le produit de boules ouvertes $B (\lambda , \eta) \times B (x , \eta)$ s'écrit aussi :

$$\eta^2 + (| \lambda | + \| x \|) \eta - \varepsilon < 0$$

Pour que cette inégalité soit réalisée, il faut prendre η entre les racines du polynôme $X^2 + (| \lambda | + \| x \|) X - \varepsilon$.
Le produit des racines de ce trinôme du deuxième degré est $- \varepsilon$, qui est négatif.
La somme des racines est $- (| \lambda | + \| x \|)$, elle est négative.
Le trinôme a donc deux racines réelles, l'une strictement positive, l'autre strictement négative.
Il suffit de prendre η vérifiant :

$$0 < \eta < \frac{1}{2}\left(\sqrt{\left(|\lambda| + \|x\|\right)^2 + 4\varepsilon} - \left(|\lambda| + \|x\|\right)\right)$$

ce qui est toujours possible puisque ε est strictement plus grand que 0.
Avec un tel η, l'image réciproque de la boule ouverte de centre λx et de rayon ε, par l'application $(\lambda , x) \mapsto \lambda x$ est un voisinage de (λ , x) : **la multiplication par les scalaires est continue**.

HAUT

Chapitre 19. Applications continues dans $\mathbb{R}^p$.

Enoncés.

Exercice 2. Continuité dans $\mathbb{R}^2$.

Soit $S = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geqslant 0 \}$. Soit $f : S \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \frac{\sqrt{y}}{1 + x^4 + y^6}.$$

Montrer que f est continue en tout point $(a, b) \in S$.

Solution.

1°/ Continuité des fonctions puissances $p : y \mapsto y^x$, $x > 0$.

Pour x entier, l'application p est définie dans $\mathbb{R}$ tout entier.
Pour x non entier, l'application p est définie, de façon générale, seulement pour les y positifs, c'est-à-dire dans $[0 , +\infty[\subset \mathbb{R}$.
Elle est à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Pour $x = 0$, on pourrait définir l'application p par $y \mapsto 1$.
Elle est constante, donc continue car $| y - y' | < \eta \Rightarrow | 1 - 1 | = 0 < \varepsilon$, pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $\eta > 0$.

Supposons désormais $x > 0$.
Etant donné un $\varepsilon > 0$, $| y^x - y'^x | < \varepsilon$ équivaut à $y^x - \varepsilon < y'^x < y^x + \varepsilon$.

· Si $y = 0$, il suffit de prendre $| y' - y | = | y' | < \varepsilon^{\frac{1}{x}}$ pour avoir $| y^x - y'^x | = | y'^x | < \varepsilon$.
Donc l'application $y \mapsto y^x$ est continue en 0.

· Si $y > 0$, étant donné un $\varepsilon > 0$ quelconque, on peut toujours prendre, pour ne pas avoir de problème avec 0, un $\varepsilon' < y^x$ vérifiant $\varepsilon' < \varepsilon$. Il suffit, de prendre, par exemple $\varepsilon' = \frac{1}{2} Inf (y^x , \varepsilon)$.
L'application réciproque de $y \mapsto y^x$ est $t \mapsto t^{\frac{1}{x}}$.
L'image réciproque de $y^x - \varepsilon'$ est $(y^x - \varepsilon')^{\frac{1}{x}}$;
l'image réciproque de $y^x + \varepsilon'$ est $(y^x + \varepsilon')^{\frac{1}{x}}$.
Considérons l'intervalle de $\mathbb{R}$ défini par :

$$| y' - y | < \eta = Inf (y - (y^x - \varepsilon')^{\frac{1}{x}} , (y^x + \varepsilon')^{\frac{1}{x}} - y)$$

η est strictement positif car

$y^x > \varepsilon' \Rightarrow y^x > y^x - \varepsilon' > 0 \Rightarrow y > (y^x - \varepsilon')^{\frac{1}{x}}$(la fonction $p : y \mapsto y^x$ est croissante),
et, de même, $y^x < y^x + \varepsilon' \Rightarrow y < (y^x + \varepsilon')^{\frac{1}{x}}$

η, qui est le plus petit des deux nombres strictements positifs $y - (y^x - \varepsilon')^{\frac{1}{x}}$ et $(y^x + \varepsilon')^{\frac{1}{x}} - y$, est donc, lui aussi, strictement plus grand que 0.

On a alors :

$$y - (y - (y^x - \varepsilon')^{\frac{1}{x}}) \leqslant y - \eta < y' < y + \eta \leqslant y + ((y^x + \varepsilon')^{\frac{1}{x}} - y)$$
$$(y^x - \varepsilon')^{\frac{1}{x}} < y' < (y^x + \varepsilon')^{\frac{1}{x}}$$
$$y^x - \varepsilon' < y'^x < y^x + \varepsilon'$$
$$| y'^x - y^x | < \varepsilon' < \varepsilon$$

$$\boxed{(\forall\ \varepsilon > 0)(\exists\ \eta > 0)\ (\ | y' - y | < \eta \Rightarrow | y'^x - y^x | < \varepsilon\ )}$$

On a vu qu'il suffisait de prendre :

$$\eta = Inf\ (\ y - (y^x - \varepsilon')^{\frac{1}{x}}\ ,\ (y^x + \varepsilon')^{\frac{1}{x}} - y), \text{ avec } \varepsilon' = \frac{1}{2} Inf\ (y^x\ ,\ \varepsilon\ ).$$

La relation démontrée prouve, par définition, que $y \mapsto y^x$ est continue pour tout $y > 0$.
Comme elle est déjà continue pour $y = 0$, elle est continue pour tout $y \geqslant 0$.

2°/ Continuité d'un polynôme.

Tout polynôme s'obtient par composition d'additions, de produits, de produits par des scalaires, de fonctions puissances.
Ces opérations sont en nombre fini.
Un polynôme définit donc, d'après le résultat précédent et d'après les résultats de l'exercice 1, une application continue.
Il en résulte, notamment que l'application

$$(x\ ,\ y) \mapsto 1 + x^4 + y^6$$

est une application continue.

Examinons en détail comment on l'obtient (on peut l'obtenir d'autres façons).
Les résultats R1, R2, R3, R4, font référence à l'exercice 1.

$(x\ ,\ y) \mapsto x$ continue dans $\mathbb{R}^2$ car c'est la projection p1 (Résultat R1)
$x \mapsto x^4$ continue dans $\mathbb{R}$ car c'est une fonction puissance (Résultat 1°)
$(x\ ,\ y) \mapsto x^4$ continue dans $\mathbb{R}^2$ car composée des deux précédentes (Résultat R2)
$(x\ ,\ y) \mapsto y$ continue dans $\mathbb{R}^2$ car c'est la projection p2 (Résultat R1)
$y \mapsto y^6$ continue dans $\mathbb{R}$ car c'est une fonction puissance (Résultat 1°)
$(x\ ,\ y) \mapsto y^6$ continue dans $\mathbb{R}^2$ car composée des deux précédentes (Résultat R2)
$(x\ ,\ y) \mapsto (x^4, y^6)$ continue dans $\mathbb{R}^2$ car ses deux facteurs sont continus (Résultat R3)
$(x\ ,\ y) \mapsto x + y$ continue dans $\mathbb{R}^2$ car c'est l'addition (Résultat R4)
$(x\ ,\ y) \mapsto x^4 + y^6$ continue dans $\mathbb{R}^2$ car composée des deux précédentes (Résultat R2)

$(x\,,\,y) \mapsto 1$ continue dans $\mathbb{R}^2$ car c'est une fonction puissance (Résultat 1°)
$(x\,,\,y) \mapsto (1,\, x^4 + y^6)$ continue dans $\mathbb{R}^2$ car ses deux facteurs sont continus (Résultat R3)
$(x\,,\,y) \mapsto 1 + x^4 + y^6$ continue dans $\mathbb{R}^2$ car composée de la précédente et de l'addition (Résultat R2)

3°/ Continuité de la fonction "inverse".

La fonction "inverse" $x \mapsto \frac{1}{x}$ est définie pour $x \neq 0$.
En dehors de 0, c'est une fonction puissance presqu'ordinaire.
Comme c'est une fonction impaire, le comportement pour $x \in]-\infty\,,\,0[$ se déduira par symétrie par rapport à 0, du comportement pour $x \in]0\,,\,+\infty[$.
Considérons donc un $x > 0$. Alors $\frac{1}{x}$ est aussi un nombre réel > 0.
Etant donné un ε positif, on peut toujours trouver un ε' vérifiant à la fois

$$\varepsilon' < \varepsilon \text{ et } \varepsilon' < \frac{1}{x}.$$

L'application $x \mapsto \frac{1}{x}$ est sa propre application réciproque (elle est idempotente, c'est une involution) : l'inverse de l'inverse de x est x.

L'image réciproque de $\frac{1}{x} - \varepsilon'$ est $\frac{1}{\frac{1}{x} - \varepsilon'}$.

L'image réciproque de $\frac{1}{x} + \varepsilon'$ est $\frac{1}{\frac{1}{x} + \varepsilon'}$.

Considérons les deux nombres réels $\frac{1}{\frac{1}{x} - \varepsilon'} - x$ et $x - \frac{1}{\frac{1}{x} + \varepsilon'}$.

Le premier est $\frac{1}{\frac{1}{x} - \varepsilon'} - x = \varepsilon' x \times \frac{1}{\frac{1}{x} - \varepsilon'} > 0$.

Le deuxième est $x - \frac{1}{\frac{1}{x} + \varepsilon'} = \varepsilon' x \times \frac{1}{\frac{1}{x} + \varepsilon'} > 0$.

On va prendre pour η le plus petit des deux, c'est le deuxième car

$$\frac{1}{\frac{1}{x} + \varepsilon'} < \frac{1}{\frac{1}{x} - \varepsilon'} \Rightarrow x - \frac{1}{\frac{1}{x} + \varepsilon'} = \varepsilon' x \times \frac{1}{\frac{1}{x} + \varepsilon'} < \varepsilon' x \times \frac{1}{\frac{1}{x} - \varepsilon'} = \frac{1}{\frac{1}{x} - \varepsilon'} - x$$

On pose donc

$$\eta = x - \frac{1}{\frac{1}{x} + \varepsilon'} = \varepsilon' x \times \frac{1}{\frac{1}{x} + \varepsilon'} > 0$$

Alors pour $|x' - x| < \eta$, on a :

$$x - \eta < x' < x + \eta$$

$$\frac{1}{\frac{1}{x} + \varepsilon'} < x' < x + \varepsilon' x \times \frac{1}{\frac{1}{x} + \varepsilon'} < x + \varepsilon' x \times \frac{1}{\frac{1}{x} - \varepsilon'} = x + \frac{1}{\frac{1}{x} - \varepsilon'} - x = \frac{1}{\frac{1}{x} - \varepsilon'}$$

En prenant les inverses de ces nombres positifs, on change le sens des inégalités :

$$\frac{1}{x} + \varepsilon' > \frac{1}{x'} > \frac{1}{x} - \varepsilon'$$

$$\left|\frac{1}{x'} - \frac{1}{x}\right| < \varepsilon' < \varepsilon$$

$$|x' - x| < \eta \Rightarrow \left|\frac{1}{x'} - \frac{1}{x}\right| < \varepsilon$$

C'est dire que $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue pour tout $x > 0$.

Par symétrie, l'application est continue pour tout $x < 0$.
Elle est donc continue pour tout $x \neq 0$, c'est-à-dire, partout où elle est définie.

4°/ Continuité de l'application *f*.

$$f(x, y) = \frac{\sqrt{y}}{1 + x^4 + y^6}$$

$(x, y) \mapsto 1 + x^4 + y^6$	continue dans $\mathbb{R}^2$	car c'est un polynôme	(Résultat 2°)
$x \mapsto \frac{1}{x}$	continue dans $\mathbb{R} - \{0\}$	car c'est l'inverse	(Résultat 3°)
$(x, y) \mapsto \frac{1}{1 + x^4 + y^6}$	continue dans $\mathbb{R}^2$	car composée des deux précédentes et $1 + x^4 + y^6$ est toujours différent de 0	(Résultat R2)
$(x, y) \mapsto y$	continue dans $\mathbb{R}^2$	car c'est la projection p_2	(Résultat R1)
$y \mapsto \sqrt{y}$	continue dans $[0, +\infty[$	car c'est une fonction puissance	(Résultat 2°)
$(x, y) \mapsto \sqrt{y}$	continue dans S	car composée des deux précédentes	(Résultat R2)
$f : (x, y) \mapsto \frac{\sqrt{y}}{1 + x^4 + y^6}$	continue dans S	car produit des deux fonctions $\sqrt{y}$ par $\frac{1}{1 + x^4 + y^6}$	(Résultat R4)

Chapitre 19. Applications continues dans $\mathbb{R}^p$.

Enoncés.

Exercice 3. Application multilinéaire continue.

Soit n un entier naturel $\geqslant 1$, $E_1, \ldots, E_n$, des espaces normés réels, F un espace normé réel, $f : E_1 \times \ldots \times E_n \to F$ une application multilinéaire (linéaire par rapport à chacune des variables). On munit $E = E_1 \times \ldots \times E_n$ de la topologie produit.
Démontrez que, pour que f soit continue, il faut et il suffit qu'il existe une constante $\lambda \geqslant 0$, telle que pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n)$ de E, on ait :

$$\| f(x_1, \ldots, x_n) \| \leqslant \lambda \| x_1 \| \ldots \| x_n \|.$$

Solution.

1°/ La condition est nécessaire.

Considérons un point $a = (a_1, \ldots, a_n)$ de $E = E_1 \times \ldots \times E_n$.
Pour montrer que l'application multilinéaire f de E dans F est continue en a, il faut démontrer, par exemple, la relation

$$(\forall\ \varepsilon > 0)(\exists\ \eta > 0)(\ \| x - a \| < \eta \Rightarrow \| f(x) - f(a) \| < \varepsilon)$$

Dans l'espace E, la norme définie par les normes des espaces $E_1, \ldots, E_n$, est la norme produit définie, pour un point $x = (x_1, \ldots, x_n)$ de E par :

$$\| x \| = \sup_{1 \leq i \leq n} \| x_i \|.$$

La distance correspondante de deux points $a = (a_1, \ldots, a_n)$ et $x = (x_1, \ldots, x_n)$ de E est donnée par :

$$\| x - a \| = \sup_{1 \leq i \leq n} \| x_i - a_i \|.$$

Considérons la somme

$$\sum_{i=1}^{i=n} f(a_1, \ldots, a_{i-1}, x_i - a_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)$$

Comme f est multilinéaire, elle est linéaire par rapport à la i-ème variable et chaque terme de la somme se développe en deux termes :

$$\sum_{i=1}^{i=n} f(a_1, \dots, a_{i-1}, x_i - a_i, x_{i+1}, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{i=n} [f(a_1, \dots, a_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n) - f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i, x_{i+1}, \dots, x_n)].$$

Quand on développe cette somme, on voit que le terme $-f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$ correspondant à l'indice i s'annule avec le terme $f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$ correspondant à l'indice $i + 1$.
En définitive, dans la somme, il reste seulement le premier terme pour $i = 1$ et le deuxième terme pour $i = n$:

$$\sum_{i=1}^{i=n} f(a_1, \dots, a_{i-1}, x_i - a_i, x_{i+1}, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n) - f(a_1, \dots, a_n) = f(x) - f(a).$$

Soit λ la constante positive, qui existe par hypothèse, vérifiant :

$$\| f(x_1, \dots, x_n) \| \leqslant \lambda \| x_1 \| \dots \| x_n \|$$

pour tout $x = (x_1, \dots, x_n) \in E = E_1 \times \dots \times E_n$.

On a :

$$\| f(a_1, \dots, a_{i-1}, x_i - a_i, x_{i+1}, \dots, x_n) \| \leqslant \lambda \| a_1 \| \dots \| a_{i-1} \| \| x_i - a_i \| \| x_{i+1} \| \dots \| x_n \|$$

pour tout $i = 1, \dots, n$.

L'inégalité du triangle donne alors :

$$\| f(x) - f(a) \| \leqslant \sum_{i=1}^{i=n} \lambda \| a_1 \| \dots \| a_{i-1} \| \| x_i - a_i \| \| x_{i+1} \| \dots \| x_n \|$$

Si l'on prend $x = (x_1, \dots, x_n)$ dans une boule de centre a et de rayon η, on aura $\| x_i - a_i \| < \eta$, pour tout $i = 1, \dots, n$, et on aura $\| x_i \| \leqslant \| x_i - a_i \| + \| a_i \| < \eta + \| a_i \|$.
Comme $\| a \|$ est le plus grand des $\| a_i \|$, on a toujours :

$$\| a_i \| \leqslant \| a \| < \| a \| + \eta \text{ et } \| x_i \| < \eta + \| a_i \| \leqslant \| a \| + \eta$$

de sorte que l'on peut majorer $\| a_1 \| \dots \| a_{i-1} \| \| x_i - a_i \| \| x_{i+1} \| \dots \| x_n \|$ par $\eta (\| a \| + \eta)^{n-1}$

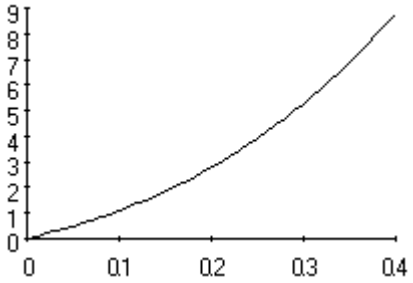
On pourra donc majorer $\| f(x) - f(a) \|$ par :

$$\| f(x) - f(a) \| \leqslant n \lambda \eta (\| a \| + \eta)^{n-1}.$$

Tout le problème de la démonstation est donc de savoir si, étant donné un $\varepsilon > 0$, il existe un $\eta > 0$ vérifiant :

$$n \lambda \eta (\| a \| + \eta)^{n-1} < \varepsilon.$$

Or la fonction numérique $x \mapsto n \lambda x (\| a \| + x)^{n-1}$ est une fonction polynôme, donc elle est continue en 0 et comme elle prend la valeur 0 pour $x = 0$:



étant donné un $\varepsilon > 0$, on peut toujours trouver un $\eta > 0$ tel que $n \lambda \eta (\| a \| + \eta)^{n-1}$ soit strictement plus petit que ε.
On a alors :

$$\| x - a \| < \eta \Rightarrow \| f(x) - f(a) \| \leqslant n \lambda \eta (\| a \| + \eta)^{n-1} < \varepsilon.$$

Et ceci montre que f est continue au point a. Comme cette propriété est vraie pour tout $a \in E$, f est continue dans E.

2°/ La condition est nécessaire.

Supposons maintenant que l'application multinéaire f soit continue au point $O = (0, \ldots, 0)$.
On sait alors que l'image réciproque d'une boule ouverte de centre $f(O) = 0$ contient une boule ouverte de centre O, et que l'image réciproque d'une boule fermée de centre $f(O) = 0$ contient une boule fermée de centre O.
Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $\eta > 0$ tel que $\| x \| \leqslant \eta$ entraîne $\| f(x) \| \leqslant \varepsilon$.
En particulier, pour $\varepsilon = 1$, il existe un $\eta > 0$ tel que

$$\| x \| \leqslant \eta \text{ entraîne } \| f(x) \| \leqslant 1.$$

S'il existait un i tel que la variable x_i soit nulle, on aurait $f(x) = 0$ puisque f est multilinéaire, donc linéaire par rapport à la i-ème variable. Dans ce cas, pour tout réel λ, on aurait :

$$0 = \| f(x_1, \ldots, x_n) \| \leqslant \lambda \| x_1 \| \ldots \| x_n \| = 0$$

Si aucun des x_i n'est nul, on peut écrire, puisque f est multilinéaire :

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \frac{\|x_1\| \cdots \|x_n\|}{\eta^n} f\left(\eta \frac{x_1}{\|x_1\|}, \ldots, \eta \frac{x_n}{\|x_n\|} \right)$$

Appelons y le point $\left(\eta \frac{x_1}{\|x_1\|}, \ldots, \eta \frac{x_n}{\|x_n\|} \right)$. On a

$$\| y \| = \sup_{1 \leq i \leq n} \left\| \eta \frac{x_i}{\| x_i \|} \right\| = \eta.$$

donc le point y est dans la boule fermée de centre $O = (0, \dots, 0)$ et de rayon η.
Son image par f a donc une norme inférieure à 1, par définition de η.
Il en résulte que la norme de $f(x)$, égale à $\frac{\| x_1 \| \cdots \| x_n \|}{\eta^n}$ fois la norme de $f(y)$, est inférieure à $\frac{\| x_1 \| \cdots \| x_n \|}{\eta^n}$.

$$\| f(x_1, \dots, x_n) \| \leqslant \lambda \| x_1 \| \dots \| x_n \|,$$

avec un $\lambda = \frac{1}{\eta^n}$ qui ne dépend pas du point $(x_1, \dots, x_n)$, puisque η n'en dépend pas.

Remarques.

Notre résultat est donc démontré et nous avons vu que la démonstration ne fait intervenir que la continuité en $O = (0, \dots, 0)$ et non la continuité en tout point.
En réalité, il est facile de voir, par composition d'applications, pour les applications multilinéaires, que, comme les translations dans E et dans F sont des applications continues, la continuité en un point est équivalente à la continuité en tout point.
Il suffit donc, pour obtenir le résultat, que f soit continue en un point quelconque $a = (a_1, \dots, a_n)$ de $E = E_1 \times \dots \times E_n$.

Pour $n = 1$, on voit qu'une application linéaire f est continue si, et seulement si, il existe une constante λ telle que, pour tout $x \in E$, on ait $\| f(x) \| \leqslant \lambda \| x \|$. Et comme, f étant linéaire, cette condition est équivalente à $\| f(x) - f(a) \| \leqslant \lambda \| x - a \|$, le résultat peut s'énoncer sous la forme :

Pour qu'une application linéaire soit continue, il faut et il suffit qu'elle soit **lipschitzienne**.

Exercices

Formes linéaires continues.

1. Continuité des formes linéaires sur $\mathbb{R}^p$.
2. Norme d'une forme linéaire sur $\mathbb{R}^p$.
3. Continuité de la distance à un point.
4. Projecteur orthogonal.

Continuité des formes linéaires sur $\mathbb{R}^p$.

Les formes linéaires sur $\mathbb{R}^p$ sont des applications continues.
Leur noyau est toujours un hyperplan fermé.

HAUT

Norme d'une forme linéaire sur $\mathbb{R}^p$.

La **norme d'une forme linéaire** f sur $\mathbb{R}^p$ est, par définition, le plus petit des nombres réels λ tels que $| f(x) |$ soit plus petit que $\lambda \| x \|$ pour tout $x \in \mathbb{R}^p$

$$\| f \| = Inf \{\lambda \in \mathbb{R} | (\forall x \in \mathbb{R}^p)(| f(x) | \leqslant \lambda \| x \|)$$

Propriétés.

La norme d'une forme linéaire f est égale à la norme de l'unique vecteur y qui vérifie $f(x) = < y, x >$ pour tout $x \in \mathbb{R}^p$: $\| f \| = \| y \|$. Elle dépend de la norme que l'on a choisi dans $\mathbb{R}^p$, norme euclidienne ou norme produit, par exemple.

HAUT

Continuité de la distance à un point.

Pour tout point $a \in \mathbb{R}^p$, l'application qui, à un $x \in \mathbb{R}^p$, fait correspondre sa distance $d(x, a) = \| x - a \|$ au point a, est une application continue de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$.

Plus généralement, pour toute partie X de $\mathbb{R}^p$, l'application qui, à un $x \in \mathbb{R}^p$, fait correspondre sa distance à X définie par :

$$d(x, X) = \inf_{a \in X} \| x - a \|$$

est une application continue.

HAUT

Projecteur orthogonal.

Etant donné un sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^p$, pour tout $x \in \mathbb{R}^p$, il existe un unique $y \in F$ tel que la distance de x à y soit égal à la distance de x à F.
L'application $p_F : x \mapsto y$ s'appelle le **projecteur orthogonal** sur F. C'est une application linéaire continue de $\mathbb{R}^p$ sur F.
Par défaut, la distance est la distance euclidienne.

Si $F°$ désigne l'**orthogonal** de F, ensemble des $y \in \mathbb{R}^p$ tels que, pour tout $x \in F$, le produit scalaire de x et de y est nul, $\mathbb{R}^p$ est **somme directe topologique** de F et de son orthogonal $F°$:

$$\mathbb{R}^p = F \oplus F°,$$

ce qui signifie que c'est non seulement une somme directe orthogonale, mais, en plus, que les projecteurs sont continus.
Par défaut, le produit scalaire est le produit scalaire euclidien.

HAUT

Chapitre 20. Formes linéaires continues.

Exercices

Exercice 1. Formes linéaires sur $\mathbb{R}^p$.
Exercice 2. Projection orthogonale.
Exercice 3. Norme d'une forme linéaire, distance d'un point au noyau.

Exercice 1. Formes linéaires sur $\mathbb{R}^p$.

1°/ Montrez que toute forme linéaire sur $\mathbb{R}^p$ est une application continue. 2°/ Montrez que le noyau d'une forme linéaire sur $\mathbb{R}^p$ est un sous-espace vectoriel fermé. 3°/ Montrez que l'application qui, à une forme linéaire f sur $\mathbb{R}^p$ fait correspondre la borne inférieure des $\lambda \geqslant 0$ tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}^p$, $\lvert f(x) \rvert$ soit plus petit que $\lambda \lVert x \rVert$, est une norme sur le dual de $\mathbb{R}^p$.	Solution

HAUT

Exercice 2. Projection orthogonale.

1°/ Soit $a \in \mathbb{R}^p$. Montrez que l'application $x \mapsto \| x - a \| = d(x, a)$ est continue dans $\mathbb{R}^p$.

2°/ Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^p$. Montrez que pour tout élément $x \in \mathbb{R}^p$, il existe un unique élément $y \in F$ tel que $d(x, y) = d(x, F)$. Le point y s'appelle la **projection orthogonale** de x sur F.

Solution

3°/ Montrez que $\mathbb{R}^p$ est somme directe topologique de F et de son orthogonal $F°$:

$$\mathbb{R}^p = F \oplus F°.$$

Montrez que le projecteur orthogonal p_F de $\mathbb{R}^p$ sur F est continu et a pour norme 1, si F n'est pas réduit à 0.

HAUT

Exercice 3. Norme d'une forme linéaire, distance d'un point au noyau.

Soit f une forme linéaire non nulle sur $\mathbb{R}^p$. On pose:

- $H = Ker\ (f)$
- $S = \{x \in \mathbb{R}^p \mid \| s \|_2 = 1\}$, où $\| . \|_2$ désigne la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^p$.

1°/ Démontrer que $\{ | f(s) | \in \mathbb{R} \mid s \in S \}$ est majoré et que l'on a :

$M = Sup\ \{ | f(s) | \in \mathbb{R} \mid s \in S \} > 0$.

En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}^p$, on a :

$| f(x) | \leq M \| x \|_2$.

2°/ Pour tout $x \in \mathbb{R}^p$, on pose :

$d(x, H) = Inf\ \{ \| x - h \|_2 \mid h \in H \}$.

Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^p$, on a :

$d(x, H) = \frac{|f(x)|}{M}$.

Solution

3°/ Soit $\{ e_1 , ... , e_p \}$ la base canonique de $\mathbb{R}^p$. On pose :

$u_i = f(e_i)$ pour $i \in \{1, 2, ... , p \}$,

de sorte que l'équation de l'hyperplan H est :

$$\sum_{i=1}^{i=p} u_i X_i = 0.$$

Calculer $d(x, H)$ en fonction de $u_1 , u_2 , ... , u_p$ et des composantes $x_1 , x_2 , ... , x_p$ de x dans la base canonique de $\mathbb{R}^p$.

HAUT

Chapitre 20. Formes linéaires continues.

Enoncés.

Exercice 1. Formes linéaires sur $\mathbb{R}^p$.

1°/ Montrez que toute forme linéaire sur $\mathbb{R}^p$ est une application continue. 2°/ Montrez que le noyau d'une forme linéaire sur $\mathbb{R}^p$ est un sous-espace vectoriel fermé. 3°/ Montrez que l'application qui, à une forme linéaire f sur $\mathbb{R}^p$ fait correspondre la borne inférieure des $\lambda \geqslant 0$ tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}^p$, $\| f(x) \|$ soit plus petit que $\lambda \| x \|$, est une norme sur le dual de $\mathbb{R}^p$.	

Solution.

1°/ Forme linéaire.

Soit $\{e\} = \{e_1, \dots, e_p\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^p$.
Toute forme linéaire f sur $\mathbb{R}^p$ est de la forme

$$f(x) = f(x^1, \dots, x^p) = x^1 f(e_1) + \dots + x^p f(e_p)$$

On a donc :

$$\begin{aligned} | f(x) | &= | x^1 f(e_1) + \dots + x^p f(e_p) | \\ &\leqslant | x^1 f(e_1) | + \dots + | x^p f(e_p) | \\ &\leqslant p \, Sup (| x^1 | , \dots , | x^p |) \, Sup (| f(e_1) | , \dots , | f(e_p) |) = \lambda \| x \| \end{aligned}$$

avec $\lambda = p \, Sup (| f(e_1) | , \dots , | f(e_p) |)$, indépendant de x, et $\| x \| = Sup (| x^1 | , \dots , | x^p |)$, norme produit.

La relation

$$| f(x) | \leqslant \lambda \| x \|$$

montre que ***f* est continue**, (Chapitre 19, Exercice 3, pour $n = 1$).

2°/ Noyau.

Le noyau d'une forme linéaire sur $\mathbb{R}^p$ est un sous-espace vectoriel de dimension $p - 1$: c'est un hyperplan.
Comme c'est l'image réciproque d'un fermé, $\{0\}$, par une application continue, c'est un fermé.

Le noyau d'une forme linéaire sur $\mathbb{R}^p$ est un hyperplan fermé.

Remarquons aussi que tout sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^p$ est fermé.
En effet, puisqu'il est isomorphe à un sous-espace $\mathbb{R}^q$, il est complet et, dans $\mathbb{R}^p$ qui est complet, complet = fermé.

L'intérêt de l'exercice réside dans le fait que pour un espace normé de dimension infinie, les hyperplans, qui sont toujours noyaux de formes linéaires, sont fermés ou partout denses.
Ceux qui sont fermés sont les noyaux des formes linéaires continues.
Mais il existe aussi des formes linéaires qui ne sont pas continues, et dont les noyaux sont les hyperplans partout denses.

3°/ Norme d'une application linéaire.

$$\| f \| = Inf \{\lambda \geqslant 0 \mid (\forall x \in \mathbb{R}^p)(\mid f(x) \mid \leqslant \lambda \| x \|)\}$$

· $\| f \|$, borne inférieure d'un ensemble de nombres positifs, est un nombre réel positif.

· $\| f \| = 0 \Rightarrow (\forall \lambda > 0)(\forall x \in \mathbb{R}^p)(\mid f(x) \mid \leqslant \lambda \| x \|)$.
Donc pour tout x, on voit, en faisant tendre λ vers 0, que, par prolongement des inégalités par passage à la limite, on a $\mid f(x) \mid = 0$, donc $f(x) = 0$. D'où $f = 0$.
Réciproquement, si $f = 0$, on a $\mid f(x) \mid = 0 \leqslant 0 \| x \|$ pour tout x, donc $\| f \| = 0$.

· $\| \alpha f \| = Inf \{\lambda \geqslant 0 \mid (\forall x \in \mathbb{R}^p)(\mid \alpha f(x) \mid \leqslant \lambda \| x \|)\}$
$= Inf \{\lambda \geqslant 0 \mid (\forall x \in \mathbb{R}^p)(\mid \alpha \mid \mid f(x) \mid \leqslant \lambda \| x \|)\}$
Si α est égal à 0, on a $\alpha f = 0$ et $\| \alpha f \| = 0 = \mid \alpha \mid \| f \|$.
Si α est différent de 0, on a :

$$\| \alpha f \| = Inf \{\lambda \geqslant 0 \mid (\forall x \in \mathbb{R}^p)(\mid f(x) \mid \leqslant \frac{\lambda}{\mid \alpha \mid} \| x \|)\}$$

La relation :

$$(\forall x \in \mathbb{R}^p)(\mid f(x) \mid \leqslant \frac{\lambda}{\mid \alpha \mid} \| x \|)$$

entraîne :

$$\| f \| \leqslant \frac{\lambda}{\mid \alpha \mid}.$$

Par prolongement des inégalités par passage à la limite (borne inférieure des λ), il vient :

$$\frac{\| \alpha f \|}{\mid \alpha \mid} \geqslant \| f \|,$$

soit

$$\| \alpha f \| \geqslant | \alpha | \, \| f \|.$$

Réciproquement, la relation :

$$\| (\alpha f)(x) \| = | \alpha | \, \| f(x) \| \leqslant | \alpha | \, \| f \| \, \| x \| \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}^p,$$

entraîne

$$\| \alpha f \| \leqslant | \alpha | \, \| f \|$$

d'où l'égalité :

$$\| \alpha f \| = | \alpha | \, \| f \|$$

· Inégalité du triangle.

$$| f(x) + g(x) | \leqslant | f(x) | + | g(x) | \leqslant \| f \| \, \| x \| + \| g \| \, \| x \| \Rightarrow \| f + g \| \leqslant \| f \| + \| g \|$$

Le dual de $\mathbb{R}^p$, qui est aussi son dual topologique puisque toute forme linéaire est continue, est donc un espace normé.
En tant qu'espace normé de dimension p, il s'identifie à $\mathbb{R}^p$.
Et quand on identifie (homéomorphisme canonique) une forme linéaire f avec l'unique vecteur y tel que $f(x) = \langle x , y \rangle$ pour tout x, on a

$$\boxed{\| f \| = \| y \| = Sup (| f(e_1) | , \dots , | f(e_p) |)}$$

En effet, pour tout $i = 1, \dots , p$, on a, comme on l'a déjà vu dans Chapitre 16, Exercice 1 :

$$f(e_i) = \langle e_i, y \rangle = \langle e^i, y \rangle = y^i$$

donc :

$$Sup (| f(e_1) | , \dots , | f(e_p) |) = Sup (| y^1 |, \dots , | y^p |) = \| y \|$$

Et d'autre part :

$$| f(x) | = | \langle x , y \rangle | \leqslant \| x \| \, \| y \|, \forall x \Rightarrow \| f \| \leqslant \| y \|$$
$$| f(y) | = | \langle y , y \rangle | = \| y \|^2 \leqslant \| f \| \, \| y \| \Rightarrow \| y \| \leqslant \| f \|$$
$$\| f \| \leqslant \| y \| \text{ et } \| y \| \leqslant \| f \| \Rightarrow \| y \| = \| f \|$$

Autrement dit, l'application $f \mapsto y$ est une **isométrie**, elle conserve la norme.

Chapitre 20. Formes linéaires continues.

Enoncés.

Exercice 2. Projection orthogonale.

1°/ Soit $a \in \mathbb{R}^p$. Montrez que l'application $x \mapsto \| x - a \| = d(x, a)$ est continue dans $\mathbb{R}^p$. 2°/ Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^p$. Montrez que pour tout élément $x \in \mathbb{R}^p$, il existe un unique élément $y \in F$ tel que $d(x, y) = d(x, F)$. Le point y s'appelle la **projection orthogonale** de x sur F. 3°/ Montrez que $\mathbb{R}^p$ est somme directe topologique de F et de son orthogonal $F°$: $$\mathbb{R}^p = F \oplus F°.$$ Montrez que le projecteur orthogonal p_F de $\mathbb{R}^p$ sur F est continu et a pour norme 1, si F n'est pas réduit à 0.	

Solution.

1°/ Continuité de la distance.

On a, pour x et y dans $\mathbb{R}^p$:

$$\| a - x \| = \| a - y + y - x \| \leqslant \| a - y \| + \| y - x \|$$
$$\| a - x \| - \| a - y \| \leqslant \| y - x \|$$

De même :

$$\| a - y \| - \| a - x \| \leqslant \| x - y \|$$

donc :

$$| \| a - x \| - \| a - y \| | \leqslant \| x - y \|$$
$$| d(a, x) - d(a, y) | \leqslant \| x - y \|$$

Une application qui vérifie une relation :

$$\| f(x) - f(y) \| \leqslant k \| x - y \|$$

est appelée une **application contractante** ou **lipschitzienne**, (**contraction** lorsque $k \leqslant 1$). k est le **rapport de contraction**.
Par exemple, toute application linéaire est contractante.

Toute application contractante est **uniformément continue** (pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $\eta = \frac{\varepsilon}{k} > 0$ tel que l'image d'une boule quelconque de rayon η soit contenue dans une boule de rayon ε) et continue (pour tout $x \in \mathbb{R}^p$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $\eta = \frac{\varepsilon}{k} > 0$, tel que l'image par f de la boule de centre x et de rayon η soit contenue dans la boule de centre $f(x)$ et de rayon ε).

En particulier, on a ici :

$$\| x - y \| < \eta \Rightarrow | d(a, y) - d(a, x) | < \varepsilon$$

Donc la distance au point a est une fonction continue et même uniformément continue :

$x \mapsto d(a, x)$ est une application uniformément continue de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$.

2°/ Projection orthogonale.

L'existence est purement topologique.

On utilisera la propriété que l'image d'un fermé de $\mathbb{R}^p$ par une application uniformément continue f : $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ est un fermé de $\mathbb{R}^q$.
Tout sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^p$, en tant que noyau d'une application linéaire, obligatoirement continue comme toute application linéaire de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^q$, est fermé puisque c'est l'image réciproque de $\{0\}$ qui est fermé.

Or la distance $d(x, .)$ est uniformément continue, donc l'image d'un fermé est un fermé, et l'image de F est un fermé. Comme l'image d'un connexe de $\mathbb{R}^p$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ (**théorème de Bolzano**) et que F est un connexe, l'image de F est un intervalle fermé de $\mathbb{R}$.
Comme cet intervalle est minoré par 0, il possède une borne inférieure.
Cette borne inférieure est l'image par $d(x, .)$ d'un élément y de F : $d(x, F) = d(x, y)$.

L'unicité est purement algébrique.

On considère un élément y vérifiant $d(x, F) = d(x, y)$.
Il engendre un sous-espace vectoriel $K = \mathbb{R}\, y$ de dimension 1.
On peut décomposer $\mathbb{R}^p$ en somme directe orthogonale $\mathbb{R}^p = \mathbb{R}\, y \oplus (\mathbb{R}\, y)^\circ$.
Alors x s'écrit :

$x = x_1 \oplus x_2$ avec $x_1 \in \mathbb{R}\, y$ et $x_2 \in (\mathbb{R}\, y)^\circ$.

On a alors :

$$\begin{aligned} \| x - y \|^2 &= < x - y \mid x - y > \\ &= < x_1 + x_2 - y \mid x_1 + x_2 - y > \\ &= \| x_1 - y \|^2 + \| x_2 \|^2 \end{aligned}$$

$$\| x - y \|^2 = \| x_1 - y \|^2 + \| x_2 \|^2$$

Comme on a aussi :

$$\| x \|^2 = \| x_1 \|^2 + \| x_2 \|^2$$

et

$$\| x - y \|^2 = [\ d\ (x, F)\ ]^2$$

Il vient, par soustraction :

$$\| x_1 \|^2 - \| x_1 - y \|^2 = \| x \|^2 - [\ d\ (x, F)\ ]^2$$

Cette quantité est une constante indépendante du vecteur y choisi.

Comme x_1 est dans F , on a $\| x - x_1 \| = \| x_2 \| \geqslant d\ (x, F)$
$[\ d\ (x, F)\ ]^2 = \| x - y \|^2 = \| x_1 - y \|^2 + \| x_2 \|^2 \geqslant \| x_1 - y \|^2 + [\ d\ (x, F)\ ]^2 \Rightarrow \| x_1 - y \|^2 = 0 \Rightarrow y = x_1$
donc $x_2 = x - y$ est orthogonal à y et $\| x \|^2 = \| x - y \|^2 + \| y \|^2$.

Ainsi pour tout vecteur y vérifiant $d\ (x, y) = d\ (x, F)$, on peut écrire :

$$x = y \oplus (x - y)$$

avec $x - y$ orthogonal à y,

$$\| y \|^2 = \| x \|^2 - [d\ (x, F)]^2, \text{ et } \| x - y \|^2 = \| x \|^2 - \| y \|^2 = [d\ (x, F)]^2$$

Pour tout autre vecteur y' tel que $d\ (x, y') = d\ (x, F)$, on aura aussi :

$$x = y' \oplus (x - y')$$
$$\| y' \|^2 = \| x \|^2 - [d\ (x, F)]^2$$

avec $x - y'$ orthogonal à y'. y et y' ont donc la même norme : $\| y \| = \| y' \| = \sqrt{\|x\|^2 - \left[d(x, F)\right]^2}$

On a alors :

$$< x - y \mid y > = 0 = < x - y' \mid y' >$$
$$< x \mid y > = \| y \|^2 = \| y' \|^2 = < x \mid y' >$$
$$< x \mid y - y' > = 0.$$

La relation $< x \mid y - y' > = 0$ montre que x est orthogonal à $y - y'$. Le vecteur $y - y'$ est dans $(\ \mathbb{R}\ x\ )°$.
Or y' se décompose de façon unique en une composante sur y et une composante dans l'orthogonal de y :

$$y' = u \oplus v$$
$$\| y' \|^2 = \| u \|^2 + \| v \|^2$$

$< y' \mid y > = < u \mid y >$ est réel puisque u est proportionnel à y, donc $< y \mid y' > = < y' \mid y >$.

$$\| y - y' \|^2 = < y - y' \mid y - y' > = \| y \|^2 + \| y' \|^2 - 2 < y \mid y' > = 2\ [\ \| y \|^2 - < y \mid y' >\ ]$$

$$< y \mid y - y' > = \| y \|^2 - < y \mid y' > = \frac{\| y - y' \|^2}{2} = < y' - y \mid y') \geqslant 0$$

On a donc

$$- \frac{\| y - y' \|^2}{2} = < y' \mid y - y' > \leqslant 0 \leqslant < y \mid y - y') = \frac{\| y - y' \|^2}{2}$$

de sorte que, par addition :

$$< y' \mid y - y' > + < y \mid y - y' > = - \frac{\| y - y' \|^2}{2} + \frac{\| y - y' \|^2}{2} = 0$$
$$< y + y' \mid y - y' > = 0$$

$y + y'$ est orthogonal à $y - y'$.

Pour tout $z = \alpha\, y + (1 - \alpha)\, y' = y' + \alpha\, (y - y')$ du segment , $\alpha \in [\, 0 \,,\, 1\,] \subset \mathbb{R}$, comme $y - y'$ est orthogonal à x, on a :

$$< x \mid z > = < x \mid y' > = \| y' \|^2 = \| x \|^2 - [d\,(x, F)]^2 = \| y \|^2$$

donc $< x \mid z >$ est réel positif, et $< x \mid z > = < z \mid x >$.
D'autre part :

$$\| z \| = \| \alpha\, y + (1 - \alpha)\, y' \| \leqslant \alpha \| y \| + (1 - \alpha) \| y' \| = \alpha \| y \| + (1 - \alpha) \| y \| = \| y \|$$
$$\| z \| \leqslant \| y \|$$

$$\begin{aligned} \| x - z \|^2 &= \| x \|^2 + \| z \|^2 - 2 < x \mid z > \\ &= \| x \|^2 + \| z \|^2 - 2 \| y \|^2 \\ &\leqslant \| x \|^2 + \| y \|^2 - 2 \| y \|^2 \\ &\leqslant \| x \|^2 - \| y \|^2 \\ &\leqslant [d\,(x, F)]^2 \end{aligned}$$

$$\| x - z \| \leqslant d\,(x, F)$$

Or, par définition de $d\,(x, F)$, comme z est dans F, on a $\| x - z \| \geqslant d\,(x, F)$, d'où l'égalité : $\| x - z \| = d\,(x, F)$.
Autrement dit, dès que y et y' sont deux points de l'image réciproque de $d\,(x, F)$, par l'application $y \mapsto d\,(x, y)$, tout point du segment est encore un point de cette image réciproque.
Cette image réciproque est donc un ensemble convexe.
Et comme on a aussi $\| x - z \| = d\,(x, F)$, il en résulte que l'on a : $x = z \oplus (x - z)$ avec $(x - z)$ orthogonal à z, donc

$$< x \mid z > = \| z \|^2 = \| x \|^2 - [d\,(x, F)]^2 = \| y \|^2.$$

L'image réciproque de $d\,(x, F)$, par l'application uniformément continue $y \mapsto d\,(x, y)$ est donc un ensemble convexe de points de F qui sont tous à la même distance de O et à la même distance de x.

Considérons le milieu du segment $\overline{y\,y'}$, $z = \frac{y + y'}{2}$.

Comme $y + y'$ est orthogonal à $y - y'$, z est orthogonal à $y - y'$, et, plus généralement, pour tout $\alpha \in$

$\mathbb{R}$, $z = \frac{y+y'}{2}$ est orthogonal à $\alpha\,(y-y')$. Or, comme $\frac{y+y'}{2}$ fait partie du segment $\overline{y\,y'}$, on a toujours :

$$\left\| \frac{y+y'}{2} \right\|^2 = \| x \|^2 - [d\,(x, F)]^2 = \| y \|^2 = \| y' \|^2$$
$$\left\| \frac{y+y'}{2} \right\|^2 + | \alpha |^2 \| y - y' \|^2 = \left\| \frac{y+y'}{2} + \alpha(y-y') \right\|^2$$
$$\| y \|^2 + | \alpha |^2 \| y - y' \|^2 = \left\| \frac{y+y'}{2} + \alpha(y-y') \right\|^2$$

Par exemple, pour $\alpha = \frac{1}{2}$, on trouve :

$$\| y \|^2 + \frac{1}{4} \| y - y' \|^2 = \| y \|^2$$

Et ceci montre que $\| y - y' \|^2$ est nul, donc $y = y'$.
Le point y tel que $d\,(x, y) = d\,(x, F)$ est unique.

3°/ Somme directe topologique et projecteur.

A tout point x de $\mathbb{R}^p$, on peut faire correspondre l'unique point $y \in F$ tel que $d\,(x, y) = d\,(x, F)$.
On définit ainsi une application p_F de $\mathbb{R}^p$ dans F.
Pour cette application p_F, on a :

$$< x - p_F\,(x) \mid p_F\,(x) > = 0$$
$$\| p_F\,(x) \|^2 = \| x \|^2 - [d\,(x, F)\,]^2$$
$$\| x - p_F\,(x) \| = d\,(x, F)$$

Comme F est complet, donc fermé :

$$x \in F \Leftrightarrow d\,(x, F) = 0 \Leftrightarrow x = p_F\,(x)$$

Comme $p_F\,(x)$ est dans F, on a donc $p_F\,(p_F\,(x)) = p_F\,(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^p$.
Ceci montre que p_F est un projecteur.
Et comme la projection $p_F\,(x)$ est orthogonale à $x - p_F\,(\mathrm{x})$, cette application est le projecteur orthogonal p_F de $\mathbb{R}^p$ sur F.
C'est une application linéaire.
Elle est continue parce que le théorème de Pythagore donne :

$$\| y \|^2 = \| x \|^2 - \| x - y \|^2 = \| x \|^2 - [d\,(x, F)]^2 \leqslant \| x \|^2$$
$$\| y \| = \| p_F\,(x) \| \leqslant \| x \|$$

De plus, la norme de p_F est inférieure ou égale à 1.

Pour $x \in F$, on a $p_F\,(x) = x$.

Si on prend un x de norme 1 dans F, on a $\| p_F(x) \| = 1 \leqslant \| p_F \|$, ce qui montre que

$$\| p_F \| = 1.$$

Tout $x \in \mathbb{R}^p$ s'écrit d'une manière unique sous la forme :

$$x = p_F(x) \oplus (x - p_F(x))$$

Montrons que $x - p_F(x)$ est orthogonal à F.

Les éléments de F sont caractérisés par $p_F(y) = y$: F est le noyau de l'application linéaire continue $id_{\mathbb{R}^p} - p_F$.
C'est le sous-espace propre de p_F pour la valeur propre 1.
Comme le polynôme minimal de p_F est $X(X-1)$, p_F est diagonalisable et $\mathbb{R}^p$ est somme directe de ses sous-espaces propres. $Im\ (id_{\mathbb{R}^p} - p_F)$ est le sous-espace propre pour la valeur propre 0.
Comme les valeurs propres sont réelles, p_F est un endomorphisme hermitien et, pour tout $x \in \mathbb{R}^p$ et tout $y \in \mathbb{R}^p$, on a :

$$< p_F(x) \mid y > = < x \mid p_F(y) >$$

Si y est dans F, on a $p_F(y) = y$ et $< x - p_F(x) \mid y > = 0$, donc F est orthogonal à $x - p_F(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^p$.
L'orthogonal de F contient donc l'image de $id_{\mathbb{R}^p} - p_F$ et comme $\mathbb{R}^p$ est somme directe de F et de $Im\ (id_{\mathbb{R}^p} - p_F)$, et que $F^\circ \cap F = \varnothing$, puisque la forme hermitienne n'est pas dégénérée, F° est égal à l'image de $id_{\mathbb{R}^p} - p_F$, donc

$$\mathbb{R}^p = F \oplus F^\circ.$$

Et cette somme directe orthogonale est une somme directe topologique, parce le projecteur p_F est continu.

Chapitre 20. Formes linéaires continues.

Enoncés.

Exercice 3. Norme d'une forme linéaire, distance d'un point au noyau.

Soit f une forme linéaire non nulle sur $\mathbb{R}^p$. On pose:

- $H = Ker\ (f)$
- $S = \{x \in \mathbb{R}^p \mid \| s \|_2 = 1\}$, où $\| . \|_2$ désigne la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^p$.

1°/ Démontrer que $\{ | f(s) | \in \mathbb{R} \mid s \in S \}$ est majoré et que l'on a :

$M = Sup \{ | f(s) | \in \mathbb{R} \mid s \in S \} > 0$.

En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}^p$, on a :

$| f(x) | \leq M \| x \|_2$.

2°/ Pour tout $x \in \mathbb{R}^p$, on pose :

$d(x, H) = Inf \{ \| x - h \|_2 \mid h \in H \}$.

Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^p$, on a :

$d(x, H) = \frac{|f(x)|}{M}$.

3°/ Soit $\{ e_1 , ... , e_p \}$ la base canonique de $\mathbb{R}^p$. On pose :

$u_i = f(e_i)$ pour $i \in \{1, 2, ... , p \}$,

de sorte que l'équation de l'hyperplan H est :

$$\sum_{i=1}^{i=p} u_i X_i = 0.$$

Calculer $d(x, H)$ en fonction de $u_1 , u_2 , ... , u_p$ et des composantes $x_1 , x_2 , ... , x_p$ de x dans la base canonique de $\mathbb{R}^p$.

Solution.

1°/ Majoration de $| f(x) |$.

a) L'ensemble $\{ | f(s) | \in \mathbb{R} \mid s \in S \}$ est majoré.

Considérons une forme linéaire f sur $\mathbb{R}^p$.

Soit $\{e\} = \{e_1 , \dots , e_p \}$ la base canonique de $\mathbb{R}^p$.

Tout élément x de $\mathbb{R}^p$ s'écrit de façon unique sous la forme :

$x = x^1 e_1 + \ldots + x^p e_p$
Par linéarité :

$$f(x) = f(x^1, \ldots, x^p) = x^1 f(e_1) + \ldots + x^p f(e_p)$$

On a donc :

$$\begin{aligned} |f(x)| &= |x^1 f(e_1) + \ldots + x^p f(e_p)| \\ &\leqslant |x^1 f(e_1)| + \ldots + |x^p f(e_p)| \\ &\leqslant p\, Sup(|x^1|, \ldots, |x^p|)\, Sup(|f(e_1)|, \ldots, |f(e_p)|) = \lambda \|x\| \end{aligned}$$

avec $\lambda = p\, Sup(|f(e_1)|, \ldots, |f(e_p)|)$, indépendant de x, et $\|x\| = Sup(|x^1|, \ldots, |x^p|)$, norme produit.

Remarque.

La relation

$$|f(x)| \leqslant \lambda \|x\|, \text{ pour tout } x \text{ de } \mathbb{R}^p.$$

montre que ***f* est lipschitzienne, donc continue**, (Chapitre 19, Exercice 3, pour $n = 1$, voir aussi Chapitre 20, Exercice 1).

Par définition, nous avons $\|x\|_2 = (x^{1\,2} + \ldots + x^{p\,2})^{\frac{1}{2}} = 1$.
Pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$, $x^{i\,2} \leqslant x^{1\,2} + \ldots + x^{p\,2}$, donc $|x^i| \leqslant \|x\|_2$.
$\|x\| = Sup(|x^1|, \ldots, |x^p|) \leqslant \|x\|_2$.
La relation $|f(x)| \leqslant \lambda \|x\|$ donne alors $|f(x)| \leqslant \lambda \|x\| \leqslant \lambda \|x\|_2$.

Lorsque x est un élément de S, nous avons $\|x\|_2 = 1$ et il reste : $|f(x)| \leqslant \lambda$, qui montre que l'ensemble $\{ |f(s)| \in \mathbb{R} \mid s \in S \}$ est majoré.

b) La borne supérieure *M* de { | *f* (*s*) | ∈ ℝ | *s* ∈ *S* } est > 0.

Puisque l'ensemble des majorants de $\{ |f(s)| \in \mathbb{R} \mid s \in S \}$ n'est pas vide et qu'il est minoré par 0, il possède une borne inférieure N, qui est elle-même un majorant de $\{ |f(s)| \in \mathbb{R} \mid s \in S \}$:
nous avons $|f(s)| \leqslant N$, pour tout $s \in S$.

Puisque f n'est pas nulle, il existe un $x \in \mathbb{R}^p$ tel que $f(x)$ soit différent de 0.

x est différent de 0 (sinon $f(x)$ serait nul), donc $\|x\|_2$ est différent de 0 et $s = \frac{x}{\|x\|_2}$ est un élément de S.
$x = \|x\|_2 s$, $f(x) = \|x\|_2 f(s) \neq 0$, $0 < \|x\|_2 |f(s)| \leqslant \|x\|_2 N$.
Cette relation montre :
1) qu'il existe un $s \in S$ tel que $f(s)$ soit différent de 0,
2) que N est strictement plus grand que 0.

L'ensemble $\{ |f(s)| \in \mathbb{R} \mid s \in S \}$ n'est pas vide et il est majoré : donc il possède une borne supérieure M qui est aussi un majorant de $\{ |f(s)| \in \mathbb{R} \mid s \in S \}$. On a donc $N \leqslant M$.
La relation $|f(s)| \leqslant N$, pour tout $s \in S$ montre que $M = Sup \{ |f(s)| \in \mathbb{R} \mid s \in S \} \leqslant N$.
On a donc la relation $M = N > 0$.

Pour compléter le tableau, il manque une seule chose, le fait que la borne supérieure M de $\{ |f(s)| \in \mathbb{R} \mid s \in S \}$ est atteinte : il existe un $s \in S$ tel que $|f(s)| = M$. Cette propriété se trouvera démontrée lorsqu'on connaîtra le théorème de Weierstrass (l'image d'un compact par une application continue est un compact).

c) Majoration de $|f(x)|$ pour $x \in \mathbb{R}^p$.

Pour tout x non nul dans $\mathbb{R}^p$, $\frac{x}{\|x\|_2}$ est un élément de S, donc $\left| f\left(\frac{x}{\|x\|_2}\right) \right| \leqslant M$.

Par linéarité, il vient :

$$\boxed{|f(x)| \leqslant M \|x\|_2.}$$

Et comme cette relation reste vraie pour $x = 0$, où elle se réduit à une égalité, la relation est vraie pour tout $x \in \mathbb{R}^p$.

2°/ Distance d'un point au noyau de f.

Soit $h \in H$. Par définition, nous avons $f(h) = 0$.
La distance de x à h est, par définition, la norme euclidienne de $x - y$: $d(x, h) = \|x - h\|_2$.
La distance de x à H est, par définition, la borne inférieure de $\{ d(x, h) \mid h \in H \}$.

A chaque $x \in \mathbb{R}^p$, on peut associer sa **projection orthogonale** $y = p_H(x)$ sur H (Exercice 2).
La distance de x à H est la distance de x à y.
A cause du **théorème de Pythagore** $\|x\|_2^2 = \|y\|_2^2 + \|x - y\|_2^2$,

$$\left| f\left(\frac{x}{\|x\|_2}\right) \right| = \frac{|f(x)|}{\|x\|_2} \leqslant \frac{|f(x)|}{\|x - y\|_2} = \left| f\left(\frac{x-y}{\|x-y\|_2}\right) \right|.$$

Comme M est la borne supérieure des $|f(s)|$ pour les s de S, c'est aussi la borne supérieure des $\left| f\left(\frac{x}{\|x\|_2}\right) \right|$, pour les $x \in \mathbb{R}^p$, et c'est aussi la borne supérieure des $\left| f\left(\frac{x-y}{\|x-y\|_2}\right) \right|$ pour les $x \in \mathbb{R}^p$.
Dans S, il existe seulement deux éléments opposés orthogonaux à H, ceux qui se projettent orthogonalement à H en 0 et qui sont sur le supplémentaire orthogonal de H, sous-espace vectoriel de dimension 1.
Ces deux éléments ont le même $|f(s)| = M$.
Alors, comme $\frac{x-y}{\|x-y\|_2}$ est un élément de S orthogonal à H, on a toujours $\left| f\left(\frac{x-y}{\|x-y\|_2}\right) \right| = M$,
c'est-à-dire :

$$\boxed{\quad\quad}$$

$$\boxed{\frac{|f(x)|}{M} = d\,(x, H).}$$

3°/ Expression analytique de la distance *d* (*x*, *H*).

Tout point $X = (X_1, \ldots, X_p)$ de l'hyperplan *H* vérifie :

$$\sum_{i=1}^{i=p} u_i X_i = 0.$$

Cette relation exprime que $X = (X_1, \ldots, X_p)$ est orthogonal à $U = (u_1, \ldots, u_p)$.

Donc *U* est orthogonal à l'hyperplan *H* et $\frac{U}{\|U\|_2}$ est un élément de *S* orthogonal à *H*.

On a donc $M = \left| f\left(\frac{U}{\|U\|_2}\right)\right| = \frac{|f(U)|}{\|U\|_2}$.

$f(U) = \sum_{i=1}^{i=p} u_i f(e_i) = \sum_{i=1}^{i=p} u_i{}^2 = \|U\|_2{}^2$

$M = \frac{|f(U)|}{\|U\|_2} = \|U\|_2$

La distance d'un $x \in \mathbb{R}^p$ à *H* s'exprime donc par :

$$d\,(x, H) = \frac{|f(x)|}{M} = \frac{|f(x)|}{\|U\|_2}.$$

$f(x) = \sum_{i=1}^{i=p} x_i f(e_i) = \sum_{i=1}^{i=p} x_i u_i = \langle x \mid U \rangle$ (produit scalaire de *x* et *U*).

$\|U\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{i=p} u_i{}^2\right)^{1/2}$.

$$\boxed{d\,(x, H) = \frac{\left|\sum_{i=1}^{i=p} x_i\, u_i\right|}{\sqrt{\sum_{i=1}^{i=p} u_i{}^2}}}$$

Exercices

Continuité partielle.

1. Continuité par rapport à l'ensemble des variables.
2. Continuité partielle.

Continuité par rapport à l'ensemble des variables.

Une application $f : E \to F$ d'un espace normé E dans un espace normé F est dite continue en un point $a \in E$ si, et seulement si, l'image réciproque d'un voisinage de $f(a)$ est un voisinage de a.

Comme les voisinages d'un point sont les parties qui contiennent une boule ouverte de rayon non nul centrée sur ce point (on dit que les boules ouvertes forment un "système fondamental de voisinages"), il revient au même de dire que, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe un $\eta > 0$ tel que, pour tout $x \in E$:

$$\| x - a \|_E < \eta \Rightarrow \| f(x) - f(a) \|_F < \varepsilon.$$

Remarques.

Si E est de dimension finie p, il est isomorphe à $\mathbb{R}^p$, qu'on peut rapporter à sa base canonique.

Une application de $\mathbb{R}^p$ dans F est appelée une "fonction de p variables".

Une application de $\mathbb{R}^p$ dans F, continue en $a = (a_1, \ldots, a_p) \in \mathbb{R}^p$ est appelée "fonction de p variables continue en a par rapport à l'ensemble des variables".

HAUT

Continuité partielle.

Une fonction de p variables $f : \mathbb{R}^p \to F$ de l'espace normé $\mathbb{R}^p$ dans un espace normé F est dite continue en un point $a = (a_1, \dots, a_p) \in \mathbb{R}^p$ par rapport à la variable d'indice j si, et seulement si, l'image réciproque d'un voisinage de $f(a)$ par l'application

$$x_j \mapsto f(a_1, \dots, a_{j-1}, x_j, a_{j+1}, \dots, a_p)$$

est un voisinage de a_j.

Comme les voisinages d'un point sont les parties qui contiennent une boule ouverte de rayon non nul centrée sur ce point (on dit que les boules ouvertes forment un "système fondamental de voisinages"), il revient au même de dire que, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe un $\eta > 0$ tel que, pour tout $x = (a_1, \dots, a_{j-1}, x_j, a_{j+1}, \dots, a_p) \in \mathbb{R}^p$:

$$|x_j - a_j| < \eta \Rightarrow \|f(x) - f(a)\|_F < \varepsilon.$$

Propriétés.

- Une application qui est continue en un point par rapport à l'ensemble des variables, est continue en ce point par rapport à chacune des variables.
- La réciproque est fausse : la continuité par rapport à chacune des variables n'entraîne pas la continuité par rapport à l'ensemble des variables.

HAUT

Chapitre 21. Continuité partielle.

Exercices

Exercice 1. Continuité et continuité partielle de 4 applications de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 1. Continuité et continuité partielle de 4 applications de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

Etudier la continuité de l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, et des applications partielles $x \mapsto f(x, y)$ et $y \mapsto f(x, y)$ pour :

$$1°/\ f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{pour } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{pour } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$2°/\ f(x,y) = \begin{cases} e^{\frac{-1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}} & \text{pour } x^2+y^2 < 1 \\ 0 & \text{pour } x^2+y^2 \geqslant 1 \end{cases}$$

$$3°/\ f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)^x & \text{pour } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{pour } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$4°/\ f(x,y) = \begin{cases} x & \text{pour } |x| < |y| \\ y & \text{pour } |x| \geqslant |y| \end{cases}$$

Solution

HAUT

Chapitre 21. Continuité partielle.

Enoncés.

Exercice 1. Continuité et continuité partielle de 4 applications de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

Etudier la continuité de l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, et des applications partielles $x \mapsto f(x, y)$ et $y \mapsto f(x, y)$ pour :

$$1°/\ f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{pour } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{pour } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$2°/\ f(x,y) = \begin{cases} e^{\frac{-1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}} & \text{pour } x^2+y^2 < 1 \\ 0 & \text{pour } x^2+y^2 \geqslant 1 \end{cases}$$

$$3°/\ f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)^x & \text{pour } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{pour } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$4°/\ f(x,y) = \begin{cases} x & \text{pour } |x| < |y| \\ y & \text{pour } |x| \geqslant |y| \end{cases}$$

Solution.

1°/ Première fonction.

1. Continuité globale.

· $f_1 : (x, y) \mapsto xy$ est une application continue de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ (Chapitre 19, Exercice 1, R4).

· $f_2 : (x, y) \mapsto x^2 + y^2$ est une application continue de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ (Chapitre 19, Exercice 2, 2°).

· $f_3 : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est une application continue de $\mathbb{R} - \{0\}$ dans $\mathbb{R}$ (Chapitre 19, Exercice 2, 3°).

· Une application composée d'un nombre fini d'applications continues est continue. (Chapitre 19, Exercice 1, R2).

· Une application produit $(x, y) \mapsto (u(x, y), v(x, y))$ et continue si, et seulement si, chacun de ses facteurs u et v est continu.

· L'application f peut se décomposer en :

$$f = f_1 \circ (f_1, f_3 \circ f_2)$$

L'application f est continue en tout point de $\mathbb{R}^2$ n'appartenant pas à $f_2^{-1}(\{0\}) = (0,0)$.

Pour étudier la continuité en (0,0), il suffit de remarquer que, pour $y = k\,x$, avec $x \neq 0$, on a

$$f(x\,,\,k\,x) = \frac{k}{1+k^2}$$

C'est une constante, de sorte que si $M = (x, y)$ tend vers $O = (0,0)$ en restant sur la droite d'équation $y = k\,x$, la limite de f est $\frac{k}{1+k^2}$.
Cette limite n'est pas nulle pour $k \neq 0$. De sorte que $f(x, y)$ ne tend pas vers la valeur de f au point O. L'application f n'est pas continue en O.

f est continue par rapport à l'ensemble des variables en tout point de $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$.Elle n'est pas continue en (0,0).

2. Continuités partielles.

a) Continuité par rapport à *x*.

Pour $y = 0$ et x différent de 0, on a $f(x, y) = 0$. Pour $y = 0$ et $x = 0$, on a $f(x, y) = 0$ par définition. La fonction $f(x, 0)$ est une constante : elle est continue.

Pour y différent de 0 et x diffrent de 0, la fonction $x \mapsto f(x, y)$ est le rapport de deux polynômes dont le dénominateur n'est jamais nul : c'est une fonction continue.

Reste alors seulement à étudier la continuité de cette fonction f pour $x = 0$. La limite de $x\,y$ est 0. La limite de $x^2 + y^2$ est $y^2 \neq 0$. La limite du rapport est le rapport des limites, c'est $0 = f(0, y)$.

La fonction $x \mapsto f(x, y)$ est continue pour toute valeur réelle de y.

b) Continuité par rapport à *y*.

Par symétrie de f par rapport à x et y,

La fonction $y \mapsto f(x, y)$ est continue pour toute valeur réelle de x.

On a ainsi un exemple de fonction numérique qui est continue en tout point par rapport à chacune des variables, mais qui n'est pas continue par rapport à l'ensemble des variables.

2°/ Deuxième fonction.

1. Continuité globale.

· L'application $f_1 : (x, y) \mapsto 1 - x^2 - y^2$ est un polynôme, c'est donc une application continue dans $\mathbb{R}^2$, donc aussi, en particulier, dans la boule ouverte de centre O et de rayon 1 pour la norme euclidienne. Dans cette boule unité B, le polynôme est strictement plus grand que 0 et inférieur ou égal à 1. $f_1(B) =]0\,,\,1]$. On a :

$$\lim_{x^2+y^2 \to 1} f_1(x, y) = 0.$$

· L'application $f_2 : x \mapsto \sqrt{x}$ est une fonction puissance d'exposant > 0 : c'est une application continue dans $\mathbb{R}$, et elle ne s'annule pas dans l'intervalle] 0 , 1]. f_2 ( ] 0 , 1]) =] 0 , 1]. On a :

$$\lim_{x \to 0} f_2(x) = 0$$

· L'application composée f_2 o $f_1 : B \to \mathbb{R}$, est donc continue et (f_2 o f_1)(B) =] 0 , 1]. Et

$$\lim_{x^2+y^2 \to 1} (f_2 \text{ o } f_1)(x, y) = 0.$$

· L'application $f_3 : x \mapsto \frac{1}{x}$ est la fonction "inverse". Elle est continue dans tout domaine ne contenant pas 0 : en particulier elle est continue sur] 0 , 1] et f_3 ( ]0 , 1]) = [1 , +∞ [.

$$\lim_{x \to 0} f_3(x) = +\infty.$$

· L'application composée f_3 o f_2 o $f_1 : B \to \mathbb{R}$, est donc continue dans B et (f_3 o f_2 o f_1)(B) = [1 , +∞ [.

$$\lim_{x^2+y^2 \to 1} (f_3 \text{ o } f_2 \text{ o } f_1)(x, y) = +\infty.$$

· L'application $f_4 : x \mapsto -x$ est un polynôme, c'est une application continue. En particulier elle est continue en tout point de l'intervalle [1 , +∞ [et f_4 ([1 , +∞ [ ) =] –∞ , –1].

$$\lim_{x \to +\infty} f_4(x) = -\infty.$$

· L'application composée f_4 o f_3 o f_2 o $f_1 : B \to \mathbb{R}$, est donc continue dans B et (f_4 o f_3 o f_2 o f_1)(B) =] –∞ , –1].

$$\lim_{x^2+y^2 \to 1} (f_4 \text{ o } f_3 \text{ o } f_2 \text{ o } f_1)(x, y) = -\infty.$$

· L'application $f_5 : x \mapsto e^x$ est l'exponentielle. C'est une application continue. En particulier, elle est continue en chaque point de l'intervalle] –∞ , –1] et f_5 ( ] –∞ , –1]) =] 0 , e^{-1}].

$$\lim_{x \to -\infty} f_5(x) = 0$$

· L'application composée $g = f_5$ o f_4 o f_3 o f_2 o $f_1 : B \to \mathbb{R}$, est donc continue dans B et (f_5 o f_4 o f_3 o f_2 o f_1)(B) =] 0 , e^{-1}].

$$\lim_{x^2+y^2\to 1}(f_5 \circ f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1)\,(x, y) = 0$$

· Or l'application $g = f_5 \circ f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1$ est la restriction de f à la boule B. On a donc :

$$\lim_{x^2+y^2\to 1} f\,(x, y) = 0$$

Et cette relation montre que l'application f, qui, comme g, est continue dans la boule B, est continue aussi sur la frontière de B, puisqu'on a, par définition, $f\,(x, y) = 0$ pour tout point (x, y) vérifiant $x^2 + y^2 \geqslant 1$.
Comme la fonction f est contante et égale à 0 à l'extérieur de B, elle est continue en tout point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

L'application f est continue dans $\mathbb{R}^2$.

2. Continuités partielles.

Comme f est continue, elle est continue par rapport à chacune des variables, parce que :

— pour chaque y, l'application $x \mapsto (x, y)$ est continue, l'application $(x, y) \mapsto f\,(x, y)$ est continue, donc l'application composée est continue.
— pour chaque x, l'application $y \mapsto (x, y)$ est continue, l'application $(x, y) \mapsto f\,(x, y)$ est continue, donc l'application composée est continue.

3°/ Troisième fonction.

1. Continuité globale.

· L'application $f_1 : (x, y) \mapsto x^2 + y^2$ est un polynôme, c'est une application continue.
En particulier, elle est continue pour $(x, y) \neq 0$ et l'on a $f_1\,(\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}) =]\,0\,, +\infty[$ et

$$\lim_{(x, y)\to(0,0)} f_1\,(x, y) = 0$$

· L'application $f_2 : x \mapsto \ln x$ est la fonction logarithme. Elle est continue dans $]\,0\,, +\infty\,[$ et l'on a $f_2\,(\,]\,0\,, +\infty\,[\,) =]-\infty\,, +\infty[= \mathbb{R}$ et

$$\lim_{x\to 0} f_2\,(x) = -\infty.$$

· L'application composée $f_2 \circ f_1$ est donc continue dans $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$, on a $(f_2 \circ f_1)\,(\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}) =]-\infty\,, +\infty[= \mathbb{R}$ et

$$\lim_{(x, y)\to(0,0)}(f_2 \circ f_1)\,(x, y) = 0$$

· L'application $f_3 : (x, y) \mapsto x$ est la projection sur le premier facteur. C'est une application continue

(Chapitre 19, Exercice 1, R1). En particulier elle est continue sur $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ et l'on a $f_3(\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}) = \mathbb{R} - \{0\}$ et

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_3(x, y) = 0$$

· Une application produit $f_4 = (u, v) : (x, y) \mapsto (u(x, y), v(x, y))$ est continue dès que les applications facteurs u et v sont continues (Chapitre 19, Exercice 1, R3) et l'on a, dans ce cas, $f_4(A) = u(A) \times v(A)$.

· L'application $f_4 = (f_2 \circ f_1, f_3)$ est continue sur $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ et l'on a $f_4(\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}) = \mathbb{R} \times (\mathbb{R} - \{0\})$ et

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_4(x, y) = (-\infty, 0)$$

· L'application $f_5 : (x, y) \mapsto x\,y$ est continue sur $\mathbb{R}^2$. En particulier, elle et continue sur $\mathbb{R} \times (\mathbb{R} - \{0\})$. On a :

$$f_5(\mathbb{R} \times (\mathbb{R} - \{0\})) = \mathbb{R}.$$

· L'application composée $f_5 \circ f_4 = f_5 \circ (f_2 \circ f_1, f_3)$ est continue sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ et l'on a $(f_5 \circ f_4)(\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}) = \mathbb{R}$ et

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (f_5 \circ f_4)(x, y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} [x \ln(x^2 + y^2)] = 0.$$

En effet, comme on a $|x| \leqslant \sqrt{x^2 + y^2}$,

$|x \ln(x^2 + y^2)|$ est majoré par $\sqrt{x^2 + y^2} \times |\ln(x^2 + y^2)|$.

En posant $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, il vient : $|x \ln(x^2 + y^2)| \leqslant r\,|\ln(r)|$.

Or : $\lim_{r\to 0} [r \ln r] = 0$ (Chapitre 2, Exercice 3), donc :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (f_5 \circ f_4)(x, y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} [x \ln(x^2 + y^2)] = 0.$$

· L'application $f_6 : x \mapsto e^x$ est la fonction exponentielle, elle est continue (Chapitre 3, Définitions). On a $f_6(\mathbb{R}) =]0, +\infty[$, et

$$\lim_{x\to 0} e^x = e^0 = 1$$

· L'application composée $g = f_6 \circ f_5 \circ f_4 = f_6 \circ f_5 \circ (f_2 \circ f_1, f_3)$ est continue sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$. On a $(f_6 \circ f_5 \circ f_4)(\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}) = \mathbb{R}$, et

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (f_6 \circ f_5 \circ f_4)(x, y) = f_6\left(\lim_{(x,y)\to(0,0)} (f_5 \circ f_4)(x, y)\right) = f_6(0) = 1.$$

Autrement dit, comme g est la restriction de f à $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$, on peut écrire :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 1 \neq f(0,0) = 0$$

Donc l'application f n'est pas continue en (0,0).
Mais cette singularité est isolée, et on rendrait l'application f continue en posant :

$$f(0,0) = 1.$$

2. Continuités partielles.

a) Continuité par rapport à y.

Pour $x = 0$, l'application $y \mapsto f(0, y) = (y^2)^0 = 1$ de $\mathbb{R} - \{0\}$ dans $\mathbb{R}$ est constante, donc sa limite en 0 est $1 \neq f(0,0) = 0$.
Donc f n'est pas continue en (0, 0) par rapport à y.

b) Continuité par rapport à x.

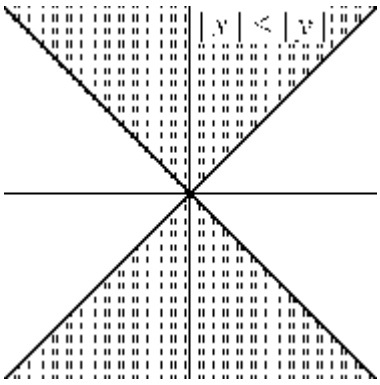
Pour $y = 0$, l'application $x \mapsto f(x, 0) = (x^2)^x = e^{2x\ln|x|}$ de $\mathbb{R} - \{0\}$ dans $\mathbb{R}$ est composée d'applications continues :
$x \mapsto \ln|x|$ de $\mathbb{R} - \{0\}$ dans $\mathbb{R}$,
$x \mapsto (x, \ln|x|)$ de $\mathbb{R} - \{0\}$ dans $(\mathbb{R} - \{0\}) \times \mathbb{R}$,
$(x, y) \mapsto 2xy$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$,
$x \mapsto e^x$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
C'est une application continue dans $\mathbb{R} - \{0\}$. Sa limite est donnée par la règle "la puissance l'emporte sur le logarithme" vue plus haut : $2x\ln|x|$ tend vers 0 lorsque x tend vers 0, et $e^{2x\ln|x|}$ tend vers $e^0 = 1 \neq f(0,0) = 0$.
Donc f n'est pas continue en (0, 0) par rapport à x.

Remarquons cependant que, lorsqu'on enlève la singularité isolée en posant $f(0,0) = 1$, les applications partielles deviennent continues en (0,0), tout comme f, puisqu'on a trouvé :

$$\lim_{x\to 0}(x^2 + 0^2)^x = 1;\ \lim_{y\to 0}(0^2 + y^2)^0 = 1;\ \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 1.$$

4°/ Quatrième fonction.

1. Continuité générale.



L'inégalité $|x| < |y|$ définit deux régions du plan, délimitées par les droites d'équations $x - y = 0$ (**droite D_1**) et $x + y = 0$ (**droite D_2**).
Par symétrie, le comportement de f sera le même à l'intérieur des deux régions, les problèmes ne pourront surgir qu'à la frontière, constituée des deux droites.
A l'intérieur de la région $|x| < |y|$, $f(x, y)$ est égal à x.
Comme la projection $(x, y) \mapsto x$ est continue, la restriction de f à l'ouvert défini par $|x| < |y|$, est continue.
Par symétrie, la restriction de f à l'ouvert défini par $|y| < |x|$, est continue.
Considérons un point (a, b) de la frontière.

On a $|a| = |b|$, donc $f(a, b) = b$, avec $b = a$ ou $b = -a$.

a) Droite D_1.

Supposons d'abord $b = a$.
Comme les projections sont continues, étant donné un $\varepsilon > 0$, il existe un $\eta_1 > 0$, tel que

$$\| (x, y) - (a, b) \| < \eta_1 \Rightarrow | x - a | < \varepsilon$$

et il existe un $\eta_2 > 0$ tel que :

$$\| (x, y) - (a, b) \| < \eta_2 \Rightarrow | y - b | < \varepsilon$$

En prenant pour η le plus petit des deux nombres, soit $\eta = Inf(\eta_1, \eta_2)$, il vient :

$$\| (x, y) - (a, b) \| < \eta \Rightarrow | x - a | < \varepsilon \text{ et } | y - b | < \varepsilon$$

Comme on a supposé b = a, cette relation s'écrit :

$$\| (x, y) - (a, b) \| < \eta \Rightarrow | x - b | < \varepsilon \text{ et } | y - b | < \varepsilon$$

donc, que le point (x, y) soit d'un côté ou de l'autre de la droite d'équation $y = x$, on est sûr d'avoir

$$| f(x, y) - f(a, b) | < \varepsilon,$$

et ceci montre que

L'application f est continue au point (a, a) de la frontière.

b) Droite D_2.

Supposons maintenant $b = -a$.
Comme les projections sont continues, étant donné un $\varepsilon > 0$, il existe un $\eta_1 > 0$, tel que

$$\| (x, y) - (a, b) \| < \eta_1 \Rightarrow | x - a | < \varepsilon$$

et il existe un $\eta_2 > 0$ tel que :

$$\| (x, y) - (a, b) \| < \eta_2 \Rightarrow | y - b | < \varepsilon$$

En prenant pour η le plus petit des deux nombres, soit $\eta = Inf(\eta_1, \eta_2)$, il vient :

$$\| (x, y) - (a, b) \| < \eta \Rightarrow | x - a | < \varepsilon \text{ et } | y - b | < \varepsilon$$

Comme on a supposé $b = -a$, cette relation s'écrit :

$$\| (x, y) - (a, b) \| < \eta \Rightarrow | x + b | < \varepsilon \text{ et } | y - b | < \varepsilon$$

Elle ne permet plus d'affirmer que la fonction est continue, car,
— du côté $|x| < |y|$, $f(x, y)$ tend vers $a = -b$ lorsque (x, y) tend vers $(-b, b)$,
— du côté $|x| > |y|$, $f(x, y)$ tend vers b lorsque (x, y) tend vers $(-b, b)$.
Les deux limites sont différentes, sauf pour b = 0.

Cela permettrait de construire deux suites de points tendant vers le point $(-b, b)$, une de chaque côté, avec des images par la fonction f qui n'ont pas la même limite. La fonction f n'a donc pas de limite en $(-b, b)$: elle n'est donc pas continue en ce point.

Conclusion :

L'application f est continue sur $\mathbb{R}^2 - D_2$.
Sur $D_2 - \{(0,0)\}$, elle n'est pas continue.
En (0,0), elle est continue.

2°/ Continuité partielle.

Les applications $x \mapsto f(x, y)$ et $y \mapsto f(x, y)$ sont déjà continues partout où f est continue.
Pour les points $(b, -b)$ de $D_2 - \{0\}$, elles ne sont pas continues, parce que d'un côté de la droite $f(x, y)$ tend vers b, alors que de l'autre côté, elle tend vers $-b$, et ceci que x soit fixé, ou que y soit fixé, puisque c'est vrai déjà si aucun d'eux n'est fixé.

Conclusion :

Pour tout $y \in \mathbb{R}$, l'application $x \mapsto f(x, y)$ est continue sur $\mathbb{R} - \{-y\}$.
En $-y$, elle n'est pas continue, sauf pour $y = 0$. En 0, elle est continue.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'application $y \mapsto f(x, y)$ est continue sur $\mathbb{R} - \{-x\}$.
En $-x$, elle n'est pas continue, sauf pour $x = 0$. En 0, elle est continue.

Exercices

Dérivées partielles, dérivée totale.

1. Dérivée par rapport à un vecteur.
2. Dérivée partielle.
3. Dérivée totale, différentielle.

Dérivée par rapport à un vecteur.

Pour une application f d'un espace normé E dans un espace normé F, on appelle **dérivée de f en $a \in E$, suivant le vecteur $h \in E$**, la limite dans F, si elle existe du vecteur $\frac{f(a+th)-f(a)}{t}$, pour $t \in \mathbb{R} - \{0\}$, lorsque t tend vers 0.

$$D_h f(a) = \lim_{\substack{t \to 0 \\ t \neq 0}} \frac{f(a+th)-f(a)}{t}$$

Cette formule, qui sert de définition, sert aussi pour le calcul de la dérivée suivant un vecteur.

HAUT

Dérivée partielle.

HAUT

Pour une application f d'un espace normé $E = \mathbb{R}_p$ de dimension finie, dans un espace normé F, de dimension finie, on appelle **dérivée partielle d'ordre 1 de f en $a \in E$, par rapport à sa variable d'indice i**, la dérivée, lorsqu'elle existe, de f par rapport au vecteur e_i de la base canonique de $\mathbb{R}_p$.

$$\partial_i f(a) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(a) = \lim_{\substack{t \to 0 \\ t \neq 0}} \frac{f(a + t e_i) - f(a)}{t}$$

Propriétés

- Le calcul d'une dérivée partielle peut se faire à partir de la formule de définition.
- Pour une fonction d'une seule variable réelle, la notion de dérivée partielle suivant 1, coïncide avec la notion de dérivée :

$$\partial_1 f(a) = \lim_{\substack{t \to 0 \\ t \neq 0}} \frac{f(a + t) - f(a)}{t}$$

- Pour une fonction d'une seule variable réelle, à valeurs dans $\mathbb{R}_q$, la dérivée de f en a (suivant 1) est un vecteur $\mathbb{R}_q$, dont les composantes sont les dérivées des composantes de f en a (suivant 1) : les composantes de la dérivée sont les dérivées des composantes.
- Si $f : \mathbb{R}_p \to \mathbb{R}_q$ est dérivable, sa dérivée est une application linéaire de $\mathbb{R}_p$ dans $\mathbb{R}_q$, représentée par une matrice qu'on appelle la **matrice jacobienne** de f. La colonne d'indice i de cette matrice est la dérivée partielle de f par rapport à la variable d'indice i.
- Par exemple, pour $q = 1$, la dérivée d'une application f de $\mathbb{R}_p$ dans $\mathbb{R}$ est une **forme linéaire** sur $\mathbb{R}_p$, représentée par la matrice jacobienne :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x^1}(a) \quad \dots \quad \frac{\partial f}{\partial x^p}(a) \right)$$

- Les dérivées partielles sont les coordonnées de la dérivée sur la base duale, notée $\{dx_1, \dots, dx_p\}$: la dérivée partielle d'indice i est le coefficient de dx_i dans le développement de l'application dérivée df en fonction des dx_i.

HAUT

Dérivée totale, différentielle.

HAUT

Pour une application f d'un espace normé $E = \mathbb{R}^p$ de dimension finie, dans un espace normé $F = \mathbb{R}^q$, de dimension finie, on appelle **dérivée de f en $a \in E$, l'application linéaire T_a:** $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, lorsqu'elle existe, définie par la formule :

$$f(a+h) = f(a) + T_a(h) + \| h \| \omega(h)$$

dans laquelle $\omega(h)$ est un vecteur de $\mathbb{R}^q$ qui tend vers 0 dans $\mathbb{R}^q$, lorsque h tend vers 0 dans $\mathbb{R}^p$.

La dérivée de f en a, T_a, s'appelle aussi la **différentielle de f** en a.
Une application est dite **dérivable**, ou **différentiable**, en a si elle a une différentielle en a.

Propriétés

- Pour une fonction d'une seule variable réelle, la dérivée, quand elle existe est une **homothétie** ayant pour rapport la dérivée de f suivant 1 :

$$\partial_1 f(a) = \lim_{\substack{t \to 0 \\ t \neq 0}} \frac{f(a+t) - f(a)}{t}$$

- Si $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ est dérivable, sa dérivée est une application linéaire de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^q$, représentée par une matrice qu'on appelle la **matrice jacobienne** de f. La colonne d'indice i de cette matrice est la dérivée partielle de f par rapport à la variable d'indice i.
- Pour qu'une application $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ soit dérivable, il faut et il suffit que les applications composantes $f_i : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ soient dérivables, pour $1 \leqslant i \leqslant q$.
- Les formes coordonnées de $\mathbb{R}^p$, qui forment la **base duale** de la base canonique, forment une base du dual de $\mathbb{R}^p$. On les note $\{dx^1, \ldots, dx^p\}$, parce que la forme coordonnée d'indice i fait correspondre à un x sa i-ème coordonnée x^i et la différentielle de cette forme coordonnée est la même forme coordonnée (toute application linéaire est dérivable et sa dérivée est la même application linéaire). On note donc $\boldsymbol{dx^i}$ la **forme coordonnée d'indice i**. Par définition : $\boldsymbol{dx^i = e'^i}$.
- La **dérivée partielle** d'indice i d'une application de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$ est le coefficient de dx^i dans le développement de la différentielle df en fonction des dx^i : toute application dérivable en un point possède des dérivées partielles en ce point, mais réciproquement, **une application qui possède des dérivées partielles en un point, n'est pas forcément dérivable en ce point** (Exercice 1, 1°).

$$df\,(x^1, \dots, x^p) = \frac{\partial f}{\partial x^1}(x^1, \dots, x^p)\,dx^1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x^p}(x^1, \dots, x^p)\,dx^p$$

Avec la convention d'Einstein : $df = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i = \partial_i f\, dx^i$

HAUT

Chapitre 22. Dérivées partielles, dérivée totale.

Exercices

Exercice 1. Différentielle et dérivées partielles de 4 applications de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.
Exercice 2. Différentielle et dérivées partielles de 2 applications de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.
Exercice 3. Continuité et différentiabilité de 2 applications de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.
Exercice 4. Continuité et dérivabilité de $x^2 \cos(y/x)$.

Exercice 1. Différentielle et dérivées partielles de 4 applications de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

Calculez la dérivée totale et les dérivées partielles, quand elles existent, de l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, définie par :

$$1°/\ f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{pour } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{pour } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$2°/\ f(x,y) = \begin{cases} e^{\frac{-1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}} & \text{pour } x^2+y^2 < 1 \\ 0 & \text{pour } x^2+y^2 \geqslant 1 \end{cases}$$

$$3°/\ f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)^x & \text{pour } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{pour } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$4°/\ f(x,y) = \begin{cases} x & \text{pour } |x| < |y| \\ y & \text{pour } |x| \geqslant |y| \end{cases}$$

Solution

HAUT

Exercice 2. Différentielle et dérivées partielles de 2 applications de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

Calculez la dérivée totale et les dérivées partielles, quand elles existent, de l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, définie par :

$$1°/\ f(x,y) = \begin{cases} x\,(y^2 + \ln x^2) & \text{pour } x > 0 \\ 0 & \text{pour } x = 0 \end{cases}$$

$$2°/\ f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{pour } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{pour } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Solution

HAUT

Exercice 3. Continuité et différentiabilité de 2 applications de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

1°/ Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose :

$$q(x, y) = x^2 - xy + y^2.$$

Démontrer que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\frac{1}{2}(x^2 + y^2) \leq q(x, y).$$

En déduire que $q(x, y) = 0$ si, et seulement si, $x = y = 0$.

Solution

2°/ Soit $\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto \alpha(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x}{\sqrt{q(x,y)}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } x = y = 0 \end{cases}$.

Etudier la continuité et la différentiabilité de α en $(0, 0)$.

3°/ Soit $\beta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto \beta(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{q(x,y)} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } x = y = 0 \end{cases}$.

Etudier la continuité et la différentiabilité de β en $(0, 0)$.

HAUT

Exercice 4. Continuité et dérivabilité de $x^2 \cos(y/x)$.

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application définie par $\begin{cases} f(x,y) = x^2 \cos\left(\frac{y}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ f(0,y) = 0 \end{cases}$.

1°/ Justifier que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2 - \{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$.

Calculer $df\left(1, \frac{\pi}{2}\right)(h_1, h_2)$.

Solution

2°/ Etude au point (0,0).

a) Etudier la continuité de f.

b) Existence et calcul éventuel des dérivées partielles premières.

c) f est-elle différentiable en ce point ?

HAUT

Chapitre 22. Dérivées partielles, dérivée totale.

Enoncés.

Exercice 1. Différentielle et dérivées partielles de 4 applications de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

Calculez la dérivée totale et les dérivées partielles, quand elles existent, de l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, définie par :

$$1°/\ f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{pour } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{pour } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$2°/\ f(x,y) = \begin{cases} e^{\frac{-1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}} & \text{pour } x^2+y^2 < 1 \\ 0 & \text{pour } x^2+y^2 \geqslant 1 \end{cases}$$

$$3°/\ f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)^x & \text{pour } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{pour } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$4°/\ f(x,y) = \begin{cases} x & \text{pour } |x| < |y| \\ y & \text{pour } |x| \geqslant |y| \end{cases}$$

Solution.

Notons $\{e_1, e_2\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$: $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$.

1°/ Première fonction.

Nous savons déjà (Chapitre 21, Exercice 1, 1°) que :
— f est continue par rapport à l'ensemble des variables en tout point de $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$.Elle n'est pas continue en (0,0).
— La fonction $x \mapsto f(x, y)$ est continue pour toute valeur réelle de y.
— La fonction $y \mapsto f(x, y)$ est continue pour toute valeur réelle de x.

1. Dérivées partielles en (0,0).

Si elle existe, la dérivée partielle en (0,0) d'indice 1 de f, notée $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$, est, par définition, la limite lorsque t tend vers 0 sur $\mathbb{R} - \{0\}$ de $\dfrac{f((0,0) - te_1) - f(0,0)}{t} = \dfrac{f(t,0)}{t}$.

Or $f(t,0) = 0$, donc la limite de $\frac{f(t,0)}{t}$ existe et elle est égale à 0.

La dérivée partielle première de f par rapport à x en (0,0) est 0.

Par symétrie entre x et y :

La dérivée partielle première de f par rapport à y en (0,0) est 0.

2. Dérivée totale en (0,0).

Pour que f soit dérivable en (0,0), il faut que f soit continue en (0,0).
Or f n'est pas continue en (0,0) (Chapitre 21, Exercice 1, 1°). Donc :

La fonction f n'est pas dérivable en (0,0).

Une fonction qui n'est pas continue en un point n'est pas dérivable en ce point.

On a donc là **un exemple d'application non dérivable en un point mais qui possède en ce point des dérivées partielles premières**.

3. Différentielle en $(x, y) \neq (0,0)$.

En dehors du point (0,0), f est quotient de deux fonctions de (x, y) : $f(x, y) = \frac{u}{v}(x, y)$ avec $u(x, y) = x y$ et $v(x, y) = x^2 + y^2$.

***u* est le produit des deux formes coordonnées** p_1 et p_2 qui sont des applications linéaires donc dérivables : c'est une application dérivable et sa différentielle au point (x, y), application de $\mathbb{R}^2$ dans son dual, est donnée par :

$$du = y\,dx + x\,dy$$

où dx, différentielle de p_1, est l'application constante de $\mathbb{R}^2$ dans son dual $\mathbb{R}^{2*}$, qui, à chaque $a \in \mathbb{R}^2$, associe la forme coordonnée d'indice 1, soit p_1 : $dx = d\,p_1 = p_1$.
et où dy, différentielle de p_2, est l'application constante de $\mathbb{R}^2$ dans son dual $\mathbb{R}^{2*}$, qui, à chaque $a \in \mathbb{R}^2$, associe la forme coordonnée d'indice 2, soit p_2 : $dy = d\,p_2 = p_2$.

Appliquée à un élément $h = (h_1, h_2)$ de $\mathbb{R}^2$, la forme linéaire $du = y\,dx + x\,dy$ sur $\mathbb{R}^2$ donne :

$$du(h) = y\,h_1 + x\,h_2 = y\,p_1(h) + x\,p_2(h)$$

***v* est une fonction polynôme** des deux variables x et y.
Elle est donc dérivable en tout point de $\mathbb{R}^2$ et sa différentielle s'obtient par :

$$dv = 2\,x\,dx + 2\,y\,dy.$$

Comme $v(x, y)$ est différent de 0 en tout point de $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$, le quotient $f = \frac{u}{v}$ est dérivable en

tout point de $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ et sa différentielle est donnée par :

$$df = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2} = \frac{(x^2+y^2)(y\,dx + x\,dy) - xy(2x\,dx + 2y\,dy)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{(y^2-x^2)\,y\,dx + (x^2-y^2)\,x\,dy}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\boxed{df = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}(y\,dx - x\,dy)}$$

4. Dérivées partielles en $(x, y) \neq (0,0)$.

Puisque f est différentiable (c'est-à-dire dérivable, c'est équivalent) en tout point $(x, y) \neq (0,0)$, f admet des dérivées partielles par rapport à chacune de ses variables au point (x, y) : ces dérivées partielles sont les coefficients de dx et de dy dans l'expression de df, ce sont donc aussi les éléments de la **matrice jacobienne** de df.

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\ ;\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -x\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}.}$$

La matrice jacobienne de f au point (x, y) est la matrice de df**, de la base canonique de $\mathbb{R}^2$ dans la base duale** :

$$J_{(x,y)}f = \begin{pmatrix} y\dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} & -x\dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} \end{pmatrix}$$

C'est la matrice de l'application linéaire dérivée df.

Nous remarquons que les dérivées partielles ne sont **pas bornées** au voisinage de (0, 0) : elles n'ont pas de limite réelle en (0, 0) et ne sont donc **pas continues** en (0, 0).

2°/ Deuxième fonction.

Nous savons déjà (Chapitre 21, Exercice 1, 2°) que :
— L'application f est continue dans $\mathbb{R}^2$.
— L'application $x \mapsto f(x, y)$ est continue pour toute valeur réelle de y.
— L'application $y \mapsto f(x, y)$ est continue pour toute valeur réelle de x.

1. Domaine $x^2 + y^2 > 1$.

Dans ce domaine, f est constante et nulle, elle est donc dérivable et sa différentielle est 0 : elle a donc des dérivées partielles nulles par rapport à chacune de ses variables, puisque les dérivées partielles sont alors les composantes de df sur la base duale de la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

$$\boxed{df = 0,\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0\ ,\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0.}$$

2. Domaine $x^2 + y^2 < 1$.

Dans ce domaine, f est l'exponentielle d'une fonction $u(x, y) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2-y^2}} = -(v(x, y))^{-\frac{1}{2}}$,

avec $v(x, y) = 1 - x^2 - y^2$
Comme le dénominateur de u n'est jamais nul dans le domaine étudié, la fonction u est dérivable et sa différentielle est donnée par :

$$du = \frac{1}{2}(v(x, y))^{-\frac{3}{2}}\, dv$$

avec

$$dv = -2\, x\, dx - 2\, y\, dy.$$

L'exponentielle est une application dérivable et sa différentielle est donnée par :

$$d(e^u) = e^u\, du.$$

Il en résulte, par composition des applications u et exponentielle, que f est dérivable en chaque point du domaine étudié et sa différentielle au point (x, y) est donnée par :

$$D_{(x,y)}f = df = f(x, y)\, du = f(x, y)\, \frac{1}{2}(v(x, y))^{-\frac{3}{2}}\, dv = -f(x, y)\,(1 - x^2 - y^2)^{-\frac{3}{2}}(x\, dx + y\, dy)$$

$$\boxed{D_{(x,y)}f = -\frac{e^{\frac{-1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}}}{\left(1-x^2-y^2\right)^{\frac{3}{2}}}(x\, dx + y\, dy)}$$

Comme f est dérivable dans le domaine $x^2 + y^2 < 1$, elle a des dérivées partielles par rapport à chacune de ses variables dans ce domaine et les dérivées partielles sont les coefficients de dx et dy dans l'expression de df :

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -x\frac{e^{\frac{-1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}}}{\left(1-x^2-y^2\right)^{\frac{3}{2}}};\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -y\frac{e^{\frac{-1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}}}{\left(1-x^2-y^2\right)^{\frac{3}{2}}}.}$$

3. Frontière $x^2 + y^2 = 1$.

Sur la frontière, f est nulle.

Considérons un point $a = (a_1, a_2)$ de la frontière.
Il vérifie $a_1^2 + a_2^2 = 1$.
En ce point, f est nulle, par définition.
Considérons l'application ω qui, à un $h = (h_1, h_2) \neq (0,0)$, fait correspondre $\omega(h)$ défini par

$$f(a + h) = f((a_1, a_2) + h) = \| h \|\, \omega(h)$$

On a :

$$\omega(h) = \frac{f(a+h)-f(a)}{\|h\|} = \frac{f(a+h)}{\|h\|} = \begin{cases} \frac{1}{\|h\|} e^{\frac{-1}{\sqrt{1-(a_1+h_1)^2-(a_2+h_2)^2}}} & \text{pour } \|a+h\| < 1 \\ 0 & \text{pour } \|a+h\| \geqslant 1 \end{cases}$$

Pour les points $a + h$ vérifiant $\|a + h\| < 1$, $\omega(h)$ est donné par :

$$\omega(h) = \frac{e^{\frac{-1}{\sqrt{-2a_1h_1-2a_2h_2-h_1^2-h_2^2}}}}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = \frac{e^{\frac{-1}{\sqrt{-2<a,h>-\|h\|^2}}}}{\|h\|}$$

où $< a, h > = a_1 h_1 + a_2 h_2$ est le produit scalaire euclidien de $a = (a_1, a_2)$ et de $h = (h_1, h_2)$ et $\|h\| = \sqrt{h_1^2+h_2^2}$ est la norme euclidienne de h.
Comme on a, par l'**inégalité de Schwarz** :

$$-\|a\|\|h\| \leqslant < a, h > \leqslant \|a\|\|h\|$$

En multipliant chaque terme par – 2, il vient

$$2\|a\|\|h\| \geqslant -2 < a, h > \geqslant -2\|a\|\|h\|$$

et, puisque, par hypothèse, $\|a\| = 1$,

$$-2 < a, h > -\|h\|^2 \leqslant 2\|a\|\|h\| - \|h\|^2 = \|h\|(2\|a\| - \|h\|) = \|h\|(2 - \|h\|) \leqslant 2\|h\|$$

$$\sqrt{-2<a,h>-\|h\|^2} \leqslant \sqrt{2\|h\|}$$

$$-\sqrt{-2<a,h>-\|h\|^2} \geqslant -\sqrt{2\|h\|}$$

$$\frac{-1}{\sqrt{-2<a,h>-\|h\|^2}} \leqslant \frac{-1}{\sqrt{2\|h\|}}$$

$$e^{\frac{-1}{\sqrt{-2<a,h>-\|h\|^2}}} \leqslant e^{\frac{-1}{\sqrt{2\|h\|}}}$$

$$0 \leqslant \omega(h) \leqslant \frac{1}{\|h\|} e^{\frac{-1}{\sqrt{2\|h\|}}}$$

Comme cette relation est vraie aussi lorsque $\|a + h\|$ est supérieur ou égal à 1, puisque, dans ce cas, $\omega(h)$ est nul, elle est vraie pour tout h.

$$\boxed{0 \leqslant \omega(h) \leqslant \frac{1}{\|h\|} e^{\frac{-1}{\sqrt{2\|h\|}}}}$$

Lorsque $h = (h_1, h_2)$ tend vers (0,0) avec $\|h\| < 2$, l'argument de l'exponentielle tend vers $-\infty$, donc l'exponentielle tend vers 0, le dénominateur tend lui aussi vers 0, **l'exponentielle l'emporte sur la puissance** (Chapitre 2, Exercice 4), de sorte que $\lim_{\substack{h \to (0,0) \\ h \neq (0,0)}} \frac{1}{\|h\|} e^{\frac{-1}{\sqrt{2\|h\|}}} = 0$ et, **théorème des gendarmes**,

$\omega(h)$ tend vers 0.

On a donc pu écrire $f(a+h)$ sous la forme :

$$f(a+h) = f(a) + T(h) + \| h \| \omega(h)$$

avec $f(a) = 0$, $T(h) = 0$, et $\omega(h)$ tend vers 0 lorsque h tend vers 0.

Ceci montre que l'application f est dérivable en a et que sa dérivée en a est $T = 0$.

En résumé :

f est dérivable en tout point de $\mathbb{R}^2$.
Sa différentielle au point (x, y) est donnée par :

$$df(x,y) = \begin{cases} -\dfrac{e^{\frac{-1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}}}{(1-x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}}(x\,dx + y\,dy) & \text{pour } x^2+y^2<1 \\ 0 & \text{pour } x^2+y^2 \geqslant 1 \end{cases}$$

Les dérivées partielles de f existent donc en tout point (x, y) de $\mathbb{R}^2$ et sont données par les coefficients de dx et de dy dans l'expression de df.

3°/ Troisième fonction.

Nous savons déjà (Chapitre 21, Exercice 1, 3°) que :
— f est continue par rapport à l'ensemble des variables en tout point de $\mathbb{R}^2$.
— L'application $x \mapsto f(x, y)$ est continue en tout point de $\mathbb{R}$.
— L'application $y \mapsto f(x, y)$ est continue en tout point de $\mathbb{R}$.
En effet, la **singularité artificielle** $f(0, 0) = 0$ a été remplacée par la valeur obtenue par prolongement par continuité $f(0, 0) = 1$.

1. Dérivée pour $(x, y) \neq (0,0)$.

En dehors du point (0,0), f est composée d'applications dérivables (polynôme, logarithme d'argument strictement positif, produit d'applications dérivables, exponentielle), elle est donc dérivable et sa différentielle s'obtient par les règles usuelles de dérivation des fonctions d'une variable :

$$f(x,y) = e^{x \ln(x^2+y^2)} = e^u \text{ avec } u(x,y) = x \ln(x^2+y^2)$$
$$df = e^u\,du$$
$$du = \ln(x^2+y^2)\,dx + x\,d(\ln(x^2+y^2))$$
$$d(\ln(x^2+y^2)) = \frac{d(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = \frac{2}{x^2+y^2}(x\,dx + y\,dy)$$
$$du = \ln(x^2+y^2)\,dx + \frac{2x}{x^2+y^2}(x\,dx + y\,dy)$$
$$du = \left(\ln(x^2+y^2) + \frac{2x^2}{x^2+y^2}\right)dx + \frac{2xy}{x^2+y^2}dy$$

$$df = \left(ln\left(x^2 + y^2\right) + \frac{2x^2}{x^2 + y^2} \right) (x^2 + y^2)^x \, dx + \frac{2xy}{x^2 + y^2} (x^2 + y^2)^x \, dy$$

Les dérivées partielles de f en $(x, y) \neq (0,0)$ existent donc et sont données par les coefficients de dx et dy dans l'expression de df :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \left(ln\left(x^2 + y^2\right) + \frac{2x^2}{x^2 + y^2} \right) (x^2 + y^2)^x$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2} (x^2 + y^2)^x$$

2. Dérivée en (0,0).

f est continue en (0, 0), est-elle dérivable ?

a) Dérivée partielle par rapport à x en (0, 0).

Pour $y = 0$, la fonction f est donnée par :

$f(x, 0) = (x^2)^x$ pour x différent de 0 et $f(0,0) = 1 = \lim_{x \to 0} (x^2)^x$.

La fonction $x \mapsto (x^2)^x$ est dérivable pour tout x différent de 0 et sa différentielle est :

$$\begin{aligned} d\left[(x^2)^x\right] &= d\left[e^{x \ln x^2}\right] \\ &= (x^2)^x \, d\left[x \ln x^2\right] \\ &= (x^2)^x \left(\ln x^2 \, dx + x \, d\left[\ln x^2\right]\right) \\ &= (x^2)^x \left(\ln x^2 \, dx + x \frac{d(x^2)}{x^2}\right) \\ &= (x^2)^x \left(\ln x^2 \, dx + 2 \, dx\right) \\ &= (x^2)^x \left(\ln x^2 + 2\right) dx \end{aligned}$$

Autrement dit, pour tout x différent de 0 et pour tout h, on peut écrire :

$$((x + h)^2)^{x+h} = (x^2)^x + T_x(h) + \| h \| \, \omega(h)$$

avec un $\omega(h)$ qui tend vers 0 lorsque h tend vers 0. Le calcul précédent donne :

$$T_x(h) = (x^2)^x \left(\ln x^2 + 2\right) h.$$

On remarquera que le coefficient $(x^2)^x (\ln x^2 + 2)$ de l'application linéaire T_x est tout simplement la valeur de la dérivée partielle de f par rapport à x en $(x, 0) \neq (0,0)$.

Etudions le rapport $\frac{f\left((0, 0) - t e_1\right) - f(0,0)}{t} = \frac{f(t, 0) - 1}{t} = \frac{\left(t^2\right)^t - 1}{t}$, dont la limite lorsque t tend vers 0, si elle existe, donne la dérivée partielle de f par rapport à x au point (0,0).

D'après la formule précédente, on peut écrire, pour $h = -x$ et $x = t \neq 0$:

$$1 = (t^2)^t + T_t(-t) + \| t \| \omega(-t)$$
$$= (t^2)^t - T_t(t) + \| t \| \omega(-t)$$

$$(t^2)^t - 1 = T_t(t) - \| t \| \omega(-t)$$
$$= (t^2)^t (\ln t^2 + 2)\, t - \| t \| \omega(-t)$$

$$\frac{(t^2)^t - 1}{t} = (t^2)^t (\ln t^2 + 2) - \frac{|t|}{t} \omega(-t)$$

Lorsque t tend vers 0, $(t^2)^t$ tend vers 1, $\ln t^2 + 2$ tend vers $-\infty$, $\frac{|t|}{t}$ est borné et $\omega(-t)$ tend vers 0.

Donc $\frac{(t^2)^t - 1}{t}$ tend vers $-\infty$, et n'a pas de limite dans $\mathbb{R}$.

L'application f n'a pas de dérivée partielle par rapport à x en (0,0).

b) Dérivée partielle de *f* par rapport à *y* en (0, 0).

Etudions maintenant le rapport $\frac{f((0,0) - t e_2) - f(0,0)}{t} = \frac{f(0,t) - 1}{t} = 0$. Il est constant.

Sa limite lorsque t tend vers 0 est donc 0.

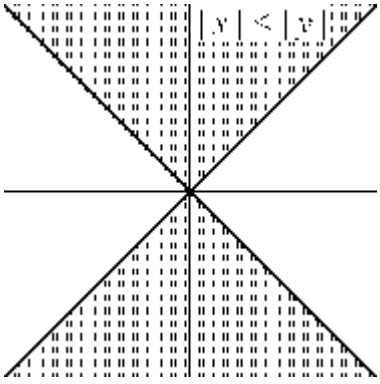
La dérivée partielle de f par rapport à y en (0,0) est 0.

c) Dérivée totale de *f* en (0, 0).

Puisque f n'a pas de dérivée partielle par rapport à x en (0,0), elle ne peut pas avoir, non plus, de dérivée.

La fonction f n'est pas dérivable en (0,0).

4°/ Quatrième fonction.



Nous savons déjà (Chapitre 21, Exercice 1, 4°) que :

— L'application f est continue partout dans le plan, à l'exception de la droite $D_2 - \{(0, 0)\}$. Sur $D_2 - \{(0, 0)\}$, elle n'est pas continue. ($D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y = 0\}$, $D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 0\}$).

— L'application $x \mapsto f(x, y)$ est continue en tout point de $\mathbb{R} - \{-y\}$. En $-y$, elle n'est pas continue, sauf pour $y = 0$.

— L'application $y \mapsto f(x, y)$ est continue en tout point de $\mathbb{R} - \{-x\}$. En $-x$, elle n'est pas continue, sauf pour $x = 0$.

1. Dérivée pour | *x* | < | *y* |.

Dans ce domaine, la fonction est continue et vaut x : c'est la restriction de la première projection p_1, qui est aussi la forme coordonnée d'indice 1. Elle est donc dérivable, puisque p_1 est dérivable et sa dérivée est p_1.

f est dérivable pour | *x* | < | *y* |. Sa différentielle dans ce domaine est donnée par $df = dx = p_1$.

Dans ce domaine, les dérivées partielles de *f* existent et sont les coefficients de *dx* et de *dy* dans l'expression de *df* :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 1$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$$

2. Dérivée pour | *y* | < | *x* |.

Dans ce domaine, la fonction est continue et vaut *y* : c'est la restriction de la deuxième projection p_2, qui est aussi la forme coordonnée d'indice 2. Elle est donc dérivable, puisque p_2 est dérivable et sa dérivée est p_2.

f est dérivable pour | *y* | < | *x* |. Sa différentielle dans ce domaine est donnée par $df = dy = p_2$.

Dans ce domaine, les dérivées partielles de *f* existent et sont les coefficients de *dx* et de *dy* dans l'expression de *df* :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 1$$

3°/ Dérivée sur la frontière.

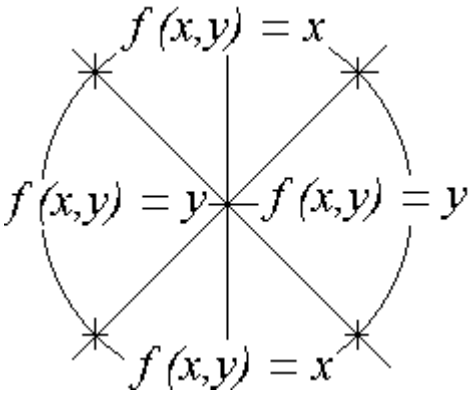
a) Sur la droite d'équation *y* = *x* ≠ 0.

$$f(x, y) = f(x, x) = x$$

La dérivée partielle de *f* par rapport à *x* au point (*x*, *x*) est la limite, si elle existe, du rapport

$$\frac{f(x+t, x)-f(x, x)}{t} = \frac{f(x+t, x)-x}{t} = \begin{cases} 1 & \text{pour } |x+t| < |x| \\ 0 & \text{pour } |x+t| \geqslant |x| \end{cases}$$

lorsque *t* tend vers 0 en restant différent de 0.



Ce rapport n'a pas de limite lorsque *t* tend vers 0, puisque la limite à droite n'est pas égale à la limite à gauche.

La fonction *f* n'est pas dérivable par rapport à *x* sur la droite d'équation *y* = *x*, pour *x* ≠ 0.

De même,

$$\frac{f(x, x+t)-x}{t} = \begin{cases} 0 & \text{pour } |x| < |x+t| \\ 1 & \text{pour } |x| \geqslant |x+t| \end{cases}$$

Ce rapport n'a pas de limite lorsque t tend vers 0, puisque la limite à droite n'est pas égale à la limite à gauche.

La fonction f n'est pas dérivable par rapport à y sur la droite d'équation $y = x$, pour $x \neq 0$.

Comme f n'a pas de dérivées partielles sur la droite d'équation $y = x$, elle n'a pas, non plus, de différentielle sur cette droite.

La fonction f n'est pas dérivable sur la droite d'équation $y = x$, pour $x \neq 0$.

b) Sur la droite d'équation $y = -x \neq 0$.

$$f(x, y) = y = -x$$

$$\frac{f(x+t, -x)+x}{t} = \begin{cases} 1+\frac{2x}{t} & \text{pour } |x+t| < |x| \\ 0 & \text{pour } |x+t| \geqslant |x| \end{cases}$$

Ce rapport n'est pas borné lorsque t tend vers 0.

La fonction f n'est pas dérivable par rapport à x sur la droite d'équation $y = -x$, pour $x \neq 0$.

De même,

$$\frac{f(x, -x+t)+x}{t} = \begin{cases} \frac{2x}{t} & \text{pour } |x| < |-x+t| \\ 1 & \text{pour } |x| \geqslant |-x+t| \end{cases}$$

Ce rapport n'est pas borné lorsque t tend vers 0.

La fonction f n'est pas dérivable par rapport à y sur la droite d'équation $y = -x$, pour $x \neq 0$.

Comme f n'a pas de dérivées partielles sur la droite d'équation $y = -x$, elle n'a pas, non plus, de différentielle sur cette droite.

La fonction f n'est pas dérivable sur la droite d'équation $y = -x$, pour $x \neq 0$.

c) Au point (0,0).

Sur l'axe des x, $f(x, y)$ est égal à y, y compris au point (0,0) où la fonction est nulle.
Le rapport $\frac{f(t, 0)-f(0, 0)}{t}$ est égal à 0, quel que soit t : sa limite lorsque t tend vers 0 est donc 0.

La dérivée partielle de f par rapport à x existe en (0,0) : elle vaut 0.

Sur l'axe des y, $f(x, y)$ est égal à x, y compris au point (0,0) où la fonction est nulle.

Le rapport $\frac{f(0, t)-f(0, 0)}{t}$ est égal à 0, quel que soit t : sa limite lorsque t tend vers 0 est donc 0.

La dérivée partielle de *f* par rapport à *y* existe en (0,0) : elle vaut 0.

Si *f* était dérivable au point (0,0), sa dérivée serait donnée par :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\, dx + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\, dy = 0$$

de sorte que la formule :

$$f(a + h) = f(a) + (df).h + \| h \| \omega(h)$$

se réduirait, avec $a = (0,0)$, $f(a) = 0$, $h = (h_1, h_2)$, et un $\omega(h)$ qui tendrait vers 0 lorsque $\| h \|$ tend vers 0, à :

$$f(h_1, h_2) = \| h \| \omega(h).$$

Pour démontrer que *f* est dérivable en (0,0), il suffit donc d'étudier la limite du rapport $\frac{f(h)}{\|h\|}$: si ce rapport, égal à $\omega(h)$, tend vers 0 lorsque $\| h \|$ tend vers 0, *f* est dérivable et sa dérivée en (0,0) est 0, sinon *f* n'est pas dérivable en (0,0).

$f(h) = f(h_1, h_2)$ est égal à h_1, ou à h_2, suivant que h_1, ou h_2, est le plus petit des deux en valeur absolue.
En prenant des $h = (h_1, h_2)$ vérifiant $h_2 = t\, h_1$, avec $t > 1$, et $\| h \| = Sup\,(|h_1|, |h_2|) = |h_2| = t\,|h_1|$, on obtient :

$$\frac{f(h)}{\|h\|} = \frac{h_1}{t|h_1|} = \frac{sgn(h_1)}{t}$$

On peut donc trouver, sur la droite $h_2 = t\, h_1$, une suite de points, par exemple la suite $\left(\left(\frac{1}{n}, \frac{t}{n}\right)\right)_{n \geq 1}$, tendant vers (0,0), pour laquelle la limite de $\frac{f(h)}{\|h\|}$ sera égale à $\frac{1}{t}$, et une autre suite de points, par exemple $\left(\left(\frac{-1}{n}, \frac{-t}{n}\right)\right)_{n \geq 1}$, tendant vers (0,0), pour laquelle la limite de $\frac{f(h)}{\|h\|}$ sera égale à $-\frac{1}{t} \neq \frac{1}{t}$.
Cela veut dire que le rapport $\frac{f(h)}{\|h\|}$ n'a pas de limite : en particulier, il ne tend pas vers 0 lorsque $\| h \|$ tend vers 0.

La fonction *f* n'est pas dérivable au point (0,0), bien qu'elle y possède des dérivées partielles nulles.

Chapitre 22. Dérivées partielles, dérivée totale.

Enoncés.

Exercice 2. Différentielle et dérivées partielles de 2 applications de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

Calculez la dérivée totale et les dérivées partielles, quand elles existent, de l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, définie par :

$$1°/\ f(x,y) = \begin{cases} x\,(y^2 + \ln x^2) & \text{pour } x > 0 \\ 0 & \text{pour } x = 0 \end{cases}$$

$$2°/\ f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{pour } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{pour } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Solution.

1°/ Première fonction.

1. Continuité.

Lorsque x tend vers 0, le produit $x \ln x^2 = 2\,x \ln |x|$ tend vers 0 (Chapitre 2, Exercice 3).
Il en résulte que l'application f est continue en (0,0). Comme elle est continue déjà pour tout point (x, y) différent de (0,0) parce qu'elle est composée d'applications continues, elle est continue dans $\mathbb{R}^2$ et, en particulier dans $[\,0, +\infty\,[\times \mathbb{R}$.

2. Dérivée pour $x > 0$.

Comme f est composée de fonctions élémentaires dérivables pour $x > 0$, elle est dérivable pour $x > 0$ et possède donc des dérivées partielles premières. Sa différentielle et ses dérivées partielles premières sont données par :

$$df = (2 + y^2 + \ln x^2)\,dx + 2\,x\,y\,dy.$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2 + y^2 + \ln x^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2\,x\,y.$$

3. Dérivées partielles pour $x = 0$.

a) Dérivée partielle par rapport à *x*.

y est un nombre réel quelconque, éventuellement nul.

$$f(0, y) = 0$$

On peut écrire :

$$f(t, y) = t\,(y^2 + \ln t^2)$$

$$\frac{f(t, y) - f(0, y)}{t} = y^2 + \ln t^2$$

Cette expression n'est pas bornée lorsque *t* tend vers 0, elle n'a donc pas de limite dans $\mathbb{R}$, donc *f* n'a pas de dérivée partielle première par rapport à *x* en (0, *y*).

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(0, y) \text{ n'existe pas, quel que soit } y \in \mathbb{R}.}$$

b) Dérivée partielle par rapport à *y*.

Quel que soit *y*, nul ou non, et quel que soit $t \neq 0$:

$$f(0, y + t) = 0$$

$$\frac{f(0, y+t) - f(0, y)}{t} = 0$$

Cette expression, toujours égale à 0, tend vers 0 lorsque *t* tend vers 0, donc *f* a une dérivée partielle première par rapport à *y* en (0,*y*), c'est 0.

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial y}(0, y) = 0.}$$

4. Dérivée totale pour $x = 0$.

Puisque *f* n'a pas de dérivée partielle par rapport à *x* en (0, *y*), elle n'est pas dérivable en (0, *y*).

$$\boxed{f \text{ n'est pas dérivable en } (0, y)}$$

2°/ Deuxième fonction.

1. Continuité.

En dehors du point (0,0), *f* est composée d'applications continues, elle est donc continue et l'on a :

$$|x| \leqslant \sqrt{x^2 + y^2} \text{ et } |y| \leqslant \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow |f(x, y)| = \frac{|x||y|}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leqslant \sqrt{x^2 + y^2} = \|(x, y)\|$$

La relation :

$$| f (x, y) | \leqslant || (x, y) ||$$

valable aussi lorsque $(x, y) = (0,0)$, montre que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

2. Dérivée pour $(x, y) \neq (0,0)$.

1er cas. Pour $y \neq 0$.

Comme y n'est pas nul, on peut trouver un ouvert contenant (x, y) dans lequel y ne change pas de signe, de sorte que $sgn\ (y)$ est constant dans cet ouvert.
Dans cet ouvert, pour $(x, y) \neq (0,0)$, $f\ (x, y)$, composée d'applications dérivables, est dérivable.
Sa différentielle est donnée par :

$$df = d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}$$

$$u = x\,|\,y\,| = x\,y\,sgn\ (y)$$

$$du = sgn\ (y)\ (y\,dx + x\,dy\ ) = |\,y\,|\ (dx + \frac{x}{y}dy)$$

$$v = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$dv = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}(x\,dx + y\,dy)$$

$$v\,du - u\,dv = |\,y\,|\sqrt{x^2 + y^2}\ (dx + \frac{x}{y}dy) - x\,|\,y\,|\,\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}(x\,dx + y\,dy)$$

$$= \frac{|y|}{y}\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}(y^3\,dx + x^3\,dy)$$

$$df = \frac{sgn(y)}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}(y^3\,dx + x^3\,dy), \text{ pour tout } (x, y) \in \mathbb{R}^2, \text{ avec } y \neq 0.$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{sgn(y)}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}\,y^3, \text{ quel que soit } x, \text{ pour tout } y \neq 0.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{sgn(y)}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}\,x^3, \text{ quel que soit } x, \text{ pour tout } y \neq 0.$$

2e cas. Pour $y = 0$.

a) Dérivée partielle par rapport à *x* en (*x*, 0).

Pour tout *x* différent de 0 et tout *t* différent de 0 :

$$f(x + t, 0) = 0$$

$$\frac{f(x+t, 0) - f(x, 0)}{t} = 0$$

Lorsque *t* tend vers 0, la limite de ce rapport est 0.

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(x,0) = 0, \text{ quel que soit } x \neq 0}$$

b) Dérivée partielle par rapport à *y* en (*x*, 0).

x est différent de 0, puisque (*x*, 0) est différent de (0,0) :

$$\frac{f(x, t) - f(x, 0)}{t} = \frac{x|t|}{t\sqrt{x^2+t^2}} = sgn\,(t)\,\frac{x}{\sqrt{x^2+t^2}}$$

Lorsque *t* tend vers 0, $\frac{x}{\sqrt{x^2+t^2}}$ tend vers $sgn\,(x) = \begin{cases} +1 & \text{pour } x > 0 \\ -1 & \text{pour } x < 0 \end{cases}$, donc $\frac{f(x, t) - f(x, 0)}{t}$ n'a pas de limite parce qu'on peut trouver une suite $(t_n)_{n \geqslant 1}$ de valeurs de *t* qui tend vers 0 par valeurs positives, auquel cas la suite $\left(\frac{f(x, t_n) - f(x, 0)}{t_n}\right)_{n \geqslant 1}$ a pour limite *sgn* (*x*), et on peut trouver une autre suite $(t'_n)_{n \geqslant 1}$ de valeurs de *t* qui tend vers 0 par valeurs négatives, auquel cas, la suite $\left(\frac{f(x, t'_n) - f(x, 0)}{t'_n}\right)_{n \geqslant 1}$ a pour limite – *sgn* (*x*).

On a alors deux suites qui tendent vers 0 et dont les images n'ont pas la même limite : c'est dire que la fonction de *t* $\frac{f(x, t) - f(x, 0)}{t}$ n'a pas de limite lorsque *t* tend vers 0.

$$\boxed{f \text{ n'a pas de dérivée partielle première par rapport à } y, \text{ en } (x,0), \text{ pour } x \text{ différent de } 0.}$$

c) Dérivée en (*x*, 0).

S'il n'y a pas de dérivée partielle première par rapport à *y* en (*x*, 0), il n'y a pas non plus de dérivée en (*x*, 0).

$$\boxed{f \text{ n'est pas dérivable en } (x, 0) \text{ pour } x \text{ différent de } 0.}$$

3. Dérivée en (0,0).

a) Dérivée partielle par rapport à *x*.

Pour *x* = 0 et pour tout *t* différent de 0 :

$$f(x + t, 0) = f(t, 0) = 0$$

$$\frac{f(t, 0) - f(0, 0)}{t} = 0$$

Lorsque t tend vers 0, la limite de ce rapport est 0.

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0}$$

b) Dérivée partielle par rapport à *y*.

$$f(0, t) = 0$$

$$\frac{f(0, t) - f(0, 0)}{t} = 0$$

Lorsque t tend vers 0, la limite de ce rapport est 0.

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0.}$$

c) Dérivée totale.

$$f(h_1, h_2) - f(0,0) = f(h_1, h_2) = \frac{h_1 \left| h_2 \right|}{\sqrt{{h_1}^2 + {h_2}^2}} = \frac{h_1}{\sqrt{1 + \left(\frac{h_1}{h_2}\right)^2}}$$

On ne peut pas réduite cette expression à la forme $T(h) + \| h \| \omega(h)$ avec $T(h)$ linéaire et $\omega(h)$ tendant vers 0 si h tend vers (0,0), parce que, s'il existait un $T(h) = a\, h_1 + b\, h_2$ quels que soient h_1 et h_2, on aurait, en prenant un $h_1 = t\, h_2$:

$$f(t\, h_2, h_2) - f(0,0) = h_2 \frac{t}{\sqrt{1 + t^2}} = (a\, t + b)\, h_2 + \| h \| \omega(h)$$

$$h_2 \frac{t}{\sqrt{1 + t^2}} = (a\, t + b)\, h_2 + \sqrt{1 + t^2} \left| h_2 \right| \omega(h)$$

$$\omega(h) = sgn(h_2) \left(\frac{t}{1 + t^2} - \frac{at + b}{\sqrt{1 + t^2}} \right)$$

La quantité $\omega(h)$ a pour module une quantité qui ne tend pas vers 0 lorsque, pour t constant, h_2 tend vers 0.

$$\boxed{\text{La fonction } f(x, y) \text{ n'est pas dérivable en (0,0).}}$$

On a ainsi un exemple d'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, partout continue, et même uniformément continue (car lipschitzienne), non dérivable sur l'axe des x, mais dérivable partout ailleurs. Notamment, l'application f n'est pas dérivable en (0,0) bien que ses dérivées partielles par rapport à x et par rapport à y existent en ce point.

Chapitre 22. Dérivées partielles, dérivée totale.

Enoncés.

Exercice 3. Continuité et différentiabilité de 2 applications de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

1°/ Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose :

$$q(x, y) = x^2 - xy + y^2.$$

Démontrer que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\frac{1}{2}(x^2 + y^2) \leq q(x, y).$$

En déduire que $q(x, y) = 0$ si, et seulement si, $x = y = 0$.

2°/ Soit $\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto \alpha(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x}{\sqrt{q(x,y)}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } x = y = 0 \end{cases}$.

Etudier la continuité et la différentiabilité de α en $(0, 0)$.

3°/ Soit $\beta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto \beta(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{q(x,y)} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } x = y = 0 \end{cases}$.

Etudier la continuité et la différentiabilité de β en $(0, 0)$.

Solution.

1°/ Forme quadratique.

$$q(x, y) - \frac{1}{2}(x^2 + y^2) = x^2 - xy + y^2 - \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$$
$$= \frac{1}{2}(x^2 + y^2) - xy$$
$$= \frac{1}{2}(x^2 + y^2 - 2xy) = \frac{1}{2}(x - y)^2 \geqslant 0$$
$$q(x, y) \geqslant \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$$

Il résulte de cette inégalité que $q(x, y)$ est toujours positif ou nul, quels que soient x et y dans $\mathbb{R}$:

$$0 \leqslant \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \leqslant q(x, y)$$

et le "**théorème des gendarmes**" entraîne que si $q(x, y)$ est nul, alors $\frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ est nul, donc $(x, y) = (0, 0)$.
Comme, inversement, $q(0, 0) = 0$, on voit que $q(x, y)$ est nul si, et seulement si, $x = y = 0$.

2°/ Continuité et différentiabilité de α.

En dehors du point (0, 0), α, composée d'applications continues et dérivables, est continue et dérivable.

Au voisinage du point (0,0), pour $y = t\,x \neq 0$, on a :

$$\alpha(x, t\,x) = \frac{1}{\sqrt{1 - t + t^2}}$$

et cette quantité constante dépend uniquement de t et non de x.
Il en résulte que a (x, y) n'a pas de limite lorsque (x, y) tend vers (0,0).
On peut, en effet, considérer la suite $\left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right)$, $n \geqslant 1$, $t = 2$, $\alpha(x, y) = \frac{1}{\sqrt{3}}$ tend vers $\frac{1}{\sqrt{3}}$ lorsque n tend vers l'infini.
La suite $\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$, $n \geqslant 1$, $t = 1$, $\alpha(x, y) = 1$ tend vers 1 lorsque n tend vers l'infini.
On a donc construit deux suites tendant vers (0, 0) dont les images par α n'ont pas la même limite : c'est dire que

> α (x, y) n'a pas de limite lorsque (x, y) tend vers (0, 0) en restant différent de (0, 0).
> α n'est donc ni continue ni dérivable en (0, 0).

3°/ Continuité et différentiabilité de β.

En dehors du point (0, 0), β, composée d'applications continues et dérivables, est continue et dérivable.

La relation $|x| \leqslant \|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ (norme euclidienne) et la relation $\frac{1}{2}(x^2 + y^2) \leqslant q(x, y)$ entraînent :

$$|\beta(x, y)| = \left|\frac{x^3}{q(x, y)}\right| \leqslant 2\sqrt{x^2 + y^2}$$

donc si $\|(x, y)\|$ tend vers 0, le "théorème des gendarmes" entraîne que β (x, y) tend aussi vers $0 = \beta(0, 0)$.
L'application b est donc continue en (0, 0).

La dérivée partielle de β par rapport à x au point (0, 0) est la limite, si elle existe, du rapport $\frac{\beta(t, 0)}{t} = t$.
Cette limite existe, elle vaut 0.
La dérivée partielle de β par rapport à x au point (0, 0) est 0.

La dérivée partielle de β par rapport à *y* au point (0, 0) est la limite, si elle existe, du rapport $\frac{\beta(0,t)}{t}$ = 0.
Cette limite existe, elle vaut 0.
La dérivée partielle de β par rapport à *y* au point (0, 0) est 0.

Comme les dérivées partielles premières de β au point (0, 0) existent et sont nulles, l'application dérivée de β en (0, 0), si elle existe, ne peut être que l'application linéaire nulle de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, puisque ses composantes sur la base duale {*dx*, *dy*} de la base canonique, qui sont les dérivées partielles de β, sont alors nulles.

Avec des dérivées partielles nulles, pour que l'application β soit dérivable, il faut, et il suffit, que le rapport $\frac{\beta(h_1,h_2)-\beta(0,0)}{\|(h_1,h_2)\|}$ tende vers 0 lorsque (h_1, h_2) tend vers (0, 0) en restant différent de (0, 0).
Or $\frac{\beta(h_1,h_2)-\beta(0,0)}{\|(h_1,h_2)\|} = \frac{{h_1}^3}{\sqrt{{h_1}^2+{h_2}^2}\times({h_1}^2-h_1h_2+{h_2}^2)}$.
Si $h_1 = 0$, ce rapport est nul quel que soit h_2 différent de 0, donc la limite de $\frac{\beta(h_1,h_2)-\beta(0,0)}{\|(h_1,h_2)\|}$, si elle existe, ne peut être que 0.
Pour $h_2 = 0$, le rapport est égal au signe de h_1, il vaut 1 en valeur absolue et ne saurait donc tendre vers 0.
Autrement dit, le rapport $\frac{\beta(h_1,h_2)-\beta(0,0)}{\|(h_1,h_2)\|}$ n'a pas de limite lorsque (h_1, h_2) tend vers (0, 0) en restant différent de (0, 0).

L'application β est continue en (0, 0) et possède en ce point des dérivées partielles nulles, mais elle n'est pas dérivable en ce point.

Chapitre 22. Dérivées partielles, dérivée totale.

Enoncés.

Exercice 4. Continuité et dérivabilité de $x^2 \cos(y/x)$.

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application définie par $\begin{cases} f(x,y) = x^2 \cos\left(\frac{y}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ f(0,y) = 0 \end{cases}$.

1°/ Justifier que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2 - \{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$.
Calculer $df\left(1, \frac{\pi}{2}\right)(h_1, h_2)$.

2°/ Etude au point (0,0).
a) Etudier la continuité de f.
b) Existence et calcul éventuel des dérivées partielles premières.
c) f est-elle différentiable en ce point ?

Solution.

1°/ Etude dans l'ouvert $\mathbb{R}^2 - \{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$.

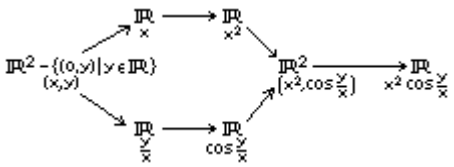
Remarque préliminaire.

$\{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}\} = \{0\} \times \mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$, noyau de la première projection de $\mathbb{R}^2$, qu'on appelle l' "**axe des *y***".
Comme $\mathbb{R}^2$ est de dimension finie, tout sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ est fermé.
Donc $\{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$ est fermé et son complémentaire $\mathbb{R}^2 - \{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$ est ouvert.

$\mathbb{R}^2 - \{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

a) Existence et continuité des dérivées partielles.

En dehors de l'axe des y défini par $\{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$, on peut décomposer l'application f de la façon suivante :



L'application $(x, y) \mapsto x$, de $\mathbb{R}^2 - \{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$ dans $\mathbb{R}$, est la restriction d'un projecteur, application linéaire, à un ouvert, c'est donc une application de classe C^∞.
L'application $x \mapsto x^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, est une fonction puissance entière positive, c'est donc une application de classe C^∞.
L'application φ_1 composée des deux précédentes est donc une application de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2 - \{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$.
L'application $(x, y) \mapsto \frac{y}{x}$, de $\mathbb{R}^2 - \{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$ dans $\mathbb{R}$, est une fraction rationnelle (quotient de deux polynômes) dont le dénominateur n'est jamais nul dans l'ensemble de définition, c'est donc une application de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2 - \{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$.
L'application $u \mapsto \cos u$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, est une application indéfiniment dérivable, donc de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.
L'application φ_2 composée des deux précédentes est donc une application de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2 - \{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$.
L'application φ, de composantes φ_1 et φ_2, est donc aussi une application de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2 - \{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$.
L'application $(u, v) \mapsto u\,v$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, est le produit des deux projecteurs de $\mathbb{R}^2$: c'est une application de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2$.
L'application f, composée des deux précédentes, est encore une application de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2 - \{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$.

f est une application de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2 - \{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$.

Dans l'ouvert $\mathbb{R}^2 - \{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$, les dérivées partielles de f se calculent par les règles habituelles de dérivation des fonctions numériques d'une variable :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x \cos\left(\frac{y}{x}\right) + y \sin\left(\frac{y}{x}\right)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -x \sin\left(\frac{y}{x}\right)$$

Elles sont elles-mêmes de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2 - \{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$, puisque f est de classe C^∞ sur cet ouvert.

b) Dérivée au point $\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$.

En particulier, au point $\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$, les dérivées partielles premières de f par rapport aux variables x et y valent :

$$\frac{\partial f}{\partial x}\left(1, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}\left(1, \frac{\pi}{2}\right) = -1$$

et puisque f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2 - \{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$, f est différentiable au point $\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$ et son application dérivée est l'application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ (ou forme linéaire sur $\mathbb{R}^2$) :

$$df\left(1, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}\, dx - dy$$

L'image par cette application linéaire d'un vecteur (h_1, h_2) de $\mathbb{R}^2$ est le nombre réel :

$$df\left(1, \frac{\pi}{2}\right)(h_1, h_2) = \frac{\pi}{2}\, dx\,(h_1, h_2) - dy\,(h_1, h_2)$$

Or, par définition,

dx est la première forme coordonnée, c'est-à-dire l'application linéaire qui, à un (h_1, h_2) de $\mathbb{R}^2$ fait correspondre h_1,

dy est la deuxième forme coordonnée, c'est-à-dire l'application linéaire qui, à un (h_1, h_2) de $\mathbb{R}^2$ fait correspondre h_2,

donc on obtient :

$$\boxed{df\left(1, \frac{\pi}{2}\right)(h_1, h_2) = \frac{\pi}{2}\, h_1 - h_2.}$$

2°/ Etude en dehors de l'ouvert $\mathbb{R}^2 - \{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$.

a) Existence des dérivées partielles premières.

Bien que le texte de l'énoncé ne demande pas de faire l'étude de la différentiabilité de *f* dans le sous-espace vectoriel $\{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}\} = \{0\} \times \mathbb{R}$, il est intéressant de voir si les dérivées partielles de *f* existent partout dans ce sous-espace.

Lorsque $x = 0$, la dérivée partielle par rapport à *x* de *f* au point $(0, y)$ est la limite, si elle existe, du rapport $\frac{f(t, y) - f(0, y)}{t} = t \cos\left(\frac{y}{t}\right)$, lorsque *t* tend vers 0 en restant différent de 0.

Or cette limite existe, c'est 0 puisqu'en valeur absolue, le rapport $\frac{f(t, y) - f(0, y)}{t} = t \cos\left(\frac{y}{t}\right)$ est majoré par $|\, t\, |$, qui tend vers 0 (théorème de prolongement des inégalités par passage à la limite, ou "*théorème des gendarmes*").

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, y) = 0.$$

La dérivée partielle par rapport à *y* de *f* au point $(0, y)$ est la limite, si elle existe, du rapport $\frac{f(0, y+t) - f(0, y)}{t} = 0$.

La limite de 0 existe, c'est 0.

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, y) = 0.$$

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(0, y) = 0 \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(0, y) = 0, \text{ pour tout } y \in \mathbb{R}, \text{ y compris pour } y = 0.}$$

On sait déjà que les dérivées partielles premières de *f* sont continues en tout point d'abscisse *x* différente de 0, puisque *f* est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2 - \{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$.

Pour montrer que *f* est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$, il faudrait montrer que les dérivées partielles, qui existent, on le sait maintenant, en tout point (x, y) de $\mathbb{R}^2$, sont encore continues lorsque x est égal à 0.

b) Continuité des dérivées partielles en (0,0).

Les relations :

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| = \left|2x\cos\left(\frac{y}{x}\right) + y\sin\left(\frac{y}{x}\right)\right| \leqslant \left|2x\cos\left(\frac{y}{x}\right)\right| + \left|y\sin\left(\frac{y}{x}\right)\right| \leqslant 2|x| + |y| \leqslant 3\|(x,y)\|$$

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| = \left|-x\sin\left(\frac{y}{x}\right)\right| \leqslant |x| \leqslant \|(x,y)\|$$

montrent que $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ tendent toutes deux vers 0 lorsque (x, y) tend vers (0,0) en restant différent de (0,0).
Comme on a, d'après le résultat précédent, $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$, les dérivées partielles de *f* sont continues en (0,0).
Il en résulte que *f* est différentiable en (0,0), comme toute application dont les dérivées partielles sont continues en (0,0).

f est différentiable en (0,0) et a des dérivées partielles continues au point (0,0).

c) Différentiabilité sur l'axe des *y* en dehors du point (0,0).

En un point $(0, y_0)$, avec y_0 différent de 0, la dérivée partielle par rapport à y est continue parce que $-x\sin\left(\frac{y}{x}\right)$ tend vers 0 lorsque $\|(x, y) - (0, y_0)\| = \|(x, y - y_0)\|$ tend vers 0, puisque $-x\sin\left(\frac{y}{x}\right)$ est majoré en module par $|x|$ qui tend vers 0.
Mais la dérivée partielle par rapport à x n'est pas continue, parce que $2x\cos\left(\frac{y}{x}\right) + y\sin\left(\frac{y}{x}\right)$ n'a pas de limite lorsque $\|(x, y) - (0, y_0)\| = \|(x, y - y_0)\|$ tend vers 0, à cause du terme en sinus qui n'a pas de limite lorsque x tend vers 0.

En un point $(0, y)$, avec y différent de 0 :
$\frac{\partial f}{\partial y}(0, y)$ est continue et vaut 0,
$\frac{\partial f}{\partial x}(0, y)$ existe et vaut 0 **mais n'est pas continue**.

Pour savoir si *f* est dérivable au point $(0, y_0)$, avec y_0 différent de 0, étudions la limite, lorsque (h_1, h_2) tend vers (0,0) en restant différent de 0, du rapport :

$$\frac{f(h_1, y_0 + h_2) - f(0, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, y_0)(h_1, h_2) - \frac{\partial f}{\partial y}(0, y_0)(h_1, h_2)}{\|(h_1, h_2)\|} =$$

$$\begin{cases} \dfrac{{h_1}^2}{\left\|(h_1, h_2)\right\|} \cos\left(\dfrac{y_0+h_2}{h_1}\right) & \text{pour } h_1 \neq 0 \\ 0 & \text{pour } h_1 = 0 \end{cases}$$

Comme le cosinus est majoré par 1, le rapport est toujours compris, quel que soit h_1 dans $\mathbb{R}$, entre 0 et $\dfrac{{h_1}^2}{\left\|(h_1, h_2)\right\|}$, lui-même inférieur ou égal à $\| (h_1, h_2) \|$, qui tend vers (0,0).
Comme le rapport tend vers 0, on peut l'appeler $\omega (h_1, h_2)$ et l'on obtient, en posant $h = (h_1, h_2)$:

$$f((0, y_0) + h) = f(0, y_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}(0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(0, y_0) \right)(h) + \| h \| \omega (h)$$

avec $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0, y_0) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(0, y_0) = 0$ et un $\omega (h)$ qui tend vers 0 lorsque $\| h \|$ tend vers 0.
Cette relation, jointe au résultat précédent, montre que :

> En un point $(0, y)$, avec y différent de 0, f est différentiable et sa dérivée est 0.
> En un tel point, f possède des dérivées partielles premières nulles :
> — la dérivée partielle par rapport à x est continue,
> — la dérivée partielle par rapport à y n'est pas continue.

En résumé,
— f est différentiable en tout point de $\mathbb{R}^2$,
— sa dérivée partielle première par rapport à la première variable est continue en tout point de $\mathbb{R}^2$,
— sa dérivée partielle première par rapport à la deuxième variable est continue en tout point de $\mathbb{R}^2$, sauf aux points de l'axe des y d'ordonnée différente de 0.

Exercices

Gradient.

1. Définition du gradient.
2. Propriétés du gradient.

Définition du gradient.

HAUT

La dérivée de f en un point $(x^1, \dots, x^p)$, quand elle existe, est une forme linéaire T sur $\mathbb{R}^p$.
Lorsque $\mathbb{R}^p$ est muni d'un produit scalaire, on peut identifier la dérivée de f à l'unique élément de $\mathbb{R}^p$, noté ∇f (qui se lit **nabla** f), ou *grad* f (qui se lit **gradient** de f) tel que, pour tout vecteur $h \in \mathbb{R}^p$, on ait :

$$T(h) = \langle grad\ f, h \rangle$$ (Chapitre 13, Définitions)

Dans une base quelconque $\{e_1, \dots, e_p\}$ de $\mathbb{R}^p$, le gradient de f en (x, y) a donc, par définition, pour **composantes covariantes**, les dérivées de f suivant les vecteurs de base :

$$grad_i\ f = T(e_i) = \langle grad\ f, e_i \rangle.$$

Si la base donnée $\{e_1, \dots, e_p\}$ est orthonormée, comme c'est le cas de la base canonique pour le produit scalaire euclidien, nous avons vu, au moins dans $\mathbb{R}^2$, (Chapitre 13, Exercice 1) que la base d'origine duale $\{e^1, \dots, e^p\}$ était la base donnée et que, de ce fait, les composantes covariantes et les composantes contravariantes étaient identiques.
Dans ce cas, *grad* f a pour composantes sur la base canonique, les dérivées partielles de f.

Quand on identifie le gradient de f avec la forme linéaire T, on écrit (composantes covariantes dans la base canonique) :

$$grad\ f(x^1, \dots, x^p) = \left(\frac{\partial f}{\partial x^1}(x^1, \dots, x^p) \quad \cdots \quad \frac{\partial f}{\partial x^p}(x^1, \dots, x^p) \right)$$ (**matrice jacobienne** de f)

Quand on idientifie le gradient de f avec un champ de vecteurs de $\mathbb{R}^p$, on écrit (composantes contravariantes dans la base canonique) :

$$\nabla f = grad\ f(x^1, \dots, x^p) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x^1}(x^1, \dots, x^p) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x^p}(x^1, \dots, x^p) \end{pmatrix}$$

HAUT

Propriétés du gradient.

1°/ Le gradient d'un champ scalaire f est un **champ de vecteurs**. Il est défini en chaque point où f est dérivable. Sa définition est liée à l'existence d'un **produit scalaire sur $\mathbb{R}^p$** (par défaut, produit scalaire euclidien).

2°/ En chaque point A de $\mathbb{R}^p$ où f est différentiable, passe une **équipotentielle** $f(M) = constante$. Le gradient de de f en A est un vecteur de $\mathbb{R}^p$ situé sur la **normale** en A à l'équipotentielle passant par A, il est dirigé dans le sens des potentiels croissants.

3°/ La dérivée de f en A, suivant un vecteur u, est le **produit scalaire** du gradient de f en A par le vecteur u :

$$D_u f(A) = < grad\, f(A) \mid u >$$

4°/ L'application linéaire $df(M)$ dérivée de f, aux points M où elle existe, est la forme linéaire définie par :

$$df(M) : h \mapsto df(M)(h) = < grad\, f(M) \mid h >$$

HAUT

Chapitre 23. Gradient.

Exercices

Exercice 1. Gradient et normale à une courbe de niveau.
Exercice 2. Gradient et tangente à une courbe de niveau.

Exercice 1. Gradient et normale à une courbe de niveau.

On considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, définie par $f(x, y) = x\,y$. 1°/ Représenter les courbes de niveau $f(x, y) = k$, pour $k \in \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$. 2°/ Calculez le gradient de f au point $A = (4, \frac{1}{2})$. Montrez que ce vecteur est normal à la courbe de niveau contenant A et qu'il est dirigé dans le sens des potentiels croissants.	Solution

HAUT

Exercice 2. Gradient et tangente à une courbe de niveau.

On considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, définie par $f(x, y) = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} - \frac{1}{4}$. 1°/ Calculez le gradient de f au point $A = (-1, 1)$. Montrez que ce vecteur est normal à la courbe de niveau contenant A. 2°/ En déduire une équation de la tangente à cette courbe de niveau en A.	Solution

HAUT

Chapitre 23. Gradient.

Enoncés.

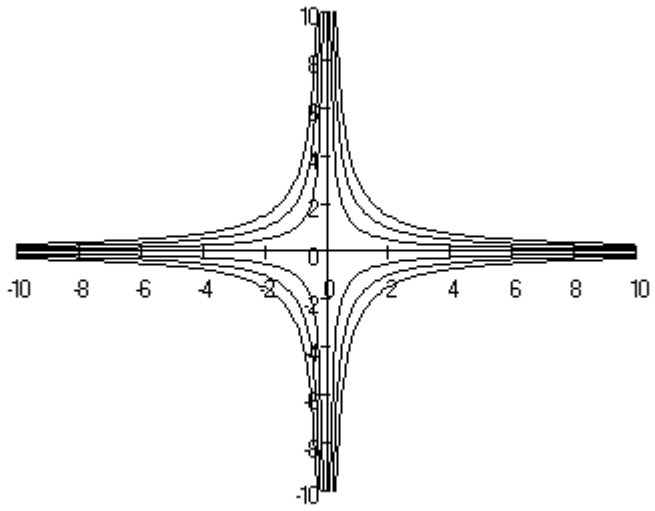
Exercice 1. Gradient et normale à une courbe de niveau.

On considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, définie par $f(x, y) = x\,y$. 1°/ Représenter les courbes de niveau $f(x, y) = k$, pour $k \in \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$. 2°/ Calculez le gradient de f au point $A = (4, \frac{1}{2})$. Montrez que ce vecteur est normal à la courbe de niveau contenant A et qu'il est dirigé dans le sens des potentiels croissants.	

Solution.

1°/ Courbes de niveau.

Les courbes de niveau, ou équipotentielles, de f, sont les courbes d'équation $x\,y = k$. Ces courbes forment un faisceau d'**hyperboles équilatères**, dont les asymptotes, obtenues pour $k = 0$, sont les axes de coordonnées.



Courbes de niveau $x\,y = k$, $k = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$.

2°/ Gradient.

Ici, l'application f est dérivable en tout point et sa différentielle est :

$$df = y\,dx + x\,dy$$

Le gradient est donc le vecteur (y, x).

$$\boxed{\textit{grad } f\,(x, y) = (y, x)}$$

Au point $A = (4, \frac{1}{2})$, ce gradient prend la valeur $(\frac{1}{2}, 4)$.

La courbe de niveau qui passe par le point A a pour équation $x\,y = 4 \times \frac{1}{2} = 2$.

Son équation est donc $y = \frac{2}{x}$.

La dérivée de y est $-\frac{2}{x^2}$. Pour $x = 4$, elle vaut $-\frac{1}{8}$. C'est la pente de la tangente à la courbe de niveau.

Or la pente du gradient est $\frac{4}{\frac{1}{2}} = 8$.

Donc le produit des deux pentes est – 1 et cela signifie que **le gradient est perpendiculaire à la tangente**.
Le gradient est porté par la normale à la courbe de niveau passant par A.

Comme les composantes du gradient au point A sont positives, le gradient est orienté dans le sens des k croissants, donc dans le sens des "potentiels" croissants. Le champ scalaire f est appelé un potentiel et on dit, en physique, que **le gradient dérive du potentiel *f***.

Chapitre 23. Gradient.

Enoncés.

Exercice 2. Gradient et tangente à une courbe de niveau.

On considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, définie par $f(x, y) = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} - \frac{1}{4}$.

1°/ Calculez le gradient de f au point $A = (-1, 1)$. Montrez que ce vecteur est normal à la courbe de niveau contenant A.
2°/ En déduire une équation de la tangente à cette courbe de niveau en A.

Solution.

1°/ Gradient.

La différentielle de f est :

$$df = \frac{1}{4} \times 2\, x\, dx + \frac{1}{2} \times 2\, y\, dy = \frac{x}{2} dx + y\, dy$$

Les composantes du gradient sont donc :

$$grad\, f = \begin{pmatrix} \frac{x}{2} \\ y \end{pmatrix}$$

Au point $A = (-1, 1)$, le gradient vaut :

$$\boxed{grad\, f = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}}$$

2°/ Tangente.

La tangente est la **droite perpendiculaire au gradient** passant par A. Son équation est donc :

$$< grad\, f, AM > = 0$$

$$\left(-\frac{1}{2} \quad 1\right) \begin{pmatrix} x+1 \\ y-1 \end{pmatrix} = 0$$

$$y - 1 = \frac{1}{2}(x + 1)$$

$$\boxed{}$$

$$\boxed{y = \frac{x}{2} + \frac{3}{2}}$$

Exercices

Applications de classe C^1.

1. Continuité des dérivées partielles.
2. Critère de différentiabilité.
3. Théorème des accroissements finis.
4. Théorème de Schwarz.

Continuité des dérivées partielles.

Si $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ possède des dérivées partielles premières continues en un point $A \in \mathbb{R}^p$, on dit que f est **continûment dérivable** en A.
Si f est continûment dérivable en tout point A de $\mathbb{R}^p$, on dit que f est de **classe C^1**.

Il existe des applications non dérivables en un point mais qui possèdent en ce point des dérivées partielles premières (Chapitre 22, Exercice 1, 1° et 4°).

Il existe des applications dérivables en un point, qui ne sont pas continûment dérivables en ce point.
Exemple : l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2)\sin\left(\dfrac{1}{x^2 + y^2}\right) & \text{pour } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{pour } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Cette application est dérivable en (0,0), mais ses dérivées partielles ne sont pas continues en (0,0). (Chapitre 24, Exercice 1).

HAUT

Critère de différentiabilité.

Si $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ possède des dérivées partielles premières continues en un point $A \in \mathbb{R}^p$, f est **continûment dérivable** en A, par définition.
Toute application continûment dérivable en A est dérivable en A.

Autrement dit, si les dérivées partielles de f existent en A et sont continues en A, alors f est dérivable en A.

Les dérivées partielles de f peuvent exister en A sans que f soit dérivable en A : dans ce cas, l'une au moins des dérivées partielles en A n'est pas continue en A (Chapitre 22, Exercice 1, 1°).

HAUT

Théorème des accroissements finis.

HAUT

Hypothèses

1. U est un ouvert de $\mathbb{R}^p$.
2. $a \in U$, $h \in \mathbb{R}^p$, $a + h \in U$.
3. $[a, a + h] \subset U$.
4. $f : U \to \mathbb{R}$ est de classe C^k sur U ($k \geqslant 1$).

Sous ces hypothèses :

Il existe un nombre réel $\theta \in]\,0, 1\,[$ pour lequel la **formule de Taylor-Lagrange** est vérifiée :

$$f(a + h) = f(a) + \frac{1}{1!}df(a)(h) + \ldots + \frac{1}{(k-1)!}(df(a)(h))^{(k-1)} + \frac{1}{k!}(df(a + \theta h)(h))^{(k)},$$

formule dans laquelle une puissance symbolique $(df(x)(h))^{(r)}$ est définie par :

$$(df(x)(h))^{(r)} = \sum_{\alpha_1 + \cdots + \alpha_p = r} {h_1}^{\alpha_1} \ldots {h_p}^{\alpha_p} \frac{\partial^r f}{\partial {x_1}^{\alpha_1} \ldots \partial {x_p}^{\alpha_p}}(x).$$

Pour $k = 1$, la formule de Taylor-Lagrange s'appelle **formule des accroissements finis** :

$$f(a + h) = f(a) + df(a + \theta h)(h) = f(a) + \sum_{j=1}^{j=p} h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(a + \theta h)$$

Remarque : formule de Taylor-Young.

Si, dans les hypothèses précédentes, l'hypothèse 3 (le segment $[a, a + h]$ est contenu dans U) est supprimée, la formule de Taylor-Lagrange n'est plus valable, il subsiste seulement la **formule de Taylor-Young** :

$$f(a + h) = f(a) + \frac{1}{1!}df(a)(h) + \ldots + \frac{1}{k!}(df(a)(h))^{(k)} + \| h \| \omega(h)$$

avec un $\omega(h)$ qui tend vers 0 lorsque $\| h \|$ tend vers 0.

Pour $a = 0$, la formule de Taylor-Young prend le nom de **formule de Taylor-Mac Laurin** :

$$f(h) = f(0) + \frac{1}{1!}df(0)(h) + \ldots + \frac{1}{k!}(df(0)(h))^{(k)} + \| h \| \omega(h)$$

Pour les applications indéfiniment dérivables (k infini), les formules de développement limité deviennent des formules de développement en série (**série de Taylor**).

HAUT

Théorème de Schwarz.

Hypothèses

1. f est une application de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^q$.
2. f est de classe C^2 sur un ouvert U de $\mathbb{R}^p$.

Sous ces hypothèses :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\ \partial x}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x\ \partial y}(x,y), \text{ pour tout } (x,y) \in U.$$

HAUT

Chapitre 24. Applications de classe C^1.

Exercices

Exercice 1. Application dérivable qui n'est pas de classe C^1.
Exercice 2. Application de classe C^1.
Exercice 3. Application composée.
Exercice 4. Dérivées partielles secondes.
Exercice 5. Relation entre dérivées partielles.

Exercice 1. Application dérivable qui n'est pas de classe C^1.

On considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right) & \text{pour } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{pour } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Solution

1°/ Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^2$ et calculer ses dérivées partielles.
2°/ Montrer que f n'est pas de classe C^1.

HAUT

Exercice 2. Application de classe C^1.

Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2, et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$g(x, y) = \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(y)}{x - y} & \text{pour } y \neq x. \\ f'(x) & \text{pour } y = x \end{cases}$$

Montrer que g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

Solution

HAUT

Exercice 3. Application composée.

Donner un exemple d'applications $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, telles que : — f admet des dérivées partielles premières en (0,0), — $f(0,0) = (0,0)$ — g admet des dérivées partielles premières en (0,0), — $g \circ f$ n'admet pas de dérivées partielles premières en (0,0).	Solution

HAUT

Exercice 4. Dérivées partielles secondes.

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par : $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & \text{pour } (x, y) \neq (0, 0). \\ 0 & \text{pour } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

Comparer $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \, \partial y}(0,0)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \, \partial x}(0,0)$.

Solution

HAUT

Exercice 5. Relation entre dérivées partielles.

Soient $f, \varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2, et $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $F(x, y) = f(x + \varphi(y))$. Vérifier la relation :

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\frac{\partial F}{\partial x} = 0.$$

Solution

HAUT

Chapitre 24. Applications de classe C^1.

Enoncés.

Exercice 1. Application dérivable qui n'est pas de classe C^1.

On considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) & \text{pour } (x, y) \neq (0, 0). \\ 0 & \text{pour } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

1°/ Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^2$ et calculer ses dérivées partielles.
2°/ Montrer que f n'est pas de classe C^1.

Solution.

1°/ Dérivabilité.

1. Pour $(x, y) \neq (0, 0)$.

Pour $(x, y) \neq (0, 0)$, f est composée d'applications dérivables : f est donc dérivable.
Sa dérivée en $(x, y) \neq (0, 0)$, est donnée par :

$$df(x, y) = \left((x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) - \cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) \right)\left(\frac{2x}{x^2+y^2}dx + \frac{2y}{x^2+y^2}dy \right)$$

Les dérivées partielles de f en $(x, y) \neq (0, 0)$, sont :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{2x}{x^2+y^2}\left((x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) - \cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) \right)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{2y}{x^2+y^2}\left((x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) - \cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) \right)$$

2. Pour $(x, y) = (0, 0)$.

a) Dérivées partielles.

La dérivée partielle de f par rapport à x au point $(0, 0)$, est la limite lorsque t tend vers 0 en restant différent de 0, si elle existe, du rapport

$$\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \frac{f(t,0)}{t} = t \sin\frac{1}{t^2}.$$

Or $\sin\frac{1}{t^2}$ est majoré, en module, par 1, donc $\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t}$ est compris entre $-|t|$ et $|t|$.
Lorsque t tend vers 0, $-|t|$ et $|t|$ tendent tous deux vers 0, donc, théorème des gendarmes, $\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t}$ tend vers 0.

Donc f possède en (0, 0) une dérivée partielle par rapport à x, qui est 0 : $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$.

Comme f est une fonction symétrique en x et y, f possède aussi en (0, 0) une dérivée partielle par rapport à y, qui est 0 : $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

b) Dérivée totale.

La dérivée de f en (0, 0), si elle existe, est une application linéaire T vérifiant :

$$f(h) = f(0,0) + T(h) + \|h\|\,\omega(h), \text{ avec } \lim_{\substack{h\to(0,0)\\ h\neq(0,0)}} \omega(h) = 0$$

Comme $f(0,0) = 0$, en prenant la norme euclidienne $\|h\| = \sqrt{h_1^2+h_2^2}$, nous obtenons :

$$\frac{f(h)}{\|h\|} = \sqrt{h_1^2+h_2^2}\,\sin\left(\frac{1}{h_1^2+h_2^2}\right).$$

Comme $\sin\left(\frac{1}{h_1^2+h_2^2}\right)$ est borné, $\frac{f(h)}{\|h\|}$ tend vers 0 avec $\|h\| = \sqrt{h_1^2+h_2^2}$.
Il suffit donc de prendre $\omega(h) = \sqrt{h_1^2+h_2^2}\,\sin\left(\frac{1}{h_1^2+h_2^2}\right) = \|h\|\sin\left(\frac{1}{\|h\|^2}\right)$ pour avoir :

$$f(h) = f(0,0) + 0.h + \|h\|\,\omega(h), \text{ avec } \lim_{\substack{h\to(0,0)\\ h\neq(0,0)}} \omega(h) = 0$$

Cette formule montre que f est dérivable en (0, 0) et que sa dérivée en (0, 0) est l'homothétie de rapport 0.
Ce résultat suffit, en fait, pour démontrer que f possède en (0, 0) des dérivées partielles nulles (**résultat (a)**).

L'application f est dérivable en (0, 0) et sa dérivée en (0, 0) est nulle.

2°/ Continuité des dérivées partielles.

Nous avons vu (Chapitre 18, Exercice 1, 4° et 5°) que les dérivées partielles :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{2x}{x^2+y^2}\left((x^2 + y^2) \sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) - \cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\right)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{2y}{x^2+y^2}\left((x^2 + y^2) \sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) - \cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\right)$$

n'avaient pas de limite en (0, 0) parce qu'elles ne sont pas bornées au voisinage de (0, 0).

Comme les dérivées partielles sont nulles pour (0, 0), elles ne sont donc pas continues en (0, 0) et f n'est pas de classe C^1.

Chapitre 24. Applications de classe C^1.

Enoncés.

Exercice 2. Application de classe C^1.

Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2, et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$g(x, y) = \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(y)}{x - y} & \text{pour } y \neq x. \\ f'(x) & \text{pour } y = x \end{cases}$$

Montrer que g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

Solution.

1°/ Dérivabilité.

1. Pour $x \neq y$.

En tout point (x, y) de $\mathbb{R}^2$ vérifiant $y \neq x$, g est composée d'applications dérivables : g est donc dérivable.
Ses dérivées partielles s'obtiennent par les règles usuelles de dérivation des fonctions d'une variable :

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = \frac{(x - y) f'(x) - (f(x) - f(y))}{(x - y)^2} = \frac{1}{x - y}(f'(x) - g(x, y))$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = \frac{-(x - y) f'(y) + (f(x) - f(y))}{(x - y)^2} = -\frac{1}{x - y}(f'(y) - g(x, y))$$

2. Pour $x = y$.

$g(x, y) = f'(x)$.

La dérivée de g, si elle existe, est une application linéaire $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que :

$$g((x, x) + h) = g(x, x) + T(h) + \| h \| \omega(h), \text{ avec } \lim_{\substack{h \to (0,0) \\ h \neq (0,0)}} \omega(h) = 0.$$

Or, pour $h = (h_1, h_2)$,

$$g((x, x) + h) = g(x + h_1, x + h_2) = \frac{f(x + h_1) - f(x + h_2)}{h_1 - h_2} \text{ si } h_1 \neq h_2$$

Comme f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$, il existe un θ' réel vérifiant :

$f(x + h_1) = f(x + h_2) + f'(x + h_2)(h_1 - h_2) + \frac{1}{2}(h_1 - h_2)^2 f''(x + h_2 + \theta'(h_1 - h_2))$, avec $0 < \theta' < 1$.

$\frac{f(x+h_1) - f(x+h_2)}{h_1 - h_2} = f'(x + h_2) + \frac{1}{2}(h_1 - h_2) f''(x + h_2 + \theta'(h_1 - h_2))$, avec $0 < \theta' < 1$.

Or $f'(x + h_2) = f'(x) + h_2 f''(x + \theta h_2)$, avec $0 < \theta < 1$,
donc :

$g((x, x) + h) = f'(x) + h_2 f''(x + \theta h_2) + \frac{1}{2}(h_1 - h_2) f''(x + h_2 + \theta'(h_1 - h_2))$, avec $0 < \theta' < 1$ et $0 < \theta < 1$.

$g((x, x) + h) - f'(x) - \frac{1}{2}(h_1 + h_2) f''(x) = h_2 (f''(x + \theta h_2) - f''(x)) + \frac{1}{2}(h_1 - h_2)(f''(x + h_2 + \theta'(h_1 - h_2)) - f''(x))$, avec $0 < \theta' < 1$ et $0 < \theta < 1$.

Lorsque $\| h \| = Sup(|h_1|, |h_2|)$ (**norme produit**) tend vers 0, la quantité

$$h_2 (f''(x + \theta h_2) - f''(x)) + \frac{1}{2}(h_1 - h_2)(f''(x + h_2 + \theta'(h_1 - h_2)) - f''(x))$$

est majorée, en module, par une quantité $\| h \| \omega(h)$, avec un $\omega(h)$ qui tend vers 0 lorsque $\| h \|$ tend vers 0, de sorte que l'on peut écrire $g((x, x) + h) - f'(x) - \frac{1}{2}(h_1 + h_2) f''(x)$ sous la forme $\| h \| \omega_1(h)$, avec un $\omega_1(h)$ qui tend vers 0 lorsque $\| h \|$ tend vers 0.

$g((x, x) + h) = f'(x) + \frac{1}{2}(h_1 + h_2) f''(x) + \| h \| \omega_1(h)$,
$g((x, x) + h) = g(x, x) + \frac{1}{2}(h_1 + h_2) f''(x) + \| h \| \omega_1(h)$, avec un $\omega_1(h)$ qui tend vers 0 lorsque $\| h \|$ tend vers 0.

Si $h_1 = h_2$, on a simplement : $g((x, x) + h) = g(x + h_1, x + h_1) = f'(x + h_1)$
$f'(x + h_1) = f'(x) + h_1 f''(x + \theta h_1)$, avec $0 < \theta < 1$,
$g((x, x) + h) - f'(x) - h_1 f''(x) = h_1 (f''(x + \theta h_1) - f''(x))$
Et nous avons encore :
$g((x, x) + h) = g(x, x) + \frac{1}{2}(h_1 + h_2) f''(x) + \| h \| \omega_1(h)$, avec un $\omega_1(h)$ qui tend vers 0 lorsque $\| h \|$ tend vers 0.

La formule, valable pour tout h de $\mathbb{R}^2$:

$$g((x, x) + h) = g(x, x) + \frac{1}{2}(h_1 + h_2) f''(x) + \| h \| \omega_1(h),$$
avec un $\omega_1(h)$ qui tend vers 0 lorsque $\| h \|$ tend vers 0,

montre que ***g* est dérivable au point (*x*, *x*)** et que sa dérivée en ce point est la forme linéaire sur $\mathbb{R}^2$:

$$D_{(x, x)}(g) = dg(x, x) : (h_1, h_2) \mapsto \frac{1}{2}(h_1 + h_2) f''(x)$$
$$D_{(x, x)}(g) = \frac{1}{2} f''(x)\, dx + \frac{1}{2} f''(x)\, dy$$

(*dx* et *dy* étant, par définition, les formes coordonnées)

Les dérivées partielles de *g* au point (*x*, *x*) sont les coefficients de *dx* et *dy* :

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, x) = \frac{1}{2} f''(x)$$
$$\frac{\partial g}{\partial y}(x, x) = \frac{1}{2} f''(x)$$

2°/ Continuité des dérivées partielles.

Comme *f* est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$, il existe un θ et un θ', vérifiant (**formule de Taylor-Lagrange**) :

$f(x) = f(y) + f'(y)(x - y) + \frac{1}{2}(x - y)^2 f''(y + \theta(x - y))$, avec $0 < \theta < 1$.
$f(y) = f(x) + f'(x)(y - x) + \frac{1}{2}(y - x)^2 f''(x + \theta'(y - x))$, avec $0 < \theta' < 1$.

Pour *x* différent de *y* :

$g(x, y) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y} = f'(y) + \frac{1}{2}(x - y) f''(y + \theta(x - y))$, avec $0 < \theta < 1$.
$g(x, y) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y} = f'(x) + \frac{1}{2}(x - y) f''(x + \theta'(y - x))$, avec $0 < \theta' < 1$.

$\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = -\frac{1}{x - y}(f'(y) - g(x, y)) = \frac{1}{2} f''(y + \theta(x - y))$, avec $0 < \theta < 1$.
$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{x - y}(f'(x) - g(x, y)) = \frac{1}{2} f''(x + \theta'(y - x))$, avec $0 < \theta' < 1$.

Lorsque *y* tend vers *x*, en restant différent de *x*, $\frac{\partial g}{\partial y}(x, y)$ et $\frac{\partial g}{\partial x}(x, y)$ tendent tous deux vers $\frac{1}{2} f''(x) = \frac{\partial g}{\partial x}(x, x) = \frac{\partial g}{\partial y}(x, x)$, puisque f'' est continue.

Les dérivées partielles de *g* sont donc continues et ***g* est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$**.

Chapitre 24. Applications de classe C^1.

Enoncés.

Exercice 3. Application composée.

Donner un exemple d'applications $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, telles que : — f admet des dérivées partielles premières en (0,0), — f (0,0) = (0,0) — g admet des dérivées partielles premières en (0,0), — g o f n'admet pas de dérivées partielles premières en (0,0).	

Solution.

Rappel (théorème du Cours).

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^p$, V un ouvert de $\mathbb{R}^q$, f une application de U dans V, g une application de V dans $\mathbb{R}^r$, $a \in U$, $b = f(a) \in V$.
Si f est différentiable en a, si g est différentiable en b, alors $g \circ f$ est différentiable en a et l'on a :

$$d(g \circ f)(a) = dg(b) \circ df(a)$$
$$J_a(g \circ f) = J_b(g) \times J_a(f)$$

(la matrice jacobienne de l'application composée est le produit des matrices jacobiennes)

1°/ Application f.

On sait (théorème précédent) que si f est différentiable en (0,0), si g est différentiable en f (0,0), alors g o f est différentiable en (0,0), donc possède des dérivées partielles premières.

On sait aussi qu'une application dont les dérivées partielles sont continues est différentiable (une application continûment différentiable est différentiable).

Pour pouvoir répondre à la question de l'énoncé, il faudra prendre une application f, ou une application g, non différentiable en (0,0) mais possédant des dérivées partielles premières en ce point, par exemple f ou g ayant des dérivées partielles premières en (0,0), mais des dérivées partielles premières non continues en (0,0).

Il nous faut, de plus, une application f qui prend la valeur (0,0) lorsque (x, y) est égal à (0,0).

Considérons par exemple l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par :

$$f(x, y) = (\| (x, y) \|^2, \| (x, y) \|^2)$$

en prenant pour norme, la norme euclidienne $\| (x, y) \|^2 = x^2 + y^2$.

$$\frac{f(t, 0) - f(0, 0)}{t} = (t, t)$$

Avec cet f, la limite de $\frac{f(t, 0) - f(0, 0)}{t}$, lorsque t tend vers 0, existe et vaut (0,0).

De même la limite de $\frac{f(0, t) - f(0, 0)}{t} = (t, t)$ existe et vaut (0,0).

L'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par
$f(x, y) = (x^2 + y^2, x^2 + y^2)$
possède en (0,0) des dérivées partielles premières égales à (0,0).

En fait, les composantes de l'application f sont des polynômes, donc des applications de classe C^∞, donc f est elle-même de classe C^∞.

2°/ Application *g*.

Pour application g, on va prendre une application non continue en (0,0) toute simple : une application qui vaut 1 si x et y sont différents de 0 et qui vaut 0 sur les axes de coordonnées, c'est-à-dire si x ou y est nul.

$$g(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } xy \neq 0 \\ 0 & \text{si } xy = 0 \end{cases}$$

Cette application g possède, en (0,0), des dérivées partielles premières par rapport à x et par rapport à y qui sont nulles, puisque

$$\frac{g(t, 0) - g(0, 0)}{t} = \frac{g(0, t) - g(0, 0)}{t} = 0$$

Mais g n'est pas différentiable en (0, 0), puisqu'elle n'est pas continue en (0, 0).

L'application $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par
$g(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } xy \neq 0 \\ 0 & \text{si } xy = 0 \end{cases}$
possède en (0,0) des dérivées partielles premières égales à 0.

3°/ Application composée.

L'application $g \circ f$ est l'application égale à 1 si $(x^2 + y^2)^2$ est différent de 0, et égale à 0 si $(x^2 + y^2)^2$ est égal à 0. Elle est donc égale à 1 partout sauf en (0,0) où elle vaut 0.

$$\frac{(g \circ f)(t, 0) - (g \circ f)(0, 0)}{t} = \frac{1}{t}, \text{ pour } t \neq 0.$$

Ce rapport n'a pas de limite dans $\mathbb{R}$, donc $g \circ f$ n'a pas de dérivée partielle par rapport à x en (0,0).

$$\frac{(g \circ f)(0,t) - (g \circ f)(0,0)}{t} = \frac{1}{t}, \text{ pour } t \neq 0.$$

Ce rapport n'a pas de limite dans $\mathbb{R}$, donc $g \circ f$ n'a pas de dérivée partielle par rapport à y en (0,0).

L'application $g \circ f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$(g \circ f)(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

n'a pas de dérivées partielles premières en (0,0) .

Conclusion.

Ce n'est pas parce que f a des dérivées partielles premières en un point A, et que g a des dérivées partielles premières en $f(A)$, que l'application composée $g \circ f$ aura des dérivées partielles premières en A.

Ce qui est vrai des applications différentiables dans des ouverts par le Théorème du Cours rappelé plus haut, n'est pas vrai si l'on n'a pas des ouverts, ou si les applications n'ont que des dérivées partielles, sans être différentiables.

Chapitre 24. Applications de classe C^1.

Enoncés.

Exercice 4. Dérivées partielles secondes.

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par : $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{pour } (x, y) \neq (0, 0). \\ 0 & \text{pour } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

Comparer $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}(0,0)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}(0,0)$.

Solution.

1°/ Dérivées partielles premières par rapport à *x* et par rapport à *y*.

a) En dehors du point (0,0).

Pour (x, y) différent de $(0,0)$, $f(x, y) = \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$ est composée d'applications différentiables : elle est différentiable et sa différentielle est donnée par :

$$\frac{df}{f} = \frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} + \frac{d(x^2-y^2)}{x^2-y^2} - \frac{d(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$$

$$\frac{df}{f} = \frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} + \frac{2x\,dx}{x^2-y^2} - \frac{2y\,dy}{x^2-y^2} - \frac{2x\,dx}{x^2+y^2} - \frac{2y\,dy}{x^2+y^2}$$

$$\frac{df}{f} = \left(\frac{1}{x} + \frac{2x}{x^2-y^2} - \frac{2x}{x^2+y^2}\right)dx + \left(\frac{1}{y} - \frac{2y}{x^2-y^2} - \frac{2y}{x^2+y^2}\right)dy$$

$$df(x, y) = \left(\frac{y(x^2-y^2)}{x^2+y^2} + \frac{2x^2y}{x^2+y^2} - \frac{2x^2y(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}\right)dx + \left(\frac{x(x^2-y^2)}{x^2+y^2} - \frac{2xy^2}{x^2+y^2} - \frac{2xy^2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}\right)dy$$

$$df(x, y) = \left(\frac{y(3x^2-y^2)}{x^2+y^2} - \frac{2x^2y(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}\right)dx + \left(\frac{x(x^2-3y^2)}{x^2+y^2} - \frac{2xy^2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}\right)dy$$

Les dérivées partielles de *f* sont les coefficients de *dx* et *dy* dans l'expression de *df* :

Pour $(x, y) \neq (0,0)$:

$$\left|\begin{array}{l}\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\left(\dfrac{y\left(3x^2-y^2\right)}{x^2+y^2}-\dfrac{2x^2y\left(x^2-y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}\right)\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\left(\dfrac{x\left(x^2-3y^2\right)}{x^2+y^2}-\dfrac{2xy^2\left(x^2-y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}\right)\end{array}\right|$$

Comme les numérateurs des fractions rationnelles qui interviennent dans ces expressions sont de degrés supérieurs aux dénominateurs, la limite de ces expressions lorsque (x, y) tend vers (0,0) est 0. Par exemple :

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right|\leqslant 8\sqrt{x^2+y^2} \text{ et } \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right|\leqslant 8\sqrt{x^2+y^2}.$$

b) Au point (0,0).

$$\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t}=\frac{f(0,t)-f(0,0)}{t}=0$$

Donc les dérivées partielles de f en (0,0) existent et valent 0.
Comme c'est aussi la limite des valeurs de dérivées partielles en (x, y) lorsque (x, y) tend vers (0,0), Les dérivées partielles de f existent et sont continues en tout point de $\mathbb{R}^2$.

L'application f est de classe C^1 dans $\mathbb{R}^2$.

2°/ Dérivées partielles secondes de *f*.

Calculons la dérivée partielle par rapport à y de

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y\left(3x^2-y^2\right)}{x^2+y^2}-\dfrac{2x^2y\left(x^2-y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2} & \text{pour } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{pour } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

au point (0,0).

$$\frac{1}{t}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,t)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\right)=-1$$

La limite de ce rapport lorsque t tend vers 0 est donc – 1 et la dérivée partielle seconde $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(0,0)$ vaut – 1.

Calculons maintenant la dérivée partielle par rapport à x de

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x\left(x^2-3y^2\right)}{x^2+y^2}-\dfrac{2xy^2\left(x^2-y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2} & \text{pour } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{pour } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

au point (0,0).

$$\frac{1}{t}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(t,0)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\right)=1.$$

La limite de ce rapport lorsque t tend vers 0 est donc 1 et la dérivée partielle seconde $\frac{\partial^2 f}{\partial x\ \partial y}(0,0)$ vaut 1.

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial y\ \partial x}(0,0) = -1\ ;\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\ \partial y}(0,0) = 1.}$$

Les deux dérivées secondes ne sont pas égales, le **théorème de Schwarz** ne s'applique pas, bien que f soit de classe C^1 dans $\mathbb{R}^2$.

Cela vient du fait que les dérivées partielles secondes ne sont pas continues en (0,0).

Chapitre 24. Applications de classe C^1.

Enoncés.

Exercice 5. Relation entre dérivées partielles.

Soient $f, \varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2, et $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $F(x, y) = f(x + \varphi(y))$.
Vérifier la relation :

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial F}{\partial x} = 0.$$

Solution.

Pour calculer les dérivées, appliquons le théorème de dérivation des fonctions composées.

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = f'(x + \varphi(y)) \times \frac{\partial(x + \varphi(y))}{\partial x} = f'(x + \varphi(y))$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = f'(x + \varphi(y)) \times \frac{\partial(x + \varphi(y))}{\partial y} = f'(x + \varphi(y)) \times \varphi'(y)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x, y) = \frac{\partial(f'(x + \varphi(y)))}{\partial x} = f''(x + \varphi(y))$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x, y)\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = f''(x + \varphi(y))\, f'(x + \varphi(y)) \times \varphi'(y)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}(x, y) = \frac{\partial(f'(x + \varphi(y))\,\varphi'(y))}{\partial x} = f''(x + \varphi(y))\,\varphi'(y)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}(x, y)\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = f''(x + \varphi(y))\,\varphi'(y)\, f'(x + \varphi(y))$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}(x, y)\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x, y)\frac{\partial F}{\partial y}(x, y)}$$

Comme f et φ sont arbitraires pourvu qu'elles soient de classe C^2, on voit, par le calcul qui vient d'être fait que :

$$F(x, y) = f(x + \varphi(y))$$

qui dépend de deux fonctions arbitraires, est la solution générale de l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial F}{\partial x} = 0.$$

Exercices

Equations aux dérivées partielles d'ordre 1.

1. Matrice jacobienne.
2. Théorème du changement de variables.
3. Changement de variables dans une équation aux dérivées partielles.

Matrice jacobienne.

HAUT

Un **changement de coordonnées** est défini par une application $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ qui, au vecteur (x, y), fait correspondre le vecteur $(u, v) = g(x, y)$.
Il peut être défini aussi par l'application inverse h, qui, au vecteur (u, v) fait correspondre le vecteur $(x, y) = h(u, v)$.
L'application g est définie dans un ouvert U de $\mathbb{R}^2$.
L'application h est définie dans un ouvert V de $\mathbb{R}^2$.
x et y sont les **coordonnées cartésiennes**,
u et v s'appellent les **coordonnées locales**.

La matrice de l'application linéaire dérivée de h est la **matrice du changement de base**.
Elle a pour colonnes les vecteurs de la nouvelle base (appelée la **base locale** définie par le changement de coordonnées) exprimés par rapport à l'ancienne base (base canonique).
On l'appelle aussi **matrice jacobienne du changement de variables**.

$$J_{(u,v)}(h) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial x}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial y}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix}$$

C'est la matrice de l'application identique lorsqu'on passe de la base locale $\{e'\} = \{e'_1, e'_2\}$ à la base canonique $\{e\} = \{e_1, e_2\}$:

$$[id_{\mathbb{R}^2}, \{e'\}, \{e\}] = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial x}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial y}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix}$$

Remarquons toutefois que la nouvelle base n'est pas, contrairement à la base canonique, une base orthonormée. Les nouveaux vecteurs de base n'ont pas nécessairement pour norme 1 et ils ne sont pas nécessairement orthogonaux.

HAUT

Théorème du changement de variables.

HAUT

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^p$, V un ouvert de $\mathbb{R}^q$, $a \in U$, $f : U \to V$ définie par

$f(x_1, \dots, x_p) = (f_1(x_1, \dots, x_p), \dots, f_q(x_1, \dots, x_p))$

et $g : V \to \mathbb{R}$ définie par $(y_1, \dots, y_q) \mapsto g(y_1, \dots, y_q)$.
Si, pour tout $i \in \{1, \dots, q\}$, f_i est différentiable en a, et si g est différentiable en $b = f(a)$, alors :

1°/ $G = g \circ f$, application de U dans $\mathbb{R}$ qui, à $(x_1, \dots, x_p)$, fait correspondre $g(f_1(x_1, \dots, x_p), \dots, f_q(x_1, \dots, x_p))$, est différentiable en a et l'on a :

$$dG(a) = \sum_{i=1}^{i=q} \frac{\partial g}{\partial y_i}(b)\, df_i(a)$$

2°/ Les dérivées partielles de G au point a, sont, pour $1 \leqslant j \leqslant p$:

$$\frac{\partial G}{\partial x_j}(a) = \sum_{i=1}^{i=q} \frac{\partial g}{\partial y_i}(b)\, \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)$$

En pratique, on peut écrire (par abus d'écriture) :

$$df_i(x) = \sum_{j=1}^{j=p} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\, dx_j$$

$$dg(y) = \sum_{i=1}^{i=q} \frac{\partial g}{\partial y_i}(y)\, dy_i$$

$$dG(x) = \sum_{i=1}^{i=q} \frac{\partial g}{\partial y_i}(y)\, df_i(x)$$

HAUT

Changement de variables dans une équation aux dérivées partielles.

HAUT

Etant donnée une équation aux dérivées partielles du premier ordre définie par :

$$G\left(x, y, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = 0$$

où f est une fonction inconnue à déterminer, le but du jeu est de définir un changement de variables $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, avec $h(u, v) = (x, y)$, de matrice jacobienne :

$$J_{(u,v)}(h) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial x}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial y}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix}$$

de telle sorte que l'écriture de l'équation aux dérivées partielles s'en trouve simplifiée.

On pose $F = f \circ h$: la fonction F, c'est f écrit en remplaçant x et y par leurs expressions en fonction de u et v.
C'est f écrit en fonction de u et v.
On suppose que h est différentiable dans un ouvert V de $\mathbb{R}^2$ et que f est différentiable dans un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ contenant $h(V)$.
Alors F est différentiable en tout point (u, v) de U et ses dérivées partielles sont données par la formule matricielle

$$\left(\frac{\partial F}{\partial u}(u,v) \quad \frac{\partial F}{\partial v}(u,v)\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x(u,v), y(u,v)) \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x(u,v), y(u,v))\right) \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial x}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial y}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix}$$

qu'on écrit aussi, de façon abusive mais pratique :

$$\left(\frac{\partial F}{\partial u} \quad \frac{\partial F}{\partial v}\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \quad \frac{\partial f}{\partial y}\right) \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}$$

Lorsque le déterminant de la matrice jacobienne, qu'on appelle le **jacobien de la transfomation**, est différent de 0, cette matrice est inversible et les dérivées partielles de f par rapport à x et par rapport à y sont données par :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} \quad \frac{\partial f}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial F}{\partial u} \quad \frac{\partial F}{\partial v}\right) (J_{(u,v)}(h))^{-1}$$

Dans le cas de deux variables, la matrice inverse $(J_{(u,v)}(h))^{-1}$ est donnée par :

$$(J_{(u,v)}(h))^{-1} = \frac{1}{Det\left(J_{(u,v)}(h)\right)} \begin{pmatrix} \frac{\partial y}{\partial v}(u,v) & -\frac{\partial x}{\partial v}(u,v) \\ -\frac{\partial y}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial x}{\partial u}(u,v) \end{pmatrix}$$

Appelons J le jacobien $Dét\ (J_{(u,v)}\ (h)) = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}$.
Les dérivées partielles de f par rapport à x et y s'expriment, en fonction de u et v, par :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{J}\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{1}{J}\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial F}{\partial v}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{1}{J}\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial F}{\partial u} + \frac{1}{J}\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial F}{\partial v}$$

On peut alors remplacer dans l'équation aux dérivées partielles, x, y, $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, par leurs expressions en fonction de u et v. On obtient une nouvelle équation aux dérivées partielles :

$$H\left(u, v, \frac{\partial F}{\partial u}, \frac{\partial F}{\partial v}\right) = 0$$

qui permettra, on l'espère, de calculer F en fonction de u et v, puis éventuellement, d'en déduire :

$$f\ (x, y) = F\ (h^{-1}\ (x, y)) = F\ (u\ (x, y), v\ (x, y))$$

HAUT

Chapitre 25. Equations aux dérivées partielles d'ordre 1.

Exercices

Exercice 1. Equation linéaire à coefficients constants.
Exercice 2. Equation linéaire à coefficients de degré 1, avec second membre.
Exercice 3. Equation linéaire à coefficients de degré 1, sans second membre.
Exercice 4. Equation linéaire à coefficients de degré 2.
Exercice 5. Equation linéaire.
Exercice 6. Equation linéaire avec second membre.

Exercice 1. Equation linéaire à coefficients constants.

Résoudre l'équation aux dérivées partielles :

$$2\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

en utilisant le changement de coordonnées défini par :

$u = x + y$
$v = x + 2y$

Solution

HAUT

Exercice 2. Equation linéaire à coefficients de degré 1, avec second membre.

Résoudre, dans $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$, l'équation aux dérivées partielles :

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = \sqrt{x^2+y^2}$$

en utilisant les coordonnées polaires du plan.

Solution

HAUT

Exercice 3. Equation linéaire à coefficients de degré 1, sans second membre.

Résoudre, dans $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$, l'équation aux dérivées partielles :

$$x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

en utilisant les coordonnées polaires du plan.

Solution

HAUT

Exercice 4. Equation linéaire à coefficients de degré 2.

Résoudre l'équation aux dérivées partielles :

$$2xy\frac{\partial f}{\partial x}+(1+y^2)\frac{\partial f}{\partial y}=0$$

en utilisant, pour $x > 0$, le changement de coordonnées défini par :

$$x=\frac{u^2+v^2}{2}$$
$$y=\frac{u}{v}$$

Solution

HAUT

Exercice 5. Equation linéaire.

HAUT

1°/ Démontrer que les deux parties suivantes de $\mathbb{R}^2$ sont ouvertes :

$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < y\}$ et $V = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid 4v < u^2\}$

2°/

1. Démontrer que, pour tout $(x, y) \in \Omega$, on a : $(u, v) = (x + y, xy) \in V$.
2. Démontrer que, pour tout $(u, v) \in V$, il existe un unique $(x, y) \in \Omega$ tel que
   $u = x + y$ et $v = xy$.
3. Démontrer que l'application Φ de Ω dans V définie, pour tout $(x, y) \in \Omega$, par
   $\Phi(x, y) = (u, v) = (x + y, xy)$
   est un C^1-difféomorphisme de Ω sur V.
4. Pour tout $(x, y) \in \Omega$, calculer $J_{(x+y,\,xy)}\,\Phi^{-1}$ et $J_{(x,y)}\,\Phi$ en fonction de x et y, puis donner le produit de ces deux matrices ; le résultat obtenu était-il prévisible ?
5. Expliciter $d\Phi\,(0, 1)\,(1, 1)$ et $d\Phi^{-1}\,(1, 0)\,(2, 1)$.

3°/ Pour toute application λ de classe C^1 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on considère l'application G_λ de V dans $\mathbb{R}$ définie, pour tout $(u, v) \in V$, par :

$G_\lambda(u, v) = \lambda(u)\, e^{3v}$.

Solution

1. Démontrer que G_λ est de classe C^1 sur V.
2. Quelle relation simple lie $\frac{\partial G_\lambda}{\partial v}(u, v)$ et $G_\lambda(u, v)$ pour tout $(u, v) \in V$?

4°/ Déterminer toutes les applications G de classe C^1 de V dans $\mathbb{R}$, solutions de l'équation aux dérivées partielles :

$(E)\ \frac{\partial G}{\partial v}(u, v) = 3\,G(u, v)$, pour tout $(u, v) \in V$.

5°/ Soit f une application de Ω dans $\mathbb{R}$, de classe C^1 sur Ω.

1. Expliquer pourquoi $F = f \circ \Phi^{-1}$ est de classe C^1 sur V, et, pour tout $(x, y) \in \Omega$, calculer $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ en fonction de $\frac{\partial F}{\partial u}(u, v)$ et $\frac{\partial F}{\partial v}(u, v)$ où $(u, v) = \Phi(x, y)$.
2. Si f est solution de l'équation aux dérivées partielles :
   $(e)\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + 3(y - x) f(x, y) = 0$, pour tout $(x, y) \in \Omega$,
   démontrer que $F = f \circ \Phi^{-1}$ est solution de (E).

6°/ Déterminer toutes les applications f de Ω dans $\mathbb{R}$, de classe C^1, solutions de (e).

HAUT

Exercice 6. Equation linéaire avec second membre.

1°/ Soit $z : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ une application de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Résoudre l'équation différentielle :

$t\,z'(t) - z(t) = -1$.

2°/ Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ l'application définie par $\varphi(x, y) = (u, v)$ avec $\begin{cases} u = xy \\ v = \dfrac{y}{x} \end{cases}$

et soit $O = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid uv > 0\}$.

a) Démontrer que O est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

b) Soit $U = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$. Démontrer que φ est C^1-difféomorphisme de U sur O.

c) En déduire toutes les applications $f : U \to \mathbb{R}$ de classe C^1 sur U telles que

$$x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) - 2 f(x, y) + 2 = 0$$

Solution

HAUT

Chapitre 25. Equations aux dérivées partielles d'ordre 1.

Enoncés.

Exercice 1. Equation linéaire à coefficients constants.

Résoudre l'équation aux dérivées partielles :

$$2\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

en utilisant le changement de coordonnées défini par :

$u = x + y$
$v = x + 2y$

Solution.

1°/ Changement de coordonnées.

u et v s'appellent les **coordonnées locales**.

Le changement de coordonnées indiqué définit une application $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ qui, au vecteur (x, y), fait correspondre le vecteur $(u, v) = g(x, y) = (x + y, x + 2y)$.
Cette application g est définie dans l'ouvert $\mathbb{R}^2$.
De plus, ici, l'application g est linéaire : on peut la définir par sa matrice

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Le déterminant de g est 1, il est différent de 0, g est inversible et la matrice de $h = g^{-1}$ est l'inverse de la matrice de g :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

L'application h est linéaire. Elle est égale à sa dérivée.
La matrice de l'application dérivée de h est la **matrice du changement de base**, elle a pour colonnes les vecteurs de la nouvelle base (appelée la **base locale** définie par le changement de coordonnées) exprimés par rapport à l'ancienne base (base canonique). On l'appelle aussi **matrice jacobienne du changement de variables**.

$$J_{(u,v)}(h) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial x}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial y}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

C'est la matrice de l'application identique lorsqu'on passe de la base locale $\{e'\} = \{e'_1, e'_2\}$ à la base canonique $\{e\} = \{e_1, e_2\}$:

$$[id_{\mathbb{R}^2}, \{e'\}, \{e\}] = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Le fait que cette matrice soit constante indique seulement que **la base locale ne dépend pas du point (x, y)**.

2°/ Changement de variables dans l'équation.

Le **théorème du changement de variables** s'applique ici, puisque les applications f et h sont de classe C^1 dans $\mathbb{R}^2$ (h est linéaire et la relation écrite entre les dérivées partielles de f, constituant l'équation aux dérivées partielles, sous-entend que ces dérivées partielles sont continues). Il en résulte que :

1. $F = f \circ h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est de classe C^1,
2. Les dérivées partielles de F au point (u, v) sont données par :

$$\frac{\partial F}{\partial u}(u, v) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(u,v), y(u,v)) \frac{\partial x}{\partial u}(u, v) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(u,v), y(u,v)) \frac{\partial y}{\partial u}(u, v)$$
$$\frac{\partial F}{\partial v}(u, v) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(u,v), y(u,v)) \frac{\partial x}{\partial v}(u, v) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(u,v), y(u,v)) \frac{\partial y}{\partial v}(u, v)$$

Or la matrice de l'application linéaire $dF : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est, au point (u, v) :

$$\left(\frac{\partial F}{\partial u}(u,v) \quad \frac{\partial F}{\partial v}(u,v)\right),$$

la matrice de l'application linéaire $df : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est, au point $(x(u,v), y(u,v))$:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x(u,v), y(u,v)) \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x(u,v), y(u,v))\right)$$

Les relations précédentes peuvent s'écrire, sous forme matricielle :

$$\left(\frac{\partial F}{\partial u}(u,v) \quad \frac{\partial F}{\partial v}(u,v)\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x(u,v), y(u,v)) \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x(u,v), y(u,v))\right) \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial x}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial y}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix}$$

soit, en introduisant la matrice jacobienne $J_{(u,v)}(h) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial x}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial y}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$,

$$\left(\frac{\partial F}{\partial u}(u,v) \quad \frac{\partial F}{\partial v}(u,v)\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x(u,v),y(u,v)) \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x(u,v),y(u,v))\right)\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial F}{\partial u}(u, v) = 2\,\frac{\partial f}{\partial x}(x(u,v), y(u,v)) - \frac{\partial f}{\partial y}(x(u,v), y(u,v))$$
$$\frac{\partial F}{\partial v}(u, v) = -\frac{\partial f}{\partial x}(x(u,v), y(u,v)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(u,v), y(u,v))$$

L'équation aux dérivées partielles $2\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ se réduit alors à :

$$\boxed{\frac{\partial F}{\partial u} = 0.}$$

3°/ Résolution de l'équation aux dérivées partielles.

Dire que la dérivée partielle de F par rapport à u est nulle, c'est dire que F ne dépend pas de u : c'est donc une fonction arbitraire φ de v uniquement.
Comme on a supposé que f était de classe C^1, il faut supposer que F est une fonction de classe C^1, donc que la fonction "arbitraire" φ de v doit être une fonction de classe C^1.

La solution générale de l'équation $\frac{\partial F}{\partial u} = 0$ peut donc s'écrire, de façon abusive, mais pratique

$$F(u, v) = \varphi(v),$$

ce qui s'écrit aussi :

$$f(x(u, v), y(u, v)) = \varphi(v)$$

de sorte que $f = F \circ h^{-1} = F \circ g$ est donné par :

$$\boxed{f(x, y) = \varphi(x + 2y), \varphi \text{ de classe } C^1 \text{ dans } \mathbb{R}.}$$

Chapitre 25. Equations aux dérivées partielles d'ordre 1.

Enoncés.

Exercice 2. Equation linéaire à coefficients de degré 1, avec second membre.

Résoudre, dans $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$, l'équation aux dérivées partielles :

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = \sqrt{x^2+y^2}$$

en utilisant les coordonnées polaires du plan.

Solution.

1°/ Coordonnées polaires du plan.

Les coordonnées polaires (r, θ) du plan sont définies par l'application $h : \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$:

$x = r\cos\theta$
$y = r\sin\theta$

La **matrice jacobienne** J du changement de coordonnées est donc :

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r}(r,\theta) & \frac{\partial x}{\partial \theta}(r,\theta) \\ \frac{\partial y}{\partial r}(r,\theta) & \frac{\partial y}{\partial \theta}(r,\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$$

Rappelons que cette matrice a pour colonnes les composantes sur la base canonique des vecteurs de base du repère local.

2°/ Changement de coordonnées dans l'équation.

De façon abusive mais pratique, on écrit, en remplaçant $F(r, \theta) = (f \circ h)(r, \theta) = f(x(r, \theta), y(r, \theta))$ par $f(r, \theta)$:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial r} & \frac{\partial f}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$$

Le déterminant de la matrice jacobienne est r.
Comme on cherche une solution $f(x, y)$ dans $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$, on peut supposer $r \neq 0$.
Pour $r \neq 0$, la matrice jacobienne est inversible et on a :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} \quad \frac{\partial f}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial r} \quad \frac{\partial f}{\partial \theta}\right)\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\frac{\sin\theta}{r} & \frac{\cos\theta}{r} \end{pmatrix}$$

L'équation aux dérivées partielles :

$$x\,\frac{\partial f}{\partial x} + y\,\frac{\partial f}{\partial y} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

s'écrit alors, en fonction de r et θ :

$$r\cos\theta\left(\cos\theta\,\frac{\partial f}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\,\frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + r\sin\theta\left(\sin\theta\,\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\,\frac{\partial f}{\partial \theta}\right) = r$$

$$r\,\frac{\partial f}{\partial r} = r$$

Comme on a supposé r différent de 0, on peut simplifier par r. Il reste :

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial r} = 1}$$

3°/ Résolution de l'équation aux dérivées partielles.

L'équation $\frac{\partial f}{\partial r} = 1$ peut s'intégrer par rapport à r :

$$f(r, \theta) = r + \varphi(\theta)$$

où la fonction numérique arbitraire φ doit être de classe C^1 pour que f le soit.

Comme $\theta = Arctan\ \frac{y}{x}$ ne dépend que du rapport $\frac{y}{x}$, la solution s'écrira, en fonction de x et y :

$$\boxed{f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} + \phi\left(\frac{y}{x}\right)}$$

où ϕ doit être de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ pour que f le soit sur $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$.

Chapitre 25. Equations aux dérivées partielles d'ordre 1.

Enoncés.

Exercice 3. Equation linéaire à coefficients de degré 1, sans second membre.

Résoudre, dans $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$, l'équation aux dérivées partielles : $$x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x} = 0$$ en utilisant les coordonnées polaires du plan.	

Solution.

1°/ Coordonnées polaires du plan.

Les coordonnées polaires (r, θ) du plan sont définies par :

$x = r\cos\theta$
$y = r\sin\theta$

La **matrice jacobienne** du changement de coordonnées est donc :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r}(r,\theta) & \frac{\partial x}{\partial \theta}(r,\theta) \\ \frac{\partial y}{\partial r}(r,\theta) & \frac{\partial y}{\partial \theta}(r,\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$$

Rappelons que cette matrice a pour colonnes les composantes sur la base canonique des vecteurs de base du repère local.

2°/ Changement de coordonnées dans l'équation.

De façon abusive mais pratique, on écrit, en remplaçant $F(r, \theta) = (f \circ h)(r, \theta) = f(x(r, \theta), y(r, \theta))$ par $f(r, \theta)$:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial r} & \frac{\partial f}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$$

Le déterminant de la matrice jacobienne est r.
Comme on cherche une solution dans $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$, on peut supposer $r \neq 0$.
Pour $r \neq 0$, la matrice jacobienne est inversible et on a :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} \quad \frac{\partial f}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial r} \quad \frac{\partial f}{\partial \theta}\right) \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\frac{\sin\theta}{r} & \frac{\cos\theta}{r} \end{pmatrix}$$

L'équation aux dérivées partielles :

$$x \frac{\partial f}{\partial y} - y \frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

s'écrit alors, en fonction de r et θ :

$$r \cos\theta \left(\sin\theta \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta}\right) - r \sin\theta \left(\cos\theta \frac{\partial f}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta}\right) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = 0$$

Comme on a supposé r différent de 0, on peut simplifier par r. Il reste :

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial \theta} = 0}$$

3°/ Résolution de l'équation aux dérivées partielles.

L'équation $\frac{\partial f}{\partial \theta} = 0$ peut s'intégrer par rapport à θ :

$$f(r, \theta) = \varphi(r)$$

où la fonction numérique arbitraire φ doit être de classe C^1 pour que f le soit.

$$\boxed{f(x, y) = \varphi(r), \varphi \text{ de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}^*.}$$

En fonction de x et y, la solution peut être écrite :

$$\boxed{f(x, y) = \phi(x^2 + y^2), \phi \text{ de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}^*.}$$

Chapitre 25. Equations aux dérivées partielles d'ordre 1.

Enoncés.

Exercice 4. Equation linéaire à coefficients de degré 2.

Résoudre l'équation aux dérivées partielles :

$$2xy\frac{\partial f}{\partial x}+(1+y^2)\frac{\partial f}{\partial y}=0$$

en utilisant, pour $x > 0$, le changement de coordonnées défini par :

$$x=\frac{u^2+v^2}{2}$$
$$y=\frac{u}{v}$$

Solution.

1°/ Matrice jacobienne.

$$J_{(u,v)}(h)=\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial r}(r,\theta) & \frac{\partial x}{\partial \theta}(r,\theta)\\ \frac{\partial y}{\partial r}(r,\theta) & \frac{\partial y}{\partial \theta}(r,\theta)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u & v\\ \frac{1}{v} & -\frac{u}{v^2}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y}\end{pmatrix}J_{(u,v)}(h)$$

Le jacobien est $J=-\frac{u^2}{v^2}-1=-\frac{u^2+v^2}{v^2}$.

Le changement de coordonnées est défini si, et seulement si, le jacobien J est un nombre réel différent de 0, soit :
— v est différent de 0
— x est strictement plus grand que 0 (positif parce c'est une somme de carrés, et différent de 0 parce que v doit être différent de 0).

2°/ Changement de coordonnées dans l'équation aux dérivées partielles.

La matrice inverse de la matrice jacobienne est :

$$(J_{(u,v)}(h))^{-1} = \frac{1}{J}\begin{pmatrix} \frac{\partial y}{\partial v}(u,v) & -\frac{\partial x}{\partial v}(u,v) \\ -\frac{\partial y}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial x}{\partial u}(u,v) \end{pmatrix}$$

La formule

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} \quad \frac{\partial f}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial F}{\partial u} \quad \frac{\partial F}{\partial v}\right)(J_{(u,v)}(h))^{-1}$$

s'écrit donc :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{J}\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{1}{J}\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial F}{\partial v} = +\frac{v^2}{u^2+v^2}\frac{u}{v^2}\frac{\partial F}{\partial u} + \frac{v^2}{u^2+v^2}\frac{1}{v}\frac{\partial F}{\partial v}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{1}{J}\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial F}{\partial u} + \frac{1}{J}\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial F}{\partial v} = +\frac{v^2}{u^2+v^2}v\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{v^2}{u^2+v^2}u\frac{\partial F}{\partial v}$$

et l'équation aux dérivées partielles $2xy\frac{\partial f}{\partial x} + (1+y^2)\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ s'écrit :

$$2\frac{u^2+v^2}{2}\frac{u}{v}\frac{1}{u^2+v^2}\left(u\frac{\partial F}{\partial u} + v\frac{\partial F}{\partial v}\right) + \left(1+\frac{u^2}{v^2}\right)\frac{v^2}{u^2+v^2}\left(v\frac{\partial F}{\partial u} - u\frac{\partial F}{\partial v}\right) = 0$$

$$\left(\frac{u}{v}u + v\right)\frac{\partial F}{\partial u} + (u-u)\frac{\partial F}{\partial v} = 0$$

$$\frac{u^2+v^2}{v}\frac{\partial F}{\partial u} = 0$$

Comme $\frac{u^2+v^2}{v}$ est un nombre réel strictement positif, on peut simplifier et l'équation aux dérivées partielles se réduit à :

$$\boxed{\frac{\partial F}{\partial u} = 0}$$

3°/ Résolution de l'équation aux dérivées partielles.

La relation $\frac{\partial F}{\partial u} = 0$ indique que F ne dépend que de v, c'est-à-dire ne dépend que de $v^2 = \frac{2x}{1+y^2}$, ou encore ne dépend que de $\frac{x}{1+y^2}$

$$\boxed{f(x,y) = \varphi\left(\frac{x}{1+y^2}\right)}$$

Pour obtenir cette solution, on a supposé $x > 0$ et φ de classe C^1.

Pour x quelconque et φ de classe C^1, on obtient :

$$2\,x\,y\,\frac{\partial f}{\partial x}+(1+y^2)\frac{\partial f}{\partial y}=2\,x\,y\,\varphi'\left(\frac{x}{1+y^2}\right)\times\frac{1}{1+y^2}+(1+y^2)\,\varphi'\left(\frac{x}{1+y^2}\right)\times\frac{-2\,x\,y}{(1+y^2)^2}=0$$

donc la formule $f(x, y) = \varphi\left(\frac{x}{1+y^2}\right)$ donne encore la solution pour ***x*** **quelconque**.

Chapitre 25. Equations aux dérivées partielles d'ordre 1.

Enoncés.

Exercice 5. Equation linéaire.

1°/ Démontrer que les deux parties suivantes de $\mathbb{R}^2$ sont ouvertes :
$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < y\}$ et $V = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid 4v < u^2\}$

2°/

1. Démontrer que, pour tout $(x, y) \in \Omega$, on a : $(u, v) = (x + y, xy) \in V$.
2. Démontrer que, pour tout $(u, v) \in V$, il existe un unique $(x, y) \in \Omega$ tel que
   $u = x + y$ et $v = xy$.
3. Démontrer que l'application Φ de Ω dans V définie, pour tout $(x, y) \in \Omega$, par
   $\Phi(x, y) = (u, v) = (x + y, xy)$
   est un C^1-difféomorphisme de Ω sur V.
4. Pour tout $(x, y) \in \Omega$, calculer $J_{(x+y,\,xy)}\,\Phi^{-1}$ et $J_{(x,y)}\,\Phi$ en fonction de x et y, puis donner le produit de ces deux matrices ; le résultat obtenu était-il prévisible ?
5. Expliciter $d\Phi\,(0, 1)\,(1, 1)$ et $d\Phi^{-1}\,(1, 0)\,(2, 1)$.

3°/ Pour toute application λ de classe C^1 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on considère l'application G_λ de V dans $\mathbb{R}$ définie, pour tout $(u, v) \in V$, par :

$G_\lambda(u, v) = \lambda(u)\, e^{3v}$.

1. Démontrer que G_λ est de classe C^1 sur V.
2. Quelle relation simple lie $\dfrac{\partial G_\lambda}{\partial v}(u, v)$ et $G_\lambda(u, v)$ pour tout $(u, v) \in V$?

4°/ Déterminer toutes les applications G de classe C^1 de V dans $\mathbb{R}$, solutions de l'équation aux dérivées partielles :

$(E)\ \dfrac{\partial G}{\partial v}(u, v) = 3\,G(u, v)$, pour tout $(u, v) \in V$.

5°/ Soit f une application de Ω dans $\mathbb{R}$, de classe C^1 sur Ω.

1. Expliquer pourquoi $F = f \circ \Phi^{-1}$ est de classe C^1 sur V, et, pour tout $(x, y) \in \Omega$, calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ en fonction de $\dfrac{\partial F}{\partial u}(u, v)$ et $\dfrac{\partial F}{\partial v}(u, v)$ où $(u, v) = \Phi(x, y)$.
2. Si f est solution de l'équation aux dérivées partielles :

(*e*) $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + 3\,(y - x)\,f\,(x, y) = 0$, pour tout $(x, y) \in \Omega$,
démontrer que $F = f \circ \Phi^{-1}$ est solution de (*E*).

6°/ Déterminer toutes les applications *f* de Ω dans $\mathbb{R}$, de classe C^1, solutions de (*e*).

Solution.

1°/ Ouverts.

L'application $(x, y) \mapsto y - x$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ est une application polynomiale, donc continue.
L'intervalle ouvert]0, +∞ [est un ouvert de $\mathbb{R}$ car tout intervalle ouvert est un ouvert.
Or l'image réciproque d'un ouvert par une application continue est un ouvert, donc l'image réciproque de]0, +∞ [par l'application $(x, y) \mapsto y - x$ est un ouvert.
L'image réciproque de]0, +∞ [par l'application $(x, y) \mapsto y - x$ est, par définition, Ω, donc Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

De même, l'application $(u, v) \mapsto u^2 - 4\,v$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ est une application polynomiale, donc continue.
L'intervalle ouvert]0, +∞ [est un ouvert de $\mathbb{R}$ car tout intervalle ouvert est un ouvert.
Or l'image réciproque d'un ouvert par une application continue est un ouvert, donc l'image réciproque de]0, +∞ [par l'application $(u, v) \mapsto u^2 - 4\,v$ est un ouvert.
L'image réciproque de]0, +∞ [par l'application $(u, v) \mapsto u^2 - 4\,v$ est, par définition, *V*, donc *V* est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

2°/ C^1-difféomorphisme Φ.

Posons $\Phi\,(x, y) = (x + y, x\,y)$.

a) Image de Ω par Φ.

On a, quel que soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $(x - y)^2 \geqslant 0$, l'égalité n'étant réalisée que si $x = y$.
En particulier, pour $(x, y) \in \Omega$, *x* est strictement plus petit que *y*, donc *x* est différent de *y* et l'on a $(x - y)^2 > 0$.
Or $(x - y)^2$ est égal à $(x + y)^2 - 4\,x\,y$, donc, pour tout $(x, y) \in \Omega$, on a $(x + y)^2 - 4\,x\,y > 0$, soit $4\,x\,y < (x + y)^2$.
Et cette inégalité signifie exactement que l'élément $(x + y, x\,y)$ de $\mathbb{R}^2$ appartient à *V*.
Autrement dit :

Φ est une application de Ω dans *V*.

b) Φ est bijective.

Soit (u, v) un élément quelconque de *V*.
Par définition de *V*, on a : $4\,v < u^2$.
Il existe donc un unique $t \in]\,0, +\infty\,[$ tel que $t^2 = u^2 - 4\,v$.
La solution du système d'équations :

$$\begin{aligned} x + y &= u \\ -x + y &= t \end{aligned}$$

est unique, puisque la matrice des coefficients $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible (son déterminant vaut 2, il est différent de 0).

$$x = \frac{1}{2}(u - t) = \frac{1}{2}(u - \sqrt{u^2 - 4v})$$

$$y = \frac{1}{2}(u + t) = \frac{1}{2}(u + \sqrt{u^2 - 4v})$$

Comme t est strictement plus grand que 0, $y = x + t$ est strictement plus grand que x.
Autrement dit, le couple (x, y) est un élément de Ω.
On a donc ainsi défini une application Ψ de V dans Ω, vérifiant

$$\Psi(u, v) = (x, y) = \left(\frac{1}{2}(u - \sqrt{u^2 - 4v}) , \frac{1}{2}(u + \sqrt{u^2 - 4v}) \right)$$

Cette application Ψ est une section et une rétraction de Φ.

• En effet, calculons d'abord $\Phi(\Psi(u, v))$ pour un (u, v) quelconque de V.

$$\Phi(\Psi(u, v)) = \Phi\left(\frac{1}{2}(u - \sqrt{u^2 - 4v}) , \frac{1}{2}(u + \sqrt{u^2 - 4v}) \right)$$

$$= \left(\frac{1}{2}(u - \sqrt{u^2 - 4v}) + \frac{1}{2}(u + \sqrt{u^2 - 4v}), \frac{1}{2}(u - \sqrt{u^2 - 4v}) \times \frac{1}{2}(u + \sqrt{u^2 - 4v}) \right) = (u, v)$$

La relation $\Phi(\Psi(u, v)) = (u, v)$ pour tout $(u, v) \in V$, montre que Ψ est une **section** (ou inverse à droite) de Φ, donc que Φ est **surjective**.

• Calculons ensuite $\Psi(\Phi(x, y))$ pour un (x, y) quelconque de Ω.
Par définition de Ψ et de Φ, on a :

$$\Psi(\Phi(x, y)) = \left(\frac{1}{2}((x + y) - \sqrt{(x+y)^2 - 4xy}) , \frac{1}{2}((x + y) + \sqrt{(x+y)^2 - 4xy}) \right).$$

Or $(x + y)^2 - 4xy = (x - y)^2$ et comme (x, y) est élément de Ω, $y - x$ est strictement plus grand que 0, de sorte que l'on a :

$$\sqrt{(x+y)^2 - 4xy} = \sqrt{(x-y)^2} = |x - y| = y - x$$

$$\Psi(\Phi(x, y)) = \left(\frac{1}{2}((x + y) - (y - x)) , \frac{1}{2}((x + y) + (y - x)) \right) = (x, y).$$

La relation $\Psi(\Phi(x, y)) = (x, y)$ pour tout $(x, y) \in \Omega$, montre que Ψ est une **rétraction** (ou inverse à gauche) de Φ, donc que Φ est **injective**.

En résumé :

Φ est bijective et son application réciproque $\Phi^{-1} : V \to \Omega$ est définie par
$$\Phi^{-1}(u, v) = \left(\frac{1}{2}(u - \sqrt{u^2 - 4v}) , \frac{1}{2}(u + \sqrt{u^2 - 4v}) \right)$$

c) Φ est un C^1-difféomorphisme.

On sait déjà que Φ est une bijection.
Φ est dérivable parce que ses composantes sont des applications polynomiales donc dérivables de Ω dans $\mathbb{R}$.

Pour montrer que Φ est un C^1-difféomorphisme, il reste seulement à montrer que l'application réciproque $\Psi = \Phi^{-1}$ est dérivable en tout point (u, v) de V.

Or comme $u^2 - 4v$ est toujours strictement positif dans V, l'application $(u, v) \mapsto \sqrt{u^2 - 4v}$ est composée de l'application polynomiale, dérivable, $(u, v) \mapsto u^2 - 4v$ de V dans $\mathbb{R}_+^*$ et de l'application puissance, dérivable, $t \mapsto t^{\frac{1}{2}}$, de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$.

L'application $(u, v) \mapsto \sqrt{u^2 - 4v}$ est donc dérivable.
Il en résulte que les applications composantes de Φ^{-1} sont des applications dérivables, donc que Φ^{-1} elle-même est dérivable.

Φ est un C^1-difféomorphisme de Ω sur V.

d) Matrices jacobiennes.

Par abus d'écriture, en notant encore u et v les applications composantes de Φ, on peut écrire :

$$J_{(x, y)}\,\Phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ y & x \end{pmatrix}$$

et la matrice inverse de cette matrice est, en notant, par abus d'écriture, x et y les applications composantes de Φ^{-1} :

$$J_{(x+y,\,xy)}\,\Phi^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = \frac{1}{x-y}\begin{pmatrix} x & -1 \\ -y & 1 \end{pmatrix}.$$

On remarquera que, dans Ω, $x - y$ n'est jamais nul.

Puisque les deux matrices sont inverses l'une de l'autre, leur produit est la matrice unité de $M_2(\mathbb{R})$.

e) Applications dérivées.

L'application dérivée de Φ a pour matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ la matrice jacobienne de Φ.
Il en résulte :

$$d\Phi\,(0, 1)\,(1, 1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = (2, 1)$$

Au vecteur $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ correspond, par Φ^{-1}, le vecteur $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

L'application dérivée de Φ^{-1} a pour matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ la matrice jacobienne de Φ^{-1}.
On a donc :

$$d\Phi^{-1}(1, 0)(2, 1) = -\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (1, 1)$$

$$\boxed{d\Phi(0, 1)(1, 1) = (2, 1) \; ; \; d\Phi^{-1}(1, 0)(2, 1) = (1, 1)}$$

3°/ Application G_λ.

a) G_λ est de classe C^1 sur V.

L'application $(u, v) \mapsto (\lambda(u), e^{3v})$ de V dans $\mathbb{R}^2$ est de classe C^1 sur V parce ses composantes sont de classe C^1 sur V.
L'application $(x, y) \mapsto x\,y$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ est de classe C^1, parce que c'est une application polynomiale.
L'application composée des deux précédentes est donc de classe C^1 sur V.
Donc l'application $G_\lambda : (u, v) \mapsto \lambda(u)\, e^{3v}$ de V dans $\mathbb{R}$ est de classe C^1 sur V.

$$\boxed{G_\lambda \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } V.}$$

b) Equation aux dérivées partielles de G_λ.

La dérivée partielle de G_λ par rapport à v est $\dfrac{\partial G_\lambda}{\partial v}(u, v) = 3\,\lambda(u)\, e^{3v} = 3\, G_\lambda(u, v)$.
Donc G_λ vérifie l'équation aux dérivées partielles :

$$\boxed{\frac{\partial G_\lambda}{\partial v} = 3\, G_\lambda}$$

4°/ Résolution de l'équation (E).

L'intégration de l'équation aux dérivées partielles (E) par rapport à v :

$$\frac{\partial G}{\partial v}(u, v) = 3\, G(u, v)$$

donne :

$$ln\,|\, G(u, v)\,| = 3\, v + \mu(u)$$

où μ est une application arbitraire de classe C^1 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

En prenant l'exponentielle des deux membres, et en faisant entrer le signe dans l'application λ, cette solution peut être écrite :

$$\boxed{G(u, v) = \lambda(u)\, e^{3v}}$$

où λ est une application arbitraire de classe C^1 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de sorte que G est une application de classe C^1 de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

En particulier, la restriction de G à V est une application de classe C^1 de V dans $\mathbb{R}$ solution de l'équation aux dérivées partielles.
De plus, toute solution de l'équation (E) qui est une application de classe C^1 de V dans $\mathbb{R}$ est de cette forme, avec un λ qui est de classe C^1 sur la première projection de V sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire avec un λ qui est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

5°/ Relation entre les solutions de l'équation (E) et les solutions de l'équation (e).

a) Dérivées partielles.

Pour toute application f de Ω dans $\mathbb{R}$, de classe C^1 sur Ω, comme Φ^{-1} est un C^1-difféomorphisme de V sur Ω, l'application composée des deux est de classe C^1 sur V.

$$\boxed{F = f \circ \Phi^{-1} \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } V.}$$

On peut écrire alors $f = F \circ \Phi$.
Le théorème de dérivation des fonctions composées s'applique :

$$df(x, y) = dF(\Phi(x, y)) \circ d\Phi(x, y)$$

En termes de matrices jacobiennes, cette égalité d'applications linéaires se traduit par l'égalité matricielle :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right) = \left(\frac{\partial F}{\partial u}(\Phi(x, y)) \quad \frac{\partial F}{\partial v}(\Phi(x, y))\right) J_{(x, y)}\Phi = \left(\frac{\partial F}{\partial u}(\Phi(x, y)) \quad \frac{\partial F}{\partial v}(\Phi(x, y))\right) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ y & x \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \frac{\partial F}{\partial u}(\Phi(x, y)) + y \frac{\partial F}{\partial v}(\Phi(x, y)) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= \frac{\partial F}{\partial u}(\Phi(x, y)) + x \frac{\partial F}{\partial v}(\Phi(x, y)) \end{aligned}}$$

b) Equation aux dérivées partielles.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + 3(y - x) f(x, y) &= \frac{\partial F}{\partial u}(\Phi(x, y)) + x \frac{\partial F}{\partial v}(\Phi(x, y)) - \left(\frac{\partial F}{\partial u}(\Phi(x, y)) + y \frac{\partial F}{\partial v}(\Phi(x, y))\right) + 3(y - x) F(\Phi(x, y)) \\ &= (x - y)\left(\frac{\partial F}{\partial v}(\Phi(x, y)) - 3 F(\Phi(x, y))\right) \end{aligned}$$

La relation :

$$(e) \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + 3(y - x) f(x, y) = 0, \text{ pour tout } (x, y) \in \Omega,$$

avec $(x - y) \neq 0$, pour tout $(x, y) \in \Omega$, se traduit donc par :

$$\left(\frac{\partial F}{\partial v} - 3F\right) \circ \Phi = 0$$

et comme Φ est inversible, il vient, en composant à droite par Φ^{-1} :

$$\frac{\partial F}{\partial v} - 3F = 0$$

ce qui montre que, avec $F = f \circ \Phi^{-1}$, ou, de façon équivalente, avec $f = F \circ \Phi$, la relation

"f est une application de classe C^1 de Ω dans $\mathbb{R}$ vérifiant l'équation (e)"

est équivalente à la relation

"F est une application de classe C^1 de V dans $\mathbb{R}$ vérifiant l'équation (E)" :

$$\boxed{\frac{\partial F}{\partial v}(u, v) = 3F(u, v), \text{ pour tout } (u, v) \in V.}$$

6°/ Résolution de l'équation (*e*).

D'après le résultat de la quatrième question, on connaît déjà toutes les applications F de classe C^1 de V dans $\mathbb{R}$, solutions de l'équation aux dérivées partielles (E) : ce sont les applications $(u, v) \mapsto \lambda(u)\, e^{3v}$, où λ est une application arbitraire de classe C^1 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

D'après le résultat que la question 5.b, les applications f de classe C^1 de Ω dans $\mathbb{R}$ vérifiant l'équation (e) sont donc les applications :

$(x, y) \mapsto \lambda(x + y)\, e^{3xy}$, où λ est une application arbitraire de classe C^1 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

$$\boxed{f(x, y) = \lambda(x + y)\, e^{3xy}, \text{ où } \lambda \text{ est une application arbitraire de classe } C^1 \text{ de } \mathbb{R} \text{ dans } \mathbb{R}.}$$

Chapitre 25. Equations aux dérivées partielles d'ordre 1.

Enoncés.

Exercice 6. Equation linéaire avec second membre.

1°/ Soit $z : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ une application de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$.
Résoudre l'équation différentielle :
$t\,z'(t) - z(t) = -1$.

2°/ Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ l'application définie par $\varphi(x, y) = (u, v)$ avec $\begin{cases} u = xy \\ v = \dfrac{y}{x} \end{cases}$

et soit $O = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid uv > 0\}$.
a) Démontrer que O est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
b) Soit $U = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$. Démontrer que φ est C^1-difféomorphisme de U sur O.
c) En déduire toutes les applications $f : U \to \mathbb{R}$ de classe C^1 sur U telles que
$x \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) - 2 f(x, y) + 2 = 0$

Solution.

1°/ Equation diférentielle.

a) Méthode pour les petits futés.

La forme $t\,z'(t) - z(t)$ fait immédiatement penser à la dérivée d'un quotient $\dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ avec $u(t) = z(t)$ et $v(t) = t$.
Il manque seulement le dénominateur $v^2 = t^2$: qu'à cela ne tienne, ajoutons-le.
On peut diviser par t^2 puisque $z(t)$ n'est défini que sur $\mathbb{R}_+^*$.

L'équation différentielle devient :

$$\frac{tz'(t) - z(t)}{t^2} = -\frac{1}{t^2}$$
$$\left(\frac{z(t)}{t}\right)' = \left(\frac{1}{t}\right)'$$
$$\left(\frac{z(t) - 1}{t}\right)' = 0$$

donc la solution générale est donnée par :

$\frac{z(t)-1}{t}$ ne dépend pas de t

$\frac{z(t)-1}{t} = constante$

$$\boxed{z\,(t) = 1 + \lambda\, t, \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}, \text{ arbitraire indépendant de } t.}$$

b) L'artillerie lourde.

L'équation différentielle $t\,z'\,(t) - z\,(t) = -1$ est une équation différentielle linéaire du premier ordre, à coefficients non constants, avec second membre (c'est-à-dire non homogène).
Sa solution générale s'obtient en ajoutant, à la solution générale de l'équation sans second membre (équation homogène associée), une solution particulière de l'équation avec second membre.

1. Solution générale de l'équation sans second membre.

L'équation homogène associée à notre équation différentielle est :

$$t\,z'\,(t) - z\,(t) = 0$$

Cette équation s'écrit, en dehors de la solution triviale $z\,(t) = 0$:

$$\frac{z'(t)}{z(t)} = \frac{1}{t}$$

Sa solution générale est donnée par :

$$ln\,|\,z\,(t)\,| = ln\,|\,t\,| + constante.$$

Les solutions définie pour $t > 0$ s'écrivent donc, puisque la fonction logarithme est une bijection de $]\,0\,,\,+\infty\,[$ sur $\mathbb{R}$:

$$\boxed{z\,(t) = \lambda\, t}$$

où λ est une constante réelle arbitraire.
La solution triviale $z\,(t) = 0$ est incluse dans cette forme, on l'obtient pour $\lambda = 0$.

2. Solution particulière de l'équation avec second membre.

L'équation différentielle :

$$t\,z'\,(t) - z\,(t) = -1$$

a pour second membre une constante et le coefficient de z est une constante. Cherchons une solution particulière constante : elle est évidente, car si $z'\,(t)$ est nul, il reste $z\,(t) = 1$.

$$\boxed{z\,(t) = 1}$$

Que faire si l'on n'a pas aperçu cette solution particulière évidente. Il reste à appliquer la méthode de variation de la constante, (méthode de Lagrange).
On cherche une solution particulière de la forme $z\,(t) = \lambda\,(t)\,t$, où $\lambda\,(t)$ est une fonction numérique

définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

Pour un tel z, la dérivée est $z'(t) = \lambda'(t)\, t + \lambda(t)$ et l'équation différentielle s'écrit :

$$t(\lambda'(t)\, t + \lambda(t)) - \lambda(t)\, t = -1$$
$$\lambda'(t)\, t^2 = -1$$
$$\lambda'(t) = -\frac{1}{t^2}$$

On trouve donc une solution particulière en prenant pour $\lambda(t)$ n'importe quelle fonction numérique dont la dérivée est $-\frac{1}{t^2}$.
On peut prendre, par exemple :

$$\lambda(t) = \frac{1}{t}$$

ce qui donne la solution particulière :

$$\boxed{z(t) = \lambda(t)\, t = 1}$$

3. Solution générale de l'équation avec second membre.

Cette solution générale de l'équation différentielle $t\, z'(t) - z(t) = -1$ s'obtient en additionnant, à la solution générale $\lambda\, t$ de l'équation sans second membre, la solution particulière 1 de l'équation avec second membre :

$$\boxed{z(t) = 1 + \lambda\, t, \text{ où } \lambda \text{ est une constante réelle arbitraire.}}$$

On obtient, bien sûr, le même résultat qu'avec la méthode précédente, mais à quel prix !

2°/ Equation aux dérivées partielles.

a) Ouvert *O*.

L'application $\phi : (u, v) \mapsto u\, v$ est une application continue, et même de classe C^∞, de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, (produit des deux projecteurs).
L'intervalle ouvert $]0, +\infty[$ est un ouvert de $\mathbb{R}$.
L'image réciproque d'un ouvert par une application continue est un ouvert.
L'image réciproque de l'ouvert $]0, +\infty[$ par l'application continue ϕ est donc un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
Or $\phi^{-1}(]0, +\infty[)$ est l'ensemble des couples (u, v) de $\mathbb{R}^2$ qui vérifient $u\, v = \phi(u, v) > 0$, c'est donc l'ensemble O.
Donc :

$$\boxed{O \text{ est un ouvert de } \mathbb{R}^2.}$$

b) C^1-difféomorphisme φ.

1. Bijection.

Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ l'application définie par $\varphi(x, y) = (u, v)$ avec $\begin{cases} u = x\,y \\ v = \dfrac{y}{x} \end{cases}$.

Ses composantes $u : (x, y) \mapsto x\,y$ et $v : (x, y) \mapsto \dfrac{y}{x}$, sont des applications de classe C^1, et même C^∞, sur $\mathbb{R}^2 - \{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$.
Donc φ est une application de classe C^1, et même C^∞, sur $\mathbb{R}^2 - \{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$.
L'ensemble $U = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$, produit de deux ouverts non vides de $\mathbb{R}$, est un ouvert non vide de $\mathbb{R}^2$.

Pour $U = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$, notons φ_U la restriction de φ à U.

φ_U est une application de U dans $\mathbb{R}^2$, de classe C^1, et même C^∞, sur U.

Pour un couple (x, y) de nombres réels strictement positifs, $\varphi_U(x, y) = \varphi(x, y) = \left(x\,y, \dfrac{y}{x}\right)$ est un couple de nombres réels strictement positifs.
L'image de φ_U est donc contenue dans U, lui-même contenu dans l'ouvert O.

Remarquons cependant que O contient aussi tous les couples de nombres réels strictement négatifs puisque le produit de deux tels nombres est strictement positif.

Considérons un élément quelconque (u, v) de U.
Posons $y = \sqrt{uv}$, $x = \sqrt{\dfrac{u}{v}}$, x et y sont des nombres réels strictement positifs, (x, y) est un élément de U et l'on a :

$$\varphi_U(x, y) = \varphi(x, y) = \left(x\,y, \frac{y}{x}\right) = (u, v).$$

Cette relation montre que le couple (u, v), choisi arbitrairement dans U, est l'image par φ_U d'un élément (x, y) de U.
L'application $\varphi_U : U \to U$ est donc surjective.

$$\boxed{\varphi_U(U) = U}$$

Elle est injective aussi. En effet, si l'on considère deux couples (x, y) et (x', y') de nombres réels strictement positifs ayant la même image (u, v) par φ_U, on a :

$$u = x\,y = x'\,y'$$
$$v = \frac{y}{x} = \frac{y'}{x'}$$

donc, par produit :

$$y^2 = y'^2$$

et, par quotient :

$$x^2 = x'^2$$

et comme x, x', y, y', sont tous des nombres réels strictement positifs, il vient :

$$x = x'$$

$$y = y'$$

ce qui montre que

φ_U est injective

2. Application dérivée.

La matrice jacobienne de φ_U est :

$$J_{(x, y)}(\varphi_U) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & x \\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \end{pmatrix}$$

Son déterminant est

$$Det\,(J_{(x, y)}(\varphi_U)) = 2\,\frac{y}{x} = 2\,v.$$

Il est différent de 0 dans U.
Donc l'application linéaire dérivée de φ_U est une bijection de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$, pour tout élément (x, y) de U.

3. Théorème d'inversion globale.

Les conditions d'application du théorème d'inversion globale sont vérifiées :
— U est un ouvert non vide de $\mathbb{R}^2$
— $\varphi_U : U \to \mathbb{R}^2$ est de classe C^1, et même C^∞, sur U.
— φ_U est injective.
— $d\varphi_U$ est bijective pour tout (x, y) de U.
Les conclusions du théorème d'inversion globale s'appliquent :
— $U = \varphi_U(U)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$, mais, ça, on le savait déjà.
— φ_U est un C^1-difféomorphisme de U sur U.

La restriction φ_U de φ à l'ouvert U est un C^1-difféomorphisme de U sur U.

c) Résolution de l'équation aux dérivées partielles.

Soit $g = f \circ \varphi_U^{-1}$.

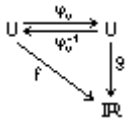
φ_U^{-1}, comme φ_U est un C^1-difféomorphisme de U sur U.
Comme f est supposée différentiable sur U, le théorème du changement de variables s'applique : g est une application différentiable sur U et sa matrice jacobienne est donnée par :

$$J_{(u, v)}(g) = J_{\varphi_U^{-1}(u, v)}(f) \times J_{(u, v)}(\varphi_U^{-1}).$$

Et, inversement :

$$J_{(x,y)}(f) = J_{\varphi_U(x,y)}(g) \times J_{(x,y)}(\varphi_U)$$

On peut construire le diagramme commutatif suivant, d'applications différentiables sur U :



La formule $J_{(x,y)}(f) = J_{\varphi_U(x,y)}(g) \times J_{(x,y)}(\varphi_U)$ permet d'exprimer les dérivées partielles de f en fonction de celles de g, dans la formule matricielle :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) = \left(\frac{\partial g}{\partial u}(u(x,y), v(x,y)) \quad \frac{\partial g}{\partial v}(u(x,y), v(x,y))\right)\begin{pmatrix} y & x \\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \end{pmatrix}$$

L'équation aux dérivées partielles :

$$x\,\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\,\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) - 2\,f(x,y) + 2 = 0$$

qui s'écrit aussi :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2\,f(x,y) - 2$$

devient :

$$\left(\frac{\partial g}{\partial u}(u(x,y), v(x,y)) \quad \frac{\partial g}{\partial v}(u(x,y), v(x,y))\right)\begin{pmatrix} y & x \\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2\,f(x,y) - 2$$

$$\left(\frac{\partial g}{\partial u}(u(x,y), v(x,y)) \quad \frac{\partial g}{\partial v}(u(x,y), v(x,y))\right)\begin{pmatrix} 2xy \\ 0 \end{pmatrix} = 2\,g(u(x,y), v(x,y)) - 2$$

$$\left(\frac{\partial g}{\partial u}(u(x,y), v(x,y)) \quad \frac{\partial g}{\partial v}(u(x,y), v(x,y))\right)\begin{pmatrix} 2u(x,y) \\ 0 \end{pmatrix} = 2\,g(u(x,y), v(x,y)) - 2$$

$$2\,u\,\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) = 2\,g(u,v) + 2$$

$$u\,\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) - g(u,v) - 1 = 0$$

La solution trouvée dans la première question permet de l'intégrer par rapport à u :

$\frac{g(u,v)-1}{u}$ ne dépend pas de u, c'est une fonction numérique arbitraire de v, donc une application] 0, +∞ [$\to \mathbb{R}$, de classe C^1 sur] 0, +∞ [.

$$g(u,v) = 1 + \lambda(v)\,u$$

La solution $f = g \circ \varphi_U$ est alors donnée par :

$f(x, y) = 1 + x\,y \times \lambda\left(\frac{y}{x}\right)$, où λ est une application $]0, +\infty[\to \mathbb{R}$, arbitraire de classe C^1.

Exercices

Dérivées partielles successives, laplacien.

1. Gradient.
2. Laplacien, fonction harmonique.
3. Divergence.
4. Rotationnel.

Gradient.

Etant donné un **champ scalaire** $f : \Omega \to \mathbb{R}$ de classe C^1 sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^3$, sa dérivée en un point A de Ω, est une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$, donc une forme linéaire sur $\mathbb{R}^3$, qu'on peut identifier à un vecteur de $\mathbb{R}^3$ appelé le **gradient** de f au point A.

$$grad\ f = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \quad \frac{\partial f}{\partial y} \quad \frac{\partial f}{\partial z}\right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} = \nabla f, \text{ qui se lit "nabla } f\text{".}$$

$$\text{avec } \nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x} \quad \frac{\partial}{\partial y} \quad \frac{\partial}{\partial z}\right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$

(les composantes covariantes sont égales aux composantes contravariantes parce que la base canonique est orthonormée).

HAUT

Laplacien, fonction harmonique.

Etant donné un **champ scalaire** $f : \Omega \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^3$, on appelle **laplacien** de f le champ scalaire Δf défini sur U par :

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} = \langle \nabla, \nabla \rangle = \nabla . \nabla = \nabla^2$$

Une **fonction harmonique** est un champ scalaire dont le laplacien est nul. C'est donc, par définition, une solution de l'équation aux dérivées partielles :

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$$

HAUT

Divergence.

HAUT

Etant donné un **champ vectoriel** F de classe C^1 sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^3$, ses composantes sont des champs scalaires P, Q, R sur Ω.
Les dérivées de P, Q, R, sont des formes linéaires sur $\mathbb{R}^3$.
La dérivée de F en un point A de Ω est l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ ayant pour composantes les dérivées de P, Q, R, en A.
La matrice de la dérivée de F en un point A de Ω, dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, est :

$$[dF\ (x, y, z)] = \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x}(x,y,z) & \frac{\partial P}{\partial y}(x,y,z) & \frac{\partial P}{\partial z}(x,y,z) \\ \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y,z) & \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y,z) & \frac{\partial Q}{\partial z}(x,y,z) \\ \frac{\partial R}{\partial x}(x,y,z) & \frac{\partial R}{\partial y}(x,y,z) & \frac{\partial R}{\partial z}(x,y,z) \end{pmatrix}$$

On appelle **divergence** de F le champ scalaire qui, à un $A \in \Omega$, associe la **trace** de la dérivée de F en A (somme des valeurs propres, égale à la somme des éléments diagonaux de la matrice de la dérivée de F).

$$div\ F = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix} = < \nabla, F > = \nabla . F$$

Si F est un gradient, $F = grad\ f$, la formule devient :

$$div\ (grad\ f) = \nabla . \nabla f = \Delta f.$$

Le laplacien est la divergence du gradient.

HAUT

Rotationnel.

HAUT

Etant donné un **champ vectoriel** $F = \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix}$ de classe C^1 sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^3$, on appelle **rotationnel** de F le champ vectoriel *rot F* défini par :

$$rot\ F = \begin{pmatrix} \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \\ \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \end{pmatrix} = \nabla \wedge F.$$

Le rotationnel se calcule comme un produit vectoriel :

$$rot\ F = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & P & e_1 \\ \frac{\partial}{\partial y} & Q & e_2 \\ \frac{\partial}{\partial z} & R & e_3 \end{vmatrix}$$

$\{e_1, e_2, e_3\}$ est la base canonique, et le "déterminant" se calcule en développant par rapport à la troisième colonne.

La divergence d'un rotationnel est nulle : $\nabla.(\nabla \wedge F) = 0$, *div* (*rot F*) = 0.

Le rotationnel d'un gradient est nul : $\nabla \wedge (\nabla f) = 0$, *rot* (*grad f*) = $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

HAUT

Chapitre 26. Dérivées partielles successives, laplacien.

Exercices

Exercice 1. Laplacien en coordonnées polaires du plan.
Exercice 2. Fonctions harmoniques à variables séparées.
Exercice 3. Fonction harmonique dans $\mathbb{R}^2$.
Exercice 4. Laplacien dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 1. Laplacien en coordonnées polaires du plan.

Soient $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une application de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ et $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie, quels que soient $(r, \theta) \in \mathbb{R}^2$, par :

$$F(r, \theta) = f(r \cos\theta, r \sin\theta).$$

Calculer le laplacien de f au point (x, y) en fonction de r, θ, F et des dérivées partielles de F.

Solution

HAUT

Exercice 2. Fonctions harmoniques à variables séparées.

Soient I et J deux intervalles ouverts non vides de $\mathbb{R}$. Trouver tous les couples (u, v) d'applications $u : I \to \mathbb{R}$, $v : J \to \mathbb{R}$, de classe C^2 sur I et J respectivement, tels que, en notant f l'application de $I \times J$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $$f(x, y) = u(x)\, v(y),$$ f soit une fonction harmonique sur $I \times J$, c'est-à-dire vérifie $\Delta f = 0$.	Solution

HAUT

Exercice 3. Fonction harmonique dans $\mathbb{R}^2$.

Déterminer les applications f de classe C^1 sur un ouvert U de $\mathbb{R}$ que l'on précisera, telles que l'application $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $g(x, y) = f\left(\frac{y}{x}\right)$ soit solution de l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 0$$

Solution

HAUT

Exercice 4. Laplacien dans $\mathbb{R}^3$.

Calculer le laplacien de l'application $f : [\mathbb{R} - \{0\}]^3 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x, y, z) = Arctan\left(\frac{x}{y}\right) + Arctan\left(\frac{y}{z}\right) + Arctan\left(\frac{z}{x}\right).$$

Solution

HAUT

Chapitre 26. Dérivées partielles successives, laplacien.

Enoncés.

Exercice 1. Laplacien en coordonnées polaires du plan.

Soient $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une application de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ et $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie, quels que soient $(r, \theta) \in \mathbb{R}^2$, par : $$F(r, \theta) = f(r \cos\theta, r \sin\theta).$$ Calculer le laplacien de f au point (x, y) en fonction de r, θ, F et des dérivées partielles de F.	

Solution.

1°/ Changement de coordonnées.

Le changement de coordonnées défini par :

$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta$$

est un difféomorphisme h, de classe C^1, qui est la fonction réciproque de l'application :
$\varphi : (x, y) \mapsto (r, \theta)$ de $\mathbb{R}^2 - D$ sur $]0, +\infty[\times]-\pi, \pi[$,
où D est la demi-droite définie par

$$D = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leqslant 0 \text{ et } y = 0 \}.$$

La matrice jacobienne du changement de coordonnées est :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r}(r,\theta) & \frac{\partial x}{\partial \theta}(r,\theta) \\ \frac{\partial y}{\partial r}(r,\theta) & \frac{\partial y}{\partial \theta}(r,\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$$

Le jacobien, déterminant de la matrice jacobienne, est r.

2°/ Changement de variables dans f.

$F = f \circ h$.
Pour $r \neq 0$, la matrice jacobienne est inversible et le **théorème du changement de variables** se traduit par les formules :

$\frac{\partial F}{\partial r}(r, \theta) = \frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta)\frac{\partial x}{\partial r}(r, \theta) + \frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta)\frac{\partial y}{\partial r}(r, \theta) = \frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta)\cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta)\sin\theta$

$\frac{\partial F}{\partial \theta}(r, \theta) = \frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta)\frac{\partial x}{\partial \theta}(r, \theta) + \frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta)\frac{\partial y}{\partial \theta}(r, \theta) = -\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\sin\theta + \frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\cos\theta$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial r} \quad \frac{\partial F}{\partial \theta}\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \quad \frac{\partial f}{\partial y}\right)(r\cos\theta, r\sin\theta)\begin{pmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{pmatrix}$$

Par inversion :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} \quad \frac{\partial f}{\partial y}\right)(r\cos\theta, r\sin\theta) = \left(\frac{\partial F}{\partial r} \quad \frac{\partial F}{\partial \theta}\right)(r, \theta)\begin{pmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial F}{\partial r} \quad \frac{\partial F}{\partial \theta}\right)(r, \theta)\begin{pmatrix}r\cos\theta & r\sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$$

Symboliquement, cette relation peut être écrite :

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} \quad \frac{\partial}{\partial y}\right) = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r} \quad \frac{\partial}{\partial \theta}\right)\begin{pmatrix}r\cos\theta & r\sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$$

3°/ Calcul du laplacien en coordonnées polaires du plan.

Par transposition dans la formule précédente, on obtient :

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\\ \frac{\partial}{\partial y}\end{pmatrix} = \frac{1}{r}\begin{pmatrix}r\cos\theta & -\sin\theta\\ r\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial r}\\ \frac{\partial}{\partial \theta}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\theta & -\frac{\sin\theta}{r}\\ \sin\theta & \frac{\cos\theta}{r}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial r}\\ \frac{\partial}{\partial \theta}\end{pmatrix}$$

et, par produit :

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} \quad \frac{\partial}{\partial y}\right)\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\\ \frac{\partial}{\partial y}\end{pmatrix} = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r} \quad \frac{\partial}{\partial \theta}\right)\begin{pmatrix}r\cos\theta & r\sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta & -\frac{\sin\theta}{r}\\ \sin\theta & \frac{\cos\theta}{r}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial r}\\ \frac{\partial}{\partial \theta}\end{pmatrix} = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r} \quad \frac{\partial}{\partial \theta}\right)\begin{pmatrix}r & 0\\ 0 & \frac{1}{r}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial r}\\ \frac{\partial}{\partial \theta}\end{pmatrix} = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r} \quad \frac{\partial}{\partial \theta}\right)\begin{pmatrix}r\frac{\partial}{\partial r}\\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\end{pmatrix}$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\right)\right) = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}$$

$$\boxed{\Delta f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}(r, \theta) + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}(r, \theta)}$$

Chapitre 26. Dérivées partielles successives, laplacien.

Enoncés.

Exercice 2. Fonctions harmoniques à variables séparées.

Soient I et J deux intervalles ouverts non vides de $\mathbb{R}$. Trouver tous les couples (u, v) d'applications $u : I \to \mathbb{R}$, $v : J \to \mathbb{R}$, de classe C^2 sur I et J respectivement, tels que, en notant f l'application de $I \times J$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x, y) = u(x)\, v(y),$$

f soit une fonction harmonique sur $I \times J$, c'est-à-dire vérifie $\Delta f = 0$.

Solution.

Une première solution, évidente, de l'équation de Laplace $\Delta f = 0$, est fournie par $f = 0$, puisque le laplacien est un opérateur linéaire.
Cherchons les solutions non identiquement nulles. u est alors différent de 0 ainsi que v.

Le laplacien de f est :

$$\Delta f(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = u''(x)\, v(y) + u(x)\, v''(y).$$

L'équation de Laplace devient :

$$u''(x)\, v(y) + u(x)\, v''(y) = 0$$

Comme u et v sont différents de 0, l'équation s'écrit aussi :

$$\frac{u''}{u}(x) = -\frac{v''}{v}(y)$$

Le premier membre ne dépend que de x, le deuxième membre ne dépend que de y : la valeur commune est donc une constante k, et la résolution de l'équation de Laplace revient à résoudre le système :

$$u''(x) - k\, u(x) = 0$$
$$v''(y) + k\, v(y) = 0$$

où k est une constante réelle arbitraire.

1°/ $k = 0$.

Réglons d'abord le cas où k est pris égal à 0.

$u''(x) = 0 \Rightarrow u(x) = a\,x + b$, a et b constantes réelles arbitraires.
$v''(y) = 0 \Rightarrow v(y) = a'\,y + b'$, a' et b' constantes réelles arbitraires.

$f(x, y)$ est donc le produit d'un polynôme de premier degré en x et d'un polynôme de premier degré en y, on peut le mettre sous la forme :

$$\boxed{f(x, y) = a\,(x - x_0)(y - y_0)}$$

avec trois constantes arbitraires réelles a, x_0, y_0.

2°/ $k = \omega^2 > 0$.

Les équations s'écrivent :

$u''(x) - \omega^2\,u(x) = 0$
$v''(y) + \omega^2\,v(y) = 0$

Leurs solutions sont données par :

$u(x) = a\,e^{\omega x} + b\,e^{-\omega x}$
$v(y) = a'\,cos\,(\omega\,y) + b'\,sin\,(\omega\,y)$

et le produit $f(x, y)$ peut être écrit sous la forme :

$$\boxed{f(x, y) = (a\,e^{\omega x} + b\,e^{-\omega x})\,cos\,(\omega\,y + \varphi)}$$

avec quatre constantes arbitraires réelles a, b, ω, φ.

3°/ $k = -\omega^2 < 0$.

Les équations s'écrivent :

$u''(x) + \omega^2\,u(x) = 0$
$v''(y) - \omega^2\,v(y) = 0$

De façon symétrique à la solution précédente, la solution peut s'écrire :

$$\boxed{f(x, y) = (a\,e^{\omega y} + b\,e^{-\omega y})\,cos\,(\omega\,x + \varphi)}$$

avec quatre constantes arbitraires réelles a, b, ω, φ.

Dans les trois cas, la solution 0 apparaît comme un cas particulier.

Chapitre 26. Dérivées partielles successives, laplacien.

Enoncés.

Exercice 3. Fonction harmonique dans $\mathbb{R}^2$.

Déterminer les applications f de classe C^1 sur un ouvert U de $\mathbb{R}$ que l'on précisera, telles que l'application $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $g(x, y) = f\left(\frac{y}{x}\right)$ soit solution de l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 0$$

Solution.

1°/ Changement de variable dans l'équation de Laplace.

Posons $u(x, y) = \frac{y}{x}$. Pour $x \neq 0$, u est différentiable et sa différentielle est :

$$du = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{y}{x^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{x}$$

$$g(x, y) = f(u)$$

$$dg(x, y) = f'(u)\,du = -f'\left(\frac{y}{x}\right)\frac{y}{x^2}dx + f'\left(\frac{y}{x}\right)\frac{1}{x}dy$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = -\frac{y}{x^2}f'(u)$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{1}{x}f'(u)$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = 2\frac{y}{x^3}f'(u) - \frac{y}{x^2}\frac{\partial u}{\partial x}f''(u) = 2\frac{y}{x^3}f'(u) + \frac{y^2}{x^4}f''(u)$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = \frac{1}{x}\frac{\partial u}{\partial y}f''(u) = \frac{1}{x^2}f''(u)$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 2\,\frac{y}{x^3}\,f'(u) + \frac{y^2}{x^4} f''(u) + \frac{1}{x^2} f''(u) = \frac{1}{x^2}(2\,u\,f'(u) + (1+u^2)\,f''(u))$$

L'équation de Laplace $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 0$ s'écrit alors :

$$\boxed{2\,u\,f'(u) + (1+u^2)\,f''(u) = 0}$$

C'est une équation différentielle du deuxième ordre dans laquelle ne figure pas *f*.

2°/ Résolution de l'équation.

L'équation peut être écrite :

$$\frac{f''}{f'} = -\frac{2u}{1+u^2}$$

Si on l'intègre par rapport à *u*, on obtient :

$$ln\,|f'| = -\,ln\,(1+u^2) + constante$$

$$f'(u) = \frac{a}{1+u^2}$$

$$f(u) = a\,Arctan\,u + b$$

$$\boxed{g(x,y) = a\,Arctan\,\frac{y}{x} + b}$$

Cette solution est définie pour *x* différent de 0 et elle est de classe C^1 dans l'ouvert $U = (\mathbb{R} - \{0\}) \times \mathbb{R}$.

Chapitre 26. Dérivées partielles successives, laplacien.

Enoncés.

Exercice 4. Laplacien dans $\mathbb{R}^3$.

Calculer le laplacien de l'application $f : [\mathbb{R} - \{0\}]^3 \to \mathbb{R}$ définie par : $$f(x, y, z) = Arctan\left(\frac{x}{y}\right) + Arctan\left(\frac{y}{z}\right) + Arctan\left(\frac{z}{x}\right).$$	

Solution.

1°/ Laplacien de *Arctan* $\left(\frac{x}{y}\right)$.

D'après l'Exercice 3, on a déjà (en prenant $a = 1$, et $b = 0$) :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(Arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right) = 0$$

En échangeant les rôle de x et y, il vient :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\left(Arctan\left(\frac{x}{y}\right)\right) = 0$$
$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(Arctan\left(\frac{x}{y}\right)\right) = 0$$

Et comme on a aussi $\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(Arctan\left(\frac{x}{y}\right)\right) = 0$, il vient, par addition, avec $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$:

$$\boxed{\Delta\left(Arctan\left(\frac{x}{y}\right)\right) = 0}$$

2°/ Laplacien de *f*.

Par permutation circulaire sur les variables, la relation précédente donne :

$$\Delta\left(Arctan\left(\frac{y}{z}\right)\right) = 0 \text{ et } \Delta\left(Arctan\left(\frac{z}{x}\right)\right) = 0$$

Comme Δ est un opérateur linéaire, l'addition des trois relations obtenues donne :

$$\boxed{\Delta f = 0}$$

Exercices

Différentielle d'application composée, fonction homogène, difféomorphisme.

1. Théorème de différenciation d'une application composée.
2. Identité d'Euler et fonctions homogènes.
3. Difféomorphismes et applications ouvertes.

Théorème de différenciation d'une application composée.

<u>Les hypothèses d'application</u> :

⟶ U est un ouvert de $\mathbb{R}^p$, p entier supérieur ou égal à 1,
⟶ V est un ouvert de $\mathbb{R}^q$, q entier supérieur ou égal à 1,
⟶ $f : U \to V$, $a \in U$, $f(a) = b \in V$,
⟶ f est différentiable en a,
⟶ $g : V \to \mathbb{R}^r$, r entier supérieur ou égal à 1,
⟶ g est différentiable en b.

<u>Les conclusions</u> :

⟶ $g \circ f$ est différentiable en a,
⟶ la matrice jacobienne de $g \circ f$ est le produit des matrices jacobiennes de g et de f.

HAUT

Identité d'Euler et fonctions homogènes.

Une fonction homogène de degré α est une application d'un ouvert U de $\mathbb{R}^p$, p entier supérieur ou égal à 1, dans $\mathbb{R}$, qui vérifie, pour tout $a \in U$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, la relation :

$$f(\lambda a) = \lambda^{\alpha} f(a)$$

Propriété :

Si f est homogène de degré α et si f est différentiable sur U, alors les dérivées partielles d'ordre 1 de f sont homogènes de degré $\alpha - 1$ sur U.

Propriété caractéristique :

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^p$.
Pour qu'une application $f : U \to \mathbb{R}$, différentiable sur U, soit une fonction homogène de degré α sur U, il faut et il suffit qu'en chaque point $a = (a_1, \ldots, a_p)$ de U, f vérifie l'**identité d'Euler** :

$$\alpha f(a) = \sum_{i=1}^{i=p} a_i \frac{\partial f}{\partial x^i}(a)$$

HAUT

Différomorphismes et applications ouvertes.

HAUT

Si U et V sont des ouverts de $\mathbb{R}^p$ et ϕ une application de U dans V, on dit que ϕ est un C^1-difféomorphisme de U sur V si, et seulement si :

1. **ϕ est bijective,**
2. **ϕ est de classe C^1 sur U,**
3. **ϕ^{-1} est de classe C^1 sur V.**

Propriétés.

— La dérivée d'un C^1-difféomorphisme de U sur V est un automorphisme de $\mathbb{R}^p$.
— La dérivée de l'application réciproque d'un C^1-difféomorphisme de U sur V est l'application réciproque de la dérivée du C^1-difféomorphisme :

$$(d\phi(x))^{-1} = d\phi^{-1}(\phi(x))$$

— La matrice jacobienne d'un C^1-difféomorphisme de U sur V est inversible et son inverse est la matrice jacobienne de l'application réciproque du C^1-difféomorphisme.

— Si le déterminant de la matrice jacobienne de $f : U \to V$ (f de classe C^1) est différent de 0 pour tout $x \in U$, f est une **application ouverte** (l'image d'un ouvert est un ouvert).

Théorème d'inversion locale.

— Pour toute application $f : U \to \mathbb{R}^p$ (U ouvert non vide de $\mathbb{R}^p$, p entier > 0)

· de classe C^1 sur U,
· dont la dérivée est bijective en un point a de U (i.e. jacobien $\neq 0$ en a)

il existe un voisinage ouvert V de a, contenu dans U, telle que la restriction de f à V soit un C^1-difféomorphisme de V sur son image, et cette image $f(V)$ est un voisinage ouvert de $f(a)$ dans $\mathbb{R}^p$.

Théorème d'inversion globale.

— Une application $f : U \to \mathbb{R}^p$ (U ouvert non vide de $\mathbb{R}^p$, p entier > 0)

· de classe C^1 sur U,
· injective,
· dont la dérivée est bijective en chaque point de U (i.e. jacobien $\neq 0$ dans U)

est un C^1-difféomorphisme de U sur son image, et son image $f(U)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^p$.

Si ce théorème d'inversion globale s'applique à $f : U \to \mathbb{R}^p$, l'application f permet de faire un "**changement de variables**" pour résoudre certaines équations aux dérivées partielles.

HAUT

Chapitre 27 - Différentielle d'application composée, fonction homogène, difféomorphisme.

Exercices

Exercice 1. Différentielle d'application composée.
Exercice 2. Fonction homogène.
Exercice 3. Difféomorphisme.

Exercice 1. Différentielle d'application composée.

On considère les applications $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définies par :

$$f(x, y, z) = (x + y, x^2 y z)$$
$$g(u, v) = (u^2 v, 2u + v, e^v)$$

1°/ Démontrer que f et g sont différentiables et écrire leurs matrices jacobiennes en un point.
2°/ Déterminer les différentielles de $f \circ g$ et de $g \circ f$.

Solution

HAUT

Exercice 2. Fonction homogène.

On considère l'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x, y, z) = \begin{cases} \dfrac{xyz}{x^2y + y^2z + z^2x} & \text{pour } x^2y + y^2z + z^2x \neq 0 \\ 0 & \text{pour } x^2y + y^2z + z^2x = 0 \end{cases}$$

1°/ Montrer que f est une application homogène. Quel est son degré d'homogénéité ?
2°/ Etudier la continuité de f et la continuité des applications partielles.
3°/ Etudier les dérivées partielles et la différentielle de f.
4°/ Montrer que f est solution de l'équation aux dérivées partielles :

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

dans un ouvert U que l'on précisera.

Solution

HAUT

Exercice 3. Différomorphisme.

1°/ Soit $a \in \mathbb{R}$. A quelle condition, l'application $\varphi : (x, y) \mapsto (a\,x + y, 2\,x + a\,y)$ est-elle un différomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$?

2°/ On pose $a = -1$. A l'aide de φ, déterminer toutes les applications f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant la relation :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + 2\,\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \sin(2\,x - y)$$

Solution

HAUT

Chapitre 27. Différentielle d'application composée, fonction homogène, difféomorphisme.

Enoncés.

Exercice 1. Différentielle d'application composée.

On considère les applications $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définies par : $f(x, y, z) = (x + y, x^2 y z)$ $g(u, v) = (u^2 v, 2u + v, e^v)$ 1°/ Démontrer que f et g sont différentiables et écrire leurs matrices jacobiennes en un point. 2°/ Déterminer les différentielles de $f \circ g$ et de $g \circ f$.	

Solution.

1°/ Matrices jacobiennes.

Si U est un ouvert de $\mathbb{R}^p$, pour qu'une application $f : U \to \mathbb{R}^q$ soit différentiable, il faut et il suffit que ses applications composantes soient différentiables (Chapitre 22, Définitions).

Ici, les applications composantes de f et g sont des polynômes ou des exponentielles, donc des applications différentiables, donc f et g sont différentiables.

Posons :

$X = x + y$
$Y = x^2 y z$

f est l'application $(x, y, z) \mapsto (X, Y)$.
La matrice jacobienne de f est la matrice des dérivées partielles de ses composantes :

$$\frac{D(X,Y)}{D(x,y,z)} = J^{(x,y,z)}f = \begin{pmatrix} \frac{\partial X}{\partial x} & \frac{\partial X}{\partial y} & \frac{\partial X}{\partial z} \\ \frac{\partial Y}{\partial x} & \frac{\partial Y}{\partial y} & \frac{\partial Y}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2xyz & x^2 z & x^2 y \end{pmatrix}$$

Posons :

$U = u^2 v$
$V = 2u + v$
$W = e^v$

g est l'application $(u, v) \mapsto (U, V, W)$.
La matrice jacobienne de g est la matrice des dérivées partielles de ses composantes :

$$\frac{D(U,V,W)}{D(u,v)} = J^{(u,v)}g = \begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial u} & \frac{\partial U}{\partial v} \\ \frac{\partial V}{\partial u} & \frac{\partial V}{\partial v} \\ \frac{\partial W}{\partial u} & \frac{\partial W}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2uv & u^2 \\ 2 & 1 \\ 0 & e^v \end{pmatrix}$$

2°/ Différentielles des applications composées.

Le **théorème de différenciation des applications composées** (Chapitre 27, Définitions) s'applique ici parce que f et g sont différentiables en tout point.
Il en résulte :

$d(f \circ g)(u, v) = df(g(u, v)) \circ dg(u, v)$
$d(g \circ f)(x, y, z) = dg(f(x, y, z)) \circ df(x, y, z)$

et la matrice jacobienne de l'application composée est le produit des matrices jacobiennes des applications.

a) Application composée $f \circ g$.

$$J^{(u,v)}(f \circ g) = J^{(U,V,W)}(f) \times J^{(u,v)}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2UVW & U^2W & U^2V \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2uv & u^2 \\ 2 & 1 \\ 0 & e^v \end{pmatrix}$$

$$J^{(u,v)}(f \circ g) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2u^2v(2u+v)e^v & (u^2v)^2e^v & (u^2v)^2(2u+v) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2uv & u^2 \\ 2 & 1 \\ 0 & e^v \end{pmatrix}$$

$$J^{(u,v)}(f \circ g) = \begin{pmatrix} 2uv+2 & u^2+1 \\ 4u^3v^2(2u+v)e^v + 2u^4v^2e^v & 2u^4v(2u+v)e^v + (u^2v)^2e^v + u^4v^2(2u+v)e^v \end{pmatrix}$$

$$\boxed{J^{(u,v)}(f \circ g) = \begin{pmatrix} 2uv+2 & u^2+1 \\ 2u^3v^2(5u+2v)e^v & u^4v(4u+3v+2uv+v^2)e^v \end{pmatrix}}$$

Cette matrice est la matrice, de la base canonique dans la base canonique, de l'application linéaire dérivée de l'application $f \circ g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

b) Application composée $g \circ f$.

$$J^{(x,y,z)}(g \circ f) = J^{(X,Y)}g \times J^{(x,y,z)}f = \begin{pmatrix} 2XY & X^2 \\ 2 & 1 \\ 0 & e^Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2xyz & x^2z & x^2y \end{pmatrix}$$

$$J^{(x,y,z)}(g \circ f) = \begin{pmatrix} 2(x+y)x^2yz & (x+y)^2 \\ 2 & 1 \\ 0 & e^{x^2yz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2xyz & x^2z & x^2y \end{pmatrix}$$

$$J^{(x,\,y,\,z)}(g \circ f) = \begin{pmatrix} 2xyz(x+y)(2x+y) & x^2z(x+y)(x+3y) & x^2y(x+y)^2 \\ 2(1+xyz) & 2+x^2z & x^2y \\ 2xyze^{x^2yz} & x^2ze^{x^2yz} & x^2ye^{x^2yz} \end{pmatrix}$$

Cette matrice est la matrice, de la base canonique dans la base canonique, de l'application linéaire dérivée de l'application $g \circ f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

Chapitre 27. Différentielle d'application composée, fonction homogène, difféomorphisme.

Enoncés.

Exercice 2. Fonction homogène.

On considère l'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x, y, z) = \begin{cases} \dfrac{xyz}{x^2y + y^2z + z^2x} & \text{pour } x^2y + y^2z + z^2x \neq 0 \\ 0 & \text{pour } x^2y + y^2z + z^2x = 0 \end{cases}$$

1°/ Montrer que f est une application homogène. Quel est son degré d'homogénéité ?
2°/ Etudier la continuité de f et la continuité des applications partielles.
3°/ Etudier les dérivées partielles et la différentielle de f.
4°/ Montrer que f est solution de l'équation aux dérivées partielles :

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

dans un ouvert U que l'on précisera.

Solution.

1°/ Application homogène.

Pour tout λ différent de 0 :

— si $x^2y + y^2z + z^2x$ est différent de 0 :

$$f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \frac{xyz}{x^2y + y^2z + z^2x} = f(x, y, z) = \lambda^0 f(x, y, z)$$

— si $x^2y + y^2z + z^2x$ est égal 0,

$$(\lambda x)^2(\lambda y) + (\lambda y)^2(\lambda z) + (\lambda z)^2(\lambda x) = \lambda^3(x^2y + y^2z + z^2x) = 0$$
$$f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = 0 = \lambda^0 f(x, y, z)$$

Ces relations montrent que :

f est homogène de degré 0, en tout point (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$.

2°/ Continuité.

Lorsque le dénominateur n'est pas nul, f est le rapport de deux polynômes : les polynômes sont des applications continues, donc f est continue.

f est continue en tout point $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ vérifiant $x^2 y + y^2 z + z^2 x \neq 0$

Le dénominateur est nul lorsqu'on a :

$$x^2 y + y^2 z + z^2 x = 0$$

Cela se produit déjà sur les axes de coordonnées $\mathbb{R} \times \{0\} \times \{0\}$, $\{0\} \times \mathbb{R} \times \{0\}$, $\{0\} \times \{0\} \times \mathbb{R}$, c'est-à-dire lorsque deux au moins des trois variables x, y, z, sont nulles.

Au point (0,0,0), l'application f n'est visiblement pas continue puisque $f(x, y, z)$ n'a pas de limite lorsque (x, y, z) tend vers (0,0,0).
Pour le voir il suffit de prendre une suite de points sur la droite $x = y = z$: la limite de $f(x, y, z)$ est $\frac{1}{3}$; et une suite de points sur la droite $x = y = -z$: la limite de $f(x, y, z)$ est -1. On a ainsi deux suites tendant vers 0, dont les images n'ont pas la même limite :

f n'est pas continue en (0,0,0).

Si les applications partielles étaient continues en (0,0,0) étaient continues en 0, f serait continue en (0,0,0), ce qui n'est pas. Donc l'une au moins des applications partielles n'est pas continue. Comme f est une fonction symétrique des variables x, y, z, si l'une des applications partielles n'est pas continue en 0, les trois le sont.

Les applications partielles $x \mapsto f(x, 0, 0)$, $y \mapsto f(0, y, 0)$, $z \mapsto f(0, 0, z)$, ne sont pas continues en 0.

En dehors du point (0,0,0), f est-elle continue sur la surface d'équation $x^2 y + y^2 z + z^2 x = 0$?
Considérons un point (a, b, c) de cette surface: $a^2 b + b^2 c + c^2 a = 0$.
Par définition de f, f est nulle en ce point : $f(a, b, c) = 0$.
Cherchons la limite de $f(a + x, b + y, c + z)$ lorsque (x, y, z) tend vers (0,0,0) en restant différent de (0,0,0).

$f(a + x, b + y, c + z) =$

$$\begin{cases} \dfrac{(a+x)(b+y)(c+z)}{(a+x)^2(b+y)+(b+y)^2(c+z)+(c+z)^2(a+x)} & \text{pour } (a+x)^2(b+y)+(b+y)^2(c+z)+(c+z)^2(a+x) \neq 0 \\ 0 & \text{pour } (a+x)^2(b+y)+(b+y)^2(c+z)+(c+z)^2(a+x) = 0 \end{cases}$$

$f(a + x, b + y, c + z)$ a donc la même limite que le rapport $\dfrac{abc+bcx+cay+abz}{(2ab+c^2)x+(2bc+a^2)y+(2ca+b^2)z}$.

1. **Si le produit $a\,b\,c$ est nul**, le point (a, b, c) est sur l'un des axes : en effet, le point (a, b, c) vérifie $a^2 b + b^2 c + c^2 a = 0$, donc si, par exemple, a est nul, alors $b^2 c$ est nul donc $b = 0$ ou $c = 0$.
   Par exemple, si (a, b, c) est sur l'axe des z ($a = 0$, $b = 0$, $c \neq 0$), le numérateur est nul : il faut rechercher le terme de degré 2 de $(a + x)^2 (b + y) + (b + y)^2 (c + z) + (c + z)^2 (a + x)$, c'est : $a\,y\,z + b\,z\,x + c\,x\,y = c\,x\,y$.
   Le dénominateur n'est pas nul : il vaut $c^2 x$.
   Donc la fraction a la même limite que $\frac{y}{c}$, c'est $0 = f(0, 0, c)$.

f est donc continue au point (0, 0, *c*).
Par symétrie entre les variables, *f* est continue en chaque point des axes, autres que (0,0,0).

2. **Si le produit *a b c* n'est pas nul**, comme le dénominateur de la fraction $\frac{abc+bcx+cay+abz}{(2ab+c^2)x+(2bc+a^2)y+(2ca+b^2)z}$ tend vers 0, la fraction tend vers l'infini, *f* (*a* + *x*, *b* + *y*, *c* + *z*) n'a pas de limite, *f* n'est pas continue au point (*a*, *b*, *c*).

Les seuls points de continuité de *f* sur la surface d'équation $x^2 y + y^2 z + z^2 x = 0$, sont les points des axes de coordonnées, à l'exception du point (0,0,0). En tout point de cette surface qui n'est pas sur un des axes, *f* n'est pas continue.

En un point (*a*, *b*, *c*) vérifiant $a^2 b + b^2 c + c^2 a = 0$, avec $a\,b\,c \neq 0$, où *f* n'est pas continue, l'une au moins des applications partielles $x \mapsto f(a + x, b, c)$, $y \mapsto f(a, b + y, c)$, $z \mapsto f(a, b, c + z)$, n'est pas continue en 0.
Comme *f* est symétrique par rapport à *x*, *y*, *z*, aucune des applications partielles n'est continue en 0.

$$f(a + x, b, c) = \frac{(a+x)bc}{(a+x)^2 b + b^2 c + c^2 (a+x)} = \frac{abc+bcx}{(2ab+c^2)x+bx^2}$$

Lorsque *a b c* est différent de 0, le rapport n'a pas de limite finie lorsque *x* tend vers 0.

3°/ Dérivabilité.

Lorsque le dénominateur n'est pas nul, *f* est le rapport de deux polynômes, applications différentiables.
Comme rapport de deux applications différentiables, *f* est différentiable et sa différentielle s'obtient par :

$$df = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2} =$$
$$\frac{(x^2 y + y^2 z + z^2 x)(yz\,dx + zx\,dy + xy\,dz) - xyz(2xy\,dx + x^2 dy + 2yz\,dy + y^2 dz + 2zx\,dz + z^2 dx)}{(x^2 y + y^2 z + z^2 x)^2}$$

$$df = \frac{(x^2 y^2 z + y^3 z^2 + xyz^3 - 2x^2 y^2 z - xyz^3)}{(x^2 y + y^2 z + z^2 x)^2} dx$$
$$+ \frac{(x^3 yz + xy^2 z^2 + x^2 z^3 - x^3 yz - 2xy^2 z^2)}{(x^2 y + y^2 z + z^2 x)^2} dy$$
$$+ \frac{(x^3 y^2 + xy^3 z + x^2 yz^2 - xy^3 z - 2x^2 yz^2)}{(x^2 y + y^2 z + z^2 x)^2} dz$$

En tout point n'appartenant pas à la surface d'équation $x^2 y + y^2 z + z^2 x = 0$, *f* est dérivable et admet pour différentielle : $df = \frac{y^2 z(yz - x^2)\,dx + z^2 x(zx - y^2)\,dy + x^2 y(xy - z^2)\,dz}{(x^2 y + y^2 z + z^2 x)^2}$

Les dérivées partielles de *f* sont les coefficients de *dx*, *dy*, *dz*, dans cette expression :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y^2 z\left(y z - x^2\right)}{\left(x^2 y + y^2 z + z^2 x\right)^2}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{z^2 x\left(z x - y^2\right)}{\left(x^2 y + y^2 z + z^2 x\right)^2}$$
$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{x^2 y\left(x y - z^2\right)}{\left(x^2 y + y^2 z + z^2 x\right)^2}$$

Lorsque *f* n'est pas continue, elle n'est pas dérivable.
De plus, dans ce cas, aucune des application partielles n'est continue, donc les applications partielles ne sont pas dérivables et *f* n'a pas de dérivée partielle sur la surface d'équation $x^2 y + y^2 z + z^2 x = 0$, à l'exception, peut-être, des points des axes de coordonnées, autres que le point (0,0,0).

A cause de la symétrie des variables, il suffit d'étudier la dérivabilité de *f* en un point (0, 0, *c*), $c \neq 0$, pour connaître la dérivabilité de *f* en tout point d'un axe, autre que le point (0,0,0).

En un tel point, $\frac{f(t,0,c) - f(0,0,c)}{t} = 0$ a pour limite 0 lorsque *t* tend vers 0, de sorte que *f* admet une dérivée partielle par rapport à *x* nulle en (0,0,*c*), et, par symétrie, également une dérivée partielle nulle, par rapport à *y*.
Le rapport $\frac{f(0,0,c+t) - f(0,0,c)}{t}$ est également nul : *f* admet, en (0,0, *c*) une dérivée partielle par rapport à *z* et cette dérivée partielle est nulle.

Si *f* était dérivable en (0, 0, *c*), comme ses dérivées partielles en ce point sont nulles, la dérivée de *f* en (0, 0, *c*) serait nulle et le rapport $\frac{f((0,0,c)+h) - f(0,0,c)}{\|h\|}$ tendrait vers 0 lorsque $\| h \|$ tend vers 0.
Or, si l'on prend un $h = (h_1, t\, h_1, 0)$ avec un h_1 strictement plus grand que 0 tendant vers 0, et un *t* strictement compris entre 0 et 1, et $\| h \| = Sup\ (| h_1 |, | h_2 |, | h_3 |) = h_1$, il vient :

$$\frac{f((0,0,c)+h) - f(0,0,c)}{\|h\|} = \frac{t\, c}{t h_1^2 + t^2 h_1 + c^2}$$

Lorsque $\| h \| = h_1$ tend vers 0, ce nombre tend vers $\frac{t}{c}$: la limite dépend du nombre *t* choisi entre 0 et 1.
Autrement dit, le rapport $\frac{f((0,0,c)+h) - f(0,0,c)}{\|h\|}$ ne tend pas vers 0 lorsque $\| h \|$ tend vers 0.
C'est dire que *f* n'est pas dérivable au point (0,0, *c*).

En résumé :

f n'est dérivable en aucun point de la surface d'équation $x^2 y + y^2 z + z^2 x = 0$. En ces points, *f* ne possède pas non plus de dérivée partielle, sauf sur les axes de coordonnées, où, en tout point autre que (0,0,0), *f* possède des dérivées partielles nulles.

3°/ Identité d'Euler.

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{xyz}{\left(x^2 y + y^2 z + z^2 x\right)^2}(y^2 z - x^2 y + x z^2 - y^2 z + x^2 y - x z^2) = 0$$

Cette relation est vérifiée en tout point où f possède des dérivées partielles, y compris sur les axes de coordonnées en dehors du point (0,0,0), puisqu'en ces points les dérivées partielles de f sont nulles.

La surface d'équation $x^2 y + y^2 z + z^2 x = 0$ est un fermé, puisque c'est l'image réciproque du fermé $\{0\}$ par une application polynôme continue. Si on appelle U l'ouvert complémentaire de cette surface dans $\mathbb{R}^3$, U est le plus grand ouvert dans lequel la relation :

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

est vérifiée.

Cette relation est l'**identité d'Euler** :

$$\alpha f(a) = \sum_{i=1}^{i=p} a_i \frac{\partial f}{\partial x^i}(a)$$

avec $\alpha = 0$. Elle est vérifiée par toute application différentiable homogène de degré $\alpha = 0$.

Chapitre 27. Différentielle d'application composée, fonction homogène, difféomorphisme.

Enoncés.

Exercice 3. Difféomorphisme.

1°/ Soit $a \in \mathbb{R}$. A quelle condition, l'application $\varphi : (x, y) \mapsto (a\,x + y,\ 2\,x + a\,y)$ est-elle un difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$?

2°/ On pose $a = -1$. A l'aide de φ, déterminer toutes les applications f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant la relation :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + 2\,\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \sin(2\,x - y)$$

Solution.

1°/ Difféomorphisme.

φ est un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ si, et seulement si, les conditions suivantes sont réalisées :

1. φ est bijective.
2. φ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.
3. φ^{-1} est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

Ici, φ est une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.
Pour que φ soit bijective, il faut et il suffit que son déterminant soit différent de 0.
Or la matrice de φ de la base canonique dans la base canonique est $[\varphi,\{e\},\{e\}] = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 2 & a \end{pmatrix}$.

Son déterminant est $a^2 - 2$.
La condition nécessaire et suffisante pour que φ soit bijective est :

$$\boxed{a^2 \neq 2}$$

Si cette condition est réalisée, comme toute application linéaire définie dans un espace de dimension finie, φ est différentiable et égale à sa différentielle.
De plus, comme φ est linéaire et continue, les applications composantes de φ sont linéaires et continues :

$\varphi_1 : (x, y) \mapsto a\,x + y$ et $\varphi_2 : (x, y) \mapsto 2\,x + a\,y$ sont linéaires et continues.

Les dérivées partielles de φ ont pour composantes les dérivées partielles des composantes de φ.

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}\right),\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial y}, \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}\right)$$

Ces dérivées partielles des composantes de φ sont des applications constantes, donc continues :

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}: (x, y) \mapsto a \; ; \; \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}: (x, y) \mapsto 1 \; ; \; \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}: (x, y) \mapsto 2 \; ; \; \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}: (x, y) \mapsto a.$$

Les dérivées partielles de φ, ayant des composantes continues, sont continues.
φ, ayant des dérivées partielles continues, est de classe C^1, par définition.

De même, si la condition $a^2 \neq 2$ est réalisée, φ est inversible et φ^{-1} est, comme φ, une bijection linéaire, donc de classe C^∞ et, en particulier, de classe C^1.
La matrice de φ^{-1} dans la base canonique est l'inverse de la matrice de j :

$$[\varphi^{-1},\{e\},\{e\}] = \frac{1}{a^2-2}\begin{pmatrix} a & -1 \\ -2 & a \end{pmatrix}$$

$$\varphi^{-1} : (x, y) \mapsto \frac{1}{a^2-2}(a\,x - y, -2\,x + a\,y)$$

En finale, nous avons ainsi démontré que :

> La condition nécessaire et suffisante pour que φ soit un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ est que a^2 soit différent de 2.

2°/ Résolution d'une équation aux dérivées partielles.

a) Changement de variables dans l'équation.

Pour $a = -1$, le déterminant $a^2 - 2$ de φ vaut -1, il est différent de 0 et φ est C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.
En appelant p_1 et p_2 les projecteurs, ou formes coordonnées, de $\mathbb{R}^2$ sur ses facteurs, on posera:

$$u = (p_1 \circ \varphi)(x, y) = a\,x + y = -x + y$$
$$v = (p_2 \circ \varphi)(x, y) = 2\,x + a\,y = 2\,x - y$$

φ est l'application $(x, y) \mapsto (u, v)$
φ^{-1} est l'application $(u, v) \mapsto (x, y)$

La matrice jacobienne de φ est la matrice de φ :

$$J^{(x,y)}\varphi = \frac{D(u,v)}{D(x,y)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

En posant :

$$F = f \circ \varphi^{-1} : (u, v) \mapsto f(x, y)$$
$$f = F \circ \varphi : (x, y) \mapsto F(u, v)$$

le théorème du changement de variables s'applique et s'écrit, au point (x, y) :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) = \left(\frac{\partial F}{\partial u}(u(x,y),v(x,y)) \quad \frac{\partial F}{\partial v}(u(x,y),v(x,y))\right)\begin{pmatrix}\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial u}{\partial y}(x,y)\\ \frac{\partial v}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial v}{\partial y}(x,y)\end{pmatrix}$$

ce qu'on écrit aussi, symboliquement :

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x} \quad \frac{\partial}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial u} \quad \frac{\partial}{\partial v}\right)\begin{pmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{pmatrix} = \left(\frac{\partial}{\partial u} \quad \frac{\partial}{\partial v}\right)\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}$$

et, par abus d'écriture (en écrivant *f* même lorsqu'il s'agit de *F*, les variables étant *u* et *v*) :

$$grad\, f\,(x, y) = \nabla f\,(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) = \left(\frac{\partial F}{\partial u}(u(x,y),v(x,y)) \quad \frac{\partial F}{\partial v}(u(x,y),v(x,y))\right)\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}$$

L'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + 2\,\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = sin\,(2\,x - y)$$

qu'on peut écrire aussi :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix} = sin\,(2\,x - y)$$

s'écrit alors :

$$\left(\frac{\partial F}{\partial u}(u(x,y),v(x,y)) \quad \frac{\partial F}{\partial v}(u(x,y),v(x,y))\right)\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix} = sin\,(2\,x - y)$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial u}(u,v) \quad \frac{\partial F}{\partial v}(u,v)\right)\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix} = sin\,v$$

$$\boxed{\frac{\partial F}{\partial u}(u, v) = sin\,v}$$

b) Résolution de l'équation.

En intégrant l'équation $\frac{\partial F}{\partial u}(u, v) = sin\,v$ par rapport à *u*, on obtient :

$$F\,(u, v) = u\,sin\,v + g\,(v)$$

où *g* doit être une application différentiable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ pour que *F* soit différentiable.

En fonction de *x* et *y*, la solution s'écrit :

$$\boxed{\begin{array}{c} f\,(x, y) = F\,(u\,(x, y), v\,(x, y)) = (y - x)\,sin\,(2\,x - y) + g\,(2\,x - y) \\ \text{où } g \text{ est une fonction numérique dérivable quelconque de } \mathbb{R} \text{ dans } \mathbb{R}. \end{array}}$$

Exercices

Points critiques, matrice hessienne.

1. **Point critique.**
2. **Matrice hessienne.**

Point critique.

Pour une application f d'un ouvert U de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$, on dit que $a \in U$ est un **point critique** de f si, et seulement si, les dérivées partielles d'ordre 1 de f existent en a et sont nulles en a :

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}(a) = 0, \text{ pour tout } i = 1, \dots, p.$$

Pour que a soit point critique d'une application f différentiable en a, il faut et il suffit que la différentielle de f soit nulle en a :

$$df\,(a) = 0.$$

Un extremum relatif de f est un point critique, mais il y a des points critiques qui ne sont pas des extrema relatifs.

HAUT

Matrice hessienne.

HAUT

Pour une application f **de classe** C^2 d'un ouvert U de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$, et un point $a \in U$, la dérivée d'ordre 2 de f est une forme bilinéaire **symétrique** sur $\mathbb{R}^p$.

La matrice de cette forme bilinéaire symétrique dans la base canonique de $\mathbb{R}^p$ s'appelle la **matrice hessienne** de f.

$$Hess_a(f) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{(\partial x^1)^2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^p \partial x^1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^1 \partial x^p} & \cdots & \dfrac{\partial f}{(\partial x^p)^2} \end{pmatrix}$$

Comme c'est une matrice réelle symétrique, elle est **diagonalisable**.

Au voisinage d'un point critique a, l'application dérivée est nulle en a, et la formule de Taylor-Young à l'ordre 2 se réduit à :

$$f(a+h) = f(a) + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} h_1 & \cdots & h_p \end{pmatrix} Hess_a(f) \begin{pmatrix} h^1 \\ \vdots \\ h^p \end{pmatrix} + \| h \| \omega(h)$$

$\begin{pmatrix} h_1 & \cdots & h_p \end{pmatrix}$ étant les composantes covariantes d'un vecteur h et $\begin{pmatrix} h^1 \\ \vdots \\ h^p \end{pmatrix}$ ses composantes contravariantes (identiques aux composantes covariantes si la base est orthonormée).

Cette formule permet de déterminer, lorsque la matrice hessienne n'est pas nulle, la nature du point critique (**extremum** ou **col**).

HAUT

Chapitre 28 - Points critiques, matrice hessienne.

Exercices

Exercice 1. Points critiques.
Exercice 2. Extrema libres.
Exercice 3. Points critiques d'un polynôme.

Exercice 1. Points critiques.

On considère l'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + 2xz + 2yz + 4y$$

1°/ Déterminer les points critiques de f et leur nature.
2°/ Calculer le gradient de f au point $B = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + 1, \frac{1}{\sqrt{3}} - 1, \frac{1}{\sqrt{3}} - 1\right)$. En déduire l'équation du plan tangent en B à la surface de niveau passant par B.
3°/ Etudier la position de la surface de niveau passant par B par rapport à son plan tangent en B.

Solution

HAUT

Exercice 2. Extrema libres.

On considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x, y, z) = 2x^3 - y^2 + 2xy + 1$$

1°/ Déterminer les extrema relatifs de f sur $\mathbb{R}^2$.
2°/ f possède-t'elle un maximum absolu ? un minimum absolu ?
3°/ Représenter le domaine $T = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x \leqslant 0) \text{ et } (y \leqslant 0) \text{ et } (x + y + 1 \geqslant 0) \}$.
Montrer que la restriction de f à T admet deux extrema absolus que l'on calculera.

Solution

HAUT

Exercice 3. Points critiques d'un polynôme.

On considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$$

Déterminer les points critiques de f et leur nature.

Solution

HAUT

Chapitre 28 - Points critiques, matrice hessienne.

Enoncés.

Exercice 1. Points critiques.

On considère l'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + 2\,x\,z + 2\,y\,z + 4\,y$$

1°/ Déterminer les points critiques de f et leur nature.
2°/ Calculer le gradient de f au point $B = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + 1, \frac{1}{\sqrt{3}} - 1, \frac{1}{\sqrt{3}} - 1\right)$. En déduire l'équation du plan tangent en B à la surface de niveau passant par B.
3°/ Etudier la position de la surface de niveau passant par B par rapport à son plan tangent en B.

Solution.

1°/ Points critiques.

Par définition, les points critiques sont les points où la dérivée est nulle.

L'application f est un polynôme : c'est une application de classe C^1 en tout point de $\mathbb{R}^3$.
Pour que la dérivée d'une application continûment dérivable soit nulle, il faut et il suffit que ses dérivées partielles soient nulles.
Les dérivées partielles s'obtiennent par les règles ordinaires de dérivation des fonctions numériques d'une variable :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = 2\,x + 2\,z$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = 2\,y + 4 + 2\,z$$
$$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = 2\,x + 2\,y$$

Les trois dérivées partielles sont nulles lorsque :

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Pour inverser la matrice $H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, on écrit d'abord:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = H \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Soustrayons la première colonne de la troisième :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = H \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Soustrayons la deuxième colonne de la troisième :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = H \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Divisions la troisième colonne par – 2 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = H \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Soustrayons la troisième colonne de la première et de la deuxième :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = H \times \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} H \times \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

L'inverse de la matrice H est $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et la solution du système $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est donnée par :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Les trois dérivées partielles sont nulles au point $A = (1, –1, –1)$ et en ce point seulement.

Le seul point critique de f est le point $A = (1, –1, –1)$. En ce point, $f(A)$ vaut –2.

Pour déterminer la nature du point critique, il faut faire une étude de $f(x, y, z)$ dans un voisinage du

point $A = (1, -1, -1)$.
Avec $f(1, -1, -1) = -2$, et $h = (x, y, z)$, la formule de Taylor-Young à l'ordre 2 se réduit à :

$$f(A + h) = f(A) + \frac{1}{2}(x \quad y \quad z)\, Hess_{(1,-1,-1)}(f) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \| (x, y, z) \| \, \omega(x, y, z)$$

où $\omega(x, y, z)$ tend vers 0 lorsque $\| (x, y, z) \|$ tend vers 0, et où $Hess_{(1,-1,-1)}(f)$ est la matrice hessienne de f au point $A = (1, -1, -1)$.

$$Hess^{(x, y, z)}(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Cette matrice hessienne est **constante**, elle ne dépend pas du point (x, y, z) choisi.

$$Hess_{(1,-1,-1)}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$f(x + 1, y - 1, z - 1) = -2 + \frac{1}{2}(x \quad y \quad z) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \| (x, y, z) \| \, \omega(x, y, z)$$

$$f(x + 1, y - 1, z - 1) = -2 + x^2 + y^2 + 2xy + 2yz + \| (x, y, z) \| \, \omega(x, y, z)$$

Or, par définition, nous avons :

$$\begin{aligned} f(x + 1, y - 1, z - 1) &= (x + 1)^2 + (y - 1)^2 + 2(x + 1)(y - 1) + 2(y - 1)(z - 1) + 4(y - 1) \\ &= -2 + x^2 + y^2 + 2xy + 2yz \end{aligned}$$

donc, comme $\| (x, y, z) \|$ n'est pas nul, c'est que **$\omega(x, y, z)$ est identiquement nul** dans tout voisinage de $(1, -1, -1)$.

L'étude de la nature du point critique $(1, -1, -1)$ se ramène à l'étude de la forme quadratique :

$$(x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 + 2xy + 2yz$$

et, plus spécialement, à l'étude de la matrice :

$$\frac{1}{2} Hess_{(1,-1,-1)}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = H.$$

Le **polynôme caractéristique** de cette matrice est :

$$P[\lambda] = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix}$$

Développons le déterminant par rapport à la première colonne :

$$P[\lambda] = (1-\lambda)(\lambda^2 - \lambda - 1) - (1-\lambda) = (1-\lambda)(\lambda^2 - \lambda - 2) = (1-\lambda)(\lambda+1)(\lambda-2)$$

$$\boxed{P[\lambda] = -(\lambda-2)(\lambda-1)(\lambda+1)}$$

La matrice $\frac{1}{2}Hess_{(1,-1,-1)}(f)$ a trois valeurs propres réelles distinctes : deux sont strictement positives et une strictement négative.

$\lambda_1 = 2$
$\lambda_2 = 1$
$\lambda_3 = -1$

Comme **les valeurs propres n'ont pas toutes le même signe**, la forme quadratique définie par la dérivée seconde au point critique (1, –1, –1) est positive ou négative suivant les régions de l'espace dans tout voisinage ouvert de (1, –1, –1).
Autrement dit :

f possède en (1, –1, –1) un col égal à – 2.
C'est le seul point critique de f.

Les **valeurs propres de la matrice hessienne** de f, $Hess^{(x,y,z)}(f) = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, sont donc, en tout point (x, y, z), 4, 2 et –2, ce qui montre que tout point de l'espace $\mathbb{R}^3$ est un point hyperbolique de la surface de niveau passant par ce point.

2°/ Gradient et plan tangent.

Le gradient de f en un point $A = (x, y, z)$ de $\mathbb{R}^3$ a, pour composantes dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, les dérivées partielles de f :

$$grad\, f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2(x+z) \\ 2(y+z+2) \\ 2(x+y) \end{pmatrix}.$$

On sait que le gradient de f est **normal à la surface de niveau** et qu'il est orienté **dans le sens des potentiels f croissants**.
L'équation du plan tangent en $A = (x, y, z)$ est alors déterminée par la relation :

$$\overrightarrow{AM} . \overrightarrow{grad\, f(A)} = 0$$

soit, pour $M = (X, Y, Z)$:

$$(x + z)(X – x) + (y + z + 2)\,(Y – y) + (x + y)\,(Z – z) = 0.$$
$$(x + z)\,X + (y + z + 2)\,Y + (x + y)\,Z = (x + z)\,x + (y + z + 2)\,y + (x + y)\,z = f\,(x, y, z) – 2\,y$$

$$\boxed{\text{Plan tangent en } (x, y, z) : (x + z)\,X + (y + z + 2)\,Y + (x + y)\,Z = f\,(x, y, z) – 2\,y}$$

Pour le point B de coordonnées $x = \frac{1}{\sqrt{3}} + 1$, $y = \frac{1}{\sqrt{3}} – 1$, $z = \frac{1}{\sqrt{3}} – 1$, cette équation est :

$$\frac{2}{\sqrt{3}}(X + Y + Z) = f\,(B) – 2\,y$$

On vérifie sans peine que $f\,(B)$ est nul. Il reste $\frac{2}{\sqrt{3}}(X + Y + Z) = – 2\,y = \frac{2}{\sqrt{3}}(\sqrt{3} – 1)$

$$\boxed{X + Y + Z = \sqrt{3} – 1}$$

et, en B, le gradient de f est :

$$\boxed{grad\,f\,(B) = \frac{4}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = 4\,u_1}$$

Ce gradient est porté par l'axe déterminé par le vecteur propre unitaire $u_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ de la matrice hessienne de f pour la valeur propre 4. En effet , $\| u_1 \| = 1$ et, quel que soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$Hess^{(x, y, z)}\,(f).\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2&0&2\\0&2&2\\2&2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$
$$Hess^{(x, y, z)}\,(f).u_1 = 4\,u_1$$

Nous avons donc, au point B : $grad\,f\,(B) = Hess^{(B)}\,(f).u_1 = 4\,u_1$

3°/ Position de la surface par rapport au plan tangent en *B*.

Le point B est défini par $B = u_1 + A$, où A est le point critique de l'application f et où u_1 est vecteur propre unitaire de la matrice hessienne de f au point A, pour la valeur propre 4.
On vérifie facilement que $f\,(B)$ est nul : $f\,(B) = 0$.
La surface de niveau passant par B est définie par $f\,(x, y, z) = f\,(B) = 0$: $x^2 + y^2 + 2\,x\,z + 2\,y\,z + 4\,y = 0$.

Le plan tangent en B est perpendiculaire en B à $grad\,f\,(B) = \frac{4}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = 4\,u_1 = 4\,\overrightarrow{AB}$.

C'est donc le plan perpendiculaire en B à $\overrightarrow{AB} = u_1$.

Il est déterminé par les vecteurs propres unitaires $u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ et $u_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$ correspondant aux valeurs propres 2 et –2 de la matrice hessienne de f :

$$\begin{pmatrix}2&0&2\\0&2&2\\2&2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\text{ et }\begin{pmatrix}2&0&2\\0&2&2\\2&2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}=-2\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$$

A l'ordre 2, la formule de Taylor-Young s'écrit :

$$f(B+h)=f(B)+(df(B)).h+\frac{1}{2}(df(B))^{(2)}.h^2+\|h\|\,\omega(h)$$

Or, par définition de *f*:

$$f(B+h)=$$
$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}+1+h_1\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-1+h_2\right)^2+2\left(\frac{1}{\sqrt{3}}+1+h_1\right)\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-1+h_3\right)+2\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-1+h_2\right)\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-1+h_3\right)+4\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-1+h_2\right)$$
$$=f(B)+h_1^2+h_2^2+2h_1h_3+2h_2h_3$$
$$+2h_1\left(\frac{1}{\sqrt{3}}+1\right)+4h_2\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-1\right)+2h_1\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-1\right)+4h_3\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-1\right)+4h_2$$
$$=f(B)+\frac{4}{\sqrt{3}}(h_1+h_2+h_3)+(h_1\quad h_2\quad h_3)\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}h_1\\h_2\\h_3\end{pmatrix}$$

$$\frac{4}{\sqrt{3}}(h_1+h_2+h_3)=(h_1\quad h_2\quad h_3)\times\frac{4}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=(df(B)).h$$

de sorte que l'on a :

$$f(B+h)=f(B)+(df(B)).h+\frac{1}{2}(df(B))^{(2)}.h^2$$

ce qui montre que $\|h\|\,\omega(h)=0$ et $\omega(h)=0$.

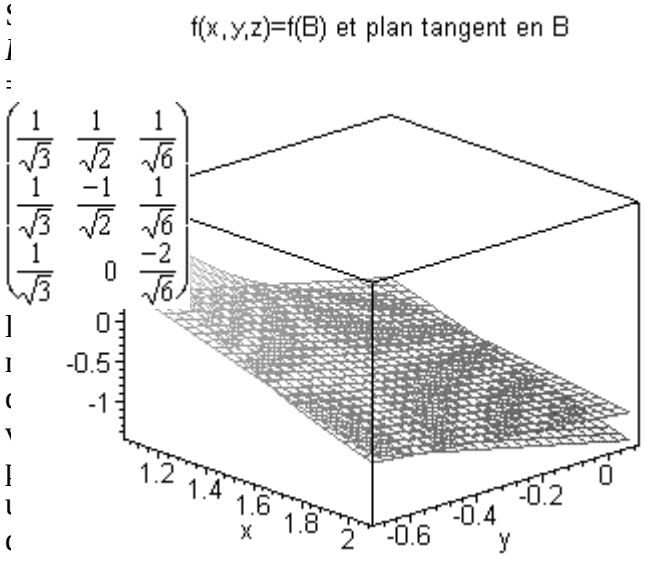
Pour un *h* appartenant au plan tangent, *h* est orthogonal à *grad f* (*B*)) :

$$(df(B)).h=<grad\,f(B),h>=0$$

Il reste :

$$f(B+h)=\frac{1}{2}(h_1\quad h_2\quad h_3)\begin{pmatrix}2&0&2\\0&2&2\\2&2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}h_1\\h_2\\h_3\end{pmatrix}$$
$$f(B+h)=(h_1\quad h_2\quad h_3)\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}h_1\\h_2\\h_3\end{pmatrix}$$

Comme les valeurs propres 2, 1, –1, de la matrice $\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\1&1&0\end{pmatrix}$ n'ont pas toutes le même signe, le plan tangent en *B* traverse la surface $f(x,y,z)=0$: il y a, autour de *B*, dans le plan tangent, des régions où *f* est supérieure à *f* (*B*), et des régions où *f* est inférieure à *f* (*B*).
***B* est un point hyperbolique**.



la matrice hessienne de *f*. C'est une matrice unitaire, elle transforme la base canonique orthonormée en une base propre orthonormée. Son inverse est donc sa transposée:

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

Le changement de coordonnées (contravariantes) défini par cette matrice vérifie : $\begin{pmatrix} h'_1 \\ h'_2 \\ h'_3 \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix}$.

Inversons la matrice, nous obtenons : $\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} h'_1 \\ h'_2 \\ h'_3 \end{pmatrix}$.

Transposons, nous obtenons :$(h_1 \quad h_2 \quad h_3) = (h'_1 \quad h'_2 \quad h'_3)\, P^{-1}$

Remplaçons dans :

$$f(B+h) = (h_1 \quad h_2 \quad h_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix}$$

Il vient :

$$f(B+h) = (h'_1 \quad h'_2 \quad h'_3)\, P^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} P \begin{pmatrix} h'_1 \\ h'_2 \\ h'_3 \end{pmatrix}.$$

La matrice $P^{-1}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\1&1&0\end{pmatrix}P$, semblable à la matrice $\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\1&1&0\end{pmatrix}$, est la matrice diagonale des valeurs propres, dans la base propre $\{u_1, u_2, u_3\}$:

$$P^{-1}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\1&1&0\end{pmatrix}P = \begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}.$$

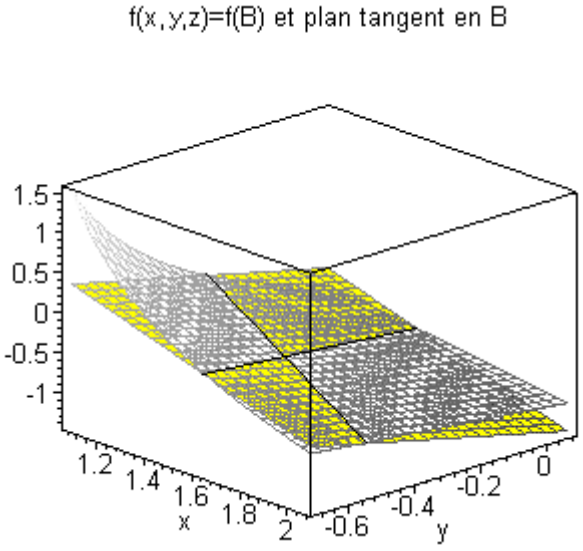
$$f(B+h) = (h'_1 \quad h'_2 \quad h'_3)\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}h'_1\\h'_2\\h'_3\end{pmatrix}$$

$$= 2h'^2_1 + h'^2_2 - h'^2_3$$

Mais, pour un h appartenant au plan tangent en B à la surface de niveau passant par b, on a $h'_1 = 0$ et $f(B+h)$ se réduit à:

$$f(B+h) = h'^2_2 - h'^2_3$$

Dans le plan tangent en B à la surface de niveau passant par B, les vecteurs $u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ et $u_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$ forment une base orthonormale du plan : h'_2 et h'_3 sont les composantes de h dans ce plan.
Les deux diagonales des axes déterminent quatre régions du plan.
Entre les deux diagonales, près de l'axe u_2, on a $|h'_3| < |h'_2|$ et $f(B+h)$ est > 0.



Comme le gradient de f au point B vaut $\frac{4}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ et qu'il est orienté dans le sens des f croissants, f augmente lorsque z augmente, donc si $f(B+h)$ est > 0, le plan tangent en B à la surface de niveau passant par B est au-dessus de cette surface, la surface est en dessous du plan tangent.
Dans les deux autres régions, $f(B+h)$ est < 0 et la surface est au-dessus du plan tangent.
Sur les deux diagonales, $f(B+h)$ est nul, donc les deux diagonales appartiennent à la surface de niveau passant par B : ce sont les intersections du plan tangent et de la surface de niveau.

Chapitre 28 - Points critiques, matrice hessienne.

Enoncés.

Exercice 2. Extrema libres.

On considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x, y, z) = 2x^3 - y^2 + 2xy + 1$$

1°/ Déterminer les extrema relatifs de f sur $\mathbb{R}^2$.
2°/ f possède-t'elle un maximum absolu ? un minimum absolu ?
3°/ Représenter le domaine $T = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x \leqslant 0) \text{ et } (y \leqslant 0) \text{ et } (x + y + 1 \geqslant 0) \}$.
Montrer que la restriction de f à T admet deux extrema absolus que l'on calculera.

Solution.

1°/ Extrema relatifs.

f est un polynôme, c'est donc une application de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2$.
Les extrema relatifs sont des points où les dérivées partielles de f sont nulles : leurs coordonnées vérifient les équations

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 6x^2 + 2y = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -2y + 2x = 0$$

La deuxième relation donne $x = y$. En reportant cette expression de y dans la première relation, on obtient, après simplification par 2 :

$$x(3x + 1) = 0$$

Il y a ainsi deux candidats au titre d'extremum relatif, ce sont les points A et B de coordonnées :

$$A : x = y = 0 \text{ et } B : x = y = -\frac{1}{3}$$

Pour voir s'il s'agit bien d'extrema relatifs, il faut maintenant étudier la variation de f au voisinage de ces points.
Comme la dérivée de f aux points A et B est nulle, la formule de Taylor-Young à l'ordre 2 se réduit à

$$f(A + h) = f(A) + \frac{1}{2} h.Hess_A(f).h + \| h \|^2 \omega_A(h)$$
$$f(B + h) = f(B) + \frac{1}{2} h.Hess_B(f).h + \| h \|^2 \omega_B(h)$$

$$f(A) = f(0,0) = 1$$
$$f(B) = f\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) = 1 + \frac{1}{27}$$
$$Hess_{(x,y)}(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12x & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$
$$Hess_A(f) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$
$$Hess_B(f) = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Le déterminant de $Hess_A(f)$ est négatif : les valeurs propres sont de signes opposés, ***A* est un col**.
Le déterminant de $Hess_B(f)$ est positif : les valeurs propres sont de même signe, ***B* est un extremum relatif**.
La trace de $Hess_B(f)$ est négative : les valeurs propres sont toutes deux négatives, la forme quadratique définie par la matrice hessienne est négative, de sorte que *B* est un maximum relatif.

f possède un seul extremum relatif, le point $B = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$, qui est un maximum relatif : $f(B) = 1 + \frac{1}{27}$.

2°/ Extrema absolus.

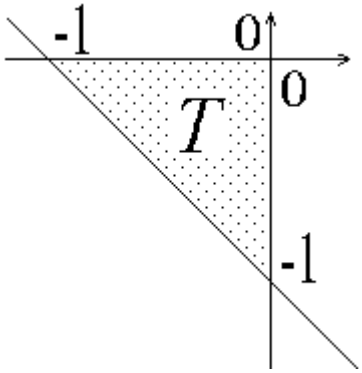
$f(x, 0) = 2x^3 + 1$ n'est borné ni supérieurement, ni inférieurement, donc $f(x, y)$ n'est borné ni supérieurement, ni inférieurement.

f ne possède ni maximum absolu, ni minimum absolu.

3°/ Extrema absolus sur un compact.

L'ensemble *T* défini par les inéquations :

$x \leqslant 0$
$y \leqslant 0$
$x + y + 1 \geqslant 0$



est le compact représenté dans la figure ci-contre par un triangle *T*.
C'est l'adhérence du triangle limité par les droites d'équations $y = 0$, $x = 0$, $x + y + 1 = 0$.
Non seulement *T* est compact (fermé borné), mais il est, de plus, connexe et convexe.

L'image de *T* par *f* est l'image d'un connexe compact par une application continue, c'est un intervalle fermé borné.
Il existe donc un point de *T* au moins où *f* atteint sa valeur maximum, et un point de *T* au moins où *f* atteint sa valeur minimum.

A l'intérieur de *T*, se trouve le seul point *B* où *f* possède un maximum relatif, de valeur $1 + \frac{1}{27} \approx 1{,}04$.

Si ce point n'est pas un maximum absolu de f sur T, le maximum absolu de f sur T, ne peut se trouver que sur la frontière de T.

Examinons comment varie f sur la frontière de T :

— Sur l'axe des x, on a $y = 0$, $f(x, 0) = 2x^3 + 1$.
La dérivée $6x^2 + 1$ est strictement positive quel que soit x.
En particulier, le maximum de f sur ce côté de la frontière est obtenu pour la plus grande valeur de x, c'est-à-dire 0, et la plus petite est obtenue pour la plus petite valeur de x, c'est-à-dire – 1.
$f(– 1, 0) = – 1$, $f(0,0) = 1$.

— Sur l'axe des y, on a $x = 0$, $f(0, y) = 1 – y^2$.
La dérivée $– 2y$ est positive lorsque y varie de –1 à 0 et elle s'annule pour $y = 0$.
En particulier, le maximum de f sur ce côté de la frontière est obtenu pour la plus grande valeur de y, c'est-à-dire 0, et la plus petite est obtenue pour la plus petite valeur de y, c'est-à-dire – 1.
$f(0, – 1) = 0$, $f(0, 0) = 1$.

— Sur la droite $x + y + 1 = 0$, on a $y = – x – 1$,
$f(x, – x – 1) = 2x^3 – (x + 1)^2 – 2x(x + 1) + 1 = 2x^3 – 3x^2 – 4x$.
La dérivée $6x^2 – 6x – 4$ est négative entre les racines du trinôme : elle est négative pour $x = 0$, positive pour $x = – 1$.
Entre les deux, elle s'annule pour $x = \frac{1}{2} – \frac{\sqrt{33}}{6}$.
Donc, lorsque x varie de – 1 à 0, et que le point (x, y) varie sur la droite d'équation $x + y + 1 = 0$ de (– 1, 0) à (0, – 1), f commence par augmenter, passe par un maximum pour $x = \frac{1}{2} – \frac{\sqrt{33}}{6}$ puis décroît.

$f(– 1, 0) = – 1$,

$$f\left(\frac{1}{2} – \frac{\sqrt{33}}{6}, \frac{\sqrt{33}}{6} – \frac{3}{2}\right) = 2x^3 – 3x^2 – 4x = x(2x^2 – 3x – 4) = x\left(2\left(x – \frac{3}{4}\right)^2 – \frac{9}{8} – 4\right)$$

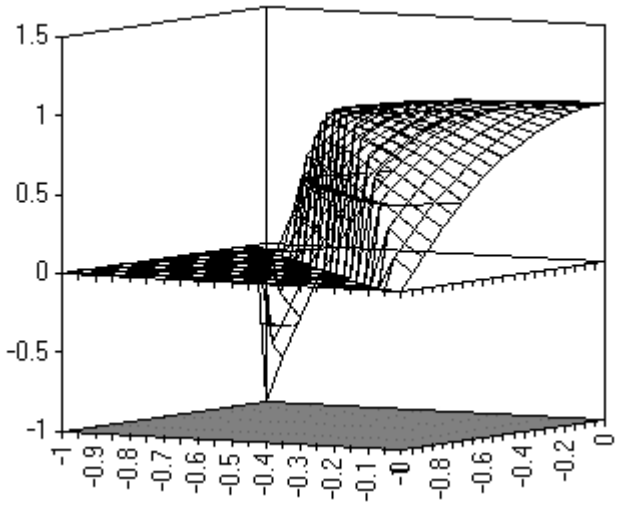
$$= \frac{3 – \sqrt{33}}{6}\left(2\left(\frac{3 – 2\sqrt{33}}{6}\right)^2 – \frac{41}{8}\right) = \frac{11\sqrt{33} – 45}{18} \approx 1{,}01 < 1{,}04 \approx 1 + \frac{1}{27}.$$

$f(0, – 1) = 0$.

En rassemblant ces résultats, on voit que le maximum de f sur la frontière de T est inférieur au maximum relatif de f à l'intérieur de T : la valeur maximum de f sur T est donc atteinte au point B.
Par contre, la valeur minimum de f sur T est atteinte sur la frontière, au point (– 1, 0).

La valeur maximum de f sur T est $1 + \frac{1}{27}$, elle est obtenue à l'intérieur de T, en $B = \left(– \frac{1}{3}, – \frac{1}{3}\right)$.
La valeur minimum de f sur T est – 1, elle est obtenue sur la frontière de T, en (– 1, 0).

Un dessin aidera à mieux comprendre comment varie f dans T.


1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1
-0.9
-0.8
-0.7
-0.6
-0.5
-0.4
-0.3
-0.2
-0.1
0
-0.8
-0.6
-0.4
-0.2
0

Chapitre 28 - Points critiques, matrice hessienne.

Enoncés.

Exercice 3. Points critiques d'un polynôme.

On considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par : $$f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$$ Déterminer les points critiques de f et leur nature.	

Solution.

1°/ Points critiques.

L'application polynomiale f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2$.
Les points critiques sont ceux qui annulent la dérivée de f.
Leurs coordonnées (x, y) vérifient les relations :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$$

$$3x^2 + 3y^2 - 15 = 0$$
$$6xy - 12 = 0$$

$$x^2 + y^2 = 5$$
$$xy = 2$$
$$x^2 y^2 = 4$$

x^2 et y^2 sont donc solutions de l'équation :

$$X^2 - 5X + 4 = 0$$
$$(X - 1)(X - 4) = 0$$
$$(x^2 - 1)(x^2 - 4) = 0$$
$$(x - 1)(x + 1)(x - 2)(x + 2) = 0$$

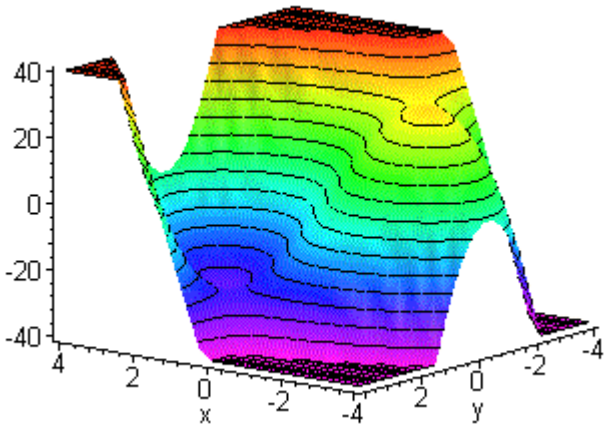
La relation $y = \frac{2}{x}$ donne les valeurs correspondantes de y.
On trouve ainsi quatre points critiques. Rangeons-les par abscisses croissantes :

f possède quatre points critiques : $A = (-2, -1)$, $B = (-1, -2)$; $C = (1, 2)$; D $(2, 1)$.

2°/ Nature des points critiques.

La matrice hessienne de f au point (x, y), qui est la matrice de la forme quadratique définie par la dérivée seconde de f est :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x & 6y \\ 6y & 6x \end{pmatrix}$$



Son déterminant $r\,t - s^2$, produit des valeurs propres de la matrice hessienne, est $36\,(x^2 - y^2)$.
Sa trace $r + t$, somme des valeurs propres de la matrice hessienne, est $12\,x$.

Au point $A = (-2, -1)$: $r\,t - s^2 = 36\,(4 - 1) > 0$, $r = -12 < 0$, les deux valeurs propres de la matrice hessienne sont négatives, la forme quadratique dérivée seconde est négative, le point A est un **maximum relatif**.
Au point $B = (-1, -2)$: $r\,t - s^2 = 36\,(1 - 4) < 0$, les deux valeurs propres de la matrice hessienne sont de signes contraires, la forme quadratique dérivée seconde n'est ni positive, ni négative, le point B est un **col**.
Au point $C = (1, 2)$: $r\,t - s^2 = 36\,(1 - 4) < 0$, les deux valeurs propres de la matrice hessienne sont de signes contraires, la forme quadratique dérivée seconde n'est ni positive, ni négative, le point C est un **col**.
Au point $D = (2, 1)$: $r\,t - s^2 = 36\,(4 - 1) > 0$, $r = 12 > 0$, les deux valeurs propres de la matrice hessienne sont positives, la forme quadratique dérivée seconde est positive, le point D est un **minimum relatif**.

A $(-2, -1)$: maximum relatif.
B $(-1, -2)$: col.
C $(1, 2)$: col.
D $(2, 1)$: minimum relatif.

Par ailleurs, on voit que, pour $y = 0$, $f\,(x, 0) = x^3 - 15\,x$ peut prendre toute valeur de $-\infty$ à $+\infty$.
f n'a donc ni maximum absolu, ni minimum absolu.

Exercices

Extrema relatifs dans $\mathbb{R}^2$.

1. Extrema relatifs.
2. Matrice hessienne dans $\mathbb{R}^2$.

Extrema relatifs dans $\mathbb{R}^2$.

Pour une application de classe C^2 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, les coordonnées des points critiques sont solutions des équations :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0.$$

Pour déterminer si un point critique est un extremum relatif, on étudie les valeurs propres de la matrice hessienne de f (dérivées secondes) au point critique :

— Si les valeurs propres sont de **même signe**, le point critique est un **extremum relatif** : maximum relatif pour des valeurs propres négatives, minimum pour des valeurs propres positives.

— Si les valeurs propres sont de **signes différents**, le point critique est un **col**.

— Si une ou les deux valeurs propres sont nulles, il faut étudier les dérivées partielles d'ordre 3.

Explication.

En un point critique a, la formule de Taylor-Young à l'ordre 2 donne :

$$f(a + h) = f(a) + \frac{1}{2}\, {}^t h.Hess_a(f).h + \| h \| \omega(h)$$

La forme quadratique $\frac{1}{2}\, {}^t h.Hess_a(f).h$ est positive ($f(a + h) > f(a)$) lorsque ses valeurs propres sont toutes deux positives.
La forme quadratique $\frac{1}{2}\, {}^t h.Hess_a(f).h$ est négative ($f(a + h) < f(a)$) lorsque ses valeurs propres sont toutes deux négatives.
Si une valeur propre est nulle, la forme quadratique suivant un vecteur propre est nulle, il faut écrire la formule de Taylor-Young à l'ordre 3 pour un tel vecteur propre.

HAUT

Matrice hessienne dans $\mathbb{R}^2$.

HAUT

Pour une application de classe C^2 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, la matrice hessienne de f en un point (x, y) est :

$$Hess_{(x,y)}(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{pmatrix}$$

On pose

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = r,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\ \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y\ \partial x}(x, y) = s,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = t.$$

$r\,t - s^2$ est le déterminant de la matrice $Hess_{(x,y)}(f)$, produit des valeurs propres.
$r + t$ est la trace de la matrice $Hess_{(x,y)}(f)$, somme des valeurs propres.

La nature d'un point critique a dépend des signes de r et de $r\,t - s^2$ en ce point :
— $r\,t - s^2 < 0$: col
— $r\,t - s^2 > 0$: extremum relatif
  $r > 0$: minimum relatif
  $r < 0$: maximum relatif
— $r\,t - s^2 = 0$: col ou extremum relatif, selon les dérivées d'ordre supérieur à 2.

Explication.

En un point critique a, la formule de Taylor-Young à l'ordre 2 donne :

$$f(a + h) = f(a) + \frac{1}{2}\,{}^t h.Hess_a(f).h + \| h \|\, \omega(h)$$

$r\,t - s^2 < 0$: les valeurs propres de $Hess_a(f)$ sont de signes opposés, a est un col.

$r\,t - s^2 > 0$: les valeurs propres de $Hess_a(f)$ sont de même signe, le produit $r\,t$ est plus grand que s^2, il est positif, r et t sont de même signe.

- Si r est positif, t est positif et $r + t$ est positif, les deux valeurs propres sont positives et $Hess_a(f)$ définit une forme quadratique positive, a est un minimum relatif.
- Si r est négatif, t est négatif et $r + t$ est négatif, les deux

valeurs propres sont négatives et $Hess_a(f)$ définit une forme quadratique négative, a est un maximum relatif.

HAUT

Chapitre 29 - Extrema relatifs dans $\mathbb{R}^2$.

Exercices

Exercice 1. Points critiques.
Exercice 2. Minimum absolu.
Exercice 3. Minimum relatif.

Exercice 1. Points critiques.

Pour chaque application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par la formule indiquée, déterminer les points critiques de f et indiquer leur nature :

a) $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + 2x + 3y$

b) $f(x, y) = x^3 + y^3$

c) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$

d) $f(x, y) = (x - y)^2 + (x + y)^3$

e) $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy$

Solution

HAUT

Exercice 2. Minimum absolu.

Soit a un nombre réel strictement positif. Trouver le minimum de l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y) = \sqrt{x^2 + (y-a)^2} + \sqrt{(x-a)^2 + y^2}$$

Solution

HAUT

Exercice 3. Minimum relatif.

On considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x, y) = (x^2 - y)(3x^2 - y)$$

1°/ Prouver que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, l'application $g_\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$g_\lambda(x) = f(x, \lambda x)$$

admet un minimum relatif en 0.

2°/ Est-ce que f admet un minimum relatif en (0,0) ?

Solution

HAUT

Chapitre 29. Extrema relatifs dans $\mathbb{R}^2$.

Enoncés.

Exercice 1. Points critiques.

Pour chaque application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par la formule indiquée, déterminer les points critiques de f et indiquer leur nature :

a) $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + 2x + 3y$

b) $f(x, y) = x^3 + y^3$

c) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$

d) $f(x, y) = (x - y)^2 + (x + y)^3$

e) $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy$

Solution.

Par définition, les points critiques sont les points où la dérivée est nulle.

1°/ $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + 2x + 3y$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x + y + 2$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x + 2y + 3$$

Les points critiques annulent les deux dérivées partielles :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Il y a un seul point critique, le point $A = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}\right)$.

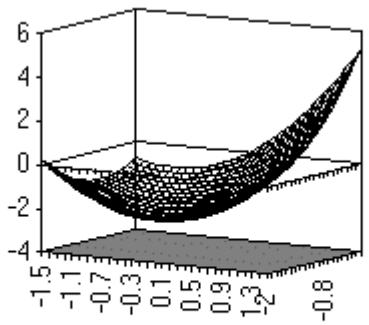
$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 2 \; ; \; s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \, \partial y}(x, y) = 1 \; ; \; t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 2$$

$$rt - s^2 = 3$$

$rt - s^2$ est > 0, et r est > 0 :

Le point critique $A = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}\right)$ est un minimum relatif.

De plus, comme $r\,t - s^2$ et r sont constamment positifs, le plan tangent à la surface d'équation $z = f(x, y)$ est constamment au-dessous de la surface : celle-ci est donc convexe et le minimum relatif est un minimum absolu.



2°/ $f(x, y) = x^3 + y^3$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3y^2$$

Il y a un seul point critique, c'est le point (0,0).

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 0 \; ; \; s = \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(0,0) = 0 \; ; \; t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = 0$$

$$r\,t - s^2 = 0 \; ; \; r = t = 0$$

La forme quadratique définie par la matrice hessienne $\begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}$ en (0,0) est nulle.

Pour étudier la nature du point critique (0,0), il faut calculer les dérivées troisièmes en (0,0) :

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(0,0) = 6, \; \frac{\partial^3 f}{\partial x^2\,\partial y}(0,0) = 0, \; \frac{\partial^3 f}{\partial x\,\partial y^2}(0,0) = 0, \; \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(0,0) = 6$$

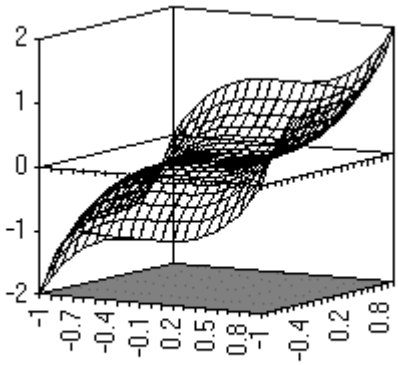
La formule de Taylor-Young au voisinage de $A = (0,0)$ s'écrit :

$$f(A + h) = f(A) + h_1^3 + h_2^3 + \| h \|^3 \omega(h)$$

avec un $\omega(h)$ qui tend vers 0 lorsque $\| h \|$ tend vers 0.

La forme homogène de degré 3, $h_1^3 + h_2^3$, n'est pas de signe constant, elle change de signe si l'on change h en $-h$, donc le point (0,0) est un col.

Le point (0,0) est un col.



3°/ $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2 - 3y \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 6x \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(x, y) = -3$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3y^2 - 3x \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(x, y) = -3 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 6y$$

Les points critiques sont déterminés par les équations:

$$x^2 = y$$
$$y^2 = x$$

donc $x^4 = x$, $x(x^3 - 1) = 0$, $x(x - 1)(x^2 + x + 1) = 0$.
Dans $\mathbb{R}$, il y a seulement deux solutions : $x = 0$ et $x = 1$.
$y = x^2$ donne les deux solutions : (0,0) et (1,1).

Il y a deux points critiques, (0,0) et (1,1).

1. Nature du point (0,0).

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 0 \; ; \; s = \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(0,0) = -3 \; ; \; t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = 0$$

$$rt - s^2 = -9$$

$rt - s^2$ est négatif :

Le point (0,0) est un col.

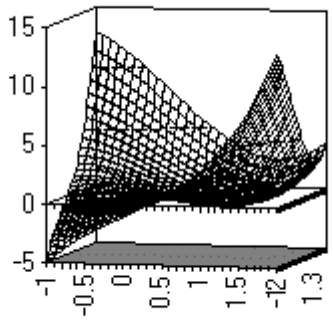
2. Nature du point (1,1).

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1) = 6 \; ; \; s = \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(1,1) = -3 \; ; \; t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,1) = 6$$

$$r\,t - s^2 = 27$$
$$r = t = 6$$

$r\,t - s^2 > 0$ et $r > 0$:

Le point $A = (1,1)$ est un minimum relatif.



4°/ $f(x, y) = (x - y)^2 + (x + y)^3$.

$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2(x - y) + 3(x + y)^2$ $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 2 + 6x$ $\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(x, y) = -2 + 6(x + y)$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -2(x - y) + 3(x + y)^2$ $\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(x, y) = -2 + 6x$ $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 2 + 6(x + y)$

Les points critiques sont déterminés par les équations:

$$x + y = 0$$
$$x - y = 0$$

donc $x = y = 0$.

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 2\ ;\ s = \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(0,0) = -2\ ;\ t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = 2$$

$$r\,t - s^2 = 0$$
$$r = t = 2$$

Les valeurs propres de la matrice hessienne de f en $A = (0,0)$ sont donc 0 et 4.
Pour connaître la nature du point critique (0,0), il faut étudier les dérivées partielles d'ordre 3.

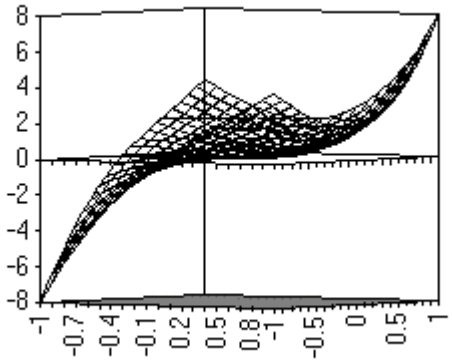
$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(0,0) = 6,\ \frac{\partial^3 f}{\partial x^2\,\partial y}(0,0) = 6,\ \frac{\partial^3 f}{\partial x\,\partial y^2}(0,0) = 6,\ \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(0,0) = 6$$

Pour un vecteur propre h pour la valeur propre 0, $h = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$(car la somme des deux colonnes de la matrice hessienne de f en (0,0) est nulle), la forme quadratique définie par la dérivée d'ordre 2 est nulle et la formule de Taylor-Young à l'ordre 3 se réduit à :

$$f(A+h) = f(A) + (h_1{}^3 + h_1{}^2 h_2 + h_1 h^2 + h_2{}^3) + \| h \|^3 \omega(h) = f(A) + 4\lambda^3 + \| h \|^3 \omega(h)$$

avec un $\omega(h)$ qui tend vers 0 lorsque $\| h \|$ tend vers 0.
Le signe de la différence $f(A+h) - f(A)$ dépend du signe de λ : le point $A = (0,0)$ est un col.

Le point $A = (0,0)$ est un col.



5°/ $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 4x^3 - 4y \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 12x^2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}(x, y) = -4$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 4y^3 - 4x \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}(x, y) = -4 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 12y^2$$

Les points critiques sont déterminés par les équations:

$$x^3 = y$$
$$y^3 = x$$

donc :

$$x^9 = x$$
$$x(x^8 - 1) = 0$$
$$x(x^4 - 1)(x^4 + 1) = 0$$
$$x(x^2 - 1)(x^2 + 1)(x^4 + 1) = 0$$
$$x(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)(x^4 + 1) = 0$$

Les racines réelles sont : $x = 0$, $x = 1$, $x = -1$.
La relation $y = x^3$ donne les valeurs correspondantes de y : $y = 0$, $y = 1$, $y = -1$.

Il y a trois points critiques : $A = (0,0)$, $B = (1,1)$, $C = (-1, -1)$.

1. Nature du point critique $A = (0,0)$.

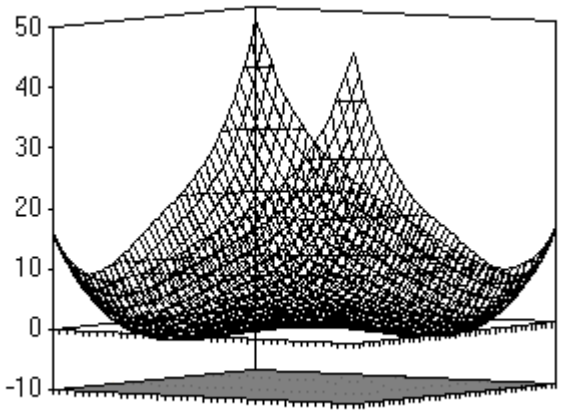
$$r = 0,\ s = -4,\ t = 0,\ r t - s^2 = -16 < 0$$

Le point $A = (0,0)$ est un col.

2. Nature des points critiques $B = (1,1)$ et $C = (– 1, – 1)$.

$r = 12$, $s = – 4$, $t = 12$, $r\,t – s^2 = 144 – 16 = 128 > 0$ et $r > 0$:

Les points $B = (1,1)$ et $C = (– 1, – 1)$ sont des minima relatifs.



Chapitre 29. Extrema relatifs dans $\mathbb{R}^2$.

Enoncés.

Exercice 2. Minimum absolu.

Soit a un nombre réel strictement positif. Trouver le minimum de l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par : $$f(x,y)=\sqrt{x^2+(y-a)^2}+\sqrt{(x-a)^2+y^2}$$	

Solution.

1°/ Domaine de définition.

L'application f est définie en tout point (x, y) de $\mathbb{R}^2$.

2°/ Dérivabilité.

Lorsque les polynômes $x^2 + (y - a)^2$ et $(x - a)^2 + y^2$ sont différents de 0, c'est-à-dire pour

$$(x, y) \neq (0, a) \text{ et } (x, y) \neq (a, 0)$$

composée de sommes et de fonctions puissances, l'application f est indéfiniment dérivable.
Elle a alors des dérivées partielles premières :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+(y-a)^2}} + \frac{x-a}{\sqrt{(x-a)^2+y^2}}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{y-a}{\sqrt{x^2+(y-a)^2}} + \frac{y}{\sqrt{(x-a)^2+y^2}}$$

Au point $(0, a)$, la dérivée partielle première de f par rapport à x, si elle existe, est la limite, lorsque t tend vers 0 en restant différent de 0, du rapport $\frac{f(t,a)-f(0,a)}{t} = \frac{1}{t}\left(\sqrt{t^2}+\sqrt{(t-a)^2+a^2}-\sqrt{2a^2}\right)$.

$$\frac{f(t,a)-f(0,a)}{t} = \frac{1}{t}\left(|t|+\sqrt{2a^2-2at+t^2}-\sqrt{2a^2}\right)$$
$$= \frac{1}{t}\left(|t|+\sqrt{2a^2}\sqrt{1-\frac{t}{a}+\frac{t^2}{2a^2}}-\sqrt{2a^2}\right)$$
$$= \frac{1}{t}\left(|t|+\sqrt{2a^2}\left(1-\frac{t}{2a}\right)-\sqrt{2a^2}+o(t^2)\right)$$
$$= \frac{1}{t}\left(|t|-\frac{\sqrt{2a^2}}{2a}t+o(t^2)\right)$$

$= sgn\,(t) - \frac{\sqrt{2}}{2} + o\,(t)$, puisque $a > 0$.

La limite à droite ($t > 0$) n'est pas égale à la limite à gauche ($t < 0$), le rapport n'a pas de limite et f n'a pas de dérivée partielle première par rapport à x au point $(0, a)$.

Au point $(0, a)$, la dérivée partielle première de f par rapport à y, si elle existe, est la limite, lorsque t tend vers 0 en restant différent de 0, du rapport $\frac{f(0,a+t)-f(0,a)}{t} = \frac{1}{t}\left(\sqrt{t^2} + \sqrt{a^2+(a+t)^2} - \sqrt{2a^2}\right) =$

$sgn\,(t) + \frac{\sqrt{2}}{2} + o\,(t)$

Ce rapport n'a pas de limite, f n'a pas de dérivée partielle première par rapport à y au point $(0, a)$.

Comme la fonction f est une fonction symétrique de x et y ($f(x, y) = f(y, x)$), f n'a pas, non plus, de dérivée partielle première par rapport à x ou à y, au point $(a,0)$.

L'application f n'est pas dérivable, même partiellement, aux points $(0, a)$ et $(a, 0)$.
Elle est dérivable partout ailleurs dans $\mathbb{R}^2$.

Comme $\mathbb{R}^2 - \{ (0, a) ; (a, 0) \}$ est ouvert, si f a un minimum absolu, ce ne peut être qu'en un point de cet ouvert, auquel cas c'est aussi un minimum relatif, ou bien en un point de $\{ (0, a) ; (a, 0) \}$ auquel cas ce n'est pas forcément un minimum relatif.

3°/ Points critiques.

Les points critiques sont ceux qui annulent les deux dérivées partielles premières de f.
Leurs coordonnées (x, y) sont solutions du système :

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+(y-a)^2}} + \frac{x-a}{\sqrt{(x-a)^2+y^2}} = 0$$
$$\frac{y-a}{\sqrt{x^2+(y-a)^2}} + \frac{y}{\sqrt{(x-a)^2+y^2}} = 0$$

La deuxième relation s'obtient à partir de la première en changeant x en y et y en x.

Par addition des deux relations membre à membre, on obtient :

$$(x + y - a)\left[\frac{1}{\sqrt{x^2+(y-a)^2}} + \frac{1}{\sqrt{(x-a)^2+y^2}}\right] = 0$$

Et comme $\left[\frac{1}{\sqrt{x^2+(y-a)^2}} + \frac{1}{\sqrt{(x-a)^2+y^2}}\right]$ est toujours > 0 dans l'ouvert $\mathbb{R}^2 - \{ (0, a) ; (a, 0) \}$:

$$x + y = a$$

La première relation, qui traduit la nullité de la dérivée partielle première par rapport à x, est équivalente à :

$$x\sqrt{(x-a)^2+y^2} = (a-x)\sqrt{x^2+(y-a)^2}$$

Sur cette relation, on voit que x et $a - x$ ont le même signe, donc ***x* est compris entre 0 et *a***.
Si cette relation est vérifiée, on obtient, avec $y = a - x$ compris, lui aussi entre 0 et a :

$$\sqrt{2}\ x\ (a - x) = \sqrt{2}\ x\ (a - x)$$

Elle est toujours vérifiée : les points critiques sont donc les points vérifiant $x + y = a$, avec $0 < x < a$.

En résumé, comme (x, y) doit être différent de $(0, a)$ et de $(a, 0)$:

Pour $a > 0$, tous les points $(x, a - x)$, avec x strictement compris entre 0 et a, sont points critiques.

Les points $(x, a - x)$ sont les points du segment ouvert $](0,a), (a, 0)[$.
Les candidats à la qualité de minimum absolu sont donc tous les points du segment fermé $[(0,a), (a, 0)]$.

4°/ Nature des points critiques.

a) Valeur de *f* en un point critique.

La valeur de f en un point critique $(x, a - x)$ est :

$$f(x, a - x) = \sqrt{2}\,(\,|\,x\,| + |\,a - x\,|\,)$$

Or x et $a - x$ ont le même signe et x est compris entre 0 et a, donc x a le signe de a.
Si a est positif, x et $a - x$ sont positifs, $f(x, a - x) = \sqrt{2}\,(\,x + a - x\,) = a\sqrt{2}$.

$$f(x, a - x) = a\sqrt{2}$$

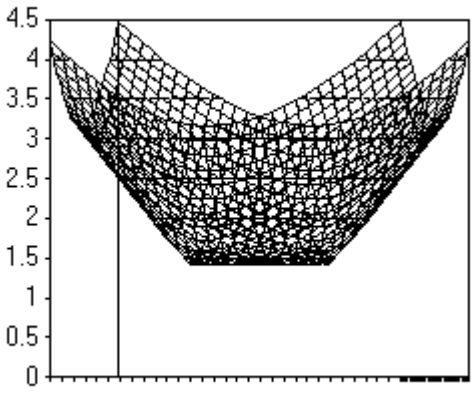
On remarquera que l'on a aussi :

$$f(0, a) = f(a, 0) = a\sqrt{2}.$$

Ainsi, **la valeur de *f* est constante le long du segment fermé [(0,*a*), (*a*, 0)]**.

b) Nature des points critiques.

Pour déterminer la nature d'un point critique, il faut étudier la matrice hessienne de f et, pour cela, calculer les dérivées secondes de f.



$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + (y - a)^2}} - \frac{x^2}{2\left(x^2 + (y - a)^2\right)\sqrt{x^2 + (y - a)^2}} + \frac{1}{\sqrt{(x - a)^2 + y^2}} - \frac{(x - a)^2}{2\left((x - a)^2 + y^2\right)\sqrt{(x - a)^2 + y^2}}$$

$$= \frac{1}{x\sqrt{2}} - \frac{1}{2x\sqrt{2}} + \frac{1}{(a-x)\sqrt{2}} - \frac{1}{2(a-x)\sqrt{2}}$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{a-x}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{a}{x(a-x)}$$

$$r = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(x, a-x) = \frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{a}{x(a-x)} > 0$$

En changeant x en y, et compte tenu de la symétrie de f et de $x + y = a$, il vient :

$$t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, a-x) = \frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{a}{x(a-x)} > 0$$

Reste à calculer la dérivée partielle seconde par rapport à x une fois et par rapport à y une fois :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(x, y) = -\frac{x(y-a)}{2\left(x^2+(y-a)^2\right)\sqrt{x^2+(y-a)^2}} - \frac{(x-a)y}{2\left((x-a)^2+y^2\right)\sqrt{(x-a)^2+y^2}}$$
$$= -\frac{1}{2x\sqrt{2}} + \frac{1}{2(a-x)\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{1}{a-x} - \frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{2x-a}{x(a-x)}$$

$$s = \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(x, a-x) = \frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{a-2x}{x(a-x)}$$

$$r\,t - s^2 = \frac{1}{8x^2(a-x)^2}\left(a^2 - (a-2x)^2\right) = \frac{1}{2x(a-x)} > 0$$

$r\,t - s^2 > 0$ et $r > 0$:

Tous les points critiques sont des minimas relatifs.

Pour voir si ces minima relatifs sont des minima absolus, il faut étudier la différence :

$$f(x, y) - a\sqrt{2} = \sqrt{x^2+(y-a)^2} + \sqrt{(x-a)^2+y^2} - a\sqrt{2}$$

$\sqrt{x^2+(y-a)^2}$ est la distance euclidienne du point (x, y) au point $(0, a)$,
$\sqrt{(x-a)^2+y^2}$ est la distance euclidienne du point (x, y) au point $(a, 0)$,
$a\sqrt{2}$ est la distance euclidienne du point $(0, a)$ au point $(a, 0)$.

L'inégalité du triangle dans $\mathbb{R}^2$ muni de la distance euclidienne donne :

$$d((0, a), (a, 0)) \leqslant d((0, a), (x, y)) + d((x, y), (a, 0))$$
$$a\sqrt{2} \leqslant \sqrt{x^2+(y-a)^2} + \sqrt{(x-a)^2+y^2} = f(x, y)$$

et cette inégalité démontre que la valeur minimum de $f(x, y)$ est $a\sqrt{2} = f(x, a-x)$, $0 \leqslant x \leqslant a$.

La valeur minimum de f est $a\sqrt{2}$: cette valeur est atteinte en chaque point du segment fermé

$[(0,a), (a, 0)]$.

A posteriori, le résultat est évident : la somme des distances d'un point quelconque à deux points donnés, éventuellement confondus, est minimum lorsque le point est sur le segment fermé joignant les deux points donnés et dans ce cas la somme des distances est la longueur du segment joignant ces deux points.

Chapitre 29. Extrema relatifs dans $\mathbb{R}^2$.

Enoncés.

Exercice 3. Minimum relatif.

On considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x, y) = (x^2 - y)(3x^2 - y)$$

1°/ Prouver que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, l'application $g_\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$g_\lambda(x) = f(x, \lambda x)$$

admet un minimum relatif en 0.

2°/ Est-ce que f admet un minimum relatif en (0,0) ?

Solution.

1°/ Minimum relatif de g_λ.

$$g_\lambda(x) = f(x, \lambda x) = (x^2 - \lambda x)(3x^2 - \lambda x) = x^2(x - \lambda)(3x - \lambda)$$
$$\frac{dg_\lambda}{dx}(x) = 2x(x - \lambda)(3x - \lambda) + x^2(3x - \lambda) + 3x^2(x - \lambda)$$
$$\frac{dg_\lambda}{dx}(x) = 2x(x - \lambda)(3x - \lambda) + 2x^2(3x - 2\lambda)$$
$$\frac{dg_\lambda}{dx}(x) = 2x[(x - \lambda)(3x - \lambda) + x(3x - 2\lambda)]$$
$$\frac{dg_\lambda}{dx}(x) = 2x(6x^2 - 6\lambda x - \lambda^2)$$

Pour $x = 0$, $\frac{dg_\lambda}{dx}(x)$ est nul, le point $x = 0$ est un point critique pour g_λ.

$$\frac{d^2g_\lambda}{dx^2}(x) = 2(6x^2 - 6\lambda x - \lambda^2) + 2x(12x^2 - 6\lambda)$$
$$\frac{d^2g_\lambda}{dx^2}(x) = 12x(3x^2 - 2\lambda) - 2\lambda^2$$

Pour $x = 0$, $\frac{d^2 g_\lambda}{d x^2}(x)$ est négatif, le point $x = 0$ est un minimum relatif pour g_λ.

$g_\lambda (x) = f (x, \lambda x)$ admet un minimum relatif 0 en 0.

2°/ Point critique de *f*.

Remarquons qu'on aurait pu calculer la dérivée de g_λ à partir des dérivées partielles de f :

$$\frac{d g_\lambda}{d x}(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, \lambda x) + \lambda \frac{\partial f}{\partial y}(x, \lambda x)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2 x (3 x^2 - y) + 6 x (x^2 - y) = 4 x (3 x^2 - 2 y)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = - (3 x^2 - y) - (x^2 - y) = - 2 (2 x^2 + y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, \lambda x) = 4 x^2 (3 x - 2 \lambda)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, \lambda x) = - 2 x (2 x + \lambda)$$

$$\frac{d g_\lambda}{d x}(x) = 4 x^2 (3 x - 2 \lambda) - 2 \lambda x (2 x + \lambda) = 2 x (6 x^2 - 6 \lambda x - \lambda^2)$$

On obtient, bien sûr, le même résultat que précédemment.
Ce calcul met en évidence les dérivées partielles premières de f par rapport à x et par rapport à y : ces dérivées partielles sont nulles au point (0,0).

Au point (0,0), f admet un point critique.

Pour déterminer la nature de ce point critique, calculons la matrice hessienne de f en (0,0) :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x , y) = 4 (3 x^2 - 2 y) + 24 x^2 = 4 (9 x^2 - 2 y)$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \, \partial y}(x, y) = - 8 x$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = - 2$$

$$Hess_{(x,y)} (f) = \begin{pmatrix} 4(9x^2 - 2y) & -8x \\ -8x & -2 \end{pmatrix}$$

$$Hess_{(0,0)} (f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Cette matrice, qui est déjà sous la forme de Jordan (c'est-à-dire diagonale ou triangulaire supérieure), a pour valeurs propres 0 et – 2.

Pour déterminer la nature du point critique (0,0), il faut étudier les dérivées partielles d'ordre 3 en

(0,0) suivant le vecteur propre (1,0) pour la valeur propre 0.

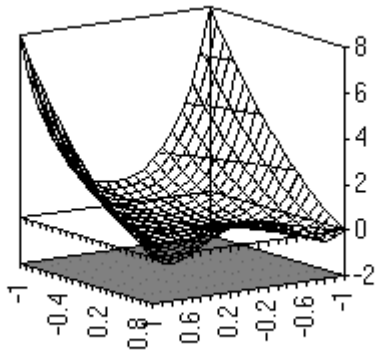
$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x, y) = 72\, x$$
$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\, \partial y}(x, y) = -8$$
$$\frac{\partial^3 f}{\partial x\, \partial y^2}(x, y) = 0$$
$$\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x, y) = 0$$

La formule de Taylor-Young à l'ordre 3 s'écrit donc, avec $f(0,0) = 0$:

$$f(h_1, h_2) = -h_2{}^2 + 12\, h_1{}^3 - \frac{4}{3} h_1{}^2 h_2 + \| h \|^3\, \omega(h)$$

Pour $h_2 = 0$, $f(h_1, 0) = 12\, h_1{}^3 + \| h \|^3\, \omega(h)$ qui est > 0 pour $h_1 > 0$ assez petit.
Pour $h_1 = 0$, $f(0, h_2) = -h_2 + \| h \|^3\, \omega(h) < 0$ pour $\| h \|$ assez petit.

L'application f admet en (0,0) un col de valeur 0.



A posteriori, le résultat est évident : f est un polynôme de degré 2 en y, il est négatif lorsque y est compris entre x^2 et $3\, x^2$, et positif lorsque y est inférieur à x^2 ou supérieur à $3\, x^2$. Il existe donc une région du plan, comprise entre les deux paraboles, d'équations $y = x^2$ et $y = 3\, x^2$, où $f(x, y)$ est négative ; partout ailleurs, $f(x, y)$ est positive. Donc le point critique (0,0) ne peut être ni un maximum relatif, ni un minimum relatif : c'est un col.

Exercices

Intégrales propres dépendant d'un paramètre.

1. **Continuité de l'intégrale.**
2. **Dérivabilité de l'intégrale.**
3. **Intégrabilité de l'intégrale.**

Continuité de l'intégrale.

Hypothèses :

- X est un intervalle d'intérieur non vide,
- a et b sont des nombres réels vérifiant $a < b$,
- f est une application continue de $X \times [a, b]$ dans $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$,

Conclusion :

L'application $F : X \to K$ définie par

$$F(x) = \int_a^b f(x, t)\, dt$$

est continue sur X.

HAUT

Dérivabilité de l'intégrale.

HAUT

Hypothèses :

- X est un intervalle d'intérieur non vide,
- a et b sont des nombres réels vérifiant $a < b$,
- f est une application de $X \times [a, b]$ dans $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$,
- L'application partielle $f_x : t \mapsto f(x, t)$ est continue sur $[a, b]$ pour tout $x \in X$,
- $\frac{\partial f}{\partial x}$ existe et c'est une application continue de $X \times [a, b]$ dans K.

Conclusion :

L'application $F : X \to K$ définie par

$$F(x) = \int_a^b f(x, t)\, dt$$

est de classe C^1 sur X et, pour tout $x \in X$, sa dérivée est l'intégrale de la dérivée partielle de f par rapport à x :

$$F'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)\, dt$$

HAUT

Intégrabilité de l'intégrale.

Hypothèses :

- X est un intervalle d'intérieur non vide,
- a et b sont des nombres réels vérifiant $a < b$,
- f est une application continue de $X \times [a, b]$ dans $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$,

Conclusion :

L'application $F : X \to K$ définie par

$$F(x) = \int_a^b f(x, t)\, dt$$

est intégrable sur tout intervalle $[\alpha, \beta]$ contenu dans X et son intégrale sur l'intervalle $[\alpha, \beta]$ est :

$$\int_\alpha^\beta F(x)\, dx = \int_a^b \left(\int_\alpha^\beta f(x, t)\, dx \right) dt$$

Cette formule est un cas particulier du **théorème de Fubini** (intégrales doubles).

HAUT

Chapitre 30 - Intégrales propres dépendant d'un paramètre.

Exercices

Exercice 1. Dérivabilité.
Exercice 2. Transformation de Laplace.
Exercice 3. Coefficients d'une série de Fourier.
Exercice 4. Dérivation d'une intégrale généralisée dépendant d'un paramètre.
Exercice 5. Fonction Gamma d'Euler.

Exercice 1. Dérivabilité.

Soit $(x, y) \mapsto f(x, y)$ l'application $\mathbb{R} \times (\mathbb{R} - \{0\}) \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x, y) = Arctan \frac{x}{y}.$$

1°/ Montrer que f est continue dans tout rectangle $[a, b] \times [c, d]$ tel que $0 \notin [c, d]$, et que f admet, dans ce rectangle, une dérivée partielle par rapport à y continue.

2°/ On considère l'application $F : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$F(y) = \int_0^1 Arctan \frac{x}{y}\, dx.$$

Montrer que F est dérivable dans tout intervalle ne contenant pas 0 et calculer sa dérivée.

3°/ Vérifier le résultat précédent en calculant directement $F(y)$ puis sa dérivée $F'(y)$.

Solution

HAUT

Exercice 2. Transformation de Laplace.

1°/ Montrer que si une fonction numérique $f(t)$, nulle pour $t < 0$, vérifie, pour $t > 0$,

$$f(x + T) = f(x)$$

avec un $T > 0$, alors son image par la transformation de Laplace, définie par :

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t)\, e^{-p\,t}\, dt$$

est donnée par :

$$F(p) = \frac{1}{1 - e^{-p\,T}} \int_0^{T} f(t)\, e^{-p\,t}\, dt.$$

Solution

2°/ Déterminer l'image de Laplace $F(p)$ de la fonction numérique $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, nulle pour $t < 0$ et égale, pour $t > 0$, à $|\sin t|$.

3°/ Exprimer, en fonction de F et de ses dérivées, la transformée de Laplace de $(-t)^m f(t)$, où f est la fonction numérique définie en 2° et où m est un entier $\geqslant 1$.

Calculer, en fonction de p, la valeur de l'intégrale $\int_0^{\pi} t\, e^{-p\,t} \sin t\, dt$.

HAUT

Exercice 3. Coefficients d'une série de Fourier.

On considère la fonction impaire $x \mapsto f(x, t)$ de période 2π, égale à $\cosh tx$ pour $0 < x < \pi$. Sa "série de Fourier" est :

$$\frac{1}{2}[f(x+0, t) + f(x-0, t)] = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(t) \sin nx$$

où le "coefficient de Fourier d'indice n" est donné par l'intégrale :

$$c_n(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cosh(tx) \sin(nx)\, dx.$$

1°/ Montrer que c_n est une fonction de t dérivable et intégrable sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

2°/ Calculer $c_n(t)$.

3°/ Déduire de la série de Fourier de f la formule :

$$\frac{\pi}{4}\frac{1}{\cosh\frac{\pi t}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{(2n+1)^2 + t^2}.$$

4°/ On se propose de calculer l'intégrale :

$$\varphi(x) = \int_0^{\infty} \frac{\cos(xt)}{\cosh(t)}\, dt.$$

Pour cela, on développe $\frac{1}{\cosh(t)}$ suivant les puissances de e^{-t}, on multiplie terme à terme par $\cos xt$ et on intègre terme à terme de 0 à $+\infty$. En appliquant le résultat de la troisième question, montrer que l'on a :

$$\varphi(x) = \frac{\pi}{2}\frac{1}{\cosh\frac{\pi x}{2}}.$$

Solution

HAUT

Exercice 4. Dérivation d'une intégrale généralisée dépendant d'un paramètre.

1°/ Démontrer que, pour tout nombre réel $x \geqslant 421$, l'intégrale généralisée

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-421t} - e^{-xt}}{t}\, dt$$

converge.

2°/ Dans toute la suite de l'exercice 3, on désigne par F l'application de l'intervalle $[421, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$, définie, pour tout $x \geqslant 421$, par :

$$F(x) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-421t} - e^{-xt}}{t}\, dt.$$

F est-elle dérivable ?

3°/ Pour tout $x \geqslant 421$, expliciter F à l'aide de fonctions élémentaires et préciser la valeur de $F(421\,k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Solution

HAUT

Exercice 5. Fonction Gamma d'Euler.

On considère l'application $\Gamma : \mathrm{R} \longrightarrow \mathrm{R}$ définie par :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}\, e^{-t}\, dt$$

1°/ Dans quel intervalle de R, la fonction numérique Γ est-elle définie ?

2°/ Démontrer la formule $\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$.

En déduire la formule $\Gamma(n+1) = n!$ pour tout $n \in \mathrm{N}^*$.

3°/ Sachant que $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$, calculer $\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)$, $n \in \mathrm{N}$.

4°/ Calculer l'intégrale $\int_0^{+\infty} u^n\, e^{-u^2}\, du$, pour tout $n \in \mathrm{N}$.

5°/ Montrer qu'on peut prolonger la définition de Γ pour certaines valeurs négatives de x ?

Calculer $\Gamma\left(-n - \frac{1}{2}\right)$, $n \in \mathrm{N}$.

Solution

HAUT

Chapitre 30. Intégrales propres dépendant d'un paramètre.

Enoncés.

Exercice 1. Dérivabilité.

Soit $(x, y) \mapsto f(x, y)$ l'application $\mathbb{R} \times (\mathbb{R} - \{0\}) \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x, y) = Arctan \frac{x}{y}.$$

1°/ Montrer que f est continue dans tout rectangle $[a, b] \times [c, d]$ tel que $0 \notin [c, d]$, et que f admet, dans ce rectangle, une dérivée partielle par rapport à y continue.

2°/ On considère l'application $F : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$F(y) = \int_0^1 Arctan \frac{x}{y}\, dx.$$

Montrer que F est dérivable dans tout intervalle ne contenant pas 0 et calculer sa dérivée.

3°/ Vérifier le résultat précédent en calculant directement $F(y)$ puis sa dérivée $F'(y)$.

Solution.

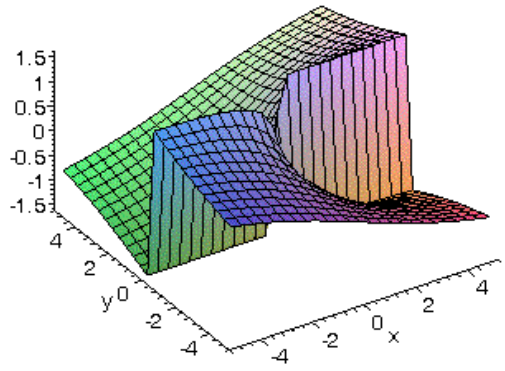
1°/ Continuité et dérivée partielle.

L'application *Arctan* est continue sur $\mathbb{R}$. L'application $(x, y) \mapsto \frac{x}{y}$ est continue sur $\mathbb{R} \times (\mathbb{R} - \{0\})$.
L'application f, composée des deux précédentes, est donc une application continue sur $\mathbb{R} \times (\mathbb{R} - \{0\})$.
En particulier, f est continue dans tout rectangle $[a, b] \times [c, d]$ ne contenant pas de segment de l'axe des x ($y = 0$).
Il en résulte que l'application partielle $y \mapsto f(x, y)$ est continue sur $[c, d]$ pour tout $x \in [a, b]$.

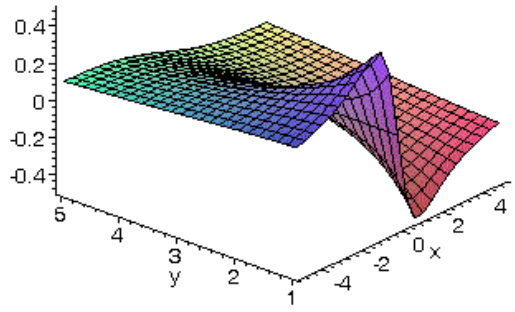
De plus, comme f est composée d'applications dérivables pour $y \neq 0$, elle est dérivable dans $\mathbb{R} \times (\mathbb{R} - \{0\})$.
En particulier, elle possède une dérivée partielle par rapport à y, pour $y \neq 0$:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\frac{\frac{x}{y}}{y\left(1 + \frac{x^2}{y^2}\right)} = -\frac{x}{x^2 + y^2}.$$

Comme le point (0,0), qui annule le dénominateur, ne peut appartenir à un rectangle $[a, b] \times [c, d]$ tel que $0 \notin [c, d]$, cette dérivée partielle, rapport de deux polynômes dont le deuxième ne s'annule pas, est une application continue dans tout rectangle $[a, b] \times [c, d]$ tel que $0 \notin [c, d]$.



$$f(x, y) = Arctan\ \frac{x}{y}$$



$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\frac{x}{x^2 + y^2}$$

2°/ Fonction définie par une intégrale propre.

Les conditions vérifiées dans la question précédente :

- $[a, b]$ est un intervalle d'intérieur non vide,
- c et d sont des nombres réels vérifiant $c < d$,
- f est une application de $[a, b] \times [c, d]$ dans $\mathbb{R}$,
- L'application partielle $f_x : y \mapsto f(x, y)$ est continue sur $[c, d]$ pour tout $x \in [a, b]$,
- $\frac{\partial f}{\partial x}$ existe et c'est une application continue de $[a, b] \times [c, d]$ dans $\mathbb{R}$.

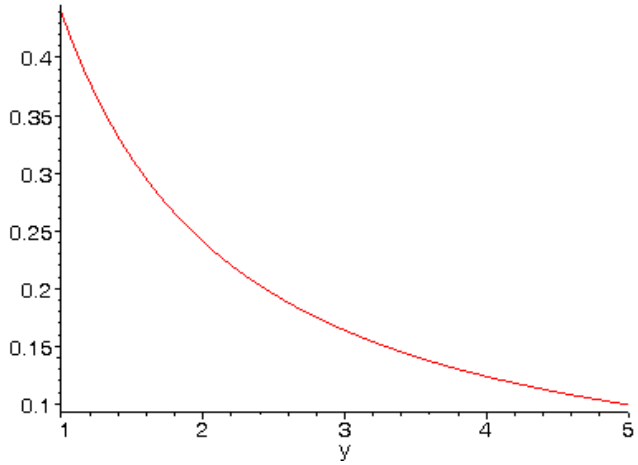
permettent d'appliquer le **théorème de dérivabilité sous le signe somme** : l'application F définie par :

$$F(y) = \int_0^1 Arctan\ \frac{x}{y}\, dx.$$

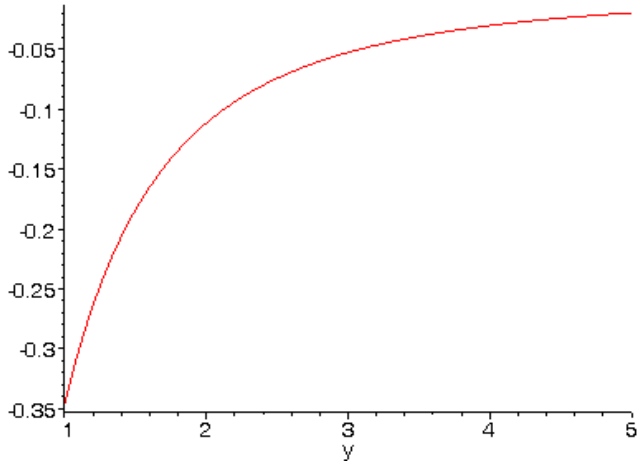
est dérivable dans tout intervalle $[c, d]$ ne contenant pas 0, et sa dérivée est donnée par :

$$F'(y) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial y}\left(Arctan\left(\frac{x}{y}\right)\right) dx = -\int_0^1 \frac{x}{x^2 + y^2}\, dx = \frac{1}{2}\, ln\left(\frac{y^2}{1 + y^2}\right)$$

(La dérivée de $Arctan\ u$ est $\frac{u'}{1 + u^2}$).



$$F(y) = \int_0^1 Arctan\ \frac{x}{y}\ dx.$$



$$F'(y) = \frac{1}{2}\ ln\left(\frac{y^2}{1+y^2}\right)$$

3°/ Calcul direct.

L'intégrale $F(y) = \int_0^1 Arctan\ \frac{x}{y}\ dx$ peut se calculer directement en intégrant par parties. On pose :

$$u = Arctan\ \frac{x}{y},\ du = \frac{y}{x^2+y^2}\ dx,\ v = x,\ dv = dx.$$

$$F(y) = Arctan\ \frac{1}{y} - \int_0^1 \frac{\frac{x}{y}}{1+\frac{x^2}{y^2}}\ dx = Arctan\ \frac{1}{y} - \frac{y}{2}\left[\ ln\left(1+\frac{x^2}{y^2}\right)\right]_{x=0}^{x=1} = Arctan\ \frac{1}{y} + \frac{y}{2}\ ln\left(\frac{y^2}{1+y^2}\right)$$

$$\boxed{F(y) = Arctan\ \frac{1}{y} + \frac{y}{2}\ ln\left(\frac{y^2}{1+y^2}\right)}$$

Cette application est dérivable pour $y \neq 0$ et sa dérivée est :

$$F'(y) = -\frac{\frac{1}{y^2}}{1+\frac{1}{y^2}} + \frac{1}{2}\ ln\left(\frac{y^2}{1+y^2}\right) + \frac{y}{2}\frac{1+y^2}{y^2}\frac{2y}{(1+y^2)^2} = \frac{1}{2}\ ln\left(\frac{y^2}{1+y^2}\right)$$

$$\boxed{F'(y) = \frac{1}{2}\ ln\left(\frac{y^2}{1+y^2}\right)}$$

On retrouve bien le même résultat.
On voit que la formule de dérivation sous le signe d'intégration simplifie parfois le calcul des intégrales :

$$\boxed{\frac{1}{2}\int\ ln\left(\frac{y^2}{1+y^2}\right)\ dy = Arctan\ \frac{1}{y} + \frac{y}{2}\ ln\left(\frac{y^2}{1+y^2}\right) + Constante}$$

Chapitre 30. Intégrales propres dépendant d'un paramètre.

Enoncés.

Exercice 2. Transformation de Laplace.

1°/ Montrer que si une fonction numérique $f(t)$, nulle pour $t < 0$, vérifie, pour $t > 0$,

$$f(x + T) = f(x)$$

avec un $T > 0$, alors son image par la transformation de Laplace, définie par :

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t)\, e^{-p\,t}\, dt$$

est donnée par :

$$F(p) = \frac{1}{1 - e^{-p\,T}} \int_0^{T} f(t)\, e^{-p\,t}\, dt.$$

2°/ Déterminer l'image de Laplace $F(p)$ de la fonction numérique $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, nulle pour $t < 0$ et égale, pour $t > 0$, à $|\sin t|$.

3°/ Exprimer, en fonction de F et de ses dérivées, la transformée de Laplace de $(-t)^m f(t)$, où f est la fonction numérique définie en 2° et où m est un entier $\geqslant 1$.

Calculer, en fonction de p, la valeur de l'intégrale $\int_0^{\pi} t\, e^{-p\,t} \sin t\, dt$.

Solution.

1°/ Transformée de Laplace d'une fonction périodique.

Par définition, la transformée de Laplace d'une fonction $f(t)$ nulle pour $t < 0$ est la fonction de variable complexe p définie par l'intégrale :

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t)\, e^{-p\,t}\, dt$$

Si $f(x + k\,T) = f(x)$ pour tout $x \in]\,0,\, T\,[$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, on peut écrire :

$$F(p) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\int_{k\,T}^{(k+1)\,T} f(t)\, e^{-p\,t}\, dt \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\int_0^{T} f(u)\, e^{-p\,(u\,+\,k\,T)}\, du \right)$$

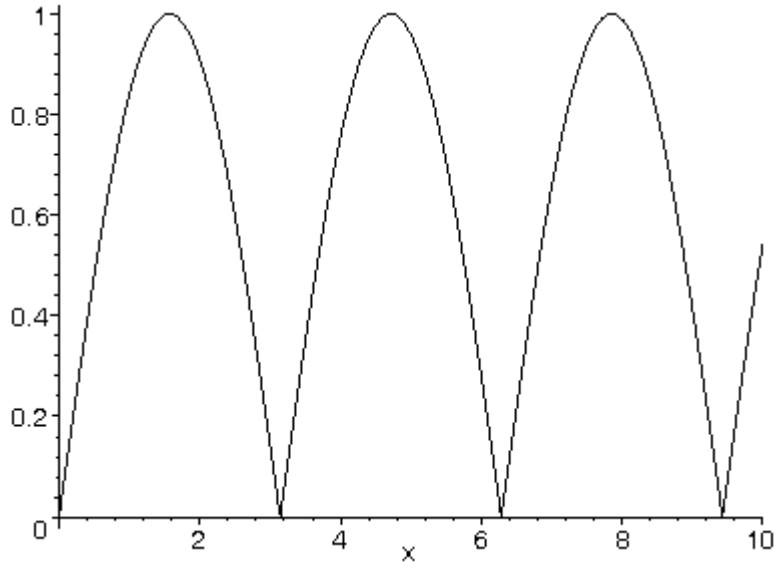
$$= \left(\sum_{k=0}^{\infty} e^{-p\,k\,T} \right) \int_0^T f(u)\, e^{-p\,u}\, du$$

Pour $| e^{-p\,T} |$ strictement plus petit que 1, la série $\sum_{k=0}^{\infty} e^{-p\,k\,T}$ converge, sa somme est égale à $\frac{1}{1-e^{-p\,T}}$ et l'on obtient :

$$\boxed{F(p) = \frac{1}{1-e^{-p\,T}} \int_0^T f(t)\, e^{-p\,t}\, dt.}$$

2°/ Application numérique.

La fonction $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t < 0 \\ |sint| & \text{pour } t > 0 \end{cases}$ est continue et périodique de période $T = \pi$ pour $t > 0$.



Sa transformée de Laplace est, d'après le résultat obtenu dans la première question :

$$F(p) = \frac{1}{1-e^{-p\,\pi}} \int_0^{\pi} e^{-p\,t}\, sin\, t\, dt.$$

Pour calculer l'intégrale, on peut utiliser la formule d'Euler :

$$sin\, t = \frac{1}{2i} (e^{i\,t} - e^{-i\,t})$$

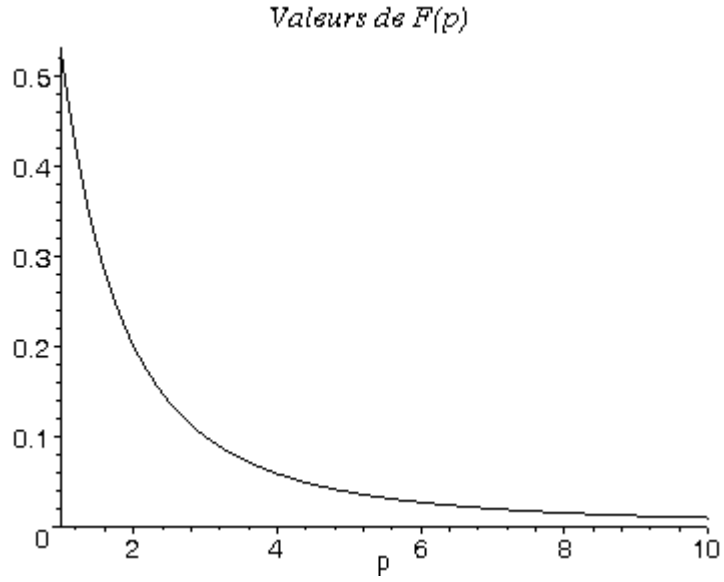
Il vient :

$$F(p) = \frac{1}{1-e^{-p\,\pi}} \frac{1}{2i} \left(\int_0^{\pi} e^{-(p-i)\,t}\, sin\, t\, dt - \int_0^{\pi} e^{-(p+i)\,t}\, sin\, t\, dt \right)$$

$$= \frac{1}{1-e^{-p\pi}} \frac{1}{2i} \left[\frac{-e^{-(p-i)t}}{p-i} + \frac{-e^{-(p+i)t}}{p+i} \right]_{t=0}^{t=\pi}$$

$$= \frac{1}{1-e^{-p\pi}} \frac{1}{2i} \left[\frac{e^{-p\pi}+1}{p-i} - \frac{e^{-p\pi}+1}{p+i} \right] = \frac{1}{1-e^{-p\pi}} \frac{1+e^{-p\pi}}{1+p^2}$$

$$\boxed{F(p) = \frac{1}{1+p^2} \frac{1+e^{-p\pi}}{1-e^{-p\pi}}}$$



3°/ Dérivabilité.

Le théorème de dérivabilité d'une intégrale dépendant d'un paramètre indique que la fonction

$(1 - e^{-p\pi}) F(p) = \int_0^{\pi} e^{-pt} \sin t \, dt$

est dérivable et a pour dérivée l'intégrale de 0 à π de la dérivée par rapport à p de $e^{-pt} \sin t$, lorsque :

- c et d sont des nombres réels vérifiant $c < d$,
- f est une application de $[0, \pi] \times [c, d]$ dans $\mathbb{R}$,
- L'application partielle $f_p : p \mapsto f(t, p)$ est continue sur $[c, d]$ pour tout $t \in [0, \pi]$,
- $\frac{\partial f}{\partial p}$ existe et c'est une application continue de $[0, \pi] \times [c, d]$ dans $\mathbb{R}$.

Ici, l'application partielle $f_p : p \mapsto f(t, p) = e^{-pt} \sin t$ est de classe C^1 sur tout intervalle $[c, d]$ de $\mathbb{R}$.

Donc sa dérivée partielle par rapport à p existe, c'est l'application continue de $[0, \pi] \times [c, d]$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\frac{\partial f}{\partial p}(t, p) = -t \, e^{-pt} \sin t$$

$$\frac{d}{dp}((1 - e^{-p\pi}) F(p)) = \pi \, e^{-p\pi} F(p) + (1 - e^{-p\pi}) F'(p) = \int_0^{\pi} (-t) \, e^{-pt} \sin t \, dt.$$

Si l'intervalle [*c*, *d*] ne contient pas 0, on voit donc que *F* est dérivable sur [*c*, *d*] et sa dérivée est donnée par :

$$F'(p) = -\frac{\pi e^{-p\pi}}{1-e^{-p\pi}} F(p) + \frac{1}{1-e^{-p\pi}}\int_0^{\pi} (-t)\, e^{-pt} \sin t\, dt$$
$$= -\frac{\pi e^{-p\pi}}{1+p^2}\frac{1+e^{-p\pi}}{(1-e^{-p\pi})^2} + \frac{1}{1-e^{-p\pi}}\int_0^{\pi} (-t)\, e^{-pt} \sin t\, dt$$

$\frac{1}{1-e^{-p\pi}}\int_0^{\pi} (-t)\, e^{-pt} \sin t\, dt$ est la transformée de Laplace de la fonction nulle pour $t < 0$, périodique de période p pour $t > 0$, et égale à $(-t \sin t)$ entre 0 et π.

Par récurrence, à partir de la formule :

$$\int_0^{\pi} (-t)\, e^{-pt} \sin t\, dt = \frac{d}{dp}((1-e^{-p\pi}) F(p))$$

il vient, par dérivations successives de l'intégrale :

$$\int_0^{\pi} (-t)^m\, e^{-pt} \sin t\, dt = \frac{d^m}{dp^m}((1-e^{-p\pi}) F(p))$$

La formule de Leibnitz de dérivation d'un produit permet de calculer l'intégrale en fonction de $F(p)$ et de ses dérivées :

$$\int_0^{\pi} (-t)^m\, e^{-pt} \sin t\, dt = \sum_{k=0}^{k=m} \binom{m}{k} \frac{d^k(1-e^{-p\pi})}{dp^k} \frac{d^{m-k} F(p)}{dp^{m-k}}$$
$$= (1-e^{-p\pi}) F^{(m)}(p) - \sum_{k=1}^{k=m} \binom{m}{k} (-\pi)^k e^{-p\pi} F^{(m-k)}(p)$$

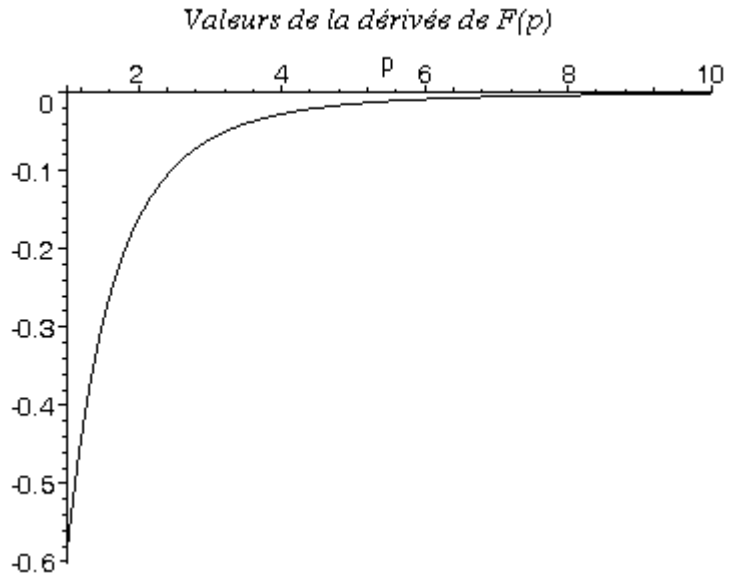
et la transformée de Laplace de la fonction nulle pour $t < 0$, périodique de période p pour $t > 0$, et égale à $(-t)^m \sin t$ entre 0 et π est donnée par :

$$\boxed{\frac{1}{1-e^{-p\pi}}\int_0^{\pi} (-t)^m\, e^{-pt} \sin t\, dt = F^{(m)}(p) - \frac{e^{-p\pi}}{1-e^{-p\pi}} \sum_{k=1}^{k=m} \binom{m}{k} (-\pi)^k F^{(m-k)}(p)}$$

On peut faire aussi le calcul direct de la dérivée de *F* sur l'expression :

$$F(p) = \frac{1}{1+p^2}\frac{1+e^{-p\pi}}{1-e^{-p\pi}} = \frac{1}{1+p^2}\left(\frac{2}{1-e^{-p\pi}} - 1\right)$$

$$F'(p) = \frac{1}{1+p^2}\frac{2\pi}{(1-e^{-p\pi})^2} - \frac{2p}{(1+p^2)^2}\frac{1+e^{-p\pi}}{1-e^{-p\pi}}$$

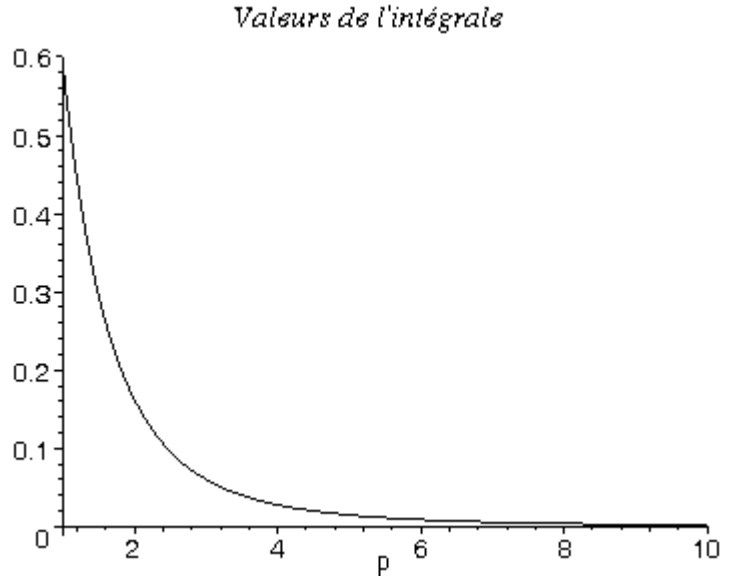


On en déduit la valeur de l'intégrale :

$$\int_0^{\pi} (-t)\, e^{-p\,t} \sin t\, dt = \pi\, e^{-p\,\pi}\, F(p) + (1 - e^{-p\,\pi})\, F'(p)$$

$$= \frac{\pi e^{-p\,\pi}}{1+p^2}\frac{1+e^{-p\,\pi}}{1-e^{-p\,\pi}} + \frac{1}{1+p^2}\frac{2\,\pi}{1-e^{-p\,\pi}} - \frac{2p}{\left(1+p^2\right)^2}\,(1 + e^{-p\,\pi})$$

$$\int_0^{\pi} t\, e^{-p\,t} \sin t\, dt = \frac{2p}{\left(1+p^2\right)^2}(1 + e^{-p\,\pi}) - \frac{\pi}{\left(1+p^2\right)\left(1-e^{-p\,\pi}\right)}(2 + e^{-p\,\pi} + e^{-2\,p\,\pi})$$



Chapitre 30. Intégrales propres dépendant d'un paramètre.

Enoncés.

Exercice 3. Coefficients d'une série de Fourier.

On considère la fonction impaire $x \mapsto f(x, t)$ de période 2π, égale à $\cosh tx$ pour $0 < x < \pi$. Sa "série de Fourier" est :

$$\frac{1}{2}[f(x+0, t) + f(x-0, t)] = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(t) \sin nx$$

où le "coefficient de Fourier d'indice n" est donné par l'intégrale :

$$c_n(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cosh(tx) \sin(nx)\, dx.$$

1°/ Montrer que c_n est une fonction de t dérivable et intégrable sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

2°/ Calculer $c_n(t)$.

3°/ Déduire de la série de Fourier de f la formule :

$$\frac{\pi}{4}\frac{1}{\cosh\frac{\pi t}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{(2n+1)^2 + t^2}.$$

4°/ On se propose de calculer l'intégrale :

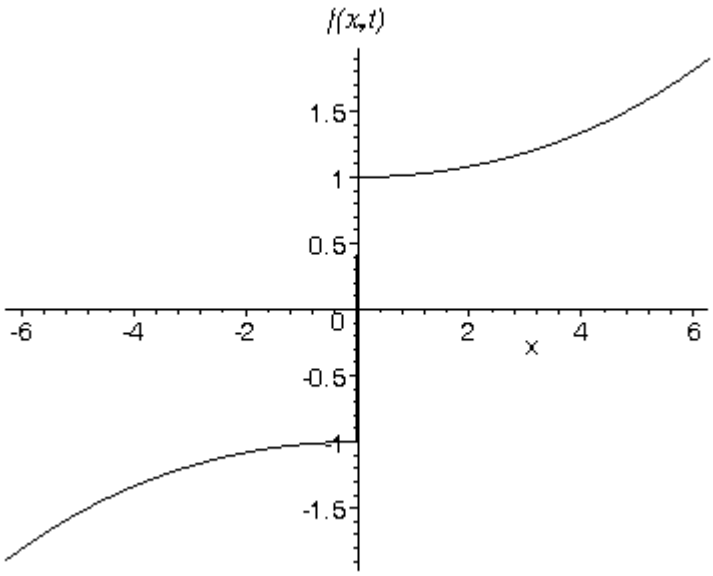
$$\varphi(x) = \int_0^{\infty} \frac{\cos(xt)}{\cosh(t)}\, dt.$$

Pour cela, on développe $\frac{1}{\cosh(t)}$ suivant les puissances de e^{-t}, on multiplie terme à terme par $\cos xt$ et on intègre terme à terme de 0 à $+\infty$. En appliquant le résultat de la troisième question, montrer que l'on a :

$$\varphi(x) = \frac{\pi}{2}\frac{1}{\cosh\frac{\pi x}{2}}.$$

Solution.

1°/ Dérivabilité et intégrabilité de $c_n(t)$.



$$c_n(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cosh(tx)\,\sin(nx)\,dx.$$

La fonction $\cosh(t\,x)\,\sin n\,x$ vérifie les conditions suivantes :

- L'application partielle $f_x : t \mapsto f(x, t) = \cosh(t\,x)\,\sin n\,x$ est continue sur tout intervalle $[a, b]$, $a < b$, pour tout $x \in [0, \pi]$,
- $\frac{\partial f}{\partial x}$ existe et c'est une application continue de $[0, \pi] \times [a, b]$ dans $\mathbb{R}$.

Le théorème de dérivation sous le signe d'intégration s'applique : la fonction $c_n(t)$ est dérivable et sa dérivée est donnée par la formule :

$$c'_n(t) = \frac{2t}{\pi}\int_0^{\pi} \sinh(tx)\,\sin(nx)\,dx.$$

Le théorème d'intégration sous le signe d'intégration (**théorème de Fubini**) s'applique aussi : la fonction $c_n(t)$ est intégrable sur tout intervalle $[a, b]$, $a < b$, et son intégrale sur cet intervalle est donné par la formule :

$$\int_a^b c_n(t)\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\int_a^b \cosh(tx)\,dt\right)\sin(nx)\,dx.$$

2°/ Calcul de $c_n(t)$.

$$\cosh(t\,x) = \frac{e^{t\,x}+e^{-t\,x}}{2}\ ;\ \sin(n\,x) = \frac{e^{i\,n\,x}-e^{-i\,n\,x}}{2i}$$

$$\cosh(t\,x)\times\sin(n\,x) = \frac{e^{t\,x}+e^{-t\,x}}{2}\times\frac{e^{i\,n\,x}-e^{-i\,n\,x}}{2i} = \frac{1}{4\,i}\left(e^{(t+i\,n)\,x} - e^{-(t+i\,n)\,x} - e^{(t-i\,n)\,x} + e^{-(t-i\,n)\,x}\right)$$

$$c_n(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cosh(tx)\sin(nx)\,dx$$

$$= \frac{2}{4i\pi}\left[\frac{e^{(t+in)x}+e^{-(t+in)x}}{t+in} - \frac{e^{(t-in)x}+e^{-(t-in)x}}{t-in}\right]_{x=0}^{x=\pi}$$

$$= \frac{1}{i\pi}\left[(-1)^n\left(\frac{\cosh(\pi t)}{t+in} - \frac{\cosh(\pi t)}{t-in}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{t+in} - \frac{2}{t-in}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{i\pi}\left(\frac{1}{t+in} - \frac{1}{t-in}\right)((-1)^n\cosh(\pi t) - 1)$$

$$= \frac{-2in}{i\pi\left(t^2+n^2\right)}((-1)^n\cosh(\pi t) - 1)$$

$$\boxed{c_n(t) = \frac{2n}{\pi\left(t^2+n^2\right)}(1-(-1)^n\cosh(\pi t))}$$

Le développement en série de Fourier de la fonction numérique f est donc :

$$\frac{1}{2}[f(x+0,t) + f(x-0,t)] = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(t)\sin nx$$

$$\boxed{\frac{1}{2}[f(x+0,t) + f(x-0,t)] = \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}(1-(-1)^n\cosh(\pi t))\frac{n\sin(nx)}{n^2+t^2}}$$

3°/ Cas particulier.

Pour $x = \frac{\pi}{2}$, on a $\frac{1}{2}[f(x+0,t) + f(x-0,t)] = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cosh\frac{\pi t}{2}$.

Dans la série de Fourier de f, $\sin(n x) = \sin\frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair} \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$.

Il vient donc :

$$\cosh\frac{\pi t}{2} = \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}(1+\cosh(\pi t))(-1)^n\frac{2n+1}{(2n+1)^2+t^2}$$

$$\frac{\pi}{2}\frac{\cosh\left(\frac{\pi t}{2}\right)}{1+\cosh(\pi t)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+1}{(2n+1)^2+t^2}$$

La formule

$$\cosh(\pi t) = \cosh^2\frac{\pi t}{2} + \sinh^2\frac{\pi t}{2} = 2\cosh^2\frac{\pi t}{2} - 1$$

donne :

$$\frac{\pi}{2}\frac{\cosh\left(\frac{\pi t}{2}\right)}{1+\cosh(\pi t)} = \frac{\pi}{4}\frac{1}{\cosh\frac{\pi t}{2}}$$

D'où la formule attendue :

$$\boxed{\frac{\pi}{4}\frac{1}{\cosh\frac{\pi t}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+1}{(2n+1)^2+t^2}}$$

4°/ Calcul de l'intégrale φ (*x*).

$$\frac{1}{\cosh(t)} = \frac{2}{e^t+e^{-t}} = \frac{2e^{-t}}{1+\left(e^{-t}\right)^2} = 2\,e^{-t}\,(1-e^{-2t}+\ldots+(-1)^n e^{-2nt}+\ldots)$$

$$\frac{\cos(xt)}{\cosh(t)} = 2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n e^{-(2n+1)t}\cos(x\,t)$$

Comme *cos* (*x t*) est majoré par 1, la série est uniformément convergente par rapport à *t* dans $\mathbb{R}$, pour chaque *x* : on peut donc l'intégrer terme à terme par rapport à *t* :

$$\varphi(x) = \int_0^{\infty}\frac{\cos(xt)}{\cosh(t)}\,dt = 2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^{\infty}e^{-(2n+1)t}\cos(x\,t)\,dt$$

L'intégrale $\int_0^{\infty}e^{-(2n+1)t}\cos(x\,t)\,dt$ est la partie réelle de l'intégrale

$\int_0^{\infty}e^{-(2n+1)t}\,e^{ixt}\,dt = \int_0^{\infty}e^{-(2n+1-ix)t}\,dt = \frac{1}{2n+1-ix}$.

Elle vaut donc $\frac{2n+1}{(2n+1)^2+x^2}$ et l'on obtient :

$$\varphi(x) = \int_0^{\infty}\frac{\cos(xt)}{\cosh(t)}\,dt = 2\,2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+1}{(2n+1)^2+x^2}$$

D'après le résultat obtenu dans la question 3, il vient alors :

$$\boxed{\int_0^{\infty}\frac{\cos(xt)}{\cosh(t)}\,dt = \frac{\pi}{2}\frac{1}{\cosh\frac{\pi x}{2}}}$$

Chapitre 30. Intégrales propres dépendant d'un paramètre.

Enoncés.

Exercice 4. Dérivation d'une intégrale généralisée dépendant d'un paramètre.

1°/ Démontrer que, pour tout nombre réel $x \geqslant 421$, l'intégrale généralisée

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-421t} - e^{-xt}}{t}\, dt$$

converge.

2°/ Dans toute la suite de l'exercice 3, on désigne par F l'application de l'intervalle $[421, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$, définie, pour tout $x \geqslant 421$, par :

$$F(x) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-421t} - e^{-xt}}{t}\, dt.$$

F est-elle dérivable ?

3°/ Pour tout $x \geqslant 421$, expliciter F à l'aide de fonctions élémentaires et préciser la valeur de $F(421\,k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Solution.

1°/ Convergence de l'intégrale.

Posons $x = 421 + y$, avec $y \geqslant 0$.

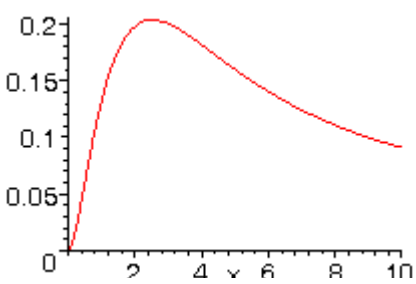
$$e^{-xt} = e^{-421\,t}\, e^{-yt}$$

$$\frac{e^{-421t} - e^{-xt}}{t} = e^{-421\,t}\, \frac{1 - e^{-yt}}{t}$$

Posons $f_y(t) = \frac{1 - e^{-yt}}{t}$

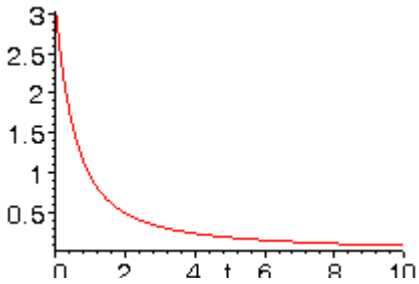
f_y est une application de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$.

Elle est continue et dérivable pour toute valeur de $t \in]0, +\infty[$.



Sa dérivée est $-\frac{1+yt}{t^2}\left(\frac{1}{1+yt} - e^{-yt}\right)$.

$\frac{1+yt}{t^2}$ est toujours positif pour y et t positifs.



La fonction $\frac{1}{1+x} - e^{-x}$ est

toujours positive pour $x > 0$.
Donc la dérivée de f_y est toujours négative.

L'application f_y est décroissante sur]0, +∞[.

Or sa limite lorsque t tend vers 0 est y, on a donc, pour tout $t \in]0, +\infty[$, $\frac{1-e^{-yt}}{t} \leqslant y$ et $\frac{e^{-421t} - e^{-xt}}{t} \leqslant y\, e^{-421\,t}$

$$x \geqslant 421 \text{ et } t > 0 \Rightarrow 0 \leqslant \frac{e^{-421t} - e^{-xt}}{t} \leqslant (x - 421)\, e^{-421\,t}$$

La fonction $\frac{e^{-421t} - e^{-xt}}{t}$ est donc majorée, quel que soit $x \geqslant 421$, par une fonction intégrable sur]0, +∞[.
C'est donc une fonction intégrable sur]0, +∞[.

$$x \geqslant 421 \Rightarrow \text{l'intégrale généralisée } \int_0^{\infty} \frac{e^{-421t} - e^{-xt}}{t}\, dt \text{ converge.}$$

2°/ Dérivabilité de l'intégrale généralisée.

a) Vérification des 4 conditions d'application du théorème de dérivabilité.

▷ L'application partielle $f_x : t \mapsto \frac{e^{-421t} - e^{-xt}}{t}$ définie, pour $x \geqslant 421$, sur]0, +∞ [, et de classe C^∞ sur cet intervalle, peut être prolongée en 0 par la limite $(x - 421)$ de f_x lorsque t tend vers 0 en restant dans l'intervalle]0, +∞ [.
L'**application partielle** ainsi prolongée est **continue** sur [0, +∞ [.

▷ D'après le résultat de la première question, l'**intégrale** $\int_0^{\infty} \frac{e^{-421t} - e^{-xt}}{t}\, dt$ **converge** pour tout $x \geqslant 421$.

▷ La **dérivée partielle** par rapport à x de l'application $(x, t) \mapsto \frac{e^{-421t} - e^{-xt}}{t}$ existe, c'est l'application $(x, t) \mapsto e^{-x\,t}$.
Elle est **continue** sur $\mathbb{R}^2$, donc aussi, en particulier, dans [421, +∞ [× [0, +∞ [.

▷ L'intégrale de la dérivée partielle par rapport à x est $\int_0^{\infty} e^{-x\,t}\, dt$.

Pour $x \geqslant 421$, $e^{-x\,t}$ est majoré par la fonction intégrable $e^{-421\,t}$.
Le théorème de convergence dominée permet alors d'affirmer que l'**intégrale de la dérivée partielle** par rapport à x **converge uniformément** à l'infini, pour $x \geqslant 421$.

b) Application du théorème de dérivabilité.

Comme les quatre conditions d'application du théorème de dérivabilité d'une intégrale généralisée dépendant d'un paramètre sont vérifiées, on peut appliquer ce théorème.

L'application F : [421, +∞ [$\to \mathbb{R}$ définie par $F(x) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-421t} - e^{-xt}}{t}\, dt$ est de classe C^1 sur [421, +∞ [et l'on a, pour tout $x \in$ [421, +∞ [:

$$F'(x) = \int_0^{\infty} e^{-xt}\, dt = \frac{1}{x}$$

3°/ Expression de *F*.

La dérivée de F est $\frac{1}{x}$.
Donc $F(x) = \ln x + \text{constante}$.
Pour $x = 421$, $F(x)$ est l'intégrale d'une fonction nulle, c'est 0, donc la constante vaut $-\ln 421$.

$$\boxed{F(x) = \ln \frac{x}{421}}$$

Pour $x = 421\,k$, $k \in \mathbb{N}^*$, on obtient :

$$\boxed{F(421\,k) = \ln k}$$

Chapitre 30. Intégrales propres dépendant d'un paramètre.

Enoncés.

Exercice 5. Fonction Gamma d'Euler.

On considère l'application $\Gamma : R \longrightarrow R$ définie par :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\, dt$$

1°/ Dans quel intervalle de R, la fonction numérique Γ est-elle définie ?
2°/ Démontrer la formule $\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$.
En déduire la formule $\Gamma(n+1) = n!$ pour tout $n \in N^*$.
3°/ Sachant que $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$, calculer $\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)$, $n \in N$.
4°/ Calculer l'intégrale $\int_0^{+\infty} u^n e^{-u^2}\, du$, pour tout $n \in N$.
5°/ Montrer qu'on peut prolonger la définition de Γ pour certaines valeurs négatives de x ?
Calculer $\Gamma\left(-n - \frac{1}{2}\right)$, $n \in N$.

Solution.

1°/ Convergence de l'intégrale.

Vers l'infini, l'exponentielle l'emporte sur la puissance et l'intégrale est convergente.
Vers 0, $u \times u^{x-1} e^{-u}$ est équivalent à u^x et ne tend vers 0 que si $x > 0$.
L'intégrale, qu'on appelle l'**intégrale eulérienne de seconde espèce**, n'est donc définie que pour $x > 0$.

L'intégrale définit la fonction Γ uniquement pour $x \in]0, +\infty[$.

2°/ Formule de récurrence.

Intégrons $\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\, dt$ par parties en posant $u = e^{-t}$, $du = -e^{-t}\, dt$, et, pour avoir $dv = t^{x-1}\, dt$, on prend $v = \frac{t^x}{x}$, $x > 0$.

$$\Gamma(x) = \int u\, dv = uv - \int v\, du = -\frac{1}{x}\left[t^x e^{-t} \right]_0^{\infty} + \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} t^x e^{-t}\, dt.$$

Le terme tout intégré étant nul, il reste :

$\Gamma(x) = \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} t^x e^{-t}\,dt = \frac{1}{x}\Gamma(x+1)$.

D'où :

$$\boxed{\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x),\ x > 0.}$$

C'est ce qu'on appelle la **formule de récurrence** de la fonction Γ.

Pour $x = 1$, la définition de Γ donne :

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt = [-e^{-t}]_0^{\infty} = 1 = 0\ !.$$

Supposons que, pour un entier $n \geq 1$, on ait $\Gamma(n) = (n-1)\ !$.
La formule $\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$ donne alors, pour $x = n$, $\Gamma(n+1) = n\,\Gamma(n) = n \times (n-1)\ ! = n\ !$.
Donc la formule de l'hypothèse de récurrence est vraie pour $n+1$ dès qu'elle est vraie pour n.
La relation $\Gamma(1) = 1$ et le principe de récurrence entraînent que :

$$\boxed{\Gamma(n+1) = n\ !, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.}$$

3°/ Valeurs demi-entières.

La relation $\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$ entraîne :

$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$

$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)$

...

$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{2n-1}{2}\Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right)$

Après multiplication membre à membre et simplification, il reste, compte tenu de la relation $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$:

$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times \ldots \times\frac{2n-1}{2}\times\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{2^{2n}\,n!}\sqrt{\pi}$.

$$\boxed{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{2^{2n}\,n!}\sqrt{\pi}}$$

4°/ Calcul d'une intégrale.

Dans l'intégrale $\int_0^{+\infty} u^n e^{-u^2}\,du$, posons $u = \sqrt{t}$, $\frac{du}{u} = \frac{1}{2}\frac{dt}{t}$.

$$\int_0^{+\infty} u^n e^{-u^2}\,du = \int_0^{+\infty} u^{n+1} e^{-u^2}\frac{du}{u} = \int_0^{+\infty} t^{\frac{n+1}{2}} e^{-t}\frac{1}{2}\frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} t^{\frac{n+1}{2}-1} e^{-t}\,dt = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)$$

Lorsque n est pair, $n = 2k$, $k \geq 0$, $\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right) = \frac{(2k)!}{2^{2k}\,k!}\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Lorsque n est impair, $n = 2k+1$, $k \geq 0$, $\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) = \frac{1}{2}\Gamma(k+1) = \frac{k!}{2}$.

$$\int_0^{+\infty} u^{2k} e^{-u^2}\,du = \frac{(2k)!}{2^{2k}\,k!}\frac{\sqrt{\pi}}{2},\ k \in \mathrm{N}.$$
$$\int_0^{+\infty} u^{2k+1} e^{-u^2}\,du = \frac{k!}{2},\ k \in \mathrm{N}.$$

Pour $k = 0$, la première des deux formules donne $\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ (**intégrale de Gauss**), c'est le calcul de cette intégrale qui donnera la valeur de $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,du = \sqrt{\pi}$.

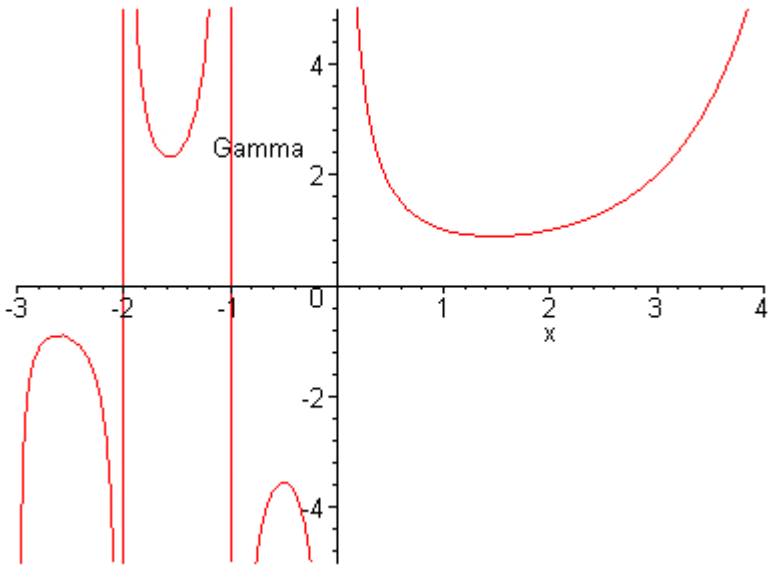
5°/ Prolongement de Γ aux valeurs négatives de *x*.

La formule $\Gamma(x) = \frac{1}{x}\Gamma(x+1)$ n'a de sens que si $x > 0$, puisque $\Gamma(x)$ est définie par l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\,dt$, qui ne converge que pour $x > 0$.

Prenons maintenant un $x \in]-1, 0[$.
$x + 1$ est dans l'intervalle $]0, 1[$, donc $\Gamma(x+1)$ existe et aussi $\frac{1}{x}\Gamma(x+1)$.
Nous pouvons définir $\Gamma(x)$, dans l'intervalle $]-1, 0[$, par la formule $\Gamma(x) = \frac{1}{x}\Gamma(x+1)$.
Nous aurons, par exemple, pour $x = -\frac{1}{2}$, $\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = -2\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = -2\sqrt{\pi}$.

Si l'on prend maintenant un $x \in]-2, -1[$, $x + 1$ est dans l'intervalle $]-1, 0[$ et $\Gamma(x+1)$ est défini.
On peut alors définir $\Gamma(x)$, dans l'intervalle $]-2, -1[$, par la formule $\Gamma(x) = \frac{1}{x}\Gamma(x+1)$.

De proche en proche, on définit ainsi $\Gamma(x)$ pour toutes les valeurs négatives de x, à l'exception des valeurs entières négatives.



La formule $\Gamma(x) = \frac{1}{x}\Gamma(x+1)$ donne, de proche en proche :

$\Gamma(x) = \frac{1}{x}\Gamma(x+1)$
$\Gamma(x+1) = \frac{1}{x+1}\Gamma(x+2)$
...
$\Gamma(x+n) = \frac{1}{x+n}\Gamma(x+n+1)$

Après multiplication et simplification, il reste :

$$\boxed{\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+n+1)}{x(x+1)\cdots(x+n)}}$$

Formule qui permet de définir directement $\Gamma(x)$ dans l'intervalle $]-(n+1), -n[$.

Lorsque x tend vers $-n$, $(x+n)\,\Gamma(x)$ tend vers $\frac{\Gamma(1)}{-n(-n+1)\cdots(-1)} = \frac{(-1)^n}{n!}$, ce qui montre que, au voinage de $x = -n$, dans l'intervalle $]-(n+1), -n[$, l'infiniment grand $\Gamma(x)$ a, pour partie principale $\frac{(-1)^n}{n!}\frac{1}{x+n}$.

Pour $x = -n - \frac{1}{2}$, la formule précédente donne :

$$\Gamma\left(-n-\frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\left(-\frac{2n+1}{2}\right)\left(-\frac{2n-1}{2}\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}\right)} = (-1)^{n+1}\frac{2^{2n+1}\,n!}{(2n+1)!}\sqrt{\pi}$$

$$\boxed{\Gamma\left(-n-\frac{1}{2}\right) = (-1)^{n+1}\frac{2^{2n+1}\,n!}{(2n+1)!}\sqrt{\pi}}$$

Pour $n = 0$, on retrouve $\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = -2\sqrt{\pi}$.

Remarque :

Pour les grandes valeurs de x, on peut démontrer la **formule de Stirling** :

$$\Gamma(x) = \sqrt{\frac{2\pi}{x}}\left(\frac{x}{e}\right)^x\left(1 + \frac{1}{12x} + \frac{1}{288x^2} + \ldots\right)$$

Exercices

Fonctions implicites.

1. Théorème des fonctions implicites.

Théorème des fonctions implicites.

HAUT

Soient p et q des entiers > 0, U un ouvert de $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$, $(a, b) = (a_1, \dots, a_p, b_1, \dots, b_q) \in U$, $f : U \to \mathbb{R}^q$ définie par :

$f(x, y) = f(x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_q) = (f_1(x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_q), \dots, f_q(x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_q))$.

On suppose que :

1. f est de classe C^k sur U ($k \geqslant 1$);
2. $f(a, b) = 0$;
3. la matrice des dérivées partielles de f par rapport aux variables $y_1, \dots, y_q$, au point (a, b), est inversible dans $M_q(\mathbb{R})$.

Dans ces conditions, il existe :

- un voisinage ouvert V de a dans $\mathbb{R}^p$,
- un voisinage ouvert W de b dans $\mathbb{R}^q$,
- une application $\varphi : V \to W$ de classe C^k,

vérifiant :

1. $V \times W \subset U$.
2. φ est l'unique application de V dans W telle que, pour tout $x \in V$, on ait $f(x, \varphi(x)) = 0$.
3. $(x, y) \in V \times W$ et $f(x, y) = 0 \Leftrightarrow x \in V$ et $y = \varphi(x) = (\varphi_1(x), \dots, \varphi_q(x))$.

De plus,

1. il existe un voisinage V' de a inclus dans V tel que, pour tout $x = (x_1, \dots, x_p) \in V'$, la matrice des dérivées partielles de f par rapport aux variables $y_1, \dots, y_q$, au point $(x, \varphi(x))$, soit inversible,
2. la matrice jacobienne de φ en x est :

$$J_x(\varphi) = \frac{D(\varphi_1, \dots, \varphi_q)}{D(x_1, \dots, x_p)} = -\left(\frac{D(f_1, \dots, f_q)}{D(y_1, \dots, y_q)}(x, \varphi(x))\right)^{-1} \frac{D(f_1, \dots, f_q)}{D(x_1, \dots, x_p)}(x, \varphi(x))$$

HAUT

Chapitre 31 - Fonctions implicites.

Exercices

Exercice 1. Dérivée d'une fonction implicite (degré 2).
Exercice 2. Dérivée d'une fonction implicite (degré 3).
Exercice 3. Dérivées partielles d'une fonction implicite (degré 2).
Exercice 4. Dérivées partielles d'une fonction implicite (sinus).
Exercice 5. Fonction implicite de classe C^1 (*Arctan*).

Exercice 1. Dérivée d'une fonction implicite (degré 2).

Utiliser le théorème des fonctions implicites pour calculer la dérivée de y par rapport à x au point (2, 3), y étant défini par la relation $x^2 + y^2 - 13 = 0$.	Solution

HAUT

Exercice 2. Dérivée d'une fonction implicite (degré 3).

Trouver $\frac{dy}{dx}$ pour $f(x, y) = y^3 + x\,y - 12 = 0$.	Solution

HAUT

Exercice 3. Dérivées partielles d'une fonction implicite (degré 2).

Trouver $\frac{\partial z}{\partial x}$ et $\frac{\partial z}{\partial y}$ pour $f(x, y, z) = x^2 + 3xy - 2y^2 + 3xz + z^2 = 0$.	Solution

HAUT

Exercice 4. Dérivées partielles d'une fonction implicite (sinus).

Trouver $\frac{\partial z}{\partial x}$ et $\frac{\partial z}{\partial y}$ pour $f(x, y, z) = \sin xy + \sin yz + \sin zx - 1 = 0$.	Solution

HAUT

Exercice 5. Fonction implicite de classe C^1 (*Arctan*).

Soit $(u, v) \mapsto f(u, v)$ une application de classe C^1 de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. On pose :

$$g(x, y) = f\left(\operatorname{Arctan}\frac{y}{x}, \operatorname{Arctan}\frac{x}{y}\right).$$

La relation $g(x, y) = 0$ définit-elle une fonction implicite $y = \varphi(x)$?
Le cas échéant, calculer sa dérivée $\varphi'(x)$.
Expliciter la fonction φ.

Solution

HAUT

Chapitre 31. Fonctions implicites.

Enoncés.

Exercice 1. Dérivée d'une fonction implicite (degré 2).

Utiliser le théorème des fonctions implicites pour calculer la dérivée de y par rapport à x au point (2, 3), y étant défini par la relation $x^2 + y^2 - 13 = 0$.	

Solution.

1°/ Conditions d'applications du théorème des fonctions implicites.

1. f, définie par $f(x, y) = x^2 + y^2 - 13$, est de classe C^1 sur l'ouvert $U = \mathbb{R}^2$: c'est clair puisque f est un polynôme.
2. $f(2, 3) = 2^2 + 3^2 - 13 = 0$;
3. la dérivée partielle de f par rapport à y, au point (2, 3), est inversible dans $\mathbb{R}$: $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y$, $\frac{\partial f}{\partial y}(2, 3) = 6 \neq 0$.

Les trois conditions d'application du théorème des fonctions implicites sont donc vérifiées pour f.

2°/ Dérivée de y par rapport à x.

Le théorème des fonctions implicites s'applique :

Dans ces conditions, il existe :

- un intervalle ouvert V de $\mathbb{R}$ contenant 2,
- un intervalle ouvert W de $\mathbb{R}$ contenant 3,
- une application $\varphi : V \to W$ de classe C^1,

vérifiant :

1. $V \times W \subset U = \mathbb{R}^2$
2. φ est l'unique application de V dans W telle que, pour tout $x \in V$, on ait $f(x, \varphi(x)) = 0$.
3. $(x, y) \in V \times W$ et $f(x, y) = 0 \Leftrightarrow x \in V$ et $y = \varphi(x)$.

De plus,

1. il existe un intervalle ouvert V' inclus dans V contenant 2 et tel que,

pour tout $x \in V'$, la dérivée partielle de f par rapport à y, au point $(x, \varphi(x))$, soit inversible,

2. la matrice jacobienne de φ en $x \in V'$ est :

$$J_x(\varphi) = \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, \varphi(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x))}$$

On obtient donc :

$$\frac{dy}{dx}(2, 3) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(2, 3)}{\frac{\partial f}{\partial y}(2, 3)} = -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3}$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx}(2, 3) = -\frac{2}{3}}$$

Chapitre 31. Fonctions implicites.

Enoncés.

Exercice 2. Dérivée d'une fonction implicite (degré 3).

Trouver $\frac{dy}{dx}$ pour $f(x, y) = y^3 + x\,y - 12 = 0$.	

Solution.

1°/ Conditions d'application du théorème des fonctions implicites.

1. f, définie par $f(x, y) = y^3 + x\,y - 12$, est de classe C^1 sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$: c'est clair, puisque f est un polynôme, f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$, donc f est de classe C^1 sur tout ouvert U de $\mathbb{R}^2$
2. $f(x, y) = 0$ par hypothèse.
3. la dérivée partielle de f par rapport à y, au point (x, y), est inversible dans l'ouvert U de $\mathbb{R}^2$: il suffit de prendre pour U l'ouvert défini par $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3\,y^2 + x \neq 0$.

Les trois conditions d'application du théorème des fonctions implicites sont alors vérifiées pour f dans l'ouvert U.

2°/ Dérivée de y par rapport à x.

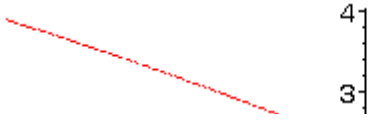
Le théorème des fonctions implicites s'applique, en dehors des points communs à la parabole d'équation $3\,y^2 + x = 0$ et à la courbe d'équation $f(x, y) = 0$.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)} = -\frac{y}{3y^2 + x}$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{3y^2 + x}}$$

Remarque.

Remarquons qu'aucun point (x, y) avec $y = 0$ ne vérifie la relation $f(x, y) = 0$, de sorte que la relation $f(x, y) = y^3 + x$



$y - 12 = 0$ peut s'écrire :

$$x = \frac{12 - y^3}{y}$$

Il y a alors un seul point commun à la parabole d'équation $3\,y^2 + x = 0$ et à la courbe d'équation $f(x, y) = 0$.
C'est le point dont les coordonnées vérifient :

$$y^2 = -\frac{1}{3}x\ ;\ y^3 = -\frac{1}{3}xy\ ;\ y^3 + x\,y - 12 = \frac{2}{3}xy - 12 = 0\ ;\ xy = 18\ ;\ y^3 = -6\ ;\ y = -6^{\frac{1}{3}};\ x = -3\,y^2 = 3 \times 6^{\frac{2}{3}}$$

$$A = (x, y) = (3 \times 6^{\frac{2}{3}}, -6^{\frac{1}{3}})$$

En dehors de ce point A, en reportant l'expression $x = \frac{12 - y^3}{y}$ dans la dérivée de y par rapport à x, on obtient :

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2}\frac{y^2}{6 + y^3}$$

On aurait pu obtenir directement de résultat car la dérivée de $x = \frac{12 - y^3}{y}$ par rapport à y est :

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{12}{y^2} - 2\,y = -2\,\frac{6 + y^3}{y^2}$$

et la dérivée de y par rapport à x est donnée par :

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{dx}{dy}\right)^{-1} = -\frac{1}{2}\frac{y^2}{6 + y^3}$$

Chapitre 31. Fonctions implicites.

Enoncés.

Exercice 3. Dérivées partielles d'une fonction implicite (degré 2).

Trouver $\frac{\partial z}{\partial x}$ et $\frac{\partial z}{\partial y}$ pour $f(x, y, z) = x^2 + 3xy - 2y^2 + 3xz + z^2 = 0$.	

Solution.

1°/ Conditions d'applications du théorème des fonctions implicites.

Soit (x_0, y_0, z_0) un point de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $f(x_0, y_0, z_0) = 0$.

1. f, définie par $f(x, y, z) = x^2 + 3xy - 2y^2 + 3xz + z^2$, est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^3$: c'est clair puisque f est un polynôme.
2. $f(x_0, y_0, z_0) = 0$ par hypothèse ;
3. la dérivée partielle de f par rapport à z, au point (x_0, y_0, z_0) est inversible dans l'ouvert U de $\mathbb{R}^3$:
   $\frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) = 3x_0 + 2z_0 \neq 0$, il suffit de prendre pour U le complémentaire du plan d'équation $3x + 2z = 0$.

Les trois conditions d'application du théorème des fonctions implicites sont alors vérifiées pour f, dans l'ouvert U.

2°/ Dérivées partielles de z.

Le théorème des fonctions implicites s'applique :

Dans ces conditions, il existe :

- un ouvert V de $\mathbb{R}^2$ contenant (x_0, y_0),
- un ouvert W de $\mathbb{R}$ contenant z_0,
- une application $\varphi : V \to W$ de classe C^1,

vérifiant :

1. $V \times W \subset U$
2. φ est l'unique application de V dans W telle que, pour tout $(x, y) \in V$,

on ait $f(x, y, \varphi(x, y)) = 0$.

3. $(x, y, z) \in V \times W$ et $f(x, y, z) = 0 \Leftrightarrow (x, y) \in V$ et $z = \varphi(x, y)$.

De plus,

1. il existe un ouvert V' inclus dans V contenant (x_0, y_0) et tel que, pour tout $(x, y) \in V'$, la dérivée partielle de f par rapport à z, au point $(x, y, \varphi(x, y))$, soit inversible,
2. la matrice jacobienne de φ en $(x, y) \in V'$ est :
$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)(x, y) = -\left(\frac{\partial f}{\partial z}\left(x, y, \varphi(x, y)\right)\right)^{-1}\left(\frac{\partial f}{\partial x} \quad \frac{\partial f}{\partial y}\right)(x, y, \varphi(x, y))$$

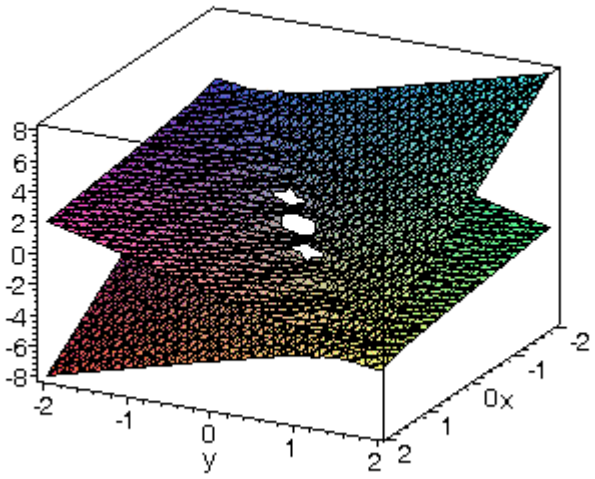
On obtient donc, dans l'ouvert V' :

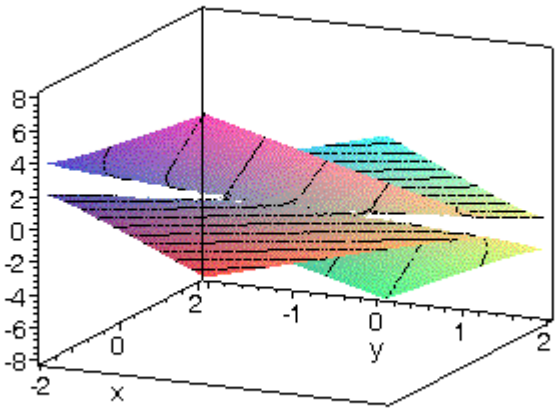
$$\frac{\partial z}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) = -\left(\frac{\partial f}{\partial z}\left(x, y, \varphi(x, y)\right)\right)^{-1}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, \varphi(x, y))$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) = -\left(\frac{\partial f}{\partial z}\left(x, y, \varphi(x, y)\right)\right)^{-1}\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, \varphi(x, y))$$

Lorsque $f(x, y, z) = x^2 + 3xy - 2y^2 + 3xz + z^2 = 0$, on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = 2x + 3y + 3z$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = 3x - 4y$$
$$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = 3x + 2z$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x, y) = -\frac{2x + 3y + 3z}{3x + 2z}$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}(x, y) = -\frac{3x - 4y}{3x + 2z}$$




8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
-2
0
2
x
2
-1
0
1
2
y

Chapitre 31. Fonctions implicites.

Enoncés.

Exercice 4. Dérivées partielles d'une fonction implicite (sinus).

Trouver $\frac{\partial z}{\partial x}$ et $\frac{\partial z}{\partial y}$ pour $f(x, y, z) = \sin xy + \sin yz + \sin zx - 1 = 0$.	

Solution.

1°/ Conditions d'applications du théorème des fonctions implicites.

Soit (x_0, y_0, z_0) un point de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $f(x_0, y_0, z_0) = 0$.

1. f, définie par $f(x, y, z) = \sin xy + \sin yz + \sin zx - 1$, est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^3$: c'est clair puisque f est composée d'applications de classe C^1.
2. $f(x_0, y_0, z_0) = 0$ par hypothèse ;
3. la dérivée partielle de f par rapport à z, au point (x_0, y_0, z_0) est inversible dans l'ouvert U de $\mathbb{R}^3$:
   $\frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) = y_0 \cos y_0 z_0 + x_0 \cos z_0 x_0 \neq 0$, il suffit de prendre pour U le complémentaire de la surface d'équation $y \cos y z + x \cos z x = 0$.

Les trois conditions d'application du théorème des fonctions implicites sont alors vérifiées pour f, dans l'ouvert U.

2°/ Dérivées partielles de z.

Le théorème des fonctions implicites s'applique :

Dans ces conditions, il existe :

- un ouvert V de $\mathbb{R}^2$ contenant (x_0, y_0),
- un ouvert W de $\mathbb{R}$ contenant z_0,
- une application $\varphi : V \to W$ de classe C^1,

vérifiant :

1. $V \times W \subset U$
2. φ est l'unique application de V dans W telle que, pour tout $(x, y) \in V$, on ait $f(x, y, \varphi(x, y)) = 0$.
3. $(x, y, z) \in V \times W$ et $f(x, y, z) = 0 \Leftrightarrow (x, y) \in V$ et $z = \varphi(x, y)$.

De plus,

1. il existe un ouvert V' inclus dans V contenant (x_0, y_0) et tel que, pour tout $(x, y) \in V'$, la dérivée partielle de f par rapport à z, au point $(x, y, \varphi(x, y))$, soit inversible,
2. la matrice jacobienne de φ en $(x, y) \in V'$ est :
$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)(x, y) = -\left(\frac{\partial f}{\partial z}\left(x, y, \varphi(x, y)\right)\right)^{-1}\left(\frac{\partial f}{\partial x} \quad \frac{\partial f}{\partial y}\right)(x, y, \varphi(x, y))$$

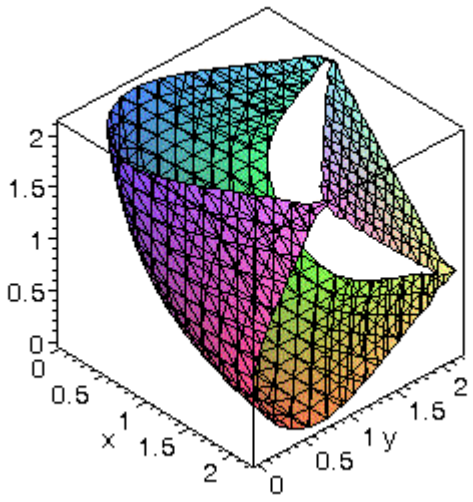
On obtient donc, dans l'ouvert V' :

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) = -\left(\frac{\partial f}{\partial z}\left(x, y, \varphi(x, y)\right)\right)^{-1}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, \varphi(x, y))$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) = -\left(\frac{\partial f}{\partial z}\left(x, y, \varphi(x, y)\right)\right)^{-1}\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, \varphi(x, y))$$

Lorsque $f(x, y, z) = \sin xy + \sin yz + \sin zx - 1 = 0$, on a donc :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = y \cos xy + z \cos zx$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = z \cos yz + x \cos xy$$
$$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = x \cos zx + y \cos yz$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x, y) = -\frac{y \cos xy + z \cos zx}{x \cos zx + y \cos yz}$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}(x, y) = -\frac{z \cos yz + x \cos xy}{x \cos zx + y \cos yz}$$



$$f(x, y, z) = \sin xy + \sin yz + \sin zx - 1 = 0$$

Chapitre 31. Fonctions implicites.

Enoncés.

Exercice 5. Fonction implicite de classe C^1 (*Arctan*).

Soit $(u, v) \mapsto f(u, v)$ une application de classe C^1 de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. On pose :

$$g(x, y) = f\left(Arctan \frac{y}{x}, Arctan \frac{x}{y} \right).$$

La relation $g(x, y) = 0$ définit-elle une fonction implicite $y = \varphi(x)$?
Le cas échéant, calculer sa dérivée $\varphi'(x)$.
Expliciter la fonction φ.

Solution.

1°/ Conditions d'applications du théorème des fonctions implicites.

Soit (x_0, y_0) un point de $\mathbb{R}^2$ vérifiant $g(x_0, y_0) = 0$.

1. g, définie par $g(x, y) = f\left(Arctan \frac{y}{x}, Arctan \frac{x}{y} \right)$, est de classe C^1 sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ lorsque U ne coupe ni l'axe des x ($\mathbb{R} \times \{0\}$) ni l'axe des y ($\{0\} \times \mathbb{R}$), de sorte que x et y sont différents de 0 pour chaque point de U. Dans ce cas, g, composée d'applications de classe C^1 est de classe C^1.
2. $g(x_0, y_0) = 0$, par hypothèse ;
3. la dérivée partielle de g par rapport à y, au point (x_0, y_0), est inversible dans l'ouvert U de $\mathbb{R}$ si l'on a :
$$\frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$$
$$= \frac{x_0}{{x_0}^2 + {y_0}^2}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\left(Arctan \frac{y_0}{x_0}, Arctan \frac{x_0}{y_0} \right) - \frac{\partial f}{\partial v}\left(Arctan \frac{y_0}{x_0}, Arctan \frac{x_0}{y_0} \right) \right) \neq 0.$$
Dans l'ouvert U, on doit donc avoir en tout point (x, y) : $\frac{\partial f}{\partial u}\left(Arctan \frac{y}{x}, Arctan \frac{x}{y} \right) \neq \frac{\partial f}{\partial v}\left(Arctan \frac{y}{x}, Arctan \frac{x}{y} \right)$.

Les trois conditions d'application du théorème des fonctions implicites sont alors vérifiées pour *f*.

2°/ Fonction implicite.

Le théorème des fonctions implicites s'applique :

Dans ces conditions, il existe :

- un intervalle ouvert V de $\mathbb{R}$ contenant x_0,
- un intervalle ouvert W de $\mathbb{R}$ contenant y_0,
- une application $\varphi : V \to W$ de classe C^1,

vérifiant :

1. $V \times W \subset U \subset \mathbb{R}^2$
2. φ est l'unique application de V dans W telle que, pour tout $x \in V$, on ait $g(x, \varphi(x)) = 0$.
3. $(x, y) \in V \times W$ et $g(x, y) = 0 \Leftrightarrow x \in V$ et $y = \varphi(x)$.

De plus,

1. il existe un intervalle ouvert V' inclus dans V contenant x_0 et tel que, pour tout $x \in V'$, la dérivée partielle de g par rapport à y, au point $(x, \varphi(x))$, soit inversible, c'est-à-dire non nulle.
2. la matrice jacobienne de φ en $x \in V'$ est :

$$J_x(\varphi) = \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)}{\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)}$$

$$u = Arctan\ \frac{y}{x} ; \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{y}{x^2+y^2} ; \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2}$$
$$v = Arctan\ \frac{x}{y} ; \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{y}{x^2+y^2} ; \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{x}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{y}{x^2+y^2}\left(\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial v}\right)$$
$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2}\left(\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial v}\right)$$

Dans U, on a $\left(\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial v}\right)\left(Arctan\ \frac{y}{x}, Arctan\ \frac{x}{y}\right) \neq 0$, $x \neq 0$, $y \neq 0$.

On obtient donc :

$$\varphi'(x_0) = \frac{dy}{dx}(x_0, y_0) = -\frac{\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0)}{\frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0)} = \frac{y_0}{x_0}$$

et, pour tout point x de V' :

$$\boxed{\varphi'(x) = \frac{y}{x} = \frac{\varphi(x)}{x}}$$

3°/ Fonction explicite.

La relation :

$$\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = \frac{1}{x}$$

s'intègre en donnant :

$$ln\,|\,\varphi(x)\,| = ln\,|\,x\,| + constante$$

si bien que la fonction φ est de la forme :

$$\boxed{y = \varphi(x) = k\,x, \text{ où } k \text{ est une constante réelle.}}$$

On a alors, pour tout x de V' : $g(x, k\,x) = 0 = f\left(Arctan\,k, Arctan\,\frac{1}{k}\right) = 0$.

Or $Arctan\,k + Arctan\,\frac{1}{k} = \varepsilon\,\frac{\pi}{2}$, avec $\varepsilon = sgn(k) = sgn(Arctan\,k)$, donc l'application f elle-même doit vérifier la relation :

$$f\left(u, sgn(u)\,\frac{\pi}{2} - u\right) = 0, \text{ pour un } u = Arctan\,k \in \mathbb{R}.$$

On voit donc apparaître une nouvelle condition d'existence de φ :

Pour que la relation $g(x, y) = 0$ définisse une fonction implicite $y = \varphi(x)$,
il faut que l'équation $f\left(u, sgn(u)\,\frac{\pi}{2} - u\right) = 0$ possède au moins une racine réelle.
Si u_0 est une telle racine, la fonction implicite définie par $g(x, y) = 0$ est explicite : $y = x\,tan\,u_0$.

Exercices

Changements de variables implicites.

1. **Théorème du changement de variables implicite.**

Théorème du changement de variables implicite.

HAUT

C'est exactement le théorème des fonctions implicites avec *p* = *q*.

Soit p un entier > 0, U un ouvert de $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p$, $(a, b) = (a_1, \dots, a_p, b_1, \dots, b_p) \in U$, $f : U \to \mathbb{R}^p$ définie par :

$f(x, y) = f(x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_p) = (f_1(x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_p), \dots, f_p(x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_p))$.

On suppose que :

1. f est de classe C^k sur U ($k \geqslant 1$);
2. $f(a, b) = 0$;
3. la matrice des dérivées partielles de f par rapport aux variables $y_1, \dots, y_p$, au point (a, b), est inversible dans $M_p(\mathbb{R})$.

Dans ces conditions, il existe :

- un voisinage ouvert V de a dans $\mathbb{R}^p$,
- un voisinage ouvert W de b dans $\mathbb{R}^p$,
- une application $\varphi : V \to W$ de classe C^k,

vérifiant :

1. $V \times W \subset U$.
2. φ est l'unique application de V dans W telle que, pour tout $x \in V$, on ait $f(x, \varphi(x)) = 0$.
3. $(x, y) \in V \times W$ et $f(x, y) = 0 \Leftrightarrow x \in V$ et $y = \varphi(x) = (\varphi_1(x), \dots, \varphi_p(x))$.

De plus,

1. il existe un voisinage V' de a inclus dans V tel que, pour tout $x = (x_1, \dots, x_p) \in V'$, la matrice des dérivées partielles de f par rapport aux variables $y_1, \dots, y_p$, au point $(x, \varphi(x))$, soit inversible,
2. la matrice jacobienne de φ en x est :

$$J_x(\varphi) = \frac{D(\varphi_1, \dots, \varphi_p)}{D(x_1, \dots, x_p)} = -\left(\frac{D(f_1, \dots, f_p)}{D(y_1, \dots, y_p)}(x, \varphi(x))\right)^{-1} \frac{D(f_1, \dots, f_p)}{D(x_1, \dots, x_p)}(x, \varphi(x))$$

HAUT

Chapitre 32 - Changements de variables implicites.

Exercices

Exercice 1. Changement de variables implicite dans $\mathbb{R}^2$.
Exercice 2. Matrice jacobienne d'un changement de variables implicite dans $\mathbb{R}^2$.
Exercice 3. Dérivées partielles dans un changement de variables implicite dans $\mathbb{R}^2$.

Exercice 1. Changement de variables implicite dans $\mathbb{R}^2$.

Si u et v sont fonctions de x et y par l'intermédiaire des relations :

$$f(x, y, u, v) = x + y^2 + 2uv = 0$$
$$g(x, y, u, v) = x^2 - xy + y^2 + u^2 + v^2 = 0,$$

1°/ Trouver la matrice jacobienne du changement de coordonnées $\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}$.

2°/ Dans quel domaine (D) du plan (x, y) le changement de coordonnées $\varphi : (x, y) \mapsto (u, v)$ est-il de classe C^1 ?

Solution

HAUT

Exercice 2. Matrice jacobienne d'un changement de variables implicite dans $\mathbb{R}^2$.

On considère les relations :

$$u^2 - v^2 + 2x + 3y = 0$$
$$uv + x - y = 0.$$

Calculer :
1°/ La matrice jacobienne de la transformation $(x, y) \mapsto (u, v)$.
2°/ La matrice jacobienne de la transformation $(u, v) \mapsto (x, y)$.

Solution

HAUT

Exercice 3. Dérivées partielles dans un changement de variables implicite dans $\mathbb{R}^2$.

Trouver les dérivées partielles de u et v par rapport à x et y, puis celles de x et y par rapport à u et v, sachant que :

$$2u - v + x^2 + xy = 0$$
$$u + 2v + xy - y^2 = 0.$$

Solution

HAUT

Chapitre 32. Changements de variables implicites.

Enoncés.

Exercice 1. Changement de variables implicite dans $\mathbb{R}^2$.

Si u et v sont fonctions de x et y par l'intermédiaire des relations :

$$f(x, y, u, v) = x + y^2 + 2uv = 0$$
$$g(x, y, u, v) = x^2 - xy + y^2 + u^2 + v^2 = 0,$$

1°/ Trouver la matrice jacobienne du changement de coordonnées $\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}$.

2°/ Dans quel domaine (D) du plan (x, y) le changement de coordonnées $\varphi : (x, y) \mapsto (u, v)$ est-il de classe C^1 ?

Solution.

L'application $F : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de composantes f et g est de classe C^1, parce que ses composantes f et g sont des applications polynômes, de classe C^1.

Lorsque la matrice $\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} \\ \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial v} \end{pmatrix}$ est inversible, le théorème des fonctions implicites s'applique : il existe, au voisinage d'un point (x_0, y_0, u_0, v_0) vérifiant $F(x_0, y_0, u_0, v_0) = 0$, une application unique de classe C^1, $\varphi : (x, y) \mapsto (u, v)$ telle que $F((x, y), \varphi(x, y)) = 0$

Les relations :

$$f(x, y, u, v) = x + y^2 + 2uv = 0$$
$$g(x, y, u, v) = x^2 - xy + y^2 + u^2 + v^2 = 0,$$

donnent :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial u}du + \frac{\partial f}{\partial v}dv = 0$$
$$dg = \frac{\partial g}{\partial x}dx + \frac{\partial g}{\partial y}dy + \frac{\partial g}{\partial u}du + \frac{\partial g}{\partial v}dv = 0$$

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy\right) + \frac{\partial f}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy\right) = 0$$
$$dg = \frac{\partial g}{\partial x}dx + \frac{\partial g}{\partial y}dy + \frac{\partial g}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy\right) + \frac{\partial g}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy\right) = 0$$

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} \right) dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} \right) dy = 0$$
$$dg = \left(\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} \right) dx + \left(\frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} \right) dy = 0$$

Ces relations s'écrivent, sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} \\ \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Si la matrice $\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} \\ \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial v} \end{pmatrix}$ est inversible, c'est-à-dire si son déterminant est différent de 0, la matrice jacobienne de φ est :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} \\ \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial v} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} \\ \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2v & 2u \\ 2u & 2v \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} v & u \\ u & v \end{pmatrix}$$

Le déterminant est 4 ($v^2 - u^2$). On le suppose différent de 0.

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} \\ \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial v} \end{pmatrix}^{-1} = - \frac{1}{2(u^2 - v^2)} \begin{pmatrix} v & -u \\ -u & v \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2y \\ 2x - y & 2y - x \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \frac{1}{2(u^2 - v^2)} \begin{pmatrix} v & -u \\ -u & v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2y \\ 2x - y & 2y - x \end{pmatrix} = \frac{1}{2(u^2 - v^2)} \begin{pmatrix} v - u(2x - y) & 2vy - u(2y - x) \\ -u + v(2x - y) & -2uy + v(2y - x) \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \frac{1}{2(u^2 - v^2)} \begin{pmatrix} v - u(2x - y) & 2vy - u(2y - x) \\ -u + v(2x - y) & -2uy + v(2y - x) \end{pmatrix}}$$

2°/ Domaine de classe C^1 de φ.

La matrice jacobienne $\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}$ est inversible si le déterminant de la matrice

$\begin{pmatrix} v-u(2x-y) & 2vy-u(2y-x) \\ -u+v(2x-y) & -2uy+v(2y-x) \end{pmatrix}$ est différent de 0 :

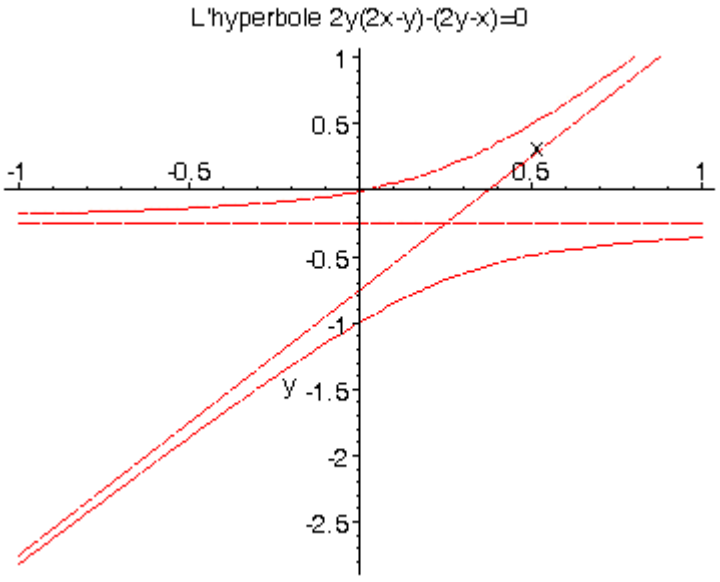
$$[v - u\,(2\,x - y)][-\,2\,u\,y + v\,(2\,y - x)] - [-\,u + v\,(2\,x - y)][2\,v\,y - u\,(2\,y - x)] \neq 0$$
$$-\,2\,u\,v\,y + 2\,u^{\,2}\,y\,(2\,x - y) + v^{\,2}\,(2\,y - x) - 2\,u\,v\,(2\,x - y)(2\,y - x) + 2\,u\,v\,y - 2\,v^{\,2}\,(2\,x - y) - u^{\,2}\,(2\,y - x) + u\,v\,(2\,x - y)(2\,y - x) \neq 0$$
$$(u^{\,2} - v^{\,2})[2\,y\,(2\,x - y) - (2\,y - x)] \neq 0$$

Comme on a déjà $(u^{\,2} - v^{\,2}) \neq 0$, pour que la matrice jacobienne de φ, $\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} \\ \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial v} \end{pmatrix}$, soit inversible, il faut et il suffit que

$$2\,y\,(2\,x - y) - (2\,y - x)$$

soit différent de 0.

L'hyperbole d'équation $2\,y\,(2\,x - y) - (2\,y - x) = 0$ est un fermé, puisque c'est l'image réciproque du fermé {0} par l'application continue $(x, y) \mapsto 2\,y\,(2\,x - y) - (2\,y - x)$.
Dans l'ouvert complémentaire de l'hyperbole d'équation $2\,y\,(2\,x - y) - (2\,y - x) = 0$, le déterminant jacobien de φ est différent de 0.



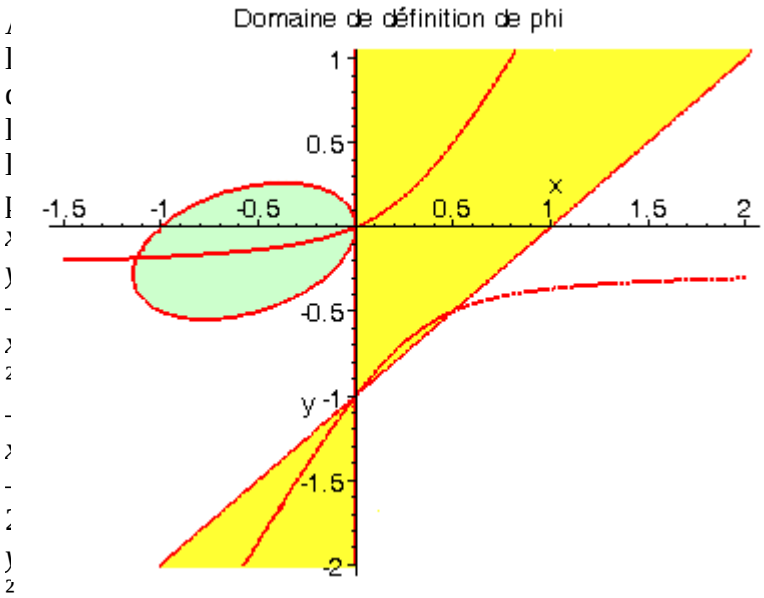
On peut obtenir l'expression explicite de φ à partir des relations :

$f\,(x, y, u, v) = x + y^{\,2} + 2\,u\,v = 0$
$g\,(x, y, u, v) = x^{\,2} - x\,y + y^{\,2} + u^{\,2} + v^{\,2} = 0$.

$(u + v)^{\,2} = u^{\,2} + v^{\,2} + 2\,u\,v = x\,y - (x^{\,2} + y^{\,2}) - x - y^{\,2} = x\,y - x^{\,2} - x - 2\,y^{\,2}$
$(u - v)^{\,2} = u^{\,2} + v^{\,2} - 2\,u\,v = x\,y - (x^{\,2} + y^{\,2}) + x + y^{\,2} = x\,y - x^{\,2} + x$

$$x\,y - x^{\,2} - x - 2\,y^{\,2} = (x\,y)\begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - x$$

Le produit des valeurs propres de la matrice $\begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -2 \end{pmatrix}$ est le déterminant $\frac{7}{4}$.
La somme des valeurs propres est la trace – 3 de la matrice.
Donc les deux valeurs propres sont du même signe : la courbe d'équation $x\,y - x^{\,2} - x - 2\,y^{\,2} = 0$ est une ellipse.



garde le même signe.
Il est strictement plus petit que 0 (exemple : $y = 0$, $x = -\frac{1}{2}$, $x\,y - x^2 - x - 2\,y^2 = -\frac{5}{4}$).
Le polynôme $x\,y - x^2 - x - 2\,y^2$ ne peut pas être égal à un carré $(u + v)^2$ à l'intérieur de l'ellipse.
L'application φ n'est définie qu'**à l'extérieur de l'ellipse**.

De même $x\,y - x^2 + x = x\,(y - x + 1) = 0$ définit l'équation de deux droites.
Le produit $x\,(y - x + 1) = (u - v)^2$ est positif dans l'angle aigu entre les droites.
L'application φ n'est définie que dans l'angle aigu entre les deux droites.
Cette portion du plan est toute entière à l'extérieur de l'ellipse.
Le domaine de classe C^1 de φ est donc contenu dans cette portion du plan (x, y) dans l'angle aigu entre les deux droites d'équations $x = 0$ et $y - x + 1 = 0$ (**domaine en jaune sur la figure**).

Dans cette portion de plan, le domaine (D) de classe C^1 de φ est constitué des **points qui n'appartiennent pas à l'hyperbole** d'équation $2\,y\,(2\,x - y) - (2\,y - x) = 0$.

Dans ce domaine (D), on a :

$$|u + v| = \sqrt{x\,y - x^2 - x - 2\,y^2}$$
$$|u - v| = \sqrt{x\,y - x^2 + x}$$

La condition $u^2 - v^2 \neq 0$ s'exprime simplement par le fait que (x, y) n'est pas sur les droites d'équations $x = 0$ et $y - x + 1 = 0$: elle est automatiquement vérifiée si l'on prend pour D l'ouvert constitué de la portion de plan située strictement dans l'angle aigu entre les deux droites, moins les points de l'hyperbole d'équation $2\,y\,(2\,x - y) - (2\,y - x) = 0$.
On constate que (D) est la réunion de cinq parties ouvertes connexes limitées par les droites et l'hyperbole.

Exemples de point où φ n'est pas de classe C^1, bien qu'elle soit définie :
il suffit de prendre des points situés à la fois dans l'angle aigu entre les droites et sur l'hyperbole, par exemple :
$\left(\frac{1}{2}\,,\,\frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}\,,\,-1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \left(\frac{1}{4}\,,\,-\frac{1+\sqrt{3}}{4}\right)$

3°/ Résolution des équations.

On peut trouver explicitement u et v en fonction de x et y à partir des relations :

$(u + v)^2 = u^2 + v^2 + 2\,u\,v = x\,y - (x^2 + y^2) - x - y^2 = x\,y - x^2 - x - 2\,y^2$
$(u - v)^2 = u^2 + v^2 - 2\,u\,v = x\,y - (x^2 + y^2) + x + y^2 = x\,y - x^2 + x$

dans le domaine de définition de φ.

Pour $u + v > 0$ et $u - v > 0$, on obtient :

$$u = \frac{1}{2}\left(\sqrt{x\,y - x^2 - x - 2\,y^2} + \sqrt{x\,y - x^2 + x}\right)$$
$$v = \frac{1}{2}\left(\sqrt{x\,y - x^2 - x - 2\,y^2} - \sqrt{x\,y - x^2 + x}\right)$$

Le produit $u\,v$ vaut $\frac{1}{4}(x\,y - x^2 - x - 2\,y^2 - x\,y + x^2 - x) = -\frac{1}{2}(x + y^2)$.
$f(x, y, u, v) = 0$.
La solution convient.

Pour $u + v > 0$ et $u - v < 0$, on obtient :

$$u = \frac{1}{2}\left(\sqrt{x\,y - x^2 - x - 2\,y^2} - \sqrt{x\,y - x^2 + x}\right)$$
$$v = \frac{1}{2}\left(\sqrt{x\,y - x^2 - x - 2\,y^2} + \sqrt{x\,y - x^2 + x}\right)$$

Le produit $u\,v$ vaut $\frac{1}{4}(x\,y - x^2 - x - 2\,y^2 - x\,y + x^2 - x) = -\frac{1}{2}(x + y^2)$.
$f(x, y, u, v) = 0$.
La solution convient.

Pour $u + v < 0$ et $u - v > 0$, on obtient :

$$u = -\frac{1}{2}\left(\sqrt{x\,y - x^2 - x - 2\,y^2} - \sqrt{x\,y - x^2 + x}\right)$$
$$v = -\frac{1}{2}\left(\sqrt{x\,y - x^2 - x - 2\,y^2} + \sqrt{x\,y - x^2 + x}\right)$$

Le produit $u\,v$ vaut $\frac{1}{4}(x\,y - x^2 - x - 2\,y^2 - x\,y + x^2 - x) = -\frac{1}{2}(x + y^2)$.
$f(x, y, u, v) = 0$.
La solution convient.

Pour $u + v < 0$ et $u - v < 0$, on obtient :

$$u = -\frac{1}{2}\left(\sqrt{x\,y - x^2 - x - 2\,y^2} + \sqrt{x\,y - x^2 + x}\right)$$
$$v = -\frac{1}{2}\left(\sqrt{x\,y - x^2 - x - 2\,y^2} - \sqrt{x\,y - x^2 + x}\right)$$

Le produit $u\,v$ vaut $\frac{1}{4}(x\,y - x^2 - x - 2\,y^2 - x\,y + x^2 - x) = -\frac{1}{2}(x + y^2)$.

$f(x, y, u, v) = 0$.
La solution convient.

Chapitre 32. Changements de variables implicites.

Enoncés.

Exercice 2. Matrice jacobienne d'un changement de variables implicite dans $\mathbb{R}^2$.

On considère les relations : $u^2 - v^2 + 2x + 3y = 0$ $uv + x - y = 0.$ Calculer : 1°/ La matrice jacobienne de la transformation $(x, y) \mapsto (u, v)$. 2°/ La matrice jacobienne de la transformation $(u, v) \mapsto (x, y)$.	

Solution.

1°/ Application $(x, y) \mapsto (u, v)$.

a) Application du théorème des fonctions implicites.

Soit $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application définie par $((x, y), (u, v)) \mapsto (u^2 - v^2 + 2x + 3y, uv + x - y)$.
On pose $f_1(x, y, u, v) = u^2 - v^2 + 2x + 3y$, $f_2(x, y, u, v) = uv + x - y$.
L'application f a des composantes f_1 et f_2, applications de $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$.
L'application f est donc de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$.
En particulier, l'application f est de classe C^1 sur l'ouvert $U = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 - \{((0, 0), (0, 0))\}$.

L'ouvert U n'est pas vide, il contient au moins un bi-point (A, B) tel que $f(A, B) = (0, 0)$, il suffit de prendre, par exemple,
$A = (x, y) = \left(-\frac{3}{5}, \frac{2}{5}\right)$, $B = (u, v) = (1, 1)$.

La matrice des dérivées partielles de f par rapport à u et v est :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} & \frac{\partial f_1}{\partial v} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} & \frac{\partial f_2}{\partial v} \end{pmatrix}((x, y), (u, v)) = \begin{pmatrix} 2u & -2v \\ v & u \end{pmatrix}.$$

Son déterminant est $2(u^2 + v^2)$.
Il est différent de 0 en dehors du point $(u, v) = (0, 0)$.
La relation $f((x, y), (0, 0)) = (0, 0)$ a pour unique solution $(x, y) = (0, 0)$.

La matrice $\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} & \frac{\partial f_1}{\partial v} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} & \frac{\partial f_2}{\partial v} \end{pmatrix}$ est donc inversible en un point $((x, y), (u, v))$ vérifiant $f((x, y), (u, v)) = (0, 0)$ chaque fois que $((x, y), (u, v))$ est différent de $((0, 0), (0, 0))$, c'est-à-dire dans l'ouvert U.

Les conditions d'application du théorème des fonctions implicites sont alors réunies pour tout bi-point $((x_0, y_0), (u_0, v_0))$ de l'ouvert U vérifiant :
$f(((x_{00}, y_0), (u_0, v_0)) = 0$:
— f est de classe C^1 sur l'ouvert $U = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 - \{((0, 0), (0, 0))\}$.
— la matrice $\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} & \frac{\partial f_1}{\partial v} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} & \frac{\partial f_2}{\partial v} \end{pmatrix}((x_0, y_0), (u_0, v_0))$ est inversible.

Le théorème des fonctions implicites s'applique :
— il existe un voisinage ouvert V de (x_0, y_0) dans $\mathbb{R}^2$
— il existe un voisinage ouvert W de (u_0, v_0) dans $\mathbb{R}^2$
— il existe un application $\varphi : V \to W$ de classe C^1 vérifiant :
·· $V \times W$ est un voisinage ouvert de $((x_0, y_0), (u_0, v_0))$ contenu dans U,
·· φ est l'unique application de V dans W vérifiant, pour tout (x, y) de V, la relation $f((x, y), \varphi(x, y)) = 0$,
·· $((x, y), (u, v)) \in V \times W$ et $f((x, y), (u, v)) = 0$ équivaut à $(x, y) \in V$ et $(u, v) = \varphi(x, y) = (\varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y))$
De plus, il existe un voisinage V' de (x_0, y_0) contenu dans V tel que, pour tout (x, y) de V', on ait :

·· $\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} & \frac{\partial f_1}{\partial v} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} & \frac{\partial f_2}{\partial v} \end{pmatrix}((x, y), (u, v))$ est inversible,

·· $\begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial v} \end{pmatrix}(x, y) = -\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} & \frac{\partial f_1}{\partial v} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} & \frac{\partial f_2}{\partial v} \end{pmatrix}^{-1}((x, y), \varphi(x, y)) \times \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix}((x, y), \varphi(x, y))$

Ce dernier résultat permet de calculer la matrice jacobienne de φ :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 2u & -2v \\ v & u \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2(u^2+v^2)}\begin{pmatrix} u & 2v \\ -v & 2u \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2(u^2+v^2)}\begin{pmatrix} 2u+2v & 3u-2v \\ 2u-2v & -2u-3v \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = -\frac{1}{2(u^2+v^2)}\begin{pmatrix} 2u+2v & 3u-2v \\ 2u-2v & -2u-3v \end{pmatrix}}$$

b) Explicitation de la transformation $(x, y) \mapsto (u, v)$.

Les relations :

$$u^2 - v^2 + 2x + 3y = 0$$
$$uv + x - y = 0.$$

peuvent s'écrire, sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v^2 - u^2 \\ -uv \end{pmatrix}.$$

$$v^2 - u^2 = 2x + 3y$$
$$uv = y - x$$
$$u^2 v^2 = (y - x)^2$$

$u = 0$ ou $v = 0 \Leftrightarrow y = x$.
Pour u et v différents de 0 :

$$v^2 = \frac{(y-x)^2}{u^2}$$
$$\frac{(y-x)^2}{u^2} - u^2 = 2x + 3y$$
$$u^4 + (2x + 3y)u^2 - (y - x)^2 = 0$$

La seule racine positive est :

$$u^2 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{(2x+3y)^2 + 4(y-x)^2} - (2x+3y)\right)$$
$$u = \pm\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{(2x+3y)^2 + 4(y-x)^2} - (2x+3y)\right)}$$

Avec $v = \frac{y-x}{u}$, on trouve donc deux groupes de solutions :

$$\begin{cases} u = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{(2x+3y)^2 + 4(y-x)^2} - (2x+3y)\right)} \\ v = \frac{y-x}{\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{(2x+3y)^2 + 4(y-x)^2} - (2x+3y)\right)}} \end{cases} ; \begin{cases} u = -\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{(2x+3y)^2 + 4(y-x)^2} - (2x+3y)\right)} \\ v = -\frac{y-x}{\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{(2x+3y)^2 + 4(y-x)^2} - (2x+3y)\right)}} \end{cases}.$$

L'application φ est alors déterminée par le signe de u.
Si $f(((x_0, y_0), (u_0, v_0)) = 0$:
— lorsque u_0 est positif, l'application φ est déterminée par

$$\begin{cases} u = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{(2x+3y)^2 + 4(y-x)^2} - (2x+3y)\right)} \\ v = \frac{y-x}{\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{(2x+3y)^2 + 4(y-x)^2} - (2x+3y)\right)}} \end{cases}.$$

— lorsque u_0 est négatif, l'application φ est déterminée par

$$\begin{cases} u = -\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{(2x+3y)^2+4(y-x)^2}-(2x+3y)\right)} \\ v = -\frac{y-x}{\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{(2x+3y)^2+4(y-x)^2}-(2x+3y)\right)}} \end{cases}.$$

2°/ Application $(u, v) \mapsto (x, y)$.

a) Application du théorème des fonctions implicites.

Soit $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application définie par $((x, y), (u, v)) \mapsto (u^2 - v^2 + 2x + 3y, uv + x - y)$.
On pose $f_1(x, y, u, v) = u^2 - v^2 + 2x + 3y$, $f_2(x, y, u, v) = uv + x - y$.
L'application f a des composantes f_1 et f_2, applications de $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$.
L'application f est donc de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$.
La matrice des dérivées partielles de f par rapport à x et y est :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix}(x, y, u, v) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Son déterminant est – 5.
Il est toujours différent de 0.
La matrice $\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix}(x, y, u, v)$ est donc inversible en tout point $((x, y), (u, v))$ vérifiant $f((x, y), (u, v)) = (0, 0)$.

Les conditions d'application du théorème des fonctions implicites sont alors réunies pour tout bi-point $((x_0, y_0), (u_0, v_0))$ de $\mathbb{R}^2$ vérifiant :
$f((x_0, y_0), (u_0, v_0)) = 0$:
— f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$.
— la matrice $\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix}(x_0, y_0, u_0, v_0)$ est inversible.

Le théorème des fonctions implicites s'applique :
— il existe un voisinage ouvert V de (u_0, v_0) dans $\mathbb{R}^2$.
— il existe un voisinage ouvert W de (x_0, y_0) dans $\mathbb{R}^2$.
— il existe un application $\varphi : V \to W$ de classe C^1 vérifiant :
·· $V \times W$ est un voisinage ouvert de $((x_0, y_0), (u_0, v_0))$ contenu dans $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$,
·· φ est l'unique application de V dans W vérifiant, pour tout (u, v) de V, la relation $f(\varphi(u, v), (u, v)) = 0$,
·· $((u, v), (x, y)) \in V \times W$ et $f((x, y), (u, v)) = 0$ équivaut à $(u, v) \in V$ et $(x, y) = \varphi(u, v) = (\varphi_1(u, v), \varphi_2(u, v))$

De plus, il existe un voisinage V' de (u_0, v_0) contenu dans V tel que, pour tout (u, v) de V', on ait :

$$\cdot\cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} (x, y, u, v) \text{ est inversible,}$$

$$\cdot\cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial v} \end{pmatrix} (u, v) = - \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix}^{-1} (\varphi(u, v), (u, v)) \times \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} & \frac{\partial f_1}{\partial v} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} & \frac{\partial f_2}{\partial v} \end{pmatrix} (\varphi(u, v), (u, v))$$

Ce dernier résultat permet de calculer la matrice jacobienne de φ :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial v} \end{pmatrix} (u, v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial x}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial y}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2u & -2v \\ v & u \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2u & -2v \\ v & u \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -2u-3v & -3u+2v \\ -2u+2v & 2u+2v \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial x}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial y}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -2u-3v & -3u+2v \\ -2u+2v & 2u+2v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}^{-1}}$$

b) Explicitation de la transformation $(u, v) \mapsto (x, y)$.

Les relations :

$$u^2 - v^2 + 2x + 3y = 0$$
$$uv + x - y = 0.$$

peuvent s'écrire, sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v^2 - u^2 \\ -uv \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} v^2 - u^2 \\ -uv \end{pmatrix} = -\frac{1}{5} \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^2 - u^2 \\ -uv \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -\frac{1}{5} \begin{pmatrix} u^2 + 3uv - v^2 \\ u^2 - 2uv - v^2 \end{pmatrix}$$

Par dérivations partielles on en déduit :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial x}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial y}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -2u-3v & -3u+2v \\ -2u+2v & 2u+2v \end{pmatrix}$$

Chapitre 32. Changements de variables implicites.

Enoncés.

Exercice 3. Dérivées partielles dans un changement de variables implicite dans $\mathbb{R}^2$.

Trouver les dérivées partielles de u et v par rapport à x et y, puis celles de x et y par rapport à u et v, sachant que : $2u - v + x^2 + xy = 0$ $u + 2v + xy - y^2 = 0$.	

Solution.

1°/ Conditions d'application.

Soit $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application définie par $((x, y), (u, v)) \mapsto (2u - v + x^2 + xy, u + 2v + xy - y^2)$.
On pose $f_1(x, y, u, v) = 2u - v + x^2 + xy$, $f_2(x, y, u, v) = u + 2v + xy - y^2$.
L'application f a des composantes f_1 et f_2, applications de $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$.
L'application f est donc de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$.
Il y a au moins un bi-point $((x, y), (u, v))$ de $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ vérifiant $f((x, y), (u, v)) = 0$, ne serait-ce que $((0, 0), (0, 0))$.

La matrice des dérivées partielles de f par rapport à u et v est :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} & \frac{\partial f_1}{\partial v} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} & \frac{\partial f_2}{\partial v} \end{pmatrix}((x, y), (u, v)) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Son déterminant est 5.
Il est toujours différent de 0.
La matrice $\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} & \frac{\partial f_1}{\partial v} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} & \frac{\partial f_2}{\partial v} \end{pmatrix}((x, y), (u, v))$ est donc inversible en tout point $((x, y), (u, v))$ vérifiant $f((x, y), (u, v)) = (0, 0)$.

Les conditions d'application du théorème des fonctions implicites sont alors réunies pour tout bi-point $((x_0, y_0), (u_0, v_0))$ de $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ vérifiant :
$f((x_0, y_0), (u_0, v_0)) = 0$:

— f est de classe C^1 sur l'ouvert $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$.
— la matrice $\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} & \frac{\partial f_1}{\partial v} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} & \frac{\partial f_2}{\partial v} \end{pmatrix}((x_0, y_0), (u_0, v_0))$ est inversible.

2°/ Application du théorème des fonctions implicites.

Le théorème des fonctions implicites s'applique :
— il existe un voisinage ouvert V de (x_0, y_0) dans $\mathbb{R}^2$
— il existe un voisinage ouvert W de (u_0, v_0) dans $\mathbb{R}^2$
— il existe un application $\varphi : V \to W$ de classe C^1 vérifiant :
·· $V \times W$ est un voisinage ouvert de $((x_0, y_0), (u_0, v_0))$ contenu dans U,
·· φ est l'unique application de V dans W vérifiant, pour tout (x, y) de V, la relation $f((x, y), \varphi(x, y)) = 0$,
·· $((x, y), (u, v)) \in V \times W$ et $f((x, y), (u, v)) = 0$ équivaut à $(x, y) \in V$ et $(u, v) = \varphi(x, y) = (\varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y))$
De plus, il existe un voisinage V' de (x_0, y_0) contenu dans V tel que, pour tout (x, y) de V', on ait :

·· $\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} & \frac{\partial f_1}{\partial v} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} & \frac{\partial f_2}{\partial v} \end{pmatrix}((x, y), (u, v))$ est inversible,

·· $\begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial v} \end{pmatrix}(x, y) = -\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} & \frac{\partial f_1}{\partial v} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} & \frac{\partial f_2}{\partial v} \end{pmatrix}^{-1}((x, y), \varphi(x, y)) \times \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix}((x, y), \varphi(x, y))$

Ce dernier résultat permet de calculer la matrice jacobienne de φ :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 2x+y & x \\ y & x-2y \end{pmatrix} = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2x+y & x \\ y & x-2y \end{pmatrix} = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4x+3y & 3x-2y \\ -2x+y & x-4y \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4x+3y & 3x-2y \\ -2x+y & x-4y \end{pmatrix}}$$

3°/ Explicitation de la transformation $(x, y) \mapsto (u, v)$.

Les relations :

$$2u - v + x^2 + xy = 0$$
$$u + 2v + xy - y^2 = 0.$$

s'écrivent :

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x^2+xy \\ xy-y^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} x^2+xy \\ xy-y^2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^2+xy \\ xy-y^2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2x^2+3xy-y^2 \\ -x^2+xy-2y^2 \end{pmatrix}$$

$$u = -\frac{1}{5}(2x^2+3xy-y^2) = -\frac{1}{40}((4x+3y)^2-17y^2)$$
$$v = -\frac{1}{5}(-x^2+xy-2y^2) = \frac{1}{20}((2x-y)^2+7y^2)$$

La matrice jacobienne du changement de variable s'en déduit :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4x+3y & 3x-2y \\ -2x+y & x-4y \end{pmatrix}$$

4°/ Changement inverse.

La matrice jacobienne de φ^{-1} est l'inverse de la matrice jacobienne de φ :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}^{-1} = -\frac{25}{(4x+3y)(x-4y)-(3x-2y)(-2x+y)}\begin{pmatrix} x-4y & -3x+2y \\ 2x-y & 4x+3y \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{25}{4x^2-13xy-12y^2+6x^2-7xy+2y^2}\begin{pmatrix} x-4y & -3x+2y \\ 2x-y & 4x+3y \end{pmatrix}$$

$$= \frac{5}{2}\frac{1}{(x-y)^2-2y^2}\begin{pmatrix} x-4y & -3x+2y \\ 2x-y & 4x+3y \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = \frac{5}{2\left(x-\left(\sqrt{2}+1\right)y\right)\left(x+\left(\sqrt{2}-1\right)y\right)}\begin{pmatrix} x-4y & -3x+2y \\ 2x-y & 4x+3y \end{pmatrix}}$$

Exercices

Extrema liés - Conditions du premier ordre.

1. **Théorème des multiplicateurs de Lagrange.**
2. **Lagrangien.**

Théorème des multiplicateurs de Lagrange (théorème des extrema liés).

HAUT

Hypothèses et notations.

— p et q sont des entiers > 0.
— U est un **ouvert** de $\mathbb{R}^p$.
— $f, g_1, \ldots, g_q$, sont des applications de **classe C^1** de U dans $\mathbb{R}$.
— Γ est l'ensemble des éléments m de U pour lesquels on a $g_1(m) = \ldots = g_q(m) = 0$ ("**contraintes égalités**").
— f_Γ est la restriction de f à Γ.
— f_Γ admet un **extremum relatif** en un point $m_0 \in \Gamma$.
— les formes linéaires $dg_1(m_0), \ldots, dg_q(m_0)$, sont **linéairement indépendantes**.

Conclusions.

Il existe des nombres réels (uniques) $\lambda_1, \ldots, \lambda_q$, qu'on appelle les ***multiplicateurs de Lagrange***, vérifiant :

$$df(m_0) = \lambda_1 dg_1(m_0) + \ldots + \lambda_q dg_q(m_0)$$

Il revient au même de dire que, en m_0, le gradient de f est combinaison linéaire des gradients des contraintes.

Application.

Ce théorème permet de calculer, parmi les points $m \in \Gamma$, le point m_0 pour lequel la restriction de f à Γ possède un maximum ou un minimum.
L'équation :

$$df(m_0) = \lambda_1 dg_1(m_0) + \ldots + \lambda_q dg_q(m_0)$$

est, en fait, un système de p équations (à $q + p$ inconnues) faisant intervenir les dérivées partielles par rapport aux p variables (m_0 possède p coordonnées).
Il suffit de résoudre le système de $q + p$ équations à $q + p$ inconnues :

$$df(m_0) = \lambda_1 dg_1(m_0) + \ldots + \lambda_q dg_q(m_0)$$
$$g_1(m_0) = \ldots = g_q(m_0) = 0$$

pour avoir les valeurs de $\lambda_1, \ldots, \lambda_q$, et, surtout, les coordonnées de m_0.

HAUT

Lagrangien.

HAUT

Avec les hypothèses et notations du théorème des multiplicateurs de Lagrange :

Si :
— p et q sont des entiers > 0,
— U est un **ouvert** de $\mathbb{R}^p$,
— $f, g_1, \dots, g_q$, sont des applications de **classe C^1** de U dans $\mathbb{R}$,
— Γ est l'ensemble des éléments m de U pour lesquels on a $g_1(m) = \dots = g_q(m) = 0$ ("**contraintes égalités**").
on appelle **Lagrangien** de f l'application :

$$L : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}$$

définie par :

$$L(x_1, \dots, x_p, \lambda_1, \dots, \lambda_q) = f(x_1, \dots, x_p) + \lambda_1 g_1(x_1, \dots, x_p) + \dots + \lambda_q g_q(x_1, \dots, x_p).$$

Utilisation du lagrangien.

Parmi les points $m \in \Gamma$, les points m_0 pour lequel la restriction de f à Γ possède un extremum relatif, sont des points critiques du lagrangien. Ils vérifient le système de $q + p$ équations à $q + p$ inconnues résumées par la relation :

$$dL(m_0) = 0$$

soit :

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1}(x_1, \dots, x_p, \lambda_1, \dots, \lambda_q) = \dots = \frac{\partial L}{\partial \lambda_q}(x_1, \dots, x_p, \lambda_1, \dots, \lambda_q) = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial x_1}(x_1, \dots, x_p, \lambda_1, \dots, \lambda_q) = \dots = \frac{\partial L}{\partial x_p}(x_1, \dots, x_p, \lambda_1, \dots, \lambda_q) = 0$$

La résolution de ce système fournit :
— la valeur des multiplicateurs de Lagrange $\lambda_1, \dots, \lambda_q$,
— et, surtout, les coordonnées $(x_1, \dots, x_p)$ de m_0.

HAUT

Chapitre 33 - Extrema liés - Conditions du premier ordre.

Exercices

Exercice 1. Baignoire parallélépipédique.
Exercice 2. Optimisation par deux méthodes.
Exercice 3. Distance d'un point à une ellipse.
Exercice 4. Extrema liés de $x^3 + y^2$.
Exercice 5. Temps minimum d'un trajet rail-route.
Exercice 6. Points critiques de $x^p y^q$ sous la contrainte $x + y = a$.
Exercice 7. Problème de plus court chemin d'un point à un autre, sous contrainte.
Exercice 8. Extremum relatif lié (fonction avec logarithme).
Exercice 9. Extrema sur un compact.

Exercice 1. Baignoire parallélépipédique.

1°/ Déterminer, par la méthode des multiplicateurs de Lagrange, parmi les baignoires ayant un volume intérieur donné $V \neq 0$, de forme parallélépipédique rectangle, celle dont la surface intérieure est minimum. 2°/ Parmi les baignoires de forme parallélépipédique rectangle de surface intérieure $S \neq 0$, déterminer celle qui a le plus grand volume.	Solution

HAUT

Exercice 2. Optimisation par deux méthodes.

On veut résoudre le problème avec contraintes égalités suivant :

$$(P)\begin{cases} \text{minimiser} & Q(x_1, x_2, x_3) := x_1^2 + x_2^2 + x_3^2, \quad \text{où } x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}. \\ \text{sous les contraintes} & \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 \quad (C_1) \\ x_1 - x_2 + x_3 = -2 \quad (C_2) \end{cases} \end{cases}$$

Solution

1°/ Eliminer x_1 et x_2 à l'aide des équations de contrainte et ramener le problème à une seule variable x_3. En déduire la solution x^* du problème (P) :

$x^* \equiv (x_1^*, x_2^*, x_3^*)$.

2°/ Ecrire le lagrangien associé au problème (P).

3°/ Trouver la valeur des multiplicateurs de Lagrange des deux contraintes à l'optimum.

HAUT

Exercice 3. Distance d'un point à une ellipse.

On considère dans le plan $\mathbb{R}^2$ l'ellipse :

$$\Gamma = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 4\,y^2 = 1 \}.$$

Etant donné le point $M_0 = (1, 2) \in \mathbb{R}^2$,
1°/ Déterminer le point M_1 de l'ellipse tel que la distance $d(M_0, M_1)$ soit minimum.
2°/ Déterminer le point M_2 de l'ellipse tel que la distance $d(M_0, M_2)$ soit maximum.

Solution

HAUT

Exercice 4. Extrema liés de $x^3 + y^2$.

Chercher les extrema de l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x, y) = x^3 + y^2$$

sous la contrainte :

1°/ $x + y^2 = 3$.

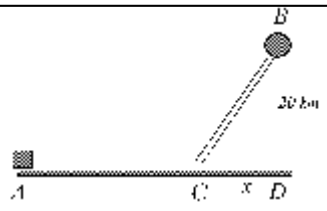
2°/ $x + y = 2$.

Solution

HAUT

Exercice 5. Temps minimum d'un trajet rail-route.

A d km d'une voie ferrée, se trouve le village B. Où faut-il instaurer un arrêt C pour que le voyage de la gare A au village B par la voie ferrée AC et la route CB prenne le temps minimum ?
Le train roule à v km/h, le transport routier roule à $\frac{v}{\alpha}$ km/h



de moyenne ($\alpha > 1$). Calculer le temps minimum pour aller de A à B et la vitesse moyenne du trajet de A à B.
Application numérique : $d = 20$ km, $v = 80$ km/h, $\alpha = 4$, $AD = 40$ km.

Solution

HAUT

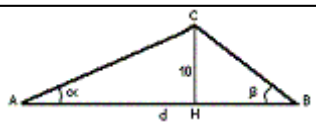
Exercice 6. Points critiques de $x^p\,y^q$ sous la contrainte $x + y = a$.

Etudier les points critiques de l'expression $f(x, y) = x^p\,y^q$, où p et q sont des nombres réels strictement positifs, lorsqu'on sait que la somme $x + y$ est égale à un nombre réel positif a ?	Solution

HAUT

Exercice 7. Problème de plus court chemin d'un point à un autre, sous contrainte.

Etant donnés deux points A et B distants de d, comment placer sur AB la projection H de C (CH de longueur 10) de telle sorte que le temps de parcours ACB soit le plus court possible, sachant que la vitesse entre A et C est le double de la vitesse entre C et B ?



Solution

HAUT

Exercice 8. Extremum relatif lié (fonction avec logarithme).

Soit $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \ 0 < x, 0 < y, \text{ et } x + y < 3\}$ et soit

$$h : \Omega \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto h(x, y) = x \ln x + y \ln y + (3 - x - y) \ln (3 - x - y).$$

1°/ Démontrer que Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
2°/ Démontrer que h est de classe C^2 sur Ω et expliciter les dérivées partielles de h d'ordre 1 et d'ordre 2 en tout point (x, y) de Ω.
3°/ Déterminer les points critiques de h et étudier les extrema relatifs éventuels de h.
4°/ Soient les applications :
$f :]0, +\infty[\times]0, +\infty[\times]0, +\infty[\to \mathbb{R} : (x, y, z) \mapsto f(x, y, z) = x \ln x + y \ln y + z \ln z$
$g :]0, +\infty[\times]0, +\infty[\times]0, +\infty[\to \mathbb{R} : (x, y, z) \mapsto g(x, y, z) = x + y + z - 3.$
f admet-elle un extremum relatif lié par la contrainte $g(x, y, z) = 0$?

Solution

HAUT

Exercice 9. Extrema sur un compact.

Soient f et g deux applications de $U = \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ dans $\mathbb{R}$ définies, pour tout $(x, y) \in U$, par :

$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} + y^2 - 1$

et

$g(x, y) = x^2 + y^2 - 9$

1°/

1. Démontrer que U est une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$.
2. Démontrer que f et g sont de classe C^2 sur U et expliciter les dérivées partielles de f et g à l'ordre 1 et à l'ordre 2.
3. Démontrer que f et g n'admettent aucun extremum relatif sur U.

2°/ On considère l'application h de U dans $\mathbb{R}$ définie, pour tout $(x, y) \in U$, par :

$h(x, y) = f(x, y) - \frac{7}{6} g(x, y)$.

Solution

1. Déterminer les points critiques pour h.
2. h admet-elle des extrema relatifs ?

3°/ Après avoir énoncé le théorème des multiplicateurs de Lagrange concernant les extrema liés, démontrer qu'il existe quatre points de $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | g(x, y) = 0\}$ en lesquels la restriction de f à Γ est susceptible de présenter des extrema relatifs.

4°/

1. Démontrer que Γ est une partie compacte de $\mathbb{R}^2$.
2. Démontrer que la restriction de f à Γ admet un maximum (resp. minimum) absolu M (resp. m) que l'on précisera.
3. En quels points de Γ, ce maximum (resp. minimum) est-il atteint ?

HAUT

Chapitre 33. Extrema liés - Conditions du premier ordre.

Enoncés.

Exercice 1. Baignoire parallélépipédique.

1°/ Déterminer, par la méthode des multiplicateurs de Lagrange, parmi les baignoires ayant un volume intérieur donné $V \neq 0$, de forme parallélépipédique rectangle, celle dont la surface intérieure est minimum. 2°/ Parmi les baignoires de forme parallélépipédique rectangle de surface intérieure $S \neq 0$, déterminer celle qui a le plus grand volume.	

Solution.

1°/ Volume donné, surface minimum.

1. Position du problème en termes d'extremum lié.

Le volume intérieur d'un parallélépipède rectangle d'arêtes x_1, x_2, x_3, est :

$$V(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 x_3.$$

La surface intérieure de la baignoire ainsi constituée, avec un fond de surface $x_1 x_2$ est :

$$S(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 + 2 x_1 x_3 + 2 x_2 x_3.$$

Le problème est donc de minimiser $S(x_1, x_2, x_3)$ sous la contrainte $V(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 x_3 = V$.

2. Mise en équations du problème d'extremum lié.

Pour mettre en équations le problème d'extremum lié, on forme d'abord le **lagrangien** du système :

$$L(x_1, x_2, x_3, \lambda) = S(x_1, x_2, x_3) + \lambda (V(x_1, x_2, x_3) - V)$$
$$L(x_1, x_2, x_3, \lambda) = x_1 x_2 + 2 x_1 x_3 + 2 x_2 x_3 + \lambda (x_1 x_2 x_3 - V)$$

C'est une application de $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de classe C^∞.
Si le problème a une solution, elle vérifie la relation :

$$d L(x_1, x_2, x_3, \lambda) = 0$$

qui se traduit par les équations :

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda}(x_1, x_2, x_3, \lambda) = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial x_1}(x_1, x_2, x_3, \lambda) = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial x_2}(x_1, x_2, x_3, \lambda) = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial x_3}(x_1, x_2, x_3, \lambda) = 0$$

$$x_1 x_2 x_3 = V \quad (1)$$
$$x_2 + 2 x_3 + \lambda x_2 x_3 = 0 \quad (2)$$
$$x_1 + 2 x_3 + \lambda x_1 x_3 = 0 \quad (3)$$
$$2 x_1 + 2 x_2 + \lambda x_1 x_2 = 0 \quad (4)$$

3. Résolution du système d'équations.

Par soustraction membre à membre des équations (2) et (3), on obtient la relation :

$$(x_2 - x_1)(1 + \lambda x_3) = 0$$

Cette relation est vérifiée pour :

$$x_2 = x_1 \text{ ou } \lambda x_3 = -1.$$

a) Cas où $x_2 = x_1$.

Dans ce cas, les équations (1) à (4) se réduisent à :

$$x_1^2 x_3 = V \quad (1')$$
$$x_1 + 2 x_3 + \lambda x_1 x_3 = 0 \quad (2')$$
$$4 x_1 + \lambda x_1^2 = 0 \quad (3')$$

L'équation (3') s'écrit :

$$x_1 (4 + \lambda x_1) = 0.$$

Par hypothèse, le volume $V = x_1 x_2 x_3$ est différent de 0, donc x_1 est différent de 0.
La relation précédente se simplifie alors en :

$$4 + \lambda x_1 = 0$$
$$\lambda = -\frac{4}{x_1}$$

En portant cette valeur dans l'équation (2'), il vient :

$$x_1 + 2 x_3 - 4 x_3 = 0$$
$$x_1 = 2 x_3$$

En portant cette valeur dans l'équation (1'), il vient :

$$4\,x_3{}^3 = V$$
$$x_3 = \left(\frac{V}{4}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}\,(2\,V)^{\frac{1}{3}}$$

D'où :

$$x_1 = x_2 = 2\,x_3 = (2\,V)^{\frac{1}{3}}$$
$$x_3 = \frac{1}{2}\,(2\,V)^{\frac{1}{3}}$$
$$\lambda = -\frac{4}{x_1} = -2\left(\frac{4}{V}\right)^{\frac{1}{3}}$$

La surface intérieure de la baignoire vaut alors :

$$S\,(x_1, x_2, x_3) = x_1\,x_2 + 2\,x_2\,x_3 + 2\,x_2\,x_3 = (2\,V)^{\frac{2}{3}} + 4\left(\frac{V^2}{2}\right)^{\frac{1}{3}} = 3\,(2\,V)^{\frac{2}{3}}.$$

b) Cas où $\lambda\,x_3 = -1$.

Dans ce cas, l'équation (2) se réduit à :

$$2\,x_3 = 0$$

ce qui est impossible puisque, par hypothèse, le volume $V = x_1\,x_2\,x_3$ est différent de 0.

c) Conclusion.

Lorsque le volume V est différent de 0, la surface intérieure de la baignoire ne peut être minimum que lorsqu'on prend :

Une baignoire ayant :

- pour fond un carré de côtés $x_1 = x_2 = (2\,V)^{\frac{1}{3}}$
- pour hauteur $x_3 = \frac{1}{2}\,(2\,V)^{\frac{1}{3}}$
- pour surface intérieure $S = 3\,(2\,V)^{\frac{2}{3}}$.

Resterait à vérifier que la surface intérieure correspond bien à un minimum, et non à un point critique quelconque.
Pour cela, il faudrait étudier les "**conditions du deuxième ordre**" : c'est à l'ordre du jour d'un chapitre ultérieur.
Pour l'instant, on peut se contenter d'une remarque qualitative : en prenant, par exemple, $x_1 = 2\,x_2 = x_3 = (2\,V)^{\frac{1}{3}}$, la surface intérieure de la baignoire est :

$$S = x_1\,x_2 + 2\,x_2\,x_3 + 2\,x_2\,x_3 = \frac{7}{2}\,(2\,V)^{\frac{2}{3}} > 3\,(2\,V)^{\frac{2}{3}}.$$

De sorte que la valeur $3\,(2\,V)^{\frac{2}{3}}$.n'est déjà certainement pas un maximum, puisqu'on a pu en trouver une plus grande.

2°/ Surface donnée, volume maximum.

1. Position du problème en termes d'extremum lié.

Le volume intérieur d'un parallélépipède rectangle d'arêtes x_1, x_2, x_3, est :

$$V(x_1, x_2, x_3) = x_1\,x_2\,x_3.$$

La surface intérieure de la baignoire ainsi constituée, avec un fond de surface $x_1\,x_2$ est :

$$S(x_1, x_2, x_3) = x_1\,x_2 + 2\,x_1\,x_3 + 2\,x_2\,x_3.$$

Le problème est donc de maximiser $V(x_1, x_2, x_3)$ sous la contrainte $S(x_1, x_2, x_3) = x_1\,x_2 + 2\,x_1\,x_3 + 2\,x_2\,x_3 = S$.

2. Mise en équations du problème d'extremum lié.

Pour mettre en équations le problème d'extremum lié, on forme d'abord le **lagrangien** du système :

$$L(x_1, x_2, x_3, \lambda) = V(x_1, x_2, x_3) + \lambda\,(S(x_1, x_2, x_3) - S)$$
$$L(x_1, x_2, x_3, \lambda) = x_1\,x_2\,x_3 + \lambda\,(x_1\,x_2 + 2\,x_1\,x_3 + 2\,x_2\,x_3 - S)$$

C'est une application de $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de classe C^∞.
Si le problème a une solution, elle vérifie la relation :

$$d\,L(x_1, x_2, x_3, \lambda) = 0$$

qui se traduit par les équations :

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda}(x_1, x_2, x_3, \lambda) = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial x_1}(x_1, x_2, x_3, \lambda) = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial x_2}(x_1, x_2, x_3, \lambda) = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial x_3}(x_1, x_2, x_3, \lambda) = 0$$

$$x_1\,x_2 + 2\,x_1\,x_3 + 2\,x_2\,x_3 = S \quad (1)$$
$$x_2\,x_3 + \lambda\,(x_2 + 2\,x_3) = 0 \quad (2)$$
$$x_1\,x_3 + \lambda\,(x_1 + 2\,x_3) = 0 \quad (3)$$
$$x_1\,x_2 + 2\,\lambda\,(x_1 + x_2) = 0 \quad (4)$$

3. Résolution du système d'équations.

Par soustraction membre à membre des équations (2) et (3), on obtient la relation :

$$(x_2 - x_1)(x_3 + \lambda) = 0$$

Cette relation est vérifiée si, et seulement si :

$$x_2 = x_1 \text{ ou } x_3 = -\lambda.$$

Par addition membre à membre des relations (2) et (3), on obtient la relation :

$$(x_2 + x_1)(x_3 + \lambda) + 4\lambda x_3 = 0$$

Si l'on avait $x_3 = -\lambda$, cette relation se réduirait à $4\lambda x_3 = 0$, donc $\lambda = x_3 = 0$.
Les relations (1) et (4) se réduiraient à $S = x_1 x_2 = 0$, ce qui est impossible puisque, par hypothèse, S est différent de 0.
On ne peut donc pas avoir $x_3 = -\lambda$, donc la relation $(x_2 - x_1)(x_3 + \lambda) = 0$ établie plus haut ne peut être vérifiée que si

$$x_2 = x_1.$$

Les relations (1) à (4) se réduisent alors à :

$$x_1^2 + 4 x_1 x_3 = S$$
$$x_1 x_3 + \lambda (x_1 + 2 x_3) = 0$$
$$x_1^2 + 4\lambda x_1 = 0$$

$$x_1(x_1 + 4 x_3) = S \qquad (1')$$
$$x_1 (x_3 + \lambda) + 2\lambda x_3) = 0 \qquad (2')$$
$$x_1(x_1 + 4\lambda) = 0 \qquad (3')$$

Par hypothèse, S est différent de 0 : la relation (1') impose donc que x_1 soit différent de 0, de sorte que la relation (3') se réduit à :

$$x_1 = -4\lambda.$$

En portant cette valeur dans la relation (2'), il vient :

$$-4\lambda (x_3 + \lambda) + 2\lambda x_3) = 0$$
$$-4\lambda^2 - 2\lambda x_3 = 0$$
$$-2\lambda (x_3 + 2\lambda) = 0$$

On ne peut pas avoir $\lambda = 0$, sinon on aurait $x_1 = -4\lambda = 0$, alors que l'hypothèse $S \neq 0$ impose, par la relation (1'), que x_1 soit différent de 0.
C'est donc que l'on a :

$$x_3 = -2\lambda.$$

Ainsi nous avons obtenu :

$$x_2 = x_1 = 2x_3 = -4\lambda.$$

La relation (1') devient :

$$x_1(x_1 + 2x_1) = S$$
$$3x_1^2 = S$$

$$x_1 = x_2 = 2x_3 = -4\lambda = \sqrt{\frac{S}{3}}$$

Le volume de la baignoire est alors :

$$V = x_1 x_2 x_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{S}{3}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Conclusion :

Lorsque la surface intérieure S est différente de 0, le volume de la baignoire ne peut être maximum que lorsqu'on prend :

Une baignoire ayant :

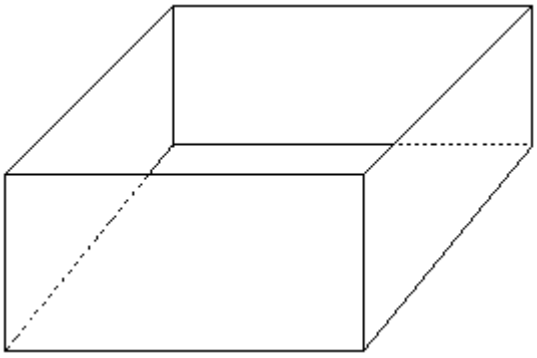
- pour fond un carré de côtés $x_1 = x_2 = \sqrt{\frac{S}{3}} = (2V)^{\frac{1}{3}}$
- pour hauteur $x_3 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{S}{3}} = \frac{1}{2}(2V)^{\frac{1}{3}}$
- pour volume $V = \frac{1}{2}\left(\frac{S}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$.

La formule $V = \frac{1}{2}\left(\frac{S}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$ est à rapprocher de la formule $S = 3(2V)^{\frac{2}{3}}$ obtenue, dans la question 1°, en cherchant la surface intérieure minimum d'une baignoire de volume V.
La relation est identique dans les deux cas, on peut l'écrire :

$$S^3 = 3^3 (2V)^2$$

$$S^3 = 108 V^2$$

Surface intérieure minimum S et volume maximum V sont liés à une baignoire carrée en forme de moitié de cube d'arête $\sqrt{\frac{S}{3}} = (2V)^{\frac{1}{3}}$.



Chapitre 33. Extrema liés - Conditions du premier ordre.

Enoncés.

Exercice 2. Optimisation par deux méthodes.

On veut résoudre le problème avec contraintes égalités suivant :

$$(P)\quad \begin{cases} \text{minimiser} & Q(x_1, x_2, x_3) := x_1^2 + x_2^2 + x_3^2, \quad \text{où } x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}. \\ \text{sous les contraintes} & \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 \quad (C_1) \\ x_1 - x_2 + x_3 = -2 \quad (C_2) \end{cases} \end{cases}$$

1°/ Eliminer x_1 et x_2 à l'aide des équations de contrainte et ramener le problème à une seule variable x_3. En déduire la solution x^* du problème (P) :

$x^* \equiv (x_1^*, x_2^*, x_3^*)$.

2°/ Ecrire le lagrangien associé au problème (P).

3°/ Trouver la valeur des multiplicateurs de Lagrange des deux contraintes à l'optimum.

Solution.

1°/ Solution par substitution.

Les contraintes

$$x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 \quad (C_1)$$
$$x_1 - x_2 + x_3 = -2 \quad (C_2)$$

donnent :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3+4 \\ -x_3-2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} x_3+4 \\ -x_3-2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_3+4 \\ -x_3-2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_3+4 \\ -x_3-2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -x_3 \\ 2x_3+6 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = -\frac{x_3}{3}$$

$$x_2 = \frac{2}{3} x_3 + 2$$

Reportons ces valeurs dans l'expression de $Q(x_1, x_2, x_3)$:

$$Q(x_1, x_2, x_3) = {x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2 = \frac{1}{9} {x_3}^2 + \frac{4}{9} {x_3}^2 + \frac{8}{3} x_3 + 4 + {x_3}^2$$
$$Q(x_1, x_2, x_3) = \frac{14}{9} {x_3}^2 + \frac{8}{3} x_3 + 4.$$

$Q(x_1, x_2, x_3)$, polynôme du deuxième degré en x_3, est minimum lorsque sa dérivée est nulle :

$$\frac{28}{9} x_3 + \frac{8}{3} = 0$$
$$7 x_3 + 6 = 0$$

$$x_3 = -\frac{6}{7}$$

En reportant cette valeur dans les expressions de x_1 et x_2 en fonction de x_3, on obtient le point où Q est minimum :

$$x_1 = -\frac{x_3}{3} = \frac{2}{7} ; x_2 = \frac{2}{3} x_3 + 2 = 2 - \frac{4}{7} = \frac{10}{7} ; x_3 = -\frac{6}{7}$$

La valeur de Q en ce point est :

$$Q(x_1, x_2, x_3) = {x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2 = \frac{4 + 100 + 36}{49} = \frac{20}{7}.$$

La valeur minimum de Q sous les contraintes (C_1) et (C_2) est $\frac{20}{7}$.
Elle est atteinte au point $x^* = \frac{2}{7}(1, 5, -3)$.

2°/ Lagrangien.

Les contraintes (C_1) et (C_2) étant écrites :

$g_1(x_1, x_2, x_3) \equiv x_1 + 2 x_2 - x_3 - 4 = 0$
$g_2(x_1, x_2, x_3) \equiv x_1 - x_2 + x_3 + 2 = 0$

Le ***lagrangien*** du problème (P) est, par définition :

$L(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \lambda_2) = Q(x_1, x_2, x_3) + \lambda_1 g_1(x_1, x_2, x_3) + \lambda_2 g_2(x_1, x_2, x_3)$,

où λ_1 et λ_2 sont des nombres réels, appelés "***multiplicateurs de Lagrange***".

Avec les expressions que l'on a ici pour $Q(x_1, x_2, x_3)$, $g_1(x_1, x_2, x_3)$, $g_2(x_1, x_2, x_3)$, le lagrangien s'écrit :

$$L(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \lambda_2) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \lambda_1 (x_1 + 2x_2 - x_3 - 4) + \lambda_2 (x_1 - x_2 + x_3 + 2)$$

3°/ Méthode des multiplicateurs de Lagrange.

Un extremum de Q sous les contraintes (C_1) et (C_2) est un extremum du lagrangien : c'est un point critique du lagrangien, il annule la dérivée du lagrangien.
Cette propriété se traduit par les "***conditions de Lagrange***" :

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1}(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \lambda_2) = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_2}(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \lambda_2) = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial x_1}(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \lambda_2) = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial x_2}(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \lambda_2) = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial x_3}(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \lambda_2) = 0$$

$$x_1 + 2x_2 - x_3 - 4 = 0$$
$$x_1 - x_2 + x_3 + 2 = 0$$
$$2x_1 + \lambda_1 + \lambda_2 = 0$$
$$2x_2 + 2\lambda_1 - \lambda_2 = 0$$
$$2x_3 - \lambda_1 + \lambda_2 = 0$$

Les trois dernières relations donnent x_1, x_2, x_3, en fonction de λ_1, λ_2.
En reportant les expressions obtenues dans les deux premières équations, on trouve un système de deux équations à deux inconnues λ_1, λ_2.

$$-(\lambda_1 + \lambda_2) - 2(2\lambda_1 - \lambda_2) - (\lambda_1 - \lambda_2) - 8 = 0$$
$$-(\lambda_1 + \lambda_2) + (2\lambda_1 - \lambda_2) + (\lambda_1 - \lambda_2) + 4 = 0$$

$$-6\lambda_1 + 2\lambda_2 - 8 = 0$$
$$2\lambda_1 - 3\lambda_2 + 4 = 0$$

$$3\lambda_1 - \lambda_2 = -4$$
$$2\lambda_1 - 3\lambda_2 = -4$$

Par soustraction : $\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0$, $\lambda_1 = -2\lambda_2$, la deuxième relation devient $-7\lambda_2 = -4$, d'où :

$$\lambda_1 = -\frac{8}{7}$$
$$\lambda_2 = \frac{4}{7}$$

Les valeurs de x_1, x_2, x_3, s'en déduisent :

$$x_1 = -\frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2) = \frac{2}{7}$$
$$x_2 = -\frac{1}{2}(2\lambda_1 - \lambda_2) = \frac{10}{7}$$
$$x_3 = \frac{1}{2}(\lambda_1 - \lambda_2) = -\frac{6}{7}$$

$$\boxed{x_1 = \frac{2}{7} ; x_2 = \frac{10}{7} ; x_3 = -\frac{6}{7} ; \lambda_1 = -\frac{8}{7} ; \lambda_2 = \frac{4}{7}.}$$

Au point $x^* = \frac{2}{7}(1, 5, -3)$, la fonction Q vaut :

$$Q\left(\frac{2}{7}, \frac{10}{7}, -\frac{6}{7}\right) = \frac{20}{7}$$

Compte tenu de la valeur des multiplicateurs de Lagrange, le lagrangien du problème est :

$$\begin{aligned} L(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \lambda_2) &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \lambda_1 (x_1 + 2x_2 - x_3 - 4) + \lambda_2 (x_1 - x_2 + x_3 + 2) \\ &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - \frac{8}{7}(x_1 + 2x_2 - x_3 - 4) + \frac{4}{7}(x_1 - x_2 + x_3 + 2) \\ &= x_1^2 - \frac{4}{7}x_1 + x_2^2 - \frac{20}{7}x_2 + x_3^2 + \frac{12}{7}x_3 + \frac{40}{7} \\ &= \left(x_1 - \frac{2}{7}\right)^2 + \left(x_2 - \frac{10}{7}\right)^2 + \left(x_3 + \frac{6}{7}\right)^2 + \frac{20}{7} \end{aligned}$$

$$\boxed{L(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \lambda_2) = \left(x_1 - \frac{2}{7}\right)^2 + \left(x_2 - \frac{10}{7}\right)^2 + \left(x_3 + \frac{6}{7}\right)^2 + \frac{20}{7}}$$

Cette écriture met en évidence le fait que la dérivée du lagrangien est nulle au point $x^* = \left(\frac{2}{7}, \frac{10}{7}, -\frac{6}{7}\right)$ et que sa valeur en ce point est un minimum de valeur $\frac{20}{7}$.

Chapitre 33. Extrema liés - Conditions du premier ordre.

Enoncés.

Exercice 3. Distance d'un point à une ellipse.

On considère dans le plan $\mathbb{R}^2$ l'ellipse :

$$\Gamma = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 4\,y^2 = 1\}.$$

Etant donné le point $M_0 = (1, 2) \in \mathbb{R}^2$,
1°/ Déterminer le point M_1 de l'ellipse tel que la distance $d(M_0, M_1)$ soit minimum.
2°/ Déterminer le point M_2 de l'ellipse tel que la distance $d(M_0, M_2)$ soit maximum.

Solution.

1°/ Recherche d'extrema liés.

Le carré de la distance d'un point $M = (x, y)$ de $\mathbb{R}^2$ au point $M_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ est fonction de (x, y) :

$$f(x, y) = (d(M, M_0))^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$$

Le problème est donc d'optimiser $f(x, y)$ sous la contrainte :

$$g(x, y) \equiv x^2 + 4\,y^2 - 1 = 0.$$

Pour cela, le **théorème des multiplicateurs de Lagrange** nous dit que, si M est un extremum relatif de f sous la contrainte $g(x, y) = 0$, alors le gradient de f au point M est colinéaire au gradient de g au point M : il existe un nombre réel λ, appelé *multiplicateur de Lagrange*, tel que l'on ait

$$df(M) = \lambda\, dg(M).$$

Autrement dit, comme le gradient en M de la distance à un point M_0 est porté par la droite M_0M, et que le gradient de g en un point M de Γ est porté par la normale en M à Γ, pour un extremum relatif M de la distance à M_0 sous la contrainte $g(x, y) = 0$, le vecteur $\overrightarrow{M_0M}$ est orthogonal à l'ellipse.

Rechercher les extrema liés, c'est rechercher les points M de l'ellipse tels que $\overrightarrow{M_0M}$ soit porté par la normale en M à l'ellipse.

L'égalité $df\,(M) = \lambda\, dg\,(M)$ se traduit par les relations :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(M) = \lambda \frac{\partial g}{\partial x}(M)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(M) = \lambda \frac{\partial g}{\partial y}(M)$$

$$2\,(x - x_0) = 2\,\lambda\, x$$
$$2\,(y - y_0) = 8\,\lambda\, y$$

$$(1 - \lambda)\, x = x_0$$
$$(1 - 4\,\lambda)\, y = y_0$$

Si λ est différent de 1 et de $\frac{1}{4}$, la relation $g\,(x, y) \equiv x^2 + 4\,y^2 - 1 = 0$ s'écrit alors :

$$\frac{{x_0}^2}{(1-\lambda)^2} + 4\,\frac{{y_0}^2}{(1-4\,\lambda)^2} - 1 = 0$$
$$(1 - 4\,\lambda)^2\, {x_0}^2 + 4\,(1 - \lambda)^2\, {y_0}^2 - (1 - 4\,\lambda)^2\,(1 - \lambda)^2 = 0$$
$$(1 - 8\,\lambda + 16\,\lambda^2)\, {x_0}^2 + 4\,(1 - 2\,\lambda + \lambda^2)\, {y_0}^2 - ((1 - 4\,\lambda)(1 - \lambda))^2 = 0$$
$$(4\,\lambda^2 - 5\,\lambda + 1)^2 - (1 - 8\,\lambda + 16\,\lambda^2)\, {x_0}^2 - 4\,(1 - 2\,\lambda + \lambda^2)\, {y_0}^2 = 0$$
$$(4\,\lambda^2 - 5\,\lambda + 1)^2 - 4\,(4\,{x_0}^2 + {y_0}^2)\,\lambda^2 + 8\,({x_0}^2 + {y_0}^2)\,\lambda - ({x_0}^2 + 4\,{y_0}^2) = 0$$

Si on veut pouvoir écrire cette expression sous la forme :

$(4\,\lambda^2 - 5\,\lambda + a)(4\,\lambda^2 - 5\,\lambda + b) = 0$
$(4\,\lambda^2 - 5\,\lambda)^2 + (a + b)(4\,\lambda^2 - 5\,\lambda) + a\,b = 0$

il faudra écrire :

$(4\,\lambda^2 - 5\,\lambda)^2 + 2\,(4\,\lambda^2 - 5\,\lambda) + 1 - (4\,{x_0}^2 + {y_0}^2)\,(4\,\lambda^2 - 5\,\lambda) + (-5\,(4\,{x_0}^2 + {y_0}^2) + 8\,({x_0}^2 + {y_0}^2)\,\lambda - ({x_0}^2 + 4\,{y_0}^2) = 0$
$(4\,\lambda^2 - 5\,\lambda)^2 + (2 - 4\,{x_0}^2 - {y_0}^2)\,(4\,\lambda^2 - 5\,\lambda) - 3\,(4\,{x_0}^2 - {y_0}^2)\,\lambda + 1 - ({x_0}^2 + 4\,{y_0}^2) = 0$

avec, pour coefficient de λ :

$$4\,{x_0}^2 - {y_0}^2 = 0$$

C'est bien le cas si l'on prend $(x_0, y_0) = (1, 2)$.
Dans ce cas, on a :

$$a + b = 2 - 4\,{x_0}^2 - {y_0}^2 = -6$$
$$a\,b = 1 - {x_0}^2 - 4\,{y_0}^2 = -16$$

donc $\{a, b\} = \{-8, 2\}$ et l'équation donnant λ se réduit à :

$$(4\lambda^2 - 5\lambda - 8)(4\lambda^2 - 5\lambda + 2) = 0$$

L'équation $4\lambda^2 - 5\lambda - 8 = 0$ possède deux racines réelles.
L'équation $4\lambda^2 - 5\lambda + 2 = 0$ possède deux racines complexes.

Le multiplicateur de Lagrange λ peut prendre deux valeurs réelles qui sont les solutions de l'équation $4\lambda^2 - 5\lambda - 8 = 0$.

$$\lambda_1 = -\frac{1}{8}(\sqrt{153} - 5) \; ; \; \lambda_2 = \frac{1}{8}(\sqrt{153} + 5).$$

Ces valeurs sont différentes de 1 et de $\frac{1}{4}$, ce qui justifie, a posteriori, notre calcul.

Les valeurs de *x* et *y* correspondant à ces deux valeurs de λ sont données par les relations :

$$(1 - \lambda)\, x = x_0 = 1$$
$$(1 - 4\lambda)\, y = y_0 = 2$$

$$x_1 = \frac{1}{1-\lambda_1} = \frac{8}{\sqrt{153}+3} = \frac{1}{18}(\sqrt{153} - 3) = \frac{1}{6}(\sqrt{17} - 1)$$
$$y_1 = \frac{2}{1-4\lambda_1} = \frac{4}{\sqrt{153}-3} = \frac{1}{36}(\sqrt{153} + 3) = \frac{1}{12}(\sqrt{17} + 1)$$

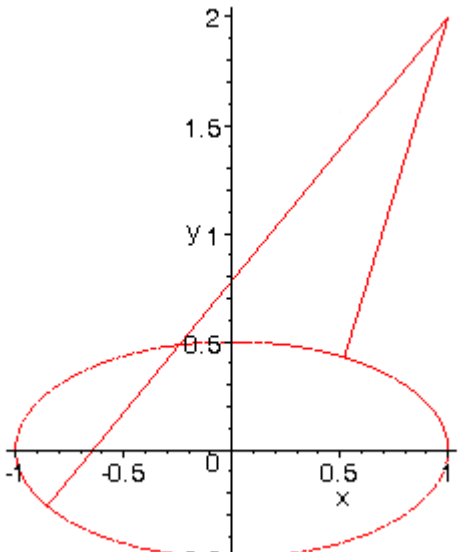
$$x_2 = \frac{1}{1-\lambda_2} = -\frac{8}{\sqrt{153}-3} = -\frac{1}{6}(\sqrt{17} + 1)$$
$$y_2 = \frac{2}{1-4\lambda_2} = -\frac{1}{12}(\sqrt{17} - 1)$$

Il existe donc deux points de l'ellipse pour lesquels le gradient de *f* est colinéaire au gradient de *g*, ce sont les points :

$$M_1 = \left(\frac{\sqrt{17}-1}{6}, \frac{\sqrt{17}+1}{12}\right); M_2 = \left(-\frac{\sqrt{17}+1}{6}, -\frac{\sqrt{17}-1}{12}\right)$$

2°/ Maximum et minimum de la distance.

Le point $M_0 = (1, 2)$ est dans le premier quadrant, à l'extérieur de l'ellipse.
L'ellipse entoure le point $O = (0, 0)$.
Le point $M_1 = \left(\frac{\sqrt{17}-1}{6}, \frac{\sqrt{17}+1}{12}\right)$ est sur l'ellipse, dans le premier quadrant.
Le point $M_2 = \left(-\frac{\sqrt{17}+1}{6}, -\frac{\sqrt{17}-1}{12}\right)$ est sur l'ellipse, dans le troisième quadrant.
La distance du point M_0 au point M_1 est inférieure à la distance du point M_0 au point M_2.
C'est donc le point M_1 qui correspond



au minimum de distance et le point M_2
qui correspond au maximum de distance.

La valeur du carré de la distance est donnée par la valeur de

$$f(x, y) = (d(M, M_0))^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$$

$$d(M_1, M_0) = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{17}-1}{6} - 1\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{17}+1}{12} - 2\right)^2} = \frac{1}{12}\sqrt{810 - 102\sqrt{17}} \approx 1{,}645$$

$$d(M_2, M_0) = \sqrt{\left(-\frac{\sqrt{17}+1}{6} - 1\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{17}-1}{12} - 2\right)^2} = \frac{1}{12}\sqrt{810 + 102\sqrt{17}} \approx 2{,}923$$

Chapitre 33. Extrema liés - Conditions du premier ordre.

Enoncés.

Exercice 4. Extrema liés de $x^3 + y^2$.

Chercher les extrema de l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par : $f(x, y) = x^3 + y^2$ sous la contrainte : 1°/ $x + y^2 = 3$. 2°/ $x + y = 2$.	

Solution.

1°/ Contrainte $x + y^2 = 3$.

Chercher les extrema liés de $f(x, y) = x^3 + y^2$ sous la contrainte $g(x, y) \equiv x + y^2 - 3 = 0$, c'est rechercher les points critiques du lagrangien :

$$L(x, y, \lambda) \equiv f(x, y) + \lambda\, g(x, y) = x^3 + y^2 + \lambda\,(x + y^2 - 3)$$

Les solutions du problème sont données par la résolution des équations :

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda}(x, y, \lambda) = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial x}(x, y, \lambda) = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial y}(x, y, \lambda) = 0$$

$$x + y^2 - 3 = 0 \quad (1)$$
$$3x^2 + \lambda = 0 \quad (2)$$
$$2y + 2\lambda y = 0 \quad (3)$$

La relation (3) s'écrit, après simplification par 2 et mise en facteurs :

$$y(1 + \lambda) = 0$$

Sa solution est donnée par :

$$y = 0 \text{ ou } \lambda = -1.$$

1. Lorsque $y = 0$,

La première équation se réduit à $x = 3$, et la deuxième donne $\lambda = -3x^2 = -27$.
D'où la solution :

$$\boxed{(x, y, \lambda) = (3, 0, -27)}$$

Ce point est un point stationnaire de la contrainte : c'est un point à tangente verticale de la courbe d'équation implicite $g(x, y) = 0$.

2. Lorsque $\lambda = -1$,

La relation (2) se réduit à $3x^2 = 1$. La valeur de x s'en déduit : $x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$.
Pour chaque valeur de x, l'équation (1) donne deux valeurs de y : $y = \pm \sqrt{3 - x}$.
On trouve donc quatre solutions correspondant à $\lambda = -1$:

$$\boxed{\begin{array}{c}(x, y, \lambda) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, -\sqrt{3+\frac{\sqrt{3}}{3}}, -1\right) ; (x, y, \lambda) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \sqrt{3+\frac{\sqrt{3}}{3}}, -1\right); \\ (x, y, \lambda) = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\sqrt{3-\frac{\sqrt{3}}{3}}, -1\right) ; (x, y, \lambda) = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \sqrt{3-\frac{\sqrt{3}}{3}}, -1\right)\end{array}}$$

3. Valeurs de *f* correspondantes.

Les valeurs de $f(x, y) = x^3 + y^2$ correspondant à ces cinq candidats à une place d'extremum sont données par :

$$f(x, y) = x^3 + y^2 = x^3 + 3 - x = 3 + x(x^2 - 1) = 3 - x\left(\frac{\lambda}{3} + 1\right)$$

$$f(3, 0) = 27$$

Pour les solutions avec $\lambda = -1$, on a :

$$f(x, y) = 3 - \frac{2}{3}x.$$

$$f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \pm\sqrt{3+\frac{\sqrt{3}}{3}}\right) = 3 + \frac{2\sqrt{3}}{9}$$
$$f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \pm\sqrt{3-\frac{\sqrt{3}}{3}}\right) = 3 - \frac{2\sqrt{3}}{9}$$

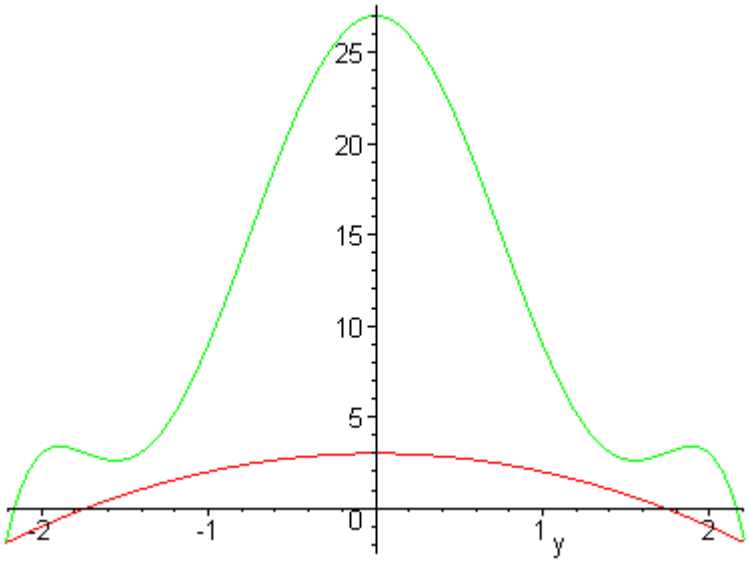
La relation $g(x, y) \equiv x + y^2 - 3 = 0$ impose que x est plus petit que 3.
$f(x, y) = x^3 + y^2 = x^3 + 3 - x$ tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers $-\infty$.
On voit donc que :

Sous la contrainte $x + y^2 - 3 = 0$, la fonction $f(x, y) = x^3 + y^2$ possède :

- Un maximum absolu au point (3, 0) : $f(x, y) = 27$

- 2 maxima relatifs aux points $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \pm\sqrt{3+\frac{\sqrt{3}}{3}}\right)$ $f(x, y) = 3 + \frac{2\sqrt{3}}{9}$
- 2 minima relatifs aux points $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \pm\sqrt{3-\frac{\sqrt{3}}{3}}\right)$ $f(x, y) = 3 - \frac{2\sqrt{3}}{9}$

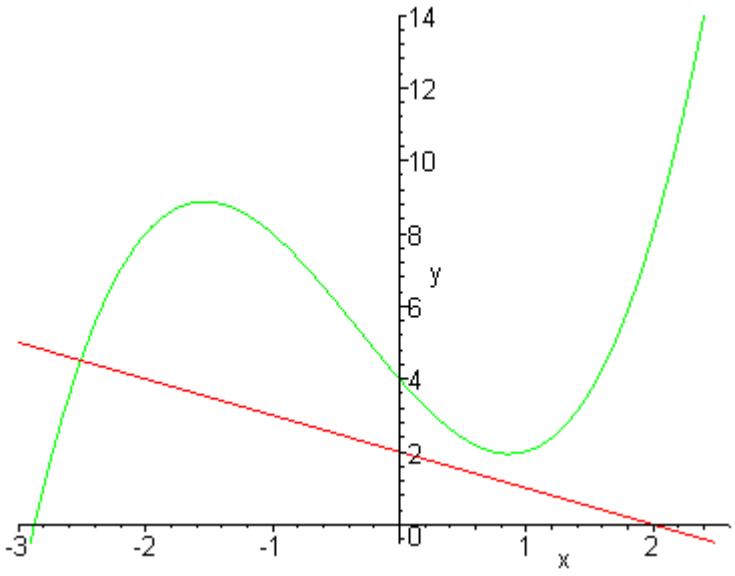
On peut représenter (en fonction de y) les variations de $f(x, y) = x^3 + y^2$ lorsque le point $M = (x, y)$ se déplace le long de la parabole d'équation $x + y^2 = 3$.



Cette courbe met en évidence un maximum absolu pour $y = 0$ et $x = 3$, deux minima relatifs pour des valeurs symétriques de y, deux maxima relatifs pour des valeurs symétriques de y

2°/ Contrainte $x + y = 2$.

On peut représenter (en fonction de x) les variations de $f(x, y) = x^3 + y^2$ lorsque le point $M = (x, y)$ se déplace le long de la droite d'équation $x + y = 2$.



Cette courbe met en évidence un maximum relatif à une abscisse négative et un minimum relatif a

une abscisse positive.
Retrouvons ces résultats par le calcul.

Lorsque y est égal à $2 - x$, $f(x, y)$ est donné par :

$$f(x, 2-x) = x^3 + (2-x)^2$$

Sa dérivée est $3x^2 - 2(2-x) = 3x^2 + 2x - 4 = 3\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{3} - 4 = 3\left(x + \frac{\sqrt{13}+1}{3}\right)\left(x - \frac{\sqrt{13}-1}{3}\right)$.

Elle est nulle pour deux valeurs de x :

$$x_1 = -\frac{\sqrt{13}+1}{3} \; ; \; x_2 = \frac{\sqrt{13}-1}{3}$$

En ces points, on a :

$$x^2 = \frac{2}{3}(2-x)$$
$$x^3 = \frac{2}{3}x(2-x) = \frac{2}{3}\left(2x - \frac{2}{3}(2-x)\right) = \frac{2}{9}(8x-4) = \frac{8}{9}(2x-1)$$
$$f(x, 2-x) = x^3 + (2-x)^2 = \frac{8}{9}(2x-1) + 4 - 4x + \frac{2}{3}(2-x) = -\frac{26}{9}x + \frac{40}{9} = \frac{2}{9}(20 - 13x)$$

A chaque valeur de x correspond une seule valeur de y donnée par $y = 2 - x$.
On trouve donc deux points candidats au titre d'extremum :

$$(x_1, y_1) = \left(-\frac{\sqrt{13}+1}{3}, 2 + \frac{\sqrt{13}+1}{3}\right), \text{ où } f(x_1, y_1) = \frac{2}{9}\left(20 + 13 \times \frac{\sqrt{13}+1}{3}\right) = \frac{2}{27}(73 + 13\sqrt{13})$$
$$(x_2, y_2) = \left(\frac{\sqrt{13}-1}{3}, 2 - \frac{\sqrt{13}-1}{3}\right), \text{ où } f(x_2, y_2) = \frac{2}{9}\left(20 - 13 \times \frac{\sqrt{13}-1}{3}\right) = \frac{2}{27}(73 - 13\sqrt{13}).$$

On voit donc que :

Sous la contrainte $x + y = 2$, la fonction $f(x, y) = x^3 + y^2$ possède :

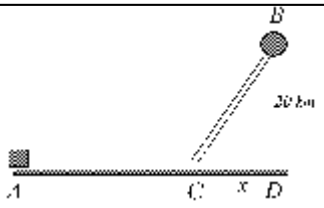
- un maximum relatif $\frac{2}{27}(73 + 13\sqrt{13})$ au point $\left(-\frac{\sqrt{13}+1}{3}, 2 + \frac{\sqrt{13}+1}{3}\right)$
- un minimum relatif $\frac{2}{27}(73 - 13\sqrt{13})$.au point $\left(\frac{\sqrt{13}-1}{3}, 2 - \frac{\sqrt{13}-1}{3}\right)$

Chapitre 33. Extrema liés - Conditions du premier ordre.

Enoncés.

Exercice 5. Temps minimum d'un trajet rail-route.

A d km d'une voie ferrée, se trouve le village B. Où faut-il instaurer un arrêt C pour que le voyage de la gare A au village B par la voie ferrée AC et la route CB prenne le temps minimum ?
Le train roule à v km/h, le transport routier roule à $\frac{v}{\alpha}$ km/h



de moyenne ($\alpha > 1$). Calculer le temps minimum pour aller de A à B et la vitesse moyenne du trajet de A à B.
Application numérique : $d = 20$ km, $v = 80$ km/h, $\alpha = 4$, $AD = 40$ km.

Solution.

1°/ Solution littérale.

Soit x la distance de C à D.
Le temps mis pour aller de A à C est $\frac{AD-x}{v}$.
Le temps mis pour aller de C à B est $\frac{\alpha}{v}\sqrt{d^2+x^2}$.
Le temps total mis pour faire le trajet ACB est :

$$t = \frac{AD-x}{v} + \frac{\alpha}{v}\sqrt{d^2+x^2}$$

La dérivée de t par rapport à x est :

$$\frac{dt}{dx} = -\frac{1}{v} + \frac{\alpha}{v}\frac{x}{\sqrt{d^2+x^2}} = \frac{1}{v}\frac{\alpha x - \sqrt{d^2+x^2}}{\sqrt{d^2+x^2}}$$

Cette dérivée est nulle lorsque :

$$\alpha x = \sqrt{d^2+x^2}$$
$$(\alpha^2 - 1)\, x^2 = d^2 \text{ et } x \geqslant 0.$$

Le temps de parcours possède un extremum pour $x = \frac{d}{\sqrt{\alpha^2-1}}$.

Cette relation suppose que α est strictement plus grand que 1, c'est-à-dire que le train va plus vite

que le transport routier.

La dérivée seconde du temps par rapport à x est :

$$\frac{d^2t}{dx^2} = \frac{\alpha}{v}\frac{1}{\sqrt{d^2+x^2}}\left(1-\frac{x^2}{d^2+x^2}\right) = \frac{\alpha}{v}\frac{1}{\sqrt{d^2+x^2}}\frac{d^2}{d^2+x^2} > 0$$

Comme la dérivée seconde est toujours négative, l'extremum du temps est un minimum relatif et un minimum absolu.

Le temps minimum de parcours est :

$$t_{min} = \frac{AD-x}{v} + \frac{\alpha}{v}\sqrt{d^2+x^2} = \frac{1}{v}(AD + (\alpha^2 - 1)\,x) = \frac{1}{v}(AD + d\sqrt{\alpha^2-1})$$

Comme la distance parcourue est $AD - x + \sqrt{d^2+x^2} = AD + (\alpha - 1)\,x = AD + d\sqrt{\frac{\alpha-1}{\alpha+1}}$, la vitesse moyenne est

$$v_{moy} = v \times \frac{AD + d\sqrt{\frac{\alpha-1}{\alpha+1}}}{AD + d\sqrt{\alpha^2-1}}.$$

Le temps de parcours de A à B est minimum lorsqu'on met l'arrêt C à une distance $\frac{d}{\sqrt{\alpha^2-1}}$ de D.

Dans ce cas, le temps de parcours est $\frac{1}{v}(AD + d\sqrt{\alpha^2-1})$ et la vitesse moyenne $v \times \frac{AD + d\sqrt{\frac{\alpha-1}{\alpha+1}}}{AD + d\sqrt{\alpha^2-1}}$.

2°/ Application numérique.

$$x = \frac{d}{\sqrt{\alpha^2-1}} = \frac{20}{\sqrt{15}} = 4\sqrt{\frac{5}{3}} \approx 5{,}16 \text{ km}$$

$$\boxed{x = 5{,}2 \text{ km}}$$

Le temps de parcours minimum pour aller de A à B est :

$$t_{min} = \frac{1}{v}(AD + d\sqrt{\alpha^2-1}) = \frac{1}{80}(40 + 20\sqrt{15}) = \frac{1}{4}(2 + \sqrt{15}) \approx 1 \text{ h } 28 \text{ min}$$

La distance parcourue est :

$AD + d\sqrt{\frac{\alpha-1}{\alpha+1}} = 40 + 20\sqrt{\frac{3}{5}} \approx 55{,}5$ km, dont 34,8 en train et 20,7 par la route.

La vitesse moyenne est :

$$v_{moy} = v \times \frac{AD + d\sqrt{\frac{\alpha-1}{\alpha+1}}}{AD + d\sqrt{\alpha^2-1}} = 80 \times \frac{40 + 20\sqrt{\frac{3}{5}}}{40 + 20\sqrt{15}} \approx 38 \text{ km/h.}$$

Chapitre 33. Extrema liés - Conditions du premier ordre.

Enoncés.

Exercice 6. Points critiques de $x^p\, y^q$ sous la contrainte $x + y = a$.

Etudier les points critiques de l'expression $f(x, y) = x^p\, y^q$, où p et q sont des nombres réels strictement positifs, lorsqu'on sait que la somme $x + y$ est égale à un nombre réel positif a ?	

Solution.

Les fonctions puissances sont définies pour $x \geqslant 0$ ($p > 0$) et $y \geqslant 0$ ($q > 0$).
Le lagrangien est

$L(x, y, \lambda) \equiv x^p\, y^q - \lambda\,(x + y - a)$.

Sous la contrainte $x + y - a$, les points critiques de $f(x, y) = x^p\, y^q$, annulent les dérivées premières du lagrangien :

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda}(x, y, \lambda) = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial x}(x, y, \lambda) = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial y}(x, y, \lambda) = 0$$

$$x + y = a \qquad (1)$$
$$p\, x^{p-1}\, y^q - \lambda = 0 \quad (2)$$
$$q\, x^p\, y^{q-1} - \lambda = 0 \quad (3)$$

Les solutions sont données par :

$\lambda = p\, x^{p-1}\, y^q = q\, x^p\, y^{q-1}$
$x^{p-1}\, y^{q-1}\,(p\, y - q\, x) = 0$

A ce stade, il faut distinguer plusieurs cas, suivant les valeurs de p et q :

a) $p > 1$.

$x = 0$ est solution.
On a alors $y = a$ et $f(x, y) = 0$, c'est une valeur minimum : minimum relatif et minimum absolu.

Pour $p \leqslant 1$, $(0, a)$ est un minimum absolu, mais pas un minimum relatif, puisque ce n'est pas une solution de l'équation.

b) $q > 1$.

$y = 0$ est solution.
On a alors $x = a$ et $f(x, y) = 0$, c'est une valeur minimum : minimum relatif et minimum absolu.

Pour $q \leqslant 1$, $(a, 0)$ est un minimum absolu, mais pas un minimum relatif, puisque ce n'est pas une solution de l'équation.

c) Dans tous les cas où p et q sont strictement plus grands que 0,

l'équation $x^{p-1} y^{q-1} (p y - q x) = 0$ a pour solution :

$$\frac{y}{q} = \frac{x}{p} = \frac{x+y}{p+q} = \frac{a}{p+q}$$

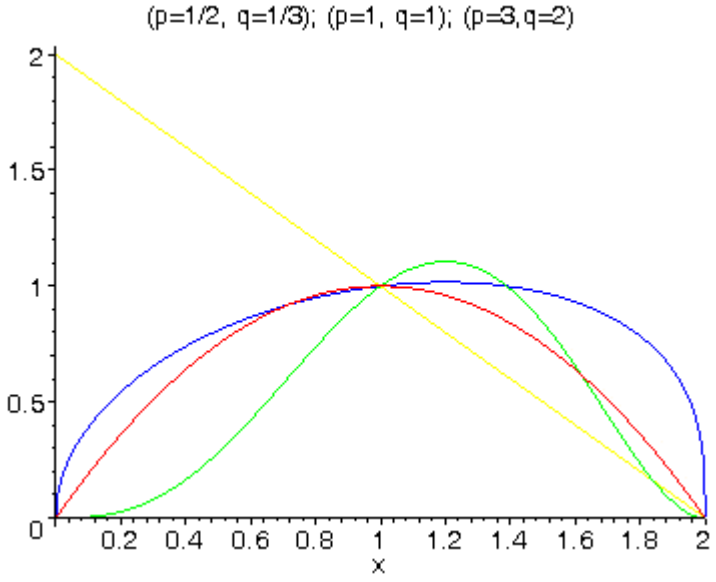
$$x = a \frac{p}{p+q}; y = a \frac{q}{p+q}.$$

$$\lambda = p x^{p-1} y^{q} = a^{p+q-1} \frac{p^p q^q}{(p+q)^{p+q-1}}$$

$$f(x, y) = x^p y^q = a^{p+q} \frac{p^p q^q}{(p+q)^{p+q}}$$

et cette valeur correspond à un maximum relatif.

On peut représenter (en fonction de x) les variations de la fonction $f(x, y)$ lorsque le point (x, y) parcourt le segment de la droite d'équation $x + y = a$ compris dans le quadrant $x > 0$, $y > 0$.

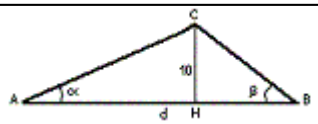


Chapitre 33. Extrema liés - Conditions du premier ordre.

Enoncés.

Exercice 7. Problème de plus court chemin d'un point à un autre, sous contrainte.

Etant donnés deux points *A* et *B* distants de *d*, comment placer sur *AB* la projection *H* de *C* (*CH* de longueur 10) de telle sorte que le temps de parcours *ACB* soit le plus court possible, sachant que la vitesse entre *A* et *C* est le double de la vitesse entre *C* et *B* ?



Solution.

1°/ Position du problème en termes d'extremum lié.

1. Contrainte égalité.

Avec les notations de la figure de l'énoncé, la géométrie du problème impose :
$\tan\alpha = \frac{CH}{AH}$; $\tan\beta = \frac{CH}{BH}$; $CH = 10$; $AH + BH = d$.

D'où la contrainte :

$$g(\alpha, \beta) := \frac{1}{\tan\alpha} + \frac{1}{\tan\beta} - \frac{d}{10} = 0.$$

2. Fonction à minimiser.

Soit *v* la vitesse sur *AC*.
Le temps de parcours sur *AC*, où la vitesse est *v*, est $\frac{1}{v} CA = \frac{1}{v}\frac{CH}{\sin\alpha}$.
Le temps de parcours sur *CB*, où la vitesse est $\frac{v}{2}$, est $\frac{2}{v} CB = \frac{2}{v}\frac{CH}{\sin\beta}$.
Le temps de parcours total est $t = \frac{CH}{v}\left(\frac{1}{\sin\alpha} + \frac{2}{\sin\beta}\right) = \frac{10}{v}\left(\frac{1}{\sin\alpha} + \frac{2}{\sin\beta}\right)$

La fonction à minimiser est donc : $\frac{1}{\sin\alpha} + \frac{2}{\sin\beta} = \frac{vt}{10}$

$$f(\alpha, \beta) := \frac{1}{\sin\alpha} + \frac{2}{\sin\beta}$$

2°/ Méthode de Lagrange.

Le lagrangien du problème est, par définition, $L(\alpha, \beta, \lambda) = f(\alpha, \beta) + \lambda\, g(\alpha, \beta)$.
Une solution (α, β) qui minimise $f(\alpha, \beta)$ sous la contrainte égalité $g(\alpha, \beta) = 0$ est un point critique du lagrangien. Il vérifie donc les relations :

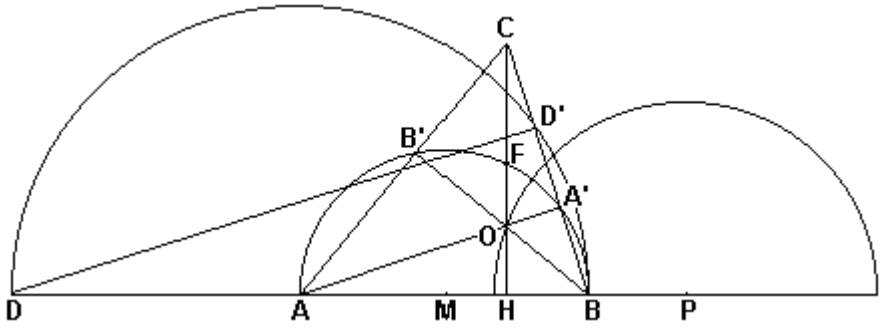
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda}(\alpha, \beta, \lambda) = g(\alpha, \beta) = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial \alpha}(\alpha, \beta, \lambda) = \frac{\partial f}{\partial \alpha}(\alpha, \beta) + \lambda \frac{\partial g}{\partial \alpha}(\alpha, \beta) = -\frac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha} - \lambda \frac{1+\tan^2\alpha}{\tan^2\alpha} = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial \beta}(\alpha, \beta, \lambda) = \frac{\partial f}{\partial \beta}(\alpha, \beta) + \lambda \frac{\partial g}{\partial \beta}(\alpha, \beta) = -2\frac{\cos\beta}{\sin^2\beta} - \lambda \frac{1+\tan^2\beta}{\tan^2\beta} = 0$$

Les deuxième et troisième relations donnent immédiatement : $\lambda = -\cos\alpha = -2\cos\beta$, de sorte que la résolution du problème est ramenée à la résolution des équations :

$$\boxed{\begin{array}{c}\frac{1}{\tan\alpha} + \frac{1}{\tan\beta} = \frac{d}{10} \\ -\lambda = \cos\alpha = 2\cos\beta.\end{array}}$$

3°/ Résolution géométrique.

Les relations précédentes permettent de trouver $\cos\beta$ comme solution d'une équation du quatrième degré. $\cos\alpha$ s'en déduit.
Il semble plus élégant de résoudre ce problème par une méthode géométrique.
Dans les relations précédentes, $\frac{d}{10} = \frac{AB}{CH}$, et le nombre 2 de la deuxième relation est le rapport r des vitesses sur AC et sur CB ($r > 1$).
Nous allons résoudre le problème pour AB et CH quelconques et pour un rapport de vitesses r quelconque, plus grand que 1 dans un premier temps.



Notons D le symétrique de B par rapport à A, et D' la projection de D sur CB :
$BD' = 2d\cos\beta$.
Appelons A' la projection de A sur CB, B' la projection de B sur AC : les points A' et B' sont tous deux sur le cercle de diamètre AB.
$AB' = d\cos\alpha = r\,d\cos\beta$.
$BA' = d\cos\beta = \frac{1}{r}AB'$
Considérons maintenant l'orthocentre O du triangle ABC.
Les triangles OAB' et OBA' sont semblables (3 angles respectivement égaux).
$\frac{OA}{OB} = \frac{OB'}{OA'} = \frac{AB'}{BA'} = r$ (rapport des vitesses)
$OA = r\,OB$
Le point O se trouve donc **sur le cercle des points dont le rapport des distances à A et à B est r (rapport des vitesses)** : cercle centré sur le point P d'abscisse $AP = \frac{r^2}{r^2-1}\,AB$ et de rayon $\frac{r}{r^2-1}$

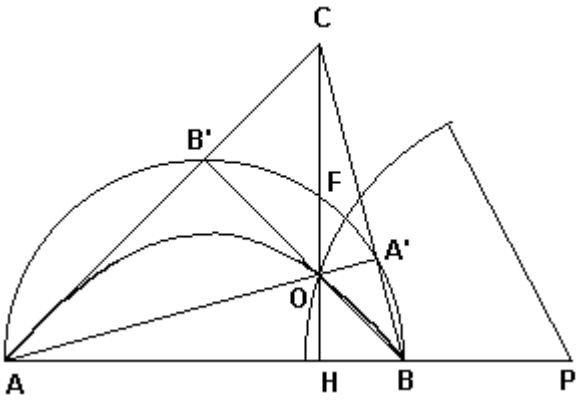
AB. A cause de la symétrie du problème, on considérera que le rapport des vitesses est > 1, sinon on voyagera de *B* à *A*.

Les triangles *OHB* et *AHC* sont semblables (3 angles égaux) : $\frac{OB}{AC} = \frac{HB}{HC} = \frac{OH}{AH} = \frac{1}{\tan\beta}$.

Les triangles *OHA* et *BHC* sont semblables (3 angles égaux) : $\frac{OA}{BC} = \frac{HA}{HC} = \frac{OH}{BH} = \frac{1}{\tan\alpha}$.

$\frac{OH}{AH} + \frac{OH}{BH} = \frac{1}{\tan\beta} + \frac{1}{\tan\alpha} = \frac{d}{10}$; $OH\ \frac{AH + BH}{AH.BH} = \frac{d}{10}$; $OH \,.\, d = \frac{d}{10}\ AH \,.\, BH$

$OH = \frac{AH.BH}{10}$



Or si l'on appelle *F* l'intersection de *CH* avec le cercle de diamètre *AB*, on a $\frac{BH}{FH} = \frac{FH}{AH}$, donc $AH \,.\, BH = FH^2$, soit encore $HO \,.\, HC = HF^2$, avec $HC = 10$.

$$OH = \frac{FH^2}{CH}$$

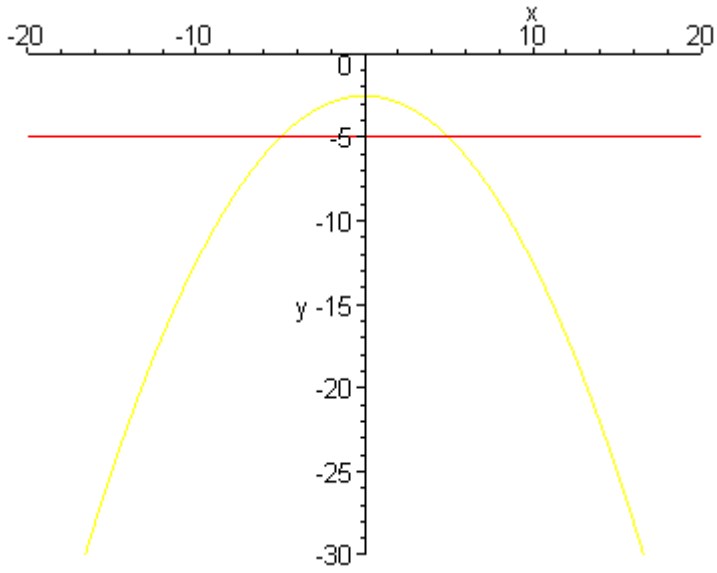
La transformation $(x\ ,\ y) \longrightarrow (x,\ \frac{y^2}{CH})$ transforme le demi-cercle de diamètre *AB* en arc de parabole passant par *A* et *B* : l'intersection de cet arc de parabole avec le cercle des points dont le rapport des distances à *A* et *B* est *r* donne le point *O*, et par conséquent, le point *C* et le point *H*.

Le point *O* (*x*, *y*) vérifie, en prenant l'origine des coordonnées en *A* :

Parabole : $\left(x - \frac{AB}{2}\right)^2 + CH.\ y = \left(\frac{AB}{2}\right)^2$

Cercle : $\left(x - \frac{r^2}{r^2 - 1} AB\right)^2 + y^2 = \left(\frac{r}{r^2 - 1} AB\right)^2$

On a progressé dans la compréhension ! On sait que la solution est comprise dans la bande correspondant à la partie du cercle qui peut être coupée par la parabole, variable suivant la valeur de $\frac{AB}{CH}$ qui peut varier de 0 à l'infini, mais comprise entre *P* ' et *B* (*P* ' étant le point où le cercle de centre *P* coupe *AB*).

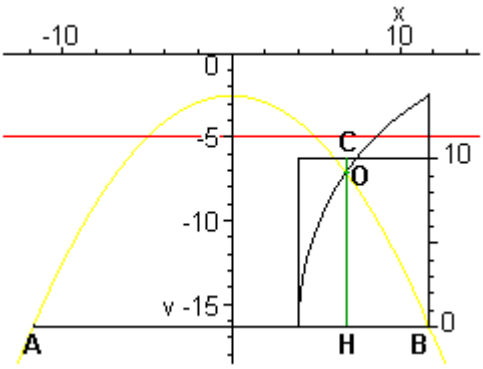


En regardant de plus près, on voit que le cercle ne dépend que du diamètre *AB* (et du rapport des vitesses *r*) : cercle de centre *P* d'abscisse $AP = \frac{r^2}{r^2 - 1}\ AB$ et de rayon $\frac{r}{r^2 - 1}\ AB$; alors que la parabole ne dépend que de la distance *CH* (parabole de paramètre $\frac{CH}{4}$) : la solution du problème résulte du rapprochement des deux.

On
comme
donc

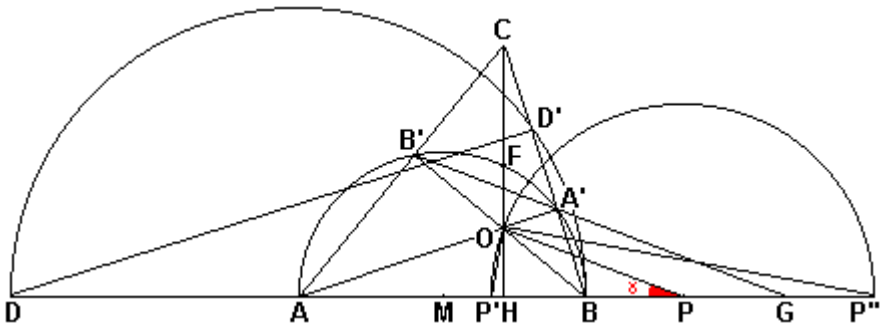
par **construire un transparent portant la parabole** de paramètre $\frac{CH}{4}$ = 2,5 (cela peut se faire avec MAPLE, par exemple) : sur ce cache, on voit la directrice, à l'ordonnée 0, et le foyer, à l'ordonnée -5.

On construit ensuite un arc du cercle de centre *P* d'abscisse *AP* = $\frac{r^2}{r^2-1}$ *AB* et de rayon $\frac{r}{r^2-1}$ *AB*, d'angle au centre *Arc cos* $\frac{1}{r}$, on trace la médiatrice de *AB* qui doit porter l'axe de la parabole, et le segment de droite qui doit porter *C*, à une distance 10 de *AB* :



On superpose ensuite les deux images jusqu'à ce que la parabole, d'axe la médiatrice de *AB* passe par les points *A* et *B* : l'intersection de la parabole avec l'arc de cercle détermine l'orthocentre *O* du triangle *ACB* et la perpendiculaire en *O* à *AB* donne la position de *CH*.
Cette méthode résout instantanément notre équation du 4e degré, en visualisant l'intersection *O* de la parabole et du cercle.

Lorsque le rapport des vitesses entre *A* et *C* n'est pas 2 mais un *r* quelconque, il faut prendre un **autre cercle du faisceau à points de base *A* et *B***. La parabole reste la même, tant qu'on ne change pas la longueur de *CH*. On a donc instantanément la position de *CH* quel que soit le rapport des vitesses sur *AC* et sur *AB*.
En réalité, comme seul intervient le rapport des longueurs de *CH* et *AB*, on peut utiliser toujours la même parabole, en prenant pour unité de longueur dans les deux dessins, le dixième de la longueur de *CH*.
Le transparent portant la parabole de paramètre $\frac{CH}{4}$ est un appareil à résoudre le problème du temps de parcours le plus court : il permet de trouver la solution, quel que soit le rapport des vitesses sur les trajets *AC* et *CB*, et quel que soit le rapport des longueurs de *CH* et *AB*.
La précision de cet appareil n'excède pas la précision habituelle des graphiques (3 chiffres significatifs). Si l'on veut plus de précision, il faut faire appel à un logiciel de calcul, ou bien résoudre l'équation de degré 4 à l'aide de radicaux.



Algébriquement, on peut résoudre le problème en introduisant l'angle au centre $\gamma = \beta - \alpha$ qui repère l'orthocentre *O* sur le cercle de centre *P*, qu'on peut prendre comme seule variable du problème. Sans entrer dans des détails de calcul qu'on pourra vérifier sans trop de peine, les angles α et β solutions du problème sont donnés, en fonction de *r* et γ par les relations :

$$\cos\alpha = \frac{r\sin\gamma}{\sqrt{r^2-2r\cos\gamma+1}} \; ; \; \sin\alpha = \frac{r\cos\gamma-1}{\sqrt{r^2-2r\cos\gamma+1}} \; ; \; \tan\alpha = \frac{r\cos\gamma-1}{r\sin\gamma};$$

$$\cos\beta = \frac{\sin\gamma}{\sqrt{r^2-2r\cos\gamma+1}} \; ; \; \sin\beta = \frac{r-\cos\gamma}{\sqrt{r^2-2r\cos\gamma+1}} ; \; \tan\beta = \frac{r-\cos\gamma}{\sin\gamma} \; ;$$

La relation qui permet de calculer γ en fonction de *AB* et *CH* est : $\mathbf{(r^2-1)\,CH\sin\gamma = AB\,(r\cos\gamma - 1)\,(r-\cos\gamma)}$.

Cette relation se ramène à une équation algébrique du quatrième degré de variable *cos* γ, qui a l'avantage d'être symétrique en *r* et $\frac{1}{r}$: γ est le même si l'on change *r* en $\frac{1}{r}$, *P* change de position, prenant la position symétrique par rapport au milieu *M* de *AB*.

AH est donné en fonction de γ par la relation : $AH = \frac{r}{r^2 - 1} AB\,(r - \cos\gamma) = \frac{r \sin\gamma}{r\cos\gamma - 1} CH$.

Chapitre 33. Extrema liés - Conditions du premier ordre.

Enoncés.

Exercice 8. Extremum relatif lié (fonction avec logarithme).

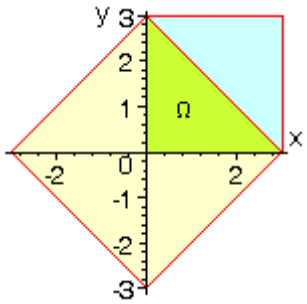
Soit $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \ 0 < x, 0 < y, \text{ et } x + y < 3\}$ et soit

$$h : \Omega \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto h(x, y) = x \ln x + y \ln y + (3 - x - y) \ln (3 - x - y).$$

1°/ Démontrer que Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
2°/ Démontrer que h est de classe C^2 sur Ω et expliciter les dérivées partielles de h d'ordre 1 et d'ordre 2 en tout point (x, y) de Ω.
3°/ Déterminer les points critiques de h et étudier les extrema relatifs éventuels de h.
4°/ Soient les applications :
$f :]0, +\infty[\times]0, +\infty[\times]0, +\infty[\to \mathbb{R} : (x, y, z) \mapsto f(x, y, z) = x \ln x + y \ln y + z \ln z$
$g :]0, +\infty[\times]0, +\infty[\times]0, +\infty[\to \mathbb{R} : (x, y, z) \mapsto g(x, y, z) = x + y + z - 3.$
f admet-elle un extremum relatif lié par la contrainte $g(x, y, z) = 0$?

Solution.

1°/ Ouvert.



Ω est l'intersection
— de la boule ouverte de centre (0, 0) et de rayon 3 pour la norme $\| \ . \ \|_1$ de $\mathbb{R}^2$, définie par
$\| (x, y) \|_1 = | x | + | y |$,
— et de la boule ouverte de centre $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$ et de rayon $\frac{3}{2}$ pour la norme $\| \ . \ \|_\infty$ de $\mathbb{R}^2$, définie par
$\| (x, y) \|_\infty = Sup (| x |, | y |)$.
Dans $\mathbb{R}^2$, toutes les normes sont équivalentes : toute boule ouverte pour un norme est ouverte pour une autre norme.
Toute boule ouverte est un ouvert.
L'intersection de deux ouverts est un ouvert.
Donc Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

2°/ Application *h*.

L'application h est définie en tout point de Ω puisqu'alors les arguments des fonctions logarithmes

qui interviennent dans la définition de h sont strictement positifs.
En tout point où son argument est strictement positif, la fonction logarithme est de classe C^∞.
Les fonctions polynomiales sont aussi de classe C^∞.
Donc l'application h, composée d'applications de classe C^∞ sur Ω, est elle-même de classe C^∞ sur Ω.
En particulier

$$\boxed{h \text{ est de classe } C^2 \text{ sur } \Omega.}$$

Ses dérivées partielles s'obtiennent par les règles de dérivation des fonctions numériques élémentaires :

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x, y) = 1 + \ln x - (1 + \ln(3 - x - y)) = \ln x - \ln(3 - x - y)$$
$$\frac{\partial h}{\partial y}(x, y) = 1 + \ln y - (1 + \ln(3 - x - y)) = \ln y - \ln(3 - x - y)$$

La matrice jacobienne de h est la matrice de l'application dérivée dans la base canonique :

$$\boxed{\left(\frac{\partial h}{\partial x}(x, y) \quad \frac{\partial h}{\partial y}(x, y)\right) = \left(\ln x - \ln(3 - x - y) \quad \ln y - \ln(3 - x - y)\right)}$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x, y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{3 - x - y} = \frac{3 - y}{x(3 - x - y)}$$
$$\frac{\partial^2 h}{\partial y \partial x}(x, y) = \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{1}{3 - x - y}$$
$$\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}(x, y) = \frac{1}{y} + \frac{1}{3 - x - y} = \frac{3 - x}{y(3 - x - y)}$$

La matrice hessienne de h est la matrice de l'application dérivée seconde dans la base canonique :

$$\boxed{Hess^{(x, y)}(h) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 h}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \end{pmatrix}(x, y) = \frac{1}{3 - x - y}\begin{pmatrix} \frac{3 - y}{x} & 1 \\ 1 & \frac{3 - x}{y} \end{pmatrix}}$$

3°/ Points critiques de *h*.

a) Existence.

Les points critiques sont les points où l'application dérivée est nulle :

$$\ln x - \ln(3 - x - y) = 0$$
$$\ln y - \ln(3 - x - y) = 0$$

$$x = 3 - x - y$$
$$y = 3 - x - y$$

$$2x + y = 3$$
$$x + 2y = 3$$

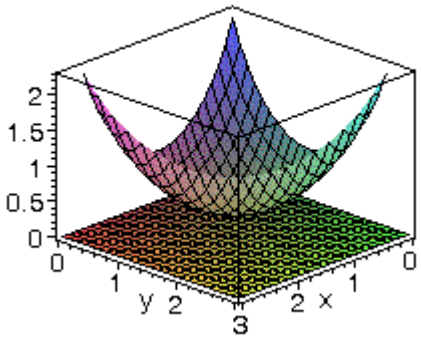
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

h possède un seul point critique, le point (1, 1).

b) Nature.

Au point critique (1, 1) :
- — *h* vaut *h* (1, 1) = 0.
- — La matrice jacobienne de *h* est nulle.
- — La matrice hessienne de *h* est $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$: déterminant = 3, trace = 4.

Les deux valeurs propres, réelles, de la matrice hessienne sont strictement plus grandes que 0.
La forme quadratique définie par la dérivée seconde est positive non dégénérée.
Le point (1, 1) est un minimum relatif de *h*.



Le point critique (1, 1) est un minimum relatif de *h*.

4°/ Optimisation avec contrainte égalité.

La contrainte $g(x, y, z) = 0$ impose que le point (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ est dans le plan d'équation $x + y + z = 3$.
Dans ce plan, z est égal à $3 - x - y$, et la valeur de f au point (x, y, z) est $h(x, y) = x \ln x + y \ln y + (3 - x - y) \ln (3 - x - y)$.
h est minimum au point d'abscisse 1 et d'ordonnée 1. En ce point, z vaut 1 et f est nul.

Dans le plan d'équation $x + y + z = 3$, f présente un minimum relatif de valeur 0 au point (1, 1, 1).

Chapitre 33. Extrema liés - Conditions du premier ordre.

Enoncés.

Exercice 9. Extrema sur un compact.

Soient f et g deux applications de $U = \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ dans $\mathbb{R}$ définies, pour tout $(x, y) \in U$, par :

$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} + y^2 - 1$

et

$g(x, y) = x^2 + y^2 - 9$

1°/

1. Démontrer que U est une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$.
2. Démontrer que f et g sont de classe C^2 sur U et expliciter les dérivées partielles de f et g à l'ordre 1 et à l'ordre 2.
3. Démontrer que f et g n'admettent aucun extremum relatif sur U.

2°/ On considère l'application h de U dans $\mathbb{R}$ définie, pour tout $(x, y) \in U$, par :

$h(x, y) = f(x, y) - \frac{7}{6} g(x, y)$.

1. Déterminer les points critiques pour h.
2. h admet-elle des extrema relatifs ?

3°/ Après avoir énoncé le théorème des multiplicateurs de Lagrange concernant les extrema liés, démontrer qu'il existe quatre points de $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | g(x, y) = 0\}$ en lesquels la restriction de f à Γ est susceptible de présenter des extrema relatifs.

4°/

1. Démontrer que Γ est une partie compacte de $\mathbb{R}^2$.
2. Démontrer que la restriction de f à Γ admet un maximum (resp. minimum) absolu M (resp. m) que l'on précisera.
3. En quels points de Γ, ce maximum (resp. minimum) est-il atteint ?

Solution.

1°/ Extrema relatifs.

a) U est un ouvert.

Tout voisinage de (0, 0) contient (0, 0), donc la partie réduite au point (0, 0) de $\mathbb{R}^2$ est égale à son adhérence : c'est un fermé.
Son complémentaire U est donc un ouvert.

U est ouvert

b) Dérivées partielles de *f* et *g*.

L'application *f* est composée d'applications polynomiales et d'une application puissance fractionnaire d'argument strictement plus grand que 0 : elle est donc composée, de fait, d'applications possédant des dérivées de tous ordres et possède donc, elle-même, des dérivées de tout ordre.
En particulier, elle est de classe C^2 sur U.
L'application *g* est une application polynomiale : elle possède donc, elle aussi, des dérivées de tout ordre et, en particulier, elle est de classe C^2 sur U.

f et g sont de classe C^2 sur U.

Par application itérée du théorème de dérivation des applications composées, on obtient :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \; ; \; \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + 2\,y \; ;$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\left(1 - \frac{x^2}{x^2+y^2}\right) = \frac{y^2}{x^2+y^2}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}};$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(x, y) = -\frac{x\,y}{x^2+y^2}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \; ;$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \frac{x^2}{x^2+y^2}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} + 2.$$

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = 2\,x \; ; \; \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = 2\,y \; ; \; \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, y) = 2 \; ; \; \frac{\partial^2 g}{\partial x\,\partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 g}{\partial y\,\partial x}(x, y) = 0 \; ; \; \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 2.$$

c) Extrema relatifs sur *U*.

Les extrema relatifs de *f* (resp. de *g*) sont des points critiques, c'est-à-dire des points où la dérivée première est nulle.
Les coordonnées des points critiques de *f* (resp. de *g*) annulent les dérivées partielles premières de *f* (resp. de *g*) :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \Rightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0, \text{ donc } x = 0.$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \Rightarrow \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + 2\,y = 0, \text{ donc } y = 0.$$

Mais, dans U, on ne peut pas avoir, à la fois, $x = 0$ et $y = 0$, donc il n'existe, dans U, aucun point critique, donc aucun extremum relatif de *f*.

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = 0 \Rightarrow 2\,x = 0, \text{ donc } x = 0.$$
$$\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = 0 \Rightarrow 2\,y = 0, \text{ donc } y = 0.$$

Mais, dans U, on ne peut pas avoir, à la fois, $x = 0$ et $y = 0$, donc il n'existe, dans U, aucun point critique, donc aucun extremum relatif de *g*.

f et g n'ont, dans U, aucun extremum relatif.

2°/ Application h.

a) Points critiques.

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - \frac{7}{6}\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{7}{6}\times 2x = x\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{7}{3}\right)$$

$$\frac{\partial h}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) - \frac{7}{6}\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + 2y - \frac{7}{6}\times 2y = y\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{1}{3}\right)$$

Les points critiques de h dans U annulent $\frac{\partial h}{\partial y}(x, y)$.

On a donc $\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{3}$ ou $y = 0$.

Les points critiques de h dans U annulent aussi $\frac{\partial h}{\partial x}(x, y)$.

Pour $y = 0$, comme le point (0, 0) n'est pas dans U, c'est que $\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{7}{3} = 0$.

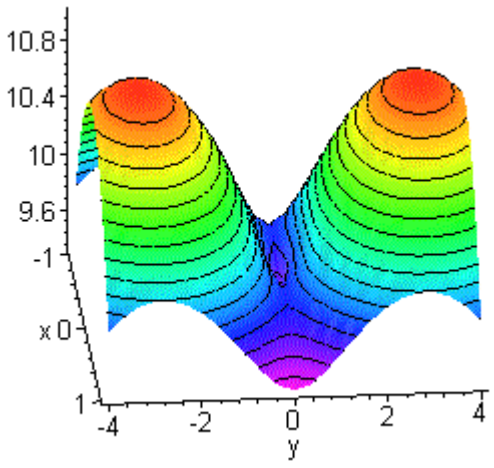
Avec $y = 0$, on voit donc que les points critiques de h ont pour abscisses $x = \pm\frac{3}{7}$.

Pour $\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{3}$, $\frac{\partial h}{\partial x}(x, y)$ est nul pour $x = 0$, auquel cas $|y| = 3$

Dans U, l'application h possède quatre points critiques qui sont les points $\left(\frac{3}{7}, 0\right)$, $\left(-\frac{3}{7}, 0\right)$, (0, –3), (0,3)

b) Extrema relatifs.

Pour étudier la nature des points critiques de h, il faut étudier la matrice hessienne de h en ces points.



$$Hess_{(x, y)}(h) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 h}{\partial y\,\partial x} \\ \frac{\partial^2 h}{\partial x\,\partial y} & \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \frac{y^2}{x^2+y^2}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{7}{6}\times 2 & -\frac{xy}{x^2+y^2}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ -\frac{xy}{x^2+y^2}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{x^2}{x^2+y^2}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} + 2 - \frac{7}{6}\times 2 \end{pmatrix}$$

$$Hess_{(x, 0)}(h) = \begin{pmatrix} -\frac{7}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{|x|} - \frac{1}{3} \end{pmatrix}, x \neq 0$$

$Hess_{(0, y)}(h) = \begin{pmatrix} \frac{1}{|y|} - \frac{7}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$, $y \neq 0$.

Aux points critiques d'ordonnée $y = 0$, $\frac{1}{|x|}$ vaut $\frac{7}{3}$.
Le déterminant de la matrice hessienne vaut donc $-\frac{7}{3} \times 2$, il est strictement négatif.
Cela signifie que les points critiques sont des **cols** de h, puisque les deux valeurs propres de h, $-\frac{7}{3}$ et 2, sont non nulles et de signes contraires.

Aux points critiques d'abscisse $x = 0$, $\frac{1}{|y|}$ vaut $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{|y|} - \frac{7}{3} = -2$ est strictement négatif, de sorte que le déterminant de la matrice hessienne est strictement positif.
Les deux valeurs propres de la matrice hessienne sont donc de même signe et, comme la trace de la matrice hessienne est strictement négative, les deux valeurs propres sont négatives, -2 et $-\frac{1}{3}$: les deux points critiques correspondants sont donc des **maxima relatifs** de h.

h possède sur U deux extrema relatifs qui sont des maxima relatifs. Ces maxima relatifs sont atteints aux points $(0, -3)$ et $(0, 3)$.

3°/ Extrema liés.

Le théorème des multiplicateurs de Lagrange énonce que :

Sous les hypothèses et notations suivantes:

— p et q sont des entiers > 0.
— U est un **ouvert** de $\mathbb{R}^p$.
— $f, g_1, \ldots, g_q$, sont des applications de **classe C^1** de U dans $\mathbb{R}$.
— Γ est l'ensemble des éléments m de U pour lesquels on a $g_1(m) = \ldots = g_q(m) = 0$ ("**contraintes égalités**").
— f_Γ est la restriction de f à Γ.
— f_Γ admet un **extremum relatif** en un point $m_0 \in \Gamma$.
— les formes linéaires $dg_1(m_0), \ldots, dg_q(m_0)$, sont **linéairement indépendantes**.

Conclusion.

Il existe des nombres réels (uniques) $\lambda_1, \ldots, \lambda_q$, qu'on appelle les ***multiplicateurs de Lagrange***, vérifiant :

$$df(m_0) = \lambda_1 dg_1(m_0) + \ldots + \lambda_q dg_q(m_0)$$

Dans le cas présent, $p = 2$, $q = 1$, U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$, f et g sont des applications de classe C^1 de U dans $\mathbb{R}$, Γ est l'ensemble des éléments $m = (x, y)$ de U pour lesquels on a $g(x, y) = 0$. La forme

linéaire $dg = 2\,x\,dx + 2\,y\,dy$ n'est pas identiquement nulle. On étudie la restriction f_Γ de f à Γ.

Les extrema relatifs éventuels m_0 de f_Γ sont des points critiques du lagrangien

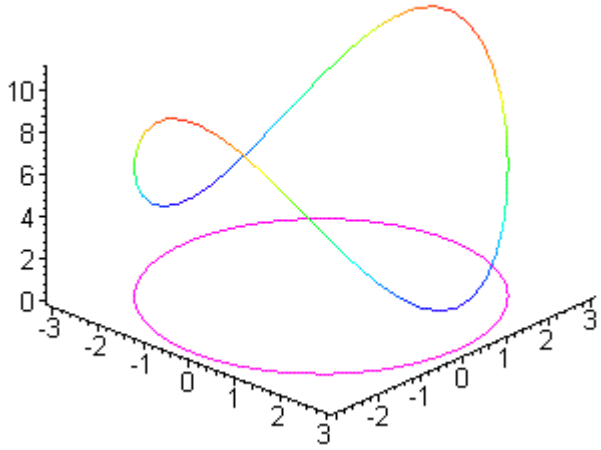
$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\, g(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} + y^2 + \lambda\,(x^2 + y^2 - 9)$$

Ils vérifient donc les relations :

$$\frac{\partial L}{\partial x}(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + 2\,\lambda\, x = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial y}(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + 2\,y + 2\,\lambda\, y = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda}(x, y) = x^2 + y^2 - 9 = 0$$



La première relation donne $x = 0$ ou $\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} = -2\,\lambda$.

a) Pour $x = 0$,

La deuxième relation se réduit à $y = 0$ (impossible car (0, 0) n'appartient pas à U) ou $\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} + 2 + 2\,\lambda = 0$.

Reste donc, pour $x = 0$, seulement $\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} = -2 - 2\,\lambda$, relation qui montre que **$\lambda + 1$ doit être négatif**.

Dans ce cas, la dernière relation se réduit à :

$$4\,(\lambda + 1)^2 = \frac{1}{9}$$

$$\lambda + 1 = \pm\frac{1}{6}$$

$$\lambda = -\frac{7}{6}\ (\lambda + 1 \text{ doit être négatif})$$

Pour $\lambda = -\frac{7}{6}$, le lagrangien $L(x, y, \lambda)$ est l'application h étudiée dans la deuxième question.

Les points critiques correspondant à $x = 0$ sont les points $(0, -3)$ et $(0, 3)$: ils correspondent à des maxima relatifs de h.

b) Pour $\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} = -2\,\lambda$,

λ doit être négatif.

La deuxième relation se réduit à $2\,y = 0$, soit $y = 0$

La troisième relation donne

$$4\,\lambda^2 = \frac{1}{9}$$

$$\lambda = \pm \frac{1}{6}$$

$\lambda = -\frac{1}{6}$ (λ doit être négatif).

$$x^2 = 9$$
$$x = \pm 3$$

En résumé :

Le lagrangien $L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\, g(x, y)$ possède quatre points critiques :
$(0, -3, -\frac{7}{6})$, $(0, 3, -\frac{7}{6})$, $(-3, 0, -\frac{1}{6})$, $(3, 0, -\frac{1}{6})$,
qui sont les candidats potentiels au titre d'extremum relatif de f_Γ.

4°/ Maximum et minimum de f_Γ.

a) Γ est un compact.

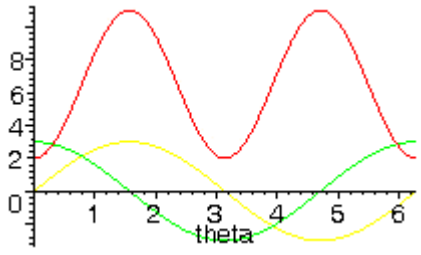
Γ est l'image réciproque de $\{0\}$ par l'application continue g : c'est donc un fermé de $\mathbb{R}^2$.
Les points (x, y) de Γ vérifient $g(x, y) = x^2 + y^2 - 9 = 0$, soit $\| (x, y) \|^2 = 9$.
Γ est donc bornée.
Γ, fermée et bornée, est un compact de $\mathbb{R}^2$.

Γ est une partie compacte de $\mathbb{R}^2$.

b) Maximum et minimum de f sur Γ.

On sait que toute application continue de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$ définie sur un compact atteint sa borne inférieure et sa borne supérieure.
Comme Γ est compact et f_Γ continue, $f_\Gamma(\Gamma)$ est compact, donc fermé et borné, et f_Γ atteint sa borne inférieure et sa borne supérieure.

En coordonnées polaires du plan, l'équation de Γ est :
$x = 3 \cos\theta$
$y = 3 \sin\theta$
avec θ variant de 0 à 2π, et la restriction de f à Γ est :
$f_\Gamma(\theta) = 2 + 9 \sin^2(\theta)$.



Cette restriction présente un maximum de 11 aux points $\theta = \frac{\pi}{2}$ et $\theta = 3\frac{\pi}{2}$, soit (0, 3) et (0, – 3),
et un minimum de 2 aux points $\theta = 0$ et $\theta = \pi$, soit (3, 0) et (– 3, 0).

Sur G, f atteint son maximum $M = 11$ aux points (0, 3) et (0, – 3), et son minimum $m = 2$ aux points (3, 0) et (– 3, 0).

Exercices

Optimisation avec contraintes égalité - Conditions du deuxième ordre.

1. Théorème des multiplicateurs de Lagrange (conditions du premier ordre).
2. Type de point critique (conditions du deuxième ordre).

Théorème des multiplicateurs de Lagrange (conditions du premier ordre).

HAUT

Hypothèses et notations.

— p et q sont des entiers > 0.
— U est un **ouvert** de $\mathbb{R}^p$.
— $f, g_1, \ldots, g_q$, sont des applications de **classe C^1** de U dans $\mathbb{R}$.
— Γ est l'ensemble des éléments m de U pour lesquels on a $g_1(m) = \ldots = g_q(m) = 0$ ("**contraintes égalités**").
— f_Γ est la restriction de f à Γ.
— f_Γ admet un **extremum relatif** en un point $m_0 \in \Gamma$.
— les formes linéaires $dg_1(m_0), \ldots, dg_q(m_0)$, sont **linéairement indépendantes**.

Conclusions.

Il existe des nombres réels (uniques) $\lambda_1, \ldots, \lambda_q$, qu'on appelle les ***multiplicateurs de Lagrange***, vérifiant :

$$df(m_0) = \lambda_1 dg_1(m_0) + \ldots + \lambda_q dg_q(m_0)$$

Il revient au même de dire que, en m_0, le gradient de f est combinaison linéaire des gradients des contraintes.

Application.

Ce théorème permet de calculer, parmi les points $m \in \Gamma$, le point m_0 pour lequel la restriction de f à Γ possède un maximum ou un minimum.
L'équation :

$$df(m_0) = \lambda_1 dg_1(m_0) + \ldots + \lambda_q dg_q(m_0)$$

est, en fait, un système de p équations (à $q + p$ inconnues) faisant intervenir les dérivées partielles par rapport aux p variables (m_0 possède p coordonnées).
Il suffit de résoudre le système de $q + p$ équations à $q + p$ inconnues :

$$df(m_0) = \lambda_1 dg_1(m_0) + \ldots + \lambda_q dg_q(m_0)$$
$$g_1(m_0) = \ldots = g_q(m_0) = 0$$

pour avoir les valeurs de $\lambda_1, \ldots, \lambda_q$, et, surtout, les coordonnées de m_0.

HAUT

Type de point critique (conditions du deuxième ordre).

HAUT

Avec les hypothèses et notations du théorème des multiplicateurs de Lagrange :

Si :
— p et q sont des entiers > 0,
— U est un **ouvert** de $\mathbb{R}^p$,
— $f, g_1, \dots, g_q$, sont des applications de **classe C^1** de U dans $\mathbb{R}$,
— Γ est l'ensemble des éléments m de U pour lesquels on a $g_1(m) = \dots = g_q(m) = 0$ ("**contraintes égalités**").
on appelle **Lagrangien** de f l'application :

$$L : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}$$

définie par :

$$L(x_1, \dots, x_p, \lambda_1, \dots, \lambda_q) = f(x_1, \dots, x_p) + \lambda_1 g_1(x_1, \dots, x_p) + \dots + \lambda_q g_q(x_1, \dots, x_p).$$

Pour qu'existent des multiplicateurs de Lagrange, il faut que les gradients des g_i ne soient pas nuls aux points critiques du lagrangien.

Cette condition est appelée la **condition de qualification des contraintes**. Cette condition est vérifiée si le déterminant de la matrice hessienne du lagrangien est différent de zéro aux points stationnaires du lagrangien.

Lorsque la condition de qualification des contraintes est vérifiée, on détermine si un point critique du lagrangien est un maximum local ou un minimum local en étudiant le **signe du déterminant de la matrice hessienne du lagrangien** et le signe des mineurs diagonaux principaux.

S'il y a p variables et q contraintes, on calcule $p - q$ mineurs diagonaux principaux, le premier étant le déterminant, à $p + q$ lignes et $p + q$ colonnes, de la matrice hessienne, le suivant étant le déterminant obtenu en enlevant la dernière ligne et la dernière colonne du précédent.

- si les $p - q$ mineurs diagonaux principaux alternent en signe, le premier étant du signe de $(-1)^p$, le point est un **maximum local**.
- s'ils sont tous de même signe, et du signe de $(-1)^q$, le point est un **minimum local**.

Exemples.

1. Pour $p = 2$ (2 variables) et $q = 1$ (une contrainte égalité), $p - q = 1$: on calcule un seul déterminant diagonal principal, qui est le déterminant de la matrice hessienne (à trois lignes et trois colonnes).

— Si le déterminant de la matrice hessienne du lagrangien est positif, le point stationnaire est un maximum local.

— Si le déterminant de la matrice hessienne du lagrangien est négatif, le point stationnaire est un minimum local.

2. Pour $p = 3$ (3 variables) et $q = 1$ (une contrainte égalité), $p - q = 2$: on calcule deux déterminants diagonaux principaux, le déterminant (à quatre lignes et quatre colonnes) de la matrice hessienne et le déterminant (à trois lignes et trois colonnes) obtenu en enlevant du déterminant de la matrice hessienne la dernière ligne et la dernière colonne.

— Si le déterminant de la matrice hessienne du lagrangien est négatif, et le suivant positif, le point stationnaire est un maximum local.

— Si les deux déterminants sont positifs, le point stationnaire est un minimum local.

HAUT

Chapitre 34 - Optimisation avec contraintes égalité - Conditions du deuxième ordre.

Exercices

Exercice 1. Maximisation dans $\mathbb{R}^2$.
Exercice 2. Maximisation dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 1. Maximisation dans $\mathbb{R}^2$.

Maximiser la fonction numérique $f(x, y)$, sous la contrainte $g(x, y) = 0$, lorsque : 1°/ $f(x, y) = x\,y$, $g(x, y) \equiv x + 4\,y - 16$. 2°/ $f(x, y) = x^2\,y$, $g(x, y) \equiv 2\,x^2 + y^2 - 3$.	Solution

HAUT

Exercice 2. Maximisation dans $\mathbb{R}^3$.

Maximiser la fonction numérique $f(x, y, z)$, sous la contrainte $g(x, y, z) = 0$, lorsque : 1°/ $f(x, y, z) = x\,y\,z$, $g(x, y, z) \equiv x + y + z - 3$. 2°/ $f(x, y, z) = x^2 y^2 z^2$, $g(x, y, z) \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 3$.	Solution

HAUT

Chapitre 34. Optimisation avec contraintes égalités - Conditions du deuxième ordre.

Enoncés.

Exercice 1. Maximisation dans $\mathbb{R}^2$.

Maximiser la fonction numérique $f(x, y)$, sous la contrainte $g(x, y) = 0$, lorsque : 1°/ $f(x, y) = x\,y$, $g(x, y) \equiv x + 4\,y - 16$. 2°/ $f(x, y) = x^2\,y$, $g(x, y) \equiv 2\,x^2 + y^2 - 3$.	

Solution.

1°/ $f(x, y) \equiv x\,y$, $g(x, y) \equiv x + 4\,y - 16$.

1. Points stationnaires du lagrangien.

a) Condition de qualification de la contrainte.

Le gradient de g a pour composantes les dérivées partielles de g par rapport à x et par rapport à y :

$$grad\ g(x, y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Ce gradient est constant et il est différent de 0, donc la contrainte n'admet pas de point stationnaire (c'est-à-dire à gradient nul).
La condition de qualification de la contrainte est donc vérifiée : un point stationnaire du lagrangien ne peut pas être un point stationnaire de la contrainte.

b) Lagrangien et conditions d'optimisation du premier ordre.

Le lagrangien du problème est :

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\, g(x, y) = x\,y + \lambda\,(x + 4\,y - 16).$$

Les conditions d'optimisation du premier ordre sont :

$$\frac{\partial L}{\partial x}(x, y, \lambda) = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial y}(x, y, \lambda) = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda}(x, y, \lambda) = 0$$

$$y + \lambda = 0$$
$$x + 4\,\lambda = 0$$

$$x + 4\,y = 16$$

$$y = -\lambda$$
$$x = -4\,\lambda$$
$$-4\,\lambda - 4\,\lambda = 16$$

$$\lambda = -2$$
$$x = 8$$
$$y = 2$$

Il y a un seul point stationnaire du lagrangien, le point $(x, y, \lambda) = (8, 2, -2)$.

Ce point est le seul candidat potentiel à l'optimum.
En ce point, $f(x, y) = x\,y$ vaut 16.

2°/ Conditions du deuxième ordre.

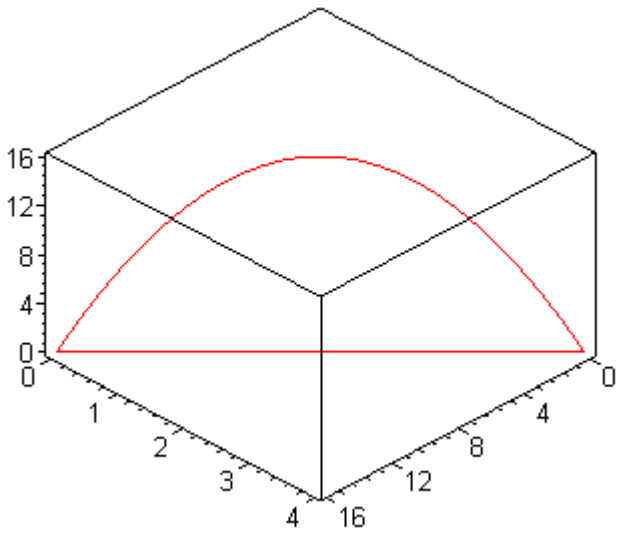
Pour voir si le point (8, 2) donne un maximum ou un minimum de f sous la contrainte $g = 0$, il faut étudier la différence :

$$f(x + h_1, y + h_2) - f(x, y)$$

lorsque $g(x + h_1, y + h_2) = g(x, y) = 0$.

La condition $g(8 + h_1, 2 + h_2) = 0$ s'écrit :

$$(8 + h_1) + 4\,(2 + h_2) - 16 = 0$$
$$h_1 + 4\,h_2 = 0$$



$$f(8 + h_1, 2 + h_2) - f(x, y) = (8 + h_1)(2 + h_2) - 8 \times 2$$
$$= 2\,(h_1 + 4\,h_2) + h_1\,h_2 = h_1\,h_2$$
$$= -4\,h_2^{\,2}$$

Cette quantité est toujours négative, donc ***f* possède un maximum au point (8, 2)**.

Cette méthode, particulière au cas particulier étudié, peut être généralisée à un cas quelconque.

La différence $f(x + h_1, y + h_2) - f(x, y)$ est liée à la variation du lagrangien sous la contrainte $g = 0$.
La matrice hessienne du lagrangien est la matrice des dérivées partielles secondes de L :

$$Hess\,(L) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial y\,\partial x} & \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda\,\partial x} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial x\,\partial y} & \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda\,\partial y} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial x\,\partial \lambda} & \frac{\partial^2 L}{\partial y\,\partial \lambda} & \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial y\,\partial x} & \frac{\partial g}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial x\,\partial y} & \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} & \frac{\partial g}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Cette matrice hessienne est indépendante du point (x, y, λ).
En particulier, au point critique $(8, 2, -2)$:

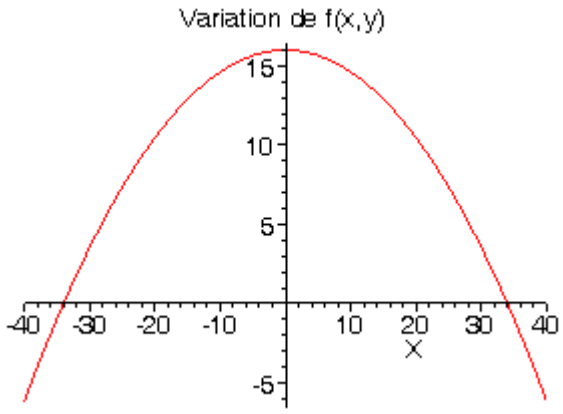
$$Hess_{(8,\,2,\,-2)}\,(L) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Le déterminant de la matrice, produit des valeurs propres, est $8 > 0$.
Il n'est pas nul (condition de qualification des contraintes).

Le résultat général est que lorsqu'il y a deux variables et une contrainte, si le déterminant de la matrice hessienne du lagrangien est positif, le point stationnaire du lagrangien est un **maximum local** de *f*.

Plus généralement, s'il y a **une contrainte de moins que le nombre de variables**, le point stationnaire du lagrangien est un maximum local de *f* lorsque le déterminant de la matrice hessienne du lagrangien est du signe de $(-1)^p$, où p est le nombre de variables.

Méthode alternative : changement de variables.



Le changement de variables défini par :

$$Y = (x - 8) + 4\,(y - 2)$$
$$X = -4\,(x - 8) + (y - 2)$$

donne :

$$f\,(x, y) = x\,y = \left[\frac{1}{17}(Y - 4\,X) + 8\right]\left[\frac{1}{17}(4\,Y + X) + 2\right]$$
$$g\,(x, y) = x + 4\,y - 16 = Y$$

La contrainte $g\,(x, y) = 0$ s'exprime par $Y = 0$.
Sous la contrainte $Y = 0$, $f\,(x, y)$ devient :

$$f\,(x, y) = \left[-\frac{4\,X}{17} + 8\right]\left[\frac{X}{17} + 2\right] = 4\left(4 - \frac{X^2}{17^2}\right)$$

Ce trinôme du deuxième degré présente un maximum de 16 pour $X = 0$.

2°/ $f\,(x, y) \equiv x^2\,y$, $g\,(x, y) \equiv 2\,x^2 + y^2 - 3$.

1. Conditions du premier ordre.

Le lagrangien est :

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\, g(x, y) = x^2 y + \lambda\,(2x^2 + y^2 - 3)$$

Les points stationnaires du lagrangien sont donnés par :

$$\frac{\partial L}{\partial x}(x, y, \lambda) = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial y}(x, y, \lambda) = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda}(x, y, \lambda) = 0$$

$$2xy + 4\lambda x = 0$$
$$x^2 + 2\lambda y = 0$$
$$2x^2 + y^2 - 3 = 0$$

$$2x(y + 2\lambda) = 0$$
$$x^2 + 2\lambda y = 0$$
$$2x^2 + y^2 = 3$$

Les points de coordonnées $x = 0$, $y = \pm\sqrt{3}$, $\lambda = 0$, sont solutions du système.
Ils donnent une valeur $f(x, y) = 0$.
Pour x différent de 0, on aura :

$$y = -2\lambda$$
$$x^2 = 4\lambda^2$$
$$12\lambda^2 = 3$$

$$\lambda^2 = \frac{1}{4}$$
$$x^2 = 1$$
$$y = -2\lambda$$

Les six solutions du sytème sont donc données par :

$$\lambda = 0\ ;\ x = 0\ ;\ y = \sqrt{3}\ ;\ f(x, y) = 0.$$
$$\lambda = 0\ ;\ x = 0\ ;\ y = -\sqrt{3}\ ;\ f(x, y) = 0.$$
$$\lambda = \frac{1}{2}\ ;\ y = -1;\ x = 1;\ f(x, y) = -1.$$
$$\lambda = \frac{1}{2}\ ;\ y = -1;\ x = -1;\ f(x, y) = -1.$$
$$\lambda = -\frac{1}{2}\ ;\ y = 1;\ x = 1;\ f(x, y) = 1$$
$$\lambda = -\frac{1}{2}\ ;\ y = 1;\ x = -1;\ f(x, y) = 1.$$

2. Conditions du deuxième ordre.

Comme il y a deux variables et une contrainte, il est aisé d'utiliser le déterminant de la matrice hessienne du lagrangien pour déterminer si les points stationnaires du lagrangien sont des maxima ou des minima locaux :

— lorsque le déterminant est positif, le point est un maximum local ;
— lorsque le déterminant est négatif, le point est un minimum local ;
— lorsque le déterminant est nul, le point est peut-être un point stationnaire de la contrainte.

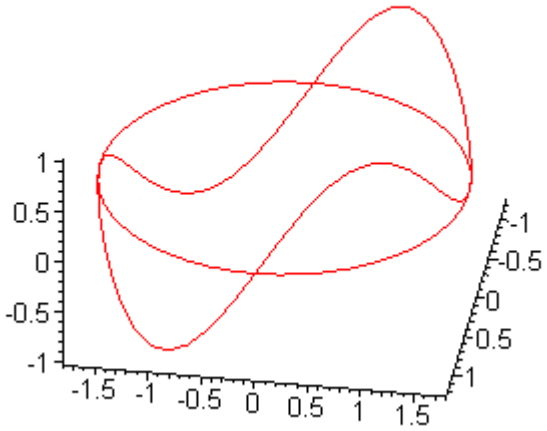
$$\frac{\partial L}{\partial x}(x, y, \lambda) = 2xy + 4\lambda x$$
$$\frac{\partial L}{\partial y}(x, y, \lambda) = x^2 + 2\lambda y$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda}(x, y, \lambda) = 2x^2 + y^2 - 3$$

$$Hess_{(x, y, \lambda)} L = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda \partial x} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda \partial y} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial \lambda} & \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial \lambda} & \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} & \frac{\partial g}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} & \frac{\partial g}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y+4\lambda & 2x & 4x \\ 2x & 2\lambda & 2y \\ 4x & 2y & 0 \end{pmatrix}$$

Son déterminant est :

$$\begin{vmatrix} 2y+4\lambda & 2x & 4x \\ 2x & 2\lambda & 2y \\ 4x & 2y & 0 \end{vmatrix} = 8 \begin{vmatrix} y+2\lambda & x & 2x \\ x & \lambda & y \\ 2x & y & 0 \end{vmatrix} = 8\,[\,4x^2y - y^2(y + 2\lambda) - 4x^2\lambda\,]$$
$$Dét\,(Hess_{(x, y, \lambda)} L) = 8\,[4x^2(y - \lambda) - y^2(y + 2\lambda)]$$

Pour $\lambda = 0$, $x = 0$, $y^2 = 3$, le déterminant vaut $-24y$: il est du signe de $-y$.
Il est positif pour $y = -\sqrt{3}$ (maximum local) et négatif pour $y = \sqrt{3}$ (minimum local).



Pour les autres points critiques, $y + 2\lambda = 0$, $x^2 = 1$, $(y - \lambda) = -3\lambda$, le déterminant vaut -64λ, il est du signe de $-\lambda$.
Pour $\lambda = \frac{1}{2}$, le déterminant est négatif (minima locaux).
Pour $\lambda = -\frac{1}{2}$, le déterminant est positif (maxima locaux).

En définitive :

Sous la contrainte $2x^2 + y^2 = 3$, la fonction $f(x, y) = x^2 y$ possède trois maxima locaux : $f(0, -\sqrt{3}) = 0$; $f(1, 1) = 1$; $f(-1, 1) = 1$.

Chapitre 34. Optimisation avec contraintes égalités - Conditions du deuxième ordre.

Enoncés.

Exercice 2. Maximisation dans $\mathbb{R}^3$.

Maximiser la fonction numérique $f(x, y, z)$, sous la contrainte $g(x, y, z) = 0$, lorsque : 1°/ $f(x, y, z) = x\,y\,z$, $g(x, y, z) \equiv x + y + z - 3$. 2°/ $f(x, y, z) = x^2 y^2 z^2$, $g(x, y, z) \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 3$.	

Solution.

1°/ $f(x, y, z) = x\,y\,z$, $g(x, y, z) \equiv x + y + z - 3$.

1. Conditions du premier ordre.

Le lagrangien est :

$$L(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) + \lambda\, g(x, y, z) = x\,y\,z + \lambda\,(x + y + z - 3)$$

Les conditions du premier ordre permettent de calculer les points critiques du lagrangien :

$$\frac{\partial L}{\partial x}(x, y, z, \lambda) = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial y}(x, y, z, \lambda) = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial z}(x, y, z, \lambda) = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda}(x, y, z, \lambda) = 0$$

$$y\,z + \lambda = 0$$
$$x\,z + \lambda = 0$$
$$x\,y + \lambda = 0$$
$$x + y + z - 3 = 0$$

Lorsque $\lambda = 0$, deux des trois variables x, y, z sont nulles, la troisième est quelconque, d'après les trois premières relations.
Les solutions sont des points des axes de coordonnées.
La contrainte (quatrième équation) montre que les solutions sont les points de rencontre des axes avec le plan d'équation $x + y + z = 3$.
Ce sont les points (3, 0, 0), (0, 3, 0), (0, 0, 3).

Lorsque λ est différent de 0, par produit, les trois premières relations donnent :

$$x^2 y^2 z^2 = -\lambda^3$$

Cette relation montre que λ ne peut être que négatif : $\lambda < 0$.
Dans ce cas :

$$x\,y\,z = \pm\sqrt{-\lambda^3} = \pm(-\lambda\sqrt{-\lambda}.) = -\lambda\,x = -\lambda\,y = -\lambda\,z$$

Comme λ est différent de 0, on peut simplifier par $-\lambda$ et il reste :

$$x = y = z = \pm\sqrt{-\lambda} \neq 0.$$
$$x\,y\,z = x^3 = y^3 = z^3$$

La relation $x + y + z - 3 = 0$ donne alors $x = y = z = 1$, donc $\lambda = -1$.
En résumé :

Le lagrangien possède quatre points critiques : $(x, y, z, \lambda) \in \{(3,0,0,0), (0,3,0,0), (0,0,3,0), (1,1,1,-1)\}$

Ces quatre points sont les candidats au titre de maximum local de *f*.
$f(x, y, z) = x\,y\,z$ vaut 0 aux trois premiers points critiques et 1 au dernier.
Comme $f(x, y, z)$ est nul chaque fois que *x* ou *y* ou *y* est nul, on voit que l'on peut isoler un triangle, joignant les points critiques (3,0,0), (0,3,0), (0,0,3) :
f est nul sur les côtés de ce triangle équilatéral et vaut 1 au centre de gravité du triangle qui est le seul point critique en dehors de la frontière du triangle.

2. Conditions du deuxième ordre.

La matrice hessienne du lagrangien est :

$$Hess_{(x, y, z, \lambda)}(L) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial y\,\partial x} & \frac{\partial^2 L}{\partial z\,\partial x} & \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda\,\partial x} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial x\,\partial y} & \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial z\,\partial y} & \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda\,\partial y} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial x\,\partial z} & \frac{\partial^2 L}{\partial y\,\partial z} & \frac{\partial^2 L}{\partial z^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda\,\partial z} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial x\,\partial \lambda} & \frac{\partial^2 L}{\partial y\,\partial \lambda} & \frac{\partial^2 L}{\partial z\,\partial \lambda} & \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & z & y & 1 \\ z & 0 & x & 1 \\ y & x & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Son déterminant est :

$$\begin{vmatrix} 0 & z & y & 1 \\ z & 0 & x & 1 \\ y & x & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -z & z-y & y & 1 \\ z & -x & x & 1 \\ y-x & x & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -z & z-y & 1 \\ z & -x & 1 \\ y-x & x & 1 \end{vmatrix}$$
$$= -[\,2\,x\,z + (y-x)(z-y) - z\,(z-y) + x\,(y-x) + x\,z]$$
$$= -[\,-x^2 - y^2 - z^2 + 2\,x\,z + 2\,x\,y + 2\,y\,z\,]$$
$$= (x + y + z)^2 - 4\,(x\,y + y\,z + z\,x)$$

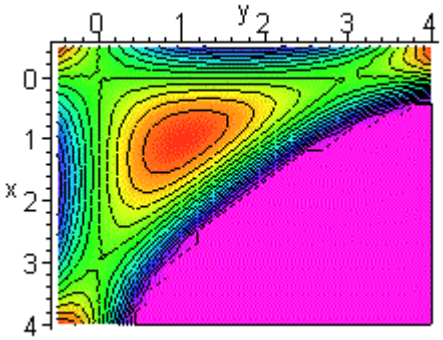
$$Det\,(Hess_{(x, y, z, \lambda)}(L)) = (x + y + z)^2 - 4\,(x\,y + y\,z + z\,x)$$

Pour tous les points critiques du lagrangien, on a $x + y + z = 3$ et $x\,y + y\,z + z\,x = -3\,\lambda$.

Il en résulte que, pour les quatre points critiques, le déterminant de la matrice hessienne du lagrangien est donné par la formule :

$$\boxed{Det\,(Hess_{(x,\,y,\,z,\,\lambda)}\,(L)) = 9 + 12\,\lambda.}$$

Pour $\lambda = 0$ (points critiques sur les axes de coordonnées), le déterminant est positif : il ne peut pas y avoir de maximum local. Il y a au mieux soit un col, soit un minimum local.



Le mineur $\begin{vmatrix} 0 & z & y \\ z & 0 & x \\ y & x & 0 \end{vmatrix} = 2\,x\,y\,z = 0$ est nul, il faut donc étudier la **dérivée d'ordre 3 du lagrangien** : seules sont non nulles les dérivées partielles $\frac{\partial^3 L}{\partial x\,\partial y\,\partial z} = \frac{\partial^3 L}{\partial x\,\partial z\,\partial y} = \frac{\partial^3 L}{\partial y\,\partial z\,\partial x} = \frac{\partial^3 L}{\partial y\,\partial x\,\partial z}$ $= \frac{\partial^3 L}{\partial z\,\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^3 L}{\partial z\,\partial y\,\partial x} = 1.$

La dérivée d'ordre 3 de L est donc $(h_1, h_2, h_3, \lambda) \mapsto h_1\,h_2\,h_3$.

Elle ne dépend pas de λ et **peut changer de signe** autour du point (0, 0, 0, 0) dans l'hyperplan $h_1 + h_2 + h_3 = 0$, suivant le signe de h_1, h_2 et h_3. Les points critiques (3,0,0,0), (0,3,0,0), (0,0,3,0), sont donc des **cols** et non des maxima locaux.

Pour $\lambda = -1$, (point critique (1, 1, 1, –1)), le déterminant est négatif, donc du signe de $(-1)^p$, où $p = 3$ est le nombre de variables de f : il y a un **maximum local de *f***.

On peut le vérifier directement en calculant la différence :

$f\,(1 + h_1, 1 + h_2, 1 + h_3) - f\,(1, 1, 1) = (1 + h_1)(1 + h_2)(1 + h_3) - 1$
$= (h_1 + h_2 + h_3) + h_1\,h_2 + h_2\,h_3 + h_3\,h_1 + h_1\,h_2\,h_3.$

$g\,(1 + h_1, 1 + h_2, 1 + h_3) = 0 \Rightarrow h_1 + h_2 + h_3 = 0$

Il reste :

$f\,(1 + h_1, 1 + h_2, 1 + h_3) - f\,(1, 1, 1) = h_1\,h_2 + h_2\,h_3 + h_3\,h_1 + h_1\,h_2\,h_3$
$= h_1\,h_2\,(1 + h_3) + h_3\,(h_1 + h_2)$
$= h_1\,h_2\,(1 - (h_1 + h_2)) - (h_1 + h_2)(h_1 + h_2)$
$= h_1\,h_2 - (h_1 + h_2)^2 - h_1\,h_2\,(h_1 + h_2)$

Au voisinage de (0,0,0), cette fonction est équivalente aux termes de plus bas degré $h_1\,h_2 - (h_1 + h_2)^2$, quantité qui est toujours négative : $h_1\,h_2 - (h_1 + h_2)^2 = -\frac{1}{4}((2\,h_1 + h_2)^2 + 3\,h_2^2) < 0.$

Dire que $f\,(1 + h_1, 1 + h_2, 1 + h_3) - f\,(1, 1, 1)$ est négatif au voisinage de (0,0,0) en restant dans le plan $h_1 + h_2 + h_3 = 0$, c'est dire que le point (1,1,1) est un **maximum local de *f*** dans le plan $x + y + z = 3$.

2°/ $f\,(x, y, z) = x^2\,y^2\,z^2$, $g\,(x, y, z) \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 3$.

1. Conditions du premier ordre.

Le lagrangien est :

$$L(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) + \lambda\, g(x, y, z) = x^2 y^2 z^2 + \lambda\,(x^2 + y^2 + z^2 - 3)$$

Les conditions du premier ordre permettent de calculer les points critiques du lagrangien :

$$\frac{\partial L}{\partial x}(x, y, z, \lambda) = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial y}(x, y, z, \lambda) = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial z}(x, y, z, \lambda) = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda}(x, y, z, \lambda) = 0$$

Les trois premières conditions indiquent que **le gradient de *f* est colinéaire au gradient de *g***.
La quatrième condition indique que la contrainte est $g(x, y, z) = 0$.

$$2\,x\,y^2\,z^2 + 2\,\lambda\,x = 0$$
$$2\,x^2\,y\,z^2 + 2\,\lambda\,y = 0$$
$$2\,x^2\,y^2\,z + 2\,\lambda\,z = 0$$
$$x^2 + y^2 + z^2 - 3 = 0$$

Pour $\lambda = 0$, les trois premières équations se réduisent à $x\,y\,z = 0$, donc (x, y, z) appartient à l'un des plans de coordonnées ($x = 0$, ou $y = 0$, ou $z = 0$).
La quatrième équation indique que le point (x, y, z) appartient à la sphère de centre (0,0,0) et de rayon $\sqrt{3}$.
Les points critiques correspondants sont les points des **grands cercles** de cette sphère, déterminés par les plans de coordonnées.

Pour $\lambda \neq 0$, les trois premières équations se réduisent à :

$$x\,(y^2\,z^2 + \lambda) = 0$$
$$y\,(x^2\,z^2 + \lambda) = 0$$
$$z\,(x^2\,y^2 + \lambda) = 0$$

Pour $x = 0$, il reste $\lambda\,y = 0$ et $\lambda\,z = 0$.
Comme on a supposé $\lambda \neq 0$, c'est que $y = 0$ et $z = 0$.
La quatrième équation donne alors $3 = 0$, ce qui est absurde.
On ne peut donc pas avoir $x = 0$ lorsque λ est différent de 0.
Par symétrie, on ne peut avoir non plus, $y = 0$, ou $z = 0$.
Ainsi, pour $\lambda \neq 0$, on a $x \neq 0$, $y \neq 0$, $z \neq 0$, et les équations se réduisent à :

$$y^2\,z^2 + \lambda = 0$$
$$x^2\,z^2 + \lambda = 0$$
$$x^2\,y^2 + \lambda = 0$$
$$x^2 + y^2 + z^2 - 3 = 0$$

Les trois premières équations montrent que λ est négatif et que l'on a : $x^2\,y^2 = y^2\,z^2 = z^2\,x^2 = -\lambda \neq 0$.

$x^2 y^2 = z^2 x^2$ et $x \neq 0 \Rightarrow y^2 = z^2$
$x^2 y^2 = y^2 z^2$ et $y \neq 0 \Rightarrow x^2 = z^2$
On obtient donc : $x^2 = y^2 = z^2$.
En portant ces relations dans la quatrième équation, on obtient : $3x^2 - 3 = 0$; $x^2 = y^2 = z^2 = 1$, $\lambda = -y^2 z^2 = -1$.

On obtient ainsi huit solutions qui sont les sommets du cube centré sur (0,0,0) et d'arête 2, boule fermée de $\mathbb{R}^3$ de centre (0,0,0) et de rayon 1, pour la norme $\| \cdot \|_\infty$. Ces points sont aux centres des huitièmes de sphère déterminés, sur la sphère de centre (0,0,0) et de rayon $\sqrt{3}$, par les plans de coordonnées.

Les points critiques du lagrangien sont :

- Pour $\lambda = 0$, les intersections des plans de coordonnées avec la sphère de centre (0,0,0) et de rayon $\sqrt{3}$.
- Pour $\lambda = -1$, les centres des huitièmes de sphère déterminés par les solutions précédentes.

2. Conditions du deuxième ordre.

$$\frac{\partial L}{\partial x}(x, y, z, \lambda) = 2xy^2z^2 + 2\lambda x$$
$$\frac{\partial L}{\partial y}(x, y, z, \lambda) = 2x^2yz^2 + 2\lambda y$$
$$\frac{\partial L}{\partial z}(x, y, z, \lambda) = 2x^2y^2z + 2\lambda z$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda}(x, y, z, \lambda) = x^2 + y^2 + z^2 - 3$$

La matrice hessienne du lagrangien est :

$$Hess_{(x, y, z, \lambda)}(L) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 L}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda \partial x} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda \partial y} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial z} & \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial z} & \frac{\partial^2 L}{\partial z^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda \partial z} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial \lambda} & \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial \lambda} & \frac{\partial^2 L}{\partial z \partial \lambda} & \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y^2z^2 + 2\lambda & 4xyz^2 & 4xy^2z & 2x \\ 4xyz^2 & 2x^2z^2 + 2\lambda & 4x^2yz & 2y \\ 4xy^2z & 4x^2yz & 2x^2y^2 + 2\lambda & 2z \\ 2x & 2y & 2z & 0 \end{pmatrix}$$

$$Hess_{(x, y, z, \lambda)}(L) = 2\begin{pmatrix} y^2z^2 + \lambda & 2xyz^2 & 2xy^2z & x \\ 2xyz^2 & x^2z^2 + \lambda & 2x^2yz & y \\ 2xy^2z & 2x^2yz & x^2y^2 + \lambda & z \\ x & y & z & 0 \end{pmatrix}$$

Pour $\lambda = 0$, le produit xyz est nul, l'une des coordonnées au moins est nulle.
Le déterminant de la matrice hessienne est :

$$Dét\,(Hess_{(x, y, z, 0)}(L)) = 16\begin{vmatrix} y^2z^2 & 0 & 0 & x \\ 0 & x^2z^2 & 0 & y \\ 0 & 0 & x^2y^2 & z \\ x & y & z & 0 \end{vmatrix}$$

Développons par rapport à la quatrième ligne :

$Dét\,(Hess_{(x, y, z, 0)}\,(L)) = 16\,(-x^6\,y^2\,z^2 - x^2\,y^6\,z^2 - x^2\,y^2\,z^6) = -16\,x^2\,y^2\,z^2\,(x^4 + y^4 + z^4) = 0.$
Comme le déterminant de la matrice hessienne est nul (condition de qualification des contraintes non remplie), il faudra faire une étude des dérivées d'ordre plus élevé, pour justifier mathématiquement le type de points critiques, des intersections des plans de coordonnées avec la sphère.
Cependant, on peut déjà conclure : en effet, lorsque x ou y ou z est nul, $f\,(x, y, z) = x^2\,y^2\,z^2$ est nul.
Or f n'a que des valeurs positives ou nulles : la valeur 0 ne peut donc être un maximum, même relatif, c'est un minimum absolu.
Les points critiques correspondant au multiplicateur de Lagrange 0 sont des **minima absolus**.

Pour $\lambda = -1$, $x^2 = y^2 = z^2 = 1$.
La matrice hessienne se réduit à :

$$Hess_{(x, y, z, -1)}\,(L) = 2\begin{pmatrix} 0 & 2xy & 2xz & x \\ 2xy & 0 & 2yz & y \\ 2xz & 2yz & 0 & z \\ x & y & z & 0 \end{pmatrix}$$

Son déterminant est :

$$Dét(Hess_{(x, y, z, -1)}\,L) = 16\begin{vmatrix} 0 & 2xy & 2xz & x \\ 2xy & 0 & 2yz & y \\ 2xz & 2yz & 0 & z \\ x & y & z & 0 \end{vmatrix} = 16\,x^2\,y^2\,z^2\begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$x^2\,y^2\,z^2 = f\,(x, y, z) = 1.$

Echangeons la quatrième colonne et la première : le déterminant est changé de signe (5 transpositions).

$$Dét(Hess_{(x, y, z, -1)}\,L) = -16\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Soustrayons deux fois la première colonne de la deuxième et de la troisième : le déterminant ne change pas de valeur.

$$Dét(Hess_{(x, y, z, -1)}\,L) = -16\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Ajoutons à la quatrième colonne la somme de la deuxième et de la troisième : le déterminant ne change pas de valeur.

$$Dét(Hess_{(x, y, z, -1)}\,L) = -16\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

Le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit des éléments de la diagonale :

$$Dét(Hess_{(x, y, z, -1)}\,L) = -192.$$

Le déterminant de la matrice hessienne est négatif, il est du signe de $(-1)^p$, où $p = 3$ est le nombre de variables.

Calculons le mineur diagonal principal d'ordre 3 : $16\,x^2\,y^2\,z^2\begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 144\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 288.$

Il est positif.
Les signes donc alternent à partir de $(-1)^p = (-1)^3 = -1$, où p est le

nombre de variables (dimension de $\mathbb{R}^p$).

Conclusion.

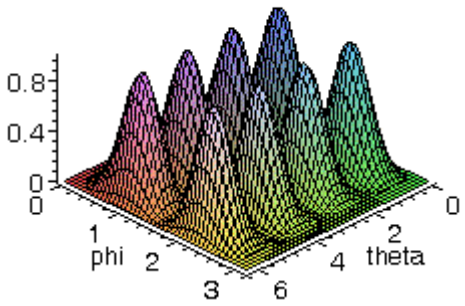
Les huit points critiques correspondant à $\lambda = -1$:
$\{(1,1,1), (1,1,-1),(1,-1,1), (1,-1,-1), (-1,1,1), (-1,1,-1),(-1,-1,1), (-1,-1,-1)\}$
sont des maxima locaux pour *f* qui y atteint la valeur 1.

Le dessin montre que les intersections de la sphère et des plans de coordonnées sont des **minima relatifs**.

Remarque : coordonnées sphériques.

Pour parfaire et simplifier l'étude de *f*, il faudrait passer en coordonnées sphériques définies par :

$x = r \sin(\varphi) \cos(\theta)$
$y = r \sin(\varphi) \sin(\theta)$
$z = r \cos(\varphi)$



$r \in [0, +\infty[$, $\theta \in [0, 2\pi[$, $\varphi \in [0, \pi]$.

$f(x, y, z) = r^6 \sin^4(\varphi) \cos^2(\varphi) \cos^2(\theta) \sin^2(\theta)$
$g(x, y, z) = r^2 - 3$.

La contrainte $g(x, y, z) = 0$ s'exprime alors par $r = \sqrt{3}$ (sphère de rayon $\sqrt{3}$ et de centre (0, 0, 0)).
Sous la contrainte $g(x, y, z) = 0$, $f(x, y, z)$ devient :
$f(x, y, z) = 3^3 \sin^4(\varphi) \cos^2(\varphi) \cos^2(\theta) \sin^2(\theta)$
C'est une fonction de deux variables dont on sait calculer les extrema relatifs libres dans l'ouvert défini par $0 < \theta < 2\pi$, $0 < \varphi < \pi$.

Exercices

Formes différentielles exactes.

1. Condition d'exactitude d'une forme différentielle d'ordre 1.

Condition d'exactitude d'une forme différentielle d'ordre 1.

HAUT

1. Toute forme différentielle de classe C^1 sur un ouvert U de $\mathbb{R}^p$, qui est exacte sur U, est fermée sur U.

2. Théorème (de Poincaré) :
Toute forme différentielle de classe C^1 sur un ouvert U de $\mathbb{R}^p$, **étoilé** par rapport à l'un de ses points, qui est fermée sur U, est exacte sur U.

Rappel : une partie A de $\mathbb{R}^p$ est dite **étoilée par rapport à un point M_0** si, et seulement si, pour tout point M de A, le segment M_0M est contenu dans A.
Le **segment** M_0M est, par définition, l'ensemble des $x \in \mathbb{R}^p$ tels qu'il existe un $t \in \mathbb{R}$, $t \in [0, 1]$, tel que $x = (1 - t)\, M_0 + t\, M$.

En rapprochant 1 et 2 :
Pour qu'une forme différentielle définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$ (ou de $\mathbb{R}^3$), étoilé par rapport à l'un de ses points, soit exacte, il faut et il suffit qu'elle soit fermée.
Autrement dit, pour qu'un champ de vecteurs, défini sur un ouvert étoilé par rapport à l'un de ses points, soit un gradient, il faut et il suffit que son rotationnel soit nul.

HAUT

Chapitre 35 - Formes différentielles exactes.

Exercices

Exercice 1. Forme différentielle avec *Arc tan* et *ln*.
Exercice 2. Forme différentielle avec fonctions puissances.
Exercice 3. Forme différentielle avec fractions rationnelles.

Exercice 1. Forme différentielle avec *Arc tan* et *ln*.

La forme différentielle d'ordre 1 : $\omega = Arctan\ \frac{y}{x}\ dx + \frac{1}{2}\ ln\ (x^2 + y^2)\ dy$ est-elle exacte ? Si oui, l'intégrer.	Solution

HAUT

Exercice 2. Forme différentielle avec fonctions puissances.

1°/ Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que la forme différentielle :

$$\omega = x\,y^p\,dx + x^q\,y\,dy$$

p et q entiers, soit exacte sur $\mathbb{R}^2$.

2°/ Dans le cas où ω est exacte, l'intégrer.

Solution

HAUT

Exercice 3. Forme différentielle avec fractions rationnelles.

La forme différentielle :

$$\omega = \frac{a}{z}\,dx - \frac{b}{z}\,dy + \frac{by - ax}{z^2}\,dz$$

est-elle exacte ? Si oui, l'intégrer.

Solution

HAUT

Chapitre 35. Formes différentielles exactes.

Enoncés.

Exercice 1. Forme différentielle avec *Arc tan* et *ln*.

La forme différentielle d'ordre 1 : $$\omega = Arctan\ \frac{y}{x}\ dx + \frac{1}{2}\ ln\ (x^2 + y^2)\ dy$$ est-elle exacte ? Si oui, l'intégrer.	

Solution.

1°/ Forme différentielle d'ordre 1.

Une forme différentielle d'ordre 1 sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ est une application ω de U dans le dual de $\mathbb{R}^2$, qui, à tout $(x, y) \in U$, fait correspondre une application linéaire $\omega\ (x, y)$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

$$\omega : U \to \mathbb{R}^{2*}$$
$$\omega\ (x, y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

Or on sait bien (voir Chapitre 13, Exercice 1) qu'une forme linéaire $\omega\ (x, y)$ sur $\mathbb{R}^2$ définit un unique vecteur $V\ (x, y)$ de $\mathbb{R}^2$ dont le produit scalaire avec un vecteur h quelconque de $\mathbb{R}^2$ est égal à $\omega\ (x, y)\ (h)$:

$$\omega\ (x, y)\ (h) = <V\ (x, y), h> \ (\forall\ h \in \mathbb{R}^2).$$

On peut donc identifier une forme différentielle ω avec un champ de vecteurs V : à tout point (x, y) de $\mathbb{R}^2$, on peut associer l'unique vecteur $V\ (x, y)$ ainsi défini, qui, étant donnée la base canonique $\{e_1, e_2\}$ de $\mathbb{R}^2$, a pour composantes covariantes sur la base d'origine duale $\{e^1, e^2\}$, les composantes de $\omega\ (x, y)$ sur la base duale $\{dx, dy\}$:

$$\omega\ (x, y) = \omega_1(x, y)\ dx + \omega_2(x, y)\ dy \Leftrightarrow V\ (x, y) = \omega_1(x, y)\ e^1 + \omega_2(x, y)\ e^2$$

Rappelons que pour une base orthonormée, les composantes covariantes et les composantes contravariantes sont identiques.

Par définition, dire qu'une forme différentielle ω est **exacte**, c'est dire que le champ de vecteurs associé V est le **gradient** d'un champ scalaire f :

$$\boxed{\omega \text{ exacte} \Leftrightarrow (\exists\ f \in \mathbb{R}^{2*})(V = grad\ f) \Leftrightarrow (\exists\ f \in \mathbb{R}^{2*})(\omega = d\ f)}$$

On dit qu'une forme différentielle d'ordre 1 et de classe C^1 sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ est **fermée** si le champ de vecteurs associé V possède un **rotationnel nul**.
(En identifiant une forme linéaire sur $\mathbb{R}$ au rapport de l'homothétie qu'est la forme linéaire, on peut définir le **rotationnel** d'un champ de vecteurs V sur $\mathbb{R}^2$, de composantes V_1 et V_2, comme le champ scalaire $\nabla \wedge V$ sur $\mathbb{R}^2$ qui, à tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, associe le nombre réel $rot\ V\ (x, y) = \frac{\partial V_2}{\partial x}\ (x, y) - \frac{\partial V_1}{\partial y}$ (x, y))

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une forme différentielle d'ordre 1 sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$, étoilé par rapport à l'un de ses points, soit exacte est qu'elle soit fermée :

Dans un ouvert étoilé : exacte = fermée

Ce résultat donne un critère pratique pour voir si une forme différentielle d'ordre 1 et de classe C^1 sur un ouvert étoilé U de $\mathbb{R}^2$ est exacte : on calcule le rotationnel du champ de vecteurs associé. Si on trouve 0, la forme différentielle est exacte.

2°/ Application du critère d'exactitude.

Pour la forme différentielle ω d'ordre 1, de classe C^1 sur l'ouvert $U = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$, définie par :

$$\omega\ (x, y) = Arctan\ \frac{y}{x}\ dx + \frac{1}{2}\ ln\ (x^2 + y^2)\ dy$$

le champ de vecteurs V défini par ω est déterminé par l'image qu'il donne d'un couple (x, y) de nombres réels :

$$V\ (x, y) = (Arctan\ \frac{y}{x}, \frac{1}{2}\ ln\ (x^2 + y^2))$$

Son rotationnel est le champ scalaire $rot\ V$ défini par :

$$rot\ V\ (x, y) = \frac{\partial V_2}{\partial x}\ (x, y) - \frac{\partial V_1}{\partial y}\ (x, y)) = \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{1}{x}\frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} = 0$$

Comme le rotationnel de V est nul, V est un gradient d'après notre critère, donc :

ω est exacte dans tout ouvert étoilé ne contenant pas (0, 0).

3°/ Intégration de ω.

Intégrer ω, c'est trouver tous les champs scalaires f de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$, vérifant

$$\omega = d\ f.$$

C'est donc trouver tous les champs scalaires f dont le champ de vecteurs V, associé à la forme différentielle ω, est le gradient :

$$V = grad\ f.$$

Ces relations sont équivalentes aux équations aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = Arctan\ \frac{y}{x}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{2}\ ln\ (x^2 + y^2)$$

Le problème est donc de résoudre ce système de deux équations aux dérivées partielles, c'est-à-dire de trouver toutes les applications f de $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$dans $\mathbb{R}$, de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$, qui vérifient les deux relations précédentes.
Intégrons par rapport à x la première équation :

$$f(x, y) = \int Arctan\ \frac{y}{x}\ dx$$

Pour trouver une primitive, par rapport à x, de $Arctan\ \frac{y}{x}$, intégrons, par rapport à x, par parties en posant

$$u = Arctan\ \frac{y}{x},\ du = -\frac{y}{x^2}\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\ dx = -\frac{y}{x^2+y^2}\ dx,\ dv = dx,\ v = x.$$
$$f(x, y) = \int Arctan\ \frac{y}{x}\ dx = \int u\ dv = u\ v - \int v\ du = x\ Arctan\ \frac{y}{x} + y\int \frac{x}{x^2+y^2}\ dx$$
$$f(x, y) = x\ Arctan\ \frac{y}{x} + \frac{1}{2}\ y\ ln\ (x^2 + y^2) + g\ (y)$$

où $g\ (y)$ est une fonction arbitraire de y, de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
Dérivons cette expression par rapport à y :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}} + \frac{1}{2}\ ln\ (x^2 + y^2) + \frac{y^2}{x^2+y^2} + g'\ (y) = \frac{1}{2}\ ln\ (x^2 + y^2) + 1 + g'\ (y).$$

Pour que la deuxième équation aux dérivées partielles de f soit vérifiée, il faut, et il suffit, que $g\ (y)$ vérifie l'équation différentielle :

$$1 + g'\ (y) = 0$$
$$g\ (y) = -\ y + Constante$$

$$f(x, y) = x\ Arctan\ \frac{y}{x} + \frac{1}{2}\ y\ ln\ (x^2 + y^2) - y + Constante$$

$$\boxed{\omega = d\ f \Leftrightarrow f(x, y) = x\ Arctan\ \frac{y}{x} + \frac{1}{2}\ y\ ln\ (x^2 + y^2) - y + Constante}$$

Chapitre 35. Formes différentielles exactes.

Enoncés.

Exercice 2. Forme différentielle avec fonctions puissances.

1°/ Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que la forme différentielle : $\omega = x\,y^p\,dx + x^q\,y\,dy$ p et q entiers, soit exacte sur $\mathbb{R}^2$. 2°/ Dans le cas où ω est exacte, l'intégrer.	

Solution.

1°/ Condition nécessaire et suffisante d'exactitude.

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une forme différentielle ω définie dans un ouvert étoilé A de $\mathbb{R}^2$ par $\omega(x, y) = f_1(x, y)\,dx + f_2(x, y)\,dy$ soit exacte est que les applications f_1 et f_2 vérifient la relation :

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial f_2}{\partial x}.$$

Avec :

$f_1(x, y) = x\,y^p$
$f_2(x, y) = x^q\,y$

cette relation s'écrit :

$$p\,x\,y^{p-1} = q\,y\,x^{q-1}.$$

Autrement dit, le polynôme $p\,x\,y^{p-1} - q\,y\,x^{q-1}$ doit être identiquement nul.
Cela ne peut se produire que dans les deux cas suivants :
— $p = q = 0$ (coefficients nuls) ;
— ou bien $p - 1 = 1$ et $q - 1 = 1$ et $p = q$ (termes identiques de signes opposés).

Pour que la forme différentielle ω définie par $\omega(x, y) = x\,y^p\,dx + x^q\,y\,dy$ soit exacte, il faut et il suffit que l'on ait :

$$p = q = 0 \text{ ou } p = q = 2$$

2°/ Intégration de la forme différentielle.

Dire que ω est exacte, c'est dire qu'il existe une application f de classe C^1 de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, vérifiant $\omega = df$.

a) Pour $p = q = 0$.

$$\omega(x, y) = x\, y^p\, dx + x^q\, y\, dy = x\, dx + y\, dy = \frac{1}{2}\, d(x^2 + y^2)$$

$$\boxed{f(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + Constante}$$

b) Pour $p = q = 2$.

$$\omega(x, y) = x\, y^2\, dx + x^2\, y\, dy = x\, y\, (y\, dx + x\, dy) = x\, y\, d(x\, y) = \frac{1}{2}\, d(x^2\, y^2)$$

$$\boxed{f(x, y) = \frac{1}{2}\, x^2\, y^2 + Constante}$$

Chapitre 35. Formes différentielles exactes.

Enoncés.

Exercice 3. Forme différentielle avec fractions rationnelles.

La forme différentielle : $$\omega = \frac{a}{z}\,dx - \frac{b}{z}\,dy + \frac{by-ax}{z^2}\,dz$$ est-elle exacte ? Si oui, l'intégrer.	

Solution.

1°/ Exactitude.

Pour que la forme différentielle ω définie sur l'ouvert $U = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times [\mathbb{R} - \{0\}]$ par :

$$\omega\,(x, y, z) = \frac{a}{z}\,dx - \frac{b}{z}\,dy + \frac{by-ax}{z^2}\,dz,$$

il faut et il suffit que le champ de vecteurs A, défini sur un ouvert étoilé contenu dans l'ouvert $U = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times [\mathbb{R} - \{0\}]$ par

$$A\,(x, y, z) = \frac{a}{z}\,e_1 - \frac{b}{z}\,e_2 + \frac{by-ax}{z^2}\,e_3$$

soit un gradient, donc **il faut et il suffit que le rotationnel de A soit nul**.

Le rotationnel est donné par la formule symbolique :

$$rot\,A = \nabla \wedge A = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{a}{z} & e_1 \\ \frac{\partial}{\partial y} & -\frac{b}{z} & e_2 \\ \frac{\partial}{\partial z} & \frac{by-ax}{z^2} & e_3 \end{vmatrix}$$

dans laquelle on développe le déterminant par rapport à la troisième colonne, celle qui contient les vecteurs $\{e_1, e_2, e_3\}$ de la base canonique, pour avoir les composantes du rotationnel.

$$rot\,A = \left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{by-ax}{z^2}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{b}{z}\right)\right) e_1 + \left(\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{a}{z}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{by-ax}{z^2}\right)\right) e_2 - \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{b}{z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{a}{z}\right)\right) e_3$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{by-ax}{z^2}\right) = \frac{b}{z^2} \text{ et } \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{b}{z}\right) = -\frac{b}{z^2} \quad \Rightarrow \left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{by-ax}{z^2}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{b}{z}\right)\right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{a}{z}\right) = -\frac{a}{z^2} \quad \text{et } \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{by-ax}{z^2}\right) = -\frac{a}{z^2} \Rightarrow \left(\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{a}{z}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{by-ax}{z^2}\right)\right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{b}{z}\right) = 0 \quad \text{et } \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{a}{z}\right) = 0 \quad \Rightarrow \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{b}{z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{a}{z}\right)\right) = 0$$

Ainsi, les trois composantes du rotationnel de A sont nulles : ***rot A = 0***.

Il en résulte, d'après le critère énoncé, que :

ω est exacte dans tout ouvert étoilé de $U = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times [\mathbb{R} - \{0\}]$.

2°/ Intégration.

Si ω est exacte dans un ouvert étoilé A contenu dans $U = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times [\mathbb{R} - \{0\}]$, il existe, par définition, une application f définie sur A, à valeurs dans $\mathbb{R}$, de classe C^1 sur A, vérifiant :

$$\omega = d f.$$

Pour trouver f, on peut
— soit constater que la différentielle de $\frac{ax-by}{z}$ est égale à ω, donc $f(x, y, z) = \frac{ax-by}{z} + Constante$,
— soit intégrer le système d'équations aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = \frac{a}{z}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = -\frac{b}{z}$$
$$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = \frac{by-ax}{z^2}$$

La première équation donne, par intégration par rapport à x :

$$f(x, y, z) = \frac{ax}{z} + g(y, z)$$

où g est une application arbitraire de classe C^1 sur $\mathbb{R} \times [\mathbb{R} - \{0\}]$, à valeur dans $\mathbb{R}$.
Par dérivation par rapport à y, on obtient :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = \frac{\partial g}{\partial y}(y, z)$$

Pour que la deuxième équation aux dérivées partielles soit vérifiée, il faut choisir un g vérifiant :

$$\frac{\partial g}{\partial y}(y, z) = -\frac{b}{z}$$

En intégrant cette équation par rapport à y, il vient :

$$g(y, z) = -\frac{by}{z} + h(z)$$

$$f(x, y, z) = \frac{a\,x}{z} - \frac{b\,y}{z} + h(z)$$

où h est une application arbitraire de classe C^1 sur $[\mathbb{R} - \{0\}]$, à valeur dans $\mathbb{R}$.
Par dérivation par rapport à z, on obtient :

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = \frac{b\,y - a\,x}{z^2} + h'(z)$$

Pour que la troisième équation aux dérivées partielles soit vérifiée, il faut choisir un h vérifiant :

$$h'(z) = 0$$
$$h(z) = \textit{Constante}$$

$$\boxed{f(x, y, z) = \frac{a\,x - b\,y}{z} + \textit{Constante}}$$

Exercices

Intégrales curvilignes.

1. Chemin de classe C^1.
2. Intégrale curviligne.
3. Théorème de Green-Riemann.

Chemin de classe C^1.

Un **chemin** $([a, b], \gamma)$ de classe C^1 de $\mathbb{R}^p$ est un couple $([a, b], \gamma)$ où :
— $[a, b]$ est un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$,
— γ est une application de classe C^1 de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}^p$.

$\gamma([a, b])$ est appelé le **support du chemin**.

HAUT

Intégrale curviligne.

Etant donnée une forme différentielle ω de classe C^1 sur un ouvert U de $\mathbb{R}^p$ et un chemin $([a, b], \gamma)$ de classe C^1 à support g $([a, b])$ contenu dans U, on appelle **intégrale curviligne de ω** le long du chemin $([a, b], \gamma)$ le nombre réel défini par :

$$\int_\gamma \omega = \int_a^b \omega(\gamma(t))(\gamma'(t))\,dt = \int_a^b \langle V(\gamma(t)), grad\,\gamma(t)\rangle_2\,dt$$

où V est le champ de vecteurs défini sur U par ω,
et $\langle V(\gamma(t)), grad\,\gamma(t)\rangle_2$ est le produit scalaire euclidien des deux vecteurs.

L'intégrale curviligne de ω le long du chemin $([a, b], \gamma)$ est appelé aussi la **circulation du champ de vecteurs V** le long du chemin $([a, b], \gamma)$.

HAUT

Théorème de Green-Riemann.

Un **compact à bord** de $\mathbb{R}^2$ est un ensemble fermé borné dont la frontière ∂K est réunion disjointe d'un nombre fini de supports de lacets géométriques orientés simples, de classe C^1 par morceaux et tels qu'en parcourant cette frontière dans le sens de l'orientation, on ait constamment K du même côté.
Si on a constamment K à gauche, on dit que le bord de K est orienté dans le **sens direct** et on le note ∂K^+.

Si K est un compact à bord de $\mathbb{R}^2$, contenu dans un ouvert U de $\mathbb{R}^2$, et si $\omega = P\,dx + Q\,dy$ est une forme différentielle de degré 1, de classe C^1 sur U, alors K est un ensemble mesurable et l'intégrale curviligne de ω sur ∂K^+ est donnée par :

$$\int_{\partial K^+} (P\,dx + Q\,dy) = \iint_K \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\,dy$$

Les physiciens disent :
"La circulation d'un champ de vecteurs sur une courbe fermée est égal au flux du rotationnel à travers une surface bordée par la courbe".

HAUT

Chapitre 36 - Intégrales curvilignes.

Exercices

Exercice 1. Intégrale sur un arc de parabole.
Exercice 2. Intégrale sur divers chemins.
Exercice 3. Circulation sur une courbe fermée.
Exercice 4. Chemins et intégrale double.
Exercice 5. Transformée de Fourier de la loi Gamma.

Exercice 1. Intégrale sur un arc de parabole.

Calculer l'intégrale curviligne

$$\int_{AB} [(x^2 - 2xy)\,dx + (2xy + y^2)\,dy]$$

où AB est l'arc de parabole d'équation $y = x^2$ joignant les points $A = (1, 1)$ et $B = (2, 4)$.

Solution

HAUT

Exercice 2. Intégrale sur divers chemins.

Calculer l'intégrale curviligne

$$\int_{AB} (x + y)\,(dx + dy)$$

où AB est le chemin joignant les points $A = (2, 0)$ et $B = (0, 0)$ déterminé par :
1°/ Le segment de droite AB.
2°/ Le demi-cercle inférieur de diamètre AB.
3°/ L'arc supérieur de l'ellipse d'équation $(x - 1)^2 + \frac{y^2}{4} = 1$, parcouru de A vers B.

Solution

HAUT

Exercice 3. Circulation sur une courbe fermée.

On considère la forme différentielle ω définie par :

$$\omega(x, y) = \left(y + \frac{1}{x}\right) dx + \left(x + \frac{1}{y}\right) dy.$$

1°/ Vérifier que ω est une forme différentielle fermée sur l'ouvert $\mathbb{R}^2 - \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0 \text{ ou } y = 0\}$.

2°/ Montrer que la forme différentielle ω est exacte sur l'ouvert $O = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0 \text{ ou } y > 0\}$. Calculer les applications $f : O \to \mathbb{R}$ de classe C^2 vérifiant $\omega = df$.

3°/ On considère l'arc de courbe (Γ) d'équation :

$3x^2 - 2xy + 3y^2 - 16x - 16y + 56 = 0$.

Calculer $\int_{\Gamma^+} \omega$.

Solution

HAUT

Exercice 4. Chemins et intégrale double.

On considère, d'une part, les trois chemins de $\mathbb{R}^2$ suivants :

$$\gamma_1 : [0, 1] \to \mathbb{R}^2 : \quad t \mapsto \gamma_1(t) = (t, 0)$$
$$\gamma_2 : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto \gamma_2(t) = (\cos t, \sin t)$$
$$\gamma_3 : [0, 1] \to \mathbb{R}^2 : \quad t \mapsto \gamma_3(t) = (0, 1 - t)$$

et, d'autre part, la forme différentielle sur $\mathbb{R}^2$, $\omega = P\,dx + Q\,dy$, où P et Q sont des applications de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définies, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ par :

$$P(x, y) = \frac{y^3}{3} \text{ et } Q(x, y) = \frac{x^3}{3}.$$

Solution

1°/ a) Donner l'allure des supports de $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$.

b) Calculer les trois intégrales curvilignes $\int_{\gamma_1} \omega, \int_{\gamma_2} \omega, \int_{\gamma_3} \omega$.

2°/ a) Rappeler la définition d'un compact à bord élémentaire de $\mathbb{R}^2$.

b) Est-ce que la partie $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \ 0 \leqslant x, 0 \leqslant y, x^2 + y^2 \leqslant 1\}$ de $\mathbb{R}^2$ est un compact à bord élémentaire de $\mathbb{R}^2$?

c) Après avoir rappelé le théorème de Green-Riemann, calculer l'intégrale double suivante :

$$\iint_K (x^2 - y^2)\,dx\,dy.$$

HAUT

Exercice 5. Transformée de Fourier de la loi Gamma.

Calculer l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1}\, e^{-a\,x}\, e^{-2\,i\,\pi\,\lambda\,x}\, dx,$$

où $\Gamma(\alpha)$ est défini par l'intégrale $\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} u^{\alpha-1}\, e^{-u}\, du$.

Solution

HAUT

Chapitre 36. Intégrales curvilignes.

Enoncés.

Exercice 1. Intégrale sur un arc de parabole.

Calculer l'intégrale curviligne

$$\int_{AB} [(x^2 - 2xy)\,dx + (2xy + y^2)\,dy]$$

où AB est l'arc de parabole d'équation $y = x^2$ joignant les points $A = (1, 1)$ et $B = (2, 4)$.

Solution.

1°/ Exactitude ?

La forme différentielle ω définie par

$$\omega(x, y) = (x^2 - 2xy)\,dx + (2xy + y^2)\,dy$$

est-elle exacte ?
Pour le savoir, il suffit de regarder si elle est fermée, puisque, dans $\mathbb{R}^2$, ouvert étoilé, exacte = fermée.

$$\frac{\partial}{\partial y}(x^2 - 2xy) = -2x$$
$$\frac{\partial}{\partial x}(2xy + y^2) = 2y$$
$$\frac{\partial}{\partial y}(x^2 - 2xy) \neq \frac{\partial}{\partial x}(2xy + y^2)$$

La forme différentielle ω n'est donc pas fermée.
Elle n'est donc **pas exacte**.

On peut cependant isoler une partie de ω qui est exacte, puisqu'on peut écrire ω sous la forme :

$$\omega(x, y) = (x^2\,dx + y^2\,dy) - 2xy\,(dx - dy) = \frac{1}{3}\,d(x^3 + y^3) - 2xy\,(dx - dy)$$

$$\boxed{\omega(x, y) = \frac{1}{3}\,d(x^3 + y^3) - 2xy\,(dx - dy)}$$

Le premier facteur, $\frac{1}{3}\,d(x^3 + y^3)$, est une forme différentielle exacte : son intégrale sur un chemin qui va de A à B ne dépend que de A et de B, et non du chemin suivi.

Le deuxième facteur, $-2\,x\,y\,(dx - dy)$, n'est pas une forme différentielle exacte : son intégrale sur un chemin qui va de A à B dépend du chemin suivi.

2°/ Intégration .

a) Intégration du premier facteur.

L'intégrale $\int_{AB} \frac{1}{3}\,d\,(x^3 + y^3)$ est la variation de la primitive $\frac{1}{3}(x^3 + y^3)$ entre A et B :

$$\int_{AB} \frac{1}{3}\,d\,(x^3 + y^3) = \frac{1}{3}[2^3 + 4^3 - 1^3 - 1^3] = \frac{70}{3}$$

b) Intégration du deuxième facteur.

L'arc de parabole est un **arc paramétré simple compact** (c'est-à-dire un chemin simple) $([1, 2], \gamma)$, où $\gamma : [1, 2] \to \mathbb{R}^2$ est défini par $\gamma\,(t) = (t, t^2)$.
L'application γ est de classe C^1 sur $[1, 2]$.
La dérivée $\gamma'\,(t)$ de γ au point t a pour composantes les dérivées des composantes de γ : $\gamma'\,(t) = (1, 2\,t)$.
La formule de définition de l'intégrale d'une forme différentielle ω sur un chemin $([a, b], \gamma)$,

$$\int_{AB} \omega = \int_a^b \omega\,(\gamma\,(t))\,(\gamma'\,(t))\,dt$$

s'écrit ici :

$$\int_{AB} [-2\,x\,y\,(dx - dy)] = \int_1^2 [-2\,t \times t^2\,(1 - 2\,t)]\,dt$$

Il revient au même de dire que, sur la parabole $y = x^2$, dy est égal à $2\,x\,dx$, et le deuxième facteur $[-2\,x\,y\,(dx - dy)]$ se réduit à :

$$-2\,x\,y\,(dx - dy) = -2\,x^3\,(dx - 2\,x\,dx) = (-2\,x^3 + 4\,x^4)\,dx$$

$$\int_{AB} [-2\,x\,y\,(dx - dy)] = \int_1^2 (-2\,x^3 + 4\,x^4)\,dx$$

$$= \left[-\frac{2}{4}\,x^4 + \frac{4}{5}\,x^5\right]_{x=1}^{x=2}$$

$$= \frac{1}{10}\,[8\,x^5 - 5\,x^4]_{x=1}^{x=2}$$

$$= \frac{1}{10}\,(8 \times 32 - 5 \times 16 - 8 + 5) = \frac{1}{10}\,(261 - 88) = \frac{73}{10}$$

c) Valeur de l'intégrale.

Par addition, on obtient :

$$\int_{AB} [(x^2 - 2\,x\,y)\,dx + (2\,x\,y + y^2)\,dy\,] = \frac{70}{3} + \frac{73}{10} = \frac{919}{30}$$

$$\int_{AB} [(x^2 - 2xy)\,dx + (2xy + y^2)\,dy] = \frac{919}{30}$$

Chapitre 36. Intégrales curvilignes.

Enoncés.

Exercice 2. Intégrale sur divers chemins.

Calculer l'intégrale curviligne

$$\int_{AB} (x + y)\,(dx + dy)$$

où AB est le chemin joignant les points $A = (2, 0)$ et $B = (0, 0)$ déterminé par :
1°/ Le segment de droite AB.
2°/ Le demi-cercle inférieur de diamètre AB.
3°/ L'arc supérieur de l'ellipse d'équation $(x - 1)^2 + \frac{y^2}{4} = 1$, parcouru de A vers B.

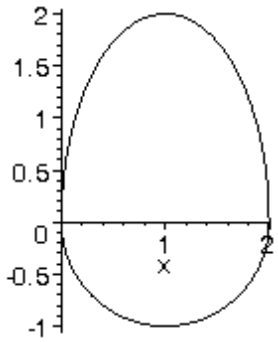
Solution.

Remarque préliminaire.

La forme différentielle ω définie par $\omega\,(x, y) = (x + y)\,(dx + dy) = (x + y)\,d\,(x + y) = \frac{1}{2}\,d\,((x + y)^2)$

est exacte et a pour primitive $\frac{1}{2}\,(x + y)^2$.

Son intégrale sur un chemin allant de A à B est la variation de la primitive de A à B :



$$\int_{AB} (x + y)\,(dx + dy) = \frac{1}{2}\,[(x + y)^2]_A^B = \frac{1}{2}\,[(x + y)^2]_{(2,0)}^{(0,0)} = \frac{1}{2}$$
$$[(0 + 0)^2 - (2 + 0)^2] = -2$$

Cette intégrale ne dépend pas du chemin suivi pour aller de *A* à *B*.
Nous allons vérifier ce résultat en prenant divers chemins pour aller de A (2, 0) à B (0, 0).

1°/ Segment de droite.

Le chemin $([a, b], \gamma)$ est défini par $[a, b] = [0, 2]$, $\gamma\,(t) = (2 - t, 0)$, $\gamma'\,(t) = (-1, 0)$.
La formule de définition de l'intégrale d'une forme différentielle ω sur un chemin $([a, b], \gamma)$,

$$\int_{AB} \omega = \int_a^b \omega\,(\gamma\,(t))\,(\gamma'\,(t))\,dt$$

s'écrit ici :

$$\int_{AB} (x + y)\,(dx + dy) = \int_0^2 ((2 - t) + 0)\,(-1 + 0)\,dt = -\int_0^2 (2 - t)\,dt$$

Pour calculer l'intégrale, on fait le changement de variable $u = 2 - t$, $du = -dt$, $t = 0 \Rightarrow u = 2$, $t = 2 \Rightarrow u = 0$,

$$-\int_0^2 (2 - t)\,dt = \int_2^0 u\,du = -\int_0^2 u\,du = -\frac{1}{2}\,[u^2]_0^2 = -\frac{1}{2}\,[2^2 - 0^2] = -2$$

$$\boxed{\int_{AB} (x + y)\,(dx + dy) = -2}$$

2°/ Demi-cercle inférieur.

On peut définir le chemin $([a, b], \gamma)$ par $[a, b] = [0, \pi]$, $\gamma(t) = (1 + \cos t, -\sin t)$, $\gamma'(t) = (-\sin t, -\cos t)$.
La formule de définition de l'intégrale d'une forme différentielle ω sur un chemin $([a, b], \gamma)$ s'écrit ici :

$$\int_{AB} (x + y)\,(dx + dy) = \int_0^\pi (1 + \cos t - \sin t)\,(-\sin t - \cos t)\,dt = -\int_0^\pi \sin t\,dt - \int_0^\pi \cos t\,dt - \int_0^\pi (\cos^2 t - \sin^2 t)\,dt$$

$$\int_{AB} (x + y)\,(dx + dy) = [\cos t]_0^\pi - [\sin t]_0^\pi - \int_0^\pi \cos 2t\,dt = -2 - \frac{1}{2}\,[\sin 2t]_0^\pi = -2$$

$$\boxed{\int_{AB} (x + y)\,(dx + dy) = -2}$$

3°/ Demi-ellipse supérieure.

On peut définir le chemin $([a, b], \gamma)$ par $[a, b] = [0, \pi]$, $\gamma(t) = (1 + \cos t, 2 \sin t)$, $\gamma'(t) = (-\sin t, 2 \cos t)$.
La formule de définition de l'intégrale d'une forme différentielle ω sur un chemin $([a, b], \gamma)$ s'écrit ici :

$$\int_{AB} (x + y)\,(dx + dy) = \int_0^\pi (1 + \cos t + 2 \sin t)(-\sin t + 2 \cos t)\,dt = -\int_0^\pi \sin t\,dt + 2\int_0^\pi \cos t\,dt + 2\int_0^\pi (\cos^2 t - \sin^2 t)\,dt$$

$$\int_{AB} (x + y)\,(dx + dy) = [\cos t]_0^\pi + 2\,[\sin t]_0^\pi + 2\int_0^\pi \cos 2t\,dt = -2 + [\sin 2t]_0^\pi = -2$$

$$\boxed{\int_{AB} (x + y)\,(dx + dy) = -2}$$

Chapitre 36. Intégrales curvilignes.

Enoncés.

Exercice 3. Circulation sur une courbe fermée.

On considère la forme différentielle ω définie par :

$$\omega(x, y) = \left(y + \frac{1}{x}\right) dx + \left(x + \frac{1}{y}\right) dy.$$

1°/ Vérifier que ω est une forme différentielle fermée sur l'ouvert $\mathbb{R}^2 - \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0 \text{ ou } y = 0\}$.
2°/ Montrer que la forme différentielle ω est exacte sur l'ouvert $O = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0 \text{ ou } y > 0\}$. Calculer les applications $f : O \to \mathbb{R}$ de classe C^2 vérifiant $\omega = df$.
3°/ On considère l'arc de courbe (Γ) d'équation :

$$3x^2 - 2xy + 3y^2 - 16x - 16y + 56 = 0.$$

Calculer $\int_{\Gamma^+} \omega$.

Solution.

1°/ Forme différentielle fermée.

Par définition, une forme différentielle ω de classe C^1 sur un ouvert U, définie par :

$$\omega(x, y) = f_1(x, y)\, dx + f_2(x, y)\, dy,$$

est fermée si, et seulement si, pour tout couple (x, y) de l'ensemble de définition de ω, on a :

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y).$$

Or :

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(y + \frac{1}{x}\right) = 1 = \frac{\partial}{\partial x}\left(x + \frac{1}{y}\right)$$

donc la forme différentielle ω définie sur l'ouvert $\mathbb{R}^2 - \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0 \text{ ou } y = 0\}$ par :

$$\omega(x, y) = \left(y + \frac{1}{x}\right) dx + \left(x + \frac{1}{y}\right) dy$$

est fermée sur cet ouvert.
Sous forme symbolique, on écrira :

$$\boxed{\nabla \wedge \omega = 0}$$

(tandis qu'en toute rigueur, il faudrait écrire :

$$d\,\omega = 0$$

en utilisant ce qu'on appelle la **différentielle extérieure** de ω).

2°/ Forme différentielle exacte.

Sur $\mathbb{R}^2$ et sur tout ouvert étoilé O de $\mathbb{R}^2$, toute forme différentielle fermée de classe C^1 est exacte (**théorème de Poincaré**).
L'ensemble $O = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0 \text{ ou } y > 0\}$ est ouvert, et c'est un ouvert étoilé parce que si (x_0, y_0) et (x, y) sont deux points de O et si t est un nombre réel compris entre 0 et 1, alors :
$(1 - t)(x_0, y_0) + t(x, y) = ((1 - t)x_0 + t x, (1 - t)y_0 + t y)$ a ses deux composantes > 0.
Or ω est fermée sur l'ouvert étoilé $O = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0 \text{ ou } y > 0\}$ d'après le résultat de la première question, donc **ω est exacte**.
Cela veut dire qu'il existe des applications f de O dans $\mathbb{R}$ de classe C^2 telles que ω soit égale à df.

On peut écrire, avec $x > 0$ et $y > 0$:

$$\omega(x, y) = y\,dx + x\,dy + \frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} = d(x\,y) + d(\ln x + \ln y) = d(x\,y + \ln(x\,y)) = df(x, y)$$

Comme $f(x, y)$ et $x\,y + \ln(x\,y)$ ont la même application dérivée, elles ne diffèrent que d'une constante.

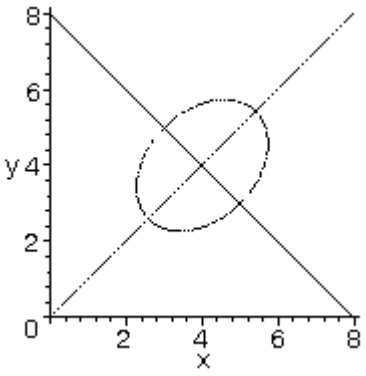
$$\boxed{f(x, y) = x\,y + \ln(x\,y) + Constante}$$

3°/ Intégrale curviligne.

L'arc de courbe (Γ) d'équation :

$$3x^2 - 2xy + 3y^2 - 16x - 16y + 56 = 0$$

est une **conique du genre ellipse**.
En effet, la forme quadratique définie par les termes de plus haut degré a pour matrice $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.
Cette matrice a pour déterminant 8 > 0 et pour trace 6 > 0.
Les deux valeurs propres, réelles puisque la matrice est symétrique, sont du même signe et différentes de 0 (2 et 4).
Cette propriété caractérise les coniques du genre ellipse.



L'équation de l'arc de courbe (Γ) peut s'écrire :

$$3x^2 - 2xy + 3y^2 - 16x - 16y + 56 = 2(x - y)^2 + (x + y)^2 - 16(x + y) + 56$$
$$= 2(x - y)^2 + (x + y - 8)^2 - 8$$

$$\frac{(x-y)^2}{4} + \frac{(x+y-8)^2}{8} = 1$$

Sous cette forme, on reconnaît une ellipse de centre (4, 4), de demi-axe 2 sur la droite $x - y = 0$, de demi-axe $2\sqrt{2}$ sur la droite $x + y - 8 = 0$.
On peut en donner une représentation paramétrique admissible par :

$x - y = 2 \cos \theta$
$x + y - 8 = 2\sqrt{2} \sin \theta$
θ variant de 0 à 2π.

$$\boxed{\begin{aligned} x &= 4 + \cos\theta + \sqrt{2}\sin\theta \\ y &= 4 - \cos\theta + \sqrt{2}\sin\theta \end{aligned}}$$

Lorsque θ varie de 0 à 2π, le point courant (x, y) de (Γ) part de (5,3) et revient au même point en passant successivement par $(4 + \sqrt{2}, 4 + \sqrt{2})$ pour $\theta = \frac{\pi}{2}$, puis par (3, 5) pour $\theta = \pi$, puis par $(4 - \sqrt{2}, 4 - \sqrt{2})$ pour $\theta = \frac{3\pi}{2}$.
L'arc de courbe (Γ) est décrit dans le sens positif lorsque θ varie de 0 à 2π.

Autrement dit, l'arc de courbe (Γ) est un lacet simple compact et Γ^+ est un chemin géométrique orienté simple de classe C^1 dont l'extrémité coïncide avec l'origine.

Le **théorème de Green-Riemann** s'applique alors au compact K situé à gauche de $\Gamma^+ = \partial K^+$:

$$\int_{\partial K^+} \left(P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy\right) = \iint_K \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\right) dx\,dy$$

Autrement dit, la circulation du champ de vecteurs $V = (P, Q)$ le long de Γ^+ est égale au flux du rotationnel de V à travers K.
Lorsque $\omega = P\,dx + Q\,dy$ est exacte, V est un gradient et son rotationnel est nul, donc l'intégrale est nulle.

La circulation d'un gradient sur un lacet est donc nulle : l'intégrale de ω sur Γ^+ est nulle.

$$\boxed{\int_{\Gamma^+} \omega = 0}$$

Ce résultat pourrait se vérifier, **sans faire intervenir le théorème de Green-Riemann**, avec la représentation paramétrique admissible exhibée plus haut :

$([0, 2\pi], \gamma)$,
$\gamma(\theta) = (4 + \cos\theta + \sqrt{2}\sin\theta,\ 4 - \cos\theta + \sqrt{2}\sin\theta)$,
$\gamma'(\theta) = (-\sin\theta + \sqrt{2}\cos\theta,\ \sin\theta + \sqrt{2}\cos\theta)$

$$\int_{\Gamma^+} \omega = \int_{\Gamma^+} \left(y + \frac{1}{x}\right) dx + \left(x + \frac{1}{y}\right) dy$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\left(4 - \cos\theta + \sqrt{2}\sin\theta + \frac{1}{4 + \cos\theta + \sqrt{2}\sin\theta} \right) \left(-\sin\theta + \sqrt{2}\cos\theta \right) + \left(4 + \cos\theta + \sqrt{2}\sin\theta + \frac{1}{4 - \cos\theta + \sqrt{2}\sin\theta} \right) \left(\sin\theta + \sqrt{2}\cos\theta \right) \right) d\theta$$

Les termes sans dénominateur donnent la variation d'une fonction périodique de période 2 π, sur une période : l'intégrale est nulle.
Dans les deux termes avec dénominateur, on a, au numérateur, la dérivée du dénominateur.
L'intégrale est alors la variation du logarithme d'une fonction de période 2 π, sur un intervalle d'une période : elle est nulle.

Chapitre 36. Intégrales curvilignes.

Enoncés.

Exercice 4. Chemins et intégrale double.

On considère, d'une part, les trois chemins de $\mathbb{R}^2$ suivants :

$$\gamma_1 : [0, 1] \to \mathbb{R}^2 : \quad t \mapsto \gamma_1(t) = (t, 0)$$
$$\gamma_2 : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto \gamma_2(t) = (\cos t, \sin t)$$
$$\gamma_3 : [0, 1] \to \mathbb{R}^2 : \quad t \mapsto \gamma_3(t) = (0, 1 - t)$$

et, d'autre part, la forme différentielle sur $\mathbb{R}^2$, $\omega = P\,dx + Q\,dy$, où P et Q sont des applications de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définies, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ par :

$$P(x, y) = \frac{y^3}{3} \text{ et } Q(x, y) = \frac{x^3}{3}.$$

1°/ a) Donner l'allure des supports de $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$.

b) Calculer les trois intégrales curvilignes $\int_{\gamma_1} \omega, \int_{\gamma_2} \omega, \int_{\gamma_3} \omega$.

2°/ a) Rappeler la définition d'un compact à bord élémentaire de $\mathbb{R}^2$.

b) Est-ce que la partie $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \, 0 \leqslant x, 0 \leqslant y, x^2 + y^2 \leqslant 1\}$ de $\mathbb{R}^2$ est un compact à bord élémentaire de $\mathbb{R}^2$?

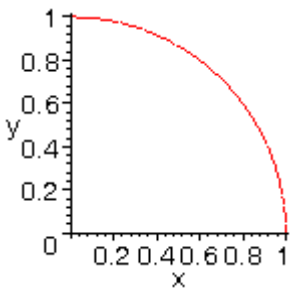
c) Après avoir rappelé le théorème de Green-Riemann, calculer l'intégrale double suivante :

$$\iint_K (x^2 - y^2)\,dx\,dy.$$

Solution.

1°/ Intégrales curvilignes.

a) Les chemins.



γ_1 a pour support le segment de droite joignant le point (0, 0) au point (1, 0).

γ_2 a pour support le quart de cercle de centre (0, 0) et de rayon 1 joignant le point (1, 0) au point (0, 1).

γ_3 a pour support le segment de droite joignant le point (0, 1) au point (0, 0).

b) Les intégrales curvilignes.

▷ Sur γ_1, $P(\gamma_1(t)) = 0$, $Q(\gamma_1(t)) = \frac{t^3}{3}$, $\gamma'_1(t) = (1, 0)$,

$$\omega(\gamma_1(t))(\gamma'_1(t)) = P(\gamma_1(t)) \times 1 + Q(\gamma_1(t)) \times 0 = 0,$$
$$\int_{\gamma_1} \omega = 0$$

▷ Sur γ_2, $P(\gamma_2(t)) = \frac{1}{3} \sin^3 t$, $Q(\gamma_2(t)) = \frac{1}{3} \cos^3 t$, $\gamma'_2(t) = (-\sin t, \cos t)$,

$$\omega(\gamma_2(t))(\gamma'_2(t)) = \frac{1}{3} \sin^3 t \times (-\sin t) + \frac{1}{3} \cos^3 t \times \cos t = \frac{1}{3} (\cos^4 t - \sin^4 t)$$
$$= \frac{1}{3} (\cos^2 t - \sin^2 t)(\cos^2 t + \sin^2 t) = \frac{1}{3} (\cos^2 t - \sin^2 t) = \frac{1}{3} \cos 2t$$
$$\int_{\gamma_2} \omega = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{3} \cos 2t \, dt = \frac{1}{6} \left[\sin 2t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0$$

▷ Sur γ_3, $P(\gamma_3(t)) = \frac{1}{3} (1 - t)^3$, $Q(\gamma_3(t)) = 0$, $\gamma'_3(t) = (0, -1)$,

$$\omega(\gamma_3(t))(\gamma'_3(t)) = \frac{1}{3}(1 - t)^3 \times 0 + 0 \times (-1) = 0$$
$$\int_{\gamma_3} \omega = 0$$

$$\boxed{\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega = \int_{\gamma_3} \omega = 0}$$

2°/ Intégrale double.

a) Compact à bord élémentaire.

Un **compact à bord** de $\mathbb{R}^2$ est un ensemble fermé borné dont la frontière ∂K est réunion disjointe d'un nombre fini de supports de lacets géométriques orientés simples, de classe C^1 par morceaux et tels qu'en parcourant cette frontière dans le sens de l'orientation, on ait constamment K du même côté.
Si on a constamment K à gauche, on dit que le bord de K est orienté dans le **sens direct** et on le note ∂K^+.

Un compact à bord est dit **élémentaire** s'il peut être défini indifféremment, et simultanément, par les inégalités :

$a \leqslant x \leqslant b$; $\varphi_1(x) \leqslant y \leqslant \varphi_2(x)$, ($\varphi_1$ et φ_2 continues sur $[a, b]$ et de classe C^1 par morceaux)

$c \leqslant y \leqslant d$; $\psi_1(y) \leqslant x \leqslant \psi_2(y)$, ($\psi_1$ et ψ_2 continues sur $[c, d]$ et de classe C^1 par morceaux)

b) Compact à bord élémentaire *K*.

$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant x, 0 \leqslant y, x^2 + y^2 \leqslant 1\}$ est la partie de $\mathbb{R}^2$ qui a pour frontière les supports de γ_1, γ_2, γ_3.
C'est un ensemble fermé borné, donc compact.
Son bord est un lacet simple de classe C^1 par morceaux, puisque les chemins γ_1, γ_2, γ_3, sont de classe C^1 et n'ont en commun que leurs extrémités.
Il est orienté dans le sens direct car, lorsque *t* augmente sur chacun des chemins, *K* est à gauche du chemin.
Il est élémentaire parce qu'il est connexe et convexe. D'ailleurs, on peut le définir, indifféremment, et simultanément, par les inégalités :

$0 \leqslant x \leqslant 1 ; 0 \leqslant y \leqslant \sqrt{1 - x^2}$
$0 \leqslant y \leqslant 1 ; 0 \leqslant x \leqslant \sqrt{1 - y^2}$

c) Théorème de Green-Riemann.

Rappel du théorème.

Si *K* est un compact à bord de $\mathbb{R}^2$, contenu dans un ouvert *U* de $\mathbb{R}^2$, et si $\omega = P\,dx + Q\,dy$ est une forme différentielle de degré 1, de classe C^1 sur *U*, alors *K* est un ensemble mesurable et l'intégrale curviligne de ω sur ∂K^+ est donnée par :

$$\int_{\partial K^+} (P\,dx + Q\,dy) = \iint_K \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\,dy$$

Application du théorème.

Pour le compact à bord élémentaire *K*, le théorème s'applique :

$$\int_{\gamma_1} \omega + \int_{\gamma_2} \omega + \int_{\gamma_3} \omega = \iint_K (x^2 - y^2)\,dx\,dy.$$

Comme toutes les intégrales curvilignes sont nulles, leur somme est nulle.
La valeur de l'intégrale double est donc 0.

$$\boxed{\iint_K (x^2 - y^2)\,dx\,dy = 0}$$

Remarque.

Pour obtenir ce résultat, pas besoin de grand chose : si on change *x* en *y* et *y* en *x*, comme *K* est symétrique par rapport à la droite d'équation $y = x$, on obtient : $\iint_K (x^2 - y^2)\,dx\,dy = \iint_K (y^2 - x^2)\,dx\,dy$, donc $2 \iint_K (x^2 - y^2)\,dx\,dy = 0$.

Chapitre 36. Intégrales curvilignes.

Enoncés.

Exercice 5. Transformée de Fourier de la loi Gamma.

Calculer l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1}\, e^{-a\,x}\, e^{-2\,i\,\pi\,\lambda\,x}\, dx,$$

où $\Gamma(\alpha)$ est défini par l'intégrale $\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} u^{\alpha-1}\, e^{-u}\, du$.

Solution.

1. Remarques terminologiques préliminaires.

1°/ Pour $\alpha > 0$ et $a > 0$, la fonction numérique $\frac{a^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1}\, e^{-a\,x}$ est une densité de probabilité sur] 0, + ∞ [.
La loi de probabilité qu'elle définit s'appelle la **loi Gamma de paramètres *a* et α**.

2°/ Pour une fonction numérique $f(x)$ intégrable, l'application R ⟶ C définie par :

$$\lambda \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-2\,i\,\pi\,\lambda\,x}\, dx$$

s'appelle la **tranformée de Fourier** de *f*.

Ainsi, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1}\, e^{-a\,x}\, e^{-2\,i\,\pi\,\lambda\,x}\, dx$ apparaît-elle, au facteur constant a^{α} près, comme la transformée de Fourier de la loi Gamma de paramètres *a* et α.

3°/ A un changement de variable près ($-2\,\pi\,\lambda = u$), cette transformée de Fourier est la **fonction caractéristique** de la loi Gamma.

2. Calcul de l'intégrale.

L'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1}\, e^{-a\,x}\, e^{-2\,i\,\pi\,\lambda\,x}\, dx$ est majorée, en module, par l'intégrale du module :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1}\, e^{-a\,x}\, dx,$$

qui est convergente pour $\alpha > 0$ et $a > 0$. Donc l'intégrale existe et c'est la limite, lorsque A tend vers l'infini, et lorsque ε tend vers 0, de l'intégrale

$$\int_\varepsilon^A \frac{1}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1}\, e^{-a\,x}\, e^{-2\,i\,\pi\,\lambda\,x}\, dx.$$

Posons $a + 2\,i\,\pi\,\lambda = r\,e^{i\,\theta}$ et $z = (a + 2\,i\,\pi\,\lambda)\,x$.
θ est dans l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}\,,\,+\frac{\pi}{2}\right[$ puisque $a > 0$.

$$x^{\alpha-1}\, dx = \left(\frac{1}{a + 2i\,\pi\,\lambda}\right)^{\alpha} z^{\alpha-1}\, dz.$$

Lorsque x parcourt le segment de l'axe réel $[\varepsilon, A]$, z parcourt le segment de droite dans C allant de $(a + 2\,i\,\pi\,\lambda)\,\varepsilon$ à $(a + 2\,i\,\pi\,\lambda)\,A$.

$$\int_\varepsilon^A \frac{1}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1}\, e^{-a\,x}\, e^{-2\,i\,\pi\,\lambda\,x}\, dx = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left(\frac{1}{a + 2i\,\pi\,\lambda}\right)^{\alpha} \int_{(a+2i\,\pi\,\lambda)\,\varepsilon}^{(a+2i\,\pi\,\lambda)\,A} z^{\alpha-1}\, e^{-z}\, dz.$$

Considérons dans C, le lacet formé de :

— (γ_1) : segment de droite allant de $(a + 2\,i\,\pi\,\lambda)\,\varepsilon$ à $(a + 2\,i\,\pi\,\lambda)\,A$.

— (γ_2) : arc de grand cercle de rayon $r\,A$ allant de $(a + 2\,i\,\pi\,\lambda)\,A$ à $r\,A$, dans le sens rétrograde si $\lambda > 0$, dans le sens direct si $\lambda < 0$.

— (γ_3) : segment de droite allant de $r\,A$ à $r\,\varepsilon$ sur l'axe réel.

— (γ_4) : arc de petit cercle de rayon $r\,\varepsilon$ allant de $r\,\varepsilon$ à $(a + 2\,i\,\pi\,\lambda)\,\varepsilon$, dans le sens direct si $\lambda > 0$, dans le sens rétrograde si $\lambda < 0$.

La fonction $z^{\alpha-1}\, e^{-z}$ ne possède aucun point singulier à l'intérieur du domaine limité par le lacet $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4)$.
Son intégrale le long de ce lacet est donc nulle et on obtient :

$$\int_{(a+2i\,\pi\,\lambda)\,\varepsilon}^{(a+2i\,\pi\,\lambda)\,A} z^{\alpha-1}\, e^{-z}\, dz = \int_{\gamma 1} z^{\alpha-1}\, e^{-z}\, dz = -\int_{\gamma 2} z^{\alpha-1}\, e^{-z}\, dz - \int_{\gamma 3} z^{\alpha-1}\, e^{-z}\, dz - \int_{\gamma 4} z^{\alpha-1}\, e^{-z}\, dz.$$

Sur (γ_2), $z = r\,A\,e^{i\,\varphi}$, φ variant de θ à 0.
Sur (γ_2) : $dz = i\,z\,d\varphi$.
$|\,z\,| = r\,A$, $|\,e^{-z}\,| = e^{-x}$, où $x = r\,A\,\cos\varphi$ est la partie réelle de z, qui reste toujours strictement positive puisque $r\,\cos\varphi \geq r\,\cos\theta = a > 0$.

$$\int_{\gamma 2} z^{\alpha-1}\, e^{-z}\, dz = \int_{\gamma 2} (r\,A)^{\alpha}\, e^{-(r\,A\,\cos\varphi\, +\, i\,r\,A\,\sin\varphi)\, +\, i\,\alpha\,\varphi}\, i\, d\varphi.$$

$$\left|\int_{\gamma 2} z^{\alpha-1}\, e^{-z}\, dz\right| \leq \left|\int_{\gamma 2} (r\,A)^{\alpha}\, e^{-r\,A\,\cos\varphi}\, d\varphi\right| \leq |\,\theta\,|\,(r\,A)^{\alpha}\, e^{-r\,A\,\cos\theta}$$

Lorsque A tend vers l'infini, l'exponentielle l'emporte sur la puissance et l'intégrale sur (γ_2) tend vers 0.

Sur (γ_3), z est réel.

$$-\int_{\gamma 3} z^{\alpha-1}\, e^{-z}\, dz = \int_{r\varepsilon}^{r\,A} x^{\alpha-1}\, e^{-x}\, dx.$$

Lorsque ε tend vers 0 et A vers l'infini, $\int_{r\varepsilon}^{r\,A} x^{\alpha-1}\, e^{-x}\, dx$ tend vers $\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}\, e^{-x}\, dx = \Gamma(\alpha)$.

Sur (γ_4), $z = r\,\varepsilon\, e^{i\varphi}$, φ variant de 0 à θ.

Sur (γ_4) : $dz = i\, z\, d\varphi$.

$|z| = r\,\varepsilon$, $|e^{-z}| = e^{-x}$, où $x = r\,\varepsilon\, cos\,\varphi$ est la partie réelle de z, qui reste toujours strictement positive puisque $r\, cos\,\varphi \geq r\, cos\,\theta = a > 0$.

$$\int_{\gamma_4} z^{\alpha-1}\, e^{-z}\, dz = \int_{\gamma_4} (r\,\varepsilon)^{\alpha}\, e^{-(r\,\varepsilon\, cos\,\varphi + i\, r\,\varepsilon\, sin\,\varphi) + i\,\alpha\,\varphi}\, i\, d\varphi.$$

$$\left|\int_{\gamma_4} z^{\alpha-1}\, e^{-z}\, dz\right| \leq \left|\int_{\gamma_4} (r\,\varepsilon)^{\alpha}\, d\varphi\right| \leq |\,\theta\,|\,(r\,\varepsilon)^{\alpha}$$

Lorsque ε tend vers 0, l'intégrale sur (γ_4) tend vers 0.

Au total, nous obtenons, à la limite :

$$\lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ A \to +\infty}} \int_{(a+2i\,\pi\lambda)\varepsilon}^{(a+2i\,\pi\lambda)\,A} z^{\alpha-1}\, e^{-z}\, dz = \Gamma(\alpha).$$

Donc :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1}\, e^{-a\,x}\, e^{-2\,i\,\pi\,\lambda\,x}\, dx = \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ A \to +\infty}} \int_{\varepsilon}^{A} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1}\, e^{-a\,x}\, e^{-2\,i\,\pi\,\lambda\,x}\, dx$$

$$= \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ A \to +\infty}} \int_{(a+2i\,\pi\lambda)\varepsilon}^{(a+2i\,\pi\lambda)\,A} z^{\alpha-1}\, e^{-z}\, dz$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{1}{a + 2i\,\pi\,\lambda}\right)^{\alpha} \times \Gamma(\alpha).$$

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1}\, e^{-a\,x}\, e^{-2\,i\,\pi\,\lambda\,x}\, dx = \left(\frac{1}{a + 2i\,\pi\,\lambda}\right)^{\alpha}.}$$

D'après les remarques préliminaires, il résulte de cette formule :

$$\int_0^{+\infty} \frac{a^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\, x^{\alpha-1}\, e^{-a\,x}\, e^{i\,u\,x}\, dx = \left(\frac{a}{a - i\,u}\right)^{\alpha} = \left(1 - i\,\frac{u}{a}\right)^{-\alpha}$$

C'est la fonction caractéristique de la loi Gamma de paramètres a et α.

Exercices

Intégrales doubles.

1. Théorème de Fubini.
2. Coordonnées polaires du plan.

Théorème de Fubini.

Soit f une fonction intégrable sur $\mathbb{R}^p$ vérifiant la condition suivante :

pour tout $x_1 \in \mathbb{R}$, l'application $f_{x_1} : \mathbb{R}^{p-1} \to \mathbb{R}$ définie par $f_{x_1}(x_2, \dots, x_p) = f(x_1, x_2, \dots, x_p)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^{p-1}$.

Alors l'application $x_1 \mapsto \int_{\mathbf{R}^{p-1}} f(x_1, x_2, \dots, x_p)\, dx_2 \dots dx_p$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et on a l'égalité :

$$\int_{\mathbf{R}^p} f(x_1, x_2, \dots, x_p)\, dx_1\, dx_2 \dots dx_p = \int_{\mathbf{R}} \left(\int_{\mathbf{R}^{p-1}} f(x_1, x_2, \dots, x_p)\, dx_2 \dots dx_p \right) dx_1$$

Le théorème reste vrai, évidemment, si on remplace x_1 par un x_i, pour $1 \leqslant i \leqslant p$.

HAUT

Coordonnées polaires du plan.

HAUT

Lorsqu'on fait un changement de variables dans $\mathbb{R}^2$, des coordonnées cartésiennes aux coordonnées polaires du plan, il faut :
— remplacer l'élément différentiel $dx\,dy$ par $r\,dr\,d\theta$,
— remplacer la fonction à intégrer $f(x, y)$ par $f(r\cos\theta, r\sin\theta)$,
— remplacer le domaine d'intégration S par son image $\varphi(S)$ par l'application $\varphi : (x, y) \mapsto (r, \theta)$, avec :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}\,,\ \theta = 2\,\mathrm{Arctan}\,\frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}$$

en sachant que φ induit un C^1-difféomorphisme du plan moins la demi-droite $]-\infty, 0]$ sur l'ouvert $]0, +\infty[\times]-\pi, \pi[$.
L'intégration pour toutes les valeurs possibles de θ est alors une intégration de $-\pi$ à π.

— On peut aussi considérer l'application $\phi : (r, \theta) \mapsto (x, y)$ de $[0, +\infty[\times [0, 2\pi]$ dans $\mathbb{R}^2$, définie par :

$$x = r\cos\theta\,,\ y = r\sin\theta$$

ϕ induit un C^1-difféomorphisme de l'ouvert $]0, +\infty[\times]0, 2\pi[$.sur le plan moins la demi-droite $]0, +\infty[$.
Le domaine d'intégration S est alors à remplacer par $\phi^{-1}(S)$.
L'intégration pour toutes les valeurs possibles de θ est alors une intégration de 0 à 2π.

HAUT

Chapitre 37 - Intégrales doubles.

Exercices

Exercice 1. Intégrales doubles dans $\mathbb{R}^2$.

Exercice 1. Intégrales doubles dans $\mathbb{R}^2$.

Calculer les intégrales doubles suivantes, dans la partie S de $\mathbb{R}^2$ indiquée.

1°/ $\iint_S |x-y|\,dx\,dy$, pour $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leqslant 1 \text{ et } |y| \leqslant 1\}$.

2°/ $\iint_S \frac{1}{(x+y)^4}\,dx\,dy$, pour $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqslant 1, y \geqslant 2, x+y \leqslant 5\}$.

3°/ $\iint_S \frac{(x+y)^2}{x^2+y^2+2}\,dx\,dy$, pour $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leqslant 1\}$.

4°/ $\iint_S \left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)dx\,dy$, pour $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leqslant R^2\}$.

Solution

HAUT

Chapitre 37. Intégrales doubles.

Enoncés.

Exercice 1. Intégrales doubles dans $\mathbb{R}^2$.

Calculer les intégrales doubles suivantes, dans la partie S de $\mathbb{R}^2$ indiquée.

1°/ $\iint_S |x-y|\,dx\,dy$, pour $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leqslant 1 \text{ et } |y| \leqslant 1\}$.

2°/ $\iint_S \frac{1}{(x+y)^4}\,dx\,dy$, pour $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqslant 1, y \geqslant 2, x+y \leqslant 5\}$.

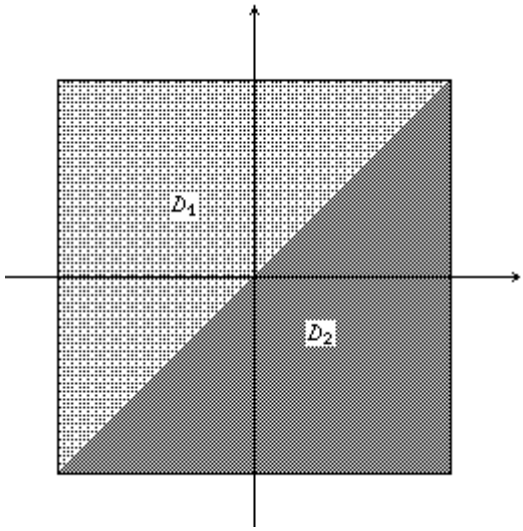
3°/ $\iint_S \frac{(x+y)^2}{x^2+y^2+2}\,dx\,dy$, pour $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leqslant 1\}$.

4°/ $\iint_S \left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)dx\,dy$, pour $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leqslant R^2\}$.

Solution.

1°/ Première intégrale.

Le domaine d'intégration est un carré de côté 2.
C'est la réunion de deux domaines triangulaires D_1 et D_2, symétriques l'un de l'autre par rapport à la droite d'équation $y = x$.
Si l'on change x en y et y en x (symétrie par rapport à la droite d'équation $y = x$), $|x-y|$ est inchangé.
L'intégrale de $|x-y|$ étendue à D_1 est donc égale à l'intégrale de $|x-y|$ étendue à D_2, et, par addition :



$$\iint_S |x-y|\,dx\,dy = 2\iint_{D_1} |x-y|\,dx\,dy.$$

$$\iint_{D_1} |x-y|\,dx\,dy = \int_{-1}^{+1}\left(\int_x^1 |x-y|\,dy\right)dx$$

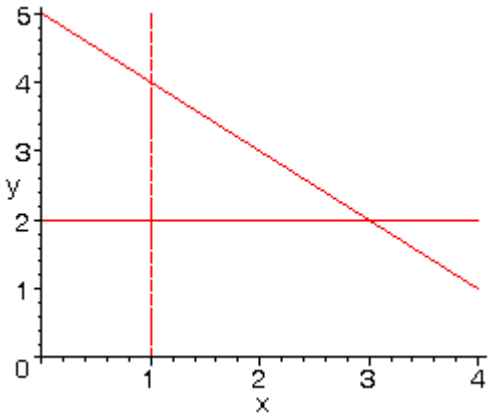
$$= \int_{-1}^{+1}\left(\int_x^1 (x-y)\,dy\right)dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}[(y-x)^2]_{y=x}^{y=1}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}(1-x)^2\,dx = -\frac{1}{6}\,[(1-x)^3]_{x=-1}^{x=+1} = \frac{4}{3}.$$

$$\boxed{\iint_S |x-y|\,dx\,dy = \frac{8}{3}}$$

2°/ Deuxième intégrale.

Le domaine d'intégration *S* est un triangle :



x peut varier de 1 à 3.
Pour *x* fixé entre 1 et 3, *y* varie de 2 à 5 – *x*.

$$\iint_S \frac{1}{(x+y)^4}\,dx\,dy = \int_1^3 \left(\int_2^{5-x} \frac{1}{(x+y)^4}\,dy \right) dx$$

$$\int_2^{5-x} \frac{1}{(x+y)^4}\,dy = -\frac{1}{3}\left[\frac{1}{(x+y)^3}\right]_{y=2}^{y=5-x}$$

$$= -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{5^3} - \frac{1}{(x+2)^3}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{(x+2)^3} - \frac{1}{5^3}\right)$$

$$\iint_S \frac{1}{(x+y)^4}\,dx\,dy = \frac{1}{3}\int_1^3 \left(\frac{1}{(x+2)^3} - \frac{1}{5^3}\right) dx$$

$$= -\frac{1}{6}\left[\frac{1}{(x+2)^2}\right]_{x=1}^{x=3} - \frac{1}{3}\times\frac{2}{5^3} = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{5^2}\right) - \frac{1}{3}\times\frac{2}{5^3} = \frac{22}{15^3}$$

$$\boxed{\iint_S \frac{1}{(x+y)^4}\,dx\,dy = \frac{22}{15^3}}$$

3°/ Troisième intégrale.

Le domaine d'intégration *S* est la boule fermée de centre (0,0) et de rayon 1.
Elle devient un pavé en coordonnées polaires du plan.
Le calcul sera donc plus simple en coordonnées polaires du plan, définies par :

$x = r \cos\theta$
$y = r \sin\theta$

S est alors défini par $0 \leqslant r \leqslant 1$, $-\pi \leqslant \theta \leqslant \pi$.
Le théorème du changement de variables en coordonnées polaires du plan s'applique (intégration sur un compact).

- $dx\,dy$ est changé en $r\,dr\,d\theta$,
- $\frac{(x+y)^2}{x^2+y^2+2}$ devient $\frac{r^2}{r^2+2}(\sin\theta + \cos\theta)^2$, les variables sont séparées.

$$\iint_S \frac{(x+y)^2}{x^2+y^2+2}\,dx\,dy = \int_0^1 \frac{r^3}{r^2+2}\,dr \times \int_{-\pi}^{+\pi} (\sin\theta + \cos\theta)^2\,d\theta.$$

$$\int_0^1 \frac{r^3}{r^2+2}\,dr = \int_0^1 r\,dr - 2\int_0^1 \frac{r}{r^2+2}\,dr = \frac{1}{2}\left[r^2\right]_0^1 - \left[\ln(r^2+2)\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \ln\frac{3}{2}.$$

$$\int_{-\pi}^{+\pi} (\sin\theta + \cos\theta)^2 \, d\theta = \int_{-\pi}^{+\pi} (1 + 2\sin\theta\cos\theta) \, d\theta = 2\pi.$$

$$\boxed{\iint_S \frac{(x+y)^2}{x^2+y^2+2} \, dx\, dy = \pi\left(1 - 2\ln\frac{3}{2}\right)}$$

4°/ Quatrième intégrale.

1. Coordonnées cartésiennes.

S est la boule fermée de centre (0,0) et de rayon $R > 0$.
C'est un compact de $\mathbb{R}^2$.
L'application $(x, y) \mapsto \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ est continue, donc bornée sur S.
Si S_1 désigne la première projection de S ($S_1 = [-R, +R]$), et $S(x)$ l'ensemble des y de $\mathbb{R}$ tels que $(x, y) \in S$, on a (corollaire du théorème de Fubini) :

$$\iint_S \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right) dx\, dy = \int_{-R}^{+R} \left(\int_{S(x)} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right) dy \right) dx$$

Pour x fixé, y varie, pour les $(x, y) \in S$, de $-\sqrt{R^2 - x^2}$ à $+\sqrt{R^2 - x^2}$, $S(x)$ est donc l'intervalle $[-\sqrt{R^2 - x^2}, +\sqrt{R^2 - x^2}]$.

$$\begin{aligned}\iint_S \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right) dx\, dy &= \int_{-R}^{+R} \left(\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{+\sqrt{R^2-x^2}} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right) dy \right) dx \\ &= \int_{-R}^{+R} \left(2\frac{x^2}{a^2}\sqrt{R^2 - x^2} + \frac{2}{3b^2}(R^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} \right) dx\end{aligned}$$

Pour calculer cette intégrale, nous allons faire le changement de variable $x = R\sin\theta$, θ variant de $-\frac{\pi}{2}$ à $\frac{\pi}{2}$ pour que x varie de $-R$ à R.

$$\sqrt{R^2 - x^2} = R\cos\theta$$
$$dx = R\cos\theta\, d\theta$$

$$\int_{-R}^{+R} \left(2\frac{x^2}{a^2}\sqrt{R^2 - x^2} + \frac{2}{3b^2}(R^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} \right) dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} 2R^4 \cos^2\theta \left(\frac{1}{a^2}\sin^2\theta + \frac{1}{3b^2}\cos^2\theta \right) d\theta$$

$$= 2R^4 \frac{1}{a^2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta \sin^2\theta \, d\theta + 2R^4 \frac{1}{3b^2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta \, d\theta$$

$$= \frac{R^4}{2a^2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} (\sin 2\theta)^2 \, d\theta + \frac{2R^4}{3b^2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)^2 d\theta$$

$$= \frac{R^4}{2a^2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 4\theta}{2} \, d\theta + \frac{R^4}{6b^2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} (1 + 2\cos 2\theta + \cos^2 2\theta) \, d\theta$$

$$= \frac{R^4}{4a^2}\pi + \frac{R^4}{6b^2}\pi + \frac{R^4}{6b^2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 4\theta}{2}\, d\theta$$
$$= \frac{R^4}{4a^2}\pi + \frac{R^4}{6b^2}\pi + \frac{R^4}{6b^2}\frac{\pi}{2}$$
$$= \frac{R^4}{4a^2}\pi + \frac{R^4}{4b^2}\pi.$$

$$\boxed{\iint_S \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right) dx\, dy = \pi\, \frac{R^4}{4}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)}$$

2. Coordonnées polaires du plan.

Comme le domaine d'intégration *S* est une boule fermée de centre (0,0) et de rayon $R > 0$, le calcul se simplifiera en coordonnées polaires du plan, puisqu'alors, *S* devient un pavé.
Les coordonnées polaires du plan sont définies par :

$x = r \cos\theta$
$y = r \sin\theta$

S est défini par $0 \leqslant r \leqslant R$, $-\pi \leqslant \theta \leqslant \pi$.

$$\left(r = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ et } \theta = 2\, Arctan\, \frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}} \right)$$

Le théorème du changement de variables en coordonnées polaires du plan s'applique (intégration sur un compact).

- $dx\, dy$ est changé en $r\, dr\, d\theta$,
- $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = r^2\left(\frac{\cos^2\theta}{a^2} + \frac{\sin^2\theta}{b^2}\right)$

$$\iint_S \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right) dx\, dy = \int_0^R r^3\, dr \times \int_{-\pi}^{+\pi}\left(\frac{\cos^2\theta}{a^2} + \frac{\sin^2\theta}{b^2}\right) d\theta$$
$$= \frac{1}{4} R^4 \times \int_{-\pi}^{+\pi}\left(\frac{1+\cos 2\theta}{2a^2} + \frac{1-\cos 2\theta}{2b^2}\right) d\theta.$$

Les intégrales avec cosinus sont nulles, il reste :

$$\boxed{\iint_S \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right) dx\, dy = \pi\, \frac{R^4}{4}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)}$$

Conclusion.

Chaque fois que le domaine d'intégration devient un pavé avec un changement de coordonnées, on a intérêt à faire le changement de coordonnées, car les bornes d'intégration ne dépendent plus des variables.
Le calcul de l'intégrale double se ramène alors à des calculs d'intégrales simples.

Exercices

Changement de variables dans les intégrales doubles.

1. Théorème du changement de variables dans les intégrales.
2. Coordonnées polaires du plan.
3. Coordonnées polaires de l'espace.

Théorème du changement de variables dans les intégrales.

Soient U et V deux ouverts bornés mesurables de $\mathbb{R}^p$ et $\varphi : U \to V$, tels que :

1. φ est une bijection de U sur V.
2. φ est de classe C^1 sur U.
3. Le déterminant $\frac{D(\varphi_1, \ldots, \varphi_p)}{D(x_1, \ldots, x_p)}$ de la matrice jacobienne de φ est non nul et borné sur U.

Alors, pour toute application $f : V \to \mathbb{R}$, bornée sur V et continue sur V sauf, peut-être, sur un ensemble de mesure nulle :

1. $f \circ \varphi$ est intégrable sur U.
2. $\int_V f(y)\, dy = \int_U (f \circ \varphi)(x) \left| \frac{D(\varphi_1, \ldots, \varphi_p)}{D(x_1, \ldots, x_p)} \right| dx$.

HAUT

Coordonnées polaires du plan.

HAUT

Lorsqu'on fait un changement de variables dans $\mathbb{R}^2$, des coordonnées cartésiennes aux coordonnées polaires du plan, il faut :
— remplacer l'élément différentiel $dx\,dy$ par $r\,dr\,d\theta$,
— remplacer la fonction à intégrer $f(x, y)$ par $f(r\cos\theta, r\sin\theta)$,
— remplacer le domaine d'intégration S par son image $\varphi(S)$ par l'application $\varphi : (x, y) \mapsto (r, \theta)$, avec :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}\,,\ \theta = 2\,\mathrm{Arctan}\,\frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}$$

en sachant que φ induit un C^1-difféomorphisme du plan moins la demi-droite $]-\infty, 0]$ sur l'ouvert $]0, +\infty[\times]-\pi, \pi[$.
L'intégration pour toutes les valeurs possibles de θ est alors une intégration de $-\pi$ à π.

— On peut aussi considérer l'application $\phi : (r, \theta) \mapsto (x, y)$ de $[0, +\infty[\times [0, 2\pi]$ dans $\mathbb{R}^2$, définie par :

$$x = r\cos\theta\,,\ y = r\sin\theta$$

ϕ induit un C^1-difféomorphisme de l'ouvert $]0, +\infty[\times]0, 2\pi[$.sur le plan moins la demi-droite $]0, +\infty[$.
Le domaine d'intégration S est alors à remplacer par $\phi^{-1}(S)$.
L'intégration pour toutes les valeurs possibles de θ est alors une intégration de 0 à 2π.

HAUT

Coordonnées polaires de l'espace.

Pour le changement en **coordonnées polaires de l'espace**, défini par :

$x = r \cos\theta \cos\varphi$

$y = r \cos\theta \sin\varphi$

$z = r \sin\varphi$

qui réalise une bijection de $]0, +\infty[\times \left]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right[\times]-\pi, +\pi[$ sur $\mathbb{R}^3 - \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x \leqslant 0 \text{ et } y = 0\}$, il faudra donc :

1. remplacer le domaine d'intégration V de l'espace (x, y, z) par son image U dans l'espace (r, θ, φ),
2. remplacer, dans la fonction à intégrer f, x, y et z par leurs expressions en fonction de r, θ et φ,
3. remplacer $dx\,dy\,dz$ par $r^2 \cos\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi$.

HAUT

Chapitre 38 - Changements de variables dans les intégrales doubles.

Exercices

Exercice 1. Domaine limité par deux paraboles.
Exercice 2. Domaine limité par trois hyperboles et une droite.
Exercice 3. Domaine limité par quatre paraboles.
Exercice 4. Domaine triangulaire.
Exercice 5. Domaine limité par une courbe de degré 3.
Exercice 6. Mesure d'un compact.
Exercice 7. Intégrale de Gauss.
Exercice 8. Fonction Beta d'Euler.

Exercice 1. Domaine limité par deux paraboles.

S étant le domaine défini par $y^2 - 2px \leqslant 0$, $x^2 - 2py \leqslant 0$, $p \in \mathbb{R}_+^*$ fixé, calculer l'intégrale : $$\iint_S e^{\frac{x^3+y^3}{xy}}\,dx\,dy.$$	Solution

HAUT

Exercice 2. Domaine limité par trois hyperboles et une droite.

S étant le domaine défini par $$a \leqslant x\,y \leqslant b,\ y \geqslant x \geqslant 0,\ y^2 - x^2 \leqslant 1,\ (a, b) \in \mathbb{R}^2 \text{ fixé tel que } 0 < a < b,$$ calculer l'intégrale : $$\iint_S (y^2 - x^2)\,(x^2 + y^2)\,dx\,dy.$$	Solution

HAUT

Exercice 3. Domaine limité par quatre paraboles.

Soit D la partie du demi-plan $y > 0$ limitée par les quatre paraboles :

$$P_1 : y^2 = 4x + 4,\ P_2 : y^2 = 2x + 1,$$
$$P_3 : y^2 = 9 - 6x,\ P_4 : y^2 = 4 - 4x,$$

et $f : D \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

Solution

Calculer $I = \iint_D f(x, y)\, dx\, dy$, en utilisant le changement de variables défini par :

$x = u^2 - v^2$
$y = 2uv$
$u > 0, v > 0.$

HAUT

Exercice 4. Domaine triangulaire.

S étant le domaine défini par $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $x + y \leqslant 1$, calculer l'intégrale : $$\iint_S (x+y)^2 e^{x^2-y^2}\, dx\, dy.$$	Solution

HAUT

Exercice 5. Domaine limité par une courbe de degré 3.

S étant le domaine défini par $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $x^3 + y^3 \leqslant 1$, calculer l'intégrale : $$\iint_S x^2 y^2 (1 - x^3 - y^3)^{\frac{1}{3}} \, dx \, dy.$$	Solution

HAUT

Exercice 6. Mesure d'un compact.

Soit K la partie de $\mathbb{R}^2$ définie par :

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 - x \leqslant 0,\ 0 \leqslant x \leqslant y\}.$$

1°/ Expliquer pourquoi K est une partie compacte mesurable de $\mathbb{R}^2$.

2°/ On considère les deux chemins suivants de $\mathbb{R}^2$:

$$\delta : \left[0, \frac{1}{2}\right] \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto (t, t)$$

et

$$g : \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right] \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos t\ ,\ \frac{1}{2}\sin t\right).$$

Calculer $\int_\delta x\,dy$ et $\int_\gamma x\,dy$.

En remarquant que $Fr\,(K) = Im\,\delta \cup Im\,\gamma$, en déduire la mesure de K.

3°/ Calculer directement $\iint_K dx\,dy$ à l'aide d'un changement de variables classique et vérifier le résultat obtenu à la question précédente.

Solution

HAUT

Exercice 7. Intégrale de Gauss.

Par changement de variables en coordonnées polaires du plan, calculer l'intégrale

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy.$$

En déduire la valeur de l'intégrale de Gauss $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}\,du$.

Solution

HAUT

Exercice 8. Fonction Beta d'Euler.

On définit la fonction Beta d'Euler par l'intégrale

$$B(x, y) = \int_0^1 u^{x-1} (1-u)^{y-1}\, du,\ x \text{ et } y \text{ réel.}$$

1°/ Quel est le domaine de définition de la fonction Beta ?
2°/ La fonction Gamma d'Euler est définie par l'intégrale :

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-u} u^{x-1}\, du.$$

Montrer que l'on a :

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\ \Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

Solution

HAUT

Chapitre 38. Changements de variables dans les intégrales doubles.

Enoncés.

Exercice 1. Domaine limité par deux paraboles.

S étant le domaine défini par $y^2 - 2px \leqslant 0$, $x^2 - 2py \leqslant 0$, $p \in \mathbb{R}_+^*$ fixé, calculer l'intégrale : $$\iint_S e^{\frac{x^3+y^3}{xy}}\,dx\,dy.$$	

Solution.

1°/ Le domaine S.

Le domaine S est la partie commune à la concavité des deux paraboles. C'est une région symétrique par rapport à la droite d'équation $y = x$, dans laquelle x et y sont tous deux positifs.

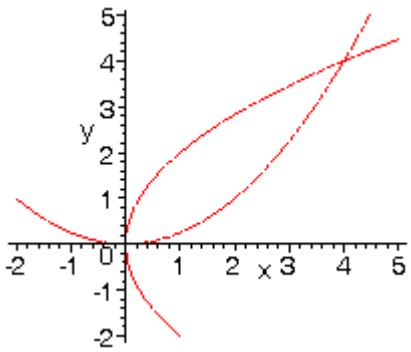
$y^2 \leqslant 2px$

$y^4 \leqslant 4p^2x^2 \leqslant 8p^3y$

$y^3 \leqslant 8p^3$

$y \leqslant 2p$.

Dans le domaine S, x et y sont tous deux compris entre 0 et $2p$. Autrement dit, le domaine S est entièrement contenu dans le pavé $[0, 2p] \times [0, 2p]$.



2°/ Changement de variables.

$$\frac{x^3+y^3}{xy} = \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x}$$

Posons :

$$u = \frac{x^2}{y},\ v = \frac{y^2}{x}.$$

▷ La **fonction à intégrer** s'écrit $e^{u+v} = e^u e^v$.

▷ La **matrice jacobienne** du changement de coordonnées est :

$$\frac{D(u,v)}{D(x,y)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2x}{y} & -\frac{x^2}{y^2} \\ -\frac{y^2}{x^2} & \frac{2y}{x} \end{pmatrix}$$

Son déterminant est $3 > 0$:

$$du\,dv = 3\,dx\,dy$$

▷ Le **domaine *S*** est défini par :

$$y^2 - 2p\,x \leqslant 0,\ x^2 - 2p\,y \leqslant 0,$$
$$0 \leqslant u \leqslant 2p,\ 0 \leqslant v \leqslant 2p.$$

3°/ Calcul de l'intégrale.

$$\iint_S e^{\frac{x^3+y^3}{xy}}\,dx\,dy = \frac{1}{3}\int_0^{2p} e^u\,du \times \int_0^{2p} e^v\,dv = \frac{1}{3}(e^{2p}-1)^2$$

$$\boxed{\iint_S e^{\frac{x^3+y^3}{xy}}\,dx\,dy = \frac{1}{3}(e^{2p}-1)^2}$$

Chapitre 38. Changements de variables dans les intégrales doubles.

Enoncés.

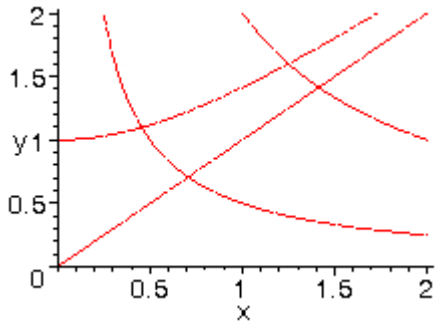
Exercice 2. Domaine limité par trois hyperboles et une droite.

S étant le domaine défini par $$a \leqslant x\,y \leqslant b,\ y \geqslant x \geqslant 0,\ y^2 - x^2 \leqslant 1,\ (a, b) \in \mathbb{R}^2 \text{ fixé tel que } 0 < a < b,$$ calculer l'intégrale : $$\iint_S (y^2 - x^2)\,(x^2 + y^2)\,dx\,dy.$$	

Solution.

1°/ Domaine S.

Le domaine S est la portion du quart de plan $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, limitée :
— en haut par la branche d'hyperbole $y^2 - x^2 = 1$ d'asymptote $y = x$;
— en bas par la droite $y = x$;
— à gauche par la branche d'hyperbole $x\,y = a$;
— à droite par la branche d'hyperbole $x\,y = b$.



2°/ Changement de variables.

La fonction à intégrer s'écrit :

$$(y^2 - x^2)(x^2 + y^2)$$

Posons :

$$u = y^2 - x^2$$
$$v = x\,y.$$

▷ Dans le **domaine** S, u varie de 0 à 1, v varie de a à b.
S devient $[0, 1] \times [a, b]$.

▷ La **matrice jacobienne** du changement de coordonnées est :

$$\frac{D(u,v)}{D(x,y)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x & 2y \\ y & x \end{pmatrix}$$

Son déterminant est $-2(x^2 + y^2)$.

$$du\,dv = 2(x^2 + y^2)\,dx\,dy$$

▷ La **différentielle à intégrer** s'écrit :

$$(y^2 - x^2)(x^2 + y^2)\,dx\,dy = u\,du\,dv$$

3°/ Calcul de l'intégrale.

$$\iint_S (y^2 - x^2)(x^2 + y^2)\,dx\,dy = \frac{1}{2}\int_0^1 u\,du \times \int_a^b dv = \frac{b-a}{4}$$

$$\boxed{\iint_S (y^2 - x^2)(x^2 + y^2)\,dx\,dy = \frac{b-a}{4}}$$

Chapitre 38. Changements de variables dans les intégrales doubles.

Enoncés.

Exercice 3. Domaine limité par quatre paraboles.

Soit D la partie du demi-plan $y > 0$ limitée par les quatre paraboles :

$$P_1 : y^2 = 4x + 4,\ P_2 : y^2 = 2x + 1,$$
$$P_3 : y^2 = 9 - 6x,\ P_4 : y^2 = 4 - 4x,$$

et $f : D \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

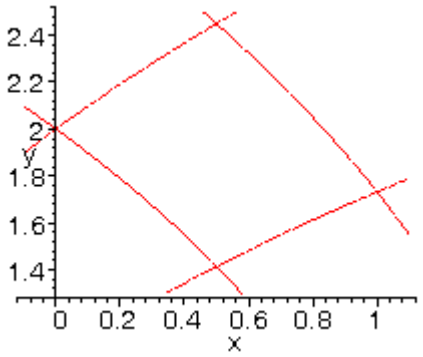
Calculer $I = \iint_D f(x, y)\, dx\, dy$, en utilisant le changement de variables défini par :

$x = u^2 - v^2$
$y = 2uv$
$u > 0, v > 0$.

Solution.

1°/ Domaine D.

Le domaine D est l'espace limité par les quatre arcs de parabole P_1, P_2, P_3, P_4 :
— en haut : P_1, d'équation $y^2 = 4x + 4$,
— en bas : P_2, d'équation $y^2 = 2x + 1$,
— à droite : P_3, d'équation $y^2 = 9 - 6x$,
— à gauche : P_4, d'équation $y^2 = 4 - 4x$.



C'est donc l'ensemble des couples (x, y) de $[0, +\infty[\times [0, +\infty[$ vérifiant :
$2x + 1 \leqslant y^2 \leqslant 4x + 4$ et $4 - 4x \leqslant y^2 \leqslant 9 - 6x$
$(x + 1)^2 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant (x + 2)^2$ et $(x - 2)^2 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant (x - 3)^2$

Les valeurs extrêmes de x sont 0, atteinte pour $y = 2$, et 1, atteinte pour $y = \sqrt{3}$.
Les valeurs extrêmes de y sont $\sqrt{2}$ et $\sqrt{6}$, atteintes pour $x = \dfrac{1}{2}$.

2°/ Changement de variables.

Le changement de variables défini par :

$x = u^2 - v^2$
$y = 2\,u\,v$
$u > 0, v > 0,$

a, pour matrice jacobienne :

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2u & -2v \\ 2v & 2u \end{pmatrix}.$$

Son déterminant est $4\,(u^2 + v^2)$, il est différent de 0 pour $u > 0$ et $v > 0$.

$$dx\,dy = 4\,(u^2 + v^2)\,du\,dv$$

$$x^2 + y^2 = (u^2 + v^2)^2$$

$$\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\,dx\,dy = 8\,u\,v\,du\,dv$$

$$u^2 + v^2 = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$4\,u^2 v^2 = y^2$$

u^2 et v^2 sont solutions de l'équation $X^2 - \sqrt{x^2 + y^2}\,X + \frac{y^2}{4} = 0$, avec $u^2 - v^2 \geqslant 0$.

$(2X - \sqrt{x^2 + y^2})^2 - (x^2 + y^2) + y^2 = 0$
$(2X - \sqrt{x^2 + y^2} - x)(2X - \sqrt{x^2 + y^2} + x) = 0$
$u^2 = \frac{1}{2}(\sqrt{x^2 + y^2} + x)$
$v^2 = \frac{1}{2}(\sqrt{x^2 + y^2} - x)$
$u = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\sqrt{x^2 + y^2} + x}$
$v = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\sqrt{x^2 + y^2} - x}$

Le domaine D est changé en D' défini par :

$y^2 \leqslant 4x + 4 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \leqslant (x+2)^2 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} \leqslant x + 2 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} - x = 2v^2 \leqslant 2 \Leftrightarrow v \leqslant 1.$
$2x + 1 \leqslant y^2 \Leftrightarrow (x+1)^2 \leqslant x^2 + y^2 \Leftrightarrow x + 1 \leqslant \sqrt{x^2 + y^2} \Leftrightarrow 1 \leqslant \sqrt{x^2 + y^2} - x = 2v^2 \Leftrightarrow v \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}.$
$4 - 4x \leqslant y^2 \Leftrightarrow (x-2)^2 \leqslant x^2 + y^2 \Leftrightarrow 2 - x \leqslant \sqrt{x^2 + y^2} \Leftrightarrow 2 \leqslant \sqrt{x^2 + y^2} + x = 2u^2 \Leftrightarrow u \geqslant 1.$
$y^2 \leqslant 9 - 6x \Leftrightarrow x^2 + y^2 \leqslant (x-3)^2 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} \leqslant 3 - x \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} + x = 2u^2 \leqslant 3 \Leftrightarrow u \leqslant$

$\sqrt{\frac{3}{2}}$.

3°/ Calcul de l'intégrale.

L'intégrale s'écrit :

$$\iint_D \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy = 2\int_1^{\sqrt{\frac{3}{2}}} (2u)\,du \times \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 (2v)\,dv = 2\,(\frac{3}{2}-1)(1-\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{\iint_D \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy = \frac{1}{2}}$$

Chapitre 38. Changements de variables dans les intégrales doubles.

Enoncés.

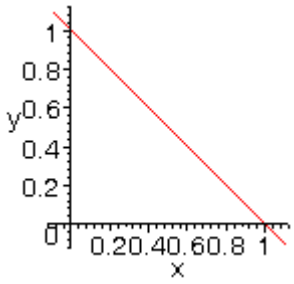
Exercice 4. Domaine triangulaire.

S étant le domaine défini par $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $x + y \leqslant 1$, calculer l'intégrale : $$\iint_S (x+y)^2 e^{x^2-y^2}\, dx\, dy.$$	

Solution.

1°/ Domaine d'intégration.

Le domaine d'intégration est le triangle limité par les axes de coordonnées et la droite d'équation $x + y = 1$.

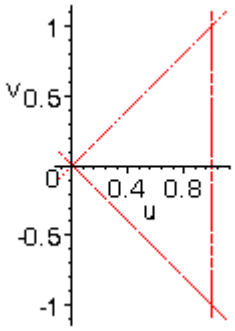


2°/ Changement de variables.

Posons :

$$u = x + y$$
$$v = x - y.$$

▷ Dans le **domaine** S, u varie de 0 à 1.
Pour u fixé entre 0 et 1, v varie de $-u$ à $+u$.



▷ La **matrice jacobienne** du changement de variables est :

$$\frac{D(u,v)}{D(x,y)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Son déterminant est -2.

$$du\, dv = 2\, dx\, dy$$
$$dx\, dy = \frac{1}{2}\, du\, dv$$

▷ La **fonction à intégrer** devient :

$$(x+y)^2 e^{x^2-y^2} = u^2 e^{uv}.$$

3°/ Calcul de l'intégrale.

$$\begin{aligned}
\iint_S (x+y)^2 e^{x^2-y^2}\,dx\,dy &= \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\int_{-u}^{u} u^2 e^{uv}\,dv \right) du \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 u \left(\int_{-u}^{u} u\, e^{uv}\,dv \right) du \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 u \left[e^{uv} \right]_{v=-u}^{v=+u} du \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 u \left[e^{u^2} - e^{-u^2} \right] du \\
&= \frac{1}{4} \left[e^{u^2} + e^{-u^2} \right]_0^1 \\
&= \frac{1}{4}(e + e^{-1} - 2) \\
&= \left(\frac{e^{\frac{1}{2}} - e^{-\frac{1}{2}}}{2} \right)^2 \\
&= \sinh^2 \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Chapitre 38. Changements de variables dans les intégrales doubles.

Enoncés.

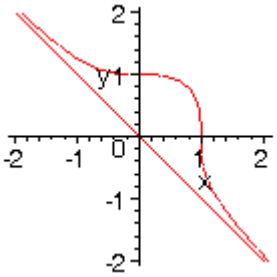
Exercice 5. Domaine limité par une courbe de degré 3.

S étant le domaine défini par $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $x^3 + y^3 \leqslant 1$, calculer l'intégrale : $$\iint_S x^2 y^2 (1 - x^3 - y^3)^{\frac{1}{3}} \, dx \, dy.$$	

Solution.

1°/ Domaine d'intégration.

Le domaine S est la portion du quart de plan $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, comprise entre la courbe d'équation $x^3 + y^3 = 1$ et l'axe des x.
Il est contenu entièrement dans le pavé $[0, 1] \times [0, 1]$.



2°/ Changement de variables.

Posons :

$$u = x^{\frac{3}{2}}$$
$$v = y^{\frac{3}{2}}$$

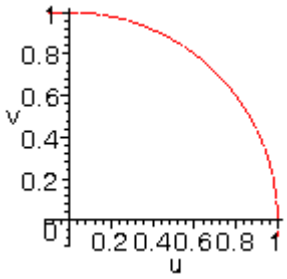
On a :

$$du = \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} dx, \; dx = \frac{2}{3} u^{-\frac{1}{3}} \, du$$
$$dv = \frac{3}{2} y^{\frac{1}{2}} dy, \; dy = \frac{2}{3} v^{-\frac{1}{3}} \, dv$$

$$dx \, dy = \frac{4}{9} u^{-\frac{1}{3}} v^{-\frac{1}{3}} \, du \, dv$$

$$x^2 y^2 (1 - x^3 - y^3)^{\frac{1}{3}} = u^{\frac{4}{3}} v^{\frac{4}{3}} (1 - u^2 - v^2)^{\frac{1}{3}}$$
$$x^2 y^2 (1 - x^3 - y^3)^{\frac{1}{3}} \, dx \, dy = \frac{4}{9} u \, v \, (1 - u^2 - v^2)^{\frac{1}{3}} \, du \, dv$$

Lorsque x varie de 0 à 1, u varie de 0 à 1.
Pour u fixé entre 0 et 1, c'est-à-dire pour x fixé entre 0 et 1, y varie de 0 à $(1 - x^3)^{\frac{1}{3}}$, donc v varie de 0 à $(1 - u^2)^{\frac{1}{2}}$.
Le domaine S devient la portion S' du quart de plan $u \geqslant 0$, $v \geqslant 0$, comprise entre le cercle d'équation $u^2 + v^2 = 1$ et l'axe des u.



L'intégrale devient :

$$\iint_S x^2 y^2 (1 - x^3 - y^3)^{\frac{1}{3}} \, dx \, dy = \frac{4}{9} \iint_{S'} u \, v \, (1 - u^2 - v^2)^{\frac{1}{3}} \, du \, dv.$$

3°/ Calcul de l'intégrale.

a) Changement en coordonnées polaires du plan.

Passons en coordonnées polaires dans le plan (u, v) :

$$u = r \cos \theta$$
$$v = r \sin \theta$$

$$du \, dv = r \, dr \, d\theta$$

$$u \, v \, (1 - u^2 - v^2)^{\frac{1}{3}} = r^2 (1 - r^2)^{\frac{1}{3}} \sin \theta \cos \theta$$
$$u \, v \, (1 - u^2 - v^2)^{\frac{1}{3}} \, du \, dv = r^3 (1 - r^2)^{\frac{1}{3}} \sin \theta \cos \theta \, dr \, d\theta$$

Le domaine S' devient le pavé $[0, 1] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ du plan (r, θ).

L'intégrale devient :

$$\iint_S x^2 y^2 (1 - x^3 - y^3)^{\frac{1}{3}} \, dx \, dy = \frac{4}{9} \int_0^1 r^3 (1 - r^2)^{\frac{1}{3}} \, dr \times \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \cos \theta \, d\theta.$$

b) Calcul de l'intégrale.

Première intégrale.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \cos \theta \, d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\theta \, d\theta = \frac{1}{4} [-\cos 2\theta \,]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}$$

Deuxième intégrale.

Pour calculer l'intégrale $\int_0^1 r^3 (1 - r^2)^{\frac{1}{3}} \, dr$, effectuons le changement de variable $(1 - r^2)^{\frac{1}{3}} = t$.

$$1 - r^2 = t^3$$
$$-2\,r\,dr = 3\,t^2\,dt$$

Pour $r = 0$, $t = 1$.
Pour $r = 1$, $t = 0$.

$$r^3 (1 - r^2)^{\frac{1}{3}}\,dr = -\frac{3}{2}(1 - t^3)\,t^3\,dt$$

$$\int_0^1 r^3 (1 - r^2)^{\frac{1}{3}}\,dr = \frac{3}{2}\int_0^1 (1 - t^3)\,t^3\,dt = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{7}\right) = \frac{9}{56}$$

Rassemblement des résultats.

$$\iint_S x^2 y^2 (1 - x^3 - y^3)^{\frac{1}{3}}\,dx\,dy = \frac{4}{9} \times \frac{9}{56} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{28}$$

$$\boxed{\iint_S x^2 y^2 (1 - x^3 - y^3)^{\frac{1}{3}}\,dx\,dy = \frac{1}{28}}$$

Chapitre 38. Changements de variables dans les intégrales doubles.

Enoncés.

Exercice 6. Mesure d'un compact.

Soit K la partie de $\mathbb{R}^2$ définie par :

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 - x \leqslant 0,\ 0 \leqslant x \leqslant y\}.$$

1°/ Expliquer pourquoi K est une partie compacte mesurable de $\mathbb{R}^2$.

2°/ On considère les deux chemins suivants de $\mathbb{R}^2$:

$$\delta : \left[0,\ \frac{1}{2}\right] \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto (t, t)$$

et

$$g : \left[\frac{\pi}{2},\ \pi\right] \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos t\ ,\ \frac{1}{2}\sin t\right).$$

Calculer $\int_\delta x\,dy$ et $\int_\gamma x\,dy$.

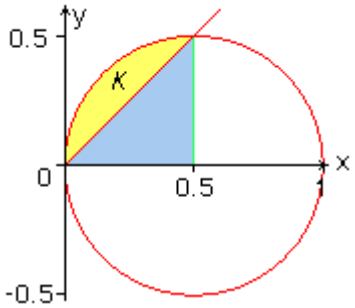
En remarquant que $Fr\,(K) = Im\,\delta \cup Im\,\gamma$, en déduire la mesure de K.

3°/ Calculer directement $\iint_K dx\,dy$ à l'aide d'un changement de variables classique et vérifier le résultat obtenu à la question précédente.

Solution.

1°/ Compact mesurable.

a) K est fermée.



L'application $(x, y) \mapsto x^2 + y^2 - x$ est une application polynomiale de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, elle est donc continue.
L'image réciproque par cette application continue, de l'intervalle fermé $]-\infty, 0]$ de $\mathbb{R}$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$.

L'application $(x, y) \mapsto x - y$ est une application polynomiale de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, elle est donc continue.
L'image réciproque par cette application continue, de l'intervalle fermé $]-\infty, 0]$ de $\mathbb{R}$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$.

L'application $(x, y) \mapsto x$ est une application polynomiale de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, elle est donc continue.
L'image réciproque par cette application continue, de l'intervalle fermé $[0, +\infty[$ de $\mathbb{R}$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$.

Toute intersection de fermés est un fermé.
L'intersection *K* des trois fermés précédents est un fermé de $\mathbb{R}^2$.

b) *K* est compacte.

K est contenu dans la boule fermée bornée de centre $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ de rayon $\frac{1}{2}$, parce que cette boule est l'ensemble des points dont le carré de la distance à $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ est inférieur à $\frac{1}{4}$, soit $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 \leqslant \frac{1}{4}$ ou $x^2 + y^2 - x \leqslant 0$.
Tout fermé contenu dans un compact est compact. Donc *K* est compact.

c) *K* est mesurable.

De tout recouvrement de *K* par des pavés ouverts de diamètre *a* strictement positif, on peut extraire un recouvrement fini, par *n* pavés, *n* fini.
Tout pavé ouvert de diamètre *a* est mesurable (sa mesure est a^2).
Donc *K* est mesurable et sa mesure est inférieure ou égale à $n\,a^2$.

Toute boule est convexe. La boule de centre $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ de rayon $\frac{1}{2}$ est donc convexe.
L'ensemble des (x, y) vérifiant $0 \leqslant x \leqslant y$ est convexe car si l'on a $0 \leqslant x_1 \leqslant y_1$ et $0 \leqslant x_2 \leqslant y_2$, tout point

$(x, y) = (x_1, y_1) + t\,[(x_2, y_2) - (x_1, y_1)]$, $t \in [0, 1]$,

du segment $[(x_1, y_1), (x_2, y_2)]$ vérifie :

$0 \leqslant x = (1 - t)\,x_1 + t\,x_2 \leqslant (1 - t)\,y_1 + t\,y_2 = y$.

L'intersection de deux convexes est un convexe.
Donc *K* est convexe.

On peut aussi se servir de la convexité et de la compacité de *K* pour affirmer que *K* est mesurable.

2°/ Intégrales curvilignes.

Les deux chemins δ et γ sont de classe C^1 parce que leurs applications composantes ont des dérivées de tous ordres.

$\delta'(t) = (1, 1)$

Par définition,

$$\int_\delta x\,dy = \int_0^{\frac{1}{2}} t\,dt = \frac{1}{8}$$

$$\int_\gamma x\,dy = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{1}{2}(1 + \cos t) \times \frac{1}{2}\cos t\,dt = \frac{1}{4}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos t\,dt + \frac{1}{4}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos^2 t\,dt$$

$$\int_\gamma x\,dy = \frac{1}{4}\,[\sin t]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} + \frac{1}{8}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (1 + \cos 2t)\,dt.$$

L'intégrale de $\cos 2t$ va donner la variation d'un $\sin 2t$ pour t variant de $\frac{\pi}{2}$ à π : elle est nulle et il reste

$$\int_\gamma x\,dy = -\frac{1}{4} + \frac{\pi}{16}.$$

L'image de δ est le segment de droite joignant les points (0, 0) et $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

L'image de γ est le quart de cercle de centre $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ et de rayon $\frac{1}{2}$ joignant le point $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ au point (0, 0).

La réunion des deux constitue donc la frontière du compact *K*.
Cette frontière constitue le bord du compact *K*, elle est parcourue en laissant *K* à gauche : le bord est donc orienté dans le sens positif.

$$\int_\delta x\,dy + \int_\gamma x\,dy = \int_{\partial K^+} x\,dy.$$

Comme le compact *K* est convexe, c'est un compact à bord élémentaire.
Le théorème de Green-Riemann s'applique :

$$\int_{\partial K^+} \left(P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy\right) = \iint_K \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\right) dx\,dy$$

$$\int_{\partial K^+} x\,dy = \iint_K dx\,dy$$

On voit donc que la mesure $\iint_K dx\,dy$ de *K* est donnée par la formule :

$$\iint_K dx\,dy = \int_{\partial K^+} x\,dy = \int_\delta x\,dy + \int_\gamma x\,dy = \frac{1}{8} - \frac{1}{4} + \frac{\pi}{16} = \frac{\pi - 2}{16}$$

$$\boxed{\iint_K dx\,dy = \frac{\pi - 2}{16}}$$

3°/ Calcul direct.

La surface du secteur de cercle *K* est égal au quart de la surface du disque de centre $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ et de rayon $\frac{1}{2}$, moins la moitié de la surface du carré de côté $\frac{1}{2}$ (voir figure).

$$\iint_K dx\,dy = \frac{\pi}{16} - \frac{1}{8} = \frac{\pi - 2}{16}$$

Chapitre 38. Changements de variables dans les intégrales doubles.

Enoncés.

Exercice 7. Intégrale de Gauss.

Par changement de variables en coordonnées polaires du plan, calculer l'intégrale

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy.$$

En déduire la valeur de l'intégrale de Gauss $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}\,du$.

Solution.

1°/ Intégration dans R ².

Lorsqu'on fait un changement de variables dans R ², des coordonnées cartésiennes aux coordonnées polaires du plan, il faut :
— remplacer l'élément différentiel $dx\,dy$ par $r\,dr\,d\theta$,
— remplacer la fonction à intégrer $f(x, y)$ par $f(r\cos\theta, r\sin\theta)$,
— remplacer le domaine d'intégration S par son image $\varphi(S)$ par l'application φ : $(x, y) \mapsto (r, \theta)$, avec :

$$r = \sqrt{x^2+y^2},\ \theta = 2\,\mathrm{Arctan}\,\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}$$

en sachant que φ induit un C^1-difféomorphisme du plan moins la demi-droite $]-\infty, 0]$ sur l'ouvert $]0, +\infty[\times]-\pi, \pi[$.
L'intégration pour toutes les valeurs possibles de θ est alors une intégration de $-\pi$ à π.

On a donc :

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \int_0^{+\infty}\int_{-\pi}^{+\pi} e^{-r^2}\,r\,dr\,d\theta.$$

Les variables sont séparées :

$$\int_0^{+\infty}\int_{-\pi}^{+\pi} e^{-r^2}\,r\,dr\,d\theta = \left(\int_0^{+\infty} e^{-r^2}\,r\,dr\right)\left(\int_{-\pi}^{+\pi} d\theta\right)$$

$$= \left(\frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{-t}\, dt \right) \left(\int_{-\pi}^{+\pi} d\theta \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left[-e^{-t} \right]_0^{\infty} \times 2\,\pi = \pi.$$

$$\boxed{\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy = \pi.}$$

2°/ Intégrale de Gauss.

Dans l'intégrale $\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy$, les variables sont séparées et le théorème de Fubini donne :

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx \right) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}\, dy \right)$$

On a donc $\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}\, du \right)^2 = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy = \pi.$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}\, du = \sqrt{\pi}.}$$

Comme la fonction e^{-u^2} est paire, $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}\, du = 2 \int_0^{+\infty} e^{-u^2}\, du$.

Le résultat précédent donne :

$$\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\, du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Chapitre 38. Changements de variables dans les intégrales doubles.

Enoncés.

Exercice 8. Fonction Beta d'Euler.

On définit la fonction Beta d'Euler par l'intégrale

$$B(x, y) = \int_0^1 u^{x-1} (1-u)^{y-1}\, du,\ x \text{ et } y \text{ réel.}$$

1°/ Quel est le domaine de définition de la fonction Beta ?
2°/ La fonction Gamma d'Euler est définie par l'intégrale :

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-u} u^{x-1}\, du.$$

Montrer que l'on a :

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\ \Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

Solution.

1°/ Domaine de définition.

La fonction Beta est défini lorsque l'intégrale est convergente :
— la convergence vers 0 impose $x > 0$,
— la convergence vers 1 impose $y > 0$.

Le domaine de définition de la fonction Beta est donc le quart de plan défini par $x >$ et $y > 0$.

2°/ Relation entre la fonction Beta et la fonction Gamma.

Calculons $\Gamma(x)\ \Gamma(y)$:

$$\Gamma(x)\ \Gamma(y) = \int_0^\infty e^{-u} u^{x-1}\, du \int_0^\infty e^{-v} v^{y-1}\, dv.$$

$$= \iint_D e^{-(u+v)} u^{x-1} v^{y-1}\, du\, dv \text{ (Lebesgue-Fubini),}$$

où D est le quart de plan défini par $u > 0$ et $v > 0$.

Faisons le changement de variable défini par :

$u + v = s$ et $\frac{u}{v} = t$, d'où : $v = \frac{s}{1+t}$ et $u = \frac{s\,t}{1+t}$.

Le jacobien est $J = \frac{D(u,v)}{D(s,t)} = \frac{t}{1+t} \times (-s)\,\frac{1}{(1+t)^2} - \frac{1}{1+t} \times \frac{s}{(1+t)^2} = -\frac{s}{(1+t)^2}$.

Le transformé D_1 du quart de plan D par la transformation, est le quart de plan défini par $s > 0$ et $t > 0$, donc $|J| = \frac{s}{(1+t)^2}$.
Le changement de coordonnées est une homéomorphisme de D sur D_1.
Le théorème du changement de variable dans les intégrales doubles s'applique. Donc :

$$\Gamma(x)\,\Gamma(y) = \iint_{D_1} e^{-s} \left(\frac{s\,t}{1+t}\right)^{x-1} \left(\frac{s}{1+t}\right)^{y-1} \frac{s}{(1+t)^2}\,ds\,dt.$$
$$= \int_0^\infty e^{-s}\,s^{x+y-1}\,ds \times \int_0^\infty \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}}\,dt = \Gamma(x+y) \int_0^\infty \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}}\,dt.$$

Et l'on obtient un résultat intermédiaire :

$$\boxed{\frac{\Gamma(x)\,\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} = \int_0^\infty \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}}\,dt.}$$

Dans l'intégrale, faisons le changement de variable $1 + t = \frac{1}{1-u}$, soit $t = \frac{u}{1-u}$, et $dt = \frac{du}{(1-u)^2}$.

Lorsque $t = 0$, $u = 0$.
Lorsque t tend vers l'infini, u tend vers 1.

L'intégrale est ransformée en :

$$\int_0^\infty \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}}\,dt = \int_0^1 u^{x-1}\,(1-u)^{-x+1}\,(1-u)^{x+y}\,(1-u)^{-2}\,du.$$
$$= \int_0^1 u^{x-1}\,(1-u)^{y-1}\,du = \mathrm{B}(x, y),$$

et le résultat précédent devient :

$$\boxed{\mathrm{B}(x, y) = \frac{\Gamma(x)\,\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.}$$

Application

$$\int_0^1 t^n\,(1-t)^n\,dt = \mathrm{B}(n+1, n+1) = \frac{(n!)^2}{(2n+1)!}$$

En effet, $\Gamma(n+1) = n!$ (Analyse, Chapitre 30, Exercice 5, 2°).

COMPLEMENTS de MATHEMATIQUES et de PHYSIQUE

Deuxième année de Pharmacie

LYON

EXERCICES CORRIGES DE MATHEMATIQUES

Henri IMMEDIATO

1996

Université Claude Bernard - LYON I
2e Année de Pharmacie - 1996
Compléments de Mathématiques et Physique

Séance 1

NOMBRES COMPLEXES

1. Définition.

L'espace vectoriel réel $\mathbb{R}^2$ des couples (x, y) de nombres réels peut être muni d'une addition :

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

et d'une multiplication :

$$(x_1, y_1) \times (x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 - x_2 y_1)$$

Muni de ces opérations, $\mathbb{R}^2$ est un corps noté $\mathbb{C}$. Les éléments de $\mathbb{C}$ s'appellent des ***nombres complexes***. Un nombre complexe de partie réelle x et de partie imaginaire y s'identifie avec le point du plan $\mathbb{R}^2$ de coordonnées x et y. L'axe des x est identifié avec $\mathbb{R}$ et s'appelle l' ***axe réel***. L'axe de y s'appelle l' ***axe imaginaire***. Le nombre complexe z est appelé l' ***affixe*** du point M de coordonnées x et y. Par abus de langage, on parlera aussi du "point z" du plan complexe, au lieu de parler du "point M d'affixe z" du plan.

2. Propriétés.

L'élément unité pour la multiplication est $(1, 0)$.

Un nombre réel x s'identifie au couple $(x, 0)$. L'élément unité $(1, 0)$ est le nombre réel 1.

L'élément $(0, 1)$ est noté i et l'on a :

$$i^2 = i \times i = (0, 1) \times (0, 1) = (-1, 0) = -1$$

Tout nombre complexe (x, y) peut être écrit :

$$(x, y) = x(1, 0) + y(0, 1) = x \times 1 + y \times i = x + iy$$

$$\boxed{(x, y) = x + iy}$$

x est la ***partie réelle*** du nombre complexe $x + iy$.
y est la ***partie imaginaire*** du nombre complexe $x + iy$.

La propriété essentielle du corps $\mathbb{C}$ est que :

> Tout polynôme de degré n à coefficients complexes possède n racines dans le corps $\mathbb{C}$.

On dit que $\mathbb{C}$ est ***algébriquement clos***. De plus, c'est le plus petit corps algébriquement clos contenant $\mathbb{R}$ comme sous-corps : $\mathbb{C}$ est la ***clôture algébrique*** de $\mathbb{R}$.

3. Représentation polaire.

Un point du cercle trigonométrique de centre 0 et de rayon 1, répéré par un angle polaire θ, a pour partie réelle $\cos\theta$ et pour partie imaginaire $\sin\theta$. Le développement en série de Taylor de ces fonctions est :

$$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2} + \ldots + (-1)^n \frac{\theta^{2n}}{2n!} + \ldots$$

$$sin\ \theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{\theta^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots$$

Ces développements sont uniformément convergents dans tout voisinage de 0 et peuvent donc être manipulés termes à termes. On a :

$$cos\ \theta + i\ sin\ \theta = 1 + i\,\theta - \frac{\theta^2}{2} - i\frac{\theta^3}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{\theta^{2n}}{2n!} + (-1)^n \frac{\theta^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots$$

$$= \sum_{n=0}^{n=+\infty} \frac{(i\,\theta)^n}{n!}$$

Par analogie avec l'exponentielle réelle :

$$e^x = \sum_{n=0}^{n=+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

on pose :

$$\boxed{e^{i\,\theta} = cos\ \theta + i\ sin\ \theta} \qquad (\textbf{\textit{Formule d'Euler}})$$

Cette fonction a les mêmes propriétés qu'une exponentielle puisqu'elle est définie par une série identique.

Un point z du plan peut être repéré par ses coordonnées polaires r et θ :

$$x = r\ cos\ \theta$$
$$y = r\ sin\ \theta$$

$$z = x + i\,y = r\ cos\ \theta + i\,r\ sin\ \theta = r\,(cos\ \theta + i\ sin\ \theta) = r\,e^{i\,\theta}$$

$$\boxed{z = r\ e^{i\,\theta}}$$

r s'appelle le ***module*** du nombre complexe z.
θ s'appelle l'***argument*** du nombre complexe z.

Le module d'un nombre complexe est un nombre positif (nul seulement si $z = 0$). L'argument d'un nombre complexe est défini à $2\,k\,\pi$ près. On a, par exemple :

$$i = e^{i\frac{\pi}{2}}$$
$$-1 = e^{i\,\pi}$$

$|\,z - a\,|$ est la distance entre les points d'affixes a et z.

Séance 2

FONCTIONS DE VARIABLE COMPLEXE

1. Définition.

On appelle ici ***fonction de la variable complexe z*** toute application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$. Une fonction $f(z)$ de la variable complexe $z = x + iy$ a une partie réelle et une partie imaginaire qui sont toutes deux des fonctions des deux variables x et y :

$$f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$$

On dit qu'une fonction $f(z)$ est ***dérivable*** en z_0 si le rapport $\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ tend vers un limite finie dans $\mathbb{C}$ lorsque z tend vers z_0.

2. Conditions de Cauchy.

Pour qu'une fonction $f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$ soit dérivable, il faut et il suffit que P et Q vérifient les ***conditions de Cauchy*** :

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}$$

Ces conditions expriment seulement que la fonction $f(z) = P(x, y) + iQ(x, y$ ne dépend pas explicitement de la variable $\overline{z}$ quand on fait le changement de variables :

$$z = x + iy$$
$$\overline{z} = x - iy$$

De ces conditions de Cauchy résulte le fait que, pour qu'une fonction $P(x, y)$ des deux variables réelles x et y soit la partie réelle d'une fonction dérivable $f(z)$, il faut et il suffit que son laplacien ΔP soit nul.

$$\Delta P = \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = 0$$

Dans ce cas, la partie imaginaire Q est elle-même une ***fonction harmonique***, c'est-à-dire dont le laplacien est nul, et on peut la définir, à une constante près, à partir des conditions de Cauchy qui donnent deux équations aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{\partial P}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial x}$$

Les fonctions P et Q sont des ***fonctions harmoniques conjuguées***.

Les lignes $P(x, y) = constante$ sont appelées ***lignes de niveau***. Les lignes $Q(x, y) = constante$ sont appelées ***lignes de champ***.

3. Singularités des fonctions de variable complexe.

Une fonction $f(z)$ de la variable complexe z est dite ***fonction monogène en un point a*** si elle est ***dérivable*** en ce point, c'est-à-dire si le rapport $\frac{f(z)-f(a)}{z-a}$ a une limite finie lorsque z tend vers a en suivant un chemin quelconque dans $\mathbb{C}$. Une fonction monogène en tous points d'un domaine D du plan complexe est dite ***fonction holomorphe dans D***.

Une fonction de variable complexe $f(z)$ holomorphe dans un domaine D entourant un point a peut avoir quatre sortes de points singuliers en a :

- ***singularité artificielle*** : $f(z)$ reste bornée au voisinage de a, mais $\frac{f(z)-f(a)}{z-a}$ n'a pas de limite lorsque z tend vers a.
  Dans ce cas, on peut rendre la fonction $f(z)$ monogène en a en changeant la valeur de $f(a)$.
  Exemple : la fonction égale à z^2 pour $z \neq 0$ et à 1 pour $z = 0$ a une singularité artificielle en 0. Elle est rendue holomorphe dans tout le plan en posant $f(0) = 0$.
  On suppose, la plupart du temps qu'on a éliminé les singularités artificielles.

- ***pôle*** : $f(z)$ non bornée au voisinage de a, mais $\frac{1}{f(z)}$ est holomorphe au voisinage de a.
  Exemple : la fonction $\frac{1}{z-a}$ n'est pas bornée au voisinage de a mais $\frac{1}{f(z)} = z - a$ est holomorphe au voisinage de a. Le point a est un pôle pour la fonction $\frac{1}{z-a}$.
  Si le point a est un pôle pour la fonction $f(z)$, le plus entier positif n pour lequel $(z-a)^n f(z)$ est holomorphe au voisinage de a s'appelle l' ***ordre de multiplicité*** du pôle.
  Exemple : La fonction $\frac{(z-2)(z-3)}{z(z-1)^3}$ a un pôle simple en $z = 0$ et un pôle d'ordre 3 en $z = 1$.

- ***point essentiel*** : a est un point singulier pour $f(z)$ et pour $\frac{1}{f(z)}$, mais f est une fonction uniforme, elle a une seule détermination pour une valeur de z.
  Exemple : la fonction $e^{\frac{1}{z}} = e^{\frac{x}{x^2+y^2}} \times e^{-i\frac{y}{x^2+y^2}}$ a un point essentiel en $z = 0$.

- ***point critique*** : la fonction $f(z)$ ne reprend pas la même valeur quand on suit un chemin faisant un tour autour de a. On dit que $f(z)$ est une ***fonction multiforme*** ou qu'elle a plusieurs ***déterminations*** en un point. On change de détermination en faisant un tour autour du point a.
  Exemple : la fonction $\ln z$ définie par $\ln(\rho e^{i\theta}) = \ln\rho + i\theta$ augmente de $2i\pi$ quand on fait un tour autour du point 0.
  On peut rendre ***uniforme*** une fonction à plusieurs déterminations en pratiquant une ***coupure*** dans le plan complexe. Cette coupure constitue une barrière qu'on peut contourner, mais qu'on ne peut pas franchir. Chaque fois qu'on franchit la coupure, on change de détermination.
  Exemple : la fonction $\ln z$ est rendue uniforme dans le plan complexe par une coupure allant de 0 à l'infini sur l'axe réel. Dans le plan coupé, on choisit une détermination : la fonction $\ln z$ est alors bien définie en tout point du plan et elle est holomorphe dans le plan coupé. La détermination $\ln z = \ln\rho + i\theta$ avec $0 \leq \theta < 2\pi$ est appelée la ***détermination principale du logarithme***.

Remarques sur les singularités.

- On étudie les ***singularités à l'infini*** en faisant le changement de variable $z' = \frac{1}{z}$ et en étudiant les singularités de la fonction pour $z' = 0$.
- Une fonction $f(z)$ peut n'avoir aucune singularité dans un domaine et, cependant, ne pas être holomorphe dans ce domaine. Par exemple, la fonction $\sqrt{z}$ n'a aucun point singulier dans le domaine compris entre deux

cercles de centre 0 et cependant, elle change de détermination quand on fait un tour entourant le point 0 : elle n'est pas holomorphe dans le domaine compris entre les deux cerclces.

Une fonction qui n'a, dans un domaine *D*, qu'un nombre fini de points singuliers qui sont des pôles, est appelée une ***fonction méromorphe*** dans *D*.
Une fonction holomorphe dans tout domaine borné est appelée une ***fonction entière***.
On appelle ***fonction analytique*** dans un domaine *D* toute fonction qui est holomorphe dans *D*, sauf peut-être dans un ensemble dénombrable de points singuliers (pôles, points essentiels, points critiques).

Université Claude Bernard - LYON I
2e Année de Pharmacie - 1996
Compléments de Mathématiques et Physique

Séance 3

INTEGRATION DES FONCTIONS DE VARIABLE COMPLEXE

Les résultats fondamentaux concernant l'intégration des fonctions de variable complexe ont été obtenus par Cauchy au XIX^{e} siècle.

1. La valeur de l'intégrale reste la même quel que soit le chemin emprunté pour aller d'un point à un autre, tant que la fonction est holomorphe : c'est le *théorème de Cauchy*. Il revient au même de dire que l'intégrale le long d'une courbe fermée est nulle si la fonction est holomorphe à l'intérieur du contour d'intégration.

2. Sur toute courbe fermée simple Γ entourant le point a et parcourue dans le sens direct :
$$\int_{(\Gamma)} \frac{dz}{z-a} = 2\,i\,\pi$$
Pour montrer ce résultat, on se ramène à $a = 0$ par un changement de variable et l'intégrale $\int_{(\Gamma)} \frac{dz}{z}$ se calcule en passant aux coordonnées polaires :
$$\int_{(\Gamma)} \frac{dz}{z} = \int_{(\Gamma)} \frac{(x-iy)(dx+idy)}{x^2+y^2} = \int_{(\Gamma)} \frac{x\,dx+y\,dy}{x^2+y^2} + i\int_{(\Gamma)} \frac{x\,dy-y\,dx}{x^2+y^2} = \int_{(\Gamma)} \frac{dr}{r} + i\int_{(\Gamma)} d\theta$$
En un tour sur Γ, θ varie de $2\,\pi$ et $ln\,r$ ne varie pas.

3. Si $f(z)$ est une fonction holomorphe dans un domaine D et sur la courbe frontière Γ de D, et si a est un point intérieur à Γ, on a :
$$f(a) = \frac{1}{2\,i\,\pi} \int_{(\Gamma)} \frac{f(z)}{z-a}\,dz$$
(Γ étant parcourue dans le sens direct). C'est la ***formule de l'intégrale de Cauchy***.

4. Par récurrence, on en déduit que si $f(z)$ est indéfiniment dérivable dans D, sa dérivée d'ordre n en un point a intérieur à D est donnée par :
$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\,i\,\pi} \int_{(\Gamma)} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,dz$$

5. Si la fonction $f(z)$ est holomorphe dans une couronne D comprise entre deux cercles de centre a et de rayons R et R' (avec $R' > R$), ainsi que sur ces deux cercles, on peut développer $f(z)$ en ***série de Laurent*** sous la forme :
$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_n\,(z-a)^n$$
avec
$$c_n = \frac{1}{2\,i\,\pi} \int_{\gamma} \frac{f(s)}{(s-a)^{n+1}}\,ds$$
où γ est un cercle de centre a et de rayon quelconque compris entre R et R'. Le coefficient c_{-1} de $\frac{1}{z-a}$ dans le développement en série de Laurent de $f(z)$ est appelé le ***résidu*** de f au pôle a.

6. Si (C) est un chemin fermé, l'intégrale de $f(z)\,dz$ le long de (C) est égale au produit de $2\,i\,\pi$ par la somme des résidus de $f(z)$ aux pôles à l'intérieur de (C) :

$$\int_{(C)} f(z)\,dz = 2\,i\,\pi \sum_{j} R_j$$

C'est le ***théorème des résidus***.

Séance 4

DISTRIBUTIONS

Définitions.

- On appelle "***fonction de base***" sur $\boldsymbol{R}$, toute fonction $\varphi : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{C}$ indéfiniment dérivable à support borné (le support d'une fonction est le plus petit ensemble fermé en dehors duquel la fonction est nulle). Les fonctions de base sur $\boldsymbol{R}$ forment un espace vectoriel D sur $\boldsymbol{C}$.

  Exemple : la fonction égale à $e^{-\frac{1}{1-x^2}}$ entre -1 et 1 et à 0 en dehors de l'intervalle $[-1 ; 1]$ est indéfiniment dérivable, y compris aux points -1 et 1, et son support est l'intervalle $[-1 ; 1]$: c'est une fonction de base.

- On dit qu' ***une suite de fonctions de base tend vers 0*** si la suite des fonctions tend uniformément vers 0 ainsi que toute suite de dérivées de même ordre.

- On appelle "***distribution***" sur $\boldsymbol{R}$ toute application linéaire et continue de l'espace vectoriel $\boldsymbol{D}$ des fonctions de base dans le corps $\boldsymbol{C}$ des complexes. Le terme "continu" veut dire que si une suite de fonctions de base tend vers 0, alors la suite des images de ces fonctions de base par la distribution est une suite de nombres complexes qui tend vers 0. Les distributions sur $\boldsymbol{R}$ forment un espace vectoriel D' sur $\boldsymbol{C}$.

  Exemples :
  - Toute fonction localement sommable (c'est-à-dire intégrable sur tout ensemble fermé borné) f définit une distribution par

    $$< f , \varphi > = \int f(t)\, \varphi(t)\, dt$$

  - Par exemple, la "***fonction de Heaviside***" $\Upsilon(x)$ égale à 0 pour $x \leq 0$ et à 1 pour $x > 0$ définit la ***distribution de Heaviside*** Υ :

    $$< \Upsilon , \varphi > = \int_0^{\infty} \varphi(t)\, dt$$

  - La distribution définie par la formule :

    $$< \delta , \varphi > = \varphi(0)$$

    est appelée "***distribution de Dirac***".

Propriétés.

- Si α est une fonction indéfiniment dérivable, pas nécessairement à support borné, et T une distribution, on peut définir la distribution αT par

  $$< \alpha T , \varphi > = < T , \alpha \varphi >$$

  puisque $\alpha \varphi$ est une fonction de base, chaque fois que φ est une fonction de base.

- Pour toute distribution T, on peut définir une ***dérivée*** $\frac{dT}{dx}$ par

$$< \frac{dT}{dx} , \varphi > = - < T , \frac{d\varphi}{dx} >.$$

Contrairement aux fonctions, ***une distribution est toujours dérivable***. Comme une fonction peut définir une distribution, on peut se demander quel rapport il y a entre la dérivée au sens des fonctions et la dérivée au sens des distributions. Ce rapport est le suivant : si l'on considère une fonction f dérivable partout sauf en un point x_0 où la fonction présente un saut $\sigma_0 = f(x_0^+) - f(x_0^-)$, la dérivée de f, qui est presque partout définie (définie partout sauf sur un ensemble de mesure nulle), définit une distribution $\left\{\frac{df}{dx}\right\}$ au moyen d'une intégrale ; cette distribution est liée à la distribution dérivée $\frac{df}{dx}$ de la distribution définie par la fonction f par la formule :

$$\frac{df}{dx} = \left\{\frac{df}{dx}\right\} + \sigma_0 \delta.$$

Démonstration :

$$< \frac{df}{dx} , \varphi > = - < f , \frac{d\varphi}{dx} > = - \int f \frac{d\varphi}{dx} dx = - \int_{-\infty}^{x_0} f \frac{d\varphi}{dx} dx - \int_{x_0}^{+\infty} f \frac{d\varphi}{dx} dx$$

Pour chaque morceau d'intégrale, on intègre par parties :

$$- \int_{-\infty}^{x_0} f \frac{d\varphi}{dx} dx = [- f \varphi]_{-\infty}^{x_0^-} + \int_{-\infty}^{x_0} f' \varphi \, dx = - f(x_0^-) \varphi(x_0) + \int_{-\infty}^{x_0} f' \varphi \, dx$$

$$- \int_{x_0}^{+\infty} f \frac{d\varphi}{dx} dx = [- f \varphi]_{x_0^+}^{+\infty} + \int_{x_0}^{+\infty} f' \varphi \, dx = + f(x_0^+) \varphi(x_0) + \int_{x_0}^{+\infty} f' \varphi \, dx$$

Par addition, il vient :

$$- \int f \frac{d\varphi}{dx} dx = [f(x_0^+) - f(x_0^-)] \varphi(x_0) + \int f' \varphi \, dx = < \sigma_0 \delta , \varphi > + < \left\{\frac{df}{dx}\right\}, \varphi >$$

Exemple : soit Υ la distribution de Heaviside, définie par la fonction égale à 0 pour x négatif et à 1 pour x positif. Au point 0, elle présente un saut égal à 1. Sa dérivée au sens des fonctions est presque partout nulle puisque la fonction est constante par intervalles. Sa dérivée au sens des distributions est donc

$$\frac{d\Upsilon}{dx} = \delta.$$

Séance 5

CONVOLUTION

Définition.

Si f et g sont deux fonctions localement sommables, alors la fonction h définie par :

$$h(x) = \int f(x-t)\, g(t)\, dt$$

lorsque l'intégrale existe, est une fonction localement sommable qu'on appelle le "***produit de convolution***" de f et g et qu'on note :

$$h = f \star g$$

Propriétés.

- $f \star g = g \star f$. Le produit de convolution est commutatif.
  En effet, si l'on pose $x - t = u$, on a $du = -dt$ et :
  $$(f \star g)(x) = -\int_{+\infty}^{-\infty} f(u)\, g(x-u)\, du = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\, g(x-u)\, du = (g \star f)(x)$$
- On démontre que si f ou g est continue, $f \star g$ est continue (démonstration pas évidente).
- Si les deux fonctions f et g ont leurs supports dans l'intervalle $[\,0\,;+\infty\,[$, $f \star g$ existe et a son support dans $[\,0\,;+\infty\,[$. On a alors :

  $$(f \star g)(x) = Y(x) \int_0^x f(x-t)\, g(t)\, dt$$

  Cette propriété se démontre en considérant successivement les deux cas $x \le 0$ et $x \ge 0$.

Définitions.

- Le ***support d'une distribution*** est le plus petit ensemble fermé en dehors duquel la distribution est nulle. Ceci veut dire que si une fonction de base φ a son support en dehors du support de la distribution T, on a
  $$< T , \varphi > = 0.$$

- Si S et T sont deux distributions sur R, on appelle "***produit de convolution***" de S et T, la distribution, lorsqu'elle existe, définie par :

  $$< S \star T , \varphi > = < S_x , < T_y , \varphi(x+y) > >$$

  Condition d'existence : les supports A et B de S et T sont tels que, pour tout $x \in A$ et pour tout $y \in B$:

  $$x + y \text{ borné} \Leftrightarrow x \text{ borné et } y \text{ borné}$$

Propriétés.

- Si le produit de convolution existe, il est commutatif :

$$S \star T = T \star S$$

- Si S ou T a un support borné, $S \star T$ existe.
- Si S et T ont toutes deux leur support borné à gauche, leur produit de convolution existe et a son support borné à gauche. Les distributions à support borné à gauche forment une algèbre (espace vectoriel muni d'un produit lui donnant une structure d'anneau) appelée l' ***algèbre de convolution*** $\boldsymbol{D'_+}$**.**
- La distribution de Dirac δ est l'élément unité du produit de convolution :

$$T \star \delta = \delta \star T = T$$

- Pour tout entier $m \geq 1$, $\delta^{(m)} \star T$ existe et est égal à la dérivée m-ième de T au sens des distributions :

$$\delta^{(m)} \star T = \frac{d^m T}{dx^m}$$

- Les résultats de l'exercice 3 de la séance 4 s'écrivent :

$$(\delta' - \lambda\,\delta) \star \Upsilon(x)\, e^{\lambda x} = \delta$$

$$(\delta'' + \omega^2\,\delta) \star \frac{\Upsilon(x)\sin\omega x}{\omega} = \delta$$

$$\delta^{(m)} \star \frac{\Upsilon(x)\, x^{m-1}}{(m-1)!} = \delta$$

- Soit Γ le cercle trigonométrique dans $\boldsymbol{R}^2$, toute distribution sur Γ a son support borné. Le produit de convolution de deux distributions sur Γ existe toujours et les distributions sur Γ forment une algèbre de convolution $D'(\Gamma)$.

Séance 6

SERIES DE FOURIER

Série de Fourier d'une fonction périodique.

Si f est une fonction périodique de période T, on appelle ***série de Fourier*** de f la série :

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}^*} c_n(f)\, e^{n i x}$$

où les ***coefficients de Fourier*** de f sont donnés par la formule :

$$c_n(f) = \frac{1}{T} \int_a^{a+T} e^{-n i t}\, f(t)\, dt \qquad (a \text{ réel quelconque})$$

La série de Fourier de f existe dès que la fonction f est intégrable sur tout intervalle de longueur finie.

En tout point où f a une limite à droite $f(x+0)$ et une limite à gauche $f(x-0)$, la somme de la série de Fourier de f est donnée par la formule :

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}^*} c_n(f)\, e^{n i x} = \frac{1}{2} [\, f(x-0) + f(x+0) \,]$$

En particulier, en un point où f est continue, $f(x)$ est égal à la somme de sa série de Fourier :

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} c_n(f)\, e^{n i x}$$

Les fonctions de carré sommable sur une période, c'est-à-dire telles que l'intégrale $\int_a^{a+T} |f(t)|^2\, dt$ existe, vérifient la formule de Parseval-Plancherel :

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}^*} |c_n(f)|^2 = \frac{1}{T} \int_a^{a+T} |f(t)|^2\, dt$$

Si le produit de convolution $f \star g$ existe, les coefficients de Fourier du produit de convolution sont donnés par :

$$c_n(f \star g) = T\, c_n(f) \times c_n(g)$$

Série de Fourier d'une distribution périodique.

Une distribution T sur $\mathbb{R}$ est dite ***distribution périodique*** de période T si elle est égale à sa translatée par T :

$$\delta_T \star T = T$$

Les distributions périodiques de période T s'identifient aux distributions sur le cercle Γ de longueur T dans $\mathbb{R}^2$. Elles forment une algèbre de convolution $D'(\Gamma)$. Dans cette algèbre de convolution, l'élément unité δ est identifié à la distribution $\sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \delta_{nT}$ sur $\mathbb{R}$ ("***peigne*** **de Dirac**).

Comme le cercle Γ est borné, toute fonction indéfiniment dérivable de l'abscisse curviligne s (définie à un multiple entier près de la période) est une fonction de base sur Γ : les fonctions $e^{n i \omega s}$ sont des fonctions de bases sur Γ.

A une distribution T de $D'(\Gamma)$, on peut associer sa ***série de Fourier*** :

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}^*} c_n(T)\, e^{n i \omega x}$$

où les coefficients de Fourier de T sont donnés par la formule :

$$c_n(T) = \frac{1}{T} < T, e^{-n i \omega x} >$$

avec $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

Pour une distribution définie par une fonction périodique localement sommable, on retrouve la formule donnant les coefficients de Fourier de la fonction, l'intégrale s'étendant à un intervalle d'une période.

Les séries de Fourier des distributions sur Γ possèdent les propriétés essentielles des séries de Fourier de fonctions périodiques de période T. Notamment, les coefficients de Fourier d'un produit de convolution sont donnés par :

$$c_n(T \star S) = T\, c_n(T)\, c_n(S)$$

Il y a cependant des différences importantes avec les séries de Fourier de fonctions :

- La série de Fourier d'une distribution T sur Γ (où d'une distribution périodique sur $\mathbb{R}$) converge ***toujours*** vers cette distribution : une distribution est toujours égale à la somme de sa série de Fourier. En particulier, sur $\mathbb{R}$:

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \delta_{nT} = \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \frac{1}{T} e^{n i \omega x} = \frac{1}{T} \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} e^{n i \omega x}$$

- La dérivation terme à terme d'une série de Fourier de distribution de $D'(\Gamma)$ est toujours une opération légitime :

$$\frac{d^m T}{dx^m} = \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} c_n(T)\,(i n \omega)^m\, e^{n i \omega x}$$

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \delta_{nT}{}^{(m)} = \frac{1}{T} \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} (i n \omega)^m\, e^{n i \omega x}$$

- Pour qu'une série trigonométrique $\sum_{n \in \mathbb{Z}^*} c_n\, e^{n i \omega x}$ converge vers une distribution sur Γ, il faut et il suffit que la suite des $|c_n|$ soit majorée par une puissance de n quand n tend vers l'infini.

Université Claude Bernard - LYON I
2e Année de Pharmacie - 1996
Compléments de Mathématiques et Physique

Séance 7

TRANSFORMATION DE FOURIER

Transformée de Fourier d'une fonction.

La transformation de Fourier d'une fonction, telle qu'elle a été définie plus haut par la formule :

$$\mathsf{F}\, f(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi\lambda t}\, f(t)\, dt$$

peut s'appliquer à toute fonction intégrable sur R. Les fonctions intégrables sur R ne sont qu'une classe particulière de fonctions localement sommables. Elles définissent donc des distributions particulières : ces distributions régulières, définies par la formule

$$< f, \varphi > = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, \varphi(t)\, dt$$

peuvent s'appliquer, en fait, même à des fonctions φ dont le support n'est pas borné : il suffit que les fonctions φ décroissent à l'infini plus vite que n'importe quelle puissance de $\frac{1}{t}$.

De telles fonctions φ, qui ont les mêmes propriétés que les fonctions de base à l'exception du support borné, s'appellent des ***fonctions à décroissance rapide***. Elles forment un espace vectoriel complexe S contenant l'espace vectoriel D des fonctions de base. Les fonctions à décroissance rapide sont elles-mêmes des fonctions intégrables et, de ce fait, possèdent une transformée de Fourier.

La transformée de Fourier $\mathsf{F}f$ d'une fonction f possède les propriétés suivantes :

1. $|\mathsf{F}f(\lambda)| \leq \int |f(x)|\, dx$
2. $\mathsf{F}f(\lambda)$ tend vers 0 si λ tend vers l'infini.
3. Si f est une fonction m fois continûment dérivable, on a :
   - $(2i\pi\lambda)^m\, \mathsf{F}f = \mathsf{F}f^{(m)}$
   - $|2i\pi\lambda|^m\, |\mathsf{F}f| \leq \int |f^{(m)}(x)|\, dx$
4. Si la fonction $x^m f(x)$ est intégrable, la transformée de Fourier $\mathsf{F}f$ est m fois continûment dérivable et l'on a :
   $$\mathsf{F}[(-2i\pi x)^m f(x)] = (\mathsf{F}f)^{(m)}$$
5. Pour tout réel k différent de 0 :
   $$\mathsf{F}[f(kx)] = \frac{1}{|k|}(\mathsf{F}f)\left(\frac{\lambda}{k}\right)$$
   En particulier, pour $k = -1$:
   $$\mathsf{F}[f(-x)] = (\mathsf{F}f)(-\lambda)$$
   Il en résulte que si f est paire, $\mathsf{F}f$ est paire aussi, et si f est impaire, $\mathsf{F}f$ est impaire aussi. La transformation de Fourier conserve la parité.
6. La transformation de Fourier conjuguée $\overline{\mathsf{F}}$ est définie par $\overline{\mathsf{F}}f(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2i\pi\lambda t}\, f(t)\, dt$. Le nombre complexe $\overline{\mathsf{F}}f(\lambda)$ est le conjugué du nombre complexe $\mathsf{F}f(\lambda)$ si la fonction $f(x)$ est réelle.

Des propriétés 3 et 4, il résulte que la transformée de Fourier d'une fonction à décroissance rapide est une fonction à décroissance rapide.

Transformation de Fourier des distributions.

Les distributions qui sont définies sur les fonctions à décroissance rapide s'appellent les *distributions tempérées*. Elles forment un espace vectoriel complexe $\mathcal{S}'$ qui est contenu dans l'espace vectoriel $\mathcal{D}'$ des distributions sur $\mathbb{R}$.

Exemples :

- Toutes les distributions à support borné sont des distributions tempérées.
- Les fonctions bornées sont tempérées.
- Les fonctions localement sommables à croissance lente sont tempérées.
- Le produit d'un polynôme par une distribution tempérée est une distribution tempérée.

On peut définir la transformée de Fourier d'une distribution tempérée par la formule :

$$< \mathcal{F} T , \varphi > = < T , \mathcal{F} \varphi >$$

La transformation de Fourier conjuguée $\overline{\mathcal{F}}$ est définie par la formule :

$$< \overline{\mathcal{F}} T , \varphi > = < T , \overline{\mathcal{F}} \varphi >$$

Propriétés de la transformation de Fourier.

1. $\mathcal{F} T$ et $\overline{\mathcal{F}} T$ sont des distributions tempérées.
2. Si T est une distribution à support borné, son image $\mathcal{F} T$ par la transformation de Fourier est une fonction prolongeable pour les valeurs complexes de λ en une fonction entière $V(\lambda)$ donnée par la formule :
$$V(\lambda) = < U_x , e^{-2 i \pi \lambda x} >$$
3. $\mathcal{F}[\delta] = 1$
   $\mathcal{F}[\delta'] = 2 i \pi \lambda$
   $\mathcal{F}[\delta^{(m)}] = (2 i \pi \lambda)^m$
   $\mathcal{F}[\delta_a] = e^{-2 i \pi \lambda a}$
   $$\mathcal{F}\left[\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \delta_k \right] = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \delta_k$$
   $\mathcal{F}[T^{(m)}] = (2 i \pi \lambda)^m \mathcal{F} T$
   $\mathcal{F}[(-2 i \pi x)^m T] = (\mathcal{F} T)^{(m)}$
4. $\mathcal{F} 1 = \overline{\mathcal{F}} 1 = \delta$
5. **Formule de réciprocité** :
   - Pour toute fonction à décroissance rapide φ : $\overline{\mathcal{F}}\ \mathcal{F}\ \varphi = \mathcal{F}\ \overline{\mathcal{F}}\ \varphi = \varphi$
   - Pour toute distribution tempérée T : $\overline{\mathcal{F}}\ \mathcal{F}\ T = \mathcal{F}\ \overline{\mathcal{F}} T = T$
     Corollaire : $\mathcal{F} T = 0 \Leftrightarrow T = 0$
6. **Formule de Parseval-Plancherel** :
   Si f et g sont des fonctions de carré intégrable, leurs images par la transformation de Fourier sont des fonctions de carré intégrable et on a :
   $$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 \, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |\mathcal{F} f(\lambda)|^2 \, d\lambda$$
   $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \, \overline{g(x)} \, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F} f(\lambda) \, \overline{\mathcal{F} g(\lambda)} \, d\lambda$$
7. **Formule sommatoire de Poisson** :
   Si φ est une fonction à décroissance rapide :
   $$\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \varphi(k) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \mathcal{F} \varphi(k)$$

Transformation de Fourier et convolution.

La propriété fondamentale est que la transformation de Fourier transforme un produit de convolution en multiplication et une multiplication en produit de convolution :

$$\mathcal{F}(S \star T) = \mathcal{F}S \,.\, \mathcal{F}T$$
$$\overline{\mathcal{F}}(S \star T) = \overline{\mathcal{F}}S \,.\, \overline{\mathcal{F}}T$$
$$\mathcal{F}(S \,.\, T) = \mathcal{F}S \star \mathcal{F}T$$
$$\overline{\mathcal{F}}(S \,.\, T) = \overline{\mathcal{F}}S \star \overline{\mathcal{F}}T$$

Université Claude Bernard - LYON I
2e Année de Pharmacie - 1996
Compléments de Mathématiques et Physique

Séance 1.

NOMBRES COMPLEXES

Exercice 1.

Soit z l'affixe d'un point M du plan complexe.

1°/ Montrez que tous les points M d'affixe z du plan complexe vérifiant la relation

$$\left| \frac{z+1}{z-1} \right| = k,$$

où k est une constante réelle différente de 1, sont sur un même cercle (C_k) dont on calculera la position du centre et le rayon.

2°/ Comparez les cercles (C_k) et $(C_{\frac{1}{k}})$.

3°/ Quel est l'ensemble des points M d'affixe z du plan complexe vérifiant la relation

$$\left| \frac{z+1}{z-1} \right| = 1$$

3°/ Dessiner les ensembles de points obtenus pour les valeurs de k égales à 0 , $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$, 1 , 2 , 3 , ∞.

Exercice 2

1°/ Déterminez les nombres complexes solutions de l'équation : $z^4 = 1$.

2°/ Déterminez sous forme trigonométrique les solutions de l'équation : $z^4 = 8 (1 - i \sqrt{3})$.

3°/ Soit $a = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$. Vérifiez : $a^4 = 8 (1 - i \sqrt{3})$. En déduire sous forme algébrique les résultats du 2°/.

4°/ Des questions 2°/ et 3°/, déduire les valeurs exactes de $cos \frac{11\pi}{12}$ et $sin \frac{11\pi}{12}$.

Exercice 3

λ, α, β étant trois constantes données réelles ou complexes, montrez que les solutions de l'équation :

$$\lambda^n (z - \alpha)^n - (z - \beta)^n = 0$$

sont toutes sur une même circonférence. Calculez la position du centre et le rayon de cette circonférence.

Exercice 4

Soit $z \in \mathrm{C}$, $z = x + i\,y$, $(x\,,y) \in \mathrm{R}^2$, $P(z) = z^3 - 3\,i\,z^2 - (3 - i)\,z + 2 + 2\,i$.

1°/ Vérifiez que l'équation $P(z) = 0$ admet une solution réelle z_0 et une solution imaginaire pure z_1. Résoudre l'équation $P(z) = 0$. Calculez le module et l'argument des solutions z_0 , z_1 , z_2.

2°/ Dans le plan complexe, soient M_0 , M_1 , M_2 , les points d'affixes respectives z_0 , z_1 , z_2. Calculez $Z = \dfrac{z_2 - z_0}{z_1 - z_0}$. Démontrez que $|Z| = 1$. Précisez la nature du triangle $(M_0\,, M_1\,, M_2)$.

Exercice 5

Soit z l'affixe d'un point M du plan complexe.

1°/ Quel est l'ensemble des points M vérifiant la relation

$$|z + 1| + |z - 1| = k,$$

k étant une constante réelle ?

2°/ Quelle condition doit vérifier k pour que le problème ait une solution ?

3°/ Ecrire l'équation de l'ensemble des points M vérifiant la relation donnée.

4°/ Dessiner les ensembles de points obtenus pour les valeurs de k égales à 2 , 3 , 4 , 5.

Exercice 6

Soit z l'affixe d'un point M du plan complexe.

1°/ Quel est l'ensemble des points M vérifiant la relation

$$|z + 1| - |z - 1| = k,$$

k étant une constante réelle ?

2°/ Quelle condition doit vérifier k pour que le problème ait une solution ?

3°/ Ecrire l'équation de l'ensemble des points M vérifiant la relation donnée.

4°/ Dessiner les ensembles de points obtenus pour les valeurs de k égales à -2 , -1 , 0 , 1 , 2.

Exercice 7

Soit z l'affixe d'un point M du plan complexe.

1°/ Quel est l'ensemble des points M vérifiant la relation

$$|z + 1| \times |z - 1| = k,$$

k étant une constante réelle ?

2°/ Quelle condition doit vérifier k pour que le problème ait une solution ?

3°/ Ecrire l'équation de l'ensemble des points M vérifiant la relation donnée.

4°/ Dessiner les ensembles de points obtenus pour les valeurs de k égales à 0 , $\dfrac{1}{3}$, $\dfrac{1}{2}$, 1 , $\dfrac{3}{2}$, 2 , 3.

Séance 2.

FONCTIONS DE VARIABLE COMPLEXE

Exercice 1.

On considère la fonction de deux variables réelles x et y : $P(x,y) = \frac{x}{2}\left(1 + \frac{1}{x^2+y^2}\right)$.

1°/ Montrez que $P(x,y)$ est la partie réelle d'une fonction analytique $f(z)$ de la variable complexe $z = x + iy$. Calculez la fonction $f(z)$ vérifiant $f(1) = 1$.

2°/ Soit (C_k) l'ensemble des points du plan complexe dont l'affixe z vérifie la relation $\left|\frac{z-1}{z+1}\right| = k$. Montrez que, pour $k \neq 1$, (C_k) est un cercle dont on calculera la position du centre et le rayon. Etudiez le cas particulier $k = 2$. Que se passe-t-il lorsque k est égal à 1 ?

Pour un point m de (C_k), on pose $Z = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$.

a) Calculez $\left|\frac{Z-1}{Z+1}\right|$ en fonction de k.

b) Montrez que, lorsque le point m d'affixe z parcourt (C_k), le point M d'affixe Z parcourt, pour $k \neq 1$, un cercle (D_k) dont on calculera la position du centre et le rayon ?

c) Montrez que le cercle (D_k) passe par le centre du cercle (C_k).

Exercice 2.

Soient a et b deux constantes réelles différentes. On considère les deux fonctions des variables réelles x et y :

$$P(x,y) = \frac{(x-a)(x-b)+y^2}{(x-b)^2+y^2} \quad \text{et} \quad Q(x,y) = \frac{(a-b)\,y}{(x-b)^2+y^2}$$

1°/ Montrez que $P(x,y) + i\,Q(x,y)$ est une fonction analytique $f(z)$ de la variable complexe $z = x + iy$.

2°/ Etudiez les lignes de niveau $P(x,y) = constante$ et les lignes de champ $Q(x,y) = constante$ du potentiel complexe $f(z)$. Représentez graphiquement les courbes correspondant aux valeurs $-2, -1, 0, 1, 2$ des constantes.

Exercice 3

On considère la fonction : $Arc\ tg\ z = \frac{1}{2\,i}\ ln\ \frac{1+i\,z}{1-i\,z}$.

1°/ Déterminez les points singuliers de la fonction *Arc tg z*.

2°/ Comment peut-on rendre uniforme la fonction *Arc tg z* ?

3°/ La fonction *Arc tg z* ayant pour valeur 0 au point $z_0 = 0$, trouver sa valeur au point $z_1 = 1 + i$, lorsqu'on passe de z_0 à z_1 par un chemin rectiligne.

Exercice 4

On considère la fonction : $Arc\ cos\ z = \frac{1}{i}\ ln\ (\ z + \sqrt{z^2 - 1}\ )$.

1°/ Déterminez les points singuliers de la fonction *Arc cos z*.

2°/ Comment peut-on rendre uniforme la fonction *Arc cos z* ?

3°/ La fonction *Arc cos z* ayant pour valeur $\frac{\pi}{2}$ au point $z_0 = 0$, trouver sa valeur au point $z_1 = 2$, lorsqu'on passe de z_0 à z_1 par un demi-cercle (Γ) de centre 1 et d'ordonnées positives.

Séance 3

INTEGRATION DES FONCTIONS DE VARIABLE COMPLEXE

Exercice 1

1°/ Calculer l'intégrale $\int_{(C)} \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z} \right) dz$, étendue au cercle trigonométrique *(C)* de centre *O* (0 ; 0) et de rayon 1 parcouru dans le sens direct.

2°/ Calculer l'intégrale $\int_{(C)} \frac{z-1}{z+1}\, dz$, étendue au cercle *(C)* de centre *A* (− 1; 0) et de rayon 1 parcouru dans le sens direct.

3°/ Calculer l'intégrale $\int_{(C)} \left(\frac{z-1}{z+1} \right)^2 dz$, étendue au cercle *(C)* de centre *A* (− 1; 0) et de rayon 1 parcouru dans le sens direct.

Exercice 2

Calculer l'intégrale $\frac{1}{2\,i\,\pi} \int_{(C)} \frac{(z+a)\,e^z}{z^4}\, dz$, étendue au cercle trigonométrique *(C)* de centre *O* (0 ; 0) et de rayon 1 parcouru dans le sens direct.

Exercice 3

Calculer l'intégrale $\int_0^{\pi} \frac{\cos 3x}{2+\cos x}\, dx$

Exercice 4

Calculer l'intégrale $\int_0^1 \frac{dx}{(x+2)\sqrt[5]{x^3\,(1-x)^2}}$

Séance 4

DISTRIBUTIONS

Exercice 1

Soit T une distribution sur R. Montrez les propriétés suivantes :

1°/ $x\,T = 0 \Leftrightarrow (\exists\, c \in C)\ (T = c\,\delta)$

2°/ Pour que la dérivée de T soit nulle, il faut et il suffit qu'il existe un nombre complexe c vérifiant

$$T = c\,1,$$

où 1 est la distribution définie par $1\,(\varphi) = \int \varphi\,(x)\,dx$.

Exercice 2

Trouver la limite, quand h tend vers 0, dans l'espace D' des distributions sur R, de $\dfrac{\delta_h - \delta_{-h}}{2h}$.

Exercice 3

$\Upsilon(x)$ désignant la fonction de Heaviside, calculer, au sens des distributions :

1°/ $\left(\dfrac{d}{dx} - \lambda\right) \Upsilon(x)\, e^{\lambda x}$

2°/ $\left(\dfrac{d^2}{dx^2} + \omega^2\right) \dfrac{\Upsilon(x)\ \sin \omega x}{\omega}$

3°/ $\dfrac{d^m}{dx^m} \dfrac{\Upsilon(x)\, x^{m-1}}{(m-1)!}$ pour m entier ≥ 1

Séance 5

CONVOLUTION

Exercice 1

Soit $\Upsilon(x)$ la fonction de Heaviside.

1°/ Calculez le produit de convolution $\Upsilon(x)\, e^{\lambda x} \star \Upsilon(x)\, e^{\mu x}$.

2°/ Calculez le produit de convolution $\Upsilon(x)\, \sin x \star \Upsilon(x)\, sh\, 2x$.

Exercice 2

Soit δ la distribution de Dirac, $\Upsilon(x)$ la fonction de Heaviside, $\mathcal{D}'_+$ l'espace des distributions sur $\mathbb{R}$ à support borné à gauche. Trouvez les inverses dans $\mathcal{D}'_+$ des distributions suivantes :

1°/ $\delta'' - 5\,\delta' + 6\,\delta$

2°/ $\Upsilon + \delta''$

3°/ $\Upsilon(x)\, e^{x} + \delta'$

Exercice 3

Résoudre l'équation intégrale $\int_0^x (x-t)\cos(x-t)\, f(t)\, dt = g(x)$, où g est une fonction donnée et f une fonction inconnue, les deux ayant leur support dans l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

Exercice 4

On désigne par $f(x)$ la solution de l'équation différentielle

$$y''' + 2y'' + y' + 2y = -10 \cos x$$

satisfaisant aux conditions initiales :

$$y(0) = 0, \qquad y'(0) = 0 \qquad y''(0) = -4$$

On pose $F(x) = \Upsilon(x)\, f(x)$, où $\Upsilon(x)$ est la fonction de Heaviside. Ecrire l'équation différentielle satisfaite par $F(x)$ au sens des distributions. Déterminer alors $F(x)$ en utilisant le calcul symbolique dans $\mathcal{D}'_+$.

Université Claude Bernard - LYON I
2e Année de Pharmacie - 1996
Compléments de Mathématiques et Physique

Séance 6

SERIES DE FOURIER

Exercice 1

1°/ Calculez la série de Fourier de la fonction $f(x)$ égale à x dans l'intervalle $-\pi < x < \pi$, et périodique de période 2π. Calculez $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ et $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

2°/ Calculez la série de Fourier de la fonction $g(x)$ égale à x^3 dans l'intervalle $-\pi < x < \pi$, et périodique de période 2π. En déduire la valeur de $\sin x - \frac{\sin 2x}{2^3} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{n^3} + \ldots$.

3°/ Montrez que l'on peut déduire les développement trouvés de celui de $\delta_{(\pi)}$ sur le cercle Γ de longueur 2π.

Exercice 2

1°/ Soit T une distribution périodique de période T. Montrez que sa série de Fourier peut se mettre sous la forme :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos \frac{2\pi n x}{T} + \sum_{n=0}^{\infty} b_n \sin \frac{2\pi n x}{T}$$

avec des coefficients a_n et b_n que l'on explicitera.

Dans les deux questions suivantes, on pose, pour une fonction φ, $\varphi_1(x) = \varphi(-x)$

2°/ On dit qu'une distribution T est ***impaire*** si l'on a $\langle T, \varphi_1 \rangle = -\langle T, \varphi \rangle$ pour toute fonction de base $\varphi \in D$. Montrez que la série de Fourier d'une distribution impaire de période T se réduit à une série de sinus.

3°/ On dit qu'une distribution T est ***paire*** si l'on a $\langle T, \varphi_1 \rangle = \langle T, \varphi \rangle$ pour toute fonction de base $\varphi \in D$. Montrez que la série de Fourier d'une distribution paire de période T se réduit à une série de cosinus.

Exercice 3

Soient f et g deux fonctions périodiques de période T, de carré intégrable sur une période (espace $L^2(T)$).

1°/ Montrez que

$$h(x) = \frac{1}{T} \int_0^T f(x+t)\, g(t)\, dt$$

est aussi une fonction périodique de période T, de carré intégrable sur une période.

2°/ Calculez les coefficients de Fourier $c_n(h)$ de h en fonction des coefficients de Fourier $c_n(f)$ et $c_n(g)$ de f et g.

3°/ En admettant que pour tout x, la série de Fourier de $h(x)$ est convergente et a pour somme $h(x)$, montrez les formules :

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(f)\, \overline{c_k(g)} = \frac{1}{T} \int_a^{a+T} f(x)\, \overline{g(x)}\, dx$$

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k(f)|^2 = \frac{1}{T} \int_a^{a+T} |f(x)|^2\, dx$$

Séance 7

TRANSFORMATION DE FOURIER

Exercice 1

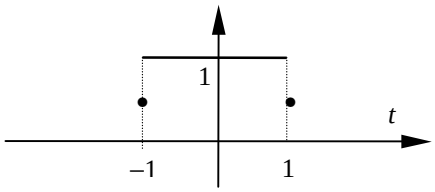
1°/ Soient f et g deux fonctions intégrables (c'est-à-dire appartenant à l'espace L_1) définie sur R. Montrez que le produit de convolution défini par : $h(x) = f \star g = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)\, g(y)\, dy$ est aussi dans L_1 et que l'on a : $\| h \|_{L_1} \leq \| f \|_{L_1} \times \| g \|_{L_1}$, la norme de convergence en moyenne de L_1 étant définie, pour une fonction f, par $\| f \|_{L_1} = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\, dt$.

2°/ Montrez directement la formule : $\mathcal{F} h = \mathcal{F} f \,.\, \mathcal{F} g$, la transformée de Fourier $\mathcal{F} f$ d'une fonction $f \in L_1$ étant définie par : $\mathcal{F}(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi\lambda u} f(u)\, du$.

Exercice 2

Calculez la transformée de Fourier de la fonction $f(t)$ définie par

$$f(f) = \begin{cases} 1 & \text{pour} \quad |t| < 1 \\ \frac{1}{2} & \text{pour} \quad |t| = 1 \\ 0 & \text{pour} \quad |t| > 1 \end{cases}$$



Formule de réciprocité.

Exercice 3

Calculez l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|} \cos x\, t \; dt$. En déduire la valeur de l'intégrale $\int_{0}^{+\infty} \frac{\cos xt}{1+t^2} \; dt$.

Université Claude Bernard - LYON I
2e Année de Pharmacie - 1996
Compléments de Mathématiques et Physique

Séance 1.

NOMBRES COMPLEXES

Exercice 1.

Soit z l'affixe d'un point M du plan complexe.

1°/ Montrez que tous les points M d'affixe z du plan complexe vérifiant la relation

$$\left| \frac{z+1}{z-1} \right| = k,$$

où k est une constante réelle différente de 1, sont sur un même cercle (C_k) dont on calculera la position du centre et le rayon.

2°/ Comparez les cercles (C_k) et $(C_{\frac{1}{k}})$.

3°/ Quel est l'ensemble des points M d'affixe z du plan complexe vérifiant la relation

$$\left| \frac{z+1}{z-1} \right| = 1$$

3°/ Dessiner les ensembles de points obtenus pour les valeurs de k égales à 0 , $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$, 1 , 2 , 3 , ∞.

Corrigé de l'Exercice 1

1°/ Ensemble des points dont le rapport des distances à deux points fixes est une constante.

Comme le module d'un rapport est aussi le rapport des modules du numérateur et du dénominateur, la relation

$$\left| \frac{z+1}{z-1} \right| = k$$

peut être écrite aussi :

$$\frac{|z+1|}{|z-1|} = k$$

Comme un module de nombre complexe est un nombre positif ou nul, le problème n'aura de sens que si la constante réelle k est positive ou nulle ou infinie.

Condition d'existence : $k \geq 0$

On sait (cours de Terminale) que ***l'ensemble des points dont le rapport des distances à deux points fixes est une constante positive est un cercle*** du faisceau à points limites les deux points fixes. Montrons-le par le calcul.

Soient x et y la partie réelle et la partie imaginaire, respectivement, du nombre complexe z :

$$z = x + i\,y$$

Le module d'un nombre complexe est la racine carrée du produit du nombre complexe par le nombre complexe conjugué :

$$|z| = \sqrt{z\,\bar{z}}$$
$$|z+1| = \sqrt{(x+iy+1)(x-iy+1)}$$
$$|z-1| = \sqrt{(x+iy-1)(x-iy-1)}$$

Lorsque la constante k est positive, on a les équivalences :

$$\frac{|z+1|}{|z-1|} = k \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{(x+iy+1)(x-iy+1)} = k\sqrt{(x+iy-1)(x-iy-1)}$$
$$\Leftrightarrow \quad (x+iy+1)(x-iy+1) = k^2 (x+iy-1)(x-iy-1)$$
$$\Leftrightarrow \quad (x+1)^2 + y^2 = k^2 [(x-1)^2 + y^2]$$
$$\Leftrightarrow \quad x^2 + 2x + 1 + y^2 = k^2 [x^2 - 2x + 1 + y^2]$$
$$\Leftrightarrow \quad (k^2-1)(x^2 + y^2 + 1) - 2(k^2+1)x = 0$$

1er cas : $k^2 = 1$.

Ce cas est équivalent à $k = 1$, puisque k est une constante positive.
Dans ce cas, la relation précédente se réduit à :

$$\frac{|z-1|}{|z+1|} = k \quad \Leftrightarrow \quad -4x = 0$$

et l'ensemble des points M est la droite d'équation $x = 0$, c'est-à-dire l'axe des y, médiatrice du segment joignant les points A d'affixe -1, et B d'affixe $+1$.

2ème cas : $k^2 \neq 1$.

Ce cas est équivalent à $k \neq 1$, puisque k est une constante positive.
Dans ce cas, la relation

$$\frac{|z-1|}{|z+1|} = k \quad \Leftrightarrow \quad (k^2-1)(x^2 + y^2 + 1) - 2(k^2+1)x = 0$$

s'écrit :

$$\frac{|z-1|}{|z+1|} = k \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 + 1 - 2\frac{k^2+1}{k^2-1}x = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad \left(x - \frac{k^2+1}{k^2-1}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{k^2+1}{k^2-1}\right)^2 - 1$$
$$\Leftrightarrow \quad \left(x - \frac{k^2+1}{k^2-1}\right)^2 + y^2 = \frac{(k^2+1)^2 - (k^2-1)^2}{(k^2-1)^2}$$
$$\Leftrightarrow \quad \left(x - \frac{k^2+1}{k^2-1}\right)^2 + y^2 = \frac{[(k^2+1)-(k^2-1)]\times[(k^2+1)+(k^2-1)]}{(k^2-1)^2}$$
$$\Leftrightarrow \quad \left(x - \frac{k^2+1}{k^2-1}\right)^2 + y^2 = \frac{4k^2}{(k^2-1)^2}$$

C'est l'équation d'un cercle dont le centre est situé sur l'axe des x.

L'ensemble des points M vérifiant la relation $\left|\frac{z+1}{z-1}\right| = k$ est le cercle $(C\,;r)$:

- de centre le point C de coordonnées : $x = \frac{k^2+1}{k^2-1}$; $y = 0$
- de rayon $r = \frac{2k}{|k^2-1|}$

Pour $k > 1$,

La relation suivante est vraie :

$$\frac{k^2+1}{k^2-1} > 0$$

Cette relation signifie que le centre du cercle est du côté des x positifs. Sont aussi vraies les relations :

$$(k-1)^2 > 0$$
$$k^2 - 2k + 1 > 0$$
$$k^2 + 1 > 2k$$
$$\frac{k^2+1}{k^2-1} > \frac{2k}{k^2-1} = \frac{2k}{\left|k^2-1\right|}$$

Cette dernière relation signifie que l'abscisse du centre est plus grande que le rayon , donc que tout le cercle est situé du même côté de la médiatrice du segment AB.

Les points de rencontre du cercle $(C ; r)$ avec l'axe des x déterminent un diamètre du cercle. Ils ont pour abscisses les valeurs de x vérifiant l'équation du cercle :

$$\left(x - \frac{k^2+1}{k^2-1}\right)^2 + y^2 = \frac{4k^2}{(k^2-1)^2}$$

avec $y = 0$:

$$\left(x - \frac{k^2+1}{k^2-1}\right)^2 = \frac{4k^2}{(k^2-1)^2}$$
$$x = \frac{k^2+1}{k^2-1} \pm \frac{2k}{\left|k^2-1\right|} = \frac{k^2+1}{k^2-1} \pm \frac{2k}{k^2-1} = \frac{(k\pm1)^2}{k^2-1}$$

Les deux extrémités du diamètre sur l'axe des x sont donc :

- $x = \frac{k+1}{k-1}$; $y = 0$
- $x = \frac{k-1}{k+1}$; $y = 0$

Ces points forment, avec les points $(-1 ; 0)$ et $(+1 ; 0)$ ce que l'on appelle une « *division harmonique* ».

Pour $k < 1$,

Le rayon du cercle est :

$$r = \frac{2k}{1-k^2} = \frac{2\times\frac{1}{k}}{\left(\frac{1}{k}\right)^2 - 1}$$

L'abscisse du centre est :

$$x = \frac{k^2+1}{k^2-1} = -\frac{\left(\frac{1}{k}\right)^2 + 1}{\left(\frac{1}{k}\right)^2 - 1}$$

Ces relations signifient que les cercles correspondant à des valeurs de la constante k inverses l'une de l'autre sont symétriques par rapport à l'axe des y.

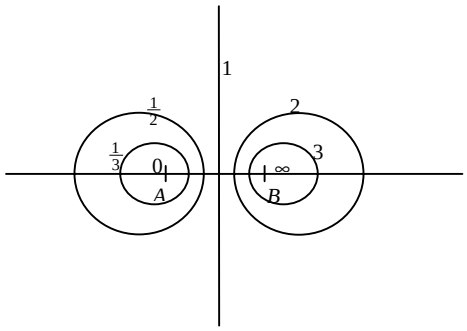
Pour $k = 0$,

On obtient : $|z + 1| = 0$, donc $z = -1$.

Pour k infini,

On obtient : $|z - 1| = 0$, donc $z = 1$.

On peut ainsi tracer le dessin ci-contre :



Pour $k' = \frac{1}{k}$, soit (C') l'ensemble des points M' d'affixe z' vérifiant $\left| \frac{z'+1}{z'-1} \right| = k'$.

Posons $z = \frac{1}{z'}$. On obtient : $\left| \frac{\frac{1}{z}+1}{\frac{1}{z}-1} \right| = \frac{1}{k}$, soit $\left| \frac{z+1}{z-1} \right| = k$. Cette relation montre que l'inverse du cercle *(C')* est le cercle (C) correspondant à la constante $k = \frac{1}{k'}$.

On peut d'ailleurs obtenir cet ensemble d'une autre façon : posons, en effet $z = -z'$. On obtient : $\left| \frac{z-1}{z+1} \right| = \frac{1}{k}$, soit $\left| \frac{z+1}{z-1} \right| = k$. Cette relation montre que les cercles correspondant aux valeurs k et $\frac{1}{k}$ sont symétriques l'un de l'autre par rapport au point origine O. Comme l'axe des x est aussi un axe de symétrie de ces cercles, ils sont symétriques l'un de l'autre par rapport à l'axe des y.

Les cercles correspondants aux valeurs k et $\frac{1}{k}$ sont symétriques l'un de l'autre par rapport à l'axe des y.

Exercice 2

1°/ Déterminez les nombres complexes solutions de l'équation : $z^4 = 1$.

2°/ Déterminez sous forme trigonométrique les solutions de l'équation : $z^4 = 8\,(1 - i\sqrt{3}\,)$.

3°/ Soit $a = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} + i\,\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$. Vérifiez : $a^4 = 8\,(1 - i\sqrt{3}\,)$. En déduire sous forme algébrique les résultats du 2°/.

4°/ Des questions 2°/ et 3°/, déduire les valeurs exactes de $\cos\dfrac{11\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{11\pi}{12}$.

Corrigé de l'Exercice 2.

1°/ Solutions de l'équation $z^4 = 1$.

L'équation $z^4 = 1$ s'écrit aussi $z^4 - 1 = 0$, soit $(z^2 - 1)(z^2 + 1) = 0$, ou $(z - 1)(z + 1)(z - i)(z + i) = 0$. Ses solutions sont :

$$z = 1 \quad z = -1 \quad z = i \quad z = -i$$

2°/ Résolution de l'équation $z^4 = 8\,(1 - i\sqrt{3}\,)$ sous forme trigonométrique.

Posons $z = \rho\, e^{i\,\theta}$. L'équation $z^4 = 8\,(1 - i\sqrt{3}\,)$ s'écrit $\rho^4\, e^{4\,i\,\theta} = 16\,(\dfrac{1}{2} - i\sqrt{3}\,) = 16\,(\cos\dfrac{\pi}{3} - i\sin\dfrac{\pi}{3})$, soit $\rho^4 = 16\; e^{-\,i\,\frac{\pi}{3}}$. Elle équivaut donc à :

$$\rho^4 = 16 \quad \text{et} \qquad e^{4\,i\,\theta} = e^{-\,i\,\frac{\pi}{3}}.$$

Ses solutions sont données par :

$$\rho = 2 \quad \text{et} \qquad \theta = -\frac{\pi}{12} + k\,\frac{\pi}{2}$$

Ces solutions correspondent à quatre nombres complexes. Pour avoir les solutions avec un argument compris entre 0 et 2π, il faut prendre $k = 1$, $k = 2$, $k = 3$, $k = 4$. D'où les solutions :

$$z_1 = 2\,(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12})$$
$$z_2 = 2\,(\cos(\frac{5\pi}{12} + \frac{\pi}{2}) + i\sin(\frac{5\pi}{12} + \frac{\pi}{2})) = i\,z_1$$
$$z_3 = 2\,(\cos(\frac{5\pi}{12} + \pi) + i\sin(\frac{5\pi}{12} + \pi)) = -z_1$$
$$z_4 = 2\,(\cos(\frac{5\pi}{12} + 3\,\frac{\pi}{2}) + i\sin(\frac{5\pi}{12} + 3\,\frac{\pi}{2})) = -i\,z_1$$

3°/ Calcul du nombre complexe a^4.

$$
\begin{aligned}
a^2 &= \left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} + i\,\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} \right) \times \left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} + i\,\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} \right) \\
&= \left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} \right)^2 + 2\,i \left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} \right) \times \left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} \right) + i^2 \left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} \right)^2 \\
&= \frac{6-2\sqrt{12}+2}{4} + 2\,i\,\frac{6-2}{4} - \frac{6+2\sqrt{12}+2}{4} \\
&= -\sqrt{12} + 2\,i \\
&= -2\,(\sqrt{3} - i\,)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a^4 &= 4\,(\sqrt{3} - i\,)^2 \\
&= 4\,(3 - 2\,i\,\sqrt{3} + i^2\,) \\
&= 4\,(2 - 2\,i\,\sqrt{3}\,) \\
&= 8\,(1 - i\,\sqrt{3}\,)
\end{aligned}
$$

$$a^4 = 8\,(1 - i\,\sqrt{3}\,)$$

Cette relation montre que le nombre complexe a est solution de l'équation $z^4 = 8\,(1 - i\,\sqrt{3}\,)$. C'est donc l'une des quatre solutions trouvées plus haut. Comme le nombre complexe a possède une partie réelle positive et une partie imaginaire positive, il est situé dans le premier quadrant, c'est donc la solution z_1 . Les solutions de l'équation $z^4 = 8\,(1 - i\,\sqrt{3}\,)$ peuvent alors être écrites sous forme algébrique :

$$
\begin{aligned}
z_1 &= 2\,(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}) = a = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} + i\,\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} \\
z_2 &= 2\,(\cos(\frac{5\pi}{12} + \frac{\pi}{2}) + i\sin(\frac{5\pi}{12} + \frac{\pi}{2})) = i\,a = -\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} + i\,\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} \\
z_3 &= 2\,(\cos(\frac{5\pi}{12} + \pi) + i\sin(\frac{5\pi}{12} + \pi)) = -a = -\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} - i\,\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} \\
z_4 &= 2\,(\cos(\frac{5\pi}{12} + 3\,\frac{\pi}{2}) + i\sin(\frac{5\pi}{12} + 3\,\frac{\pi}{2})) = -i\,a = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} - i\,\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}
\end{aligned}
$$

4°/ Valeurs exactes de certains cosinus ou sinus.

La valeur de z_1 permet d'écrire :

$$\cos\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \quad \text{et} \quad \sin\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

La valeur de z_2 permet d'écrire :

$$\cos\frac{11\pi}{12} = -\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \quad \text{et} \quad \sin\frac{11\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

Exercice 3

λ, α, β étant trois constantes données réelles ou complexes, montrez que les solutions de l'équation :

$$\lambda^n (z - \alpha)^n - (z - \beta)^n = 0$$

sont toutes sur une même circonférence. Calculez la position du centre et le rayon de cette circonférence.

Corrigé de l'exercice 3.

1°/ Les solutions sont sur un même cercle.

La relation $\lambda^n (z - \alpha)^n - (z - \beta)^n = 0$ peut s'écrire sous la forme :

$$\left(\frac{z-\beta}{z-\alpha} \right)^n = \lambda^n$$

Elle entraîne la relation :

$$\left| \frac{z-\beta}{z-\alpha} \right| = | \lambda |$$

Soient M , A , B , les points d'affixes respectives z , α , β. Le rapport des distances du point M aux points A et B est une constante $| \lambda |$. Tous les points M vérifiant cette relation sont sur un cercle du faisceau à points limites A et B. Ce cercle dégénère en médiatrice du segment AB lorsque $| \lambda |$ est égal à 1.

2°/ Position du centre et circonférence du cercle.

Posons :

$$\alpha = a + i\, b$$
$$\beta = c + i\, d$$
$$z = x + i\, y$$

La relation précédente s'écrit :

$$\sqrt{(x-c)^2 + (y-d)^2} = | \lambda | \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$$
$$(x - c)^2 + (y-d)^2 = | \lambda |^2 [(x-a)^2 + (y-b)^2$$
$$(1 - | \lambda |^2) (x^2 + y^2) - 2 (c - a | \lambda |^2) x - 2 (d - b | \lambda |^2) y + c^2 - a^2 | \lambda |^2 + d^2 - b^2 | \lambda |^2 = 0$$

Pour $| \lambda | = 1$

La relation

$$(1 - | \lambda |^2) (x^2 + y^2) - 2 (c - a | \lambda |^2) x - 2 (d - b | \lambda |^2) y + c^2 - a^2 | \lambda |^2 + d^2 - b^2 | \lambda |^2 = 0$$

se réduit à :

$$2 (c - a) x + 2 (d - b) y = c^2 - a^2 + d^2 - b^2$$

$$(c - a) \left(x - \frac{a+c}{2} \right) + (d - b) \left(y - \frac{d+b}{2} \right) = 0$$

Si l'on appelle A le point de coordonnées $(a ; b)$, B le point de coordonnées $(c ; d)$, M le point de coordonnées $(x ; y)$, I le milieu du segment AB , la relation précédente exprime que le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{IM}$ et $\overrightarrow{AB}$ est nul : c'est l'équation de la **médiatrice du segment *AB*.**

Pour $| \lambda | \neq 1$

La relation

$$(1-|\lambda|^2)(x^2+y^2)-2(c-a|\lambda|^2)x-2(d-b|\lambda|^2)y+c^2-a^2|\lambda|^2+d^2-b^2|\lambda|^2=0$$

s'écrit :

$$\left(x-\frac{c-a|\lambda|^2}{1-|\lambda|^2}\right)^2+\left(y-\frac{d-b|\lambda|^2}{1-|\lambda|^2}\right)^2=\left(\frac{c-a|\lambda|^2}{1-|\lambda|^2}\right)^2-\frac{c^2-a^2|\lambda|^2}{1-|\lambda|^2}$$
$$+\left(\frac{d-b|\lambda|^2}{1-|\lambda|^2}\right)^2-\frac{d^2-b^2|\lambda|^2}{1-|\lambda|^2}$$
$$=\frac{c^2-2ac|\lambda|^2+a^2|\lambda|^4-(c^2-a^2|\lambda|^2)(1-|\lambda|^2)}{(1-|\lambda|^2)^2}$$
$$+\frac{d^2-2bd|\lambda|^2+b^2|\lambda|^4-(d^2-b^2|\lambda|^2)(1-|\lambda|^2)}{(1-|\lambda|^2)^2}$$
$$=\left(\frac{(c-a)|\lambda|}{1-|\lambda|^2}\right)^2+\left(\frac{(d-b)|\lambda|}{1-|\lambda|^2}\right)^2$$

$$\left(x-\frac{c-a|\lambda|^2}{1-|\lambda|^2}\right)^2+\left(y-\frac{d-b|\lambda|^2}{1-|\lambda|^2}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{(c-a)^2+(d-b)^2}\,|\lambda|}{1-|\lambda|^2}\right)^2$$

C'est l'équation d'un cercle de

- Centre : $x_c=\dfrac{c-a|\lambda|^2}{1-|\lambda|^2}$ $\qquad y_c=\dfrac{d-b|\lambda|^2}{1-|\lambda|^2}$
- Rayon : $r=\sqrt{(c-a)^2+(d-b)^2}\times\dfrac{|\lambda|}{1-|\lambda|^2}$

Le centre du cercle a pour affixe $\gamma=x_c+iy_c=\dfrac{c-a|\lambda|^2}{1-|\lambda|^2}+i\dfrac{d-b|\lambda|^2}{1-|\lambda|^2}=\dfrac{\beta-\alpha|\lambda|^2}{1-|\lambda|^2}$

Le centre du cercle est sur la droite AB : en effet, on a :

$$\overrightarrow{CA}=\begin{pmatrix}x_c-a\\y_c-b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{c-a|\lambda|^2}{1-|\lambda|^2}-a\\\frac{d-b|\lambda|^2}{1-|\lambda|^2}-b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{c-a}{1-|\lambda|^2}\\\frac{d-b}{1-|\lambda|^2}\end{pmatrix}=\frac{1}{1-|\lambda|^2}\begin{pmatrix}c-a\\d-b\end{pmatrix}=\frac{1}{1-|\lambda|^2}\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{CB}=\begin{pmatrix}x_c-c\\y_c-d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{c-a|\lambda|^2}{1-|\lambda|^2}-c\\\frac{d-b|\lambda|^2}{1-|\lambda|^2}-d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{c-a}{1-|\lambda|^2}|\lambda|^2\\\frac{d-b}{1-|\lambda|^2}|\lambda|^2\end{pmatrix}=\frac{|\lambda|^2}{1-|\lambda|^2}\begin{pmatrix}c-a\\d-b\end{pmatrix}=\frac{|\lambda|^2}{1-|\lambda|^2}\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{CB}=|\lambda|^2\overrightarrow{CA}$$
$$\overrightarrow{CA}\wedge\overrightarrow{CB}=0$$

3°/ Résolution de l'équation $\lambda^n (z-\alpha)^n - (z-\beta)^n = 0$

Posons $Z = \dfrac{z-\beta}{z-\alpha}$. L'équation s'écrit $Z^n = \lambda^n$. Avec $\lambda = |\lambda| e^{i\theta_0}$ et $Z = \rho e^{i\theta}$, elle devient

$$\rho^n e^{ni\theta} = |\lambda|^n e^{ni\theta_0}$$

Les n solutions sont données par :

$$\left\| \begin{array}{l} \rho = |\lambda| \\ \theta = \theta_0 + \dfrac{2k\pi}{n}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1 \end{array} \right.$$

$$Z = |\lambda| e^{i\left(\theta_0 + \frac{2k\pi}{n}\right)} = \lambda e^{\frac{2ik\pi}{n}}$$

$Z = \dfrac{z-\beta}{z-\alpha}$ donne alors $z = \dfrac{\beta - \alpha Z}{1-Z} = \dfrac{\beta - \alpha\lambda e^{\frac{2ik\pi}{n}}}{1-\lambda e^{\frac{2ik\pi}{n}}}$

$$\boxed{z = \frac{\beta - \alpha\lambda e^{\frac{2ik\pi}{n}}}{1-\lambda e^{\frac{2ik\pi}{n}}} \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1}$$

Posons $\gamma = \dfrac{\beta - \alpha|\lambda|^2}{1-|\lambda|^2}$, nous obtenons :

$$\gamma - \alpha = (\beta - \alpha) \times \frac{1}{1-|\lambda|^2} \text{ et } \gamma - \beta = (\beta - \alpha) \times \frac{|\lambda|^2}{1-|\lambda|^2} = |\lambda|^2 (\gamma - \alpha)$$

$$z - \gamma = \frac{\beta - \alpha\lambda e^{\frac{2ik\pi}{n}}}{1-\lambda e^{\frac{2ik\pi}{n}}} - \frac{\beta - \alpha|\lambda|^2}{1-|\lambda|^2} = (\beta - \alpha) \times \left(\frac{1}{1-\lambda e^{\frac{2ik\pi}{n}}} - \frac{1}{1-|\lambda|^2} \right)$$

$$z - \gamma = (\beta - \alpha) \times \left(\frac{1-\overline{\lambda} e^{-\frac{2ik\pi}{n}}}{1-|\lambda|^2} - \frac{1}{1-|\lambda|^2} \right)$$

$$z - \gamma = (\beta - \alpha) \times \frac{\overline{\lambda} e^{-\frac{2ik\pi}{n}}}{1-|\lambda|^2}$$

$$\boxed{z - \gamma = (\gamma - \alpha)\, \overline{\lambda}\, e^{-\frac{2ik\pi}{n}} = (\gamma - \alpha)\, \overline{Z}} \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1$$

Ces relations montrent que si z est solution de l'équation, alors $|z - \gamma|$ est toujours le même, quelle que soit la solution considérée et l'on a :

$$|z - \gamma| = |\beta - \alpha| \times \frac{|\lambda|}{1 - |\lambda|^2} = |\gamma - \alpha| \times |\lambda|$$

On retrouve ainsi le fait que toutes les solutions sont sur un même cercle

- de centre le point d'affixe γ
- de rayon $|\beta - \alpha| \times \dfrac{|\lambda|}{1 - |\lambda|^2}$

Exercice 4

Soit $z \in \mathbb{C}$, $z = x + iy$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $P(z) = z^3 - 3iz^2 - (3 - i)z + 2 + 2i$.

1°/ Vérifiez que l'équation $P(z) = 0$ admet une solution réelle z_0 et une solution imaginaire pure z_1. Résoudre l'équation $P(z) = 0$. Calculez le module et l'argument des solutions z_0, z_1, z_2.

2°/ Dans le plan complexe, soient M_0, M_1, M_2, les points d'affixes respectives z_0, z_1, z_2. Calculez $Z = \dfrac{z_2 - z_0}{z_1 - z_0}$. Démontrez que $|Z| = 1$. Précisez la nature du triangle (M_0, M_1, M_2).

Corrigé de l'exercice 4

1°/ Solutions de l'équation $P(z) = 0$.

Le polynôme $P(z)$ peut être écrit :

$$P(z) = (z^3 - 3z + 2) + i(-3z^2 + z + 2)$$

Sous cette forme, on voit tout de suite que $z = 1$ est racine des deux polynômes $(z^3 - 3z + 2)$ et $(-3z^2 + z + 2)$. Le polynôme $P(z)$ admet donc la racine réelle

$$z_0 = 1$$

Si z est imaginaire pur, la partie réelle de $P(z) = (2 + iz) + (z^3 - 3iz^2 - 3z + 2i)$ est $2 + iz$; Elle ne peut être nulle que pour $z = 2i$. Pour cette valeur de z, on a :

$$z^3 - 3iz^2 - 3z + 2i = -8i + 12i - 6i + 2i = 0$$

la partie imaginaire de $P(z)$ est nulle elle aussi, donc $P(z) = 0$ et $P(z)$ admet la racine imaginaire pure

$$z_1 = 2i$$

On peut alors faire la division euclidienne de $P(z)$ par le polynôme

$$(z - z_0)(z - z_1) = (z - 1)(z - 2i) = z^2 - (1 + 2i)z + 2i$$

z^3	$-3iz^2$	$-(3 - i)z$	$+2 + 2i$	$\|\|$	$z^2 - (1 + 2i)z + 2i$
$-z^3$	$+(1 + 2i)z^2$	$-2iz$		$\|\|$	$z + (1 - i)$
0	$+(1 - i)z^2$	$-(3 + i)z$	$+2 + 2i$	$\|\|$	
	$-(1 - i)z^2$	$+(1 - i)(1 + 2i)z$	$-2i(1 - i)$	$\|\|$	
	0	0	0	$\|\|$	

D'où :

$$P(z) = (z - 1)(z - 2i)(z - (i - 1))$$

Et sous cette forme les trois racines apparaissent :

$z_1 = 1$	de module 1 et d'argument 0
$z_2 = 2i$	de module 2 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$
$z_3 = i - 1$	de module $\sqrt{2}$ et d'argument $\dfrac{3\pi}{4}$

2°/ Points d'affixes z_0 , z_1 , z_2

$$Z = \frac{z_2 - z_0}{z_1 - z_0} = \frac{i-1-1}{2\,i-1} = \frac{i-2}{2\,i-1} = \frac{(i-2)(-2\,i-1)}{(2\,i-1)(-2\,i-1)} = \frac{2+4\,i-i+2}{4+1} = \frac{4+3\,i}{5}$$

$$|\,Z\,| = \frac{1}{5}\sqrt{4^2+3^2} = 1$$

$$\boxed{|\,Z\,| = 1}$$

Cette relation montre que l'on a :

$$|\,z_2 - z_0\,| = |\,z_1 - z_0\,|$$
$$\| \overrightarrow{M_0M_2} \| = \| \overrightarrow{M_0M_1} \|$$

Le triangle $M_0M_1M_2$ est donc **isocèle de sommet M_0** .

Exercice 5

Soit z l'affixe d'un point M du plan complexe.

1°/ Quel est l'ensemble des points M vérifiant la relation

$$|z+1| + |z-1| = k,$$

k étant une constante réelle ?

2°/ Quelle condition doit vérifier k pour que le problème ait une solution ?

3°/ Ecrire l'équation de l'ensemble des points M vérifiant la relation donnée.

4°/ Dessiner les ensembles de points obtenus pour les valeurs de k égales à 2 , 3 , 4 , 5.

Corrigé de l'Exercice 5.

1°/ Ensemble des points dont la somme des distances à deux points fixes est une constante.

Il est bien connu qu'un tel ensemble de points est une ellipse dont les foyers sont les deux points fixes. Nous allons le montrer par le calcul. La relation

$$|z+1| + |z-1| = k,$$

n'a de solution que si k est une constante réelle positive supérieure ou égale à la distance des deux points fixes A d'affixe -1 et B d'affixe $+1$. La somme des longueurs de deux côtés d'un triangle est supérieure ou égale à la longueur du troisième côté (*inégalité du triangle*).

Condition d'existence : $k \geq 2$

$$|z+1| = \sqrt{(x+iy+1)(x-iy+1)}$$

$$|z-1| = \sqrt{(x+iy-1)(x-iy-1)}$$

$$|z+1|+|z-1| = k \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{(x+iy+1)(x-iy+1)} + \sqrt{(x+iy-1)(x-iy-1)} = k$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\sqrt{(x+iy+1)(x-iy+1)} + \sqrt{(x+iy-1)(x-iy-1)}\right)^2 = k^2$$

$$\Leftrightarrow \quad [(x+1)^2 + y^2] + [(x-1)^2 + y^2] + 2\sqrt{(x+iy+1)(x-iy+1)}\sqrt{(x+iy-1)(x-iy-1)} = k^2$$

$$\Leftrightarrow \quad 2(x^2 + y^2 + 1) + 2\sqrt{(x^2+y^2+1-2x)(x^2+y^2+1+2x)} = k^2$$

$$\Leftrightarrow \quad 4[(x^2 + y^2 + 1)^2 - 4x^2] = [k^2 - 2(x^2 + y^2 + 1)]^2$$

$$\Leftrightarrow \quad 4(x^2 + y^2 + 1)^2 - 16x^2 = 4(x^2 + y^2 + 1)^2 + k^4 - 4k^2(x^2 + y^2 + 1)$$

$$\Leftrightarrow \quad 4(k^2 - 4)x^2 + 4k^2y^2 = k^2(k^2 - 4)$$

Posons $a = \dfrac{k}{2}$, ou $k = 2a$.

$$|z+1|+|z-1| = k \quad \Leftrightarrow \quad 16(a^2 - 1)x^2 + 16a^2y^2 = 16a^2(a^2 - 1)$$

$$\Leftrightarrow \quad (a^2 - 1)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - 1)$$

Comme k est somme de deux nombres positifs dont l'un au moins est différent de 0, d'où $a > 0$. La relation

$$a^2 - 1 = 0$$

est alors équivalente à :

$$a = 1$$

Pour $a = 1$, on a : $k = 2$.

$|z+1|+|z-1| = 2 \quad \Leftrightarrow \quad y^2 = 0$ et $|x+1| + |x-1| = 2$

Si $x \leq -1$, on a $|x+1| = -1-x$ et $|x-1| = 1-x$; $|x+1| + |x-1| = -2x = 2 \Rightarrow x = -1$.

Si $-1 < x < +1$, on a $|x+1| = x+1$ et $|x-1| = 1-x$; $|x+1| + |x-1| = 2$ pour tout x.

Si $1 \leq x$, on a $|x+1| = x+1$ et $|x-1| = x-1$; $|x+1| + |x-1| = 2x = 2 \Rightarrow x = 1$.
L'ensemble des points M tels que $|x+1| + |x-1| = 2$ est donc le segment de droite joignant les points A (–1) et B (+1).

Pour a > 1, on a $k > 2$.
Dans ce cas, la relation

$$(a^2 - 1)x^2 + a^2 y^2 = a^2 (a^2 - 1)$$

est équivalente à :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - 1} = 1$$

C'est l'équation canonique :

- soit ellipse de demi-axes a et $\sqrt{a^2 - 1}$ si $a > 1$, ce qui est le cas ici.
- soit d'une hyperbole de demi-axes a et $\sqrt{1 - a^2}$ si $a < 1$.

L'ensemble des points $M(z)$ vérifiant
$|z + 1| + |z - 1| = k$ (k constante réelle supérieure ou égale à 2)
est d'une ellipse :

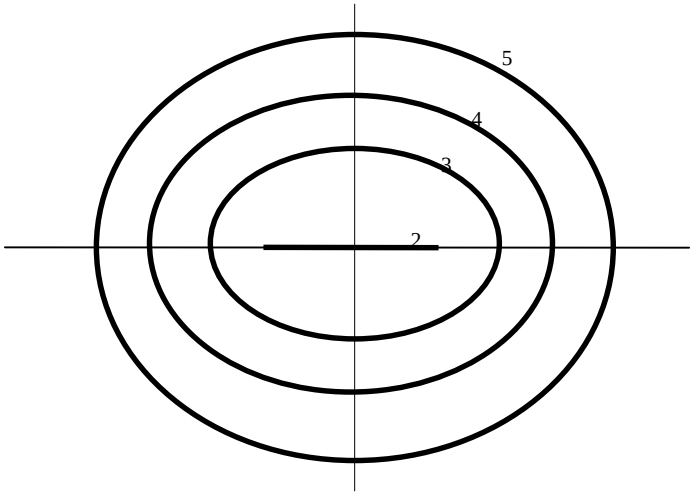
- de foyers A (–1) et B (+1)
- de demi-grand axe $a = \frac{k}{2}$ sur l'axe des x
- de demi-petit axe $b = \sqrt{a^2 - 1} = \frac{1}{2}\sqrt{k^2 - 4}$

Les coordonnées des points d'intersection avec les axes sont :

- sur le grand axe (axe des x) : $y = 0$ et $x = \pm a = \pm \frac{k}{2}$
- sur le petit axe (axe des y) : $x = 0$ et $y = \pm \sqrt{a^2 - 1} = \pm \frac{1}{2}\sqrt{k^2 - 4}$

2°/ Exemples.

On peut alors tracer le dessin suivant :



Exercice 6

Soit z l'affixe d'un point M du plan complexe.

1°/ Quel est l'ensemble des points M vérifiant la relation

$$|\, z+1\,| - |\, z-1\,| = k,$$

k étant une constante réelle ?

2°/ Quelle condition doit vérifier k pour que le problème ait une solution ?

3°/ Ecrire l'équation de l'ensemble des points M vérifiant la relation donnée.

4°/ Dessiner les ensembles de points obtenus pour les valeurs de k égales à -2 , -1 , 0 , 1 , 2.

Corrigé de l'exercice 6.

1°/ Ensemble des points dont les différences des distances à deux points fixes est une constante.

Il est bien connu qu'un tel ensemble est une branche d'hyperbole puisque cette propriété peut servir de définition de l'hyperbole. Nous allons le montrer par le calcul. La relation :

$$|\, z+1\,| - |\, z-1\,| = k$$

est équivalente à :

$$\sqrt{(x+iy+1)\,(x-iy+1)} - \sqrt{(x+iy-1)\,(x-iy-1)} = k$$

$$\sqrt{(x+1)^2+y^2} - \sqrt{(x-1)^2+y^2} = k$$

L'inégalité du triangle nous indique que la valeur absolue de la différence des longueurs de deux côtés d'un triangle est inférieure ou égale à la longueur du troisième côté. On en déduit la condition suivante :

Condition d'existence : $|\, k\,| \le 2$

On peut supposer $k \ge 0$, car si k est négatif, en posant $k' = -k$, on obtient :

$$|\, z-1\,| - |\, z+1\,| = k'$$

soit, avec $z' = -z$:

$$|\, z'+1\,| - |\, z'-1\,| = k'$$

On est ramené à l'étude des points $M'(z')$ dont la différence des distances aux points $A(-1)$ et $B(+1)$ est une constante positive k', et l'on revient aux points $M(z)$ par symétrie par rapport au point O (0).

Pour $k \ge 0$, on a $\sqrt{(x+1)^2+y^2} \ge \sqrt{(x-1)^2+y^2}$ et, sous ces restrictions, la relation :

$$\sqrt{(x+1)^2+y^2} - \sqrt{(x-1)^2+y^2} = k$$

est équivalente à la relation obtenue par passage aux carrés :

$$[\,(x+1)^2 + y^2\,] + [\,(x-1)^2 + y^2\,] - 2\sqrt{(x+1)^2+y^2}\,\sqrt{(x-1)^2+y^2} = k^2$$

$$2\,(x^2+y^2+1) - 2\sqrt{(x+1)^2+y^2}\,\sqrt{(x-1)^2+y^2} = k^2$$

relation équivalente à :

$2\,(x^2+y^2+1) \ge k^2$ et $4\,(x^2+y^2+1)^2 - 16\,x^2 = [\,k^2 - 2\,(x^2+y^2+1)\,]^2$

$2\,(x^2+y^2+1) \ge k^2$ et $4\,(x^2+y^2+1)^2 - 16\,x^2 = 4\,(x^2+y^2+1)^2 + k^4 - 4\,k^2\,(x^2+y^2+1)$

$2\,(x^2+y^2+1) \ge k^2$ et $4\,k^2\,(x^2+y^2+1) - 16\,x^2 = k^4$

$2\,(x^2+y^2+1) \ge k^2$ et $4\,(k^2-4)\,x^2 + 4\,k^2\,y^2 = k^2\,(k^2-4)$

Pour $k = 0$,
La solution est donnée par $x = 0$ et y quelconque : c'est l'axe des y.

Pour $k = 2$,

La solution est donnée par $y = 0$ et $x^2 \geq 1$: c'est la partie de l'axe des x à l'extérieur du segment joignant les points A (−1) et B (+1). Comme on doit avoir $\sqrt{(x+1)^2+y^2} - \sqrt{(x-1)^2+y^2} = 2 > 0$, la solution est donnée par la demi-droite $]+1 ; +\infty[$ de l'axe réel.

Pour $0 < k < 2$,
la relation
$2(x^2+y^2+1) \geq k^2$ et $4(k^2-4)x^2 + 4k^2y^2 = k^2(k^2-4)$
est équivalente à :
$2(x^2+y^2+1) \geq k^2$ et $4(k^2-4)x^2 + 4k^2y^2 = k^2(k^2-4)$
Posons $a = \frac{k}{2}$, ou $k = 2a$, avec $0 < a < 1$

$|z+1| - |z-1| = k \quad \Leftrightarrow \quad x^2+y^2+1 \geq 2a^2$ et $16(a^2-1)x^2 + 16a^2y^2 = 16a^2(a^2-1)$

$\Leftrightarrow \quad x^2+y^2+1 \geq 2a^2$ et $(a^2-1)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2-1)$

$\Leftrightarrow \quad x^2+y^2+1 \geq 2a^2$ et $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{1-a^2} = 1$

$\Leftrightarrow \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{1-a^2} = 1$ et $x^2 \geq 2a^2 - 1 - y^2 = 2a^2 - 1 - (1-a^2)\left(\frac{x^2}{a^2} - 1\right)$

$\Leftrightarrow \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{1-a^2} = 1$ et $x^2 \geq a^2$

C'est l'équation canonique d'une hyperbole. Et la restriction

$$\sqrt{(x+1)^2+y^2} \geq \sqrt{(x-1)^2+y^2}$$

réduit l'ensemble des points M vérifiant la relation $|z+1| - |z-1| = k$ à la branche positive de cette hyperbole. Cette hyperbole a pour asymptotes les droites d'équations :

$$k\,y \pm \sqrt{4-k^2}\,x = 0$$

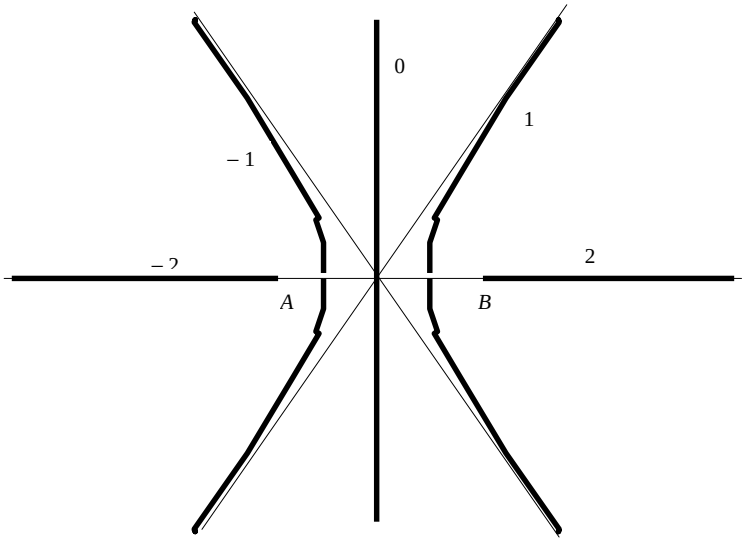
L'ensemble des points M vérifiant la relation
$|z+1| - |z-1| = k = 2a$, avec $|a| \leq 1$
est la branche d'hyperbole d'équation :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{1-a^2} = 1$$

située du côté du signe de k.

2°/ Tracé de l'ensemble des points M dans des cas particuliers.

Les propriétés établies plus haut permettent de visualiser les ensembles dans le dessin suivant :



Exercice 7

Soit z l'affixe d'un point M du plan complexe.

1°/ Quel est l'ensemble des points M vérifiant la relation

$$|z+1| \times |z-1| = k,$$

k étant une constante réelle ?

2°/ Quelle condition doit vérifier k pour que le problème ait une solution ?

3°/ Ecrire l'équation de l'ensemble des points M vérifiant la relation donnée.

4°/ Dessiner les ensembles de points obtenus pour les valeurs de k égales à 0 , $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$, 1 , $\frac{3}{2}$, 2 , 3.

Corrigé de l'Exercice 7.

1°/ Ensemble des points dont le produit des distances à deux points fixes est une constante

Pour que la relation

$$|z+1| \times |z-1| = k$$

ait un sens, il faut déjà que la constante k soit réelle et positive. Sous cette condition, l'ensemble des points M tels que le produit des distances à deux points fixes soit une constante est bien connu, il s'agit des « *ovales de Cassini* », courbes de degré 4. Nous allons les retrouver par le calcul.

Pour $k = 0$,

La distance du point $M(z)$ à l'un des deux points A (-1) ou B $(+1)$ est nulle : l'ensemble des points M vérifiant la relation

$$|z+1| \times |z-1| = k$$

est alors réduit aux deux points A et B.

Pour $k > 0$,

La relation :

$$|z+1| \times |z-1| = k$$

est équivalente à :

$$\sqrt{(x+1)^2+y^2} \times \sqrt{(x-1)^2+y^2} = k$$

ou :

$$[(x+1)^2 + y^2] \times [(x-1)^2 + y^2] = k^2$$
$$(x^2 + y^2 + 1)^2 - 4x^2 = k^2$$

Symétries :

Si l'on change x en $-x$, l'équation reste inchangée : symétrie par rapport à l'axe des y.
Si l'on change y en $-y$, l'équation reste inchangée : symétrie par rapport à l'axe des x.
Par combinaison des deux symétries précédentes : symétrie par rapport au point O.

Nous allons étudier cette fonction pour $x \geq 0$ et $y \geq 0$. Le reste de la courbe s'étudiera par symétries.

$$x^2 + y^2 + 1 = \sqrt{k^2+4x^2}$$
$$y^2 = -1 - x^2 + \sqrt{k^2+4x^2}$$

Il n'existe de solutions que si $x^2 + 1 \leq \sqrt{k^2+4x^2}$, soit $x^4 + 2x^2 + 1 \leq k^2 + 4x^2$, $(x^2-1)^2 \leq k^2$,

$$1 - k \leq x^2 \leq 1 + k$$

Si k est inférieur ou égal à 1, x^2 peut varier de $1-k$ à $1+k$.
Pour $k = 1$, x^2 varie de 0 à 2.
Si k est supérieur à 1, x^2 varie toujours de 0 à $k+1$.
Dans cet intervalle, y prend une seule valeur positive :

$$y = \sqrt{\sqrt{k^2+4x^2} - (x^2+1)}$$

Pour $x = 0$, $y = \sqrt{k-1}$, ce qui suppose $k \geq 1$.
y est nul pour $x = \sqrt{1+k}$, et, lorsque k est inférieur ou égal à 1, pour $x = \sqrt{1-k}$.
Entre les deux valeurs de x qui annulent y, il y a forcément une valeur de x où la dérivée de y est nulle, c'est le théorème de Rolle. Calculons la dérivée de y par rapport à x :
De la relation

$$(x^2 + y^2 + 1)^2 - 4 x^2 = k^2$$

on tire, par dérivation par rapport à x :

$$2 (x^2 + y^2 + 1) (2 x + 2 y \frac{dy}{dx}) - 8 x = 0$$

$$y \frac{dy}{dx} = 2 x \left(1 - \frac{1}{x^2 + y^2 + 1} \right)$$

Lorsque y est nul sans que x soit nul, la dérivée est infinie, la tangente à la courbe est verticale. Il y a une seule possibilité d'avoir $y = 0$ lorsque x est nul, c'est pour $k = 1$; dans ce cas, l'équation de la courbe est :

$$y = \sqrt{\sqrt{1+4x^2} - 1 - x^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2 \sqrt{\sqrt{1+4x^2} - 1 - x^2}} \left(-2 x + \frac{4x}{\sqrt{1+4x^2}} \right)$$

Lorsque x tend vers 0, le terme entre parenthèses est équivalent à $2 x$. Le dénominateur est équivalent à $2 x$. Le rapport tend vers 1. La tangent à la courbe est la première bissectrice.

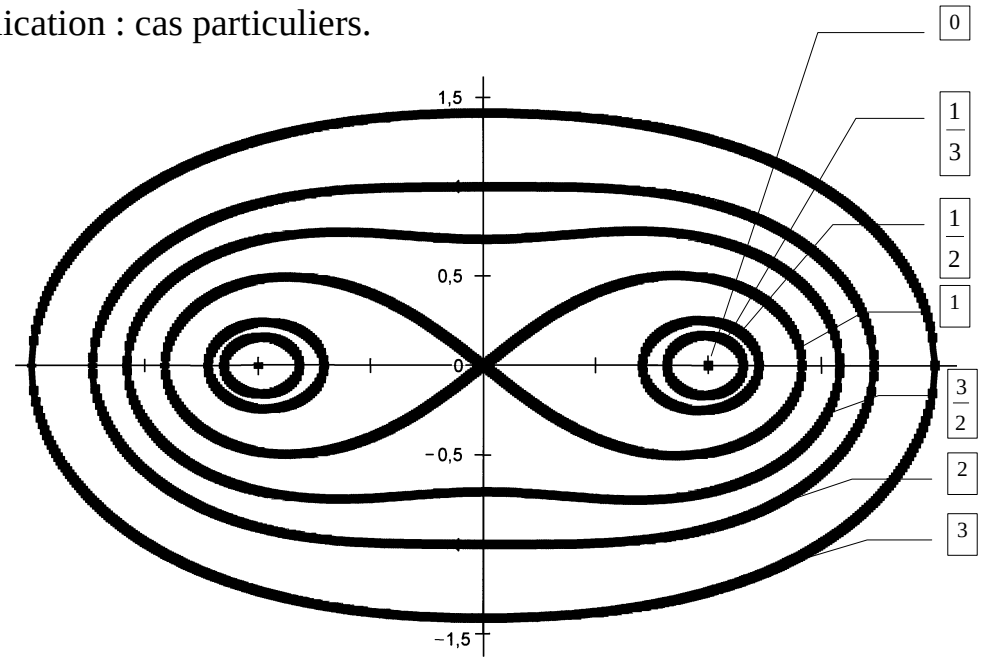
Par contre, lorsque k est plus grand que 1, la dérivée de y est donnée par :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2 \sqrt{\sqrt{k^2+4x^2} - 1 - x^2}} \left(-2 x + \frac{4x}{\sqrt{k^2+4x^2}} \right)$$

Lorsque x tend vers 0, la parenthèse est équivalente à $2 x \times \frac{2-k}{k}$. Le dénominateur est équivalent à $2 \sqrt{k-1}$ et le rapport tend vers 0. La tangente au point $(x = 0 ; y = \sqrt{k-1})$ est horizontale.
On peut donc se faire une idée assez précise de l'ensemble des points M dont le produit des distance à deux points fixes est une constante.

Les courbes obtenues s'appellent les « *ovales de Cassini* », avec, comme cas particulier correspondant à $k = 1$, la *lemniscate de Bernoulli* (qu'on peut aussi obtenir comme inverse d'une hyperbole par rapport à un foyer).

2°/ Application : cas particuliers.



Séance 2.

FONCTIONS DE VARIABLE COMPLEXE

Exercice 1.

On considère la fonction de deux variables réelles x et y : $P(x,y) = \frac{x}{2}\left(1 + \frac{1}{x^2+y^2}\right)$.

1°/ Montrez que $P(x,y)$ est la partie réelle d'une fonction analytique $f(z)$ de la variable complexe $z = x + iy$. Calculez la fonction $f(z)$ vérifiant $f(1) = 1$.

2°/ Soit (C_k) l'ensemble des points du plan complexe dont l'affixe z vérifie la relation $\left|\frac{z-1}{z+1}\right| = k$.

Montrez que, pour $k \neq 1$, (C_k) est un cercle dont on calculera la position du centre et le rayon. Etudiez le cas particulier $k = 2$. Que se passe-t-il lorsque k est égal à 1 ?

Pour un point m de (C_k), on pose $Z = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$.

a) Calculez $\left|\frac{Z-1}{Z+1}\right|$ en fonction de k.

b) Montrez que, lorsque le point m d'affixe z parcourt (C_k), le point M d'affixe Z parcourt, pour $k \neq 1$, un cercle (D_k) dont on calculera la position du centre et le rayon ?

c) Montrez que le cercle (D_k) passe par le centre du cercle (C_k).

Corrigé de l'Exercice 1.

1°/ $P(x;y)$ est la partie réelle d'une fonction analytique $f(z)$.

Une ***fonction analytique*** est, par définition, une fonction dérivable de la variable complexe z sauf, éventuellement, en des points singuliers isolés. Nous verrons, par la suite, ce que l'on entend exactement par "*points singuliers isolés*". Notons seulement, pour l'instant, qu'il s'agit de points où la fonction n'est pas dérivable. Par exemple, la fonction $\frac{1}{z}$ n'est pas dérivable au point $z = 0$, elle est dérivable partout ailleurs, le point 0 est un point singulier isolé pour cette fonction ; la fonction $\frac{1}{z}$ est une fonction analytique.

Pour qu' une fonction $P(x;y)$ de deux variables réelles x et y soit la partie réelle d'une fonction dérivable $f(z)$ de la variable $z = x + iy$, il faut et il suffit que son "Laplacien" soit nul :

$$\Delta P = \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = 0$$

Une fonction dont le laplacien est nul est appelée une fonction "*harmonique*".
Ici, on a :

$$P\,(x\,;y) = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\,\frac{x}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{x^2+y^2-x\times 2x}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,\frac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = \frac{1}{2}\,\frac{-2x\times\left(x^2+y^2\right)^2 - \left(y^2-x^2\right)\times 2\left(x^2+y^2\right)\times 2x}{\left(x^2+y^2\right)^4} = x\,\frac{x^2-3y^2}{\left(x^2+y^2\right)^3}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{x}{2}\times\frac{-2y}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \frac{-\,x\,y}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = \frac{-\,x\left(x^2+y^2\right)^2 + x\,y\times 2\times\left(x^2+y^2\right)\times 2y}{\left(x^2+y^2\right)^4} = -\;x\,\frac{x^2-3y^2}{\left(x^2+y^2\right)^3} = -\,\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}$$

$$\Delta P = \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = 0$$

La fonction $P\,(x\,;y)$ est harmonique. C'est donc la partie réelle d'une fonction analytique $f\,(z)$.

La fonction $f\,(z)$ est de la forme $f\,(z) = P\,(x;y) + i\,Q\,(x;y)$. La partie imaginaire $Q\,(x;y)$ est définie par les "***conditions de Cauchy***" :

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -\,\frac{\partial P}{\partial y} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial x}$$

Ces conditions expriment simplement le fait que la fonction $P\,(x;y) + i\,Q\,(x;y)$, considérée comme fonction de z et de $\bar{z}$, ne dépend pas de $\bar{z}$ car, puisque $x = \frac{z+\bar{z}}{2}$ et $y = \frac{z-\bar{z}}{2\,i}$, on a :

$$\frac{\partial\,(P+iQ)}{\partial\,\bar{z}} = \frac{\partial\,(P+iQ)}{\partial\,x}\,\frac{\partial\,x}{\partial\,\bar{z}} + \frac{\partial\,(P+iQ)}{\partial\,y}\,\frac{\partial\,y}{\partial\,\bar{z}} = \left(\frac{\partial P}{\partial x} + i\,\frac{\partial Q}{\partial x}\right)\times\frac{1}{2} + \left(\frac{\partial P}{\partial y} + i\,\frac{\partial Q}{\partial y}\right)\times\frac{-1}{2\,i}$$

$$\frac{\partial\,(P+iQ)}{\partial\,\bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y}\right) + \frac{i}{2}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y}\right).$$

Dans ces conditions, la fonction $P + i\,Q$ ne dépend que de z et sa dérivée par rapport à z est :

$$\frac{d\,(P+iQ)}{d\,z} = \frac{\partial\,(P+iQ)}{\partial\,z} = \frac{\partial\,(P+iQ)}{\partial\,x}\,\frac{\partial\,x}{\partial\,z} + \frac{\partial\,(P+iQ)}{\partial\,y}\,\frac{\partial\,y}{\partial\,z} = \left(\frac{\partial P}{\partial x} + i\,\frac{\partial Q}{\partial x}\right)\times\frac{1}{2} + \left(\frac{\partial P}{\partial y} + i\,\frac{\partial Q}{\partial y}\right)\times\frac{1}{2\,i}$$

$$\frac{d\,(P+iQ)}{d\,z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right) + \frac{i}{2}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = \frac{\partial P}{\partial x} + i\,\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial\,(P+iQ)}{\partial\,x} = -\,i\,\frac{\partial\,(P+iQ)}{\partial\,y}.$$

Ici, les conditions de Cauchy s'écrivent :

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{x\,y}{\left(x^2+y^2\right)^2} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,\frac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

Intégrons d'abord la première relation par rapport à x :

$$Q(x\,;y) = -\frac{1}{2}\,\frac{y}{x^2+y^2} + R(y) \qquad \text{où } R(y) \text{ est une fonction arbitraire de } y.$$

Lorsqu'on dérive cette expression par rapport à y, on obtient :

$$\frac{\partial Q}{\partial y} = -\frac{1}{2}\frac{x^2+y^2-y\times 2y}{\left(x^2+y^2\right)^2} + \frac{dR}{dy} = \frac{1}{2}\,\frac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} + \frac{dR}{dy}$$

Pour avoir $\dfrac{\partial Q}{\partial y} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\,\dfrac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$, il faut prendre une fonction $R(y)$ vérifiant $\dfrac{dR}{dy} = \dfrac{1}{2}$: c'est une fonction

$R(y) = \dfrac{y}{2} + C$, où C est une constante réelle arbitraire. La fonction $Q(x\,;y)$ est donc donnée par :

$$Q(x\,;y) = \frac{y}{2} - \frac{1}{2}\,\frac{y}{x^2+y^2} + C$$

et la fonction $f(z) = P(x\,;y) + i\,Q(x\,;y)$ est :

$$f(z) = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\,\frac{x}{x^2+y^2} + i\left(\frac{y}{2} - \frac{1}{2}\,\frac{y}{x^2+y^2} + C\right) = \frac{x+iy}{2} + \frac{1}{2}\,\frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{z}{2} + \frac{1}{2}\,\frac{\bar{z}}{z\,\bar{z}} + i\,C$$

$$f(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) + i\,C$$

Pour avoir $f(1) = 1$, il faut prendre $C = 0$ et il reste :

$$\boxed{f(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)}$$

2°/ Etude de l'ensemble (C_k)

L'étude faite dans l'exercice 3 de la Séance 1 peut être reprise ici .

On pose $\dfrac{z-1}{z+1} = k\,e^{i\,\theta}$, avec $k \geq 0$ et $0 \leq \theta < 2\pi$, d'où

$$z = \frac{1+k\,e^{i\,\theta}}{1-k\,e^{i\,\theta}}$$

Pour $k \neq 1$

Posons $\gamma = \dfrac{1+k^2}{1-k^2}$, nous obtenons :

$$z-\gamma = \frac{1+k\,e^{i\,\theta}}{1-k\,e^{i\,\theta}} - \frac{1+k^2}{1-k^2} = \left(1 + \frac{1+k\,e^{i\,\theta}}{1-k\,e^{i\,\theta}}\right) - \left(1 + \frac{1+k^2}{1-k^2}\right) = 2\times\left(\frac{1}{1-k\,e^{i\,\theta}} - \frac{1}{1-k^2}\right)$$

$$z-\gamma = \frac{2\,k}{1-k^2}\,\frac{1-k\,e^{-i\,\theta}}{1-k\,e^{i\,\theta}}\,e^{i\,\theta} = \frac{2\,k}{1-k^2}\,e^{i\,\varphi} \qquad \text{avec} \qquad e^{i\,\varphi} = \frac{1-k\,e^{-i\,\theta}}{1-k\,e^{i\,\theta}}\,e^{i\,\theta} = \frac{z+1}{\bar{z}+1}\,e^{i\,\theta}$$

$$\boxed{z-\gamma = \frac{2\,k}{1-k^2}\,e^{i\,\varphi}}$$

C'est l'équation d'un cercle de centre $\gamma = \dfrac{1+k^2}{1-k^2}$ situé sur l'axe réel, et de rayon $r = \dfrac{2\,k}{\left|1-k^2\right|}$.

Pour $k = 1$

On obtient $z = \dfrac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}} = \dfrac{e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{i\frac{\theta}{2}}+e^{-i\frac{\theta}{2}}\right)}{-e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{i\frac{\theta}{2}}-e^{-i\frac{\theta}{2}}\right)} = -\dfrac{2\cos\frac{\theta}{2}}{2\,i\,\sin\frac{\theta}{2}} = i\,\mathrm{cotg}\,\dfrac{\theta}{2}$

Cette relation montre que z est imaginaire pur et décrit l'axe des y : c'est la médiatrice du segment joignant les deux points -1 et $+1$.

Cas particulier : $k = 2$.

$$\gamma = -\frac{5}{3}$$

$$z = -\frac{5}{3} + \frac{4}{3}\,e^{-i\varphi}$$

C'est l'équation du cercle de centre $-\dfrac{5}{3}$ et de rayon $\dfrac{4}{3}$.

3°/ Transformation de Joukovski.

Si l'on pose $Z = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$, on obtient $\dfrac{Z-1}{Z+1} = \dfrac{\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)-1}{\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)+1} = \dfrac{z^2-2z+1}{z^2+2z+1} = \left(\dfrac{z-1}{z+1}\right)^2$.

$$\frac{Z-1}{Z+1} = \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2$$

Si l'on a posé $\dfrac{z-1}{z+1} = k\,e^{i\,\theta}$, avec $k \geq 0$ et $0 \leq \theta < 2\pi$, il vient : $\dfrac{Z-1}{Z+1} = k^2\,e^{2\,i\,\theta}$, avec $k \geq 0$ et $0 \leq \theta < 2\pi$. En particulier , on obtient :

$$\left|\frac{Z-1}{Z+1}\right| = k^2$$

La relation $\dfrac{Z-1}{Z+1} = k^2\,e^{2\,i\,\theta}$ donne $Z = \dfrac{1+k^2e^{2\,i\,\theta}}{1-k^2e^{2\,i\,\theta}}$, ou encore, en posant $\Gamma = \dfrac{1+k^4}{1-k^4}$ et $e^{i\,\Phi} = \dfrac{Z+1}{\overline{Z}+1}\,e^{2\,i\,\theta}$:

$$Z - \Gamma = \frac{2\,k^2}{1-k^4}\,e^{i\,\Phi}$$

Cette relation montre que lorsque z parcourt le cercle de centre $\frac{1+k^2}{1-k^2}$ et de rayon $\frac{2k}{\left|1-k^2\right|}$, ***Z parcourt le cercle*** de centre $\frac{1+k^4}{1-k^4}$ et de rayon $\frac{2k^2}{\left|1-k^4\right|}$. De plus, $\frac{\gamma-1}{\gamma+1} = \frac{\frac{1+k^2}{1-k^2}-1}{\frac{1+k^2}{1-k^2}+1} = k^2$: le point γ, centre du cercle (C_k), est sur le cercle (D_k).

Exercice 2.

Soient a et b deux constantes réelles différentes. On considère les deux fonctions des variables réelles x et y :

$$P(x,y) = \frac{(x-a)(x-b)+y^2}{(x-b)^2+y^2} \quad \text{et} \quad Q(x,y) = \frac{(a-b)\,y}{(x-b)^2+y^2}$$

1°/ Montrez que $P(x,y) + i\,Q(x,y)$ est une fonction analytique $f(z)$ de la variable complexe $z = x + i\,y$.

2°/ Etudiez les lignes de niveau $P(x,y) = constante$ et les lignes de champ $Q(x,y) = constante$ du potentiel complexe $f(z)$. Représentez graphiquement les courbes correspondant aux valeurs -2 , -1 , 0 , 1 , 2 des constantes.

Corrigé de l'Exercice 2.

1°/ Fonction analytique $f(z)$.

Pour que $P + i\,Q$ soit une fonction analytique de la variable $z = x + i\,y$, il faut et il suffit que les conditions de Cauchy soient vérifiées :

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{\partial P}{\partial y} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial x}$$

Or on a :

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{[(x-b)+(x-a)][(x-b)^2+y^2\,]-[(x-a)(x-b)+y^2\,][2(x-b)]}{[(x-b)^2+y^2\,]^2}$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{(a-b)(x-b)^2+(b-a)y^2}{[(x-b)^2+y^2\,]^2} = (a-b)\,\frac{(x-b)^2-y^2}{[(x-b)^2+y^2\,]^2}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{2y[(x-b)^2+y^2\,]-2y[(x-a)(x-b)+y^2\,]}{[(x-b)^2+y^2\,]^2}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{2(a-b)(x-b)y}{[(x-b)^2+y^2\,]^2}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{-2(a-b)(x-b)y}{[(x-b)^2+y^2\,]^2} = -\frac{\partial P}{\partial y}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial y} = (a-b)\,\frac{[(x-b)^2+y^2\,]-2y^2}{[(x-b)^2+y^2\,]^2}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial y} = (a-b)\,\frac{(x-b)^2-y^2}{[(x-b)^2+y^2\,]^2} = \frac{\partial P}{\partial x}$$

Les conditions de Cauchy sont satisfaites, $f = P + i\,Q$ est une fonction analytique de la variable z.
On aurait pu écrire aussi :

$$P + i\,Q = \frac{(x-a)(x-b)+y^2}{(x-b)^2+y^2} + i\,\frac{(a-b)\,y}{(x-b)^2+y^2} = \frac{(x-a)(x-b)+y^2+i\,(a-b)y}{(x-b)^2+y^2}$$

$$P + i\,Q = \frac{x^2+y^2+ab-a(x-iy)-b(x+iy)}{(x-b)^2+y^2} = \frac{z\bar{z}+ab-a\bar{z}-bz}{(z-b)(\bar{z}-b)} = \frac{(z-a)(\bar{z}-b)}{(z-b)(\bar{z}-b)} = \frac{z-a}{z-b}, \text{ fonction de } z.$$

$$f(z) = \frac{z-a}{z-b}$$

2°/ Etude des lignes de niveaux et des lignes de champ.

a) Lignes de niveau $P(x, y) = \dfrac{(x-a)(x-b)+y^2}{(x-b)^2+y^2} = k$

$(x-a)(x-b) + y^2 = k[(x-b)^2 + y^2]$
$(x-b)[(x-a) - k(x-b)] + (1-k)y^2 = 0$
$(x-b)[(1-k)x - (a-kb)] + (1-k)y^2 = 0$
$(1-k)x^2 - [(1-k)b + (a-kb)]x + (1-k)y^2 + (a-kb)b = 0$
$(1-k)x^2 + (2kb-a-b)x + (1-k)y^2 + (a-kb)b = 0$

Pour $k = 1$, il reste $(b-a)(x-b) = 0$; $b \neq a \Rightarrow x = b$.
Pour $k \neq 1$, on obtient :

$$\left(x + \frac{2kb-a-b}{2(1-k)}\right)^2 + y^2 = \frac{(2kb-a-b)^2 - 4b(1-k)(a-kb)}{4(1-k)^2}$$

$$\left(x + \frac{2kb-a-b}{2(1-k)}\right)^2 + y^2 = \frac{4k^2b^2 + a^2 + b^2 - 4kab - 4kb^2 + 2ab - 4ab + 4kab + 4kb^2 - 4k^2b^2}{4(1-k)^2}$$

$$\left(x + \frac{2kb-a-b}{2(1-k)}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{a-b}{2(1-k)}\right)^2$$

C'est l'équation d'un cercle tangent en $(b\,;0)$ à la droite $x = b$:

- centre $\quad x = -\dfrac{2kb-a-b}{2(1-k)} \qquad y = 0$
- rayon $\quad r = \left|\dfrac{a-b}{2(1-k)}\right|$

k		-2	-1	0	1	2	3	4
centre	x	$\dfrac{a+5b}{6}$	$\dfrac{a+3b}{4}$	$\dfrac{a+b}{2}$	∞	$\dfrac{3b-a}{2}$	$\dfrac{5b-a}{4}$	$\dfrac{7b-a}{6}$
	y	0	0	0	0	0	0	0
rayon		$\dfrac{\lvert b-a\rvert}{6}$	$\dfrac{\lvert b-a\rvert}{4}$	$\dfrac{\lvert b-a\rvert}{2}$	∞	$\dfrac{\lvert b-a\rvert}{2}$	$\dfrac{\lvert b-a\rvert}{4}$	$\dfrac{\lvert b-a\rvert}{6}$

Si k tend vers l'infini, le cercle devient de plus en plus petit jusqu'à se confondre avec le point $x = b$, $y = 0$.

b) Lignes de champ $Q(x, y) = \dfrac{(a-b)y}{(x-b)^2+y^2} = k$.

$(a-b)y = k[(x-b)^2 + y^2]$
$k[(x-b)^2 + y^2] - (a-b)y = 0$

Pour $k = 0$, il reste $(b-a)y = 0$; $a \neq b \Rightarrow y = 0$.
Pour $k \neq 0$, on obtient :

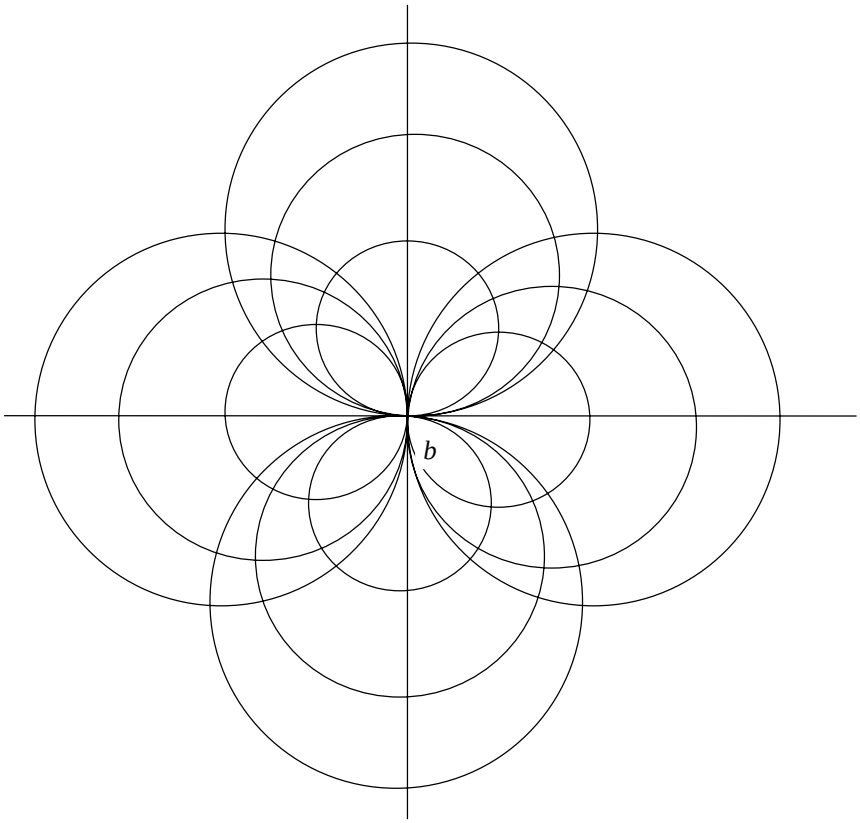
$$(x-b)^2+\left(y-\frac{a-b}{2k}\right)^2=\left(\frac{a-b}{2k}\right)^2$$

C'est l'équation d'un cercle tangent en $x = b, y = 0$ à la droite $y = 0$:

- centre $x = b \quad y = \frac{a-b}{2k}$
- rayon $r = \left|\frac{a-b}{2k}\right|$

k		-3	-2	-1	0	1	2	3
centre	x	b	b	b	b	b	b	b
	y	$\frac{b-a}{6}$	$\frac{b-a}{4}$	$\frac{b-a}{2}$	∞	$\frac{a-b}{2}$	$\frac{a-b}{4}$	$\frac{a-b}{6}$
rayon		$\frac{\lvert b-a\rvert}{6}$	$\frac{\lvert b-a\rvert}{4}$	$\frac{\lvert b-a\rvert}{2}$	∞	$\frac{\lvert b-a\rvert}{2}$	$\frac{\lvert b-a\rvert}{4}$	$\frac{\lvert b-a\rvert}{6}$

Si k tend vers l'infini, le cercle devient de plus en plus petit jusqu'à se confondre avec le point $x = b$, $y = 0$.



Exercice 3

On considère la fonction : $Arc\ tg\ z = \frac{1}{2\,i}\ ln\ \frac{1+i\,z}{1-i\,z}$.

1°/ Déterminez les points singuliers de la fonction *Arc tg z.*

2°/ Comment peut-on rendre uniforme la fonction *Arc tg z* ?

3°/ La fonction *Arc tg z* ayant pour valeur 0 au point $z_0 = 0$, trouver sa valeur au point $z_1 = 1 + i$, lorsqu'on passe de z_0 à z_1 par un chemin rectiligne.

Corrigé de l'Exercice 3.

1°/ Rappels de cours.

Définitions.

Une fonction $f(z)$ de la variable complexe z est dite ***fonction monogène en un point a*** si elle est ***dérivable*** en ce point, c'est-à-dire si le rapport $\frac{f(z)-f(a)}{z-a}$ a une limite finie lorsque z tend vers a en suivant un chemin quelconque dans $\mathbb{C}$. Pour qu'une fonction $f(z) = P(x,y) + i\,Q(x,y)$ soit monogène en un point a, il faut et il suffit que les ***conditions de Cauchy*** soient vérifiées en ce point : $\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}$ et $\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}$. Les fonctions P et Q sont ce qu'on appelle des ***fonctions harmoniques conjuguées*** .
Une fonction monogène en tous points d'un domaine D du plan complexe est dite ***fonction holomorphe dans D***.

Singularités isolées.

Une fonction de variable complexe $f(z)$ holomorphe dans un domaine D entourant un point a peut avoir quatre sortes de points singuliers en a :

- ***singularité artificielle*** : $f(z)$ reste bornée au voisinage de a, mais $\frac{f(z)-f(a)}{z-a}$ n'a pas de limite lorsque z tend vers a.
  Dans ce cas, on peut rendre la fonction $f(z)$ monogène en a en changeant la valeur de $f(a)$.
  Exemple : la fonction égale à z^2 pour $z \neq 0$ et à 1 pour $z = 0$ a une singularité artificielle en 0. Elle est rendue holomorphe dans tout le plan en posant $f(0) = 0$.
  On suppose, la plupart du temps qu'on a éliminé les singularités artificielles.

- ***pôle*** : $f(z)$ non bornée au voisinage de a, mais $\frac{1}{f(z)}$ est holomorphe au voisinage de a.
  Exemple : la fonction $\frac{1}{z-a}$ n'est pas bornée au voisinage de a mais $\frac{1}{f(z)} = z - a$ est holomorphe au voisinage de a. Le point a est un pôle pour la fonction $\frac{1}{z-a}$.
  Si le point a est un pôle pour la fonction $f(z)$, le plus entier positif n pour lequel $(z-a)^n\ f(z)$ est holomorphe au voisinage de a s'appelle l' ***ordre de multiplicité*** du pôle.
  Exemple : La fonction $\frac{(z-2)(z-3)}{z\,(z-1)^3}$ a un pôle simple en $z = 0$ et un pôle d'ordre 3 en $z = 1$.

- ***point essentiel*** : a est un point singulier pour $f(z)$ et pour $\frac{1}{f(z)}$, mais f est une fonction uniforme, elle a une seule détermination pour une valeur de z.
  Exemple : la fonction $e^{\frac{1}{z}} = e^{\frac{x}{x^2+y^2}} \times e^{-i\frac{y}{x^2+y^2}}$ a un point essentiel en $z = 0$.

- ***point critique*** : la fonction $f(z)$ ne reprend pas la même valeur quand on suit un chemin faisant un tour autour de a. On dit que $f(z)$ est une ***fonction multiforme*** ou qu'elle a plusieurs ***déterminations*** en un point. On change de détermination en faisant un tour autour du point a.
  Exemple : la fonction $ln\ z$ définie par $ln(\rho e^{i\theta}) = ln\ \rho + i\theta$ augmente de $2i\pi$ quand on fait un tour autour du point 0.
  On peut rendre ***uniforme*** une fonction à plusieurs déterminations en pratiquant une ***coupure*** dans le plan complexe. Cette coupure constitue une barrière qu'on peut contourner, mais qu'on ne peut pas franchir. Chaque fois qu'on franchit la coupure, on change de détermination.
  Exemple : la fonction $ln\ z$ est rendue uniforme dans le plan complexe par une coupure allant de 0 à l'infini sur l'axe réel. Dans le plan coupé, on choisit une détermination : la fonction $ln\ z$ est alors bien définie en tout point du plan et elle est holomorphe dans le plan coupé. La détermination $ln\ z = ln\ \rho + i\theta$ avec $0 \le \theta < 2\pi$ est appelée la ***détermination principale du logarithme***.

Remarques sur les singularités.

- On étudie les ***singularités à l'infini*** en faisant le changement de variable $z' = \frac{1}{z}$ et en étudiant les singularités de la fonction pour $z' = 0$.
- Une fonction $f(z)$ peut n'avoir aucune singularité dans un domaine et, cependant, ne pas être holomorphe dans ce domaine. Par exemple, la fonction $\sqrt{z}$ n'a aucun point singulier dans le domaine compris entre deux cercles de centre 0 et cependant, elle change de détermination quand on fait un tour entourant le point 0 : elle n'est pas holomorphe dans le domaine compris entre les deux cercles.

Suite des définitions.

Une fonction qui n'a, dans un domaine D, qu'un nombre fini de points singuliers qui sont des pôles, est appelée une ***fonction méromorphe*** dans D.
Une fonction holomorphe dans tout domaine borné est appelée une ***fonction entière***.
On appelle ***fonction analytique*** dans un domaine D toute fonction qui est holomorphe dans D, sauf peut-être dans un ensemble dénombrable de points singuliers (pôles, points essentiels, points critiques).

2°/ Points singuliers de la fonction *Arc tg z*.

La fonction $Arc\ tg\ z = \frac{1}{2i}\ ln\ \frac{1+iz}{1-iz}$ a des points singuliers qui viennent des singularités des fonctions

- homographique $z \to \frac{1+iz}{1-iz}$
- logarithme $z \to ln\ z$

La fonction logarithme a un point critique en $z = 0$ et un point critique à l'infini, donc tout point en lequel $\frac{1+iz}{1-iz}$ est nul ou infini est un point critique de la fonction $Arc\ tg\ z$.

> La fonction $Arc\ tg\ z$ a pour singuliers les points $z = -i$ et $z = i$ qui sont des points critiques.

Si on change z en $\frac{1}{z}$, la fonction $Arc\ tg\ z$ est changée en

$$Arc\ tg\ \frac{1}{z} = \frac{1}{2\,i}\ ln\ \frac{1+\frac{i}{z}}{1-\frac{i}{z}} = \frac{1}{2\,i}\ ln\ \frac{z+i}{z-i} = \frac{1}{2\,i}\ ln\ \frac{i(1-iz)}{-i(1+iz)}$$

Cette fonction a les mêmes points singuliers que la fonction *Arc tg z* : il n'y a pas de singularité en $z = 0$. Donc la fonction *Arc tg z* n'a pas de singularité à l'infini.

3°/ Coupure rendant uniforme la fonction *Arc tg z*.

Les déterminations du logarithme sont définies par :

$$ln\ (\rho\, e^{i\,\theta}) = ln\ \rho\ + i\ \theta + 2\,i\,k\,\pi \quad \text{avec} \quad 0 \le \theta < 2\,\pi \text{ et } k \text{ entier relatif quelconque}$$

Posons :

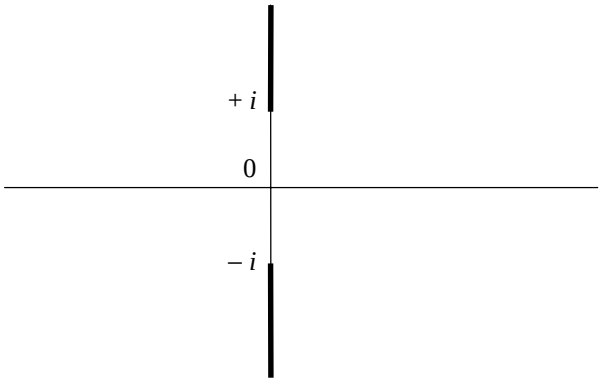
$$z - i = \rho_1\, e^{i\,\theta_1}$$
$$z + i = \rho_2\, e^{i\,\theta_2}$$

On a

$$1 + i\,z = i\,(z - i) = \rho_1\, e^{i\left(\theta_1 + \frac{\pi}{2}\right)}$$
$$1 - i\,z = -\,i\,(z + i) = \rho_2\, e^{i\left(\theta_2 - \frac{\pi}{2}\right)}$$
$$Arc\ tg\ z = \frac{1}{2\,i}\ ln\ \frac{1+i\,z}{1-i\,z} = \frac{1}{2\,i}\ ln\left(\ \frac{\rho_1}{\rho_2}\ e^{\,i\ (\theta_1-\theta_2+\pi)}\ \right) = -\,\frac{i}{2}\ ln\ \frac{\rho_1}{\rho_2} + \frac{1}{2}\ (\ \theta_1 - \theta_2 + \pi + 2\,k\,\pi\ )$$

Pour rendre uniforme la fonction *Arc tg z*, il faudra couper le plan de telle sorte que $\frac{1}{2}\ (\ \theta_1 - \theta_2 + \pi + 2\,k\,\pi\ )$ reprenne la même valeur après un chemin quelconque revenant au même point. Donc ou bien θ_1 augmente de $2\,\pi$ et alors θ_2 doit aussi augmenter de $2\,\pi$ (coupure joignant les deux points $-\,i$ et $+\,i$ sans passer par l'infini), ou bien θ_1 et θ_2 ne peuvent pas augmenter de $2\,\pi$ (coupure joignant $-\,i$ à l'infini, et $+\,i$ à l'infini).

Comme on veut partir du point $z = 0$, on choisira une coupure joignant $-\,i$ et $+\,i$ en passant par l'infini.



3°/ Choix d'une détermination de la fonction *Arc tg z*.

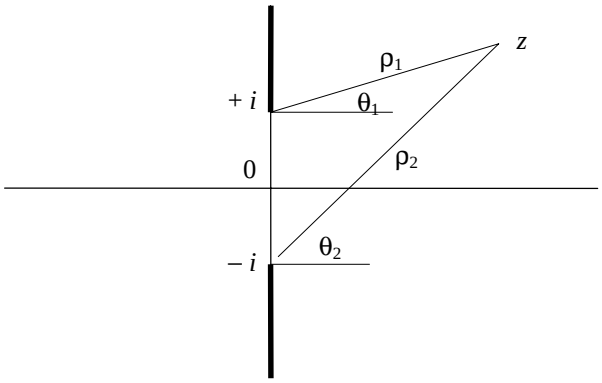
Pour $z = 0$, on a toujours $\rho_1 = \rho_2$ et la partie imaginaire de la fonction *Arc tg z* est nulle. Il reste :

$$Arc\ tg\ 0 = \frac{1}{2}\ (\ \theta_1 - \theta_2 + \pi + 2\,k\,\pi\ )$$

Pour avoir *Arc tg* 0 = 0, il faudra prendre $\theta_1 - \theta_2 = -\,\pi$ et $k = 0$, par exemple. Cela est possible en prenant la détermination principale du logarithme ($k = 0$) , $\theta_1 = -\,\frac{\pi}{2}$, $\theta_2 = \frac{\pi}{2}$ pour $z = 0$. Dans le plan coupé, on prendra pour cela des valeurs de θ_1 allant de $-\,\frac{3\,\pi}{2}$ à $+\,\frac{\pi}{2}$, des valeurs de θ_2 allant de $-\,\frac{\pi}{2}$ à $+\,\frac{3\,\pi}{2}$.

La fonction *Arc tg z* est alors déterminée par :

$$Arc\ tg\ z = \frac{1}{2}\,(\theta_1 - \theta_2 + \pi) - \frac{i}{2}\,ln\,\frac{\rho_1}{\rho_2} \qquad -\frac{3\pi}{2} < \theta_1 \leq +\frac{\pi}{2} \qquad -\frac{\pi}{2} \leq \theta_2 < +\frac{3\pi}{2}$$



4°/ Valeur finale de la fonction *Arc tg z*.

La valeur initiale *Arc tg 0 = 0* a permis de choisir une détermination de la fonction *Arc tg z* dans le plan coupé. Un chemin rectiligne allant du point 0 au point $1 + i$ ne traverse pas la coupure ; la fonction conserve donc la même détermination. Au point $1 + i$, on a :

$$\rho_1 = 1 \qquad \theta_1 = 0$$
$$\rho_2 = \sqrt{5} \qquad \theta_2 = Arc\ tg\ 2$$

$$Arc\ tg\ (1 + i) = \frac{1}{2}\,(\pi - Arc\ tg\ 2) - \frac{i}{2}\,ln\,\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$Arc\ tg\ (1 + i) = \frac{1}{2}\,(\pi - Arc\ tg\ 2) + \frac{i}{4}\,ln\,5$$

Exercice 4

On considère la fonction : $Arc\ cos\ z = \frac{1}{i}\ ln\ (\ z + \sqrt{z^2 - 1}\ )$.

1°/ Déterminez les points singuliers de la fonction *Arc cos z.*

2°/ Comment peut-on rendre uniforme la fonction *Arc cos z* ?

3°/ La fonction *Arc cos z* ayant pour valeur $\frac{\pi}{2}$ au point $z_0 = 0$, trouver sa valeur au point $z_1 = 2$, lorsqu'on passe de z_0 à z_1 par un demi-cercle (Γ) de centre 1 et d'ordonnées positives.

Corrigé de l'Exercice 4.

1°/ Points singuliers de la fonction *Arc cos z.*

La fonction *Arc cos z* est définie à partir d'un logarithme : elle aura pour point critique tout point annulant l'argument du logarithme. Or les solutions de l'équation

$$z + \sqrt{z^2 - 1}\ = 0$$

vérifient

$$z^2 = z^2 - 1$$

Il n'y a pas de solution. La fonction logarithme n'introduit donc pas de point critique dans la fonction *Arc cas z.*

Reste alors la fonction $\sqrt{z^2 - 1}$. Comme toute fonction puissance, elle est définie à partir du logarithme par :

$$z^n = e^{n\ ln\ z}$$

Si n est entier, la détermination est la même quelle que soit la détermination du logarithme. Par contre, si n n'est pas un entier, le choix de la détermination du logarithme a une influence sur la valeur finale de la fonction. Donc si la puissance n'est pas entière, il y a un point singulier pour chaque valeur de z qui annule l'argument de la puissance. Ici, les points singuliers seront les points $z = -1$ et $z = +1$. Ces points singuliers sont des points critiques puisqu'on change de détermination en tournant autour de l'un d'eux.

Pour le point à l'infini, changeons z en $\frac{1}{z}$:

$$Arc\ cos\ \frac{1}{z} = \frac{1}{i}\ ln\left(\ \frac{1}{z} + \sqrt{\frac{1}{z^2} - 1}\ \right) = \frac{1}{i}\ [\ ln\ (\ 1 + \sqrt{1 - z^2}\ )\ - ln\ z\ ]$$

Cette fonction a un point critique pour $z = 0$. Donc la fonction *Arc cos z* a un point critique à l'infini.

En résumé :

La fonction *Arc cos z* a trois points singuliers isolés :

- un point critique en $z = -1$
- un point critique en $z = +1$
- un point critique à l'infini

2°/ Coupure rendant uniforme la fonction *Arc cos z.*

Si l'on pose :

$$z + 1 = \rho_1\ e^{i\ \theta_1}$$
$$z - 1 = \rho_2\ e^{i\ \theta_2}$$

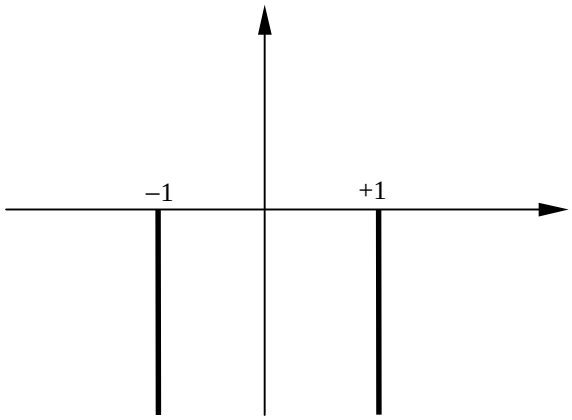
on obtient :

$$Arc\cos z = \frac{1}{i}\, ln\left(z + e^{\frac{1}{2}\, ln\,(\rho_1 \rho_2) + \frac{i}{2}(\theta_1 + \theta_2 + 2\,k\,\pi)} \right) = \frac{1}{i}\, ln\left(z + \sqrt{\rho_1 \rho_2}\; e^{\frac{i}{2}(\theta_1 + \theta_2 + 2\,k\,\pi)} \right)$$

Une fois choisie la valeur de la constante k, c'est-à-dire la détermination du logarithme, si l'on tourne un tour autour du point -1, θ_1 augmente de $2\,\pi$. Pour que la fonction $Arc\cos z$ ne change pas de détermination, il faudra que θ_2 augment aussi de $2\,\pi$: la coupure qui rendra $Arc\cos z$ uniforme doit empêcher que l'on tourne séparément autour des deux points critiques -1 et 1 : elle doit joindre ces deux points. Comme le point à l'infini est aussi un point critique, la coupure doit rejoindre le point à l'infini.

La coupure joindra les points -1 et $+1$ en passant par le point à l'infini : comme on veut éviter que la coupure passe par les points 0 et 2, qui sont le point de départ et le point d'arrivée du chemin que l'on veut suivre, on pratiquera une telle coupure par :

- une demi-droite d'ordonnées négatives joignant le point -1 à l'infini
- une demi-droite d'ordonnées négatives joignant le point $+1$ à l'infini



3°/ Détermination finale de la fonction *Arc cos z*.

On veut avoir $Arc\cos 0 = \frac{\pi}{2}$,

on a

$$Arc\cos z = \frac{1}{i}\, ln\left(z + \sqrt{\rho_1 \rho_2}\; e^{\frac{i}{2}(\theta_1 + \theta_2 + 2\,k\,\pi)} \right).$$

Pour $z = 0$, on a $\rho_1 = \rho_2 = 1$, il reste :

$$Arc\cos 0 = \frac{1}{2}\,(\theta_1 + \theta_2 + 2\,k\,\pi)$$

Avec la détermination principale du logarithme ($k = 0$), il suffit de prendre $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = \pi$. Ceci impose de prendre pour détermination de la fonction

$$Arc\cos z = \frac{1}{i}\, ln\left(z + \sqrt{\rho_1 \rho_2}\; e^{i\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}} \right) \qquad -\frac{\pi}{2} \le \theta_1 < \frac{3\,\pi}{2} \qquad -\frac{\pi}{2} \le \theta_2 < \frac{3\,\pi}{2}$$

Quand on suit le demi-cercle Γ de centre 1 et de rayon 1, d'ordonnées positives pour alles du point 0 au point 2, on ne traverse pas la coupure, la détermination reste la même. Au point $z = 2$, on a :

$$\rho_1 = 3 \qquad \theta_1 = 0$$
$$\rho_2 = 1 \qquad \theta_2 = 0$$

$$Arc\cos 2 = \frac{1}{i}\, ln\,(2 + \sqrt{3}\,) = -\,i\, ln\,(2 + \sqrt{3}\,) = i\, ln\, \frac{1}{2+\sqrt{3}} = i\, ln\,(2 - \sqrt{3}\,)$$

$$Arc\cos 2 = i\, ln\,(2 - \sqrt{3}\,)$$

Séance 3

INTEGRATION DES FONCTIONS DE VARIABLE COMPLEXE

Exercice 1

1°/ Calculer l'intégrale $\int_{(C)} \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z} \right) dz$, étendue au cercle trigonométrique *(C)* de centre *O* (0 ; 0) et de rayon 1 parcouru dans le sens direct.

2°/ Calculer l'intégrale $\int_{(C)} \frac{z-1}{z+1}\, dz$, étendue au cercle *(C)* de centre *A* (− 1; 0) et de rayon 1 parcouru dans le sens direct.

3°/ Calculer l'intégrale $\int_{(C)} \left(\frac{z-1}{z+1} \right)^2 dz$, étendue au cercle *(C)* de centre *A* (− 1; 0) et de rayon 1 parcouru dans le sens direct.

Corrigé de l'Exercice 1.

1°/ Intégrale $\int_{(C)} \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z} \right) dz$

La fonction $\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z} \right)$ a, à l'intérieur du contour d'intégration, un pôle simple en 0. En ce pôle, le résidu est le coefficient de $\frac{1}{z}$ dans le développement en série de Laurent. Or la fonction est déjà présentée sous forme de développement en série de puissances de z. Le résidu en 0 est le coefficient $\frac{1}{2}$.

Le « ***théorème des résidus*** » indique que l'intégrale d'une fonction de variable complexe sur un contour fermé est égal au produit de $2\, i\, \pi$ par la somme des résidus aux pôles situés à l'intérieur du contour d'intégration, l'intérieur étant à gauche du sens de parcours. On obtient donc ici :

$$\int_{(C)} \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z} \right) dz = 2\, i\, \pi \times \frac{1}{2} = i\, \pi$$

$$\int_{(C)} \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z} \right) dz = i\, \pi$$

2°/ Intégrale $\int_{(C)} \frac{z-1}{z+1}\,dz$.

La fonction $\frac{z-1}{z+1}$ a un pôle simple au point -1 situé à l'intérieur du contour d'intégration. Le résidu en ce pôle, coefficient du terme $\frac{1}{z+1}$ dans le développement en série de Laurent de la fonction, est égal à

$$\lim_{z\to -1} (z+1)\, f(z) = \lim_{z\to -1} (z-1) = -2$$

Le théorème des résidus donne alors la valeur de l'intégrale :

$$\int_{(C)} \frac{z-1}{z+1}\,dz = 2\,i\,\pi \times (-2) = -4\,i\,\pi$$

$$\boxed{\int_{(C)} \frac{z-1}{z+1}\,dz = -4\,i\,\pi}$$

3°/ Intégrale $\int_{(C)} \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2 dz$.

La fonction $\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2$ a un pôle d'ordre 2 au point -1 situé à l'intérieur du contour d'intégration. Pour calculer le résidu en ce pôle, il faut développer la fonction en série de Laurent autour du point -1.

$$\frac{z-1}{z+1} = 1 - \frac{2}{z+1}$$

$$\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2 = \left(1 - \frac{2}{z+1}\right)^2 = \frac{4}{(z+1)^2} - \frac{4}{z+1} + 1$$

Le résidu au point -1 est donc -4.

Le théorème des résidus donne alors la valeur de l'intégrale :

$$\int_{(C)} \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2 dz = 2\,i\,\pi \times (-4) = -8\,i\,\pi$$

$$\boxed{\int_{(C)} \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2 dz = -8\,i\,\pi}$$

Exercice 2

Calculer l'intégrale $\frac{1}{2\,i\,\pi}\int_{(C)}\frac{(z+a)\,e^{z}}{z^{4}}\,dz$, étendue au cercle trigonométrique *(C)* de centre *O* (0 ; 0) et de rayon 1 parcouru dans le sens direct.

Corrigé de l'Exercice 2.

La fonction $\frac{(z+a)\,e^{z}}{z^{4}}$ possède à l'intérieur du contour d'intégration un unique point singulier en 0, qui est un pôle. Ce pôle est d'ordre 3 si $a = 0$; il est d'ordre 4 si $a \neq 0$. Comme le développement de la fonction e^{z} en série de puissances de z est uniformément convergent, on peut faire toutes opérations terme à terme sur ce développement :

$$e^{z} = 1 + z + \frac{z^{2}}{2} + \ldots + \frac{z^{n}}{n!} + \ldots$$

1°/ Cas où $a = 0$.

$$\frac{(z+a)\,e^{z}}{z^{4}} = \frac{e^{z}}{z^{3}} = \frac{1}{z^{3}} + \frac{1}{z^{2}} + \frac{1}{2\,z} + \frac{1}{6} + \frac{z}{24} + \ldots + \frac{z^{n}}{(n+3)!} + \ldots$$

Le résidu en $z = 0$ est le coefficient de $\frac{1}{z}$ dans ce développement, c'est $\frac{1}{2}$. Le théorème des résidus donne alors la valeur de l'intégrale :

$$\frac{1}{2\,i\,\pi}\int_{(C)}\frac{e^{z}}{z^{3}}\,dz = \frac{1}{2}$$

2°/ Cas où $a \neq 0$.

$$\frac{(z+a)\,e^{z}}{z^{4}} = \frac{e^{z}}{z^{3}} + a\,\frac{e^{z}}{z^{4}} = \frac{a}{z^{4}} + \frac{a+1}{z^{3}} + \frac{a+2}{2\,z^{2}} + \frac{a+3}{6\,z} + \frac{a+4}{24} + \ldots + \frac{a+n+4}{(n+4)!}\,z^{n} + \ldots$$

Le résidu en $z = 0$ est le coefficient de $\frac{1}{z}$ dans ce développement, c'est $\frac{a+3}{6}$. Le théorème des résidus donne alors la valeur de l'intégrale :

$$\frac{1}{2\,i\,\pi}\int_{(C)}\frac{(z+a)\,e^{z}}{z^{4}}\,dz = \frac{a+3}{6}$$

Pour $a = 0$, on retrouve la valeur trouvée en 1°/.

Exercice 3

Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\cos 3x}{2+\cos x}\, dx$

Corrigé de l'Exercice 3.

1°/ Réduction du problème à une intégration dans le plan complexe.

Tout d'abord, remarquons les symétries de l'intégrale, due à la parité de la fonction cosinus : si l'on pose

$$x = 2\pi - x'$$

l'intégrale devient :

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos 3x}{2+\cos x}\, dx = \int_{2\pi}^{\pi} \frac{\cos 3x'}{2+\cos x'} (-dx') = \int_{\pi}^{2\pi} \frac{\cos 3x}{2+\cos x}\, dx$$

de sorte que l'on a :

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos 3x}{2+\cos x}\, dx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{\cos 3x}{2+\cos x}\, dx$$

Posons $z = e^{ix}$. On a $dz = i\, e^{ix}\, dx$, ou $dx = -i\,\dfrac{dz}{z}$. Lorsque x décrit le segment $[\,0\,;\,2\pi\,]$, la variable z décrit le cercle trigonométrique (C) dans le sens direct.

$$\frac{\cos 3x}{2+\cos x} = \frac{1}{2}\left(z^3 + \frac{1}{z^3} \right) \times \frac{1}{2+\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)} = \frac{(z^6+1)\,z}{z^3(z^2+4z+1)} = \frac{z^6+1}{z^2(z^2+4z+1)}$$

$$\boxed{\int_0^{2\pi} \frac{\cos 3x}{2+\cos x}\, dx = -i \int_{(C)} \frac{z^6+1}{z^3(z^2+4z+1)}\, dz}$$

3°/ Intégration de la fonction de variable complexe.

La fonction $\dfrac{z^6+1}{z^3(z^2+4z+1)}$ est holomorphe, sauf aux points :

- $z = 0$ pôle d'ordre 3
- $z = -2 \pm \sqrt{3}$ pôles simples

Les pôles situés à l'intérieur du cercle trigonométrique sont 0 et $-2+\sqrt{3}$. Le théorème des résidus donne :

$$\int_{(C)} \frac{z^6+1}{z^3(z^2+4z+1)}\, dz = 2\,i\,\pi\,(R_0 + R_{-2+\sqrt{3}})$$

Calcul du résidu en 0.

R_0 est le coefficient du terme en z^2 du développement en puissances de z de la fonction $\dfrac{1+z^6}{1+4z+z^2}$. La division euclidienne des polynômes permet de calculer :

$$\frac{1+z^6}{1+4z+z^2} = 1 - 4z + 15z^2 + 0\,(z^3)$$

donc $R_0 = 15$.

Calcul du résidu en $-2+\sqrt{3}$.

$$R_{-2+\sqrt{3}} = \lim_{z \to -2+\sqrt{3}} (z + 2 - \sqrt{3}) \times \frac{z^6 + 1}{z^3 (z^2 + 4z + 1)} = \lim_{z \to -2+\sqrt{3}} \frac{z^6 + 1}{z^3 (z + 2 + \sqrt{3})}$$

$$R_{-2+\sqrt{3}} = \frac{(-2+\sqrt{3})^6 + 1}{(-2+\sqrt{3})^3 ((-2+\sqrt{3}) + 2 + \sqrt{3})} = \left((-2 + \sqrt{3})^3 + \frac{1}{(-2+\sqrt{3})^3} \right) \times \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

$$(-2 + \sqrt{3})^3 = -8 + 12\sqrt{3} - 18 + 3\sqrt{3} = -26 + 15\sqrt{3}$$

$$\frac{1}{(-2+\sqrt{3})^3} = \frac{1}{-26+15\sqrt{3}} = \frac{-26-15\sqrt{3}}{676 - 675} = -26 - 15\sqrt{3}$$

$$R_{-2+\sqrt{3}} = -\frac{26}{\sqrt{3}}$$

$$\int_{(C)} \frac{z^6 + 1}{z^3 (z^2 + 4z + 1)} \, dz = 2 i \pi \left(15 - \frac{26}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos 3x}{2 + \cos x} \, dx = -i \int_{(C)} \frac{z^6 + 1}{z^3 (z^2 + 4z + 1)} \, dz = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} (-26 + 15\sqrt{3}) = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} (-2 + \sqrt{3})^3$$

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos 3x}{2 + \cos x} \, dx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{\cos 3x}{2 + \cos x} \, dx = \frac{\pi}{\sqrt{3}} (-2 + \sqrt{3})^3 = -\frac{\pi\sqrt{3}}{3} (2 - \sqrt{3})^3$$

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos 3x}{2 + \cos x} \, dx = -\frac{\pi\sqrt{3}}{3} (2 - \sqrt{3})^3$$

Exercice 4

Calculer l'intégrale $\int_0^1 \frac{dx}{(x+2)\sqrt[5]{x^3(1-x)^2}}$

Corrigé de l'exercice 4.

Soit $f(x)$ la fonction définie par

$$f(x) = \frac{1}{(x+2)\sqrt[5]{x^3(1-x)^2}}$$

1°/ Convergence de l'intégrale.

Vers 0.

$\varepsilon \; f(\varepsilon) \approx \frac{1}{2}\,\varepsilon^{\frac{2}{5}} \to 0$

Vers 1.

$\varepsilon \; f(1-\varepsilon) \approx \frac{1}{2}\,\varepsilon^{\frac{3}{5}} \to 0$

La convergence de l'intégrale est donc assurée.

2°/ Fonction holomorphe associée à l'intégrale.

A l'intégrale à calculer associons la fonction

$$f(z) = \frac{1}{(z+2)\,z^{\frac{3}{5}}(z-1)^{\frac{2}{5}}}$$

Les singularités de cette fonction sont :

- un pôle simple en $z = -2$
- un point critique en $z = 0$
- un point critique en $z = 1$

$$f\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{\left(\frac{1}{z}+2\right)\frac{1}{z^{\frac{3}{5}}}\left(\frac{1}{z}-1\right)^{\frac{2}{5}}} = \frac{z^{1+\frac{3}{5}+\frac{2}{5}}}{(1+2z)\times(1-z)^{\frac{2}{5}}} = \frac{z^2}{(1+2z)\times(1-z)^{\frac{2}{5}}}$$

$f\left(\frac{1}{z}\right)$ n'a pas de singularité en $z = 0$, donc $f(z)$ n'a pas de singularité à l'infini, qui est un zéro d'ordre 2.

Posons

$z = \rho_1 \; e^{i\theta_1}$

$z - 1 = \rho_2 \; e^{i\theta_2}$

Pour la détermination $ln\,\rho\,e^{i\,\theta} = ln\,\rho + i\,\theta + 2\,i\,k\,\pi$ du logarithme, avec une valeur particulière de k et un angle θ compris entre 0 et $2\,\pi$, nous avons :

$$z^{\frac{3}{5}} = e^{\frac{3}{5}\ln z} = \rho_1^{\frac{3}{5}}\, e^{\frac{3\,i\,\theta_1}{5}}\, e^{\frac{6\,i\,k\,\pi}{5}}$$

$$(z-1)^{\frac{2}{5}} = e^{\frac{2}{5}\ln z} = \rho_2^{\frac{2}{5}}\, e^{\frac{2\,i\,\theta_2}{5}}\, e^{\frac{4\,i\,k\,\pi}{5}}$$

$$f(z) = \frac{1}{(z+2)\,z^{\frac{3}{5}}(z-1)^{\frac{2}{5}}} = \frac{1}{(z+2)\,\rho_1^{\frac{3}{5}}\,\rho_2^{\frac{2}{5}}\, e^{\frac{3\,i\,\theta_1}{5}}\, e^{\frac{2\,i\,\theta_2}{5}}\, e^{\frac{10\,i\,k\,\pi}{5}}} = \frac{1}{(z+2)\,\rho_1^{\frac{3}{5}}\,\rho_2^{\frac{2}{5}}}\, e^{-\frac{3\,i\,\theta_1}{5}-\frac{2\,i\,\theta_2}{5}}$$

$$f(z) = \frac{1}{(z+2)\,\rho_1^{\frac{3}{5}}\,\rho_2^{\frac{2}{5}}}\, e^{-\frac{i\,(3\,\theta_1+2\,\theta_2)}{5}}$$

La valeur de $f(z)$ ne dépend finalement pas de la valeur choisie initialement pour la constante k dans la détermination du logarithme.

Lorsque θ_1 augmente de $2\,\pi$, l'argument de $(z+2)\,f(z)$ diminue de $\frac{6\,\pi}{5}$.

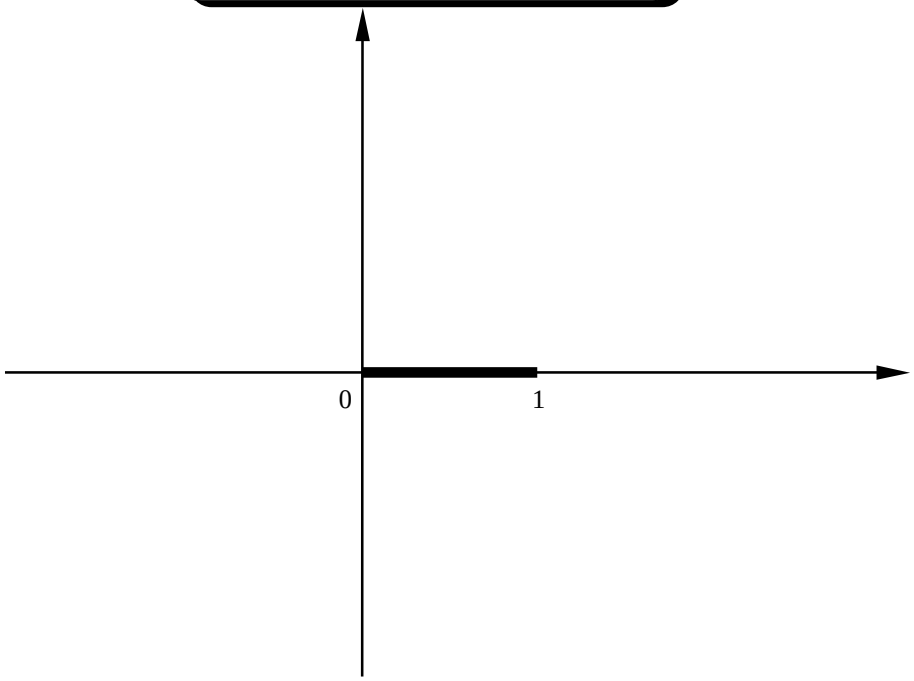
Lorsque θ_2 augmente de $2\,\pi$, l'argument de $(z+2)\,f(z)$ diminue de $\frac{4\,\pi}{5}$.

Donc si l'on fait un tour autour d'un point critique seul, la détermination de $f(z)$ change, alors que si l'on fait un tour autour des deux points critiques à la fois, l'argument de $(z+2)\,f(z)$ diminue de $\frac{10\,\pi}{5} = 2\,\pi$: la détermination de $f(z)$ ne change pas. On rendra donc uniforme la fonction $f(z)$ par une coupure empêchant de tourner autour d'un seul point critique. Il faut que l'on puisse tourner autour des deux points critiques à la fois ou bien autour d'aucun point critique. Ceci est réalisable par une coupure joignant les deux points critiques : cette coupure peut, ou non, passer par le point à l'infini.

Comme l'intégrale que l'on s'est proposé de calculer est une intégrale de 0 à 1, nous choisirons une coupure sur le segment $[\,0\,;\,1\,]$ de l'axe réel.

Dans le plan ainsi coupé, nous avons pour fonction $f(z)$:

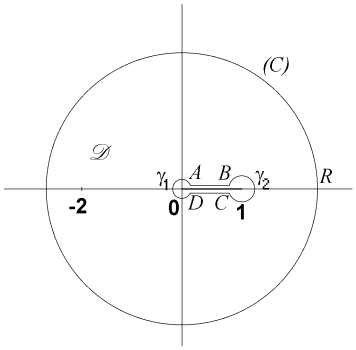
$$f(z) = \frac{1}{(z+2)\,\rho_1^{\frac{3}{5}}\,\rho_2^{\frac{2}{5}}}\, e^{-\frac{i\,(3\,\theta_1+2\,\theta_2)}{5}}$$



3°/ Contour d'intégration.

Nous intégrerons la fonction $f(z)$ sur un contour Γ formé de deux morceaux :

- Un grand cercle (C) de centre O et de rayon R qu'on prendra aussi grand qu'on veut, parcouru dans le sens direct.
- Un lacet entourant la coupure, parcouru en sens rétrograde, et constitué de
  - ∗ bord inférieur CD de la coupure, allant de 1 à 0
  - ∗ petit cercle γ_1 de rayon ε_1 aussi petit qu'on veut, autour du point 0
  - ∗ bord supérieur AB de la coupure, allant de 0 à 1
  - ∗ petit cercle γ_2 de rayon ε_2 aussi petit qu'on veut, autour du point 1



4°/ Valeur de l'intégrale.

La fonction $f(z)$ est holomorphe à l'intérieur du domaine D limité par ce coutour, sauf au point $z = -2$ qui est un pôle simple. Le théorème des résidus donne alors le résultat :

$$\int_{\Gamma} f(z)\,dz = 2\,i\,\pi \times R_{-2}$$

où R_{-2} est le résidu de la fonction $f(z)$ au point $z = -2$. Et par passage à la limite :

$$\lim_{\substack{\varepsilon_1 \to 0 \\ \varepsilon_2 \to 0 \\ R \to \infty}} \int_{\Gamma} f(z)\,dz = 2\,i\,\pi \times R_{-2}$$

$$\lim_{R\to\infty} \int_{(C)} f(z)\,dz + \lim_{\varepsilon_1 \to 0} \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \lim_{\varepsilon_2 \to 0} \int_{\gamma_2} f(z)\,dz + \lim_{\substack{\varepsilon_1 \to 0 \\ \varepsilon_2 \to 0}} \int_{AB} f(z)\,dz + \lim_{\substack{\varepsilon_1 \to 0 \\ \varepsilon_2 \to 0}} \int_{CD} f(z)\,dz = 2\,i\,\pi \times R_{-2}$$

Sur le grand cercle *(C)*.

Pour tout z de (C), $R\,|f(z)| \approx \dfrac{R}{R^2} \to 0$ si $R \to \infty$, donc, pour tout z de (C), $\lim_{R\to\infty} (R\,|f(z)|) = 0$ et

$$\max_{z \in (C)} \left(\lim_{R\to\infty} (R\,|f(z)|) \right) = 0$$

On a alors :

$$\left| \int_{(C)} f(z)\,dz \right| \le \int_{(C)} |f(z)|\,|dz| \le \max_{z \in (C)} (|f(z)|) \times \int_{(C)} |dz| = 2\,\pi\,R \times \max_{z \in (C)} (|f(z)|)$$

$$\left| \int_{(C)} f(z)\,dz \right| \le 2\,\pi \times \max_{z \in (C)} (R\,|f(z)|)$$

$$\left| \lim_{R\to\infty} \int_{(C)} f(z)\,dz \right| = \lim_{R\to\infty} \left| \int_{(C)} f(z)\,dz \right| \le 2\pi \lim_{R\to\infty} \left[\max_{z\in(C)} \left(R\,|f(z)| \right) \right]$$

$$\left| \lim_{R\to\infty} \int_{(C)} f(z)\,dz \right| \le 2\pi \max_{z\in(C)} \left(\lim_{R\to\infty} \left(R\,|f(z)| \right) \right) = 0$$

$$\boxed{\lim_{R\to\infty} \int_{(C)} f(z)\,dz = 0}$$

Sur le petit cercle γ_1.

Pour tout z de γ_1, avec $|z| = \varepsilon_1$, $\varepsilon_1 |f(z)| \approx \frac{1}{2}\,\varepsilon_1^{\frac{2}{5}} \to 0$ si $\varepsilon_1 \to 0$,

donc pour tout z de γ_1, $\lim_{\varepsilon_1\to 0} \left(\varepsilon_1 |f(z)| \right) = 0$ et $\max_{z\in\gamma_1} \left[\lim_{\varepsilon_1\to 0} \left(\varepsilon_1 |f(z)| \right) \right] = 0$

On a alors :

$$\left| \int_{\gamma_1} f(z)\,dz \right| \le \int_{\gamma_1} |f(z)|\,|dz| \le \max_{z\in\gamma_1} \left(|f(z)| \right) \times \int_{\gamma_1} |dz| = 2\pi\varepsilon_1 \times \max_{z\in\gamma_1} \left(|f(z)| \right)$$

$$\left| \int_{\gamma_1} f(z)\,dz \right| \le 2\pi \times \max_{z\in\gamma_1} \left(\varepsilon_1 |f(z)| \right)$$

$$\left| \lim_{\varepsilon_1\to 0} \int_{\gamma_1} f(z)\,dz \right| = \lim_{\varepsilon_1\to 0} \left| \int_{\gamma_1} f(z)\,dz \right| \le 2\pi \lim_{\varepsilon_1\to 0} \left[\max_{z\in\gamma_1} \left(\varepsilon_1 |f(z)| \right) \right]$$

$$\left| \lim_{\varepsilon_1\to 0} \int_{\gamma_1} f(z)\,dz \right| \le 2\pi \max_{z\in\gamma_1} \left(\lim_{\varepsilon_1\to 0} \left(\varepsilon_1 |f(z)| \right) \right) = 0$$

$$\boxed{\lim_{\varepsilon_1\to 0} \int_{\gamma_1} f(z)\,dz = 0}$$

Sur le petit cercle γ_2.

Pour tout z de γ_2, avec $|z-1| = \varepsilon_2$, $\varepsilon_2 |f(z)| \approx \frac{1}{2}\,\varepsilon_2^{\frac{3}{5}} \to 0$ si $\varepsilon_2 \to 0$,

donc pour tout z de γ_2, $\lim_{\varepsilon_2\to 0} \left(\varepsilon_2 |f(z)| \right) = 0$ et $\max_{z\in\gamma_2} \left[\lim_{\varepsilon_2\to 0} \left(\varepsilon_2 |f(z)| \right) \right] = 0$

On a alors :

$$\left| \int_{\gamma_2} f(z)\,dz \right| \le \int_{\gamma_2} |f(z)|\,|dz| \le \max_{z\in\gamma_2} \left(|f(z)| \right) \times \int_{\gamma_2} |dz| = 2\pi\varepsilon_2 \times \max_{z\in\gamma_2} \left(|f(z)| \right)$$

$$\left| \int_{\gamma_2} f(z)\,dz \right| \le 2\pi \times \max_{z\in\gamma_2} \left(\varepsilon_2 |f(z)| \right)$$

$$\left| \lim_{\varepsilon_2\to 0} \int_{\gamma_2} f(z)\,dz \right| = \lim_{\varepsilon_2\to 0} \left| \int_{\gamma_2} f(z)\,dz \right| \le 2\pi \lim_{\varepsilon_2\to 0} \left[\max_{z\in\gamma_2} \left(\varepsilon_2 |f(z)| \right) \right]$$

$$\left| \lim_{\varepsilon_2\to 0} \int_{\gamma_2} f(z)\,dz \right| \le 2\pi \max_{z\in\gamma_2} \left(\lim_{\varepsilon_2\to 0} \left(\varepsilon_2 |f(z)| \right) \right) = 0$$

$$\boxed{\lim_{\varepsilon_2\to 0} \int_{\gamma_2} f(z)\,dz = 0}$$

Sur le segment *AB*.

On a :

$\rho_1 = x$ $\quad\quad$ $\theta_1 = 0$

$\rho_2 = 1 - x$ $\quad\quad$ $\theta_2 = \pi$

$z = x$ $\quad\quad$ $dz = dx$

$$f(z) = \frac{1}{(z+2)\,\rho_1^{\frac{3}{5}}\,\rho_2^{\frac{2}{5}}}\,e^{-\frac{i(3\theta_1+2\theta_2)}{5}} = \frac{1}{(x+2)\sqrt[5]{x^3(1-x)^2}}\,e^{-\frac{2i\pi}{5}}$$

$$\int_{AB} f(z)\,dz = e^{-\frac{2i\pi}{5}} \int_{\varepsilon_1}^{1-\varepsilon_2} \frac{1}{(x+2)\sqrt[5]{x^3(1-x)^2}}\,dx$$

$$\lim_{\substack{\varepsilon_1 \to 0 \\ \varepsilon_2 \to 0}} \int_{AB} f(z)\,dz = e^{-\frac{2i\pi}{5}} \int_0^1 \frac{1}{(x+2)\sqrt[5]{x^3(1-x)^2}}\,dx$$

Sur le segment *CD*.

On a :

$\rho_1 = x$ $\quad\quad$ $\theta_1 = 0$

$\rho_2 = 1 - x$ $\quad\quad$ $\theta_2 = -\pi$

$z = x$ $\quad\quad$ $dz = dx$

$$f(z) = \frac{1}{(z+2)\,\rho_1^{\frac{3}{5}}\,\rho_2^{\frac{2}{5}}}\,e^{-\frac{i(3\theta_1+2\theta_2)}{5}} = \frac{1}{(x+2)\sqrt[5]{x^3(1-x)^2}}\,e^{\frac{2i\pi}{5}}$$

$$\int_{CD} f(z)\,dz = e^{\frac{2i\pi}{5}} \int_{1-\varepsilon_2}^{\varepsilon_1} \frac{1}{(x+2)\sqrt[5]{x^3(1-x)^2}}\,dx = -e^{\frac{2i\pi}{5}} \int_{\varepsilon_1}^{1-\varepsilon_2} \frac{1}{(x+2)\sqrt[5]{x^3(1-x)^2}}\,dx$$

$$\lim_{\substack{\varepsilon_1 \to 0 \\ \varepsilon_2 \to 0}} \int_{CD} f(z)\,dz = -e^{\frac{2i\pi}{5}} \int_0^1 \frac{1}{(x+2)\sqrt[5]{x^3(1-x)^2}}\,dx$$

Total.

En rassemblant les morceaux d'intégrale, la relation

$$\lim_{R\to\infty} \int_{(C)} f(z)\,dz + \lim_{\varepsilon_1 \to 0} \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \lim_{\varepsilon_2 \to 0} \int_{\gamma_2} f(z)\,dz + \lim_{\substack{\varepsilon_1 \to 0 \\ \varepsilon_2 \to 0}} \int_{AB} f(z)\,dz + \lim_{\substack{\varepsilon_1 \to 0 \\ \varepsilon_2 \to 0}} \int_{CD} f(z)\,dz = 2i\pi \times R_{-2}$$

devient :

$$\left(e^{-\frac{2i\pi}{5}} - e^{\frac{2i\pi}{5}}\right) \int_0^1 \frac{1}{(x+2)\sqrt[5]{x^3(1-x)^2}}\,dx = 2i\pi \times R_{-2}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{(x+2)\sqrt[5]{x^3(1-x)^2}}\,dx = -\frac{\pi}{\sin\frac{2\pi}{5}} \times R_{-2}$$

Calcul du résidu au point $z = -2$.

Comme le point $z = -2$ est un pôle simple, le résidu en ce point peut se calculer par la formule :

$$R_{-2} = \lim_{z \to -2} \left[(z+2)\,f(z) \right]$$

Pour $z = -2$, on a :

$\rho_1 = 2 \qquad \theta_1 = \pi + 2\,k\,\pi$

$\rho_2 = 3 \qquad \theta_2 = \pi + 2\,k\,\pi$

$$(z+2)\,f(z) = \frac{1}{\rho_1^{\frac{3}{5}}\,\rho_2^{\frac{2}{5}}}\,e^{-\frac{i\,(3\,\theta_1 + 2\,\theta_2)}{5}} = 2^{-\frac{3}{5}}\,3^{-\frac{2}{5}}\,e^{-\frac{i\,(3\,\pi + 6\,k\,\pi + 2\,\pi + 4\,k\,\pi)}{5}} = -\,2^{-\frac{3}{5}}\,3^{-\frac{2}{5}}$$

Il vient alors :

$$R_{-2} = \lim_{z \to -2} [\,(z+2)\,f(z)\,] = -\,2^{-\frac{3}{5}}\,3^{-\frac{2}{5}} = -\,\frac{1}{\sqrt[5]{72}}$$

D'où le résultat final :

$$\int_0^1 \frac{1}{(x+2)\sqrt[5]{x^3\,(1-x)^2}}\,dx = \frac{\pi}{\sin\frac{2\,\pi}{5}} \times \frac{1}{\sqrt[5]{72}}$$

Or $\sin\frac{2\,\pi}{5} = 2\,\sin\frac{\pi}{5}\,\cos\frac{\pi}{5} = 2\,\frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\,\sqrt{2}}\,\frac{\sqrt{5}+1}{4} = \frac{(\sqrt{5}+1)\,\sqrt{5-\sqrt{5}}}{4\,\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{\sqrt{5}}}{2}\,\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} = \frac{\sqrt{\varphi\,\sqrt{5}}}{2}$ en appelant φ le nombre d'or $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

On peut donc écrire la valeur de l'intégrale sous la forme :

$$\int_0^1 \frac{1}{(x+2)\sqrt[5]{x^3\,(1-x)^2}}\,dx = \frac{\pi}{\sqrt{\varphi\,\sqrt{5}}}\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2}{5}} = \frac{\pi}{\sqrt{\varphi\,\sqrt{5}}}\,\sqrt[5]{\frac{4}{9}}$$

On obtient donc, sous forme de radicaux :

$$\int_0^1 \frac{1}{(x+2)\sqrt[5]{x^3\,(1-x)^2}}\,dx = \frac{\pi}{\sqrt{\varphi\,\sqrt{5}}}\,\sqrt[5]{\frac{4}{9}} = \pi\,\frac{\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{5}}}}{\sqrt[10]{162}} \qquad \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Approximativement :

$$\frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{1}{(x+2)\sqrt[5]{x^3\,(1-x)^2}}\,dx = 0,\,447\,020$$

$$\int_0^1 \frac{1}{(x+2)\sqrt[5]{x^3\,(1-x)^2}}\,dx = 1,\,404\,355$$

Séance 4

DISTRIBUTIONS

Exercice 1

Soit T une distribution sur $\boldsymbol{R}$. Montrez les propriétés suivantes :

1°/ $x\,T = 0 \Leftrightarrow (\exists\, c \in \boldsymbol{C})\ (T = c\,\delta)$

2°/ Pour que la dérivée de T soit nulle, il faut et il suffit qu'il existe un nombre complexe c vérifiant

$$T = c\,1,$$

où 1 est la distribution définie par $< 1 , \varphi > = \int \varphi(x)\,dx.$

Corrigé de l'Exercice 1.

Définitions.

- On appelle "***fonction de base***" sur $\boldsymbol{R}$, toute fonction $\varphi : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{C}$ indéfiniment dérivable à support borné (le support d'une fonction est le plus petit ensemble fermé en dehors duquel la fonction est nulle). Les fonctions de base sur $\boldsymbol{R}$ forment un espace vectoriel D sur $\boldsymbol{C}$.

  Exemple : la fonction égale à $e^{-\frac{1}{1-x^2}}$ entre -1 et 1 et à 0 en dehors de l'intervalle $[-1 ; 1]$ est indéfiniment dérivable, y compris aux points -1 et 1, et son support est l'intervalle $[-1 ; 1]$: c'est une fonction de base.

- On dit qu' ***une suite de fonctions de base tend vers 0*** si la suite des fonctions tend uniformément vers 0 ainsi que toute suite de dérivées de même ordre.

- On appelle "***distribution***" sur $\boldsymbol{R}$ toute application linéaire et continue de l'espace vectoriel $\boldsymbol{D}$ des fonctions de base dans le corps $\boldsymbol{C}$ des complexes. Le terme "continu" veut dire que si une suite de fonctions de base tend vers 0, alors la suite des images de ces fonctions de base par la distribution est une suite de nombres complexes qui tend vers 0. Les distributions sur $\boldsymbol{R}$ forment un espace vectoriel D' sur $\boldsymbol{C}$.

  Exemples :
  - Toute fonction localement sommable (c'est-à-dire intégrable sur tout ensemble fermé borné) f définit une distribution par

    $$< f , \varphi > = \int f(t)\,\varphi(t)\,dt$$

  - Par exemple, la "***fonction de Heaviside***" $\Upsilon(x)$ égale à 0 pour $x \le 0$ et à 1 pour $x > 0$ définit la ***distribution de Heaviside*** Υ :

$$< \Upsilon , \varphi > = \int_0^{\infty} \varphi\,(t)\,dt$$

∗ La distribution définie par la formule :

$$< \delta , \varphi > = \varphi\,(0)$$

est appelée "***distribution de Dirac***".

Propriétés.

- Si α est une fonction indéfiniment dérivable, pas nécessairement à support borné, et T une distribution, on peut définir la distribution $\alpha\,T$ par

$$< \alpha\,T , \varphi > = < T , \alpha\,\varphi >$$

puisque $\alpha\,\varphi$ est une fonction de base, chaque fois que φ est une fonction de base.

- Pour toute distribution T, on peut définir une ***dérivée*** $\dfrac{dT}{dx}$ par

$$< \frac{dT}{dx} , \varphi > = - < T , \frac{d\varphi}{dx} >.$$

Contrairement aux fonctions, ***une distribution est toujours dérivable***. Comme une fonction peut définir une distribution, on peut se demander quel rapport il y a entre la dérivée au sens des fonctions et la dérivée au sens des distributions. Ce rapport est le suivant : si l'on considère une fonction f dérivable partout sauf en un point x_0 où la fonction présente un saut $\sigma_0 = f\,(x_0^{+}) - f\,(x_0^{-})$, la dérivée de f, qui est presque partout définie (définie partout sauf sur un ensemble de mesure nulle), définit une distribution $\left\{\dfrac{df}{dx}\right\}$ au moyen d'une intégrale ; cette distribution est liée à la distribution dérivée $\dfrac{df}{dx}$ de la distribution définie par la fonction f par la formule :

$$\frac{df}{dx} = \left\{\frac{df}{dx}\right\} + \sigma_0\,\delta.$$

Démonstration :

$$< \frac{df}{dx} , \varphi > = - < f , \frac{d\varphi}{dx} > = - \int f \frac{d\varphi}{dx}\,dx = - \int_{-\infty}^{x_0} f \frac{d\varphi}{dx}\,dx - \int_{x_0}^{+\infty} f \frac{d\varphi}{dx}\,dx$$

Pour chaque morceau d'intégrale, on intègre par parties :

$$- \int_{-\infty}^{x_0} f \frac{d\varphi}{dx}\,dx = [- f\,\varphi]_{-\infty}^{x_0^{-}} + \int_{-\infty}^{x_0} f\,'\,\varphi\,dx = - f\,(x_0^{-})\,\varphi\,(x_0) + \int_{-\infty}^{x_0} f\,'\,\varphi\,dx$$

$$- \int_{x_0}^{+\infty} f \frac{d\varphi}{dx}\,dx = [- f\,\varphi]_{x_0^{+}}^{+\infty} + \int_{x_0}^{+\infty} f\,'\,\varphi\,dx = + f\,(x_0^{+})\,\varphi\,(x_0) + \int_{x_0}^{+\infty} f\,'\,\varphi\,dx$$

Par addition, il vient :

$$- \int f \frac{d\varphi}{dx}\,dx = [\, f\,(x_0^{+}) - f\,(x_0^{-})\,]\,\varphi\,(x_0) + \int f\,'\,\varphi\,dx = < \sigma_0\,\delta , \varphi > + < \left\{\frac{df}{dx}\right\} , \varphi >$$

Exemple : soit Υ la distribution de Heaviside, définie par la fonction égale à 0 pour x négatif et à 1 pour x positif. Au point 0, elle présente un saut égal à 1. Sa dérivée au sens des fonctions est presque partout nulle puisque la fonction est constante par intervalles. Sa dérivée au sens des distributions est donc

$$\frac{d\Upsilon}{dx} = \delta.$$

Revenons à la résolution de notre exercice.

1°/ $x\,T = 0 \Leftrightarrow (\exists\, c)\,(c \in \boldsymbol{C}$ et $T = c\,\delta)$.

a) $(\exists\, c)\,(c \in \boldsymbol{C}$ et $T = c\,\delta) \Rightarrow x\,T = 0$

Pour toute fonction de base φ, on a, en effet, lorsque $T = c\,\delta$:

$$< x\,T\,,\,\varphi > = < T\,,\,x\,\varphi > = < c\,\delta\,,\,x\,\varphi > = c < \delta\,,\,x\,\varphi > = c \times 0 \times \varphi\,(0) = 0$$

et ceci montre que $x\,T$ est la distribution nulle :

$$x\,T = 0.$$

b) $x\,T = 0 \Rightarrow (\exists\, c)\,(c \in \boldsymbol{C}$ et $T = c\,\delta)$

- T est nulle pour toute fonction de base χ de la forme $\chi = x\,\varphi$ où φ est une fonction de base.
  En effet, on a, lorsque $\chi = x\,\varphi$:
  $$< T\,,\,\chi > = < T\,,\,x\,\varphi > = < x\,T\,,\,\varphi > = < 0\,,\,\varphi > = 0$$

- Pour qu'une fonction de base χ soit de la forme $\chi = x\,\varphi$, il faut et il suffit que l'on ait $\chi\,(0) = 0$.
  En effet, si $\chi = x\,\varphi$, on a $\chi\,(0) = 0$, et, réciproquement, si $\chi\,(0) = 0$, la fonction $\varphi\,(x) = \dfrac{\chi(x)}{x}$ est indéfiniment dérivable en dehors de 0 et la formule de Taylor, appliquée à la fonction $\chi\,(x)$ montre que c'est encore vrai pour 0.

- Considérons alors une fonction de base θ, fixée une fois pour toutes, telle que $\theta\,(0) = 1$. Toute fonction de base φ peut être écrite sous la forme $\varphi = \lambda\,\theta + \chi$ avec $\lambda \in \boldsymbol{C}$ et $\chi \in D$. Il suffit de prendre
  $$\lambda = \varphi\,(0) \text{ et } \chi = \varphi - \varphi\,(0)\,\theta$$
  car, dans ce cas :
  $$\varphi\,(x) = \varphi\,(0)\,\theta\,(x) + \varphi\,(x) - \varphi\,(0)\,\theta\,(x) = \lambda\,\theta\,(x) + \chi\,(x) = (\lambda\,\theta + \chi)\,(x)$$
  On a alors
  $$\chi\,(0) = \varphi\,(0) - \varphi\,(0)\,\theta\,(0) = \varphi\,(0) - \varphi\,(0) \times 1 = \varphi\,(0) - \varphi\,(0) = 0,$$
  donc
  $$< T, \chi > = 0,$$
  c'est-à-dire
  $$< T\,,\,\varphi - \varphi\,(0)\,\theta > = 0,$$
  ou
  $$< T\,,\,\varphi > - < T\,,\,\varphi\,(0)\,\theta > = 0$$
  $$< T\,,\,\varphi > = < T\,,\,\varphi\,(0)\,\theta > = < T\,,\,\theta > \varphi\,(0) = c\,\varphi\,(0)$$
  en notant c la constante $< T\,,\,\theta >$. La relation $< T\,,\,\varphi > = c\,\varphi\,(0)$ s'écrit aussi :
  $$< T\,,\,\varphi > = < c\,\delta\,,\,\varphi >$$
  On a donc $T = c\,\delta$.

2°/ $\dfrac{dT}{dx} = 0 \Leftrightarrow (\exists\, c)\,(c \in \boldsymbol{C}$ et $T = c\,1)$

a) $(\exists\, c)\,(c \in \boldsymbol{C}$ et $T = c\,1) \Rightarrow \dfrac{dT}{dx} = 0.$

Pour toute fonction de base φ, on a, en effet, lorsque $T = c\ 1$:

$$< \frac{dT}{dx} , \varphi > = - < \mathrm{T} , \frac{d\varphi}{dx} > = - < c\ 1 , \frac{d\varphi}{dx} > = - c < 1 , \frac{d\varphi}{dx} > = - c \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\varphi}{dx}\, dx = - c\ [\ \varphi (x)\ ]_{-\infty}^{+\infty} = 0$$

puisque φ est à support borné.

b) $\dfrac{dT}{dx} = 0 \Rightarrow (\exists\ c\ ) (c\ \in \boldsymbol{C}$ et $T = c\ 1\ )$

- Si $\dfrac{dT}{dx}$ est nul, on a pour toute fonction de base φ :

$$0 = < \frac{dT}{dx} , \varphi > = - < T , \frac{d\varphi}{dx} > = < T , - \frac{d\varphi}{dx} >$$

Ceci montre que T est nulle pour toute fonction de base ψ qui est la dérivée d'une fonction de base φ :

$$(\forall\ \psi) (\psi \in D \Rightarrow ((\exists\ \varphi) (\varphi \in D \text{ et } \psi = \frac{d\varphi}{dx}) \Rightarrow < T , \psi > = 0)) \qquad (1)$$

- Pour qu'une fonction de base ψ soit la dérivée d'une fonction de base φ, il faut et il suffit que l'on ait :

$$\int \psi (t)\, dt = 0$$

$$(\forall\ \psi) (\psi \in D \Rightarrow ((\exists\ \varphi) (\varphi \in D \text{ et } \psi = \frac{d\varphi}{dx}) \Leftrightarrow < 1 , \psi > = 0)) \qquad (2)$$

En effet, considérons une fonction de base ψ. S'il existe une fonction de base φ telle que $\psi = \dfrac{d\varphi}{dx}$, on a :

$$< 1 , \psi > = \int \psi (x)\, dx = \int \frac{d\varphi}{dx}\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\varphi}{dx}\, dx = [\ \varphi (x)\ ]_{-\infty}^{+\infty} = 0$$

Et, réciproquement, si $< 1 , \psi > = 0$, on peut prendre $\varphi (x) = \int_{-\infty}^{x} \psi (t)\ dt$. La fonction $\varphi (x)$ est une fonction de base et l'on a

$$\psi = \frac{d\varphi}{dx}.$$

- Les relations (1) et (2) entraînent la relation :

$$(\forall\ \psi) (\psi \in D \Rightarrow (< 1 , \psi > = 0 \Rightarrow < T , \psi > = 0)) \qquad (3)$$

- Considérons alors une fonction de base quelconque φ. Soit χ une fonction de base telle que $< 1 , \chi > \neq 0$. Posons $a = \dfrac{\langle 1 , \varphi \rangle}{\langle 1 , \chi \rangle}$. On obtient : $0 = < 1 , \varphi > - a < 1 , \chi > = < 1 , \varphi > - < 1 , a\ \chi > = < 1 , \varphi - a\ \chi >$. La relation (3) entraîne $< T , \varphi - a\ \chi > = 0$ et l'on a :

$$< T , \varphi > = < T , a\ \chi > = a < T , \chi > = \frac{\langle 1 , \varphi \rangle}{\langle 1 , \chi \rangle} < T , \chi > = \frac{\langle T , \chi \rangle}{\langle 1 , \chi \rangle} < 1 , \varphi > = \left\langle \frac{\langle T , \chi \rangle}{\langle 1 , \chi \rangle} 1 , \varphi \right\rangle$$

relation qui montre que T est de la forme $c\ 1$, avec $c = \dfrac{\langle T , \chi \rangle}{\langle 1 , \chi \rangle} \in \boldsymbol{C}$. La distribution T est bien une ***distribution constante***.

Exercice 2

Trouver la limite, quand h tend vers 0, dans l'espace D' des distributions sur R, de $\frac{\delta_h - \delta_{-h}}{2h}$.

Corrigé de l'Exercice 2.

Pour toute fonction de base $\varphi \in D$, on a :

$$< \frac{\delta_h - \delta_{-h}}{2h} , \varphi > = \frac{\varphi(h) - \varphi(-h)}{2h}$$

D'après le théorème des accroissements finis, comme la fonction φ est continue et dérivable, il existe un nombre θ compris entre -1 et 1 tel que l'on ait :

$$\frac{\varphi(h) - \varphi(-h)}{2h} = \varphi'(\theta h)$$

Si h tend vers 0, θh tend vers et 0 et $\varphi'(\theta h)$ tend vers $\varphi'(0)$.

Donc $< \frac{\delta_h - \delta_{-h}}{2h} , \varphi > = \frac{\varphi(h) - \varphi(-h)}{2h} = \varphi'(\theta h)$ tend vers $\varphi'(0) = < -\delta' , \varphi >$, c'est dire que $\frac{\delta_h - \delta_{-h}}{2h}$ tend vers $-\delta'$.

$$\lim_{h \to 0} \frac{\delta_h - \delta_{-h}}{2h} = -\delta'$$

Exercice 3

$\Upsilon(x)$ désignant la fonction de Heaviside, calculer, au sens des distributions :

1°/ $\left(\frac{d}{dx} - \lambda \right) \Upsilon(x)\, e^{\lambda x}$

2°/ $\left(\frac{d^2}{dx^2} + \omega^2 \right) \frac{\Upsilon(x)\ \sin \omega x}{\omega}$

3°/ $\frac{d^m}{dx^m} \left(\frac{\Upsilon(x)\, x^{m-1}}{(m-1)!} \right)$ pour m entier ≥ 1

Corrigé de l'Exercice 3.

1°/ $\left(\frac{d}{dx} - \lambda \right) \Upsilon(x)\, e^{\lambda x}$

La formule donnant la dérivée, au sens des distributions, du produit d'une fonction indéfiniment dérivable $e^{\lambda x}$ par une distribution $\Upsilon(x)$ est, formellement, la même que celle qui donne la dérivée usuelle d'un produit de fonctions :

$$\frac{d}{dx} \left(\Upsilon(x)\, e^{\lambda x} \right) = \frac{d\Upsilon(x)}{dx}\, e^{\lambda x} + \Upsilon(x) \frac{d(e^{\lambda x})}{dx}$$

Or nous savons que :

- $\frac{d\Upsilon(x)}{dx}$ est la distribution de Dirac δ
- $\alpha(x)\, \delta = \alpha(0)\, \delta$ puisque, pour toute fonction de base φ
  $$< \alpha\, \delta\, ,\, \varphi > = < \delta\, ,\, \alpha\, \varphi > = \alpha(0)\, \varphi(0) = \alpha(0) < \delta,\, \varphi > = < \alpha(0)\, \delta,\, \varphi >$$
  donc $e^{\lambda x}\ \delta = \delta$
- $\frac{d(e^{\lambda x})}{dx} = \lambda\ e^{\lambda x}$ car la dérivée au sens des fonctions coïncide pour une fonction dérivable avec la dérivée au sens des distributions, puisqu'une fonction dérivable est continue et n'a pas de saut.

Il en résulte que la dérivée de $\Upsilon(x)\, e^{\lambda x}$ au sens des distributions est donnée par :

$$\frac{d}{dx} \left(\Upsilon(x)\, e^{\lambda x} \right) = \delta + \lambda\, \Upsilon(x)\, e^{\lambda x}$$

d'où :

$$\boxed{\left(\frac{d}{dx} - \lambda \right) \Upsilon(x)\, e^{\lambda x} = \delta}$$

2°/ $\left(\frac{d^2}{dx^2} + \omega^2 \right) \frac{\Upsilon(x)\ \sin \omega x}{\omega}$

$$\frac{d}{dx} \left(\Upsilon(x) \frac{\sin \omega x}{\omega} \right) = \frac{\sin \omega x}{\omega} \frac{d\Upsilon(x)}{dx} + \Upsilon(x) \cos \omega x = \sin 0\ \delta + \Upsilon(x) \cos \omega x = \Upsilon(x) \cos \omega x$$

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(\Upsilon(x) \frac{\sin \omega x}{\omega} \right) = \frac{d}{dx} \left(\Upsilon(x) \cos \omega x \right) = \cos \omega x \frac{d\Upsilon(x)}{dx} - \omega\, \Upsilon(x) \sin \omega x = \delta - \omega\, \Upsilon(x) \sin \omega x$$

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + \omega^2 \right) \frac{\Upsilon(x)\ sin\omega x}{\omega} = \delta$$

3°/ $\frac{d^m}{dx^m}\left(\frac{\Upsilon(x)\, x^{m-1}}{(m-1)!} \right)$ pour m entier ≥ 1

Pour $m = 1$.
On a :

$$\frac{d^m}{dx^m}\left(\frac{\Upsilon(x)\, x^{m-1}}{(m-1)!} \right) = \frac{d\Upsilon(x)}{dx} = \delta$$

Supposons que l'on ait :

$$\frac{d^m}{dx^m}\left(\frac{\Upsilon(x)\, x^{m-1}}{(m-1)!} \right) = \delta$$

pour un entier $m \geq 1$.

On a alors, pour l'entier $m + 1$:

$$\begin{aligned}
\frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}}\left(\frac{\Upsilon(x)\, x^m}{m!} \right) &= \frac{d^m}{dx^m}\left(\frac{d}{dx}\left(\frac{\Upsilon(x)\, x^m}{m!} \right) \right) \\
&= \frac{d^m}{dx^m}\left(\frac{x^m}{m!}\delta + \Upsilon(x)\frac{x^{m-1}}{(m-1)!} \right) \\
&= \frac{d^m}{dx^m}\left(0 + \Upsilon(x)\frac{x^{m-1}}{(m-1)!} \right) \\
&= \frac{d^m}{dx^m}\left(\Upsilon(x)\frac{x^{m-1}}{(m-1)!} \right) \\
&= \delta
\end{aligned}$$

et, par récurrence :

$$\boxed{\frac{d^m}{dx^m}\left(\frac{\Upsilon(x)\, x^{m-1}}{(m-1)!} \right) = \delta}$$ pour tout entier $m \geq 1$.

Séance 5

CONVOLUTION

Exercice 1

Soit $\Upsilon(x)$ la fonction de Heaviside.

1°/ Calculez le produit de convolution $\Upsilon(x)\, e^{\lambda x} \star \Upsilon(x)\, e^{\mu x}$.

2°/ Calculez le produit de convolution $\Upsilon(x)\, \sin x \star \Upsilon(x)\, sh\, 2x$.

Corrigé de l'Exercice 1.

Il faut commencer par donner quelques définitions et propriétés.

Définition.

Si f et g sont deux fonctions localement sommables, alors la fonction h définie par :

$$h(x) = \int f(x-t)\, g(t)\, dt$$

lorsque l'intégrale existe, est une fonction localement sommable qu'on appelle le "***produit de convolution***" de f et g et qu'on note :

$$h = f \star g$$

Propriétés.

- $f \star g = g \star f$. Le produit de convolution est commutatif.
  En effet, si l'on pose $x - t = u$, on a $du = -dt$ et :
  $$(f \star g)(x) = -\int_{+\infty}^{-\infty} f(u)\, g(x-u)\, du = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\, g(x-u)\, du = (g \star f)(x)$$
- On démontre que si f ou g est continue, $f \star g$ est continue (démonstration pas évidente).
- Si les deux fonctions f et g ont leurs supports dans l'intervalle $[0 ; +\infty[$, $f \star g$ existe et a son support dans $[0 ; +\infty[$. On a alors :

$$(f \star g)(x) = \Upsilon(x) \int_0^x f(x-t)\, g(t)\, dt$$

Cette propriété se démontre en considérant successivement les deux cas $x \le 0$ et $x \ge 0$.

Définitions.

- Le ***support d'une distribution*** est le plus petit ensemble fermé en dehors duquel la distribution est nulle. Ceci veut dire que si une fonction de base φ a son support en dehors du support de la distribution T, on a
$$< T , \varphi > = 0.$$

- Si S et T sont deux distributions sur R, on appelle "***produit de convolution***" de S et T, la distribution, lorsqu'elle existe, définie par :
$$< S \star T , \varphi > = < S_x , < T_y , \varphi (x + y) > >$$
Condition d'existence : les supports A et B de S et T sont tels que, pour tout $x \in A$ et pour tout $y \in B$:
$$x + y \text{ borné } \Leftrightarrow x \text{ borné et } y \text{ borné}$$

Propriétés.

- Si le produit de convolution existe, il est commutatif :
$$S \star T = T \star S$$
- Si S ou T a un support borné, $S \star T$ existe.
- Si S et T ont toutes deux leur support borné à gauche, leur produit de convolution existe et a son support borné à gauche. Les distributions à support borné à gauche forment une algèbre (espace vectoriel muni d'un produit lui donnant une structure d'anneau) appelée l' ***algèbre de convolution D'_+.***
- La distribution de Dirac δ est l'élément unité du produit de convolution :
$$T \star \delta = \delta \star T = T$$
- Pour tout entier $m \geq 1$, $\delta^{(m)} \star T$ existe et est égal à la dérivée m-ième de T au sens des distributions :
$$\delta^{(m)} \star T = \frac{d^m T}{dx^m}$$
- Les résultats de l'exercice 3 de la séance 4 s'écrivent :
$$(\delta' - \lambda \delta) \star \Upsilon(x) e^{\lambda x} = \delta$$
$$(\delta'' + \omega^2 \delta) \star \frac{\Upsilon(x) \sin \omega x}{\omega} = \delta$$
$$\delta^{(m)} \star \frac{\Upsilon(x) x^{m-1}}{(m-1)!} = \delta$$
- Soit Γ le cercle trigonométrique dans $\boldsymbol{R}^2$, toute distribution sur Γ a son support borné. Le produit de convolution de deux distributions sur Γ existe toujours et les distributions sur Γ forment une algèbre de convolution $D'(\Gamma)$.

Revenons à la résolution de notre exercice.

1°/ $\Upsilon(x) e^{\lambda x} \star \Upsilon(x) e^{\mu x}$.

Nous avons affaire ici au produit de convolution de deux distributions définies par des fonctions à support borné à gauche contenus dans l'intervalle [0 ; + ∞ [. Le produit de convolution des deux fonctions est défini par :
$$\Upsilon(x) e^{\lambda x} \star \Upsilon(x) e^{\mu x} = \int \Upsilon(x-t) e^{\lambda(x-t)} \Upsilon(t) e^{\mu t} \, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \Upsilon(x-t) e^{\lambda(x-t)} \Upsilon(t) e^{\mu t} \, dt$$

L'intégrale peut se décomposer en deux morceaux : $\int_{-\infty}^{+\infty} = \int_{-\infty}^{x} + \int_{x}^{+\infty}$.

- Entre $-\infty$ et x, on a $t < x$, $x - t > 0$, $\Upsilon(x-t) = 1$, $\Upsilon(t)$ dépendra du signe de x.
- Entre x et $+\infty$, on a $t > x$, $x - t < 0$, $\Upsilon(x-t) = 0$, $\int_{x}^{+\infty} \Upsilon(x-t)\, e^{\lambda(x-t)}\, \Upsilon(t)\, e^{\mu t}\, dt = 0$.

Il reste, dans tous les cas :

$$\Upsilon(x)\, e^{\lambda x} \star \Upsilon(x)\, e^{\mu x} = \int_{-\infty}^{x} e^{\lambda(x-t)}\, \Upsilon(t)\, e^{\mu t}\, dt = e^{\lambda x} \times \int_{-\infty}^{x} \Upsilon(t)\, e^{(\mu-\lambda)t}\, dt$$

∗ Pour $x \le 0$, on a $t \le x \le 0$, donc $\Upsilon(t) = 0$ et l'intégrale est nulle.

∗ Pour $x > 0$, on peut décomposer l'intégrale en deux morceaux : $\int_{-\infty}^{x} = \int_{-\infty}^{0} + \int_{0}^{x}$

Entre $-\infty$ et 0, on a $t < 0$, donc $\Upsilon(t) = 0$ et l'intégrale est nulle.
Entre 0 et x, on a $0 \le t \le x$, $\Upsilon(t) = 1$ et il reste :

$$\int_{-\infty}^{x} \Upsilon(t)\, e^{(\mu-\lambda)t}\, dt = \int_{0}^{x} e^{(\mu-\lambda)t}\, dt.$$

Il y a deux cas à considérer pour calculer l'intégrale :

∗ 1er cas : $\lambda = \mu$.

$$\int_{0}^{x} e^{(\mu-\lambda)t}\, dt = \int_{0}^{x} dt = x$$

$$\Upsilon(x)\, e^{\lambda x} \star \Upsilon(x)\, e^{\mu x} = x\, e^{\lambda x}$$

∗ 2ème cas : $\lambda \neq \mu$.

$$\int_{0}^{x} e^{(\mu-\lambda)t}\, dt = \frac{1}{\mu-\lambda}\left(e^{(\mu-\lambda)x} - 1\right)$$

$$\Upsilon(x)\, e^{\lambda x} \star \Upsilon(x)\, e^{\mu x} = \frac{1}{\mu-\lambda}\left(e^{(\mu-\lambda)x} - 1\right) \times e^{\lambda x} = \frac{e^{\mu x} - e^{\lambda x}}{\mu-\lambda} = \frac{e^{\lambda x} - e^{\mu x}}{\lambda-\mu}$$

En résumé :

$$\Upsilon(x)\, e^{\lambda x} \star \Upsilon(x)\, e^{\mu x} = \begin{cases} \Upsilon(x)\, x\, e^{\lambda x} & \text{si } \lambda = \mu \\ \Upsilon(x)\, \dfrac{e^{\lambda x} - e^{\mu x}}{\lambda-\mu} & \text{si } \lambda \neq \mu \end{cases}$$

2°/ $\Upsilon(x)\, \sin x \star \Upsilon(x)\, sh\, 2x$

C'est une application directe de la formule précédente car on a :

$$\Upsilon(x)\, \sin x = \frac{1}{2i}\left(\Upsilon(x)\, e^{ix} - \Upsilon(x)\, e^{-ix}\right)$$

$$\Upsilon(x)\, sh\, 2x = \frac{1}{2}\left(\Upsilon(x)\, e^{2x} - \Upsilon(x)\, e^{-2x}\right)$$

$$\Upsilon(x)\, \sin x \star \Upsilon(x)\, sh\, 2x = \frac{1}{4i}\left(\Upsilon(x)\, e^{ix} \star \Upsilon(x)\, e^{2x} - \Upsilon(x)\, e^{ix} \star \Upsilon(x)\, e^{-2x} - \Upsilon(x)\, e^{-ix} \star \Upsilon(x)\, e^{2x} + \Upsilon(x)\, e^{-ix} \star \Upsilon(x)\, e^{-2x}\right)$$

$$= \frac{1}{4i}\left(\Upsilon(x)\, \frac{e^{ix} - e^{2x}}{i-2} - \Upsilon(x)\, \frac{e^{ix} - e^{-2x}}{i+2} - \Upsilon(x)\, \frac{e^{-ix} - e^{2x}}{-i-2} + \Upsilon(x)\, \frac{e^{-ix} - e^{-2x}}{-i+2}\right)$$

$$= \frac{1}{4i}\left[\Upsilon(x)\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)\left(\frac{1}{i-2} - \frac{1}{i+2}\right) - \Upsilon(x)\left(e^{2x} - e^{-2x}\right)\left(\frac{1}{i-2} + \frac{1}{i+2}\right)\right]$$

$$= -\frac{2}{5}\Upsilon(x)\, \sin x + \frac{1}{5}\Upsilon(x)\, sh\, 2x = \frac{\Upsilon(x)}{5}\left(sh\, 2x - 2\sin x\right)$$

$$\Upsilon(x)\ \sin x \star \Upsilon(x)\ sh\ 2x = \frac{\Upsilon(x)}{5}\ (sh\ 2x - 2\ \sin x)$$

Remarques importantes.

$$\Upsilon(x)\ \sin x = \Upsilon(x)\ \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = \Upsilon(x)\ e^{ix} \star \Upsilon(x)\ e^{-ix}$$
$$= (\delta' - i\delta)^{-1} \star (\delta' + i\delta)^{-1} = [(\delta' - i\delta) \star (\delta' + i\delta)]^{-1} = (\delta'' + \delta)^{-1}$$
$$\Upsilon(x)\ sh\ 2x = \Upsilon(x)\ \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} = 2\ \Upsilon(x)\ e^{2x} \star \Upsilon(x)\ e^{-2x}$$
$$= 2(\delta' - 2\delta)^{-1} \star (\delta' + 2\delta)^{-1} = 2[(\delta' - 2\delta) \star (\delta' + 2\delta)]^{-1} = 2(\delta'' - 4\delta)^{-1}$$
$$\Upsilon(x)\ \sin x \star \Upsilon(x)\ sh\ 2x = 2(\delta'' + \delta)^{-1} \star (\delta'' - 4\delta)^{-1}$$
$$= 2[(\delta'' + \delta) \star (\delta'' - 4\delta)]^{-1}$$
$$= 2(\delta^{(4)} - 3\delta'' - 4\delta)^{-1}$$

On a donc :

$$\frac{1}{2}(\delta^{(4)} - 3\delta'' - 4\delta) \star \Upsilon(x)\ \sin x \star \Upsilon(x)\ sh\ 2x = \delta$$

Considérons l'opérateur différentiel $D = \frac{d^4}{dx^4} - 3\frac{d^2}{dx^2} - 4$. Appliqué à la distribution

$$\frac{1}{2}\ \Upsilon(x)\ \sin x \star \Upsilon(x)\ sh\ 2x = \frac{\Upsilon(x)}{10}\ (sh\ 2x - 2\ \sin x)$$

cet opérateur donne δ.
Si l'on recherche ce qu'on appelle la "***solution élémentaire***" de l'opérateur différentiel D, c'est-à-dire la fonction $f(x)$ solution de l'équation différentielle

$$\frac{d^4 f}{dx^4} - 3\frac{d^2 f}{dx^2} - 4f = 0$$

qui vérifie les conditions initiales :

$$f(0) = 0$$
$$\left(\frac{df}{dx}\right)_{x=0} = 0$$
$$\left(\frac{d^2 f}{dx^2}\right)_{x=0} = 0$$
$$\left(\frac{d^3 f}{dx^3}\right)_{x=0} = 1$$

on est amené à poser $F(x) = \Upsilon(x)\ f(x)$ et à considérer F comme une distribution à support dans $[0 ; +\infty[$.
Les dérivées successives de F au sens des distributions sont :

$$\frac{dF}{dx} = \Upsilon\ \frac{df}{dx}$$
$$\frac{d^2 F}{dx^2} = \Upsilon\ \frac{d^2 f}{dx^2}$$
$$\frac{d^3 F}{dx^3} = \Upsilon\ \frac{d^3 f}{dx^3}$$
$$\frac{d^4 F}{dx^4} = \Upsilon\ \frac{d^4 f}{dx^4} + \delta$$

et l'on a :

$$D\ F = \frac{d^4 F}{dx^4} - 3\frac{d^2 F}{dx^2} - 4F = (\delta^{(4)} - 3\delta'' - 4\delta) \star F$$

$$= \Upsilon(x)\left(\frac{d^4 f}{dx^4} - 3\frac{d^2 f}{dx^2} - 4 f \right) + \delta$$
$$= \delta$$
$$(\delta^{(4)} - 3\,\delta'' - 4\,\delta) \star F = \delta$$

On a donc :

$$F = (\delta^{(4)} - 3\,\delta'' - 4\,\delta)^{-1} = \frac{1}{2}\,\Upsilon(x)\,\sin x \star \Upsilon(x)\,sh\,2x = \frac{\Upsilon(x)}{10}\,(sh\,2x - 2\sin x)$$

et

$$f(x) = \frac{1}{10}\,(sh\,2x - 2\sin x)$$

La connaissance de cette solution élémentaire permet, par convolution, de résoudre l'équation avec un second membre non nul et de trouver toute solution vérifiant des conditions initiales données.

Par exemple, si l'on cherche la solution de l'équation différentielle :

$$\frac{d^4 f}{dx^4} - 3\frac{d^2 f}{dx^2} - 4 f = 2 e^{-x}$$

qui vérifie les conditions initiales :

$$f(0) = 0$$
$$\left(\frac{df}{dx} \right)_{x=0} = 1$$
$$\left(\frac{d^2 f}{dx^2} \right)_{x=0} = 0$$
$$\left(\frac{d^3 f}{dx^3} \right)_{x=0} = 0$$

on posera $F(x) = \Upsilon(x)\,f(x)$. Les dérivées de F au sens des distributions sont :

$$\frac{dF}{dx} = \Upsilon\,\frac{df}{dx}$$
$$\frac{d^2 F}{dx^2} = \Upsilon\,\frac{d^2 f}{dx^2} + \delta$$
$$\frac{d^3 F}{dx^3} = \Upsilon\,\frac{d^3 f}{dx^3} + \delta'$$
$$\frac{d^4 F}{dx^4} = \Upsilon\,\frac{d^4 f}{dx^4} + \delta''$$

et l'on a :

$$D\,F = \Upsilon D f + (\delta'' - 3\,\delta) = 2\,\Upsilon(x)\,e^{-x} + (\delta'' - 3\,\delta)$$
$$(\delta^{(4)} - 3\,\delta'' - 4\,\delta) \star F = 2\,\Upsilon(x)\,e^{-x} + (\delta'' - 3\,\delta)$$

d'où :

$$F = (\delta^{(4)} - 3\,\delta'' - 4\,\delta)^{-1} \star (2\,\Upsilon(x)\,e^{-x} + (\delta'' - 3\,\delta))$$
$$= \frac{\Upsilon(x)}{10}\,(sh\,2x - 2\sin x) \star (2\,\Upsilon(x)\,e^{-x} + (\delta'' - 3\,\delta))$$

et il reste seulement à calculer les produits de convolution qui interviennent.

Exercice 2

Soit δ la distribution de Dirac, $\Upsilon(x)$ la fonction de Heaviside, D'_+ l'espace des distributions sur R à support borné à gauche. Trouvez les inverses dans D'_+ des distributions suivantes :

1°/ $\delta'' - 5\,\delta' + 6\,\delta$

2°/ $\Upsilon + \delta''$

3°/ $\Upsilon(x)\,e^{x} + \delta'$

Corrigé de l'Exercice 2.

1°/ Inverse de $\delta'' - 5\,\delta' + 6\,\delta$.

$$\delta'' - 5\,\delta' + 6\,\delta = (\delta' - 2\,\delta) \star (\delta' - 3\,\delta)$$
$$(\delta'' - 5\,\delta' + 6\,\delta)^{-1} = (\delta' - 2\,\delta)^{-1} \star (\delta' - 3\,\delta)^{-1} = \Upsilon(x)\,e^{2x} \star \Upsilon(x)\,e^{3x} = \Upsilon(x)\,(e^{3x} - e^{2x})$$

$$\boxed{(\delta'' - 5\,\delta' + 6\,\delta)^{-1} = \Upsilon(x)\,(e^{3x} - e^{2x})}$$

2°/ Inverse de $\Upsilon + \delta''$.

$$\Upsilon + \delta'' = \delta'^{-1} + \delta'' = \delta'^{-1} \star (\delta + \delta''') = \delta'^{-1} \star (\delta' + \delta) \star (\delta'' - \delta' + \delta)$$
$$= \delta'^{-1} \star (\delta' + \delta) \star \left(\delta' - \frac{1+i\sqrt{3}}{2}\,\delta\right) \star \left(\delta' - \frac{1-i\sqrt{3}}{2}\,\delta\right)$$

$$(\Upsilon + \delta'')^{-1} = \delta' \star (\delta' + \delta)^{-1} \star \left(\delta' - \frac{1+i\sqrt{3}}{2}\,\delta\right)^{-1} \star \left(\delta' - \frac{1-i\sqrt{3}}{2}\,\delta\right)^{-1}$$
$$= \delta' \star \Upsilon(x)\,e^{-x} \star \Upsilon(x)\,e^{\frac{1+i\sqrt{3}}{2}x} \star \Upsilon(x)\,e^{\frac{1-i\sqrt{3}}{2}x}$$

$$\Upsilon(x)\,e^{\frac{1+i\sqrt{3}}{2}x} \star \Upsilon(x)\,e^{\frac{1-i\sqrt{3}}{2}x} = \Upsilon(x)\,\frac{e^{\frac{1+i\sqrt{3}}{2}x} - e^{\frac{1-i\sqrt{3}}{2}x}}{\frac{1+i\sqrt{3}}{2} - \frac{1-i\sqrt{3}}{2}} = \Upsilon(x)\,\frac{e^{\frac{1+i\sqrt{3}}{2}x} - e^{\frac{1-i\sqrt{3}}{2}x}}{i\sqrt{3}}$$

$$\delta' \star \Upsilon(x)\,e^{-x} = \delta - \Upsilon(x)\,e^{-x}$$

$$(\Upsilon + \delta'')^{-1} = (\delta - \Upsilon(x)\,e^{-x}) \star \Upsilon(x)\,\frac{e^{\frac{1+i\sqrt{3}}{2}x} - e^{\frac{1-i\sqrt{3}}{2}x}}{i\sqrt{3}}$$

$$= \frac{1}{i\sqrt{3}}\left(\Upsilon(x)\,e^{\frac{1+i\sqrt{3}}{2}x} - \Upsilon(x)\,e^{\frac{1-i\sqrt{3}}{2}x} - \Upsilon(x)\,e^{-x} \star \Upsilon(x)\,e^{\frac{1+i\sqrt{3}}{2}x} + \Upsilon(x)\,e^{-x} \star \Upsilon(x)\,e^{\frac{1-i\sqrt{3}}{2}x} \right)$$

$$\frac{1}{i\sqrt{3}}\left(\Upsilon(x)\,e^{\frac{1+i\sqrt{3}}{2}x} - \Upsilon(x)\,e^{\frac{1-i\sqrt{3}}{2}x} \right) = \frac{2}{\sqrt{3}}\,\Upsilon(x)\,e^{\frac{x}{2}}\,\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x$$

$$\Upsilon(x)\,e^{-x} \star \Upsilon(x)\,e^{\frac{1+i\sqrt{3}}{2}x} = \Upsilon(x)\,\frac{e^{-x} - e^{\frac{1+i\sqrt{3}}{2}x}}{-1 - \frac{1+i\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{3+i\sqrt{3}}\,\Upsilon(x)\left(e^{\frac{1+i\sqrt{3}}{2}x} - e^{-x} \right)$$

$$\Upsilon(x)\,e^{-x} \star \Upsilon(x)\,e^{\frac{1-i\sqrt{3}}{2}x} = \Upsilon(x)\,\frac{e^{-x} - e^{\frac{1-i\sqrt{3}}{2}x}}{-1-\frac{1-i\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{3-i\sqrt{3}}\,\Upsilon(x)\left(\, e^{\frac{1-i\sqrt{3}}{2}x} - e^{-x} \,\right)$$

$$-\Upsilon(x)\,e^{-x} \star \Upsilon(x)\,e^{\frac{1+i\sqrt{3}}{2}x} + \Upsilon(x)\,e^{-x} \star \Upsilon(x)\,e^{\frac{1-i\sqrt{3}}{2}x}$$

$$= \Upsilon(x)\,e^{-x}\left(\, \frac{2}{3+i\sqrt{3}} - \frac{2}{3-i\sqrt{3}} \,\right) - \frac{2}{3+i\sqrt{3}}\,\Upsilon(x)\,e^{\frac{1+i\sqrt{3}}{2}x} + \frac{2}{3-i\sqrt{3}}\,\Upsilon(x)\,e^{\frac{1-i\sqrt{3}}{2}x}$$

$$= -\frac{4\,i\sqrt{3}}{12}\,\Upsilon(x)\,e^{-x} - \frac{1}{6}\,(3 - i\sqrt{3})\,\Upsilon(x)\,e^{\frac{1+i\sqrt{3}}{2}x} + \frac{1}{6}\,(3 + i\sqrt{3})\,\Upsilon(x)\,e^{\frac{1-i\sqrt{3}}{2}x}$$

$$= -\frac{i}{\sqrt{3}}\,\Upsilon(x)\,e^{-x} - \frac{1}{2}\,\Upsilon(x)\,e^{\frac{x}{2}} \times 2\,i\,\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{i}{\sqrt{3}}\,\Upsilon(x)\,e^{\frac{x}{2}} \times \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x$$

$$(\Upsilon + \delta'')^{-1} = \frac{2}{\sqrt{3}}\,\Upsilon(x)\,e^{\frac{x}{2}}\,\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{3}\,\Upsilon(x)\,e^{-x} - \frac{1}{\sqrt{3}}\,\Upsilon(x)\,e^{\frac{x}{2}}\,\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{3}\,\Upsilon(x)\,e^{\frac{x}{2}}\,\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\,\Upsilon(x)\,e^{\frac{x}{2}}\,\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{3}\,\Upsilon(x)\,e^{\frac{x}{2}}\,\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{3}\,\Upsilon(x)\,e^{-x}$$

$$= \frac{2}{3}\,\Upsilon(x)\,e^{\frac{x}{2}}\left(\, \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x \,\right) - \frac{1}{3}\,\Upsilon(x)\,e^{-x}$$

$$(\Upsilon + \delta'')^{-1} = \frac{2}{3}\,\Upsilon(x)\,e^{\frac{x}{2}}\,\sin\left(\, \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{\pi}{6} \,\right) - \frac{1}{3}\,\Upsilon(x)\,e^{-x}$$

3°/ Inverse de $\Upsilon(x)\,e^{x} + \delta'$.

$$\Upsilon(x)\,e^{x} = (\delta' - \delta)^{-1}$$

$$\Upsilon(x)\,e^{x} + \delta' = \Upsilon(x)\,e^{x} + \delta \star \delta' = \Upsilon(x)\,e^{x} + \Upsilon(x)\,e^{x} \star (\delta' - \delta) \star \delta' = \Upsilon(x)\,e^{x} \star (\delta + (\delta' - \delta) \star \delta')$$

$$\Upsilon(x)\,e^{x} + \delta' = \Upsilon(x)\,e^{x} \star (\delta'' - \delta' + \delta) = \Upsilon(x)\,e^{x} \star (\delta' - \frac{1+i\sqrt{3}}{2}\delta) \star (\delta' - \frac{1-i\sqrt{3}}{2}\delta)$$

$$(\Upsilon(x)\,e^{x} + \delta')^{-1} = (\Upsilon(x)\,e^{x})^{-1} \star (\delta' - \frac{1+i\sqrt{3}}{2}\delta)^{-1} \star (\delta' - \frac{1-i\sqrt{3}}{2}\delta)^{-1}$$

$$= (\delta' - \delta) \star \Upsilon(x)\,e^{\frac{1+i\sqrt{3}}{2}x} \star \Upsilon(x)\,e^{\frac{1-i\sqrt{3}}{2}x}$$

$$= (\delta' - \delta) \star \Upsilon(x)\,\frac{e^{\frac{1+i\sqrt{3}}{2}x} - e^{\frac{1-i\sqrt{3}}{2}x}}{i\sqrt{3}} = (\delta' - \delta) \star \frac{2}{\sqrt{3}}\,\Upsilon(x)\,e^{\frac{x}{2}}\,\sin\left(\, \frac{\sqrt{3}}{2}x \,\right)$$

$$\delta' \star \frac{2}{\sqrt{3}}\,\Upsilon(x)\,e^{\frac{x}{2}}\,\sin\left(\, \frac{\sqrt{3}}{2}x \,\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}\,\Upsilon(x)\,\frac{d}{dx}\left(\, e^{\frac{x}{2}}\,\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x \,\right)$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\,\Upsilon(x)\,e^{\frac{x}{2}}\left(\, \frac{1}{2}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x \,\right)$$

$$(\delta' - \delta) \star \frac{2}{\sqrt{3}}\,\Upsilon(x)\,e^{\frac{x}{2}}\,\sin\left(\, \frac{\sqrt{3}}{2}x \,\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}\,\Upsilon(x)\,e^{\frac{x}{2}}\left(\, -\frac{1}{2}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x \,\right)$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \Upsilon(x)\, e^{\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} x + \frac{\pi}{6} \right)$$

$$\left(\Upsilon(x)\, e^{x} + \delta' \right)^{-1} = \frac{2}{\sqrt{3}} \Upsilon(x)\, e^{\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} x + \frac{\pi}{6} \right)$$

Exercice 3

Résoudre l'équation intégrale $\int_0^x (x-t)\cos(x-t)\, f(t)\, dt = g(x)$, où g est une fonction donnée et f une fonction inconnue, les deux ayant leur support dans l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

Corrigé de l'Exercice 3.

Une équation intégrale comme celle qui est proposée ici s'appelle une "***équation intégrale de Volterra***". Comme g a son support dans $[0 ; +\infty[$, cette équation est équivalente à l'équation de convolution dans l'espace D'_+ :

$$\Upsilon(x)\, x \cos x \star f(x) = g(x)$$

Sa solution dans D'_+ est donnée par :

$$f = (\Upsilon(x)\, x \cos x)^{-1} \star g(x)$$

Tout le problème est donc de déterminer l'inverse en convolution dans D'_+ de la distribution $\Upsilon(x)\, x \cos x$.

On peut écrire :

$$\Upsilon(x)\, x \cos x = \frac{\Upsilon(x)\, x\, e^{ix} + \Upsilon(x)\, x\, e^{-ix}}{2}$$

On sait par ailleurs que pour tout $\lambda \in C$, on a $\Upsilon(x)\, e^{\lambda x} \star \Upsilon(x)\, e^{\lambda x} = \Upsilon(x)\, x\, e^{\lambda x}$ (voir démonstration au début du corrigé de l'Exercice 1). On en déduit :

$\Upsilon(x)\, x\, e^{ix} = \Upsilon(x)\, e^{ix} \star \Upsilon(x)\, e^{ix} = (\delta' - i\delta)^{-1} \star (\delta' - i\delta)^{-1} = (\delta' - i\delta)^{-2}$

$\Upsilon(x)\, x\, e^{-ix} = \Upsilon(x)\, e^{-ix} \star \Upsilon(x)\, e^{-ix} = (\delta' + i\delta)^{-1} \star (\delta' + i\delta)^{-1} = (\delta' + i\delta)^{-2}$

Il vient alors :

$$\begin{aligned}
\Upsilon(x)\, x \cos x &= \frac{\Upsilon(x)\, x\, e^{ix} + \Upsilon(x)\, x\, e^{-ix}}{2} = \frac{1}{2}\left[(\delta' - i\delta)^{-2} + (\delta' + i\delta)^{-2}\right] \\
&= \frac{1}{2}(\delta' - i\delta)^{-2} \star (\delta' + i\delta)^{-2} \star \left[(\delta' + i\delta)^{2} + (\delta' - i\delta)^{2}\right] \\
&= \frac{1}{2}(\delta' - i\delta)^{-2} \star (\delta' + i\delta)^{-2} \star (2\delta'' - 2\delta) \\
&= (\delta'' + \delta)^{-2} \star (\delta'' - \delta) \\
&= (\delta^{(4)} + 2\delta'' + \delta)^{-1} \star (\delta' - \delta) \star (\delta' + \delta)
\end{aligned}$$

L'inverse en convolution de la distribution $\Upsilon(x)\, x \cos x$ dans D'_+ est donnée par :

$$\begin{aligned}
(\Upsilon(x)\, x \cos x)^{-1} &= (\delta^{(4)} + 2\delta'' + \delta) \star (\delta' - \delta)^{-1} \star (\delta' + \delta)^{-1} \\
&= (\delta^{(4)} + 2\delta'' + \delta) \star \Upsilon(x)\, e^{x} \star \Upsilon(x)\, e^{-x} \\
&= (\delta^{(4)} + 2\delta'' + \delta) \star \Upsilon(x) \frac{e^{x} - e^{-x}}{2} \\
&= (\delta^{(4)} + 2\delta'' + \delta) \star \Upsilon(x)\, sh\, x
\end{aligned}$$

Les dérivées successives de la distribution $\Upsilon(x)\, sh\, x$ sont :

$$\begin{aligned}
\delta' \star \Upsilon(x)\, sh\, x &= \Upsilon(x)\, ch\, x \\
\delta'' \star \Upsilon(x)\, sh\, x &= \Upsilon(x)\, sh\, x + \delta \\
\delta''' \star \Upsilon(x)\, sh\, x &= \Upsilon(x)\, ch\, x + \delta' \\
\delta^{(4)} \star \Upsilon(x)\, sh\, x &= \Upsilon(x)\, sh\, x + \delta + \delta''
\end{aligned}$$

et l'on obtient :

$$(\delta^{(4)} + 2\delta'' + \delta) \star \Upsilon(x)\, sh\, x = 4\,\Upsilon(x)\, sh\, x + \delta'' + 3\delta$$

$$(\Upsilon(x)\, x \cos x)^{-1} = 4\,\Upsilon(x)\, sh\, x + \delta'' + 3\delta$$

La solution $f = (\Upsilon(x)\, x \cos x)^{-1} \star g(x)$ est donc donnée par :

$$f = (4\,\Upsilon(x)\, sh\, x + \delta'' + 3\delta) \star g$$

$$f(x) = 4\,\Upsilon(x) \int_0^x sh(x-t)\, g(t)\, dt + \frac{d^2 g}{dx^2} + 3\, g(x)$$

Dans cette expression il faut supposer que $g(x)$ est une fonction deux fois dérivable, puisque f est une distribution régulière, c'est-à-dire définie par une fonction localement sommable.

Exercice 4

On désigne par $f(x)$ la solution de l'équation différentielle

$$y''' + 2y'' + y' + 2y = -10 \cos x$$

satisfaisant aux conditions initiales :

$$y(0) = 0, \qquad y'(0) = 0 \qquad y''(0) = -4$$

On pose $F(x) = \Upsilon(x) f(x)$, où $\Upsilon(x)$ est la fonction de Heaviside. Ecrire l'équation différentielle satisfaite par $F(x)$ au sens des distributions. Déterminer alors $F(x)$ en utilisant le calcul symbolique dans D'_+.

Corrigé de l'Exercice 4.

$F(x) = \Upsilon(x) f(x)$

$\delta' \star F = \dfrac{dF}{dx} = \Upsilon f' + f(0)\,\delta = \Upsilon f'$

$\delta'' \star F = \dfrac{d^2F}{dx^2} = \Upsilon f'' + f'(0)\,\delta + f(0)\,\delta' = \Upsilon f''$

$\delta''' \star F = \dfrac{d^3F}{dx^3} = \Upsilon f''' + f''(0)\,\delta + f'(0)\,\delta' + f(0)\,\delta'' = \Upsilon f''' - 4\,\delta$

$(\delta''' + 2\delta'' + \delta' + 2\delta) \star F = \Upsilon(f''' + 2f'' + f' + 2f) - 4\delta = -10\,\Upsilon(x)\cos x - 4\delta$

$(\delta'' + \delta) \star (\delta' + 2\delta) \star F = -2(5\,\Upsilon(x)\cos x + 2\delta)$

$(\delta' + i\delta) \star (\delta' - i\delta) \star (\delta' + 2\delta) \star F = -2(5\,\Upsilon(x)\cos x + 2\delta)$

$F = -2(\delta' + i\delta)^{-1} \star (\delta' - i\delta)^{-1} \star (\delta' + 2\delta)^{-1} \star (5\,\Upsilon(x)\cos x + 2\delta)$

$$F = -2\,\Upsilon(x)\,e^{-ix} \star \Upsilon(x)\,e^{ix} \star \Upsilon(x)\,e^{-2x} \star (5\,\Upsilon(x)\cos x + 2\delta)$$

1°/ Calcul de la solution élémentaire $\Upsilon(x)\,e^{-ix} \star \Upsilon(x)\,e^{ix} \star \Upsilon(x)\,e^{-2x}$.

Commençons par établir une formule qui pourra servir à plusieurs reprises.

Pour des réels a et b, on a :

$$\Upsilon(x)\,e^{ax} \star \Upsilon(x)\,e^{ibx} = \frac{a+ib}{a^2+b^2}\,\Upsilon(x)\,(e^{ax} - e^{ibx})$$

$$= \frac{a+ib}{a^2+b^2}\,\Upsilon(x)\,(e^{ax} - \cos bx - i \sin bx)$$

$$= \frac{\Upsilon(x)}{a^2+b^2}\left(a\,e^{ax} - a\cos bx + b \sin bx\right) + i\,\frac{\Upsilon(x)}{a^2+b^2}\left(b\,e^{ax} - b\cos bx - a \sin bx\right)$$

Or on a aussi :

$$\Upsilon(x)\,e^{ax} \star \Upsilon(x)\,e^{ibx} = \Upsilon(x)\,e^{ax} \star \Upsilon(x)\cos bx + i\,\Upsilon(x)\,e^{ax} \star \Upsilon(x)\sin bx$$

Par identification des parties réelles et des parties imaginaires, on en tire :

$$\Upsilon(x)\,e^{ax} \star \Upsilon(x)\cos bx = \frac{\Upsilon(x)}{a^2+b^2}\left(a\,e^{ax} - a\cos bx + b \sin bx\right)$$

$$\Upsilon(x)\,e^{ax} \star \Upsilon(x)\sin bx = \frac{\Upsilon(x)}{a^2+b^2}\left(b\,e^{ax} - b\cos bx - a \sin bx\right)$$

$\Upsilon(x)\,e^{ix} \star \Upsilon(x)\,e^{-ix} = \Upsilon(x)\sin x$

$\Upsilon(x)\, e^{-ix} \star \Upsilon(x)\, e^{ix} \star \Upsilon(x)\, e^{-2x} = \Upsilon(x) \sin x \star \Upsilon(x)\, e^{-2x}$

Pour $a = -2$ et $b = 1$, les formules précédentes donnent :

$$\Upsilon(x)\, e^{-ix} \star \Upsilon(x)\, e^{ix} \star \Upsilon(x)\, e^{-2x} = \frac{\Upsilon(x)}{5} (e^{-2x} - \cos x + 2 \sin x)$$

2°/ Résolution de l'équation différentielle.

$F = -2\, \Upsilon(x)\, e^{-ix} \star \Upsilon(x)\, e^{ix} \star \Upsilon(x)\, e^{-2x} \star (5\, \Upsilon(x) \cos x + 2\, \delta)$

$F = -\frac{4}{5} \Upsilon(x) (2 \sin x - \cos x + e^{-2x}) - 2\, \Upsilon(x) (2 \sin x - \cos x + e^{-2x}) \star \Upsilon(x) \cos x$

Pour terminer ce calcul, il faut connaître les produits de convolution suivants :

$\Upsilon(x) \sin x \star \Upsilon(x) \cos x$

$\Upsilon(x) \cos x \star \Upsilon(x) \cos x$

$\Upsilon(x)\, e^{-2x} \star \Upsilon(x) \cos x$

Or on a :

$\Upsilon(x)\, e^{ix} \star \Upsilon(x)\, e^{ix} = \Upsilon(x)\, x\, e^{ix}$

$\Upsilon(x)\, e^{ix} \star \Upsilon(x)\, e^{-ix} = \Upsilon(x) \sin x$

donc, il vient, par addition :

$2\, \Upsilon(x)\, e^{ix} \star \Upsilon(x) \cos x = \Upsilon(x) (x \cos x + \sin x) + i\, \Upsilon(x)\, x \sin x$

$2\, \Upsilon(x) \cos x \star \Upsilon(x) \cos x + 2\, i\, \Upsilon(x) \sin x \star \Upsilon(x) \cos x = \Upsilon(x) (x \cos x + \sin x) + i\, \Upsilon(x)\, x \sin x$

En identifiant les parties réelles et les parties imaginaires, il vient :

$$\Upsilon(x) \cos x \star \Upsilon(x) \cos x = \frac{\Upsilon(x)}{2} (x \cos x + \sin x)$$

$$\Upsilon(x) \sin x \star \Upsilon(x) \cos x = \frac{\Upsilon(x)}{2} x \sin x$$

D'après les formules établies plus haut, pour $a = -2$ et $b = 1$, on a :

$$\Upsilon(x)\, e^{-2x} \star \Upsilon(x) \cos x = \frac{\Upsilon(x)}{5} \left(-2\, e^{-2x} + 2 \cos x + \sin x \right)$$

$F = -\frac{4}{5} \Upsilon(x) (2 \sin x - \cos x + e^{-2x}) - 2\, \Upsilon(x) (2 \sin x - \cos x + e^{-2x}) \star \Upsilon(x) \cos x$

$= -\frac{4}{5} \Upsilon(x) (2 \sin x - \cos x + e^{-2x}) - 4\, \Upsilon(x) \sin x \star \Upsilon(x) \cos x + 2\, \Upsilon(x) \cos x \star \Upsilon(x) \cos x$
$- 2\, \Upsilon(x)\, e^{-2x} \star \Upsilon(x) \cos x$

$= -\frac{4}{5} \Upsilon(x) (2 \sin x - \cos x + e^{-2x}) - 4 \frac{\Upsilon(x)}{2} x \sin x + 2 \frac{\Upsilon(x)}{2} (x \cos x + \sin x)$
$- 2 \frac{\Upsilon(x)}{5} \left(-2\, e^{-2x} + 2 \cos x + \sin x \right)$

$= -\Upsilon(x) \sin x + \Upsilon(x)\, x \cos x - \Upsilon(x)\, x \sin x$

$$F = \Upsilon(x) [-\sin x + x (\cos x - \sin x)]$$
$$f(x) = -\sin x + x (\cos x - \sin x)$$

Séance 6

SERIES DE FOURIER

Exercice 1

1°/ Calculez la série de Fourier de la fonction $f(x)$ égale à x dans l'intervalle $-\pi < x < \pi$, et périodique de période 2π. Calculez $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ et $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

2°/ Calculez la série de Fourier de la fonction $g(x)$ égale à x^3 dans l'intervalle $-\pi < x < \pi$, et périodique de période 2π. En déduire la valeur de $\sin x - \frac{\sin 2x}{2^3} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{n^3} + \ldots$.

3°/ Montrez que l'on peut déduire les développement trouvés de celui de $\delta_{(\pi)}$ sur le cercle Γ de longueur 2π.

Corrigé de l'Exercice 1.

Série de Fourier d'une fonction périodique.

Si f est une fonction périodique de période T, on appelle ***série de Fourier*** de f la série :

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}^*} c_n(f)\, e^{nix}$$

où les ***coefficients de Fourier*** de f sont donnés par la formule :

$$c_n(f) = \frac{1}{T} \int_a^{a+T} e^{-nit} f(t)\, dt \qquad (a \text{ réel quelconque})$$

La série de Fourier de f existe dès que la fonction f est intégrable sur tout intervalle de longueur finie.

En tout point où f a une limite à droite $f(x+0)$ et une limite à gauche $f(x-0)$, la somme de la série de Fourier de f est donnée par la formule :

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}^*} c_n(f)\, e^{nix} = \frac{1}{2} [\, f(x-0) + f(x+0) \,]$$

En particulier, en un point où f est continue, $f(x)$ est égal à la somme de sa série de Fourier :

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} c_n(f)\, e^{nix}$$

Les fonctions de carré sommable sur une période, c'est-à-dire telles que l'intégrale $\int_a^{a+T} |f(t)|^2\, dt$ existe, vérifient la formule de Parseval-Plancherel :

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}^*} |c_n(f)|^2 = \frac{1}{T}\int_a^{a+T} |f(t)|^2 \, dt$$

Si le produit de convolution $f \star g$ existe, les coefficients de Fourier du produit de convolution sont donnés par :

$$c_n(f \star g) = T\, c_n(f) \times c_n(g)$$

Série de Fourier d'une distribution périodique.

Une distribution T sur $\mathbb{R}$ est dite ***distribution périodique*** de période T si elle est égale à sa translatée par T :

$$\delta_T \star T = T$$

Les distributions périodiques de période T s'identifient aux distributions sur le cercle Γ de longueur T dans $\mathbb{R}^2$. Elles forment une algèbre de convolution $D'(\Gamma)$. Dans cette algèbre de convolution, l'élément unité δ est identifié à la distribution $\sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \delta_{nT}$ sur $\mathbb{R}$ ("***peigne*" *de Dirac***).

Comme le cercle Γ est borné, toute fonction indéfiniment dérivable de l'abscisse curviligne s (définie à un multiple entier près de la période) est une fonction de base sur Γ : les fonctions $e^{ni\omega s}$ sont des fonctions de bases sur Γ.

A une distribution T de $D'(\Gamma)$, on peut associer sa ***série de Fourier*** :

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}^*} c_n(T)\, e^{ni\omega x}$$

où les coefficients de Fourier de T sont donnés par la formule :

$$c_n(T) = \frac{1}{T} < T, e^{-ni\omega x} >$$

avec $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

Pour une distribution définie par une fonction périodique localement sommable, on retrouve la formule donnant les coefficients de Fourier de la fonction, l'intégrale s'étendant à un intervalle d'une période.

Les séries de Fourier des distributions sur Γ possèdent les propriétés essentielles des séries de Fourier de fonctionss périodiques de période T. Notamment, les coefficients de Fourier d'un produit de convolution sont donnés par :

$$c_n(T \star S) = T\, c_n(T)\, c_n(S)$$

Il y a cependant des différences importantes avec les séries de Fourier de fonctions :

- La série de Fourier d'une distribution T sur Γ (où d'une distribution périodique sur $\mathbb{R}$) converge ***toujours*** vers cette distribution : une distribution est toujours égale à la somme de sa série de Fourier. En particulier, sur $\mathbb{R}$:

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \delta_{nT} = \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \frac{1}{T} e^{ni\omega x} = \frac{1}{T} \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} e^{ni\omega x}$$

- La dérivation terme à terme d'une série de Fourier de distribution de $D'(\Gamma)$ est toujours une opération légitime :

$$\frac{d^m T}{dx^m} = \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} c_n(T)\,(in\omega)^m\, e^{ni\omega x}$$

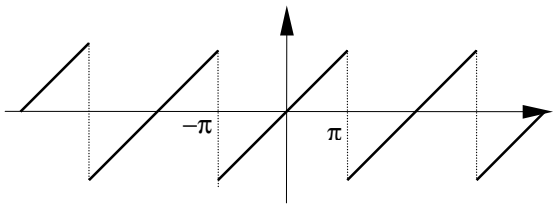
$$\sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \delta_{nT}^{(m)} = \frac{1}{T} \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} (in\omega)^m\, e^{ni\omega x}$$

- Pour qu'une série trigonométrique $\sum_{n \in \mathbb{Z}^*} c_n\, e^{ni\omega x}$ converge vers une distribution sur Γ, il faut et il suffit que la suite des $|c_n|$ soit majorée par une puissance de n quand n tend vers l'infini.

1°/ Série de Fourier de la fonction périodique de période 2π égale à x entre $-\pi$ et π.

a) Série de Fourier de la fonction $f(x)$.

Soit f la distribution définie par la fonction périodique de période 2π égale à x entre $-\pi$ et π. Ses coefficients de Fourier sont donnés par la formule :



$$c_n = \frac{1}{2\pi} < x , e^{-nix} >, \quad n \in Z.$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} x\, e^{-nix}\, dx$$

Pour calculer l'intégrale, on intègre par parties en posant :

$u = x$, d'où $du = dx$, et, pour avoir $dv = e^{-nix}\, dx$, on prendra $v = -\frac{1}{ni}\, e^{-nix}$ ($n \neq 0$).

L'intégrale s'écrit, pour $n \neq 0$:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} x\, e^{-nix}\, dx = \int u\, dv = uv - \int v\, du$$

$$= -\frac{1}{ni} [\, x\, e^{-nix} \,]_{x=-\pi}^{x=+\pi} + \frac{1}{ni} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{-nix}\, dx$$

$$= -\frac{1}{ni} (\pi\, e^{-ni\pi} + \pi\, e^{ni\pi}) + \frac{1}{n^2} [\, e^{-nix} \,]_{x=-\pi}^{x=+\pi}$$

$$= (-1)^n \frac{2i\pi}{n} + \frac{1}{n^2} (e^{-ni\pi} - e^{ni\pi})$$

$$= (-1)^n \frac{2i\pi}{n}$$

D'où :

$$\boxed{c_n = i \frac{(-1)^n}{n} \quad \text{pour } n \neq 0}$$

Pour $n = 0$, on obtient $c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} x\, dx = 0$, puisqu'on intègre une fonction impaire dans un intervalle symétrique.

La série de Fourier de la fonction $f(x)$ est donc :

$$\sum_{n \in Z^*} i \frac{(-1)^n}{n} e^{nix} = \sum_{n=1}^{\infty} i \frac{(-1)^n}{n} (e^{nix} - e^{-nix}) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx$$

et, en chaque point où la fonction est continue, on a l'égalité :

$$\boxed{x = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx} \qquad -\pi < x < \pi$$

Remarques.

- La fonction $f(x)$ est une fonction impaire : sa série de Fourier n'a que des termes en sinus. Ce résultat est général. De façon analogue, la série de Fourier d'une fonction paire n'a que des termes en cosinus.
- Aux points de discontinuité de la fonction $f(x)$, la somme de la série de Fourier de $f(x)$ prend la valeur moyenne entre la limite à droite et la limite à gauche des valeurs de $f(x)$ (résultat dû à Jordan)

$$\frac{1}{2}\,[\,f(x+0)-f(x-0)\,]=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx$$

b) Valeur de séries numériques.

Une série de Fourier de distribution peut s'intégrer ou se dériver terme à terme sans problème de convergence. Par exemple, comme la distribution définie par la fonction $f(x)$ est la dérivée, au sens des distributions, de la distribution définie par la fonction paire ***continue*** de période 2π, égale à $\frac{x^2}{2}$ entre $-\pi$ et π, on obtient, par intégration terme à terme :

$$\frac{x^2}{2}=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx+\text{constante} \qquad \text{pour } -\pi\le x\le\pi$$

La valeur de la constante est le coefficient de Fourier d'indice 0 de la distribution définie par la fonction paire continue de période 2π égale à $\frac{x^2}{2}$ entre $-\pi$ et π :

$$c_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{x^2}{2}\,dx=\frac{1}{12\pi}\,[\,x^3\,]_{x=-\pi}^{x=+\pi}=\frac{\pi^2}{6}$$

$$\frac{x^2}{2}=\frac{\pi^2}{6}+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx \qquad \text{pour } -\pi\le x\le\pi$$

Cette formule peut s'écrire aussi sous la forme :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx=\frac{x^2}{4}-\frac{\pi^2}{12}} \qquad \text{pour } -\pi\le x\le\pi$$

En particulier, pour $x=\pi$, cette formule donne, avec $\cos n\pi=(-1)^n$:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{4}-\frac{\pi^2}{12}=\frac{\pi^2}{6}$$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}}$$

Comme la série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ est absolument convergente, on peut faire sur elle toutes opérations terme à terme et écrire, en particulier, en séparant les termes pairs et les termes impairs :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(2m+1)^2}+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(2m)^2}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(2m+1)^2}+\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

On en déduit :

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{3}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{3}{4}\times\frac{\pi^2}{6}=\frac{\pi^2}{8}$$

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}}$$

La somme de la série demandée s'obtient en enlevant le premier terme de la série ($n = 0$) :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8} - 1$$

1°/ Série de Fourier de la fonction périodique de période 2π égale à x^3 entre $-\pi$ et π.

En intégrant terme à terme la série :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx = \frac{x^2}{4} - \frac{\pi^2}{12} \qquad \text{pour } -\pi \le x \le \pi$$

on obtient :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} \sin nx = \frac{x^3}{12} - \frac{\pi^2 x}{12} + \text{constante} \qquad \text{pour } -\pi \le x \le \pi$$

La valeur de la constante est nulle comme on le voit en faisant $x = 0$. Il reste donc :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} \sin nx = \frac{x^3}{12} - \frac{\pi^2 x}{12} \qquad \text{pour } -\pi \le x \le \pi$$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^3} \sin nx = \frac{x}{12}(\pi^2 - x^2)} \qquad \text{pour } -\pi \le x \le \pi$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} x^3 &= \pi^2 x + 12 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} \sin nx \\ &= 2\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx + 12 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} \sin nx \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{2\pi^2}{n} - \frac{12}{n^3} \right) \sin nx \end{aligned}$$

C'est la série de Fourier de $g(x)$:

$$\boxed{x^3 = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{2\pi^2}{n} - \frac{12}{n^3} \right) \sin nx} \qquad \text{pour } -\pi \le x \le \pi$$

3°/ Comparaison avec la série de Fourier de la distribution δ_π sur le cercle Γ.

Soit

$$x = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n \, e^{nix}$$

la série de Fourier de la fonctrion égale à x entre $-\pi$ et π.
Sur le cercle Γ de longueur 2π, on a :

$$\delta_{(\pi)} = \frac{1}{2\pi} \sum_{-\infty}^{+\infty} <\delta_{(\pi)}, e^{-nix}> = \frac{1}{2\pi} \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^n \, e^{nix}$$

Par ailleurs, sur le cercle Γ, on a :

$$\delta' \star x = 1 - 2\pi\delta_{(\pi)}$$

puisque la dérivée de x au sens des fonctions est 1 et que la fonction égale à x sur le cercle Γ présente un saut de valeur 2π au point $x = \pi$.

Sur le cercle Γ, la série de Fourier de δ est donnée par :

$$\delta = \frac{1}{2\pi} \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{nix}$$

Par dérivation terme à terme, on obtient la série de Fourier de δ' sur le cercle Γ :

$$\delta' = \frac{1}{2\pi} \sum_{-\infty}^{+\infty} in \, e^{nix}$$

1ère méthode.

Le coefficient de Fourier d'indice n d'un produit de convolution est égal au produit des coefficients de Fourier d'indice n des facteurs, multiplié par la période (2π, égale à la longueur du cercle Γ). La formule :

$$\delta' \star x = 1 - 2\pi\delta_{(\pi)}$$

conduit alors à la formule :

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} in \, c_n \, e^{nix} = 1 - \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^n \, e^{nix}$$

et on voit par identification que l'on dooit prendre $c_0 = 0$ et :

$$c_n = \frac{(-1)^{n+1}}{in} = i\frac{(-1)^n}{n} \qquad \text{pour } n \neq 0$$

Ceci donne, on l'a vu dans la première question, en regroupant les termes d'indices n et $-n$:

$$x = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx \qquad \text{pour } -\pi < x < \pi$$

2ème méthode.

La formule :

$$\delta' \star x = 1 - 2\pi\delta_{(\pi)}$$

donne, par dérivation :

$$\delta'' \star x = -2\pi \, \delta' \star \delta_{(\pi)}$$

$$x = -2\pi\delta''^{-1} \star \delta' \star \delta_{(\pi)} = -2\pi \, \delta'^{-1} \star \delta_{(\pi)}$$

Or

$$\delta_{(\pi)} \star \delta_{(\pi)} = \delta_{(2\pi)} = \delta \qquad \Rightarrow \qquad \delta_{(\pi)} = \delta_{(\pi)}^{-1}$$

$$\Rightarrow \qquad \delta'_{(\pi)} = \delta' \star \delta_{(\pi)} = \delta' \star \delta_{(\pi)}^{-1}$$
$$\Rightarrow \qquad \delta'^{-1}_{(\pi)} = \delta'^{-1} \star \delta_{(\pi)}$$

Donc :

$$x = -2\pi\ \delta'^{-1}_{(\pi)}$$

La série de Fourier de $\delta_{(\pi)}$ est :

$$\delta_{(\pi)} = \frac{1}{2\pi} \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^n\ e^{inx}$$

On en déduit, par dérivation terme à terme :

$$\delta'_{(\pi)} = \frac{1}{2\pi} \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^n\ in\, e^{inx}$$

En comparant avec la série de Fourier de δ :

$$\delta = \frac{1}{2\pi} \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^n\ e^{inx}$$

on obtient la série de Fourier de $\delta'^{-1}_{(\pi)}$:

$$\delta'^{-1}_{(\pi)} = \frac{1}{2\pi} \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{in}\ e^{inx}$$

puis celle de $x = -2\pi\ \delta'^{-1}_{(\pi)}$:

$$x = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{in}\ e^{inx}$$

Cette formule conduit, on l'a vu, à :

$$x = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}\ \sin nx \qquad \text{pour } -\pi < x < \pi$$

Calcul de la série de Fourier de x^3

La formule obtenue par dérivation sur le cercle Γ :

$$\delta' \star x^3 = 3x^2 - 2\pi^3\ \delta_{(\pi)}$$

donne :

$$\delta'' \star x^3 = 6x - 2\pi^3 \delta'_{(\pi)} = -12\pi \delta'^{-1}_{(\pi)} - 2\pi^3 \delta'_{(\pi)}$$
$$x^3 = -12\pi \delta'_{(\pi)}{}^{-1} \star \delta''^{-1} - 2\pi^3 \delta'_{(\pi)} \star \delta''^{-1} = -12\pi \delta'''^{-1}_{(\pi)} - 2\pi^3 \delta'^{-1}_{(\pi)} = -12\pi \delta'''^{-1}_{(\pi)} + \pi^2 x$$

$$\frac{1}{12}(\pi^2 x - x^3) = \pi \delta'''^{-1}_{(\pi)}$$

On a, par dérivations successives à partir de :

$$\delta_{(\pi)} = \frac{1}{2\pi} \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^n\ e^{inx}$$

$$\delta'_{(\pi)} = \frac{1}{2\pi} \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^n\ in\, e^{inx}$$

$$\delta''_{(\pi)} = \frac{1}{2\pi} \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^{n+1}\ n^2 e^{inx}$$

$$\delta'''_{(\pi)} = \frac{1}{2\pi} \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^{n+1}\, i n^3 e^{inx}$$

$$\delta'''_{(\pi)^{-1}} = \frac{1}{2\pi} \sum_{\substack{-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{i n^3} e^{inx}$$

$$\frac{1}{12}(\pi^2 x - x^3) = \pi\, \delta'''_{(\pi)^{-1}} = \sum_{\substack{-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2 i n^3} e^{inx}$$

$$\boxed{\frac{1}{12}(\pi^2 x - x^3) = \sum_{\substack{-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2 i n^3} e^{inx}} \qquad \text{pour } -\pi < x < \pi$$

On retrouve donc les formules et les développements trouvés plus haut.

Exercice 2

1°/ Soit T une distribution périodique de période T. Montrez que sa série de Fourier peut se mettre sous la forme :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos\frac{2\pi n x}{T} + \sum_{n=0}^{\infty} b_n \sin\frac{2\pi n x}{T}$$

avec des coefficients a_n et b_n que l'on explicitera.

Dans les deux questions suivantes, on pose, pour une fonction φ, $\varphi_1(x) = \varphi(-x)$

2°/ On dit qu'une distribution T est ***impaire*** si l'on a $\langle T, \varphi_1 \rangle = -\langle T, \varphi \rangle$ pour toute fonction de base $\varphi \in \mathcal{D}$. Montrez que la série de Fourier d'une distribution impaire de période T se réduit à une série de sinus.

3°/ On dit qu'une distribution T est ***paire*** si l'on a $\langle T, \varphi_1 \rangle = \langle T, \varphi \rangle$ pour toute fonction de base $\varphi \in \mathcal{D}$. Montrez que la série de Fourier d'une distribution paire de période T se réduit à une série de cosinus.

Corrigé de l'Exercice 2.

1°/ Série de Fourier d'une distribution périodique.

A une distribution périodique T, de période T, on peut faire correspondre de façon biunivoque une distribution $\tilde{T}$ sur le cercle Γ de longueur T. La série de Fourier de $\tilde{T}$ est la série de Fourier de T. Considérons alors la série de Fourier $\tilde{T} = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$ de la distribution périodique T de période $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Les coefficients de Fourier c_n sont donnés par la formule :

$$c_n = \frac{1}{T} \langle \tilde{T}, e^{-ni\omega x} \rangle$$

En toute rigueur, il faut bien mettre $\tilde{T}$ et non T, car, si la distribution est régulière (définie par une fonction), on intègre sur une période, donc sur le cercle Γ. Ce n'est que par abus de langage que l'on met T au lieu de $\tilde{T}$ dans cette définition, en identifiant les distributions périodiques de période T sur $\mathbf{R}$ et les distributions sur le cercle Γ.

La série de Fourier de T, sur laquelle on peut faire toutes opérations terme à terme, s'écrit :

$$\tilde{T} = c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx})$$

$$= c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (c_n + c_{-n}) \cos n\omega x + i \sum_{n=1}^{+\infty} (c_n - c_{-n}) \sin n\omega x$$

Cette formule montre que l'on peut écrire $\tilde{T}$ sous la forme :

$$\tilde{T} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cos\frac{2\pi n x}{T} + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin\frac{2\pi n x}{T}$$

avec $a_0 = c_0 = \frac{1}{T}\langle \tilde{T}, 1 \rangle$, $a_n = c_n + c_{-n} = \frac{2}{T}\langle \tilde{T}, \cos\frac{2\pi n x}{T} \rangle$

$$b_n = i(c_n - c_{-n}) = \frac{2}{T}\langle \tilde{T}, \sin\frac{2\pi n x}{T} \rangle$$

Pour une fonction de base φ sur $\boldsymbol{R}$, on appelle "*symétrique*" de φ et on note φ_1, la fonction de base sur $\boldsymbol{R}$ définie par :

$$\varphi_1(x) = \varphi(-x)$$

Pour une distribution T sur $\boldsymbol{R}$, on appelle "***symétrique***" de T et on note T_1 la distribution sur $\boldsymbol{R}$ définie par:

$$< T_1 , \varphi > = < T , \varphi_1 >$$

Pour une fonction de base φ sur $\boldsymbol{R}$, on note Φ la fonction périodique de période T associée à φ :

$$\Phi(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \varphi (x + n T)$$

En réalité, comme φ est à support borné, cette somme ne comporte pour chaque x qu'un nombre fini de termes.
On note aussi Φ l'image de Φ dans $D'(\Gamma)$, définie par

$$\Phi(s) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \varphi (s + n T)$$

et Φ_1 la symétrique de Φ définie par $\Phi_1(x) = \Phi(-x)$.
On a alors :

$$< \tilde{T} , \Phi_1 > = < T , \varphi_1 >$$

2°/ Série de Fourier d'une distribution impaire.

Si T est impaire, on a :

$$< \tilde{T} , \Phi_1 > = < T , \varphi_1 > = - < T , \varphi > = - < \tilde{T} , \Phi >$$

donc $\tilde{T}$ est impaire. En particulier, on a :

$$< \tilde{T} , e^{n i \omega x} > = - < \tilde{T} , e^{-n i \omega x} >$$

$$c_n = -c_{-n}$$

$$a_n = c_n + c_{-n} = 0$$

Ainsi, tous les termes en cosinus du développement en série de Fourier de T sont nuls et

> La série de Fourier de la distribution impaire T se réduit à une série de sinus.

3°/ Série de Fourier d'une distribution paires.

Si T est paire, on a :

$$< \tilde{T} , \Phi_1 > = < T , \varphi_1 > = < T , \varphi > = < \tilde{T} , \Phi >$$

donc $\tilde{T}$ est paire. En particulier, on a :

$$< \tilde{T} , e^{n i \omega x} > = < \tilde{T} , e^{-n i \omega x} >$$

$$c_n = c_{-n}$$

$$b_n = c_n - c_{-n} = 0$$

Ainsi, tous les termes en sinus du développement en série de Foruier de T sont nuls et

> La série de Fourier de la distribution paire T se réduit à une série de cosinus.

Exercice 3

Soient f et g deux fonctions périodiques de période T, de carré intégrable sur une période (espace $L^2(T)$).

1°/ Montrez que

$$h(x) = \frac{1}{T} \int_0^T f(x+t)\, g(t)\, dt$$

est aussi une fonction périodique de période T, de carré intégrable sur une période.

2°/ Calculez les coefficients de Fourier $c_n(h)$ de h en fonction des coefficients de Fourier $c_n(f)$ et $c_n(g)$ de f et g.

3°/ En admettant que pour tout x, la série de Fourier de $h(x)$ est convergente et a pour somme $h(x)$, montrez les formules :

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(f)\, \overline{c_k(g)} = \frac{1}{T} \int_a^{a+T} f(x)\, \overline{g(x)}\, dx$$

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k(f)|^2 = \frac{1}{T} \int_a^{a+T} |f(x)|^2\, dx$$

Corrigé de l'Exercice 3.

1°/ La fonction $h(x)$ dans $L^2(T)$.

$$h(x+T) = \frac{1}{T} \int_0^T f(x+T+t)\, g(t)\, dt$$

Comme $f(x)$ est une fonction périodique de période T, on a $f(x+T+t) = f(x+t)$ et il vient :

$$h(x+T) = \frac{1}{T} \int_0^T f(x+T+t)\, g(t)\, dt = \frac{1}{T} \int_0^T f(x+t)\, g(t)\, dt = h(x)$$

ce qui montre que $h(x)$ est une fonction périodique de période T.

Pour montrer que la fonction $h(x)$ est une fonction de carré intégrable sur une période, il suffit, par définition, de montrer que l'intégrale

$$\frac{1}{T} \int_0^T |h(x)|^2\, dx$$

est finie.

La définition de $h(x)$ montre que l'on a :

$$|h(x)| = \left| \frac{1}{T} \int_0^T f(x+t)\, g(t)\, dt \right|$$

Comme $f(x)$ est une fonction de carré intégrable sur une période, $f(x+t)$ est une fonction de t de carré intégrable sur une période pour chaque valeur de $x \in \mathbf{R}$. D'autre part, comme $g(t)$ est une fonction de carré intégrable sur une période, la fonction conjuguée $\overline{g(t)}$, qui a le même module que $g(t)$, est de carré intégrable sur une période. L'intégrale $\frac{1}{T} \int_0^T f(x+t)\, g(t)\, dt$ est, d'après la définition

$$(f, g) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)\, \overline{g(t)}\, dt$$

du ***produit hermitien*** dans l' ***espace de Hilbert*** $\mathrm{L}^2(T)$, le produit hermitien de $f(x+t)$ et de $\overline{g}(t)$:

$$|h(x)| = \left| \frac{1}{T} \int_0^T f(x+t)\, g(t)\, dt \right| = (f(x+t), \overline{g}(t)).$$

C'est donc un nombre fini. Donc $|h(x)|^2$ reste, lui aussi, fini et borné par une constante A. On a alors :

$$\frac{1}{T} \int_0^T |h(x)|^2\, dx \le \frac{1}{T} \int_0^T A\, dx = A$$

Ceci montre que $h(x)$ est une fonction de carré intégrable sur une période et appartient à l'espace $\mathrm{L}^2(T)$.

2°/ Coefficients de Fourier de la fonction $h(x)$.

Par définition, les coefficients de Fourier de la fonction $h(x)$ sont donnés par la formule :

$$c_n(h) = \frac{1}{T} \int_0^T h(x)\, e^{-\frac{2in\pi}{T}x}\, dx$$

La définition de $h(x)$ donne alors :

$$c_n(h) = \frac{1}{T} \int_0^T \left(\frac{1}{T} \int_0^T f(x+t)\, g(t)\, dt \right) e^{-\frac{2in\pi}{T}x}\, dx$$

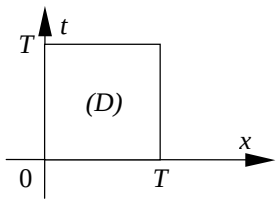
$$c_n(h) = \frac{1}{T^2} \int_0^T \left(\int_0^T f(x+t)\, g(t)\, dt \right) e^{-\frac{2in\pi}{T}x}\, dx$$

Comme le produit $f(x+t)\, g(t)$ est une fonction intégrable de x et de t sur une période, le ***théorème de Fubini*** peut s'appliquer. Ce théorème indique que, puisque l'intégrale double existe, elle peut se calculer en intégrant d'abord par rapport à l'une ou par rapport à l'autre des variables :

$$c_n(h) = \frac{1}{T^2} \iint_{(D)} f(x+t)\, g(t)\, e^{-\frac{2in\pi}{T}x}\, dt\, dx$$

où (D) est le carré de côté T dans le plan (x,t).
En intégrant d'abord par rapport à x, il vient :

$$c_n(h) = \frac{1}{T^2} \int_0^T \left(\int_0^T f(x+t)\, e^{-\frac{2in\pi}{T}x}\, dx \right) g(t)\, dt$$



Par changement de variable $x + t = u$, on a :

$$\int_0^T f(x+t)\, e^{-\frac{2in\pi}{T}x}\, dx = \left(\int_t^{t+T} f(u)\, e^{-\frac{2in\pi}{T}u}\, du \right) e^{\frac{2in\pi}{T}t}$$

$$\int_t^{t+T} f(u)\, e^{-\frac{2in\pi}{T}u}\, du = T\, c_n(f)$$

$$c_n(h) = \frac{1}{T^2} \int_0^T T\, c_n(f)\, e^{\frac{2in\pi}{T}t}\, g(t)\, dt = c_n(f) \times \frac{1}{T} \int_0^T e^{\frac{2in\pi}{T}t}\, g(t)\, dt = c_n(f)\, c_{-n}(g)$$

Or on a :

$$c_n(\overline{g}) = \frac{1}{T} \int_0^T e^{-\frac{2in\pi}{T}t}\, \overline{g}(t)\, dt$$

donc :

$$\overline{c_n(\overline{g})} = \frac{1}{T} \int_0^T e^{\frac{2in\pi}{T}t}\, g(t)\, dt = c_{-n}(g)$$

$$\boxed{c_n(h) = c_n(f)\, \overline{c_n(\overline{g})}}$$

3°/ Démonstration des formules proposées.

Si l'on suppose que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la formule suivante est vraie :

$$h(x) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_n(h)\, e^{\frac{2in\pi}{T}x}$$

la définition de $h(x)$, jointe à la formule obtenue dans la question 2°, donne :

$$\frac{1}{T}\int_0^T f(x+t)\,g(t)\,dt = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_n(f)\,\overline{c_n(\overline{g})}\, e^{\frac{2in\pi}{T}x}$$

En particulier, pour $x = 0$, il vient :

$$\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,g(t)\,dt = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_n(f)\,\overline{c_n(\overline{g})}$$

Cette formule, appliquée à la fonction $\overline{g}$ au lieu de la fonction g donne :

$$\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,\overline{g}(t)\,dt = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_n(f)\,\overline{c_n(g)}$$

Enfin, lorsque, dans cette formule, nous prenons $f = g$, la formule s'écrit :

$$\frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|^2\,dt = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} |c_n(f)|^2$$

C'est la ***formule de Parseval - Plancherel***.

Séance 7

TRANSFORMATION DE FOURIER

Exercice 1

1°/ Soient f et g deux fonctions intégrables (c'est-à-dire appartenant à l'espace L_1) définie sur R. Montrez que le produit de convolution défini par : $h(x) = f \star g = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)\, g(y)\, dy$ est aussi dans L_1 et que l'on a : $\| h \|_{L_1} \leq \| f \|_{L_1} \times \| g \|_{L_1}$, la norme de convergence en moyenne de L_1 étant définie, pour une fonction f, par $\| f \|_{L_1} = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\, dt$.

2°/ Montrez directement la formule : $\mathcal{F} h = \mathcal{F} f \,.\, \mathcal{F} g$, la transformée de Fourier $\mathcal{F} f$ d'une fonction $f \in L_1$ étant définie par : $\mathcal{F}(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi\lambda u} f(u)\, du$.

Corrigé de l'Exercice 1.

1°/ Le produit de convolution de deux fonctions de L_1 est une fonction de L_1.

Pour calculer

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)\, g(y)\, dy \right) dx$$

nous allons faire le changement de variables défini par :

$$u = x - y$$
$$v = y$$

Le « *jacobien* » de la transformation est $\frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \left(\frac{D(u,v)}{D(x,y)} \right)^{-1} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}^{-1} = 1$. On obtient donc :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(x)\, dx = \int_{R^2} f(u)\, g(v)\, du\, dv = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\, du \right) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} g(v)\, dv \right)$$

et cette relation montre que la fonction $h(x)$ est intégrable, dès lors que f et g sont intégrables.

$$\| h \|_{L_1} = \int_{-\infty}^{+\infty} |h(x)|\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)\, g(y)\, dy \right| dx$$

$$\leq \int_{R^2} |f(u)|\, |g(v)|\, du\, dv = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(u)|\, du \right) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |g(v)|\, dv \right)$$

$$\| h \|_{L_1} \leq \| f \|_{L_1} \| g \|_{L_1}$$

2°/ Transformée de Fourier d'un produit de convolution.

$$\mathcal{F}h(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi\lambda x}\, h(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi\lambda x} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)\, g(y)\, dy \right) dx$$

Avec le changement de variables

$$u = x - y$$
$$v = y$$

l'intégrale devient :

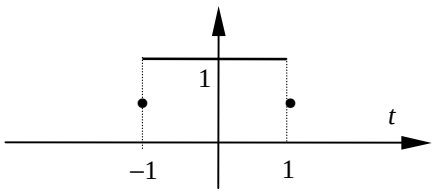
$$\mathcal{F}h(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-2i\pi\lambda(u+v)}\, f(u)\, g(v)\, du\, dv = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi\lambda u}\, f(u)\, du \right) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi\lambda v}\, g(v)\, dv \right)$$

$$\boxed{\mathcal{F}h = \mathcal{F}f\ \mathcal{F}g}$$

Exercice 2

Calculez la transformée de Fourier de la fonction $f(t)$ définie par

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{pour} \quad |t| < 1 \\ \frac{1}{2} & \text{pour} \quad |t| = 1 \\ 0 & \text{pour} \quad |t| > 1 \end{cases}$$



Formule de réciprocité.

Corrigé de l'Exercice 2.

Résumé : définitions et propriétés de la transformation de Fourier.

Transformée de Fourier d'une fonction.

La transformation de Fourier d'une fonction, telle qu'elle a été définie plus haut par la formule :

$$\mathcal{F} f(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi\lambda t} f(t)\, dt$$

peut s'appliquer à toute fonction intégrable sur $\mathbb{R}$. Les fonctions intégrables sur $\mathbb{R}$ ne sont qu'une classe particulière de fonctions localement sommables. Elles définissent donc des distributions particulières : ces distributions régulières, définies par la formule

$$\langle f, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, \varphi(t)\, dt$$

peuvent s'appliquer, en fait, même à des fonctions φ dont le support n'est pas borné : il suffit que les fonctions φ décroissent à l'infini plus vite que n'importe quelle puissance de $\frac{1}{t}$.

De telles fonctions φ, qui ont les mêmes propriétés que les fonctions de base à l'exception du support borné, s'appellent des ***fonctions à décroissance rapide***. Elles forment un espace vectoriel complexe $\mathcal{S}$ contenant l'espace vectoriel $\mathcal{D}$ des fonctions de base. Les fonctions à décroissance rapide sont elles-mêmes des fonctions intégrables et, de ce fait, possèdent une transformée de Fourier.

La transformée de Fourier $\mathcal{F} f$ d'une fonction f possède les propriétés suivantes :

1. $|\mathcal{F} f(\lambda)| \leq \int |f(x)|\, dx$
2. $\mathcal{F} f(\lambda)$ tend vers 0 si λ tend vers l'infini.
3. Si f est une fonction m fois continûment dérivable, on a :
   - $(2i\pi\lambda)^m \mathcal{F} f = \mathcal{F} f^{(m)}$
   - $|2i\pi\lambda|^m |\mathcal{F} f| \leq \int |f^{(m)}(x)|\, dx$
4. Si la fonction $x^m f(x)$ est intégrable, la transformée de Fourier $\mathcal{F} f$ est m fois continûment dérivable et l'on a :
   $$\mathcal{F}[(-2i\pi x)^m f(x)] = (\mathcal{F} f)^{(m)}$$
5. Pour tout réel k différent de 0 :
   $$\mathcal{F}[f(kx)] = \frac{1}{|k|} (\mathcal{F} f)\left(\frac{\lambda}{k}\right)$$
   En particulier, pour $k = -1$:
   $$\mathcal{F}[f(-x)] = (\mathcal{F} f)(-\lambda)$$

Il en résulte que si f est paire, $\mathcal{F} f$ est paire aussi, et si f est impaire, $\mathcal{F} f$ est impaire aussi. La transformation de Fourier conserve la parité.

6. La transformation de Fourier conjuguée $\overline{\mathcal{F}}$ est définie par $\overline{\mathcal{F}} f(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2i\pi\lambda t} f(t)\, dt$. Le nombre complexe $\overline{\mathcal{F}} f(\lambda)$ est le conjugué du nombre complexe $\mathcal{F} f(\lambda)$ si la fonction $f(x)$ est réelle.

Des propriétés 3 et 4, il résulte que la transformée de Fourier d'une fonction à décroissance rapide est une fonction à décroissance rapide.

Transformation de Fourier des distributions.

Les distributions qui sont définies sur les fonctions à décroissance rapide s'appellent les *distributions tempérées*. Elles forment un espace vectoriel complexe $\mathcal{S}'$ qui est contenu dans l'espace vectoriel $\mathcal{D}'$ des distributions sur $\mathbb{R}$.

Exemples :

- Toutes les distributions à support borné sont des distributions tempérées.
- Les fonctions bornées sont tempérées.
- Les fonctions localement sommables à croissance lente sont tempérées.
- Le produit d'un polynôme par une distribution tempérée est une distribution tempérée.

On peut définir la transformée de Fourier d'une distribution tempérée par la formule :

$$< \mathcal{F} T , \varphi > = < T , \mathcal{F} \varphi >$$

La transformation de Fourier conjuguée $\overline{\mathcal{F}}$ est définie par la formule :

$$< \overline{\mathcal{F}} T , \varphi > = < T , \overline{\mathcal{F}} \varphi >$$

Propriétés de la transformation de Fourier.

1. $\mathcal{F} T$ et $\overline{\mathcal{F}} T$ sont des distributions tempérées.
2. Si T est une distribution à support borné, son image $\mathcal{F} T$ par la transformation de Fourier est une fonction prolongeable pour les valeurs complexes de λ en une fonction entière $V(\lambda)$ donnée par la formule :
$$V(\lambda) = < U_x , e^{-2i\pi\lambda x} >$$
3. $\mathcal{F}[\delta] = 1$
   $\mathcal{F}[\delta'] = 2i\pi\lambda$
   $\mathcal{F}[\delta^{(m)}] = (2i\pi\lambda)^m$
   $\mathcal{F}[\delta_a] = e^{-2i\pi\lambda a}$
   $$\mathcal{F}\left[\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \delta_k\right] = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \delta_k$$
   $\mathcal{F}[T^{(m)}] = (2i\pi\lambda)^m \mathcal{F} T$
   $\mathcal{F}[(-2i\pi x)^m T] = (\mathcal{F} T)^{(m)}$
4. $\mathcal{F} 1 = \overline{\mathcal{F}} 1 = \delta$
5. **Formule de réciprocité** :
   - Pour toute fonction à décroissance rapide φ : $\overline{\mathcal{F}}\ \mathcal{F}\ \varphi = \mathcal{F}\ \overline{\mathcal{F}}\ \varphi = \varphi$
   - Pour toute distribution tempérée T : $\overline{\mathcal{F}}\ \mathcal{F}\ T = \mathcal{F}\ \overline{\mathcal{F}}\ T = T$
     Corollaire : $\mathcal{F} T = 0 \Leftrightarrow T = 0$
6. **Formule de Parseval-Plancherel** :
   Si f et g sont des fonctions de carré intégrable, leurs images par la transformation de Fourier sont des fonctions de carré intégrable et on a :
   $$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |\mathcal{F} f(\lambda)|^2\, d\lambda$$
   $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, \overline{g(x)}\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F} f(\lambda)\, \overline{\mathcal{F} g(\lambda)}\, d\lambda$$

7. Formule sommatoire de Poisson :

Si φ est une fonction à décroissance rapide :

$$\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \varphi(k) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \mathsf{F}\varphi(k)$$

Transformation de Fourier et convolution.

La propriété fondamentale est que la transformation de Fourier transforme un produit de convolution en multiplication et une multiplication en produit de convolution :

$$\begin{aligned} \mathsf{F}(S \star T) &= \mathsf{F}S \,.\, \mathsf{F}T \\ \overline{\mathsf{F}}(S \star T) &= \overline{\mathsf{F}}S \,.\, \overline{\mathsf{F}}T \\ \mathsf{F}(S \,.\, T) &= \mathsf{F}S \star \mathsf{F}T \\ \overline{\mathsf{F}}(S \,.\, T) &= \overline{\mathsf{F}}S \star \overline{\mathsf{F}}T \end{aligned}$$

1°/ Transformée de Fourier de la fonction $f(t)$.

Soit $f(t)$ une fonction paire. Sa transformée de Fourier $\mathsf{F}f$, définie par

$$\mathsf{F}\, f(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi\lambda t}\, f(t)\, dt$$

est aussi une fonction paire comme on le voit en faisant le changement de variable $t = -x$ dans

$$\mathsf{F}\, f(-\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2i\pi\lambda t}\, f(t)\, dt$$

$$\mathsf{F}\, f(-\lambda) = \int_{+\infty}^{-\infty} e^{-2i\pi\lambda t}\, f(-x)\, d(-x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi\lambda x}\, f(-x)\, dx$$

$$f(x) = f(-x) \Rightarrow \mathsf{F}\, f(-\lambda) = \mathsf{F}\, f(\lambda)$$

On a alors :

$$\begin{aligned} \mathsf{F}\, f(\lambda) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi\lambda t}\, f(t)\, dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2i\pi\lambda t}\, f(t)\, dt \\ &= \frac{1}{2}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi\lambda t}\, f(t)\, dt + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2i\pi\lambda t}\, f(t)\, dt \right) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2i\pi\lambda t} + e^{-2i\pi\lambda t}}{2}\, f(t)\, dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(2\pi\lambda t)\, f(t)\, dt \\ &= \int_{-\infty}^{0} \cos(2\pi\lambda t)\, f(t)\, dt + \int_{0}^{+\infty} \cos(2\pi\lambda t)\, f(t)\, dt \\ &= \int_{+\infty}^{0} \cos(-2\pi\lambda x)\, f(-x)\, d(-x) + \int_{0}^{+\infty} \cos(2\pi\lambda t)\, f(t)\, dt \\ &= 2\int_{0}^{+\infty} \cos(2\pi\lambda t)\, f(t)\, dt \end{aligned}$$

Si $f(t)$ est une fonction paire, sa transformée de Fourier est donnée par :

$$\mathsf{F}\, f(\lambda) = 2\int_{0}^{+\infty} \cos(2\pi\lambda t)\, f(t)\, dt$$

Avec la fonction étudiée, cette intégrale se réduit à :

$$\mathcal{F} f(\lambda) = 2 \int_0^1 \cos(2\pi\lambda t)\, dt = \frac{2}{2\pi\lambda} \left[\sin(2\pi\lambda t) \right]_{t=0}^{t=1} = \frac{\sin(2\pi\lambda)}{\pi\lambda}$$

$$\boxed{\mathcal{F} f(\lambda) = \frac{\sin(2\pi\lambda)}{\pi\lambda}}$$

2°/ Formule de réciprocité.

Pour une distribution tempérée, la formule de réciprocité de la transformation de Fourier est toujours vraie :

$$\overline{\mathcal{F}}\ \mathcal{F}\ T = \mathcal{F}\ \overline{\mathcal{F}}\ T = T$$

Pour une fonction, la formule de réciprocité est vraie si les conditions suivantes sont vérifiées :

- f est à variation bornée
- $f(t) = \frac{1}{2} [f(t+0) + f(t-0)]$

Dans le cas présent, la fonction f est à variation bornée et l'on a, pour tout t, $f(t) = \frac{1}{2} [f(t+0) + f(t-0)]$.

La formule de réciprocité s'applique et donne :

$$\overline{\mathcal{F}}\ \mathcal{F}\ f = \mathcal{F}\ \overline{\mathcal{F}} f = f$$

soit :

$$\boxed{2 \int_0^{+\infty} \frac{\sin(2\pi\lambda)}{\pi\lambda} \cos(2\pi\lambda t)\, d\lambda = \begin{cases} 1 & \text{pour } |t|<1 \\ \frac{1}{2} & \text{pour } |t|=1 \\ 0 & \text{pour } |t|>1 \end{cases}}$$

En particulier, pour $t = 0$, on obtient :

$$2 \int_0^{+\infty} \frac{\sin(2\pi\lambda)}{\pi\lambda}\, d\lambda = 1$$

et, par changement de variable $2\pi\lambda = x$:

$$4 \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \frac{dx}{2\pi} = 1$$

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}}$$

Exercice 3

Calculez l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|}\ cos\, x\, t\ dt$. En déduire la valeur de l'intégrale $\int_{0}^{+\infty} \frac{cos\, xt}{1+t^2}\ dt$.

Corrigé de l'exercice 3.

1°/ Calcul de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|}\ cos\, x\, t\ dt$.

Remarquons d'abord que la fonction $e^{-|t|}\ sin\, x\, t$ est une fonction impaire, donc son intégrale sur un intervalle symétrique par rapport à 0 est nulle :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|}\ sin\, x\, t\ dt = 0$$

On a alors :

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|}\ cos\, x\, t\ dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|}\ cos\, x\, t\ dt + i \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|}\ sin\, x\, t\ dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|}\ e^{i\,x\,t}\ dt \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t| + i\,x\,t}\ dt = \int_{-\infty}^{0} e^{-|t| + i\,x\,t}\ dt + \int_{0}^{+\infty} e^{-|t| + i\,x\,t}\ dt \\
&= \int_{-\infty}^{0} e^{t + i\,x\,t}\ dt + \int_{0}^{+\infty} e^{-t + i\,x\,t}\ dt \\
&= \frac{1}{1 + i\,x} + \frac{1}{1 - i\,x} = \frac{2}{1+x^2}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|}\ cos\, x\, t\ dt = \frac{2}{1+x^2}}$$

2°/ Formule de réciprocité.

La formule $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|}\ cos\, x\, t\ dt = \frac{2}{1+x^2}$ ressemble à une transformation de Fourier. Pour avoir une transformée de Fourier au sens où on l'a définie, il faut prendre $x = 2\,\pi\,\lambda$ et écrire l'intégrale sous la forme :

$$2 \int_{0}^{+\infty} e^{-|t|}\ cos\,(2\,\pi\,\lambda\,t)\ dt = \frac{2}{1 + 4\,\pi^2\,\lambda^2}$$

Sous cette forme, on reconnaît la transformée de Fourier de la fonction paire continue à variation bornée $e^{-|t|}$.

Cette transformée de Fourier est une fonction bornée intégrable. La formule de réciprocité de la transformation de Fourier s'applique et donne :

$$2 \int_{0}^{+\infty} \frac{2}{1 + 4\,\pi^2\,\lambda^2}\ cos\,(2\,\pi\,\lambda\,t)\ d\lambda = e^{-|t|}$$

En posant $x = 2\,\pi\,\lambda$ dans l'intégrale, celle-ci s'écrit :

$$2 \int_{0}^{+\infty} \frac{2}{1 + 4\,\pi^2\,\lambda^2}\ cos\,(2\,\pi\,\lambda\,t)\ d\lambda = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{+\infty} \frac{cos\, xt}{1 + x^2}\ dx$$

et l'on obtient la formule :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos xt}{1+x^2}\, dx = \frac{\pi}{2}\, e^{-|t|}$$

En échangeant les noms des variables, cette formule s'écrit aussi :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos xt}{1+t^2}\, dt = \frac{\pi}{2}\, e^{-|x|}$$

Probabilités

e-mail

1. Modélisation, équiprobabilité.
2. Probabilité conditionnelle, indépendance.
3. Variable aléatoire réelle discrète.
4. Loi uniforme.
5. Loi binomiale.
6. Loi géométrique.
7. Loi de Poisson.
8. Loi hypergéométrique.
9. Fonction génératrice.
10. Lois conjointes discrètes, indépendance.
11. Loi multinomiale.
12. Variable aléatoire réelle à densité.
13. Fonction caractéristique et transformée de Fourier.
14. Loi constante.
15. Loi normale.
16. Loi Gamma.
17. Loi du Khi deux.
18. Loi de Student.
19. Loi de Fischer-Snedecor.
20. Inégalités.
21. Convergences.
22. Chaînes de Markov.

NTE

Nouvelles Technologies Educatives

Accueil

Exercices

Modélisation, équiprobabilité.

1. Espaces probabilisables.
   1.1. Expériences et événements aléatoires.
   1.2. Tribu d'événements.
2. Probabilité.
   2.1. Définitions : probabilité, espace probabilisé, modèle, événements incompatibles.
   2.2. Propriétés, formule de Poincaré.
   2.3. Evénements élémentaires équiprobables.

1. Espaces probabilisables.

HAUT

1.1. Expériences et événements aléatoires.

1.1.1. Expérience déterministe.

Si nous mesurons la différence de potentiel U qui existe aux bornes d'un circuit résistif de résistance R = 10 ohms et dans lequel circule un courant d'intensité i = 2 ampères, le voltmètre indiquera une différence de potentiel $U = R\,i$ = 20 volts.

Le résultat de cette expérience est parfaitement déterminé par la connaissance des paramètres : on dit que l'expérience est déterministe.

1.1.2. Expérience aléatoire, ensemble fondamental.

Si nous lançons un dé dont les faces sont numérotées de 1 à 6, l'expérience consiste à noter le numéro de la face supérieure.
Le résultat de l'expérience n'est pas connu a priori : nous disons alors que l'expérience est aléatoire.

L'ensemble Ω de tous les résultats possibles pour une expérience aléatoire E donnée s'appelle le **référentiel**, ou **ensemble fondamental**, de l'expérience aléatoire E.
L'ensemble Ω n'est pas déduit de manière unique de l'expérience aléatoire, mais dépend de l'usage qui doit être fait des résultats.
Un élément de l'ensemble fondamental s'appelle un **résultat élémentaire**.

Nous supposerons, dans un premier temps, que l'ensemble Ω des résultats élémentaires est un ensemble fini.

Dans l'expérience aléatoire du jet de dé, l'ensemble Ω est l'ensemble {1, 2, 3, 4, 5, 6}.
Les résultats élémentaires sont les nombres entiers 1, 2, 3, 4, 5, 6.

1.1.3. Evénement.

Un **événement** est une assertion ou proposition logique relative au résultat d'une expérience.
On dira qu'**un événement est réalisé** ou non suivant que la proposition est vraie ou fausse une fois l'exéprience accomplie.
A la réalisation d'un événement, on peut associer tous les résultats correspondants de l'épreuve.
Un événement peut donc être identifié à une **partie de Ω**.
Les **événements élémentaires** apparaissent alors comme les parties de Ω réduites à un élément.

1.2. Tribu d'événements.

HAUT

1.2. Tribu d'événements.

HAUT

a) Définitions : tribu d'événements, espace probabilisable.
b) Propriétés d'une tribu d'événements A.
1.— Ø ∈ A.
2.— Toute réunion finie d'éléments de A est un élément de A.
3.— Toute intersection finie d'éléments de A est un élément de A.
4.— Evénements élémentaires.
c) Exemples.
1.— Algèbre grossière d'événements.
2.— Algèbre de Bernoulli d'événements.
3.— Ensemble des parties de l'ensemble fondamental.
d) Algèbre d'événements engendrée par une partition.

Etant donnée une expérience aléatoire *E* d'ensemble fondamental Ω, nous appelons **événement aléatoire**, ou **événement**, toute partie de Ω.
Un événement est donc un élément de l'ensemble $\mathcal{P}(\Omega)$ des parties de Ω.

a) Définitions. HAUT

Soit $\mathbb{A}$ un ensemble d'événements.
$\mathbb{A}$ est une partie de l'ensemble $\mathfrak{P}(\Omega)$ des parties de l'ensemble fondamental Ω de l'expérience aléatoire *E*.

Nous dirons que $\mathbb{A}$ est une **tribu d'événements** de l'expérience aléatoire *E* si $\mathbb{A}$ vérifie les propriétés suivantes :

1.– $\Omega \in \mathbb{A}$.
2.– $A \in \mathbb{A} \Rightarrow \overline{A} \in \mathbb{A}$ ($\overline{A}$ désigne le complémentaire $\complement_{\Omega} A$ de *A* dans Ω) : $\mathbb{A}$ est **stable par complémentation**.
3.– Pour toute famille dénombrable $(A_i)_{i \in I}$ d'éléments de $\mathbb{A}$, $\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathbb{A}$: $\mathbb{A}$ est **stable par réunion dénombrable**.

On appelle **espace probabilisable** tout couple $(\Omega, \mathbb{A})$ dans lequel
– Ω est l'ensemble fondamental d'une expérience aléatoire *E*,
– $\mathbb{A}$ une tribu d'événements de l'expérience aléatoire *E*.

b) Propriétés d'une tribu d'événements. HAUT

Si $\mathbb{A}$ est une tribu d'événements d'une expérience aléatoire *E* d'ensemble fondamental Ω, $\mathbb{A}$ possède les propriétés suivantes.

1.— $\emptyset \in \mathbb{A}$. HAUT

En effet, d'après la propriété 2 de la définition, le complémentaire d'un élément de $\mathbb{A}$ est un élément de $\mathbb{A}$.
D'après la propriété 1 de la définition, Ω est un élément de $\mathbb{A}$.
Par la règle dite règle de *modus ponens*, il résulte de ce qui précède que le complémentaire de Ω est un élément de $\mathbb{A}$.
Or le complémentaire de Ω dans Ω est la partie vide Ø.
Donc la partie vide Ø est un élément de $\mathbb{A}$.

2.— Toute réunion finie d'éléments de $\mathbb{A}$ est un élément de $\mathbb{A}$.

HAUT

C'est vrai déjà, d'après la propriété précédente A1, pour la réunion de 0 élément de $\mathbb{A}$, qui est vide.

Supposons, hypothèse de récurrence, que la réunion de toute famille de n éléments de $\mathbb{A}$ soit un élément de $\mathbb{A}$, pour un entier $n \geq 0$.
Considérons une famille $(A_i)_{i \in \{1, \dots, n+1\}}$ de $n + 1$ éléments de $\mathbb{A}$.
D'après l'hypothèse de récurrence, la réunion $A_1 \cup \dots \cup A_n$ est un élément de $\mathbb{A}$ (cette réunion est vide si $n = 0$).
D'après la propriété 3 de la définition, comme A_{n+1} et $A_1 \cup \dots \cup A_n$ sont des éléments de $\mathbb{A}$, leur réunion $A_1 \cup \dots \cup A_n \cup A_{n+1}$ est aussi un élément de $\mathbb{A}$.
La propriété se trouve donc vraie pour $n + 1$ dès qu'elle est vraie pour n.
D'après le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout entier $n \geq 0$.

3.— Toute intersection finie d'éléments de $\mathbb{A}$ est un élément de $\mathbb{A}$.

HAUT

$$\bigcap_{i=1}^{i=n} A_i = \overline{\bigcup_{i=1}^{i=n} \overline{A_i}}$$

Si les A_i sont des éléments de $\mathbb{A}$, les complémentaires $\overline{A_i}$ sont des éléments de $\mathbb{A}$, d'après la propriété 2 de la définition.

$\bigcup_{i=1}^{i=n} \overline{A_i}$ est un élément de $\mathbb{A}$, d'après la propriété précédente A2.

Le complémentaire $\overline{\bigcup_{i=1}^{i=n} \overline{A_i}} = \bigcap_{i=1}^{i=n} A_i$ de cet élément $\bigcup_{i=1}^{i=n} \overline{A_i}$ de $\mathbb{A}$ est un élément de $\mathbb{A}$ d'après la propriété 2 de la définition.

4.— Evénements élémentaires.

HAUT

Dans une **tribu finie** d'événements $\mathbb{A}$, les éléments minimaux pour l'inclusion, dans l'ensemble $\mathbb{A}^*$ des événements non vides, sont appelés les **événements élémentaires** de $\mathbb{A}$.

Propriété.

> • Tout événement est réunion des événements élémentaires qu'il contient.
> • Les événements élémentaires contenus dans un événement non vide forment une partition de cet événement.

Démonstration.

1°/ Considérons un événement $A \in \mathbb{A}$.
Soit $(A_i)_{i \in I}$ la famille des événements élémentaires de $\mathbb{A}$ contenus dans A.
Soit $B = \bigcup_{i \in I} A_i$ la réunion de cette famille.
B est un élément de $\mathbb{A}$ (propriété A2), contenu dans A.
Soit x un élément de Ω, appartenant à A et n'appartenant pas à B.
La famille des événements de $\mathbb{A}$ contenant x n'est pas vide, elle contient au moins A.
Soit X l'intersection de cette famille.
X est un élément de $\mathbb{A}$ (propriété A3), contenu dans A et non vide, puisqu'il contient x.
X est un élément minimal pour l'inclusion dans $\mathbb{A}^*$.
En effet, si X contenait strictement un autre événement non vide Y, Y ne contiendrait pas x, puisque X est contenu dans tout événement contenant x.
$X \cap \overline{Y}$ serait alors un élément de $\mathbb{A}$ contenant x, donc contenant X, ce qui ne peut pas être, sinon X serait contenu dans $\overline{Y}$, et serait donc sans point commun avec Y, contredisant le fait que Y est non vide et contenu dans X.
Mais si X est un élément minimal, donc un événement élémentaire, contenu dans A, c'est l'un des A_i.
L'élément x qui appartient à X appartient ainsi à l'un des A_i, donc à leur réunion B.
Ceci contredit notre hypothèse de choix de x, élément de Ω, appartenant à A et n'appartenant pas à B.
Il n'existe donc aucun x appartenant à A et n'appartenant pas à B : c'est que A est égal à B.
Et A est la réunion des événements élémentaires qu'il contient.

2°/ Si A n'est pas vide, il contient au moins un élément x.
Comme précédemment, l'intersection X de la famille des événements contenant x est un événement élémentaire contenant x et contenu dans A.
Donc la famille des événements élémentaires contenus dans A n'est pas vide.
A chaque élément x de A, on peut ainsi faire correspondre un événement élémentaire contenant x et contenu dans A.
Comme A est fini, la famille F des événements élémentaires ainsi définie est finie.
L'intersection de deux événements élémentaires différents est vide, sinon on pourrait trouver un événement non vide strictement plus petit que les deux autres, ce qui n'est pas possible, s'agissant d'éléments minimaux dans $\mathbb{A}^*$.
On peut alors extraire de la famille F une famille d'événements élémentaires distincts, et tout événement élémentaire contenu dans A est un élément de cette famille extraite.
D'après ce qui précède, A est réunion de cette famille : celle-ci forme donc une partition de A.

En particulier, si Ω est fini, Ω est réunion des événements élémentaires de $\mathbb{A}$, puisque c'est un événement de $\mathbb{A}$ qui contient tous les événements élémentaires de $\mathbb{A}$.

HAUT

c) Exemples. HAUT

1.— Algèbre grossière d'événements. HAUT

$\mathbb{A} = \{\Omega, \emptyset\}$ est une algèbre d'événements, appelée l'algèbre grossière des événements.

En effet, les trois axiomes de la définition sont trivialement vérifiés, compte tenu des relations :

$$\Omega \cup \emptyset = \Omega,\ \Omega \cup \Omega = \Omega,\ \emptyset \cup \emptyset = \emptyset,\ \overline{\Omega} = \emptyset,\ \overline{\emptyset} = \Omega.$$

Il y a un seul événement élémentaire, Ω.

2.— Algèbre de Bernoulli d'événements.

HAUT

Si A est un événement non vide, $\mathbb{A} = \{\Omega, A, \overline{A}, \varnothing\}$ est une algèbre d'événements qu'on appelle une algèbre de Bernoulli d'événements.

En effet, Ω est un élément de $\mathbb{A}$, par définition.
La réunion de deux éléments de $\mathbb{A}$ est un élément de $\mathbb{A}$:

$\Omega \cup \Omega = \Omega \cup A = A \cup \Omega = \Omega \cup \overline{A} = \overline{A} \cup \Omega = \Omega \cup \varnothing = \varnothing \cup \Omega = A \cup \overline{A} = \overline{A} \cup A = \Omega \in \mathbb{A}$.
$A \cup A = A \cup \varnothing = \varnothing \cup A = A \in \mathbb{A}$.
$\overline{A} \cup \overline{A} = \overline{A} \cup \varnothing = \varnothing \cup \overline{A} = \overline{A} \in \mathbb{A}$.
$\varnothing \cup \varnothing = \varnothing \in \mathbb{A}$.

Le complémentaire d'un élément de $\mathbb{A}$ est un élément de $\mathbb{A}$.

$\overline{\Omega} = \varnothing \in \mathbb{A}$.
$\overline{A} \in \mathbb{A}$.
$\overline{\overline{A}} = A \in \mathbb{A}$.
$\overline{\varnothing} = \Omega \in \mathbb{A}$.

Les événements élémentaires sont A et $\overline{A}$.

Toute algèbre d'événements possédant l'événement A comme élément contient cette algèbre de Bernoulli d'événements.
Cette algèbre de Bernoulli d'événements contenant A est donc la plus petite algèbre d'événements contenant A.
On l'appelle l'algèbre d'événements engendrée par A.

3.— Ensemble des parties de l'ensemble fondamental.

HAUT

L'ensemble $\mathcal{P}(\Omega)$ des parties de Ω est une algèbre d'événements.

En effet, Ω est une partie de Ω (appelée la partie pleine).
La réunion de deux parties de Ω est une partie de Ω.
Le complémentaire d'une partie de Ω est une partie de Ω.

Les événements élémentaires sont les parties de Ω réduites à un seul élément de Ω.

Exemple : dans l'expérience aléatoire du jet de dé, les événements élémentaires sont $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{5\}$, $\{6\}$.

Tout événement est réunion des événements élémentaires qu'il contient.

Exemple : dans l'expérience aléatoire du jet de dé, l'événement "le résultat du lancer est un nombre pair" est $\{2, 4, 6\} = \{2\} \cup \{4\} \cup \{6\}$.

d) Algèbre d'événements engendrée par une partition. HAUT

Une partition finie $(A_i)_{i \in \{1, \dots, n\}}$ de Ω ne peut constituer, en elle-même, une algèbre d'événements.

> En effet, la réunion de deux éléments distincts d'une partition n'est jamais un élément de la partition, puisque deux éléments distincts d'une partition sont sans point commun. Par ailleurs, la partie vide est un élément de toute algèbre d'événements et aucun élément d'une partition n'est vide.

Par contre, **les réunions de famille sont des événements** et les réunions $\bigcup_{i \in I} A_i$ des familles d'éléments de la partition, pour tous les $I \in \mathfrak{P}([1, n])$, forment une algèbre d'événements, qu'on appelle l'**algèbre d'événements engendrée** par la partition.

Une partition finie de Ω s'appelle un **système complet d'événements**.

Les événements élémentaires de l'algèbre engendrée par la partition $(A_i)_{i \in \{1, \dots, n\}}$ sont constitués des événements $(A_i)_{i \in \{1, \dots, n\}}$ de la partition.
Toute algèbre d'événements est engendrée par ses événements élémentaires : en effet, tous les événements de l'agèbre d'événements sont réunions des événements élémentaires qu'ils contiennent.

Exemple :

Etant donnés deux événements A et B, les événements $A \cap B$, $A \cap \overline{B}$, $\overline{A} \cap B$, $\overline{A} \cap \overline{B}$, s'ils ne sont pas vides, forment une partition de Ω et engendrent une algèbre d'événements, formée des réunions des $2^4 = 16$ familles possibles de ces événements, et dont les événements élémentaires sont $A \cap B$, $A \cap \overline{B}$, $\overline{A} \cap B$, $\overline{A} \cap \overline{B}$.

HAUT

2. Probabilité.

HAUT

2.1. Définition : probabilité, espace probabilisé, modèle, événements incompatibles.

Soit $(\Omega, \mathbb{A})$ un espace probabilisable dont l'ensemble fondamental Ω est fini, de cardinal N.
On appelle **probabilité** sur cet espace probabilisable, toute application P de $\mathbb{A}$ dans l'intervalle [0, 1] de $\mathbb{R}$, qui vérifie les deux propriétés suivantes :

P1.— $P(\Omega) = 1$
P2.— $A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

La propriété P2 s'appelle l'**axiome des probabilités totales**.
Lorsque deux événements A et B ont une intersection vide, on dit qu'ils sont **incompatibles**.
Par une récurrence immédiate, on voit que l'axiome des probabilités totales peut se généraliser à n'importe quelle famille finie $(A_i)_{i \in \{1, \dots, n\}}$ d'événements incompatibles deux à deux, c'est-à-dire vérifiant l'axiome :
$(\forall i)(\forall j)(i \in [1, n] \text{ et } j \in [1, n] \text{ et } i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset)$.

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{i=n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{i=n} P(A_i)$$

On appelle **espace probabilisé** tout triplet $(\Omega, \mathbb{A}, P)$ dans lequel $(\Omega, \mathbb{A})$ est un espace probabilisable et P une probabilité sur cet espace probabilisable.
On appelle **modèle** d'une expérience aléatoire la donnée d'une **espace probabilisé** $(\Omega, \mathbb{A}, P)$ dans lequel l'algèbre d'événements $\mathbb{A}$. est engendrée par un système complet d'événements.

2.2. Propriétés, formule de Poincaré.

HAUT

2.2. Propriétés d'une probabilité, formule de Poincaré.

HAUT

2.2.1. Evénements contraires.
2.2.2. Evénement impossible.
2.2.3. Croissance.
2.2.4. Probabilité d'une réunion finie, formule de Poincaré.

2.2.1. Evénements contraires.

HAUT

Deux événements sont dits **contraires** s'ils sont complémentaires l'un de l'autre.
En particuliers, deux événements contraires sont incompatibles : leur intersection est vide.
Pour tout événement A, A et $\overline{A}$ sont des événements contraires.

$A \cap \overline{A} = \emptyset \Rightarrow P(A \cup \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A})$
$A \cup \overline{A} = \Omega \Rightarrow P(\Omega) = P(A) + P(\overline{A})$
$P(\Omega) = 1 \Rightarrow P(A) + P(\overline{A}) = 1$

$$\boxed{P(A) + P(\overline{A}) = 1}$$

2.2.2. Evénement impossible.

Un événement est dit **impossible** si sa probabilité est nulle.

La partie vide est un événement impossible.

La propriété précédente $P(A) + P(\overline{A}) = 1$ donne, pour $A = \Omega$, $P(\Omega) + P(\emptyset) = 1$.
$P(\Omega) = 1 \Rightarrow P(\emptyset) = 0$.

$$\boxed{P(\emptyset) = 0}$$

2.2.3. Croissance.

HAUT

Si l'événement A est contenu dans l'événement B, alors $P(A)$ est inférieure ou égale à $P(B)$.

$$\boxed{A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)}$$

En effet :

$A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A$
$A \cap B = A \Rightarrow B = (B \cap A) \cup (B \cap \overline{A}) = A \cup (B \cap \overline{A})$,
$A \cap (B \cap \overline{A}) = \emptyset \Rightarrow P(B) = P(A \cap (B \cap \overline{A})) = P(A) + P(B \cap \overline{A})$
$P(B \cap \overline{A}) \in [0, 1]$ et $P(B) = P(A) + P(B \cap \overline{A}) \Rightarrow P(B) \geq P(A)$

En définitive, on obtient bien : $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$.
Toute probabilité est une application croissante.

2.2.4. Probabilité d'une réunion finie.

HAUT

$$A \cup B = A \cup (B \cap \overline{A})$$
$$A \cap (B \cap \overline{A}) = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A \cup (B \cap \overline{A})) = P(A) + P(B \cap \overline{A})$$

$$P(B \cap \overline{A}) = P(A \cup B) - P(A)$$

$$B = (B \cap A) \cup (B \cap \overline{A})$$
$$(B \cap A) \cap (B \cap \overline{A}) = \emptyset \Rightarrow P(B) = P((B \cap A) \cup (B \cap \overline{A})) = P(B \cap A) + P(B \cap \overline{A})$$

$$P(B \cap \overline{A}) = P(B) - P(B \cap A) = P(B) - P(A \cap B)$$
$$P(A \cup B) - P(A) = P(B) - P(A \cap B)$$

$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$

Généralisation : formule de Poincaré.

La formule précédente se généralise à la réunion d'une famille $(A_i)_{i \in \{1, \dots, n\}}$ de n événements, éléments de $\mathbb{A}$.
On intersecte les événements distincts par 1, par 2, par 3, etc., en alternant les signes :

$$\boxed{P\left(\bigcup_{i=1}^{i=n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{i=n} P(A_i) - \sum_{1 \le i < j \le n} P(A_i \cap A_j) + \dots + (-1)^n P(A_1 \cap \dots \cap A_n)}$$

Cette formule est appelée la **formule de Poincaré**.
Pour la démontrer, on raisonne par récurrence sur l'entier $n \geq 1$.

HAUT

Démonstration de la formule de Poincaré.

HAUT

La formule :

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{i=n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{i=n} P(A_i) - \sum_{1 \le i < j \le n} P(A_i \cap A_j) + \ldots + (-1)^n P(A_1 \cap \ldots \cap A_n)$$

est trivialement vraie pour $n = 1$ et l'on sait déjà qu'elle est vraie pour $n = 2$: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
Supposons, hypothèse de récurrence, qu'elle soit vraie pour un entier $n \geq 2$.

Considérons une famille $(A_i)_{i \in \{1, \ldots, n+1\}}$ de $n + 1$ événements, éléments de $\mathbb{A}$.

On peut écrire $\bigcup_{i=1}^{i=n+1} A_i = \left(\bigcup_{i=1}^{i=n} A_i\right) \cup A_{n+1}$.
Comme la formule de Poincaré est vraie pour $n = 2$, on obtient :

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{i=n+1} A_i\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{i=n} A_i\right) + P(A_{n+1}) - P\left(\left(\bigcup_{i=1}^{i=n} A_i\right) \cap A_{n+1}\right)$$

$$\left(\bigcup_{i=1}^{i=n} A_i\right) \cap A_{n+1} = \bigcup_{i=1}^{i=n} (A_i \cap A_{n+1})$$

D'après l'hypothèse de récurrence :

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{i=n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{i=n} P(A_i) - \sum_{1 \le i < j \le n} P(A_i \cap A_j) + \ldots + (-1)^n P(A_1 \cap \ldots \cap A_n)$$

et

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{i=n} (A_i \cap A_{n+1})\right) = \sum_{i=1}^{i=n} P(A_i \cap A_{n+1}) - \sum_{1 \le i < j \le n} P(A_i \cap A_j \cap A_{n+1}) + \ldots + (-1)^n P(A_1 \cap \ldots \cap A_n \cap A_{n+1}),$$

soit, par changement de signe :

$$-P\left(\bigcup_{i=1}^{i=n} (A_i \cap A_{n+1})\right) = -\sum_{i=1}^{i=n} P(A_i \cap A_{n+1}) + \sum_{1 \le i < j \le n} P(A_i \cap A_j \cap A_{n+1}) - \ldots + (-1)^{n+1} P(A_1 \cap \ldots \cap A_n \cap A_{n+1}),$$

$P(A_{n+1})$ s'ajoute à $\sum_{i=1}^{i=n} P(A_i)$ pour donner $\sum_{i=1}^{i=n+1} P(A_i)$.

$-\sum_{i=1}^{i=n} P(A_i \cap A_{n+1})$ s'ajoute à $-\sum_{1 \le i < j \le n} P(A_i \cap A_j)$ pour donner $-\sum_{1 \le i < j \le n+1} P(A_i \cap A_j)$.

Et ainsi de suite : chaque terme du développement de $-P\left(\bigcup_{i=1}^{i=n} (A_i \cap A_{n+1})\right)$ s'ajoute au terme correspondant de $P\left(\bigcup_{i=1}^{i=n} A_i\right)$ pour donner juste ce qu'il fallait pour compléter les intersections avec les termes contenant A_{n+1}.

En définitive, on obtient bien, pour $P\left(\bigcup_{i=1}^{i=n+1} A_i\right)$, la même formule que la formule de l'hypothèse de récurrence, dans laquelle on remplace n par $n + 1$.
Le principe de récurrence permet alors d'affirmer que la formule est vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$.

HAUT

2.3. Evénements élémentaires équiprobables dans $\mathfrak{P}(\Omega)$.

HAUT

Soit Ω l'ensemble fondamental, supposé fini de cardinal N, associé à une épreuve aléatoire E, $\mathfrak{P}(\Omega)$ la tribu d'événements des parties de Ω.
Une probabilité P sur l'espace probabilisable $(\Omega, \mathfrak{P}(\Omega))$ peut se définir en associant à chaque événement élémentaire $\{\omega_i\}$, $\omega_i \in \Omega$, un nombre réel p_i, avec :

$$p_i = P(\{\omega_i\}) \text{ (qu'on note aussi } P(\omega_i)).$$

- $(\forall\, i)(i \in [1, N] \subset \mathbb{N} \Rightarrow p_i \in [0, 1] \subset \mathbb{R})$ [les p_i sont des nombres réels compris entre 0 et 1].
- $\sum_{i=1}^{i=N} p_i = \sum_{i=1}^{i=N} P(\{\omega_i\}) = P\left(\bigcup_{i=1}^{i=N} \{\omega_i\}\right) = P(\Omega) = 1$ [la somme des p_i est égale à 1].

Comme chaque événement est réunion des événements élémentaires qu'il contient, la probabilité d'un événement A est donnée par :

$$P(A) = P\left(\bigcup_{\omega \in A} \{\omega\}\right) = \sum_{\omega \in A} P(\{\omega\})$$

Un cas particulier important est celui où **tous les événements élémentaires ont la même probabilité *p***.
La relation $\sum_{i=1}^{i=N} p_i = 1$ s'écrit $N\,p = 1$, soit $p = \frac{1}{N}$.
La probabilité d'un événement A qui est réalisé dans n événements élémentaires est alors donnée par :

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\{\omega\}) = Card(A) \times \frac{1}{N} = \frac{n}{N}$$

La probabilité d'un événement A est le rapport entre le nombre de cas favorables n et le nombre de cas possibles N.

$$P(A) = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$$

HAUT

Chapitre 1. Modélisation, équiprobabilité.

Exercices

Exercice 1. Jet de trois dés distincts.
Exercice 2. Ensemble fondamental.
Exercice 3. Evénements élémentaires.
Exercice 4. Décomposition d'un événement en événements élémentaires.
Exercice 5. Coïncidence de deux anniversaires.
Exercice 6. Jet de deux dés.
Exercice 7. Tribu.
Exercice 8. Voyageurs dans un train.
Exercice 9. Langues.
Exercice 10. Yeux.
Exercice 11. Dé noir et dé rouge.
Exercice 12. Adresses au hasard, formule de Poincaré.
Exercice 13. Six lancers de pièces.
Exercice 14. Paradoxe du Chevalier de Méré.
Exercice 15. Chasseur et cible.
Exercice 16. Matchs d'une équipe.
Exercice 17. Six jets d'un dé.
Exercice 18. Modélisation d'un lancer de dé.
Exercice 19. Modélisation du lancer de deux dés.
Exercice 20. Tirage exhaustif, tirage non exhaustif.

Exercice 1. Jet de trois dés distincts.

On jette trois dés distincts dont les faces sont numérotées de 1 à 6. 1°/ Décrire un espace Ω des résultats élémentaires permettant de modéliser cette expérience. Quel est le cardinal de Ω ? 2°/ Soit A l'événement "on obtient au moins un as". Quel est le cardinal de A ? 3°/ Soit B l'événement "deux dés au moins portent le même numéro". Quel est le cardinal de B ?	Solution

HAUT

Exercice 2. Ensemble fondamental.

Pour les expériences aléatoires suivantes, donner l'ensemble fondamental Ω et son cardinal. 1°/ On lance un dé 20 fois. 2°/ Une urne contient une boule blanche et une boule noire. On prend dans cette urne une boule au hasard, on la remet et on ajoute une boule de même couleur. On reprend une boule au hasard. 3°/ Au bord de l'A7, un étudiant fait du stop.	Solution

HAUT

Exercice 3. Evénements élémentaires.

Chaque matin, au réveil, Jojo peut se livrer, ou non, aux activités suivantes : se raser, se brosser les dents, écouter la radio.
1°/ Décrire un ensemble fondamental permettant de modéliser les activités matinales de Jojo.
2°/ Appelons A l'événement "Jojo se rase", B l'événement "Jojo se brosse les dents" et C l'événement "Jojo écoute la radio". Décrire la liste des événements élémentaires constituant ces événements.
3°/ Exprimer à l'aide des événements A, B et C, les événements suivants :
a) ce matin, Jojo se brosse les dents, mais n'écoute pas la radio.
b) ce matin, Jojo n'écoute pas la radio, mais se brosse les dents.
c) ce matin, Jojo ne se rase pas, ne se brosse pas les dents, ni n'écoute la radio.
d) ce matin, Jojo se brosse les dents ou se rase, mais n'écoute pas la radio.
e) ce matin, Jojo, ou bien se rase, ou bien se brosse les dents, mais, dans tous les cas, écoute la radio.
f) ce matin, Jojo, ou bien se rase, ou bien se brosse les dents et écoute la radio.
g) ce matin, Jojo, ou bien se rase mais n'écoute pas la radio, ou bien se brosse les dents et écoute la radio.
h) ce matin, Jojo, ou bien ne se rase pas, ou bien il écoute la radio et se brosse les dents.
i) ce matin, Jojo, ou bien ne se rase pas, ou bien il se rase et écoute la radio.

Solution

HAUT

Exercice 4. Décomposition d'un événement en événements élémentaires.

1°/ On lance un dé jusqu'à la première apparition du "six". Notons

S_i = {le i-ème lancer donne un "six"}, $i \in \mathbb{N}$.

Ecrire à l'aide des événements S_i et $\overline{S_i}$ l'événement

A = {la première apparition du "six" a lieu après le cinquième lancer}

Est-ce le même événement que

B = {"six" n'apparaît pas au cours des 5 premiers lancers} ?

2°/ On effectue une suite infinie de lancers d'un dé. Pour tout $i \in \mathbb{N}$, on note :

A_i = {le i-ème lancer donne un as}.

a) Définir par une phrase ne comportant aucun vocabulaire mathématique chacun des événements :

$$E_1 = \bigcap_{i=5}^{+\infty} A_i \; ; \; E_2 = \left(\bigcap_{i=1}^{i=4} \overline{A_i} \right) \cap \left(\bigcap_{i=5}^{+\infty} A_i \right) \; ; \; E_3 = \bigcup_{i>4} A_i .$$

b) Ecrire, à l'aide des événements A_i l'événement "on obtient au moins une fois l'as au-delà du n-ième lancer".

Solution

HAUT

Exercice 5. Coïncidence de deux anniversaires.

1°/ Dans une classe de 36 élèves, quelle est la probabilité pour que deux élèves au moins soient nés le même jour ? (on considèrera que l'année compte 365 jours, et que toutes les dates d'anniversaires sont indépendantes et équiprobables). 2°/ Généraliser ce résultat pour une classe de *n* élèves.	Solution

HAUT

Exercice 6. Jet de deux dés.

On considère l'épreuve aléatoire constituée par le jet de deux dés à six faces numérotées de 1 à 6, indépendants et bien équilibrés, un dé blanc et un dé noir. 1°/ Donner trois exemples d'ensembles fondamentaux Ω qu'on peut associer à cette expérience aléatoire. 2°/ On considère l'assertion "La somme des faces supérieures des dés est supérieure ou égale à 10". Pour chacun des trois exemples d'ensembles fondamentaux construits dans la question précédente, est-ce un événement élémentaire ? est-ce un événement ? 3°/ On considère l'assertion "L'un au moins, des deux dés, marque 6". Pour chacun des trois exemples d'ensembles fondamentaux construits dans la question précédente, est-ce un événement élémentaire ? est-ce un événement ?	Solution

HAUT

Exercice 7. Tribu.

1°/ Montrer qu'un ensemble $\mathcal{C}$ de parties d'un ensemble fondamental Ω associé à une épreuve aléatoire est une tribu si, et seulement si, il vérifie les trois axiomes :

T1. $\mathcal{C}$ est stable par **passage au complément** : $A \in \mathcal{C} \Rightarrow \overline{A} \in \mathcal{C}$.
T'2. $\mathcal{C}$ est stable par **intersection dénombrable** (finie ou infinie) :
$(\forall\, i \in I \subseteq \mathbb{N})(A_i \in \mathcal{C}) \Rightarrow \bigcap_{i \in I} A_i \in \mathcal{C}$.
T'3. $\varnothing \in \mathcal{C}$.

2°/ Dans une épreuve aléatoire d'ensemble fondamental Ω, soient A et B deux événements incompatibles vérifiant $B \neq \overline{A}$. Construire un schéma montrant la tribu engendrée par A et B, et joignant par un trait montant deux événements liés par la relation d'inclusion, le plus petit étant le plus bas.

Solution

3°/ Dans une épreuve aléatoire d'ensemble fondamental Ω, soient A et B deux événements non incompatibles vérifiant $A \neq B$. Construire un schéma montrant la tribu engendrée par A et B, et joignant par un trait montant deux événements liés par la relation d'inclusion, le plus petit étant le plus bas.

4°/ Interpréter chaque élément du schéma de la troisième question en termes de sous-anneau de Boole pour les opérations :
— Addition : différence symétrique,
— Multiplication : intersection.

HAUT

Exercice 8. Voyageurs dans un train.

Un groupe de huit voyageurs n'ayant pas réservé leur place se répartit au hasard et indépendamment les uns des autres entre les cinq voitures d'un train.

1. Définir l'ensemble Ω des événements élémentaires relatif à cette expérience aléatoire et préciser la probabilité P qu'il convient de considérer.
2. Donner au moins deux exemples de systèmes complets d'événements et définir les espaces probabilisables correspondants.
3. Quelle est la probabilité que, dans chaque voiture, se trouve au moins un des voyageurs du groupe ?
4. On sait qu'il y a, dans chaque voiture, deux places libres. Quelle est la probabilité que tous les voyageurs du groupe trouvent une place assise ?

Solution

HAUT

Exercice 9. Langues.

On sait que, parmi 120 étudiants, 60 étudient l'anglais, 50 étudient l'espagnol, et 20 étudient à la fois l'anglais et l'espagnol. En prenant un étudiant au hasard, calculer la probabilité pour que cet étudiant 1. étudie l'anglais ou l'espagnol, 2. n'étudie ni l'anglais, ni l'espagnol.	Solution

HAUT

Exercice 10. Yeux.

Une classe comporte 10 garçons dont la moitié a les yeux marron et 20 filles dont la moitié également a les yeux marron. Calculez la probabilité pour qu'une personne tirée au hasard dans cette classe soit un garçon ou ait les yeux marron.	Solution

HAUT

Exercice 11. Dé noir et dé rouge.

On lance, au hasard et simultanément, deux dés, un noir et un rouge.
Soient N le résultat affiché par le dé noir et R le résultat affiché par le dé rouge.

1°/ Expliciter l'espace fondamental Ω et l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{C}, P)$.
2°/ Calculer
1. $P\,[N = R]$
2. $P\,[N \geq R]$
3. $P\,[N + R \geq 5]$
4. $P\,[N$ et R sont impairs$]$
5. $P\,[N \leq 2, R \geq 4]$

Solution

HAUT

Exercice 12. Adresses au hasard, formule de Poincaré.

Une personne écrit des lettres personnelles à n correspondants, mais la secrétaire, croyant qu'il s'agit d'une circulaire, met les étiquettes d'adresse au hasard. a) Quelle est la probabilité que chaque lettre parvienne à son destinataire ? b) Quelle est la probabilité qu'une lettre au moins parvienne à son destinataire ? Calculer la limite de cette probabilité quand n tend vers l'infini.	Solution

HAUT

Exercice 13. Six lancers de pièces.

On lance six fois, de manière identique et indépendante, une pièce de monnaie équilibrée. Une réalisation ω de cette expérience est donc une suite de six lettres F ou P indiquant le résultat obtenu à chaque lancer.
Pour tout couple (n, k) d'entiers tels que $n \leq 1$, $k \geq 0$ et $n + k \leq 5$, on note $A\,(n, k)$ l'événement

"On obtient F au lancer numéro j pour tout entier j tel que $n \leq j \leq n + k$
et on obtient P au lancer numéro $n + k + 1$".

Solution

1°/ Quel est le nombre total des événements $A\,(n, k)$?
2°/ Soit $\omega = FFPFPF$. Indiquer un événement $A\,(n, k)$ tel que $\omega \in A\,(n, k)$ et un événement $A\,(n', k')$ tel que $\omega \notin A\,(n', k')$.
3°/ Calculer $P\,[A\,(n, k)]$. Quelle est la probabilité de la réunion des $A\,(n, k)$?
4°/ Parmi les événements $A\,(n, k)$, citer deux événements compatibles et indépendants.
5°/ Parmi les événements $A\,(n, k)$, citer deux événements incompatibles et non indépendants.

HAUT

Exercice 14. Paradoxe du Chevalier de Méré.

a) Est-il plus probable d'obtenir au moins une fois six en quatre jets d'un dé que d'obtenir au moins une fois un double six en vingt-quatre jets de deux dés ? b) Lorsqu'on lance simultanément deux dés, est-il plus probable que la somme affichée soit 11 ou 12 ? 7 ou 8 ?	Solution

HAUT

Exercice 15. Chasseur et cible.

Un chasseur visant sa cible, l'atteint (évènement A) avec la probabilité 0,4, et, par conséquent, la manque (évènement $\overline{A}$) avec la probabilité 0,6. Il tire quatre fois.

1. Déterminer les éléments de l'évènement E correspondant au cas où la cible est atteinte deux fois exactement, et calculer $P(E)$.

2. Calculer la probabilité pour que la cible soit atteinte au moins une fois.

Solution

HAUT

Exercice 16. Matchs d'une équipe.

Une équipe gagne (G) avec une probabilité 0,5, perd (P) avec une probabilité 0,3 et fait match nul (N) avec une probabilité 0,2. L'équipe joue deux fois.

1. Déterminer l'ensemble fondamental Ω et les probabilités des évènements élémentaires.

2. Calculer la probabilité pour que l'équipe gagne au moins une fois.

Solution

HAUT

Exercice 17. Six jets d'un dé.

Soit q_A la probabilité de n'avoir aucun succès si on jette au hasard six fois un dé équilibré.

— Expliciter trois espaces différents pour modéliser cette expérience.

— Expliciter la loi de probabilité de chacun.

Solution

HAUT

Exercice 18. Modélisation d'un lancer de dé.

On cherche à modéliser le lancer d'un dé à six faces. Voici trois modèles :

1) On prend $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. L'élément $i \in \Omega$ représente l'éventualité "le dé s'est arrêté sur le numéro i".

2) On prend $\Omega = \{a, b, c\}$. Ici :

- ♦ a représente l'éventualité "le dé s'est arrêté sur le numéro 1 ou sur le numéro 2",
- ♦ b représente l'éventualité "le dé s'est arrêté sur le numéro 3 ou sur le numéro 4",
- ♦ c représente l'éventualité "le dé s'est arrêté sur le numéro 5 ou sur le numéro 6".

3) On prend $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$. Ici :

- ♦ ω_1 représente l'éventualité "le dé s'est arrêté sur le numéro 1 ou sur le numéro 2 ou sur le numéro 3",
- ♦ ω_2 représente l'éventualité "le dé s'est arrêté sur le numéro 3 ou sur le numéro 4",
- ♦ ω_3 représente l'éventualité "le dé s'est arrêté sur le numéro 6".

Solution

1°/ Pour chacun de ces modèles, déterminez la probabilité qu'il convient de mettre sur Ω pour que le modèle corresponde bien à notre expérience.

2°/ Dire, pour chacun des modèles, si A, B, C, D, sont des événements et, dans l'affirmative, les écrire comme sous-ensembles de Ω et donner leurs probabilités :

A = "le nombre obtenu est inférieur ou égal à 4".
B = "le nombre obtenu est 6".
C = "le nombre obtenu est 1 ou 2".
D = "le nombre obtenu est pair".

HAUT

Exercice 19. Modélisation du lancer de deux dés.

On jette deux dés.

1°/ Décrire l'espace probabilisé (Ω, P) associé.

2°/ On considère les deux événements :

A = "la somme des deux résultats est impaire",
B = "l'un au moins des deux résultats est 1".

Décrire les événements suivants et calculer leurs probabilités :

$A \cup B$, $A \cap B$, $A \cap \overline{B}$

Solution

HAUT

Exercice 20. Tirage exhaustif, tirage non exhaustif.

1°/ On tire successivement une carte de chacun de deux jeux de 52 cartes. Quelle est la probabilité de sortir au moins un as ? 2°/ On tire deux cartes d'un même jeu de 52 cartes. Quelle est la probabilité de sortir au moins un as ? (on envisagera deux cas : a) la seconde carte est tirée après remise dans le jeu de la première, b) les deux cartes sont tirées simultanément).	Solution

HAUT

Chapitre 1. Modélisation, équiprobabilité.

Enoncés.

Exercice 1. Jet de trois dés distincts.

On jette trois dés distincts dont les faces sont numérotées de 1 à 6. 1°/ Décrire un espace Ω des résultats élémentaires permettant de modéliser cette expérience. Quel est le cardinal de Ω ? 2°/ Soit *A* l'événement "on obtient au moins un as". Quel est le cardinal de *A* ? 3°/ Soit *B* l'événement "deux dés au moins portent le même numéro". Quel est le cardinal de *B* ?	

Solution.

1°/ Ensemble fondamental.

Un résultat élémentaire de l'épreuve aléatoire est un triplet de nombres compris entre 1 et 6 : c'est une application de l'ensemble {1, ... , 6} dans l'ensemble {1, 2, 3} : l'ensemble fondamental est donc l'ensemble des applications d'un ensemble à 6 éléments dans un ensemble à trois éléments.

$$\boxed{\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^{3}}$$

Son cardinal est $Card\ (\Omega) = 6^{3} = 216$.

$$\boxed{Card\ (\Omega) = 6^{3} = 216.}$$

2°/ Cardinal de l'événement *A*.

Le cardinal d'un événement, ou nombre de cas favorables, est le nombre d'événements élémentaires dont l'événement est la réunion.
Considérons l'événement $\overline{A}$ = "on n'obtient aucun as", contraire de *A*.
$\overline{A}$ est l'ensemble des applications d'un ensemble à 5 éléments, {1, ... , 5}, dans un ensemble à trois éléments.
$Card\ (\overline{A}) = 5^{3} = 125$

La relation $Card\ (\Omega) = Card\ (A) + Card\ (\overline{A})$, qui est toujours vraie, donne :
$Card\ (A) = Card\ (\Omega) - Card\ (\overline{A}) = 216 - 125 = 91$.

$$\boxed{Card\ (A) = 91.}$$

3°/ Cardinal de l'événement *B*.

Considérons l'événement $\overline{B}$ = "les trois dés portent un numéro différent", contraire de *B*.
Il y a $6 \times 5 \times 4 = 120$ façons de l'obtenir.
La cardinal de *B* est alors donné par :

$Card\,(B) = Card\,(\Omega) - Card\,(\overline{B}) = 216 - 120 = 96.$

$$\boxed{Card\,(B) = 96.}$$

Chapitre 1. Modélisation, équiprobabilité.

Enoncés.

Exercice 2. Ensemble fondamental.

Pour les expériences aléatoires suivantes, donner l'ensemble fondamental Ω et son cardinal. 1°/ On lance un dé 20 fois. 2°/ Une urne contient une boule blanche et une boule noire. On prend dans cette urne une boule au hasard, on la remet et on ajoute une boule de même couleur. On reprend une boule au hasard. 3°/ Au bord de l'A7, un étudiant fait du stop.	

Solution.

1°/ Première expérience aléatoire.

On suppose que le dé a six faces, qu'on peut numéroter de 1 à 6 : le résultat élémentaire du lancer d'un dé est le numéro de la face supérieure.
L'ensemble des résultats élémentaires du lancer d'un dé est {1, 2, 3, 4, 5, 6}.
Répéter 20 fois le lancer de dés, c'est faire le produit de 20 ensembles {1, 2, 3, 4, 5, 6}.
L'ensemble fondamental Ω est donc l'ensemble $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^{20}$ des applications d'un ensemble à 20 éléments dans un ensemble à 6 éléments.
Son cardinal est 6^{20}.

2°/ Deuxième expérience aléatoire.

Le résultat élémentaire d'un tirage de boule est la couleur de la boule tirée ; il y a deux résultats possibles, *Blanc* ou *Noir*.
Répéter 2 fois le tirage de boule, c'est faire le produit de 2 ensembles {*B*, *N*}.
L'ensemble fondamental Ω est donc l'ensemble $\{B, N\}^2$ des applications d'un ensemble à 2 éléments dans un ensemble à 2 éléments.
Son cardinal est $2^2 = 4$.

Soit B_i l'événement "la boule tirée lors du *i*-ème tirage est blanche", $i = 1, 2$.
Soit N_i l'événement "la boule tirée lors du *i*-ème tirage est noire", $i = 1, 2$.
N_i est le contraire de B_i.

Les résultats élémentaires de l'expérience aléatoire sont : $B_1 \cap B_2$, $B_1 \cap N_2$, $N_1 \cap B_2$, $N_1 \cap N_2$.

2°/ Troisième expérience aléatoire.

Le résultat élémentaire de l'expérience est le succès ou l'échec de l'entreprise.
Il y a deux résultats possibles. L'ensemble fondamental possède deux éléments, son cardinal est 2.

Chapitre 1. Modélisation, équiprobabilité.

Enoncés.

Exercice 3. Evénements élémentaires.

Chaque matin, au réveil, Jojo peut se livrer, ou non, aux activités suivantes : se raser, se brosser les dents, écouter la radio.
1°/ Décrire un ensemble fondamental permettant de modéliser les activités matinales de Jojo.
2°/ Appelons *A* l'événement "Jojo se rase", *B* l'événement "Jojo se brosse les dents" et *C* l'événement "Jojo écoute la radio". Décrire la liste des événements élémentaires constituant ces événements.
3°/ Exprimer à l'aide des événements *A*, *B* et *C*, les événements suivants :
a) ce matin, Jojo se brosse les dents, mais n'écoute pas la radio.
b) ce matin, Jojo n'écoute pas la radio, mais se brosse les dents.
c) ce matin, Jojo ne se rase pas, ne se brosse pas les dents, ni n'écoute la radio.
d) ce matin, Jojo se brosse les dents ou se rase, mais n'écoute pas la radio.
e) ce matin, Jojo, ou bien se rase, ou bien se brosse les dents, mais, dans tous les cas, écoute la radio.
f) ce matin, Jojo, ou bien se rase, ou bien se brosse les dents et écoute la radio.
g) ce matin, Jojo, ou bien se rase mais n'écoute pas la radio, ou bien se brosse les dents et écoute la radio.
h) ce matin, Jojo, ou bien ne se rase pas, ou bien il écoute la radio et se brosse les dents.
i) ce matin, Jojo, ou bien ne se rase pas, ou bien il se rase et écoute la radio.

Solution.

1°/ Ensemble fondamental.

Pour chacune des trois activités envisagées, il y a deux résultats possibles, réalisation ou non.
Un résultat possible de l'expérience aléatoire est donc une application d'un ensemble à 3 éléments dans un ensemble à 2 éléments.
Son cardinal est $2^3 = 8$, nombre de triplets différents qu'on peut obtenir avec les nombres 0 (non réalisation de l'activité) et 1 (réalisation de l'activité).

2°/ Evénements élémentaires.

Notons $\overline{A}$ l'événement contraire de *A*, $\overline{B}$ l'événement contraire de *B*, $\overline{C}$ l'événement contraire de *C*.
Les 8 événements élémentaires peuvent s'écrire :

$$A \cap B \cap C,\ A \cap B \cap \overline{C},\ A \cap \overline{B} \cap C,\ A \cap \overline{B} \cap \overline{C},\ \overline{A} \cap B \cap C,\ \overline{A} \cap B \cap \overline{C},\ \overline{A} \cap \overline{B} \cap C,\ \overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}.$$

3°/ Décomposition d'événements en fonction de *A*, *B*, *C*, $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$.

a) Jojo se brosse les dents, mais n'écoute pas la radio. C'est l'événement $B \cap \overline{C}$.
b) Jojo n'écoute pas la radio, mais se brosse les dents. C'est l'événement $\overline{C} \cap B = B \cap \overline{C}$.
c) Jojo ne se rase pas, ne se brosse pas les dents, ni n'écoute la radio. C'est l'événement élémentaire $\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$.
d) Jojo se brosse les dents ou se rase, mais n'écoute pas la radio. C'est l'événement $(A \cup B) \cap \overline{C}$.
e) Jojo, ou bien se rase, ou bien se brosse les dents, mais, dans tous les cas, écoute la radio. C'est l'événement $(A \cap \overline{C}) \cup (B \cap \overline{C}) = (A \cup B) \cap \overline{C}$.
f) Jojo, ou bien se rase, ou bien se brosse les dents et écoute la radio. C'est l'événement $A \cup (B \cap C)$.
g) Jojo, ou bien se rase mais n'écoute pas la radio, ou bien se brosse les dents et écoute la radio. C'est l'événement $(A \cap \overline{C}) \cup (B \cap C)$.
h) Jojo, ou bien ne se rase pas, ou bien il écoute la radio et se brosse les dents. C'est l'événement $\overline{A} \cup (B \cap C)$.
i) Jojo, ou bien ne se rase pas, ou bien il se rase et écoute la radio. C'est l'événement $\overline{A} \cup (A \cap C)$.

Remarque.

Comme il y a huit événement élémentaires, il y a 2^8 événements dans l'algèbre des événements $\mathcal{P}(\Omega)$.

Chapitre 1. Modélisation, équiprobabilité.

Enoncés.

Exercice 4. Décomposition d'un événement en événements élémentaires.

1°/ On lance un dé jusqu'à la première apparition du "six". Notons
S_i = {le i-ème lancer donne un "six"}, $i \in \mathbb{N}$.
Ecrire à l'aide des événements S_i et $\overline{S_i}$ l'événement
A = {la première apparition du "six" a lieu après le cinquième lancer}
Est-ce le même événement que
B = {"six" n'apparaît pas au cours des 5 premiers lancers} ?

2°/ On effectue une suite infinie de lancers d'un dé. Pour tout $i \in \mathbb{N}$, on note :
A_i = {le i-ème lancer donne un as}.
a) Définir par une phrase ne comportant aucun vocabulaire mathématique chacun des événements :

$$E_1 = \bigcap_{i=5}^{+\infty} A_i \; ; \; E_2 = \left(\bigcap_{i=1}^{i=4} \overline{A_i} \right) \cap \left(\bigcap_{i=5}^{+\infty} A_i \right) \; ; \; E_3 = \bigcup_{i>4} A_i .$$

b) Ecrire, à l'aide des événements A_i l'événement "on obtient au moins une fois l'as au-delà du n-ième lancer".

Solution.

1°/ Lancers de dé jusqu'à l'apparition d'un six.

Dire que la première apparition du six a lieu après le cinquième lancer, c'est dire, d'une part qu'il n'y a pas eu de six lors des cinq premiers lancers et, d'autre part qu'il existe un $i > 5$ tel que le i-ème lancer donne un six : c'est l'événement $A = \left(\bigcap_{i=1}^{i=5} \overline{S_i} \right) \cap \left(\bigcup_{i>5} S_i \right)$.

L'événement B est l'événement $\bigcap_{i=1}^{i=5} \overline{S_i}$. Ce n'est pas exactement la même chose que A : pour s'en convaincre, il suffit d'envisager le cas où le dé ne porte pas de six, l'événement A est impossible, sa probabilité est 0, l'événement B est certain, sa probabilité est 1.

2°/ Suite infinie de lancers de dé.

a) Description d'événements.

L'événement $E_1 = \bigcap_{i=5}^{+\infty} A_i$ est l'événement "on obtient un as à chaque lancer à partir du cinquième".

L'événement $E_2 = \left(\bigcap_{i=1}^{i=4} \overline{A_i} \right) \cap \left(\bigcap_{i=5}^{+\infty} A_i \right)$ est l'événement "on n'obtient aucun as au cours des 4 premiers lancers et on obtient un as à chaque lancer à partir du cinquième".

L'événement $E_3 = \bigcup_{i>4} A_i$ est l'événement "on obtient au moins une fois l'as au-delà du 4-ième lancer".

b) Décomposition d'un événement.

L'événement "on obtient au moins une fois l'as au-delà du *n*-ième lancer" est $A = \bigcup_{i>n} A_i$.

Pour $n = 4$, c'est l'événement E_3 de la question précédente.

Chapitre 1. Modélisation, équiprobabilité.

Enoncés.

Exercice 5. Coïncidence de deux anniversaires.

1°/ Dans une classe de 36 élèves, quelle est la probabilité pour que deux élèves au moins soient nés le même jour ? (on considèrera que l'année compte 365 jours, et que toutes les dates d'anniversaires sont indépendantes et équiprobables). 2°/ Généraliser ce résultat pour une classe de *n* élèves.	

Solution.

1°/ Classe de 36 élèves.

Chacun des 36 élèves peut avoir l'un des 365 jours de l'année comme date d'anniversaire.
Les résultats élémentaires sont donc les applications {1, ... , 36} dans {1, ... 365}.
Il y a donc 365^{36} possibilités de répartition des dates d'anniversaires.

Soit *A* l'événement "deux élèves au moins ont la même date d'anniversaire" et $\overline{A}$ l'événement contraire "les 36 dates d'anniversaires sont différentes".
Un événement élémentaire inclus dans $\overline{A}$ est une injection de {1, ... , 36} dans {1, ... 365}, le cardinal de $\overline{A}$ est donc :
$Card\,(\overline{A}) = 365 \times 364 \times ... \times (365 - 35)$.

Si les dates d'anniversaires sont indépendantes et équiprobables, la probabilité de l'événement $\overline{A}$ est le rapport entre le nombre de cas favorables $Card\,(\overline{A})$ et le nombre de cas possibles $Card\,(\Omega) = 365^{36}$, soit

$$P(\overline{A}) = \frac{365}{365} \times \frac{364}{365} \times ... \times \frac{330}{365}$$

La probabilité de *A* s'en déduit :

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{365}{365} \times \frac{364}{365} \times ... \times \frac{330}{365} = 0{,}832$$

La probabilité pour que deux élèves au moins, dans une classe de 36, soient nés le même jour est 0, 832.

2°/ Classe de *n* élèves.

Le même type de raisonnement que celui de la première question conduit au résultat :

La probabilité pour que deux élèves au moins, dans une classe de *n*, soient nés le même jour est :

$$1 - \prod_{k=0}^{k=n-1} \frac{365-k}{365}$$

Chapitre 1. Modélisation, équiprobabilité.

Enoncés.

Exercice 6. Jet de deux dés.

On considère l'épreuve aléatoire constituée par le jet de deux dés à six faces numérotées de 1 à 6, indépendants et bien équilibrés, un dé blanc et un dé noir. 1°/ Donner trois exemples d'ensembles fondamentaux Ω qu'on peut associer à cette expérience aléatoire. 2°/ On considère l'assertion "La somme des faces supérieures des dés est supérieure ou égale à 10". Pour chacun des trois exemples d'ensembles fondamentaux construits dans la question précédente, est-ce un événement élémentaire ? est-ce un événement ? 3°/ On considère l'assertion "L'un au moins, des deux dés, marque 6". Pour chacun des trois exemples d'ensembles fondamentaux construits dans la question précédente, est-ce un événement élémentaire ? est-ce un événement ?	

Solution.

1°/ Ensemble fondamental Ω.

L'ensemble fondamental d'une expérience aléatoire n'est pas unique, il dépend de ce que l'on veut étudier.

a) Premier exemple.

Si l'on s'intéresse séparément au résultat de chaque dé, on pourra écrire chaque résultat de l'expérience aléatoire sous forme d'un couple (i, j), i étant le résultat du dé blanc, j étant le résultat du dé noir, $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. On obtient ainsi un ensemble fondamental à $6^2 = 36$ éléments.

b) Deuxième exemple.

Si l'on s'intéresse globalement au résultat des deux dés, sans les discerner, on pourra écrire chaque résultat de l'expérience aléatoire sous forme d'un couple (i, j), i étant le résultat le plus faible, j le résultat le plus élevé, $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $j \geq i$. On obtient ainsi un ensemble fondamental à $6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 21$ éléments.

c) Troisième exemple.

Si l'on s'intéresse seulement à la somme des deux dés, on pourra écrire chaque résultat de l'expérience aléatoire sous forme d'un nombre entier $s \in \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$. On obtient ainsi un ensemble fondamental à 11 éléments.

c) Quatrième exemple.

Si l'on s'intéresse seulement au plus élevé des résultats des deux dés, on pourra écrire chaque résultat de l'expérience aléatoire sous forme d'un nombre entier $m \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. On obtient ainsi un ensemble fondamental à 6 éléments.

2°/ Somme.

Les éléments de l'ensemble fondamental Ω constituent les événements élémentaires.
Un événement est une réunion d'événements élémentaires.

a) Premier exemple.

L'assertion $A \equiv$ "La somme des faces supérieures des dés est supérieure ou égale à 10" est réalisée si, et seulement si, l'un des événements élémentaires suivants est réalisé :

$$(4, 6), (6, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 5), (6, 6).$$

Il s'agit donc d'un **événement**, réunion de 6 événements élémentaires :

$$A = \{(4, 6)\} \cup \{(6, 4)\} \cup \{(5, 5)\} \cup \{(5, 6)\} \cup \{(6, 5)\} \cup \{(6, 6)\}.$$

b) Deuxième exemple.

L'assertion $A \equiv$ "La somme des faces supérieures des dés est supérieure ou égale à 10" est réalisée si, et seulement si, l'un des événements élémentaires suivants est réalisé :

$$(4, 6), (5, 5), (5, 6), (6, 6).$$

Il s'agit donc d'un **événement**, réunion de 4 événements élémentaires :

$$A = \{(4, 6)\} \cup \{(5, 5)\} \cup \{(5, 6)\} \cup \{(6, 6)\}.$$

c) Troisième exemple.

L'assertion $A \equiv$ "La somme des faces supérieures des dés est supérieure ou égale à 10" est réalisée si, et seulement si, l'un des événements élémentaires suivants est réalisé :

$$\{S = 10\}, \{S = 11\}, \{S = 12\}.$$

Il s'agit donc d'un **événement**, réunion de 3 événements élémentaires :

$$A = \{S = 10\} \cup \{S = 11\} \cup \{S = 12\}.$$

d) Quatrième exemple.

Pour que la somme des faces supérieures des dés soit supérieure ou égale à 10, il faut que le résultat le plus élevé soit 5 ou 6.
La réalisation de l"assertion $A \equiv$ "La somme des faces supérieures des dés est supérieure ou égale à 10" entraîne la réalisation de l'événement $\{m = 5\} \cup \{m = 6\}$.

$A \subset \{m = 5\} \cup \{m = 6\}$.

Mais les événements élémentaires $\{m = 5\}$ et $\{m = 6\}$ contiennent chacun des cas où la somme est inférieure à 10, donc aucun des deux n'entraîne la réalisation de l'assertion $A \equiv$ "La somme des faces supérieures des dés est supérieure ou égale à 10".

$\{m = 5\} \not\subset A$ et $\{m = 6\} \not\subset A$.

Donc A ne saurait être réunion d'événements élémentaires : ce n'est **pas un événement**.

3°/ Maximum.

a) Premier exemple.

L'assertion $B \equiv$ "L'un au moins, des deux dés, marque 6" est réalisée si, et seulement si, l'un des événements élémentaires suivants est réalisé :

$$(1, 6), (6, 1), (2, 6), (6, 2), (3, 6), (6, 3), (4, 6), (6, 4), (5, 6), (6, 5), (6, 6).$$

B est donc un **événement**, réunion de 11 événements élémentaires :

$$B = \{(1, 6)\} \cup \{(6, 1)\} \cup \{(2, 6)\} \cup \{(6, 2)\} \cup \{(3, 6)\} \cup \{(6, 3)\} \cup \{(4, 6)\} \cup \{(6, 4)\} \cup \{(5, 6)\} \cup \{(6, 5)\} \cup \{(6, 6)\}.$$

b) Deuxième exemple.

L'assertion $B \equiv$ "L'un au moins, des deux dés, marque 6" est réalisée si, et seulement si, l'un des événements élémentaires suivants est réalisé :

$$(1, 6), (2, 6), (3, 6), (4, 6), (5, 6), (6, 6).$$

B est donc un **événement**, réunion de 6 événements élémentaires :

$$B = \{(1, 6)\} \cup \{(2, 6)\} \cup \{(3, 6)\} \cup \{(4, 6)\} \cup \{(5, 6)\} \cup \{(6, 6)\}.$$

c) Troisième exemple.

Si l'un des deux dés marque 6, la somme des deux dés est au moins 7 :

$$B \subset \{S = 7\} \cup \{S = 8\} \cup \{S = 9\} \cup \{S = 10\} \cup \{S = 11\} \cup \{S = 12\}$$

Cette inclusion montre que si un événement élémentaire est contenu dans B, c'est nécessairement l'un des événements $\{S = 7\}$, $\{S = 8\}$, $\{S = 9\}$, $\{S = 10\}$, $\{S = 11\}$, $\{S = 12\}$.

Mais la réalisation de l'un des événements élémentaires $\{S = 7\}$, $\{S = 8\}$, $\{S = 9\}$, $\{S = 10\}$, n'entraîne pas, à lui seul, la réalisation de l'assertion B.

Alors comme B peut être réalisé avec, par exemple, $\{S = 7\}$, c'est que B n'est pas réunion d'événement élémentaires : ce n'est **pas un événement**.

d) Quatrième exemple.

L'assertion $B \equiv$ "L'un au moins, des deux dés, marque 6" est réalisée si, et seulement si, l'événement élémentaire $\{m = 6\}$ est réalisé.

Donc B est un **événement élémentaire**. En particulier, c'est un événement.

Chapitre 1. Modélisation, équiprobabilité.

Enoncés.

Exercice 7. Tribu.

1°/ Montrer qu'un ensemble $\mathcal{C}$ de parties d'un ensemble fondamental Ω associé à une épreuve aléatoire est une tribu si, et seulement si, il vérifie les trois axiomes :

T1. $\mathcal{C}$ est stable par **passage au complément** : $A \in \mathcal{C} \Rightarrow \overline{A} \in \mathcal{C}$.
T'2. $\mathcal{C}$ est stable par **intersection dénombrable** (finie ou infinie) :
$(\forall\, i \in I \subseteq \mathbb{N})(A_i \in \mathcal{C}) \Rightarrow \bigcap_{i \in I} A_i \in \mathcal{C}$.
T'3. $\varnothing \in \mathcal{C}$.

2°/ Dans une épreuve aléatoire d'ensemble fondamental Ω, soient A et B deux événements incompatibles vérifiant $B \neq \overline{A}$. Construire un schéma montrant la tribu engendrée par A et B, et joignant par un trait montant deux événements liés par la relation d'inclusion, le plus petit étant le plus bas.

3°/ Dans une épreuve aléatoire d'ensemble fondamental Ω, soient A et B deux événements non incompatibles vérifiant $A \neq B$. Construire un schéma montrant la tribu engendrée par A et B, et joignant par un trait montant deux événements liés par la relation d'inclusion, le plus petit étant le plus bas.

4°/ Interpréter chaque élément du schéma de la troisième question en termes de sous-anneau de Boole pour les opérations :
— Addition : différence symétrique,
— Multiplication : intersection.

Solution.

1°/ Tribu.

Une tribu est, par définition, un ensemble de parties vérifiant les trois axiomes :

T1. $\mathcal{C}$ est stable par **passage au complément** : $A \in \mathcal{C} \Rightarrow \overline{A} \in \mathcal{C}$.
T2. $\mathcal{C}$ est stable par **réunion dénombrable** (finie ou infinie) : $(\forall\, i \in I \subseteq \mathbb{N})(A_i \in \mathcal{C}) \Rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{C}$.
T3. $\Omega \in \mathcal{C}$.

a) T1, T2 et T3 entraînent T1, T'2 et T'3.

Si $(A_i)_{i \in I}$ est une famille de parties de Ω appartenant à $\mathcal{C}$, la famille $(B_i)_{i \in I}$ des complémentaires des A_i

est aussi, d'après T1, une famille de partie de Ω appartenant à $\mathcal{C}$.
D'après T2, qui est réalisé pour la famille $(B_i)_{i \in I}$, la réunion $\bigcup_{i \in I} B_i$ est aussi un élément de $\mathcal{C}$.
D'après T1, le complémentaire de $\bigcup_{i \in I} B_i$, qui est l'intersection $\bigcap_{i \in I} A_i$, est encore un élément de $\mathcal{C}$.
Et ceci montre que T'2 est réalisé.

Comme la partie vide est le complémentaire de la partie pleine Ω, si T3 est réalisé, alors, d'après T1, ∅ est un élément de $\mathcal{C}$ et T'3 est réalisé.

b) T1, T'2, T'3 entraînent T1, T2 et T3.

Réciproquement, si $(A_i)_{i \in I}$ est une famille de parties de Ω appartenant à $\mathcal{C}$, la famille $(B_i)_{i \in I}$ des complémentaires des A_i est aussi, d'après T1, une famille de partie de Ω appartenant à $\mathcal{C}$.
D'après T'2, qui est réalisé pour la famille $(B_i)_{i \in I}$, l'intersection $\bigcap_{i \in I} B_i$ est aussi un élément de $\mathcal{C}$.
D'après T1, le complémentaire de $\bigcap_{i \in I} B_i$, qui est la réunion $\bigcup_{i \in I} A_i$, est encore un élément de $\mathcal{C}$.
Et ceci montre que T2 est réalisé.

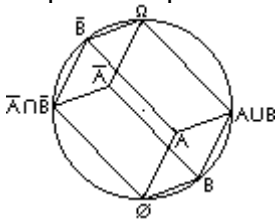
Comme la partie pleine Ω est le complémentaire de la partie vide ∅, si T'3 est réalisé, alors, d'après T1, Ω est un élément de $\mathcal{C}$ et T3 est réalisé.

Nous avons donc démontré que **les deux systèmes d'axiomes sont équivalents**.

2°/ Tribu engendrée par deux événements incompatibles.

Dire que les deux événements *A* et *B* sont incompatibles, c'est dire que leur intersection est la partie vide : $A \cap B = \varnothing$.
A est donc contenue dans le complémentaire de *B*, et *B* est contenue dans le complémentaire de *A*.
La tribu engendrée par *A* et *B* est formée de toutes les parties engendrées à partir de *A* et *B* par :
— passage au complémentaire,
— réunion,
— intersection.

On peut la représenter par le dessin suivant :



Le cercle tracé n'est utile que pour placer régulièrement les événements.
Le complémentaire d'un événement est son symétrique par rapport au centre du cercle.
Les événements élémentaires sont les plus petits : *A*, *B*, $\overline{A} \cap \overline{B}$.
Les autres événements, hormis ∅, sont réunions d'événements élémentaires :

$$A \cup B,\ \overline{A} = B \cup (\overline{A} \cap \overline{B}),\ \overline{B} = A \cup (\overline{A} \cap \overline{B}),\ \Omega = A \cup B \cup (\overline{A} \cap \overline{B})$$

3°/ Tribu engendrée par deux événements non incompatibles.

On suppose ici que les événements *A* et *B*, ont une intersection non vide.
Les événements élémentaires de la tribu engendrée par *A* et *B* sont alors :

$$A \cap B,\ A \cap \overline{B},\ \overline{A} \cap B,\ \overline{A} \cap \overline{B}.$$

En effet, ces événements, non vides, sont deux à deux incompatibles et ils forment un système complet d'événements puisque leur réunion est Ω.

$$(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B}) = (A \cap (B \cup \overline{B})) \cup (\overline{A} \cap (B \cup \overline{B})) = (A \cap \Omega) \cup (\overline{A} \cap \Omega) = A \cup \overline{A} = \Omega.$$

Et d'autre part, ces quatre événements appartiennent à la tribu engendrée par *A* et *B*, puisqu'on les obtient à partir de *A* et *B*, par passage au complémentaire et par intersection.

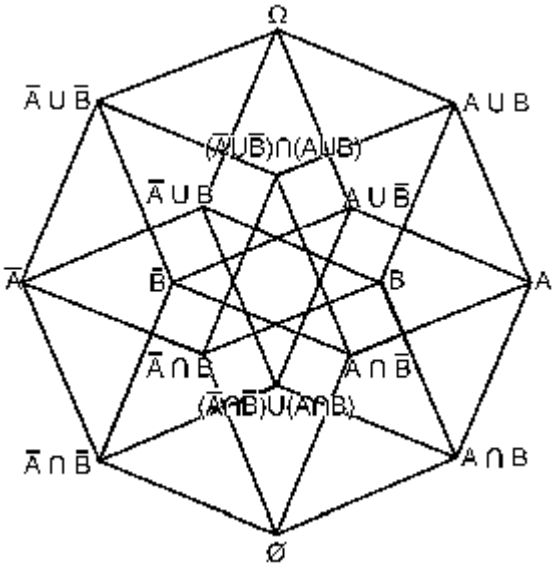
La tribu engendrée par *A* et *B* est donc l'ensemble des parties de cet ensemble à 4 éléments : elle contient $2^4 = 16$ éléments.
— 1 partie à 0 événement élémentaire : ∅.
— 4 parties à 1 événement élémentaire : $A \cap B$, $A \cap \overline{B}$, $\overline{A} \cap B$, $\overline{A} \cap \overline{B}$.
— 6 parties à 2 événements élémentaires : $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = A$, $(\overline{A} \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B}) = \overline{A}$, $(A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B) = B$, $(A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap \overline{B}) = \overline{B}$, $(A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B) = A + B$ (différence symétrique de *A* et *B*), $(A \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B})$ qui est le complémentaire de $A + B$:

$$\overline{A+B} = \overline{A \cap \overline{B}} \cap \overline{\overline{A} \cap B} = (\overline{A} \cup B) \cap (A \cup \overline{B}) = (\overline{A} \cap (A \cup \overline{B})) \cup (B \cap (A \cup \overline{B})) = (\overline{A} \cap \overline{B}) \cup (A \cap B).$$

— 4 parties à 3 événements élémentaires, qui sont les complémentaires des parties à 1 événement élémentaire :

$$\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cap B},\ \overline{A} \cup B = \overline{A \cap \overline{B}},\ A \cup \overline{B} = \overline{\overline{A} \cap B},\ A \cup B = \overline{\overline{A} \cap \overline{B}}.$$

— 1 partie à quatre événements élémentaires : $\Omega = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B})$, complémentaire de la partie vide à 0 événement élémentaire.



On peut représenter cette tribu par le dessin ci-contre, où les traits montants représentent la relation d'inclusion.

Comme précédemment, deux événements relié par un trait qui monte sont inclus l'un dans l'autre, le plus petit étant situé le plus bas.

4°/ Calcul de Boole.

La loi de composition interne

$$(A, B) \mapsto A + B = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$$

est associative, commutative, elle possède un élément neutre qui est la partie vide (**∅ = 0**), et tout élément possède un symétrique qui est lui-même (***A* + *A* = 0**). C'est une loi de groupe abélien.

La loi de composition interne

$$(A, B) \mapsto A\,B = A \cap B$$

est associative, commutative, idempotente (**$A^2 = A$**), elle possède un élément unité qui est Ω (**Ω = 1**), et elle est distributive par rapport à l'addition.

Ces deux opérations font donc de la tribu des parties de Ω, un **anneau de Boole** (unitaire, commutatif , idempotent).

La réunion de deux parties est le complémentaire du produit des complémentaires : $A \cup B = \overline{\overline{A} \cap \overline{B}}$

Pour une partie A, le complémentaire de A est $1 + A$.
En effet, $1 + A = (\Omega \cap \overline{A}) \cup (\overline{\Omega} \cap A) = \overline{A}$

On a donc :
$A \cup B = 1 + ((1 + A)(1 + B)) = 1 + 1 + A + B + A\,B = A + B + A\,B$.

On sait alors traduire tous les éléments de la tribu engendrée par A et B en termes d'opérations d'anneaux de Boole :

— Partie à zéro événement élémentaire :
$\varnothing = 0$

— Parties à un événement élémentaire :
$A \cap B = A\,B$,
$A \cap \overline{B} = A\,(1 + B) = A + A\,B$,
$\overline{A} \cap B = (1 + A)\,B = B + A\,B$,
$\overline{A} \cap \overline{B} = (1 + A)(1 + B) = 1 + A + B + A\,B$.

— Parties à deux événements élémentaires :
A,
B,
$\overline{A} = 1 + A$,
$\overline{B} = 1 + B$,
$A + B$,
$\overline{A + B} = 1 + A + B$.

— Parties à trois événements élémentaires : complémentaires des parties à un événement élémentaire.
$\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cap B} = 1 + A\,B$,
$\overline{A} \cup B = \overline{A \cap \overline{B}} = 1 + A\,(1 + B)$,
$A \cup \overline{B} = \overline{\overline{A} \cap B} = 1 + (1 + A)\,B$,
$A \cup B = \overline{\overline{A} \cap \overline{B}} = 1 + (1 + A)(1 + B)$.

— Partie à quatre événements élémentaires :
$\Omega = 1$.

Certains de ces événements engendrés par A et B portent un nom :

$1+A=\overline{A}$	*négation* de A
$A+B+AB=A\bigcup B$	*disjonction* de A et B
$AB=A\bigcap B$	*conjonction* de A et B
$1+A+AB=\overline{A}\bigcup B$	*conditionnel* de B par A, noté $A\rightarrow B$
$1+A+B=(\overline{A}\bigcap\overline{B})\bigcup(A\bigcap B)$	*biconditionnel* de A et B, noté $A\leftrightarrow B$
$1+A+B+AB=\overline{A}\bigcap\overline{B}$	*A Pierce B*, noté $A\downarrow B$
$1+AB=\overline{A}\bigcup\overline{B}$	*A Scheffer B*, noté $A\mid B$

Chapitre 1. Modélisation, équiprobabilité.

Enoncés.

Exercice 8. Système complet d'événements.

Un groupe de huit voyageurs n'ayant pas réservé leur place se répartit au hasard et indépendamment les uns des autres entre les cinq voitures d'un train. 1. Définir l'ensemble Ω des événements élémentaires relatif à cette expérience aléatoire et préciser la probabilité *P* qu'il convient de considérer. 2. Donner au moins deux exemples de systèmes complets d'événements et définir les espaces probabilisables correspondants. 3. Quelle est la probabilité que, dans chaque voiture, se trouve au moins un des voyageurs du groupe ? 4. On sait qu'il y a, dans chaque voiture, deux places libres. Quelle est la probabilité que tous les voyageurs du groupe trouvent une place assise ?	

Solution.

1°/ Ensemble fondamental.

Un résultat de l'expérience aléatoire est du type : le voyageur Untel est monté dans la voiture numéro tant, le voyageur Deuxtel est monté dans la voiture numéro tant, etc.
Un **événement élémentaire** est donc un octuplet de nombres compris entre 1 et 5 : la composante d'indice $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ est le numéro de la voiture dans laquelle est montée le voyageur numéro *i*.
L'ensemble de ces événements élémentaires est, par définition, l'**ensemble fondamental** Ω de l'expérience aléatoire.
L'ensemble fondamental Ω possède 5^8 éléments = 390 625 événements élémentaires.

Exemple : (1, 3, 2, 1, 5, 2, 4, 3) est l'événement élémentaire
$\{N_1 = 1\} \cap \{N_2 = 3\} \cap \{N_3 = 2\} \cap \{N_4 = 1\} \cap \{N_5 = 5\} \cap \{N_6 = 2\} \cap \{N_7 = 4\} \cap \{N_8 = 3\}$
N_k étant le numéro de la voiture dans laquelle est monté le voyageur numéro *k*.

2°/ Espace probabilisable.

A partir de l'ensemble fondamental Ω, il est possible de définir plusieurs **espaces probabilisables** $(\Omega, \mathcal{C})$, suivant ce qu'on veut étudier.
$\mathcal{C}$ est une **tribu** d'événements, engendrée par un **système fondamental d'événements**, c'est-à-dire par une partition de l'ensemble Ω.
La génération d'une tribu à partir d'un système fondamental d'événements se fait par les opérations de passage au complémentaire (complémentation) et de réunion (disjonction).
On peut, par exemple, considérer que les voyageurs et les voitures sont, ou non, discernables, ce qui permet déjà de construire quatre espaces probabilisables, à partir de quatre systèmes complets

d'événements différents.

a) Voyageurs discernables, voitures discernables.

L'ensemble des 390 625 événements élémentaires forme lui-même un système complet d'événements.
La tribu $\mathcal{C}$ est l'ensemble des parties de Ω.

b) Voyageurs indiscernables, voitures discernables.

On prend pour système complet d'événements engendrant $\mathcal{C}$, l'ensemble des quintuplets de nombres compris entre 0 et 8 dont la somme est 8 : la composante d'indice $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ d'un tel quintuplet est le nombre de voyageurs qui sont montés dans la voiture numéro *i*.

Exemple : le quintuplet (0, 2, 1, 3, 2) est l'événement
$\{V_1 = 0\} \cap \{V_2 = 2\} \cap \{V_3 = 1\} \cap \{V_4 = 3\} \cap \{V_5 = 2\}$
V_j étant le nombre de voyageurs qui sont montés dans la voiture numéro *j*.

La probabilité du quintuplet $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$ est donnée par la formule :

$$P\,[\,(V_1, V_2, V_3, V_4, V_5) = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)\,] = \frac{1}{5^8}\frac{8!}{v_1!\cdots v_5!}$$

En effet, il suffit de compter dans Ω, le nombre de cas favorables donnant la bonne répartition de voyageurs.
Etant donnés les huit voyageurs, il y a $\binom{8}{v_1}$ façons d'en choisir v_1 pour les mettre dans la première voiture.
Ces v_1 voyageurs étant choisis, il y a $\binom{8-v_1}{v_2}$ façons d'en choisir v_2 parmi les $8 - v_1$ restants pour les mettre dans la deuxième voiture.
Il y a donc $\binom{8}{v_1}\binom{8-v_1}{v_2} = \frac{8!}{v_1!\,v_2!\,(8-v_1-v_2)!}$ façons de choisir v_1 voyageurs pour la première voiture et v_2 voyageurs pour la deuxième voiture.

Un tel choix étant fait, on choisira v_3 voyageurs pour la troisième voiture, parmi les $(8 - v_1 - v_2)$ restants, puis on choisira v_4 voyageurs pour la quatrième voiture, parmi les $(8 - v_1 - v_2 - v_3)$ restants, les $v_5 = 8 - v_1 - v_2 - v_3 - v_4$ voyageurs restants montant dans la cinquième voiture.

On trouve donc bien $\frac{8!}{v_1!\cdots v_5!}$ façons de mettre v_1 voyageurs dans la première voiture, v_2 voyageurs dans la deuxième voiture, ... , v_5 voyageurs dans la cinquième voiture.
La probabilité uniforme sur Ω, donne alors pour probabilité de l'événement $(V_1, V_2, V_3, V_4, V_5) = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$, le rapport entre le nombre de cas favorables $\frac{8!}{v_1!\cdots v_5!}$ et le nombre de cas possibles 5^8.

Cette loi de probabilité s'appelle la **loi multinomiale**.

c) Voyageurs discernables, voitures indiscernables.

On prend pour système complet d'événements engendrant $\mathcal{C}$, l'ensemble des partitions de l'ensemble {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8} en au plus 5 parties, une partie indiquant quels voyageurs sont montés dans la même voiture.

Exemple : la partition ({1, 3}, {2, 4, 6}, {5, 7, 8}) est l'événement "Une voiture a vu monter les voyageurs 1 et 3, une autre voiture a vu monter les voyageurs 2, 4 et 6, une autre enfin les voyageurs 5, 7, et 8".

d) Voyageurs indiscernables, voitures indiscernables.

On prend pour système complet d'événements engendrant $\mathcal{C}$, l'ensemble des quintuplets de nombres croissants compris entre 0 et 8 dont la somme est 8 : la composante d'indice *i* indique combien de voyageurs sont montés dans une voiture.

Exemple : le quintuplet (0, 1, 1, 2, 4) est l'événement "Il n'est monté aucun voyageur dans une voiture, deux voitures ont vu chacune monter un seul des 8 voyageurs, une voiture a vu monter deux des voyageurs, et la voiture restante a vu monter les quatre autres voyageurs".

e) Notre choix.

Comme l'énoncé ne donne aucune précision sur les voyageurs, on pourra les considérer comme indiscernables.
Il reste alors le choix entre deux possibilités : les voitures sont, par nature, discernables puisqu'elles sont alignées dans un ordre précis sur la voie, mais si l'on ne s'intéresse qu'au nombre de voyageurs par voiture, on aura intérêt à considérer comme indiscernables les voitures car, dans ce cas, le nombre d'événements élémentaires est suffisamment réduit pour qu'on les puisse tous énumérer sans fatigue.

On remarquera que :
— chaque événement élémentaire du cas "Voyageurs indiscernables, voitures indiscernables" est réunion d'événements élémentaires du cas "Voyageurs indiscernables, voitures discernables",
— et que chaque événement élémentaire du cas "Voyageurs indiscernables, voitures discernables" est réunion d'événements élémentaires du cas "Voyageurs discernables, voitures discernables".
— Dans tous les cas, l'ensemble fondamental Ω est le même, seule la tribu $\mathcal{C}$ des événements change :

Nous retiendrons le choix "**Voyageurs indiscernables, voitures indiscernables**" ; le système complet d'événements engendrant la tribu $\mathcal{C}$ est constitué des 18 événements suivants.

1 : (0, 0, 0, 0, 8) : tous les voyageurs sont montés dans la même voiture.
2 : (0, 0, 0, 1, 7) : un voyageur dans une voiture, les 7 autres dans une autre voiture.
3 : (0, 0, 0, 2, 6)
4 : (0, 0, 0, 3, 5)
5 : (0, 0, 0, 4, 4)
6 : (0, 0, 1, 1, 6)
7 : (0, 0, 1, 2, 5)
8 : (0, 0, 1, 3, 4)
9 : (0, 0, 2, 2, 4)
10 : (0, 0, 2, 3, 3)
11 : (0, 1, 1, 1, 5)
12 : (0, 1, 1, 2, 4)
13 : (0, 1, 1, 3, 3)
14 : (0, 1, 2, 2, 3)
15 : (0, 2, 2, 2, 2)
16 : (1, 1, 1, 1, 4)
17 : (1, 1, 1, 2, 3)

18 : (1, 1, 2, 2, 2) : deux voitures contiennent un voyageur, trois voitures contiennent deux voyageurs.

De façon précise, notre **espace probabilisable** $(\Omega, \mathcal{C})$ sera constitué :

- de l'ensemble Ω des événements élémentaires $(N_1, \ldots, N_8)$ du cas "Voyageurs discernables, voitures discernables",
- de la tribu $\mathcal{C}$ des événements engendrée par les 18 événements deux à deux incompatibles, numérotés 1 à 18, énumérés ci-dessus, par les opérations de complémentation et de disjonction.

On peut calculer la probabilité de chacun de ces quintuplets, à partir de la loi multinomiale précédente.

1 : $P(0, 0, 0, 0, 8) = \frac{1}{5^8} \times \frac{8!}{(0!)^4\, 8!} \times \binom{5}{1} = \frac{1}{5^8} \times 5$,

puisqu'il existe $\binom{5}{1} = 5$ façons de choisir la voiture contenant les 8 voyageurs.

2 : $P(0, 0, 0, 1, 7) = \frac{1}{5^8} \times \frac{8!}{(0!)^3\, 1!\, 7!} \times \binom{5}{1} \times \binom{4}{1} = \frac{1}{5^8} \times 160.$

3 : $P(0, 0, 0, 2, 6) = \frac{1}{5^8} \times \frac{8!}{(0!)^3\, 2!\, 6!} \times \binom{5}{1} \times \binom{4}{1} = \frac{1}{5^8} \times 560.$

4 : $P(0, 0, 0, 3, 5) = \frac{1}{5^8} \times \frac{8!}{(0!)^3\, 3!\, 5!} \times \binom{5}{1} \times \binom{4}{1} = \frac{1}{5^8} \times 1120.$

5 : $P(0, 0, 0, 4, 4) = \frac{1}{5^8} \times \frac{8!}{(0!)^3 (4!)^2} \times \binom{5}{2} = \frac{1}{5^8} \times 700.$

6 : $P(0, 0, 1, 1, 6) = \frac{1}{5^8} \times \frac{8!}{(0!)^2 (1!)^2\, 6!} \times \binom{5}{1} \times \binom{4}{2} = \frac{1}{5^8} \times 1680.$

7 : $P(0, 0, 1, 2, 5) = \frac{1}{5^8} \times \frac{8!}{(0!)^2\, 1!\, 2!\, 5!} \times \binom{5}{1} \times \binom{4}{1} \times \binom{3}{1} = \frac{1}{5^8} \times 10\,080.$

8 : $P(0, 0, 1, 3, 4) = \frac{1}{5^8} \times \frac{8!}{(0!)^2\, 1!\, 3!\, 4!} \times \binom{5}{1} \times \binom{4}{1} \times \binom{3}{1} = \frac{1}{5^8} \times 16\,800.$

9 : $P(0, 0, 2, 2, 4) = \frac{1}{5^8} \times \frac{8!}{(0!)^2 (2!)^2\, 4!} \times \binom{5}{1} \times \binom{4}{2} = \frac{1}{5^8} \times 12\,600.$

10 : $P(0, 0, 2, 3, 3) = \frac{1}{5^8} \times \frac{8!}{(0!)^2\, 2! (3!)^2} \times \binom{5}{1} \times \binom{4}{2} = \frac{1}{5^8} \times 16\,800.$

11 : $P(0, 1, 1, 1, 5) = \frac{1}{5^8} \times \frac{8!}{0! (1!)^3\, 5!} \times \binom{5}{1} \times \binom{4}{3} = \frac{1}{5^8} \times 6720.$

12 : $P(0, 1, 1, 2, 4) = \frac{1}{5^8} \times \frac{8!}{0! (1!)^2\, 2!\, 4!} \times \binom{5}{1} \times \binom{4}{1} \times \binom{3}{2} = \frac{1}{5^8} \times 50\,400.$

13 : $P(0, 1, 1, 3, 3) = \frac{1}{5^8} \times \frac{8!}{0! (1!)^2 (3!)^2} \times \binom{5}{2} \times \binom{3}{2} = \frac{1}{5^8} \times 33\,600.$

14 : $P(0, 1, 2, 2, 3) = \frac{1}{5^8} \times \frac{8!}{0!\, 1! (2!)^2\, 3!} \times \binom{5}{1} \times \binom{4}{2} \times \binom{2}{1} = \frac{1}{5^8} \times 100\,800.$

15 : $P(0, 2, 2, 2, 2) = \frac{1}{5^8} \times \frac{8!}{0! (2!)^4} \times \binom{5}{1} = \frac{1}{5^8} \times 12\,600.$

16 : $P(1, 1, 1, 1, 4) = \frac{1}{5^8} \times \frac{8!}{(1!)^4\, 4!} \times \binom{5}{1} = \frac{1}{5^8} \times 8400.$

17 : $P\,(1, 1, 1, 2, 3) = \frac{1}{5^8} \times \frac{8!}{(1!)^3\, 2!\, 3!} \times \binom{5}{1} \times \binom{4}{1} = \frac{1}{5^8} \times 67\,200.$

18 : $P\,(1, 1, 2, 2, 2) = \frac{1}{5^8} \times \frac{8!}{(1!)^2\, (2!)^3} \times \binom{5}{2} = \frac{1}{5^8} \times 50\,400.$

On peut vérifier que la somme des probabilités de ces 18 événements est bien égale à 1 :
5+160+560+1120+700+1680+10080+16800+12600+16800+./.
./.+6720+50400+33600+100800+12600+8400+67200+50400=390625

Dans notre espace probabilisable (Ω, $\mathcal{C}$), un **système complet d'événements** est une partition de l'ensemble des 18 événements énumérés ci-dessus engendrant $\mathcal{C}$ et constituant les "événements élémentaires" de la tribu $\mathcal{C}$.
Il y a exactement autant de systèmes complets d'événements qu'il y a de partitions d'un ensemble à 18 éléments (soit 682 076 806 154, cf N.Bourbaki, Théorie des ensembles, Chapitre 3, Exercice 7, page 120, Hermann, Paris, 1963).
On peut regrouper les 18 événements élémentaires de plusieurs façons, la plus simple étant de les regrouper un par un : l'ensemble des événements élémentaires forme un système complet d'événements.
On peut les regrouper de diverses autres façons, par exemple :

α) Suivant le nombre de voitures restées vides de voyageurs du groupe :

Ω = {0 voiture vide} $\cup$ {1 voiture vide} $\cup$ {2 voitures vides} $\cup$ {3 voitures vides} $\cup$ {4 voitures vides}.

β) Suivant la parité des nombres de voyageurs du groupe dans les voitures.

Ω = {Toutes les voitures ont pris un nombre pair de voyageurs} $\cup$ {Au moins 1 voiture a pris un nombre impair de voyageurs}
Ω = {Toutes les voitures non vides ont pris un nombre impair de voyageurs} $\cup$ {Au moins 1 voiture non vide a pris un nombre pair de voyageurs}

γ) Suivant le remplissage des voitures en voyageurs du groupe.

Ω = {Toutes les voitures ont pris au plus 2 voyageurs} $\cup$ {Au moins 1 voiture a pris exactement 3 voyageurs} $\cup$ {Aucune voiture n'a pris exactement 3 voyageurs et au moins 1 voiture a pris 4 voyageurs ou plus}.

3°/ Aucune voiture vide.

Parmi les 18 événements élémentaires engendrant la tribu $\mathcal{C}$, seuls les événements numérotés 16, 17, 18, ne laissent aucune voiture vide.

L'événement $A \equiv$ "dans chaque voiture, se trouve au moins un des voyageurs du groupe" est donc la réunion de ces trois événements élémentaires.
Sa probabilité est la somme des probabilités des trois événements élémentaires :

$$P\,(A) = \frac{1}{5^8} \times (8\,400 + 67\,200 + 50\,400) = \frac{1}{5^8} \times 126\,000 = \frac{1008}{3125} \approx 0{,}32.$$

4°/ Chaque voyageur trouve une place assise.

Dire que chaque voyageur trouve une place assise, quand on sait qu'il y en a deux dans chaque voiture, c'est dire que le nombre de voyageurs du groupe qui monte dans une voiture ne doit pas dépasser deux.
Cet événement *B* est la réunion des événements élémentaires numérotés 15 et 18.
Sa probabilité est la somme des probabilités des deux événements élémentaires :

$$P(B) = \frac{1}{5^8} \times (12\,600 + 50\,400) = \frac{1}{5^8} \times 63\,000 = \frac{504}{3125} \approx 0{,}16.$$

Chapitre 1. Modélisation, équiprobabilité.

Enoncés.

Exercice 9. Langues.

On sait que, parmi 120 étudiants, 60 étudient l'anglais, 50 étudient l'espagnol, et 20 étudient à la fois l'anglais et l'espagnol. En prenant un étudiant au hasard, calculer la probabilité pour que cet étudiant 1. étudie l'anglais ou l'espagnol, 2. n'étudie ni l'anglais, ni l'espagnol.	

Solution.

1°/ Représentation des données.

S'agissant de la répartition conjointe de deux caractères dans une population, on peut représenter les données par un tableau d'effectifs à double entrée.

On note
A l'événement "L'étudiant étudie l'anglais",
$\overline{A}$ l'événement "L'étudiant n'étudie pas l'anglais",
E l'événement "L'étudiant étudie l'espagnol",
$\overline{E}$ l'événement "L'étudiant n'étudie pas l'espagnol".

Les données peuvent être regroupées dans le tableau suivant :

	A	$\overline{A}$	*Total*
E	20		50
$\overline{E}$			
Total	60		120

Par additions et soustractions, on peut finir de remplir le tableau :

	A	$\overline{A}$	*Total*
E	20	30	50
$\overline{E}$	40	30	70
Total	60	60	120

Lorsqu'on suppose que chaque étudiant a la même probabilité d'être choisi, les probabilités conjointes s'obtiennent en divisant les effectifs conjoints par l'effectif total : en divisant chaque effectif par l'effectif total 120, on obtient le tableau des probabilités conjointes et des probabilités marginales:

	A	$\overline{A}$	*Total*
E	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{12}$
$\overline{E}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{7}{12}$
Total	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

2°/ Probabilités.

Les probabilités demandées peuvent se déduire du tableau précédent :

$$P(\overline{A} \cap \overline{E}) = \frac{1}{4}$$
$$P(A \cup E) = 1 - P(\overline{A} \cap \overline{E}) = \frac{3}{4}$$

On aurait pu écrire aussi :

$$P(A \cup E) = P(A) + P(E) - P(A \cap E) = \frac{6}{12} + \frac{5}{12} - \frac{2}{12} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$
$$P(\overline{A} \cap \overline{E}) = 1 - P(A \cup E) = \frac{1}{4}.$$

Chapitre 1. Modélisation, équiprobabilité.

Enoncés.

Exercice 10. Yeux.

Une classe comporte 10 garçons dont la moitié a les yeux marron et 20 filles dont la moitié également a les yeux marron. Calculez la probabilité pour qu'une personne tirée au hasard dans cette classe soit un garçon ou ait les yeux marron.	

Solution.

1°/ Représentation des données.

	G	F	*Total*
M	5	10	
$\overline{M}$			
Total	10	20	

Complétons le tableau de répartition conjointe d'effectifs :

	G	F	*Total*
M	5	10	15
$\overline{M}$	5	10	15
Total	10	20	30

En divisant par l'effectif total 30, on obtient le tableau de la loi de probabilité conjointe :

	G	F	*Total*
M	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$
$\overline{M}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$
Total	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1

2°/ Probabilités.

Le tableau précédent permet de répondre à la question posée.

$$P(G \cup M) = 1 - P(F \cap \overline{M}) = \frac{2}{3} = P(G) + P(M) - P(G \cap M).$$

Chapitre 1. Modélisation, équiprobabilité.

Enoncés.

Exercice 11. Dé noir et dé rouge.

On lance, au hasard et simultanément, deux dés, un noir et un rouge. Soient N le résultat affiché par le dé noir et R le résultat affiché par le dé rouge. 1°/ Expliciter l'espace fondamental Ω et l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{C}, P)$. 2°/ Calculer 1. $P\,[N = R]$ 2. $P\,[N \geq R]$ 3. $P\,[N + R \geq 5]$ 4. $P\,[N$ et R sont impairs$]$ 5. $P\,[N \leq 2, R \geq 4]$	

Solution.

1°/ Espace probabilisé.

Un résultat de l'épreuve aléatoire est un couple $(n, r) \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^2$, où n désigne le résultat obtenu par le dé noir, et r le résultat obtenu par le dé rouge.
L'ensemble fondamental Ω est donc $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^2$.
Son cardinal est 36.
La probabilité sur Ω est uniforme.
La tribu $\mathcal{C}$ des événements est l'ensemble $\mathrm{P}(\Omega)$ des parties de Ω.
La probabilité d'un événement A est donnée par $P(A) = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)}$.

2°/ Calcul de diverses probabilités.

a) $P(N = R)$.

L'événement $N = R$ est la réunion d'événements élémentaires

$$\{(1, 1)\} \cup \{(2, 2)\} \cup \{(3, 3)\} \cup \{(4, 4)\} \cup \{(5, 5)\} \cup \{(6, 6)\}.$$

Son cardinal est 6.
Sa probabilité est $P(N = R) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

b) $P(N \geq R)$.

L'événement $N \geq R$ est la réunion d'événements élémentaires

$$\{(1, 1)\} \cup \{(2, 1)\} \cup \{(3, 1)\} \cup \{(4, 1)\} \cup \{(5, 1)\} \cup \{(6, 1)\} \cup \{(2, 2)\} \cup \{(3, 2)\} \cup \{(4, 2)\} \cup \{(5, 2)\} \cup \{(6, 2)\} \cup \{(3, 3)\} \cup \{(4, 3)\} \cup \{(5, 3)\} \cup \{(6, 3)\} \cup \{(4, 4)\} \cup \{(5, 4)\} \cup \{(6, 4)\} \cup \{(5, 5)\} \cup \{(6, 5)\} \cup \{(6, 6)\}$$

Son cardinal est 21.
Sa probabilité est $P(N \geq R) = \frac{21}{36} = \frac{7}{12}$.

c) $P(N + R) \geq 5$.

$P(N + R \geq 5) = 1 - P(N + R \leq 4)$

L'événement $N + R \leq 4$ est la réunion d'événements élémentaires

$$\{(1, 1)\} \cup \{(1, 2)\} \cup \{(1, 3)\} \cup \{(2, 1)\} \cup \{(2, 2)\} \cup \{(3, 1)\}$$

Son cardinal est 6.
Le complémentaire $N + R \geq 5$ a pour cardinal $36 - 6 = 30$.
Sa probabilité est $P(N + R \geq 5) = \frac{5}{6}$.

d) N et R sont impairs.

L'événement "N et R sont impairs" est la réunion d'événements élémentaires

$$\{(1, 1)\} \cup \{(3, 1)\} \cup \{(5, 1)\} \cup \{(1, 3)\} \cup \{(3, 3)\} \cup \{(5, 3)\} \cup \{(1, 5)\} \cup \{(3, 5)\} \cup \{(5, 5)\}$$

Son cardinal est 9.
Sa probabilité est $P(N \text{ et } R \text{ sont impairs}) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$.
On remarquera la relation $P(N \text{ et } R \text{ sont impairs}) = P(N \text{ est impair}) \times P(R \text{ est impair}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$, qui tient à l'indépendance de N et R.

e) $N \leq 2$ et $R \geq 4$.

L'événement "$N \leq 2$ et $R \geq 4$" est la réunion d'événements élémentaires

$$\{(1, 4)\} \cup \{(1, 5)\} \cup \{(1, 6)\} \cup \{(2, 4)\} \cup \{(2, 5)\} \cup \{(2, 6)\}$$

Son cardinal est 6.
Sa probabilité est $P(N \leq 2 \text{ et } R \geq 4) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.
On remarquera la relation $P(N \leq 2 \text{ et } R \geq 4) = P(N \leq 2) \times P(R \geq 4) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}$, qui tient à l'indépendance de N et R.

Chapitre 1. Modélisation, équiprobabilité.

Enoncés.

Exercice 12. Adresses au hasard, formule de Poincaré.

Une personne écrit des lettres personnelles à *n* correspondants, mais la secrétaire, croyant qu'il s'agit d'une circulaire, met les étiquettes d'adresse au hasard. a) Quelle est la probabilité que chaque lettre parvienne à son destinataire ? b) Quelle est la probabilité qu'une lettre au moins parvienne à son destinataire ? Calculer la limite de cette probabilité quand *n* tend vers l'infini.	

Solution.

1°/ Probabilité que chaque lettre parvienne au destinataire.

Soit A_i l'événement "la lettre *i* parvient à son destinataire" et soit $P(A_i)$ sa probabilité.
On cherche $p_n = P(A_1 \cap \ldots \cap A_n)$.
$P(A_1 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1})\, P(A_n \mid A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1})$
Or, s'il y a déjà $n-1$ lettres qui parviennent à leurs destinataires, on est sûr que la dernière arrivera aussi au destinataire puisqu'il reste une seule étiquette à choisir pour une enveloppe : $P(A_n \mid A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}) = 1$,
$P(A_1 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1})$.
$P(A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}) = P(A_1 \cap \ldots \cap A_{n-2})\, P(A_{n-1} \mid A_1 \cap \ldots \cap A_{n-2}) = P(A_1 \cap \ldots \cap A_{n-2}) \times \frac{1}{2}$.
$P(A_1 \cap \ldots \cap A_{n-2}) = P(A_1 \cap \ldots \cap A_{n-3})\, P(A_{n-2} \mid A_1 \cap \ldots \cap A_{n-3}) = P(A_1 \cap \ldots \cap A_{n-3}) \times \frac{1}{3}$.
……
$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)\, P(A_2 \mid A_1) = \frac{1}{n} \times \frac{1}{n-1}$.

Par produit, on obtient, après simplification :

$$\boxed{P(A_1 \cap \ldots \cap A_n) = \frac{1}{n!}.}$$

Raisonnement alternatif.

Une autre forme de ce raisonnement aurait été de dire : étant donnée une première lettre, la probabilité qu'elle ait la bonne étiquette est $\frac{1}{n}$.

Si la première lettre a la bonne étiquette, la probabilité que la deuxième lettre ait la bonne étiquette est $\frac{1}{n-1}$.

Donc la probabilité que les deux premières lettres aient la bonne étiquette est $\frac{1}{n} \times \frac{1}{n-1}$.

Si les deux premières lettres ont la bonne étiquette, la probabilité que la troisième ait elle aussi la bonne étiquette est $\frac{1}{n-2}$.

La probabilité que les trois premières lettres aient la bonne étiquette est $\frac{1}{n} \times \frac{1}{n-1} \times \frac{1}{n-2}$.

Par une récurrence immédiate, on voit alors que la probabilité pour que les n lettres aient la bonne étiquette est $\frac{1}{n!}$.

2°/ Probabilité qu'une lettre au moins parvienne à destination.

- Soit A_i l'événement "la lettre i parvient à son destinataire" et soit $P(A_i)$ sa probabilité.

  On a $P(A_i) = \frac{1}{n}$ pour tout i.
- Soit k un entier compris entre 1 et n.

  On note S_k la somme $\sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k})$.

  Il y a $\binom{n}{k}$ façons de choisir le k-uple $(i_1, \ldots, i_k)$.

  Pour chaque k-uple $(i_1, \ldots, i_k)$, on a :

  $P(A_{i_1}) = \frac{1}{n}$,

  $P(A_{i_2} \mid A_{i_1}) = \frac{1}{n-1}$,

  ... ,

  $P(A_{i_k} \mid A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_{k-1}}) = \frac{1}{n-(k-1)}$, donc

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1})\, P(A_{i_2} \mid A_{i_1}) \ldots P(A_{i_k} \mid A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_{k-1}})$$
$$= \frac{1}{n} \times \frac{1}{n-1} \times \ldots \times \frac{1}{n-(k-1)} = \frac{1}{n(n-1)\cdots(n-k+1)} = \frac{(n-k)!}{n!}$$

$$S_k = \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}) = \binom{n}{k} \frac{(n-k)!}{n!} = \frac{1}{k!}.$$

- On cherche la probabilité $P(A_1 \cup \ldots \cup A_n)$.

  Si $n = 2$, on sait que
  $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2) = S_1 - S_2$.

  Il faut donc trouver une généralisation de cette formule pour $n \ge 2$.
- On voit déjà, par récurrence, que $P(A_1 \cup \ldots \cup A_n)$ est combinaison linéaire des S_k, $1 \le k \le n$:

$$P(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_{k=1}^{k=n} \alpha_k S_k.$$

- L'événement $A_1 \cup \ldots \cup A_n$ est réunion d'événements élémentaires (chaque événement élémentaire est une permutation de l'ensemble {1, ... , n}). Un tel événement élémentaire appartenant à $A_1 \cup \ldots$

$\bigcup A_n$ appartient à k des événements $A_1, \dots, A_n$, et pas aux autres.

Pour simplifier les notations, nous supposerons qu'un tel événement élémentaire ω appartient aux k premiers, $A_1, \dots, A_k$, mais à aucun des $n - k$ autres, ce qui veut dire qu'il appartient à $A_1 \bigcap \dots \bigcap A_k$, mais pas à $A_{k+1} \bigcup \dots \bigcup A_n$.

Si l'on considère un S_i, $1 \le i \le k$, l'événement élémentaire ω intervient chaque fois qu'une combinaison de i des événements $A_1, \dots, A_n$, contient seulement des événements tirés parmi $A_1, \dots, A_k$.

$P(\omega)$ intervient donc $\binom{k}{i}$ fois dans S_i, $1 \le i \le k$.

En d'autres termes, S_i contient le facteur additif $\binom{k}{i} P(\omega)$.

Lorsque i est plus grand que k, les combinaisons de i des événements $A_1, \dots, A_n$, qui interviennent, par leur intersection, dans S_i, contiennent forcément au moins l'un des $A_{k+1}, \dots, A_n$. L'événement élémentaire ω ne saurait y appartenir et n'intervient donc pas dans S_i.

Ainsi, lorsque ω est un événement élémentaire de $A_1 \bigcup \dots \bigcup A_n$, il n'intervient que dans les S_i vérifiant $1 \le i \le k$, pour un k qui dépend de ω.

Pour que la probabilité de chaque évènement élémentaire ω de $A_1 \bigcup \dots \bigcup A_n$ intervienne une seule fois dans la probabilité $P(A_1 \bigcup \dots \bigcup A_n)$, qui est somme des probabilités de ses événements élémentaires, il faudra que les coefficients α_i vérifient la relation :

$$\sum_{i=1}^{i=k} \alpha_i \binom{k}{i} P(\omega) = P(\omega), \text{ pour tout } \omega \in A_1 \bigcup \dots \bigcup A_n$$

$$\sum_{i=1}^{i=k} \alpha_i \binom{k}{i} = 1, \text{ pour tout } k,\ 1 \le k \le n,$$

- Or la formule du binôme $(1 - x)^k = 1 - \sum_{i=1}^{i=k} (-1)^{i-1} \binom{k}{i} x^i$ donne, pour $x = 1$, $\sum_{i=1}^{i=k} (-1)^{i-1} \binom{k}{i} = 1$.

  On voit donc, par récurrence, que l'on a : $\alpha_i = (-1)^{i-1}$, et la formule

$$P(A_1 \bigcup \dots \bigcup A_n) = \sum_{k=1}^{k=n} \alpha_k S_k.$$

s'écrit :

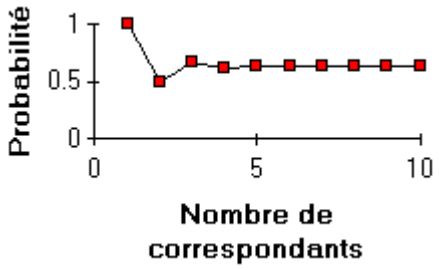
$$\boxed{P(A_1 \bigcup \dots \bigcup A_n) = S_1 - S_2 + \dots + (-1)^{n-1} S_n}$$

C'est la **formule de Poincaré**.

- Avec $S_k = \frac{1}{k!}$, il vient alors :

$$P(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{(-1)^{k+1}}{k!} = 1 - \sum_{k=0}^{k=n} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

- Donc la probabilité pour qu'une lettre au moins parvienne à son destinataire est $1 - \sum_{k=0}^{k=n} \frac{(-1)^k}{k!}$.
- Lorsque n tend vers l'infini, cette probabilité tend vers $1 - \frac{1}{e} \approx 0{,}63212$.



Chapitre 1. Modélisation, équiprobabilité.

Enoncés.

Exercice 13. Six lancers de pièces.

On lance six fois, de manière identique et indépendante, une pièce de monnaie équilibrée. Une réalisation ω de cette expérience est donc une suite de six lettres *F* ou *P* indiquant le résultat obtenu à chaque lancer.
Pour tout couple (n, k) d'entiers tels que $n \leq 1$, $k \geq 0$ et $n + k \leq 5$, on note $A(n, k)$ l'événement

"On obtient *F* au lancer numéro *j* pour tout entier *j* tel que $n \leq j \leq n + k$
et on obtient *P* au lancer numéro $n + k + 1$".

1°/ Quel est le nombre total des événements $A(n, k)$?
2°/ Soit ω = *FFPFPF*. Indiquer un événement $A(n, k)$ tel que $\omega \in A(n, k)$ et un événement $A(n', k')$ tel que $\omega \notin A(n', k')$.
3°/ Calculer $P[A(n, k)]$. Quelle est la probabilité de la réunion des $A(n, k)$?
4°/ Parmi les événements $A(n, k)$, citer deux événements compatibles et indépendants.
5°/ Parmi les événements $A(n, k)$, citer deux événements incompatibles et non indépendants.

Solution.

Définition de l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{C}, P)$:

L'**ensemble fondamental** est $\Omega = \{F, P\}^6$, ensemble des suites de six lettres *F* ou *P*.

La **tribu** $\mathcal{C}$ est l'ensemble $\mathcal{P}(\Omega)$ des parties de Ω.

La **probabilité** *P* sur $\mathcal{C}$ est définie à partir de la loi uniforme sur l'ensemble des événements élémentaires, réduits à un élément de Ω.

1°/ Nombre d'événements $A(n, k)$.

Les événements $A(n, k)$ sont les événements de la forme

$$A(n, k) = \left(\underset{1}{*} \dots \underset{n-1}{*}\right)\left[\underset{n}{F} \dots \underset{n+k}{F} \quad \underset{n+k+1}{P}\right]\left(\underset{n+k+2}{*} \dots \underset{6}{*}\right)$$

$\underbrace{\qquad\qquad}_{k+2 \text{ éléments}}$

contenant un *P* précédé d'une suite d'au moins un *F*.
Le *P* est à la place $n + k + 1$, $2 \leq n + k + 1 \leq 6$.
Le premier *F* de la suite considérée de *F* est la place *n*, $1 \leq n \leq 5$.
Le dernier *F* de la suite considérée de *F* est la place $n + k$, $0 \leq k \leq 5 - n$, soit $n \leq n + k \leq 5$.

Un **événement élémentaire** appartenant à l'événement $A(n, k)$ contient cette suite caractéristique

$\underbrace{\left[\begin{matrix} F & \dots & F & P \\ n & & n+k & n+k+1 \end{matrix}\right.}_{k+2 \text{ éléments}}$ de l'événement $A\,(n, k)$, précédée d'une suite quelconque $\left(\begin{matrix} * & \dots & * \\ 1 & & n-1 \end{matrix}\right.$ de F ou P de longueur $n - 1$ éventuellement nulle, et suivie d'une suite quelconque $\left(\begin{matrix} * & \dots & * \\ n+k+2 & & 6 \end{matrix}\right)$ de F ou P de longueur $5 - (n + k)$ éventuellement nulle.

Pour n et k fixés, il y a une seul événement $A\,(n, k)$.
Pour n fixé entre 1 à 5, bornes comprises, k peut varier de 0 à $5 - n \leq 4$, puisqu'il doit rester une place pour un P.
Donc, pour n fixé, il y a :

$$\sum_{k=0}^{k=5-n} 1 = 6 - n$$

événements $A\,(n, k)$ possibles.
Le nombre total d'événements $A\,(n, k)$ est donc :

$$\sum_{n=1}^{n=5} (6 - n) = \sum_{m=1}^{m=5} m = \frac{5 \times 6}{2} = 15.$$

Il y a en tout 15 événements $A\,(n, k)$.

On peut les construire tous facilement dans un tableau (* est un signe générique qui remplace, indifféremment, F ou P) :

n \ k	0	1	2	3	4
1	*FP*****	*FFP****	*FFFP***	*FFFFP**	*FFFFFP*
2	**FP****	**FFP***	**FFFP**	**FFFFP*	
3	***FP***	***FFP**	***FFFP*		
4	****FP**	****FFP*			
5	*****FP*				

2°/ Evénement élémentaire ω.

L'événement élémentaire ω = *FFPFPF*

— commence par *FFP*, donc, à ce titre, il peut appartenir à ***A* (1, 1)**, ***A* (2, 0)**, *A* (4, 0), ***A* (4, 1)**, *A* (5, 0),

— finit par *FPF*, donc, à ce titre, il peut appartenir à *A* (1, 0), ***A* (1, 1)**, *A* (1, 3), ***A* (2, 0)**, *A* (2, 2), *A* (3, 1), ***A* (4, 1)**.

Il appartient donc aux $A\,(n, k)$ communs aux deux listes :

$$\omega \in A\,(1, 1) \cap A\,(2, 0) \cap A\,(4, 0)$$

et il n'appartient à aucun autre $A\,(n, k)$. Par exemple, il n'appartient pas à $A\,(1, 0)$ puisqu'il ne commence pas par *FP*.

3°/ Probabilité de l'événement $A\ (n, k)$.

La loi uniforme sur Ω conduit à la formule $P\ (A\ (n, k)) = \frac{Card\left(A\left(n, k\right)\right)}{Card\ (\Omega)}$.

Or, dans $A\ (n, k)$, il y a une chaîne fixée de longueur $k + 2$ et il reste $6 - (k + 2)$ éléments qui peuvent prendre chacun la valeur F ou la valeur P.

On a donc $Card\ (A\ (n, k)) = 2^{6-(k+2)}$ et $P\ (A\ (n, k)) = \frac{2^{6-(k+2)}}{2^6} = 2^{-(k+2)} = \frac{1}{2^{k+2}}$.

$$\boxed{P\ (A\ (n, k)) = \frac{1}{2^{k+2}}}$$

Cette probabilité est indépendante de la place de la chaîne, c'est-à-dire indépendante de n.

On aurait pu raisonner aussi de la façon suivante.
L'événement $A\ (n, k)$ est déterminé par une suite de F terminée par un P : la longueur totale de la chaîne $\underbrace{\left[F \ldots F\right.}_{k+2 \text{ éléments}}\ \underbrace{\left.\begin{matrix} F & P \\ n+k & n+k+1 \end{matrix}\right]}$ est $k + 2$.

Chaque élément de la chaîne a une probabilité $\frac{1}{2}$.

L'événement $A\ (n, k)$ a donc une probabilité $\frac{1}{2^{k+2}}$.

Remarque.

Il reste 7 événements élémentaires qui n'appartiennent à aucun des $A\ (n, k)$.
Ce sont ceux qui n'ont aucune suite de F se poursuivant par un P :

$$PPPPPP\ ;\ PPPPPF\ ;\ PPPPFF\ ;\ PPPFFF\ ;\ PPFFFF\ ;\ PFFFFF\ ;\ FFFFFF.$$

La réunion des $A\ (n, k)$ est donc formée de $2^6 - 7 = 57$ événements élémentaires et la probabilité de cette réunion est $\frac{57}{64}$.

4°/ Evénements $A\ (n, k)$ compatibles et indépendants.

Les événements $A\ (1, 1) = FFP***$ et $A\ (4, 1) = ***FFP$ sont compatibles, leur intersection est l'événement élémentaire $FFPFFP$.
Ils sont indépendants car :

$$P\ (A\ (1, 1)) = \frac{1}{2^3};\ P\ (A\ (4, 1)) = \frac{1}{2^3};\ P\ (A\ (1, 1) \cap A\ (4, 1)) = P\ (FFPFFP) = \frac{1}{2^6} = P\ (A\ (1, 1)) \times P\ (A\ (4, 1)).$$

$$\boxed{A\ (1, 1) = FFP*** \text{ et } A\ (4, 1) = ***FFP \text{ sont compatibles et indépendants}}$$

5°/ Evénements $A\ (n, k)$ incompatibles et non indépendants.

Les événements $A\ (1, 0) = FP****$ et $A\ (1, 1) = FFP***$ sont incompatibles : aucun événement élémentaire ne peut avoir, à la fois, un P et un F en deuxième position.

Ils ne sont pas indépendants puisque le produit de leurs probabilités est $\frac{1}{2^2} \times \frac{1}{2^3} = \frac{1}{2^5}$, alors que la probabilité de leur intersection est 0.

A (1, 0) = *FP***** et A (1, 1) = *FFP**** sont incompatibles et non indépendants.

Chapitre 1. Modélisation, équiprobabilité.

Enoncés.

Exercice 14. Paradoxe du Chevalier de Méré.

a) Est-il plus probable d'obtenir au moins une fois six en quatre jets d'un dé que d'obtenir au moins une fois un double six en vingt-quatre jets de deux dés ? b) Lorsqu'on lance simultanément deux dés, est-il plus probable que la somme affichée soit 11 ou 12 ? 7 ou 8 ?	

Solution.

1°/ Paradoxe du chevalier de Méré.

a) Un six en quatre jets d'un dé.

La probabilité de ne pas avoir de 6 en quatre jets indépendants d'un dé équilibré est $\left(\frac{5}{6}\right)^4$.

La probabilité d'avoir au moins un 6 en quatre jets de dé est $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{11 \times 61}{36^2} = \frac{671}{1296} \approx 0{,}518$

b) Double six en vingt-quatre jets de deux dés.

La probabilité de ne pas avoir de double six en un jet de deux dés est $1 - \left(\frac{1}{6}\right)^2$.

La probabilité de ne pas avoir de double six en vingt-quatre jets de deux dés est $\left(1 - \left(\frac{1}{6}\right)^2\right)^{24}$.

La probabilité d'avoir au moins un double six en vingt-quatre jets de deux dés est $1 - \left(1 - \left(\frac{1}{6}\right)^2\right)^{24} \approx 0{,}491$.

Il est plus fréquent d'obtenir un six en quatre jets d'un dé qu'un double six en vingt-quatre jets de deux dés.

2°/ Somme de deux dés.

Pour l'expérience aléatoire consistant en le jet de deux dés (discernables), un résultat de l'expérience est un couple (i, j) de nombres compris entre 1 et 6.
L'ensemble fondamental Ω est donc $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^2$. Il possède 36 éléments.
Si les dés sont équilibrés et les lancers faits au hasard, on peut prendre sur Ω une probabilité uniforme : tous les couples ont la même probabilité $\frac{1}{36}$.
Le fait de considérer les dés comme indiscernables conduirait à considérer un système complet de 21

événements de la forme $\{i, j\}$, avec $(i, j) \in \Omega$, $i \leq j$ et des probabilités non uniformes :

$$P[\{i,j\}] = \begin{cases} \frac{1}{36} & \text{pour } i = j \\ \frac{2}{36} & \text{pour } i \neq j \end{cases}$$

La tribu $\mathcal{C}$ de l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{C}, P)$ est la tribu engendrée par les 21 événements du système complet d'événements.
Du point de vue calcul numérique des probabilités, les deux espaces probabilisés donneront les mêmes résultats.

a) 11 ou 12 ?

L'assertion $A \equiv$ "la somme est 11" est vraie lorsque l'un des événements élémentaires suivants est réalisé :

Dés discernables : (5, 6), (6, 5).
Dés indiscernables : {5, 6}.

C'est donc un événement et sa probabilité est

$$\text{Dés discernables : } P(A) = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)} = \frac{2}{36}.$$
$$\text{Dés indiscernables : } P(A) = \frac{2}{36} \ (i \neq j).$$

L'assertion $B \equiv$ "la somme est 12" est vraie lorsque l'événement élémentaire suivant est réalisé :

Dés discernables : (6, 6).
Dés indiscernables : {6, 6}.

C'est donc un événement et sa probabilité est :

$$\text{Dés discernables : } P(B) = \frac{Card(B)}{Card(\Omega)} = \frac{1}{36}.$$
$$\text{Dés indiscernables : } P(B) = \frac{1}{36} \ (i = j).$$

Les résultats numériques concernant les probabilités sont les mêmes, que les dés soient discernables ou non.
On se contentera, désormais, d'étudier l'espace probabilisé $(\Omega, \mathfrak{P}(\Omega), P)$, où $\mathfrak{P}(\Omega)$ est la tribu des parties de Ω, et où P est la probabilité uniforme sur Ω.

Il est plus probable d'obtenir une somme de 11 qu'une somme de 12.

b) 7 ou 8 ?

L'assertion $A \equiv$ "la somme est 7" est vraie lorsque l'un des événements élémentaires suivants est réalisé :

(1, 6), (6, 1), (2, 5), (5, 2), (3, 4), (4, 3).

C'est donc un événement, réunion de 6 événements élémentaires et sa probabilité est $P(A) = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)} =$

$\frac{6}{36}$.

L'assertion $B \equiv$ "la somme est 8" est vraie lorsque l'un des événements élémentaires suivants est réalisé :

(2, 6), (6, 2), (3, 5), (5, 3), (4, 4).

C'est donc un événement, réunion de 5 événements élémentaires et sa probabilité est $P(B) = \frac{Card(B)}{Card(\Omega)} = \frac{5}{36}$.

Il est plus probable d'obtenir une somme de 7 qu'une somme de 8.

Chapitre 1. Modélisation, équiprobabilité.

Enoncés.

Exercice 15. Chasseur et cible.

Un chasseur visant sa cible, l'atteint (évènement A) avec la probabilité 0,4, et, par conséquent, la manque (évènement $\overline{A}$) avec la probabilité 0,6. Il tire quatre fois. 1. Déterminer les éléments de l'évènement E correspondant au cas où la cible est atteinte deux fois exactement, et calculer $P(E)$. 2. Calculer la probabilité pour que la cible soit atteinte au moins une fois.	

Solution.

1°/ Evènements élémentaires.

Un évènement élémentaire est une suite de quatre symboles A ou $\overline{A}$. On suppose que les tirs successifs sont des **épreuves indépendantes**, de sorte que les résultats des tirs successifs sont des **évènements indépendants** : la probabilité d'un évènement élémentaire est alors le produit des probabilités des évènements A ou $\overline{A}$ qui le composent.

Les évènements élémentaires qui composent l'évènement E sont les suites de 4 symboles A ou $\overline{A}$ contenant deux, et deux seulement, symboles A : il y a $\binom{4}{2} = 6$ tels évènements élémentaires.

$$E = \{AA\overline{A}\,\overline{A}\} \cup \{A\overline{A}\,A\overline{A}\} \cup \{A\overline{A}\,\overline{A}A\} \cup \{\overline{A}\,AA\overline{A}\} \cup \{\overline{A}\,A\overline{A}\,A\} \cup \{\overline{A}\,\overline{A}\,AA\}.$$

La probabilité de l'évènement E est la somme des probabilités des évènements élémentaires qui le composent : or chacun de ces évènements élémentaires a la même probabilité $0,4^2 \times 0,6^2$, la probabilité de E est donc

$$P(E) = 6 \times 0,4^2 \times 0,6^2 = 0,3456$$

$$\boxed{P(E) = 0,3456}$$

2°/ Probabilité d'atteindre la cible.

La probabilité d'atteindre la cible 0 fois, c'est-à-dire la probabilité de ne pas atteindre la cible en quatre tirs, est $0,6^4$: $P(\{\overline{A}\,\overline{A}\,\overline{A}\,\overline{A}\}) = 0,6^4$.

L'évènement "atteindre la cible", identique à l'évènement "atteindre la cible au moins une fois" est le complémentaire de l'évènement "atteindre la cible 0 fois". Sa probabilité en est donc le complémentaire à 1 : P("atteindre la cible au moins une fois") $= 1 - P(\{\overline{A}\,\overline{A}\,\overline{A}\,\overline{A}\}) = 1 - 0,6^4 = 0,8704$

P ("atteindre la cible") = 0,8704

Chapitre 1. Modélisation, équiprobabilité.

Enoncés.

Exercice 16. Matchs d'une équipe.

Une équipe gagne (*G*) avec une probabilité 0,5, perd (*P*) avec une probabilité 0,3 et fait match nul (*N*) avec une probabilité 0,2. L'équipe joue deux fois. 1. Déterminer l'ensemble fondamental Ω et les probabilités des évènements élémentaires. 2. Calculer la probabilité pour que l'équipe gagne au moins une fois.	

Solution.

1°/ Présentation des données sous forme de tableau.

Les évènements élémentaires constituant l'ensemble fondamental peuvent être représentées par les 9 cases d'un tableau de contingence :

1er match \ 2e match	Gagne	Perd	Nul
Gagne			
Perd			
Nul			

Les données donnent les probabilités marginales :

1er match \ 2e match	Gagne	Perd	Nul	Total
Gagne				0,5
Perd				0,3
Nul				0,2
Total	0,5	0,3	0,2	1

Les deux matchs sont considérés comme des **épreuves indépendantes**.
Les probabilités conjointes s'obtiennent donc en faisant les **produits des probabilités marginales** :

1er match \ 2e match	Gagne : G2	Perd : P2	Nul : N2	Total
Gagne : G1	0,25	0,15	0,10	0,5
Perd : P1	0,15	0,09	0,06	0,3

Nul : N1	0,10	0,06	0,04	0,2
Total	0,5	0,3	0,2	1

Chaque case du tableau de contingence ainsi constitué contient la probabilité de l'évènement élémentaire correspondant.

2°/ Probabilité que l'équipe gagne au moins une fois.

Notons G1 l'évènement "l'équipe gagne le premier match", G2 l'évènement "l'équipe gagne le deuxième match". L'évènement "l'équipe gagne au moins un match" est l'évènement G1 $\cup$ G2. Sa probabilité est $P(G1 \cup G2) = P(G1) + P(G2) - P(G1 \cap G2) = 0,5 + 0,5 - 0,25 = 0,75$.

$$\boxed{P(G1 \cup G2) = 0,75.}$$

Chapitre 1. Modélisation, équiprobabilité.

Enoncés.

Exercice 17. Six jets d'un dé.

Soit q_A la probabilité de n'avoir aucun succès si on jette au hasard six fois un dé équilibré. — Expliciter trois espaces différents pour modéliser cette expérience. — Expliciter la loi de probabilité de chacun.	

Solution.

1°/ Modèle 1.

On prend pour Ω l'ensemble des 6^6 résultats possibles, avec la loi uniforme.
Card $(\Omega) = 6^6 = 46\,656$.

2°/ Modèle 2.

On prend pour Ω l'ensemble des suites de succès/échecs, avec la loi produit.
Card $(\Omega) = 2^6 = 64$.
La probabilité p du succès lors d'un lancer d'un dé est définie par

$$(1 - p)^6 = q_A,$$
$$p = 1 - q_A^{\frac{1}{6}}.$$

3°/ Modèle 3.

On prend pour Ω l'ensemble des nombres de succès $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, avec la loi binomiale.
Card $(\Omega) = 7$.
Les paramètres de la loi binomiale sont $n = 6$, et p défini par

$$(1 - p)^6 = q_A,$$
$$p = 1 - q_A^{\frac{1}{6}}.$$

Chapitre 1. Modélisation, équiprobabilité.

Enoncés.

Exercice 18. Modélisation d'un lancer de dé.

On cherche à modéliser le lancer d'un dé à six faces. Voici trois modèles :

1) On prend $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. L'élément $i \in \Omega$ représente l'éventualité "le dé s'est arrêté sur le numéro i".

2) On prend $\Omega = \{a, b, c\}$. Ici :

- ♦ a représente l'éventualité "le dé s'est arrêté sur le numéro 1 ou sur le numéro 2",
- ♦ b représente l'éventualité "le dé s'est arrêté sur le numéro 3 ou sur le numéro 4",
- ♦ c représente l'éventualité "le dé s'est arrêté sur le numéro 5 ou sur le numéro 6".

3) On prend $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$. Ici :

- ♦ ω_1 représente l'éventualité "le dé s'est arrêté sur le numéro 1 ou sur le numéro 2 ou sur le numéro 3",
- ♦ ω_2 représente l'éventualité "le dé s'est arrêté sur le numéro 3 ou sur le numéro 4",
- ♦ ω_3 représente l'éventualité "le dé s'est arrêté sur le numéro 6".

1°/ Pour chacun de ces modèles, déterminez la probabilité qu'il convient de mettre sur Ω pour que le modèle corresponde bien à notre expérience.

2°/ Dire, pour chacun des modèles, si A, B, C, D, sont des événements et, dans l'affirmative, les écrire comme sous-ensembles de Ω et donner leurs probabilités :

A = "le nombre obtenu est inférieur ou égal à 4".
B = "le nombre obtenu est 6".
C = "le nombre obtenu est 1 ou 2".
D = "le nombre obtenu est pair".

Solution.

1°/ Probabilités.

a) Modèle 1.

Dans le modèle 1, si l'on suppose que le dé est bien équilibré et que le lancer se fait au hasard, chaque

face a, par hypothèse, la même probabilité de sortie que les autres faces : la loi de probabilité sur $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ est alors la loi uniforme, chaque événement a une probabilité $\frac{1}{6}$.

i	1	2	3	4	5	6
$P[i]$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

b) Modèle 2.

Si l'on prend $\Omega = \{a, b, c\}$ avec $a = \{1, 2\}$, $b = \{3, 4\}$, $c = \{5, 6\}$, si chaque face a, par hypothèse, la même probabilité de sortie que les autres faces, les probabilités des événements a, b, c, se déduisent de la loi uniforme du modèle 1 : elles sont toutes égales à $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. La loi de probabilité sur Ω est donc, dans le modèle 2, une loi uniforme.

i	$a = \{1, 2\}$	$b = \{3, 4\}$	$c = \{5, 6\}$
$P[i]$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

c) Modèle 3.

Si l'on prend $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$, avec des événements ω_1, ω_2, ω_3, deux à deux incompatibles non vides, dont la réunion est Ω, et si chaque face a, par hypothèse, la même probabilité de sortie que les autres faces, les probabilités des événements ω_1, ω_2, ω_3 se déduisent de la loi uniforme du modèle 1 : elles sont proportionnelles au nombre d'éventualités de chacun des événements ω_1, ω_2, ω_3.

$$\frac{P[\omega_1]}{3} = \frac{P[\omega_2]}{2} = \frac{P[\omega_3]}{1} = \frac{P[\omega_1] + P[\omega_2] + P[\omega_3]}{6} = \frac{1}{6}$$

i	$\omega_1 = \{1, 2, 3\}$	$\omega_2 = \{4, 5\}$	$\omega_3 = \{6\}$
$P[i]$	$\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$	$\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

2°/ Evénements.

Dans un modèle, un événement est, par définition, une réunion d'événements élémentaires.

a) Evénement *A*.

Dans le modèle 1, $A = \{1, 2, 3, 4\}$ est un événement, c'est la réunion $\{1\} \cup \{2\} \cup \{3\} \cup \{4\}$. Sa probabilité est $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.
Dans le modèle 2, $A = \{1, 2, 3, 4\}$ est un événement, c'est la réunion $\{a\} \cup \{b\}$. Sa probabilité est $\frac{2}{3}$.
Dans le modèle 3, $A = \{1, 2, 3, 4\}$ n'est pas un événement, aucune réunion d'événements élémentaires ne se réduit à A, parce que l'on peut écrire $A = \omega_1 \cup \{4\}$ et comme $\{4\}$ est strictement contenu dans l'événement élémentaire ω_2, aucune réunion d'événements élémentaires pris parmi l'ensemble $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$, ne peut se réduire à $\{4\}$.

b) Evénement *B*.

Dans le modèle 1, $B = \{6\}$ est un événement. C'est l'événement élémentaire $i = 6$. Sa probabilité est $\frac{1}{6}$.

Dans le modèle 2, $B = \{6\}$ n'est pas un événement, parce qu'il est strictement contenu dans l'événement élémentaire *c*, de sorte qu'aucune réunion d'événements élémentaires pris parmi l'ensemble $\Omega = \{a, b, c\}$, ne peut se réduire à *B*.

Dans le modèle 3, $B = \{6\}$ est un événement. C'est l'événement élémentaire ω_3. Sa probabilité est $\frac{1}{6}$.

c) Evénement *C*.

Dans le modèle 1, $C = \{1, 2\}$ est un événement, c'est la réunion des événements élémentaires $\{i = 1\}$ et $\{i = 2\}$. Sa probabilité est $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

Dans le modèle 2, $C = \{1, 2\}$ est un événement. C'est l'événement élémentaire *a*. Sa probabilité est $\frac{1}{3}$.

Dans le modèle 3, $C = \{1, 2\}$ n'est pas un événement, parce qu'il est strictement contenu dans l'événement élémentaire ω_1, de sorte qu'aucune réunion d'événements élémentaires pris parmi l'ensemble $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$, ne peut se réduire à $C = \{1, 2\}$.

d) Evénement *D*.

Dans le modèle 1, $D = \{2, 4, 6\}$ est la réunion d'événements élémentaires : $D = \{2\} \cup \{4\} \cup \{6\}$. C'est un événement. Sa probabilité est $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Dans le modèle 2, $D = \{2, 4, 6\}$ n'est pas un événement, parce qu'aucun événement, ou partie de Ω, ne peut contenir $\{2\}$ sans contenir aussi l'événement élémentaire $a = \{1, 2\}$, donc sans contenir aussi $\{1\}$. Or *D* ne contient pas $\{1\}$, donc *D* n'est pas un événement.

Dans le modèle 3, $D = \{2, 4, 6\}$ n'est pas un événement, parce qu'aucun événement, ou partie de Ω, ne peut contenir $\{2\}$ sans contenir aussi l'événement élémentaire $\omega_1 = \{1, 2, 3\}$, donc sans contenir aussi $\{1\}$. Or *D* ne contient pas $\{1\}$, donc *D* n'est pas un événement.

En résumé :

Modèle \ Evénément	*A*	*B*	*C*	*D*
1	OUI	OUI	OUI	OUI
2	OUI	**NON**	OUI	**NON**
3	**NON**	OUI	**NON**	**NON**

Chapitre 1. Modélisation, équiprobabilité.

Enoncés.

Exercice 19. Modélisation du lancer de deux dés.

On jette deux dés. 1°/ Décrire l'espace probabilisé (Ω, P) associé. 2°/ On considère les deux événements : A = "la somme des deux résultats est impaire", B = "l'un au moins des deux résultats est 1". Décrire les événements suivants et calculer leurs probabilités : $A \cup B, A \cap B, A \cap \overline{B}$	

Solution.

1°/ Espace probabilisé.

Le jet de deux dés peut être modélisé, comme le jet d'un seul dé dans l'exercice 1, de plusieurs façons.

Il faut d'abord faire des hypothèses :
— il s'agit de deux dés à six faces ;
— les deux dés sont bien équilibrés, de sorte que chaque face d'un dé a la même probabilité de sortie que les autres faces.

Modèle 1.

Si les dés sont **discernables**, un blanc et un jaune par exemple, on pourra prendre comme événements élémentaires les couples de faces obtenues en mettant, comme première coordonnée, la face obtenue par le dé blanc et, comme deuxième coordonnée, la face obtenue par le dé jaune. On obtient ainsi 36 événements élémentaires ayant chacun une probabilité $\frac{1}{36}$.

Modèle 2.

Si les dés sont **indiscernables**, on pourra prendre comme événements élémentaires les couples de faces obtenues, rangées par ordre croissant. On obtient ainsi $6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 7 \times 3 = 21$ événements élémentaires dont les probabilités se calculent à partir de la loi uniforme du modèle 1 : $P(i, j) = \begin{cases} \frac{1}{36} & \text{si } i = j \\ \frac{2}{36} & \text{si } i \neq j \end{cases}$.

EVENEMENT	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)	(2, 2)
PROBABILITE	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

EVENEMENT	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)
PROBABILITE	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$

EVENEMENT	(3, 6)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)	(5, 5)	(5, 6)	(6, 6)
PROBABILITE	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

2°/ Evénements.

Comme le texte de l'énoncé ne distingue pas les dés, le modèle 2 convient mieux que le modèle 1 pour décrire les événements, parce qu'il comporte moins d'événements élémentaires que le modèle 1.

$$A = \{(1, 2), (1, 4), (1, 6), (2, 3), (2, 5), (3, 4), (3, 6), (4, 5), (5, 6)\}$$
$$P[A] = 9 \times \frac{2}{36} = \frac{1}{2}.$$

$$B = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6)\}$$
$$P[B] = \frac{1}{36} + 5 \times \frac{2}{36} = \frac{11}{36}$$

$A \cup B$ est l'événement $\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 3), (2, 5), (3, 4), (3, 6), (4, 5), (5, 6)\}$. On peut le décrire en disant que $A \cup B$ est réalisé si l'on obtient un 1 au moins, ou bien, s'il n'y a pas de 1, la somme des deux dés est impaire. Sa probabilité est $P[A \cup B] = \frac{1}{36} + 11 \times \frac{2}{36} = \frac{23}{36}$.

$A \cap B$ est l'événement $\{(1, 2), (1, 4), (1, 6)\}$. On peut le décrire en disant que $A \cap B$ est réalisé si l'on obtient un 1 et un nombre pair. Sa probabilité est $P[A \cap B] = 3 \times \frac{2}{36} = \frac{1}{6}$.

$\overline{B}$, complémentaire de B est l'événement "Il n'y a pas de 1". $A \cap \overline{B}$ est l'événement "Il n'y a pas de 1 et la somme des deux dés est impaire", ou encore "Chaque dé marque au moins 2 et la somme des deux dés est impaire". C'est l'événement $A \cap \overline{B} = \{(2, 3), (2, 5), (3, 4), (3, 6), (4, 5), (5, 6)\}$. Sa probabilité est $P[A \cap \overline{B}] = 6 \times \frac{2}{36} = \frac{1}{3}$.

Chapitre 1. Modélisation, équiprobabilité.

Enoncés.

Exercice 20. Tirage exhaustif, tirage non exhaustif.

1°/ On tire successivement une carte de chacun de deux jeux de 52 cartes. Quelle est la probabilité de sortir au moins un as ? 2°/ On tire deux cartes d'un même jeu de 52 cartes. Quelle est la probabilité de sortir au moins un as ? (on envisagera deux cas : a) la seconde carte est tirée après remise dans le jeu de la première, b) les deux cartes sont tirées simultanément).	

Solution.

1°/ Tirage dans deux jeux.

On suppose que le jeu de 52 cartes comporte des cartes ordinaires (4 couleurs et Roi, Dame, Valet, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, As, dans chaque couleur) et que chaque carte a la même probabilité $\frac{1}{52}$ d'être tirée.

Dans le premier tirage, la probabilité de ne pas tirer d'as est $\frac{48}{52}$.

Dans le deuxième tirage, la probabilité de ne pas tirer d'as est $\frac{48}{52}$.

La probabilité de ne pas tirer d'as au cours des deux tirages est donc $\frac{48}{52} \times \frac{48}{52}$.

La probabilité de tirer au moins un as au cours des deux tirages est

$$1 - \frac{48}{52} \times \frac{48}{52} = \frac{52^2 - 48^2}{52^2} = \frac{(52-48)(52+48)}{52^2} = \frac{20^2}{52^2} = \frac{5^2}{13^2} = \frac{25}{169} \approx 0{,}148.$$

La probabilité de tirer au moins un as est $\frac{25}{169}$.

2°/ Tirages dans un jeu.

a) Tirage non exhaustif.

Non exhaustif = avec remise.

A chaque tirage, la probabilité de ne pas tirer un as est la même et vaut $\frac{48}{52}$.

Pour deux tirages indépendants successifs, la probabilité de ne pas tirer d'as est $\frac{48}{52} \times \frac{48}{52}$.

La probabilité de tirer au moins un as au cours des deux tirages avec remise est, comme dans la première

question, voisine de 0,148.

Dans un tirage avec remise, la probabilité de tirer au moins un as en deux cartes est $\frac{25}{169}$.

b) Tirage exhaustif.

Exhaustif = sans remise.

Les événements peuvent se mettre dans un tableau donnant la loi conjointe des deux tirages :

1er tirage \ 2e tirage	As	Pas d'As	Total
As			$\frac{4}{52}$
Pas d'As			$\frac{48}{52}$
Total			1

Comme les tirages ne sont pas indépendants, il faut calculer séparément les probabilités conjointes.

La probabilité de tirer un as au premier tirage est $\frac{4}{52}$. La probabilité de ne pas tirer un as au premier tirage est $\frac{48}{52}$.

Lorsqu'on a tiré un as au premier tirage, la probabilité de tirer un as au deuxième tirage est $\frac{3}{51}$, la probabilité de ne pas tirer d'as est $\frac{48}{51}$.
Lorsqu'on n'a pas tiré d'as au premier tirage, la probabilité de tirer un as au deuxième tirage est $\frac{4}{51}$, la probabilité de ne pas tirer d'as est $\frac{47}{51}$.

Nous obtenons donc pour tableau de la loi conjointe des deux tirages :

1er tirage \ 2e tirage	As	Pas d'As	Total
As	$\frac{4}{52} \times \frac{3}{51}$	$\frac{4}{52} \times \frac{48}{51}$	$\frac{4}{52}$
Pas d'As	$\frac{48}{52} \times \frac{4}{51}$	$\frac{48}{52} \times \frac{47}{51}$	$\frac{48}{52}$
Total	$\frac{4}{52}$	$\frac{48}{52}$	1

On remarquera que la loi marginale du tirage d'as est la même au deuxième tirage qu'au premier.

La probabilité de ne tirer aucun as est la probabilité de l'événement "Pas d'as au premier tirage et pas d'as au deuxième tiage".
Elle est donnée dans le tableau et vaut $\frac{48}{52} \times \frac{47}{51}$.
La probabilité d'avoir au moins un as en tirant deux cartes est donc :

$$1 - \frac{48}{52} \times \frac{47}{51} = \frac{33}{221} \approx 0{,}149$$

Dans un tirage sans remise, la probabilité de tirer au moins un as en deux cartes est $\frac{33}{221}$.

On voit que cette probabilité est, en pratique, très voisine de la probabilité obtenue dans un tirage avec remise :
la différence est $\frac{33}{221} - \frac{25}{169} = \frac{52}{37\,349} = \frac{4}{2873} = \frac{1}{718{,}25}$.

Exercices

Probabilité conditionnelle, indépendance.

1. Probabilité conditionnelle, définition.

2. Indépendance.

2.1. Définition.
2.2. Extension de la définition d'une probabilité conditionnelle.
2.3. Indépendance et incompatibilité.
2.4. Généralisation.

3. Système complet d'événements, formule de Bayes.

3.1. La formule sous sa forme générale.
3.2. Cas particulier de la formule de Bayes.
3.3. Exemple et interprétation.

1. Probabilité conditionnelle, définition

HAUT

Soit (Ω, $\mathbb{A}$, P) un espace probabilisé (Ω fini).
Soit $B \in \mathbb{A}$, un événement de probabilité différente de 0 : $P(B) \neq 0$.
Soit $A \in \mathbb{A}$, un événement.

On appelle **probabilité conditionnelle de *A* sachant que *B* est réalisé**, ou **probabilité conditionnée de *A* par *B***, le nombre réel :

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

L'application $A \mapsto P(A \mid B)$ de $\mathbb{A}$ dans $\mathbb{R}$ définit une probabilité sur (Ω, $\mathbb{A}$).

En effet :

a) Comme P est une probabilité, ses valeurs sont positives et comprises entre 0 et 1, donc, pour tout $A \in \mathbb{A}$, $P(A \mid B)$ est positif.

b) Comme $A \cap B$ est contenu dans B et que l'application P est croissante, $P(A \cap B)$ est inférieur ou égal à $P(B)$, donc le rapport $\frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ est inférieur ou égal à 1.

c) $P(\Omega \mid B) = \frac{P(\Omega \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$.

d) Soient A_1 et A_2 deux événements incompatibles ($A_1 \cap A_2 = \emptyset$).

$$P((A_1 \cup A_2) \mid B) = \frac{P((A_1 \cup A_2) \cap B)}{P(B)} = \frac{P((A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B))}{P(B)}$$

$$(A_1 \cap B) \cap (A_2 \cap B) \subset A_1 \cap A_2 = \emptyset \Rightarrow (A_1 \cap B) \cap (A_2 \cap B) = \emptyset$$
$$(A_1 \cap B) \cap (A_2 \cap B) = \emptyset \Rightarrow P((A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B)) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B)$$

$$A_1 \cap A_2 = \emptyset \Rightarrow P((A_1 \cup A_2) \mid B) = \frac{P(A_1 \cap B)}{P(B)} + \frac{P(A_2 \cap B)}{P(B)}$$
$$A_1 \cap A_2 = \emptyset \Rightarrow P((A_1 \cup A_2) \mid B) = P(A_1 \mid B) + P(A_2 \mid B).$$

HAUT

2. Indépendance

HAUT

2.1. Définition.

La relation de définition de la **probabilité conditionnelle** de A lorsque B est réalisé, $P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ peut être écrite :

$$P(A \cap B) = P(A \mid B)\, P(B)$$

Si la probabilité de A n'est pas nulle, on peut écrire aussi :

$$P(A \cap B) = P(B \cap A) = P(B \mid A)\, P(A)$$

Deux événements A et B sont dits **indépendants en probabilité**, ou, simplement, **indépendants**, s'ils vérifient la relation :

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A)\, P(B)}$$

Pour des événements de probabilité non nulle, les propriétés suivantes sont équivalentes :
- A et B sont indépendants.
- $P(A \cap B) = P(A)\, P(B)$.
- $P(A \mid B) = P(A)$.
- $P(B \mid A) = P(B)$.

L'information donnée par la réalisation de A sur la réalisation de B est nulle et l'information donnée par la réalisation de B sur la réalisation de A est nulle.

HAUT

2.2. Extension de la définition d'une probabilité conditionnelle.

HAUT

La définition de la probabilité conditionnelle de A lorsque B est réalisé, peut s'étendre au cas où la probabilité de B est nulle.
Si $P(B) = 0$, B est indépendant de tout événement A, et tout événement A est indépendant de B, puisque $P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$.
Nous dirons, dans ce cas, que $P(A \mid B) = P(A)$, par définition.

D'où **la nouvelle définition** :

Etant donnés deux événements A et B, on appelle **probabilité conditionnelle de A sachant que B est réalisé**, ou **probabilité conditionnée de A par B**, le nombre réel :

$$P(A \mid B) = \begin{cases} \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} & \text{lorsque } P(B) \neq 0 \\ P(A) & \text{lorsque } P(B) = 0 \end{cases}$$

Cette extension de la définition permet d'écrire la formule :

$$P(A \cap B) = P(B)\,P(A \mid B) = P(A)\,P(B \mid A)$$

dans tous les cas.

HAUT

2.3. Indépendance et incompatibilité.

HAUT

Il convient de ne pas confondre **indépendance et incompatibilité**.
L'indépendance est une question de probabilité : si on change la probabilité, deux événements précédemment indépendants peuvent ne plus être indépendants.
L'incompatibilité ne fait pas intervenir la probabilité : une intersection vide reste vide quelque soit la probabilité.

2.4. Généralisation.

HAUT

La formule

$$P(A \cap B) = P(A)\, P(B \mid A)$$

peut être généralisée.

$$\boxed{P(A \cap B \cap C) = P(A)\, P(B \mid A)\, P(C \mid A \cap B)}$$

En effet, on peut écrire successivement :

$$P(A \cap B \cap C) = P(C \cap (A \cap B)) = P(A \cap B)\, P(C \mid A \cap B) = P(A)\, P(B \mid A)\, P(C \mid A \cap B).$$

Nous dirons que les trois événements A, B, C sont **indépendants dans leur ensemble** si, et seulement si, les quatre relations suivantes sont vérifiées :

$P(A \cap B \cap C) = P(A)\, P(B)\, P(C)$
$P(A \cap B) = P(A)\, P(B)$
$P(B \cap C) = P(B)\, P(C)$
$P(C \cap A) = P(C)\, P(A)$

Plus généralement, nous dirons que n événements $(A_i)_{i \in \{1, \dots, n\}}$ sont **indépendants dans leur ensemble** si, et seulement si, pour toute partie I de l'ensemble $\{1, \dots, n\}$, la relation suivante est vérifiée :

$$\boxed{P\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} P(A_i)}$$

Dans le cas où I est vide, l'intersection d'une famille vide est vide, et il faut prendre 0 pour produit d'une famille vide.

HAUT

3. Système complet d'événements, formule de Bayes.

HAUT

3.1. La formule sous sa forme générale.

Dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{A}, P)$, on appelle **système complet d'événements** toute partition finie de Ω par des éléments de $\mathbb{A}$.
Soit $(B_i)_{i \in \{1, \dots, n\}}$ un système complet d'événements.
Alors, pour tout événement A de probabilité non nulle, et pour tout indice $i \in \{1, \dots, n\}$, on a la **formule de Bayes** :

$$P(B_i \mid A) = \frac{P(A \mid B_i)\, P(B_i)}{P(A \mid B_1)\, P(B_1) + \cdots + P(A \mid B_n)\, P(B_n)}$$

Démonstration.

Comme $(B_i)_{i \in \{1, \dots, n\}}$ est une partition de Ω, on a $\Omega = \bigcup_{i=1}^{i=n} B_i$ et :

$$A = A \cap \Omega = A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{i=n} B_i \right) = \bigcup_{i=1}^{i=n} (A \cap B_i)$$

Comme les B_i sont deux à deux incompatibles, les $A \cap B_i$, qui sont contenus dans les B_i d'indices correspondants, sont eux aussi, deux à deux incompatibles.
La probabilité de leur réunion est donc la somme de leurs probabilités :

$$P(A) = \sum_{i=1}^{i=n} P(A \cap B_i) = \sum_{i=1}^{i=n} P(A \mid B_i)\, P(B_i) = P(A \mid B_1)\, P(B_1) + \dots + P(A \mid B_n)\, P(B_n)$$

La formule $P(A \cap B_i) = P(A \mid B_i)\, P(B_i) = P(B_i \mid A)\, P(A)$ s'écrit alors :

$$P(B_i \mid A)\, [P(A \mid B_1)\, P(B_1) + \dots + P(A \mid B_n)\, P(B_n)] = P(A \mid B_i)\, P(B_i)$$

et **si la probabilité de *A* n'est pas nulle**, c'est-à-dire si l'un au moins des $P(A \mid B_j)\, P(B_j)$ n'est pas nul, la formule de Bayes s'en déduit.

HAUT

3.2. Cas particulier de la formule de Bayes.

HAUT

Pour tout événement non vide B, B et $\overline{B}$ forment une partition de Ω.
Dans ce cas, la formule de Bayes se réduit à :

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \mid B)\, P(B)}{P(A \mid B)\, P(B) + P(A \mid \overline{B})\, P(\overline{B})}$$

3.3. Exemple et interprétation.

HAUT

On prend un dé au hasard parmi un lot de 100 dés dont on sait que 25 d'entre eux sont pipés.
Pour un dé pipé, la probabilité d'obtenir un 6 est 0,5.
On lance le dé choisi, on obtient 6 : quelle est la probabilité pour que le dé choisi soit pipé ?

Appelons *B* l'événement "le dé est pipé", *A* l'événement "on obtient un 6".
B et $\overline{B}$ forment un système complet d'événements.
La formule de Bayes donne :

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \mid B)\,P(B)}{P(A \mid B)\,P(B) + P(A \mid \overline{B})\,P(\overline{B})} = \frac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{6}\times\frac{3}{4}} = \frac{1}{2}.$$

Remarque.

> La formule de Bayes s'applique dans le cas d'une expérience aléatoire où le hasard intervient à deux reprises : une première fois dans le choix du dé, une deuxième fois dans le résultat du lancer.
> Un résultat lié au premier niveau de hasard est appelé une "**cause**".
> Un résultat lié au deuxième niveau de hasard est appelé une "**conséquence**".
> Dans le cas présent, on a calculé la probabilité que le dé soit pipé (la cause), sachant que nous avons obtenu les 6 (la conséquence).
> C'est pourquoi la formule de Bayes est aussi appelée la **formule de probabilité des causes**.

Les données du problème peuvent être présentées sous forme d'un **tableau des probabilités**, compte tenu de la formule $P(A \cap B) = P(B)\,P(A \mid B)$:

	Dé pipé = *B*	Dé non pipé = $\overline{B}$	*Total*
6 = *A*	$P(A \cap B) = P(B)\,P(A \mid B) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2}$	$P(A \cap \overline{B}) = P(\overline{B}) \times P(A \mid \overline{B}) = P(\overline{B}) \times \frac{1}{6}$	$P(A)$
non 6 = $\overline{A}$	$P(\overline{A} \cap B)$	$P(\overline{A} \cap \overline{B})$	$P(\overline{A})$
Total	$P(B) = \frac{1}{4}$	$P(\overline{B})$	$P(\Omega) = 1$

Ces données suffisent pour remplir le tableau, par somme ou différence :

	B	$\overline{B}$	*Total*
A	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{4} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{8}$	$\frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$
$\overline{A}$	$\frac{1}{4} - \frac{1}{8} = \frac{1}{8}$	$\frac{3}{4} - \frac{1}{8} = \frac{5}{8}$	$1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$
Total	$\frac{1}{4}$	$1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$	1

	B	$\overline{B}$	*Total*
A	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$

$\overline{A}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{3}{4}$
Total	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	1

Ce tableau de probabilités conjointes remplace la formule de Bayes et permet de répondre à toutes les questions qu'on se pose sur les probabilités conditionnelles : pour calculer $P(B \mid A)$, on regarde dans la ligne de A, combien il y a de $A \cap B$.

	B	$\overline{B}$	*Total*
A	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$
$\overline{A}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{3}{4}$
Total	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	1

$$P(B \mid A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

HAUT

Chapitre 2. Probabilité conditionnelle, indépendance.

Exercices

Exercice 1. Modélisation d'un jeu de cartes numérotées.
Exercice 2. Fleurs : nombre et couleur.
Exercice 3. Alarme et intrusion.
Exercice 4. Test et maladie.
Exercice 5. Dés : couleur et parité.
Exercice 6. Pièces défectueuses fabriquées par deux machines.
Exercice 7. Propriétés de deux événements indépendants.
Exercice 8. Trois lancers successifs indépendants.
Exercice 9. Trois boîtes et deux couleurs de comprimés.
Exercice 10. Tirages sans remise, loi de Wilcoxon.
Exercice 11. Fleurs : âge et couleur.
Exercice 12. Probabilité conditionnelle d'une intersection.
Exercice 13. Pièces défectueuses fabriquées par trois machines.
Exercice 14. Probabilité conditionnelle d'un sous-ensemble.
Exercice 15. Tension artérielle et traitement.
Exercice 16. CNS d'indépendance.
Exercice 17. Evénements non incompatibles.
Exercice 18. Six lancers de pièce de monnaie.
Exercice 19. Vaccin : grossesse et réactions secondaires.
Exercice 20. Jet de deux dés discernables ou non.
Exercice 21. Jet de trois dés.
Exercice 22. Tombola à cinq billets gagnants.
Exercice 23. La cible.
Exercice 24. Exemple d'événements indépendants.
Exercice 25. Fumeurs.

Exercice 1. Modélisation d'un jeu de cartes numérotées.

Alain, Bernard et Charles ont chacun un jeu de cinq cartes numérotées de 1 à 5. Ils tirent chacun une carte au hasard dans leur jeu. Alain a un point s'il a le plus grand chiffre (il peut y avoir des ex-aequo), Bernard a un point s'il a la plus petite carte (il peut y avoir des ex-aequo), Charles a un point si Alain ou Bernard a le même résultat que lui. Par exemple, si Alain a un 3, Bernard un 2 et Charles un 3, Alain marque 1 point, Bernard marque 1 point et Charles marque 1 point. 1°/ Modéliser ce jeu avec un ensemble fondamental Ω dont on donnera le cardinal. 2°/ Quelle est la probabilité qu'Alain marque un point ? Quelle est la probabilité que Bernard marque un point ? Quelle est la probabilité que Charles marque un point ? 3°/ Sachant que Charles a marqué un point, quelle est la probabilité qu'Alain marque un point ?	Solution

HAUT

Exercice 2. Fleurs : nombre et couleur.

Un horticulteur produit des pots d'une certaine variété de plantes à fleurs. Il affirme que:
— 5 plantes sur 6 ont plus de 3 fleurs dans la saison,
— 4 plantes sur 5 donnent des fleurs rouges,
— parmi les plantes qui fournissent plus de 3 fleurs, 9 plantes sur 10 donnent des fleurs rouges.
On lui achète au hasard un pot contenant une plante.

1°/ Calculer la probabilité pour que cette plante donne plus de trois fleurs rouges dans la saison.
2°/ Sachant que cette plante a donné des fleurs rouges, quelle est la probabilité pour que cette plante ait produit plus de trois fleurs ?

Solution

HAUT

Exercice 3. Alarme et intrusion.

Pourquoi votre alarme anti-intrusion se déclenche-t-elle la plupart du temps pour rien ?
On considère l'ensemble fondamental W = {*ac*, *at*, *nc*, *nt*} où:
— *a* signifie que l'alarme s'est déclenchée au moins une fois pendant vos vacances estivales,
— *n* signifie qu'elle ne s'est pas déclenchée.
— *c* signifie que des cambrioleurs ont effectivement tenté de s'introduiredans votre domicile,
— *t* signifie que personnen'a rien tenté de semblable (*t* pour tranquilité).
On donne les probabilités suivantes :
— la probabilité d'être victime d'un cambriolage pendant vos vacances est de 1 %,
— la probabilité que votre alarme se déclenche, sachant que des cambrioleurs sont présents est de 99 %,
— et la probabilité que l'alarme se déclenche sans raison est de 5 %.

1°/ Donner la probabilité de chaque événement élémentaire.
2°/ Votre alarme se déclenche: quelle est la probabilité que ce soit pour rien ?

Solution

HAUT

Exercice 4. Test et maladie.

Une maladie affecte une personne sur mille. On dispose d'un test sanguin qui détecte cette maladie avec une fiabilité de 99 % lorsque le sujet est effectivement atteint. Cependant, on obtient un résultat faussement positif pour 0,2 % des personnes saines testées. Quelle est la probabilité pour qu'une personne soit réellement malade lorsqu'elle a un test positif ? Conclure.	Solution

HAUT

Exercice 5. Dés : couleur et parité.

On jette deux dés non pipés, un noir et un blanc. Modéliser cette expérience aléatoire. On note A l'événement "le chiffre du dé noir est pair", B l'événement "le chiffre du dé blanc est pair", et C l'événement "les dés ont la même parité". Montrer que A et B, B et C, C et A sont indépendants. Peut-on en déduire que $P(A \cap B \cap C) = P(A)\,P(B)\,P(C)$?	Solution

HAUT

Exercice 6. Pièces défectueuses fabriquées par deux machines.

Deux machines M_1 et M_2 fabriquent respectivement 100 et 150 pièces par jour. Les pièces fabriquées par la machine M_1 sont défectueuses dans 5 % des cas et celles fabriquées par M_2 dans 4 % des cas. On prend une pièce au hasard dans la fabrication d'un jour. Elle n'est pas défectueuse. Quelle est la probabilité qu'elle ait été fabriquée par la machine M_1 ?	Solution

HAUT

Exercice 7. Propriétés de deux événements indépendants.

Montrer que si A et B sont deux événements indépendants, il en est de même pour A et $\overline{B}$, $\overline{A}$ et B, $\overline{A}$ et $\overline{B}$.	Solution

HAUT

Exercice 8. Trois lancers successifs indépendants.

On lance au hasard et successivement trois pièces identiques.
Les lancers successifs sont indépendants.

1°/ Les pièces sont bien équilibrées.
a) Expliciter l'espace fondamental et préciser la loi de probabilité pour cette expérience aléatoire.
b) Quelle est la probabilité d'obtenir deux piles et une face.

2°/ On note p la probabilité de face.
a) Expliciter l'espace fondamental et préciser la loi de probabilité pour cette expérience aléatoire.
b) Calculer la probabilité d'obtenir deux faces et une pile.
c) Quelle est la probabilité d'obtenir au moins deux faces.

Solution

HAUT

Exercice 9. Trois boîtes et deux couleurs de comprimés.

Une boîte de médicament B_1 contient 10 comprimés jaunes et 0 rouge.
Une boîte de médicament B_2 contient 4 comprimés jaunes et 1 rouge.
Une boîte de médicament B_3 contient 5 comprimés jaunes et 5 rouges.

1°/ On prend une boîte au hasard et de cette boîte, on tire un comprimé au hasard : le comprimé est rouge. Calculer la probabilité pour que le comprimé ainsi tiré provienne de la boîte B_1 ? de la boîte B_2 ? de la boîte B_3 ?

2°/ On réunit les 25 comprimés des boîtes B_1, B_2, B_3. On tire au hasard un comprimé et le comprimé obtenu est rouge. Calculer la probabilité pour que le comprimé ainsi tiré provienne de la boîte B_1 ? de la boîte B_2 ? de la boîte B_3 ?

Solution

HAUT

Exercice 10. Tirages sans remise, loi de Wilcoxon.

Une urne contient 6 jetons, numérotés de 1 à 6. On tire au hasard et simultanément 3 jetons. Soit S la somme des numéros des jetons tirés.

1°/ Calculer $P(S = 6)$, $P(S = 14)$.
2°/ Calculer $P(S = k)$, pour tout k entier (loi de Wilcoxon).
3°/ Quelle est la probabilité que la somme S soit égale à 12 sachant qu'on a tiré le jeton 4.
4°/ Quelle est la probabilité qu'on ait tiré le jeton 4, sachant que la somme S est égale à 12.

Solution

HAUT

Exercice 11. Fleurs : âge et couleur.

Dans une jardinerie:
25 % des plantes ont moins d'un an,
60 % ont de 1 à 2 ans,
25 % ont des fleurs jaunes,
60 % ont des fleurs roses,
15 % ont des fleurs jaunes et moins d'un an,
3 % ont plus de 2 ans et n'ont ni fleurs jaunes, ni fleurs roses.
15 % de celles qui ont de 1 à 2 ans, ont des fleurs jaunes,
15 % de celles qui ont de 1 à 2 ans, n'ont ni fleurs jaunes ni fleurs roses.
On choisit une plante au hasard dans cette jardinerie.

1°/ Quelle est la probabilité qu'elle ait moins d'un an et des fleurs roses ?
2°/ Quelle est la probabilité qu'elle ait des fleurs roses, sachant qu'elle a plus de 2 ans ?
3°/ Quelle est la probabilité qu'elle ait plus de deux ans et des fleurs jaunes, sachant qu'elle n'a pas de fleurs roses ?

Solution

HAUT

Exercice 12. Probabilité conditionnelle d'une intersection.

Dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{A}, P)$, on considère deux événements A et B de probabilités $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{1}{4}$, avec $P(A \cup B) = \frac{1}{2}$.

1°/ Calculer $P(A \mid B)$.
2°/ Calculer $P(A \cap \overline{B} \mid A \cup \overline{B})$.

Solution

HAUT

Exercice 13. Pièces défectueuses fabriquées par trois machines.

Dans une usine, la machine *A* fabrique 60 % des pièces, dont 2 % sont défectueuses. La machine *B* fabrique 30 % des pièces, dont 3 % sont défectueuses. La machine *C* fabrique 10 % des pièces, dont 4 % sont défectueuses. On tire une pièce au hasard dans la fabrication : elle est défectueuse. Quelle est la probabilité qu'elle ait été fabriquée par la machine *A* ? par la machine *B* ? par la machine *C*.	Solution

HAUT

Exercice 14. Probabilité conditionnelle d'un sous-ensemble.

Soit $E = \{a,b,c,d,e\}$. On choisit au hasard un sous-ensemble F de E 1°/ Décrire un espace probabilisé associé à cette expérience aléatoire. 2°/ Déterminer les probabilités des deux événements suivants : $a \in F$ $\{a,c,d\} \subset F$ 3°/ Calculer la probabilité que $\{a,b,c\} \subset$ F sachant que $a \in F$. 4°/ Calculer la probabilité que $\{a,b\} \subset$ F sachant que $c \notin F$ ou $d \in F$.	Solution

HAUT

Exercice 15. Tension artérielle et traitement.

Dans une population de 250 patients atteint d'une maladie M, 125 d'entre eux ont une tension artérielle élevée, et 125 une tension artérielle basse. On applique à ces 250 patients un traitement susceptible d'agir sur la maladie M. Après un délai identique pour chaque patient, on observe le résultat (succès ou échec) du traitement. On observe 21 échecs chez les patients qui ont une tension basse et 29 échecs chez ceux qui ont une tension élevée.On choisit au hasard un sujet parmi les 250 patients. Calculer :

1. La probabilité pour le sujet de réagir avec succès au traitement.
2. La probabilité pour le sujet d'avoir une tension basse.
3. La probabilité pour le sujet d'avoir une tension basse s'il réagit avec succès au traitement.
4. La probabilité pour le sujet de réagir avec succès a traitement s'il a une tension basse.
5. La probabilité pour le sujet de réagir avec succès au traitement s'il a une tension élevée.
6. La probabilité pour le sujet de réagir avec succès au traitement et d'avoir une tension basse.
7. Peut-on considérer que le succès du traitement et avoir une tension basse avant le traitement sont deux évènements :

- ☐ A. indépendants
- ☐ B. dépendants
- ☐ C. incompatibles
- ☐ D. compatibles

Cocher la ou les réponses exactes.

Solution

HAUT

Exercice 16. CNS d'indépendance.

1°/ Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que deux évènements A et B soient indépendants est que l'on ait :

$P(A \cap B) \times P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(A \cap \overline{B}) \times P(\overline{A} \cap B)$.

2°/ Montrer que, pour qu'un évènement A soit indépendant de tout évènement B, il faut et il suffit que sa probabilité soit 0 ou 1.

Solution

HAUT

Exercice 17. Evénements non incompatibles.

Soient A et B deux évènements tels que $P(A) + P(B) > 1$. Montrer que A et B ne sont pas incompatibles.	Solution

HAUT

Exercice 18. Six lancers de pièce de monnaie.

On lance six fois de manière identique et indépendante une pièce de monnaie équilibrée. Une réalisation ω de cette expérience est donc une suite de six lettres F ou P indiquant le résultat obtenu à chaque lancer. Pour tout couple (n,k) d'entiers tels que $n \geq 1$, $k \geq 0$ et $n + k \leq 5$, on note $A(n,k)$ l'évènement "On obtient F au lancer n° j pour tout entier j tel que $n \leq j \leq n + k$ et on obtient P au lancer n° $n + k + 1$".

1. Quel est le nombre total des évènements $A(n,k)$?
2. Soit $\omega = FFPFPF$. Indiquer un évènement $A(n,k)$ tel que $\omega \in A(n,k)$ et un évènement $A(n',k')$ tel que $\omega \notin A(n',k')$.
3. Calculer $P[A(n,k)]$.
4. Parmi les évènements $A(n,k)$, citer deux évènements compatibles et indépendants.
5. Parmi les évènements $A(n,k)$, citer deux évènements incompatibles et non indépendants.

Solution

HAUT

Exercice 19. Vaccin : grossesse et réactions secondaires.

Un nouveau vaccin a été testé sur 12500 personnes ; 75 d'entre elles, dont 35 femmes enceintes, ont eu des réactions secondaires nécessitant une hospitalisation. 1°/ Sachant que ce vaccin a été administré à 680 femmes enceintes, quelle est la probabilité qu'une femme enceinte ait eu une réaction secondaire si elle reçoit le vaccin ? 2°/ Quelle est la probabilité qu'une personne non enceinte ait une réaction secondaire ?	Solution

HAUT

Exercice 20. Jet de deux dés discernables ou non.

On jette au hasard deux dés équilibrés. Décrire l'espace des épreuves si les dés sont :

— indiscernables ;

— noir et rouge.

Quelle est la probabilité conditionnelle que la somme soit plus grande que 5 sachant qu'un des dés a donné le résultat 3.

Solution

HAUT

Exercice 21. Jet de trois dés.

On jette au hasard trois dés équilibrés. Quelle est la probabilité conditionnelle d'avoir un 6, sachant qu'il n'y a pas de répétition ?	Solution

HAUT

Exercice 22. Tombola à cinq billets gagnants.

Une tombola met en jeu 100 billets, dont 5 sont gagnants. On achète 4 billets. Quelle est la probabilité de tenir au moins un billet gagnant ?	Solution

HAUT

Exercice 23. La cible.

Un tireur vise une cible. Pour $1 \leq n \leq 10$, on note A_n l'événement "La cible est atteinte au tir numéro n". On donne $P(A_1) = 0{,}4$ et, pour $1 \leq n \leq 9$, $P(A_{n+1} \mid A_n) = P(A_n)$, $P(A_{n+1} \mid \overline{A_n}) = 1{,}1 \times P(A_n)$.

1°/ Calculer la probabilité que la cible soit atteinte au troisième tir.

2°/ Calculer la probabilité que la cible soit atteinte au moins une fois lors des trois premiers tirs.

3°/ A partir de quel tir, la probabilité d'atteindre la cible dépasse-t-elle 0,5 ?

Solution

HAUT

Exercice 24. Exemple d'événements indépendants.

1°/ Donner un exemple de trois événements deux à deux indépendants, mais non indépendants. 2°/ Donner un exemple de trois événements A, B, C, non indépendants, mais vérifiant : $P(A \cap B \cap C) = P(A)\,P(B)\,P(C)$.	Solution

HAUT

Exercice 25. Fumeurs.

Une population est formée de 40 % d'hommes et de 60 % de femmes. On sait que le pourcentage de fumeurs parmi les hommes est de 50 %, et parmi les femmes, de 30 %. On choisit un individu au hasard dans cette population. 1°/ Quelle est la probabilité qu'il soit fumeur ? 2°/ Quelle est la probabilité qu'il soit un homme, sachant qu'il est fumeur ?	Solution

HAUT

Chapitre 2. Probabilité conditionnelle, indépendance.

Enoncés.

Exercice 1. Modélisation d'un jeu de cartes numérotées.

Alain, Bernard et Charles ont chacun un jeu de cinq cartes numérotées de 1 à 5. Ils tirent chacun une carte au hasard dans leur jeu. Alain a un point s'il a le plus grand chiffre (il peut y avoir des ex-aequo), Bernard a un point s'il a la plus petite carte (il peut y avoir des ex-aequo), Charles a un point si Alain ou Bernard a le même résultat que lui. Par exemple, si Alain a un 3, Bernard un 2 et Charles un 3, Alain marque 1 point, Bernard marque 1 point et Charles marque 1 point. 1°/ Modéliser ce jeu avec un ensemble fondamental Ω dont on donnera le cardinal. 2°/ Quelle est la probabilité qu'Alain marque un point ? Quelle est la probabilité que Bernard marque un point ? Quelle est la probabilité que Charles marque un point ? 3°/ Sachant que Charles a marqué un point, quelle est la probabilité qu'Alain marque un point ?	

Solution.

1°/ Modèle.

1. Ensemble fondamental.

Pour un joueur, les résultats possibles sont {1, 2, 3, 4, 5}.
Pour trois joueurs, les résultats possibles sont les applications d'un ensemble à trois éléments dans un ensemble à 5 éléments :
$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}^3$, son cardinal est $Card\ (\Omega) = 5^3 = 125$.

Soit A_n l'événement "Alain tire la carte n", $n = 1, 2, 3, 4, 5$.
Soit B_n l'événement "Bernard tire la carte n", $n = 1, 2, 3, 4, 5$.
Soit C_n l'événement "Charles tire la carte n", $n = 1, 2, 3, 4, 5$.
Les événements élémentaires sont les événements $A_n \cap B_i \cap C_j$, $(n, i, j) \in \{1, 2, 3, 4, 5\}^3$

2. Probabilité.

Pour un joueur, on suppose que les cinq résultats possibles sont équiprobables.
On suppose, de plus, que les tirages de chacun des joueurs sont indépendants.
Alors les 125 événements élémentaires de Ω sont équiprobables.
La probabilité de chaque événement élémentaire $A_n \cap B_i \cap C_j$ est $\frac{1}{125}$.

La probabilité d'un événement $A \in \mathfrak{P}(\Omega)$ est donnée par $P(A) = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)} = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$.

2°/ Probabilité de marquer un point.

1. Alain.

Soit A l'événement "Alain gagne un point".

$$A = \bigcup_{n=1}^{n=5} \left(A_n \cap \left(\bigcup_{i=1}^{i=n} B_i \right) \cap \left(\bigcup_{j=1}^{j=n} C_j \right) \right)$$

$$A = \bigcup_{\substack{1 \le i \le n \le 5 \\ 1 \le j \le n \le 5}} (A_n \cap B_i \cap C_j)$$

Les événements $A_n \cap B_i \cap C_j$ sont des événements élémentaires.

Pour chaque valeur de n, i peut prendre n valeurs, j peut prendre n valeurs, donc (i, j) peut prendre n^2 valeurs.
Le cardinal de A est donc :

$$Card(A) = \sum_{n=1}^{n=5} n^2 = \frac{5 \times (5+1) \times (2 \times 5+1)}{6} = 55$$

et $P(A) = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)} = \frac{55}{125} = \frac{11}{25}$

La probabilité qu'Alain gagne un point est $\frac{11}{25}$.

2. Bernard.

Soit B l'événement "Bernard gagne un point".

$$B = \bigcup_{n=1}^{n=5} \left(B_n \cap \left(\bigcup_{i=n}^{i=5} A_i \right) \cap \left(\bigcup_{j=n}^{j=5} C_j \right) \right)$$

$$B = \bigcup_{\substack{1 \le n \le i \le 5 \\ 1 \le n \le j \le 5}} (B_n \cap A_i \cap C_j)$$

Les événements $B_n \cap A_i \cap C_j$ sont des événements élémentaires.

Pour chaque valeur de n, i peut prendre $6 - n$ valeurs, j peut prendre $6 - n$ valeurs, donc (i, j) peut prendre $(6 - n)^2$ valeurs.
Le cardinal de B est donc :

$Card\,(B) = \sum_{n=1}^{n=5} (6-n)^2 = 5^2 + 4^2 + 3^2 + 2^2 + 1^2 = \frac{5\times(5+1)\times(2\times5+1)}{6} = 55$

et $P\,(B) = \frac{Card\,(B)}{Card\,(\Omega)} = \frac{55}{125} = \frac{11}{25}$

La probabilité que Bernard gagne un point est $\frac{11}{25}$.

3. Charles.

Soit C l'événement "Charles gagne un point".

$C = \bigcup_{n=1}^{n=5} ((C_n \cap A_n) \cup (C_n) \cap B_n))$

$C = \bigcup_{n=1}^{n=5} (C_n \cap (A_n \cup B_n))$

Les cinq événements $(C_n \cap A_n) \cup (C_n) \cap B_n)$, n = 1 à 5, sont incompatibles deux à deux, car $C_n \cap C_{n'} = Ø$ pour $n \neq n'$.
Le **théorème des probabilités totales** donne alors :

$$P\,(C) = \sum_{n=1}^{n=5} P\,(C_n \cap A_n) \cup (C_n) \cap B_n)$$

La **formule de Poincaré** donne :

$$P\,((C_n \cap A_n) \cup (C_n) \cap B_n)) = P\,(C_n \cap A_n) + P\,(C_n) \cap B_n) - P\,((C_n \cap A_n) \cap (C_n) \cap B_n)).$$

Les événements B_i, i = 1 à 5, forment un système complet d'événements :

$C_n \cap A_n = \bigcup_{i=1}^{i=5} ((C_n \cap A_n) \cap B_i)$

$Card\,(C_n \cap A_n) = 5$

$P\,(C_n \cap A_n) = \frac{5}{125}$.

Les événements A_i, i = 1 à 5, forment un système complet d'événements :

$C_n \cap B_n = \bigcup_{i=1}^{i=5} ((C_n \cap B_n) \cap A_i)$

$Card\,(C_n \cap B_n) = 5$

$P\,(C_n \cap B_n) = \frac{5}{125}$

$(C_n \cap A_n) \cap (C_n) \cap B_n) = C_n \cap A_n \cap B_n$ est un événement élémentaire.

$P\,(C_n \cap A_n \cap B_n) = \frac{1}{125}$.

Au total :

$$P\left(C_n \cap A_n\right) \cup \left(C_n\right) \cap B_n\right) = \frac{5}{125} + \frac{5}{125} - \frac{1}{125} = \frac{9}{125}$$

$$P\left(C\right) = \sum_{n=1}^{n=5} P\left(C_n \cap A_n\right) \cup \left(C_n\right) \cap B_n\right) = 5 \times \frac{9}{125} = \frac{9}{25}$$

La probabilité que Charles gagne un point est $\frac{9}{25}$.

3°/ Probabilité conditionnelle.

$$P\left(A \mid C\right) = \frac{P\left(A \cap C\right)}{P\left(C\right)}$$

L'événement $A \cap C$ est l'événement "Alain gagne un point et Charles gagne un point".
Soit n le numéro tiré par Alain, i le numéro tiré par Bernard, j le numéro tiré par Charles.
Pour qu'Alain gagne, il faut que j soit inférieur ou égal à n et que i soit inférieur ou égal à n.
Si $j = n$, Charles gagne, quel que soit le numéro i tiré par Bernard, entre 1 et n, ce qui donne déjà n événements élémentaires contenus dans $A \cap C$.
Si $j < n$, Charles gagne si et seulement si $i = j$, et j peut prendre $n - 1$ valeurs de 1 à $n - 1$.
Au total, pour n fixé, il y a $n + (n - 1) = 2\,n - 1$ façons de réaliser l'événement $A \cap C$.
Le cardinal de $A \cap C$ est donc :

$$Card\left(A \cap C\right) = \sum_{n=1}^{n=5} \left(2\,n - 1\right) = 5 \times \left(5 + 1\right) - 5 = 25$$

$$P\left(A \cap C\right) = \frac{Card\left(A \cap C\right)}{Card\left(\Omega\right)} = \frac{25}{125} = \frac{5}{25}$$

$$P\left(A \mid C\right) = \frac{P\left(A \cap C\right)}{P\left(C\right)} = \frac{\frac{5}{25}}{\frac{9}{25}} = \frac{5}{9}$$

La probabilité que A gagne un point, sachant que C gagne un point, est $\frac{5}{9}$.

Chapitre 2. Probabilité conditionnelle, indépendance.

Enoncés.

Exercice 2. Fleurs : nombre et couleur.

Un horticulteur produit des pots d'une certaine variété de plantes à fleurs. Il affirme que: — 5 plantes sur 6 ont plus de 3 fleurs dans la saison, — 4 plantes sur 5 donnent des fleurs rouges, — parmi les plantes qui fournissent plus de 3 fleurs, 9 plantes sur 10 donnent des fleurs rouges. On lui achète au hasard un pot contenant une plante. 1°/ Calculer la probabilité pour que cette plante donne plus de trois fleurs rouges dans la saison. 2°/ Sachant que cette plante a donné des fleurs rouges, quelle est la probabilité pour que cette plante ait produit plus de trois fleurs ?	

Solution.

1°/ Présentation des données.

S'agissant d'étudier deux caractères présentant chacun deux modalités, nous avons intérêt à présenter les données sous forme d'un petit tableau de probabilités conjointes.

Désignons par F l'événement "la plante produit plus de trois fleurs dans l'année", et par R l'événement "la plante produit des fleurs rouges". La probabilité de l'événement $F \cap R$ "la plante produit plus de trois fleurs rouges" est donnée par la formule de définition de la probabilité conditionnelle :

$$P(F \cap R) = P(R \mid F) \times P(F) = \frac{9}{10} \times \frac{5}{6} = \frac{3}{4}.$$

$$\boxed{P(F \cap R) = \frac{3}{4}.}$$

Les données de l'énoncé se présentent donc de la façon suivante :

	Plus de trois fleurs	Pas plus de trois fleurs	Total
Fleurs rouges	$\frac{9}{10} \times \frac{5}{6} = \frac{3}{4}$		$\frac{4}{5}$
Pas de fleur rouge			
Total	$\frac{5}{6}$		

Ces données suffisent à remplir le tableau par différences, sachant que la somme des probabilités doit être égale à 1 :

	Plus de trois fleurs	Pas plus de trois fleurs	Total
Fleurs rouges	$\frac{9}{10} \times \frac{5}{6} = \frac{3}{4}$	$\frac{4}{5} - \frac{3}{4} = \frac{1}{20}$	$\frac{4}{5}$
Pas de fleur rouge	$\frac{5}{6} - \frac{3}{4} = \frac{1}{12}$	$\frac{1}{5} - \frac{1}{12} = \frac{7}{60} = \frac{1}{6} - \frac{1}{20}$	$1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$
Total	$\frac{5}{6}$	$1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6}$	1

2°/ Probabilité conditionnelle.

Nous cherchons $P(F \mid R)$.

Par définition de la probabilité conditionnelle $P(F \mid R) = \frac{P(F \cap R)}{P(R)}$.

$P(F \cap R) = \frac{3}{4}$, $P(R) = \frac{4}{5}$, donc $P(F \mid R) = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{4} \times \frac{5}{4} = \frac{15}{16}$

Dans le tableau des probabilités conjointes, nous regardons dans la ligne des fleurs rouges le rapport entre la probabilité conjointe de $F \cap R$ et la probabilité marginale (colonne total) des fleurs rouges.

$$\boxed{P(F \mid R) = \frac{15}{16}}$$

Chapitre 2. Probabilité conditionnelle, indépendance.

Enoncés.

Exercice 3. Alarme et intrusion.

Pourquoi votre alarme anti-intrusion se déclenche-t-elle la plupart du temps pour rien ? On considère l'ensemble fondamental W = {*ac*, *at*, *nc*, *nt*} où: — *a* signifie que l'alarme s'est déclenchée au moins une fois pendant vos vacances estivales, — *n* signifie qu'elle ne s'est pas déclenchée. — *c* signifie que des cambrioleurs ont effectivement tenté de s'introduiredans votre domicile, — *t* signifie que personnen'a rien tenté de semblable (*t* pour tranquilité). On donne les probabilités suivantes : — la probabilité d'être victime d'un cambriolage pendant vos vacances est de 1 %, — la probabilité que votre alarme se déclenche, sachant que des cambrioleurs sont présents est de 99 %, — et la probabilité que l'alarme se déclenche sans raison est de 5 %. 1°/ Donner la probabilité de chaque événement élémentaire. 2°/ Votre alarme se déclenche: quelle est la probabilité que ce soit pour rien ?	

Solution.

1°/ Présentation des données.

S'agissant de deux caractères présentant chacundeux modalités, nous présenterons les données sous forme d'un tableau de probabilités conjointes, avec les probabilités marginales dans la colonne Total et dans la ligne Total.

	a	*n*	Total
c	1× 0,99 = 0,99	1 – 0,99 = 0,01	1
t	5	99 – 5 = 94	100 – 1 = 99
Total	5 + 0,99 = 5,99	94 + 0,01 = 94,01 = 100 – 5,99	100

La probabilité des quatre événements élémentaires se lit dans le tableau des probabilités conjointes, avec la façon de les obtenir :

$P(ac) = P(a \cap c) = 0{,}99\ \%$; $P(at) = P(a \cap t) = 5\ \%$; $P(nc) = P(n \cap c) = 0{,}01\ \%$; $P(nt) = P(n \cap t) = 94{,}01\ \%$.

2°/ Probabilité conditionnelle.

Pour avoir $P(t \mid a)$, nous regardons dans la colonne *a* combien il y a de *t* :

$$P(t \mid a) = \frac{5}{5{,}99} \approx 83\ \%$$

Conclusion : c'est souvent pour rien que l'alarme s'est déclenchée !

Chapitre 2. Probabilité conditionnelle, indépendance.

Enoncés.

Exercice 4. Test et maladie.

Une maladie affecte une personne sur mille. On dispose d'un test sanguin qui détecte cette maladie avec une fiabilité de 99 % lorsque le sujet est effectivement atteint. Cependant, on obtient un résultat faussement positif pour 0,2 % des personnes saines testées. Quelle est la probabilité pour qu'une personne soit réellement malade lorsqu'elle a un test positif ? Conclure.	

Solution.

1°/ Présentation des données.

S'agissant de l'étude de deux caractères présentant chacun deux modalités, nous présenterons les données sous forme d'un tableau de probabilités conjointes en complétant avec les probabilités marginales.

	M	$\overline{M}$	Total
T	0,99 × 0,001 = 0,00099	0,002 × 0,999 = 0,001998	0,002988
$\overline{T}$	0,001 – 0,00099 = 0,00001	0,999 – 0,001998 = 0,997002	0,997002 + 0,00001 = 0,997012
Total	0,001	1 – 0,001 = 0,999	1

2°/ Probabilité conditionnelle.

$$P(M \mid T) = \frac{0,00099}{0,002988} \approx \frac{1}{3}$$

Conclusion : il n'y a qu'une chance sur trois d'être atteint de la maladie lorsque le test est positif.
Pour augmenter la spécificité du test, il faudrait diminuer le nombre de faux positifs, car la maladie est rare.

Chapitre 2. Probabilité conditionnelle, indépendance.

Enoncés.

Exercice 5. Dés : couleur et parité.

On jette deux dés non pipés, un noir et un blanc. Modéliser cette expérience aléatoire. On note A l'événement "le chiffre du dé noir est pair", B l'événement "le chiffre du dé blanc est pair", et C l'événement "les dés ont la même parité". Montrer que A et B, B et C, C et A sont indépendants. Peut-on en déduire que $P(A \cap B \cap C) = P(A)\,P(B)\,P(C)$?	

Solution.

1°/ Modélisation.

1. Premier modèle.

Les résultats élémentaires de l'expérience aléatoire du jet d'un dé sont $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
Lorsqu'on jette deux dés discernables et indépendants, les résultats élémentaires sont l'ensemble produit

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^2.$$

Son cardinal est $6^2 = 36$.

Comme les dés sont équilibrés, chaque face d'un dé est équiprobable.
Comme les dés sont indépendants, la loi de probabilité produit est le produit des lois : les 36 événements élémentaires sont équiprobables.

2. Deuxième modèle.

Les événements $A \cap B$, $A \cap \overline{B}$, $\overline{A} \cap B$, $\overline{A} \cap \overline{B}$, forment une partition finie de Ω, chacun ayant un cardinal de 9.
Dans la mesure où l'on ne s'intéresse, dans la suite, qu'à la parité du résultat obtenu, on peut modéliser l'expérience aléatoire en prenant pour ensemble fondamental les événements $A \cap B$, $A \cap \overline{B}$, $\overline{A} \cap B$, $\overline{A} \cap \overline{B}$, chacun de ces événements élémentaires étant équiprobable, avec une probabilité de $\frac{9}{36} = \frac{1}{4}$.

2°/ Indépendance.

$A = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$; $Card(A) = 2$, $P(A) = \frac{1}{2}$,

$B = (B \cap A) \cup (B \cap \overline{A})$; $Card(B) = 2$, $P(B) = \frac{1}{2}$,

$C = (A \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B})$; $Card(C) = 2$, $P(C) = \frac{1}{2}$.

$B \cap C = ((B \cap A) \cup (B \cap \overline{A})) \cap ((A \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B}))$
$= (A \cap B) \cup ((B \cap \overline{A}) \cap (\overline{A} \cap \overline{B}))$
$= (A \cap B) \cup (\overline{A} \cap (B \cap \overline{B}))$
$= (A \cap B) \cup (\overline{A} \cap \emptyset)$
$= (A \cap B) \cup \emptyset$
$= A \cap B$
$A \cap C = ((A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})) \cap ((A \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B}))$
$= (A \cap B) \cup ((A \cap \overline{B}) \cap (\overline{A} \cap \overline{B}))$
$= (A \cap B) \cup (\overline{B} \cap (A \cap \overline{A}))$
$= (A \cap B) \cup (\overline{B} \cap \emptyset)$
$= (A \cap B) \cup \emptyset$
$= A \cap B$

$A \cap B$ est un événement élémentaire du deuxième modèle, son cardinal est 1 et sa probabilité est $\frac{1}{4}$:

$$P(A \cap B) = \frac{1}{4} = P(A) \times P(B)$$

Cette relation montre que A et B sont indépendants.

$$P(B \cap C) = P(A \cap B) = \frac{1}{4} = P(B) \times P(C)$$

Cette relation montre que B et C sont indépendants.

$$P(A \cap C) = P(A \cap B) = \frac{1}{4} = P(A) \times P(C)$$

Cette relation montre que A et C sont indépendants.

Les événements *A, B, C,* sont donc indépendants deux à deux.

Cependant, $A \cap B \cap C = A \cap (B \cap C) = A \cap (A \cap B) = A \cap B$, donc :
$P(A \cap B \cap C) = P(A \cap B) = \frac{1}{4} \neq P(A) \times P(B) \times P(C) = \frac{1}{8}$.
Cette relation montre que **les événements *A, B, C,* ne sont pas indépendants dans leur ensemble**.

Les événements A, B, C sont indépendants deux à deux, ils ne sont pas indépendants dans leur ensemble.

Chapitre 2. Probabilité conditionnelle, indépendance.

Enoncés.

Exercice 6. Pièces défectueuses fabriquées par deux machines.

Deux machines M_1 et M_2 fabriquent respectivement 100 et 150 pièces par jour. Les pièces fabriquées par la machine M_1 sont défectueuses dans 5 % des cas et celles fabriquées par M_2 dans 4 % des cas. On prend une pièce au hasard dans la fabrication d'un jour. Elle n'est pas défectueuse. Quelle est la probabilité qu'elle ait été fabriquée par la machine M_1 ?	

Solution.

1°/ Présentation des données.

S'agissant de l'étude de deux caractères présentant chacun deux modalités, nous présenterons les données sous forme d'un tableau d'effectifs conjoints, en complétant les lignes et les colonnes par les effectifs marginaux.
On note D l'événement "la pièce tirée est défectueuse", $\overline{D}$ l'événement contraire, M_1 l'événement "la pièce tirée a été fabriquée par la machine M_1", M_2 l'événement "la pièce tirée a été fabriquée par la machine M_2".

	M_1	M_2	Total
D	0,05 × 100 = 5	0,04 × 150 = 6	5 + 6 = 11
$\overline{D}$	100 – 5 = **95**	150 – 6 = 144	95 + 144 = 250 – 11 = **239**
	100	150	250

2°/ Probabilité conditionnelle.

On demande de calculer $P(M_1 \mid \overline{D})$.
On regarde, dans le tableau, dans la ligne $\overline{D}$, combien il y a de M_1 :

$$P(M_1 \mid \overline{D}) = \frac{95}{239}$$

Chapitre 2. Probabilité conditionnelle, indépendance.

Enoncés.

Exercice 7. Propriétés de deux événements indépendants.

Montrer que si A et B sont deux événements indépendants, il en est de même pour A et $\overline{B}$, $\overline{A}$ et B, $\overline{A}$ et $\overline{B}$.	

Solution.

Dire que A et B sont indépendants, c'est dire que $P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$.

$A = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$
$(A \cap B) \cap (A \cap \overline{B}) = \emptyset \Rightarrow P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B})$
$P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B) = P(A) - P(A)\,P(B) = P(A)(1 - P(B)) = P(A)\,P(\overline{B})$
La relation $P(A \cap \overline{B}) = P(A)\,P(\overline{B})$ montre que A et $\overline{B}$ sont indépendants.

A et B indépendants $\Rightarrow$ A et $\overline{B}$ indépendants.

Echangeons les rôles de A et B : B et A indépendants $\Rightarrow$ B et $\overline{A}$ indépendants.
Or B et A indépendants, c'est la même chose que A et B indépendants, puisque la relation $P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$ est symétrique en A et B, donc :

A et B indépendants $\Rightarrow$ B et $\overline{A}$ indépendants.

Remplaçons B par $\overline{B}$: A et $\overline{B}$ indépendants $\Rightarrow$ $\overline{B}$ et $\overline{A}$ indépendants.
On a donc les relations :
"A et B indépendants $\Rightarrow$ A et $\overline{B}$ indépendants" et "A et $\overline{B}$ indépendants $\Rightarrow$ $\overline{B}$ et $\overline{A}$ indépendants".
Par transitivité de l'implication,

A et B indépendants $\Rightarrow$ $\overline{B}$ et $\overline{A}$ indépendants.

Remplaçons A et B par leurs événements contraires, sachant que $\overline{\overline{A}} = A$ et $\overline{\overline{B}} = B$:
$\overline{B}$ et $\overline{A}$ indépendants $\Rightarrow$ A et B indépendants.
En définitive, il y a **équivalence entre les quatre relations** :

A et B sont indépendants
A et $\overline{B}$ sont indépendants
$\overline{A}$ et B sont indépendants
$\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants

Chapitre 2. Probabilité conditionnelle, indépendance.

Enoncés.

Exercice 8. Trois lancers successifs indépendants.

On lance au hasard et successivement trois pièces identiques. Les lancers successifs sont indépendants. 1°/ Les pièces sont bien équilibrées. a) Expliciter l'espace fondamental et préciser la loi de probabilité pour cette expérience aléatoire. b) Quelle est la probabilité d'obtenir deux piles et une face. 2°/ On note p la probabilité de face. a) Expliciter l'espace fondamental et préciser la loi de probabilité pour cette expérience aléatoire. b) Calculer la probabilité d'obtenir deux faces et une pile. c) Quelle est la probabilité d'obtenir au moins deux faces.	

Solution.

1°/ Equiprobabilité.

1. Espace fondamental et loi de probabilité.

Les résultats de l'expérience aléatoire sont les huit triplets $(r_1, r_2, r_3) \in \{Pile, Face\}^3$ des résultats possibles des lancers de trois pièces.

$$\Omega = \{ (F, F, F), (F, F, P), (F, P, F), (P, F, F), (F, P, P), (P, F, P), (P, P, F), (P, P, P) \}$$

Si l'on note r_1, r_2, r_3, les résultats des trois lancers successifs d'une pièce, l'indépendance des lancers successifs assure que la probabilité d'un triple résultat (r_1, r_2, r_3) est le produit des probabilités des résultats r_1, r_2, r_3 :

$$P [\{(r_1, r_2, r_3)\}] = P [\{r_1\} \cap \{r_2\} \cap \{r_3\}] = P [\{r_1\}] \times P [\{r_2\}] \times P [\{r_3\}]$$

Le lancer au hasard et les pièces bien équilibrées assurent l'équiprobabilité des résultats d'un lancer :

$$P [\{Pile\}] = P [\{Face\}], \text{ pour tout lancer.}$$

La formule $P [\{Pile\} \cup \{Face\}] = P [\{Pile\}] + P [\{Face\}] = 1$ donne alors :

$$P [\{Pile\}] = P [\{Face\}] = \frac{1}{2}, \text{ pour tout lancer.}$$

Tous les événements élémentaires ont la même probabilité :

$$P\ [\ \{(r_1, r_2, r_3)\}\ ] = \frac{1}{2^3}, \text{ pour tout } (r_1, r_2, r_3) \in \Omega.$$

La loi de probabilité définie par le hasard et l'indépendance est donc ici une **loi uniforme** sur l'ensemble fondamental Ω.

2. Probabilité d'un événement.

Avec la loi uniforme sur Ω, la probabilité d'un événement *A*, réunion de *Card* (*A*) événements élémentaires, est donnée par :

$$P\ (A) = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)}.$$

L'assertion "On obtient deux piles et une face" est vraie si, et seulement si, l'un des événements élémentaires suivants est réalisé :

$$\{(F, P, P)\},\ \{(P, F, P)\},\ \{(P, P, F)\}$$

Cette assertion est donc un événement, réunion de ces trois événements élémentaires :

$$A = \{(F, P, P),\ (P, F, P),\ (P, P, F)\}.$$

et sa probabilité pour la loi uniforme est donnée par :

$$\boxed{P\ (A) = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)} = \frac{3}{8}}$$

2°/ Pièces non équilibrées.

1. Espace fondamental et loi de probabilité.

Les résultats de l'expérience aléatoire sont les huit triplets $(r_1, r_2, r_3) \in \{Pile, Face\}^3$ des résultats possibles des lancers de trois pièces.

$$\Omega = \{\ (F, F, F),\ (F, F, P),\ (F, P, F),\ (P, F, F),\ (F, P, P),\ (P, F, P),\ (P, P, F),\ (P, P, P)\ \}$$

Si l'on note r_1, r_2, r_3, les résultats des trois lancers successifs d'une pièce, l'indépendance des lancers successifs assure que la probabilité d'un triple résultat (r_1, r_2, r_3) est le produit des probabilités des résultats r_1, r_2, r_3 :

$$P\ [\ \{(r_1, r_2, r_3)\}\ ] = P\ [\ \{r_1\} \cap \{r_2\} \cap \{r_3\}\ ] = P\ [\ \{r_1\}\ ] \times P\ [\ \{r_2\}\ ] \times P\ [\ \{r_3\}\ ]$$

Les formules $P\ [\ \{Pile\} \cup \{Face\}\ ] = P\ [\ \{Pile\}\ ] + P\ [\ \{Face\}\ ] = 1$ et $P\ [\ \{Face\}\ ] = p$ donnent alors, pour tout lancer :

$$P\ [\ \{Face\}\ ] = p$$
$$P\ [\ \{Pile\}\ ] = 1 - p$$

La probabilité d'un événement élémentaire élément de Ω dépend du nombre *n* de *Faces* qu'il contient :

$$P\ [\ \{(r_1, r_2, r_3)\}\ ] = p^n\ (1-p)^{(3-n)}, \text{ pour tout } (r_1, r_2, r_3) \in \Omega.$$

La loi de probabilité définie par le hasard et l'indépendance n'est donc plus une loi uniforme sur l'ensemble fondamental Ω.

2. Probabilité d'un événement *A*.

Avec cette loi de probabilité sur Ω, la probabilité d'un événement *A*, réunion de *Card* (*A*) événements élémentaires A_i, est donnée par :

$$P\ (A) = \sum_{i \in Card(A)} P\ (A_i) = \sum_{i \in Card(A)} p^{n_i}\ (1-p)^{3-n_i}$$

où n_i est le nombre de *Faces* de l'événement élémentaire A_i.

L'assertion "*On obtient deux faces et une pile*" est vraie si, et seulement si, l'un des événements élémentaires suivants est réalisé :

$$\{(F, F, P)\},\ \{(F, P, F)\},\ \{(P, F, F)\}.$$

C'est donc un événement *A*, réunion de ces trois événements élémentaires :

$$A = \{(F, F, P),\ (F, P, F),\ (P, F, F)\}$$

Sa probabilité est la somme des probabilités des trois événements élémentaires.
Or chaque événement élémentaire composant *A* possède le même nombre de *Faces*, donc la même probabilité $p^2\ (1-p)$.
On a donc :

$$\boxed{P\ (A) = 3 \times p^2\ (1-p)}$$

3. Probabilité d'un événement *B*.

L'assertion "*On obtient au moins deux faces*" est vraie si, et seulement si, l'un des événements élémentaires suivants est réalisé :

$$\{(F, F, P)\},\ \{(F, P, F)\},\ \{(P, F, F)\},\ \{(F, F, F)\}.$$

C'est donc un événement *B*, réunion de ces quatre événements élémentaires :

$$B = \{(F, F, P),\ (F, P, F),\ (P, F, F),\ (F, F, F)\} = A \cup \{(F, F, F)\}$$

Comme $A \cap \{(F, F, F)\}$ est vide, la probabilité de la réunion est la somme des probabilités.

$$P\ (B) = P\ (A) + P\ \{(F, F, F)\} = 3 \times p^2\ (1-p) + p^3$$

$$\boxed{P\ (B) = 3 \times p^2\ (1-p) + p^3 = p^2\ (3-2\ p)}$$

Chapitre 2. Probabilité conditionnelle, indépendance.

Enoncés.

Exercice 9. Trois boîtes et deux couleurs de comprimés.

Une boîte de médicament B_1 contient 10 comprimés jaunes et 0 rouge. Une boîte de médicament B_2 contient 4 comprimés jaunes et 1 rouge. Une boîte de médicament B_3 contient 5 comprimés jaunes et 5 rouges. 1°/ On prend une boîte au hasard et de cette boîte, on tire un comprimé au hasard : le comprimé est rouge. Calculer la probabilité pour que le comprimé ainsi tiré provienne de la boîte B_1 ? de la boîte B_2 ? de la boîte B_3 ? 2°/ On réunit les 25 comprimés des boîtes B_1, B_2, B_3. On tire au hasard un comprimé et le comprimé obtenu est rouge. Calculer la probabilité pour que le comprimé ainsi tiré provienne de la boîte B_1 ? de la boîte B_2 ? de la boîte B_3 ?	

Solution.

1°/ Application de la formule de Bayes.

La formule de Bayes, appliquée à l'événement R (= "le comprimé est rouge") et au système complet d'événements $\{B_1, B_2, B_3\}$, donne :

$$P(B_i \mid R) = \frac{P(R \mid B_i)\, P(B_i)}{P(R \mid B_1)\, P(B_1) + P(R \mid B_2)\, P(B_2) + P(R \mid B_3)\, P(B_3)}$$

Les nombres de comprimés dans les boîtes permettent d'écrire tout de suite :

$$P(R \mid B_1) = 0$$
$$P(R \mid B_2) = \frac{1}{5}$$
$$P(R \mid B_3) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

de sorte que la formule de Bayes se réduit à :

$$P(B_i \mid R) = 10 \times \frac{P(R \mid B_i)\, P(B_i)}{2\, P(B_2) + 5\, P(B_3)}$$

soit :

$$P(B_1 \mid R) = 0 \; ; \; P(B_2 \mid R) = \frac{2\,P(B_2)}{2\,P(B_2)+5\,P(B_3)} \; ; \; P(B_3 \mid R) = \frac{5\,P(B_3)}{2\,P(B_2)+5\,P(B_3)}$$

a) Tirage en deux étapes.

Les boîtes sont équiprobables : $P(B_1) = P(B_2) = P(B_3)$.
Les formules précédentes se réduisent à :

$$\boxed{P(B_1 \mid R) = 0 \; ; \; P(B_2 \mid R) = \frac{2}{7} \; ; \; P(B_3 \mid R) = \frac{5}{7}}$$

b) Tirage en une étape.

La probabilité $P(B_i)$ pour que le comprimé tiré provienne de la boîte B_i est égale au nombre de cas favorables, nombre de comprimés de la boîte B_i, divisé par le nombre de cas possibles, nombre total de comprimés, soit 25 :

$$P(B_i) = \frac{nombre\ de\ comprimés\ dans\ B_i}{nombre\ total\ de\ comprimés}.$$

Comme on a aussi : $P(R \mid B_i) = \frac{nombre\ de\ comprimés\ rouges\ dans\ B_i}{nombre\ de\ comprimés\ dans\ B_i}$, on obtient :

$$P(R \mid B_i)\,P(B_i) = \frac{nombre\ de\ comprimés\ rouges\ dans\ B_i}{nombre\ total\ de\ comprimés}$$

$$P(R \mid B_1)\,P(B_1) + P(R \mid B_2)\,P(B_2) + P(R \mid B_3)\,P(B_3) = \frac{nombre\ total\ de\ comprimés\ rouges}{nombre\ total\ de\ comprimés}$$

et la formule de Bayes se réduit à :

$$P(B_i \mid R) = \frac{nombre\ de\ comprimés\ rouges\ dans\ B_i}{nombre\ total\ de\ comprimés\ rouges}$$

$$\boxed{P(B_1 \mid R) = 0 \; ; \; P(B_2 \mid R) = \frac{1}{6} \; ; \; P(B_3 \mid R) = \frac{5}{6}.}$$

2°/ Tableaux de probabilités conjointes.

Dans chacune des deux épreuves aléatoires, correspondant aux deux questions de l'énoncé, le comprimé tiré présente deux caractères qualitatifs, la boîte qui le contenait et la couleur. Le caractère "Boîte" présente trois modalités : $\{B_1, B_2, B_3\}$; le caractère "Couleur" présente deux modalités $\{C_1, C_2\}$, C_1 = jaune, C_2 = rouge.

Les **événements élémentaires** sont les "modalités conjointes" des deux caractères, c'est-à-dire les couples (B_i, C_j), $i \in \{1, 2, 3\}$, $j \in \{1, 2\}$, qu'on peut représenter par les six cellules d'un tableau à deux lignes, C_1 et C_2, et trois colonnes, B_1, B_2, B_3.
Ces six événements élémentaires constituent l'**ensemble fondamental** Ω de l'épreuve aléatoire.

Chaque événement élémentaire est la conjonction de deux événements "la boîte présente la modalité *i*" et "la couleur présente la modalité *j*".
On peut noter aussi $B_i \cap C_j$ l'événement élémentaire (B_i, C_j).

Couleur \ Boîte	B_1	B_2	B_3	*Probabilité marginale*
C_1	$P(B_1 \cap C_1)$	$P(B_2 \cap C_1)$	$P(B_3 \cap C_1)$	$P(C_1)$
C_2	$P(B_1 \cap C_2)$	$P(B_2 \cap C_2)$	$P(B_3 \cap C_2)$	$P(C_2)$
Probabilité marginale	$P(B_1)$	$P(B_2)$	$P(B_3)$	1

La **probabilité** *P* qu'on met sur Ω dépend du type d'expérience :
— dans le premier cas, les boîtes ont chacune une probabilité marginale de $\frac{1}{3}$ (**loi uniforme sur les boîtes**) : $P(B_1) = P(B_2) = P(B_3) = \frac{1}{3}$.
Les probabilités conditionnelles des couleurs dans chaque boîte sont déterminées par la **loi uniforme sur les comprimés d'une boîte**.
— dans le deuxième cas, les comprimés ont chacun une probabilité $\frac{1}{25}$ d'être tirés (**loi uniforme sur les comprimés**) : les probabilités conjointes sont proportionnelles aux nombres de comprimés, la probabilité d'un événement *A* contenant *n* comprimés est $\frac{n}{25}$.

Première expérience aléatoire.

Couleur \ Boîte	B_1	B_2	B_3	*Probabilité marginale*
C_1 = jaune				
C_2 = rouge				
Probabilité marginale	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1

Deuxième expérience aléatoire

Couleur \ Boîte	B_1	B_2	B_3	*Effectif marginal*
C_1 = jaune	10	4	5	
C_2 = rouge	0	1	5	
Effectif marginal				25

Dans la première expérience aléatoire, les probabilités des événements élémentaires se calculent à partir des probabilités conditionnelles :

La boîte de médicament B_1 contient 10 comprimés jaunes et 0 rouge :
$P(C_1 \mid B_1) = \frac{10}{10} = 1$, $P(B_1 \cap C_1) = P(C_1 \mid B_1)\, P(B_1) = \frac{1}{3}$
$P(C_2 \mid B_1) = 0$. $P(B_1 \cap C_2) = P(C_2 \mid B_1)\, P(B_1) = 0$.

La boîte de médicament B_2 contient 4 comprimés jaunes et 1 rouge :
$P(C_1 \mid B_2) = \frac{4}{5}$, $P(B_2 \cap C_1) = P(C_1 \mid B_2)\, P(B_2) = \frac{4}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{4}{15}$
$P(C_2 \mid B_2) = \frac{1}{5}$, $P(B_2 \cap C_2) = P(C_2 \mid B_2)\, P(B_2) = \frac{1}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{15}$.

La boîte de médicament B_3 contient 5 comprimés jaunes et 5 rouges :
$P(C_1 \mid B_3) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$, $P(B_3 \cap C_1) = P(C_1 \mid B_3)\, P(B_3) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

$P(C_2 \mid B_2) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$, $P(B_3 \cap C_2) = P(C_2 \mid B_3)\, P(B_3) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$.

On peut alors finir de remplir le tableau des probabilités, en faisant aussi les sommes par lignes :

Couleur \ Boîte	B_1	B_2	B_3	*Probabilité marginale*
C_1 = jaune	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{23}{30}$
C_2 = rouge	0	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{7}{30}$
Probabilité marginale	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1

Les probabilités dans chacune des expériences aléatoires sont donc données par les tableaux :

Première expérience aléatoire

Couleur \ Boîte	B_1	B_2	B_3	*Probabilité marginale*
C_1 = jaune	$\frac{10}{30}$	$\frac{8}{30}$	$\frac{5}{30}$	$\frac{23}{30}$
C_2 = rouge	0	$\frac{2}{30}$	$\frac{5}{30}$	$\frac{7}{30}$
Probabilité marginale	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1

Deuxième expérience aléatoire

Couleur \ Boîte	B_1	B_2	B_3	*Probabilité marginale*
C_1 = jaune	$\frac{10}{25}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{5}{25}$	$\frac{19}{25}$
C_2 = rouge	0	$\frac{1}{25}$	$\frac{5}{25}$	$\frac{6}{25}$
Probabilité marginale	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	1

Ces tableaux de probabilités permettent de répondre aux questions :

Pour trouver $P(B_i \mid C_j)$, on regarde dans la ligne C_j, la probabilité de la colonne B_i : on fait le rapport entre $P(B_i \cap C_j)$ et $P(C_j)$.

— Dans la première question, on lit immédiatement : $P(B_1 \mid R) = 0$; $P(B_2 \mid R) = \frac{2}{7}$; $P(B_3 \mid R) = \frac{5}{7}$.

— Dans la deuxième question, on lit immédiatement : $P(B_1 \mid R) = 0$; $P(B_2 \mid R) = \frac{1}{6}$; $P(B_3 \mid R) = \frac{5}{6}$.

Remarquons enfin que, quel que soit le type de l'expérience, **les deux caractères ne sont pas indépendants** puisque l'on a, pour chacune des épreuves aléatoires :

$$P(B_1 \cap C_2) = 0 \text{ avec } P(B_1)\, P(C_2) \neq 0$$

Chapitre 2. Probabilité conditionnelle, indépendance.

Enoncés.

Exercice 10. Tirages sans remise, loi de Wilcoxon.

Une urne contient 6 jetons, numérotés de 1 à 6. On tire au hasard et simultanément 3 jetons. Soit S la somme des numéros des jetons tirés. 1°/ Calculer $P(S = 6)$, $P(S = 14)$. 2°/ Calculer $P(S = k)$, pour tout k entier (loi de Wilcoxon). 3°/ Quelle est la probabilité que la somme S soit égale à 12 sachant qu'on a tiré le jeton 4. 4°/ Quelle est la probabilité qu'on ait tiré le jeton 4, sachant que la somme S est égale à 12.	

Solution.

1°/ Cas particuliers.

Lorsqu'on tire au hasard et simultanément 3 jetons parmi les 6 présents dans l'urne, un résultat de l'expérience aléatoire est une combinaison de 3 jetons pris parmi les 6. Toutes les combinaisons de 3 jetons ont la même probabilité.
L'**espace probabilisé** $(\Omega, \mathcal{C}, P)$ associé à l'expérience aléatoire est donc défini de la façon suivante.

> L'**ensemble fondamental** Ω est l'ensemble des combinaisons de trois jetons parmi 6.
> La **tribu** $\mathcal{C}$ est l'ensemble des parties de Ω.
> La **probabilité** P est la loi uniforme sur un ensemble à $Card(\Omega) = \binom{6}{3} = 20$ éléments.

La probabilité d'un événement A est donnée par $P(A) = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)}$.

> Combinaisons dont la somme est 6 : {1, 2, 3}.
> Combinaisons dont la somme est 7 : {1, 2, 4}.
> Combinaisons dont la somme est 8 : {1, 2, 5}, {1, 3, 4}.
> Combinaisons dont la somme est 9 : {1, 2, 6}, {1, 3, 5}, {2, 3, 4}.
> Combinaisons dont la somme est 10 : {1, 3, 6}, {1, 4, 5}, {2, 3, 5}.
> Combinaisons dont la somme est 11 : {1, 4, 6}, {2, 3, 6}, {2, 4, 5}.
> Combinaisons dont la somme est 12 : {1, 5, 6}, {2, 4, 6}, {3, 4, 5}.
> Combinaisons dont la somme est 13 : {2, 5, 6}, {3, 4, 6}.
> Combinaisons dont la somme est 14 : {3, 5, 6}.
> Combinaisons dont la somme est 15 : {4, 5, 6}.

La seule combinaison de 3 jetons dont la somme est 6 est {1, 2, 3}, donc $Card(S = 6) = 1$ et $P(S = 6) = \frac{1}{20}$.

La seule combinaison de 3 jetons dont la somme est 14 est {3, 5, 6}, donc *Card* (*S* = 14) = 1 et *P* (*S* = 14) = $\frac{1}{20}$.

2°/ Cas général.

Le tableau précédent des combinaisons permet de dresser le tableau de la loi de probabilité de *S*.

k	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$P(S = k)$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{2}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{2}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$

3°/ Probabilité conditionnelle.

Les 10 combinaisons qui contiennent le jeton 4 sont :

Combinaisons dont la somme est 7 : {1, 2, 4}.
Combinaisons dont la somme est 8 : {1, 3, 4}.
Combinaisons dont la somme est 9 : {2, 3, 4}.
Combinaisons dont la somme est 10 : {1, 4, 5}.
Combinaisons dont la somme est 11 : {1, 4, 6}, {2, 4, 5}.
Combinaisons dont la somme est 12 : {2, 4, 6}, {3, 4, 5}.
Combinaisons dont la somme est 13 : {3, 4, 6}.
Combinaisons dont la somme est 15 : {4, 5, 6}.

Parmi ces 10, 2 ont pour somme 12 :

$$P(S = 12 \mid J4) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$

4°/ Probabilité conditionnelle.

Les trois combinaisons dont la somme est 12 sont :

Combinaisons dont la somme est 12 : {1, 5, 6}, {2, 4, 6}, {3, 4, 5}.

Parmi ces 3, 2 contiennent le jeton 4 :

$$P(J4 \mid S = 12) = \frac{2}{3}$$

Chapitre 2. Probabilité conditionnelle, indépendance.

Enoncés.

Exercice 11. Fleurs : âge et couleur.

Dans une jardinerie: 25 % des plantes ont moins d'un an, 60 % ont de 1 à 2 ans, 25 % ont des fleurs jaunes, 60 % ont des fleurs roses, 15 % ont des fleurs jaunes et moins d'un an, 3 % ont plus de 2 ans et n'ont ni fleurs jaunes, ni fleurs roses. 15 % de celles qui ont de 1 à 2 ans, ont des fleurs jaunes, 15 % de celles qui ont de 1 à 2 ans, n'ont ni fleurs jaunes ni fleurs roses. On choisit une plante au hasard dans cette jardinerie. 1°/ Quelle est la probabilité qu'elle ait moins d'un an et des fleurs roses ? 2°/ Quelle est la probabilité qu'elle ait des fleurs roses, sachant qu'elle a plus de 2 ans ? 3°/ Quelle est la probabilité qu'elle ait plus de deux ans et des fleurs jaunes, sachant qu'elle n'a pas de fleurs roses ?	

Solution.

1°/ Présentation des données.

S'agissant de la distribution de deux caractères ayant chacun trois modalités dans la population, on peut présenter les données sous forme d'un tableau des probabilités :

Age / Fleur	< 1 an	1 à 2 ans	> 2 ans	Total
Jaune	0,15	0,60 × 0,15		0,25
Rose				0,60
Ni jaune ni rose		0,60 × 0,15	0,03	
Total	0,25	0,60		

Par soustractions et additions, on peut, sachant que la probabilité totale est 1, compléter ce tableau pour avoir les probabilités conjointes et les probabilités marginales. Donnons d'abord des noms aux événements :

A_1 : la plante a moins d'un an
A_2 : la plante a de un à deux ans
A_3 : la plante a plus de deux ans

B_1 : la plante a des fleurs jaunes
B_2 : la plante a des fleurs roses
B_3 : la plante n'a ni fleurs jaunes, ni fleurs roses

Age / Fleurs	A_1	A_2	A_3	*Total*
B_1	**0,15**	**0,09**	**0,01**	0,25
B_2	**0,07**	**0,42**	**0,11**	0,60
B_3	**0,03**	**0,09**	**0,03**	0,15
Total	0,25	0,60	0,15	1

Ce tableau, qui contient la loi conjointe et les lois marginales, permet de répondre aux questions.

2°/ Réponses aux questions.

a) Moins d'un an et fleurs roses

$$P(A_1 \cap B_2) = 0{,}07$$

b) Fleurs roses, sachant plus de deux ans.

$$P(B_2 \mid A_3) = \frac{0{,}11}{0{,}15} = \frac{11}{15} \approx 0{,}733$$

On regarde dans la colonne des A_3 combien il y a de B_2.

c) Plus de deux ans et fleurs jaunes, sachant pas de fleurs roses.

$$P(A_3 \cap B_1 \mid \text{non } B_2) = \frac{0{,}01}{1-0{,}60} = \frac{1}{40} = 0{,}025$$

On regarde, dans les deux lignes correspondant à (non B_2), combien il y a de $A_3 \cap B_1$.

Chapitre 2. Probabilité conditionnelle, indépendance.

Enoncés.

Exercice 12. Probabilité conditionnelle d'une intersection.

Dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{A}, P)$, on considère deux événements A et B de probabilités $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{1}{4}$, avec $P(A \cup B) = \frac{1}{2}$. 1°/ Calculer $P(A \mid B)$. 2°/ Calculer $P(A \cap \overline{B} \mid A \cup \overline{B})$.	

Solution.

1°/ Tableau des probabilités.

Le complémentaire de $A \cup B$ est $\overline{A} \cap \overline{B}$.

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Les données permettent alors de compléter le tableau des probabilités conjointes et des probabilités marginales.

	B	$\overline{B}$	*Total*
A	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$
$\overline{A}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$
Total	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	1

2°/ Probabilités conditionnelles.

Pour calculer $P(A \mid B)$, on regarde dans la colonne B combien il y a de A :

$$P(A \mid B) = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{3}.$$

$$\boxed{P(A \mid B) = \frac{1}{3}.}$$

Par définition, la probabilité conditionnelle $P(A \cap \overline{B} \mid A \cup \overline{B})$ est égale à $\frac{P((A \cap \overline{B}) \cap (A \cup \overline{B}))}{P(A \cup \overline{B})}$.

$A \cup \overline{B}$ est le complémentaire de $\overline{A} \cap B$, sa probabilité est donnée par :

$$P(A \cup \overline{B}) = 1 - P(\overline{A} \cap B) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}.$$

La distributivité de l'union par rapport à l'intersection donne :

$$(A \cap \overline{B}) \cap (A \cup \overline{B}) = (A \cap \overline{B} \cap A) \cup (A \cap \overline{B} \cap \overline{B}) = (A \cap \overline{B}) \cup (A \cap \overline{B}) = (A \cap \overline{B})$$

On a donc :

$$P((A \cap \overline{B}) \cap (A \cup \overline{B})) = P(A \cap \overline{B}) = \frac{1}{4}.$$

Reportons les valeurs trouvées, dans la relation $P(A \cap \overline{B} \mid A \cup \overline{B}) = \frac{P((A \cap \overline{B}) \cap (A \cup \overline{B}))}{P(A \cup \overline{B})}$.

$$P(A \cap \overline{B} \mid A \cup \overline{B}) = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{5}{6}} = \frac{3}{10}$$

$$\boxed{P(A \cap \overline{B} \mid A \cup \overline{B}) = \frac{3}{10}}$$

Chapitre 2. Probabilité conditionnelle, indépendance.

Enoncés.

Exercice 13. Pièces défectueuses fabriquées par trois machines.

Dans une usine, la machine *A* fabrique 60 % des pièces, dont 2 % sont défectueuses. La machine *B* fabrique 30 % des pièces, dont 3 % sont défectueuses. La machine *C* fabrique 10 % des pièces, dont 4 % sont défectueuses. On tire une pièce au hasard dans la fabrication : elle est défectueuse. Quelle est la probabilité qu'elle ait été fabriquée par la machine *A* ? par la machine *B* ? par la machine *C*.	

Solution.

1°/ Tableau des probabilités.

Notons :
— *A* l'événement : la pièce est produite par la machine *A* ;
— *B* l'événement : la pièce est produite par la machine *B* ;
— *C* l'événement : la pièce est produite par la machine *C* ;
— *D* l'événement : la pièce est défectueuse ;
— $\overline{D}$ l'événement : la pièce n'est pas défectueuse ;

Les données sont :

$$P(A) = 0{,}60 \ ; \ P(B) = 0{,}30 \ ; \ P(C) = 0{,}10.$$
$$P(D \mid A) = 0{,}02 \ ; \ P(D \mid B) = 0{,}03 \ ; \ P(D \mid C) = 0{,}04.$$

On en déduit :

$$P(A \cap D) = P(D \mid A)\, P(A) = 0{,}012 \ ; \ P(B \cap D) = P(D \mid B)\, P(B) = 0{,}009 \ ; \ P(C \cap D) = P(D \mid C)\, P(C) = 0{,}004 \ ;$$

	A	*B*	*C*	*Total*
Défectueuses D	0,60 × 0,02 = 0,012	0,30 × 0,03 = 0,009	0,10 × 0,04 = 0,004	
Non défectueuses $\overline{D}$				
Total	0,60	0,30	0,10	1

On peut compléter le tableau par sommes et différences :

	A	B	C	*Total*
Défectueuses D	0,012	0,009	0,004	0,025
Non défectueuses $\overline{D}$	0,588	0,291	0,096	0,975
Total	0,60	0,30	0,10	1

2°/ Probabilités conditionnelles.

Le tableau précédent donne :

$$P(A \mid D) = \frac{0,012}{0,025} = \frac{12}{25} \; ; \; P(B \mid D) = \frac{0,009}{0,025} = \frac{9}{25} \; ; \; P(C \mid D) = \frac{0,004}{0,025} = \frac{4}{25}.$$

$$\boxed{P(A \mid D) = \frac{12}{25} \; ; \; P(B \mid D) = \frac{9}{25} \; ; \; P(C \mid D) = \frac{4}{25}.}$$

En fait, **le tableau remplace la formule de Bayes**.
Cette formule donne, pour le système complet $\{A, B, C\}$ d'événements :

$$P(A \mid D) = \frac{P(D \mid A)\, P(A)}{P(D \mid A)\, P(A) + P(D \mid B)\, P(B) + P(D \mid C)\, P(C)} = \frac{0,02 \times 0,60}{0,02 \times 0,60 + 0,03 \times 0,30 + 0,04 \times 0,10} = \frac{0,012}{0,025}$$

et on obtient des formules analogues pour B et C.

Chapitre 2. Probabilité conditionnelle, indépendance.

Enoncés.

Exercice 14. Probabilité conditionnelle d'un sous-ensemble.

Soit $E = \{a,b,c,d,e\}$. On choisit au hasard un sous-ensemble F de E 1°/ Décrire un espace probabilisé associé à cette expérience aléatoire. 2°/ Déterminer les probabilités des deux événements suivants : $a \in F$ $\{a,c,d\} \subset F$ 3°/ Calculer la probabilité que $\{a,b,c\} \subset$ F sachant que $a \in F$. 4°/ Calculer la probabilité que $\{a,b\} \subset$ F sachant que $c \notin F$ ou $d \in F$.	

Solution.

1°/ Espace probabilisé.

Les évènements possibles sont les parties de E, les évènements élémentaires sont les parties réduites à un élément.

$\Omega = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{e\}\} = E$
$A = \mathfrak{P}(E)$

Un ensemble à cinq éléments possède $2^5 = 32$ parties.
La phrase " On choisit au hasard une partie F de E " indique que toutes les parties de E sont équiprobables.
Chaque partie F de E a une probabilité $\frac{1}{32}$ d'être choisie au hasard.

2°/ Probabilité d'évènements.

a) Evènement $a \in F$.

Comme toutes les parties sont équiprobables, la probabilité pour qu'une partie contienne l'élément a est le rapport entre le nombre de parties contenant a et le nombre total de parties. Le nombre de parties ne contenant pas a est 2^4, donc le nombre de parties contenant a est $2^5 - 2^4 = 2^4$ et la probabilité de l'évènement $a \in F$ est :

$$P(a \in F) = \frac{1}{2}.$$

b) Evènement $\{ a, c, d \} \subset F$.

Il y a $2^2 = 4$ façons de compléter l'ensemble $\{ a , c , d \}$ en une partie de E, donc il y a 4 parties de E contenant la partie $\{ a , c , d \}$.
La probabilité de l'évènement $\{ a , c , d \} \subset F$ est donc $\frac{4}{32} = \frac{1}{8}$.

3°/ Probabilité conditionnelle 1.

$$P (\{ a , c , d \} \subset F \mid a \in F) = \frac{P\left(\left(\{a ; c ; d\} \subset F\right) \cap \left(a \in F\right)\right)}{P\left(a \in F\right)}$$

L'événement $\{ a , c , d \} \subset F$ est contenu dans l'événement $a \in F$, parce que si $\{ a , c , d \} \subset F$ est réalisé, alors $a \in F$ est, lui aussi, réalisé.
Cette relation se traduit par l'égalité

$$(\{ a , c , d \} \subset F) \cap (a \in F) = (\{ a , c , d \} \subset F)$$

La probabilité $P (\{ a , c , d \} \subset F \mid a \in F)$ s'écrit donc :

$$P (\{ a , c , d \} \subset F \mid a \in F) = \frac{P\left(\{a ; c ; d\} \subset F\right)}{P\left(a \in F\right)} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}.$$

$$\boxed{P (\{ a , c , d \} \subset F \mid a \in F) = \frac{1}{4}.}$$

4°/ Probabilité conditionnelle 2.

$$P (\{ a ; b \} \subset F \mid (c \notin F \text{ ou } d \in F)) = \frac{P\left(\left(\{a ; b\} \subset F\right) \cap \left(\left(c \notin F\right) \cup \left(d \in F\right)\right)\right)}{P\left(\left(c \notin F\right) \cup \left(d \in F\right)\right)}.$$

$(\{ a ; b \} \subset F) \cap ((c \notin F) \cup (d \in F)) = ((\{ a ; b \} \subset F) \cap (c \notin F)) \cup ((\{ a ; b \} \subset F) \cap (d \in F))$

$= ((a \in F) \cap (b \in F) \cap (c \notin F)) \cup ((a \in F) \cap (b \in F) \cap (d \in F))$

D'après la formule donnant la probabilité de la réunion de deux événements, on obtient :

$P (\{ a ; b \} \subset F) \cap ((c \notin F) \cup (d \in F)) = P ((a \in F) \cap (b \in F) \cap (c \notin F)) + P ((a \in F) \cap (b \in F) \cap (d \in F)) - P (((a \in F) \cap (b \in F) \cap (c \notin F)) \cap ((a \in F) \cap (b \in F) \cap (d \in F)))$

$= \frac{1}{8} + \frac{1}{8} - P ((a \in F) \cap (b \in F) \cap (c \notin F) \cap (d \in F)) = \frac{1}{4} - \frac{1}{16} = \frac{3}{16}$

$$P ((c \notin F) \cup (d \in F)) = 1 - P ((c \in F) \cap (d \notin F)) = 1 - P (c \in F) P (d \notin F) = 1 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

$$P(\{a\,;b\}\subset F \mid (c\notin F \text{ ou } d\in F)) = \frac{\frac{3}{16}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{4} = P(\{a\,;b\}\subset F)$$

$$\boxed{P(\{a\,;b\}\subset F \mid (c\notin F \text{ ou } d\in F)) = P(\{a\,;b\}\subset F) = \frac{1}{4}}$$

La relation $P(\{a\,;b\}\subset F \mid (c\notin F \text{ ou } d\in F)) = P(\{a\,;b\}\subset F)$ montre que les évènements $(\{a\,;b\}\subset F)$ et $(c\notin F \text{ ou } d\in F)$ sont **indépendants**.

Chapitre 2. Probabilité conditionnelle, indépendance.

Enoncés.

Exercice 15. Tension artérielle et traitement.

Dans une population de 250 patients atteint d'une maladie M, 125 d'entre eux ont une tension artérielle élevée, et 125 une tension artérielle basse. On applique à ces 250 patients un traitement susceptible d'agir sur la maladie M. Après un délai identique pour chaque patient, on observe le résultat (succès ou échec) du traitement. On observe 21 échecs chez les patients qui ont une tension basse et 29 échecs chez ceux qui ont une tension élevée.On choisit au hasard un sujet parmi les 250 patients. Calculer :

1. La probabilité pour le sujet de réagir avec succès au traitement.
2. La probabilité pour le sujet d'avoir une tension basse.
3. La probabilité pour le sujet d'avoir une tension basse s'il réagit avec succès au traitement.
4. La probabilité pour le sujet de réagir avec succès a traitement s'il a une tension basse.
5. La probabilité pour le sujet de réagir avec succès au traitement s'il a une tension élevée.
6. La probabilité pour le sujet de réagir avec succès au traitement et d'avoir une tension basse.
7. Peut-on considérer que le succès du traitement et avoir une tension basse avant le traitement sont deux évènements :

- ☐ A. indépendants
- ☐ B. dépendants
- ☐ C. incompatibles
- ☐ D. compatibles

Cocher la ou les réponses exactes.

Solution.

Complétons par addition ou soustraction le tableau des données :

Résultat \ T.A.	Basse	Elevée	Total
Echec	21	29	50
Succès	104	96	200
Total	125	125	250

Ce tableau permet de répondre aux questions.

$P(\text{Succès}) = \frac{200}{250} = \frac{4}{5} = 0,80$	$P(\text{Basse} \mid \text{Succès}) = \frac{104}{200} = 0,52$	$P(\text{Succès} \mid \text{Elevée}) = \frac{96}{125} = 0,768$
$P(\text{Basse}) = \frac{125}{250} = \frac{1}{2} = 0,50$	$P(\text{Succès} \mid \text{Basse}) = \frac{104}{125} = 0,832$	$P(\text{Succès} \cap \text{Basse}) = \frac{104}{250} = 0,416$

P(Basse | Succès) = 0,52 ≠ 0,50 = P(Basse), donc les évènements "Succès" et "Basse" ne sont pas indépendants (A est faux, B est vrai).
P(Succès ⋂ Basse) = 0,416 ≠ 0, donc les évènements "Succès" et "Basse" ne sont pas incompatibles (C est faux, D est vrai).

A Faux
B Vrai
C Faux
D Vrai

Chapitre 2. Probabilité conditionnelle, indépendance.

Enoncés.

Exercice 16. CNS d'indépendance.

1°/ Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que deux évènements A et B soient indépendants est que l'on ait : $P(A \cap B) \times P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(A \cap \overline{B}) \times P(\overline{A} \cap B)$. 2°/ Montrer que, pour qu'un évènement A soit indépendant de tout évènement B, il faut et il suffit que sa probabilité soit 0 ou 1.	

Solution.

1°/ Condition d'indépendance.

Le résultat découlera immédiatement du lemme suivant.

Lemme.

Pour deux évènements quelconques A et B, la relation suivante est vraie :
$P(A \cap B) - P(A)\,P(B) = P(A \cap B) \times P(\overline{A} \cap \overline{B}) - P(A \cap \overline{B}) \times P(\overline{A} \cap B)$.

Démonstration du lemme.

$A = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$ et $(A \cap B) \cap (A \cap \overline{B}) = \varnothing \Rightarrow P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B})$
$B = (B \cap A) \cup (B \cap \overline{A})$ et $(B \cap A) \cap (B \cap \overline{A}) = \varnothing \Rightarrow P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \overline{A})$
$\overline{B} = (\overline{B} \cap A) \cup (\overline{B} \cap \overline{A})$ et $(\overline{B} \cap A) \cap (\overline{B} \cap \overline{A}) = \varnothing \Rightarrow P(\overline{B}) = P(\overline{B} \cap A) + P(\overline{B} \cap \overline{A})$

La première relation donne : $P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B)$.
La deuxième relation donne : $P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$.
La troisième relation donne : $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{B}) - P(A \cap \overline{B}) = 1 - P(B) - P(A) + P(A \cap B)$.

On en tire :

$$\begin{aligned} P(A \cap \overline{B}) \times P(\overline{A} \cap B) &= (P(A) - P(A \cap B)) \times (P(B) - P(A \cap B)) \\ &= P(A)\,P(B) - P(A \cap B) \times (P(A) + P(B) - P(A \cap B)) \\ &= P(A)\,P(B) - P(A \cap B) + P(A \cap B) \times (1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B)) \end{aligned}$$

$= P(A)\,P(B) - P(A \cap B) + P(A \cap B) \times P(\overline{A} \cap \overline{B})$

C'est bien la relation annoncée dans le lemme.

Le lemme entraîne immédiatement :

$$P(A \cap B) - P(A)\,P(B) = 0 \Leftrightarrow P(A \cap B) \times P(\overline{A} \cap \overline{B}) - P(A \cap \overline{B}) \times P(\overline{A} \cap B) = 0$$

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A)\,P(B) \Leftrightarrow P(A \cap B) \times P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(A \cap \overline{B}) \times P(\overline{A} \cap B)}$$

Comme la relation $P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$ est équivalente au fait que A et B sont indépendants, le résultat est démontré.

2°/ Indépendance de tout évènement.

Pour qu'un évènement soit indépendant de tout évènement, il faut et il suffit que sa probabilité soit 0 ou 1.

En effet, si A a une probabilité nulle :

$A \cap B \subset A \Rightarrow P(A \cap B) \leq P(A) = 0 \Rightarrow P(A \cap B) = 0$

$A \cap \overline{B} \subset A \Rightarrow P(A \cap \overline{B}) \leq P(A) = 0 \Rightarrow P(A \cap \overline{B}) = 0$

Donc la relation du deuxième membre se réduit à 0 = 0, la relation du premier membre aussi, et pour tout évènement B, A et B sont indépendants.

Un évènement de probabilité nulle est indépendant de tout évènement.

Si A a une probabilité égale à 1, $\overline{A}$ a une probabilité nulle.

$\overline{A} \cap B \subset \overline{A} \Rightarrow P(\overline{A} \cap B) \leq P(\overline{A}) = 0 \Rightarrow P(\overline{A} \cap B) = 0$

$\overline{A} \cap \overline{B} \subset \overline{A} \Rightarrow P(\overline{A} \cap \overline{B}) \leq P(\overline{A}) = 0 \Rightarrow P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0$

On a donc $P(A \cap B) \times P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(A \cap \overline{B}) \times P(\overline{A} \cap B) = 0$, ce qui montre que A et B sont indépendants, quel que soit B.

Un évènement de probabilité 1 est indépendant de tout évènement.

Réciproquement, si A est un évènement indépendant de tout évènement B, on a $P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$ pour tout B.

En particulier, la relation est vraie si $A = B$, auquel cas elle s'écrit $P(A \cap A) = P(A)\,P(A)$, soit $P(A) = (P(A))^2$, d'où $P(A) = 0$ ou $P(A) = 1$.

Un évènement A indépendant de tout évènement a une probabilité égale à 0 ou à 1.

Chapitre 2. Probabilité conditionnelle, indépendance.

Enoncés.

Exercice 17. Evénements non incompatibles.

Soient A et B deux évènements tels que $P(A) + P(B) > 1$. Montrer que A et B ne sont pas incompatibles.	

Solution.

La formule $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ montre que $P(A \cup B) + P(A \cap B) = P(A) + P(B)$ est strictement plus grand que 1. Comme $P(A \cup B)$ est inférieur ou égal à 1, on a :
$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) > 1 - P(A \cup B) \geq 0$
$P(A \cap B) > 0$
Comme la probabilité de $A \cap B$ est différente de 0, les évènements A et B ne sont pas incompatibles.

Chapitre 2. Probabilité conditionnelle, indépendance.

Enoncés.

Exercice 18. Six lancers de pièce de monnaie.

On lance six fois de manière identique et indépendante une pièce de monnaie équilibrée. Une réalisation ω de cette expérience est donc une suite de six lettres *F* ou *P* indiquant le résultat obtenu à chaque lancer. Pour tout couple (n,k) d'entiers tels que $n \geq 1$, $k \geq 0$ et $n + k \leq 5$, on note $A(n,k)$ l'évènement "On obtient *F* au lancer n° *j* pour tout entier *j* tel que $n \leq j \leq n + k$ et on obtient *P* au lancer n° $n + k + 1$". 1. Quel est le nombre total des évènements $A(n,k)$? 2. Soit ω = *FFPFPF*. Indiquer un évènement $A(n,k)$ tel que $\omega \in A(n,k)$ et un évènement $A(n',k')$ tel que $\omega \notin A(n',k')$. 3. Calculer $P[A(n,k)]$. 4. Parmi les évènements $A(n,k)$, citer deux évènements compatibles et indépendants. 5. Parmi les évènements $A(n,k)$, citer deux évènements incompatibles et non indépendants.	

Solution.

1°/ Nombre d'évènements $A(n,k)$.

Les évènements $A(n,k)$ sont les réunions d'évènements élémentaires de la forme ***FFP**, où * désigne, indifféremment, *F* ou *P*. Il contiennent tous au moins un *P* précédé d'un *F*. Le *P* est à la place $n + k + 1$. Le premier *F* de la suite considérée de *F* est la place *n*.

Pour *n* fixé, entre 1 à 5, bornes comprises, *k* peut varier de 0 à $5 - n$, donc, pour *n* fixé, il y a :

$$\sum_{k=0}^{k=5-n} 1 = 6 - n$$

évènements $A(n,k)$ possibles. Le nombre total d'évènements $A(n,k)$ est donc :

$$\sum_{n=1}^{n=5} (6 - n) = \sum_{m=1}^{m=5} m = \frac{5 \times 6}{2} = 15.$$

Il y a en tout 15 évènements $A(n,k)$.

On peut les construire tous facilement dans un tableau :

$n \setminus k$	0	1	2	3	4

1	*FP****	*FFP***	*FFFP**	*FFFFP*	*FFFFFP*
2	**FP***	**FFP**	**FFFP*	**FFFFP*	
3	***FP**	***FFP*	***FFFP		
4	****FP*	****FFP			
5	*****FP				

2°/ Evènement élémentaire ω.

L'évènement élémentaire ω = *FFPFPF* appartient, d'après le tableau précédent, à $A(1,1)$, à $A(2,0)$ et à $A(4,0)$. Il n'appartient à aucun autre $A(n,k)$. Par exemple, il n'appartient pas à $A(1,0)$ puisqu'il ne commence pas par *FP*.

$$\omega = A(1,1) \cap A(2,0) \cap A(4,0)$$

3°/ Probabilité de l'évènement $A(n,k)$.

L'évènement $A(n,k)$ est déterminé par une suite de *F* terminée par un *P* : la longueur total de la chaîne est $k + 2$. Chaque élément de la chaîne a une probabilité $\frac{1}{2}$. L'évènement $A(n, k)$ a donc une probabilité $\frac{1}{2^{k+2}}$.

$$P(A(n,k)) = \frac{1}{2^{k+2}}$$

Cette probabilité est indépendante de la place de la chaîne, c'est-à-dire est indépendante de *n*.

Remarque.
Etant donné deux évènements $A(n,k)$ et $A(n',k')$ avec $n < n'$, Pour qu'un évènement élémentaire appartienne à $A(n',k')$ sans appartenir à aucun des $A(n,k)$, il faut et il suffit qu'il commence par $n' - 1$ fois *P* avant la chaîne définissant $A(n',k')$. On pourrait donc définir un évènement $A'(n, k)$ commençant par $n - 1$ fois *P*, se poursuivant par la chaîne définissant $A(n,k)$ et se terminant par n'importe quoi. Le nombre de ces évènements $A'(n, k)$ est encore égal à 15, mais la probabilité de chacun d'eux serait :

$$P(A'(n, k)) = \frac{1}{2^{n-1}} \times \frac{1}{2^{k+2}} = \frac{1}{2^{n+k+1}}.$$

La différence avec les $A(n,k)$ est que deux tels évènements $A'(n, k)$ sont toujours sans évènement élémentaire commun, ils sont incompatibles.
La probabilité totale des $A'(n, k)$ est, d'après l'axiome des probabilités totales, la somme des probabilités :

$$\sum_{n=1}^{n=5} \sum_{k=0}^{k=5-n} \frac{1}{2^{n+k+1}} = \sum_{n=1}^{n=5} \frac{1}{2^{n+1}} \times 2 \times (1 - 2^{n-6}) = \sum_{n=1}^{n=5} \frac{1}{2^n} - \frac{5}{2^6}$$

$$= \frac{1}{2} \times 2 \times (1 - 2^{-5}) - 5 \times 2^{-6} = 1 - 7 \times 2^{-6}.$$

ce qui montre, puisqu'il y a 2^6 évènements élémentaires, qu'il existe 7 évènements élémentaires qui n'appartiennent à aucun des $A'(n, k)$. Ces évènements élémentaires sont ceux qui n'ont aucune suite de *F* se poursuivant par un *P* :

PPPPPP ; PPPPPF ; PPPPFF ; PPPFFF ; PPFFFF ; PFFFFF ; FFFFFF.

4°/ Evènements $A(n, k)$ compatibles et indépendants.

Les évènements $A(1,1) = FFP***$ et $A(4,1) = ***FFP$ sont compatibles, leur intersection est l'évènement élémentaire $FFPFFP$.
Ils sont indépendants car :

$$P(A(1,1)) = \frac{1}{2^3};\ P(A(4,1)) = \frac{1}{2^3}\ ;\ P(A(1,1) \cap A(4,1)) = P(FFPFFP) = \frac{1}{2^6} = P(A(1,1)) \times P(A(4,1)).$$

5°/ Evènements A(n,k) incompatibles et non indépendants.

Les évènements $A(1,0) = FP****$ et $A(1,1) = FFP***$ sont incompatibles : aucun évènement élémentaire ne peut avoir, à la fois, un P et un F en deuxième position.
Ils ne sont pas indépendants puisque le produit de leurs probabilités est $\frac{1}{2^2} \times \frac{1}{2^3} = \frac{1}{2^5}$, alors que la probabilité de leur intersection est 0.

Chapitre 2. Probabilité conditionnelle, indépendance.

Enoncés.

Exercice 19. Vaccin : grossesse et réactions secondaires.

Un nouveau vaccin a été testé sur 12500 personnes ; 75 d'entre elles, dont 35 femmes enceintes, ont eu des réactions secondaires nécessitant une hospitalisation. 1°/ Sachant que ce vaccin a été administré à 680 femmes enceintes, quelle est la probabilité qu'une femme enceinte ait eu une réaction secondaire si elle reçoit le vaccin ? 2°/ Quelle est la probabilité qu'une personne non enceinte ait une réaction secondaire ?	

Solution.

1. Probabilité de réaction secondaire pour une femme enceinte vaccinée.

Les données de l'énoncé peuvent être présentées dans un tableau :

	Réactions secondaires	Pas de réaction secondaire	Total
Femme enceinte	35		680
Personne non enceinte			
Total	75		12500

et ce tableau peut être complété par différences :

	Réactions secondaires	Pas de réaction secondaire	Total
Femme enceinte	35	645	680
Personne non enceinte	40	11780	11820
Total	75	12425	12500

35 femmes enceintes sur 680 présentent une réaction secondaire nécessitant une hospitalisation.
La probabilité de réaction secondaire pour une femme enceinte est donc $\frac{35}{680} = \frac{7}{136} \approx 5{,}1 \times 10^{-2}$.

2. Probabilité de réaction secondaire pour une personne non enceinte vaccinée.

Le tableau précédent montre que 40 personnes non enceintes vaccinées sur 11 820 présentent une réaction secondaire nécessitant une hospitalisation. La probabilité de réaction secondaire pour une personne non enceinte est donc $\frac{40}{11\,820} = \frac{2}{591} \approx 3{,}4 \times 10^{-3}$.

Chapitre 2. Probabilité conditionnelle, indépendance.

Enoncés.

Exercice 20. Jet de deux dés discernables ou non.

On jette au hasard deux dés équilibrés. Décrire l'espace des épreuves si les dés sont : — indiscernables ; — noir et rouge. Quelle est la probabilité conditionnelle que la somme soit plus grande que 5 sachant qu'un des dés a donné le résultat 3.	

Solution.

1°/ Espace des épreuves.

a) Un dé noir, un dé rouge.

Les résultats possibles sont les suites de deux nombres compris entre 1 et 6. Il y en a $6^2 = 36$. La loi de probabilité est la **loi uniforme** sur ces 36 éléments.

b) Dés indiscernables.

Les résultats possibles sont les suites croissantes de deux nombres de 1 à 6. Il y en a :

$$6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = \frac{6\times 7}{2} = 21,$$

avec la loi de probabilité :

ω	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
p	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$

ω	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)	(5, 5)	(5, 6)	(6, 6)
p	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Cette loi de probabilité se construit à partir de la loi uniforme sur les résultats possibles lorsque les dés peuvent être discernés.

2°/ Loi conditionnelle.

Soit S la somme des deux dés, A l'événement "L'un des deux dés a donné 3". On cherche la probabilité :

$$P\,(S > 5 \mid A) = \frac{P\left(\{S > 5\} \cap A\right)}{P(A)}$$

Dans le tableau précédent (dés indistinguables), l'événement A est la réunion de 6 évènements élémentaires

$$A = \{(1,3), (2,3), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6)\}$$

Sa probabilité est somme des probabilités de ces évènements élémentaires :

$$P\,(A) = \frac{2}{36} + \frac{2}{36} + \frac{1}{36} + \frac{2}{36} + \frac{2}{36} + \frac{2}{36} = \frac{11}{36}.$$

Parmi les évènements élémentaires constituant A, ceux dont la somme est supérieure à 5 sont :

$$\{S > 5\} \cap A = \{(3,3), (3,4), (3,5), (3,6)\}$$

La probabilité de $\{S > 5\} \cap A$ est la somme des probabilités de ces évènements élémentaires :

$$P\,(\{S > 5\} \cap A) = \frac{1}{36} + \frac{2}{36} + \frac{2}{36} + \frac{2}{36} = \frac{7}{36}$$

$$P\,(S > 5 \mid A) = \frac{P\left(\{S > 5\} \cap A\right)}{P(A)} = \frac{7}{11}.$$

Chapitre 2. Probabilité conditionnelle, indépendance.

Enoncés.

Exercice 21. Jet de trois dés.

On jette au hasard trois dés équilibrés. Quelle est la probabilité conditionnelle d'avoir un 6, sachant qu'il n'y a pas de répétition ?	

Solution.

1°/ Espace des épreuves et loi de probabilité.

On peut prendre pour espace des épreuves, l'ensemble Ω des résultats possibles de trois dés distinguables, avec la loi uniforme sur ces $6^3 = 216$ évènements élémentaires.

2°/ Probabilité conditionnelle.

Il y a 6 résultats possibles pour le premier dé. Le résultat du premier dé étant choisi, il existe, pour le deuxième dé, 5 résultats possibles différents de celui du premier dé. Le résultat des deux premiers dés étant choisis, il existe, pour le troisième dé, 4 résultats possibles différents de ceux des deux premiers dés. Au total, il y a donc $6 \times 5 \times 4 =$ **120 évènements élémentaires sans répétition**.

Parmi ceux-ci, il y a trois façons de choisir le dé qui a pour résultat un 6. Ce dé étant choisi, il y a 5 façons de choisir le résultat d'un deuxième dé en dehors du 6, et 4 façons de choisir, pour le troisième dé, un résultat qui ne soit pas déjà affiché par les deux premiers. Au total, il y a :
$3 \times 5 \times 4 =$ **60 évènements élémentaires sans répétition avec un 6**.

La probabilité conditionnelle cherchée est donc :

$$p = \frac{60}{120} = \frac{1}{2}$$

Chapitre 2. Probabilité conditionnelle, indépendance.

Enoncés.

Exercice 22. Tombola à cinq billets gagnants.

Une tombola met en jeu 100 billets, dont 5 sont gagnants. On achète 4 billets. Quelle est la probabilité de tenir au moins un billet gagnant ?	

Solution.

1°/ Raisonnement sur les cardinaux.

Il y a $\binom{100}{4}$ = 3 921 225 combinaisons possibles de 4 billets parmi les 100.

Parmi celles-ci, il y en a $\binom{95}{4}$ = 3 183 545 qui n'ont aucun billet gagnant, donc, par différence, il y en a

3 921 225 - 3 183 545 = 737 680
qui possèdent au moins un billet gagnant.
En supposant que toutes les combinaisons de 4 billets sont équiprobables, la probabilité d'avoir au moins un billet gagnant est :

$$p = \frac{737\,680}{3\,921\,225} \approx 0{,}1881$$

2°/ Raisonnement sur les probabilités.

On peut raisonner aussi sur les probabilités en disant :
- La probabilité d'avoir choisi un premier billet non gagnant est $\frac{95}{100}$ si tous les billets ont la même probabilité d'être gagnant.
- Ce premier billet étant choisi, la probabilité de choisir un deuxième billet non gagnant est $\frac{94}{99}$, donc la probabilité de choisir les deux premiers billets non gagnants est $\frac{95}{100} \times \frac{94}{99}$.
- Ces deux premiers billets non gagnants étant choisis, la probabilité de choisir un troisième billet non gagnant est $\frac{93}{98}$, donc la probabilité de choisir les trois premiers billets non gagnants est $\frac{95}{100} \times \frac{94}{99} \times \frac{93}{98}$.
- Ces trois premiers billets non gagnants étant choisis, la probabilité de choisir un quatrième billet non gagnant est $\frac{92}{97}$, donc la probabilité de choisir 4 billets non gagnants est $\frac{95}{100} \times \frac{94}{99} \times \frac{93}{98} \times \frac{92}{97}$.

La probabilité d'avoir au moins un billet gagnant est donc :

$$p = 1 - \frac{95}{100} \times \frac{94}{99} \times \frac{93}{98} \times \frac{92}{97} \approx 0{,}1881$$

On trouve bien sûr le même résultat.

Chapitre 2. Probabilité conditionnelle, indépendance.

Enoncés.

Exercice 23. La cible.

Un tireur vise une cible. Pour $1 \leq n \leq 10$, on note A_n l'événement "La cible est atteinte au tir numéro n". On donne $P(A_1) = 0{,}4$ et, pour $1 \leq n \leq 9$, $P(A_{n+1} \mid A_n) = P(A_n)$, $P(A_{n+1} \mid \overline{A_n}) = 1{,}1 \times P(A_n)$. 1°/ Calculer la probabilité que la cible soit atteinte au troisième tir. 2°/ Calculer la probabilité que la cible soit atteinte au moins une fois lors des trois premiers tirs. 3°/ A partir de quel tir, la probabilité d'atteindre la cible dépasse-t-elle 0,5 ?	

Solution.

1°/ Cible atteinte au troisième tir.

Soit n le numéro d'un tir, et p_n la probabilité d'atteindre la cible au tir n, q_n la probabilité de ne pas l'atteindre, avec $p_n + q_n = 1$.
Par hypothèse, lorsque la cible est atteinte au tir n, les probabilités ne changent pas.
Lorsque la cible n'est pas atteinte au tir n, la probabilité d'atteindre la cible au tir $n + 1$ est multipliée par 1,1 :

Tir $n+1$ \ Tir n	Atteint	Manque	Total
Atteint	$p_n \times p_n$	$q_n \times 1{,}1\, p_n$	p_{n+1}
Manque	$p_n \times q_n$	$q_n \times (1 - 1{,}1\, p_n)$	q_{n+1}
Total	p_n	q_n	1

$$p_{n+1} = p_n^{\,2} + 1{,}1\, p_n q_n = p_n^{\,2} + 1{,}1\, p_n (1 - p_n) = 1{,}1\, p_n - 0{,}1\, p_n^{\,2}$$

$$\boxed{p_{n+1} = 1{,}1\, p_n - 0{,}1\, p_n^{\,2}.}$$

avec $p_1 = p = 0{,}4$.
La formule précédente permet de calculer p_n pour $n = 1, 2, 3, 4$, probabilité d'atteindre la cible pour chaque tir, et, par complément à 1, la probabilité de ne pas atteindre la cible au tir n :

n	1	2	3
p_n	0,4	0,424	0,4484224
q_n	0,6	0,576	0,5515776

$$q_{n+1} = 1{,}1\, q_n{}^2 - 0{,}1\, q_n.$$

La probabilité que la cible soit atteinte au troisième tir est voisine de 0,45.

2°/ Cible atteinte au moins une fois.

La variable aléatoire X représentant le nombre de fois où la cible est atteinte, peut prendre les valeurs {0, 1, 2, 3}.

Notons A_n l'événement "La cible est atteinte au tir n" et $\overline{A_n} = B_n$ l'événement complémentaire "La cible n'est pas atteinte au tir n".
L'événement $X = 0$ est donné par : $B_1 \cap B_2 \cap B_3$.
Sa probabilité est :

$$\begin{aligned} P[X = 0] &= P[B_1 \cap B_2 \cap B_3] \\ &= P[B_3 \mid B_1 \cap B_2] \times P[B_1 \cap B_2] \\ &= P[B_3 \mid B_1 \cap B_2] \times P[B_2 \mid B_1] \times P[B_1] \end{aligned}$$

$P[B_3 \mid B_1 \cap B_2]$ est la probabilité de manquer la cible au troisième tir lorsque le tireur a déjà manqué la cible aux deux premiers essais.
La probabilité d'atteindre la cible a été multipliée deux fois par 1,1.
$P[B_3 \mid B_1 \cap B_2] = 1 - P[A_3 \mid B_1 \cap B_2] = 1 - 1{,}1^2 p = 1 - 1{,}21 \times 0{,}4 = 1 - 0{,}482 = 0{,}518.$

$P[B_2 \mid B_1]$ est la probabilité de manquer la cible au deuxième tir lorsque le tireur a déjà manqué la cible au premier essai.
La probabilité d'atteindre la cible a été multipliée par 1,1.
$P[B_2 \mid B_1] = 1 - P[A_2 \mid B_1] = 1 - 1{,}1\, p = 1 - 1{,}1 \times 0{,}4 = 1 - 0{,}44 = 0{,}56.$

$P[B_1]$ est la probabilité de manquer la cible au premier tir.
$P[B_1] = 0{,}6.$

$$P[X = 0] = 0{,}518 \times 0{,}56 \times 0{,}6 = 0{,}174048$$

$$P[X \geq 1] = 1 - P[X = 0] = 1 - 0{,}174048 = 0{,}825952$$

La probabilité que la cible soit atteinte au moins une fois en trois tirs est voisine de 0,83.

3°/ Nombre de tirs pour que la probabilité dépasse 0,5.

La formule de récurrence donnant la probabilité d'atteindre la cible au tir $n + 1$:

$$p_{n+1} = 1{,}1\, p_n - 0{,}1\, p_n{}^2$$

avec $p_1 = p = 0{,}4$ donne, en fonction de n :

n	1	2	3	4	5	6

p_n	0,400	0,424	0,448	0,473	0,498	0,523

Sur ce tableau, on voit que :

La probabilité d'atteindre la cible dépasse 0,5 à partir du sixième tir.

Remarques.

- p_n est une fonction **strictement croissante** de n parce que $p_{n+1} - p_n = 0{,}1\, p_n\, q_n > 0$.
- La suite $(p_n)_{n \in \mathrm{N}}$ est une suite strictement croissante de nombres positifs majorés par 1 : c'est une suite convergente.
  Sa limite λ, comprise entre $p_1 = 0{,}4$ et 1, vérifie :

$$\lambda = 1{,}1\,\lambda - 0{,}1\,\lambda^2$$
$$\lambda = 1.$$

  A force de tirer, le tireur finira presque sûrement par atteindre la cible.

Chapitre 2. Probabilité conditionnelle, indépendance.

Enoncés.

Exercice 24. Exemple d'événements indépendants.

1°/ Donner un exemple de trois événements deux à deux indépendants, mais non indépendants. 2°/ Donner un exemple de trois événements A, B, C, non indépendants, mais vérifiant : $P(A \cap B \cap C) = P(A)\,P(B)\,P(C)$.	

Solution.

1°/ Indépendance deux à deux.

Les trois événements à déterminer doivent vérifier :

$$P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$$
$$P(A \cap C) = P(A)\,P(C)$$
$$P(B \cap C) = P(B)\,P(C)$$
$$P(A \cap B \cap C) \neq P(A)\,P(B)\,P(C)$$

Prenons pour Ω l'ensemble des nombres entiers de 1 à 8 et, pour P la loi uniforme sur Ω.

Avec $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4, 5, 6\}$, $C = \{1, 2, 5, 6\}$, on a :

$$P(A \cap B) = P[\{3, 4\}] = \frac{1}{4} = P(A)\,P(B)$$
$$P(A \cap C) = P[\{1, 2\}] = \frac{1}{4} = P(A)\,P(C)$$
$$P(B \cap C) = P[\{5, 6\}] = \frac{1}{4} = P(B)\,P(C)$$
$$P(A \cap B \cap C) = P(\varnothing) = 0 \neq P(A)\,P(B)\,P(C) = \frac{1}{8}$$

2°/ Indépendance.

Dire que trois événements A, B, C, sont indépendants, c'est dire que :

— toute famille de deux de ces trois événements est indépendante :
$P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$

$P(A \cap C) = P(A)\,P(C)$
$P(B \cap C) = P(B)\,P(C)$

— les événements sont indépendants dans leur ensemble :
$P(A \cap B \cap C) = P(A)\,P(B)\,P(C)$

On cherche ici des événements non indépendants mais indépendants dans leur ensemble : il faut, et il suffit, qu'ils ne soient pas deux à deux indépendants.

Prenons, dans l'ensemble Ω défini dans la première question, $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, muni d'une loi de probabilité uniforme, des événements A, B, C, dont l'intersection n'est pas vide :
$A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 2, 5, 6\}$, $C = \{1, 3, 7, 8\}$

On a :

$$P(A \cap B) = P[\{1, 2\}] = \frac{1}{4} = P(A)\,P(B)$$
$$P(A \cap C) = P[\{1, 3\}] = \frac{1}{4} = P(A)\,P(C)$$
$$P(B \cap C) = P[\{1\}] = \frac{1}{8} \neq P(B)\,P(C) = \frac{1}{4}.$$
$$P(A \cap B \cap C) = P[\{1\}] = \frac{1}{8} = P(A)\,P(B)\,P(C).$$

Donc les événements A, B, C sont indépendants dans leur ensemble, mais ne sont pas indépendants deux à 2, donc ils ne sont pas indépendants.

Chapitre 2. Probabilité conditionnelle, indépendance.

Enoncés.

Exercice 25. Fumeurs.

Une population est formée de 40 % d'hommes et de 60 % de femmes. On sait que le pourcentage de fumeurs parmi les hommes est de 50 %, et parmi les femmes, de 30 %. On choisit un individu au hasard dans cette population. 1°/ Quelle est la probabilité qu'il soit fumeur ? 2°/ Quelle est la probabilité qu'il soit un homme, sachant qu'il est fumeur ?	

Solution.

1°/ Tableau de la loi conjointe.

Les données permettent de remplir le tableau suivant des probabilités conjointes des deux caractères étudiés.

	Homme	*Femme*	*Total*
Fumeur	0,4 × 0,5 = 0,20	0,6 × 0,3 = 0,18	0,38
Non fumeur	0,20	0,42	0,62
Total	0,40	0,60	1

2°/ Probabilités.

Le tableau précédent permet de répondre aux questions et remplace la formule de Bayes :

$$P\,[Fumeur] = 0{,}38$$

$$P\,[Homme \mid Fumeur] = \frac{0{,}20}{0{,}38} = \frac{10}{19} \approx 0{,}526$$

Exercices

Variable aléatoire réelle discrète.

1. Définition d'une variable aléatoire.

2. Exemple : variable de Bernoulli.

3. Loi de probabilité d'une variable aléatoire.

   3.1. Définition.
   3.2. Propriétés.
   3.3. Exemple : loi de Bernoulli.

4. Fonction de répartition.

   4.1. Définition.
   4.2. Propriétés.
   4.3. Exemple.

5. Espérance mathématique.

   5.1. Définition et exemple.
   5.2. Propriétés.
   5.3. Espérance mathématique d'une fonction aléatoire.
   5.4. Moments.
   5.5. Moments centrés.

6. Variance.

   6.1. Définition, formule de Koenig.
   6.2. Propriété.
   6.3. Exemple.

HAUT

1. Définition d'une variable aléatoire.

HAUT

Soit $(\Omega, \mathbb{A})$ un espace probabilisable associé à une épreuve aléatoire E.
Soit X une application de Ω dans $\mathbb{R}$.
Nous dirons que X est une **variable aléatoire réelle** liée à E si, et seulement si, pour tout réel x, l'image réciproque $X^{-1}(]-\infty, x])$ est un élément de $\mathbb{A}$.

Si $X(\Omega)$ est une partie dénombrable de $\mathbb{R}$, nous dirons que X est une **variable aléatoire discrète**.
Une variable aléatoire discrète sera dite **finie** ou **infinie** suivant que l'ensemble de ses valeurs est fini ou infini.

Réciproquement, considérons l'ensemble fondamental Ω associé à une épreuve aléatoire E.
Soit $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.
Considérons une application $X : \Omega \to \mathbb{R}$.
On note $X(\Omega)$ l'ensemble des valeurs de X, qu'on suppose dénombrable.
A toute partie B de $\mathbb{R}$, on peut associer la partie $X^{-1}(B)$ de Ω, qui est l'ensemble, éventuellement vide, des $\omega \in \Omega$ pour lesquels $X(\omega)$ est un élément de B.
L'ensemble des parties $X^{-1}(B)$ de Ω, pour les partie B de $\mathbb{R}$, forme une **algèbre d'événements** $\mathbb{A}$.

En effet :

1°/ $X^{-1}(\mathbb{R}) = \Omega$, donc $\Omega \in \mathbb{A}$.
2°/ Soit $A \in \mathbb{A}$. Il existe une partie B de $\mathbb{R}$ telle que $A = X^{-1}(B)$.
$\omega \in \overline{A} \Leftrightarrow \omega \notin A \Leftrightarrow X(\omega) \notin B \Leftrightarrow X(\omega) \in \overline{B} \Leftrightarrow \omega \in X^{-1}(\overline{B})$.
La relation $\overline{A} = X^{-1}(\overline{B})$ entraîne $\overline{A} \in \mathbb{A}$.
3°/ Soient A et A' des éléments de $\mathbb{A}$. Il existe des parties B et B' de $\mathbb{R}$ telles que l'on ait $A = X^{-1}(B)$ et $A' = X^{-1}(B')$.
$\omega \in X^{-1}(B \cup B') \Leftrightarrow X(\omega) \in B \cup B' \Leftrightarrow X(\omega) \in B$ ou $X(\omega) \in B' \Leftrightarrow \omega \in X^{-1}(B)$ ou $\omega \in X^{-1}(B') \Leftrightarrow \omega \in X^{-1}(B \cup B')$
La relation $X^{-1}(B \cup B') = X^{-1}(B) \cup X^{-1}(B)$ entraîne $A \cup A' \in \mathbb{A}$.

Comme l'application $B \mapsto X^{-1}(B)$ est croissante, les **événements élémentaires** de cette algèbre d'événements sont les images réciproques des valeurs x_k de X.

Toute application X définie sur Ω et à valeurs dans $\mathbb{R}$ permet donc de définir un espace probabilisable $(\Omega, \mathbb{A})$, sur lequel X est une variable aléatoire réelle.

HAUT

2. Exemple : variable de Bernoulli.

HAUT

Soit Ω l'ensemble fondamental associé à une épreuve aléatoire *E*.
Soit *A* un événement, partie de Ω.

On appelle **variable indicatrice de Bernoulli** de *A*, ou **fonction indicatrice** de *A*, la variable aléatoire $\mathbb{1}_A$ définie, pour tout élément ω de Ω, par :

$$\mathbb{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{lorsque } \omega \in A \\ 0 & \text{lorsque } \omega \notin A \end{cases}$$

Cette variable aléatoire n'a que deux valeurs : 0 et 1.
Les événements élémentaires de l'algèbre d'événements qu'elle définit sont :

$\mathbb{1}_A^{-1}(1) = A$

$\mathbb{1}_A^{-1}(0) = \overline{A}$

L'algèbre d'événements définie par la variable indicatrice de Bernoulli de *A* est donc l'algèbre de Bernoulli $\mathbb{A}$ formée des éléments {Ø, *A*, $\overline{A}$, Ω} de $\mathfrak{P}(\Omega)$ et l'espace probabilisable associé est $(\Omega, \mathbb{A})$.

3. Loi de probabilité d'une variable aléatoire.

HAUT

3.1. Définition.

Soit $(\Omega, \mathbb{A}, P)$ un espace probabilisé, et X une variable aléatoire discrète.
Soit $(x_k)_{k \in I}$ l'ensemble des valeurs de X.
Soit A_k l'événement élémentaire de $\mathbb{A}$ défini par la valeur x_k :
$A_k = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x_k\} = X^{-1}(\{x_k\}) \in \mathbb{A}$.

On note P_X l'application $\mathbb{R} \to [0, 1]$ définie par :

$$P_X(x) = P(X^{-1}(\{x\}))$$

Comme les valeurs de X sont les $(x_k)_{k \in I}$, $X^{-1}(\{x\})$ est vide lorsque x n'est pas l'un des $(x_k)_{k \in I}$ et sa probabilité est nulle.
Lorsque $x = x_k$, pour un $k \in I$, on obtient :

$$P_X(x_k) = P(X^{-1}(\{x_k\})) = P(A_k) = \sum_{\omega \in A_k} P(\omega) = \sum_{X(\omega) = x_k} P(\omega)$$

Le nombre $p_k = P_X(x_k) = \sum_{X(\omega) = x_k} P(\omega)$ est souvent noté, par abus d'écriture, $P(X = x_k)$, ou $P(x_k)$.
On dit que p_k est la **probabilité de la valeur x_k** de X.

L'ensemble des couples $(x_k, p_k)_{k \in I}$ est appelé la **loi de probabilité** de la variable aléatoire X.

HAUT

3.2. Propriétés d'une loi de probabilité.

HAUT

a) Pour tout $k \in I$, $p_k \in [0, 1]$.

En effet, $p_k = P(X = x_k) = P(A_k)$, et les valeurs de P sont des nombres réels compris entre 0 et 1.

b) $\sum_{k \in I} p_k = 1$ (condition de normalisation).

En effet, les A_k, $k \in I$, sont les événements élémentaires de l'algèbre d'événements A, donc ils sont incompatibles deux à deux et leur réunion est :

$$\bigcup_{k \in I} A_k = \bigcup_{k \in I} X^{-1}(\{x_k\}) = X^{-1}\left(\bigcup_{k \in I} \{x_k\}\right) = X^{-1}(X(\Omega)) = \Omega$$

de sorte que l'on a :

$$\sum_{k \in I} p_k = \sum_{k \in I} P(A_k) = P\left(\bigcup_{k \in I} A_k\right) = P(\Omega) = 1.$$

3.3. Exemple de loi de probabilité : loi de Bernoulli.

HAUT

Considérons la variable indicatrice de Bernoulli $\mathbb{1}_A$ d'un événement A.
Notons p la probabilité de réalisation de l'événement A, et $q = 1 - p$.
Nous avons, par définition :

$$\mathbb{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{lorsque } \omega \in A \\ 0 & \text{lorsque } \omega \notin A \end{cases}$$

donc :

$p = P(A) = P(\mathbb{1}_A^{-1}(1)) = P(\mathbb{1}_A = 1) = P_{\mathbb{1}_A}(1) = P(1)$.

$q = 1 - P(A) = P(\overline{A}) = P(\mathbb{1}_A^{-1}(0)) = P(\mathbb{1}_A = 0) = P_{\mathbb{1}_A}(0) = P(0)$.

La loi de probabilité de la variable indicatrice $\mathbb{1}_A$ est donc donnée par le tableau :

x_k	0	1
p_k	q	p

avec $p + q = 1$.

4. Fonction de répartition.

HAUT

4.1. Définition.

On appelle **fonction de répartition d'une variable aléatoire** X l'application $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{\substack{k \in I \\ x_k \leqslant x}} P(X = x_k) = \sum_{\substack{k \in I \\ x_k \leqslant x}} p_k.$$

4.2. Propriétés d'une fonction de répartition.

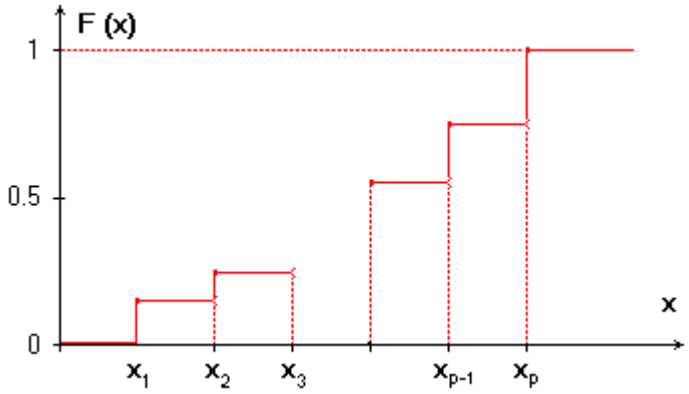
HAUT

Comme les p_k sont des nombres positifs, la fonction de répartition est une **application croissante**, dont toutes les valeurs sont positives.

Comme la somme $\sum_{k \in I} p_k$ des p_k est égale à 1, $F(x)$ croît de 0 à 1 lorsque x varie de $-\infty$ à $+\infty$.

Lorsque x atteint une valeur x_k par valeurs inférieures, $F(x)$ augmente brusquement de p_k et reste constante sur l'intervalle $[x_k, x_{k+1}[$.

C'est une **fonction en escalier, continue à droite** :



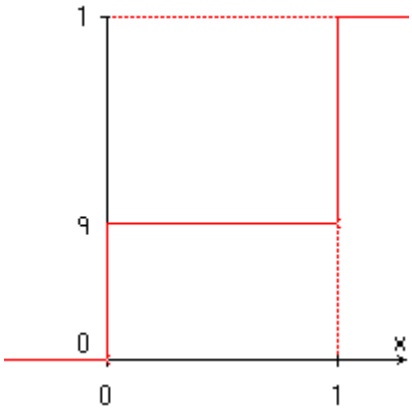
HAUT

4.3. Exemple de fonction de répartition.

HAUT

La variable indicatrice de Bernoulli d'un événement A a pour fonction de répartition :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{lorsque } x < 0 \\ q & \text{lorsque } 0 \leqslant x < 1 \\ 1 & \text{lorsque } 1 \leqslant x \end{cases}$$



5. Espérance mathématique.

HAUT

5.1. Définition et exemple.

On appelle **espérance mathématique** (**ou moyenne**) d'une variable aléatoire X le nombre, quand il existe :

$$E(X) = \sum_{k \in I} p_k x_k$$

Exemple : espérance mathématique de la variable indicatrice de Bernoulli d'un événement *A*.

$$E(1_A) = q \times 0 + p \times 1 = p = P(A).$$

5.2. Propriétés de l'espérance mathématique.

HAUT

a) Espérance mathématique d'une constante.

Si la variable aléatoire X n'a qu'une seule valeur $X = a$, on a $P(X = a) = 1$ et $E(X) = a\,P(X = a) = a$.

$$\boxed{E(a) = a}$$

b) Linéarité.

Soient X une variable aléatoire réelle discrète, a et b des constantes.
La variable aléatoire $Z = a\,X + b$ prend les valeurs $z_k = a\,x_k + b$ avec les probabilités :

$$P(Z = z_k) = P(X = x_k)$$

$$E(Z) = \sum_k P(X = x_k)\,(a\,x_k + b)$$

$$E(Z) = E(Z) = a \sum_k P(X = x_k)\,x_k + b \sum_k P(X = x_k) = a\,E(X) + b$$

D'où le résultat :

$$\boxed{E(a\,X + b) = a\,E(X) + b}$$

Plus généralement, **nous admettrons** que, pour deux variables aléatoires X et Y, et deux constantes a et b, nous avons :

$$\boxed{E(a\,X + b\,Y) = a\,E(X) + b\,E(Y)}$$

HAUT

5.3. Espérance mathématique d'une fonction aléatoire.

HAUT

Si φ est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $\varphi \circ X$ est une variable aléatoire qu'on note $\varphi(X)$.

L'espérance mathématique, ou moyenne, de $\varphi(X)$ est (**résultat admis**) :

$$E(\varphi(X)) = \sum_{k \in I} p_k \varphi(x_k)$$

5.4. Moments.

HAUT

Pour tout entier n, l'espérance mathématique $E(X^n)$ s'appelle le **moment d'ordre *n*** de X, on le note m_n.

$$m_n = E(X^n) = \sum_{k \in I} p_k x_k^n$$

$$m_0 = \sum_{k \in I} p_k = 1$$

$$m_1 = \sum_{k \in I} p_k x_k = E(X)$$

$$m_2 = \sum_{k \in I} p_k x_k^2 = E(X^2)$$

5.5. Moments centrés.

HAUT

Pour tout entier n, l'espérance mathématique $E((X - E(X))^n)$ s'appelle le **moment centré d'ordre *n*** de X, on le note μ_n.

$$\mu_n = E((X - E(X))^n) = \sum_{k \in I} p_k (x_k - E(X))^n$$

$$\mu_0 = \sum_{k \in I} p_k = 1$$

$$\mu_1 = \sum_{k \in I} p_k (x_k - E(X)) = E(X) - E(X) = 0$$

$$\mu_2 = \sum_{k \in I} p_k (x_k - E(X))^2$$

6. Variance.

HAUT

6.1. Définition, formule de Koenig.

Le moment centré d'ordre 2, μ_2, s'appelle la **variance**. On note $Var\,(X)$ la variance de X.

$$Var\,(X) = \sum_{k \in I} p_k \,(x_k - E\,(X))^2$$

En développant le carré, on obtient :

$$Var\,(X) = \sum_{k \in I} p_k \,(x_k^2 + (E\,(X))^2 - 2\,x_k\,E\,(X))$$

$$= \sum_{k \in I} p_k\,x_k^2 + \left(\sum_{k \in I} p_k\right)(E\,(X))^2 - 2\left(\sum_{k \in I} p_k\,x_k\right)E\,(X)$$

$$= \sum_{k \in I} p_k\,x_k^2 - (E\,(X))^2$$

$$Var\,(X) = E\,(X^2) - (E\,(X))^2 = m_2 - m_1^2$$

La formule $Var\,(X) = E\,(X^2) - (E\,(X))^2$ est connue sous le nom de **formule de la variance**, ou **formule de Koenig**.
Elle indique que la variance est la moyenne du carré, moins le carré de la moyenne.

La racine carrée de la variance s'appelle l'**écart-type**. On $\sigma\,(X)$ ou σ_X l'écart-type de X.

$$\sigma_X = \sqrt{Var\,(X)}$$

HAUT

6.2. Propriété de la variance.

HAUT

$$\boxed{Var\,(a\,X + b) = a^{2}\,Var\,(X)}$$

En effet :

$$\begin{aligned} Var\,(a\,X + b) &= E\,((a\,X + b - E\,(a\,X + b))^{2}) \\ &= E\,((a\,X + b - a\,E\,(X) - b))^{2}) \\ &= E\,(a^{2}\,(X - E\,(X))^{2}) \\ &= a^{2}\,E\,((X - E\,(X))^{2}) \\ &= a^{2}\,Var\,(X) \end{aligned}$$

6.3. Exemple de variance.

HAUT

Le moment d'ordre 2 de la **variable indicatrice de Bernoulli** d'un événement A de probabilité p est :

$$m_2 = E(X^2) = q \times 0^2 + p \times 1^2 = p$$

La variance est :

$$Var(X) = m_2 - m_1^2 = p - p^2 = p(1-p) = p\,q.$$

HAUT

Chapitre 3. Variables aléatoires réelles discrètes.

Exercices

Exercice 1. Fonction indicatrice d'un connecteur.
Exercice 2. Loi du maximum de deux dés.
Exercice 3. Loi du plus petit numéro tiré.
Exercice 4. Train et places assises.
Exercice 5. Minimum et maximum de trois jetons.
Exercice 6. Rat et labyrinthe.
Exercice 7. Somme, produit, Sup, Inf, de deux dés.
Exercice 8. Loi du produit de deux nombres.
Exercice 9. Tirage exhaustif de boules blanches.
Exercice 10. Loi de probabilité sur $\{0, 1, \dots, n\}$.
Exercice 11. Tirage sans remise de n boules numérotées.
Exercice 12. Le jeu des métiers.
Exercice 13. Jeu de 5000.

Exercice 1. Fonction indicatrice d'un connecteur.

Etant donnés deux événements A et B sur un ensemble fondamental Ω, exprimer, à l'aide des fonctions indicatrices de A et B : — la fonction indicatrice de $A \cap B$, — la fonction indicatrice de $A \cup B$, — la fonction indicatrice de $\overline{A}$, — la fonction indicatrice de $A \Delta B$ (ou exclusif).	Solution

HAUT

Exercice 2. Loi du maximum de deux dés.

On lance deux fois de suite un dé équilibré. Modéliser cette expérience. Soit X la variable aléatoire égale au plus grand des numéros tirés. Quelle est la loi de probabilité de X. Calculer son espérance mathématique et sa variance.	Solution

HAUT

Exercice 3. Loi du plus petit numéro tiré.

Une urne contient N boules numérotées de 1 à N. On tire, au hasard et simultanément, k boules de l'urne ($1 \leq k \leq n$).

1°/ Modéliser cette expérience.

2°/ On note Y la variable aléatoire égale au plus petit numéro tiré. Décrire $Y(\Omega)$.

3°/ Déterminer $P(Y > x)$, $x \in \mathbb{R}$.

4°/ En déduire la loi de Y.

5°/ Calculer son espérance mathématique.

6°/ Retrouver la loi de Y par un raisonnement direct.

Solution

HAUT

Exercice 4. Train et places assises.

Un groupe de huit voyageurs n'ayant pas réservé leur place se répartit au hasard et indépendamment les uns des autres entre les cinq voitures d'un train.
On sait qu'il y a, dans chaque voiture, deux places libres.
Soit X le nombre de voyageurs du groupe qui trouvent une place assise.

1°/ Expliciter l'espace fondamental Ω et l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{C}, P)$.
2°/ Ecrire la loi de probabilité de X.
3°/ Calculer l'espérance mathématique et la variance de X.
4°/ Y a-t-il plus de chances que le nombre de voyageurs du groupe trouvant une place assise soit pair ou impair ?

Solution

HAUT

Exercice 5. Minimum et maximum de trois jetons.

Dans une urne, il y a cinq jetons numérotés de 1 à 5. On tire, au hasard et simultanément, trois jetons et on note X le plus petit nombre affiché, Y le plus grand. 1°/ Expliciter l'espace fondamental Ω et l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{C}, P)$. 2°/ A quelles parties de Ω correspondent les évènements $(X = 1)$, $(X = 2)$, $(X = 3)$, $(X = 4)$? 3°/ Calculer la loi de X. 4°/ Montrer que Y suit la même loi de probabilité que $6 - X$.	Solution

HAUT

Exercice 6. Rat et labyrinthe.

Le temps T nécessaire à un rat pour parcourir un labyrinthe est une variable aléatoire dont la distribution de probabilité est donnée par :

t (en secondes)	2	3	4	5	6	7
$P(T = t)$	0,1	0,1	0,3	p_5	0,2	0,1

1°/ Compléter le tableau en calculant $p_5 = P(T = 5)$.

2°/ Calculer le temps moyen, la variance, l'écart-type.

3°/ Le rat est récompensé à l'aide d'un biscuit pour chaque seconde économisée sur un temps de parcours de 6 secondes (par exemple, s'il met 4 secondes, il reçoit 2 biscuits, mais, s'il met 6 secondes ou plus, il ne reçoit rien).
Tabuler la loi de probabilité de la variable " Récompense " R, égale au nombre de biscuits reçus.
Calculer la récompense moyenne du rat, ainsi que la variance et l'écart-type de R.

4°/ Supposons que le rat soit puni par un choc électrique dont la "puissance" augmente fortement avec le temps mis à parcourir le labyrinthe, soit un choc de T^2 volts pour un temps de T secondes. Calculer la punition moyenne du rat.

5°/ Reprendre la question précédente en supposant que la punition soit un choc électrique dont la puissance varie avec le temps selon la formule $P = 10\,T + 5$ (la "puissance" du choc électrique est exprimée en volts). Calculer de deux façons différentes la punition moyenne ainsi que $Var(P)$.

Solution

HAUT

Exercice 7. Somme, produit, Sup, Inf, de deux dés.

On lance, au hasard et simultanément, deux dés, un noir et un rouge.
Soient N le résultat affiché par le dé noir et R le résultat affiché par le dé rouge.

1°/ Calculer la loi de probabilité de chacune des variables aléatoires :

1. $S = N + R$
2. $Z = N\,R$
3. $M = Sup\,(N, R)$
4. $K = Inf\,(N, R)$

2°/ En déduire que $14 - S$ et S suivent la même loi de probabilité, et que $6 - M$ et K suivent la même loi de probabilité.

Solution

HAUT

Exercice 8. Loi du produit de deux nombres.

On choisit au hasard deux nombres différents de l'ensemble $K = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, toute paire d'éléments de K ayant la même probabilité d'être choisie. On note X le produit des deux éléments choisis. 1°/ Déterminer la loi de X et calculer son espérance mathématique et sa variance. 2°/ Tracer le graphe de la fonction de répartition F_X.	Solution

HAUT

Exercice 9. Tirage exhaustif de boules blanches.

Une urne contient k boules blanches et $n - k$ boules noires. On les tire une à une sans remise. X est la variable aléatoire désignant le tirage où est extraite de l'urne la dernière boule blanche.

1°/ Quelle est la loi de X ?

2°/ Calculer $\sum_{i=p}^{i=n} \binom{i}{p}$.

3°/ Calculer $E(X)$.

Solution

HAUT

Exercice 10. Loi de probabilité sur {0, 1, ... , *n*}.

1°/ On considère un réel $a > 0$, un entier $n \geq 2$, et un réel p_0, $0 \leq p_0 \leq \frac{1}{n+1}$. Montrer que la suite définie par $p_r = p_0 + a\,r$, $0 \leq r \leq n$, est, pour une valeur convenable de a, une loi de probabilité sur $\Omega = \{0, 1, 2, \ldots, n\}$.

2°/ Si $P(X = r) = p_r$, alors calculer $E(X)$.

Indication : on pourra utiliser la formule $\sum_{k=1}^{k=n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Solution

HAUT

Exercice 11. Tirage sans remise de *n* boules numérotées.

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n ($n \geq 2$) et indiscernables par ailleurs.
On effectue n tirages successifs, au hasard, d'une boule dans cette urne, sans remise.

1°/ Quelle est la probabilité pour que la boule n° 1 soit tirée au k^e tirage ($k = 1, 2, \dots, n$) ?

2°/ a) Quelle est la probabilité pour que les boules n° 1 et n° 2 soient tirées l'une derrière l'autre (consécutivement) dans cet ordre ?

b) Quelle est la probabilité pour que les boules n° 1 et n° 2 soient tirées dans cet ordre, consécutivement ou non) ?

3°/ On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre minimum de tirages nécessaires pour que les boules n° 1 et n° 2 soient tirées (dans un ordre quelconque).

a) Pour tout entier $k = 2, 3, \dots, n$, et pour $i = 1, 2$, on désigne par E_i et F_i, respectivement, les évènements

- "La boule n° i est tirée au cours des $k - 1$ premiers tirages ;
- "La boule n° i est tirée au k^e tirage.

Calculer les probabilités de $E_1 \cap F_2$ et de $E_2 \cap F_1$.

b) Donner la loi de probabilité de X.

c) Calculer l'espérance mathématique de X.

On rappelle que $\sum_{k=1}^{k=n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ et $\sum_{k=1}^{k=n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Solution

HAUT

Exercice 12. Le jeu des métiers.

Dans un jeu télévisé, quatre personnages se présentent, chacun exerçant un métier différent.
Le joueur doit associer à chacun des 4 personnages un des 4 métiers proposés, mais ne peut associer à un personnage un métier qu'il a déjà cité auparavant pour un autre.
Si le nombre n de réponses justes n'est pas nul, le gain est de $2^{n-1} \times 200$ euros.
Un joueur répond au hasard et on note G la variable aléatoire représentant son gain.

1°/ Calculer la loi de probabilité de G.
2°/ Quelle est la probabilité que le gain ne soit pas nul ?
3°/ Quelle est l'espérance mathématique de G ?
4°/ Quelle est la variance de G ?

Solution

HAUT

Exercice 13. Jeu de 5000.

Un joueur lance cinq dés ordinaires bien équilibrés indépendants, à six faces marquées de 1 à 6. Les 1 obtenus valent 100 points chacun. Les 5 obtenus valent 50 points chacun. Les autres résultats ne valent rien. Quelle est l'espérance mathématique du gain dans un jet des 5 dés ?	Solution

HAUT

Chapitre 3. Variables aléatoires réelles discrètes.

Enoncés.

Exercice 1. Fonction indicatrice d'un connecteur.

Etant donnés deux événements A et B sur un ensemble fondamental Ω, exprimer, à l'aide des fonctions indicatrices de A et B : — la fonction indicatrice de $A \cap B$, — la fonction indicatrice de $A \cup B$, — la fonction indicatrice de $\overline{A}$, — la fonction indicatrice de $A \Delta B$ (ou exclusif).	

Solution.

La fonction indicatrice $\mathbb{1}_A$ d'un événement A est une application de Ω dans $\mathbb{R}$, définie par :

$$\mathbb{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{lorsque } \omega \in A \\ 0 & \text{lorsque } \omega \notin A \end{cases}$$

1°/ Intersection.

$\mathbb{1}_{A\cap B}(\omega) = 1 \Leftrightarrow \omega \in A \cap B$
$\mathbb{1}_{A\cap B}(\omega) = 1 \Leftrightarrow \omega \in A$ et $\omega \in B$
$\mathbb{1}_{A\cap B}(\omega) = 1 \Leftrightarrow \mathbb{1}_A(\omega) = 1$ et $\mathbb{1}_B(\omega) = 1$
$\mathbb{1}_{A\cap B}(\omega) = 1 \Leftrightarrow \mathbb{1}_A(\omega) \times \mathbb{1}_B(\omega) = 1$
$\mathbb{1}_{A\cap B}(\omega) = 1 \Leftrightarrow (\mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B)(\omega) = 1$

$$\boxed{\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B}$$

2°/ Réunion.

$\mathbb{1}_{A\cup B}(\omega) = 1 \Leftrightarrow \omega \in A \cup B$
$\mathbb{1}_{A\cup B}(\omega) = 1 \Leftrightarrow \omega \in A$ ou $\omega \in B$
$\mathbb{1}_{A\cup B}(\omega) = 1 \Leftrightarrow \mathbb{1}_A(\omega) = 1$ ou $\mathbb{1}_B(\omega) = 1$
$\mathbb{1}_{A\cup B}(\omega) = 1 \Leftrightarrow \mathbb{1}_A(\omega) + \mathbb{1}_B(\omega) - \mathbb{1}_A(\omega) \times \mathbb{1}_B(\omega) = 1$
$\mathbb{1}_{A\cup B}(\omega) = 1 \Leftrightarrow (\mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B)(\omega) = 1$

$$\boxed{\mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B}$$

3°/ Complémentaire.

$\mathbb{1}_{\overline{A}}(\omega) = 1 \Leftrightarrow \omega \in \overline{A}$

$\mathbb{1}_{\overline{A}}(\omega) = 1 \Leftrightarrow \omega \notin A$

$\mathbb{1}_{\overline{A}}(\omega) = 1 \Leftrightarrow \mathbb{1}_A(\omega) = 0$

$\mathbb{1}_{\overline{A}}(\omega) = 1 \Leftrightarrow 1 - \mathbb{1}_A(\omega) = 1$

$\mathbb{1}_{\overline{A}}(\omega) = 1 \Leftrightarrow (1 - \mathbb{1}_A)(\omega) = 1$

$$\boxed{\mathbb{1}_{\overline{A}} = 1 - \mathbb{1}_A}$$

4°/ Ou exclusif.

$A \Delta B = (A \cup B) \cap (\overline{A \cap B})$

$\mathbb{1}_{A \Delta B} = \mathbb{1}_{A \cup B} \times (1 - \mathbb{1}_{A \cap B})$

$\mathbb{1}_{A \Delta B} = (\mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B) \times (1 - \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B)$

$\mathbb{1}_{A \Delta B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A^2 \times \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B^2 + \mathbb{1}_A^2 \times \mathbb{1}_B^2$

Or $\mathbb{1}_A^2 = \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_A = \mathbb{1}_{A \cap A} = \mathbb{1}_A$, donc :

$$\boxed{\mathbb{1}_{A \Delta B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - 2\,\mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B}$$

Chapitre 3. Variables aléatoires réelles discrètes.

Enoncés.

Exercice 2. Loi du maximum de deux dés.

On lance deux fois de suite un dé équilibré. Modéliser cette expérience. Soit X la variable aléatoire égale au plus grand des numéros tirés. Quelle est la loi de probabilité de X. Calculer son espérance mathématique et sa variance.	

Solution.

1°/ Modélisation.

L'ensemble des résultats élémentaires pour le jet d'un dé est {1, 2, 3, 4, 5, 6}.
L'ensemble des résultats élémentaires pour deux jets d'un dé est $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^2$.
Son cardinal est *Card* $(\Omega) = 6^2 = 36$.

Comme le dé est équilibré, chaque résultat élémentaire d'un jet du dé est équiprobable et a une probabilité $\frac{1}{6}$.
Comme les jets sont supposés indépendants, les probabilités se multiplient ; chaque élément de Ω est équiprobable et a une probabilité $\frac{1}{36}$.

2°/ Plus grand numéro tiré.

Dressons le tableau des valeurs du plus grand numéro tiré en fonction des deux jets du dé :

Max	$D_1 = 1$	$D_1 = 2$	$D_1 = 3$	$D_1 = 4$	$D_1 = 5$	$D_1 = 6$
$D_2 = 1$	1	2	3	4	5	6
$D_2 = 2$	2	2	3	4	5	6
$D_2 = 3$	3	3	3	4	5	6
$D_2 = 4$	4	4	4	4	5	6
$D_2 = 5$	5	5	5	5	5	6
$D_2 = 6$	6	6	6	6	6	6

La loi de probabilité s'obtient en comptant le nombre d'occurences des valeurs du maximum :
une valeur n du maximum apparaît $2n - 1$ fois, $1 \leq n \leq 6$, sa probabilité est donc $\frac{2n-1}{36}$

$$P(X = n) = \frac{2n-1}{36},\ 1 \leq n \leq 6.$$

3°/ Espérance et variance.

$$E(X) = \sum_{n=1}^{n=6} n\,P(X=n) = \frac{1}{36}\sum_{n=1}^{n=6} n(2n-1) = \frac{2}{36}\sum_{n=1}^{n=6} n^2 - \frac{1}{36}\sum_{n=1}^{n=6} n$$

$$E(X) = \frac{2}{36}\frac{6\times(6+1)\times(2\times 6+1)}{6} - \frac{1}{36}\frac{6\times(6+1)}{2} = \frac{7}{36}\times(26-3) = \frac{161}{36}$$

$$\boxed{E(X) = \frac{161}{36}}$$

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \sum_{n=1}^{n=6} n^2\,P(X=n) - \left(\frac{161}{36}\right)^2$$

$$\sum_{n=1}^{n=6} n^2\,P(X=n) = \frac{1}{36}\sum_{n=1}^{n=6} n^2(2n-1) = \frac{2}{36}\sum_{n=1}^{n=6} n^3 - \frac{1}{36}\sum_{n=1}^{n=6} n^2$$

$$= \frac{2}{36}\left(\frac{6\times(6+1)}{2}\right)^2 - \frac{1}{36}\frac{6\times(6+1)\times(2\times 6+1)}{6}$$

$$= \frac{7}{36}\times(126-13) = \frac{287}{12}$$

$$Var(X) = \frac{287}{12} - \left(\frac{161}{36}\right)^2 = \frac{287\times 108 - 161^2}{36^2} = \frac{5\,075}{1\,296}$$

$$\boxed{Var(X) = \frac{5\,075}{1\,296}}$$

Chapitre 3. Variables aléatoires réelles discrètes.

Enoncés.

Exercice 3. Loi du plus petit numéro tiré.

Une urne contient N boules numérotées de 1 à N. On tire, au hasard et simultanément, k boules de l'urne ($1 \leq k \leq n$). 1°/ Modéliser cette expérience. 2°/ On note Y la variable aléatoire égale au plus petit numéro tiré. Décrire $Y(\Omega)$. 3°/ Déterminer $P(Y > x)$, $x \in \mathbb{R}$. 4°/ En déduire la loi de Y. 5°/ Calculer son espérance mathématique. 6°/ Retrouver la loi de Y par un raisonnement direct.	

Solution.

1°/ Modélisation.

Un résultat élémentaire de l'expérience aléatoire est une partie à k éléments de l'ensemble $\{1, \dots, N\}$.
L'ensemble fondamental Ω est l'ensemble des parties à k éléments de l'ensemble $\{1, \dots, N\}$.
Son cardinal est $Card(\Omega) = \binom{N}{k}$.

Le tirage au hasard suppose que tous les événements élémentaires sont équiprobables, de probabilité

$$\frac{1}{\binom{N}{k}}.$$

2°/ Variable aléatoire Y.

Y est le plus petit numéro tiré.
Sa plus petite valeur possible est 1, sa plus grande valeur possible s'obtient lorsqu'on a tiré les k boules portant les numéros les plus élevés : $N, \dots, N-(k-1) = N+1-k$.
Toutes les valeurs intermédiaires de 1 à $N+1-k$ peuvent être atteintes.

$$\boxed{Y(\Omega) = \{1, \dots, N+1-k\}}$$

3°/ Fonction de répartition.

Pour $x < 1$, la probabilité que $Y > x$ est 1, puisque la plus petite valeur de Y est $1 > x$.
L'événement $Y > x$ est certain.

Pour $x \geq N+1-k$, la probabilité que $Y > x$ est 0, puisque la plus grande valeur de Y est $N+1-k$.

L'événement $Y > x$ est impossible.

Soit x un réel compris entre 1 et $N + 1 – k$, $1 \leq x < N + 1 – k$.
La partie entière $E\,[x]$ de x est le plus grand entier inférieur ou égal à x : $E\,[x] \leq x < E\,[x] + 1$.
Comme les valeurs de Y sont entières, l'événement $Y > x$ est identique à l'événement $Y \geq E\,[x] + 1$.
Son cardinal est le nombre de parties à k éléments de l'ensemble à $N – E\,[x]$ éléments $\{E\,[x] + 1, \ldots, N\}$.
Sa probabilité est donc $\dfrac{\binom{N - E[x]}{k}}{\binom{N}{k}}$

$$P\,(Y > x) = \begin{cases} 1 & \text{lorsque } x < 1 \\ \dfrac{\binom{N - E[x]}{k}}{\binom{N}{k}} & \text{lorsque } 1 \leqslant x < N + 1 - k \\ 0 & \text{lorsque } x \geqslant N + 1 - k \end{cases}$$

La **fonction de répartition** $F\,(x)$ est donnée par $F\,(x) = P\,(Y \leq x) = 1 – P\,(Y > x)$.

$$F\,(x) = \begin{cases} 0 & \text{lorsque } x < 1 \\ 1 - \dfrac{\binom{N - E[x]}{k}}{\binom{N}{k}} & \text{lorsque } 1 \leqslant x < N + 1 - k \\ 1 & \text{lorsque } x \geqslant N + 1 - k \end{cases}$$

4°/ Loi de probabilité.

Soit m un entier compris entre 1 et $N + 1 – k$, $1 \leq m \leq N + 1 – k$.
Comme les valeurs de Y sont entières, nous avons :
$Y > m – 1 \Leftrightarrow (Y = m)$ ou $(Y > m)$, avec $(Y = m) \bigcap (Y > m) = Ø$,
donc $P\,(Y > m – 1) = P\,(Y = m) + P\,(Y > m)$.

$$P\,(Y = m) = P\,(Y > m – 1) – P\,(Y > m).$$

D'après le résultat de la question précédente, avec $E\,(m] = m$, nous obtenons :

a) Pour $m = 1$.

$m – 1 = 0 < 1$, $P\,(Y > m – 1) = 1$,

$$P\,(Y > m) = P\,(Y > 1) = \frac{\binom{N-1}{k}}{\binom{N}{k}} = \frac{N-k}{N} = 1 - \frac{k}{N}$$

$P\,(Y = 1) = \dfrac{k}{N}$.

b) Pour $m = N + 1 – k$.

$P\,(Y > m) = P\,(Y > N + 1 - k) = 0,$

$P\,(Y > m - 1) = P\,(Y > N - k) = \dfrac{1}{\binom{N}{k}}.$

$P\,(Y = N + 1 - k) = \dfrac{1}{\binom{N}{k}}.$

c) Pour $2 \leq m \leq N - k$.

$$P\,(Y > m - 1) = \frac{\binom{N+1-m}{k}}{\binom{N}{k}}$$

$$P\,(Y > m) = \frac{\binom{N-m}{k}}{\binom{N}{k}}$$

$$P\,(Y = m) = \frac{1}{\binom{N}{k}}\left(\binom{N+1-m}{k} - \binom{N-m}{k}\right)$$

La relation $\binom{N+1-m}{k} = \binom{N-m}{k} + \binom{N-m}{k-1}$ donne la solution :

$$P\,(Y = m) = \frac{\binom{N-m}{k-1}}{\binom{N}{k}}$$

Et cette relation donne encore $P\,(Y = N + 1 - k) = \dfrac{1}{\binom{N}{k}}$, et $P\,(Y = 1) = \dfrac{k}{N}$, de sorte que la loi de probabilité de Y est donnée, dans tous les cas, par la formule :

$$\boxed{P\,(Y = m) = \frac{\binom{N-m}{k-1}}{\binom{N}{k}},\ 1 \leq m \leq N + 1 - k.}$$

Nous remarquerons que la somme des probabilités étant égale à 1, nous avons :

$$\binom{N}{k} = \binom{N-1}{k-1} + \binom{N-2}{k-1} + \ldots + \binom{k-1}{k-1}$$

formule déjà établie dans Théorie des ensembles, Exercice_9_1.

5°/ Espérance mathématique.

$$E(Y) = \sum_{m=1}^{m=N+1-k} m\,P(Y=m) = \frac{1}{\binom{N}{k}} \sum_{m=1}^{m=N+1-k} m \binom{N-m}{k-1}$$

$$E(Y) = \frac{1}{\binom{N}{k}}\left(\binom{N-1}{k-1} + 2\binom{N-2}{k-1} + \ldots + (N+1-k)\binom{k-1}{k-1}\right)$$

$$\binom{N}{k} = \binom{N-1}{k-1} + \binom{N-2}{k-1} + \ldots + \binom{k-1}{k-1}$$

$$\binom{N-1}{k-1} + 2\binom{N-2}{k-1} + \ldots + (N+1-k)\binom{k-1}{k-1} = \binom{N}{k} + \left(\binom{N-2}{k-1} + \ldots + (N-k)\binom{k-1}{k-1}\right)$$

donc, par récurrence :

$$\binom{N-1}{k-1} + 2\binom{N-2}{k-1} + \ldots + (N+1-k)\binom{k-1}{k-1} = \binom{N}{k} + \binom{N-1}{k} + \ldots + \binom{k+1}{k} + \binom{k-1}{k-1}$$

$$\binom{N-1}{k-1} + 2\binom{N-2}{k-1} + \ldots + (N+1-k)\binom{k-1}{k-1} = \binom{N}{k} + \binom{N-1}{k} + \ldots + \binom{k+1}{k} + \binom{k}{k} = \binom{N+1}{k+1}.$$

D'où $E(Y) = \dfrac{\binom{N+1}{k+1}}{\binom{N}{k}} = \dfrac{N+1}{k+1}$

$$\boxed{E(Y) = \frac{N+1}{k+1}}$$

6°/ Raisonnement direct.

Si m est l'une des valeurs possibles de Y, l'événement $Y = m$ est réalisé si, et seulement si, parmi les boules tirées figurent, d'une part la boule qui porte le numéro m et, d'autre part, $k - 1$ boules de numéro $> m$, donc choisies parmi les $N - m$ boules de numéros $m + 1, \ldots, N = m + (N - m)$, ce qui est possible de $\binom{N-m}{k-1}$ façons, nombre de parties à $k - 1$ éléments dans un ensemble à $N - m$ éléments.

Donc $Card(Y = m) = \binom{N-m}{k-1}$ et $P(Y = m) = \dfrac{\binom{N-m}{k-1}}{\binom{N}{k}}$.

Chapitre 3. Variables aléatoires réelles discrètes.

Enoncés.

Exercice 4. Train et places assises.

Un groupe de huit voyageurs n'ayant pas réservé leur place se répartit au hasard et indépendamment les uns des autres entre les cinq voitures d'un train. On sait qu'il y a, dans chaque voiture, deux places libres. Soit X le nombre de voyageurs du groupe qui trouvent une place assise. 1°/ Expliciter l'espace fondamental Ω et l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{C}, P)$. 2°/ Ecrire la loi de probabilité de X. 3°/ Calculer l'espérance mathématique et la variance de X. 4°/ Y a-t-il plus de chances que le nombre de voyageurs du groupe trouvant une place assise soit pair ou impair ?	

Solution.

1°/ Espace probabilisé.

L'ensemble fondamental Ω est l'ensemble des octuplets de nombres compris entre 1 et 5 : la composante d'indice $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ est le numéro de la voiture dans laquelle est montée le voyageur numéro i.
Il y a 5^8 événements élémentaires.
La probabilité P définie sur Ω est la **probabilité uniforme** : tous les événements élémentaires ont la même probabilité.
La probabilité d'un événement A est donnée par $P(A) = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)}$.

En considérant que les voyageurs du groupe sont indiscernables et les voitures indiscernables, on prend pour système complet d'événements engendrant la tribu $\mathcal{C}$, l'ensemble des **quintuplets de nombres croissants** compris entre 0 et 8 dont la somme est 8 : la composante d'indice i indique combien de voyageurs sont montés dans une voiture. Nous avons vu qu'il existe 18 tels quintuplets et nous avons calculé la probabilité de chacun (Chapitre 1, Exercice 8).

Evénement	*Quintuplet*	*Probabilité*	*Valeur*
A_1	(0, 0, 0, 0, 8)	$\binom{5}{1} \times \frac{1}{5^8} \times \frac{8!}{0!0!0!0!8!}$	$\frac{5}{5^8}$
A_2	(0, 0, 0, 1, 7)	$\binom{5}{1}\binom{4}{1} \times \frac{1}{5^8} \times \frac{8!}{0!0!0!1!7!}$	$\frac{160}{5^8}$
A_3	(0, 0, 0, 2, 6)	$\binom{5}{1}\binom{4}{1} \times \frac{1}{5^8} \times \frac{8!}{0!0!0!2!6!}$	$\frac{560}{5^8}$
A_4	(0, 0, 0, 3, 5)	$\binom{5}{1}\binom{4}{1} \times \frac{1}{5^8} \times \frac{8!}{0!0!0!3!5!}$	$\frac{1\,120}{5^8}$
A_5	(0, 0, 0, 4, 4)	$\binom{5}{2} \times \frac{1}{5^8} \times \frac{8!}{0!0!0!4!4!}$	$\frac{700}{5^8}$
A_6	(0, 0, 1, 1, 6)	$\binom{5}{2}\binom{3}{1} \times \frac{1}{5^8} \times \frac{8!}{0!0!1!1!6!}$	$\frac{1\,680}{5^8}$
A_7	(0, 0, 1, 2, 5)	$\binom{5}{1}\binom{4}{1}\binom{3}{1} \times \frac{1}{5^8} \times \frac{8!}{0!0!1!2!5!}$	$\frac{10\,080}{5^8}$
A_8	(0, 0, 1, 3, 4)	$\binom{5}{1}\binom{4}{1}\binom{3}{1} \times \frac{1}{5^8} \times \frac{8!}{0!0!1!3!4!}$	$\frac{16\,800}{5^8}$
A_9	(0, 0, 2, 2, 4)	$\binom{5}{2}\binom{3}{1} \times \frac{1}{5^8} \times \frac{8!}{0!\,0!\,2!\,2!\,4!}$	$\frac{12\,600}{5^8}$
A_{10}	(0, 0, 2, 3, 3)	$\binom{5}{2}\binom{3}{1} \times \frac{1}{5^8} \times \frac{8!}{0!\,0!\,2!\,3!\,3!}$	$\frac{16\,800}{5^8}$
A_{11}	(0, 1, 1, 1, 5)	$\binom{5}{1}\binom{4}{1} \times \frac{1}{5^8} \times \frac{8!}{0!\,1!\,1!\,1!\,5!}$	$\frac{6\,720}{5^8}$
A_{12}	(0, 1, 1, 2, 4)	$\binom{5}{1}\binom{4}{1}\binom{3}{1} \times \frac{1}{5^8} \times \frac{8!}{0!\,1!\,1!\,2!\,4!}$	$\frac{50\,400}{5^8}$
A_{13}	(0, 1, 1, 3, 3)	$\binom{5}{2}\binom{3}{1} \times \frac{1}{5^8} \times \frac{8!}{0!\,1!\,1!\,3!\,3!}$	$\frac{33\,600}{5^8}$
A_{14}	(0, 1, 2, 2, 3)	$\binom{5}{1}\binom{4}{1}\binom{3}{1} \times \frac{1}{5^8} \times \frac{8!}{0!\,1!\,2!\,2!\,3!}$	$\frac{100\,800}{5^8}$
A_{15}	(0, 2, 2, 2, 2)	$\binom{5}{1} \times \frac{1}{5^8} \times \frac{8!}{0!\,2!\,2!\,2!\,2!}$	$\frac{12\,600}{5^8}$
A_{16}	(1, 1, 1, 1, 4)	$\binom{5}{1} \times \frac{1}{5^8} \times \frac{8!}{1!\,1!\,1!\,1!\,4!}$	$\frac{8\,400}{5^8}$
A_{17}	(1, 1, 1, 2, 3)	$\binom{5}{1}\binom{4}{1} \times \frac{1}{5^8} \times \frac{8!}{1!\,1!\,1!\,2!\,3!}$	$\frac{67\,200}{5^8}$
A_{18}	(1, 1, 2, 2, 2)	$\binom{5}{2} \times \frac{1}{5^8} \times \frac{8!}{1!\,1!\,2!\,2!\,2!}$	$\frac{50\,400}{5^8}$

2°/ Loi de probabilité.

Pour chaque quintuplet du système complet d'événements, nous pouvons calculer le nombre de personnes du groupe qui trouvent une place assise, il y en a 2 au maximum par voiture.

Evénement	*Quintuplet*	*Valeur de X*	*Probabilité*
A_1	(0, 0, 0, 0, 8)	2	$\frac{5}{5^8}$
A_2	(0, 0, 0, 1, 7)	3	$\frac{160}{5^8}$
A_3	(0, 0, 0, 2, 6)	4	$\frac{560}{5^8}$
A_4	(0, 0, 0, 3, 5)	4	$\frac{1120}{5^8}$
A_5	(0, 0, 0, 4, 4)	4	$\frac{700}{5^8}$
A_6	(0, 0, 1, 1, 6)	4	$\frac{1680}{5^8}$
A_7	(0, 0, 1, 2, 5)	5	$\frac{10\,080}{5^8}$
A_8	(0, 0, 1, 3, 4)	5	$\frac{16\,800}{5^8}$
A_9	(0, 0, 2, 2, 4)	6	$\frac{12\,600}{5^8}$
A_{10}	(0, 0, 2, 3, 3)	6	$\frac{16\,800}{5^8}$
A_{11}	(0, 1, 1, 1, 5)	5	$\frac{6\,720}{5^8}$
A_{12}	(0, 1, 1, 2, 4)	6	$\frac{50\,400}{5^8}$
A_{13}	(0, 1, 1, 3, 3)	6	$\frac{33\,600}{5^8}$
A_{14}	(0, 1, 2, 2, 3)	7	$\frac{100\,800}{5^8}$
A_{15}	(0, 2, 2, 2, 2)	8	$\frac{12\,600}{5^8}$
A_{16}	(1, 1, 1, 1, 4)	6	$\frac{8\,400}{5^8}$
A_{17}	(1, 1, 1, 2, 3)	7	$\frac{67\,200}{5^8}$
A_{18}	(1, 1, 2, 2, 2)	8	$\frac{50\,400}{5^8}$

En regroupant suivant les valeurs de X, on obtient le tableau de la loi de probabilité de X :

k	2	3	4	5	6	7	8
$P(X = k)$	$\frac{1}{5^8} \times 5$	$\frac{1}{5^8} \times 160$	$\frac{1}{5^8} \times (560 + 1120 + 700 + 1680)$	$\frac{1}{5^8} \times (10\,080 + 16\,800 + 6720)$	$\frac{1}{5^8} \times (12\,600 + 16\,800 + 50\,400 + 33\,600 + 8400)$	$\frac{1}{5^8} \times (100\,800 + 67\,200)$	$\frac{1}{5^8} \times (12\,600 + 50\,400)$

k	2	3	4	5	6	7	8
$P(X = k) \times 5^8$	5	160	4 060	33 600	121 800	168 000	63 000

3°/ Espérance mathématique et variance.

a) Espérance.

$$E(X) = \sum k\,P(X = k) = \frac{1}{5^8}(2 \times 5 + 3 \times 160 + 4 \times 4\,060 + 5 \times 33\,600 + 6 \times 121\,800 + 7 \times 168\,000 + 8 \times 63\,000)$$

$$= \frac{2\,595\,530}{5^8} = \frac{519\,106}{5^7} \approx 6{,}64$$

$$\boxed{E(X) \approx 6{,}64}$$

b) Variance.

$$E(X^2) = \sum k^2\,P(X = k) = \frac{1}{5^8}(2^2 \times 5 + 3^2 \times 160 + 4^2 \times 4\,060 + 5^2 \times 33\,600 + 6^2 \times 121\,800 + 7^2 \times 168\,200 + 8^2 \times 63\,000) = \frac{17\,555\,220}{5^8}$$

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{1}{5^{16}}(5^8 \times 17\,555\,220 - 2\,595\,530^2) = \frac{1}{5^{16}} \times 121\,731\,831\,600 \approx 0{,}7912$$

$$\boxed{Var(X) \approx 0{,}7912}$$

L'**écart-type** est la racine carrée de la variance :

$$\sigma_X \approx 0{,}89$$

4°/ Pair ou impair.

$$P(X \text{ est pair}) = P(X = 2) + P(X = 4) + P(X = 6) + P(X = 8) = \frac{1}{5^8} \times (5 + 4060 + 121\,800 + 63\,000) = \frac{1}{5^8} \times 188\,865 \approx 0{,}48$$

$$P(X \text{ est impair}) = P(X = 3) + P(X = 5) + P(X = 7) = \frac{1}{5^8} \times (160 + 33\,600 + 168\,000) = \frac{1}{5^8} \times 201\,760 \approx 0{,}52$$

Il y a **plus de chances de voir un nombre impair** de personnes du groupe trouvant une place assise, que d'en voir un nombre pair.

D'ailleurs le nombre le plus fréquent de personnes trouvant une place assise est le **mode** : c'est 7.
A elles seules, les valeurs 5 ou 7 sont plus fréquentes que les valeurs 6 ou 8 et les valeurs {5, 6, 7, 8} représentent 99 % des valeurs probables.

Chapitre 3. Variables aléatoires réelles discrètes.

Enoncés.

Exercice 5. Minimum et maximum de trois jetons.

Dans une urne, il y a cinq jetons numérotés de 1 à 5. On tire, au hasard et simultanément, trois jetons et on note X le plus petit nombre affiché, Y le plus grand. 1°/ Expliciter l'espace fondamental Ω et l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{C}, P)$. 2°/ A quelles parties de Ω correspondent les évènements $(X = 1)$, $(X = 2)$, $(X = 3)$, $(X = 4)$? 3°/ Calculer la loi de X. 4°/ Montrer que Y suit la même loi de probabilité que $6 - X$.	

Solution.

1°/ Espace probabilisé.

Les évènements élémentaires, élément de l'ensemble fondamental Ω, sont les combinaisons des 5 jetons 3 à 3, il y en a $\binom{5}{3} = 10$:

$$\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 2, 5\}, \{1, 3, 4\}, \{1, 3, 5\}, \{1, 4, 5\}, \{2, 3, 4\}, \{2, 3, 5\}, \{2, 4, 5\}, \{3, 4, 5\}.$$

Chacune de ces combinaisons est équiprobable et a pour probabilité 0,1.
La tribu $\mathcal{C}$ de l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{C}, P)$ est l'ensemble $\mathfrak{P}(\Omega)$ des parties de Ω.
La probabillité d'un événement A est donnée par $P(A) = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)}$.

2°/ Parties de Ω.

$X^{-1}(1) = \{1, 2, 3\} \cup \{1, 2, 4\} \cup \{1, 2, 5\} \cup \{1, 3, 4\} \cup \{1, 3, 5\} \cup \{1, 4, 5\}$
$X^{-1}(2) = \{2, 3, 4\} \cup \{2, 3, 5\} \cup \{2, 4, 5\}$.
$X^{-1}(3) = \{3, 4, 5\}$
$X^{-1}(4) = \emptyset$.

3°/ Loi de X.

k	1	2	3
$P(X = k)$	0,6	0,3	0,1

4°/ Loi de *Y*.

$Y^{-1}(1)(3) = \{1, 2, 3\}$
$Y^{-1}(4) = \{1, 2, 4\} \cup \{1, 3, 4\} \cup \{2, 3, 4\}$
$Y^{-1}(5) = \{1, 2, 5\} \cup \{1, 3, 5\} \cup \{1, 4, 5\} \cup \{2, 3, 5\} \cup \{2, 4, 5\} \cup \{3, 4, 5\}$

k	3	4	5
$P(Y = k)$	0,1	0,3	0,6

Or on a :

k	1	2	3
$P(X = k)$	0,6	0,3	0,1
$k' = 6 - k$	5	4	3
$P(6 - X = k') = P(X = k)$	0,6	0,3	0,1

On voit donc que Y et $6 - X$ suivent la **même loi de probabilité**.

Chapitre 3. Variables aléatoires réelles discrètes.

Enoncés.

Exercice 6. Rat et labyrinthe.

Le temps T nécessaire à un rat pour parcourir un labyrinthe est une variable aléatoire dont la distribution de probabilité est donnée par :

t (en secondes)	2	3	4	5	6	7
$P(T = t)$	0,1	0,1	0,3	p_5	0,2	0,1

1°/ Compléter le tableau en calculant $p_5 = P(T = 5)$.

2°/ Calculer le temps moyen, la variance, l'écart-type.

3°/ Le rat est récompensé à l'aide d'un biscuit pour chaque seconde économisée sur un temps de parcours de 6 secondes (par exemple, s'il met 4 secondes, il reçoit 2 biscuits, mais, s'il met 6 secondes ou plus, il ne reçoit rien).
Tabuler la loi de probabilité de la variable " Récompense " R, égale au nombre de biscuits reçus.
Calculer la récompense moyenne du rat, ainsi que la variance et l'écart-type de R.

4°/ Supposons que le rat soit puni par un choc électrique dont la "puissance" augmente fortement avec le temps mis à parcourir le labyrinthe, soit un choc de T^2 volts pour un temps de T secondes. Calculer la punition moyenne du rat.

5°/ Reprendre la question précédente en supposant que la punition soit un choc électrique dont la puissance varie avec le temps selon la formule $P = 10\,T + 5$ (la "puissance" du choc électrique est exprimée en volts). Calculer de deux façons différentes la punition moyenne ainsi que $Var(P)$.

Solution.

1°/ Condition de normalisation.

La somme des probabilités est toujours égale à 1 :

$$P(T = 2) + P(T = 3) + P(T = 4) + P(T = 5) + P(T = 6) + P(T = 7) = 1$$

C'est la " **condition de normalisation** ".
Il en résulte :

$P(T = 5) = 1 - (P(T = 2) + P(T = 3) + P(T = 4) + P(T = 6) + P(T = 7))$
$= 1 - 0{,}8$
$= 0{,}2$

$$\boxed{P(T = 5) = 0{,}2}$$

2°/ Espérance mathématique, variance, écart-type.

Par définition, $E(T) = \sum t_i P(T = t_i)$.
On a donc ici :

$E(T) = 2 \times 0{,}1 + 3 \times 0{,}1 + 4 \times 0{,}3 + 5 \times 0{,}2 + 6 \times 0{,}2 + 7 \times 0{,}1$
$= 0{,}2 + 0{,}3 + 1{,}2 + 1{,}0 + 1{,}2 + 0{,}7$
$= 4{,}6$

$$\boxed{E(T) = 4{,}6 \text{ s}}$$

$Var(T) = \sum (t_i - E(T))^2 P(T = t_i) = E(T^2) - (E(T))^2$ (formule de la variance ou de Kœnig).

On en déduit :

$Var(T) = \sum t_i^2 P(T = t_i) - 4{,}6^2$
$= 4 \times 0{,}1 + 9 \times 0{,}1 + 16 \times 0{,}3 + 25 \times 0{,}2 + 36 \times 0{,}2 + 49 \times 0{,}1 - 21{,}16$
$= 0{,}4 + 0{,}9 + 4{,}8 + 5{,}0 + 7{,}2 + 4{,}9 - 21{,}16$
$= 23{,}2 - 21{,}16$
$= 2{,}04$

$$\boxed{Var(T) = 2{,}04 \text{ s}^2.}$$

L'écart-type est la racine carrée de la variance :

$$\boxed{\sigma_T = 1{,}43 \text{ s}}$$

3°/ Récompense : variable R.

Valeurs de R en fonction des valeurs de T :

t	2	3	4	5	6	7
r	4	3	2	1	0	0
$P(T = t)$	0,1	0,1	0,3	0,2	0,2	0,1

Loi de probabilité de la variable R :

r	0	1	2	3	4
$P(R = r)$	0,3	0,2	0,3	0,1	0,1

Cette loi de probabilité permet de calculer les paramètres de la variable R :

$E(R) = 0 \times 0{,}3 + 1 \times 0{,}2 + 2 \times 0{,}3 + 3 \times 0{,}1 + 4 \times 0{,}1$
$= 0{,}2 + 0{,}6 + 0{,}3 + 0{,}4$
$= 1{,}5$

Le rat reçoit, en moyenne, 1,5 biscuits.

$Var(R) = E(R^2) - (E(R))^2$
$= 0 \times 0,3 + 1 \times 0,2 + 4 \times 0,3 + 9 \times 0,1 + 16 \times 0,1 - (1,5)^2$
$= 0,2 + 1,2 + 0,9 + 1,6 - 2,25$
$= 3,90 - 2,25$
$= 1,65$

$Var(R) = 1,65$ biscuits^2

$\sigma_R = \sqrt{Var(R)}$
$= \sqrt{1,65}$
$= 1,28$ biscuits

$\sigma_R = 1,28$ biscuits

4°/ Punition : variable P_1.

Valeurs de P_1 en fonction des valeurs de T :

t	2	3	4	5	6	7
$p_1 = t^2$	4	9	16	25	36	49
$P(T = t) = P(P_1 = p_1)$	0,1	0,1	0,3	0,2	0,2	0,1

Ce tableau donne aussi la loi de probabilité de la variable P_1 .

Et cette loi de probabilité permet de calculer les paramètres de la variable P_1 :

$E(P_1) = E(T^2)$
$= 23,2$ (déjà calculé dans la première question)

$E(P_1) = 23,2$ volts

5°/ Punition : variable P_2.

Valeurs de P_2 en fonction des valeurs de T :

t	2	3	4	5	6	7
$p_2 = 10\,t + 5$	25	35	45	55	65	75
$P(T = t) = P(P_2 = p_2)$	0,1	0,1	0,3	0,2	0,2	0,1

Ce tableau donne aussi la loi de probabilité de la variable P_2.

Et cette loi de probabilité permet de calculer les paramètres de la variable P_2 :

$E(P_2) = 25 \times 0{,}1 + 35 \times 0{,}1 + 45 \times 0{,}3 + 55 \times 0{,}2 + 65 \times 0{,}2 + 75 \times 0{,}1$
$= 2{,}5 + 3{,}5 + 13{,}5 + 11{,}0 + 13{,}0 + 7{,}5$
$= 51{,}0$ volts

$$\boxed{E(P_2) = 51 \text{ V}}$$

$Var(P_2) = E(P_2^2) - (E(P_2))^2$
$= 25^2 \times 0{,}1 + 35^2 \times 0{,}1 + 45^2 \times 0{,}3 + 55^2 \times 0{,}2 + 65^2 \times 0{,}2 + 75^2 \times 0{,}1 - 51^2$
$= 625 \times 0{,}1 + 1225 \times 0{,}1 + 2025 \times 0{,}3 + 3025 \times 0{,}2 + 4225 \times 0{,}2 + 5625 \times 0{,}1 - 2601$
$= 62{,}5 + 122{,}5 + 607{,}5 + 605{,}0 + 845{,}0 + 562{,}5 - 2601$
$= 2805 - 2601$
$= 204$

$$\boxed{Var(P_2) = 204 \text{ V}^2}$$

Comme la variable aléatoire P_2 est une fonction linéaire de la variable aléatoire T :

$$P_2 = 10\,T + 5$$

on peut calculer les paramètres de P_2 en fonction des paramètres, déjà calculés, de T.
Pour cela on utilise les formules, faciles à démontrer :

$$E(a\,T + b) = a\,E(T) + b$$
$$Var(a\,T + b) = a^2\,Var(T)$$

Ces formules donnent ici :

$E(P_2) = E(10\,T + 5)$
$= 10\,E(T) + 5$
$= 10 \times 4{,}6 + 5$
$= 51$ V

$Var(P_2) = Var(10\,T + 5)$
$= 10^2\,Var(T)$
$= 100\,Var(T)$
$= 100 \times 2{,}04$
$= 204$

On retrouve, bien plus facilement, les résultats obtenus directement à partir de la loi de probabilité.

Chapitre 3. Variables aléatoires réelles discrètes.

Enoncés.

Exercice 7. Somme, produit, Sup, Inf, de deux dés.

On lance, au hasard et simultanément, deux dés, un noir et un rouge.
Soient N le résultat affiché par le dé noir et R le résultat affiché par le dé rouge.

1°/ Calculer la loi de probabilité de chacune des variables aléatoires :

1. $S = N + R$
2. $Z = N\,R$
3. $M = Sup\,(N, R)$
4. $K = Inf\,(N, R)$

2°/ En déduire que $14 - S$ et S suivent la même loi de probabilité, et que $6 - M$ et K suivent la même loi de probabilité.

Solution.

1°/ Loi de la somme S.

S prend les valeurs

$N \setminus R$	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Les probabilités sont les mêmes pour chaque événement élémentaire, et valent toutes $\frac{1}{36}$. La loi de S s'en déduit.

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P\,(S = k)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

2°/ Loi du produit Z.

Z prend les valeurs

$N \setminus R$	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	15	18
4	4	8	12	16	20	24
5	5	10	14	20	25	30
6	6	12	18	24	30	36

Les probabilités sont les mêmes pour chaque événement élémentaire, et valent toutes $\frac{1}{36}$. La loi de Z s'en déduit.

k	1	2	3	4	5	6	8	9	10	12	15	16	18	20	24	25	30	36
$P(Z = k)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

3°/ Loi du *Sup M*.

M prend les valeurs

$N \setminus R$	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	2	3	4	5	6
3	3	3	3	4	5	6
4	4	4	4	4	5	6
5	5	5	5	5	5	6
6	6	6	6	6	6	6

Les probabilités sont les mêmes pour chaque événement élémentaire, et valent toutes $\frac{1}{36}$. La loi de M s'en déduit.

k	1	2	3	4	5	6
$P(M = k)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$

4°/ Loi de l'*Inf K*.

K prend les valeurs

$N \setminus R$	1	2	3	4	5	6
1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	2	2	2	2
3	1	2	3	3	3	3

4	1	2	3	4	4	4
5	1	2	3	4	5	5
6	1	2	3	4	5	6

Les probabilités sont les mêmes pour chaque événement élémentaire, et valent toutes $\frac{1}{36}$. La loi de K s'en déduit.

k	1	2	3	4	5	6
$P(K = k)$	$\frac{11}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{1}{36}$

Par symétrie des tableaux des lois de probabilités et compte tenu du fait que $P(6 - M = k) = P(M = 6 - k)$, on constate que K suit la même loi de probabilité que $6 - M$.

Chapitre 3. Variables aléatoires réelles discrètes.

Enoncés.

Exercice 8. Loi du produit de deux nombres.

On choisit au hasard deux nombres différents de l'ensemble $K = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, toute paire d'éléments de K ayant la même probabilité d'être choisie. On note X le produit des deux éléments choisis. 1°/ Déterminer la loi de X et calculer son espérance mathématique et sa variance. 2°/ Tracer le graphe de la fonction de répartition F_X.	

Solution.

1°/ Loi de X.

Il y a $\binom{5}{2}$ = 10 combinaisons de deux nombres différents pris parmi les cinq que comporte l'ensemble K.

Chacune de ces combinaisons a, par hypothèse, une probabilité de 0,1.

Combinaison	(–2,–1)	(–2,0)	(–2,1)	(–2,2)	(–1,0)	(–1,1)	(–1,2)	(0,1)	(0,2)	(1,2)
Probabilité	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1
Produit X	2	0	–2	–4	0	–1	–2	0	0	2

Le produit X prend les valeurs –4, –2, –1, 0, 2, avec les probabilités qui se déduisent du tableau précédent :

k	–4	–2	–1	0	2
$P\,[X = k]$	0,1	0,2	0,1	0,4	0,2

L'espérance de X se déduit de cette loi de probabilité :

$$E\,(X) = 0{,}1 \times (-4) + 0{,}2 \times (-2) + 0{,}1 \times (-1) + 0{,}4 \times 0 + 0{,}2 \times 2 = -0{,}5.$$

$$\boxed{E\,(X) = -0{,}5.}$$

La variance est alors donnée par la formule de la variance (formule de König) :

$$Var\,(X) = E\,(X^2) - (E\,(X))^2$$
$$= 0{,}1 \times 16 + 0{,}2 \times 4 + 0{,}1 \times 1 + 0{,}4 \times 0 + 0{,}2 \times 4 - 0{,}25 = 3{,}05$$

$$\boxed{Var\,(X) = 3{,}05}$$

2°/ Fonction de répartition.

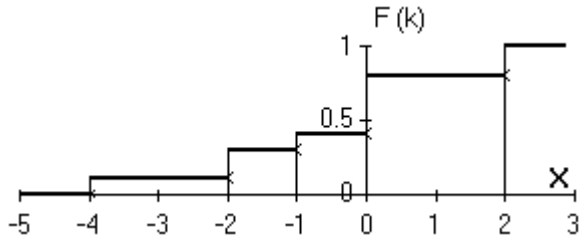
La fonction de répartition de X est définie par :

$$F(x) = P[X \leq x]$$

Elle est nulle si $x < -4$.
Elle est égale à 1 à partir de $x = 2$.
Entre les deux, elle augmente par palier en étant continue à gauche, suivant le tableau de la loi de probabilité :

k	–4	–2	–1	0	2
$P[X = k]$	0,1	0,2	0,1	0,4	0,2
$F(k)$	0,1	0,3	0,4	0,8	1,0

Son graphe est donc :



Chapitre 3. Variables aléatoires réelles discrètes.

Enoncés.

Exercice 9. Tirage exhaustif de boules blanches.

Une urne contient k boules blanches et $n-k$ boules noires. On les tire une à une sans remise. X est la variable aléatoire désignant le tirage où est extraite de l'urne la dernière boule blanche. 1°/ Quelle est la loi de X ? 2°/ Calculer $\sum_{i=p}^{i=n} \binom{i}{p}$. 3°/ Calculer $E(X)$.	

Solution.

1°/ Loi de X.

X prend des valeurs entières, de k à n, puisqu'il faut au moins k tirages pour sortir toutes boules blanches, et puisqu'au bout de n tirages, on est sûr d'avoir tiré toutes les boules, donc toutes les boules blanches.

La probabilité de $X = r$, est le rapport entre le nombre de cas favorables et le nombre de cas possibles.

Un cas favorable est un arrangement de r boules caractérisé par les propriétés suivantes :
— parmi les $r-1$ premières boules, il y a $k-1$ boules blanches et $r-k$ boules noires.
— la r^e boule est la dernière boule blanche.

Le nombre de façons de tirer $k-1$ boules blanches, parmi les k possibles, et $r-k$ boules noires, parmi les $n-k$ possibles, au cours des $(r-1)$ premiers tirages est
— le nombre de façons de positionner $k-1$ boules blanches parmi les $r-1$ tirages effectués, soit $\binom{r-1}{k-1}$,
— multiplié par le nombre de façons de tirer $r-k$ boules noires parmi les $n-k$ boules noires, soit $\binom{n-k}{r-k}$,
— multiplié par le nombre de façons de permuter les k boules blanches, soit $k\,!$,
— multiplié par le nombre de façons de permuter les $r-k$ boules noires, soit $(r-k)\,!$.
— Au r^e tirage, il y a une seule façon de choisir la dernière boule blanche.
On obtient ainsi un nombre de cas favorables de

$$\frac{(r-1)!}{(k-1)!\,(r-k)!}\,k\,!\,\frac{(n-k)!}{(r-k)!\,(n-r)!}\,(r-k)\,!$$

Le nombre de cas possibles est le nombre de combinaisons de n boules, r à r, multiplié par le nombre de

permutations possibles des r boules que l'on a choisies : $\frac{n!}{r!(n-r)!}\, r!$

$$P[X=r] = k\,\frac{(r-1)!}{(r-k)!} \times \frac{(n-k)!}{(n-r)!} \times \frac{(n-r)!}{n!} = \frac{(r-1)!}{(k-1)!\,(r-k)!} \times \frac{k!\,(n-k)!}{n!} = \frac{\binom{r-1}{k-1}}{\binom{n}{k}}$$

C'est le rapport entre le nombre de façons de choisir $k-1$ boules blanches parmi $r-1$, et le nombre de façons de choisir k boules parmi n.

$$\boxed{P[X=r] = \frac{\binom{r-1}{k-1}}{\binom{n}{k}}}$$

Par exemple, si $k = n$ (0 boule noire), on peut avoir seulement $r = n$ et $P[X = n] = 1$.

2°/ Formule d'analyse combinatoire.

Il faut calculer $\sum_{i=p}^{i=n} \binom{i}{p}$.

Pour $n = p$, il y a un seul terme dans la somme, il vaut $1 = \binom{p}{p} = \binom{p+1}{p+1}$.

Pour $n = p + 1$, il y a deux termes, la somme vaut $\binom{p}{p} + \binom{p+1}{p} = 1 + (p+1) = p + 2 = \binom{p+2}{p+1}$

Pour n quelconque plus grand que p, la somme comporte $n - (p-1)$ termes. Supposons, hypothèse de récurrence, qu'elle soit donnée, pour un $n \geq p$, par :

$$\binom{p}{p} + \binom{p+1}{p} + \ldots + \binom{n}{p} = \binom{n+1}{p+1}$$

Alors, pour $n + 1$, il faut ajouter, dans la somme, le terme $\binom{n+1}{p}$, ce qui porte la somme à $\binom{n+1}{p+1} + \binom{n+1}{p} = \binom{n+2}{p+1}$, de sorte que la formule de l'hypothèse de récurrence est vraie pour $n + 1$, dès qu'elle est vraie pour n.
Elle est donc vraie pour tout n supérieur à p.

$$\boxed{\sum_{i=p}^{i=n} \binom{i}{p} = \binom{n+1}{p+1}}$$

3°/ Espérance de *X*.

$$E(X) = \sum_{r=k}^{r=n} r\,P[X=r] = \sum_{r=k}^{r=n} r\,\frac{\binom{r-1}{k-1}}{\binom{n}{k}} = \sum_{r=k}^{r=n} r\,\frac{(r-1)!}{(k-1)!\,(r-k)!} \times \frac{k!\,(n-k)!}{n!} = k\,\frac{k!\,(n-k)!}{n!} \sum_{r=k}^{r=n} \binom{r}{k}$$

En appliquant le résultat de la deuxième question, on trouve donc :

$$E(X) = k\,\frac{k!\,(n-k)!}{n!}\binom{n+1}{k+1} = k\,\frac{k!\,(n-k)!}{n!}\,\frac{(n+1)!}{(k+1)!\,(n-k)!} = k\,\frac{n+1}{k+1}$$

$$\boxed{E(X) = k\,\frac{n+1}{k+1}}$$

Par exemple, pour $k = n$ (0 boule noire), il faut en moyenne n boules pour tirer les n boules blanches.

Chapitre 3. Variables aléatoires réelles discrètes.

Enoncés.

Exercice 10. Loi de probabilité sur {0, 1, ... , *n*}.

1°/ On considère un réel $a > 0$, un entier $n \geq 2$, et un réel p_0, $0 \leq p_0 \leq \frac{1}{n+1}$. Montrer que la suite définie par $p_r = p_0 + a\,r$, $0 \leq r \leq n$, est, pour une valeur convenable de a, une loi de probabilité sur $\Omega = \{0, 1, 2, \ldots, n\}$. 2°/ Si $P(X = r) = p_r$, alors calculer $E(X)$. Indication : on pourra utiliser la formule $\sum_{k=1}^{k=n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.	

Solution.

1°/ Condition de normalisation.

La somme des probabilités doit être égale à 1.

$$\sum_{r=0}^{r=n} p_r = \sum_{r=0}^{r=n} (p_0 + a\,r) = 1$$

$$(n+1)\,p_0 + a \sum_{r=0}^{r=n} r = 1$$

$$a\,\frac{n(n+1)}{2} = 1 - (n+1)\,p_0$$

$$\boxed{a = 2 \times \frac{1-(n+1)\,p_0}{n(n+1)}}$$

Comme, par définition, p_0 est compris entre 0 et $\frac{1}{n+1}$, a est un nombre réel, compris entre 0 et $\frac{2}{n(n+1)}$.
p_r est un nombre réel positif, car somme de nombres réels positifs.
Comme la somme des p_r est égale à 1, les p_r sont tous des nombres réels compris entre 0 et 1 : ils définissent donc la loi de probabilité d'une variable aléatoire X :

$$\boxed{P(X = r) = p_r = p_0 + 2 \times \frac{1-(n+1)\,p_0}{n(n+1)} \times r.}$$

2°/ Espérance de X.

$$E(X) = \sum_{r=0}^{r=n} r\,P(X=r) = p_0 \sum_{r=0}^{r=n} r + a \sum_{r=0}^{r=n} r^2 = p_0 \frac{n(n+1)}{2} + a \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$E(X) = p_0 \frac{n(n+1)}{2} + (1-(n+1)\,p_0)\frac{2n+1}{3}$$

$$= \frac{2n+1}{3} + p_0 \frac{n+1}{6}(3n-4n-2)$$

$$\boxed{E(X) = \frac{2n+1}{3} - p_0 \frac{(n+1)(n+2)}{6}.}$$

Suivant la valeur de p_0, $E(X)$ varie entre $\frac{n}{2}$, pour $p_0 = \frac{1}{n+1}$, et $\frac{2n+1}{3}$ pour $p_0 = 0$.

Chapitre 3. Variables aléatoires réelles discrètes.

Enoncés.

Exercice 11. Tirage sans remise de *n* boules numérotées.

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n ($n \geq 2$) et indiscernables par ailleurs. On effectue n tirages successifs, au hasard, d'une boule dans cette urne, sans remise.

1°/ Quelle est la probabilité pour que la boule n° 1 soit tirée au k^e tirage ($k = 1, 2, \dots, n$) ?

2°/ a) Quelle est la probabilité pour que les boules n° 1 et n° 2 soient tirées l'une derrière l'autre (consécutivement) dans cet ordre ?

b) Quelle est la probabilité pour que les boules n° 1 et n° 2 soient tirées dans cet ordre, consécutivement ou non) ?

3°/ On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre minimum de tirages nécessaires pour que les boules n° 1 et n° 2 soient tirées (dans un ordre quelconque).

a) Pour tout entier $k = 2, 3, \dots, n$, et pour $i = 1, 2$, on désigne par E_i et F_i, respectivement, les évènements

- "La boule n° i est tirée au cours des $k - 1$ premiers tirages ;
- "La boule n° i est tirée au k^e tirage.

Calculer les probabilités de $E_1 \cap F_2$ et de $E_2 \cap F_1$.

b) Donner la loi de probabilité de X.

c) Calculer l'espérance mathématique de X.

On rappelle que $\sum_{k=1}^{k=n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ et $\sum_{k=1}^{k=n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Solution.

Comme les n tirages se font sans remise, ils peuvent se faire de n ! façons différentes, correspondant au nombre de permutations d'un ensemble à n éléments. Dans cette épreuve, un événement élémentaire est une permutation de l'ensemble à n éléments $\{1, \dots, n\}$ et chaque permutation a la même probabilité. L'ensemble Ω des évènements élémentaires est l'ensemble des bijections de l'ensemble $T = \{1, 2, \dots, n\}$ des tirages sur l'ensemble $U = \{1, 2, \dots, n\}$ des boules. $Card\ (\Omega) = n$!.

1°/ Probabilité de tirer la boule n°1 au k^e tirage.

On peut raisonner de plusieurs façons :

- Il y a une seule façon de mettre la boule 1 à la place k et, cette place étant choisie, les autres boules peuvent de répartir de $(n - 1)$! façons dans les $n - 1$ places restantes. Au total la probabilité de tirer la boule 1 au k^e tirage est $\frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$.

- L'ensemble A des cas favorables est l'ensemble

$$A = \{f \in \Omega \mid f(k) = 1\}$$

$Card(A) = (n-1)!$ (nombre des permutations de l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$ telles que $f(k) = 1$).

$$P(A) = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)} = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}.$$

- Une autre façon de raisonner aurait été de dire : la probabilité de ne pas tirer la boule 1 au premier tirage est $\frac{n-1}{n}$; la boule 1 n'ayant pas été tirée au premier tirage, la probabilité de ne pas tirer la boule 1 au 2e tirage est $\frac{n-2}{n-1}$; et ainsi de suite : la boule 1 n'ayant pas été tirée au cours des $(k-2)$ premiers tirages, la probabilité de ne pas tirer la boule 1 au $(k-1)^e$ tirage est $\frac{n-(k-1)}{n-(k-2)}$. Au total, la probabilité de ne pas tirer la boule 1 au cours des $(k-1)$ premiers tirages est $\frac{n-1}{n} \times \frac{n-2}{n-1} \times \dots \times \frac{n-(k-1)}{n-(k-2)} = \frac{n-(k-1)}{n}$. La boule 1 n'ayant pas été choisie au cours des $(k-1)$ premiers tirages, la probabilité de choisir la boule 1 au k^e tirage est $\frac{1}{n-(k-1)}$. La probabilité de l'événement "La boule 1 est tirée au k^e tirage" est donc $\frac{n-(k-1)}{n} \times \frac{1}{n-(k-1)} = \frac{1}{n}$.
- Comme les boules sont indiscernables, la boule n° 1 a autant de chances de sortir au 1er tirage qu'au k^e tirage, quel que soit $k = 1, \dots, n$: la probabilité qu'elle sorte au k^e tirage est donc $\frac{1}{n}$.

2°/ Probabilité de tirer les boules 1 et 2 dans l'ordre.

a) Tirages consécutifs.

On peut proposer deux méthodes équivalentes de raisonnement.

- On pose $B = \bigcup_{k=1}^{k=n-1} B_k$, avec $B_k = \{f \in \Omega \mid f(k) = 1 \text{ et } f(k+1) = 2\}$.

$$P(B_k) = \frac{Card(B_k)}{Card(\Omega)} = \frac{(n-2)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)}, \text{ pour tout } k \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Comme les B_k sont deux à deux incompatibles (on ne peut pas avoir, à la fois $f(k) = 1$ et $f(k') = 1$ sans avoir $k = k'$, puisque f est une bijection), on obtient, par additivité :

$$P(B) = P(B_k) = (n-1)\frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n}.$$

- Le nombre de permutations des n boules dans lesquelles les boules 1 et 2 se suivent est $(n-2)! \times (n-1) = (n-1)!$.

En effet : il y a $(n-1)$ façons de choisir la place de la boule 1, et, cette place étant choisie, la place de la boule 2 est à la suite de la boule 1, et il y a $(n-2)!$ permutations possibles des $n-2$ nombres différents de 1 et de 2 pour occuper les $n-2$ places restantes.

Au total, la probabilité de tirer consécutivement les deux boules 1 et 2 est : $\frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$.

b) Tirages non obligatoirement consécutifs.

Là encore, deux méthodes équivalentes de raisonnement.

- On pose $C = \bigcup_{1 \leqslant i < j \leqslant n} C_{ij}$, avec $C_{ij} = \{f \in \Omega \mid f(i) = 1 \text{ et } f(j) = 2\}$.

  $P(C_{ij}) = \frac{Card(C_{ij})}{Card(\Omega)} = \frac{(n-2)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)}$, pour tout couple (i, j) vérifiant $1 \leq i < j \leq n$.

  Comme il existe $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ couples (i, j) vérifiant $1 \leq i < j \leq n$, on obtient par additivité des probabilités d'évènements incompatibles deux à deux :

  $$P(C) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} P(C_{ij}) = \frac{n(n-1)}{2} \times \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{2}$$

- Comme les boules sont équiprobables, il y a autant de chances de tirer les boules 1 et 2 dans l'ordre (1, 2) que dans l'ordre (2, 1) : la probabilité de tirer les boules 1 et 2 dans l'ordre est donc $\frac{1}{2}$. En effet, à chaque permutation où les boules 1 et 2 sont dans l'ordre (1,2), correspond de façon biunivoque une permutation dans laquelle les boules 1 et 2 sont dans l'ordre (2,1), celle dans laquelle on permute seulement les boules 1 et 2, pour passer de l'une à l'autre.

3°/ Etude de la variable aléatoire *X*.

a) Probabilités d'événements.

- L'événement $E_1 \cap F_2$ est l'événement :

  "La boule 1 est tirée au cours des $k - 1$ premiers tirages et la boule 2 est tirée au k^e tirage".

  $E_1 \cap F_2$ est réunion $\bigcup_{j=1}^{j=k-1} A_j$ des événements élémentaires $A_j = \{f \in \Omega \mid f(j) = 1 \text{ et } f(k) = 2\}$. Or on a :

  $P(A_j) = \frac{Card(A_j)}{Card(\Omega)} = \frac{(n-2)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)}$, pour tout $j \in \{1, 2, \ldots, k-1\}$.

  Donc, par additivité :

$$P(E_1 \cap F_2) = \sum_{j=1}^{j=k-1} P(A_j) = \frac{k-1}{n(n-1)}.$$

- Il y a $(k-1)$ façons de placer la boule 1 dans l'un des $(k-1)$ premiers tirages. Cette place étant choisie, il y a $\binom{n-2}{k-2}$ façons de choisir $(k-2)$ nombres parmi les nombres différents de 1 et de 2, et $(k-2)$! façons de les placer, aux côtés de 1, dans les $(k-2)$ places libres parmi les $(k-1)$ premières.
  Ensuite, il y a une seule façon de choisir la boule 2 pour le k^e tirage, et $(n-k)$! façons de placer les $(n-k)$ boules restantes dans les $(n-k)$ derniers tirages. Au total, il y a $(k-1) \times \binom{n-2}{k-2} \times (k-2)! \times 1 \times (n-k)! = (k-1) \times (n-2)!$ tirages possibles des n boules dans lesquels "la boule 1 est tirée au cours des $k-1$ premiers tirages et la boule 2 est tirée au k^e tirage". La probabilité de l'événement $E_1 \cap F_2$ est donc

$$P(E_1 \cap F_2) = \frac{(k-1) \times (n-2)!}{n!} = \frac{k-1}{n(n-1)}.$$

$$\boxed{P(E_1 \cap F_2) = \frac{k-1}{n(n-1)}.}$$

De façon symétrique, la probabilité de l'événement $E_2 \cap F_1$ est la même :

$$\boxed{P(E_2 \cap F_1) = \frac{k-1}{n(n-1)}}$$

b) Loi de probabilité de *X*.

X prend des valeurs de 2 à *n*. En effet, il faut au moins 2 tirages pour tirer les boules 1 et 2, et, en *n* tirages, on est certain d'avoir tiré les boules 1 et 2, puisqu'on les a toutes tirées.
L'événement $X = k$ est réunion des deux évènements incompatibles $E_1 \cap F_2$ et $E_2 \cap F_1$: sa probabilité est donc la somme des probabilités de ces deux évènements.

$$\boxed{P(X = k) = 2\,\frac{k-1}{n(n-1)}}$$

c) Espérance mathématique de *X*.

$$E(X) = \sum_{k=2}^{k=n} k\,P(X = k) = 2 \sum_{k=2}^{k=n} \frac{k(k-1)}{n(n-1)} = \frac{2}{n(n-1)}\left(\sum_{k=2}^{k=n} k^2 - \sum_{k=2}^{k=n} k \right)$$
$$= \frac{2}{n(n-1)}\left(\sum_{k=1}^{k=n} k^2 - 1 - \sum_{k=1}^{k=n} k + 1 \right) = \frac{2}{n(n-1)}\left(\sum_{k=1}^{k=n} k^2 - \sum_{k=1}^{k=n} k \right)$$
$$= \frac{2}{n(n-1)}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} \right)$$

$$= \frac{n+1}{n-1}\left(\frac{2n+1}{3} - 1 \right) = \frac{2(n+1)}{3}$$

$$\boxed{E(X) = \frac{2(n+1)}{3}}$$

Chapitre 3. Variables aléatoires réelles discrètes.

Enoncés.

Exercice 12. Le jeu des métiers.

Dans un jeu télévisé, quatre personnages se présentent, chacun exerçant un métier différent.
Le joueur doit associer à chacun des 4 personnages un des 4 métiers proposés, mais ne peut associer à un personnage un métier qu'il a déjà cité auparavant pour un autre.
Si le nombre n de réponses justes n'est pas nul, le gain est de $2^{n-1} \times 200$ euros.
Un joueur répond au hasard et on note G la variable aléatoire représentant son gain.

1°/ Calculer la loi de probabilité de G.
2°/ Quelle est la probabilité que le gain ne soit pas nul ?
3°/ Quelle est l'espérance mathématique de G ?
4°/ Quelle est la variance de G ?

Solution.

1°/ Loi de probabilité du gain.

Attribuer l'un des quatre métiers aux quatre personnages établit une bijection de l'ensemble des métiers sur l'ensemble des personnages.
Les événements élémentaires sont les bijections d'un ensemble à quatre éléments dans un ensemble à quatre éléments.
Il y en a autant que de permutations d'un ensemble à quatre éléments, soit 4 ! = 24.
Comme le candidat répond au hasard, il attribue à chacune des permutations la même probabilité.
La loi de probabilité sur l'ensemble fondamental, ou espace des épreuves, est une loi uniforme.
Calculons le gain pour chacune des 24 permutations.

Personnage 1	Personnage 2	Personnage 3	Personnage 4	Gain
Métier 1	Métier 2	Métier 3	Métier 4	1 600
1	2	4	3	400
1	3	2	4	400
1	3	4	2	200
1	4	2	3	200
1	4	3	2	400
2	1	3	4	400
2	1	4	3	0
2	3	1	4	200
2	3	4	1	0
2	4	1	3	0
2	4	3	1	200
3	1	2	4	200

3	1	4	2	0
3	2	1	4	400
3	2	4	1	200
3	4	1	2	0
3	4	2	1	0
4	1	2	3	0
4	1	3	2	200
4	2	1	3	200
4	2	3	1	400
4	3	1	2	0
4	3	2	1	0

Ce tableau permet de calculer la loi de probabilité du gain :

Gain	0	200	400	1600
Probabilité	$\frac{9}{24} = \frac{3}{8}$	$\frac{8}{24} = \frac{1}{3}$	$\frac{6}{24} = \frac{1}{4}$	$\frac{1}{24}$

2°/ Gain non nul.

La probabilité que le gain ne soit pas nul est :

$$P\,[G > 0] = 1 - P\,[G = 0] = 1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$$

$$\boxed{P\,[G > 0] = \frac{5}{8}}$$

3°/ Espérance du gain.

$$E\,(G) = 0 \times \frac{3}{8} + 200 \times \frac{1}{3} + 400 \times \frac{1}{4} + 1\,600 \times \frac{1}{24}$$
$$= 200 \times \frac{1}{3} + 100 + 200 \times \frac{1}{3}$$
$$= \frac{700}{3} \approx 233{,}33\ €$$

$$\boxed{E\,(G) = \frac{700}{3}}$$

4°/ Variance du gain.

$$Var\,(G) = E\,(G^2) - (E\,(G))^2$$
$$E\,(G^2) = 0^2 \times \frac{3}{8} + 200^2 \times \frac{1}{3} + 400^2 \times \frac{1}{4} + 1\,600^2 \times \frac{1}{24}$$
$$= (4 \times \frac{1}{3} + 16 \times \frac{1}{4} + 256 \times \frac{1}{24}) \times 10^4$$
$$= (4 \times \frac{1}{3} + 4 + 32 \times \frac{1}{3}) \times 10^4$$

$= 16 \times 10^4$

$Var\,(G) = 16 \times 10^4 - \frac{49}{9} \times 10^4$

$= \frac{95}{9} \times 10^4$

$$\boxed{Var\,(G) = \frac{95}{9} \times 10^4 \text{ €}^2}$$

L'écart-type, racine carrée de la variance, vaut donc $\frac{\sqrt{95}}{3} \times 10^2 \approx 324{,}89$ €.

Chapitre 3. Variables aléatoires réelles discrètes.

Enoncés.

Exercice 13. Jeu de 5000.

Un joueur lance cinq dés ordinaires bien équilibrés indépendants, à six faces marquées de 1 à 6. Les 1 obtenus valent 100 points chacun. Les 5 obtenus valent 50 points chacun. Les autres résultats ne valent rien. Quelle est l'espérance mathématique du gain dans un jet des 5 dés ?	

Solution.

Plusieurs méthodes sont applicables.

1°/ Espérance du gain en un jet de cinq dés.

Pour le jet d'un dé de loi uniforme, l'espérance de gain G_1 est :

$E(G_1) = 100 \times \frac{1}{6} + 50 \times \frac{1}{6} + 0 \times \frac{4}{6} = 25.$

Pour le jet de cinq dés indépendants de même loi uniforme, l'espérance du gain $G = G_1 + G_2 + G_3 + G_4 + G_5$ est :

$$E(G) = E(G_1) + E(G_2) + E(G_3) + E(G_4) + E(G_5) = 5\,E(G_1) = 125.$$

2°/ Nombre de 1 et nombre de 5 en cinq dés.

Le nombre X_1 de 1 obtenus en cinq dés indépendants suit une **loi binomiale** de paramètres $n = 5$, $p = \frac{1}{6}$.

$E(X_1) = n\,p = \frac{5}{6}$.

Le nombre X_2 de 5 obtenus en cinq dés indépendants suit une **loi binomiale** de paramètres $n = 5$, $p = \frac{1}{6}$.

$E(X_2) = n\,p = \frac{5}{6}$.

Le gain G est $G = 100\,X_1 + 50\,X_2$.

$E(G) = 100\,E(X_1) + 50\,E(X_2) = 150 \times \frac{5}{6} = 125.$

3°/ Loi multinomiale.

Pourquoi faire simple quand on sait faire compliqué ???

Le tableau des résultats possibles est le suivant :

Résultat	1	5	{2, 3, 4, 6}
Nombre	X_1	X_2	X_0
Probabilité du résultat pour un dé	$p_1 = \frac{1}{6}$	$p_2 = \frac{1}{6}$	$p_0 = \frac{4}{6}$

$$X_1 + X_2 + X_0 = 5$$

Le triplet (X_1, X_2, X_0) suit une **loi multinomiale**.
La loi conjointe du couple (X_1, X_2) est donc donnée par la loi multinomiale :

$$P[X_1 = k_1 \text{ et } X_2 = k_2] = \frac{5!}{k_1!\, k_2!\, (5 - k_1 - k_2)!} \left(\frac{1}{6}\right)^{k_1} \left(\frac{1}{6}\right)^{k_2} \left(\frac{4}{6}\right)^{5 - k_1 - k_2}$$

Les lois de probabilités marginales de X_1 et de X_2 sont toutes deux des lois binomiales de paramètre $n = 5$ et $p = \frac{1}{6}$, mais ces deux variables aléatoires ne sont **pas indépendantes**.

La fonction génératrice du couple (X_1, X_2) est :

$$g_{(X_1, X_2)}(u, v) = (p_1 u + p_2 v + p_0)^5 = \left(\frac{u + v + 4}{6}\right)^5$$

Le gain $G(X_1, X_2)$ associé à un couple (X_1, X_2) est $100 X_1 + 50 X_2$.

Sa fonction génératrice est
$g_G(u) = E(u^{(100 X_1 + 50 X_2)}) = g_{(X_1, X_2)}(u^{100}, u^{50}) = \left(\frac{u^{100} + u^{50} + 4}{6}\right)^5$.

$$\boxed{g_G(u) = \left(\frac{u^{100} + u^{50} + 4}{6}\right)^5}$$

Son espérance mathématique est $E(G) = g'_G(1) = \frac{5}{6}\left[100 u^{99} + 50 u^{49}\right]_{u=1} \left[\left(\frac{u^{100} + u^{50} + 4}{6}\right)^4\right]_{u=1} = 125$.

$$\boxed{E(G) = 125}$$

Exercices

Loi uniforme.

1. Définition.

Soit n un entier supérieur ou égal à 1.
On dit qu'une variable aléatoire X suit une **loi uniforme sur $\{x_1, \dots, x_n\}$** si sa loi de probabilité est :

$p_k = P(X = x_k) = \frac{1}{n}$, $k = 1, \dots, n$.

x_k	x_1	...	x_n
p_k	$\frac{1}{n}$	...	$\frac{1}{n}$

2. Propriétés.

Si X suit une loi uniforme sur $\{x_1, \dots, x_n\}$:

$$E(X) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n} x_k$$

$$Var(X) = \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{k=n} x_k^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{k=n} x_k\right)^2\right)$$

3. Cas particulier.

Si X suit une **loi uniforme sur {1, ... , n}** (relation notée $X \rightsquigarrow U[1, n]$), les relations :

$$\sum_{k=1}^{k=n} k = \frac{n(n+1)}{2} \text{ et } \sum_{k=1}^{k=n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

entraînent :

$$E(X) = \frac{n+1}{2}$$

$$Var(X) = \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{(n+1)^2}{4} = \frac{n+1}{2}\left(\frac{2n+1}{3} - \frac{n+1}{2}\right) = \frac{n+1}{2} \times \frac{n-1}{6} = \frac{n^2-1}{12}$$

$$g_X(u) := E(u^X) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n} u^k = \frac{u}{n}(1 + u + \dots + u^{n-1}) = \frac{u}{n}\frac{1-u^n}{1-u}.$$

HAUT

Chapitre 4. Loi uniforme.

Exercices

Exercice 1. Jet de dé.
Exercice 2. Tirage de boules dans une urne.
Exercice 3. Le problème des Sophie.
Exercice 4. Gain dans un lancer de dé.
Exercice 5. Lancer de trois pièces.
Exercice 6. Jeu de dé en deux lancers.

Exercice 1. Jet de dé.

On lance un dé équilibré à six faces numérotées de 1 à 6. Soit X le numéro de la face supérieure du dé. 1°/ Modéliser l'expérience aléatoire en précisant l'ensemble fondamental Ω et la probabilité. 2°/ Préciser le nom de la loi de probabilité de X et calculer ses paramètres.	Solution

HAUT

Exercice 2. Tirage de boules dans une urne.

Une urne contient une boule blanche et une boule noire. On prend dans cette urne une boule au hasard, on la remet et on ajoute une boule de la même couleur. On fait un deuxième tirage d'une boule au hasard dans cette urne.

1°/ Modéliser cette expérience en décrivant l'ensemble fondamental Ω. Préciser son cardinal.
2°/ Quelle est la loi de probabilité du nombre de boules blanches dans l'urne, juste avant le deuxième tirage ? Quelle est la loi de probabilité de la couleur de la deuxième boule tirée ?
3°/ Quelle est la loi de probabilité du nombre de boules blanches dans l'urne, après le deuxième tirage ? Quelle est la loi de probabilité du nombre de boules noires dans l'urne après le deuxième tirage ?
4°/ Après le deuxième tirage, on remet dans l'urne la boule tirée et on en ajoute une de même couleur. On répète ce petit jeu plusieurs fois. Notons B_n le nombre de boules blanches et N_n le nombre de boules noires présentes après n répétitions.

Montrer par récurrence que, pour tout $k = 1, \dots, n+1$, $P(B_n = k) = \frac{1}{n+1}$.

(justifier soigneusement les calculs). De quelle loi s'agit-il ?

Solution

HAUT

Exercice 3. Le problème des Sophie.

On suppose que la probabilité à la naissance d'être garçon ou d'être fille est la même, $\frac{1}{2}$.
Dans une famille, tous les enfants ont des prénoms différents.

1°/ La famille comporte deux enfants.
a) Sachant qu'il y a une fille, quelle est la probabilité pour que l'autre enfant soit une fille ?
b) Sachant qu'il y a une fille qui s'appelle Sophie, quelle est la probabilité pour que l'autre enfant soit une fille ?
2°/ La famille comporte *n* enfants.
a) Sachant qu'il y a au moins une fille, quelle est la probabilité pour que tous les enfants soient des filles ?
b) Sachant qu'il y a au moins une fille qui s'appelle Sophie, quelle est la probabilité pour que tous les enfants soient des filles ?

Solution

HAUT

Exercice 4. Gain dans un lancer de dé.

Un joueur paie 15 euros pour jeter au hasard un dé équilibré. Il gagnera :

- 15 euros s'il obtient le 1 ;
- 5 euros s'il obtient le 2 ou le 3 ;
- 60 euros s'il obtient le 6 ;
- 0 dans les autres cas.

Calculer le gain moyen du joueur.

Solution

HAUT

Exercice 5. Lancer de trois pièces.

On lance au hasard 3 pièces successivement. On va supposer l'indépendance des lancers.

1°/ Les pièces sont équilibrées.

a) Expliciter l'espace des épreuves et préciser la loi de probabilité pour cette expérience.
b) Quelle est la probabilité d'avoir deux piles et une face.

Solution

2°/ On note *p* la probabilité de face dans un lancer.

a) Expliciter l'espace des épreuves et préciser la loi de probabilité pour cette expérience.
b) Calculer la probabilité d'avoir deux faces et une pile.
c) Quelle est la probabilité d'obtenir au moins deux faces.

HAUT

Exercice 6. Jeu de dé en deux lancers.

On va jouer aux dés.
On lance un dé jusqu'à ce qu'on obtienne un total de 6 au moins.
Donc si le dé affiche un 6 au premier lancer, le jeu se termine ; sinon, par exemple si, au premier lancer, le dé affiche 5, alors le joueur doit lancer encore mais, dans ce cas, il est sûr de terminer au prochain lancer.
Soient N la variable aléatoire égale au nombre de lancers, et ℓ_1 la variable qui représente le résultat du premier lancer.

1°/ Expliciter :
a) La loi de ℓ_1.
b) La loi conditionnelle de ℓ_1, sachant que $\ell_1 \in \{3 ; 6\}$.
c) $P\,[N = 2 \mid \ell_1 = 2]$ (probabilité conditionnelle sachant que $\ell_1 = 2$).

2°/ Calculer :
a) $P\,[N = 2 \mid \ell_1]$ (probabilité conditionnelle sachant la valeur de ℓ_1).
b) $P\,[N = 2]$.
c) L'espérance conditionnelle $E\,[\ell_1 \mid N = 2]$.

3°/ Déterminer la loi conditionnelle de N sachant $\ell_1 \geq 3$.

Solution

HAUT

Chapitre 4. Loi uniforme.

Enoncés.

Exercice 1. Jet de dé.

On lance un dé équilibré à six faces numérotées de 1 à 6. Soit X le numéro de la face supérieure du dé. 1°/ Modéliser l'expérience aléatoire en précisant l'ensemble fondamental Ω et la probabilité. 2°/ Préciser le nom de la loi de probabilité de X et calculer ses paramètres.	

Solution.

1°/ Modélisation.

Les résultats possibles du jet d'un dé sont les valeurs de la face supérieure du dé : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
Son cardinal est $Card\ (\Omega) = 6$.
L'ensemble des événements est l'ensemble $\mathfrak{P}\ (\Omega)$ des parties de Ω.
Les événements $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{5\}$, $\{6\}$, parties réduites à un élément, sont les événements élémentaires.
Comme le dé est équilibré, on suppose que les résultats possibles sont équiprobables, chacun ayant une probabilité $\frac{1}{6}$.

2°/ Loi de probabilité de X.

La variable aléatoire X est définie sur Ω par $X\ (n) = n$.
On a donc : $p_n := P\ (X = n) = P\ (X^{-1}\ (n)) = P\ (\{n\}) = \frac{1}{6}$.

$$\boxed{p_n := P\ (X = n) = \frac{1}{6},\ n = 1, \ldots, 6.}$$

Les six valeurs possibles de X ont toutes la même probabilité : la loi de X est une **loi uniforme**.

Ses paramètres sont son espérance mathématique $E\ (X)$ et sa variance $Var\ (X)$.

$$E\ (X) = \sum_{n=1}^{n=6} n\, p_n = \frac{1}{6} \sum_{n=1}^{n=6} n = \frac{1}{6} \frac{6 \times (6+1)}{2} = \frac{7}{2} = \frac{6+1}{2}$$

(De façon générale, si $X \rightsquigarrow U\ [1, n]$, $E\ (X) = \frac{n+1}{2}$).

$$Var\ (X) = \sum_{n=1}^{n=6} p_n\ (n - E\ (X))^2 = E\ (X^2) - (E\ (X))^2$$

$E(X^2) = \sum_{n=1}^{n=6} n^2 p_n = \frac{1}{6}\sum_{n=1}^{n=6} n^2 = \frac{1}{6}\frac{6\times(6+1)\times(2\times 6+1)}{6} = \frac{91}{6}$

$Var(X) = \frac{91}{6} - \frac{49}{4} = \frac{35}{12} = \frac{6^2-1}{12}$.

(De façon générale, si $X \rightsquigarrow U[1, n]$, $Var(X) = \frac{n^2-1}{12}$).

Chapitre 4. Loi uniforme.

Enoncés.

Exercice 2. Tirage de boules dans une urne.

Une urne contient une boule blanche et une boule noire. On prend dans cette urne une boule au hasard, on la remet et on ajoute une boule de la même couleur. On fait un deuxième tirage d'une boule au hasard dans cette urne.

1°/ Modéliser cette expérience en décrivant l'ensemble fondamental Ω. Préciser son cardinal.
2°/ Quelle est la loi de probabilité du nombre de boules blanches dans l'urne, juste avant le deuxième tirage ? Quelle est la loi de probabilité de la couleur de la deuxième boule tirée ?
3°/ Quelle est la loi de probabilité du nombre de boules blanches dans l'urne, après le deuxième tirage ? Quelle est la loi de probabilité du nombre de boules noires dans l'urne après le deuxième tirage ?
4°/ Après le deuxième tirage, on remet dans l'urne la boule tirée et on en ajoute une de même couleur. On répète ce petit jeu plusieurs fois. Notons B_n le nombre de boules blanches et N_n le nombre de boules noires présentes après n répétitions.

Montrer par récurrence que, pour tout $k = 1, \dots, n+1$, $P(B_n = k) = \frac{1}{n+1}$.

(justifier soigneusement les calculs). De quelle loi s'agit-il ?

Solution.

1°/ Modélisation.

La boule tirée au premier tirage peut être blanche (événement b_1), ou noire (événement n_1).
La boule tirée au deuxième tirage peut être blanche (événement b_2), ou noire (événement n_2).

Les résultats élémentaires de l'expérience aléatoire constituée de deux tirages successifs sont $b_1 \cap b_2$, $b_1 \cap n_2$, $n_1 \cap b_2$, $n_1 \cap n_2$.
L'ensemble fondamental Ω est donc un ensemble à quatre éléments :

$\Omega = \{b_1 \cap b_2, b_1 \cap n_2, n_1 \cap b_2, n_1 \cap n_2\}$.
$Card(\Omega) = 4$.

Et l'algèbre des événements est l'ensemble des parties $\mathcal{P}(\Omega)$, ensemble à 16 éléments.

Reste à calculer les probabilités des résultats élémentaires, sous l'hypothèse d'équiprobabilité des boules contenues dans l'urne.

Au premier tirage, nous avons $P(b_1) = \frac{1}{2}$, $P(n_1) = \frac{1}{2}$.

Lorsque b_1 est réalisé, on ajoute à l'urne une autre boule blanche de sorte que l'urne contient, avant le deuxième tirage, deux boules blanches et une boule noire, chacune ayant une probabilité $\frac{1}{3}$ d'être tirée au deuxième tirage.
$P(b_2 \mid b_1) = \frac{2}{3}$, $P(n_2 \mid b_1) = \frac{1}{3}$.

Lorsque n_1 est réalisé, on ajoute à l'urne une autre boule noire de sorte que l'urne contient, avant le deuxième tirage, deux boules noires et une boule blanche, chacune ayant une probabilité $\frac{1}{3}$ d'être tirée au deuxième tirage.
$P(b_2 \mid n_1) = \frac{1}{3}$, $P(n_2 \mid n_1) = \frac{2}{3}$.

On en déduit :

$$P(b_1 \cap b_2) = P(b_2 \mid b_1)\, P(b_1) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3}.$$
$$P(b_1 \cap n_2) = P(n_2 \mid b_1)\, P(b_1) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}.$$
$$P(n_1 \cap b_2) = P(b_2 \mid n_1)\, P(n_1) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}.$$
$$P(n_1 \cap n_2) = P(n_2 \mid n_1)\, P(n_1) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3}.$$

Ces probabilités des résultats élémentaires permettent de dresser le tableau des probabilités conjointes des deux tirages :

	b_2	n_2	Total
b_1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$
n_1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$
Total	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

2°/ Lois de probabilité.

1. Loi de probabilité du nombre de boules blanches avant le deuxième tirage.

A l'issue du premier tirage, on ajoute à l'urne initiale une boule de la couleur de celle qui a été tirée au premier tirage.
Le nombre B_1 de boules blanches dans l'urne, juste avant le deuxième tirage, peut donc prendre deux valeurs :

$B_1 = 1$ lorsque la première boule tirée est noire, $P(B_1 = 1) = P(n_1) = \frac{1}{2}$.

$B_1 = 2$ lorsque la première boule tirée est blanche, $P(B_1 = 2) = P(b_1) = \frac{1}{2}$.

D'où la loi de probabilité de B_1 :

k	1	2
$P(B_1 = k)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

2. Loi de probabilité de la couleur de la deuxième boule tirée.

C'est la loi marginale déduite du tableau des probabilités conjointes des deux tirages dressé dans la première question :

$$P(b_2) = P(n_2) = \frac{1}{2}.$$

3°/ Lois de probabilité après le deuxième tirage.

1. Loi de probabilité du nombre de boules blanches restantes à l'issue du deuxième tirage.

Le nombre B_1 de boules blanches dans l'urne avant le deuxième tirage peut prendre, on l'a vu, deux valeurs, 1 et 2.
$\{B_1 = 1\} = n_1$; $\{B_1 = 2\} = b_1$.
Le nombre X de boules blanches dans l'urne après le deuxième tirage peut donc prendre trois valeurs, 0, 1 et 2.
$\{X = 0\} = n_1 \cap b_2$; $P(X = 0) = P(n_1 \cap b_2) = \frac{1}{6}$.
$\{X = 1\} = (b_1 \cap b_2) \cup (n_1 \cap n_2)$; $P(X = 1) = P(b_1 \cap b_2) + P(n_1 \cap n_2) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$
$\{X = 2\} = b_1 \cap n_2$; $P(Y = 2) = P(b_1 \cap n_2) = \frac{1}{6}$.
D'où la loi de probabilité de X :

k	0	1	2
$P(X = k)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$

2. Loi de probabilité du nombre de boules noires restantes à l'issue du deuxième tirage.

Soit Y le nombre de boules noires restantes à l'issue du deuxième tirage.
Avant le deuxième tirage, il y a trois boules dans l'urne : après le deuxième tirage, il n'en reste que deux.
S'il reste X boules blanches, c'est qu'il reste $Y = 2 - X$ boules noires dans l'urne.
La loi de probabilité de Y se déduit de la loi de probabilité de X par symétrie, et comme la loi de X est une loi symétrique, la loi de Y est la même que la loi de X :

k	0	1	2
$P(Y = k)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$

4°/ Tirages répétés.

Lorsqu'on répète les tirages en suivant la même procédure, nous noterons B_n le nombre de boules blanches juste avant le $(n + 1)$-ième tirage, c'est-à-dire juste après avoir remis dans l'urne la boule tirée

lors du n-ième tirage et avoir ajouté une boule de même couleur.
L'urne contient, à cet instant, $n + 2$ boules, le nombre N_n de boules noires présentes est :
$N_n = n + 2 - B_n$.

Supposons, hypothèse de récurrence, que le nombre B_n de boules blanches présentes dans l'urne juste avant le $(n + 1)$-ième tirage, suive une **loi uniforme** définie par :

$$P(B_n = k) = \frac{1}{n+1},\ k = 1, \dots, n + 1.$$

Cette loi est vérifiée pour $n = 1$ (on l'a vu dans la deuxième question) :

k	1	2
$P(B_1 = k)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Notons b_{n+1} l'événement "la boule tirée au $(n + 1)$-ième tirage est blanche", n_{n+1} l'événement "la boule tirée au $(n + 1)$-ième tirage est noire".

Soit k un nombre entier compris entre 1 et $n + 2$.

$\{B_{n+1} = k\} = (b_{n+1} \cap \{B_n = k - 1\}) \cup (n_{n+1} \cap \{B_n = k\})$

Les événements $(b_{n+1} \cap \{B_n = k - 1\})$ et $(n_{n+1} \cap \{B_n = k\})$ sont incompatibles:
$(b_{n+1} \cap \{B_n = k - 1\}) \cap (n_{n+1} \cap \{B_n = k\}) = \emptyset$.
Donc, axiome des probabilités totales :
$P(B_{n+1} = k) = P(b_{n+1} \cap \{B_n = k - 1\}) + P(n_{n+1} \cap \{B_n = k\})$

$P(b_{n+1} \cap \{B_n = k - 1\}) = P(b_{n+1} \mid B_n = k - 1)\ P(B_n = k - 1)$
$P(b_{n+1} \mid B_n = k - 1) = \frac{k-1}{n+2}$ puisqu'il y a dans l'urne, avant le $(n + 1)$-ième tirage, $n + 2$ boules équiprobables dont $k - 1$ blanches.
$P(B_n = k - 1) = 0$ pour $k = 1$, $\frac{1}{n+1}$ pour $k = 2, \dots, n + 2$ (hypothèse de récurrence)
$P(b_{n+1} \cap \{B_n = k - 1\}) = \frac{k-1}{n+2} \times \frac{1}{n+1},\ k = 1, \dots, n + 2.$

$P(n_{n+1} \cap \{B_n = k\}) = P(n_{n+1} \mid B_n = k)\ P(B_n = k)$
$P(n_{n+1} \mid B_n = k) = \frac{n+2-k}{n+2}$, puisqu'il y a dans l'urne, avant le $(n + 1)$-ième tirage, $n + 2$ boules équiprobables dont $n + 2 - k$ noires.
$P(B_n = k) = 0$ pour $k = n + 2$, $\frac{1}{n+1}$ pour $k = 1, \dots, n + 1$ (hypothèse de récurrence).
$P(n_{n+1} \cap \{B_n = k\}) = \frac{n+2-k}{n+2} \times \frac{1}{n+1},\ k = 1, \dots, n + 2.$

Au total :
$P(B_{n+1} = k) = \frac{k-1}{n+2} \times \frac{1}{n+1} + \frac{n+2-k}{n+2} \times \frac{1}{n+1},\ k = 1, \dots, n + 2.$

$P(B_{n+1} = k) = \frac{1}{n+2}$, $k = 1, \ldots, n+2$.
La formule de l'hypothèse de récurrence est vérifiée lorsqu'on remplace n par $n + 1$.
D'après le principe de récurrence, cette formule est donc vérifiée pour tout entier $n \geq 1$.

Le nombre B_n de boules blanches présentes dans l'urne juste avant le $(n + 1)$-ième tirage, suit une **loi uniforme** définie par :

$$P(B_n = k) = \frac{1}{n+1}, \quad k = 1, \ldots, n+1.$$

$B_n \rightsquigarrow U[1, n+1]$

$E(B_n) = \frac{n+1}{2}$

$Var(B_n) = \frac{(n+1)^2 - 1}{12} = \frac{n(n+2)}{12}$

Chapitre 4. Loi uniforme.

Enoncés.

Exercice 3. Le problème des Sophie.

On suppose que la probabilité à la naissance d'être garçon ou d'être fille est la même, $\frac{1}{2}$. Dans une famille, tous les enfants ont des prénoms différents. 1°/ La famille comporte deux enfants. a) Sachant qu'il y a au moins une fille, quelle est la probabilité pour que l'autre enfant soit une fille ? b) Sachant qu'il y a au moins une fille qui s'appelle Sophie, quelle est la probabilité pour que l'autre enfant soit une fille ? 2°/ La famille comporte *n* enfants. a) Sachant qu'il y a au moins une fille, quelle est la probabilité pour que tous les enfants soient des filles ? b) Sachant qu'il y a au moins une fille qui s'appelle Sophie, quelle est la probabilité pour que tous les enfants soient des filles ?	

Solution.

1°/ Famille de deux enfants.

a) Il y a au moins une fille.

Les configurations de familles de deux enfants sont *XX*, *XY*, *YX*, *YY*, avec *X* = fille, *Y* = garçon.
La probabilité à la naissance d'être garçon ou d'être fille étant la même, $\frac{1}{2}$, ces quatre configurations sont équiprobables.
Notons *A* l'événement "Il y a au moins une fille" : $P(A) = \frac{3}{4}$.

Notons *B* l'événement "Il y a deux filles" : $P(B) = \frac{1}{4}$.

B est contenu dans *A* : $A \cap B = B$.
La probabilité conditionnelle cherchée est $P(B \mid A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P(B)}{P(A)} = \frac{1}{3}$.

Sachant qu'il y a au moins une fille, la probabilité pour que l'autre enfant soit une fille est $\frac{1}{3}$.

b) Il y a au moins une fille qui s'appelle Sophie.

Soit E_1, l'enfant qui s'appelle Sophie, c'est une fille.

Soit E_2, l'autre enfant. Il y a une chance sur deux que ce soit une fille.

Sachant qu'il y a au moins une fille qui s'appelle Sophie, la probabilité pour que l'autre enfant soit une fille est $\frac{1}{2}$.

2°/ Famille de *n* enfants.

a) Il y a au moins une fille.

Le nombre de configurations de sexes possibles pour *n* enfants est 2^n. Elles sont équiprobables.
Parmi ces configurations, une seule ne contient que des garçons, les $2^n - 1$ autres contiennent au moins une fille.
Parmi ces $2^n - 1$ configurations contenant au moins une fille, une seule ne contient que des filles.

Sachant qu'il y a au moins une fille, la probabilité pour qu'il n'y ait que des filles est $\frac{1}{2^n - 1}$.

b) Il y a au moins une fille qui s'appelle Sophie.

Il ne peut y avoir, par hypothèse, qu'un enfant qui s'appelle Sophie.
Pour les $n - 1$ autres enfants, il y a 2^{n-1} configurations possibles de sexes. Elles sont équiprobables.
Parmi celles-ci, une seule ne contient que des filles.
La probabilité pour qu'il n'y ait que des filles est donc $\frac{1}{2^{n-1}}$.

Sachant qu'il y a au moins une fille qui s'appelle Sophie, la probabilité pour qu'il n'y ait que des filles est $\frac{1}{2^{n-1}}$.

Note : cet exercice est tiré de la revue *Pour la Science*, n°336, Octobre 2005, pp.92-93.

Chapitre 4. Loi uniforme.

Enoncés.

Exercice 4. Gain dans un lancer de dé.

Un joueur paie 15 euros pour jeter au hasard un dé équilibré. Il gagnera :

- 15 euros s'il obtient le 1 ;
- 5 euros s'il obtient le 2 ou le 3 ;
- 60 euros s'il obtient le 6 ;
- 0 dans les autres cas.

Calculer le gain moyen du joueur.

Solution.

1°/ Loi de probabilité du gain.

Soit X le résultat du dé, G le gain :

k	1	2	3	4	5	6
$P(X=k)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
$G(k)$	0	–10	–10	–15	–15	45

2°/ Espérance du gain.

$$E(G) = \sum_{k=1}^{k=6} G(k)\,P(X=k) = \frac{1}{6}(0 - 10 - 10 - 15 - 15 + 45) = -\frac{5}{6}$$

Chapitre 4. Loi uniforme.

Enoncés.

Exercice 5. Lancer de trois pièces.

On lance au hasard 3 pièces successivement. On va supposer l'indépendance des lancers.

1°/ Les pièces sont équilibrées.

a) Expliciter l'espace des épreuves et préciser la loi de probabilité pour cette expérience.
b) Quelle est la probabilité d'avoir deux piles et une face.

2°/ On note *p* la probabilité de face dans un lancer.

a) Expliciter l'espace des épreuves et préciser la loi de probabilité pour cette expérience.
b) Calculer la probabilité d'avoir deux faces et une pile.
c) Quelle est la probabilité d'obtenir au moins deux faces.

Solution.

1°/ Espace des épreuves.

Soit $\Omega_i = \{F, P\}$ les résultats possibles du lancer *i*. Tous les résultats possibles forment un ensemble

$$\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \Omega_3 = \begin{Bmatrix} FFF & FPF & FFP & FPP \\ PFF & PPF & PFP & PPP \end{Bmatrix}$$

qui sera notre espace des épreuves. Donc *Card* $(\Omega) = 8$.

On définit la loi de probabilité *P* par l'indépendance : si L_1, L_2, L_3, sont les résultats des lancers successifs et si $l_1\, l_2\, l_3$ est un événement élémentaire de Ω, avec $l_i \in \{F, P\}$, l'**indépendance des lancers** se traduit par la formule :

$$P(l_1\, l_2\, l_3) = P(L_1 = l_1)\, P(L_2 = l_2)\, P(L_3 = l_3)$$

1°/ Pièces équilibrées.

a) Espace des épreuves, loi de probabilité.

$$P(l_1\, l_2\, l_3) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}.$$

Donc on trouve une **loi uniforme** sur Ω.

b) Probabilité d'un événement.

L'événement "Obtenir deux piles et une face" est l'événement $A = \{PPF, PFP, FPP\}$. Avec la loi uniforme sur Ω, sa probabilité est $\frac{1}{8} Card(A) = \frac{3}{8}$.

2°/ Probabilité *p* d'obtenir face.

a) Espace des épreuves, loi de probabilité.

Si n est le nombre faces obtenus en 3 lancers successifs, on aura :

$$P(l_1 l_2 l_3) = p^n q^{3-n}$$

avec $q = 1 - p$.

b) Probabilité de l'événement *A*.

La probabilité de l'événement $A = \{FFP, FPF, PFF\}$ est :

$$P(A) = P(\{FFP\}) + P(\{FPF\}) + P(\{PFF\}) = 3 p^2 q.$$

c) Probabilité d'un événement *B*.

L'événement "Obtenir au moins 2 faces" est l'événement $B = \{FFF, FFP, FPF, PFF\} = \{FFF\} \bigcup A$. C'est la réunion de deux évènements incompatibles : sa probabilité est la somme des probabilités de ces deux évènements :

$$P(B) = P(\{FFF\}) + P(A) = p^3 + 3 p^2 q.$$

Chapitre 4. Loi uniforme.

Enoncés.

Exercice 6. Jeu de dé en deux lancers.

On va jouer aux dés.
On lance un dé jusqu'à ce qu'on obtienne un total de 6 au moins.
Donc si le dé affiche un 6 au premier lancer, le jeu se termine ; sinon, par exemple si, au premier lancer, le dé affiche 5, alors le joueur doit lancer encore mais, dans ce cas, il est sûr de terminer au prochain lancer.
Soient N la variable aléatoire égale au nombre de lancers, et ℓ_1 la variable qui représente le résultat du premier lancer.

1°/ Expliciter :
a) La loi de ℓ_1.
b) La loi conditionnelle de ℓ_1, sachant que $\ell_1 \in \{3 ; 6\}$.
c) $P\,[N = 2 \mid \ell_1 = 2]$ (probabilité conditionnelle sachant que $\ell_1 = 2$).
2°/ Calculer :
a) $P\,[N = 2 \mid \ell_1]$ (probabilité conditionnelle sachant la valeur de ℓ_1).
b) $P\,[N = 2]$.
c) L'espérance conditionnelle $E\,[\ell_1 \mid N = 2]$.
3°/ Déterminer la loi conditionnelle de N sachant $\ell_1 \geq 3$.

Solution.

1°/ Loi de ℓ_1.

a) Loi de ℓ_1.

ℓ_1 prend des valeurs entières de 1 à 6 avec des probabilités égales si l'on suppose le dé équilibré.

La loi de probabilité de la variable aléatoire ℓ_1 est donc une **loi uniforme** de paramètre $\frac{1}{6}$, sur l'ensemble $\{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$.

b) Loi conditionnelle de ℓ_1.

Si l'on sait que ℓ_1 prend la valeur 3 ou la valeur 6, comme ces deux valeurs sont équiprobables, la loi conditionnelle de ℓ_1 sachant $\ell_1 \in \{3 ; 6\}$, est une **loi uniforme** de paramètre $\frac{1}{2}$ sur l'ensemble $\{3 ; 6\}$.

c) Probabilité conditionnelle.

Lorsque $\ell_1 = 2$, le premier lancer a donné 2 comme résultat, par définition de ℓ_1.
Pour que *N* soit égal à 2, c'est-à-dire pour que la somme des deux lancers donnent au moins 6, il faut que le deuxième lancer donne au moins 4, ce qui se produit dans 3 cas sur 6 cas équiprobables :

$$\boxed{P\,[N = 2 \mid \ell_1 = 2] = \frac{1}{2}.}$$

2°/ Loi de *N*.

a) $P\,[N = 2 \mid \ell_1]$.

Pour que *N* soit égal à 2, il faut déjà que ℓ_1 soit différent de 6 (pour qu'il y ait au moins 2 lancers), il faut aussi que la somme des deux lancers donnent au moins 6, donc que le deuxième lancer ℓ_2 donne au moins $6 - \ell_1$, ce qui se produit dans $\ell_1 + 1$ cas sur 6 cas équiprobables :

$$\boxed{P\,[N = 2 \mid \ell_1] = \frac{\ell_1 + 1}{6}.}$$

b) $P\,[N = 2]$.

$$P\,[N = 2] = \sum_{n=1}^{n=5} P\,[\ell_1 = n \text{ et } \ell_2 \geq 6 - n]$$

Pour *n* compris entre 1 et 5,

$$P\,[\ell_1 = n \text{ et } \ell_2 \geq 6 - n] = P\,[\ell_2 \geq 6 - n \mid \ell_1 = n] \times P\,[\ell_1 = n] = P\,[N = 2 \mid \ell_1 = n] \times P\,[\ell_1 = n] = \frac{n+1}{6} \times \frac{1}{6}.$$

$$P\,[N = 2] = \sum_{n=1}^{n=5} \frac{n+1}{36} = \frac{1}{36}\,(15 + 5) = \frac{5}{9}.$$

$$\boxed{P\,[N = 2] = \frac{5}{9}.}$$

c) $E\,[\ell_1 \mid N = 2]$.

$$E\,[\ell_1 \mid N = 2] = \sum_{n=1}^{n=5} P\,[\ell_1 = n \mid N = 2] \times n = \sum_{n=1}^{n=5} \frac{P\left[\ell_1 = n \text{ et } N = 2\right]}{P\left[N = 2\right]} \times n$$

$$= \sum_{n=1}^{n=5} \frac{P\left[\ell_1 = n \text{ et } \ell_2 \geq n - 2\right]}{P\left[N = 2\right]} \times n = \frac{9}{5} \sum_{n=1}^{n=5} \frac{n(n+1)}{36} = \frac{1}{20}\left(\sum_{n=1}^{n=5} n^2 + \sum_{n=1}^{n=5} n\right)$$

$$= \frac{1}{20}\,(55 + 15) = \frac{7}{2} = E\,[\ell_1]$$

$$\boxed{E\,[\ell_1 \mid N = 2] = \frac{7}{2}.}$$

Ce résultat paraît contradictoire avec l'intuition, puisque lorsqu'on sait que $N = 2$, ℓ_1 ne peut avoir que l'une des valeurs de 1 à 5 et la moyenne des valeurs de 1 à 5 avec une loi uniforme est 3.
En réalité, lorsqu'on sait que $N = 2$, **la loi conditionnelle de ℓ_1 n'est plus une loi uniforme**, et le résultat obtenu n'est pas contradictoire : la valeur $N = 2$ fait pencher la balance du côté des grandes valeurs de ℓ_1.

3°/ Loi conditionnelle de N sachant $\ell_1 \geq 3$.

La loi conjointe de ℓ_1 et ℓ_2, pour deux lancers indépendants, est une loi uniforme.
Le tableau des **valeurs de *N*** correspondant est le suivant, chaque case du tableau conjoint possède une probabilité de $\frac{1}{36}$:

ℓ_2 \ ℓ_1 / N	1	2	3	4	5	6
1	> 2	> 2	> 2	> 2	2	1
2	> 2	> 2	> 2	2	2	1
3	> 2	> 2	2	2	2	1
4	> 2	2	2	2	2	1
5	2	2	2	2	2	1
6	2	2	2	2	2	1

L'événement $\ell_1 \geq 3$ correspond aux cases coloriées en jaune du tableau de contingence.
Dans les 24 cases correspondantes du tableau des valeurs de *N*, on compte 6 fois la valeur 1, 15 fois la valeur 2, 3 fois la valeur "> 2" :

$$P\,[N = 1 \mid \ell_1 \geq 3] = \frac{6}{24}\ ;\ P\,[N = 2 \mid \ell_1 \geq 3] = \frac{15}{24}\ ;\ P\,[N > 2 \mid \ell_1 \geq 3] = \frac{3}{24}.$$

Pour avoir les probabilités conditionnelles des autres valeurs de *N*, on peut décomposer l'événement $N > 2$ en 4 événements incompatibles :

ℓ_1	ℓ_2	ℓ_3	N
4	1		3
3	2		3
3	1	> 1	3
3	1	1	4

$$P\,[N = 4 \mid \ell_1 \geq 3] = P\,[\ell_1 = 3 \mid \ell_1 \geq 3] \times P\,[\ell_2 = 1 \mid \ell_1 \geq 3] \times P\,[\ell_3 = 1 \mid \ell_1 \geq 3]$$

Or :

$P\,[\ell_1 = 3 \mid \ell_1 \geq 3] = \frac{1}{4}$;

$P\,[\ell_2 = 1 \mid \ell_1 \geq 3] = P\,[\ell_2 = 1] = \frac{1}{6}$, parce que les résultats des lancers successifs sont indépendants.

$P\,[\ell_3 = 1 \mid \ell_1 \geq 3] = P\,[\ell_3 = 1] = \frac{1}{6}$, parce que les résultats des lancers successifs sont indépendants.

Donc :

$$P\,[N = 4 \mid \ell_1 \geq 3] = \frac{1}{4} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{144}.$$

$$P\,[N = 3 \mid \ell_1 \geq 3] = P\,[N > 2 \mid \ell_1 \geq 3] - P\,[N = 4 \mid \ell_1 \geq 3] = \frac{3}{24} - \frac{1}{144} = \frac{17}{144}.$$

D'où la **loi de probabilité conditionnelle de *N* sachant $\ell_1 \geq 3$** :

n	1	2	3	4
$P\,[N = n \mid \ell_1 \geq 3]$	$\frac{36}{144}$	$\frac{90}{144}$	$\frac{17}{144}$	$\frac{1}{144}$

Exercices

Loi binomiale.

1. Loi de Bernoulli.

1.1. Définition.
1.2. Propriétés.

2. Loi binomiale.

2.1. Définition.
2.2. Propriétés.
2.3. Interprétation.
2.4. Exemple : tirage avec remise.
2.5. Loi des fréquences.

1. Loi de Bernoulli.

HAUT

1.1. Définition.

On dit qu'une variable aléatoire X est une **variable de Bernoulli de paramètre *p*** si sa loi de probabilité est :

x_k	0	1
p_k	q	p

avec $p + q = 1$. Cette loi est notée $B(1 ; p)$ et on note $X \rightsquigarrow B(1 ; p)$ la relation "X suit la loi de Bernoulli de paramètre p".

1.2. Propriétés.

Si $X \rightsquigarrow B(1 ; p)$:

$E(X) = p$
$Var(X) = p\,q$
$g_X(u) = E(u^X) = q + p\,u$

2. Loi binomiale.

HAUT

2.1. Définition.

On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres n et p (relation notée $X \rightsquigarrow B(n ; p)$) si sa loi de probabilité est donnée par :

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k},\ k = 0, \ldots, n.$$

avec $p + q = 1$, et où $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ est le coefficient binomial d'indices n et k.

Pour le coefficient binomial $\binom{n}{k}$, on utilise parfois l'ancienne notation C_n^k.

2.2. Propriétés de la loi binomiale.

HAUT

$g_X(u) = \sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} u^k = \sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k} (p\,u)^k q^{n-k} = (p\,u + q)^n$ (formule du binôme)

$E(X) = g'_X(1) = \left(n\,p\,(q + p\,u)^{n-1} \right)_{u=1} = n\,p$ car $q + p = 1$.

$Var(X) = g''_X(1) + g'_X(1) - (g'_X(1))^2$

$= \left(n\,(n-1)\,p^2\,(q + p\,u)^{n-2} \right)_{u=1} + n\,p - n^2\,p^2$

$= n\,p\,((n-1)\,p + 1 - n\,p) = n\,p\,q.$

2.3. Interprétation de la loi binomiale.

HAUT

Pour $n = 1$, $B(1 ; p)$ est la loi de Bernoulli.

Soit E l'épreuve aléatoire consistant en n répétitions indépendantes d'une épreuve de Bernoulli, $E_1, \dots, E_n$, de même paramètre p.
Soit X le nombre de succès obtenus.
Les valeurs de X vont de 0 à n.
La loi de probabilité de X est une loi binomiale de paramètres n et p.

> En effet, une épreuve de Bernoulli admet deux résultats possibles : l'échec, noté 0, de probabilité q, et le succès, noté 1, de probabilité p, avec $p + q = 1$.
> Si E est l'épreuve aléatoire consistant en n répétitions indépendantes $E_1, \dots, E_n$, d'une épreuve de Bernoulli de paramètre p, un résultat possible de E est une suite de n nombres 0 ou 1, indiquant le résultat de chaque épreuve de Bernoulli.
> Comme les épreuves sont indépendantes, les probabilités se multiplient et la probabilité d'un résultat particulier comportant k succès et $(n - k)$ échecs est $p^k q^{n-k}$.
> Le nombre de résultats possibles comportant k succès et $(n - k)$ échecs est égal au nombre de choix possibles de la position des k succès, représentés par des 1, dans la suite des n résultats : c'est le nombre des combinaisons des n places, k à k, soit $\binom{n}{k}$.
>
> La probabilité d'avoir k succès, dans aussi $(n - k)$ échecs, est donc donnée par $\binom{n}{k} p^k q^{n-k}$.

En pratique, toute variable binomiale de paramètre n et p, peut toujours s'interpréter comme le **nombre de succès dans une répétition indépendante *n* fois d'une épreuve de Bernoulli de paramètre *p***.

Remarquons aussi que si l'on note $X_1, \dots, X_n$, les variables de Bernoulli associées aux épreuves de Bernoulli indépendantes successives $E_1, \dots, E_n$, le nombre de succès X est la somme $X_1 + \dots + X_n$.
Une variable binomiale de paramètres n et p est somme de n variables de Bernoulli indépendantes de paramètre p.
Chaque variable de Bernoulli a, pour fonction génératrice, $(q + p\,u)$.
On a alors le résultat :

$$(q + p\,u)^n = g_{X_1 + \dots + X_n}(u) = g_{X_1}(u) \dots g_{X_n}(u)$$

Cette propriété caractérise les variables aléatoires dites **indépendantes** : deux variables aléatoires à valeurs entières sont indépendantes si, et seulement si, la fonction génératrice de leur somme est le produit de leurs fonctions génératrices.

HAUT

2.4. Exemple : tirage avec remise.

HAUT

Considérons une urne contenant N boules, dont n_1 boules blanches et n_2 boules noires, avec $N = n_1 + n_2$.
On tire une boule au hasard dans l'urne, on note sa couleur et on la remet dans l'urne (c'est ce qu'on appelle un **tirage non exhaustif**).
Si la boule est blanche, c'est le succès, noté 1, de probabilité $p = \frac{n_1}{N}$.

Si elle est noire, c'est l'échec, noté 0, de probabilité $q = \frac{n_2}{N}$.

On effectue ainsi n tirages successifs avec remise.
Au bout de n tirages, la probabilité d'avoir tiré k fois une boule blanche est donnée par la loi binomiale :

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k},$$

où p est la proportion de boules blanches et q la proportion de boules noires.

Le modèle de l'urne avec tirages non exhaustifs peut être utilisé chaque fois que le paramètre p de la loi binomiale est un nombre rationnel.

HAUT

2.5. Loi des fréquences.

HAUT

Soit X une variable binomiale de paramètres n et p.
Considérons la variable $F = \frac{X}{n}$, qu'on appelle la variable **fréquence**.

Nous avons :

$$E(F) = E\left(\frac{X}{n}\right) = \frac{1}{n} E(X) = \frac{1}{n} n p = p.$$
$$Var(F) = Var\left(\frac{X}{n}\right) = \frac{1}{n^2} Var(X) = \frac{1}{n^2} n p q = \frac{pq}{n}.$$

HAUT

Chapitre 5. Loi binomiale.

Exercices

Exercice 1. Modélisation.
Exercice 2. Réponses au hasard à un QCM du code de la route.
Exercice 3. Mélange de sérums pour économiser des tests.
Exercice 4. Une partie de pile ou face.
Exercice 5. Rachat de gain aléatoire.
Exercice 6. Jet de dix dés.
Exercice 7. Vaccin et peste.
Exercice 8. Jeu de pile ou face.
Exercice 9. Nombre de garçons dans une famille de n enfants.
Exercice 10. Fautes d'impression dans un livre.
Exercice 11. Feux rouges Paris-Orly.
Exercice 12. Retrouver son chapeau.

Exercice 1. Modélisation.

Pour les expériences aléatoires suivantes, donner les ensembles fondamentaux Ω et les probabilités qui les décrivent. Puis, pour chacune des variables aléatoires X que l'on étudie, préciser le nom de la loi, ses paramètres, et, pour $k \in X(\Omega)$, donner l'expression de $P(X = k)$. 1°/ On tire au hasard une carte d'un jeu de 52 cartes. X est un succès si la carte tirée est un as, X est un échec si c'est une autre carte. 2°/ On lance une pièce cinq fois. X est le nombre de piles obtenus. 3°/ On lance un dé 20 fois. X est le nombre de 5 obtenus.	Solution

HAUT

Exercice 2. Réponses au hasard à un QCM du code de la route.

Pour l'examen du code de la route, les candidats doivent remplir un questionnaire de 40 questions, en choisissant, pour chacune d'elles l'une des quatre réponses proposées, dont une seule est exacte. Un candidat totalement ignorant décide de tenter sa chance en cochant complètement au hasard une réponse pour chaque question. 1°/ Quelle est la loi de probabilité du nombre S de bonnes réponses du candidat ? 2°/ Calculer $P(S \geq 36)$.	Solution

HAUT

Exercice 3. Mélange de sérums pour économiser des tests.

La probabilité d'observer une maladie dans une population est 0,1. La maladie peut être détectée sans erreur par un dosage sanguin.
On considère une population de 100 personnes, toutes indépendantes les unes des autres.On forme, au hasard, 10 groupes de 10 personnes. Au lieu de tester les 100 personnes individuellement, on teste le mélange des sérums d'un groupe de 10. Si le test est négatif, on considère que les 10 personnes sont saines et on est dispensé de 10 tests individuels. Si le test est positif, c'est qu'une personne au moins du groupe est atteinte de la maladie et il faut alors tester individuellement les 10 personnes du groupe ; dans ce cas, on aura dû effectuer 11 tests.
1°/ Soit Y le nombre de personnes malades dans un groupe.
a) Quelle est la loi de probabilité de Y ?
Trouver les probabilités pour que, dans un groupe, on observe :
b) aucune personne malade,
c) une et une seule personne malade,
d) au moins une personne malade.
2°/ En désignant par N le nombre total de tests à effectuer avec cette méthod de partition d'un échantillon de 100 personnes, et par X le nombre de groupes pour lequel le test est positif,
a) exprimer N en fonction de X.
b) Quelle est la loi de probabilité de X ?
c) Calculer $P(N = 110)$, $P(N = 100)$.
3°/ Calculer le nombre moyen de tests $E(N)$ et la variance du nombre des tests $Var(N)$.
4°/ Déterminer l'espérance mathématique et la variance du nombre N de tests à effectuer lorsqu'on partitionne les 100 personnes en n groupes égaux. Déterminer la taille n des groupes qui rend minimum l'espérance mathématique de N.

Solution

HAUT

Exercice 4. Une partie de pile ou face.

Un joueur joue à pile ou face en effectuant des séries de trois lancers successifs, au hasard, d'une pièce équilibrée.

◊ S'il obtient trois fois de suite le même résultat dans une série de trois lancers, cette série ne compte pas (**série nulle**) et il rejoue une série.
◊ Si les trois lancers d'une série contiennent deux fois de suite un même résultat, mais pas trois, le joueur a gagné un point (**série gagnante**).
◊ Si les trois lancers d'une série donnent des résultats alternés, le joueur perd un point (**série perdante**).

Solution

Une série gagnante ou perdante s'appelle une **manche**.

1°/ Calculer la probabilité pour que le joueur gagne 6 points en 10 manches et la probabilité que le gain du joueur en dix manches soit nul.
2°/ En supposant le nombre de manches égal à 2 n, $n \in \mathbb{N}^*$, calculer la probabilité pour que le gain soit égal à 2 k, $k \in \{-n, -n+1, \dots, 0, \dots, n-1, n\}$.
Calculer l'espérance mathématique et la variance du gain en 2 n manches.

HAUT

Exercice 5. Rachat de gain aléatoire.

Mille personnes gagnent la possibilité de jouer un jeu de pile ou face équilibré pour gagner 10 000 euros. Un petit malin à l'esprit d'entreprise propose à chaque joueur la somme de 4 500 euros pour jouer à sa place : évidemment, s'il gagne, c'est lui qui empoche le gain. 1°/ Calculer l'espérance mathématique et l'écart-type du gain de cet entrepreneur en fonction du nombre N de personnes qui acceptent son offre. 2°/ Calculer, en fonction du nombre N de personnes qui acceptent son offre, la probabilité que l'entrepreneur perde de l'argent (ce qu'on appelle son "risque"). Application : $N = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$.	Solution

HAUT

Exercice 6. Jet de dix dés.

On jette dix dés au hasard. Soit p la probabilité d'un six. Sachant que l'on a eu au moins un six, quelle est la probabilité conditionnelle d'obtenir au moins deux six.	Solution

HAUT

Exercice 7. Vaccin et peste.

On sait que la peste touche une personne sur cinq. Un vaccin est testé sur 10 personnes (indépendantes) : aucune n'est touchée. a) Calculer la probabilité du même résultat si on suppose que le vaccin n'a aucun effet. b) Comparer le résultat avec celui d'une autre expérience où 20 personnes ont pris le vaccin, dont une seule a été touchée.	Solution

HAUT

Exercice 8. Jeu de pile ou face.

Un joueur joue à pile ou face où la probabilité de gagner est 2/3. S'il gagne, le joueur obtient un franc, s'il perd, il rend un franc.

1°/ Calculer la probabilité qu'après 10 essais, il ait gagné plus de 5 francs.
2°/ Soit T la variable aléatoire qui représente le nombre d'essais qu'il faut pour que son gain devienne positif. Calculer les probabilités $P\,[T = n]$ pour $n = 1, 2, 3, 5, 7$.
3°/ Soit S la variable aléatoire qui représente le nombre d'essais qu'il faut pour qu'il gagne deux fois de suite. Calculer les probabilités $P\,[S = n]$ pour $n = 1, 2, 3, 4, 5$.
4°/ Calculer la probabilité pour que le joueur gagne 6 points en 10 lancers et la probabilité que le gain du joueur en dix lancers soit nul.
5°/ Mêmes questions qu'en 4° en supposant le nombre de lancers égal à $2n$, $n \in \mathbb{N}^*$, et le gain égal à $2k$, $k \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq k \leq n$.

Solution

HAUT

Exercice 9. Nombre de garçons dans une famille de *n* enfants.

On étudie les familles comportant un nombre donné n d'enfants, $n \geq 2$. On suppose que la probabilité de naissance d'une fille ou d'un garçon est 1/2 et cela indépendamment du rang de naissance de l'enfant.

a) Calculer la probabilité pour que la famille comporte au plus un garçon.
b) Calculer la probabilité pour que la famille comporte au moins un garçon et au moins une fille.
c) Les deux évènements considérés sont-ils indépendants ?

Solution

HAUT

Exercice 10. Fautes d'impression dans un livre.

Dans un livre de deux cents pages, il y a vingt fautes d'impression, réparties au hasard.

On modélise cette situation en considérant l'espace $\Omega = \{1, \dots, 200\}^{20}$ muni de la probabilité uniforme P.

1°/ On considère une page donnée, de numéro n. Quelle est la probabilité que s'y trouvent deux fautes d'impression ?

2°/ On considère un ensemble E de 10 pages.

a) Quelle est la probabilité que s'y trouvent trois fautes d'impression ?

b) Sachant que, dans l'ensemble E se trouvent trois fautes d'impression, quelle est la probabilité que ces trois fautes soient toutes sur la première page de E ?

Solution

HAUT

Exercice 11. Feux rouges Paris-Orly.

1°/ Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(X_k)_{1 \leq k \leq n}$ un n-uplet de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, telles que $P(X_1 = 1) = 1 - P(X_1 = 0) = p$. On pose $S_n = X_1 + ... + X_n$.

a) Calculer l'espérance et la variance de S_n.

b) Déterminer la loi de S_n.

Solution

2°/ Paris est interdit à la circulation pour laisser le champ libre aux voitures officielles. Entre l'Etoile et Orly, il y a treize feux tricolores qui fonctionnent de manière indépendante. Chacun est rouge un tiers du temps. Soit X le nombre de feux rouges qu'une escorte de motards ignore sur son passage, de l'Etoile à Orly. Déterminer l'espérance et l'écart-type de X.

HAUT

Exercice 12. Retrouver son chapeau.

n personnes reprennent au hasard leur chapeau en sortant d'une soirée arrosée. On note X_n le nombre de chapeaux que l'on a retrouvé sur la tête de leur légitime propriétaire. En introduisant la variable de Bernoulli Y_i qui vaut 1, par définition, si, et seulement si, le convive numéro i a retrouvé son chapeau, calculer l'espérance et la variance de X_n.	Solution

HAUT

Chapitre 5. Loi binomiale.

Enoncés.

Exercice 1. Modélisation.

Pour les expériences aléatoires suivantes, donner les ensembles fondamentaux Ω et les probabilités qui les décrivent. Puis, pour chacune des variables aléatoires X que l'on étudie, préciser le nom de la loi, ses paramètres, et, pour $k \in X(\Omega)$, donner l'expression de $P(X = k)$. 1°/ On tire au hasard une carte d'un jeu de 52 cartes. X est un succès si la carte tirée est un as, X est un échec si c'est une autre carte. 2°/ On lance une pièce cinq fois. X est le nombre de piles obtenus. 3°/ On lance un dé 20 fois. X est le nombre de 5 obtenus.	

Solution.

1°/ Tirage d'un as.

1. Modélisation.

Un résultat élémentaire du tirage d'une carte d'un jeu de 52 cartes est la valeur de la carte tirée.
L'ensemble fondamental Ω est constitué des valeurs des 52 cartes du jeu.
Les événements sont les parties de Ω.
Chaque carte étant équiprobable, la probabilité de chaque résultat élémentaire est $\frac{1}{52}$.

La probabilité d'un événement A est $P(A) = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)}$.

2. Variable aléatoire.

L'ensemble des 4 as du jeu forme un événement A de cardinal 4.
Sa probabilité est $P(A) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$.
$\omega \in A$ signifie "La carte tirée est un as".

La variable aléatoire X est la **fonction indicatrice** de A : $X(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{lorsque } \omega \in A \\ 0 & \text{lorsque } \omega \notin A \end{cases}$.

C'est une **variable de Bernoulli**, dont le paramètre est $p := P(X = 1) = P(X^{-1}(1)) = P(A) = \frac{1}{13}$.
Son espérance mathématique est $E(X) = p = \frac{1}{13}$, sa variance est $Var(X) = p(1 - p) = \frac{12}{169}$.
Une variable de Bernoulli de paramètre p est une variable binomiale de paramètres $n = 1$ et p.

2°/ Nombre de piles.

1. Modélisation.

Le lancer d'une pièce a deux résultats possibles, pile et face, ensemble à deux éléments.
Lancer 5 fois la pièce a pour résultats élémentaires $\Omega = \{\text{pile, face}\}^5$.
$Card\ (\Omega) = 2^5 = 32$.
Si l'on suppose la pièce équilibrée, chaque résultat élémentaire a une probabilité $\frac{1}{32}$.

Les événements sont les parties de Ω.
La probabilité d'un événement A est $P\ (A) = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)}$.

2. Variable aléatoire.

Lancer une pièce est une **épreuve de Bernoulli**, avec deux résultats possibles : le succès "On obtient pile", de probabilité $p = \frac{1}{2}$, et l'échec "On obtient face", de probabilité $q = 1 - p = \frac{1}{2}$.
Lorsqu'**on répéte cinq fois cette épreuve**, de façon indépendante, le nombre de succès obtenus, c'est-à-dire le nombre de piles obtenus en cinq lancers, suit une **loi binomiale** de paramètres $n = 5$, nombre de répétitions, et $p = \frac{1}{2}$, probabilité du succès dans l'épreuve.

$$P\ (X = k) = \binom{5}{k} p^k\, q^{5-k} = \frac{1}{32}\binom{5}{k}$$

k	0	1	2	3	4	5
$P\ (X = k)$	$\frac{1}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{1}{32}$

Son espérance mathématique est $E\ (X) = n\ p = \frac{5}{2}$; sa variance est $Var\ (X) = n\ p\ q = \frac{5}{4}$.

3°/ Nombre de 5.

1. Modélisation.

Lancer un dé a six résultats possibles, valeur de la face supérieure.
Lancer 20 fois le dé a pour résultats élémentaires $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^{20}$.
$Card\ (\Omega) = 6^{20}$.
Si l'on suppose le dé équilibré, chaque résultat élémentaire a une probabilité $\frac{1}{6^{20}}$.

Les événements sont les parties de Ω.
La probabilité d'un événement A est $P\ (A) = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)}$.

2. Variable aléatoire.

Lancer un dé est une **épreuve de Bernoulli**, avec deux résultats possibles : le succès "On obtient 5", de probabilité $p = \frac{1}{6}$, et l'échec "On n'obtient pas de 5", de probabilité $q = 1 - p = \frac{5}{6}$.
Lorsqu'**on répéte vingt fois cette épreuve**, de façon indépendante, le nombre de succès obtenus, c'est-à-dire le nombre de 5 obtenus en vingt lancers, suit une **loi binomiale** de paramètres $n = 20$, nombre de répétitions, et $p = \frac{1}{6}$, probabilité du succès dans l'épreuve.

$$P(X = k) = \binom{20}{k} p^k q^{20-k} = \binom{20}{k} \frac{5^{20-k}}{6^{20}}$$

Son espérance mathématique est $E(X) = n\,p = \frac{10}{3}$; sa variance est $Var(X) = n\,p\,q = \frac{25}{9}$.

Chapitre 5. Loi binomiale.

Enoncés.

Exercice 2. Réponses au hasard à un QCM du code de la route.

Pour l'examen du code de la route, les candidats doivent remplir un questionnaire de 40 questions, en choisissant, pour chacune d'elles l'une des quatre réponses proposées, dont une seule est exacte. Un candidat totalement ignorant décide de tenter sa chance en cochant complètement au hasard une réponse pour chaque question. 1°/ Quelle est la loi de probabilité du nombre S de bonnes réponses du candidat ? 2°/ Calculer $P(S \geq 36)$.	

Solution.

1°/ Loi de probabilité.

Pour une question, le fait de regarder si la réponse est bonne ou non est une **épreuve de Bernoulli**, avec deux résultats possibles :

— le succès : la réponse est bonne, probabilité $p = \frac{1}{4}$,

— l'échec : la réponse est mauvaise, probabilité $q = 1 - p = \frac{3}{4}$.

Lorsqu'on répète cette épreuve de Bernoulli pour les $n = 40$ questions, le nombre S de succès suit une **loi binomiale** de paramètres $n = 40$ et $p = \frac{1}{4}$.

$$P(S = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \frac{3^{40-k}}{4^{40}} \binom{40}{k}$$

$$\boxed{P(S = k) = \frac{3^{40-k}}{4^{40}} \binom{40}{k}}$$

Son espérance mathématique est $E(S) = n\,p = 10$, sa variance est $Var(S) = n\,p\,q = \frac{15}{2}$.

2°/ Calcul d'une probabilité.

$P(S \geq 36) = P(S = 36) + P(S = 37) + P(S = 38) + P(S = 39) + P(S = 40)$

$$P(S = 36) = \frac{40 \times 39 \times 38 \times 37}{1 \times 2 \times 3 \times 4} \times \frac{3^4}{4^{40}}$$

$P(S = 37) = \frac{40 \times 39 \times 38}{1 \times 2 \times 3} \times \frac{3^3}{4^{40}}$

$P(S = 38) = \frac{40 \times 39}{1 \times 2} \times \frac{3^2}{4^{40}}$

$P(S = 39) = 40 \times \frac{3}{4^{40}}$

$P(S = 40) = \frac{1}{4^{40}}$

$4^{40} = 16^{20} > 10^{20}$

$1 + 40 \times 3 + \frac{40 \times 39}{1 \times 2} \times 3^2 + \frac{40 \times 39 \times 38}{1 \times 2 \times 3} \times 3^3 + \frac{40 \times 39 \times 38 \times 37}{1 \times 2 \times 3 \times 4} \times 3^4 < 5 \times 40^4 < 10^8$

$P(S \geq 36) < 10^{-12}$, ce qui est très voisin de 0.
Autrement dit, le candidat n'a pratiquement aucune chance de réussite.

$$\boxed{P(S \geq 36) < 10^{-12}}$$

Chapitre 5. Loi binomiale.

Enoncés.

Exercice 3. Mélange de sérums pour économiser des tests.

La probabilité d'observer une maladie dans une population est 0,1. La maladie peut être détectée sans erreur par un dosage sanguin.
On considère une population de 100 personnes, toutes indépendantes les unes des autres.On forme, au hasard, 10 groupes de 10 personnes. Au lieu de tester les 100 personnes individuellement, on teste le mélange des sérums d'un groupe de 10. Si le test est négatif, on considère que les 10 personnes sont saines et on est dispensé de 10 tests individuels. Si le test est positif, c'est qu'une personne au moins du groupe est atteinte de la maladie et il faut alors tester individuellement les 10 personnes du groupe ; dans ce cas, on aura dû effectuer 11 tests.
1°/ Soit Y le nombre de personnes malades dans un groupe.
a) Quelle est la loi de probabilité de Y ?
Trouver les probabilités pour que, dans un groupe, on observe :
b) aucune personne malade,
c) une et une seule personne malade,
d) au moins une personne malade.
2°/ En désignant par N le nombre total de tests à effectuer avec cette méthode de partition d'un échantillon de 100 personnes, et par X le nombre de groupes pour lequel le test est positif,
a) exprimer N en fonction de X.
b) Quelle est la loi de probabilité de X ?
c) Calculer $P(N = 110)$, $P(N = 100)$.
3°/ Calculer le nombre moyen de tests $E(N)$ et la variance du nombre des tests $Var(N)$.
4°/ Déterminer l'espérance mathématique et la variance du nombre N de tests à effectuer lorsqu'on partitionne les 100 personnes en n groupes égaux. Déterminer la taille n des groupes qui rend minimum l'espérance mathématique de N.

Solution.

1°/ Nombre de malades dans un groupe.

1. Loi de probabilité.

Pour une personne du groupe, le fait de regarder si elle est malade ou non constitue une épreuve de Bernoulli, avec deux résultats possibles :
— le succès : elle est malade, avec une probabilité $p = 0,1$.
— l'échec : elle n'est pas malade, avec une probabilité $q = 1 - p = 0,9$.

Lorsqu'on répète cette épreuve de Bernoulli pour les $n = 10$ personnes du groupe, le nombre Y de succès, c'est-à-dire le nombre de personnes malades dans le groupe, suit une loi binomiale de paramètres $n = 10$

et $p = 0{,}1$.

$$P(Y = k) = \binom{10}{k} (0{,}1)^k (0{,}9)^{10-k}.$$

Son espérance mathématique est $E(Y) = n\,p = 1$, sa variance est $Var(Y) = n\,p\,q = 0{,}9$.

2. Calcul de diverses probabilités.

$P(Y = 0) = (0{,}9)^{10}$
$P(Y = 1) = 10 \times 0{,}1 \times (0{,}9)^9 = (0{,}9)^9$
$P(Y \geq 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - (0{,}9)^{10}$

2°/ Nombre de tests à effectuer.

1. Nombre *N* de tests.

On commence par effectuer 10 tests, un par groupe.
Pour chaque groupe à test positif, on refait 10 tests.
S'il y a X groupes à test positif, on refait, pour ces groupes 10 X tests.

Au total on effectue $N = 10 + 10\,X$ tests.

$$N = 10 + 10\,X$$

2. Loi de probabilité de *X*.

Pour un groupe, le fait de regarder si le test est positif ou non constitue une **épreuve de Bernoulli**, avec deux résultats possibles :

— le succès : le test est positif. Le test est positif si, et seulement si, il y a au moins une personne maladce dans le groupe. Sa probabilité est $p = P(Y \geq 1) = 1 - (0{,}9)^{10} = 0{,}6513215599$

— l'échec : le test est négatif, probabilité $q = 1 - p = P(Y = 0) = (0{,}9)^{10} = 0{,}3486784401$

Lorsqu'on répète cette épreuve de Bernoulli pour les $n = 10$ groupes, le nombre X de succès, c'est-à-dire le nombre de groupes à test positif, suit une **loi binomiale** de paramètres $n = 10$ et $p = 1 - (0{,}9)^{10}$.

$$P(X = k) = \binom{10}{k} (1 - (0{,}9)^{10})^k ((0{,}9)^{10})^{10-k}.$$

Son espérance mathématique est $E(X) = n\,p = 10 \times (1 - (0{,}9)^{10}) = 6{,}5$.
Sa variance est $Var(X) = n\,p\,q = 2{,}27$.

3. Calcul de diverses probabilités.

$P(N = 110) = P(X = 10) = (1 - (0{,}9)^{10})^{10} = 1{,}4\ \%$.
$P(N = 100) = P(X = 9) = 10 \times (1 - (0{,}9)^{10})^9 \times (0{,}9)^{10} = 7{,}4\ \%$.

Au total, on a plus de 9 chances sur 10 d'avoir à faire moins de 100 tests : c'est tout bénéfice, puisqu'on en fait payer 100.

3°/ Espérance et variance du nombre de tests.

$E(N) = E(10 + 10X) = 10 + 10E(X) = 10 + 10 \times (10 \times (1 - (0,9)^{10})) = 75.$
$Var(N) = Var(10 + 10X) = 10^2 Var(X) = 227.$

4°/ Partition en *n* groupes de même taille.

Si l'on considère un groupe de taille n, la probabilité pour qu'il contienne au moins un malade est, on l'a vu pour $n = 10$:
$1 - 0,9^n$.

Si l'on considère G groupes de taille n, le nombre X de groupes comportant au moins un malade suit une loi binomiale
$B(G ; 1 - 0,9^n)$
La valeur moyenne de X est donnée par $E(X) = G \times (1 - 0,9^n)$.
La variance de X est donnée par $Var(X) = G \times (1 - 0,9^n) \times 0,9^n$.

Le nombre N de tests à effectuer, qui est donné par $N = G + nX$, a pour paramètres statistiques :

$$E(N) = nE(X) + G = nG \times (1 - 0,9^n) + G$$
$$Var(N) = n^2 Var(X) = n^2 G \times (1 - 0,9^n) \times 0,9^n.$$

Exemples.

a) Pour $G = 5$ groupes de $n = 20$ personnes :
$E(N) = nG \times (1 - 0,9^n) + G = 100 \times (1 - 0,9^{20}) + 5 = 92,842$
$Var(N) = n^2 G \times (1 - 0,9^n) \times 0,9^n = 2000 \times (1 - 0,9^{20}) \times 0,9^{20} = 213,592$

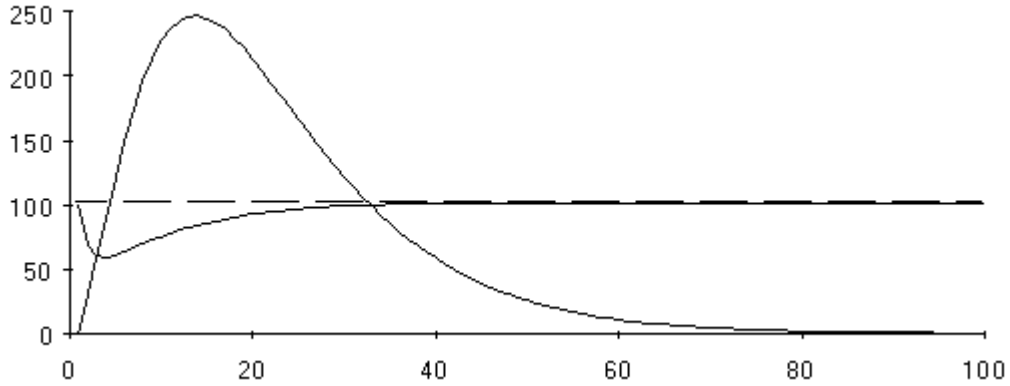
b) Pour $G = 20$ groupes de $n = 5$ personnes :
$E(N) = nG \times (1 - 0,9^n) + G = 100 \times (1 - 0,9^5) + 20 = 60,951$
$Var(N) = n^2 G \times (1 - 0,9^n) \times 0,9^n = 500 \times (1 - 0,9^5) \times 0,9^5 = 120,906$

5°/ Maximum du gain.

* Lorsqu'on prend $nG = 100$, les formules donnant $E(N)$ et $Var(N)$ peuvent s'écrire en fonction du seul paramètre n (taille des groupes), pour $n > 1$ (pour $n = 1$: $E(N) = 100$, $Var(N) = 0$) :

$$E(N) = 100 \times (1 - 0,9^n) + \frac{100}{n}$$
$$Var(N) = 100n \times (1 - 0,9^n) \times 0,9^n.$$

* Ces formules permettent d'étudier la variation de $E(N)$ et de $Var(N)$ en fonction de la taille des groupes.



Evolution du nombre moyen de tests E(N) et de la variance Var(N) du nombre de tests à effectuer en fonction de la taille des groupes constitués dans une population de 100 tests.

L'espérance mathématique de *N* passe par un minimum. Ce minimum est atteint pour $n = 4$, comme le montre le tableau suivant. La variance, quant à elle, est maximum pour $n = 10$.

n	1	2	4	5	10	20
E (*N*)	100,00	69,00	59,39	60,95	75,13	92,84
Var (*N*)	0,00	30,78	90,25	120,91	227,10	213,59

Lorsque le nombre moyen de tests est minimum, l'espérance de gain du laboratoire, qui, de toutes façons, fait payer 100 tests, est maximum. Le nombre moyen de tests gagnés est 100 – 59,39 = 40,61, soit un **gain moyen de près de 41 %**.

Un tel procédé a été interdit par la loi : quiconque demande un test à un laboratoire a droit à un test, et pas à 60 % d'un test !

Chapitre 5. Loi binomiale.

Enoncés.

Exercice 4. Une partie de pile ou face.

Un joueur joue à pile ou face en effectuant des séries de trois lancers successifs, au hasard, d'une pièce équilibrée.

◊ S'il obtient trois fois de suite le même résultat dans une série de trois lancers, cette série ne compte pas (**série nulle**) et il rejoue une série.
◊ Si les trois lancers d'une série contiennent deux fois de suite un même résultat, mais pas trois, le joueur a gagné un point (**série gagnante**).
◊ Si les trois lancers d'une série donnent des résultats alternés, le joueur perd un point (**série perdante**).

Une série gagnante ou perdante s'appelle une **manche**.

1°/ Calculer la probabilité pour que le joueur gagne 6 points en 10 manches et la probabilité que le gain du joueur en dix manches soit nul.
2°/ En supposant le nombre de manches égal à 2 n, $n \in \mathbb{N}^*$, calculer la probabilité pour que le gain soit égal à 2 k, $k \in \{-n, -n+1, \dots, 0, \dots, n-1, n\}$.
Calculer l'espérance mathématique et la variance du gain en 2 n manches.

Solution.

Remarque préliminaire : espace probabilisé.

Commençons par modéliser l'expérience aléatoire, c'est-à-dire par construire un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{C}, P)$.
Un résultat possible de l'expérience aléatoire consistant en trois lancers successifs d'une pièce, est une suite de trois P ou F suivant que les trois lancers ont donné *Pile* ou *Face*.
Un événement élémentaire est donc un élément de $\{P, F\}^3 = \Omega$.
Comme les lancers successifs se font au hasard et indépendamment, chaque événement élémentaire a la même probabilité.
Les résultats *PPP* et *FFF* étant éliminés, on garde seulement la tribu $\mathcal{C}$ engendrée par les six autres événements élémentaires :

$$PPF, FPP, FFP, PPF, PFP, FPF.$$

Comme chacun de ces événements élémentaires a la même probabilité de réalisation, la loi de probabilité P sur $\mathcal{C}$ est définie par la probabilité uniforme sur l'ensemble $\{PPF, FPP, FFP, PPF, PFP, FPF\}$ de cardinal 6.
La probabilité d'un événement $A \in \mathcal{C}$ est $P(A) = \frac{1}{6} \times Card(A)$

Le "**succès**" d'une manche est l'événement $\{PPF, FPP, FFP, PPF\}$.

Son cardinal est 4.
Sa probabilité est $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.
L'"**échec**" d'une manche est l'événement {*PFP*, *FPF*}.
Son cardinal est 2.
Sa probabilité est $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

1°/ Loi du gain en 10 manches.

Soit G_k le gain à la k^e manche.
La loi de probabilité de G_k est donnée par le tableau :

g_k	–1	+1
$P(G_k = g_k)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

Cette loi est indépendante du numéro *k* de la manche.

La variable $X_k = \frac{1}{2}(G_k + 1)$ prend les valeurs 0 et 1 avec les probabilités respectives $\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{3}$.
C'est donc une **variable de Bernoulli**, qui indique si la k^e manche est un succès (valeur 1) ou un échec (valeur 0).
On l'appelle la **variable indicatrice** de la k^e manche.
Le nombre de manches conduisant à un succès est la somme $X = \sum_{k=1}^{k=10} X_k = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{k=10} G_k + 5$ de $n = 10$ variables de Bernoulli indépendantes de paramètre $p = \frac{2}{3}$.
C'est une **variable binomiale**, *X* suit une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = \frac{2}{3}$.
Si l'on appelle *G* le gain total, égal à $\sum_{k=1}^{k=10} G_k = 2(X - 5)$, la loi de probabilité de *G* se déduit de celle de *X* $= \frac{1}{2}G + 5$:

$$P(G = 2(x - 5)) = P(X = x) = \binom{10}{x}\left(\frac{2}{3}\right)^x\left(\frac{1}{3}\right)^{10-x},\ x \in \{0, \dots, 10\}.$$

Soit, en posant $g = 2x - 10$, $x = \frac{1}{2}(g + 10) = \frac{g}{2} + 5$:

$$P(G = g) = \binom{10}{\frac{g}{2}+5}\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{g}{2}+5}\left(\frac{1}{3}\right)^{10-\left(\frac{g}{2}+5\right)} = \frac{2^{\frac{g}{2}+5}}{3^{10}}\binom{10}{\frac{g}{2}+5},\ g \in \{-10, -8, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, 8, 10\}.$$

$$P(G = 6) = \frac{2^8}{3^{10}}\binom{10}{8} = P(X = 8) = 0{,}195$$

$$\boxed{P(G = 6) = 0{,}195}$$

$$P\,(G = 0) = P\,(X = 5) = \frac{2^5}{3^{10}}\binom{10}{5} = 0{,}137$$

$$\boxed{P\,(G = 0) = 0{,}137}$$

2°/ Loi du gain en 2 *n* manches.

Le gain G_i à la i^e manche est toujours lié à la variable de Bernoulli X_i égale à 1 en cas de succès et à 0 en cas d'échec, par la formule :

$$G_i = 2\,X_i - 1$$

$E\,(G_i) = 2\,E\,(X_i) - 1 = 2 \times \frac{2}{3} - 1 = \frac{1}{3}$
$Var\,(G_i) = 4\,Var\,(X_i) = 4 \times \frac{2}{3} = \frac{8}{3}$

Lorsqu'on fait la somme pour les 2 *n* manches, le gain total *G* est lié au nombre *X* de succès par la formule :

$$G = 2\,X - 2\,n$$

Comme *X* suit une loi binomiale de paramètres 2 *n* et $\frac{2}{3}$, la loi de *G* est connue :

$$P\,(G = g) = P\,(X = \frac{g}{2} + n) = \binom{2n}{\frac{g}{2}+n}\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{g}{2}+n}\left(\frac{1}{3}\right)^{2n-\left(\frac{g}{2}+n\right)} = \frac{2^{\frac{g}{2}+n}}{3^{2n}}\binom{2n}{\frac{g}{2}+n}$$

Les valeurs de *X* sont entières, donc les valeurs de *G* sont des entiers pairs. En posant $g = 2\,k$, on obtient :

$$\boxed{P\,(G = 2\,k) = \frac{2^{n+k}}{3^{2n}}\binom{2n}{n+k},\ k \in \{-n, -n+1, \ldots, 0, \ldots, n-1, n\}}$$

$E\,(G) = 2\,E\,(X) - 2\,n = 2 \times (2\,n \times \frac{2}{3}) - 2\,n = \frac{2n}{3} = 2\,n\,E\,(G_i)$.
$Var\,(G) = \sum Var\,(G_i) = 2\,n \times \frac{8}{3} = \frac{16n}{3} = 4\,Var\,(X)$.

Chapitre 5. Loi binomiale.

Enoncés.

Exercice 5. Rachat de gain aléatoire.

Mille personnes gagnent la possibilité de jouer un jeu de pile ou face équilibré pour gagner 10 000 euros. Un petit malin à l'esprit d'entreprise propose à chaque joueur la somme de 4 500 euros pour jouer à sa place : évidemment, s'il gagne, c'est lui qui empoche le gain. 1°/ Calculer l'espérance mathématique et l'écart-type du gain de cet entrepreneur en fonction du nombre N de personnes qui acceptent son offre. 2°/ Calculer, en fonction du nombre N de personnes qui acceptent son offre, la probabilité que l'entrepreneur perde de l'argent (ce qu'on appelle son "risque"). Application : $N = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$.	

Solution.

1°/ Gain moyen.

Soit N le nombre de personnes qui acceptent l'offre.
Soit X le nombre de fois que gagne l'entrepreneur, parmi les N possibilités de jouer qu'il a acquises : X suit une **loi binomiale** de paramètres N et $p = \frac{1}{2}$, puisque c'est le nombre de succès dans une répétition d'épreuves de Bernoulli.

$$E(X) = N\,p = \frac{N}{2}.$$
$$Var(X) = N\,p\,(1-p) = \frac{N}{4}.$$

L'entrepreneur a payé 4500 N.
Son gain est donc donné par :

$$G = 10\,000\,X - 4\,500\,N$$

L'espérance mathématique du gain est donc :

$$E(G) = 10\,000\,E(X) - 4\,500\,N = 10\,000\,\frac{N}{2} - 4\,500\,N = 500\,N.$$

$$\boxed{E(G) = 500\,N}$$

La variance du gain est :

$$Var(G) = (10^4)^2\,Var(X) = 25 \times 10^6\,N$$

L'écart-type de X est la racine carrée de la variance :

$$\boxed{\sigma_G = 5\,000\sqrt{N}}$$

2°/ Risque.

a) Pour $N = 0$.

Si personne n'accepte son offre, l'entrepreneur n'a aucune chance de perdre de l'argent : son risque est nul.

$$\boxed{R(0) = 0}$$

b) Pour $N \geq 1$.

L'entrepreneur avance 4500 N et le gain est $G = 10000\,X - 4500\,N$.
X, nombre de fois où il gagne à un jeu de pile ou face équilibré en jouant N fois, suit une loi binomiale de paramètres N et $\frac{1}{2}$.
$E(X) = \frac{N}{2}$, $Var(X) = \frac{N}{4}$.
Pour que le gain soit positif, il faut que l'on ait $X \geq 0{,}45\,N$. Le risque est donc

$$\boxed{R(N) = P(X < 0{,}45\,N) = \frac{1}{2^N}\sum_{k=0}^{k=r}\binom{N}{k},\ N \geq 1}$$

où r désigne le plus grand entier **strictement plus petit** que $0{,}45\,N$.

c) Application numérique.

— $N = 1$.

$$R(1) = \frac{1}{2^1}\sum_{k=0}^{k=0}\binom{1}{k} = \frac{1}{2}$$

— $N = 2$.

$$R(2) = \frac{1}{2^2}\sum_{k=0}^{k=0}\binom{2}{k} = \frac{1}{4}$$

— $N = 3$.

$$R(3) = \frac{1}{2^3}\sum_{k=0}^{k=1}\binom{3}{k} = \frac{1}{2}$$

— $N = 4$.

$$R(4) = \frac{1}{2^4}\sum_{k=0}^{k=1}\binom{4}{k} = \frac{5}{16}$$

— $N = 5$.

$$R(5) = \frac{1}{2^5}\sum_{k=0}^{k=2}\binom{5}{k} = \frac{1}{2}$$

— $N = 6$.

$$R(6) = \frac{1}{2^6}\sum_{k=0}^{k=2}\binom{6}{k} = \frac{11}{32}$$

— $N = 7$.

$$R(7) = \frac{1}{2^7}\sum_{k=0}^{k=3}\binom{7}{k} = \frac{1}{2}$$

d) Limite lorsque *N* tend vers l'infini.

Lorsque N devient très grand, nous verrons que **la loi binomiale peut être approchée par une loi de Gauss**, ou loi normale, de paramètres

$$\mu = E(X) = \frac{N}{2}, \text{ et } \sigma^2 = Var(X) = \frac{N}{4}.$$

En tenant compte de la **correction de continuité**, le risque $R(N)$ a pour valeur approchée :

$$R(N) = P(X < 0{,}45\,N) = P(X \leq r) = F\left(\frac{r + \frac{1}{2} - \frac{N}{2}}{\sqrt{\frac{N}{4}}}\right) = F\left(\frac{2r+1-N}{\sqrt{N}}\right)$$

où F est la fonction de répartition de la variable normale centrée réduite.
Par exemple, pour $N = 1000$ (cas où les 1000 personnes acceptent l'offre), $r = 449$, $\frac{2r+1-N}{\sqrt{N}} = -3{,}1939$,

$R(1\,000) \approx F(-3{,}194) \approx 7{,}0 \times 10^{-4}$.

Lorsque N est grand, $r + \frac{1}{2}$ est pratiquement égal à $0{,}45\,N$, de sorte que $\frac{2r+1-N}{\sqrt{N}}$ est pratiquement égal à $-0{,}1\sqrt{N}$ et le risque est :

$$R(N) = F\left(-\frac{\sqrt{N}}{10}\right) = 1 - F\left(\frac{\sqrt{N}}{10}\right)$$

La formule $R(N) = F\left(-\frac{\sqrt{N}}{10}\right)$ montre que si N tend vers l'infini, $R(N)$ tend vers $F(-\infty) = 0$.

$$\lim_{N \to \infty} R(N) = 0$$

résultat qui ne transparaissait pas au travers des quelques cas étudiés plus haut, puisqu'on y voit le risque osciller autour d'une valeur qui augmente en se rapprochant de 0,5.

Chapitre 5. Loi binomiale.

Enoncés.

Exercice 6. Jet de dix dés.

On jette dix dés au hasard. Soit p la probabilité d'un six. Sachant que l'on a eu au moins un six, quelle est la probabilité conditionnelle d'obtenir au moins deux six.	

Solution.

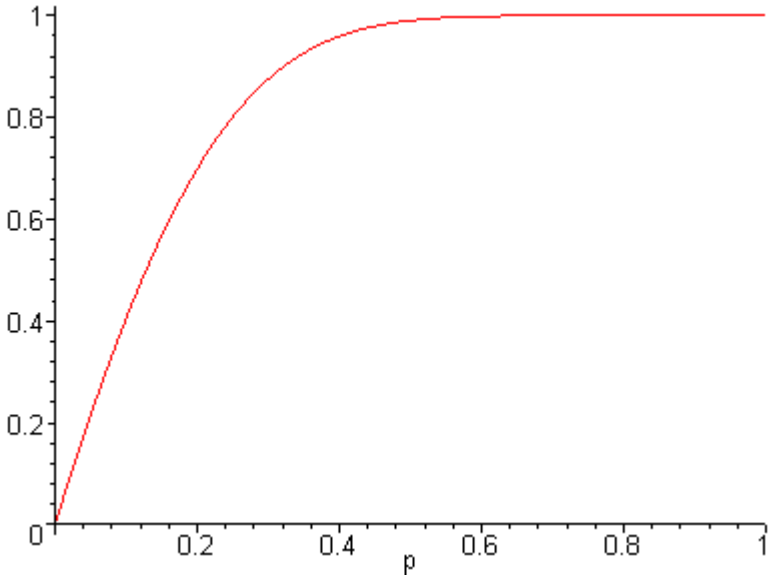
Soit A l'événement "On a obtenu au moins un 6".
Soit B l'événement "On a obtenu au moins deux 6".
Soit X le nombre de 6 obtenus. X suit une **loi binomiale** de paramètres $n = 10$ et p.
$P(X = 0) = (1 - p)^{10} \Rightarrow P(A) = P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - (1 - p)^{10}$.
$P(X = 1) = 10 \times p \times (1 - p)^{9} \Rightarrow P(B) = P(X \geq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = P(A) - 10 \times p \times (1 - p)^{9}$.

La relation $X \geq 2 \Rightarrow X \geq 1$ entraîne $B \subset A$ donc $A \cap B = B$. On a alors :

$$P(B \mid A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P(B)}{P(A)} = 1 - \frac{10\,p(1-p)^9}{1-(1-p)^{10}}$$

$$\boxed{P(B \mid A) = 1 - \frac{10\,p(1-p)^9}{1-(1-p)^{10}}}$$

C'est une fonction strictement croissante de p, qui varie de 0 à 1 lorsque p varie de 0 à 1.



Application numérique :

Si $p = \frac{1}{6}$, $P(B \mid A) \approx 0{,}6148$.

Chapitre 5. Loi binomiale.

Enoncés.

Exercice 7. Vaccin et peste.

On sait que la peste touche une personne sur cinq. Un vaccin est testé sur 10 personnes (indépendantes) : aucune n'est touchée. a) Calculer la probabilité de ce résultat si on suppose que le vaccin n'a aucun effet. b) Comparer le résultat avec celui d'une autre expérience où 20 personnes ont pris le vaccin, dont une seule a été touchée.	

Solution.

1°/ Loi de probabilité du nombre de malades.

Pour une personne, de deux choses l'une : ou bien elle contracte la peste, probabilité $p = \frac{1}{5}$, ou bien elle ne contracte pas la peste, probabilité $q = 1 - p = \frac{4}{5}$. Le fait de regarder si la personne a, ou non, contracté la peste constitue une épreuve de Bernoulli. Lorsqu'on répète cette épreuve de Bernoulli pour n personnes testées, le nombre X de personnes atteintes est le nombre de succès dans cette répétition d'épreuves de Bernoulli ; X suit une **loi binomiale** de paramètres n et $p = \frac{1}{5}$.

$$P(X = k) = \binom{n}{k}\left(\frac{1}{5}\right)^{k}\left(\frac{4}{5}\right)^{n-k}$$

Si on observe k malades dans un échantillon de n personnes traitées, $P(X \leq k)$ s'appelle la **probabilité critique** du test de l'hypothèse (H_0) : "Le vaccin n'a pas d'effet", contre l'hypothèse (H_1) : "Le vaccin diminue le nombre de malades". Ce n'est que si cette probabilité est inférieure au seuil de 5 % que l'on dira que le vaccin a un **effet significatif**.

2°/ Application : $n = 10$, $k = 0$.

$$P(X = 0) = \left(\frac{4}{5}\right)^{10} = 0{,}1074.$$

$$\boxed{P(X = 0) = 0{,}1074.}$$

Cette probabilité est supérieure à 5 %. On ne peut pas rejeter l'hypothèse (H_0) : "Le vaccin n'a pas d'effet".

3°/ Application : $n = 20$, $k = 1$.

$$P(X = 1) = 20 \times \frac{1}{5} \times \left(\frac{4}{5}\right)^{19} = 5{,}76 \times 10^{-2}.$$

$$P(X = 0) = \left(\frac{4}{5}\right)^{20} = 1{,}15 \times 10^{-2}.$$

$$P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = 5{,}76 \times 10^{-2} + 1{,}15 \times 10^{-2} = 6{,}91 \times 10^{-2}.$$

$$\boxed{P(X \leq 1) = 0{,}0691.}$$

Cette probabilité est supérieure à 5 %. On ne peut pas rejeter l'hypothèse (H_0) : "Le vaccin n'a pas d'effet".

Chapitre 5. Loi binomiale.

Enoncés.

Exercice 8. Partie de pile ou face.

Un joueur joue à pile ou face où la probabilité de gagner est 2/3. S'il gagne, le joueur obtient un franc, s'il perd, il rend un franc.

1°/ Calculer la probabilité qu'après 10 essais, il ait gagné plus de 5 francs.
2°/ Soit T la variable aléatoire qui représente le nombre d'essais qu'il faut pour que son gain devienne positif. Calculer les probabilités $P\,[T = n]$ pour $n = 1, 2, 3, 5, 7$.
3°/ Soit S la variable aléatoire qui représente le nombre d'essais qu'il faut pour qu'il gagne deux fois de suite. Calculer les probabilités $P\,[S = n]$ pour $n = 1, 2, 3, 4, 5$.
4°/ Calculer la probabilité pour que le joueur gagne 6 points en 10 lancers et la probabilité que le gain du joueur en dix lancers soit nul.
5°/ Mêmes questions qu'en 4° en supposant le nombre de lancers égal à $2n$, $n \in \mathbb{N}^*$, et le gain égal à $2k$, $k \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq k \leq n$.

Solution.

1°/ Loi de probabilité.

Lors de l'essai numéro i, soit X_i la variable aléatoire égale à 0 si le joueur perd (probabilité $q = \frac{1}{3}$), et égale à 1 si le joueur gagne (probabilité $p = \frac{2}{3}$). X_i est une **variable de Bernoulli** de paramètre $p = \frac{2}{3}$.
Le gain du joueur à l'essai n° i est $G_i = +1$ si $X_i = 1$, et $G_i = -1$ si $X_i = 0$.
On a donc : $G_i = 2\,X_i - 1$.

Sur n essais, le nombre X d'essais où le joueur gagne est la **variable binomiale** $X = X_1 + \ldots + X_n$, de paramètres n et $p = \frac{2}{3}$.
Le gain G en n essais est $G = G_1 + \ldots + G_n = 2\,X - n$.

$$\boxed{G = 2\,X - n}$$

La loi de probabilité du gain est donnée par la loi binomiale de X :

$$P\,(G = 2\,k - n) = P\,(X = k) = \binom{n}{k} p^k\,(1-p)^{n-k},\ 0 \leq k \leq n.$$

Pour $n = 10$, l'événement $G > 5$ est l'événement $2\,X - 10 > 5$, soit $X > \frac{15}{2}$, donc $\{X = 8\} \cup \{X = 9\} \cup \{X = 10\}$ et la probabilité de la réunion de ces trois évènements incompatibles deux à deux est la somme de leurs probabilités :

$$P(G > 5) = P(\{X = 8\}) + P(\{X = 9\}) + P(\{X = 10\}) = \binom{10}{8}\left(\frac{2}{3}\right)^8\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \binom{10}{9}\left(\frac{2}{3}\right)^9\left(\frac{1}{3}\right)^1 + \binom{10}{10}\left(\frac{2}{3}\right)^{10}\left(\frac{1}{3}\right)^0$$

$$= 45 \times \frac{256}{59\,049} + 10 \times \frac{512}{59\,049} + \frac{1\,024}{59\,049} = \frac{11\,520 + 5\,120 + 1\,024}{59\,049} = \frac{17\,664}{59\,049} = \frac{5\,888}{19\,683} = 0{,}2991...$$

Au bout de 10 essais, la probabilité que le joueur ait gagné plus de 5 francs est d'environ 3 chances sur 10.

2°/ Gain positif.

a) Pour n = 1.

Le gain devient positif au 1er essai si le joueur gagne au premier essai : probabilité $p = \frac{2}{3}$.

$P(T = 1) = \frac{2}{3}$.

b) Pour n = 2.

Le gain devient positif au 2e essai si :
— le joueur a perdu au 1er essai, probabilité $q = \frac{1}{3}$,
— le joueur a gagné 2 francs au 2e essai : impossible.
$P(T = 2) = 0$.

c) Pour n = 3.

Le gain devient positif au 3e essai si :
— le joueur gagne au 3e essai, probabilité $\frac{2}{3}$;
— le joueur gagne au 2e essai, probabilité $\frac{2}{3}$;
— le joueur perd au 1er essai, probabilité $\frac{1}{3}$.

$P(T = 3) = \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{27}$.

d) Pour n = 5.

Le gain devient positif au 5e essai dans les deux cas suivants :
— 1er essai : perdu, 2e essai : perdu, 3e essai : gagné, 4e essai : gagné, 5e essai : gagné.
— 1er essai : perdu, 2e essai : gagné, 3e essai : perdu, 4e essai : gagné, 5e essai : gagné.

$P(T = 5) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{16}{243}$

e) Pour n = 7.

Le gain devient positif au 7e essai dans les cas suivants (*P* = perdu, *G* = gagné) :
— *PPPGGGG*. Evolution du gain total {–1 ; –2 ; –3 ; –2 ; –1 ; 0 ; +1}
— *PPGPGGG*. Evolution du gain total {–1 ; –2 ; –1 ; –2 ; –1 ; 0 ; +1}
— *PPGGPGG*. Evolution du gain total {–1 ; –2 ; –1 ; 0 ; –1 ; 0 ; +1}
— *PGPPGGG*. Evolution du gain total {–1 ; 0 ; –1 ; –2 ; –1 ; 0 ; +1}
— *PGPGPGG*. Evolution du gain total {–1 ; 0 ; –1 ; 0 ; –1 ; 0 ; +1}

$P\,(T = 7) = 5 \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{80}{2\,187}$.

Dans le cas général, pour que le gain devienne positif au n^{e} essai, il faut :
— qu'il y ait un G de plus que de P : n est impair = $2\,k + 1$
— la série commence par un P et se termine par deux G.
— le nombre de G après un essai donné ne dépasse pas le nombre de P précédents.

3°/ Gain deux fois de suite.

a) Pour n = 1.

Evènement impossible : le joueur ne peut pas gagner deux fois de suite s'il ne joue qu'une seule fois.
$P\,(S = 1) = 0$

b) Pour n = 2.

$\{S = 2\} = \{GG\}$
$P\,(S = 2) = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$.

c) Pour n = 3.

$\{S = 3\} = \{PGG\}$
$P\,(S = 3) = \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{27}$

d) Pour n = 4.

$\{S = 4\} = \{PPGG\ ;\ GPGG\}$
$P\,(S = 4) = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{4}{27}$

e) Pour n = 5.

$\{S = 5\} = \{PPPGG\ ;\ PGPGG\ ;\ GPPGG\}$
$P\,(S = 5) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 + 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{20}{243}$

4°/ Gain en dix lancers.

Pour $n = 10$, l'événement $G = 6$ est l'événement $2\,X - 10 = 6$, soit $X = 8$.
La formule $P\,(G = 2\,k - n) = P\,(X = k) = \binom{n}{k} p^k\,(1 - p)^{n-k}$, $0 \leq k \leq n$, donne, avec $p = \frac{2}{3}$:

$$P\,(G = 6) = P\,(X = 8) = \binom{10}{8}\left(\frac{2}{3}\right)^8\left(\frac{1}{3}\right)^2 = 45 \times \frac{2^8}{3^{10}} = 45 \times \frac{256}{59\,049} = 7{,}62 \times 10^{-4}.$$

$$P\,(G = 0) = P\,(X = 5) = \binom{10}{5}\left(\frac{2}{3}\right)^5\left(\frac{1}{3}\right)^5 = 0{,}1366.$$

5°/ Gain en 2 *n* lancers.

En remplaçant n par $2\,n$, la formule

$$P\,(G = 2\,k - n) = P\,(X = k) = \binom{n}{k} p^{\,k}\,(1-p)^{\,n-k},\ 0 \le k \le n,$$

devient :

$$P\,(G = 2\,k - 2\,n) = P\,(X = k) = \binom{2\,n}{k} p^{\,k}\,(1-p)^{\,2\,n-k},\ 0 \le k \le 2\,n,$$

Dans cette formule, remplaçons $k - n$ par k, soit k par $n + k$:

$$\boxed{P\,(G = 2\,k) = \binom{2\,n}{n+k} p^{\,n+k}\,(1-p)^{\,n-k},\ -n \le k \le n.}$$

Bien entendu, ce résultat reste valable si l'on restreint les valeurs de gain aux valeurs positives : $0 \le k \le n$.
Par exemple :

$$P\,(G = 0) = \binom{2\,n}{n} p^{\,n}\,(1-p)^{\,n}$$

Pour $n = 5$ (10 lancers) et $p = \frac{2}{3}$, on retrouve la formule :

$$P\,(G = 0) = \binom{10}{5}\left(\frac{2}{3}\right)^5\left(\frac{1}{3}\right)^5$$

de la question précédente.

Chapitre 5. Loi binomiale.

Enoncés.

Exercice 9. Nombre de garçons dans une famille de *n* enfants.

On étudie les familles comportant un nombre donné n d'enfants, $n \geq 2$. On suppose que la probabilité de naissance d'une fille ou d'un garçon est 1/2 et cela indépendamment du rang de naissance de l'enfant. a) Calculer la probabilité pour que la famille comporte au plus un garçon. b) Calculer la probabilité pour que la famille comporte au moins un garçon et au moins une fille. c) Les deux évènements considérés sont-ils indépendants ?	

Solution.

Soit X le nombre de garçons dans une famille de n enfants.

1°/ Loi de probabilité de X.

Pour un enfant qui naît, de deux choses l'une : ou bien c'est un garçon, probabilité $p = \frac{1}{2}$, ou bien c'est une fille, probabilité $q = 1 - p = \frac{1}{2}$. Le fait de regarder si l'enfant qui naît est un garçon ou une fille constitue une **épreuve de Bernoulli**. Lorsqu'on répète cette épreuve de Bernoulli pour les n enfants de la famille, le nombre de succès dans cette répétition d'épreuves de Bernoulli est le nombre X de garçons de la famille : sa loi de probabilité est une **loi binomiale** de paramètres n et p.

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \frac{1}{2^n}\binom{n}{k}.$$

2°/ Probabilité pour que $X \leq 1$.

$$P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = \frac{1}{2^n}\left(\binom{n}{0} + \binom{n}{1}\right) = \frac{n+1}{2}.$$

3°/ Probabilité pour que $1 \leq X \leq n - 1$.

$$P(1 \leq X \leq n-1) = 1 - P(X = 0) - P(X = n) = 1 - \frac{1}{2^n}\left(\binom{n}{0} + \binom{n}{n}\right) = 1 - \frac{1}{2^{n-1}}.$$

4°/ Indépendance.

$$\{X \leq 1\} \cap \{1 \leq X \leq n-1\} = \{X \leq 1\} \cap \{1 \leq X\} \cap \{X \leq n-1\}$$

$$= \{X = 1\} \cap \{X \leq n-1\} = \{X = 1\} \cap \{n \geq 2\} = \{X = 1\}.$$

$$P(\{X \leq 1\} \cap \{1 \leq X \leq n-1\}) = P(\{X = 1\}) = \frac{n}{2^n}$$

$$P(\{X \leq 1\}) \times P(\{1 \leq X \leq n-1\}) = \frac{n+1}{2^n} \times \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right).$$

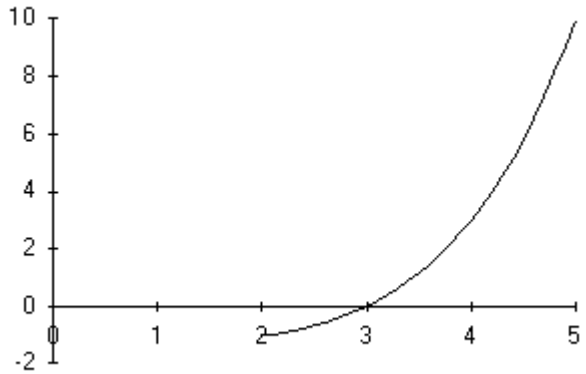
Pour $n = 2$, par exemple, on a : $\frac{n}{2^n} = \frac{1}{2}$, $\frac{n+1}{2^n} \times \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) = \frac{3}{8}$. Les deux sont différents, donc les deux évènements $\{X \leq 1\}$ et $\{1 \leq X \leq n-1\}$ ne sont pas indépendants en général.
Pour qu'ils soient indépendants, il faudrait que l'on ait

$$\frac{n+1}{2^n} \times \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) = \frac{n}{2^n}$$

Cela n'est possible que pour $n = 3$, seule solution de l'équation

$$2^{n-1} = n + 1$$

En effet, la dérivée de la fonction $2^{x-1} - x - 1$ est $(ln\ 2)\ 2^{x-1} - 1$, elle est strictement positive pour $x \geq 2$. Donc la fonction $2^{x-1} - x - 1$ est strictement croissante pour $x \geq 2$: elle est négative pour $x = 2$, nulle pour $x = 3$, strictement positive pour $x > 3$.



Variations de la fonction $f(x) = 2^{x-1} - x - 1$, *pour* $x \geq 2$

En conclusion :

Les évènements $\{1 \leq X\}$ et $\{1 \leq X \leq n-1\}$ sont indépendants pour $n = 3$, non indépendants pour $n \neq 3$.

Chapitre 5. Loi binomiale.

Enoncés.

Exercice 10. Fautes d'impression dans un livre.

Dans un livre de deux cents pages, il y a vingt fautes d'impression, réparties au hasard.

On modélise cette situation en considérant l'espace $\Omega = \{1, \ldots, 200\}^{20}$ muni de la probabilité uniforme P.

1°/ On considère une page donnée, de numéro n. Quelle est la probabilité que s'y trouvent deux fautes d'impression ?

2°/ On considère un ensemble E de 10 pages.

a) Quelle est la probabilité que s'y trouvent trois fautes d'impression ?

b) Sachant que, dans l'ensemble E se trouvent trois fautes d'impression, quelle est la probabilité que ces trois fautes soient toutes sur la première page de E ?

Solution.

1°/ Nombre de fautes dans une page.

Une faute donnée se trouve avec la même probabilité dans chacune des 200 pages.
Pour une faute, de deux choses l'une :

— ou bien la faute se trouve dans la page choisie avec une probabilité $\frac{1}{200} = 0{,}005$,

— ou bien elle se trouve ailleurs avec une probabilité 0,995.

Le nombre X de fautes dans la page choisie apparaît donc comme le nombre de succès dans la répétition 20 fois d'épreuves de Bernoulli indépendantes où la probabilité du succès est 0,005.
On sait qu'alors, la loi de probabilité de X est une **loi binomiale** de paramètres $n = 20$ et $p = 0{,}005$.

$$P(X = 2) = \binom{20}{2} \times (0{,}005)^2 \times (0{,}995)^{18} = 4{,}3 \times 10^{-4}$$

$$\boxed{P(X = 2) = 4{,}3 \times 10^{-4}}$$

2°/ Nombre de fautes dans dix pages.

Une faute donnée se trouve avec la même probabilité dans chacune des 200 pages.
La probabilité qu'une faute donnée se trouve dans les 10 pages choisies est donc $\frac{10}{200} = 0{,}05$.

Par un raisonnement analogue à celui de la première question, le nombre Y de fautes dans les 10 pages choisies suivra une **loi binomiale** de paramètres $n = 20$ et $p = 0{,}05$.

$$P(Y = 3) = \binom{20}{3} \times (0{,}05)^3 \times (0{,}95)^{17} = 0{,}060$$

$$P(Y = 3) = 6{,}0 \times 10^{-2}$$

3°/ Probabilité conditionnelle.

Sachant que l'ensemble E de 10 pages contient trois fautes d'impression, chacune des trois fautes a une chance sur 10 de se trouver sur la première page de l'ensemble E.
Le nombre de fautes contenues dans la première page apparaît comme le nombre de succès dans la répétition trois fois d'une épreuve de Bernoulli dans laquelle la probabilité du succès est 0,10.
Le nombre Z de fautes contenues dans la première page suit alors une **loi binomiale** de paramètres $n = 3$ et $p = 0{,}10$.

$$P(Z = 3) = \binom{3}{3} (0{,}10)^3 (0{,}90)^{3-3} = 10^{-3}.$$

La probabilité que les trois fautes soient sur la première page de l'ensemble E est 10^{-3}.

Chapitre 5. Loi binomiale.

Enoncés.

Exercice 11. Feux rouges Paris-Orly.

1°/ Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(X_k)_{1 \leq k \leq n}$ un n-uplet de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, telles que $P(X_1 = 1) = 1 - P(X_1 = 0) = p$. On pose $S_n = X_1 + ... + X_n$. a) Calculer l'espérance et la variance de S_n. b) Déterminer la loi de S_n. 2°/ Paris est interdit à la circulation pour laisser le champ libre aux voitures officielles. Entre l'Etoile et Orly, il y a treize feux tricolores qui fonctionnent de manière indépendante. Chacun est rouge un tiers du temps. Soit X le nombre de feux rouges qu'une escorte de motards ignore sur son passage, de l'Etoile à Orly. Déterminer l'espérance et l'écart-type de X.	

Solution.

1°/ Somme de variables de Bernoulli.

$E(S_n) = E(X_1 + ... + X_n) = E(X_1) + ... + E(X_n) = n\,E(X_1) = n\,p.$
$Var(S_n) = Var(X_1 + ... + X_n) = Var(X_1) + ... + Var(X_n) = n\,Var(X_1) = n\,p\,(1-p).$

La somme S_n de n variables aléatoires de Bernoulli indépendantes de même loi, suit une **loi binomiale** de paramètres n et p.

2°/ Application.

Pour un feu rouge donné, de deux choses l'une : ou bien il est rouge et est ignoré de l'escorte, avec une probabilité $p = \frac{1}{3}$, ou bien il n'est pas rouge et n'a pas besoin d'être ignoré de l'escorte, avec une probabilité $q = 1 - p = \frac{2}{3}$.
Le fait de regarder si un feu est rouge au passage de l'escorte constitue une épreuve de Bernoulli, dont le succès "Le feu est rouge et ignoré de l'escorte" a une probabilité $p = \frac{1}{3}$.
Lorsqu'on répète cette épreuve de Bernoulli pour les 13 feux du trajet, le nombre de succès est le nombre X de feux rouges que l'escorte de motards ignore sur son passage : il suit une **loi binomiale** de paramètres $n = 13$ et $p = \frac{1}{3}$.

D'après le rappel précédent, on a :

$$E(X) = n\,p = \frac{13}{3}$$
$$Var(X) = n\,p\,q = \frac{26}{9}$$

Chapitre 5. Loi binomiale.

Enoncés.

Exercice 12. Retrouver son chapeau.

n personnes reprennent au hasard leur chapeau en sortant d'une soirée arrosée. On note X_n le nombre de chapeaux que l'on a retrouvé sur la tête de leur légitime propriétaire. En introduisant la variable de Bernoulli Y_i qui vaut 1, par définition, si, et seulement si, le convive numéro i a retrouvé son chapeau, calculer l'espérance et la variance de X_n.	

Solution.

Comme chaque personne a autant de chances que les autres de retrouver son chapeau, la probabilité qu'un convive prenne son propre chapeau parmi les n chapeaux est $\frac{1}{n}$.

La variable de Bernoulli Y_i a donc pour paramètre $p = \frac{1}{n}$.

Le nombre X_n de chapeaux que l'on a retrouvés sur la tête de leur légitime propriétaire est la somme des Y_i :

$$X_n = Y_1 + \ldots + Y_n.$$

La variable X_n suit donc une **loi binomiale** de paramètres n et $p = \frac{1}{n}$.

Son espérance est $n\,p = 1$ et sa variance $n\,p\,q = \frac{n-1}{n} = 1 - \frac{1}{n}$.

Exercices

Loi géométrique.

1. Définitions.

2. Propriétés.

1°/ Equivalence des définitions.
2°/ Espérance mathématique.
3°/ Variance.

1. Définitions.

HAUT

Considérons une épreuve de Bernoulli dans laquelle le succès a une probabilité p.
On note q la probabilité $1 - p$ de l'échec.
On répète l'épreuve de Bernoulli de façon indépendante jusqu'à l'obtention d'un succès.
Soit X le nombre de répétitions nécessaires à l'obtention d'un succès.
L'événement $X = n$ est la conjonction de $n - 1$ échecs suivi d'un succès.
Comme les épreuves successives sont indépendantes, les probabilités se multiplient :

$$P(X = n) = p\, q^{n-1},\ n \in \mathbb{N}^*.$$

Cette loi de probabilité est appelée **loi géométrique de paramètre *p* sur** N*****.
La relation "X suit une loi géométrique de paramètre p sur N*" est notée $X \rightsquigarrow Geom^*(p)$.

Par analogie, on dit que X suit une **loi géométrique de paramètre *p* sur** N, si sa loi de probabilité est donnée par:

$$P(X = n) = p\, q^{n},\ n \in \mathbb{N}.$$

La relation "X suit une loi géométrique de paramètre p sur N" est notée $X \rightsquigarrow Geom(p)$.

2. Propriétés.

HAUT

1°/ Equivalence des définitions.

Soit $X \rightsquigarrow Geom^*(p)$.
Soit $Y = X - 1$ et $n \in \mathbb{N}$.
$P(Y = n) = P(X = n + 1) = p\,q^n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.
Donc $Y \rightsquigarrow Geom(p)$.
Réciproquement, si $Y \rightsquigarrow Geom(p)$, soit $X = Y + 1$ et $n \in \mathbb{N}^*$.
$P(X = n) = P(Y = n - 1) = p\,q^{n-1}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

Il y a donc équivalence entre $X \rightsquigarrow Geom^*(p)$ et $X - 1 \rightsquigarrow Geom(p)$.

$$\boxed{X \rightsquigarrow Geom^*(p) \Leftrightarrow X - 1 \rightsquigarrow Geom(p)}$$

2°/ Espérance mathématique.

HAUT

$$X \rightsquigarrow Geom^*(p) \Rightarrow E(X) = \frac{1}{p}$$
$$X \rightsquigarrow Geom(p) \Rightarrow E(X) = \frac{q}{p}$$

a) Soit $X \rightsquigarrow Geom^*(p)$.

$E(X) = \sum_{n=1}^{\infty} n\,P(X=n) = \sum_{n=1}^{\infty} n\,p\,q^{n-1} = p\sum_{n=1}^{\infty} n\,q^{n-1}$

$\sum_{n=1}^{\infty} n\,q^{n-1}$ est la dérivée par rapport à q de $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$, puisqu'on peut dériver terme à terme une série entière à l'intérieur du cercle de convergence.

Donc $\sum_{n=1}^{\infty} n\,q^{n-1} = \frac{1}{(1-q)^2} = \frac{1}{p^2}$ et $E(X) = p\sum_{n=1}^{\infty} n\,q^{n-1} = \frac{1}{p}$.

b) Soit $X \rightsquigarrow Geom(p)$.

Alors $Y = X + 1 \rightsquigarrow Geom^*(p)$. D'après le résultat précédent $E(Y) = \frac{1}{p}$.

D'où $E(X) = E(Y-1) = E(Y) - 1 = \frac{1}{p} - 1 = \frac{q}{p}$

HAUT

3°/ Variance.

HAUT

Les relations $Var\,(X+1) = Var\,(X-1) = Var\,(X)$ font qu'il n'y a pas besoin de distinguer loi géométrique sur $\mathbb{N}$ et loi géométrique su $\mathbb{N}^*$ pour le calcul de la variance : le résultat est identique.

$$X \rightsquigarrow Geom^*\,(p) \text{ ou } X \rightsquigarrow Geom\,(p) \Rightarrow Var\,(X) = \frac{q}{p^2}$$

En effet, soit $X \rightsquigarrow Geom^*\,(p)$.

$Var\,(X) = E\,(X^2) - (E\,(X))^2 = E\,(X^2) - \frac{1}{p^2}$

$E\,(X^2) = E\,(X\,(X-1)) + E\,(X) = \sum_{n=1}^{\infty} n\,(n-1)\,p\,q^{n-1} + \frac{1}{p}$

$\sum_{n=1}^{\infty} n\,(n-1)\,p\,q^{n-1} = \sum_{n=2}^{\infty} n\,(n-1)\,p\,q^{n-1} = p\,q \sum_{n=2}^{\infty} n\,(n-1)\,q^{n-2}$

$\sum_{n=2}^{\infty} n\,(n-1)\,q^{n-2}$ est la dérivée seconde de $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$ par rapport à q.

$\sum_{n=2}^{\infty} n\,(n-1)\,q^{n-2} = \frac{2}{(1-q)^3} = \frac{2}{p^3}$

$E\,(X^2) = 2\,\frac{q}{p^2} + \frac{1}{p} = \frac{2}{p^2} - \frac{1}{p}$

$Var\,(X) = \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p} = \frac{q}{p^2}$

HAUT

Chapitre 6. Loi géométrique.

Exercices

Exercice 1. Modélisation.
Exercice 2. Tirages de cartes numérotées.
Exercice 3. Partie de dé à deux joueurs.
Exercice 4. Le hamster.
Exercice 5. Jet d'une deuxième dé pour faire une paire.
Exercice 6. *Inf* et *Sup* de deux variables géométriques.
Exercice 7. Partie de dé à trois joueurs.
Exercice 8. Temps d'attente d'un métro.
Exercice 9. Le ballon de foot.
Exercice 10. Conducteur et passagère.
Exercice 11. Différence de deux variables géométriques.

Exercice 1. Modélisation.

Pour les expériences aléatoires suivantes, donner les ensembles fondamentaux Ω et les probabilités qui les décrivent. Puis, pour chacune des variables aléatoires X que l'on étudie, préciser le nom de la loi, ses paramètres, et, pour $k \in X(\Omega)$, donner l'expression de $P(X = k)$. 1°/ Un homme ivre rentre chez lui avec 10 clés différentes dans sa poche. Pour ouvrir la porte, il essaie une clé au hasard et, si la porte ne s'ouvre pas, il remet la clé dans sa poche et recommence. X est le nombre de clés essayées jusqu'à ce que la porte s'ouvre. 2°/ On lance un dé équilibré jusqu'à obtenir un 6. X est le nombre de lancers jusqu'à obtenir 6.	Solution

HAUT

Exercice 2. Tirages de cartes numérotées.

Dans une boîte, il y a n cartes numérotées de 1 à n. On effectue des tirages successifs avec remise, jusqu'à obtenir la carte n. Soit Z le nombre de tirages effectués.

1°/ Reconnaître quelle est la loi de Z. Calculer la probabilité que le nombre de cartes tirées soit égal à r, pour $r \geq 1$.
2°/ Quelle est la probabilité que le nombre de cartées tirées soit inférieur ou égal à 50 ?
Application : $n = 100$.

Solution

HAUT

Exercice 3. Partie de dé à deux joueurs.

Alice et Bruno lancent le même dé à tour de rôle (Alice commence). Le gagnant est le premier à obtenir un "six". Ω désigne l'ensemble de toutes les éventualités possibles (on ne demande pas d'expliciter Ω). Quand Alice ou Bruno gagne, la partie s'arrête. On s'intéresse aux trois événements :

A = {victoire d'Alice},
B = {victoire de Bruno},
D = {Pas de vainqueur}.

On note :

F_n = {Fin de la partie au n-ième lancer},
S_j = {Le j-ième lancer donne un "six"}.

Solution

1°/ Exprimer l'événement D à l'aide des événements S_j.

2°/ a) Exprimer les événements A et B à l'aide des événements F_n.

b) Exprimer l'événement F_n à l'aide des événements S_j.

c) En déduire l'expression des événements A et B à l'aide des événements S_j.

3°/ On admet dans la suite que l'on peut modéliser la situation par une probabilité P sur $\mathcal{P}(\Omega)$, telle que $P(F_n) = \frac{1}{6} \times \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer la probabilité de victoire de chaque joueur.

HAUT

Exercice 4. Le hamster.

On place un hamster dans une cage. Il se trouve face à 5 portillons dont un seul lui permet de sortir de la cage. A chaque essai infructueux, il reçoit une décharge électrique et on le replace à l'endroit initial.

1. En supposant que le hamster ne soit pas doué d'apprentissage et qu'il choisisse donc de façon équiprobable entre les 5 solutions à chaque nouvel essai, déterminer la probabilité des évènements :

a) le hamster sort au premier essai,
b) le hamster sort au troisième essai,
c) le hamster sort au septième essai.

2. Le hamster mémorise maintenant les essais infructueux et choisit de façon équiprobable entre les portillons qu'il n'a pas encore essayés. On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre d'essais effectués.

a) Quelles valeurs peut prendre X ? Déterminer sa loi de probabilité.
b) Déterminer l'espérance mathématique $E(X)$: interpréter le résultat.
c) Déterminer la variance $Var(X)$.

Solution

HAUT

Exercice 5. Jet d'un deuxième dé pour faire une paire.

On joue avec deux dés équilibrés à six faces numérotées de 1 à 6 (dés non pipés). On jette un premier dé. On jette ensuite le deuxième dé jusqu'à ce qu'il indique le même numéro que le premier. Soit X le nombre de fois qu'il faut lancer le deuxième dé pour qu'il indique le même numéro que le premier. a) Etablir la loi de probabilité de X. b) Calculer son espérance mathématique et sa variance.	Solution

HAUT

Exercice 6. *Inf* et *Sup* de deux variables géométriques.

Soit $X \rightsquigarrow Geom^*(p_X)$ et $Y \rightsquigarrow Geom^*(p_Y)$ deux variables aléatoires géométriques sur N*, indépendantes.

1°/ Calculer la loi de probabilité de la variable aléatoire $W = Inf(X, Y)$.
Calculer son espérance mathématique.

2°/ Calculer la loi de probabilité de la variable aléatoire $Z = Sup(X, Y)$.
Calculer son espérance mathématique.

Solution

HAUT

Exercice 7. Partie de dé à trois joueurs.

Trois joueurs lancent, chacun leur tour, un dé, puis recommencent dans le même ordre, jusqu'à ce qu'un joueur amène un 6. La partie s'arrête alors, le joueur qui a amené un 6 a gagné. La probabilité d'obtenir 6 est p, avec $0 < p < 1$. a) Calculer la probabilité pour que la partie s'arrête au dixième lancer ou au r-ième lancer, $r \geq 1$. b) Calculer la probabilité de gagner pour chacun des joueurs.	Solution

HAUT

Exercice 8. Temps d'attente d'un métro.

Pour se rendre au bureau, un homme passe par une station de métro où il peut choisir entre deux lignes indépendantes. Ligne *A* : les trains arrivent selon une loi géométrique sur N* de moyenne 3 minutes et le trajet dure 13 minutes. Ligne *B* : les trains arrivent selon une loi géométrique sur N* de moyenne 6 minutes et le trajet dure 8 minutes. 1°/ Quelle est la probabilité d'attendre au moins 10 minutes avant que n'arrive le train *A*. 2°/ Quelle est la probabilité qu'aucun train n'arrive pendant les cinq premières minutes ? 3°/ Calculer la probabilité que le train *A* arrive avant le train *B*.	Solution

HAUT

Exercice 9. Le ballon de foot.

La surface extérieure d'un ballon de foot est composée de 20 hexagones réguliers numérotés de 1 à 20 et de 12 pentagones réguliers numérotés de 1 à 6, le même numéro apparaissant sur deux pentagones. Après lancer, la probabilité que le ballon tombe sur un pentagone particulier est p alors que la probabilité qu'il tombe sur un hexagone particulier est p '. On lance le ballon de manière indépendante jusqu'à ce qu'il tombe sur un pentagone. On note X le numéro du pentagone concerné, N le nombre de lancers et S la somme des numéros des polygones sur lesquels le ballon est tombé au cours de ces lancers.

1°/ Exprimer la relation qui existe entre p et p '.
2°/ Quelle est la loi de X ?
3°/ Déterminer la loi de N en fonction du paramètre p.
4°/ Calculer $E[S \mid N = n]$, puis $E[S]$.

Solution

HAUT

Exercice 10. Conducteur et passagère.

Guy est très distrait : quand il s'arrête pour prendre de l'essence, il y a une chance sur dix pour qu'il reparte sans sa passagère, descendue pour visiter les lieux. Soit X la variable aléatoire égale au nombre d'étapes que Guy a parcouru en compagnie de sa passagère, avant de repartir sans elle. 1°/ Etablir la loi de probabilité de X. Calculer $E(X)$. 2°/ Quel est le nombre maximum d'étapes que peut comporter le voyage pour que la passagère arrive à destination dans la voiture de Guy avec une probabilité supérieure à 0,5 ?	Solution

HAUT

Exercice 11. Différence de deux variables géométriques.

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant chacune une loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$. Trouver la loi de $X - Y$.	Solution

HAUT

Chapitre 6. Loi géométrique.

Enoncés.

Exercice 1. Modélisation.

Pour les expériences aléatoires suivantes, donner les ensembles fondamentaux Ω et les probabilités qui les décrivent. Puis, pour chacune des variables aléatoires X que l'on étudie, préciser le nom de la loi, ses paramètres, et, pour $k \in X(\Omega)$, donner l'expression de $P(X = k)$. 1°/ Un homme ivre rentre chez lui avec 10 clés différentes dans sa poche. Pour ouvrir la porte, il essaie une clé au hasard et, si la porte ne s'ouvre pas, il remet la clé dans sa poche et recommence. X est le nombre de clés essayées jusqu'à ce que la porte s'ouvre. 2°/ On lance un dé équilibré jusqu'à obtenir un 6. X est le nombre de lancers jusqu'à obtenir 6.	

Solution.

1°/ Ouverture de porte.

1. Modélisation.

L'essai d'une clé au hasard est une épreuve de Bernoulli, avec deux résultats possibles :
— le succès : la porte s'ouvre. Sa probabilité est la probabilité $p = \frac{1}{10}$ d'avoir choisi la bonne clé.
— l'échec : la porte ne s'ouvre pas. Sa probabilité est $q = 1 - p = \frac{9}{10}$.

On répète l'épreuve de Bernoulli de façon indépendante.
Un résultat élémentaire ω_n de l'expérience aléatoire est une suite de $n - 1$ échecs suivis d'un succès, $n \in \mathbb{N}^*$.
Ω est l'ensemble des ω_n, pour $n \in \mathbb{N}^*$.
Les ω_n, pour $n \in \mathbb{N}^*$, constituent les événements élémentaires (parties minimales pour l'inclusion).

Un événement est une partie de Ω.
Tout événement est réunion des événements élémentaires qu'il contient.

La probabilité d'un résultat élémentaire est donnée par le produit des probabilités des résultats des épreuves de Bernoulli qui le composent :

$$P(\omega_n) = p\, q^{n-1}.$$

La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des événements élémentaires qu'il contient.

2. Loi de probabilité.

Soit X le nombre de **répétitions de l'épreuve de Bernoulli** qu'il faut faire pour rencontrer un succès.
L'événement $X = n$, pour un $n \in \mathbb{N}^*$, est l'événement élémentaire ω_n.
La loi de probabilité de X est donc donnée par :

$$P(X = n) = P(\omega_n) = p\,q^{n-1}.$$

C'est la **loi géométrique** sur $\mathbb{N}^*$.

2°/ Lancer de dé.

1. Modélisation.

Le jet d'un dé est ici une épreuve de Bernoulli, avec deux résultats possibles :
— le succès : on obtient un 6. Sa probabilité est $p = \frac{1}{6}$ puisque le dé est équilibré.
— l'échec : on 'obtient pas un 6. Sa probabilité est $q = 1 - p = \frac{5}{6}$.
On répète l'épreuve de Bernoulli de façon indépendante.
Un résultat élémentaire ω_n de l'expérience aléatoire est une suite de $n - 1$ échecs suivis d'un succès, $n \in \mathbb{N}^*$.
Ω est l'ensemble des ω_n, pour $n \in \mathbb{N}^*$.
Les ω_n, pour $n \in \mathbb{N}^*$, constituent les événements élémentaires (parties minimales pour l'inclusion).

Un événement est une partie de Ω.
Tout événement est réunion des événements élémentaires qu'il contient.

La probabilité d'un résultat élémentaire est donnée par le produit des probabilités des résultats des épreuves de Bernoulli qui le composent :

$$P(\omega_n) = p\,q^{n-1}.$$

La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des événements élémentaires qu'il contient.

2. Loi de probabilité.

Soit X le nombre de **répétitions de l'épreuve de Bernoulli** qu'il faut faire pour rencontrer un succès.
L'événement $X = n$, pour un $n \in \mathbb{N}^*$, est l'événement élémentaire ω_n.
La loi de probabilité de X est donc donnée par :

$$P(X = n) = P(\omega_n) = p\,q^{n-1}.$$

C'est la **loi géométrique** sur $\mathbb{N}^*$.

Chapitre 6. Loi géométrique.

Enoncés.

Exercice 2. Tirages de cartes numérotées.

Dans une boîte, il y a n cartes numérotées de 1 à n. On effectue des tirages successifs avec remise, jusqu'à obtenir la carte n. Soit Z le nombre de tirages effectués. 1°/ Reconnaître quelle est la loi de Z. Calculer la probabilité que le nombre de cartes tirées soit égal à r, pour $r \geq 1$. 2°/ Quelle est la probabilité que le nombre de cartées tirées soit inférieur ou égal à 50 ? Application : $n = 100$.	

Solution.

1°/ Loi de probabilité.

On répète, de façon indépendante, une épreuve de Bernoulli (tirage d'une carte) dans laquelle la probabilité du succès (tirer la carte numéro n) est $p = \frac{1}{n}$, jusqu'à l'obtention d'un succès.

Le nombre de répétitions d'une épreuve de Bernoulli de paramètre p, nécessaire à l'obtention d'un succès suit une loi géométrique sur $\mathbb{N}^*$ de paramètre p.

Donc le nombre Z de tirages effectués suit une **loi géométrique sur $\mathbb{N}^*$**, de paramètre p.

$$\boxed{P(Z = r) = p\, q^{r-1} = \frac{(n-1)^{r-1}}{n^r}.}$$

Son espérance mathématique est $E(Z) = \frac{1}{p} = n$, sa variance est $Var(Z) = \frac{q}{p^2} = n(n-1)$.

2°/ Calcul d'une probabilité.

$$P(Z \leq 50) = 1 - P(Z > 50)$$

$$P(Z > 50) = \sum_{r=51}^{\infty} p\, q^{r-1} = q^{50} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{50}$$

$$\boxed{P(Z \leq 50) = 1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{50}}$$

Application numérique : $n = 100$.

$$P(Z \leq 50) = 1 - (0{,}99)^{50} = 0{,}395$$

Autrement dit, il faut en moyenne 100 tirages avec remise pour tomber sur la carte n, mais il y a environ 4 chances sur 10 d'y arriver en 50 tirages maximum.

Chapitre 6. Loi géométrique.

Enoncés.

Exercice 3. Partie de dé à deux joueurs.

Alice et Bruno lancent le même dé à tour de rôle (Alice commence). Le gagnant est le premier à obtenir un "six". Ω désigne l'ensemble de toutes les éventualités possibles (on ne demande pas d'expliciter Ω). Quand Alice ou Bruno gagne, la partie s'arrête. On s'intéresse aux trois événements :

A = {victoire d'Alice},
B = {victoire de Bruno},
D = {Pas de vainqueur}.

On note :

F_n = {Fin de la partie au n-ième lancer},
S_j = {Le j-ième lancer donne un "six"}.

1°/ Exprimer l'événement D à l'aide des événements S_j.

2°/ a) Exprimer les événements A et B à l'aide des événements F_n.

b) Exprimer l'événement F_n à l'aide des événements S_j.

c) En déduire l'expression des événements A et B à l'aide des événements S_j.

3°/ On admet dans la suite que l'on peut modéliser la situation par une probabilité P sur $\mathfrak{P}(\Omega)$, telle que $P(F_n) = \frac{1}{6} \times \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer la probabilité de victoire de chaque joueur.

Solution.

1°/ Evénement *D*.

L'événement D = {Pas de vainqueur} signifie que, quel que soit $j \in \mathbb{N}^*$, le j-ème lancer ne donne pas de "six".

$$D = \bigcap_{j=1}^{\infty} \overline{S_j} = \overline{\bigcup_{j=1}^{\infty} S_j}.$$

Remarquons que, **si le dé est équilibré**, la probabilité de S_j est $\frac{1}{6}$ et la probabilité de $\overline{S_j}$ est $\frac{5}{6}$.

La limite de $\left(\frac{5}{6}\right)^{\infty}$ est 0. Il en résulte que la probabilité de D est nulle : ***D* est un événement impossible**.

$$P(D) = 0$$

2°/ Evénements A, B, F_n.

1. Expression de A et B en fonction des F_n.

Dire que Alice gagne, c'est dire qu'il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que F_{2n-1} se réalise :

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_{2n-1}$$

Dire que Bruno gagne, c'est dire qu'il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que F_{2n} se réalise :

$$B = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_{2n}$$

2. Expression de F_n en fonction des S_j.

Dire que la partie se termine au n-ième lancer, c'est dire que les $n-1$ premiers lancers n'ont donné aucun six et que le n-ième lancer a donné un six :

$$F_n = \left(\bigcap_{j=1}^{j=n-1} \overline{S_j} \right) \cap S_n$$

3. Expression de A et B en fonction des S_j.

Dire que Alice gagne, c'est dire qu'il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel qu'il n'y a eu aucun "six" au cours des $2n-2$ premiers lancers, et qu'il y a eu un "six" au $(2n-1)$-ème lancer :

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\left(\bigcap_{j=1}^{j=2n-2} \overline{S_j} \right) \cap S_{2n-1} \right)$$

Dire que Bruno gagne, c'est dire qu'il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel qu'il n'y a eu aucun "six" au cours des $2n-1$ premiers lancers, et qu'il y a eu un "six" au $(2n)$-ième lancer :

$$B = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\left(\bigcap_{j=1}^{j=2n-1} \overline{S_j} \right) \cap S_{2n} \right)$$

3°/ Loi de probabilité de F_n.

Si le dé est équilibré, la probabilité de S_j est $\frac{1}{6}$ et la probabilité de $\overline{S_j}$ est $\frac{5}{6}$.
L'expérience consiste en une répétition d'épreuves de Bernoulli de paramètre $p = \frac{1}{6}$, jusqu'à l'obtention d'un succès (obtention d'un six).
Le nombre X de répétitions nécessaires à l'obtention d'un succès suit une **loi géométrique sur $\mathbb{N}^*$**, de

paramètre $p = \frac{1}{6}$.

L'événement $X = n$ est l'événement F_n : la partie se termine au n-ième lancer.

$$P(F_n) = P(X = n) = \frac{1}{6} \times \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}, n \in \mathbb{N}^*.$$

Son espérance mathématique est 6 et sa variance est $6 \times 5 = 30$.

4°/ Probabilité de victoire des deux joueurs.

$$P(A) = \sum_{n=1}^{\infty} P(F_{2n-1}) = \frac{1}{6} \times \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^{2n-2} = \frac{6}{11}$$

$$P(B) = \sum_{n=1}^{\infty} P(F_{2n}) = \frac{1}{6} \times \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^{2n-1} = \frac{5}{11}$$

Chapitre 6. Loi géométrique.

Enoncés.

Exercice 4. Le hamster.

On place un hamster dans une cage. Il se trouve face à 5 portillons dont un seul lui permet de sortir de la cage. A chaque essai infructueux, il reçoit une décharge électrique et on le replace à l'endroit initial.

1. En supposant que le hamster ne soit pas doué d'apprentissage et qu'il choisisse donc de façon équiprobable entre les 5 solutions à chaque nouvel essai, déterminer la probabilité des évènements :

a) le hamster sort au premier essai,
b) le hamster sort au troisième essai,
c) le hamster sort au septième essai.

2. Le hamster mémorise maintenant les essais infructueux et choisit de façon équiprobable entre les portillons qu'il n'a pas encore essayés. On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre d'essais effectués.

a) Quelles valeurs peut prendre X ? Déterminer sa loi de probabilité.
b) Déterminer l'espérance mathématique $E(X)$: interpréter le résultat.
c) Déterminer la variance $Var(X)$.

Solution.

1°/ Hamster sans apprentissage.

Pour un essai, de deux choses l'une :
— ou bien le hamster trouve le bon portillon, c'est le succès, probabilité $p = \frac{1}{5}$,
— ou bien le hamster ne trouve pas le bon portillon, c'est l'échec, probabilité $q = 1 - p = \frac{4}{5}$.

Le fait de regarder si, pour un essai, le hamster trouve ou non le bon portillon constitue une épreuve de Bernoulli, dans laquelle la probabilité du succès est toujours la même, $p = \frac{1}{5}$.

Lorsqu'on répète cette épreuve de Bernoulli jusqu'à l'obtention d'un succès, le nombre d'essai nécessaire X suit une **loi géométrique sur $\mathbb{N}^*$** de paramètre $p = \frac{1}{5}$.

$$P(X = k) = q^{k-1} p = \frac{4^{k-1}}{5^k}, k \in \mathbb{N}^*.$$

Les probabilités demandées s'en déduisent :

$P(X = 1) = p = \frac{1}{5}$.
$P(X = 3) = q^2 p = \frac{4^2}{5^3} = \frac{16}{125}$.
$P(X = 7) = q^6 p = \frac{4^5}{5^6} = \frac{1024}{15625}$.

2°/ Hamster doué d'apprentissage.

1. Loi de *X*.

Soit *X* le nombre d'essais nécessaires pour trouver le bon portillon.
X prend des valeurs de 1 à 5 puisque le hamster n'essaie pas deux fois un portillon pour lequel il a reçu une décharge.

L'événement $X = k$ est l'événement $E_1 \cap ... \cap E_{k-1} \cap S_k$, en notant E_i l'échec au *i*-ème essai et S_i le succès au *i*-ème essai.
Pour le *i*-ème essai, il reste $n + 1 - i$ portillons équiprobables à essayer, la probabilité du succès est $P(S_i \mid E_1 \cap ... \cap E_{i-1}) = \frac{1}{n+1-i} = \frac{1}{6-i}$, et la probabilité de l'échec est $P(E_i \mid E_1 \cap ... \cap E_{i-1}) = \frac{n-i}{n+1-i} = \frac{5-i}{6-i}$.

$P(X = 1) = \frac{1}{5}$.
$P(X = 2) = P(S_2 \cap E_1) = P(S_2 \mid E_1) P(E_1) = \frac{1}{4} \times \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$.
$P(X = 3) = P(S_3 \cap E_1 \cap E_2) = P(S_3 \mid E_1 \cap E_2) P(E_1 \cap E_2)$
$P(E_1 \cap E_2) = P(E_2 \mid E_1) P(E_1) = \frac{3}{4} \times \frac{4}{5}$
$P(S_3 \mid E_1 \cap E_2) = \frac{1}{3}$
$P(X = 3) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$
$P(X = 4) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$
$P(X = 5) = 1 - P(X = 1) - P(X = 2) - P(X = 3) - P(X = 4) = \frac{1}{5}$

Autrement dit :

La loi de probabilité de *X* est une loi uniforme sur l'ensemble {1, 2, 3, 4, 5}.

2. Espérance mathématique.

Comme la loi de *X* est symétrique, l'espérance mathématique est la valeur centrale 3.

$E(X) = 3$.

En moyenne, le hamster trouve la bonne porte en trois essais.

3. Variance.

$Var(X) = E((X - E(X))^2) = \frac{1}{5}((-2)^2 + (-1)^2 + 0^2 + 1^2 + 2^2) = 2$

$$\boxed{Var\,(X) = 2.}$$

Chapitre 6. Loi géométrique.

Enoncés.

Exercice 5. Jet d'un deuxième dé pour faire une paire.

On joue avec deux dés équilibrés à six faces numérotées de 1 à 6 (dés non pipés). On jette un premier dé. On jette ensuite le deuxième dé jusqu'à ce qu'il indique le même numéro que le premier. Soit X le nombre de fois qu'il faut lancer le deuxième dé pour qu'il indique le même numéro que le premier. a) Etablir la loi de probabilité de X. b) Calculer son espérance mathématique et sa variance.	

Solution.

1°/ Loi de X.

On lance le deuxième dé au moins une fois, donc les valeurs de X sont les entiers naturels différents de 0 :

$$X(\Omega) = \mathbb{N}^*.$$

Le numéro du premier dé étant fixé, la probabilité pour que $X = 1$, c'est-à-dire la probabilité pour que le deuxième dé indique le même numéro que le premier à son premier lancer est :

$$P(X = 1) = p = \frac{1}{6}.$$

Le deuxième dé donne le même numéro que le premier seulement au n^{e} lancer si, et seulement si, les $n - 1$ premiers lancers ont donné un numéro différent et le n^{e} a donné le même numéro.
La probabilité de cet évènement est donc :

$$\boxed{P(X = n) = p\, q^{n-1}}$$

avec $q = 1 - p$.

X est une **variable géométrique de paramètre p** $= \frac{1}{6}$ sur $\mathbb{N}^*$.

2°/ Espérance de X.

$$E(X) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, P(X = n)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} n\,p\,q^{n-1}$$
$$= p \sum_{n=1}^{\infty} n\,q^{n-1}$$
$$= p \times (1 + 2\,q + 3\,q^2 + \ldots + n\,q^{n-1} + \ldots)$$
$$= p \times \frac{d}{dq}(1 + q + q^2 + \ldots + q^n + \ldots)$$
$$= p \times \frac{d}{dq}\left(\frac{1}{1-q}\right)$$
$$= p \times \frac{1}{(1-q)^2}$$
$$= p \times \frac{1}{p^2}$$
$$= \frac{1}{p}$$
$$= 6$$

$$\boxed{E(X) = \frac{1}{p} = 6}$$

3°/ Variance de *X*.

La variance de *X* est donnée par la **formule de la variance** :

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

Calculons, en premier lieu, $E(X^2)$.

$$E(X^2) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2\,P(X = n)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} n^2\,p\,q^{n-1}$$
$$= p \sum_{n=1}^{\infty} n^2\,q^{n-1}$$
$$= p \times \sum_{n=1}^{\infty} (n(n-1)\,q^{n-1} + n\,q^{n-1})$$
$$= p \times \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)\,q^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} n\,p\,q^{n-1}$$
$$= p\,q\,(2 \times 1 + 3 \times 2 \times q + 4 \times 3 \times q^2 + \ldots) + E(X)$$
$$= p\,q \times \frac{d^2}{dq^2}(1 + q + q^2 + q^3 + \ldots) + E(X)$$
$$= p\,q \times \frac{d^2}{dq^2}\left(\frac{1}{1-q}\right) + E(X)$$

$$= p\,q \times \frac{d}{dq}\left(\frac{1}{(1-q)^2}\right) + E(X)$$

$$= p\,q \times \frac{2}{(1-q)^3} + \frac{1}{p}$$

$$= 2\,\frac{q}{p^2} + \frac{1}{p}$$

$$= \frac{2q+p}{p^2}$$

$$= \frac{q+(q+p)}{p^2}$$

$$= \frac{q}{p^2} + \frac{1}{p^2}$$

$$Var(X) = \frac{q}{p^2} + \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^2}$$

$$= \frac{q}{p^2}$$

$$= \frac{5}{6} \times 36 = 30$$

$$\boxed{Var(X) = \frac{q}{p^2} = 30}$$

Chapitre 6. Loi géométrique.

Enoncés.

Exercice 6. *Inf* et *Sup* de deux variables géométriques.

Soit $X \rightsquigarrow Geom^*(p_X)$ et $Y \rightsquigarrow Geom^*(p_Y)$ deux variables aléatoires géométriques sur N*, indépendantes. 1°/ Calculer la loi de probabilité de la variable aléatoire $W = Inf(X, Y)$. Calculer son espérance mathématique. 2°/ Calculer la loi de probabilité de la variable aléatoire $Z = Sup(X, Y)$. Calculer son espérance mathématique.	

Solution.

Par hypothèse, nous avons :

$$P(X = m) = p_X (1 - p_X)^{m-1},\ m \geq 1.$$
$$P(Y = n) = p_Y (1 - p_Y)^{n-1},\ n \geq 1.$$

1°/ Loi de probabilité de la borne inférieure.

$$Inf(X, Y) \geq k \Leftrightarrow X \geq k \text{ et } Y \geq k$$
$$P(Inf(X, Y) \geq k) = P(X \geq k \text{ et } Y \geq k) = P(X \geq k) \times P(Y \geq k)$$

$$P(X \geq k) = \sum_{h=k}^{\infty} p_X (1 - p_X)^{h-1} = p_X (1 - p_X)^{k-1} \sum_{i=0}^{\infty} (1 - p_X)^i$$

$$= p_X (1 - p_X)^{k-1} \times \frac{1}{1 - (1 - p_X)} = (1 - p_X)^{k-1} = q_X{}^{k-1}$$

en posant $q_X = 1 - p_X$.
De même, en posant $q_Y = 1 - p_Y$:

$$P(Y \geq k) = q_Y{}^{k-1}$$

$$P(Inf(X, Y) \geq k) = q_X{}^{k-1} q_Y{}^{k-1}$$
$$P(Inf(X, Y) \geq k + 1) = q_X{}^{k} q_Y{}^{k}$$
$$P(Inf(X, Y) = k) = P(Inf(X, Y) \geq k) - P(Inf(X, Y) \geq k + 1) = q_X{}^{k-1} q_Y{}^{k-1} - q_X{}^{k} q_Y{}^{k}$$

$$P\,(Inf\,(X, Y) = k) = q_X^{\,k-1}\, q_Y^{\,k-1}\,(1 - q_X\, q_Y) = (1 - q_X\, q_Y)\,(q_X\, q_Y)^{k-1}$$

Inf (*X*, *Y*) est une **variable géométrique** sur N*, de paramètre $1 - q_X\, q_Y = 1 - (1 - p_X)(1 - p_Y) = p_X + p_Y - p_X\, p_Y$.

Son espérance mathématique et sa variance sont donc :

$$E\,(Inf\,(X, Y)) = \frac{1}{p_X + p_Y - p_X\, p_Y}$$

$$Var\,(Inf\,(X, Y)) = \frac{(1 - p_X)(1 - p_Y)}{(p_X + p_Y - p_X\, p_Y)^2}$$

Remarque.

Si *X* et *Y* sont des **variables géométriques sur N**, le même genre de calcul s'applique.
$P\,(X \geq k) = q_X^{\,k}$; $P\,(Y \geq k) = q_Y^{\,k}$;
$P\,(Inf\,(X, Y) \geq k) = P\,(X \geq k \text{ et } Y \geq k) = P\,(X \geq k) \times P\,(Y \geq k) = q_X^{\,k}\, q_Y^{\,k}$
$P\,(Inf\,(X, Y) = k) = (1 - q_X\, q_Y)\,(q_X\, q_Y)^k$

Et cette relation montre que ***Inf* (*X*, *Y*) est une variable géométrique sur N**, de paramètre $1 - q_X\, q_Y$.

2°/ Loi de probabilité de la borne supérieure.

Calculons $P\,(\{X = k\} \cup \{Y = k\})$ et $P\,(\{Sup\,(X, Y) = k\} \cup \{Inf\,(X, Y) = k\})$

$$P\,(\{X = k\} \cup \{Y = k\}) = P\,(\{X = k\}) + P\,(\{Y = k\}) - P\,(\{X = k\} \cap \{Y = k\})$$
$$P\,(\{Sup\,(X, Y) = k\} \cup \{Inf\,(X, Y) = k\}) = P\,(\{Sup\,(X, Y) = k\}) + P\,(\{Inf\,(X, Y) = k\}) - P\,(\{Sup\,(X, Y) = k\} \cap \{Inf\,(X, Y) = k\})$$

Or $\{Sup\,(X, Y) = k\} \cup \{Inf\,(X, Y) = k\} = \{X = k\} \cup \{Y = k\}$
et $\{Sup\,(X, Y) = k\} \cap \{Inf\,(X, Y) = k\} = \{X = k\} \cap \{Y = k\}$,
donc $P\,(\{Sup\,(X, Y) = k\} \cup \{Inf\,(X, Y) = k\}) = P\,(\{X = k\} \cup \{Y = k\})$
et $P\,(\{Sup\,(X, Y) = k\} \cap \{Inf\,(X, Y) = k\}) = P\,(\{X = k\} \cap \{Y = k\})$
de sorte que, par soustraction, il vient :

$$P\,(\{Sup\,(X, Y) = k\}) + P\,(\{Inf\,(X, Y) = k\}) = P\,(\{X = k\}) + P\,(\{Y = k\})$$
$$P\,(\{Sup\,(X, Y) = k\}) = P\,(\{X = k\}) + P\,(\{Y = k\}) - P\,(\{Inf\,(X, Y) = k\})$$

D'où le résultat :

$$P\,(\{Sup\,(X, Y) = k\}) = p_X\, q_X^{\,k-1} + p_Y\, q_Y^{\,k-1} - (1 - q_X\, q_Y)\,(q_X\, q_Y)^{k-1}$$

D'autre part, la relation :

$Sup\,(X, Y) + Inf\,(X, Y) = X + Y$
(la somme du plus petit et du plus grand est égale à la somme des deux),
$Sup\,(X, Y) = X + Y - Inf\,(X, Y)$

entraîne, par linéarité :

$$E\,(Sup\,(X, Y)) = E\,(X) + E\,(Y) - E\,(Inf\,(X, Y)) = \frac{1}{p_X} + \frac{1}{p_Y} - \frac{1}{p_X + p_Y - p_X\,p_Y}$$

On peut aussi calculer la variance de $Sup\,(X, Y)$.

La relation :

$P\,(\{Sup\,(X, Y) = k\}) = P\,(\{X = k\}) + P\,(\{Y = k\}) - P\,(\{Inf\,(X, Y) = k\})$

entraîne :

$$E\,((Sup\,(X, Y))^2) = \sum_{k=1}^{\infty} k^2\,P\,(\{Sup\,(X, Y) = k\}) = \sum_{k=1}^{\infty} k^2\,P\,(\{X = k\}) + \sum_{k=1}^{\infty} k^2\,P\,(\{Y = k\}) - \sum_{k=1}^{\infty} k^2\,P\,(\{Inf\,(X, Y) = k\})$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2\,P\,(\{X = k\}) = Var\,(X) + (E\,(X))^2$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2\,P\,(\{Y = k\}) = Var\,(Y) + (E\,(Y))^2$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2\,P\,(\{Inf\,(X, Y) = k\}) = Var\,(Inf\,(X, Y)) + (E\,(Inf\,(X, Y)))^2$$

$Var\,(Sup\,(X, Y)) = E\,((Sup\,(X, Y))^2) - (E\,(Sup\,(X, Y)))^2$
$= Var\,(X) + (E\,(X))^2 + Var\,(Y) + (E\,(Y))^2 - Var\,(Inf\,(X, Y)) - (E\,(Inf\,(X, Y)))^2 - (E\,(X) + E\,(Y) - E\,(Inf\,(X, Y)))^2$
$= Var\,(X) + Var\,(Y) - Var\,(Inf\,(X, Y)) - 2\,E\,(X)\,E\,(Y) + 2\,(E\,(X) + E\,(Y))\,E\,(Inf\,(X, Y))$

$$= \frac{q_X}{{p_X}^2} + \frac{q_Y}{{p_Y}^2} - \frac{(1-p_X)(1-p_Y)}{(p_X + p_Y - p_X\,p_Y)^2} - \frac{2}{p_X\,p_Y} + 2\left(\frac{1}{p_X} + \frac{1}{p_Y}\right)\frac{1}{p_X + p_Y - p_X\,p_Y}$$

$$- \frac{2}{p_X\,p_Y} + 2\left(\frac{1}{p_X} + \frac{1}{p_Y}\right)\frac{1}{p_X + p_Y - p_X\,p_Y} = \frac{2}{p_X + p_Y - p_X\,p_Y}$$

$$Var\,(Sup\,(X, Y)) = \frac{q_X}{{p_X}^2} + \frac{q_Y}{{p_Y}^2} - \frac{(1-p_X)(1-p_Y)}{(p_X + p_Y - p_X\,p_Y)^2} + \frac{2}{p_X + p_Y - p_X\,p_Y}$$

$$= \frac{1}{{p_X}^2} - \frac{1}{p_X} + \frac{1}{{p_Y}^2} - \frac{1}{p_Y} - \frac{1}{(p_X + p_Y - p_X\,p_Y)^2} + \frac{3}{p_X + p_Y - p_X\,p_Y}$$

$$Var\,(Sup\,(X, Y)) = \frac{1}{{p_X}^2} - \frac{1}{p_X} + \frac{1}{{p_Y}^2} - \frac{1}{p_Y} - \frac{1}{(p_X + p_Y - p_X\,p_Y)^2} + \frac{3}{p_X + p_Y - p_X\,p_Y}$$

Chapitre 6. Loi géométrique.

Enoncés.

Exercice 7. Partie de dé à trois joueurs.

Trois joueurs lancent, chacun leur tour, un dé, puis recommencent dans le même ordre, jusqu'à ce qu'un joueur amène un 6. La partie s'arrête alors, le joueur qui a amené un 6 a gagné. La probabilité d'obtenir 6 est p, avec $0 < p < 1$. a) Calculer la probabilité pour que la partie s'arrête au dixième lancer ou au r-ième lancer, $r \geq 1$. b) Calculer la probabilité de gagner pour chacun des joueurs.	

Solution.

1°/ Loi de probabilité.

Soit X le nombre de lancers qu'il faut pour amener un 6.
Posons $q = 1 - p$. Il faut $r - 1$ lancers sans 6 avant d'obtenir un lancer avec un 6.
Les lancers sont indépendants, donc les probabilités des lancers successifs se multiplient.
La probabilité pour que X soit égal à r est donc donnée par :
$P(X = r) = p\,q^{r-1}$
Autrement dit, X suit une **loi géométrique** sur N* de paramètre p.

2°/ Probabilité d'un événement.

L'événement "la partie s'arrête au 10 e lancer" est l'évènement $X = 10$.
L'événement "la partie s'arrêt au r e lancer", avec $r \geq 1$, est l'événement $X = r$.
Nous cherchons la probabilité de l'événement $\{X = 10\} \cup \{X = r\}$.
Si $r = 10$, $\{X = 10\} \cup \{X = r\} = \{X = 10\}$, et $P(\{X = 10\} \cup \{X = r\}) = P(\{X = 10\}) = p\,q^9$
sinon $\{X = 10\} \cap \{X = r\} = \emptyset$ et $P(\{X = 10\} \cup \{X = r\}) = P(\{X = 10\}) + P(\{X = r\}) = p\,q^{r-1} + p\,q^9$.

$$P(\{X = 10\} \cup \{X = r\}) = \begin{cases} p\,q^9 & \text{si } r = 10. \\ p\,q^{r-1} + p\,q^9 & \text{si } r \neq 10. \end{cases}$$

3°/ Probabilité de gain des joueurs.

Soit A l'événement "le 1 er joueur gagne" : $A = \{X = 1\} \cup \{X = 4\} \cup \ldots \cup \{X = 3n + 1\} \cup \ldots$

$$P(A) = \sum_{n=0}^{\infty} P(X = 3n + 1) = \sum_{n=0}^{\infty} p\,q^{3n} = p \sum_{n=0}^{\infty} q^{3n} = \frac{p}{1 - q^3} = \frac{1}{1 + q + q^2}$$

Soit B l'événement "le 2 e joueur gagne" : $B = \{X = 2\} \cup \{X = 5\} \cup \ldots \cup \{X = 3n + 2\} \cup \ldots$

$$P(B) = \sum_{n=0}^{\infty} P(X = 3n + 2) = \sum_{n=0}^{\infty} p\, q^{3n+1} = p\, q \sum_{n=0}^{\infty} q^{3n} = q\, P(A) = \frac{q}{1+q+q^2}$$

Soit C l'événement "le 3 e joueur gagne" : $C = \{X = 3\} \cup \{X = 6\} \cup \ldots \cup \{X = 3n + 3\} \cup \ldots$

$$P(C) = \sum_{n=0}^{\infty} P(X = 3n + 3) = \sum_{n=0}^{\infty} p\, q^{3n+2} = p\, q^2 \sum_{n=0}^{\infty} q^{3n} = q^2\, P(A) = \frac{q^2}{1+q+q^2}.$$

Chapitre 6. Loi géométrique.

Enoncés.

Exercice 8. Temps d'attente d'un métro.

Pour se rendre au bureau, un homme passe par une station de métro où il peut choisir entre deux lignes indépendantes. Ligne *A* : les trains arrivent selon une loi géométrique sur N* de moyenne 3 minutes et le trajet dure 13 minutes. Ligne *B* : les trains arrivent selon une loi géométrique sur N* de moyenne 6 minutes et le trajet dure 8 minutes. 1°/ Quelle est la probabilité d'attendre au moins 10 minutes avant que n'arrive le train *A*. 2°/ Quelle est la probabilité qu'aucun train n'arrive pendant les cinq premières minutes ? 3°/ Calculer la probabilité que le train *A* arrive avant le train *B*.	

Solution.

Hypothèse : le temps est mesuré en minute, et toute minute commencée est comptée comme entière.

1°/ Loi de probabilité du temps d'attente du train *A*.

Soit X le temps d'attente du train *A*.

Par hypothèse, X suit une loi géométrique sur N* de moyenne $E(X) = \frac{1}{p_A} = 3$.

Son paramètre est donc $p_A = \frac{1}{3}$ et sa loi de probabilité est :

$$P(X = k) = p_A \, q_A{}^{k-1} = \frac{2^{k-1}}{3^k}$$

avec $q_A = 1 - p_A = \frac{2}{3}$.

La probabilité pour que X soit supérieur ou égal à 10 est donnée par :

$$P(X \geq 10) = \sum_{k=10}^{\infty} p_A \, q_A{}^{k-1} = p_A \, q_A{}^{9} \times \frac{1}{1-q_A} = q_A{}^{9} = \left(\frac{2}{3}\right)^9.$$

$$P(X \geq 10) = \left(\frac{2}{3}\right)^9 \approx 2{,}6 \times 10^{-2}.$$

2°/ Loi de probabilité du minimum du temps d'attente.

Soit X le temps d'attente du train *A*, Y le temps d'attente du train *B*.

Comme *X* suit une loi géométrique sur N* de paramètre p_A et que *Y* suit une loi géométrique sur N* de paramètre p_B, on sait que le minimum de *X* et *Y* suit une loi géométrique sur N* de paramètre $1 - q_A q_B$.

La probabilité pour que *Inf* (*X*, *Y*) soit supérieur ou égal à 6 est donnée par :

$$P\,(Inf\,(X, Y) \geq 6) = (q_A\, q_B)^5 = \left(\frac{5}{9}\right)^5 \approx 5{,}29 \times 10^{-2}$$

3°/ Loi de probabilité de la différence des temps d'attente.

La probabilité pour que *X* soit strictement plus petit que *Y* est donnée par :

$$P\,(X < Y) = \sum_{n=1}^{\infty} P\,(X = n \text{ et } Y > n) = p_A\, q_A{}^{n-1}\, q_B{}^n = \frac{p_A q_B}{1 - q_A q_B} = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{5}{6}}{1 - \frac{2}{3} \times \frac{5}{6}} = \frac{5}{8}$$

$$P\,(X < Y) = \frac{5}{8}$$

Chapitre 6. Loi géométrique.

Enoncés.

Exercice 9. Le ballon de foot.

La surface extérieure d'un ballon de foot est composée de 20 hexagones réguliers numérotés de 1 à 20 et de 12 pentagones réguliers numérotés de 1 à 6, le même numéro apparaissant sur deux pentagones. Après lancer, la probabilité que le ballon tombe sur un pentagone particulier est p alors que la probabilité qu'il tombe sur un hexagone particulier est p '. On lance le ballon de manière indépendante jusqu'à ce qu'il tombe sur un pentagone. On note X le numéro du pentagone concerné, N le nombre de lancers et S la somme des numéros des polygones sur lesquels le ballon est tombé au cours de ces lancers. 1°/ Exprimer la relation qui existe entre p et p '. 2°/ Quelle est la loi de X ? 3°/ Déterminer la loi de N en fonction du paramètre p. 4°/ Calculer $E[S \mid N = n]$, puis $E[S]$.	

Solution.

1°/ Relation entre p et p '.

Les événements élémentaires sont les faces sur lesquelles peut tomber le ballon.
On les notera H_i, $i \in \{1, 2, \dots, 20\}$, pour les hexagones, et P_j, $j \in \{1, 2, \dots, 12\}$, pour les pentagones.

On notera *Hexa* l'événement "Le ballon tombe sur un hexagone". $P(Hexa) = \sum_{i=1}^{i=20} P(H_i) = 20\,p$ '.

On notera *Penta* l'événement "Le ballon tombe sur un pentagone". $P(Penta) = \sum_{j=1}^{j=12} P(P_j) = 12\,p = 1 - 20\,p$ '.

La somme des probabilités des événements élémentaires est égale à 1 (**condition de normalisation**) :

$$\sum_{i=1}^{i=20} P(H_i) + \sum_{j=1}^{j=12} P(P_j) = 1$$
$$20\,p' + 12\,p = 1$$
$$4 \times (5\,p' + 3\,p) = 1$$

$$\boxed{5\,p' + 3\,p = \frac{1}{4}}$$

2°/ Loi de probabilité de X.

Les valeurs possibles de X sont les entiers de 1 à 6, numéros inscrits sur les pentagones.
Lorsqu'on sait que le ballon tombe sur un pentagone, la probabilité qu'il tombe sur le pentagone numéroté k est de $\frac{2}{12} = \frac{1}{6}$, puisqu'il y a deux pentagones qui portent le numéro k, sur les 12 pentagones équiprobables.

$$\boxed{P\,[\,X = k\,] = \frac{1}{6}}$$

Cette relation donne la loi de probabililté de X : **loi uniforme** sur l'ensemble {1, 2, ... 6 }.

3°/ Loi de probabilité de *N*.

Le fait de regarder si le ballon tombe sur un pentagone est une épreuve de Bernoulli, dont le succès a une probabilité 12 p.
Le nombre N de répétitions de l'épreuve de Bernoulli qu'il faut pour arriver à un succès suit une loi géométrique sur N*, de paramètre 12 p :

$$\boxed{P\,[\,N = n\,] = 12\,p\,(1 - 12\,p)^{n-1}}$$

Cette relation donne la loi de probabililté de N : **loi géométrique** sur N*, de paramètre 12 p.

4°/ Espérance mathématique de *S*.

Lorsque $N = n$, on sait que le ballon est tombé sur un hexagone au cours des $n - 1$ premiers lancers, et sur un pentagone au n^{e} lancer.
La somme S est la somme S' des $n - 1$ premiers lancers, plus la valeur de X obtenue au n^{e} lancer.

$$E\,[\,S \mid N = n\,] = E\,[\,S' + X \mid N = n\,] = E\,[\,S' \mid N = n\,] + E\,[\,X\,]$$

L'espérance de S' lorsque $N = n$ est égale à $(n - 1)$ fois l'espérance du numéro d'hexagone.
Comme les hexagones sont équiprobables, l'espérance du numéro d'hexagone est la valeur centrale $\frac{20+1}{2}$, et l'espérance de S' est :

$$E\,[\,S' \mid N = n\,] = \frac{21}{2}\,(n - 1)$$

Comme X suit une loi uniforme sur l'ensemble {1, 2, ... , 6 }, l'espérance de X est la valeur centrale $\frac{6+1}{2}$.

Il vient alors :

$$E\,[\,S \mid N = n\,] = \frac{21}{2}\,(n - 1) + \frac{7}{2} = \frac{21}{2}\,n - 7$$

$$\boxed{E_N\,[\,S\,] = \frac{21}{2}\,N - 7}$$

L'espérance mathématique de S s'en déduit, par le **théorème de la moyenne conditionnelle** :

$$E[S] = E[E_N[S]] = E\left(\frac{21}{2}N - 7\right) = \frac{21}{2}E[N] - 7.$$

Or N suit une loi géométrique sur N* de paramètre $12p$, donc son espérance mathématique est l'inverse du paramètre, soit $E[N] = \frac{1}{12p}$.

Il vient alors :

$$E[S] = \frac{21}{2} \times \frac{1}{12p} - 7 = \frac{7}{8p} - 7$$

$$\boxed{E[S] = \frac{7}{8p} - 7}$$

Application numérique.

Il est raisonnable de supposer, pour un ballon équilibré, que ***p* et *p* ' sont proportionnels aux surfaces** d'un pentagone et d'un hexagone de côté a.

La surface d'un hexagone régulier de côté a est $\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2$ $\left(= 6\frac{a^2}{4} \times \cot an\frac{\pi}{6}\right)$

La surface d'un pentagone régulier de côté a est $\frac{\left(5+\sqrt{5}\right)^{\frac{3}{2}}}{2^{\frac{7}{2}}}a^2$ $\left(= 5\frac{a^2}{4} \times \cot an\frac{\pi}{5}\right)$

$$\frac{p}{\frac{\sqrt{5}}{8}\left(\sqrt{5}+1\right)\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}} = \frac{p'}{\frac{3\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{12 \times \frac{\sqrt{5}}{8}\left(\sqrt{5}+1\right)\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} + 20 \times \frac{3\sqrt{3}}{2}}$$

$$p = \frac{\frac{\sqrt{5}}{8}\left(\sqrt{5}+1\right)\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}}{12 \times \frac{\sqrt{5}}{8}\left(\sqrt{5}+1\right)\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} + 20 \times \frac{3\sqrt{3}}{2}} = 2{,}37 \times 10^{-2}$$

$$p' = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{2}}{12 \times \frac{\sqrt{5}}{8}\left(\sqrt{5}+1\right)\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} + 20 \times \frac{3\sqrt{3}}{2}} = 3{,}58 \times 10^{-2}$$

$$E[S] = \frac{7}{8p} - 7 = 29{,}93$$

Chapitre 6. Loi géométrique.

Enoncés.

Exercice 10. Conducteur et passagère.

Guy est très distrait : quand il s'arrête pour prendre de l'essence, il y a une chance sur dix pour qu'il reparte sans sa passagère, descendue pour visiter les lieux. Soit X la variable aléatoire égale au nombre d'étapes que Guy a parcouru en compagnie de sa passagère, avant de repartir sans elle. 1°/ Etablir la loi de probabilité de X. Calculer $E(X)$. 2°/ Quel est le nombre maximum d'étapes que peut comporter le voyage pour que la passagère arrive à destination dans la voiture de Guy avec une probabilité supérieure à 0,5 ?	

Solution.

1°/ Loi de X.

Appelons "succès" le fait que Guy reparte sans sa passagère.
A chaque étape, la probabilité du succès est $p = 0{,}1$, la probabilité de l'échec est $q = 0{,}9$.
Dire que X est égal à n, c'est dire qu'il y a eu $n - 1$ échecs successifs, suivis d'un succès à la n^{e} étape.
La probabilité que $X = n$ est $p\,q^{n-1} = 0{,}1 \times 0{,}9^{n-1}$.

X suit une **loi géométrique sur $\mathbb{N}^*$**, de paramètre $p = 0{,}1$. Son espérance est $\frac{1}{p} = 10$.

2°/ Nombre maximum d'étapes.

Soit N le nombre d'étapes du voyage.

Dire que la passagère arrive à destination en N étapes, c'est dire que le nombre X d'étapes parcourues avant d'abandonner la passagère est supérieur ou égal à N.

La probabilité que X soit supérieur ou égal à N est :

$$P[X \geq N] = \sum_{k=N}^{\infty} P[X = k] = \sum_{k=N}^{\infty} p\,q^{k-1} = p\,q^{N-1}(1 + q + q^2 + \dots) = \frac{p\,q^{N-1}}{1-q} = q^{N-1}.$$

$$P[X \geq N] = q^{N-1}.$$

Le nombre maximum N d'étapes que la passagère peut parcourir sans être abandonnée avec une probabilité supérieure à 0,5 est défini par :

$$P[X \geq N] \geq \frac{1}{2} \text{ et } P[X \geq N+1] < \frac{1}{2}$$

$$q^{N-1} \geq \frac{1}{2} \text{ et } q^{N} < \frac{1}{2}$$

$$q^{N} < \frac{1}{2} \leq q^{N-1}$$

$$N \ln q < \ln \frac{1}{2} \leq (N-1) \ln q$$

$$N - 1 \leq -\frac{\ln 2}{\ln q} < N$$

$$N \leq 1 - \frac{\ln 2}{\ln q} < N + 1$$

$$N = \left[1 - \frac{\ln 2}{\ln q} \right] \text{ (partie entière)}$$

$$N = [\ 7{,}58\ ]$$

$$\boxed{N = 7}$$

Pour trouver N, on peut aussi calculer la fonction de répartition de la variable géométrique X.
Grâce à Excel ou un autre tableur, on peut construire facilement le tableau suivant :

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P[X = k]$	0.10	0.09	0.08	0.07	0.07	0.06	0.05	0.05	0.04	0.04
$F(k)$	0.10	0.19	0.27	0.34	0.41	0.47	0.52	0.57	0.61	0.65

Sur ce tableau on voit que c'est à partir de $N = 7$ que la probabilité est supérieure à 0,5.
En effet, la probabilité que Guy abandonne sa passagère avant la septième étape est :
$P[X = 1] + P[X = 2] + P[X = 3] + P[X = 4] + P[X = 5] + P[X = 6] = 0{,}47$
La probabilité que la passagère arrive au bout de la septième étape est égale à la probabilité qu'elle n'ait pas été abandonnée avant, c'est donc 1 moins la probabilité qu'elle ait été abandonnée avant, donc $1 - 0{,}47 = 0{,}53$.
Par contre, la probabilité pour que Guy n'ait pas encore abandonné sa passagère au bout de la septième étape est seulement $0{,}48 = 1 - 0{,}52$, inférieure à 0,5. Donc si le voyage comporte huit étapes, la probabilité d'arriver au bout en voiture n'est que 0,48.

Le nombre maximum d'étapes que peut comporter le voyage pour que la passagère arrive à destination dans la voiture de Guy avec une probabilité supérieure à 0,5 est 7.

Chapitre 6. Loi géométrique.

Enoncés.

Exercice 11. Différence de deux variables géométriques.

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant chacune une loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$. Trouver la loi de $X - Y$.	

Solution.

La variable $X - Y$ peut prendre toute valeur entière, positive, négative ou nulle.
Cherchons la probabilité d'une valeur $k \in \mathbb{Z}$.

a) Pour $k = 0$.

$$P(X - Y = 0) = \sum_{k=1}^{\infty} P(X = k \text{ et } Y = k) = \sum_{k=1}^{\infty} P(X = k) \times P(Y = k)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} p^2 (1-p)^{2(k-1)} = \frac{p^2}{1-(1-p)^2} = \frac{p}{2-p}$$

$$\boxed{P(X - Y = 0) = \frac{p}{2-p}}$$

b) Pour $k > 0$.

$$P(X - Y = k) = \sum_{n=1}^{\infty} P(Y = n \text{ et } X = n + k) = \sum_{n=1}^{\infty} P(Y = n) \times P(X = n + k)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} p^2 (1-p)^{2n+k-2} = \frac{p^2 (1-p)^k}{1-(1-p)^2} = \frac{p}{2-p} (1-p)^k$$

$$\boxed{P(X - Y = k) = \frac{p}{2-p} (1-p)^k}$$

c) Pour $k < 0$.

$$P(X - Y = k) = \sum_{n=1}^{\infty} P(X = n \text{ et } Y = n - k) = \sum_{n=1}^{\infty} p^2 (1-p)^{2n-k-2}$$

$$= \frac{p^2(1-p)^{-k}}{1-(1-p)^2} = \frac{p}{2-p}(1-p)^{-k}$$

$$\boxed{P(X-Y=k) = \frac{p}{2-p}(1-p)^{-k}}$$

d) Rassemblons ces résultats :

$$\boxed{P(X-Y=k) = \frac{p}{2-p}(1-p)^{|k|},\ k \in \mathbb{Z}.}$$

Exercices

Loi de Poisson.

1. Définition.

2. Propriétés.

1°/ Approximation de la loi binomiale.
2°/ Espérance mathématique.
3°/ Variance.

1. Définition.

HAUT

Une variable aléatoire prenant des valeurs entières k avec les probabilités $P(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$, s'appelle une **variable de Poisson** de paramètre λ.
Sa loi de probabilité s'appelle **loi de Poisson de paramètre λ**. $X \rightsquigarrow P_\lambda$.
La loi de Poisson est aussi appelée la **loi des phénomènes rares**.
On l'obtient toujours comme **approximation d'une loi binomiale** lorsque n devient très grand et lorsque p devient très petit avec une espérance $n\,p$ qui tend vers une constante strictement positive λ.

Soit X_n une variable binomiale de paramètres n et p_n.
Supposons que, lorsque n augmente indéfiniment, le paramètre p_n soit tel que la limite de $n\,p_n$ soit un nombre réel positif λ.
Alors, pour tout k fixé, dans l'expression de la probabilité de la loi binomiale :

$$P(X_n = k) = \frac{n(n-1)\dots(n+1-k)}{1\times 2\times\dots\times k}\,{p_n}^k(1-p_n)^{n-k}$$

$n\,(n-1)\dots(n-k)$ est équivalent à n^k, puisqu'il est compris entre $n^k\left(1-\frac{k}{n}\right)^k \approx n^k\left(1-\frac{k^2}{n}\right)$, et n^k.
$n\,(n-1)\dots(n-k)\,{p_n}^k$ est donc équivalent à $(n\,p_n)^k$, qui tend vers λ^k.
$(1-p_n)^{n-k}$ a pour logarithme $(n-k)\,ln\,(1-p_n) \approx -(n-k)\,p_n = -n\left(1-\frac{k}{n}\right)p_n$, qui tend vers $-\lambda$.
Donc $(1-p_n)^{n-k}$ tend vers $e^{-\lambda}$.
Finalement, $P(X_n = k)$ tend vers $e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$.

2. Propriétés.

HAUT

1°/ Approximation de la loi binomiale.

En pratique, on considère qu'on peut approcher une loi binomiale de paramètres n et p par une loi de Poisson de paramètre $\lambda = n\,p$, lorsque les trois conditions suivantes sont vérifiées :

1. n est grand ($n \geq 100$).
2. p est petit ($p \leq 0{,}01$) : $n\,p = n\,p\,q$.
3. $n\,p$ est de l'ordre de grandeur de l'unité, ni trop petit, ni trop grand ($1 \leq n\,p \leq 10$).

2°/ Espérance mathématique.

HAUT

$$\boxed{X \rightsquigarrow P_\lambda \Rightarrow E(X) = \lambda.}$$

Soit $X \rightsquigarrow P_\lambda$.

$$E(X) = \sum_{n=1}^{\infty} n\,P(X=n) = \sum_{n=1}^{\infty} n\,e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!} = \lambda\,e^{-\lambda}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} = \lambda\,e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!} = e^{\lambda} \Rightarrow E(X) = \lambda.$$

HAUT

3°/ Variance.

HAUT

$$\boxed{X \rightsquigarrow P_\lambda \Rightarrow Var\,(X) = \lambda.}$$

En effet, soit $X \rightsquigarrow P_\lambda$.

$Var\,(X) = E\,(X^2) - (E\,(X))^2 = E\,(X^2) - \lambda^2$.

$$E\,(X^2) = E\,(X\,(X-1)) + E\,(X) = \sum_{n=1}^{\infty} n\,(n-1)\,e^{-\lambda}\,\frac{\lambda^n}{n!} + \lambda.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\,(n-1)\,e^{-\lambda}\,\frac{\lambda^n}{n!} = \sum_{n=2}^{\infty} n\,(n-1)\,e^{-\lambda}\,\frac{\lambda^n}{n!} = \lambda^2\,e^{-\lambda} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\lambda^{n-2}}{(n-2)!} = \lambda^2\,e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{\lambda} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n\,(n-1)\,e^{-\lambda}\,\frac{\lambda^n}{n!} = \lambda^2.$$

$E\,(X^2) = \lambda^2 + \lambda$.

$Var\,(X) = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$.

HAUT

Chapitre 7. Loi de Poisson.

Exercices

Exercice 1. Assurance de navires et économie d'échelle.
Exercice 2. Accidents sur une autoroute.
Exercice 3. Fonctions d'une variable de Poisson.
Exercice 4. Allergie à un médicament.
Exercice 5. Fautes d'impression dans un livre.

Exercice 1. Assurance de navires et économies d'échelle.

La compagnie "La Guêpe" assure 1 000 navires. Un navire a une valeur de 10 millions d'euros. La probabilité de perte d'un navire est estimée à 0,001 pour une année. Les risques de pertes des navires sont indépendants. 1°/ On appelle X la variable aléatoire ayant pour valeur le nombre de navires perdus en une année parmi les navires assurés par "La Guêpe". Quelle est la loi de probabilité de X ? 2°/ Quelle est la probabilité qu'il y ait trois navires perdus en une année ? 3°/ A la fin de l'année, la compagnie "La Guêpe" règle les sinistres de l'annnée. A combien doivent d'élever ses réserves pour qu'elle puisse honorer ses engagements avec une probabilité de 0,999 ? 4°/ La compagnie "La Fourmi" est placée dans les mêmes conditions que "La Guêpe" : elle assure 1 000 navires, d'une valeur unitaire de 10 millions d'euros. Elle règle, en fin d'année, les sinistres de l'année. Elle doit maintenir ses réserves à un niveau suffisant pour pouvoir honorer ses engagements avec la probabilité de 0,999. Les dirigeants des deux compagnies envisagent la fusion de celles-ci. La nouvelle compagnie "L'Hyménoptère" prendra en charge les 2 000 navires. Calculer le montant des réserves que doit avoir "L'Hyménoptère" pour pouvoir rembourser les sinistres en fin d'année avec une probabilité de 0,999. On appellera Y le nombre de navires perdus en un an par la compagnie "L'Hyménoptère". Conclure.	Solution

HAUT

Exercice 2. Accidents sur une autoroute.

On admet que le nombre d'accidents survenant sur une autoroute quotidiennement est une variable aléatoire qui suit une loi de Poisson de paramètrer $\lambda = 3$. Quelle est la probabilité qu'il y ait au moins 2 accidents lors d'un jour donné ?	Solution

HAUT

Exercice 3. Fonctions d'une variable de Poisson.

Soit X une variable aléatoire de Poisson de paramètre λ. Calculer $E(\cos(\pi X))$ et $Var(2X+3)$.	Solution

HAUT

Exercice 4. Allergie à un médicament.

On sait que la probabilité qu'une personne soit allergique à un certain médicament est égale à 10^{-3}. On s'intéresse à un échantillon de 1000 personnes. On appelle X la variable aléatoire dont la valeur est le nombre de personnes allergiques dans l'échantillon.

1°/ Déterminer, en la justifiant, la loi de probabilité de X.
2°/ En utilisant une approximation que l'on justifiera, calculer les probabilités des évènements suivants :

a) Il y a exactement deux personnes allergiques dans l'échantillon.
b) Il y a au moins deux personnes allergiques dans l'échantillon.

Solution

HAUT

Exercice 5. Fautes d'impression dans un livre.

On suppose que, dans un livre de 500 pages, il y a 300 fautes d'impression distribuées au hasard. Calculer la probabilité pour que la page 36 contienne : a) Exactement deux fautes d'impression. b) Au moins deux fautes d'impression.	Solution

HAUT

Chapitre 7. Loi de Poisson.

Enoncés.

Exercice 1. Assurance de navires et économie d'échelle.

La compagnie "La Guêpe" assure 1 000 navires. Un navire a une valeur de 10 millions d'euros. La probabilité de perte d'un navire est estimée à 0,001 pour une année. Les risques de pertes des navires sont indépendants. 1°/ On appelle X la variable aléatoire ayant pour valeur le nombre de navires perdus en une année parmi les navires assurés par "La Guêpe". Quelle est la loi de probabilité de X ? 2°/ Quelle est la probabilité qu'il y ait trois navires perdus en une année ? 3°/ A la fin de l'année, la compagnie "La Guêpe" règle les sinistres de l'annnée. A combien doivent d'élever ses réserves pour qu'elle puisse honorer ses engagements avec une probabilité de 0,999 ? 4°/ La compagnie "La Fourmi" est placée dans les mêmes conditions que "La Guêpe" : elle assure 1 000 navires, d'une valeur unitaire de 10 millions d'euros. Elle règle, en fin d'année, les sinistres de l'année. Elle doit maintenir ses réserves à un niveau suffisant pour pouvoir honorer ses engagements avec la probabilité de 0,999. Les dirigeants des deux compagnies envisagent la fusion de celles-ci. La nouvelle compagnie "L'Hyménoptère" prendra en charge les 2 000 navires. Calculer le montant des réserves que doit avoir "L'Hyménoptère" pour pouvoir rembourser les sinistres en fin d'année avec une probabilité de 0,999. On appellera Y le nombre de navires perdus en un an par la compagnie "L'Hyménoptère". Conclure.	

Solution.

1°/ Loi de probabilité de X.

Pour un navire assuré par "La Guêpe", de deux choses l'une :
— ou bien il est sinistré, c'est le succès, de probabilité $p = 0{,}001$,
— ou bien il n'est pas sinistré, c'est l'échec, de probabilité $q = 1 - p = 0{,}999$.
Le fait de regarder, pour un navire, s'il est ou non perdu dans l'année, constitue une épreuve de Bernoulli.
On peut répéter l'épreuve de Bernoulli pour les 1000 navires assurés par "La Guêpe" : les épreuves de Bernoulli correspondantes sont indépendantes par hypothèse.
Le nombre de succès dans cette répétition d'épreuves de Bernoulli est le nombre X de navires perdus dans l'année : il suit une loi binomiale de paramètres n = nombre de répétitions = 1000, et p = probabilité du succès dans l'épreuve de Bernoulli = 0,001.

$$X \rightsquigarrow B(1000,\ 0{,}001).$$
$$P(X = k) = \binom{1000}{k} (0{,}001)^{k} (0{,}999)^{1000-k}$$

Approximation par la loi de Poisson.

n est grand (*n* = 1000)
p est petit (*p* = 0,001)
n p = 1 est de l'ordre de grandeur de l'unité.

Les conditions de l'approximation de la loi binomiale $B(n, p)$ par la loi de Poisson P_{np} sont réunies.
La loi de probabilité de *X* peut donc être approchée par une loi de Poisson de paramètre $\lambda = n\,p = 1$.

$$X \rightsquigarrow P_1.$$
$$P(X = k) = \frac{e^{-1}}{k!}$$

2°/ Probabilité de perdre trois navires dans l'année.

Avec l'approximation de Poisson, $P(X = 3) = \frac{1}{6e} = 0.0613$.

$$P(X = 3) = 6\ \%.$$

3°/ Réserves à provisionner.

Si *X* suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 1$, la table de la loi de Poisson cumulée donne $P(X > 5) = 0{,}001$.
Donc $P(X \leq 5) = 0{,}999$.
Pour que la compagnie "La Guêpe" puisse honorer ses engagements avec une probabilité de 0,999, il faudra donc qu'elle ait des réserves correspondant au sinistre de 5 navires, soit 50 millions d'euros.

"La Guêpe" doit avoir des réserves de 50 millions d'euros pour tenir ses engagements avec une probabilité de 0,999.

4°/ Fusion.

Si *Y* est le nombre de navires sinistrés de la compagnie "La Fourmi", $Z = X + Y$ est la somme de deux variables de Poisson indépendantes de même paramètre $\lambda = 1$. C'est une variable de Poisson de paramètre $\lambda = 1 + 1 = 2$.

> En effet, la **fonction génératrice** de la loi de Poisson est
> $g_X(u) = E(u^X) = e^{\lambda(u-1)}$.
> Pour $\lambda = 1$: $g_X(u) = E(u^X) = e^{u-1}$ et $g_Y(u) = E(u^Y) = e^{u-1}$
> $g_{X+Y}(u) = E(u^{X+Y}) = E(u^X\,u^Y)$
> Comme *X* et *Y* sont indépendantes, u^X et u^Y sont indépendantes :
> $E(u^X\,u^Y) = E(u^X)\,E(u^Y) = e^{2(u-1)}$,
donc $X + Y$ suit une loi de Poisson de paramètre 2.

La table cumulée de la loi de Poisson de paramètre 2 donne $P(Z > 7) = 0{,}001$, de sorte que les réserves de la compagnie fusionnée "L'Hyménoptère" doivent correspondre au règlement de 7 sinistres, soit 70 millions d'euros.

"L'Hyménoptère" doit avoir des réserves de 70 millions d'euros pour tenir ses engagements avec une probabilité de 0,999.

Conclusion.

La fusion diminue de 30 % les réserves à maintenir pour tenir les engagements avec une probabilité de 0,999.
Les dirigeants, hélas, se distribueront à eux-mêmes les 30 millions d'euros d'économies et licencieront un tiers du personnel !

Chapitre 7. Loi de Poisson.

Enoncés.

Exercice 2. Accidents sur une autoroute.

On admet que le nombre d'accidents survenant sur une autoroute quotidiennement est une variable aléatoire qui suit une loi de Poisson de paramètrer $\lambda = 3$. Quelle est la probabilité qu'il y ait au moins 2 accidents lors d'un jour donné ?	

Solution.

La loi de Poisson de paramètre λ est définie par :

$$P(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

$P(X \geq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 1 - e^{-\lambda} - \lambda e^{-\lambda} = 1 - (1 + \lambda) e^{-\lambda}$

Pour $\lambda = 3$, $P(X \geq 2) = 1 - (1 + \lambda) e^{-\lambda} = 1 - 4 e^{-3} = 0.800851726528544$.

La table de la loi de Poisson cumulée pour $\lambda = 3$ donne la valeur $P(X \geq 2) = P(X > 1) = 0{,}801$.

$$\boxed{P(X \geq 2) = P(X > 1) = 0{,}801.}$$

Chapitre 7. Loi de Poisson.

Enoncés.

Exercice 3. Fonctions d'une variable de Poisson.

Soit X une variable aléatoire de Poisson de paramètre λ. Calculer $E\,(cos\,(\pi\,X))$ et $Var\,(2\,X + 3)$.	

Solution.

La loi de Poisson de paramètre λ est définie par :

$$P\,(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!},\ \forall\ k \in \mathbb{N}.$$

1°/ Espérance de $cos\,(\pi\,X)$.

L'espérance de $cos\,(\pi\,X)$ est définie par $E\,(\,cos\,(\pi\,X)) = \sum_{k=0}^{\infty} cos\,(k\,\pi)\,P\,(X = k)$.

$cos\,(k\,\pi) = (-1)^k$.

$$E\,(\,cos\,(\pi\,X)) = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-\lambda)^k}{k!} = e^{-\lambda}\times e^{-\lambda} = e^{-2\lambda}$$

$$\boxed{E\,(\,cos\,(\pi\,X)) = e^{-2\lambda}}$$

2°/ Variance de $2\,X + 3$.

La variance de $2\,X + 3$ est donnée par la formule : $Var\,(a\,X + b) = a^2\,Var\,(X)$, donc $Var\,(2\,X + 3) = 4\,Var\,(X)$.
Or la variance d'une variable de Poisson de paramètre λ est égale à λ, donc :

$$\boxed{Var\,(2\,X + 3) = 4\,\lambda.}$$

Chapitre 7. Loi de Poisson.

Enoncés.

Exercice 4. Allergie à un médicament.

On sait que la probabilité qu'une personne soit allergique à un certain médicament est égale à 10^{-3}. On s'intéresse à un échantillon de 1000 personnes. On appelle X la variable aléatoire dont la valeur est le nombre de personnes allergiques dans l'échantillon. 1°/ Déterminer, en la justifiant, la loi de probabilité de X. 2°/ En utilisant une approximation que l'on justifiera, calculer les probabilités des évènements suivants : a) Il y a exactement deux personnes allergiques dans l'échantillon. b) Il y a au moins deux personnes allergiques dans l'échantillon.	

Solution.

1°/ Loi de probabilité de X.

Pour une personne de l'échantillon, de deux choses l'une : ou bien elle est allergique (probabilité $p = 10^{-3}$), ou bien elle ne l'est pas (probabilité $q = 1 - p = 0{,}999$).
L'épreuve qui consiste à regarder, pour une personne de l'échantillon, si elle allergique ou non, constitue une **épreuve de Bernoulli**.
Lorsqu'on répète cette épreuve de Bernoulli pour les $n = 1000$ individus de l'échantillon, le nombre X de succès, c'est-à-dire le nombre X de personnes allergiques, suit une **loi binomiale** $Bin\ (1000\ ;\ 10^{-3})$:

$$P\ (\ X = k\ ) = \binom{1000}{k} 10^{-3\,k}\ (\ 0{,}999\ )^{\,1000-k}.$$

2°/ Approximation de la loi binomiale par une loi de Poisson.

Les **trois conditions** pour que l'approximation par la loi de Poisson soit valable sont réalisées :

- $n = 1000$ est grand
- $p = 10^{-3}$ est petit
- $n\,p = 1$ est de l'ordre de grandeur de l'unité, ni trop grand, ni trop petit, et on s'intéresse aux valeurs de X de 0 à 2.

On peut donc remplacer la loi binomiale $Bin\ (1000\ ;\ 10^{-3})$ par une loi de Poisson de paramètre $\lambda = n\,p = 1$.

$$P\ (\ X = k\ ) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-1} \times \frac{1}{k!}$$

a) $P\ (\ X = 2\ ) = \dfrac{1}{2e} \approx 0{,}1839$

b) $P\ (\ X \geq 2\ ) = 1 - P\ (\ X < 2\ ) = 1 - P\ (\ X = 0\ ) - P\ (\ X = 1\ ) = 1 - \dfrac{1}{e} - \dfrac{1}{e} = 1 - \dfrac{2}{e} \approx 0{,}2642.$

Chapitre 7. Loi de Poisson.

Enoncés.

Exercice 5. Fautes d'impression dans un livre.

On suppose que, dans un livre de 500 pages, il y a 300 fautes d'impression distribuées au hasard. Calculer la probabilité pour que la page 36 contienne : a) Exactement deux fautes d'impression. b) Au moins deux fautes d'impression.	

Solution.

1°/ Loi de probabilité du nombre de fautes d'impression dans une page.

Considérons une faute d'impression particulière.
Comme les fautes sont réparties au hasard dans les 500 pages, la probabilité pour que la faute considérée se trouve à la page 36 est $p = \frac{1}{500}$.
Le fait de regarder si telle faute se trouve à la page 36 est une **épreuve de Bernoulli** dont le succès " la faute se trouve à la page 36 " a une probabilité $p = \frac{1}{500}$, toujours la même, quelle que soit la faute.
Lorsqu'on répète cette épreuve de Bernoulli pour les $n = 300$ fautes, le nombre X de fautes qui se trouvent à la page 36 apparaît comme le **nombre de succès dans une répétition** d'épreuves de Bernoulli.
On sait alors que X suit une **loi binomiale** de paramètres $n = 300$ et $p = \frac{1}{500}$.

$$P(X = k) = \binom{500}{k}\left(\frac{1}{500}\right)^k\left(1-\frac{1}{500}\right)^{500-k}$$

2°/ Probabilités de la loi binomiale.

Le calcul avec une calculette *HP 48SX* donne les valeurs suivantes :

k	0	1	2	3
$P(X = k)$	0,5485	0,3297	0,0988	0,0197

On en déduit les réponses aux questions posées :

$P(X = 2) = 0,0988$
$P(X \geq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 0,1218$

$$P(X = 2) = 0,0988 \text{ et } P(X \geq 2) = 0,1218$$

3°/ Approximation par la loi de Poisson.

On peut **approcher la loi binomiale** de paramètres n et p par une loi de Poisson de paramètre $\lambda = n\,p$ lorsque :

— n est grand
— p est petit
— $n\,p$ n'est ni trop grand, ni trop petit et les valeurs de k étudiées ne s'éloignent pas trop de la moyenne $n\,p$.

Avec $n = 300$, $p = \frac{1}{500}$, et des valeurs de k étudiées de 0 à 2 qui sont proches de $n\,p = 0{,}60$, ces conditions d'approximation sont réalisées : les valeurs de probabilités données par la loi binomiale peuvent se calculer approximativement **par la loi de Poisson de paramètre $\lambda = n\,p = 0{,}60$**.

$$P(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-0{,}60} \times \frac{(0{,}60)^k}{k!}$$

La calculette donne les valeurs suivantes :

k	0	1	2	3
Loi binomiale	0,5485	0,3297	0,0988	0,0197
Loi de Poisson	0,5488	0,3293	0,0988	0,0198

On en déduit les réponses aux questions posées :

$P(X = 2) = 0{,}0988$
$P(X \geq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 0{,}1219$

$$P(X = 2) = 0{,}0988 \text{ et } P(X \geq 2) = 0{,}1219$$

En comparant ces valeurs avec celles obtenues dans la question précédente à partir de la loi binomiale, on voit que l'approximation par la loi de Poisson est tout à fait bonne dans le cas présent.
En fait, dans ce cas particulier, les calculs à la machine ne sont pas plus compliqués avec la loi binomiale qu'avec la loi de Poisson et l'approximation par la loi de Poisson n'a pas réellement de justification ici.

Chapitre 16. Test de Kolmogorov-Smirnov.

Enoncés.

Exercice. Nombre de clients d'un antiquaire.

Un antiquaire pointilleux note le temps qu'il passe à attendre un client dans une journée continue de 10 heures à 18 heures. Il a ainsi noté les heures d'arrivée des clients :
{10h15 ; 10h40 ; 11h15 ; 11h27 ; 12h57 ; 13h03 ; 14h18 ; 15h23 ; 16h20 ; 16h24 ; 17h09}
Ces heures d'arrivée donnent, par différence, le temps d'attente, en minutes, entre deux clients :
{25 ; 35 ; 12 ; 90 ; 6 ; 75 ; 65 ; 57 ; 4 ; 45}
L'antiquaire sait que les clients arrivent indépendamment les uns des autres et il aimerait bien savoir si le nombre de clients qui arrivent dans une période de temps T ne dépend que de T, ou bien s'il dépend aussi de l'heure à partir de laquelle on mesure cette période T. Vous allez l'aider.

1°/ En supposant établi le fait que la somme de deux variables aléatoires indépendantes de lois gamma, de paramètres r et s, suit une **loi gamma** de paramètre $r + s$, montrer que, si le nombre de clients qui arrivent, indépendamment les uns des autres, dans une période de temps T ne dépend que de T, le temps d'attente entre deux clients suit une **loi exponentielle**, et que le nombre de clients qui arrivent pendant la période T suit une **loi de Poisson**.
2°/ Donner une estimation du temps d'attente moyen.
3°/ Poser les hypothèses à tester (hypothèse nulle et hypothèse alternative).
4°/ La comparaison de la distribution observée à la distribution théorique s'effectue par un test de Kolmogorov-Smirnov. Que peut-on en conclure ?

Solution.

1°/ Distribution théorique.

Une réalisation d'évènements aléatoires successifs est appelée un **processus de Poisson** si, et seulement si, par définition :

1. Les évènements surviennent à des intervalles de temps (temps d'attente) indépendants.
2. Le nombre d'évènements survenant dans un intervalle de temps $[t ; t + T]$, ne dépend que de T. (Si T est égal à 1, l'espérance mathématique du nombre d'évènements survenant dans le temps $[t ; t + 1]$ est appelé la **cadence** du processus).
3. Deux évènements ne peuvent survenir en même temps.

Les hypothèses faites montrent que l'antiquaire suppose que les temps d'attente de clients forment un processus de Poisson.

Dans ces conditions, si $p^0(h)$ est la probabilité qu'aucun évènement ne se produise pendant une durée h, la deuxième condition dit que $p^0(h)$ ne dépend que de h, et non de l'instant t à partir duquel est mesuré la

durée *h*. Alors si l'on considère trois instants *t*, *t* + *h*, *t* + *h* + *k*, la probabilité qu'il ne se passe rien entre *t* et *t* + *h* + *k* est, du fait de l'indépendance :

$$p_0(h + k) = p_0(h).\, p_0(k)$$

Et cette relation, caractéristique de l'exponentielle*, montre que $p^0(h)$ est une exponentielle, de la forme :

$$p_0(h) = e^{-c\,h}$$

* En effet, la relation $f(x + y) = f(x)\, f(y)$ donne, par dérivation par rapport à *x* ou par rapport à *y*, $f'(x + y) = f'(x)\, f(y) = f(x)\, f'(y)$

$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{f'(y)}{f(y)}$ = constante, et l'équation différentielle $f' + c\, f = 0$ a pour solution $f(x) = f(0)\, e^{-c\,x}$.

La relation $f(0) = (f(0))^2$ donne alors, pour $f \neq 0$, $f(0) = 1$ et $f(x) = e^{-c\,x}$.

La durée *T* séparant deux évènements consécutifs est une variable aléatoire : la probabilité que *T* soit supérieure à une valeur *t* est la probabilité qu'aucun évènement ne se produise dans le temps *t*. D'après la relation donnant $p^0(T)$, il est donné par la relation : $P(T > t) = e^{-c\,t}$ La fonction de répartition de *T* est donc $P(T < t) = 1 - e^{-c\,t}$ et la densité de probabilité de *T* est la dérivée $f(t) = c\, e^{-c\,t}$ Autrement dit, le temps séparant deux évènements consécutifs suit une **loi exponentielle** de paramètre *c*. Le temps d'attente entre deux clients suit une loi exponentielle.

Son espérance mathématique est $E(T) = \frac{1}{c}$ et la variable *c T* suit une loi gamma de paramètres *c* et *r* = 1.

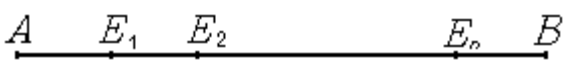
Rappelons que la **loi gamma** de paramètre λ et *a* est définie par

$$f_{(\lambda,\, a)}(x) = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} x^{a-1}\, e^{-\lambda\,x},\ x \geq 0,\ \text{avec}\ \Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-u}\, u^{x-1}\, du,\ \Gamma(n) = (n-1)\,!\ .$$

La durée *Y* séparant *k* + 1 évènements consécutifs est une variable aléatoire somme de *k* variables aléatoires $T_1, \ldots, T_k$ de même loi exponentielle. Donc la variable $c\,Y = c\,T_1 + \ldots + c\,T_k$, somme de *k* variables indépendantes de loi Γ_1, suit une loi Γ_k, ce qui résulte directement du fait que la fonction caractéristique d'une loi Gamma de paramètres λ et *a* est $\frac{\lambda^a}{(\lambda - i\,u)^a}$ et du fait que la fonction caractéristique d'une somme de variables aléatoires indépendantes est le produit des fonctions caractéristiques : si le paramètre l est le même, les *a* s'ajoutent on obtient encore une fonction caractéristique de loi Gamma. (voir aussi G. SAPORTA, Théories et Méthodes de la statistique, Technip, Paris, 1978, p.65).
La densité de probabilité de *Y* est donc :

$$f_k(y) = c\, e^{-c\,y}\, \frac{(c\,y)^{k-1}}{(k-1)\,!}$$

On en déduit que le nombre *N* d'évènements se produisant pendant une période de durée fixée *T* suit une **loi de Poisson** de paramètre *c T*.



En effet, appelons *AB* la période d'étude. La relation :

$$P\,(N = n) = P\,(N \geq n) - P\,(N \geq n + 1)$$

est évidente.
Or $P\,(N \geq n)$ est la probabilité que la durée AE_n soit inférieure ou égale à T.
Cette durée AE_n est somme de n durées $AE_1 + E_1E_2 + ... + E_{n-1}E_n$ indépendantes qui suivent toutes, comme le temps T séparant deux évènements consécutifs, introduit plus haut, une loi exponentielle de même paramètre c, de sorte que la durée AE_n suit la loi $f_n(y)$ et l'on a :

$$P\,(N \geq n) = \int_0^T c\,e^{-ct}\frac{(ct)^{n-1}}{(n-1)!}\,dt$$

La probabilité $P\,(N = n) = P\,(N \geq n) - P\,(N \geq n + 1)$ est alors donnée par la formule :

$$P\,(N = n) = \int_0^T c\,e^{-ct}\frac{(ct)^{n-1}}{(n-1)!}\,dt - \int_0^T c\,e^{-ct}\frac{(ct)^{n}}{n!}\,dt$$

Une intégration par parties, avec $u = \frac{(ct)^n}{n!}$, $du = c\frac{(ct)^{n-1}}{(n-1)!}\,dt$, $dv = c\,e^{-ct}\,dt$, $v = -e^{-ct}$, donne :

$$\int_0^T c\,e^{-ct}\frac{(ct)^{n}}{n!}\,dt = -\frac{(cT)^n}{n!}e^{-ct} + \int_0^T c\,e^{-ct}\frac{(ct)^{n-1}}{(n-1)!}\,dt$$

d'où :

$$P\,(N = n) = \frac{(cT)^n}{n!}e^{-cT}$$

Cette formule montre que le nombre d'évènements N survenant pendant une période T suit une **loi de Poisson** de paramètre $\lambda = c\,T$.

Pour $T = 1$, l'espérance de N est donnée par $E\,(N) = c$, ce qui montre que la constante c est la **cadence** du nombre de clients.

2°/ Estimation de la moyenne.

Si le temps d'attente suit une loi exponentielle $\lambda\,e^{-\lambda x}$, son espérance mathématique est $\frac{1}{\lambda}$, on peut l'estimer en prenant la moyenne de l'échantillon.

Estimation de la durée de vie moyenne $\frac{1}{\lambda}$: $\frac{1}{10}(25 + 35 + 12 + 90 + 6 + 75 + 65 + 57 + 4 + 45) = 41{,}4$, soit environ 40 minutes.

3°/ Hypothèses à tester.

(H^0) : Le temps d'attente suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = \frac{1}{41{,}4}$.

(H^1) : Le temps d'attente ne suit pas une loi exponentielle de paramètre $\lambda = \frac{1}{41{,}4}$.

4°/ Test de Kolmogorov-Smirnov.

Rangeons les temps d'attente observés par ordre croissant.
La fonction de répartition de la loi exponentielle de paramètre λ est $1 - e^{-\lambda x}$.
On obtient le tableau suivant :

x	4	6	12	25	35	45	57	65	75	90
Nombre de valeurs	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Fréquence cumulée	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00
$1 - e^{-\lambda x}$	0,10	0,14	0,26	0,46	0,58	0,68	0,76	0,80	0,85	0,89
Ecart absolu	0,00	0,06	0,04	0,06	0,08	0,08	0,04	0,00	0,05	0,11

La plus grande valeur de l'écart absolu s'observe pour la 10e classe :

$$D_{max} = 0,11$$

Pour n = 10 classes, la table de Kolmogorov pour $\alpha = 0,05$ donne une valeur seuil de 0,4087.

$D_{max} < 0,4087 \Rightarrow$ on accepte (H_0).
La différence qu'on observe avec la loi exponentielle n'est pas significative au seuil de 5 %.

Conclusion pratique.

Jusqu'à plus ample information, compte tenu de la taille de l'échantillon, nous pourrons admettre, au seuil de 5 %, que le temps d'attente entre deux clients suit une loi exponentielle de moyenne 41,4 minutes.

Nous pourrons rassurer l'antiquaire : le nombre de clients dans une période donnée ne dépend que de la durée de la période, plus longtemps il restera ouvert et plus de clients il aura.

Exercices

Loi hypergéométrique.

1. Définition.
2. Interprétation : tirage sans remise.
3. Propriétés.

    a) Espérance mathématique.
    b) Variance.
    c) Tendance vers la loi binomiale.

1. Définition.

HAUT

On dit qu'une variable aléatoire X suit une **loi hypergéométrique de paramètres N, n, p**, si, et seulement si :

1°/ X prend un certain nombre de valeurs entières formant un **intervalle $X(\Omega)$** contenu dans l'intervalle [0 ; n] ;
2°/ $N\,p$ est un entier, noté N_1 ; on note alors N_2 l'entier $N - N_1$.
3°/ Pour tout entier k appartenant à $X(\Omega)$, $P(X = k) = \dfrac{\binom{N_1}{k}\binom{N_2}{n-k}}{\binom{N}{n}}$.

La relation "X suit une loi hypergéométrique de paramètres N, n, p" s'écrit : $X \rightsquigarrow H(N, n, p)$.

2. Interprétation : tirage sans remise.

HAUT

Dans une urne contenant N boules dont N_1 blanches et N_2 noires, on tire au hasard n boules, sans remise (**tirage exhaustif**).
On note X le nombre de boules blanches tirées : X est une variable aléatoire dont les valeurs sont comprises entre 0 et n.
La valeur maximum de X est le plus petit des deux nombres entiers n et N_1 : on peut tirer jusqu'à n boules blanches si n est plus petit que N_1, sinon on ne peut tirer qu'au plus N_1 boules blanches lorsque N_1 est plus petit que n.
La valeur minimum de X est le plus grand des deux entiers relatifs 0 et $n - N_2$: on peut tirer 0 boule blanche si n est inférieur au nombre N_2 de boules noires, sinon on tire au minimum $n - N_2$ boules blanches lorsque le nombre de boules tirées n est supérieur au nombre de boules noires N_2.

$$X(\Omega) = [\, Max\,(0, n - N_2)\,;\, Min\,(n, N_1)\,].$$

Le nombre de tirages possibles de n boules parmi N est le coefficient binomial $\binom{N}{n}$: ils sont équiprobables.

Pour un entier k appartenant à $X(\Omega)$, il y a $\binom{N_1}{k}$ façons de choisir k boules blanches parmi les N_1 boules blanches et, pour chaque choix de k boules blanches parmi les N_1, il y a $\binom{N_2}{n-k}$ façons de choisir les $n - k$ boules noires complétant le tirage.
Le nombre de tirages de n boules contenant k boules blanches est donc $\binom{N_1}{k}\binom{N_2}{n-k}$ et la probabilité d'avoir $X = k$ est donnée par le rapport :

$$P(X = k) = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}} = \frac{\binom{N_1}{k}\binom{N_2}{n-k}}{\binom{N}{n}},$$

donc X suit une **loi hypergéométrique** de paramètres N, n, $p = \frac{N_1}{N}$.

Remarquons que l'égalité $P(X = k) = \frac{\binom{N_1}{k}\binom{N_2}{n-k}}{\binom{N}{n}}$ est valable, en fait, pour tout $k \in [\, 0\,;\, n\,]$, puisqu'en dehors de l'intervalle $X(\Omega)$, l'un des coefficients binomiaux $\binom{N_1}{k}$ et $\binom{N_2}{n-k}$ est nul et la probabilité correspondante est nulle.
On peut donc écrire :

$$\sum_{k=0}^{k=n} \frac{\binom{N_1}{k}\binom{N_2}{n-k}}{\binom{N}{n}} = \sum_{k=0}^{k=n} P(X = k) = 1$$

soit :

$$\sum_{k=0}^{k=n} \binom{N_1}{k}\binom{N_2}{n-k} = \binom{N_1+N_2}{n}.$$

Cette égalité est appelée l'**identité de Vandermonde**.

HAUT

3. Propriétés.

HAUT

a) Espérance mathématique.

$$E(X) = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{\binom{N_1}{k}\binom{N_2}{n-k}}{\binom{N}{n}} k = \frac{n!\left(N_1+N_2-n\right)!}{\left(N_1+N_2\right)!} \sum_{k=0}^{k=n} \binom{N_1}{k}\binom{N_2}{n-k} k$$

Dans la somme, le terme correspondant à $k = 0$ est nul.
D'autre part, pour k différent de 0,

$$k\binom{N_1}{k} = k\frac{N_1!}{k!\left(N_1-k\right)!} = N_1 \frac{\left(N_1-1\right)!}{(k-1)!\left(N_1-k\right)!} = N_1 \frac{\left(N_1-1\right)!}{(k-1)!\left(\left(N_1-1\right)-(k-1)\right)!}$$
$$= N_1\binom{N_1-1}{k-1}.$$
$$k\binom{N_1}{k} = N_1\binom{N_1-1}{k-1}.$$

D'où :

$$E(X) = \frac{n!\left(N_1+N_2-n\right)!}{\left(N_1+N_2\right)!} N_1 \sum_{k=1}^{k=n} \binom{N_1-1}{k-1}\binom{N_2}{n-k}$$

L'identité de Vandermonde donne, en posant $h = k - 1$,

$$\sum_{k=1}^{k=n} \binom{N_1-1}{k-1}\binom{N_2}{n-k} = \sum_{h=0}^{h=n-1} \binom{N_1-1}{h}\binom{N_1}{n-1-h} = \binom{N_1+N_2-1}{n-1}.$$

$$E(X) = \frac{n!\left(N_1+N_2-n\right)!}{\left(N_1+N_2\right)!} N_1 \binom{N_1+N_2-1}{n-1}$$
$$= \frac{n!\left(N_1+N_2-n\right)!}{\left(N_1+N_2\right)!} N_1 \frac{\left(N_1+N_2-1\right)!}{(n-1)!\left(N_1+N_2-1-n+1\right)!}$$
$$= \frac{n N_1}{N_1+N_2} = n\,p.$$

$$\boxed{E(X) = n\,p.}$$

HAUT

b) Variance. HAUT

La variance peut se calculer par la formule :

$$Var\,(X) = E\,(X\,(X-1)) + E\,(X) - (E\,(X))^2.$$

$$E\,(X\,(X-1)) = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{\binom{N_1}{k}\binom{N_2}{n-k}}{\binom{N}{n}} k\,(k-1) = \frac{n!\,(N_1+N_2-n)!}{(N_1+N_2)!} \sum_{k=0}^{k=n} \binom{N_1}{k}\binom{N_2}{n-k} k\,(k-1).$$

Or on a, pour $k > 0$:

$$k\binom{N_1}{k} = N_1\binom{N_1-1}{k-1}$$

et, pour $k > 1$:

$$(k-1)\binom{N_1-1}{k-1} = (N_1-1)\binom{N_1-2}{k-2}$$

$$k\,(k-1)\binom{N_1}{k} = N_1\,(k-1)\binom{N_1-1}{k-1} = N_1\,(N_1-1)\binom{N_1-2}{k-2}$$

Comme les termes correspondant à $k = 0$ et à $k = 1$, dans la somme $\sum_{k=0}^{k=n} \binom{N_1}{k}\binom{N_2}{n-k} k\,(k-1)$, sont nuls, il reste :

$$E\,(X\,(X-1)) = \frac{n!\,(N_1+N_2-n)!}{(N_1+N_2)!} \sum_{k=2}^{k=n} N_1\,(N_1-1)\binom{N_1-2}{k-2}\binom{N_2}{n-k}$$

$$= \frac{n!\,(N_1+N_2-n)!}{(N_1+N_2)!} N_1\,(N_1-1) \sum_{k=2}^{k=n} \binom{N_1-2}{k-2}\binom{N_2}{n-k}.$$

L'identité de Vandermonde, appliquée avec $h = k - 2$, donne :

$$\sum_{k=2}^{k=n} \binom{N_1-2}{k-2}\binom{N_2}{n-k} = \sum_{h=0}^{h=n-2} \binom{N_1-2}{h}\binom{N_2}{n-2-h} = \binom{N_1+N_2-2}{n-2}$$

$$E\,(X\,(X-1)) = \frac{n!\,(N_1+N_2-n)!}{(N_1+N_2)!} N_1\,(N_1-1)\binom{N_1+N_2-2}{n-2}$$

$$= \frac{n!\,(N_1+N_2-n)!}{(N_1+N_2)!} N_1\,(N_1-1)\frac{(N_1+N_2-2)!}{(n-2)!\,(N_1+N_2-2-n+2)!}$$

$$= n\,(n-1)\frac{N_1}{N_1+N_2}\frac{N_1-1}{N_1+N_2-1}$$

$$Var\,(X) = n\,(n-1)\,\frac{N_1}{N_1+N_2}\frac{N_1-1}{N_1+N_2-1} + n\,\frac{N_1}{N_1+N_2} - n^2\,\frac{(N_1)^2}{(N_1+N_2)^2}$$

$$= n\,(n-1)\,\frac{N_1}{N_1+N_2}\frac{N_1-1}{N_1+N_2-1} + n\,\frac{N_1}{N_1+N_2}\left(1 - n\,\frac{N_1}{N_1+N_2}\right)$$

$$= n\,\frac{N_1}{N_1+N_2}\left((n-1)\,\frac{N_1-1}{N_1+N_2-1} + 1 - n\,\frac{N_1}{N_1+N_2}\right)$$

$$= n\,\frac{N_1}{N_1+N_2}\frac{1}{(N_1+N_2)(N_1+N_2-1)}\left((n-1)\,(N_1-1)(N_1+N_2) + (N_1+N_2-1)(N_1+N_2) - n\,N_1\,(N_1+N_2-1)\right)$$

$$= n\,\frac{N_1}{N_1+N_2}\frac{1}{(N_1+N_2)(N_1+N_2-1)}\left((N_1+N_2)((n-1)\,(N_1-1) + N_1 + N_2 - 1 - n\,N_1) + n\,N_1\right)$$

$$= n\,\frac{N_1}{N_1+N_2}\frac{1}{(N_1+N_2)(N_1+N_2-1)}\left((N_1+N_2)(n\,N_1 - n - N_1 + 1 + N_1 + N_2 - 1 - n\,N_1) + n\,N_1\right)$$

$$= n\,\frac{N_1}{N_1+N_2}\frac{1}{(N_1+N_2)(N_1+N_2-1)}\left((N_1+N_2)(N_2-n) + n\,N_1\right)$$

$$= n\,\frac{N_1}{N_1+N_2}\frac{1}{(N_1+N_2)(N_1+N_2-1)}\left(N_2(N_2-n) + N_1\,(N_2-n) + n\,N_1\right)$$

$$= n\,\frac{N_1}{N_1+N_2}\frac{1}{(N_1+N_2)(N_1+N_2-1)}\left(N_2(N_1+N_2-n)\right)$$

$$= n\,\frac{N_1}{N_1+N_2}\,\frac{N_2}{N_1+N_2}\,\frac{N_1+N_2-n}{N_1+N_2-1} = n\,p\,q\,\frac{N-n}{N-1}$$

avec $q = 1 - p = \frac{N_2}{N_1+N_2}$ et $N = N_1 + N_2$.

$$\boxed{Var\,(X) = n\,p\,q\,\frac{N-n}{N-1}}$$

HAUT

c) Tendance vers la loi binomiale. HAUT

Lorsqu'on compare les résultats obtenus pour la loi hypergéométrique de paramètres *N*, *n*, *p*, et pour la loi binomiale de paramètres *n* et *p*, on constate que :

1°/ Que les tirages soient effectués avec ou sans remise, l'espérance mathématique du nombre de boules blanches est la même, c'est *n p*, qui ne dépend pas de *N*.

2°/ La variance change : le rapport $\frac{N-n}{N-1}$ est appelé **rapport d'exhaustivité**. Il est compris entre 0 et 1. Autrement dit, la variable hypergéométrique est moins dispersée que la variable binomiale.

3°/ Lorsque *N* augmente indéfiniment avec une proportion $p = \frac{N_1}{N_1+N_2} = \frac{N_1}{N}$ de boules blanches constante, le rapport :

$$\frac{\binom{N_1}{k}\binom{N_2}{n-k}}{\binom{N}{n}} = \frac{Np(Np-1)\cdots(Np-k+1)}{1\times 2\times\cdots\times k}\frac{Nq(Nq-1)\cdots(Nq-n+k+1)}{1\times 2\times\cdots\times(n-k)}\frac{1\times 2\times\cdots\times n}{N(N-1)\cdots(N-n+1)}$$

est équivalent à :

$$\binom{n}{k}\frac{(Np)^k(Nq)^{n-k}}{N^n} = \binom{n}{k}p^k q^{n-k}$$

On voit donc que **la loi hypergéométrique tend vers la loi binomiale**, lorsque le nombre de boules augmente indéfiniment dans l'urne en gardant une proportion constante de boules blanches.

HAUT

Chapitre 8. Loi hypergéométrique.

Exercices

Exercice 1. Pièces défectueuses dans un échantillon.
Exercice 2. Note d'examen d'un étudiant qui fait des impasses.
Exercice 3. Poissons de couleurs variées.
Exercice 4. Boules rouges et boules jaunes dans une urne.

Exercice 1. Pièces défectueuses dans un échantillon.

On prélève au hasard un échantillon de k pièces dans une production totale de N pièces comportant en tout n pièces défecteuses. Quelle est la probabilité qu'il y ait exactement j pièces défectueuses dans l'échantillon ?	Solution

HAUT

Exercice 2. Note d'examen d'un étudiant qui fait des impasses.

Un examen se déroule sous forme d'un questionnaire à choix multiple (Q.C.M.) où on pose 20 questions. Chaque question comporte quatre réponses possibles, dont une et une seule est la bonne. Une réponse juste compte 1 point, sinon zéro. On suppose que le programme de l'examen comporte 100 questions dont on tirera aléatoirement les 20 de l'examen. Un candidat étudie une proportion p du programme. 1°/ Ecrire la loi de probabilité de la note N du candidat ? 2°/ Calculer l'espérance mathématique $E(N)$ et la variance $Var(N)$.	Solution

HAUT

Exercice 3. Poissons de couleurs variées.

Dans un bassin, nagent 100 poissons rouges, 200 poissons bleus, 300 poissons jaunes, 400 poissons gris, indépendamment les uns des autres. Un coup d'épuisette ramène, au hasard, un nombre $n < 100$ de poissons de diverses couleurs, chaque poisson ayant la même "chance" d'être pêché. 1°/ Sachant qu'un coup d'épuisette a capturé, au hasard, n poissons, quelle est la probabilité d'avoir obtenu exactement r poissons rouges, b poissons bleus, j poissons jaunes et g poissons gris, avec $r + b + j + g = n$? 2°/ Le coup d'épuisette a ramené 10 poissons. Quelle est la probabilité que ce coup d'épuisette soit constitué de 2 poissons rouges, 2 poissons bleus, 3 poissons jaunes et 3 poissons gris ?	Solution

HAUT

Exercice 4. Boules rouges et boules jaunes dans une urne.

Dans une boîte, il y a 6 boules rouges et 8 boules jaunes.
On tire au hasard 3 boules de la boîte, sans remise.
Soit X (respectivement Y) le nombre de boules rouges (respectivement jaunes) tirées parmi les 3.
1°/ Expliciter la loi de X.
2°/ Calculer :
a) $E[X]$.
b) $E[Y]$.
c) $Var(Y)$.
3°/ Les variables X et Y sont-elles indépendantes ? Donner une raison précise.

Solution

HAUT

Chapitre 8. Loi hypergéométrique.

Enoncés.

Exercice 1. Pièces défectueuses dans un échantillon.

On prélève au hasard un échantillon de k pièces dans une production totale de N pièces comportant en tout n pièces défecteuses. Quelle est la probabilité qu'il y ait exactement j pièces défectueuses dans l'échantillon ?	

Solution.

1°/ Loi de probabilité de X.

Soit X le nombre de pièces défectueuses dans l'échantillon.
X peut prendre une valeur entière j de $Max\ (0, n + k – N)$ à $Min\ (k, n)$.
En effet, si k est plus grand que le nombre de pièces non défectueuses $N – n$, on tire au moins $k – (N – n)$ pièces défectueuses. Sinon, on peut tirer 0 pièces défectueuses.
De l'autre côté, le nombre de pièces défectueuses tirées est au maximum égal à la taille k de l'échantillon lorsque k est inférieur au nombre de pièces défectueuses, et il est au maximum égal au nombre de pièces défectueuses lorsque la taille k de l'échantillon est supérieure au nombre n de pièces défectueuses.

Un échantillon comportant j pièces défecteuses est constitué en prenant une partie à j éléments de l'ensemble à n éléments des pièces défectueuses, et une partie à $k – j$ éléments de l'ensemble à $N – n$ éléments des pièces non défectueuses. Ceci peut se faire de $\binom{n}{j}\binom{N-n}{k-j}$ façons.

Comme il existe $\binom{N}{k}$ échantillons possibles de k pièces parmi les N pièces de la production, la probabilité qu'il y ait exactement j pièces défectueuses dans l'échantillon de k pièces est donnée par :

$$P\ (X = j) = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}} = \frac{\binom{n}{j}\binom{N-n}{k-j}}{\binom{N}{k}}$$

Le nombre X de pièces défectueuses dans un échantillon de k pièces suit une **loi hypergéométrique** de paramètre $p = \frac{n}{N}$:

$$P\ (X = j) = \frac{\binom{n}{j}\binom{N-n}{k-j}}{\binom{N}{k}},\ j = Max\ (0, n + k – N), \ldots , Min\ (n, k).$$

2°/ Paramètres de la loi de X.

L'espérance mathématique de X est $E(X) = k\,p$, elle ne dépend pas directement de N, mais seulement de la proportion de pièces défectueuses dans la production et de la taille de l'échantillon.
Elle a la même expression que l'espérance d'une variable binomiale de paramètres k et p.
Autrement dit, que le tirage se fasse avec remise (variable binomiale) ou sans remise (variable hypergéométrique) ne change pas l'espérance.

La variance de X est $Var(X) = k\,p\,q\,\frac{N-k}{N-1}$, avec $q = 1 - p = \frac{N-n}{N}$ proportion de pièces non défectueuses.
Si le tirage était effectué avec remise (variable binomiale) la variance serait $k\,p\,q$.
Le rapport $\frac{N-k}{N-1}$ est appelé **rapport d'exhaustivité**. Il est compris entre 0 et 1. Autrement dit, la variable hypergéométrique est moins dispersée que la variable binomiale, sa variance est plus faible.

Chapitre 8. Loi hypergéométrique.

Enoncés.

Exercice 2. Note d'examen d'un étudiant qui fait des impasses.

Un examen se déroule sous forme d'un questionnaire à choix multiple (Q.C.M.) où on pose 20 questions. Chaque question comporte quatre réponses possibles, dont une et une seule est la bonne. Une réponse juste compte 1 point, sinon zéro. On suppose que le programme de l'examen comporte 100 questions dont on tirera aléatoirement les 20 de l'examen. Un candidat étudie une proportion p du programme. 1°/ Ecrire la loi de probabilité de la note N du candidat ? 2°/ Calculer l'espérance mathématique $E(N)$ et la variance $Var(N)$.	

Solution.

1°/ Loi de probabilité de N.

La note N est le nombre de questions auxquelles le candidat donne une bonne réponse.
Il donne une bonne réponse quand il connaît le sujet (la question fait partie des 100 p questions qu'il a étudiées) ou quand il a de la chance (pour chaque question qu'il n'a pas étudiée, il a une chance sur quatre de donner la bonne réponse en répondant au hasard).

Parmi les 20 questions, un certain nombre X fait partie des 100 p questions étudiées et fournit automatiquement X points.
Les 20 questions sont tirées, évidemment sans remise, parmi les 100 possibles.
La loi de X est donc une **loi hypergéométrique** de paramètres 100, 20, p :

$$P(X = m) = \frac{\binom{100\,p}{m}\binom{100(1-p)}{20-m}}{\binom{100}{20}},\ 0 \le m \le 20.$$

Un certain nombre de réponses pourront être devinées par le jeu du hasard parmi les $20 - X$ questions non révisées, soit Y ce nombre.
A chaque question non révisée est associée une variable de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{4}$.
Lorsque $X = m$ est fixé, la loi de Y, somme de $20 - m$ variables de Bernoulli indépendantes de même paramètre, est une **loi binomiale** de paramètres $20 - m$ et $\frac{1}{4}$.

$$P(Y = n \mid X = m) = \binom{20-m}{n}\left(\frac{1}{4}\right)^n\left(\frac{3}{4}\right)^{20-m-n},\ 0 \le n \le m \le 20.$$

La loi de $N = X + Y$ s'obtient à partir des deux précédentes :

$$P(N = n) = \sum_{m=0}^{m=n} P(X = m \text{ et } Y = n - m) = \sum_{m=0}^{m=n} P(Y = n - m \mid X = m)\, P(X = m)$$

$$\boxed{P(N = n) = \sum_{m=0}^{m=n} \binom{20-m}{n-m} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-m} \left(\frac{3}{4}\right)^{20-n} \frac{\binom{100\,p}{m}\binom{100(1-p)}{20-m}}{\binom{100}{20}}}$$

2°/ Espérance mathématique et variance de *N*.

La loi de probabilité de *N* est difficilement manipulable.
On utilisera ici le théorème de l'espérance conditionnelle et le théorème de la variance conditionnelle.

Montrons d'abord quelques résultats relatifs à la variable hypergéométrique.

Lemme 1 : espérance de la variable hypergéométrique.

Si la loi de probabilité de *X* est donnée par :

$$P(X = k) = \frac{\binom{n_1}{m}\binom{N-n_1}{n-m}}{\binom{N}{n}} \text{ (loi hypergéométrique de paramètres } N, n, p = \frac{n_1}{N}),$$

alors l'espérance de *X* est :

$$\boxed{E(X) = n\,p = n\,\frac{n_1}{N}.}$$

Démonstration du lemme 1.

X peut être considéré comme le nombre d'individus possédant un certain caractère *A*, dans un échantillon exhaustif de taille *n* tiré au hasard dans une population de taille *N* contenant $n_1 = p\,N$ individus possédant le caractère *A*.
X est la somme de *n* variables de Bernoulli $X_1, \ldots, X_n$, correspondant aux tirages exhaustifs (= sans remise) successifs des *n* individus de l'échantillon dans la population de taille *N*.

$$X = X_1 + \ldots + X_n$$

Comme la proportion d'individus possédant le caractère *A* dans la population est $p = \frac{n_1}{N}$, la probabilité de l'événement $X_1 = 1$ est égale à $p = \frac{n_1}{N}$ et $\boldsymbol{X_1}$ **est une variable de Bernoulli de paramètre** ***p***.

$P(X_2 = 1) = P(X_2 = 1 \mid X_1 = 0) \times P(X_1 = 0) + P(X_2 = 1 \mid X_1 = 1) \times P(X_1 = 1)$

$$= \frac{n_1}{N-1} \times \frac{N-n_1}{N} + \frac{n_1-1}{N-1} \times \frac{n_1}{N} = \frac{n_1}{N(N-1)}(N - n_1 + n_1 - 1) = \frac{n_1}{N}$$

et X_2 **est une variable de Bernoulli de paramètre** p.

$P(X_3 = 1) = P(X_3 = 1 \mid X_1 + X_2 = 0) \times P(X_1 + X_2 = 0) + P(X_3 = 1 \mid X_1 + X_2 = 1) \times P(X_1 + X_2 = 1) + P(X_3 = 1 \mid X_1 + X_2 = 2) \times P(X_1 + X_2 = 2)$

Or $X_1 + X_2$ suit une loi hypergéométrique de paramètres N, 2 et $p = \frac{n_1}{N}$, de sorte qu'il vient :

$$P(X_1 + X_2 = 0) = \frac{\binom{n_1}{0}\binom{N-n_1}{2}}{\binom{N}{2}} = \frac{(N-n_1)(N-n_1-1)}{N(N-1)}$$

$$P(X_1 + X_2 = 1) = \frac{\binom{n_1}{1}\binom{N-n_1}{1}}{\binom{N}{2}} = \frac{2n_1(N-n_1)}{N(N-1)}$$

$$P(X_1 + X_2 = 2) = \frac{\binom{n_1}{2}\binom{N-n_1}{0}}{\binom{N}{2}} = \frac{n_1(n_1-1)}{N(N-1)}$$

$$P(X_3 = 1) = \frac{n_1}{N-2} \times \frac{(N-n_1)(N-n_1-1)}{N(N-1)} + \frac{n_1-1}{N-2} \times \frac{2n_1(N-n_1)}{N(N-1)} + \frac{n_1-2}{N-2} \times \frac{n_1(n_1-1)}{N(N-1)}$$

$$= \frac{n_1}{N(N-1)(N-2)}[(N-n_1)(N-n_1-1) + 2(n_1-1)(N-n_1) + (n_1-1)(n_1-2)]$$

$$= \frac{n_1}{N(N-1)(N-2)}[(N-n_1)(N-n_1-1+2(n_1-1)) + (n_1-1)(n_1-2)]$$

$$= \frac{n_1}{N(N-1)(N-2)}[(N-n_1)(N+n_1-3) + (n_1-1)(n_1-2)]$$

$$= \frac{n_1}{N(N-1)(N-2)}[N^2 - n_1^2 - 3N + 3n_1 + n_1^2 - 3n_1 + 2]$$

$$= \frac{n_1}{N(N-1)(N-2)}[N^2 - 3N + 2]$$

$$= \frac{n_1}{N(N-1)(N-2)}[(N-1)(N-2)]$$

$$= \frac{n_1}{N}$$

et X_3 **est une variable de Bernoulli de paramètre** p.

De même, on peut montrer que **chacune des variables de Bernoulli** X_1**, ... ,** X_n**, possède le même paramètre** p.
On a donc :

$$E(X) = E(X_1 + ... + X_n) = n\,p.$$

Lemme 2 : variance de la variable hypergéométrique.

Si la loi de probabilité de X est donnée par :

$$P(X = m) = \frac{\binom{n_1}{m}\binom{N-n_1}{n-m}}{\binom{N}{n}} \text{(loi hypergéométrique de paramètres } N, n, p = \frac{n_1}{N}),$$

alors la variance de X est :

$$\boxed{Var(X) = \frac{N-n}{N-1}\,n\,p\,(1-p) = n\,\frac{N-n}{N-1}\frac{n_1\left(N-n_1\right)}{N^2}}$$

Démonstration du lemme 2.

X peut être considéré comme le nombre d'individus possédant un certain caractère A, dans un échantillon exhaustif de taille n tiré au hasard dans une population de taille N contenant $n_1 = p\,N$ individus possédant le caractère A.
X est la somme de n variables de Bernoulli $X_1, ..., X_n$, correspondant aux tirages exhaustifs (= sans remise) successifs des n individus de l'échantillon dans la population de taille N.

$$X = X_1 + ... + X_n$$

Les variables $X_1, ..., X_n$, ont toutes pour paramètre p, mais elles ne sont pas indépendantes.
La covariance de X_i et X_j est :

$$Cov(X_i, X_j) = E(X_i X_j) - E(X_i)\,E(X_j)$$

$$= P(X_i X_j = 1) - P(X_i = 1)\,P(X_j = 1)$$
$$= P(X_i = 1 \text{ et } X_j = 1) - p^2$$
$$= P(X_j = 1 \mid X_i = 1)\,P(X_i = 1) - p^2$$
$$= P(X_j = 1 \mid X_i = 1)\,p - p^2$$

Or $P(X_j = 1 \mid X_i = 1)$ ne dépend pas des indices i et j puisque toutes les variables $X_1, ..., X_n$, ont pour paramètre p.
Donc $P(X_j = 1 \mid X_i = 1) = P(X_2 = 1 \mid X_1 = 1) = \frac{n_1 - 1}{N-1}$ et il vient :

$$Cov(X_i, X_j) = \frac{n_1 - 1}{N-1}\,p - p^2$$

$$= \frac{n_1 - 1}{N-1}\frac{n_1}{N} - \frac{{n_1}^2}{N^2}$$

$$= \frac{n_1}{N^2(N-1)} [\,(n_1 - 1)\,N - n_1\,]$$
$$= \frac{{n_1}^2}{N^2} - \frac{n_1}{N(N-1)}$$

$$Var\,(X) = Var\,(\sum X_i)$$

$$= \sum Var\,(X_i) + 2 \sum_{i>j} Cov\,(X_i, X_j)$$
$$= n\,p\,(1-p) + 2 \sum_{i>j} \left(\frac{n_1 - 1}{N-1}\,p - p^2 \right)$$

Or il y a $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ façon de choisir le couple (i, j) avec $i > j$, donc :

$$Var\,(X) = n\,p\,(1-p) + n\,(n-1) \left(\frac{n_1 - 1}{N-1}\,p - p^2 \right)$$

$$= n\,p \left((1-p) + (n-1)\,\frac{p\,N - 1}{N-1} - (n-1)\,p \right)$$
$$= \frac{np}{N-1} [(N-1)(1-p) + (n-1)(p\,N - 1) - (n-1)\,p\,(N-1)]$$
$$= \frac{np}{N-1} [(N-1)(1-p) + (n-1)(p\,N - N + N - 1) - (n-1)\,p\,(N-1)]$$
$$= \frac{np}{N-1} [(N-1)((1-p) + (n-1) - (n-1)\,p) - N\,(n-1)(1-p)]$$
$$= \frac{np}{N-1} [(N-1)((1-p) + (n-1)(1-p)) - N\,(n-1)(1-p)]$$
$$= \frac{np(1-p)}{N-1} [\,(N-1)\,n - N\,(n-1)\,]$$
$$= \frac{N-n}{N-1}\,n\,p\,(1-p)$$

a) Espérance de *N*.

$$E\,(N) = E\,(X + Y) = E\,(X) + E\,(Y) = E\,(X) + E\,[\,E_X\,(Y)\,]$$

Or on connaît $E\,(X) = 20\,p$ (loi hypergéométrique) et $E_X\,(Y) = (20 - X)\,\frac{1}{4} = 5 - \frac{1}{4}\,X$, il vient :

$$E\,[\,E_X\,(Y)\,] = 5 - \frac{1}{4}\,E\,(X)$$
$$E\,(N) = E\,(X) + 5 - \frac{1}{4}\,E\,(X) = 5 + \frac{3}{4}\,E\,(X) = 5 + \frac{3}{4} \times 20\,p = 5 + 15\,p = 5\,(1 + 3\,p)$$

$$\boxed{E\,(N) = 5\,(1 + 3\,p)}$$

b) Variance de *N*.

$Var\,(N) = E\,(Var_X\,(N)) + Var\,(E_X\,(N))$

$Var_X\,(N) = Var_{X=k}\,(N) = Var_{X=k}\,(k + Y) = Var_{X=k}\,(Y) = (20 - k)\,\frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{16}\,(20 - X)$ (loi binomiale)

$E\,(Var_X\,(N)) = E\left(\frac{3}{16}\,(20 - X)\right) = \frac{15}{4} - \frac{3}{16}\,E\,(X) = \frac{15}{4} - \frac{3}{16} \times 20\,p = \frac{15}{4} - \frac{15}{4}\,p = \frac{15}{4}\,(1 - p)$

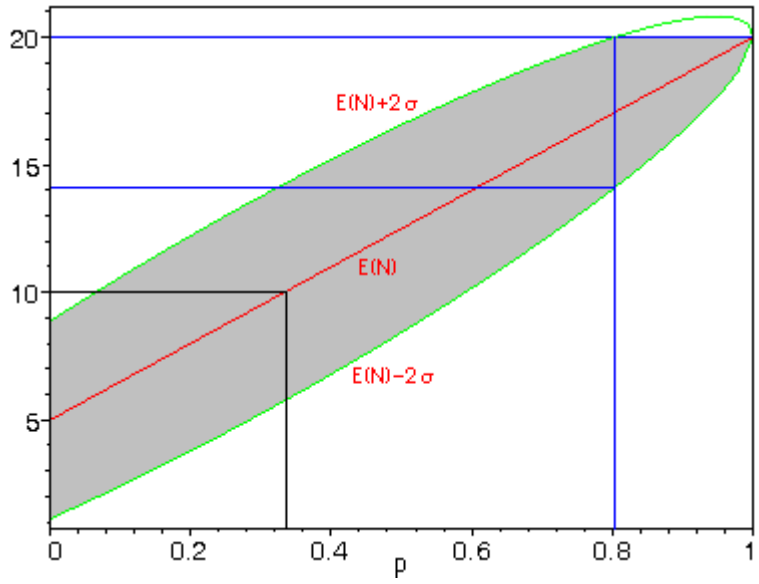
$E_X\,(N) = E_{X=k}\,(N) = E_{X=k}\,(k + Y) = k + E_{X=k}\,(Y) = k + (20 - k)\,\frac{1}{4} = 5 + \frac{3}{4}\,k = 5 + \frac{3}{4}\,X$

$Var\,(E_X\,(N)) = \frac{9}{16}\,Var\,(X) = \frac{9}{16}\,\frac{80}{99}\,20\,p\,(1 - p) = \frac{100}{11}\,p\,(1 - p)$ (loi hypergéométrique)

$Var\,(N) = \frac{15}{4}\,(1 - p) + \frac{100}{11}\,p\,(1 - p) = (1 - p)\left(\frac{15}{4} + \frac{100}{11}\,p\right)$

$$\boxed{Var\,(N) = (1 - p)\left(\frac{15}{4} + \frac{100}{11}\,p\right)}$$

Les formules donnant $E\,(N)$ et $Var\,(N)$ permettent de tracer le diagramme suivant, montrant la variation de N en fonction de p :



Sur ce diagramme, on lit, par exemple, qu'en apprenant 80 % des questions ($p = 0{,}8$), on a 95 % de chances d'avoir plus de 14 sur 20, alors qu'en apprenant rien ($p = 0$) et en répondant au hasard, on a 95 % de chances d'avoir entre1 et 9 sur 20.

Chapitre 8. Loi hypergéométrique.

Enoncés.

Exercice 3. Poissons de couleurs variées.

Dans un bassin, nagent 100 poissons rouges, 200 poissons bleus, 300 poissons jaunes, 400 poissons gris, indépendamment les uns des autres. Un coup d'épuisette ramène, au hasard, un nombre $n < 100$ de poissons de diverses couleurs, chaque poisson ayant la même "chance" d'être pêché. 1°/ Sachant qu'un coup d'épuisette a capturé, au hasard, n poissons, quelle est la probabilité d'avoir obtenu exactement r poissons rouges, b poissons bleus, j poissons jaunes et g poissons gris, avec $r + b + j + g = n$? 2°/ Le coup d'épuisette a ramené 10 poissons. Quelle est la probabilité que ce coup d'épuisette soit constitué de 2 poissons rouges, 2 poissons bleus, 3 poissons jaunes et 3 poissons gris ?	

Solution.

1°/ Loi hypergéométrique.

Le tirage des poissons est un **tirage exhaustif**.
Notons N_r, N_b, N_j, N_g, respectivement, les nombres de poissons rouges, de poissons bleus, de poissons jaunes et de poissons gris présents dans le bassin.
$N_r = 100$, $N_b = 200$, $N_j = 300$, $N_g = 400$.
Le bassin contient, en tout, $N_r + N_b + N_j + N_g = 1\,000$ poissons.

On s'intéresse aux nombres de poissons pêchés de chaque couleur.
Notons Y_r, Y_b, Y_j, Y_g, respectivement, les nombres ramenés de poissons rouges, de poissons bleus, de poissons jaunes et de poissons gris.
On suppose remplie la condition $Y_r + Y_b + Y_j + Y_g = n \leq Min\,(N_r, N_b, N_j, N_g)$
Y_r, Y_b, Y_j, Y_g, prennent leurs valeurs dans l'ensemble des entiers de 0 à n.

Pour un quadruplet (r, b, j, g) d'entiers positifs ou nuls tel que $r + b + j + g = n$, toutes les parties à n éléments de l'ensemble des $N_r + N_b + N_j + N_g$ poissons sont équiprobables.

$$P\,((Y_r, Y_b, Y_j, Y_g) = (r, b, j, g)) = P\,(\{Y_r = r\} \cap \{Y_b = b\} \cap \{Y_j = j\} \cap \{Y_g = g\})$$

Cette probabilité est égale au nombre de parties à $r + b + j + g = n$ éléments contenant r rouges, b bleus, j jaunes, g gris, divisé par le nombre de parties à $r + b + j + g = n$ éléments dans l'ensemble des $N_r + N_b + N_j + N_g$ poissons.

Or il y a $\binom{N_r}{r} \times \binom{N_b}{b} \times \binom{N_j}{j} \times \binom{N_g}{g}$ ensembles de poissons contenant r rouges, b bleus, j jaunes, g gris,

et il y a $\binom{N_r + N_b + N_j + N_g}{r+b+j+g}$ parties à $r + b + j + g = n$ poissons dans l'ensemble des $N_r + N_b + N_j + N_g$ poissons.

On a donc :

$$P(\{Y_r = r\} \cap \{Y_b = b\} \cap \{Y_j = j\} \cap \{Y_g = g\}) = \frac{\binom{N_r}{r}\binom{N_b}{b}\binom{N_j}{j}\binom{N_g}{g}}{\binom{N_r + N_b + N_j + N_g}{r+b+j+g}}$$

C'est une **loi hypergéométrique**, à quatre variables.

Pour $N_r = 100$, $N_b = 200$, $N_j = 300$, $N_g = 400$, et $r + b + j + g = 10$, cette formule s'écrit :

$$P(\{Y_r = r\} \cap \{Y_b = b\} \cap \{Y_j = j\} \cap \{Y_g = g\} \mid r + b + j + g = 10) = \frac{\binom{100}{r}\binom{200}{b}\binom{300}{j}\binom{400}{g}}{\binom{1000}{10}}.$$

2°/ Application numérique.

Pour $r = 2$, $b = 2$, $j = 3$, $g = 3$, la formule précédente donne :

$$P(\{Y_r = 2\} \cap \{Y_b = 2\} \cap \{Y_j = 3\} \cap \{Y_g = 3\}) = \frac{\binom{100}{2}\binom{200}{2}\binom{300}{3}\binom{400}{3}}{\binom{1000}{10}} = 1{,}764 \times 10^{-2}$$

$$P(\{Y_r = 2\} \cap \{Y_b = 2\} \cap \{Y_j = 3\} \cap \{Y_g = 3\}) = 1{,}764 \times 10^{-2}$$

Chapitre 8. Loi hypergéométrique.

Enoncés.

Exercice 4. Boules rouges et boules jaunes dans une urne.

Dans une boîte, il y a 6 boules rouges et 8 boules jaunes. On tire au hasard 3 boules de la boîte, sans remise. Soit X (respectivement Y) le nombre de boules rouges (respectivement jaunes) tirées parmi les 3. 1°/ Expliciter la loi de X. 2°/ Calculer : a) $E\,[X]$. b) $E\,[Y]$. c) $Var\,(Y)$. 3°/ Les variables X et Y sont-elles indépendantes ? Donner une raison précise.	

Solution.

1°/ Loi de X.

On choisit au hasard l'une des $\binom{14}{3}$ combinaisons équiprobables de 3 boules parmi les 14.

Parmi ces $\binom{14}{3}$ combinaisons, il y en a $\binom{6}{k}\binom{8}{3-k}$ comportant k boules rouges choisies parmi les 6, et $3 - k$ boules jaunes choisies parmi les 8, $0 \leq k \leq 3$.
La probabilité que $X = k$, égale à la probabilité que $Y = 3 - k$, est donc donnée par la **loi hypergéométrique** :

$$P\,[X = k] = \frac{\binom{6}{k}\binom{8}{3-k}}{\binom{14}{3}},\ 0 \leq k \leq 3.$$

2°/ Espérances et variance.

a) $E\,[X]$.

$$E\,[X] = \sum_{k=0}^{k=3} k\,P\,(X = k) = \frac{1}{364}(6 \times 28 + 2 \times 15 \times 8 + 3 \times 20) = \frac{468}{364} = \frac{9}{7} \approx 1{,}286.$$

b) $E\,[Y]$.

$$E[Y] = E[3 - X] = 3 - E[X] = \frac{12}{7} \approx 1{,}714.$$

c) *Var* (*Y*).

$$Var(Y) = Var(3 - X) = Var(X) = E[X^2] - (E[X])^2$$
$$E[X^2] = \frac{1}{364}(6 \times 28 + 2^2 \times 15 \times 8 + 3^2 \times 20) = \frac{828}{364} = \frac{207}{91}$$
$$Var(Y) = \frac{207}{91} - \frac{81}{49} = \frac{396}{637} \approx 0{,}622.$$

3°/ Indépendance.

L'événement $\{X = k\}$ est le même que l'événement $\{Y = 3 - k\}$, donc $\{X = k\} \cap \{Y = 3 - k\} = \{X = k\}$ et l'on a :

$$P[\{X = k\} \cap \{Y = 3 - k\}] = P[\{X = k\}] \neq P[\{X = k\}] \times P[\{Y = 3 - k\}] = (P[\{X = k\}])^2$$

La relation $P[\{X = k\} \cap \{Y = 3 - k\}] \neq P[\{X = k\}] \times P[\{Y = 3 - k\}]$ montre que

les variables *X* et *Y* ne sont pas indépendantes.

Exercices

Fonction génératrice.

1. Fonction génératrice.

1.1. Définition.
1.2. Propriété fondamentale.
1.3. Fonction génératrice et probabilités.

2. Moments factoriels et moments.

2.1. Définition.
2.2. Espérance et variance.
2.3. Calcul des moments.

1. Fonction génératrice.

HAUT

1.1. Définition.

Etant donnée une variable aléatoire discrète X, à **valeurs entières** ($X(\Omega) \subset \mathbb{N}$), on appelle **fonction génératrice** de X, l'application $g_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie, lorsqu'elle existe, par :

$$g_X(u) = E(u^X).$$

Par définition de l'**espérance mathématique d'une fonction aléatoire**, on a donc, s'agissant d'une variable aléatoire à valeurs entières :

$$g_X(u) = \sum_{n=0}^{\infty} P(X = n)\, u^n$$

1.2. Propriété fondamentale.

HAUT

La fonction génératrice de la **somme de deux variables aléatoires indépendantes** est le **produit des fonctions génératrices** de chaque variable.

$$g_{X+Y}(u) = E(u^{X+Y}) = E(u^X u^Y) = E(u^X)\, E(u^Y) = g_X(u)\, g_Y(u)$$

Savoir calculer la loi de probabilité à partir de la fonction génératrice.

HAUT

La définition de la fonction génératrice conduit à :

$$g_X(u) = \sum_{n=0}^{\infty} P(X = n)\, u^n$$

donc la probabilité que X égale n est le **coefficient de u^n dans le développement en série entière de $g_X(u)$** au voisinage de 0.

Si on développe $g_X(u)$ en **série de Taylor**, sous la forme :

$$g_X(u) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g_X^{(n)}(0)}{n!}\, u^n$$

comme le développement en série entière est unique, on obtient, par identification :

$$P(X = n) = \frac{g_X^{(n)}(0)}{n!}$$

Remarque.

Si la fonction génératrice de X est un **polynôme**, les valeurs de X sont les puissances de u et la probabilité d'une valeur n est le coefficient de u^n dans le polynôme.

Moment factoriel d'ordre *k*.

HAUT

Pour $k \geq 1$, on appelle **moment factoriel d'ordre *k*** l'espérance mathématique de $X\,(X-1)\,(\ldots)\,(X-(k-1))$:

$$M_k = E\,(X\,(X-1)\,(\ldots)\,(X-(k-1))) = g_X^{(k)}\,(1)$$

Par extension de la définition, on appelle **moment factoriel d'ordre 0** la valeur de la fonction génératrice pour $u = 1$:

$$M_0 = E\,(1) = g_X\,(1) = 1 = \sum_{n=0}^{\infty} P\,(X = n)$$ (condition de normalisation).

Les moments factoriels interviennent dans le développement de la fonction génératrice en **série entière au voisinage de 1** :

$$g_X\,(1+v) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g_X^{(n)}(1)}{n!}\,v^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{M_n}{n!}\,v^n.$$

Espérance mathématique et variance.

HAUT

$$E(X) = M_1 = g'_X(1)$$
$$Var(X) = M_2 + M_1 - M_1^2 = g''_X(1) + g'_X(1) - (g'_X(1))^2$$

Moments.

HAUT

Les moments $m_n = E(X^n)$ peuvent s'exprimer de façon linéaire par rapport aux moments factoriels M_k :

$$\begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ m_4 \\ m_5 \\ m_6 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 7 & 6 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 15 & 25 & 10 & 1 & 0 & \cdots \\ 1 & 31 & 90 & 65 & 15 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \\ M_5 \\ M_6 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Si l'on note $p(n, k)$ l'élément de la n^{e} ligne dans la k^{e} colonne de la matrice, on peut calculer cet élément par récurrence à partir des formules :

$p(n, 1) = 1$,
$p(1, k) = 0$ pour $k > 1$,
$p(n, k) = p(n-1, k-1) + k\, p(n-1, k)$

autrement dit pour calculer un élément, on prend l'élément situé dans la ligne au-dessus dans la même colonne, on le multiplie par le numéro de la colonne, et on y ajoute le premier élément à gauche dans cette ligne du dessus (un peu comme dans le triangle de Pascal, sauf qu'il faut multiplier l'élément au-dessus par le numéro de colonne).

$p(n, k)$ est le **nombre de partitions en *k* classes d'un ensemble à *n* éléments**.

$$m_n = \sum_{k=1}^{k=n} p(n, k)\, M_k = \sum_{k=1}^{k=n} p(n, k)\, g_X^{(k)}(1)$$

HAUT

Chapitre 9. Fonction génératrice.

Exercices

Exercice 1. Fonction génératrice polynomiale.
Exercice 2. Variable de Bernoulli.
Exercice 3. Variable binomiale.
Exercice 4. Variable de Poisson.
Exercice 5. Variable géométrique sur $\mathbb{N}^*$.
Exercice 6. Variable géométrique sur $\mathbb{N}$.
Exercice 7. Trajet en tramway.
Exercice 8. Loi binomiale négative.
Exercice 9. Produit d'une variable de Bernoulli et d'une variable de Poisson.
Exercice 10. Lancers de cinq dés.
Exercice 11. Fonction génératrice en $exp\,(1+u^2)$.
Exercice 12. Jeu de fléchettes.
Exercice 13. Fonction génératrice de $X+1$ et $2X$.
Exercice 14. Fonction génératrice $s/(2-s^2)$.
Exercice 15. Somme de variables de Bernoulli.
Exercice 16. Somme de variables de Poisson.
Exercice 17. Loi conditionnelle binomiale.
Exercice 18. Fonction génératrice conjointe.

Exercice 1. Fonction génératrice polynomiale.

Une variable aléatoire réelle discrète X, à valeurs entières, a pour fonction génératrice :

$$g_X(u) = k(3 + 2u^2)^3$$

1°/ Déterminez la constante k.
2°/ Déterminez la loi de probabilité de la variable aléatoire X ?
3°/ Calculez l'espérance mathématique et la variance de X ?

Solution

HAUT

Exercice 2. Variable de Bernoulli.

Soit X la fonction indicatrice d'un évènement A de probabilité p :
$X = 0$ si A n'est pas réalisé (probabilité $P(\overline{A}) = 1 - p = q$)
$X = 1$ si A est réalisé (probabilité $P(A) = p$).

1°/ Déterminez la fonction génératrice de X.
2°/ Calculez les moments factoriels M_k et les moments m_k de X, $k \geq 0$.
3°/ Calculez l'espérance mathématique et la variance de X.

Solution

HAUT

Exercice 3. Variable binomiale.

On lance cinq dés à six faces équiprobables. Soit X le nombre de 6 obtenus. 1°/ Quelle est la loi de probabilité de X ? 2°/ Quelles est la fonction génératrice de X ? 3°/ Calculez les moments factoriels M_k de X, $k \geq 0$. 4°/ Calculez l'espérance mathématique et la variance de X.	Solution

HAUT

Exercice 4. Variable de Poisson.

Soit X une variable aléatoire de Poisson de paramètre λ.

1°/ Quelle est la fonction génératrice de X ?
2°/ Calculez les moments factoriels M_k de X, $k \geq 0$.
3°/ Calculez l'espérance et la variance de X.

Solution

HAUT

Exercice 5. Variable géométrique sur $\mathbb{N}^*$.

Soit X une variable aléatoire géométrique sur $\mathbb{N}^*$, de paramètre p.

1°/ Quelle est la fonction génératrice de X ?
2°/ Calculez les moments factoriels M_k de X, $k \geq 0$.
3°/ Calculez l'espérance et la variance de X.

Solution

HAUT

Exercice 6. Variable géométrique sur $\mathbb{N}$.

Soit X une variable aléatoire géométrique sur $\mathbb{N}$, de paramètre p.

1°/ Quelle est la fonction génératrice de X ?
2°/ Calculez les moments factoriels M_k de X, $k \geq 0$.
3°/ Calculez l'espérance et la variance de X.

Solution

HAUT

Exercice 7. Trajet en tramway.

1°/ On prend le tramway de la Résidence Einstein à la Part-Dieu.
Le temps A du trajet en période normale suit une loi :

$$P(A = k) = a\, k^2\, \frac{\lambda^k}{k!}$$

avec $\lambda = 20$, $k \in \mathbb{N}$, et pour une constante a convenable.

a) Calculer a et donner la fonction génératrice de A.

b) Calculer l'espérance et la variance de A.

Solution

2°/ Le temps d'attente suit une loi géométrique de moyenne 10 minutes en période normale et une loi géométrique de moyenne 5 minutes en période pointe.
En période de pointe, le temps B du trajet suit la loi :

$$P(B = k) = b\, k^2\, \frac{\mu^k}{k!}$$

avec $\mu = 25$, $k \in \mathbb{N}$, et pour une constante b convenable.
Est-il plus rapide, en moyenne, de voyager en période de pointe ?

HAUT

Exercice 8. Loi binomiale négative.

On lance un dé équilibré à six faces numérotées de 1 à 6.
On appelle succès le fait d'obtenir un 6.
1°/ On note T_n le nombre de lancers qu'il faut pour obtenir un n^e succès.
Déterminer la loi de probabilité de T_n, sa fonction génératrice, son espérance mathématique, sa variance.
2°/ On note Y le nombre d'échecs précédant le n^e succès.
Déterminer la loi de probabilité de Y, sa fonction génératrice, son espérance mathématique, sa variance.

Solution

HAUT

Exercice 9. Produit d'une variable de Bernoulli et d'une variable de Poisson.

Soient $X \in \{0, 1\}$ de loi $P[X = 1] = p$; $P[X = 0] = q = 1 - p$, et $Y \rightsquigarrow Poiss(l)$ indépendantes. On pose $Z = X Y$. 1°/ Trouver la loi de Z. 2°/ Calculer $E(Z)$. 3°/ Calculer $Var(Z)$. 4°/ Calculer la fonction génératrice g_Z.	Solution

HAUT

Exercice 10. Lancers de cinq dés.

On dispose de cinq dés : un bleu, un vert, un jaune, un rouge, un noir. On considère trois façons de jouer.

1°/ On utilise uniquement le dé noir. Soit $N \geq 1$, la variable aléatoire qui représente le nombre de lancers pour que l'on enregistre un six pour la première fois.

a) Expliciter la loi de N.

b) Calculer $P(N \geq n+1)$.

c) Calculer la fonction génératrice $g_N(u)$.

2°/ On jette les dés successivement dans l'ordre indiqué; on commence avec le bleu et on joue jusqu'à ce qu'on obtienne un six, en suite on passe au vert et on joue jusqu'à ce qu'on obtienne un 6, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on obtienne un 6 avec le dernier dé, le noir. On arrête là. Soit $M \geq 1$, la variable aléatoire qui représente le nombre de lancers avant que le jeu se termine. Calculer l'espérance de M.

3°/ On jette les cinq dés ensemble, on écarte ceux qui ont obtenu un 6, et on recommence avec les autres. Le jeu se termine quand il ne reste plus de dés. Soit $K \geq 1$ la variable aléatoire qui représente le nombre de fois que l'on a lancé les dés.

Calculer la probabilité $P[K \leq n]$. (Indication : chaque dé est indépendant des autres).

Calculer l'espérance de K.

Solution

HAUT

Exercice 11. Fonction génératrice en *exp* (1+u^2).

Une variable aléatoire réelle X a pour fonction génératrice

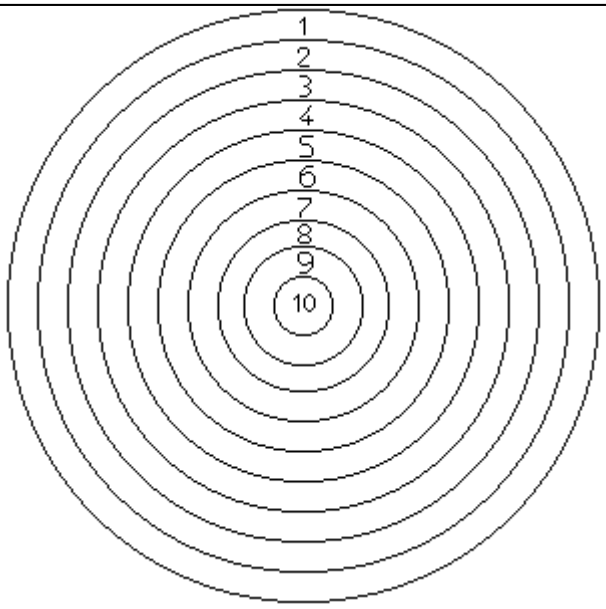
$$g_X(u) = a\, exp\,(1 + u^2),\ a \text{ réel.}$$

1°/ Calculer la valeur de a.
2°/ Quelle est la loi de probabilité de X ?
3°/ Calculer l'espérance mathématique et la variance de X.

Solution

HAUT

Exercice 12. Jeu de fléchettes.



Sur une cible circulaire de rayon 10 divisée en zones annulaires séparées par des cercles concentriques de rayon $n = 1$ à $n = 10$, la zone centrale circulaire de rayon 1 vaut 10 et la zone annulaire située entre les rayons n et $n + 1$ vaut $10 - n$, $1 \leq n \leq 9$.
Au lancer de fléchette, le joueur touche la cible avec une probabilité $p = \frac{4}{5}$.
Lorsqu'il touche la cible, il touche la zone de valeur n avec une probabilité proportionnelle à la surface de la zone.

1°/ Soit X le score obtenu avec une fléchette en un lancer (score = 0 à l'extérieur de la cible). Ecrire la loi de probabilité de X.
2°/ Calculer l'espérance et la variance de X.
3°/ Les lancers successifs de fléchettes sont indépendants.
Une volée de fléchettes comporte de 1 à 3 fléchettes.
Le joueur lance une première volée de trois fléchettes.
Il reprend celles qui ne marquent pas au moins 7 points pour les relancer (2e volée).
Et ainsi de suite, il relance, volée après volée, celles des trois qui ne sont pas dans la zone des 7 points ou plus près du centre, jusqu'à ce qu'elles soient toutes dans cette zone.
Soit Y le nombre de volées nécessaires à ce résultat.
Quelle est la loi de probabilité de Y ?
Quelle est son espérance mathématique (on pourra utiliser la fonction génératrice) ?

Solution

Rappel :

$$\sum_{k=1}^{k=n} k = \frac{n(n+1)}{2} \; ; \; \sum_{k=1}^{k=n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} ; \; \sum_{k=1}^{k=n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

HAUT

Exercice 13. Fonction génératrice de $X + 1$ et $2X$.

Soit G_X la fonction génératrice d'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$. Donner les fonctions génératrices de $X + 1$ et de $2X$.	Solution

HAUT

Exercice 14. Fonction génératrice s / (2 – s ²).

Soit X une variable aléatoire dont la fonction génératrice est :

$G_X = \frac{s}{2-s^2}$, $s \in [\,0\,,\,1\,]$.

Déterminer les lois de X et de $Y = \frac{X}{2}$.

Solution

HAUT

Exercice 15. Somme de variables de Bernoulli.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, et $X_1, \dots, X_n$, n variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, de loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$.
Donner la loi de $S_n = X_1 + \dots + X_n$ en utilisant les fonctions génératrices.

Solution

HAUT

Exercice 16. Somme de variables de Poisson.

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de lois de Poisson de paramètres respectifs λ et μ.
En utilisant les fonctions génératrices, donner la loi de $X + Y$.

Solution

HAUT

Exercice 17. Loi conditionnelle binomiale.

Dans une famille donnée, on appelle X, Y, Z, les variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ représentant respectivement le nombre de filles, le nombre de garçons, le nombre d'enfants, de la famille.
On suppose qu'à chaque naissance dans une famille, il est équiprobable d'avoir une fille ou un garçon, de manière indépendante des autres naissances.

1°/ Démontrer que, si G_X et G_Z sont les fonctions génératrices de X et Z, alors

$$G_X(t) = G_Z\left(\frac{t+1}{2}\right).$$

2°/ Donner la loi de X dans les cas suivants :
— Z suit une loi de Poisson de paramètre λ.
— Z suit une loi géométrique sur $\mathbb{N}$ de paramètre p.

Solution

HAUT

Exercice 18. Fonction génératrice conjointe.

Soient $p \in]0, 1[$ un paramètre, et (X, Y) un couple de variables aléatoires réelles à valeurs entières, de fonction génératrice :

$$G_{(X, Y)}(s, t) = \lambda \frac{t\, ln(1 - p\, s\, t)}{1 - (1 - p)\, t}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Solution

1°/ Déterminer la constante λ.
2°/ Donner l'espérance et la variance de X. Quelle est la loi marginale de X ?
3°/ Montrer que les variables X et $Y - X$ sont indépendantes et donner la loi de $Y - X$.
4°/ En déduire la loi du couple (X, Y).

HAUT

Chapitre 9. Fonction génératrice.

Enoncés.

Exercice 1. Fonction génératrice polynomiale.

Une variable aléatoire réelle discrète X, à valeurs entières, a pour fonction génératrice : $g_X(u) = k(3 + 2u^2)^3$ 1°/ Déterminez la constante k. 2°/ Déterminez la loi de probabilité de la variable aléatoire X ? 3°/ Calculez l'espérance mathématique et la variance de X ?	

Solution.

1°/ Condition de normalisation.

La fonction génératrice est, par définition, l'espérance mathématique de u^X.
Sa valeur pour $u = 1$ est l'espérance de $1^X = 1$: c'est 1.

La condition $g_X(1) = 1$ s'apàpelle la **condition de normalisation**. Elle s'écrit ici :

$$1 = g_X(1) = k(3 + 2)^3 = 125\,k$$

$$\boxed{k = \frac{1}{125} = 8 \times 10^{-3}}$$

2°/ Loi de probabilité de X.

La fonction génératrice

$$g_X(u) = \frac{1}{125}(3 + 2u^2)^3 = \frac{1}{125}(27 + 54u^2 + 36u^4 + 8u^6)$$

jointe à la formule de définition de l'espérance d'une fonction aléatoire :

$$g_X(u) = E(u^X) = \sum_{n=0}^{\infty} P(X = n)\,u^n$$

donne, par identification des coefficients de u^n (le développement en série entière de la fonction $g_X(u)$ au voisinage de $u = 0$ est unique), la loi de probabilité de X :

k	0	2	4	6

$P(X = k)$	$\frac{27}{125}$	$\frac{54}{125}$	$\frac{36}{125}$	$\frac{8}{125}$

3°/ Espérance mathématique et variance de X.

Espérance et variance peuvent se calculer à partir de la fonction génératrice et de ses dérivées en $u = 1$.

a) Espérance mathématique.

$$g'_X(u) = \frac{12}{125} u (3 + 2u^2)^2$$

$$E(X) = g'_X(1) = \frac{12}{125} \times 5^2 = \frac{12}{5} = 2{,}4$$

On aurait pu aussi calculer $E(X)$ directement à partir de la loi de probabilité.

b) Variance.

$$g''_X(u) = \frac{12}{125}(3 + 2u^2)^2 + \frac{96}{125} u^2 (3 + 2u^2)$$

$$Var(X) = g''_X(1) + g'_X(1) - (g'_X(1))^2 = \frac{12}{5} + \frac{96}{25} + \frac{12}{5} - \frac{144}{25} = \frac{60 + 96 + 60 - 144}{25} = \frac{72}{25} = 2{,}88$$

Remarque.

La dérivée d'ordre k de la fonction génératrice pour $u = 1$, s'appelle le ***moment factoriel d'ordre k***, noté M_k.

Les formules donnant l'espérance mathématique et la variance sont :

$$E(X) = M_1$$
$$Var(X) = M_2 + M_1 - (M_1)^2$$

Chapitre 9. Fonction génératrice.

Enoncés.

Exercice 2. Variable de Bernoulli.

Soit X la fonction indicatrice d'un évènement A de probabilité p :
$X = 0$ si A n'est pas réalisé (probabilité $P(\overline{A}) = 1 - p = q$)
$X = 1$ si A est réalisé (probabilité $P(A) = p$).

1°/ Déterminez la fonction génératrice de X.
2°/ Calculez les moments factoriels M_k et les moments m_k de X, $k \geq 0$.
3°/ Calculez l'espérance mathématique et la variance de X.

Solution.

1°/ Fonction génératrice.

La loi de probabilité :

k	0	1
$P(X = k)$	q	p

et la formule donnant la fonction génératrice :

$$g_X(u) = E(u^X)$$

se combinent en :

$$g_X(u) = q \times u^0 + p \times u^1 = q + p\,u$$

$$\boxed{g_X(u) = q + p\,u}$$

2°/ Moments factoriels et moments.

Le moment factoriel $M_k = E(X(X-1)\ldots(X-(k-1)))$ est donné par la valeur de la dérivée d'ordre k pour $u = 1$.

$$M_k = g_X^{(k)}(1)$$

$M_0 = g_X(1) = 1$
$M_1 = g'_X(1) = p$

$M_k = g_X^{(k)}(1) = 0$ pour $k > 1$.

Le moment $m_k = E(X^k)$ s'obtient à partir de la définition de l'espérance mathématique :

$m_0 = E(1) = 1$
$m_k = q \times 0^k + p \times 1^k = p$ pour $k > 0$.

3°/ Espérance et variance.

$E(X) = M_1 = m_1 = p$
$Var(X) = M_2 + M_1 - (M_1)^2 = m_2 - (m_1)^2 = p - p^2 = p(1-p) = p\,q$.

Chapitre 9. Fonction génératrice.

Enoncés.

Exercice 3. Variable binomiale.

On lance cinq dés à six faces équiprobables. Soit X le nombre de 6 obtenus. 1°/ Quelle est la loi de probabilité de X ? 2°/ Quelles est la fonction génératrice de X ? 3°/ Calculez les moments factoriels M_k de X, $k \geq 0$. 4°/ Calculez l'espérance mathématique et la variance de X.	

Solution.

1°/ Loi de probabilité.

Soit X_k le nombre de 6 obtenu par le k^e dé, $k = 1, \ldots, 5$.

X_k prend la valeur 0 avec une probabilité $q = \frac{5}{6}$, et la valeur 1 avec une probabilité $p = \frac{1}{6}$.
X_k est donc une variable de Bernoulli de paramètre p, pour tout $k = 1, \ldots, 5$.
Les variables aléatoires X_k sont indépendantes en probabilité puisque les jets de dés sont supposés physiquement indépendants.
On sait qu'alors la variable aléatoire $X = X_1 + \ldots + X_5$ suit une loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = \frac{1}{6}$.

On aurait pu dire aussi que le nombre X de 6 obtenus avec cinq dés représente le nombre de succès dans une répétition 5 fois de l'épreuve de Bernoulli qui consiste à regarder si un dé a obtenu 6 (succès de probabilité $p = \frac{1}{6}$) ou autre chose (échec, de probabilité $q = \frac{5}{6}$).

$$P(X = k) = \frac{1}{6^5}\binom{5}{k}5^{5-k}$$

2°/ Fonction génératrice.

L'avantage de faire apparaître ici X comme somme de cinq variables aléatoires discrètes indépendantes est que la fonction génératrice de X s'obtient par **produit des fonctions génératrices** des X_k : $E(u^{X_1 + \ldots + X_5}) = E(u^{X_1} \ldots u^{X_5}) = E(u^{X_1}) \ldots E(u^{X_5})$ puisque les variables $X_1, \ldots, X_5$, sont indépendantes ; $p = \frac{1}{6}$, $q = \frac{5}{6}$, $n = 5$:

$$g_X(u) = (q + p\,u)^n = \left(\frac{5+u}{6}\right)^5$$

3°/ Moments factoriels.

$M_0 = g_X(1) = 1$

$M_1 = g'_X(1) = \frac{5}{6^5}(5+1)^4 = \frac{5}{6} = n\,p$

$M_2 = g''_X(1) = \frac{5\times 4}{6^5}(5+1)^3 = \frac{5}{9} = n\,(n-1)\,p^2$

$M_3 = g_X^{(3)}(1) = \frac{5\times 4\times 3}{6^5}(5+1)^2 = \frac{5}{18} = n\,(n-1)\,(n-2)\,p^3$

$M_4 = g_X^{(4)}(1) = \frac{5\times 4\times 3\times 2}{6^5}(5+1) = \frac{5}{54} = n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)\,p^4$

$M_5 = g_X^{(5)}(1) = \frac{5\times 4\times 3\times 2}{6^5} = \frac{5}{324} = n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)\,(n-4)\,p^5 = n\,!\,p^n.$

$M_k = g_X^{(k)}(1) = 0$ pour $k > 5$.

$$M_k = g_X^{(k)}(1) = \begin{cases} \frac{n!}{(n-k)!}\,p^k & \text{pour } 0 \le k \le n = 5 \\ 0 & \text{pour } k > 5 \end{cases}$$

4°/ Espérance et variance.

$E(X) = M_1 = \frac{5}{6} = n\,p.$

$Var(X) = M_2 + M_1 - (M_1)^2 = \frac{5}{9} + \frac{5}{6} - \frac{25}{36} = \frac{20+30-25}{36} = \frac{25}{36} = n\,p\,q$

Chapitre 9. Fonction génératrice.

Enoncés.

Exercice 4. Variable de Poisson.

Soit X une variable aléatoire de Poisson de paramètre λ. 1°/ Quelle est la fonction génératrice de X ? 2°/ Calculez les moments factoriels M_k de X, $k \geq 0$. 3°/ Calculez l'espérance et la variance de X.	

Solution.

1°/ Fonction génératrice.

$$g_X(u) = E(u^X) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} u^k = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda u)^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda u} = e^{\lambda (u-1)}$$

$$\boxed{g_X(u) = e^{\lambda (u-1)}}$$

2°/ Moments factoriels.

$M_0 = g_X(1) = 1$

$M_k = g_X^{(k)}(1) = \lambda^k$, $k \geq 1$.

$$\boxed{M_k = g_X^{(k)}(1) = \lambda^k, k \geq 0}$$

3°/ Espérance et variance.

$E(X) = M_1 = \lambda$.

$Var(X) = M_2 + M_1 - (M_1)^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$.

Chapitre 9. Fonction génératrice.

Enoncés.

Exercice 5. Variable géométrique sur $\mathbb{N}^*$.

Soit X une variable aléatoire géométrique sur $\mathbb{N}^*$, de paramètre p. 1°/ Quelle est la fonction génératrice de X ? 2°/ Calculez les moments factoriels M_k de X, $k \geq 0$. 3°/ Calculez l'espérance et la variance de X.	

Solution.

1°/ Fonction génératrice.

Posons, comme d'habitude, $q = 1 - p$.
La loi de probabilité de X s'écrit :

$$P(X = k) = p\, q^{k-1},\ k \geq 1.$$

et la fonction génératrice de X est :

$$g_X(u) = E(u^X) = \sum_{k=1}^{\infty} p\, q^{k-1} u^k = p\, u \sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1} u^{k-1}.$$

Or la somme de la série géométrique :

$$\sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1} u^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} (q\, u)^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (q\, u)^k$$

est $\frac{1}{1-qu}$, donc la fonction génératrice de X est :

$$\boxed{g_X(u) = \frac{pu}{1-qu}}$$

2°/ Moments factoriels.

$$M_0 = g_X(1) = 1.$$

On peut écrire :

$$g_X(u) = \frac{pu}{1-qu} = \frac{p}{q}\frac{qu-1+1}{1-qu} = \frac{p}{q}\frac{1}{1-qu} - \frac{p}{q}$$

$$g_X^{(k)}(u) = k!\,\frac{p}{q}\,q^k \times \frac{1}{(1-qu)^{k+1}},\ k \geq 1.$$

$$M_k = g_X^{(k)}(1) = k!\,\frac{p}{q}\,q^k \times \frac{1}{p^{k+1}} = k!\,\frac{q^{k-1}}{p^k},\ k \geq 1.$$

$$\boxed{\begin{array}{c} M_0 = 1. \\ M_k = k!\,\frac{q^{k-1}}{p^k},\ k \geq 1. \end{array}}$$

3°/ Espérance et variance.

$E(X) = M_1 = \frac{1}{p}$.

$Var(X) = M_2 + M_1 - (M_1)^2 = 2\,\frac{q}{p^2} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = \frac{q}{p^2}$

Chapitre 9. Fonction génératrice.

Enoncés.

Exercice 6. Variable géométrique sur $\mathbb{N}$.

Soit X une variable aléatoire géométrique sur $\mathbb{N}$, de paramètre p. 1°/ Quelle est la fonction génératrice de X ? 2°/ Calculez les moments factoriels M_k de X, $k \geq 0$. 3°/ Calculez l'espérance et la variance de X.	

Solution.

1°/ Fonction génératrice.

Posons $q = 1 - p$.
La loi de probabilité de X s'écrit :

$$P(X = k) = p\, q^k,\ k \geq 0.$$

et la fonction génératrice de X est :

$$g_X(u) = E(u^X) = \sum_{k=0}^{\infty} p\, q^k\, u^k = p \sum_{k=0}^{\infty} q^k\, u^k = \frac{p}{1-qu}.$$

$$\boxed{g_X(u) = \frac{p}{1-qu}}$$

2°/ Moments factoriels.

$$M_0 = g_X(1) = 1.$$

$$M_k = g_X^{(k)}(1) = k!\, p \times q^k \frac{1}{p^{k+1}} = k! \left(\frac{q}{p}\right)^k,\ k \geq 1.$$

$$\boxed{M_k = k! \left(\frac{q}{p}\right)^k,\ k \geq 0.}$$

3°/ Espérance et variance.

$E(X) = M_1 = \frac{q}{p} = \frac{1}{p} - 1.$

$Var(X) = M_2 + M_1 - (M_1)^2 = 2\frac{q^2}{p^2} + \frac{q}{p} - \frac{q^2}{p^2} = \frac{q^2 + pq}{p^2} = \frac{q}{p^2}.$

Remarque.

Ces résultats sont compatibles avec ceux de l'exercice 5 parce que si X est une variable géométrique de paramètre p sur $\mathbb{N}$, alors $X + 1$ est une variable géométrique de paramètre p sur $\mathbb{N}^*$, et réciproquement.

Chapitre 9. Fonction génératrice.

Enoncés.

Exercice 7. Trajet en tramway.

1°/ On prend le tramway de la Résidence Einstein à la Part-Dieu.
Le temps A du trajet en période normale suit une loi :

$$P(A = k) = a\, k^2\, \frac{\lambda^k}{k!}$$

avec $\lambda = 20$, $k \in \mathbb{N}$, et pour une constante a convenable.
a) Calculer a et donner la fonction génératrice de A.
b) Calculer l'espérance et la variance de A.

2°/ Le temps d'attente suit une loi géométrique de moyenne 10 minutes en période normale et une loi géométrique de moyenne 5 minutes en période pointe.
En période de pointe, le temps B du trajet suit la loi :

$$P(B = k) = b\, k^2\, \frac{\mu^k}{k!}$$

avec $\mu = 25$, $k \in \mathbb{N}$, et pour une constante b convenable.
Est-il plus rapide, en moyenne, de voyager en période de pointe ?

Solution.

1°/ Trajet en période normale.

La fonction génératrice de A est

$$g_A(u) = \sum_{k=0}^{\infty} P(A = k)\, u^k = \sum_{k=0}^{\infty} a\, k^2\, \frac{\lambda^k}{k!}\, u^k = a \sum_{k=0}^{\infty} k^2\, \frac{(\lambda u)^k}{k!}$$

Or on a, pour tout λ réel, $\sum_{k=0}^{\infty} k^2\, \frac{\lambda^k}{k!} = \lambda\,(\lambda + 1)\, e^{\lambda}$,

donc $\sum_{k=0}^{\infty} k^2\, \frac{(\lambda u)^k}{k!} = \lambda\, u\,(\lambda\, u + 1)\, e^{\lambda u}$

$$g_A(u) = a\, \lambda\, u\,(\lambda\, u + 1)\, e^{\lambda u}$$

La condition de normalisation $g_A(1) = 1$ s'écrit alors :

$$a\,\lambda\,(\lambda+1)\,e^{\lambda}=1$$

$$\boxed{a=\frac{e^{-\lambda}}{\lambda(\lambda+1)}}$$

Numériquement, avec $\lambda = 20$:

$$a=\frac{1}{420}\,e^{-20}$$

$$g_A(u)=\frac{\lambda u(\lambda u+1)e^{\lambda u}}{\lambda(\lambda+1)e^{\lambda}}=u\,\frac{\lambda u+1}{\lambda+1}\,e^{\lambda(u-1)}$$

$$\boxed{g_A(u)=u\,\frac{\lambda u+1}{\lambda+1}\,e^{\lambda(u-1)}=\frac{1}{21}\,u\,(20\,u+1)\,e^{20(u-1)}}$$

L'espérance et la variance de A s'en déduisent :

$$g_A(u)=\frac{1}{\lambda+1}\,(\lambda\,u^2+u)\,e^{\lambda(u-1)}$$
$$g'_A(u)=\frac{1}{\lambda+1}\,(2\,\lambda\,u+1+\lambda^2\,u^2+\lambda\,u)\,e^{\lambda(u-1)}$$
$$=\frac{1}{\lambda+1}\,(\lambda^2\,u^2+3\,\lambda\,u+1)\,e^{\lambda(u-1)}$$
$$E(A)=g'_A(1)=\frac{1}{\lambda+1}\,(\lambda^2+3\,\lambda+1)$$
$$E(A)=\lambda+2-\frac{1}{\lambda+1}=22-\frac{1}{21}$$

$$\boxed{E(A)=22-\frac{1}{21}}$$

$$g''_A(u)=\frac{1}{\lambda+1}\,(\lambda^3\,u^2+3\,\lambda^2\,u+\lambda+2\,\lambda^2\,u+3\,\lambda)\,e^{\lambda(u-1)}$$
$$=\frac{1}{\lambda+1}\,(\lambda^2\,u^2+5\,\lambda\,u+4)\,e^{\lambda(u-1)}$$
$$g''_A(1)=\frac{1}{\lambda+1}\,\lambda\,(\lambda^2+5\,\lambda+4)$$
$$=\frac{1}{\lambda+1}\,\lambda\,(\lambda+1)(\lambda+4)$$
$$=\lambda\,(\lambda+4)$$
$$=(\lambda+2)^2-4$$
$$Var(A)=g''_A(1)+g'_A(1)-(g'_A(1))^2$$
$$=(\lambda+2)^2-4+\lambda+2-\frac{1}{\lambda+1}-\left(\lambda+2-\frac{1}{\lambda+1}\right)^2$$
$$=(\lambda+2)^2+\lambda-2-\frac{1}{\lambda+1}-(\lambda+2)^2-\frac{1}{(\lambda+1)^2}+2\,\frac{\lambda+2}{\lambda+1}$$
$$=\lambda+\frac{2}{\lambda+1}-\frac{1}{\lambda+1}-\frac{1}{(\lambda+1)^2}$$
$$=\lambda+\frac{1}{\lambda+1}-\frac{1}{(\lambda+1)^2}$$
$$=20+\frac{1}{21}-\frac{1}{441}$$

$$\boxed{Var\,(A) = 20 + \frac{1}{21} - \frac{1}{441}}$$

2°/ Trajet en période de pointe.

Reprenons les calculs de la première question en changeant *a* en *b* et λ en μ :

$$E\,(B) = \mu + 2 - \frac{1}{\mu+1} = 27 - \frac{1}{26}$$

Le début de la deuxième question de l'énoncé nous apprend, enfin, que l'unité utilisée pour la mesure des temps est la minute (min).
Ajoutons au temps moyen du trajet, le temps moyen d'attente (5 min en période de pointe, 10 min en période normale), nous obtenons le temps total du déplacement, en minutes :

$$\text{Période de pointe : } E\,(B) + 5 = 32 - \frac{1}{26}$$
$$\text{Période normale : } E\,(A) + 10 = 32 - \frac{1}{21}$$

$$\frac{1}{26} < \frac{1}{21} \Rightarrow E\,(A) + 10 = 32 - \frac{1}{21} < E\,(B) + 5 = 32 - \frac{1}{26}$$

En moyenne, le trajet est donc un tout petit peu plus rapide en période normale qu'en période de pointe. Mais la différence n'est que de $\frac{1}{21} - \frac{1}{26} = \frac{5}{546}$, soit moins d'une seconde : c'est négligeable sur un trajet d'un peu plus d'une demi-heure.

En moyenne, le trajet dure pratiquement le même temps en période normale et en période de pointe.

Chapitre 9. Fonction génératrice.

Enoncés.

Exercice 8. Loi binomiale négative.

On lance un dé équilibré à six faces numérotées de 1 à 6. On appelle succès le fait d'obtenir un 6. 1°/ On note T_n le nombre de lancers qu'il faut pour obtenir un n^e succès. Déterminer la loi de probabilité de T_n, sa fonction génératrice, son espérance mathématique, sa variance. 2°/ On note Y le nombre d'échecs précédant le n^e succès. Déterminer la loi de probabilité de Y, sa fonction génératrice, son espérance mathématique, sa variance.	

Solution.

1°/ Loi de Pascal.

Soit T_1, le nombre de lancers qu'il faut pour obtenir un premier succès.

On sait que T_1 suit une loi géométrique sur N*, de paramètre $p = \frac{1}{6}$.

Soit T_2, le nombre de lancers qu'il faut pour obtenir deux succès.

$T_2 - T_1$ suit une loi géométrique sur N*, de paramètre $p = \frac{1}{6}$.

Et ainsi de suite.

$T_n = (T_n - T_{n-1}) + (T_{n-1} - T_{n-2}) \ldots + (T_2 - T_1) + T_1$

est **somme de *n* variables aléatoires géométriques sur N*, indépendantes, de même paramètre $p = \frac{1}{6}$.**

On pose $q = 1 - p = \frac{5}{6}$.

a) Fonction génératrice de T_n.

La fonction génératrice de T_n est le produit des fonctions génératrices des variables géométriques indépendantes dont elle est la somme :

$$g_{T_n}(u) = \left(\frac{pu}{1-qu}\right)^n$$

b) Développement en série entière de la fonction génératrice.

La fonction génératrice de T_n s'écrit aussi :

$$g_{T_n}(u) = p^n u^n \frac{1}{(1-qu)^n}$$

Soit $f(u) = \frac{1}{(1-qu)^n}$.

Sa dérivée est $n\,q\,\frac{1}{(1-qu)^{n+1}}$.

Sa dérivée d'ordre k, $k \geq 0$, s'obtient par récurrence :

$$f^{(k)}(u) = n\,(n+1)\,\ldots\,(n+k-1)\,q^k \frac{1}{(1-qu)^{n+k}}.$$

Pour $u = 0$, cette dérivée d'ordre k vaut

$$f^{(k)}(0) = n\,(n+1)\,\ldots\,(n+k-1)\,q^k.$$

La formule de Taylor donne le développement de $f(u)$ au voisinage de 0 :

$$f(u) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} u^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n(n+1)\cdots(n+k-1)}{1\times 2\times\cdots\times k} (q\,u)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-n(-n-1)\cdots(-n-k+1)}{1\times 2\times\cdots\times k} (-q\,u)^k$$

Si l'on pose

$$\binom{-n}{k} = \frac{-n(-n-1)\cdots(-n-k+1)}{1\times 2\times\cdots\times k} = (-1)^k \binom{n+k-1}{k},$$

par analogie avec le coefficient binomial

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{1\times 2\times\cdots\times k},$$

on obtient la formule :

$$(1-q\,u)^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-n}{k} (-q\,u)^k$$

analogue négatif de la formule du binôme :

$$(1-q\,u)^n = \sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k} (-q\,u)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} (-q\,u)^k \text{ (on a } \binom{n}{k} = 0 \text{ pour } 0 \leq n < k).$$

$$g_{T_n}(u) = p^n u^n \frac{1}{(1-qu)^n}$$
$$= p^n u^n (1-q\,u)^{-n}$$

$$= p^n u^n \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-n}{k} (-q\,u)^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-n}{k} p^n (-q)^k u^{n+k}$$

Posons $h = n + k$:

$$g_{T_n}(u) = \sum_{h=n}^{\infty} \binom{-n}{h-n} p^n (-q)^{h-n} u^h$$

$$\binom{-n}{h-n} = \frac{-n(-n-1)\cdots(-n-(h-n-1))}{1\times 2\times\cdots\times(h-n)} = (-1)^{h-n}\frac{n(n+1)\cdots(h-1)}{1\times 2\times\cdots\times(h-n)} = (-1)^{h-n}\binom{h-1}{h-n} = (-1)^{h-n}\binom{h-1}{n-1}$$

$$g_{T_n}(u) = \sum_{h=n}^{\infty} \binom{h-1}{n-1} p^n q^{h-n} u^h$$

$$= \left(\frac{p}{q}\right)^n \sum_{h=n}^{\infty} \binom{h-1}{n-1} (q\,u)^h$$

$$\boxed{g_{T_n}(u) = \left(\frac{pu}{1-qu}\right)^n = \sum_{h=n}^{\infty} \binom{h-1}{n-1} p^n q^{h-n} u^h}$$

c) Loi de probabilité de T_n.

Le développement en série entière donne la loi de probabilité de la variable T_n :

$$\boxed{P(T_n = h) = \binom{h-1}{n-1} p^n q^{h-n},\ h \geq n.}$$

Cette loi de probabilité peut se trouver directement en remarquant que pour que le h^{e} lancer soit le n^{e} succès, il faut d'abord que h soit au moins égal à n et, de plus :
1°/ qu'il y ait $(n-1)$ succès et $(h-1)-(n-1) = h-n$ échecs au cours des $h-1$ premiers lancers, ce qui peut se faire de $\binom{h-1}{n-1}$ façons avec, chaque fois, une probabilité q pour l'échec et une probabilité p pour le succès : la probabilité de l'événement est donc $\binom{h-1}{n-1} p^{n-1} q^{h-n}$

2°/ que le h^{e} lancer soit un succès, ce qui se fait avec une probabilité p.
La probabilité de l'événement "le h^{e} lancer est le n^{e} succès" est donc :

$$P(T_n = h) = \binom{h-1}{n-1} p^n q^{h-n},\ h \geq n.$$

Cette loi de probabilité s'appelle la **loi de Pascal** (ou parfois, et par erreur, **loi binomiale négative**, voir plus loin).

d) Espérance mathématique et variance.

Comme T_n est somme de n variables aléatoires indépendantes de loi géométrique sur N*, de paramètre p :

— son espérance est $n \times \frac{1}{p} = 6\,n$.
— sa variance est $n \times \frac{q}{p^2} = 30\,n$.

2°/ Nombre d'échecs.

Soit Y le nombre d'échecs précédant le n^{e} succès.
Dire que $Y = k$, c'est dire que T_n est égal à $n + k$.

$$P(Y=k) = P(T_n = n+k) = \binom{n+k-1}{n-1} p^n q^k = \binom{n+k-1}{k} p^n q^k = \binom{-n}{k} p^n (-q)^k$$

$$\boxed{P(Y=k) = \binom{-n}{k} p^n (-q)^k,\ 0 \le k.}$$

C'est cette loi qu'on appelle le plus souvent **loi binomiale négative** dans la littérature.

Sa fonction génératrice est :

$$g_Y(u) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-n}{k} p^n (-q)^k u^k = p^n \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-n}{k} (-q\,u)^k = \left(\frac{p}{1-qu}\right)^n$$

$$\boxed{g_Y(u) = \left(\frac{p}{1-qu}\right)^n}$$

Cette formule montre que Y est **somme de *n* variables aléatoires indépendantes de même loi géométrique sur N, de paramètre *p*** ($p = \frac{1}{6}$).
La différence entre la loi de Pascal et la loi binomiale négative est que :
— une variable qui suit une loi de Pascal est somme de ***n* variables aléatoires géométriques sur N*, indépendantes, de même paramètre *p***.
— une variable qui suit une loi binomiale négative est somme de ***n* variables aléatoires géométriques sur N, indépendantes, de même paramètre *p***.

La moyenne et la variance de Y se déduisent de la propriété précédente :

— $E(Y) = n \times \frac{q}{p} = 5\,n$;
— $Var(Y) = n \times \frac{q}{p^2} = 30\,n$.

Chapitre 9. Fonction génératrice.

Enoncés.

Exercice 9. Produit d'une variable de Bernoulli et d'une variable de Poisson.

Soient $X \in \{0, 1\}$ de loi $P[X = 1] = p$; $P[X = 0] = q = 1 - p$, et $Y \rightsquigarrow Poiss$ (l) indépendantes. On pose $Z = X\,Y$. 1°/ Trouver la loi de Z. 2°/ Calculer $E(Z)$. 3°/ Calculer $Var(Z)$. 4°/ Calculer la fonction génératrice g_Z.	

Solution.

1°/ Loi de probabilité de Z.

Comme X prend les valeurs 0 et 1 et que Y prend toutes les valeurs entières de 0 à l'infini, le produit $Z = X\,Y$ prend toutes les valeurs entières de 0 à l'infini.

a) Pour $n = 0$:

$$P(Z = 0) = P(\{X = 0\} \cup \{X = 1 \text{ et } Y = 0\}).$$

Comme les évènements $\{X = 0\}$ et $\{X = 1$ et $Y = 0\}$ sont incompatibles, la probabilité de leur réunion est la somme de leurs probabilités. La probabilité de l'événement $\{X = 0\}$ est q. Comme les variables X et Y sont indépendantes, la probabilité de l'événement $\{X = 1$ et $Y = 0\}$ est le produit des probabilités des évènements $\{X = 1\}$ et $\{Y = 0\}$: $P(\{X = 1 \text{ et } Y = 0\}) = P(\{X = 1\}) \times P(\{Y = 0\}) = p\,e^{-\lambda}$. Il vient alors :

$$\boxed{P(Z = 0) = q + p\,e^{-\lambda}.}$$

b) Pour n ≥ 1 :

$$P(Z = n) = P(X = 1 \text{ et } Y = n) = P(X = 1) \times P(Y = n) = p\,e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}$$

$$\boxed{P(Z = n) = p\,e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!},\ n \geq 1.}$$

2°/ Espérance de Z.

Comme les variables X et Y sont indépendantes, l'espérance du produit $X\,Y$ est le produit des espérances de X et de Y :

$E(X) = p$; $E(Y) = \lambda$; $E(Z) = E(X\,Y) = E(X)\,E(Y) = p\,\lambda$

$$\boxed{E(Z) = \lambda\, p.}$$

3°/ Fonction génératrice et variance de Z.

$$g_Z(u) = E(u^Z) = E(u^{X\,Y}) = g_X(g_Y(u)) = q + p\,g_Y(u) = q + p\,e^{\lambda(u-1)}$$

$$\boxed{g_Z(u) = q + p\,e^{\lambda(u-1)}}$$

La dérivée première est :

$$g'_Z(u) = \lambda\,p\,e^{\lambda(u-1)}$$

L'espérance de Z est le moment factoriel d'ordre 1 : $E(Z) = M_1 = g'_Z(1) = \lambda\,p$.

$$g''_Z(u) = \lambda^2\,p\,e^{\lambda(u-1)}$$

La variance de Z est donnée en fonction des moments factoriels par :

$$Var(Z) = M_2 + M_1 - M_1^{\,2} = g''_Z(1) + \lambda\,p - \lambda^2\,p^2 = \lambda^2\,p + \lambda\,p - \lambda^2\,p^2 = \lambda\,p\,(1 + \lambda\,q)$$

$$\boxed{Var(Z) = \lambda\,p\,(1 + \lambda\,q)}$$

Chapitre 9. Fonction génératrice.

Enoncés.

Exercice 10. Lancers de cinq dés.

On dispose de cinq dés : un bleu, un vert, un jaune, un rouge, un noir. On considère trois façons de jouer.

1°/ On utilise uniquement le dé noir. Soit $N \geq 1$, la variable aléatoire qui représente le nombre de lancers pour que l'on enregistre un six pour la première fois.

a) Expliciter la loi de N.

b) Calculer $P\,(N \geq n+1)$.

c) Calculer la fonction génératrice $g_N\,(u)$.

2°/ On jette les dés successivement dans l'ordre indiqué; on commence avec le bleu et on joue jusqu'à ce qu'on obtienne un six, en suite on passe au vert et on joue jusqu'à ce qu'on obtienne un 6, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on obtienne un 6 avec le dernier dé, le noir. On arrête là. Soit $M \geq 1$, la variable aléatoire qui représente le nombre de lancers avant que le jeu se termine. Calculer l'espérance de M.

3°/ On jette les cinq dés ensemble, on écarte ceux qui ont obtenu un 6, et on recommence avec les autres. Le jeu se termine quand il ne reste plus de dés. Soit $K \geq 1$ la variable aléatoire qui représente le nombre de fois que l'on a lancé les dés.
Calculer la probabilité $P\,[K \leq n]$. (Indication : chaque dé est indépendant des autres).
Calculer l'espérance de K.

Solution.

1°/ Loi de N.

On suppose les 6 faces du dé équiprobables et les lancers successifs indépendants.
La loi de N est alors une **loi géométrique** sur N* de paramètre $p = \frac{1}{6}$, avec $q = 1 - p = \frac{5}{6}$.

$$P\,(N = n) = p\,q^{n-1} = \frac{5^{n-1}}{6^n}$$

Cette loi permet de calculer :

$$P\,(N \geq n+1) = \sum_{k=n+1}^{\infty} p\,q^{k-1} = \frac{p\,q^n}{1-q} = q^n\,.$$

$$g_N\,(u) = E\,(u^N) = \sum_{k=1}^{\infty} p\,q^{n-1}\,u^n = \frac{pu}{1-qu}.$$

On en déduit l'espérance de N : $E(N) = g'_N(1) = \left[\frac{p}{(1-q\,u)^2}\right]_{u=1} = \frac{1}{p} = 6$.

2°/ Espérance de *M*.

$M = \sum_{k=1}^{k=5} N_k$ est somme de 5 variables géométriques indépendantes de paramètre p = $\frac{1}{6}$.
Son espérance est somme des espérances des 5 variables :

$$E(M) = 5\,E(N) = 30.$$

3°/ Fonction de répartition de *K*.

$K = \sup_{1 \leqslant k \leqslant 5} (N_k)$
$K \leq n \Leftrightarrow N_k \leq n$, pour tout $k = 1, \ldots, 5$.

Comme les dés sont indépendants, la probabilité d'une intersection est le produit des probabilités :

$$P(K \leq n) = P\left(\bigcap_{k=1}^{k=5} \{N_k \leq n\}\right) = \prod_{k=1}^{k=5} P(\{N_k \leq n\}) = (1 - q^n)^5$$

$$P(K \leq n) = (1 - q^n)^5 = \left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n\right)^5$$

4°/ Espérance mathématique de *K*.

De la formule précédente, on déduit la **fonction génératrice** de K :

$$P(K = k) = P(K \leq k) - P(K \leq k-1) = (1 - q^k)^5 - (1 - q^{k-1})^5$$

$$g_K(u) = E(u^K) = \sum_{k=1}^{\infty} P(K = k)\,u^k = \sum_{k=1}^{\infty} [(1 - q^k)^5 - (1 - q^{k-1})^5]\,u^k$$

$$= 5\,\frac{1-q}{q} \sum_{k=1}^{\infty} (q\,u)^k - 10\,\frac{1-q^2}{q^2} \sum_{k=1}^{\infty} (q^2\,u)^k + 10\,\frac{1-q^3}{q^3} \sum_{k=1}^{\infty} (q^3\,u)^k - 5\,\frac{1-q^4}{q^4} \sum_{k=1}^{\infty} (q^4\,u)^k + \frac{1-q^5}{q^5} \sum_{k=1}^{\infty} (q^5\,u)^k$$

$$= u\left[\,5\,\frac{1-q}{1-qu} - 10\,\frac{1-q^2}{1-q^2u} + 10\,\frac{1-q^3}{1-q^3u} - 5\,\frac{1-q^4}{1-q^4u} + \frac{1-q^5}{1-q^5u}\,\right]$$

La fonction génératrice est de la forme $g_K(u) = u\,f(u)$, avec :

$$f(u) = 5\,\frac{1-q}{1-qu} - 10\,\frac{1-q^2}{1-q^2u} + 10\,\frac{1-q^3}{1-q^3u} - 5\,\frac{1-q^4}{1-q^4u} + \frac{1-q^5}{1-q^5u}$$

On remarquera que, conformément à la condition de normalisation, on a :

$$g_K(1) = f(1) = 1$$

La dérivée de la fonction génératrice est :

$$g'_K(u) = f(u) + u\,f'(u)$$

$$f'(u) = 5\,\frac{q}{1-q}\left(\frac{1-q}{1-qu}\right)^2 - 10\,\frac{q^2}{1-q^2}\left(\frac{1-q^2}{1-q^2u}\right)^2 + 10\,\frac{q^3}{1-q^3}\left(\frac{1-q^3}{1-q^3u}\right)^2 - 5\,\frac{q^4}{1-q^4}\left(\frac{1-q^4}{1-q^4u}\right)^2 + \frac{q^5}{1-q^5}\left(\frac{1-q^5}{1-q^5u}\right)^2$$

L'espérance mathématique de K est la valeur de la dérivée de $g_K(u)$ pour $u = 1$:

$$E(K) = g'_K(1) = f(1) + f'(1)$$

Or $f(1) = 1$ et $f'(1) = 5\,\frac{q}{1-q} - 10\,\frac{q^2}{1-q^2} + 10\,\frac{q^3}{1-q^3} - 5\,\frac{q^4}{1-q^4} + \frac{q^5}{1-q^5}$,

donc, après simplification, il reste :

$$\boxed{E(K) = \frac{5}{1-q} - \frac{10}{1-q^2} + \frac{10}{1-q^3} - \frac{5}{1-q^4} + \frac{1}{1-q^5}}$$

Numériquement, avec $q = \frac{5}{6}$, on trouve, à peu de chose près, $E(K) = 13{,}02$.

Autrement dit, il faut en moyenne 13 lancers pour obtenir 5 six.

Chapitre 9. Fonction génératrice.

Enoncés.

Exercice 11. Fonction génératrice en *exp* $(1+u^2)$.

Une variable aléatoire réelle X a pour fonction génératrice $$g_X(u) = a\ exp\ (1 + u^2),\ a \text{ réel.}$$ 1°/ Calculer la valeur de a. 2°/ Quelle est la loi de probabilité de X ? 3°/ Calculer l'espérance mathématique et la variance de X.	

Solution.

1°/ Valeur de *a*.

La valeur de a est fournie par la "condition de normalisation" $g_X(1) = 1$, équivalente à la condition "La somme des probabilités est égale à 1". Ici, cette condition s'écrit :

$$a\ exp\ (2) = 1,$$

$$\boxed{a = exp\ (-2)}$$

2°/ Loi de *X*.

$$g_X(u) = exp\ (u^2 - 1) = exp\ (-1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^{2n}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} P\ (X = n)\ u^n.$$

Comme le développement en série entière d'une fonction est unique, on en déduit, par identification :

$$\boxed{P\ (X = 2\ n) = \frac{e^{-1}}{n!} \text{ et } P\ (X = 2\ n + 1) = 0, \text{ pour tout entier } n \geq 0.}$$

3°/ Espérance et variance de *X*.

$g'_X(u) = 2\ u\ g_X(u)$;
$g''_X(u) = 2\ u\ g'_X(u) + 2\ g_X(u)$;
$g_X(1) = 1,\ g'_X(1) = 2$; $g''_X(1) = 6$.

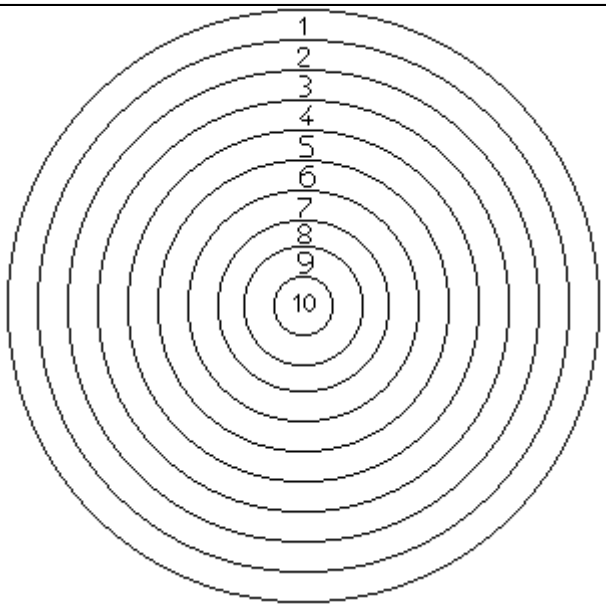
$$\boxed{E\ (X) = g'_X(1) = 2}$$

$$\boxed{Var\ (X) = g''_X(1) + g'_X(1) - (g'_X(1))^2 = 4.}$$

Chapitre 9. Fonction génératrice.

Enoncés.

Exercice 12. Jeu de fléchettes.



Sur une cible circulaire de rayon 10 divisée en zones annulaires séparées par des cercles concentriques de rayon $n = 1$ à $n = 10$, la zone centrale circulaire de rayon 1 vaut 10 et la zone annulaire située entre les rayons n et $n + 1$ vaut $10 - n$, $1 \leq n \leq 9$.
Au lancer de fléchette, le joueur touche la cible avec une probabilité $p = \frac{4}{5}$.
Lorsqu'il touche la cible, il touche la zone de valeur n avec une probabilité proportionnelle à la surface de la zone.

1°/ Soit X le score obtenu avec une fléchette en un lancer (score = 0 à l'extérieur de la cible). Ecrire la loi de probabilité de X.
2°/ Calculer l'espérance et la variance de X.
3°/ Les lancers successifs de fléchettes sont indépendants.
Une volée de fléchettes comporte de 1 à 3 fléchettes.
Le joueur lance une première volée de trois fléchettes.
Il reprend celles qui ne marquent pas au moins 7 points pour les relancer (2^e volée).
Et ainsi de suite, il relance, volée après volée, celles des trois qui ne sont pas dans la zone des 7 points ou plus près du centre, jusqu'à ce qu'elles soient toutes dans cette zone.
Soit Y le nombre de volées nécessaires à ce résultat.
Quelle est la loi de probabilité de Y ?
Quelle est son espérance mathématique (on pourra utiliser la fonction génératrice) ?

Rappel :

$$\sum_{k=1}^{k=n} k = \frac{n(n+1)}{2} \; ; \; \sum_{k=1}^{k=n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} ; \; \sum_{k=1}^{k=n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

Solution.

1°/ Loi de X.

La surface de la cible de rayon 10 est $100\,\pi$.

La zone annulaire S_{10-n} de valeur $10 - n$, comprise entre les cercles de rayon n et $n + 1$ a une surface

$$\pi (n + 1)^2 - \pi n^2 = (2 n + 1) \pi, n \in \{0, \dots , 9\}.$$

Lorsque le lanceur atteint la cible (probabilité $p = \frac{4}{5}$), la probabilité qu'il atteigne la zone S_{10-n} est $\frac{(2n+1)\pi}{100\pi} = \frac{2n+1}{100}$, $n \in \{0, \dots , 9\}$.
Dans la zone S_{10-n}, X vaut $10 - n$.

En posant $k = 10 - n$, la loi de probabilité de X s'en déduit :

$$P [X = k] = P (X = k| \textit{Cible touchée}) \times P (\textit{Cible touchée}) = \frac{4}{5} \times \frac{2(10-k)+1}{100}$$

$$P [X = k] = \begin{cases} \frac{1}{5} & \text{pour } k = 0 \\ \frac{21-2k}{125} & \text{pour } k \in \{1,\dots,10\} \end{cases}$$

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P [X = k]$	$\frac{25}{125}$	$\frac{19}{125}$	$\frac{17}{125}$	$\frac{15}{125}$	$\frac{13}{125}$	$\frac{11}{125}$	$\frac{9}{125}$	$\frac{7}{125}$	$\frac{5}{125}$	$\frac{3}{125}$	$\frac{1}{125}$

2°/ Espérance et variance de *X*.

$$E(X) = \sum_{k=1}^{k=10} k \times \frac{21-2k}{125} = \frac{21}{125} \times \frac{10 \times 11}{2} - \frac{2}{125} \times \frac{10 \times 11 \times 21}{6} = \frac{231}{25} - \frac{154}{25} = \frac{77}{25} = 3 + \frac{2}{25}$$

$$Var (X) = \sum_{k=1}^{k=10} k^2 \times \frac{21-2k}{125} - \left(\frac{77}{25}\right)^2 = \frac{407}{25} - \left(\frac{77}{25}\right)^2 = \frac{4\,246}{625}.$$

Espérance et variance peuvent se calculer à partir de la **fonction génératrice** $g_X (u)$ de X.
Calculons, par exemple, l'espérance.
$P [X = 0] = \frac{25}{125} = \frac{4}{125} + \frac{21}{125}$

$$g_X (u) = \frac{4}{125} + \frac{1}{125} \sum_{k=0}^{k=10} (21 - 2 k) u^k = \frac{4}{125} + \frac{21}{125} \frac{1-u^{11}}{1-u} - \frac{2}{125} u \frac{d}{du}\left(\frac{1-u^{11}}{1-u} \right)$$

$$g_X (u) = \frac{4}{125} + \frac{21}{125} \frac{1-u^{11}}{1-u} - \frac{2}{125} u \frac{-11u^{10}(1-u)+1-u^{11}}{(1-u)^2}$$

$$g_X (u) = \frac{4}{125} + \frac{21}{125} \frac{1-u^{11}}{1-u} - \frac{2}{125} u \frac{1-11u^{10}+10u^{11}}{(1-u)^2}$$

$$\boxed{g_X (u) = \frac{4}{125} + \frac{21}{125} \frac{1-u^{11}}{1-u} - \frac{2}{125} \frac{u-11u^{11}+10u^{12}}{(1-u)^2}}$$

$$E(X) = g'_X(1) = \left[\frac{21}{125}\frac{1-11u^{10}+10u^{11}}{(1-u)^2} - \frac{2}{125}\frac{1-121u^{10}+120u^{11}}{(1-u)^2} - \frac{4}{125}\frac{u-11u^{11}+10u^{12}}{(1-u)^3} \right]_{u=1}$$

La valeur pour $u = 1$ est la limite lorsque u tend vers 1.

$21 (1 – 11 u^{10} + 10 u^{11}) – 2 (1 – 121 u^{10} + 120 u^{11}) = 19 + 11 u^{10} – 30 u^{11}$

$19 + 11 u^{10} – 30 u^{11} = 19 + 11 (1 + (u – 1))^{10} – 30 (1 + (u – 1))^{11}$

$= 19 + 11 [1 + 10 (u – 1) + \frac{10 \times 9}{2}(u – 1)^2 + 0 ((u – 1)^3))] – 30 [1 + 11 (u – 1) + \frac{11 \times 10}{2} (u – 1)^2 + 0 ((u – 1)^3)]$

$= (19 + 11 – 30) + (110 – 330) (u – 1) + \frac{11 \times 10}{2}(9 – 30) (u – 1)^2 + 0 ((u – 1)^3)$

$= – 220 (u – 1) – 1\,155 (u – 1)^2 + 0 ((u – 1)^3)$

$(1 – u) [21 (1 – 11 u^{10} + 10 u^{11}) – 2 (1 – 121 u^{10} + 120 u^{11})] = 220 (u – 1)^2 + 1\,155 (u – 1)^3 + 0 ((u – 1)^4))$

$u – 11 u^{11} + 10 u^{12} = 1 + (u – 1) – 11 (1 + (u – 1))^{11} + 10 (1 + (u – 1))^{12}$

$= 1 + (u – 1) – 11 [1 + 11 (u – 1) + \frac{11 \times 10}{2} (u – 1)^2 + \frac{11 \times 10 \times 9}{6} (u – 1)^3 + 0 ((u – 1)^4))] + 10 [1 + 12 (u – 1) + \frac{12 \times 11}{2} (u – 1)^2 + \frac{12 \times 11 \times 10}{6}(u – 1)^3 + 0 ((u – 1)^4)]$

$= (1 – 11 + 10) + (1 – 11^2 + 10 \times 12) (u – 1) + \left(– 11 \times \frac{11 \times 10}{2} + 10 \times \frac{12 \times 11}{2} \right)(u – 1)^2 + \left(– 11 \times \frac{11 \times 10 \times 9}{6} + 10 \times \frac{12 \times 11 \times 10}{6} \right)(u – 1)^3 + 0 ((u – 1)^4)$

$= \frac{11 \times 10}{2}(u – 1)^2 + \frac{11 \times 10}{2} (– 33 + 40) \times (u – 1)^3 + 0 ((u – 1)^4)$

$= 55 (u – 1)^2 – 385 (u – 1)^3 + 0 ((u – 1)^4)$

$(1 – u) [21 (1 – 11 u^{10} + 10 u^{11}) – 2 (1 – 121 u^{10} + 120 u^{11})] – 4 [u – 11 u^{11} + 10 u^{12}] = 220 (u – 1)^2 + 1\,155 (u – 1)^3 – 4 \times 55 (u – 1)^2 + 4 \times 385 (u – 1)^3 + 0 ((u – 1)^4)$

$= (1\,155 – 1\,540) (u – 1)^3 + 0 ((u – 1)^4)$

$= 385 (1 – u)^3 + 0 ((u – 1)^4)$

$$\frac{21}{125}\frac{1-11u^{10}+10u^{11}}{(1-u)^2} - \frac{2}{125}\frac{1-121u^{10}+120u^{11}}{(1-u)^2} - \frac{4}{125}\frac{u-11u^{11}+10u^{12}}{(1-u)^3} = \frac{385}{125} + 0(u-1) = \frac{77}{25} + 0(u-1)$$

Nous obtenons donc :

$$E(X) = g'_X(1) = \lim_{u \to 1}\left[\frac{21}{125}\frac{1-11u^{10}+10u^{11}}{(1-u)^2} - \frac{2}{125}\frac{1-121u^{10}+120u^{11}}{(1-u)^2} - \frac{4}{125}\frac{u-11u^{11}+10u^{12}}{(1-u)^3} \right] = \frac{77}{25}$$

3°/ Lancers de trois fléchettes.

Pour une fléchette, le nombre Y_1 de lancers nécessaires pour atteindre la zone à 7 point ou au-dessus, suit une **loi géométrique** de paramètre

$$p = P(X \geq 7) = P(X = 7) + P(X = 8) + P(X = 9) + P(X = 10) = \frac{7}{125} + \frac{5}{125} + \frac{3}{125} + \frac{1}{125} = \frac{16}{125}.$$

Posons $q = 1 - p = \frac{109}{125}$.

La probabilité que Y_1 soit strictement plus grand que k est :

$$P(Y_1 > k) = \sum_{n=k+1}^{\infty} P(Y_1 = n) = \sum_{n=k+1}^{\infty} p\, q^{n-1} = p\, q^k \sum_{h=0}^{\infty} q^h = \frac{p\, q^k}{1-q} = q^k$$

Dire qu'il faut k volées pour lancer les trois fléchettes dans la zone désirée, c'est dire que le maximum de lancers pour une fléchette aura été de k.
Si l'on note Y_1, Y_2, Y_3, le nombre de lancers nécessaires pour chacune des trois fléchettes et Y le nombre de volées nécessaires, on a :

$$Y = Sup\,(Y_1, Y_2, Y_3)$$
$$\{Y \le k\} = \{Y_1 \le k\} \cap \{Y_2 \le k\} \cap \{Y_3 \le k\}$$

Comme les lancers de fléchettes sont indépendants, les variables Y_1, Y_2, Y_3 sont indépendantes.
La probabilité de l'intersection est le produit des probabilités :

$$P[Y \le k] = (P[Y_1 \le k])^3 = (1 - P[Y_1 > k])^3 = (1 - q^k)^3$$
$$P[Y = k] = P[Y \le k] - P[Y \le k-1] = (1 - q^k)^3 - (1 - q^{k-1})^3$$

$$\boxed{P[Y = k] = (1 - q^k)^3 - (1 - q^{k-1})^3 \text{ avec } q = \frac{109}{125}.}$$

$$P[Y = k] = [(1 - q^k) - (1 - q^{k-1})][(1 - q^k)^2 + (1 - q^k)(1 - q^{k-1}) + (1 - q^{k-1})^2]$$
$$P[Y = k] = q^{k-1}(1 - q)[1 - 2q^k + q^{2k} + 1 - q^k - q^{k-1} + q^{2k-1} + 1 - 2q^{k-1} + q^{2k-2}]$$
$$P[Y = k] = p\, q^{k-1}[3 - 3q^{k-1} - 3q^k + q^{2k} + q^{2k-1} + q^{2k-2}]$$

Pour calculer l'espérance mathématique de Y, partons de la **fonction génératrice** de Y.

La fonction génératrice de Y est $g_Y(u) = \sum_{k=1}^{\infty} P[Y = k]\, u^k$.

$$g_Y(u) = p \sum_{k=1}^{\infty} (3q^{k-1} - 3q^{2k-2} - 3q^{2k-1} + q^{3k-1} + q^{3k-2} + q^{3k-3})\, u^k$$
$$g_Y(u) = p\left(3\frac{u}{1-qu} - 3\frac{u}{1-q^2u} - 3\frac{qu}{1-q^2u} + q^2\frac{u}{1-q^3u} + q\frac{u}{1-q^3u} + \frac{u}{1-q^3u}\right)$$
$$g_Y(u) = p\,u\left(3\frac{1}{1-qu} - 3\frac{1+q}{1-q^2u} + \frac{1+q+q^2}{1-q^3u}\right)$$
$$g_Y(u) = u\left(3\frac{1-q}{1-qu} - 3\frac{1-q^2}{1-q^2u} + \frac{1-q^3}{1-q^3u}\right)$$

L'espérance mathématique est donnée par $E(Y) = g'_Y(1)$:

$$E(Y) = g'_Y(1) = 1 + 3\frac{q}{1-q} - 3\frac{q^2}{1-q^2} + \frac{q^3}{1-q^3} = \frac{712\,753\,625}{51\,331\,488} \approx 13{,}8853.. \approx 14.$$

Dans les conditions de l'énoncé, il faut donc en moyenne environ 14 volées de fléchettes pour les envoyer toutes les trois dans le 7, ou plus, de la cible.

Chapitre 9. Fonction génératrice.

Enoncés.

Exercice 13. Fonction génératrice de $X + 1$ et $2\,X$.

Soit G_X la fonction génératrice d'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$. Donner les fonctions génératrices de $X + 1$ et de $2\,X$.	

Solution.

1°/ Fonction génératrice de $X + 1$.

$$G_{X+1}(u) = E\left(u^{X+1}\right) = u\,E\left(u^{X}\right) = u\,G_X(u)$$

$$\boxed{G_{X+1}(u) = u\,G_X(u)}$$

2°/ Fonction génératrice de $2\,X$.

$$G_{2X}(u) = E\left(u^{2X}\right) = G_X\left(u^{2}\right)$$

$$\boxed{G_{2X}(u) = G_X\left(u^{2}\right)}$$

Chapitre 9. Fonction génératrice.

Enoncés.

Exercice 14. Fonction génératrice s / (2 – s^2).

Soit X une variable aléatoire dont la fonction génératrice est : $G_X(s) = \frac{s}{2-s^2}$, $s \in [\,0\,,\,1\,]$. Déterminer les lois de X et de $Y = \frac{X}{2}$.	

Solution.

1°/ Loi de probabilité de X.

$$G_X(s) = \frac{s}{2}\frac{1}{1-\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{s}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)^{2k} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)^{2k+1}$$

En identifiant ce développement avec le développement :

$$G_X(s) = \sum_{n=0}^{\infty} P\,[\,X = n\,]\,s^n$$

on voit que l'on a :

$$\begin{cases} P[X = 2k] = 0 \\ P[X = 2k+1] = \frac{1}{2^{k+1}} \end{cases}$$

La variable X ne prend que des valeurs entières impaires.

2°/ Loi de probabilité de Y.

La loi de probabilité de Y se déduit directement de celle de X, puisque $Y = k + \frac{1}{2}$ équivaut à $X = 2\,k + 1$.

$$P\,[\,Y = k + \tfrac{1}{2}\,] = \frac{1}{2^{k+1}},\ k \in \mathbb{N}.$$

Y prend toutes les valeurs demi-entières.

Chapitre 9. Fonction génératrice.

Enoncés.

Exercice 15. Somme de variables de Bernoulli.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, et $X_1, \ldots, X_n$, n variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, de loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$. Donner la loi de $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ en utilisant les fonctions génératrices.	

Solution.

1°/ Fonction génératrice d'une variable de Bernoulli.

$$G_{S_n}(u) = E(u^{X_1}) = (1-p) \times u^0 + p\, u^1 = q + p\, u$$

avec $q = 1 - p$.

2°/ Variable binomiale.

La fonction génératrice d'une somme finie de variables aléatoires indépendantes est le produit de leurs fonctions génératrices :

$$G_{S_n}(u) = G_{X_1 + \ldots + X_n}(u) = G_{X_1}(u) \ldots G_{X_n}(u)$$

Comme les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$, suivent toutes la même loi de Bernoulli, elles ont toutes la même fonction génératrice $q + p\, u$.
La fonction génératrice de S_n est donc :

$$G_{S_n}(u) = (q + p\, u)^n$$

On reconnaît, là, la fonction génératrice d'une **variable binomiale** de paramètres n et p.
On peut retrouver directement ce résultat en développant cette fonction génératrice par la formule du binôme.

$$G_{S_n}(u) = \sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k} (p\, u)^k\, q^{n-k} = \sum_{k=0}^{k=n} \left(\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \right) u^k$$

Or la fonction génératrice de S_n est, par définition, l'espérance de u^{S_n}.
Elle a, pour expression :

$$G_{S_n}(u) = \sum_{k=0}^{\infty} P(S_n = k)\, u^k.$$

Comme le développement en série entière d'une fonction est unique, la comparaison terme à terme avec le développement précédent montre que :

— S_n ne prend que des valeurs k entières de 0 à n.

— La probabilité que S_n soit égal à k, $0 \leq k \leq n$, est donnée par :

$$P(S_n = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Autrement dit, S_n suit une **loi binomiale de paramètres *n* et *p***.

La somme de n variables de Bernoulli indépendantes de même paramètre p est une variable binomiale de paramètres n et p.

Chapitre 9. Fonction génératrice.

Enoncés.

Exercice 16. Somme de variables de Poisson.

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de lois de Poisson de paramètres respectifs λ et μ. En utilisant les fonctions génératrices, donner la loi de $X + Y$.	

Solution.

1°/ Fonction génératrice de $X + Y$.

La fonction génératrice de X est $G_X(u) = e^{\lambda(u-1)}$.

La fonction génératrice de Y est $G_Y(u) = e^{\mu(u-1)}$.

La fonction génératrice d'une somme finie de variables aléatoires indépendantes est le produit de leurs fonctions génératrices.
X et Y sont des variables aléatoires indépendantes.
La fonction génératrice de $X + Y$ est le produit des fonctions génératrices de X et de Y :

$$G_{X+Y}(u) = G_X(u)\, G_Y(u) = e^{\lambda(u-1)}\, e^{\mu(u-1)} = e^{(\lambda+\mu)(u-1)}.$$

$$\boxed{G_{X+Y}(u) = e^{(\lambda+\mu)(u-1)}.}$$

2°/ Loi de probabilité de $X + Y$.

On reconnaît dans la fonction génératrice de $X + Y$, la fonction génératrice d'une variable de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$.
On peut retrouver directement ce résultat en développant la fonction génératrice en série entière.

Le développement en série entière de la fonction génératrice de $X + Y$ s'obtient à partir du développement en série entière de l'exponentielle :

$$G_{X+Y}(u) = e^{-(\lambda+\mu)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left((\lambda+\mu)u\right)^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-(\lambda+\mu)} \frac{(\lambda+\mu)^n}{n!} u^n$$

La comparaison terme à terme de ce développement avec la définition de la fonction génératrice de $X + Y$:

$$G_{X+Y}(u) = E\left(u^{X+Y}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X+Y=n)\, u^n$$

donne la loi de probabilité de $X + Y$:

$$P(X + Y = n) = e^{-(\lambda + \mu)} \frac{(\lambda + \mu)^n}{n!}$$

C'est une **loi de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$**.

Chapitre 9. Fonction génératrice.

Enoncés.

Exercice 17. Loi conditionnelle binomiale.

Dans une famille donnée, on appelle X, Y, Z, les variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ représentant respectivement le nombre de filles, le nombre de garçons, le nombre d'enfants, de la famille.
On suppose qu'à chaque naissance dans une famille, il est équiprobable d'avoir une fille ou un garçon, de manière indépendante des autres naissances.

1°/ Démontrer que, si G_X et G_Z sont les fonctions génératrices de X et Z, alors

$$G_X(t) = G_Z\left(\frac{t+1}{2}\right).$$

2°/ Donner la loi de X dans les cas suivants :
— Z suit une loi de Poisson de paramètre λ.
— Z suit une loi géométrique sur $\mathbb{N}$ de paramètre p.

Solution.

1°/ Fonction génératrice de X.

a) Loi conditionnelle de X connaissant Z.

Soit n un entier.
Considérons une famille de n enfants ($Z = n$).
Pour le k^e enfant, on note X_k la variable aléatoire qui prend la valeur 1 si l'enfant est une fille et la valeur 0 si l'enfant est un garçon.
Pour tout k entier, de 1 à n, X_k est une variable de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$.
Les n variables aléatoires X_k sont indépendantes.
Lorsque la famille comporte n enfants, la somme $X = X_1 + ... + X_n$ est le nombre de filles de la famille.
L'Exercice 15 montre que X suit une loi binomiale de paramètres n et $\frac{1}{2}$.
Sa fonction génératrice est :

$$G_{X\,|\,Z=n}(u) = E_{Z=n}(u^X) = \left(\frac{1+u}{2}\right)^n$$

$$\boxed{G_{X\,|\,Z=n}(u) = \left(\frac{1+u}{2}\right)^n}$$

b) Loi marginale de *X*.

Le théorème de l'espérance conditionnelle donne :

$$G_X(u) = E(u^X) = E(E_Z(u^X)) = \sum_{n=0}^{\infty} E_{Z=n}(u^X)\, P(Z=n)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} G_{X \mid Z=n}(u)\, P(Z=n) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1+u}{2}\right)^n P(Z=n) = G_Z\left(\frac{1+u}{2}\right)$$

$$\boxed{G_X(u) = G_Z\left(\frac{1+u}{2}\right)}$$

2°/ Loi de *X*.

a) *Z* suit une loi de Poisson de paramètre λ.

$$G_Z(u) = e^{\lambda(u-1)}$$

$$G_X(u) = G_Z\left(\frac{1+u}{2}\right) = e^{\lambda\left(\frac{1+u}{2}-1\right)} = e^{\frac{\lambda}{2}(u-1)}.$$

C'est la fonction génératrice d'une variable de Poisson de paramètre $\frac{\lambda}{2}$.

$$\boxed{X \text{ suit une } \textbf{loi de Poisson} \text{ de paramètre } \frac{\lambda}{2}.}$$

b) *Z* suit une loi géométrique sur ℕ de paramètre *p*.

Dire que *Z* suit une loi géométrique sur ℕ de paramètre *p*, c'est dire, par définition, que *Z* + 1 suit une loi géométrique sur ℕ * de paramètre *p*.
La fonction génératrice de *Z* + 1 est donc :

$$G_{Z+1}(u) = \frac{pu}{1-qu}$$

avec $q = 1 - p$.

Or $G_{Z+1}(u) = E(u^{Z+1}) = u\,E(u^Z) = u\,G_Z(u)$, donc :

$$\boxed{G_Z(u) = \frac{p}{1-qu} = \frac{p}{1-(1-p)u}}$$

$$G_X(u) = G_Z\left(\frac{1+u}{2}\right) = \frac{p}{1-q\left(\frac{1+u}{2}\right)} = \frac{2p}{1+p-qu} = \frac{\frac{2p}{1+p}}{1-\left(1-\frac{2p}{1+p}\right)u}$$

Donc :

X suit une **loi géométrique** sur $\mathbb{N}$ de paramètre $\frac{2p}{1+p}$

Chapitre 9. Fonction génératrice.

Enoncés.

Exercice 18. Fonction génératrice conjointe.

Soient $p \in]0, 1[$ un paramètre, et (X, Y) un couple de variables aléatoires réelles à valeurs entières, de fonction génératrice :

$$G_{(X, Y)}(s, t) = \lambda \frac{t \ln(1 - p\,s\,t)}{1 - (1 - p)\,t}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

1°/ Déterminer la constante λ.
2°/ Donner l'espérance et la variance de X. Quelle est la loi marginale de X ?
3°/ Montrer que les variables X et $Y - X$ sont indépendantes et donner la loi de $Y - X$.
4°/ En déduire la loi du couple (X, Y).

Solution.

1°/ Condition de normalisation.

$$G_{(X, Y)}(1, 1) = 1 \Rightarrow \lambda \frac{\ln(1 - p)}{p} = 1$$

$$\boxed{\lambda = \frac{p}{\ln(1 - p)} < 0}$$

$$G_{(X, Y)}(s, t) = \frac{p}{\ln(1 - p)} \frac{t \ln(1 - p\,s\,t)}{1 - (1 - p)\,t}$$

2°/ Loi marginale de X.

La fonction génératrice de X est donnée par :

$$G_X(u) = G_{(X, Y)}(u, 1) = \frac{\ln(1 - p\,u)}{\ln(1 - p)}$$

Ses dérivées successives sont données par :

$$G'_X(u) = -\frac{p}{\ln(1 - p)} \frac{1}{1 - p\,u}$$
$$G^n{}_X(u) = -\frac{(n - 1)!}{\ln(1 - p)} \left(\frac{p}{1 - p\,u} \right)^n$$

On en déduit :

— l'espérance de X :

$$E(X) = G'_X(1) = -\frac{p}{(1-p)\ln(1-p)}$$

— la variance de X :

$$Var(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - (G'_X(1))^2 = -\frac{1}{\ln(1-p)}\left(\frac{p}{1-p}\right)^2 - \frac{p}{(1-p)\ln(1-p)} - \frac{1}{(\ln(1-p))^2}\left(\frac{p}{1-p}\right)^2$$

$$= -\frac{p^2\ln(1-p) + p(1-p) + p^2}{(1-p)^2(\ln(1-p))^2} = -\frac{p(p+\ln(1-p))}{(1-p)^2(\ln(1-p))^2}$$

— la loi de X :

$$P(X=0) = G_X(0) = 0$$

$$P(X=n) = \frac{1}{n!}G^{(n)}_X(0) = -\frac{p^n}{n\ln(1-p)},\ n \geq 1.$$

$$\boxed{P(X=n) = -\frac{p^n}{n\ln(1-p)},\ n \geq 1.}$$

3°/ Loi de $Y - X$.

La fonction génératrice conjointe de X et $Y - X$ est :

$$G_{(X,\,Y-X)}(u,v) = E(u^X v^{Y-X}) = G_{(X,\,Y)}\left(\frac{u}{v}, v\right) = \frac{pv}{1-(1-p)v}\frac{\ln(1-pu)}{\ln(1-p)}$$

Or :

$$G_X(u) = \frac{\ln(1-pu)}{\ln(1-p)}$$

$$G_{Y-X}(v) = G(X, Y-X)(1, v) = \frac{pv}{1-(1-p)v}$$

donc :

$$G_{(X,\,Y-X)}(u,v) = G_X(u)\,G_{Y-X}(v)$$

et cette relation montre que :

Les variables aléatoires X et $Y - X$ sont indépendantes.

La loi de probabilité de la variable $Y - X$ se déduit de sa fonction génératrice $G_{Y-X}(v) = \frac{p\,v}{1-(1-p)v}$:

La variable aléatoire $Y - X$ suit une **loi géométrique** sur $\mathbb{N}^*$, de paramètre p.
$P(Y - X = k) = p\,(1-p)^{k-1}$, $k \geq 1$.

4°/ Loi conjointe de X et Y.

Comme les variables X et $Y - X$ sont indépendantes, on a :

$$P(X = n \text{ et } Y = k) = P(X = n \text{ et } Y - X = k - n) = P(X = n)\,P(Y - X = k - n)$$
$$= -\frac{p^n}{n\ln(1-p)}\,p\,(1-p)^{k-n-1},\ n \geq 1,\ k - n \geq 1.$$

La loi conjointe de X et Y est donc donnée par :

$$P(X = n \text{ et } Y = k) = \begin{cases} \frac{-1}{n\ln(1-p)}\left(\frac{p}{1-p}\right)^{n+1}(1-p)^k & \text{pour } 1 \leqslant n < k \\ 0 & \text{pour } n \leqslant 0 \text{ ou } k \leqslant n \end{cases}$$

On peut en déduire la loi de Y :

$$P(Y = k) = -\frac{(1-p)^k}{\ln(1-p)}\frac{p}{1-p}\sum_{n=1}^{n=k-1}\frac{1}{n}\left(\frac{p}{1-p}\right)^n$$

$$\sum_{n=1}^{n=k-1}\frac{1}{n}x^n = \sum_{n=1}^{n=k-1}\int_0^x u^{n-1}\,du = \int_0^x\left(\sum_{n=1}^{n=k-1}u^{n-1}\right)du$$
$$= \int_0^x \frac{1-u^{k-1}}{1-u}\,du = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{u^{k-1}}{1-u}\,du,\ |x| < 1.$$

$$\sum_{n=1}^{n=k-1}\frac{1}{n}\left(\frac{p}{1-p}\right)^n = -\ln\left(1-\frac{p}{1-p}\right) - \int_0^{\frac{p}{1-p}}\frac{u^{k-1}}{1-u}\,du$$

$$P(Y = k) = -\frac{p}{\ln(1-p)}(1-p)^{k-1}\left(\ln\left(\frac{1-p}{1-2p}\right) - \int_0^{\frac{p}{1-p}}\frac{u^{k-1}}{1-u}\,du\right),\ k \geq 2,\ p < \frac{1}{2}.$$

Exercices

Lois conjointes discrètes, indépendance.

1. Loi de probabilité d'un couple aléatoire discret.

1.1. Définition : loi de probabilité conjointe.
1.2. Lois marginales.
1.3. Lois conditionnelles.
1.4. Indépendance.
1.5. Espérance conditionnelle, variance conditionnelle.

2. Fonction génératrice d'un couple aléatoire discret.

2.1. Définition.
2.2. Fonction génératrice et loi de probabilité conjointe.
2.3. Fonction génératrice et lois marginales.
2.4. Fonction génératrice et lois conditionnelles.
2.5. Fonction génératrice et indépendance.
2.6. Espérance, variance, covariance.

3. Variable aléatoire discrète à *n* dimensions.

1. Loi de probabilité d'un couple aléatoire discret.

HAUT

1.1. Définition : loi de probabilité conjointe.

Etant donnée un couple de variables aléatoires discrètes (X, Y) à **valeurs réelles** ($(X, Y)(\Omega) \subset \mathbb{R}^2$), on appelle **loi conjointe** de X et Y, l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$(x_i, y_j) \mapsto P(\{X = x_i\} \cap \{Y = y_j\})$$

On écrit aussi :

$$P(\{(X, Y) = (x_i, y_j)\}) = P(\{X = x_i\} \cap \{Y = y_j\})$$

Le couple aléatoire (X, Y) n'est plus une variable aléatoire réelle, mais une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^2$.

Une loi conjointe se représente, habituellement, par un tableau dans lequel on met, en marge, les valeurs de X et de Y et, dans les cellules correspondantes, les valeurs de probabilité des événements conjoints $\{X = x_i\} \cap \{Y = y_j\}$:

$X \setminus Y$	y_1	...	y_j	...
x_1	$P(\{X = x_1\} \cap \{Y = y_1\})$	...	$P(\{X = x_1\} \cap \{Y = y_j\})$	...
...	...	...	...	...
x_i	$P(\{X = x_i\} \cap \{Y = y_1\})$	...	$P(\{X = x_i\} \cap \{Y = y_j\})$	...
...	...	...	...	...

1.2. Lois marginales.

HAUT

Etant donnée la loi conjointe d'un couple aléatoire réel discret (X, Y), la loi marginale de X est la loi de probabilité de X.
Elle se calcule en faisant la somme, pour toutes les valeurs possibles de y_j, des probabilités
$P(\{X = x_i\} \cap \{Y = y_j\})$.

$$P(\{X = x_i\}) = \sum_{y_j} P(\{X = x_i\} \cap \{Y = y_j\}).$$

Les lois marginales se représentent, habituellement, par les sommes des lignes et des colonnes du tableau de la loi conjointe :

$X \setminus Y$	y_1	...	y_j	...	*Total Loi marginale de X*
x_1	$P(\{X = x_1\} \cap \{Y = y_1\})$	...	$P(\{X = x_1\} \cap \{Y = y_j\})$	...	$P(\{X = x_1\})$
...	...	...	...	...	...
x_i	$P(\{X = x_i\} \cap \{Y = y_1\})$	...	$P(\{X = x_i\} \cap \{Y = y_j\})$	...	$P(\{X = x_i\})$
...	...	...	...	...	...
Total Loi marginale de Y	$P(\{Y = y_1\})$	...	$P(\{Y = y_j\})$	...	1

1.3. Lois conditionnelles.

HAUT

Etant donnée la loi conjointe d'un couple aléatoire réel discret (X, Y), la loi conditionnelle de X pour Y fixé est définie par :

$$P(\{X = x_i\} \mid \{Y = y_j\}) = \frac{P\left(\{X = x_i\} \cap \{Y = y_j\}\right)}{P\left(\{Y = y_j\}\right)}$$

La loi conditionnelle de X s'obtient, pour chaque valeur de Y, en divisant la probabilité conjointe dans une case, par la somme de la colonne.
La loi conditionnelle de Y s'obtient, pour chaque valeur de X, en divisant la probabilité conjointe dans une case, par la somme de la ligne :

$X \setminus Y$	y_1	...	y_j	...	*Total Loi marginale de X*
x_1	$P(\{X = x_1\} \cap \{Y = y_1\})$	...	$P(\{X = x_1\} \cap \{Y = y_j\})$	...	$P(\{X = x_1\})$
...	...	...	...	...	...
x_i	$P(\{X = x_i\} \cap \{Y = y_1\})$	...	$P(\{X = x_i\} \cap \{Y = y_j\})$	...	$P(\{X = x_i\})$
...	...	...	...	...	...
Total Loi marginale de Y	$P(\{Y = y_1\})$	...	$P(\{Y = y_j\})$	...	1

1.4. Indépendance.

HAUT

Les variables aléatoires réelles discrètes X et Y sont dites indépendantes si, et seulement si, la loi conjointe est le produit des lois marginales :

$$P(\{X = x_i\} \cap \{Y = y_j\}) = P(\{X = x_i\}) \times P(\{Y = y_j\})$$

Sur le tableau de la loi conjointe, complété par les lois marginales, l'indépendance de X et Y se vérifie par le fait que la probabilité dans une case de la loi conjointe est le produit de la somme de la ligne correspondante et de la somme de la colonne correspondante :

$X \setminus Y$	y_1	...	y_j	...	*Total Loi marginale de X*
x_1	$P(\{X = x_1\} \cap \{Y = y_1\})$	...	$P(\{X = x_1\} \cap \{Y = y_j\})$	...	$P(\{X = x_1\})$
...	...	...	...	...	...
x_i	$P(\{X = x_i\} \cap \{Y = y_1\})$	...	$P(\{X = x_i\} \cap \{Y = y_j\})$	...	$P(\{X = x_i\})$
...	...	...	...	...	...
Total Loi marginale de Y	$P(\{Y = y_1\})$	...	$P(\{Y = y_j\})$	...	1

1.5. Espérance conditionnelle, variance conditionnelle.

HAUT

Théorème de l'espérance conditionnelle.

Soeint X et Y deux variables aléatoires réelles discrètes.
Si $E_Y(X)$ désigne l'espérance conditionnelle de X pour Y fixé, l'espérance de X est donnée par :

$$E(X) = E(E_Y(X))$$

Ce théorème est vrai aussi pour un couple de variables aléatoires réelles quelconques.

Théorème de la variance conditionnelle.

Soeint X et Y deux variables aléatoires réelles discrètes.
Si $E_Y(X)$ désigne l'espérance conditionnelle de X pour Y fixé, et $Var_Y(X)$ la variance conditionnelle de X pour Y fixé, la variance de X est donnée par :

$$Var(X) = Var(E_Y(X)) + E(Var_Y(X))$$

Ce théorème est vrai aussi pour un couple de variables aléatoires réelles quelconques.

2. Fonction génératrice d'un couple aléatoire discret.

HAUT

2.1. Définition.

Etant donné un couple (X, Y) de variables aléatoires réelles **à valeurs entières positives**, on appelle **fonction génératrice** du couple (X, Y), l'application $g_{(X, Y)}$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ qui, à un couple $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ fait correspondre l'espérance mathématique de la fonction aléatoire $u^X v^Y$:

$$g_{(X, Y)}(u, v) = E(u^X v^Y) = \sum_{(m, n) \in \mathbb{N}^2} P(\{X = m\} \cap \{Y = n\})\, u^m v^n.$$

Propriété (condition de normalisation).

La somme des probabilités des valeurs du couple (X, Y) étant toujours égale à 1, on a :

$$g_{(X, Y)}(1, 1) = E(1) = \sum_{(m, n) \in \mathbb{N}^2} P(\{X = m\} \cap \{Y = n\}) = 1$$

2.2. Fonction génératrice et loi de probabilité conjointe.

HAUT

Etant donné un couple (X, Y) de variables aléatoires réelles **à valeurs entières positives**, de fonction génératrice :

$$g_{(X, Y)}(u, v) = E(u^X v^Y) = \sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} P(\{X = m\} \cap \{Y = n\})\, u^m v^n,$$

le développement de $g_{(X, Y)}(u, v)$ en série de Taylor-Mac Laurin au voisinage de (0, 0), donne

$$P(\{X = m\} \cap \{Y = n\}) = \frac{1}{m!\, n!} \frac{\partial^{m+n} g_{(X,Y)}}{\partial u^m \partial v^n}(0, 0)$$

La probabilité d'une valeur (m, n) du couple (X, Y) est le coefficient du terme $u^m v^n$ dans le développement en série entière de la fonction génératrice $g_{(X, Y)}(u, v)$ au voisinage de (0, 0).

2.3. Fonction génératrice et lois marginales.

HAUT

Etant donné un couple (X, Y) de variables aléatoires réelles **à valeurs entières positives**, de fonction génératrice :

$$g_{(X, Y)}(u, v) = E(u^X v^Y) = \sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} P(\{X = m\} \cap \{Y = n\})\, u^m v^n,$$

la fonction génératrice de X est donnée par :

$$g_X(u) = E(u^X) = g_{(X, Y)}(u, 1)$$

la fonction génératrice de Y est donnée par :

$$g_Y(v) = E(v^Y) = g_{(X, Y)}(1, v)$$

2.4. Fonction génératrice et lois conditionnelles.

HAUT

Etant donné un couple (X, Y) de variables aléatoires réelles **à valeurs entières positives**, de fonction génératrice :

$$g_{(X, Y)}(u, v) = E(u^X v^Y) = \sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} P(\{X = m\} \cap \{Y = n\})\, u^m v^n,$$

la loi conditionnelle de X pour Y fixé est donnée par :

$$P(\{X = m\} \mid \{Y = n\}) = \frac{P(\{X = m\} \cap \{Y = n\})}{P(\{Y = n\})}$$

Or :

$$P(\{X = m\} \cap \{Y = n\}) = \frac{1}{m!\, n!} \frac{\partial^{m+n} g_{(X,Y)}}{\partial u^m \partial v^n}(0, 0)$$

$$P(\{Y = n\}) = \frac{1}{n!} \frac{\partial^n g_Y}{\partial v^n}(0) = \frac{1}{n!} \frac{\partial^n g_{(X,Y)}}{\partial v^n}(1, 0)$$

donc :

$$P(\{X = m\} \mid \{Y = n\}) = \frac{1}{m!} \frac{\dfrac{\partial^{m+n} g_{(X,Y)}}{\partial u^m \partial v^n}(0, 0)}{\dfrac{\partial^n g_{(X,Y)}}{\partial v^n}(1, 0)}$$

et la fonction génératrice de X pour Y fixé est donnée par :

$$g_{X \mid Y = n}(u) = E_{Y = n}(u^X) = \sum_{m \in \mathbb{N}} \frac{P(\{X = m\} \cap \{Y = n\})}{P(\{Y = n\})} u^m = \frac{\dfrac{\partial^n g_{(X,Y)}}{\partial v^n}(u, 0)}{\dfrac{\partial^n g_{(X,Y)}}{\partial v^n}(1, 0)}$$

HAUT

2.5. Fonction génératrice et indépendance.

HAUT

Etant donné un couple (X, Y) de variables aléatoires réelles **à valeurs entières positives**, de fonction génératrice :

$$g_{(X, Y)}(u, v) = E(u^X v^Y) = \sum_{(m, n) \in \mathbb{N}^2} P(\{X = m\} \cap \{Y = n\})\, u^m v^n,$$

la condition d'indépendance

$$P(\{X = m\} \cap \{Y = n\}) = P(\{X = m\}) \times P(\{Y = n\})$$

se traduit par :

$$\begin{aligned} g_{(X, Y)}(u, v) &= \sum_{(m, n) \in \mathbb{N}^2} P(\{X = m\}) \times P(\{Y = n\})\, u^m v^n \\ &= \left(\sum_{m \in \mathbb{N}} P(\{X = m\})\, u^m \right) \times \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} P(\{Y = n\})\, v^n \right) \\ &= g_X(u)\, g_Y(v) \end{aligned}$$

Pour que les variables aléatoires à valeurs entières positives X et Y, soient indépendantes, il faut et il suffit que la fonction génératrice conjointe soit égale au produit de la fonction génératrice de X et de la fonction génératrice de Y.

Il revient d'ailleurs au même de dire que les variables X et Y sont indépendantes si, et seulement si, la fonction génératrice conjointe est **produit de deux fonctions d'une seule variable**.

HAUT

2.6. Espérance, variance, covariance.

HAUT

Etant donné un couple (X, Y) de variables aléatoires réelles **à valeurs entières positives**, de fonction génératrice :

$$g_{(X, Y)}(u, v) = E(u^X v^Y) = \sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} P(\{X = m\} \cap \{Y = n\})\, u^m v^n,$$

L'espérance de X est donnée par : $E(X) = g'_X(1) = \frac{\partial g_{(X,Y)}}{\partial u}(1, 1)$

L'espérance de Y est donnée par : $E(Y) = g'_Y(1) = \frac{\partial g_{(X,Y)}}{\partial v}(1, 1)$

La variance de X est donnée par :

$$Var(X) = g''_X(1) + g'_X(1) - (g'_X(1))^2 = \frac{\partial^2 g_{(X,Y)}}{\partial u^2}(1, 1) + \frac{\partial g_{(X,Y)}}{\partial u}(1, 1) - \left(\frac{\partial g_{(X,Y)}}{\partial u}(1, 1)\right)^2$$

La variance de Y est donnée par :

$$Var(Y) = g''_Y(1) + g'_Y(1) - (g'_Y(1))^2 = \frac{\partial^2 g_{(X,Y)}}{\partial v^2}(1, 1) + \frac{\partial g_{(X,Y)}}{\partial v}(1, 1) - \left(\frac{\partial g_{(X,Y)}}{\partial v}(1, 1)\right)^2$$

La covariance de X et Y, définie par l'espérance du produit des aléatoires centrées $X - E(X)$ et $Y - E(Y)$, est donnée par la **formule de la covariance** :

$$Cov(X, Y) = E(X\,Y) - E(X)\,E(Y)$$

On trouve ici, en fonction de la fonction génératrice conjointe :

$$Cov(X, Y) = \frac{\partial^2 g_{(X,Y)}}{\partial u\, \partial v}(1, 1) - \frac{\partial g_{(X,Y)}}{\partial u}(1, 1) \times \frac{\partial g_{(X,Y)}}{\partial v}(1, 1)$$

HAUT

3. Variable aléatoire discrète à *n* dimensions.

HAUT

Les résultats obtenus, valables dans $\mathbb{R}^2$, peuvent être généralisés à $\mathbb{R}^n$, à ceci près qu'il faudra distinguer, pour une famille de *n* variables aléatoires réelles, entre l'**indépendance de la famille dans son ensemble** (la probabilité conjointe est le produit des probabilités marginales) et l'**indépendance des variables aléatoires deux à deux** (la probabilité conjointe de deux variables aléatoires quelconques de la famille est le produit des probabilités marginales de ces deux variables aléatoires).

L'indépendance de la famille dans son ensemble entraîne l'indépendance des variables deux à deux, mais la réciproque est fausse.

Chapitre 10. Lois conjointes discrètes, indépendance.

Exercices

Exercice 1. Variables construites à partir de 3 variables indépendantes.
Exercice 2. Loi conjointe de deux variables à 3 valeurs entières.
Exercice 3. Loi conjointe de deux variables à nombre infini de valeurs entières.
Exercice 4. Fonction génératrice d'un couple.
Exercice 5. Fonction génératrice polynomiale.
Exercice 6. Fonction génératrice produit d'un polynôme et d'une exponentielle.
Exercice 7. L'observation à deux niveaux.
Exercice 8. Equation aux dérivées partielles de la fonction génératrice de deux variables indépendantes.
Exercice 9. Fonction génératrice exponentielle.
Exercice 10. Combinaisons linéaires de deux variables.
Exercice 11. Variables indépendantes dans un triplet aléatoire.
Exercice 12. Variables dépendantes dans un triplet aléatoire.
Exercice 13. Couple aléatoire défini par sa fonction génératrice.
Exercice 14. Loi conjointe du maximum et du minimum de deux jetons.
Exercice 15. Tirage à deux niveaux.
Exercice 16. Lancement de dé.
Exercice 17. Chèques émis et chèques sans provision.
Exercice 18. Deux variables de Bernoulli sur (N, 𝔓 (N), *Geom*).
Exercice 19. Pêche.
Exercice 20. Lois conjointes.
Exercice 21. Loi conjointe de deux variables indépendantes.
Exercice 22. Covariance et coefficient de corrélation (deux pièces de monnaie).
Exercice 23. Covariance et corrélation de la somme et du maximum.
Exercice 24. Loi conjointe $P\{(X, Y) = (i, j)\} = a\, p^j$, $1 \leq i < j$.
Exercice 25. Loi conditionnelle binomiale.
Exercice 26. Truite et loi de Poisson.
Exercice 27. Appels téléphoniques et lois binomiales.

Exercice 1. Variables construites à partir de 3 variables indépendantes.

Soit $\{X, Y, Z\}$ une famille de variables aléatoires indépendantes telles que :
$P[X = 1] = p$, $P[X = -1] = q$;
$P[Y = 1] = p$, $P[Y = 0] = q$; $0 < p < 1$, $p + q = 1$.
On suppose que Z suit la même loi que Y.
Calculer :

1°/ La loi de $\frac{X+1}{2}$.

2°/ La loi de $W = 1 + X + 2Y^2$.

3°/ $E(W)$ et $Var(W)$.

On introduit les variables aléatoires $U = \frac{W}{2} - Y + Z$; $V = \frac{W}{2} - Y - Z$.

4°/ Calculer la loi conjointe de U et V.

5°/ Les variables U et V sont-elles indépendantes ?

Solution

HAUT

Exercice 2. Loi conjointe de 2 variables à 3 valeurs entières.

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles discrètes dont la loi de probabilité conjointe est donnée par le tableau :

$X \backslash Y$	0	1	2
0	$\frac{16}{81}$	$\frac{16}{81}$	$\frac{4}{81}$
1	$\frac{16}{81}$	?	$\frac{4}{81}$
2	$\frac{4}{81}$	$\frac{4}{81}$	$\frac{1}{81}$

Solution

1°/ Calculer la probabilité de l'événement $(X, Y) = (1, 1)$.
2°/ Calculer les lois marginales de X et de Y.
3°/ Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
4°/ Calculer la loi de probabilité, l'espérance et la variance de $X + Y$.

HAUT

Exercice 3. Loi conjointe de 2 variables à nombre infini de valeurs entières.

Soient a et b deux nombres entiers tels que $0 < a < b$ et $\lambda \in \mathrm{R}_+^*$.

On considère un vecteur aléatoire (X, Y) dont la loi de probabilité est définie par :

$$P(\{X = i\} \cap \{Y = j\}) = e^{-b\lambda} \frac{\lambda^j}{j!} \binom{j}{i} a^i (b-a)^{j-i},\ i, j \in \mathrm{N},\ i \leq j.$$

1°/ Représenter graphiquement l'ensemble $(X, Y)(\Omega)$.
En déduire les supports des variables aléatoires X et Y.
2°/ Déterminer la loi marginale de Y. Donner $E(Y)$, $Var(Y)$.
3°/ Déterminer la loi conditionnelle de X sachant que $Y = j$.
4°/ Déterminer la loi marginale de X.
5°/ Calculer $Cov(X, Y)$.
6°/ Calculer la fonction génératrice du couple (X, Y) et retrouver les résultats précédents.

Solution

HAUT

Exercice 4. Fonction génératrice d'un couple.

Soit (X, Y) une vecteur aléatoire dont la loi est donnée, pour $(m, n) \in \mathbb{N}^2$, par :

$$P(\{X = m\} \cap \{Y = n\}) = \frac{1}{e} \frac{m+n}{m!\, n!} \lambda^{m+n}$$

1. Déterminer la valeur du paramètre λ.
2. Calculer la loi marginale de X et la loi marginale de Y.
3. Calculer l'espérance et la variance de X et de Y.
4. Calculer la loi de probabilité de $X + Y$.
5. Calculer l'espérance et la variance de $X + Y$.
6. Calculer l'espérance de $X\,Y$.
7. Quelle est la fonction génératrice de (X, Y) ?
8. Quelle est la fonction génératrice de X ? de Y ?
9. Quelle est la fonction génératrice de $X + Y$?
10. Retrouver, à l'aide de la fonction génératrice, l'espérance et la variance de X, de Y, de $X + Y$.

Solution

HAUT

Exercice 5. Fonction génératrice polynomiale.

On donne, dans le plan *Ox, Oy*, la distribution de probabilité admettant pour fonction génératrice :

$$g_{(X, Y)}(u, v) = E(u^X v^Y) = \frac{1}{9}(1 + 2v + uv + 2u^3 + 2uv^3 + u^3 v^3)$$

Solution

1°/ Quelle est la loi conjointe de X et Y ?
2°/ Calculez les fonctions génératrices de X, Y, $X + Y$.
3°/ Calculez la covariance de X et Y.
Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

HAUT

Exercice 6. Fonction génératrice produit d'un polynôme et d'une exponentielle.

Soit (X, Y) un couple aléatoire réel discret à valeurs dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, dont la fonction génératrice est

$g_{(X, Y)}(u, v) = a\,(u + \lambda\, v)\, e^{u + v}$

où a et λ sont des nombres réels.

Solution

1°/ Comment choisir le couple (a, λ) pour que la fonction $g_{(X, Y)}(u, v)$ soit définie ?

Pour $\lambda = 0$, quelle est la valeur de a ?

2°/ Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

3°/ Calculer les lois de probabilité de X, de Y, de $X + Y - 1$.

HAUT

Exercice 7. L'observation à deux niveaux.

Pendant une certaine période d'observation, lorsqu'un phénomène se produit, il a une probabilité p d'être observé. Soit X le nombre de phénomènes qui se produisent pendant la période d'observation, Y le nombre de phénomènes observés.

1°/ Quelle est la loi conditionnelle de Y connaissant X ?

2°/ Exprimer la fonction génératrice de Y en fonction de celle de X.

3°/ Quelle est la loi de probabilité de Y dans les cas suivants :

a) X suit une loi de Poisson de paramètre λ.
b) X suit une loi binomiale de paramètres n et p'.
c) X suit une loi géométrique sur $\mathbb{N}$ de paramètre p'.

Solution

HAUT

Exercice 8. Equation aux dérivées partielles de la fonction génératrice de deux variables indépendantes.

On considère deux variables aléatoires X et Y, discrètes à valeurs entières positives, dont la fonction génératrice est donnée par :

$$g_{(X, Y)}(u, v) = \lambda (4 + 4u + 4v + 4u^2 + 4uv + v^2 + 4u^2 v + uv^2 + u^2 v^2)$$

1°/ Quelle est la valeur de λ ?
2°/ Calculer l'espérance et la variance de X.
3°/ Calculer l'espérance et la variance de Y.
4°/ Calculer la covariance de X et Y.
5°/ Vérifier la relation $g_{(X, Y)} \frac{\partial^2 g_{(X,Y)}}{\partial u \, \partial v} - \frac{\partial g_{(X,Y)}}{\partial u} \frac{\partial g_{(X,Y)}}{\partial v} = 0$.
Montrer que cette relation est une condition nécessaire et suffisante pour que deux variables aléatoires X et Y, discrètes à valeurs entières positives, soient indépendantes.

Solution

HAUT

Exercice 9. Fonction génératrice exponentielle.

On considère deux variables aléatoires X et Y, discrètes à valeurs entières positives, dont la fonction génératrice est donnée par :

$$g_{(X, Y)}(u, v) = e^{\lambda ((1-p)u + p u v - 1)}$$

1°/ Calculer l'espérance et la variance de X.
2°/ Calculer l'espérance et la variance de Y.
3°/ Calculer la covariance de X et Y.
4°/ Quelles sont les lois marginales de X et de Y ?
5°/ Vérifier la relation $g_{(X, Y)}(u, v) = g_X(u((1-p) + p v))$.
Montrer que cette relation est une condition nécessaire et suffisante pour que la loi conditionnelle de Y pour $X = n$ fixé, soit une loi binomiale de paramètres n et p.

Solution

HAUT

Exercice 10. Combinaisons linéaires de deux variables.

Soient λ un nombre réel positif et (X, Y) un couple de variables aléatoires réelles à valeurs entières, dont la fonction génératrice est :

$$g_{(X, Y)}(u, v) = \lambda (u + v) e^{(u + v)}$$

1°/ Calculer λ.
2°/ Calculer la loi de probabilité du couple (X, Y).
3°/ Calculer la loi marginale de X. Calculer l'espérance et la variance de X.
4°/ Calculer l'espérance et la variance de la variable aléatoire $Z = \frac{1}{X+1}$.
5°/ Quelle est la loi conditionnelle de Y connaissant X ? Quelle est la fonction génératrice de cette loi ?
6°/ Exprimer, en fonction de Z, l'espérance conditionnelle $E_X(Y)$ et la variance conditionnelle $Var_X(Y)$ de Y connaissant X.
7°/ Calculer l'espérance de $E_X(Y)$. En déduire l'espérance de Y.
8°/ Calculer la variance de $E_X(Y)$. En déduire la variance de Y.
9°/ Calculer la loi marginale de Y. En déduire l'espérance et la variance de Y. Comparer avec les résultats précédents.
10°/ Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire $T = X + Y - 1$? En déduire l'espérance et la variance de la variable aléatoire $X + Y$.
11°/ Calculer la covariance de X et Y. Calculer le coefficient de corrélation linéaire de X et Y. Conclusion ?
12°/ Calculer la covariance de X et $X + 5Y$. Les variables X et $X + 5Y$ sont-elles indépendantes ?

Solution

HAUT

Exercice 11. Variables indépendantes dans un triplet aléatoire.

Soit $(X, Y, Z) : \Omega \to \mathbb{N}^3$ un triplet aléatoire discret à valeurs entières.
On suppose que la loi de ce triplet est donnée, pour $p \in]0, 1[$, par :

$$P[(X, Y, Z) = (i, j, k)] = \begin{cases} \frac{1}{3} p^2 (1-p)^{i+j} & \forall i \in \mathbb{N}, \forall j \in \mathbb{N}, \forall k \in \{j, j+1, j+2\} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Solution

1°/ Vérifier que l'on définit bien ainsi un triplet aléatoire.
2°/ Expliciter la loi de chacune des variables aléatoires X et Y. Calculer $E(X)$, $E(Y)$.
3°/ Montrer que les variables X et Y sont indépendantes.
Expliciter la loi du couple (X, Y) puis celle de la variable aléatoire $X + Y$.
4°/ Calculer $P(Z) = 0$, $P(Z = 1)$, $P(Z = 2)$, puis $P(Z = k)$ pour tout $k \geq 3$.
5°/ Montrer que $P(Z \geq Y) = 1$.

HAUT

Exercice 12. Variables dépendantes dans un triplet aléatoire.

Soit $(X, Y, Z) : \Omega \to \mathbb{N}^3$ un triplet aléatoire discret.
On suppose que la loi de probabilité conjointe de ce triplet est donnée, pour $p \in]0, 1[$, $q = 1 - p$, $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, par :

$$P[(X, Y, Z) = (i, j, k)] = \begin{cases} \alpha \dfrac{p^j}{j!} \dfrac{q^{k-j}}{(k-j)!} \dfrac{\lambda^k}{k+1} & \text{pour } 0 \le i \le k \text{ et } 0 \le j \le k \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Solution

1°/ Quelle est la valeur de α ?
2°/ Calculer l'espérance mathématique et la variance de X, Y, et Z.
3°/ Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
Les variables X et Z sont-elles indépendantes ?
Les variables Y et Z sont-elles indépendantes ?
Quelle est la loi conditionnelle de Y pour Z fixé ?

HAUT

Exercice 13. Couple aléatoire défini par sa fonction génératrice.

Soit p un nombre réel, $0 < p < 1$. Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires réelles discrètes à valeurs entières, dont la fonction génératrice est donnée par :

$$g_{(X, Y)}(u, v) = p \frac{u + p(1-u)}{pv + (1-v)}$$

1°/ Calculer la loi de probabilité conjointe de X et Y.
2°/ Calculer la loi marginale de X. Comment s'appelle cette loi ? Donner $E(X)$ et $Var(X)$.
3°/ Calculer la loi marginale de Y. Comment s'appelle cette loi ? Donner $E(Y)$ et $Var(Y)$.
4°/ Calculer la covariance de X et Y. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

Solution

HAUT

Exercice 14. Loi conjointe du maximum et du minimum de deux jetons.

On tire simultanément deux jetons d'une urne contenant quatre jetons numérotés de 1 à 4. Soit U le plus petit et V le plus grand des numéros obtenus. Déterminer la loi conjointe et les lois marginales de U et V. Les variables U et V sont-elles indépendantes ?	Solution

HAUT

Exercice 15. Tirage à deux niveaux.

On choisit au hasard un nombre entier X entre 1 et n, puis un nombre entier Y au hasard entre 1 et X. Déterminer la loi et l'espérance de Y.	Solution

HAUT

Exercice 16. Lancement de dé.

On lance un dé équilibré et on note X le numéro obtenu. Puis on relance X fois le dé et on note Y le nombre total d'as obtenus. Déterminer la loi conjointe de X et Y. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ? Calculer l'espérance et la variance de Y.	Solution

HAUT

Exercice 17. Chèques émis et chèques sans provision.

Le nombre X de chèques émis par les clients d'une banque en un jour suit une loi de Poisson de paramètre λ. Lorsqu'un chèque est émis, il a une probabilité p d'être sans provision. 1°/ Quelle est la loi de probabilité conditionnelle, sachant que $X = n$, du nombre Y de chèques sans provision émis en un jour par les clients de la banque ? Justifiez votre réponse. 2°/ Quelle est la loi de probabilité de Y ? 3°/ Quelle est la loi de probabilité de $X - Y$? 4°/ Les variables aléatoires Y et $X - Y$ sont-elles indépendantes ?	Solution

HAUT

Exercice 18. Deux variables de Bernoulli sur (N, ℘ (N), *Geom*).

Pour $0 < p < 1$, soit P la loi *Geom* (p) sur $\Omega = \mathbb{N}$.
On définit deux variables aléatoires X et Y sur Ω :

$$X(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega = 5m \\ 0 & \text{si } \omega \neq 5m \end{cases} ; \; Y(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega = 2k \\ 0 & \text{si } \omega = 2k+1 \end{cases} ;$$

pour $m \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$.

1°/ Calculer :
a) P [$X = 1$] et P [$Y = 1$].
b) P [$X = Y = 1$].
c) E [$(X - Y)^2$].
2°/ Montrer que les variables X et Y ne sont pas indépendantes.

Solution

HAUT

Exercice 19. Pêche.

Un pêcheur lance sa ligne : le nombre de poissons qui viennent visiter son hameçon dans la journée suit une loi de Poisson de paramètre λ. Mais, s'agissant d'un pêcheur débutant, le poisson a deux chances sur 3 de ne pas être ferré et de repartir libre quand il vient visiter l'hameçon. Soit X le nombre de poissons pêchés dans la journée.

1°/ Quelle est la loi de probabilité de X.
2°/ Quelle est l'espérance mathématique de X ?
3°/ Le pêcheur constate qu'en moyenne, il pêche 15 poissons par jours. Quelle est la valeur de λ ?

Solution

HAUT

Exercice 20. Lois conjointes.

1°/ On considère la loi de probabilité conjointe suivante de deux variables aléatoires X et Y

X \ Y	– 4	2	7	*Total*
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$
5	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$
Total	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	1

Solution

Calculer :

a) L'espérance mathématique de X, $E(X)$ et l'espérance mathématique de Y, $E(Y)$.

b) La covariance de X et Y, $Cov(X, Y)$

c) Les écarts-types σ_X, σ_Y et le coefficient de corrélation $\rho(X, Y)$.

2°/ Mêmes questions avec :

X \ Y	– 2	– 1	4	5	*Somme*
1	0,1	0,2	0	0,3	0,6
2	0,2	0,1	0,1	0	0,4
Somme	0,3	0,3	0,1	0,3	1

HAUT

Exercice 21. Loi conjointe de deux variables indépendantes.

On suppose que X et Y sont des variables aléatoires indépendantes ayant pour lois de probabilités respectives :

x_i	1	2
$P\,[X = x_i]$	0,7	0,3

y_i	– 2	5	8
$P\,[Y = y_i]$	0,3	0,5	0,2

Calculer la loi de probabilité conjointe de X et Y et vérifier que $Cov\,(X, Y) = 0$.

Solution

HAUT

Exercice 22. Covariance et coefficient de corrélation (deux pièces de monnaies).

On lance quatre fois une pièce de monnaie bien équilibrée. Soit X le nombre de faces obtenu et Y la plus longue suite de faces obtenue. 1°/ Déterminer la loi de probabilité conjointe de X et Y. 2°/ Calculer $Cov(X, Y)$ et $\rho(X, Y)$.	Solution

HAUT

Exercice 23. Covariance et corrélation de la somme et du maximum.

On tire, sans remise, deux cartes au hasard dans une boîte contenant cinq cartes numérotées 1, 1, 2, 2, et 3. Soit X la somme et Y le maximum des deux nombres tirés. 1°/ Déterminer la loi de probabilité conjointe de X et Y. 2°/ Calculer $Cov\,(X, Y)$ et $\rho\,(X, Y)$.	Solution

HAUT

Exercice 24. Loi conjointe $P\{(X, Y) = (i, j)\} = a\, p^j$, $1 \leq i < j$.

Un vecteur aléatoire (X, Y) est défini sur un espace probabilisé (Ω, P). Sa loi est donnée par :

$$(X, Y)(\Omega) = \{ (i, j) \in \mathbb{N}^2,\ 1 \leq i < j \},$$
$$\text{et } P\{(X, Y) = (i, j)\} = a\, p^j \ \forall\ (i, j) \in (X, Y)(\Omega),$$

où a est un réel strictement positif, et $0 < p < 1$.

1°/ Représenter graphiquement $(X, Y)(\Omega)$. Déterminer la loi marginale de X en fonction de a. En déduire la valeur de a.
2°/ Quel est le nom de la loi de X ? Donner l'espérance et la variance de X.
3°/ Calculer $E(Y)$ et $E(XY)$. Montrer que $Var(Y) = 2\, Var(X)$.
4°/ Montrer que X et $Y - X$ ont même loi. X et $Y - X$ sont-elles indépendantes ?
5°/ Déterminer la loi de Y. Vérifier que :

$$E\left(\frac{X}{Y}\right) = \frac{E(X)}{E(Y)}.$$

Solution

HAUT

Exercice 25. Loi conditionnelle binomiale.

On suppose que X est régie par une loi binomiale de paramètres n et p ($n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0, 1]$ sont fixés), et que, pour chaque k fixé (avec $0 \leq k \leq n$), la loi conditionnelle de Y sachant $X = k$, est une loi binomiale de paramètres k et q ($q \in [0, 1]$ est fixé). Trouver la loi de Y par un calcul, puis par un raisonnement direct.	Solution

HAUT

Exercice 26. Truite et loi de Poisson.

Une truite pond des œufs au fond du torrent. Leur nombre N suit une loi de Poisson de paramètre $a > 0$. Chaque œuf survit avec une probabilité $p \in]0, 1[$, indépendamment des autres.
1°/ Soit M le nombre d'œufs qui survivent. Donner la loi conjointe du couple (N, M). Donner la loi marginale et l'espérance de M.
2°/ M et $N - M$ sont-elles indépendantes ?

Solution

HAUT

Exercice 27. Appels téléphoniques et lois binomiales.

Une secrétaire donne n appels téléphoniques ($n \geq 1$ est fixé). A chacun de ces appels, la probabilité qu'elle parvienne à joindre son correspondant est p ($p \in]0, 1[$ est fixé).
On suppose que les résultats de tous ces appels sont indépendants.
Après cette première série d'essais, elle tente, le lendemain de rappeler les correspondants qu'elle n'a pas réussi à joindre. Les hypothèses sur ses chances de résussite sont les mêmes.
On note X le nombre de personnes jointes dès le premier jour et Y le nombre de personnes jointes l'un ou l'autre jour.
1°/ Quelle est la loi de X ?
2°/ Pour $h \leq k \leq n$, que vaut $P(Y = k \mid X = h)$?
3°/ En déduire la loi de Y. Retrouver ce résultat par un argument direct.

Solution

HAUT

Chapitre 10. Lois conjointes discrètes, indépendance.

Enoncés.

Exercice 1. Variables construites à partir de 3 variables indépendantes.

Soit $\{X, Y, Z\}$ une famille de variables aléatoires indépendantes telles que :
$P[X = 1] = p$, $P[X = -1] = q$;
$P[Y = 1] = p$, $P[Y = 0] = q$; $0 < p < 1$, $p + q = 1$.
On suppose que Z suit la même loi que Y.
Calculer :

1°/ La loi de $\frac{X+1}{2}$.

2°/ La loi de $W = 1 + X + 2Y^2$.
3°/ $E(W)$ et $Var(W)$.

On introduit les variables aléatoires $U = \frac{W}{2} - Y + Z$; $V = \frac{W}{2} - Y - Z$.

4°/ Calculer la loi conjointe de U et V.
5°/ Les variables U et V sont-elles indépendantes ?

Solution.

1°/ Loi de probabilité.

$\frac{X+1}{2}$ prend la valeur 0 avec la probabilité q, et la valeur 1 avec la probabilité p : c'est une **variable de Bernoulli de paramètre *p***, tout comme Y ou Y^2.

$\frac{X+1}{2}$ est une variable de Bernoulli de paramètre p.

2°/ Loi de probabilité de *W*.

$W = 1 + X + 2Y^2$, est somme de deux variables aléatoires indépendantes $1 + X$ et $2Y^2$ qui suivent la même loi de probabilité

k	0	2
$P(1 + X = k) = P(2Y^2 = k)$	q	p

La fonction génératrice de W est donc le produit des fonctions génératrices de $1 + X$ et de $2Y^2$:

$$g_W(u) = (q + p\,u^2)^2 = q^2 + 2\,p\,q\,u^2 + p^2\,u^4 = \sum_m P(W = m)\,u^m$$

La loi de probabilité de W s'en déduit :

m	0	2	4
$P(W = m)$	q^2	$2\,p\,q$	p^2

On remarquera que $\frac{W}{2}$, somme de deux variables de Bernoulli $\frac{X+1}{2}$ et $Y^2 = Y$ de même paramètre p, est une **variable binomiale de paramètres $n = 2$ et p**.

$\frac{W}{2}$ est une variable binomiale de paramètres 2 et p.

3°/ Espérance et variance de W.

Comme $\frac{W}{2}$ est une variable binomiale de paramètres $n = 2$ et p, on connaît son espérance et sa variance :

$$E\left(\frac{W}{2}\right) = 2\,p\ ;\ Var\left(\frac{W}{2}\right) = 2\,p\,q.$$

Des relations générales $E(a\,W + b) = a\,E(W) + b$ et $Var(a\,W + b) = a^2\,Var(W)$, vraies quels que soient a et b dans $\mathbb{R}$,
on tire : $E\left(\frac{W}{2}\right) = \frac{1}{2}\,E(W)$ et $Var\left(\frac{W}{2}\right) = \frac{1}{4}\,Var(W)$, donc :

$E(W) = 4\,p$ et $Var(W) = 8\,p\,q$.

4°/ Loi conjointe de U et V.

$\frac{W}{2} - Y = \frac{X+1}{2} + Y^2 - Y = \frac{X+1}{2}$ est une variable de Bernoulli de paramètre p, tout comme Z.
$U = \frac{X+1}{2} + Z$ est somme de deux variables de Bernoulli indépendantes de paramètre p. Sa loi de probabilité est une loi binomiale :

m	0	1	2
$P(U = m)$	q^2	$2\,p\,q$	p^2

$V = \frac{X+1}{2} - Z$ est la différence des deux mêmes variables de Bernoulli indépendantes de paramètre p. Sa loi de probabilité est :

m	-1	0	1
$P(V = m)$	$p\,q$	$p^2 + q^2$	$p\,q$

La loi conjointe se déduit des valeurs de $\frac{X+1}{2}$ et de Z correspondant aux valeurs de U et V :

$$\frac{X+1}{2} = \frac{U+V}{2}, Z = \frac{U-V}{2}$$

et de la loi de Bernoulli commune suivie par les deux variables indépendantes $\frac{X+1}{2}$ et Z.

$U \backslash V$	-1	0	1	*Total*
0	0	q^2	0	q^2
1	$p\,q$	0	$p\,q$	$2\,p\,q$
2	0	p^2	0	p^2
Total	$p\,q$	$p^2 + q^2$	$p\,q$	1

5°/ Indépendance.

Dans le tableau de la loi conjointe, il y a des probabilités conjointes nulles sans que les probabilités marginales soient nulles : la probabilité conjointe ne saurait donc être le produit des probabilités marginales, et **les deux variables ne sont pas indépendantes**.

Les variables aléatoires U et V ne sont pas indépendantes.

Chapitre 10. Lois conjointes discrètes, indépendance.

Enoncés.

Exercice 2. Loi conjointe de 2 variables à 3 valeurs entières.

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles discrètes dont la loi de probabilité conjointe est donnée par le tableau :

$X \backslash Y$	0	1	2
0	$\frac{16}{81}$	$\frac{16}{81}$	$\frac{4}{81}$
1	$\frac{16}{81}$	?	$\frac{4}{81}$
2	$\frac{4}{81}$	$\frac{4}{81}$	$\frac{1}{81}$

1°/ Calculer la probabilité de l'événement $(X, Y) = (1, 1)$.
2°/ Calculer les lois marginales de X et de Y.
3°/ Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
4°/ Calculer la loi de probabilité, l'espérance et la variance de $X + Y$.

Solution.

1°/ Condition de normalisation.

La somme des probabilités doit être égale à 1.

$$3 \times \frac{16}{81} + 4 \times \frac{4}{81} + \frac{1}{81} = \frac{65}{81}$$

Il manque $\frac{16}{81}$ pour arriver à 1.

La probabilité manquante est donc nécessairement $\frac{16}{81}$.

$$\boxed{P((X, Y) = (1, 1)) = \frac{16}{81}}$$

2°/ Lois marginales de X et Y.

Les lois marginales de X et Y s'obtiennent en faisant les totaux de probabilités par ligne et par colonnes :

$X \backslash Y$	0	1	2	*Total*
0	$\frac{16}{81}$	$\frac{16}{81}$	$\frac{4}{81}$	$\frac{36}{81} = \frac{4}{9}$

1	$\frac{16}{81}$	$\frac{16}{81}$	$\frac{4}{81}$	$\frac{36}{81} = \frac{4}{9}$
2	$\frac{4}{81}$	$\frac{4}{81}$	$\frac{1}{81}$	$\frac{9}{81} = \frac{1}{9}$
Total	$\frac{36}{81} = \frac{4}{9}$	$\frac{36}{81} = \frac{4}{9}$	$\frac{9}{81} = \frac{1}{9}$	1

On voit donc que X et Y suivent la même loi de probabilité :

k	0	1	2
$P(X = k) = P(Y = k)$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$

La fonction génératrice est :

$$g_X(u) = g_Y(u) = \frac{4}{9}u^0 + \frac{4}{9}u^1 + \frac{1}{9}u^2 = \frac{1}{9}(2+u)^2 = \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}u\right)^2$$

Cette fonction génératrice est de la forme $(q + p\,u)^2$ avec $p = \frac{1}{3}$.

On reconnaît la fonction génératrice d'une **variable binomiale** de paramètres $n = 2$, $p = \frac{1}{3}$.

X et Y sont des variables binomiales de paramètres $n = 2$, $p = \frac{1}{3}$.

3°/ Indépendance.

Le tableau de la loi conjointe et des lois marginales :

$X \setminus Y$	0	1	2	*Total*
0	$\frac{16}{81}$	$\frac{16}{81}$	$\frac{4}{81}$	$\frac{36}{81} = \frac{4}{9}$
1	$\frac{16}{81}$	$\frac{16}{81}$	$\frac{4}{81}$	$\frac{36}{81} = \frac{4}{9}$
2	$\frac{4}{81}$	$\frac{4}{81}$	$\frac{1}{81}$	$\frac{9}{81} = \frac{1}{9}$
Total	$\frac{36}{81} = \frac{4}{9}$	$\frac{36}{81} = \frac{4}{9}$	$\frac{9}{81} = \frac{1}{9}$	1

permet de vérifier facilement que chaque probabilité conjointe est le produit des probabilités marginales correspondantes :

$$\frac{4}{9} \times \frac{4}{9} = \frac{16}{81} ; \frac{4}{9} \times \frac{1}{9} = \frac{4}{81} ; \frac{1}{9} \times \frac{1}{9} = \frac{1}{81}$$

et ceci montre que

Les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.

4°/ Variable $X + Y$.

Comme X et Y sont indépendantes, la fonction génératrice de $X + Y$ est le produit des fonctions génératrices de X et Y :

$$g_{X+Y}(u) = \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}u\right)^4$$

$X + Y$ est une variable binomiale de paramètres $n = 4$ et $p = \frac{1}{3}$.

$$P(X + Y = k) = \frac{1}{81}\binom{4}{k}2^{4-k}$$

Les formules connues donnent alors immédiatement l'espérance et la variance de $X + Y$:

$E(X + Y) = n\,p = \frac{4}{3} = E(X) + E(Y)$

$Var(X + Y) = n\,p\,q = \frac{8}{9} = Var(X) + Var(Y)$.

Chapitre 10. Lois conjointes discrètes, indépendance.

Enoncés.

Exercice 3. Loi conjointe de 2 variables à nombre infini de valeurs entières.

Soient a et b deux nombres entiers tels que $0 < a < b$ et $\lambda \in \mathrm{R}_+^*$.

On considère un vecteur aléatoire (X, Y) dont la loi de probabilité est définie par :

$$P(\{X = i\} \cap \{Y = j\}) = e^{-b\lambda} \frac{\lambda^j}{j!} \binom{j}{i} a^i (b-a)^{j-i},\ i, j \in \mathrm{N},\ i \leq j.$$

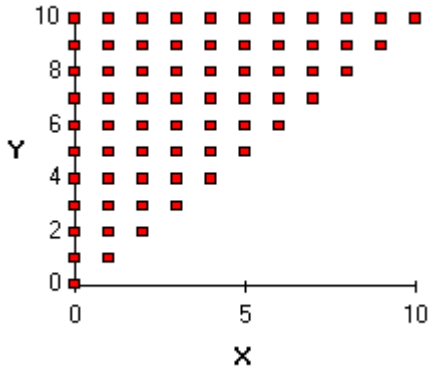
1°/ Représenter graphiquement l'ensemble $(X, Y)(\Omega)$.
En déduire les supports des variables aléatoires X et Y.
2°/ Déterminer la loi marginale de Y. Donner $E(Y)$, $Var(Y)$.
3°/ Déterminer la loi conditionnelle de X sachant que $Y = j$.
4°/ Déterminer la loi marginale de X.
5°/ Calculer $Cov(X, Y)$.
6°/ Calculer la fonction génératrice du couple (X, Y) et retrouver les résultats précédents.

Solution.

1°/ Représentation graphique et supports.

L'ensemble des valeurs du couple (X, Y) pour lesquelles la probabilité est non nulle, est l'ensemble des couples d'entiers positifs ou nul (i, j) tels que i soit inférieur ou égal à j.

L'ensemble $(X, Y)(\Omega)$:



Les points représentés constituent le support du couple (X, Y) : c'est le plus petit fermé de $\mathbb{R}^2$ en dehors duquel la probabilité du couple (X, Y) est nulle.

Le support de X et le support de Y sont $\mathbb{N}$ entier.

2°/ Loi de Y.

La loi marginale de Y est donnée par :

$$P(Y=j) = \sum_{i=0}^{i=j} P(\{X=i\} \cap \{Y=j\}) = \sum_{i=0}^{i=j} e^{-b\lambda}\frac{\lambda^j}{j!}\binom{j}{i} a^i (b-a)^{j-i} = e^{-b\lambda}\frac{\lambda^j}{j!}\sum_{i=0}^{i=j}\binom{j}{i} a^i (b-a)^{j-i}$$

$$P(Y=j) = e^{-b\lambda}\frac{\lambda^j}{j!}(a+(b-a))^j = e^{-b\lambda}\frac{\lambda^j}{j!} b^j$$

Y suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda\, b$.

La condition d'existence
$\lambda\, b > 0$
est réalisée par hypothèse de l'énoncé ($\lambda > 0$, $b > 0$).

On sait alors que :
- L'espérance de *Y* est $E(Y) = \lambda\, b$.
- La variance de *Y* est $Var(Y) = \lambda\, b$.

3°/ Loi conditionnelle de *X*.

La loi conditionnelle de *X* sachant que $Y = j$ est donnée par :

$$P(\{X=i\} \mid \{Y=j\}) = \frac{P\left(\{X=x_i\} \cap \{Y=y_j\}\right)}{P\left(\{Y=y_j\}\right)} = \frac{e^{-b\lambda}\frac{\lambda^j}{j!}\binom{j}{i} a^i (b-a)^{j-i}}{e^{-b\lambda}\frac{(\lambda b)^j}{j!}} = \frac{1}{b^j}\binom{j}{i} a^i (b-a)^{j-i}$$

$$P(\{X=i\} \mid \{Y=j\}) = \binom{j}{i}\left(\frac{a}{b}\right)^i \left(1-\frac{a}{b}\right)^{j-i}$$

La loi conditionnelle de *X* sachant que $Y = j$, est une loi binomiale de paramètres *j* et $\frac{a}{b}$.

La condition d'existence
$\frac{a}{b} \in [\,0\,,\,1\,]$.
est réalisée par hypothèse de l'énoncé ($0 < a < b$).

4°/ Loi de *X*.

La loi de probabilité de la variable aléatoire *X* est la loi marginale :

$$P(X=i) = \sum_{j=i}^{\infty} P(\{X=i\} \cap \{Y=j\}) = \sum_{j=i}^{\infty} e^{-b\lambda}\frac{\lambda^j}{j!}\binom{j}{i} a^i (b-a)^{j-i}$$

$$P(X=i) = e^{-b\lambda} a^i \sum_{j=i}^{\infty} \frac{\lambda^j}{j!}\binom{j}{i} (b-a)^{j-i}$$

$$P(X=i) = e^{-b\lambda}\frac{\lambda^i}{i!} a^i \sum_{j=i}^{\infty} \frac{\lambda^{j-i}}{(j-i)!} (b-a)^{j-i}$$

$$P(X = i) = e^{-b\lambda} \frac{\lambda^i}{i!} a^i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} (b-a)^k$$

$$P(X = i) = e^{-b\lambda} \frac{\lambda^i}{i!} a^i e^{(b-a)\lambda}$$

$$P(X = i) = e^{-a\lambda} \frac{\lambda^i}{i!} a^i$$

X suit une loi de Poisson de paramètre λa.

La condition d'existence :
$\lambda a > 0$
est réalisée par hypothèse de l'énoncé ($\lambda > 0$, $a > 0$).

On sait alors que :
- L'espérance de X est $E(X) = \lambda a$,
- La variance de X est $Var(X) = \lambda a$,

5°/ Covariance de *X* et de *Y*.

La covariance, qui est, par définition, $E((X - E(X))(Y - E(Y)))$ peut être calculée par la **formule de la covariance** :

$$Cov(X, Y) = E(XY) - E(X) E(Y).$$

On connaît déjà :

$E(X) = \lambda a$
$E(Y) = \lambda b$.

Reste à calculer l'espérance mathématique du produit XY.

$$E(XY) = \sum_{0 \le i \le j} i j P((X, Y) = (i, j))$$

$$E(XY) = \sum_{0 \le i \le j} i j e^{-b\lambda} \frac{\lambda^j}{j!} \binom{j}{i} a^i (b-a)^{j-i}$$

$$= e^{-b\lambda} \sum_{j=0}^{\infty} j \frac{\lambda^j}{j!} (b-a)^j \sum_{i=0}^{i=j} i \binom{j}{i} a^i (b-a)^{-i}$$

$$\sum_{i=0}^{i=j} i \binom{j}{i} a^i (b-a)^{-i} = \frac{a}{b-a} \sum_{i=1}^{i=j} i \binom{j}{i} \left(\frac{a}{b-a}\right)^{i-1}$$

$$= \frac{a}{b-a} \sum_{i=1}^{i=j} \binom{j}{i} \left(\frac{d(x^i)}{dx}\right)_{x = \frac{a}{b-a}}$$

$$= \frac{a}{b-a}\left(\frac{d}{dx}\left(\sum_{i=0}^{i=j}\binom{j}{i}x^i\right)\right)_{x=\frac{a}{b-a}}$$

$$= \frac{a}{b-a}\left(\frac{d}{dx}\left((1+x)^j\right)\right)_{x=\frac{a}{b-a}}$$

$$= \frac{a}{b-a}\left(j(1+x)^{j-1}\right)_{x=\frac{a}{b-a}}$$

$$= j\,\frac{a}{b-a}\left(\frac{b}{b-a}\right)^{j-1}$$

Cette formule, établie en supposant que i puisse prendre des valeurs supérieures à 0, donc en supposant j différent de 0, est encore valable pour $j = 0$ car elle donne la valeur 0, qui est bien la valeur, pour $j = 0$, de l'expression :
$\sum_{i=0}^{i=j} i\binom{j}{i}a^i(b-a)^{-i}$.

$$E(XY) = e^{-b\lambda}\sum_{j=0}^{\infty} j\,\frac{\lambda^j}{j!}(b-a)^j\,j\frac{a}{b-a}\left(\frac{b}{b-a}\right)^{j-1}$$

$$= e^{-b\lambda}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\lambda^j}{j!}j^2\,a\,b^{j-1}$$

$$= e^{-b\lambda}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\lambda^j}{j!}(j(j-1)+j)\,a\,b^{j-1}$$

$$= e^{-b\lambda}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\lambda^j}{j!}j(j-1)\,a\,b^{j-1} + e^{-b\lambda}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\lambda^j}{j!}j\,a\,b^{j-1}$$

$$= e^{-b\lambda}(\lambda a)(\lambda b)\sum_{j=2}^{\infty}\frac{\lambda^{j-2}}{(j-2)!}b^{j-2} + e^{-b\lambda}(\lambda a)\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\lambda^{j-1}}{(j-1)!}b^{j-1}$$

$$= e^{-b\lambda}(\lambda a)(\lambda b)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}b^k + e^{-b\lambda}(\lambda a)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}b^k$$

$$= e^{-b\lambda}(\lambda a)((\lambda b)+1)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}b^k$$

$$= e^{-b\lambda}(\lambda a)(\lambda b+1)\,e^{b\lambda}$$

$$= \lambda a(\lambda b+1)$$

On en déduit :

$$Cov(X,Y) = \lambda a(\lambda b+1) - (\lambda a)(\lambda b) = \lambda a$$

$$\boxed{Cov(X,Y) = \lambda a}$$

6°/ Fonction génératrice du couple (X, Y).

$$g_{(X,Y)}(u,v) = E(u^X v^Y) = \sum_{0 \le i \le j} P((X,Y)=(i,j))\, u^i v^j$$

$$= \sum_{0 \le i \le j} e^{-b\lambda} \frac{\lambda^j}{j!} \binom{j}{i} a^i (b-a)^{j-i} u^i v^j$$

$$= e^{-b\lambda} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j}{j!} v^j (b-a)^j \sum_{i=0}^{i=j} \binom{j}{i} u^i a^i (b-a)^{-i}$$

$$= e^{-b\lambda} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j}{j!} v^j (b-a)^j \left(1+\frac{ua}{b-a}\right)^j$$

$$= e^{-b\lambda} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j}{j!} v^j (b+(u-1)a)^j$$

$$= e^{-b\lambda}\, e^{\lambda v (b+(u-1)a)}$$

$$= e^{\lambda((v-1)b+(u-1)va)}$$

$$\boxed{g_{(X,Y)}(u,v) = e^{\lambda((v-1)b+(u-1)va)}}$$

De cette expression, on tire :

— La fonction génératrice de Y : $g_Y(v) = g_{(X,Y)}(1,v) = e^{\lambda b(v-1)}$, expression qui montre que Y suit une **loi de Poisson** de paramètre λb.
— La fonction génératrice de X : $g_X(u) = g_{(X,Y)}(u,1) = e^{\lambda a(u-1)}$, expression qui montre que X suit une **loi de Poisson** de paramètre λa.

— La fonction génératrice de X pour $Y = j$: $g_{X \mid Y=j}(u) = \dfrac{\dfrac{\partial^j g_{(X,Y)}}{\partial v^j}(u,0)}{\dfrac{\partial^j g_{(X,Y)}}{\partial v^j}(1,0)}$.

Or $g_{(X,Y)}(u,v) = e^{\lambda((v-1)b+(u-1)va)} = e^{-b\lambda}\, e^{\lambda v(b+(u-1)a)}$,

donc $\dfrac{\partial^j g_{(X,Y)}}{\partial v^j}(u,v) = \lambda^j (b+(u-1)a)^j g_{(X,Y)}(u,v)$

$\dfrac{\partial^j g_{(X,Y)}}{\partial v^j}(u,0) = \lambda^j (b+(u-1)a)^j g_{(X,Y)}(u,0) = \lambda^j (b+(u-1)a)^j e^{-b\lambda}$

$\dfrac{\partial^j g_{(X,Y)}}{\partial v^j}(1,0) = \lambda^j b^j g_{(X,Y)}(1,0) = \lambda^j b^j e^{-b\lambda}$

$g_{X \mid Y=j}(u) = \left(1-\dfrac{a}{b}+\dfrac{a}{b}u\right)^j$, expression qui montre que X suit, lorsque $Y = j$, une **loi binomiale** de paramètres j et $\dfrac{a}{b}$.

La **covariance** de X et Y est donnée, en fonction de la fonction génératrice du couple (X, Y), par la formule :

$Cov\,(X, Y) = \frac{\partial^2 g_{(X,Y)}}{\partial u\,\partial v}(1, 1) - \frac{\partial g_{(X,Y)}}{\partial u}(1, 1) \times \frac{\partial g_{(X,Y)}}{\partial v}(1, 1).$

Or $g_{(X, Y)}(u, v) = e^{\lambda((v-1)b + (u-1)va)} = e^{-b\lambda}\, e^{\lambda v(b + (u-1)a)} = e^{-b\lambda}\, e^{\lambda v(b-a)}\, e^{\lambda a u v}$

$\frac{\partial g_{(X,Y)}}{\partial v}(u, v) = \lambda\,(b + (u-1)\,a)\, g_{(X, Y)}(u, v),$

$\frac{\partial g_{(X,Y)}}{\partial v}(1, 1) = E\,(Y) = \lambda\, b\, g_{(X, Y)}(1, 1) = \lambda\, b,$ puisque $g_{(X, Y)}(1, 1)$ est toujours égal à 1 (somme des probabilités).

$\frac{\partial g_{(X,Y)}}{\partial u}(u, v) = \lambda\, a\, v\, g_{(X, Y)}(u, v),$

$\frac{\partial g_{(X,Y)}}{\partial u}(1, 1) = E\,(X) = \lambda\, a\, g_{(X, Y)}(1, 1) = \lambda\, a.$

$\frac{\partial^2 g_{(X,Y)}}{\partial u\,\partial v}(u, v) = \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial g_{(X,Y)}}{\partial u}\right)(u, v) = \lambda\, a\, g_{(X, Y)}(u, v) + \lambda\, a\, v\, \frac{\partial g_{(X,Y)}}{\partial v}(u, v)$

$\frac{\partial^2 g_{(X,Y)}}{\partial u\,\partial v}(1, 1) = \lambda\, a\, g_{(X, Y)}(1, 1) + \lambda\, a\, \frac{\partial g_{(X,Y)}}{\partial v}(1, 1) = \lambda\, a + \lambda\, a\, \lambda\, b.$

$Cov\,(X, Y) = \lambda\, a + \lambda\, a\, \lambda\, b - \lambda\, a\, \lambda\, b = \lambda\, a.$

Conclusion : les calculs sont plus rapides avec la fonction génératrice, puisqu'on a calculé, une fois pour toutes, la somme de la série des probabilités.

Chapitre 10. Lois conjointes discrètes, indépendance.

Enoncés.

Exercice 4. Fonction génératrice d'un couple.

Soit (X, Y) une vecteur aléatoire dont la loi est donnée, pour $(m, n) \in \mathbb{N}^2$, par :

$$P(\{X = m\} \cap \{Y = n\}) = \frac{1}{e} \frac{m+n}{m!\, n!} \lambda^{m+n}$$

1. Déterminer la valeur du paramètre λ.
2. Calculer la loi marginale de X et la loi marginale de Y.
3. Calculer l'espérance et la variance de X et de Y.
4. Calculer la loi de probabilité de $X + Y$.
5. Calculer l'espérance et la variance de $X + Y$.
6. Calculer l'espérance de $X\,Y$.
7. Quelle est la fonction génératrice de (X, Y) ?
8. Quelle est la fonction génératrice de X ? de Y ?
9. Quelle est la fonction génératrice de $X + Y$?
10. Retrouver, à l'aide de la fonction génératrice, l'espérance et la variance de X, de Y, de $X + Y$.

Solution.

1°/ Condition de normalisation.

La valeur du paramètre λ est déterminée par la condition de normalisation :

$$\sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} P(\{X = m\} \cap \{Y = n\}) = \sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} \frac{1}{e} \frac{m+n}{m!\, n!} \lambda^{m+n} = 1$$

Pour calculer la somme de la série entière $\sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} \frac{1}{e} \frac{m+n}{m!\, n!} \lambda^{m+n}$, remarquons que l'on peut mettre $\frac{1}{e}$ en facteur.
Ensuite, pour $k = m + n$ fixé dans $\mathbb{N}$, n peut varier de 0 à k, et m est égal à $k - n$, de sorte que la condition de normalisation s'écrit :

$$\frac{1}{e} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{n=k} \frac{k\, \lambda^k}{n!\,(k-n)!} = 1$$

Le premier terme de la somme, correspondant à $k = 0$, est nul, on peut donc faire partir la somme depuis la valeur $k = 1$.

Il est alors possible de mettre λ en facteur et d'écrire :

$$\frac{1}{e}\lambda\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}\sum_{n=0}^{n=k}\frac{k!}{n!(k-n)!}=1$$

$$\sum_{n=0}^{n=k}\frac{k!}{n!(k-n)!}=\sum_{n=0}^{n=k}\binom{k}{n}=2^k$$

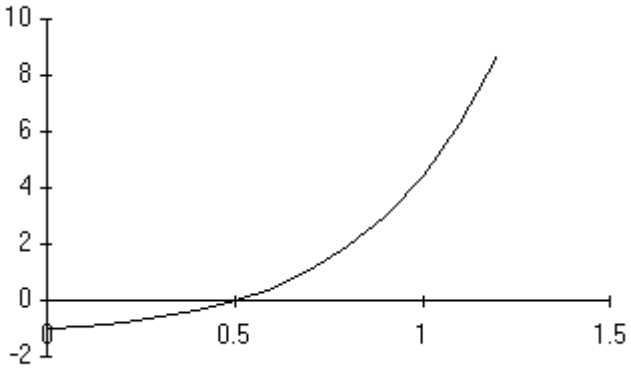
$$\frac{1}{e}2\lambda\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2\lambda)^{k-1}}{(k-1)!}=1$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2\lambda)^{k-1}}{(k-1)!}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2\lambda)^{k}}{k!}=e^{2\lambda}$$

$$2\lambda e^{2\lambda-1}=1$$

Il faut donc prendre pour λ une racine de l'équation $2\lambda e^{2\lambda-1}=1$.
La courbe représentative de la fonction

$$y=2\lambda e^{2\lambda-1}-1$$



montre que la seule solution de l'équation est $\lambda=\frac{1}{2}$, puisque la dérivée $2(1+2\lambda^2)e^{2\lambda-1}$ est strictement positive.

$$\boxed{\lambda=\frac{1}{2}}$$

et la loi de probabilité conjointe s'écrit :

$$P(\{X=m\}\cap\{Y=n\})=\frac{1}{e}\frac{m+n}{m!\,n!}\frac{1}{2^{m+n}}$$

2°/ Loi marginale de *X*, loi marginale de *Y*.

Comme la loi conjointe de X et Y est symétrique en m et n, les variables X et Y suivent la même loi marginale.
Il suffira donc de calculer la loi marginale de X pour avoir celle de Y automatiquement, en changeant X en Y et m en n.

$$P(X=m) = \sum_{n=0}^{\infty} P(\{X=m\} \cap \{Y=n\}) = \frac{1}{e} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m+n}{m!\,n!} \frac{1}{2^{m+n}}$$

$$= \frac{1}{e} \frac{m}{m!} \frac{1}{2^m} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{2^n} + \frac{1}{e} \frac{1}{2^m} \frac{1}{m!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n!} \frac{1}{2^n}$$

$$= \frac{1}{e} \frac{m}{m!} \frac{1}{2^m} e^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{e} \frac{1}{2^m} \frac{1}{m!} \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{e}\, 2^m\, m!} \left(m + \frac{1}{2} \right)$$

$$\boxed{P(X=m) = \frac{2m+1}{\sqrt{e}\, 2^{m+1}\, m!}}$$

On en déduit aussitôt la loi marginale de Y :

$$\boxed{P(Y=n) = \frac{2n+1}{\sqrt{e}\, 2^{n+1}\, n!}}$$

3°/ Espérance et variance de *X* et de *Y*.

Comme les variables X et Y suivent la même loi, elles ont la même espérance et la même variance.

$$E(X) = \sum_{m=0}^{\infty} P(X=m)\, m = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2m+1}{\sqrt{e}\, 2^{m+1}\, m!}\, m$$

$$= \frac{1}{\sqrt{e}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{m^2}{2^m\, m!} + \frac{1}{2\sqrt{e}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{m}{2^m\, m!}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{e}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{m(m-1)+m}{2^m\, m!} + \frac{1}{4\sqrt{e}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(m-1)!} \frac{1}{2^{m-1}}$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{e}} \sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{(m-2)!} \frac{1}{2^{m-2}} + \left(\frac{1}{2\sqrt{e}} + \frac{1}{4\sqrt{e}} \right) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(m-1)!} \frac{1}{2^{m-1}}$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{e}}\, e^{\frac{1}{2}} + \frac{3}{4\sqrt{e}}\, e^{\frac{1}{2}}$$

$= 1$

$$\boxed{E(X) = E(Y) = 1}$$

Pour calculer la variance, nous appliquerons la formule de la variance : $Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$.
Pour cela, il faut, préalablement, calculer l'espérance de X^2.

$$E(X^2) = \sum_{m=0}^{\infty} P(X = m)\, m^2 = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2m+1}{\sqrt{e}\, 2^{m+1}\, m!}\, m^2$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2m+1}{\sqrt{e}\, 2^{m+1}\, (m-1)!}\, m = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2m+1}{\sqrt{e}\, 2^{m+1}\, (m-1)!}\, ((m-1)+1)$$

$$= \sum_{m=2}^{\infty} \frac{2m+1}{\sqrt{e}\, 2^{m+1}\, (m-2)!} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2m+1}{\sqrt{e}\, 2^{m+1}\, (m-1)!}$$

$$= \sum_{m=2}^{\infty} \frac{2(m-2)+5}{\sqrt{e}\, 2^{m+1}\, (m-2)!} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2(m-1)+3}{\sqrt{e}\, 2^{m+1}\, (m-1)!}$$

$$= \frac{1}{8\sqrt{e}} \sum_{m=3}^{\infty} \frac{1}{(m-3)!} \frac{1}{2^{m-3}} + \frac{5}{8\sqrt{e}} \sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{(m-2)!} \frac{1}{2^{m-2}} + \frac{1}{4\sqrt{e}} \sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{(m-2)!} \frac{1}{2^{m-2}} + \frac{3}{4\sqrt{e}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(m-1)!} \frac{1}{2^{m-1}}$$

$$= \frac{1}{8} + \frac{5}{8} + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \frac{7}{4}$$

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{7}{4} - 1 = \frac{3}{4}$$

$$\boxed{Var(X) = Var(Y) = \frac{3}{4}}$$

4°/ Loi de probabilité de la somme $X + Y$.

La somme $X + Y$ peut prendre toutes les valeurs entières positives ou nulles.
L'évènement $X + Y = k$ est réunion des évènements

$$\{X = m\} \cap \{Y = k - m\}$$

avec m variant de 0 à k.
Comme ces évènements sont deux à deux incompatibles, la probabilité de leur réunion est la somme de leurs probabilités (axiome des probabilités totales).
On obtient donc :

$$P(X+Y=k) = \sum_{m=0}^{m=k} P(\{X=m\} \cap \{Y=k-m\}) = \frac{1}{e}\sum_{m=0}^{m=k} \frac{k}{m!\,(k-m)!}\frac{1}{2^k}$$

Pour $k = 0$, la somme se réduit à un seul terme qui est 0 : $P(X+Y=0) = 0$.

Pour $k \geq 1$, on peut écrire :

$$P(X+Y=k) = \frac{1}{e}\frac{1}{2^k}\frac{1}{(k-1)!}\sum_{m=0}^{m=k} \frac{k!}{m!\,(k-m)!} = \frac{1}{e}\frac{1}{2^k}\frac{1}{(k-1)!}\,2^k = \frac{1}{e}\frac{1}{(k-1)!}$$

Donc, dans tous les cas, on peut écrire le résultat sous la forme :

$$\boxed{P(X+Y=k) = \frac{1}{e}\frac{k}{k!}}$$

5°/ Espérance et variance de la somme $X + Y$.

$$E(X+Y) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X+Y=k)\,k = \frac{1}{e}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2}{k!}$$

$$= \frac{1}{e}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k(k-1)+k}{k!} = \frac{1}{e}\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(k-2)!} + \frac{1}{e}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!}$$

$$= 1 + 1 = 2$$

$$\boxed{E(X+Y) = E(X) + E(Y) = 2}$$

Pour calculer la variance, appliquons la formule de la variance :

$Var(X+Y) = E((X+Y)^2) - (E(X+Y))^2 = E(X^2 + Y^2 + 2XY) - 4 = 2E(X^2) + 2E(XY) - 4$
Or, nous avons trouvé $E(X^2) = \frac{7}{4}$, donc il vient :

$$Var(X+Y) = -\frac{1}{2} + 2E(XY)$$

Nous compléterons le calcul de la variance de $X + Y$ après avoir calculé l'espérance du produit XY.

6°/ Espérance du produit $X Y$.

Par définition de l'espérance mathématique :

$$E(XY) = \sum_{(m,n)\in \mathbb{N}^2} P(\{X=m\} \cap \{Y=n\})\,m\,n = \sum_{(m,n)\in \mathbb{N}^2} \frac{1}{e}\frac{m+n}{m!\,n!}\frac{1}{2^{m+n}}\,m\,n.$$

Dans la somme, tous les termes correspondant à $m = 0$, ou à $n = 0$, sont nuls : on peut donc faire partir la

somme depuis $(m, n) = (1, 1)$ et, dans ce cas, on peut simplifier par m et par n et écrire :

$$E(XY) = \frac{1}{e}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{m+n}{(m-1)!\,(n-1)!}\frac{1}{2^{m+n}}$$

Pour calculer la somme de la série double, groupons ensemble les termes ayant la même valeur k de $m + n$: k varie de 2 à l'infini.
Pour k fixé, m est égal à $k - n$, et comme m est supérieur ou égal à 1, on peut faire varier n de 1 à $k - 1$.

$$E(XY) = \frac{1}{e}\sum_{k=2}^{\infty}\sum_{n=1}^{n=k-1}\frac{k}{(n-1)!\,(k-n-1)!}\frac{1}{2^k} = \frac{1}{e}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{k}{(k-2)!\,2^k}\sum_{n=1}^{n=k-1}\frac{(k-2)!}{(n-1)!\,\big((k-2)-(n-1)\big)!}$$

$$= \frac{1}{e}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(k-2)+2}{(k-2)!\,2^k}\sum_{n-1=0}^{n-1=k-2}\frac{(k-2)!}{(n-1)!\,\big((k-2)-(n-1)\big)!}$$

$$= \frac{1}{e}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(k-2)+2}{(k-2)!\,2^k}2^{k-2} = \frac{1}{4e}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{k-2}{(k-2)!} + \frac{1}{2e}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{(k-2)!}$$

$$= \frac{1}{4e}\sum_{k=3}^{\infty}\frac{1}{(k-3)!} + \frac{1}{2e}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{(k-2)!} = \frac{1}{4e}e + \frac{1}{2e}e = \frac{3}{4}$$

$$\boxed{E(XY) = \frac{3}{4}}$$

Nous pouvons maintenant achever le calcul de la variance de $X + Y$:

$$Var(X+Y) = -\frac{1}{2} + 2E(XY) = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 1$$

$$\boxed{Var(X+Y) = 1}$$

Remarquons, pour terminer que la variance de $X + Y$ n'est pas la somme de la variance de X et de la variance de Y :

$$Var(X+Y) - (Var(X) + Var(Y)) = 1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}$$

La moitié de cette différence porte un nom, on l'appelle la **covariance** de X et Y :

$$Cov(X, Y) = -\frac{1}{4}$$

C'est une forme bilinéaire de X et Y et l'on a :

$$Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) + 2\,Cov(X+Y)$$

7°/ Fonction génératrice du couple (X, Y).

Par définition : $g_{(X, Y)}(u, v) = E(u^X v^Y)$.

$$g_{(X, Y)}(u, v) = \sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} P(\{X = m\} \cap \{Y = n\})\, u^m v^n$$

$$g_{(X, Y)}(u, v) = \frac{1}{e} \sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} \frac{m+n}{m!\, n!} \frac{1}{2^{m+n}}\, u^m v^n$$

$$g_{(X, Y)}(u, v) = \frac{1}{e} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!} \sum_{m=0}^{m=k} \frac{k!}{m!\,(k-m)!} \left(\frac{u}{2}\right)^m \left(\frac{v}{2}\right)^{k-m}$$

$$g_{(X, Y)}(u, v) = \frac{1}{e} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!} \left(\frac{u}{2} + \frac{v}{2}\right)^k$$

$$g_{(X, Y)}(u, v) = \frac{u+v}{2e} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!} \left(\frac{u+v}{2}\right)^{k-1}$$

$$\boxed{g_{(X, Y)}(u, v) = \frac{u+v}{2e}\, e^{\frac{u+v}{2}}}$$

8°/ Fonction génératrice de *X* et de *Y*.

$$g_X(u) = E(u^X) = E(u^X 1^Y) = g_{(X, Y)}(u, 1)$$

$$\boxed{g_X(u) = \frac{u+1}{2e}\, e^{\frac{u+1}{2}} = \frac{u+1}{2}\, e^{\frac{u-1}{2}}}$$

De même :

$$g_Y(v) = E(v^Y) = E(1^X v^Y) = g_{(X, Y)}(1, v)$$

$$\boxed{g_Y(v) = \frac{v+1}{2}\, e^{\frac{v-1}{2}}}$$

***X* et *Y* ont la même fonction génératrice, donc la même loi de probabilité**.

9°/ Fonction génératrice de *X* + *Y*.

$$g_{X+Y}(u) = E(u^{X+Y}) = E(u^X u^Y) = g_{(X, Y)}(u, u)$$

$$\boxed{g_{X+Y}(u) = u\, e^{u-1}}$$

Comme on a toujours $g_Z(u+1) = u\,g_Z(u)$, la formule précédente montre que
La variable aléatoire $Z = X + Y - 1$ suit une loi de Poisson de paramètre 1.

10°/ Espérances, variances, covariance.

$$E(X) = g'_X(1) = \left(\left(\frac{1}{2} + \frac{u+1}{4}\right)e^{\frac{u-1}{2}}\right)_{u=1} = 1$$

$$\boxed{E(X) = E(Y) = 1}$$

$$Var(X) = M_2 + M_1 - M_1^2$$

$$Var(X) = g''_X(1) + g'_X(1) - (g'_X(1))^2 = \left(\left(\frac{1}{4} + \frac{u+3}{8}\right)e^{\frac{u-1}{2}}\right)_{u=1} + 1 - 1 = \frac{3}{4}$$

$$\boxed{Var(X) = Var(Y) = \frac{3}{4}}$$

$$E(X+Y) = g'_{X+Y}(1) = [\,(1+u)\,e^{u-1}\,]_{u=1} = 2 = E(X) + E(Y)$$

$$Var(X+Y) = g''_{X+Y}(1) + g'_{X+Y}(1) - (g'_{X+Y}(1))^2 = [\,(1+u)\,e^{u-1}\,]_{u=1} + 2 - 4 = 1$$

$$Cov(X,Y) = \frac{1}{2}(Var(X+Y) - Var(X) - Var(Y)) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{3}{4} - \frac{3}{4}\right) = -\frac{1}{4}$$

$$E(XY) = Cov(X,Y) + E(X)\,E(Y) = -\frac{1}{4} + 1 = \frac{3}{4}$$

Nous constatons que **les calculs sont beaucoup plus rapides avec la fonction génératrice** qu'avec les séries entières de définition.

Chapitre 10. Lois conjointes discrètes, indépendance.

Enoncés.

Exercice 5. Fonction génératrice polynomiale.

On donne, dans le plan *Ox*, *Oy*, la distribution de probabilité admettant pour fonction génératrice : $g_{(X,\,Y)}\,(u,\,v) = E\,(u^{X}\,v^{Y}) = \frac{1}{9}(1 + 2\,v + u\,v + 2\,u^{3} + 2\,u\,v^{3} + u^{3}\,v^{3})$ 1°/ Quelle est la loi conjointe de *X* et *Y* ? 2°/ Calculez les fonctions génératrices de *X*, *Y*, *X* + *Y*. 3°/ Calculez la covariance de *X* et *Y*. Les variables aléatoires *X* et *Y* sont-elles indépendantes ?	

Solution.

1°/ Loi conjointe.

La fonction $g_{(X,\,Y)}\,(u,\,v)$ est bien une fonction génératrice, parce que tous les coefficients sont positifs, compris entre 0 et 1, et la somme des coefficients est 1.
Les probabilités sont les coefficients des puissances des monômes $u^{m}\,v^{n}$dans la fonction génératrice du couple (*X*, *Y*)

$$g_{(X,\,Y)}(u,\,v) = \sum_{(m,\,n)\,\in\,\mathbb{N}^{2}} P\,((X,\,Y) = (m,\,n))\,u^{m}\,v^{n}$$

Les valeurs de *X* sont les exposants de *u*, les valeurs de *Y* sont les exposants de *v*. La fonction génératrice du couple (*X*, *Y*) permet donc de dresser le tableau de la loi conjointe, avec les lois marginales obtenues en faisant les sommes par ligne ou par colonne.

X \ *Y*	0	1	3	Total
0	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	0	$\frac{1}{3}$
1	0	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{3}$
3	$\frac{2}{9}$	0	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$
Total	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1

La colonne "Total" donne la loi marginale de *X*. La ligne "Total" donne la loi marginale de *Y*.
Sur ce tableau, on voit que :
— *X* et *Y* prennent les mêmes valeurs {0, 1, 3} avec la même probabilité : *X* et *Y* suivent la même loi

uniforme sur {0, 1, 3}.

— Certaines probabilités conjointes sont nulles sans que les probabilités marginales correspondantes soient nulles : les variables X et Y ne sont pas indépendantes.

2°/ Fonctions génératrices de X, Y, $X + Y$.

$g_X(u) = E(u^X) = g_{(X, Y)}(u, 1) = \frac{1}{3}(1 + u + u^3)$

$g_Y(v) = E(v^Y) = g_{(X, Y)}(1, v) = \frac{1}{3}(1 + v + v^3)$

$g_{X+Y}(u) = E(u^{X+Y}) = E(u^X u^Y) = g_{(X, Y)}(u, u) = \frac{1}{9}(1 + 2u + u^2 + 2u^3 + 2u^4 + u^6)$.

3°/ Indépendance.

a) Loi conjointe.

Dans le tableau de la loi conjointe, on voit que certaines probabilités sont nulles sans que les probabilités marginales soient nulles : la loi conjointe n'est donc pas le produit des lois marginales, les variables X et Y ne sont pas indépendantes.

b) Covariance.

Les variables X et Y ont la même fonction génératrice, elles suivent la même loi de probabilité marginale.

$E(X) = g'_X(1) = \frac{1}{3}(1 + 3) = \frac{4}{3} = E(Y)$.

$E(XY) = \frac{\partial^2 g_{(X,Y)}}{\partial u \, \partial v}(1,1) = \frac{1}{9}(1 + 6 + 9) = \frac{16}{9}$

$Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{16}{9} - \frac{4}{3} \times \frac{4}{3} = 0$

Nous avons ici un exemple de variables dont **la covariance est nulle sans que les variables soient indépendantes**.

Les relations $Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{1}{2}(Var(X + Y) - Var(X) - Var(Y))$ impliquent alors que

$E(XY) = E(X)E(Y)$ n'entraîne pas que X et Y sont indépendantes. $Cov(X, Y) = 0$ n'entraîne pas que X et Y sont indépendantes. $Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y)$ n'entraîne pas que X et Y sont indépendantes.

alors que, si X et Y sont indépendantes, on a :

$E(XY) = E(X)E(Y)$
$Cov(X, Y) = 0$
$Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y)$

Chapitre 10. Lois conjointes discrètes, indépendance.

Enoncés.

Exercice 6. Fonction génératrice produit d'un polynôme et d'une exponentielle.

Soit (X, Y) un couple aléatoire réel discret à valeurs dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, dont la fonction génératrice est

$$g_{(X, Y)}(u, v) = a\,(u + \lambda\, v)\, e^{u + v}$$

où a et λ sont des nombres réels.

1°/ Comment choisir le couple (a, λ) pour que la fonction $g_{(X, Y)}(u, v)$ soit définie ?
Pour $\lambda = 0$, quelle est la valeur de a ?
2°/ Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
3°/ Calculer les lois de probabilité de X, de Y, de $X + Y - 1$.

Solution.

1°/ Fonction génératrice.

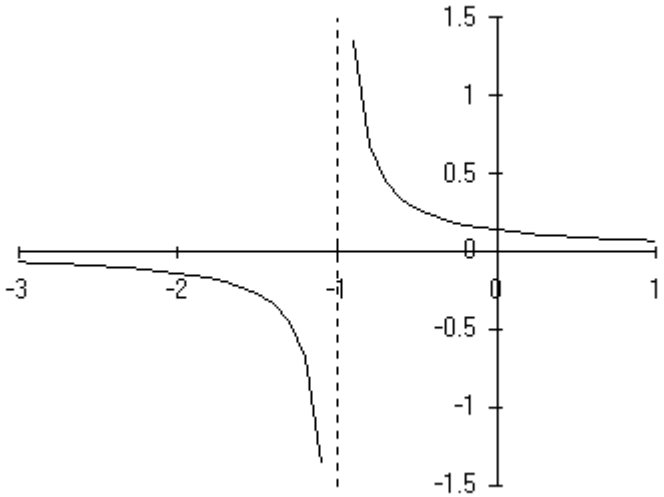
a) Condition de normalisation.

La condition de normalisation (somme des probabilités égale à 1) s'exprime au moyen de la fonction génératrice, par

$$g_{(X, Y)}(1, 1) = 1$$

soit :

$$a\,(1 + \lambda)\, e^{2} = 1.$$



Il faut donc choisir, dans le plan, le point (a, λ) **sur l'hyperbole d'équation $a\,(1 + \lambda)\, e^{2} = 1$**.

Pour $\lambda = 0$, par exemple, on aura $a = e^{-2}$.
La fonction génératrice n'est pas définie pour $\lambda = -1$, ni pour $a = 0$.

b) Probabilités.

Tous les coefficients du développement en série entière de $g_{(X, Y)}(u, v)$ au voisinage de $(0, 0)$ doivent être

positifs puisque ce sont les probabilités conjointes.

$$g_{(X, Y)}(0, 0) = 0$$
$$\frac{\partial g_{(X,Y)}}{\partial u}(0, 0) = a \geq 0$$
$$\frac{\partial g_{(X,Y)}}{\partial v}(0, 0) = a\,\lambda \geq 0$$

Donc a et λ doivent tous deux être positifs ou nuls.
D'autre part, nous avons vu, plus haut, que a devait être différent de 0.
En résumé :

Pour que $g_{(X, Y)}(u, v) = a\,(u + \lambda\, v)\, e^{u + v}$ soit une fonction génératrice, il faut, et il suffit que l'on ait :
$a\,(1 + \lambda)\, e^{2} = 1$, avec $a > 0$ et $\lambda \geq 0$.

2°/ Indépendance.

Pour que les variables X et Y soient indépendantes, il faut que la fonction génératrice du couple (X, Y) soit produit d'une fonction de u par une fonction de v, ce qui n'est pas le cas, puisqu'on ne peut pas écrire le facteur $(u + \lambda\, v)$ comme produit d'une fonction de u et d'une fonction de v que si $\lambda = 0$.

Pour en être bien persuadé, il suffit, par exemple, de calculer :

$P\,(X = 0 \text{ et } Y = 0) = P\,((X, Y) = (0, 0)) = g_{(X, Y)}(0, 0) = 0,$
$P\,(X = 0) = g_{(X, Y)}(0, 1) = a\,\lambda\, e,$
$P\,(Y = 0) = g_{(X, Y)}(1, 0) = a\, e,$

pour voir que $P\,(X = 0 \text{ et } Y = 0)$ est différent du produit $P\,(X = 0)\,P\,(Y = 0)$, sauf dans le cas où λ est nul, ce qui suffit pour montrer que les variables X et Y ne sont pas indépendantes lorsque λ est différent de 0.
En effet, a est toujours différent de 0 et seul λ peut être nul, auquel cas a est égal à e^{-2}.

Lorsque $\lambda = 0$, la fonction génératrice $g_{(X, Y)}(u, v) = a\,(u + \lambda\, v)\, e^{u + v}$ s'écrit $a\, u\, e^{u + v} = a\, u\, e^{u}\, e^{v}$ avec $a = e^{-2}$; c'est le produit d'une fonction de u et d'une fonction de v : dans ce cas seulement, X et Y sont des variables indépendantes. Et l'on a :

$$g_{(X, Y)}(u, v) = g_X(u)\, g_Y(v)$$

avec $g_X(u) = g_{(X, Y)}(u, 1) = u\, e^{u - 1}$ et $g_Y(v) = g_{(X, Y)}(1, v) = e^{v - 1}$

L'égalité des fonctions entraîne l'égalité des dérivées :

$$P\,((X, Y) = (m, n)) = \frac{1}{m!\,n!}\frac{\partial^{m+n} g_{(X,Y)}}{\partial u^m\, \partial v^n}(0,0) = \frac{1}{m!}\frac{\partial^m g_X}{\partial u^m}(0) \times \frac{1}{n!}\frac{\partial^n g_Y}{\partial v^n}(0) = P\,(X = m)\,P\,(Y = n)$$

Les variables aléatoires X et Y sont indépendantes si et seulement si $\lambda = 0$.

3°/ Lois de probabilité.

a) Loi de *X*.

La fonction génératrice de *X* est $g_X(u) = g_{(X, Y)}(u, 1) = a\,(u + \lambda)\,e^{u+1} = \frac{u+\lambda}{1+\lambda}\,e^{u-1} = \frac{1}{e}\frac{u+\lambda}{1+\lambda}\,e^{u}$

La loi de probabilité de *X* s'en déduit.

On voit, en effet, par une récurrence immédiate, que l'on a :

$$\frac{\partial^m g_X}{\partial u^m}(u) = \frac{1}{e}\frac{u+m+\lambda}{1+\lambda}\,e^{u}$$

d'où :

$$\boxed{P\,(X = m) = \frac{1}{m!}\frac{\partial^m g_X}{\partial u^m}(0) = \frac{1}{m!}\frac{1}{e}\frac{m+\lambda}{1+\lambda}}$$

Pour $\lambda = 0$, la loi de *X* est donnée par $P\,(X = m) = \frac{1}{e}\frac{m}{m!}$, soit $P\,(X - 1 = k) = e^{-1}\,\frac{1}{k!}$, $k \geq 0$.

Pour $\lambda = 0$, la variable $X - 1$ suit une loi de Poisson de paramètre 1.

b) Loi de *Y*.

La fonction génératrice de *Y* est $g_Y(v) = g_{(X, Y)}(u, 1) = a\,(1 + \lambda\,v)\,e^{1+v} = \frac{1}{e}\frac{\lambda v+1}{\lambda+1}e^{v}$.

C'est la même fonction génératrice que celle de *X* dans laquelle on remplace λ par $\frac{1}{\lambda}$.

La loi de probabilité de *Y* se déduit de celle de *X* en y remplaçant λ par $\frac{1}{\lambda}$:

$$\boxed{P\,(Y = n) = \frac{1}{n!}\frac{1}{e}\frac{1+\lambda n}{1+\lambda}}$$

Pour $\lambda = 0$, la loi de *Y* est donnée par $P\,(Y = n) = e^{-1}\,\frac{1}{n!}$, $n \geq 0$.

Pour $\lambda = 0$, la variable *Y* suit une loi de Poisson de paramètre 1.

c) Loi de $Z = X + Y - 1$.

$$g_{X+Y}(u) = E\,(u^{X+Y}) = E\,(u^X\,u^Y) = g_{(X, Y)}(u, u) = a\,(1 + \lambda)\,u\,e^{2u} = u\,e^{2(u-1)}$$

On voit alors, par récurrence, que les dérivées d'ordre $k \geq 0$ de cette fonction sont données par la formule :

$$\frac{\partial^k g_{X+Y}}{\partial u^k}\,(u) = 2^{k-1}(k + 2\,u)\,e^{2(u-1)}$$

et la loi de probabilité de $X + Y$ s'en déduit :

$$P(X+Y=k) = \frac{1}{k!}\frac{\partial^k g_{X+Y}}{\partial u^k}(0) = \frac{k}{k!}\,2^{k-1}\,e^{-2}$$

Pour $k = 0$, cette probabilité est nulle.
Pour $k \geq 1$, on obtient, avec $k - 1 = h$:

$$P(X+Y-1=h) = e^{-2}\frac{2^h}{h!},\ h \geq 0,$$

ce qui montre que, **quel que soit $\lambda \neq -1$, la variable $Z = X + Y - 1$ suit une loi de Poisson de paramètre 2.**

Remarque.

Pour $\lambda = 0$, on trouve que la somme des deux variables aléatoires indépendantes de Poisson de paramètre 1, $X - 1$ et Y , est une variable de Poisson de paramètre 2.
C'est un fait général : la somme de deux variables indépendantes de Poisson est une variable de Poisson.

Chapitre 10. Lois conjointes discrètes, indépendance.

Enoncés.

Exercice 7. L'observation à deux niveaux.

Pendant une certaine période d'observation, lorsqu'un phénomène se produit, il a une probabilité p d'être observé. Soit X le nombre de phénomènes qui se produisent pendant la période d'observation, Y le nombre de phénomènes observés. 1°/ Quelle est la loi conditionnelle de Y connaissant X ? 2°/ Exprimer la fonction génératrice de Y en fonction de celle de X. 3°/ Quelle est la loi de probabilité de Y dans les cas suivants : a) X suit une loi de Poisson de paramètre λ. b) X suit une loi binomiale de paramètres n et p'. c) X suit une loi géométrique sur $\mathbb{N}$ de paramètre p'.	

Solution.

1°/ Loi conditionnelle de Y.

Pour un phénomène qui se produit, de deux choses l'une, ou bien il est observé, c'est le succès, de probabilité p, ou bien il n'est pas observé, c'est l'échec, de probabilité $q = 1 - p$.
Le fait de regarder si le phénomène est observé ou non constitue une épreuve de Bernoulli.
Lorsqu'on répète cette épreuve de Bernoulli pour les $X = m$ phénomènes qui se produisent pendant la période d'observation, le nombre de succès, c'est-à-dire le nombre Y de phénomènes observés, suit une **loi binomiale** de paramètres m et p.

$$P[Y = n \mid X = m] = \binom{m}{n} p^n q^{m-n}$$

2°/ Fonction génératrice du couple (X, Y).

$$g_{(X,Y)}(u, v) = E(u^X v^Y) = \sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} P(\{X = m\} \cap \{Y = n\}) u^m v^n = \sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} P[Y = n \mid X = m] P(X = m) u^m v^n$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{n=m} \binom{m}{n} p^n q^{m-n} v^n \right) P(X = m) u^m$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} (q + p v)^m P(X = m) u^m$$

$= g_X [u (q + p v)]$

$$\boxed{g_{(X, Y)} (u, v) = g_X [u (q + p v)]}$$

Remarque.

Réciproquement, supposons que $g_{(X, Y)} (u, v) = g_X [u (q + p v)]$.
On peut alors écrire :

$$g_{(X, Y)} (u, v) = \sum_{(m, n) \in \mathbb{N}^2} P [Y = n \mid X = m] P (X = m) u^m v^n$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} (q + p v)^m P (X = m) u^m$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{n=m} \binom{m}{n} p^n q^{m-n} v^n \right) P (X = m) u^m$$

D'où, par identification :

$$P [Y = n \mid X = m] = \sum_{n=0}^{n=m} \binom{m}{n} p^n q^{m-n}$$

ce qui montre que la loi conditionnelle de Y pour X fixé est une loi binomiale.

La relation $g_{(X, Y)} (u, v) = g_X [u (q + p v)]$ est une **condition nécessaire et suffisante** pour que la loi conditionnelle de Y pour $X = m$ fixé, soit une **loi binomiale de paramètres *m* et *p***.

3°/ Fonction génératrice de *Y*.

$g_Y (v) = E (v^Y) = g_{(X, Y)} (1, v) = g_X [q + p v]$

$$\boxed{g_Y (v) = g_X (q + p v)}$$

4°/ Loi marginale de *Y*.

a) *X* suit une loi de Poisson.

Si X suit une loi de Poisson de paramètre λ, sa fonction génératrice est :

$$g_X (u) = e^{\lambda (u - 1)}$$

La fonction génératrice de Y s'en déduit d'après la formule de la deuxième question :

$$g_Y(v) = g_X(q + p\,v) = e^{\lambda(q + p\,v - 1)} = e^{\lambda p(v-1)}.$$

Y suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda\,p$.

b) X suit une loi binomiale de paramètres n et p'.

Si X suit une loi binomiale de paramètres n et p', sa fonction génératrice est :

$$g_X(u) = (q' + p'\,u)^n$$

La fonction génératrice de Y s'en déduit d'après la formule de la deuxième question :

$$g_Y(v) = g_X(q + p\,v) = (q' + p'(q + p\,v))^n = (1 - p' + p'\,q + p\,p'\,v))^n = (1 - p\,p' + p\,p'\,v))^n$$

Y suit une loi binomiale de paramètres n et $p\,p'$.

c) X suit une loi géométrique sur $\mathbb{N}$ de paramètre p'.

La fonction génératrice de X est $g_X(u) = \frac{p'}{1 - q'u}$ (Chapitre 9, Exercice 6) avec $q' = 1 - p'$.
La fonction génératrice de Y s'en déduit d'après la formule de la deuxième question, avec $1 - q\,q' - p' = q'\,p$:

$$g_Y(v) = g_X(q + p\,v) = \frac{p'}{1 - q'(q + pv)} = \frac{\frac{p'}{1 - qq'}}{1 - \left(1 - \frac{p'}{1 - qq'}\right)v}$$

Y suit une loi géométrique sur $\mathbb{N}$ de paramètre $\frac{p'}{1 - qq'}$.

Chapitre 10. Lois conjointes discrètes, indépendance.

Enoncés.

Exercice 8. Equation aux dérivées partielles de la fonction génératrice de deux variables indépendantes.

On considère deux variables aléatoires X et Y, discrètes à valeurs entières positives, dont la fonction génératrice est donnée par :

$$g_{(X, Y)}(u, v) = \lambda (4 + 4 u + 4 v + 4 u^2 + 4 u v + v^2 + 4 u^2 v + u v^2 + u^2 v^2)$$

1°/ Quelle est la valeur de λ ?
2°/ Calculer l'espérance et la variance de X.
3°/ Calculer l'espérance et la variance de Y.
4°/ Calculer la covariance de X et Y.
5°/ Vérifier la relation $g_{(X, Y)} \frac{\partial^2 g_{(X,Y)}}{\partial u \, \partial v} - \frac{\partial g_{(X,Y)}}{\partial u} \frac{\partial g_{(X,Y)}}{\partial v} = 0$.
Montrer que cette relation est une condition nécessaire et suffisante pour que deux variables aléatoires X et Y, discrètes à valeurs entières positives, soient indépendantes.

Solution.

1°/ Condition de normalisation.

$$g_{(X, Y)}(1, 1) = 1 \Rightarrow \lambda (4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 1 + 4 + 1 + 1) = 1$$
$$27 \lambda = 1$$

$$\boxed{\lambda = \frac{1}{27}}$$

$$g_{(X, Y)}(u, v) = \frac{1}{27} (4 + 4 u + 4 v + 4 u^2 + 4 u v + v^2 + 4 u^2 v + u v^2 + u^2 v^2)$$

2°/ Espérance et variance de X.

$$E(X) = g'_X(1) = \frac{\partial g_{(X,Y)}}{\partial u}(1, 1) = \frac{1}{27} (4 + 8 u + 4 v + 8 u v + v^2 + 2 u v^2)_{(u, v) = (1, 1)} = 1$$

$$Var(X) = g''_X(1) + g'_X(1) - (g'_X(1))^2 = \frac{\partial^2 g_{(X,Y)}}{\partial u^2}(1, 1) + \frac{\partial g_{(X,Y)}}{\partial u}(1, 1) - \left(\frac{\partial g_{(X,Y)}}{\partial u}(1, 1) \right)^2$$

$$= \frac{1}{27}(8 + 8\,v + 2\,v^2)_{(u, v) = (1, 1)} + 1 - 1 = \frac{18}{27} = \frac{2}{3}$$

$$\boxed{E(X) = 1 \text{ ; } Var(X) = \frac{2}{3}}$$

3°/ Espérance et variance de *Y*.

$$E(Y) = g'_Y(1) = \frac{\partial g_{(X,Y)}}{\partial v}(1, 1) = \frac{1}{27}(4 + 4\,u + 2\,v + 4\,u^2 + 2\,u\,v + 2\,u^2\,v)_{(u, v) = (1, 1)} = \frac{18}{27} = \frac{2}{3}$$

$$Var(Y) = g''_Y(1) + g'_Y(1) - (g'_Y(1))^2 = \frac{\partial^2 g_{(X,Y)}}{\partial v^2}(1, 1) + \frac{\partial g_{(X,Y)}}{\partial v}(1, 1) - \left(\frac{\partial g_{(X,Y)}}{\partial v}(1, 1)\right)^2$$

$$= \frac{1}{27}(2 + 2\,u + 2\,u^2)_{(u, v) = (1, 1)} + \frac{2}{3} - \frac{4}{9} = \frac{6}{27} = \frac{2}{9}$$

$$\boxed{E(Y) = \frac{2}{3} \text{ ; } Var(Y) = \frac{2}{9}}$$

4°/ Covariance de *X* et *Y*.

$$Cov(X, Y) = E(X\,Y) - E(X)\,E(Y) = \frac{\partial^2 g_{(X,Y)}}{\partial u\,\partial v}(1, 1) - \frac{\partial g_{(X,Y)}}{\partial u}(1, 1) \times \frac{\partial g_{(X,Y)}}{\partial v}(1, 1)$$

$$= \frac{1}{27}(4 + 8\,u + 2\,v + 4\,u\,v)_{(u, v) = (1, 1)} - 1 \times \frac{2}{3} = \frac{18}{27} - \frac{2}{3} = 0$$

$$\boxed{Cov(X, Y) = 0}$$

5°/ Indépendance.

Pour que les variables *X* et *Y* soient indépendantes, il faut et il suffit que la fonction génératrice de (*X*, *Y*) soit produit des fonctions génératrices de *X* et de *Y*.
Il revient au même de dire que $g_{(X, Y)}(u, v)$ est produit d'une fonction de *u* et d'une fonction de *v*.
Il revient au même de dire que $g_{(X, Y)}(u, v)$ vérifie l'équation aux dérivées partielles :

$$g_{(X, Y)}\,\frac{\partial^2 g_{(X,Y)}}{\partial u\,\partial v} - \frac{\partial g_{(X,Y)}}{\partial u}\,\frac{\partial g_{(X,Y)}}{\partial v} = 0$$

Démonstration.

a) Condition nécessaire.

Supposons que *X* et *Y*, variables aléatoires discrètes à valeurs entières positives, sont indépendantes.
On sait qu'alors la fonction génératrice de (*X*, *Y*) est produit des fonctions génératrices de *X* et de *Y* :

$$g_{(X, Y)}(u, v) = g_X(u) \times g_Y(v)$$

$$\frac{\partial g_{(X,Y)}}{\partial u}(u, v) = \frac{d g_X}{d u}(u) \times g_Y(v)$$
$$\frac{\partial g_{(X,Y)}}{\partial v}(u, v) = g_X(u) \times \frac{d g_Y}{d v}(v)$$
$$\frac{\partial^2 g_{(X,Y)}}{\partial u \partial v}(u, v) = \frac{d g_X}{d u}(u) \times \frac{d g_Y}{d v}(v)$$
$$g_{(X, Y)} \frac{\partial^2 g_{(X,Y)}}{\partial u \partial v} = g_{(X, Y)} \frac{d g_X}{d u}(u) \times \frac{d g_Y}{d v}(v)$$
$$= g_X(u) \times g_Y(v) \frac{d g_X}{d u}(u) \times \frac{d g_Y}{d v}(v)$$
$$= \frac{\partial g_{(X,Y)}}{\partial u} \frac{\partial g_{(X,Y)}}{\partial v}$$

b) Condition suffisante.

Supposons que la fonction génératrice de (X, Y) vérifie l'équation aux dérivées partielles :

$$g_{(X, Y)} \frac{\partial^2 g_{(X,Y)}}{\partial u \partial v} - \frac{\partial g_{(X,Y)}}{\partial u} \frac{\partial g_{(X,Y)}}{\partial v} = 0.$$

Cette équation aux dérivées partielles peut être écrite, en divisant par $(g_{(X, Y)})^2$:

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{g_{(X,Y)}} \frac{\partial g_{(X,Y)}}{\partial u} \right) = 0$$
$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial}{\partial u}(ln \mid g_{(X, Y)} \mid) \right) = 0$$

Cette relation montre que $\frac{\partial}{\partial u}(ln \mid g_{(X, Y)} \mid)$ ne dépend pas de v, c'est une fonction de u uniquement.
Donc $ln \mid g_{(X, Y)} \mid$ est somme d'une fonction de u et d'une fonction de v.
Donc $g_{(X, Y)}$ est produit d'une fonction de u et d'une fonction de v.

$$g_{(X, Y)}(u, v) = f_X(u) \times f_Y(v)$$
$$g_X(u) = g_{(X, Y)}(u, 1) = f_X(u) \times f_Y(1)$$
$$g_Y(v) = g_{(X, Y)}(1, v) = f_X(1) \times f_Y(v)$$
$$g_X(u) \times g_Y(v) = f_X(u) \times f_Y(1) \times f_X(1) \times f_Y(v)$$

La condition de normalisation :

$$g_{(X, Y)}(1, 1) = 1$$

s'écrit :

$$f_X(1) \times f_Y(1) = 1.$$

D'où :

$$g_X(u) \times g_Y(v) = f_X(u) \times f_Y(v) = g_{(X,Y)}(u, v)$$

ce qui est une condition nécessaire et suffisante pour que X et Y soient indépendantes.

Remarque.

La **covariance** est la valeur, au point (1, 1), du premier membre de l'équation aux dérivées partielles : la nullité du premier membre au point (1, 1) n'entraîne pas la nullité du premier membre en tout point (u, v). Autrement dit, $Cov(X, Y) = 0$ n'entraîne pas que les deux variables X et Y sont indépendantes !

Application au cas étudié.

Ici, on a :

$$g_{(X,Y)}(u, v) \frac{\partial^2 g_{(X,Y)}}{\partial u \, \partial v}(u, v) = \frac{1}{27}(4 + 4u + 4v + 4u^2 + 4uv + v^2 + 4u^2v + uv^2 + u^2v^2) \times \frac{1}{27}(4 + 8u + 2v + 4uv)$$

$$= \frac{1}{27^2}(1 + u + u^2)(2 + v)^2(4 + 2v)(1 + 2u)$$
$$= \frac{2}{27^2}(1 + u + u^2)(1 + 2u)(2 + v)^3$$

$$\frac{\partial g_{(X,Y)}}{\partial u}(u, v) \frac{\partial g_{(X,Y)}}{\partial v}(u, v) = \frac{1}{27}(4 + 8u + 4v + 8uv + v^2 + 2uv^2) \times \frac{1}{27}(4 + 4u + 2v + 4u^2 + 2uv + 2u^2v)$$

$$= \frac{1}{27^2}(1 + 2u)(4 + 4v + v^2)(1 + u + u^2)(4 + 2v)$$
$$= \frac{2}{27^2}(1 + u + u^2)(1 + 2u)(2 + v)^3$$

$g_{(X,Y)}(u, v)$ vérifie donc bien l'équation aux dérivées partielles, donc les variables X et Y sont indépendantes.

Remarquons d'ailleurs qu'on peut écrire directement :

$$g_{(X,Y)}(u, v) = \frac{1}{27}(4 + 4u + 4v + 4u^2 + 4uv + v^2 + 4u^2v + uv^2 + u^2v^2)$$

$$= \frac{1}{27}(1 + u + u^2)(4 + 4v + v^2)$$
$$= \frac{1}{27}(1 + u + u^2)(2 + v)^2$$

$$g_X(u) = g_{(X,Y)}(u, 1) = \frac{1}{3}(1 + u + u^2)$$
$$g_Y(v) = g_{(X,Y)}(1, v) = \frac{1}{9}(2 + v)^2$$
$$g_{(X,Y)}(u, v) = g_X(u) \times g_Y(v)$$

L'expression $g_X(u) = \frac{1}{3}(1 + u + u^2)$ montre que ***X* suit une loi uniforme** sur $\{0, 1, 2\}$.

L'expression $g_Y(v) = \frac{1}{9}(2 + v)^2$ montre que ***Y* suit une loi binomiale** de paramètres $n = 2$, $p = \frac{1}{3}$.

Chapitre 10. Lois conjointes discrètes, indépendance.

Enoncés.

Exercice 9. Fonction génératrice exponentielle.

On considère deux variables aléatoires X et Y, discrètes à valeurs entières positives, dont la fonction génératrice est donnée par :

$$g_{(X, Y)}(u, v) = e^{\lambda((1-p)u + puv - 1)}$$

1°/ Calculer l'espérance et la variance de X.
2°/ Calculer l'espérance et la variance de Y.
3°/ Calculer la covariance de X et Y.
4°/ Quelles sont les lois marginales de X et de Y ?
5°/ Vérifier la relation $g_{(X, Y)}(u, v) = g_X(u((1-p) + pv))$.
Montrer que cette relation est une condition nécessaire et suffisante pour que la loi conditionnelle de Y pour $X = n$ fixé, soit une loi binomiale de paramètres n et p.

Solution.

1°/ Espérance et variance de X.

$$E(X) = g'_X(1) = \frac{\partial g_{(X,Y)}}{\partial u}(1, 1) = [\lambda((1-p) + pv)\, e^{\lambda((1-p)u + puv - 1)}]_{(u, v) = (1, 1)} = \lambda.$$

$$Var(X) = g''_X(1) + g'_X(1) - (g'_X(1))^2 = \frac{\partial^2 g_{(X,Y)}}{\partial u^2}(1, 1) + \frac{\partial g_{(X,Y)}}{\partial u}(1, 1) - \left(\frac{\partial g_{(X,Y)}}{\partial u}(1, 1)\right)^2$$

$$= [(\lambda((1-p) + pv))^2\, e^{\lambda((1-p)u + puv - 1)}]_{(u, v) = (1, 1)} + \lambda - \lambda^2 = \lambda.$$

$$\boxed{E(X) = \lambda \ ; \ Var(X) = \lambda}$$

2°/ Espérance et variance de Y.

$$E(Y) = g'_Y(1) = \frac{\partial g_{(X,Y)}}{\partial v}(1, 1) = [\lambda p u\, e^{\lambda((1-p)u + puv - 1)}]_{(u, v) = (1, 1)} = \lambda p.$$

$$Var(Y) = g''_Y(1) + g'_Y(1) - (g'_Y(1))^2 = \frac{\partial^2 g_{(X,Y)}}{\partial v^2}(1, 1) + \frac{\partial g_{(X,Y)}}{\partial v}(1, 1) - \left(\frac{\partial g_{(X,Y)}}{\partial v}(1, 1)\right)^2$$

$$= [(\lambda p u)^2\, e^{\lambda((1-p)u + puv - 1)}]_{(u, v) = (1, 1)} + \lambda p - (\lambda p)^2 = \lambda p.$$

$$\boxed{E(X) = \lambda p \ ; \ Var(X) = \lambda p}$$

3°/ Covariance de *X* et *Y*.

$$Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{\partial^2 g_{(X,Y)}}{\partial u \, \partial v}(1, 1) - \frac{\partial g_{(X,Y)}}{\partial u}(1, 1) \times \frac{\partial g_{(X,Y)}}{\partial v}(1, 1)$$

$$= \left[(\lambda p + \lambda^2 p u ((1 - p) + p v)) e^{\lambda ((1-p) u + p u v - 1)}\right]_{(u, v) = (1, 1)} - \lambda \times \lambda p = \lambda p (1 + \lambda) - \lambda^2 p = \lambda p.$$

$$\boxed{Cov(X, Y) = \lambda p.}$$

Comme la covaraince n'est pas nulle, les variables *X* et *Y* ne risquent pas d'être indépendantes.

$$\boxed{X \text{ et } Y \text{ ne sont pas indépendantes.}}$$

4°/ Lois marginales.

$$g_X(u) = g_{(X, Y)}(u, 1) = e^{\lambda (u - 1)}$$

$$\boxed{X \text{ suit une loi de Poisson de paramètre } \lambda.}$$

$$g_Y(v) = g_{(X, Y)}(1, v) = e^{\lambda p (v - 1)}$$

$$\boxed{Y \text{ suit une loi de Poisson de paramètre } \lambda p.}$$

5°/ Loi conditionnelle.

La relation

$$g_{(X, Y)}(u, v) = e^{\lambda ((1-p) u + p u v - 1)} = e^{\lambda (u ((1-p) + p v) - 1)} = g_X(u ((1 - p) + p v))$$

montre que, pour $X = n$ fixé, *Y* suit une loi binomiale de paramètres *n* et *p*.

$$\boxed{\text{Pour } X = n \text{ fixé, } Y \text{ suit une loi binomiale de paramètres } n \text{ et } p.}$$

Démonstration.

a) Condition suffisante.

Supposons que, étant données deux variables aléatoires discrètes à valeurs entières positives, pour $X = n$ fixé, *Y* suive une loi binomiale de paramètres *n* et *p*.
Alors la fonction génératrice de (*X*, *Y*) est :

$$g_{(X, Y)}(u, v) = \sum_{(m, n) \in \mathbb{N}^2} P(X = m \text{ et } Y = n) \, u^m \, v^n$$

$$= \sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} P(Y = n \mid X = m)\, P(X = m)\, u^m v^n$$

$$= \sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} \binom{m}{n} p^n (1-p)^{m-n} P(X = m)\, u^m v^n$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{n=m} \binom{m}{n} \left(\frac{pv}{1-p} \right)^n \right) (1-p)^m P(X = m)\, u^m$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \left(1 + \frac{pv}{1-p} \right)^m (1-p)^m P(X = m)\, u^m$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} (u((1-p) + pv))^m P(X = m)$$

$$= g_X(u((1-p) + pv))$$

b) Condition nécessaire.

Réciproquement, supposons que l'on ait $g_{(X, Y)}(u, v) = g_X(u((1-p) + pv))$.
Alors :

$$g_{(X, Y)}(u, v) = \sum_{m=0}^{\infty} (u((1-p) + pv))^m P(X = m)$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \left(1 + \frac{pv}{1-p} \right)^m (1-p)^m P(X = m)\, u^m$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{n=m} \binom{m}{n} \left(\frac{pv}{1-p} \right)^n \right) (1-p)^m P(X = m)\, u^m$$

$$= \sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} \binom{m}{n} p^n (1-p)^{m-n} P(X = m)\, u^m v^n$$

Mais comme, d'autre part, on a toujours :

$$g_{(X, Y)}(u, v) = \sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} P(X = m \text{ et } Y = n)\, u^m v^n$$

$$= \sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} P(Y = n \mid X = m)\, P(X = m)\, u^m v^n$$

il vient, par identification des deux développements :

$$P(Y = n \mid X = m) = \binom{m}{n} p^n (1-p)^{m-n}$$

ce qui montre que la loi conditionnelle de Y pour $X = m$ fixé, est une loi binomiale de paramètres m et p.

La relation $g_{(X, Y)}(u, v) = g_X(u((1 - p) + p\,v))$ est une condition nécessaire et suffisante pour que la loi conditionnelle de Y pour $X = m$ fixé, soit une loi binomiale de paramètres m et p.

Chapitre 10. Lois conjointes discrètes, indépendance.

Enoncés.

Exercice 10. Combinaisons linéaires de deux variables.

Soient λ un nombre réel positif et (X, Y) un couple de variables aléatoires réelles à valeurs entières, dont la fonction génératrice est :

$$g_{(X, Y)}(u, v) = \lambda (u + v) e^{(u + v)}$$

1°/ Calculer λ.
2°/ Calculer la loi de probabilité du couple (X, Y).
3°/ Calculer la loi marginale de X. Calculer l'espérance et la variance de X.
4°/ Calculer l'espérance et la variance de la variable aléatoire $Z = \frac{1}{X+1}$.
5°/ Quelle est la loi conditionnelle de Y connaissant X ? Quelle est la fonction génératrice de cette loi ?
6°/ Exprimer, en fonction de Z, l'espérance conditionnelle $E_X(Y)$ et la variance conditionnelle $Var_X(Y)$ de Y connaissant X.
7°/ Calculer l'espérance de $E_X(Y)$. En déduire l'espérance de Y.
8°/ Calculer la variance de $E_X(Y)$. En déduire la variance de Y.
9°/ Calculer la loi marginale de Y. En déduire l'espérance et la variance de Y. Comparer avec les résultats précédents.
10°/ Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire $T = X + Y - 1$? En déduire l'espérance et la variance de la variable aléatoire $X + Y$.
11°/ Calculer la covariance de X et Y. Calculer le coefficient de corrélation linéaire de X et Y. Conclusion ?
12°/ Calculer la covariance de X et $X + 5Y$. Les variables X et $X + 5Y$ sont-elles indépendantes ?

Solution.

1°/ Condition de normalisation.

La condition de normalisation :

$$g_{(X, Y)}(1,1) = 1$$

exprime que la somme des probabilités est égale à 1. Elle s'écrit ici :

$$2 \lambda e^2 = 1.$$

On en déduit la valeur de λ :

$$\boxed{\lambda = \frac{1}{2e^2}}$$

La fonction génératrice du couple (X, Y) s'écrit alors :

$$\boxed{g_{(X,Y)}(u, v) = \frac{1}{2e^2}(u + v)\, e^{(u+v)}}$$

2°/ Loi de probabilité du couple (X, Y).

Lemme.

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{k!} u^k = u\, e^u}$$

Démonstration du lemme. (Analyse, Chapitre 12, Exercice 6, 1°).

Dans la somme $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{k!} u^k$, le premier terme est nul et la somme s'écrit :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{k!} u^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k!} u^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!} u^k$$
$$= u \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!} u^{k-1} = u \sum_{h=0}^{\infty} \frac{u^h}{h!} = u\, e^u$$

Par application du lemme précédent, on obtient :

$$(u + v)\, e^{(u+v)} = u\, e^u\, e^v + v\, e^u\, e^v = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{m}{m!} u^m \sum_{n=0}^{\infty} \frac{v^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n!} v^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{u^m}{m!}$$

$$(u + v)\, e^{(u+v)} = \sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} \frac{m+n}{m!\, n!} u^m v^n$$

$$g_{(X,Y)}(u, v) = \frac{1}{2e^2}(u + v)\, e^{(u+v)} = \frac{1}{2e^2} \sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} \frac{m+n}{m!\, n!} u^m v^n$$

Par identification de ce développement avec la définition de la fonction génératrice :

$$g_{(X,Y)}(u,v) = \sum_{(m,n)\in\mathbb{N}^2} P[X=m \text{ et } Y=n]\, u^m v^n,$$

il vient :

$$\boxed{P[X=m \text{ et } Y=n] = \frac{1}{2e^2}\frac{m+n}{m!\,n!}}$$

3°/ Loi marginale de *X*.

La fonction génératrice de *X* est donnée par :

$$g_X(u) = g_{(X,Y)}(u,1) = \frac{1}{2e^2}(u+1)e^{(u+1)} = \frac{u+1}{2e}e^u = \frac{1}{2e}(e^u + u e^u)$$

$$g_X(u) = \frac{1}{2e}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{m+1}{m!}u^m$$

La loi marginale de *X* s'en déduit :

$$\boxed{P[X=m] = \frac{1}{2e}\frac{m+1}{m!},\ m\geq 0}$$

Espérance et variance de *X* se calculent à partir des moments factoriels :

$$E(X) = M_1 = \frac{dg_X}{du}(1) = \frac{1}{2e}[(u+2)e^u]_{u=1} = \frac{3}{2}$$

$$Var(X) = M_2 + M_1 - (M_1)^2$$

$$= \frac{d^2 g_X}{du^2}(1) + \frac{3}{2} - \frac{9}{4}$$

$$= \frac{1}{2e}[(u+3)e^u]_{u=1} + \frac{3}{2} - \frac{9}{4}$$

$$= 2 + \frac{3}{2} - \frac{9}{4} = \frac{5}{4}$$

$$\boxed{E(X) = \frac{3}{2}\ ;\ Var(X) = \frac{5}{4}}$$

4°/ Variable *Z*.

$$E(Z) = E\left(\frac{1}{X+1}\right) = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m+1}P(X=m) = \frac{1}{2e}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!} = \frac{1}{2}$$

$$E(Z^2) = E\left(\frac{1}{(X+1)^2}\right) = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(m+1)^2}P(X=m) = \frac{1}{2e}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(m+1)!} = \frac{1}{2e}(e-1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2e}$$

$$Var(Z) = E(Z^2) - (E(Z))^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2e} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2e}$$

$$\boxed{E(Z) = \frac{1}{2} \; ; \; Var(Z) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2e}}$$

5°/ Loi conditionnelle de *Y* connaissant *X*.

$$P[Y = n \mid X = m] = \frac{P\left(\{X = m\} \cap \{Y = n\}\right)}{P\left(\{X = m\}\right)} = \frac{\frac{1}{2e^2}\frac{m+n}{m!\,n!}}{\frac{1}{2e}\frac{m+1}{m!}} = \frac{1}{e}\frac{m+n}{m+1}\frac{1}{n!}$$

$$\boxed{P[Y = n \mid X = m] = \frac{1}{e}\frac{m+n}{m+1}\frac{1}{n!}}$$

La fonction génératrice de *Y* connaissant *X* est donc donnée par :

$$g_{Y \mid X = m}(u) = \sum_{n=0}^{\infty} P[Y = n \mid X = m]\, v^n = \frac{1}{e}\frac{m}{m+1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{v^n}{n!} + \frac{1}{e}\frac{1}{m+1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{n!}v^n = \frac{1}{e}\frac{m+v}{m+1}\,e^v$$

$$\boxed{g_{Y \mid X = m}(u) = \frac{m+v}{m+1}\,e^{v-1}}$$

6°/ Espérance et variance conditionnelles de *Y* connaissant *X*.

$$E_X(Y) = \frac{d\,g_{Y \mid X}}{dv}(1) = \left[\frac{m+1+v}{m+1}\;e^{v-1}\right]_{v=1} = \frac{m+2}{m+1} = 1 + \frac{1}{m+1} = 1 + \frac{1}{X+1} = 1 + Z$$

$$\boxed{E_X(Y) = 1 + Z}$$

Le moment factoriel conditionnel d'ordre 2 est :

$$\frac{d^2\,g_{Y \mid X}}{dv^2}(1) = \left[\frac{m+2+v}{m+1}\;e^{v-1}\right]_{v=1} = 1 + \frac{2}{m+1} = 1 + 2\,Z.$$

La variance conditionnelle de *Y* par *X* s'en déduit :

$$Var_X(Y) = (1 + 2\,Z) + (1 + Z) - (1 + Z)^2 = 2 + 3\,Z - 1 - 2\,Z - Z^2 = 1 + Z - Z^2$$

$$\boxed{Var_X(Y) = 1 + Z - Z^2}$$

7°/ Espérance de *Y*.

L'espérance de l'espérance conditionnelle de *Y* est :

$$E(E_X(Y)) = E(1 + Z) = 1 + E(Z) = \frac{3}{2}$$

Le théorème de la moyenne conditionnelle donne :

$$\boxed{E(Y) = E(E_X(Y)) = \frac{3}{2}}$$

8°/ Variance de *Y*.

La variance de l'espérance conditionnelle de *Y* est :

$$Var(E_X(Y)) = Var(1 + Z) = Var(Z) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2e}$$

L'espérance de la variance conditionnelle de *Y* est :

$$E(Var_X(Y)) = E(1 + Z - Z^2) = 1 + E(Z) - E(Z^2) = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2e} = 1 + \frac{1}{2e}$$

Le théorème de la variance conditionnelle donne :

$$Var(Y) = E(Var_X(Y)) + Var(E_X(Y)) = 1 + \frac{1}{2e} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2e} = \frac{5}{4}$$

$$\boxed{Var(Y) = E(Var_X(Y)) + Var(E_X(Y)) = \frac{5}{4}}$$

9°/ Loi marginale de *Y*.

La fonction génératrice de *Y* est :

$$g_Y(v) = g_{(X,Y)}(1, v) = \frac{1}{2e^2}(1 + v)\, e^{(1+v)} = g_X(v).$$

Les variables aléatoires *X* et *Y* ont donc la même loi de probabilité, donc aussi même espérance et même variance.

$$\boxed{\begin{array}{c} P[Y = n] = \frac{1}{2e}\frac{n+1}{n!},\ n \geq 0 \\ E(Y) = \frac{3}{2}\ ;\ Var(Y) = \frac{5}{4} \end{array}}$$

10°/ Loi de *X* + *Y* – 1.

La fonction génératrice de la somme $S = X + Y$ est donnée par :

$$g_S(u) = g_{X+Y}(u) = g_{(X,Y)}(u, u) = \frac{1}{2e^2}\, 2\, u\, e^{2u} = u\, e^{2(u-1)}.$$

La fonction génératrice de $S - 1$ est donc $u^{-1}\, g_S(u) = e^{2(u-1)}$.
C'est la fonction génératrice d'une variable de Poisson de paramètre 2.

La variable aléatoire $X + Y - 1$ suit une loi de Poisson de paramètre 2.

On a donc :

$$E(X + Y - 1) = 2 \text{ et } Var(X + Y - 1) = 2.$$

On en déduit :

$$E(X + Y) = E(X + Y - 1) + 1 = 3$$
$$Var(X + Y) = Var(X + Y - 1) = 2$$

11°/ Covariance et coefficient de corrélation linéaire de *X* et *Y*.

$$Cov(X, Y) = \frac{1}{2}(Var(X + Y) - Var(X) - Var(Y)) = \frac{1}{2}(2 - 2 \times \frac{5}{4}) = 1 - \frac{5}{4} = -\frac{1}{4}$$
$$r(X, Y) = \frac{Cov(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = -\frac{1}{4} \times \frac{4}{5} = -\frac{1}{5}$$

$$Cov(X, Y) = -\frac{1}{4} \; ; \; r(X, Y) = -\frac{1}{5}$$

Comme la covariance et le coefficient de corrélation linéaire de X et Y ne sont pas nuls, les variables X et Y ne sont pas indépendantes.

12°/ Covariance de *X* et *a X + b Y*.

$$Cov(X, a X + b Y) = a\, Cov(X, X) + b\, Cov(X, Y) = a\, Var(X) + b\, Cov(X, Y) = \frac{5a - b}{4}.$$

Cette covariance est nulle si $b = 5\, a$:

$$Cov(X, X + 5\, Y) = 0$$

Considérons, par exemple, l'événement $X + 5\, Y = 1$. La seule façon d'avoir $X + 5\, Y = 1$ est de prendre $X = 1$ et $Y = 0$, puisque X et Y ne prennent que des valeurs entières positives. On a donc :

$$\{X + 5\, Y = 1\} = \{X = 1 \text{ et } Y = 0\} = \{X = 1\} \cap \{Y = 0\}$$
$$\{X = 1\} \cap \{X + 5\, Y = 1\} = \{X = 1\} \cap \{X = 1\} \cap \{Y = 0\} = \{X = 1\} \cap \{Y = 0\} = \{X + 5\, Y = 1\}$$
$$P[\{X = 1\} \cap \{X + 5\, Y = 1\}] = P[\{X + 5\, Y = 1\}] = P[X = 1 \text{ et } Y = 0] = \frac{1}{2e^2} \neq 0$$

La loi marginale de X donne :

$$P[X = 1] = \frac{1}{e} \neq 1$$

On a donc :

$$P[\{X = 1\} \cap \{X + 5\, Y = 1\}] = P[X + 5\, Y = 1] \neq P[X + 5\, Y = 1] \times P[X = 1]$$

Cette relation montre que :

Les variables X et $X + 5Y$ ne sont pas indépendantes.

On a donc trouvé là un nouvel exemple de deux variables aléatoires dont la covariance est nulle sans qu'elles soient indépendantes.

Chapitre 10. Lois conjointes discrètes, indépendance.

Enoncés.

Exercice 11. Variables indépendantes dans un triplet aléatoire.

Soit $(X, Y, Z) : \Omega \to \mathbb{N}^3$ un triplet aléatoire discret à valeurs entières.
On suppose que la loi de ce triplet est donnée, pour $p \in]0, 1[$, par :

$$P[(X, Y, Z) = (i, j, k)] = \begin{cases} \frac{1}{3} p^2 (1-p)^{i+j} & \forall i \in \mathbb{N}, \forall j \in \mathbb{N}, \forall k \in \{j, j+1, j+2\} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

1°/ Vérifier que l'on définit bien ainsi un triplet aléatoire.
2°/ Expliciter la loi de chacune des variables aléatoires X et Y. Calculer $E(X)$, $E(Y)$.
3°/ Montrer que les variables X et Y sont indépendantes.
Expliciter la loi du couple (X, Y) puis celle de la variable aléatoire $X + Y$.
4°/ Calculer $P(Z) = 0$, $P(Z = 1)$, $P(Z = 2)$, puis $P(Z = k)$ pour tout $k \geq 3$.
5°/ Montrer que $P(Z \geq Y) = 1$.

Solution.

1°/ Triplet aléatoire.

En premier lieu, il est clair que les valeurs de P sont toutes positives ou nulles, puisque ce sont soit 0, soit un produit de nombres réels positifs (et inférieurs à 1).

La somme des valeurs de P est :

$$\sum_{(i,j,k)} P[(X, Y, Z) = (i, j, k)] = \frac{1}{3} p^2 \sum_{i=0}^{\infty} (1-p)^i \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=j}^{k=j+2} (1-p)^j$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=j}^{k=j+2} (1-p)^j = \sum_{j=0}^{\infty} 3(1-p)^j = 3 \sum_{j=0}^{\infty} (1-p)^j$$

$$\sum_{(i,j,k)} P[(X, Y, Z) = (i, j, k)] = p^2 \sum_{i=0}^{\infty} (1-p)^i \sum_{j=0}^{\infty} (1-p)^j = p^2 \times \frac{1}{1-(1-p)} \times \frac{1}{1-(1-p)} = 1$$

$$\boxed{\sum_{(i,j,k)} P[(X, Y, Z) = (i, j, k)] = 1}$$

Ces résultats montrent bien que (X, Y, Z) constitue un triplet aléatoire, puisqu'il induit une probabilité sur $\mathbb{N}^3$.

2°/ Lois marginales et espérances de X et Y.

La fonction génératrice du triplet (X, Y, Z) est :

$$E\left(u^X v^Y w^Z\right) = \sum_{(i,j,k)} u^i v^j w^k P\left[(X, Y, Z) = (i, j, k)\right]$$

$$= \frac{1}{3} p^2 \sum_{i=0}^{\infty} (1-p)^i u^i \sum_{j=0}^{\infty} (1-p)^j v^j \sum_{k=j}^{k=j+2} w^k$$

$$= \frac{1}{3} p^2 \sum_{i=0}^{\infty} (1-p)^i u^i \sum_{j=0}^{\infty} (1-p)^j v^j w^j \left(1 + w + w^2\right)$$

$$= \frac{1}{3} \frac{1}{1-(1-p)u} \frac{1}{1-(1-p)vw} \left(1 + w + w^2\right)$$

$$\boxed{g_{(X, Y, Z)}(u, v, w) = \frac{1}{3} \frac{p}{1-(1-p)u} \frac{p}{1-(1-p)vw} \left(1 + w + w^2\right)}$$

La **loi marginale de X** est donnée par sa fonction génératrice :

$$g_X(u) = g_{(X, Y, Z)}(u, 1, 1) = \frac{p}{1-(1-p)u}$$

On reconnaît la fonction génératrice d'une variable géométrique de paramètre p sur $\mathbb{N}$ ($(X + 1)$ suit une loi géométrique de paramètre p sur $\mathbb{N}^*$).

$$\boxed{P(X = i) = p(1-p)^i}$$

La **loi marginale de Y** est donnée par sa fonction génératrice :

$$g_Y(v) = g_{(X, Y, Z)}(1, v, 1) = \frac{p}{1-(1-p)v}$$

Y a la même fonction génératrice que X, C'est aussi une variable géométrique de paramètre p sur $\mathbb{N}$.

$$\boxed{P(Y = j) = p(1-p)^j}$$

L'**espérance de X et de Y** est la valeur de la dérivée de la fonction génératrice en $u = 1$:

$$g'_X(u) = \frac{p(1-p)}{\left(1-(1-p)u\right)^2}$$

$$E(X) = g'_X(1) = \frac{1-p}{p}$$

$$\boxed{\phantom{E(X) = g'_X(1) = \frac{1-p}{p}}}$$

$$\boxed{E(X) = E(Y) = \frac{1-p}{p}}$$

3°/ Indépendance.

La fonction génératrice de la loi du couple (X, Y) est donnée par :

$$g_{(X, Y)}(u, v) = g_{(X, Y, Z)}(u, v, 1) = \frac{p}{1-(1-p)u}\frac{p}{1-(1-p)v} = g_X(u)\, g_Y(v)$$

Cette relation montre que **les variables X et Y sont indépendantes**.

Puisque ces variables sont indépendantes, la loi de probabilité du couple (X, Y) est le produit des lois marginales de X et de Y :

$$\boxed{P[(X, Y) = (i, j)] = p^2 (1-p)^{i+j}}$$

La fonction génératrice de $X + Y$ s'obtient à partir de celle du couple (X, Y) :

$$g_{X+Y}(u) = E(u^{X+Y}) = E(u^X u^Y) = g_{(X, Y)}(u, u) = \frac{p^2}{(1-(1-p)u)^2}$$

Sa dérivée d'ordre n est :

$$g^{(n)}_{X+Y}(u) = (n+1)!\, p^2 (1-p)^n \times \frac{1}{(1-(1-p)u)^{n+2}}$$

La probabilité de l'événement $X + Y = n$, qui est le coefficient de u^n dans le développement en série de la fonction génératrice, est

$$P(X + Y = n) = (n+1)\, g^{(n)}_{X+Y}(0) = (n+1)\, p^2 (1-p)^n$$

$$\boxed{P(X + Y = n) = (n+1)\, p^2 (1-p)^n}$$

4°/ Loi de Z.

La fonction génératrice de Z s'obtient à partir de la fonction génératrice du triplet (X, Y, Z) :

$$g_Z(w) = g_{(X, Y, Z)}(1, 1, w) = \frac{1}{3}\frac{p}{1-(1-p)w}(1 + w + w^2)$$

La **formule de dérivation d'un produit de Leibniz** donne :

$$g^{(n)}_Z(w) = \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k}\left(\frac{p}{1-(1-p)w}\right)^{(n-k)}(1 + w + w^2)^{(k)}$$

$$\left(\frac{p}{1-(1-p)w}\right)^{(n-k)} = (n-k)\,!\,p\,(1-p)^{n-k}\frac{1}{(1-(1-p)w)^{n-k+1}}$$

$$\binom{n}{k}\left(\frac{p}{1-(1-p)w}\right)^{(n-k)} = \frac{n!}{k!}p\,(1-p)^{n-k}\frac{1}{(1-(1-p)w)^{n-k+1}}$$

$$(1+w+w^2)^{(k)} = \begin{cases} 1+w+w^2 & \text{pour } k=0 \\ 1+2w & \text{pour } k=1 \\ 2 & \text{pour } k=2 \\ 0 & \text{pour } k\geq 3 \end{cases}$$

Pour $n = 0$, la somme a un seul terme, celui qui correspond à $k = n = 0$:

$$\boxed{P\,(Z=0) = g_Z\,(0) = \frac{1}{3}p}$$

Pour $n = 1$, la somme a deux termes, correspondant à $k = 0$ et $k = 1$:

$$P\,(Z=1) = g'_Z\,(0) = \frac{1}{3}p\,[\,(1-p)+1\,] = \frac{1}{3}p\,(2-p) = \frac{1}{3}\,(1-(1-p)^2)$$

$$\boxed{P\,(Z=1) = g'_Z\,(0) = \frac{1}{3}\,(1-(1-p)^2)}$$

Pour $n = 2$, la somme a trois termes, correspondant à $k = 0$, $k = 1$ et $k = 2$:

$$P\,(Z=2) = \frac{1}{2}g''_Z\,(0) = \frac{1}{3}p\,((1-p)^2+(1-p)+1) = \frac{1}{3}\,(1-(1-p)^3)$$

$$\boxed{P\,(Z=2) = \frac{1}{2}g''_Z\,(0) = \frac{1}{3}\,(1-(1-p)^3)}$$

Pour $n \geq 3$, la somme se réduit au trois premiers termes :

$$\frac{1}{n!}g^{(n)}{}_Z\,(0) = \frac{1}{3}p\,[\,(1-p)^n+(1-p)^{n-1}+(1-p)^{n-2}\,] = \frac{1}{3}p\,(1-p)^{n-2}\,((1-p)^2+(1-p)+1)$$

$$\boxed{P\,(Z=n) = \frac{1}{n!}g^{(n)}{}_Z\,(0) = \frac{1}{3}\,(1-p)^{n-2}\,(1-(1-p)^3),\ n\geq 3.}$$

5°/ Comparaison de *Z* et *Y*.

La fonction génératrice de $Z - Y$ est :

$$g_{Z-Y}\,(v) = E\,(w^{Z-Y}) = g_{(X,Y,Z)}\,(1, \frac{1}{w}, w) = \frac{1}{3}\,(1+w+w^2)$$

Donc $Z - Y$ prend les valeurs 0, 1, 2, avec la probabilité $\frac{1}{3}$ (loi uniforme)

La probabilité que Z soit supérieure ou égale à Y est donc $P\,(Z-Y\geq 0) = 3\times\frac{1}{3} = 1$.

La probabilité que Z soit strictement plus grande que Y est $P(Z - Y = 1) + P(Z - Y = 2) = \frac{2}{3}$

$$\boxed{P(Z \geq Y) = 1}$$

Z est somme de la variable $Z - Y$ (loi uniforme sur $\{0, 1, 2\}$ et de la variable Y (loi géométrique de paramètre p sur $\mathbb{N}$).

Chapitre 10. Lois conjointes discrètes, indépendance.

Enoncés.

Exercice 12. Variables dépendantes dans un triplet aléatoire.

Soit $(X, Y, Z) : \Omega \to \mathbb{N}^3$ un triplet aléatoire discret.
On suppose que la loi de probabilité conjointe de ce triplet est donnée, pour $p \in]0, 1[$, $q = 1 - p$, $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, par :

$$P[(X, Y, Z) = (i, j, k)] = \begin{cases} \alpha \dfrac{p^j}{j!} \dfrac{q^{k-j}}{(k-j)!} \dfrac{\lambda^k}{k+1} & \text{pour } 0 \le i \le k \text{ et } 0 \le j \le k \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

1°/ Quelle est la valeur de α ?
2°/ Calculer l'espérance mathématique et la variance de X, Y, et Z.
3°/ Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
Les variables X et Z sont-elles indépendantes ?
Les variables Y et Z sont-elles indépendantes ?
Quelle est la loi conditionnelle de Y pour Z fixé ?

Solution.

1°/ Condition de normalisation.

En premier lieu, il est clair que les valeurs de P sont toutes positives ou nulles, puisque ce sont soit 0, soit un produit de nombres réels positifs (et inférieurs à 1).

La somme des valeurs de P doit être égale à 1 :

$$\sum_{(i,j,k)} P[(X, Y, Z) = (i, j, k)] = \alpha \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k+1} \sum_{j=0}^{j=k} \frac{p^j}{j!} \frac{q^{k-j}}{(k-j)!} \sum_{i=0}^{i=k} 1$$

$$\sum_{i=0}^{i=k} 1 = k + 1$$

$$\sum_{(i,j,k)} P[(X, Y, Z) = (i, j, k)] = \alpha \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \sum_{j=0}^{j=k} \binom{k}{j} p^j q^{k-j} = \alpha \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} (p + q)^k = \alpha e^{\lambda} = 1$$

$$\boxed{\alpha = e^{-\lambda}}$$

$$P\,[(X, Y, Z) = (i, j, k)] = e^{-\lambda}\,\frac{p^j}{j!}\frac{q^{k-j}}{(k-j)!}\frac{\lambda^k}{k+1}$$

Coimme X, Y, Z, ne prennent que des valeurs entières, on peut calculer la fonction génératrice du couple (X, Y, Z).

La **fonction génératrice** du triplet (X, Y, Z) est :

$$g_{(X, Y, Z)}(u, v, w) = E\,(u^X v^Y w^Z) = \sum_{(i,j,k)} u^i v^j w^k P\,[(X, Y, Z) = (i, j, k)]$$

$$= e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k+1}\,w^k\sum_{j=0}^{j=k}\frac{p^j}{j!}\frac{q^{k-j}}{(k-j)!}\,v^j\sum_{i=0}^{i=k}u^i$$

$$= e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k+1}\,w^k\frac{(q+pv)^k}{k!}\frac{1-u^{k+1}}{1-u}$$

$$= e^{-\lambda}\frac{1}{1-u}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k+1}\,w^k\frac{(q+pv)^k}{k!} - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k+1}\,w^k\frac{(q+pv)^k}{k!}\,u^{k+1}\right)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k+1}\,w^k\frac{(q+pv)^k}{k!} = \frac{1}{\lambda w(q+pv)}\left(\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(\lambda\,w\,(q+p\,v))^k\right)-1\right) = \frac{e^{\lambda w(q+pv)}-1}{\lambda w(q+pv)}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k+1}\,w^k\frac{(q+pv)^k}{k!}\,u^{k+1} = \frac{1}{\lambda w(q+pv)}\left(\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(\lambda\,u\,w\,(q+p\,v))^k\right)-1\right) = \frac{e^{\lambda u w(q+pv)}-1}{\lambda w(q+pv)}$$

$$g_{(X, Y, Z)}(u, v, w) = e^{-\lambda}\frac{1}{1-u}\left(\frac{e^{\lambda w(q+pv)}-1}{\lambda w(q+pv)} - \frac{e^{\lambda u w(q+pv)}-1}{\lambda w(q+pv)}\right) = e^{-\lambda}\frac{e^{\lambda w(q+pv)} - e^{\lambda u w(q+pv)}}{\lambda(1-u)(q+pv)w}$$

$$\boxed{g_{(X, Y, Z)}(u, v, w) = e^{-\lambda}\frac{e^{\lambda w(q+pv)} - e^{\lambda u w(q+pv)}}{\lambda(1-u)(q+pv)w}}$$

2°/ Espérances et variances de X, Y, Z.

a) Espérance et variance de X.

$$g_X(u) = g_{(X, Y, Z)}(u, 1, 1) = e^{-\lambda}\frac{e^{\lambda} - e^{\lambda u}}{\lambda(1-u)} = \frac{e^{\lambda(u-1)}-1}{\lambda(u-1)} = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{(\lambda(u-1))^{i-1}}{i!}$$

Pour $u = 1$, la série entière se réduit à son premier terme, qui est 1 : $g_X(1) = 1$.

Le développement en série entière de la dérivée de $g_X(u)$ s'obtient en dérivant terme à terme la série entière de $g_X(u)$:

$$g'_X(u) = \sum_{i=2}^{\infty} \lambda \frac{i-1}{i!} (\lambda (u-1))^{i-2}$$

Pour $u = 1$, la série entière se réduit à son premier terme, qui est $\frac{\lambda}{2}$: $E(X) = g'_X(1) = \frac{\lambda}{2}$.

Le développement en série entière de la dérivée seconde de $g_X(u)$ s'obtient en dérivant terme à terme la série entière de $g'_X(u)$:

$$g''_X(u) = \sum_{i=3}^{\infty} \lambda^2 \frac{(i-1)(i-2)}{i!} (\lambda (u-1))^{i-3}$$

Pour $u = 1$, la série entière se réduit à son premier terme, qui est $\frac{\lambda^2}{3}$: $g''_X(1) = \frac{\lambda^2}{3}$.
La variance de X s'en déduit :

$$Var(X) = g''_X(1) + g'_X(1) - (g'_X(1))^2 = \frac{\lambda^2}{3} + \frac{\lambda}{2} - \frac{\lambda^2}{4} = \frac{\lambda^2}{12} + \frac{\lambda}{2}$$

$$\boxed{E(X) = \frac{\lambda}{2} \; ; \; Var(X) = \frac{\lambda^2}{12} + \frac{\lambda}{2}.}$$

b) Espérance et variance de *Y*.

$$g_Y(v) = g_{(X,Y,Z)}(1, v, 1) = \lim_{u \to 1} g_{(X,Y,Z)}(u, v, 1) = e^{-\lambda} e^{\lambda (q + p v)} \lim_{u \to 1} \frac{e^{\lambda (u-1)(q+pv)} - 1}{\lambda (u-1)(q+pv)}$$
$$= e^{\lambda (q + p v - 1)} = e^{\lambda p (v-1)}.$$

On voit donc que Y suit une **loi de Poisson** de paramètre λp.
Son espérance mathématique est λp, sa variance est λp.

$$\boxed{E(Y) = \lambda p \; ; \; Var(Y) = \lambda p.}$$

c) Espérance et variance de *Z*.

$$g_Z(w) = g_{(X,Y,Z)}(1, 1, w) = \lim_{u \to 1} g_{(X,Y,Z)}(u, 1, w) = e^{-\lambda} e^{\lambda w} \lim_{u \to 1} \frac{e^{\lambda (u-1) w} - 1}{\lambda (u-1) w} = e^{\lambda (w-1)}.$$

On voit donc que Z suit une **loi de Poisson** de paramètre λ.
Son espérance mathématique est λ, sa variance est λ.

$$\boxed{E(Z) = \lambda \; ; \; Var(Z) = \lambda.}$$

3°/ Indépendance.

$$g_{(X,Y)}(u,v) = g_{(X,Y,Z)}(u,v,1) = e^{-\lambda}\frac{e^{\lambda(q+pv)} - e^{\lambda u(q+pv)}}{\lambda(1-u)(q+pv)}$$

$$= e^{\lambda p(v-1)}\frac{e^{\lambda(u-1)(q+pv)}-1}{\lambda(u-1)(q+pv)} = e^{\lambda p(v-1)}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\left(\lambda(u-1)(q+pv)\right)^{i-1}}{i!}$$

$$g_X(u) \times g_Y(v) = \frac{e^{\lambda(u-1)}-1}{\lambda(u-1)} \times e^{\lambda p(v-1)} \neq g_{(X,Y)}(u,v)$$

(puisque $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\left(\lambda(u-1)(q+pv)\right)^{i-1}}{i!}$ dépend de v, alors que $\frac{e^{\lambda(u-1)}-1}{\lambda(u-1)} = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{\left(\lambda(u-1)\right)^{i-1}}{i!}$ n'en dépend pas)

La relation $g_X(u) \times g_Y(v) \neq g_{(X,Y)}(u,v)$ montre que **les variables *X* et *Y* ne sont pas indépendantes**.

$$g_{(X,Z)}(u,w) = g_{(X,Y,Z)}(u,1,w) = e^{-\lambda}\frac{e^{\lambda w} - e^{\lambda uw}}{\lambda(1-u)w}$$

$$= e^{\lambda(w-1)}\frac{e^{\lambda(u-1)w}-1}{\lambda(u-1)w} = e^{\lambda(w-1)}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\left(\lambda(u-1)w\right)^{i-1}}{i!}$$

$$g_X(u) \times g_Z(w) = \frac{e^{\lambda(u-1)}-1}{\lambda(u-1)} \times e^{\lambda(w-1)} \neq g_{(X,Z)}(u,w)$$

(puisque $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\left(\lambda(u-1)w\right)^{i-1}}{i!}$ dépend de w, alors que $\frac{e^{\lambda(u-1)}-1}{\lambda(u-1)} = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{\left(\lambda(u-1)\right)^{i-1}}{i!}$ n'en dépend pas)

La relation $g_X(u) \times g_Z(w) \neq g_{(X,Z)}(u,w)$ montre que **les variables *X* et *Z* ne sont pas indépendantes**.

$$g_{(Y,Z)}(v,w) = g_{(X,Y,Z)}(1,v,w) = \lim_{u \to 1} g_{(X,Y,Z)}(u,v,w)$$

$$g_{(X,Y,Z)}(u,v,w) = e^{-\lambda}\frac{e^{\lambda w(q+pv)} - e^{\lambda uw(q+pv)}}{\lambda(1-u)(q+pv)w} = e^{\lambda(w(q+pv)-1)}\frac{e^{\lambda(u-1)w(q+pv)}-1}{\lambda(u-1)w(q+pv)}$$

Lorsque u tend vers 1, $\frac{e^{\lambda(u-1)w(q+pv)}-1}{\lambda(u-1)w(q+pv)}$ tend vers 1 et $g_{(X,Y,Z)}(u,v,w)$ tend vers $e^{\lambda(w(q+pv)-1)} = g_Z(w(q+pv))$.

On a donc :

$$\boxed{g_{(Y,Z)}(v,w) = g_Z(w(q+pv))}$$

Cette relation est une condition nécessaire et suffisante pour que la loi conditionnelle de *Y* pour *Z* fixé, soit une **loi binomiale** de paramètre *Z* et *p* (Voir Exercice 7, 2°).
Comme *Y* est une variable de Poisson, sa loi marginale (loi de Poisson) n'est pas égale à sa loi conditionnelle pour *Z* fixé (loi binomiale) : **les variables *Y* et *Z* ne sont pas indépendantes**.

Chapitre 10. Lois conjointes discrètes, indépendance.

Enoncés.

Exercice 13. Couple aléatoire défini par sa fonction génératrice.

Soit p un nombre réel, $0 < p < 1$. Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires réelles discrètes à valeurs entières, dont la fonction génératrice est donnée par :

$$g_{(X, Y)}(u, v) = p\,\frac{u + p(1-u)}{p\,v + (1-v)}$$

1°/ Calculer la loi de probabilité conjointe de X et Y.
2°/ Calculer la loi marginale de X. Comment s'appelle cette loi ? Donner $E(X)$ et $Var(X)$.
3°/ Calculer la loi marginale de Y. Comment s'appelle cette loi ? Donner $E(Y)$ et $Var(Y)$.
4°/ Calculer la covariance de X et Y. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

Solution.

1°/ Probabilités conjointes.

Posons $q = 1 - p$.
La fonction génératrice du couple (X, Y) s'écrit :

$$g_{(X, Y)}(u, v) = (p + q\,u) \times \frac{p}{1 - q\,v}$$

La probabilité conjointe $P(X = m \text{ et } Y = n)$ est donnée par :

$$P(X = m \text{ et } Y = n) = \frac{1}{m!\,n!}\frac{\partial^{m+n} g_{(X,Y)}}{\partial u^m\,\partial v^n}(0, 0), \text{ pour tout couple } (m, n) \in \mathbb{N}^2.$$

$$\frac{\partial^{m+n} g_{(X,Y)}}{\partial u^m\,\partial v^n}(u, v) = \frac{\partial^m}{\partial u^m}(p + q\,u) \times \frac{\partial^n}{\partial v^n}\left(\frac{p}{1 - q\,v}\right)$$

$\frac{\partial^m}{\partial u^m}(p + q\,u)$ est nul pour $m \geq 2$.

$\frac{\partial^m}{\partial u^m}(p + q\,u) = p + q\,u$, pour $n = 0$;

$\frac{\partial^m}{\partial u^m}(p + q\,u) = q$ pour $n = 1$.

$\frac{\partial^n}{\partial v^n}\left(\frac{p}{1-qv}\right) = p\,q^n\,(n\,!)\,\frac{1}{(1-qv)^{n+1}}$, pour $n \geq 0$.

$$P\,(X = m \text{ et } Y = n) = \begin{cases} p^2\,q^n & \text{pour } m = 0 \text{ et } n \geq 0 \\ p\,q^{n+1} & \text{pour } m = 1 \text{ et } n \geq 0 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

2°/ Loi marginale de *X*.

La fonction génératrice de *X* est :

$$g_X\,(u) = g_{(X,\,Y)}\,(u,\,1) = p + q\,u$$

C'est la fonction génératrice d'une **variable de Bernoulli** de paramètre *q*.

n	0	1
$P\,(X = n)$	*p*	*q*

Son espérance est $E\,(X) = q$, sa variance est $Var\,(X) = p\,q$.

3°/ Loi marginale de *Y*.

La fonction génératrice de *Y* est :

$$g_Y\,(v) = g_{(X,\,Y)}\,(1,\,v) = \frac{p}{1-qv}$$

C'est la fonction génératrice d'une **variable géométrique sur N** de paramètre *p*.

$$P\,(Y = n) = p\,q^n$$

Son espérance est $E\,(Y) = g'_Y\,(1) = \frac{q}{p}$.

Sa variance est :

$Var\,(Y) = g''_Y\,(1) + g'_Y\,(1) - (g'_Y\,(1))^2 = 2\,\frac{q^2}{p^2} + \frac{q}{p} - \frac{q^2}{p^2} = \frac{q^2 + pq}{p^2} = \frac{q}{p^2}$

4°/ Covariance et indépendance.

La fonction génératrice du couple (*X*, *Y*) est le produit de la fonction génératrice de *X* et de la fonction génératrice de *Y* :

$$g_{(X,\,Y)}\,(u,\,v) = g_X\,(u) \times g_Y\,(v)$$

C'est une condition nécessaire et suffisante pour que les variables aléatoires *X* et *Y* soient indépendantes.

La covariance de deux variables aléatoires indépendantes est nulle.

Les variables aléatoires X et Y sont indépendantes et leur covariance est nulle.

Chapitre 10. Lois conjointes discrètes, indépendance.

Enoncés.

Exercice 14. Loi conjointe du maximum et du minimum de deux jetons.

On tire simultanément deux jetons d'une urne contenant quatre jetons numérotés de 1 à 4. Soit U le plus petit et V le plus grand des numéros obtenus. Déterminer la loi conjointe et les lois marginales de U et V. Les variables U et V sont-elles indépendantes ?	

Solution.

1°/ Espace probabilisé.

Les événements élémentaires sont les combinaisons de deux nombres différents pris parmi les nombres entiers {1, 2, 3, 4}.
Il y a donc 6 événements élémentaires {1, 2}, {1, 3}, {1, 4}, {2, 3}, {2, 4}, {3, 4}, équiprobables :

$$\Omega = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}\}$$

L'algèbre A des événements est l'ensemble $\mathcal{P}(\Omega)$ des parties de Ω.

La probabilité P est induite par la probabilité uniforme sur l'ensemble des événements élémentaires.

2°/ Loi conjointe et lois marginales.

Les valeurs de U sont 1, 2, 3.
Les valeurs de V sont 2, 3, 4.
Les couples (U, V) sont en correspondance biunivoque avec les événements élémentaires.
Le tableau des probabilités conjointes, complété par les lois marginales, est donc :

$U \backslash V$	2	3	4	*Total*
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$
2	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
3	0	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
Total	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1

3°/ Indépendance.

Il y a des 0 dans la loi conjointe :

$$P(U = 3) = \frac{1}{6} \text{ ; } P(V = 2) = \frac{1}{6} \text{ ; } P(U = 3 \text{ et } V = 2) = 0 \neq P(U = 3) \times P(V = 2).$$

La relation $P(U = 3 \text{ et } V = 2) \neq P(U = 3) \times P(V = 2)$ montre que les variables U et V ne sont pas indépendantes.

Chapitre 10. Lois conjointes discrètes, indépendance.

Enoncés.

Exercice 15. Tirage à deux niveaux.

On choisit au hasard un nombre entier X entre 1 et n, puis un nombre entier Y au hasard entre 1 et X. Déterminer la loi et l'espérance de Y.	

Solution.

1°/ Loi conjointe et lois marginales.

La loi conjointe de X et Y s'obtient à partir de la loi marginale de X et de la loi conditionnelle de Y pour X fixé, par la formule :

$$P\,(X=k \text{ et } Y=j) = P\,(X=k) \times P\,(Y=j \mid X=k) = \begin{cases} 0 & \text{pour } j>k \\ \frac{1}{n}\times\frac{1}{k} & \text{pour } j\leqslant k \end{cases}$$

Cette formule permet de construire le tableau suivant de la loi conjointe, complété par les lois marginales.

$X \backslash Y$	1	...	j	...	n	*Total*
1	$\frac{1}{n}\times 1$	...	0	...	0	$\frac{1}{n}$
...	...	...			...	...
k	$\frac{1}{n}\times\frac{1}{k}$	...	$\begin{cases} 0 & \text{pour } j>k \\ \frac{1}{n}\times\frac{1}{k} & \text{pour } j\leqslant k \end{cases}$	...	$\begin{cases} 0 & \text{pour } n>k \\ \frac{1}{n}\times\frac{1}{n} & \text{pour } n=k \end{cases}$	$\frac{1}{n}$
...	...	...	...	...	...	...
n	$\frac{1}{n}\times\frac{1}{n}$	...	$\frac{1}{n}\times\frac{1}{n}$	...	$\frac{1}{n}\times\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$
Total	$\frac{1}{n}\times\sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{k}$	...	$\frac{1}{n}\times\sum_{k=j}^{k=n}\frac{1}{k}$		$\frac{1}{n}\times\sum_{k=n}^{k=n}\frac{1}{k}$	1

La loi marginale de Y est donnée par :

$$P\,(Y=j) = \frac{1}{n}\times\sum_{k=j}^{k=n}\frac{1}{k}$$

2°/ Espérance mathématique de *Y*.

$$E(Y) = \sum_{j=1}^{j=n} j\,P(Y=j) = \frac{1}{n} \times \sum_{j=1}^{j=n} \left(j \sum_{k=j}^{k=n} \frac{1}{k} \right)$$

Pour k fixé entre 1 et n, j varie de 1 à k :

$$\sum_{j=1}^{j=n} \left(j \sum_{k=j}^{k=n} \frac{1}{k} \right) = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k} \left(\sum_{j=1}^{j=k} j \right) = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k} \frac{k(k+1)}{2} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{k=n} k + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{k=n} 1$$

$$= \frac{1}{2} \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n}{2} = \frac{n^2+3n}{4} = \frac{n(n+3)}{4}$$

$$E(Y) = \frac{1}{n} \times \sum_{j=1}^{j=n} \left(j \sum_{k=j}^{k=n} \frac{1}{k} \right) = \frac{n+3}{4}$$

$$\boxed{E(Y) = \frac{n+3}{4}}$$

Chapitre 10. Lois conjointes discrètes, indépendance.

Enoncés.

Exercice 16. Lancement de dé.

On lance un dé équilibré et on note X le numéro obtenu. Puis on relance X fois le dé et on note Y le nombre total d'as obtenus. Déterminer la loi conjointe de X et Y. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ? Calculer l'espérance et la variance de Y.	

Solution.

1°/ Loi conjointe.

a) Loi conjointe de X et Y.

La loi marginale de X est la **loi uniforme** sur l'ensemble $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Si l'on note Y_j le nombre d'as obtenus au cours du j^{e} lancer, la variable Y_j suit une loi de Bernoulli de paramètre $p = \frac{1}{6}$.
Lorsque $X = k$, la variable Y est somme des k variables aléatoires de Bernoulli indépendantes $Y_1, \dots, Y_k$.
La loi conditionnelle de Y lorsque $X = k$ est donc une **loi binomiale** de paramètres k et $\frac{1}{6}$.

La loi conjointe de X et Y s'obtient par produit :

$P(X = k \text{ et } Y = j) = P(X = k) \times P(Y = j \mid X = k) = \frac{1}{6} \times \binom{k}{j} \left(\frac{1}{6}\right)^j \left(\frac{5}{6}\right)^{k-j} = \frac{1}{6^{k+1}} \binom{k}{j} 5^{k-j}$, pour $j \leq k$ (et 0 pour $j > k$).

$X \mid Y$	0	1	2	3	4	5	6	*Total*
1	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{36}$	0	0	0	0	0	$\frac{1}{6}$
2	$\frac{25}{216}$	$\frac{10}{216}$	$\frac{1}{216}$	0	0	0	0	$\frac{1}{6}$
3	$\frac{125}{1\,296}$	$\frac{75}{1\,296}$	$\frac{15}{1\,296}$	$\frac{1}{1\,296}$	0	0	0	$\frac{1}{6}$
4	$\frac{625}{7\,776}$	$\frac{500}{7\,776}$	$\frac{150}{7\,776}$	$\frac{20}{7\,776}$	$\frac{1}{7\,776}$	0	0	$\frac{1}{6}$
5	$\frac{3\,125}{46\,656}$	$\frac{3\,125}{46\,656}$	$\frac{1\,250}{46\,656}$	$\frac{250}{46\,656}$	$\frac{25}{46\,656}$	$\frac{1}{46\,656}$	0	$\frac{1}{6}$

6	$\frac{15\,625}{279\,936}$	$\frac{18\,750}{279\,936}$	$\frac{9\,375}{279\,936}$	$\frac{2\,500}{279\,936}$	$\frac{375}{279\,936}$	$\frac{30}{279\,936}$	$\frac{1}{279\,936}$	$\frac{1}{6}$
Total	$\frac{155\,155}{279\,936}$	$\frac{92\,436}{279\,936}$	$\frac{26\,811}{279\,936}$	$\frac{4\,936}{279\,936}$	$\frac{561}{279\,936}$	$\frac{36}{279\,936}$	$\frac{1}{279\,936}$	1

b) Loi marginale de *Y*.

La loi marginale de *Y* se déduit du tableau par addition dans les colonnes

j	0	1	2	3	4	5	6
$P\,(Y = j)$	$\frac{155\,155}{279\,936}$	$\frac{92\,436}{279\,936}$	$\frac{26\,811}{279\,936}$	$\frac{4\,936}{279\,936}$	$\frac{561}{279\,936}$	$\frac{36}{279\,936}$	$\frac{1}{279\,936}$

Vérification : 155 155 + 92 436 + 26 811 + 4 936 + 561 + 36 + 1 = 279 936

c) Indépendance.

Le tableau de la loi conjointe comporte des 0, bien que les probabilités marginales ne soient pas nulles : les variables ***X* et *Y* ne sont pas indépendantes**.

2°/ Espérance et variance de *Y*.

L'espérance et la variance d'une **loi uniforme** sur un intervalle [1, *n*] d'entiers sont :
– espérance : $\frac{n+1}{2}$;
– variance : $\frac{n^2-1}{12}$.
En particulier, ici :
— $E\,(X) = \frac{7}{2}$;
— $Var\,(X) = \frac{35}{12}$.

L'espérance et la variance d'une **loi binomiale** de paramètres *n* et *p* sont :
– espérance : $n\,p$;
– variance : $n\,p\,q = n\,p\,(1-p)$.

$Y_{|X}$ est une variable binomiale de paramètres *X* et $\frac{1}{6}$:
$E\,(Y_{|X}) = \frac{X}{6}$
$Var\,(Y_{|X}) = \frac{5}{36}\,X$.

$$E\,(Y) = E\,(E\,(Y_{|X})) = E\,(\frac{X}{6}) = \frac{1}{6}\,E\,(X) = \frac{7}{12}$$

$$Var\,(Y) = Var\,(E\,(Y_{|X})) + E\,(Var\,(Y_{|X}))$$
$$= Var\,(\frac{X}{6}) + E\,(\frac{5}{36}\,X)$$

$$= \frac{1}{36} Var(X) + \frac{5}{36} E(X)$$
$$= \frac{1}{36}\frac{35}{12} + \frac{5}{36}\frac{7}{2} = \frac{245}{432}$$

Remarque :

$$P(Y=j) = \sum_{k=Max(j,1)}^{k=6} P(X=k \text{ et } Y=j) = \sum_{k=Max(j,1)}^{k=6} \frac{1}{6} \times \binom{k}{j} \left(\frac{1}{6}\right)^{j} \left(\frac{5}{6}\right)^{k-j} = \frac{1}{6^7} \sum_{k=Max(j,1)}^{k=6} \binom{k}{j} 6^{6-k} \times 5^{k-j}$$

$$P(Y=j) = \frac{1}{6^7} \sum_{k=Max(j,1)}^{k=6} \binom{k}{j} 6^{6-k} \times 5^{k-j}$$

$$P(Y=j) = \frac{1}{279\,936} \sum_{k=Max(j,1)}^{k=6} \binom{k}{j} 6^{6-k} \times 5^{k-j}$$

Chapitre 10. Lois conjointes discrètes, indépendance.

Enoncés.

Exercice 17. Chèques émis et chèques sans provision.

Le nombre X de chèques émis par les clients d'une banque en un jour suit une loi de Poisson de paramètre λ. Lorsqu'un chèque est émis, il a une probabilité p d'être sans provision. 1°/ Quelle est la loi de probabilité conditionnelle, sachant que $X = n$, du nombre Y de chèques sans provision émis en un jour par les clients de la banque ? Justifiez votre réponse. 2°/ Quelle est la loi de probabilité de Y ? 3°/ Quelle est la loi de probabilité de $X - Y$? 4°/ Les variables aléatoires Y et $X - Y$ sont-elles indépendantes ?	

Solution.

1°/ Loi conditionnelle de Y connaissant X.

Lorsque le nombre de chèques émis dans une journée est $X = n$, considérons l'un des n chèques émis. De deux choses l'une, ou bien il est couvert par une provision (probabilité $1 - p$), ou bien il est sans provision (probabilité p). Le fait de regarder s'il a ou non une provision constitue une épreuve de Bernoulli. Lorsqu'on répète n fois cette épreuve de Bernoulli, le nombre de succès dans cette répétition est le nombre Y de chèques sans provision : on sait que le nombre de succès dans une répétition d'épreuves de Bernoulli, suit une loi binomiale de paramètres n (nombre de répétitions) et p (probabilité du succès). Lorsque le nombre de chèques émis en une journée est $X = n$, le nombre Y de chèques sans provision suit une **loi binomiale** de paramètres n et p :

$$P(Y = k \mid X = n) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

où $\binom{n}{k}$ est le coefficient binomial d'indices n et k, qu'on peut généraliser en prenant une valeur nulle lorsque k est strictement plus grand que n.

2°/ Loi de probabilité conjointe du couple (X, Y).

La loi de probabilité du couple (X, Y) est donnée par la formule :

$$P(X = n \text{ et } Y = k) = P(Y = k \mid X = n) \times P(X = n),$$

par définition de la probabilité conditionnelle $P(Y = k \mid X = n)$.

Or on a :

$P(Y = k \mid X = n) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$, d'après le résultat de la première question,

$P(X = n) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}$, par définition de la loi de Poisson de paramètre λ.

On en déduit la loi de probabilité conjointe du couple (X, Y) :

$$P(X = n \text{ et } Y = k) = \begin{cases} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} & \text{pour } 0 \le k \le n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

qui s'écrit aussi :

$$\boxed{P(X = n \text{ et } Y = k) = \begin{cases} e^{-\lambda} \lambda^n \frac{p^k}{k!} \frac{(1-p)^{n-k}}{(n-k)!} & \text{pour } 0 \le k \le n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$$

3°/ Loi de probabilité de la variable *Y*.

L'évènement $Y = k$, $k \ge 0$, est la réunion des évènements incompatibles ($Y = k$ et $X = n$) pour les valeurs de $n \ge k$.
La loi de probabilité de la variable aléatoire Y est donnée par la somme des probabilités :

$$P(Y = k) = \sum_{n=k}^{\infty} P(Y = k \text{ et } X = n)$$

$$P(Y = k) = e^{-\lambda} \frac{p^k}{k!} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{(1-p)^{n-k}}{(n-k)!} \lambda^n$$

Or le développement en série de l'exponentielle donne :

$$e^{\lambda(1-p)} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\lambda(1-p))^j}{j!}$$

On a donc :

$$P(Y = k) = e^{-\lambda} \frac{(\lambda p)^k}{k!} e^{\lambda(1-p)}$$

$$\boxed{P(Y = k) = e^{-\lambda p} \frac{(\lambda p)^k}{k!}}$$

C'est une **loi de Poisson** de paramètre λp.

Son espérance mathématique est : $E(Y) = \lambda p$.
Sa variance est aussi λp.

4°/ Indépendance des variables Y et $X - Y$.

Dire que les variables Y et $X - Y$ sont indépendantes, c'est dire que, quelles que soient les nombres entiers positifs k et j, on a :
$P(Y = k \text{ et } X - Y = j) = P(Y = k) \times P(X - Y = j)$.

Or on a :
$(Y = k \text{ et } X - Y = j) \Leftrightarrow (Y = k \text{ et } X = k + j)$

$$P(Y = k \text{ et } X - Y = j) = P(Y = k \text{ et } X = k + j) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^{k+j}}{(k+j)!} \binom{k+j}{k} p^k (1-p)^j$$

$$P(Y = k \text{ et } X - Y = j) = e^{-\lambda(p+(1-p))} \frac{(\lambda p)^k}{k!} \frac{(\lambda(1-p))^j}{j!} = e^{-\lambda p} \frac{(\lambda p)^k}{k!} \times e^{-\lambda(1-p)} \frac{(\lambda(1-p))^j}{j!}$$

- $e^{-\lambda p} \frac{(\lambda p)^k}{k!}$ est la probabilité de l'évènement $Y = k$;
- $e^{-\lambda(1-p)} \frac{(\lambda(1-p))^j}{j!}$ est la probabilité pour le nombre de chèques avec provision soit égal à j, puisque, étant donné un chèque reçu dans la journée, la probabilité pour qu'il soit couvert par une provision est $1 - p$. Or le nombre de chèques avec provision est $X - Y$, donc $P(X - Y = j) = e^{-\lambda(1-p)} \frac{(\lambda(1-p))^j}{j!}$.

On a bien :

$$P(Y = k \text{ et } X - Y = j) = P(Y = k) \times P(X - Y = j).$$

Les variables Y et $X - Y$ sont indépendantes.

Ce résultat signifie que le nombre de chèques avec provision et le nombre de chèques sans provision sont des variables indépendantes en probabilité. Cela paraît évident, a posteriori, si l'on suppose que les chèques sont émis indépendamment les uns des autres.

Chapitre 10. Lois conjointes discrètes, indépendance.

Enoncés.

Exercice 18. Deux variables de Bernoulli sur (N, ℘ (N), *Geom*).

Pour $0 < p < 1$, soit P la loi *Geom* (p) sur $\Omega = \mathrm{N}$.
On définit deux variables aléatoires X et Y sur Ω :

$$X(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega = 5m \\ 0 & \text{si } \omega \neq 5m \end{cases} ; \; Y(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega = 2k \\ 0 & \text{si } \omega = 2k+1 \end{cases} ;$$

pour $m \in \mathrm{N}$, $k \in \mathrm{N}$.

1°/ Calculer :
a) P [$X = 1$] et P [$Y = 1$].
b) P [$X = Y = 1$].
c) $E[(X - Y)^2]$.
2°/ Montrer que les variables X et Y ne sont pas indépendantes.

Solution.

1°/ Probabilités.

On pose $q = 1 - p$.

a) P [$X = 1$] et P [$Y = 1$].

$$\mathrm{P}[X=1] = \sum_{m=0}^{\infty} \mathrm{P}[\omega = 5m] = \sum_{m=0}^{\infty} p\, q^{5m} = \sum_{m=0}^{\infty} (q^5)^m : \frac{p}{1-q^5} \quad : \frac{1-q}{1-q^5} \quad : \frac{1}{1+q+q^2+q^3+q^4}$$

$$\mathrm{P}[Y=1] = \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{P}[\omega = 2k] = \sum_{k=0}^{\infty} p\, q^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} (q^2)^k : \frac{p}{1-q^2} \quad : \frac{1-q}{1-q^2} \quad : \frac{1}{1+q}$$

$$\boxed{\mathrm{P}[X=1] = \frac{1}{1+q+q^2+q^3+q^4} \; ; \; \mathrm{P}[Y=1] = \frac{1}{1+q}}$$

b) P [$X = Y = 1$].

$$\mathrm{P}[X = Y = 1] = \mathrm{P}[\{X=1\} \cap \{Y=1\}].$$

$$\{X = 1\} \cap \{Y = 1\} = \{\omega \in \mathrm{N} \mid \omega = 5\,m = 2\,k\}$$

Or les entiers naturels qui sont à la fois multiples de 5 et multiples de 2 sont les multiples de 10, donc :

$$\{X = 1\} \cap \{Y = 1\} = \{\omega \in \mathrm{N} \mid \omega = 10\,n,\, n \in \mathrm{N}\}$$

$$\mathrm{P}\,[X = Y = 1] = \sum_{n=0}^{\infty} p\,q^{10\,n} = p \sum_{n=0}^{\infty} (q^{10})^{n} = \frac{p}{1-q^{10}}$$

$$\boxed{\mathrm{P}\,[X = Y = 1] = \frac{p}{1-q^{10}}}$$

c) $E\,[(X - Y)^2]$.

La loi conjointe de X et Y est donnée par le tableau dont les éléments connus sont les suivants :

$X \setminus Y$	0	1	*Total*
0			
1		$\frac{p}{1-q^{10}}$	$\frac{p}{1-q^{5}}$
Total	$\frac{p}{1-q^{2}}$		1

Par soustractions, on peut compléter ce tableau :

$X \setminus Y$	0	1	*Total*
0	$\frac{p}{1-q^{2}} - \frac{p}{1-q^{5}} + \frac{p}{1-q^{10}}$	$1 - \frac{p}{1-q^{2}} - \frac{p}{1-q^{10}}$	$1 - \frac{p}{1-q^{5}}$
1	$\frac{p}{1-q^{5}} - \frac{p}{1-q^{10}}$	$\frac{p}{1-q^{10}}$	$\frac{p}{1-q^{5}}$
Total	$\frac{p}{1-q^{2}}$	$1 - \frac{p}{1-q^{2}}$	1

$(X - Y)^2$ peut prendre seulement les valeurs 0 et 1 : c'est donc une **variable de Bernoulli**, dont le paramètre est :

$$P\,[\,(X - Y)^2 = 1\,] = P\,[\,\{X = 0 \text{ et } Y = 1\} \cup \{X = 1 \text{ et } Y = 0\}\,]$$

Comme les événements $\{X = 0 \text{ et } Y = 1\}$ et $\{X = 1 \text{ et } Y = 0\}$ sont incompatibles, la probabilité de leur réunion est la somme de leurs probabilités (axiome des probabilités totales) :

$$P\,[\,\{X = 0 \text{ et } Y = 1\} \cup \{X = 1 \text{ et } Y = 0\}\,] = P\,[\,\{X = 0 \text{ et } Y = 1\}\,] + P\,[\,\{X = 1 \text{ et } Y = 0\}\,]$$

On obtient donc, grâce au tableau de la loi conjointe :

$$P\left[\,(X-Y)^2=1\,\right]=\left(\frac{p}{1-q^5}-\frac{p}{1-q^{10}}\right)+\left(1-\frac{p}{1-q^2}-\frac{p}{1-q^{10}}\right)=1-\frac{p}{1-q^2}+\frac{p}{1-q^5}-2\,\frac{p}{1-q^{10}}$$

L'espérance mathématique d'une variable de Bernoulli est égale à son paramètre :

$$\boxed{E\left[\,(X-Y)^2\,\right]=1-\frac{p}{1-q^2}+\frac{p}{1-q^5}-2\,\frac{p}{1-q^{10}}}$$

2°/ Indépendance.

Nous avons montré, dans la première question, les résultats suivants :

$$\mathrm{P}\,[X=1]=\frac{p}{1-q^5}\;;\;\mathrm{P}\,[Y=1]=\frac{p}{1-q^2}\;;\;\mathrm{P}\,[X=1\text{ et }Y=1]=\frac{p}{1-q^{10}}$$

Pour avoir l'égalité P [X = 1 et Y = 1] = P [X = 1] × P [Y = 1], il faudrait que p soit solution strictement comprise entre 0 et 1, de l'équation :

$$\frac{p}{1-q^{10}}=\frac{p}{1-q^2}\times\frac{p}{1-q^5}=\frac{1}{1+q}\times\frac{p}{1-q^5},$$

$$\frac{1}{1+q^5}\times\frac{p}{1-q^5}=\frac{1}{1+q}\times\frac{p}{1-q^5}$$

$$\frac{1}{1+q^5}=\frac{1}{1+q}$$

$$q^5=q$$

$$q\,(1-q^4)=0$$

mais cette équation ne possède aucune racine strictement comprise entre 0 et 1 (les seules solutions réelles sont : q = 1, soit p = 0, ce qui est exclu, et q = 0, soit p = 1, exclu aussi).
Il n'existe donc aucune valeur de p strictement comprise entre 0 et 1, pour laquelle on ait l'égalité P [X = 1 et Y = 1] = P [X = 1] × P [Y = 1].

Et ceci suffit pour montrer que :

Les variables aléatoires X et Y ne sont jamais indépendantes, quel que soit p, $0 < p < 1$.

Chapitre 10. Lois conjointes discrètes, indépendance.

Enoncés.

Exercice 19. Pêche.

Un pêcheur lance sa ligne : le nombre de poissons qui viennent visiter son hameçon dans la journée suit une loi de Poisson de paramètre λ. Mais, s'agissant d'un pêcheur débutant, le poisson a deux chances sur 3 de ne pas être ferré et de repartir libre quand il vient visiter l'hameçon. Soit X le nombre de poissons pêchés dans la journée. 1°/ Quelle est la loi de probabilité de X. 2°/ Quelle est l'espérance mathématique de X ? 3°/ Le pêcheur constate qu'en moyenne, il pêche 15 poissons par jours. Quelle est la valeur de λ ?	

Solution.

1°/ Loi de X.

Appelons Y le nombre de poissons qui viennent visiter l'hameçon dans la journée.
La loi de probabilité conditionnelle de X pour Y fixé est une loi binomiale de paramètres $n = Y$ et $p = \frac{1}{3}$.

On pose $q = 1 - p$.
On sait qu'alors (Exercice 7.3°) la fonction génératrice de X est liée à celle de Y par :

$$g_X(u) = g_Y(q + p\,u)$$

Par hypothèse, Y suit une loi de Poisson de paramètre λ.
Sa fonction génératrice est :

$$g_Y(u) = e^{\lambda(u-1)}$$

La fonction génératrice de X est alors :

$$g_X(u) = g_Y(q + p\,u) = e^{\lambda(q + p\,u - 1)} = e^{\lambda p(u-1)}$$

Cette relation montre que :

X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda\, p = \frac{\lambda}{3}$

2°/ Espérance mathématique de X.

L'espérance mathématique d'une variable de Poisson est égale au paramètre :

$$\boxed{E(X) = \frac{\lambda}{3}}$$

3°/ Valeur du paramètre λ.

$$E(X) = 15 \Rightarrow \lambda = 45$$

$$\boxed{\lambda = 45.}$$

Chapitre 10. Lois conjointes discrètes, indépendance.

Enoncés.

Exercice 20. Lois conjointes.

1°/ On considère la loi de probabilité conjointe suivante de deux variables aléatoires X et Y

X \ Y	– 4	2	7	*Total*
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$
5	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$
Total	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	1

Calculer :

a) L'espérance mathématique de X, $E(X)$ et l'espérance mathématique de Y, $E(Y)$.

b) La covariance de X et Y, $Cov(X, Y)$

c) Les écarts-types σ_X, σ_Y et le coefficient de corrélation $\rho(X, Y)$.

2°/ Mêmes questions avec :

X \ Y	– 2	– 1	4	5	*Somme*
1	0,1	0,2	0	0,3	0,6
2	0,2	0,1	0,1	0	0,4
Somme	0,3	0,3	0,1	0,3	1

Solution.

1°/ Première loi conjointe.

a) Espérances mathématiques.

Les espérances mathématiques se calculent avec les lois marginales.

La loi de X est uniforme et symétrique : l'espérance mathématique est la valeur centrale.

$$E(X) = \frac{1+5}{2} = 3$$

$$E(Y) = \frac{3}{8} \times (-4) + \frac{3}{8} \times 2 + \frac{1}{4} \times 7 = 1$$

$$\boxed{E(X) = 3 \; ; \; E(Y) = 1}$$

b) Covariance.

La covariance peut se calculer par la formule :

$$Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)\,E(Y)$$
$$E(XY) = \frac{1}{8} \times (-4) + \frac{1}{4} \times 2 + \frac{1}{8} \times 7 + \frac{1}{4} \times (-20) + \frac{1}{8} \times 10 + \frac{1}{8} \times 35 = \frac{3}{2}$$
$$Cov(X, Y) = \frac{3}{2} - 3 = -\frac{3}{2}$$

$$\boxed{Cov(X, Y) = -\frac{3}{2}}$$

c) Ecarts-types et rapport de corrélation linéaire.

Les variances se calculent par la formule de la variance.

$$E(X^2) = \frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{2} \times 25 = 13$$
$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 13 - 9 = 4$$
$$\sigma_X = \sqrt{Var(X)} = 2$$

$$E(Y^2) = \frac{3}{8} \times 16 + \frac{3}{8} \times 4 + \frac{1}{4} \times 49 = \frac{158}{8} = \frac{79}{4}$$
$$Var(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2 = \frac{79}{4} - 1 = \frac{75}{4}$$
$$\sigma_Y = \sqrt{Var(Y)} = \frac{5\sqrt{3}}{2}$$

Le rapport de corrélation linéaire est alors donné par :

$$\rho(X, Y) = \frac{Cov(X, Y)}{\sigma_X \, \sigma_Y} = -\frac{3}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{5\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{10}$$

$$\boxed{\sigma_X = 2 \; ; \; \sigma_Y = \frac{5\sqrt{3}}{2} \; ; \; \rho(X, Y) = -\frac{\sqrt{3}}{10}}$$

2°/ Deuxième loi conjointe.

a) Espérances mathématiques.

Les espérances mathématiques se calculent avec les lois marginales.

$$E(X) = 0{,}6 \times 1 + 0{,}4 \times 2 = 1{,}4$$
$$E(Y) = 0{,}3 \times (-2) + 0{,}3 \times (-1) + 0{,}1 \times 4 + 0{,}3 \times 5 = 1$$

$$\boxed{E(X) = 1{,}4 \; ; \; E(Y) = 1}$$

b) Covariance.

La covariance peut se calculer par la formule :

$$Cov\,(X, Y) = E\,(X\,Y) - E\,(X)\,E\,(Y)$$
$$E\,(X\,Y) = 0{,}1 \times (-2) + 0{,}2 \times (-1) + 0 \times 4 + 0{,}3 \times 5 + 0{,}2 \times (-4) + 0{,}1 \times (-2) + 0{,}1 \times 8 + 0 \times 10 = 0{,}9$$
$$Cov\,(X, Y) = 0{,}9 - 1{,}4 = -0{,}5$$

$$\boxed{Cov\,(X, Y) = -0{,}5}$$

c) Ecarts-types et rapport de corrélation linéaire.

Les variances se calculent par la formule de la variance.

$$E\,(X^2) = 0{,}6 \times 1 + 0{,}4 \times 4 = 2{,}2$$
$$Var\,(X) = E\,(X^2) - (E\,(X))^2 = 2{,}2 - 1{,}96 = 0{,}24$$
$$\sigma_X = \sqrt{Var\,(X)} = \frac{\sqrt{6}}{5}$$

$$E\,(Y^2) = 0{,}3 \times 4 + 0{,}3 \times 1 + 0{,}1 \times 16 + 0{,}3 \times 16 = 7{,}9$$
$$Var\,(Y) = E\,(Y^2) - (E\,(Y))^2 = 7{,}9 - 1 = 6{,}9$$
$$\sigma_Y = \sqrt{Var\,(Y)} = \sqrt{\frac{69}{10}}$$

Le rapport de corrélation linéaire est alors donné par :

$$\rho\,(X, Y) = \frac{Cov(X, Y)}{\sigma_X\,\sigma_Y} = -\frac{1}{2} \times \frac{5}{\sqrt{6}} \times \sqrt{\frac{10}{69}} = -\frac{5\sqrt{115}}{138}$$

$$\boxed{\sigma_X = \frac{\sqrt{6}}{5}\ ;\ \sigma_Y = \sqrt{\frac{69}{10}}\ ;\ \rho\,(X, Y) = -\frac{5\sqrt{115}}{138}}$$

Chapitre 10. Lois conjointes discrètes, indépendance.

Enoncés.

Exercice 21. Loi conjointe de deux variables indépendantes.

On suppose que X et Y sont des variables aléatoires indépendantes ayant pour lois de probabilités respectives :

x_i	1	2
$P\,[X = x_i]$	0,7	0,3

y_i	– 2	5	8
$P\,[Y = y_i]$	0,3	0,5	0,2

Calculer la loi de probabilité conjointe de X et Y et vérifier que $Cov\,(X, Y) = 0$.

Solution.

1°/ Loi conjointe.

Comme les variables aléatoires X et Y sont indépendantes, la loi conjointe s'obtient par produit des lois marginales.

X \ Y	– 2	5	8	*Somme*
1	0,21	0,35	0,14	0,7
2	0,09	0,15	0,06	0,3
Somme	0,3	0,5	0,2	1

2°/ Covariance.

$$E\,(X) = 0{,}7 \times 1 + 0{,}3 \times 2 = 1{,}3$$
$$E\,(Y) = 0{,}3 \times (-2) + 0{,}5 \times 5 + 0{,}2 \times 8 = 3{,}5$$
$$E\,(X\,Y) = 0{,}21 \times (-2) + 0{,}35 \times 5 + 0{,}14 \times 8 + 0{,}09 \times (-4) + 0{,}15 \times 10 + 0{,}06 \times 16 = 4{,}55$$
$$Cov\,(X, Y) = E\,(X\,Y) - E\,(X)\,E\,(Y) = 4{,}55 - 1{,}3 \times 3{,}5 = 0$$

$$\boxed{Cov\,(X, Y) = 0}$$

Chapitre 10. Lois conjointes discrètes, indépendance.

Enoncés.

Exercice 22. Covariance et coefficient de corrélation (deux pièces de monnaies).

On lance quatre fois une pièce de monnaie bien équilibrée. Soit X le nombre de faces obtenu et Y la plus longue suite de faces obtenue. 1°/ Déterminer la loi de probabilité conjointe de X et Y. 2°/ Calculer $Cov\,(X, Y)$ et $\rho\,(X, Y)$.	

Solution.

1°/ Loi conjointe.

Les évènements élémentaires de l'épreuve de quatre lancers d'une pièce de monnaie bien équilibrée sont les suites de 4 lettres prises parmi les lettres P (pile) et F (face), il y en a $2^4 = 16$. Pour chaque évènement élémentaire, de probabilité $\frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$, on peut calculer la valeur de X et la valeur de Y :

	PPPP	*PPPF*	*PPFP*	*PFPP*	*FPPP*	*PPFF*	*PFPF*	*FPPF*	*PFFP*	*FPFP*	*FFPP*	*PFFF*	*FPFF*	*FFPF*	*FFFP*	*FFFF*
X	0	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	4
Y	0	1	1	1	1	2	1	1	2	1	2	3	2	2	3	4

La loi conjointe de (X, Y) et les lois marginales de X et de Y se déduisent de ce tableau, chaque case du tableau ayant une probablité de $\frac{1}{16}$.

$X \backslash Y$	0	1	2	3	4	
0	$\frac{1}{16}$	0	0	0	0	$\frac{1}{16}$
1	0	$\frac{4}{16}$	0	0	0	$\frac{4}{16}$
2	0	$\frac{3}{16}$	$\frac{3}{16}$	0	0	$\frac{6}{16}$
3	0	0	$\frac{2}{16}$	$\frac{2}{16}$	0	$\frac{4}{16}$
4	0	0	0	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$
	$\frac{1}{16}$	$\frac{7}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$	1

On remarquera que la loi marginale de X est une **loi binomiale** de paramètres $n = 4$ et $p = \frac{1}{2}$.

On aurait pu déterminer directement cette loi marginale en remarquant que, pour une pièce, de deux choses l'une, ou bien elle indique face, c'est le succès, de probabilité $\frac{1}{2}$, ou bien elle indique pile, c'est l'échec, de probabilité $\frac{1}{2}$. Le fait de regarder si une pièce indique face est une épreuve de Bernoulli, avec deux résultats possibles, le succès et l'échec. Lorsqu'on répète cette épreuve de Bernoulli pour les quatre lancers, le nombre X de faces obtenu apparaît comme le nombre de succès dans cette répétition d'épreuves de Bernoulli : X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 4$, nombre de répétition de l'épreuve de Bernoulli, et $p = \frac{1}{2}$, probabilité du succès dans l'épreuve de Bernoulli.

2°/ Covariance et coefficient de corrélation linéaire.

$$E(X) = n\,p = 2$$
$$E(Y) = \frac{1}{16} \times 0 + \frac{7}{16} \times 1 + \frac{5}{16} \times 2 + \frac{2}{16} \times 3 + \frac{1}{16} \times 4 = \frac{27}{16}$$
$$E(X\,Y) = \frac{4}{16} \times 1 + \frac{3}{16} \times 2 + \frac{3}{16} \times 4 + \frac{2}{16} \times 6 + \frac{2}{16} \times 9 + \frac{1}{16} \times 16 = \frac{68}{16}$$
$$Cov(X, Y) = E(X\,Y) - E(X)\,E(Y) = \frac{68}{16} - 2 \times \frac{27}{16} = \frac{14}{16} = \frac{7}{8} = 0{,}8750$$

$$\boxed{Cov(X, Y) = \frac{7}{8}}$$

$$Var(X) = n\,p\,q = 1$$
$$\sigma_X = \sqrt{Var(X)} = 1$$

$$E(Y^2) = \frac{1}{16} \times 0^2 + \frac{7}{16} \times 1^2 + \frac{5}{16} \times 2^2 + \frac{2}{16} \times 3^2 + \frac{1}{16} \times 4^2 = \frac{61}{16}$$
$$Var(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2 = \frac{61}{16} - \frac{729}{256} = \frac{247}{256}$$
$$\sigma_Y = \sqrt{Var(Y)} = \frac{\sqrt{247}}{16}$$

Le rapport de corrélation linéaire est alors donné par :

$$\rho(X, Y) = \frac{Cov(X, Y)}{\sigma_X\,\sigma_Y} = \frac{7}{8} \times \frac{16}{\sqrt{247}} = \frac{14\sqrt{247}}{247} \approx 0{,}8908$$

$$\boxed{\rho(X, Y) = \frac{14\sqrt{247}}{247}}$$

Chapitre 10. Lois conjointes discrètes, indépendance.

Enoncés.

Exercice 23. Covariance et corrélation de la somme et du maximum.

On tire, sans remise, deux cartes au hasard dans une boîte contenant cinq cartes numérotées 1, 1, 2, 2, et 3. Soit X la somme et Y le maximum des deux nombres tirés. 1°/ Déterminer la loi de probabilité conjointe de X et Y. 2°/ Calculer $Cov\,(X, Y)$ et $\rho\,(X, Y)$.	

Solution.

1°/ Loi conjointe.

Les événements élémentaires de l'épreuve de tirage de deux cartes parmi les 5 sont les couples :

$$(1, 1)\ ;\ (1\ ;\ 2)\ ;\ (1, 3)\ ;\ (2, 2)\ ;\ (2, 3).$$

Pour calculer les probabilités de ces évènements, il faut considérer les $\binom{5}{2} = 10$ tirages possibles qu'on obtient en distinguant les deux cartes donnant 1 et les deux cartes donnant 2, chacun de ces événements ayant une probabilité 0,1 :

$$(1_a, 1_b)\ ;\ (1_a, 2_a)\ ;\ (1_a, 2_b)\ ;\ (1_a, 3)\ ;$$
$$(1_b, 2_a)\ ;\ (1_b, 2_b)\ ;\ (1_b, 3)\ ;$$
$$(2_a, 2_b)\ ;\ (2_a, 3)\ ;$$
$$(2_b, 3).$$

L'événement (1, 1) est constitué de l'unique événement $(1_a, 1_b)$, ce qui veut dire qu'il y a une façon de tirer les deux 1. Sa probabilité est 0,1.
L'événement (1, 2) est constitué des événements $(1_a, 2_a)$; $(1_a, 2_b)$; $(1_b, 2_a)$; $(1_b, 2_b)$, il y a deux façons de choisir le 1 et deux façons de choisir le 2 ; sa probabilité est 0,4.
L'événement (1, 3) est constitué des événements $(1_a, 3)$ et $(1_b, 3)$. Il y a deux façons de choisir le 1 et 1 façon de chosir le 3. Sa probabilité est 0,2.
L'événement (2, 2) est constitué de l'unique événement $(2_a, 2_b)$, il y a une seule façon de choisir les deux 2. Sa probabilité est 0,1.
L'événement (2, 3) est constitué des deux événements $(2_a, 3)$ et $(2_b, 3)$, il y a deux façons de choisir le 2 et 1 façon de chosir le 3. Sa probabilité est 0,2.

Pour chacun des événements élémentaires, on peut calculer la valeur de X et la valeur de Y et dresser le tableau des résultats :

Evénement	Probabilité	X	Y
(1, 1)	0,1	2	1
(1, 2)	0,4	3	2
(1, 3)	0,2	4	3
(2, 2)	0,1	4	2
(2, 3)	0,2	5	3

Ce tableau permet de construire la loi conjointe de X et Y, et, par addition, les lois marginales de X et de Y :

$X\backslash Y$	1	2	3	*Loi marginale de X*
2	0,1	0	0	0,1
3	0	0,4	0	0,4
4	0	0,1	0,2	0,3
5	0	0	0,2	0,2
Loi marginale de Y	0,1	0,5	0,4	1

2°/ Covariance, coefficient de corrélation linéaire.

$$E(X) = 0{,}1 \times 2 + 0{,}4 \times 3 + 0{,}3 \times 4 + 0{,}2 \times 5 = 3{,}6$$
$$E(Y) = 0{,}1 \times 1 + 0{,}5 \times 2 + 0{,}4 \times 3 = 2{,}3$$
$$E(XY) = 0{,}1 \times 2 + 0{,}4 \times 6 + 0{,}1 \times 8 + 0{,}2 \times 12 + 0{,}2 \times 15 = 8{,}8$$
$$Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)\,E(Y) = 8{,}8 - 3{,}6 \times 2{,}3 = 0{,}52 = \frac{13}{25}$$
$$E(X^2) = 0{,}1 \times 4 + 0{,}4 \times 9 + 0{,}3 \times 16 + 0{,}2 \times 25 = 13{,}8$$
$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 13{,}8 - 12{,}96 = 0{,}84$$
$$\sigma_X = \sqrt{Var(X)} = \frac{\sqrt{21}}{5}$$
$$E(Y^2) = 0{,}1 \times 1 + 0{,}5 \times 4 + 0{,}4 \times 9 = 5{,}7$$
$$Var(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2 = 5{,}7 - 5{,}29 = 0{,}41$$
$$\sigma_Y = \sqrt{Var(Y)} = \frac{\sqrt{41}}{10}$$
$$\rho(X, Y) = \frac{Cov(X, Y)}{\sigma_X\,\sigma_Y} = \frac{13}{25} \times \frac{5}{\sqrt{21}} \times \frac{10}{\sqrt{41}} = \frac{26}{\sqrt{861}} \approx 0{,}8861$$

$$Cov(X, Y) = \frac{13}{25} = 0{,}52 \text{ ; } \rho(X, Y) = \frac{26}{\sqrt{861}} \approx 0{,}8861.$$

Chapitre 10. Lois conjointes discrètes, indépendance.

Enoncés.

Exercice 24. Loi conjointe $P\{(X, Y) = (i, j)\} = a\, p^j$, $1 \leq i < j$.

Un vecteur aléatoire (X, Y) est défini sur un espace probabilisé (Ω, P). Sa loi est donnée par :

$$(X, Y)(\Omega) = \{ (i, j) \in \mathbb{N}^2,\ 1 \leq i < j \},$$
$$\text{et } P\{(X, Y) = (i, j)\} = a\, p^j \ \forall\ (i, j) \in (X, Y)(\Omega),$$

où a est un réel strictement positif, et $0 < p < 1$.

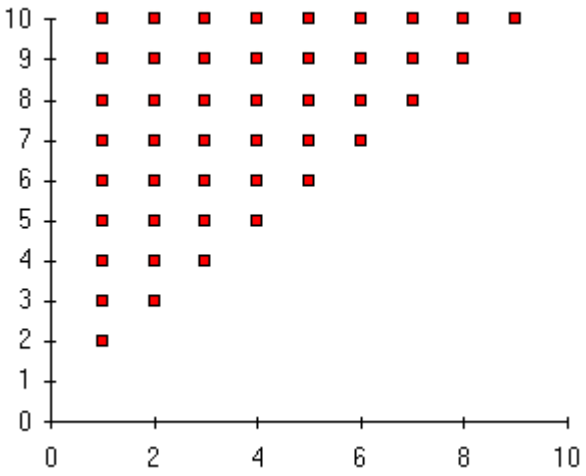
1°/ Représenter graphiquement $(X, Y)(\Omega)$. Déterminer la loi marginale de X en fonction de a. En déduire la valeur de a.
2°/ Quel est le nom de la loi de X ? Donner l'espérance et la variance de X.
3°/ Calculer $E(Y)$ et $E(XY)$. Montrer que $Var(Y) = 2\, Var(X)$.
4°/ Montrer que X et $Y - X$ ont même loi. X et $Y - X$ sont-elles indépendantes ?
5°/ Déterminer la loi de Y. Vérifier que :

$$E\left(\frac{X}{Y}\right) = \frac{E(X)}{E(Y)}.$$

Solution.

1°/ Représentation graphique et loi marginale.

$(X, Y)(\Omega) = \{ (i, j) \in \mathbb{N}^2,\ 1 \leq i < j \}$ est représenté par l'ensemble des points à coordonnées entières strictement positives différentes, situés au-dessus de la première diagonale principale ($Y > X$).



La loi conjointe de X et Y est, par hypothèse :

$$P\{(X, Y) = (i, j)\} = a\, p^j$$

La fonction génératrice correspondante est :

$$g_{(X, Y)}(u, v) = E(u^X v^Y) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=i+1}^{\infty} P[\{X = i\} \cap \{Y = j\}]\, u^i v^j$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=i+1}^{\infty} a\, p^j u^i v^j = a \sum_{i=1}^{\infty} u^i \sum_{j=i+1}^{\infty} (p v)^j = a \sum_{i=1}^{\infty} u^i \frac{(p v)^{i+1}}{1 - p v}$$

$$= a \frac{p v}{1 - p v} \frac{p u v}{1 - p u v}$$

$$\boxed{g_{(X, Y)}(u, v) = a \frac{p v}{1 - p v} \frac{p u v}{1 - p u v}}$$

La condition de normalisation $g_{(X, Y)}(1, 1) = 1$ s'exprime par :

$$a \frac{p^2}{(1 - p)^2} = 1$$

$$\boxed{a = \frac{(1 - p)^2}{p^2}}$$

$$g_{(X, Y)}(u, v) = \frac{(1 - p)^2}{p^2} \frac{p v}{1 - p v} \frac{p u v}{1 - p u v} = \frac{(1 - p)^2 u v^2}{(1 - p v)(1 - p u v)}$$

$$\boxed{g_{(X, Y)}(u, v) = \frac{(1 - p)^2 u v^2}{(1 - p v)(1 - p u v)}}$$

La fonction génératrice de X s'obtient à partir de la fonction génératrice du couple (X, Y) par :

$$g_X(u) = g_{(X,Y)}(u, 1) = \frac{(1-p)u}{1-pu}$$

$$\boxed{g_X(u) = \frac{(1-p)u}{1-pu}}$$

Cette formule montre que X suit une **loi géométrique sur $\mathbb{N}^*$** de paramètre $1 - p$ et la loi marginale de X est :

$$\boxed{P(X = k) = (1-p)\,p^{k-1}}$$

2°/ Paramètres de X.

Comme X suit une loi géométrique de paramètre $1 - p$, on connaît son espérance et sa variance :

$$\boxed{E(X) = \frac{1}{1-p};\ Var(X) = \frac{p}{(1-p)^2}}$$

3°/ Paramètres de Y.

La fonction génératrice de Y s'obtient à partir de la fonction génératrice $\frac{(1-p)^2 u v^2}{(1-pv)(1-puv)}$ du couple (X, Y) par :

$$g_Y(v) = g_{(X,Y)}(1, v) = \frac{(1-p)^2 v^2}{(1-pv)^2} = \left(\frac{(1-p)v}{1-pv}\right)^2$$

et cette formule montre que :

Y est somme de deux variables aléatoires géométriques sur $\mathbb{N}^*$, indépendantes et de même paramètre $1 - p$.

Son espérance mathématique est donc égale à deux fois l'espérance mathématique d'une variable géométrique de paramètre $1 - p$, et sa variance est égale à deux fois la variance d'une variable géométrique de paramètre $1 - p$:

$$\boxed{E(Y) = 2\,E(X) = \frac{2}{1-p};\ \ Var(Y) = 2\,Var(X) = \frac{2p}{(1-p)^2}}$$

L'espérance du produit $X\,Y$ est donnée par le moment factoriel d'ordre (1, 1) de la fonction génératrice du couple (X, Y) :

$$E(X\,Y) = \frac{\partial^2 g_{(X,Y)}}{\partial u\,\partial v}(1, 1)$$

Or la dérivée par rapport à v de la fonction génératrice $\frac{(1-p)^2 u v^2}{(1-p v)(1-p u v)}$ est :

$$\frac{\partial g_{(X,Y)}}{\partial v}(u, v) = (1-p)^2 u \left(\frac{2v}{(1-pv)(1-puv)} + \frac{pv^2}{(1-pv)^2(1-puv)} + \frac{puv^2}{(1-pv)(1-puv)^2} \right)$$

Pour $v = 1$, il reste :

$$\frac{\partial g_{(X,Y)}}{\partial v}(u, 1) = (1-p)^2 u \left(\frac{2}{(1-p)(1-pu)} + \frac{p}{(1-p)^2(1-pu)} + \frac{pu}{(1-p)(1-pu)^2} \right)$$

$$= (2-p) \frac{u}{1-pu} + p(1-p) \frac{u^2}{(1-pu)^2}$$

La dérivée par rapport à u de cette fonction est :

$$\frac{\partial^2 g_{(X,Y)}}{\partial u \partial v}(u, 1) = \frac{2-p}{1-pu} + (p(2-p) + 2p(1-p)) \frac{u}{(1-pu)^2} + 2p^2(1-p) \frac{u^2}{(1-pu)^3}$$

et sa valeur pour $u = 1$ est :

$$E(XY) = \frac{\partial^2 g_{(X,Y)}}{\partial u \partial v}(1, 1) = \frac{2-p}{1-p} + \frac{2p - p^2 + 2p - 2p^2 + 2p^2}{(1-p)^2} = \frac{2+p}{(1-p)^2}$$

$$\boxed{E(XY) = \frac{2+p}{(1-p)^2}}$$

4°/ Loi de $Y - X$.

La fonction génératrice de la variable aléatoire $Y - X$ se déduit de la fonction génératrice $\frac{(1-p)^2 u v^2}{(1-p v)(1-p u v)}$ du couple (X, Y) par :

$$g_{Y-X}(u) = E(u^{Y-X}) = g_{(X,Y)}\left(\frac{1}{u}, u\right) = \frac{(1-p)u}{1-pu}$$

Cette formule montre que $Y - X$ suit la même **loi géométrique sur $\mathbb{N}^*$, de paramètre $1 - p$,** que X :

$$\boxed{P(Y - X = k) = (1-p) p^{k-1}, k \geq 1.}$$

On remarquera que la covariance de X et de $(Y - X)$ est nulle. En effet :

$$E(X(Y-X)) = E(XY) - E(X^2) = E(XY) - (Var(X) + (E(X))^2 = \frac{2+p}{(1-p)^2} - \frac{p}{(1-p)^2} - \frac{1}{(1-p)^2} = \frac{1}{(1-p)^2}$$

$$E(X)\,E(Y-X) = \frac{1}{1-p} \times \frac{1}{1-p} = \frac{1}{(1-p)^2} = E(X(Y-X))$$

$$Cov(X, Y-X) = E(X(Y-X)) - E(X)\,E(Y-X) = 0.$$

Mais cette relation ne prouve pas que les variables X et $Y-X$ sont indépendantes !
Pour étudier l'indépendance des deux variables, il faut étudier leur loi conjointe.

L'événement $\{X = k \text{ et } Y-X = j\}$ est l'événement $\{X = k \text{ et } Y = j+k\}$. Sa probabilité est donnée par la loi conjointe de X et Y :

$$P(\{X = k \text{ et } Y-X = j\}) = P(\{X = k \text{ et } Y = j+k\}) = a\,p^{j+k} = \frac{(1-p)^2}{p^2}\,p^{j+k} = (1-p)^2\,p^{j+k-2}$$

$$P(X = k) = (1-p)\,p^{k-1}$$
$$P(Y-X = j) = (1-p)\,p^{j-1}$$

$$P(X = k) \times P(Y-X = j) = (1-p)\,p^{k-1}\,(1-p)\,p^{j-1} = (1-p)^2\,p^{j+k-2} = P(\{X = k \text{ et } Y-X = j\})$$

La relation :

$$P(\{X = k \text{ et } Y-X = j\}) = P(X = k) \times P(Y-X = j)$$

montre que :

Les variables X et $Y-X$ sont indépendantes et suivent la même loi géométrique de paramètre $1-p$.

On retrouve ainsi le fait que $Y = X + (Y-X)$ est somme de deux variables aléatoires indépendantes de même loi géométrique de paramètre $1-p$.

5°/ Loi de *Y*.

La loi conjointe des variables indépendantes X et Z est le produit des lois marginales :

$$P(X = i \text{ et } Z = k) = P(X = i) \times P(Z = k) = (1-p)^2\,p^{i+k-2}$$
$$P(Y = X+Z = n) = \sum_{i=1}^{i=n-1} P(X = i \text{ et } Z = n-i) = (1-p)^2 \sum_{i=1}^{i=n-1} p^{i+(n-i)-2} = (n-1)(1-p)^2\,p^{n-2}$$

$$P(Y = n) = (n-1)(1-p)^2\,p^{n-2},\ n \geq 2.$$

L'espérance du quotient $\frac{X}{Y}$ est donnée par :

$$E\left(\frac{X}{Y}\right) = \sum_{1 \leqslant i < j} \frac{i}{j}\,P[\,\{X = i\} \cap \{Y = j\}\,] = \frac{(1-p)^2}{p^2} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=i+1}^{\infty} \frac{i}{j}\,p^j$$
$$= \frac{(1-p)^2}{p^2} \sum_{j=2}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{i=j-1} i\right) \frac{p^j}{j} = \frac{(1-p)^2}{p^2} \sum_{j=2}^{\infty} \frac{j-1}{2}\,p^j$$

$$= \frac{(1-p)^2}{p^2}\frac{p^2}{2}\sum_{j=2}^{\infty}(j-1)\,p^{j-2} = \frac{(1-p)^2}{2}\,\frac{d}{dp}\left(\sum_{j=2}^{\infty}p^{j-1}\right)$$

$$= \frac{(1-p)^2}{2}\,\frac{d}{dp}\left(\frac{p}{1-p}\right) = \frac{(1-p)^2}{2}\,\frac{d}{dp}\left(\frac{1}{1-p}-1\right)$$

$$= \frac{(1-p)^2}{2}\frac{1}{(1-p)^2} = \frac{1}{2}$$

Et comme on a obtenu, dans la troisième question, la relation $E(Y) = 2\,E(X)$, il vient :

$$\boxed{E\left(\frac{X}{Y}\right) = \frac{1}{2} = \frac{E(X)}{E(Y)}}$$

Chapitre 10. Lois conjointes discrètes, indépendance.

Enoncés.

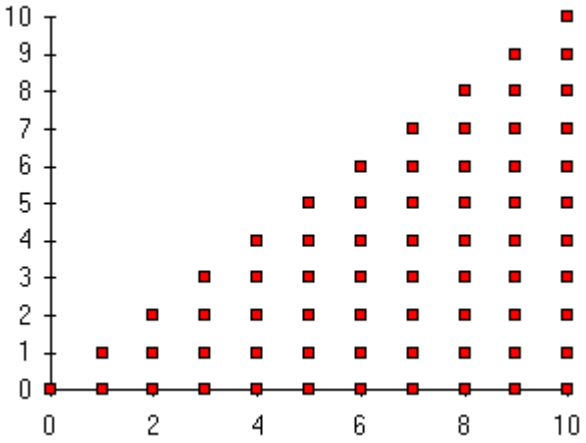
Exercice 25. Loi conditionnelle binomiale.

On suppose que X est régie par une loi binomiale de paramètres n et p ($n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0, 1]$ sont fixés), et que, pour chaque k fixé (avec $0 \leq k \leq n$), la loi conditionnelle de Y sachant $X = k$, est une loi binomiale de paramètres k et q ($q \in [0, 1]$ est fixé). Trouver la loi de Y par un calcul, puis par un raisonnement direct.	

Solution.

1°/ Calcul.

L'ensemble de valeurs $(X, Y)(\Omega)$ est l'ensemble des points de coordonnées entières comprises entre 0 et n vérifiant $Y \leq X$:



Dans chaque colonne, par hypothèse, la loi de probabilité est une loi binomiale de paramètres l'abscisse de la colonne (valeur de X) et q.
Toujours par hypothèse, les valeurs de X suivent une loi binomiale de paramètres n et p.

On sait (Exercice 7) que, lorsque la loi conditionnelle de Y pour $X = k$ fixé est une loi binomiale de paramètres k et q, alors la fonction génératrice de Y est donnée, en fonction de la fonction génératrice de X par la formule :

$$g_Y(v) = g_X((1 - q) + q\,v)$$

Lorsque X suit une loi binomiale de paramètres n et p, sa fonction génératrice est :

$$g_X(u) = ((1 - p) + p\,u)^n$$

La fonction génératrice de Y est alors :

$$g_Y(v) = g_X((1-q) + q\,v) = ((1-p) + p\,((1-q) + q\,v))^n = ((1-p\,q) + p\,q\,v)^n$$

Cette formule montre que Y suit une **loi binomiale** de paramètres n et $p\,q$.

2°/ Raisonnement direct.

$X = X_1 + ... + X_n$ est somme de n variables de Bernoulli de même paramètre p, représentant le nombre de phénomènes qui se produisent, parmi les n phénomènes étudiés, qui peuvent ou non se produire, indépendamment les uns des autres.
$Y = Y_1 + ... + Y_n$ est la somme des n variables de Bernoulli, représentant le nombre de phénomènes observés, parmi les n phénomènes qui se produisent.
La probabilité qu'un phénomène soit observé est le produit $p\,q$ de la probabilité p qu'il se produise et de la probabilité q d'être observé lorsqu'il se produit.
Chaque variable Y_k est donc une variable de Bernoulli de paramètre $p\,q$ et Y est somme de n variables de Bernoulli indépendantes de même paramètre $p\,q$.

Y suit donc une **loi binomiale** de paramètres n et $p\,q$.

Chapitre 10. Lois conjointes discrètes, indépendance.

Enoncés.

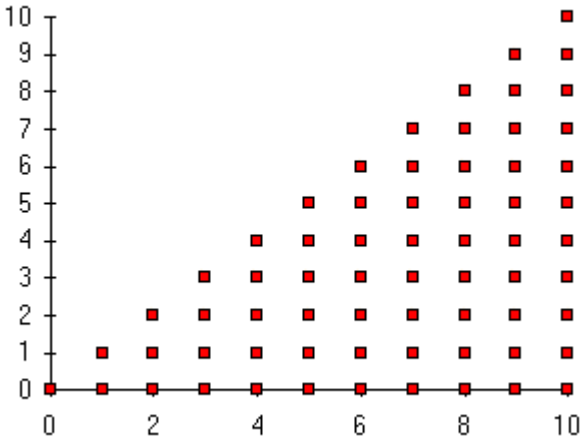
Exercice 26. Truite et loi de Poisson.

Une truite pond des œufs au fond du torrent. Leur nombre N suit une loi de Poisson de paramètre $a > 0$. Chaque œuf survit avec une probabilité $p \in]0, 1[$, indépendamment des autres. 1°/ Soit M le nombre d'œufs qui survivent. Donner la loi conjointe du couple (N, M). Donner la loi marginale et l'espérance de M. 2°/ M et $N - M$ sont-elles indépendantes ?	

Solution.

1°/ Calcul.

L'ensemble de valeurs (N, M) (Ω) est l'ensemble des points de coordonnées entières comprises entre 0 et n vérifiant $M \leq N$:



Pour un oeuf pondu, de deux choses l'une : ou bien il survit, probabilité p, ou bien il ne survit pas, probabilité $1 - p$.
Lorsque k oeufs sont pondus, le nombre d'oeufs qui survivent apparaît comme le nombre de succès dans la répétition k fois d'une épreuve de Bernoulli.
La loi de probabilité de M pour $N = k$ fixé est donc une loi binomiale de paramètres k et p.

On sait (Exercice 7) que, lorsque la loi conditionnelle de M pour $N = k$ fixé est une loi binomiale de paramètres k et p, alors

a) Loi conjointe de (N, M).

La fonction génératrice du couple (N, M) est donnée par :

$g_{(N, M)}(u, v) = g_N [\, u((1-p) + p\, v) \,]$

Lorsque N suit une loi de Poisson de paramètre a, sa fonction génératrice est :

$$g_N(u) = e^{a(u-1)}$$

La fonction génératrice de (N, M) est alors :

$$g_{(N, M)}(u, v) = g_N [\, u((1-p) + p\, v) \,] = e^{a((u((1-p) + p\, v)) - 1)}$$

La loi conjointe du couple (N, M) s'obtient par calcul direct :

$$P((N, M) = (k, j)) = P(M = j \mid N = k) \times P(N = k) = \binom{k}{j} p^j (1-p)^{k-j} \times e^{-a} \frac{a^k}{k!}$$
$$= e^{-a} \binom{k}{j} p^j (1-p)^{k-j} \frac{a^k}{k!}$$
$$= e^{-a\,p} \frac{(a\,p)^j}{j!} \times e^{-a(1-p)} \frac{(a(1-p))^{k-j}}{(k-j)!}$$

b) Loi marginale de M.

La fonction génératrice de M est donnée, en fonction de la fonction génératrice de N par la formule :

$$g_M(v) = g_N((1-p) + p\, v)$$

Lorsque N suit une loi de Poisson de paramètre a, sa fonction génératrice est :

$$g_N(u) = e^{a(u-1)}$$

La fonction génératrice de M est alors :

$$g_M(v) = g_N((1-p) + p\, v) = e^{a(((1-p) + p\, v) - 1)} = e^{a\,p\,(v-1)}$$

Cette formule montre que Y suit une **loi de Poisson** de paramètre $a\,p$.

2°/ Indépendance de M et $N - M$.

Le raisonnement fait pour M peut être refait pour le nombre $N - M$ des œufs qui ne survivent pas, chaque ne survivant pas avec une probabilité $q = 1 - p$.
$N - M$ suit une loi de Poisson de paramètre $a\,q$. Son espérance est donc $a\,q$.

L'événement ($M = m$ et $N - M = k$) est l'événement ($M = m$ et $N = m + k$).
Sa probabilité est donnée par la loi conjointe de N et M :

$$P(M = m \text{ et } N - M = k) = P(M = m \text{ et } N = m + k)$$
$$= \binom{m+k}{m} p^m\, q^k\, e^{-a} \frac{a^{m+k}}{(m+k)!}$$

$$= e^{-a\,p}\frac{(a\,p)^m}{m\,!} \times e^{-a\,q}\frac{(a\,q)^k}{k\,!}$$
$$= P\,(M = m) \times P\,(N - M = k)$$

Cette égalité montre que les variables M et $N - M$ sont indépendantes.

Chapitre 10. Lois conjointes discrètes, indépendance.

Enoncés.

Exercice 27. Appels téléphoniques et lois binomiales.

Une secrétaire donne n appels téléphoniques ($n \geq 1$ est fixé). A chacun de ces appels, la probabilité qu'elle parvienne à joindre son correspondant est p ($p \in]0, 1[$ est fixé). On suppose que les résultats de tous ces appels sont indépendants. Après cette première série d'essais, elle tente, le lendemain de rappeler les correspondants qu'elle n'a pas réussi à joindre. Les hypothèses sur ses chances de résussite sont les mêmes. On note X le nombre de personnes jointes dès le premier jour et Y le nombre de personnes jointes l'un ou l'autre jour. 1°/ Quelle est la loi de X ? 2°/ Pour $h \leq k \leq n$, que vaut $P(Y = k \mid X = h)$? 3°/ En déduire la loi de Y. Retrouver ce résultat par un argument direct.	

Solution.

1°/ Loi de X.

Pour un appel donné le premier jour, de deux choses l'une : ou bien la secrétaire parvient à joindre son correspondant, avec une probabilité p, ou bien elle ne parvient pas à le joindre, avec une probabilité $q = 1 - p$.
Le fait de regarder si un appel a donné le résultat escompté est une épreuve de Bernoulli de paramètre p.
Lorsqu'on répète cette épreuve de Bernoulli n fois, le nombre de succès est le nombre X des correspondants joints au cours de la première journée : ce nombre suit une **loi binomiale de paramètres n et p**.

$$P(X = h) = \binom{n}{h} p^h q^{n-h}.$$

2°/ Loi conditionnelle de Y par X.

Lorsque X est égal à h, Y prend des valeurs de h à n.
Pour $h \leq k \leq n$, la probabilité que Y égale k quand on sait que h correspondants ont été joints le premier jour, est égale à la probabilité que $k - h$ correspondants aient été joints le deuxième jour, sur les $n - h$ qui restaient à joindre.
Or le même argument que dans la première question montre que le nombre de correspondants joints au cours de la deuxième journée, suit une **loi binomiale de paramètres $n - h$ et p**.

$$P(Y = k \mid X = h) = \binom{n-h}{k-h} p^{k-h} q^{n-k}.$$

3°/ Loi de *Y*.

$$P(Y=k)=\sum_{h=0}^{h=k} P(Y=k \mid X=h)\times P(X=h)=\sum_{h=0}^{h=k}\binom{n-h}{k-h}p^{k-h}q^{n-k}\binom{n}{h}p^{h}q^{n-h}$$

$$=\frac{n!}{(n-k)!}p^{k}q^{2n-k}\sum_{h=0}^{h=k}\frac{q^{-h}}{h!(k-h)!}=\binom{n}{k}p^{k}q^{2n-k}\sum_{h=0}^{h=k}\binom{k}{h}q^{-h}$$

$$=\binom{n}{k}p^{k}q^{2n-k}(1+q^{-1})^{k}$$

$$=\binom{n}{k}[p(2-p)]^{k}q^{2(n-k)}$$

Comme on a aussi :

$$p(2-p)=2p-p^2=1-(1-p)^2=1-q^2,$$

On voit que *Y* suit une **loi binomiale de paramètres *n* et $1-q^2=1-(1-p)^2$**.

On pourrait trouver directement ce résultat en remarquant que chaque personne avait une probabilité q^2 de ne pas être jointe en deux jours, puisqu'elle avait une probabilité *q* de ne pas être jointe le premier jour et, n'ayant pas été jointe le premier jour, à nouveau une probabilité *q* de ne pas être jointe le deuxième jour.
Donc chaque personne avait une probabilité $1-q^2$ d'être jointe au cours de l'un des deux jours d'appel.
Le nombre *Y* de personnes jointes en deux jours d'appel suit donc une loi binomiale de paramètres *n* et $1-q^2$.

Exercices

Loi multinomiale.

1. Définition.
2. Cas particulier, $n = 2$: loi binomiale.
3. Lois marginales.
4. Distribution de deux caractères.
5. Fonction génératrice.

1. Définition.

HAUT

Etant donnée une épreuve aléatoire d'ensemble fondamental Ω,
étant donné un **ensemble complet d'événements** $(A_j)_{1 \le j \le n}$ (partition de l'ensemble fondamental Ω), de probabilités respectives $p_j = P[A_j]$, avec $\sum_{j=1}^{j=n} p_j = 1$,
étant donné un nombre m de répétitions indépendantes de l'épreuve aléatoire,
on note $\boldsymbol{Y_j}$ **le nombre de fois que se réalise l'événement** $\boldsymbol{A_j}$ **en** ***m* répétitions indépendantes** de l'épreuve aléatoire, $1 \le j \le n$.

Soient k_j des nombres entiers naturels tels que $k_1 + k_2 + ... + k_n = m$.
La variable $(Y_1, Y_2, ..., Y_n)$ suit ce qu'on appelle une **loi multinomiale** :

$$P(Y_1 = k_1 \text{ et } Y_2 = k_2 \text{ et } ... \text{ et } Y_n = k_n) = \frac{m!}{k_1!\, k_2! \cdots k_n!} {p_1}^{k_1} {p_2}^{k_2} ... {p_n}^{k_n}$$

La loi multinomiale est donc la loi conjointe des n variables aléatoires $(Y_1, Y_2, ..., Y_n)$ liées par la relation

$$Y_1 + Y_2 + ... + Y_n = m$$

2. Cas particulier, $n = 2$: loi binomiale.

HAUT

Etant donnée une épreuve aléatoire d'ensemble fondamental Ω,
étant donné un **ensemble complet d'événements** $(A_j)_{1 \le j \le 2}$ (partition de l'ensemble fondamental Ω), de probabilités respectives $p_j = P[A_j]$, avec $p_1 + p_2 = 1$,
étant donné un nombre m de répétitions indépendantes de l'épreuve aléatoire,
on note $\boldsymbol{Y_j}$ **le nombre de fois que se réalise l'événement** $\boldsymbol{A_j}$ **en** ***m* répétitions indépendantes** de l'épreuve aléatoire, $1 \le j \le 2$.

Soient k_j, $1 \le j \le 2$, des nombres entiers naturels tels que $k_1 + k_2 = m$.
La variable (Y_1, Y_2) suit une **loi binomiale** :

$$P(Y_1 = k_1 \text{ et } Y_2 = k_2) = \frac{m!}{k_1!\,k_2!}\, {p_1}^{k_1} {p_2}^{k_2}$$

La loi binomiale est donc la loi conjointe des 2 variables aléatoires (Y_1, Y_2) liées par la relation

$$Y_1 + Y_2 = m$$

L'épreuve aléatoire est une **épreuve de Bernoulli**, avec deux résultats possibles : le succès A_1 et l'échec A_2.
Y_1 est le nombre de succès obtenus lorsqu'on répète m fois de façon indépendante l'épreuve de Bernoulli,
Y_2 est le nombre d'échecs.
On a toujours $Y_2 = m - Y_1$, de sorte que la valeur de Y_2 est déterminée par celle de Y_1.
Il suffit donc d'écrire :

$$P(Y_1 = k_1) = \binom{m}{k_1} {p_1}^{k_1} (1 - p_1)^{(m - k_1)}$$

pour retrouver la forme classique de la loi binomiale.

HAUT

3. Lois marginales.

HAUT

Etant donnée une épreuve aléatoire d'ensemble fondamental Ω,
étant donné un **ensemble complet d'événements** $(A_j)_{1 \leq j \leq n}$ (partition de l'ensemble fondamental Ω), de probabilités respectives $p_j = P[A_j]$, avec $\sum_{j=1}^{j=n} p_j = 1$,
étant donné un nombre m de répétitions indépendantes de l'épreuve aléatoire,
on note $\boldsymbol{Y_j}$ **le nombre de fois que se réalise l'événement** $\boldsymbol{A_j}$ **en** ***m* répétitions indépendantes** de l'épreuve aléatoire, $1 \leq j \leq n$.

Soient k_j des nombres entiers naturels tels que $k_1 + k_2 + ... + k_n = m$.
La variable $(Y_1, Y_2, ..., Y_n)$ suit une **loi multinomiale** :

$$P(Y_1 = k_1 \text{ et } Y_2 = k_2 \text{ et } ... \text{ et } Y_n = k_n) = \frac{m!}{k_1!\, k_2! \cdots k_n!} {p_1}^{k_1} {p_2}^{k_2} ... {p_n}^{k_n}$$

La loi marginale de la variable aléatoire Y_j est une **loi binomiale** de paramètres m et p_j.
En effet, si l'on appelle A_j le succès dans l'épreuve aléatoire, et $A_1 \cup ... \cup A_{j-1} \cup A_{j+1} \cup ... \cup A_n = \complement_\Omega A_j$ l'échec, la loi de probabilité de Y_j est donnée par :

$$P[Y_j = k_j] = \binom{m}{k_j} {p_j}^{k_j} (1 - p_j)^{(m - k_j)}$$

HAUT

4. Distribution de deux caractères.

HAUT

Etant donnés deux caractères A et B dans une population, présentant des modalités A_1, ... , A_n, B_1, ... , B_m, caractérisées par des probabilités conjointes :

$$p_{ij} = P\,[\,A_i \cap B_j\,]$$

la **répartition conjointe de probabilité** des deux caractères dans la population peut être schématisée dans un tableau à double entrée :

A \ B	B_1	...	B_j	...	B_m	*Total*
A_1	p_{11}	...	p_{1j}	...	p_{1m}	$p_{1.}$
...	...	...	...	...	...	...
A_i	p_{i1}	...	p_{ij}	...	p_{im}	$p_{i.}$
...	...	...	...	...	...	...
A_n	p_{n1}	...	p_{nj}	...	p_{nm}	$p_{n.}$
Total	$p_{.1}$	...	$p_{.j}$	...	$p_{.m}$	1

Considérons l'épreuve aléatoire qui consiste à tirer un individu au hasard dans la population.
On répète N fois cette épreuve de manière indépendante (tirage avec remise).
On note Y_{ij} le nombre d'individus tirés présentant à la fois les modalités A_i et B_j :

A \ B	B_1	...	B_j	...	B_m	*Total*
A_1	Y_{11}	...	Y_{1j}	...	Y_{1m}	$Y_{1.}$
...	...	...	...	...	...	...
A_i	Y_{i1}	...	Y_{ij}	...	Y_{im}	$Y_{i.}$
...	...	...	...	...	...	...
A_n	Y_{n1}	...	Y_{nj}	...	Y_{nm}	$Y_{n.}$
Total	$Y_{.1}$	...	$Y_{.j}$	...	$Y_{.m}$	N

La loi de probabilité de la variable aléatoire multiple représentée dans le tableau précédent est une **loi multinomiale**.
La probabilité d'une réalisation :

A \ B	B_1	...	B_j	...	B_m	*Total*
A_1	k_{11}	...	k_{1j}	...	k_{1m}	$k_{1.}$
...	...	...	...	...	...	...
A_i	k_{i1}	...	k_{ij}	...	k_{im}	$k_{i.}$
...	...	...	...	...	...	...
A_n	k_{n1}	...	k_{nj}	...	k_{nm}	$k_{n.}$
Total	$k_{.1}$	...	$k_{.j}$	...	$k_{.m}$	N

est donnée par la formule :

$$P\left[Y_{ij} = k_{ij}, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m \right] = \frac{N!}{\prod_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} k_{ij}!} \times \prod_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} {p_{ij}}^{k_{ij}}$$

HAUT

5. Fonction génératrice.

HAUT

Etant donnée une variable aléatoire $(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ de loi multinomiale :

$$P(Y_1 = k_1 \text{ et } Y_2 = k_2 \text{ et } \dots \text{ et } Y_n = k_n) = \frac{m!}{k_1!\, k_2! \cdots k_n!}\, {p_1}^{k_1} {p_2}^{k_2} \dots {p_n}^{k_n}$$

la fonction génératrice de $(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ est

$$g_{(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)}(u_1, u_2, \dots, u_n) = (p_1 u_1 + p_2 u_2 + \dots + p_n u_n)^m$$

Cette relation traduit l'indépendance des *m* épreuves successives.

HAUT

Chapitre 11. Loi multinomiale.

Exercices

Exercice 1. Jet de cinq dés.
Exercice 2. Sexe et études supérieures.

Exercice 1. Jet de cinq dés.

On lance 5 fois de suite un dé équilibré. Quelles sont les probabilités des évènements : 1°/ On amène deux fois un nombre pair et une fois le 1, une fois le 3, une fois le 5. 2°/ On amène trois fois un nombre pair et jamais un nombre premier. 3°/ On amène trois fois un nombre premier et une fois le 4. 4°/ On amène au moins une fois le nombre 2 et 3 fois un nombre pair. 5°/ On amène au moins une fois le nombre 2 et au plus deux fois un nombre pair.	Solution

HAUT

Exercice 2. Sexe et études supérieures.

Sachant qu'une femme aura 10 petits-enfants, que la probabilité de faire des études supérieures est 0,4 et qu'elle est indépendante du sexe et que la probabilité de naissance d'un garçon est 0,60, calculer la probabilité des événements suivants : 1°/ il naîtra 5 garçons et 5 filles, parmi lesquels 2 garçons et 3 filles feront des études supérieures. 2°/ il naîtra 6 garçons et 4 filles, parmi lesquels au moins 2 garçons et au moins 2 filles feront des études supérieures. 3°/ 5 petits-enfants feront des études supérieures.	Solution

HAUT

Chapitre 11. Loi multinomiale.

Enoncés.

Exercice 1. Jet de cinq dés.

On lance 5 fois de suite un dé équilibré. Quelles sont les probabilités des évènements : 1°/ On amène deux fois un nombre pair et une fois le 1, une fois le 3, une fois le 5. 2°/ On amène trois fois un nombre pair et jamais un nombre premier. 3°/ On amène trois fois un nombre premier et une fois le 4. 4°/ On amène au moins une fois le nombre 2 et 3 fois un nombre pair. 5°/ On amène au moins une fois le nombre 2 et au plus deux fois un nombre pair.	

Solution.

1°/ Premier événement.

Soit $A = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$, ensemble des réalisations possibles avec un dé,
$A_1 = \{2 ; 4 ; 6\}$, ensemble des nombres pairs de A,
$A_2 = \{1\}$,
$A_3 = \{3\}$,
$A_4 = \{5\}$.
Les événements A_j, $j = 1, 2, 3, 4$, forment une **partition** de A.
Leurs probabilités lors du jet d'un dé se déduisent de la loi uniforme sur A :

$$p_1 = P[A_1] = \frac{1}{2} ;$$
$$p_2 = P[A_2] = \frac{1}{6} ;$$
$$p_3 = P[A_3] = \frac{1}{6} ;$$
$$p_4 = P[A_4] = \frac{1}{6}.$$

Soit Y_j le nombre de fois que se réalise l'événement A_j en cinq lancers de dé, ou en un lancer de cinq dés, $j = 1, 2, 3, 4$. Soient k_j des nombres entiers naturels tels que $k_1 + k_2 + k_3 + k_4 = 5$.
La variable (Y_1, Y_2, Y_3, Y_4) suit une **loi multinomiale** :

$$P(Y_1 = k_1 \text{ et } Y_2 = k_2 \text{ et } Y_3 = k_3 \text{ et } Y_4 = k_4) = \frac{5!}{k_1!\, k_2!\, k_3!\, k_4!}\, {p_1}^{k_1} {p_2}^{k_2} {p_3}^{k_3} {p_4}^{k_4}$$

Pour $k_1 = 2$, $k_2 = 1$, $k_3 = 1$, $k_4 = 1$, cette loi multinomiale donne :

$$P(Y_1 = 2 \text{ et } Y_2 = 1 \text{ et } Y_3 = 1 \text{ et } Y_4 = 1) = \frac{5!}{2!}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{1}{6}\right)^1 = \frac{5}{72}$$

$$\boxed{P\,(Y_1 = 2 \text{ et } Y_2 = 1 \text{ et } Y_3 = 1 \text{ et } Y_4 = 1) = \frac{5}{72}}$$

2°/ Deuxième événement.

Soit $A = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$,
$A_1 = \{4 ; 6\}$, ensemble des nombres pairs de A qui ne sont pas premiers,
$A_2 = \{1\}$, ensemble des nombres impairs de A qui ne sont pas premiers,
$A_3 = \{2 ; 3 ; 5\}$, ensemble des nombres impairs premiers de A et des nombres pairs premiers de A.

Les événements A_j, $j = 1, 2, 3$, forment une partition de A.
Leurs probabilités se déduisent de la loi uniforme sur A :

$$p_1 = P\,[A_1] = \frac{1}{3} ;$$
$$p_2 = P\,[A_2] = \frac{1}{6} ;$$
$$p_3 = P\,[A_3] = \frac{1}{2}.$$

Soit Y_j le nombre de fois que se réalise l'événement A_j en cinq lancers de dé, ou en un lancer de cinq dés, $j = 1, 2, 3$. Soient k_j des nombres entiers naturels tels que $k_1 + k_2 + k_3 = 5$.
La variable (Y_1, Y_2, Y_3) suit une **loi multinomiale** :

$$P\,(Y_1 = k_1 \text{ et } Y_2 = k_2 \text{ et } Y_3 = k_3) = \frac{5\,!}{k_1\,!\,k_2\,!\,k_3\,!} {p_1}^{k_1} {p_2}^{k_2} {p_3}^{k_3}$$

Pour $k_1 = 3$, $k_2 = 2$, $k_3 = 0$, cette loi multinomiale donne :

$$P\,(Y_1 = 3 \text{ et } Y_2 = 2 \text{ et } Y_3 = 0) = \frac{5!}{3!\,2!}\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{10}{972}$$

$$\boxed{P\,(Y_1 = 3 \text{ et } Y_2 = 2 \text{ et } Y_3 = 0) = \frac{10}{972}}$$

3°/ Troisième événement.

Soit $A = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$,
$A_1 = \{2 ; 3 ; 5\}$, ensemble des nombres premiers de A,
$A_2 = \{4\}$,
$A_3 = \{1 ; 6\}$, ensemble des nombres de A qui ne sont pas dans A_1 ou A_2.
Les événements A_j, $j = 1, 2, 3$, forment une partition de A.
Leurs probabilités se déduisent de la loi uniforme sur A :

$$p_1 = P\,[A_1] = \frac{1}{2} ;$$
$$p_2 = P\,[A_2] = \frac{1}{6} ;$$
$$p_3 = P\,[A_3] = \frac{1}{3}.$$

Soit Y_j le nombre de fois que se réalise l'événement A_j en cinq lancers de dé, ou en un lancer de cinq dés, $j = 1, 2, 3$. Soient k_j des nombres entiers naturels tels que $k_1 + k_2 + k_3 = 5$.
La variable (Y_1, Y_2, Y_3) suit une **loi multinomiale** :

$$P\,(Y_1 = k_1 \text{ et } Y_2 = k_2 \text{ et } Y_3 = k_3) = \frac{5\,!}{k_1\,!\,k_2\,!\,k_3\,!} {p_1}^{k_1} {p_2}^{k_2} {p_3}^{k_3}$$

Pour $k_1 = 3$, $k_2 = 1$, $k_3 = 1$, cette loi multinomiale donne :

$$P\,(Y_1 = 3 \text{ et } Y_2 = 1 \text{ et } Y_3 = 1) = \frac{5!}{3!}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{1}{3}\right)^1 = \frac{5}{36}$$

$$\boxed{P\,(Y_1 = 3 \text{ et } Y_2 = 1 \text{ et } Y_3 = 1) = \frac{5}{36}}$$

4°/ Quatrième événement.

Soit $A = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$,
$A_1 = \{2\}$,
$A_2 = \{4 ; 6\}$,
$A_3 = \{1 ; 3 ; 5\}$.
Les événements A_j, $j = 1, 2, 3$, forment une partition de A.
Leurs probabilités se déduisent de la loi uniforme sur A :

$p_1 = P\,[A_1] = \frac{1}{6}$;
$p_2 = P\,[A_2] = \frac{1}{3}$;
$p_3 = P\,[A_3] = \frac{1}{2}$.

Soit Y_j le nombre de fois que se réalise l'événement A_j en cinq lancers de dé, ou en un lancer de cinq dés, $j = 1, 2, 3$. Soient k_j des nombres entiers naturels tels que $k_1 + k_2 + k_3 = 5$.
La variable (Y_1, Y_2, Y_3) suit une **loi multinomiale** :

$$P\,(Y_1 = k_1 \text{ et } Y_2 = k_2 \text{ et } Y_3 = k_3) = \frac{5\,!}{k_1\,!\,k_2\,!\,k_3\,!} {p_1}^{k_1} {p_2}^{k_2} {p_3}^{k_3}$$

L'événement dont on cherche la probabilité est réunion de trois événements incompatibles :

$$(Y_1 = 1 \text{ et } Y_2 = 2 \text{ et } Y_3 = 2) \text{ ou } (Y_1 = 2 \text{ et } Y_2 = 1 \text{ et } Y_3 = 2) \text{ ou } (Y_1 = 3 \text{ et } Y_2 = 0 \text{ et } Y_3 = 2).$$

La probabilité de la réunion est la somme des probabilités.

Pour $k_1 = 0$, $k_2 = 3$, $k_3 = 2$, la loi multinomiale donne :

$$P\,(Y_1 = 0 \text{ et } Y_2 = 3 \text{ et } Y_3 = 2) = \frac{5!}{3!\,2!}\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{54}$$

La **loi marginale** de Y_3, qui est une **loi binomiale** de paramètres $n = 5$ et $p = p_3 = \frac{1}{2}$, donne :

$$P(Y_3 = 2) = \frac{5!}{3!\,2!}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{16}$$

Or l'événement :

$(Y_1 = 0 \text{ et } Y_2 = 3 \text{ et } Y_3 = 2)$ ou $(Y_1 = 1 \text{ et } Y_2 = 2 \text{ et } Y_3 = 2)$ ou $(Y_1 = 2 \text{ et } Y_2 = 1 \text{ et } Y_3 = 2)$ ou $(Y_1 = 3 \text{ et } Y_2 = 0 \text{ et } Y_3 = 2)$

est l'événement $(Y_3 = 2)$, on a donc :

$$P(Y_1 = 0 \text{ et } Y_2 = 3 \text{ et } Y_3 = 2) + P(Y_1 = 1 \text{ et } Y_2 = 2 \text{ et } Y_3 = 2) + P(Y_1 = 2 \text{ et } Y_2 = 1 \text{ et } Y_3 = 2) + P(Y_1 = 3 \text{ et } Y_2 = 0 \text{ et } Y_3 = 2) = P(Y_3 = 2)$$

et, par différence :

$$P(Y_1 = 1 \text{ et } Y_2 = 2 \text{ et } Y_3 = 2) + P(Y_1 = 2 \text{ et } Y_2 = 1 \text{ et } Y_3 = 2) + P(Y_1 = 3 \text{ et } Y_2 = 0 \text{ et } Y_3 = 2)$$
$$= P(Y_3 = 2) - P(Y_1 = 0 \text{ et } Y_2 = 3 \text{ et } Y_3 = 2) = \frac{5}{16} - \frac{5}{54} = \frac{19}{432}$$

$$\boxed{P((Y_1 = 1 \text{ et } Y_2 = 2 \text{ et } Y_3 = 2) \text{ ou } (Y_1 = 2 \text{ et } Y_2 = 1 \text{ et } Y_3 = 2) \text{ ou } (Y_1 = 3 \text{ et } Y_2 = 0 \text{ et } Y_3 = 2)) = \frac{19}{432}}$$

5°/ Cinquième événement.

Soit $A = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$,
$A_1 = \{2\}$,
$A_2 = \{4 ; 6\}$,
$A_3 = \{1 ; 3 ; 5\}$.
Les événements A_j, $j = 1, 2, 3$, forment une partition de A.
Leurs probabilités se déduisent de la loi uniforme sur A :

$$p_1 = P[A_1] = \frac{1}{6} ;$$
$$p_2 = P[A_2] = \frac{1}{3} ;$$
$$p_3 = P[A_3] = \frac{1}{2}.$$

Soit Y_j le nombre de fois que se réalise l'événement A_j en cinq lancers de dé, ou en un lancer de cinq dés, $j = 1, 2, 3$. Soient k_j des nombres entiers naturels tels que $k_1 + k_2 + k_3 = 5$.
La variable (Y_1, Y_2, Y_3) suit une **loi multinomiale** :

$$P(Y_1 = k_1 \text{ et } Y_2 = k_2 \text{ et } Y_3 = k_3) = \frac{5!}{k_1!\,k_2!\,k_3!} {p_1}^{k_1} {p_2}^{k_2} {p_3}^{k_3}$$

L'événement dont on cherche la probabilité est la réunion des événements incompatibles :

$(Y_1 = 1 \text{ et } Y_2 = 0 \text{ et } Y_3 = 4)$ ou $(Y_1 = 1 \text{ et } Y_2 = 1 \text{ et } Y_3 = 3)$ ou $(Y_1 = 2 \text{ et } Y_2 = 0 \text{ et } Y_3 = 3)$.

Sa probabilité est la somme des probabilités des événements élémentaires qui le composent :

$$P(Y_1 = 1 \text{ et } Y_2 = 0 \text{ et } Y_3 = 4) + P(Y_1 = 1 \text{ et } Y_2 = 1 \text{ et } Y_3 = 3) + P(Y_1 = 2 \text{ et } Y_2 = 0 \text{ et } Y_3 = 3)$$
$$= \frac{5!}{1!\,0!\,4!}\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^4 + \frac{5!}{1!\,1!\,3!}\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{5!}{2!\,0!\,3!}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{5}{96} + \frac{5}{36} + \frac{5}{144} = \frac{65}{288}$$

$$P((Y_1 = 1 \text{ et } Y_2 = 0 \text{ et } Y_3 = 4) \text{ ou } (Y_1 = 1 \text{ et } Y_2 = 1 \text{ et } Y_3 = 3) \text{ ou } (Y_1 = 2 \text{ et } Y_2 = 0 \text{ et } Y_3 = 3)) = \frac{65}{288}$$

Chapitre 11. Loi multinomiale.

Enoncés.

Exercice 2. Sexe et études supérieures.

Sachant qu'une femme aura 10 petits-enfants, que la probabilité de faire des études supérieures est 0,4 et qu'elle est indépendante du sexe et que la probabilité de naissance d'un garçon est 0,60, calculer la probabilité des événements suivants : 1°/ il naîtra 5 garçons et 5 filles, parmi lesquels 2 garçons et 3 filles feront des études supérieures. 2°/ il naîtra 6 garçons et 4 filles, parmi lesquels au moins 2 garçons et au moins 2 filles feront des études supérieures. 3°/ 5 petits-enfants feront des études supérieures.	

Solution.

1°/ Premier événement.

Soit $A = \{M\,S\,;\, M\overline{S};\, F\,S\,;\, F\overline{S}\}$, ensemble des réalisations possibles avec un petit-enfant, M pour masculin, F pour féminin, S pour études supérieures, $\overline{S}$ pour pas d'études supérieures. Le tableau des probabilités conjointes est le suivant :

Etudes \ Sexe	M	F	*Total*
S	0,24	0,16	0,4
$\overline{S}$	0,36	0,24	0,6
Total	0,6	0,4	1

Soit $A_1 = \{MS\}$, $A_2 = \{M\overline{S}\}$, $A_3 = \{F\,S\}$, $A_4 = \{F\overline{S}\}$.
Les événements A_j, $j = 1, 2, 3, 4$, forment une partition de A.
Leurs probabilités lors de la naissance d'un petit enfant sont lues dans la table de la loi conjointe :

$p_1 = P[A_1] = 0{,}24$;
$p_2 = P[A_2] = 0{,}36$;
$p_3 = P[A_3] = 0{,}16$;
$p_4 = P[A_4] = 0{,}24$.

Soit Y_j le nombre de fois que se réalise l'événement A_j en 10 naissances, $j = 1, 2, 3, 4$.
Soient k_j des nombres entiers naturels tels que $k_1 + k_2 + k_3 + k_4 = 10$.
La variable (Y_1, Y_2, Y_3, Y_4) suit une **loi multinomiale** :

$$P(Y_1 = k_1 \text{ et } Y_2 = k_2 \text{ et } Y_3 = k_3 \text{ et } Y_4 = k_4) = \frac{10!}{k_1!\,k_2!\,k_3!\,k_4!}\,p_1^{k_1}\,p_2^{k_2}\,p_3^{k_3}\,p_4^{k_4}$$

Pour $k_1 = 2$, $k_2 = 3$, $k_3 = 3$, $k_4 = 2$, cette loi multinomiale donne :

$$P\,(Y_1 = 2 \text{ et } Y_2 = 3 \text{ et } Y_3 = 3 \text{ et } Y_4 = 2) = \frac{10\,!}{2\,!\,3\,!\,3\,!\,2\,!}(0{,}24)^{\,2}\,(0{,}36)^{\,3}\,(0{,}16)^{\,3}\,(0{,}24)^{\,2} \approx 1{,}60 \times 10^{-2}$$

$$\boxed{P\,(Y_1 = 2 \text{ et } Y_2 = 3 \text{ et } Y_3 = 3 \text{ et } Y_4 = 2) = 1{,}60 \times 10^{-2}}$$

2°/ Deuxième événement.

Avec les notations de la première question, l'événement dont on cherche la probabilité est réunion de 15 événements élémentaires incompatibles :

($Y_1 = 2$ et $Y_2 = 4$ et $Y_3 = 2$ et $Y_4 = 2$)
ou ($Y_1 = 3$ et $Y_2 = 3$ et $Y_3 = 2$ et $Y_4 = 2$)
ou ($Y_1 = 4$ et $Y_2 = 2$ et $Y_3 = 2$ et $Y_4 = 2$)
ou ($Y_1 = 5$ et $Y_2 = 1$ et $Y_3 = 2$ et $Y_4 = 2$)
ou ($Y_1 = 6$ et $Y_2 = 0$ et $Y_3 = 2$ et $Y_4 = 2$)
ou ($Y_1 = 2$ et $Y_2 = 4$ et $Y_3 = 3$ et $Y_4 = 1$)
ou ($Y_1 = 3$ et $Y_2 = 3$ et $Y_3 = 3$ et $Y_4 = 1$)
ou ($Y_1 = 4$ et $Y_2 = 2$ et $Y_3 = 3$ et $Y_4 = 1$)
ou ($Y_1 = 5$ et $Y_2 = 1$ et $Y_3 = 3$ et $Y_4 = 1$)
ou ($Y_1 = 6$ et $Y_2 = 0$ et $Y_3 = 3$ et $Y_4 = 1$)
ou ($Y_1 = 2$ et $Y_2 = 4$ et $Y_3 = 4$ et $Y_4 = 0$)
ou ($Y_1 = 3$ et $Y_2 = 3$ et $Y_3 = 4$ et $Y_4 = 0$)
ou ($Y_1 = 4$ et $Y_2 = 2$ et $Y_3 = 4$ et $Y_4 = 0$)
ou ($Y_1 = 5$ et $Y_2 = 1$ et $Y_3 = 4$ et $Y_4 = 0$)
ou ($Y_1 = 6$ et $Y_2 = 0$ et $Y_3 = 4$ et $Y_4 = 0$).

La probabilité de la réunion est la somme des probabilités des événements élémentaires données par la loi multinomiale :

k_1	k_2	k_3	k_4	*Probabilité*
2	4	2	2	$2{,}70 \times 10^{-2}$
3	3	2	2	$2{,}40 \times 10^{-2}$
4	2	2	2	$1{,}20 \times 10^{-2}$
5	1	2	2	$3{,}20 \times 10^{-3}$
6	0	2	2	$3{,}55 \times 10^{-4}$
2	4	3	1	$1{,}20 \times 10^{-2}$
3	3	3	1	$1{,}07 \times 10^{-2}$
4	2	3	1	$5{,}33 \times 10^{-3}$
5	1	3	1	$1{,}42 \times 10^{-3}$
6	0	3	1	$1{,}58 \times 10^{-4}$
2	4	4	0	

				$2{,}00 \times 10^{-3}$
3	3	4	0	$1{,}78 \times 10^{-3}$
4	2	4	0	$8{,}88 \times 10^{-4}$
5	1	4	0	$2{,}37 \times 10^{-4}$
6	0	4	0	$2{,}63 \times 10^{-5}$
Total				0,1009

3°/ Troisième événement.

Pour un petit-enfant à naître, de deux choses l'une : ou bien il fera des études supérieures, c'est le succès, de probabilité $p = 0{,}4$, ou bien il ne fera pas d'études supérieures, c'est l'échec, de probabilité $q = 0{,}6$. Le fait de regarder s'il fait des études supérieures constitue une **épreuve de Bernoulli**. Lorsqu'on répète 10 fois cette épreuve de Bernoulli, le nombre Y de succès est le nombre de petits-enfants qui feront des études supérieures : Y suit une **loi binomiale** de paramètres $n = 10$ et $p = 0{,}4$.

La probabilité que 5 petits-enfants fassent des études supérieures est donnée par la loi binomiale :

$$P(Y = 5) = \frac{10!}{5!\,5!}(0{,}4)^5(0{,}6)^5 \approx 2{,}64 \times 10^{-2}$$

$$\boxed{P(Y = 5) = 2{,}64 \times 10^{-2}}$$

Exercices

Variables aléatoires réelles à densité.

1. Définition d'une loi à densité, variable aléatoire continue.

1.1. Fonction de répartition.
1.2. Variable aléatoire absolument continue.
1.3. Densité de probabilité.
1.4. Variable aléatoire continue.

2. Espérance et variance d'une variable aléatoire continue.

3. Indépendance.

1. Définition d'une loi à densité, variable aléatoire continue.

HAUT

1.1. Fonction de répartition.

On appelle **fonction de répartition** d'une variable aléatoire réelle X, l'application

$x \mapsto F(x) = P(X < x)$.

Pour qu'une application $F : \mathrm{R} \longrightarrow [0, 1]$ soit une fonction de répartition, il faut et il suffit que :

— $F(-\infty) = 0$
— $F(+\infty) = 1$
— F soit croissante
— F soit continue à gauche.

1.2. Variable aléatoire absolument continue.

HAUT

On dit qu'une variable aléatoire réelle X est absolument continue si, et seulement si, sa fonction de répartition F est dérivable.

1.3. Densité de probabilité.

HAUT

On appelle densité de probabilité d'une variable aléatoire réelle X absolument continue, la dérivée f de sa fonction de répartition.

1.4. Variable aléatoire continue.

HAUT

On dit qu'une variable aléatoire réelle X est continue si, et seulement si, sa densité de probabilité ***f* est une application continue** :

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt.$$

2. Espérance et variance d'une variable alétoire continue.

HAUT

L'espérance mathématique d'une fonction aléatoire $h(X)$ est, par définition :

$$E(h(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x) f(x)\, dx$$

$$\boxed{E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\, dx}$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\, dx$$

$$Var(X) = E((X - E(X))^2) = E(X^2) - (E(X))^2$$

$$\boxed{Var(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\, dx - \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\, dx \right)^2}$$

3. Indépendance.

HAUT

Deux variables aléatoires réelles à densité X et Y sont dites **indépendantes** si la densité conjointe $f_{(X, Y)}(x, y)$ est le produit des densités de probabilité marginales de X et de Y :

$$f_{(X, Y)}(x, y) = f_X(x)\, f_Y(y)$$

n variables aléatoires réelles à densité X_j, $1 \leq j \leq n$, sont dites **indépendantes dans leur ensemble** si, pour toute partie J de $[1, n] \subseteq \mathbb{N}^*$, la densité conjointe $f_{(X_j)_{j \in J}}((x_j)_{j \in J})$ est le produit des densités de probabilité marginales des X_j, $1 \leq j \leq n$:

$$f_{(X_j)_{j \in J}}((x_j)_{j \in J}) = \prod_{j \in J} f_{X_j}(x_j)$$

Chapitre 12. Variables aléatoires réelles à densité.

Exercices

Exercice 1. Densité linéaire sur un intervalle.
Exercice 2. Densité exponentielle d'une valeur absolue.
Exercice 3. Densité produit de x par une exponentielle de x.
Exercice 4. Densité produit de x par une exponentielle de x^2.
Exercice 5. Densité $k + x \div 6$ sur un intervalle.
Exercice 6. Durée de vie de loi exponentielle d'une ampoule.
Exercice 7. Densité en t^2.

Exercice 1. Densité linéaire sur un intervalle.

Soit X la variable aléatoire réelle de densité de probabilité

$$f(x) = \begin{cases} k\,x & \text{si } 0 \leq x \leq 5 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1°/ Calculez k.
2°/ Calculez : $P(1 \leq X \leq 3)$, $P(2 \leq X \leq 4)$ et $P(X \leq 3)$.

Solution

HAUT

Exercice 2. Densité exponentielle d'une valeur absolue.

Soit X une variable aléatoire de densité $f(t) = \lambda e^{-2\|t\|}$, $t \in \mathrm{R}$, où λ est un réel. 1°/ Quelle est la valeur de λ ? 2°/ Quelle est la densité de probabilité de $Y = X^2$? 3°/ Calculez $E(X)$, $Var(X)$, $E(Y)$, $Var(Y)$.	Solution

HAUT

Exercice 3. Densité produit de *x* par une exponentielle de *x*.

Soient a et b deux réels strictement positifs, et f une application de R dans R définie par :

$$f(x) = a\, x\, e^{-b\,x}\, 1_{[0,+\infty[}(x)$$

où $1_{[0,+\infty[}$ est la fonction indicatrice de l'intervalle $[0, +\infty[$ de R.

Solution

1°/ Quelle relation doivent vérifier a et b pour que f soit la densité de probabilité d'une variable aléatoire X.
2°/ On suppose cette relation vérifiée. Calculer l'espérance et la variance de X en fonction de b.
3°/ La durée de vie, en jours, d'un appareil électroménager est une variable aléatoire de densité f avec $b = \frac{1}{10}$. Quelle est la probabilité pour que l'appareil dure plus de 15 jours, sachant qu'il fonctionnait au 5^e jour ?

HAUT

Exercice 4. Densité produit de x par une exponentielle de x^2.

Soit $a \in \mathbb{R}$ et soit X une variable aléatoire continue dont la densité de probabilité f est définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$$f(x) = a\, x\, e^{-\frac{x^2}{4}} 1_{[0,+\infty[}(x),$$

où 1_A désigne la fonction indicatrice de l'ensemble A.

Solution

1°/ Quelle est la valeur de a ?
2°/ On pose $Y = X^2$.
Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire Y et préciser sa densité.
Quelle est la loi de la variable aléatoire Y ?
Calculer l'espérance de la variable aléatoire Y.

HAUT

Exercice 5. Densité $k + x \div 6$ sur un intervalle.

Soit X une variable aléatoire réelle continue ayant pour densité de probabilité

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{6}x + k & \text{si } 0 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

a) Calculez k.
b) Calculez : $P(1 \leq X \leq 2)$.

Solution

HAUT

Exercice 6. Durée de vie de loi exponentielle d'une ampoule.

On suppose que la durée de vie, en jours, d'une ampoule, est une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{100}$.
1°/ Quelle est la durée de vie moyenne d'une ampoule ?
2°/ Quelle est la probabilité qu'une ampoule dure encore au moins 10 jours, sachant qu'à son n^e jour, elle marche encore ?

Solution

HAUT

Exercice 7. Densité en t^2.

Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire de densité f définie par :

$$f(t) = a\, t^2\, \mathbb{1}_{[1,2[}(t),$$

où $\mathbb{1}_{[1,2[}$ est la fonction indicatrice de l'intervalle [1, 2], définie par

$$\mathbb{1}_{[1,2[}(t) = \begin{cases} 1 & \text{pour } t \in [1,2] \\ 0 & \text{pour } t \notin [1,2] \end{cases}.$$

Solution

1°/ Déterminer a.
2°/ Expliciter la fonction de répartition de X.
3°/ Calculer $E(X)$ et $Var(X)$.
4°/ Expliciter la densité de la variable aléatoire $Y = \frac{1}{2}(X - 1)$, puis celle de la variable aléatoire $Z = \frac{1}{X}$. La variable aléatoire Z est-elle intégrable ?

HAUT

Chapitre 12. Variables aléatoires réelles à densité.

Enoncés.

Exercice 1. Densité linéaire sur un intervalle.

Soit X la variable aléatoire réelle de densité de probabilité

$$f(x) = \begin{cases} k\,x & \text{si } 0 \le x \le 5 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1°/ Calculez k.
2°/ Calculez : $P(1 \le X \le 3)$, $P(2 \le X \le 4)$ et $P(X \le 3)$.

Solution.

1°/ Condition de normalisation.

La condition $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$ s'écrit ici $\int_0^5 k\,x\,dx = 1$, soit $k \times \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^5 = 1$, ou $\frac{25\,k}{2} = 1$,

$$k = \frac{2}{25}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2\,x}{25} & \text{pour } 0 \leqslant x \leqslant 5 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

2°/ Calcul de probabilités.

$P(1 \le X \le 3) = \int_1^3 \frac{2\,x}{25}\,dx = \frac{1}{25}(3^2 - 1^2) = \frac{8}{25}$
$P(1 \le X \le 3) = \frac{8}{25}$.

$P(2 \le X \le 4) = \int_2^4 \frac{2\,x}{25}\,dx = \frac{1}{25}(4^2 - 2^2) = \frac{12}{25}$
$P(2 \le X \le 4) = \frac{12}{25}$

$P(X \le 3) = \int_0^3 \frac{2\,x}{25}\,dx = \frac{1}{25}(3^2 - 0^2) = \frac{9}{25}$
$P(X \le 3) = \frac{9}{25}$

Chapitre 12. Variables aléatoires réelles à densité.

Enoncés.

Exercice 2. Densité exponentielle d'une valeur absolue.

Soit X une variable aléatoire de densité $f(t) = \lambda\, e^{-2\lvert t\rvert}$, $t \in \mathrm{R}$, où λ est un réel. 1°/ Quelle est la valeur de λ ? 2°/ Quelle est la densité de probabilité de $Y = X^2$? 3°/ Calculez $E(X)$, $Var(X)$, $E(Y)$, $Var(Y)$.	

Solution.

1°/ Condition de normalisation.

La condition $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$ s'écrit ici :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda\, e^{-2\lvert t\rvert}\,dt = 1$$

Or :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda\, e^{-2\lvert t\rvert}\,dt = \int_{-\infty}^{0} \lambda\, e^{-2t}\,dt + \int_{0}^{\infty} \lambda\, e^{-2t}\,dt$$

$$= 2\lambda \int_{0}^{\infty} e^{-2t}\,dt = 2\lambda\left[-\frac{1}{2}\,e^{-2t}\right]_{0}^{\infty} = \lambda$$

donc :

$$\boxed{\lambda = 1}$$

2°/ Densité de probabilité de $Y = X^2$.

Calculons d'abord la fonction de répartition F de Y.

$Y(\Omega) = [\,0\,;+\infty\,[$.

Pour $y \le 0$, $F(y) = 0$.

Pour $y > 0$, $Y < y \Leftrightarrow X^2 < y \Leftrightarrow \lvert X\rvert < \sqrt{y} \Leftrightarrow -\sqrt{y} < X < +\sqrt{y}$

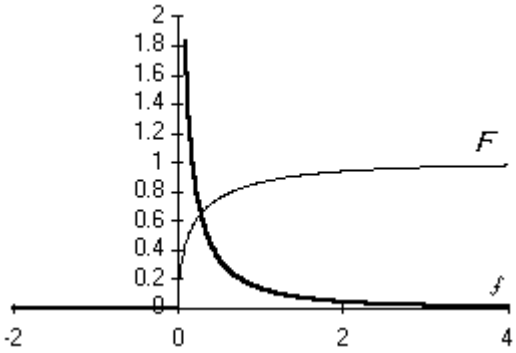
$F(y) = P(Y < y) = P(-\sqrt{y} < X < +\sqrt{y})$

$$F(y) = \int_{-\sqrt{y}}^{+\sqrt{y}} e^{-2\lvert t\rvert}\,dt = 2\int_{0}^{\sqrt{y}} e^{-2t}\,dt = 2\left[-\frac{1}{2}\,e^{-2t}\right]_{0}^{\sqrt{y}} = 1 - e^{-2\sqrt{y}}$$

$$F(y) = \begin{cases} 0 & \text{pour } y \le 0 \\ 1 - e^{-2\sqrt{y}} & \text{pour } y > 0 \end{cases}$$

La densité de probabilité s'en déduit par dérivation dans chaque intervalle ouvert.

$$f(y) = \begin{cases} 0 & \text{pour } y < 0 \\ \dfrac{e^{-2\sqrt{y}}}{2\sqrt{y}} & \text{pour } y > 0 \end{cases}$$



Fonction de répartition F et densité de probabilité f de $Y = X^2$.

3°/ Moyennes et variances.

Comme la densité de probabilité de X est symétrique par rapport à la valeur $X = 0$, on a déjà :

$$\boxed{E(X) = 0}$$

$$E(X^2) = E(Y) = \int_0^{\infty} y\, f(y)\, dy = \int_0^{\infty} \sqrt{y}\; e^{-2\sqrt{y}}\; dy = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\, e^{-2|x|}\, dx = 2\int_0^{\infty} x^2\, e^{-2x}\, dx.$$

Pour calculer l'intégrale $2\int_0^{\infty} x^2\, e^{-2x}\, dx$, on intègre par parties en posant :

$u = x^2$, d'où $du = 2x\, dx$

Pour avoir $dv = 2\, e^{-2x}\, dx$, on prend $v = -e^{-2x}$

L'intégrale $2\int_0^{\infty} x^2\, e^{-2x}\, dx$ est de la forme $\int u\, dv$. La formule d'intégration par parties donne :

$$\int u\, dv = u\, v - \int v\, du$$

Ici, cette formule s'écrit :

$$2\int_0^{\infty} x^2\, e^{-2x}\, dx = -\Big[\, x^2\, e^{-2x} \,\Big]_0^{\infty} + 2\int_0^{\infty} x\, e^{-2x}\, dx = 2\int_0^{\infty} x\, e^{-2x}\, dx.$$

Pour calculer l'intégrale $2\int_0^{\infty} x\, e^{-2x}\, dx$, on intègre par parties en posant :

$u = x$, d'où $du = dx$

Pour avoir $dv = 2\, e^{-2x}\, dx$, on prend $v = -e^{-2x}$

L'intégrale $2\int_0^{\infty} x\, e^{-2x}\, dx$ est de la forme $\int u\, dv$. La formule d'intégration par parties donne :

$$\int u\, dv = u\, v - \int v\, du$$

Ici, cette formule donne :

$$2\int_0^{\infty} x\,e^{-2x}\,dx = -\Big[\,x\,e^{-2x}\,\Big]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-2x}\,dx = -\frac{1}{2}\,[\,e^{-2x}\,]_0^{\infty} = \frac{1}{2}$$

$$2\int_0^{\infty} x^2\,e^{-2x}\,dx = 2\int_0^{\infty} x\,e^{-2x}\,dx. = \frac{1}{2}$$

$$E(X^2) = E(Y) = 2\int_0^{\infty} x^2\,e^{-2x}\,dx = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{E(Y) = \frac{1}{2}}$$

On en déduit la variance de X :

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{Var(X) = \frac{1}{2}}$$

Pour calculer la variance de Y, il faut calculer $E(Y^2) = E(X^4) = 2\int_0^{\infty} x^4\,e^{-2x}\,dx$.

Pour calculer l'intégrale $2\int_0^{\infty} x^4\,e^{-2x}\,dx$, on intègre par parties en posant :

$u = x^4$, d'où $du = 4\,x^3\,dx$

Pour avoir $dv = 2\,e^{-2x}\,dx$, on prend $v = -e^{-2x}$

L'intégrale $2\int_0^{\infty} x^4\,e^{-2x}\,dx$ est de la forme $\int u\,dv$. La formule d'intégration par parties donne :

$$\int u\,dv = u\,v - \int v\,du$$

Ici, cette formule s'écrit :

$$2\int_0^{\infty} x^4\,e^{-2x}\,dx = -\Big[\,x^4\,e^{-2x}\,\Big]_0^{\infty} + 4\int_0^{\infty} x^3\,e^{-2x}\,dx = 4\int_0^{\infty} x^3\,e^{-2x}\,dx.$$

Pour calculer l'intégrale $4\int_0^{\infty} x^3\,e^{-2x}\,dx.$, on intègre par parties en posant :

$u = 2\,x^3$, d'où $du = 6\,x^2\,dx$

Pour avoir $dv = 2\,e^{-2x}\,dx$, on prend $v = -e^{-2x}$

L'intégrale $4\int_0^{\infty} x^3\,e^{-2x}\,dx$ est de la forme $\int u\,dv$. La formule d'intégration par parties donne :

$$\int u\,dv = u\,v - \int v\,du$$

Ici, cette formule s'écrit :

$$4\int_0^{\infty} x^3\,e^{-2x}\,dx = -2\Big[\,x^3\,e^{-2x}\,\Big]_0^{\infty} + 6\int_0^{\infty} x^2\,e^{-2x}\,dx = 6\int_0^{\infty} x^2\,e^{-2x}\,dx = 3\times\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

D'où :

$$2\int_0^{\infty} x^4\,e^{-2x}\,dx = 4\int_0^{\infty} x^3\,e^{-2x}\,dx = \frac{3}{2}$$

$$E(Y^2) = 2\int_0^{\infty} x^4 e^{-2x}\,dx = \frac{3}{2}$$

$$Var(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2 = \frac{3}{2} - \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$$

$$\boxed{Var(Y) = \frac{5}{4}}$$

Chapitre 12. Variables aléatoires réelles à densité.

Enoncés.

Exercice 3. Densité produit de *x* par une exponentielle de *x*.

Soient a et b deux réels strictement positifs, et f une application de R dans R définie par :

$$f(x) = a\, x\, e^{-b\,x}\, 1_{[0,\,+\infty[}(x)$$

où $1_{[0,\,+\infty[}$ est la fonction indicatrice de l'intervalle $[0, +\infty[$ de R.

1°/ Quelle relation doivent vérifier a et b pour que f soit la densité de probabilité d'une variable aléatoire X.
2°/ On suppose cette relation vérifiée. Calculer l'espérance et la variance de X en fonction de b.
3°/ La durée de vie, en jours, d'un appareil électroménager est une variable aléatoire de densité f avec $b = \frac{1}{10}$. Quelle est la probabilité pour que l'appareil dure plus de 15 jours, sachant qu'il fonctionnait au 5e jour ?

Solution.

1°/ Condition de normalisation.

Pour que f soit une fonction positive, il faut déjà que a soit positif.
Dans ce cas, comme f est une fonction positive, pour qu'elle soit une densité de probabilité, il faut et il suffit que son intégrale sur R soit égale à 1.
Il faut donc déjà que a soit strictement plus grand que 0 : c'est vrai par hypothèse.
De plus, la condition :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 1$$

s'écrit :

$$a \int_0^{\infty} x\, e^{-b\,x}\, dx = 1.$$

Pour calculer l'intégrale $a\int_0^{\infty} x\, e^{-b\,x}\, dx$, on intègre par parties en posant :

$$u = x,\ du = dx.$$
$$dv = a\,e^{-b\,x}\,dx,\ v = -\frac{a}{b}e^{-b\,x}\ (b \neq 0).$$

La formule d'intégration par parties donne :

$$a\int_0^{\infty} x\,e^{-b\,x}\,dx = \int u\,dv = u\,v - \int v\,du = \left[-\frac{a}{b}x\,e^{-b\,x} \right]_0^{\infty} + \frac{a}{b}\int_0^{\infty} e^{-b\,x}\,dx$$
$$\frac{a}{b}\int_0^{\infty} e^{-b\,x}\,dx = \left[-\frac{a}{b^2}e^{-b\,x} \right]_0^{\infty}$$

Pour que $e^{-b\,x}$ et $x\,e^{-b\,x}$ tendent vers une limite finie lorsque x tend vers l'infini, il faut, et il suffit que b soit positif.
Sous la condition $b > 0$, qui est vérifiée par hypothèse, il reste :

$$a\int_0^{\infty} x\,e^{-b\,x}\,dx = \frac{a}{b}\int_0^{\infty} e^{-b\,x}\,dx = \frac{a}{b^2}$$

et la condition de normalisation $a\int_0^{\infty} x\,e^{-b\,x}\,dx = 1$ s'écrit $\frac{a}{b^2} = 1$, soit, avec $b > 0$:

$$\boxed{b = \sqrt{a}\ ,\ a > 0,\ b > 0.}$$

2°/ Espérance et variance de *X*.

a) Espérance.

$$E\,(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\,f\,(x)\,dx = b^{\,2}\int_0^{\infty} x^{\,2}\,e^{-b\,x}\,dx.$$

On intégre par parties :

$u = x^{\,2}$, $du = 2\,x\,dx$,
$dv = b^{\,2}\,e^{-b\,x}\,dx$, $v = -\,b\,e^{-b\,x}$.

$$E\,(X) = \left[-\,b\,x^{\,2}\,e^{-b\,x} \right]_0^{\infty} + 2\,b\int_0^{\infty} x\,e^{-b\,x}\,dx = 2\,b\int_0^{\infty} x\,e^{-b\,x}\,dx.$$

On intégre par parties :

$u = x$, $du = dx$,
$dv = 2\,b\,e^{-b\,x}\,dx$, $v = -\,2\,e^{-b\,x}$.

$$E\,(X) = \left[-\,2\,x\,e^{-b\,x} \right]_0^{\infty} + 2\int_0^{\infty} e^{-b\,x}\,dx = 2\int_0^{\infty} e^{-b\,x}\,dx = \frac{2}{b}$$

$$\boxed{E\,(X) = \frac{2}{b}}$$

b) Variance.

Pour calculer la variance, on utilise la formule de la variance :

$$Var\,(X) = E\,(X^2) - (E\,(X))^2$$
$$(E\,(X))^2 = \frac{4}{b^2}$$

$$E\,(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f\,(x)\,dx = b^2 \int_0^{\infty} x^3 e^{-b\,x}\,dx.$$

On intégre par parties :

$u = x^3$, $du = 3\,x^2\,dx$,
$dv = b^2\,e^{-b\,x}\,dx$, $v = -\,b\,e^{-b\,x}$.

$$E\,(X^2) = \Big[-b\,x^3\,e^{-b\,x} \Big]_0^{\infty} + 3\,b \int_0^{\infty} x^2\,e^{-b\,x}\,dx = 3\,b \int_0^{\infty} x^2\,e^{-b\,x}\,dx = \frac{3}{b} E\,(X) = \frac{6}{b^2}$$
$$Var\,(X) = \frac{6}{b^2} - \frac{4}{b^2} = \frac{2}{b^2}$$

$$\boxed{Var\,(X) = \frac{2}{b^2}}$$

3°/ Probabilité conditionnelle.

Appelons X, la durée de vie, en jours, de l'appareil électroménager.
Pour $b = \frac{1}{10}$, le calcul précédent donne $E\,(X) = 20$ et $Var\,(X) = 200$.

La probabilité que X soit supérieur à 15 jours, sachant que X est supérieur à 5 jours est donnée par :

$$P\,(X > 15 \mid X > 5) = \frac{P\big(X > 15 \text{ et } X > 5\big)}{P\big(X > 5\big)} = \frac{P\big(X > 15\big)}{P\big(X > 5\big)} = \frac{\int_{15}^{\infty} f\,(x)\,dx}{\int_5^{\infty} f\,(x)\,dx}$$

Calculons de façon générale, l'intégrale $\int_t^{\infty} f\,(x)\,dx$.

Le changement de variable $u = x - t$ ramène le calcul de l'intégrale à

$$\int_0^{\infty} f\,(u + t)\,du = b^2 \int_0^{\infty} (u + t)\,e^{-b\,(u\,+\,t)}\,du$$
$$= b^2\,e^{-b\,t} \left(\int_0^{\infty} u\,e^{-b\,u}\,du + t \int_0^{\infty} e^{-b\,u}\,du \right).$$
$$\int_t^{\infty} f\,(x)\,dx = e^{-b\,t}\,(1 + b\,t) = \left(1 + \frac{t}{10} \right) e^{-\frac{t}{10}}$$

On obtient alors :

$$\int_{15}^{\infty} f(x)\,dx = \left(1 + \frac{15}{10}\right) e^{-\frac{15}{10}} = \frac{5}{2}\,e^{-\frac{3}{2}}$$

$$\int_{5}^{\infty} f(x)\,dx = \left(1 + \frac{5}{10}\right) e^{-\frac{5}{10}} = \frac{3}{2}\,e^{-\frac{1}{2}}$$

$$\boxed{P(X > 15 \mid X > 5) = \frac{5}{3e}}$$

Chapitre 12. Variables aléatoires réelles à densité.

Enoncés.

Exercice 4. Densité produit de x par une exponentielle de x^2.

Soit $a \in \mathbb{R}$ et soit X une variable aléatoire continue dont la densité de probabilité f est définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$$f(x) = a\, x\, e^{-\frac{x^2}{4}} 1_{[0,+\infty[}(x),$$

où 1_A désigne la fonction indicatrice de l'ensemble A.

1°/ Quelle est la valeur de a ?
2°/ On pose $Y = X^2$.
Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire Y et préciser sa densité.
Quelle est la loi de la variable aléatoire Y ?
Calculer l'espérance de la variable aléatoire Y.

Solution.

1°/ Condition de normalisation.

La condition de normalisation impose que la somme des probabilités soit égale à 1.
Cette condition se traduit par la relation :

$$\int_0^{\infty} a\, x\, e^{-\frac{x^2}{4}} dx = 1$$

Pour calculer l'intégrale, faisons le changement de variable $\frac{1}{4} x^2 = u$, $x\, dx = 2\, du$.

$$1 = \int_0^{\infty} a\, x\, e^{-\frac{x^2}{4}} dx = 2\, a \int_0^{\infty} e^{-u}\, du = 2\, a.$$

$$\boxed{a = \frac{1}{2}}$$

$$f(x) = \frac{1}{2}\, x\, e^{-\frac{x^2}{4}} 1_{[0,+\infty[}(x).$$

2°/ Variable aléatoire $Y = X^2$.

Comme Y ne prend que des valeurs positives, la fonction de répartition de Y est donnée, pour $y \geq 0$, par :

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X^2 \leq y) = P(X \leq \sqrt{y}) = \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{y}} x\, e^{-\frac{x^2}{4}} dx.$$

Pour calculer l'intégrale, faisons le changement de variable $\frac{1}{4} x^2 = u$, $x\,dx = 2\,du$.

$$F_Y(y) = \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{y}} x\, e^{-\frac{x^2}{4}} dx = \int_0^{\frac{y}{4}} e^{-u}\, du = 1 - e^{-\frac{y}{4}}.$$

La densité de probabilité de Y est égale, sur l'intervalle $[0\ ,\ +\infty\ [$, à la dérivée de F_Y et elle est nulle sur l'intervalle $]-\infty,\ 0[$:

$$\boxed{f_Y(y) = \frac{1}{4} e^{-\frac{y}{4}} 1_{[0,\ +\infty\ [}(y)}$$

La variable aléatoire Y suit une **loi exponentielle** de paramètre $\frac{1}{4}$.

L'espérance de Y peut se calculer par :

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} y\, f_Y(y)\, dy = \frac{1}{4}\int_0^{\infty} y\, e^{-\frac{y}{4}} dy.$$

On intègre par parties :

$u = y$, $du = dy$,
$dv = \frac{1}{4} e^{-\frac{y}{4}} dy$, $v = -e^{-\frac{y}{4}}$.

$$E(Y) = u\,v - \int v\, du = \left[-y\, e^{-\frac{y}{4}} \right]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-\frac{y}{4}} dy = \int_0^{\infty} e^{-\frac{y}{4}} dy = \left[-4\, e^{-\frac{y}{4}} \right]_0^{\infty} = 4$$

$$\boxed{E(Y) = 4}$$

Dans une loi exponentielle, l'espérance est l'inverse du paramètre.

Chapitre 12. Variables aléatoires réelles à densité.

Enoncés.

Exercice 5. Densité $k + x\div 6$ sur un intervalle.

Soit X une variable aléatoire réelle continue ayant pour densité de probabilité

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{6}x + k & \text{si } 0 \le x \le 3 \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

a) Calculez k.
b) Calculez : $P(1 \le X \le 2)$.

Solution.

1°/ Condition de normalisation.

La condition de normalisation $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$ s'écrit ici :

$\int_0^3 (\frac{1}{6}x + k)\,dx = 1$, soit $\frac{1}{6} \times \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^3 + k\,[x]_0^3 = 1$, ou $\frac{9}{12} + 3k = 1$, ou encore $3k = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$

$$k = \frac{1}{12}$$

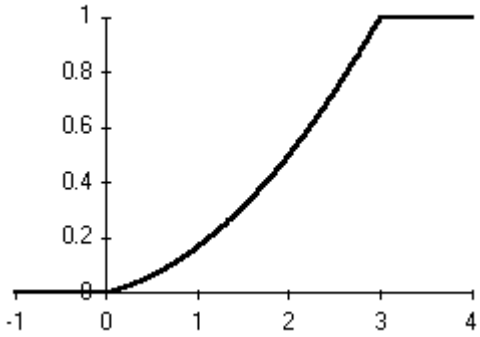
2°/ Calcul de probabilité.

$$P(1 \le X \le 2) = \int_1^2 f(x)\,dx = \int_1^2 \left(\frac{1}{6}x + \frac{1}{12} \right) dx = \frac{1}{6} \times \left[\frac{x^2}{2} \right]_1^2 + \frac{1}{12}\,[x]_1^2 = \frac{3}{12} + \frac{1}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

$$P(1 \le X \le 2) = \frac{1}{3}.$$

Remarque.
La fonction de répartition $F(x)$ est :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x \le 0 \\ \frac{x(x+1)}{12} & \text{pour } 0 < x \le 3 \\ 1 & \text{pour } 3 < x \end{cases}$$



Fonction de répartition F (*x*).

$$P\,(1 \leq X \leq 2) = F\,(2) - F\,(1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}.$$

Chapitre 12. Variables aléatoires réelles à densité.

Enoncés.

Exercice 6. Durée de vie de loi exponentielle d'une ampoule.

On suppose que la durée de vie, en jours, d'une ampoule, est une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{100}$. 1°/ Quelle est la durée de vie moyenne d'une ampoule ? 2°/ Quelle est la probabilité qu'une ampoule dure encore au moins 10 jours, sachant qu'à son n^e jour, elle marche encore ?	

Solution.

1°/ Espérance.

La durée de vie X a une densité de probabilité donnée par :

$$f_X(x) = \frac{1}{100}\, e^{-\frac{x}{100}}.$$

L'espérance mathématique est l'inverse du paramètre de la loi exponentielle :

$$\boxed{E(X) = 100 \text{ jours}}$$

2°/ Probabilité conditionnelle.

$$P(X \geq n+10 \mid X \geq n) = \frac{P(X \geqslant n+10 \text{ et } X \geqslant n)}{P(X \geqslant n)} = \frac{P(X \geqslant n+10)}{P(X \geqslant n)} = \frac{1-F(n+10)}{1-F(n)}$$

où $F(x)$ est la fonction de répartition, nulle pour $x \leq 0$, et donnée, pour $x > 0$, par :

$$F(x) = \int_0^x \frac{1}{100}\, e^{-\frac{t}{100}}\, dt = 1 - e^{-\frac{x}{100}}$$

$$P(X \geq n+10 \mid X \geq n) = \frac{1-F(n+10)}{1-F(n)} = \frac{e^{-\frac{n+10}{100}}}{e^{-\frac{n}{100}}} = e^{-\frac{10}{100}} = e^{-\frac{1}{10}}$$

$$\boxed{P(X \geq n+10 \mid X \geq n) = e^{-\frac{1}{10}}}$$

Cette probabilité est **indépendante de *n*** : on dit que **la loi exponentielle n'a pas de mémoire** !
La variable exponentielle X ne "se souvient pas" d'avoir déjà fonctionné pendant n jours : la probabilité de sa survie dans les 10 jours à venir ne dépend pas de la durée de son fonctionnement antérieur.

Chapitre 12. Variables aléatoires réelles à densité.

Enoncés.

Exercice 7. Densité en t^2.

Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire de densité f définie par :

$$f(t) = a\, t^2\, \mathbb{1}_{[1,2[}(t),$$

où $\mathbb{1}_{[1,2[}$ est la fonction indicatrice de l'intervalle [1, 2], définie par

$$\mathbb{1}_{[1,2[}(t) = \begin{cases} 1 & \text{pour } t \in [1,2] \\ 0 & \text{pour } t \notin [1,2] \end{cases}.$$

1°/ Déterminer a.
2°/ Expliciter la fonction de répartition de X.
3°/ Calculer $E(X)$ et $Var(X)$.
4°/ Expliciter la densité de la variable aléatoire $Y = \frac{1}{2}(X - 1)$, puis celle de la variable aléatoire $Z = \frac{1}{X}$. La variable aléatoire Z est-elle intégrable ?

Solution.

1°/ Valeur de a.

La valeur de a est déterminée par la condition de normalisation $\int_{\mathbb{R}} f(t)\, dt = \int_1^2 a\, t^2\, dt = 1$:

$$\frac{a}{3}(2^3 - 1^3) = 1$$

$$\boxed{a = \frac{3}{7}}$$

$$f(t) = \frac{3}{7}\, t^2\, \mathbb{1}_{[1,2[}(t).$$

2°/ Fonction de répartition.

La fonction de répartition est définie par :

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt$$

Pour $x \leq 1$, cette probabilité est nulle, puisque f est nulle pour x plus petit que 1.
Pour x compris entre 1 et 2, l'intégrale se réduit à :

$$F(x) = \int_1^x \frac{3}{7} t^2 \, dt = \frac{1}{7}(x^3 - 1)$$

En particulier, on a : $F(2) = 1$ et $F(1) = 0$.
Pour x supérieur à 2, l'intégrale $\int_{-\infty}^{x} f(t) \, dt$ se réduit à $\int_1^2 f(t) \, dt = 1$.

En résumé :

$$\boxed{F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x \leqslant 1 \\ \frac{1}{7}\left(x^3 - 1\right) & \text{pour } 1 \leqslant x \leqslant 2 \\ 1 & \text{pour } x \geqslant 2 \end{cases}}$$

3°/ Espérance et variance de *X*.

$$E(X) = \int_1^2 t f(t) \, dt = \frac{3}{7}\int_1^2 t^3 \, dt = \frac{3}{28}(2^4 - 1^4) = \frac{45}{28}$$

$$\boxed{E(X) = \frac{45}{28}}$$

$$E(X^2) = \int_1^2 t^2 f(t) \, dt = \frac{3}{7}\int_1^2 t^4 \, dt = \frac{3}{35}(2^5 - 1^5) = \frac{93}{35}$$

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{93}{35} - \left(\frac{45}{28}\right)^2 = \frac{291}{784}$$

$$\boxed{Var(X) = \frac{291}{784}}$$

4°/ Variables fonctions de *X*.

$Y = \frac{1}{2}(X - 1)$ a, pour fonction de répartition :

$$P(Y \leq y) = P\left(\frac{1}{2}(X - 1) \leq y\right) = P(X \leq 2y + 1) = \begin{cases} 0 & \text{pour } 2y + 1 \leqslant 1 \\ \frac{1}{7}\left((2y + 1)^3 - 1\right) & \text{pour } 1 \leqslant 2y + 1 \leqslant 2 \\ 1 & \text{pour } 2y + 1 \geqslant 2 \end{cases}$$

$$P(Y \leq y) = \begin{cases} 0 & \text{pour } y \leqslant 0 \\ \frac{1}{7}\left((2y + 1)^3 - 1\right) & \text{pour } 0 \leqslant y \leqslant \frac{1}{2} \\ 1 & \text{pour } y \geqslant \frac{1}{2} \end{cases}$$

La densité de probabilité de Y s'obtient par dérivation :

$$\boxed{f_Y(y) = \frac{6}{7}(2y+1)^2 \mathbb{1}_{[0,\frac{1}{2}[}(y)}$$

Comme X ne peut prendre que des valeurs entre 1 et 2, $Z = \frac{1}{X}$ ne prend que des valeurs positives, entre $\frac{1}{2}$ et 1.

La fonction de répartition de Z est donc nulle jusqu'à $z = \frac{1}{2}$.

Pour $\frac{1}{2} \leq z \leq 1$, $\frac{1}{z}$ est compris entre 1 et 2,

$$P(Z \leq z) = P\left(\frac{1}{X} \leq z\right) = P\left(X \geq \frac{1}{z}\right) = 1 - F\left(\frac{1}{z}\right) = 1 - \frac{1}{7}\left(\frac{1}{z^3} - 1\right)$$

On vérifie bien que l'on a : $P\left(Z \leq \frac{1}{2}\right) = 0$ et $P(Z \leq 1) = 1$.

Pour $z \geq 1$, $P(Z \leq z) = 1$.

En résumé :

$$P(Z \leq z) = \begin{cases} 0 & \text{pour } z \leqslant \frac{1}{2} \\ 1 - \frac{1}{7}\left(\frac{1}{z^3} - 1\right) & \text{pour } \frac{1}{2} \leqslant z \leqslant 1 \\ 1 & \text{pour } z \geqslant 1 \end{cases}$$

La densité de probabilité s'obtient par dérivation :

$$\boxed{f_Z(z) = \frac{3}{7}\frac{1}{z^4} \mathbb{1}_{[\frac{1}{2},1]}(z)}$$

L'espérance de Z existe : $E(Z) = \frac{3}{7}\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{z^3}\, dz = \frac{1}{7}(2^2 - 1) = \frac{3}{7}$.

$$\boxed{E(Z) = \frac{3}{7}}$$

Ceci montre que Z est intégrable, puisqu'elle a un moment d'ordre 1.

Exercices

Fonction caractéristique et transformation de Fourier.

1. Fonction caractéristique d'une variable aléatoire réelle.

1.1. Transformation de Fourier.
1.2. Fonction caractéristique d'une variable aléatoire réelle.
1.3. Fonction caractéristique d'un couple de variables aléatoires réelles.

2. Propriétés de la fonction caractéristique.

2.1. Réciprocité de la transformation de Fourier.
2.2. Indépendance.
2.3. Espérance, variance, moments.

1. Fonction caractéristique d'une variable aléatoire continue.

HAUT

1.1. Transformation de Fourier.

Etant donnée une fonction numérique f intégrable, on appelle **transformée de Fourier** de f la fonction numérique $\mathrm{F}f : \mathrm{R} \to \mathrm{C}$, définie par :

$$\mathrm{F}f(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{2i\pi ux}\, dx$$

Note : translation et dérivation.

La propriété fondamentale de la transformation de Fourier est de transformer un **produit de convolution** $\star$ en produit :

$$f(x) \xrightarrow{Fourier} F(u) \text{ et } g(x) \xrightarrow{Fourier} G(u)$$
$$\Rightarrow (f \star g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, g(t-x)\, dt \xrightarrow{Fourier} F(u)\, G(u)$$

- Au sens des distributions, une translation de vecteur a dans R est un produit de convolution par la distribution de Dirac δ_a (et δ_0 est l'élément unité du produit de convolution).

$$f(x) \xrightarrow{Fourier} F(u) \text{ et } \delta_a \xrightarrow{Fourier} e^{iua}$$
$$\Rightarrow f(x-a) = \delta_a \star f(x) \xrightarrow{Fourier} e^{iua} F(u)$$

- Au sens des distributions, la dérivation est un produit de convolution par δ'_0 :

$$f(x) \xrightarrow{Fourier} F(u) \text{ et } \delta'_0 \xrightarrow{Fourier} u$$
$$\Rightarrow f'(x) = \delta'_0 \star f(x) \xrightarrow{Fourier} u\, F(u)$$

HAUT

1.2. Fonction caractéristique d'une variable aléatoire réelle.

HAUT

Etant donnée une variable aléatoire réelle X , on appelle **fonction caractéristique** de X la fonction numérique F_X définie par :

$$F_X(u) = E(e^{iuX})$$

1. Si X est une variable aléatoire réelle de **densité de probabilité** f, la fonction caractéristique de X est liée à la **transformée de Fourier** F f de sa densité de probabilité f par

$$F_X(u) = \mathrm{F}\, f\left(\frac{-u}{2\pi}\right)$$

2. Si X est une variable aléatoire **discrète** de valeurs x_k, $k \geq 1$, sa fonction caractéristique prend la forme d'une **série de Fourier** :

$$F_X(u) = \sum_{k=1}^{\infty} P(X = x_k)\, e^{iux_k}$$

Note.

La **théorie des distributions** permet d'associer à une loi de probabilité définie par :

$$P(X = x_k) = p_k,\ k \geq 1,$$

la "distribution de probabilité" $\sum_{k=1}^{\infty} p_k \delta_{x_k}$,

où δ_{x_k} est la distribution de Dirac au point x_k.

La **transformée de Fourier de la distribution** δ_a est l'application $u \mapsto e^{-2i\pi ua}$.

De sorte que la fonction caractéristique de X est encore liée à la transformée de Fourier de sa distribution de probabilité par la même relation :

$$F_X(u) = \mathrm{F}\, f\left(\frac{-u}{2\pi}\right)$$

3. Si X est une variable aléatoire **discrète de valeurs entières** $k \geq 0$, sa fonction caractéristique est liée à sa **fonction génératrice** g_X par

$$F_X(u) = g_X(e^{iu})$$

1.3. Fonction caractéristique d'un couple de variables aléatoires réelles.

HAUT

La fonction caractéristique d'un couple (X, Y) est la fonction numérique de $\mathbb{R}^2$ dans C définie par :

$$F_{(X, Y)}(u, v) = E\left(e^{i(uX + vY)}\right) = E\left(e^{iuX}\, e^{ivY}\right)$$

Elle est liée à la transformée de Fourier de la densité ou de la distribution de probabilité f par :

$$F_{(X, Y)}(u, v) = \mathrm{F}\, f\left(-\frac{u}{2\pi}, -\frac{v}{2\pi}\right)$$

2. Propriétés de la fonction caractéristique.

HAUT

2.1. Réciprocité de la transformation de Fourier.

La fonction caractéristique F_X d'une variable aléatoire réelle X définit parfaitement la **loi de probabilité** f de X (réciprocité de la transformation de Fourier F) et on peut écrire

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F_X(u)\, e^{-iux}\, du.$$

Le facteur de normalisation $\frac{1}{2\pi}$ assure que $\overline{\mathcal{F}}$ o F est l'application identique, et que F o $\overline{\mathcal{F}}$ est l'application identique (dans l'espace des distributions tempérées).

2.2. Indépendance.

HAUT

Si deux variables aléatoires réelles X et Y sont indépendantes, la fonction caractéristique de la somme est le produit des fonctions caractéristiques, (la réciproque est fausse).

$$F_{X+Y}(u, v) = F_X(u)\, F_Y(v)$$

2.3. Espérance, variance, moments.

HAUT

L'**espérance** $E(X)$ s'exprime à l'aide de la fonction caractéristique F_X par :

$$E(X) = -i F'_X(0)$$

La **variance** $Var(X)$ s'exprime à l'aide de la fonction caractéristique F_X par :

$$Var(X) = -F''_X(0) + (F'_X(0))^2$$

Le **moment d'ordre k** ≥ 0, s'exprime par :

$$\boxed{m_k = (-i)^k F_X^{(k)}(0)}$$

Chapitre 13. Fonction caractéristique et transformation de Fourier.

Exercices

Exercice 1. Fonction caractéristique d'une loi constante.
Exercice 2. Fonction caractéristique et moments.
Exercice 3. Fonction caractéristique et loi exponentielle.
Exercice 4. Réciprocité de la transformation de Fourier.
Exercice 5. Fonction caractéristique exponentielle de $-u^2$.
Exercice 6. Fonction caractéristique et indépendance.
Exercice 7. Fonction caractéristique d'un couple (X, Y).
Exercice 8. Fonction caractéristique d'une loi constante et d'une loi exponentielle.

Exercice 1. Fonction caractéristique d'une loi constante.

Soit X une variable continue de loi constante sur l'intervalle [0, 1].
Soit Y une variable continue de loi constante sur l'intervalle [–1, 1], indépendante de X.

1°/ Calculer la fonction caractéristique de X.
2°/ Calculer la fonction caractéristique de Y.
3°/ Calculer la fonction caractéristique de $X + Y$.
4°/ On considère une variable aléatoire Z de fonction caractéristique $F_Z(u) = \cos u$.
Quelle est la loi de probabilité de Z ?

Solution

HAUT

Exercice 2. Fonction caractéristique et moments.

Soit X une variable aléatoire continue de loi de probabilité $k \mid x \mid e^{-|x|}$, $x \in$ R.
1°/ Quelle est la valeur de k ?
2°/ Quelle est la fonction caractéristique de X ?
3°/ A l'aide de la fonction caractéristique, calculer l'espérance et la variance de X.
4°/ Calculer directement les moments m_k et vérifier les résultats de la 3e question.

Solution

HAUT

Exercice 3. Fonction caractéristique et loi exponentielle.

1°/ Soit X une variable aléatoire réelle de fonction caractéristique F_X. Calculer la fonction caractéristique de la variable aléatoire réelle $Y = a\,X + b$, $(a, b) \in \mathrm{R}^2$. 2°/ Soit X une variable aléatoire exponentielle. a) Quelle est la fonction caractéristique de la variable aléatoire $Y = 3\,X + 2$? b) Quelle est la fonction caractéristique de la variable aléatoire $Z = X + Y$?	Solution

HAUT

Exercice 4. Réciprocité de la transformation de Fourier.

Soit X une variable aléatoire dont la fonction caractéristique est :

$$F_X(u) = a\left(\frac{i}{u}(1 - e^{iu}) + 1\right)$$

Solution

1°/ Quelle est la valeur de a ?
2°/ Est-ce que X est une variable aléatoire continue ?
3°/ Quelle est la loi de probabilité de X ?
4°/ Tracer la courbe représentative des variations de la fonction de répartition de X.

HAUT

Exercice 5. Fonction caractéristique exponentielle de $-u^2$.

Soit X une variable aléatoire dont la fonction caractéristique est :

$$F_X(u) = a\, e^{-u^2}$$

1°/ Quelle est la valeur de a ?
2°/ Est-ce que X est une variable aléatoire continue ?
3°/ Quelle est la loi de probabilité de X ?
4°/ Soit Y une variable aléatoire réelle de même loi que X et indépendante de X.
Quelle est la fonction caractéristique de $X + Y$?

Solution

HAUT

Exercice 6. Fonction caractéristique et indépendance.

Soit (X, Y) un couple aléatoire dont la densité de probabilité est donnée par :

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{4}\left[1 + x\,y\,(x^2 - y^2)\right] & \text{pour } |x| < 1 \text{ et } |y| < 1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Solution

1°/ Calculer les lois marginales de X et Y.
2°/ Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
3°/ Calculer les fonctions caractéristiques de X et Y.
4°/ Calculer la fonction caractéristique de la variable aléatoire $Z = X + Y$.
Conclusion ?

HAUT

Exercice 7. Fonction caractéristique d'un couple.

On considère un couple (X, Y) de variables aléatoires continues dont on notera $\varphi_{(X, Y)}$ la fonction caractéristique. On suppose que :

$$\varphi_{(X, Y)}(\alpha, \beta) = e^{-\frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2 + \alpha\beta)}, \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Solution

1°/ Déterminer les lois marginales de X et de Y.
2°/ Calculer la covariance du couple (X, Y).
3°/ Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

HAUT

Exercice 8. Fonction caractéristique d'une loi constante et d'une loi exponentielle.

Soit $X : (\Omega, P) \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire continue.
Calculer l'espérance et la variance de X, la transformée de Laplace et la fonction caractéristique de la densité de probabilité de X, dans les cas suivants :

1°/ X suit une loi constante sur un intervalle $[a, b]$, $a < b$.

2°/ X suit une loi exponentielle de paramètre $\mu > 0$.

Solution

HAUT

Chapitre 13. Fonction caractéristique et transformation de Fourier.

Enoncés.

Exercice 1. Fonction caractéristique d'une loi constante.

Soit X une variable continue de loi constante sur l'intervalle [0, 1]. Soit Y une variable continue de loi constante sur l'intervalle [–1, 1], indépendante de X. 1°/ Calculer la fonction caractéristique de X. 2°/ Calculer la fonction caractéristique de Y. 3°/ Calculer la fonction caractéristique de $X + Y$. 4°/ On considère une variable aléatoire Z de fonction caractéristique $F_Z(u) = \cos u$. Quelle est la loi de probabilité de Z ?	

Solution.

1°/ Fonction caractéristique de X.

La fonction caractéristique F_X d'une variable aléatoire réelle X est, par définition, l'application qui, à un $u \in \mathrm{R}$, fait correspondre l'espérance mathématique de e^{iuX} :

$$F_X(u) = E(e^{iuX}).$$

C'est la **transformée de Fourier** de la densité de probabilité f_X de X.
Lorsque X est une variable aléatoire continue, la fonction caractéristique s'exprime par une intégrale :

$$F_X(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\, e^{iux}\, dx$$

Lorsque X est une variable aléatoire discrète, la fonction caractéristique s'exprime par une série de Fourier :

$$F_X(u) = \sum_{k=1}^{\infty} P(X = x_k)\, e^{iux_k}$$

Pour une variable aléatoire X de loi constante sur l'intervalle [0, 1], la densité de probabilité est $1_{[0,\,1]}$ et la fonction caractéristique est :

$$F_X(u) = \int_0^1 e^{iux}\,dx = \frac{1}{iu}[\,e^{iux}\,]_0^1 = \frac{i}{u}(1 - e^{iu})$$

$$\boxed{F_X(u) = \frac{i}{u}(1 - e^{iu})}$$

2°/ Fonction caractéristique de *Y*.

La densité de probabilité de la variable *Y* est constante sur l'intervalle [–1, 1] : $f_Y = \frac{1}{2}\,1_{[-1,\,1]}$ (l'intervalle a pour longueur 2).
La fonction caractéristique F_Y de *Y* est donnée par la formule :

$$F_Y(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(y)\,e^{iuy}\,dy = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} e^{iuy}\,dy = \frac{1}{2}\frac{1}{iu}[\,e^{iuy}\,]_{-1}^{+1} = \frac{e^{iu} - e^{-iu}}{2iu} = \frac{\sin u}{u}$$

$$\boxed{F_Y(u) = \frac{\sin u}{u}}$$

3°/ Fonction caractéristique de *X* + *Y*.

$$F_{X+Y}(u) = E\,(e^{iu(X+Y)}) = E\,(e^{iuX + iuY}) = E\,(e^{iuX}\,e^{iuY})$$

Comme *X* et *Y* sont, par hypothèse, indépendantes, les variables aléatoires e^{iuX} et e^{iuY} sont, elles aussi, indépendantes et l'espérance de leur produit est le produit de leurs espérances :

$$F_{X+Y}(u) = E\,(e^{iuX})\,E\,(e^{iuY}) = F_X(u)\,F_Y(u) = \frac{i}{u}(1 - e^{iu})\,\frac{\sin u}{u}$$

$$\boxed{F_{X+Y}(u) = \frac{i}{u^2}(1 - e^{iu})\,\sin u}$$

La formule $F_{X+Y}(u) = F_X(u)\,F_Y(u)$ montre que la loi de probabilité de $X + Y$ est le **produit de convolution** des lois de *X* et de *Y*, puisque sa transformée de Fourier est le produit des transformées de Fourier des lois de *X* et *Y*.

4°/ Loi de probabilité de *Z*.

On peut écrire :

$$\cos u = \frac{1}{2}(e^{iu} + e^{-iu}).$$

Or la fonction caractéristique d'une variable aléatoire discrète *Z* de valeurs z_k, $k \geq 1$, prend la forme

$$F_Z(u) = \sum_{k=1}^{\infty} P\,(Z = z_k)\,e^{iuz_k}$$

Par identification, on reconnaît, dans la formule donnant *cos u*, la fonction caractéristique d'une variable discrète *Z* prenant les valeurs –1 et 1, avec des probabilités $\frac{1}{2}$.

Une loi de probabilité est entièrement déterminée par sa fonction caractéristique (réciprocité de la transformation de Fourier).

La loi de probabilité de *Z* est donc donnée par le tableau suivant :

z	-1	1
$P\ (Z = z)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Z est une variable discrète uniforme sur l'ensemble {–1, 1}.

La variable aléatoire $\frac{Z+1}{2}$ est une **variable de Bernoulli** de paramètre $\frac{1}{2}$.

Chapitre 13. Fonction caractéristique et transformation de Fourier.

Enoncés.

Exercice 2. Fonction caractéristique et moments.

Soit X une variable aléatoire continue de loi de probabilité $k \mid x \mid e^{-\mid x \mid}$, $x \in$ R. 1°/ Quelle est la valeur de k ? 2°/ Quelle est la fonction caractéristique de X ? 3°/ A l'aide de la fonction caractéristique, calculer l'espérance et la variance de X. 4°/ Calculer directement les moments m_k et vérifier les résultats de la 3 e question.	

Solution.

1°/ Fonction caractéristique.

La fonction caractéristique, définie par :

$$F_X(u) = E(e^{iuX})$$

s'exprime ici par l'intégrale :

$$F_X(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} k \mid x \mid e^{-\mid x \mid} e^{iux}\, dx$$

En décomposant l'intervalle]– ∞, + ∞ [en deux intervalles,]– ∞, 0 [et [0, + ∞ [, il vient :

$$F_X(u) = k \int_{-\infty}^{0} (-x)\, e^{x} e^{iux}\, dx + k \int_{0}^{\infty} x\, e^{-x} e^{iux}\, dx$$

La première intégrale s'écrit, par changement de variable :

$$\int_{-\infty}^{0} x\, e^{x} e^{iux}\, dx = -\int_{0}^{\infty} x'\, e^{-x'} e^{-iux'} (-dx') = \int_{0}^{\infty} x\, e^{-x} e^{-iux}\, dx$$

d'où :

$$F_X(u) = k \int_{0}^{\infty} x\, e^{-x} (e^{iux} + e^{-iux})\, dx$$
$$= k \int_{0}^{\infty} x\, e^{-x}\, 2\, \Re(e^{iux})\, dx$$

$$= 2\,k\,\Re\left(\int_0^\infty x\,e^{-x}\,e^{i\,u\,x}\,dx\right)$$

On a :

$$\int_0^\infty x\,e^{-x}\,e^{i\,u\,x}\,dx = \int_0^\infty x\,e^{(i\,u-1)\,x}\,dx.$$

On intègre par parties en posant $v = x$, $dv = dx$, $dw = e^{(i\,u-1)\,x}\,dx$, $w = \frac{1}{i\,u-1}\,e^{(i\,u-1)\,x}$.

$$\int_0^\infty x\,e^{(i\,u-1)\,x}\,dx = \int v\,dw = v\,w - \int w\,dv = \left[\,x\,\frac{1}{i\,u-1}\,e^{(i\,u-1)\,x}\,\right]_0^\infty - \frac{1}{i\,u-1}\int_0^\infty e^{(i\,u-1)\,x}\,dx$$

$$= -\frac{1}{i\,u-1}\left[\,\frac{1}{i\,u-1}\,e^{(i\,u-1)\,x}\,\right]_0^\infty = \frac{1}{(i\,u-1)^2}$$

$$\Re\left(\int_0^\infty x\,e^{-x}\,e^{i\,u\,x}\,dx\right) = \Re\left(\frac{1}{(i\,u-1)^2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(i\,u-1)^2} + \frac{1}{(-i\,u-1)^2}\right) = \frac{1}{2}\frac{(1+i\,u)^2 + (1-i\,u)^2}{(1+u^2)^2}$$

$$= \frac{1-u^2}{(1+u^2)^2}$$

$$F_X(u) = 2\,k\,\Re\left(\int_0^\infty x\,e^{-x}\,e^{i\,u\,x}\,dx\right) = 2\,k\,\frac{1-u^2}{(1+u^2)^2}$$

$$\boxed{F_X(u) = 2\,k\,\frac{1-u^2}{(1+u^2)^2}}$$

2°/ Condition de normalisation.

La condition "La somme des probabilités est égale à 1", soit $E(1) = 1$, s'exprime, en termes de fonction caractéristique, par la relation

$$E(1) = E(e^{i\,0\,X}) = F_X(0) = 1$$

Ici, la relation $F_X(0) = 1$ s'écrit :

$$2\,k = 1$$

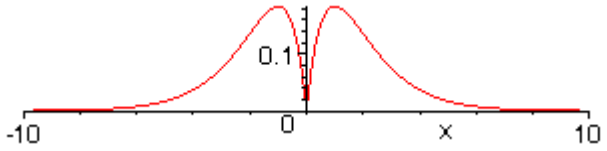
$$\boxed{k = \frac{1}{2}}$$

La fonction caractéristique de X est donc donnée par :

$$\boxed{F_X(u) = \frac{1-u^2}{(1+u^2)^2}}$$

C'est une fonction paire, de classe C^∞ sur R.
Avec $k = \frac{1}{2}$, la densité de probabilité est :

$$\boxed{f(x) = \frac{|x|}{2} e^{-|x|}}$$



3°/ Espérance et variance de *X*.

$$E(X) = \frac{1}{i} E(i X e^{i0X}) = \frac{1}{i} E\left(\left[\frac{d}{du}(e^{iuX}) \right]_{u=0} \right) = \frac{1}{i} \left[\frac{d}{du}(E(e^{iuX})) \right]_{u=0}$$

$$E(X) = \frac{1}{i} F'_X(0) = \frac{1}{i} \left[-\frac{2u}{(1+u^2)^2} - \frac{4u(1-u^2)}{(1+u^2)^3} \right]_{u=0} = 0$$

Cette valeur est confirmée par le fait que la distribution de probabilité de *X* est symétrique par rapport à la valeur 0 : **la moyenne est donc la valeur centrale** 0.

En dérivant une nouvelle fois par rapport à *u*, il vient, avec $i^2 = -1$:

$$E(X^2) = \frac{1}{i^2} E((iX)^2 e^{i0X}) = \frac{1}{i^2} E\left(\left[\frac{d^2}{du^2}(e^{iuX}) \right]_{u=0} \right) = -\left[\frac{d^2}{du^2}(E(e^{iuX})) \right]_{u=0} = -F''_X(0)$$

$$E(X^2) = -\left[-\frac{2}{(1+u^2)^2} + \frac{8u^2}{(1+u^2)^3} - \frac{4(1-3u^2)}{(1+u^2)^3} + \frac{24u^2(1-u^2)}{(1+u^2)^4} \right]_{u=0} = 6$$

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = -F''_X(0) + (F'_X(0))^2 = 6$$

$$\boxed{E(X) = 0 \ ; \ Var(X) = 6}$$

4°/ Calcul direct des moments.

Le moment m_n d'ordre *n* est défini par :

$$m_n = E(X^n) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n f_X(x)\, dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} x^n |x| e^{-|x|}\, dx$$

A l'infini, l'exponentielle l'emporte sur la puissance et l'intégrale est convergente pour tout entier *n*.

Lorsque n est impair, on intègre une fonction impaire sur un intervalle symétrique autour de 0 : l'intégrale est nulle, les moments d'ordre impair sont nuls.
$m_{2k+1} = 0, \forall\, k \in \mathrm{N}$.

Le moment m_{2k} d'ordre $2k$ s'écrit :

$$m_{2k} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2k} \,|\, x \,|\, e^{-|x|}\, dx = \int_{0}^{\infty} x^{2k+1}\, e^{-x}\, dx$$

La fonction Γ d'Euler est définie par l'intégrale :

$$\Gamma\,(u) = \int_{0}^{\infty} x^{u-1}\, e^{-x}\, dx.$$

Si u est un entier $n + 1$, il vient : $\Gamma\,(n+1) = \int_{0}^{\infty} x^{n}\, e^{-x}\, dx = n\,!$

[La démonstration peut se faire facilement par récurrence, à partir de $\Gamma\,(1) = 1$ et $\Gamma\,(n+1) = n\,\Gamma\,(n)$ (intégration par parties)].

$$m_{2k} = \int_{0}^{\infty} x^{2k+1}\, e^{-x}\, dx = (2k+1)\,!$$

$$\boxed{m_{2k+1} = 0\ ;\ m_{2k} = (2k+1)\,!\ ;\ k \in \mathrm{N}.}$$

En particulier, on a :

$E\,(X) = m_1 = 0,$
$Var\,(X) = m_2 - m_1{}^2 = m_2 = 3\,! = 6.$

On retrouve bien les résultats de la troisième question.

Chapitre 13. Fonction caractéristique et transformation de Fourier.

Enoncés.

Exercice 3. Fonction caractéristique et loi exponentielle.

1°/ Soit X une variable aléatoire réelle de fonction caractéristique F_X. Calculer la fonction caractéristique de la variable aléatoire réelle $Y = a\,X + b$, $(a, b) \in \mathrm{R}^2$. 2°/ Soit X une variable aléatoire exponentielle. a) Quelle est la fonction caractéristique de la variable aléatoire $Y = 3\,X + 2$? b) Quelle est la fonction caractéristique de la variable aléatoire $Z = X + Y$?	

Solution.

1°/ Fonction caractéristique de $a\,X + b$.

$$F_{a\,X+b}(u) = E\left(e^{i\,u\,(a\,X+b)}\right) = e^{i\,u\,b}\,E\left(e^{i\,u\,a\,X}\right) = e^{i\,b\,u}\,F_X(a\,u)$$

$$\boxed{F_{a\,X+b}(u) = e^{i\,b\,u}\,F_X(a\,u)}$$

2°/ Variable exponentielle.

Cherchons d'abord la **fonction caractéristique** de la variable exponentielle X de paramètre $\lambda > 0$.
La densité de probabilité de X est :

$$f(x) = \begin{cases} \lambda\,e^{-\lambda\,x} & \text{pour } x > 0 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

La fonction caractéristique de X est donc :

$$F_X(u) = \int_0^{\infty} \lambda\,e^{-\lambda\,x}\,e^{i\,u\,x}\,dx = \lambda \int_0^{\infty} e^{(i\,u-\lambda)\,x}\,dx = \frac{\lambda}{i\,u-\lambda}\left[\,e^{(i\,u-\lambda)\,x}\,\right]_0^{\infty} = \frac{\lambda}{\lambda-i\,u}$$

$$\boxed{F_X(u) = \frac{\lambda}{\lambda-i\,u}}$$

a) Variable *Y*.

$$Y = 3\,X + 2$$

$$F_{3X+2}(u) = e^{2iu}\,F_X(3\,u) = e^{2iu}\,\frac{\lambda}{\lambda - 3iu}$$

b) Variable *Z*.

$$Z = X + Y = 4\,X + 2$$

$$F_{4X+2}(u) = e^{2iu}\,F_X(4\,u) = e^{2iu}\,\frac{\lambda}{\lambda - 4iu}$$

Chapitre 13. Fonction caractéristique et transformation de Fourier.

Enoncés.

Exercice 4. Réciprocité de la transformation de Fourier.

Soit X une variable aléatoire dont la fonction caractéristique est :

$$F_X(u) = a\left(\frac{i}{u}(1 - e^{iu}) + 1\right)$$

1°/ Quelle est la valeur de a ?
2°/ Est-ce que X est une variable aléatoire continue ?
3°/ Quelle est la loi de probabilité de X ?
4°/ Tracer la courbe représentative des variations de la fonction de répartition de X.

Solution.

1°/ Condition de normalisation.

La condition de normalisation $F_X(0) = 1$ donne :

$$\lim_{u\to 0} a\left(\frac{i}{u}(1 - e^{iu}) + 1\right) = 1$$

$$e^{iu} = 1 + iu + \frac{1}{2}(iu)^2 + 0(u^3)$$

$$\frac{i}{u}(1 - e^{iu}) = \frac{1}{iu}(e^{iu} - 1) = 1 + \frac{1}{2}iu + 0(u^2)$$

$$\frac{i}{u}(1 - e^{iu}) + 1 = 2 + \frac{1}{2}iu + 0(u^2)$$

$$\lim_{u\to 0}\left(\frac{i}{u}(1 - e^{iu}) + 1\right) = 2$$

$$\lim_{u\to 0} a\left(\frac{i}{u}(1 - e^{iu}) + 1\right) = a \lim_{u\to 0}\left(\frac{i}{u}(1 - e^{iu}) + 1\right) = 2a$$

$$2a = 1$$

$$\boxed{a = \frac{1}{2}}$$

$$F_X(u) = \frac{1}{2}\left(\frac{i}{u}(1 - e^{iu}) + 1\right)$$

2°/ *X* variable aléatoire continue ?

$F_X(u)$ peut être décomposée en somme de deux morceaux :

$$F_X(u) = \frac{1}{2}\left(\frac{i}{u}(1 - e^{iu}) + 1\right)$$

Dans le premier terme de la somme, $\frac{i}{u}(1 - e^{iu})$, on reconnaît la fonction caractéristique d'une variable aléatoire continue *Y* de loi constante sur l'intervalle [0, 1] (Exercice 1.1°).
Dans le deuxième terme de la somme, 1, on reconnaît la fonction caractéristique d'une variable discrète *Z* uniforme sur l'ensemble réduit à {0}.
Le passage de la loi de probabilité à la fonction caractéristique, de même que la transformation de Fourier, est une opération linéaire injective.
La densité de probabilité de *X* est donc combinaison linéaire des densités de probabilité de *Y* et *Z* :

$$F_X(u) = \frac{1}{2}(F_Y(u) + F_Z(u))$$
$$\Rightarrow f_X = \frac{1}{2}(f_Y + f_Z) = \frac{1}{2}(1_{[0,1]} + \delta_0)$$

Et cette relation, qui fait intervenir une distribution de Dirac au point 0, donc une **probabilité non nulle de la valeur 0**, montre que *X* n'est pas une variable aléatoire continue, puisque, pour une variable aléatoire continue, la probabilité d'une valeur particulière est nulle (la probabilité d'un intervalle est proportionnelle à la longueur de l'intervalle, et si la longueur de l'intervalle est nulle, la probabilité est nulle).

X n'est pas une variable aléatoire continue.

3°/ Loi de probabilité de *X*.

La formule :

$$f_X = \frac{1}{2}(f_Y + f_Z) = \frac{1}{2}(1_{[0,1]} + \delta_0)$$

montre que :

$$P(X = 0) = \frac{1}{2}$$

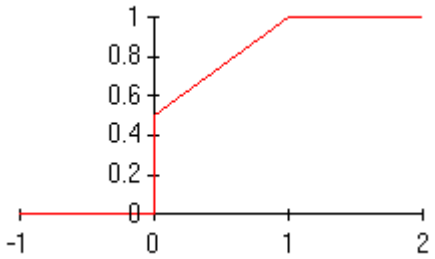
et, en dehors du point 0, *X* a une densité de probabilité égale à $\frac{1}{2}1_{[0,1]}$.

Autrement dit :

La probabilité d'un intervalle réel [*a*, *b*] est égale à :
— la moitié de la longueur de $[a, b] \cap [0, 1]$ si $0 \notin [a, b]$,
— la moitié de la longueur de $[a, b] \cap [0, 1]$, plus $\frac{1}{2}$, si $0 \in [a, b]$,

4°/ Fonction de répartition.

La fonction de répartition peut être représentée par :



Elle n'est pas continue, puisqu'elle présente un saut de $\frac{1}{2}$ en 0 : ceci confirme que X n'est pas une variable aléatoire continue.

Chapitre 13. Fonction caractéristique et transformation de Fourier.

Enoncés.

Exercice 5. Fonction caractéristique exponentielle de $-u^2$.

Soit X une variable aléatoire dont la fonction caractéristique est : $$F_X(u) = a\, e^{-u^2}$$ 1°/ Quelle est la valeur de a ? 2°/ Est-ce que X est une variable aléatoire continue ? 3°/ Quelle est la loi de probabilité de X ? 4°/ Soit Y une variable aléatoire réelle de même loi que X et indépendante de X. Quelle est la fonction caractéristique de $X + Y$?	

Solution.

1°/ Condition de normalisation.

La condition $E(1) = 1$ s'écrit $F_X(0) = 1$, soit

$$\boxed{a = 1}$$

$$F_X(u) = e^{-u^2}$$

2°/ X variable aléatoire continue ?

La loi de probabilité est la transformée de Fourier réciproque de e^{-u^2}, soit :

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}\, e^{-i\,u\,x}\, du = \frac{1}{2\pi}\lim_{A\to+\infty}\int_{-A}^{+A} e^{-(u^2 + i\,u\,x)}\, du$$

$$(u^2 + i\,u\,x) = \left(u + i\,\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{x^2}{4}$$

Posons $v = u + i\,\frac{x}{2}$, $dv = du$.

$$-(u^2 + i\,u\,x) = -v^2 - \frac{x^2}{4}$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \lim_{A \to +\infty} \int_{-A+i\frac{x}{2}}^{+A+i\frac{x}{2}} e^{-v^2} e^{-\frac{x^2}{4}} dv = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2}{4}} \lim_{A \to +\infty} \int_{-A+i\frac{x}{2}}^{+A+i\frac{x}{2}} e^{-v^2} dv$$

Comme la fonction e^{-v^2} n'a aucun point singulier dans C, l'intégrale d'un point à un autre ne dépend pas du chemin suivi (**théorème de Cauchy**):

$$\int_{-A+i\frac{x}{2}}^{+A+i\frac{x}{2}} e^{-v^2} dv = \int_{-A+i\frac{x}{2}}^{-A} e^{-v^2} dv + \int_{-A}^{+A} e^{-v^2} dv + \int_{+A}^{+A+i\frac{x}{2}} e^{-v^2} dv$$

$e^{-\frac{x^2}{4}}$ est toujours inférieur ou égal à 1.
Sur les petits côtés $[-A + i\frac{x}{2}, -A]$ et $[A, A + i\frac{x}{2}]$, par exemple sur $[A, A + i\frac{x}{2}]$:

$v = A + i\,y$ avec y variant de 0 à $\frac{x}{2}$.

$v^2 = A^2 - y^2 + 2\,i\,A\,y$

$|e^{-v^2}| = e^{-A^2} \times e^{y^2} \leq e^{-A^2} \times e^{\frac{x^2}{4}}$,

$$\left| \int_{+A}^{+A+i\frac{x}{2}} e^{-v^2} dv \right| \leq \int_{+A}^{+A+i\frac{x}{2}} |e^{-v^2}|\, dv \leq e^{-A^2} \times e^{\frac{x^2}{4}} \times \frac{|x|}{2}$$

qui tend vers 0 lorsque A tend vers l'infini.
Le résultat ne change pas en changeant A en $-A$.

Il reste donc :

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2}{4}} \lim_{A \to +\infty} \int_{-A}^{+A} e^{-v^2} dv = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2}{4}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-v^2} dv$$

$$\left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-v^2} dv \right) e^{-\frac{x^2}{4}} = constante \times e^{-\frac{x^2}{4}}$$

On voit donc que ***X* est une variable aléatoire continue**, puisqu'elle possède une densité de probabilité qui est une fonction analytique.

3°/ Loi de probabilité de *X*.

L'exposant $-\frac{x^2}{4}$ montre que la densité de probabilité de X varie comme une **loi normale**

$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ **de paramètres μ = 0 et σ =** $\sqrt{2}$ (Voir Chapitre 14).

Elle s'écrit donc :

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{4}}}$$

D'ailleurs, la **loi de Gauss centrée réduite** nous dit que $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\, e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt = 1$.

Le changement de variable $v = \frac{t}{\sqrt{2}}$, $dv = \frac{1}{\sqrt{2}}\, dt$, donne la valeur de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-v^2}\, dv = \sqrt{\pi}$

De sorte que, finalement, il reste bien :

$$f(x) = \frac{1}{2\,\pi}\, e^{-\frac{x^2}{4}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-v^2}\, dv = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{4}}$$

X est une **variable normale de paramètres μ = 0 et σ =** $\sqrt{2}$.

4°/ Fonction caractéristique de *X* + *Y*.

Comme les variables *X* et *Y* sont indépendantes, la fonction caractéristique de la somme est le **produit des fonctions caractéristiques** de *X* et de *Y* :

$$F_{X+Y}(u) = F_X(u)\, F_Y(u)$$

et comme *X* et *Y* suivent la même loi, elles ont la même fonction caractéristique :

$$F_{X+Y}(u) = (F_X(u))^2 = e^{-2u^2}$$

$$\boxed{F_{X+Y}(u) = e^{-2u^2}}$$

La densité de probabilité de *X* + *Y* est donc donnée par :

$$f_{X+Y}(x) = \frac{1}{2\,\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2u^2}\, e^{-iux}\, du = \frac{1}{2\,\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(2u^2 + iux)}\, du$$

Posons $u' = u\,\sqrt{2}$, nous obtenons :

$$f_{X+Y}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{2\,\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(u'^2 + iu'\frac{x}{\sqrt{2}})}\, du = \frac{1}{\sqrt{2}}\, f_X\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2\,\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{8}}$$

et cette formule montre que ***X* + *Y* est une variable normale de moyenne 0 et de variance 4**.

C'est un résultat général : la **somme de deux variables normales indépendantes**, de moyennes μ_1 et μ_2, et de variances σ_1^2 et σ_2^2, est une **variable normale** de moyenne $\mu_1 + \mu_2$, et de variance $\sigma_1^2 + \sigma_2^2$,

Chapitre 13. Fonction caractéristique et transformation de Fourier.

Enoncés.

Exercice 6. Fonction caractéristique et indépendance.

Soit (X, Y) un couple aléatoire dont la densité de probabilité est donnée par :

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{4}\left[1 + x\,y\,(x^2 - y^2)\right] & \text{pour } |x| < 1 \text{ et } |y| < 1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

1°/ Calculer les lois marginales de X et Y.
2°/ Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
3°/ Calculer les fonctions caractéristiques de X et Y.
4°/ Calculer la fonction caractéristique de la variable aléatoire $Z = X + Y$.
Conclusion ?

Solution.

1°/ Lois marginales de X et Y.

a) Loi marginale de X.

Pour $|x| < 1$:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\,dy = \int_{-1}^{+1} \frac{1}{4}\left[1 + x\,y\,(x^2 - y^2)\right] dy$$
$$= \frac{1}{4}\left[y\right]_{-1}^{+1} + \frac{x^3}{8}\left[y^2\right]_{-1}^{+1} - \frac{x}{16}\left[y^4\right]_{-1}^{+1} = \frac{1}{2}.$$

Pour $|x| \geq 0$, $f(x, y) = 0$ pour tout y, donc $f_X(x) = 0$.

Au total :

X suit une loi constante sur l'intervalle $[-1, +1]$.

b) Loi marginale de Y.

Pour $|y| < 1$:

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\, dx = \int_{-1}^{+1} \frac{1}{4}\,[1 + x\,y\,(x^2 - y^2)]\, dx$$
$$= \frac{1}{4}[\,x\,]_{-1}^{+1} + \frac{y}{16}\,[\,x^4\,]_{-1}^{+1} - \frac{y^3}{8}\,[\,x^2\,]_{-1}^{+1} = \frac{1}{2}.$$

Pour $|\,y\,| \geq 0$, $f(x, y) = 0$ pour tout x, donc $f_Y(y) = 0$.

Au total :

Y suit une loi constante sur l'intervalle [– 1, + 1].

X et Y suivent la même loi constante sur l'intervalle [– 1, + 1].

2°/ Indépendance.

Pour que les deux variables X et Y soient indépendantes, il faut et il suffit que la loi conjointe soit le produit des lois marginales :

$$f(x, y) = f_X(x) \times f_Y(y)$$

Cette relation n'est pas vérifiée ici puisque le produit $f_X(x) \times f_Y(y)$ est constant et égal à $\frac{1}{4}$ à l'intérieur du carré défini par $|\,x\,| < 1$ et $|\,y\,| < 1$, alors que $f(x, y) = \frac{1}{4}\,[1 + x\,y\,(x^2 - y^2)]$ dans ce même carré.

Les variables X et Y ne sont pas indépendantes.

3°/ Fonctions caractéristiques.

Nous avons déjà calculé (Exercice 1,2°) la fonction caractéristique de X et Y :

$$F_X(u) = F_Y(u) = \frac{\sin u}{u}$$

4°/ Fonction caractéristique de la somme.

Soit $Z = X + Y$.
La fonction caractéristique de Z est définie par :

$$F_Z(u) = E(e^{iuZ}) = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{iu(x+y)}\, f(x, y)\, dx\, dy$$
$$= \int_{-1}^{+1} e^{iux} \left(\int_{-1}^{+1} e^{iuy} \frac{1}{4}\,[1 + x\,y\,(x^2 - y^2)]\, dy \right) dx$$
$$= \frac{1}{4}\Big[\left(\int_{-1}^{+1} e^{iux}\, dx \right)\left(\int_{-1}^{+1} e^{iuy}\, dy \right)$$
$$+ \left(\int_{-1}^{+1} e^{iux}\, x^3\, dx \right)\left(\int_{-1}^{+1} e^{iuy}\, y\, dy \right)$$

$$-\left(\int_{-1}^{+1} e^{iux}\, x\, dx\right)\left(\int_{-1}^{+1} e^{iuy}\, y^3\, dy\right)\Big]$$

Or on a :

$$\int_{-1}^{+1} e^{iux}\, x^3\, dx = \int_{-1}^{+1} e^{iuy}\, y^3\, dy,$$

$$\int_{-1}^{+1} e^{iux}\, x\, dx = \int_{-1}^{+1} e^{iuy}\, y\, dy$$

$$\int_{-1}^{+1} e^{iux}\, dx = \int_{-1}^{+1} e^{iuy}\, dy.$$

donc il reste seulement :

$$F_Z(u) = \frac{1}{4}\left(\int_{-1}^{+1} e^{iux}\, dx\right)^2$$

$$\int_{-1}^{+1} e^{iux}\, dx = \frac{1}{iu}\left[e^{iux}\right]_{-1}^{+1} = 2\frac{\sin u}{u}$$

$$\boxed{F_Z(u) = \frac{\sin^2 u}{u^2} = \left(\frac{\sin u}{u}\right)^2 = F_X(u) \times F_Y(u)}$$

Conclusion.

Nous avons ici un exemple de variables aléatoires X et Y telles que la fonction caractéristique de la somme $X + Y$ soit le produit des fonctions caractéristiques de X et Y, sans que les variables X et Y soient indépendantes.

Cet exemple est tiré de **Jean BASS, Eléments de Calcul des Probabilités, III e édition, Masson éd., Paris, 1974, p.86**.

Chapitre 13. Fonction caractéristique et transformation de Fourier.

Enoncés.

Exercice 7. Fonction caractéristique d'un couple.

On considère un couple (X, Y) de variables aléatoires continues dont on notera $\varphi_{(X, Y)}$ la fonction caractéristique. On suppose que :

$$\varphi_{(X, Y)}(\alpha, \beta) = e^{-\frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2 + \alpha\beta)}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

1°/ Déterminer les lois marginales de X et de Y.
2°/ Calculer la covariance du couple (X, Y).
3°/ Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

Solution.

1°/ Lois de probabilité.

La fonction caractéristique du couple (X, Y) est définie par la transformée de Fourier de la densité de probabilité :

$$\varphi_{(X, Y)}(\alpha, \beta) = E\left(e^{(i\alpha X + i\beta Y)}\right)$$

Sur cette expression, on voit donc que la fonction caractéristique de X est $\varphi_{(X, Y)}(\alpha, 0) = e^{-\frac{\alpha^2}{2}}$

et que la fonction caractéristique de Y est $\varphi_{(X, Y)}(0, \beta) = e^{-\frac{\beta^2}{2}}$.

Or la fonction caractéristique d'une variable normale de moyenne μ et de variance σ^2 est $e^{i\alpha\mu} e^{-\frac{\alpha^2\sigma^2}{2}}$.
On voit donc que X et Y suivent la même loi normale de moyenne $\mu = 0$ et de variance $\sigma^2 = 1$ (**loi normale centrée réduite**).

$$f_X(x) = f_Y(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

2°/ Covariance.

La covariance est donnée par la formule de la covariance :

$$Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

$E(X) = E(Y) = 0$ (variables centrées)

$$E(XY) = -\frac{\partial^2 \varphi(X,Y)}{\partial\alpha\,\partial\beta}(0,0) = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha\,\partial\beta} + \frac{\partial u}{\partial\alpha}\frac{\partial u}{\partial\beta}\right)_{(\alpha,\beta)=(0,0)} e^{u(0,0)},$$

avec $u(\alpha,\beta) = -\frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2 + \alpha\beta)$

$$\frac{\partial u}{\partial\alpha}(\alpha,\beta) = -\alpha - \frac{1}{2}\beta.$$
$$\frac{\partial u}{\partial\beta}(\alpha,\beta) = -\beta - \frac{1}{2}\alpha.$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha\,\partial\beta}(\alpha,\beta) = -\frac{1}{2}$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha\,\partial\beta}(\alpha,\beta) + \frac{\partial u}{\partial\alpha}(\alpha,\beta)\frac{\partial u}{\partial\beta}(\alpha,\beta) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4}(2\alpha+\beta)(2\beta+\alpha)$$
$$E(XY) = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{Cov(X,Y) = \frac{1}{2}}$$

3°/ Indépendance.

Comme la covariance n'est pas nulle, les variables X et Y ne sont pas indépendantes.

Chapitre 13. Fonction caractéristique et transformation de Fourier.

Enoncés.

Exercice 8. Fonction caractéristique d'une loi constante et d'une loi exponentielle.

Soit $X : (\Omega, P) \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire continue. Calculer l'espérance et la variance de X, la transformée de Laplace et la fonction caractéristique de la densité de probabilité de X, dans les cas suivants : 1°/ X suit une loi constante sur un intervalle $[a, b]$, $a < b$. 2°/ X suit une loi exponentielle de paramètre $\mu > 0$.	

Solution.

1°/ Loi uniforme.

La densité de probabilité d'une variable aléatoire X de loi constante sur l'intervalle $[a, b]$, $a < b$, est :

$$f_X(x) = \frac{1}{b-a} \mathbb{1}_{[a, b]}(x),$$

où $\mathbb{1}_{[a, b]}$ est la fonction indicatrice de l'intervalle $[a, b]$, égale à 1 sur l'intervalle $[a, b]$, et à 0 en dehors de cet intervalle.

Son **espérance** est :

$$E(X) = \frac{1}{b-a}\int_a^b x\,dx = \frac{1}{b-a}\frac{b^2-a^2}{2} = \frac{a+b}{2}$$

Sa **variance** est donnée par la formule de la variance :

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

$$E(X^2) = \frac{1}{b-a}\int_a^b x^2\,dx = \frac{1}{b-a}\frac{b^3-a^3}{3} = \frac{a^2+b^2+ab}{3}$$

$$Var(X) = \frac{a^2+b^2+ab}{3} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{a^2+b^2+ab}{3} - \frac{a^2+b^2+2ab}{4} = \frac{a^2+b^2-2ab}{12} = \frac{(b-a)^2}{12}$$

La **transformée de Laplace** de la densité de probabilité est :

$$TL_X(p) = E(e^{-pX}) = \frac{1}{b-a}\int_a^b e^{-px}\,dx = \frac{1}{p}\frac{e^{-ap}-e^{-bp}}{b-a}$$

La **fonction caractéristique** de la densité de probabilité est :

$$C_X(\alpha) = TL_X(-i\alpha) = \frac{i}{\alpha}\frac{e^{-ia\alpha} - e^{-ib\alpha}}{b-a}$$

2°/ Loi exponentielle.

La densité de probabilité d'une variable aléatoire X de loi exponentielle de paramètre $\mu > 0$ est :

$$f_X(x) = \mu\, e^{-\mu x}\, \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x),$$

où $\mathbb{1}_{[0,+\infty[}$ est la fonction indicatrice de l'intervalle $[0, +\infty[$, égale à 1 sur l'intervalle $[0, +\infty[$, et à 0 en dehors de cet intervalle.

Son **espérance** est :

$$E(X) = \int_0^{\infty} \mu\, x\, e^{-\mu x}\, dx = \frac{1}{\mu}\int_0^{\infty} y\, e^{-y}\, dy = \frac{1}{\mu}\,[-(y+1)\, e^{-y}]_0^{\infty} = \frac{1}{\mu}$$

Sa **variance** est donnée par la formule de la variance :

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

$$E(X^2) = \int_0^{\infty} \mu\, x^2\, e^{-\mu x}\, dx = \frac{1}{\mu^2}\int_0^{\infty} y^2\, e^{-y}\, dy = \frac{1}{\mu^2}\,[-(y^2 + 2y + 2)\, e^{-y}]_0^{\infty} = \frac{2}{\mu^2}$$

$$Var(X) = \frac{2}{\mu^2} - \frac{1}{\mu^2} = \frac{1}{\mu^2}$$

La **transformée de Laplace** de la densité de probabilité est :

$$TL_X(p) = E(e^{-pX}) = \int_0^{\infty} \mu\, e^{-\mu x}\, e^{-px}\, dx = \frac{\mu}{\mu + p},\ \mathcal{R}e(p) > -\mu.$$

La **fonction caractéristique** de la densité de probabilité est :

$$C_X(\alpha) = TL_X(-i\alpha) = \frac{\mu}{\mu - i\alpha}$$

Exercices

Loi constante.

1. Variable aléatoire réelle de loi constante.
2. Espérance et variance d'une variable aléatoire de loi constante.

1. Variable aléatoire réelle de loi constante.

HAUT

Définition.

On dit qu'une variable aléatoire réelle à densité a une **loi de probabilité constante** si, et seulement si :

— le support de sa densité de probabilité est un intervalle fermé de longueur finie ;
— la densité de probabilité est constante sur le support.

Définition équivalente.

Une variable aléatoire est dite **constante sur un intervalle** $[a, b]$ si sa densité de probabilité est :

$$f(x) = \frac{1}{b-a} 1_{[a, b]}(x)$$

où $1_{[a, b]}$ est la **fonction indicatrice** de l'intervalle $[a, b]$ (égale à 1 sur $[a, b]$, et à 0 ailleurs)

2. Espérance et variance d'une variable aléatoire de loi constante.

HAUT

Si X est une variable aléatoire réelle de densité de probabilité :

$$f(x) = \frac{1}{b-a} 1_{[a, b]}(x)$$

alors l'espérance mathématique de X est donnée par

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\, dx = \frac{a+b}{2}$$

et sa variance est donnée par :

$$Var(X) = E((X - E(X))^2) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Chapitre 14. Loi constante.

Exercices

Exercice 1. Fonction de répartition, espérance, variance.
Exercice 2. Fonction de répartition bijective croissante.
Exercice 3. Variable aléatoire dont la fonction de répartition est bijective.
Exercice 4. Carré d'une variable de loi constante sur un intervalle.
Exercice 5. Loi du logarithme d'une variable de loi constante.
Exercice 6. Loi constante sur $[0, 1]^2$.
Exercice 7. Loi constante sur $[0, 2]^2$.
Exercice 8. Temps d'attente du premier arrivé.
Exercice 9. Loi constante sur $[0, 1] \times [0, 2]$.
Exercice 10. Loi constante sur le disque unité.

Exercice 1. Fonction de répartition, espérance, variance.

Etant donné un réel a strictement positif, on considère une variable aléatoire réelle X de densité de probabilité

$$f(x) = \begin{cases} k & \text{si } 0 < x < a \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1°/ Déterminez k.
2°/ Déterminez la fonction de répartition de X.
3°/ Calculez $E(X)$ et $Var(X)$.

Solution

HAUT

Exercice 2. Fonction de répartition bijective croissante.

Soit X une variable aléatoire réelle dont la fonction de répartition F_X est une bijection continue, strictement croissante de classe C_1 de R sur]0, 1[. 1°/ Montrer que la variable aléatoire réelle $Y = F_X(X)$ suit une loi constante sur]0, 1 [. 2°/ Donner les valeurs de $E(Y)$ et $Var(Y)$.	Solution

HAUT

Exercice 3. Variable aléatoire dont la fonction de répartition est bijective.

Soit X une variable aléatoire réelle dont la fonction de répartition F_X est bijective de R sur]0, 1[.

1°/ Soit Y une variable aléatoire de loi constante sur l'intervalle [0, 1].

Montrer que $F_X^{-1}(Y)$ et X ont la même loi.

2°/ On suppose, de plus, que F_X est de classe C^1 sur R.

Donner alors la densité de la loi de X.

Solution

HAUT

Exercice 4. Carré d'une variable de loi constante sur un intervalle.

Soit X une variable aléatoire réelle de loi constante sur $[-1, \frac{3}{2}]$. On pose $Y = X^2$. Calculer la loi de Y.	Solution

HAUT

Exercice 5. Loi du logarithme d'une variable de loi constante.

Soit X une variable aléatoire de loi uniforme sur [0, 1], et soit $\lambda > 0$ un paramètre. Déterminer la loi de $Y = -\frac{1}{\lambda} ln\,(1 - X)$, puis l'espérance $E\,(Y)$.	Solution

HAUT

Exercice 6. Loi constante sur $[0, 1]^2$.

On choisit au hasard, et indépendamment, X et Y dans l'intervalle [0 ; 1] de R. 1°/ Quelle est la loi de probabilité de $Z = \lvert X - Y \rvert$? 2°/ Calculez l'espérance mathématique $E(Z)$.	Solution

HAUT

Exercice 7. Loi constante sur [0, 2] ².

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi constante sur l'intervalle [0 ; 2] de R.

1°/ Quelle est la loi de probabilité de $S = X + Y$?
2°/ Quelle est la loi de probabilité de $Z = X\,Y$?
3°/ Calculez $E(S)$, $Var(S)$, $E(Z)$, $Var(Z)$.

Solution

HAUT

Exercice 8. Temps d'attente du premier arrivé.

Deux personnes se donnent rendez-vous entre 12 heures et 14 heures. Soient X et Y les heures d'arrivées des deux personnes, Z le temps d'attente du premier arrivé. Calculez la loi de probabilité de Z, son espérance, sa variance.	Solution

HAUT

Exercice 9. Loi constante sur [0, 1] × [0, 2].

On trace un rectangle d'un mètre sur deux sur le sol et on repère l'endroit où tombe la première goutte de pluie dans ce rectangle par ses coordonnées $X \in [0, 1]$ et $Y \in [0, 2]$. On suppose que X et Y sont indépendantes et suivent une loi constante. Calculer la probabilité que la première goutte de pluie tombe dans un cercle centré au milieu du rectangle, et de rayon 20 cm.	Solution

HAUT

Exercice 10. Loi constante sur le disque unité.

Soit $(X, Y) : (\Omega, P) \to \mathbb{R}^2$ un couple de variables aléatoires dont la loi conjointe a une densité donnée par

$$f(x, y) = \frac{1}{\lambda} \mathbb{1}_{x^2+y^2 \leq 1}(x, y),$$

où λ est une constante positive.

1°/ Calculer la valeur de λ.
2°/ Déterminer la loi de X, la loi de Y, et calculer la covariance du couple (X, Y).
3°/ Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

Solution

HAUT

Chapitre 14. Loi constante.

Enoncés.

Exercice 1. Fonction de répartition, espérance, variance.

Etant donné un réel a strictement positif, on considère une variable aléatoire réelle X de densité de probabilité

$$f(x) = \begin{cases} k & \text{si } 0 < x < a \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1°/ Déterminez k.
2°/ Déterminez la fonction de répartition de X.
3°/ Calculez $E(X)$ et $Var(X)$.

Solution.

1°/ Condition de normalisation.

La condition $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$ s'écrit ici $\int_0^a k\,dx = 1$, soit $k\,a = 1$,

$$k = \frac{1}{a}$$

2°/ Fonction de répartition.

La fonction de répartition F est définie par $F(X) = P(X < x)$. Si la densité de probabilité de X est f, on obtient :

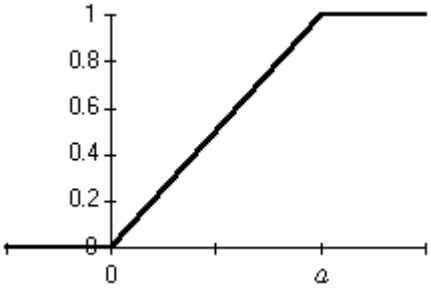
$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

- Pour $x \leq 0$, $f(t) = 0$ pour tout t dans l'intervalle $]-\infty; x[$, donc l'intégrale est nulle et $F(x) = 0$.
- Pour $0 < x \leq a$, $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt + \int_0^x f(t)\,dt = 0 + \int_0^x \frac{1}{a}\,dt = \frac{x}{a}$
- Pour $a < x$, $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt + \int_0^a f(t)\,dt + \int_a^x f(t)\,dt = 0 + 1 + 0 = 1$

$$\begin{array}{ll} 0 & \text{pour } x \leq 0 \end{array}$$

$$F(x) = \begin{cases} \frac{x}{a} & \text{pour } 0 < x \leq a \\ 1 & \text{pour } a < x \end{cases}$$

Cette fonction de répartition possède la courbe représentative suivante :



Fonction de répartition F(x).

3°/ Espérance et variance.

a) Espérance.

Comme la distribution est symétrique, la moyenne est la **valeur centrale** $\frac{a}{2}$.

$$E(X) = \frac{a}{2}$$

b) Variance.

$$E(X^2) = \int_0^a x^2 \frac{1}{a}\, dx = \frac{a^3}{3a} = \frac{a^2}{3}$$

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{a^2}{3} - \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{12}$$

$$Var(X) = \frac{a^2}{12}$$

Chapitre 14. Loi constante.

Enoncés.

Exercice 2. Fonction de répartition bijective croissante.

Soit X une variable aléatoire réelle dont la fonction de répartition F_X est une bijection continue, strictement croissante de classe C_1 de R sur]0, 1[. 1°/ Montrer que la variable aléatoire réelle $Y = F_X(X)$ suit une loi constante sur]0, 1 [. 2°/ Donner les valeurs de $E(Y)$ et $Var(Y)$.	

Solution.

1°/ Variable aléatoire $Y = F_X(X)$.

Les valeurs de Y, comme celles de toute fonction de répartition, sont toujours dans l'intervalle [0, 1].
Soit $y \in]0, 1[$:

$$P(Y \leq y) = P(F_X(X) \leq y) = P(X \leq F_X^{-1}(y)) = F_X(F_X^{-1}(y)) = y.$$

La fonction de répartition de Y est donc :

$$\boxed{F_Y(y) = y\, 1_{[0, 1]}(y)}$$

et la densité de probabilité de Y en est la dérivée au sens des distributions (définie sauf en 0 et 1) :

$$\boxed{f_Y(y) = 1_{[0, 1]}(y)}$$

Cette relation montre que la loi de probabilité de Y est une **loi constante sur l'intervalle [0, 1]**.

2°/ Espérance et variance de Y.

Comme la loi de probabilité de Y est une loi symétrique, l'espérance mathématique est la valeur centrale $\frac{1}{2}$: $E(Y) = \frac{1}{2}$.

$$E(Y^2) = \int_0^1 y^2\, dy = \frac{1}{3}.$$

$$Var\,(Y) = E\,(Y^2) - (E\,(Y))^2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}.$$

$$\boxed{E\,(Y) = \frac{1}{2};\ Var\,(Y) = \frac{1}{12}.}$$

Chapitre 14. Loi constante.

Enoncés.

Exercice 3. Variable aléatoire dont la fonction de répartition est bijective.

Soit X une variable aléatoire réelle dont la fonction de répartition F_X est bijective de R sur]0, 1[. 1°/ Soit Y une variable aléatoire de loi constante sur l'intervalle [0, 1]. Montrer que $F_X^{-1}(Y)$ et X ont la même loi. 2°/ On suppose, de plus, que F_X est de classe C^1 sur R. Donner alors la densité de la loi de X.	

Solution.

1°/ Loi de $F_X^{-1}(Y)$.

Remarquons d'abord que, lorsque Y suit une loi constante sur [0, 1], pour $u \in [0, 1]$, la probabilité $P(Y < u)$ est $\int_0^u dx = u$.

Une fonction de répartition est toujours croissante : si elle est bijective de R sur]0, 1[, elle est strictement croissante.
La fonction de répartition de la variable $F_X^{-1}(Y)$ est donnée, d'après la remarque précédente, par :

$$F_{F_X^{-1}(Y)}(t) = P(F_X^{-1}(Y) < t) = P(Y < F_X(t)) = F_X(t)$$

Autrement dit, X et $F_X^{-1}(Y)$ ont la même fonction de répartition, donc la **même loi de probabilité**.

Cette propriété constitue le **principe de la méthode de Monte-Carlo** :
Pour construire un échantillon $(x_i)_{1 \le i \le n}$ d'une variable aléatoire X suivant une loi de probabilité connue, on tire au hasard un échantillon $(y_i)_{1 \le i \le n}$ d'une variable aléatoire Y qui suit une loi constante sur l'intervalle] 0, 1 [, à l'aide d'une table de nombres au hasard par exemple, et on prend

$$x_i = F_X^{-1}(y_i),\ 1 \le i \le n.$$

2°/ Loi de X.

Lorsque F_X est de classe C^1 sur R, la densité de probabilité de X est la dérivée (au sens des fonctions) de la fonction de répartition F_X.

Comme X et $F_X^{-1}(Y)$ ont la même fonction de répartition, par dérivation, ces deux variables ont la **même densité de probabilité** :

$$\boxed{f_X(x) = f_{F_X^{-1}(Y)}(x) = F'_X(x)}$$

Chapitre 14. Loi constante.

Enoncés.

Exercice 4. Carré d'une variable de loi constante sur un intervalle.

Soit X une variable aléatoire réelle de loi constante sur $[-1, \frac{3}{2}]$. On pose $Y = X^2$. Calculer la loi de Y.	

Solution.

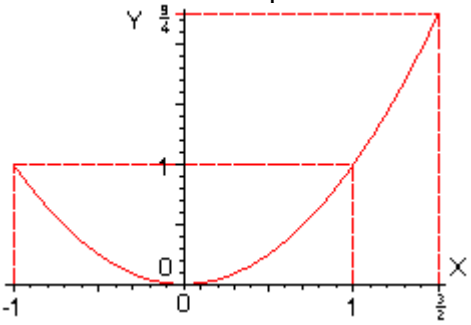
1°/ Fonction de répartition de Y.

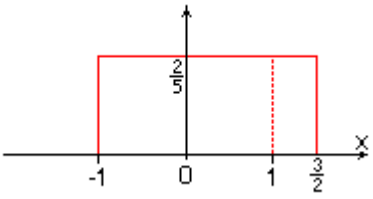
La densité de probabilité de X est, par définition de la loi constante sur un intervalle de longueur $\frac{5}{2}$:

$$f_X(x) = \frac{2}{5}\, 1_{\left[-1;\frac{3}{2}\right]}(x).$$

Pour calculer la densité de probabilité de Y, nous allons calculer d'abord sa fonction de répartition.
$Y = X^2$ ne prend que des valeurs positives, de 0 à $\frac{9}{4}$.

La courbe représentative de la fonction $y = x^2$ sur l'intervalle $[-1, \frac{3}{2}]$, montre déjà qu'il y aura lieu de distinguer, pour Y, l'intervalle $[0, 1]$ où, à une valeur de Y correspondent deux valeurs symétriques de X, de l'intervalle $]1, \frac{9}{4}]$ où, à une valeur de Y correspond une et une seule valeur de X.



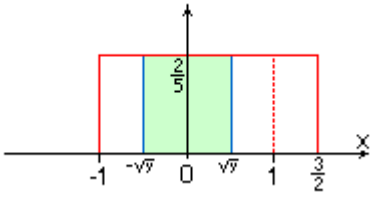


Pour $y \le 0$, la probabilité que Y soit inférieur à y est nulle, la fonction de répartition $F_Y(y)$ vaut 0.

Pour y compris entre 0 et 1 :

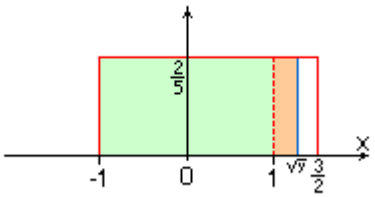
$$P(Y \le y) = P(X^2 \le y) = P(|X| \le \sqrt{y}) = P(-\sqrt{y} \le X \le \sqrt{y}) = \frac{2}{5}\int_{-\sqrt{y}}^{+\sqrt{y}} dx = \frac{4}{5}\sqrt{y}.$$

$$F_Y(y) = \frac{4}{5}\sqrt{y}.$$



En particulier :

$$P(Y \le 1) = \frac{4}{5}.$$



Pour y compris entre 1 et $\frac{9}{4}$:

$$P(Y \le y) = P(Y \le 1) + P(1 < Y \le y) = \frac{4}{5} + P$$

$$(1 < X^2 \le y)$$

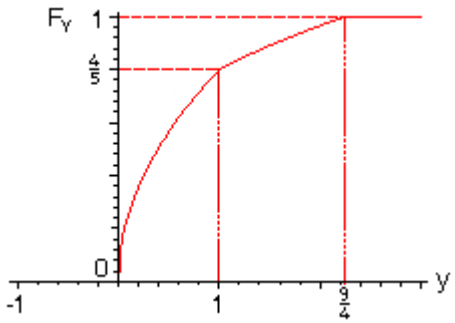
$$= \frac{4}{5} + P(1 < X \le \sqrt{y}) = \frac{4}{5} + \frac{2}{5}\int_1^{\sqrt{y}} dx = \frac{4}{5} + \frac{2}{5}(\sqrt{y} - 1)$$

$$F_Y(y) = \frac{2}{5}(\sqrt{y} + 1)$$

Pour y supérieur à $\frac{9}{4}$, la probabilité que Y soit inférieur à y vaut 1, la fonction de répartition $F_Y(y)$ vaut 1.

En résumé, la fonction de répartition de Y est donnée par :

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{pour } y \le 0 \\ \frac{4}{5}\sqrt{y} & \text{pour } 0 \le y \le 1 \\ \frac{2}{5}(\sqrt{y} + 1) & \text{pour } 1 \le y \le \frac{9}{4} \\ 1 & \text{pour } y \ge \frac{9}{4} \end{cases}$$

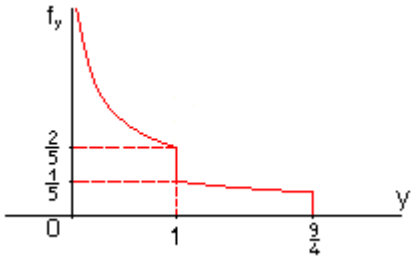


On vérifie facilement que cette fonction est continue sur R.

2°/ Densité de probabilité de *Y*.

La densité de probabilité de Y est la dérivée de F_Y : elle est définie presque partout et elle est continue par morceaux.

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{pour } y < 0 \\ \frac{2}{5\sqrt{y}} & \text{pour } 0 < y < 1 \\ \frac{1}{5\sqrt{y}} & \text{pour } 1 < y < \frac{9}{4} \\ 0 & \text{pour } y > \frac{9}{4} \end{cases}$$



Chapitre 14. Loi constante.

Enoncés.

Exercice 5. Loi du logarithme d'une variable de loi constante.

Soit X une variable aléatoire de loi uniforme sur [0, 1], et soit $\lambda > 0$ un paramètre. Déterminer la loi de $Y = -\frac{1}{\lambda} ln\,(1 - X)$, puis l'espérance $E\,(Y)$.	

Solution.

1°/ Loi de *Y*.

$$ln\,(1 - X) = -\lambda\, Y$$
$$X = 1 - e^{-\lambda Y}$$

On reconnaît, dans l'expression de X en fonction de Y, la fonction de répartition d'une variable exponentielle Z de paramètre λ : $X = F_Z\,(Y)$.

Autrement dit, Y est l'image réciproque de X par la fonction de répartition d'une variable exponentielle Z de paramètre λ : $Y = F_Z^{-1}\,(X)$.

D'après l'Exercice 2, $F_Z^{-1}\,(X)$ et Z ont la même loi de probabilité.

Donc Y et Z ont la même loi de probabilité.

La loi de probabilité de Y est une **loi exponentielle** de paramètre λ.

$$f_Y\,(y) = \lambda\, e^{-\lambda y}\, 1_{[0;\,+\infty[}\,(y)$$

Calcul direct.

Le résultat précédent peut s'obtenir directement en calculant la fonction de répartition de Y :

$$F_Y\,(y) = P\,(Y < y) = P\,(-\frac{1}{\lambda} ln\,(1 - X) < y) = P\,(1 - X > e^{-\lambda y}) = P\,(X < 1 - e^{-\lambda y}) = F_X\,(1 - e^{-\lambda y})$$

Or la fonction de répartition de la variable uniforme X est :

$$F_X\,(x) = Inf\,(1, x)\, 1_{[0;\,+\infty[}\,(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x \leq 0 \\ x & \text{pour } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{pour } 1 \leq x \end{cases}$$

et $1 - e^{-\lambda y}$ ne peut être que négatif pour y négatif, ou compris entre 0 et 1 pour y positif, donc :

$$F_Y(y) = (1 - e^{-\lambda y})\, 1_{[0;+\infty[}(y)$$

Puisque cette fonction de répartition est continue et de classe C^1 par morceaux, la densité de probabilité est la dérivée, définie presque partout, de cette fonction de répartition.

$$f_Y(y) = \lambda\, e^{-\lambda y}\, 1_{[0;+\infty[}(y)$$

Cette densité de probabilité montre que Y suit une **loi exponentielle de paramètre λ**.

Cette propriété permet de simuler un échantillon de loi exponentielle à partir de nombres choisis au hasard dans l'intervalle [0, 1].

2°/ Espérance de *Y*.

L'espérance d'une variable exponentielle est l'inverse du paramètre λ (Exercice 1).

$$\boxed{E(Y) = \frac{1}{\lambda}}$$

Chapitre 14. Loi constante.

Enoncés.

Exercice 6. Loi constante sur [0, 1] ².

On choisit au hasard, et indépendamment, X et Y dans l'intervalle [0 ; 1] de R. 1°/ Quelle est la loi de probabilité de $Z = \lvert X - Y \rvert$? 2°/ Calculez l'espérance mathématique $E(Z)$.	

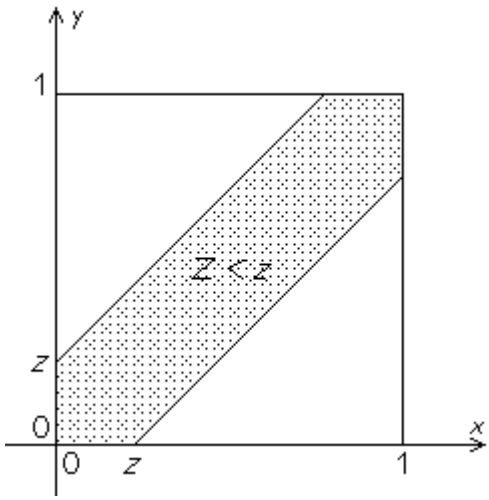
Solution.

1°/ Densité de probabilité de Z.

a) Fonction de répartition de Z.

$\lvert X - Y \rvert$, distance de deux points de l'intervalle fermé [0 ; 1] de R, varie de 0 à 1 : Z prend donc toutes ses valeurs dans l'intervalle [0 ; 1] de R.

$$Z(\Omega) = [\,0\,;\,1\,].$$



Pour un $z \in [\,0\,;\,1\,]$: $Z \leq z \Leftrightarrow \lvert X - Y \rvert \leq z \Leftrightarrow -z \leq X - Y \leq z$.

Lorsque z est strictement plus petit que 0, la probabilité d'avoir $\lvert X - Y \rvert \leq z$ est nulle.

Lorsque z est compris entre 0 et 1, les points (X, Y) du plan R^2 vérifiant les conditions :
$0 \leq X \leq 1$ et $0 \leq Y \leq 1$ et $-z \leq X - Y \leq z$
sont les points de la zone hachurée de la figure ci-contre. Comme les variables X et Y ont une distribution constante dans l'intervalle [0 ; 1], la probabilité conjointe élémentaire dans le plan (X,Y) est $dx\,dy$ et la probabilité d'une surface contenue dans le carré unité $[0;1] \times [0;1]$ est la valeur de la surface :
$P(Z < z)$ est la surface contenue entre les droites $Y = X - z$ et $Y = X + z$.
$P(Z < z) = 1 - (1 - z)^2 = -z^2 + 2z = z(2 - z)$
C'est la fonction de répartition de Z, lorsque z est compris entre 0 et 1.

Enfin, lorsque z est supérieur ou égal à 1, la probabilité d'avoir $\lvert X - Y \rvert \leq z$ est égale à 1.

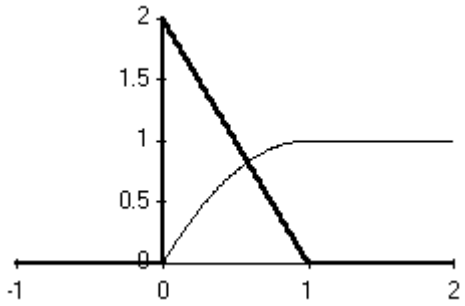
$$F(z) = \begin{cases} 0 & \text{pour } z < 0 \\ z(2-z) & \text{pour } 0 < z < 1 \\ 1 & \text{pour } 1 < z \end{cases}$$

b) Densité de probabilité de *Z*.

La densité de probabilité est la dérivée de la fonction de répartition :

$$f(z)=\begin{cases} 0 & \text{pour } z<0 \\ 2(1-z) & \text{pour } 0<z<1 \\ 0 & \text{pour } 1<z \end{cases}$$

Ces fonctions possèdent les courbes représentatives suivantes :



Fonction de répartition *F* et densité de probabilité *f* de la variable $Z = |X - Y|$.

2°/ Espérance mathématique de *Z*.

$$E(Z) = \int_{-\infty}^{+\infty} z\, f(z)\, dz = \int_{0}^{1} 2\, z\, (1-z)\, dz = [z^2]_0^1 - \frac{2}{3}[z^3]_0^1 = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\boxed{E(Z) = \frac{1}{3}}$$

Chapitre 14. Loi constante.

Enoncés.

Exercice 7. Loi constante sur [0, 2] ².

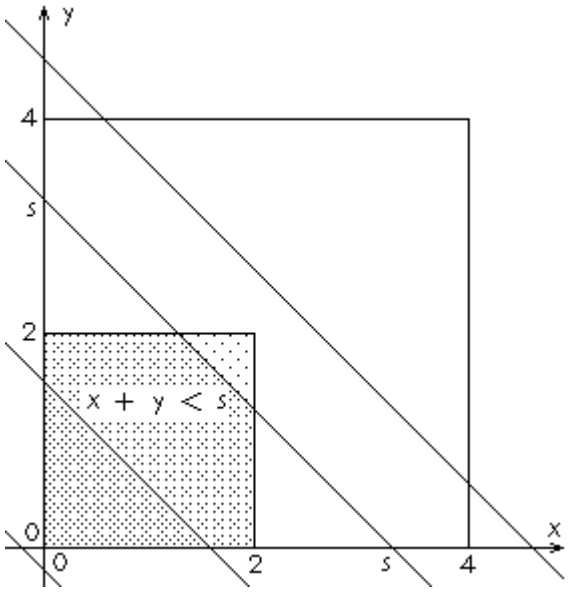
Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi constante sur l'intervalle [0 ; 2] de R. 1°/ Quelle est la loi de probabilité de $S = X + Y$? 2°/ Quelle est la loi de probabilité de $Z = X\,Y$? 3°/ Calculez $E(S)$, $Var(S)$, $E(Z)$, $Var(Z)$.	

Solution.

1°/ Loi de probabilité de $S = X + Y$.

Comme X et Y prennent toutes deux leurs valeurs dans l'intervalle [0 ; 2] de façon indépendante, $X + Y$ prend ses valeurs dans l'intervalle [0 ; 4] :
$(X + Y)(\Omega) = [0 ; 4]$
Pour un $s \in [0 ; 4]$, la probabilité pour que $X + Y$ soit inférieur à s est proportionnel à la surface de la partie du carré de côté 2 situé sous la droite d'équation $X + Y = s$: comme la surface du carré de côté 2 est 4, la probabilité est le quart de la surface.

a) Fonction de répartition de S.



Pour $s < 0$, la portion de surface du carré de côté 2 située sous la droite d'équation $x + y = s$ est vide : sa surface est nulle, la probabilité que S soit inférieur à s est nulle.
Pour $0 \le s \le 2$, la surface est $\frac{s^2}{2}$, la probabilité est $\frac{s^2}{8}$.
Pour $2 \le s \le 4$, la surface vaut
$\frac{s^2}{2} - (s-2)^2 = \frac{s^2 - 2\left(s^2 - 4s + 4\right)}{2} = 4s - 4 - \frac{s^2}{2} = 4 - \frac{(4-s)^2}{2}$
et la probabilité est $1 - \frac{(4-s)^2}{8} = s - 1 - \frac{s^2}{8}$.

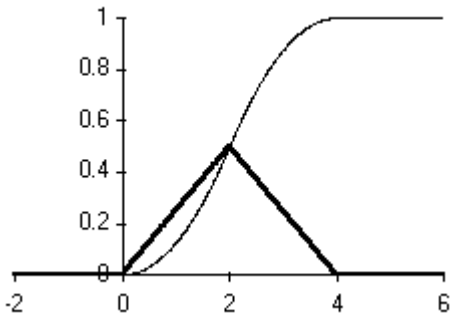
$$F(s) = \begin{cases} 0 & \text{pour } s < 0 \\ \frac{s^2}{2} & \text{pour } 0 < s < 2 \\ 1 - \frac{(4-s)^2}{8} & \text{pour } 2 < s < 4 \\ 1 & \text{pour } 4 < s \end{cases}$$

b) Densité de probabilité.

La densité de probabilité se déduit de la fonction de répartition par dérivation :

$$f(s)=\begin{cases} 0 & \text{pour } s<0 \\ s & \text{pour } 0<s<2 \\ 1-\frac{s}{4} & \text{pour } 2<s<4 \\ 0 & \text{pour } 1<z \end{cases}$$

Ces fonctions *f* et *F* ont les courbes représentatives suivantes :



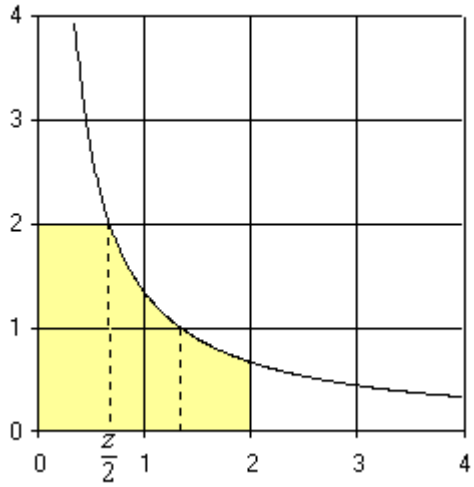
Fonction de répartition *F* et densité de probabilité *f* de la somme $X + Y$.

2°/ Loi de probabilité de *Z*.

a) Fonction de répartition.

Lorsque *X* et *Y* varient tous deux entre 0 et 2, leur produit $Z = X\,Y$ varie entre 0 et 4.

$$(XY)\,(\Omega) = [0\,;\,4]$$



Une courbe $XY = constante$ est une branche d'hyperbole ayant pour asymptotes les axes, d'équations $X = 0$ et $Y = 0$.
Le produit *XY* est plus petit qu'une constante *z* lorque le point de coordonnées (*X*, *Y*) est sous la branche d'hyperbole d'équation $XY = z$.
La probabilité d'avoir $XY < z$ est la surface de la portion de carré de côté 2 située sous la branche d'hyperbole d'équation $XY = z$, divisée par 4, surface totale du carré.
Si *z* est négatif, la probabilité d'avoir $XY < z$ est nulle puisque *X* et *Y* ont des valeurs positives.
Si *z* est supérieur à 4, tout le carré [0 ; 2] × [0 ; 2] est situé sous la branche d'hyperbole $XY = 4$, la probabilité d'avoir $XY < z$ est égale à 1.
Si *z* est compris entre 0 et 4, la branche d'hyperbole $XY = z$ coupe la droite $Y = 2$ au point d'abscisse $X = \frac{z}{2}$.

La surface de la portion du carré [0 ; 2] × [0 ; 2] situé sous la branche d'hyperbole $XY = z$ est égale à la surface du rectangle $[0\,;\,\frac{z}{2}] \times [0\,;\,2]$, plus la surface sous la branche d'hyperbole dans l'intervalle $[\frac{z}{2}\,;\,2]$.

Cette surface est donc $2 \times \frac{z}{2} + \int_{\frac{z}{2}}^{2} \frac{z}{x}\,dx = z + z\,[\ln x]_{\frac{z}{2}}^{2} = z + z\,(\ln 2 - \ln \frac{z}{2}) = z + z \ln \frac{4}{z}$.

Donc la probabilité est $P(Z < z) = \frac{z}{4}\left(1 + ln\,\frac{4}{z}\right)$.

On obtient ainsi la fonction de répartition G du produit $Z = X\,Y$.

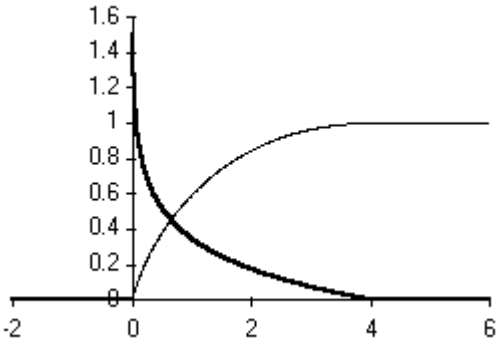
$$G(z) = \begin{cases} 0 & \text{pour } z < 0 \\ \frac{z}{4}\left(1 + ln\left(\frac{4}{z}\right)\right) & \text{pour } 0 < z < 4 \\ 1 & \text{pour } 4 < z \end{cases}$$

b) Densité de probabilité.

La densité de probabilité g se déduit de la fonction de répartition par dérivation :

$$g(z) = \begin{cases} 0 & \text{pour } z < 0 \\ \frac{1}{4} ln\,\frac{4}{z} & \text{pour } 0 < z < 4 \\ 1 & \text{pour } 4 < z \end{cases}$$

Densité de probabilité et fonction de répartition peuvent se représenter sur le même graphique.



Fonction de répartition G et densité de probabilité g du produit XY.

3°/ Moyennes et variances.

Les variables X et Y suivent la même loi uniforme sur l'intervalle [0 ; 2]. Cette distribution est symétrique et son espérance est la valeur centrale 1.

$$\boxed{E(X) = E(Y) = 1}$$

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y) = 1 + 1 = 2.$$

On pourrait remarquer aussi que la densité de probabilité de la somme $X + Y$ est symétrique par rapport à 2, donc $E(X + Y) = 2$.

$$\boxed{E(X + Y) = E(X) + E(Y) = 2.}$$

Comme X et Y sont indépendantes, l'espérance du produit est le produit des espérances :

$$\boxed{E(XY) = E(X)\,E(Y) = 1}$$

La variance de X est l'espérance mathématique de $(X-1)^2$.

$$Var(X) = E((X-1)^2) = \frac{1}{2}\int_0^2 (x-1)^2\,dx = \frac{1}{6}[(x-1)^3]_0^2 = \frac{1}{3}.$$

$$\boxed{Var(X) = \frac{1}{3}}$$

Comme X et Y suivent la même loi, on a aussi :

$$\boxed{Var(Y) = \frac{1}{3}}$$

Comme X et Y sont indépendantes, la variance de la somme est la somme des variances :

$$\boxed{Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) = \frac{2}{3}}$$

Reste à calculer maintenant la variance du produit XY.

$$Var(XY) = E((XY)^2) - (E(XY))^2$$

$$E((XY)^2) = E(X^2Y^2) = E(X^2)\,E(Y^2) = (Var(X) + (E(X))^2)^2 = \frac{16}{9}$$

$$Var(XY) = \frac{16}{9} - 1 = \frac{7}{9}$$

$$\boxed{Var(XY) = \frac{7}{9}}$$

Chapitre 14. Loi constante.

Enoncés.

Exercice 8. Temps d'attente du premier arrivé.

Deux personnes se donnent rendez-vous entre 12 heures et 14 heures. Soient X et Y les heures d'arrivées des deux personnes, Z le temps d'attente du premier arrivé. Calculez la loi de probabilité de Z, son espérance, sa variance.	

Solution.

1°/ Loi de probabilité de Z.

On suppose que les personnes arrivent au hasard entre 12 heures et 14 heures :
- la distribution de probabilité de X entre 12 heures et 14 heures, est uniforme,
- la distribution de probabilité de Y entre 12 heures et 14 heures, est uniforme.

Le temps d'attente du premier arrivé est la valeur absolue de la différence entre X et Y :

$$Z = | X - Y |$$

Le problème ressemble donc à celui de l'exercice 6.
Pour avoir le même énoncé, il faut prendre :
— pour origine des temps, 12 heures,
— pour unité de temps, 2 heures.
Alors X et Y sont choisies au hasard entre 0 et 1. La densité de probabilité de Z est :

$$f(z) = \begin{cases} 0 & \text{pour } z < 0 \\ 2(1-z) & \text{pour } 0 < z < 1 \\ 0 & \text{pour } 1 < z \end{cases}$$

2°/ Espérance et variance de Z.

Dans l'exercice 6, nous avons trouvé $E(Z) = \frac{1}{3}$. Comme l'unité de temps est 2 heures, l'attente moyenne sera de $E(Z) = \frac{1}{3} \times 2$ heures = 40 minutes.

$$\boxed{E(Z) = 40 \text{ minutes}}$$

$$E(Z^2) = \int_0^1 2z^2(1-z)\,dz = \frac{2}{3}[z^3]_0^1 - \frac{1}{2}[z^4]_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

$$Var(Z) = E(Z^2) - (E(Z))^2 = \frac{1}{6} - \frac{1}{9} = \frac{1}{18}.$$

Comme l'unité de temps est 2 heures, $Var(Z) = \frac{1}{18} \times 4 \text{ (heures)}^2 = \frac{2}{9} \text{ (heures)}^2$

$$\boxed{Var\,(Z) = \frac{2}{9}\ \text{(heures)}^2}$$

L'écart-type, racine carrée de la variance, est :

$$\sigma_Z = \frac{\sqrt{2}}{3}\ \text{heures} = 28\ \text{min}\ 17\ \text{s}$$

Chapitre 14. Loi constante.

Enoncés.

Exercice 9. Loi constante sur [0, 1] × [0, 2].

On trace un rectangle d'un mètre sur deux sur le sol et on repère l'endroit où tombe la première goutte de pluie dans ce rectangle par ses coordonnées $X \in [0, 1]$ et $Y \in [0, 2]$. On suppose que X et Y sont indépendantes et suivent une loi constante. Calculer la probabilité que la première goutte de pluie tombe dans un cercle centré au milieu du rectangle, et de rayon 20 cm.	

Solution.

1°/ Modélisation.

Par hypothèse, la densité de probabilité de X est la fonction indicatrice $\mathbb{1}_{[0, 1]}$ de l'intervalle [0, 1] de $\mathbb{R}$.
La densité de probabilité de Y est la fonction indicatrice $\mathbb{1}_{[0, 2]}$ de l'intervalle [0, 2] de $\mathbb{R}$.
Comme les variables X et Y sont indépendantes, la densité conjointe est le produit des densités marginales :

$$f(x, y) = \mathbb{1}_{[0, 1]}(x) \times \mathbb{1}_{[0, 2]}(y) = \mathbb{1}_{[0, 1] \times [0, 2]}(x, y)$$

ce qui montre que le couple (X, Y) suit une **loi constante** sur le rectangle [0, 1] × [0, 2].

2°/ Probabilité.

Comme le couple (X, Y) suit une loi constante sur le rectangle [0, 1] × [0, 2], la probabilité d'une région du rectangle est proportionnelle à la surface de la région.
La probabilité d'un cercle centré au milieu du rectangle, et de rayon 20 cm est égale au **rapport** entre la surface du cercle et la surface du rectangle :

$$p = \frac{\pi(0{,}20)^2}{2} = \frac{2\,\pi}{100} \approx 6{,}28 \times 10^{-2}$$

Chapitre 14. Loi constante.

Enoncés.

Exercice 10. Loi constante sur le disque unité.

Soit $(X, Y) : (\Omega, P) \to \mathbb{R}^2$ un couple de variables aléatoires dont la loi conjointe a une densité donnée par

$$f(x, y) = \frac{1}{\lambda} \mathbb{1}_{x^2+y^2 \leq 1}(x, y),$$

où λ est une constante positive.

1°/ Calculer la valeur de λ.
2°/ Déterminer la loi de X, la loi de Y, et calculer la covariance du couple (X, Y).
3°/ Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

Solution.

1°/ Condition de normalisation.

La somme des probabilités doit être égale à 1.

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{\lambda} \mathbb{1}_{x^2+y^2 \leq 1}(x, y)\, dx\, dy = 1$$

Or $\iint_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_{x^2+y^2 \leq 1}(x, y)\, dx\, dy$ est la surface de la boule unité de $\mathbb{R}^2$: elle est égale à π.
On a donc $\frac{\pi}{\lambda} = 1$.

$$\boxed{\lambda = \pi}$$

$$f(x, y) = \frac{1}{\pi} \mathbb{1}_{x^2+y^2 \leq 1}(x, y)$$

La loi conjointe de X et Y est une **loi constante** sur la boule fermée unité B_1 de $\mathbb{R}^2$.

2°/ Lois de probabilité. Covariance.

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi} \mathbb{1}_{[-1,1]}(x) \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{+\sqrt{1-x^2}} dy = \frac{2}{\pi} \sqrt{1-x^2}\, \mathbb{1}_{[-1,1]}(x)$$

Par symétrie :

$$f_Y(y) = \frac{2}{\pi}\sqrt{1-y^2}\,\mathbb{1}_{[-1,1]}(y).$$

La covariance de X et Y peut être calculée par la formule de la covariance :

$$Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)\,E(Y).$$

$E(X) = \int_{\mathbb{R}} x\,f_X(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{+1} x\sqrt{1-x^2}\,dx = 0$ (intégrale d'une fonction impaire sur un intervalle symétrique par rapport à 0).
De même : $E(Y) = 0$, puisque la loi de Y est symétrique par rapport à 0.

$$E(XY) = \iint_{\mathbb{R}^2} x\,y\,f(x,y)\,dx\,dy = \frac{1}{\pi}\iint_{B_1} x\,y\,dx\,dy.$$

Pour calculer l'intégrale, passons en coordonnées polaires du plan :

$x = r\cos\theta$
$y = r\sin\theta$

$$x\,y\,dx\,dy = r\cos\theta \times r\sin\theta \times r\,dr\,d\theta$$

La boule unité $x^2 + y^2 < 1$ du plan (x, y) est transformée en pavé ouvert $]0, 1[\times]-\pi, \pi[$ du plan (r, θ).

$$E(XY) = \frac{1}{\pi}\int_0^1 r^3\,dr \int_{-\pi}^{+\pi} \sin\theta\cos\theta\,d\theta = \frac{1}{\pi}\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^1 \times \left[-\frac{\cos 2\theta}{4}\right]_{-\pi}^{+\pi} = 0$$

$$\boxed{Cov(X, Y) = 0}$$

3°/ Indépendance.

La densité de probabilité conjointe $f(x, y) = \frac{1}{\pi}\mathbb{1}_{x^2+y^2\le 1}(x, y)$ n'est pas le produit des densités de probabilité marginales $f_X(x)\,f_Y(y)$, donc les variables X et Y ne sont pas indépendantes.

$$\boxed{\text{Les variables } X \text{ et } Y \text{ ne sont pas indépendantes.}}$$

Exercices

Loi normale.

1. Variable aléatoire réelle de loi normale.

1.1. Définition.
1.2. Espérance et variance.
1.3. Loi normale centrée réduite.
1.4. Fonction de répartition.
1.5. Fonction caractéristique.
1.6. Somme de variables aléatoires normales indépendantes.
1.7. Combinaison linéaire de variables normales.
1.8. Utilisation de la table de la fonction de répartition *F*.

2. Loi de Laplace-Gauss à *n* dimensions.

1. Variable aléatoire réelle de loi normale.

HAUT

1.1. Définition.

On dit qu'une variable aléatoire réelle à densité X a une **loi de probabilité normale de paramètres μ et σ** si, et seulement si, sa densité de probabilité est donnée par la formule :

$$f_{(\mu,\sigma)}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Dans ce cas, on dit aussi que X est une variable aléatoire **normale de paramètres μ et σ**.
Cette relation est notée $X \rightsquigarrow G(\mu, \sigma^2)$. (Le G rappelle que la loi normale est souvent appelée **loi de Gauss** ou loi de **Laplace-Gauss**).

> **Remarque** : comme $f_{(\mu,\sigma)}$ est une densité de probabilité, le paramètre σ est nécessairement un nombre réel > 0.

Le coefficient $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$ est un coefficient de normalisation qui assure que la somme des probabilités est 1 :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{(\mu,\sigma)}\, dx = 1$$

Démonstration.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{(\mu,\sigma)}\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dx$$

Faisons le changement de variable $u = \frac{x-\mu}{\sigma}$: $dx = \sigma\, du$.
Lorsque x tend vers $-\infty$, u tend vers $-\infty$.
Lorsque x tend vers $+\infty$, u tend vers $+\infty$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{(\mu,\sigma)}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du$$

Cette relation montre déjà que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f_{(\mu,\sigma)}\, dx$ ne dépend ni de μ, ni de σ.

Pour calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du$, posons $v = \frac{u}{\sqrt{2}}$: $du = \sqrt{2}\, dv$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du = \sqrt{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-v^2}\, dv.$$

Posons $I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-v^2}\,dv$.

On peut écrire :

$$I^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx \times \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}\,dy = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy \text{ (Fubini)}$$

Le changement de coordonnées polaires du plan donne :

$$I^2 = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-r^2}\,r\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \times \int_0^{\infty} e^{-r^2}\,r\,dr.$$

$$I^2 = 2\pi \times \left[-\frac{1}{2} e^{-r^2} \right]_0^{\infty} = \pi.$$

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-v^2}\,dv = \sqrt{\pi}$$

Il en résulte :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}\,du = \sqrt{2}\,I = \sqrt{2\pi}$$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}\,du = \sqrt{2\pi}}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{(\mu,\sigma)}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}\,du = 1$$

HAUT

1.2. Espérance et variance.

HAUT

Si X est une variable aléatoire **normale de paramètres μ et σ** :

$$\boxed{\begin{array}{c} E(X) = \mu \\ Var(X) = \sigma^2 \end{array}}$$

Autrement dit, pour la loi normale de paramètres μ et σ, μ est l'espérance mathématique et σ l'écart-type.

Démonstration.

1°/ Par définition, $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$.

Faisons le changement de variable $u = \frac{x-\mu}{\sigma}$: $dx = \sigma\, du$.

Lorsque x tend vers $-\infty$, u tend vers $-\infty$.
Lorsque x tend vers $+\infty$, u tend vers $+\infty$.

$$E(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (\mu + u\sigma)\, e^{-\frac{u^2}{2}} du = \frac{\mu}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du + \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u\, e^{-\frac{u^2}{2}} du.$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u\, e^{-\frac{u^2}{2}} du = \lim_{A \to +\infty} \int_{-A}^{+A} u\, e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

$\int_{-A}^{+A} u\, e^{-\frac{u^2}{2}} du$ est l'intégrale d'une fonction impaire sur un intervalle symétrique par rapport à 0 : elle est nulle, et sa limite lorsque A tend vers l'infini est 0. Il reste :

$$E(X) = \frac{\mu}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du.$$

Nous avons calculé plus haut $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du = \sqrt{2\pi}$, donc $E(X) = \mu$.

2°/ $Var(X) = E((X - E(X))^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$.

Faisons le changement de variable $u = \frac{x-\mu}{\sigma}$: $dx = \sigma\, du$.

$$Var(X) = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 e^{-\frac{u^2}{2}} du.$$

Intégrons par parties en prenant $dv = u\, e^{-\frac{u^2}{2}} du$, soit $v = -e^{-\frac{u^2}{2}}$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u^2 e^{-\frac{u^2}{2}}\,du = \int u\,dv = u\,v - \int v\,du = [u^2 e^{-u^2}]_0^{\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}\,du$$
$$= 0 + \sqrt{2\pi} = \sqrt{2\pi}$$

Il vient donc :

$$Var\,(X) = \sigma^2.$$

HAUT

1.3. Loi normale centrée réduite.

HAUT

Centrée signifie $E(X) = 0$.
Réduite signifie $Var(X) = 1$.

Pour une variable normale de paramètres μ et σ, nous avons $E(X) = \mu$ et $Var(X) = \sigma^2$.

La loi normale centrée réduite est donc définie par la densité de probabilité correspondant à $\mu = 0$ et $\sigma = 1$:

$$f_{(0,\,1)}(u) = \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\, e^{-\frac{u^2}{2}}$$

Une variable normale centrée réduite est donc une variable aléatoire réelle $U \rightsquigarrow G(0, 1)$, de moyenne 0 et d'écart-type 1.

1.4. Fonction de répartition.

HAUT

$$F_{(\mu, \sigma)}(x) = F_{(0, 1)}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

Cette relation montre que **pour calculer la fonction de répartition de $X \rightsquigarrow G(\mu, \sigma^2)$, il suffit de connaître la fonction de répartition de $U \rightsquigarrow G(0, 1)$**.
Cette relation montre aussi que $X \rightsquigarrow G(\mu, \sigma^2) \Rightarrow U = \frac{X-\mu}{\sigma} \rightsquigarrow G(0, 1)$.

C'est un résultat très important en pratique : il permet de calculer toute probabilité relative à la loi normale grâce à la table de la fonction de répartition de la variable normale centrée réduite.

Démonstration.

Soit $X \rightsquigarrow G(\mu, \sigma^2)$, une variable normale de paramètres μ et σ.
Sa fonction de répartition $F_{(\mu, \sigma)}(x)$ est définie par :

$$F_{(\mu, \sigma)}(x) = P(X < x) = \int_{-\infty}^{x} f_{(\mu, \sigma)}(t)\, dt = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dt.$$

Pour calculer l'intégrale, faisons le changement de variable $v = \frac{t-\mu}{\sigma}$:

$$F_{(\mu, \sigma)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma}} e^{-\frac{v^2}{2}}\, dv$$

Or si $U \rightsquigarrow G(0, 1)$ est une variable normale centrée réduite, sa fonction de répartition $F_{(0, 1)}$ est définie par :

$$F_{(0, 1)}(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{u} e^{-\frac{v^2}{2}}\, dv$$

Nous obtenons donc :

$$F_{(\mu, \sigma)}(x) = F_{(0, 1)}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

La formule $F_{(\mu, \sigma)}(x) = F_{(0, 1)}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$ montre que si $X \rightsquigarrow G(\mu, \sigma^2)$, alors la variable aléatoire $U = \frac{X-\mu}{\sigma}$ est une variable normale centrée réduite, puisque sa fonction de répartition est définie par :

$$P(U < u) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < u\right) = P(X < \mu + u\sigma) = F_{(\mu, \sigma)}(\mu + u\sigma) = F_{(0, 1)}(u)$$

HAUT

1.5. Fonction caractéristique.

HAUT

1°/ La fonction caractéristique d'une **variable normale *U* centrée réduite** est donnée par :

$$FC_U(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$$

2°/ La fonction caractéristique d'une **variable normale *X* de paramètres μ et σ** est donnée par :

$$FC_X(t) = e^{i\mu t} e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}}$$

Démonstration.

1°/ Soit $U \rightsquigarrow G(0, 1)$ une variable normale centrée réduite.
Sa fonction caractéristique $FC_U : \mathrm{R} \to \mathrm{C}$, est définie par :

$$FC_U(t) = E(e^{itU}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itu} e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

$$FC_U(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{A \to +\infty} \int_{-A}^{+A} e^{-\frac{1}{2}(u^2 - 2itu)} du$$

$$u^2 - 2itu = (u - it)^2 + t^2$$

$$FC_U(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} \lim_{A \to +\infty} \int_{-A}^{+A} e^{-\frac{(u-it)^2}{2}} du$$

Posons $v = u - it$.
Lorsque u parcours l'axe réel de $-A$ à $+A$, v parcours, dans C, une parallèle à l'axe réel, à l'ordonnée $-t$, de $-A - it$ à $A - it$.

$$FC_U(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} \lim_{A \to +\infty} \int_{-A-it}^{+A-it} e^{-\frac{v^2}{2}} dv.$$

Or la fonction $e^{-\frac{v^2}{2}}$ n'a aucun point singulier dans C, donc l'intégrale d'un point à un autre ne dépend pas du chemin suivi (théorème de Cauchy).

$$\int_{-A-it}^{+A-it} e^{-\frac{v^2}{2}} dv = \int_{-A-it}^{-A} e^{-\frac{v^2}{2}} dv + \int_{-A}^{+A} e^{-\frac{v^2}{2}} dv + \int_{+A}^{+A-it} e^{-\frac{v^2}{2}} dv.$$

Sur les côtés $[-A - it, -A]$ et $[A, A - it]$, $e^{-\frac{v^2}{2}}$ est majoré en module par $e^{-\frac{A^2}{2}}$, de sorte que l'intégrale de $e^{-\frac{v^2}{2}}$ y est majorée en module par

$$e^{-\frac{A^2}{2}} \times |t|$$

qui tend vers 0 lorsque A tend vers l'infini.
Il reste donc :

$$FC_U(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} \lim_{A \to +\infty} \int_{-A}^{+A} e^{-\frac{v^2}{2}}\, dv = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{v^2}{2}}\, dv$$

Et comme on a $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{v^2}{2}}\, dv = \sqrt{2\pi}$, il reste :

$$\boxed{FC_U(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}}$$

2°/ Soit X une variable normale de paramètres μ et σ.
Nous savons déjà que la variable aléatoire $U = \frac{X - \mu}{\sigma}$ est une variable normale centrée réduite.
La relation $X = \mu + U\,\sigma$ entraîne (Chapitre 12, Exercice 3, 1°) :

$$FC_X(t) = F_{\sigma U + \mu}(t) = e^{i\mu t} FC_U(\sigma t) = e^{i\mu t} e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}}$$

HAUT

1.6. Somme de variables aléatoires normales indépendantes.

HAUT

Toute somme finie de variables normales indépendantes est une variable normale.
L'espérance de la somme est la somme des espérances.
La variance de la somme est la somme des variances.

Démonstration.

1°/ Somme de deux variables normales indépendantes.

Soient X_1 une variable normale de paramètres μ_1 et σ_1, et X_2 une variable normale de paramètres μ_2 et σ_2 indépendante de X_1.
Nous savons déjà que la fonction caractéristique de la somme de deux variables aléatoires indépendantes est le produit des fonctions caractéristiques des deux variables :

$$FC_{X_1+X_2}(t) = FC_{X_1}(t) \times FC_{X_2}(t)$$

Nous obtenons donc :

$$FC_{X_1+X_2}(t) = e^{i\mu_1 t} e^{-\frac{\sigma_1^2 t^2}{2}} \times e^{i\mu_2 t} e^{-\frac{\sigma_2^2 t^2}{2}}$$
$$= e^{i(\mu_1+\mu_2)t} e^{-\frac{(\sigma_1^2+\sigma_2^2)t^2}{2}}$$

et cette formule montre que $X_1 + X_2$ est une **variable normale** d'espérance $\mu_1 + \mu_2$ et de variance $\sigma_1^2 + \sigma_2^2$.

2°/ Somme d'une nombre fini ≥ 2 de variables normales indépendantes.

Bien entendu, ce résultat se généralise immédiatement par récurrence à toute somme finie de variables normales indépendantes.

HAUT

1.7. Combinaison linéaire de variables normales.

HAUT

Si X est une variable normale de paramètres μ et σ, a et b des constantes réelles, alors ***a X + b* est une variable normale** de paramètres $a\,\mu + b$ et $|a|\,\sigma$.

$$X \rightsquigarrow G(\mu, \sigma) \Rightarrow a X + b \rightsquigarrow G(a\,\mu + b, |a|\,\sigma)$$

Si X_1 et X_2 sont des variables normales **indépendantes** de paramètres (μ_1, σ_1) et (μ_2, σ_2), et a et b des constantes réelles, alors ***a* X_1 + *b* X_2 est une variable normale** de paramètres :

$$\left(a\,\mu_1 + b\,\mu_2, \sqrt{a^2\,\sigma_1^2 + b^2\,\sigma_2^2}\right)$$

$$X_1 \rightsquigarrow G(\mu_1, \sigma_1) \text{ et } X_2 \rightsquigarrow G(\mu_2, \sigma_2) \Rightarrow a X_1 + b X_2 \rightsquigarrow G\left(a\,\mu_1 + b\,\mu_2, \sqrt{a^2\,\sigma_1^2 + b^2\,\sigma_2^2}\right)$$

Si les variables normales X_1 et X_2 ne sont **pas indépendantes**, ***a* X_1 + *b* X_2 est une variable normale** de paramètres :

$$\left(a\,\mu_1 + b\,\mu_2, \sqrt{a^2\,\sigma_1^2 + b^2\,\sigma_2^2 - 2ab\,Cov(X_1, X_2)}\right)$$

HAUT

1.8. Utilisation de la table de la fonction de répartition *F*.

HAUT

La fonction de répartition d'une variable normale de paramètres (μ, σ) peut toujours s'exprimer à l'aide de la fonction de répartition *F* de la variable normale centrée réduite :

$$P(X < x) = F\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

Pour tout intervalle de bornes (*a*, *b*), éventuellement infinies, on a :

$$P(a < X < b) = F\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - F\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

Les valeurs $F(u)$ de la fonction de répartition *F* de la variable normale centrée réduite se lisent dans la table pour $u \geq 0$.

Table de la fonction de répartion de la variable normale centrée réduite

$u = 0{,}52$

$F(0{,}52) = 0{,}6985$

u	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6143
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7290	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389

Pour $u < 0$, on applique la formule de symétrie

$$F(u) = 1 - F(-u)$$

en lisant $F(-u)$ dans la table :

$$F(-0,52) = 1 - F(0,52) = 1 - 0,6985 = 0,3015$$

Valeurs souvent utilisées (les seules à connaître, en pratique) :

$F(1,645) = 0,9500$, qui sert dans les tests unilatéraux à 5 %.
$F(1,96) = 0,9750$, qui sert dans les tests bilatéraux à 5 %.

HAUT

2. Loi de Laplace-Gauss à *n* dimensions.

HAUT

On dit qu'un vecteur aléatoire $(X_1, \dots, X_n)$ suit une loi de Laplace-Gauss (centrée) à *n* dimensions si sa densité de probabilité est de la forme :

$$f_{(X_1, \dots, X_n)}(x_1, \dots, x_n) = K\, e^{-\frac{1}{2} Q(x_1, \dots, x_n)}$$

où *Q* est une forme quadratique positive non dégénérée.

Dans ce cas, si *g* est le déterminant de la matrice de *Q*, produit des valeurs propres, on a $K = \frac{\sqrt{g}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}$.

On peut montrer que les **lois marginales** d'un vecteur aléatoire qui suit une loi de Laplace-Gauss à *n* dimensions, sont des lois normales.
La réciproque est fausse : ce n'est pas parce que $X_1, \dots, X_n$, suivent des lois de Laplace-Gauss que $(X_1, \dots, X_n)$ suivra une loi de Laplace-Gauss à *n* dimensions.

Chapitre 15. Loi normale.

Exercices

Exercice 1. Intervalles de fluctuations.
Exercice 2. Calcul des paramètres à partir de probabilités.
Exercice 3. Fabrique de tubes.
Exercice 4. Glycémie.
Exercice 5. Nombres d'étudiants suivant la taille.
Exercice 6. Loi log-normale.
Exercice 7. Distribution normale de notes.
Exercice 8. Indépendance de deux variables normales.
Exercice 9. Etude de la courbe de Gauss.
Exercice 10. $X - Y$ et $\sqrt{X^2 + Y^2}$, X et Y normales.

Exercice 1. Intervalles de fluctuations.

Soit X une variable aléatoire réelle suivant une loi normale $G(\mu, \sigma)$.
1°/ Montrez que la variable aléatoire $U = \frac{X - \mu}{\sigma}$ suit une loi normale $G(0, 1)$.
2°/ Calculez $P(|X - \mu| \leq \sigma)$, $P(|X - \mu| \leq 2\sigma)$, $P(|X - \mu| \leq 3\sigma)$.

Solution

HAUT

Exercice 2. Calcul des paramètres à partir de probabilités.

Calculer l'espérance mathématique et la variance d'une variable aléatoire normale X sachant que : $P(X \leq 2) = 0{,}5793$ et $P(X > 5) = 0{,}2119$.	Solution

HAUT

Exercice 3. Fabrique de tubes.

Une machine automatique fabrique en série des tubes dont le diamètre X est réparti selon la loi normale de moyenne 20 cm et d'écart-type 1,5 mm.

a) Calculez la probabilité qu'une pièce prise au hasard dans la fabrication ait un diamètre compris entre 19,75 cm et 20,25 cm.
b) Quel intervalle de centre 20 cm peut-on garantir avec une probabilité 0,95 ?

Solution

HAUT

Exercice 4. Glycémie.

On suppose que la glycémie est distribuée normalement dans la population, avec une moyenne de 1 g/l et un écart-type de 0,03 g/l. On mesure la glycémie chez un individu.

1- Calculer la probabilité pour que sa glycémie soit :
   a) inférieure à 1,06 ;
   b) supérieure à 0,9985 ;
   c) comprise entre 0,94 et 1,08 ;

2- On mesure la glycémie chez 1 000 individus choisis au hasard. Donner le nombre moyen d'individus dont la glycémie est supérieure à 0,99.

Solution

HAUT

Exercice 5. Nombre d'étudiants suivant la taille.

On suppose que la taille de 615 étudiants est distribuée normalement avec une moyenne de 1,75 m et un écart-type de 20 cm. Calculer le nombre d'étudiants ayant des tailles : — inférieures ou égales à 1,50 m — comprises entre 1,50 m et 1,65 m — supérieures ou égales à 2 m.	Solution

HAUT

Exercice 6. Loi log-normale.

Véronique vend des cuisines intégrées par téléphone. Soit X la durée d'une communication téléphonique de Véronique. La variable $Y = \ln X$ suit une loi normale $G(\mu, \sigma^2)$.

1°/ Exprimer la fonction de répartition G_X de X en fonction de μ, σ, et de la fonction de répartition F de la loi normale centrée réduite.

2°/ En déduire la densité de probabilité de X.

3°/ Calculer $E(X)$.

Solution

HAUT

Exercice 7. Distribution normale de notes.

On suppose que les étudiants d'un cours de statistique ont des notes normalement distribuées autour d'une moyenne de 9,7, avec un écart-type de 4. 1°/ Trouver la probabilité pour qu'un étudiant ait une note supérieure à 13. 2°/ Trouver la probabilité pour qu'un échantillon aléatoire de 10 étudiants ait une note moyenne supérieure à 13.	Solution

HAUT

Exercice 8. Indépendance de deux variables normales.

Soient X et Y deux variables aléatoires $(\Omega, P) \to \mathbb{R}$ indépendantes gaussiennes (ou normales), de moyennes nulles et de variances respectives λ^2 et μ^2, $\lambda > 0$, $\mu > 0$.
1°/ Calculer les lois de $X + Y$ et de $X - Y$. Les variables $X + Y$ et $X - Y$ sont-elles indépendantes ?
2°/ Donner la loi conjointe du couple $(X + Y, X - Y)$.
3°/ Déterminer également la loi conjointe du couple $\left(X\,Y, \frac{X}{Y} \right)$.
4°/ Reprendre les trois premières questions pour deux variables aléatoires X et Y de Cauchy.

Solution

HAUT

Exercice 9. Etude de la courbe de Gauss.

Soit X une variable aléatoire de loi normale $N(\mu, \sigma^2)$. On note f sa densité de probabilité et F sa fonction de répartition. 1°/ Montrer que la droite d'équation $x = \mu$ est axe de symétrie de la courbe représentative (C) de f. Etudier la fonction f. Tracer la courbe (C) en indiquant les points d'inflexion. Quelle est l'aire de la partie du plan comprise entre l'axe des x et (C) ? Indiquer un domaine du plan s'appuyant sur (C) et dont l'aire est $P(\mu - \sigma < X < \mu + 2\sigma)$. 2°/ Montrer que le point de coordonnées $(m, \frac{1}{2})$ est centre de symétrie et point d'inflexion de la courbe représentative de F. Tracer cette courbe. En s'aidant de cette courbe, tracer un segment dont la longueur est $P(\mu < X < \mu + \sigma)$.	Solution

HAUT

Exercice 10. $X - Y$ et $\sqrt{X^2 + Y^2}$, X et Y normales.

Soit $(X, Y) : \Omega \to \mathbb{R}^2$ un couple formé de deux variables aléatoires indépendantes et de même loi.
On suppose que X et Y suivent une loi de Gauss d'espérance 0 et de variance $\frac{1}{2}$.

1°/ Calculer la loi de $X - Y$ par la méthode de votre choix.

2°/ Expliciter la densité de la loi de la variable aléatoire $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$.
On pourra effectuer un changement de variable en coordonnées polaires.

3°/ Reconnaître la loi de R. Quelle est son espérance ? Quelle est sa variance ?

Solution

HAUT

Chapitre 15. Loi normale.

Enoncés.

Exercice 1. Intervalles de fluctuations.

Soit X une variable aléatoire réelle suivant une loi normale G (μ, σ). 1°/ Montrez que la variable aléatoire $U = \frac{X - \mu}{\sigma}$ suit une loi normale G (0, 1). 2°/ Calculez P (| X – μ | ≤ σ), P (| X – μ | ≤ 2 σ), P (| X – μ | ≤ 3 σ).	

Solution.

1°/ $U \rightsquigarrow G$ (0, 1).

Soit $X \rightsquigarrow G$ (μ, σ ²), une variable normale de paramètres μ et σ.
Sa fonction de répartition $F_{(\mu, \sigma)}(x)$ est définie par :

$$F_{(\mu, \sigma)}(x) = P(X < x) = \int_{-\infty}^{x} f_{(\mu, \sigma)}(t)\, dt = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dt.$$

Pour calculer l'intégrale, faisons le changement de variable $v = \frac{t - \mu}{\sigma}$:

$$F_{(\mu, \sigma)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma}} e^{-\frac{v^2}{2}}\, dv$$

Or si $U \rightsquigarrow G$ (0, 1) est une variable normale centrée réduite, sa fonction de répartition $F_{(0, 1)}$ est définie par :

$$F_{(0, 1)}(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{u} e^{-\frac{v^2}{2}}\, dv$$

Nous obtenons donc :

$$\boxed{F_{(\mu, \sigma)}(x) = F_{(0, 1)}\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)}$$

La formule $F_{(\mu, \sigma)}(x) = F_{(0, 1)}\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)$ montre que si $X \rightsquigarrow G$ (μ, σ ²), alors la variable aléatoire $U = \frac{X - \mu}{\sigma}$ est une variable normale centrée réduite, puisque sa fonction de répartition est définie par :

$$P\,(U < u) = P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} < u\right) = P\,(X < \mu + u\,\sigma) = F_{(\mu,\,\sigma)}\,(\mu + u\,\sigma) = F_{(0,\,1)}\,(u)$$

2°/ Probabilité d'intervalles de fluctuations.

$$|\,X - \mu\,| \leq k\,\sigma \Leftrightarrow \mu - k\,\sigma \leq X \leq \mu + k\,\sigma \Leftrightarrow -k \leq \frac{X - \mu}{\sigma} \leq k$$

L'évènement $|\,X - \mu\,| \leq k\,\sigma$ est le même que l'évènement $-k \leq U \leq k$. Sa probabilité est donc :

$$P\,(|\,X - \mu\,| \leq k\,\sigma) = P\,(-k \leq U \leq k) = F\,(k) - F\,(-k).$$

Par symétrie de la distribution de U, nous avons, pour tout nombre réel u :

$$F\,(-u) = 1 - F\,(u)$$

d'où :

$$\boxed{P\,(|\,X - \mu\,| \leq k\,\sigma) = 2\,F\,(k) - 1}$$

Or la table de la fonction de répartition F de la variable normale centrée réduite fournit les valeurs :

k	1	2	3
$F\,(k)$	0,8413	0,9772	0,99865

De la formule $P\,(|\,X - \mu\,| \leq k\,\sigma) = 2\,F\,(k) - 1$, on déduit les valeurs de probabilité des **intervalles de fluctuations** :

k	1	2	3
$F\,(k)$	0,8413	0,9772	0,99865
$P\,(|\,X - \mu\,| \leq k\,\sigma)$	0,6827	0,9545	0,99730

Chapitre 15. Loi normale.

Enoncés.

Exercice 2. Calcul des paramètres à partir de probabilités.

Calculer l'espérance mathématique et la variance d'une variable aléatoire normale X sachant que : $P(X \leq 2) = 0{,}5793$ et $P(X > 5) = 0{,}2119$.	

Solution.

1°/ Traduction de la relation $P(X \leq 2) = 0{,}5793$.

Désignons par F la **fonction de répartition de la variable normale centrée réduite**, μ et σ les paramètres de la loi normale de X.

$$P(X \leq 2) = 0{,}5793 \Leftrightarrow F\left(\frac{2-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}5793$$

La table de la fonction de répartition de la variable normale centrée réduite fournit :

$$F(0{,}20) = 0{,}5793$$

Comme la fonction F est une bijection monotone strictement croissante de $]-\infty\,;+\infty[$ sur $]0\,;1[$, la relation

$$F\left(\frac{2-\mu}{\sigma}\right) = F(0{,}20)$$

est équivalente à :

$$\frac{2-\mu}{\sigma} = 0{,}20 = \frac{1}{5}$$
$$5\mu + \sigma = 10$$

2°/ Traduction de la relation $P(X > 5) = 0{,}2119$.

$$P(X > 5) = 0{,}2119 \Leftrightarrow P(X \leq 5) = 1 - P(X > 5) = 1 - 0{,}2119 = 0{,}7881 \Leftrightarrow F\left(\frac{5-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}7881$$

Or la table de la fonction de répartition de la variable normale centrée réduite fournit :

$$F\,(0{,}80) = 0{,}7881$$

Comme la fonction F est une bijection, la relation $F\left(\frac{5-\mu}{\sigma}\right) = F\,(0{,}80)$ équivaut à

$$\frac{5-\mu}{\sigma} = 0{,}80 = \frac{4}{5}$$
$$5\,\mu + 4\,\sigma = 25$$

3°/ Valeurs de μ et σ.

Le système de deux équations du premier degré :

$$5\,\mu + \sigma = 10$$
$$5\,\mu + 4\,\sigma = 25$$

a pour unique solution, calculée par soustraction, puis substitution :

$$\boxed{\begin{array}{l}\mu = 1\\ \sigma = 5\end{array}}$$

Chapitre 15. Loi normale.

Enoncés.

Exercice 3. Fabrique de tubes.

Une machine automatique fabrique en série des tubes dont le diamètre X est réparti selon la loi normale de moyenne 20 cm et d'écart-type 1,5 mm. a) Calculez la probabilité qu'une pièce prise au hasard dans la fabrication ait un diamètre compris entre 19,75 cm et 20,25 cm. b) Quel intervalle de centre 20 cm peut-on garantir avec une probabilité 0,95 ?	

Solution.

1°/ Probabilité d'un intervalle.

Désignons par F la fonction de répartition de la variable normale centrée réduite.

$$P\,(19{,}75 < X < 20{,}25) = F\left(\frac{20{,}25-20}{0{,}15}\right) - F\left(\frac{19{,}75-20}{0{,}15}\right) = F\left(\frac{5}{3}\right) - F\left(-\frac{5}{3}\right)$$

La relation $F\,(-u) = 1 - F\,(u)$ entraîne alors :

$$P\,(19{,}75 < X < 20{,}25) = 2\,F\left(\frac{5}{3}\right) - 1$$

Or la table de la fonction de répartition de la variable normale centrée réduite donne :

$$F\left(\frac{5}{3}\right) = 0{,}9522$$

On en déduit :

$$P\,(19{,}75 < X < 20{,}25) = 2 \times 0{,}9522 - 1 = 0{,}9044$$

$$\boxed{P\,(19{,}75 < X < 20{,}25) = 0{,}9044}$$

2°/ Intervalle de sécurité à 95 %.

Un intervalle centré sur $\mu = 20$ cm est de la forme $\mu \pm u\,\sigma$. Sa probabilité est :

$$P\,(\mu - u\,\sigma < X < \mu + u\,\sigma) = F\,(u) - F\,(-u) = 2\,F\,(u) - 1.$$

Pour avoir $P\,(\mu - u\,\sigma < X < \mu + u\,\sigma) = 0{,}95$, il faut prendre u tel que :

$$2\,F\,(u) - 1 = 0{,}95$$
$$F\,(u) = \frac{1{,}95}{2} = 0{,}975$$

La table de la fonction de répartition de la variable normale centrée réduite fournit la valeur :

$$\boldsymbol{u = 1{,}96}$$

L'intervalle $[\mu - u\,\sigma\ ;\ \mu + u\,\sigma\ ]$ correspondant est :

$$[\ 20{,}00 - 1{,}96 \times 0{,}15\ ;\ 20{,}00 + 1{,}96 \times 0{,}15\ ] = [\ 20{,}00 - 0{,}29\ ;\ 20{,}00 + 0{,}29\ ].$$

L'intervalle de sécurité à 95 % est l'intervalle [19,71 ; 20,29]

Ce résultat signifie que 95 % des tubes fabriqués ont un diamètre compris dans cet intervalle. Autrement dit, on est sûr à 95 % que le diamètre d'un tube pris au hasard dans la production, est dans l'intervalle [19,71 ; 20,29].

Chapitre 15. Loi normale.

Enoncés.

Exercice 4. Glycémie.

On suppose que la glycémie est distribuée normalement dans la population, avec une moyenne de 1 g/l et un écart-type de 0,03 g/l. On mesure la glycémie chez un individu. 1- Calculer la probabilité pour que sa glycémie soit : a) inférieure à 1,06 ; b) supérieure à 0,9985 ; c) comprise entre 0,94 et 1,08 ; 2- On mesure la glycémie chez 1 000 individus choisis au hasard. Donner le nombre moyen d'individus dont la glycémie est supérieure à 0,99.	

Solution.

1°/ Probabilité de divers intervalles de valeurs de la glycémie.

Notons X la glycémie mesurée sur un individu de la population.
X suit une loi normale G (1,00 ; 0,03) de paramètres $\mu = 1{,}00$ et $\sigma = 0{,}03$.
La variable aléatoire centrée réduite correspondante $U = \frac{X - \mu}{\sigma}$ suit une loi normale G (0 ; 1).

a) P ($X < 1{,}06$)

$$P\,(X < 1{,}06) = P\left(U < \frac{1{,}06 - 1{,}00}{0{,}03}\right) = P\,(U < 2) = F\,(2) = 0{,}977249868052 \approx 0{,}9772$$

(table de la fonction de répartition de la variable normale).

$$\boxed{P\,(X < 1{,}06) = 0{,}9772}$$

b) P ($X > 0{,}9985$)

$$P\,(X > 0{,}9985) = P\left(U > \frac{0{,}9985 - 1{,}00}{0{,}03}\right) = P\,(U > -0{,}05) = P\,(U < 0{,}05)$$

$$P\,(X > 0{,}9985) = F\,(0{,}05) = 0{,}519938805838 \approx 0{,}5199$$

(table de la fonction de répartition de la variable normale).

$$\boxed{P\,(X > 0{,}9985) = 0{,}5199}$$

Remarque.

Comme la valeur 0,05 est petite, on peut avoir une approximation de la valeur de F en utilisant un développement en série de Taylor :

$$F(u) = F(0) + F'(0)\,u + F''(0)\,\frac{u^2}{2} + F'''(0)\,\frac{u^3}{6} + \ldots,$$

avec $F'(u) = f(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{u^2}{2}}$.

En limitant le développement aux trois premiers termes non nuls, on obtient :

$$F(0) = 0{,}5,\ F'(0) = f(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ F''(0) = f'(0) = 0,\ F'''(0) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ \ldots$$

$$F(0{,}05) \approx 0{,}5 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(0{,}05 - \frac{0{,}05^3}{6}\right) \approx 0{,}5199$$

C'est déjà une bonne approximation.

c) $P\,(0{,}94 < X < 1{,}08)$

$$P(0{,}94 < X < 1{,}08) = P\left(\frac{0{,}94-1{,}00}{0{,}03} < U < \frac{1{,}08-1{,}00}{0{,}03}\right)$$
$$= F\left(\frac{8}{3}\right) - F(-2) = F\left(\frac{8}{3}\right) - 1 + F(2)$$
$$= 0{,}9962 + 0{,}9772 - 1 = 0{,}9734$$

(table de la fonction de répartition de la variable normale).

$$\boxed{P(0{,}94 < X < 1{,}08) = 0{,}9734}$$

2°/ Nombre moyen d'individus.

La probabilité p que la glycémie X d'un individu choisi au hasard dans la population soit supérieure à 0,99 g/l est donnée par la **loi normale** :

$$p = P(X > 0{,}99) = 1 - P(X \leq 0{,}99) = 1 - F\left(\frac{0{,}99-1{,}00}{0{,}03}\right) = 1 - F\left(-\frac{1}{3}\right) = F\left(\frac{1}{3}\right) \approx 0{,}6306.$$

(table de la fonction de répartition de la variable normale).

Le fait de regarder si, pour un individu, sa glycémie est supérieure ou non à 0,99 g/l, constitue une épreuve de Bernoulli dans laquelle la probabilité du succès est p, indépendante de l'individu choisi.
Lorsqu'on répète cette épreuve de Bernoulli pour les $n = 1000$ individus de l'échantillon, le nombre N de succès obtenus est le nombre d'individus dont la glycémie est supérieure à 0,99 g/l.
Ce nombre N suit une **loi binomiale** de paramètres $n = 1000$ et $p = 0{,}6306$.
La valeur moyenne de N est son espérance mathématique $E(N) = n\,p = 630{,}6$.

$$E(N) = 630,6$$

La **loi faible des grands nombres** (théorème de Bernoulli) nous dit, d'ailleurs, qu'en moyenne, la proportion d'individus ayant une glycémie supérieure à 0,99 g/l, tend, en probabilité, à se rapprocher de la valeur théorique de la probabilité donnée par la loi normale, à mesure que le nombre d'individus pris en considération augmente. Dans un échantillon aléatoire de 1 000 individus, on peut donc admettre que :

Il y a en moyenne 630,6 individus qui présentent une glycémie supérieure à 0, 99 g/l.

Chapitre 15. Loi normale.

Enoncés.

Exercice 5. Nombre d'étudiants suivant la taille.

On suppose que la taille de 615 étudiants est distribuée normalement avec une moyenne de 1,75 m et un écart-type de 20 cm. Calculer le nombre d'étudiants ayant des tailles : — inférieures ou égales à 1,50 m — comprises entre 1,50 m et 1,65 m — supérieures ou égales à 2 m.	

Solution.

1°/ Formule générale.

Soit X la taille d'un étudiant.
Soit N le nombre d'étudiants ayant une taille comprise entre deux limites a et b.
Pour un étudiant choisi au hasard parmi les 615 du groupe, la probabilité que sa taille soit comprise entre a et b est le rapport entre le nombre N de cas favorables et le nombre total d'étudiants, soit $\frac{N}{615}$.
Mais comme X suit, par hypothèse, une loi de Gauss de moyenne 1,75 m et d'écart-type 0,20 m, la probabilité que la taille X soit comprise entre a et b est donnée par :

$$P\,(a < X < b) = F\left(\frac{b-1,75}{0,20}\right) - F\left(\frac{a-1,75}{0,20}\right)$$

F désignant la fonction de répartition de la variable normale centrée réduite.
On obtient donc :

$$N = 615 \times P\,(a < X < b) = 615 \times \left[\ F\left(\frac{b-1,75}{0,20}\right) - F\left(\frac{a-1,75}{0,20}\right)\ \right]$$

$$\boxed{N = 615 \times [\,F\,(5\,b - 8,75) - F\,(5\,a - 8,75)].}$$

2°/ Cas particuliers.

On peut alors dresser le tableau suivant des résultats :

(table de la fonction de répartition de la variable normale).

Taille X	$-\infty$		1,50		1,65		2,00		$+\infty$
$5\,(X - 1,75)$	$-\infty$		$-1,25$		$-0,50$		1,25		$+\infty$
$F\,(5\,X - 8,75)$	0		0,1056		0,3085		0,8944		1
$P\,(X < 1,5)$		0,1056							
$P\,(1,5 < X < 1,65)$				0,2029					
$P\,(X \geq 2)$								0,1056	
Nombre N		65		125				65	

Chapitre 15. Loi normale.

Enoncés.

Exercice 6. Loi log-normale.

Véronique vend des cuisines intégrées par téléphone. Soit X la durée d'une communication téléphonique de Véronique. La variable $Y = ln\ X$ suit une loi normale $G\ (\mu, \sigma^2)$.
1°/ Exprimer la fonction de répartition G_X de X en fonction de μ, σ, et de la fonction de répartition F de la loi normale centrée réduite.
2°/ En déduire la densité de probabilité de X.
3°/ Calculer $E\ (X)$.

Solution.

1°/ Fonction de répartition de X.

$$X\ (\Omega) =]\ 0, +\infty\ [$$

Pour $x \leq 0$, la fonction de répartition de X est nulle et, pour $x > 0$, on a

$$X \leq x \Leftrightarrow Y \leq ln\ x$$

$$G_X\ (x) = P\ (X \leq x) = P(Y \leq ln\ x) = F\left(\frac{ln\ x - \mu}{\sigma}\right)$$

La fonction de répartition de X peut donc s'écrire :

$$\boxed{G_X\ (x) = F\left(\frac{ln\ x - \mu}{\sigma}\right) 1_{]\ 0, +\infty\ [}\ (x)}$$

2°/ Densité de probabilité de X.

La densité de probabilité est la dérivée de la fonction de répartition.

$$g_X\ (x) = \frac{d\ G_X}{dx}(x) = \frac{d\ F}{du}\frac{du}{dx}$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{\sigma\ x}\ ;\ \frac{d\ F}{du} = f\ (u) = \frac{1}{\sqrt{2\ \pi}} e^{-\frac{u^2}{2}}\ ;\ u = \frac{ln\ x - \mu}{\sigma}.$$

$$g_X(x) = \frac{1}{\sigma x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(\ln x-\mu)^2}{2\sigma^2}}1_{]0,+\infty[}(x)$$

3°/ Espérance de *X*.

$$E(X) = \int_0^{\infty} x\, g_X(x)\, dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty} e^{-\frac{(\ln x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dx$$

Pour calculer l'intégrale, faisons un **premier changement de variable** :

$$t = \ln x,\ dt = \frac{dx}{x},\ dx = x\, dt = e^t\, dt$$

$$e^{-\frac{(\ln x-\mu)^2}{2\sigma^2}} = e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Lorsque x tend vers 0, t tend vers $-\infty$.
Lorsque x tend vers $+\infty$, t tend vers $+\infty$.

$$E(X) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty} e^{-\frac{(\ln x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, e^t\, dt = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{t-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dt$$

Or on peut écrire :

$$t-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2} = \frac{2t\sigma^2-t^2+2t\mu-\mu^2}{2\sigma^2} = \frac{-\left(t-\left(\mu+\sigma^2\right)\right)^2+\left(\mu+\sigma^2\right)^2-\mu^2}{2\sigma^2} = -\frac{\left(t-\left(\mu+\sigma^2\right)\right)^2}{2\sigma^2}+\mu+\frac{\sigma^2}{2}$$

$$E(X) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{t-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dt = \frac{e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\left(t-\left(\mu+\sigma^2\right)\right)^2}{2\sigma^2}}\, dt.$$

Pour calculer cette nouvelle intégrale faisons un **deuxième changement de variable** :

$$u = \frac{t-\left(\mu+\sigma^2\right)}{\sigma},\ du = \frac{dt}{\sigma}$$

$$e^{-\frac{\left(t-\left(\mu+\sigma^2\right)\right)^2}{2\sigma^2}} = e^{-\frac{u^2}{2}}$$

$$E(X) = \frac{e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\left(t-\left(\mu+\sigma^2\right)\right)^2}{2\sigma^2}}\, dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du.$$

Or $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du$ est la surface située sous la courbe de Gauss centrée réduite, elle vaut 1 :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}\,du = 1$$

Il reste alors :

$$\boxed{E(X) = e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}}$$

Chapitre 15. Loi normale.

Enoncés.

Exercice 7. Distribution normale de notes.

On suppose que les étudiants d'un cours de statistique ont des notes normalement distribuées autour d'une moyenne de 9,7, avec un écart-type de 4. 1°/ Trouver la probabilité pour qu'un étudiant ait une note supérieure à 13. 2°/ Trouver la probabilité pour qu'un échantillon aléatoire de 10 étudiants ait une note moyenne supérieure à 13.	

Solution.

1°/ Probabilité pour un étudiant.

Soit X la note obtenue par un étudiant : par hypothèse, X suit une loi de Gauss de moyenne $\mu = 9,7$ et d'écart-type $\sigma = 4$. La probabilité pour que X soit supérieur à 13 est donnée par la fonction de répartion de la variable normale centrée réduite :

$$P(X > 13) = 1 - P(X \leq 13) = 1 - F\left(\frac{13-9,7}{4}\right) = 1 - F(0,825) = 1 - 0,7953 = 0,2047$$

Un étudiant choisi au hasard a une chance sur 5 d'avoir une note supérieure à 13.

2°/ Probabilité pour 10 étudiants.

La moyenne $\overline{X}$ d'un échantillon de taille 10 suit une loi normale de moyenne $\mu = 9,7$ et d'écart-type $\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,265$.
La probabilité pour que $\overline{X}$ soit supérieure à 13 est donnée par la fonction de répartion de la variable normale centrée réduite :

$$P(\overline{X} > 13) = 1 - P(\overline{X} \leq 13) = 1 - F\left(\frac{13-9,7}{4} \times \sqrt{10}\right) = 1 - F(2,61) = 1 - 0,9954 = 0,0046$$

Un échantillon aléatoire de 10 étudiants a 5 chances sur 1000 d'avoir une moyenne supérieure à 13.

Chapitre 15. Loi normale.

Enoncés.

Exercice 8. Indépendance de deux variables normales.

Soient X et Y deux variables aléatoires $(\Omega, P) \to \mathbb{R}$ indépendantes gaussiennes (ou normales), de moyennes nulles et de variances respectives λ^2 et μ^2, $\lambda > 0$, $\mu > 0$. 1°/ Calculer les lois de $X + Y$ et de $X - Y$. Les variables $X + Y$ et $X - Y$ sont-elles indépendantes ? 2°/ Donner la loi conjointe du couple $(X + Y, X - Y)$. 3°/ Déterminer également la loi conjointe du couple $\left(X\,Y, \frac{X}{Y} \right)$. 4°/ Reprendre les trois premières questions pour deux variables aléatoires X et Y de Cauchy.	

Solution.

Première partie : lois normales.

1°/ Lois de probabilité de $X + Y$ et $X - Y$.

La fonction caractéristique de X est, à un coefficient près, la **transformée de Fourier** de sa densité de probabilité :

$$\varphi_X(t) = E\left(e^{itX}\right) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} f_X(x)\,dx$$

Pour une variable normale d'espérance μ et de variance σ^2, la **fonction caractéristique** est :

$$\varphi(t) = e^{it\mu} e^{-\frac{t^2\sigma^2}{2}}$$

Les fonctions caractéristiques de X et Y sont donc :

$$\varphi_X(t) = e^{-\frac{t^2\lambda^2}{2}}$$
$$\varphi_Y(t) = e^{-\frac{t^2\mu^2}{2}}$$

Comme les variables aléatoires X et Y sont indépendantes, la fonction caractéristique de la somme est le produit des fonctions caractéristiques (rappelons que, en général, la réciproque est fausse, voir Exercice 7) :

$$\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t)\,\varphi_Y(t) = e^{-\frac{t^2\lambda^2}{2}}\,e^{-\frac{t^2\mu^2}{2}} = e^{-\frac{t^2(\lambda^2+\mu^2)}{2}}$$

et cette relation montre que $X + Y$ est une variable normale d'espérance 0 et de variance $\lambda^2 + \mu^2$.

Sa loi de probabilité est donc :

$$\boxed{f_{X+Y}(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\lambda^2+\mu^2}}\,e^{-\frac{u^2}{2(\lambda^2+\mu^2)}}}$$

De même, si X et Y sont indépendantes, X et $-Y$ sont indépendantes aussi, et $-Y$ est, comme Y, une variable normale de moyenne 0 et de variance μ^2, puisque la loi de Y est symétrique.
Donc $X - Y$ est une variable normale d'espérance 0 et de variance $\lambda^2 + \mu^2$.
La variable $X - Y$ suit la même loi de probabilité que $X + Y$.

$$\boxed{f_{X-Y}(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\lambda^2+\mu^2}}\,e^{-\frac{u^2}{2(\lambda^2+\mu^2)}}}$$

$Var(X) = Var\left(\frac{1}{2}[(X+Y]+(X-Y)]\right) = \frac{1}{4}\,Var\,[(X+Y]+(X-Y)]$

$= \frac{1}{4}\,(Var(X+Y) + Var(X-Y) + 2\,Cov(X+Y, X-Y))$

$Var(Y) = Var\left(\frac{1}{2}[(X+Y]-(X-Y)]\right) = \frac{1}{4}\,Var\,[(X+Y]-(X-Y)]$

$= \frac{1}{4}\,(Var(X+Y) + Var(X-Y) - 2\,Cov(X+Y, X-Y))$

Par soustraction :
$Var(X) - Var(Y) = Cov(X+Y, X-Y)$
Or $Var(X) = \lambda^2$ et $Var(Y) = \mu^2$, donc la covariance de $X + Y$ et $X - Y$ est :

$$\boxed{Cov(X+Y, X-Y) = \lambda^2 - \mu^2}$$

Un théorème général, que nous admettrons ici, affirme que, **pour que deux variables normales soient indépendantes, il faut et il suffit que leur covariance soit nulle**.
Comme λ et μ sont > 0, cette propriété s'écrit ici :

Pour que $X + Y$ et $X - Y$ soient indépendantes, il faut et il suffit que $\lambda = \mu$.

2°/ Loi conjointe de $X + Y$ et $X - Y$.

La densité de probabilité conjointe des variables $X + Y$ et $X - Y$ est la transformée de Fourier inverse de la fonction caractéristique conjointe (**formule de réciprocité**).

$$f_{(X+Y, X-Y)}(u, v) = \iint_{\mathbb{R}^2} \varphi_{(X+Y, X-Y)}(\alpha, \beta)\,e^{-i(\alpha u + \beta v)}\,d\alpha\,d\beta$$

$$= \iint_{\mathbb{R}^2} \varphi_X(\alpha+\beta)\,\varphi_Y(\alpha-\beta)\,e^{-i(\alpha u + \beta v)}\,d\alpha\,d\beta$$

En effet, on a toujours, lorsque X et Y sont indépendantes :
$\varphi_{(X+Y,\,X-Y)}(\alpha, \beta) = E\left(e^{i(\alpha(X+Y)+\beta(X-Y))}\right) = E\left(e^{i(\alpha+\beta)X + i(\alpha-\beta)Y}\right)$
$= \varphi_{(X,\,Y)}(\alpha+\beta, \alpha-\beta) = \varphi_X(\alpha+\beta)\,\varphi_Y(\alpha-\beta)$

Lorsqu'on pose :

$$x = \frac{u+v}{2}$$
$$y = \frac{u-v}{2}$$

l'intégrale s'écrit :

$$f_{(X+Y,\,X-Y)}(u, v) = \iint_{\mathbb{R}^2} \varphi_X(\alpha+\beta)\,\varphi_Y(\alpha-\beta)\,e^{-i(\alpha(x+y)+\beta(x-y))}\,d\alpha\,d\beta$$
$$= \iint_{\mathbb{R}^2} \varphi_X(\alpha+\beta)\,\varphi_Y(\alpha-\beta)\,e^{-i((\alpha+\beta)x+(\alpha-\beta)y)}\,d\alpha\,d\beta$$

Faisons le changement de variables :

$$s = \alpha + \beta$$
$$t = \alpha - \beta$$

Le déterminant de la matrice jacobienne $\frac{D(\alpha, \beta)}{D(s, t)}$ du changement de variables est $-\frac{1}{2}$.
Le théorème du changement de variables donne :

$$f_{(X+Y,\,X-Y)}(u, v) = \frac{1}{2}\iint_{\mathbb{R}^2} \varphi_X(s)\,\varphi_Y(t)\,e^{-i(sx+ty)}\,ds\,dt$$
$$= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \varphi_X(s)\,e^{-isx}\,ds \int_{\mathbb{R}} \varphi_Y(t)\,e^{-ity}\,dt$$
$$= \frac{1}{2} f_X(x)\,f_Y(y)$$
$$= \frac{1}{2} f_X\left(\frac{u+v}{2}\right) f_Y\left(\frac{u-v}{2}\right)$$
$$= \frac{1}{4\pi\lambda\mu}\,e^{-\frac{1}{2\lambda^2}\left(\frac{u+v}{2}\right)^2}\,e^{-\frac{1}{2\mu^2}\left(\frac{u-v}{2}\right)^2}$$

$$\boxed{f_{(X+Y,\,X-Y)}(u, v) = \frac{1}{4\pi\lambda\mu} e^{-\frac{1}{8}\left(\frac{1}{\lambda^2}+\frac{1}{\mu^2}\right)(u^2+v^2)}\,e^{-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\lambda^2}-\frac{1}{\mu^2}\right)uv}}$$

Lorsque $\lambda = \mu$, c'est-à-dire lorsque $X + Y$ et $X - Y$ sont indépendantes, cette formule se réduit à :

$$f_{(X+Y,\,X-Y)}(u, v) = \frac{1}{4\pi\lambda\mu} e^{-\frac{u^2+v^2}{4\lambda^2}} = \left(\frac{1}{2\sqrt{\pi\lambda}}\,e^{-\frac{u^2}{4\lambda^2}}\right) \times \left(\frac{1}{2\sqrt{\pi\lambda}}\,e^{-\frac{v^2}{4\lambda^2}}\right)$$
$$= f_{X+Y}(u) \times f_{X-Y}(v)$$

3°/ Loi conjointe du couple $\left(X\,Y, \frac{X}{Y} \right)$.

Posons :

$$U = X\,Y$$
$$V = \frac{X}{Y}$$

Les variables U et V doivent avoir le même signe puisque $U\,V = X^2$ et $\frac{U}{V} = Y^2$ sont positfs.

Pour calculer la fonction de répartition de la variable (U, V), faisons le changement de variables défini par :

$$u = x\,y$$
$$v = \frac{x}{y}$$

Le déterminant de la matrice jacobienne $\frac{D(u,v)}{D(x,y)}$ est $-2\,v$.

$$f_{(U,V)}(u, v)] = f_{(X,Y)}\left(\sqrt{uv}, \sqrt{\frac{u}{v}} \right) = f_X(\sqrt{uv}) \times f_Y\left(\sqrt{\frac{u}{v}} \right) \times \frac{1}{2|v|}$$
$$= \frac{1}{2|v|} \times \frac{1}{2\,\pi\,\lambda\,\mu}\, e^{-\frac{u\,v}{2\,\lambda^2}}\, e^{-\frac{u}{2\,\mu^2\,v}}$$

La densité de probabilité conjointe du couple $\left(X\,Y, \frac{X}{Y} \right)$ est donc :

$$f_{\left(X\,Y, \frac{X}{Y} \right)}(u, v) = \frac{1}{4\,\pi\,\lambda\,\mu\,|v|}\, e^{-\frac{u}{2}\left(\frac{v}{\lambda^2} + \frac{1}{\mu^2\,v} \right)},\ u\,v > 0.$$

Elle est symétrique par rapport au point (0, 0) : $f_{\left(X\,Y, \frac{X}{Y} \right)}(-u, -v) = f_{\left(X\,Y, \frac{X}{Y} \right)}(u, v)$.

Deuxième partie : lois de Cauchy.

La loi de Student à un degré de liberté s'appelle **loi de Cauchy**, ou **loi de Lorentz**.

- C'est la loi de probabilité de *tan* θ lorsque θ est distribuée uniformément entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$.
- C'est aussi la loi du rapport de deux variables normales centrées réduites indépendantes.
- Sa densité de probabilité est $\frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}$.
- Elle n'a ni espérance ni variance.
- La fonction caractéristique est donnée par :

$$\varphi_X(t) = E(e^{itX}) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} f_X(x)\,dx$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{itx}}{1+x^2}\,dx = e^{-|t|}.$$

1°/ Lois de probabilité de $X + Y$ et $X - Y$.

$$\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t)\,\varphi_Y(t) = e^{-2|t|} = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{2itx}}{1+x^2}\,dx.$$

Posons $y = 2x$, il vient par différenciation, $dy = 2\,dx$ et :

$$\varphi_{X+Y}(t) = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{2itx}}{1+x^2}\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{ity}}{4+y^2}\,dy.$$

La densité de probabilité de $X + Y$ est donc :

$$f_{X+Y}(x) = \frac{1}{\pi}\frac{2}{4+x^2}$$

Comme la loi de Cauchy est une loi symétrique, Y et $-Y$ ont la même densité de probabilité.
Il en résulte que $X - Y$ et $X + Y$ ont la même loi de probabilité.

$$\boxed{f_{X+Y}(x) = f_{X-Y}(x) = \frac{1}{\pi}\frac{2}{4+x^2}}$$

La fonction caractéristique de $(X + Y, X - Y)$ est :

$$\varphi_{(X+Y,\,X-Y)}(\alpha, \beta) = \varphi_{(X,\,Y)}(\alpha + \beta, \alpha - \beta) = \varphi_X(\alpha + \beta)\,\varphi_Y(\alpha - \beta)$$
$$= e^{-|\alpha+\beta|}\,e^{-|\alpha-\beta|} = e^{-(|\alpha+\beta|+|\alpha-\beta|)}$$

$$\varphi_{X+Y}(\alpha)\,\varphi_{X-Y}(\beta) = e^{-2|\alpha|}\,e^{-2|\beta|} = e^{-2(|\alpha|+|\beta|)}$$

Pour $\alpha > \beta > 0$, par exemple, on a $|\alpha + \beta| + |\alpha - \beta| = 2\alpha \neq 2(|\alpha| + |\beta|) = 2\alpha + 2\beta$.

Donc $\varphi_{(X+Y,\,X-Y)}(\alpha, \beta)$ est différent de $\varphi_{X+Y}(\alpha)\,\varphi_{X-Y}(\beta)$.
Autrement dit,

Les variables $X + Y$ et $X - Y$ ne sont pas indépendantes.

2°/ Loi conjointe de $X + Y$ et $X - Y$.

Comme précédemment :

La densité de probabilité conjointe des variables $X + Y$ et $X - Y$ est la transformée de Fourier inverse de la fonction caractéristique conjointe (**formule de réciprocité**).

$$f_{(X+Y,\,X-Y)}(u,v) = \iint_{\mathbb{R}^2} \varphi_{(X+Y,\,X-Y)}(\alpha,\beta)\, e^{-i(\alpha u+\beta v)}\, d\alpha\, d\beta$$
$$= \iint_{\mathbb{R}^2} \varphi_X(\alpha+\beta)\,\varphi_Y(\alpha-\beta)\, e^{-i(\alpha u+\beta v)}\, d\alpha\, d\beta$$

En effet, comme on l'a remarqué plus haut :
$\varphi_{(X+Y,\,X-Y)}(\alpha,\beta) = \varphi_{(X,\,Y)}(\alpha+\beta,\alpha-\beta) = \varphi_X(\alpha+\beta)\,\varphi_Y(\alpha-\beta)$

Lorsqu'on pose :

$$x = \frac{u+v}{2}$$
$$y = \frac{u-v}{2}$$

l'intégrale s'écrit :

$$f_{(X+Y,\,X-Y)}(u,v) = \iint_{\mathbb{R}^2} \varphi_X(\alpha+\beta)\,\varphi_Y(\alpha-\beta)\, e^{-i(\alpha(x+y)+\beta(x-y))}\, d\alpha\, d\beta$$
$$= \iint_{\mathbb{R}^2} \varphi_X(\alpha+\beta)\,\varphi_Y(\alpha-\beta)\, e^{-i((\alpha+\beta)x+(\alpha-\beta)y)}\, d\alpha\, d\beta$$

Faisons le changement de variables :

$$s = \alpha+\beta$$
$$t = \alpha-\beta$$

Le déterminant de la matrice jacobienne $\frac{D(\alpha,\beta)}{D(s,t)}$ du changement de variables est $-\frac{1}{2}$.
Le théorème du changement de variables donne :

$$f_{(X+Y,\,X-Y)}(u,v) = \frac{1}{2}\iint_{\mathbb{R}^2} \varphi_X(s)\,\varphi_Y(t)\, e^{-i(sx+ty)}\, ds\, dt$$
$$= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \varphi_X(s)\, e^{-isx}\, ds \int_{\mathbb{R}} \varphi_Y(t)\, e^{-ity}\, dt$$
$$= \frac{1}{2} f_X(x)\, f_Y(y)$$
$$= \frac{1}{2} f_X\left(\frac{u+v}{2}\right) f_Y\left(\frac{u-v}{2}\right)$$
$$= \frac{8}{\pi^2}\times\frac{1}{4+(u+v)^2}\times\frac{1}{4+(u-v)^2}$$

La densité de probabilité conjointe de $X+Y$ et $X-Y$ est
$f_{(X+Y,\,X-Y)}(u,v) = \frac{8}{\pi^2}\times\frac{1}{4+(u+v)^2}\times\frac{1}{4+(u-v)^2}$.

3°/ Loi conjointe du couple $\left(XY, \frac{X}{Y}\right)$.

Posons :

$$U = X\,Y$$
$$V = \frac{X}{Y}$$

Les variables U et V doivent avoir le même signe puisque $U\,V = X^2$ et $\frac{U}{V} = Y^2$ sont positfs.

Pour calculer la fonction de répartition de la variable (U, V), faisons le changement de variables défini par :

$$u = x\,y$$
$$v = \frac{x}{y}$$

Le déterminant de la matrice jacobienne $\frac{D(u,v)}{D(x,y)}$ est $-2\,v$.

$$f_{(U,V)}(u, v)] = f_{(X,Y)}\left(\sqrt{uv}, \sqrt{\frac{u}{v}}\right) = f_X(\sqrt{uv}) \times f_Y\left(\sqrt{\frac{u}{v}}\right) \times \frac{1}{2|v|}$$
$$= \frac{1}{2\,\pi^2} \times \frac{1}{1+u\,v} \times \frac{signe(v)}{u+v}$$

La densité de probabilité conjointe du couple $\left(X\,Y, \frac{X}{Y}\right)$ est :

$$f_{\left(X\,Y, \frac{X}{Y}\right)}(u, v) = \frac{1}{2\,\pi^2} \times \frac{1}{1+u\,v} \times \frac{signe(v)}{u+v}.$$

Chapitre 15. Loi normale.

Enoncés.

Exercice 9. Etude de la courbe de Gauss.

Soit X une variable aléatoire de loi normale $N(\mu, \sigma^2)$. On note f sa densité de probabilité et F sa fonction de répartition. 1°/ Montrer que la droite d'équation $x = \mu$ est axe de symétrie de la courbe représentative (C) de f. Etudier la fonction f. Tracer la courbe (C) en indiquant les points d'inflexion. Quelle est l'aire de la partie du plan comprise entre l'axe des x et (C) ? Indiquer un domaine du plan s'appuyant sur (C) et dont l'aire est $P(\mu - \sigma < X < \mu + 2\sigma)$. 2°/ Montrer que le point de coordonnées $(m, \frac{1}{2})$ est centre de symétrie et point d'inflexion de la courbe représentative de F. Tracer cette courbe. En s'aidant de cette courbe, tracer un segment dont la longueur est $P(\mu < X < \mu + \sigma)$.	

Solution.

1°/ Courbe de Gauss.

La densité de probabilité de X a pour expression, par définition :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

Si l'on change $x = \mu - (\mu - x)$ en $\mu + (\mu - x)$ (symétrie par rapport à μ), on obtient :

$$f(2m - x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} = f(x)$$

Cette égalité montre que la droite d'équation $x = \mu$ est axe de symétrie de la courbe représentative (C) de f.

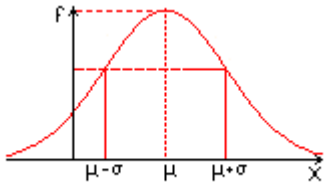
Pour étudier f il suffira donc de l'étudier pour $x \geq \mu$. Le reste s'en déduira par symétrie.

La fonction f est continue, car composée d'applications continues et elle est dérivable, car composée d'applications dérivables.
Sa dérivée est :

$$f'(x) = -\frac{x-\mu}{\sigma^3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

Elle est nulle pour $x = \mu$.
Elle est positive pour $x < \mu$, négative pour $x > \mu$.
f est donc croissante pour $x < \mu$, décroissante pour $x > \mu$.
La dérivée seconde est :

$$f''(x) = \left(-\frac{1}{\sigma^3 \sqrt{2\pi}} + \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^5 \sqrt{2\pi}} \right) e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

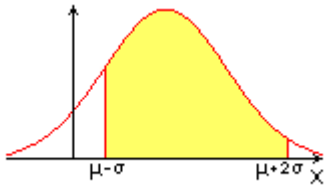


Elle est nulle pour $(x - \mu)^2 = \sigma^2$, soit $x = \mu \pm \sigma$.
En ces points, la dérivée ne change pas de signe.
Il y a donc **deux points d'inflexion** : $x = \mu - \sigma$ et $x = \mu + \sigma$.

Cette étude permet de construire la courbe représentative (C).

Comme f est une densité de probabilité, l'aire comprise entre la courbe (C) et l'axe des x est égale à 1 (**condition de normalisation**).

La probabilité que X soit dans un intervalle $[a, b]$, $a < b$, est l'intégrale de f dans l'intervalle $[a, b]$.
Elle est représentée par l'aire comprise entre la courbe (C) et l'axe des X dans l'intervalle $[a, b]$.
Ainsi, la probabilité que X soit compris entre $m - \sigma$ et $m + 2\sigma$, est représentée par l'aire comprise entre la courbe (C) et l'axe des x dans l'intervalle $[m - \sigma, m + 2\sigma]$.



2°/ Fonction de répartition.

La fonction de répartition $F(x)$ est représentée par l'aire comprise entre la courbe (C) et l'axe des x dans l'intervalle $]-\infty, x]$.

Comme la droite $x = \mu$ est axe de symétrie de f (c'est-à-dire $f(2\mu - x) = f(x)$), et que la surface totale sous la courbe de Gauss (C) est égale à 1, la surface comprise entre l'axe des x et la courbe (C) dans l'intervalle $]-\infty, 0]$, est égale à $\frac{1}{2}$:

$F(\mu) = \frac{1}{2}$.
Le point $\left(\mu, \frac{1}{2} \right)$ est donc **sur la courbe** représentative des variations de F.

La fonction de répartition F est une primitive de la densité de probabilité f : $F' = f$ et $F'' = f'$.
$f'(\mu) = 0 \Rightarrow F''(\mu) = 0$.
Le point $\left(\mu, \frac{1}{2} \right)$ est **point d'inflexion** de la courbe représentative des variations de F.

La pente de la tangente en ce point est $F'(\mu) = f(\mu) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}}$, elle ne dépend pas de la valeur de μ.

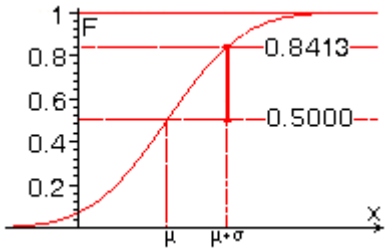
La symétrie de f par rapport à μ entraîne que la surface comprise entre la courbe (C) et l'axe des x dans un intervalle $]-\infty, \mu - x]$ est égale à la surface symétrique, comprise entre la courbe (C) et l'axe des x, dans l'intervalle $[\mu + x, +\infty[$.
Cette symétrie se traduit par la relation :

$$F(\mu - x) = 1 - F(\mu + x)$$
$$F(\mu - x) + F(\mu + x) = 1$$

Le milieu du segment joignant les points $(\mu - x, F(\mu - x))$ et $(\mu + x, F(\mu + x))$ de la courbe représentative de F a, pour coordonnées :

$$\frac{1}{2}[(\mu - x) + (\mu + x)] = \mu \text{ et } \frac{1}{2}(F(\mu - x) + F(\mu + x)) = \frac{1}{2}$$

Ces relations montrent que le point $\left(\mu, \frac{1}{2}\right)$ de la courbe représentative des variations de F est **centre de symétrie** pour cette courbe : le symétrique d'un point quelconque de la courbe par rapport au point $\left(\mu, \frac{1}{2}\right)$ est encore un point de la courbe.



Pour **représenter graphiquement** un segment dont la longueur est $P(\mu < X < \mu + \sigma) = F(\mu + \sigma) - F(\mu)$, il suffit de tracer la droite $x = \mu + \sigma$ et la droite $F = \frac{1}{2}$.

Le segment de la droite $x = \mu + \sigma$ compris entre la courbe représentative de la fonction de répartition et la droite d'équation $F = \frac{1}{2}$, a pour longueur

$$F(\mu + \sigma) - F(\mu) = P(\mu < X < \mu + \sigma) = 0{,}3413.$$

En réalité, il n'est même pas besoin de connaître la valeur $F(\mu + \sigma) = 0{,}8413$ donnée par la table de la fonction de répartition de la variable normale centrée réduite, pour pouvoir construire ce segment si l'on dispose de la courbe représentative des variations de F.

Chapitre 15. Loi normale.

Enoncés.

Exercice 10. $X - Y$ et $\sqrt{X^2 + Y^2}$, X et Y normales.

Soit $(X, Y) : \Omega \to \mathbb{R}^2$ un couple formé de deux variables aléatoires indépendantes et de même loi.
On suppose que X et Y suivent une loi de Gauss d'espérance 0 et de variance $\frac{1}{2}$.

1°/ Calculer la loi de $X - Y$ par la méthode de votre choix.

2°/ Expliciter la densité de la loi de la variable aléatoire $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$.
On pourra effectuer un changement de variable en coordonnées polaires.

3°/ Reconnaître la loi de R. Quelle est son espérance ? Quelle est sa variance ?

Solution.

1°/ Loi de $X - Y$.

La fonction caractéristique d'une variable de Gauss X d'espérance μ et de variance σ^2 (transformée de Fourier de la densité de probabilité) est :

$$\varphi_X(\alpha) = e^{i\alpha\mu} e^{-\frac{\alpha^2\sigma^2}{2}}$$

Si les variables X et Y sont indépendantes, les variables X et $-Y$ sont indépendantes aussi (de même que toute fonction de X seulement est indépendante de toute fonction de Y).
La fonction caractéristique d'une somme de variables indépendantes est le produit des fonctions caractéristiques des variables.
Si Y suit une loi de Gauss d'espérance μ' et de variance σ'^2, $-Y$ suit la loi symétrique par rapport à 0 : c'est encore un loi de Gauss, d'espérance $-\mu'$ et de variance σ'^2.
La fonction caractéristique de $-Y$ est :

$$\varphi_{-Y}(\alpha) = e^{-i\alpha\mu'} e^{-\frac{\alpha^2\sigma'^2}{2}}$$

La fonction caractéristique de $X - Y$ est donc :

$$\varphi_{X-Y}(\alpha) = \varphi_X(\alpha)\,\varphi_{-Y}(\alpha) = e^{i\alpha(\mu-\mu')} e^{-\frac{\alpha^2(\sigma^2+\sigma'^2)}{2}}$$

Et ce résultat montre que $X - Y$ suit une loi de Gauss d'espérance $E(X) - E(Y) = \mu - \mu'$, et de variance $Var(X) + Var(Y) = \sigma^2 + \sigma'^2$.

En particulier, ici, $\mu = \mu' = 0$, $\sigma^2 = \sigma'^2 = \frac{1}{2}$.

$X - Y$ suit une loi de Gauss d'espérance 0 (centrée) et de variance 1 (réduite).

2°/ Loi de *R*.

$R = \sqrt{X^2 + Y^2}$ ne peut prendre que des valeurs positives.
Pour $r \leq 0$, la probabilité $P(R < r)$ est donc nulle.
Lorsque r est > 0, La probabilité $P(R < r)$ est donnée par l'intégrale double de la densité de probabilité étendue au domaine D défini par $R < r$:

$$P(R < r) = \iint_D f(x, y)\, dx\, dy$$

La densité de probabilité conjointe est le produit des densité marginales puisque les variables X et Y sont indépendantes :

$$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} \times \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-y^2} = \frac{1}{\pi} e^{-(x^2 + y^2)}$$

$$P(R < r) = \frac{1}{\pi} \iint_D e^{-(x^2 + y^2)}\, dx\, dy$$

Pour calculer l'intégrale, passons en coordonnées polaires du plan : $x = \rho \cos\theta$, $y = \rho \sin\theta$.
L'intégrale devient :

$$P(R < r) = \frac{1}{\pi} \int_0^r \rho\, e^{-\rho^2}\, d\rho \times \int_{-\pi}^{+\pi} d\theta = \int_0^{r^2} e^{-u}\, du = 1 - e^{-r^2}$$

En résumé :

$$P(R < r) = \begin{cases} 0 & \text{pour } r < 0 \\ 1 - e^{-r^2} & \text{pour } r > 0 \end{cases}$$

La densité de probabilité s'obtient par dérivation :

$$f_R(r) = \begin{cases} 0 & \text{pour } r < 0 \\ 2r\, e^{-r^2} & \text{pour } r > 0 \end{cases}$$

3°/ Espérance et variance de *R*.

$\sqrt{2}\, X$ et $\sqrt{2}\, Y$ sont des variables de Gauss centrées réduites.
$2(X^2 + Y^2)$ est la somme des carrés de deux variables de Gauss centrées réduites indépendantes : c'est une variable de Khi-deux à deux degrés de liberté, donc une variable exponentielle de paramètre $\frac{1}{2}$.

$\sqrt{2}\, R$ est donc la racine carrée d'une variable exponentielle de paramètre $\frac{1}{2}$.

R est le produit par $\frac{\sqrt{2}}{2}$, de la racine carrée d'une variable exponentielle de paramètre $\frac{1}{2}$.

L'espérance de R est :

$$E(R) = 2\int_0^{\infty} r^2 e^{-r^2}\, dr$$

Pour calculer l'intégrale, posons $r^2 = u$, $dr = \frac{1}{2\sqrt{u}}\, du$,

$$E(R) = \int_0^{\infty} \sqrt{u}\, e^{-u}\, du = \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\boxed{E(R) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.}$$

$$E(R^2) = E(X^2 + Y^2) = E(X^2) + E(Y^2) = Var(X) + Var(Y) = 1$$

La variance de R est $Var(R) = E(R^2) - (E(R))^2$:

$$\boxed{Var(R) = 1 - \frac{\pi}{4}}$$

Exercices

Loi Gamma.

1. **Définition**.
2. **Fonction caractéristique**.
3. **Espérance et variance**.
4. **Interprétation : loi du Khi-deux, loi exponentielle, loi d'Erlang**.

Loi d'Erlang.

Loi Gamma.

HAUT

1. Définition.

On dit qu'une variable aléatoire réelle à densité X suit une **loi Gamma de paramètres λ et *a*** (λ et a étant des réels > 0) si, et seulement si, sa densité de probabilité est donnée par la formule :

$$f_{(\lambda, a)}(x) = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-\lambda x}, \; x \geq 0.$$

Cette relation est notée $X \rightsquigarrow \Gamma_{(\lambda, a)}$.

Dans cette formule, Γ est la **fonction Gamma d'Euler** définie par :

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-u} u^{x-1} du.$$

HAUT

2. Fonction caractéristique.

HAUT

La fonction caractéristique de la loi Gamma de paramètres λ et a est :

$$\left(1 - i\frac{u}{\lambda}\right)^a$$

En obtient une fonction du même type en multipliant des fonctions de ce type avec le même λ.
Il en résulte qu'une somme finie de variables aléatoires indépendantes de lois Gamma ayant le même paramètre λ, est encore une variable aléatoire de loi Gamma.

Par exemple, toutes les variables de χ^2 ont le même $\lambda = \frac{1}{2}$, donc la somme d'une nombre fini de variables de χ^2 est encore une variable de χ^2.

3. Espérance et variance.

HAUT

Si X est une variable aléatoire **de loi Gamma de paramètres λ et a** :

$$E(X) = \frac{a}{\lambda}.$$
$$Var(X) = \frac{a}{\lambda^2}.$$

[On l'obtient facilement par la fonction caractéristique.]

HAUT

4. Interprétation de la loi Gamma.

HAUT

1°/ La loi Gamma de paramètres $\lambda = \frac{1}{2}$ et $a = \frac{\nu}{2}$, $\nu \in \mathbb{N}^*$, s'appelle **loi du χ^2 de Karl Pearson à ν degrés de liberté** : c'est la loi de probabilité de la **somme des carrés de ν variables normales centrées réduites indépendantes** entre elles.
Sa densité de probabilité est :

$$f(x) = \frac{2^{-\frac{\nu}{2}}}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} x^{\frac{\nu}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}, \; x > 0.$$

2°/ La loi Gamma de paramètres $\lambda > 0$ et $a = 1$, s'appelle la **loi exponentielle de paramètre λ**.
Sa densité de probabilité est :

$$f(x) = \lambda\, e^{-\lambda x}, \; x > 0.$$

Ainsi, pour $\nu = 2$, la loi du χ^2 de Karl Pearson à 2 degrés de liberté est une loi exponentielle de paramètre $\lambda = \frac{1}{2}$.

3°/ La loi Gamma de paramètres $\lambda > 0$ et $a = n$ entier ≥ 1, est la loi de probabilité de la **somme de *n* variables aléatoires indépendantes de même loi exponentielle** de paramètre λ.

4°/ La loi Gamma de paramètres $\lambda = 1$ et $a = n + 1$, entier, s'appelle **loi d'Erlang** de paramètre *n*. Elle est liée à la loi de Poisson. Sa densité de probabilité est :

$$f(x) = \frac{1}{n!} x^n e^{-x}, \; x \geq 0.$$

HAUT

Loi d'Erlang

HAUT

Lorsque a est un entier $n + 1$, et lorsque $\lambda = 1$, la loi Gamma s'écrit :

$$f_{(1,\,n+1)}(x) = \frac{1}{n!}\,x^n\,e^{-x},\ x \geq 0.$$

C'est ce qu'on appelle la **loi d'Erlang** de paramètre n.
Sa fonction de répartition est :

$$F_X(x) = \frac{1}{n!}\int_0^x u^n\,e^{-u}\,du.$$

Si l'on considère la **variable de Poisson *Y* de paramètre *x***, on a :

$$P\,[Y > n] = F_X(x)$$

Pour le démontrer, on établit d'abord, par récurrence, la formule :

$$e^{-u}\frac{u^n}{n!} + \frac{d}{du}\left[\sum_{k=0}^{k=n} e^{-u}\frac{u^k}{k!}\right] = 0$$

On pose $F_n(u) = e^{-u}\frac{u^n}{n!}$ et $S_n(u) = \sum_{k=0}^{k=n} e^{-u}\frac{u^k}{k!}$.
L'hypothèse de récurrence est : $F_n(u) + S'_n(u) = 0$
On a :

$$S_{n+1}(u) = F_{n+1}(u) + S_n(u)$$
$$S'_{n+1}(u) = F'_{n+1}(u) + S'_n(u)$$
$$F'_{n+1}(u) = \frac{d}{du}\left[e^{-u}\frac{u^{n+1}}{(n+1)!}\right] = e^{-u}\frac{u^n}{n!} - e^{-u}\frac{u^{n+1}}{(n+1)!} = F_n(u) - F_{n+1}(u)$$
$$S'_{n+1}(u) = F_n(u) - F_{n+1}(u) + S'_n(u)$$
$$S'_{n+1}(u) = -F_{n+1}(u)$$
$$F_{n+1}(u) + S'_{n+1}(u) = 0$$

La formule de l'hypothèse de récurrence est donc vraie pour $n + 1$ dès qu'elle est vraie pour n.
Comme elle est vraie de façon évidente pour $n = 0$, elle est vraie pour tout entier naturel n.

Il résulte de cette formule, par intégration, que la fonction de répartition de la **variable de Poisson** de paramètre $u > 0$ est donnée par :

$$S_n(u) = \sum_{k=0}^{k=n} e^{-u}\frac{u^k}{k!} = 1 - \frac{1}{n!}\int_0^u x^n\,e^{-x}\,dx$$

Donc, si Y suit une loi de Poisson de paramètre u :

$$P(Y > n) = \frac{1}{n!}\int_0^u x^n e^{-x}\, dx = = F_X(u)$$

HAUT

Chapitre 16. Loi Gamma.

Exercices

Exercice 1. Loi Gamma.
Exercice 2. Maximum de deux variables exponentielles.

Exercice 1. Loi Gamma.

On considère la loi de probabilité Gamma de paramètres λ et a, dont la densité de probabilité est :

$$f_{(\lambda, a)}(x) = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-\lambda x}, \; x \geq 0.$$

formule dans laquelle $\Gamma(a)$ est défini par l'intégrale

$$\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} u^{a-1} e^{-u} \, du.$$

1°/ Calculer la fonction caractéristique de la loi Gamma.
2°/ Calculer l'espérance et la variance de cette loi :
— à partir de la fonction caractéristique ;
— directement à partir de la densité de probabilité.

Solution

HAUT

Exercice 2. Maximum de deux variables exponentielles.

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle de paramètres respectifs a et b. On note M le maximum de X et Y, c'est-à-dire la variable aléatoire telle que :

$$M(\omega) = \begin{cases} Y(\omega) & \text{si } \omega \text{ est tel que } Y(\omega) \geq X(\omega) \\ X(\omega) & \text{si } \omega \text{ est tel que } X(\omega) \geq Y(\omega) \end{cases}$$

1°/ Déterminer la fonction de répartition F de M.
2°/ Quelle est la loi de M ?
3°/ Calculer $P(X = Y)$ et $P(M = X)$.

Solution

HAUT

Chapitre 16. Loi Gamma.

Enoncés.

Exercice 1. Loi Gamma.

On considère la loi de probabilité Gamma de paramètres λ et *a*, dont la densité de probabilité est :

$$f_{(\lambda,\, a)}(x) = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} x^{a-1}\, e^{-\lambda x},\ x \geq 0.$$

formule dans laquelle Γ (*a*) est défini par l'intégrale

$$\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} u^{a-1}\, e^{-u}\, du.$$

1°/ Calculer la fonction caractéristique de la loi Gamma.
2°/ Calculer l'espérance et la variance de cette loi :
— à partir de la fonction caractéristique ;
— directement à partir de la densité de probabilité.

Solution.

1°/ Fonction caractéristique.

Pour la loi de probabilité Gamma de paramètres λ et *a*, la densité de probabilité est :

$$f_{(\lambda,\, a)}(x) = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} x^{a-1}\, e^{-\lambda x},\ x \geq 0.$$

où Γ (*a*) est défini par l'intégrale $\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} u^{a-1}\, e^{-u}\, du$ (fonction Gamma d'Euler)

Prenons λ = *a* et *a* = α.

$$f_{(a,\, \alpha)}(x) = \frac{a^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1}\, e^{-a x},\ x \geq 0.$$

La théorie de Cauchy des fonctions complexes, ou la théorie de l'intégration curviligne sur un lacet, permet de calculer :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1}\, e^{-a x}\, e^{-2 i \pi \lambda x}\, dx = \left(\frac{1}{a + 2 i \pi \lambda} \right)^{\alpha}$$

(Laurent Schwartz, *Méthodes mathématiques pour les sciences physiques*, Hermann, Paris, 1961, p.205-207).
D'où il résulte, en remplaçant 2 π λ par – *u* :

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}\, e^{-a\,x}\, e^{i\,u\,x}\, dx = \left(\frac{1}{a - i\,u}\right)^{\alpha}$$

La fonction caractéristique de la loi Gamma de paramètres λ et *a* est donc :

$$C\,f_{(\lambda,\,a)}(u) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - i\,u}\right)^{a} = \left(1 - i\,\frac{u}{\lambda}\right)^{-a} = \frac{\lambda^{a}}{(\lambda - i\,u)^{a}}$$

$$\boxed{C\,f_{(\lambda,\,a)}(u) = \frac{\lambda^{a}}{(\lambda - i\,u)^{a}}}$$

Remarque : par symétrie, on obtient, en changeant *u* en – *u* et *x* en – *x* :

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{-\infty}^{+\infty} |\,x\,|^{\alpha-1}\, e^{-a\,|x|}\, e^{i\,u\,x}\, dx = \left(\frac{1}{a + i\,u}\right)^{\alpha} + \left(\frac{1}{a - i\,u}\right)^{\alpha}.$$

formule qui permet de calculer, pour α = 1, la fonction caractéristique de la loi exponentielle symétrique.
$$\frac{1}{2\,a}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a\,|x|}\, e^{i\,u\,x}\, dx = \frac{1}{a^2 + u^2}.$$
Et la formule de réciprocité permettra de calculer la fonction caractéristique de la loi de Cauchy.

2°/ Espérance et variance.

a) Calcul à partir de la fonction caractéristique.

Les premiers termes du développement en série de Taylor de

$$C\,f_{(\lambda,\,a)}(u) = \left(1 - i\,\frac{u}{\lambda}\right)^{-a}$$

sont :

$$\begin{aligned} C\,f_{(\lambda,\,a)}(u) &= 1 + i\,\frac{u}{\lambda}\,a + \frac{1}{2}(-a)(-a-1)\left(-i\,\frac{u}{\lambda}\right)^2 + o\,(u^3) \\ &= 1 + i\,\frac{u}{\lambda}\,a - \frac{1}{2}a\,(a+1)\,\frac{u^2}{\lambda^2} + o\,(u^3) \end{aligned}$$

Les premiers moments de la loi Gamma sont donc :

$$m_1 = \frac{a}{\lambda} \text{ et } m_2 = \frac{a(a+1)}{\lambda^2}$$

D'où l'espérance et la variance d'une variable aléatoire *X* de loi Gamma :

$$E(X) = m_1 = \frac{a}{\lambda}$$
$$Var(X) = m_2 - m_1^2 = \frac{a}{\lambda^2}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} E(X) = \frac{a}{\lambda} \\ Var(X) = \frac{a}{\lambda^2} \end{array}}$$

b) Calcul direct à partir de la densité de probabilité.

Bien entendu, on peut aussi calculer directement ces paramètres à partir de la densité de probabilité.
Le moment d'ordre n, $n \in \mathbb{N}$, est donné par :

$$m_n = E(X^n) = \int_0^{+\infty} x^n \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-\lambda x}\, dx$$
$$= \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} \int_0^{+\infty} x^{n+a-1} e^{-\lambda x}\, dx$$

Pour calculer l'intégrale, faisons le changement de variable $y = \lambda x$. $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$.

$$\int_0^{+\infty} x^{n+a-1} e^{-\lambda x}\, dx = \int_0^{+\infty} x^{n+a} e^{-\lambda x} \frac{dx}{x}$$
$$= \int_0^{+\infty} \left(\frac{y}{\lambda}\right)^{n+a} e^{-y} \frac{dy}{y}$$
$$= \lambda^{-n-a} \int_0^{+\infty} y^{n+a-1} e^{-y}\, dy$$

$$m_n = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} \lambda^{-n-a} \Gamma(n+a) = \frac{1}{\lambda^n} \frac{\Gamma(n+a)}{\Gamma(a)}$$

Pour $n = 0$, on obtient $m_0 = \int_0^{+\infty} f_{(\lambda, a)}(x)\, dx = 1$.

La formule de récurrence $\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$ donne, pour $n \geq 1$:

$$\Gamma(a+1) = a\,\Gamma(a)$$
$$\Gamma(a+2) = (a+1)\,\Gamma(a+1)$$
...
$$\Gamma(a+n) = (a+n-1)\,\Gamma(a+n-1)$$

Après multiplication membre à membre et simplification, il reste :

$$\Gamma(a+n) = a\,(a+1) \ldots (a+n-1)\,\Gamma(a)$$

D'où :

$$\boxed{\phantom{m_n = \frac{\Gamma(n+a)}{\lambda^n \Gamma(a)}}}$$

$$\boxed{m_n = \frac{1}{\lambda^n} a\,(a+1)\,...\,(a+n-1),\ n \in \mathbb{N}^*.}$$

En particulier :

— pour $n = 1$, $m_1 = E(X) = \frac{a}{\lambda}$,

— pour $n = 2$, $m_2 = E(X^2) = \frac{a(a+1)}{\lambda^2}$,

et on retrouve $Var(X) = m_2 - m_1^2 = \frac{a}{\lambda^2}$.

Chapitre 16. Loi Gamma.

Enoncés.

Exercice 2. Minimum de deux variables exponentielles.

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle de paramètres respectifs a et b. On note M le maximum de X et Y, c'est-à-dire la variable aléatoire telle que :

$$M(\omega) = \begin{cases} Y(\omega) & \text{si } \omega \text{ est tel que } Y(\omega) \geq X(\omega) \\ X(\omega) & \text{si } \omega \text{ est tel que } X(\omega) \geq Y(\omega) \end{cases}$$

1°/ Déterminer la fonction de répartition F de M.
2°/ Quelle est la loi de M ?
3°/ Calculer $P(X = Y)$ et $P(M = Y)$.

Solution (*).

La **loi exponentielle** de paramètre $\lambda > 0$ est une **loi Gamma** de paramètres λ et 1.

1°/ Fonction de répartition.

Dire que $M(\omega)$ est inférieur ou égal à m, c'est dire que $X(\omega)$ est inférieur ou égal à m et $Y(\omega)$ est inférieur ou égal à m :

$$F(m) = P(M \leq m) = P(X \leq m \text{ et } Y \leq m).$$

Comme X et Y sont indépendantes, la probabilité de ($X \leq m$ et $Y \leq m$) est le produit des probabilités $P(X \leq m)$ et $P(Y \leq m)$.
X est une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre a (nécessairement > 0) :
— sa densité de probabilité est $f_X(x) = a\, e^{-a x}\, 1_{\mathbb{R}^+}(x)$
— sa fonction de répartition est $F_X(x) = (1 - e^{-a x})\, 1_{\mathbb{R}^+}(x)$
Y est une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre b (nécessairement > 0) :
— sa densité de probabilité est $f_Y(y) = b\, e^{-b y}\, 1_{\mathbb{R}^+}(y)$
— sa fonction de répartition est $F_Y(y) = (1 - e^{-b y})\, 1_{\mathbb{R}^+}(y)$.
On obtient donc :

$$F(m) = P(M \leq m) = P(X \leq m) \times P(Y \leq m) = F_X(m) \times F_Y(m) = (1 - e^{-a m})\, 1_{\mathbb{R}^+}(m) \times (1 - e^{-b m})\, 1_{\mathbb{R}^+}(m)$$

$$\boxed{F(m) = (1 - e^{-a m})(1 - e^{-b m})\, 1_{\mathbb{R}^+}(m)}$$

2°/ Loi de probabilité.

La loi de probabilité de M est la dérivée (au sens des distributions) de la fonction de répartition.
Comme la fonction de répartition est continue, elle n'a pas de saut et la densité de probabilité (ou loi de probabilité) est, presque partout, la dérivée au sens des fonctions :

$$f(m) = [a\, e^{-a\,m}\,(1 - e^{-b\,m}) + b\, e^{-b\,m}\,(1 - e^{-a\,m})]\, \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(m)$$

$$\boxed{f(m) = [a\, e^{-a\,m} + b\, e^{-b\,m} - (a + b)\, e^{-(a+b)\,m})]\, \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(m)}$$

3°/ Probabilités.

Comme X et Y sont indépendantes, la loi conjointe de (X, Y) est le produit des lois marginales :

$$f(x, y) = f_X(x)\, f_Y(y) = a\, e^{-a\,x}\, b\, e^{-b\,y}\, \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x)\, \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(y)$$

L'événement $X = Y$ est la réunion des événements $X = k$ et $Y = k$, pour $k \in \mathbb{R}^+$.
Or l'ensemble $D = \{(k, k) \in \mathbb{R}^2 \mid k \in \mathbb{R}^+\}$ est un ensemble de mesure nulle.
Donc la probabilité de l'événement $X = Y$ est nulle, comme intégrale d'une fonction bornée étendue à un ensemble de mesure nulle :

$$P(X = Y) = \iint_D f(x, y)\, dx\, dy = 0$$

$$\boxed{P(X = Y) = 0}$$

L'événement $M = Y$ est l'événement $X \leq Y$.
La probabilité de l'événement $X \leq Y$ est l'intégrale double de $f(x, y)$ étendue au domaine D défini par $x \leq y$.

$$\begin{aligned} P(M = Y) &= \iint_D a\, e^{-a\,x}\, b\, e^{-b\,y}\, \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x)\, \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(y)\, dx\, dy \\ &= a \int_0^\infty e^{-a\,x} \left(\int_0^\infty b\, e^{-b\,y}\, dy \right) dx \\ &= a \int_0^\infty e^{-a\,x}\, e^{-b\,x}\, dx \\ &= \frac{a}{a+b} \end{aligned}$$

$$\boxed{P(M = Y) = \frac{a}{a+b}}$$

(*) Note : Merci à M. Abdellah QANNARI (Poitiers) d'avoir contribué à cet exercice.

Exercices

Loi du Khi deux.

1. Définition.
2. Espérance et variance.
3. Interprétation.
4. Utilisation de la table de la fonction de répartition.

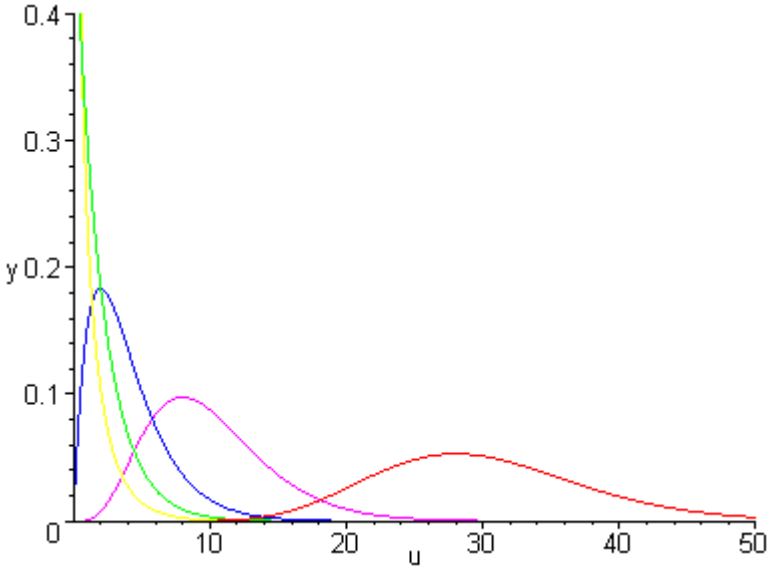
Loi du χ^2 de Karl Pearson.

HAUT

1. Définition.

On dit qu'une variable aléatoire réelle à densité *X* suit une **loi de probabilité du Khi deux à ν degrés de liberté** (ν entier > 0) si, et seulement si, sa densité de probabilité est donnée par la formule :

$$f_\nu(x) = \frac{2^{-\frac{\nu}{2}}}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{\nu}{2}-1},\ x > 0.$$



Cette relation est notée $X \rightsquigarrow \chi_\nu^2$.

Dans cette formule, Γ est la **fonction Gamma d'Euler** définie par :

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-u} u^{x-1}\, du.$$

Cette loi de probabilité est une **loi Gamma** de paramètres $\lambda = \frac{1}{2}$ et $a = \frac{\nu}{2}$, la loi Gamma étant définie par sa densité de probabilité :

$$f_{(\lambda, a)}(x) = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-\lambda x},\ x \geq 0.$$

On a représenté ci-dessus la loi du χ^2 pour diverses valeurs de ν, depuis $\nu = 1$ (loi en jaune), jusqu'à ν = 30 (rouge), en passant par ν = 2 (vert), $\nu = 4$ (bleu) et $\nu = 10$ (magenta).

Pour ν = 2, la loi du χ^2 à 2 degrés de liberté est une **loi exponentielle** de paramètre $\lambda = \frac{1}{2}$.

HAUT

2. Espérance et variance.

HAUT

Si X est une variable aléatoire **du χ^2 à ν degrés de liberté** :

$$E(X) = \nu.$$
$$Var(X) = 2\nu.$$

[En effet, le carré d'une variable normale centrée réduite a, pour espérance, 1, et pour variance 2.]

3. Interprétation de la loi du χ^2.

HAUT

La loi du χ^2 à ν degrés de liberté est la loi de probabilité de la **somme des carrés de ν variables normales centrées réduites indépendantes** entre elles.

La loi du χ^2 à 2 degrés de liberté est la **loi exponentielle** de paramètre $\lambda = \frac{1}{2}$.

La loi du χ^2 à ν degrés de liberté est la **loi Gamma** de paramètres $\lambda = \frac{1}{2}$ et $a = \frac{\nu}{2}$.

4. Utilisation de la table de la fonction de répartition.

HAUT

La table de la fonction de répartition donne la valeur de χ^2 pour laquelle la probabilité d'une valeur inférieure à χ^2 suivant le nombre n de degrés de liberté est $\alpha = F_n(\chi^2)$.

Pour les grandes valeurs de n, la loi de probabilité de χ^2 tend vers une loi normale de moyenne n et de variance $2n$.
Si n est suffisamment grand, la variable aléatoire $\sqrt{2\chi^2} - \sqrt{2n-1}$ suit, à peu près, une loi normale centrée réduite.

Chapitre 17. Loi du Khi deux.

Exercices

Exercice 1. Loi du Khi deux.
Exercice 2. Loi du Khi deux à 1 degré de liberté.
Exercice 3. Loi du Khi deux à 2 degrés de liberté.
Exercice 4. Somme de carrés de variables normales.

Exercice 1. Loi du Khi deux.

Notations.
On considère n variables aléatoires indépendantes X_j, $1 \leq j \leq n$, qui suivent toutes la même **loi normale centrée réduite**.
1°/ Calculer la loi de probabilité de la variable aléatoire $Y_1 = X_1^2$. Comment s'appelle cette loi ?
2°/ Calculer la fonction caractéristique de Y_1.
3°/ Soit $\chi^2 = \sum_{j=1}^{j=n} X_j^2$. Calculer la loi de probabilité de χ^2. Comment s'appelle cette loi ?
3°/ Calculer l'espérance mathématique et la variance de χ^2.

Solution

HAUT

Exercice 2. Loi du Khi deux à 1 degré de liberté.

On considère deux variables aléatoires X_1 et X_2 liées par la relation :

$X_1 + X_2 = m$, $m \in$ N*, et suivant une loi multinomiale :

$P\ [\ (X_1, X_2) = (k_1, k_2)\ ] = \frac{m!}{k_1!\,k_2!}\ {p_1}^{k_1}\ {p_2}^{k_2}$, avec $p_1 + p_2 = 1$.

On note $m\,p_1 = c_1$, $m\,p_2 = c_2$, $X = \frac{(X_1 - c_1)^2}{c_1} + \frac{(X_2 - c_2)^2}{c_2}$.

Solution

1°/ Dans quelle mesure la loi de probabilité de X peut-elle être considérée comme une loi de χ^2 ? Quel est alors son nombre de degrés de liberté ? Quelle est sa fonction de répartition ?

2°/ Calculer l'espérance mathématique et la variance de X.

HAUT

Exercice 3. Loi du Khi deux à 2 degrés de liberté.

On considère trois variables aléatoires X_1, X_2 et X_3 liées par la relation :

$X_1 + X_2 + X_3 = m$, $m \in$ N*, et suivant une loi multinomiale :

$P\ [\ (X_1, X_2, X_3) = (k_1, k_2, k_3)\ ] = \frac{m!}{k_1!\,k_2!\,k_3!}\, p_1^{k_1} p_2^{k_2} p_3^{k_3}$, avec $p_1 + p_2 + p_3 = 1$.

On note $m\,p_1 = c_1$, $m\,p_2 = c_2$, $m\,p_3 = c_3$, $X = \frac{(X_1 - c_1)^2}{c_1} + \frac{(X_2 - c_2)^2}{c_2} + \frac{(X_3 - c_3)^2}{c_3}$.

Solution

1°/ Montrer qu'on peut écrire X comme somme de carrés de deux variables aléatoires. Dans quelle mesure la loi de probabilité de X peut-elle être considérée comme une loi de χ^2 (sans démonstration) ? Quel est alors son nombre de degrés de liberté ? Quelle est sa fonction de répartition ?

2°/ Calculer l'espérance mathématique et la variance de X.

HAUT

Exercice 4. Somme de carrés de variables normales.

On considère n variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$ normales centrées réduites indépendantes, $n \in \mathbb{N}^*$, et leur moyenne empirique :

$$\overline{X} = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \ldots + X_n).$$

1°/ $n = 2$.

a) Montrer que $Y^2 = (X_1 - \overline{X})^2 + (X_2 - \overline{X})^2$ est le carré d'une variable aléatoire normale centrée réduite.

b) Quelle est sa loi de probabilité ?

c) Montrer que les variables aléatoires $\overline{X}$ et Y^2 sont indépendantes.

2°/ $n \geqslant 2$.

a) Montrer que $Y^2 = \sum_{i=1}^{i=n} (X_i - \overline{X})^2$ est somme des carrés de $n - 1$ variables aléatoires normales centrées réduites.

b) Quelle est sa loi de probabilité ?

c) Montrer que les variables aléatoires $\overline{X}$ et Y^2 sont indépendantes.

Solution

HAUT

Chapitre 17. Loi du Khi deux.

Enoncés.

Exercice 1. Loi du Khi deux.

Notations.
On considère n variables aléatoires indépendantes X_j, $1 \leq j \leq n$, qui suivent toutes la même **loi normale centrée réduite**.
1°/ Calculer la loi de probabilité de la variable aléatoire $Y = X_1^2$. Comment s'appelle cette loi ?
2°/ Calculer la fonction caractéristique de Y.
3°/ Soit $\chi^2 = \sum_{j=1}^{j=n} X_j^2$. Calculer la loi de probabilité de χ^2. Comment s'appelle cette loi ?
3°/ Calculer l'espérance mathématique et la variance de χ^2.

Solution.

1°/ Loi de probabilité de *Y*.

La fonction de répartition G de Y est définie par $G(y) = P[Y < y]$.
Comme les valeurs de Y sont positives, $G(y)$ est nul lorsque y est négatif.
Donc la densité de probabilité de Y est nulle pour les valeurs négatives de Y.

Pour $y > 0$, $Y < y \Leftrightarrow X_1^2 < y \Leftrightarrow |X_1| < \sqrt{y}$.
$P[Y < y] = P[|X_1| < \sqrt{y}] = 2P[0 < X_1 < \sqrt{y}]$, puisque la loi de probabilité de X_1 est une loi normale symétrique.

$$P[Y < y] = 2\int_0^{\sqrt{y}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du.$$

Posons $u^2 = x$, $u = \sqrt{x}$, $du = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$.
Lorsque $u = 0$, $x = 0$. Lorsque $u = \sqrt{y}$, $x = y$.

$$P[Y < y] = 2\int_0^{y} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x}{2}} \frac{dx}{2\sqrt{x}} = \int_0^{y} \frac{2^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}} x^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{x}{2}} dx.$$

La fonction Γ d'Euler est définie par $\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{z-1} dx$, définie dans C pour $\Re(z) > 0$.

Pour $z = \frac{1}{2}$, $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} x^{-\frac{1}{2}} e^{-x} dx = 2\int_0^{\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}$ (intégrale de Gauss).

On peut donc écrire la densité de probabilité de Y sous la forme :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x \leq 0 \\ \dfrac{2^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} x^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{x}{2}} & \text{pour } x > 0 \end{cases}$$

On peut écrire aussi $f(x) = \dfrac{e^{-\frac{x}{2}}}{\sqrt{2\pi x}}$, $x > 0$.

C'est une **loi Gamma** de paramètres $\lambda = \frac{1}{2}$ et $a = \frac{1}{2}$.

Rappel : la **loi Gamma de paramètres λ et *a*** a, par définition, pour densité de probabilité :

$$f_{(\lambda, a)}(x) = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-\lambda x}, \; x \geq 0.$$

2°/ Fonction caractéristique.

La fonction caractéristique d'une variable aléatoire Y est, à peu de chose près, la transformée de Fourier de sa densité de probabilité f. Elle est définie par :

$$C f(t) = E(e^{itY}) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{itx} dx.$$

La fonction caractéristique d'une loi Gamma de paramètres λ et a est $\left(1 - i\frac{t}{\lambda}\right)^{-a}$

La loi de Y est une loi Gamma de paramètres $\lambda = \frac{1}{2}$ et $a = \frac{1}{2}$.

Donc :

La fonction caractéristique de Y est $(1 - 2it)^{-\frac{1}{2}}$.

3°/ Loi de probabilité de χ^2.

χ^2 est somme de n variables aléatoires indépendantes ayant la même loi que Y : sa fonction caractéristique est donc $(1 - 2it)^{-\frac{n}{2}}$.
On reconnaît la fonction caractéristique d'une **loi Gamma** de paramètres $\lambda = \frac{1}{2}$ et $a = \frac{n}{2}$.
Le théorème d'inversion de la transformation de Fourier donne alors le résultat :

La densité de probabilité de χ^2 est donnée par la **loi Gamma** de paramètres $\lambda = \frac{1}{2}$ et $a = \frac{n}{2}$:

$$f(x) = \frac{2^{-\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}, x \geq 0.$$

La loi Gamma de paramètres $\lambda = \frac{1}{2}$ et $a = \frac{n}{2}$ est appelée **loi de χ^2 à *n* degrés de liberté** ou **loi de Karl Pearson à *n* degrés de liberté**.

4°/ Espérance et variance.

Le développement en série de Taylor en 0 de la fonction caractéristique $F_{\chi^2}(t) = (1 - 2\,i\,t)^{-\frac{n}{2}}$ de χ^2 donne, pour ses premiers termes :

$$(1 - 2\,i\,t)^{-\frac{n}{2}} = 1 + n\,i\,t + \frac{1}{2!}\left(-\frac{n}{2}\right)\left(-\frac{n}{2}-1\right)(-2\,i\,t)^2 + o(t^3) = 1 + n\,i\,t - \frac{1}{2}\,n\,(n+2)\,t^2 + o(t^3)$$

et ce développement montre, par identification avec le développement
$E(e^{i\,t\,\chi^2}) = E\left(1 + i\,t\,\chi^2 + \frac{1}{2}(i\,t\,\chi^2)^2 + \ldots\right) = 1 + i\,t\,E(\chi^2) + \frac{1}{2}(i\,t)^2\,E((\chi^2)^2) + \ldots$.
$F_{\chi^2}(t) = 1 + i\,t\,E(\chi^2) - \frac{1}{2}\,E((\chi^2)^2)\,t^2 + \ldots$.
que :
$E(\chi^2) = -i\,F'_{\chi^2}(0) = n.$
$E((\chi^2)^2) = -F''_{\chi^2}(0) = n\,(n+2)$

— L'espérance mathématique de χ^2 est $E(\chi^2) = n$,
— La variance de χ^2 est $E((\chi^2)^2) - (E(\chi^2))^2 = n\,(n+2) - n^2 = 2\,n$.

$$E(\chi^2) = n.$$
$$Var(\chi^2) = 2\,n.$$

De façon générale, d'ailleurs, pour une loi Gamma de paramètres λ et a, l'espérance est $\frac{a}{\lambda}$ et la variance $\frac{a}{\lambda^2}$ (Chapitre 16, Exercice 1).
La loi du χ^2 à *n* degrés de liberté est une loi Gamma de paramètres $\lambda = \frac{1}{2}$ et $a = \frac{n}{2}$: on retrouve le même résultat.

Chapitre 17. Loi du Khi deux.

Enoncés.

Exercice 2. Loi du Khi deux à 1 degré de liberté.

On considère deux variables aléatoires X_1 et X_2 liées par la relation : $X_1 + X_2 = m$, $m \in$ N*, et suivant une loi multinomiale : $P\,[\,(X_1, X_2) = (k_1, k_2)\,] = \frac{m!}{k_1!\,k_2!}\,{p_1}^{k_1}\,{p_2}^{k_2}$, avec $p_1 + p_2 = 1$. On note $m\,p_1 = c_1$, $m\,p_2 = c_2$, $X = \frac{(X_1 - c_1)^2}{c_1} + \frac{(X_2 - c_2)^2}{c_2}$. 1°/ Dans quelle mesure la loi de probabilité de X peut-elle être considérée comme une loi de χ^2 ? Quel est alors son nombre de degrés de liberté ? Quelle est sa fonction de répartition ? 2°/ Calculer l'espérance mathématique et la variance de X.	

Solution.

1°/ Loi de probabilité de X.

$X_1 + X_2 = m = c_1 + c_2$

$X_2 - c_2 = -(X_1 - c_1)$

$X = (X_1 - c_1)^2 \left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} \right)$

$$= m \frac{(X_1 - c_1)^2}{c_1 c_2} = \frac{(X_1 - c_1)^2}{c_1 \left(1 - \frac{c_1}{m}\right)} = \frac{(X_1 - m p_1)^2}{m p_1 (1 - p_1)} = \left(\frac{X_1 - m p_1}{\sqrt{m p_1 (1 - p_1)}} \right)^2$$

Or la loi marginale de X_1 est une **loi binomiale**, de paramètres m et p_1.
Donc l'espérance mathématique de X_1 est $m\,p_1$ et sa variance est $m\,p_1\,(1 - p_1)$

X est donc le **carré de la variable centrée réduite** U correspondant à X_1 $X = U^2$.

On peut la considérer comme une loi de χ^2, c'est-à-dire comme la loi de probabilité d'une somme de carrés de variables normales centrées réduites, dans la mesure où la loi de X_1 peut être considérée comme une **loi normale**, c'est-à-dire si m est suffisamment grand et si $m\,p_1$ n'est ni trop grand, ni trop petit. Habituellement, on considère que ces conditions sont remplies si m est supérieur à 30 et $m\,p_1$ et $m\,p_2$ tous deux supérieurs à 5.

Dans ce cas, la loi de probabilité de X est une **loi de χ^2 à un degré de liberté**.

> Pour m supérieur à 30 et $m\,p_1$ et $m\,p_2$ tous deux supérieurs à 5,
> la loi de probabilité de X est approximativement une **loi de χ^2 à un degré de liberté**.

Sa densité de probabilité est une **loi Gamma** de paramètres $\lambda = \frac{1}{2}$ et $a = \frac{1}{2}$:

$$f(x) = \frac{e^{-\frac{x}{2}}}{\sqrt{2\pi x}} \quad (x > 0).$$

Sa fonction de répartition, nulle pour $x < 0$, est, pour $x > 0$:

$$F_{\chi^2}(x) = P[X < x] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x t^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{t}{2}}\, dt.$$

Posons $u = \sqrt{t}$, d'où $du = \frac{dt}{2\sqrt{t}}$.

$$F_{\chi^2}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{x}} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du,\ x > 0.$$

On retrouve la fonction de répartition liée à la loi normale centrée réduite : c'est normal, si l'on peut dire, puisque l'on a :
$P[X < x] = P[\,|U| < \sqrt{x}\,] = 2\,P[0 < U < \sqrt{x}\,]$.
Elle est liée à la fonction de répartition F de la variable normale centrée réduite par :
$F_{\chi^2}(x) = 2\,F(\sqrt{x}) - 1$

> $F_{\chi^2}(x) = 2\,F(\sqrt{x}) - 1$, F fonction de répartition de la variable normale centrée réduite.

2°/ Espérance et variance.

Pour une loi Gamma de paramètre λ et a, l'espérance est $\frac{a}{\lambda}$ et la variance $\frac{a}{\lambda^2}$ (Chapitre 16, Exercice 1).

Pour $\lambda = \frac{1}{2}$ et $a = \frac{1}{2}$, on obtient :

> $E(X) = 1$
> $Var(X) = 2$

Chapitre 17. Loi du Khi deux.

Enoncés.

Exercice 3. Loi du Khi deux à 2 degrés de liberté.

On considère trois variables aléatoires X_1, X_2 et X_3 liées par la relation :

$X_1 + X_2 + X_3 = m$, $m \in \mathbb{N}^*$, et suivant une loi multinomiale :

$P\,[\,(X_1, X_2, X_3) = (k_1, k_2, k_3)\,] = \dfrac{m!}{k_1!\,k_2!\,k_3!}\,p_1^{k_1}\,p_2^{k_2}\,p_3^{k_3}$, avec $p_1 + p_2 + p_3 = 1$.

On note $m\,p_1 = c_1$, $m\,p_2 = c_2$, $m\,p_3 = c_3$, $X = \dfrac{(X_1 - c_1)^2}{c_1} + \dfrac{(X_2 - c_2)^2}{c_2} + \dfrac{(X_3 - c_3)^2}{c_3}$.

1°/ Montrer qu'on peut écrire X comme somme de carrés de deux variables aléatoires. Dans quelle mesure la loi de probabilité de X peut-elle être considérée comme une loi de χ^2 (sans démonstration) ? Quel est alors son nombre de degrés de liberté ? Quelle est sa fonction de répartition ?

2°/ Calculer l'espérance mathématique et la variance de X.

Solution.

1°/ Loi de probabilité de X.

a) Réduction de X.

$$X = \frac{(X_1 - c_1)^2}{c_1} + \frac{(X_2 - c_2)^2}{c_2} + \frac{(X_3 - c_3)^2}{c_3}$$

Exprimons d'abord X en fonction de X_1 et X_2 seulement compte tenu de la relation :

$$X_1 + X_2 + X_3 = m = c_1 + c_2 + c_3$$

$$(X_3 - c_3) = -(X_1 - c_1) - (X_2 - c_2)$$

$$\frac{(X_3 - c_3)^2}{c_3} = \frac{1}{c_3}((X_1 - c_1) + (X_2 - c_2))^2 = \frac{(X_1 - c_1)^2}{c_3} + \frac{(X_2 - c_2)^2}{c_3} + \frac{2}{c_3}(X_1 - c_1)(X_2 - c_2)$$

$$X = (X_1 - c_1)^2\left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_3}\right) + (X_2 - c_2)^2\left(\frac{1}{c_2} + \frac{1}{c_3}\right) + \frac{2}{c_3}(X_1 - c_1)(X_2 - c_2)$$

La forme quadratique du deuxième membre a pour matrice :

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_3} & \frac{1}{c_3} \\ \frac{1}{c_3} & \frac{1}{c_2} + \frac{1}{c_3} \end{pmatrix}$$

$$X = {}^t\begin{pmatrix} X_1 - c_1 \\ X_2 - c_2 \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} X_1 - c_1 \\ X_2 - c_2 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de *M* sont les racines de l'équation :

$$\left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_3} - \lambda \right)\left(\frac{1}{c_2} + \frac{1}{c_3} - \lambda \right) - \frac{1}{{c_3}^2} = 0$$

$$\lambda^2 - \left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \frac{2}{c_3} \right)\lambda + \left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_3} \right)\left(\frac{1}{c_2} + \frac{1}{c_3} \right) - \frac{1}{{c_3}^2} = 0$$

Le discriminant de l'équation est :

$$\Delta = \left(\left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_3} \right) + \left(\frac{1}{c_2} + \frac{1}{c_3} \right) \right)^2 - 4\left(\left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_3} \right)\left(\frac{1}{c_2} + \frac{1}{c_3} \right) - \frac{1}{{c_3}^2} \right)$$
$$= \left(\left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_3} \right) - \left(\frac{1}{c_2} + \frac{1}{c_3} \right) \right)^2 + \frac{4}{{c_3}^2} = \left(\frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_2} \right)^2 + \frac{4}{{c_3}^2} > 0$$

La somme $\left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \frac{2}{c_3} \right)$ et le produit $\left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_3} \right)\left(\frac{1}{c_2} + \frac{1}{c_3} \right) - \frac{1}{{c_3}^2} = \frac{m}{c_1 c_2 c_3}$ des racines sont des nombres réels strictement positifs.
Les valeurs propres sont donc réelles, distinctes, et > 0 :

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \frac{2}{c_3} + \sqrt{\left(\frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_2} \right)^2 + \frac{4}{{c_3}^2}} \right)$$
$$\lambda_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \frac{2}{c_3} - \sqrt{\left(\frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_2} \right)^2 + \frac{4}{{c_3}^2}} \right)$$

Comme on a : $\frac{1}{c_2} + \frac{1}{c_3} - \lambda_2 = -\left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_3} - \lambda_1 \right)$, on peut prendre pour matrice de vecteurs propres **orthogonaux** :

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{c_3} & \frac{1}{c_2} + \frac{1}{c_3} - \lambda_2 \\ \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_3} - \lambda_1 & -\frac{1}{c_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{c_3} & -\left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_3} - \lambda_1 \right) \\ \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_3} - \lambda_1 & -\frac{1}{c_3} \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_3} - \lambda_1 = \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_3} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \frac{2}{c_3} + \sqrt{\left(\frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_2} \right)^2 + \frac{4}{{c_3}^2}} \right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_2} - \right.$$

$\sqrt{\left(\frac{1}{c_1}-\frac{1}{c_2}\right)^2+\frac{4}{{c_3}^2}}\Big) < 0.$

Le carré a^2 de la norme euclidienne a de ces vecteurs propres est : $a^2 = \frac{1}{{c_3}^2} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{c_1}-\frac{1}{c_2}-\sqrt{\left(\frac{1}{c_1}-\frac{1}{c_2}\right)^2+\frac{4}{{c_3}^2}}\right)^2$

Or $\left(\frac{1}{c_1}-\frac{1}{c_2}-\sqrt{\left(\frac{1}{c_1}-\frac{1}{c_2}\right)^2+\frac{4}{{c_3}^2}}\right)^2 = 2\left(\frac{1}{c_1}-\frac{1}{c_2}\right)^2+\frac{4}{{c_3}^2}-2\left(\frac{1}{c_1}-\frac{1}{c_2}\right)\sqrt{\left(\frac{1}{c_1}-\frac{1}{c_2}\right)^2+\frac{4}{{c_3}^2}}$

Donc $\frac{1}{{c_3}^2}+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{c_1}-\frac{1}{c_2}-\sqrt{\left(\frac{1}{c_1}-\frac{1}{c_2}\right)^2+\frac{4}{{c_3}^2}}\right)^2 = \frac{2}{{c_3}^2}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{c_1}-\frac{1}{c_2}-\sqrt{\left(\frac{1}{c_1}-\frac{1}{c_2}\right)^2+\frac{4}{{c_3}^2}}\right)\left(\frac{1}{c_1}-\frac{1}{c_2}\right)$

On peut donc prendre pour matrice (unitaire) de vecteurs propres **orthonormés** :

$$P = \frac{1}{a}\begin{pmatrix} -\frac{1}{c_3} & -\left(\frac{1}{c_1}+\frac{1}{c_3}-\lambda_1\right) \\ \frac{1}{c_1}+\frac{1}{c_3}-\lambda_1 & -\frac{1}{c_3} \end{pmatrix}$$

Le déterminant de P est $|P| = 1$.

L'inverse de P est la transposée de P : $P^{-1} = \frac{1}{a}\begin{pmatrix} -\frac{1}{c_3} & \frac{1}{c_1}+\frac{1}{c_3}-\lambda_1 \\ -\left(\frac{1}{c_1}+\frac{1}{c_3}-\lambda_1\right) & -\frac{1}{c_3} \end{pmatrix}$.

$$P^{-1}\begin{pmatrix} X_1-c_1 \\ X_2-c_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{a}\begin{pmatrix} -\frac{1}{c_3} & \frac{1}{c_1}+\frac{1}{c_3}-\lambda_1 \\ -\left(\frac{1}{c_1}+\frac{1}{c_3}-\lambda_1\right) & -\frac{1}{c_3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1-c_1 \\ X_2-c_2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{a}\begin{pmatrix} \frac{1}{c_3}(X_1-c_1)-\left(\frac{1}{c_1}+\frac{1}{c_3}-\lambda_1\right)(X_2-c_2) \\ \left(\frac{1}{c_1}+\frac{1}{c_3}-\lambda_1\right)(X_1-c_1)+\frac{1}{c_3}(X_2-c_2) \end{pmatrix}$$

La matrice $P^{-1}\,M\,P$ est la matrice diagonale des valeurs propres $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$.

$$X = ((X_1-c_1)\quad(X_2-c_2))\,P\,P^{-1}\,M\,P\,P^{-1}\begin{pmatrix} X_1-c_1 \\ X_2-c_2 \end{pmatrix} = {}^t\left(P^{-1}\begin{pmatrix} X_1-c_1 \\ X_2-c_2 \end{pmatrix}\right)(P^{-1}\,M\,P)\,P^{-1}\begin{pmatrix} X_1-c_1 \\ X_2-c_2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\lambda_1}{a^2}\left(\frac{1}{c_3}(X_1-c_1)-\left(\frac{1}{c_1}+\frac{1}{c_3}-\lambda_1\right)(X_2-c_2)\right)^2+\frac{\lambda_2}{a^2}\left(\left(\frac{1}{c_1}+\frac{1}{c_3}-\lambda_1\right)(X_1-c_1)+\frac{1}{c_3}(X_2-c_2)\right)^2$$

Et comme les valeurs propres λ_1 et λ_2 sont strictement positives, on a mis X sous forme de somme de deux carrés de variables aléatoires Y_1 et Y_2 combinaisons linéaires des variables centrées $(X_1 - c_1)$ et $(X_2 - c_2)$:

$$\boxed{X = {Y_1}^2 + {Y_2}^2}$$

avec :

$$Y_1 = \frac{\sqrt{\lambda_1}}{a}\left(\frac{1}{c_3}(X_1 - c_1) - \left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_3} - \lambda_1\right)(X_2 - c_2)\right),$$

$$Y_2 = \frac{\sqrt{\lambda_2}}{a}\left(\left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_3} - \lambda_1\right)(X_1 - c_1) + \frac{1}{c_3}(X_2 - c_2)\right).$$

$$\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_3} - \lambda_1 = -\frac{1}{2}\left(\sqrt{\left(\frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_2}\right)^2 + \frac{4}{{c_3}^2}} - \left(\frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_2}\right)\right)$$

$$\lambda_1 \lambda_2 = \frac{m}{c_1 c_2 c_3}$$

b) Loi de χ^2.

X peut être considérée comme une **variable de χ^2 à deux degrés de liberté** dans la mesure où Y_1 et Y_2 peuvent être considérées comme des variables aléatoires normales centrées réduites indépendantes, ce qui se produira lorsque m est assez grand (supérieur à 30) avec c_1, c_2, c_3, supérieurs à 5 (admis ici sans démonstration).

D'après les résultats de l'Exercice 1, sa densité de probabilité est une **loi Gamma** de paramètres $\lambda = \frac{1}{2}$ et $a = 1$: $f(x) = \frac{1}{2} e^{-\frac{x}{2}}$, $x \geq 0$.

C'est donc une **loi exponentielle** de paramètre $\lambda = \frac{1}{2}$.

Sa fonction de répartition est $F(x) = \frac{1}{2}\int_0^x e^{-\frac{t}{2}}\, dt = 1 - e^{-\frac{x}{2}}$, $x \geq 0$.

$$\boxed{F(x) = 1 - e^{-\frac{x}{2}},\ x \geq 0.}$$

2°/ Espérance et variance.

Pour une loi Gamma de paramètres λ et a, l'espérance est $\frac{a}{\lambda}$ et la variance $\frac{a}{\lambda^2}$ (Chapitre 16, Exercice 1).

Pour $a = 1$ et $\lambda = \frac{1}{2}$, nous obtenons :

$$\boxed{E(X) = 2,\ Var(X) = 4.}$$

Chapitre 17. Loi du Khi deux.

Enoncés.

Exercice 4. Somme de carrés de variables normales.

On considère n variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$ normales centrées réduites indépendantes, $n \in \mathbb{N}^*$, et leur moyenne empirique :

$$\overline{X} = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \ldots + X_n).$$

1°/ $n = 2$.

a) Montrer que $Y^2 = (X_1 - \overline{X})^2 + (X_2 - \overline{X})^2$ est le carré d'une variable aléatoire normale centrée réduite.

b) Quelle est sa loi de probabilité ?

c) Montrer que les variables aléatoires $\overline{X}$ et Y^2 sont indépendantes.

2°/ $n \geqslant 2$.

a) Montrer que $Y^2 = \sum_{i=1}^{i=n} (X_i - \overline{X})^2$ est somme des carrés de $n - 1$ variables aléatoires normales centrées réduites.

b) Quelle est sa loi de probabilité ?

c) Montrer que les variables aléatoires $\overline{X}$ et Y^2 sont indépendantes.

Solution.

1°/ $n = 2$.

a) Variable Y^2.

$$Y^2 = (X_1 - \overline{X})^2 + (X_2 - \overline{X})^2$$

$$\overline{X} = \frac{1}{2}(X_1 + X_2)$$

$$Y^2 = \frac{1}{2}(X_1 - X_2)^2$$

Comme X_1 et X_2 sont des variables normales centrées réduites, $Y = \frac{X_1 - X_2}{\sqrt{2}}$ est une variable normale centrée réduite, de sorte que $(X_1 - \overline{X})^2 + (X_2 - \overline{X})^2 = Y^2$ est le carré d'une variable normale centrée réduite.

b) Loi de χ^2.

Y^2, carré d'une variable normale centrée réduite, est une **variable de χ^2 à un degré de liberté**,

d'après les résultats de l'Exercice 1 (1°).
Sa densité de probabilité est une **loi Gamma** de paramètres $\lambda = \frac{1}{2}$ et $a = \frac{1}{2}$. On peut l'écrire :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x \leq 0 \\ \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x}{2}} & \text{pour } x > 0 \end{cases}$$

c) Indépendance de $\overline{X}$ et Y^2.

1) Indépendance des variables $(X_1 + X_2)$ et $(X_1 - X_2)$.

La densité de probabilité conjointe des variables $(X_1 + X_2)$ et $(X_1 - X_2)$ est la transformée de Fourier inverse de la fonction caractéristique conjointe (**formule de réciprocité**).

$$f_{(X_1 + X_2, X_1 - X_2)}(u, v) = \iint_{\mathbb{R}^2} \varphi_{(X_1 + X_2, X_1 - X_2)}(\alpha, \beta)\, e^{-i(\alpha u + \beta v)}\, d\alpha\, d\beta$$
$$= \iint_{\mathbb{R}^2} \varphi_{X_1}(\alpha + \beta)\, \varphi_{X_2}(\alpha - \beta)\, e^{-i(\alpha u + \beta v)}\, d\alpha\, d\beta$$

En effet, on a toujours, lorsque X_1 et X_2 sont indépendantes :
$\varphi_{(X_1 + X_2, X_1 - X_2)}(\alpha, \beta) = E(e^{i(\alpha (X_1 + X_2) + \beta (X_1 - X_2))}) = E(e^{i(\alpha + \beta) X_1 + i(\alpha - \beta) X_2})$
$= \varphi_{(X_1, X_2)}(\alpha + \beta, \alpha - \beta) = \varphi_{X_1}(\alpha + \beta)\, \varphi_{X_2}(\alpha - \beta)$

Lorsqu'on pose :

$$x = \frac{u+v}{2}$$
$$y = \frac{u-v}{2}$$

l'intégrale s'écrit :

$$f_{(X_1 + X_2, X_1 - X_2)}(u, v) = \iint_{\mathbb{R}^2} \varphi_{X_1}(\alpha + \beta)\, \varphi_{X_2}(\alpha - \beta)\, e^{-i(\alpha (x+y) + \beta (x-y))}\, d\alpha\, d\beta$$
$$= \iint_{\mathbb{R}^2} \varphi_{X_1}(\alpha + \beta)\, \varphi_{X_2}(\alpha - \beta)\, e^{-i((\alpha + \beta) x + (\alpha - \beta) y)}\, d\alpha\, d\beta$$

Faisons le changement de variables :

$$s = \alpha + \beta$$
$$t = \alpha - \beta$$

Le déterminant de la matrice jacobienne $\frac{D(\alpha, \beta)}{D(s, t)}$ du changement de variables est $-\frac{1}{2}$.
Le théorème du changement de variables donne :

$$f_{(X_1 + X_2, X_1 - X_2)}(u, v) = \frac{1}{2} \iint_{\mathbb{R}^2} \varphi_{X_1}(s)\, \varphi_{X_2}(t)\, e^{-i(s x + t y)}\, ds\, dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \varphi_{X_1}(s)\, e^{-isx}\, ds \int_{\mathbb{R}} \varphi_{X_2}(t)\, e^{-ity}\, dt$$

$$= \frac{1}{2} f_{X_1}(x)\, f_{X_1}(y)$$

$$= \frac{1}{2} f_{X_1}\left(\frac{u+v}{2}\right) f_{X_2}\left(\frac{u-v}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{4\pi}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u+v}{2}\right)^2}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u-v}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{4\pi} e^{-\frac{1}{4}(u^2+v^2)}$$

$$= \left(\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\, e^{-\frac{u^2}{4}}\right) \times \left(\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\, e^{-\frac{v^2}{4}}\right)$$

Or $(X_1 + X_2)$ et $(X_1 - X_2)$ sont des variables aléatoires centrées de variance 2, donc leurs densités de probabilité sont de la forme $\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\, e^{-\frac{t^2}{4}}$ et il vient :

$$\boxed{f_{(X_1+X_2, X_1-X_2)}(u, v) = f_{X_1+X_2}(u) \times f_{X_1-X_2}(v)}$$

Cette relation montre $(X_1 + X_2)$ et $(X_1 - X_2)$ sont indépendantes.

2) Indépendance de $\overline{X}$ et Y^2.

De l'indépendance de $(X_1 + X_2) = 2\ \overline{X}$ et $(X_1 - X_2) = \sqrt{2}\ Y$, va résulter l'indépendance de $\overline{X}$ et de Y^2.

En effet, la fonction de répartition conjointe du couple $(\overline{X}, Y^2)$ est donnée par :

$$F_{(\overline{X},Y^2)}(x, y) = Pr\,[\overline{X} < x \text{ et } Y^2 < y\,] = Pr\,[(X_1 + X_2) < 2x \text{ et } (X_1 - X_2) = 2\ Y^2 < 2y\,]$$

L'indépendance de $(X_1 + X_2)$ et $(X_1 - X_2)$ entraîne que cette probabilité est égale à :

$Pr\,[(X_1 + X_2) < 2x] \times Pr\,[(X_1 - X_2) = 2\ Y^2 < 2y] = Pr\,[\overline{X} < x] \times Pr\,[Y^2 < y] = F_{\overline{X}}(x)\, F_{Y^2}(y)$.

La relation $F_{(\overline{X},Y^2)}(x, y) = F_{\overline{X}}(x)\, F_{Y^2}(y)$ donne, par dérivation partielle par rapport à x et à y:

$$\frac{\partial^2}{\partial x\, \partial y}(F_{(\overline{X},Y^2)}(x, y)) = f_{(\overline{X},Y^2)}(x, y) = f_{\overline{X}}(x)\, f_{Y^2}(y)$$

et cette relation $f_{(\overline{X},Y^2)}(x, y) = f_{\overline{X}}(x)\, f_{Y^2}(y)$ est la définition-même de l'indépendance des variables $\overline{X}$ et Y^2.

2°/ $n \geqslant 2$.

a) Variable Y^2 .

$$Y^2 = \sum_{i=1}^{i=n} (X_i - \overline{X})^2$$

En développant les carrés et en tenant compte de la définition de $\overline{X}$, avec $\sum_{i=1}^{i=n} X_i = n\overline{X}$, on obtient tout de suite :

$$Y^2 = \sum_{i=1}^{i=n} X_i{}^2 - n\overline{X}^2$$

Remplaçons $\overline{X}$ par $\frac{1}{n}(X_1 + X_2 + ... + X_n)$ et développons le carré $\overline{X}^2$.

$$\begin{aligned} Y^2 &= \sum_{i=1}^{i=n} X_i{}^2 - \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + ... + X_n)^2 \\ &= \sum_{i=1}^{i=n} \left(1 - \frac{1}{n}\right) X_i{}^2 - \frac{2}{n} \sum_{1 \leqslant i < j} X_i X_j \\ &= \frac{n-1}{n} \sum_{i=1}^{i=n} X_i{}^2 - \frac{2}{n} \sum_{1 \leqslant i < j} X_i X_j \end{aligned}$$

Sous cette forme, Y^2 apparaît comme une forme quadratique dont la matrice est :

$A = \begin{pmatrix} \frac{n-1}{n} & -\frac{1}{n} & \cdots & -\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} \\ -\frac{1}{n} & \frac{n-1}{n} & \cdots & -\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & \cdots & \frac{n-1}{n} & -\frac{1}{n} \\ -\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & \cdots & -\frac{1}{n} & \frac{n-1}{n} \end{pmatrix} = Id - \frac{1}{n} I_n$, où Id est la matrice identité de dimension n et I_n la matrice carrée $n \times n$ ne comportant que des 1.

On voit tout de suite que la somme de toutes les colonnes de la matrice A vaut 0, ce qui s'exprime par :

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Cette relation montre que le vecteur colonne $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre de A pour la valeur propre 0.

Comme le noyau de A (noyau de l'endomorphisme de $\mathbf{R}^n$ défini par A) se trouve, par ce fait, de dimension au moins égale à 1, l'image de A est au plus de dimension $n - 1$ et la matrice A est d'ordre inférieur ou égal à $n - 1$.

En réalité, par soustraction de la dernière colonne de la matrice

$$A \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{n} & \cdots & -\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} \\ 0 & 1-\frac{1}{n} & \cdots & -\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & -\frac{1}{n} & \cdots & 1-\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} \\ 0 & -\frac{1}{n} & \cdots & -\frac{1}{n} & 1-\frac{1}{n} \end{pmatrix}$$

à chacune des $n - 1$ premières colonnes, puis par permutation circulaire des $n - 1$ dernières colonnes colonnes, on obtient :

$$A \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{n} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{n} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & -\frac{1}{n} & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 1-\frac{1}{n} & \cdots & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

De cette dernière matrice on peut extraire la matrice des $n - 1$ dernières colonnes, $n - 1$ premières lignes : c'est une matrice triangulaire inférieure dont les éléments de la diagonale sont non nuls et égaux à $-\frac{1}{n}$, 1, ... , 1, 1. Leur produit vaut $-\frac{1}{n}$, donc le déterminant de cette matrice extraite à $n - 1$ lignes et $n - 1$ colonnes n'est pas nul, ce qui veut dire que la matrice A est d'ordre $n - 1$.

Autrement dit, le noyau de A, sous-espace propre pour la valeur propre 0 est de dimension 1.

Considérons alors un vecteur u de $\mathbf{R}^n$ orthogonal au sous-espace propre pour la valeur propre 0.

Comme u est orthogonal au vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, la somme de ses coordonnées cartésiennes est nulle.

On a donc $I_n u = 0$

Et $A u = Id\, u - \frac{1}{n} I_n u = u$.

La relation $A u = u$ montre que u est vecteur propre pour la valeur propre 1.

La matrice A possède donc deux valeurs propres distinctes :

— la valeur propre 0 est d'ordre 1 et $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre pour cette valeur propre.

— la valeur propre 1 est d'ordre $n - 1$ et le sous-espace propre pour la valeur propre 1 est l'hyperplan orthogonal au vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Il suffit maintenant, pour diagonaliser la matrice A, ce qui reviendra à mettre Y^2 sous forme de somme de $n - 1$ carrés, de choisir dans $\mathbf{R}^n$ une base orthonormée formée de vecteurs propres.

Sur la direction définie par le vecteur $\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\\1\end{pmatrix}$, de norme $\sqrt{n}$, on peut prendre comme vecteur unitaire $u_1 = \frac{1}{\sqrt{n}}\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\\1\end{pmatrix}$. C'est un vecteur propre pour la valeur propre 0.

Ce choix étant fait, considérons maintenant, par exemple, le vecteur $\begin{pmatrix}1\\-1\\\vdots\\0\\0\end{pmatrix}$. Il a ses deux premières coordonnées non nulles (1 et –1) et les $n - 2$ autres sont 0.
On l'a pris de telle sorte que la somme de ses coordonnées est nulle, ce qui veut dire qu'il est orthogonal au vecteur u_1.
D'autre part, le carré de sa norme est 2, donc on peut prendre pour premier vecteur propre unitaire pour la valeur propre 1, le vecteur $u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\\vdots\\0\\0\end{pmatrix}$.

De façon générale, pour un entier i compris entre 2 et n, nous considérons le vecteur dont les $i - 1$ premières coordonnées sont égales à 1, la i-ème étant égale à $1 - i$, et les $n - i$ dernières coordonnées étant nulles.
La somme des coordonnées de ce vecteur est $(i - 1) + (1 - i) = 0$, le vecteur est donc orthogonal à u_1 et le produit scalaire avec un u_j, $1 < j < i$, est $(j - 1) + (1 - j) = 0$, puisque les j premières coordonnées du vecteur d'indice i choisi sont égales à 1. De sorte que le vecteur est orthogonal à tous les u_j, $1 \leqslant j < i$.
Le carré de la norme de ce vecteur est $(i - 1) + (1 - i)^2 = (i - 1)\, i$ et on peut prendre pour vecteur unitaire correspondant le vecteur $u_i = \frac{1}{\sqrt{(i-1)\,i}}\begin{pmatrix}1\\\vdots\\1\\1-i\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$, vecteur propre pour la valeur propre 1.

On construit donc ainsi, de proche en proche, une base orthonormale $\{u_1, \ldots, u_n\}$ formée de vecteurs propres de A.
La matrice P dont les colonnes sont les vecteurs unitaires propres ainsi construits est donnée par :

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{n}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \cdots & \frac{1}{\sqrt{(n-2)(n-1)}} & \frac{1}{\sqrt{(n-1)n}} \\ \frac{1}{\sqrt{n}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \cdots & \frac{1}{\sqrt{(n-2)(n-1)}} & \frac{1}{\sqrt{(n-1)n}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{n}} & 0 & \cdots & \frac{2-n}{\sqrt{(n-2)(n-1)}} & \frac{1}{\sqrt{(n-1)n}} \\ \frac{1}{\sqrt{n}} & 0 & \cdots & 0 & \frac{1-n}{\sqrt{(n-1)n}} \end{pmatrix}$$

Comme les vecteurs colonnes de cette matrice forment une base orthonormale, P est une matrice unitaire : son inverse est sa transposée.

$P^{-1} A P = {}^t P A P$ est la matrice diagonale des valeurs propres :

$$P^{-1} A P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$$

On obtient donc $Y^2 = {}^t X A X = {}^t X P \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} P^{-1} X = {}^t (P^{-1} X) \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} (P^{-1} X)$

$$P^{-1} X = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{n}} & \frac{1}{\sqrt{n}} & \cdots & \frac{1}{\sqrt{n}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{(n-1)n}} & \frac{1}{\sqrt{(n-1)n}} & \cdots & \frac{1-n}{\sqrt{(n-1)n}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{n}} (X_1 + X_2 + \ldots + X_n) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} (X_1 - X_2) \\ \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{(n-1)n}} (X_1 + X_2 + \ldots + (1-n) X_n) \end{pmatrix}$$

$$Y^2 = \frac{1}{2} (X_1 - X_2)^2 + \ldots + \frac{1}{n(n-1)} (X_1 + X_2 + \ldots - (n-1) X_n)^2$$

$\frac{X_1 - X_2}{\sqrt{2}}$ est une variable normale centrée réduite, on l'a déjà vu dans la première question.

Quand à $X_1 + X_2 + \ldots - (k-1) X_k$, pour k variant de 3 à n, c'est une combinaison linéaire de variables normales : c'est donc une variable normale.
Sa moyenne est 0 puisque toutes les variables X_i sont centrées.
Sa variance est $1 + 1 + \ldots + (k-1)^2 = (k-1) + (k-1)^2 = k(k-1)$.
Ainsi, toutes les variables $\frac{1}{k(k-1)} (X_1 + X_2 + \ldots - (k-1) X_k)^2$ sont des carrés de variables normales centrées réduites. Et c'est vrai pour toutes les valeurs de k de 2 à n.

Y^2 est donc somme des carrés de $n-1$ variables normales centrées réduites. Nous démontrerons plus bas, en c), que ces variables sont indépendantes.

$$Y^2 = \frac{1}{2}(X_1 - X_2)^2 + \ldots + \frac{1}{n(n-1)}(X_1 + X_2 + \ldots - (n-1)X_n)^2$$

b) Loi de χ^2.

Y^2, somme des carrés de $(n-1)$ variables normales centrées réduites indépendantes, est une **variable de χ^2 à $n-1$ degrés de liberté**, d'après les résultats de l'Exercice 1 (3°).
Sa densité de probabilité est une **loi Gamma** de paramètres $\lambda = \frac{1}{2}$ et $a = \frac{n}{2}$. On peut l'écrire :

$$f(x) = \frac{2^{-\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}, \; x \geq 0.$$

2) Indépendance de $\overline{X}$ et Y^2.

La matrice

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{n}} & \frac{1}{\sqrt{n}} & \cdots & \frac{1}{\sqrt{n}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{(n-1)n}} & \frac{1}{\sqrt{(n-1)n}} & \cdots & \frac{1-n}{\sqrt{(n-1)n}} \end{pmatrix}$$

permet de passer des variables $X_1, X_2, \ldots, X_n$, aux variables

$Y_1 = \frac{1}{\sqrt{n}}(X_1 + X_2 + \ldots + X_n)$,
$Y_2 = \frac{X_1 - X_2}{\sqrt{2}}$,
$\ldots$,
$Y_n = \frac{1}{\sqrt{(n-1)n}}(X_1 + X_2 + \ldots - (n-1)X_n)$.

Cette matrice est inversible.

La densité de probabilité conjointe de la variable aléatoire $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$ est la transformée de Fourier inverse de la fonction caractéristique conjointe.

$$f_{(Y_1, \ldots, Y_n)}(y_1, \ldots, y_n) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_{(Y_1, \ldots, Y_n)}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)\, e^{-i(\alpha_1 y_1 + \ldots + \alpha_n y_n)}\, d\alpha_1 \ldots d\alpha_n$$

$$\varphi_{(Y_1, \ldots, Y_n)}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = E\left(e^{i(\alpha_1 Y_1 + \ldots + \alpha_n Y_n)}\right)$$

Le produit scalaire $\alpha_1 Y_1 + \ldots + \alpha_n Y_n$ est donné par :

$\alpha_1 Y_1 + \ldots + \alpha_n Y_n = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) P^{-1} X$, avec $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$.

On peut donc aussi l'écrire :

$\alpha_1 Y_1 + ... + \alpha_n Y_n = {}^t(P\,\alpha)\,X$, avec $\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$.

Posons $\beta = P\,\alpha = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{n}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \cdots & \frac{1}{\sqrt{(n-2)(n-1)}} & \frac{1}{\sqrt{(n-1)n}} \\ \frac{1}{\sqrt{n}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \cdots & \frac{1}{\sqrt{(n-2)(n-1)}} & \frac{1}{\sqrt{(n-1)n}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{n}} & 0 & \cdots & \frac{2-n}{\sqrt{(n-2)(n-1)}} & \frac{1}{\sqrt{(n-1)n}} \\ \frac{1}{\sqrt{n}} & 0 & \cdots & 0 & \frac{1-n}{\sqrt{(n-1)n}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$

$\beta_1 = \frac{1}{\sqrt{n}}\alpha_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\alpha_2 + ... + \frac{1}{\sqrt{(n-1)\,n}}\alpha_n$,
$\beta_2 = \frac{1}{\sqrt{n}}\alpha_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\alpha_2 + ... + \frac{1}{\sqrt{(n-1)\,n}}\alpha_n$,
...
$\beta_{n-1} = \frac{1}{\sqrt{n}}\alpha_1 + \frac{2-n}{\sqrt{(n-2)(n-1)}}\alpha_{n-1} + \frac{1}{\sqrt{(n-1)\,n}}\alpha_n$,
$\beta_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\alpha_1 + \frac{1-n}{\sqrt{(n-1)n}}\alpha_n$,

$\alpha_1 Y_1 + ... + \alpha_n Y_n = \beta_1 X_1 + ... + \beta_n X_n$
$\varphi_{(Y_1, ..., Y_n)}(\alpha_1, ..., \alpha_n) = E\,(e^{i(\beta_1 X_1 + ... + \beta_n X_n)})$

Comme $X_1, ..., X_n$ sont indépendantes :
$E\,(e^{i(\beta_1 X_1 + ... + \beta_n X_n)}) = E\,(e^{i\beta_1 X_1}) \times ... \times E\,(e^{i\beta_n X_n})$
et finalement :
$\varphi_{(Y_1, ..., Y_n)}(\alpha_1, ..., \alpha_n) = \varphi_{X_1}(\beta_1) ... \varphi_{X_n}(\beta_n)$

L'intégrale s'écrit :

$$f_{(Y_1, ..., Y_n)}(y_1, ..., y_n) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_{X_1}(\beta_1) ... \varphi_{X_n}(\beta_n)\, e^{-i(\beta_1 x_1 + ... + \beta_n x_n)}\, d\alpha_1 ... d\alpha_n$$

avec $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

Faisons le changement de variables défini par $\beta = P\,\alpha$.

Le déterminant de la matrice jacobienne $\frac{D\alpha}{D\beta}$ du changement de variables est l'inverse du déterminant de P, matrice unitaire : il a pour valeur absolue 1.
Le théorème du changement de variables donne alors:

$$f_{(Y_1, ..., Y_n)}(y_1, ..., y_n) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_{X_1}(\beta_1) ... \varphi_{X_n}(\beta_n)\, e^{-i(\beta_1 x_1 + ... + \beta_n x_n)}\, d\beta_1 ... d\beta_n$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \varphi_{X_1}(\beta_1)\, e^{-i\beta_1 x_1}\, d\beta_1 \ldots \int_{\mathbb{R}} \varphi_{X_n}(\beta_n)\, e^{-i\beta_n x_n}\, d\beta_n$$
$$= f_{X_1}(x_1) \ldots f_{X_n}(x_n)$$

Les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ sont normales centrées réduites : $f_{X_i}(x_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x_i^2}{2}}$.

$$f_{(Y_1, \ldots, Y_n)}(y_1, \ldots, y_n) = f_{X_1}(x_1) \ldots f_{X_n}(x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{1}{2}\left(x_1^2 + \ldots + x_n^2\right)}.$$

$x_1^2 + \ldots + x_n^2 = {}^t x.\, x = {}^t(P\,y)\,.\,(P\,y) = {}^t y\, {}^t P.\, P\, y = {}^t y.\, y = y_1^2 + \ldots + y_n^2$.

$$f_{(Y_1, \ldots, Y_n)}(y_1, \ldots, y_n) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{1}{2}\left(y_1^2 + \ldots + y_n^2\right)} = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y_1^2}{2}}\right) \ldots \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y_n^2}{2}}\right)$$

Or les Y_i sont des variables aléatoires normales centrées réduites, donc leurs densités de probabilité sont de la forme $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y_i^2}{2}}$ et il vient :

$$\boxed{f_{(Y_1, \ldots, Y_n)}(y_1, \ldots, y_n) = f_{Y_1}(y_1) \times \ldots \times f_{Y_n}(y_n)}$$

Cette relation montre que les **variables $Y_1, \ldots, Y_n$, sont indépendantes**.

Il en résulte notamment que $Y^2 = Y_2^2 + \ldots + Y_n^2$ est somme des carrés de $n - 1$ variables normales centrées réduites **indépendantes**, et que $\overline{X} = \frac{1}{\sqrt{n}} Y_1$ est **indépendante de Y^2**.

Exercices

Loi de Student.

1. **Définition.**
2. **Espérance et variance.**
3. **Interprétation.**
4. **Utilisation de la table de la fonction de répartition.**

Variable aléatoire réelle de loi de Student.

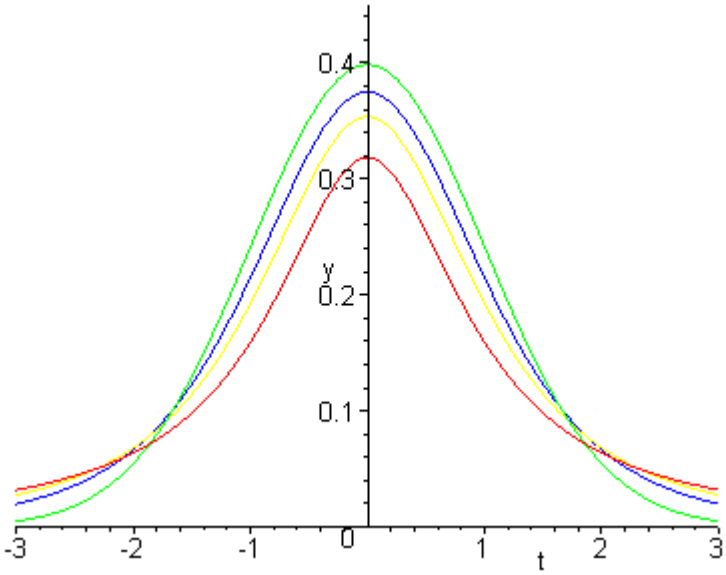
HAUT

1. Définition.

On dit qu'une variable aléatoire réelle à densité X a une **loi de probabilité de Student à ν degrés de liberté** (ν entier > 0) si, et seulement si, sa densité de probabilité est donnée par la formule :

$$f_\nu(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\nu}\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)\left(1+\frac{t^2}{\nu}\right)^{\frac{\nu+1}{2}}}$$

Cette relation est notée $X \rightsquigarrow T_\nu$.



On a représenté ci-contre la loi de Student pour diverses valeurs de ν, depuis $\nu = 1$ (loi de Cauchy en rouge), jusqu'à l'infini (loi normale en vert), en passant par ν = 2 (jaune) et $\nu = 4$ (bleu).
Cette loi de Student est aussi appelée la **loi *T***, ou loi de Student-Fisher à ν degrés de liberté (d.d.l.).
Dans cette formule, Γ est la **fonction Gamma d'Euler** définie par :

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-u}\, u^{x-1}\, du.$$

HAUT

2. Espérance et variance.

HAUT

Si X est une variable aléatoire **de Student à ν degrés de liberté** :

$$E(X) = 0$$
$$Var(X) = \frac{\nu}{\nu - 2}$$

L'espérance n'existe que pour $\nu > 1$.
Lorsque l'espérance existe, elle est nulle, puisque la loi est symétrique autour de 0.
La variance n'existe que pour $\nu > 2$.
La variance est toujours supérieure à 1 et tend vers 1 lorsque ν tend vers l'infini.

HAUT

3. Interprétation de la loi de Student.

HAUT

La loi de Student à ν degrés de liberté est la loi de probabilité du **quotient d'une variable normale centrée réduite (Laplace-Gauss) par la racine carrée de la somme des carrés de ν variables normales centrées réduites indépendantes** entre elles et indépendantes de la première variable.

Cette loi a été mise en évidence par le probabiliste **William E. Gosset**, à qui la firme qui l'employait imposait de signer ses travaux du pseudonyme de Student : la présence d'un statisticien dans l'état-major de direction d'une entreprise industrielle constituait alors un secret de fabrication.

Pour ν = 1, la loi de Student s'appelle **loi de Cauchy**, ou **loi de Lorentz**.

- C'est la loi de probabilité de *tan* θ lorsque θ est distribuée uniformément entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$.
- C'est aussi la loi du rapport de deux variables normales centrées réduites indépendantes.
- Sa densité de probabilité est $\frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}$.

La loi de Student, c'est aussi :
— la loi de probabilité de la **racine carrée d'une variable de Fisher-Snedecor** $F_{1,\nu}$.
— la loi de probabilité du **rapport d'une variable normale centrée réduite et de la racine carrée d'une variable de χ^2 divisée par son nombre de degrés de liberté**, indépendante de la première.

4. Utilisation de la table de la fonction de répartition.

HAUT

La table de la fonction de répartition donne la valeur de *t* pour laquelle la probabilité d'une valeur inférieure à *t* suivant le nombre *n* de degrés de liberté, est égale à α.

Elle ne donne que les **valeurs positives de *t***, correspondant à des valeurs de probabilité supérieures à 0,5.
A cause de la symétrie de la loi de Student, on pourra calculer les valeurs négatives de *t* par la formule :

$$F(-t) = 1 - F(t).$$

Pour *n* infini, les valeurs de *t* sont les valeurs données par la fonction de répartition normale centrée réduite.

HAUT

Chapitre 18. Loi de Student.

Exercices

Exercice 1. Loi de Student.
Exercice 2. Loi de Student pour un échantillon.

Exercice 1. Loi de Student.

Soit X une variable aléatoire normale centrée réduite. Soit Y une variable aléatoire distribuée suivant la loi du khi deux à n degrés de liberté. On suppose que les variables X et Y sont indépendantes.

1°/ Calculer la loi conjointe de X et Y.

2°/ En posant $T = \frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{n}}}$, déduire du résultat précédent la loi conjointe de Y et T.

3°/ En déduire la loi de probabilité de T. Comment s'appelle cette loi ?

4°/ Calculer l'espérance mathématique et la variance de T.

Solution

HAUT

Exercice 2. Loi de Student pour un échantillon.

HAUT

Notations.

On considère n variables aléatoires indépendantes X_j, $1 \leq j \leq n$, $n > 1$, qui suivent toutes la même loi normale de moyenne μ et de variance σ^2 ($\sigma > 0$).

On note $\overline{X}$ la variable aléatoire $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{j=n} X_j$.

On note S^2 la variable aléatoire $\frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{j=n} (X_j - \overline{X})^2$, qu'on appelle **estimateur de variance**, et on note S la racine carrée de S^2.

On note T la variable aléatoire : $T = \frac{\overline{X} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$.

Solution

1°/ Montrer que S^2 peut se mettre sous la forme

$$S^2 = \frac{\sigma^2}{n-1}\sum_{j=2}^{j=n} Y_j^2,$$

où les $Y_j = \frac{1}{\sigma\sqrt{j(j-1)}}\sum_{i=1}^{i=j-1} (X_j - X_i)$ sont des variables normales centrées réduites indépendantes dans leur ensemble et indépendantes de $\overline{X}$.

2°/ En déduire la loi de probabilité de la variable aléatoire T. Comment s'appelle cette loi ?

3°/ Calculer l'espérance et la variance de T.

HAUT

Chapitre 18. Loi de Student.

Enoncés.

Exercice 1. Loi de Student.

Soit X une variable aléatoire normale centrée réduite. Soit Y une variable aléatoire distribuée suivant la loi du khi deux à n degrés de liberté. On suppose que les variables X et Y sont indépendantes. 1°/ Calculer la loi conjointe de X et Y. 2°/ En posant $T = \frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{n}}}$, déduire du résultat précédent la loi conjointe de Y et T. 3°/ En déduire la loi de probabilité de T. Comment s'appelle cette loi ? 4°/ Calculer l'espérance mathématique et la variance de T.	

Solution.

1°/ Loi conjointe de X et Y.

X est une variable normale centrée réduite, sa densité de probabilité est $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Y est une variable de χ^2 à n degrés de liberté, sa densité de probabilité est $f_Y(y) = \frac{2^{-\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} y^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{y}{2}}, y > 0.$

Dans cette expression, la **fonction Gamma d'Euler** est définie par l'intégrale :

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} e^{-u} u^{s-1} du.$$

Comme les variables X et Y sont indépendantes, la densité de probabilité conjointe de X et Y est le produit des densités de probabilités de X et Y.

$$f_{(X,Y)}(x,y) = f_X(x) f_Y(y) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\right)\left(\frac{2^{-\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} y^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{y}{2}}\right), y > 0.$$

$$\boxed{f_{(X,Y)}(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2^{-\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} y^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x^2+y}{2}}, y > 0.}$$

2°/ Loi conjointe de *Y* et *T*.

Dans le plan des (*x*, *y*), la probabilité élémentaire conjointe de *X* et *Y* est nulle dans le demi-plan $y < 0$. Pour $y > 0$, elle est donnée, suivant le résultat de la question 1°, par :

$$f_{(X, Y)}(x, y)\, dx\, dy = \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}} \frac{2^{-\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} y^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x^2+y}{2}} dx\, dy.$$

La probabilité d'un domaine *D* est :

$$P\,[\,(X, Y) \in D\,] = \iint_{D_1} \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}} \frac{2^{-\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} y^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x^2+y}{2}} dx\, dy,$$

où D_1 est l'intersection de *D* avec le demi-plan défini par $y > 0$.

Lorsque, dans le demi-plan des (*x*, *y*) vérifiant $y > 0$, on fait le changement de variables défini par $s = y$ et $t = x\sqrt{\frac{n}{y}}$, le changement inverse est défini par les relations :

$$y = s \text{ et } x = t\sqrt{\frac{s}{n}}$$

Ce changement de variables est de classe C^1, de sorte que l'on a :

$$dx\, dy = \left|\frac{D(x, y)}{D(s, t)}\right| ds\, dt = \left|-\frac{\partial x}{\partial t}(s, t)\right| ds\, dt = \sqrt{\frac{s}{n}}\, ds\, dt.$$

La probabilité élémentaire conjointe des variables $S = Y$ et $T = \frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{n}}}$ est donnée alors par :

$$f_{(S, T)}(s, t)\, ds\, dt = f_{(X, Y)}(x(s, t), y(s, t)) \times \sqrt{\frac{s}{n}}\, ds\, dt$$

$$= \sqrt{\frac{s}{n}} \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}} \frac{2^{-\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} s^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}\left(s\frac{t^2}{n}+s\right)} ds\, dt,\ s > 0.$$

La densité de probabilité conjointe de $S = Y$ et *T* est :

$$f_{(S, T)}(s, t) = \sqrt{\frac{s}{n}} \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}} \frac{2^{-\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} s^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}\left(s\frac{t^2}{n}+s\right)},\ s > 0.$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n\,\pi}} \frac{2^{-\frac{n+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} s^{\frac{n-1}{2}} e^{-\frac{1}{2}\left(1+\frac{t^2}{n}\right)s}, \; s > 0.$$

Cette densité de probabilité conjointe de Y et T peut être écrite, en remplaçant s par y :

$$f_{(Y,\,T)}(y,\,t) = \frac{1}{\sqrt{n\,\pi}} \frac{2^{-\frac{n+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} y^{\frac{n-1}{2}} e^{-\frac{1}{2}\left(1+\frac{t^2}{n}\right)y}, \; y > 0.$$

3°/ Loi de probabilité de *T*.

La densité de probabilité de T se déduit de la densité de probabilité conjointe de Y et T :

$$f_T(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(Y,\,T)}(y,\,t)\,dy = \int_0^{+\infty} f_{(Y,\,T)}(y,\,t)\,dy \text{ (puisque } f_{(Y,\,T)}(y,\,t) \text{ est nulle pour } y < 0)$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n\,\pi}} \frac{2^{-\frac{n+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} y^{\frac{n-1}{2}} e^{-\frac{1}{2}\left(1+\frac{t^2}{n}\right)y} dy$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n\,\pi}} \frac{2^{-\frac{n+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^{+\infty} y^{\frac{n-1}{2}} e^{-\frac{1}{2}\left(1+\frac{t^2}{n}\right)y} dy.$$

Le changement de variable $u = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{t^2}{n}\right) y$ donne $y = 2\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-1} u$ et $dy = 2\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-1} du$

$$\int_0^{+\infty} y^{\frac{n-1}{2}} e^{-\frac{1}{2}\left(1+\frac{t^2}{n}\right)y} dy = \int_0^{+\infty} 2^{\frac{n-1}{2}} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n-1}{2}} u^{\frac{n-1}{2}} e^{-u}\, 2\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-1} du$$

$$= 2^{\frac{n+1}{2}} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} \int_0^{+\infty} u^{\frac{n+1}{2}-1} e^{-u}\, du$$

On reconnaît la **fonction Gamma d'Euler** définie par l'intégrale :

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} e^{-u}\, u^{s-1}\, du.$$

$\int_0^{+\infty} u^{\frac{n+1}{2}-1} e^{-u}\, du = \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)$ et il vient :

$$\int_0^{+\infty} y^{\frac{n-1}{2}} e^{-\frac{1}{2}\left(1+\frac{t^2}{n}\right)y}\, dy = 2^{\frac{n+1}{2}} \frac{1}{\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}}} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)$$

D'où la densité de probabilité de la variable T :

$$f_T(t) = \frac{1}{\sqrt{n\,\pi}} \frac{2^{-\frac{n+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \times 2^{\frac{n+1}{2}} \frac{1}{\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}}} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{n\,\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \frac{1}{\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}}}$$

$$\boxed{f_T(t) = \frac{1}{\sqrt{n\,\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \frac{1}{\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}}}}$$

Cette loi, très utile en Statistiques pour les comparaisons de moyennes de petits échantillons normaux, s'appelle la **Loi de Student à *n* degrés de liberté**.
C'est une loi symétrique (fonction paire).

4°/ Espérance et variance.

a) Cas particulier : *n* = 1.

Lorsque $n = 1$, la densité de probabilité f_T de T se réduit à :

$$f_T(t) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+t^2}$$

C'est ce qu'on appelle la **loi de Cauchy**.
$\int_{-\infty}^{+\infty} f_T(t)\, dt = 1$, joint à $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\, dt = [\, Arc\ tan\ t\,]_{-\infty}^{+\infty} = \pi$, donne $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

Comme l'intégrale $E(T) = \int_{-\infty}^{+\infty} t\, f_T(t)\, dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t\, dt}{1+t^2}$ n'est pas convergente, la variable T n'a pas d'espérance mathématique.
Donc elle n'a pas, non plus de variance.

Une variable de Cauchy (n = 1) n'a ni espérance ni variance.

b) Cas particulier : *n* = 2.

Lorsque $n = 2$, la densité de probabilité de T se réduit, compte tenu de $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ à :

$$f_T(t) = \frac{1}{2\sqrt{3}} \frac{1}{\left(1+\frac{t^2}{2}\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

L'espérance est $E(T) = \int_{-\infty}^{+\infty} t\, f_T(t)\, dt = 0$ puisque $t\, f_T(t)$ est impaire.

$$E(T^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f_T(t)\, dt = \frac{1}{2\sqrt{3}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^2}{\left(1+\frac{t^2}{2}\right)^{\frac{3}{2}}}\, dt.$$

Comme $t \times \frac{t^2}{\left(1+\frac{t^2}{2}\right)^{\frac{3}{2}}}$ ne tend pas vers 0 lorsque t tend vers l'infini, l'intégrale n'est pas convergente.

La variable de Student à deux degrés de liberté possède une espérance nulle, mais n'a pas de variance.

c) Cas général : $n > 2$.

L'espérance est l'intégrale d'une fonction impaire intégrable : elle est nulle.
La variance est alors l'espérance du carré :

$$Var(T) = E(T^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f_T(t)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \frac{1}{\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}}} t^2\, dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}}} t^2\, dt = \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} 2 \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}}} t^2\, dt$$

Changement de variable : posons $t = \sqrt{n}\ tan\ u$, d'où $dt = \sqrt{n}(1 + tan^2 u)\, du$, $t^2 = n\ tan^2 u$,

$$\frac{1}{\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}}}\,t^2\,dt = n\sqrt{n}\,\frac{\tan^2 u}{\left(1+\tan^2 u\right)^{\frac{n-1}{2}}}\,du = n\sqrt{n}\left(\frac{1}{\left(1+\tan^2 u\right)^{\frac{n-3}{2}}}-\frac{1}{\left(1+\tan^2 u\right)^{\frac{n-1}{2}}}\right)du$$

$$= n\sqrt{n}\,(\cos^{n-3} u - \cos^{n-1} u)\,du$$

$$Var\,(T) = \frac{2n}{\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n-3} u\,du - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n-1} u\,du\right).$$

Quand on intègre $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n-1} u\,du$ par parties, le terme tout intégré est nul et il reste :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n-1} t\,dt = \frac{n-2}{n-1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n-3} t\,dt$$

$$Var\,(T) = \frac{2n}{(n-1)\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n-3} u\,du = \frac{n}{n-2}\,\frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n-1} u\,du$$

$$\boxed{Var\,(T) = \frac{n}{n-2}\,\frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n-1} u\,du}$$

1. Lemme.

Nous allons démontrer la formule :

$$\boxed{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n u\,du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)},\ \forall\, n \in \mathrm{N}.}$$

On connaît déjà les formules $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$, $\Gamma\,(x+1) = x\,\Gamma\,(x)$ pour $x > 0$, $\Gamma\,(n) = (n-1)\,!$ pour $n \in \mathrm{N}^*$.

<u>La formule à démontrer est vraie pour $n = 0$</u>, puisqu'elle se réduit alors à :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

<u>Elle est vraie aussi pour $n = 1$</u>, puisqu'elle se réduit alors à :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos u\, du = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \times \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \times \frac{1}{\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} = 1 = [\sin u\,]_0^{\frac{\pi}{2}}.$$

Supposons qu'elle soit vraie pour un $n \in \mathrm{N}$: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n u\, du = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}$.

Montrons qu'elle est vraie pour $n + 2$.

Considérons donc l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+2} u\, du$.

Quand on intègre par parties, le terme tout intégré est nul et il reste :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+2} t\, dt = \frac{n+1}{n+2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t\, dt$$

D'après l'hypothèse de récurrence, nous obtenons donc :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+2} t\, dt = \frac{n+1}{n+2} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\frac{n+1}{2}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\frac{n+2}{2}\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{n+3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+2\right)}$$

Ce qui montre que **la formule de l'hypothèse de récurrence est vraie pour n + 2, dès qu'elle vraie pour n**.
Comme elle est vraie pour $n = 0$ et pour $n = 1$, elle est vraie pour tout $n \in \mathrm{N}$.

2. Variance de *T*.

La formule $Var\,(T) = \frac{n}{n-2} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1} u\, du$ et le lemme précédent donnent :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1} u\, du = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} \text{ d'où } Var\,(T) = \frac{n}{n-2} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} = \frac{n}{n-2}$$

La variance d'une variable de Student à n degrés de liberté, $n > 2$, est $\frac{n}{n-2}$.
Son espérance est nulle.

Chapitre 18. Loi de Student.

Enoncés.

Exercice 2. Loi de Student pour un échantillon.

Notations.
On considère n variables aléatoires indépendantes X_j, $1 \leq j \leq n$, $n > 1$, qui suivent toutes la même loi normale de moyenne μ et de variance σ^2 ($\sigma > 0$).

On note $\overline{X}$ la variable aléatoire $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{j=n} X_j$.

On note S^2 la variable aléatoire $\frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{j=n} (X_j - \overline{X})^2$, qu'on appelle **estimateur de variance**, et on note S la racine carrée de S^2.
On note T la variable aléatoire :

$$T = \frac{\overline{X} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}.$$

1°/ Montrer que S^2 peut se mettre sous la forme

$$S^2 = \frac{\sigma^2}{n-1}\sum_{j=2}^{j=n} Y_j^2,$$

où les $Y_j = \frac{1}{\sigma\sqrt{j(j-1)}}\sum_{i=1}^{i=j-1} (X_j - X_i)$ sont des variables normales centrées réduites indépendantes dans leur ensemble et indépendantes de $\overline{X}$.
2°/ En déduire la loi de probabilité de la variable aléatoire T. Comment s'appelle cette loi ?
3°/ Calculer l'espérance et la variance de T.

Solution.

1°/ Réduction de S^2.

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{j=n} (X_j - \overline{X})^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{j=n} (X_j^2 - 2 X_j \overline{X} + \overline{X}^2)$$

$$= \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{j=n} X_j{}^2 - \frac{2}{n-1}\overline{X}\sum_{j=1}^{j=n} X_j + \frac{n}{n-1}\,\overline{X}^2$$
$$= \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{j=n} X_j{}^2 - \frac{n}{n-1}\,\overline{X}^2$$

On aboutit à la forme classique :

$$\boxed{S^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{j=1}^{j=n} X_j{}^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{j=1}^{j=n} X_j\right)^2\right)}$$

Soit $\{e_1, \ldots, e_n\}$ la base canonique de R^n.

Considérons la forme quadratique $Q(x)$ définie, pour $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{R}^n$ par

$$Q(x) = \sum_{j=1}^{j=n} x_j{}^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{j=1}^{j=n} x_j\right)^2$$

Question : comment résoudre ce problème si l'on ne connaît rien aux formes quadratiques ?
Réponse : utiliser la méthode alternative développée plus bas, ou vérifier directement que S^2 s'écrit sous la forme :

$$\boxed{S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{j=2}^{j=n}\left(\frac{1}{\sqrt{j(j-1)}}\sum_{i=1}^{i=j-1}(X_j - X_i)\right)^2.}$$

On a, par définition :

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{j=n}(X_j - \overline{X})^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{j=n}\left(X_j - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{i=n} X_i\right)\right)^2$$

on peut donc écrire $Q(x)$ sous la forme :

$$Q(x) = \sum_{j=1}^{j=n}\left(x_j - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{i=n} x_i\right)\right)^2$$

En particulier, si x est le vecteur **1** dont toutes les composantes sur la base canonique sont égales à 1 : $Q(\mathbf{1}) = 0$.

Modifions l'expression $Q(x) = \sum_{j=1}^{j=n} x_j{}^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{j=1}^{j=n} x_j\right)^2$ en développant le carré de la somme.

$$\left(\sum_{j=1}^{j=n} x_j\right)^2 = \sum_{j=1}^{j=n} x_j{}^2 + 2\sum_{1\le i<j\le n} x_i x_j$$

$$Q(x) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\sum_{j=1}^{j=n} {x_j}^2 - \frac{2}{n}\sum_{1 \le i < j \le n} x_i x_j$$

$$\boxed{Q(x) = \frac{n-1}{n}\left(\sum_{j=1}^{j=n} {x_j}^2 - \frac{2}{n-1}\sum_{1 \le i < j \le n} x_i x_j\right)}$$

La matrice (symétrique) de la forme quadratique Q est donc :

$$M = \begin{pmatrix} \frac{n-1}{n} & \frac{-1}{n} & \dots & \frac{-1}{n} \\ \frac{-1}{n} & \frac{n-1}{n} & \dots & \frac{-1}{n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{-1}{n} & \frac{-1}{n} & \dots & \frac{n-1}{n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & \dots & -\frac{1}{n} \\ -\frac{1}{n} & 1-\frac{1}{n} & \dots & -\frac{1}{n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & \dots & 1-\frac{1}{n} \end{pmatrix}$$

Chaque ligne a pour somme 0, donc le déterminant de M est nul, la forme quadratique est dégénérée.
Le polynôme caractéristique de M est le déterminant :

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\frac{1}{n}-\lambda & -\frac{1}{n} & \dots & -\frac{1}{n} \\ -\frac{1}{n} & 1-\frac{1}{n}-\lambda & \dots & -\frac{1}{n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & \dots & 1-\frac{1}{n}-\lambda \end{vmatrix}$$

Le déterminant est facile à calculer.

En effet, on ne change pas la valeur du déterminant en remplaçant la première colonne par la somme des colonnes :

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & -\frac{1}{n} & \dots & -\frac{1}{n} \\ -\lambda & 1-\frac{1}{n}-\lambda & \dots & -\frac{1}{n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\lambda & -\frac{1}{n} & \dots & 1-\frac{1}{n}-\lambda \end{vmatrix}$$

On peut mettre $-\lambda$ en facteur, le déterminant devient :

$$P(\lambda) = -\lambda \begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{n} & \dots & -\frac{1}{n} \\ 1 & 1-\frac{1}{n}-\lambda & \dots & -\frac{1}{n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & -\frac{1}{n} & \dots & 1-\frac{1}{n}-\lambda \end{vmatrix}$$

On ne change pas la valeur du déterminant en soustrayant la première ligne de chacune des lignes suivantes :

$$P(\lambda) = -\lambda \begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{n} & \dots & -\frac{1}{n} \\ 0 & 1-\lambda & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Développons par rapport à la première colonne : il reste le déterminant d'une matrice diagonale.

$$\boxed{P(\lambda) = -\lambda (1-\lambda)^{n-1}}$$

L'équation aux valeurs propres $P(\lambda) = 0$ se réduit donc à $\lambda (1-\lambda)^{n-1} = 0$.

Ainsi, la matrice M possède **une valeur propre nulle** et **une valeur propre 1 d'ordre $n-1$**.

Soit $\mathbf{1} = (1, 1, \dots, 1) \in \mathrm{R}^n$: $\mathbf{1} = \sum_{j=1}^{j=n} e_j$.
Comme la somme des colonnes de la matrice M est nulle, $M\,\mathbf{1} = 0$: $\mathbf{1}$ est **vecteur propre de M pour la valeur propre 0**.

Pour tout couple (i, j) d'indices vérifiant $1 \le i < j \le n$, **$(e_j - e_i)$ est vecteur propre pour la valeur propre 1** :

En effet, $M(e_j - e_i)$ est la différence entre la j-ème et la i-ème colonnes de $\begin{pmatrix} 1-\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & \dots & -\frac{1}{n} \\ -\frac{1}{n} & 1-\frac{1}{n} & \dots & -\frac{1}{n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & \dots & 1-\frac{1}{n} \end{pmatrix}$, c'est le vecteur $(e_j - e_i)$.

Par exemple, pour $i = 1$, les vecteurs $(e_j - e_1)$, $2 \le j \le n$, sont linéairement indépendants et forment donc une base du sous-espace propre pour la valeur propre 1. Comme il existe une base formée de vecteurs propres, la matrice M est semblable à une matrice diagonale ayant pour éléments de la diagonale, les valeurs propres 0, 1, ... , 1.

Le sous-espace propre pour la valeur propre 1 est l'hyperplan H orthogonal à $\mathbf{1}$: son équation est donc $x_1 + \dots + x_n = 0$.
Dans cet hyperplan, M se réduit à l'application identique, puisque tous les vecteurs contenus dans l'hyperplan sont vecteurs propres pour la valeur propre 1.
Donc le produit scalaire défini par la forme quadratique Q coïncide, dans cet hyperplan, avec le produit scalaire euclidien.

Le **procédé d'orthogonalisation de Schmitt** permet de construire dans l'hyperplan H orthogonal à $\mathbf{1}$ une base orthonormée de dimension $n-1$.

Pour construire une telle base, partons d'un vecteur dont la somme des composantes est nulle, par exemple $(-1, 1, 0, \dots, 0) = e_2 - e_1$.

Sa norme est $\sqrt{2}$, et le vecteur $y_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(e_2 - e_1)$ a pour norme 1.
Cherchons alors λ_1 et λ_2 dans R tel que $\lambda_1 (e_2 - e_1) + \lambda_2 (e_3 - e_1) \in H$ et tel que $\lambda_1 (e_2 - e_1) + \lambda_2 (e_3 - e_1)$ soit orthogonal à $(e_2 - e_1)$.

La première condition est toujours vérifiée, puisque $e_j - e_i$ appartient toujours à H.
La deuxième condition donne $\lambda_1 \| e_2 - e_1 \|^2 + \lambda_2 < e_3 - e_1, e_2 - e_1 > = 0$,
$2\lambda_1 + \lambda_2 = 0$, puisque la base canonique est orthonormée. Prenons $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 2$:
le vecteur $-(e_2 - e_1) + 2(e_3 - e_1) = (e_3 - e_1) + (e_3 - e_2)$ remplit les conditions.
Le carré de la norme de ce vecteur est 6.

Hypothèse de récurrence.

Pour un $j \geq 2$, et inférieur ou égal à $n - 1$, $\sum_{i=1}^{i=j-1} (e_j - e_i)$ est orthogonal à tous les $\sum_{i=1}^{i=k-1} (e_k - e_i)$, $k = 1, \ldots, j - 1$.

Considérons alors $\sum_{i=1}^{i=j} (e_{j+1} - e_i)$.
C'est un élément de H, puisque c'est une somme d'éléments de H.
Le produit scalaire de $\sum_{i=1}^{i=j} (e_{j+1} - e_i)$ et $\sum_{l=1}^{l=k-1} (e_k - e_l)$ est :

$$< \sum_{i=1}^{i=j} (e_{j+1} - e_i) , \sum_{l=1}^{l=k-1} (e_k - e_l) > = \sum_{i=1}^{i=j} \sum_{l=1}^{l=k-1} < e_{j+1} - e_i, e_k - e_l >$$

$< e_{j+1} - e_i, e_k - e_l > = < - e_i, e_k - e_l >$ car e_{j+1} est orthogonal à tous les autres.
Pour $k \in [\, 1, j - 1\,]$, et pour $i = j$, $< - e_i, e_k - e_l > = 0$.
Pour les autres valeurs de i, de 1 à $j - 1$, il reste $< - e_i, e_k - e_l > = - \delta_{ik} + \delta_{il}$, en utilisant les **symboles de Kronecker**.

$$- \sum_{i=1}^{i=j-1} \sum_{l=1}^{l=k-1} \delta_{ik} + \sum_{i=1}^{i=j-1} \sum_{l=1}^{l=k-1} \delta_{il} = - (k - 1) + (k - 1) = 0$$

Enfin, pour $k = j$,

$$< \sum_{i=1}^{i=j} (e_{j+1} - e_i) , \sum_{l=1}^{l=k-1} (e_k - e_l) > = \sum_{i=1}^{i=j} \sum_{l=1}^{l=j-1} < - e_i, e_j - e_l > = - 1 + 1 = 0.$$

La relation de l'hypothèse de récurrence est donc vérifiée pour $j + 1$.
Conclusion : la relation de l'hypothèse de récurrence est vérifiée pour tout j, de 2 jusqu'à n.

Autrement dit, les vecteurs $\sum_{i=1}^{i=j-1} (e_j - e_i) = (j - 1) e_j - \sum_{i=1}^{i=j-1} e_i$, $2 \leq j \leq n$, forment une **base orthogonale** de H.
Le carré de la norme d'un tel vecteur est $(j - 1)^2 + (j - 1) = j(j - 1)$, et les vecteurs :

$$y_j = \frac{1}{\sqrt{j(j-1)}} \sum_{i=1}^{i=j-1} (e_j - e_i), j = 2, \ldots, n,$$

forment une **base orthonormée** de H.

Il en résulte que, pour tout vecteur $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, la coordonnée de x sur le vecteur de base y_j est :

$$< y_j, x > = \frac{1}{\sqrt{j(j-1)}} \sum_{i=1}^{i=j-1} < e_j - e_i, x > = \frac{1}{\sqrt{j(j-1)}} \sum_{i=1}^{i=j-1} (x_j - x_i)$$

Pour tout *x*, on a identiquement :

$$Q(x) = \sum_{j=2}^{j=n} \left(\frac{1}{\sqrt{j(j-1)}} \sum_{i=1}^{i=j-1} (x_j - x_i) \right)^2$$

Il en résulte, en prenant pour coordonnées de *x* les variables aléatoires X_i, $1 \leq i \leq n$:

$$\boxed{S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{j=2}^{j=n} \left(\frac{1}{\sqrt{j(j-1)}} \sum_{i=1}^{i=j-1} (X_j - X_i) \right)^2.}$$

Pour une valeur de *j*, la variable aléatoire $\frac{1}{\sqrt{j(j-1)}} \sum_{i=1}^{i=j-1} (X_j - X_i) = \frac{1}{\sqrt{j(j-1)}} \left((j-1) X_j - \sum_{i=1}^{i=j-1} X_i \right)$ est combinaison linéaire de variables normales indépendantes : c'est une variable normale.
Son espérance est la somme des espérances $\frac{1}{\sqrt{j(j-1)}}((j-1)\,\mu - (j-1)\,\mu) = 0$.
Sa variance est la somme des variances $\frac{j-1}{j}\,\sigma^2 + (j-1)\,\frac{1}{j(j-1)}\,\sigma^2 = \sigma^2$.
De sorte les variables centrées réduites correspondantes suivent une loi normale centrée réduite :

$$\boxed{Y_j = \frac{1}{\sigma\sqrt{j(j-1)}} \sum_{i=1}^{i=j-1} (X_j - X_i) \rightsquigarrow G(0,1),\ j = 2, \ldots, n.}$$

Ces variables aléatoires sont des coordonnées dans une base orthonormale de *H* : elles sont indépendantes dans leur ensemble et indépendantes de $\sum_{j=1}^{j=n} X_j = n\,\overline{X}$ qui est orthogonal à *H*, donc indépendantes de $\overline{X}$ et de toute fonction de $\overline{X}$. On peut écrire :

$$\boxed{S^2 = \frac{\sigma^2}{n-1} \sum_{j=2}^{j=n} Y_j^2.}$$

Une autre méthode pour arriver au même résultat.

Vérifions d'abord l'égalité :

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \left(\sum_{j=1}^{j=n} (X_j - \mu)^2 - n\,(\overline{X} - \mu)^2 \right)$$

$$\sum_{j=1}^{j=n} (X_j - \mu)^2 - n\,(\overline{X} - \mu)^2 = \sum_{j=1}^{j=n} X_j^2 - 2\,\mu \sum_{j=1}^{j=n} X_j + \sum_{j=1}^{j=n} \mu^2 - n\,(\overline{X}^2 - 2\,\mu\overline{X} + \mu^2)$$

$$= \sum_{j=1}^{j=n} X_j{}^2 - 2\,\mu\, n\, \overline{X} + n\,\mu^2 - n\,\overline{X}^2 + 2\,n\,\mu\overline{X} - n\,\mu^2$$
$$= \sum_{j=1}^{j=n} X_j{}^2 - n\,\overline{X}^2$$
$$= \sum_{j=1}^{j=n} X_j{}^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{j=1}^{j=n} X_j\right)^2$$

D'où, par division par $n - 1$, l'égalité annoncée.

Ensuite, faisons, sur les variables centrées $X_j - \mu$, $1 \le j \le n$, un **<u>changement de coordonnées rectangulaires</u>** défini par :

$$\begin{pmatrix} X'_1 \\ X'_2 \\ \vdots \\ X'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1\,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2\,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1\,1} & a_{n-1\,2} & \cdots & a_{n-1\,n-1} & a_{n-1\,n} \\ \frac{1}{\sqrt{n}} & \frac{1}{\sqrt{n}} & \cdots & \frac{1}{\sqrt{n}} & \frac{1}{\sqrt{n}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 - \mu \\ X_2 - \mu \\ \vdots \\ X_n - \mu \end{pmatrix}$$

avec $a_{j\,i} = \begin{cases} -\dfrac{1}{\sqrt{j(j+1)}} & \text{pour } i \le j \\ \sqrt{\dfrac{j}{j+1}} & \text{pour } i = j+1 \\ 0 & \text{pour } i > j+1 \end{cases}$, $1 \le j \le n-1$.

C'est là qu'est masquée la difficulté : d'où sort cette idée de changement de coordonnées parachuté ?
Réponse : de la diagonalisation de la matrice de la forme quadratique définie par S^2, celle-là même que nous avons faite plus haut.

$X'_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}(X_1 - \mu) + \frac{1}{\sqrt{2}}(X_2 - \mu)$; $E(X'_1) = 0$; $Var(X'_1) = \frac{\sigma^2}{2} + \frac{\sigma^2}{2} = \sigma^2$.
$X'_2 = -\frac{1}{\sqrt{6}}(X_1 - \mu) - \frac{1}{\sqrt{6}}(X_2 - \mu) + \sqrt{\frac{2}{3}}(X_3 - \mu)$; $E(X'_2) = 0$; $Var(X'_2) = \frac{\sigma^2}{6} + \frac{\sigma^2}{6} + \frac{2}{3}\sigma^2 = \sigma^2$.
...
$X'_{n-1} = -\frac{1}{\sqrt{(n-1)\,n}}(X_1 - \mu) - \frac{1}{\sqrt{(n-1)\,n}}(X_2 - \mu) - \ldots - \frac{1}{\sqrt{(n-1)\,n}}(X_{n-1} - \mu) + \sqrt{\frac{n-1}{n}}(X_n - \mu)$
$E(X'_{n-1}) = 0$; $Var(X'_{n-1}) = (n-1)\frac{\sigma^2}{(n-1)\,n} + \frac{n-1}{n}\sigma^2 = \sigma^2$.
$X'_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{j=n}(X_j - \mu)$; $E(X'_n) = 0$; $Var(X'_n) = n\,\frac{\sigma^2}{n} = \sigma^2$.

Comme les X_j sont des variables normales centrées indépendantes, il en est de même des X'_j.
Les X'_j sont donc des variables normales centrées indépendantes qui ont toutes la même variance σ^2.
On vérifie alors les relations :

$$\overline{X} - \mu = \frac{1}{\sqrt{n}} X'_n$$
$$\sum_{j=1}^{j=n} X'_j{}^2 = \sum_{j=1}^{j=n} (X_j - \mu)^2$$

La première égalité est évidente.
Le changement de coordonnées correspond à un **changement de base orthonormale** parce que les vecteurs lignes de la matrice du changement de coordonnées sont des vecteurs unitaires orthogonaux, ce qui est facile à vérifier puisque la somme des éléments d'une ligne est nulle (sauf la dernière) et que la somme des carrés des éléments d'une ligne vaut 1.
Donc la norme d'un vecteur ne change pas par ce changement de coordonnées, d'où la deuxième égalité.

D'où, compte tenu de la relation $S^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{j=1}^{j=n} (X_j - \mu)^2 - n\,(\overline{X} - \mu)^2\right)$ établie au début :

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{j=n-1} X'_j{}^2 \text{ et } T = \frac{X'_n}{S}$$

2°/ Loi de probabilité de *T*.

a) Détermination de la loi de *T*.

$\overline{X}$, combinaison linéaire de variables normales indépendantes, est une variable normale.
Son espérance est μ et sa variance $\frac{\sigma^2}{n}$.

Donc la variable aléatoire $\frac{\overline{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ est une **variable normale centrée réduite**.

$\sum_{j=2}^{j=n} Y_j{}^2$ est somme de carrés de variables normales centrées réduites indépendantes dans leur ensemble, c'est donc une variable de χ^2 à $(n-1)$ degrés de liberté et cette variable est indépendante de $\overline{X}$.
$\frac{S^2}{\sigma^2} = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{j=n-1} Y_j{}^2$ est une variable de χ^2 à $(n-1)$ degrés de liberté, divisée par son nombre de degrés de liberté.

$T = \frac{\overline{X} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$ apparaît alors comme le **rapport entre une variable normale centrée réduite $\frac{\overline{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ et la racine carrée $\frac{S}{\sigma}$ d'une variable de χ^2 à $(n-1)$ degrés de liberté divisée par son nombre de degré de liberté, indépendante de la précédente** : d'après le résultat de l'Exercice 1, *T* est une **variable de Student** (à $n-1$ degrés de liberté) et sa loi de probabilité est donnée par :

$$f_T(t) = \frac{1}{\sqrt{(n-1)\,\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \frac{1}{\left(1 + \frac{t^2}{n-1}\right)^{\frac{n}{2}}}$$

Remarque : la loi de T^2 est la loi de probabilité du rapport de deux variables de χ^2 divisées par leur nombres de degrés de liberté : c'est ce qu'on appelle une **loi *F* de Fisher-Snedecor** (à $(1, n-1)$ degrés de

liberté).
Le carré d'une variable T de Student à $n - 1$ degrés de liberté est une variable F de Fisher-Snedecor à (1, $n - 1$) degrés de liberté.

3°/ Espérance et variance de T.

D'après l'Exercice 1, l'espérance de T est nulle pour $(n - 1) > 1$.
La variance de T n'existe pas pour $n - 1 = 1$ ou $n - 1 = 2$.

Lorsqu'il existe au moins trois degrés de libertés (ici, le nombre de degrés de liberté est $n - 1$, donc $n \geq 4$):

L'espérance est 0 et la variance est $\frac{n-1}{n-3}$

Exercices

Loi de Fisher-Snedecor.

1. Définition.
2. Espérance et variance.
3. Interprétation.
4. Utilisation de la table de la fonction de répartition.

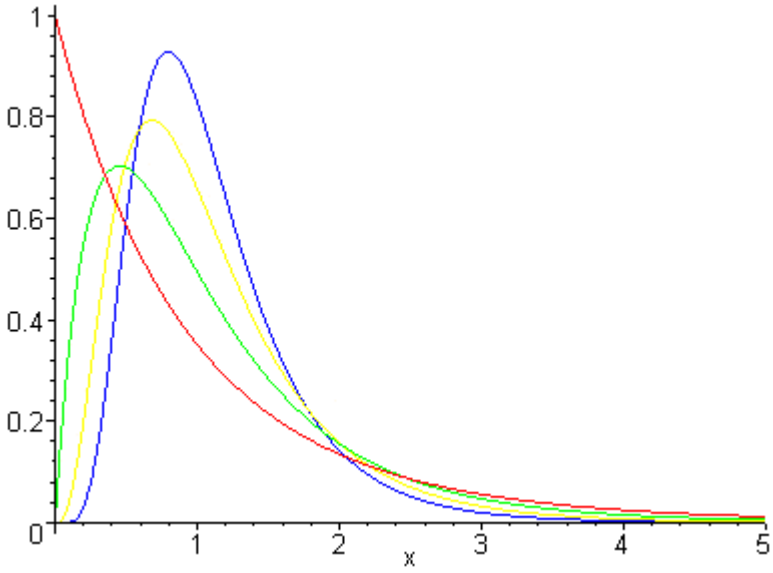
Variable aléatoire réelle de loi de Fisher-Snedecor.

HAUT

1. Définition.

On dit qu'une variable aléatoire réelle à densité X suit une **loi de probabilité de Fisher-Snedecor à (n_1, n_2) degrés de liberté** (n_1 et n_2 entiers > 0) si, et seulement si, sa densité de probabilité, nulle pour $x < 0$, est donnée, pour $x > 0$, par la formule :

$$f_{(n_1, n_2)}(x) = n_1^{\frac{n_1}{2}} n_2^{\frac{n_2}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{n_1+n_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)} \frac{x^{\frac{n_1}{2}-1}}{(n_1 x+n_2)^{\frac{n_1+n_2}{2}}}$$



Cette relation est notée $X \rightsquigarrow F_{(n_1, n_2)}$.

On a représenté ci-contre cette loi F de Fisher-Snedecor pour diverses valeurs de (n_1, n_2) : $n_2 = 20$, $n_1 = 2, 4, 8, 16$.
Dans cette formule, Γ est la **fonction Gamma d'Euler** définie, lorsque la partie réelle de x est > 0, par :

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-u} u^{x-1} du.$$

La **fonction Beta d'Euler** est définie, lorsque les parties réelles de x et y sont > 0, par :

$$B(x, y) = \int_0^1 u^{x-1} (1-u)^{y-1} du.$$

Elle vérifie :

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\,\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

de sorte qu'on pourrait la faire intervenir dans la densité de probabilité de Fisher-Snedecor : $f_{(n_1, n_2)}(x) =$

$$\frac{n_1^{\frac{n_1}{2}} n_2^{\frac{n_2}{2}}}{B\left(\frac{n_1}{2}, \frac{n_2}{2}\right)} \frac{x^{\frac{n_1}{2}-1}}{(n_1 x+n_2)^{\frac{n_1+n_2}{2}}}$$

HAUT

2. Espérance et variance.

HAUT

Si X est une variable aléatoire **de Fisher-Snedecor à (n_1, n_2) degrés de liberté** :

$$E(X) = \frac{n_2}{n_2 - 2},\ n_2 \geq 3.$$

$$Var(X) = \frac{n_1 + 2}{n_1} \frac{{n_2}^2}{(n_2 - 2)(n_2 - 4)} - \frac{{n_2}^2}{(n_2 - 2)^2},\ n_2 \geq 5.$$

3. Interprétation de la loi *F* de Fisher-Snedecor.

HAUT

La loi *F* de Fisher-Snedecor à (n_1, n_2) degrés de liberté est la loi de probabilité du **rapport de deux variables de khi-deux indépendantes** divisées par leurs nombres de degrés de liberté (n_1 pour le numérateur, n_2 pour le dénominateur).

Pour $n_1 = 1$, la loi *F* de Fisher-Snedecor à (1, n_2) degrés de liberté est la loi de probabilité du **carré d'une variable de Student** à n_2 degrés de liberté.

4. Utilisation de la table de la fonction de répartition.

HAUT

La table de la fonction de répartition donne, en fonction de n_1 et n_2, la valeur de x pour laquelle la fonction de répartition $\int_0^x f_{(n_1, n_2)}(t)\,dt$ vaut **0,975**.

Cette table sert à la comparaison des variances de deux populations à partir de deux échantillons.

Chapitre 19. Loi de Fisher-Snedecor.

Exercices

Exercice 1. Loi de Fisher-Snedecor.
Exercice 2. Loi de Fisher-Snedecor pour deux échantillons.

Exercice 1. Loi de Fisher-Snedecor.

Soit F une variable de Fisher-Snedecor à (n_1, n_2) degrés de liberté.

1°/ Ecrire la densité de probabilité de F.

2°/ Calculer l'espérance mathématique et la variance de F.

— Que vaut l'espérance pour $n_1 = n_2 - 2$?

— Montrer que la variance est strictement plus grande que 1 pour $n_1 = n_2 = n$, et calculer sa limite lorsque n tend vers l'infini.

3°/ Calculer la fonction caractéristique de F.

Solution

HAUT

Exercice 2. Loi de Fisher-Snedecor pour deux échantillons.

HAUT

On considère $n + m$ variables aléatoires indépendantes X_j, $1 \leq j \leq n + m$, $n > 1$, $m > 1$, qui suivent toutes la même loi normale de moyenne μ et de variance σ^2 ($\sigma > 0$).
On note :

— $\overline{X_1}$ la variable aléatoire $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{j=n} X_j$,

— $\overline{X_2}$ la variable aléatoire $\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{j=m} X_{n+j}$

— S_1^2 la variable aléatoire $\frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{j=n} (X_j - \overline{X_1})^2$,

— S_2^2 la variable aléatoire $\frac{1}{m-1}\sum_{j=1}^{j=m} (X_{n+j} - \overline{X_2})^2$,

— F la variable aléatoire : $F = \frac{S_1^2}{S_2^2}$.

1°/ Calculer la loi de probabilité de la variable aléatoire F. Comment s'appelle cette loi ?
2°/ Calculer l'espérance et la variance de F.

Solution

HAUT

Chapitre 19. Loi de Fisher-Snedecor.

Enoncés.

Exercice 1. Loi de Fisher-Snedecor.

Soit F une variable de Fisher-Snedecor à (n_1, n_2) degrés de liberté. 1°/ Ecrire la densité de probabilité de F. 2°/ Calculer l'espérance mathématique et la variance de F.	

Solution.

1°/ Densité de probabilité.

La densité de probabilité est, par définition :

$$f_{(n_1, n_2)}(x) = n_1^{\frac{n_1}{2}}\, n_2^{\frac{n_2}{2}}\, \frac{\Gamma\left(\frac{n_1+n_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)\,\Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)}\, \frac{x^{\frac{n_1}{2}-1}}{(n_1 x+n_2)^{\frac{n_1+n_2}{2}}},\ x > 0,\ n_1 \text{ et } n_2 \in \mathbb{N}^*.$$

Dans cette formule, Γ est la **fonction Gamma d'Euler** définie, lorsque la partie réelle de x est > 0, par :

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-u}\, u^{x-1}\, du.$$

Cette fonction $f_{(n_1, n_2)}$ est bien une densité de probabilité sur] 0, + ∞ [, car :

— ses valeurs sont positives,
— la fonction est intégrable et son intégrale est :

$$\int_0^\infty f_{(n_1, n_2)}(x)\, dx = n_1^{\frac{n_1}{2}}\, n_2^{\frac{n_2}{2}}\, \frac{\Gamma\left(\frac{n_1+n_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)\,\Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)} \int_0^\infty \frac{x^{\frac{n_1}{2}-1}}{(n_1 x+n_2)^{\frac{n_1+n_2}{2}}}\, dx.$$

Pour calculer l'intégrale $I = \int_0^\infty \frac{x^{\frac{n_1}{2}-1}}{(n_1 x+n_2)^{\frac{n_1+n_2}{2}}}\, dx$, posons $t = \frac{n_1 x}{n_1 x+n_2}$,

$n_1 x\,(1-t) = n_2\, t \Rightarrow x = \frac{n_2}{n_1}\,\frac{t}{1-t} = \frac{n_2}{n_1}\left(\frac{1}{1-t} - 1\right)$,

$dx = \frac{n_2}{n_1}\,\frac{dt}{(1-t)^2}$

$n_1 x + n_2 = n_2 \times \frac{1}{1-t}$.

Lorsque $x = 0$, $t = 0$.
Lorsque x tend vers l'infini, t tend vers 1.

$$I = \int_0^1 \left(\frac{n_2}{n_1}\frac{t}{1-t}\right)^{\frac{n_1}{2}-1} \left(\frac{1-t}{n_2}\right)^{\frac{n_1+n_2}{2}} \frac{n_2}{n_1}\frac{dt}{(1-t)^2}$$

$$= n_1^{-\frac{n_1}{2}} n_2^{-\frac{n_2}{2}} \int_0^1 t^{\frac{n_1}{2}-1} (1-t)^{\frac{n_2}{2}-1}\, dt$$

Dans l'intégrale, on reconnaît la **fonction Beta d'Euler** définie, lorsque les parties réelles de x et de y sont > 0, par :

$$\mathrm{B}(x, y) = \int_0^1 u^{x-1} (1-u)^{y-1}\, du = \frac{\Gamma(x)\,\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

$$\int_0^1 t^{\frac{n_1}{2}-1} (1-t)^{\frac{n_2}{2}-1}\, dt = \mathrm{B}\left(\frac{n_1}{2}, \frac{n_2}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n_1+n_2}{2}\right)}$$

$$n_1^{\frac{n_1}{2}} n_2^{\frac{n_2}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{n_1+n_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)} \int_0^\infty \frac{x^{\frac{n_1}{2}-1}}{(n_1 x + n_2)^{\frac{n_1+n_2}{2}}}\, dx = n_1^{\frac{n_1}{2}} n_2^{\frac{n_2}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{n_1+n_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)} n_1^{-\frac{n_1}{2}} n_2^{-\frac{n_2}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n_1+n_2}{2}\right)}$$

$$\int_0^\infty f_{(n_1, n_2)}(x)\, dx = 1.$$

L'intégrale de $f_{(n_1, n_2)}$ est bien égale à 1, ce qui achève de montrer que $f_{(n_1, n_2)}$ est bien une densité de probabilité.

2°/ Espérance et variance.

Pour simplifier les notations, notons $C(n_1, n_2)$ le coefficient :

$$C(n_1, n_2) = n_1^{\frac{n_1}{2}} n_2^{\frac{n_2}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{n_1+n_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)}.$$

a) Espérance.

L'espérance est la valeur, quand elle existe, de l'intégrale :

$$E(F) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_{(n_1, n_2)}(x)\, dx = C(n_1, n_2) \int_0^{\infty} \frac{x^{\frac{n_1}{2}}}{(n_1 x + n_2)^{\frac{n_1+n_2}{2}}}\, dx.$$

Vers 0, la convergence est assurée quels que soient n_1 et n_2 dans N*.
Vers l'infini, l'intégrale converge lorsque $n_2 > 2$: l'espérance existe pour $n_2 \geq 3$.

Posons $t = \frac{n_1 x}{n_1 x + n_2}$, $n_1 x (1-t) = n_2 t$, $x = \frac{n_2}{n_1} \frac{t}{1-t} = \frac{n_2}{n_1}\left(\frac{1}{1-t} - 1\right)$, $dx = \frac{n_2}{n_1} \frac{dt}{(1-t)^2}$

$n_1 x + n_2 = n_2 \times \frac{1}{1-t}$.

Lorsque $x = 0$, $t = 0$.
Lorsque x tend vers l'infini, t tend vers 1.

$$E(F) = C(n_1, n_2) \int_0^1 t^{\frac{n_1}{2}} n_1^{-\frac{n_1}{2}} n_2^{-\frac{n_2}{2}} (1-t)^{\frac{n_2}{2}-2} \frac{n_2}{n_1}\, dt$$

$$= n_1^{-\frac{n_1}{2}} n_2^{-\frac{n_2}{2}} \frac{n_2}{n_1} n_1^{\frac{n_1}{2}} n_2^{\frac{n_2}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{n_1+n_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)} \int_0^1 t^{\frac{n_1}{2}} (1-t)^{\frac{n_2}{2}-2}\, dt$$

$$= \frac{n_2}{n_1} \frac{\Gamma\left(\frac{n_1+n_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)} \int_0^1 t^{\frac{n_1}{2}} (1-t)^{\frac{n_2}{2}-2}\, dt$$

Dans l'intégrale, on reconnaît la **fonction Beta d'Euler** définie, lorsque les parties réelles de x et de y sont > 0, par :

$$B(x, y) = \int_0^1 u^{x-1} (1-u)^{y-1}\, du = \frac{\Gamma(x)\,\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

$$\int_0^1 t^{\frac{n_1}{2}} (1-t)^{\frac{n_2}{2}-2}\, dt = B\left(\frac{n_1}{2} + 1, \frac{n_2}{2} - 1\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{n_1}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{n_2}{2}-1\right)}{\Gamma\left(\frac{n_1}{2}+1+\frac{n_2}{2}-1\right)}$$

$$E(F) = \frac{n_2}{n_1} \frac{\Gamma\left(\frac{n_1}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{n_2}{2}-1\right)}{\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)}$$

La relation de récurrence $\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$ donne alors :

$$E(F) = \frac{n_2}{n_1} \frac{\frac{n_1}{2}}{\frac{n_2}{2} - 1} = \frac{n_2}{n_1} \frac{n_1}{n_2 - 2} = \frac{n_2}{n_2 - 2}$$

$$\boxed{E(F) = \frac{n_2}{n_2 - 2},\ n_2 \geq 3.}$$

L'espérance de F ne dépend pas de n_1, elle est toujours supérieure à 1 et, lorsque n_2 tend vers l'infini, elle tend vers 1.

b) Variance.

$$Var(F) = E(F^2) - (E(F))^2.$$

La variance est définie lorsque $E(F)$ et $E(F^2)$ sont définis.
L'espérance est définie pour $n_2 \geq 3$.

$$E(F^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_{(n_1, n_2)}(x)\, dx = C(n_1, n_2) \int_0^{\infty} \frac{x^{\frac{n_1}{2}+1}}{(n_1 x + n_2)^{\frac{n_1+n_2}{2}}}\, dx.$$

Vers 0, la convergence est assurée quels que soient n_1 et n_2 dans N*.
Vers l'infini, l'intégrale converge lorsque $n_2 > 4$: la variance existe pour $n_2 \geq 5$.

Posons $t = \frac{n_1 x}{n_1 x + n_2}$, $n_1 x (1 - t) = n_2 t$, $x = \frac{n_2}{n_1} \frac{t}{1-t} = \frac{n_2}{n_1}\left(\frac{1}{1-t} - 1\right)$, $dx = \frac{n_2}{n_1} \frac{dt}{(1-t)^2}$

$n_1 x + n_2 = n_2 \times \frac{1}{1-t}$.

Lorsque $x = 0$, $t = 0$.
Lorsque x tend vers l'infini, t tend vers 1.

$$E(F^2) = C(n_1, n_2) \int_0^1 t^{\frac{n_1}{2}+1} n_1^{-\frac{n_1}{2}-1} n_2^{-\frac{n_2}{2}+1} (1-t)^{\frac{n_2}{2}-3} \frac{n_2}{n_1}\, dt$$

$$= n_1^{-\frac{n_1}{2}-1} n_2^{-\frac{n_2}{2}+1} \frac{n_2}{n_1} n_1^{\frac{n_1}{2}} n_2^{\frac{n_2}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{n_1+n_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)} \int_0^1 t^{\frac{n_1}{2}+1} (1-t)^{\frac{n_2}{2}-3}\, dt$$

$$= \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 \frac{\Gamma\left(\frac{n_1+n_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)} \int_0^1 t^{\frac{n_1}{2}+1} (1-t)^{\frac{n_2}{2}-3}\, dt$$

Dans l'intégrale, on reconnaît la **fonction Beta d'Euler** définie, lorsque la partie réelle de x et de y est > 0, par :

$$\mathrm{B}(x, y) = \int_0^1 u^{x-1} (1-u)^{y-1}\, du.$$

$$\int_0^1 t^{\frac{n_1}{2}+1} (1-t)^{\frac{n_2}{2}-3}\, dt = \mathrm{B}\left(\frac{n_1}{2}+2, \frac{n_2}{2}-2\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{n_1}{2}+2\right)\Gamma\left(\frac{n_2}{2}-2\right)}{\Gamma\left(\frac{n_1}{2}+2+\frac{n_2}{2}-2\right)}$$

$$E(F^2) = \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 \frac{\Gamma\left(\frac{n_1}{2}+2\right)\Gamma\left(\frac{n_2}{2}-2\right)}{\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)}$$

La relation de récurrence $\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$ donne alors :

$$E(F^2) = \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 \frac{\frac{n_1}{2}\left(\frac{n_1}{2}+1\right)}{\left(\frac{n_2}{2}-1\right)\left(\frac{n_2}{2}-2\right)} = \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 \frac{n_1(n_1+2)}{(n_2-2)(n_2-4)} = \frac{n_1+2}{n_1}\frac{{n_2}^2}{(n_2-2)(n_2-4)}$$

$$Var(F) = E(F^2) - (E(F))^2$$
$$= \frac{n_1+2}{n_1}\frac{{n_2}^2}{(n_2-2)(n_2-4)} - \frac{{n_2}^2}{(n_2-2)^2}$$

$$\boxed{Var(F) = \frac{n_1+2}{n_1}\frac{{n_2}^2}{(n_2-2)(n_2-4)} - \frac{{n_2}^2}{(n_2-2)^2},\ n_2 \geq 5.}$$

Lorsque n_1 et n_2 tendent vers l'infini, la variance de F tend vers 0.

Chapitre 19. Loi de Fisher-Snedecor.

Enoncés.

Exercice 2. Loi de Fisher-Snedecor pour deux échantillons.

On considère $n + m$ variables aléatoires indépendantes X_j, $1 \leq j \leq n + m$, $n > 1$, $m > 1$, qui suivent toutes la même loi normale de moyenne μ et de variance σ^2 ($\sigma > 0$).
On note :

— $\overline{X_1}$ la variable aléatoire $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{j=n} X_j$,

— $\overline{X_2}$ la variable aléatoire $\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{j=m} X_{n+j}$

— S_1^2 la variable aléatoire $\frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{j=n} (X_j - \overline{X_1})^2$,

— S_2^2 la variable aléatoire $\frac{1}{m-1}\sum_{j=1}^{j=m} (X_{n+j} - \overline{X_2})^2$,

— F la variable aléatoire : $F = \frac{S_1^2}{S_2^2}$.

1°/ Calculer la loi de probabilité de la variable aléatoire F. Comment s'appelle cette loi ?
2°/ Calculer l'espérance et la variance de F.

Solution.

1°/ Loi de probabilité de F.

D'après l'exercice 2, 1°, du Chapitre 18, on sait que S_1^2 et S_2^2 peuvent s'écrire sous la forme :

$$S_1^2 = \frac{\sigma^2}{n-1}\sum_{j=1}^{j=n-1} Y_j^2 \text{ et } S_2^2 = \frac{\sigma^2}{m-1}\sum_{j=1}^{j=m-1} Y_{n+j}^2,$$

où les Y_k, $k = 1, \ldots, n-1, n+1, \ldots, n+m-1$, sont des **variables normales centrées réduites** indépendantes entre elles et indépendantes de $\overline{X_1}$ et de $\overline{X_2}$.

Les variables aléatoires $\sum_{j=1}^{j=n-1} {Y_j}^2$ et $\sum_{j=1}^{j=m-1} {Y_{n+j}}^2$ sont donc des **variables de χ^2** à $n-1$ et $m-1$ degrés de liberté, respectivement (Chapitre 17, Exercice 1, 3°), et elles sont indépendantes.

La variable aléatoire $F = \frac{{S_1}^2}{{S_2}^2} = \frac{\frac{{S_1}^2}{\sigma^2}}{\frac{{S_2}^2}{\sigma^2}}$ apparaît alors comme le **rapport de deux variables de χ^2 indépendantes divisées par leurs nombres de degrés de liberté**.

Pour calculer la densité de probabilité de F, nous allons calculer la loi conjointe des variables indépendantes $\frac{{S_1}^2}{\sigma^2}$ et $\frac{{S_2}^2}{\sigma^2}$, faire un changement de variables et en déduire la loi de probabilité du rapport.

$X = (n-1)\frac{{S_1}^2}{\sigma^2}$ est une variable de χ^2 à $n-1$ degrés de liberté. Ses valeurs sont positives.

Sa densité de probabilité est donc $f_X(x) = \frac{2^{-\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} x^{\frac{n-1}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}$, $x > 0$.

Sa fonction de répartition est $P(X < x) = \int_0^x \frac{2^{-\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} t^{\frac{n-1}{2}-1} e^{-\frac{t}{2}}\, dt$, $x > 0$.

La fonction de répartition de $\frac{{S_1}^2}{\sigma^2}$ est donc donnée par :

$$P\left(\frac{{S_1}^2}{\sigma^2} < x\right) = P(X < (n-1)x) = \int_0^{(n-1)x} \frac{2^{-\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} t^{\frac{n-1}{2}-1} e^{-\frac{t}{2}}\, dt,\ x > 0.$$

Dans l'intégrale, posons $t = (n-1)u$, $dt = (n-1)\,du$.

$$P\left(\frac{{S_1}^2}{\sigma^2} < x\right) = \int_0^x \frac{2^{-\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} (n-1)^{\frac{n-1}{2}-1} u^{\frac{n-1}{2}-1} e^{-\frac{n-1}{2}u} (n-1)\, du = \int_0^x \frac{\left(\frac{n-1}{2}\right)^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} u^{\frac{n-1}{2}-1} e^{-\frac{n-1}{2}u}\, du,\ x > 0.$$

La densité de probabilité de $X = \frac{{S_1}^2}{\sigma^2}$ est donc $\frac{\left(\frac{n-1}{2}\right)^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} x^{\frac{n-1}{2}-1} e^{-\frac{n-1}{2}x}$, $x > 0$.

De même, la densité de probabilité de $Y = \frac{{S_2}^2}{\sigma^2}$ est $\frac{\left(\frac{m-1}{2}\right)^{\frac{m-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)} x^{\frac{m-1}{2}-1} e^{-\frac{m-1}{2}x}$, $x > 0$.

Comme les variables aléatoires $\frac{{S_1}^2}{\sigma^2}$ et $\frac{{S_2}^2}{\sigma^2}$ sont indépendantes, la densité de probabilité conjointe est le produit des densités de probabilité :

$$\frac{\left(\frac{n-1}{2}\right)^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} x^{\frac{n-1}{2}-1} e^{-\frac{n-1}{2}x} \times \frac{\left(\frac{m-1}{2}\right)^{\frac{m-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)} y^{\frac{m-1}{2}-1} e^{-\frac{m-1}{2}y}, x > 0, y > 0.$$

Dans le plan des (x, y), faisons le changement de variable défini par $u = x$, $v = \frac{x}{y}$. Inversement, $x = u$, $y = \frac{u}{v}$. $\frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u} = -\frac{u}{v^2}$.

Dans la transformation, le domaine D défini par $x > 0$, $y > 0$, est transformé en D_1 défini par $u > 0$, $v > 0$.

La valeur absolue du jacobien $\frac{D(x,y)}{D(u,v)} = -\frac{u}{v^2}$ est donc $\frac{u}{v^2}$ et la densité de probabilité conjointe des variables X et $F = \frac{X}{Y}$ est donnée par :

$$\frac{\left(\frac{n-1}{2}\right)^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} x^{\frac{n-1}{2}-1} e^{-\frac{n-1}{2}x} \times \frac{\left(\frac{m-1}{2}\right)^{\frac{m-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)} \left(\frac{x}{f}\right)^{\frac{m-1}{2}-1} e^{-\frac{m-1}{2}\frac{x}{f}} \times \frac{x}{f^2}, x > 0, f > 0.$$

$$= \frac{\left(\frac{n-1}{2}\right)^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \frac{\left(\frac{m-1}{2}\right)^{\frac{m-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)} x^{\frac{n-1}{2}-1+\frac{m-1}{2}-1+1} e^{-\frac{n-1}{2}x} e^{-\frac{m-1}{2}\frac{x}{f}} f^{-\frac{m-1}{2}+1-2}, x > 0, f > 0.$$

La densité de probabilité de F est donc donnée par :

$$f_F(f) = \frac{\left(\frac{n-1}{2}\right)^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \frac{\left(\frac{m-1}{2}\right)^{\frac{m-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)} \left(\int_0^\infty x^{\frac{n+m-2}{2}-1} e^{-\left(\frac{n-1}{2}f + \frac{m-1}{2}\right)\frac{x}{f}} dx \right) f^{-\frac{m-1}{2}-1}$$

Pour calculer l'intégrale $\int_0^\infty x^{\frac{n+m-2}{2}-1} e^{-\left(\frac{n-1}{2}f + \frac{m-1}{2}\right)\frac{x}{f}} dx$, posons $y = \left(\frac{n-1}{2}f + \frac{m-1}{2}\right)\frac{x}{f}$.

Lorsque x varie de 0 à l'infini, y varie de 0 à l'infini.

$$x = \frac{f}{\frac{n-1}{2} f + \frac{m-1}{2}} y,\ dx = \frac{f}{\frac{n-1}{2} f + \frac{m-1}{2}} dy.$$

$$\int_0^\infty x^{\frac{n+m-2}{2}-1} e^{-\left(\frac{n-1}{2} f + \frac{m-1}{2}\right)\frac{x}{f}}\, dx = \int_0^\infty \left(\frac{f}{\frac{n-1}{2} f + \frac{m-1}{2}}\right)^{\frac{n+m-2}{2}-1} y^{\frac{n+m-2}{2}-1} e^{-y} \frac{f}{\frac{n-1}{2} f + \frac{m-1}{2}} dy,$$

$$= f^{\frac{n+m-2}{2}} \left(\frac{n-1}{2} f + \frac{m-1}{2}\right)^{-\frac{n+m-2}{2}} \int_0^\infty y^{\frac{n+m-2}{2}-1} e^{-y}\, dy.$$

Par définition de la fonction Gamma d'Euler, $\int_0^\infty y^{\frac{n+m-2}{2}-1} e^{-y}\, dy = \Gamma\left(\frac{n-1}{2} + \frac{m-1}{2}\right)$.

Nous obtenons donc :

$$f_F(f) = \frac{\left(\frac{n-1}{2}\right)^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \frac{\left(\frac{m-1}{2}\right)^{\frac{m-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)} \left(\Gamma\left(\frac{n-1}{2} + \frac{m-1}{2}\right) f^{\frac{n+m-2}{2}} \left(\frac{n-1}{2} f + \frac{m-1}{2}\right)^{-\frac{n+m-2}{2}}\right) f^{-\frac{m-1}{2}-1}$$

$$\boxed{f_F(f) = \left(\frac{n-1}{2}\right)^{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{m-1}{2}\right)^{\frac{m-1}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2} + \frac{m-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)} \frac{f^{\frac{n-1}{2}-1}}{\left(\frac{n-1}{2} f + \frac{m-1}{2}\right)^{-\left(\frac{n-1}{2}+\frac{m-1}{2}\right)}},\ f > 0.}$$

et nous reconnaissons là, par définition, une **loi *F* de Fisher-Snedecor à (*n* – 1, *m* – 1) degrés de liberté** (voir Exercice 1).

La loi *F* de Fisher-Snedecor à (n_1, n_2) degrés de liberté est donc la loi du rapport entre une variable de χ^2 à n_1 degrés de liberté, divisée par son nombre de degrés de liberté, et une variable de χ^2 à n_2 degrés de liberté, divisée par son nombre de degrés de liberté.
Cette loi est très utile, en Statistiques, pour **comparer les variances** de deux populations à partir des résultats obtenus dans un échantillon aléatoire simple et indépendant de chaque population.

2°/ Espérance et variance.

Nous avons déjà calculé, dans l'exercice 1, l'espérance et la variance d'une variable *F* de Fisher-Snedecor à (n_1, n_2) degrés de liberté : il suffit d'appliquer ici les résultats obtenus avec $n_1 = n - 1$, et $n_2 = m - 1$.

$$E(F) = \frac{n_2}{n_2 - 2} = \frac{m-1}{m-3},\ m \geq 4.$$

$$Var(F) = \frac{n_1 + 2}{n_1} \frac{{n_2}^2}{(n_2 - 2)(n_2 - 4)} - \frac{{n_2}^2}{(n_2 - 2)^2} = \frac{n+1}{n-1} \frac{(m-1)^2}{(m-3)(m-5)} - \frac{(m-1)^2}{(m-3)^2},\ m \geq 6.$$

Exercices

Inégalités.

1. **Formule de Markov.**
2. **Inégalité de Bienaymé-Tchebichev.**
3. **Inégalité de Schwarz.**
4. **Inégalité de Kolmogorov.**

1. Formule de Markov.

HAUT

Soit X une variable aléatoire réelle qui possède un moment d'ordre 1, $E[X]$.
Pour tout nombre réel $\lambda > 1$, on a :

$$P(X \geq \lambda E[X]) \leq \frac{1}{\lambda}$$

2. Inégalité de Bienaymé-Tchebichev.

HAUT

Soit X une variable aléatoire réelle qui possède un moment d'ordre 2, $E(X^2)$.
Alors, pour tout nombre réel $a > 0$, on a l'**inégalité de Bienaymé-Tchebichev** :

$$P(|X| > a) \leq \frac{E(X^2)}{a^2}.$$

En particulier, si X possède une espérance mathématique μ et un écart-type σ, on obtient :

$$P\left(\left|\frac{X-\mu}{\sigma}\right| > k\right) \leq \frac{1}{k^2}$$

3. Inégalité de Schwarz.

HAUT

Si X et Y sont deux variables aléatoires réelles possédant des moments d'ordre 2, l'**inégalité de Schwarz** est vérifiée :

$$| E(XY) | \leq \sqrt{E(X^2)}\sqrt{E(Y^2)}$$

En particulier, si l'on remplace X et Y par les variables centrées correspondantes, l'inégalité s'écrit, avec la covariance et les écarts-types :

$$| Cov(X, Y) | \leq \sigma_X \sigma_Y.$$

4. Inégalité de Kolmogorov.

HAUT

Si X est une variable aléatoire réelle **bornée en module** par un nombre M, alors X possède un moment d'ordre 2 et l'**inégalité de Kolmogorov** est vérifiée pour tout nombre réel a :

$$P\left(|X| \geq a\right) \leq \frac{E\left(X^2\right) - a^2}{M^2}$$

Chapitre 20. Inégalités.

Exercices

Exercice 1. Inégalité de Bienaymé-Tchebichev.
Exercice 2. Inégalité de Kolmogorov.
Exercice 3. Inégalité de Schwarz.

Exercice 1. Inégalité de Bienaymé-Tchebichev.

Soit X une variable aléatoire réelle possédant une espérance mathématique μ et un écart-type σ.

1°/ Démontrer l'inégalité de Bienaymé-Tchebichev : $P(|X| > a) \leq \frac{E(X^2)}{a^2}$.

2°/ En déduire l'inégalité de Markov : $P\left(\left|\frac{X-\mu}{\sigma}\right| > k\right) \leq \frac{1}{k^2}$.

Solution

HAUT

Exercice 2. Inégalité de Kolmogorov.

HAUT

Soit X une variable aléatoire réelle bornée en module par un nombre réel positif M.

1°/ Démontrer l'inégalité de Kolmogorov :

$$P(|X| \geq a) \geq \frac{E(X^2) - a^2}{M^2}.$$

Solution

2°/ Vérifier le résultat lorsque X est une variable aléatoire continue de densité $f(x) = e^{-x}$, $x > 0$.

Exercice 3. Inégalité de Schwarz.

HAUT

Soit X une variable aléatoire réelle **positive** possédant une espérance mathématique μ et un écart-type σ. Démontrer que si λ est un nombre réel compris entre 0 et 1,

$$P(X \geq \lambda \mu) \geq (1-\lambda)^2 \frac{\mu^2}{E(X^2)}.$$

Indication : on pourra utiliser l'inégalité de Schwarz.

Solution

Chapitre 20. Inégalités.

Enoncés.

Exercice 1. Inégalité de Bienaymé-Tchebichev.

Soit X une variable aléatoire réelle possédant une espérance mathématique μ et un écart-type σ. 1°/ Démontrer l'inégalité de Bienaymé-Tchebichev : $P(\lvert X \rvert > a) \leq \frac{E(X^2)}{a^2}$. 2°/ En déduire l'inégalité de Markov : $P\left(\left\lvert \frac{X-\mu}{\sigma} \right\rvert > k\right) \leq \frac{1}{k^2}$.	

Solution.

1°/ Inégalité de Bienaymé-Tchebichev.

$P(\lvert X \rvert > a)$ est la somme des probabilités des $X(\omega)$ pour tous les $\omega \in \Omega$ tels que $\lvert X(\omega) \rvert > a$.

Si X est une variable discrète, cette somme s'écrit $\sum_{\substack{\omega \in \Omega \\ \lvert X(\omega) \rvert > a}} P(X(\omega))$.

Si X est une variable à densité, cette somme s'écrit $\int_{\lvert x \rvert > a} f(x)\,dx$.

Dans une approche élémentaire, nous nous limitons à ces deux cas.

Dans le cas d'une **variable discrète**, chaque terme de la somme est majoré par $\left(\frac{X(\omega)}{a}\right)^2 P(X(\omega))$, donc la somme est majorée par :

$$\sum_{\substack{\omega \in \Omega \\ \lvert X(\omega) \rvert > a}} \left(\frac{X(\omega)}{a}\right)^2 P(X(\omega)) = \frac{1}{a^2} \sum_{\substack{\omega \in \Omega \\ \lvert X(\omega) \rvert > a}} (X(\omega))^2 P(X(\omega)) \leq \frac{1}{a^2} \sum_{\omega \in \Omega} (X(\omega))^2 P(X(\omega)) = \frac{E(X^2)}{a^2}.$$

Dans le cas d'une **variable à densité**,

$$P(\lvert X \rvert > a) = \int_{\lvert x \rvert > a} f(x)\,dx \leq \int_{\lvert x \rvert > a} \frac{x^2}{a^2} f(x)\,dx = \frac{1}{a^2} \int_{\lvert x \rvert > a} x^2 f(x)\,dx \leq \frac{1}{a^2} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx = \frac{E(X^2)}{a^2}.$$

Dans les deux cas, on obtient : $P(|X| > a) \leq \frac{E(X^2)}{a^2}$ (inégalité de Bienaymé-Tchebichev).

2°/ Inégalité de Markov.

Dans l'inégalité de Bienaymé-Tchebichev, remplaçons X par $\frac{X-\mu}{\sigma}$ et a par k :

$$P\left(\left|\frac{X-\mu}{\sigma}\right| > k\right) \leq \frac{1}{k^2} E\left(\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^2\right) = \frac{1}{k^2 \sigma^2} E((X-\mu)^2)$$

Or $E((X-\mu)^2) = E((X-E(X))^2)$ est, par définition, la variance σ^2 de X, donc $P\left(\left|\frac{X-\mu}{\sigma}\right| > k\right) \leq \frac{1}{k^2 \sigma^2}$ $\sigma^2 = \frac{1}{k^2}$, c'est l'inégalité de Markov.

Chapitre 20. Inégalités.

Enoncés.

Exercice 2. Inégalité de Kolmogorov.

Soit X une variable aléatoire réelle bornée en module par un nombre réel positif M.

1°/ Démontrer l'inégalité de Kolmogorov :

$$P(|X| \geq a) \geq \frac{E(X^2) - a^2}{M^2}.$$

2°/ Vérifier le résultat lorsque X est une variable aléatoire continue de densité $f(x) = e^{-x}$, $x > 0$.

Solution.

1°/ Inégalité de Kolmogorov.

L'espérance de X^2 est $E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\, dx$, ou, plus généralement pour une mesure de probabilité $dF(x)$, $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2\, dF(x)$ (intégrale de Stieltjes), ce qui englobe aussi le cas d'une variable aléatoire discrète.

Décomposons la droite réelle R en deux parties :

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\, dF(x) = \int_{|x| \geq a} x^2\, dF(x) + \int_{|x| < a} x^2\, dF(x)$$

a) Pour $a > M$,

La première intégrale est nulle et la deuxième donne :

$$E(X^2) = \int_{|x| < a} x^2\, dF(x) \leq M^2 < a^2.$$

Comme on a aussi, dans ce cas, $P(|X| \geq a) = 0$, on peut écrire :

$$P(|X| \geq a) = 0 > \frac{E(X^2) - a^2}{M^2}$$

de sorte que l'inégalité de Kolmogorov est trivialement vérifiée, quelque soit $a > M$.

b) Pour $a \leq M$,

Comme X est bornée par M, on a :

$$\int_{|x|\geq a} x^2\, dF(x) = \int_{a\leq|x|\leq M} x^2\, dF(x) \leq M^2 \int_{a\leq|x|\leq M} dF(x) = M^2 P(|X|\geq a).$$

Dans l'intervalle défini par $|x| < a$, on a $\int_{|x|<a} x^2\, dF(x) \leq a^2 \int_{|x|<a} dF(x) = a^2 P(|X|<a) \leq a^2$.

Au total, nous obtenons :

$$E(X^2) \leq M^2 P(|X|\geq a) + a^2,$$
$$P(|X|\geq a) \geq \frac{E(X^2)-a^2}{M^2}.$$

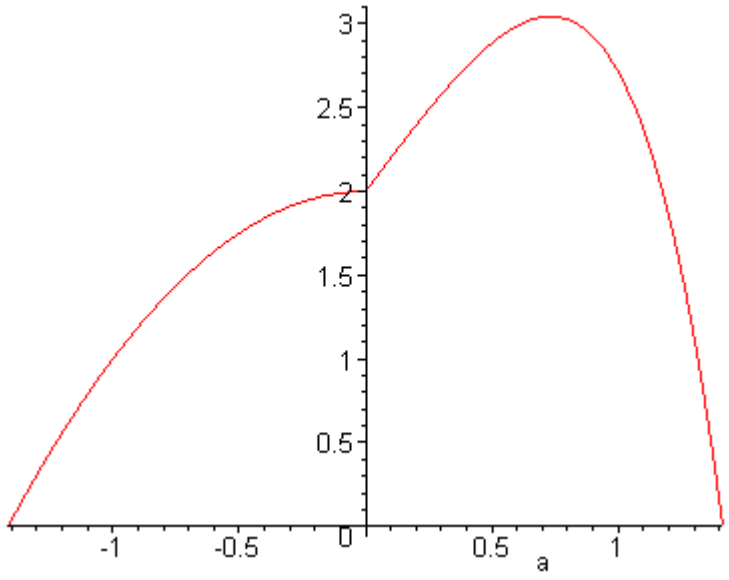
De sorte que l'inégalité de Kolmogorov est vérifiée pour tout a réel.

2°/ Application à la variable exponentielle.

La loi exponentielle est une loi Gamma de paramètres $\lambda = 1$ et $a = 1$.
Son espérance est $\frac{a}{\lambda} = 1$ et sa variance est $\frac{a}{\lambda^2} = 1$.
Cette variable aléatoire n'est pas bornée, elle peut prendre toute valeur entre 0 et $+\infty$.
L'inégalité de Kolmogorov ne s'applique donc pas.

Cependant :

$E(X^2) = \Gamma(3) = 2$, $P(|X|\geq a) = e^{-a}$ pour $a > 0$, et égale 1 pour $a \leq 0$
$\frac{E(X^2)-a^2}{P(|X|\geq a)} = (2 - a^2)\, e^a$ pour $a > 0$, et égale $(2 - a^2)$ pour $a \leq 0$.
Cette fonction continue est négative pour $|a| > \sqrt{2}$.
Elle est maximum pour $a = \sqrt{3} - 1 > 0$, ou pour $a = 0$ lorsque $a \leq 0$.
La valeur du maximum est :
$(2 - (\sqrt{3}-1)^2)\, e^{\sqrt{3}-1} = 2(\sqrt{3}-1)\, e^{\sqrt{3}-1} \approx 3{,}044$ pour $a > 0$, et 2 pour $a \leq 0$.
Dans tous les cas, on peut écrire
$\frac{E(X^2)-a^2}{P(|X|\geq a)} \leq 2(\sqrt{3}-1)\, e^{\sqrt{3}-1}$



De sorte que, pour la loi exponentielle, on obtient une **inégalité du genre de celle de Kolmogorov** :

$$P(|X|\geq a) \geq \frac{E(X^2)-a^2}{M^2} = \frac{E(X^2)-a^2}{2(\sqrt{3}-1)\, e^{\sqrt{3}-1}}$$

sans que $M = \sqrt{2\left(\sqrt{3}-1\right)}\ e^{\frac{\sqrt{3}-1}{2}}$ soit un majorant de $|X|$.

Chapitre 20. Inégalités.

Enoncés.

Exercice 3. Inégalité de Schwarz.

Soit X une variable aléatoire réelle **positive** possédant une espérance mathématique μ et un écart-type σ. Démontrer que si λ est un nombre réel compris entre 0 et 1, $$P(X \geq \lambda \mu) \geq (1-\lambda)^2 \frac{\mu^2}{E(X^2)}.$$ **Indication** : on pourra utiliser l'inégalité de Schwarz.	

Solution.

1°/ Inégalité de Schwarz.

Si l'on considère deux éléments f et g d'un espace normé E,

$$| < f , g > | \leq \| f \| . \| g \|,$$

où $< f , g >$ est le produit scalaire défini par la norme. C'est l'**inégalité de Schwarz**.

Par exemple, lorsque X et Y sont des variables aléatoires réelles, pour tout $\lambda \in \mathrm{R}$, $(X + \lambda Y)^2$ est une variable aléatoire positive et l'on a, lorsque les quantités écrites existent :

$$E((X + \lambda Y)^2) \geq 0, \forall \lambda \in \mathrm{R}.$$

Or $E((X + \lambda Y)^2) = E(X^2) + 2\lambda E(XY) + \lambda^2 E(Y^2)$,
donc, pour que le trinôme soit positif pour toute valeur de λ, il faut, et il suffit, que le discriminant soit négatif, ce qui se traduit par :

$$(E(XY))^2 - E(X^2) E(Y^2) \leq 0.$$

$$\boxed{| E(X Y) | \leq \sqrt{E(X^2)} \sqrt{E(Y^2)}}$$

C'est une forme de l'**inégalité de Schwarz**.

2°/ Minorant de $P(X \geq \lambda \mu)$.

D'après l'inégalité de Schwarz :

$$\int_{\lambda\mu}^{+\infty} x\,dF(x) \le \sqrt{\int_{\lambda\mu}^{+\infty} x^2\,dF(x)}\sqrt{\int_{\lambda\mu}^{+\infty} dF(x)} \le \sqrt{\int_{\lambda\mu}^{+\infty} x^2\,dF(x)} \times \sqrt{P(X \ge \lambda\mu)}$$

Comme λ est positif, $\int_{\lambda\mu}^{+\infty} x^2\,dF(x) = \int_0^{+\infty} x^2\,dF(x) - \int_0^{\lambda\mu} x^2\,dF(x)$ est plus petit que $\int_0^{+\infty} x^2\,dF(x) = E(X^2)$, donc :

$$\int_{\lambda\mu}^{+\infty} x\,dF(x) \le \sqrt{\int_{\lambda\mu}^{+\infty} x^2\,dF(x)} \times \sqrt{P(X \ge \lambda\mu)} \le \sqrt{E(X^2)} \times \sqrt{P(X \ge \lambda\mu)}$$

Or $\int_{\lambda\mu}^{+\infty} x\,dF(x) = \mu - \int_0^{\lambda\mu} x\,dF(x)$, car $\int_0^{\lambda\mu} x\,dF(x) + \int_{\lambda\mu}^{+\infty} x\,dF(x) = \int_0^{+\infty} x\,dF(x) = \mu$

Dans l'intervalle] 0, $\lambda\,\mu$ [, x est inférieur à $\lambda\,\mu$, donc $\int_0^{\lambda\mu} x\,dF(x) \le \lambda\,\mu \int_0^{\lambda\mu} dF(x) \le \lambda\,\mu \int_0^{+\infty} dF(x) = \lambda\,\mu$.

La relation $\int_{\lambda\mu}^{+\infty} x\,dF(x) = \mu - \int_0^{\lambda\mu} x\,dF(x)$ entraîne alors :

$$\int_{\lambda\mu}^{+\infty} x\,dF(x) \ge \mu - \lambda\,\mu = (1-\lambda)\,\mu$$

D'où :

$$\sqrt{E(X^2)} \times \sqrt{P(X \ge \lambda\mu)} \ge \int_{\lambda\mu}^{+\infty} x\,dF(x) \ge (1-\lambda)\,\mu$$

$$P(X \ge \lambda\,\mu) \ge (1-\lambda)^2\,\frac{\mu^2}{E(X^2)}.$$

Exercices

Convergences.

1. Convergence en loi.
2. Théorème central limite.
3. Convergence en probabilité.
4. Convergence en moyenne quadratique.
5. Convergence presque sûre.
6. Lois des grands nombres.
   a) Loi faible des grands nombres.
   b) Loi forte des grands nombres.

1. Convergence en loi.

HAUT

Si $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires définies sur la même tribu A d'un ensemble fondamental Ω, et si $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la suite des fonctions de répartition des variables aléatoires $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on dit que la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **tend en loi** vers une variable aléatoire X de fonction de répartition F si, et seulement si, la suite $(F_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $F(x)$ **en tout point x où F est continue**.

La **convergence en loi** s'appelle aussi **convergence légale**, ou **convergence au sens de Bernoulli**.

Théorèmes de Paul Lévy.

1. $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend en loi vers X, la fonction caractéristique de X_n tend, en tout point vers la fonction caractéristique de X.

2. Réciproquement, soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires dont les fonctions caractéristiques φ_n tendent, pour chaque t vers une limite $\psi(t)$. Si ψ est continue en 0, la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend en loi vers une variable aléatoire X dont ψ est la fonction caractéristique.

HAUT

2. Théorème central limite.

HAUT

Soit $(X_n)_{n \in N^*}$ est une suite de variables aléatoires réelles indépendantes ayant toutes la même loi de probabilité d'espérance μ et d'écart-type σ.

On pose $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{j=n} X_j$ et $Y_n = \frac{\overline{X}_n - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$.

Les Y_n sont des variables centrées réduites : $E(Y_n) = 0$, $E(Y_n^2) = 1$.

Théorème central limite.

La suite $(Y_n)_{n \in N^*}$ tend en loi vers une **variable aléatoire normale centrée réduite**.
Autrement dit, quelle que soit la loi de probabilité commune des X_n, la loi de Y_n tend vers une loi normale centrée réduite.

HAUT

3. Convergence en probabilité (ou convergence stochastique de Slutski).

HAUT

On dit que la suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ **tend en probabilité** vers une variable aléatoire X si :

$$\lim_{n \to +\infty} P\,[\,|X_n - X| > h\,] = 0$$

quel que soit le nombre $h > 0$ fixé.

Théorème.

La convergence en probabilité entraîne la convergence en loi.

HAUT

4. Convergence en moyenne quadratique.

HAUT

On dit que la suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ **tend en moyenne quadratique** vers une variable aléatoire X si :

$$\lim_{n \to +\infty} E\left[(X_n - X)^2 \right] = 0$$

Théorème.

La convergence en moyenne quadratique entraîne la convergence en probabilité.

C'est une conséquence de l'inégalité de Bienaymé-Tchebichev.
La réciproque est fausse.

HAUT

5. Convergence presque sûre.

HAUT

On dit que la suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ **converge presque sûrement** vers une variable aléatoire X si :

$$\lim_{n \to +\infty} X_n(\omega) = X(\omega)$$

sauf pour un ensemble d'événements $\omega \in \Omega$ de probabilité nulle.

Théorème.

La convergence presque sûre entraîne la convergence en probabilité.

HAUT

6. Lois des grands nombres.

a) Loi faible des grands nombres.

HAUT

Soit $(X_n)_{n \in N^*}$ est une suite de variables aléatoires réelles centrées orthogonales et d'écarts-types σ_n.

On pose $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{j=n} X_j$ (moyenne arithmétique).

Si $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{j=n} {\sigma_j}^2 = 0$, la suite $(\overline{X}_n)_{n \in N^*}$ tend **en moyenne quadratique et en probabilité** vers 0.

Corollaire.

Soit $(X_n)_{n \in N^*}$ est une suite de variables aléatoires réelles orthogonales de même espérance μ et de même écart-type σ.

On pose $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{j=n} X_j$ (moyenne arithmétique).

Alors, la suite $(\overline{X}_n)_{n \in N^*}$ tend en moyenne quadratique et en probabilité vers μ.

- **Loi faible des grands nombres (énoncé de Bernoulli).**

Soit A le résultat d'une épreuve aléatoire, de probabilité $P(A) = p$ $(0 < p < 1)$.
Soit $f_A(n)$ la fréquence de l'événement A dans une série de n **répétitions indépendantes** de l'épreuve.
Alors, pour tout $\delta > 0$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier N tel que, pour tout $n \geq N$, on ait :

$$P(|f_A(n) - p| < \varepsilon) \geq 1 - \delta.$$

Il revient au même de dire que :

> La fréquence de l'événement A **converge en probabilité** vers la probabilité de A quand le nombre d'épreuves augmente indéfiniment.

Note :

Lorsque ε est suffisamment petit $(0 < \varepsilon < p(1-p))$, il suffit de prendre $N \geq \frac{9}{8\varepsilon^2} \ln \frac{2}{\delta}$ (Bernstein), alors que l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev assure l'inégalité $P(|f_A(n) - p| < \varepsilon) \geq 1 - \delta$ seulement pour $n \geq N \geq \frac{p(1-p)}{\varepsilon^2 \delta}$.

- **Loi faible des grands nombres (énoncé de Kintchine).**

> Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles deux à deux

indépendantes et identiquement distribuées, dont l'espérance mathématique $E[X_1]$ existe.

Alors la suite de variables aléatoires $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{j=n} X_j$, $n \geq 1$, **converge en probabilité** vers $E[X_1]$, lorsque n augmente indéfiniment.

HAUT

b) Loi forte des grands nombres.

HAUT

Soit $(X_n)_{n \in N^*}$ est une suite de variables aléatoires réelles indépendantes centrées et d'écarts-types σ_n.

On pose $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{j=n} X_j$ (moyenne arithmétique).

Si la série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{{\sigma_k}^2}{k^2}$ est convergente, alors la suite $(\overline{X}_n)_{n \in N^*}$ tend presque sûrement vers 0.

Corollaire.

Soit $(X_n)_{n \in N^*}$ est une suite de variables aléatoires réelles indépendantes de même espérance $\mu \neq 0$, et de même écart-type σ.

On pose $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{j=n} X_j$ (moyenne arithmétique).

Alors, la suite $(\overline{X}_n)_{n \in N^*}$ tend en probabilité et presque sûrement vers μ.

Théorème de Borel-Cantelli.

La loi forte des grands nombres de Bernoulli (ou théorème de Borel-Cantelli), indique que, lorsque *n* tend vers l'infini, la moyenne $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{j=n} X_j$ d'un échantillon de taille *n* de la variable de Bernoulli de paramètre *p*, converge presque sûrement vers *p*.

HAUT

Chapitre 21. Convergences.

Exercices

Exercice 1. Journaux et métro.
Exercice 2. Jets de dé.
Exercice 3. Jets de pièce.
Exercice 4. Loi binomiale et approximation normale.
Exercice 5. Processus de Poisson.
Exercice 6. Loi binomiale négative.
Exercice 7. Convergence légale et convergence en moyenne quadratique.
Exercice 8. Convergence légale et convergence en probabilité.
Exercice 9. Convergence en probabilité.
Exercice 10. Convergence presque sûre et convergence en probabilité.
Exercice 11. Loi forte des grands nombres.

Exercice 1. Journaux et métro.

HAUT

A l'entrée d'une station de métro, un marchand de journaux remarque qu'en moyenne, entre 8 heures et 9 heures, une personne sur 10 achète un journal.

1°/ Sachant qu'il passe 400 personnes entre 8 h et 9 h, indiquer la loi de probabilité du nombre X de journaux vendus pendant cette période (préciser les hypothèses).
2°/ Donner l'espérance et la variance de X.
3°/ Par quelle loi de probabilité peut-on approcher la loi de X ? Utiliser cette approximation pour calculer les probabilités des événements :
$X = 42$; $X \geq 45$; $35 \leq X < 45$; $29 \leq X < 52$.

Solution

HAUT

Exercice 2. Jets de dé.

HAUT

On jette un dé (à 6 faces équiprobables) 6000 fois. Soit X le nombre 1 obtenus en 6000 jets. 1°/ Montrer que X est une variable binomiale. 2°/ Justifier l'approximation de la loi binomiale par la loi normale. 3°/ En utilisant l'approximation normale, calculer les probabilités suivantes : $P(980 \leq X \leq 1030)$; $P(980 < X < 1030)$.	Solution

HAUT

Exercice 3. Jets de pièce.

HAUT

On jette 12 fois une pièce bien équilibrée. Calculer la probabilité p pour que le nombre de faces soit compris entre 4 et 7, en utilisant : 1°/ La loi binomiale. 2°/ L'approximation normale de la loi binomiale.	Solution

HAUT

Exercice 4. Loi binomiale et approximation normale.

HAUT

Soit p la probabilité d'un événement A. On effectue n épreuves indépendantes et on désigne par f la fréquence de réalisation de A dans cette série d'épreuves. Au moyen de l'approximation de la distribution binomiale, répondre aux questions suivantes : 1°/ Soit $p = 0,4$ et $n = 1500$. Quelle est la probabilité pour que f soit compris entre 0,40 et 0,44 ? 2°/ Soit $p = 0,375$. Combien d'épreuves indépendantes faut-il effectuer pour que la probabilité d'avoir $\lvert f - p \rvert \leq 0,01$ soit au moins de 0,995 ? 3°/ Soit $p = \frac{2}{3}$, $n = 1200$. Comment choisir ε pour que la probabilité d'avoir $\lvert f - p \rvert < \varepsilon$ soit au moins 0,985 ? 4°/ Soit $n = 14\,400$. Pour quelles valeurs de p la probabilité de $\lvert f - p \rvert \leq 0,01$ est-elle au moins 0,99 ?	Solution

HAUT

Exercice 5. Processus de Poisson.

HAUT

On considère une suite de variables aléatoires indépendantes X_i, $i \geq 1$, qui suivent toutes la même **loi exponentielle** de paramètre a. On note T_n la somme :

$$T_n = X_1 + ... + X_n.$$

A chaque nombre réel $t > 0$, on fait correspondre l'unique entier $N(t)$ vérifiant :

$$T_{N(t)} \leq t < T_{N(t)+1}.$$

1°/ Montrer que, lorsque t augmente indéfiniment, le rapport $\frac{T_{N(t)}}{N(t)}$ converge presque sûrement vers l'espérance de X_1.

2°/ En déduire que, dans les mêmes conditions, $\frac{N(t)}{t}$ converge presque sûrement vers a.

Solution

HAUT

Exercice 6. Loi binomiale négative.

HAUT

On considère une variable aléatoire X qui suit une **loi binomiale négative** de paramètres r et p :

$$P(X = n) = \binom{n-1}{r-1} p^r (1-p)^{n-r}.$$

Quelle est la loi limite de la variable aléatoire $Y = X - r$ lorsque r augmente indéfiniment, que p tend vers 1, et que le produit $r(1-p)$ a une limite finie λ ?

Solution

HAUT

Exercice 7. Convergence légale et convergence en moyenne quadratique.

HAUT

1°/ Une suite de variables aléatoires X_n ($n \geq 1$) converge en loi vers une variable aléatoire X. Une autre suite de variables aléatoires Y_n ($n \geq 1$), indépendantes des X_n, converge en probabilité vers une variable aléatoire qui est presque sûrement égale à une constante a.
Montrez que la variable aléatoire $Z_n = X_n + Y_n$ converge en loi vers une variable aléatoire Z dont on exprimera la fonction de répartition au moyen de celle de X et de a.

2°/ Trouver un exemple d'une suite de variables aléatoires Z_n possédant un moment d'ordre 2 et qui converge en loi vers la variable aléatoire normale centrée réduite Z sans que la variance de Z_n tende vers 1.
On pourra utiliser le résultat de la question 1 et la suite de variables aléatoires Y_n dont la loi est définie par :

$$\begin{cases} P(Y_n = 0) = 1 - \frac{1}{n} \\ P(Y_n = n) = \frac{1}{n} \end{cases}$$

Solution

HAUT

Exercice 8. Convergence légale et convergence en probabilité.

HAUT

On considère une suite de variables aléatoires indépendantes U_n ($n \geq 1$) de même loi discrète :

$$\begin{cases} P(U_n = 1) = p \\ P(U_n = -1) = q \end{cases} \quad p + q = 1$$

On définit une suite de variables aléatoires V_n ($n \geq 1$) par les relations :

$V_1 = U_1$,
$V_2 = U_1 U_2$,
.....
$V_n = U_1 U_2 \ldots U_n$
.....

1°/ Calculer l'espérance mathématique de V_n et en déduire sa loi.
2°/ Montrer que, si n augmente indéfiniment, la loi de V_n admet, en général, une limite que l'on précisera.
3°/ La suite des variables V_n converge-t-elle en probabilité lorsque n augmente indéfiniment ?

Solution

HAUT

Exercice 9. Convergence en probabilité.

HAUT

1°/ Démontrer la formule de Markov. En déduire la formule de Bienaymé-Tchebichev.
2°/ Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires telle que :

$$\lim_{n\to+\infty}(E[X_n]) = m,$$

$$\lim_{n\to+\infty}(Var[X_n]) = 0.$$

Montrer que $(X_n)_{n\geq 0}$ converge en probabilité vers m.

3°/ Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, ayant des moments d'ordre 2 finis. Montrer que $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{j=n} X_j$ converge en probabilité vers $E[X_1]$.

Solution

HAUT

Exercice 10. Convergence presque sûre et convergence en probabilité.

HAUT

Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires qui converge presque sûrement vers une variable aléatoire X.

1°/ Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que l'on peut définir une variable aléatoire $N(\varepsilon)$ à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ vérifiant les deux conditions suivantes :

$$\begin{cases} (\forall n \in \mathbb{N})\left(n \geq N(\varepsilon) \Rightarrow \left| X_n - X \right| < \varepsilon\right) \\ \lim\limits_{n\to\infty} P\left(N(\varepsilon) \leq n\right) = 1 \end{cases}$$

2°/ Montrer que $(X_n)_{n\geq 0}$ converge en probabilité vers X.

Solution

HAUT

Exercice 11. Loi forte des grands nombres.

HAUT

J'ai fabriqué une machine. Quand on appuie sur un bouton de cette machine, sa lumière s'allume, avec une probabilité $\frac{\pi}{10}$ et indépendamment des autres essais, pendant une seconde. Quand j'appuie sur le bouton, je dis que j'ai gagné si la lumière s'est allumée. Je note X_n le nombre de fois où j'ai gagné si j'ai appuyé n fois sur le bouton. Quelle est la loi de X_n ?

Le nombre $Y_n = \frac{100}{n} \times X_n$ représente alors le "pourcentage de réussite pour n essais". Si I est un sous-ensemble de [0, 100], je note $\alpha_n(I) = P(Y_n \in I)$. Déterminer la limite, quand n tend vers l'infini, des valeurs suivantes :

- $\alpha_n([0, 20])$,
- $\alpha_n([30, 40])$,
- $\alpha_n([10\,\pi - 10^{-5}, 10\,\pi + 10^{-5}])$,
- $\alpha_n(\{10\,\pi\})$.

Solution

HAUT

Chapitre 21. Convergences.

Enoncés.

Exercice 1. Journaux et métro.

A l'entrée d'une station de métro, un marchand de journaux remarque qu'en moyenne, entre 8 heures et 9 heures, une personne sur 10 achète un journal. 1°/ Sachant qu'il passe 400 personnes entre 8 h et 9 h, indiquer la loi de probabilité du nombre X de journaux vendus pendant cette période (préciser les hypothèses). 2°/ Donner l'espérance et la variance de X. 3°/ Par quelle loi de probabilité peut-on approcher la loi de X ? Utiliser cette approximation pour calculer les probabilités des événements : $X = 42$; $X \geq 45$; $35 \leq X < 45$; $29 \leq X < 52$.	

Solution.

1°/ Loi de probabilité.

Pour une personne qui passe, entre 8 heures et 9 heures, dans la station de métro, de deux choses l'une : ou bien elle achète un journal, c'est le succès, avec une probabilité $p = \frac{1}{10}$, ou bien elle n'achète pas le journal, c'est l'échec, avec une probabilité $q = 1 - p = \frac{9}{10}$.

Regarder si une personne achète ou non le journal est une épreuve de Bernoulli.

Hypothèses :

❶ On suppose que les 400 personnes qui prennent le métro entre 8 heures et 9 heures décident indépendamment l'une de l'autre de l'achat ou non d'un journal (**épreuves indépendantes**).

❷ On suppose que la probabilité d'acheter le journal est la même pour toutes les personnes qui prennent le métro entre 8 heures et 9 heures (**la probabilité du succès est la même pour chaque épreuve**).

Lorsqu'on répète l'épreuve de Bernoulli, pour les 400 personnes qui passent dans la station de métro entre 8 heures et 9 heures, le nombre de succès enregistrés est le nombre X de personnes qui achètent le journal. X, nombre de succès dans une répétition d'épreuves de Bernoulli, suit une **loi binomiale** de paramètres $n = 400$, $p = \frac{1}{10}$.

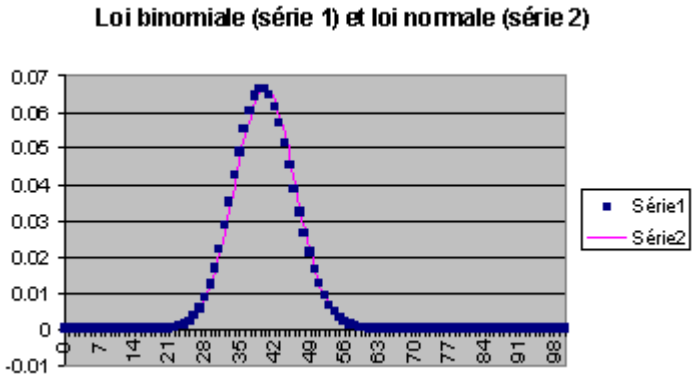
$$P[X = k] = \binom{400}{k}\left(\frac{1}{10}\right)^k\left(\frac{9}{10}\right)^{400-k}$$

2°/ Espérance et variance.

$$E(X) = n\,p = 40$$
$$Var(X) = n\,p\,q = 36.$$

3°/ Approximation normale de la loi binomiale.

Lorsque n est grand et que **la variance est supérieure à *a***, on peut approcher la loi binomiale par une loi normale, à condition de ne pas s'éloigner de plus de $\sqrt{a}$ écarts-types de la moyenne $n\,p$.
Ici, avec une variance de 36, l'approximation normale est acceptable, depuis $X = 4$, jusqu'à $X = 64$.



Pour approcher la loi binomiale (discrète) par la loi normale (continue), on peut approcher la valeur de $P[X = k] = \binom{400}{k}\left(\frac{1}{10}\right)^{k}\left(\frac{9}{10}\right)^{400-k}$ par la valeur au point k :

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{(k-\mu)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{6\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{(k-40)^2}{72}}$$

de la densité de probabilité de la variable normale de moyenne 40 et de variance 36.

Par exemple, pour $k = 42$, on prendra :

$$P[X = 42] = \frac{1}{6\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{4}{72}} = 6{,}29 \times 10^{-2}$$

(la valeur donnée par la loi binomiale est $6{,}15 \times 10^{-2}$).

Cependant, lorsqu'on veut calculer la probabilité d'un intervalle de valeurs, on aura intérêt à remplacer la densité de probabilité en un point par sa moyenne sur un intervalle de longueur 1, c'est-à-dire, à peu près, par la probabilité d'un intervalle symétrique de longueur 1 entourant la valeur visée.
Autrement dit, si l'on appelle F la fonction de répartition de la variable normale centrée réduite, on approche la valeur de $P[X = k]$ par

$$P[X = k] = F\left(\frac{k+0{,}5-\mu}{\sigma}\right) - F\left(\frac{k-0{,}5-\mu}{\sigma}\right) = F\left(\frac{k+0{,}5-40}{6}\right) - F\left(\frac{k-0{,}5-40}{6}\right)$$

de sorte que la probabilité d'un intervalle $[k_1\,;\,k_2]$ est approchée par :

$$P[X \in [k_1\,;\,k_2]] = \sum_{k=k_1}^{k=k_2} P[X = k] = \sum_{k=k_1}^{k=k_2}\left(F\left(\frac{k+0{,}5-\mu}{\sigma}\right) - F\left(\frac{k-0{,}5-\mu}{\sigma}\right)\right)$$
$$= F\left(\frac{k_2+0{,}5-\mu}{\sigma}\right) - F\left(\frac{k_1-0{,}5-\mu}{\sigma}\right),$$

$$P\,[X \in [k_1\,;\,k_2]] = F\left(\frac{k_2 + 0{,}5 - \mu}{\sigma}\right) - F\left(\frac{k_1 - 0{,}5 - \mu}{\sigma}\right)$$

La table de la fonction de répartition de la variable normale centrée réduite donne les valeurs de F correspondantes.

Les 0,5 qui apparaissent dans les numérateurs constituent ce qu'on appelle la ***correction de continuité***.
On la néglige lorsqu'elle est très petite devant l'écart-type.
Ici, l'écart-type vaut 6 et la correction de continuité de 0,5 n'est pas tout à fait négligeable devant l'écart-type.

Par exemple :

$$P\,[35 \leq X < 45] = \sum_{k=35}^{k=44} P\,[X = k] = F\left(\frac{4{,}5}{6}\right) - F\left(-\frac{5{,}5}{6}\right) = F\,(0{,}7500) + F\,(0{,}9167) - 1 = 0{,}7734 + 0{,}8204 - 1 = 0{,}5938$$

(alors que la loi binomiale donne la valeur 0,5959 et que la somme des valeurs de densité de probabilité normale est 0,5943, soit une erreur relative de 0,3 %).
Sans correction de continuité, on obtient :

$$P\,[35 \leq X < 45] = F\,(0{,}6667) + F\,(0{,}8333) - 1 = 0{,}7476 + 0{,}7976 - 1 = 0{,}5452,$$

l'approximation est beaucoup moins bonne (erreur relative de 8 %) !

De même, la probabilité de l'intervalle $29 \leq X < 52$ sera donnée par :

$$P\,[29 \leq X < 52] = F\left(\frac{51{,}5 - 40}{6}\right) - F\left(\frac{28{,}5 - 40}{6}\right) = 2\,F\,(1{,}9167) - 1 = 2 \times 0{,}9724 - 1 = 0{,}9448$$

et la probabilité de l'intervalle $X \geq 45$ sera donnée par :

$$P\,[X \geq 45] = 1 - P\,[X \leq 44] = 1 - F\left(\frac{44{,}5 - 40}{6}\right) = 1 - F\,(0{,}7500) = 1 - 0{,}7734 = 0{,}2266.$$

En résumé, les valeurs trouvées peuvent être présentées en tableau, avec les valeurs données par la loi binomiale et par la somme des densités de probabilité normales, à titre de comparaison :

	$X = 42$	$X \geq 45$	$35 \leq X < 45$	$29 \leq X < 52$
Loi binomiale	0,0615	0,2237	0,5959	0,9454
Densité normale de probabilité	0,0629	0,2264	0,5943	0,9450
Fonction de répartition normale avec correction de continuité	0,0628	0,2266	0,5938	0,9448
Sans correction de continuité	0	0,2023	0,5452	0,9332

Ce tableau montre l'importance qu'il y a à **ne pas négliger, autant que faire se peut, la correction de continuité**.

Chapitre 21. Convergences.

Enoncés.

Exercice 2. Jets de dé.

On jette un dé (à 6 faces équiprobables) 6000 fois. Soit X le nombre de 1 obtenus en 6000 jets. 1°/ Montrer que X est une variable binomiale. 2°/ Justifier l'approximation de la loi binomiale par la loi normale. 3°/ En utilisant l'approximation normale, calculer les probabilités suivantes : $P\,(980 \leq X \leq 1030)$; $P\,(980 < X < 1030)$.	

Solution.

1°/ Loi binomiale.

Le nombre X de 1 obtenus en 6000 jets de dé est le nombre de succès dans une répétition d'épreuves de Bernoulli indépendantes dont le succès, obtention d'un 1, a une probabilité $p = \frac{1}{6}$.

On sait alors que X suit une loi binomiale de paramètres $n = 6000$, nombre de répétitions de l'épreuve, et $p = \frac{1}{6}$, probabilité du succès dans une épreuve.
Son espérance est $n\,p = 1000$ et sa variance $n\,p\,q = 1000 \times \frac{5}{6}$.

2°/ Approximation normale.

L'approximation normale est justifiée si la variance est supérieure à 20.
Ici, la variance vaut $n\,p\,q = n\,p\,(1 - p) = 1000 \times \frac{5}{6} \geq 20$.

Donc **l'approximation normale est justifiée**.
On pourra donc approcher les valeurs de probabilités données par la loi binomiale par les valeurs de probabilités données par la loi normale de moyenne $\mu = 1000$ et de variance $\sigma^2 = 1000 \times \frac{5}{6}$, compte tenu de la **correction de continuité** (voir Exercice 1).

3°/ Calcul de probabilités.

$$P\,(980 \leq X \leq 1030) = F\left(\frac{1030{,}5 - 1000}{\sqrt{1000 \times \frac{5}{6}}}\right) - F\left(\frac{979{,}5 - 1000}{\sqrt{1000 \times \frac{5}{6}}}\right)$$
$$= F\,(1{,}057) - F\,(-0{,}710) = F\,(1{,}057) + F\,(0{,}710) - 1$$
$$= 0{,}8546 + 0{,}7612 - 1 = 0{,}6158$$

(La table de la fonction de répartition de la variable normale centrée réduite donne les valeurs de F).

$$P\,(980 < X < 1030) = F\left(\frac{1029{,}5-1000}{\sqrt{1000\times\frac{5}{6}}}\right) - F\left(\frac{980{,}5-1000}{\sqrt{1000\times\frac{5}{6}}}\right)$$

$$= F\,(1{,}022) - F\,(-0{,}675) = F\,(1{,}022) + F\,(0{,}675) - 1$$

$$= 0{,}8466 + 0{,}7503 - 1 = 0{,}5669$$

On voit qu'il y a une différence 3 % avec le résultat précédent.
Il faut donc bien prendre garde, s'agissant d'approximation d'une loi discrète à valeurs entières, au fait que les bornes de l'intervalle appartiennent ou non à l'intervalle dont on calcule la probabilité.

Chapitre 21. Convergences.

Enoncés.

Exercice 3. Jets de pièce.

On jette 12 fois une pièce bien équilibrée. Calculer la probabilité p pour que le nombre de faces soit compris entre 4 et 7, en utilisant : 1°/ La loi binomiale. 2°/ L'approximation normale de la loi binomiale.	

Solution.

1°/ Loi binomiale.

Le nombre X de faces obtenues est le nombre de succès dans une répétition d'épreuves de Bernoulli indépendantes où la probabilité du succès est $\frac{1}{2}$.

Ce nombre de faces suit une loi binomiale de paramètres $n = 12$ et $p = \frac{1}{2}$.

$$\boxed{P\,[X = k] = \frac{1}{2^{12}}\binom{12}{k}}$$

Cette loi donne les valeurs :

k	4	5	6	7
$P\,[X = k]$	$\frac{495}{4096}$	$\frac{792}{4096}$	$\frac{924}{4096}$	$\frac{792}{4096}$

et la somme des probabilités est :

$$P\,(4 \leq X \leq 7) = \frac{1}{2^{12}}\left(\binom{12}{4} + \binom{12}{5} + \binom{12}{6} + \binom{12}{7}\right) = \frac{3003}{4096} = 0{,}7332$$

$$\boxed{P\,(4 \leq X \leq 7) = 0{,}7332}$$

2°/ Approximation normale.

L'espérance de X est $E\,(X) = n\,p = 6$.
La variance de X est $n\,p\,q = n\,p\,(1 - p) = 3$.

La loi normale $N\,(6;3)$ donne pour approximation de la loi binomiale, avec la correction de continuité, grâce à la table de la fonction de répartition de la variable normale centrée réduite :

$$P(4 \leq X \leq 7) = F\left(\frac{7,5-6}{\sqrt{3}}\right) - F\left(\frac{3,5-6}{\sqrt{3}}\right) = F(0,866) - F(-1,444) = F(0,866) + F(1,444) - 1 = 0,8068 + 0,9255 - 1 = 0,7323$$

$$\boxed{F\left(\frac{7,5-6}{\sqrt{3}}\right) - F\left(\frac{3,5-6}{\sqrt{3}}\right) = 0,7323}$$

On voit que cette approximation n'est pas si mauvaise que ça, même avec une valeur aussi faible que 3 pour la variance, bien inférieure à la limite de 20 qu'on s'était arbitrairement fixée.
Cette concordance vient en grande partie du fait que les valeurs étudiées s'écartent peu de la valeur moyenne 6.

Chapitre 21. Convergences.

Enoncés.

Exercice 4. Loi binomiale et approximation normale.

Soit p la probabilité d'un événement A. On effectue n épreuves indépendantes et on désigne par f la fréquence de réalisation de A dans cette série d'épreuves. Au moyen de l'approximation de la distribution binomiale, répondre aux questions suivantes : 1°/ Soit $p = 0,4$ et $n = 1500$. Quelle est la probabilité pour que f soit compris entre 0,40 et 0,44 ? 2°/ Soit $p = 0,375$. Combien d'épreuves indépendantes faut-il effectuer pour que la probabilité d'avoir $\lvert f - p \rvert \leq 0,01$ soit au moins de 0,995 ? 3°/ Soit $p = \frac{2}{3}$, $n = 1200$. Comment choisir ε pour que la probabilité d'avoir $\lvert f - p \rvert < \varepsilon$ soit au moins 0,985 ? 4°/ Soit $n = 14\,400$. Pour quelles valeurs de p la probabilité de $\lvert f - p \rvert \leq 0,01$ est-elle au moins 0,99 ?	

Solution.

1°/ Probabilité de *f*.

Si l'on désigne par X le nombre d'épreuves dans laquelle A se réalise, on sait que X suit une loi binomiale de paramètres $n = 1\,500$ et $p = 0,4$.
La loi binomiale de paramètres n et p peut être approchée, lorsque n est grand par une loi normale de paramètres $\mu = n\,p$, $\sigma^2 = n\,p\,q$ ($q = 1 - p$).
La fonction de répartition de la loi binomiale, définie, lorsque x est entier, par $P(X \leq x) = P\left(f \leq \frac{x}{n}\right)$ est approchée par :

$$P(X \leq x) = F\left(\frac{x + 0,5 - np}{\sqrt{npq}}\right) = F\left(\frac{x + 0,5 - 600}{\sqrt{360}}\right)$$

où F est la fonction de répartition de la variable normale centrée réduite.
Il vient alors :

$$P(0,40 < f \leq 0,44) = P(1500 \times 0,40 < X \leq 1500 \times 0,44) = P(600 < X \leq 660) = P(X \leq 660) - P(X \leq 600)$$
$$= F\left(\frac{660,5 - 600}{\sqrt{360}}\right) - F\left(\frac{600,5 - 600}{\sqrt{360}}\right)$$
$$= F(3,189) - F(0,026)$$
$$= 0,999\,28 - 0,5105$$
$$= 0,4888$$

$$\boxed{P\,(0{,}40 < f \leq 0{,}44) = 0{,}4888}$$

Si l'on ne tenait pas compte de la correction de continuité, on trouverait :

$$P\,(0{,}40 < f \leq 0{,}44) = F\left(\frac{660-600}{\sqrt{360}}\right) - F\left(\frac{600-600}{\sqrt{360}}\right) = F\,(3{,}162) - F\,(0{,}000) = 0{,}9992 - 0{,}5000 = 0{,}4992$$

ce qui s'écarte seulement de 2 % de la valeur précédente.

2°/ Nombre d'épreuves.

$$P\,(\,|\,f-p\,|\leq 0{,}01\,) = P\,(\,|\,n\,f-n\,p\,|\leq 0{,}01\,n\,) = P\,(\,|\,X-n\,p\,|\leq 0{,}01\,n\,) = P\,(\,n\,p-0{,}01\,n\leq X\leq n\,p+0{,}01\,n\,)$$

$$= F\left(\frac{n\,p+0{,}01\,n+0{,}5-n\,p}{\sqrt{n\,p\,q}}\right) - F\left(\frac{n\,p-0{,}01\,n-0{,}5-n\,p}{\sqrt{n\,p\,q}}\right) = 2\,F\left(\frac{0{,}01\,n+0{,}5}{\sqrt{n\,p\,q}}\right) - 1$$

Pour avoir $P\,(\,|\,f-p\,|\leq 0{,}01\,)\geq 0{,}995$, il faut donc prendre n vérifiant :

$$2\,F\left(\frac{0{,}01\,n+0{,}5}{\sqrt{n\,p\,q}}\right) - 1 \geq 0{,}995$$

$$F\left(\frac{0{,}01\,n+0{,}5}{\sqrt{n\,p\,q}}\right) \geq \frac{1{,}995}{2} = 0{,}9975$$

$$\frac{0{,}01\,n+0{,}5}{\sqrt{n\,p\,q}} \geq 2{,}81$$

$$0{,}01\,n + 0{,}5 \geq 2{,}81\,\sqrt{n\,p\,q}$$

$$(0{,}01\,n + 0{,}5)^{\,2} \geq 2{,}81^{\,2}\,n\,p\,q = 7{,}8961\,n \times 0{,}375 \times 0{,}625 = 1{,}8506\,n$$

$$10^{-4}\,n^{\,2} + 0{,}01\,n + 0{,}25 - 1{,}8506\,n \geq 0$$

$$n^{\,2} - 18\,406\,n + 2\,500 \geq 0$$

Le trinôme $n^{\,2} - 18\,406\,n + 2\,500$ a deux racines positives et la plus petite est inférieure à 1.
En termes d'entiers, l'inéquation $n^{\,2} - 18\,406\,n + 2\,500 \geq 0$ ne peut donc être vérifiée que si n est supérieur à la plus grande des deux racines du trinôme.

$$(n - 9\,203)^{\,2} \geq 9\,203^{\,2} - 2\,500 = (9\,203 - 50)(9\,203 + 50) = 9\,153 \times 9\,253 = 84\,692\,709$$

$$|\,n - 9\,203\,| \geq \sqrt{84\,692\,709} = 9\,202{,}9$$

$$n \geq 9\,203 + 9\,202{,}9$$

$$n \geq 18\,406$$

Pour que la probabilité d'avoir $|\,f-p\,|\leq 0{,}01$ soit au moins de 0,995, il faut effectuer au moins 18 406 épreuves indépendantes.

3°/ Choix de ε.

$$P\,(\,|\,f-p\,|<\varepsilon\,) = P\,(\,|\,n\,f-n\,p\,|<\varepsilon\,n\,) = P\,(\,|\,X-n\,p\,|<\varepsilon\,n\,) = P\,(\,n\,p-\varepsilon\,n<X<n\,p+\varepsilon\,n\,)$$

En première approximation, **supposons que l'on puisse négliger la correction de continuité**.
La probabilité s'écrit :

$$P\left(|f-p|<\varepsilon\right)=F\left(\frac{\varepsilon n}{\sqrt{n\,p\,q}}\right)-F\left(-\frac{\varepsilon n}{\sqrt{n\,p\,q}}\right)=2\,F\left(\frac{\varepsilon n}{\sqrt{n\,p\,q}}\right)-1$$

La relation $P\left(|f-p|<\varepsilon\right)\geq 0{,}985$ s'écrit donc :

$$2\,F\left(\frac{\varepsilon n}{\sqrt{n\,p\,q}}\right)-1\geq 0{,}985$$

$$F\left(\frac{\varepsilon n}{\sqrt{n\,p\,q}}\right)\geq\frac{1{,}985}{2}=0{,}9925=F\,(2{,}432)$$

$$\frac{\varepsilon n}{\sqrt{n\,p\,q}}\geq 2{,}432$$

$$\varepsilon\geq 2{,}432\sqrt{\frac{p\,q}{n}}=2{,}432\sqrt{\frac{2}{10800}}=3{,}31\times 10^{-2}$$

Vérifions la validité du calcul et de l'approximation

On a :

$n\,p=800$,

$n\,p\,q=\frac{800}{3}$,

$3{,}31\times 10^{-2}\,n=39{,}72$,

$P\left(n\,p-\varepsilon\,n<X<n\,p+\varepsilon\,n\right)=P\left(760{,}28<X<839{,}72\right)=P\left(761\leq X\leq 839\right)$.

Avec l'approximation normale et la correction de continuité, il vient :

$$P\left(761\leq X\leq 839\right)\approx F\left(\frac{839{,}5-800}{\sqrt{\frac{800}{3}}}\right)-F\left(\frac{760{,}5-800}{\sqrt{\frac{800}{3}}}\right)=2\,F\left(\frac{839{,}5-800}{\sqrt{\frac{800}{3}}}\right)-1=2\,F\,(2{,}419)-1=2\times$$

$$0{,}9922-1=0{,}9844$$

$$P\left(|f-p|<3{,}31\times 10^{-2}\right)=0{,}9844$$

C'est insuffisant, puisqu'on voulait obtenir $P\left(|f-p|<\varepsilon\right)\geq 0{,}985$.

La probabilité donnée par la loi binomiale varie par sauts.
Tant que $\varepsilon\,n$ reste légèrement inférieur à 40, la probabilité donnée par la loi binomiale ne change pas : l'approximation normale ne change pas non plus.
Pour qu'elle change, il faudra que $\varepsilon\,n$ devienne légèrement supérieur, ou égal, à 40.
Dans ce cas, se produit un saut de probabilité, on passe à :

$$P\left(n\,p-\varepsilon\,n<X<n\,p+\varepsilon\,n\right)=P\left(760\leq X\leq 840\right)=2\,F\left(\frac{840{,}5-800}{\sqrt{\frac{800}{3}}}\right)-1=2\,F\,(2{,}480)-1=2\times 0{,}9934$$

$$-1=0{,}9869.$$

On est bien du bon côté de la barrière des 0,985.
Ainsi, il faut prendre ε supérieur ou égal à $\frac{40}{1200}=\frac{1}{30}$.

Avec $p=\frac{2}{3}$ et $n=1200$, pour que la probabilité d'avoir $|f-p|<\varepsilon$ soit au moins 0,985, il faut choisir ε

supérieur ou égal à $\frac{1}{30}$.

4°/ Valeurs de *p*.

La relation $P\ (|f-p| \leq \varepsilon) = P\ (np - \varepsilon n \leq X \leq np + \varepsilon n) \geq \alpha$ se traduit encore par une relation :

$$P\ (k_1 \leq X \leq k_2) \geq \alpha,$$

où k_1 est le plus petit entier supérieur ou égal à $np - \varepsilon n$, et k_2 le plus grand entier inférieur ou égal à $np + \varepsilon n$.
Avec l'approximation normale de la loi binomiale, cette relation s'écrit :

$$F\left(\frac{k_2+\frac{1}{2}-np}{\sqrt{npq}}\right) - F\left(\frac{k_1-\frac{1}{2}-np}{\sqrt{npq}}\right) \geq \alpha,$$

soit, à peu près :

$$2\,F\left(\frac{\varepsilon+\frac{1}{2n}}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}\right) - 1 \geq \alpha.$$

$$F\left(\frac{\varepsilon+\frac{1}{2n}}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}\right) \geq \frac{1+\alpha}{2}$$

$$\varepsilon + \frac{1}{2n} \geq \sqrt{\frac{pq}{n}}\,F^{-1}\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)$$

Lorsqu'on cherche les valeurs de *p*, on écrira :

$$\sqrt{p(1-p)} \leq \frac{\varepsilon\sqrt{n}+\frac{1}{2\sqrt{n}}}{F^{-1}\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)}$$

$$p\,(1-p) \leq \frac{\left(\varepsilon\sqrt{n}+\frac{1}{2\sqrt{n}}\right)^2}{\left(F^{-1}\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)\right)^2}$$

$$p^2 - p + \frac{\left(\varepsilon\sqrt{n}+\frac{1}{2\sqrt{n}}\right)^2}{\left(F^{-1}\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)\right)^2} \geq 0$$

$$\left(p-\frac{1}{2}\right)^2 \geq \frac{1}{4} - \frac{\left(\varepsilon\sqrt{n}+\frac{1}{2\sqrt{n}}\right)^2}{\left(F^{-1}\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)\right)^2}$$

$$\left| p - \frac{1}{2} \right| \geq \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{\left(\varepsilon \sqrt{n} + \frac{1}{2\sqrt{n}} \right)^2}{\left(F^{-1}\left(\frac{1+\alpha}{2} \right) \right)^2}}$$

$$p \leq \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{\left(\varepsilon \sqrt{n} + \frac{1}{2\sqrt{n}} \right)^2}{\left(F^{-1}\left(\frac{1+\alpha}{2} \right) \right)^2}} \text{ ou } p \geq \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{\left(\varepsilon \sqrt{n} + \frac{1}{2\sqrt{n}} \right)^2}{\left(F^{-1}\left(\frac{1+\alpha}{2} \right) \right)^2}}$$

Numériquement, nous avons ici :

$n = 14\,400$,
$\varepsilon = 0{,}01$,
$\alpha = 0{,}99$.

$$\frac{1+\alpha}{2} = 0{,}9950$$

$$F^{-1}\left(\frac{1+\alpha}{2} \right) = 2{,}576$$

$$\frac{\left(\varepsilon \sqrt{n} + \frac{1}{2\sqrt{n}} \right)^2}{\left(F^{-1}\left(\frac{1+\alpha}{2} \right) \right)^2} = \frac{1}{(2{,}576)^2}\left(1{,}2 + \frac{1}{240} \right)^2 = 0{,}2185$$

$$\sqrt{\frac{1}{4} - \frac{\left(\varepsilon \sqrt{n} + \frac{1}{2\sqrt{n}} \right)^2}{\left(F^{-1}\left(\frac{1+\alpha}{2} \right) \right)^2}} = 0{,}1774$$

$p \leq 0{,}5000 - 0{,}1774 = 0{,}3226$ ou $p \geq 0{,}5000 + 0{,}1774 = 0{,}6774$

Pour être sûr qu'on est du bon côté de la barrière des 0,99 aux limites des intervalles, nous garderons :

Avec $n = 14\,400$, la probabilité de $| f - p | \leq 0{,}01$ est au moins 0,99 pour $p \leq 0{,}3225 = \frac{4644}{14400}$ et pour $p \geq 0{,}6775 = 1 - \frac{4644}{14400}$.

Chapitre 21. Convergences.

Enoncés.

Exercice 5. Processus de Poisson.

On considère une suite de variables aléatoires indépendantes X_i, $i \geq 1$, qui suivent toutes la même **loi exponentielle** de paramètre a. On note T_n la somme :

$$T_n = X_1 + ... + X_n.$$

A chaque nombre réel $t > 0$, on fait correspondre l'unique entier $N(t)$ vérifiant :

$$T_{N(t)} \leq t < T_{N(t)+1}.$$

1°/ Montrer que, lorsque t augmente indéfiniment, le rapport $\frac{T_{N(t)}}{N(t)}$ converge presque sûrement vers l'espérance de X_1.

2°/ En déduire que, dans les mêmes conditions, $\frac{N(t)}{t}$ converge presque sûrement vers a.

Solution.

1°/ Processus de Poisson.

Quand on a une suite de variables aléatoires indépendantes X_i, $i \geq 1$, qui suivent toutes la même loi exponentielle de paramètre a, on dit que la suite de variables aléatoires $T_n = X_1 + ... + X_n$, $n \geq 1$, forme un **processus de Poisson**.

De façon générale, on dit qu'un processus temporel est un **processus de Poisson** si ce processus représente l'apparition d'événements aléatoires $E_1, ..., E_n$, $n \geq 1$, satisfaisant aux conditions suivantes :

1) Les temps d'attente entre deux événements successifs E_i, E_{i+1}, sont des variables indépendantes X_i.

2) La loi du nombre d'événements survenant dans un intervalle $[t, t + T[$ ne dépend que de T.
Si $T = 1$, l'espérance du nombre d'événements survenant dans le temps T est appelé la *cadence* du processus.

3) Deux événements ne peuvent survenir en même temps.

Exemple.

X_i est le temps qui sépare l'arrivée du $(i-1)^e$ client d'un magasin de l'arrivée du i^e client.

T_n est l'heure d'arrivée du n^e client.

$N(t)$ est le nombre de clients qui sont déjà arrivés à l'instant t.

Dans le cas présent, par hypothèse, les variables X_i sont indépendantes.
Les X_i suivent une loi exponentielle de paramètre a :
— la densité de probabilité de X_i est $f(t) = a\,e^{-a\,t}$
— la fonction de répartition de X_i est $F(t) = 1 - e^{-a\,t}$
— la probabilité que X_i soit supérieur à t est :

$$P(X_i > t) = 1 - F(t) = e^{-a\,t}$$

a) Loi de probabilité de T_n.

La loi exponentielle (ou loi de Laplace) $f(t) = a\,e^{-a\,t}\,1_{\mathbb{R}^+}(t)$ est une loi gamma de paramètre $(a, 1)$.
T_n est somme de n variables aléatoires indépendantes exponentielles de même paramètre.
T_n est une variable aléatoire qui suit une **loi gamma de paramètre (a, n)** (appelée aussi **loi d'Erlang**).
Sa densité de probabilité est :

$$f_{T_n}(t) = a\,\frac{1}{\Gamma(n)}\,(a\,t)^{n-1}\,e^{-a\,t} = \frac{(a\,t)^{n-1}}{(n-1)!}\,a\,e^{-a\,t}$$

$$\boxed{f_{T_n}(t) = \frac{(a\,t)^{n-1}}{(n-1)!}\,a\,e^{-a\,t}}$$

b) Loi de probabilité de $N(t)$.

Considérons alors un temps t.
Soit $N(t)$ le nombre d'événements qui se produisent pendant le temps t : dans l'exemple considéré, $N(t)$ est le nombre de clients déjà arrivés à l'heure t.
$T_{N(t)}$ est l'heure d'arrivée du $N(t)$ -ième client.
Le client suivant ($(N(t) + 1)$-ième) n'est pas encore arrivé à l'heure t, par définition de $N(t)$.
On a donc $T_{N(t)} \leq t$ et $t < T_{N(t)+1}$.

On a aussi la relation évidente :

$$P(N(t) = n) = P(N(t) \geq n) - P(N(t) \geq n + 1).$$

Or dire que $N(t)$ est supérieur ou égal à n, c'est dire qu'à l'heure t, au moins n clients sont arrivés.
C'est donc dire que l'heure d'arrivée du n^{e} client est inférieure ou égale à t.
C'est donc dire que T_n est inférieur ou égal à t.
La probabilité $P(N(t) \geq n)$ est donc égale à la probabilité que T_n soit inférieur à t.

$$P(N(t) \geq n) = \int_0^t \frac{(a\,x)^{n-1}}{(n-1)!}\,a\,e^{-a\,x}\,dx$$

Intégrons par parties :

$$\int_0^t \frac{(a\,x)^{n-1}}{(n-1)!}\,a\,e^{-a\,x}\,dx = \int_0^t e^{-a\,x}\,d\left(\frac{(a\,x)^n}{n!}\right) = e^{-a\,t}\frac{(a\,t)^n}{n!} + \int_0^t \frac{(a\,x)^n}{n!}\,a\,e^{-a\,x}\,dx$$

$$\int_0^t \frac{(a\,x)^{n-1}}{(n-1)!}\,a\,e^{-a\,x}\,dx - \int_0^t \frac{(a\,x)^n}{n!}\,a\,e^{-a\,x}\,dx = e^{-a\,t}\frac{(a\,t)^n}{n!}$$

$$P\,(N\,(t) = n) = P\,(N\,(t) \geq n) - P\,(N\,(t) \geq n+1) = e^{-a\,t}\frac{(a\,t)^n}{n!}$$

$$\boxed{P\,(N\,(t) = n) = e^{-a\,t}\frac{(a\,t)^n}{n!}}$$

$N\,(t)$ suit une **loi de Poisson de paramètre *a t***.

2°/ Convergence du rapport $\frac{T_{N(t)}}{N(t)}$.

Le rapport $\frac{T_{N(t)}}{N(t)}$ est la moyenne arithmétique des variables $X_1, \ldots, X_{N(t)}$.
Les variables X_i suivent la même loi exponentielle, qui possède des moments au moins jusqu'à l'ordre 4, la **loi forte des grands nombres de Borel-Cantelli** indique que, lorsque n aumente indéfiniment, la moyenne arithmétique $\frac{T_n}{n}$ converge presque sûrement vers l'espérance commune $\frac{1}{a}$ des X_i, qui est l'espérance de X_1.
Or, en moyenne, puisque $N\,(t)$ suit une loi de Poisson de paramètre $a\,t$, $N\,(t)$ augmente proportionellement à t, donc la suite des $\frac{T_{N(t)}}{N(t)}$, pour les t croissants, constitue une suite extraite de la suite des $\frac{T_n}{n}$.
Comme la suite des $\frac{T_n}{n}$ converge presque sûrement vers $\frac{1}{a}$, la suite extraite des $\frac{T_{N(t)}}{N(t)}$ converge presque sûrement vers $\frac{1}{a}$.
Ceci veut dire qu'à la longue, il est presque certain que le rapport $\frac{T_{N(t)}}{N(t)}$ sera égal à $\frac{1}{a}$.

3°/ Convergence du rapport $\frac{N(t)}{t}$.

L'inégalité $T_{N(t)} \leq t < T_{N(t)+1}$ donne :

$$\frac{T_{N(t)}}{N(t)} \leq \frac{t}{N(t)} < \frac{T_{N(t)+1}}{N(t)} \approx \frac{T_{N(t)+1}}{N(t)+1}$$

Pour les grandes valeurs de t, $T_{N(t)}$ et $T_{N(t)+1}$ ont pratiquement la même loi.
Donc $\frac{T_{N(t)+1}}{N(t)}$, comme $\frac{T_{N(t)}}{N(t)}$, converge presque sûrement vers $\frac{1}{a}$.
L'inégalité précédente montre alors que $\frac{t}{N(t)}$ converge, lui aussi, presque sûrement vers $\frac{1}{a}$, et :

Le rapport $\frac{N(t)}{t}$ converge presque sûrement vers a.

Remarque.

On sait que $N(t)$ suit une loi de Poisson de paramètre $a\,t$.
On peut choisir t assez grand pour que $a\,t$ soit grand.
Or la loi de Poisson tend, lorsque son paramètre augmente, vers une loi de Gauss (convergence en loi).
Donc la loi de $N(t)$ est pratiquement, pour les grandes valeurs de t, une loi de Gauss de moyenne $a\,t$ et de variance $a\,t$.
La loi de probabilité du rapport $\frac{N(t)}{t}$ se rapproche donc, au fur et à mesure que t augmente, d'une loi de Gauss, de moyenne a et de variance $\frac{a}{t}$.
Donc, en moyenne, $N(t)$ augmente comme $a\,t$, donc proportionnellement à t.

Chapitre 21. Convergences.

Enoncés.

Exercice 6. Loi binomiale négative.

On considère une variable aléatoire X qui suit une **loi binomiale négative** de paramètres r et p :

$$P(X = n) = \binom{n-1}{r-1} p^r (1-p)^{n-r}.$$

Quelle est la loi limite de la variable aléatoire $Y = X - r$ lorsque r augmente indéfiniment, que p tend vers 1, et que le produit $r(1-p)$ a une limite finie λ ?

Solution.

1°/ Loi binomiale négative.

Si E est un événement de probabilité p non nulle dont on effectue une suite illimitée d'épreuves indépendantes, r étant un entier positif, on désigne par Z_r la variable aléatoire égale au rang de l'épreuve qui voit se réaliser E pour la r^{e} fois.
Par définition, on dit que Z_r suit une **loi binomiale négative** de paramètres r et p.

Pour $r = 1$, Z_1 est une variable géométrique : $P(Z_1 = n) = p\,q^{n-1}$.
Pour $r = 2$, $Z_2 - Z_1$ est le nombre d'épreuves réalisées depuis la première réalisation de E, pour arriver à la deuxième réalisation de E.
C'est une variable géométrique.
Quel que soit k, $Z_k - Z_{k-1}$ est une variable géométrique.

$$Z_r = (Z_r - Z_{r-1}) + (Z_{r-1} + Z_{r-2}) + \ldots + (Z_2 - Z_1) + Z_1$$

Z_r est la **somme de *r* variables géométriques indépendantes de même paramètre *p***.

La fonction génératrice de la variable géométrique Z_1 est :

$$g_{Z_1}(u) = \frac{pu}{1-qu}$$

La fonction génératrice de la somme de r variables géométriques indépendantes de même paramètre p est :

$$g_{Z_r}(u) = \left(\frac{pu}{1-qu}\right)^r$$

La fonction génératrice de la loi binomiale négative est donc :

$$\boxed{g_X(u) = \left(\frac{pu}{1-qu}\right)^r}$$

2°/ Fonction génératrice de Y.

$$g_Y(u) = E(u^Y) = E(u^{X-r}) = E(u^X u^{-r}) = u^{-r} E(u^X) = u^{-r} g_X(u) = \left(\frac{p}{1-qu}\right)^r$$

$$\boxed{g_Y(u) = \left(\frac{p}{1-qu}\right)^r}$$

3°/ Limite de la loi de *Y*.

Si r tend vers l'infini, avec $q = \frac{\lambda}{r} + \frac{1}{r}\,\varepsilon\left(\frac{1}{r}\right)$, on a :

$$g_Y(u) = \left(\frac{1-\frac{1}{r}\left(\lambda+\varepsilon\left(\frac{1}{r}\right)\right)}{1-\frac{1}{r}\left(\lambda+\varepsilon\left(\frac{1}{r}\right)\right)u}\right)^r = \frac{\left(1-\frac{1}{r}\left(\lambda+\varepsilon\left(\frac{1}{r}\right)\right)\right)^r}{\left(1-\frac{1}{r}\left(\lambda+\varepsilon\left(\frac{1}{r}\right)\right)u\right)^r}$$

Lorsque r tend vers l'infini, $\frac{1}{r}$ tend vers 0 et on a :

$$ln\left(1-\frac{1}{r}\left(\lambda+\varepsilon\left(\frac{1}{r}\right)\right)\right)^r = r\,ln\left(1-\frac{1}{r}\left(\lambda+\varepsilon\left(\frac{1}{r}\right)\right)\right) \approx -r \times \frac{1}{r}\left(\lambda+\varepsilon\left(\frac{1}{r}\right)\right) = -\lambda - \varepsilon\left(\frac{1}{r}\right)$$

Cette quantité tend vers $-\lambda$ lorsque r tend vers l'infini.

$$\lim_{r\to\infty}\left(1-\frac{1}{r}\left(\lambda+\varepsilon\left(\frac{1}{r}\right)\right)\right)^r = e^{-\lambda}$$

$$\lim_{r\to\infty}\left(1-\frac{1}{r}\left(\lambda+\varepsilon\left(\frac{1}{r}\right)\right)u\right)^r = e^{-\lambda u}$$

$$\lim_{r\to\infty} g_Y(u) = e^{-\lambda}\, e^{\lambda u} = e^{\lambda(u-1)}$$

On reconnaît la fonction génératrice d'une **variable de Poisson** de paramètre λ.
Cette fonction est continue en $u = 1$.

Or la convergence de la suite des fonctions génératrices vers une fonction continue en $u = 1$, (ou la convergence de la suite des fonctions caractéristiques vers une fonction continue en 0), implique la convergence des fonctions de répartition, en tout point de continuité, c'est-à-dire pour toutes les valeurs

non entières de la variable.
Donc, par définition de la convergence en loi,

Si r tend vers l'infini, avec $q - \frac{\lambda}{r}$ tendant vers 0, la variable Y tend, en loi, vers une variable de **Poisson** de paramètre λ.

La loi de Y tend vers une loi de Poisson.

Chapitre 21. Convergences.

Enoncés.

Exercice 7. Convergence légale et convergence en moyenne quadratique.

1°/ Une suite de variables aléatoires X_n ($n \geq 1$) converge en loi vers une variable aléatoire X. Une autre suite de variables aléatoires Y_n ($n \geq 1$), indépendantes des X_n, converge en probabilité vers une variable aléatoire qui est presque sûrement égale à une constante a.
Montrez que la variable aléatoire $Z_n = X_n + Y_n$ converge en loi vers une variable aléatoire Z dont on exprimera la fonction de répartition au moyen de celle de X et de a.

2°/ Trouver un exemple d'une suite de variables aléatoires Z_n possédant un moment d'ordre 2 et qui converge en loi vers la variable aléatoire normale centrée réduite Z sans que la variance de Z_n tende vers 1.
On pourra utiliser le résultat de la question 1 et la suite de variables aléatoires Y_n dont la loi est définie par :

$$\begin{cases} P\left(Y_n = 0\right) = 1 - \dfrac{1}{n} \\ P\left(Y_n = n\right) = \dfrac{1}{n} \end{cases}$$

Solution.

1°/ Convergence en loi.

Désignons par $\varphi_{X_n}(t)$, $\varphi_{Y_n}(t)$, $\varphi_{Z_n}(t)$, $\varphi_X(t)$, $\varphi_Y(t)$, les fonctions caractéristiques respectives des variables aléatoires X_n, Y_n, Z_n, X, Y. On sait que :

$$\lim_{n \to +\infty} \varphi_{X_n}(t) = \varphi_X(t)$$

$$\lim_{n \to +\infty} \varphi_{Y_n}(t) = \varphi_Y(t) = e^{iat}.$$

Or, puisque X_n et Y_n sont indépendantes :

$$\varphi_{Z_n}(t) = \varphi_{X_n}(t) \times \varphi_{Y_n}(t) \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} \varphi_{Z_n}(t) = \lim_{n \to +\infty} (\varphi_{X_n}(t) \times \varphi_{Y_n}(t)) = \lim_{n \to +\infty} (\varphi_{X_n}(t)) \times$$

$\lim_{n \to +\infty} (\varphi_{Y_n}(t))$

$\lim_{n \to +\infty} \varphi_{Z_n}(t) = \varphi_X(t) \times \varphi_Y(t) = e^{iat} \varphi_X(t)$

Cette limite est la fonction caractéristique de la variable $Z = X + a$, dont la fonction de répartition est :

$F_Z(z) = P(Z < z) = P(X + a < z) = P(X < z - a) = F_X(z - a)$.

La suite des Z_n converge donc, en loi, vers la variable aléatoire $Z = X + a$ dont la fonction de répartition est :

$$\boxed{F_Z(z) = F_X(z - a)}$$

2°/ Convergence en moyenne quadratique ?

La suite Y_n dont la loi est définie par $\begin{cases} P(Y_n = 0) = 1 - \frac{1}{n} \\ P(Y_n = n) = \frac{1}{n} \end{cases}$ converge en probabilité vers $a = 0$ puisque, pour tout $\varepsilon > 0$:

$$P(|Y_n| < \varepsilon) \geq P(|Y_n| = 0) = 1 - \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} P(|Y_n| < \varepsilon) \geq \lim_{n \to +\infty} P(|Y_n| = 0) = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} P(|Y_n| < \varepsilon) = 1$$

Considérons alors une suite X_n de variables aléatoires normales centrées réduites indépendantes des Y_n et considérons la suite des variables aléatoires

$Z_n = X_n + Y_n$.

La suite (X_n) converge en loi vers une variable normale centrée réduite X.
D'après le résultat de la question 1 :

$$\boxed{\text{La suite } Z_n \text{ converge en loi vers la variable aléatoire } Z = X \text{ normale centrée réduite.}}$$

Or on a :

$E(X_n) = 0$ et $E(Y_n) = 1$
$E(Z_n) = E(X_n + Y_n) = E(X_n) + E(Y_n) = 0 + 1 = 1$.
$Var(X_n) = 1$
$E(Y_n^2) = n$; $Var(Y_n) = E(Y_n^2) - (E(Y_n))^2 = n - 1$.
$Var(Z_n) = Var(X_n) + Var(Y_n) = 1 + (n - 1)$.
$Var(Z_n) = n$

D'où

$$\lim_{n \to +\infty} Var\,(Z_n) = \infty$$

La variance de Z_n ne tend pas vers la variance de Z qui est égale à 1.

On a ainsi un exemple de suite Z_n qui tend en loi vers une variable Z, mais qui ne tend pas vers Z en moyenne quadratique.
En effet la convergence en moyenne quadratique de Z_n vers Z impliquerait :

$$\lim_{n \to +\infty} E\,((Z_n - Z)^2) = 0$$
$$(\forall\, \varepsilon > 0)(\exists\, N \in \mathrm{N})(\forall\, n \in \mathrm{N})(n \geq N \Rightarrow E\,(((Z_n - 1) - (Z - 1))^2) < \varepsilon)$$
$$E\,((Z_n - 1)^2) + E\,((Z - 1)^2) - 2\,E\,((Z_n - 1)(Z - 1)) < \varepsilon$$
$$2\,E\,((Z_n - 1)(Z - 1)) > E\,((Z_n - 1)^2) + E\,((Z - 1)^2) - \varepsilon$$
$$2\,E\,((Z_n - 1)(Z - 1)) = 2\,E\,((Z_n - 1)Z) - 2\,E\,(Z_n - 1) = 2\,Cov\,(Z_n, Z)$$
$$E\,((Z_n - 1)^2) = Var\,(Z_n) = n$$
$$E\,((Z - 1)^2) = E\,(Z^2) - 2\,E\,(Z) + 1 = Var\,(Z) + 1 = 2$$
$$2\,Cov\,(Z_n, Z) > n + 2 - \varepsilon$$
$$2\,Cov\,(X_n + Y_n, Z) > n + 2 - \varepsilon$$
$$2\,Cov\,(X_n, Z) + 2\,Cov\,(Y_n, Z) > n + 2 - \varepsilon$$

Or, d'après l'**inégalité de Schwarz** $|\,Cov\,(U, V)\,| \leq \sqrt{Var\,(U)}\,\sqrt{Var\,(V)}$, on a :

$$|\,Cov\,(X_n, Z)\,| \leq 1 \text{ et } |\,Cov\,(Y_n, Z)\,| \leq \sqrt{n-1}$$

Donc :

$$2\,(1 + \sqrt{n-1}) > n + 2 - \varepsilon$$
$$2\sqrt{n-1} > n - \varepsilon$$
$$4\,(n-1) > n^2 - 2\,n\,\varepsilon + \varepsilon^2$$
$$n^2 - 2\,(2 + \varepsilon)\,n + 4 + \varepsilon^2 < 0$$
$$(n - 2 - \varepsilon)^2 + 4 + \varepsilon^2 - (2 + \varepsilon)^2 < 0$$
$$(n - 2 - \varepsilon)^2 < 4\,\varepsilon$$
$$2 + \varepsilon - 2\sqrt{\varepsilon} < n < 2 + \varepsilon + 2\sqrt{\varepsilon}$$

ce qui est impossible lorsqu'on choisit n assez grand ($n \geq N$), il suffit de prendre un $N > 2 + \varepsilon + 2\sqrt{\varepsilon}$.

On obtient donc une contradiction et la suite Z_n ne converge donc pas en moyenne quadratique vers Z.

La suite Z_n converge en loi vers la variable Z, mais ne converge pas en moyenne quadratique vers Z.

Chapitre 21. Convergences.

Enoncés.

Exercice 8. Convergence légale et convergence en probabilité.

On considère une suite de variables aléatoires indépendantes U_n ($n \geq 1$) de même loi discrète :

$$\begin{cases} P(U_n = 1) = p \\ P(U_n = -1) = q \end{cases} \quad p + q = 1$$

On définit une suite de variables aléatoires V_n ($n \geq 1$) par les relations :

$V_1 = U_1$,
$V_2 = U_1 U_2$,
.....
$V_n = U_1 U_2 \ldots U_n$
.....

1°/ Calculer l'espérance mathématique de V_n et en déduire sa loi.
2°/ Montrer que, si n augmente indéfiniment, la loi de V_n admet, en général, une limite que l'on précisera.
3°/ La suite des variables V_n converge-t-elle en probabilité lorsque n augmente indéfiniment ?

Solution.

1°/ Variable V_n.

Les variables U_n étant indépendantes, on a :

$E(V_n) = E(U_1)\, E(U_2) \ldots E(U_n)$.
$E(U_k) = p - q = 2p - 1, \forall\, k \geq 1$.

donc :

$$\boxed{E(V_n) = (p - q)^n.}$$

D'autre part, la variable V_n est égale à –1 ou à 1, avec des probabilités p_n et q_n vérifiant :

$$p_n + q_n = 1$$
$$E(V_n) = p_n - q_n$$

On a donc :

$$p_n + q_n = 1$$
$$p_n - q_n = (p-q)^n.$$

d'où :

$$\boxed{\begin{aligned} p_n &= P(V_n = 1) = \frac{1}{2}(1 + (p-q)^n) \\ q_n &= P(V_n = -1) = \frac{1}{2}(1 - (p-q)^n) \end{aligned}}$$

2°/ Convergence en loi.

a) Cas général.

p et q sont des nombres compris entre 0 et 1 vérifiant $p + q = 1$.
Si p est strictement compris entre 0 et 1, on a $|p - q| < 1$. On en déduit :

$$\lim_{n \to +\infty} p_n = \frac{1}{2} \text{ et } \lim_{n \to +\infty} q_n = \frac{1}{2}$$

La loi de probabilité de V_n tend donc vers la loi discrète :

$$\boxed{P(1) = \frac{1}{2}; P(-1) = \frac{1}{2}}$$

b) Cas particulier.

Si $|p - q| = 1$, deux cas peuvent se produire.

1er cas : $p = 1$ et $q = 0$.

Dans ce cas, on a $p_n = 1$, $q_n = 0$.

La variable U_n est presque sûrement égale à 1.
La variable V_n est presque sûrement égale à 1.
La variable V_n converge donc presque sûrement vers une variable aléatoire égale à 1.

2e cas : $p = 0$ et $q = 1$.

Dans ce cas, on a $p_n = \frac{1+(-1)^n}{2}$ et $q_n = \frac{1-(-1)^n}{2}$.

La variable U_n est presque sûrement égale à –1.

La variable V_n est presque sûrement égale à $(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$: il ne peut y avoir convergence.

3°/ Convergence en probabilité.

Si V_n converge en probabilité vers une variable aléatoire V (c'est-à-dire: pour tout $\varepsilon > 0$, $\lim_{n\to+\infty} P(|V_n - V| > \varepsilon) = 0$), sa loi de probabilité converge vers la loi de probabilité de V (**la convergence en probabilité implique la convergence en loi**) : la loi de probabilité de la variable V ne peut donc être que la loi limite obtenue dans la question précédente.

Dans le cas particulier $|p - q| = 1$:
— Si $p = 0$ et $q = 1$, il n'y a pas de convergence.
— Si $p = 1$ et $q = 0$, V_n converge presque sûrement vers une variable V égale à 1.
La loi de probabilité de V est $P(V = 1) = 1$.
La loi de probabilité de V_n est $p_n = P(V_n = 1) = 1$: cette loi converge de façon évidente vers la loi de V, puisque c'est la loi de V.

Dans le cas général $|p - q| < 1$:
Si V_n converge en probabilité vers une variable aléatoire V, la loi de V ne peut être que :

$$P(V = -1) = \frac{1}{2} \; ; \; P(V = 1) = \frac{1}{2}.$$

Comme les valeurs de V_n et de V sont –1 et 1, la relation :

$$\forall \varepsilon > 0, \lim_{n\to+\infty} P(|V_n - V| > \varepsilon) = 0$$

entraîne en particulier :

$$\lim_{n\to+\infty} P(|V_n - V| = 2) = 0.$$

Il en résulte :

$$\lim_{n\to+\infty} E((V_n - V)^2) \leq 4 \lim_{n\to+\infty} P(|V_n - V| = 2) = 0$$

autrement dit, la suite V_n converge en moyenne quadratique vers V.
Or pour la convergence en moyenne quadratique, toute suite convergente est une suite de Cauchy, donc :

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} E((V_n - V_m)^2) = 0$$

Mais, par ailleurs, on peut écrire :

$$V_n - V_m = U_1 \dots U_n - U_1 \dots U_m$$

Si on suppose, par exemple, *m* inférieur à *n*, on obtient :

$$V_n - V_m = V_m (U_{m+1} \dots U_n - 1)$$

et comme $V_m{}^2 = 1$, il vient :

$$(V_n - V_m)^2 = (U_{m+1} \dots U_n - 1)^2$$

Or la variable aléatoire $U_{m+1} \dots U_n$ suit la même loi que la variable V_{n-m}.
En effet, elle prend seulement les valeurs –1 et 1 et son espérance mathématique est $(p - q)^{n-m}$, donc les probabilités $P(-1)$ et $P(1)$ vérifient :

$$P(-1) + P(1) = 1$$
$$P(1) - P(-1) = E(U_{m+1} \dots U_n) = (p - q)^{n-m}$$

donc

$$P(1) = p_{n-m} = \frac{1+(p-q)^{n-m}}{2} \text{ et } P(-1) = q_{n-m} = \frac{1-(p-q)^{n-m}}{2}.$$

Il en résulte :

$$P((V_n - V_m)^2 = 0) = \frac{1+(p-q)^{n-m}}{2}$$
$$P((V_n - V_m)^2 = 4) = \frac{1-(p-q)^{n-m}}{2}$$
$$E((V_n - V_m)^2) = 2(1 - (p - q)^{n-m})$$

Pour *n* inférieur à *m*, on aurait obtenu :

$$E((V_n - V_m)^2) = 2(1 - (p - q)^{m-n})$$

Dans tous les cas, on peut écrire :

$$E((V_n - V_m)^2) = 2(1 - (p - q)^{|n-m|})$$

Pour *n* fixé, cette quantité tend, lorsque *m* tend vers l'infini, vers 2.
Pour *m* fixé, cette quantité tend vers 2 lorsque *n* tend vers l'infini.
Donc

$$\lim_{\substack{n \to \infty \\ m \to \infty}} E((V_n - V_m)^2) = 2$$

Il y a donc une contradiction avec le résultat précédemment obtenu :

$$\lim_{\substack{n \to \infty \\ m \to \infty}} E\left((V_n - V_m)^2\right) = 0$$

Donc :

V_n ne peut pas converger en probabilité vers une variable aléatoire V.

En résumé :

La suite V_n ne peut converger en probabilité vers une variable aléatoire V que dans le cas particulier $p = 1$, $q = 0$.

Dans le cas général, $0 < p < 1$, on a ainsi un exemple d'une suite (V_n) qui converge en loi mais qui ne converge pas en probabilité.

Chapitre 21. Convergences.

Enoncés.

Exercice 9. Convergence en probabilité.

1°/ Démontrer la formule de Markov. En déduire la formule de Bienaymé-Tchebichev. 2°/ Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires telle que : $$\lim_{n\to+\infty}(E[X_n]) = m,$$ $$\lim_{n\to+\infty}(Var[X_n]) = 0.$$ Montrer que $(X_n)_{n\geq 0}$ converge en probabilité vers m. 3°/ Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, ayant des moments d'ordre 2 finis. Montrer que $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{j=n} X_j$ converge en probabilité vers $E[X_1]$.	

Solution.

1°/ Markov et Bienaymé-Tchebichev.

a) Inégalité de Markov.

Théorème.

Soit X une variable aléatoire positive d'espérance mathématique finie $\mu = E[X]$.
Pour tout nombre réel $\lambda > 1$, on a :

$$\boxed{P(X \geq \lambda E[X]) \leq \frac{1}{\lambda}}$$

(L'inégalité est vraie aussi pour $0 < \lambda \leq 1$, mais elle est alors triviale puisque toute probabilité est au plus égale à 1).

Démonstration.

Par hypothèse, pour une variable aléatoire X positive :

$$\mu = \int_0^{\infty} x \, dF(x)$$

donc :

$$\mu \geq \int_{\lambda\,\mu}^{+\infty} x \, dF(x) \geq \lambda\,\mu \int_{\lambda\,\mu}^{+\infty} dF(x) = \lambda\,\mu\,(1 - F(\lambda\,\mu))$$

ce qui démontre l'inégalité de Markov.
Si la fonction de répartition F est continue et strictement croissante, on peut remplacer les inégalités par des inégalités strictes :

$$P(X > \lambda\, E[X]) < \frac{1}{\lambda}.$$

Remarque.

Si la fonction de répartition F est continue et strictement croissante et si $x = Q(y)$ est le quantile de y, c'est-à-dire la fonction réciproque de $y = F(x)$, l'inégalité de Markov signifie que

$$Q\left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) \leq \lambda\,\mu.$$

En particulier, pour une variable aléatoire X positive, le troisième quartile ne peut jamais être supérieur à quatre fois l'espérance mathématique : $Q\left(\frac{3}{4}\right) \leq 4\,\mu$.

b) Inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Théorème.

Soit X une variable aléatoire d'espérance mathématique $\mu = E[X]$ et d'écart-type $\sigma = \sqrt{Var(X)}$.
Pour tout nombre réel $\lambda > 1$, on a :

$$\boxed{P[\,|X - \mu| > \lambda\,\sigma\,] < \frac{1}{\lambda^2}}$$

(L'inégalité est vraie aussi pour $0 < \lambda \leq 1$, mais elle est alors triviale puisque toute probabilité est au plus égale à 1).

Démonstration.

L'inégalité de Markov, appliquée à la variable aléatoire $Y = (X - \mu)^2$, avec λ^2 au lieu de λ, donne :

$$P(Y \geq \lambda^2\, Var(X)) \leq \frac{1}{\lambda^2}$$
$$P(|X - \mu| \geq \lambda\,\sigma) \leq \frac{1}{\lambda^2}$$

Pour une variable aléatoire continue, on peut mettre des inégalités strictes à la place des inégalités.

2°/ Convergence en probabilité.

Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ une suite de variables aléatoires telle que :

$$\lim_{n \to +\infty} (E[X_n]) = \mu,$$
$$\lim_{n \to +\infty} (Var[X_n]) = 0.$$

Notons σ_n l'écart-type $\sqrt{Var(X_n)}$ de X_n.
Par hypothèse, étant donnés un $\lambda > 1$ et un $\varepsilon > 0$, il existe un entier N tel que, pour tout $n > N$, on ait :

$$| E[X_n] - \mu | < \frac{\varepsilon}{2}$$
$$\lambda \sigma_n < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$| X_n - \mu | \leq | X_n - E[X_n] | + | E[X_n] - \mu |$$
$$| X_n - E[X_n] | < \lambda \sigma_n < \frac{\varepsilon}{2} \text{ et } | E[X_n] - \mu | < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow | X_n - \mu | < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$$| X_n - E[X_n] | < \lambda \sigma_n < \frac{\varepsilon}{2} \text{ et } | E[X_n] - \mu | < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow P(| X_n - E[X_n] | < \lambda \sigma_n) \leq P(| X_n - \mu | < \varepsilon)$$

L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev s'écrit, pour tout entier n, et tout $\lambda > 1$:

$$P(| X_n - E[X_n] | \geq \lambda \sigma_n) \leq \frac{1}{\lambda^2},$$
$$P(| X_n - E[X_n] | < \lambda \sigma_n) > 1 - \frac{1}{\lambda^2},$$

Etant donnés un $\lambda > 1$ et un $\varepsilon > 0$, il existe donc un entier N tel que, pour tout $n > N$, on ait :

$$P(| X_n - \mu | < \varepsilon) > 1 - \frac{1}{\lambda^2}.$$

Etant donnés un $\delta > 0$ et un $\varepsilon > 0$, il existe donc un entier N tel que, pour tout $n > N$, on ait :

$$P(| X_n - \mu | \geq \varepsilon) \leq \delta.$$

Cette propriété montre, par définition, que :

La suite $(X_n)_{n \geq 0}$ converge en probabilité vers μ.

3°/ Loi faible des grands nombres.

Théorème.

Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ une suite de variables aléatoires indépendantes deux à deux et identiquement

distribuées, ayant des moments jusqu'à l'ordre 2 finis. Alors la variable aléatoire $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n} X_k$ converge en probabilité vers $E[X_1]$.

Démonstration.

Soit S_n la variable aléatoire $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n} X_k$. On a :

$$E[S_n] = E[X_1] \text{ et } Var[S_n] = \frac{1}{n} Var[X_1].$$

$$\lim_{n \to +\infty} (E[S_n]) = E[X_1],$$

$$\lim_{n \to +\infty} (Var[S_n]) = 0.$$

La propriété démontrée dans la deuxième question montre alors que la suite $(S_n)_{n \geq 0}$ converge en probabilité vers $E[X_1]$.

Chapitre 21. Convergences.

Enoncés.

Exercice 10. Convergence presque sûre et convergence en probabilité.

Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires qui converge presque sûrement vers une variable aléatoire X.

1°/ Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que l'on peut définir une variable aléatoire $N(\varepsilon)$ à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ vérifiant les deux conditions suivantes :

$$\begin{cases} (\forall n \in \mathbb{N})\left(n \geq N(\varepsilon) \Rightarrow \left| X_n - X \right| < \varepsilon\right) \\ \lim\limits_{n\to\infty} P\left(N(\varepsilon) \leq n\right) = 1 \end{cases}$$

2°/ Montrer que $(X_n)_{n\geq 0}$ converge en probabilité vers X.

Solution.

1°/ Définition de $N(\varepsilon)$.

Dire que la suite $(X_n)_{n\geq 0}$ de variables aléatoires converge presque sûrement vers une variable aléatoire X, c'est dire que l'ensemble U des événements élémentaires ω pour lesquels $\lim\limits_{n\to+\infty}(X_n(\omega))$ est $X(\omega)$ est un ensemble de probabilité 1.

Etant donné un $\varepsilon > 0$, dire que, pour un $\omega \in \Omega$, $\lim\limits_{n\to+\infty}(X_n(\omega))$ est égal à $X(\omega)$, c'est dire qu'il existe un entier N tel que, pour tout $n \geq N$, on ait

$$|X_n(\omega) - X(\omega)| < \varepsilon.$$

Notons $N(\varepsilon, \omega)$ le plus petit des entiers vérifiant cette propriété : $N(\varepsilon, \omega) = Inf\ \{N \in \mathbb{N} \mid (\forall\ n \in \mathbb{N})(n \geq N \Rightarrow |X_n(\omega) - X(\omega)| < \varepsilon)\ \}$
Lorsque ω n'appartient pas à U, on posera $N(\varepsilon, \omega) = +\infty$.
Dans ce cas encore, comme il n'existe aucun entier $n \geq N(\varepsilon, \omega)$, on peut dire que, pour tout $n \geq N(\varepsilon, \omega)$, on a

$|X_n(\omega) - X(\omega)| < \varepsilon$.

On définit ainsi, pour chaque $\varepsilon > 0$, une application $N(\varepsilon)$ de Ω dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, donc une "variable aléatoire" à valeurs entières ou infinie, qui, à chaque $\omega \in \Omega$, fait correspondre un $N(\varepsilon, \omega) \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ vérifiant la propriété :

$$n \geq N(\varepsilon, \omega) \Leftrightarrow |X_n(\omega) - X(\omega)| < \varepsilon.$$

Il en résulte, pour un n donné dans N :

$$P(N(\varepsilon) \leq n) = P(\{\omega \in \Omega \mid N(\varepsilon, \omega) \leq n\}).$$
$$P(N(\varepsilon) \leq n) = P(\{\omega \in \Omega \mid |X_n(\omega) - X(\omega)| < \varepsilon\}).$$

Posons

$U_n(\varepsilon) = \{\omega \in \Omega \mid |X_n(\omega) - X(\omega)| < \varepsilon\}$.

Par définition de $U_n(\varepsilon)$, la relation précédente s'écrit :

$$P(N(\varepsilon) \leq n) = P(U_n(\varepsilon))$$

a) Les $U_n(\varepsilon)$ forment une **suite croissante** de parties de Ω, dont la réunion est U.

En effet, chaque $U_n(\varepsilon)$ est contenu dans U puisque :
$\omega \in U_n(\varepsilon) \Leftrightarrow |X_n(\omega) - X(\omega)| < \varepsilon$.
Or, par définition de $N(\varepsilon)$,
$|X_n(\omega) - X(\omega)| < \varepsilon \Leftrightarrow N(\varepsilon) \leq n$
Donc, pour tout entier $m \geq n$, on a $m \geq N(\varepsilon)$, et $|X_m(\omega) - X(\omega)| < \varepsilon$.

Il en résulte $\lim_{m \to \infty}(X_m(\omega)) = X(\omega)$, c'est-à-dire $\omega \in U$.

Réciproquement, $\omega \in U \Rightarrow \lim_{n \to +\infty}(X_n(\omega)) = X(\omega)$
Donc, pour tout $\varepsilon > 0$, $(\exists N(\varepsilon))(\forall n \geq N(\varepsilon))(|X_n(\omega) - X(\omega)| < \varepsilon)$
Et, en particulier, pour tout $\varepsilon > 0$, $(\exists n)(\omega \in U_n(\varepsilon))$.

Enfin, la suite $(U_n(\varepsilon))_{n \geq 0}$ est croissante car $\omega \in U_n(\varepsilon) \Rightarrow N(\varepsilon) \leq n$, il en résulte $N(\varepsilon) \leq n + 1$, donc $\omega \in U_{n+1}(\varepsilon)$.

b) Les $P(U_n(\varepsilon)))_{n \geq 0}$ forment une suite croissante de nombres réels, dont la limite est $P(U) = 1$.

En effet, comme toute probabilité, P est une fonction croissante, et la croissance de la suite $(U_n(\varepsilon))_{n \geq 0}$ entraîne la croissance de la suite $P(U_n(\varepsilon)))_{n \geq 0}$.
Comme tous les $U_n(\varepsilon)$ sont contenus dans U, $P(U)$ est un majorant de la suite $P(U_n(\varepsilon)))_{n \geq 0}$.
Il en résulte que la suite $P(U_n(\varepsilon)))_{n \geq 0}$ est croissante et majorée par $P(U)$, donc convergente, et sa limite est $\leq P(U)$.
Si la limite de la suite $P(U_n(\varepsilon)))_{n \geq 0}$ était strictement plus petite que $P(U)$, il existerait une partie non vide de U dont l'intersection avec tous les $U_n(\varepsilon)$ serait vide, ce qui est impossible puisque chaque élément de U appartient à au moins un des $U_n(\varepsilon)$.

La relation :

$$P\,(N\,(\varepsilon) \leq n) = P\,(U_n\,(\varepsilon))$$

entraîne alors la relation :

$$\lim_{n \to +\infty} (P\,(N\,(\varepsilon) \leq n)) = \lim_{n \to +\infty} (P\,(U_n\,(\varepsilon))) = P\,(\lim_{n \to +\infty} U_n\,(\varepsilon)) = P\,(U) = 1.$$

Et nous avons ainsi démontré que l'on peut définir une variable aléatoire $N\,(\varepsilon)$ à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ vérifiant les deux conditions suivantes :

$$\begin{cases} (\forall\, n \in \mathbb{N})\left(n \geq N(\varepsilon) \Rightarrow \left| X_n - X \right| < \varepsilon\right) \\ \lim\limits_{n \to \infty} P\left(N(\varepsilon) \leq n\right) = 1 \end{cases}$$

2°/ Convergence en probabilité.

Posons $Y_n = X_n - X$.
Par définition, il est équivalent de dire que la suite $(Y_n)_{n \geq 0}$ converge presque partout vers 0 et de dire que la suite $(X_n)_{n \geq 0}$ converge presque partout vers X.
Par définition, il est équivalent de dire que la suite $(Y_n)_{n \geq 0}$ converge en probabilité vers 0 et de dire que la suite $(X_n)_{n \geq 0}$ converge en probabilité vers X.

Considérons un $\varepsilon > 0$.

Soit $A_n\,(\varepsilon)$ l'événement $\sup\limits_{m \geq n} |\, Y_m \,| \geq \varepsilon$.

Soit U l'événement $\lim\limits_{n \to +\infty} Y_n = 0$.

Posons $B_n\,(\varepsilon) = U \cap A_n\,(\varepsilon)$.

La relation $\sup\limits_{m \geq n+1} |\, Y_n \,| \leq \sup\limits_{m \geq n} |\, Y_n \,|$ entraîne $A_{n+1}\,(\varepsilon) \subset A_n\,(\varepsilon)$, donc $B_{n+1}\,(\varepsilon) \subset B_n\,(\varepsilon)$.
La suite $(B_n\,(\varepsilon))_{n \geq 0}$ est donc une **suite décroissante** de parties de Ω.
L'intersection des $B_n\,(\varepsilon)$, pour $n \geq 0$, est vide, sinon il existerait au moins un événement élémentaire ω pour lequel on aurait

$$\sup_{m \geq n} |\, Y_m\,(\omega) \,| \geq \varepsilon \text{ pour tout } n, \text{ et } \lim_{n \to +\infty} Y_n\,(\omega) = 0,$$

ce qui serait contradictoire.
Il en résulte alors :

$$\lim_{n \to +\infty} P\,(B_n\,(\varepsilon)) = P\,(\lim_{n \to +\infty} B_n\,(\varepsilon)) = P\,(\varnothing) = 0$$

Comme on a $P\,(U) = 1$ par hypothèse, il vient :

$$P(B_n\,(\varepsilon)) = P\,(U \cap A_n\,(\varepsilon)) = P\,(U) + P\,(A_n\,(\varepsilon)) - P\,(U \cup A_n\,(\varepsilon))$$

$$U \subset U \bigcup A_n(\varepsilon) \text{ et } P(U) = 1 \Rightarrow P(U \bigcup A_n(\varepsilon)) = 1$$

$$P(B_n(\varepsilon)) = P(A_n(\varepsilon))$$

$$\lim_{n \to +\infty} P(A_n(\varepsilon)) = \lim_{n \to +\infty} P(B_n(\varepsilon)) = 0$$

$$\lim_{n \to +\infty} P(\sup_{m \geq n} | Y_m | \geq \varepsilon) = 0$$

Cette relation montre que la variable aléatoire $\sup_{m \geq n} | Y_m |$ converge en probabilité vers 0.

Comme on a $| Y_n | \leq \sup_{m \geq n} | Y_m |$, la variable aléatoire Y_n converge elle aussi en probabilité vers 0.

La convergence presque sûre entraîne la convergence en probabilité.

Chapitre 21. Convergences.

Enoncés.

Exercice 11. Loi forte des grands nombres.

J'ai fabriqué une machine. Quand on appuie sur un bouton de cette machine, sa lumière s'allume, avec une probabilité $\frac{\pi}{10}$ et indépendamment des autres essais, pendant une seconde. Quand j'appuie sur le bouton, je dis que j'ai gagné si la lumière s'est allumée. Je note X_n le nombre de fois où j'ai gagné si j'ai appuyé n fois sur le bouton. Quelle est la loi de X_n ?

Le nombre $Y_n = \frac{100}{n} \times X_n$ représente alors le "pourcentage de réussite pour n essais".

Si I est un sous-ensemble de [0, 100], je note $\alpha_n(I) = P(Y_n \in I)$. Déterminer la limite, quand n tend vers l'infini, des valeurs suivantes :

- $\alpha_n([0, 20])$,
- $\alpha_n([30, 40])$,
- $\alpha_n([10\,\pi - 10^{-5}, 10\,\pi + 10^{-5}])$,
- $\alpha_n(\{10\,\pi\})$.

Solution.

1°/ Loi de X_n.

Lors de l'essai i, soit X_{ni} la variable aléatoire égale à 1 si la lumière s'allume, à 0 si la lumière ne s'allume pas.

X_{ni} est une variable de Bernoulli de paramètre $\frac{\pi}{10}$.

X_n est la somme de n variables aléatoires de Bernoulli indépendantes X_{ni} pour i variant de 1 à n ($n \geq 1$).

On sait alors que X_n suit une loi binomiale de paramètres n et $p = \frac{\pi}{10}$.

X_n suit une loi binomiale de paramètres n et $p = \frac{\pi}{10}$.

2°/ Limites de probabilités.

La loi forte des grands nombres de Bernoulli (ou **théorème de Borel-Cantelli**), nous indique que, lorsque n tend vers l'infini, la moyenne $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=n} X_{ni}$ d'un échantillon de taille n de la variable de Bernoulli de paramètre $p = \frac{\pi}{10}$, converge presque sûrement vers p.

Donc le pourcentage de réussite $Y_n = \frac{100}{n} \times X_n = \frac{100}{n} \times \sum_{i=1}^{i=n} X_{ni}$ converge presque sûrement vers 100 p = 10 π.

Cela signifie que la probabilité $\alpha_n(I) = P(Y_n \in I)$ d'un intervalle de longueur non nulle* I contenant la valeur 10 π tend vers 1 lorsque n tend vers l'infini, alors que la probabilité d'un intervalle ne contenant pas la valeur 10 π tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini.

*Il faut que la longueur de l'intervalle soit non nulle sinon on obtient $\alpha_n(\{10\ \pi\}) = 0$, car Y_n ne prend que des valeurs rationnelles, et la limite de $\alpha_n(\{10\ \pi\}) = 0$ est 0.

{ 10 π } est un intervalle de longueur nulle :

$$\lim_{n \to +\infty} (\alpha_n(\{10\ \pi\}) = 0$$

10 π n'appartient pas à l'intervalle [0, 20] :

$$\lim_{n \to +\infty} (\alpha_n([0, 20])) = 0$$

10 π appartient à l'intervalle [30, 40] :

$$\lim_{n \to +\infty} (\alpha_n([30, 40])) = 1$$

10 π appartient à l'intervalle [10 π – 10^{-5}, 10 π + 10^{-5}] :

$$\lim_{n \to +\infty} (\alpha_n([10\ \pi - 10^{-5}, 10\ \pi + 10^{-5}])) = 1$$

Exercices

Chaînes de Markov.

1. Chaîne simple homogène de Markov.
2. Chaîne de Markov discrète.
3. Matrice de probabilité.

1. Chaîne simple homogène de Markov.

HAUT

Une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires réelles forme une **chaîne de Markov simple** si, pour tout $n \geq 1$, la probabilité conditionnelle des valeurs de X_{n+1} connaissant les valeurs de $(X_1, \dots, X_n)$ ne dépend que des valeurs de X_n, et pas des valeurs de $(X_1, \dots, X_{n-1})$.

On dit que la chaîne de Markov simple $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est **homogène** si, et seulement si :
— les variables X_n suivent toutes la même loi de probabilité,
— la loi de probabilité conditionnelle de X_{n+1} connaissant X_n ne dépend pas de n.

Une chaîne de Markov simple homogène $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est bien déterminée par deux quantités :
— la loi de probabilité des X_n (**probabilité de présence**),
— la loi de probabilité conditionnelle de X_{n+1} connaissant X_n (**probabilité de passage**),

HAUT

2. Chaîne de Markov discrète.

HAUT

Considérons une chaîne de Markov simple homogène $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires réelles.
On suppose que chaque variable aléatoire X_n suit la même loi discrète : elle prend les r valeurs $a_1, \dots, a_r$, avec les probabilités $p_1, \dots, p_r$.
On note p_{ij} la probabilité conditionnelle $Prob\,[\, X_{n+1} = a_j \mid X_n = a_i \,]$ et P la matrice des (p_{ij}) :

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1j} & \cdots & p_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{i1} & \cdots & p_{ij} & \cdots & p_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & \cdots & p_{nj} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}$$

Par hypothèse, les p_{ij} ne dépendent pas de n.
La matrice P est la **matrice des probabilités de passage** des valeurs de X_n aux valeurs de X_{n+1}.
Par récurrence, pour tout entier $k \geq 1$, la matrice des probabilités de passage des valeurs de X_n aux valeurs de X_{n+k} est alors P^k.

HAUT

3. Matrice de probabilité.

HAUT

Considérons une chaîne de Markov simple homogène $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires réelles.
On suppose que chaque variable aléatoire X_n suit la même loi discrète : elle prend les r valeurs $a_1, \dots, a_r$, avec les probabilités $p_1, \dots, p_r$.

Soit $P = \begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1j} & \cdots & p_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{i1} & \cdots & p_{ij} & \cdots & p_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & \cdots & p_{nj} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}$ la matrice des probabilités de passage des valeurs de X_n aux valeurs de X_{n+1}.

P est ce qu'on appelle une **matrice de probabilité** : c'est une matrice carrée $n \times n$, dont
— les éléments sont non négatifs : $0 \leq p_{ij}$, pour tout i de 1 à n et tout j de 1 à n.
— la somme des éléments de chaque ligne est égale à 1 : $\sum_{j=1}^{j=n} p_{ij} = 1$, pour tout i de 1 à n.

Une matrice de probabilité possède **une valeur propre égale à 1** (qui peut être simple ou multiple) et toutes ses autres valeurs propres sont de module ≤ 1.
Si les éléments de la diagonale d'une matrice de probabilité sont tous strictement plus grands que 0, 1 est la seule valeur propre de module 1.

Si 1 est valeur propre simple de la matrice de probabilité P et si les autres valeurs propres sont toutes de module strictement plus petit que 1, alors P^k tend vers une limite finie lorsque k tend vers l'infini.
Pour une chaîne de Markov simple homogène discrète, cela signifie que le système évolue vers une configuration stable.

HAUT

Chapitre 22. Chaînes de Markov.

Exercices

Exercice 1. Marche aléatoire sur une droite.
Exercice 2. Nuits de travail d'un étudiant.
Exercice 3. Comportement d'une souris.
Exercice 4. Territoire de vente.

Exercice 1. Marche aléatoire sur une droite.

HAUT

Sur un axe *Ox*, on marque quatre points, 0, 1, 2, 3. Un point matériel se trouve initialement à une abscisse entière x_0 entre 0 et 3. A l'instant 1, il subit un choc qui le déplace vers la gauche (avec une probabilité 0,5) ou vers la droite (avec une probabilité 0,5). Il atteint ainsi une position ayant pour abscisse $x_0 - 1$ ou $x_0 + 1$.

Dans la position acquise, il subit, à l'instant 2, un nouveau choc qui, dans les mêmes conditions le déplace vers la gauche ou vers la droite. Et ainsi de suite. S'il atteint la position extrême à gauche (position 0) ou la position extrême à droite (position 3), il est "absorbé" et le mouvement s'arrête.

Solution

1°/ On suppose qu'à l'instant 0, chacun des quatre points 0, 1, 2, 3, a une probabilité de présence de 0,25. A l'instant *n*, la position est une variable aléatoire X_n. Pour $\alpha \in \{0, 1, 2, 3\}$ et $\beta \in \{0, 1, 2, 3\}$, calculer la matrice de probabilité de passage de la position α à la position β, à l'instant $n + 1$ (matrice de transition).

2°/ Calculer P^n pour un entier *n* quelconque.

3°/ Quelle est la limite de P^n lorsque *n* tend vers l'infini ?

4°/ Interpréter le résultat précédent en termes de probabilité de la limite du point matériel suivant la position initiale.

HAUT

Exercice 2. Nuits de travail d'un étudiant.

HAUT

Un étudiant a l'habitude travailler de la manière suivante. S'il étudie toute une nuit, il est sûr à 70 % de ne pas étudier la nuit suivante. Par contre, s'il n'étudie pas une certaine nuit, il est sûr à 60 % qu'il ne travaillera également pas la nuit suivante. En fin de compte, avec quelle fréquence étudie-t'il la nuit ?	Solution

HAUT

Exercice 3. Comportement d'une souris.

HAUT

Un psychologue fait les hypothèses suivantes sur le comportement de souris soumises à un régime alimentaire particulier. Lors d'une expérience particulière, 80 % des souris qui allaient vers la droite lors de l'expérience précédente, iront également vers la droite, et 60 % des souris qui allaient vers la gauche lors de l'expérience précédente, iront vers la droite cette fois-ci. En supposant que 50 % des souris allaient à droite lors de la première expérience, que va prédire le psychologue pour : 1°/ La deuxième expérience ? 2°/ La troisième expérience ? 3°/ La millième expérience ?	Solution

HAUT

Exercice 4. Territoire de vente.

HAUT

Le territoire de vente d'un représentant se compose de trois villes *A*, *B*, *C*. Il ne vend jamais deux jours de suite dans la même ville. Si, un jour donné, il vend dans la ville *A*, il vendra le jour suivant dans la ville *B*. Mais si, un certain jour, il vend dans la ville *B*, ou dans la ville *C*, il y a deux fois plus de chance pour que, le lendemain, il vende dans la ville *A* plutôt que dans la ville restante. Quelle est, en fin de compte, la fréquence de vente dans chaque ville ?	Solution

HAUT

Chapitre 22. Chaînes de Markov.

Enoncés.

Exercice 1. Marche aléatoire sur une droite.

Sur un axe *Ox*, on marque quatre points, 0, 1, 2, 3. Un point matériel se trouve initialement à une abscisse entière x_0 entre 0 et 3. A l'instant 1, il subit un choc qui le déplace vers la gauche (avec une probabilité 0,5) ou vers la droite (avec une probabilité 0,5). Il atteint ainsi une position ayant pour abscisse $x_0 - 1$ ou $x_0 + 1$.

Dans la position acquise, il subit, à l'instant 2, un nouveau choc qui, dans les mêmes conditions le déplace vers la gauche ou vers la droite. Et ainsi de suite. S'il atteint la position extrême à gauche (position 0) ou la position extrême à droite (position 3), il est "absorbé" et le mouvement s'arrête.

1°/ On suppose qu'à l'instant 0, chacun des quatre points 0, 1, 2, 3, a une probabilité de présence de 0,25. A l'instant *n*, la position est une variable aléatoire X_n. Pour $\alpha \in \{0, 1, 2, 3\}$ et $\beta \in \{0, 1, 2, 3\}$, calculer la matrice de probabilité de passage de la position α à la position β, à l'instant $n + 1$ (matrice de transition).

2°/ Calculer P^n pour un entier *n* quelconque.

3°/ Quelle est la limite de P^n lorsque *n* tend vers l'infini ?

4°/ Interpréter le résultat précédent en termes de probabilité de la limite du point matériel suivant la position initiale.

Solution.

1°/ Matrice de transition.

A l'instant $n + 1$:

— Si le point matériel est en 0, il y reste. La probabilité de $\beta = 0$ lorsque $\alpha = 0$ est 1, et les autres probabilités conditionnelles sont nulles :

$P[\beta = 1 \mid \alpha = 0] = 0$, $P[\beta = 2 \mid \alpha = 0] = 0$, $P[\beta = 3 \mid \alpha = 0] = 0$.

La première ligne de la matrice de transition est donc (1 0 0 0).

— Si le point matériel est en 1, il a une probabilité 0,5 de venir en 0 et une probabilité 0,5 de se retrouver en 2. Les autres probabilités conditionnelles sont nulles. La deuxième ligne de la matrice de transition est (0,5 0 0,5 0).

— Si le point matériel est en 2, il a une probabilité 0,5 de venir en 1 et une probabilité 0,5 de se retrouver en 3. Les autres probabilités conditionnelles sont nulles. La troisième ligne de la matrice de transition est (0 0,5 0 0,5).

— Si le point matériel est en 3, il y reste. La probabilité de $\beta = 3$ lorsque $\alpha = 3$ est 1, et les autres probabilités conditionnelles sont nulles :

$P[\beta = 0 \mid \alpha = 3] = 0$, $P[\beta = 1 \mid \alpha = 3] = 0$, $P[\beta = 2 \mid \alpha = 3] = 0$.
La troisième ligne de la matrice de transition est donc (0 0 0 1).

Au total, la matrice de transition est la matrice :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0,5 & 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 & 0,5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cette matrice de probabilité a des 1 sur la diagonale : ce n'est donc pas une matrice régulière et 1 n'est pas une valeur propre simple.

2°/ Calcul de P^n.

Pour calculer P^n, il faut diagonaliser la matrice P, ou, au moins, la trianguliariser.
Le polynôme caractéristique est le déterminant de $P - \lambda I$:

$$Det\,(P - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0,5 & -\lambda & 0,5 & 0 \\ 0 & 0,5 & -\lambda & 0,5 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

Pour calculer le déterminant, on développe par rapport à la première ligne, puis on développe le déterminant qui reste par rapport à la dernière ligne :

$$Det\,(P - \lambda I) = (1 - \lambda)^2 (\lambda^2 - 0,5^2).$$

Il y a donc trois valeurs propres réelles $\{1, 0,5, -0,5\}$.
1 est valeur propre double et les deux autres valeurs propres, 0,5 et – 0,5 sont simples et de module < 1.

Cherchons des vecteurs propres pour les trois valeurs propres.

a) Valeur propre 1.

La matrice $P - I$ est : $P - I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,5 & -1 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0,5 & -1 & 0,5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

La somme de chaque ligne est 0, donc le vecteur $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est dans le noyau de $P - I$: ce vecteur est vecteur propre de P pour la valeur propre 1.
Si on ajoute à la deuxième colonne 2 fois la troisième colonne et 3 fois la quatrième colonne, on obtient une colonne de 0, donc $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ est vecteur propre de P pour la valeur propre 1 et il est linéairement indépendant du vecteur e_1.
Les deux vecteurs forment donc une base $\{e_1, e_2\}$du sous-espace propre pour la valeur propre 1.

b) Valeur propre 0,5.

La matrice $P - 0{,}5\ I$ est : $P - 0{,}5\ I = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}5 & -0{,}5 & 0{,}5 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & -0{,}5 & 0{,}5 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}5 \end{pmatrix}$.

La somme de la deuxième et de la troisième colonne est nulle, donc le vecteur $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est vecteur propre pour la valeur propre 0,5.

c) Valeur propre – 0,5.

La matrice $P + 0{,}5\ I$ est : $P + 0{,}5\ I = \begin{pmatrix} 1{,}5 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}5 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0 & 0 & 0 & 1{,}5 \end{pmatrix}$.

La différence entre la deuxième et la troisième colonne est nulle, donc le vecteur $e_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est vecteur propre pour la valeur propre – 0,5.

d) Diagonalisation de *P*.

Nous avons ainsi trouvé une base $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ de R^4 formée de vecteurs propres de *P*, ce qui montre que *P* est diagonalisable.
La matrice des vecteurs propres est :

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le déterminant de *V* est – 6 (développement par rapport à la première ligne puis par rapport à la dernière) et la matrice inverse est

$$V^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \\ -3 & 3 & 3 & -3 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice $V^{-1}\ P\ V$ est :

$$P' = V^{-1}\ P\ V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0{,}5 \end{pmatrix}$$

de sorte que l'on obtient une diagonalisation de *P* :

$$P = V\,P'\,V^{-1} = V\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0{,}5&0\\0&0&0&-0{,}5\end{pmatrix}V^{-1}$$

e) Puissance *n*-ième de *P*.

Avec la diagonalisation $P = V\,P'\,V^{-1}$, il devient facile de calculer :

$$P^n = (V\,P'\,V^{-1})\,(V\,P'\,V^{-1})\,\ldots\,(V\,P'\,V^{-1})\ (n \text{ fois})$$
$$P^n = V\,P'^n\,V^{-1} \text{ (par associativité du produit et } V^{-1}\,V = I)$$

Comme P' est une matrice diagonale, sa puissance *n*-ième s'obtient en élevant les éléments de la diagonale à la puissance *n* :

$$P'^n = \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&\frac{1}{2^n}&0\\0&0&0&\frac{(-1)^n}{2^n}\end{pmatrix}$$

$$P^n = V\,P'^n\,V^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&1&1&1\\1&2&1&-1\\1&3&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&\frac{1}{2^n}&0\\0&0&0&\frac{(-1)^n}{2^n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6&0&0&0\\-2&0&0&2\\-3&3&3&-3\\-1&3&-3&1\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{6}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&1&1&1\\1&2&1&-1\\1&3&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6&0&0&0\\-2&0&0&2\\-3&3&3&-3\\-1&3&-3&1\end{pmatrix} + \frac{1}{6}\frac{1}{2^n}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&1&1&1\\1&2&1&-1\\1&3&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6&0&0&0\\-2&0&0&2\\-3&3&3&-3\\-1&3&-3&1\end{pmatrix} + \frac{1}{6}\frac{(-1)^n}{2^n}$$
$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&1&1&1\\1&2&1&-1\\1&3&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6&0&0&0\\-2&0&0&2\\-3&3&3&-3\\-1&3&-3&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&1&1&1\\1&2&1&-1\\1&3&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6&0&0&0\\-2&0&0&2\\-3&3&3&-3\\-1&3&-3&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&1&1&1\\1&2&1&-1\\1&3&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6&0&0&0\\-2&0&0&2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6&0&0&0\\4&0&0&2\\2&0&0&4\\0&0&0&6\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&1&1&1\\1&2&1&-1\\1&3&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6&0&0&0\\-2&0&0&2\\-3&3&3&-3\\-1&3&-3&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&1&1&1\\1&2&1&-1\\1&3&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\-3&3&3&-3\\0&0&0&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0&0&0\\-3&3&3&-3\\-3&3&3&-3\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&1&1&1\\1&2&1&-1\\1&3&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6&0&0&0\\-2&0&0&2\\-3&3&3&-3\\-1&3&-3&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&1&1&1\\1&2&1&-1\\1&3&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\-1&3&-3&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0&0&0\\-1&3&-3&1\\1&-3&3&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$P^n = \frac{1}{6}\begin{pmatrix}6&0&0&0\\4&0&0&2\\2&0&0&4\\0&0&0&6\end{pmatrix} + \frac{1}{2^n}\frac{1}{6}\begin{pmatrix}0&0&0&0\\-3&3&3&-3\\-3&3&3&-3\\0&0&0&0\end{pmatrix} + \frac{(-1)^n}{2^n}\frac{1}{6}\begin{pmatrix}0&0&0&0\\-1&3&-3&1\\1&-3&3&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$P^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2^n}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{(-1)^n}{2^n}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3°/ Limite de P^n.

Lorsque n tend vers l'infini, $\frac{1}{2^n}$ tend vers 0, $\frac{(-1)^n}{2^n}$ tend aussi vers 0, donc il reste :

$$\lim_{n \to +\infty} P^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4°/ Interprétation en termes de probabilité.

La première ligne de $\lim_{n \to +\infty} P^n$ indique que si la position initiale x_0 du point matériel est 0, il est presque sûrement en 0 après un nombre suffisamment grand d'itérations du processus.

La deuxième ligne de $\lim_{n \to +\infty} P^n$ indique que si la position initiale x_0 du point matériel est 1, il se retrouvera, après un nombre suffisamment grand d'itérations du processus, en 0 avec une probabilité $\frac{2}{3}$ et en 1 avec une probabilité $\frac{1}{3}$.

La troisième ligne de $\lim_{n \to +\infty} P^n$ indique que si la position initiale x_0 du point matériel est 2, il se retrouvera, après un nombre suffisamment grand d'itérations du processus, en 0 avec une probabilité $\frac{1}{3}$ et en 1 avec une probabilité $\frac{2}{3}$.

La quatrième ligne de $\lim_{n \to +\infty} P^n$ indique que si la position initiale x_0 du point matériel est 3, il est presque sûrement en 3 après un nombre suffisamment grand d'itérations du processus.

Chapitre 22. Chaînes de Markov.

Enoncés.

Exercice 2. Nuits de travail d'un étudiant.

Un étudiant a l'habitude travailler de la manière suivante. S'il étudie toute une nuit, il est sûr à 70 % de ne pas étudier la nuit suivante. Par contre, s'il n'étudie pas une certaine nuit, il est sûr à 60 % qu'il ne travaillera également pas la nuit suivante. En fin de compte, avec quelle fréquence étudie-t'il la nuit ?	

Solution.

1°/ Matrice de transition.

L'état X_{n+1} de l'étudiant lors de la nuit $n + 1$, dépend uniquement de l'état X_n de l'étudiant lors de la nuit n.
Les données de l'énoncé peuvent se compléter et se résumer dans un tableau :

X_n \ X_{n+1}	Etude	Repos	Total
Etude	0,3	0,7	1
Repos	0,4	0,6	1

Ce tableau donne la matrice de transition des probabilités conditionnelles des valeurs de X_{n+1} suivant les valeurs de X_n :

$$P = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,7 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}$$

Cette matrice de probabilités (éléments positifs ou nuls et la somme de chaque ligne vaut 1) a pour valeurs propres 1 et – 0,1.
Comme 1 est valeur propre simple, la système évolue vers une configuration stable.

2°/ Limite de P^n.

Comme la matrice P possède deux valeurs propres simples, elle est diagonalisable.
Cherchons une base de $\mathbb{R}^2$ formée de vecteurs propres.

a) Valeur propre 1.

$$P - I = \begin{pmatrix} -0,7 & 0,7 \\ 0,4 & -0,4 \end{pmatrix}$$

La somme des colonnes est nulle, dont le vecteur $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ est vecteur propre de P pour la valeur propre 1.

b) Valeur propre – 0,1.

$$P + 0{,}1\, I = \begin{pmatrix}0{,}4 & 0{,}7\\ 0{,}4 & 0{,}7\end{pmatrix}$$

7 fois la première colonne moins 4 fois la deuxième colonne donne 0, donc le vecteur $\begin{pmatrix}7\\-4\end{pmatrix}$ est vecteur propre de P pour la valeur propre – 0,1.

c) Diagonalisation.

Nous avons donc trouvé une matrice de vecteurs propres $V = \begin{pmatrix}1 & 7\\ 1 & -4\end{pmatrix}$.

Le déterminant de V est – 11, et l'inverse de V est $V^{-1} = \frac{1}{11}\begin{pmatrix}4 & 7\\ 1 & -1\end{pmatrix}$.

$$P' = V^{-1} P V = \frac{1}{11}\begin{pmatrix}4 & 7\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0{,}3 & 0{,}7\\ 0{,}4 & 0{,}6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 7\\ 1 & -4\end{pmatrix} = \frac{1}{11}\begin{pmatrix}4 & 7\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -0{,}7\\ 1 & 0{,}4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -0{,}1\end{pmatrix}$$

P' est la matrice diagonale des valeurs propres.

Nous avons donc diagonalisé la matrice P sous la forme : $P = V P' V^{-1} = V \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -0{,}1\end{pmatrix} V^{-1}$, avec $V = \begin{pmatrix}1 & 7\\ 1 & -4\end{pmatrix}$.

d) Calcul de P^n.

$$\begin{aligned}
P^n &= (V P' V^{-1})\,(V P' V^{-1}) \ldots (V P' V^{-1}) \ (n \text{ fois})\\
&= V P'^n V^{-1}\\
&= \frac{1}{11}\begin{pmatrix}1 & 7\\ 1 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{(-1)^n}{10^n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & 7\\ 1 & -1\end{pmatrix}\\
&= \frac{1}{11}\begin{pmatrix}1 & 7\\ 1 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & 7\\ 1 & -1\end{pmatrix} + \frac{1}{11}\frac{(-1)^n}{10^n}\begin{pmatrix}1 & 7\\ 1 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & 7\\ 1 & -1\end{pmatrix}\\
&= \frac{1}{11}\begin{pmatrix}1 & 7\\ 1 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & 7\\ 0 & 0\end{pmatrix} + \frac{1}{11}\frac{(-1)^n}{10^n}\begin{pmatrix}1 & 7\\ 1 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}\frac{4}{11} & \frac{7}{11}\\ \frac{4}{11} & \frac{7}{11}\end{pmatrix} + \frac{(-1)^n}{10^n}\begin{pmatrix}\frac{7}{11} & -\frac{7}{11}\\ -\frac{4}{11} & \frac{4}{11}\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

e) Limite de P^n.

Lorsque n tend vers l'infini, $\frac{(-1)^n}{10^n}$ tend vers 0 et il reste :

$$\lim_{n\to+\infty} P^n = \begin{pmatrix} \frac{4}{11} & \frac{7}{11} \\ \frac{4}{11} & \frac{7}{11} \end{pmatrix}$$

3°/ Interprétation.

La première colonne de *P*, donc aussi la première colonne de $\lim_{n\to+\infty} P^n$ correspond, par définition de *P*, aux nuits d'étude et la deuxième colonne aux nuits de repos.
On voit donc qu'en fin de compte, **l'étudiant travaille 4 nuits sur 11**.

Méthode alternative.

On peut chercher le vecteur de probabilité (composantes positives et somme des composantes égale à 1) qui est **vecteur propre de la transposée de *P*** pour la valeur propre 1 : c'est ce qu'on appelle le **vecteur de probabilité constant**. On trouve facilement le vecteur $\begin{pmatrix} \frac{4}{11} \\ \frac{7}{11} \end{pmatrix}$, qui s'interprète de la même façon :

l'étudiant travaille en définitive 4 nuits sur 11.
Cette méthode a l'avantage d'être rapide. Elle ne nécessite pas une diagonalisation complète de *P*.

Chapitre 22. Chaînes de Markov.

Enoncés.

Exercice 3. Comportement d'une souris.

Un psychologue fait les hypothèses suivantes sur le comportement de souris soumises à un régime alimentaire particulier. Lors d'une expérience particulière, 80 % des souris qui allaient vers la droite lors de l'expérience précédente, iront également vers la droite, et 60 % des souris qui allaient vers la gauche lors de l'expérience précédente, iront vers la droite cette fois-ci. En supposant que 50 % des souris allaient à droite lors de la première expérience, que va prédire le psychologue pour : 1°/ La deuxième expérience ? 2°/ La troisième expérience ? 3°/ La millième expérience ?	

Solution.

1°/ Matrice de transition.

L'état X_{n+1} d'une souris lors de l'expérience $n + 1$, dépend uniquement de l'état X_n de la souris lors de l'expérience n.
Les données de l'énoncé peuvent se compléter et se résumer dans un tableau :

X_n \ X_{n+1}	Droite	Gauche	Total
Droite	0,8	0,2	1
Gauche	0,6	0,4	1

Ce tableau donne la matrice de transition des probabilités conditionnelles des valeurs de X_{n+1} connaissant les valeurs de X_n :

$$P = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,6 & 0,4 \end{pmatrix}$$

Cette matrice de probabilités (éléments positifs ou nuls et la somme de chaque ligne vaut 1) a pour valeurs propres 1 et 0,2.
Comme 1 est valeur propre simple, la système évolue vers une configuration stable.

2°/ Limite de P^n.

Comme la matrice P possède deux valeurs propres simples, elle est diagonalisable.
Cherchons une base de R ² formée de vecteurs propres.

a) Valeur propre 1.

$$P - I = \begin{pmatrix} -0,2 & 0,2 \\ 0,6 & -0,6 \end{pmatrix}$$

La somme des colonnes est nulle, dont le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre de P pour la valeur propre 1.

b) Valeur propre 0,2.

$$P - 0,2\, I = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,2 \\ 0,6 & 0,2 \end{pmatrix}$$

1 fois la première colonne moins 3 fois la deuxième colonne donne 0, donc le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ est vecteur propre de P pour la valeur propre 0,2.

c) Diagonalisation.

Nous avons donc trouvé une matrice de vecteurs propres $V = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$.

Le déterminant de V est – 4, et l'inverse de V est $V^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

$$P' = V^{-1} P V = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,6 & 0,4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0,2 \\ 1 & -0,6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,2 \end{pmatrix}$$

P' est la matrice diagonale des valeurs propres.

Nous avons donc diagonalisé la matrice P sous la forme : $P = V P' V^{-1} = V \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,2 \end{pmatrix} V^{-1}$, avec $V = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$.

d) Calcul de P^n.

$$\begin{aligned}
P^n &= (V P' V^{-1})\,(V P' V^{-1}) \ldots (V P' V^{-1}) \ (n \text{ fois}) \\
&= V P'^n V^{-1} \\
&= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5^n} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{5^n}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{5^n}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} + \frac{1}{5^n}\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{3}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

e) Limite de P^n.

Lorsque *n* tend vers l'infini, $\frac{1}{5^n}$ tend vers 0 et il reste :

$$\lim_{n\to+\infty} P^n = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

3°/ Interprétation.

La première colonne de *P*, donc aussi la première colonne de $\lim_{n\to+\infty} P^n$ correspond, par définition de *P*, aux souris qui vont à droite et la deuxième colonne aux souris qui vont à gauche.
On voit donc qu'en fin de compte, **les trois quarts des souris vont à droite**.

Méthode alternative.

On peut chercher le vecteur de probabilité (composantes positives et somme des composantes égale à 1) qui est **vecteur propre de la transposée de *P*** pour la valeur propre 1 : c'est ce qu'on appelle le **vecteur de probabilité constant**. On trouve facilement le vecteur $\begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$, qui s'interprète de la même façon : les souris vont à droite en définitive 3 fois sur 4.
Cette méthode a l'avantage d'être rapide. Elle ne nécessite pas une diagonalisation complète de *P*.

4°/ Réponses aux questions de l'énoncé.

a) Deuxième expérience.

Nous supposons, conformément à l'énoncé, que le vecteur de probabilité de la première expérience est $X_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.
Le théorème des probabilités totales donne :
$P(X_2 = \text{Droite}) = P(X_1 = \text{Droite}) \times P(X_2 = \text{Droite} \mid X_1 = \text{Droite}) + P(X_1 = \text{Gauche}) \times P(X_2 = \text{Droite} \mid X_1 = \text{Gauche})$
$P(X_2 = \text{Gauche}) = P(X_1 = \text{Droite}) \times P(X_2 = \text{Gauche} \mid X_1 = \text{Droite}) + P(X_1 = \text{Gauche}) \times P(X_2 = \text{Gauche} \mid X_1 = \text{Gauche})$.
Ces relations se résument par la relation matricielle :

$$X_2 = X_1 P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}6 & 0{,}4 \end{pmatrix} = (0{,}7 \quad 0{,}3).$$

Le psychologue peut donc prédire qu'à la deuxième expérience, 70 % des souris iront à droite et 30 % à gauche.

b) Troisième expérience.

$$X_3 = X_2 P = (0{,}7 \quad 0{,}3)\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}6 & 0{,}4 \end{pmatrix} = (0{,}74 \quad 0{,}26).$$

Le psychologue peut donc prédire qu'à la troisième expérience, 74 % des souris iront à droite et 26 % à gauche.

b) Millième expérience.

$$X_{1000} = X_1 P^{999} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} + \frac{1}{5^{999}}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{3}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}.$$

Comme $\frac{1}{5^{999}}$ est négligeable, il reste :

$$X_{1000} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Autrement dit, le psychologue peut prédire qu'à la millième expérience, 75 % des souris iront à droite et 25 % à gauche.

Chapitre 22. Chaînes de Markov.

Enoncés.

Exercice 4. Territoire de vente.

Le territoire de vente d'un représentant se compose de trois villes *A*, *B*, *C*. Il ne vend jamais deux jours de suite dans la même ville. Si, un jour donné, il vend dans la ville *A*, il vendra le jour suivant dans la ville *B*. Mais si, un certain jour, il vend dans la ville *B*, ou dans la ville *C*, il y a deux fois plus de chance pour que, le lendemain, il vende dans la ville *A* plutôt que dans la ville restante. Quelle est, en fin de compte, la fréquence de vente dans chaque ville ?	

Solution.

1°/ Matrice de transition.

La ville X_{n+1} du représentant au jour $n + 1$, dépend uniquement de la ville X_n du représentant au jour n.
Les données de l'énoncé peuvent se compléter et se résumer dans un tableau :

X_n \ X_{n+1}	A	B	C	Total
A	0	1	0	1
B	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	1
C	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	1

Ce tableau donne la matrice de transition des probabilités conditionnelles des valeurs de X_{n+1} connaissant les valeurs de X_n :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Cette matrice de probabilités (éléments positifs ou nuls et la somme de chaque ligne vaut 1) a pour valeurs propres 1, $-\frac{1}{3}$, $-\frac{2}{3}$.
Comme 1 est valeur propre simple, la système évolue vers une configuration stable.

2°/ Limite de P^n.

Comme la matrice P possède trois valeurs propres réelles simples, elle est diagonalisable.

Cherchons une base de $\mathbb{R}^2$ formée de vecteurs propres.

a) Valeur propre 1.

$$P - I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & -1 & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -1 \end{pmatrix}$$

La somme des colonnes est nulle, dont le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre de P pour la valeur propre 1.

b) Valeur propre $-\frac{1}{3}$.

$$P + \frac{1}{3} I = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

3 fois la première colonne moins 1 fois la deuxième colonne moins 5 fois la troisième colonne donne 0, donc le vecteur $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}$ est vecteur propre de P pour la valeur propre $-\frac{1}{3}$.

c) Valeur propre $-\frac{2}{3}$.

$$P + \frac{2}{3} I = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

3 fois la première colonne moins 2 fois la deuxième colonne moins 2 fois la troisième colonne donne 0, donc le vecteur $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ est vecteur propre de P pour la valeur propre $-\frac{2}{3}$.

c) Diagonalisation.

Nous avons donc trouvé une matrice de vecteurs propres $V = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & -5 & -2 \end{pmatrix}$.

Le déterminant de V est -20, et l'inverse de V est $V^{-1} = \frac{1}{20}\begin{pmatrix} 8 & 9 & 3 \\ 0 & 5 & -5 \\ 4 & -8 & 4 \end{pmatrix}$.

$$P' = V^{-1} P V = \frac{1}{20}\begin{pmatrix} 8 & 9 & 3 \\ 0 & 5 & -5 \\ 4 & -8 & 4 \end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & -5 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{60}\begin{pmatrix} 8 & 9 & 3 \\ 0 & 5 & -5 \\ 4 & -8 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -3 & -6 \\ 3 & 1 & 4 \\ 3 & 5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

P' est la matrice diagonale des valeurs propres.

Nous avons donc diagonalisé la matrice P sous la forme : $P = V P' V^{-1} = V\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} V^{-1}$, avec $V = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & -5 & -2 \end{pmatrix}$.

d) Calcul de P^n.

$P^n = (V P' V^{-1}) (V P' V^{-1}) \dots (V P' V^{-1})$ (n fois)

$= V P'^n V^{-1}$

$$= \frac{1}{20}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & -5 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{(-1)^n}{3^n} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(-2)^n}{3^n} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 & 9 & 3 \\ 0 & 5 & -5 \\ 4 & -8 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{20}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & -5 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 & 9 & 3 \\ 0 & 5 & -5 \\ 4 & -8 & 4 \end{pmatrix} + \frac{1}{20}\frac{(-1)^n}{3^n}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & -5 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 & 9 & 3 \\ 0 & 5 & -5 \\ 4 & -8 & 4 \end{pmatrix} + \frac{1}{20}\frac{(-2)^n}{3^n}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & -5 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 & 9 & 3 \\ 0 & 5 & -5 \\ 4 & -8 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{20}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & -5 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 & 9 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{20}\frac{(-1)^n}{3^n}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & -5 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{20}\frac{(-2)^n}{3^n}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & -5 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & -8 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{20}\begin{pmatrix} 8 & 9 & 3 \\ 8 & 9 & 3 \\ 8 & 9 & 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{20}\frac{(-1)^n}{3^n}\begin{pmatrix} 0 & 15 & -15 \\ 0 & -5 & 10 \\ 0 & -25 & 10 \end{pmatrix} + \frac{1}{20}\frac{(-2)^n}{3^n}\begin{pmatrix} 12 & -24 & 12 \\ -8 & 16 & -8 \\ -8 & 16 & -8 \end{pmatrix}$$

e) Limite de P^n.

Lorsque n tend vers l'infini, $\frac{(-1)^n}{3^n}$ et $\frac{(-2)^n}{3^n}$ tendent vers 0 et il reste :

$$\lim_{n \to +\infty} P^n = \frac{1}{20}\begin{pmatrix} 8 & 9 & 3 \\ 8 & 9 & 3 \\ 8 & 9 & 3 \end{pmatrix}$$

3°/ Interprétation.

La première colonne de P, donc aussi la première colonne de $\lim_{n\to+\infty} P^n$ correspond, par définition de P, à la ville A, la deuxième colonne à la ville B et la troisième colonne à la ville C.
En supposant qu'au départ le représentant a autant de chance de se trouver dans l'une quelconque des trois villes, on voit donc qu'en fin de compte, **le représentant se retrouve 8 fois sur 20 dans la ville *A*, 9 fois sur 20 dans la ville *B* et 3 fois sur 20 dans la ville C**.

Méthode alternative.

On peut chercher le vecteur de probabilité (composantes positives et somme des composantes égale à 1) qui est **vecteur propre de la transposée de *P*** pour la valeur propre 1 : c'est ce qu'on appelle le **vecteur de probabilité constant**. On trouve facilement le vecteur $\begin{pmatrix}0{,}40\\0{,}45\\0{,}15\end{pmatrix}$, qui s'interprète de la même façon : le représentant passe 40 jours sur 100 dans la ville A, 45 jours sur 100 dans la ville B et 15 jours sur 100 dans la ville C..
Cette méthode a l'avantage d'être rapide. Elle ne nécessite pas une diagonalisation complète de P.

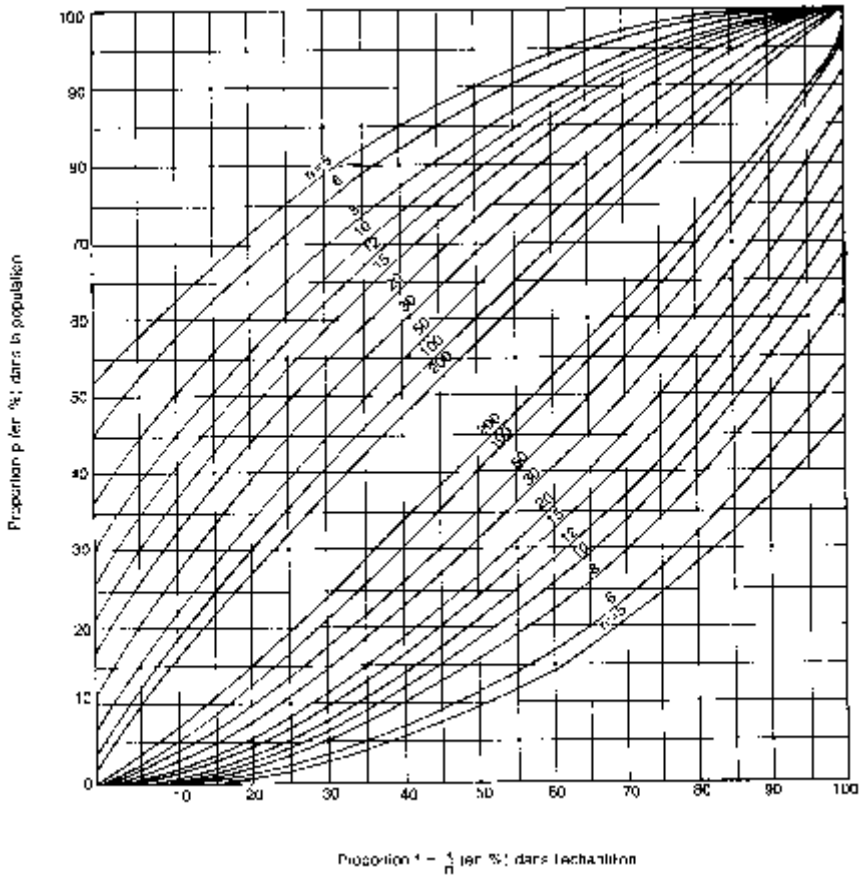
EXTRAITS D'UNE TABLE DE NOMBRES AU HASARD

(Kendall et Babington Smith, table tirée de Christian Labrousse, Statistique, Tome2, Dunod, Paris, 1962)

02 22 85 19 48 74 55 24 89 69 15 53 00 20 88 48 95 08
85 76 34 51 40 44 62 93 65 99 72 64 09 34 01 13 09 74
00 88 96 79 38 24 77 00 70 91 47 43 43 82 71 67 49 90
64 29 81 85 50 47 36 50 91 19 09 15 98 75 60 58 33 15
94 03 80 04 21 49 54 91 77 85 00 45 68 23 12 94 23 44
42 28 52 73 06 41 37 47 47 31 52 99 89 82 22 81 86 55
09 27 52 72 49 11 30 93 33 29 54 17 54 48 47 42 04 79
54 68 64 07 85 32 05 96 54 79 57 43 96 97 30 72 12 19
25 04 92 29 71 11 64 10 42 23 23 67 01 19 20 58 35 93
28 58 32 91 95 28 42 36 98 59 66 32 15 51 46 63 57 10
64 35 04 62 24 87 44 85 45 68 41 66 19 17 13 09 63 37
61 05 55 88 25 01 15 77 12 90 69 34 36 93 52 39 36 23
98 93 18 93 86 98 99 04 75 28 30 05 12 09 57 35 90 15
61 89 35 47 16 32 20 16 78 52 82 37 26 33 67 42 11 93
94 40 82 18 06 61 54 67 03 66 76 82 90 31 71 90 39 27
54 38 58 65 27 70 93 57 59 00 63 56 18 79 85 52 21 03
63 70 89 23 76 46 97 70 00 62 15 35 97 42 47 54 60 60
61 58 65 62 81 29 69 71 95 53 53 69 20 95 66 60 50 70
51 68 98 15 05 64 43 32 74 07 44 63 52 38 67 59 56 69
59 25 41 48 64 79 62 26 87 86 94 30 43 54 26 98 61 38
85 00 02 24 67 85 88 10 34 01 54 53 23 77 33 11 19 68
01 46 87 56 19 19 19 43 70 25 24 29 48 22 44 81 35 40
42 41 25 10 87 27 77 28 05 90 73 03 95 46 88 82 25 02
03 57 14 03 17 80 47 85 94 49 89 55 10 37 19 50 20 37
18 95 93 40 45 43 04 56 17 03 34 54 83 91 69 02 90 72

Abaque donnant, en fonction de *f*, l'intervalle de confiance à 95 % de *p*

f fréquence observée (en %) sur un échantillon d'effectif *n* (abscisse)
p proportion (en %) dans la population (ordonnée)



Extraits de la table cumulée de la loi de Poisson P^{λ}

Valeurs de $P(X > k)$ à λ = *Constante*

$k \setminus \lambda$	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0,632	0,865	0,950	0,982	0,993	0,998	0,999	0,999
1	0,264	0,594	0,801	0,908	0,960	0,983	0,993	0,997
2	0,080	0,323	0,577	0,762	0,875	0,938	0,970	0,986
3	0,019	0,143	0,353	0,567	0,735	0,849	0,918	0,968
4	0,004	0,053	0,185	0,371	0,560	0,715	0,827	0,900
5	0,001	0,017	0,084	0,215	0,384	0,554	0,699	0,809
6		0,005	0,034	0,111	0,238	0,394	0,550	0,687
7		0,001	0,012	0,051	0,133	0,256	0,401	0,547
8			0,004	0,021	0,068	0,153	0,271	0,407
9			0,001	0,008	0,032	0,084	0,170	0,283
10				0,003	0,014	0,043	0,099	0,184
11				0,001	0,005	0,020	0,053	0,112
12					0,002	0,009	0,027	0,064
13					0,001	0,004	0,013	0,034
14						0,001	0,006	0,017
15							0,002	0,008
16							0,001	0,004
17								0,002
18								0,001

Loi de WILCOXON - Table des seuils

		(α %)			
n1	n2	5	2.5	1	0.5
1	1	0	0	0	0
1	2	0	0	0	0
2	2	2	2	2	2
1	3	0	0	0	0
2	3	2	2	2	2
3	3	6	5	5	5
1	4	0	0	0	0
2	4	2	2	2	2
3	4	6	5	5	5
4	4	11	10	9	9
1	5	0	0	0	0
2	5	3	2	2	2
3	5	7	6	5	5
4	5	12	11	10	9
5	5	19	17	16	15
1	6	0	0	0	0
2	6	3	2	2	2
3	6	8	7	5	5
4	6	13	12	11	10
5	6	20	18	17	16
6	6	28	26	24	23
1	7	0	0	0	0
2	7	3	2	2	2
3	7	8	7	6	5
4	7	14	13	11	10
5	7	21	20	18	16
6	7	29	27	25	24
7	7	39	36	34	32
1	8	0	0	0	0
2	8	4	3	2	2
3	8	9	8	6	5
4	8	15	14	12	11
5	8	23	21	19	17
6	8	31	29	27	25
7	8	41	38	35	34
8	8	51	49	45	43

		(α %)			
n1	n2	5	2.5	1	0.5
1	9	0	0	0	0
2	9	4	3	2	2
3	9	10	8	7	6
4	9	16	14	13	11
5	9	24	22	20	18
6	9	33	31	28	26
7	9	43	40	37	35
8	9	54	51	47	45
9	9	66	62	59	56
1	10	0	0	0	0
2	10	4	3	2	2
3	10	10	9	7	6
4	10	17	15	13	12
5	10	26	23	21	19
6	10	35	32	29	27
7	10	45	42	39	37
8	10	56	53	49	47
9	10	69	65	61	58
10	10	82	78	74	71
1	11	0	0	0	0
2	11	4	3	2	2
3	11	11	9	7	6
4	11	18	16	14	12
5	11	27	24	22	20
6	11	37	34	30	28
7	11	47	44	40	38
8	11	59	55	51	49
9	11	72	68	63	61
10	11	86	81	77	73
11	11	100	96	91	87
1	12	0	0	0	0
2	12	5	4	2	2
3	12	11	10	8	7
4	12	19	17	15	13
5	12	28	26	23	21
6	12	38	35	32	30
7	12	49	46	42	40
8	12	62	58	53	51
9	12	75	71	66	63
10	12	89	84	79	76
11	12	104	99	94	90
12	12	120	115	109	105

		(α %)			
n1	n2	5	2.5	1	0.5
1	13	0	0	0	0
2	13	5	4	3	2
3	13	12	10	8	7
4	13	20	18	15	13
5	13	30	27	24	22
6	13	40	37	33	31
7	13	52	48	44	41
8	13	64	60	56	53
9	13	78	73	68	65
10	13	92	88	82	79
11	13	108	103	97	93
12	13	125	119	113	109
13	13	142	136	130	125
1	14	0	0	0	0
2	14	6	4	3	2
3	14	13	11	8	7
4	14	21	19	16	14
5	14	31	28	25	22
6	14	42	38	34	32
7	14	54	50	45	43
8	14	67	62	58	54
9	14	81	76	71	67
10	14	96	91	85	81
11	14	112	106	100	96
12	14	129	123	116	112
13	14	147	141	134	129
14	14	166	160	152	147
1	15	0	0	0	0
2	15	6	4	3	2
3	15	13	11	9	8
4	15	22	20	17	15
5	15	33	29	26	23
6	15	44	40	36	33
7	15	56	52	47	44
8	15	69	65	60	56
9	15	84	79	73	69
10	15	99	94	88	84
11	15	116	110	103	99
12	15	133	127	120	115
13	15	152	145	138	133
14	15	171	164	156	151
15	15	192	184	176	171

		(α %)			
n1	n2	5	2.5	1	0.5
1	16	0	0	0	0
2	16	6	4	3	2
3	16	14	12	9	8
4	16	24	21	17	15
5	16	34	30	27	24
6	16	46	42	37	34
7	16	58	54	49	46
8	16	72	67	62	58
9	16	87	82	76	72
10	16	103	97	91	86
11	16	120	113	107	102
12	16	138	131	124	119
13	16	156	150	142	136
14	16	176	169	161	155
15	16	197	190	181	175
16	16	219	211	202	196
1	17	0	0	0	0
2	17	6	5	3	2
3	17	15	12	10	8
4	17	25	21	18	16
5	17	35	32	28	25
6	17	47	43	39	36
7	17	61	56	51	47
8	17	75	70	64	60
9	17	90	84	78	74
10	17	106	100	93	89
11	17	123	117	110	105
12	17	142	135	127	122
13	17	161	154	146	140
14	17	182	174	165	159
15	17	203	195	186	180
16	17	225	217	207	201
17	17	249	240	230	223
1	18	0	0	0	0
2	18	7	5	3	2
3	18	15	13	10	8
4	18	26	22	19	16
5	18	37	33	29	26
6	18	49	45	40	37
7	18	63	58	52	49
8	18	77	72	66	62
9	18	93	87	81	76
10	18	110	103	96	92
11	18	127	121	113	108
12	18	146	139	131	125
13	18	166	158	150	144
14	18	187	179	170	163
15	18	208	200	190	184
16	18	231	222	212	206
17	18	255	246	235	228
18	18	280	270	259	252

Test des signes et des rangs de Wilcoxon

Soit μ la médiane de $X_1 - X_2$ et W_+ la somme des rangs des différences positives.
On rejette l'hypothèse H_0 : μ = 0, contre l'hypothèse :

H_{1-} : μ < 0 lorsque $W_+ \leq B$;

H_{1+} : μ > 0 lorsque $W_+ \geq \frac{n(n+1)}{2} - B$;

H_{10} : μ ≠ 0 lorsque $W_+ \leq B$ ou $W_+ \geq \frac{n(n+1)}{2} - B$;

B étant la valeur lue dans la table ci-dessous (test unilatéral ou test bilatéral).

Test bilatéral			Tests unilatéraux		
n	risque 5%	risque 1%	*n*	risque 5%	risque 1%
6	0		6	2	
7	2		7	2	
8	3	0	8	5	
9	5	1	9	8	2
10	8	3	10	10	4
11	10	5	11	13	7
12	13	9	12	17	9
13	17	9	13	21	12
14	21	12	14	25	15
15	25	15	15	30	19
16	29	19	16	35	23
17	34	23	17	41	27
18	40	27	18	47	32
19	46	32	19	53	37
20	52	37	20	60	43
21	59	43	21	68	48
22	66	49	22	75	53
23	73	55	23	83	61
24	81	61	24	92	68
25	89	68	25	101	76

Source : http://intec.cnam.fr/intecuv/uv205/math/tables/tables.htm.

Calcul de la loi de Wilcoxon.

La loi de probabilité de Wilcoxon intervient dans le test des rangs pour la comparaison des moyennes de deux petits échantillons d'une variable aléatoire dont on ne connaît pas la loi de probabilité.
n_1 est la taille du premier échantillon, n_2 la taille du deuxième échantillon.

Le calcul de la loi de Wilcoxon se fait par récurrence, à partir du nombre de combinaisons de n_1 nombres différents, pris parmi les nombres entiers de 1 à $n_1 + n_2$, dont la somme est inférieure ou égale à un entier w_1 fixé, variant de $1 + ... + n_1 = \frac{n_1(n_1+1)}{2}$ à $(n_2 + 1) + ... + (n_2 + n_1) = n_1 n_2 + \frac{n_1(n_1+1)}{2}$.

On note W_1 la variable aléatoire représentant la somme des rangs des valeurs du premiers échantillon dans la suite des $n_1 + n_2$ valeurs expérimentales des deux échantillons rangées par ordre croissant.
La fonction de répartition de W_1 est l'application :

$$w_1 \mapsto W(n_1 ; n_2 ; w_1) = P[W_1 \leq w_1].$$

Comme chaque combinaison de n_1 nombres différents pris dans l'ensemble {1, ... , $n_1 + n_2$} a la même probabilité (loi uniforme), $W(n_1 ; n_2 ; w_1)$ est le rapport entre le nombre de combinaisons de n_1 nombres différents pris dans l'ensemble {1, ... , $n_1 + n_2$} dont la somme est inférieure ou égale à w_1, et le nombre total de combinaisons de n_1 nombres différents pris dans l'ensemble {1, ... , $n_1 + n_2$}.

Le nombre de combinaisons de n_1 nombres différents pris dans l'ensemble {1, ... , $n_1 + n_2$} dont la somme est inférieure ou égale à w_1, est noté $Comb(n_1 ; n_2 ; w_1)$.
On a :

$$W(n_1 ; n_2 ; w_1) = \frac{Comb(n_1 ; n_2 ; w_1)}{\binom{n_1+n_2}{n_1}}$$

Tout le problème est de calculer $Comb(n_1 ; n_2 ; w_1)$.
Le calcul se fait par récurrence.

1°/ Pour $n_1 = 1$.

$$Comb(n_1 ; n_2 ; w_1) = Comb(1 ; n_2 ; w_1) = w_1.$$

En effet, pour $n_1 = 1$, on choisit un nombre parmi les nombres entiers {1, ... , $1 + n_2$}.
La "somme" d'un nombre est égale à ce nombre.
Le "nombre de combinaisons" d'un seul nombre pris dans l'ensemble {1, ... , $1 + n_2$} dont la "somme" est

inférieure ou égale à w_1, est donc le nombre d'éléments de l'ensemble {1, ... , 1 + n_2} qui sont inférieurs ou égaux à w_1 : c'est w_1.

2°/ Formule de récurrence.

On peut diviser les combinaisons dont la somme est inférieure ou égale à w_1 en deux classes :

— celles dont la somme est strictement plus petite que w_1 : il y en a $Comb\ (n_1\ ;\ n_2\ ;\ w_1 - 1)$;

— celles dont la somme est égale à w_1.
Parmi celles-ci, il y a :
· celles qui contiennent le nombre $n_1 + n_2$: il y en a
$Comb\ (n_1 - 1\ ;\ n_2\ ;\ w_1 - n_1 - n_2) - Comb\ (n_1 - 1\ ;\ n_2\ ;\ w_1 - n_1 - n_2 - 1)$.
C'est le nombre de combinaisons de $n_1 - 1$ nombres différents pris dans l'ensemble {1, ... , $n_1 + n_2 - 1$} dont la somme est inférieure ou égale à $w_1 - n_1 - n_2$.
· celles qui ne contiennent pas le nombre $n_1 + n_2$: il y en a
$Comb\ (n_1\ ;\ n_2 - 1\ ;\ w_1) - Comb\ (n_1\ ;\ n_2 - 1\ ;\ w_1 - 1)$.
C'est le nombre de combinaisons de n_1 nombres différents pris dans l'ensemble {1, ... , $n_1 + n_2 - 1$} dont la somme est égale à w_1.

Au total, nous avons obtenu la formule de récurrence (*R*) :

$$Comb\ (n_1\ ;\ n_2\ ;\ w_1) = Comb\ (n_1\ ;\ n_2\ ;\ w_1 - 1) + Comb\ (n_1 - 1\ ;\ n_2\ ;\ w_1 - n_1 - n_2) - Comb\ (n_1 - 1\ ;\ n_2\ ;\ w_1 - n_1 - n_2 - 1) + Comb\ (n_1\ ;\ n_2 - 1\ ;\ w_1) - Comb\ (n_1\ ;\ n_2 - 1\ ;\ w_1 - 1).$$

3°/ Extension de la formule de récurrence.

La précédente formule n'est valable, bien sûr, que si les quantités qui y interviennent sont définies.
On peut la prolonger pour toutes valeurs de n_1, n_2, w_1, en posant :

— Pour $n_1 \leq 0$, ou $n_2 \leq 0$, ou $w_1 \leq \frac{n_1(n_1+1)}{2} - 1$: $Comb\ (n_1\ ;\ n_2\ ;\ w_1) = 0$.

— Pour $w_1 > n_1 n_2 + \frac{n_1(n_1+1)}{2}$: $Comb\ (n_1\ ;\ n_2\ ;\ w_1) = \binom{n_1+n_2}{n_1}$.

Avec ces conventions d'écriture qui ne font que prolonger la définition stricte, la formule de récurrence établie est toujours valable.

4°/ Eviter les répétitions.

Pour limiter les calculs et éviter les répétitions, nous ne calculons les tables de la loi de Wilcoxon que pour les valeurs de n_1 inférieures ou égales à n_2 :

$$1 \leq n_1 \leq n_2$$

Pour $n_2 = 1$, il y a une seule table à établir, celle qui correspond à $n_1 = 1$.
Les valeurs possibles de w_1 sont $w_1 = 1$ et $w_1 = 2$.
Pour $w_1 = 1$, il y a une seule combinaison possible de 1 nombre pris dans l'ensemble {1, 2} dont la "somme" est inférieure ou égale à 1, c'est de choisir le nombre 1.
Pour $w_1 = 2$, il y a deux combinaisons de 1 nombre pris dans l'ensemble {1, 2} dont la "somme" est inférieure ou égale à 2, la première consiste à choisir le nombre 1, la deuxième à choisir le nombre 2.
La table de la **loi de Wilcoxon d'indice $(n_1, n_2) = (1, 1)$** se présente donc de la façon suivante :

w_1	Combinaisons de somme w_1	Fonction de Répartition
1	1	0,500
2	1	1,000

5°/ Tables de la loi de Wilcoxon pour $n_1 < n_2$.

Pour $n_2 > 1$ et $n_1 = 1$, la table de la **loi de Wilcoxon d'indice $(n_1, n_2) = (1, n_2)$** se présente de la façon suivante :

w_1	Combinaisons de somme w_1	Fonction de Répartition
1	1	$\frac{1}{n_2+1}$
...	...	...
w_1	1	$\frac{w_1}{n_2+1}$
...	...	...
$n_2 + 1$	1	1,000

Supposons établies toutes les tables d'indice (k_1, k_2) pour $1 \le k_1 \le k_2 \le n_2 - 1$ et pour $1 \le k_1 \le n_1 - 1 \le k_2 \le n_2$.

k_1 \ k_2	1	...	n_1	...	$n_2 - 1$	n_2
1	×	×	×	×	×	×
...		×	×	×	×	×
$n_1 - 1$			×	×	×	×
n_1			×	×	×	?

Dans ce cas, la formule de récurrence (*R*) :

$Comb\ (n_1\ ;\ n_2\ ;\ w_1) = Comb\ (n_1\ ;\ n_2\ ;\ w_1 - 1) + Comb\ (n_1 - 1\ ;\ n_2\ ;\ w_1 - n_1 - n_2) - Comb\ (n_1 - 1\ ;\ n_2\ ;\ w_1 - n_1 - n_2 - 1) + Comb\ (n_1\ ;\ n_2 - 1\ ;\ w_1) - Comb\ (n_1\ ;\ n_2 - 1\ ;\ w_1 - 1)$,

permet d'établir la table d'indice (n_1, n_2), pour $n_1 < n_2$, à partir des tables d'indices $(n_1 - 1, n_2)$ et $(n_1, n_2$

– 1).

Dans cette formule,
— $Comb\ (n_1 - 1\ ;\ n_2\ ;\ w_1 - n_1 - n_2) - Comb\ (n_1 - 1\ ;\ n_2\ ;\ w_1 - n_1 - n_2 - 1)$ est le nombre de combinaisons de $n_1 - 1$ nombres différents pris dans l'ensemble $\{ 1, \ldots , n_1 + n_2 - 1\}$ dont la somme est égale à $w_1 - n_1 - n_2$;
— $Comb\ (n_1\ ;\ n_2 - 1\ ;\ w_1) - Comb\ (n_1\ ;\ n_2 - 1\ ;\ w_1 - 1)$ est le nombre de combinaisons de n_1 nombres différents pris dans l'ensemble $\{ 1, \ldots , n_1 + n_2 - 1\}$ dont la somme est égale à w_1.

k_1 k_2	$n_2 - 1$	n_2
$n_1 - 1$		$w_1 - n_1 - n_2$
n_1	w_1	+

6°/ Tables de la loi de Wilcoxon pour $n_1 = n_2$.

Pour $n_1 = n_2$, la formule de récurrence (*R*) fait appel à une table d'indice $(n_1, n_2 - 1)$ qui n'existe pas.
Il faut donc transformer la formule (*R*).

Pour cela, il suffit de calculer d'une autre façon le nombre de combinaisons de n_1 nombres différents pris dans l'ensemble $\{ 1, \ldots , n_1 + n_2 - 1\}$ dont la somme est égale à w_1.
A chaque combinaison de n_1 nombres différents pris dans l'ensemble $\{ 1, \ldots , n_1 + n_2 - 1\}$ dont la somme est égale à w_1, on peut associer, de façon biunivoque, la combinaison des $n_2 - 1$ nombres restants, dont la somme est $\frac{(n_1 + n_2 - 1)(n_1 + n_2)}{2} - w_1$.
On a ainsi :

$$Comb\ (n_1\ ;\ n_2 - 1\ ;\ w_1) - Comb\ (n_1\ ;\ n_2 - 1\ ;\ w_1 - 1) = Comb\ (n_2 - 1\ ;\ n_1\ ;\ \frac{(n_1 + n_2 - 1)(n_1 + n_2)}{2} - w_1) - Comb\ (n_2 - 1\ ;\ n_1\ ;\ \frac{(n_1 + n_2 - 1)(n_1 + n_2)}{2} - w_1 - 1).$$

Pour $n_1 = n_2$, la formule de récurrence (*R*) se transforme alors en (*R'*) :

$$Comb\ (n_1\ ;\ n_2\ ;\ w_1) - Comb\ (n_1\ ;\ n_2\ ;\ w_1 - 1) = [Comb\ (n_1 - 1\ ;\ n_2\ ;\ w_1 - n_1 - n_2) - Comb\ (n_1 - 1\ ;\ n_2\ ;\ w_1 - n_1 - n_2 - 1)] + [Comb\ (n_2 - 1\ ;\ n_1\ ;\ \frac{(n_1 + n_2 - 1)(n_1 + n_2)}{2} - w_1) - Comb\ (n_2 - 1\ ;\ n_1\ ;\ \frac{(n_1 + n_2 - 1)(n_1 + n_2)}{2} - w_1 - 1)]$$

$Comb\ (n_2\ ;\ n_2\ ;\ w_1) - Comb\ (n_2\ ;\ n_2\ ;\ w_1 - 1) = [Comb\ (n_2 - 1\ ;\ n_2\ ;\ w_1 - 2\ n_2) - Comb\ (n_2 - 1\ ;\ n_2\ ;\ w$

$$_1 - 2\,n_2 - 1)] + [Comb\,(n_2 - 1\,;\,n_2\,;\,n_2\,(2\,n_2 - 1) - w_1) - Comb\,(n_2 - 1\,;\,n_2\,;\,n_2\,(2\,n_2 - 1) - w_1 - 1)]$$

Cette formule (*R'*) montre que la table d'indice (n_2, n_2) peut être établie à partir de la seule table d'indice $(n_2 - 1, n_2)$.

k_1 \ k_2	n_2
$n_2 - 1$	$w_1 - 2\,n_2$ $n_2\,(2\,n_2 - 1) - w_1$
n_2	+

7°/ Fonction de répartition et probabilités critiques.

Le calcul précédent permet de calculer une table pour chaque indice (n_1, n_2), $1 \le n_1 \le n_2$, donnant, pour chaque valeur de w_1, le nombre de combinaisons de n_1 nombres différents, pris dans l'ensemble d'entiers $\{1, \ldots, n_1 + n_2\}$, dont la somme est w_1.
En divisant ce nombre de combinaisons par $\binom{n_1 + n_2}{n_1}$, on obtient la probabilité que la somme W_1 soit égale à w_1.

En faisant la somme de ces probabilités depuis la plus basse valeur $\frac{1}{\binom{n_1 + n_2}{n_1}}$ correspondant à $w_1 = \frac{n_1(n_1+1)}{2}$ (une seule combinaison a pour somme $\frac{n_1(n_1+1)}{2}$), jusqu'à la valeur correspondant à w_1, on obtient la valeur de la fonction de répartition de W_1.

Les **tables de la fonction de répartition** de W_1 ont ainsi été établies, dans Microsoft Excel® (Version 3, c'est dire si c'est vieux !), pour

$$1 \le n_1 \le n_2 \le 50.$$

Cela donne 1 275 fichiers (un par table), occupant environ 79 Mo.

Ces tables permettent de lire directement, ou par interpolation pour les valeurs non entières de w_1, la **probabilité critique unilatérale** correspondant à une valeur observée w_1 de W_1.

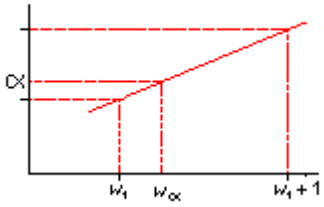
8°/ Calcul des seuils de décision.

Comme les tables des combinaisons et de la fonction de répartition prennent, finalement, beaucoup de place, on se contente de déterminer les **seuils de décision** du test de Wilcoxon suivant le risque α de première espèce que l'on accepte de prendre, et de les rassembler en une table unique.
Pour la symétrie de la table, on peut la compléter en calculant les seuils de décision lorsque n_1 est strictement plus grand que n_2 par la formule :

$$Seuil\,(n_1, n_2) = \frac{(n_1 - n_2)(n_1 + n_2 + 1)}{2} + Seuil\,(n_2, n_1)$$

formule qui résulte des symétries de la loi de Wilcoxon.
La table présentée ici donne la valeur du seuil pour lequel la queue de probabilité à droite prend la valeur α indiquée (5 %, 2,5 %, 1 %, 0,5 %) pour des valeurs de n_1 et n_2 vérifiant $1 \leq n_1 \leq n_2 \leq 18$.
Pour des valeurs de n_1 et n_2 allant jusqu'à 50, on a publié seulement la **table des seuils correspondant à un risque α de 0,025** (risque bilatéral de 5 %), pour des raisons de place et de présentation.

La calcul d'un seuil de décision se fait par interpolation linéaire.
La table d'indice (n_1, n_2), $1 \leq n_1 \leq n_2 \leq 50$, permet de déterminer un nombre w_1 vérifiant
$W(n_1 ; n_2 ; w_1) \leq \alpha$
$W(n_1 ; n_2 ; w_1 + 1) > \alpha$.
Une interpolation linéaire donne alors la valeur seuil w_α, par la formule :



$$w_\alpha = w_1 + \frac{\alpha\binom{n_1+n_2}{n_1} - Comb(n_1 ; n_2 ; w_1)}{Comb(n_1 ; n_2 ; w_1 + 1) - Comb(n_1 ; n_2 ; w_1)}$$

Si l'on note $C(n_1 ; n_2 ; w_1 + 1)$ le nombre de combinaisons de n_1 nombres différents pris parmi les entiers $\{1, \ldots, n_1 + n_2\}$ dont la somme est égale à $w_1 + 1$, donné par la table d'indice (n_1, n_2), la valeur du seuil s'écrit :

$$w_\alpha = w_1 + (\alpha - W(n_1 ; n_2 ; w_1)) \times \frac{\binom{n_1+n_2}{n_1}}{C(n_1 ; n_2 ; w_1 + 1)}$$

9°/ Utilisation de la table des seuils dans le test de Wilcoxon (test bilatéral, α = 5 %).

On suppose **vérifiées les conditions d'application** du test de Wilcoxon : deux échantillons aléatoires indépendants, de tailles n_1 et n_2, dans lesquels on connaît les valeurs de la variable aléatoire parente, dont, par ailleurs, on ne connaît pas la loi de probabilité.
On calcule la **somme w_{obs} des rangs** des valeurs du premier échantillon (taille n_1) dans la suite classée par ordre croissant des valeurs des deux échantillons.
Peu importe que n_1 soit ou non le plus petit des deux nombres n_1 et n_2.
Il suffit que n_1 et n_2 soient tous deux inférieurs ou égaux à 50.
On regarde dans la table des seuils la valeur du seuil w_1 correspondant au couple (n_1, n_2) dans le test bilatéral à 5 %.
On calcule l'**intervalle d'acceptation** $[w_1, n_1(n_1 + n_2 + 1) - w_1]$.
Si w_{obs} appartient à l'intervalle d'acceptation, la différence observée entre les moyennes des deux échantillons n'est pas significative au seuil de 5 %.

Si w_{obs} n'appartient pas à l'intervalle d'acceptation, la différence observée entre les moyennes des deux échantillons est significative au seuil de 5 %.

Table de la fonction de répartition Φ de la variable normale centrée réduite

u	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6143
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7290	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9270	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9779	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986

Table pour les grandes valeurs de *u*.

u	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,8	4,0	4,5
Φ(*u*)	0,998 65	0,999 04	0,999 31	0,999 52	0,999 66	0,999 76	0,999 841	0,999 928	0,999 968	0,999 997

La table donne les valeurs de Φ(*u*) pour *u* positif. Lorsque *u* est négatif,
il faut prendre le complément à 1 de la valeur lue dans la table : Φ(– *u*) = 1 – Φ(*u*)

Loi de Student

Valeur de *t* pour laquelle la probabilité d'une valeur inférieure à *t* suivant le nombre *n* de degrés de liberté, est égale à α.

n\α	0,55	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95	0,975	0,990	0,995	0,999
1	0,158	0,325	0,510	0,727	1,000	1,376	1,963	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657	636,619
2	0,142	0,289	0,445	0,617	0,816	1,061	1,386	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	31,598
3	0,137	0,277	0,424	0,584	0,765	0,978	1,250	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	12,929
4	0,134	0,271	0,414	0,569	0,741	0,941	1,190	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	8,610
5	0,132	0,267	0,408	0,559	0,727	0,920	1,156	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	6,869
6	0,131	0,265	0,404	0,553	0,718	0,906	1,134	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,959
7	0,130	0,263	0,402	0,549	0,711	0,896	1,119	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	5,408
8	0,130	0,262	0,399	0,546	0,706	0,889	1,108	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	5,041
9	0,129	0,261	0,398	0,543	0,703	0,883	1,100	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	4,781
10	0,129	0,260	0,397	0,542	0,700	0,879	1,093	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,587
11	0,129	0,260	0,396	0,540	0,697	0,876	1,088	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,437
12	0,128	0,259	0,395	0,539	0,695	0,873	1,083	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	4,318
13	0,128	0,259	0,394	0,538	0,694	0,870	1,079	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	4,221
14	0,128	0,258	0,393	0,537	0,692	0,868	1,076	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	4,140
15	0,128	0,258	0,393	0,536	0,691	0,866	1,074	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	4,073
16	0,128	0,258	0,392	0,535	0,690	0,865	1,071	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	4,015
17	0,128	0,257	0,392	0,534	0,689	0,863	1,069	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,965
18	0,127	0,257	0,392	0,534	0,688	0,862	1,067	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,922
19	0,127	0,257	0,391	0,533	0,688	0,861	1,066	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,883
20	0,127	0,257	0,391	0,533	0,687	0,860	1,064	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,850
21	0,127	0,257	0,391	0,532	0,686	0,859	1,063	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,819
22	0,127	0,256	0,390	0,532	0,686	0,858	1,061	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,792
23	0,127	0,256	0,390	0,532	0,685	0,858	1,060	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,767
24	0,127	0,256	0,390	0,531	0,685	0,857	1,059	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,745
25	0,127	0,256	0,390	0,531	0,684	0,856	1,058	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,725
26	0,127	0,256	0,390	0,531	0,684	0,856	1,058	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,707
27	0,127	0,256	0,389	0,531	0,684	0,855	1,057	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,690
28	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,855	1,056	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,674
29	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,854	1,055	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3,659
30	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,854	1,055	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,646
40	0,126	0,255	0,388	0,529	0,681	0,851	1,050	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704	3,551
60	0,126	0,254	0,387	0,527	0,679	0,848	1,046	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660	3,460
120	0,126	0,254	0,386	0,526	0,677	0,845	1,041	1,289	1,658	1,980	2,358	2,617	3,373
∞	0,126	0,253	0,385	0,524	0,674	0,842	1,036	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	3,291

Table de la loi de χ^2 ou de Karl Pearson

Valeur de χ^2 pour laquelle la probabilité d'une valeur inférieure à χ^2 suivant le nombre n de degrés de liberté est $\alpha = F_n(\chi^2)$.
(*n* : 1, 11, 21, 40).

$n\backslash\alpha$	0,005	0,010	0,025	0,050	0,100	0,250	0,500	0,750	0,900	0,950	0,975	0,990	0,995
1	0,0000	0,0002	0,0010	0,0039	0,0158	0,102	0,455	1,32	2,71	3,84	5,02	6,63	7,88
2	0,0100	0,0201	0,0506	0,103	0,211	0,575	1,39	2,77	4,61	5,99	7,38	9,21	10,6
3	0,0717	0,115	0,216	0,352	0,584	1,21	2,37	4,11	6,25	7,81	9,35	11,3	12,8
4	0,207	0,297	0,484	0,711	1,06	1,92	3,36	5,39	7,78	9,49	11,1	13,3	14,9
5	0,412	0,554	0,831	1,15	1,61	2,67	4,35	6,63	9,24	11,1	12,8	15,1	16,7
6	0,676	0,872	1,24	1,64	2,20	3,45	5,35	7,84	10,6	12,6	14,4	16,8	18,5
7	0,989	1,24	1,69	2,17	2,83	4,25	6,35	9,04	12,0	14,1	16,0	18,5	20,3
8	1,34	1,65	2,18	2,73	3,49	5,07	7,34	10,2	13,4	15,5	17,5	20,1	22,0
9	1,73	2,09	2,70	3,33	4,17	5,90	8,34	11,4	14,7	16,9	19,0	21,7	23,6
10	2,16	2,56	3,25	3,94	4,87	6,74	9,34	12,5	16,0	18,3	20,5	23,2	25,2
11	2,60	3,05	3,82	4,57	5,58	7,58	10,3	13,7	17,3	19,7	21,9	24,7	26,8
12	3,07	3,57	4,40	5,23	6,30	8,44	11,3	14,8	18,5	21,0	23,3	26,2	28,3
13	3,57	4,11	5,01	5,89	7,04	9,30	12,3	16,0	19,8	22,4	24,7	27,7	29,8
14	4,07	4,66	5,63	6,57	7,79	10,2	13,3	17,1	21,1	23,7	26,1	29,1	31,3
15	4,60	5,23	6,26	7,26	8,55	11,0	14,3	18,2	22,3	25,0	27,5	30,6	32,8
16	5,14	5,81	6,91	7,96	9,31	11,9	15,3	19,4	23,5	26,3	28,8	32,0	34,3
17	5,70	6,41	7,56	8,67	10,1	12,8	16,3	20,5	24,8	27,6	32,0	33,4	35,7
18	6,26	7,01	8,23	9,39	10,9	13,7	17,3	21,6	26,0	28,9	31,5	34,8	37,2
19	6,84	7,63	8,91	10,1	11,7	14,6	18,3	22,7	27,2	30,1	32,9	36,2	38,6
20	7,43	8,26	9,56	10,9	12,4	15,5	19,3	23,8	28,4	31,4	34,2	37,6	40,0
21	8,03	8,90	10,3	11,6	13,2	16,3	20,3	24,9	29,6	32,7	35,5	38,9	41,4
22	8,64	9,54	11,0	12,3	14,0	17,2	21,3	26,0	30,8	33,9	36,8	40,3	42,8
23	9,26	10,2	11,7	13,1	14,8	18,1	22,3	27,1	32,0	35,2	38,1	41,6	44,2
24	9,89	10,9	12,4	13,8	15,7	19,0	23,3	28,2	33,2	36,4	39,4	43,0	45,6
25	10,5	11,5	13,1	14,6	16,5	19,9	24,3	29,3	34,4	37,7	40,6	44,3	46,9
26	11,2	12,2	13,8	15,4	17,3	20,8	25,3	30,1	35,6	38,9	41,9	45,6	48,3
27	11,8	12,9	14,6	16,2	18,1	21,7	26,3	31,5	36,7	40,1	43,2	47,0	49,6
28	12,5	13,6	15,3	16,9	18,9	22,7	27,3	32,6	37,9	41,3	44,5	48,3	51,0
29	13,1	14,3	16,0	17,7	19,8	23,6	28,3	33,7	39,1	42,6	45,7	49,6	52,3
30	13,8	15,0	16,8	18,5	20,6	24,5	29,3	34,8	40,3	43,8	47,0	50,9	53,7
40	20,7	22,2	24,4	26,5	29,1	33,7	39,3	45,6	51,8	55,8	59,3	63,7	66,8
50	28,0	29,7	32,4	34,8	37,7	42,9	49,3	56,3	63,2	67,5	71,4	76,2	79,5
60	35,5	37,5	40,5	43,2	46,5	52,3	59,3	67,0	74,4	79,1	83,3	88,4	92,0
70	43,3	45,4	48,8	51,7	55,3	61,7	69,3	77,6	85,5	90,5	95,0	100,4	104,2
80	51,2	53,5	57,2	60,4	64,3	71,1	79,3	88,1	96,6	101,9	106,6	112,4	116,3
90	59,2	61,8	65,6	69,1	73,3	80,6	89,3	98,6	107,6	113,1	118,1	124,1	128,3
100	67,3	70,1	74,2	77,9	82,4	90,1	99,3	109,1	118,5	124,3	129,6	135,8	140,2

Pour les grandes valeurs de n, la loi de probabilité de χ^2 tend vers une loi normale de moyenne n et de variance $2n$.
Si n est suffisamment grand, la variable aléatoire $\sqrt{2\chi^2} - \sqrt{2n-1}$ suit, à peu près, une loi normale centrée réduite.

Loi de Fischer-Snedecor

La table donne la valeur de *f* pour laquelle la fonction de répartition vaut **0,975**
en fonction des nombres de degrés de liberté du **numérateur (première ligne)**
et du **dénominateur (première colonne)**.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	647,8	799,5	864,2	899,6	921,8	937,1	948,2	956,7	963,3	968,6	976,7	984,9	993,1	997,2	1001	1006	1010	1014	1018
2	38,51	39,00	39,17	39,25	39,30	39,33	39,36	39,37	39,39	39,40	39,41	39,43	39,45	39,46	39,46	39,47	39,48	39,49	39,50
3	17,44	16,04	15,44	15,10	14,88	14,73	14,62	14,54	14,47	14,42	14,34	14,25	14,17	14,12	14,08	14,04	13,99	13,95	13,90
4	12,22	10,65	9,98	9,60	9,36	9,20	9,07	8,98	8,90	8,84	8,75	8,66	8,56	8,51	8,46	8,41	8,36	8,31	8,26
5	10,01	8,43	7,76	7,39	7,15	6,98	6,85	6,76	6,68	6,62	6,52	6,43	6,33	6,28	6,23	6,18	6,12	6,07	6,02
6	8,81	7,26	6,60	6,23	5,99	5,82	5,70	5,60	5,52	5,46	5,37	5,27	5,17	5,12	5,07	5,01	4,96	4,90	4,85
7	8,07	6,54	5,89	5,52	5,29	5,12	4,99	4,90	4,82	4,76	4,67	4,57	4,47	4,42	4,36	4,31	4,25	4,20	4,14
8	7,57	6,06	5,42	5,05	4,82	4,65	4,53	4,43	4,36	4,30	4,20	4,10	4,00	3,95	3,89	3,84	3,78	3,73	3,67
9	7,21	5,71	5,08	4,72	4,48	4,32	4,20	4,10	4,03	3,96	3,87	3,77	3,67	3,61	3,56	3,51	3,45	3,39	3,33
10	6,94	5,46	4,83	4,47	4,24	4,07	3,95	3,85	3,78	3,72	3,62	3,52	3,42	3,37	3,31	3,26	3,20	3,14	3,08
11	6,72	5,26	4,63	4,28	4,04	3,88	3,76	3,66	3,59	3,53	3,43	3,33	3,23	3,17	3,12	3,06	3,00	2,94	2,88
12	6,55	5,10	4,47	4,12	3,89	3,73	3,61	3,51	3,44	3,37	3,28	3,18	3,07	3,02	2,96	2,91	2,85	2,79	2,72
13	6,41	4,97	4,35	4,00	3,77	3,60	3,48	3,39	3,31	3,25	3,15	3,05	2,95	2,89	2,84	2,78	2,72	2,66	2,60
14	6,30	4,86	4,24	3,89	3,66	3,50	3,38	3,29	3,21	3,15	3,05	2,95	2,84	2,79	2,73	2,67	2,61	2,55	2,49
15	6,20	4,77	4,15	3,80	3,58	3,41	3,29	3,20	3,12	3,06	2,96	2,86	2,76	2,70	2,64	2,59	2,52	2,46	2,40
16	6,12	4,69	4,08	3,73	3,50	3,34	3,22	3,12	3,05	2,99	2,89	2,79	2,68	2,63	2,57	2,51	2,45	2,38	2,32
17	6,04	4,62	4,01	3,66	3,44	3,28	3,16	3,06	2,98	2,92	2,82	2,72	2,62	2,56	2,50	2,44	2,38	2,32	2,25
18	5,98	4,56	3,95	3,61	3,38	3,22	3,10	3,01	2,93	2,87	2,77	2,67	2,56	2,50	2,44	2,38	2,32	2,26	2,19
19	5,90	4,51	3,90	3,56	3,33	3,17	3,05	2,96	2,88	2,82	2,72	2,62	2,51	2,45	2,39	2,33	2,27	2,20	2,13
20	5,87	4,46	3,86	3,51	3,29	3,13	3,01	2,91	2,84	2,77	2,68	2,57	2,46	2,41	2,35	2,29	2,22	2,16	2,09
21	5,83	4,42	3,82	3,48	3,25	3,09	2,97	2,87	2,80	2,73	2,64	2,53	2,42	2,37	2,31	2,25	2,18	2,11	2,04
22	5,79	4,38	3,78	3,44	3,22	3,05	2,93	2,84	2,76	2,70	2,60	2,50	2,39	2,33	2,27	2,21	2,14	2,08	2,00

23	5,75	4,35	3,75	3,41	3,18	3,02	2,90	2,81	2,73	2,67	2,57	2,47	2,36	2,30	2,24	2,18	2,11	2,04	1,97
24	5,72	4,32	3,72	3,38	3,15	2,99	2,87	2,78	2,70	2,64	2,54	2,44	2,33	2,27	2,21	2,15	2,08	2,01	1,94
25	5,69	4,29	3,69	3,35	3,13	2,97	2,85	2,75	2,68	2,61	2,51	2,41	2,30	2,24	2,18	2,12	2,05	1,98	1,91
26	5,66	4,27	3,67	3,33	3,10	2,94	2,82	2,73	2,65	2,59	2,49	2,39	2,28	2,22	2,16	2,09	2,03	1,95	1,88
27	5,63	4,24	3,65	3,31	3,08	2,92	2,80	2,71	2,63	2,57	2,47	2,36	2,25	2,19	2,13	2,07	2,00	1,93	1,85
28	5,61	4,22	3,63	3,29	3,06	2,90	2,78	2,69	2,61	2,55	2,45	2,34	2,23	2,17	2,11	2,05	1,98	1,91	1,83
29	5,59	4,20	3,61	3,27	3,04	2,88	2,76	2,67	2,59	2,53	2,43	2,32	2,21	2,15	2,09	2,03	1,96	1,89	1,81
30	5,57	4,18	3,59	3,25	3,03	2,87	2,75	2,65	2,57	2,51	2,41	2,31	2,20	2,14	2,07	2,01	1,94	1,87	1,79
40	5,42	4,05	3,46	3,13	2,90	2,74	2,62	2,53	2,45	2,39	2,29	2,18	2,07	2,01	1,94	1,88	1,80	1,72	1,64
60	5,29	3,93	3,34	3,01	2,79	2,63	2,51	2,41	2,33	2,27	2,17	2,06	1,94	1,88	1,82	1,74	1,67	1,58	1,48
120	5,15	3,80	3,23	2,89	2,67	2,52	2,39	2,30	2,22	2,16	2,05	1,94	1,82	1,76	1,69	1,61	1,53	1,43	1,31
∞	5,02	3,69	3,12	2,79	2,57	2,41	2,29	2,19	2,11	2,05	1,94	1,83	1,71	1,64	1,57	1,48	1,39	1,27	1,00

Coefficient d'aplatissement

Valeurs critiques du coefficient d'aplatissement de Karl Pearson suivant le nombre n d'observations d'une variable normale

$n \setminus \alpha$	0,01	0,05	0,95	0,99	$n \setminus \alpha$	0,01	0,05	0,95	0,99
7	1,25	1,41	3,55	4,29	400	2,52	2,64	3,41	3,67
8	1,31	1,46	3,70	4,53	450	2,55	2,66	3,39	3,63
9	1,33	1,53	3,86	4,82	500	2,57	2,67	3,37	3,60
10	1,34	1,56	3,95	5,00	550	2,58	2,69	3,35	3,57
12	1,46	1,64	4,05	5,20	600	2,60	2,70	3,34	3,54
15	1,55	1,72	4,13	5,30	650	2,61	2,71	3,33	3,52
20	1,65	1,82	4,17	5,36	700	2,62	2,72	3,31	3,50
25	1,72	1,91	4,16	5,30	800	2,65	2,74	3,29	3,46
30	1,79	1,98	4,11	5,21	900	2,66	2,75	3,28	3,43
35	1,84	2,03	4,10	5,13	1000	2,68	2,76	3,26	3,41
40	1,89	2,07	4,06	5,04	1200	2,71	2,78	3,24	3,37
45	1,93	2,11	4,00	4,94	1400	2,72	2,80	3,22	3,34
50	1,95	2,15	3,99	4,88	1600	2,74	2,81	3,21	3,32
75	2,08	2,27	3,87	4,59	1800	2,76	2,82	3,20	3,30
100	2,18	2,35	3,77	4,39	2000	2,77	2,83	3,18	3,28
125	2,24	2,40	3,71	4,24	2500	2,79	2,85	3,16	3,25
150	2,29	2,45	3,65	4,13	3000	2,81	2,86	3,15	3,22
200	2,37	2,51	3,57	3,98	3500	2,82	2,87	3,14	3,21
250	2,42	2,55	3,52	3,87	4000	2,83	2,88	3,13	3,19
300	2,46	2,59	3,47	3,79	4500	2,84	2,88	3,12	3,18
350	2,50	2,62	3,44	3,72	5000	2,85	2,89	3,12	3,17

Coefficient d'asymétrie

Valeurs critiques du coefficient d'asymétrie de Karl Pearson suivant le nombre n d'observations d'une variable normale

$n \setminus \alpha$	5 %	1 %	$n \setminus \alpha$	5 %	1 %
7	1,018	1,457	350	0,213	0,305
8	0,998	1,452	400	0,200	0,285
9	0,977	1,433	450	0,188	0,269
10	0,954	1,407	500	0,179	0,255
12	0,910	1,353	600	0,171	0,243
15	0,851	1,272	650	0,163	0,233
20	0,772	1,155	700	0,151	0,224
25	0,711	1,061	750	0,146	0,215
30	0,662	0,986	800	0,142	0,208
35	0,621	0,923	850	0,138	0,202
40	0,587	0,870	900	0,134	0,196
45	0,558	0,825	950	0,130	0,190
50	0,534	0,787	1000	0,127	0,185
60	0,492	0,723	1200	0,116	0,165
70	0,459	0,673	1400	0,107	0,152
80	0,432	0,631	1600	0,100	0,142
90	0,409	0,596	1800	0,095	0,134
100	0,389	0,567	2000	0,090	0,127
125	0,350	0,508	2500	0,080	0,114
150	0,321	0,464	3000	0,073	0,104
175	0,298	0,430	3500	0,068	0,096
200	0,280	0,403	4000	0,064	0,090
250	0,251	0,360	4500	0,060	0,085
300	0,230	0,329	5000	0,057	0,081

Test de Durbin-Watson (1 régresseur)

La table donne un intervalle dans lequel se situe la valeur critique de *d*.

Taille	*Queue de probabilité à gauche*	D_{inf}	D_{sup}
15	0,01	0,81	1,07
	0,025	0,95	1,23
	0,05	1,08	1,36
20	0,01	0,95	1,15
	0,025	1,08	1,28
	0,05	1,20	1,41
30	0,01	1,13	1,26
	0,025	1,25	1,38
	0,05	1,35	1,49
40	0,01	1,25	1,34
	0,025	1,35	1,45
	0,05	1,44	1,54
60	0,01	1,38	1,45
	0,025	1,47	1,54
	0,05	1,55	1,62
80	0,01	1,47	1,52
	0,025	1,54	1,59
	0,05	1,61	1,66
100	0,01	1,52	1,56
	0,025	1,59	1,63
	0,05	1,65	1,69

TEST DE KOLMOGOROV-SMIRNOV

Valeurs du seuil de décision :
on accepte l'hypothèse (H_0) pour les valeurs de K_n inférieures au seuil de décision.

n \ α	0,01	0,05
5	0,6685	0,5633
10	0,4864	0,4087
15	0,4042	0,3375
20	0,3524	0,2939
25	0,3165	0,2639
30	0,2898	0,2417
40	0,2521	0,2101
50	0,2260	0,1884
60	0,2067	0,1723
70	0,1917	0,1597
80	0,1795	0,1496
90	—	0,1412
100	—	0,1340
$n > 100$	$\frac{1,63}{\sqrt{n}}$	$\frac{1,36}{\sqrt{n}}$

Pour $n > 100$, les valeurs seuils sont de la forme $\frac{c}{\sqrt{n}}$:

α	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01
c	1,073	1,223	1,358	1,518	1,629

Table tirée de :
Philippe TASSI, Méthodes Statistiques, 2e édition, Economica, Paris, 1989, p.317.
en référence à :
Z. BIRNBAUM "Numeral tabulation of Kolmogorov's statistic", in Journal of American Statistical Association, 19, vol.47.

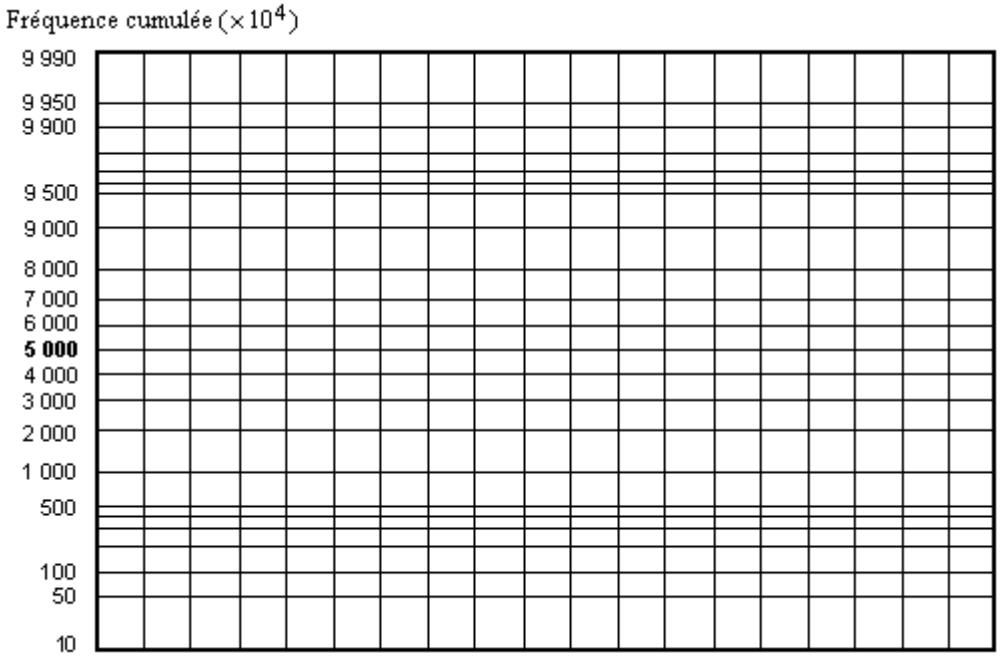
Range Studentisé

k = nombre de moyennes, ν = nombre de degrés de liberté de la variance résiduelle, α = 5 %.

La table donne la valeur de t_{seuil} intervenant dans le calcul des Plus Petites Amplitudes Significatives (test de Newmann-Keuls).

ν\ k	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	18,0	27,0	32,8	37,1	40,4	43,1	45,4	47,4	49,1
2	6,08	8,33	9,80	10,9	11,7	12,4	13,0	13,5	14,0
3	4,50	5,91	6,82	7,50	8,04	8,48	8,85	9,18	9,46
4	3,93	5,04	5,76	6,29	6,71	7,05	7,35	7,60	7,83
5	3,64	4,60	5,22	5,67	6,03	6,33	6,58	6,80	6,99
6	3,46	4,34	4,90	5,30	5,63	5,90	6,12	6,32	6,49
7	3,34	4,16	4,68	5,06	5,36	5,61	5,82	6,00	6,16
8	3,26	4,04	4,53	4,89	5,17	5,40	5,60	5,77	5,92
9	3,20	3,95	4,41	4,76	5,02	5,24	5,43	5,59	5,74
10	3,15	3,88	4,33	4,65	4,91	5,12	5,30	5,46	5,60
11	3,11	3,82	4,26	4,57	4,82	5,03	5,20	5,35	5,49
12	3,08	3,77	4,20	4,51	4,75	4,95	5,12	5,27	5,39
13	3,06	3,73	4,15	4,45	4,69	4,88	5,05	5,19	5,32
14	3,03	3,70	4,11	4,41	4,64	4,83	4,99	5,13	5,25
15	3,01	3,67	4,08	4,37	4,59	4,78	4,94	5,08	5,20
16	3,00	3,65	4,05	4,33	4,56	4,74	4,90	5,03	5,15
17	2,98	3,63	4,02	4,30	4,52	4,70	4,86	4,99	5,11
18	2,97	3,61	4,00	4,28	4,49	4,67	4,82	4,96	5,07
19	2,96	3,59	3,98	4,25	4,47	4,65	4,79	4,92	5,04
20	2,95	3,58	3,96	4,23	4,45	4,62	4,77	4,90	5,01
24	2,92	3,53	3,90	4,17	4,37	4,54	4,68	4,81	4,92
30	2,89	3,49	3,85	4,10	4,30	4,46	4,60	4,72	4,82
40	2,86	3,44	3,79	4,04	4,23	4,39	4,52	4,63	4,70
60	2,83	3,40	3,74	3,98	4,16	4,31	4,44	4,55	4,65
120	2,80	3,36	3,68	3,92	4,10	4,24	4,36	4,47	4,56
∞	2,77	3,31	3,63	3,86	4,03	4,17	4,29	4,39	4,47

Papier gausso-arithmétique



Statistiques : Cours (1ère partie, 2ème partie).

e-mail

1. Analyse univariée : représentation graphique.
2. Analyse univariée : paramètres de position.
3. Analyse univariée : paramètres de dispersion, paramètres de forme.
4. Analyse bivariée : représentation graphique.
5. Analyse bivariée : caractéristiques marginales et conditionnelles.
6. Ligne de régression et corrélation.
7. Méthodes des moindres carrés : droite orthogonale, droite de régression, droite d'allométrie.
8. Modèles non linéaires.
9. ACP : analyse en composantes principales.
10. Régression linéaire multiple.
11. Sondage stratifié.
12. Simulation d'un échantillon.
13. Estimation ponctuelle et par intervalle de confiance.
14. Test Khi-deux : conformité à une loi.
15. Test Khi-deux : indépendance.
16. Test de Kolmogorov-Smirnov : conformité à une loi.
17. Comparaison de deux moyennes : test de Wilcoxon, test de Mann-Whitney.
18. Comparaison de deux moyennes : test de Gauss.
19. Comparaison de deux moyennes : test de Student.
20. Comparaison de deux variances : test de Fisher-Snedecor.
21. Comparaison de plusieurs moyennes : analyse de variance à un facteur contrôlé.
22. Comparaison de plusieurs moyennes : analyse de variance à deux facteurs contrôlés.

NTE

Nouvelles Technologies Educatives

Accueil

Statistiques

1. Généralités.

2. Statistique descriptive univariée.

2.1. Représentation graphique.
2.2. Paramètres caractéristiques.
2.2.1 – Paramètres de position
2.2.2 – Paramètres de dispersion
2.2.3 – Paramètres de forme

3. Statistique descriptive bivariée.

3.1. Définitions.
3.2. Représentation graphique.
3.3. Caractéristiques marginales et conditionnelles.
3.4. Régression et corrélation.
3.4.1 Régression et corrélation.
3.4.2 Méthode des moindres carrés.

4. Régression orthogonale dans $\mathbb{R}^2$.

4.1. Notion d'espace vectoriel euclidien.
4.1.1. Espace vectoriel $\mathbb{R}^n$.
4.1.2. Produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$.
4.2. Approche euclidienne de la régression.
4.3. Régression orthogonale. Axe principal.
4.3.1. Introduction.
4.3.2. Définitions.
4.3.3. Diagonalisation de la matrice des variances-covariances.
4.3.4. Recherche des axes principaux.
4.3.5. Coordonnées factorielles et composantes principales.
4.3.6. Propriétés des composantes principales.

5. Régression multiple.

5.1. Position et résolution du problème.
5.2. Coefficient de corrélation multiple.
5.2.1 Définition.
5.2.2 Propriétés.
5.2.3 Application : technique de la régression pas à pas.

6. Initiation à la théorie des sondages.

6.1. Généralités.
6.2. Divers types de sondages.
6.3. Estimation des paramètres.
6.4. Etude du sondage élémentaire.

STATISTIQUE

Chapitre I - GENERALITES.

I. 1. OBJET DE LA STATISTIQUE

Le but de la statistique est de dégager les significations de données, numériques ou non, obtenues au cours de l'étude d'un phénomène.
Il faut distinguer les **données statistiques** qui sont les résultats d'observations recueillies lors de l'étude d'un phénomène, et la **méthode statistique** qui a pour objet l'étude rationnelle des données.
La méthode statistique comporte plusieurs étapes.

I. 1. 1. La statistique descriptive ou déductive.

C'est l'ensemble des méthodes à partir desquelles on recueille, ordonne, réduit, et condense les données.
A cette fin, la statistique descriptive utilise des paramètres, ou synthétiseurs, des graphiques et des méthodes dites d'analyse des données (l'ordinateur a facilité le développement de ces méthodes).

I. 1. 2. La statistique mathématique ou inductive

C'est l'ensemble des méthodes qui permettent de faire des **prévisions**, des interpolations sur une population à partir des résultats recueillis sur un échantillon.
Nous utilisons des raisonnements **inductifs** c'est-à-dire des raisonnements de passage du particulier au général.
Cette statistique utilise des repères de référence qui sont les **modèles théoriques** (lois de probabilités).
Cette statistique nécessite la recherche d'échantillons qui représentent le mieux possible la diversité de la population entière ; il est nécessaire qu'ils soient constitués au hasard ; on dit qu'ils résultent d'un **tirage non exhaustif**.
L'étude sur échantillon se justifie pour réduire le coût élevé et limiter la destruction d'individus pour obtenir la réponse statistique.

I. 2. VOCABULAIRE STATISTIQUE

I. 2. 1. Population

C'est l'ensemble des unités ou individus sur lequel on effectue une analyse statistique.

$\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_N\}$ avec $\text{card}(\Omega) = N$ fini

Ce vocabulaire est hérité du 1er champ d'application de la statistique : la démographie (Vauban (1633-1707) effectua des recensements pour des études économiques et militaires).

Exemples de populations.

Les véhicules automobiles immatriculés en France
La population des P.M.E. d'un pays
Les salariés d'une entreprise
Les habitants d'un quartier

I. 2. 2. Echantillon

C'est un ensemble d'individus prélevés dans une population déterminée

Exemple d'échantillon.

L'échantillon des véhicules automobiles immatriculés dans un département.

I. 2. 3. Caractère

C'est un trait déterminé *C* présent chez tous les individus d'une population sur laquelle on effectue une étude statistique.

- Un caractère est dit **quantitatif** s'il est mesurable.

Exemples de caractères quantitatifs.

La puissance fiscale d'un véhicule automobile.
Le chiffre d'affaire d'une P.M.E.
L'âge, le salaire des salariés d'une entreprise.

- Un caractère est dit **qualitatif** s'il est repérable sans être mesurable.

Exemples de caractères qualitatifs.

La couleur de la carrosserie d'un véhicule automobile
Le lieu de travail des habitants d'un quartier
Le sexe et la situation matrimoniale des salariés d'une entreprise

I. 2. 4. Modalités

Ce sont les différentes situations M_i possibles du caractère.

Les modalités d'un caractère doivent être **incompatibles** et **exhaustives** ; tout individu doit présenter une et une seule modalité.
Les modalités d'un caractère qualitatif sont les différentes rubriques d'une nomenclature ; celles d'un caractère quantitatif sont les mesures de ce caractère.
L'ensemble des modalités est noté *E*.

Pour un caractère quantitatif, la mesure du caractère peut être un nombre entier pris parmi un ensemble limité ; nous dirons qu'il est **discret**.

Exemple de caractère quantitatif discret.

Le nombre d'enfants d'une famille (fratrie)

Dans certains cas la mesure du caractère peut être un nombre décimal pris parmi un ensemble de valeurs possibles très important (plusieurs dizaines ou plusieurs centaines).
Pour permettre une étude et notamment une représentation graphique plus simple, nous sommes conduits à effectuer un regroupement en classes (5 à 20 classes) ; nous dirons alors que le caractère est **continu**.

Dans ces deux situations, nous dirons que le caractère quantitatif est défini par ses modalités (valeurs discrètes ou classes).

Les modalités d'un caractère quantitatif peuvent être prises dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^n$.

Exemples d'ensembles de modalités.

Nombre d'enfants dans une fratrie : $\{M_i\} = \{x_i\}=\{0, 1, 2, 3, ...\}$, $M_i \in \mathbb{N}$.

L'âge, la taille et le poids d'un groupe d'individus représentent globalement une modalité définie dans $\mathbb{R}^3$ (à condition que chacune de ces variables soit discrète)

L'ensemble des modalités d'un caractère peut être établi à priori avant l'enquête (une liste, une nomenclature, un code) ou après enquête.
On constitue l'ensemble des valeurs prises par le caractère.

Les caractères étudiés sur une population peuvent être **mixtes** :

Exemple de caractère mixte.

L'ensemble des salariés d'une entreprise peut être représenté par un caractère mixte que nous pourrons exploiter globalement ou plus efficacement en extrayant une partie des données.
Le sexe, de modalités : *H* ou *F* (codé par 1 ou 2)
L'âge, de modalités : 18, 19, 20, ... ou [16, 20], [21, 25], ...
Le salaire mensuel, de modalités : 6000, 6500, 7000, ... ou [6000, 6500[, [6500, 7500[, ...
La situation matrimoniale, de modalités : marié, célibataire, veuf, divorcé, vivant maritalement.

I. 3. NOTION DE DISTRIBUTION STATISTIQUE

Considérons une population $\Omega = \{\omega_1, ... , \omega_N\}$.
Dans cette population, considérons un caractère *C* et soit *E* l'ensemble des modalités du caractère *C*, *card* (*E*) = *p*.
On note A_i l'ensemble des individus de Ω présentant la modalité M_i du caractère *C*, $i = 1, ... , p$.

Les A_i forment une partition de Ω: $A_i \cap A_j = \emptyset$ pour $i \neq j$, et $\bigcup_{i=1}^{i=p} A_i = \Omega$.

Nous définissons $n_i = card\ (A_i)$.
n_i est l'**effectif** de la modalité M_i.

On appelle **variable statistique** toute application *X* de Ω dans *E* qui, à chaque individu ω de la population, associe une modalité M_i du caractère *C*.
L'effectif n_i d'une modalité M_i est le cardinal de l'image réciproque A_i de M_i par *X* :

$n_i = card\ (A_i) = Card\ (X^{-1}\ (M_i))$

Une variable statistique s'identifie à l'ensemble des triplets $\{(M_i, A_i, n_i)\}$, $i \in [\ 1, p\ ]$.

En pratique, le statisticien se contente souvent de l'ensemble des doublets $\{(M_i, n_i)\}$, $i \in [\ 1, p\ ]$, sans se préoccuper de savoir qui sont les n_i individus de la population présentant la modalité M_i du caractère C et constituant l'ensemble A_i.

On appelle aussi **distribution statistique** l'ensemble des doublets $\{(M_i, n_i)\}$, $i \in [\ 1, p\ ]$.

Exemples de variables statistiques.

Le nombre d'enfants d'une fratrie : $x_1 = 0$, $n_1 = 50$; $x_2 = 1$, $n_2 = 70$; $x_3 = 2$, $n_3 = 20$.

La taille d'une population : $M_1 = [\ 150, 160\ [$, $n_1 = 50$; $M_2 = [\ 160, 175\ [$, $n_2 = 100$.

Les marques de véhicules automobiles : M_1 = "Renault", $n_1 = 15\ 000$; M_2 = "Citroën", $n_2 = 10\ 000$

La **fréquence** de la modalité M_i est, par définition : $f\ (A_i) = \frac{n_i}{N} = f_i$, $N = \sum_{i=1}^{i=p} n_i$.

La notion d'effectif d'une modalité est une notion absolue, elle ne permet pas directement les comparaisons.

La notion de fréquence est une notion relative, elle permet directement les comparaisons.

Remarque.

Si le caractère C ne présente qu'une modalité a dans la population, on parle de **variable, ou de distribution, statistique constante** $\{(a, \Omega\ , N)\}$.

Chapitre II - ANALYSE UNIVARIEE.

(Statistique descriptive à un caractère)

II. 1. REPRESENTATION GRAPHIQUE

La représentation graphique des données relatives à un caractère unique repose sur la proportionnalité des longueurs, ou des aires, des graphiques, aux effectifs, ou aux fréquences, des différentes modalités du caractère.

II. 1. 1. Caractère qualitatif.

Pour un caractère qualitatif, on utilise principalement trois types de représentation graphique : le **diagramme en bâtons**, la représentation par **tuyaux d'orgue** et la représentation par **secteurs**. Lorsque le caractère étudié est la répartition géographique d'une population, la représentation graphique est un **cartogramme**.

a) Diagramme en bâtons.

Nous portons en abscisse les modalités, de façon arbitraire.
Nous portons en ordonnée des segments dont la **longueur** est proportionnelle aux effectifs (ou aux fréquences) de chaque modalité.
Nous appelons **polygone statistique**, ou **diagramme polygonal**, la ligne obtenue en joignant les sommets des bâtons.

b) Tuyaux d'orgue.

Nous portons en abscisses les modalités, de façon arbitraire.
Nous portons en ordonnées des rectangles dont la **longueur** est proportionnelle aux effectifs, ou aux fréquences, de chaque modalité.

c) Secteurs.

Les diagrammes circulaires, ou semi-circulaires, consistent à partager un disque ou un demi-disque, en tranches, ou secteurs, correspondant aux modalités observées et dont la **surface** est proportionnelle à l'effectif, ou à la fréquence, de la modalité.
Ces diagrammes conviennent très bien pour des données politiques ou socio-économiques.

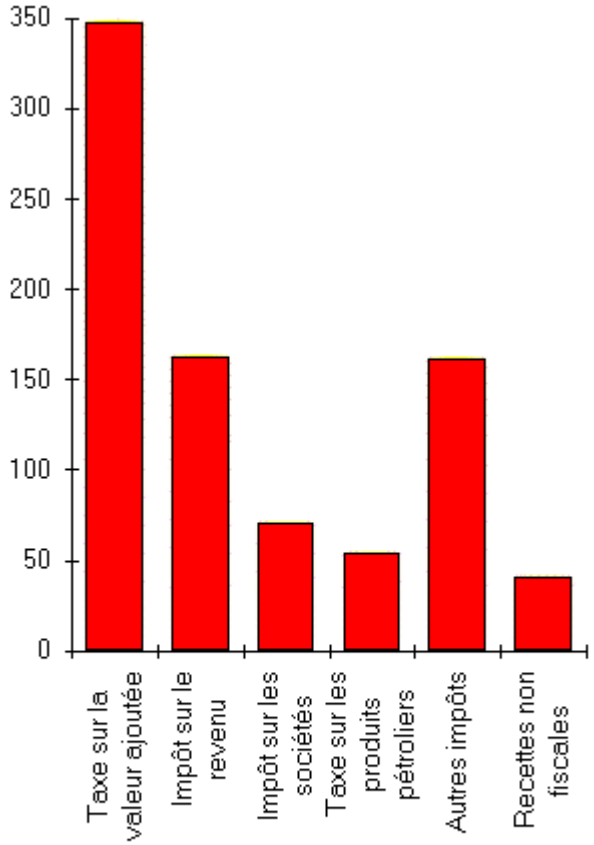
d) Exemple.

En 1982, les recettes du budget de l'Etat se présentaient de la façon suivante (en milliards de francs) :

Taxe sur la valeur ajoutée	348
Impôt sur le revenu	163
Impôt sur les sociétés	71
Taxe sur les produits pétroliers	54
Autres impôts	161
Recettes non fiscales	41
TOTAL	**838**

Le caractère étudié, la nature des recettes du budget de l'Etat, est un caractère qualitatif.

Dans la représentation en **tuyaux d'orgue**, les différentes modalités du caractère (les diverses sources de recettes du budget de l'Etat) sont représentées par des segments sur l'axe des ordonnées. Pour chaque abscisse on porte un rectangle dont la longueur est proportionnelle au montant correspondant de la recette (effectif).



Histogramme des effectifs

Dans la représentation par **diagramme en bâtons**, les différentes modalités du caractère (les diverses sources de recettes du budget de l'Etat) sont représentées par des points sur l'axe des ordonnées. Pour chaque abscisse, on porte un segment vertical dont la longueur est proportionnelle au montant correspondant de la recette (rectangle de largeur nulle).

Dans le **diagramme circulaire**, chaque secteur a une surface proportionnelle à l'importance de la recette dans le budget. L'angle au centre représentant une modalité est donc proportionnelle à l'importance de la recette dans le budget.

Source de recettes	Recette		Angle (degrés)	Angle cumulé	
	MF	%		$\widehat{xOy}$	$\widehat{xOy}_{-180°}$
Taxe sur la valeur ajoutée	348	41,5	149,5	149,5	
Impôt sur le revenu	163	19,5	70,0	219,5	39,5
Impôt sur les sociétés	71	8,5	30,5	250,0	70,0
Taxe sur les produits pétroliers	54	6,4	23,2	273,2	93,2
Autres impôts	161	19,2	69,2	342,4	162,4
Recettes non fiscales	41	4,9	17,6	360,0	180,0
TOTAL	**838**	100			

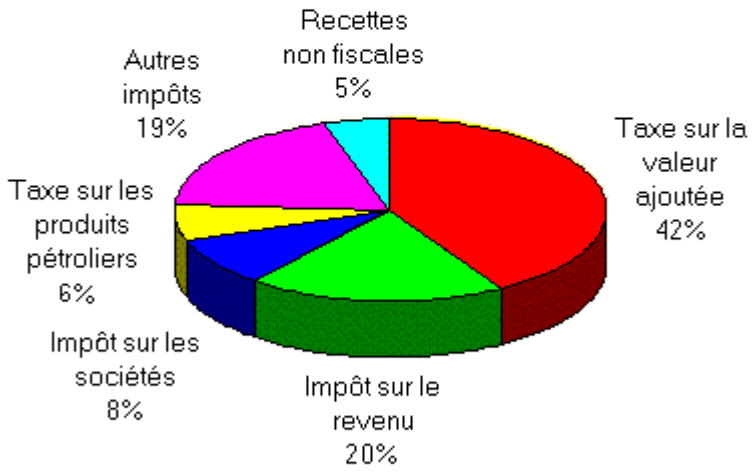


Diagramme circulaire des fréquences

e) Cartogrammes.

Un cartogramme est une carte géographique dont les secteurs géographiques sont coloriés avec une couleur différente suivant l'effectif ou suivant la fréquence du caractère étudié.

II. 1. 2. Caractère quantitatif.

La variable statistique est la mesure du caractère.
Celle-ci peut être discrète ou continue.
Il existe deux types de représentation graphique d'une distribution statistique à caractère quantitatif :

— Le **diagramme différentiel** correspond à une représentation des effectifs ou des fréquences.

— Le **diagramme intégral** correspond à une représentation des effectifs cumulés, ou des fréquences cumulées.

a) Variable statistique discrète.

— Diagramme différentiel : diagramme en bâtons, des effectifs ou des fréquences.

La différence avec le cas qualitatif consiste en ce que les abscisses ici sont les valeurs de la variable statistique.

— Diagramme intégral : courbe en escaliers des effectifs cumulés ou des fréquences cumulées.

Exemple.

En vue d'établir rationnellement le nombre de postes de travail nécessaires pour assurer à sa clientèle un service satisfaisant, une agence de voyage a fait relever, minute par minute, le nombre d'appels téléphoniques reçus au cours d'une période de 30 jours. Cette opération a fourni, pour la tranche horaire de pointe qui se situe entre onze heures et midi, les résultats suivants :

Nombre d'appels téléphoniques par minute	Nombre de minutes
0	93
1	261
2	416
3	393
4	308
5	174
6	93
7	42
8 et plus	20
TOTAL	1 800

La population étudiée est celle des 1 800 minutes composant la durée totale des appels dans la tranche horaire de onze heures à midi pendant 30 jours.
Le caractère observé est le nombre d'appels téléphoniques : c'est un caractère quantitatif et la variable statistique correspondante, qui ne peut prendre que des valeurs entières, est discrète.
La représentation des effectifs est identique à celle des fréquences : seule change l'échelle verticale.

La représentation graphique **différentielle** correcte est le **diagramme en bâtons**.
A chaque valeur x_i de la variable, portée en abscisse, on fait correspondre un segment vertical de longueur proportionnelle à la fréquence f_i de cette valeur.

Le regroupement des valeurs extrêmes de la variable en une seule classe (nombre d'appels supérieur ou égal à 8) interdit normalement la représentation graphique de ce dernier segment.
Mais, étant donnée la fréquence quasi négligeable de cette classe, l'inconvénient n'est pas bien grand et l'on pourra représenter par un segment à l'abscisse 8, la fréquence des appels de durée 8 ou plus.

Nombre d'appels téléphoniques par minute	Nombre de minutes (effectifs)	Fréquence (%)	Fréquence cumulée (%)
0	93	5,2	5,2
1	261	14,5	19,7
2	416	23,1	42,8
3	393	21,8	64,6
4	308	17,1	81,7
5	174	9,7	91,4
6	93	5,2	96,6
7	42	2,3	98,9
8 et plus	20	1,1	100,0
TOTAL	1 800	100,0	

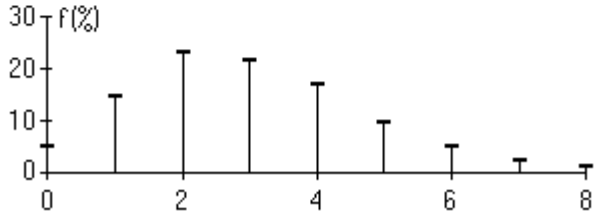
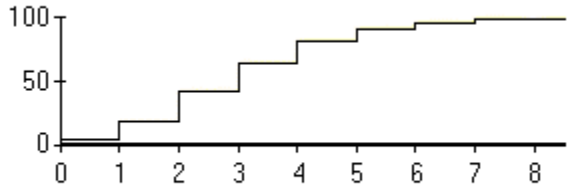


Diagramme en bâtons

La représentation graphique **intégrale** correcte est la **courbe en escalier** : les fréquences des diverses valeurs de la variable statistique correspondent aux hauteurs des marches de la courbe en escalier.



Courbe en escalier

b) Variable statistique continue.

Les observations sont regroupées en classes.
Chaque classe possède une certaine **amplitude**, qui est la longueur de l'intervalle définissant la classe.
Le rapport entre l'effectif d'une classe et son amplitude s'appelle la **densité d'effectif**.
Le rapport entre la fréquence d'une classe et son amplitude s'appelle la **densité de fréquence**.

— Diagramme différentiel : **histogramme des densités**.

Nous portons en abscisse les classes représentant les modalités et en ordonnées des rectangles dont la longueur est proportionnelle à la densité d'effectif ou à la densité de fréquence.
L'**aire** d'un rectangle de cet histogramme est alors proportionnelle à l'effectif ou à la fréquence de la classe.

— Diagramme intégral : **courbe cumulative** des effectifs ou des fréquences.
La courbe cumulative des fréquences doit représenter la fonction de répartition de la variable statistique.

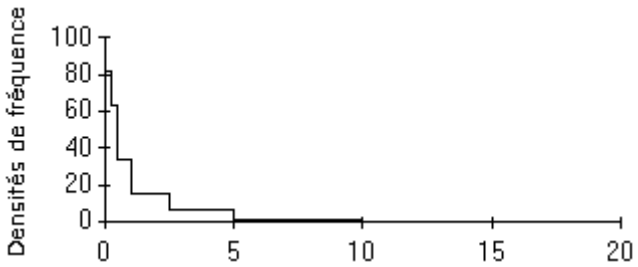
Exemple.

La Fédération nationale de la réparation et du commerce de l'automobile a effectué une enquête auprès de ses adhérents visant à mieux connaître la structure de ce secteur. Cette opération a fourni la répartition suivante des entreprises de la réparation de du commerce de l'automobile selon leur chiffre d'affaires annuel.
La masse de chiffres d'affaires correspondant aux entreprises de la première et de la dernière classes s'élève respectivement à 1 714 et 110 145 millions de francs.

Chiffre d'affaires (millions de F)	Nombre d'entreprises
Moins de 0,25	13 712
0,25 à moins de 0,50	10 674
0,50 à moins de 1,00	11 221
1,00 à moins de 2,50	15 496
2,50 à moins de 5,00	10 043
5,00 à moins de 10,00	3 347
10,00 et plus	3 147
TOTAL	67 640

La population étudiée est celle des entreprises de la réparation et du commerce de l'automobile.
Le caractère observé est le chiffre d'affaires.
C'est un caractère quantitatif et la variable statistique correspondante est continue.

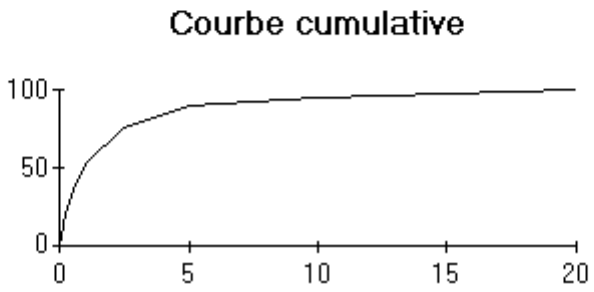
La représentation graphique différentielle correcte est l'**histogramme des densités de fréquences**.
Pour la première et la dernière classes, l'amplitude de la classe n'est pas connue.
On détermine alors la moyenne de la classe, qu'on considère comme la valeur centrale de la classe (quand on construit un histogramme, on fait l'hypothèse implicite que les effectifs sont répartis uniformément à l'intérieur de la classe, la moyenne de la classe est alors le centre de la classe).
Pour la première classe, la moyenne du chiffre d'affaires est $\frac{1714}{13712}$ = 0,125, de sorte que la première classe est la classe [0,00 , 0,25 [.
Pour la dernière classe, la moyenne du chiffre d'affaires est $\frac{110145}{3147}$ = 35, de sorte que la dernière classe est la classe [10,00 , 60,00 [.



La représentation graphique intégrale correcte est la **courbe cumulative des fréquences**.
Pour que chaque point expérimental représente la fonction de répartition, il faut prendre pour abscisses les **limites supérieures des classes** et, pour ordonnées, les **fréquences cumulées** correspondantes.

Comme la variable statistique est continue, on tracera une courbe cumulative continue, et non une courbe en escalier, de façon qu'à une valeur de fréquence cumulée corresponde une et une seule valeur de variable.
Entre deux points expérimentaux, on trace un segment de droite représentant l'interpolation linéaire, ou bien une courbe lissée, asymptotiquement tangente à l'horizontale d'ordonnée 100.

Chiffre d'affaires (millions de F)	Nombre d'entreprises (effectif)	Fréquence (%)	Amplitude de classe	Densité de fréquence	Fréquence cumulée
Moins de 0,25	13 712	20,3	0,25	81,2	20,3
0,25 à moins de 0,50	10 674	15,8	0,25	63,2	36,1
0,50 à moins de 1,00	11 221	16,6	0,50	33,2	52,7
1,00 à moins de 2,50	15 496	22,9	1,50	15,3	75,6
2,50 à moins de 5,00	10 043	14,8	2,50	5,9	90,4
5,00 à moins de 10,00	3 347	4,9	5,00	0,98	95,3
10,00 et plus	3 147	4,7	50,0	0,094	100,0
TOTAL	67 640				



II. 2. PARAMETRES CARACTERISTIQUES

Le but de l'étude statistique est aussi de résumer des données par des paramètres ou synthétiseurs.
Il existe 3 types de paramètres :
— paramètres de position (ou de tendance centrale)
— paramètres de dispersion
— paramètres de forme (asymétrie, aplatissement, concentration)

II. 2. 1. Paramètres de position

Les paramètres de position (mode, médiane, moyenne) permettent de savoir autour de quelles valeurs se situent les valeurs d'une variable statistique.

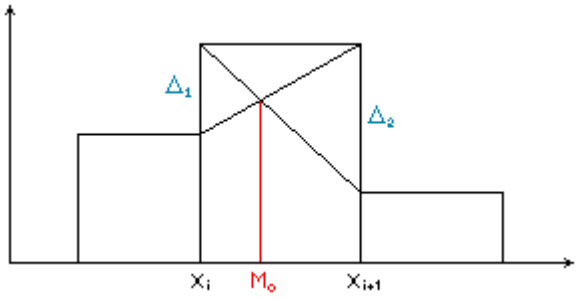
II. 2. 1. 1. Le mode

Le mode, noté M_o, est la modalité qui admet **la plus grande fréquence** :

$$f(M_o) = Max(f_i) \; ; \; i \in [\,1, p\,]$$

Il est parfaitement défini pour une variable qualitative ou une variable quantitative discrète.

Pour une variable quantitative continue nous parlons de **classe modale** : c'est la classe dont la densité de fréquence est maximum.
Si les classes ont même amplitude la densité est remplacée par l'effectif ou la fréquence et nous retrouvons la définition précédente.
Nous définissons le **mode**, pour une variable quantitative continue, en tenant compte des densités de fréquence des 2 classes adjacentes par la méthode suivante.



La classe modale $[\,x_i, x_{i+1}\,[$ étant déterminée, le mode M_o vérifie :

$$\frac{M_o - x_i}{\Delta_1} = \frac{x_{i+1} - M_o}{\Delta_2}$$

Dans une proportion, on ne change pas la valeur du rapport en additionnant les numérateurs et en additionnant les dénominateurs :

$$\frac{M_o - x_i}{\Delta_1} = \frac{x_{i+1} - M_o}{\Delta_2} = \frac{x_{i+1} - x_i}{\Delta_1 + \Delta_2}$$

$$\boxed{M_o = x_i + \frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2}(x_{i+1} - x_i).}$$

Remarques.

Lorsque les classes adjacentes à la classe modale ont des densités de fréquences égales, le mode coïncide avec le centre de la classe modale.
Le mode dépend beaucoup de la répartition en classes.
Une variable statistique peut présenter plusieurs modes locaux : on dit alors qu'elle est **plurimodale**.
Cette situation est intéressante : elle met en évidence l'existence de plusieurs sous-populations, donc l'hétérogénéité de la population étudiée.

II. 2. 1. 2. La médiane

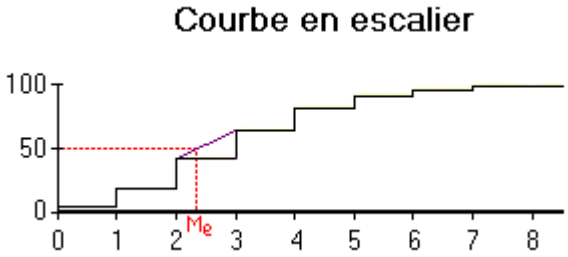
La médiane M_e est telle que l'effectif des observations dont les modalités sont inférieures à M_e est égal à l'effectif des observations dont les modalités sont supérieures à M_e.

Cette définition n'a de sens que si les modalités sont toutes ordonnées.
Dans le cas d'une variable qualitative il est parfois possible de choisir un ordre.
Exemple : niveau d'études scolaires : école primaire < 1er cycle < CAP < BEP < Bac < BTS < DEUG < ....
Une variable quantitative X doit être définie dans $\mathbb{R}$.

Détermination pratique de la médiane.

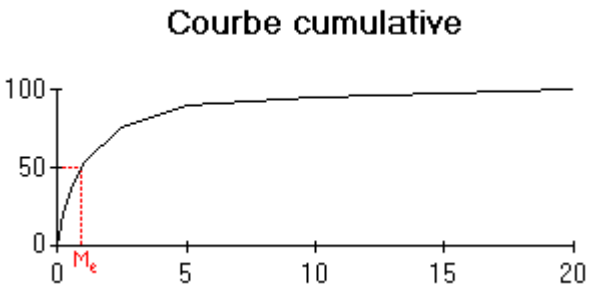
· Cas d'une variable discrète.

Reprenons l'exemple de II.1.2.a de variable discrète (appels téléphoniques).
La fréquence cumulée est 42,8 % pour $x = 2$, et 64,6 % pour $x = 3$.
L'intervalle [2, 3 [est appelé **intervalle médian**.
Dans l'intervalle médian, la médiane est calculée par **interpolation linéaire**.



· Cas d'une variable continue :

Reprenons l'exemple de II.1.2.b de variable continue (entreprises automobiles).
La fréquence cumulée est 36,1 % pour $x = 0{,}50$, et 52,7 % pour $x = 1{,}00$.
L'intervalle [0,50, 1,00 [est l'**intervalle médian**.
Dans l'intervalle médian, la médiane est calculée par **interpolation linéaire**.



Remarques

La médiane ne dépend que de l'ordre des modalités , elle n'est donc pas influencée par les observations aberrantes.
La médiane partage l'histogramme des fréquences en 2 parties d'aires égales.

II. 2. 1. 3. La moyenne

La moyenne $\overline{X}$ ne se définit que pour une variable statistique quantitative.

Pour une variable statistique discrète $\{(x_i, n_i)\}_{1 \le i \le p}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, la moyenne $\overline{X}$ est la moyenne arithmétique des modalités pondérées par les effectifs :

$$\overline{X} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{i=p} n_i x_i = \frac{1}{N}\sum_{\omega \in \Omega} X(\omega), \text{ avec } N = \sum_{i=1}^{i=p} n_i.$$

Pour une variable statistique discrète $\{((x_{ij})_{1 \le j \le q}, n_i)\}_{1 \le i \le p}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^q$, la moyenne $\overline{X}$ est encore la moyenne arithmétique des modalités dans $\mathbb{R}^q$, pondérées par les effectifs :

$$\overline{X} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{i=p} n_i \begin{pmatrix} x_{i1} \\ \vdots \\ x_{iq} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{i=p} n_i x_{i1} \\ \vdots \\ \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{i=p} n_i x_{iq} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{X_1} \\ \vdots \\ \overline{X_q} \end{pmatrix}.$$

$\overline{X}$ est le "point moyen" qui résume le nuage de points de $\mathbb{R}^q$.
Il caractérise un individu moyen représentatif du nuage de données.

Exemple.

L'étude de 21 familles a conduit à la distribution suivante suivante le nombre d'enfants dans la famille :

Nombre d'enfants x_i	0	1	2	3	4	5
Nombre de familles n_i	5	3	6	1	3	3

Le nombre moyen d'enfants par famille est $\overline{X} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{i=p} n_i x_i = \frac{1}{21}(0 \times 5 + 1 \times 3 + 2 \times 6 + 3 \times 1 + 4 \times$

$3 + 5 \times 3) = \frac{45}{21} = \frac{15}{7}$.

Naturellement, cette moyenne ne représente pas une "famille moyenne" mais donne une estimation du nombre d'enfants dans une famille dont est extrait l'échantillon : nous pourrons dire que, dans cette population, il faudra, en moyenne, 7 familles pour avoir 15 enfants, ou que 100 familles auront, en moyenne, 214 enfants.

a) Propriétés de la moyenne.

Somme.

La somme $X + Y$ de deux variables statistiques X et Y est définie par :

$$(X + Y)(\omega) = X(\omega) + Y(\omega), \text{ pour tout } \omega \in \Omega.$$

Nous avons alors écrire :

$$\overline{X+Y} = \frac{1}{N}\sum_{\omega\in\Omega}(X+Y)(\omega) = \frac{1}{N}\sum_{\omega\in\Omega}(X(\omega)+Y(\omega)) = \frac{1}{N}\sum_{\omega\in\Omega}X(\omega) + \frac{1}{N}\sum_{\omega\in\Omega}Y(\omega) = \overline{X} + \overline{Y}$$

$$\boxed{\overline{X+Y} = \overline{X} + \overline{Y}}$$

Produit par un scalaire

Le produit λX d'une variable statistique X par un nombre réel λ est défini par :

$$(\lambda X)(\omega) = \lambda X(\omega), \text{ pour tout } \omega \in \Omega.$$

Nous pouvons alors écrire :

$$\overline{\lambda X} = \frac{1}{N}\sum_{\omega\in\Omega}(\lambda X)(\omega) = \frac{\lambda}{N}\sum_{\omega\in\Omega}X(\omega) = \lambda\,\overline{X}.$$

$$\boxed{\overline{\lambda X} = \lambda\,\overline{X}.}$$

Ecart moyen à la moyenne.

$$\overline{X - \overline{X}} = \frac{1}{N}\sum_{\omega\in\Omega}(X - \overline{X})(\omega) = \frac{1}{N}\sum_{\omega\in\Omega}(X(\omega) - \overline{X}) = \frac{1}{N}\sum_{\omega\in\Omega}X(\omega) - \overline{X} = 0$$

$$\boxed{\overline{X - \overline{X}} = 0}$$

b) Moyenne conditionnée.

Soit Ω^* une sous-population de Ω (exemple : nombre d'enfants d'une fratrie d'origine étrangère dans une population donnée).

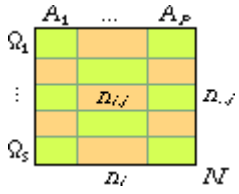
Soit X^* la restriction à Ω^*.d'une variable statistique $X = \{(x_i, A_i, n_i)\}$, $i \in [\,1, p\,]$, sur Ω.

On pose : $A_i^* = A_i \cap \Omega^*$, $n_i^* = Card\,(A_i^*) = Card\,(A_i \cap \Omega^*)$, $n^* = Card\,(\Omega^*)$.

$X^* = \{(x_i, A_i^*, n_i^*)\}$, $i \in [\,1, p\,]$.

X^* est une variable statistique sur Ω^*.

Sa moyenne est $\overline{X^*} = \frac{1}{n^*} \sum_{i=1}^{i=p} n_i^* x_i = \frac{1}{n^*} \sum_{\omega \in \Omega^*} X^*(\omega) = \frac{1}{n^*} \sum_{\omega \in \Omega^*} X(\omega)$.



Considérons maintenant une partition de Ω en s sous-populations $\Omega_1, \dots, \Omega_s$.

Soit $X = \{(x_i, A_i, n_i)\}$, $i \in [\,1, p\,]$, une variable statistique sur Ω.

Chaque sous-population Ω_j, $j \in [\,1, s\,]$, définit une variable statistique X_j sur Ω_j, qui est la restriction de X à Ω_j.

On pose $n_{ij} = Card(A_i \cap \Omega_j)$, $n_{.j} = Card(\Omega_j) = \sum_{i=1}^{i=p} n_{ij}$, $j \in [\,1, s\,]$.

On a $n_i = Card(A_i) = \sum_{j=1}^{j=s} n_{ij}$, $i \in [\,1, p\,]$.

La moyenne de X_j est $\overline{X_j} = \frac{1}{n_{.j}} \sum_{i=1}^{i=p} n_{ij} x_i$.

On peut alors définir une nouvelle variable statistique sur Ω, qu'on appelle la **moyenne conditionnée** de X pour la partition $\{\Omega_1, \dots, \Omega_s\}$:

$$M_C(X) = \{(\overline{X_j}, \Omega_j, n_{.j})\},\ j \in [\,1, s\,].$$

La moyenne de cette variable statistique est :

$$\overline{M_C(X)} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{j=s} n_{.j} \overline{X_j} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{j=s} \sum_{i=1}^{i=p} n_{ij} x_i = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{i=p} \left(\sum_{j=1}^{j=s} n_{ij} \right) x_i = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{i=p} n_i x_i = \overline{X}.$$

$$\boxed{\overline{M_C(X)} = \overline{X}.}$$

Cette relation constitue le **théorème de la moyenne conditionnée**.

Exemple.

Soit Ω une population de commerçants, partitionnée en trois catégories disjointes :
- A : les supermarchés,
- B : les moyennes surfaces,
- C : les petits détaillants.

Soit X le prix du litre d'huile.

Soit $\overline{X_A}$ le prix moyen du litre d'huile dans les supermarchés : c'est le quotient entre le prix de vente total de l'huile dans les supermarchés, et le nombre total de litres vendus dans les supermarchés.

De même, soit $\overline{X_B}$, le prix moyen du litre d'huile dans les moyennes surfaces.

De même, soit $\overline{X_C}$, le prix moyen du litre d'huile chez les petits détaillants.

La relation précédente (théorème de la moyenne conditionnée) permet de calculer le prix moyen du litre d'huile en prenant le barycentre des prix moyens $\overline{X_A}$, $\overline{X_B}$, $\overline{X_C}$, affectés des nombres de litres d'huile vendus par chaque catégorie de commerçants (moyenne pondérée par les fréquences).

c) Moyenne d'une variable continue.

La variable est connue par ses classes et la fréquence associée à chaque classe.

$$[\, e_i, e_{i+1} \,[, f_i = \frac{n_i}{N}.$$

Supposons que nous connaissions le point moyen $\overline{X_i}$ de chaque classe $[\, e_i, e_{i+1} \,[$.
Alors, d'après le théorème de la moyenne conditionnée, la moyenne de X est donnée par :

$$\overline{X} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{i=p} n_i \overline{X_i} = \sum_{i=1}^{i=p} f_i \overline{X_i}.$$

Nous allons faire le calcul dans deux hypothèses.

Première hypothèse.

Dans chaque classe, toutes les observations sont **concentrées au centre de la classe** : $x_i = \frac{1}{2} (e_i + e_{i+1})$.

$$\overline{X_i} = \frac{1}{n_i} n_i x_i = x_i$$
$$\overline{X} = \sum_{i=1}^{i=p} f_i \overline{X_i} = \sum_{i=1}^{i=p} f_i x_i$$

Deuxième hypothèse.

Dans chaque classe, la répartition des observations est **uniforme**.
Alors, par raison de symétrie, la moyenne $\overline{X_i}$ d'une classe est la valeur centrale $x_i = \frac{1}{2} (e_i + e_{i+1})$ de la classe.
On a encore :

$$\overline{X} = \sum_{i=1}^{i=p} f_i \overline{X_i} = \sum_{i=1}^{i=p} f_i x_i$$

Conclusion : dans le cas d'une variable statistique continue, pour effectuer le calcul du point moyen, l'hypothèse de répartition uniforme dans chaque classe est équivalente à l'hypothèse d'une concentration de toutes les modalités d'une classe au centre de la classe.

d) Généralisation de la notion de moyenne.

Soit $X = \{(x_i, n_i)\}$, $i \in [\, 1, p \,]$, une variable statistique quantitative discrète à valeurs dans R_+^*, $N = \sum_{i=1}^{i=p} n_i$.

Soit $\varphi : R_+^* \to R$ une application monotone (injection croissante ou décroissante) continue.
Alors $\varphi(X) = \{(\varphi(x_i), n_i)\}$, $i \in [\, 1, p \,]$, est une variable statistique quantitative discrète à valeurs dans R.

On peut calculer sa moyenne $\overline{\varphi(X)} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{i=p} n_i \varphi(x_i)$.

$\overline{\varphi(X)}$ est un nombre réel, compris entre la valeur minimum et la valeur maximum de $\varphi(x_i)$, $i \in [\, 1, p \,]$.
Comme φ est une injection continue, il existe un unique $\overline{X_\varphi} \in R_+^*$ tel que $\varphi(\overline{X_\varphi}) = \overline{\varphi(X)}$

$\overline{X_\varphi}$ est appelé la φ-**moyenne** de *X*.

Exemples de φ-moyennes.

1. Si φ est l'application identique définie par φ (*x*) = *x*, la φ-moyenne de *X* est la **moyenne arithmétique** de *X*, c'est la moyenne au sens ordinaire.
2. Si φ est définie par φ (*x*) = x^2, nous obtenons la **moyenne quadratique** $\overline{X}_q$ de *X*, définie par $\overline{X}_q{}^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{i=p} n_i x_i^2$.
3. Si φ est définie par φ (*x*) = $\frac{1}{x}$, nous obtenons la **moyenne harmonique** $\overline{X}_h$ de *X*, définie par $\frac{1}{\overline{X}_h} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{i=p} n_i \frac{1}{x_i}$.
4. Si φ est définie par φ (*x*) = *ln* (*x*), nous obtenons la **moyenne géométrique** $\overline{X}_g$ de *X*, définie par

$ln\,(\overline{X}_g) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{i=p} n_i\, ln\,(x_i)$, soit $\overline{X}_g = \left(\prod_{i=1}^{i=p} x_i^{n_i}\right)^{\frac{1}{N}}$

Propriétés des φ-moyennes.

Pour une variable statistique *X*, les différentes moyennes, harmonique, géométrique, arithmétique, quadratique, sont liées par la relation :

$$\boxed{\overline{X}_h \le \overline{X}_g \le \overline{X} \le \overline{X}_q.}$$

Il y a égalité si, et seulement si, toutes les valeurs de *X* sont égales.
La moyenne géométrique est bien adaptée à l'étude des phénomènes de croissance.
La moyenne harmonique est utilisée pour les calculs d'indices économiques.

II. 2. 2. Paramètres de dispersion

Les paramètres de dispersion (étendue, intervalle interquartile,) sont calculés pour les variables statistiques quantitatives.
Ils ne donnent pas une information complète sur une variable statistique X : en effet, deux variables qui ont la même moyenne peuvent se présenter avec des dispersions très différentes.
L'histogramme, ou le diagramme, des fréquences donnent déjà une idée qualitative de la dispersion.

II. 2. 2. 1. Etendue

Soit X une variable statistique réelle discrète.
L'étendue ω de X est la différence entre la plus grande valeur de X et la plus petite valeur de X.

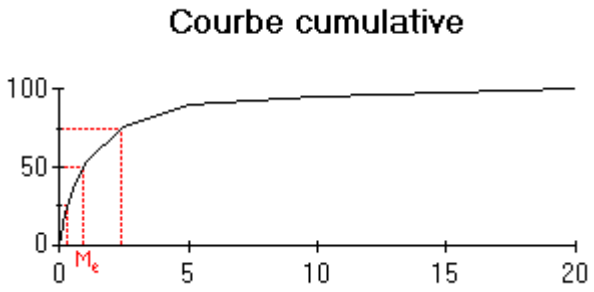
$$\omega = x_{max} - x_{min}$$

Ce paramètre est souvent utilisé dans les contrôles de fabrication, pour lesquels on donne, a priori, des marges de construction.
Son intérêt est limité par le fait qu'il dépend uniquement des valeurs extrêmes, qui peuvent être des valeurs aberrantes.

II.2.2.2. Quartiles et déciles.

a) Variable statistique continue.

Pour une variable statistique quantitative réelle continue X, on appelle **quartiles** les nombres réels Q_1, Q_2, Q_3, pour lesquels les fréquences cumulées de X sont respectivement 0,25, 0,50, 0,75.
Ce sont les valeurs pour lesquelles l'ordonnée de la **courbe cumulative des fréquences** est respectivement égale à 0,25, 0,50, 0,75.
Les quartiles partagent l'étendue en quatre intervalles qui ont le même effectif.

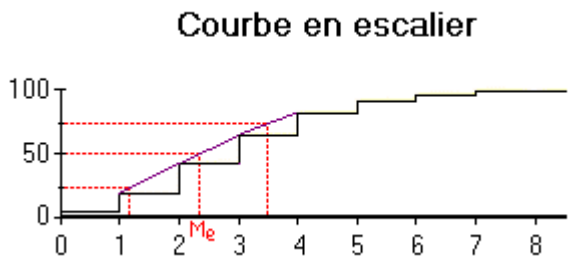


Le deuxième quartile, Q_2, est égal à la médiane.

L'**intervalle interquartile** est la différence entre les valeurs du troisième et du premier quartiles : $Q_3 - Q_1$.
L'intervalle $[Q_1, Q_3]$ contient 50 % des valeurs de X.

b) Variable statistique discrète.

Pour une variable statistique réelle discrète X, la courbe des fréquences cumulées est une **courbe en escalier**.
S'il existe une valeur de x pour laquelle la fréquence cumulée est 0,25 (resp. 0,50, 0,75), le quartile correspondant est cette valeur de X.
Sinon, les quartiles seront déterminés par **interpolation linéaire** entre deux valeurs.



c) Déciles et percentiles.

Les 9 déciles sont les nombres réels qui partagent l'étendue en dix intervalles de même effectif.
Utilisation : en matière de salaires, le rapport $\frac{D_9}{D_1}$ est un paramètre de dispersion fréquemment utilisé.

Les 99 percentiles sont les nombres réels qui partagent l'étendue en cent intervalles de même effectif.

II.2.2.3. Ecart absolu moyen.

a) Définition.

Soit $X = \{(x_i, n_i)\}_{1 \le i \le p}$ une variable statistique réelle.
On appelle **écart absolu moyen** de X la moyenne arithmétique des valeurs absolues des écarts de X à sa moyenne :

$$e = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{i=p} n_i \mid x_i - \overline{X} \mid$$

On pourrait aussi définir l'écart absolu moyen de X par rapport à sa médiane, ou par rapport à un nombre réel a quelconque.

$$e = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{i=p} n_i \mid x_i - a \mid$$

On peut démontrer que l'écart absolu moyen par rapport à un nombre réel a est minimum lorsque a est égal à la moyenne $\overline{X}$ de X.

b) Calcul pratique.

Lorsque les observations sont groupées par classe, on adopte généralement pour valeur de variable statistique le centre de chaque classe.
L'écart absolu moyen présente un inconvénient majeur : il ne se prête pas facilement aux calculs algébriques, à cause de la valeur absolue.

II.2.2.4. Variance et écart-type.

a) Définition.

Soit $X = \{(x_i, n_i)\}_{1 \le i \le p}$ une variable statistique réelle.
On appelle **variance** de X, la moyenne arithmétique des carrés des écarts de X à sa moyenne :

$$s^2(X) = \frac{1}{N} \sum_{\omega \in \Omega} (X(\omega) - \overline{X})^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{i=p} n_i (x_i - \overline{X})^2$$

On appelle **écart-type** de X la racine carrée $s(X)$ de la variance de X.
$S = N s^2(X)$ est la somme des carrés des écarts : $S = \sum_{i=1}^{i=p} n_i (x_i - \overline{X})^2$

b) Formule de la variance.

En développant le carré $(x_i - \overline{X})^2$, la formule de définition de la variance peut être écrite :

$$s^2(X) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{i=p} n_i x_i^2 - \overline{X}^2 = \overline{X^2} - \overline{X}^2$$

$$\boxed{s^2(X) = \overline{X^2} - \overline{X}^2}$$

Cette formule (la variance est égale à la moyenne du carré moins le carré de la moyenne) est appelée **formule de la variance**, ou formule de König.
Elle peut s'écrire sous la forme :

$$s^2(X) = \frac{1}{N} \left(\sum_{i=1}^{i=p} n_i x_i^2 - \frac{1}{N} \left(\sum_{i=1}^{i=p} n_i x_i \right)^2 \right)$$

c) Généralisation à R^q.

Dans R, la distance euclidienne $d(X(\omega), \overline{X})$ entre $X(\omega)$ et $\overline{X}$, est l'écart absolu $| X(\omega) - \overline{X} |$, de sorte que la variance peut être écrite :

$$s^2(X) = \frac{1}{N} \sum_{\omega \in \Omega} (d(X(\omega), \overline{X}))^2.$$

Dans R^q, on peut définir la **distance euclidienne** $d(X(\omega), \overline{X})$ entre $X(\omega) = \begin{pmatrix} X_1(\omega) \\ \vdots \\ X_q(\omega) \end{pmatrix}$ et $\overline{X} = \begin{pmatrix} \overline{X_1} \\ \vdots \\ \overline{X_q} \end{pmatrix}$, par la formule

$$(d(X(\omega), \overline{X}))^2 = \sum_{j=1}^{j=q} (X_j(\omega) - \overline{X_j})^2 = \sum_{j=1}^{j=q} (d(X_j(\omega), \overline{X_j}))^2$$

La variance d'une variable statistique à valeurs dans R^q, est alors définie par :

$$\begin{aligned} s^2(X) &= \frac{1}{N} \sum_{\omega \in \Omega} (d(X(\omega), \overline{X}))^2 \\ &= \frac{1}{N} \sum_{\omega \in \Omega} \sum_{j=1}^{j=q} (X_j(\omega) - \overline{X_j})^2 \\ &= \sum_{j=1}^{j=q} \left(\frac{1}{N} \sum_{\omega \in \Omega} (d(X_j(\omega), \overline{X_j}))^2 \right) \\ &= \sum_{j=1}^{j=q} s^2(X_j) \\ &= \sum_{j=1}^{j=q} (\overline{X_j^2} - (\overline{X_j})^2) \end{aligned}$$

Si X présente p modalités $x_i = \begin{pmatrix} x_{i1} \\ \vdots \\ x_{iq} \end{pmatrix}$, $i \in [\, 1, p \,]$, il vient, en notant n_i l'effectif de la modalité x_i $\left(N = Card(\Omega) = \sum_{i=1}^{i=p} n_i \right)$:

$$s^2(X) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{i=p} n_i \left(\sum_{j=1}^{j=q} (x_{ij} - \overline{X_{\cdot}})^2 \right)$$
$$= \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{j=q} \left(\sum_{i=1}^{i=p} n_i (x_{ij} - \overline{X_{\cdot}})^2 \right)$$
$$= \sum_{j=1}^{j=q} \left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{i=p} n_i (x_{ij} - \overline{X_{\cdot}})^2 \right)$$

$$\boxed{s^2(X) = \sum_{j=1}^{j=q} s^2(X_j) = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{j=q}\sum_{i=1}^{i=p} n_i (x_{ij} - \overline{X_{\cdot}})^2}$$

d) Propriétés de la variance.

1. La variance est toujours un nombre réel positif.
   En effet, c'est une somme de carrés.

2. La variance est nulle si, et seulement si, X possède une seule valeur.

   En effet, une somme de carrés $s^2(X) = \frac{1}{N}\sum_{\omega\in\Omega} (d(X(\omega), \overline{X}))^2$ est nulle si, et seulement si, chaque carré est nul.

3. $s^2(a + bX) = b^2 s^2(X)$, quels que soient les nombres réels a et b.
   En effet, si X est à valeurs réelles, on a :

$$\overline{(a+bX)^2} = \overline{a^2 + b^2 X^2 + 2abX} = a^2 + b^2\overline{X^2} + 2ab\overline{X}$$
$$\overline{a+bX} = a + b\overline{X}$$
$$(\overline{a+bX})^2 = a^2 + b^2(\overline{X})^2 + 2ab\overline{X}$$
$$s^2(a+bX) = \overline{(a+bX)^2} - (\overline{a+bX})^2 = b^2(\overline{X^2} - (\overline{X})^2) = b^2 s^2(X).$$

$$\boxed{s^2(a + bX) = b^2 s^2(X).}$$

Puis, si X est à valeurs dans R^q, on a :

$$s^2(a + bX) = \sum_{j=1}^{j=q} s^2(a + bX_j) = \sum_{j=1}^{j=q} b^2 s^2(X_j) = b^2 \sum_{j=1}^{j=q} s^2(X_j) = b^2 s^2(X).$$

e) Inertie par rapport à un point *a*.

On appelle **inertie** d'une variable statistique X par rapport à un point a, la moyenne du carré de la distance de X au point a :

$$\boxed{I_a(X) = \frac{1}{N}\sum_{\omega\in\Omega} (d(X(\omega), a))^2}$$

L'inertie de X par rapport au point moyen $\overline{X}$ est la variance de X.

Propriété.

L'inertie $I_a(X)$ est minimale lorsque a est égal à $\overline{X}$.

La valeur minimum de l'inertie est donc la variance de X.

En effet, soit $d = a - \overline{X}$.

Dans R^q, cette relation s'écrit : $\begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - \overline{X_1} \\ \vdots \\ a_q - \overline{X_q} \end{pmatrix}$.

$X(\omega)$ est une modalité $x_i = \begin{pmatrix} x_{i1} \\ \vdots \\ x_{iq} \end{pmatrix}$ de X, d'effectif n_i, $i \in [\,1, p\,]$.

$$I_a(X) = \frac{1}{N} \sum_{\omega \in \Omega} (d(X(\omega), a))^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{i=p} \sum_{j=1}^{j=q} n_i (x_{ij} - a_j)^2$$

Ecrivons $x_{ij} - a_j$ sous la forme :

$$x_{ij} - a_j = x_{ij} - \overline{X_j} + \overline{X_j} - a_j$$

Il vient alors :

$$(x_{ij} - a_j)^2 = (x_{ij} - \overline{X_j})^2 + (\overline{X_j} - a_j)^2 + 2(x_{ij} - \overline{X_j})(\overline{X_j} - a_j)$$

$$I_a(X) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{i=p} \sum_{j=1}^{j=q} n_i (x_{ij} - \overline{X_j})^2 + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{i=p} n_i \sum_{j=1}^{j=q} (\overline{X_j} - a_j)^2 + 2 \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{i=p} n_i \sum_{j=1}^{j=q} (x_{ij} - \overline{X_j})(\overline{X_j} - a_j)$$

$$= s^2(X) + \sum_{j=1}^{j=q} (\overline{X_j} - a_j)^2 + 2 \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{j=q} (\overline{X_j} - a_j) \left(\sum_{i=1}^{i=p} n_i (x_{ij} - \overline{X_j}) \right)$$

Par définition de $\overline{X_j}$, on a $\sum_{i=1}^{i=p} n_i (x_{ij} - \overline{X_j}) = 0$.

Posons :

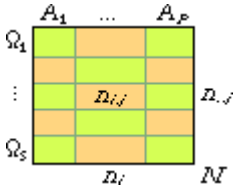
$$d^2 = \sum_{j=1}^{j=q} (\overline{X_j} - a_j)^2$$

Il reste :

$$\boxed{I_a(X) = s^2(X) + d^2.}$$

$s^2(X)$ est un nombre réel positif qui ne dépend pas de a.
d^2 est un nombre réel positif, sa valeur minimum est 0.
$I_a(X)$ est minimum lorsque d^2 est nul, c'est-à-dire lorsque $a_j = \overline{X_j}$ pour tout $j \in [\,1, q\,]$, soit $a = \overline{X}$.

f) Variance conditionnée.



Considérons maintenant une partition de Ω en s sous-populations $\Omega_1, \ldots, \Omega_s$.
Soit $X = \{(x_i, A_i, n_i)\}$, $i \in [\,1, p\,]$, une variable statistique quantitative discrète sur Ω, à valeurs dans R.
Chaque sous-population Ω_j, $j \in [\,1, s\,]$, définit une variable statistique X_j sur Ω_j, qui est la restriction de X à Ω_j.

On pose $n_{ij} = Card\,(A_i \cap \Omega_j)$, $n_{.j} = Card\,(\Omega_j) = \sum_{i=1}^{i=p} n_{ij}$, $j \in [\,1, s\,]$.

On a $n_i = Card\,(A_i) = \sum_{j=1}^{j=s} n_{ij}$, pour tout $i \in [\,1, p\,]$.

La moyenne de X_j est $\overline{X_j} = \frac{1}{n_{.j}} \sum_{i=1}^{i=p} n_{ij}\, x_i$.

La variance de X_j est $s^2(X_j) = \frac{1}{n_{.j}} \left(\sum_{i=1}^{i=p} n_{ij}\, x_i^{\,2} - \frac{1}{n_{.j}} \left(\sum_{i=1}^{i=p} n_{ij}\, x_i \right)^2 \right)$

La **moyenne conditionnée** de X pour la partition $\{\Omega_1, \ldots, \Omega_s\}$ a été définie par la variable statistique :

$$M_C(X) = \{(\overline{X_j}, \Omega_j, n_{.j})\},\ j \in [\,1, s\,], \text{ avec } N = \sum_{j=1}^{j=s} n_{.j}$$

La moyenne de cette variable statistique est : $\overline{\mathcal{M}_C(X)} = \overline{X}$.

Sa variance est :

$$\begin{aligned} s^2(M_C(X)) &= \frac{1}{N} \left(\sum_{j=1}^{j=s} n_{.j}\, \overline{X_j}^{\,2} - \frac{1}{N} \left(\sum_{j=1}^{j=s} n_{.j}\, \overline{X_j} \right)^2 \right) \\ &= \frac{1}{N} \left(\sum_{j=1}^{j=s} \frac{1}{n_{.j}} \left(\sum_{i=1}^{i=p} n_{ij}\, x_i \right)^2 - \frac{1}{N} \left(\sum_{j=1}^{j=s} \sum_{i=1}^{i=p} n_{ij}\, x_i \right)^2 \right) \\ &= \frac{1}{N} \left(\sum_{j=1}^{j=s} \frac{1}{n_{.j}} \left(\sum_{i=1}^{i=p} n_{ij}\, x_i \right)^2 - \frac{1}{N} \left(\sum_{i=1}^{i=p} n_i\, x_i \right)^2 \right) \end{aligned}$$

On peut définir une nouvelle variable statistique sur Ω, qu'on appelle la **variance conditionnée** de X pour la partition $\{\Omega_1, \ldots, \Omega_s\}$:

$$s_C^{\,2}(X) = \{(s^2(X_j), \Omega_j, n_{.j})\},\ j \in [\,1, s\,], \text{ avec } N = \sum_{j=1}^{j=s} n_{.j}$$

La moyenne de cette variable statistique est : $\overline{s_C^{\,2}(X)} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{j=s} n_{.j}\, s^2(X_j)$.

Sa variance est $s^2(s_C^{\,2}(X)) = \frac{1}{N} \left(\sum_{j=1}^{j=s} n_{.j}\, (s^2(X_j))^2 - \frac{1}{N} \left(\sum_{j=1}^{j=s} n_{.j}\, s^2(X_j) \right)^2 \right)$

On a alors :

$$\begin{aligned} N\, \overline{s_C^{\,2}(X)} &= \sum_{j=1}^{j=s} n_{.j}\, s^2(X_j) = \sum_{j=1}^{j=s} \left(\sum_{i=1}^{i=p} n_{ij}\, x_i^{\,2} - \frac{1}{n_{.j}} \left(\sum_{i=1}^{i=p} n_{ij}\, x_i \right)^2 \right) \\ &= \sum_{i=1}^{i=p} \left(\sum_{j=1}^{j=s} n_{ij} \right) x_i^{\,2} - \sum_{j=1}^{j=s} \frac{1}{n_{.j}} \left(\sum_{i=1}^{i=p} n_{ij}\, x_i \right)^2 \\ &= \sum_{i=1}^{i=p} n_i\, x_i^{\,2} - \sum_{j=1}^{j=s} \frac{1}{n_{.j}} \left(\sum_{i=1}^{i=p} n_{ij}\, x_i \right)^2 \end{aligned}$$

$$\overline{s_C^{\,2}(X)} = \frac{1}{N} \left(\sum_{i=1}^{i=p} n_i\, x_i^{\,2} \right) - \frac{1}{N} \left(\sum_{j=1}^{j=s} \frac{1}{n_{.j}} \left(\sum_{i=1}^{i=p} n_{ij}\, x_i \right)^2 \right)$$

$$\overline{s_C^2(X)} + s^2(\mathrm{M}_C(X)) = \frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{i=p} n_i x_i^2 - \frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{i=p} n_i x_i \right)^2 \right) = s^2(X)$$

La relation :

$$\boxed{s^2(X) = \overline{s_C^2(X)} + s^2(\mathrm{M}_C(X))}$$

constitue le **théorème de la variance conditionnée** : la variance de *X* est la somme de la moyenne de la variance conditionnée de *X* et de la variance de la moyenne conditionnée de *X*.

– Le terme $\overline{s_C^2(X)}$ s'appelle la **variance intraclasse**. Il traduit la variation de *X* autour de sa moyenne, dans la partition $\{\Omega_1, \ldots, \Omega_s\}$.

– Le terme $s^2(\mathrm{M}_C(X))$ s'appelle la **variance interclasse**. Il traduit la variation de la moyenne de *X* dans la partition $\{\Omega_1, \ldots, \Omega_s\}$.

Note : Ce résultat peut être étendu à une variable statistique discrète à valeurs dans R^q.

g) Variance d'une variable statistique réelle continue.

Les classes $[\, e_i, e_{i+1} \,[$, de fréquences $f_i = \frac{n_i}{N}$, $i \in [\, 1, p \,]$, forment une partition de $X(\Omega)$.
La variance de *X* s'obtient :

— en calculant la variance $s_i^2(X)$ de *X* dans chaque classe,

— en faisant la moyenne de ces variances (moyenne de la variance conditionnée) : $\sum_{i=1}^{i=p} f_i s_i^2(X)$

— en calculant la variance de la moyenne de *X* dans chaque classe (variance de la moyenne conditionnée) : $\sum_{i=1}^{i=p} f_i (\overline{X_i} - \overline{X})^2$

— en faisant la somme de la moyenne de la variance conditionnée et de la variance de la moyenne conditionnée :

$$s^2(X) = \sum_{i=1}^{i=p} f_i s_i^2(X) + \sum_{i=1}^{i=p} f_i (\overline{X_i} - \overline{X})^2$$

1°/ Dans l'hypothèse où toutes les observations sont concentrées au milieu de la classe $x_i = \frac{e_i + e_{i+1}}{2}$, la variance $s_i^2(X)$ de *X* dans chaque classe, est nulle, $s^2(X) = \sum_{i=1}^{i=p} f_i (x_i - \overline{X})^2$. On retrouve la formule du cas discret.

$$\boxed{s^2(X) = s^2(U)}$$

où $x_i = \frac{e_i + e_{i+1}}{2}$ est le centre de la classe d'indice *i* et *U* est la variable statistique $\{(x_i, n_i)\}$, $i \in \{1, \ldots, p\}$.

2°/ Dans l'hypothèse où la répartition des valeurs de *X* dans chaque classe est uniforme, au terme $\sum_{i=1}^{i=p}$

$f_i\,(\overline{X_i} - \overline{X})^2 = \sum_{i=1}^{i=p} f_i\,(x_i - \overline{X})^2$, s'ajoute un terme correctif $\sum_{i=1}^{i=p} f_i\,s_i^{\,2}\,(X)$ qui tient compte de la variation de X dans chaque classe.
Pour calculer ce terme complémentaire, il faut calculer la variance d'une variable répartie uniformément sur un intervalle.

Lemme.

La variance d'une variable statistique répartie uniformément sur un intervalle de longeur a est $\frac{a^2}{12}$.

Démonstration du lemme.

On peut utiliser la formule de la variance : la variance est égale à la moyenne du carré moins le carré de la moyenne.
La moyenne du carré est

$$\overline{X^2} = \frac{1}{a}\int_{e_i}^{e_i+a} x^2\,dx = \frac{1}{a}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{x=e_i}^{x=e_i+a} = \frac{1}{3a}[\,(e_i+a)^3 - e_i^{\,3}\,] = \frac{1}{3a}(3\,e_i^{\,2}\,a + 3\,e_i\,a^2 + a^3)$$

$$= \frac{a^2}{3} + e_i^{\,2} + e_i\,a$$

Le carré de la moyenne est

$$\overline{X}^2 = \left[\frac{1}{2}[e_i + (e_i + a)]\right]^2 = \left[e_i + \frac{a}{2}\right]^2 = \frac{a^2}{4} + e_i^{\,2} + e_i\,a.$$

La variance de X dans l'intervalle $[e_i, e_i + a]$ est donc :

$$s_i^{\,2}\,(X) = \left[\frac{a^2}{3} + e_i^{\,2} + e_i\,a\right] - \left[\frac{a^2}{4} + e_i^{\,2} + e_i\,a\right] = \frac{a^2}{3} - \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{12}$$

Le terme correctif $\sum_{i=1}^{i=p} f_i\,s_i^{\,2}\,(X)$ est donc donné par :

$$\sum_{i=1}^{i=p} f_i\,s_i^{\,2}\,(X) = \frac{1}{12}\sum_{i=1}^{i=p} f_i\,(e_{i+1} - e_i)^2.$$

Dans le cas où toutes les classes ont la même amplitude $e_{i+1} - e_i = a$, le terme correctif est :

$$\sum_{i=1}^{i=p} f_i\,s_i^{\,2}\,(X) = \frac{a^2}{12}\sum_{i=1}^{i=p} f_i = \frac{a^2}{12}$$

et la variance de X est donnée par :

$$s^2\,(X) = \sum_{i=1}^{i=p} f_i\,(x_i - \overline{X})^2 + \frac{a^2}{12} = s^2\,(U) + \frac{a^2}{12}$$

$$\boxed{s^2\,(X) = s^2\,(U) + \frac{a^2}{12}}$$

où $x_i = \frac{e_i + e_{i+1}}{2}$ est le centre de la classe d'indice i et U est la variable statistique $\{(x_i, n_i)\}$, $i \in \{1, \ldots, p\}$.

II.2.2.5. Coefficient de variation.

Pour une variable statistique réelle X, on appelle **coefficient de variation** le rapport

$$c = \frac{s(X)}{\overline{X}}$$

Pour une variable statistique X à valeurs dans $\mathbb{R}^q$, le coefficient de variation est défini par :

$$c = \frac{s(X)}{d(0, \overline{X})}.$$

Le coefficient de variation est un nombre sans dimension qui permet de comparer deux variables statistiques de natures différentes.
On remarquera que, au signe près, c'est l'écart-type de la variable statistique $\frac{X}{\overline{X}}$ ou $\frac{X}{d(0, \overline{X})}$.

II.2.2.6. Moments.

Soit X une variable statistique quantitative réelle.
On appelle **moment d'ordre *r*** de X, la quantité :

$$m_r = \frac{1}{N} \sum_{\omega \in \Omega} [X(\omega)]^r = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{i=p} n_i x_i^r$$

Pour $r = 0$: $m_0 = 1$.
Pour $r = 1$: $m_1 = \overline{X}$. Le moment d'ordre 1 est la moyenne.
Pour $r = 2$: $m_2 = \overline{X^2}$.

On appelle **moment centré d'ordre *r*** de X, la quantité :

$$\mu_r = \frac{1}{N} \sum_{\omega \in \Omega} [X(\omega) - \overline{X}]^r = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{i=p} n_i (x_i - \overline{X})^r$$

Pour $r = 0$: $\mu_0 = 1$.
Pour $r = 1$: $\mu_1 = 0$.
Pour $r = 2$: $\mu_2 = s^2(X) = m_2 - m_1^2$. Le moment centré d'ordre 2 est la variance.

II.2.2.7. Conclusion.

Centrer et réduire une variable statistique quantitative X consiste la remplacer par $\frac{X - \overline{X}}{s(X)}$:

— $X - \overline{X}$ pour la centrer (moyenne 0)
— diviser par $s(X)$ pour la réduire (écart-type 1).

La variable $X' = \frac{X - \overline{X}}{s(X)}$ a pour moyenne 0 (elle est **centrée**) et pour écart-type 1 (elle est **réduite**).

Par exemple, si nous considérons la variable statistique continue

théorique dont la densité de fréquence est

$$h(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \text{ (loi de Gauss),}$$

sa moyenne est 0 et son écart-type est 1 : c'est une variable centrée réduite et la courbe de densité de fréquence associée est appelée la **courbe en cloche**, ou **courbe de Gauss**.
Un problème intéressant sera de comparer la courbe de densité de fréquence d'une variable statistique quantitative à cette courbe en cloche.

II. 2. 3. Paramètres de forme

Nous définissons les paramètres de forme pour une variable statistique quantitative, discrète ou continue, à valeurs réelles.

II. 2. 3. 1. Coefficient d'asymétrie.

a) Définition.

Il existe plusieurs coefficients d'asymétrie. Les principaux sont les suivants.

Le coefficient d'asymétrie de **Pearson** fait intervenir le mode M_o : quand il existe, il est définie par

$$P = \frac{\overline{X} - M_o}{s(X)}.$$

Le coefficient d'asymétrie de **Yule** fait intervenir la médiane et les quartiles, il est défini par

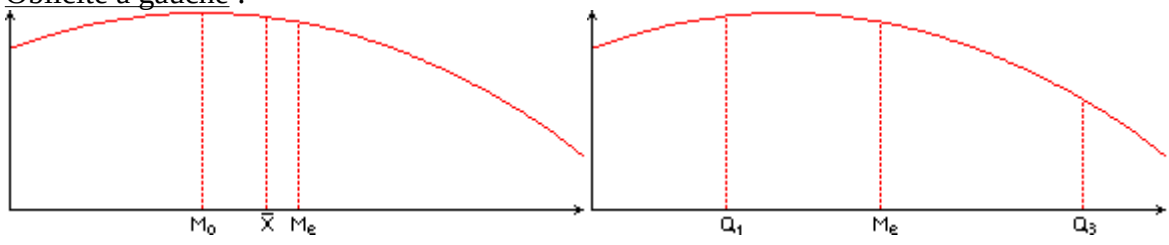
$$Y = \frac{Q_1 + Q_3 - 2M_e}{2(Q_3 - Q_1)}.$$

Le coefficient d'asymétrie de **Fisher** fait intervenir les moments centrés, il est défini par

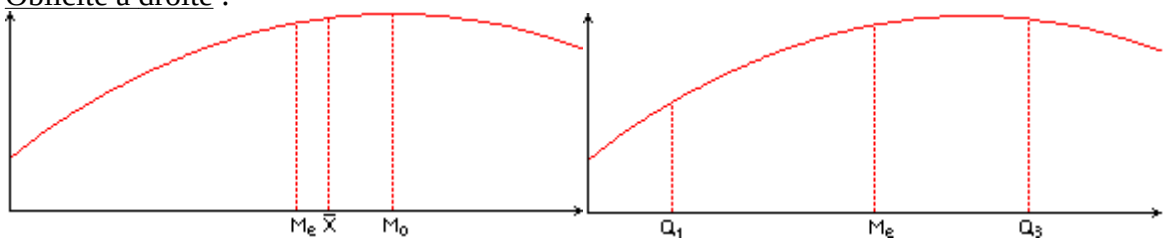
$$F = \frac{\mu_3}{\mu_2^{\frac{3}{2}}} = \frac{\mu_3}{s^3(X)}.$$

Lorsque le coefficient d'asymétrie est positif, la distribution est plus étalée à droite : on dit qu'il y a **oblicité à gauche**.
Lorsque le coefficient d'asymétrie est négatif, la distribution est plus étalée à gauche : on dit qu'il y a **oblicité à droite**.

Oblicité à gauche :



Oblicité à droite :



On utilise souvent un coefficient d'asymétrie de **Pearson basé sur les moments centrés** : $\beta_1 = \frac{\mu_3^2}{\mu_2^3}$.

Ce coefficient d'asymétrie est toujours positif.
Il est nul pour une distribution à densité de fréquence symétrique, telle la loi de Gauss.

b) Exemples.

1°/ Considérons la variable statistique X de distribution :

x_i	-1	4
n_i	4	1

$M_o = -1$; $\mu_3 = \frac{1}{5}(4 \times (-1)^3 + 1 \times 4^3) = 12$; $\mu_2 = \frac{1}{5}(4 \times (-1)^2 + 1 \times 4^2) = 4$.

$$P = \frac{\overline{X} - M_o}{s(X)} = \frac{1}{2} > 0 \text{ : oblicité à gauche.}$$

$$F = \frac{\mu_3}{s^3(X)} = \frac{3}{2} > 0 \text{ : oblicité à gauche.}$$

$$\beta_1 = \frac{{\mu_3}^2}{{\mu_2}^3} = \frac{9}{4}.$$

2°/ Considérons la variable statistique X de distribution :

x_i	-4	1
n_i	1	4

$M_o = 1$; $\mu_3 = \frac{1}{5}(1 \times (-4)^3 + 4 \times 1^3) = -12$; $\mu_2 = \frac{1}{5}(1 \times (-4)^2 + 4 \times 1^2) = 4$.

$$P = \frac{\overline{X} - M_o}{s(X)} = -\frac{1}{2} < 0 \text{ : oblicité à droite.}$$

$$F = \frac{\mu_3}{s^3(X)} = -\frac{3}{2} < 0 \text{ : oblicité à droite.}$$

$$\beta_1 = \frac{{\mu_3}^2}{{\mu_2}^3} = \frac{9}{4}.$$

II. 2. 3. 2. Coefficient d'aplatissement.

Là encore plusieurs définitions sont possibles.

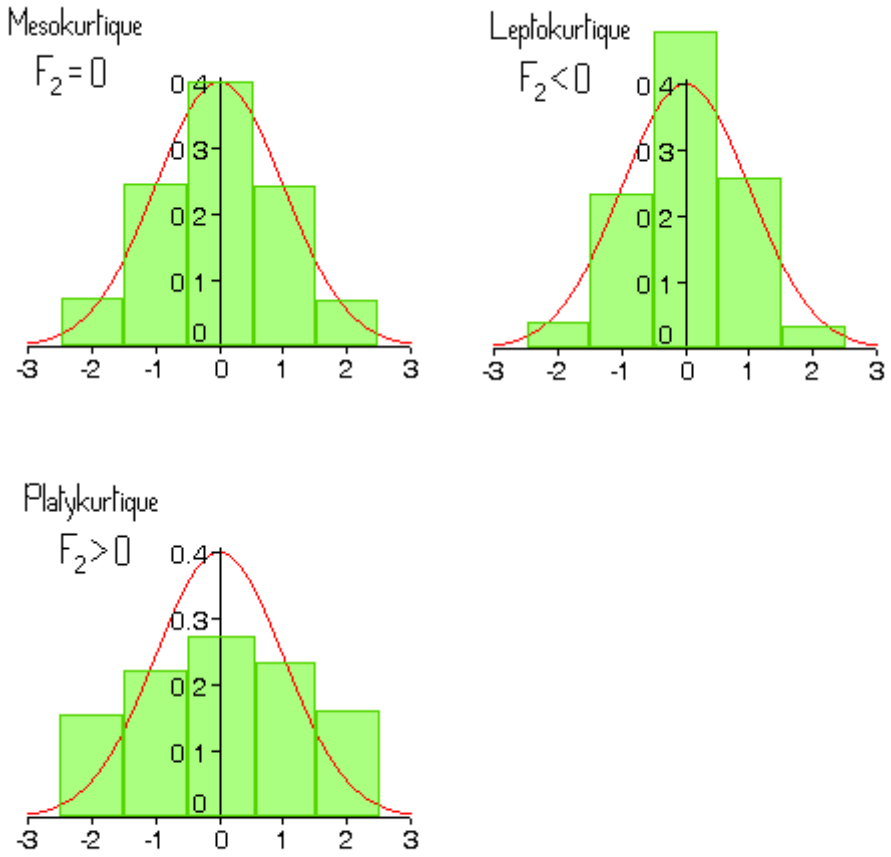
Le coefficient d'aplatissement de Pearson est $\beta_2 = \frac{\mu_4}{{\mu_2}^2}$.

Le coefficient d'aplatissement de Yule est $F_2 = \frac{\mu_4}{{\mu_2}^2} - 3$.

On peut se demander pourquoi – 3 ?
C'est parce que, en Probabilités, on peut démontrer que le coefficient d'aplatissement de Pearson pour une variable aléatoire réelle qui suit une loi de Gauss, est égal à 3.

Il est alors naturel, pour comparer l'applatissement d'une distribution statistique à l'aplatissement d'une variable de Gauss, d'introduire le coefficient $F_2 = \beta_2 - 3$.

Si F_2 est égal à 0, le polygone statistique de la variable réduite a le même aplatissement qu'une courbe en cloche, on dit que la variable est **mésokurtique**.
Si F_2 est > 0, le polygone statistique de la variable réduite est moins aplati qu'une courbe en cloche, on dit que la variable est **leptokurtique**.
Si F_2 est < 0, le polygone statistique de la variable réduite est plus aplati qu'une courbe en cloche, on dit que la variable est **platykurtique**.



II. 2. 3. 3. Indice de concentration de Gini.

a) Courbe de Lorenz.

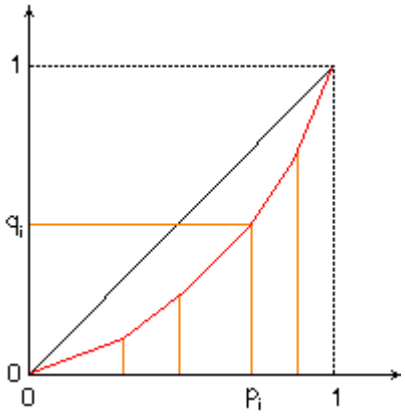
La notion de concentration ne s'applique qu'à des variables statistiques quantitatives à valeurs strictement positives.
Elle se comprendra facilement sur un exemple.

Considérons la distribution des salaires dans la populations des salariés d'une entreprise.
Les salaires sont divisés en n classes : la i^e classe, [e_i, e_{i+1} [a, pour centre, x_i et, pour effectif, n_i.
On note p_i la fréquence cumulée de e_{i+1} : c'est la proportion de salariés dont le salaire est strictement plus petit que e_{i+1}.
On note q_i la proportion de masse salariale représentée par les salariés dont le salaire est strictement

plus petit que e_{i+1}.

$$q_i = \frac{\sum_{k=1}^{k=i} n_k x_k}{\sum_{k=1}^{k=n} n_k x_k} = \frac{\sum_{k=1}^{k=i} n_k x_k}{n \overline{X}} = \frac{1}{\overline{X}} \sum_{k=1}^{k=i} f_k x_k = \sum_{k=1}^{k=i} f_k \frac{x_k}{\overline{X}}$$

On appelle courbe de concentration, ou courbe de Lorenz, la ligne polygonale joignant les points de corrdonnées (p_i, q_i).



En réalité, pour une variable statistique continue, on ne connaît la courbe de Lorenz que pour les extrémités des classes : l'interpolation linéaire suppose que la répartition des valeurs de la variable à l'intérieur de chaque classe est uniforme.

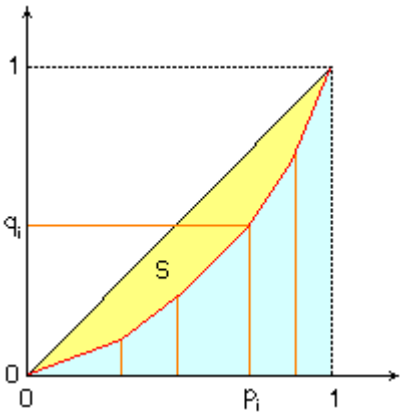
Dans le cas d'une variable discrète, on adopte aussi la représentation par une ligne polygonale.

La courbe de Lorenz est toujours inscrite dans le carré [0, 1] × [0, 1]. Cette courbe se caractérise par les traits suivants.

1°/ Les **points extrêmes** sont les points (0, 0) et (1, 1) puisque 0 % de la population reçoit 0 % de de la masse salariale et 100 % de la population reçoit 100 % de la masse salariale.
2°/ La courbe est nécessairement **convexe vers le bas**.
Cela résulte du fait que la pente du segment qui correspond, par exemple, aux points d'abscisses 0, 50 et 0,60, ne peut être inférieure à celle du segment correspondant aux abscisses 0,40 et 0,50 puisque, par définition, on considère des classes successives disposant chacune d'une part croissante de la masse salariale totale.
3°/ Enfin, et surtout, la courbure de la courbe de Lorenz peut être interprétée comme un **indice d'inégalité**.
En effet, dans une situation hypothétique d'égalité absolue, la courbe prendrait la forme d'un segment de droite (diagonale du carré) tendue entre les points (0, 0) et (1, 1).
De même, dans une situation d'inégalité extrême où la quasi-totalité de la masse salariale serait détenue par une infime minorité de la population, la courbe de Lorenz tendrait à longer l'axe des *p*, avant de remonter brutalement vers le point (1, 1).

b) Indice de Gini.

L'indice de Gini (du nom du statisticien italien Corrado Gini qui a proposé en 1912 cet indice pour les distributions de salaires et de revenus), quant à lui, est obtenu en déterminant la surface *S* comprise entre la courbe de Lorenz et la diagonale et en rapportant cette surface à la surface du demi-carré dans lequel s'inscrit cette courbe.
Comme la surface du carré est 1, l'indice de Gini est le double de l'aire *S* comprise entre la courbe de Lorenz et la diagonale du carré.
Très souvent, la surface *S* peut être déterminée avec suffisamment de précisions de manière graphique.
Numériquement, on peut calculer l'indice de Gini par la formule :



$$g = 2\,S = 1 - \sum_{i=1}^{i=n-1} (p_{i+1} - p_i)(q_{i+1} + q_i) = 1 - \sum_{i=1}^{i=n-1} f_{i+1} (q_{i+1} + q_i)$$

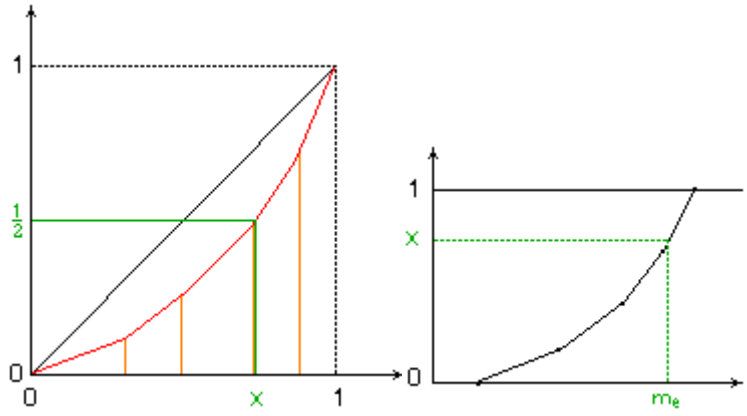
Dire que $g = 0$, c'est dire que la courbe de Lorenz coïncide avec la diagonale du carré (égalité absolue).
Dire que $g = 1$, c'est dire que la courbe de Lorenz longe d'abord l'axe des p, puis la droite $p = 1$ (inégalité maximale).
De façon générale, l'indice de Gini peut être interprété comme ayant une valeur d'autant plus grande que l'inégalité est grande : il constitue donc une bonne mesure de l'inégalité.

Applications.

L'indice de Gini permet de mesurer les inégalités scolaires, les inégalités de statut, les inégalités de salaires, etc.

c) Médiale.

La **médiale** d'une variable statistique X est la valeur de X qui partage la masse globale en deux parties égales.
Sur la courbe de Lorenz, la moitié de la masse globale correspond à l'ordonnée $\frac{1}{2}$.
Le point d'ordonnée $\frac{1}{2}$ a une abscisse x qui correspond à une fréquence cumulée x.
La valeur correspondante de X s'obtient en prenant l'abscisse du point d'ordonnée x sur le diagramme cumulatif des fréquences.



Si la variable statistique X est définie par $\{(x_i, n_i)\}$, $i \in [1, p]$, soit $\overline{X} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{i=p} n_i x_i$, avec $N = \sum_{i=1}^{i=p} n_i$.

Pour une variable continue, x_i représente le centre de la i^{e} classe.

On pose $r_i = \frac{n_i x_i}{N \overline{X}}$. On a : $\sum_{i=1}^{i=p} r_i = 1$.
Dans notre exemple, r_i représente la fraction de la masse salariale globale gagnée par les personnes dont le salaire est x_i.
La médiale de X est la médiane de la variable statistique $\{(x_i, r_i)\}$, $i \in [1, p]$.
La médiale n'est pas le salaire gagné par l'employé qui est "au milieu de la file", mais le salaire gagné par le salarié qui permet d'atteindre la moitié de la masse salariale totale.

La comparaison des valeurs de la médiale et de la médiane constitue une mesure de la concentration.
Lorsque l'écart entre la médiale et la médiane est important par rapport à l'étendue de la distribution de la variable, la concentration est forte.
Si la distribution est égalitaire, la concentration est faible et l'écart entre la médiale et la médiane est faible.

La médiale est toujours **supérieure à la médiane**, puisque 50 % des effectifs cumulés croissants ne permettent jamais d'atteindre 50 % de la masse totale.

Chapitre III - ANALYSE BIVARIEE.

(Variables statistiques à deux dimensions)

III.1. DEFINITIONS.

III.1.1. Variable statistique à deux dimensions.

Considérons une population finie Ω (*Card* (Ω) = *N*) sur laquelle nous étudions deux caractères (qualitatifs ou quantitatifs réels) *A* et *B*.
Désignons par A_i, $i \in [1, p]$, les modalités observées du caractère *A*, par B_j, $j \in [1, q]$, les modalités observées du caractère *B*.
Appelons C_{ij} l'ensemble des $\omega \in \Omega$ présentant, à la fois, la modalité A_i du caractère *A* et la modalité B_j du caractère *B*.
Appelons n_{ij} le cardinal de C_{ij}.
$N = \sum_{i=1}^{i=p} \sum_{j=1}^{j=q} n_{ij}$.

On appelle **variable statistique à deux dimensions** l'ensemble *Z* des triplets $((A_i, B_j), C_{ij}, n_{ij})$, pour $i \in [1, p]$ et $j \in [1, q]$, pour lesquels n_{ij} n'est pas nul.

Les C_{ij} forment une partition de Ω.

Le nombre $n_{i.} = \sum_{j=1}^{j=q} n_{ij}$ des individus $\omega \in \Omega$ présentant la modalité A_i du caractère *A*, permet de définir une variable statistique *X* à une dimension.
Le nombre $n_{.j} = \sum_{i=1}^{i=p} n_{ij}$ des individus $\omega \in \Omega$ présentant la modalité B_j du caractère *B*, permet de définir une variable statistique *Y* à une dimension.
Le couple (*X*, *Y*) est une **variable conjointe** : c'est une variable statistique à deux dimensions si l'on en élimine les modalités conjointes (A_i, B_j) dont l'effectif est nul.

En pratique, on admettra que, pour une variable statistique *Z* à deux dimensions :
— des modalités conjointes (A_i, B_j) peuvent avoir un effectif n_{ij} nul,
— pour tout $j \in [1, q]$, il existe au moins un $i \in [1, p]$ tel que n_{ij} ne soit pas nul,
— pour tout $i \in [1, p]$, il existe au moins un $j \in [1, q]$ tel que n_{ij} ne soit pas nul.
Dans ce cas, une variable statistique à deux dimensions est une variable conjointe, couple de deux variables statistiques à une dimension.

Une telle variable statistique à deux dimensions peut se représenter par un tableau à double entrée appelé **tableau de contingence**.

A \ B	$B1$	$\cdots$	B_j	$\cdots$	B_q	Total
A_1	n_{11}	$\cdots$	n_{1j}	$\cdots$	n_{1q}	$n_{1.}$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\iddots$	$\vdots$	$\vdots$
A_i	n_{i1}	$\cdots$	n_{ij}	$\cdots$	n_{iq}	$n_{i.}$
$\vdots$	$\vdots$	$\iddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
A_p	n_{p1}	$\cdots$	n_{pj}	$\cdots$	n_{pq}	$n_{p.}$
Total	$n_{.1}$	$\cdots$	$n_{.j}$	$\cdots$	$n_{.q}$	N

La fréquence de la modalité conjointe (A_i, B_j) est $f_{ij} = \frac{n_{ij}}{N}$.

La fréquence de la modalité A_i est $f_{i.} = \frac{n_{i.}}{N} = \sum_{j=1}^{j=q} f_{ij}$.

La fréquence de la modalité B_j est $f_{.j} = \frac{n_{.j}}{N} = \sum_{i=1}^{i=p} f_{ij}$.

Ces fréquences sont parfois appelées des "**pondérations**".

Elles vérifient les égalités : $\sum_{i=1}^{i=p} \sum_{j=1}^{j=q} f_{ij} = \sum_{i=1}^{i=p} f_{i.} = \sum_{j=1}^{j=q} f_{.j} = 1$.

III.1.2. Variables marginales. Variables conditionnelles.

III.1.2.1. Variables marginales.

Soit $Z = \{((A_i, B_j), C_{ij}, n_{ij})\}$, $i \in [1, p]$, $j \in [1, q]$, une variable statistique à deux dimensions.

A \ B	$B1$	$\cdots$	B_j	$\cdots$	B_q	Total
A_1	n_{11}	$\cdots$	n_{1j}	$\cdots$	n_{1q}	$n_{1.}$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\iddots$	$\vdots$	$\vdots$
A_i	n_{i1}	$\cdots$	n_{ij}	$\cdots$	n_{iq}	$n_{i.}$
$\vdots$	$\vdots$	$\iddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
A_p	n_{p1}	$\cdots$	n_{pj}	$\cdots$	n_{pq}	$n_{p.}$
Total	$n_{.1}$	$\cdots$	$n_{.j}$	$\cdots$	$n_{.q}$	N

Considérons les variables statistiques
$X = \{(A_i, C_{i.}, n_{i.})\}$, $i \in [1, p]$,

définie par $C_{i.} = \bigcup_{j=1}^{j=q} C_{ij}$ et $n_{i.} = \sum_{j=1}^{j=q} n_{ij}$, et

$Y = \{(B_j, C_{.j}, n_{.j})\}$, $j \in [1, q]$,

définie par $C_{.j} = \bigcup_{i=1}^{i=p} C_{ij}$ et $n_{.j} = \sum_{i=1}^{i=p} n_{ij}$.

Les variables statistiques X et Y ainsi définies sont appelées les **variables marginales** de Z.
Leur distribution est représentée par les marges du tableau de contingence.

III.1.2.2. Variables conditionnelles.

Considérons la j^e colonne du tableau de contingence :

B / A	B_j
A_1	n_{1j}
⋮	⋮
A_i	n_{ij}
⋮	⋮
A_p	n_{pj}
Total	$n_{.j}$

Ce tableau représente une variable statistique dont les modalités sont les A_i, $i \in [1, p]$ pour lesquels les n_{ij} ne sont pas nuls.

A ces modalités, est associée une partition de $C_{.j} = \bigcup_{i=1}^{i=p} C_{ij}$ par les C_{ij} non vides, pour j fixé, avec, pour effectifs, les n_{ij} non nuls.

Cette variable statistique $\{(A_i, C_{ij}, n_{ij})\}$, $i \in [1, p]$, définie par une colonne du tableau de contingence, est appelée la **variable *X* conditionnée par B_j**, ou variable X **conditionnelle** pour B fixé.

Pour cette variable conditionnelle, nous pouvons définir la **fréquence conditionnelle** de la modalité A_i par $f_{i|j} = \frac{n_{ij}}{n_{.j}}$.

On peut définir ainsi q variables conditionnelles, correspondant aux q colonnes du tableau de contingence (autant qu'il existe de modalités du caractère B).

B / A	$B1$	…	B_j	…	B_q	Total
A_i	n_{i1}	…	n_{ij}	…	n_{iq}	$n_{i.}$

De la même façon, nous pouvons définir pour chaque ligne du tableau de contingence une variable Y conditionnée par A_i, avec une fréquence conditionnelle de la modalité B_j donnée par $f_{j|i} = \frac{n_{ij}}{n_{i.}}$.

Remarque.

Si les deux variables X et Y sont quantitatives et jouent des rôles symétriques, il est intéressant d'étudier les variables conditionnelles des deux types.

Exemple : taille et poids d'étudiants.

Si l'une des variables est qualitative et l'autre quantitative, alors seul le conditionnement par la variable qualitative présente un intérêt.

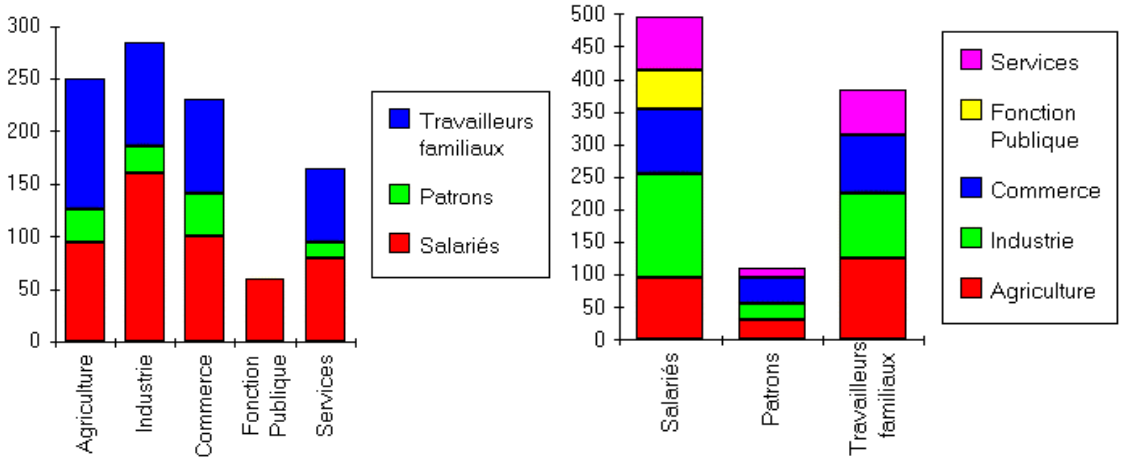
III.2. REPRESENTATION GRAPHIQUE.

III.2.1. Variable qualitative.

Pour une variable qualitative *Z* à deux dimensions, les données du tableau de contingence seront représentées par un **diagramme en tuyaux d'orgue**.

Exemple.

Statut / *Branche*	*Salariés*	*Patrons*	*Travailleurs familiaux*	Total
Agriculture	95	30	125	250
Industrie	160	25	100	285
Commerce	100	40	90	230
Fonction Publique	60	0	0	60
Services	80	15	70	165
Total	495	110	385	990



III.2.2. Variable quantitative.

III.2.2.1. Nuage de points.

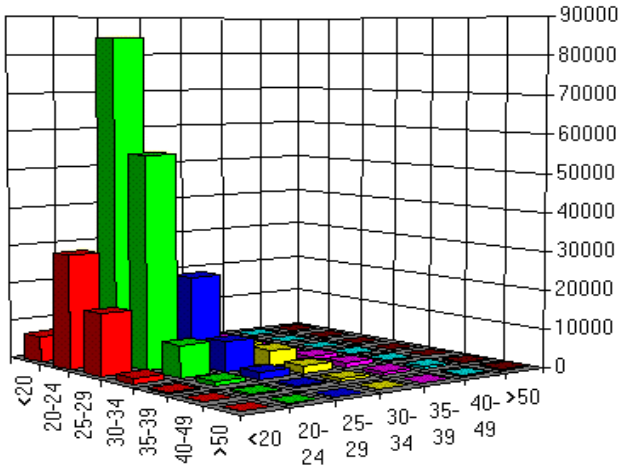
Pour une variable quantitative, discrète ou continue, on peut utiliser une représentation par un **nuage de points** dans un plan.
On peut remplacer chaque point par un **cercle** délimitant une aire proportionnelle à l'effectif ou à la fréquence.

III.2.2.2. Stéréogramme.

Dans certains cas, on peut faire une représentation dans R^3 :
- stéréogramme en bâtons pour une variable discrète.
- stéréogramme en histogramme pour une variable continue.

Exemple : Mariages célébrés en 1962, suivant l'âge des époux (1^e colonne : âge de l'époux, 1^e ligne : âge de l'épouse).

	<20	20-24	25-29	30-34	35-39	40-49	>50
<20	6756	3051	180	15	3	3	0
20-24	29416	84556	13430	1205	168	50	10
25-29	15893	54978	22774	3890	651	113	14
30-34	1789	8289	7809	4111	1021	244	15
35-39	255	1304	1996	2078	1232	362	20
40-49	66	283	447	733	852	697	120
>50	6	46	59	83	145	336	472



III.2.3. Variable mixte.

Dans le cas d'une variable mixte, ayant une composante qualitative et une composante quantitative, on utilise une représentation dans R^2 ou dans R^3 en plaçant de facon arbitraire les modalités de la variable qualitative sur l'un des axes.

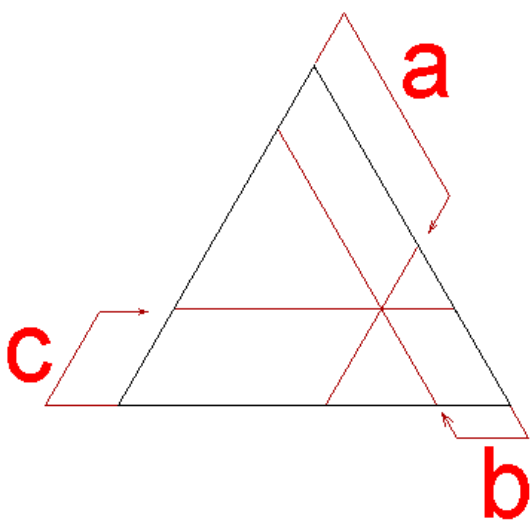
III.2.4. Autres représentations.

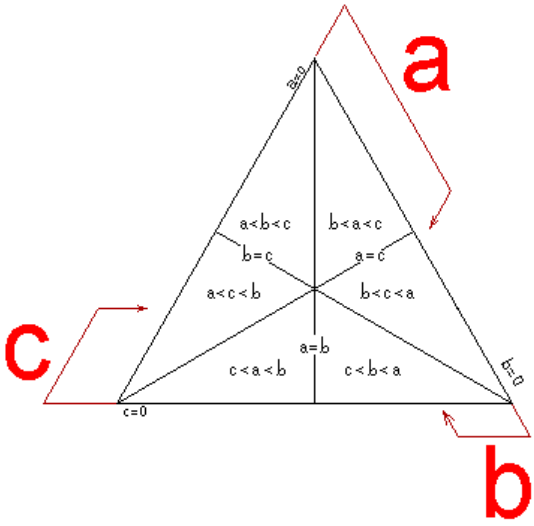
III.2.4.1. Représentation en étoile.

La représentation en étoile permet de représenter un phénomène périodique.
Par exemple, l'évolution d'un indice de prix peut se représenter par douze rayons équidistants représentant les mois avec, sur chaque rayon, les indices de prix pour le mois correspondant, d'année en année (spirale des prix).

III.2.4.2. Représentation triangulaire.

La représentation graphique triangulaire est utilisée pour représenter une quantité constante, fractionnée en trois parties variables (de somme constante).
Le principe de cette représentation repose sur le fait qu'étant donné un point à l'intérieur d'un triangle équilatéral, si l'on trace à partir de ce point des parallèles aux trois côtés, la somme des longueurs des segments déterminés par ces parallèles du point choisi aux côtés du triangle, est constante et égale à la longueur du côté du triangle équilatéral.
En particulier, on utilisera cette représentation triangulaire si la grandeur à représenter est somme de trois grandeurs représentées par des pourcentages.





Dans cette représentation, les **côtés** du triangle correspondent à la valeur 0 de l'une des trois composantes.
Les **sommets** du triangle correspondent à la valeur 0 de deux des trois composantes.
Les **milieux des côtés** correspondent à la valeur 0 de l'une des trois composantes et à la valeur 50 % des deux deux autres composantes.
Le **centre** du triangle correspond à l'égalité des trois grandeurs représentées.
Les **hauteurs** du triangle correspondent à l'égalité de deux des trois facteurs, ce qui permet de diviser l'aire du triangle en zones caractérisées par un critère précis.

Exemple.

A une date donnée, on répartit les différents secteurs d'activité selon le pourcentage d'entreprises escomptant une augmentation, une diminution, ou une stabilité, de leur activité pour la période à venir. La représentation du point dans un diagramme triangulaire, permet de suivre à travers le temps l'évolution des pronostics pour une même branche d'activité (analyse des réponses des chefs d'entreprise à l'enquête trimestrielle sur la conjoncture économique).

III.3. CARACTERISTIQUES MARGINALES ET CONDITIONNELLES.

III.3.1. Caractéristiques marginales.

Soit $Z = \{(x_i , y_j), C_{ij} , n_{ij})\}$, $i \in [1, p]$, $j \in [1, q]$, une variable statistique quantitative à deux dimensions, de variables marginales
$X = \{(x_i , C_{i.} , n_{i.})\}$, $i \in [1, p]$, et $Y = \{(y_j , C_{.j} , n_{.j})\}$, $j \in [1, q]$.

$$\sum_{i=1}^{i=p} \sum_{j=1}^{j=q} n_{ij} = N$$

X et Y sont des variables statistiques quantitatives, discrètes ou continues.

Pour une variable continue, les valeurs sont celles des moyennes des classes (centre de classes sous l'hypothèse de répartition uniforme des valeurs à l'intérieur d'une classe).

III.3.1.1. Moyennes marginales.

Les moyennes marginales de Z sont les moyennes des variables marginales X et Y :

$$\overline{X} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{i=p} n_{i.}\, x_i \; ; \; \overline{Y} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{j=q} n_{.j}\, y_j \; .$$

III.3.1.2. Variances marginales.

Les variances marginales de Z sont les variances des variables marginales X et Y :

$$s^2(X) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{i=p} n_{i.} (x_i - \overline{X})^2 = \frac{1}{N} \left(\sum_{i=1}^{i=p} n_{i.}\, x_i^{\,2} - \frac{1}{N} \left(\sum_{i=1}^{i=p} n_{i.}\, x_i \right)^2 \right)$$

$$s^2(Y) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{j=q} n_{.j} (y_j - \overline{Y})^2 = \frac{1}{N} \left(\sum_{j=1}^{j=q} n_{.j}\, y_j^{\,2} - \frac{1}{N} \left(\sum_{j=1}^{j=q} n_{.j}\, y_j \right)^2 \right)$$

III.3.2. Caractéristiques conditionnelles.

Soit $Z = \{(x_i , y_j), C_{ij} , n_{ij})\}$, $i \in [1, p]$, $j \in [1, q]$, une variable statistique quantitative à deux dimensions, de variables conditionnelles

$$Z_{|Y=y_j} = \{(x_i , C_{ij} , n_{ij})\},\ i \in [1, p], \text{ et } Z_{|X=x_i} = \{(y_j , C_{ij} , n_{ij})\},\ j \in [1, q].$$

avec

$$\sum_{i=1}^{i=p} \sum_{j=1}^{j=q} n_{ij} = N$$

III.3.2.1. Moyennes conditionnelles.

Les moyennes conditionnelles de Z sont les moyennes de ses variables conditionnelles :

$\overline{Z_{|Y=y_j}} = \frac{1}{n_{.j}} \sum_{i=1}^{i=p} n_{ij} x_i$, notée aussi, de façon simplifiée, $\overline{X_j}$.

Cette notation simplifiée sera utilisée systématiquement : dans le cas d'une moyenne, l'indice représente toujours le conditionnement.

$$\overline{Z_{|X=x_i}} = \frac{1}{n_{i.}} \sum_{j=1}^{j=q} n_{ij} y_j = \overline{Y_i}$$

III.3.2.2. Variances conditionnelles.

Les variances conditionnelles de *Z* sont les variances de ses variables conditionnelles.

$$s^2(Z|Y=y_j) = \frac{1}{n_{.j}} \sum_{i=1}^{i=p} n_{ij} (x_i - \overline{Z_{|Y=y_j}})^2 = \frac{1}{n_{.j}} \left(\sum_{i=1}^{i=p} n_{ij} x_i^2 - \frac{1}{n_{.j}} \left(\sum_{i=1}^{i=p} n_{ij} x_i \right)^2 \right) = s_j^2(X)$$

$$s^2(Z|X=x_i) = \frac{1}{n_{i.}} \sum_{j=1}^{j=q} n_{ij} (y_j - \overline{Z_{|X=x_i}})^2 = \frac{1}{n_{i.}} \left(\sum_{j=1}^{j=q} n_{ij} y_j^2 - \frac{1}{n_{i.}} \left(\sum_{j=1}^{j=q} n_{ij} y_j \right)^2 \right) = s_i^2(Y)$$

Là encore, la notation simplifiée sera utilisée systématiquement : un indice pour la variance représente le conditionnement.

III.3.3. Covariance.

Pour une variable statistique quantitative *Z* à deux dimensions, de variables marginales *X* et *Y*, on définit la covariance de *X* et *Y* par l'expression :

$$Cov(X, Y) = \sum_{i=1}^{i=p} \sum_{j=1}^{j=q} n_{ij} (x_i - \overline{X})(y_j - \overline{Y})$$

Nous remarquons que la variance a la même dimension qu'une variance.
D'ailleurs, nous avons $Cov(X, X) = s^2(X)$ et $Cov(Y, Y) = s^2(Y)$.
De plus, si l'on remarque que l'on a :

$$\sum_{i=1}^{i=p} \sum_{j=1}^{j=q} n_{ij} = N$$
$$\sum_{i=1}^{i=p} \sum_{j=1}^{j=q} n_{ij} x_i = \sum_{i=1}^{i=p} n_{i.} x_i = N \overline{X}$$
$$\sum_{i=1}^{i=p} \sum_{j=1}^{j=q} n_{ij} y_j = \sum_{j=1}^{j=q} n_{.j} y_j = N \overline{Y}$$

la formule de définition de la covariance peut s'écrire :

$$Cov(X, Y) = \frac{1}{N} \left(\sum_{i=1}^{i=p} \sum_{j=1}^{j=q} n_{ij} x_i y_j - \frac{1}{N} \left(\sum_{i=1}^{i=p} n_{ij} x_i \right) \left(\sum_{j=1}^{j=q} n_{ij} y_j \right) \right) = \overline{XY} - \overline{X}\,\overline{Y}$$

La formule $Cov(X, Y) = \overline{XY} - \overline{X}\,\overline{Y}$ est appelée **formule de la covariance**.

Propriétés de la covariance.

$Cov(a X + b, c Y + d) = a c Cov(X, Y)$, pour a, b, c, d dans $\mathbb{R}$.

En effet :

$\overline{aX+b} = a\,\overline{X} + b,$
$\overline{cY+d} = c\,\overline{Y} + d,$
$\overline{(aX+b)(cY+d)} = a\,c\,\overline{XY} + a\,d\,\overline{X} + b\,c\,\overline{Y} + b\,d.$

$Cov\,(a\,X + b, c\,Y + d) = \overline{(aX+b)(cY+d)} - \overline{aX+b}\;\overline{cY+d}$

$= a\,c\,\overline{XY} + a\,d\,\overline{X} + b\,c\,\overline{Y} + b\,d - (a\,\overline{X} + b)(c\,\overline{Y} + d)$
$= a\,c\,\overline{XY} + a\,d\,\overline{X} + b\,c\,\overline{Y} + b\,d - a\,c\,\overline{X}\,\overline{Y} - b\,c\,\overline{Y} - a\,d\,\overline{X} - b\,d$
$= a\,c\,(\overline{XY} - \overline{X}\,\overline{Y})$
$= a\,c\,Cov\,(X, Y)$

III.3.4. Relations entre caractéristiques marginales et caractéristiques conditionnelles.

III.3.4.1. Moyenne.

La moyenne marginale est la moyenne pondérée des moyennes conditionnelles.

$$\overline{X} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{i=p} n_{i.}\,x_i = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{i=p}\sum_{j=1}^{j=q} n_{ij}\,x_i = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{j=q}\sum_{i=1}^{i=p} n_{ij}\,x_i = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{j=q} n_{.j}\,\overline{X_j}$$

De même :

$$\overline{Y} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{i=p} n_{i.}\,\overline{Y_i}$$

Nous retrouvons là un résultat déjà établi (Théorème de la moyenne conditionnée, II.2.1.3.b).

III.3.4.2. Variance.

La variance marginale est la somme de la moyenne pondérée des variances conditionnelles et de la variance pondérée des moyennes conditionnelles.

$$s^2(X) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{i=p}\sum_{j=1}^{j=q} n_{ij}\,(x_i - \overline{X})^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{i=p}\sum_{j=1}^{j=q} n_{ij}\,(x_i - \overline{X_j} + \overline{X_j} - \overline{X})^2$$
$$= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{i=p}\sum_{j=1}^{j=q} n_{ij}\,(x_i - \overline{X_j})^2 + \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{i=p}\sum_{j=1}^{j=q} n_{ij}\,(\overline{X_j} - \overline{X})^2 + \frac{2}{N}\sum_{i=1}^{i=p}\sum_{j=1}^{j=q} n_{ij}\,(x_i - \overline{X_j})(\overline{X_j} - \overline{X})$$

et l'on a :

$$\sum_{i=1}^{i=p} n_{ij}\,(x_i - \overline{X_j})^2 = n_{.j}\,s_j^2(X)$$
$$\sum_{i=1}^{i=p} n_{ij} = n_{.j}$$
$$\sum_{i=1}^{i=p}\sum_{j=1}^{j=q} n_{ij}\,(\overline{X_j} - \overline{X})^2 = \sum_{j=1}^{j=q} n_{.j}\,(\overline{X_j} - \overline{X})^2 = N\,\overline{s^2(X_j)}$$

$$\sum_{i=1}^{i=p}\sum_{j=1}^{j=q} n_{ij}\,(x_i-\overline{X_j})(\overline{X_j}-\overline{X}) = \sum_{j=1}^{j=q}(\overline{X_j}-\overline{X})\sum_{i=1}^{i=p} n_{ij}\,(x_i-\overline{X_j})$$
$$= \sum_{j=1}^{j=q}(\overline{X_j}-\overline{X})\left(\sum_{i=1}^{i=p} n_{ij}\,x_i - \sum_{i=1}^{i=p} n_{ij}\,\overline{X_j}\right)$$
$$= \sum_{j=1}^{j=q}(\overline{X_j}-\overline{X})(n_{.j}\,\overline{X_j} - n_{.j}\,\overline{X_j}) = 0.$$

Il reste donc seulement :

$$s^2(X) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{i=p}\sum_{j=1}^{j=q} n_{ij}\,(x_i-\overline{X_j})^2 + \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{i=p}\sum_{j=1}^{j=q} n_{ij}\,(\overline{X_j}-\overline{X})^2$$

$$s^2(X) = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{j=q} n_{.j}\,s_j^{\,2}(X) + \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{j=q} n_{.j}\,(\overline{X_j}-\overline{X})^2$$

ce qui traduit le résultat annoncé, qui peut s'écrire aussi (Théorème de la variance conditionnée, II.2.2.4.f) :

$$s^2(X) = \overline{s_j^{\,2}(X)} + s^2(\overline{X_j})$$

De même, la variance marginale de Y est donnée par la formule :

$$s^2(Y) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{i=p} n_{i.}\,s_i^{\,2}(Y) + \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{i=p} n_{i.}\,(\overline{Y_i}-\overline{Y})^2$$
$$s^2(Y) = \overline{s_i^{\,2}(Y)} + s^2(\overline{Y_i})$$

Remarque.

La variance traduit la dispersion de la distribution.
La dispersion de la distribution marginale de X résulte de deux facteurs :

— La dispersion des distributions conditionnées autour de leurs moyennes : c'est le premier terme, $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{i=p} n_{i.}\,s_i^{\,2}(Y)$, qu'on appelle la **variance intra-population**, et qu'on note $s_w^{\,2}(Y)$ (*w* pour within).
— La dispersion des moyennes conditionnelles autour de la moyenne : c'est le deuxième terme, $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{i=p} n_{i.}\,(\overline{Y_i}-\overline{Y})^2$, qu'on appelle la **variance inter-population**, et qu'on note $s_b^{\,2}(Y)$ (*b* pour between).

$$s^2(Y) = s_w^{\,2}(Y) + s_b^{\,2}(Y)$$

III. 4. REGRESSION ET CORRELATION.

En présence d'une distribution statistique de deux variables (X, Y), il est possible d'étudier les distributions marginales, les distributions conditionnelles, mais cette étude ne fournit pas d'interprétation des résultats.

Dans certains cas, nous pouvons nous poser la question suivante.
La connaissance d'une modalité de la variable X apporte-t-elle une information supplémentaire sur les modalités de la variable Y ?
La réponse à cette question est du domaine de la **régression** : dans un tel cas, on dit que X est la variable explicative et Y la variable expliquée.

Dans d'autres cas, aucune des deux variables ne peut être privilégiée : la liaison stochastique entre X et Y s'apprécie alors de façon symétrique par la mesure de la **corrélation**.

Exemple : X est la température moyenne mensuelle, Y est le volume des émissions de gaz destiné au chauffage.
Dans cet exemple, X est la variable explicative et Y la variable expliquée.
Il est à noter qu'une variable explicative X peut être une variable qualitative.

III.4.1. Régression et corrélation.

Soient X et Y des variables réelles quantitatives et $Z = (X, Y)$.
Considérons la variable statistique $(X, \overline{Z_{|X}})$ à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ définie par :
$\{((x_i , \overline{Y_i}), f_{i.})\}$, $i \in [1, p]$
où $f_{i.} = \frac{n_i}{N}$.
Nous appellerons cette variable la **variable statistique de régression de *Y* en *X***.

III.4.1.1. Courbe de régression.

On appelle **courbe de régression** de Y en X, le graphe, ou courbe représentative, de l'application $f : x \mapsto \overline{Y_i}$.

Si X est une variable discrète, la courbe de régression est une succession de points $(x_i , \overline{Y_i})$.
Si X est une variable continue, la courbe de régression sera formée de segments de droite joignant les points $(x_i , \overline{Y_i})$, où les x_i représentent les centres des classes.
On peut dire que la courbe de régression est la représentation graphique de la variable statistique définie précédemment.

III.4.1.2. Propriétés.

a) Le point moyen de la variable de régression de *Y* en *X* est le point moyen de Z.

En effet :
$\sum f_{i.} x_i = \overline{X}$ et $\sum f_{i.} \overline{Y_i} = \overline{Y} \Rightarrow \sum f_{i.} (x_i , \overline{Y_i}) = (\sum f_{i.} x_i , \sum f_{i.} \overline{Y_i}) = (\overline{X}, \overline{Y}) = \overline{(X,Y)} = \overline{Z}$

b) *Cov* (*X*, $\overline{Z_{|X}}$) = *Cov* (*X*, *Y*).

En effet :

$Cov\ (X, \overline{Z_{|X}}) = \sum f_{i.}\ (x_i - \overline{X})(\overline{Y_i} - \overline{\overline{Y}})$

$= \sum f_{i.}\ x_i\ \overline{Y_i} - \sum f_{i.}\ x_i\ \overline{\overline{Y}} - \sum f_{i.}\ \overline{X}\overline{Y_i} + \sum f_{i.}\ \overline{X}\ \overline{\overline{Y}}$
$= \sum f_{i.}\ x_i\ \overline{Y_i} - \overline{X}\ \overline{\overline{Y}} - \overline{X}\overline{\overline{Y_i}} + \overline{X}\ \overline{\overline{Y}}$

$\overline{\overline{Y_i}} = \overline{\overline{Y}}$

$Cov\ (X, \overline{Z_{|X}}) = \sum f_{i.}\ x_i\ \overline{Y_i} - \overline{X}\ \overline{\overline{Y}}$

$= \sum_{i=1}^{i=p} f_{i.}\ x_i \sum_{j=1}^{j=q} \frac{f_{ij}}{f_{i.}}\ y_j - \overline{X}\ \overline{\overline{Y}}$
$= \overline{XY} - \overline{X}\overline{Y}$
$= Cov\ (X, Y)$

c) $s^2\ (\overline{Z_{|X}}) = s_b^{\ 2}\ (Y)$.

En effet, comme on a $\overline{\overline{Y_i}} = \overline{\overline{Y}}$, il résulte de la définition :

$$s^2\ (\overline{Z_{|X}}) = \sum f_{i.}\ (\overline{Y_i} - \overline{\overline{Y}})^2 = s_b^{\ 2}\ (Y)$$

Notons que $s_b^{\ 2}\ (Y)$, variance inter-population, n'est pas la variance marginale $s^2\ (Y)$ de Y.

III.4.1.3. Rapport de corrélation.

La variance marginale de Y est donnée par la formule :

$$s^2\ (Y) = s_w^{\ 2}\ (Y) + s_b^{\ 2}\ (Y)$$

où la variance intra-population $s_w^{\ 2}\ (Y)$ est donnée par la formule $s_w^{\ 2}\ (Y) = \sum f_{i.}\ s_i^{\ 2}\ (Y)$ (moyenne des variances conditionnelles)
et la variance inter-population $s_b^{\ 2}\ (Y)$ par la formule $s_b^{\ 2}\ (Y) = \sum f_{i.}\ (\overline{Y_i} - \overline{\overline{Y}})^2$ (variance de la moyenne conditionnelle).

Imaginons une variable $Z = (X, Y)$ pour laquelle $\overline{Z_{|X=x_i}} = \overline{Y_i}$ soit très proche de $\overline{\overline{Y}}$, pour tout $i \in [1, p]$.
Alors la variance inter-population $s_b^{\ 2}\ (Y)$ sera faible et la courbe de régression de Y en X variera peu autour de $\overline{\overline{Y}}$.
Inversement, si les $\overline{Z_{|X=x_i}}$ sont très dispersés autour de $\overline{\overline{Y}}$, la variance inter-population $s_b^{\ 2}\ (Y)$ sera grande, ce qui veut dire que la courbe de régression de Y en X variera en grandes dents de scie autour de $\overline{\overline{Y}}$.
Autrement dit, la valeur de la variance inter-population $s_b^{\ 2}\ (Y)$ influence directement la courbe de régression.
Nous dirons que $s_b^{\ 2}\ (Y)$ est la part de la variance marginale $s^2\ (Y)$ qui est **expliquée par la régression** de Y en X.
Nous parlerons simplement de **variance expliquée**.

Le terme $s_w^2(Y)$, quant à lui, est d'autant plus faible que les $s_i^2(Y)$ sont faibles, donc que les valeurs de Y varient peu, pour chaque x_i, autour de $\overline{Y_i}$.
Ce terme n'a pas d'influence sur la courbe de régression de Y en X (qui fait intervenir seulement les x_i et les $\overline{Y_i}$) : nous l'appelons la **variance résiduelle**.

a) Définition.

Le rapport entre la variance expliquée $s_b^2(Y)$ et la variance marginale totale $s^2(Y)$ est appelé **rapport de corrélation**.
On le note $\eta^2_{Y|X}$:

$$\eta^2_{Y|X} = \frac{s_b^2(Y)}{s^2(Y)}$$

Il peut aussi être calculé par la formule :

$$\eta^2_{Y|X} = 1 - \frac{\text{variance résiduelle}}{\text{variance totale}}.$$

b) Propriétés.

1. $0 \leqslant \eta^2_{Y|X} \leqslant 1$.

Cette propriété résulte directement de la formule de définition $\eta^2_{Y|X} = \frac{s_b^2(Y)}{s^2(Y)}$ et de la formule $s^2(Y) = s_w^2(Y) + s_b^2(Y)$, dans laquelle tous les termes sont positifs.

2. $\eta^2_{Y|X} = 0 \Leftrightarrow s_b^2(Y) = 0 \Leftrightarrow \overline{Y_i} = \overline{Y}$, $\forall\, i \in [1, p]$.

Dans un tel cas, la courbe de régression est parallèle à l'axe des x.
Nous dirons que Y est **non corrélée** avec X : en clair, cela veut dire que la connaissance de X ne donne aucune information sur Y.

Naturellement et de façon symétrique, si l'on a $\eta^2_{X|Y} = 0$, X est non corrélée avec Y et la courbe de régression de X en Y est parallèle à l'axe des y.
Si l'on a, à la fois, $\eta^2_{Y|X} = 0$ et $\eta^2_{X|Y} = 0$, on dit qu'il y a **absence réciproque de corrélation**.

3. $\eta^2_{Y|X} = 1 \Leftrightarrow s_w^2(Y) = 0 \Leftrightarrow y_j = \overline{Y_i}$, $\forall\, i \in [1, p]$, $\forall\, j \in [1, q]$.

Dans un tel cas, à chaque valeur x_i de X correspond une valeur et une seule de Y : il y a une liaison fonctionnelle $Y = f(X)$ entre X et Y.
Si, de plus, on a aussi $\eta^2_{X|Y} = 1$, la liaison fonctionnelle entre X et Y est **biunivoque**.

4. En pratique, nous aurons toujours $0 < \eta^2_{Y|X} < 1$.

Dans ce cas, plus $\eta^2_{Y|X}$ est voisin de 1, plus la dépendance de Y par rapport à X est forte et,

inversement, plus $\eta^2_{Y|X}$ est voisin de 0, moins la dépendance de *Y* par rapport à *X* est forte.

Le rapport de corrélation $\eta^2_{Y|X}$ ne caractérise que l'intensité de la corrélation de *Y* par rapport à *X* et non le sens de la liaison entre les deux.
Il reste invariant si l'on effectue sur *Y* un changement d'origine ou d'échelle.

En effet : $s_b^2(aY+b) = a^2 s_b^2(Y)$ et $s^2(aY+b) = a^2 s^2(Y)$, de sorte que le rapport $\frac{s_b^2(Y)}{s^2(Y)}$ ne change pas.
Comme ce rapport ne tient pas compte de la nature de la courbe de régression, son emploi reste valable quelle que soit la nature de cette courbe de régression.

III.4.1.4. Indépendance et corrélation.

Etant donnée une variable statistique quantitative réelle à deux dimensions $Z = (X, Y)$, nous dirons que la variable statistique ***X* est indépendante de *Y*** si les variables statistiques *Y* et $Z_{|X=x_i}$ ont la même distribution pour tout $i \in [1, p]$, c'est-à-dire si, et seulement si, l'on a :

$$\frac{n_{i1}}{n_1} = \ldots = \frac{n_{ij}}{n_{.j}} = \ldots = \frac{n_{iq}}{n_{.q}}, \forall\, i \in [1, p]$$

Dans ce cas, la valeur commune de ces rapports est :

$$\frac{n_{i1}}{n_1} = \ldots = \frac{n_{ij}}{n_{.j}} = \ldots = \frac{n_{iq}}{n_{.q}} = \frac{n_{i1}+\cdots+n_{iq}}{n_1+\cdots+n_{.q}} = \frac{n_{i.}}{N}$$

et les lignes du tableau de contingence sont proportionnelles.

De façon symétrique, *Y* est indépendante de *X* si, et seulement si, l'on a :

$$\frac{n_{1j}}{n_{1.}} = \ldots = \frac{n_{ij}}{n_{i.}} = \ldots = \frac{n_{pj}}{n_{p.}} = \frac{n_{.j}}{N}, \forall\, j \in [1, q]$$

et, dans ce cas, les colonnes du tableau de contingence sont proportionnelles.

Remarque : *X* est indépendante de *Y* $\Leftrightarrow$ *Y* est indépendante de *X*.

En effet :

X est indépendante de *Y* $\Leftrightarrow \frac{n_{ij}}{n_{.j}} = \frac{n_{i.}}{N}, \forall\, i \in [1, p], \forall\, j \in [1, q]$

$\Leftrightarrow \frac{n_{ij}}{n_{.j}} = \frac{n_{i.}}{N}, \forall\, i \in [1, p], \forall\, j \in [1, q]$

$\Leftrightarrow$ *Y* est indépendante de *X*.

Au lieu de dire "*X* est indépendante de *Y*", on peut donc dire "*X* et *Y* sont indépendantes", la relation est symétrique.

Propriétés.

a) Courbes de régression de variables indépendantes.

Si *X* et *Y* sont indépendantes, les variables statistiques *Y* et $Z_{|X=x_i}$ ont la même distribution pour tout $i \in [1, p]$, elles ont donc la même moyenne, $\overline{Y} = \overline{Y_i}$ pour tout $i \in [1, p]$.
Il en résulte :

$$s_b^{\,2}(Y) = \sum f_{i.} \left(\overline{Y_i} - \overline{Y}\right)^2 = 0$$

$$\eta^2_{Y|X} = \frac{s_b^{\,2}(Y)}{s^2(Y)} = 0$$

De façon symétrique, si X et Y sont indépendantes, Y et X sont indépendantes, les variables statistiques X et $Z_{|Y=y_j}$ ont la même distribution pour tout $j \in [1, q]$, de sorte que l'on a aussi :

$$s_b^{\,2}(X) = \sum f_{.j} \left(\overline{X_j} - \overline{X}\right)^2 = 0$$

$$\eta^2_{X|Y} = \frac{s_b^{\,2}(X)}{s^2(X)} = 0$$

Ainsi, dans le cas où X et Y sont indépendantes, la courbe de régression de Y en X est une parallèle à l'axe des x et la courbe de régression de X en Y est une parallèle à l'axe des y.

On notera que si l'indépendance a pour conséquence le parallélisme des courbes de régression aux axes de coordonnées, en revanche, les courbes de régression peuvent être parallèles aux axes de coordonnées sans que, pour autant, les variables soient indépendantes.
Il ne suffit pas que les moyennes conditionnelles soient identiques pour assurer l'indépendance, il faut encore que les distributions conditionnelles soient identiques. Or plusieurs distributions peuvent avoir la même moyenne sans nécessairement être identiques.

L'absence réciproque de corrélation n'entraîne pas l'indépendance.

Les propriétés du rapport de corrélation peuvent être résumées dans le tableau suivant, qui est un tableau d'équivalence (il se lit dans les deux sens).

$\eta^2_{Y\|X}$ \ $\eta^2_{X\|Y}$	$\eta^2_{X\|Y} = 0$	$0 < \eta^2_{X\|Y} < 1$	$\eta^2_{X\|Y} = 1$
$\eta^2_{Y\|X} = 0$	Absence réciproque de corrélation	Cas général d'absence de corrélation de Y par rapport à X	Liaison fonctionnelle $y \mapsto x$ Absence de corrélation de Y par rapport à X
$0 < \eta^2_{Y\|X} < 1$	Cas général d'absence de corrélation de X par rapport à Y	Cas général	Cas général de liaison fonctionnelle non réciproque $y \mapsto x$
$\eta^2_{Y\|X} = 1$	Liaison fonctionnelle $x \mapsto y$ Absence de corrélation de X par rapport à Y	Cas général de liaison fonctionnelle non réciproque $x \mapsto y$	Liaison fonctionnelle réciproque

b) Critères d'indépendance.

1- Pour que X et Y soient indépendantes, il faut et il suffit que l'on ait :

$$n_{ij} = \frac{n_{i.}\, n_{.j}}{N}, \text{ pour tout } (i, j) \in [1, p] \times [1, q].$$

En effet, la relation précédente peut s'écrire :

$$\frac{n_{ij}}{n_{.j}} = \frac{n_{i.}}{N}, \forall\, i \in [1, p], \forall\, j \in [1, q],$$

ce qui signifie que *X* est indépendante de *Y*.

2- Pour que *X* et *Y* soient indépendantes, il faut et il suffit que l'on ait :

$$f_{ij} = f_{i.}\, f_{.j}, \text{ pour tout } (i, j) \in [1, p] \times [1, q].$$

C'est simplement une autre façon d'écrire le critère précédent, avec

$$f_{ij} = \frac{n_{ij}}{N}, f_{i.} = \frac{n_{i.}}{N}, f_{.j} = \frac{n_{.j}}{N}.$$

c) Si *X* et *Y* sont indépendantes, leur covariance est nulle.

En effet, la covariance de *X* et *Y* est donnée par la formule de la covariance :
$Cov\,(X, Y) = \overline{XY} - \overline{X}\,\overline{Y}$
Lorsque *X* et *Y* sont indépendantes, nous avons :
$\overline{XY} = \sum_{i=1}^{i=p} \sum_{j=1}^{j=q} f_{ij}\, x_i\, y_j = \sum_{i=1}^{i=p} \sum_{j=1}^{j=q} f_{i.}\, f_{.j}\, x_i\, y_j = \sum_{i=1}^{i=p} f_{i.}\, x_i \sum_{j=1}^{j=q} f_{.j}\, y_j = \overline{X}\,\overline{Y}$
de sorte que la covariance est nulle.

La réciproque est fausse : la covariance peut être nulle sans que les variables soient indépendantes.

III. 4. 2. Méthode des moindres carrés.

III.4.2.1. Propriété de la courbe de régression.

Soit $Z = \{(x_i , y_j), C_{ij} , n_{ij})\}$, $i \in [1, p]$, $j \in [1, q]$, une variable statistique quantitative à deux dimensions, de variables marginales
$X = \{(x_i , C_{i.} , n_{i.})\}$, $i \in [1, p]$, et $Y = \{(y_j , C_{.j} , n_{.j})\}$, $j \in [1, q]$.
$\sum_{i=1}^{i=p} \sum_{j=1}^{j=q} n_{ij} = N.$

Pour chaque valeur x_i de X, on sait calculer la moyenne conditionnelle de Y pour X fixé :
$\overline{Y_i} = \frac{1}{n_{i.}} \sum_{j=1}^{j=q} n_{ij} y_j$, avec $n_{i.} = \sum_{j=1}^{j=q} n_{ij}$, pour tout $i \in [1, p]$.
La courbe de régression de Y en X joint les points R_i de coordonnées $(x_i , \overline{Y_i})$, $i \in [1, p]$.

Pour tout $i \in [1, p]$, considérons un point $A_i = (x_i, y'_i)$.

On appelle **somme des carrés des écarts**, en abrégé SCE, l'expression :
$S = \sum_{i=1}^{i=p} \sum_{j=1}^{j=q} n_{ij} (y'_i - y_j)^2$
et **carré moyen**, en abrégé CM, l'expression :
$CM = \frac{S}{N} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{i=p} \sum_{j=1}^{j=q} n_{ij} (y'_i - y_j)^2 = \sum_{i=1}^{i=p} \sum_{j=1}^{j=q} f_{ij} (y'_i - y_j)^2$

La somme des carrés des écarts s'écrit :
$S = \sum_{i=1}^{i=p} \sum_{j=1}^{j=q} n_{ij} (y'_i - \overline{Y_i} + \overline{Y_i} - y_j)^2$
$= \sum_{i=1}^{i=p} \sum_{j=1}^{j=q} n_{ij} (y'_i - \overline{Y_i})^2 + \sum_{i=1}^{i=p} \sum_{j=1}^{j=q} n_{ij} (\overline{Y_i} - y_j)^2 + 2 \sum_{i=1}^{i=p} \sum_{j=1}^{j=q} n_{ij} (y'_i - \overline{Y_i})(\overline{Y_i} - y_j)$
$\sum_{i=1}^{i=p} \sum_{j=1}^{j=q} n_{ij} (y'_i - \overline{Y_i})(\overline{Y_i} - y_j) = \sum_{i=1}^{i=p} (y'_i - \overline{Y_i}) \sum_{j=1}^{j=q} n_{ij} (\overline{Y_i} - y_j) = \sum_{i=1}^{i=p} (y'_i - \overline{Y_i}) (n_{i.} \overline{Y_i} - n_{i.} \overline{Y_i}) = 0$
$\sum_{i=1}^{i=p} \sum_{j=1}^{j=q} n_{ij} (\overline{Y_i} - y_j)^2 = \sum_{i=1}^{i=p} n_{i.} s_i^2 (Y)$
$\sum_{i=1}^{i=p} \sum_{j=1}^{j=q} n_{ij} (y'_i - \overline{Y_i})^2 = \sum_{i=1}^{i=p} n_{i.} (y'_i - \overline{Y_i})^2$
$S = \sum_{i=1}^{i=p} n_{i.} (y'_i - \overline{Y_i})^2 + \sum_{i=1}^{i=p} n_{i.} s_i^2 (Y)$
Le terme $\sum_{i=1}^{i=p} n_{i.} s_i^2 (Y)$ ne dépend pas du choix des y'_i.

S prendra donc une valeur minimum, lorsque $\sum_{i=1}^{i=p} n_{i.} (y'_i - \overline{Y_i})^2$ est nul, c'est-à-dire lorsque $y'_i = \overline{Y_i}$ pour tout $i \in [1, p]$.
Autrement dit :

La courbe de régression est la ligne qui rend minimum la somme des carrés des écarts.

C'est donc celle qui ajuste au mieux une courbe au nuage de points (x_i, y_j).
Pour cette courbe, le carré moyen (CM, en abrégé), prend aussi sa valeur minimum, qui est donnée par :

$$CM = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{i=p} n_{i.}\, s_i^{\,2}(Y) = s_w^{\,2}(Y)$$

Le carré moyen correspondant à la ligne de régression est la **variance résiduelle**.

III.4.2.2. Ajustement linéaire.

Si la ligne de régression de Y en X tracée sur le nuage de points (x_i, y_j) se rapproche globalement d'une droite, nous pouvons chercher directement, par la **méthode des moindres carrés ordinaires**, en abrégé MCO, la droite qui s'ajuste le mieux au nuage de points.
Soit $y = a + b\,x$ l'équation d'une droite.
Pour tout $i \in [1, p]$, considérons le point $A_i = (x_i, y'_i = a + b\,x_i)$ de la droite.
On peut associer à la droite la somme des carrés des écarts :

$$S = \sum_{i=1}^{i=p} \sum_{j=1}^{j=q} n_{ij}\,(y'_i - y_j)^2 = \sum_{i=1}^{i=p} \sum_{j=1}^{j=q} n_{ij}\,(a + b\,x_i - y_j)^2$$

Le carré moyen associé est :

$$CM = \frac{S}{N} = \sum_{i=1}^{i=p} \sum_{j=1}^{j=q} f_{ij}\,(a + b\,x_i - y_j)^2$$

C'est la moyenne du carré de $(a + b\,X - Y)$.
Or la variance de $(a + b\,X - Y)$ est égale à la moyenne du carré, moins le carré de la moyenne,

$$s^2(a + b\,X - Y) = CM - \overline{a + b\,X - Y}^{\,2}$$

On obtient donc :

$$CM = \overline{a + b\,X - Y}^{\,2} + s^2(a + b\,X - Y) = (a + b\,\overline{X} - \overline{Y})^2 + s^2(a + b\,X - Y)$$

On sait, par ailleurs, que la variance de $a + b\,X - Y$ est donnée par :

$$s^2(a + b\,X - Y) = s^2(b\,X - Y) = b^2\,s^2(X) - 2\,b\,Cov(X, Y) + s^2(Y)$$

On peut écrire aussi :

$$b^2\,s^2(X) - 2\,b\,Cov(X, Y) + s^2(Y) = s^2(X)\left(b^2 - 2\,b\,\frac{Cov(X,Y)}{s^2(X)} \right) + s^2(Y)$$

$$= s^2(X)\left(b - \frac{Cov(X,Y)}{s^2(X)} \right)^2 + s^2(Y) - \frac{Cov^2(X,Y)}{s^2(X)}$$

$$= s^2(X)\left(b - \frac{Cov(X,Y)}{s^2(X)} \right)^2 + s^2(Y)\left(1 - \left(\frac{Cov(X,Y)}{s(X)\,s(Y)} \right)^2 \right)$$

Or, la variance $b^2\,s^2(X) - 2\,b\,Cov(X, Y) + s^2(Y)$ de $b\,X - Y$ est positive pour tout $b \in \mathbb{R}$, puisque toute variance est positive.
Donc le discriminant réduit de ce polynôme de degré 2 en b est négatif : $Cov^2(X, Y) \leqslant s^2(X)\,s^2(Y)$, et, dans l'expression

$$s^2(X)\left(b - \frac{Cov(X,Y)}{s^2(X)} \right)^2 + s^2(Y)\left(1 - \left(\frac{Cov(X,Y)}{s(X)\,s(Y)} \right)^2 \right)$$

le terme $s^2(Y)\left(1 - \left(\frac{Cov(X,Y)}{s(X)\,s(Y)} \right)^2 \right)$, qui ne dépend pas du choix de a et b, est toujours positif.

La conclusion est que le carré moyen s'écrit finalement comme somme de trois termes positifs dont le troisième ne dépend ni de a ni de b :

$$CM = (a + b\,\overline{X} - \overline{Y})^2 + s^2(X)\left(b - \frac{Cov(X,Y)}{s^2(X)} \right)^2 + s^2(Y)\left(1 - \left(\frac{Cov(X,Y)}{s(X)\,s(Y)} \right)^2 \right)$$

Cette somme prend sa valeur minimum lorsque les deux premiers termes sont nuls :

$$a + b\,\overline{X} - \overline{Y} = 0$$

$b = \dfrac{Cov(X,Y)}{s^2(X)}$

L'équation de la **droite ajustée par la méthode des moindres carrés** est donc :

$$\boxed{(y - \overline{Y}) = (x - \overline{X})\,\frac{Cov(X,Y)}{s^2(X)}}$$

La valeur de b obtenue est aussi celle qui rend minimum la variance

$s^2(a + b\,X - Y) = s^2(X)\left(b - \dfrac{Cov(X,Y)}{s^2(X)} \right)^2 + s^2(Y)\left(1 - \left(\dfrac{Cov(X,Y)}{s(X)\,s(Y)} \right)^2 \right)$.

Nous noterons $(X, \Delta_{Y|X})$ la variable statistique $\{((x_i, a + b\,x_i), f_{i.})\}$, $i \in [1, p]$.

Cette variable statistique est appelée la **variable statistique de régression linéaire de *Y* en *X***.

La représentation graphique de cette variable est donnée par la **droite ajustée par la méthode des moindres carrés ordinaires**.

Cette droite est parfois appelée la *droite de régression* de Y en X.

Le coefficient b est alors appelé le *coefficient de régression* de Y en X.

Il vaut mieux réserver ces dénominations à la droite de régression du modèle théorique probabiliste associé à la population et parler, ici, seulement de droite ajustée par la méthode des moindres carrés ordinaires.

Propriétés de la variable statistique $(X, \Delta_{Y|X})$.

1. Le point moyen est celui de *Z*.

En effet, on a : $\sum f_{i.}\,x_i = \overline{X}$ et $\sum f_{i.}\,(a + b\,x_i) = a + b\,\overline{X} = \overline{Y}$.

La relation $a + b\,\overline{X} = \overline{Y}$ montre que la droite ajustée par la méthode des moindres carrés ordinaires passe par ce point moyen $(\overline{X}, \overline{Y})$.

2. $Cov(X, \Delta_{Y|X}) = Cov(X, Y)$.

En effet :

$Cov(X, \Delta_{Y|X}) = \sum_{i=1}^{i=p} f_{i.}\,(x_i - \overline{X})(a + b\,x_i - (a + b\,\overline{X}))$

$= b \sum_{i=1}^{i=p} f_{i.}\,(x_i - \overline{X})^2$

$= b\,s^2(X)$

$= Cov(X, Y)$

puisque $b = \dfrac{Cov(X,Y)}{s^2(X)}$.

3. $s^2(\Delta_{Y|X}) = b^2\,s^2(X) \neq s^2(Y)$.

En effet, par définition : $s^2(\Delta_{Y|X}) = s^2(a + b\,X)$

et comme on a toujours $s^2(a + b\,X) = b^2\,s^2(X)$, il vient $s^2(\Delta_{Y|X}) = b^2\,s^2(X) = \left(\dfrac{Cov(X,Y)}{s(X)} \right)^2$

En général, $b^2 s^2(X)$ est différent de $s^2(Y)$, sinon on aurait $s^2(Y) = b^2 s^2(X) = \left(\frac{Cov(X,Y)}{s(X)}\right)^2$, donc :

$Cov(X, Y) = s(X)\, s(Y)$ ou $Cov(X, Y) = -s(X)\, s(Y)$
Dans le premier cas, la variance de $a + b X - Y$ est nulle :

$$s^2(a + b X - Y) = s^2(Y)\left(1 - \left(\frac{Cov(X,Y)}{s(X)\,s(Y)}\right)^2\right) = 0$$

et $Y = a + b X$, avec $b = \frac{Cov(X,Y)}{s^2(X)} = \frac{s(Y)}{s(X)} > 0$.

Dans le deuxième cas, la variance de $a + b X - Y$ est nulle aussi et $Y = a + b X$, avec $b = \frac{Cov(X,Y)}{s^2(X)} = -\frac{s(Y)}{s(X)} < 0$.

Variable statistique $(Y, \Delta_{X|Y})$.

C'est la variable statistique associée à la régression de X en Y.
L'équation de la droite ajustée par la méthode des moindres carrés ordinaires aux couples (y_j, x_i) a pour équation :

$$(x - \overline{X}) = (y - \overline{Y})\,\frac{Cov(X,Y)}{s^2(Y)}$$

Nous avons les propriétés suivantes, analogues aux précédentes :
$Cov(Y, \Delta_{X|Y}) = Cov(Y, X) = Cov(X, Y)$

$$s^2(\Delta_{X|Y}) = \frac{Cov^2(X,Y)}{s^2(Y)} \neq s^2(X)$$

III.4.2.3. Coefficient de corrélation linéaire.

Les variables $(X, \Delta_{Y|X})$ et $(Y, \Delta_{X|Y})$ représentent un résumé de la variable $Z = (X, Y)$.
Il est nécessaire de définir un nouveau paramètre pour mesurer la validité de ce résumé.
On appelle coefficient de corrélation linéaire le rapport :

$$\boxed{r = \frac{Cov(X,Y)}{s(X)\,s(Y)}}$$

Propriétés du coefficient de corrélation linéaire.

1. Coefficient de corrélation linéaire et rapport de corrélation.

Le carré du coefficient de corrélation linéaire, qu'on appelle aussi le **coefficient de détermination**, est donné par la formule :

$$r^2 = \left(\frac{Cov(X,Y)}{s(X)\,s(Y)}\right)^2 = \frac{s^2(\Delta_{Y|X})}{s^2(Y)} = \frac{s^2(\Delta_{X|Y})}{s^2(X)}$$

Il détermine la part de variance de Y qui est expliquée par la régression linéaire de Y en X (ou, respectivement, la part de variance de X expliquée par la régression linéaire de X en Y).
Le coefficient de détermination joue donc, pour la régression linéaire de Y en X, le même rôle que le

rapport de corrélation pour la régression de Y en X.
En particulier, pour la ligne de régression de Y en X, nous avions trouvé, pour carré moyen minimum, la variance résiduelle

$$s_w^2(Y) = (1 - \eta^2_{Y|X})\, s^2(Y).$$

Pour la régression linéaire de Y en X, la valeur minimum du carré moyen est $(1 - r^2)\, s^2(Y)$.
Cette valeur minimum est nécessairement plus grande que la variance résiduelle, qui est un minimum absolu :

$$0 \leqslant (1 - \eta^2_{Y|X})\, s^2(Y) \leqslant (1 - r^2)\, s^2(Y) \leqslant s^2(Y)$$
$$0 \leqslant (1 - \eta^2_{Y|X}) \leqslant (1 - r^2) \leqslant 1$$
$$0 \leqslant r^2 \leqslant \eta^2_{Y|X} \leqslant 1$$

En particulier, le coefficient de corrélation linéaire r est compris entre –1 et 1 :

$$-1 \leqslant r \leqslant 1.$$

L'égalité de r^2 et de $\eta^2_{Y|X}$ traduit la propriété que la ligne de régression de Y en X est une droite ; on dit alors que Y présente une *corrélation linéaire* avec X.

2. Cas où $r = 0$.

S'il n'y a pas de corrélation entre Y et X, $\eta^2_{Y|X}$ est nul donc aussi $r = 0$.
Dans ce cas, les droites de régression sont parallèles aux axes.
Nous ne pouvons pas en conclure l'indépendance de X et de Y.

3. Cas où $r^2 = 1$.

Si $r^2 = 1$, alors $\eta^2_{Y|X} = 1$, il y a une relation fonctionnelle liant X et Y.
Et cette relation fonctionnelle est linéaire.
En effet, dire que $r^2 = 1$, c'est dire que $Cov^2(X, Y) = s^2(X)\, s^2(Y)$.
Dans ce cas :

$$s^2(a + b\,X - Y) = s^2(X)\left(b - \frac{Cov(X,Y)}{s^2(X)} \right)^2 + s^2(Y)\left(1 - \left(\frac{Cov(X,Y)}{s(X)\,s(Y)} \right)^2 \right).$$

se réduit, avec $b = \frac{Cov(X,Y)}{s^2(X)}$, à $s^2(a + b\,X - Y) = 0$, ce qui veut dire que tous les points sont sur la droite ajustée par la méthode des moindres carrés : il existe une relation fonctionnelle linéaire entre X et Y, $Y = a + b\,X$, avec $b > 0$ si $r = 1$, et $b < 0$ si $r = -1$.
Plus r est proche de 1 ou de –1, plus la corrélation linéaire est forte.

III.4.2.4. Prédicteur et estimation.

En l'absence d'information, l'estimation la meilleure que nous puissions donner d'une valeur inconnue prise par Y est sa moyenne .
Si Y est en corrélation avec X, la connaissance de la valeur x_i de X, permet d'améliorer l'estimation de Y.
Nous dirons que $\overline{z_{|X}}$ et $\Delta_{Y|X}$ sont des **prédicteurs** de Y.

Nous avons :
$m\,(\overline{Z_{|X}}) = \overline{Y}$ et $m\,(\Delta_{Y|X}) = \overline{Y}$
$s^2\,(\overline{Z_{|X}}) = s_b{}^2\,(Y) = \eta^2{}_{Y|X}\,s^2\,(Y)$ et $s^2\,(\Delta_{Y|X}) = r^2\,s^2\,(Y)$

La mesure de la validité d'un prédicteur de *Y* se mesure par le rapport de sa variance à la variance de *Y* :

$$\frac{s^2\left(\Delta_{Y|X}\right)}{s^2(Y)} = r^2 \text{ et } \frac{s^2\left(\overline{Z_{|X}}\right)}{s^2(Y)} = \eta^2{}_{Y|X}$$

Plus le rapport est proche de 1, plus la variance du prédicteur est proche de la variance de *Y*, donc plus la variance résiduelle est faible et moins le nuage de points est dispersé autour du prédicteur, donc meilleur est le prédicteur.
$\eta^2{}_{Y|X}$ ou r^2 mesure donc la précision du prédicteur et nous pouvons dire que $\overline{Z_{|X}}$ est un prédicteur meilleur que $\Delta_{Y|X}$, puisque $\eta^2{}_{Y|X}$ est plus grand que r^2.

III.4.2.5. Généralisation du modèle.

L'ajustement linéaire peut, par des changements de variables, permettre l'ajustement d'autres modèles non linéaires.

1. Modèle exponentiel.

Si l'étude de la corrélation entre *Y* et *X* met en évidence que le taux de variation instantané de *Y* par rapport à *X* est constant (*X* pouvant être la variable "temps", dans le cas d'une chronique, ou série chronologique), alors nous avons, théoriquement :
$\frac{dy}{y} = k\,dx$, soit $y = y_0\,c^x$.
En posant $z = ln\,y$, $a = ln\,y_0$, $b = ln\,c$, il vient $z = a + b\,x$.
On est ramené à un modèle linéaire.
Dans la pratique, on vérifie si le taux de variation expérimental est sensiblement constant en calculant, pour chaque intervalle Δx le rapport $\frac{1}{\Delta x}\frac{\Delta y}{y}$.
La mise en évidence de ce modèle est obtenue en utilisant un **papier semi-logarithmique**, avec une échelle logarithmique en ordonnée et une échelle arithmétique en abscisse.
Un tel modèle est très utilisé en matière économique : étude des fonctions de production, de consommation, étude du chiffre d'affaire, etc.

2. Modèle à élasticité constante.

Si l'étude de la corrélation entre *Y* et *X* met en évidence que l'élasticité est constante, nous avons théoriquement (l'élasticité est le rapport entre la variation relative de *y* et la variation relative de *x*) :
$\frac{dy}{y} = k\,\frac{dx}{x}$, soit $y = y_0\,x^b$.
Si nous posons $z = ln\,y$, $t = ln\,x$, $a = ln\,y_0$, nous avons $z = a + b\,t$.
On est ramené à un modèle linéaire.
Dans la pratique, on vérifie que l'élasticité est constante en calculant, pour chaque intervalle Δx, le rapport $\frac{x}{\Delta x}\frac{\Delta y}{y}$.

La mise en évidence de ce modèle est obtenue en utilisant un **papier log-log**, avec une échelle logarithmique en abscisses et une échelle logarithmique en ordonnées.
Un tel modèle est, lui aussi, très utilisé en matière économique : étude des dépenses pour un poste particulier relativement aux dépenses totales du ménage.

Chapitre 4 - REGRESSION ORTHOGONALE DANS R².

4. 1. NOTION D'ESPACE VECTORIEL EUCLIDIEN.

4.1.1. Espace vectoriel $\mathbb{R}^n$.

Soit n un entier strictement positif et $\mathbb{R}$ le corps des nombres réels.
L'ensemble $\mathbb{R}^n$ des n-uples $(x_1, \dots, x_n)$ de nombres réels est muni de sa structure usuelle d'**espace vectoriel réel**, définie par les opérations :

$$(x_1, \dots, x_n) + (x'_1, \dots, x'_n) = (x_1 + x'_1, \dots, x_n + x'_n)$$
$$\lambda\,(x_1, \dots, x_n) = (\lambda\, x_1, \dots, \lambda\, x_n),\ \forall\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Notations.

On identifiera un élément $X = (x_1, \dots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$ avec la matrice $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ à n lignes et 1 colonne.

La transposée de cette matrice est la matrice ${}^tX = \begin{pmatrix} x_1 \dots x_n \end{pmatrix}$ à 1 ligne et n colonnes.

Les opérations dans $\mathbb{R}^n$ sont alors définies par des opérations sur les matrices :

<u>Addition :</u>

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_i \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x'_1 \\ \vdots \\ x_i + x'_i \\ \vdots \\ x_n + x'_n \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x_1 \dots x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x'_1 \dots x'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x'_1 \dots x_n + x'_n \end{pmatrix}$$

<u>Multiplication par un scalaire :</u>

$$\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_i \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}.$$
$$\lambda \begin{pmatrix} x_1 \dots x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\, x_1 \dots \lambda\, x_n \end{pmatrix}$$

Dans $\mathbb{R}^n$, les n éléments e_i, $i \in \{1, \dots, n\}$, dont toutes les coordonnées sont nulles, sauf la i^e qui vaut

1, forment une base, appelée la **base canonique** de $\mathbb{R}^n$.

Tout élément $X = (x_1, \ldots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$ s'écrit de manière unique sous la forme

$$X = \sum_{i=1}^{i=n} x_i \, e_i$$

4.1.2. Produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$.

Soit Φ une application de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$.
On notera aussi $< X \mid \Phi \mid Y >$ ou $< X \mid Y >_\Phi$, le nombre réel $\Phi (X, Y)$.

4.1.2.1. Définition.

On appelle **produit scalaire** dans $\mathbb{R}^n$ toute application Φ de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ qui possède les propriétés suivantes :

a) Bilinéarité.

— Linéarité par rapport à la première variable :
$\Phi (X + X', Y) = \Phi (X, Y) + \Phi (X', Y)$ et $\Phi (\lambda X, Y) = \lambda \Phi (X, Y)$, quels que soient λ dans $\mathbb{R}$, X, X' et Y dans $\mathbb{R}^n$;
cette propriété s'écrit aussi

$$< X + X' \mid \Phi \mid Y > = < X \mid \Phi \mid Y > + < X' \mid \Phi \mid Y >$$

— Linéarité par rapport à la deuxième variable :
$\Phi (X, Y + Y') = \Phi (X, Y) + \Phi (X, Y')$ et $\Phi (X, \lambda Y) = \lambda \Phi (X, Y)$, quels que soient λ dans $\mathbb{R}$, X, Y et Y' dans $\mathbb{R}^n$;
cette propriété s'écrit aussi

$$< X \mid \Phi \mid Y + Y' > = < X \mid \Phi \mid Y > + < X \mid \Phi \mid Y' >$$

b) Symétrie.

$\Phi (X, Y) = \Phi (Y, X)$, quels que soient X et Y dans $\mathbb{R}^n$:

$$< X \mid \Phi \mid Y > = < Y \mid \Phi \mid X >$$

c) Positivité.

$\Phi (X, X)$ est un nombre réel supérieur ou égal à 0, quel que soit X dans $\mathbb{R}^n$:

$$< X \mid \Phi \mid X > \geq 0$$

d) Non dégénérescence.

$\Phi (X, X) = 0$ entraîne $X = 0$:

$$< X \mid \Phi \mid X > = 0 \Rightarrow X = 0.$$

Autrement dit, le vecteur 0 = (0, ... , 0, ... , 0) de $\mathbb{R}^n$ est l'unique solution de l'équation $\Phi(X, X) = 0$.

On dit aussi qu'un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$ est une **forme bilinéaire symétrique positive non dégénérée**.
Le mot "forme" fait simplement référence au fait que les valeurs sont des scalaires.
Lorsqu'il est muni d'un produit scalaire, $\mathbb{R}^n$ est appelé un **espace vectoriel euclidien**.

4.1.2.2. Exemples.

a) Produit scalaire canonique.

L'application de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) \mapsto < X \mid Y > = {}^t X\, Y = \begin{pmatrix} x_1 \dots x_j \dots x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_i \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{i=n} x_i\, y_i$$

est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$ qu'on appelle le **produit scalaire canonique** de $\mathbb{R}^n$.
En effet, les propriétés de bilinéarité, de symétrie, de positivité et de non dégénérescence sont pratiquement évidentes à vérifier.

b) Produit scalaire défini par une matrice diagonale à éléments positifs.

Considérons une matrice réelle *M* à *n* lignes et *n* colonnes dont tous les éléments en dehors de la diagonale principale sont nuls ($m_{ij} = 0$, quels que soient les entiers *i* et *j* dans {1, ... , *n*} avec $i \neq j$) (on dit alors que *M* est une **matrice diagonale**) et dont les éléments de la diagonale principale sont des **nombres réels strictement positifs** ($m_{ii} > 0$ quel que soit l'entier *i* dans {1, ... , *n*}).

Alors l'application :

$$(X, Y) \mapsto < X \mid M \mid Y > = {}^t X\, M\, Y = \begin{pmatrix} x_1 \dots x_j \dots x_n \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_i \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \sum_{ij} m_{ij}\, x_j\, y_i = \sum_i m_{ii}\, x_i\, y_i$$

est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$. La matrice *M* est appelée la **matrice des poids** (les "poids" sont les éléments de la diagonale).

En effet, les propriétés de bilinéarité, de symétrie, de positivité et de non dégénérescence sont pratiquement évidentes à vérifier.

- Le produit scalaire canonique correspond au cas où la matrice *M* est la matrice unité $\boldsymbol{I}_n$ (tous les éléments de la diagonale sont égaux à 1 et les éléments en dehors de la diagonale sont 0) : tous les poids sont égaux à 1.
- Autre exemple : $M = D_{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}\boldsymbol{I}_n$. Tous les poids sont égaux à $\frac{1}{n}$ et la somme des poids vaut 1.

4.1.2.3. Propriétés.

a) Matrice d'un produit scalaire.

Pour tout produit scalaire Φ sur $\mathbb{R}^n$, on peut écrire :

$$\Phi(X, Y) = \Phi\left(\sum_i x_i e_i, \sum_j y_j e_j\right) = \sum_{ij} \Phi(e_i, e_j)\, x_i y_j = \begin{pmatrix} x_1 \dots x_i \dots x_n \end{pmatrix} M_\Phi \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_j \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

La matrice $M_\Phi = [\Phi(e_i, e_j)]$ s'appelle la **matrice du produit scalaire** Φ dans la base canonique.
Cette matrice est une matrice symétrique : $\Phi(e_i, e_j) = \Phi(e_j, e_i)$.
Les éléments de sa diagonale sont des nombres réels strictement positifs : $\Phi(e_i, e_i) > 0$.
Remarquons ces propriétés ne sont pas suffisantes : une matrice symétrique dont les éléments de la diagonale sont des nombres réels strictement positifs ne définit pas forcément un produit scalaire.

Par exemple, la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ a un déterminant qui vaut $-3 < 0$, donc elle possède deux valeurs propres réelles de signe opposé (3 et – 1) et la forme bilinéaire $((x_1, x_2),(y_1, y_2)) \mapsto (x_1, x_2)\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ qu'elle définit n'est pas un produit scalaire car le "produit scalaire" du vecteur propre (1, – 1) pour la valeur propre négative, par lui-même, est un nombre réel strictement négatif $((1\ -1)\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -2)$.
La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ n'est donc pas la matrice d'un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$, bien qu'elle soit symétrique et que les éléments de sa diagonale soient strictement positifs.

En réalité, pour qu'une matrice carrée symétrique réelle soit la matrice d'un produit scalaire, il faut et il suffit que toutes ses valeurs propres, qui sont toujours des nombres réels, soient strictement positives. Ce résultat sera démontré, dans sa généralité, en analyse.

b) Norme d'un vecteur.

Si Φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$, le nombre réel positif $\| X \|_\Phi = \sqrt{\Phi(X, X)}$ s'appelle la **Φ-norme** de X, ou **Φ-longueur** de X.
Quand il n'y a pas de confusion à craindre, on parlera simplement de norme ou de longueur, qu'on notera $\| X \|$ au lieu de $\| X \|_\Phi$.

On dit qu'un vecteur est **normé pour Φ** si sa Φ-longueur est 1.

Par exemple, dans $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire canonique, la longueur de $X = (x_1, x_2)$ est $\| X \| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ et le vecteur (1, 0) est normé.

c) Angle de deux vecteurs.

Etant donnés deux vecteurs X et Y de $\mathbb{R}^n$ et un produit scalaire Φ sur $\mathbb{R}^n$, pour tout nombre réel λ, on a :

$$\Phi (X + \lambda Y, X + \lambda Y) = \| X + \lambda Y \|_\Phi ^2 \geq 0$$
$$\lambda ^2 \Phi (Y, Y) + \lambda (\Phi (Y, X) + \Phi (X, Y)) + \Phi (X, X) \geq 0$$
$$\lambda ^2 \Phi (Y, Y) + 2 \lambda \Phi (X, Y) + \Phi (X, X) \geq 0$$
$$\| Y \|_\Phi ^2 \lambda ^2 + 2 < X \mid Y >_\Phi \lambda + \| X \|_\Phi ^2 \geq 0$$

Comme cette relation est vraie pour tout nombre réel λ, c'est que le discriminant de ce trinôme du deuxième degré est négatif :

$$(< X \mid Y >_\Phi) ^2 - \| X \|_\Phi ^2 \| Y \|_\Phi ^2 \leq 0$$
$$| < X \mid Y >_\Phi | \leq \| X \|_\Phi \| Y \|_\Phi$$

Cette inégalité, valable pour tous vecteurs X et Y de $\mathbb{R}^n$ constitue l'**inégalité de Schwarz**.
Si les deux vecteurs X et Y sont différents de 0, leur longueur n'est pas nulle, le produit de leurs longueurs n'est pas nul, le rapport $\frac{\langle X|Y\rangle_\Phi}{\|X\|_\Phi \|Y\|_\Phi}$ est compris entre –1 et 1, et il existe donc un angle compris entre 0 et π radians dont le cosinus est égal au rapport $\frac{\langle X|Y\rangle_\Phi}{\|X\|_\Phi \|Y\|_\Phi}$.

Par définition, cet angle unique α compris entre 0 et π, vérifiant :

$$\cos \alpha = \frac{\langle X|Y\rangle_\Phi}{\|X\|_\Phi \|Y\|_\Phi} = \frac{\langle X|\Phi|Y\rangle}{\|X\|_\Phi \|Y\|_\Phi}$$

est appelé l'**angle des deux vecteurs non nuls** X et Y.

d) Orthogonalité.

Etant donnés deux vecteurs X et Y de $\mathbb{R}^n$ et un produit scalaire Φ sur $\mathbb{R}^n$, on dit que X et Y sont **Φ-orthogonaux** (ou simplement "orthogonaux" s'il n'y a pas de confusion à craindre) si, et seulement si, leur produit scalaire est nul :

$$\Phi (X, Y) = < X \mid Y >_\Phi = 0$$

Exemples :
— 0 est Φ-orthogonal à tout vecteur de $\mathbb{R}^n$.
— L'angle de deux vecteurs non nuls Φ-orthogonaux est $\frac{\pi}{2}$.

— La base canonique de $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique est formée de vecteurs normés orthogonaux deux à deux : on parle alors de **base orthonormée**.

e) Projeté orthogonal.

Soient X et Y deux vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^n$ et Φ un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.
Il existe un unique vecteur Z de $\mathbb{R}^n$, proportionnel à Y et tel que $X – Z$ soit orthogonal à Y.

Démonstration.

Pour tout vecteur Z on peut écrire :

$$< X - Z \mid Y >_\Phi = < X \mid Y >_\Phi - < Z \mid Y >_\Phi$$

Si l'on prend un Z proportionnel à Y, on a $Z = a\,Y$, donc :

$$< X - Z \mid Y >_\Phi = < X \mid Y >_\Phi - a < Y \mid Y >_\Phi = < X \mid Y >_\Phi - a \,\| Y \|_\Phi^2.$$

Pour que $X - Z$ soit orthogonal à Y., soit $< X - Z \mid Y >_\Phi = 0$, il faut et il suffit que l'on prenne $a = \frac{\langle X|Y\rangle_\Phi}{\|Y\|_\Phi^2}$.

L'unique vecteur $Z = \frac{\langle X|Y\rangle_\Phi}{\|Y\|_\Phi^2}\, Y$, proportionnel à Y et tel que $X - Z$ soit orthogonal à Y, s'appelle le **projeté orthogonal** de X sur Y.

Propriété du projeté orthogonal.

Le projeté orthogonal Z_0 de X sur Y est le vecteur Z de $\mathbb{R}^n$ proportionnel à Y, qui minimise $\| X - Z \|_\Phi^2$.

Démonstration.

Soit Z un vecteur proportionnel à Y.
Soit $Z_0 = \frac{\langle X|Y\rangle_\Phi}{\|Y\|_\Phi^2}\, Y$ le projeté orthogonal de X sur Y.

$$\| X - Z \|_\Phi^2 = \| X - Z_0 + Z_0 - Z \|_\Phi^2 .$$

Comme Z est proportionnel à Y et que Z_0 est proportionnel à Y, la différence $Z_0 - Z$ est proportionnelle à Y.
Or $X - Z_0$ est orthogonal à Y, donc $X - Z_0$ est orthogonal à $Z_0 - Z$ qui est proportionnel à Y.
Il est résulte que l'on a :

$$\| X - Z \|_\Phi^2 = \| X - Z_0 + Z_0 - Z \|_\Phi^2 = \| X - Z_0 \|_\Phi^2 + \| Z_0 - Z \|_\Phi^2 \geq \| X - Z_0 \|_\Phi^2.$$

Et cette inégalité montre que $\| X - Z \|_\Phi^2$ atteint son minimum lorsque $Z = Z_0$.

4.2. APPROCHE EUCLIDIENNE DE LA REGRESSION.

Considérons une variable statistique quantitative bidimensionnelle (X, Y) à valeurs dans $\mathbb{R}^2$, définie dans une population Ω de taille n.
Elle est définie par l'ensemble des couples $\{ (X(\omega), Y(\omega)) \}_{\omega \in \Omega}$.
$\mathbb{R}^2$ est l'**espace des individus**.
La variable statistique est représentée par un nuage de points dans $\mathbb{R}^2$ et chaque point du nuage statistique représente un individu de la population Ω.

4.2.1. Espace des variables.

Les n valeurs $X(\omega)$ de X pour les n individus de la population peuvent être considérées comme les

coordonnées d'un vecteur de $\mathbb{R}^n$.

Ce vecteur est noté encore $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Les n valeurs $Y(\omega)$ de Y pour les n individus de la population peuvent être considérées comme les coordonnées d'un vecteur de $\mathbb{R}^n$.

Ce vecteur est noté encore $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_i \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.

L'espace $E = \mathbb{R}^n$ apparaît alors comme l'**espace des variables**.
Chaque élément de E peut être considéré comme les valeurs d'une variable statistique quantitative réelle définie sur Ω.

4.2.2. Produit scalaire.

Dans cet espace des variables, la matrice $D_{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \boldsymbol{I}_n$, où $\boldsymbol{I}_n$ est la matrice unité à n lignes et n colonnes, définit un **produit scalaire** :

$$< X \mid Y >_{D_{\frac{1}{n}}} = < X \mid D_{\frac{1}{n}} \mid Y > = \sum_i \frac{1}{n} x_i y_i = \frac{1}{n} \sum_i x_i y_i = \frac{1}{n} < X \mid Y >$$

en notant $< X \mid Y >$ le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$.

On note $\mathbb{1}_n = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ le vecteur dont toutes les coordonnées sont égales à 1.

On l'appelle le **vecteur unité** de $\mathbb{R}^n$.

On remarquera que ce vecteur unité est normé, sa longueur est $\| \mathbb{1}_n \|_{D_{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{n} \sum_i 1 \times 1 = \frac{1}{n} \times n = 1$.

4.2.3. Moyenne d'une variable statistique.

La moyenne $\overline{X}$ de la variable statistique X est donnée par :

$$\overline{X} = \frac{1}{n} \sum_\omega X(\omega) = \frac{1}{n} \sum_i x_i = \frac{1}{n} \sum_i x_i \times 1 = < X \mid D_{\frac{1}{n}} \mid \mathbb{1}_n >. = < X \mid \mathbb{1}_n >_{D_{\frac{1}{n}}}$$

La moyenne de X est le produit scalaire de X par le vecteur unité $\mathbb{1}_n$.

Notons X_0 la variable centrée correspondant à X : pour chaque individu ω de la population, sa valeur est $X(\omega) - \overline{X}$:

$$X_0 = \begin{pmatrix} x_1 - \overline{X} \\ \vdots \\ x_i - \overline{X} \\ \vdots \\ x_n - \overline{X} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} - \overline{X} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = X - \overline{X}\, 1_n .$$

$$\boxed{X = X_0 + \overline{X}\, 1_n = X_0 + < X \mid 1_n >_{D_{\frac{1}{n}}} 1_n}$$

4.2.4. Variance d'une variable statistique.

$$s^2(X) = \overline{X_0^2} = \frac{1}{n} \sum_i (x_i - \overline{X})^2 = < X_0 \mid D_{\frac{1}{n}} \mid X_0 > = \| X_0 \|^2$$

$$\boxed{s^2(X) = \| X_0 \|^2}$$

La variance de X est le carré de la norme de la variable centrée.

4.2.5. Covariance.

La covariance de deux variables quantitatives réelles X et Y définies sur Ω est la moyenne du produit des variables centrées :

$$Cov(X, Y) = \frac{1}{n} \sum_i (x_i - \overline{X})(y_i - \overline{Y}) = < X_0 \mid D_{\frac{1}{n}} \mid Y_0 > = < X_0 \mid Y_0 >_{D_{\frac{1}{n}}}$$

$$\boxed{Cov(X, Y) = < X_0 \mid D_{\frac{1}{n}} \mid Y_0 > = < X_0 \mid Y_0 >_{D_{\frac{1}{n}}}}$$

La covariance est le produit scalaire des variables centrées.

4.2.6. Coefficient de corrélation linéaire.

$$r_{XY} = \frac{Cov[X,Y)}{s[X)\, s[Y)} = \frac{\left\langle X_0 \middle| D_{\frac{1}{n}} \middle| Y_0 \right\rangle}{\|X_0\|_\Phi \|Y_0\|_\Phi} = cos\,(X_0, Y_0)$$

$$\boxed{r_{XY} = cos\,(X_0, Y_0)}$$

Le coefficient de corrélation linéaire est le cosinus de l'angle des variables centrées.

4.2.7. Prédicteur linéaire.

Soient Y la variable à expliquer, X la variable explicative, X_0 et Y_0 les variables centrées.
Le prédicteur linéaire $\Delta_{Y \mid X}$ est $y^* = a + b\,x$ ou $y^* - \overline{Y} = b\,(x - \overline{X})$, soit $y_0^* = b\,x_0$.
Il est représenté par la **droite de régression** de Y en X dans l'espace des individus.

Le coefficient b s'obtient par $b = \frac{Cov[X,Y)}{s^2[X)} = \frac{Cov[X,Y)}{s^2[X_0)} = \frac{\langle X_0 | Y_0 \rangle_{D_{\frac{1}{n}}}}{\|X_0\|^2_{D_{\frac{1}{n}}}}$.

D'après ce qui précède (4.1.2.3.e), $b\,X_0 = \frac{\langle X_0 | Y_0 \rangle_{D_{\frac{1}{n}}}}{\|X_0\|^2_{D_{\frac{1}{n}}}} X_0$ est le projeté orthogonal de Y_0 sur X_0, $Y_0 - b\,X_0$ est orthogonal à X_0 et b est la valeur qui minimise l'expression

$$S^2 = \frac{1}{n} \sum_i (Y_{0i} - b\,X_{0i})^2 = \| Y_0 - b\,X_0 \|^2_{D_{\frac{1}{n}}} = s^2(Y - b\,X) = s^2(Y - a - b\,X) = s^2(Y - Y^*) = s^2(Y_0 - Y_0^*)$$

Le prédicteur linéaire de la variable centrée Y_0 est le projeté orthogonal de Y_0 sur X_0 dans $\mathbb{R}^n$. C'est la variable Y_0^* qui minimise la variance de $Y_0 - Y_0^*$.

Nous avons alors :

$$s^2(Y) = \| Y_0 \|^2_{D_{\frac{1}{n}}} = \| Y_0 - b\,X_0 + b\,X_0 \|^2_{D_{\frac{1}{n}}} = \| Y_0 - b\,X_0 \|^2_{D_{\frac{1}{n}}} + \| b\,X_0 \|^2_{D_{\frac{1}{n}}}$$

$$s^2(Y) = S^2_{min} + b^2 \| X_0 \|^2_{D_{\frac{1}{n}}} = S^2_{min} + \left(\frac{Cov[X,Y)}{s^2[X)} \right)^2 s^2(X) = S^2_{min} + \left(\frac{Cov[X,Y)}{s[X)\,s[Y)} \right)^2 s^2(Y)$$

$$s^2(Y) = S^2_{min} + r_{XY}^2\, s^2(Y).$$

Nous retrouvons la variance résiduelle S^2_{min} et la variance expliquée par la régression $r_{XY}^2\, s^2(Y)$.

De façon symétrique, si X est la variable explicative et Y la variable explicative, nous aurons une expression :

$$s^2(X) = S'^2_{min} + r_{XY}^2\, s^2(X).$$

avec la variance résiduelle S'^2_{min} et la variance expliquée par la régression $r_{XY}^2\, s^2(X)$.

4. 3. REGRESSION ORTHOGONALE. AXE PRINCIPAL.

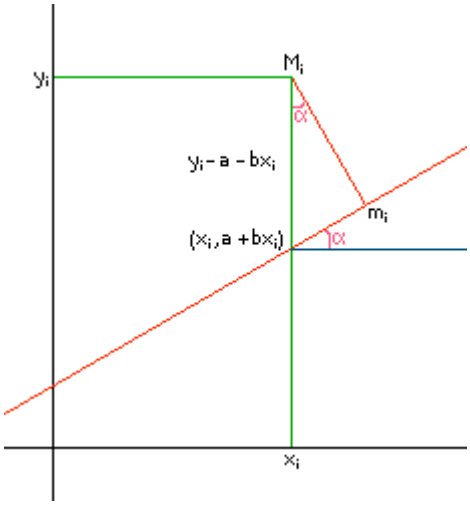
Soit $\mathbb{R}^2$ l'espace des individus, muni du produit scalaire canonique et de la base canonique $\{e_1, e_2\}$ qui, on l'a vu, est orthonormée pour ce produit scalaire.
Si aucune des variables statistiques, *X* ou *Y* ne peut s'interpréter par rapport à l'autre, il n'y a pas de raison de privilégier la régression linéaire de *Y* par rapport à *X* ou la régression linéaire de *X* par rapport à *Y*.
Nous sommes alors conduits à un autre point de vue, celui de la **réduction des données**.

4.3.1. Introduction.

Nous cherchons alors dans $\mathbb{R}^2$ une droite (*D*) qui minimise la somme $S_\perp{}^2$ des carrés des distances des points du nuage de points à la droite.
La solution est donnée par la **droite de régression orthogonale**.

a) Calcul du terme constant *a*.

L'équation de la droite de régression orthogonale est de la forme $y = a + b\,x$.



b est la tangente de l'angle de la droite avec l'axe des abscisses : $b = tan\ \alpha$.

$$\| M_i m_i \|^2 = cos^2 \alpha\, (y_i - a - b\,x_i)^2 = \frac{1}{1+b^2}\,(y_i - a - b\,x_i)^2$$

En introduisant le point moyen $(\overline{X}, \overline{Y})$, on peut écrire :

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=n} \| M_i m_i \|^2 = \frac{1}{1+b^2} \times \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=n} (y_i - \overline{Y} - b\,(x_i - \overline{X}) + (\overline{Y} - a - b\,\overline{X}))^2$$

$$= \frac{1}{1+b^2} \times \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=n} (y_i - \overline{Y} - b\,(x_i - \overline{X}))^2 + \frac{1}{1+b^2}\,(\overline{Y} - a - b\,\overline{X})^2$$

$$+ 2\,\frac{1}{1+b^2} \times (\overline{Y} - a - b\,\overline{X})\,\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=n} (y_i - \overline{Y} - b\,(x_i - \overline{X})$$

Les relations $\overline{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=n} y_i$ et $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=n} x_i$ entraînent que le dernier terme de la somme est nul.

Il reste :

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=n} \| M_i m_i \|^2 = \frac{1}{1+b^2} \times \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=n} (y_i - \overline{Y} - b\,(x_i - \overline{X}))^2 + \frac{1}{1+b^2}\,(\overline{Y} - a - b\,\overline{X})^2$$

Quel que soit la valeur de *b*, cette somme sera la plus petite possible lorsque le deuxième terme est nul : $\overline{Y} = a + b\,\overline{X}$.
Ce résultat signifie que **le point moyen est sur la droite de régression orthogonale** et que, lorsque *b* est connu, le terme constant *a* est donné par :

$$\boxed{a = \overline{Y} - b\,\overline{X}}$$

Puisque le point moyen $G = (\overline{X}, \overline{Y})$ est sur la droite de régression orthogonale, nous le prendrons comme **origine** dans $\mathbb{R}^2$.
La droite de régression orthogonale a une équation de la forme

$$y_0 = b\, x_0,$$

avec $y_0 = y - \overline{Y}$ et $x_0 = x - \overline{X}$.

b) Analyse en composantes principales (ACP).

En fait, la forme de la relation précédente fait disparaître la symétrie initiale entre les rôles de X et Y : ce n'est pas sous cette forme que nous exprimerons l'équation de la droite (D) de régression orthogonale.

Etant donnée une droite (D) passant par l'origine G, on considère plutôt le vecteur unitaire de $\mathbb{R}^2$ orthogonal à la droite (D) :

$$u_1 = \begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}, \text{ avec } \alpha^2 + \beta^2 = 1.$$

Le vecteur unitaire u porté par la droite (D) est $u = \begin{pmatrix}\beta\\ -\alpha\end{pmatrix}$.

La droite (D) est l'ensemble des points $M = (x, y)$ vérifiant $< u_1 \mid \overrightarrow{GM} > = 0$, soit $\alpha\, x_0 + \beta\, y_0 = 0$.

Etant donné un point M_i du nuage de points et sa projection orthogonale m_i sur la droite D, le vecteur $\overrightarrow{Gm_i}$ est le projeté orthogonal de $\overrightarrow{GM_i}$ sur le vecteur u : $\overrightarrow{Gm_i} = < \overrightarrow{GM_i} \mid u > u = (\beta\, x_{i0} - \alpha\, y_{i0}) \begin{pmatrix}\beta\\ -\alpha\end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{m_i M_i} = \overrightarrow{GM_i} - \overrightarrow{Gm_i} = \begin{pmatrix}x_{i0}\\ y_{i0}\end{pmatrix} - (\beta\, x_{i0} - \alpha\, y_{i0}) \begin{pmatrix}\beta\\ -\alpha\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}(1-\beta^2)\, x_{i0} + \alpha\beta\, y_{i0}\\ \alpha\beta\, x_{i0} + (1-\alpha^2)\, y_{i0}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha^2\, x_{i0} + \alpha\beta\, y_{i0}\\ \alpha\beta\, x_{i0} + \beta^2\, y_{i0}\end{pmatrix} = (\alpha\, x_{i0} + \beta\, y_{i0}) \begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$$

$$\| \overrightarrow{m_i M_i} \|^2 = (\alpha\, x_{i0} + \beta\, y_{i0})^2\, (\alpha\ \beta) \begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} = (\alpha\, x_{i0} + \beta\, y_{i0})^2\, (\alpha^2 + \beta^2) = (\alpha\, x_{i0} + \beta\, y_{i0})^2$$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=n} \| M_i\, m_i \|^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=n} (\alpha\, x_{i0} + \beta\, y_{i0})^2 = < \alpha\, X_0 + \beta\, Y_0 \mid D_{\frac{1}{n}} \mid \alpha\, X_0 + \beta\, Y_0 > = \| \alpha\, X_0 + \beta\, Y_0 \|^2_{D_{\frac{1}{n}}}.$$

La recherche de la droite de régression orthogonale se ramène donc à une question que l'on peut envisager d'un double point de vue :

— soit rechercher, dans l'espace des individus $\mathbb{R}^2$, un vecteur unitaire $u_1 = \begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$, avec $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, qui minimise la somme

$$S_\perp^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=n} \| M_i\, m_i \|^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=n} (\alpha\, x_{i0} + \beta\, y_{i0})^2,$$

— soit rechercher, dans l'espace des variables $\mathbb{R}^n$, un vecteur $\alpha\, X_0 + \beta\, Y_0$, combinaison linéaire fictive des deux variables centrées X_0 et Y_0, avec $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, qui minimise $\| \alpha\, X_0 + \beta\, Y_0 \|^2_{D_{\frac{1}{n}}}$, c'est-à-dire un vecteur de l'hyperplan défini par X_0 et Y_0, de norme minimum pour le produit scalaire défini par la matrice diagonale $D_{\frac{1}{n}}$, sous la contrainte $\alpha^2 + \beta^2 = 1$.

Sous la deuxième forme, la résolution du problème est appelée l'**analyse en composantes principales**.

4.3.2. Définitions.

Appellons Z la matrice $\begin{pmatrix} x_{10} & y_{10} \\ \vdots & \vdots \\ x_{n0} & y_{n0} \end{pmatrix}$ des variables centrées,

a) Inertie totale.

On appelle inertie totale du nuage de points de $\mathbb{R}^2$ par rapport à l'origine G des axes, la quantité :

$$I_T = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=n} \| \overrightarrow{GM_i} \|^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=n} (x_{i0}^2 + y_{i0}^2) = s^2(X) + s^2(Y).$$

b) Inertie statistique.

On appelle inertie statistique du nuage de points de $\mathbb{R}^2$ par rapport à une direction Δ de $\mathbb{R}^2$ définie par un vecteur unitaire u, la quantité :

$$I_S(u) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=n} \| \overrightarrow{Gm_i} \|^2$$

où $\overrightarrow{Gm_i}$ est le projeté orthogonal de $\overrightarrow{GM_i}$ sur u.

Le rapport $\frac{I_S(u)}{I_T}$ est le **taux d'inertie totale expliquée par la direction u**.

Par exemple, l'inertie statistique du nuage de points par rapport à l'axe des x est la variance de X et l'inertie statistique du nuage de points par rapport à l'axe des y est la variance de Y.

c) Inertie mécanique.

On appelle inertie mécanique du nuage de points de $\mathbb{R}^2$ par rapport à une direction Δ définie par un vecteur unitaire u, la quantité :

$$I_M(u) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=n} \| \overrightarrow{m_i M_i} \|^2$$

où $\overrightarrow{Gm_i}$ est le projeté orthogonal de $\overrightarrow{GM_i}$ sur u.

Par exemple, l'inertie mécanique du nuage de points par rapport à l'axe des x est la variance de Y et l'inertie mécanique du nuage de points par rapport à l'axe des y est la variance de X.

Le théorème de Pythagore $\| \overrightarrow{GM_i} \|^2 = \| \overrightarrow{Gm_i} \|^2 + \| \overrightarrow{m_i M_i} \|^2$ entraîne :

$$I_M(u) = I_T - I_S(u).$$

d) Axes principaux, ou factoriels.

On appelle **premier axe factoriel** du nuage de points de $\mathbb{R}^2$, l'axe dont la direction définie par un vecteur unitaire u maximise l'inertie statistique $I_S(u)$.

La direction définie par le vecteur *u* est appelée la **direction principale**, ou **direction factorielle**.

On remarquera que, comme le premier axe factoriel maximise $I_S(u)$, il minimise $I_M(u)$: il donne donc la solution de notre problème, c'est-à-dire la droite de régression orthogonale.

e) Matrice des variances-covariances.

Pour $u = \begin{pmatrix} \beta \\ -\alpha \end{pmatrix}$, l'inertie statistique $I_S(u) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=n} \| \overrightarrow{Gm_i} \|^2$ s'écrit, avec $\overrightarrow{Gm_i} = < \overrightarrow{GM_i} \mid u > u = (\beta x_{i0} - \alpha y_{i0}) \begin{pmatrix} \beta \\ -\alpha \end{pmatrix}$, sous la forme :

$$I_S(u) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=n} (\beta x_{i0} - \alpha y_{i0})^2 = \beta^2 \times \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=n} x_{i0}^2 + \alpha^2 \times \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=n} y_{i0}^2 - 2 \alpha \beta \times \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=n} x_{i0} y_{i0}$$

Et comme on sait que :

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=n} x_{i0}^2 = s^2(X), \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=n} y_{i0}^2 = s^2(Y), \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=n} x_{i0} y_{i0} = Cov(X, Y),$$

l'inertie statistique devient :

$$I_S(u) = \beta^2 s^2(X) + \alpha^2 s^2(Y) - 2 \alpha \beta Cov(X, Y) = (\beta - \alpha) \begin{pmatrix} s^2[X] & Cov[X,Y] \\ Cov[X,Y] & s^2[Y] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta \\ -\alpha \end{pmatrix} = {}^t u A u$$

La matrice

$$A = \begin{pmatrix} s^2[X] & Cov[X,Y] \\ Cov[X,Y] & s^2[Y] \end{pmatrix} = \frac{1}{n} \begin{pmatrix} x_{10} & \cdots & x_{n0} \\ y_{10} & \cdots & y_{n0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{10} & y_{10} \\ \vdots & \vdots \\ x_{n0} & y_{n0} \end{pmatrix}$$

s'appelle la **matrice des variances-covariances**.

En introduisant la matrice $Z = \begin{pmatrix} x_{10} & y_{10} \\ \vdots & \vdots \\ x_{n0} & y_{n0} \end{pmatrix}$ des variables centrées, la matrice des variances-covariances s'écrit sous les formes :

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} s^2[X] & Cov[X,Y] \\ Cov[X,Y] & s^2[Y] \end{pmatrix} = \frac{1}{n} \begin{pmatrix} x_{10} & \cdots & x_{n0} \\ y_{10} & \cdots & y_{n0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{10} & y_{10} \\ \vdots & \vdots \\ x_{n0} & y_{n0} \end{pmatrix} = \frac{1}{n} {}^t Z Z = {}^t Z D_{\frac{1}{n}} Z}$$

et l'inertie totale est la trace de cette matrice, somme des éléments diagonaux $s^2(X)$ et $s^2(Y)$:

$$I_T = Tr(A)$$

1 e remarque : valeurs propres.

La matrice des variances-covariances *A* est, comme on le voit, symétrique réelle.
Une valeur propre de *A* est un nombre réel λ tel qu'il existe un vecteur *v* non nul vérifiant $A v = \lambda v$.
Les valeurs propres de *A* sont donc les nombres réels λ tels que le noyau de l'endomorphisme

(application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$) défini par la matrice $A - \lambda \boldsymbol{I}_2$ ne soit pas réduit à 0.
Dire que le noyau n'est pas réduit à 0, c'est dire que l'application linéaire n'est pas injective, donc qu'elle n'est pas bijective (puisque, dans $\mathbb{R}^2$, injective = bijective) : pour cela, il faut et il suffit que son déterminant soit nul.
Les valeurs propres sont donc les solutions de l'équation :

$$Dét\,(A - \lambda \boldsymbol{I}_2) = 0$$
$$\lambda^2 - (s^2(X) + s^2(Y))\,\lambda + s^2(X)\,s^2(Y) - (Cov(X, Y))^2 = 0$$

Le discriminant de cette équation du deuxième degré est :

$$(s^2(X) + s^2(Y))^2 - 4\,(s^2(X)\,s^2(Y) - (Cov(X, Y))^2) = (s^2(X) - s^2(Y))^2 + 4\,(Cov(X, Y))^2 \geq 0$$

La matrice A possède donc, ainsi qu'on l'avait déjà dit pour toute matrice symétrique réelle, deux valeurs propres réelles λ_1 et λ_2 :
— la somme de ces valeurs propres est la **trace** de la matrice, somme des éléments de la première diagonale :
$\lambda_1 + \lambda_2 = s^2(X) + s^2(Y) \geq 0$.
— le produit de ces valeurs propres est le **déterminant** de la matrice :
$\lambda_1\,\lambda_2 = s^2(X)\,s^2(Y) - (Cov(X, Y))^2 \geq 0$ (d'après l'inégalité de Schwarz).

Les deux valeurs propres de la matrice des variances-covariances sont donc des nombres réels positifs : il est très improbable que l'une soit nulle (il faudrait, pour cela, que le coefficient de corrélation linéaire soit rigoureusement égal à 1, en valeur absolue, ce qui ne saurait se produire que si X et Y sont déduits l'un de l'autre par une relation linéaire, ou si X et Y sont constantes. Il est très improbable aussi que les deux valeurs propres soient égales : il faudrait pour cela que la covariance de X et Y soit strictement égale à 0 et que les variances de X et Y soient strictement égales, ce qui ne se produit jamais en pratique.

Dans le cas général, on peut donc appeler λ_1 et λ_2 les **valeurs propres de la matrice des variances-covariances**, rangées par ordre décroissant :

$$\lambda_1 > \lambda_2 > 0.$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}\left(s^2(X) + s^2(Y) + \sqrt{\left[s^2(X) - s^2(Y)\right]^2 + 4\left[Cov(X,Y)\right]^2} \right)$$
$$\lambda_2 = \frac{1}{2}\left(s^2(X) + s^2(Y) - \sqrt{\left[s^2(X) - s^2(Y)\right]^2 + 4\left[Cov(X,Y)\right]^2} \right)$$

2e remarque : vecteurs propres.

On démontre aussi, en algèbre, que $\mathbb{R}^2$ possède une **base propre orthonormée**, c'est-à-dire une base $\{ u_1, u_2 \}$, orthonormée pour le produit scalaire canonique, formée de vecteurs propres de la matrice A :

$$A\,u_1 = \lambda_1\,u_1 \text{ et } A\,u_2 = \lambda_2\,u_2,$$

avec

$$\| u_1 \|^2 = 1, \| u_2 \|^2 = 1, < u_1 \mid u_2 > = 0.$$

Ces vecteurs propres peuvent se calculer.
Soit λ une valeur propre. On a :

$$\begin{pmatrix} s^2[X]-\lambda & Cov[X,Y] \\ Cov[X,Y] & s^2[Y]-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s^2[Y]-\lambda \\ -Cov[X,Y] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (s^2[X]-\lambda)(s^2[Y]-\lambda)-(Cov[X,Y])^2 \\ (s^2[Y]-\lambda)Cov[X,Y]-(s^2[Y]-\lambda)Cov[X,Y] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Det(A-\lambda I_2) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

donc le vecteur $\begin{pmatrix} s^2[Y]-\lambda \\ -Cov[X,Y] \end{pmatrix}$ est un **vecteur propre pour la valeur propre λ**.
Le carré de la norme de ce vecteur pour le produit scalaire canonique est donné par :

$$(s^2(Y)-\lambda \quad -Cov(X,Y))\begin{pmatrix} s^2[Y]-\lambda \\ -Cov[X,Y] \end{pmatrix} = (s^2(Y)-\lambda)^2 + (Cov(X,Y))^2$$

On peut donc prendre pour vecteur normé relatif à la valeur propre λ, le vecteur

$$u = \frac{1}{\sqrt{(s^2[Y]-\lambda)^2+(Cov[X,Y])^2}}\begin{pmatrix} s^2[Y]-\lambda \\ -Cov[X,Y] \end{pmatrix}$$

Le produit scalaire des deux vecteurs propres ainsi obtenu est nul, parce que la relation $\lambda_1 + \lambda_2 = s^2(X) + s^2(Y)$ entraîne :

$$(s^2(Y)-\lambda_1 \quad -Cov(X,Y))\begin{pmatrix} s^2[Y]-\lambda_2 \\ -Cov[X,Y] \end{pmatrix} = (\lambda_2 - s^2(X) \quad -Cov(X,Y))\begin{pmatrix} s^2[Y]-\lambda_2 \\ -Cov[X,Y] \end{pmatrix} = -Dét(A-\lambda_2 \boldsymbol{I}_2) = 0$$

Les deux vecteurs $\begin{pmatrix} s^2[Y]-\lambda_1 \\ -Cov[X,Y] \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} s^2[Y]-\lambda_2 \\ -Cov[X,Y] \end{pmatrix}$ forment une base de $\mathbb{R}^2$ parce que le déterminant de leurs coordonnées n'est pas nul :

$$-Cov(X,Y)\times(s^2(Y)-\lambda_1) + Cov(X,Y)\times(s^2(Y)-\lambda_2) = Cov(X,Y)\times(\lambda_1-\lambda_2) \neq 0$$

de sorte que les deux vecteurs ne sont pas proportionnels.

Les deux vecteurs :

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{(s^2[Y]-\lambda_1)^2+(Cov[X,Y])^2}}\begin{pmatrix} s^2[Y]-\lambda_1 \\ -Cov[X,Y] \end{pmatrix}$$
$$u_2 = \frac{1}{\sqrt{(s^2[Y]-\lambda_2)^2+(Cov[X,Y])^2}}\begin{pmatrix} s^2[Y]-\lambda_2 \\ -Cov[X,Y] \end{pmatrix}$$

forment donc une **base propre orthonormée** de $\mathbb{R}^2$.

Remarquons que, au lieu de prendre pour vecteur propre pour la valeur propre λ, le vecteur $\begin{pmatrix} s^2[Y]-\lambda \\ -Cov[X,Y] \end{pmatrix}$, on aurait pu prendre aussi le vecteur $\begin{pmatrix} -Cov[X,Y] \\ s^2[X]-\lambda \end{pmatrix}$ qui lui est proportionnel (le déterminant de la matrice de ces vecteurs est le déterminant de la matrice $A - \lambda \boldsymbol{I}_2$).

4.3.3. Diagonalisation de la matrice des variances-covariances.

Soit $V = \begin{pmatrix} \frac{s^2[Y]-\lambda_1}{\sqrt{(s^2[Y]-\lambda_1)^2+(Cov[X,Y])^2}} & \frac{s^2[Y]-\lambda_2}{\sqrt{(s^2[Y]-\lambda_2)^2+(Cov[X,Y])^2}} \\ \frac{-Cov[X,Y]}{\sqrt{(s^2[Y]-\lambda_1)^2+(Cov[X,Y])^2}} & \frac{-Cov[X,Y]}{\sqrt{(s^2[Y]-\lambda_2)^2+(Cov[X,Y])^2}} \end{pmatrix}$ la matrice des coordonnées des vecteurs propres u_1 et u_2.

$$V\,e_1 = u_1,\ V\,e_2 = u_2.$$

V donne, par produits, pour image d'une base orthonormée, une base orthonormée : c'est ce qu'on appelle une matrice "orthogonale", ce qui veut dire que son inverse est égale à sa transposée :

$$\boxed{V^{-1} = {}^tV}$$

Pour le vérifier, remarquons que, puisque les bases $\{ e_1, e_2 \}$ et $\{ u_1, u_2 \}$ sont orthonormées, les coordonnées des vecteurs s'obtiennent par produits scalaires :

$$u_1 = < u_1 \mid e_1 > e_1 + < u_1 \mid e_2 > e_2$$
$$u_2 = < u_2 \mid e_1 > e_1 + < u_2 \mid e_2 > e_2$$

de sorte que la matrice V, qui a, pour colonnes, les vecteurs u_1 et u_2 dans la base $\{ e_1, e_2 \}$, est :

$$V = \begin{pmatrix} \langle u_1 | e_1 \rangle & \langle u_2 | e_1 \rangle \\ \langle u_1 | e_2 \rangle & \langle u_2 | e_2 \rangle \end{pmatrix}$$

et les relations inverses :

$$e_1 = < e_1 \mid u_1 > u_1 + < e_1 \mid u_2 > u_2$$
$$e_2 = < e_2 \mid u_1 > u_1 + < e_2 \mid u_2 > u_2$$

montrent que la matrice inverse de V est la matrice :

$$V^{-1} = \begin{pmatrix} \langle e_1 | u_1 \rangle & \langle e_2 | u_1 \rangle \\ \langle e_1 | u_2 \rangle & \langle e_2 | u_2 \rangle \end{pmatrix}$$

qui, compte tenu de la symétrie du produit scalaire, est la transposée de V.

$$V^{-1} = \begin{pmatrix} \langle u_1 | e_1 \rangle & \langle u_1 | e_2 \rangle \\ \langle u_2 | e_1 \rangle & \langle u_2 | e_2 \rangle \end{pmatrix} = {}^t V$$

Il résulte alors des relations $V\,e_1 = u_1$ et $V\,e_2 = u_2$, que l'on a :

$${}^tV\,u_1 = V^{-1}\,u_1 = e_1\ ;\ {}^t V\,u_2 = V^{-1}\,u_2 = e_2$$

Considérons maintenant la matrice $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, matrice diagonale des valeurs propres de A.

A est la matrice, dans la base canonique $\{ e_1, e_2 \}$, d'un endomorphisme f.
Cet endomorphisme f se réduit à deux homothéties, de rapport λ_1 selon le vecteur u_1, et de rapport λ_2 selon le vecteur u_2.
Λ est donc la matrice, dans la base propre $\{ u_1, u_2 \}$, de l'endomorphisme f.
La matrice de l'application identique de $\mathbb{R}^2$ muni de la base $\{ u_1, u_2 \}$ dans $\mathbb{R}^2$ muni de la base $\{ e_1, e_2 \}$ donne, par produits, pour image du vecteur $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ le vecteur $u_1 = \frac{1}{\sqrt{(s^2[Y]-\lambda_1)^2+(Cov[X,Y])^2}} \begin{pmatrix} s^2[Y]-\lambda_1 \\ -Cov[X,Y] \end{pmatrix}$ et, pour image du vecteur $u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ le vecteur $u_2 = \frac{1}{\sqrt{(s^2[Y]-\lambda_2)^2+(Cov[X,Y])^2}} \begin{pmatrix} s^2[Y]-\lambda_2 \\ -Cov[X,Y] \end{pmatrix}$. C'est donc la matrice V des vecteurs propres.

$$V = [\, Id_{\mathbb{R}^2}, \{ u_1, u_2 \}, \{ e_1, e_2 \}].$$

Réciproquement, la matrice de l'application identique de $\mathbb{R}^2$ muni de la base $\{ e_1, e_2 \}$ dans $\mathbb{R}^2$ muni de la base $\{ u_1, u_2 \}$ donne, par produits, pour image du vecteur $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ le vecteur $e_1 = \begin{pmatrix} \frac{s^2[Y]-\lambda_1}{\sqrt{(s^2[Y]-\lambda_1)^2+(Cov[X,Y])^2}} \\ \frac{s^2[Y]-\lambda_2}{\sqrt{(s^2[Y]-\lambda_2)^2+(Cov[X,Y])^2}} \end{pmatrix}$ et, pour image du vecteur $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ le vecteur $e_2 = \begin{pmatrix} \frac{-Cov[X,Y]}{\sqrt{(s^2[Y]-\lambda_1)^2+(Cov[X,Y])^2}} \\ \frac{-Cov[X,Y]}{\sqrt{(s^2[Y]-\lambda_2)^2+(Cov[X,Y])^2}} \end{pmatrix}$. C'est donc la matrice ${}^tV$ transposée et inverse de la matrice V des vecteurs propres.

$$ {}^tV = [\, Id_{\mathbb{R}^2}, \{ e_1, e_2 \}, \{ u_1, u_2 \}].$$

Le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2, \{ e_1, e_2 \} & \xrightarrow[A]{f} & \mathbb{R}^2, \{ e_1, e_2 \} \\ Id \uparrow {}^tV & & Id \downarrow V \\ \mathbb{R}^2, \{ u_1, u_2 \} & \xrightarrow[\Lambda]{f} & \mathbb{R}^2, \{ u_1, u_2 \} \end{array}$$

met en évidence la relation $f = Id \circ f \circ Id$.
En termes de produit de matrices, cette relation s'écrit :

$$\Lambda = V A {}^tV,$$

d'où l'on déduit aussitôt

$$A = {}^tV \Lambda V.$$

On dit qu'on a **diagonalisé la matrice** A.

4.3.4. Recherche des axes principaux.

Pour un vecteur normé u, posons $v = V u$.
On a ${}^tv = {}^tu\ {}^tV$.

$$\| v \|^2 = {}^tv\, v = {}^tu\ {}^tV\, V u = {}^tu\, u = \| u \|^2 = 1.$$

Le vecteur v est normé lui aussi.

L'inertie statistique par rapport à u s'écrit :

$$I_S(u) = {}^tu\, A\, u = {}^tu\ {}^tV \Lambda\, V u = {}^tv \Lambda\, v.$$

Dans $\mathbb{R}^2$ rapporté à la base $\{ u_1, u_2 \}$, notons $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$.

$$I_S(u) = {}^tv \Lambda\, v = (v_1 \quad v_2) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \lambda_1 v_1^2 + \lambda_2 v_2^2,$$
$$\text{avec } v_1^2 + v_2^2 = 1$$

Le problème de la recherche de la droite de régression orthogonale se ramène maintenant à la résolution du problème suivant :

Maximiser $\lambda_1 v_1^2 + \lambda_2 v_2^2$, sous la contrainte $v_1^2 + v_2^2 = 1$, avec $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$.

C'est maintenant un problème facile à résoudre :

$$I_S(u) = \lambda_1 v_1^2 + \lambda_2 v_2^2 = \lambda_1 (1 - v_2^2) + \lambda_2 v_2^2 = \lambda_1 - (\lambda_1 - \lambda_2) v_2^2$$

La quantité $\lambda_1 - (\lambda_1 - \lambda_2) v_2^2$ avec $\lambda_1 > \lambda_2$ atteint sa valeur maximum λ_1 lorsqu'on prend $v_2 = 0$, donc $| v_1 | = 1$.
La direction du premier axe factoriel est donc définie par le vecteur v de coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ dans la base $\{ u_1, u_2 \}$: $v = u_1$.

$$I_S(u_1) = \lambda_1$$

D'où le résultat, qu'on peut énoncer sous forme de **théorème** :

La direction du premier axe factoriel est définie par le vecteur propre associé à la plus grande valeur propre de la matrice des variances-covariances.

Le premier axe factoriel est la **droite de régression orthogonale**.

Comme **corollaire**, la direction perpendiculaire au premier axe factoriel définit le **deuxième axe**

factoriel : elle est définie par le vecteur propre associé à la plus petite valeur propre de la matrice des variances-covariances.
Le deuxième axe factoriel minimise l'inertie statistique $I_S(u)$: $I_S(u) = \lambda_2$ lorsque $|v_2| = 1$, donc $v_1 = 0$ et $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = u_2$ par exemple (on pourrait prendre aussi, bien sûr, $v = -u_2$, la direction définie serait la même).

$$I_S(u_2) = \lambda_2$$

Le taux d'inertie totale expliquée par le premier axe factoriel est le rapport $\frac{I_S(u_1)}{I_T} = \frac{\lambda_1}{s^2(X)+s^2(Y)} = \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}$.
Le taux d'inertie totale expliquée par le deuxième axe factoriel est le rapport $\frac{I_S(u_2)}{I_T} = \frac{\lambda_2}{s^2(X)+s^2(Y)} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}$.

La relation $\lambda_1 + \lambda_2 = s^2(X) + s^2(Y)$ (la somme des valeurs propres est la trace de la matrice des variances-covariances) s'écrit :

$$I_S(u_1) + I_S(u_2) = I_T.$$

La somme des inerties statistiques par rapport aux deux axes factoriels est l'inertie totale du nuage de points.
Chaque valeur propre de la matrice des variances-covariances correspond à l'inertie expliquée par l'axe factoriel correspondant.

4.3.5. Coordonnées factorielles et composantes principales.

Dans $\mathbb{R}^2$ rapporté à la base propre orthonormée $\{ u_1, u_2 \}$, les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{GM_i}$ s'appellent les **coordonnées factorielles**.
Comme la base $\{ u_1, u_2 \}$ est orthonormée, les coordonnées factorielles s'obtiennent par produit scalaire :

$$\overrightarrow{GM_i} = \langle \overrightarrow{GM_i} \mid u_1 \rangle u_1 + \langle \overrightarrow{GM_i} \mid u_2 \rangle u_2$$

Or la base canonique $\{ e_1, e_2 \}$ est, elle-même, orthonormée et l'on a, par conséquent :

$$\overrightarrow{GM_i} = \langle \overrightarrow{GM_i} \mid e_1 \rangle e_1 + \langle \overrightarrow{GM_i} \mid e_2 \rangle e_2 = x_{i0}\, e_1 + y_{i0}\, e_2$$

d'où :

$$\langle \overrightarrow{GM_i} \mid u_1 \rangle = x_{i0} \langle e_1 \mid u_1 \rangle + y_{i0} \langle e_2 \mid u_1 \rangle$$
$$\langle \overrightarrow{GM_i} \mid u_2 \rangle = x_{i0} \langle e_1 \mid u_2 \rangle + y_{i0} \langle e_2 \mid u_2 \rangle$$

Les coordonnées factorielles s'obtiennent donc par la formule matricielle :

$$\begin{pmatrix} \langle \overrightarrow{GM_i} | u_1 \rangle \\ \langle \overrightarrow{GM_i} | u_2 \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle e_1 | u_1 \rangle & \langle e_2 | u_1 \rangle \\ \langle e_1 | u_2 \rangle & \langle e_2 | u_2 \rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{i0} \\ y_{i0} \end{pmatrix} = {}^tV \begin{pmatrix} \langle \overrightarrow{GM_i} | e_1 \rangle \\ \langle \overrightarrow{GM_i} | e_2 \rangle \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} \langle \overrightarrow{GM_i} | u_1 \rangle \\ \langle \overrightarrow{GM_i} | u_2 \rangle \end{pmatrix} = {}^tV \begin{pmatrix} \langle \overrightarrow{GM_i} | e_1 \rangle \\ \langle \overrightarrow{GM_i} | e_2 \rangle \end{pmatrix} = {}^tV \begin{pmatrix} x_{i0} \\ y_{i0} \end{pmatrix}}$$

La matrice ${}^tV$ est ce qu'on appelle la **matrice du changement de base**.
Elle donne les nouvelles coordonnées (sur la base $\{ u_1, u_2 \}$) en fonction des anciennes (sur la base $\{ e_1, e_2 \}$).

Nous avons vu plus haut que cette matrice est la matrice de l'application identique, de $\mathbb{R}^2$ muni de la base $\{ u_1, u_2 \}$ dans $\mathbb{R}^2$ muni de la base $\{ e_1, e_2 \}$.

Les relations :

$$(< \overrightarrow{GM_i} \mid u_1 > \quad < \overrightarrow{GM_i} \mid u_2 >) = \begin{pmatrix} \langle \overrightarrow{GM_i} | u_1 \rangle \\ \langle \overrightarrow{GM_i} | u_2 \rangle \end{pmatrix} = {}^t\left({}^tV \begin{pmatrix} x_{i0} \\ y_{i0} \end{pmatrix} \right) = (x_{i0} \quad y_{i0})\, V, \text{ pour } i \in \{ 1, \ldots, n \},$$

peuvent se condenser en une seule formule matricielle :

$$\boxed{L = Z\, V}$$

formule dans laquelle :

$$L = \begin{pmatrix} \langle \overrightarrow{GM_1} | u_1 \rangle & \langle \overrightarrow{GM_1} | u_2 \rangle \\ \vdots & \vdots \\ \langle \overrightarrow{GM_n} | u_1 \rangle & \langle \overrightarrow{GM_n} | u_2 \rangle \end{pmatrix}$$

est la matrice, à *n* lignes et 2 colonnes, dont les lignes sont les coordonnées factorielles du nuage de points dans $\mathbb{R}^2$ muni de la base $\{ u_1, u_2 \}$,

$$Z = \begin{pmatrix} x_{10} & y_{10} \\ \vdots & \vdots \\ x_{n0} & y_{n0} \end{pmatrix}$$

est la matrice, à *n* lignes et 2 colonnes, dont les colonnes sont les variables centrées $X - \overline{X}$ et $Y - \overline{Y}$,

$$V = \begin{pmatrix} \dfrac{s^2[Y] - \lambda_1}{\sqrt{(s^2[Y] - \lambda_1)^2 + (Cov[X,Y])^2}} & \dfrac{s^2[Y] - \lambda_2}{\sqrt{(s^2[Y] - \lambda_2)^2 + (Cov[X,Y])^2}} \\ \dfrac{-Cov[X,Y]}{\sqrt{(s^2[Y] - \lambda_1)^2 + (Cov[X,Y])^2}} & \dfrac{-Cov[X,Y]}{\sqrt{(s^2[Y] - \lambda_2)^2 + (Cov[X,Y])^2}} \end{pmatrix}$$

est la matrice des coordonnées des vecteurs propres orthonormés $\{ u_1, u_2 \}$ de la matrice des

variances-covariances, dans la base canonique $\{ e_1, e_2 \}$.

Les deux colonnes de la matrice L sont des éléments de l'espace des variables $\mathbb{R}^n$: on les appelle les **composantes principales** de la variable statistique (X, Y).

La première colonne de la matrice V est le vecteur propre u_1.
La première colonne de la matrice $L = Z\,V$ est donc le vecteur $L_1 = Z\,u_1$.
De même, la deuxième colonne de la matrice L est le vecteur $L_2 = Z\,u_2$.
Les deux composantes principales L_1 et L_2 de la variable statistique (X, Y) s'obtiennent ainsi par les formules :

$$L_1 = \begin{pmatrix} x_{10} & y_{10} \\ \vdots & \vdots \\ x_{n0} & y_{n0} \end{pmatrix} u_1 = \frac{1}{\sqrt{\left(s^2[Y]-\lambda_1\right)^2 + \left(Cov[X,Y]\right)^2}} \begin{pmatrix} x_{10} & y_{10} \\ \vdots & \vdots \\ x_{n0} & y_{n0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s^2[Y]-\lambda_1 \\ -Cov[X,Y] \end{pmatrix}$$

$$L_2 = \begin{pmatrix} x_{10} & y_{10} \\ \vdots & \vdots \\ x_{n0} & y_{n0} \end{pmatrix} u_2 = \frac{1}{\sqrt{\left(s^2[Y]-\lambda_2\right)^2 + \left(Cov[X,Y]\right)^2}} \begin{pmatrix} x_{10} & y_{10} \\ \vdots & \vdots \\ x_{n0} & y_{n0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s^2[Y]-\lambda_2 \\ -Cov[X,Y] \end{pmatrix}$$

avec les valeurs propres λ_1 et λ_2 de la matrice

$$A = \frac{1}{n} \begin{pmatrix} x_{10} & \cdots & x_{n0} \\ y_{10} & \cdots & y_{n0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{10} & y_{10} \\ \vdots & \vdots \\ x_{n0} & y_{n0} \end{pmatrix} = \frac{1}{n}\,{}^t Z\,Z = {}^t Z\,D_{\frac{1}{n}}\,Z = \begin{pmatrix} s^2[X] & Cov[X,Y] \\ Cov[X,Y] & s^2[Y] \end{pmatrix}$$

des variances-covariances :

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}\left(s^2(X) + s^2(Y) + \sqrt{\left(s^2[X]-s^2[Y]\right)^2 + 4\left(Cov[X,Y]\right)^2} \right)$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2}\left(s^2(X) + s^2(Y) - \sqrt{\left(s^2[X]-s^2[Y]\right)^2 + 4\left(Cov[X,Y]\right)^2} \right)$$

4.3.6. Propriétés des composantes principales.

a) Les composantes principales sont centrées.

$$\overline{L_1} = < L_1 \mid D_{\frac{1}{n}} \mid 1_n > = \frac{1}{n} < Z\,u_1 \mid 1_n > = \frac{1}{n}\,{}^t(Z\,u_1)\,1_n = \frac{1}{n}\,{}^t u_1\,{}^t Z\,1_n$$

$${}^t Z\,1_n = \begin{pmatrix} x_{10} & \cdots & x_{n0} \\ y_{10} & \cdots & y_{n0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{i=n} x_{i0} \\ \sum_{i=1}^{i=n} y_{i0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

puisque les variable X_0 et Y_0 sont centrées.
Il reste donc :

$$\overline{L_1} = \frac{1}{n}\,{}^t u_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

De même :

$$\overline{L_2} = < L_2 \mid D_{\frac{1}{n}} \mid 1_n > = \frac{1}{n} < Z\, u_2 \mid 1_n > = \frac{1}{n}\, {}^t(Z\, u_2)\, 1_n = \frac{1}{n}\, {}^t u_2\, {}^t Z\, 1_n = \frac{1}{n}\, {}^t u_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0.$$

b) La variance d'une composante principale est la valeur propre correspondante.

Comme les composantes principales sont centrées, leur variance est le carré de leur norme pour le produit scalaire défini par $D_{\frac{1}{n}}$:

$$s^2(L_1) = \| L_1 \|^2_{D_{\frac{1}{n}}} = < L_1 \mid D_{\frac{1}{n}} \mid L_1 > = \frac{1}{n}\, {}^t L_1\, L_1 = \frac{1}{n}\, {}^t u_1\, {}^t Z\, Z\, u_1$$

$$\frac{1}{n}\, {}^t Z\, Z = \mathrm{A}$$

$$s^2(L_1) = {}^t u_1\, A\, u_1 = {}^t u_1\, \lambda_1\, u_1 = \lambda_1 \| u_1 \|^2 = \lambda_1$$

De même :

$$s^2(L_2) = < L_2 \mid D_{\frac{1}{n}} \mid L_2 > = \frac{1}{n}\, {}^t L_2\, L_2 = \frac{1}{n}\, {}^t u_2\, {}^t Z\, Z\, u_2$$
$$= {}^t u_2\, A\, u_2 = {}^t u_2\, \lambda_2\, u_2 = \lambda_2 \| u_2 \|^2 = \lambda_2$$

c) Les composantes principales sont non corrélées.

$$Cov(L_1, L_2) = < L_1 \mid D_{\frac{1}{n}} \mid L_2 > = \frac{1}{n}\, {}^t L_1\, L_2 = \frac{1}{n}\, {}^t u_1\, {}^t Z\, Z\, u_2$$
$$= \frac{1}{n}\, {}^t u_1\, A\, u_2 = \frac{\lambda_2}{n} < u_1 \mid u_2 > = 0$$

puisque les vecteurs u_1 et u_2 sont orthogonaux pour le produit scalaire canonique.

d) Reconstruction des données.

Les points du nuage centré sont définis par les vecteurs

$$\overrightarrow{GM_i} = x_{i0}\, e_1 + y_{i0}\, e_2 = < \overrightarrow{GM_i} \mid u_1 > u_1 + < \overrightarrow{GM_i} \mid u_2 > u_2.$$

Les projetés orthogonaux de ces vecteurs sur l'axe principal défini par u_1 sont les vecteurs :

$$\overrightarrow{Gm_i} = < \overrightarrow{GM_i} \mid u_1 > u_1 = < \overrightarrow{GM_i} \mid u_1 > (< u_1 \mid e_1 > e_1 + < u_1 \mid e_2 > e_2)$$

Les vecteurs $\overrightarrow{Om_i} = \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{Gm_i}$ forment ce qu'on appelle l'**approximation de rang 1 du nuage de points** dans $\mathbb{R}^2$.
Les points m_i sont les projections orthogonales des points M_i sur la droite de régression orthogonale.

L'équation de la **droite de régression orthogonale**, sur laquelle se situe l'approximation de rang 1 du nuage de points, peut prendre l'une des formes équivalentes :

$$< \overrightarrow{GM} \mid u_2 > = 0$$
$$(x - \overline{X})\, (s^2(Y) - \lambda_2) = (y - \overline{Y})\, Cov(X, Y)$$
$$(x - \overline{X})\, (\lambda_1 - s^2(X)) = (y - \overline{Y})\, Cov(X, Y)$$

$$(x - \overline{x})\ Cov\ (X, Y) = (y - \overline{y})\ (s^2\ (Y) - \lambda_1)$$
$$(x - \overline{x})\ Cov\ (X, Y) = (y - \overline{y})\ (\lambda_2 - s^2\ (X))$$

Chapitre 5 - REGRESSION MULTIPLE.

5. 1. POSITION ET RESOLUTION DU PROBLEME.

5.1.1. Position du problème.

Considérons trois variables statistiques réelles centrées X_0, Y_0, Z_0, définies par n triplets (x_{0i}, y_{0i}, z_{0i}), $i \in [1, n]$.
Nous considérons Z_0 comme la variable à expliquer et X_0 et Y_0 comme les variables explicatives.
Nous supposons que les observations laissent à penser que le nuage de points dans $\mathbb{R}^3$ pourrait être modélisé par un plan.
Le problème de la régression linéaire multiple de Z_0 en X_0 et Y_0 consiste à trouver un prédicteur

$$\hat{Z}_0 = a\, X_0 + b\, Y_0$$

de Z_0, tel que le nuage de points $(x_{0i}, y_{0i}, \hat{z}_{0i} = a\, x_{0i} + b\, y_{0i})$, $i \in [1, n]$, soit aussi proche possible du nuage de points (x_{0i}, y_{0i}, z_{0i}), $i \in [1, n]$, au sens des moindres carrés.

L'approche euclidienne de ce problème dans $\mathbb{R}^n$ consiste à trouver un $\hat{Z}_0 = a\, X_0 + b\, Y_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que $S^2 = \| Z_0 - \hat{Z}_0 \|^2_{D_{\frac{1}{n}}}$ soit minimum.

Le problème est donc de trouver, dans $\mathbb{R}^n$, un vecteur $\hat{Z}_0$ du plan (= sous-espace vectoriel de dimension 2) Π défini par X_0 et Y_0, tel que le vecteur $Z_0 - \hat{Z}_0$ ait une longueur minimum (au sens du produit scalaire défini par la matrice des poids $D_{\frac{1}{n}}$).

La solution sera fournie par le projeté orthogonal $\hat{Z}_0$ de Z_0 sur Π.

5.1.2. Projeté orthogonal sur un plan.

a) Définition.

Si nous connaissons une base orthonormée $\{ u_1, u_2 \}$ d'un sous-espace vectoriel Π de dimension 2, défini dans $\mathbb{R}^n$ par les deux vecteurs X_0 et Y_0, nous savons calculer le projeté orthogonal de Z_0 sur u_1, c'est le vecteur $\frac{\langle Z_0 | u_1 \rangle_{D_{\frac{1}{n}}}}{\| u_1 \|^2_{D_{\frac{1}{n}}}} u_1 = < Z_0 \mid u_1 >_{D_{\frac{1}{n}}} u_1$ et nous savons calculer aussi le projeté orthogonal $< Z_0 \mid u_2 >_{D_{\frac{1}{n}}} u_2$ de Z_0 sur u_2.

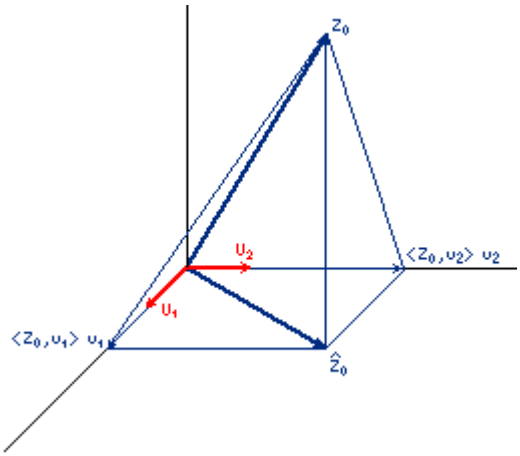
On appelle **projeté orthogonal** de Z_0 sur Π. l'unique vecteur $\hat{Z}_0$ de Π tel que $Z_0 - \hat{Z}_0$ soit orthogonal à Π.

Un tel vecteur existe et est unique.

Démonstration.

Notons $\hat{Z}_0$ le vecteur $< Z_0 \mid u_1 >_{D_1} u_1 + < Z_0 \mid u_2 >_{D_1} u_2$, somme des projetés orthogonaux de Z_0 sur les vecteurs u_1 et u_2.

$$< Z_0 - \hat{Z}_0 \mid u_1 >_{D_1} = < Z_0 \mid u_1 >_{D_1} - < \hat{Z}_0 \mid u_1 >_{D_1}$$
$$= < Z_0 \mid u_1 >_{D_1} - < < Z_0 \mid u_1 >_{D_1} u_1 + < Z_0 \mid u_2 >_{D_1} u_2 \mid u_1 >_{D_1}$$
$$= < Z_0 \mid u_1 >_{D_1} - < Z_0 \mid u_1 >_{D_1} < u_1 \mid u_1 >_{D_1} + < Z_0 \mid u_2 >_{D_1} < u_2 \mid u_1 >_{D_1}$$
$$= < Z_0 \mid u_1 >_{D_1} - < Z_0 \mid u_1 >_{D_1}$$
$$= 0$$



$$< Z_0 - \hat{Z}_0 \mid u_2 >_{D_1} = < Z_0 \mid u_2 >_{D_1} - < \hat{Z}_0 \mid u_2 >_{D_1}$$
$$= < Z_0 \mid u_2 >_{D_1} - < < Z_0 \mid u_1 >_{D_1} u_1 + < Z_0 \mid u_2 >_{D_1} u_2 \mid u_2 >_{D_1}$$
$$= < Z_0 \mid u_2 >_{D_1} - < Z_0 \mid u_1 >_{D_1} < u_1 \mid u_2 >_{D_1} + < Z_0 \mid u_2 >_{D_1} < u_2 \mid u_2 >_{D_1}$$
$$= < Z_0 \mid u_2 >_{D_1} - < Z_0 \mid u_2 >_{D_1}$$
$$= 0$$

Ainsi, $Z_0 - \hat{Z}_0$ est orthogonal à u_1 et à u_2, il est donc orthogonal à toute combinaison linéaire de u_1 et u_2, c'est-à-dire à tout élément de Π : on dit qu'il est orthogonal à Π.

Le projeté orthogonal de $\hat{Z}_0$ sur u_1 est

$$< \hat{Z}_0 \mid u_1 >_{D_1} u_1 = < Z_0 \mid u_1 >_{D_1} u_1.$$

Le projeté orthogonal de $\hat{Z}_0$ sur u_2 est

$$< \hat{Z}_0 \mid u_2 >_{D_1} u_2 = < Z_0 \mid u_2 >_{D_1} u_2.$$

Nous pouvons donc écrire :

$$\hat{Z}_0 = < Z_0 \mid u_1 >_{D_1} u_1 + < Z_0 \mid u_2 >_{D_1} u_2 = < \hat{Z}_0 \mid u_1 >_{D_1} u_1 + < \hat{Z}_0 \mid u_2 >_{D_1} u_2.$$

Réciproquement, si Z est un vecteur de Π tel que $Z_0 - Z$ soit orthogonal à Π, nous avons :

$$Z = < Z \mid u_1 >_{D_1} u_1 + < Z \mid u_2 >_{D_1} u_2 = < Z_0 \mid u_1 >_{D_1} u_1 + < Z_0 \mid u_2 >_{D_1} u_2 = \hat{Z}_0.$$

Le vecteur :

$$\hat{Z}_0 = < Z_0 \mid u_1 >_{D_{\frac{1}{n}}} u_1 + < Z_0 \mid u_2 >_{D_{\frac{1}{n}}} u_2$$

est donc l'unique vecteur de Π tel que $Z_0 - \hat{Z}_0$ soit orthogonal à Π : c'est, par définition, le projeté orthogonal de Z_0 sur Π.

La relation :

$$\hat{Z}_0 = < \hat{Z}_0 \mid u_1 >_{D_{\frac{1}{n}}} u_1 + < \hat{Z}_0 \mid u_2 >_{D_{\frac{1}{n}}} u_2$$

signifie que le projeté orthogonal de $\hat{Z}_0$ sur le plan Π est $\hat{Z}_0$.

b) Propriété du projeté orthogonal.

Le projeté orthogonal de Z_0 sur Π est le vecteur Z de Π, qui minimise la quantité $\| Z_0 - Z \|^2_{D_{\frac{1}{n}}}$.

Démonstration.

Soit Z un vecteur appartenant au sous-espace Π.
Soit $\hat{Z}_0 = < Z_0 \mid u_1 >_{D_{\frac{1}{n}}} u_1 + < Z_0 \mid u_2 >_{D_{\frac{1}{n}}} u_2$ le projeté orthogonal de Z_0 sur Π.

$$\| Z_0 - Z \|^2_{D_{\frac{1}{n}}} = \| Z_0 - \hat{Z}_0 + \hat{Z}_0 - Z \|^2_{D_{\frac{1}{n}}}$$

Or $Z_0 - \hat{Z}_0$ est orthogonal à Π, donc orthogonal à tout élément de Π, donc $Z_0 - \hat{Z}_0$ est orthogonal à $\hat{Z}_0$ et à Z, donc aussi à $\hat{Z}_0 - Z$.
Le théorème de Pythagore s'applique :

$$\| Z_0 - \hat{Z}_0 + \hat{Z}_0 - Z \|^2_{D_{\frac{1}{n}}} = \| Z_0 - \hat{Z}_0 \|^2_{D_{\frac{1}{n}}} + \| \hat{Z}_0 - Z \|^2_{D_{\frac{1}{n}}}$$

$$\| Z_0 - Z \|^2_{D_{\frac{1}{n}}} = \| Z_0 - \hat{Z}_0 \|^2_{D_{\frac{1}{n}}} + \| \hat{Z}_0 - Z \|^2_{D_{\frac{1}{n}}}$$

Cette relation montre que $\| Z_0 - Z \|^2_{D_{\frac{1}{n}}}$ atteint sa valeur minimum $\| Z_0 - \hat{Z}_0 \|^2_{D_{\frac{1}{n}}}$ lorsque $Z = \hat{Z}_0$.

Notre problème initial se trouve résolu :

Le prédicteur $\hat{Z}_0 = a X_0 + b Y_0$ de Z_0 qui rend minimum la quantité $S^2 = \| Z_0 - \hat{Z}_0 \|^2_{D_{\frac{1}{n}}}$ est le projeté orthogonal de Z_0 dans le plan Π défini par X_0 et Y_0.

La seule chose qu'il nous reste à faire dans la suite, est d'expliciter ce projeté orthogonal en fonction des données (x_{0i}, y_{0i}, z_{0i}), $i \in [1, n]$.

5.1.3. Choix d'une base orthonormée { u_1, u_2 }.

Dans le plan Π défini par X_0 et Y_0, nous pouvons définir un premier vecteur normé u_1 par :

$$u_1 = \frac{X_0}{\|X_0\|_{D_{\frac{1}{n}}}} = \frac{X_0}{s(X)}.$$

On a, en effet : $s^2(X) = \| X_0 \|^2_{D_{\frac{1}{n}}}$.

Le projeté orthogonal de Y_0 sur X_0 est $\frac{\langle Y_0 | X_0 \rangle_{D_{\frac{1}{n}}}}{\|X_0\|^2_{D_{\frac{1}{n}}}} X_0$ et $Y_0 - \frac{\langle Y_0 | X_0 \rangle_{D_{\frac{1}{n}}}}{\|X_0\|^2_{D_{\frac{1}{n}}}} X_0$ est orthogonal à X_0.

Le carré de sa norme est donné par :

$$\left\| Y_0 - \frac{\langle Y_0 | X_0 \rangle_{D_{\frac{1}{n}}}}{\|X_0\|^2_{D_{\frac{1}{n}}}} X_0 \right\|^2_{D_{\frac{1}{n}}} = \| Y_0 \|^2_{D_{\frac{1}{n}}} + \left(\frac{\langle Y_0 | X_0 \rangle_{D_{\frac{1}{n}}}}{\|X_0\|^2_{D_{\frac{1}{n}}}} \right)^2 \| X_0 \|^2_{D_{\frac{1}{n}}} . - 2 \frac{\langle Y_0 | X_0 \rangle_{D_{\frac{1}{n}}}}{\|X_0\|^2_{D_{\frac{1}{n}}}} < Y_0 | X_0 >_{D_{\frac{1}{n}}}$$

$$= s^2(Y) - s^2(Y) \left(\frac{Cov[X,Y]}{s[X]\, s[Y]} \right)^2 = s^2(Y)\,(1 - r_{XY}^2) = \frac{s^2[X]\, s^2[Y] - (Cov[X,Y])^2}{s^2[X]}$$

On peut donc prendre dans le plan Π, pour vecteur normé u_2 orthogonal à u_1, le vecteur :

$$u_2 = \frac{1}{s[X]\sqrt{1 - r_{XY}^2}} \left(Y_0 - \frac{Cov[X,Y]}{s^2[X]} X_0 \right) = \frac{s[X]}{\sqrt{s^2[X]\, s^2[Y] - (Cov[X,Y])^2}} \left(Y_0 - \frac{Cov[X,Y]}{s^2[X]} X_0 \right)$$

Les vecteurs :

$$u_1 = \frac{X_0}{s[X]}$$

$$u_2 = \frac{s[X]}{\sqrt{s^2[X]\, s^2[Y] - (Cov[X,Y])^2}} \left(Y_0 - \frac{Cov[X,Y]}{s^2[X]} X_0 \right)$$

forment une base orthonormée du plan Π défini par X_0 et Y_0.

5.1.4. Calcul du projeté orthogonal de Z_0.

Soit

$$\hat{Z}_0 = < Z_0 | u_1 >_{D_{\frac{1}{n}}} u_1 + < Z_0 | u_2 >_{D_{\frac{1}{n}}} u_2$$

le projeté orthogonal de Z_0 sur Π.

La première composante est le projeté orthogonal de Z_0 sur u_1 :

$$< Z_0 | u_1 >_{D_{\frac{1}{n}}} u_1 = < Z_0 | \frac{X_0}{s(X)} >_{D_{\frac{1}{n}}} \frac{X_0}{s(X)} = \frac{Cov[X,Z]}{s^2[X]} X_0$$

C'est aussi le projeté orthogonal de Z_0 sur X_0.

La deuxième composante est le projeté orthogonal de Z_0 sur u_2 :

$$< Z_0 \mid u_2 >_{D_{\frac{1}{n}}} u_2 = < Z_0 \mid \frac{s[X]}{\sqrt{s^2[X]\,s^2[Y]-(Cov[X,Y])^2}}\left(Y_0 - \frac{Cov[X,Y]}{s^2[X]}\,X_0 \right) >_{D_{\frac{1}{n}}} \frac{s[X]}{\sqrt{s^2[X]\,s^2[Y]-(Cov[X,Y])^2}}$$
$$\left(Y_0 - \frac{Cov[X,Y]}{s^2[X]}\,X_0 \right)$$
$$= \frac{s^2[X]}{s^2[X]\,s^2[Y]-(Cov[X,Y])^2}\left(< Z_0 \mid Y_0 >_{D_{\frac{1}{n}}} - \frac{Cov[X,Y]}{s^2[X]} < Z_0 \mid X_0 >_{D_{\frac{1}{n}}} \right)\left(Y_0 - \frac{Cov[X,Y]}{s^2[X]}\,X_0 \right)$$
$$= \frac{s^2[X]\,Cov[Z,Y]-Cov[Z,X]\,Cov[X,Y]}{s^2[X]\,s^2[Y]-(Cov[X,Y])^2}\left(Y_0 - \frac{Cov[X,Y]}{s^2[X]}\,X_0 \right)$$

Au total, nous obtenons :

$$\hat{Z}_0 = \frac{Cov[X,Z]}{s^2[X]}\,X_0 + \frac{s^2[X]\,Cov[Z,Y]-Cov[Z,X]\,Cov[X,Y]}{s^2[X]\,s^2[Y]-(Cov[X,Y])^2}\left(Y_0 - \frac{Cov[X,Y]}{s^2[X]}\,X_0 \right)$$
$$= \frac{1}{s^2[X]}\left(Cov\,(X, Z) - \frac{s^2[X]\,Cov[Z,Y]-Cov[Z,X]\,Cov[X,Y]}{s^2[X]\,s^2[Y]-(Cov[X,Y])^2} Cov\,(X, Y) \right) X_0 +$$
$$\frac{s^2[X]\,Cov[Z,Y]-Cov[Z,X]\,Cov[X,Y]}{s^2[X]\,s^2[Y]-(Cov[X,Y])^2}\,Y_0$$
$$= \frac{s^2[Y]\,Cov[X,Z]-Cov[X,Y]\,Cov[Y,Z]}{s^2[X]\,s^2[Y]-(Cov[X,Y])^2}\,X_0 + \frac{s^2[X]\,Cov[Y,Z]-Cov[X,Y]\,Cov[X,Z]}{s^2[X]\,s^2[Y]-(Cov[X,Y])^2}\,Y_0$$

$$\boxed{\hat{Z}_0 = \frac{s^2[Y]\,Cov[X,Z]-Cov[X,Y]\,Cov[Y,Z]}{s^2[X]\,s^2[Y]-(Cov[X,Y])^2}\,X_0 + \frac{s^2[X]\,Cov[Y,Z]-Cov[X,Y]\,Cov[X,Z]}{s^2[X]\,s^2[Y]-(Cov[X,Y])^2}\,Y_0}$$

Cette expression est symétrique en X et Y.
On sait calculer les quantités qui interviennent dans cette expression en fonction des données (x_{0i}, y_{0i}, z_{0i}), $i \in [1, n]$.
On commence par calculer la matrice des variances-covariances :

$$A = \frac{1}{n}\begin{pmatrix} x_{01} & \cdots & x_{0n} \\ y_{01} & \cdots & y_{0n} \\ z_{01} & \cdots & z_{0n} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{01} & y_{01} & z_{01} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{0n} & y_{0n} & z_{0n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s^2[X] & Cov[X,Y] & Cov[X,Z] \\ Cov[X,Y] & s^2[Y] & Cov[Y,Z] \\ Cov[X,Z] & Cov[Y,Z] & s^2[Z] \end{pmatrix}$$

Formellement, la relation $\hat{Z}_0 = \frac{s^2[Y]\,Cov[X,Z]-Cov[X,Y]\,Cov[Y,Z]}{s^2[X]\,s^2[Y]-(Cov[X,Y])^2}\,X_0 + \frac{s^2[X]\,Cov[Y,Z]-Cov[X,Y]\,Cov[X,Z]}{s^2[X]\,s^2[Y]-(Cov[X,Y])^2}\,Y_0$ peut se mémoriser comme un "déterminant" :

$$\begin{vmatrix} s^2[X] & Cov[X,Y] & X_0 \\ Cov[X,Y] & s^2[Y] & Y_0 \\ Cov[X,Z] & Cov[Y,Z] & \hat{Z}_0 \end{vmatrix} = 0$$

On a remplacé la dernière colonne de la matrice des variances-covariances par $\begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ \hat{Z}_0 \end{pmatrix}$.

5.2. COEFFICIENT DE CORRELATION MULTIPLE.

5.2.1. Définition.

Nous connaissons déjà les formules donnant les coefficients de corrélation linéaire entre deux variables :

$$r_{XY} = \frac{Cov[X,Y]}{s[X]\,s[Y]} = \frac{\langle X_0 | Y_0 \rangle_{D_{\frac{1}{n}}}}{s[X]\,s[Y]} \; ; \; r_{XZ} = \frac{Cov[X,Z]}{s[X]\,s[Z]} \; ; \; r_{YZ} = \frac{Cov[Y,Z]}{s[Y]\,s[Z]}.$$

Les coefficients de X_0 et Y_0 dans l'expression de $\hat{Z}_0$ deviennent :

$$\frac{s^2[Y]\,Cov[X,Z] - Cov[X,Y]\,Cov[Y,Z]}{s^2[X]\,s^2[Y] - (Cov[X,Y])^2} = \frac{s^2[Y]\,r_{XZ}\,s[X]\,s[Z] - r_{XY}\,s[X]\,s[Y]\,r_{YZ}\,s[Y]\,s[Z]}{s^2[X]\,s^2[Y] - (r_{XY}\,s[X]\,s[Y])^2} = \frac{s[X]\,s^2[Y]\,s[Z]}{s^2[X]\,s^2[Y]} \times \frac{r_{XZ} - r_{XY}\,r_{YZ}}{1 - r_{XY}^2} = \frac{s[Z]}{s[X]} \frac{r_{XZ} - r_{XY}\,r_{YZ}}{1 - r_{XY}^2}$$

et, en échangeant X et Y :

$$\frac{s^2[X]\,Cov[Y,Z] - Cov[X,Y]\,Cov[X,Z]}{s^2[X]\,s^2[Y] - (Cov[X,Y])^2} = \frac{s[Z]}{s[Y]} \frac{r_{YZ} - r_{XY}\,r_{XZ}}{1 - r_{XY}^2}$$

En reportant, dans l'expression de $\hat{Z}_0$, les expressions obtenues pour les coefficients, on obtient :

$$\hat{Z}_0 = \frac{s[Z]}{s[X]} \frac{r_{XZ} - r_{XY}\,r_{YZ}}{1 - r_{XY}^2} X_0 + \frac{s[Z]}{s[Y]} \frac{r_{YZ} - r_{XY}\,r_{XZ}}{1 - r_{XY}^2} Y_0$$

$$\frac{\hat{z}_0}{s[Z]} = \frac{r_{XZ} - r_{XY}\,r_{YZ}}{1 - r_{XY}^2} \frac{X_0}{s[X]} + \frac{r_{YZ} - r_{XY}\,r_{XZ}}{1 - r_{XY}^2} \frac{Y_0}{s[Y]}$$

Les vecteurs $\frac{X_0}{s[X]}$ et $\frac{Y_0}{s[Y]}$ sont normés pour le produit scalaire de $\mathbb{R}^n$: $\| X_0 \|_{D_{\frac{1}{n}}}^2 = s^2(X)$ et $\| Y_0 \|_{D_{\frac{1}{n}}}^2 = s^2(Y)$.

$$\left\| \frac{\hat{z}_0}{s[Z]} \right\|_{D_{\frac{1}{n}}}^2 = \frac{\| \hat{z}_0 \|_{D_{\frac{1}{n}}}^2}{s^2[Z]} = \left(\frac{r_{XZ} - r_{XY}\,r_{YZ}}{1 - r_{XY}^2} \right)^2 + \left(\frac{r_{YZ} - r_{XY}\,r_{XZ}}{1 - r_{XY}^2} \right)^2 + 2 \frac{r_{XZ} - r_{XY}\,r_{YZ}}{1 - r_{XY}^2} \frac{r_{YZ} - r_{XY}\,r_{XZ}}{1 - r_{XY}^2} \frac{\langle X_0 | Y_0 \rangle_{D_{\frac{1}{n}}}}{s[X]\,s[Y]}$$

$$= \frac{1}{(1 - r_{XY}^2)^2} \left(r_{XZ}^2 + r_{XY}^2\,r_{YZ}^2 - 2\,r_{XY}\,r_{XZ}\,r_{YZ} + r_{YZ}^2 + r_{XY}^2\,r_{XZ}^2 - 2\,r_{XY}\,r_{XZ}\,r_{YZ} + 2\,r_{XY}(r_{XZ}\,r_{YZ} - r_{XY}\,r_{XZ}^2 - r_{XY}\,r_{YZ}^2 + r_{XY}^2\,r_{XZ}\,r_{YZ}) \right)$$

$$= \frac{1}{(1 - r_{XY}^2)^2} \left(r_{XZ}^2 + r_{XY}^2\,r_{YZ}^2 - 2\,r_{XY}\,r_{XZ}\,r_{YZ} + r_{YZ}^2 + r_{XY}^2\,r_{XZ}^2 - 2\,r_{XY}\,r_{XZ}\,r_{YZ} + 2\,r_{XY}\,r_{XZ}\,r_{YZ} - 2\,r_{XY}^2\,r_{XZ}^2 - 2\,r_{XY}^2\,r_{YZ}^2 + 2\,r_{XY}^3\,r_{XZ}\,r_{YZ}) \right)$$

$$= \frac{1}{(1-r_{XY}^2)^2}\left(r_{XZ}^2 + r_{XY}^2 r_{XZ}^2 - 2 r_{XY}^2 r_{XZ}^2 + r_{YZ}^2 + r_{XY}^2 r_{YZ}^2 - 2 r_{XY}^2 r_{YZ}^2 - 2 r_{XY} r_{XZ} r_{YZ} - 2 r_{XY} r_{XZ} r_{YZ} + 2 r_{XY} r_{XZ} r_{YZ} + 2 r_{XY}^3 r_{XZ} r_{YZ}) \right)$$

$$= \frac{1}{(1-r_{XY}^2)^2}\left(r_{XZ}^2 - r_{XY}^2 r_{XZ}^2 + r_{YZ}^2 - r_{XY}^2 r_{YZ}^2 - 2 r_{XY} r_{XZ} r_{YZ} + 2 r_{XY}^3 r_{XZ} r_{YZ}) \right)$$

$$= \frac{1}{(1-r_{XY}^2)^2}\left(r_{XZ}^2 (1 - r_{XY}^2) + r_{YZ}^2 (1 - r_{XY}^2) - 2 r_{XY} r_{XZ} r_{YZ} (1 - r_{XY}^2) \right)$$

$$= \frac{1}{1-r_{XY}^2}\left(r_{XZ}^2 + r_{YZ}^2 - 2 r_{XY} r_{XZ} r_{YZ} \right)$$

Le coefficient :

$$R_{Z|XY} = \sqrt{\frac{1}{1-r_{XY}^2}\left(r_{XZ}^2 + r_{YZ}^2 - 2 r_{XY} r_{XZ} r_{YZ}\right)}$$

s'appelle le **coefficient de corrélation linéaire multiple** de Z en X, Y.

La variance du prédicteur de Z est donnée par :

$$s^2(\hat{Z}) = \| \hat{Z}_0 \|^2_{D_{\frac{1}{n}}} = R_{Z|XY}^2 \, s^2(Z)$$

5.2.2. Propriétés.

a) Validité du prédicteur de *Z*.

La variance de Z s'écrit :

$$s^2(Z) = s^2(Z_0) = \| Z_0 \|^2_{D_{\frac{1}{n}}} = \| Z_0 - \hat{Z}_0 + \hat{Z}_0 \|^2_{D_{\frac{1}{n}}} = \| Z_0 - \hat{Z}_0 \|^2_{D_{\frac{1}{n}}} + \| \hat{Z}_0 \|^2_{D_{\frac{1}{n}}}$$

Or $\| Z_0 - \hat{Z}_0 \|^2_{D_{\frac{1}{n}}}$ est la valeur minimum de la quantité $S^2 = \| Z_0 - \hat{Z} \|^2_{D_{\frac{1}{n}}}$ pour les $\hat{Z} \in \Pi$: $\| Z_0 - \hat{Z}_0 \|^2_{D_{\frac{1}{n}}} = S^2_{min}$, c'est la variance "**résiduelle**", donc

$$s^2(Z) = S^2_{min} + R_{Z|XY}^2 \, s^2(Z)$$

On retrouve la même formule de décomposition de la variance que pour la régression linéaire : la variance de Z est la somme de la variance expliquée $R_{Z|XY}^2 \, s^2(Z)$ par la régression linéaire multiple, et de la variance résiduelle $S^2_{min} = (1 - R_{Z|XY}^2) \, s^2(Z)$.

Plus le coefficient $R_{Z|XY}^2$ est proche de 1, plus la part de variance de Z expliquée par la régression linéaire multiple en X et Y est grande, donc meilleur est le prédicteur linéaire $\hat{Z}_0$.
La validité du prédicteur $\hat{Z}_0$ est mesurée par le coefficient $R_{Z|XY}^2$.

b) Calcul pratique du coefficient de corrélation linéaire multiple.

En pratique, le calcul du coefficient de corrélation linéaire multiple $R_{Z|XY}$ s'effectue de la façon

suivante :

— On calcule la **matrice des corrélations** de X et Y à partir de la matrice $V_{XY} = \begin{pmatrix} \frac{x_1-\overline{X}}{s(X)} & \frac{y_1-\overline{Y}}{s(Y)} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{x_n-\overline{X}}{s(X)} & \frac{y_n-\overline{Y}}{s(Y)} \end{pmatrix}$ des données (X, Y) réduites :

$$C_{XY} = \begin{pmatrix} 1 & r_{XY} \\ r_{XY} & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{n} \begin{pmatrix} \frac{x_1-\overline{X}}{s(X)} & \cdots & \frac{x_n-\overline{X}}{s(X)} \\ \frac{y_1-\overline{Y}}{s(Y)} & \cdots & \frac{y_n-\overline{Y}}{s(Y)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{x_1-\overline{X}}{s(X)} & \frac{y_1-\overline{Y}}{s(Y)} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{x_n-\overline{X}}{s(X)} & \frac{y_n-\overline{Y}}{s(Y)} \end{pmatrix} = {}^t V_{XY} D_{\frac{1}{n}} V_{XY}.$$

— On calcule l'**inverse** de cette matrice des corrélations :

$$C_{XY}^{-1} = \frac{1}{1-r_{XY}^2} \begin{pmatrix} 1 & -r_{XY} \\ -r_{XY} & 1 \end{pmatrix}$$

— La matrice des **coefficients de corrélation linéaire** de X et Y avec Z, peut se calculer à partir de la matrice V_{XY} et de la variable centrée réduite $V_Z = \begin{pmatrix} \frac{z_1-\overline{Z}}{s(Z)} \\ \vdots \\ \frac{z_n-\overline{Z}}{s(Z)} \end{pmatrix}$ par la formule :

$$\begin{pmatrix} r_{XZ} \\ r_{YZ} \end{pmatrix} = \frac{1}{n} \begin{pmatrix} \frac{x_1-\overline{X}}{s(X)} & \cdots & \frac{x_n-\overline{X}}{s(X)} \\ \frac{y_1-\overline{Y}}{s(Y)} & \cdots & \frac{y_n-\overline{Y}}{s(Y)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{z_1-\overline{Z}}{s(Z)} \\ \vdots \\ \frac{z_n-\overline{Z}}{s(Z)} \end{pmatrix} = {}^t V_{XY} D_{\frac{1}{n}} V_Z.$$

— Le **coefficient de corrélation linéaire multiple** $R_{Z|XY}$ est donné par la formule :

$$R_{Z|XY}^2 = \frac{1}{1-r_{XY}^2} \left(r_{XZ}^2 + r_{YZ}^2 - 2\, r_{XY}\, r_{XZ}\, r_{YZ} \right) = (r_{XZ} \quad r_{YZ})\, C_{XY}^{-1} \begin{pmatrix} r_{XZ} \\ r_{YZ} \end{pmatrix}$$

formule que l'on peut écrire directement en fonction des **données centrées réduites** :

$$\boxed{R_{Z|XY}^2 = {}^t\left({}^t V_{XY} D_{\frac{1}{n}} V_Z \right) \left({}^t V_{XY} D_{\frac{1}{n}} V_{XY} \right)^{-1} \left({}^t V_{XY} D_{\frac{1}{n}} V_Z \right).}$$

Remarquons, à l'usage des débutants, qu'il ne faudrait pas écrire :

$$\left({}^t V_{XY} D_{\frac{1}{n}} V_{XY} \right)^{-1} = V_{XY}^{-1} D_{\frac{1}{n}}^{-1} {}^t V_{XY}^{-1}$$

puisque la matrice V_{XY}, à n lignes et 2 colonnes, n'est pas inversible, alors que la matrice produit $C = {}^t V_{XY} D_{\frac{1}{n}} V_{XY}$, à 2 lignes et 2 colonnes, est inversible.

5.2.3. Application : technique de la régression pas à pas.

Pour connaître le rôle de chacune des variables explicatives, on calcule les coefficients de

détermination r_{XZ}^2 et r_{YZ}^2 et le coefficient $R_{Z|XY}^2$.
Chacun de ces coefficients représente le pourcentage de variance de Z restitué par le prédicteur correspondant.
On conservera, pour prédicteur de Z le modèle qui restituera significativement le meilleur résultat :

$\hat{z}_0 = c\, X_0$
$\hat{z}_0 = d\, Y_0$
$\hat{z}_0 = a\, X_0 + b\, Y_0$.

La théorie de la régression multiple que nous venons d'exposer dans le cas de deux variables explicatives peut se généraliser au cas de p variables explicatives, avec $p > 2$.

Chapitre 6 - INITIATION A LA THEORIE DES SONDAGES.

6. 1. GENERALITES.

6.1.1. Introduction.

L'étude exhaustive d'un caractère donné dans une population est un **recensement**.
Elle se heurte souvent à une impossibilité matérielle : coût trop élevé, ou destruction des individus étudiés.

Les méthodes d'analyse quantitative ont alors recours à la théorie des sondages, qui consiste à étudier un sous-ensemble de la population qu'on appelle un **échantillon**.

La théorie des sondages pose deux types de problèmes :

- L'échantillon doit être représentatif de la population : c'est la **théorie de l'échantillonnage**.
- Les techniques numériques utilisées sur les observations expérimentales doivent conduire à des résultats fiables, c'est-à-dire donnant une bonne représentation des paramètres inconnus de la population : c'est la **théorie de l'estimation** et des **tests**.

Les deux problèmes sont liés : la méthode d'échantillonnage utilisée a une influence sur les estimations obtenues.

En résumé, nous pouvons dire que la théorie des sondages est un outil mathématique permettant, à partir d'observations expérimentales partielles, de tenter d'atteindre une réalité inaccessible.

6.1.2. Avantages de la méthode d'enquêtes par sondages.

La méthode d'enquêtes par sondages présente sur le recensement (lorsqu'il est possible) les avantages suivants :

1. Coût plus réduit.
2. Plus grande vitesse d'exécution (notamment pour les sondages d'opinions).
3. Plus grande fiabilité des résultats : le personnel étant plus réduit, il peut être plus qualifié.
4. Moins de risque d'erreur : le volume des données à traiter est plus faible.
5. Plus grand champ d'application, notamment dans le cas de destruction des unités testées.

6.1.3. Etapes d'une enquête par sondage.

Pour effectuer une enquête par sondage, il est indispensable de respecter les instructions suivantes.

- Dresser une liste claire des objectifs de l'enquête.
- Etablir avec précision la population à échantillonner.
- Etablir une liste précise et courte des données à collecter.
- Définir le choix des méthodes de mesure : téléphone, convocations, visites à domicile, ...
- Etablir, lorsque c'est possible, le degré de précision désiré afin d'analyser le rapport des coûts et des avantages.
- Déterminer l'unité de l'échantillonnage : personne physique, collectivité, ...
- Etablir le plan de l'échantillonnage ou la méthode de sélection.

- Faire parfois une pré-enquête courte.
- Organiser le travail sur le terrain.
- Récolter les données, les présenter, les synthétiser par traitement statistique.
- Conserver les données pour pouvoir les réutiliser.

6.2. DIVERS TYPES DE SONDAGES.

Pour effectuer un sondage dans une population, c'est-à-dire pour en extraire un échantillon, deux types de méthodes sont employées : méthodes empiriques et méthodes aléatoires. Seules les méthodes aléatoires permettent d'utiliser la théorie de l'estimation.

6.2.1. Méthodes empiriques : sondages raisonnés.

Ce sont les plus connues du grand public et les plus utilisées par les instituts de sondage d'opinion. La précision de ces méthodes ne peut être calculée et leur réussite n'est que le résultat d'une longue pratique et de l'habileté professionnelle.
Les éléments sondés sont choisis dans la population suivant des critères fixés a pirori.

6.2.1.1. Méthode des unités types.

Elle repose sur l'idée suivante : les différentes variables attachées à un individu de la population n'étant pas indépendantes, un individu qui se trouve dans la moyenne de la population pour un certain nombre de caractères impportants, sera également peu différent de la moyenne pour les autres caractères.
La méthode consiste donc à diviser la population en un certain nombre de sous-ensembles relativement homogènes et à représenter chacun d'eux par une unité-type.
On choisit donc des unités d'individus que l'on considère comme fortement représentatives de certaines catégories de population : cantons-types, bureau de vote pilotes, dont les résultats observés sur de longues périodes figurent les résultats définitifs d'une région ou d'une ville, etc.

Exemple.

L'INSEE décomposa en 1942 la France en 600 régions agricoles et, dans chaque région, désigna un canton-ype.
Comme il y a en France environ 3000 cantons, la désignation de 600 cantons-types permettait de réduire d'un facteur 5 l'ampleur d'une étude des cantons.

6.2.1.2. Méthode des quotas.

L'enquêteur prélève librement son échantillon, à condition de respecter une composition donnée à l'avance (pourcentage fixé d'agriculteurs, d'ouvriers, de cadres, etc., par exemple).
Cette méthode est facile, mais aucun intervalle de confiance ne peut être donné.
Elle suppose implicitement que les catégories retenues pour la détermination des quotas sont pertinentes quant à l'objet de l'étude, ce qui est bien difficile à établir.
Pour diminuer l'arbitraire du choix, on impose à l'enquêteur des normes de déplacement géographique : c'est la **méthode de Politz**.

On utilise souvent des "**panels**", qui sont des échantillons permanents dont on étudie l'évolution.

Exemples.

- Panel d'audience à la télévision (médiamétrie, centres d'études d'opinion, ...).

- Panel de consommateurs (SECODIF : 4 500 ménages).
- Panel de détaillants (SOFRES).

Ces panels sont utilisés en marketing (lancement d'un produit, transfert de marques, etc.).

6.2.2. Méthodes aléatoires.

Les éléments sondés sont extraits **au hasard** d'une liste connue a priori de la population, appelée **base de sondage**.

Exemples.

1. Liste d'immatriculation des véhicules automobiles en France.
   C'est une très bonne base car elle est mise à jour régulièrement (cartes grises neuves, cartes grises à détruire).
2. Répertoire des entreprises (SIREN).
   Chaque entreprise possède un numéro d'immatriculation à neuf chiffres, un nom ou raison sociale, une adresse exacte.
3. L'annuaire téléphonique est une mauvaise base de sondage car d'une part, tout individu ne possède pas obligatoirement un téléphone et, d'autre part, un individu peut posséder un téléphone et ne pas figurer sur l'annuaire (la liste rouge représente environ 8 % des abonnés et l'annuaire ne recense pas les téléphones portables, soit environ 40 % des téléphones).

Les bases de sondages sont en général établies à partir des résultats d'un recensement et elles sont corrigées périodiquement entre deux recensements.
Le tirage de l'échantillon est effectué dans la base de sondage selon des critères spécifiques à chaque méthode (plan de sondage).
Cette méthode de travail ne laisse aucune initiative aux enquêteurs : il est très simple de contrôler leur travail.

6.2.2.1. Sondage élémentaire : échantillon aléatoire simple.

Dans un **échantillon aléatoire simple**, les éléments constituant l'échantillon sont extraits au hasard (à l'aide d'une table de nombres au hasard, par exemple) d'une liste de la population.
On extrait ainsi n individus d'une population de taille N.
Le tirage peut s'effectuer avec ou sans remise, renvoyant ainsi généralement à un modèle de loi binomiale (avec remise), ou hypergéométrique (sans remise).
Si le tirage s'effectue avec remise, l'échantillon aléatoire simple est dit indépendant (EASI = **Echantillon Aléatoire Simple et Indépendant**).

La méthode permet de calculer des intervalles de confiance, comme nous le verrons plus loin.
Le rapport $f = \frac{n}{N}$ s'appelle le **taux de sondage**.
Par exemple, l'INSEE utilise des taux de sondage de l'ordre de $\frac{1}{1\,500}$ pour les enquêtes sur les conditions de vie des ménages.

Exemple.

Nous voulons extraire un échantillon de 8 individus dans une population formée de 437 individus.
Nous numérotons les individus de la population de 1 à 437.
Nous considérons trois colonnes consécutives d'une page de nombres au hasard : ils forment des nombres au hasard à trois chiffres.

Nous lisons ces nombres de trois chiffres en ne retenant que ceux qui sont compris entre 001 et 437.
Lorsque nous avons retenus 8 nombres, notre échantillon est constitué des 8 individus désignés dans la population par ces huit nombres.
Selon que nous effectuons un tirage avec ou sans remise, nous garderons ou écarterons un individu déjà tiré.

L'inconvénient majeur de la méthode élémentaire est son coût : les individus tirés peuvent être très éloignés géographiquement.

6.2.2.2. Sondage stratifié.

La population étudiée Ω est partitionnée en q sous-populations Ω_1, Ω_2, ... , Ω_q, appelées "**strates**".
L'échantillon est constitué de la réunion de q échantillons choisis au hasard, un par strate : nous effectuons dans chaque strate un échantillonnage simple.

Exemple.

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $\Omega_1 = \{1, 2\}$, $\Omega_2 = \{3, 4, 5\}$.
Nous sélectionnons trois individus, dont un dans Ω_1 et deux dans Ω_2.
Nous obtenons l'un des six échantillons possibles.

Cette méthode se justifie par deux raisons essentielles :

1. — L'existence d'une stratification de fait, soit pour des raisons géographiques, soit pour des raisons administratives.

Exemple 1 : enquête sur les conditions de vie pénitentiaire en France.

La population est celle des détenus en France
Les strates sont les populations de détenus dans les divers établissements pénitentiaires.

Exemple 2 : enquête sur la consommation par un organisme disposant de bureaux départementaux.

La population est celle des consommateurs français.
Les strates sont les consommateurs de chaque département.

2. — Un caractère étudié dans la population peut varier sous l'influence d'un certain nombre de facteurs.

Pour éliminer au mieux les risques de biais, nous créons des strates homogènes et, dans chacune d'elles, nous extrayons un échantillon aléatoire simple.

Exemple.

Pour étudier la consommation de tabac, si nous estimons que l'âge et le sexe sont des facteurs très influents, nous partageons la population en strates du type :
– Hommes de moins de 20 ans,
– Hommes de 20 à 30 ans,

– etc.
– Femmes de moins de 20 ans,
– Femmes de 20 à 30 ans,
– etc.

De chaque strate, nous extrayons un échantillon aléatoire simple.

6.2.2.3. Echantillonnage systématique.

Les individus de la population Ω sont numérotés de 1 à N.
Pour sélectionner n individus, nous partageons la population en $k = \frac{N}{n}$ groupes : $\{1, \ldots, k\}$, $\{1 + k, \ldots, 2k\}$, ... , $\{1 + (n-1)k, \ldots, N\}$.
Nous choisissons au hasard l'individu i par les individus numérotés de 1 à k.
Nous constituons notre échantillon des individus $\{i, i + k, i + 2k, \ldots, i + (n-1)k\}$.
Le choix de l'individu i détermine entièrement la constitution de l'échantillon.

Exemple.

$\Omega = \{1, \ldots, 20\}$, $k = 4$.
Les échantillons possibles sont : {1, 5, 9, 13, 17}, {2, 6, 10, 14, 18}, {3, 7, 11, 15, 19}, {4, 8, 12, 16, 20}.

Cette méthode est bien adaptée à la sélection de cartes dans un fichier, ou au prélèvement de pièces dans une fabrication pour un contrôle de qualité.
Elle présente une certaine analogie avec la méthode précédente d'échantillonnage stratifié.

6.2.2.4. Echantillonnage à plusieurs degrés.

La population Ω est divisée en sous-populations appelées unités primaires.
Chaque unité primaire est divisée en unités secondaires, etc.
Nous effectuons des tirages au hasard en cascade : nous tirons des unités primaires ; dans chaque unité primaire, nous tirons une unité secondaire, etc.

Exemple.

L'INSEE effectue des échantillonnages à quatre niveaux : départements, cantons, communes, ménages.

Cette méthode permet une exécution rapide.
Elle est économique, car elle focalise les tirages.

La méthode de tirage au hasard à chaque niveau peut varier suivant le cas, par exemple tirage proportionnel aux unités qu'il contient, ou tirage équiprobable.
Nous disons alors que nous pouvons avoir des tirages avec **probabilités inégales**.

Cas particulier : tirage par grappes.

Nous choisissons des grappes pour lesquelles nous gardons tous les "grains", ou individus.
Une "grappe" est un groupe d'individus de même nature.

Exemple : ménages d'un même immeuble.

6.2.2.5. Conclusion.

En pratique, les diverses méthodes aléatoires peuvent être mêlées pour améliorer le rendement.
Pour chacune d'elle, nous pourrons varier les critères de tirage au hasard de chaque individu : avec remise, sans remise, avec des probabilités égales ou inégales.

6.3. ESTIMATION DES PARAMETRES.

6.3.1. Notion de paramètre.

Nous considérons une population Ω de taille finie N.
Dans cette population, nous étudions un caractère quantitatif réel prenant les valeurs réelles x_i, $i \in \{1, ... N\}$.
La fonction de répartition empirique $F_N(x)$ est une fonction en escalier.
La variable statistique représentant le caractère étudié peut être une variable quantitative discrète ou continue.

Le problème est de modéliser la fonction de répartition empirique $F_N(x)$, par la fonction de répartition $F(x)$ d'une variable aléatoire X, discrète ou continue suivant le cas, vérifiant $F(x_i) = F_N(x_i)$, $i \in \{1, ... N\}$.

Nous dirons que $F(x)$ définit la **loi de référence** associée à une population hypothétique infinie, dite **population de référence**.

La population Ω est appelée la **population-mère**.

La connaissance de la loi de référence du caractère étudié est d'un grand intérêt pour la déduction statistique.
Elle constitue un modèle mathématique du phénomène étudié.
Cette distribution théorique peut dépendre d'un certain nombre de paramètres inconnus.

Les sondages permettent d'estimer deux types de paramètres :

- Les paramètres propres à la population-mère : moyenne, variance, etc.
- Les paramètres propres à la loi de référence : paramètre d'une loi de Poisson, paramètres d'une loi normale, etc.

6.3.2. Notion d'estimateur d'un paramètre de Ω.

6.3.2.1. Estimateur et estimation ponctuelle.

Soit X un caractère quantitatif de la population Ω.
Ce caractère prend les valeurs inconnues x_i, $i \in \{1, ... N\}$.
Un résumé de l'ensemble des valeurs $\{x_1, ... , x_N\}$ peut être défini par un ou plusieurs paramètres de Ω (moyenne, variance, proportion, etc.).

Soit y un tel paramètre de la population Ω.

Lorsque nous extrayons de la population un échantillon aléatoire simple E de taille n, nous pouvons calculer, avec les valeurs $\{x_1, ... , x_n\}$ prises par X dans l'échantillon, une estimation ponctuelle de y,

qui sera notée y^*.

Exemple.

Si y est la moyenne $\mu = \overline{X}$ de X, nous obtiendrons une estimation ponctuelle μ^* de la moyenne μ en prenant la moyenne arithmétique de l'échantillon :

$$\mu^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=n} x_i.$$

La valeur observée y^* n'est que l'une des valeurs possibles que l'on peut obtenir avec les divers échantillons possibles de taille n.
En réalité, avec une population de N individus, il y a un certain nombre, mettons k, d'échantillons possibles E_j de taille n, $j \in \{1, ..., k\}$ (k dépend de la méthode d'échantillonnage).
Chaque échantillon possible E_j de taille n possède une certaine probabilité p_j d'être tiré.
A chaque échantillon possible E_j de taille n est associée une estimation ponctuelle y_j^* de y.
A chaque estimation ponctuelle y_j^* de y est donc associée la probabilité p_j d'être observée.

Nous pouvons alors définir une variable aléatoire $\hat{y}$ prenant, pour chaque échantillon possible E_j de taille n, la valeur y_j^* avec la probabilité p_j.

Cette variable aléatoire $\hat{y}$ est appelée un **estimateur** du paramètre y.

Les valeurs de $\hat{y}$ sont les **estimations ponctuelles** de y.

La loi de probabilité de $\hat{y}$ s'appelle la **distribution d'échantillonnage** de $\hat{y}$.

On appelle **fluctuation d'échantillonnage**, la variation des estimations ponctuelles de y et **aléas d'échantillonnage** les causes de ces variations.

6.3.2.2. Caractéristiques d'un estimateur.

Il est logique de souhaiter que l'estimateur $\hat{y}$ prenne des valeurs aussi voisines que possible de la valeur inconnue y que nous voulons estimer.
Nous sommes conduits à définir un certain nombre de qualités que doit présenter un "bon" estimateur.

a) Estimateur sans biais.

Nous dirons que $\hat{y}$ est un estimateur sans biais du paramètre y, si, et seulement si, son espérance mathématique est y.

$$\boxed{\text{sans biais} \Leftrightarrow E(\hat{y}) = y}$$

Cette propriété traduit le fait qu'en moyenne, sur tous les échantillons possibles, nous retrouvons la valeur du paramètre que nous voulons estimer.

b) Estimateur robuste.

L'estimateur $\hat{y}$ d'un paramètre *y* possède une variance $\sigma_{\hat{y}}^2$ qui traduit la dispersion des valeurs de $\hat{y}$ autour de son espérance mathématique.
Cette variance dépend de la taille *n* de l'échantillon.
Nous dirons que $\hat{y}$ est un estimateur robuste, ou **convergent**, de *y* si la limite, lorsque *n* tend vers *N* de $\sigma_{\hat{y}}^2$ est nulle.

$$\text{robuste} \Leftrightarrow \lim_{n \to N} \sigma_{\hat{y}}^2 = 0$$

Cette propriété traduit le fait suivant : si nous connaissons la valeur prise par le caractère pour tous les individus de la population, la valeur de $\hat{y}$ est la valeur exacte *y* du paramètre.

Un **estimateur correct** est un estimateur sans biais et robuste.

c) Estimateur asymptotiquement gaussien.

Nous dirons qu'un estimateur $\hat{y}$ d'un paramètre *y* est **asymptotiquement gaussien** si, et seulement si, il vérifie la propriété suivante :

Lorsque *n* augmente indéfiniment, la fonction de répartition de $\frac{\hat{y} - E(\hat{y})}{\sigma_{\hat{y}}}$ tend uniformément vers la **fonction de répartition d'une variable normale centrée réduite**.

En pratique, dès que *n* est supérieur ou égal à 30, nous admettrons que la fonction de répartition de $\frac{\hat{y} - E(\hat{y})}{\sigma_{\hat{y}}}$ peut être remplacée par la fonction de répartition de la variable normale centrée réduite.

Lorsque *n* est suffisamment grand (en pratique $n \geq 30$), pour tout $\alpha \in [0, 1]$, le nombre réel positif u_α donné par :

$\Phi(u_\alpha) = 1 - \frac{\alpha}{2}$, où Φ est la fonction de répartition de la variable normale centrée réduite,

vérifie :

$$P\left(\left| \frac{\hat{y} - E(\hat{y})}{\sigma_{\hat{y}}} \right| \leqslant u_\alpha \right) = 1 - \alpha.$$

En effet, comme la fonction de répartition de $\frac{\hat{y} - E(\hat{y})}{\sigma_{\hat{y}}}$ peut être remplacée par la fonction de répartition de la variable normale centrée réduite, dès que *n* est supérieur ou égal à 30, la symétrie de la loi normale donne :

$$P\left(\left|\frac{\hat{y}-E\left(\hat{y}\right)}{\sigma_{\hat{y}}}\right| \leqslant u_\alpha\right) = \Phi(u_\alpha) - \Phi(-u_\alpha) = \Phi(u_\alpha) - (1 - \Phi(u_\alpha)) = 2\,\Phi(u_\alpha) - 1 = 1 - \alpha.$$

Les valeurs de la fonction de répartition Φ sont données par des tables.

Un **estimateur CAG** est un estimateur correct et asymptotiquement gaussien.

d) Amélioration d'un estimateur.

Etant donnés deux estimateurs $\hat{y}_1$ et $\hat{y}_2$ du même paramètre *y*, on dit que l'estimateur $\hat{y}_1$ est meilleur que l'estimateur $\hat{y}_2$ si l'espérance de $(\hat{y}_1 - y)^2$ est plus petite que l'espérance de $(\hat{y}_2 - y)^2$.

Ceci signifie simplement que l'on considère comme meilleur un estimateur dont les valeurs sont moins dispersées autour de la valeur de *y*.
Dans l'absolu, le meilleur estimateur d'un paramètre est celui dont pour lequel l'espérance de $(\hat{y} - y)^2$ est la plus petite possible.
Un estimateur sans biais dont la variance est minimale s'appelle un **estimateur précis**.
Pour un estimateur précis, l'espérance $E(\hat{y})$ est égale à *y* et la variance $\sigma_{\hat{y}}^2$ est minimale.

6.3.3. Notion d'intervalle de confiance.

6.3.3.1. Introduction.

Considérons un échantillon aléatoire simple *E*, de taille *n*, extrait de la population Ω (tirages au sort équiprobables, sans remise).
Dans cet échantillon, le caractère étudié prend les valeurs $\{x_1, \ldots, x_n\}$.
Nous pouvons considérer la valeur prise par le caractère étudié pour l'individu *i* de l'échantillon comme la valeur prise par une variable aléatoire *X*.
L'ensemble des valeurs $\{x_1, \ldots, x_n\}$ apparaît alors comme le résultat de *n* épreuves indépendantes sur la même variable aléatoire.
L'estimateur $\hat{y}$ d'un paramètre *y* apparaît alors comme une fonction de *n* variables aléatoires indépendantes X_i, $i \in \{1, \ldots, n\}$, de même loi de probabilité, qui est la loi de probabilité de *X*.
X s'appelle la **variable parente**.

La connaissance de la loi de probabilité de *X* permet de calculer la loi de probabilité de $\hat{y}$.

La variable aléatoire centrée réduite $\frac{\hat{y}-E\left(\hat{y}\right)}{\sigma_{\hat{y}}}$ correspondant à $\hat{y}$, possède une espérance mathématique nulle et une variance égale à 1.

Exemple 1.

Nous étudions la taille des individus d'une population d'effectif *N*.
Pour cela nous extrayons un échantillon aléatoire simple et indépendant d'effectif *n*.
Soit μ la moyenne de la taille des individus de la population.
Soit *X* la variable aléatoire "taille d'un individu" : à chaque individu de l'échantillon est associé une

variable aléatoire indépendante "taille" X_i qui a la même loi de probabilité que la variable parente X.
L'estimateur

$$\hat{\mu} = \overline{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=n} X_i$$

de la taille moyenne μ dans la population, a, pour valeur dans l'échantillon, la moyenne arithmétique des tailles des individus de l'échantillon.
Cet estimateur possède une loi de probabilité qui peut être calculée en fonction de la loi de probabilité de X.

Exemple 2.

Soit σ^2 la variance de la taille des individus de la population.
Soit X la variable aléatoire "taille d'un individu" : à chaque individu de l'échantillon est associé une variable aléatoire indépendante "taille" X_i qui a la même loi de probabilité que la variable parente X.
L'estimateur

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^{i=n} X_i^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^{i=n} X_i \right)^2 \right)$$

de la variance σ^2 de la taille dans la population, a, pour valeur dans l'échantillon, $\frac{n}{n-1} S^2(X)$ où $S^2(X)$ est la variance des tailles des individus de l'échantillon (variance d'échantillonnage).
Cet estimateur possède une loi de probabilité qui peut être calculée en fonction de la loi de probabilité de X.

6.3.3.2. Intervalle de confiance pour les grands échantillons.

Si $\hat{y}$ est un estimateur correct et asymptotiquement gaussien (estimateur CAG) d'un paramètre y, avec $E(\hat{y}) = y$, la relation

$$P\left(\left| \frac{\hat{y} - E(\hat{y})}{\sigma_{\hat{y}}} \right| \leqslant u_\alpha \right) = 1 - \alpha$$

s'écrit :

$$P(\hat{y} - u_\alpha \sigma_{\hat{y}} \leqslant \mu \leqslant \hat{y} + u_\alpha \sigma_{\hat{y}}) = 1 - \alpha.$$

L'événement $\hat{y} - u_\alpha \sigma_{\hat{y}} \leqslant \mu \leqslant \hat{y} + u_\alpha \sigma_{\hat{y}}$ a donc une probabilité $1 - \alpha$ de se réaliser lorsqu'on choisit au hasard un échantillon de taille $n \geq 30$.
Autrement dit, dans la population, la proportion des échantillons de taille $n \geq 30$ pour lesquels l'événement $\hat{y} - u_\alpha \sigma_{\hat{y}} \leqslant \mu \leqslant \hat{y} + u_\alpha \sigma_{\hat{y}}$ est réalisé est $1 - \alpha$.
Autrement dit encore, étant donné un échantillon de taille $n \geq 30$, choisi au hasard, la probabilité de réalisation de l'événement $\hat{y} - u_\alpha \sigma_{\hat{y}} \leqslant \mu \leqslant \hat{y} + u_\alpha \sigma_{\hat{y}}$ est $1 - \alpha$.

Or, pour un échantillon de taille n choisi au hasard, $\hat{y}$ prend la valeur y^* et $\sigma_{\hat{y}}$ une valeur $s_{\hat{y}}$, de sorte que $\hat{y} - u_\alpha \sigma_{\hat{y}}$ prend une valeur

$$y_1 = y^* - u_\alpha s_{\hat{y}}$$

et $\hat{y} + u_\alpha \sigma_{\hat{y}}$ prend la valeur

$$y_2 = y^* + u_\alpha s_{\hat{y}}$$

L'intervalle

$$\boxed{[y_1 ; y_2] = [\, y^* - u_\alpha s_{\hat{y}} ; y^* + u_\alpha s_{\hat{y}} \,]}$$

dans lequel la taille n de l'échantillon est supérieure ou égale à 30 et $\Phi(u_\alpha) = 1 - \frac{\alpha}{2}$, s'appelle l'intervalle de confiance de y au risque α, ou **intervalle de confiance de y au niveau de confiance $1 - \alpha$**.

C'est un intervalle dans lequel la probabilité de trouver la vraie valeur de y est $1 - \alpha$.

Plus α est grand, plus l'amplitude de l'intervalle de confiance est petite, puisque Φ est une fonction croissante.
Dans la pratique, en l'absence de précision contraire, nous conviendrons de prendre $\alpha = 5$ %.

Plus n est grand, plus la valeur de $\sigma_{\hat{y}}^2$ a des chances d'être proche de 0, donc plus la valeur de $\hat{y}$ a des chances d'être proche de y.
Nous pourrons ainsi calculer la valeur de n qui permet d'avoir un intervalle de confiance d'amplitude donnée.

Les **valeurs à retenir** de la fonction de répartition de la variable aléatoire normale centrée réduite sont, pour $\Phi(u_\alpha) = 1 - \frac{\alpha}{2}$:

— $\Phi(1{,}645) = 0{,}950$, soit $u_{0,10} = 1{,}645$.

— $\Phi(1{,}960) = 0{,}975$, soit $u_{0,05} = 1{,}960$.

— $\Phi(2{,}575) = 0{,}995$, soit $u_{0,01} = 2{,}575$.

Ces valeurs donnent les intervalles de confiance aux niveaux de confiance 90 %, 95 %, 99 %.
La valeur utilisée par défaut est $u_{0,05} = 1{,}960$.

6. 4. ETUDE DU SONDAGE ELEMENTAIRE.

Soit Ω une population d'effectif *N* dont on étudie un caractère *X*.

Si *X* est un caractère quantitatif, les paramètres qui caractérisent ce caractère sont :

— la moyenne $\overline{X} = \mu = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{i=N} x_i$

— la variance $\sigma^2 = \frac{1}{N} \left(\sum_{i=1}^{i=N} x_i^2 - \frac{1}{N} \left(\sum_{i=1}^{i=N} x_i \right)^2 \right)$.

Si *X* est un caractère qualitatif à deux modalités *A* et *B*, le paramètre qui caractérise *X* est la proportion *p* d'individus présentant la modalité *A*.
Les paramètres sont inconnus.
La théorie de l'échantillonnage a pour but de les estimer au mieux.

6.4.1. Echantillon non exhaustif, tirage à probabilités égales.

Un tirage au hasard avec remise induit que chaque individu a une probabilité $\frac{1}{N}$ d'être tiré.

6.4.1.1. Caractère quantitatif.

a) Loi de probabilité induite par le tirage de l'échantillon.

Le tirage avec remise, d'un individu de W, peut être représenté par une variable aléatoire parente, notée encore *X*, dont la loi de probabilité est définie par :

$$P(X = x_i) = \frac{1}{N},\ i \in [1, N].$$

L'espérance mathématique de *X* est $E(X) = \sum_{i=1}^{i=N} \frac{1}{N} x_i = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{i=N} x_i = \mu$.

La variance de *X* est $Var(X) = E((X - \mu)^2) = \sigma^2$.

b) Estimateur de la moyenne de la population.

Constituer un échantillon de taille *n* par des tirages non exhaustifs équiprobables dans Ω, revient à définir *n* variables aléatoires indépendantes $X_1, \ldots, X_n$, qui suivent toutes la même loi que *X*.
Soit $\{x_1, \ldots, x_n\}$ la réalisation de l'échantillon *E*.

La moyenne arithmétique $\overline{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=n} x_i$ est la réalisation par échantillonnage de la variable aléatoire

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=n} X_i.$$

L'espérance mathématique de l'estimateur $\hat{\mu}$ est $E(\hat{\mu}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=n} E(X_i) = \frac{1}{n} \times n\, E(X) = \mu$.

La variance de l'estimateur $\hat{\mu}$ est $\sigma_{\hat{\mu}}^2 = Var(\hat{\mu}) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{i=n} Var(X_i) = \frac{1}{n^2} \times n\, Var(X) = \frac{\sigma^2}{n}$.

Par conséquent, $\hat{\mu}$ est un estimateur **sans biais** de μ ($E(\hat{\mu}) = \mu$) mais il n'est **pas robuste** ($\lim_{n \to N} \sigma_{\hat{\mu}}^2 = \frac{\sigma^2}{N} \neq 0$).

c) Estimateur de la variance de la population.

La variance expérimentale de l'échantillon est $s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=n} (x_i - \overline{x})^2$.

C'est la réalisation par échantillonnage de la variable aléaoire "**variance d'échantillonnage**" :

$$S^2 = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^{i=n} X_i^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^{i=n} X_i \right)^2 \right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=n} (X_i - \hat{\mu})^2$$

L'espérance mathématique de S^2 est

$$E(S^2) = E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=n} (X_i - \hat{\mu})^2 \right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=n} E\left((X_i - \hat{\mu})^2 \right)$$

$$E(S^2) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=n} E\left((X_i - \mu + \mu - \hat{\mu})^2 \right)$$

$$E(S^2) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=n} E(X_i - \mu)^2 + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=n} E(\mu - \hat{\mu})^2 + \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{i=n} E\left((X_i - \mu)(\mu - \hat{\mu}) \right)$$

Mais on a :

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=n} E(X_i - \mu)^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=n} E\left(X_i - E(X_i) \right)^2 = \frac{1}{n} n \, Var(X) = \sigma^2.$$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=n} E(\mu - \hat{\mu})^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=n} E\left((\hat{\mu} - E(\hat{\mu}))^2 \right) = Var(\hat{\mu}) = \frac{\sigma^2}{n}.$$

$$\frac{2}{n} \sum_{i=1}^{i=n} E\left((X_i - \mu)(\mu - \hat{\mu}) \right) = \frac{2}{n} E\left((\mu - \hat{\mu}) \sum_{i=1}^{i=n} (X_i - \mu) \right) = \frac{2}{n} E\left((\mu - \hat{\mu})(n\hat{\mu} - n\mu) \right) = -2 E((\hat{\mu} - \mu)^2) = -2 Var(\hat{\mu}) = -2 \frac{\sigma^2}{n}.$$

Au total :

$$E(S^2) = \sigma^2 - \frac{\sigma^2}{n} = \frac{n-1}{n} \sigma^2.$$

La variance d'échantillonnage n'est pas un estimateur sans biais de la variance σ^2 de la population : c'est un **estimateur biaisé**.

La linéarité de l'espérance mathématique montre que :

$$E\left(\frac{n}{n-1} S^2 \right) = \frac{n}{n-1} E(S^2) = \sigma^2,$$

de sorte que l'estimateur :

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{i=n} X_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{i=n} X_i\right)^2\right) = \frac{n}{n-1} S^2$$

est un estimateur **sans biais** de la variance σ^2 de la population : $E(\hat{\sigma}^2) = \sigma^2$.

6.4.1.2. Caractère qualitatif.

Le paramètre étudié inconnu est la proportion *p* d'individus de la population présentant la modalité *A* du caractère qualitatif.
Pour chaque individu de la population, nous pouvons définir une variable aléatoire de Bernoulli, prenant la valeur 1, avec la probabilité *p*, si l'individu est porteur de la modalité *A*, 0 sinon, avec la probabilité $q = 1 - p$.

Choisir un échantillon de taille *n*, c'est choisir un *n*-uple de variables aléatoires $(X_1, \ldots, X_n)$ de Bernoulli, indépendantes, de même paramètre *p*.
Soit $(x_1, \ldots, x_n)$ une réalisation de l'échantillon *E*.

La moyenne expérimentale $p^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=n} x_i$ est la réalisation par échantillonnage de la variable aléatoire $\hat{p} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=n} X_i$, qui représente la fréquence de la modalité *A* dans l'échantillon.

Son espérance mathématique est $E(\hat{p}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=n} E(X_i) = \frac{1}{n} \times n\,p = p$.

$$\hat{p} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=n} X_i$$

est un **estimateur sans biais** de la proportion *p* des individus de la population présentant la modalité *A* du caractère étudié.

Sa variance est $Var(\hat{p}) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{i=n} Var(X_i) = \frac{1}{n^2} \times n\,p\,(1-p) = \frac{p(1-p)}{n}$.
Lorsque *n* tend vers *N*, cette variance ne tend pas vers 0, mais vers $\frac{p(1-p)}{N}$: l'estimateur $\hat{p}$ de *p* n'est **pas un estimateur robuste**.

Pour les échantillons de grande taille ($n \geq 30$), on peut définir l'intervalle de confiance de *p* correspondant au risque α, par :

$$[p_1, p_2] = \left[\, p^* - u_\alpha \sqrt{\frac{p^*(1-p^*)}{n}} \;;\; p^* + u_\alpha \sqrt{\frac{p^*(1-p^*)}{n}} \,\right]$$

avec $\Phi(u_\alpha) = 1 - \frac{\alpha}{2}$.

6.4.2. Echantillon exhaustif, tirage à probabilités égales.

Un tirage au hasard sans remise induit que chaque échantillon de taille n a une probabilité $\frac{1}{\binom{N}{n}} = \frac{n!(N-n)!}{N!}$ d'être tiré.

6.4.2.1. Caractère quantitatif.

a) Estimation de la moyenne.

Soit x_{ij} la réalisation du caractère X pour le j^e individu de l'échantillon $E_i = (X_{i1}, \dots, X_{in})$.
La réalisation du i^e échantillon est un n-uple $(x_{i1}, \dots, x_{in})$.
La moyenne d'échantillonnage $\overline{x}_i = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{j=n} x_{ij}$ est la réalisation d'une variable aléatoire $\hat{\overline{X}}$ que nous allons définir.

Nous pouvons définir $\binom{N}{n}$ échantillons différents E_i, $i \in \left[\ 1\ ;\ \binom{N}{n}\ \right]$, de taille n, chacun ayant une probabilité $p_i = \frac{1}{\binom{N}{n}} = \frac{n!(N-n)!}{N!}$ d'être tiré au hasard.

Considérons la variable aléatoire $\hat{\overline{X}}$ dont la loi de probabilité, uniforme, est définie par :

$$P\left(\hat{\overline{X}} = \overline{x}_i\right) = p_i,\ i \in \left[\ 1\ ;\ \binom{N}{n}\ \right].$$

Son espérance mathématique est :

$$E\left(\hat{\overline{X}}\right) = \sum_{i=1}^{i=\binom{N}{n}} p_i\, \overline{x}_i = \frac{1}{\binom{N}{n}} \sum_{i=1}^{i=\binom{N}{n}} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{k=n} x_{ik} \right) = \frac{1}{\binom{N}{n}} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=\binom{N}{n}} \left(\sum_{k=1}^{k=n} x_{ik} \right).$$

La somme $\sum_{i=1}^{i=\binom{N}{n}}$ est une somme étendue à tous les échantillons de taille n.

Pour un k pris entre 1 et n, notons que x_{ik} est la valeur x_j du caractère X pour le k^e individu de l'échantillon, qui est le j^e individu de la population.
Cette valeur apparaît une fois dans tous les échantillons de taille n contenant cet individu de la population, mais pas forcément à la même place, c'est-à-dire pas forcément avec le même indice k.
Or il y a $\binom{N-1}{n-1}$ échantillons de taille n contenant cet individu, de sorte que la valeur x_j de X pour le j^e individu de la population, apparaît $\binom{N-1}{n-1}$ fois dans la somme $\sum_{i=1}^{i=\binom{N}{n}} \left(\sum_{k=1}^{k=n} x_{ik} \right)$.

Ce raisonnement est valable, bien sûr, pour tous les indices j de 1 à N.
Lorsque nous faisons la somme pour tous les échantillons de taille n, nous obtenons :

$$\sum_{i=1}^{i=\binom{N}{n}} \left(\sum_{k=1}^{k=n} x_{ik} \right) = \sum_{j=1}^{j=N} \binom{N-1}{n-1} x_j = \binom{N-1}{n-1} (x_1 + ... + x_N)$$

$$E\left(\hat{\bar{X}}\right) = \frac{1}{\binom{N}{n}} \frac{1}{n} \binom{N-1}{n-1} (x_1 + ... + x_N) = \frac{1}{\binom{N}{n}} \frac{1}{n} \binom{N-1}{n-1} N\,\mu = \frac{n![N-n)!}{N!} \frac{N}{n} \frac{[N-1)!}{[n-1)![N-n)!}\,\mu = \mu$$

Moralité : la moyenne d'échantillonnage $\hat{\bar{X}} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{j=n} X_{ij}$ est un estimateur **sans biais** de la moyenne μ du caractère *X*.

b) Variance de la moyenne d'échantillonnage.

La variance de $\hat{\bar{X}}$ est donnée par $Var\left(\hat{\bar{X}}\right) = E\left(\hat{\bar{X}}^2\right) - \left(E\left(\hat{\bar{X}}\right)\right)^2 = E\left(\hat{\bar{X}}^2\right) - \mu^2$.

Calculons le terme :

$$E\left(\hat{\bar{X}}^2\right) = \sum_{i=1}^{i=\binom{N}{n}} p_i \, \bar{x}_i^{\,2}$$

$$E\left(\hat{\bar{X}}^2\right) = \frac{1}{\binom{N}{n}} \sum_{i=1}^{i=\binom{N}{n}} \bar{x}_i^{\,2} = \frac{1}{\binom{N}{n}} \sum_{i=1}^{i=\binom{N}{n}} \frac{1}{n^2} \left(\sum_{k=1}^{k=n} (x_{ik})^2 \right) = \frac{1}{\binom{N}{n}} \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{i=\binom{N}{n}} \left(\sum_{k=1}^{k=n} (x_{ik})^2 \right)$$

$$= \frac{1}{\binom{N}{n}} \frac{1}{n^2} \left(\sum_{i=1}^{i=\binom{N}{n}} \left(x_{i1}^{\,2} + ... + x_{in}^{\,2} \right) + \sum_{i=1}^{i=\binom{N}{n}} \left(\sum_{\substack{j,k=1 \\ j \neq k}}^{n} x_{ij}\, x_{ik} \right) \right)$$

Pour tout individu de numéro *j* de Ω, il y a $\binom{N-1}{n-1}$ échantillons de taille *n* contenant cet individu, de sorte que $x_j^{\,2}$ apparaît $\binom{N-1}{n-1}$ fois dans la somme $\sum_{i=1}^{i=\binom{N}{n}} \left(x_{i1}^{\,2} + ... + x_{in}^{\,2} \right)$.

Et ceci est vrai pour les *N* individus de la population.
De sorte que l'on obtient :

$$\sum_{i=1}^{i=\binom{N}{n}} \left(x_{i1}^{\,2} + ... + x_{in}^{\,2} \right) = \binom{N-1}{n-1} \left(x_1^{\,2} + ... + x_N^{\,2} \right) = \binom{N-1}{n-1} N \left(\sigma^2 + \mu^2 \right) = \frac{N!}{[n-1)![N-n)!} (\sigma^2 + \mu^2)$$

Reste à calculer la somme $\sum_{i=1}^{i=\binom{N}{n}} \left(\sum_{\substack{j,k=1 \\ j \neq k}}^{n} x_{ij}\, x_{ik} \right)$

Dans chacun des $\binom{N}{n}$ échantillons de taille *n*, on forme $\frac{n[n-1)}{2}$ produits de la forme $x_{ij}\, x_{ik}$, avec $j \neq k$.
Dans l'ensemble des échantillons de taille *n*, on forme donc $\binom{N}{n} \frac{n[n-1)}{2}$ produits de deux valeurs de *X*

différentes.
Comme il existe $\frac{N(N-1)}{2}$ produits de deux valeurs de *X* différentes, chacun intervient $\binom{N}{n}\frac{n(n-1)}{N(N-1)}$ fois dans la somme étendue à l'ensemble des échantillons de taille *n*.
On obtient donc :

$$\sum_{i=1}^{i=\binom{N}{n}}\left(\sum_{\substack{j,k=1\\ j\neq k}}^{n} x_{ij}\,x_{ik}\right)=\binom{N}{n}\frac{n(n-1)}{N(N-1)}\sum_{\substack{j,k=1\\ j\neq k}}^{N} x_j\,x_k$$

Or on peut écrire aussi :

$$\sum_{\substack{j,k=1\\ j\neq k}}^{N} x_j\,x_k=\sum_{j=1}^{j=N} x_j\left(\sum_{k=1}^{k=N} x_k-x_j\right)=\left(\sum_{j=1}^{j=N} x_j\right)\left(\sum_{k=1}^{k=N} x_k\right)-\sum_{j=1}^{j=N} x_j^2$$
$$=\left(\sum_{j=1}^{j=N} x_j\right)^2-\sum_{j=1}^{j=N} x_j^2=(N\,\mu)^2-N\,(\sigma^2+\mu^2)=N\,((N-1)\,\mu^2-\sigma^2)$$

On obtient alors :

$$\sum_{i=1}^{i=\binom{N}{n}}\left(\sum_{\substack{j,k=1\\ j\neq k}}^{n} x_{ij}\,x_{ik}\right)=\binom{N}{n}\frac{n(n-1)}{N(N-1)}N\,((N-1)\,\mu^2-\sigma^2)=\frac{N!}{n!(N-n)!}\,n\,\frac{n-1}{N-1}\,((N-1)\,\mu^2-\sigma^2)=N\binom{N-2}{n-2}$$
$$((N-1)\,\mu^2-\sigma^2)$$

$$E\left(\overset{\triangle}{\bar{X}}^2\right)=\frac{1}{\binom{N}{n}}\frac{1}{n^2}\left(N\binom{N-1}{n-1}(\sigma^2+\mu^2)+N\binom{N-2}{n-2}((N-1)\,\mu^2-\sigma^2)\right)$$

$$E\left(\overset{\triangle}{\bar{X}}^2\right)=\frac{1}{\binom{N}{n}}\frac{N}{n^2}\left(\binom{N-1}{n-1}-\binom{N-2}{n-2}\right)\sigma^2+\frac{1}{\binom{N}{n}}\frac{N}{n^2}\left(\binom{N-1}{n-1}+(N-1)\binom{N-2}{n-2}\right)\mu^2$$

$$\frac{1}{\binom{N}{n}}\frac{N}{n^2}\left(\binom{N-1}{n-1}-\binom{N-2}{n-2}\right)=\frac{n!(N-n)!}{N!}\frac{N}{n^2}\left(\frac{(N-1)!}{(n-1)!(N-n)!}-\frac{(N-2)!}{(n-2)!(N-n)!}\right)$$
$$=\frac{(n-1)!(N-n)!}{(N-1)!}\frac{1}{n}\frac{(N-2)!}{(n-1)!(N-n)!}\left((N-1)-(n-1)\right)=\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}$$

$$\frac{1}{\binom{N}{n}}\frac{N}{n^2}\left(\binom{N-1}{n-1}+(N-1)\binom{N-2}{n-2}\right)=\frac{n!(N-n)!}{N!}\frac{N}{n^2}\left(\frac{(N-1)!}{(n-1)!(N-n)!}+(N-1)\frac{(N-2)!}{(n-2)!(N-n)!}\right)$$
$$=\frac{(n-1)!(N-n)!}{(N-1)!}\frac{1}{n}\frac{(N-1)!}{(n-1)!(N-n)!}(1+(n-1))=1$$

$$E\left(\overset{\triangle}{\bar{X}}^2\right)=\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\,\sigma^2+\mu^2$$

$$Var\left(\overset{\triangle}{\bar{X}}\right)=E\left(\overset{\triangle}{\bar{X}}^2\right)-\mu^2=\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\,\sigma^2$$

$$\boxed{Var\left(\hat{\overline{X}}\right) = \frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\,\sigma^2}$$

Moralité : lorsque *n* tend vers *N*, la variance de $\hat{\overline{X}}$ tend vers 0, l'estimateur $\hat{\overline{X}}$ de μ est **robuste**.

La moyenne d'échantillonnage $\hat{\overline{X}} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{j=n} X_{ij}$ est un estimateur sans biais et robuste, donc **correct**, de μ.

On remarquera aussi que la présence du rapport d'exhaustivité $\frac{N-n}{N-1}$, inférieur à 1, fait que la variance de $\hat{\overline{X}}$ est plus faible lorsque l'échantillon est exhaustif que lorsqu'il est non exhaustif : les valeurs de $\hat{\overline{X}}$ sont moins dispersées autour de la moyenne μ lorsque l'échantillon est exhaustif.

c) Estimation de la variance.

La variance expérimentale de l'échantillon $s^2 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{j=n}(x_{ij} - \overline{x}_i)^2$ est une réalisation de la variable aléatoire :

$$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{j=n}(X_{ij} - \hat{\overline{X}})^2 = \frac{1}{n}\left(\sum_{j=1}^{j=n} X_{ij}^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{j=1}^{j=n} X_{ij}\right)^2\right)$$

L'espérance mathématique de cette variable aléatoire est ;

$$E(S^2) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{j=n} E\left((X_{ij} - \hat{\overline{X}})^2\right) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{j=n} E\left((X_{ij} - \mu + \mu - \hat{\overline{X}})^2\right)$$
$$= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{j=n} E\left((X_{ij} - \mu)^2\right) + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{j=n} E\left((\mu - \hat{\overline{X}})^2\right) - \frac{2}{n}\sum_{j=1}^{j=n} E\left((X_{ij} - \mu)(\hat{\overline{X}} - \mu)\right)$$

Mais :

$E\left((X_{ij} - \mu)^2\right) = E\left((X_{ij} - E(X_{ij})^2\right) = Var(X_{ij}) = \sigma^2$.

$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{j=n} E\left((X_{ij} - \mu)^2\right) = \frac{1}{n} n\,\sigma^2 = \sigma^2$.

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{j=n} E\left((\mu - \hat{\overline{X}})^2\right) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{j=n} Var\left(\hat{\overline{X}}\right) = \frac{1}{n} n\, Var\left(\hat{\overline{X}}\right) = Var\left(\hat{\overline{X}}\right) = \frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\,\sigma^2$$

$$\sum_{j=1}^{j=n} E\left((X_{ij} - \mu)(\hat{\overline{X}} - \mu)\right) = E\left((\hat{\overline{X}} - \mu)\sum_{j=1}^{j=n}(X_{ij} - \mu)\right) = E\left((\hat{\overline{X}} - \mu)\, n\,(\hat{\overline{X}} - \mu)\right) = n\,E\left((\hat{\overline{X}} - \mu)^2\right) = n\, Var\left(\hat{\overline{X}}\right)$$

Il reste alors :

$$E(S^2) = \sigma^2 + \frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\,\sigma^2 - \frac{2}{n} n\, Var\left(\hat{\overline{X}}\right) = \sigma^2 - \frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\,\sigma^2 = \frac{n[N-1)-[N-n)}{n[N-1)}\,\sigma^2 = \frac{N[n-1)}{n[N-1)}\sigma^2$$

On voit donc que S^2 est un estimateur biaisé de σ^2, mais que, par linéarité de l'espérance mathématique :

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1-\frac{1}{N}}{1-\frac{1}{n}} S^2 = \frac{N-1}{N}\frac{1}{n-1}\left(\sum_{j=1}^{j=n} X_{ij}^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{j=1}^{j=n} X_{ij} \right)^2 \right)$$

est un **estimateur sans biais de la variance** σ^2.

6.4.2.2. Caractère qualitatif.

La fréquence d'échantillonnage $p^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=n} x_i$ de la modalité *A* du caractère qualitatif étudié est la valeur prise après échantillonnage par la variable aléatoire

$$\hat{p} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=n} X_i.$$

Mais nous avons vu, précédemment, que l'espérance mathématique et la variance de X_i, étaient données par :

$$E(X_i) = p$$
$$Var(X_i) = p(1-p).$$

L'étude précédente montre que nous pouvons écrire :

$$E(\hat{p}) = p$$
$$Var(\hat{p}) = \frac{1}{n^2} Var\left(\sum_{i=1}^{i=n} X_i \right) = \frac{1}{n^2} Var\left(n\frac{\triangle}{X} \right) = Var\left(\frac{\triangle}{X}\right) = \frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1} p(1-p).$$

Ainsi, $\hat{p}$ est un estimateur sans biais et robuste de *p*.

Sa réalisation $p^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=n} x_i$ dans un échantillon est une estimation ponctuelle sans biais de *p*.

Pour les grands échantillons, au niveau de confiance $1-\alpha$, la réalisation de l'intervalle de confiance de *p* sera donné par $[\, p_1 ; p_2 \,]$, avec

$$p_1 = p^* - u_\alpha \sqrt{\frac{N-n}{N-1}} \sqrt{\frac{p^*(1-p^*)}{n}}$$
$$p_2 = p^* + u_\alpha \sqrt{\frac{N-n}{N-1}} \sqrt{\frac{p^*(1-p^*)}{n}}$$

où u_α est défini par la relation $\Phi(u_\alpha) = 1 - \frac{\alpha}{2}$, Φ étant la fonction de répartition de la variable normale centrée réduite.

6.4.3. Echantillon non exhaustif, tirage à probabilités inégales.

Soit $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_N\}$ la population.
Nous étudions dans cette population un caractère quantitatif X de valeur x_j pour l'individu ω_j.
Notons p_j la probabilité de tirage de l'individu ω_j lors de la constitution de l'échantillon $\left(\sum_{j=1}^{j=N} p_j = 1 \right)$.

Tout tirage avec remise peut être schématisé par une variable aléatoire $\hat{\hat{X}}$ dont la loi de probabilité est définie par :

$$P(\hat{\hat{X}} = x_j) = p_j, \forall\, j \in [1 ; N].$$

Notons :

— $\mu = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{j=N} x_j$, la moyenne du caractère X dans la population.
— $\sigma^2 = \frac{1}{N}\left(\sum_{j=1}^{j=N} x_j^2 \right) - \frac{1}{N}\left(\sum_{j=1}^{j=N} x_j \right)^2$, la variance de X dans la population.

Ces paramètres sont inconnus, nous cherchons à les estimer.
Nous supposons connues la taille N de la population et les probabilités p_j associées aux valeurs x_j.

Notons, pour simplifier, $(x_1, \ldots, x_n)$ la réalisation d'un échantillon.

6.4.3.1. Estimation de la moyenne.

Considérons la variable aléatoire $\hat{\hat{X}}'$ définie par la loi de probabilité :

$$P\left(\hat{\hat{X}}' = \frac{x_j}{p_j} \right) = p_j, \forall\, j \in [1 ; N].$$

et soit :

$$\boxed{\hat{\hat{m}}' = \frac{1}{Nn} \sum_{i=1}^{i=n} \hat{\hat{X}}'_i}$$

la variable aléatoire de réalisation $m'^* = \frac{1}{Nn} \sum_{i=1}^{i=n} \frac{x_i}{p_i}$ dans l'échantillon.

Nous avons :

$$E(\hat{\hat{m}}') = \frac{1}{Nn} \sum_{i=1}^{i=n} E(\hat{\hat{X}}'_i) = \frac{1}{Nn} \sum_{i=1}^{i=n} \left(\sum_{j=1}^{j=N} p_j \frac{x_j}{p_j} \right) = \frac{1}{Nn} \sum_{i=1}^{i=n} N\mu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=n} \mu = \frac{1}{n} \times n\,\mu = \mu$$

La relation $E(\hat{\hat{m}}') = \mu$ montre que la variable aléatoire $\hat{\hat{m}}'$ est un **estimateur sans biais de μ**.
Sa réalisation $m'^* = \frac{1}{Nn} \sum_{i=1}^{i=n} \frac{x_i}{p_i}$ dans l'échantillon est une estimation ponctuelle sans biais de μ.

6.4.3.2. Variance de l'estimateur de la moyenne.

Nous avons :

$$E\left(\hat{\bar{X}}'\right) = \sum_{j=1}^{j=N} p_j \frac{x_j}{p_j} = N\,\mu$$

$$E\left(\hat{\bar{X}}'^{\,2}\right) = \sum_{j=1}^{j=N} p_j \frac{x_j^{\,2}}{p_j^{\,2}} = \sum_{j=1}^{j=N} \frac{x_j^{\,2}}{p_j}$$

$$Var\left(\hat{\bar{X}}'\right) = \sum_{j=1}^{j=N} \frac{x_j^{\,2}}{p_j} - N^{\,2}\,\mu^{\,2}$$

Comme le tirage de l'échantillon est fait avec remise, les variables $\hat{\bar{X}}_i'$ sont indépendantes, et, par conséquent :

$$Var\left(\hat{\bar{m}}'\right) = \left(\frac{1}{Nn}\right)^2 Var\left(\sum_{i=1}^{i=n} \hat{\bar{X}}_i'\right) = \frac{1}{N^2\,n^2} \sum_{i=1}^{i=n} Var\left(\hat{\bar{X}}_i'\right)$$

$$= \frac{n}{N^2\,n^2} Var\left(\hat{\bar{X}}'\right) = \frac{1}{N^2\,n} Var\left(\hat{\bar{X}}'\right) = \frac{1}{N^2\,n}\left(\sum_{j=1}^{j=N} \frac{x_j^{\,2}}{p_j} - N^{\,2}\,\mu^{\,2}\right)$$

$$\boxed{Var\left(\hat{\bar{m}}'\right) = \frac{1}{N^2\,n} \sum_{j=1}^{j=N} \frac{x_j^{\,2}}{p_j} - \frac{\mu^2}{n}}$$

Cette variance s'exprime à l'aide de l'ensemble des valeurs x_j, inconnues, prises par le caractère X dans la population Ω.
Il serait intéressant d'en avoir une estimation à partir de la réalisation $\{x_1, \ldots, x_n\}$ d'un échantillon.

6.4.3.3. Estimation de la variance de l'estimateur de la moyenne.

Soit $\hat{\bar{X}}'$ la variable aléatoire définie, comme dans IV.4.2.1. par la loi de probabilité :

$$P\left(\hat{\bar{X}}' = \frac{x_j}{p_j}\right) = p_j,\ \forall\, j \in [1\,;\,N].$$

Nous avons vu que l'espérance mathématique de cette variable aléatoire était égale à $N\,\mu$, qu'on peut estimer par $N\,\hat{\bar{m}}'$.
Considérons la variance d'échantillonnage de la variable aléatoire $\hat{\bar{X}}'$, c'est la variable aléatoire :

$$\hat{S}_1^{\,2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=n} \left(\hat{\bar{X}}_i' - N\,\hat{\bar{m}}'\right)^2$$

L'espérance mathématique de $\hat{S}_1^{\,2}$ est :

$$E\left(\hat{S}_1^{\,2}\right) = E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=n} \left(\hat{\bar{X}}_i' - N\,\hat{\bar{m}}'\right)^2\right)$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=n} E\left((\hat{X}_i' - N\,\hat{m}')^2 \right)$$
$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=n} E\left((\hat{X}_i' - N\,\mu + N\,\mu - N\,\hat{m}')^2 \right)$$
$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=n} E\left((\hat{X}_i' - N\,\mu)^2 \right) + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=n} E\left((N\,\mu - N\,\hat{m}')^2 \right) + \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{i=n} E\left((\hat{X}_i' - N\,\mu)(N\,\mu - N\,\hat{m}') \right)$$
$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=n} Var\,(\hat{X}_i') + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=n} Var\,(N\,\hat{m}') + \frac{2}{n} E\left((N\,\mu - N\,\hat{m}') \sum_{i=1}^{i=n} (\hat{X}_i' - N\,\mu) \right)$$
$$= \frac{1}{n} \times n\,Var\,(\hat{X}') + \frac{1}{n} \times n\,N^2\,Var\,(\hat{m}') + \frac{2}{n} E\left((N\,\mu - N\,\hat{m}')(N\,n\,\hat{m}' - N\,n\,\mu) \right)$$
$$= Var\,(\hat{X}') + N^2\,Var\,(\hat{m}') - \frac{2}{n} \times n\,N^2\,Var\,(\hat{m}')$$
$$= Var\,(\hat{X}') - N^2\,Var\,(\hat{m}')$$
$$= n\,N^2\,Var\,(\hat{m}') - N^2\,Var\,(\hat{m}')$$
$$= (n-1)\,N^2\,Var\,(\hat{m}')$$

La relation $E\,(\hat{s}_1^{\,2}) = (n-1)\,N^2\,Var\,(\hat{m}')$, qui s'écrit aussi :

$$E\left(\frac{\hat{s}_1^{\,2}}{(n-1)\,N^2} \right) = Var\,(\hat{m}')$$

montre que

> La variable aléatoire $\frac{\hat{s}_1^{\,2}}{(n-1)\,N^2}$ est un estimateur sans biais de la variance $Var\,(\hat{m}')$

et sa réalisation dans l'échantillon :

$$\frac{1}{n(n-1)\,N^2}\sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{x_i}{p_i} - N\,m'^* \right)^2 = \frac{1}{n(n-1)\,N^2}\left(\sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{x_i}{p_i} \right)^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{i=n} \frac{x_i}{p_i} \right)^2 \right)$$

compte tenu de la relation $N\,m'^* = m'^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=n} \frac{x_i}{p_i}$, est une **estimation ponctuelle sans biais de la variance de** $\hat{m}'$.

$$\sigma_{\hat{m}'}^{\,2}{}^* = \frac{1}{n(n-1)\,N^2}\left(\sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{x_i}{p_i} \right)^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{i=n} \frac{x_i}{p_i} \right)^2 \right)$$

Cette estimation de la variance de $\hat{m}'$ permet de construire, pour les grands échantillons, un **intervalle de confiance de la moyenne** μ :

$$m'^* \pm u_\alpha\,\sigma_{\hat{m}'}{}^*.$$

LICENCE Scientifique

Cours de Statistiques (2e partie) *
Henri IMMEDIATO

* Ce cours reprend dans ses grandes lignes le cours de Mme F. Duheille-Bienvenüe (MASS 42, 2001, Université Claude Bernard - Lyon 1) dont on n'a pu qu'apprécier la clarté et la concision.

Chapitre 1. Méthodes de simulation d'un échantillon.

Effectuer une simulation consiste à générer des données qui sont des réalisations de variables déterministes ou aléatoires selon des lois données, afin d'étudier et de comprendre le fonctionnement de systèmes économiques, industriels, scientifiques, politiques, etc.

Exemples : simulation d'un trafic urbain, de gestion d'un hôpital, d'évolution d'une population, de variations boursières, etc.

Une simulation permet de provoquer le déroulement d'une expérience de façon rapide et économique, et permet aussi d'éviter les dangers liés à la réalisation de certaines expériences à l'échelle réelle. Elle permet aussi de répéter l'expérience en faisant varier les paramètres. Enfin elle aide à l'élaboration de techniques de prévision et d'amélioration.

1.1. Méthodes de Monte-Carlo.

1.1.1. Principe d'une méthode de Monte-Carlo.

Une méthode de Monte-Carlo consiste à calculer un échantillon de loi déterminée à partir d'un échantillon de loi uniforme (nombres choisis au hasard à l'aide d'une table de nombres au hasard, ou nombres pseudo-aléatoires générés par un logiciel).
Rappelons qu'on appelle *n*-échantillon indépendant tout *n*-uple (X_1, ... , X_n) de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (c'est-à-dire de même loi), ou, si l'on aime les sigles ésotériques, VA iid.

Résultat fondamental : pour une variable aléatoire *U* de loi uniforme, ou constante, sur l'intervalle [0, 1], *X* et $F_X^{-1}(U)$ ont la même loi de probabilité.

Condition : F_X, fonction de répartition de *X*, est une bijection de R sur]0, 1[.

Etant donné un échantillon U_1, ... , U_n, de nombres choisis au hasard dans l'intervalle] 0, 1 [, les variables aléatoires $F_X^{-1}(U_1)$, ... , $F_X^{-1}(U_n)$, forment un échantillon de la loi de *X*.

Cette méthode est utile pour :

— construire un échantillon de loi connue permettant d'étudier

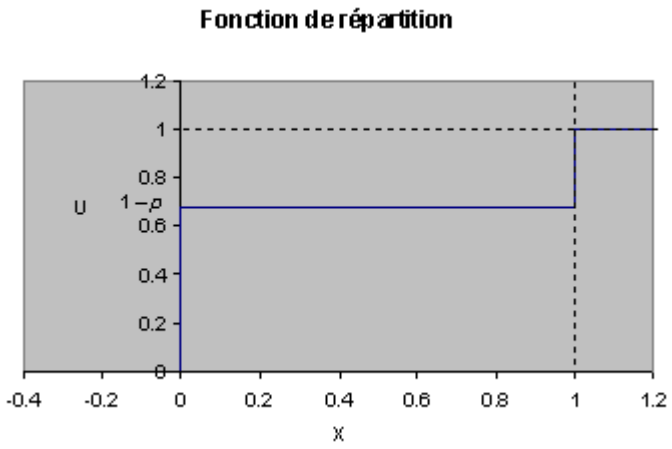
les paramètres d'un échantillon de loi inconnue,
— donner une estimation d'un paramètre, d'une constante, d'une intégrale,
— etc.

1.1.2. Application pratique de la méthode de Monte-Carlo avec la fonction de répartition.

Etant donnée une variable aléatoire *X* :

— on fixe a priori, à l'aide de la fonction de répartition de *X*, pour chaque nombre choisi au hasard, une valeur de *X* (c'est ce qu'on appelle la **transformation par quantile**).
— on tire au sort *n* nombres au hasard,
— on en déduit *n* valeurs de *X* qui constituent la réalisation d'un échantillon de *X*.

1.1.2.1. Simulation d'une variable aléatoire *X* de Bernoulli de paramètre *p*.



— pour chaque nombre u_i, $1 \leq i \leq n$, choisi au hasard dans l'intervalle [0, 1] des valeurs de la fonction de répartition, on prend
$x_i = 0$ si $u_i \in [0, 1 - p]$,
$x_i = 1$ si $u_i \in]1 - p, 1]$.
Cela revient à tracer un trait horizontal à l'ordonnée u_i et à regarder où il coupe la courbe représentative de la fonction de répartition de *X*, les points de discontinuité étant rejoints par un trait vertical : l'abscisse du point d'intersection est x_i.
— $(x_1, \ldots, x_n)$ est la réalisation d'un *n*-échantillon de *X* :
$P(X = 1) = P(U \in]1 - p, 1]) = p$.

Remarque.

Dès qu'on sait simuler une loi de Bernoulli, on sait simuler les lois qui en dérivent : loi géométrique (nombre d'épreuves pour arriver à un succès), somme de variables géométriques de même paramètre (nombre d'épreuves pour arriver à *k* succès), loi binomiale (nombre de succès en *n* épreuves), loi binomiale négative.

Exemple (engendré avec la fonction ALEA d'Excel).

Uniforme sur [0;1]	0.175	0.693	0.162	0.822	0.024	0.051	0.720	0.882	0.069	0.797	0.489	0.206	0.675	0.546	0.880	0.086	0.346	0.986	0.604	0.005
Bernoulli (0.32)	0	1	0	1	0	0	1	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0
Geom*(0.32)		2		2			3	1		2					5			3		
Somme de 2 Geom*(0.32)				4				4							7					
Binom(20;0.32)																				15

Uniforme sur [0;1]	0.133	0.230	0.802	0.210	0.351	0.806	0.850	0.238	0.282	0.166	0.371	0.332	0.521	0.115	0.751	0.428	0.999	0.065	0.516	0.533
Bernoulli (0.32)	0	0	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0
Geom*(0.32)			5			3	1								8		2			
Somme de 2 Geom*(0.32)			8				4										10			
Binom(20;0.32)																				22

Uniforme sur [0;1]	0.497	0.008	0.407	0.815	0.800	0.168	0.795	0.552	0.383	0.331	0.366	0.036	0.804	0.604	0.340	0.372	0.002	0.036	0.753	0.561
Bernoulli (0.32)	0	0	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0
Geom*(0.32)				7	1		2						6						6	
Somme de 2 Geom*(0.32)					8								8							
Binom(20;0.32)																				16

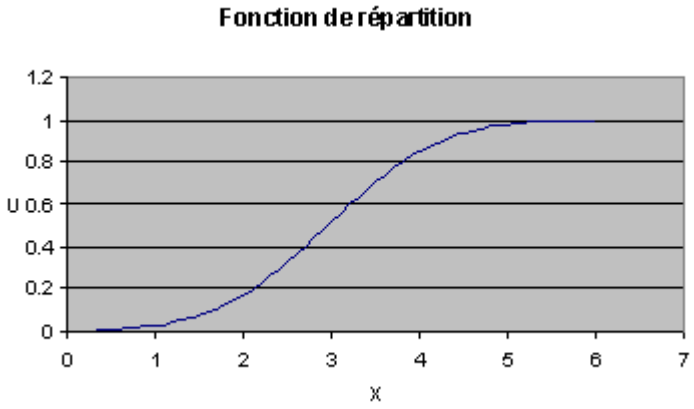
Uniforme sur [0;1]	0.507	0.315	0.122	0.554	0.387	0.506	0.199	0.025	0.831	0.292	0.862	0.105	0.240	0.651	0.352	0.487	0.027	0.650	0.116	0.281
Bernoulli (0.32)	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Geom*(0.32)									10		2									
Somme de 2 Geom*(0.32)									16											
Binom(20;0.32)																				16

Uniforme sur [0;1]	0.794	0.714	0.330	0.965	0.643	0.117	0.747	0.403	0.888	0.275	0.802	0.136	0.352	0.356	0.759	0.982	0.911	0.473	0.558	0.634
Bernoulli (0.32)	1	1	0	1	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0
Geom*(0.32)	10	1		2			3		2		2				4	1	1			
Somme de 2 Geom*(0.32)	12			3					5						6		2			
Binom(20;0.32)																				28

1.1.2.2. Simulation d'une variable aléatoire *X* de loi discrète à support borné ou non.

— pour chaque nombre u_i, $1 \leq i \leq n$, choisi au hasard dans l'intervalle [0, 1] des valeurs de la fonction de répartition, on prend pour valeur x_i de *X*, l'abscisse du point d'intersection de la droite d'ordonnée u_i avec la courbe représentative de la fonction de répartition de *X*.
— $(x_1, \ldots, x_n)$ est la réalisation d'un *n*-échantillon de *X*.

1.1.2.3. Simulation d'une variable aléatoire *X* de loi continue à support borné ou non.



— pour chaque nombre u_i, $1 \leq i \leq n$, choisi au hasard dans l'intervalle [0, 1] des valeurs de la fonction de répartition, on prend pour valeur x_i de *X*, l'abscisse du point d'intersection de la droite d'ordonnée u_i avec la courbe représentative de la fonction de répartition de *X*.
— $(x_1, \ldots, x_n)$ est la réalisation d'un *n*-échantillon de *X*.
— Si la fonction de répartition n'est continue que par morceaux, on joint les points de discontinuité par des segments verticaux, la longueur du segment étant la probabilité de l'abscisse.

1.1.3. Autres applications pratiques de la méthode de Monte-Carlo.

Comme il n'est pas toujours facile de déterminer la valeur de x_i à partir de u_i et de la fonction de répartition de *X*, on utilise souvent des méthodes particulières à chaque type de loi.

1.1.3.1. Simulation d'une variable aléatoire *X* de loi géométrique sur N* de paramètre *p*.

— On a vu plus haut comment procéder. Au lieu d'utiliser la fonction de répartition, on utilise la propriété de la loi géométrique sur N * : c'est la loi de probabilité du nombre de répétitions d'une épreuve de Bernoulli qu'il faut pour atteindre un premier succès.
— On tire une suite de nombres au hasard dans l'intervalle [0, 1].
— On en déduit une suite de 0 ou 1, valeurs d'une variable de Bernoulli de paramètre *p*, d'après 1.1.2.1 et la fonction de répartition de la variable de Bernoulli.
— Dans cette suite, on compte le **nombre de termes** x_1 qu'il faut pour atteindre un 1 (premier succès de l'épreuve de Bernoulli), puis le nombre x_2 de termes suivants, qu'il faut pour atteindre le 1 suivant, etc.

— La suite des x_i est un échantillon de **loi géométrique** sur N * de paramètre *p*.

— L'inconvénient de la méthode est qu'il faut en moyenne $\frac{1}{p}$ nombres aléatoires u_i pour engendrer une valeur x_i.

L'avantage de la méthode est qu'elle dispense du calcul de logarithme nécessité par la fonction réciproque de la fonction de répartition de la loi géométrique :

$X = 1 + \left[\frac{\ln U}{\ln(1-p)} \right]$, où [*x*] désigne la partie entière de *x*.

1.1.3.2. Simulation d'une variable aléatoire *X* de loi binomiale de paramètres *n* et *p*.

— On a vu plus haut comme procéder. Au lieu d'utiliser la fonction de répartition, on utilise la propriété de la loi binomiale de paramètres *n* et *p* : c'est la loi de probabilité du nombre de succès dans la répétition *n* fois d'une épreuve de Bernoulli.
— On tire une suite de nombres au hasard dans l'intervalle [0, 1].
— On en déduit une suite de 0 ou 1, valeurs d'une variable de Bernoulli de paramètre *p*, d'après 1.1.2.1 et la fonction de répartition de la variable de Bernoulli.
— Dans cette suite, on compte le **nombre de succès x_1 qu'on obtient en *n* épreuves**, puis le nombre x_2 de succès dans les *n* épreuves suivantes, etc.

— La suite des x_i est un échantillon de loi binomiale de paramètres *n* et *p*.

— L'inconvénient de la méthode est qu'il faut *n* nombres aléatoires u_i pour engendrer une valeur x_i.

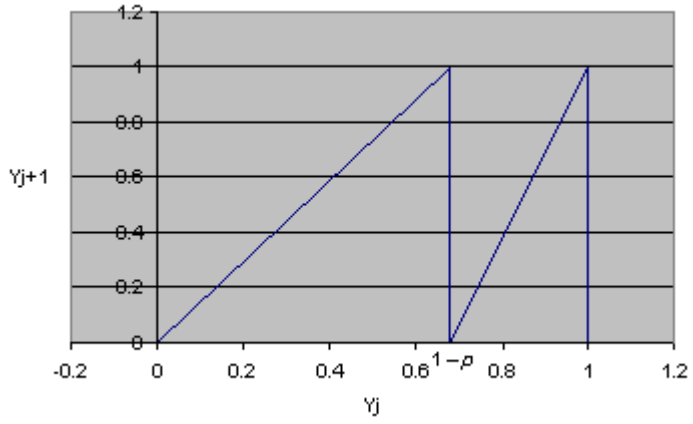
L'avantage de la méthode est qu'elle dispense du calcul de la fonction réciproque de la fonction de répartition de la loi binomiale.

Méthode alternative.

— On tire une suite $(u_i)_{1 \le i \le n}$ de nombres au hasard dans l'intervalle [0, 1].
— Pour chaque indice *i*, on pose $y_1 = u_i$, puis

$$y_{j+1} = \begin{cases} \frac{y_j}{1-p} & \text{si } 0 \leqslant y_j \leqslant 1-p \\ \frac{y_j - (1-p)}{p} & \text{si } 1-p < y_j \leqslant 1 \end{cases},$$

pour $1 \le j \le k-1$.



On désigne par x_i le nombre de y_j compris entre 1 – *p* et 1.

Explication.

Cet algorithme revient à définir, à partir de la variable aléatoire *U* de loi uniforme sur [0, 1], d'abord une suite $(Y_j)_{1 \le j \le k}$ de variables aléatoires à valeurs dans [0, 1] par $Y_1 = U$ puis

$$Y_{j+1} = \frac{Y_j}{1-p}\,1_{[0,\,1-p]}(Y_j) + \frac{Y_j-(1-p)}{p}\,1_{]1-p,\,1]}(Y_j)$$

$$\text{et } X = \sum_{j=1}^{j=k} 1_{]1-p,\,1]}(Y_j).$$

$Y_1 = U$ suit une loi uniforme sur [0, 1]. Donc la probabilité que Y_1 prenne une valeur dans un intervalle de longueur a contenu dans [0, 1] est a.
Supposons, hypothèse de récurrence, que la probabilité que Y_j prenne une valeur dans un intervalle de longueur a contenu dans [0, 1] soit a, pour tout $a \in$]0, 1[.
D'après le dessin et la définition de Y_{j+1}, Y_{j+1} est compris entre x et $x + a$ lorsque Y_j est compris entre $x\,(1-p)$ et $(x + a)(1-p)$, ou entre $p\,x + (1-p)$ et $p\,(x + a) + (1-p)$:
$P\,[x < Y_{j+1} \le x + a] = P\,[x\,(1-p) \le Y_j \le (x + a)(1-p)] + P\,[p\,x + (1-p) \le Y_j \le p\,(x + a) + (1-p)]$
$= a\,(1-p) + a\,p = a.$
Donc l'hypothèse de récurrence est vraie encore pour $j + 1$, dès qu'elle est vraie pour j.
Le résultat est donc établi pour tout $j \in \mathbb{N}^*$ puisqu'il est vrai pour $j = 1$:

La probabilité que Y_j prenne une valeur dans un intervalle de longueur a contenu dans [0, 1] est égale à a, pour tout $a \in$]0, 1[.

La loi conjointe de $1_{[0,\,1-p]}(Y_j)$ et $1_{[0,\,1-p]}(Y_{j+1})$ est donnée par :

$1_{[0,\,1-p]}(Y_{j+1})$ \ $1_{[0,\,1-p]}(Y_j)$	0	1	Total
0	p^2	$p\,(1-p)$	p
1	$p\,(1-p)$	$(1-p)^2$	$1-p$
Total	p	$1-p$	1

En effet, on connaît déjà les lois marginales d'après le résultat précédent.
Il suffit donc de calculer une seule des quatre probabilités conjointes pour avoir les trois autres par différence.
Calculons, par exemple :

$P\,[\{1_{[0,\,1-p]}(Y_{j+1}) = 1\} \cap \{1_{[0,\,1-p]}(Y_j) = 1\}] = P\,[\{1_{[0,\,1-p]}(Y_{j+1}) = 1\} \mid \{1_{[0,\,1-p]}(Y_j) = 1\}] \times P\,[\{1_{[0,\,1-p]}(Y_j) = 1\}]$
$= P\,[0 \le Y_{j+1} \le 1-p\} \mid \{0 \le Y_j \le 1-p\}] \times P\,[\{0 \le Y_j \le 1-p\}]$

$$P\,[0 \le Y_{j+1} \le 1-p\} \mid \{0 \le Y_j \le 1-p\}] = \frac{(1-p)^2 - 0}{1-p} = 1-p$$

$P\,[\{1_{[0,\,1-p]}(Y_{j+1}) = 1\} \cap \{1_{[0,\,1-p]}(Y_j) = 1\}] = (1-p) \times (1-p) = (1-p)^2$.
C'est bien la valeur indiquée dans le tableau des probabilités conjointes.

Le tableau de la loi conjointe montre que les probabilités conjointes peuvent aussi s'obtenir par produit des lois marginales :
donc deux variables aléatoires consécutives $1_{[0,\,1-p]}(Y_j)$ et $1_{[0,\,1-p]}(Y_{j+1})$ sont **indépendantes**.

On peut en déduire que les variables aléatoires $1_{[0,\,1-p]}(Y_j)$ sont indépendantes dans leur ensemble (résultat admis ici)

La variable aléatoire ***X* suit une loi binomiale de paramètres *k* et *p***, parce que *X* est somme de *k* variables aléatoires de Bernoulli indépendantes de paramètre *p*, car chaque variable aléatoire $1_{]1-p,\,1]}(Y_j)$ est une variable de Bernoulli de paramètre *p* :

$P\,[1_{]1-p,\,1]}(Y_j) = 1] = P\,[1 - p < Y_j \leq 1] = 1 - (1 - p) = p$, pour $j \geq 1$, d'après le résultat précédent.

Le *n*-uple $(x_1, \ldots, x_n)$ forme ainsi une réalisation d'un *n*-échantillon de loi binomiale de paramètres *k* et *p*.

L'avantage de la méthode est qu'il suffit d'une valeur de *U* pour définir une valeur de *X*.

1.1.3.3. Simulation d'une variable aléatoire *X* de loi exponentielle de paramètre λ.

La densité de probabilité est $f(x) = \lambda\, e^{-\lambda x}\, 1_{\mathbb{R}_+}(x)$.

La fonction de répartition est $F(x) = (1 - e^{-\lambda x})\, 1_{\mathbb{R}_+}(x)$.

La fonction réciproque de la fonction de répartition est $F^{-1}(u) = -\frac{1}{\lambda}\, ln\,(1 - u)$, $u \in\,]\,0,\, 1\,[$.

Pour chaque nombre aléatoire $u_i \in\,]\,0,\, 1\,[$, on pose $x_i = -\frac{1}{\lambda}\, ln\,(1 - u_i)$.
On obtient ainsi un échantillon de variable de loi exponentielle de paramètre λ.

Remarque.

Dès qu'on sait simuler une loi exponentielle, on sait simuler la **loi Gamma** de paramètres *n* et λ qui en découle : $Y = X_1 + \ldots + X_n$, où $X_1, \ldots, X_n$, suivent une loi exponentielle de même paramètre λ.

1.1.3.4. Simulation d'une variable aléatoire *X* de loi de Cauchy.

La densité de probabilité est $f(x) = \frac{1}{\pi\left(1 + x^2\right)}$.

La fonction de répartition est $F(x) = \frac{1}{\pi}\,(Arctan\, x + \frac{\pi}{2})$.

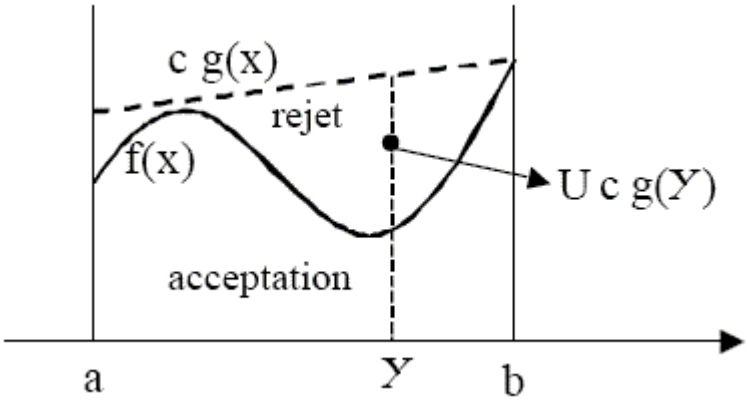
La fonction réciproque de la fonction de répartition est $F^{-1}(u) = -\,tan\,(\pi\, u - \frac{\pi}{2}) = -\,cotan\,(\pi\, u)$.

Pour chaque nombre aléatoire $u_i \in\,]\,0,\, 1\,[$, on pose $x_i = -\,cotan\,(\pi\, u_i)$.
On obtient ainsi un échantillon de variable de loi de Cauchy.

1.2. Méthode de rejet de Von Neumann.

1.2.1. Méthode.

On suppose que l'on sait simuler une variable aléatoire Y de loi de probabilité g.
On cherche à simuler une variable aléatoire X de densité de probabilité f vérifiant
$f(x) = c\,h(x)\,g(x)$, avec $0 \leq h(x) \leq 1$, pour tout x.
La **méthode de rejet de Von Neumann** consiste à :



— tirer U selon une loi uniforme sur [0, 1] ;
— tirer Y selon la loi de densité g, jusqu'à ce que $h(Y) \geq U$;
— puis recommencer : valeur de U, valeur de Y jusqu'à ce que $h(Y) \geq U$, ...
Les valeurs retenues x_i de Y forment une réalisation d'un échantillon de loi f.

1.2.2. Justification.

Soit $(U_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi uniforme sur [0, 1].
Soit $(Y_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi g, indépendante de la suite $(U_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$.
Soit T le nombre d'essais nécessaires pour obtenir la condition d'acceptation de la valeur de Y.
On peut écrire X sous la forme $X = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n \mathbf{1}_{\{T=n\}}$.
L'événement $\{T = n\}$ est la conjonction des événements $\left\{ \bigcap_{i=1}^{i=n-1} \{U_i > h(Y_i)\} \right\}$ et $\{U_n \leq h(Y_n)\}$.
Or, pour tout indice $j \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$P[\{U_j \leq h(Y_j)\}] = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_0^{h(y)} du \right] g(y)\,dy = \int_{-\infty}^{+\infty} g(y)\,h(y)\,dy = \int_{-\infty}^{+\infty} g(y)\,\frac{f(y)}{c\,g(y)}\,dy = \frac{1}{c}\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\,dy = \frac{1}{c}.$$

De sorte que, par suite de l'indépendance des variables, $P[\{T = n\}] = \frac{1}{c} \times \left(1 - \frac{1}{c}\right)^{n-1}$.
Cette égalité qui montre que ***T* suit une loi géométrique** sur $\mathbb{N}^*$, de paramètre $\frac{1}{c}$.

La probabilité de l'événement $X \leq x$ est donnée par :

$$X = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n \, 1_{\{T=n\}} \leq x$$

$$P[X \leq x] = \sum_{n=1}^{\infty} P[\{Y_n \leq x\} \cap \{T = n\}]$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{c}\right)^{n-1} P[\{Y_n \leq x\} \cap \{U_n \leq h(Y_n)\}]$$

Or $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{c}\right)^{n-1} = \frac{1}{1-\left(1-\frac{1}{c}\right)} = c$

Donc :

$$P[X \leq x] = c \int_{-\infty}^{x} \left[\int_{0}^{h(y)} du \right] g(y)\, dy$$

$$= c \int_{-\infty}^{x} h(y)\, g(y)\, dy$$

$$= \int_{-\infty}^{x} f(y)\, dy$$

Ceci montre que X est une variable aléatoire de densité de probabilité f.

Remarque.

L'espérance mathématique de T est c.
Plus c est petit, moins il faut d'essais, en moyenne, pour obtenir une valeur de X.
On aura donc intérêt à prendre la plus petite valeur possible de c, par exemple celle qui fait que les courbes représentatives de f et de $c\,g$ sont tangentes.

Application : simulation de la normale centrée réduite.

La densité de probabilité est $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$.

On commence par simuler une variable aléatoire A ayant pour densité de probabilité celle de la **valeur absolue d'une variable normale centrée réduite**.

La densité de probabilité de A est de la forme $c\,h(x)\,g(x)$ avec $c = \sqrt{\frac{2e}{\pi}}$, $g(x) = e^{-x}$, $h(x) = e^{-\frac{(x-1)^2}{2}}$.

g est la densité de probabilité d'une **variable exponentielle** de paramètre 1 : on sait la simuler (1.1.3.3).
La **méthode de rejet** de Von Neumann permet donc de simuler A.
On sait simuler aussi une **variable discrète** ε prenant les valeurs 1 et – 1 avec les probabilités $\frac{1}{2}$.

La variable aléatoire $X = \varepsilon A$ suit une loi **normale centrée réduite**.

1.3. Méthode polaire de simulation d'une variable normale.

Si U et V sont des variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur [0, 1], alors les variables

$$X = \sqrt{-2 \ln U}\ \cos(2\pi V) \text{ et } Y = \sqrt{-2 \ln U}\ \sin(2\pi V)$$

sont des variables aléatoires normales centrées réduites indépendantes.

$$X^2 + Y^2 = -2 \ln U$$
$$U = e^{-\frac{X^2+Y^2}{2}}$$
$$\tan(2\pi V) = \frac{Y}{X}$$
$$V = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Arctan} \frac{Y}{X}$$

En effet, l'espérance d'une fonction h de X et Y est donnée par :

$$E[h(X, Y)] = \iint_{[0,1]^2} h\left(\sqrt{-2 \ln U}\ \cos(2\pi V), \sqrt{-2 \ln U}\ \sin(2\pi V)\right) dU\, dV$$

$$= \iint_{\mathbb{R}^2} h(x, y) \left| \frac{D(u, v)}{D(x, y)} \right| dx\, dy$$

$$= \iint_{\mathbb{R}^2} h(x, y) \begin{vmatrix} -x e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} & \frac{1}{2\pi} \frac{-\frac{y}{x^2}}{1+\frac{y^2}{x^2}} \\ -y e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} & \frac{1}{2\pi} \frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{y^2}{x^2}} \end{vmatrix} dx\, dy$$

$$= \iint_{\mathbb{R}^2} h(x, y) \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dx\, dy = \iint_{\mathbb{R}^2} h(x, y) \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} \right) dx\, dy$$

Et ceci montre que les variables X et Y sont indépendantes et suivent chacune la loi normale centrée réduite.

Remarque.

Dès qu'on sait simuler une variable aléatoire X de loi normale centrée réduite, on sait simuler les lois qui en découlent :

— loi normale de paramètres μ et σ^2 : $Y = \mu + \sigma X$, où X suit une loi normale centrée réduite ;

— loi χ^2 de **Karl Pearson** à ν degrés de liberté : $\chi_\nu^2 = X_1^2 + \ldots + X_\nu^2$, où $X_1, \ldots, X_\nu$, suivent une loi normale centrée réduite.

— loi de **Student** à ν degrés de liberté : $T = \frac{X}{\sqrt{\frac{\chi_\nu^2}{\nu}}}$, où X suit une loi normale centrée réduite et χ_ν^2 une loi de Pearson à ν degrés de liberté ;

— loi F de **Fisher-Snedecor** à (n_1, n_2) degrés de liberté : $F = \frac{\frac{\chi_{n_1}^2}{n_1}}{\frac{\chi_{n_2}^2}{n_2}}$, où $\chi_{n_1}^2$ suit une loi de Pearson à n_1 degrés de liberté, et $\chi_{n_2}^2$ une loi de Pearson à n_2 degrés de liberté.

Chapitre 2. Estimation ponctuelle et par intervalle de confiance.

2.1. Estimation d'un pourcentage.

Soit *F* la fréquence d'une modalité d'un caractère (qualitatif ou quantitatif) dans un échantillon de taille *n*, et *f* sa réalisation dans l'échantillon dont on dispose.
Soit *p* la probabilité de cette modalité dans la population parent.
Le nombre *X* d'individus d'un échantillon de taille *n* présentant la modalité étudiée, suit une loi binomiale de paramètres *n* et *p* : *E* (*X*) = *n p*, *Var* (*X*) = *n p* (1 – *p*).
$F = \frac{X}{n}$; $E(F) = \frac{1}{n} E(X) = p$; $Var(F) = \frac{1}{n^2} Var(X) = \frac{p(1-p)}{n}$.

2.1.1. Estimation ponctuelle.

- ***F* est un estimateur sans biais de *p* : *E* (*F*) = *p*.**

On obtient une estimation ponctuelle sans biais de *p* en prenant la réalisation *f* de *F* dans l'échantillon :

$$p^* = f$$

2.1.2. Intervalle de confiance.

- ***F* est un estimateur robuste de *p* : $\lim_{n \to +\infty} Var(F) = 0$.**

On obtient une estimation ponctuelle sans biais de *Var* (*F*) en prenant la réalisation $\frac{f(1-f)}{n}$ de l'estimateur de cette variance dans l'échantillon.

- **Petits échantillons : Abaque.**

Pour les petites valeurs de *n*, on peut calculer un intervalle de confiance de *p* à partir de la loi binomiale. En abscisse, on lit la valeur de *f* ; en ordonnées, on obtient les limites de l'intervalle de confiance au risque choisi pour construire l'abaque.

- **Grands échantillons : Loi normale.**

Pour les grandes valeurs de *n*, la loi binomiale se rapproche d'une loi normale.
***F* est un estimateur de *p*, correct (sans biais et robuste) et asymptotiquement gaussien (sa fonction de répartition tend uniformément, lorsque *n* tend vers l'infini, vers une fonction de répartition normale).**
L'intervalle de confiance de *p* au risque α est donné par :

$$\left[f - u_\alpha \sqrt{\frac{f(1-f)}{n}} \; ; \; f + u_\alpha \sqrt{\frac{f(1-f)}{n}} \right]$$

où u_α est la valeur de *u* telle que *F* (*u*) = $1 - \frac{\alpha}{2}$ (*F* fonction de répartition

de la variable normale centrée réduite).
<u>Valeur à connaître</u> : $\alpha = 5\ \% \Rightarrow u_\alpha = 1{,}960$.

2.2. Estimation d'une moyenne.

On considère un échantillon aléatoire $(X_1, \ldots, X_n)$ d'une variable aléatoire réelle X et une réalisation $(x_1, \ldots, x_n)$ de cet échantillon.

$\hat{E}(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=n} X_i$ **est un estimateur correct et asymptotiquement gaussien de $E(X)$.**

2.2.1. Estimation ponctuelle.

- $E^*(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=n} x_i$

2.2.2. Intervalle de confiance.

- **<u>Petit échantillon de loi connue</u>.**
Un intervalle de confiance de $E(X)$ peut se calculer éventuellement grâce à cette loi.

- **<u>Echantillon de loi normale (ou supposée normale) et de variance σ^2 inconnue</u>.**
La fonction de répartition F_{n-1} de la variable de Student à $n-1$ degrés de liberté, permet de calculer un intervalle de confiance de la moyenne au risque α :

$$\left[E^*(X) - t_\alpha \frac{\sigma^*}{\sqrt{n}} \; ; \; E^*(X) + t_\alpha \frac{\sigma^*}{\sqrt{n}} \right]$$

où t_α est la valeur de t telle que $F_{n-1}(t) = 1 - \frac{\alpha}{2}$,
et où σ^* est la racine carrée de l'estimation ponctuelle de la variance :

$$\sigma^{*2} = \frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{i=n} x_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{i=n} x_i \right)^2 \right]$$

Si la taille est grande (dépassant les capacités de la table), la loi de Student peut être remplacée par une loi normale.

- **<u>Echantillon de loi normale (ou supposée normale) et de variance σ^2 connue</u>.**
La fonction de répartition F de la variable normale centrée réduite permet de calculer un intervalle de confiance de la moyenne au risque α :

$$\left[E^*(X) - u_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \; ; \; E^*(X) + u_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$$

où u_α est la valeur de u telle que $F(u) = 1 - \frac{\alpha}{2}$.

Valeur à connaître : $\alpha = 5\ \% \Rightarrow u_\alpha = 1{,}960$.

Echantillon de loi quelconque, de grande taille et de variance σ^2 connue.
La fonction de répartition *F* de la variable normale centrée réduite permet de calculer un intervalle de confiance de la moyenne au risque α :

$$\left[E^*(X) - u_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \; ; \; E^*(X) + u_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$$

où u_α est la valeur de *u* telle que $F(u) = 1 - \frac{\alpha}{2}$.
Valeur à connaître : $\alpha = 5\ \% \Rightarrow u_\alpha = 1{,}960$.

Echantillon de loi quelconque, de grande taille et de variance σ^2 inconnue.
La fonction de répartition *F* de la variable normale centrée réduite permet de calculer un intervalle de confiance de la moyenne au risque α :

$$\left[E^*(X) - u_\alpha \frac{\sigma^*}{\sqrt{n}} \; ; \; E^*(X) + u_\alpha \frac{\sigma^*}{\sqrt{n}} \right]$$

où u_α est la valeur de *u* telle que $F(u) = 1 - \frac{\alpha}{2}$.
et où σ^* est la racine carrée de l'estimation ponctuelle de la variance :

$$\sigma^{*2} = \frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{i=n} x_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{i=n} x_i \right)^2 \right]$$

Valeur à connaître : $\alpha = 5\ \% \Rightarrow u_\alpha = 1{,}960$.

2.3. Estimation d'une variance.

On considère un échantillon aléatoire $(X_1, \ldots, X_n)$ de taille *n* d'une variable aléatoire réelle *X* et une réalisation $(x_1, \ldots, x_n)$ de cet échantillon.

$\hat{\sigma}^2(X) = \frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{i=n} X_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{i=n} X_i \right)^2 \right]$ **est un estimateur correct et asymptotiquement gaussien de *Var* (*X*).**

2.3.1. Estimation ponctuelle.

La réalisation de $\hat{\sigma}^2(X)$ est une estimation ponctuelle de la variance :

$$\sigma^{*2} = \frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{i=n} x_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{i=n} x_i \right)^2 \right]$$

2.3.2. Intervalle de confiance.

- **$(n-1)\dfrac{\hat{\sigma}^2(X)}{\sigma^2}$ est une variable de χ^2 à $n-1$ degrés de libertés.**

L'intervalle de confiance de la variance σ^2 au risque α est :

$$\left[(n-1)\frac{\sigma^{*2}}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2} ; (n-1)\frac{\sigma^{*2}}{\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2} \right]$$

où χ_{ε}^2 désigna la valeur de χ^2 pour laquelle la fonction de répartition à $n-1$ degrés de liberté est $F_{n-1}(\chi^2) = \varepsilon$.

Les racines carrées des bornes donnent un intervalle de confiance de l'écart-type au risque α :

- $$\left[\sqrt{\frac{(n-1)\sigma^{*2}}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2}} ; \sqrt{\frac{(n-1)\sigma^{*2}}{\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2}} \right]$$

- **Lorsque n tend vers l'infini, la loi du χ^2 se rapproche d'une loi normale.**

Lorsque n est grand, on peut prendre pour intervalle de confiance de l'écart-type σ au risque α :

$$\left[\sigma^* - u_{\alpha}\frac{\sigma^*}{\sqrt{2n}} ; \sigma^* + u_{\alpha}\frac{\sigma^*}{\sqrt{2n}} \right]$$

Chapitre 3. Tests statistiques.

3.1. Généralités sur les tests.

3.1.1. Hypothèses soumises au test.

Les statistiques développent des techniques et des méthodes qui permettent d'analyser les données issues de l'observation, afin de cerner les caractéristiques de la population concernée et d'identifier un modèle capable d'engendrer ces données.
Dans ce cadre, on est amené à faire des hypothèses, c'est-à-dire à émettre des assertions concernant ces caractéristiques ou ce modèle.

Une hypothèse est dite **paramétrique** si elle se rapporte aux paramètres d'une loi. Elle est dite **non paramétrique** dans les autres cas.

Une hypothèse paramétrique est dite **simple** si elle est associée à une valeur unique. Elle est dite **multiple** dans les autres cas.

Le plus souvent, la situation se résume en une alternative constituée de deux hypothèses H_0 et H_1, qui s'excluent mutuellement et qui sont appelées respectivement l'**hypothèse nulle**, ou fondamentale, et l'**hypothèse alternative**, ou contraire.

En général, les hypothèses H_0 et H_1 ne jouent pas des rôles symétriques, et on choisit pour hypothèse nulle H_0 l'hypothèse à laquelle on croit ou on tient, ou encore celle qui permet de faire des calculs, ou encore celle dont le rejet est lourd de conséquences.

3.1.2. Test.

3.1.2.1. Définition.

Les hypothèses à confronter, H_0 et H_1, étant identifiées, leur validité est soumise à l'épreuve à l'aide d'un test d'hypothèses.
Un **test d'hypothèses** est une règle de décision qui permet, sur la base des données observées et avec des risques d'erreur déterminés, d'accepter ou de refuser une hypothèse statistique.

3.1.2.2. Erreur, risque, niveau, puissance.

La règle de décision d'un test étant basée sur l'observation d'un échantillon et non sur la base d'une information exhaustive, on n'est jamais sûr de l'exactitude de la conclusion : il y a donc toujours un risque d'erreur.

L'erreur de première espèce consiste à rejeter H_0 à tort : le **risque d'erreur de première espèce** est noté α, c'est le risque d'erreur que l'on prend en rejetant H_0 alors qu'elle est vraie. On l'appelle aussi le **niveau du test**.

L'erreur de deuxième espèce consiste à rejeter H_1 à tort : le **risque d'erreur de deuxième espèce** est noté β, c'est le risque d'erreur que l'on prend en rejetant H_1 alors qu'elle est vraie.
$\eta = 1 - \beta$ est appelé **la puissance du test**.

On s'efforce de construire des tests qui limitent les risques à des niveaux jugés acceptables.
En règle générale, on impose un seuil α à ne pas dépasser (par exemple 5 %, par défaut) et, compte tenu de cette contrainte, on cherche à construire les tests ayant la plus grande puissance possible.

3.1.2.3. Fonction discriminante.

Un test basé sur un échantillon de taille *n* est déterminé par une région *R* de R^n appelée **région critique**, ou **région de refus** de l'hypothèse H_0.
Le complémentaire *A* de *R* est appelé la **région d'acceptation** de H_0.

La règle de décision d'un test est la suivante : si $x = (x_1, \ldots, x_n)$ est le vecteur des valeurs observées, on décide de refuser H_0 (et d'accepter H_1) si $x \in R$, et on décide d'accepter H_0 si $x \notin R$.

Dans la pratique, on essaie de définir une variable aléatoire *D*, que l'on appelle **variable de décision**, ou **fonction discriminante**, et dont la loi est connue, au moins sous l'hypothèse H_0.
La région critique sera alors la région dans laquelle la probabilité des valeurs de la fonction discriminante a tendance à augmenter lorsque H_0 n'est pas vraie. Cette région est définie à l'aide du risque α de première espèce du test.

3.1.2.4. Probabilité critique.

Si l'on note *t* la valeur de la fonction discriminante *T*, on appelle **probabilité critique** de l'hypothèse H_0 :

— $P(T \geq t \mid H_0)$ si *T* a tendance à prendre de grandes valeurs lorsque H_0 n'est pas vraie (test unilatéral à gauche, queue de probabilité à droite) ;

— $P(T \leq t \mid H_0)$ si *T* a tendance à prendre de petites valeurs lorsque H_0 n'est pas vraie (test unilatéral à droite, queue de probabilité à gauche) ;

— $P(|T| \geq |t| \mid H_0)$ si *T* a tendance à s'éloigner de 0 lorsque H_0 n'est pas vraie (test bilatéral).

La probabilité critique fournit une mesure de **crédibilité de l'hypothèse** H_0 :

— une valeur très faible de la probabilité critique signifie que H_0 n'est pas valable,

— une valeur trop élevée permet de mettre en doute le caractère aléatoire de l'expérience et la fiabilité des données et des calculs.

3.2. Tests non paramétriques.

3.2.1. Test du Khi-deux de Pearson.

3.2.1.1. Nature et principe du test.

Le test du Khi-deux (χ^2) est un test non paramétrique qui permet de tester l'hypothèse H_0 selon laquelle les données observées sont engendrées par un modèle faisant intervenir une loi de probabilité, ou une famille de lois de probabilité.
Le choix du modèle résulte de diverses considérations théoriques ou expérimentales, et il importe de tester son adéquation.

Le principe du test est le suivant.

On définit une fonction discriminante D_n qui constitue une mesure normalisée de l'écart entre les valeurs théoriques déduites du modèle et les valeurs observées dans l'échantillon.
Lorsque H_0 n'est pas vraie, les valeurs de D_n augmentent et lorsque H_0 est vraie, D_n suit, au moins asymptotiquement, une loi du χ^2 de Pearson à ν degrés de liberté.
La région critique du test est donc constituée des grandes valeurs de D_n.

Le risque α étant donné, on note $\chi_{1-\alpha}^2$ le fractile d'ordre $1 - \alpha$ de la loi du χ^2 de Pearson à ν degrés de liberté défini par $P(D_n \geq \chi_{1-\alpha}^2) = \alpha$.
On note d la valeur observée de D_n dans l'échantillon, et on compare la valeur de d à $\chi_{1-\alpha}^2$.
Lorsque l'approximation par la loi du χ^2 de Pearson à ν degrés de liberté est valable, cette comparaison définit la règle de décision suivante, appelée **test asymptotique de niveau α** :

1. Si $d < \chi_{1-\alpha}^2$, on considère que l'écart est dû au hasard de l'échantillonnage et qu'il n'est pas significatif : on accepte H_0.
2. Si $d \geq \chi_{1-\alpha}^2$, on considère que l'écart observé est trop important pour être attribué aux seules fluctuations d'échantillonnage et qu'il révèle l'inadéquation du modèle : on refuse H_0.

On peut aussi, au vu de la réalisation d de D, calculer la probabilité critique $p = P[D \geq d]$ et apprécier la crédibilité de l'hypothèse H_0.

3.2.1.2. Expression et loi asymptotique de la fonction discriminante *D*.

Soient X le vecteur ou la variable aléatoire étudiée, $(X_1, \ldots, X_n)$ un n-échantillon de X, et μ la mesure de probabilité de X lorsque H_0 est vraie.

On partage l'ensemble des valeurs $X(\Omega)$ en k classes $(C_i)_{1 \leq i \leq k}$.
Si X est une variable aléatoire continue, les C_i sont en général des intervalles ou des produits d'intervalles.
Si X est une variable aléatoire discrète ou modale, les C_i sont en général des points.

Pour tout indice i de 1 à k, on note p_i la probabilité théorique de la classe C_i donnée par la loi μ :

$p_i = P(X \in C_i) = \mu(C_i) = \iint_{X^{-1}(C_i)} d\mu$ (au sens de Stieltjes),

ce qui suppose que la loi μ est entièrement déterminée.

Lorsque μ dépend de paramètres inconnus, on note $\hat{\mu}$ la loi entièrement spécifiée obtenue en estimant les paramètres de la loi μ (généralement par la méthode du maximum de vraisemblance), et $\hat{p}_i = \hat{\mu}(C_i) = \iint_{X^{-1}(C_i)} d\hat{\mu}$ l'estimation correspondante de la probabilité théorique de la classe C_i.

Ainsi, pour tout indice i de 1 à k, $n\,p_i$ (resp. $n\,\hat{p}_i$) représente l'effectif (resp. une estimation de l'effectif) théorique espéré de la classe C_i en n observations, sous l'hypothèse H_0.

Pour la validité de l'approximation par la loi du Khi-deux avec un nombre correct de degrés de liberté, tous ces effectifs théoriques doivent, en général, être supérieurs à 5.

Pour chaque indice i de 1 à k, on note N_i le nombre d'observations appartenant à la classe C_i : c'est l'effectif empirique ou observé de la classe C_i.

Avec ces notations, la variable :

$$D_n = \sum_{i=1}^{i=k} \frac{\left(N_i - n\,\hat{p}_i\right)^2}{n\,\hat{p}_i}$$

représente une mesure normalisée de l'écart global entre les valeurs théoriques et les valeurs observées.

Pour tout indice i de 1 à k, $\frac{\left(N_i - n\,\hat{p}_i\right)^2}{n\,\hat{p}_i}$ est l'écart individuel de la classe C_i.

On démontre alors que D_n suit asymptotiquement une **loi du Khi-deux** à ν degrés de liberté, avec $\nu = k - r - 1$, r étant le nombre de paramètres estimés de la loi théorique.

Lorsque $\nu = 1$, il est recommandé de tenir compte de la **correction de continuité** en prenant $\frac{\left(\left|N_i - n\,\hat{p}_i\right| - \frac{1}{2}\right)^2}{n\,\hat{p}_i}$ comme expression de l'écart correspondant à la classe C_i.

3.2.1.3. Conditions d'application.

1. On considère que l'approximation par la loi du Khi-deux est satisfaisante si $n \geq 30$ et si tous les effectifs théoriques sont supérieurs ou égaux à 5.
Si les effectifs des classes extrêmes sont inférieurs à 5, il faut procéder à des regroupements de classes.

2. Le choix des classes, quand il est possible, doit être tel que les effectifs théoriques soient proches les uns des autres, quand ils ne sont pas tous égaux.

3. Le nombre k des classes, lorsqu'il est à définir, doit être à la fois assez grand pour perdre le moins d'information possible, et assez petit pour que les effectifs des classes ne soient pas trop réduits. Empiriquement, la formule $k = [\sqrt{n}]$ (partie entière de la racine carrée de n) paraît convenable.

3.2.1.4. Principales utilisations. Disposition des calculs.

3.2.1.4.1. Test d'ajustement.

Soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{L}$ (le plus souvent inconnue).
On souhaite tester l'ajustement de celle loi à une loi connue $\mathcal{L}_0$ retenue comme étant un modèle convenable.
Cette loi $\mathcal{L}_0$ peut être entièrement spécifiée ou appartenir à une famille de lois (par exemple loi normale).

On teste donc l'hypothèse $H_0 : L = L_0$ contre l'hypothèse $H_1 : L \neq L_0$.

Pour cela, on partage convenablement l'ensemble des valeurs de X en k classes et, sur la base de n observations, on définit la fonction discriminante :

$$D_n = \sum_{i=1}^{i=k} \frac{\left(N_i - n\hat{p}_i\right)^2}{n\hat{p}_i} \text{ (si les } p_i \text{ sont inconnus)}$$

$$\text{ou } D_n = \sum_{i=1}^{i=k} \frac{\left(N_i - np_i\right)^2}{np_i} \text{ (si les } p_i \text{ sont connus).}$$

Sous réserve des conditions d'application, la fonction discriminante D_n suit une loi du Khi-deux à $n - r - 1$ degrés de liberté, où r est le nombre de paramètres de la loi L_0 qu'il a fallu estimer à partir des données.

Classe	Effectif observé	Effectif théorique	Ecart
1	N_1	$n\hat{p}_1$	$\frac{\left(N_1 - n\hat{p}_1\right)^2}{n\hat{p}_1}$
...	...	...	...
k	N_k	$n\hat{p}_k$	$\frac{\left(N_k - n\hat{p}_k\right)^2}{n\hat{p}_k}$
	$\sum_{i=1}^{i=k} N_i = n$	$\sum_{i=1}^{i=k} n\hat{p}_i = n$	$D_n = \sum_{i=1}^{i=k} \frac{\left(N_i - n\hat{p}_i\right)^2}{n\hat{p}_i}$

On présente les données et les résultats des calculs dans un tableau à quatre colonnes correspondant respectivement aux intitulés des classes, aux effectifs observés, aux effectifs théoriques, aux écarts.

Connaissant le niveau α du test, on peut calculer la valeur critique de D_n, à laquelle on compare la valeur observée d de D_n.
On peut aussi calculer, à partir de la valeur observée d de D_n, la probabilité critique, qui permet d'apprécier la crédibilité de l'hypothèse H_0.

3.2.1.4.2. Test d'indépendance.

On considère deux caractères A et B, quantitatifs ou qualitatifs.
Le caractère A présente r modalités (r classes si A est quantitatif). Le caractère B présente s modalités (s classes si B est quantitatif).
Les effectifs conjoints sont répartis en $k = r\,s$ modalités $A_i \cap B_j$.
On souhaite tester l'hypothèse H_0 : les caractères A et B sont indépendants, contre l'hypothèse H_1 : les caractères A et B ne sont pas indépendants.
On appelle N_{ij} l'effectif observé de la modalité conjointe $A_i \cap B_j$ et n_{ij} sa réalisation dans l'échantillon de taille $n = \sum_{(i,j)} N_{ij} = \sum_{(i,j)} n_{ij}$ étudié.

$N_{i.} = \sum_{j=1}^{j=s} N_{ij}$ est l'effectif marginal de la modalité A_i et $n_{i.}$ sa réalisation dans l'échantillon étudié ;

$N_{.j} = \sum_{i=1}^{i=r} N_{ij}$ est l'effectif marginal de la modalité B_j et $n_{.j}$ sa réalisation dans l'échantillon étudié.

On note p_i la probabilité de la modalité A_i, et q_j la probabilité de la modalité B_j.
Sous l'hypothèse d'indépendance H_0, la probabilité de la modalité conjointe $A_i \cap B_j$ est $p_i\, q_j$ et l'effectif théorique espéré dans un échantillon de taille n est $n\, p_i\, q_j$.

Mais p_i et q_j sont inconnus, il faut donc les estimer par $\hat{p}_i = \frac{N_{i.}}{n}$ et $\hat{q}_j = \frac{N_{.j}}{n}$: l'effectif théorique espéré est alors une variable aléatoire $C_{ij} = n\, \hat{p}_i\, \hat{q}_j = \frac{N_{i.}\, N_{.j}}{n}$, qui prend, dans l'échantillon de taille n, la valeur $c_{ij} = \frac{n_{i.}\, n_{.j}}{n}$.

L'écart correspondant à la modalité $A_i \cap B_j$ est $\frac{(N_{ij} - C_{ij})^2}{C_{ij}}$. Il prend dans l'échantillon la valeur $d_{ij} = \frac{\left(n_{ij} - \frac{n_{i.}\, n_{.j}}{n}\right)^2}{\frac{n_{i.}\, n_{.j}}{n}}$ et l'écart entre la distribution d'effectifs observés et la distribution théorique espérée sous l'hypothèse d'indépendance est mesurée par la valeur $d = \sum_{(i,j)} \frac{\left(n_{ij} - \frac{n_{i.}\, n_{.j}}{n}\right)^2}{\frac{n_{i.}\, n_{.j}}{n}}$ de la fonction discriminante D_n.

Ici, le nombre de paramètres estimés est $(r - 1) + (s - 1)$ et le nombre de degrés de liberté est :
$\nu = r\, s - 1 - [(r - 1) + (s - 1)] = (r - 1)\,(s - 1)$.
Si les conditions d'application sont vérifiées, la fonction discriminante suit une loi du Khi-deux à $\nu = (r - 1)\,(s - 1)$ degrés de liberté.

A \ B	B_1	…	B_j	…	B_s	*Total*
A_1	$n_{11}\,;c_{11}\,;d_{11}$	…	$n_{1j}\,;c_{1j}\,;d_{1j}$	…	$n_{1s}\,;c_{1s}\,;d_{1s}$	$n_{1.} = \sum_{j=1}^{j=s} n_{1j}$
…	…	…	…	…	…	…
A_i	$n_{i1}\,;c_{i1}\,;d_{i1}$	…	$n_{ij}\,;c_{ij} = \frac{n_{i.}\, n_{.j}}{n}\,;d_{ij} = \frac{(n_{ij} - c_{ij})^2}{c_{ij}}$	…	$n_{is}\,;c_{is}\,;d_{is}$	$n_{i.} = \sum_{j=1}^{j=s} n_{ij}$
…	…	…	…	…	…	…
A_r	$n_{r1}\,;c_{r1}\,;d_{r1}$	…	$n_{rj}\,;c_{rj}\,;d_{rj}$	…	$n_{rs}\,;c_{rs}\,;d_{rs}$	$n_{r.} = \sum_{j=1}^{j=s} n_{rj}$
Total	$n_{.1} = \sum_{i=1}^{i=r} n_{i1}$	…	$n_{.j} = \sum_{i=1}^{i=r} n_{ij}$	…	$n_{.s} = \sum_{i=1}^{i=r} n_{is}$	$n = \sum_{(i,j)} n_{ij}$

Les données et les calculs sont présentés dans un tableau à $r + 2$ lignes et $s + 2$ colonnes :
— dans la première colonne, figurent les modalités du caractère A ; dans la première ligne, figurent les modalités du caractère B ;
— dans la dernière ligne, figurent les effectifs marginaux des modalités de B ; dans la dernière

colonne, figurent les effectifs marginaux des modalités de A ;
— dans chaque case du tableau de contingence restant figurent : les effectifs observés n_{ij}, les effectifs théoriques espérés c_{ij}, les écarts $d_{ij} = \dfrac{\left(n_{ij} - \dfrac{n_{i.}\, n_{.j}}{n}\right)^2}{\dfrac{n_{i.}\, n_{.j}}{n}}$ correspondants.

Connaissant le niveau α du test, on peut calculer la valeur critique de D_n, à laquelle on compare la valeur observée $d = \sum_{(i,j)} d_{ij}$ de D_n.
On peut aussi calculer, à partir de la valeur observée d de D_n, la probabilité critique, qui permet d'apprécier la crédibilité de l'hypothèse H_0.

3.2.1.4.3. Test d'homogénéité.

On considère ici la répartition d'un caractère A, qualitatif ou quantitatif, dans s populations, B_1, ... , B_s.
Le caractère A présente r modalités, A_1, ... , A_r.
Le problème est de savoir si, au vu d'un échantillon, la répartition du caractère A dépend ou non de la population.
On teste donc :
— l'hypothèse H_0 : la répartition du caractère A est indépendante de la population,
contre :
— l'hypothèse H_1 : la répartition du caractère A n'est pas indépendante de la population.

Le problème est exactement du même type que le précédent : seule la formulation change un peu. La présentation, les calculs et la conclusion, se font donc de manière tout à fait analogue à ce qui vient d'être fait dans le test d'indépendance.

3.2.2. Test d'ajustement de Kolmogorov-Smirnov.

Le test d'ajustement de Kolmogorov-Smirnov est un test non paramétrique qui permet de tester l'hypothèse H_0 selon laquelle les données observées sont engendrées par une loi de probabilité théorique considérée comme étant un modèle convenable.
Mais contrairement au test Khi-deux, la loi théorique doit ici être continue et entièrement spécifiée, sans paramètre inconnu.

Dans ce test, les calculs sur les lois de probabilité se font sur les fonctions de répartition : on mesure l'écart entre la fonction de répartition théorique et la fonction de répartition observée.

On considère ainsi une variable aléatoire X de fonction de répartition F, que l'on veut comparer à une fonction de répartition théorique F_0 continue.
On souhaite tester :
— l'hypothèse H_0 : $F = F_0$,
contre :
— l'hypothèse H_1 : $F \neq F_0$.

Si $(X_1, \ldots, X_n)$ est un n-échantillon de X, la fonction de répartition empirique associée à cet

échantillon est :

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{k=n} 1_{]-\infty, x]}(X_k)$$

$F_n(x)$ est la proportion des observations dont la valeur est inférieure ou égale à x.
L'écart entre les valeurs observées et les valeurs théoriques du modèle déduites de la fonction de répartition F_0 peut donc être mesuré par la variable aléatoire :

$$\Delta_n = \sup_{x \in \mathbb{R}} | F_n(x) - F_0(x) |$$

qui sera la variable de décision, ou fonction discriminante, du test.

En posant $U_n = \sqrt{n}\ \Delta_n$, on démontre que lorsque H_0 n'est pas vraie, U_n tend vers + ∞, et, lorsque H_0 est vraie, U_n suit asymptotiquement une loi sur R^+ définie par sa fonction de répartition $K(y) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{-2n^2y^2}$.
La région critique du test est donc constituée des grandes valeurs de Δ_n.
Le niveau α étant donné, on peut définir la valeur critique de deux façons :

— La loi de Δ_n étant tabulée, le fractile $c_n(1 - \alpha)$ d'ordre $1 - \alpha$ de cette loi, fournit un test exact de niveau α en rejetant l'hypothèse H_0 si la valeur observée δ_n de Δ_n dépasse $c_n(1 - \alpha)$, et en l'acceptant dans le cas contraire.
Ce test est donc valable pour toute taille n de l'échantillon.

— La loi limite étant tabulée, le fractile $c(1 - \alpha)$ d'ordre $1 - \alpha$ de cette loi, fournit un test asymptotique de niveau α en rejetant l'hypothèse H_0 si la valeur observée δ_n de Δ_n dépasse $c(1 - \alpha)$, et en l'acceptant dans le cas contraire.
La convergence vers la loi limite étant assez rapide, ce test est largement acceptable pour $n > 100$.

Remarques.

On démontre que :

1. Les valeurs de δ_n sont toujours comprises entre $\frac{1}{2n}$ et 1.
2. Pour tout $n \geq 1$ et tout $t \geq 0$, $P[\{\sqrt{n}\ \Delta_n \geq t\}] \leq 6\, e^{-2t^2}$.
3. Pour $n > 100$, la valeur critique du test de Kolmogorov-Smirnov est, approximativement de la forme $\frac{c}{\sqrt{n}}$.

Les valeurs usuelles de c en fonction de α sont :

α	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01
c	1,073	1,223	1,358	1,518	1,629

. Ces valeurs donnent déjà une orientation à partir de $n = 30$.

4. On peut, par exemple, tester convenablement l'adéquation de la fonction discriminante D_n d'un test de Khi-deux, à la loi du Khi-deux, à l'aide d'un test de Kolmogorov-Smirnov : cette astuce permet de tester indirectement l'hypothèse du test du Khi-deux concernant une loi quelconque.

3.2.3. Tests de Wilcoxon.

Les tests de Wilcoxon sont des tests non paramétriques utilisés pour comparer deux variables X et Y de fonctions de répartition F_X et F_Y continues, en comparant F_X et F_Y, ou en comparant F_{X-Y} et F_{Y-X}.
On dit que X a tendance à être plus grande que Y, ou encore que X est stochastiquement plus grande que Y si l'on a $F_X \leq F_Y$.
Le test de Wilcoxon permet de déceler l'absence ou la présence d'un décalage d'une répartition par rapport à une autre, ou une surcharge latérale d'une distribution.
Ces tests sont sensibles et puissants lorsque F_X et F_Y se déduisent l'un de l'autre par une translation ou une propriété analogue.

Dans le cas général, les hypothèses à tester doivent être considérées avec soin et doivent correspondre à une idée pertinente de la situation traitée pour éviter les conclusions erronées.
En l'absence d'information supplémentaire, on adoptera la règle suivante.
Lorsque la variable de décision appartient à la région critique, on refuse H_0, et lorsqu'elle appartient à la région d'acceptation, on refuse H_1.

On distingue deux cas selon que les échantillons sont indépendants ou appariés.

3.2.3.1. Echantillons indépendants : test des rangs.

On considère un m-échantillon $(X_1, \ldots, X_m)$ d'une variable aléatoire X, et un n-échantillon $(Y_1, \ldots, Y_n)$ d'une variable aléatoire Y, ces deux échantillons étant indépendants.
On prend pour hypothèse H_0 : X et Y sont stochastiquement indépendants, ce qui se traduit par $F_X = F_Y$.
Dans le cas d'un test bilatéral, on prend pour hypothèse H_1 : il existe un décalage de l'une des distributions par rapport à l'autre, ce qui se traduit par $F_X \neq F_Y$.
Dans le cas d'un test unilatéral, on peut prendre pour hypothèse H_1 : X est stochastiquement plus grande que Y ($F_X < F_Y$), ou X est stochastiquement plus petite que Y ($F_X > F_Y$).

L'idée générale du test de Wilcoxon est de définir une fonction discriminante qui prend des valeurs centrales sous H_0, et qui a tendance à prendre des petites ou des grandes valeurs sinon.
On fait ce choix de la façon suivante, en considérant la **somme des rangs des valeurs d'un échantillon**.
Après avoir rangé par ordre croissant la suite des valeurs $\{X_1, \ldots, X_m, Y_1, \ldots, Y_n\}$ supposées toutes distinctes, on note R_X le vecteur rang des observations de X : c'est le vecteur $(R_{X_1}, \ldots, R_{X_m})$, où R_{X_i}, $1 \leq i \leq m$, est le rang de l'observation X_i dans la suite ordonnée des valeurs $\{X_1, \ldots, X_m, Y_1, \ldots, Y_n\}$.
De même, on note R_Y le vecteur rang des observations de Y.
On note :

— W_X la somme $\sum_{i=1}^{i=m} R_{X_i}$ des rangs des observations de X ;

— $W_Y = \sum_{j=1}^{j=n} R_{Y_j}$ la somme des rangs des observations de Y ;

— $N = m + n$ le nombre total d'observations.

Nous avons : $W_X + W_Y = \frac{N(N+1)}{2}$.

Sous l'hypothèse H_0, la loi de probabilité de W_X, appelée **loi de Wilcoxon**, (donc aussi celle de W_Y), ne dépend pas de F_X, elle dépend seulement de m et n : la probabilité de l'événement $\{W_X = k\}$ est le rapport entre le nombre de combinaisons de m des $N = m + n$ nombres de 1 à $m + n$ dont la somme est k, et le nombre total des combinaisons de $m + n$ éléments m à m, chaque combinaison ayant la même probabilité sous H_0.

Cependant, il n'y a pas d'expression simple de cette loi et on la calcule une fois pour toute par récurrence : la loi est donc tabulée et on se sert de tables pour appliquer le test.

Les valeurs de W_X vont de $1 + 2 + ... + m = \frac{m(m+1)}{2}$ à $(m + n) + (m + n - 1) + ... + (m + n - (m - 1))$ $= m(n + 1) + \frac{(m-1)m}{2} = \frac{m(m+2n+1)}{2}$

et la loi de W_X est symétrique par rapport à la valeur centrale $\frac{1}{2}\left(\frac{m(m+1)}{2} + m(n + 1) + \frac{(m-1)m}{2} \right) = \frac{m(m+n+1)}{2}$.

L'espérance mathématique de W_X est donc $E(W_X) = \frac{m(m+n+1)}{2}$.

On peut calculer aussi la variance de W_X : $Var(W_X) = \frac{mn(m+n+1)}{12}$.

Lorsque m et n deviennent très grands, la loi de probabilité de W_X tend asymptotiquement vers une loi normale.

Sous l'hypothèse H_1, les valeurs de W_X ont tendance à s'éloigner de la valeur moyenne $\frac{m(m+n+1)}{2}$.

On prendra donc pour région critique :

— dans un test bilatéral, une région de la forme $\left[\frac{m(m+1)}{2} ; \frac{m(m+1)}{2} + c \right] \cup \left[\frac{m(m+2n+1)}{2} - c ; \frac{m(m+2n+1)}{2} \right]$;

— dans un test unilatéral, une région de la forme $\left[\frac{m(m+1)}{2} ; \frac{m(m+1)}{2} + c \right]$ ou $\left[\frac{m(m+2n+1)}{2} - c ; \frac{m(m+2n+1)}{2} \right]$, suivant le sens du test.

Remarques.

1. Test de Mann-Whitney.

Au lieu de considérer la somme des rangs W_X, on peut considérer la **variable de Mann-Whitney**

$$U_X = \sum_{i=1}^{i=m} \sum_{j=1}^{j=n} 1_{\{X_i > Y_j\}}.$$

U_X est le nombre de couples (X_i, Y_j) tels que $X_i > Y_j$.

Si l'on note R'_{X_i}, $1 \le i \le m$, est le rang de l'observation X_i dans la suite ordonnée des valeurs $\{X_1, ..., X_m\}$, nous avons :

$$R_{X_i} = R'_{X_i} + \sum_{j=1}^{j=n} 1_{\{X_i > Y_j\}}$$

$$W_X = \sum_{i=1}^{i=m} R_{X_i} = \sum_{i=1}^{i=m} R'_{X_i} + \sum_{i=1}^{i=m} \sum_{j=1}^{j=n} 1_{\{X_i > Y_j\}}$$

$$W_X = \frac{m(m+1)}{2} + U_X$$

Nous voyons donc que U_X prend des valeurs de 0 à $m\,n$, et que, sous H_0, sa loi de probabilité dans cet intervalle de N est une loi symétrique, d'espérance $\frac{mn}{2}$ et de variance $\frac{mn(m+n+1)}{12} = Var\,(W_X)$.
Comme la loi de Wilcoxon, la loi de Mann-Whitney tend asymptotiquement vers une loi normale.

2. La loi asymptotique de W_X est normale.

Bien qu'il existe des tables de la loi de Wilcoxon pour des valeurs de m et n allant jusqu'à 50, de nombreux auteurs tolèrent l'application de la loi normale pour $Min\,(m, n) > 8$.
Il est alors recommandé dans ce cas, de tenir compte de la **correction de continuité** et d'utiliser la **loi normale centrée réduite** pour la variable :

$$Z = \frac{W_X + \frac{1}{2} - E\left[W_X\right]}{\sqrt{Var\left(W_X\right)}} = \frac{W_X - \frac{m(m+n+1)-1}{2}}{\sqrt{\frac{mn(m+n+1)}{12}}}$$

3. Les cas d'ex aequo sont traités par la méthode du rang moyen.

Dans le cas où les valeurs de X et Y ne sont pas toutes distinctes, W_X est remplacé par $\overline{W}_X = \sum_{i=1}^{i=m} \overline{R}_{X_i}$, où $\overline{R}_{X_i}$ est le rang moyen du groupe d'ex aequo auquel appartient X_i.
Si c_k est le nombre d'observations du groupe d'ex aequo auquel appartient X_i, le rang moyen de chaque valeur du groupe est :
$\frac{1}{c_k}(R + (R + 1) + ... + (R + (c_k - 1)) = R + \frac{c_k - 1}{2}$,
R étant le rang qu'aurait la valeur commune des X_i du groupe si elle était unique.
Autrement dit, quand on affecte un rang à chaque valeur de X, la première valeur d'un groupe d'ex aequo peut être affectée du rang R, puis, pour chaque valeur suivante ex aequo, on augmente la valeur du rang de $\frac{1}{2}$.

On montre alors que, sous H_0 :

$$E\,[\overline{W}_X] = \frac{m(m+n+1)}{2},$$

C'est la même expression que pour $E\,[W_X]$ quand il n'y a pas d'ex aequo.

$$Var\,[\overline{W}_X] = \frac{m\,n\,(m+n+1)}{12} - \frac{m\,n}{12\,(m+n)\,(m+n-1)} \sum_{k=1}^{k=r} c_k\,(c_k{}^2 - 1),$$

r étant le nombre de groupes d'ex aequo, et c_k le nombre d'observations du $k^{\text{ème}}$ groupe d'ex aequo.
Le signe moins dans l'expression montre que l'existence de groupes d'ex aequo ($c_k > 1$) a tendance à diminuer la dispersion des valeurs de la somme des rangs.

3.2.3.2. Echantillons appariés : test des signes et des rangs.

On observe maintenant un n-échantillon $((X_1, Y_1), \ldots, (X_n, Y_n))$ d'une variable (X, Y).
On note $Z = Y - X$ et $Z_i = Y_i - X_i$, $1 \le i \le n$.
Dire que X et Y sont stochastiquement indépendantes revient à dire que la loi de Z est symétrique autour de 0.
Ici, l'hypothèse H_0 est $F_Z = F_{-Z}$.
Pour un test bilatéral, on prendra, pour hypothèse H_1, $F_Z \neq F_{-Z}$.
Pour un test unilatéral, on prendra, pour hypothèse H_1, $F_Z > F_{-Z}$, ou $F_Z < F_{-Z}$, suivant que Y a tendance à prendre des valeurs plus grandes que X, ou que X a tendance à prendre des valeurs plus grandes que Y.

On définit une variable de décision, ou fonction discriminante, qui a tendance à s'éloigner de 0 lorsque H_1 est vraie : elle prendra en compte le signe de chaque Z_i et sa valeur absolue.

Pour cela, on range par ordre croissant la suite des valeurs absolues ($|Z_1|, \ldots, |Z_n|$), qu'on suppose, dans un premier temps, toutes distinctes et non nulles.
On note $R_Z = (\varepsilon(Z_1)\,R_{Z_1}, \ldots, \varepsilon(Z_n)\,R_{Z_n})$ le vecteur des signes et des rangs de l'échantillon $(Z_1, \ldots, Z_n)$.
R_{Z_i} est le rang de $|Z_i|$ dans la suite des valeurs absolues ($|Z_1|, \ldots, |Z_n|$) rangée par ordre croissant.
$\varepsilon(Z_i)$ est le signe de Z_i : + 1 si Z_i est positive, – 1 si Z_i est négative.

On note $W^+ = \sum_{\varepsilon(Z_i)=+1} R_{Z_i}$, la somme des rangs des valeurs positives de Z, et $W^- = \sum_{\varepsilon(Z_i)=-1} R_{Z_i}$, la somme des rangs des valeurs négatives de Z.
W^+ prend des valeurs de 0 (aucune valeur de Z n'est positive) à $\frac{n(n+1)}{2}$ (toutes les valeurs de Z sont positives).
$W^+ + W^- = \frac{n(n+1)}{2}$.

Sous l'hypothèse H_0, W^+ et W^- suivent la même loi de probabilité qui ne dépend pas de la loi de Z.
La loi de W^+ et W^- est une loi symétrique autour de son espérance $E\,[W^+] = \frac{n(n+1)}{4}$.

La variance de W^+ est $Var\,[W^+] = \frac{n(n+1)(2n+1)}{24}$.

La loi de probabilité de W^+ est tabulée.

Dans un test bilatéral, sous l'hypothèse H_1, W^+ a tendance à prendre des valeurs qui s'éloignent de la valeur moyenne $\frac{n(n+1)}{4}$ et on prendra une région critique de la forme $[\,0\,;\,c\,] \cup \left[\,\frac{n(n+1)}{2} - c\,;\,\frac{n(n+1)}{2}\,\right]$.

Dans un test unilatéral, la région critique prendra la forme $[\,0\,;\,c\,]$ ou $\left[\,\frac{n(n+1)}{2} - c\,;\,\frac{n(n+1)}{2}\,\right]$ suivant que, sous H_1, X a tendance à prendre des valeurs plus grandes que Y, ou que Y a tendance à prendre des valeurs plus grandes que X.

Remarques.

1. Sous H_0, la loi asymptotique de W^+ est normale.

On tolère l'application de la loi normale pour $n > 8$.
Il est alors recommandé dans ce cas, de tenir compte de la **correction de continuité** et d'utiliser la **loi normale centrée réduite** pour la variable :

$$Z = \frac{W^+ + \frac{1}{2} - E\left[W^+\right]}{\sqrt{Var\left(W^+\right)}} = \frac{W^+ - \frac{n(n+1)-2}{4}}{\sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{24}}}$$

2. Les cas d'ex aequo sont traités par la méthode du rang moyen.

Soit r le nombre de groupes d'ex aequo non nuls, c_k est le nombre d'observations du $k^{\text{ème}}$ groupe d'ex aequo non nuls, c_0 le nombre d'observations nulles.
Les premiers rangs sont ceux des c_0 observations nulles.

W^+ est alors remplacé par $\overline{W}^+ = \sum_{\varepsilon(Z_i)=+1} \overline{R}_{Z_i}$, où $\overline{R}_{Z_i}$ est le rang moyen du groupe d'ex aequo auquel appartient l'observation non nulle Z_i.

On montre alors que, sous H_0 :

$$E\,[\overline{W}^+] = \frac{1}{4}[\,n\,(n+1) - c_0\,(c_0+1)\,]$$

$$Var\,[\overline{W}^+] = \frac{1}{24}\,[\,n\,(n+1)\,(2n+1) - c_0\,(c_0+1)\,(2c_0+1)] - \frac{1}{48}\sum_{k=1}^{k=r} c_k\,(c_k{}^2 - 1)$$

3.3. Tests paramétriques.

3.3.1. Introduction.

Les tests paramétriques sont les tests que l'on peut faire sur des hypothèses concernant **les moyennes et les variances** des lois considérées, ou, plus généralement, les moments de ces lois.
Les tests sur les moyennes et les variances font intervenir les estimateurs $\overline{X}$ et S^2 de l'espérance mathématique et de la variance de la variable aléatoire parent d'un échantillon de taille n, et des fonctions de ces variables aléatoires qui, sous l'hypothèse H_0, doivent suivre des lois de probabilité connues, indépendantes des paramètres inconnus objets du test. Une telle fonction est appelée une **fonction discriminante**.

Le calcul des régions de refus ou d'acceptation d'un test paramétrique est fait à partir d'une fonction discriminante.

Quand on dispose des valeurs observées, on peut calculer les réalisations $\overline{x}$ et s^2 de $\overline{X}$ et S^2, et on calcule la valeur observée de la fonction discriminante.
La comparaison de la valeur observée de la fonction discriminante et de la région d'acceptation de l'hypothèse H_0 permet de conclure.

En réalité, il est souvent plus intéressant de calculer, à partir de la valeur observée de la fonction discriminante, la **probabilité critique** du test, qui donne une vision plus complète de la situation et donne une mesure de crédibilité de l'hypothèse H_0.

Pour les autres échantillons, une étude adaptée doit être faite, ou alors des propriétés asymptotiques sont utilisées lorsque les échantillons sont de grande taille.

Dans ce qui suit, sauf mention expresse du contraire, *les variables parents des échantillons étudiés sont supposées normales*.

> — Si l'on n'est pas certain de la normalité de la variable parent d'un échantillon, on pourra toujours faire un **test de normalité** : test d'adéquation de la loi normale, test de symétrie, test d'aplatissement. Si le test est positif, on admet que la variable parente est normale.
> — Pour les grands échantillons, le **théorème central limite** permet d'affirmer que la moyenne empirique de l'échantillon suit, au moins à peu près, une loi normale.

Pour chaque test V, on est amené à considérer trois versions : un test bilatéral V_0 et deux tests unilatéraux V_+ et V_-.
On précise alors les hypothèses H_0 et H_1 à confronter, le niveau α du test et les régions d'acceptation ou de refus de l'hypothèse H_0.

3.3.2. Tests de conformité à une valeur standard.

Soient X une variable aléatoire normale de moyenne μ et de variance σ^2, et $(X_1, \dots, X_n)$ un n-échantillon de X, c'est-à-dire une suite $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ de variables aléatoires indépendantes de même loi que X.
On note :

— $\overline{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=n} X_i$, la **moyenne empirique aléatoire**.

La moyenne empirique aléatoire est un estimateur de μ, **correct** (*sans biais* ($E(\overline{X}) = \mu$) et *robuste* ($\lim_{n \to +\infty} Var(\overline{X}) = 0$)) et **asymptotiquement gaussien** (la fonction de répartition de $\overline{X}$ tend uniformément vers la fonction de répartition d'une variable normale).

— $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{i=n} (X_i - \overline{X})^2 = \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^{i=n} X_i^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^{i=n} X_i \right)^2 \right)$, la **variance empirique aléatoire**, estimateur correct et asymptotiquement gaussien de la variance σ^2.

— $U = \frac{\overline{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$, $T = \frac{\overline{X} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$, $K = (n-1) \frac{S^2}{\sigma^2}$.

3.3.2.1. Tests de comparaison d'une moyenne à une valeur de référence.

Hypothèses à tester.

$H_0 : \mu = \mu_0$

$H_{10} : \mu \neq \mu_0$, test bilatéral V_0.
$H_{1+} : \mu > \mu_0$, test unilatéral à droite V_+.
$H_{1-} : \mu < \mu_0$, test unilatéral à gauche V_-.

3.3.2.1.1. Variance connue.

La fonction discriminante est $U = \frac{\overline{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$.

Sous l'hypothèse H_0, $U = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ suit une **loi normale** centrée réduite.

V_0 (test bilatéral).
Sous l'hypothèse H_0, les valeurs de U ne doivent pas trop s'éloigner de 0.
La région d'acceptation est un intervalle de la forme $\left[-u_{1-\frac{\alpha}{2}} ; +u_{1-\frac{\alpha}{2}} \right]$, où $u_{1-\frac{\alpha}{2}}$ est le fractile d'indice $1 - \frac{\alpha}{2}$ de la loi normale centrée réduite, c'est-à-dire la valeur de u telle que $F\left(u_{1-\frac{\alpha}{2}} \right) = 1 - \frac{\alpha}{2}$, F étant la fonction de répartition de la variable normale centrée réduite.

V_+ (test unilatéral à droite).
Sous l'hypothèse H_0, les valeurs de U ne doivent pas être trop grandes, sinon on est plutôt en faveur de l'hypothèse $H_{1+} : \mu > \mu_0$.

La région d'acceptation est un intervalle de la forme $\left]-\infty ; u_{1-\alpha}\right]$, où $u_{1-\alpha}$ est le fractile d'indice 1 – α de la loi normale centrée réduite, c'est-à-dire la valeur de u telle que $F(u_{1-\alpha}) = 1 - \alpha$, F étant la fonction de répartition de la variable normale centrée réduite.

V_- (test unilatéral à gauche).
Sous l'hypothèse H_0, les valeurs de U ne doivent pas être trop petites, sinon on est plutôt en faveur de l'hypothèse $H_{1-} : \mu < \mu_0$.
La région d'acceptation est un intervalle de la forme $\left[-u_{1-\alpha} ; +\infty\right[$, où $u_{1-\alpha}$ est le fractile d'indice 1 – α de la loi normale centrée réduite, c'est-à-dire la valeur de u telle que $F(u_{1-\alpha}) = 1 - \alpha$, F étant la fonction de répartition de la variable normale centrée réduite.

3.3.2.1.2. Variance inconnue.

La fonction discriminante est $T = \dfrac{\overline{X} - \mu}{\dfrac{S}{\sqrt{n}}}$.

Sous l'hypothèse H_0, $T = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\dfrac{S}{\sqrt{n}}}$ suit une **loi de Student** à $n - 1$ degrés de liberté.

V_0 (test bilatéral).
Sous l'hypothèse H_0, les valeurs de T ne doivent pas trop s'éloigner de 0.
La région d'acceptation est un intervalle de la forme $\left[-t_{1-\frac{\alpha}{2}} ; +t_{1-\frac{\alpha}{2}}\right]$, où $t_{1-\frac{\alpha}{2}}$ est le fractile d'indice $1 - \dfrac{\alpha}{2}$ de la loi de Student à $n - 1$ degrés de liberté, c'est-à-dire la valeur de t telle que $F\left(t_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \dfrac{\alpha}{2}$, F étant la fonction de répartition de la variable de Student à $n - 1$ degrés de liberté.

V_+ (test unilatéral à droite).
Sous l'hypothèse H_0, les valeurs de T ne doivent pas être trop grandes, sinon on est plutôt en faveur de l'hypothèse $H_{1+} : \mu > \mu_0$.
La région d'acceptation est un intervalle de la forme $\left]-\infty ; t_{1-\alpha}\right]$, où $t_{1-\alpha}$ est le fractile d'indice 1 – α de la loi de Student à $n - 1$ degrés de liberté, c'est-à-dire la valeur de t telle que $F(t_{1-\alpha}) = 1 - \alpha$, F étant la fonction de répartition de la variable de Student à $n - 1$ degrés de liberté.

V_- (test unilatéral à gauche).
Sous l'hypothèse H_0, les valeurs de T ne doivent pas être trop petites, sinon on est plutôt en faveur de l'hypothèse $H_{1-} : \mu < \mu_0$.
La région d'acceptation est un intervalle de la forme $\left[-t_{1-\alpha} ; +\infty\right[$, où $t_{1-\alpha}$ est le fractile d'indice 1 – α de la loi de Student à $n - 1$ degrés de liberté, c'est-à-dire la valeur de t telle que $F(t_{1-\alpha}) = 1 - \alpha$,

F étant la fonction de répartition de la variable de Student à $n - 1$ degrés de liberté.

3.3.2.2. Test de comparaison d'une variance à une valeur de référence.

Hypothèses à tester.

$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$

$H_{10} : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$, test bilatéral V_0.
$H_{1+} : \sigma^2 > \sigma_0^2$, test unilatéral à droite V_+.
$H_{1-} : \sigma^2 < \sigma_0^2$, test unilatéral à gauche V_-.

La fonction discriminante est $K = (n-1)\frac{S^2}{\sigma^2}$.

Sous l'hypothèse H_0, $K = (n-1)\frac{S^2}{{\sigma_0}^2}$ suit une **loi du Khi-deux** à $n - 1$ degrés de liberté.

V_0 (test bilatéral).
Sous l'hypothèse H_0, les valeurs de K ne doivent pas trop s'éloigner de son espérance $n - 1$.
La région d'acceptation est un intervalle de la forme $\left[\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2 ; \chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2 \right]$, où $\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2$ vérifie $F\left(\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2\right) = \frac{\alpha}{2}$, F étant la fonction de répartition de la variable Khi-deux à $n - 1$ degrés de liberté, et $F\left(\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2\right) = 1 - \frac{\alpha}{2}$.

V_+ (test unilatéral à droite).
Sous l'hypothèse H_0, les valeurs de K ne doivent pas être trop grandes, sinon on est plutôt en faveur de l'hypothèse $H_{1+} : \sigma^2 > \sigma_0^2$.
La région d'acceptation est un intervalle de la forme $\left[0 ; \chi_{1-\alpha}^2 \right]$, où $\chi_{1-\alpha}^2$ vérifie $F\left(\chi_{1-\alpha}^2\right) = 1 - \alpha$, F étant la fonction de répartition de la variable Khi-deux à $n - 1$ degrés de liberté.

V_- (test unilatéral à gauche).
Sous l'hypothèse H_0, les valeurs de K ne doivent pas être trop petites, sinon on est plutôt en faveur de l'hypothèse $H_{1-} : \sigma^2 < \sigma_0^2$.
La région d'acceptation est un intervalle de la forme $\left[\chi_\alpha^2 ; +\infty \right[$, où χ_α^2 vérifie $F\left(\chi_\alpha^2\right) = \alpha$, F étant la fonction de répartition de la variable Khi-deux à $n - 1$ degrés de liberté.

3.3.3. Tests d'homogénéité.

Au lieu d'un seul échantillon comme précédemment, on considère ici k échantillons, k entier supérieur ou égal à 2.
Pout tout entier i compris entre 1 et k, on considère un n_i-échantillon $E_i = (X_{i1}, \ldots, X_{in_i})$, d'une **variable normale** X_i de moyenne μ_i et de variance σ_i^2.

On pose $\nu_i = n_i - 1$, $n = \sum_{i=1}^{i=k} n_i$, $\nu = \sum_{i=1}^{i=k} \nu_i = n - k$.

On note :

— $\overline{X}_i = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{j=n_i} X_{ij}$ la moyenne empirique de E_i, estimateur de μ_i,

— $S_i^2 = \frac{1}{\nu_i} \sum_{j=1}^{j=n_i} (X_{ij} - \overline{X}_i)^2$ la variance empirique de E_i, estimateur de σ_i^2.

Enfin, on note aussi :

— $\overline{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=k} \sum_{j=1}^{j=n_i} X_{ij} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=k} n_i \overline{X}_i$, moyenne arithmétique des moyennes empiriques des échantillons pondérées par les tailles,

— $S^2 = \frac{1}{\nu} \sum_{i=1}^{i=k} \nu_i S_i^2$, moyenne arithmétique des variances empiriques des échantillons pondérées par les nombres de degré de liberté.

Le problème est de savoir si les moyennes μ_i sont homogènes (hypothèse $H_0 : \mu_i = \mu_j$ pour tout $i \in [1 ; k]$ et tout $j \in [1 ; k]$, $i \neq j$), ou si les variances σ_i^2 sont homogènes (hypothèse $H_0 : \sigma_i^2 = \sigma_j^2$ pour tout $i \in [1 ; k]$ et tout $j \in [1 ; k]$, $i \neq j$).

3.3.3.1. Tests de moyennes : cas de deux échantillons ($k = 2$).

3.3.3.1.1. Echantillons indépendants, variances connues.

$$\overline{X}_1 \rightsquigarrow G\left(\mu_1, \frac{\sigma_1^2}{n_1}\right) ; \overline{X}_2 \rightsquigarrow G\left(\mu_2, \frac{\sigma_2^2}{n_2}\right) ; \overline{X}_1 - \overline{X}_2 \rightsquigarrow G\left(\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}\right).$$

Sous l'hypothèse $H_0 : \mu_1 = \mu_2$, $U = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$ suit une **loi normale** centrée réduite.

On a alors les versions suivantes du test.

V_0 (test bilatéral).

$H_0 : \mu_1 = \mu_2$; $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$.

Sous l'hypothèse H_0, les valeurs de U ne doivent pas trop s'éloigner de 0.

La région d'acceptation est un intervalle de la forme $\left[-u_{1-\frac{\alpha}{2}} ; +u_{1-\frac{\alpha}{2}} \right]$, où $u_{1-\frac{\alpha}{2}}$ est le fractile

d'indice $1 - \frac{\alpha}{2}$ de la loi normale centrée réduite, c'est-à-dire la valeur de u telle que $F\left(u_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2}$, F étant la fonction de répartition de la variable normale centrée réduite.

V_+ (test unilatéral à droite).

$H_0 : \mu_1 = \mu_2$; $H_{1+} : \mu_1 > \mu_2$.

Sous l'hypothèse H_0, les valeurs de U ne doivent pas être trop grandes, sinon on est plutôt en faveur de l'hypothèse $H_{1+} : \mu_1 - \mu_2 > 0$.

La région d'acceptation est un intervalle de la forme $]-\infty ; u_{1-\alpha}]$, où $u_{1-\alpha}$ est le fractile d'indice $1 - \alpha$ de la loi normale centrée réduite, c'est-à-dire la valeur de u telle que $F(u_{1-\alpha}) = 1 - \alpha$, F étant la fonction de répartition de la variable normale centrée réduite.

V_- (test unilatéral à gauche).

$H_0 : \mu_1 = \mu_2$; $H_{1-} : \mu_1 < \mu_2$.

Sous l'hypothèse H_0, les valeurs de U ne doivent pas être trop petites, sinon on est plutôt en faveur de l'hypothèse $H_{1-} : \mu_1 - \mu_2 < 0$.

La région d'acceptation est un intervalle de la forme $[-u_{1-\alpha} ; +\infty[$, où $u_{1-\alpha}$ est le fractile d'indice $1 - \alpha$ de la loi normale centrée réduite, c'est-à-dire la valeur de u telle que $F(u_{1-\alpha}) = 1 - \alpha$, F étant la fonction de répartition de la variable normale centrée réduite.

3.3.3.1.2. Echantillons indépendants, variances inconnues mais égales.

Dans ce cas, $S^2 = \frac{1}{\nu}(\nu_1 S_1^2 + \nu_2 S_2^2)$ est un estimateur de la variance commune.

$\frac{S^2}{n_1} + \frac{S^2}{n_2}$ est un estimateur de la variance de $\overline{X}_1 - \overline{X}_2$.

Sous l'hypothèse H_0, $T = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{S\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$ suit une **loi de Student** à $\nu = n_1 + n_2 - 2$ degrés de liberté.

V_0 (test bilatéral).

Sous l'hypothèse H_0, les valeurs de T ne doivent pas trop s'éloigner de 0.

La région d'acceptation est un intervalle de la forme $[-t_{1-\frac{\alpha}{2}} ; +t_{1-\frac{\alpha}{2}}]$, où $t_{1-\frac{\alpha}{2}}$ est le fractile d'indice $1 - \frac{\alpha}{2}$ de la loi de Student à ν degrés de liberté, c'est-à-dire la valeur de t telle que $F\left(t_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2}$, F étant la fonction de répartition de la variable de Student à ν degrés de liberté.

V_+ (test unilatéral à droite).

Sous l'hypothèse H_0, les valeurs de T ne doivent pas être trop grandes, sinon on est plutôt en faveur de l'hypothèse $H_{1+} : \mu_1 - \mu_2 > 0$.

La région d'acceptation est un intervalle de la forme $]-\infty ; t_{1-\alpha}]$, où $t_{1-\alpha}$ est le fractile d'indice 1

– α de la loi de Student à ν degrés de liberté, c'est-à-dire la valeur de t telle que $F(t_{1-\alpha}) = 1 - \alpha$, F étant la fonction de répartition de la variable de Student à ν degrés de liberté.

***V*_ (test unilatéral à gauche).**

Sous l'hypothèse H_0, les valeurs de T ne doivent pas être trop petites, sinon on est plutôt en faveur de l'hypothèse $H_{1-} : \mu_1 - \mu_2 < 0$.

La région d'acceptation est un intervalle de la forme $\left[-t_{1-\alpha} ; +\infty \right[$, où $t_{1-\alpha}$ est le fractile d'indice 1 – α de la loi de Student à ν degrés de liberté, c'est-à-dire la valeur de t telle que $F(t_{1-\alpha}) = 1 - \alpha$, F étant la fonction de répartition de la variable de Student à ν degrés de liberté.

3.3.3.1.3. Echantillons indépendants, variances inconnues et différentes.

$\frac{{S_1}^2}{n_1} + \frac{{S_2}^2}{n_2}$ est un estimateur de la variance de $\overline{X}_1 - \overline{X}_2$.

En prenant ν tel que $\frac{1}{\nu}\left(\frac{{S_1}^2}{n_1} + \frac{{S_2}^2}{n_2} \right)^2 = \frac{1}{\nu_1}\left(\frac{{S_1}^2}{n_1} \right)^2 + \frac{1}{\nu_2}\left(\frac{{S_2}^2}{n_2} \right)^2$,

alors, sous l'hypothèse H_0, $T = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{\frac{{S_1}^2}{n_1} + \frac{{S_2}^2}{n_2}}}$ suit une loi de Student à ν degrés de liberté.

***V*_0 (test bilatéral).**

Sous l'hypothèse H_0, les valeurs de T ne doivent pas trop s'éloigner de 0.

La région d'acceptation est un intervalle de la forme $\left[-t_{1-\frac{\alpha}{2}} ; +t_{1-\frac{\alpha}{2}} \right]$, où $t_{1-\frac{\alpha}{2}}$ est le fractile d'indice $1 - \frac{\alpha}{2}$ de la loi de Student à ν degrés de liberté, c'est-à-dire la valeur de t telle que $F\left(t_{1-\frac{\alpha}{2}} \right) = 1 - \frac{\alpha}{2}$, F étant la fonction de répartition de la variable de Student à ν degrés de liberté.

***V*+ (test unilatéral à droite).**

Sous l'hypothèse H_0, les valeurs de T ne doivent pas être trop grandes, sinon on est plutôt en faveur de l'hypothèse $H_{1+} : \mu_1 - \mu_2 > 0$.

La région d'acceptation est un intervalle de la forme $\left] -\infty ; t_{1-\alpha} \right]$, où $t_{1-\alpha}$ est le fractile d'indice 1 – α de la loi de Student à ν degrés de liberté, c'est-à-dire la valeur de t telle que $F(t_{1-\alpha}) = 1 - \alpha$, F étant la fonction de répartition de la variable de Student à ν degrés de liberté.

***V*_ (test unilatéral à gauche).**

Sous l'hypothèse H_0, les valeurs de T ne doivent pas être trop petites, sinon on est plutôt en faveur de l'hypothèse $H_{1-} : \mu_1 - \mu_2 < 0$.

La région d'acceptation est un intervalle de la forme $\left[-t_{1-\alpha} ; +\infty \right[$, où $t_{1-\alpha}$ est le fractile d'indice 1 – α de la loi de Student à ν degrés de liberté, c'est-à-dire la valeur de t telle que $F(t_{1-\alpha}) = 1 - \alpha$, F étant la fonction de répartition de la variable de Student à ν degrés de liberté.

3.3.3.1.3. Echantillons indépendants, variances inconnues et différentes.

$\frac{{S_1}^2}{n_1} + \frac{{S_2}^2}{n_2}$ est un estimateur de la variance de $\overline{X}_1 - \overline{X}_2$.

En prenant ν tel que $\frac{1}{\nu}\left(\frac{{S_1}^2}{n_1} + \frac{{S_2}^2}{n_2}\right)^2 = \frac{1}{\nu_1}\left(\frac{{S_1}^2}{n_1}\right)^2 + \frac{1}{\nu_2}\left(\frac{{S_2}^2}{n_2}\right)^2$,

alors, sous l'hypothèse H_0, $T = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{\frac{{S_1}^2}{n_1} + \frac{{S_2}^2}{n_2}}}$ suit une **loi de Student** à ν degrés de liberté.

V_0 (test bilatéral).

Sous l'hypothèse H_0, les valeurs de T ne doivent pas trop s'éloigner de 0.

La région d'acceptation est un intervalle de la forme $\left[-t_{1-\frac{\alpha}{2}} ; +t_{1-\frac{\alpha}{2}} \right]$, où $t_{1-\frac{\alpha}{2}}$ est le fractile d'indice $1 - \frac{\alpha}{2}$ de la loi de Student à ν degrés de liberté, c'est-à-dire la valeur de t telle que $F\left(t_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2}$, F étant la fonction de répartition de la variable de Student à ν degrés de liberté.

V_+ (test unilatéral à droite).

Sous l'hypothèse H_0, les valeurs de T ne doivent pas être trop grandes, sinon on est plutôt en faveur de l'hypothèse $H_{1+} : \mu_1 - \mu_2 > 0$.

La région d'acceptation est un intervalle de la forme $\left]-\infty ; t_{1-\alpha}\right]$, où $t_{1-\alpha}$ est le fractile d'indice $1 - \alpha$ de la loi de Student à ν degrés de liberté, c'est-à-dire la valeur de t telle que $F(t_{1-\alpha}) = 1 - \alpha$, F étant la fonction de répartition de la variable de Student à ν degrés de liberté.

V_- (test unilatéral à gauche).

Sous l'hypothèse H_0, les valeurs de T ne doivent pas être trop petites, sinon on est plutôt en faveur de l'hypothèse $H_{1-} : \mu_1 - \mu_2 < 0$.

La région d'acceptation est un intervalle de la forme $\left[-t_{1-\alpha} ; +\infty \right[$, où $t_{1-\alpha}$ est le fractile d'indice $1 - \alpha$ de la loi de Student à ν degrés de liberté, c'est-à-dire la valeur de t telle que $F(t_{1-\alpha}) = 1 - \alpha$, F étant la fonction de répartition de la variable de Student à ν degrés de liberté.

3.3.3.1.4. Echantillons appariés.

Ici, $n_1 = n_2 = n$.

Le test se ramène à une **test de conformité à une moyenne nulle** de l'échantillon $(Z_1, \ldots, Z_n)$, avec $Z_i = X_{1i} - X_{2i}$.

Ce cas a déjà été traité auparavant, dans 3.3.2.1 : test de Gauss si la variance est connue, test de Student si la variance est inconnue.

3.3.3.2. Tests de moyennes : cas de plusieurs échantillons ($k \geq 2$). Analyse de variance à un facteur contrôlé.

Ici, on suppose que les échantillons E_i sont **indépendants** et qu'ils ont des variables parentes **normales** de **même variance** σ^2 :
$\sigma_i^2 = \sigma^2$, pour tout i, $1 \leq i \leq k$.
Si l'on n'est pas certain que la variance est la même, on fera un **test d'égalité des variances** (3.3.3.4). Si le test est positif, on admet l'égalité des variances.

On souhaite définir une fonction discriminante pour tester :
— l'hypothèse $H_0 : \mu_i = \mu_j$, pour tout $(i, j) \in \{1, \ldots, k\}^2$, $i \neq j$,
contre :
— l'hypothèse contraire H_1 : les moyennes ne sont pas toutes égales.

On a posé : $n = \sum_{i=1}^{i=k} n_i$, n_i étant la taille de l'échantillon E_i.

3.3.3.2.1. Equation de l'analyse de la variance.

Soit $\mu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=k} n_i \mu_i$ la moyenne arithmétique des moyennes μ_i pondérées par les effectifs n_i.
Dans l'hypothèse H_0, toutes les moyennes μ_i ont pour valeur commune μ.
L'influence de l'échantillon E_i sur l'hypothèse H_0 se mesure par l'écart $a_i = \mu_i - \mu$.
On a toujours $\sum_{i=1}^{i=k} n_i a_i = \sum_{i=1}^{i=k} n_i \mu_i - \sum_{i=1}^{i=k} n_i \mu = \sum_{i=1}^{i=k} n_i \mu_i - n \mu = 0$.
Dire que H_0 est vraie, c'est dire que les a_i sont tous nuls.

Dans l'hypothèse H_0 :
— $\overline{X}_i = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{j=n_i} X_{ij}$, moyenne empirique de E_i, est un estimateur de μ_i donc de μ ;
— $\overline{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=k} \sum_{j=1}^{j=n_i} X_{ij} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=k} n_i \overline{X}_i$, moyenne arithmétique des moyennes empiriques des échantillons pondérées par les tailles, est aussi un estimateur de $\mu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=k} n_i \mu_i$ et $E(\overline{X}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=k} n_i$
$E(\overline{X}_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=k} n_i \mu_i = \mu$.
Par conséquent, si H_0 est vraie, les valeurs des $\overline{X}_i$ devraient être proches de $\overline{X}$.

Les écarts $\overline{X}_i - \overline{X}$ sont d'autant plus importants que les μ_i sont différentes.
On les appelle les **écarts expliqués** (par les différences de moyennes).

Pour tout i et tout j, entre 1 et k, on peut écrire :

$X_{ij} - \overline{X} = (\overline{X}_i - \overline{X}) + (X_{ij} - \overline{X}_i)$.

L'écart entre une observation et la moyenne générale est la somme de l'écart expliqué par la différence des moyennes, et d'un **écart résiduel** $(X_{ij} - \overline{X}_i)$ entre cette observation et la moyenne de son groupe résultant de fluctuations aléatoires.

En élevant au carré la relation précédente et en additionnant pour toutes les valeurs possibles de *i* et *j*, on obtient l'équation suivante, appelée **équation de l'analyse de la variance** :

$$\sum_{i=1}^{i=k} \sum_{j=1}^{j=n_i} (X_{ij} - \overline{X})^2 = \sum_{i=1}^{i=k} n_i (\overline{X}_i - \overline{X})^2 + \sum_{i=1}^{i=k} \sum_{j=1}^{j=n_i} (X_{ij} - \overline{X}_i)^2$$

En effet, la somme des doubles produits est nulle :

$$\sum_{i=1}^{i=k} \sum_{j=1}^{j=n_i} (\overline{X}_i - \overline{X})(X_{ij} - \overline{X}_i) = \sum_{i=1}^{i=k} \overline{X}_i \left(\sum_{j=1}^{j=n_i} X_{ij} \right) - \overline{X} \sum_{i=1}^{i=k} \sum_{j=1}^{j=n_i} X_{ij} - \sum_{i=1}^{i=k} n_i \overline{X}_i^2 + \overline{X} \sum_{i=1}^{i=k} n_i \overline{X}_i$$

$$= \sum_{i=1}^{i=k} n_i \overline{X}_i^2 - \overline{X} \sum_{i=1}^{i=k} n_i \overline{X}_i - \sum_{i=1}^{i=k} n_i \overline{X}_i^2 + \overline{X} \sum_{i=1}^{i=k} n_i \overline{X}_i = 0.$$

La covariance de $(\overline{X}_i - \overline{X})$ et de $(X_{ij} - \overline{X}_i)$ est nulle.

Dans l'équation d'analyse de la variance :

— $\sum_{i=1}^{i=k} \sum_{j=1}^{j=n_i} (X_{ij} - \overline{X})^2$ est la **somme des carrés des écarts totale** (SCT),

— $\sum_{i=1}^{i=k} n_i (\overline{X}_i - \overline{X})^2$ est la **somme des carrés des écarts expliqués** (SCE), ou entre échantillons,

— $\sum_{i=1}^{i=k} \sum_{j=1}^{j=n_i} (X_{ij} - \overline{X}_i)^2$ est la **somme des carrés des écarts résiduels** (SCR), on à l'intérieur des échantillons,

et l'**équation d'analyse de la variance** s'écrit :

$$\boxed{SCT = SCE + SCR}$$

En divisant par $n = \sum_{i=1}^{i=k} n_i$, on retrouve la relation $s^2 = s_b^2 + s_w^2$ du théorème de la variance conditionnée.

3.3.3.2.2. Indépendance de SCE et SCR.

Posons $Y_{ij} = X_{ij} - a_i$.

$E_i(Y_{ij}) = E_i(X_{ij}) - a_i = \mu_i - (\mu_i - \mu) = \mu$

$E(Y_{ij}) = E(E_i(Y_{ij}))$ (théorème de la moyenne conditionnée).

$E(Y_{ij}) = E(\mu) = \mu$, quels que soient $i \in \{1, \ldots, k\}$ et $j \in \{1, \ldots, n_i\}$.

Toutes les variables Y_{ij} ont la même espérance μ.

La variance de Y_{ij} est $Var\,(X_{ij} - a_i) = Var\,(X_{ij}) = \sigma_i^2$, puisque $a_i = \mu_i - \mu$ est une constante. Et, puisque, par hypothèse, $\sigma_i^2 = \sigma^2$, pour tout i, $1 \le i \le k$, on obtient :
$Var\,(Y_{ij}) = \sigma^2$, pour tout i, $1 \le i \le k$, et tout j, $1 \le j \le n_i$.

Donc, si les X_{ij} sont des variables normales indépendantes, **les Y_{ij} sont des variables aléatoires indépendantes qui suivent toutes la même loi normale d'espérance μ et de variance σ^2.**

Soit $\overline{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=k}\sum_{j=1}^{j=n_i} Y_{ij}$ la moyenne empirique des Y_{ij}, tous échantillons confondus.

$$\overline{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=k}\sum_{j=1}^{j=n_i}(X_{ij} - a_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=k}\sum_{j=1}^{j=n_i} X_{ij} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=k}\sum_{j=1}^{j=n_i} a_i$$
$$= \overline{X} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=k} n_i a_i = \overline{X}.$$
$E\,(\overline{Y}) = E\,(\overline{X}) = \mu$.

Il en résulte :
$X_{ij} - \overline{X} = (Y_{ij} - \overline{Y}) + a_i$
$(X_{ij} - \overline{X})^2 = (Y_{ij} - \overline{Y})^2 + a_i^2 + 2\,a_i\,(Y_{ij} - \overline{Y})$
$$\sum_{i=1}^{i=k}\sum_{j=1}^{j=n_i}(X_{ij} - \overline{X})^2 = \sum_{i=1}^{i=k}\sum_{j=1}^{j=n_i}(Y_{ij} - \overline{Y})^2 + \sum_{i=1}^{i=k}\sum_{j=1}^{j=n_i} a_i^2 + 2\sum_{i=1}^{i=k}\sum_{j=1}^{j=n_i} a_i\,(Y_{ij} - \overline{Y})$$
$$= \sum_{i=1}^{i=k}\sum_{j=1}^{j=n_i}(Y_{ij} - \overline{Y})^2 + \sum_{i=1}^{i=k} n_i a_i^2 + 2\sum_{i=1}^{i=k}\sum_{j=1}^{j=n_i} a_i\,(Y_{ij} - \overline{Y})$$

L'espérance de $\sum_{i=1}^{i=k}\sum_{j=1}^{j=n_i} a_i\,(Y_{ij} - \overline{Y})$ est nulle car

$$E\left(\sum_{i=1}^{i=k}\sum_{j=1}^{j=n_i} a_i\,(Y_{ij} - \overline{Y})\right) = \sum_{i=1}^{i=k}\sum_{j=1}^{j=n_i} a_i\,E\,(Y_{ij} - \overline{Y})$$
$$= \sum_{i=1}^{i=k}\sum_{j=1}^{j=n_i} a_i\,(E\,(Y_{ij}) - E\,(\overline{Y})) = \sum_{i=1}^{i=k}\sum_{j=1}^{j=n_i} a_i\,(\mu - \mu) = 0$$

L'égalité précédente donne alors :

$$E\,(\mathrm{SCT}) = E\left(\sum_{i=1}^{i=k}\sum_{j=1}^{j=n_i}(Y_{ij} - \overline{Y})^2\right) + E\left(\sum_{i=1}^{i=k} n_i a_i^2\right)$$
$$= E\left(\sum_{i=1}^{i=k}\sum_{j=1}^{j=n_i}(Y_{ij} - \overline{Y})^2\right) + \sum_{i=1}^{i=k} n_i a_i^2$$

D'après Probabilités, Chapitre 18, Exercice 2.1°, $\sum_{i=1}^{i=k}\sum_{j=1}^{j=n_i}(Y_{ij}-\overline{Y})^2$ peut se mettre sous la forme :

$$\sum_{i=1}^{i=k}\sum_{j=1}^{j=n_i}(Y_{ij}-\overline{Y})^2 = Var(Y_{ij})\sum_{h=1}^{h=n-1}Z_h^2 = \sigma^2\sum_{h=1}^{h=n-1}Z_h^2,$$

où les Z_h sont des variables normales centrées réduites.
On obtient donc :

$$E\left(\sum_{i=1}^{i=k}\sum_{j=1}^{j=n_i}(Y_{ij}-\overline{Y})^2\right) = \sigma^2\sum_{h=1}^{h=n-1}E(Z_h^2) = (n-1)\sigma^2$$

$$\boxed{E(\text{SCT}) = (n-1)\sigma^2 + \sum_{i=1}^{i=k} n_i a_i^2}$$

On obtient, de même :

$$E(\text{SCR}) = \sum_{i=1}^{i=k}\nu_i E(S_i^2) = \nu\sigma^2 = (n-k)\sigma^2.$$

et, par différence :

$$E(\text{SCE}) = (k-1)\sigma^2 + \sum_{i=1}^{i=k} n_i a_i^2$$

Enfin, on peut démontrer que la covariance de SCE et SCR est nulle, ce qui entraîne, lorsque les échantillons sont gaussiens, l'indépendance de SCE et SCR.

3.3.3.2.3. Test de Fischer-Snedecor de l'analyse de variance.

Sous l'hypothèse H_0, tous les a_i sont nuls, les carrés moyens $CME = \frac{SCE}{k-1}$ et $CMR = \frac{SCR}{n-k}$ sont tous deux des estimateurs sans biais de σ^2, $\frac{SCE}{\sigma^2}$ et $\frac{SCR}{\sigma^2}$ suivent des lois du Khi-deux à $(k-1)$ degrés de liberté et à $(n-k)$ degrés de liberté, respectivement.
Le rapport $F = \frac{\frac{SCE}{k-1}}{\frac{SCR}{n-k}}$ suit une **loi de Fisher-Snedecor** à $(k-1, n-k)$ degrés de liberté.

Lorsque H_1 est vraie, certains des a_i ne sont pas nuls, donc *CME* a tendance à prendre de grandes valeurs puisque sa moyenne a tendance à augmenter donc *F* augmente.

On peut donc prendre *F* pour fonction discriminante et la région critique sera un intervalle $[f_{1-\alpha}, +\infty[$, où le fractile $f_{1-\alpha}$ vérifie $F(f_{1-\alpha}) = 1-\alpha$, *F* étant la fonction de répartition de la variable de Fisher-Snedecor à $(k-1, n-k)$ degrés de liberté.

Les calculs précédents sont présentés dans un tableau qu'on appelle le **tableau d'analyse de la variance** :

Source	*Somme de carrés*	*Carrés moyens*	*Degrés de liberté*	*F*
Expliquée	*SCE*	*CME*	$k - 1$	$\frac{CME}{CMR}$ observé
Résiduelle	*SCR*	*CMR*	$n - k$	valeur critique $f_{1-\alpha}$
Totale	*SCT*	*CMT*	$n - 1$	probabilité critique

Remarques.

1. Pour $k = 2$ (deux échantillons), la loi de Fisher-Snedecor à $(1, n_1 + n_2 - 2)$ degrés de liberté est la loi de probabilité du carré d'une variable de Student à $n_1 + n_2 - 2$ degrés de liberté : le test d'analyse de variance est donc équivalent au test de Student (3.3.3.1.2).

2. L'expérience montre que l'analyse de variance est peu sensible à la non-normalité des échantillons. En pratique, il suffit de ne pas l'utiliser lorsque les distributions dans les échantillons sont, d'une part, très différentes entre elles et, d'autre part, très différentes de distributions normales, et, surtout, de ne pas l'utiliser lorsque les échantillons sont trop petits.

3. L'hypothèse de l'égalité des variances semble relativement secondaire lorsque les effectifs des échantillons ne sont pas trop différents entre eux.

4. Lorsque les conditions d'application du test ne sont pas satisfaites, il existe des techniques de transformation qui permettent de normaliser les distributions et de stabiliser les variances. On peut utiliser aussi des tests non paramétriques.

3.3.3.3. Tests de variances : cas de deux échantillons.

$S_1^2 = \frac{1}{n_1 - 1} \sum_{j=1}^{j=n_1} (X_{1j} - \bar{X}_1)^2$, variance empirique de E_1, est un estimateur de σ_1^2.

Dans l'hypothèse normale, $(n_1 - 1) \frac{S_1^2}{\sigma_1^2}$ suit une loi du Khi-deux à $(n_1 - 1)$ degrés de liberté.

$S_2^2 = \frac{1}{n_2 - 1} \sum_{j=1}^{j=n_2} (X_{2j} - \bar{X}_2)^2$, variance empirique de E_2, est un estimateur de σ_2^2.

Dans l'hypothèse normale, $(n_2 - 1) \frac{S_2^2}{\sigma_2^2}$ suit une loi du Khi-deux à $(n_2 - 1)$ degrés de liberté.

En divisant les variables de Khi-deux par leurs nombres de degré de liberté, on trouve donc que $\frac{\frac{S_1^2}{\sigma_1^2}}{\frac{S_2^2}{\sigma_2^2}}$

suit une loi de Fisher-Snedecor à $(n_1 - 1, n_2 - 1)$ degrés de liberté.

Dans l'hypothèse H_0 : $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$, le rapport $F = \frac{S_1^2}{S_2^2}$ suit une **loi de Fisher-Snedecor** à $(n_1 - 1, n_2 - 1)$ degrés de liberté.

On prend donc F comme fonction discriminante et le résultat du test dépend de l'hypothèse H_1.

V_0 (test bilatéral).
Sous l'hypothèse H_0, les valeurs de F ne doivent pas trop s'éloigner de 1.
La région d'acceptation est un intervalle de la forme $\left[f_{\frac{\alpha}{2}} ; f_{1-\frac{\alpha}{2}} \right]$, où $f_{\frac{\alpha}{2}}$ vérifie $F\left(f_{\frac{\alpha}{2}}\right) = \frac{\alpha}{2}$, et $F\left(f_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2}$, F étant la fonction de répartition de la variable de Fisher-Snedecor à $(n_1 - 1, n_2 - 1)$ degrés de liberté.

V_+ (test unilatéral à droite).
Sous l'hypothèse H_0, les valeurs de F ne doivent pas être trop grandes, sinon on est plutôt en faveur de l'hypothèse $H_{1+} : \sigma_1^2 > \sigma_2^2$.
La région d'acceptation est un intervalle de la forme $\left[0 ; f_{1-\alpha} \right]$, où $f_{1-\alpha}$ vérifie $F(f_{1-\alpha}) = 1 - \alpha$, F étant la fonction de répartition de la variable de Fisher-Snedecor à $(n_1 - 1, n_2 - 1)$ degrés de liberté.

V_- (test unilatéral à gauche).
Sous l'hypothèse H_0, les valeurs de F ne doivent pas être trop petites, sinon on est plutôt en faveur de l'hypothèse $H_{1-} : \sigma_1^2 < \sigma_2^2$.
La région d'acceptation est un intervalle de la forme $\left[f_{\alpha} ; +\infty \right[$, où f_{α} vérifie $F(f_{\alpha}) = \alpha$, F étant la fonction de répartition de la variable de Fisher-Snedecor à $(n_1 - 1, n_2 - 1)$ degrés de liberté.

3.3.3.4. Tests de variances : cas de plusieurs échantillons.

Ici, les hypothèses à tester sont :
$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = ... = \sigma_k^2$, toutes les variances des variables parentes des échantillons sont égales, contre
H_1 = non (H_0), les variances des variables parentes des échantillons ne sont pas toutes égales.

Nous présentons trois tests usuels.

3.3.3.4.1. Test de Hartley.

La fonction discriminante est $H = \frac{Max\left(S_i^2\right)}{Min\left(S_i^2\right)}$, dont **la loi de probabilité est tabulée** dans certains cas, notamment lorsque tous les échantillons ont la même taille.
La région critique (région de rejet de l'hypothèse H_0) est de la forme $[h_{1-\alpha} ; +\infty [$. Elle correspond aux grandes valeurs de H.
Soit i_1 tel que $Max(S_i^2) = S_{i_1}^2$, et i_2 tel que $Min(S_i^2) = S_{i_2}^2$.
Alors, si $F(f_{1-\alpha}) = 1 - \alpha$, F étant la fonction de répartition de la variable de Fisher-Snedecor à $(n_{i_1} - 1, n_{i_2} - 1)$ degrés de liberté, on a $f_{1-\alpha} \leq h_{1-\alpha}$.

Donc si la valeur observée h de H est inférieure à $f_{1-\alpha}$, on est déjà assuré d'accepter l'hypothèse H_0.

Ce test est d'autant plus satisfaisant que les effectifs des échantillons sont proches les uns des autres.
Il est très sensible à la non-normalité des échantillons : il est donc peu fiable lorsque les échantillons ne sont pas tirés de populations normales.

3.3.3.4.2. Test de Bartlett.

La fonction discriminante est $B = \frac{Q}{C}$, avec $Q = \nu \, ln \, S^2 - \sum_{i=1}^{i=k} \nu_i \, ln \, S_i^2$ et $C = 1 + \frac{1}{3(k-1)} \left(\sum_{i=1}^{i=k} \frac{1}{\nu_i} - \frac{1}{\nu} \right)$.

Q ne prend que des valeurs positives, petites lorsque les variances sont égales.
Sous H_0, B suit à peu près une **loi du Khi-deux à $k - 1$ degrés de liberté**.

La région critique (région de rejet de l'hypothèse H_0) est de la forme $[\chi_{1-\alpha}^2 ; + \infty [$, où $F(\chi_{1-\alpha}^2) = 1 - \alpha$, F étant la fonction de répartition de la variable du Khi-deux à $k - 1$ degrés de liberté.

Remarques.

1. L'approximation par la loi du Khi-deux à $k - 1$ degrés de liberté est satisfaisante si les effectifs n_i des échantillons sont suffisamment élevés (supérieurs à 4) et si k n'est pas très élevé par rapport aux effectifs n_i.

2. Le test est très sensible à la non-normalité des échantillons : il est donc peu fiables lorsque les variables parentes des échantillons ne sont pas gaussiennes.

3. Le test de Hartley est moins puissant que le test de Bartlett dans les conditions normales d'utilisation, mais, en fait, la perte de puissance semble négligeable dans de nombreux cas.

3.3.3.4.3. Test de Levene.

L'idée de ce test est de se ramener à une égalité de moyennes.
La fonction discriminante L de ce test est la même que celle de l'analyse de variance F en remplaçant les X_{ij} par $Y_{ij} = | X_{ij} - \overline{X}_i |$.
La région de rejet est $[f_{1-\alpha} ; + \infty [$, où $FS(f_{1-\alpha}) = 1 - \alpha$, FS étant la fonction de répartition de la variable de Fisher-Snedecor à $(k - 1, n - k)$ degrés de liberté.

Remarque.

Les cas étudiés montrent que ce test est raisonnable et qu'il est d'autant plus satisfaisant que les effectifs des échantillons sont proches les uns des autres.
De plus, le test de Levene est peu sensible à la non-normalité des variables parentes des échantillons : il est robuste.

Chapitre 4. Analyse de variance.

4.1. Analyse de variance à un facteur contrôlé.

On étudie l'influence d'un facteur A sur une variable expliquée X.
Le facteur A possède k modalités ou niveaux, et on postule que ces modalités ont un effet uniquement sur la moyenne de X : on suppose donc que la variance de X est la même quelle que soit la modalité de A. Cette variance commune est notée σ^2.
Pour la modalité i du facteur A, on considère un échantillon $E_i = (X_{i1}, \dots, X_{in_i})$ de taille n_i de la variable expliquée.
L'échantillon E_i est donc constitué de n_i variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, de moyenne μ_i et de variance σ^2.
On étudie ici uniquement le cas où **la variable parente est normale** (gaussienne).
Sous certaines conditions (échantillons de grande taille, par exemple), les résultats obtenus peuvent s'étendre au cas où la variable parente n'est pas gaussienne.
L'échantillon global $E = (E_1, \dots, E_k)$ est de taille $n = \sum_{i=1}^{i=k} n_i$ et il est constitué de k échantillons indépendants.

Conditions d'application.

1. Echantillons indépendants constitués chacun de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées. 2. Variable aléatoire parente normale dans chaque échantillon. 3. Variance commune des variables parentes des échantillons.

On peut tester la validité de ces trois conditions :
— Indépendance : répartition au hasard des résidus.
— Normalité : test de normalité dans chaque échantillon, test du coefficient de symétrie, test du coefficient d'aplatissement.
— Homogénéité des variances : test de Hartley, test de Bartlett, test de Levene.

L'**équation d'analyse de la variance** s'écrit (voir Statistiques (2e année), chapitre 3, § 3.3.3.2.1) :

$$SCT = SCE + SCR$$

Le **tableau d'analyse de la variance** se présente de la façon suivante :

Source	*Somme de carrés*	*Carrés moyens*	*Degrés de liberté*	*F*
Expliquée	SCE	$CME = \frac{SCE}{k-1}$	$k-1$	$\frac{CME}{CMR}$ observé
Résiduelle	SCR	$CMR = \frac{SCR}{n-k}$	$n-k$	valeur critique $f_{1-\alpha}$
Totale	SCT	$CMT = \frac{SCT}{n-1}$	$n-1$	probabilité critique

avec :

$$SCT = \sum_{i=1}^{i=k} \sum_{j=1}^{j=n_i} (X_{ij} - \overline{X})^2$$

$$SCE = \sum_{i=1}^{i=k} n_i (\overline{X}_i - \overline{X})^2$$

$$SCR = \sum_{i=1}^{i=k} \sum_{j=1}^{j=n_i} (X_{ij} - \overline{X}_i)^2 ; \quad \overline{X}_i = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{j=n_i} X_{ij} ; \quad \overline{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=k} \sum_{j=1}^{j=n_i} X_{ij} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=k} n_i \overline{X}_i .$$

4.1.1. Réalisation des calculs.

Les données se présentent sous forme d'un tableau à k colonnes (une par modalité du facteur A).
Dans la colonne i, il y a n_i lignes utiles. Le tableau des données possède donc k colonnes et $Max(n_i)$ lignes.
Dans la colonne i, la cellule de la j-ème ligne, $1 \leq j \leq n_i$, contient la valeur x_{ij} de la variable aléatoire X_{ij}.
En bas de chaque colonne, on ajoute :

Modalité	1	...	i	...	k	
	x_{11}	...	x_{i1}	...	x_{k1}	
	...	...	...	...	...	
	...	...	x_{ij}	...	...	
	...	...	...	...	...	
	...	...	x_{in_i}	...	...	
Effectif	n_1	...	n_i	...	n_k	$n = \sum_{i=1}^{i=k} n_i$
Somme des valeurs	$x_{1.}$	...	$x_{i.} = \sum_{j=1}^{j=n_i} x_{ij}$	...	$x_{k.}$	$x = n\,\overline{x} = \sum_{i=1}^{i=k} \sum_{j=1}^{j=n_i} x_{ij}$
Carrés des sommes	$x_{1.}^2$	...	$x_{i.}^2$	...	$x_{k.}^2$	$x^2 = \left(\sum_{i=1}^{i=k} \sum_{j=1}^{j=n_i} x_{ij} \right)^2$
Somme des carrés	$c_{1.}$	...	$c_{i.} = \sum_{j=1}^{j=n_i} x_{ij}^2$	...	$c_{k.}$	$c = \sum_{i=1}^{i=k} \sum_{j=1}^{j=n_i} x_{ij}^2$
Résidus	r_1^2	...	$r_i^2 = c_{i.} - \frac{1}{n_i} x_{i.}^2$	...	r_k^2	$SCR = \sum_{i=1}^{i=k} r_i^2$
						$SCT = c - \frac{1}{n} x^2$
Variances conditionnées	s_1^2	...	$s_i^2 = \frac{1}{n_i - 1} r_i^2$	...	s_k^2	
Moyennes conditionnées	$\overline{x}_1$	...	$\overline{x}_i = \frac{1}{n_i} x_{i.}$	...	$\overline{x}_k$	$n\,\overline{x} = \sum_{i=1}^{i=k} \overline{x}_i$

— une ligne pour la valeur de n_i,

— une ligne pour la valeur de $x_{i.} = \sum_{j=1}^{j=n_i} x_{ij}$,

— une ligne pour la valeur de $x_{i.}^2$,

— une ligne pour la valeur de $c_{i.} = \sum_{j=1}^{j=n_i} x_{ij}^2$,

— une ligne pour la valeur de $r_i^2 = c_{i.} - \frac{1}{n_i} x_{i.}^2$,

— une ligne vide pour le calcul de SCT,

— une ligne pour la valeur de $s_i^2 = \frac{1}{n_i - 1} r_i^2$,

— une ligne pour la valeur de $\overline{x}_i = \frac{1}{n_i} x_{i.}$.

A gauche des lignes ajoutées, on ajoute une colonne pour les totaux et les moyennes.
SCE s'obtient par l'équation d'analyse de la variance : *SCE = SCT – SCR*.

4.1.2. Tests en analyse de variance.

L'objet de l'étude est de savoir si *A* influence la moyenne de *X*.
Le test est donc un test d'homogénéité de moyennes : on l'a déjà étudié (Cours de Statistiques (2e année), Chapitre 3, § 3.3.3.2).

On teste :
— l'hypothèse $H_0 : \mu_i = \mu_j$, pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$ et tout $j \in \{1, \dots, k\}$, $i \neq j$,
contre :
— l'hypothèse H_1 : les moyennes μ_i ne sont pas toutes égales.

Les valeurs obtenues dans le tableau de calculs permettent de remplir le tableau d'analyse de la variance.
La fonction discriminante est $F = \frac{CME}{CMR}$. Sous l'hypothèse H_0, elle suit une loi de Fisher-Snedecor à $(k – 1, n – k)$ degrés de liberté.
La dernière colonne du tableau d'analyse de la variance peut être remplie à l'aide de la table de la fonction de répartition de la variable de Fisher-Snedecor à $(k – 1, n – k)$ degrés de liberté.

Si la valeur observée de *F* est inférieure à la valeur seuil $f_{1-\alpha}$, on accepte H_0, sinon on rejette H_0.

4.1.3. Estimation en analyse de variance.

Les paramètres du modèle sont la variance σ^2 et les moyennes μ_i, $1 \leq i \leq k$.

1. Le carré moyen résiduel $\hat{\sigma}^2 = CMR$ est un **<u>estimateur sans biais de la variance</u>** σ^2.

On peut construire un **<u>intervalle de confiance de la variance</u>** σ^2 à l'aide de la loi du Khi-deux à $n – k$ degrés de liberté.

2. Lorsque H_0 est acceptée, $\overline{X}$ est un **<u>estimateur sans biais de la moyenne</u>** commune μ.

La variable $T = \frac{\overline{X} - \mu}{\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}}$ suit une loi de Student à $n – k$ degrés de liberté.

On peut construire un **<u>intervalle de confiance de la moyenne</u>** commune μ à l'aide de la loi de Student à $n – k$ degrés de liberté.

3. Lorsque H_0 est refusée : on pose $\mu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=k} n_i \mu_i$.

a) $\overline{X}_i$ est un estimateur sans biais de la moyenne μ_i.

La variable $T_i = \dfrac{\overline{X}_i - \mu_i}{\frac{\tilde{\sigma}}{\sqrt{n_i}}}$ suit une loi de Student à $n_i - 1$ degrés de liberté et permet de construire un intervalle de confiance de μ_i.

b) $A_i = \overline{X}_i - \overline{X}$ est un estimateur de l'effet $a_i = \mu_i - \mu$ de la modalité *i* du facteur *A*.

c) Les contrastes $\mu_i - \mu_j$ sont estimés sans biais par $\overline{X}_i - \overline{X}_j$ et la loi de Student à $n - k$ degrés de liberté permet de construire un intervalle de confiance.

4. Dans le cas où tous les n_i ont la même valeur h ($n = k\,h$), le **test de Newmann-Keuls** donne des précisions supplémentaires sur les contrastes et permet de regrouper les modalités de *A* en **groupes homogènes** ne présentant pas de différence significative de moyennes.
On commence par classer les modalités de *A* par valeurs décroissantes de moyenne $\overline{x}_i$.
La table "Range Studentisé" donne, en fonction du nombre *a* de moyennes à regrouper et du nombre de degrés de liberté $n - k$ de la variance résiduelle *CMR*, une valeur seuil t_s.
La formule $PPAS = t_s \times \sqrt{\dfrac{CMR}{h}}$ permet de calculer la **plus petite amplitude significative** (PPAS) correspondant à *a*.

- La comparaison des différentes moyennes $\overline{x}_i$ avec les PPAS permet de regrouper les modalités de *A* en groupes homogènes pour lesquelles les différences de moyennes ne sont pas significatives, au seuil de 5 %.
- Si l'on trouve un seul groupe homogène, c'est que toutes les moyennes sont homogènes : le test de Newmann-Keuls peut donc remplacer l'analyse de variance pour étudier l'influence du facteur *A* sur la moyenne.

4.2. Analyse de variance à deux facteurs contrôlés.

On étudie maintenant l'influence de deux facteurs *A* et *B* sur la moyenne d'une variable normale *X*, en supposant, comme précédemment que les facteurs *A* et *B* peuvent avoir une influence sur la moyenne μ, mais pas sur la variance σ^2.
On suppose que le facteur *A* présente *p* modalités, ou niveaux, A_i, $1 \le i \le p$, et que le facteur *B* présente *q* modalités, ou niveaux, B_j, $1 \le j \le q$.
Pour tout couple $(i, j) \in \{1, \dots, p\} \times \{1, \dots, q\}$, on considère un échantillon E_{ij} de taille n_{ij} de la variable expliquée X_{ij}, présentant la modalité conjointe (A_i, B_j).
On note $n_{i.} = \sum_{j=1}^{j=q} n_{ij}$, $n_{.j} = \sum_{i=1}^{i=p} n_{ij}$, $n = \sum_{i=1}^{i=p}\sum_{j=1}^{j=q} n_{ij} = \sum_{i=1}^{i=p} n_{i.} = \sum_{j=1}^{j=q} n_{.j}$.
L'échantillon E_{ij} est donc constitué de n_{ij} **variables aléatoires X_{ijk}, $1 \le k \le n_{ij}$, normales indépendantes et identiquement distribuées**, de moyenne μ_{ij} et de variance σ^2.
On pose $\mu_{i.} = \frac{1}{n_{i.}} \sum_{j=1}^{j=q} n_{ij}\,\mu_{ij}$; $\mu_{.j} = \frac{1}{n_{.j}} \sum_{i=1}^{i=p} n_{ij}\,\mu_{ij}$; $\mu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=p}\sum_{j=1}^{j=q} n_{ij}\,\mu_{ij}$.
L'ensemble *E* des échantillons E_{ij} constitue un **modèle**.

Ce modèle est dit *complet* si aucun des n_{ij} n'est nul.

Il est dit *sans répétition* si tous les n_{ij} valent 0 ou 1.

Il est dit *avec répétition* si tous les n_{ij} sont supérieurs ou égaux à 2.

Il est dit *équilibré* si les n_{ij} sont tous égaux à un entier $r \geq 1$ (tous les échantillons ont la même taille r).

Il est dit *orthogonal* si, pour tout couple $(i, j) \in \{1, \dots, p\} \times \{1, \dots, q\}$, on a $n_{ij} = \frac{n_{i.}\, n_{.j}}{n}$.

Dans un modèle complet sans répétition, tous les n_{ij} valent 1.
Tout modèle complet sans répétition est équilibré.

Dans un modèle équilibré :

$$n_{i.} = \sum_{j=1}^{j=q} n_{ij} = q\,r,\ n_{.j} = \sum_{i=1}^{i=p} n_{ij} = p\,r,\ n = \sum_{i=1}^{i=p} n_{i.} = p\,q\,r.$$

Donc $\frac{n_{i.}\, n_{.j}}{n} = r = n_{ij}$.
Tout modèle équilibré est orthogonal.

Comme dans le cas d'un seul facteur, on décompose convenablement l'écart d'une observation X_{ijk} à la moyenne générale $\overline{X}$ pour mettre en évidence l'effet des différentes modalités (niveaux) et combinaisons de modalités (traitements).
On pose :

$\overline{X}_{ij} = \frac{1}{n_{ij}} \sum_{k=1}^{k=n_{ij}} X_{ijk}$, moyenne empirique du traitement (A_i, B_j),

$\overline{X}_{ij} \rightsquigarrow G\left(\mu_{ij}, \frac{\sigma^2}{n_{ij}}\right)$

$\overline{X}_{i.} = \frac{1}{n_{i.}} \sum_{j=1}^{j=q} n_{ij}\,\overline{X}_{ij} = \frac{1}{n_{i.}} \sum_{j=1}^{j=q} \sum_{k=1}^{k=n_{ij}} X_{ijk}$, moyenne empirique du niveau A_i,

$\overline{X}_{i.} \rightsquigarrow G\left(\mu_{i.}, \frac{\sigma^2}{n_{i.}}\right)$

$\overline{X}_{.j} = \frac{1}{n_{.j}} \sum_{i=1}^{i=p} n_{ij}\,\overline{X}_{ij} = \frac{1}{n_{.j}} \sum_{i=1}^{i=p} \sum_{k=1}^{k=n_{ij}} X_{ijk}$, moyenne empirique du niveau B_j,

$\overline{X}_{.j} \rightsquigarrow G\left(\mu_{.j}, \frac{\sigma^2}{n_{.j}}\right)$

$\overline{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=p} \sum_{j=1}^{j=q} \sum_{k=1}^{k=n_{ij}} X_{ijk} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=p} n_{i.}\,\overline{X}_{i.} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{j=q} n_{.j}\,\overline{X}_{.j}$, moyenne empirique générale.

$\overline{X} \rightsquigarrow G\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$; $\overline{X} - \mu \rightsquigarrow G\left(0, \frac{\sigma^2}{n}\right)$.

$X_{ijk} - \overline{X} = (\overline{X}_{ij} - \overline{X}) + (X_{ijk} - \overline{X}_{ij})$
Le terme $(X_{ijk} - \overline{X}_{ij})$ traduit l'écart entre une observation et la moyenne du traitement (A_i, B_j).

$$X_{ijk} - \overline{X}_{ij} \rightsquigarrow G\left(0, \sigma^2\left(1 - \frac{1}{n_{ij}}\right)\right)$$

Par exemple, dans un modèle complet sans répétition, il y a une, et une seule, observation par traitement, tous les n_{ij} valent 1, et $X_{ijk} = \overline{X}_{ij}$.

Comme dans l'analyse de variance à un facteur contrôlé, nous avons toujours l'équation d'analyse de la variance :

$$\sum_{i=1}^{i=p}\sum_{j=1}^{j=q}\sum_{k=1}^{k=n_{ij}}(X_{ijk}-\overline{X})^2 = \sum_{i=1}^{i=p}\sum_{j=1}^{j=q}\sum_{k=1}^{k=n_{ij}}(\overline{X}_{ij}-\overline{X})^2 + \sum_{i=1}^{i=p}\sum_{j=1}^{j=q}\sum_{k=1}^{k=n_{ij}}(X_{ijk}-\overline{X}_{ij})^2$$
$$= \sum_{i=1}^{i=p}\sum_{j=1}^{j=q} n_{ij}(\overline{X}_{ij}-\overline{X})^2 + \sum_{i=1}^{i=p}\sum_{j=1}^{j=q}\sum_{k=1}^{k=n_{ij}}(X_{ijk}-\overline{X}_{ij})^2$$

$$(\overline{X}_{ij}-\overline{X}) = (\overline{X}_{i.}-\overline{X}) + (\overline{X}_{.j}-\overline{X}) + (\overline{X}_{ij}-\overline{X}_{i.}-\overline{X}_{.j}+\overline{X})$$
$$(X_{ijk}-\overline{X}) = (\overline{X}_{i.}-\overline{X}) + (\overline{X}_{.j}-\overline{X}) + (\overline{X}_{ij}-\overline{X}_{i.}-\overline{X}_{.j}+\overline{X}) + (X_{ijk}-\overline{X}_{ij})$$

$$(\overline{X}_{ij}-\overline{X})^2 = (\overline{X}_{i.}-\overline{X})^2 + (\overline{X}_{.j}-\overline{X})^2 + R_{ij}$$

Le terme $(\overline{X}_{i.}-\overline{X})^2$ traduit l'influence principale du facteur *A*.
Le terme $(\overline{X}_{.j}-\overline{X})^2$ traduit l'influence principale du facteur *B*.
Le terme R_{ij} est un terme qui traduit l'influence de l'interaction des facteurs *A* et *B*.

$R_{ij} = (\overline{X}_{ij}-\overline{X}_{i.}-\overline{X}_{.j}+\overline{X})^2 + 2(\overline{X}_{ij}-\overline{X}_{i.}-\overline{X}_{.j}+\overline{X})[(\overline{X}_{i.}-\overline{X})+(\overline{X}_{.j}-\overline{X})] + 2(\overline{X}_{i.}-\overline{X})(\overline{X}_{.j}-\overline{X})$
$= (\overline{X}_{ij}-\overline{X}_{i.}-\overline{X}_{.j}+\overline{X})^2 + 2(\overline{X}_{ij}-\overline{X}_{i.}-\overline{X}_{.j}+\overline{X})(\overline{X}_{i.}-\overline{X}) + 2(\overline{X}_{ij}-\overline{X}_{i.}-\overline{X}_{.j}+\overline{X})(\overline{X}_{.j}-\overline{X}) + 2(\overline{X}_{i.}-\overline{X})(\overline{X}_{.j}-\overline{X})$
$= (\overline{X}_{ij}-\overline{X}_{i.}-\overline{X}_{.j}+\overline{X})^2 + 2(\overline{X}_{ij}-\overline{X}_{i.})(\overline{X}_{i.}-\overline{X}) + 2(\overline{X}_{ij}-\overline{X}_{.j})(\overline{X}_{.j}-\overline{X}) - 2(\overline{X}_{i.}-\overline{X})(\overline{X}_{.j}-\overline{X})$

Nous obtenons alors :

$$\sum_{i=1}^{i=p}\sum_{j=1}^{j=q} n_{ij}(\overline{X}_{ij}-\overline{X})^2 = \sum_{i=1}^{i=p}\sum_{j=1}^{j=q} n_{ij}(\overline{X}_{i.}-\overline{X})^2 + \sum_{i=1}^{i=p}\sum_{j=1}^{j=q} n_{ij}(\overline{X}_{.j}-\overline{X})^2 + \sum_{i=1}^{i=p}\sum_{j=1}^{j=q} n_{ij}R_{ij}$$
$$= \sum_{i=1}^{i=p} n_{i.}(\overline{X}_{i.}-\overline{X})^2 + \sum_{j=1}^{j=q} n_{.j}(\overline{X}_{.j}-\overline{X})^2 + \sum_{i=1}^{i=p}\sum_{j=1}^{j=q} n_{ij}R_{ij}.$$

$$\sum_{i=1}^{i=p}\sum_{j=1}^{j=q} n_{ij}R_{ij} = \sum_{i=1}^{i=p}\sum_{j=1}^{j=q} n_{ij}(\overline{X}_{ij}-\overline{X}_{i.}-\overline{X}_{.j}+\overline{X})^2 + 2\sum_{i=1}^{i=p}\sum_{j=1}^{j=q} n_{ij}(\overline{X}_{ij}-\overline{X}_{i.})(\overline{X}_{i.}-\overline{X}) + 2$$
$$\sum_{i=1}^{i=p}\sum_{j=1}^{j=q} n_{ij}(\overline{X}_{ij}-\overline{X}_{.j})(\overline{X}_{.j}-\overline{X}) - 2\sum_{i=1}^{i=p}\sum_{j=1}^{j=q} n_{ij}(\overline{X}_{i.}-\overline{X})(\overline{X}_{.j}-\overline{X})$$

Dans le cas d'un **<u>modèle orthogonal</u>**, nous avons $n_{ij} = \frac{n_{i.}\,n_{.j}}{n}$, et on montre alors que $\sum_{i=1}^{i=p}\sum_{j=1}^{j=q} n_{ij}R_{ij}$ se réduit à :

$$\sum_{i=1}^{i=p}\sum_{j=1}^{j=q} n_{ij} R_{ij} = \sum_{i=1}^{i=p}\sum_{j=1}^{j=q} n_{ij} (\overline{X}_{ij} - \overline{X}_{i.} - \overline{X}_{.j} + \overline{X})^2,$$

De sorte que l'équation d'analyse de la variance prend alors une expression de la forme :

$$\sum_{i=1}^{i=p}\sum_{j=1}^{j=q}\sum_{k=1}^{k=n_{ij}} (X_{ijk} - \overline{X})^2 = \sum_{i=1}^{i=p} n_{i.} (\overline{X}_{i.} - \overline{X})^2 + \sum_{j=1}^{j=q} n_{.j} (\overline{X}_{.j} - \overline{X})^2 + SCRM + SCRV$$

$$SCT = SCEA + SCEB + SCEAB + SCR$$

dans laquelle :

$SCT = \sum_{i=1}^{i=p}\sum_{j=1}^{j=q}\sum_{k=1}^{k=n_{ij}} (X_{ijk} - \overline{X})^2$ est la somme des carrés des écarts **totale**,

$SCEA = \sum_{i=1}^{i=p} n_{i.} (\overline{X}_{i.} - \overline{X})^2$ est la somme des carrés des écarts **expliquée par *A***, elle traduit les variations de la moyenne marginale $\overline{X}_{i.}$ autour de sa moyenne $\mu_{i.}$.

$SCEB = \sum_{j=1}^{j=q} n_{.j} (\overline{X}_{.j} - \overline{X})^2$ est la somme des carrés des écarts **expliquée par *B***, elle traduit les variations de la moyenne marginale $\overline{X}_{.j}$ autour de sa moyenne $\mu_{.j}$.

$SCEAB = \sum_{i=1}^{i=p}\sum_{j=1}^{j=q} n_{ij} (\overline{X}_{ij} - \overline{X}_{i.} - \overline{X}_{.j} + \overline{X})^2$ est la somme des carrés des écarts résiduels de la moyenne, traduisant les fluctuations de $\overline{X}_{ij}$ autour de sa moyenne μ, abstraction faite des variations des moyennes marginales $\overline{X}_{i.}$ et $\overline{X}_{.j}$. Cette somme des carrés des écarts mesure donc l'influence l'**interaction des facteurs *A* et *B***** sur la moyenne.

$SCR = \sum_{i=1}^{i=p}\sum_{j=1}^{j=q}\sum_{k=1}^{k=n_{ij}} (X_{ijk} - \overline{X}_{ij})^2$ est la somme des carrés des écarts **résiduels de la variable** : elle traduit les fluctuations aléatoires de X_{ijk} autour de sa moyenne μ_{ij} dans le traitement (A_i, B_j).

L'espérance de *SCT* est $E(SCET) = (n-1)\,\sigma^2 + \sum_{i=1}^{i=p}\sum_{j=1}^{j=q} n_{ij} (\mu_{ij} - \mu)^2$.

L'espérance de *SCEA* est $E(SCEA) = (p-1)\,\sigma^2 + \sum_{i=1}^{i=p} n_{i.} (\mu_{i.} - \mu)^2$.

L'espérance de *SCEB* est $E(SCEB) = (q-1)\,\sigma^2 + \sum_{j=1}^{j=q} n_{.j} (\mu_{.j} - \mu)^2$.

L'espérance de *SCEAB* est $E(SCEAB) = (p-1)(q-1)\,\sigma^2 + \sum_{i=1}^{i=p}\sum_{j=1}^{j=q} n_{ij} (\mu_{ij} - \mu_{i.} - \mu_{.j} + \mu)^2$.

L'espérance de *SCR* est $E(SCR) = (n - p\,q)\,\sigma^2$.

4.2.1. Tests en analyse de la variance.

On se place dans le cas d'un **modèle orthogonal** $\left(n_{ij} = \frac{n_{i.}\, n_{.j}}{n} \right)$.

4.2.1.1. Test d'absence d'action du facteur *A*.

Hypothèse H_0 : $\mu_{i.} = \mu$, pour tout i, $1 \leq i \leq p$.
Hypothèse H_1 : non (H_0).

On a alors : $E\,(SCEA) = (p-1)\,\sigma^2$, $E\,(SCR) = (n - p\,q)\,\sigma^2$.

Si bien que les carrés moyens des écarts $CMEA = \frac{SCEA}{p-1}$, $CMR = \frac{SCR}{n-pq}$ lorsque n n'est pas égal à $p\,q$, sont tous des **estimateurs sans biais de la variance** σ^2.
Leur rapport $F_A = \frac{CMEA}{CMR}$ suit une **loi de Fisher-Snedecor à ($p - 1$, $n - p\,q$) degrés de liberté** : il permet de tester l'influence du facteur *A*.

Sous l'hypothèse H_1, le numérateur de F_A augmente, puisqu'on ajoute les termes $\sum_{i=1}^{i=p} n_{i.}\,(\mu_{i.} - \mu)^2$.

On rejettera l'hypothèse H_0 pour les grandes valeurs du rapport et l'**intervalle critique (zone de rejet)** sera de la forme $[\, c_{1-\alpha}\,;\, +\infty\,[$, intervalle de probabilité α : $F\,(c_{1-\alpha}) = 1 - \alpha$, où F est la fonction de répartition de la variable de Fisher-Snedecor à ($p - 1$, $n - p\,q$) degrés de liberté.

4.2.1.2. Test d'absence d'action du facteur *B*.

Hypothèse H_0 : $\mu_{.j} = \mu$, pour tout j, $1 \leq j \leq q$.
Hypothèse H_1 : non (H_0).

On a alors : $E\,(SCEB) = (q-1)\,\sigma^2$, $E\,(SCR) = (n - p\,q)\,\sigma^2$.

Si bien que les carrés moyens des écarts $CMEB = \frac{SCEB}{q-1}$, $CMR = \frac{SCR}{n-pq}$ lorsque n n'est pas égal à $p\,q$, sont tous des **estimateurs sans biais de la variance** σ^2.
Leur rapport $F_B = \frac{CMEB}{CMR}$ suit une **loi de Fisher-Snedecor à ($q - 1$, $n - p\,q$) degrés de liberté** : il permet de tester l'influence du facteur *B*.

Sous l'hypothèse H_1, le numérateur de F_B augmente, puisqu'on ajoute les termes $\sum_{j=1}^{j=q} n_{.j}\,(\mu_{.j} - \mu)^2$.

On rejettera l'hypothèse H_0 pour les grandes valeurs du rapport et l'**intervalle critique (zone de rejet)** sera de la forme $[\, c_{1-\alpha}\,;\, +\infty\,[$, intervalle de probabilité α : $F\,(c_{1-\alpha}) = 1 - \alpha$, où F est la fonction de répartition de la variable de Fisher-Snedecor à ($q - 1$, $n - p\,q$) degrés de liberté.

4.2.1.3. Test d'absence d'interaction des facteurs *A* et *B*.

Hypothèse H_0 : $\mu_{ij} - \mu_{i.} - \mu_{.j} + \mu = 0$, pour tout i, $1 \leq i \leq p$ et tout j, $1 \leq j \leq q$.
Hypothèse H_1 : non (H_0).

On a alors : $E\,(SCEAB) = (p-1)(q-1)\,\sigma^2$, $E\,(SCR) = (n-p\,q)\,\sigma^2$.

Si bien que les carrés moyens des écarts $CMEAB = \frac{SCEAB}{(p-1)(q-1)}$, $CMR = \frac{SCR}{n-pq}$ lorsque n n'est pas égal à $p\,q$, sont tous des **estimateurs sans biais de la variance** σ^2.
Leur rapport $F_{AB} = \frac{CMEAB}{CMR}$ suit une **loi de Fisher-Snedecor à $((p-1)(q-1), n-p\,q)$ degrés de liberté** : il permet de tester l'influence de l'interaction des facteurs A et B.

Sous l'hypothèse H_1, le numérateur de F_{AB} augmente, puisqu'on ajoute les termes $\sum_{i=1}^{i=p}\sum_{j=1}^{j=q} n_{ij}\,(\mu_{ij} - \mu_{i.} - \mu_{.j} + \mu)^2$.
On rejettera l'hypothèse H_0 pour les grandes valeurs du rapport et l'**intervalle critique (zone de rejet)** sera de la forme $[\,c_{1-\alpha}\,;+\infty\,[$, intervalle de probabilité α : $F\,(c_{1-\alpha}) = 1-\alpha$, où F est la fonction de répartition de la variable de Fisher-Snedecor à $((p-1)(q-1), n-p\,q)$ degrés de liberté.

En résumé, lorsque le modèle orthogonal est avec répétition :

— Le rapport $F_A = \frac{CMEA}{CMR}$ suit une loi de Fisher-Snedecor à $(p-1, n-p\,q)$ degrés de liberté : il permet de tester l'influence du facteur A.

— Le rapport $F_B = \frac{CMEB}{CMR}$ suit une loi de Fisher-Snedecor à $(q-1, n-p\,q)$ degrés de liberté : il permet de tester l'influence du facteur B.

— Le rapport $F_{AB} = \frac{CMEAB}{CMR}$ suit une loi de Fisher-Snedecor à $((p-1)(q-1), n-p\,q)$ degrés de liberté : il permet de tester l'influence de l'interaction du facteur A et du facteur B.

Sous l'hypothèse H_1, les numérateurs de F_A, F_B, F_{AB}, ont tendance à augmenter : on rejettera l'hypothèse H_0 pour les grandes valeurs du rapport et l'**intervalle critique (zone de rejet)** sera de la forme $[\,c_{1-\alpha}\,;+\infty\,[$, intervalle de probabilité α.

4.2.1.4. Absence d'interaction.

Lorsque le test du rapport F_{AB} est négatif, et permet donc de conclure à l'absence d'influence de l'interaction de A et B sur la moyenne, on pourra prendre comme somme de carrés résiduelle (variance résiduelle) : $SCR' = SCEAB + SCR$.
C'est la somme d'une variable de Khi-deux à $(p-1)(q-1)$ degrés de liberté et d'une variable de Khi-deux à $(n-p\,q)$ degrés de liberté : c'est donc une variable de Khi-deux à $(p-1)(q-1) + (n-p\,q) = (n-p-q+1)$ degrés de liberté, et le carré moyen correspondant est $CMR' = \frac{SCR'}{(n-1)-(p-1)-(q-1)}$.
Dans ce cas, on obtient un **test plus puissant** en prenant CMR' à la place de CMR, puisque l'estimation de la variance donnée par CMR' est plus précise que l'estimation donnée par CMR (elle possède plus de degrés de liberté) :

— Le rapport $F'_A = \frac{CMEA}{CMR'}$ suit une loi de Fisher-Snedecor à $(p-1, n-p-q+1)$ degrés de liberté : il permet de tester l'influence du facteur A.

— Le rapport $F'_B = \frac{CMEB}{CMR'}$ suit une loi de Fisher-Snedecor à $(q-1, n-p-q+1)$ degrés de liberté : il permet de tester l'influence du facteur B.

4.2.1.5. Modèle sans répétition

On ne peut pas, dans ce cas, tester l'absence d'influence de l'interaction de A et B, puisque $n_{ij} = 1$ et n

$= p\,q$, donc $SCR = 0$.
On suppose alors que **le modèle est additif**, ce qui veut dire qu'il n'y a **pas d'interaction** de A et B.
La variance résiduelle est $CMEAB$, qui tient compte des variations aléatoires des observations autour de leur moyenne, déduction faite de l'influence principale de A et de l'influence principale de B.

— Le rapport $F_A = \frac{CMEA}{CMEAB}$ suit une loi de Fisher-Snedecor à $(p - 1, n - p - q + 1)$ degrés de liberté : il permet de tester l'influence du facteur A.

— Le rapport $F_B = \frac{CMEB}{CMEAB}$ suit une loi de Fisher-Snedecor à $(q - 1, n - p - q + 1)$ degrés de liberté : il permet de tester l'influence du facteur B.

Comme précédemment, l'intervalle de rejet de l'hypothèse H_0 dans chacun de ces tests est un intervalle $[\, c_{1-\alpha} ; +\infty [$, de probabilité α, variable suivant le nombre de degrés de liberté.

4.2.2. Réalisation des calculs.

B A	1 $1 \dots p$	j $1 \dots i \dots p$	q $1 \dots p$	
Données	...	... x_{ij1} ... ... x_{ijk} ... ... $x_{ijn_{ij}}$ ...	...	*Effectifs* i \ j : 1 ... j ... q ... *Totaux* 1 : n_{11} ... n_{1q} ... i : ... n_{ij} ... $n_{i.} = \sum_{j=1}^{j=q} n_{ij}$ p : n_{p1} ... n_{pq} ... *Totaux* ... $n_{.j} = \sum_{i=1}^{i=p} n_{ij}$ ... $n = \sum_{i=1}^{i=p} \sum_{j=1}^{j=q} n_{ij}$
Totaux par colonne	...	... $x_{ij.} = \sum_{k=1}^{k=n_{ij}} x_{ijk}$ ... ... $\frac{1}{n_{ij}} \left(\sum_{k=1}^{k=n_{ij}} x_{ijk} \right)^2$ ...		*Somme des données* = $\sum_{i=1}^{i=p} \sum_{j=1}^{j=q} \sum_{k=1}^{k=n_{ij}} x_{ijk}$ $\sum_{i=1}^{i=p} \sum_{j=1}^{j=q} \frac{1}{n_{ij}} \left(\sum_{k=1}^{k=n_{ij}} x_{ijk} \right)^2$
Carrés	...	... $\sum_{k=1}^{k=n_{ij}} x_{ijk}^2$ ...		*Somme des carrés* = $\sum_{i=1}^{i=p} \sum_{j=1}^{j=q} \sum_{k=1}^{k=n_{ij}} x_{ijk}^2$

Carrés résiduels	...	... $\sum_{k=1}^{k=n_{ij}} x_{ijk}^2 - \frac{1}{n_{ij}}\left(\sum_{k=1}^{k=n_{ij}} x_{ijk}\right)^2$ ...	...	$SCR = \sum_{i=1}^{i=p}\sum_{j=1}^{j=q}\sum_{k=1}^{k=n_{ij}} x_{ijk}^2 - \sum_{i=1}^{i=p}\sum_{j=1}^{j=q}\frac{1}{n_{ij}}\left(\sum_{k=1}^{k=n_{ij}} x_{ijk}\right)^2\right)$
Ecarts totaux				$SCT = \sum_{i=1}^{i=p}\sum_{j=1}^{j=q}\sum_{k=1}^{k=n_{ij}} x_{ijk}^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{i=p}\sum_{j=1}^{j=q}\sum_{k=1}^{k=n_{ij}} x_{ijk}\right)^2$
Facteur A		A : 1 ... i ... p *Effectif marginal* : $n_{1.}$ ... $n_{i.}$ ... $n_{p.}$ *Données marginales* : ... $\sum_{j=1}^{j=q}\sum_{k=1}^{k=n_{ij}} x_{ijk}$ ... *Contribution à SCE* : ... $\frac{1}{n_{i.}}\left(\sum_{j=1}^{j=q}\sum_{k=1}^{k=n_{ij}} x_{ijk}\right)^2$ ...		$SCEA = \sum_{i=1}^{i=p}\sum_{j=1}^{j=q}\sum_{k=1}^{k=n_{ij}} x_{ijk}^2 - \sum_{i=1}^{i=p}\frac{1}{n_{i.}}\left(\sum_{j=1}^{j=q}\sum_{k=1}^{k=n_{ij}} x_{ijk}\right)^2$
Facteur B		B : 1 ... j ... q *Effectif marginal* : $n_{.1}$ ... $n_{.j}$ ... $n_{.q}$ *Données marginales* : ... $\sum_{i=1}^{i=p}\sum_{k=1}^{k=n_{ij}} x_{ijk}$ ... *Contribution à SCE* : ... $\frac{1}{n_{.j}}\left(\sum_{i=1}^{i=p}\sum_{k=1}^{k=n_{ij}} x_{ijk}\right)^2$ ...		$SCEB = \sum_{i=1}^{i=p}\sum_{j=1}^{j=q}\sum_{k=1}^{k=n_{ij}} x_{ijk}^2 - \sum_{j=1}^{j=q}\frac{1}{n_{.j}}\left(\sum_{i=1}^{i=p}\sum_{k=1}^{k=n_{ij}} x_{ijk}\right)^2$
Interaction AB				$SCEAB = SCT - SCR - SCEA - SCEB$

Le tableau des calculs précédent permet de construire le **tableau d'analyse de la variance**.

Source de variations	*Somme des Carrés des Ecarts*	*Degrés de liberté*	*Carrés moyens*	*F*	*Probabilité critique*
Totale	*SCT*	$n-1$	$CMT = \frac{SCT}{n-1}$		
Facteur A	*SCEA*	$p-1$	$CMEA = \frac{SCEA}{p-1}$	$F_A = \frac{CMEA}{CMR}$	p_A
Facteur B	*SCEB*	$q-1$	$CMEB = \frac{SCEB}{q-1}$	$F_B = \frac{CMEB}{CMR}$	p_B
Interaction AB	*SCEAB*	$(p-1)(q-1)$	$CMEAB = \frac{SCEAB}{(p-1)(q-1)}$	$F_{AB} = \frac{CMEAB}{CMR}$	p_{AB}
Résiduelle	*SCR*	$n-p\,q$	$CMR = \frac{SCR}{n-pq}$		

4.2.3. Le modèle additif.

Un modèle **sans interaction de *A* et *B*** est appelé un modèle additif.
Dans ce cas, on l'a vu, on obtient un test plus puissant en prenant pour **tableau d'analyse de la variance** :

Source de variations	*Somme des Carrés des Ecarts*	*Degrés de liberté*	*Carrés moyens*	*F*	*Probabilité critique*
Totale	*SCT*	$n-1$	$CMT = \frac{SCT}{n-1}$		
Facteur A	*SCEA*	$p-1$	$CMEA = \frac{SCEA}{p-1}$	$F'_A = \frac{CMEA}{CMR'}$	p'_A
Facteur B	*SCEB*	$q-1$	$CMEB = \frac{SCEB}{q-1}$	$F'_B = \frac{CMEB}{CMR'}$	p'_B
Résiduelle	$SCR' = SCR + SCEAB = SCT - SCEA - SCEB$	$n-p-q+1$	$CMR' = \frac{SCR'}{(n-1)-(p-1)-(q-1)}$		

C'est le cas, dans un modèle orthogonal avec répétition, lorsque la probabilité critique p_{AB} du test d'interaction de *A* et *B* est grande, supérieure à 0,25 ou à 0,50 par exemple (on accepte H_0).
C'est le cas, dans un modèle complet sans répétition ($n_{ij} = 1$), dans lequel on admet qu'il n'y a pas d'interaction des facteurs *A* et *B*.

4.2.4. Cas du plan complet équilibré.

Dans un plan complet équilibré, tous les effectifs n_{ij} des échantillons sont égaux à un entier $r \geq 1$.

4.2.4.1. Plan complet équilibré avec répétition : $r \geq 2$.

La seule chose qui change dans le tableau d'analyse de la variance est que n est égal à $p\ q\ r$.

4.2.4.2. Plan complet équilibré sans répétition : $r = 1$.

$n = p\ q$.
La somme des carrés des écarts résiduels *SCER* est nulle.
Il faut supposer que **le modèle est additif** (pas d'interaction de *A* et *B*).
Le tableau d'analyse de la variance se réduit à :

Source de variations	*Somme des Carrés des Ecarts*	*Degrés de liberté*	*Carrés moyens*	*F*	*Probabilité critique*
Totale	*SCT*	$n - 1$	$CMT = \frac{SCT}{n-1}$		
Facteur A	*SCEA*	$p - 1$	$CMEA = \frac{SCEA}{p-1}$	$F'_A = \frac{CMEA}{CMR'}$	p'_A
Facteur B	*SCEB*	$q - 1$	$CMEB = \frac{SCEB}{q-1}$	$F'_B = \frac{CMEB}{CMR'}$	p'_B
Résiduelle	$SCR' = SCT - SCEA - SCEB$	$n - p - q + 1$	$CMR' = \frac{SCR'}{(n-1)-(p-1)-(q-1)}$		

Le **test d'additivité de Tukey** permet de vérifier l'absence d'interaction.

On pose $SCADD = \frac{\left[\sum_{i=1}^{i=p}\sum_{j=1}^{j=q} X_{ij}\left(\overline{X}_{i.} - \overline{X}\right)\left(\overline{X}_{.j} - \overline{X}\right)\right]^2}{\left[\sum_{i=1}^{i=p}\left(\overline{X}_{i.} - \overline{X}\right)^2\right]\left[\sum_{j=1}^{j=q}\left(\overline{X}_{.j} - \overline{X}\right)^2\right]}$ et $F = \frac{SCADD}{\frac{SCEAB - SCADD}{(p-1)(q-1)-1}}$.

Sous l'hypothèse d'additivité, *F* suit une loi de Fisher-Snedecor à $(1, (p-1)(q-1)-1)$ degrés de liberté : on rejette l'hypothèse d'additivité pour les grandes valeurs de *F*.

4.2.5. Estimation en analyse de la variance.

$\overline{X}$ est un estimateur sans biais de μ.
$\overline{X}_{ij}$ est un estimateur sans biais de μ_{ij}.
$\overline{X}_{i.}$ est un estimateur sans biais de $\mu_{i.}$.
$\overline{X}_{.j}$ est un estimateur sans biais de $\mu_{.j}$.
$\overline{X}_{i.} - \overline{X}$ est un estimateur sans biais de $a_i = \mu_{i.} - \mu$.
$\overline{X}_{.j} - \overline{X}$ est un estimateur sans biais de $b_j = \mu_{.j} - \mu$.
$\overline{X}_{ij} - \overline{X}_{i.} - \overline{X}_{.j} + \overline{X}$ est un estimateur sans biais de $c_{ij} = \mu_{ij} - \mu_{i.} - \mu_{.j} + \mu$.

CMR (*CMR'* dans un modèle additif) est un estimateur sans biais de la variance σ^2.

Chapitre 1. Analyse univariée : représentation graphique.

Exercices

Exercice 1. Consommation d'énergie.
Exercice 2. Lancers de dé.
Exercice 3. Population et superficie.
Exercice 4. Notes.
Exercice 5. Immigration.
Exercice 6. Rémunérations.

Exercice 1. Consommation d'énergie.

Nous donnons les consommations mondiales par source d'énergie et par zone (1992) en Mtep (millions de tonnes équivalent pétrole) (fossile = pétrole + gaz naturel + charbon) :

	fossile	nucléaire	hydraulique
Amérique du nord	1 930,4	188,5	50,5
Amérique latine	341,3	3,3	33,6
Europe O.C.D.E.	1 172,1	197,5	38,1
Europe hors O.C.D.E.	1 431,0	58,3	23,0
Moyen-Orient	252,8		1,2
Afrique	208,6	2,4	6,2
Asie et Australasie	1 737,4	81,9	36,0

Représenter graphiquement ces données.
Mettre en évidence, graphiquement, la partie du monde consommant, en proportion, le plus d'énergie d'origine hydraulique.
(*Source* : Encyclopædia Universalis, **Les Chiffres du monde 1994**, p.544).

Solution

HAUT

Exercice 2. Lancers de dé.

Nous avons lancé 100 fois un dé à six faces numérotées de 1 à 6. Les résultats sont les suivants.

2 1 4 1 4 5 1 5 5 3 6 2 4 2 5 6 5 6 6 5
3 1 3 4 2 1 6 5 5 4 5 3 1 6 5 4 4 3 5 4
6 6 3 5 4 2 3 2 4 3 4 5 1 2 4 6 3 5 6 3
2 6 6 3 5 5 1 5 2 2 5 5 2 5 1 3 2 4 4 1
1 6 2 4 6 3 2 6 1 5 4 3 4 2 3 4 6 5 4 4

Préciser la variable statistique étudiée et effectuer la représentation graphique des données. Remarque ?

Solution

HAUT

Exercice 3. Population et superficie.

Nous donnons la superficie (en millions de km ²) et le nombre d'habitants (en millions) des divers continents du globe (source : Encyclopædia Britannica, 1994).

	Population	*Superficie*
Afrique	670	30,4
Asie	3 336	31,9
Amérique	751	42,2
Europe	728	23,0
Océanie	28	8,5

Préciser les variables statistiques étudiées et effectuer la représentation graphique des données.

Solution

HAUT

Exercice 4. Notes.

Nous donnons les notes de 80 étudiants à un examen universitaire :

68 84 75 82 68 90 62 88 76 93 73 79 88 73 60 63
93 71 59 85 75 61 65 75 87 74 62 95 78 63 72 76
66 78 82 75 94 77 69 74 68 60 96 78 89 61 75 75
95 60 79 83 71 79 62 67 96 78 85 76 65 71 75 85
65 80 73 57 88 78 62 76 53 74 86 67 73 81 72 77

Dresser le tableau de distribution de cette variable statistique (modalités, effectifs, fréquences, ...) et en faire une représentation graphique.

Solution

HAUT

Exercice 5. Immigration.

L'office national d'immigration donne, pour l'année 1976, les effectifs, en milliers d'immigrés permanents :

	hommes		femmes	
Age	Total	Mariés	Total	Mariés
0-20	1985	41	1050	66
20-25	5519	858	2446	431
25-30	5076	2006	1564	471
30-35	2739	1820	754	298
35-40	1728	1360	481	233
40-45	1176	978	342	183
45-65	1579	1366	510	235

Représenter graphiquement les données.
Peut-on mettre en évidence sur le graphique certaines lois sur l'immigration ?

Solution

HAUT

Exercice 6. Rémunérations.

On considère la répartition en pourcentages des agents civils de l'état selon le montant de leur salaire net mensuel en 1980, en négligeant les salaires au-delà de 15 000 F.

X (milliers de F)	%
[0 ; 3 [	7
[3 ; 4 [	35
[4 ; 5 [	24
[5 ; 6 [	15
[6 ; 7 [	9
[7 ; 10 [	8
[10 ; 15 [	2

Solution

Nous admettrons une répartition uniforme à l'intérieur de chaque classe.

1°/ Tracer l'histogramme des densités de fréquence de cette distribution.

2°/ Déterminer le mode.

3°/ Tracer la fonction de répartition empirique.

4°/ Déterminer la médiane.

5°/ Déterminer l'intervalle interquartile.

6°/ On appelle *rapport des déciles* le quotient du salaire au-dessus duquel se trouvent 10 % des agents, par celui en dessous duquel se trouvent 10 % des agents. Calculer ce rapport pour l'année 1980.
Sachant que ce rapport valait 2,4 en 1976, que peut-on conclure sur l'évolution des rémunérations entre ces deux années ?

HAUT

Chapitre 1. Analyse univariée : représentation graphique.

Enoncés.

Exercice 1. Consommation d'énergie.

Nous donnons les consommations mondiales par source d'énergie et par zone (1992) en Mtep (millions de tonnes équivalent pétrole) (fossile = pétrole + gaz naturel + charbon) :

	fossile	nucléaire	hydraulique
Amérique du nord	1 930,4	188,5	50,5
Amérique latine	341,3	3,3	33,6
Europe O.C.D.E.	1 172,1	197,5	38,1
Europe hors O.C.D.E.	1 431,0	58,3	23,0
Moyen-Orient	252,8		1,2
Afrique	208,6	2,4	6,2
Asie et Australasie	1 737,4	81,9	36,0

Représenter graphiquement ces données.
Mettre en évidence, graphiquement, la partie du monde consommant, en proportion, le plus d'énergie d'origine hydraulique.
(*Source* : Encyclopædia Universalis, **Les Chiffres du monde 1994**, p.544).

Solution.

1°/ Variables statistiques.

La question est de savoir, considérant une consommation d'énergie, quelle est son origine et dans quelle partie du monde elle est consommée.
Il y a donc deux variables statistiques qualitatives à étudier.

Les effectifs (consommations) des modalités de ces deux variables statistiques s'obtiennent en faisant les sommes par ligne ou par colonne du tableau de l'énoncé.

Origine	fossile	nucléaire	hydraulique	Mtep
Amérique du nord	1 930,4	188,5	50,5	2 169,4
Amérique latine	341,3	3,3	33,6	378,2
Europe O.C.D.E.	1 172,1	197,5	38,1	1 407,7
Europe hors O.C.D.E.	1 431,0	58,3	23,0	1 512,3
Moyen-Orient	252,8		1,2	254,0
Afrique	208,6	2,4	6,2	217,2
Asie et Australasie	1 737,4	81,9	36,0	1 855,3
Mtep	7 073,6	531,9	188,6	7 794,1

Variable "**Origine de l'énergie consommée**" :

Origine	fossile	nucléaire	hydraulique
Mtep	7 073,6	531,9	188,6

Variable "**Partie du monde**" :

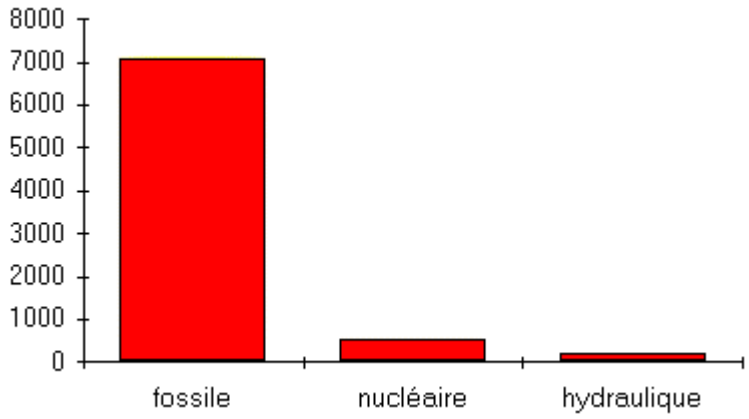
	Mtep
Amérique du nord	2 169,4
Amérique latine	378.2
Europe O.C.D.E.	1 407,7
Europe hors O.C.D.E.	1 512,3
Moyen-Orient	254,0
Afrique	217,2
Asie et Australasie	1 855,3

2°/ Représentation graphique.

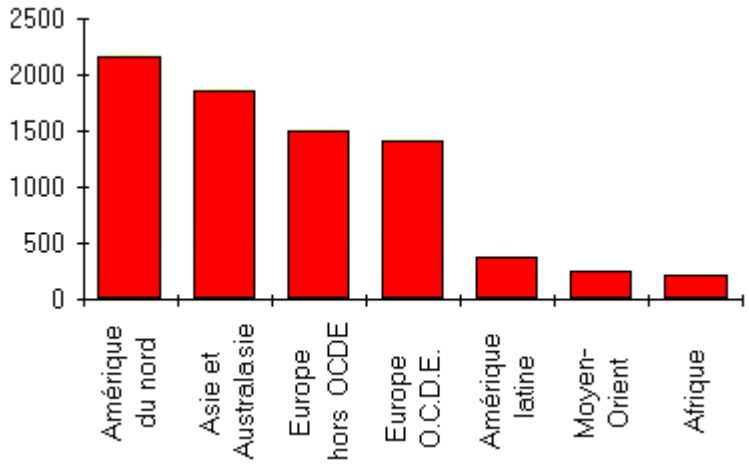
a) Tuyaux d'orgue.

Les comparaisons sont plus faciles lorsque les données sont classées, par ordre croissant ou par ordre décroissant.

Consommation d'énergie suivant la source :

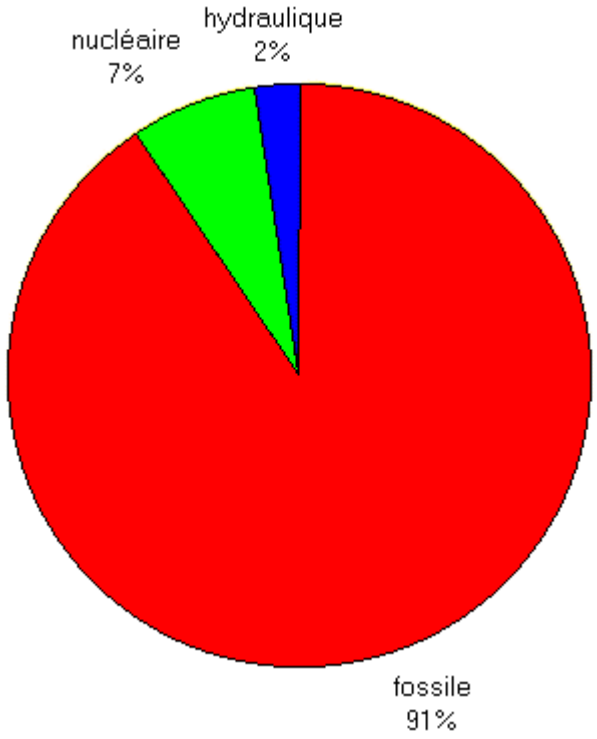


Consommation d'énergie suivant la zone :

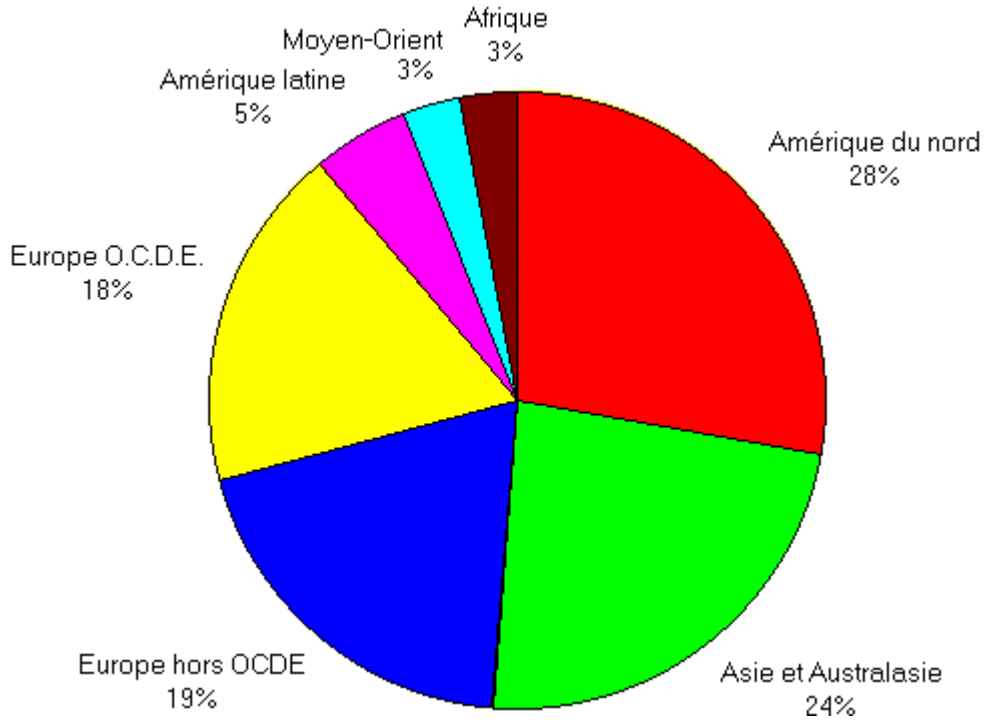


b) Diagrammes circulaires, ou secteurs.

Consommation d'énergie suivant la source :



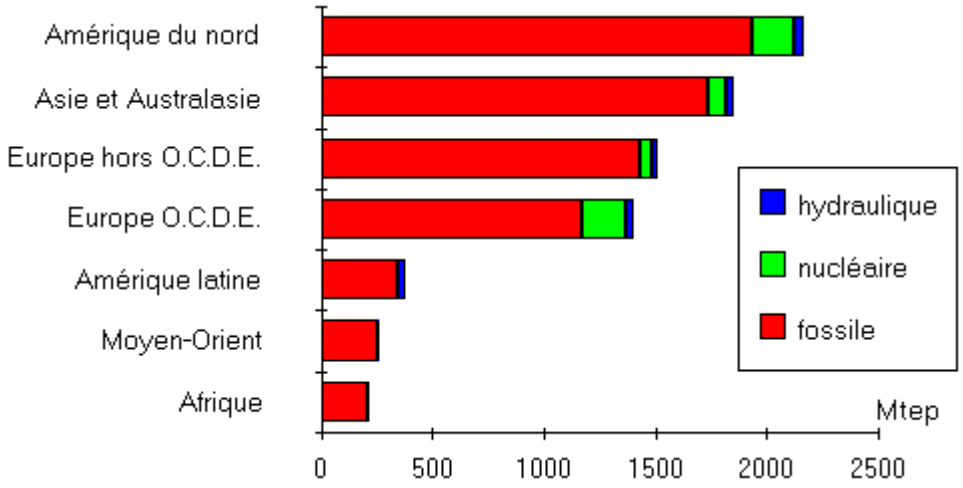
Consommation d'énergie suivant la zone :



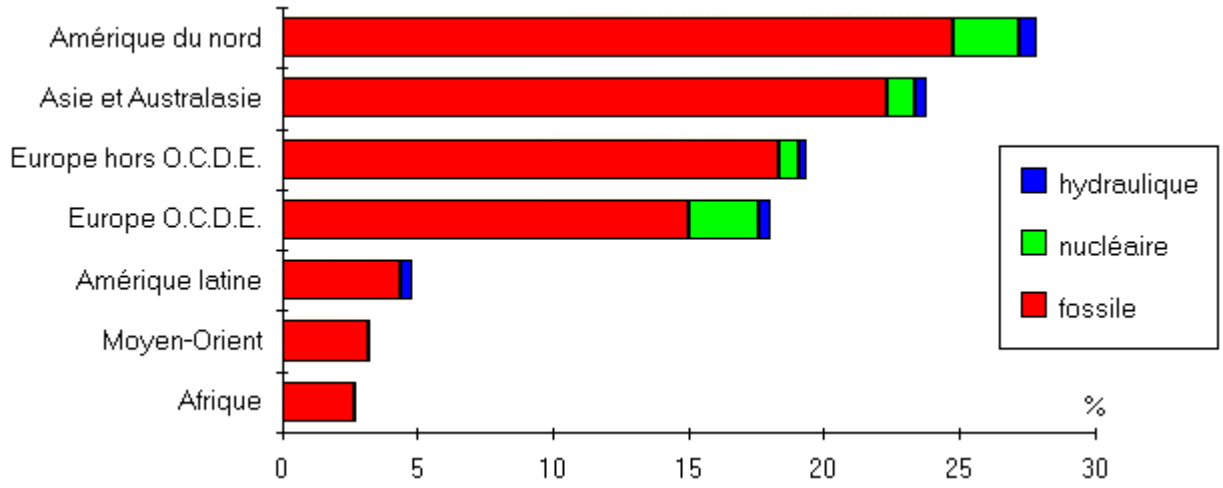
Le diagramme en tuyaux d'orgue et le diagramme circulaire montrent l'écrasante prépondérance des énergies fossiles dans la consommation mondiale d'énergie.

c) Barres.

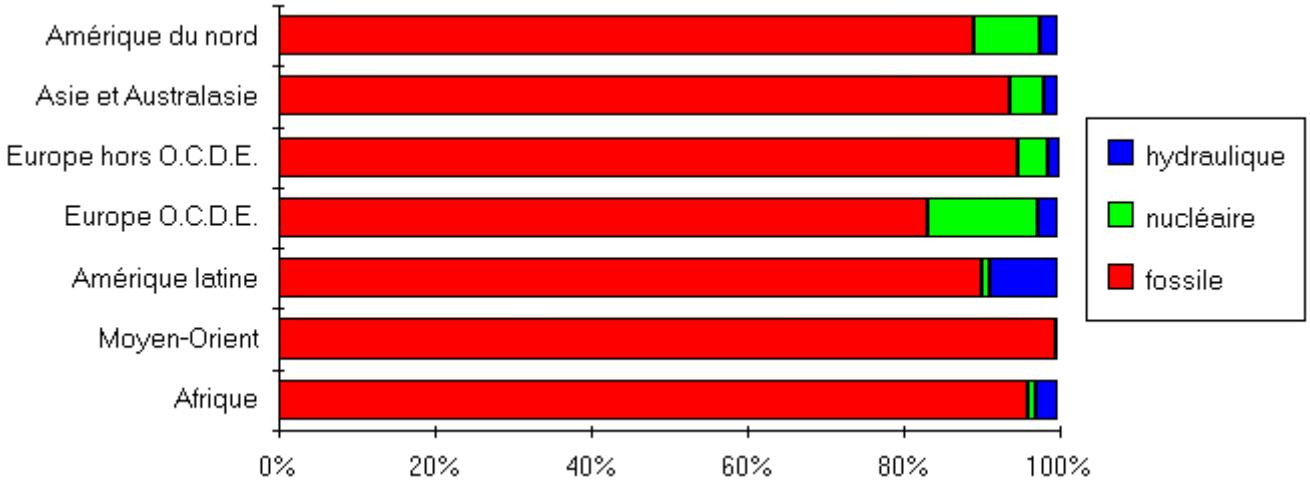
Les tuyaux d'orgue peuvent être horizontaux : on obtient ce qu'on appelle un **diagramme en barres**.
La représentation graphique des deux variables peut se faire par un diagramme en barres, avec une barre horizontale pour chaque partie du monde.
Chaque barre horizontale a une longueur proportionnelle à la consommation de la partie du monde, et la barre est divisée en trois parties proportionnellement à la répartition des origines de l'énergie que la partie du monde consomme.



Cette représentation absolue devient une représentation relative lorsqu'on divise chaque énergie consommée par l'énergie totale consommée : la forme générale de la représentation graphique reste inchangée, seule l'échelle horizontale est différente, elle est relative au lieu d'être absolue.



La représentation en barres permet aussi de comparer la part des diverses sources d'énergie consommée à l'intérieur de la consommation de chaque zone. Dans cette représentation, chaque barre horizontale a la même longueur et elle est divisée en trois parties proportionnelles aux pourcentages des diverses sources à l'intérieur de la consommation d'énergie d'une même zone.



Dans le graphique précédent, on voit que :
— l'**Amérique latine**, qui a la partie **hydraulique** bleue la plus importante, est la partie du monde qui, en proportion, consomme le plus d'énergie d'origine hydraulique ;
— l'**Europe O.C.D.E.**, qui a la partie **nucléaire** verte la plus importante, est la partie du monde qui, en proportion, consomme le plus d'énergie d'origine nucléaire ;
— le **Moyen-Orient**, qui la la partie **fossile** rouge la plus importante, est la partie du monde qui, en proportion, consomme le plus d'énergie d'origine fossile.

Nous verrons ultérieurement (Analyse bivariée) comment le **diagramme triangulaire** permet de mettre en évidence cette propriété : l'Amérique latine sera représentée par le point le plus proche de l'un des sommets du triangle, l'Europe O.C.D.E. par le point le plus proche d'un autre sommet du triangle, et le Moyen-Orient par le point le plus proche du troisième sommet du triangle.

Chapitre 1. Analyse univariée : représentation graphique.

Enoncés.

Exercice 2. Lancers de dé.

Nous avons lancé 100 fois un dé à six faces numérotées de 1 à 6. Les résultats sont les suivants.

2 1 4 1 4 5 1 5 5 3 6 2 4 2 5 6 5 6 6 5
3 1 3 4 2 1 6 5 5 4 5 3 1 6 5 4 4 3 5 4
6 6 3 5 4 2 3 2 4 3 4 5 1 2 4 6 3 5 6 3
2 6 6 3 5 5 1 5 2 2 5 5 2 5 1 3 2 4 4 1
1 6 2 4 6 3 2 6 1 5 4 3 4 2 3 4 6 5 4 4

Préciser la variable statistique étudiée et effectuer la représentation graphique des données. Remarque ?

Solution.

1°/ Variable statistique.

La variable statistique est le résultat affiché sur la face supérieure du dé.
Le tableau de distribution des effectifs et des fréquences est le suivant :

Face	1	2	3	4	5	6
Effectif	12	15	15	20	22	16
Fréquence	0,12	0,15	0,15	0,20	0,22	0,16

La face supérieure du dé est une variable statistique **qualitative** avec six modalités.
Si les modalités sont repérées par des nombres, on peut considérer aussi le numéro obtenu comme une variable statistique quantitative, discrète ou continue.
Tout dépend de la question que l'on se pose.
Par exemple, si la question est de savoir combien on obtient, en moyenne, on considérera la variable statistique comme **quantitative et continue**.

Le problème sera résolu par le **calcul de la moyenne** $0,12 \times 1 + 0,15 \times 2 + 0,15 \times 3 + 0,20 \times 4 + 0,22 \times 5 + 0,16 \times 6 = 3,73$.

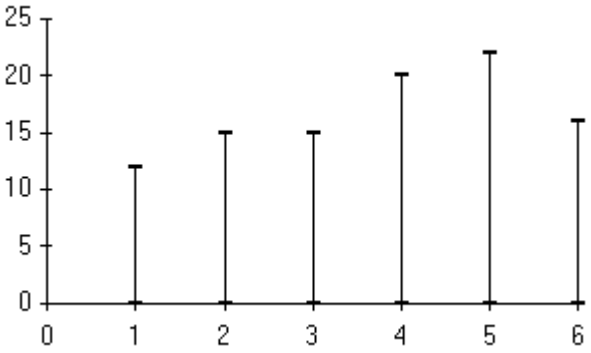
Si la question est de savoir si le dé est bien équilibré, on considérera que la variable statistique est **qualitative**.

Le problème sera résolu par la comparaison de la distribution d'effectifs à celle sur donnerait un dé bien équilibré, au moyen d'un "**test khi-deux**" : la différence n'est pas significative (*pc* = 0,29).

2°/ Représentation graphique.

La représentation graphique différentielle de la variable qualitative utilise ici le **diagramme en bâtons**,

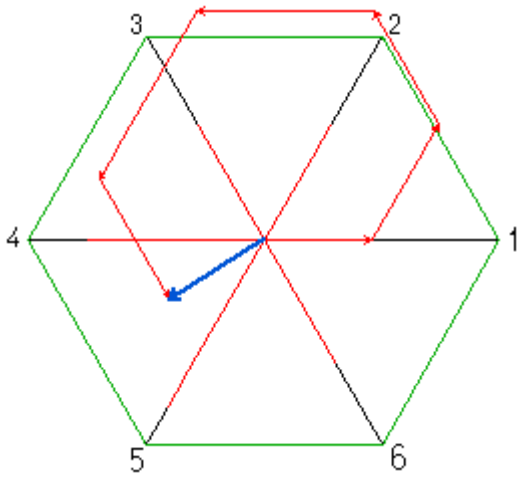
des effectifs ou des fréquences.



Remarques.

- Cette distribution n'est **pas uniforme**, contrairement à ce qu'on attendrait d'un dé bien équilibré, mais on ne sait pas, en réalité, si cette non-uniformité est le résultat du hasard de l'échantillonnage ou le résultat d'un déséquilibre du dé. Pour trancher entre ces deux hypothèses, il faudrait utiliser un **test statistique** de conformité, tel le test khi-deux de Karl Pearson.
- Pour une variable qualitative, il n'y a pas besoin de représentation graphique intégrale.

On peut mettre en évidence la dissymétrie en portant, sur 6 rayons équidistants, des longueurs proportionnelles aux fréquences et en construisant la somme des 6 vecteurs.



$$0{,}12 + 0{,}15\, e^{\frac{i\pi}{3}} + 0{,}15\, e^{\frac{2i\pi}{3}} + 0{,}20\, e^{\frac{3i\pi}{3}} + 0{,}22\, e^{\frac{4i\pi}{3}} + 0{,}16\, e^{\frac{5i\pi}{3}}$$

$$= \left(0{,}12 + 0{,}15 \times \frac{1}{2} - 0{,}15 \times \frac{1}{2} - 0{,}20 - 0{,}22 \times \frac{1}{2} + 0{,}16 \times \frac{1}{2}\right) + i\left(0{,}12 \times 0 + 0{,}15 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 0{,}15 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 0{,}20 \times 0 - 0{,}22 \times \frac{\sqrt{3}}{2} - 0{,}16 \times \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= -0{,}11 - 6{,}93 \times 10^{-2}\, i.$$

Dans un dé ordinaire, la différence pourrait s'expliquer par le fait que l'on marque les dés par des trous dans les faces : un numéro plus élevé se traduit par un défaut plus important de matière, déplaçant le centre de gravité vers la face opposée.
Or le 6 est opposé au 1, le 5 au 2, le 4 au 3 : le centre de gravité est donc déplacé vers les faces 1, 2, 3.
Un jet au hasard tendra à minimiser l'énergie potentielle de gravité, donc à placer en haut une face plus légère, 4, 5, ou 6, pour abaisser le centre de gravité.
Dans l'expérience réalisée, nous verrons en deuxième année de licence qu'on peut calculer, grâce au **test khi-deux**, qu'il y a seulement un peu plus de 2 chances sur 3 de ne pas se tromper en disant que la différence n'est pas due au hasard : ce n'est pas suffisant pour accuser un adversaire d'utiliser un dé pipé, mais c'est suffisant pour avoir des doutes sur l'équilibrage du dé !
Nous verrons aussi que la loi de Gauss, ou **loi normale**, permet de calculer qu'il faudrait que les fréquences restent à peu près les mêmes avec 400 jets de dés, au lieu de 100, pour que l'on puisse affirmer, avec moins de 5 chances sur 100 de se tromper, que la différence n'est pas due au hasard.

Chapitre 1. Analyse univariée : représentation graphique.

Enoncés.

Exercice 3. Population et superficie.

Nous donnons la superficie (en millions de km ²) et le nombre d'habitants (en millions) des divers continents du globe (source : Encyclopædia Britannica, 1994).

	Population	*Superficie*
Afrique	670	30,4
Asie	3 336	31,9
Amérique	751	42,2
Europe	728	23,0
Océanie	28	8,5

Préciser les variables statistiques étudiées et effectuer la représentation graphique des données.

Solution.

1°/ Variables statistiques.

Nous étudions deux variables statistiques répondant à deux questions :

Question *X* : étant donnée une parcelle de terrain sur le globe, à quel continent appartient-elle ?
Le caractère est qualitatif et présente cinq modalités.

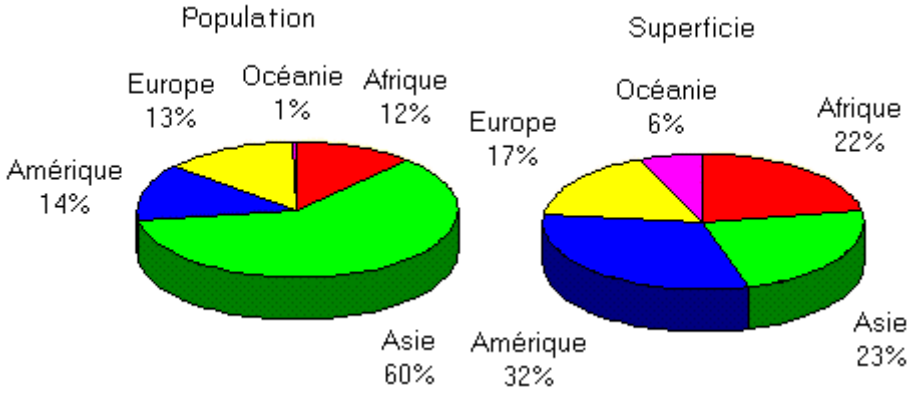
Question *Y* : étant donné un habitant du globe terrestre, à quel continent appartient-il ?
Le caractère est qualitatif et présente cinq modalités.

2°/ Représentation graphique.

La représentation la plus intéressante de ces deux variables statistiques est une représentation "camembert", ou **représentation par secteurs**, qui permettra de comparer les deux distributions.
Pour la réaliser, il faut calculer la fréquence de chaque modalité des deux variables statistiques et la convertir en angle.

	Population (millions d'habitants)	%	angle	Superficie (millions de km ²)	%	angle
Afrique	670	12,15	44°	30,4	22,35	80°
Asie	3 336	60,51	217°	31,9	23,46	84°
Amérique	751	13,62	49°	42,2	31,03	112°
Europe	728	13,21	48°	23,0	16,91	61°

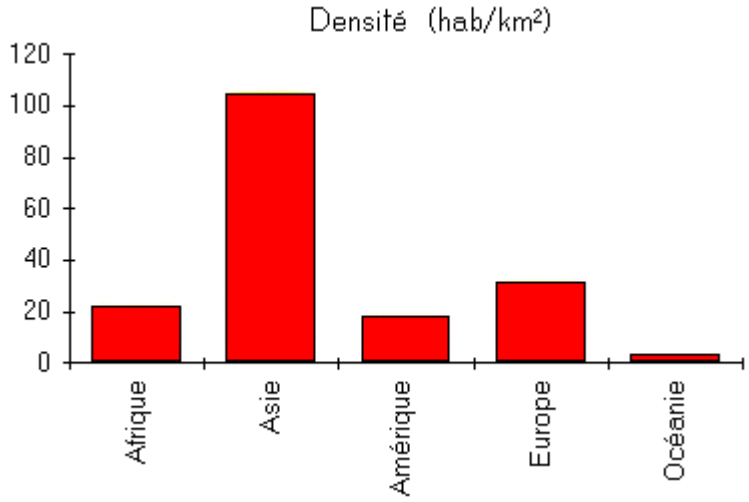
Océanie	28	0,51	2°	8,5	6,25	23°
	5 513	100,00	360°	136,0	100,00	360°



La **densité de population**, en habitants par km ^{2}, est le rapport entre la population (en millions d'habitants) et la superficie (en millions de km ^{2}).

	Population (millions d'habitants)	Superficie (millions de km ^{2})	Densité de population (habitants par km ^{2})
Afrique	670	30,4	22,0
Asie	3 336	31,9	104,6
Amérique	751	42,2	17,8
Europe	728	23,0	31,7
Océanie	28	8,5	3,3
	5 513	136,0	40,5

La représentation graphique de la densité de population peut utiliser la représentation en **tuyaux d'orgues** qui permet de comparer directement à l'oeil la densité de population des diverses parties du monde :



La densité de population est très élevée en Asie, très faible en Océanie.

Chapitre 1. Analyse univariée : représentation graphique.

Enoncés.

Exercice 4. Notes.

Nous donnons les notes de 80 étudiants à un examen universitaire :

68 84 75 82 68 90 62 88 76 93 73 79 88 73 60 63
93 71 59 85 75 61 65 75 87 74 62 95 78 63 72 76
66 78 82 75 94 77 69 74 68 60 96 78 89 61 75 75
95 60 79 83 71 79 62 67 96 78 85 76 65 71 75 85
65 80 73 57 88 78 62 76 53 74 86 67 73 81 72 77

Dresser le tableau de distribution de cette variable statistique (modalités, effectifs, fréquences, ...) et en faire une représentation graphique.

Solution.

1°/ Tableau des données.

a) Variable statistique.

Pour avoir une vision globale de la répartition des notes, il faut représenter des effectifs en fonction des notes obtenues.
La variable statistique est la **note obtenue**, avec l'effectif correspondant.

b) Regroupement en classes.

Pour avoir une représentation graphique différentielle qui ressemble à quelquechose, il faut regrouper les notes obtenues en classes et calculer les effectifs correspondants.
Le principe, dans une telle représentation, est qu'il doit y avoir environ $\sqrt{n}$ classes pour un effectif n.
Ici, avec un effectif de 80 étudiants, il faut environ **9 classes**.

c) Etendue et amplitude des classes.

La première chose à faire est de déterminer **l'étendue**.
Les notes vont de 53 pour la plus basse, à 96 pour la plus haute : l'étendue est donc 96 – 53 = 43.
Pour avoir 9 classes d'égale amplitude, nous allons prendre des classes d'**amplitude 5**, en partant de 52,5, pour éviter d'avoir à nous poser le problème des notes qui seraient juste à la limite, inférieure ou supérieure, d'une classe.

d) Calcul des effectifs des classes.

Classes	[52,5 ; 57,5]	[57,5 ; 62,5]	[62,5 ; 67,5]	[67,5 ; 72,5]	[72,5 ; 77,5]	[77,5 ; 82,5]	[82,5 ; 87,5]	[87,5 ; 92,5]	[92,5 ; 97,5]
Effectifs	|| = 2	||||||||| = 10	||||||| = 8	|||||||| = 9	|||||||||||||||||||| = 20	||||||||||| = 12	||||||| = 7	||||| = 5	||||||| = 7

2°/ Représentation graphique.

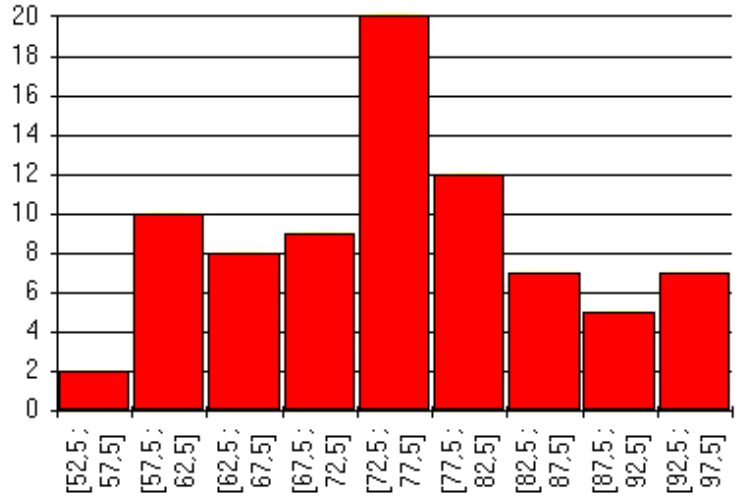
a) Complément du tableau des effectifs.

La représentation graphique correcte est :

— **Représentation différentielle** : **Histogramme des effectifs** (les classes ont toutes la même amplitude, il est donc inutile de calculer les densités d'effectifs ou les densités de fréquences).
— **Représentation intégrale** : **Diagramme cumulatif des fréquences**.
Il faut donc compléter le tableau des effectifs par le calcul des fréquences et des fréquences cumulées.

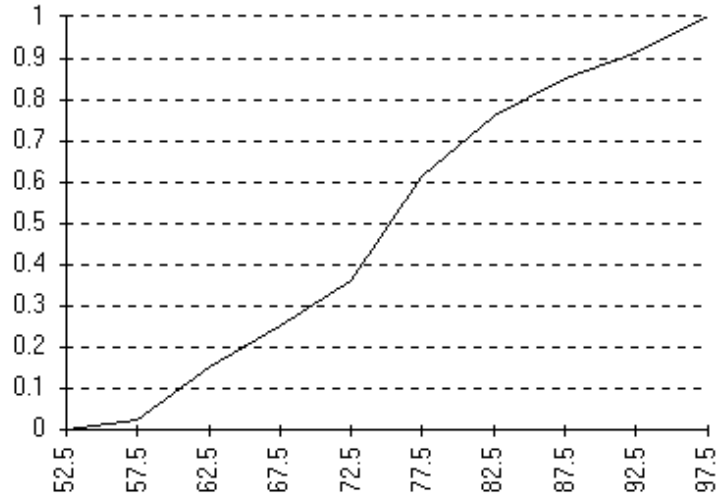
Classes	[52,5 ; 57,5]	[57,5 ; 62,5]	[62,5 ; 67,5]	[67,5 ; 72,5]	[72,5 ; 77,5]	[77,5 ; 82,5]	[82,5 ; 87,5]	[87,5 ; 92,5]	[92,5 ; 97,5]
Effectifs	2	10	8	9	20	12	7	5	7
Fréquences	0,0250	0,1250	0,1000	0,1125	0,2500	0,1500	0,0875	0,0625	0,0875
Fréquences cumulées	0,0250	0,1500	0,2500	0,3625	0,6125	0,7625	0,8500	0,9125	1,0000

b) Histogramme des effectifs.



L'histogramme des effectifs permet de voir que la distribution des notes est, en gros, symétrique, avec un pic (mode principal) pour la classe centrale.

c) Diagramme cumulatif des fréquences.



Le diagramme cumulatif des fréquences représente la fréquence cumulée en fonction de la **limite supérieure** de classe.
Entre deux points connus, on trace un segment de droite qui représente une interpolation linéaire (ce qui équivaut à l'hypothèse d'équirépartition des notes dans une classe).
Ce diagramme représente une **fonction de répartition** : pour une abscisse *x*, l'ordonnée du point d'abscisse *x* donne la probabilité qu'une note choisie au hasard parmi les 80 notes, soit inférieure ou égale à *x*.

Le diagramme cumulatif des fréquences peut se concevoir aussi, de façon plus rigoureuse, comme la représentation de la fréquence cumulée en fonction de la note obtenue. Pour l'obtenir, on ordonne les notes obtenues par ordre croissant, on calcule pour chacune l'effectif cumulé et la fréquence cumulée.
Entre deux points successifs, le diagramme cumulatif est interpolé par un segment de droite.

Note	52	53	57	59	60	61	62	63	65	66	67	68	69
Effectif cumulé	0	1	2	3	6	8	12	14	17	18	20	23	24
Fréquence cumulée	0.0000	0.0125	0.025	0.0375	0.0750	0.1000	0.1500	0.1750	0.2125	0.2250	0.2500	0.2875	0.3000

Note	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82
Effectif cumulé	27	29	33	36	43	47	49	54	57	58	59	61
Fréquence cumulée	0.3375	0.3625	0.4125	0.4500	0.5375	0.5875	0.6125	0.6750	0.7125	0.7250	0.7375	0.7625

Note	83	84	85	86	87	88	89	90	93	94	95	96
Effectif cumulé	62	63	66	67	68	71	72	73	75	76	78	80
Fréquence cumulée	0.7750	0.7875	0.8250	0.8375	0.8500	0.8875	0.9000	0.9125	0.9375	0.9500	0.9750	1.0000

L'avantage de cette représentation est qu'elle se prête bien à la mesure de certains paramètres : médiane, quartiles, déciles.
Cette mesure est plus précise que celle que l'on obtient avec le graphique précédent.
Par exemple, l'abscisse du point d'ordonnée 0,5, qu'on appelle la **médiane**, est $74 + \frac{0,5000 - 0,4500}{0,5375 - 0,4500} \times (75 - 74) = 74,57$,
alors que le graphique précédent basé sur la répartition en classes donne $72,5 + \frac{0,5000 - 0,3625}{0,6215 - 0,3625} \times (77,5 - 72,5) = 75,25$.
La différence entre les deux valeurs est due au fait que les notes ne sont pas réparties de façon uniforme dans les classes [67,5 ; 72,5] et [72,5 ; 77,5].

Chapitre 1. Analyse univariée : représentation graphique.

Enoncés.

Exercice 5. Immigration.

L'office national d'immigration donne, pour l'année 1976, les effectifs, en milliers d'immigrés permanents :

	hommes		femmes	
Age	Total	Mariés	Total	Mariés
0-20	1985	41	1050	66
20-25	5519	858	2446	431
25-30	5076	2006	1564	471
30-35	2739	1820	754	298
35-40	1728	1360	481	233
40-45	1176	978	342	183
45-65	1579	1366	510	235

Représenter graphiquement les données.
Peut-on mettre en évidence sur le graphique certaines lois sur l'immigration ?

Solution.

1°/ Variables statistiques.

Etant donné un immigré permanent, quel est son âge ? Quel est son sexe ? Quel est son statut matrimonial ?
Les trois variables statistiques étudiées sont l'âge, caractère quantitatif continu, le sexe, caractère qualitatif, et le statut matrimonial, caractère qualitatif.
L'âge est réparti en 7 classes.
Le sexe présente deux modalités, homme et femme.
Le statut matrimonial présente deux modalités, marié et non marié.
Le tableau permet d'étudier quatre variables statistiques : âge des hommes, âge des hommes mariés, âge des femmes, âge des femmes mariées.

2°/ Représentation graphique.

On peut représenter séparément chacune des quatre variables statistiques par un **histogramme de densités de fréquences**.
La densité de fréquence d'une classe est, par définition, la fréquence de la classe, divisée par l'amplitude de la classe.

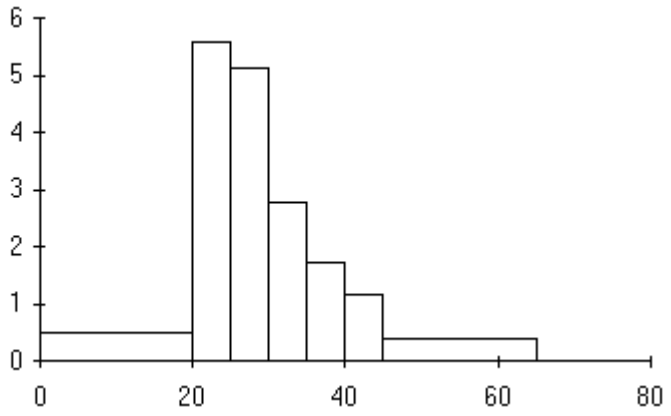
Fréquences	Hommes	Femmes

Age	Total	Mariés	Total	Mariées
0-20	0.10024240	0.00486416	0.14691479	0.03442879
20-25	0.27870922	0.10179143	0.34224150	0.22483046
25-30	0.25633774	0.23798790	0.21883308	0.24569640
30-35	0.13831936	0.21592122	0.10549881	0.15545123
35-40	0.08726391	0.16134773	0.06730097	0.12154408
40-45	0.05938794	0.11602800	0.04785225	0.09546166
45-65	0.07973942	0.16205956	0.07135861	0.12258738
Total	1	1	1	1

Densités de fréquences (% par an)	Hommes		Femmes	
Age	Total	Mariés	Total	Mariées
0-20	0.50121200	0.02432080	0.73457395	0.17214397
20-25	5.57418443	2.03582869	6.84483000	4.49660929
25-30	5.12675487	4.75975798	4.37666154	4.91392801
30-35	2.76638723	4.31842449	2.10997621	3.10902452
35-40	1.74527825	3.22695456	1.34601931	2.43088159
40-45	1.18775881	2.32055997	0.95704491	1.90923318
45-65	0.39869710	0.81029778	0.35679306	0.61293688

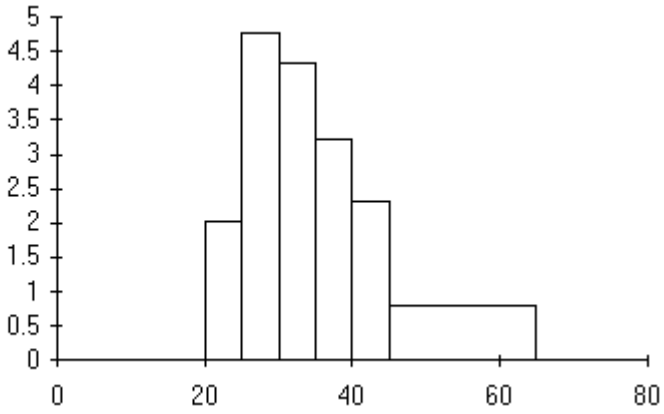
Hommes :

Age	Hommes (% par an)
0-20	0.50121200
20-25	5.57418443
25-30	5.12675487
30-35	2.76638723
35-40	1.74527825
40-45	1.18775881
45-65	0.39869710



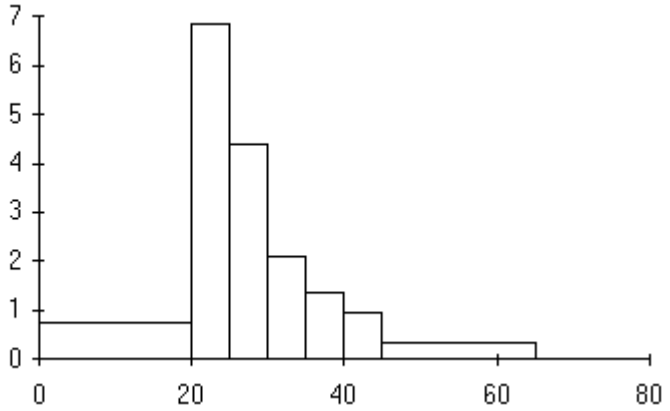
Hommes mariés :

Age	Hommes mariés (% par an)
0-20	0.02432080
20-25	2.03582869
25-30	4.75975798
30-35	4.31842449
35-40	3.22695456
40-45	2.32055997
45-65	0.81029778



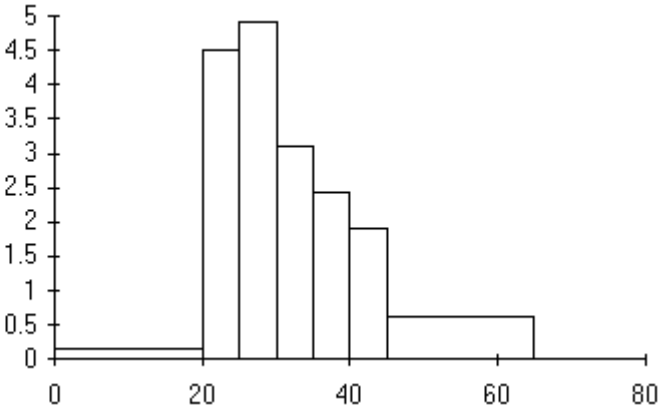
Femmes :

Age	Femmes (% par an)
0-20	0.73457395
20-25	6.84483000
25-30	4.37666154
30-35	2.10997621
35-40	1.34601931
40-45	0.95704491
45-65	0.35679306

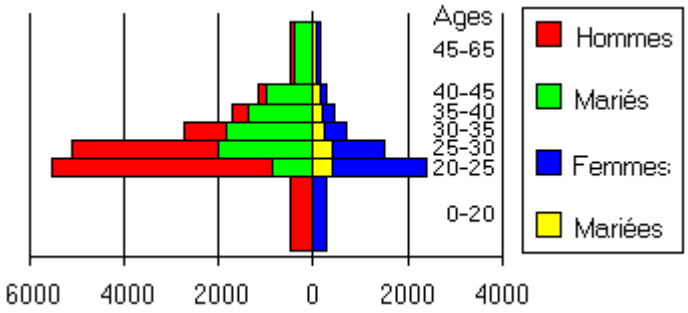


Femmes mariées :

Age	Femmes mariées (% par an)
0-20	0.17214397
20-25	4.49660929
25-30	4.91392801
30-35	3.10902452
35-40	2.43088159
40-45	1.90923318
45-65	0.61293688



En réalité, ces quatre histogrammes ne se prêtent pas bien aux comparaisons des quatre variables.
Pour représenter ensemble toutes les données, la représentation graphique la mieux adaptée est une "**pyramide des âges**".
C'est un diagramme en barres dans lequel on met à gauche les données relatives aux hommes, à droite les données relatives aux femmes (ou l'inverse).
Les données à représenter sont des densités d'effectifs ou des densités de fréquences.
Nous utiliserons ici des densités d'effectifs en prenant pour unité de temps une amplitude de 5 ans.
Les densités d'effectifs ont alors la même mesure que les effectifs, sauf pour les deux classes extrêmes, où il faut diviser les effectifs par 4 (20 ans = 4 unités de temps).
Traditionnellement, sur l'axe vertical des âges, on met 0 en bas et des âges croissants vers le haut.



Par rapport au tableau des données, la représentation graphique perd en précision ce qu'elle gagne en clarté synthétique.

3°/ Interprétation.

Dans toutes les tranches d'âges, le nombre des hommes immigrés permanents est plus élevé que le nombre des femmes et le nombre des hommes immigrés mariés est plus élevé que le nombre des femmes immigrées mariées.
La majorité des immigrés permanents a entre 20 et 30 ans.
Cette étude accrédite donc l'hypothèse que les hommes immigrent sans leurs épouses.

Chapitre 1. Analyse univariée : représentation graphique.

Enoncés.

Exercice 6. Rémunérations.

On considère la répartition en pourcentages des agents civils de l'état selon le montant de leur salaire net mensuel en 1980, en négligeant les salaires au-delà de 15 000 F.

X (milliers de F)	%
[0 ; 3 [	7
[3 ; 4 [	35
[4 ; 5 [	24
[5 ; 6 [	15
[6 ; 7 [	9
[7 ; 10 [	8
[10 ; 15 [	2

Nous admettrons une répartition uniforme à l'intérieur de chaque classe.

1°/ Tracer l'histogramme des densités de fréquence de cette distribution.

2°/ Déterminer le mode.

3°/ Tracer la fonction de répartition empirique.

4°/ Déterminer la médiane.

5°/ Déterminer l'intervalle interquartile.

6°/ On appelle *rapport des déciles* le quotient du salaire au-dessus duquel se trouvent 10 % des agents, par celui en dessous duquel se trouvent 10 % des agents. Calculer ce rapport pour l'année 1980.
Sachant que ce rapport valait 2,4 en 1976, que peut-on conclure sur l'évolution des rémunérations entre ces deux années ?

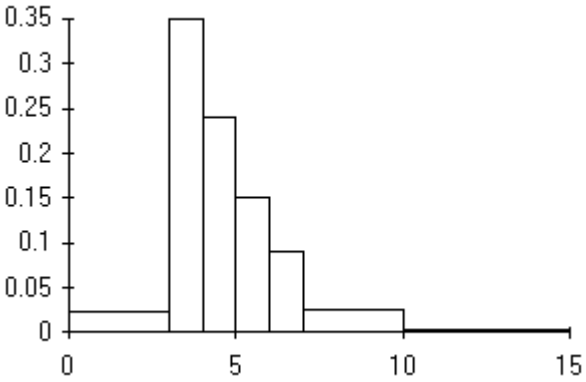
Solution.

1°/ Histogramme des densités de fréquences.

La densité de fréquence d_i de la i^{e} classe est, par définition, la fréquence f_i de la classe divisée par l'amplitude de la classe :

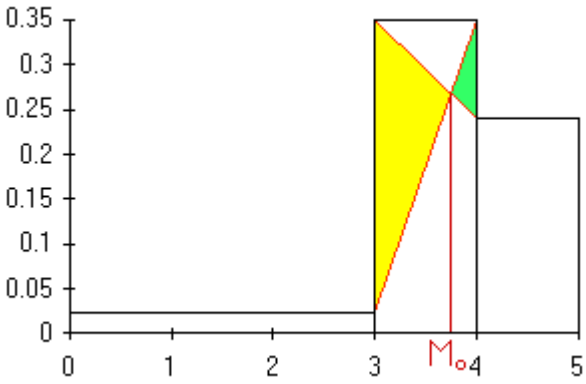
X (milliers de F)	%	f_i	d_i	$\sum f_i$
[0 ; 3 [	7	0,07	0,023	0,07
[3 ; 4 [	35	0,35	0,350	0,42
[4 ; 5 [	24	0,24	0,240	0,66
[5 ; 6 [	15	0,15	0,150	0,81
[6 ; 7 [	9	0,09	0,009	0,90
[7 ; 10 [	8	0,08	0,027	0,98

[10 ; 15 [	2	0,02	0,004	1,00



2°/ Détermination du mode.

La classe modale est la classe qui possède la plus forte densité de fréquence : sur l'histogramme précédent, on voit que c'est la classe [3 ; 4[.
Lorsqu'on suppose que la répartition des salaires à l'intérieur d'une classe est uniforme, le mode se détermine en tenant compte des classes adjacentes.



Dans les triangles semblables jaune et vert, le rapport des hauteurs est égal au rapport des grands côtés :

$$\frac{M_o - 3}{4 - M_o} = \frac{0{,}350 - \frac{0{,}07}{3}}{0{,}350 - 0{,}240}$$

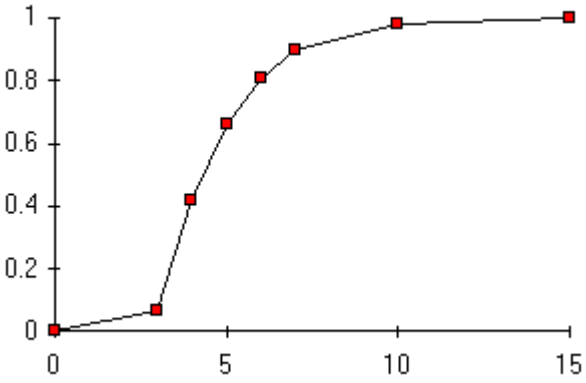
$$\frac{M_o - 3}{0{,}250 - \frac{0{,}07}{3}} = \frac{4 - M_o}{0{,}350 - 0{,}240} = \frac{1}{0{,}700 - 0{,}240 - \frac{0{,}07}{3}}$$

$$M_o = 3 + \frac{1{,}05 - 0{,}07}{1{,}38 - 0{,}07} = 3 + \frac{98}{131} \approx 3{,}75$$

3°/ Fonction de répartition empirique.

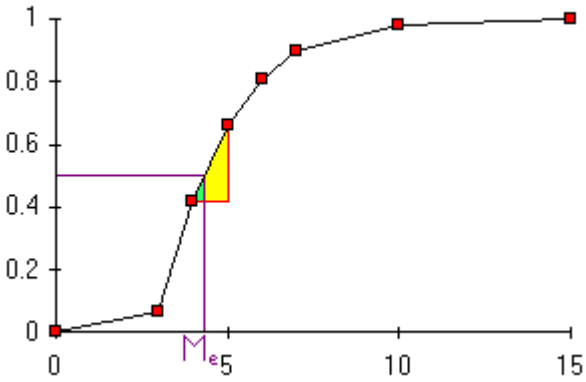
La fonction de répartition empirique s'obtient en joignant, par des segments de droites, les points ayant, pour abscisses, les bornes supérieures des classes et, pour ordonnées, les fréquences cumulées des classes. C'est ce qu'on appelle aussi le **diagramme cumulatif des fréquences**.

X (milliers de F)	Σf_i
0	0,00
3	0,07
4	0,42
5	0,66
6	0,81
7	0,90
10	0,98
15	1,00



4°/ Médiane.

La médiane est la valeur de salaire qui partage en deux parties de même cardinal l'ensemble des agents civils de l'état.
On l'obtient en prenant l'abscisse du point d'ordonnée 0,500 sur le diagramme cumulatif des fréquences précédent.



La valeur de la médiane s'obtient, dans la classe médiane [4 ; 5[, par interpolation linéaire entre les points (4 ; 0,42) et (5 ; 0,66) :

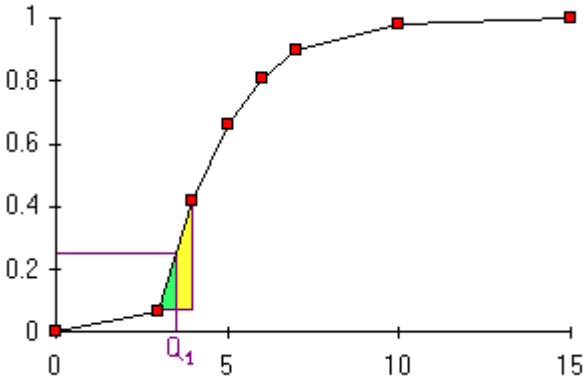
$$\frac{M_e - 4}{5-4} = \frac{0{,}50 - 0{,}42}{0{,}66 - 0{,}42}$$

$$M_e = 4 + \frac{8}{24} = 4 + \frac{1}{3} \approx 4{,}33$$

La médiane est aussi le deuxième quartile :

$$Q_2 = M_e = 4{,}33$$

5°/ Intervalle interquartile.



Le premier quartile Q_1 a, dans le diagramme précédent, pour ordonnée, 0,25.
Q_1 appartient donc à la classe [3 ; 4[et, dans cette classe, on l'obtient par interpolation linéaire entre les points (3 ; 0,07) et (4 ; 0,42).

$$Q_1 = 3 + \frac{0{,}25 - 0{,}07}{0{,}42 - 0{,}07} = 3 + \frac{18}{35} \approx 3{,}51$$

Le troisième quartile Q_3 a, dans le diagramme

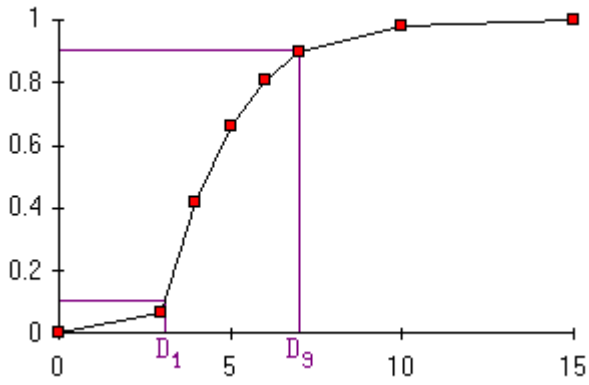
précédent, pour ordonnée, 0,75.
Q_3 appartient donc à la classe [5 ; 6[et, dans cette classe, on l'obtient par interpolation linéaire entre les points (5 ; 0,66) et (6 ; 0,81).

$$Q_3 = 5 + \frac{0{,}75 - 0{,}66}{0{,}81 - 0{,}66} = 5 + \frac{9}{15} = 5 + \frac{3}{5} = 5{,}60$$

L'intervalle interquartile est la différence entre Q_3 et Q_1 :

$$Q_3 - Q_1 = 5{,}60 - 3{,}51 = 2{,}09$$

6°/ Rapport des déciles.



Le premier décile D_1 a, pour ordonnée dans le diagramme cumulatif des fréquences, 0,10.
D_1 appartient à la classe [3 ; 4[et, dans cette classe, on l'obtient par interpolation linéaire entre les points (3 ; 0,07) et (4 ; 0,42).

$$D_1 = 3 + \frac{0{,}10 - 0{,}07}{0{,}42 - 0{,}07} = 3 + \frac{3}{35} \approx 3{,}09$$

Le neuvième décile D_9 a, pour ordonnée dans le diagramme cumulatif des fréquences, 0,90.

$D_9 = 7$

Le rapport des déciles est $\frac{D_9}{D_1} = \frac{245}{108} \approx 2{,}27$.

Le rapport des déciles est proportionnel à D_9 et inversement proportionnel à D_1 : il augmente si la proportion de gens touchant un salaire élevé augmente ou si la proportion de gens touchant un salaire faible diminue.
Ce rapport est donc une mesure des écarts de salaires chez les agents civils de l'état.

Sachant que ce rapport valait 2,4 en 1976, on voit qu'il a diminué en 4 ans : cela signifie que les écarts de salaires ont diminué dans cette période.

Chapitre 2. Analyse univariée : paramètres de position.

Exercices

Exercice 1. Vitesse moyenne.
Exercice 2. Projet d'aménagement.
Exercice 3. Taux d'intérêt moyen.
Exercice 4. Taille d'exploitations agricoles.

Exercice 1. Vitesse moyenne.

Un véhicule automobile accomplit un parcours de 500 km à la vitesse horaire de 125 km/h. Le trajet retour est accompli à la vitesse de 100 km/h. Nous considérons ces deux vitesses comme les valeurs prises par une variable statistique *Z*. Calculez une moyenne ayant une signification.	Solution

HAUT

Exercice 2. Projet d'aménagement.

Une enquête a été menée pour recueillir l'opinion des habitants d'un quartier sur un projet d'aménagement social. 300 personnes ont répondu. Les réponses sont traduites sur une échelle numérique totalement ordonnée formée des entiers de 0 à 20 inclus.

Modalités	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Effectifs	3	6	8	10	10	12	14	16	16	16	18	18	18	18	20	21	26	28	13	9	0

Solution

1°/ Donner la médiane, le 1er quartile, le 3e quartile.
2°/ Calculer la densité de fréquence sur les intervalles suivants :
[0 ; 5,5] ; [5,5 ; 8,5] ; [8,5 ; 11,5] ; [11,5 ; 14,5] ; [14,5 ; 17,5] ; [17,5 ; 20].
3°/ Tracer l'histogramme de ces densités de fréquence.
4°/ Représenter la fonction de répartition empirique. Calculer le mode et la médiane de la nouvelle distribution. Conclusion ?

HAUT

Exercice 3. Taux d'intérêt moyen.

Un épargnant a placé une somme d'argent pendant 10 ans. On lui a servi un taux d'intérêt annuel de 6 % pendant les quatre premières années, de 7 % pendant les trois années suivantes et de 8 % pendant les trois dernières années. 1°/ Quel a été le taux d'intérêt moyen versé durant les 10 années ? 2°/ Caractériser le type de moyenne que nous avons utilisé.	Solution

HAUT

Exercice 4. Taille d'exploitations agricoles.

Dans un département, on a relevé la taille des exploitations agricoles. On a obtenu les résultats suivants :

Taille (hectares)	Nombre
0 - 10	30
10 - 30	80
30 - 50	60
50 - 100	20
100 - 200	10

Solution

1°/ Déterminer les valeurs centrales de cette distribution : mode, moyenne, médiane.
2°/ Donner une évaluation de la dispersion de la distribution.
3°/ Sachant que la moyenne nationale est d'environ 50 hectares, pensez-vous qu'on puisse dire que ce département est un département de petites exploitations ?
4°/ Quelle est la taille des 10 % d'exploitations les plus grandes ?
5°/ Combien y a-t'il d'exploitations dont la taille est inférieure à 40 hectares ?
6°/ Déterminer graphiquement le mode.

HAUT

Chapitre 2. Analyse univariée : paramètres de position.

Enoncés.

Exercice 1. Vitesse moyenne.

Un véhicule automobile accomplit un parcours de 500 km à la vitesse horaire de 125 km/h. Le trajet retour est accompli à la vitesse de 100 km/h. Nous considérons ces deux vitesses comme les valeurs prises par une variable statistique *Z*. Calculez une moyenne ayant une signification.	

Solution.

Pour avoir la vitesse moyenne sur le parcours, il faut diviser la distance totale parcourue, par le temps du trajet.
La distance totale parcourue est de 500 × 2 = 1 000 km.
Le temps de l'aller est de $\frac{500}{125}$ = 4 h.
Le temps du retour est de $\frac{500}{100}$ = 5 h.
Le temps total du trajet est de 4 + 5 = 9 h.
La vitesse moyenne du trajet aller et retour est $\frac{1000}{9} \approx 111{,}1$ km/h.

La vitesse moyenne est 111,1 km/h.

$$v_m = \frac{1000}{9} = \frac{1000}{\frac{500}{125} + \frac{500}{100}} = \frac{1}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{125} + \frac{1}{100}\right)}$$

$$\frac{1}{v_m} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}\right)$$

Cette formule montre que, par définition, la vitesse moyenne v_m, est la **moyenne harmonique** de v_1 et v_2, c'est donc la moyenne harmonique de la variable statistique *Z*.

La moyenne harmonique de la variable statistique *Z* est la vitesse moyenne du trajet aller et retour.

Chapitre 2. Analyse univariée : paramètres de position.

Enoncés.

Exercice 2. Projet d'aménagement.

Une enquête a été menée pour recueillir l'opinion des habitants d'un quartier sur un projet d'aménagement social. 300 personnes ont répondu. Les réponses sont traduites sur une échelle numérique totalement ordonnée formée des entiers de 0 à 20 inclus.

Modalités	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Effectifs	3	6	8	10	10	12	14	16	16	16	18	18	18	18	20	21	26	28	13	9	0

1°/ Donner la médiane, le 1er quartile, le 3e quartile.
2°/ Calculer la densité de fréquence sur les intervalles suivants :
[0 ; 5,5] ; [5,5 ; 8,5] ; [8,5 ; 11,5] ; [11,5 ; 14,5] ; [14,5 ; 17,5] ; [17,5 ; 20].
3°/ Tracer l'histogramme de ces densités de fréquence.
4°/ Représenter la fonction de répartition empirique. Calculer le mode et la médiane de la nouvelle distribution. Conclusion ?

Solution.

1°/ Médiane, quartiles.

a) Variable statistique.

On peut considérer l'opinion d'un habitant comme une variable statistique quantitative, discrète, à 21 valeurs entières.

b) Quartiles.

Les quartiles sont les valeurs de la variable statistique qui divisent les effectifs en quatre parties égales :
— Le premier quartile correspond à un effectif cumulé de $\frac{300}{4}$ = 75 personnes.

— Le deuxième quartile est la médiane : c'est la valeur de la variable correspondant à un effectif cumulé de 150 personnes.
— Le troisième quartile correspond à un effectif cumulé de 125 personnes.

Dressons le tableau des effectifs cumulés :

Modalités	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Effectifs	3	6	8	10	10	12	14	16	16	16	18	18	18	18	20	21	26	28	13	9	0
Effectifs cumulés	3	9	17	27	37	49	63	79	95	111	129	147	165	183	203	224	250	278	291	300	300

Modalité 6 : effectif cumulé 63
Modalité 7 : effectif cumulé 79
Le premier quartile, correspondant à 75, est donc entre 6 et 7.
Par interpolation linéaire, on obtient la valeur $6 + (7 - 6)\frac{75 - 63}{79 - 63} = 6 + \frac{3}{4} = 6{,}75$.
La modalité entière la plus proche de 6,75 est 7 : le premier quartile Q_1 est égal à 7.

Modalité 11 : effectif cumulé 147

Modalité 12 : effectif cumulé 165.
La médiane est donc entre 11 et 12.
Par interpolation linéaire, on obtient la valeur $11 + (12 - 11)\frac{150-147}{165-147} = 11 + \frac{1}{6} \approx 11{,}2$.
La modalité entière la plus proche est 11 : la médiane est 11.

Modalité 15 : effectif cumulé 224
Modalité 16 : effectif cumulé 250.
La médiane est donc entre 15 et 16.
Par interpolation linéaire, on obtient la valeur $15 + (16 - 15)\frac{225-224}{250-224} = 15 + \frac{1}{26} \approx 15{,}04$.
La modalité entière la plus proche est 15 : le troisième quartile Q_3 est 15.

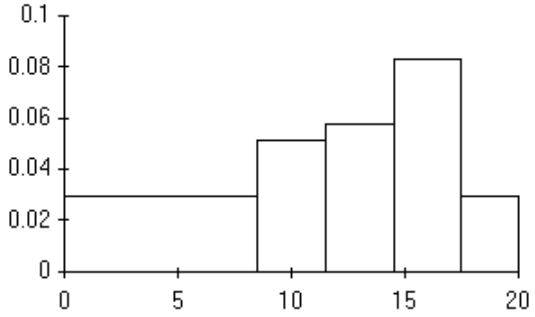
$$\boxed{Q_1 = 7 \; ; \; Q_2 = 11 \; ; \; Q_3 = 15}$$

2°/ Densités de fréquences.

La densité de fréquence d'une classe est la fréquence de la classe divisée par l'amplitude de la classe.

Classe	[0 ; 5,5]	[5,5 ; 8,5]	[8,5 ; 11,5]	[11,5 ; 14,5]	[14,5 ; 17,5]	[17,5 ; 20]
Effectif	49	46	52	56	75	22
Fréquence	0,1633	0,1533	0,1733	0,1867	0,2500	0,0733
Amplitude	5,5	3,0	3,0	3,0	3,0	2,5
Densité de fréquence	0,0297	0,0511	0,0578	0,0622	0,0833	0,0293

3°/ Histogramme des densités de fréquences.

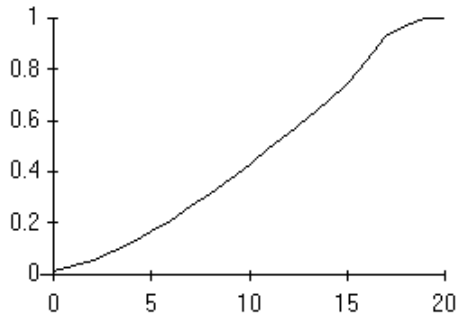


4°/ Fonction de répartition empirique, mode, médiane.

a) Fonction de répartition empirique.

Par définition, la fonction de répartition empirique joint, par des segments de droite, les points ayant, pour abscisses, les modalités et, pour ordonnées, les fréquences cumulées correspondantes :

Modalités	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Effectifs cumulés	3	9	17	27	37	49	63	79	95	111	129	147	165	183	203	224	250	278	291	300	300
Fréquences cumulées	0.01	0.03	0.06	0.09	0.12	0.16	0.21	0.26	0.32	0.37	0.43	0.49	0.55	0.61	0.68	0.75	0.83	0.93	0.97	1.00	1.00



b) Mode.

Le mode est la modalité la plus fréquente : c'est celle qui a le plus fort effectif.
Le tableau des données montre que le mode est la modalité 17.

Mode = 17

c) Médiane.

La médiane est la modalité qui partage la distribution en deux parties de même effectif.
La médiane correspond à une fréquence cumulée empirique de 0,50.
Le tableau des effectifs cumulés montre que l'effectif cumulé 150 (fréquence cumulée 0,50) correspond à une modalité entre 11 et 12.
Par interpolation linéaire entre 11 et 12, la médiane est $11 + (12 - 11) \times \frac{150 - 147}{165 - 147} = 11 + \frac{1}{6} \approx 11{,}2$.

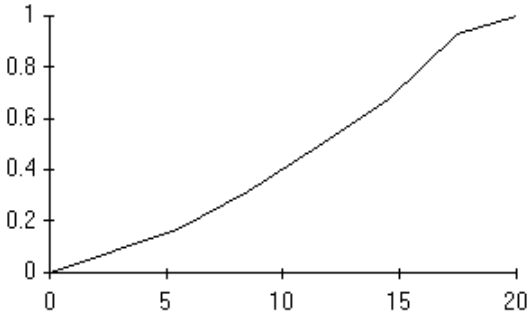
Médiane = 11,2

On voit donc que **la médiane est nettement différente du mode**.

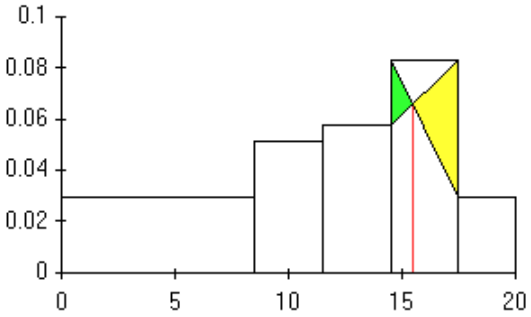
Refaisons maintenant ces calculs avec la **nouvelle distribution en classes**.

La **fonction de répartition empirique** joint, par des segments de droite, les points ayant, pour abscisses, les extrémités supérieures des classes et, pour ordonnées, les fréquences cumulées des classes correspondantes, en ajoutant le point ayant pour abscisse la limite inférieure de la première classe et, pour ordonnée, 0 :

Classe		[0 ; 5,5]	[5,5 ; 8,5]	[8,5 ; 11,5]	[11,5 ; 14,5]	[14,5 ; 17,5]	[17,5 ; 20]
Limite supérieure	0	5,5	8,5	11,5	14,5	17,5	20
Fréquence	0,0000	0,1633	0,1533	0,1733	0,1867	0,2500	0,0733
Fréquence cumulée	0,0000	0,1633	0,3167	0,4900	0,6767	0,9267	1,0000



Le **mode** M_o est déterminé dans l'hypothèse d'équirépartition au sein de la classe modale [14,5 ; 17,5] :



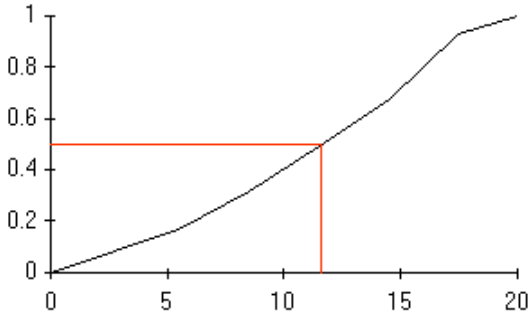
Dans les triangles semblables jaune et vert, la hauteur est proportionnelle au côté opposé :

$$\frac{M_o - 14{,}5}{0{,}0833 - 0{,}0622} = \frac{17{,}5 - M_o}{0{,}0833 - 0{,}0293} = \frac{17{,}5 - 14{,}5}{2 \times 0{,}0833 - 0{,}0622 - 0{,}0293} = \frac{3}{0{,}0752}$$

$$M_o = 14{,}5 + \frac{3}{0{,}0752} \times (0{,}0833 - 0{,}0622) = 14{,}5 + 3 \times 0{,}28 = 15{,}34$$

La **médiane** M_e correspond à une fréquence cumulée empirique de 0,50.
Par interpolation linéaire entre les points (11,5 ; 0,4900) et (14,5 ; 0,6767), on obtient une valeur

$$M_e = 11{,}5 + (14{,}5 - 11{,}5) \times \frac{0{,}5000 - 0{,}4900}{0{,}6767 - 0{,}4900} = 11{,}5 + 3 \times \frac{1}{18{,}67} = 11{,}5 + \frac{9}{56} \approx 11{,}66.$$



Conclusion.

La médiane reste très différente du mode, mais on voit aussi aussi que les valeurs du mode et de la médiane sont un peu éloignées des vraies valeurs trouvées plus haut : la différence tient au fait qu'en regroupant les valeurs en classes, on perd un peu d'information et aussi au fait qu'à l'intérieur des classes, les modalités ne sont pas équiréparties.

Chapitre 2. Analyse univariée : paramètres de position.

Enoncés.

Exercice 3. Taux d'intérêt moyen.

Un épargnant a placé une somme d'argent pendant 10 ans. On lui a servi un taux d'intérêt annuel de 6 % pendant les quatre premières années, de 7 % pendant les trois années suivantes et de 8 % pendant les trois dernières années. 1°/ Quel a été le taux d'intérêt moyen versé durant les 10 années ? 2°/ Caractériser le type de moyenne que nous avons utilisé.	

Solution.

1°/ Taux d'intérêt moyen.

Soit K le capital initial placé.
Soit K_n la valeur de ce capital, avec les intérêts, au bout de n années, $n \in [0 ; 10]$.

$$K_{10} = K \times (1{,}06)^4 \times (1{,}07)^3 \times (1{,}08)^3$$

Le taux d'intérêt moyen τ est le taux d'intérêt qui aurait produit le même intérêt en 10 ans :

$$\frac{K_{10}}{K} = (1 + \tau)^{10} = (1{,}06)^4 \times (1{,}07)^3 \times (1{,}08)^3$$

$$1 + \tau = (1{,}06)^{0{,}4} \times (1{,}07)^{0{,}3} \times (1{,}08)^{0{,}3} \approx 1{,}06897$$

$$\boxed{\tau \approx 6{,}897\ \%}$$

2°/ Type de moyenne utilisé.

La relation :

$$(1 + \tau)^{10} = (1{,}06)^4 \times (1{,}07)^3 \times (1{,}08)^3$$

s'écrit, en passant aux logarithmes népériens :

$$ln\,(1 + \tau) = \frac{1}{4 + 3 + 3}\,(4\ ln\ 1{,}06 + 3\ ln\ 1{,}07 + 3\ ln\ 1{,}08)$$

$ln\,(1 + \tau)$ est la moyenne des $ln\,(1 + \alpha)$, pondérés par le nombre d'années d'application du taux α.
$1 + \tau$ est donc la **moyenne géométrique** des valeurs du taux d'intérêt pendant les 10 années.

On peut considérer aussi la variable statistique $(x_i, n_i)_{i \in \{1, 2, 3\}}$ quantitative continue prenant les valeurs :

$$x_1 = 1{,}06 \; n_1 = 4$$
$$x_2 = 1{,}07 \; n_2 = 3$$
$$x_3 = 1{,}08 \; n_3 = 3$$

$1 + \tau$ apparaît comme la moyenne géométrique de cette variable statistique.

$$1 + \tau = \overline{x_g} = \sqrt[10]{{x_1}^4 + {x_2}^3 = {x_3}^3}$$

On voit que l'ordre d'application des taux n'a pas d'influence sur le résultat : seules comptent les durées d'application des divers taux.

Chapitre 2. Analyse univariée : paramètres de position.

Enoncés.

Exercice 4. Taille d'exploitations agricoles.

Dans un département, on a relevé la taille des exploitations agricoles. On a obtenu les résultats suivants :

Taille (hectares)	Nombre
0 - 10	30
10 - 30	80
30 - 50	60
50 - 100	20
100 - 200	10

1°/ Déterminer les valeurs centrales de cette distribution : mode, moyenne, médiane.
2°/ Donner une évaluation de la dispersion de la distribution.
3°/ Sachant que la moyenne nationale est d'environ 50 hectares, pensez-vous qu'on puisse dire que ce département est un département de petites exploitations ?
4°/ Quelle est la taille des 10 % d'exploitations les plus grandes ?
5°/ Combien y a-t'il d'exploitations dont la taille est inférieure à 40 hectares ?
6°/ Déterminer graphiquement le mode.

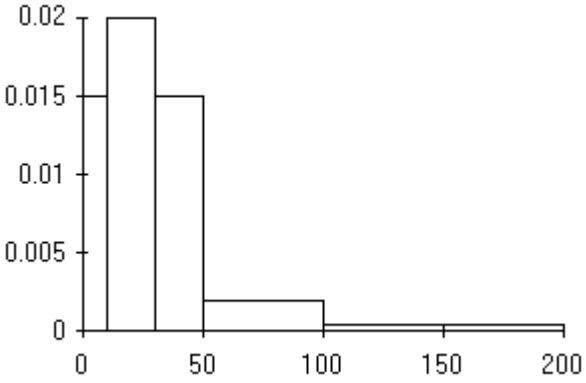
Solution.

1°/ Représentation graphique.

Pour représenter graphiquement la taille des exploitations du département étudié, il faut d'abord compléter le tableau des données par les densités de fréquences et par les fréquences cumulées :

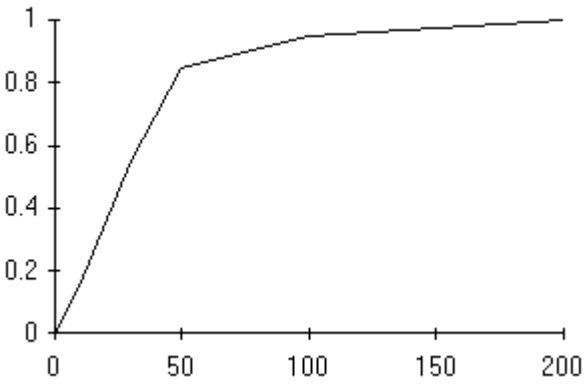
Taille (hectares)	Nombre	Fréquence	Densité de fréquence	Effectif cumulé	Fréquence cumulée
0 - 10	30	0,15	$1{,}5 \times 10^{-2}$	30	0,15
10 - 30	80	0,40	$2{,}0 \times 10^{-2}$	110	0,55
30 - 50	60	0,30	$1{,}5 \times 10^{-2}$	170	0,85
50 - 100	20	0,10	$0{,}2 \times 10^{-2}$	190	0,95
100 - 200	10	0,05	$0{,}05 \times 10^{-2}$	200	1,00

Histogramme des fréquences cumulées :



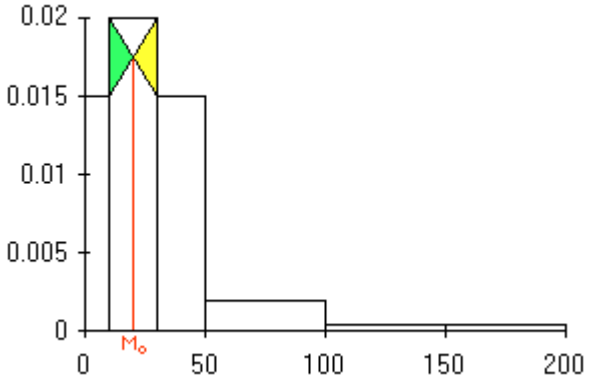
Fonction de répartition empirique :

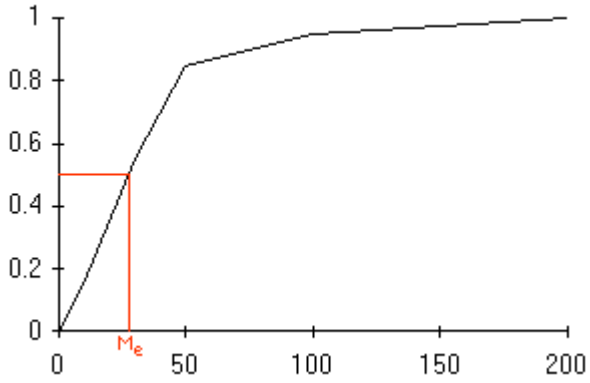
Taille (hectares)	Fréquence cumulée
0	0,00
10	0,15
30	0,55
50	0,85
100	0,95
200	1,00



Mode et médiane :

Le mode et la médiane se déduisent des représentations graphiques précédentes.





La classe modale est la classe de plus grande densité de fréquence : c'est la classe [10 ; 30].
Les exploitations agricoles les plus nombreuses ont entre 10 et 30 ha.
La détermination du mode tient compte des classes adjacentes à la classe modale.
Comme les classes adjacentes ont la même densité de fréquence 0,15, on obtient, par symétrie :
M_o = 20 ha.

La médiane correspond à la valeur 0,50 de la fonction de répartition empirique :
$M_e = 10 + (30 - 10) \times \frac{0,50 - 0,15}{0,55 - 0,15} = 10 + \frac{70}{4} = 27,5$ ha.

Moyenne :

La moyenne se calcule, en supposant la taille des exploitations équirépartie à l'intérieur de chaque classe, par la formule :

moyenne = somme des centres de classes multipliés par les fréquences correspondantes
$\overline{X} = 0,15 \times 5 + 0,40 \times 20 + 0,30 \times 40 + 0,10 \times 75 + 0,05 \times 150 = 35,75$

2°/ Dispersion.

La dispersion de la distribution peut se caractériser par l'**intervalle interquartile**.
Le premier quartile Q_1 est l'abscisse du point d'ordonnée 0,25 sur le diagramme de fonction de répartition empirique :

$$Q_1 = 10 + (30 - 10) \times \frac{0,25 - 0,15}{0,55 - 0,15} = 10 + 20 \times \frac{1}{4} = 15,00$$

Le troisième quartile Q_3 est l'abscisse du point d'ordonnée 0,75 sur le diagramme de fonction de répartition empirique :

$$Q_3 = 30 + (50 - 30) \times \frac{0,75 - 0,55}{0,85 - 0,15} = 30 + 20 \times \frac{2}{3} \approx 43,33$$

L'intervalle interquartile est :

$$Q_3 - Q_1 = 43,33 - 15,00 = 28,33$$

3°/ Comparaison de moyennes.

La moyenne nationale est de 50 ha, la moyenne du département est de 35,75 ha.
On voit donc que la moyenne du département est inférieure à la moyenne nationale.
Le tableau de la fonction de répartition empirique montre que :

85 % des exploitations agricoles du département ont une taille inférieure à la moyenne nationale.

Etant donnée la médiane de 27,5 et compte tenu de la moyenne de 35,75, le grand nombre de petites exploitations dans le département tire la moyenne vers le bas. Plus précisément :

$$0{,}55 + (0{,}85 - 0{,}55) \times \frac{35{,}75 - 30}{50 - 30} = 0{,}55 + 0{,}30 \times 0{,}2875 = 0{,}55 + 0{,}08625 \approx 0{,}64 \approx \frac{2}{3}$$

Près des deux tiers des exploitations agricoles, dans le département étudié, ont une taille en dessous de la moyenne départementale.

On peut donc dire que le département étudié est un département de petites exploitations.

4°/ Les grandes exploitations.

Les 10 % d'exploitations les plus grandes correspondent au neuvième décile D_9, abscisse du point d'ordonnée 0,90 dans le diagramme de la fonction de répartition empirique :

$$D_9 = 50 + (100 - 50) \times \frac{0{,}90 - 0{,}85}{0{,}95 - 0{,}85} = 75$$

10 % des exploitations agricoles du département ont plus de 75 ha.

5°/ Les petites exploitations.

Dans le diagramme de la fonction de répartition empirique, 40 ha est l'abscisse du point d'ordonnée :

$$0{,}55 + (0{,}85 - 0{,}55) \times \frac{40 - 30}{50 - 30} = 0{,}55 + 0{,}15 = 0{,}70$$

70 % des exploitations agricoles du département ont moins de 40 ha.

Comme il y a 200 exploitations agricoles dans le département, cela fait 140 exploitations de moins de 40 ha.

6°/ Détermination graphique du mode.

Le mode a déjà été déterminé graphiquement dans la première question :

$$M_o = 20 \text{ ha.}$$

Les exploitations les plus nombreuses sont celles d'une vingtaine d'hectares.

Chapitre 3. Analyse univariée : paramètres de dispersion, paramètres de forme.

Exercices

Exercice 1. Minimum de l'écart absolu moyen.
Exercice 2. Variable dans R^2.
Exercice 3. Salaires dans une entreprise.
Exercice 4. Salaires des agents de l'Etat.
Exercice 5. Taille des élèves.

Exercice 1. Minimum de l'écart absolu moyen.

Trouver la valeur de a telle que l'écart absolu moyen d'une variable statistique réelle discrète X par rapport au nombre réel a soit minimum.
Exemple :

x_i	1	2	3	4
n_i	2	3	5	2

Solution

HAUT

Exercice 2. Variable dans R^2.

Une variable statistique X prend ses valeurs dans R^2 :

x_i	(0 ; 1)	(1 ; 0)	(1 ; 2)	(2 ; 0)	(2 ; 2)
n_i	2	3	3	1	1

Solution

1°/ Calculer les coordonnées du point moyen $\overline{X}$.
2°/ Calculer la variance, définie à partir de la distance euclidienne.

HAUT

Exercice 3. Salaires dans une entreprise.

Les salaires de l'entreprise B.S.H. sont répartis en trois catégories.
Pour éclaircir les négociations salariales, qui doivent s'ouvrir prochainement, on vous demande de préparer un dossier sur la dispersion des salaires entre les catégories et à l'intérieur des catégories.
Vous avez réuni, pour chaque catégorie, les éléments suivants relatifs à l'année précédente :

Catégorie	Effectif	Masse salariale (en 10^6 F)	Somme des carrés des salaires (en 10^{12} F^2)
1 — Cadres	240	302,40	404,838 0
2 — Employés	300	165,00	93,690 3
3 — Ouvriers	660	330,00	16,737 6

1°/ Calculer la moyenne et l'écart-type du salaire pour chaque catégorie.
2°/ Déduire :
- — le salaire moyen de l'entreprise,
- — la mesure de la dispersion des salaires entre les catégories,
- — la mesure de la dispersion des salaires à l'intérieur des catégories,
- — la mesure de la dispersion des salaires dans l'entreprise.

Interpréter ces résultats.
Vérifier la valeur de l'écart-type total trouvé en calculant directement celui-ci à partir des données du tableau.

Solution

HAUT

Exercice 4. Salaires des agents de l'Etat.

D'après l'INSEE, en 1986, la répartition en pourcentage des agents de l'état selon le montant de leur salaire annuel net (en milliers de francs), était :

Hommes		Femmes	
Salaire	%	Salaire	%
30-60	4,5	30-50	1,4
60-70	9,8	50-60	9,2
70-80	19,0	60-70	15,8
80-90	12,6	70-80	21,5
90-100	10,8	80-90	14,5
100-110	11,0	90-100	10,9
110-120	11,2	100-110	10,6
120-140	8,2	110-120	7,8
140-180	8,4	120-140	4,0
180-260	4,0	140-180	3,6
260-400	0,5	180-340	0,7

On admettra, dans chaque classe, une répartition uniforme des salaires.

Solution

1°/ Salaire des hommes.

a) Tracer l'histogramme des densités de fréquences.
b) Déterminer le mode.
c) Tracer la fonction de répartition empirique.
d) Déterminer la médiane.
e) Déterminer l'intervalle interquartile.
f) On appelle *rapport des déciles* le quotient du salaire au-dessus duquel se trouvent 10 % des agents, par celui en dessous duquel se trouvent 10 % des agents. Calculer ce rapport.

2°/ Salaires des femmes.

a) Déterminer le mode. Que conclure ?
b) Déterminer le rapport des déciles. Que peut-on conclure sur la comparaison des rémunérations entre les hommes et les femmes ?

3°/ Concentration.

a) Tracer la courbe de concentration des salaires des hommes.
b) En déduire le coefficient de Gini.
c) Sachant que le coefficient de Gini pour les salaires des femmes est donné par 0,165, que peut-on en conclure ?

HAUT

Exercice 5. Taille des élèves.

Dans un collège, on a relevé la taille des élèves. On a obtenu les résultats suivants :

Taille (m)	1,10 - 1,30	1,30 - 1,40	1,40 - 1,50	1,50 - 1,60	1,60 - 1,80
Nombre	20	30	60	60	30

1°/ Représenter graphiquement la distribution : graphique différentiel et graphique intégral.
2°/ Déterminer les valeurs centrales de cette distribution : mode, moyenne, médiane.
3°/ Calculer la variance de la taille des élèves dans les deux cas suivants :
a) On suppose que les tailles, dans chaque classe de taille, sont concentrées au centre de la classe.
b) On suppose que la distribution est uniforme dans chaque classe.
4°/ Calculer la rapport des déciles.

Solution

HAUT

Chapitre 3. Analyse univariée : paramètres de dispersion, paramètres de forme.

Enoncés.

Exercice 1. Minimum de l'écart absolu moyen.

Trouver la valeur de a telle que l'écart absolu moyen d'une variable statistique réelle discrète X par rapport au nombre réel a soit minimum.
Exemple :

x_i	1	2	3	4
n_i	2	3	5	2

Solution.

1°/ Solution générale.

Une variable statistique réelle discrète X prend un nombre fini n de valeurs réelles x_i, chacune avec un effectif entier fini n_i, $i \in [1, n]$.
On peut supposer que les valeurs de X sont rangées par ordre croissant.
L'écart absolu moyen par rapport à un nombre réel a est :

$$f(a) = \frac{1}{N}\sum n_i \mid x_i - a \mid, \text{ où } N = \sum n_i.$$

Cette fonction continue varie **linéairement par morceaux** en fonction de a.
Elle augmente lorsque a s'éloigne, à gauche ou à droite, de l'intervalle $[x_1, x_n]$.
Comme cette fonction est continue, elle atteint donc une valeur minimum pour l'un des x_i.
Cet x_i est déterminé par le fait que la dérivée de $f(a)$, qui existe pour tout a différent des x_i, change de signe.

Pour un a donné différent de tous les x_i, appartenant à l'intervalle ouvert $]x_1, x_n[$ certaines des valeurs x_i, disons les k premières, $k \geq 0$, sont strictement plus petites que a, les $N - k$ autres sont supérieures ou égales à a.

$$f(a) = \frac{1}{N}\sum_{i=k+1}^{i=n} n_i (x_i - a) - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{i=k} n_i (x_i - a)$$

En tout point a différent des x_i, la dérivée de f par rapport à a existe, c'est une constante donnée par :

$$\frac{d\,f(a)}{d\,a} = -\frac{1}{N}\sum_{i=k+1}^{i=n} n_i + \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{i=k} n_i$$

Cette dérivée est négative lorsque $\sum_{i=1}^{i=k} n_i < \sum_{i=k+1}^{i=n} n_i$, c'est-à-dire lorsque l'effectif des valeurs de X inférieures à a est plus petit que l'effectif des valeurs de X supérieures à a.
Elle est donc négative pour toutes les valeurs de X strictement inférieures à la médiane de X.
La dérivée est positive lorsque $\sum_{i=1}^{i=k} n_i \geq \sum_{i=k+1}^{i=n} n_i$, c'est-à-dire lorsque l'effectif des valeurs de X inférieures à a est plus grand que l'effectif des valeurs de X supérieures à a.
Elle est donc positive pour toutes les valeurs de X supérieures à la médiane de X.

Deux cas de figure peuvent alors se produire :
— dans un premier cas, l'une des valeurs de X est la médiane de X : dans ce cas, lorsque a est égale à cette médiane, il y a exactement autant de valeurs de X atteintes en dessous de la médiane, que de valeurs de X atteintes au-dessus de la médiane : la dérivée change de signe en la médiane M_e. La médiane est la valeur a de X pour laquelle l'écart absolu moyen est minimum.
— dans un deuxième cas, la médiane de X n'est pas l'un des x_i : dans ce cas, la dérivée de $f(a)$ reste négative dans l'intervalle de valeurs de x contenant la médiane et elle devient positive tout de suite à droite de la valeur de X juste au-dessus de la médiane. L'écart absolu moyen est donc minimum pour la valeur a de X située juste au-dessus de la médiane.

La valeur a pour laquelle l'écart absolu moyen est minimum est donc :
— la valeur de X égale à la **médiane** M_e de X, si la médiane est l'une des valeurs prises par X,
— la valeur de X située juste au-dessus de la médiane si la médiane n'est pas l'une des valeurs prises par X.

Dans tous les cas, **l'écart absolu moyen est minimum pour la première valeur de X juste supérieure ou égale à la médiane**.

2°/ Exemple.

x_i	1	2	3	4
n_i	2	3	5	2

Les fréquences cumulées sont données dans le tableau suivant :

x_i	1	2	3	4
n_i	2	3	5	2
$\sum n_i$	2	5	10	12
$\sum f_i$	$\frac{2}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{10}{12}$	1

La médiane, qui correspond à une fréquence

cumulée de 0,5, soit un effectif cumulé de 6,
est $3 - (3 - 2) \times \frac{6-5}{10-5} = 2{,}8$.

L'écart absolu moyen par rapport à a varie linéairement par morceaux suivant les valeurs de a.

Il prend sa valeur minimum pour $a = 3$, qui est la valeur de X située juste à droite de la médiane.

$$\boxed{a = 3}$$

Chapitre 3. Analyse univariée : paramètres de dispersion, paramètres de forme.

Enoncés.

Exercice 2. Variable dans R ².

Une variable statistique X prend ses valeurs dans R ² :

x_i	(0 ; 1)	(1 ; 0)	(1 ; 2)	(2 ; 0)	(2 ; 2)
n_i	2	3	3	1	1

1°/ Calculer les coordonnées du point moyen $\overline{X}$.
2°/ Calculer la variance, définie à partir de la distance euclidienne.

Solution.

1°/ Moyenne.

$N = \sum n_i = 10$.

$$\overline{X} = \frac{1}{10} [2 \times (0 ; 1) + 3 \times (1 ; 0) + 3 \times (1 ; 2) + 1 \times (2 ; 0) + 1 \times (2 ; 2)] = \frac{1}{10} [(10 ; 10)] = (1 ; 1)$$

$$\boxed{\overline{X} = (1 ; 1)}$$

2°/ Variance.

La variance $Var\ (X)$ est définie, à partir de la distance euclidienne, par :

$$Var\ (X) = \sum f_i\ (d\ (x_i, \overline{X}))^2 = \frac{1}{N} \sum n_i\ (d\ (x_i, \overline{X}))^2$$

Le carré de la distance euclidienne de x_i à $\overline{X}$ est, par définition, le carré de la norme euclidienne du vecteur $x_i - \overline{X}$, c'est-à-dire la somme des carrés des composantes de ce vecteur.

On obtient donc :

$$Var\ (X) = \frac{1}{10} [2 \times (1^2 + 0^2) + 3 \times (0^2 + 1^2) + 3 \times (0^2 + 1^2) + 1 \times (1^2 + 1^2) + 1 \times (1^2 + 1^2)]$$

$$Var\ (X) = \frac{1}{10} [2 + 3 + 3 + 2 + 2] = \frac{12}{10} = \frac{6}{5}$$

$$\boxed{Var\ (X) = \frac{6}{5}}$$

Remarque :

Soit $a = (a_1, a_2)$ un point du plan.
L'expression

$$S = \sum f_i \, (d\,(x_i, a))^2 = \frac{1}{N} \sum n_i \, (d\,(x_i, a))^2 = \frac{1}{N} \sum n_i \, ((x_{i1} - a_1)^2 + (x_{i2} - a_2)^2)$$

est minimum lorsque $a = \overline{X}$ et sa valeur minimum est la variance de X.

En effet, on a :

$$S = \frac{1}{N} \sum n_i \, ((x_{i1} - a_1)^2 + (x_{i2} - a_2)^2)$$
$$S = \frac{1}{N} \sum n_i \, ((x_{i1} - \overline{X}_1 + \overline{X}_1 - a_1)^2 + (x_{i2} - \overline{X}_2 + \overline{X}_2 - a_2)^2)$$
$$S = \frac{1}{N} \sum n_i \, ((x_{i1} - \overline{X}_1)^2 + (\overline{X}_1 - a_1)^2 + 2\,(x_{i1} - \overline{X}_1)(\overline{X}_1 - a_1)) + \frac{1}{N} \sum n_i \, ((x_{i2} - \overline{X}_2)^2 + (\overline{X}_2 - a_2)^2 + 2\,(x_{i2} - \overline{X}_2)(\overline{X}_2 - a_2))$$

$$Var\,(X) = \frac{1}{N} \sum n_i \, (d\,(x_i, \overline{X}))^2 = \frac{1}{N} \sum n_i \, ((x_{i1} - \overline{X}_1)^2 + (x_{i2} - \overline{X}_2)^2)$$

$$\frac{1}{N} \sum n_i \, ((\overline{X}_1 - a_1)^2 + (\overline{X}_2 - a_2)^2) = ((\overline{X}_1 - a_1)^2 + (\overline{X}_2 - a_2)^2) = (d\,(\overline{X}, a))^2$$

$$\overline{X}_1 = \frac{1}{N} \sum n_i \, x_{i1}$$
$$\frac{1}{N} \sum n_i \times 2\,(x_{i1} - \overline{X}_1)(\overline{X}_1 - a_1) = 2\,(\overline{X}_1 - a_1) \times \frac{1}{N} \sum n_i \, (x_{i1} - \overline{X}_1) = 0$$

$$\overline{X}_2 = \frac{1}{N} \sum n_i \, x_{i2}$$
$$\frac{1}{N} \sum n_i \times 2\,(x_{i2} - \overline{X}_2)(\overline{X}_2 - a_2) = 2\,(\overline{X}_2 - a_2) \times \frac{1}{N} \sum n_i \, (x_{i2} - \overline{X}_2) = 0$$

Finalement, il reste seulement :

$$S = Var\,(X) + (d\,(\overline{X}, a))^2$$

Et cette expression montre bien :
— que S est minimum lorsque $d\,(\overline{X}, a) = 0$, c'est-à-dire lorsque $a = \overline{X}$,
— et que la valeur minimum de S est $Var\,(X)$.

Chapitre 3. Analyse univariée : paramètres de dispersion, paramètres de forme.

Enoncés.

Exercice 3. Salaires dans une entreprise.

Les salaires de l'entreprise B.S.H. sont répartis en trois catégories.
Pour éclaircir les négociations salariales, qui doivent s'ouvrir prochainement, on vous demande de préparer un dossier sur la dispersion des salaires entre les catégories et à l'intérieur des catégories.
Vous avez réuni, pour chaque catégorie, les éléments suivants relatifs à l'année précédente :

Catégorie	Effectif	Masse salariale (en 10^6 F)	Somme des carrés des salaires (en 10^{12} F ^{2})
1 — Cadres	240	302,40	404,838 0
2 — Employés	300	165,00	93,690 3
3 — Ouvriers	660	330,00	16,737 6

1°/ Calculer la moyenne et l'écart-type du salaire pour chaque catégorie.
2°/ Déduire :
— le salaire moyen de l'entreprise,
— la mesure de la dispersion des salaires entre les catégories,
— la mesure de la dispersion des salaires à l'intérieur des catégories,
— la mesure de la dispersion des salaires dans l'entreprise.
Interpréter ces résultats.
Vérifier la valeur de l'écart-type total trouvé en calculant directement celui-ci à partir des données du tableau.

Solution.

1°/ Moyenne et écart-type pour chaque catégorie.

Pour chaque catégorie de salariés, on donne :
– l'effectif total $N = \sum n_i$
– la somme des salaires $\sum x_i$
– la somme des carrés des salaires $\sum x_i^2$.

La moyenne est donnée par la formule : $\overline{X} = \frac{1}{N} \sum x_i$.

La variance est donnée par la formule : $Var\,(X) = \frac{1}{N} (\sum x_i^2 - \frac{1}{N} (\sum x_i)^2)$.

L'écart-type est la racine carrée de la variance : $\sigma_X = \sqrt{Var\,(X)}$

a) Cadres.

$N = \sum n_i = 240$.
$\sum x_i = 302{,}40 \times 10^6$ F.
$\sum x_i^2 = 404{,}838\,0 \times 10^{12}$ F².

$\overline{X} = \frac{1}{N} \sum x_i = \frac{1}{240} \times 302{,}40 \times 10^6$ F $= 1{,}260 \times 10^6$ F.
$Var\,(X) = \frac{1}{N} (\sum x_i^2 - \frac{1}{N} (\sum x_i)^2) = \frac{1}{240} \times (404{,}8380 \times 10^{12}$ F² $- \frac{1}{240} (302{,}40 \times 10^6$ F)²) $= 0{,}992250 \times 10^{12}$ F².
$\sigma_X = \sqrt{Var\,(X)} = 0{,}315 \times 10^6$ F

Le salaire annuel moyen des cadres est 1,260 MF, avec un écart-type de 0,315 MF.

b) Employés.

$N = \sum n_i = 300$.
$\sum x_i = 54 \times 10^6$ F.
$\sum x_i^2 = 9{,}892\,8 \times 10^{12}$ F².

$\overline{X} = \frac{1}{N} \sum x_i = \frac{1}{300} \times 54{,}00 \times 10^6$ F $= 1{,}80 \times 10^5$ F $= 180 \times 10^3$ F.
$Var\,(X) = \frac{1}{N} (\sum x_i^2 - \frac{1}{N} (\sum x_i)^2) = \frac{1}{300} \times (9{,}892\,8 \times 10^{12}$ F² $- \frac{1}{300} (54{,}00 \times 10^6$ F)²) $= 5{,}760 \times 10^8$ F².
$\sigma_X = \sqrt{Var\,(X)} = 2{,}4 \times 10^4$ F

Le salaire annuel moyen des employés est 180,0 kF, avec un écart-type de 24,0 kF.

c) Ouvriers.

$N = \sum n_i = 660$.
$\sum x_i = 95{,}040 \times 10^6$ F.
$\sum x_i^2 = 13{,}750\,446\,6 \times 10^{12}$ F².

$\overline{X} = \frac{1}{N} \sum x_i = \frac{1}{660} \times 95{,}04 \times 10^6$ F $= 1{,}440 \times 10^5$ F $= 144{,}0 \times 10^3$ F.
$Var\,(X) = \frac{1}{N} (\sum x_i^2 - \frac{1}{N} (\sum x_i)^2) = \frac{1}{660} \times (13{,}750\,446\,6 \times 10^{12}$ F² $- \frac{1}{660} (95{,}040 \times 10^6$ F)²) $= 9{,}801 \times 10^7$ F².
$\sigma_X = \sqrt{Var\,(X)} = 9{,}9 \times 10^3$ F

Le salaire annuel moyen des ouvriers est 144,0 kF, avec un écart-type de 9,9 kF.

2°/ Salaire moyen et dispersion.

Notons avec un indice *c* les valeurs relatives aux cadres de l'entreprise, avec un indice *e* les valeurs

relatives aux employés, et avec un indice *o* les valeurs relatives aux ouvriers :

$n_c = 240$, $\overline{X}_c = 1\,260{,}0 \times 10^3$ F, $\sigma_c = 315{,}0 \times 10^3$ F.
$n_e = 300$, $\overline{X}_e = 180{,}0 \times 10^3$ F, $\sigma_e = 24{,}0 \times 10^3$ F.
$n_o = 660$, $\overline{X}_o = 144{,}0 \times 10^3$ F, $\sigma_o = 9{,}9 \times 10^3$ F.

L'entreprise emploie $N = n_c + n_e + n_o = 240 + 300 + 660 = 1\,200$ salariés.

a) Salaire moyen.

Le salaire moyen dans l'entreprise est la moyenne pondérée des salaires moyens par catégorie : c'est aussi la masse salariale totale divisée par le nombre total de salariés (**théorème de la moyenne conditionnelle**).

$$\overline{X} = \frac{1}{N}(n_c \overline{X}_c + n_e \overline{X}_e + n_o \overline{X}_o) = \frac{1}{1200}(240 \times 1\,260{,}0 \times 10^3 + 300 \times 180{,}0 \times 10^3 + 660 \times 144{,}0 \times 10^3) = 376{,}2 \times 10^3 \text{ F}$$

Le salaire moyen dans l'entreprise est 376,2 kF.

b) Dispersion des salaires entre les catégories.

La dispersion des salaires entre les catégories se mesure par la variance du salaire moyen des catégories (variance interclasse) :

$$s_b^2 = \frac{1}{N}(n_c (\overline{X}_c - \overline{X})^2 + n_e (\overline{X}_e - \overline{X})^2 + n_o (\overline{X}_o - \overline{X})^2)$$
$$= \frac{1}{1200}(240 \times (1\,260{,}0 \times 10^3 - 376{,}2 \times 10^3)^2 + 300 \times (180{,}0 \times 10^3 - 376{,}2 \times 10^3)^2 + 660 \times (144{,}0 \times 10^3 - 376{,}2 \times 10^3)^2)$$
$$= 1{,}954\,983\,6 \times 10^{11} \text{ F}^2.$$

b) Dispersion des salaires à l'intérieur des catégories.

La dispersion des salaires à l'intérieur des catégories se mesure par la valeur moyenne de la variance du salaire dans les diverses catégories (variance intraclasse) :

$$s_w^2 = \frac{1}{N}(n_c \sigma_c^2 + n_e \sigma_e^2 + n_o \sigma_o^2)$$
$$= \frac{1}{1200}(240 \times (315{,}0 \times 10^3)^2 + 300 \times (24{,}0 \times 10^3)^2 + 660 \times (9{,}9 \times 10^3)^2)$$
$$= 2{,}004\,290\,55 \times 10^{10} \text{ F}^2.$$

c) Dispersion des salaires dans l'entreprise.

La dispersion des salaires dans l'entreprise se mesure par la variance du salaire : c'est la somme de la variance intraclasse et de la variance interclasse (**théorème de la variance conditionnelle**):

$$Var(X) = s_X^2 = s_w^2 + s_b^2$$

$s_X^2 = 1{,}954\,983\,6 \times 10^{11} + 2{,}004\,290\,55 \times 10^{10} = 2{,}155\,412\,265\,5 \times 10^{11}$ F^2.

$s_X = 4{,}642\,642 \times 10^5$ F.

L'écart-type des salaires dans l'entreprise est de 464,264 2 kF.

On peut obtenir directement cette valeur à partir du tableau de données :

Catégorie	Effectif	Masse salariale (en 10^6 F)	Somme des carrés des salaires (en 10^{12} F ^{2})
1 — Cadres	240	302,40	404,838 0
2 — Employés	300	54,00	9,892 8
3 — Ouvriers	660	95,040	13,750 446 6
Total	1 200	451,44	428,481 246 6

$Var\,(X) = s_X^2 = \frac{1}{N}\,(\sum x_i^2 - \frac{1}{N}\,(\sum x_i)^2) = \frac{1}{1200}(428{,}481\,246\,6 \times 10^{12} - \frac{1}{1200}(451{,}44 \times 10^6)^2) = 2{,}155\,412\,265\,5 \times 10^{11}$ F ^{2}.

Chapitre 3. Analyse univariée : paramètres de dispersion, paramètres de forme.

Enoncés.

Exercice 4. Salaires des agents de l'Etat.

D'après l'INSEE, en 1986, la répartition en pourcentage des agents de l'état selon le montant de leur salaire annuel net (en milliers de francs), était :

Hommes		Femmes	
Salaire	%	Salaire	%
30-60	4,5	30-50	1,4
60-70	9,8	50-60	9,2
70-80	19,0	60-70	15,8
80-90	12,6	70-80	21,5
90-100	10,8	80-90	14,5
100-110	11,0	90-100	10,9
110-120	11,2	100-110	10,6
120-140	8,2	110-120	7,8
140-180	8,4	120-140	4,0
180-260	4,0	140-180	3,6
260-400	0,5	180-340	0,7

On admettra, dans chaque classe, une répartition uniforme des salaires.

1°/ Salaire des hommes.

a) Tracer l'histogramme des densités de fréquences.
b) Déterminer le mode.
c) Tracer la fonction de répartition empirique.
d) Déterminer la médiane.
e) Déterminer l'intervalle interquartile.
f) On appelle *rapport des déciles* le quotient du salaire au-dessus duquel se trouvent 10 % des agents, par celui en dessous duquel se trouvent 10 % des agents. Calculer ce rapport.

2°/ Salaires des femmes.

a) Déterminer le mode. Que conclure ?
b) Déterminer le rapport des déciles. Que peut-on conclure sur la comparaison des rémunérations entre les hommes et les femmes ?

3°/ Concentration.

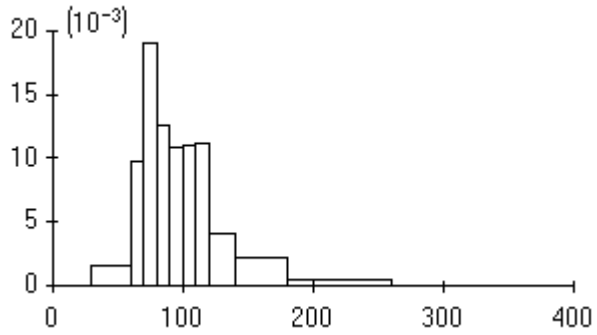
a) Tracer la courbe de concentration des salaires des hommes.
b) En déduire le coefficient de Gini.
c) Sachant que le coefficient de Gini pour les salaires des femmes est donné par 0,165, que peut-on en conclure ?

Solution.

1°/ Salaires des hommes.

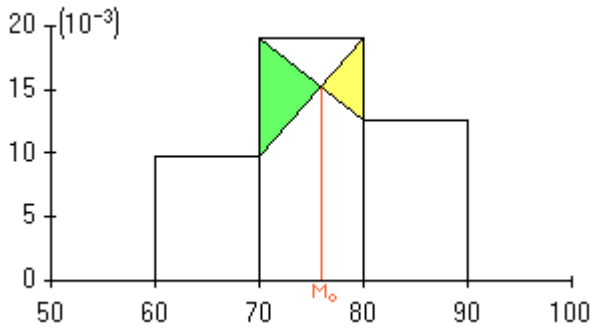
a) Histogramme des densités de fréquences.

Hommes		
Salaire	%	Densité de fréquence
30-60	4,5	$1,5 \times 10^{-3}$
60-70	9,8	$9,8 \times 10^{-3}$
70-80	19,0	$19,0 \times 10^{-3}$
80-90	12,6	$12,6 \times 10^{-3}$
90-100	10,8	$10,8 \times 10^{-3}$
100-110	11,0	$11,0 \times 10^{-3}$
110-120	11,2	$11,2 \times 10^{-3}$
120-140	8,2	$4,1 \times 10^{-3}$
140-180	8,4	$2,1 \times 10^{-3}$
180-260	4,0	$0,5 \times 10^{-3}$
260-400	0,5	$3,6 \times 10^{-5}$



b) Mode.

La classe modale est la classe de plus forte densité de fréquence, c'est la classe [70 ; 80 [.
Le mode se détermine, dans cette classe, en tenant compte des classes adjacentes.



Le mode M_o est donné par :

$$\frac{M_o - 70}{19,0 - 9,8} = \frac{80 - M_o}{19,0 - 12,6} = \frac{80 - 70}{2 \times 19,0 - 9,8 - 12,6} = \frac{10}{15,6} = \frac{25}{39}$$

$$M_o = 70 + 9,2 \times \frac{25}{39} = 75,90$$

$M_o = 75,90$ (milliers de francs).

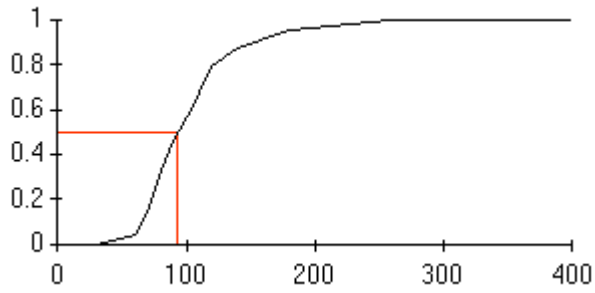
c) Fonction de répartition empirique.

La fonction de répartition empirique s'obtient par la fréquence cumulée, en fonction de la limite supérieure de classe et en ajoutant 0 pour la limite inférieure de la première classe.

Hommes		
Salaire	%	Fréquence cumulée (%)
30	0,0	0,0
60	4,5	4,5
70	9,8	14,3
80	19,0	33,3
90	12,6	45,9
100	10,8	56,7
110	11,0	67,7
120	11,2	78,9
140	8,2	87,1
180	8,4	95,5
260	4,0	99,5
400	0,5	100,0

d) Médiane.

La médiane se lit sur le graphique de la fonction de répartition empirique : c'est l'abscisse du point d'ordonnée 0,5.
Numériquement, sa valeur s'obtient par interpolation linéaire entre les points (90 ; 0,459) et (100 ; 0,567).

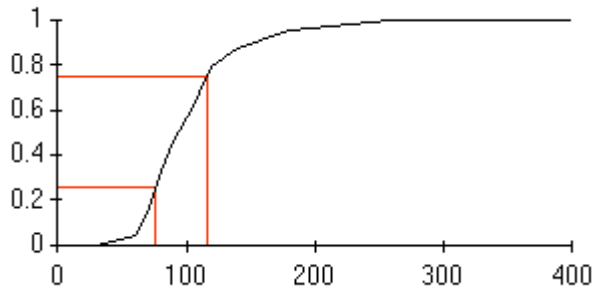


$$M_e = 90 + (100 - 90) \times \frac{0{,}500 - 0{,}459}{0{,}567 - 0{,}459} = 90 + 10 \times \frac{41}{108} = 93{,}80$$

M_e = 93,80 (milliers de francs)

e) Intervalle interquartile.

L'intervalle interquartile est la différence $Q_3 - Q_1$ entre le troisième quartile Q_3, abscisse du point d'ordonnée 0,75 sur le graphique de la fonction de répartition empirique, et le premier quartile Q_1, abscisse du point d'ordonnée 0,25 sur le graphique de la fonction de répartition empirique.
Numériquement, la valeur des quartiles s'obtient :



— Pour Q_3, par interpolation linéaire entre les points (110 ; 0,677) et (120 ; 0,789) :

$$Q_3 = 110 + (120 - 110) \times \frac{0{,}750 - 0{,}677}{0{,}789 - 0{,}677} = 110 + 10 \times \frac{73}{112} = 116{,}52$$

— Pour Q_1, par interpolation linéaire entre les points (70 ; 0,143) et (80 ; 0,333) :

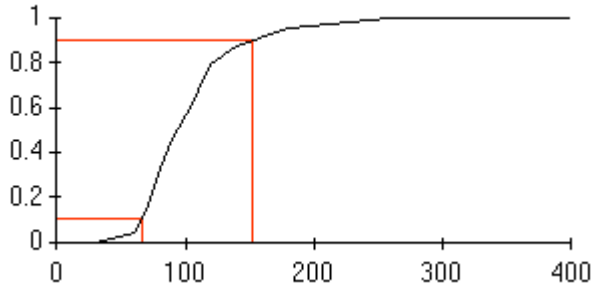
$$Q_1 = 70 + (80 - 70) \times \frac{0{,}250 - 0{,}143}{0{,}333 - 0{,}143} = 70 + 10 \times \frac{107}{190} = 75{,}63$$

$$Q_3 - Q_1 = 110 + 10 \times \frac{73}{112} - 70 - 10 \times \frac{107}{190} = 40 + 10 \times \frac{943}{10\,640} = 40{,}89$$

$$\boxed{Q_3 - Q_1 = 40{,}89 \text{ (milliers de francs)}}$$

f) Rapport des déciles.

Le rapport des déciles est le rapport $\frac{D_9}{D_1}$ entre le neuvième décile D_9, abscisse du point d'ordonnée 0,90 sur le graphique de la fonction de répartition empirique, et le premier décile D_1, abscisse du point d'ordonnée 0,10 sur le graphique de la fonction de répartition empirique.



Numériquement, la valeur des déciles s'obtient :
— Pour D_1, par interpolation linéaire entre les points (60 ; 0,045) et (70 ; 0,143) :

$$D_1 = 60 + (70 - 60) \times \frac{0{,}100 - 0{,}045}{0{,}145 - 0{,}045} = 60 + 10 \times \frac{55}{98} = 65{,}61$$

— Pour D_9, par interpolation linéaire entre les points (140 ; 0,871) et (180 ; 0,955) :

$$D_9 = 140 + (180 - 140) \times \frac{0{,}900 - 0{,}871}{0{,}955 - 0{,}871} = 140 + 40 \times \frac{29}{84} = 153{,}81$$

$$\frac{D_9}{D_1} = \frac{140 + 40 \times \frac{29}{84}}{60 + 10 \times \frac{55}{98}} = \frac{4\,522}{1\,929} = 2{,}34$$

$$\boxed{\frac{D_9}{D_1} = 2{,}34}$$

2°/ Salaires des femmes.

a) Mode.

Pour calculer le mode, il faut d'abord, comme pour les hommes, calculer les **densités de fréquences** de chaque classe.

Femmes		
Salaire	%	Densité de fréquence
30-50	1,4	$0{,}7 \times 10^{-3}$
50-60	9,2	$9{,}3 \times 10^{-3}$
60-70	15,8	$15{,}8 \times 10^{-3}$
70-80	21,5	$21{,}5 \times 10^{-3}$

80-90	14,5	$14,5 \times 10^{-3}$
90-100	10,9	$10,9 \times 10^{-3}$
100-110	10,6	$10,6 \times 10^{-3}$
110-120	7,8	$7,8 \times 10^{-3}$
120-140	4,0	$2,0 \times 10^{-3}$
140-180	3,6	$0,9 \times 10^{-3}$
180-340	0,7	$0,04 \times 10^{-3}$

La classe modale est la classe de plus forte densité de fréquence, c'est la classe [70 ; 80 [.
Le mode se détermine, dans cette classe, en tenant compte des classes adjacentes.

Le mode M_o est donné par :

$$\frac{M_o - 70}{21,5 - 15,8} = \frac{80 - M_o}{21,5 - 14,5} = \frac{80 - 70}{2 \times 21,5 - 15,8 - 14,5} = \frac{10}{12,7} = \frac{100}{127}$$

$$M_o = 70 + 5,7 \times \frac{100}{127} = 74,49$$

$M_o = 74,49$ (milliers de francs).

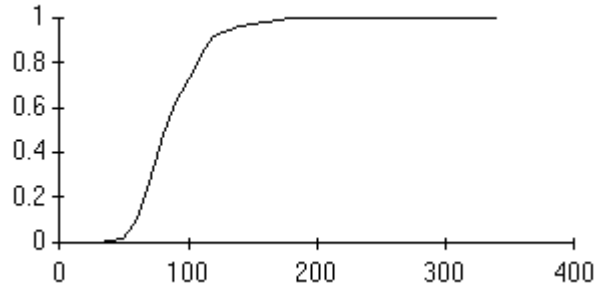
Même si le mode est légèrement inférieur chez les femmes, c'est bien dans la même tranche modale de salaires que chez les hommes que l'on trouve le plus de femmes salariées.

Les modes du salaire sont pratiquement les mêmes chez les hommes et chez les femmes, aux alentours de 75 milliers de francs.

b) Rapport des déciles.

Pour pouvoir calculer le rapport des déciles $\frac{D_9}{D_1}$ chez les femmes, il faut d'abord calculer la fonction de répartition empirique.

Femmes		
Salaire	%	Fréquence cumulée (%)
30	0,0	0,0
50	1,4	1,4
60	9,2	10,6
70	15,8	26,4
80	21,5	47,9
90	14,5	62,4
100	10,9	73,3
110	10,6	83,9
120	7,8	91,7



140	4,0	95,7
180	3,6	99,3
340	0,7	100,0

Numériquement, la valeur des déciles s'obtient :
— Pour D_1, par interpolation linéaire entre les points (50 ; 0,014) et (60 ; 0,106) :

$D_1 = 50 + (60 - 50) \times \frac{0{,}100 - 0{,}014}{0{,}106 - 0{,}014} = 50 + 10 \times \frac{43}{46} = 59{,}35$

— Pour D_9, par interpolation linéaire entre les points (110 ; 0,839) et (120 ; 0,917) :

$D_9 = 110 + (120 - 110) \times \frac{0{,}900 - 0{,}839}{0{,}917 - 0{,}839} = 110 + 10 \times \frac{61}{78} = 117{,}82$

$$\frac{D_9}{D_1} = \frac{110 + 10 \times \frac{61}{78}}{50 + 10 \times \frac{43}{46}} = \frac{21\,137}{10\,647} = 1{,}99$$

$$\boxed{\frac{D_9}{D_1} = 1{,}99}$$

Si l'on compare cette valeur à la valeur de 2,34 obtenue pour les hommes, on voit que les salaires des femmes sont plus resserrés, donc moins dispersés, autour du mode, que ceux des hommes.

En regardant plus en détail la valeur des déciles, on voit que si les 10 % des femmes les moins bien payées gagnent moins de 59,35 milliers de francs, contre 65,61 milliers de francs pour les hommes (soit environ 10 % d'écart de salaire), en revanche, seulement 10 % des femmes gagnent plus de 117,82 milliers de francs, alors que les 10 % des hommes les mieux payés parmi les agents de l'état gagnent plus de 153,81 milliers de francs (soit environ 30 % d'écart de salaire) : c'est de là surtout que provient la différence entre les rapports des déciles des hommes et des femmes.

3°/ Concentration.

a) Concentration des salaires des hommes (courbe de Lorenz).

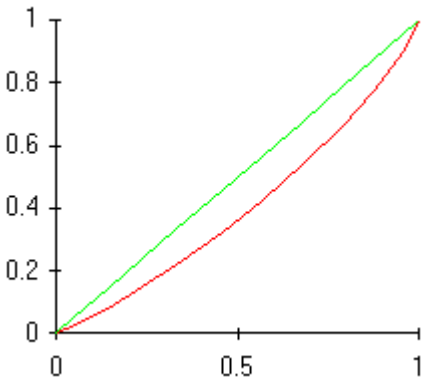
La courbe de concentration des salaires des hommes joint, par des segments de droite, les points ayant pour abscisse la fréquence cumulée d'une classe et, pour ordonnée, la proportion de masse salariale représentée par les salariés dont le salaire est plus petit que la limite supérieure de la classe.
Rappelons que l'interpolation linéaire suppose que la répartition des salaires à l'intérieur d'une classe est uniforme, de sorte que le pourcentage de masse salariale d'une classe est égal au centre de la classe, multiplié par la fréquence de la la classe, et divisé par la somme de ces produits (qui est le salaire moyen) $\frac{x_i\, f_i}{\sum x_j\, f_j}$.

Hommes		
Salaire	%	Fréquence cumulée (%)
30-60	4,5	4,5
60-70	9,8	14,3

70-80	19,0	33,3
80-90	12,6	45,9
90-100	10,8	56,7
100-110	11,0	67,7
110-120	11,2	78,9
120-140	8,2	87,1
140-180	8,4	95,5
180-260	4,0	99,5
260-400	0,5	100,0

$\overline{X} = \sum x_j f_j = 45 \times 0{,}045 + 65 \times 0{,}098 + 75 \times 0{,}190 + 85 \times 0{,}126 + 95 \times 0{,}108 + 105 \times 0{,}110 + 115 \times 0{,}112 + 130 \times 0{,}082 + 160 \times 0{,}084 + 220 \times 0{,}040 + 330 \times 0{,}005 = 102{,}595$ kF.

Hommes				
Centre de classe x_j	Fréquence f_j	Fréquence cumulée p_j	Fraction de masse salariale $x_j f_j$	Fraction de masse salariale cumulée q_j
		0,000		0,0000
45	0,045	0,045	0,0197	0,0197
65	0,098	0,143	0,0621	0,0818
75	0,190	0,333	0,1389	0,2207
85	0,126	0,459	0,1044	0,3251
95	0,108	0,567	0,1000	0,4251
105	0,110	0,677	0,1126	0,5377
115	0,112	0,789	0,1255	0,6632
130	0,082	0,871	0,1039	0,7671
160	0,084	0,955	0,1310	0,8981
220	0,040	0,995	0,0858	0,9839
330	0,005	1,000	0,0161	1,0000

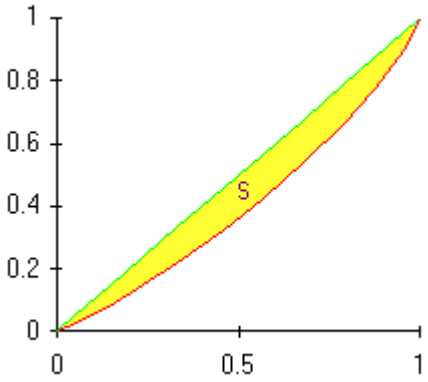


Courbe de Lorenz des salaires des hommes.

b) Indice de Gini.

L'indice de Gini est le double de la surface comprise entre la courbe de Lorenz et la diagonale principale, dans l'intervalle [0 ; 1].
Numériquement, il est donné par la formule :

$$g = 2\,S = 1 - \sum f_{j+1}\,(q_{j+1} + q_j)$$



g = 1 – (0,045 × (0,0197 + 0,0000) + 0,098 × (0,0818 + 0,0197) + 0,190 × (0,2207 + 0,0818) + 0,126 × (0,3251 + 0,2207) + 0,108 × (0,4251 + 0,3251) + 0,110 × (0,5377 + 0,4251) + 0,112 × (0,6632 + 0,5377) + 0,082 × (0,7671 + 0,6632) + 0,084 × (0,8981 + 0,7671) + 0,040 × (0,9839 + 0,8981) + 0,005 × (1,0000 + 0,9839)).

$\boxed{g = 0{,}199.}$

c) Comparaison avec l'indice de Gini des salaires des femmes.

L'indice de Gini des salaires des femmes est 0,165, d'après l'énoncé.
L'indice de Gini des salaires des hommes est 0,199, comme on vient de le calculer.
Celui des hommes est plus élevé que celui des femmes : cela traduit une plus grande inégalité de salaires chez les agents masculins de l'état que chez les agents féminins de l'état.

On avait déjà remarqué une plus grande dispersion des salaires masculins : parmi les hauts salaires, il y a surtout des hommes, alors que, pour les bas salaires, les proportions d'hommes et de femmes sont sensiblement équivalentes.

Chapitre 3. Analyse univariée : paramètres de dispersion, paramètres de forme.

Enoncés.

Exercice 5. Taille des élèves.

Dans un collège, on a relevé la taille des élèves. On a obtenu les résultats suivants :

Taille (m)	1,10 - 1,30	1,30 - 1,40	1,40 - 1,50	1,50 - 1,60	1,60 - 1,80
Nombre	20	30	60	60	30

1°/ Représenter graphiquement la distribution : graphique différentiel et graphique intégral.
2°/ Déterminer les valeurs centrales de cette distribution : mode, moyenne, médiane.
3°/ Calculer la variance de la taille des élèves dans les deux cas suivants :
a) On suppose que les tailles, dans chaque classe de taille, sont concentrées au centre de la classe.
b) On suppose que la distribution est uniforme dans chaque classe.
4°/ Calculer la rapport des déciles.

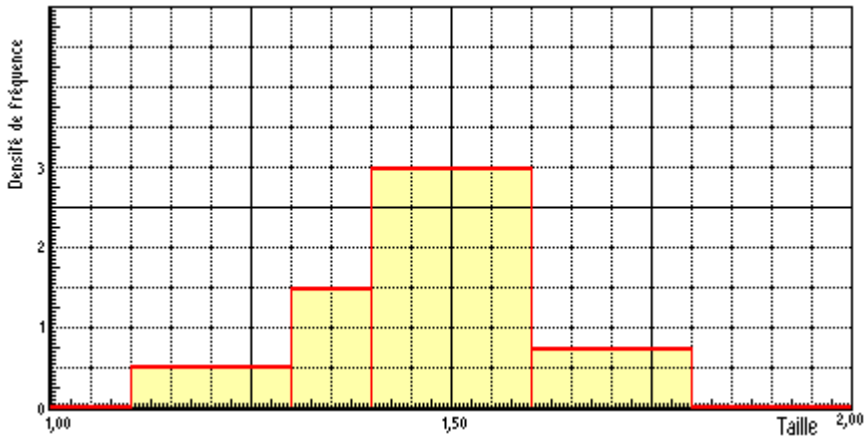
Solution.

1°/ Représentation graphique.

Pour représenter graphiquement la taille des élèves du collège étudié, il faut d'abord compléter le tableau des données par les densités de fréquences et par les fréquences cumulées :

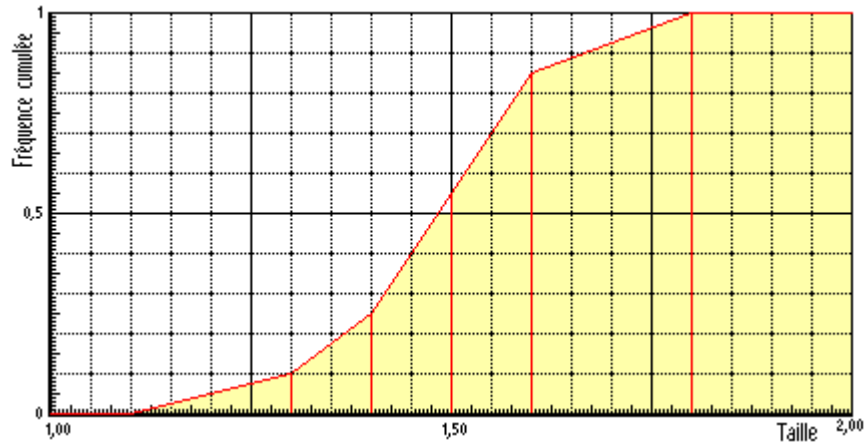
Taille (m)	Nombre	Fréquence	Densité de fréquence	Effectif cumulé	Fréquence cumulée
1,10 - 1,30	20	0,10	0,50	20	0,10
1,30 - 1,40	30	0,15	1,50	50	0,25
1,40 - 1,50	60	0,30	3,00	110	0,55
1,50 - 1,60	60	0,30	3,00	170	0,85
1,60 - 1,80	30	0,15	0,75	200	1,00

a) Graphique différentiel : histogramme des densités de fréquence.



b) Graphique intégral : fonction de répartition empirique.

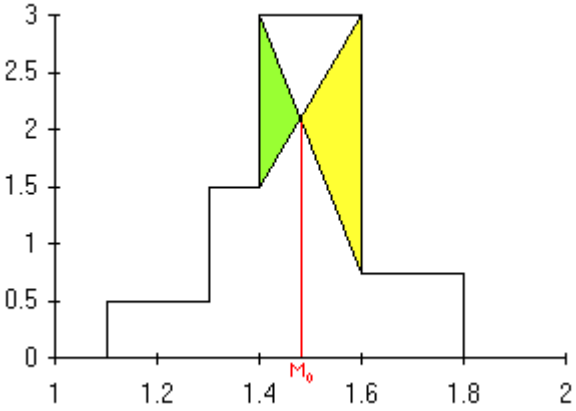
Taille (mètres) Limite supérieure de classe	Fréquence cumulée
1,10	0,00
1,30	0,10
1,40	0,25
1,50	0,55
1,60	0,85
1,80	1,00

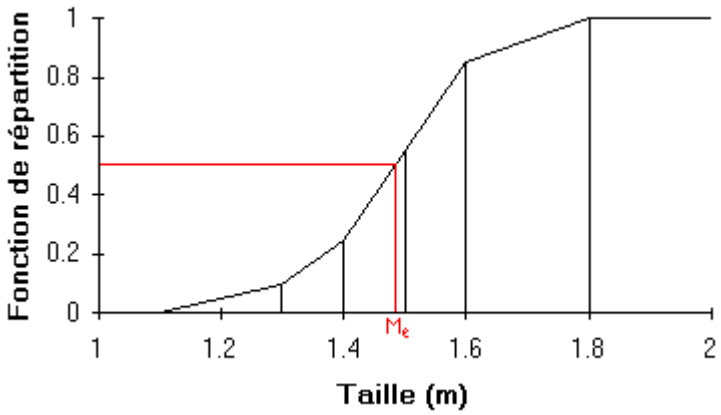


2°/ Paramètres de tendance centrale.

a) Mode et médiane.

Le mode et la médiane se déduisent des représentations graphiques précédentes.





La classe modale est la classe de plus grande densité de fréquence : c'est la classe [1,40 ; 1,60].
Les élèves ayant la plus grande densité de fréquence mesurent de 1,40 à 1,60 m.
La détermination du mode tient compte des classes adjacentes à la classe modale.

$$\frac{M_o - 1{,}40}{3 - 1{,}5} = \frac{1{,}60 - M_o}{3 - 0{,}75} = \frac{1{,}60 - 1{,}40}{6 - 2{,}25} = \frac{20}{375} = \frac{4}{75}$$

$$M_o = 1,\ 40 + 1{,}5 \times \frac{4}{75} = 1{,}40 + \frac{2}{25} = 1{,}48$$

$$\boxed{M_o = 1{,}48 \text{ m.}}$$

La médiane correspond à la valeur 0,50 de la fonction de répartition empirique :

$$M_e = 1{,}40 + (1{,}50 - 1{,}40) \times \frac{0{,}50 - 0{,}25}{0{,}55 - 0{,}25} = 1{,}40 + \frac{1}{12} = 1{,}48 \text{ m.}$$

$$\boxed{M_e = 1{,}48 \text{ m.}}$$

b) Moyenne.

La moyenne se calcule, en supposant la taille des élèves équirépartie à l'intérieur de chaque classe, par la formule :

moyenne = somme des centres de classes multipliés par les fréquences correspondantes

$$\overline{X} = 0{,}10 \times 1{,}20 + 0{,}15 \times 1{,}35 + 0{,}30 \times 1{,}45 + 0{,}30 \times 1{,}55 + 0{,}15 \times 1{,}70 = 1{,}4775$$

$\bar{X} = 1{,}48$ m.

3°/ Variance.

Tableau des calculs.

$x'_i = \frac{x_{i+1}+x_i}{2}$	n_i	$n_i\,x'_i$	$n_i\,x'^2_i$	$a_i = x_{i+1} - x_i$	$n_i\,a_i^2$
1,20	20	24,0	28,800	0,2	0,8
1,35	30	40,5	54,675	0,1	0,3
1,45	60	87,0	126,150	0,1	0,6
1,55	60	93,0	144,150	0,1	0,6
1,70	30	51,0	86,700	0,2	1,2
Total	$N = 200$	$\sum_{i=1}^{i=p} n_i\,x'_i = 295{,}5$	$\sum_{i=1}^{i=p} n_i\,x'^2_i = 440{,}475$		$\sum_{i=1}^{i=p} n_i\,a_i^2 = 3{,}5$

1. — Valeurs concentrées aux centres des classes.

La variance se calcule alors comme celle d'une variable discrète, par la formule :

$$s^2(X) = \frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{i=p} n_i\,x'^2_i - \frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{i=p} n_i\,x'_i\right)^2\right)$$

où N est l'effectif total, somme des n_i, et où les $x'_i = \frac{x_{i+1} + x_i}{2}$ sont les centres des classes $[x_i, x_{i+1}[$

$$s^2(X) = \frac{1}{200}\left(440{,}475 - \frac{1}{200}(295{,}5)^2\right) = 0{,}01936875 \text{ m}^2 = (0{,}139 \text{ m})^2$$

$$s^2(X) = 1{,}94 \times 10^{-2} \text{ m}^2$$

Cette variance, carré de l'écart-type, correspond à un écart-type de 0,139 m.

2. — Valeurs réparties uniformément dans les classes.

La variance est alors la somme de deux termes :
– la variance interclasse $s_b^2(X)$ traduit la variation du centre de classe : on vient de la calculer, elle vaut 0,01936875 m².
– la variance intraclasse $s_w^2(X)$ est la moyenne de la variance de X à l'intérieur des classes.

Or on sait que la variance d'une variable statistique uniformément répartie dans un intervalle de longueur a_i est $\frac{a_i^2}{12}$ (voir Cours).

Donc la variance intraclasse est $\frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{i=p} n_i \frac{a_i^2}{12}\right) = \frac{3{,}5}{2400} = \frac{7}{4800} \approx 1{,}45833 \times 10^{-3}$ m².

$$s^2(X) = (1{,}937 + 0{,}146) \times 10^{-2} \text{ m}^2 = 2{,}08 \times 10^{-2} \text{ m}^2 = (0{,}160 \text{ m})^2$$

$$\boxed{s^2(X) = 2{,}08 \times 10^{-2}\ \text{m}^2}$$

Cette variance correspond à un écart-type de 0,160 m.

4°/ Rapport des déciles.

Les 10 % d'élèves les plus grands correspondent au neuvième décile D_9, abscisse du point d'ordonnée 0,90 dans le diagramme de la fonction de répartition empirique :

$$D_9 = 1{,}60 + (1{,}80 - 1{,}60) \times \frac{0{,}90 - 0{,}85}{1{,}00 - 0{,}85} = 1{,}60 + \frac{1}{15} = 1{,}67 \text{ m.}$$

$$\boxed{\text{10 \% des élèves mesurent plus de 1,67 m.}}$$

Les 10 % d'élèves les plus petits correspondent au premier décile D_1, abscisse du point d'ordonnée 0,10 dans le diagramme de la fonction de répartition empirique :

$$D_1 = 1{,}30 \text{ m}$$

$$\boxed{\text{10 \% des élèves mesurent moins de 1,30 m.}}$$

Le rapport des déciles est le rapport $d = \frac{D_9}{D_1} = \frac{1{,}67}{1{,}30} = 1{,}28$.

$$\boxed{d = \frac{D_9}{D_1} = 1{,}28.}$$

Chapitre 4. Analyse bivariée : représentation graphique.

Exercices

Exercice 1. Statut vs branche d'activité.
Exercice 2. Nombre de pièces vs superficie.
Exercice 3. Poids vs taille.
Exercice 4. Mariage vs date.
Exercice 5. Variable relative.

Exercice 1. Statut vs branche d'activité.

Représenter graphiquement les données suivantes représentant la répartition de la population active d'une commune, en mettant en évidence les diverses branches :

Statut / *Branche*	*Salariés*	*Patrons*	*Travailleurs familiaux*	Total
Agriculture	95	30	125	250
Industrie	160	25	100	285
Commerce	100	40	90	230
Fonction Publique	60	0	0	60
Services	80	15	70	165
Total	495	110	385	990

Solution

HAUT

Exercice 2. Nombre de pièces vs superficie.

X est le nombre de pièces et *Y* la surface en m² d'un appartement construit entre 1958 et 1962. Représenter graphiquement les données suivantes :

$X \backslash Y$	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90	90-100	100-160
1	1	4	2	1						
2	1	12	22	8	3	1	1			
3			1	15	64	23	10	5		
4				1	10	55	24	10	7	4
5						4	13	12	6	6
6							1	2	2	7
7									2	1
8										2

Solution

HAUT

Exercice 3. Poids vs taille.

Représenter graphiquement les données du tableau ci-dessous, qui donne la répartition de 100 individus suivant leurs poids et leurs tailles (X désigne la masse corporelle en kg, Y la taille en cm).

$Y \backslash X$	$40 < x < 45$	$45 < x < 50$	$50 < x < 55$	$55 < x < 60$
$150 < y < 155$	20	9	1	0
$155 < y < 160$	2	18	4	1
$160 < y < 165$	0	5	12	6
$165 < y < 170$	0	1	7	14

Solution

HAUT

Exercice 4. Mariage vs date.

Représenter graphiquement les données suivantes : mariages en France entre 1970 et 1973, chaque mois de l'année.

	1970	1971	1972	1973
janvier	17 716	19 001	18 888	16 906
février	19 004	19 642	19 557	19 230
mars	28 308	24 955	29 206	29 293
avril	38 263	45 716	46 534	44 216
mai	22 347	23 096	21 156	19 766
juin	42 649	42 658	43 854	52 791
juillet	50 818	61 472	61 297	48 296
août	45 813	35 514	36 383	36 536
septembre	36 557	39 849	47 514	46 261
octobre	36 667	38 634	34 769	31 897
novembre	21 850	21 101	20 618	19 947
décembre	33 694	32 778	36 745	35 598
Total	393 686	406 416	416 521	400 737

Solution

HAUT

Exercice 5. Variable relative.

Nous donnons, en pourcentage, la répartition de la population active suivant le secteur d'activité, dans quelques pays :

	primaire	secondaire	tertiaire
Allemagne de l'Ouest	24	44	32
USA	13	36	51
France	28	37	35
Grande Bretagne	5	49	46
Italie	42	32	26
URSS	43	31	26

Représenter graphiquement ces données dans un diagramme triangulaire.

Solution

HAUT

Chapitre 4. Analyse bivariée : représentation graphique.

Enoncés.

Exercice 1. Statut vs branche d'activité.

Représenter graphiquement les données suivantes représentant la répartition de la population active d'une commune, en mettant en évidence les diverses branches :

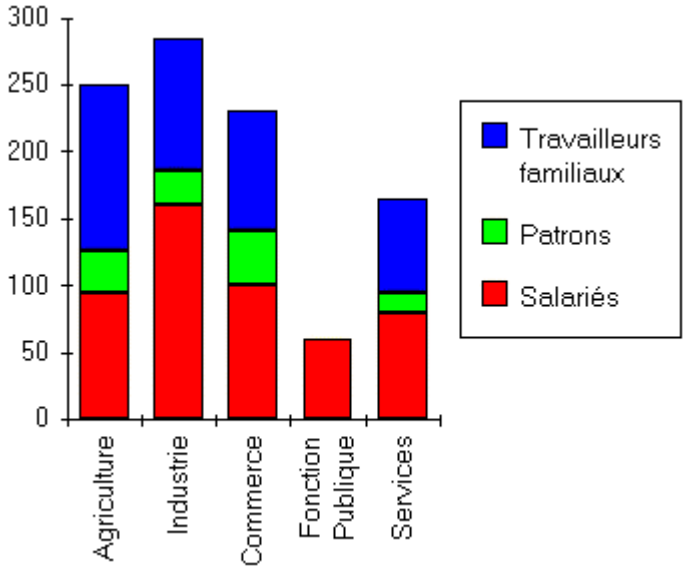
Statut / *Branche*	*Salariés*	*Patrons*	*Travailleurs familiaux*	Total
Agriculture	95	30	125	250
Industrie	160	25	100	285
Commerce	100	40	90	230
Fonction Publique	60	0	0	60
Services	80	15	70	165
Total	495	110	385	990

Solution.

Cet exemple de variables qualitatives est celui du cours.
La question qu'on se pose pour un individu de la population active de la commune en question est : "Dans quelle branche travaille-t-il et quel est son statut ?".
La réponse est double et on répond, non par des nombres, mais par des modalités qualitatives.

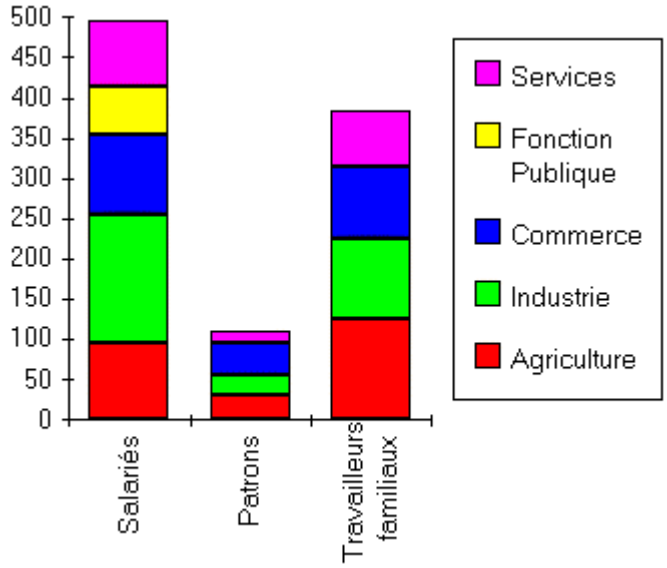
Les données seront représentées par un diagramme en **tuyaux d'orgue** : suivant qu'on s'intéresse plus à la distribution dans chaque ligne ou à la distribution dans chaque colonne, on représentera un tuyau d'orgue pour chaque branche d'activité, ou un tuyau d'orgue pour chaque statut salarial.
Dans chaque tuyau d'orgue correspondant à une modalité d'un caractère, on distinguera les diverses modalités de l'autre caractère par des couleurs différentes ou des hachures différentes.
Les diagrammes qu'on obtient sont les suivants.

Répartition par statut dans chaque branche d'activité :



Sur ce graphique, on voit, par exemple, que :
— C'est l'industrie qui emploie le plus de monde, et la fonction publique qui en emploie le moins.
— L'industrie utilise plus de salariés que de travailleurs familiaux, alors que, dans l'agriculture, c'est l'inverse.

Répartition par branche d'activité dans chaque statut salarial :



Sur ce graphique, on voit, par exemple, que :
— Les salariés sont, au total, plus nombreux que les travailleurs familiaux, eux-mêmes plus nombreux que les patrons.
— Les salariés sont les plus nombreux dans l'industrie, les travailleurs familiaux sont les plus nombreux dans l'agriculture, les patrons sont les plus nombreux dans le commerce.

Chapitre 4. Analyse bivariée : représentation graphique.

Enoncés.

Exercice 2. Nombre de pièces vs superficie.

X est le nombre de pièces et *Y* la surface en m² d'un appartement construit entre 1958 et 1962. Représenter graphiquement les données suivantes :

X \ Y	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90	90-100	100-160
1	1	4	2	1						
2	1	12	22	8	3	1	1			
3			1	15	64	23	10	5		
4				1	10	55	24	10	7	4
5						4	13	12	6	6
6							1	2	2	7
7									2	1
8										2

Solution.

La variable (*X*, *Y*) est à valeurs dans N × R.
Pour la représenter graphiquement, on peut envisager deux méthodes :

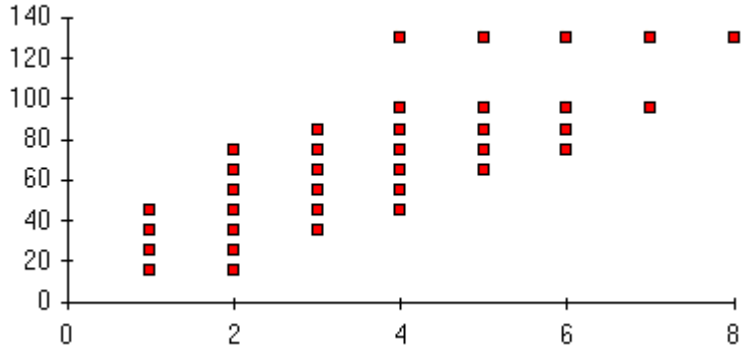
1 e méthode.

Pour chaque valeur du nombre de pièces, on trace un histogramme des **densités d'effectifs** de la surface en m² : le problème est alors qu'on doit comparer graphiquement des valeurs de $\frac{1}{60} = 1{,}7 \times 10^{-2}$ (appartements de 7 pièces de 100 à 160 m²), jusqu'à $\frac{64}{10} = 6{,}4$ (appartements de 3 pièces de 50 à 60 m²), soit un rapport de 1 à 360 environ, ce qui n'est pas accessible à l'oeil.
Nous n'utiliserons donc pas cette méthode, qui, bien que la plus rigoureuse, n'est pas assez "parlante".

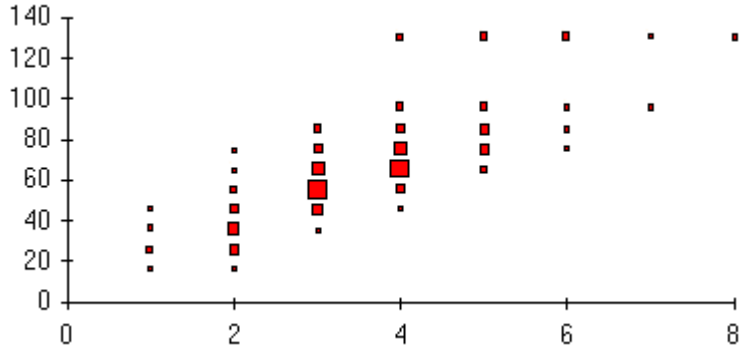
2 e méthode.

La deuxième méthode consiste à représenter chaque couple (x_i, y_i) de valeurs par une tache dans $\mathbb{R}^2$, de surface plus ou moins proportionnelle à l'effectif.
Dans cette représentation, x_i est le nombre de pièces d'un appartement appartenant à la classe de centre y_i.

Le graphique obtenu avec Excel (**nuage de points**) avec la même surface pour chaque point est le suivant :



On modifie le graphique précédent en augmentant les surfaces lorsque l'effectif augmente :



Ce graphique a l'avantage de pouvoir se lire dans les deux sens : on voit comment varie la surface pour un nombre de pièces donné (ligne verticale) et on voit comment varie le nombre de pièces pour une surface donnée (ligne horizontale).

Chapitre 4. Analyse bivariée : représentation graphique.

Enoncés.

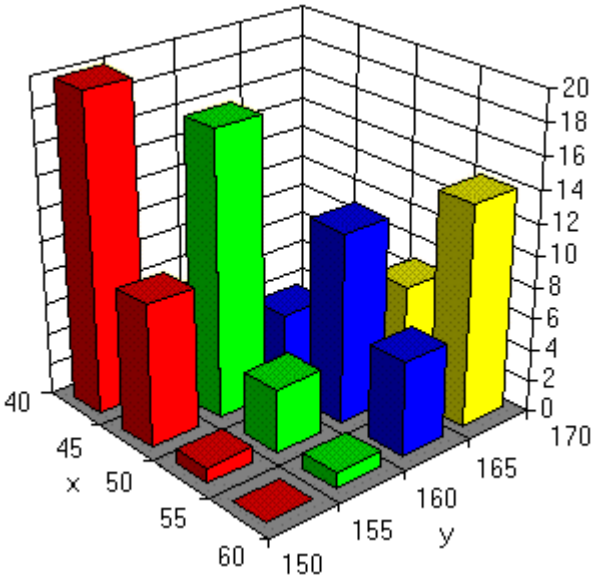
Exercice 3. Poids vs taille.

Représenter graphiquement les données du tableau ci-dessous, qui donne la répartition de 100 individus suivant leurs poids et leurs tailles (X désigne la masse corporelle en kg, Y la taille en cm).

$Y \backslash X$	$40 < x < 45$	$45 < x < 50$	$50 < x < 55$	$55 < x < 60$
$150 < y < 155$	20	9	1	0
$155 < y < 160$	2	18	4	1
$160 < y < 165$	0	5	12	6
$165 < y < 170$	0	1	7	14

Solution.

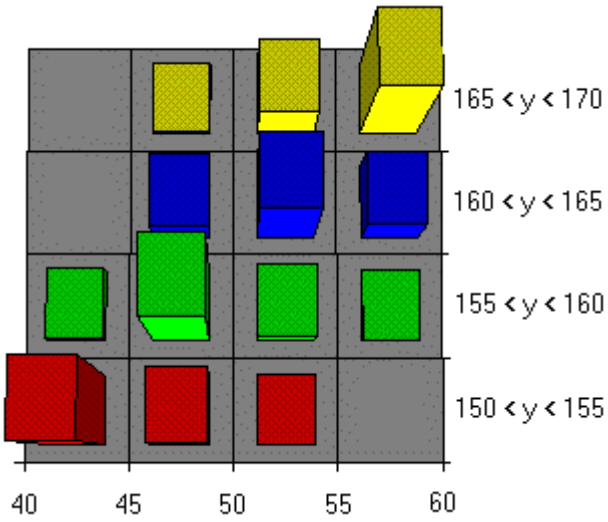
La représentation la plus "parlante" est un histogramme 3D :



Ayant gradué les axes de masse corporelle (x en kg) et de taille (y en cm), on porte, dans chaque carré correspondant à une classe conjointe de masse corporelle et de taille, une barre ayant pour longueur l'effectif de la classe.

L'inconvénient de cette représentation est que de petites barres peuvent être masquées par des barres plus grandes situées en avant.
Cet inconvénient reste faible si l'on s'intéresse à l'allure globale du graphique, qui montre (grandes barres) que, globalement, la masse corporelle et la taille varient de façon conjointe.

On peut utiliser aussi une représentation par nuages de points ayant pour abscisses les centres des classes de masse corporelle et, pour ordonnées, les centres des classes de taille.
On donne alors à chaque "point" dans R^2, une surface ou un "volume" proportionnel à l'effectif de la classe produit.



L'analyse plus précise des relations entre taille et masse corporelle sera faite ultérieurement (Séance 9, Exercice 1).

Chapitre 4. Analyse bivariée : représentation graphique.

Enoncés.

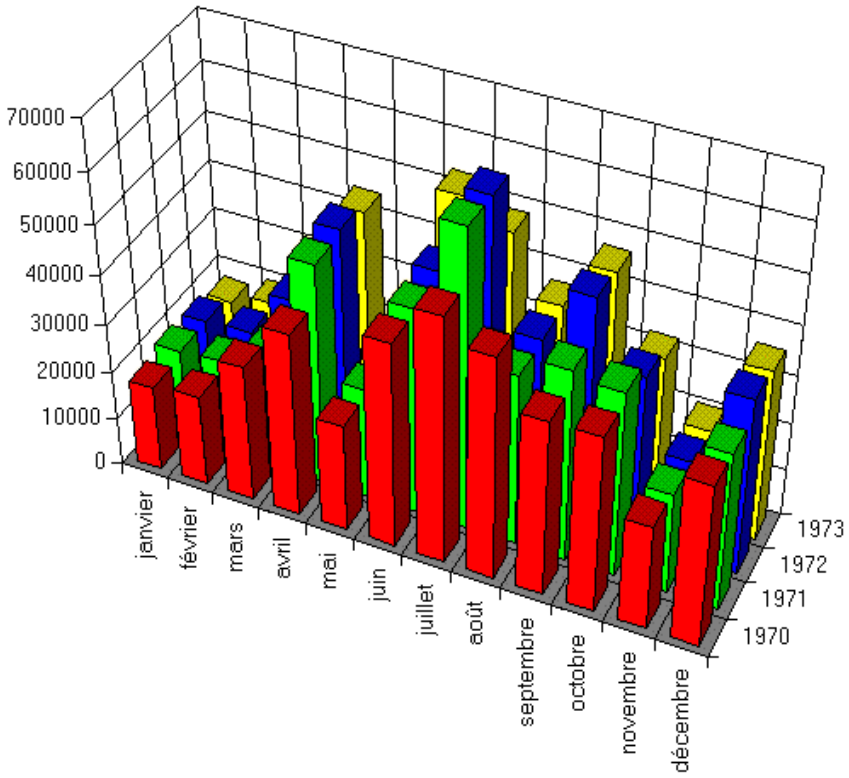
Exercice 4. Mariage vs date.

Représenter graphiquement les données suivantes : mariages en France entre 1970 et 1973, chaque mois de l'année.

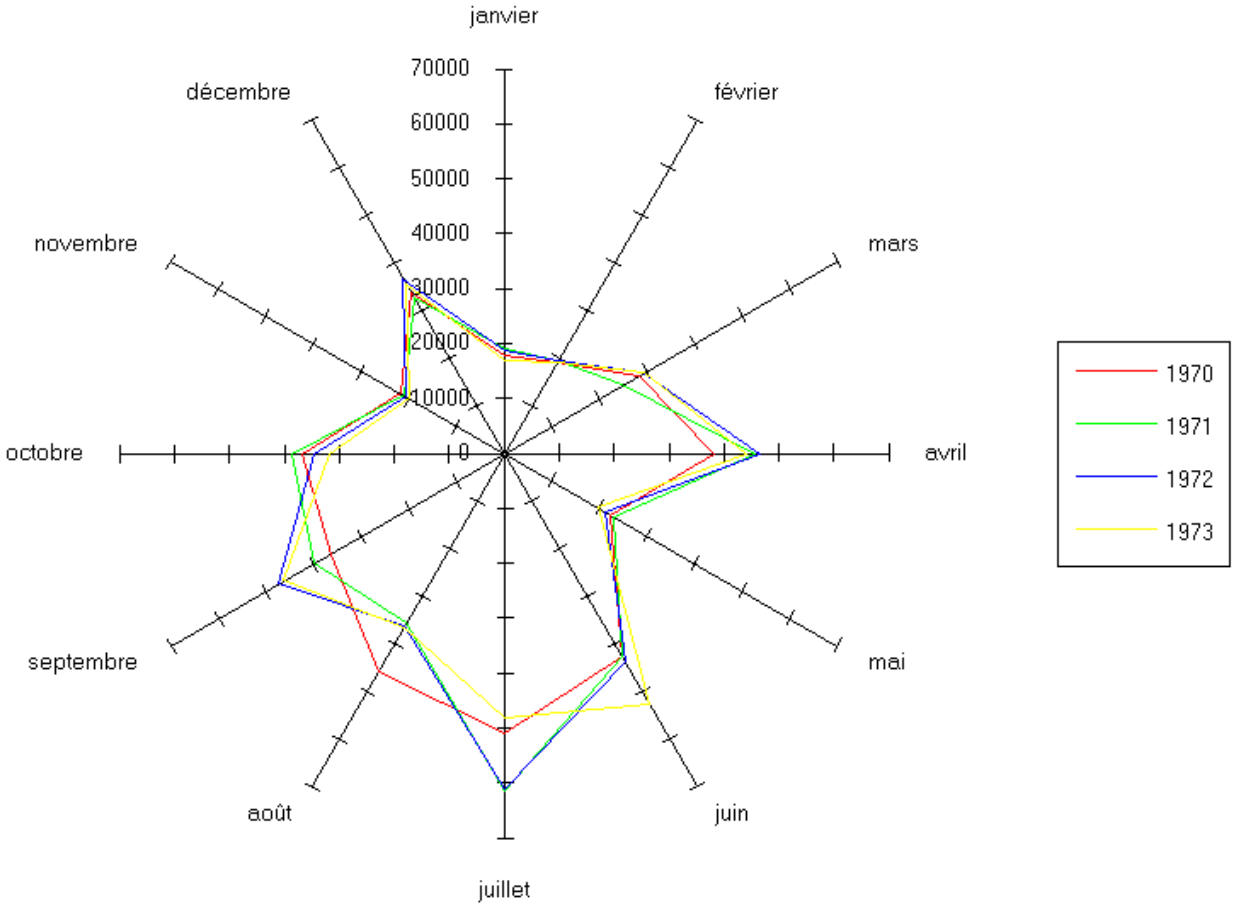
	1970	1971	1972	1973
janvier	17 716	19 001	18 888	16 906
février	19 004	19 642	19 557	19 230
mars	28 308	24 955	29 206	29 293
avril	38 263	45 716	46 534	44 216
mai	22 347	23 096	21 156	19 766
juin	42 649	42 658	43 854	52 791
juillet	50 818	61 472	61 297	48 296
août	45 813	35 514	36 383	36 536
septembre	36 557	39 849	47 514	46 261
octobre	36 667	38 634	34 769	31 897
novembre	21 850	21 101	20 618	19 947
décembre	33 694	32 778	36 745	35 598
Total	393 686	406 416	416 521	400 737

Solution.

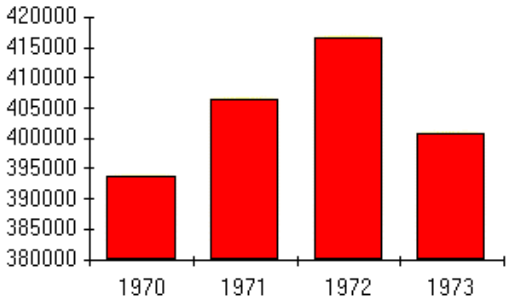
On pourrait envisager une représentation par histogramme 3D :



Mais, s'agissant d'une variable statistique (le nombre de mariages) évoluant dans le temps, il vaut mieux utiliser une représentation en étoile (radar), qui permet de suivre sur une ligne l'évolution du nombre de mariages, tout en permettant des comparaisons par mois d'une année sur l'autre, sur les rayons de l'étoile.



Les comparaisons d'une année sur l'autre pour le même mois peuvent alors se faire sur chaque ligne radar, ou rayon de l'étoile.
Pour la comparaison des nombres totaux de mariages par année, une représentation par histogramme (ou tuyaux d'orgues) suffit :

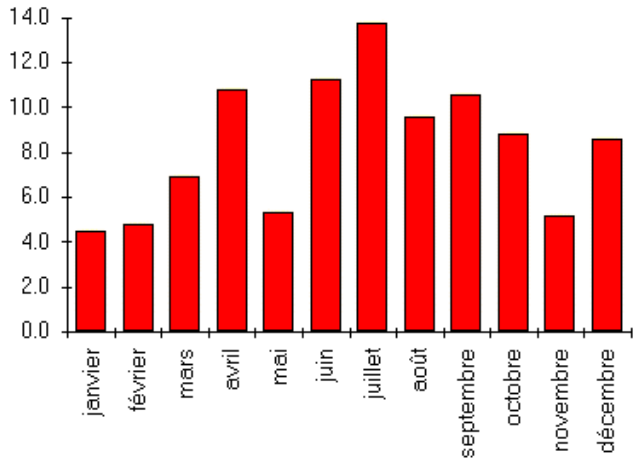


On y voit nettement qu'après avoir régulièrement augmenté de 1970 à 1972, le nombre total de mariages a chuté en 1973.
Cette évolution ne se retrouve, à l'échelle des mois, qu'en avril et en septembre.

Enfin, pour étudier l'évolution du nombre de mariages au cours de l'année suivant le mois, on utilisera un histogramme, ou un diagramme en tuyaux d'orgue, des pourcentages de mariages pour chaque mois.
On commence par compléter le tableau des données par deux colonnes donnant :
– les totaux par mois,

– les pourcentages rapportés au nombre total de mariages (1 617 360) :

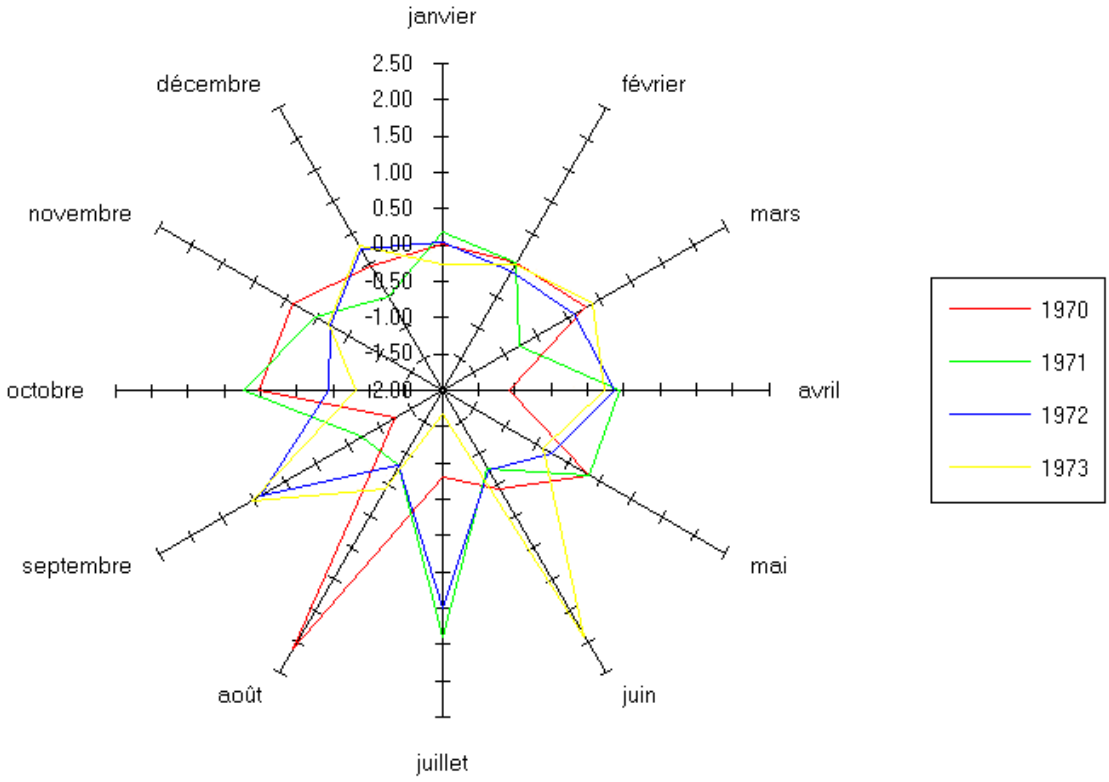
	1970	1971	1972	1973	Total	Pourcent
janvier	17 716	19 001	18 888	16 906	72 511	4,5
février	19 004	19 642	19 557	19 230	77 433	4,8
mars	28 308	24 955	29 206	29 293	111 762	6,9
avril	38 263	45 716	46 534	44 216	174 729	10,8
mai	22 347	23 096	21 156	19 766	86 365	5,3
juin	42 649	42 658	43 854	52 791	181 952	11,2
juillet	50 818	61 472	61 297	48 296	221 883	13,7
août	45 813	35 514	36 383	36 536	154 246	9,5
septembre	36 557	39 849	47 514	46 261	170 181	10,5
octobre	36 667	38 634	34 769	31 897	141 967	8,8
novembre	21 850	21 101	20 618	19 947	83 516	5,2
décembre	33 694	32 778	36 745	35 598	138 815	8,6
Total	393 686	406 416	416 521	400 737	1 617 360	



Ce graphique permet de suivre l'évolution du nombre moyen de mariages par mois, au cours d'une année.

Le calcul des moyennes permet de dresser le tableau des différences par rapport à cette moyenne dans les annnées étudiées et de représenter graphiquement en radar ces différences, ce qui permet de situer les différences notées dans la première représentation.

	1970	1971	1972	1973
janvier	0.02	0.19	0.05	-0.26
février	0.04	0.05	-0.09	0.01
mars	0.28	-0.77	0.10	0.40
avril	-1.08	0.45	0.37	0.23
mai	0.34	0.34	-0.26	-0.41
juin	-0.42	-0.75	-0.72	1.92
juillet	-0.81	1.41	1.00	-1.67
août	2.10	-0.80	-0.80	-0.42
septembre	-1.24	-0.72	0.89	1.02
octobre	0.54	0.73	-0.43	-0.82
novembre	0.39	0.03	-0.21	-0.19
décembre	-0.02	-0.52	0.24	0.30



Sur ce graphique, on voit, par exemple, que 1970 est une année moyenne ou en dessous de la moyenne, sauf pour le mois d'août qui est à deux points de pourcentage au-dessus de la moyenne.
On y voit aussi que les mois de 1973 sont souvent moyens ou légèrement en dessous de la moyenne, mais avec un mois de juin exceptionnellement au-dessus de la moyenne et un mois de juillet exceptionnellement en-dessous de la moyenne.

Chapitre 4. Analyse bivariée : représentation graphique.

Enoncés.

Exercice 5. Variable relative.

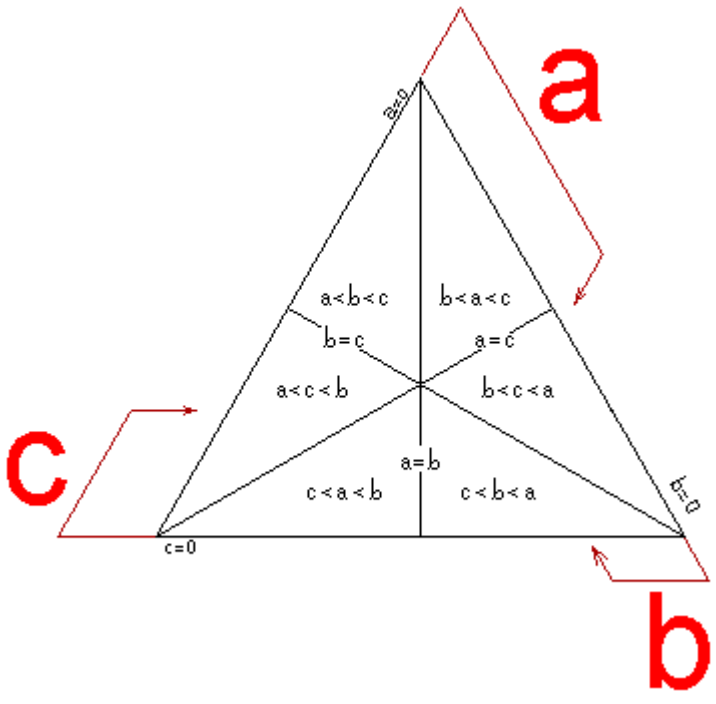
Nous donnons, en pourcentage, la répartition de la population active suivant le secteur d'activité, dans quelques pays :

	primaire	secondaire	tertiaire
Allemagne de l'Ouest	24	44	32
USA	13	36	51
France	28	37	35
Grande Bretagne	5	49	46
Italie	42	32	26
URSS	43	31	26

Représenter graphiquement ces données dans un diagramme triangulaire.

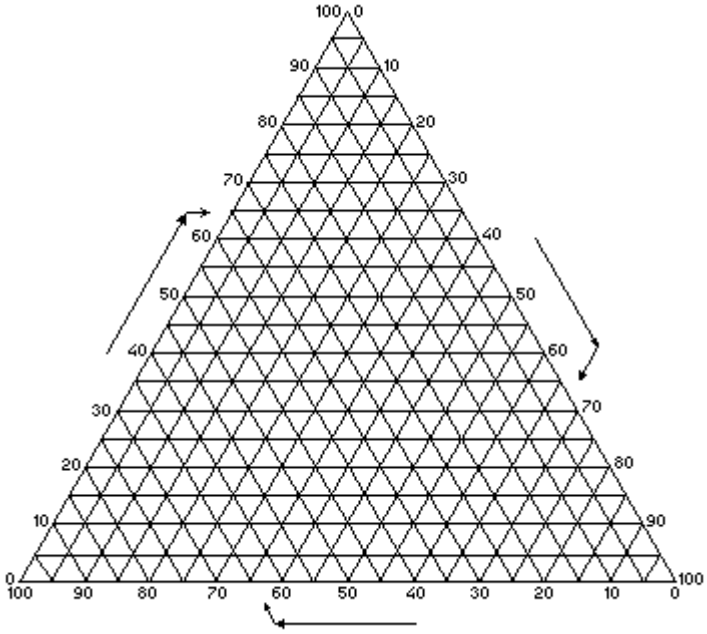
Solution.

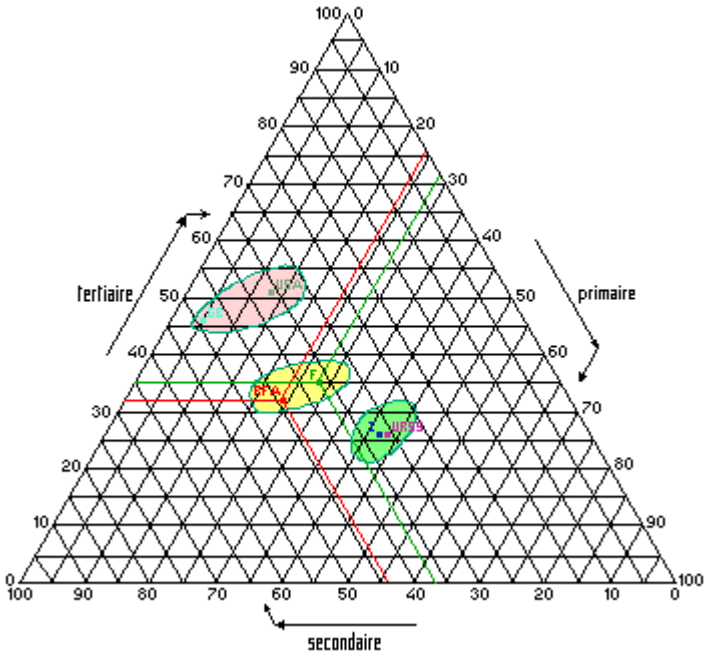
La représentation triangulaire est possible parce que la somme des pourcentages, sur chaque ligne, est la même, elle est constante et égale à 100.



Chaque pays sera représenté, dans ce graphique, par un point.

On mettra :
– en *a*, le pourcentage de la population active occupant un emploi dans le secteur primaire,
– en *b*, le pourcentage de la population active occupant un emploi dans le secteur secondaire,
– en *c*, le pourcentage de la population active occupant un emploi dans le secteur tertiaire.





Interprétation.

Les six pays peuvent être regroupés en trois catégories :
— les pays à dominante primaire (agriculture) : Italie, U.R.S.S.
— les pays à primaire faible et dominante secondaire (industrie), Grande Bretagne, ou tertiaire (services) : U.S.A.,
— les pays intermédiaires : Allemagne de l'Ouest, France.

Chapitre 5. Analyse bivariée : caractéristiques marginales et conditionnelles.

Exercices

Exercice 1. Variables à deux valeurs.
Exercice 2. Nombre d'enfants et catégorie socio-professionnelle.

Exercice 1. Variables à deux valeurs.

X et *Y* représentent deux variables statistiques qui prennent les valeurs 0 et 1.
Pour *n* individus, on recueille *a* observations du type (0, 0), *b* observations du type (0, 1), *c* observations du type (1, 0), *d* observations du type (1, 1).
Cette distribution statistique est donnée par le tableau suivant :

$X \backslash Y$	0	1
0	*a*	*b*
1	*c*	*d*

Solution

Donner, en fonction de *a*, *b*, *c*, *d*, *n* (*n* = *a* + *b* + *c* + *d*) :

1°/ Les moyennes et variances marginales,
2°/ Les moyennes et variances conditionnées,
3°/ La covariance,
4°/ Le coefficient de corrélation linéaire r_{XY},
5°/ Les rapports de corrélation $\eta^2_{X|Y}$ et $\eta^2_{Y|X}$. Comparer avec r^2_{XY}.

HAUT

Exercice 2. Nombre d'enfants et catégorie socio-professionnelle.

Du recensement général de la population française de 1982, nous pouvons extraire le tableau suivant :

X : nombre d'enfants dans la famille (enfants de 0 à 16 ans)

Y : catégorie socio-professionnelle de l'homme (INSEE 1983).

Les familles étudiées comprennent un couple dont la femme est inactive.

X \ Y (en milliers)	agriculteurs exploitants	artisans commerçants	cadres	professions intermédiaires	employés	ouvriers
0	101	179	230	259	144	500
1	39	92	123	156	97	378
2	36	90	142	173	102	418
3	17	39	59	78	54	297
4	8	14	15	19	20	193

Solution

1°/ Donner une représentation graphique de la variable statistique *X*.

2°/ Donner une représentation graphique de la variable statistique *Y*.

3°/ Déterminer la variance $s^2(X)$.

4°/ La variable *X* conditionnée par *Y* (les six modalités de *Y* sont notées M_j) est donnée par :

Y	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6
$\overline{X}_j$	0,965	?	1,132	1,185	1,302	1,611

a) Calculer la moyenne conditionnée manquante.

b) Déterminer le rapport de corrélation de *X* en *Y*. Que peut-on en conclure ?

HAUT

Chapitre 5. Analyse bivariée : caractéristiques marginales et conditionnelles.

Enoncés.

Exercice 1. Variables à deux valeurs.

X et *Y* représentent deux variables statistiques qui prennent les valeurs 0 et 1.
Pour *n* individus, on recueille *a* observations du type (0, 0), *b* observations du type (0, 1), *c* observations du type (1, 0), *d* observations du type (1, 1).
Cette distribution statistique est donnée par le tableau suivant :

$X \setminus Y$	0	1
0	*a*	*b*
1	*c*	*d*

Donner, en fonction de *a*, *b*, *c*, *d*, *n* ($n = a + b + c + d$) :

1°/ Les moyennes et variances marginales,
2°/ Les moyennes et variances conditionnées,
3°/ La covariance,
4°/ Le coefficient de corrélation linéaire r_{XY},
5°/ Les rapports de corrélation $\eta^2_{X|Y}$ et $\eta^2_{Y|X}$. Comparer avec r^2_{XY}.

Solution.

1°/ Moyennes et variances marginales.

Les distributions marginales s'obtiennent en faisant les sommes par ligne et par colonne :

$X \setminus Y$	0	1	*Total*
0	*a*	*b*	*a* + *b*
1	*c*	*d*	*c* + *d*
Total	*a* + *c*	*b* + *d*	*n*

$\sum n_{i.} x_i = (a + b) \times 0 + (c + d) \times 1 = c + d$
$\sum n_{i.} x_i^2 = (a + b) \times 0 + (c + d) \times 1 = c + d$
$\sum n_{.j} y_j = (a + c) \times 0 + (b + d) \times 1 = b + d$
$\sum n_{.j} y_j^2 = (a + c) \times 0 + (b + d) \times 1 = b + d$

La moyenne marginale de *X* est donnée par la formule $\overline{X} = \frac{1}{n} \sum n_{i.}\, x_i = \frac{c+d}{n}$.
C'est la fréquence de la valeur 1 de *X*.

La moyenne marginale de *Y* est donnée par la formule $\overline{Y} = \frac{1}{n} \sum n_{.j}\, y_j = \frac{b+d}{n}$.
C'est la fréquence de la valeur 1 de *Y*.

La variance marginale de *X* est donnée par la formule :
$s^2(X) = \frac{1}{n}\left(\sum n_{i.}\, x_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum n_{i.}\, x_i \right)^2 \right) = \frac{1}{n}\left(c + d - \frac{1}{n}(c+d)^2 \right) = \frac{c+d}{n^2}(n-c-d) = \frac{(a+b)(c+d)}{n^2}$.
C'est le **produit des effectifs divisé par le carré de la somme des effectifs**.
Cette règle est générale pour la variance de toute variable statistique dont les valeurs sont 0 et 1.
On observe que la variance est aussi le produit des fréquences des valeurs 0 et 1.

De même, la variance marginale de *Y* est donnée par la formule $s^2(Y) = \frac{(a+c)(b+d)}{n^2}$.

2°/ Moyennes et variances conditionnées.

Les moyennes conditionnées de *X* par *Y* sont :

$\overline{X}_{Y=0} = \frac{c}{a+c}$, $\overline{X}_{Y=1} = \frac{d}{b+d}$.

Les moyennes conditionnées de *Y* par *X* sont :

$\overline{Y}_{X=0} = \frac{b}{a+b}$, $\overline{Y}_{X=1} = \frac{d}{c+d}$.

Les variances conditionnées de *X* par *Y* sont les produits des fréquences :

$s_{Y=0}^2(X) = \frac{ac}{(a+c)^2}$; $s_{Y=1}^2(X) = \frac{bd}{(b+d)^2}$.

Les variances conditionnées de *Y* par *X* sont les produits des fréquences :

$s_{X=0}^2(Y) = \frac{ab}{(a+b)^2}$; $s_{X=1}^2(Y) = \frac{cd}{(c+d)^2}$.

3°/ Covariance.

La covariance de *X* et *Y* est donnée par la formule :

$Cov(X, Y) = \frac{1}{n}\left(\sum n_{ij}\, x_i\, y_j - \frac{1}{n}\left(\sum n_{i.}\, x_i \right)\left(\sum n_{.j}\, y_j \right) \right)$

$\sum n_{ij}\, x_i\, y_j = d$; $\sum n_{i.}\, x_i = c + d$; $\sum n_{.j}\, y_j = b + d$.

$Cov(X, Y) = \frac{1}{n^2}\,(n\,d - (c+d)(b+d)) = \frac{1}{n^2}(d\,(n-b-d) - c\,(b+d)) = \frac{1}{n^2}\,(d\,(a+c) - c\,b - c\,d) =$

$\frac{ad-bc}{n^2}$.

4°/ Coefficient de corrélation linéaire.

Le coefficient de corrélation linéaire r_{XY} est donné par la formule $r_{XY} = \frac{Cov(X,Y)}{s(X)s(Y)} = \frac{ad-bc}{\sqrt{(a+b)(a+c)(d+b)(d+c)}}$.

5°/ Rapports de corrélation.

Rappelons que le "**théorème de la variance conditionnée**" donne la variance marginale de *Y* par la formule :

$$s^2(Y) = s_w{}^2(Y) + s_b{}^2(Y)$$

formule dans laquelle :

— $s_w{}^2(Y)$, variance intra-population, est la moyenne des variances conditionnelles de *Y*,

— $s_b{}^2(Y)$, variance inter-population, est la variance de la moyenne conditionnelle de *Y* : c'est la part de la variance de *Y* expliquée par la régression de *Y* en *X*.

Le rapport de corrélation $\eta^2_{Y|X}$ est donné par la formule $\eta^2_{Y|X} = \frac{s_b{}^2(Y)}{s^2(Y)}$.

Il donne le pourcentage de variance de *Y* expliqué par la régression de *Y* en *X*.

$$s_b{}^2(Y) = \frac{1}{n}\sum n_{i.}(\overline{Y}_{X=i} - \overline{Y})^2 = \frac{1}{n}\left(\sum n_{i.}\overline{Y}_{X=i}{}^2 - \frac{1}{n}\left(\sum n_{i.}\overline{Y}_{X=i}\right)^2\right)$$

$$= \frac{1}{n}\left((a+b)\left(\frac{b}{a+b} - \frac{b+d}{n}\right)^2 + (c+d)\left(\frac{d}{c+d} - \frac{b+d}{n}\right)^2\right)$$

$$= \frac{1}{n}\left((a+b)\frac{(nb-(a+b)(b+d))^2}{n^2(a+b)^2} + (c+d)\frac{(nd-(c+d)(b+d))^2}{n^2(c+d)^2}\right)$$

$$= \frac{1}{n^3}\left(\frac{(b(c+d)-d(a+b))^2}{a+b} + \frac{(d(a+b)-b(c+d))^2}{c+d}\right)$$

$$= \frac{1}{n^3}\left(\frac{(bc-da)^2}{a+b} + \frac{(da-bc)^2}{c+d}\right)$$

$$= \frac{(ad-bc)^2}{n^3}\left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{c+d}\right)$$

$$= \frac{(ad-bc)^2}{n^2(a+b)(c+d)}$$

$$s^2(Y) = \frac{(a+c)(b+d)}{n^2}$$

$$\eta^2_{Y|X} = \frac{s_b{}^2(Y)}{s^2(Y)} = \frac{(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)} = r_{XY}{}^2.$$

Le rapport de corrélation de *Y* en *X*, est le carré du coefficient de corrélation linéaire, appelé aussi le **coefficient de détermination**.

Pour calculer $s_b{}^2(X) = \frac{1}{n}\sum n_{.j}(\overline{X}_{Y=j} - \overline{X})^2$, il suffit d'échanger les lettres *b* et *c*, cet échange permute les rôles de *X* et *Y* :

$$s_b{}^2(X) = \frac{(ad-bc)^2}{n^2(a+c)(b+d)}$$

$$s^2(X) = \frac{(a+b)(c+d)}{n^2}$$

$$\eta^2_{X|Y} = \frac{s_b{}^2(X)}{s^2(X)} = \frac{(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)} = r_{XY}{}^2.$$

Le rapport de corrélation de *X* en *Y*, est, lui aussi, le carré du coefficient de corrélation linéaire.

$$\boxed{\eta^2_{Y|X} = \eta^2_{X|Y} = r_{XY}{}^2.}$$

En réalité, pour chacune des deux valeurs de *X*, nous avons deux points, définis par deux valeurs de *Y* et un point moyen entre les deux.
Comme il n'y a que deux valeurs de *X*, il y a seulement deux points moyens pour définir la ligne de régression et pour définir la droite de régression : **la droite de régression coïncide avec la ligne de régression joignant les deux points moyens**.
Les deux prédicteurs de *Y* définis par les variables statistiques $\overline{z_{|x}}$ (courbe de régression) et $\Delta_{Y|X}$ (régression linéaire) fournissent la même estimation de *Y*.

Chapitre 5. Analyse bivariée : caractéristiques marginales et conditionnelles.

Enoncés.

Exercice 2. Nombre d'enfants et catégorie socio-professionnelle.

Du recensement général de la population française de 1982, nous pouvons extraire le tableau suivant :

X : nombre d'enfants dans la famille (enfants de 0 à 16 ans)

Y : catégorie socio-professionnelle de l'homme (INSEE 1983).

Les familles étudiées comprennent un couple dont la femme est inactive.

X \ Y (en milliers)	agriculteurs exploitants	artisans commerçants	cadres	professions intermédiaires	employés	ouvriers
0	101	179	230	259	144	500
1	39	92	123	156	97	378
2	36	90	142	173	102	418
3	17	39	59	78	54	297
4	8	14	15	19	20	193

1°/ Donner une représentation graphique de la variable statistique *X*.

2°/ Donner une représentation graphique de la variable statistique *Y*.

3°/ Déterminer la variance $s^2(X)$.

4°/ La variable *X* conditionnée par *Y* (les six modalités de *Y* sont notées M_j) est donnée par :

Y	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6
$\overline{X}_j$	0,965	?	1,132	1,185	1,302	1,611

a) Calculer la moyenne conditionnée manquante.

b) Déterminer le rapport de corrélation de *X* en *Y*. Que peut-on en conclure ?

Solution.

1°/ Représentation graphique de *X*.

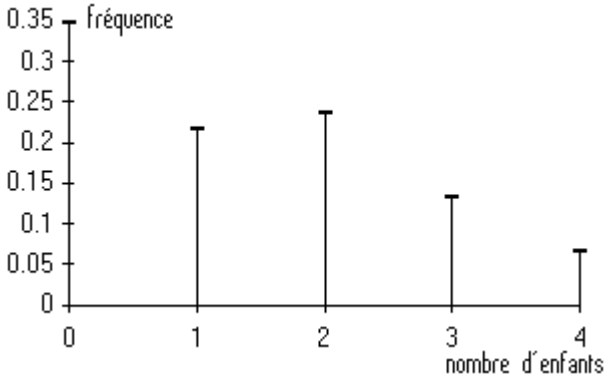
X est une variable statistique quantitative discrète.

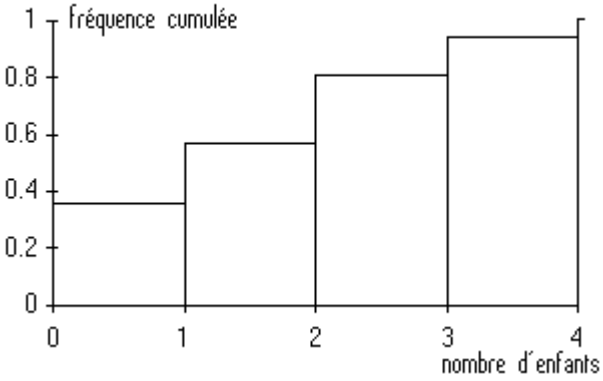
Le diagramme différentiel adéquat est un **diagramme en bâtons** : diagramme des effectifs ou diagramme des fréquences.

Le diagramme intégral adéquat est une **courbe en escalier** : diagramme cumulatif des effectifs ou des fréquences.

Les effectifs des valeurs de *X* s'obtiennent en faisant les sommes par ligne dans le tableau de contingence, les fréquences en divisant les effectifs par l'effectif total :

X	Effectif	Fréquence	Fréquence cumulée
0	1413	0.347	0.347
1	885	0.217	0.564
2	961	0.236	0.800
3	544	0.134	0.934
4	269	0.066	1.000
Total	4072	1.000	



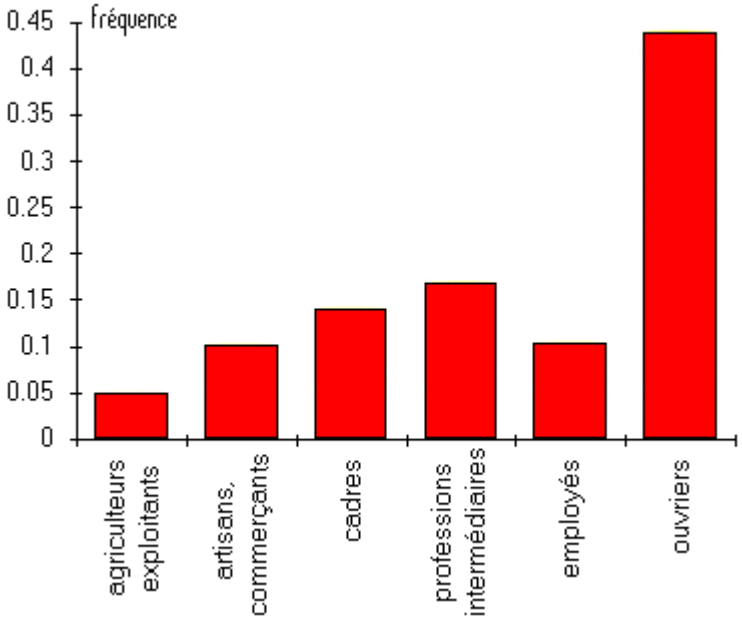


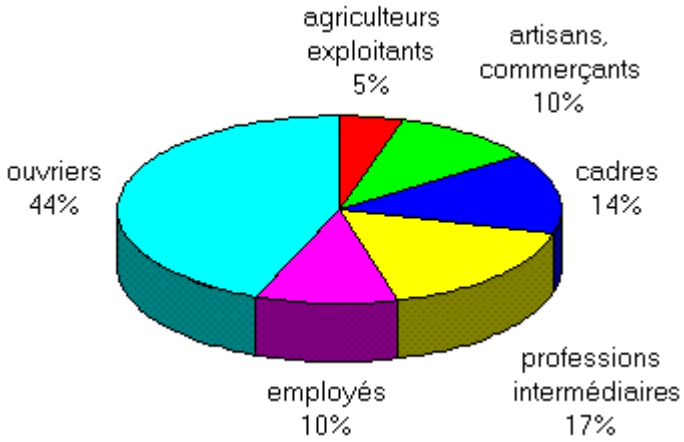
2°/ Représentation graphique de *Y*.

Y est une variable statistique qualitative.
Le diagramme différentiel adéquat est un diagramme en bâtons ou en tuyaux d'orgue, ou un diagramme circulaire ou en "camembert".
Il n'y a pas de diagramme intégral.

Les effectifs des modalités de *Y* s'obtiennent en faisant les sommes par colonnes dans le tableau de contingence, les fréquences en divisant les effectifs par l'effectif total :

Y	Effectif	Fréquence
agriculteurs exploitants	201	0.049
artisans, commerçants	414	0.102
cadres	569	0.140
professions intermédiaires	685	0.168
employés	417	0.102
ouvriers	1786	0.439
total	4072	1.000





3°/ Variance de *X*.

La variance de *X* est donnée par la formule :

$$s^2(X) = \frac{1}{n}\left(\sum n_{i.}\, x_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum n_{i.}\, x_i \right)^2 \right)$$

dans laquelle :
— n est l'effectif total : n = 4 072 ;
— les $n_{i.}$ sont les effectifs marginaux des valeurs x_i de X.

x_i	$n_{i.}$	$n_{i.}\, x_i$	$n_{i.}\, x_i^2$
0	1413	0	0
1	885	885	885
2	961	1 922	3 844
3	544	1 632	4 896

4	269	1 076	4 304
Total	$n = 4\,072$	$\sum n_{i.}\, x_i = 5\,515$	$\sum n_{i.}\, x_i^2 = 13\,929$

$$s^2(X) = \frac{1}{4\,072}\left(13\,929 - \frac{1}{4\,072}(5\,515)^2\right) = 1{,}59$$

4°/ Corrélation.

a) Moyenne conditionnée.

La moyenne conditionnée de *X* pour les artisans et commerçants est la moyenne arithmétique de *X* pour cette catégorie socio-professionnelle :

x_i	artisans commerçants n_{i2}	$n_{i2}\, x_i$
0	179	0
1	92	92
2	90	180
3	39	117
4	14	56
Total	414	445

$$\overline{X}_2 = \frac{445}{414} \approx 1{,}075$$

b) Rapport de corrélation de *X* en *Y*.

Le rapport de corrélation de *X* en *Y* est le rapport entre la variance expliquée $s_b^2(X)$, ou variance de la moyenne conditionnelle de *X* pour *Y* fixé, ou variance inter-population (*b* = between), et la variance totale $s^2(X)$ de *X*.

$$s_b^2(X) = \frac{1}{\sum_{j=1}^{j=6} n_{.j}}\left(\sum_{j=1}^{j=6} n_{.j}\, \overline{X}_j^{\,2} - \frac{1}{\sum_{j=1}^{j=6} n_{.j}}\left(\sum_{j=1}^{j=6} n_{.j}\, \overline{X}_j\right)^2\right)$$

Y	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6	*Total*
$\overline{X}_j$	0,965	1,075	1,132	1,185	1,302	1,611	
$n_{.j}$	201	414	569	685	417	1 786	4 072
$n_{.j}\, \overline{X}_j$	193,965	445,05	644,108	811,725	542,934	2 877,246	5 515,028

$n_{.j}\,\overline{X}_j^2$	187,176225	478,42875	729,130256	961,894125	706,900068	4 635,24331	7 698,77273

$$s_b{}^2(X) = \frac{1}{4\,072}\left(7\,698{,}77273 - \frac{1}{4\,072}\,(5\,515{,}028)^2\right) = 0{,}056$$

$$\eta^2_{X\,|\,Y} = \frac{s_b{}^2(X)}{s^2(X)} = \frac{0{,}056}{1{,}59} = 3{,}54 \times 10^{-2}.$$

Conclusion.

La petitesse du rapport de corrélation indique que la connaissance de la catégorie socio-professionnelle *Y* du père la population étudiée donne très peu d'information sur le nombre d'enfants *X* de la famille.

Chapitre 6. Ligne de régression et corrélation.

Exercices

Exercice 1. Nombre de pièces et superficie.
Exercice 2. Salaire et âge.
Exercice 3. Influence de la température sur le rendement d'une réaction.

Exercice 1. Nombre de pièces et superficie.

X est le nombre de pièces et Y la surface en m² d'un appartement construit entre 1958 et 1962. La liaison la plus simple que nous pouvons supposer entre les deux variables est du type $Y = b\,X$ (régression par l'origine : 0 pièce = 0 mètre carré).

X \ Y	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90	90-100	100-160
1	1	4	2	1						
2	1	12	22	8	3	1	1			
3			1	15	64	23	10	5		
4				1	10	55	24	10	7	4
5						4	13	12	6	6
6							1	2	2	7
7									2	1
8										2

Solution

1°/ Tracer le nuage de points (voir Séance 4, Exercice 2).
2°/ Tracer la droite de régression et la courbe de régression.
3°/ Calculer et comparer les variances conditionnelles.
4°/ Calculer le rapport de corrélation de Y en X et le coefficient de corrélation linéaire.
Conclusion ?
5°/ Calculer la valeur de b dans les trois modèles suivants :

— minimiser $\sum n_{i.} (\overline{Y}_i - b\,x_i)^2$;

— minimiser $\sum n_{i.} \frac{(\overline{Y}_i - b\,x_i)^2}{x_i}$;

— minimiser $\sum n_{i.} \frac{(\overline{Y}_i - b\,x_i)^2}{x_i^2}$.

HAUT

Exercice 2. Salaire et âge.

Dans une entreprise de 100 employés, nous nous intéressons au double caractère :
X : le salaire des employés,
Y : l'âge des employés.
Déterminer le pourcentage des variations de salaires expliquées par le facteur "âge".

$X \setminus Y$	20-30	30-40	40-50	50-60
4 000 - 8 000	15	10	5	5
8 000 - 12 000	10	10	12	8
12 000 - 16 000	5	5	8	7

Solution

HAUT

Exercice 3. Influence de la température sur le rendement d'une réaction.

Une série d'expériences dans une unité pilote en vue d'étudier l'influence de la température X sur le rendement d'une réaction chimique Y à pression constante a donné les résultats suivants :

X (°C)	51	52	54	56	57	58	59
Y (%)	21	18	15	12	8	6	4

1°/ Estimer, par la méthode des moindres carrés ordinaires, la droite $E_X(Y) = A + B\,X$.
2°/ Estimer la variance résiduelle.
3°/ Calculer les intervalles de confiance de A et B pour $\alpha = 5$ %.
4°/ Tester la signification du coefficient de régression estimé b pour $\alpha = 5$ %.
5°/ Faire une estimation ponctuelle et par intervalle de confiance ($\alpha = 5$ %) de la valeur moyenne de Y lorsque $X = 55$ °C.
6°/ Déterminer l'intervalle de prédiction à 95 % pour une mesure du rendement correspondant à une température de 55 °C.
7°/ En s'inspirant de la question 6, calculer et tracer l'hyperbole de sécurité du risque $\alpha = 5$ % autour de la droite de régression estimée $Y = a + b\,X$.
8°/ Ayant mesuré un rendement $Y_1 = 10$, en déduire graphiquement une estimation par intervalle de prévision à 95 % de la température X_1 correspondante.

Solution

HAUT

Chapitre 6. Ligne de régression et corrélation.

Enoncés.

Exercice 1. Nombre de pièces et superficie.

X est le nombre de pièces et *Y* la surface en m² d'un appartement construit entre 1958 et 1962. La liaison la plus simple que nous pouvons supposer entre les deux variables est du type $Y = b\,X$ (régression par l'origine : 0 pièce = 0 mètre carré).

X \ Y	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90	90-100	100-160
1	1	4	2	1						
2	1	12	22	8	3	1	1			
3			1	15	64	23	10	5		
4				1	10	55	24	10	7	4
5						4	13	12	6	6
6							1	2	2	7
7									2	1
8										2

1°/ Tracer le nuage de points (voir Séance 4, Exercice 2).
2°/ Tracer la droite de régression et la courbe de régression.
3°/ Calculer et comparer les variances conditionnelles.
4°/ Calculer le rapport de corrélation de *Y* en *X* et le coefficient de corrélation linéaire.
Conclusion ?
5°/ Calculer la valeur de *b* dans les trois modèles suivants :

— minimiser $\sum n_{i.} (\overline{Y}_i - b\,x_i)^2$;

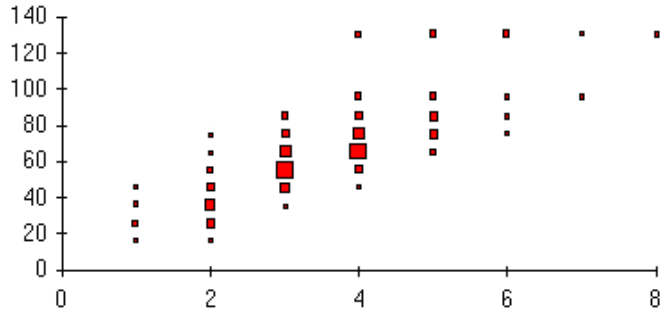
— minimiser $\sum n_{i.} \frac{(\overline{Y}_i - b\,x_i)^2}{x_i}$;

— minimiser $\sum n_{i.} \frac{(\overline{Y}_i - b\,x_i)^2}{x_i^2}$.

Solution.

1°/ Nuage de points.

Les données de l'énoncé ont déjà fait l'objet d'une représentation graphique par nuage de points (Séance 4, Exercice 2). Le graphique obtenu était le suivant :



2°/ Droite de régression et courbe de régression.

a) Courbe de régression.

La courbe de régression, ou ligne de régression, est la ligne brisée polygonale joignant les points ayant :
— pour abscisses, les valeurs de X ;
— pour ordonnées, les moyennes conditionnées de Y pour X fixé.

On se place dans l'hypothèse où toutes les valeurs de Y dans une classe sont concentrées au centre de la classe : dans ce cas, la moyenne de la classe d'indice j, est la valeur centrale y'_j de la classe, et le théorème de la moyenne conditionnée donne la moyenne conditionnée de Y pour $X = x_i$ fixé, par la formule :

$$\overline{Y}_i = \frac{1}{n_{i.}} \sum_j n_{ij} y'_j$$

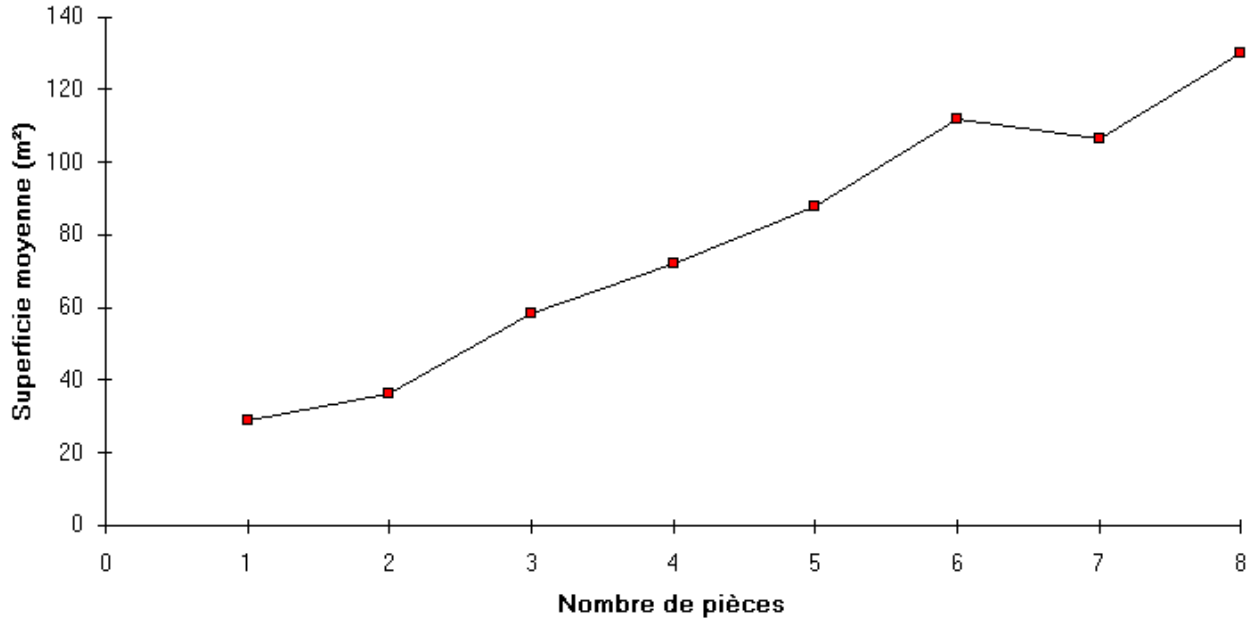
avec $n_{i.} = \sum_j n_{ij}$.

Tableau des calculs :

X \ Y	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90	90-100	100-160	$n_{i.}$	$\overline{Y}_i$
1	1	4	2	1	0	0	0	0	0	0	8	28.750
2	1	12	22	8	3	1	1	0	0	0	48	36.458
3	0	0	1	15	64	23	10	5	0	0	118	58.475
4	0	0	0	1	10	55	24	10	7	4	111	72.117
5	0	0	0	0	0	4	13	12	6	6	41	87.927
6	0	0	0	0	0	0	1	2	2	7	12	112.083
7	0	0	0	0	0	0	0	0	2	1	3	106.667
8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	2	130.000
$n_{.j}$	2	16	25	25	77	83	49	29	17	20	n = 343	

Extrait du tableau :

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	
$n_{i.}$	8	48	118	111	41	12	3	2	n = 343
$\overline{Y}_i$	28.750	36.458	58.475	72.117	87.927	112.083	106.667	130.000	



Ligne de régression de Y en X.

b) Droite de régression.

La droite de régression est la droite $y = a + b\,x$ qui minimise la somme des carrés des écarts $\sum n_{i.}\,(a + b\,x_i - \overline{Y}_i)^2$.
Ses coefficients a et b sont donnés par les formules :

$$b = \frac{Cov(X, Y)}{s^2(X)} \; ; \; a = \overline{Y} - b\,\overline{X}.$$

Les différents termes intervenant dans cette formule sont calculés par les formules suivantes :

$$Cov\,(X, Y) = \frac{1}{n}\left(\sum n_{ij}\,x_i\,y'_j - \frac{1}{n}\left(\sum n_{i.}\,x_i\right)\left(\sum n_{.j}\,y'_j\right)\right) = \overline{X\,Y} - \overline{X}\;\overline{Y}$$

avec $n = \sum_{ij} n_{ij} = 343$, $n_{.j} = \sum_i n_{ij}$, $n_{i.} = \sum_j n_{ij}$

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_i n_{i.}\,x_i = \frac{1}{n}\sum_{ij} n_{ij}\,x_i = \frac{1}{n}\sum_j n_{.j}\,\overline{X}_j$$

avec $\overline{X}_j = \frac{1}{n_{.j}}\sum_i n_{ij}\,x_i$

$$\overline{Y} = \frac{1}{n}\sum_j n_{.j}\,y'_j = \frac{1}{n}\sum_{ij} n_{ij}\,y'_j = \frac{1}{n}\sum_i n_{i.}\,\overline{Y}_i$$

avec $\overline{Y}_i = \frac{1}{n_{i.}}\sum_j n_{ij}\,y'_j$

$$s^2(X) = \frac{1}{n}\left(\sum n_{i.}\,x_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum n_{i.}\,x_i\right)^2\right)$$

Du tableau des effectifs :

X \ Y	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90	90-100	100-160	$n_{i.}$
1	1	4	2	1	0	0	0	0	0	0	8
2	1	12	22	8	3	1	1	0	0	0	48

3	0	0	1	15	64	23	10	5	0	0	118
4	0	0	0	1	10	55	24	10	7	4	111
5	0	0	0	0	0	4	13	12	6	6	41
6	0	0	0	0	0	0	1	2	2	7	12
7	0	0	0	0	0	0	0	0	2	1	3
8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	2
$n_{.j}$	2	16	25	25	77	83	49	29	17	20	$n = 343$

on déduit le tableau des produits $n_{ij} x_i y'_j$ et de leurs sommes :

$X \setminus Y$	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90	90-100	100-160	*Total*
1	15	100	70	45	0	0	0	0	0	0	230
2	30	600	1 540	720	330	130	150	0	0	0	3 500
3	0	0	105	2025	10 560	4 485	2 250	1 275	0	0	20 700
4	0	0	0	180	2 200	14 300	7 200	3 400	2 660	2 080	32 020
5	0	0	0	0	0	1 300	4 875	5 100	2 850	3 900	18 025
6	0	0	0	0	0	0	450	1 020	1 140	5 460	8 070
7	0	0	0	0	0	0	0	0	1 330	910	2 240
8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2 080	2 080
Total	45	700	1 715	2 970	13 090	20 215	14 925	10 795	7 980	14 430	86 865

$$\sum n_{ij} x_i y'_j = 86\,865.$$
$$\overline{XY} = \frac{86\,865}{343} = 253{,}2507$$

On complète le tableau des effectifs marginaux de *X* par les produits et les carrés, et par les moyennes marginales de *Y* et les produits:

x_i	$n_{i.}$	$n_{i.} x_i$	$n_{i.} x_i^2$	$\overline{Y}_i$	$n_{i.} \overline{Y}_i$
1	8	8	8	28.750	230
2	48	96	192	36.458	1750
3	118	354	1062	58.475	6900
4	111	444	1776	72.117	8005
5	41	205	1025	87.927	3605
6	12	72	432	112.083	1345
7	3	21	147	106.667	320
8	2	16	128	130.000	260
Total	$n = 343$	$\sum n_{i.} x_i = 1\,216$	$\sum n_{i.} x_i^2 = 4\,770$	$\sum n_{i.} \overline{Y}_i = 632{,}477$	$\sum n_{i.} \overline{Y}_i = 22\,415$

On en déduit la moyenne marginale et la variance marginale de *X*, la moyenne marginale de *Y* :

$$\overline{X} = \frac{1\,216}{343} = 3{,}5452$$
$$s^2(X) = \frac{1}{343}\left(4\,770 - \frac{1}{343}1\,216^2\right) = 1{,}3383$$
$$\overline{Y} = \frac{22\,415}{343} = 65{,}3499$$

On en déduit les coefficients de la droite de régression $\Delta_{Y|X}$:

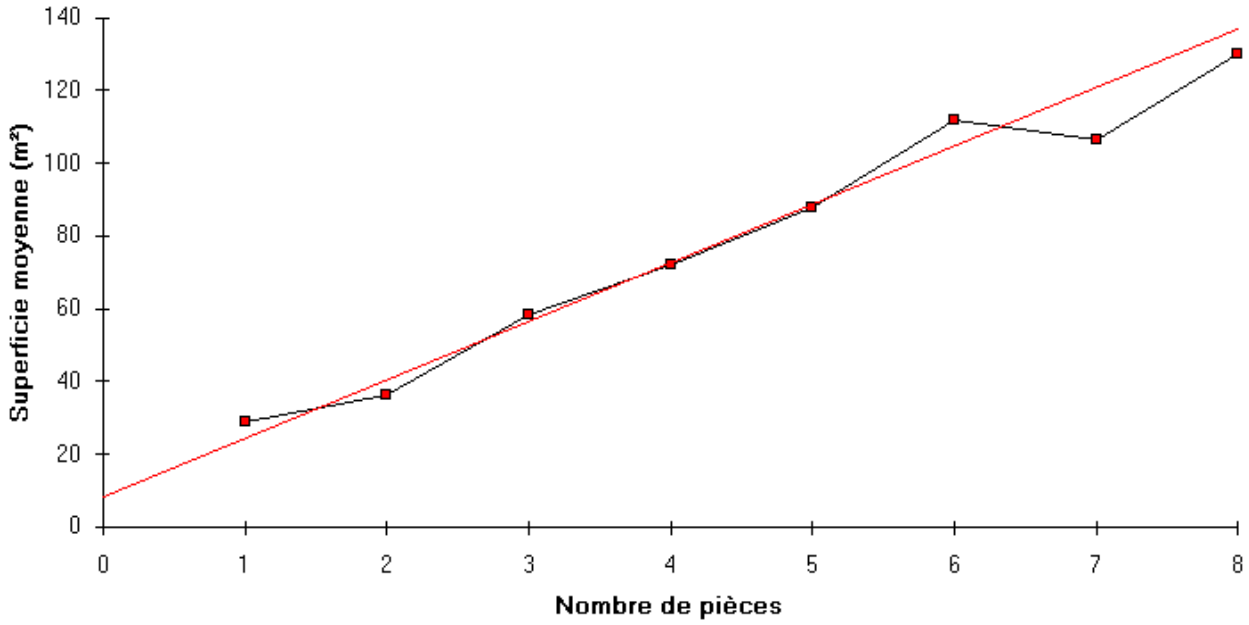
$$b = \frac{\overline{XY} - \overline{X}\,\overline{Y}}{s^2(X)} = \frac{343 \times 86\,865 - 1\,216 \times 22\,415}{343 \times 4\,770 - 1\,216 \times 1\,216} = 16{,}1193$$

$$a = \frac{1}{343}(22\,415 - 1\,216\,b) = 8{,}2037$$

L'équation de la droite de régression est donc :

$$\boxed{y = 8{,}2037 + 16{,}1193\,x}$$

Traçons cette droite dans le graphique précédent avec la ligne de régression :



Courbe de régression et droite de régression de Y en X.

3°/ Variance conditionnelles.

La variance conditionnelles de *Y* pour *X* fixé se calcule par la formule :

$$s_i^{\,2}(Y) = \frac{1}{n_{i.}}\left(\sum_j n_{ij}\,y'^{\,2}_j - \frac{1}{n_{i.}}\left(\sum_j n_{ij}\,y'_j\right)^2\right)$$

X \ Y	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90	90-100	100-160	$n_{i.}$	$\sum_j n_{ij}\,y'_j$	$\sum_j n_{ij}\,y'^{\,2}_j$	$s_i^{\,2}(Y)$
1	1	4	2	1	0	0	0	0	0	0	8	230	7 200	73.438
2	1	12	22	8	3	1	1	0	0	0	48	1 750	69 800	124.957
3	0	0	1	15	64	23	10	5	0	0	118	6 900	414 750	95.554
4	0	0	0	1	10	55	24	10	7	4	111	8 005	602 675	228.626
5	0	0	0	0	0	4	13	12	6	6	41	3 605	332 275	373.141
6	0	0	0	0	0	0	1	2	2	7	12	1 345	156 425	472.743
7	0	0	0	0	0	0	0	0	2	1	3	320	34 950	272.222
8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	2	260	33 800	0.000
											n = 343	$\sum_{ij} n_{ij}\,y'_j$ = 22 415	$\sum_{ij} n_{ij}\,y'^{\,2}_j$ = 1 651 875	$\sum_{ij} s_i^{\,2}(Y)$ = 1 640,681

$$s^2(Y) = \frac{1}{n}\left(\sum_{ij} n_{ij} y'^2_j - \frac{1}{n}\left(\sum_{ij} n_{ij} y'_j \right)^2 \right) = 545{,}359$$

On voit, dans la dernière colonne du tableau, que les variances conditionnelles de Y pour X fixé, ont tendance à augmenter avec X, avec une valeur moyenne :

$$s_w^2(Y) = \frac{1}{n} \sum_i n_{i.}\, s_i^2(Y) = 189{,}582$$

qui est la **variance intra-population** (w = within).

4°/ Rapport de corrélation.

On complète le tableau des moyennes conditionnelles de Y pour X fixé par les produits et les carrés :

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	*Total*
$n_{i.}$	8	48	118	111	41	12	3	2	n = 343
$\overline{Y}_i$	28,750	36,458	58,475	72,117	87,927	112,083	106,667	130,000	
$n_{i.}\,\overline{Y}_i$	230	1 750	6 900	8 005	3 605	1 345	320	260	22 415
$n_{i.}$ $\overline{Y}_i^2$	6 612,500	63 802,083	403 474,576	577 297,523	316 976,220	150 752,083	34 133,333	33 800,000	1 586 848,318

On en déduit la variance de la moyenne conditionnelle de Y par X, ou **variance inter-population** (b = between):

$$s_b^2(Y) = \frac{1}{343}\left(1\,586\,848{,}318 - \frac{1}{343}\, 22\,415^2 \right) = 355{,}776$$

On peut vérifier alors le théorème de la moyenne conditionnée :

$$s^2(Y) = s_w^2(Y) + s_b^2(Y)$$
$$545{,}359 = 189{,}582 + 355{,}776 \text{ (aux erreurs d'arrondis près).}$$

Le **rapport de corrélation** de Y en X est :

$$\eta^2_{Y|X} = \frac{s_b^2(Y)}{s^2(Y)} = \frac{355{,}776}{545{,}359} = 0{,}652$$

Le **coefficient de corrélation linéaire** de Y par rapport à X est :

$$r = \frac{Cov(X,Y)}{s(X)\,s(Y)} = b\,\frac{s(X)}{s(Y)} = 16{,}1193 \times \sqrt{\frac{1{,}3383}{545{,}359}} = 0{,}7985$$

et le **coefficient de détermination** en est le carré :

$$r^2 = 0{,}638$$

Ainsi :
— la variance du prédicteur de la moyenne conditionnelle par la courbe de régression est $\sigma^2_X(\overline{Y}) = \eta^2_{Y|X}\,\sigma^2(Y)$ et le pourcentage de variance de Y expliquée par la courbe de régression $\overline{Y} \mid X$ est $\eta^2_{Y|X} = 65{,}2$ % ;
— la variance du prédicteur de la moyenne conditionnelle par la droite de régression est $\sigma^2(\Delta_{Y|X}) = r^2\,\sigma^2(Y)$ et le pourcentage de variance de Y expliquée par la droite de régression $\Delta_{Y|X}$ est $r^2 = 63{,}8$ %.

Ces deux valeurs sont voisines : la courbe de régression est voisine de la droite de régression.

5°/ Modèles linéaires.

a) Premier modèle.

Pour que $\varphi(b) = \sum n_{i.} (\overline{Y}_i - b\, x_i)^2$ soit minimum, il faut que sa dérivée par rapport à b soit nulle :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial b} = 2 \sum n_{i.} (\overline{Y}_i - b\, x_i)(-x_i) = 0$$
$$b \sum n_{i.} x_i^2 = \sum n_{i.} x_i \overline{Y}_i$$
$$n_{i.} \overline{Y}_i = \sum_j n_{ij} y'_j$$
$$b \sum n_{i.} x_i^2 = \sum_{ij} n_{ij} x_i y'_j$$

La solution du problème est donc donnée par :

$$b_1 = \frac{m_{11}(X,Y)}{m_2(X)}$$

où $m_{11}(X, Y) = \frac{1}{n} \sum_{ij} n_{ij} x_i y'_j$ et $m_2(X) = \frac{1}{n} \sum_i n_{i.} x_i^2$ sont des moments non centrés.

Numériquement, on a déjà obtenu les résultats suivants :

$n = 343$;
$\sum_{ij} n_{ij} x_i y'_j = 86\,865$;
$\sum_i n_{i.} x_i^2 = 4\,770$.

On en déduit :

$$b_1 = \frac{86\,865}{4\,770} = \frac{5\,791}{318} = 18{,}2107$$

b) Deuxième modèle.

Pour que $\varphi(b) = \sum n_{i.} \frac{(\overline{Y}_i - b\, x_i)^2}{x_i}$ soit minimum, il faut que sa dérivée par rapport à b soit nulle :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial b} = 2 \sum n_{i.} \frac{\overline{Y}_i - b\, x_i}{x_i}(-x_i) = 0$$
$$b \sum n_{i.} x_i = \sum n_{i.} \overline{Y}_i$$
$$n_{i.} \overline{Y}_i = \sum_j n_{ij} y'_j$$
$$b \sum n_{i.} x_i = \sum_{ij} n_{ij} y'_j$$

La solution du problème est donc donnée par :

$$b_2 = \frac{m_1(Y)}{m_1(X)} = \frac{\overline{Y}}{\overline{X}}$$

Numériquement, on a déjà obtenu les résultats suivants :

$\sum_{ij} n_{ij} y'_j = 22\,415$
$\sum n_{i.} x_i = 1\,216$.

On en déduit :

$$b_2 = \frac{22\,415}{1\,216} = 18{,}4334$$

c) Troisième modèle.

Pour que $\varphi(b) = \sum n_{i.} \frac{\left(\overline{Y}_i - b\,x_i\right)^2}{{x_i}^2}$ soit minimum, il faut que sa dérivée par rapport à b soit nulle :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial b} = 2 \sum n_{i.} \frac{\overline{Y}_i - b\,x_i}{{x_i}^2}(-x_i) = 0$$

$$b \sum n_{i.} = \sum n_{i.} \frac{\overline{Y}_i}{x_i}$$

$$n_{i.} \frac{\overline{Y}_i}{x_i} = \frac{1}{x_i} \sum_j n_{ij}\, y'_j$$

$$n\,b = \sum_{ij} n_{ij} \frac{y'_j}{x_i}$$

La solution du problème est donc donnée par :

$$b_3 = m_1\left(\frac{Y}{X}\right)$$

Numériquement, on peut dresser le tableau suivant des valeurs de $n_{ij} \frac{y'_j}{x_i}$:

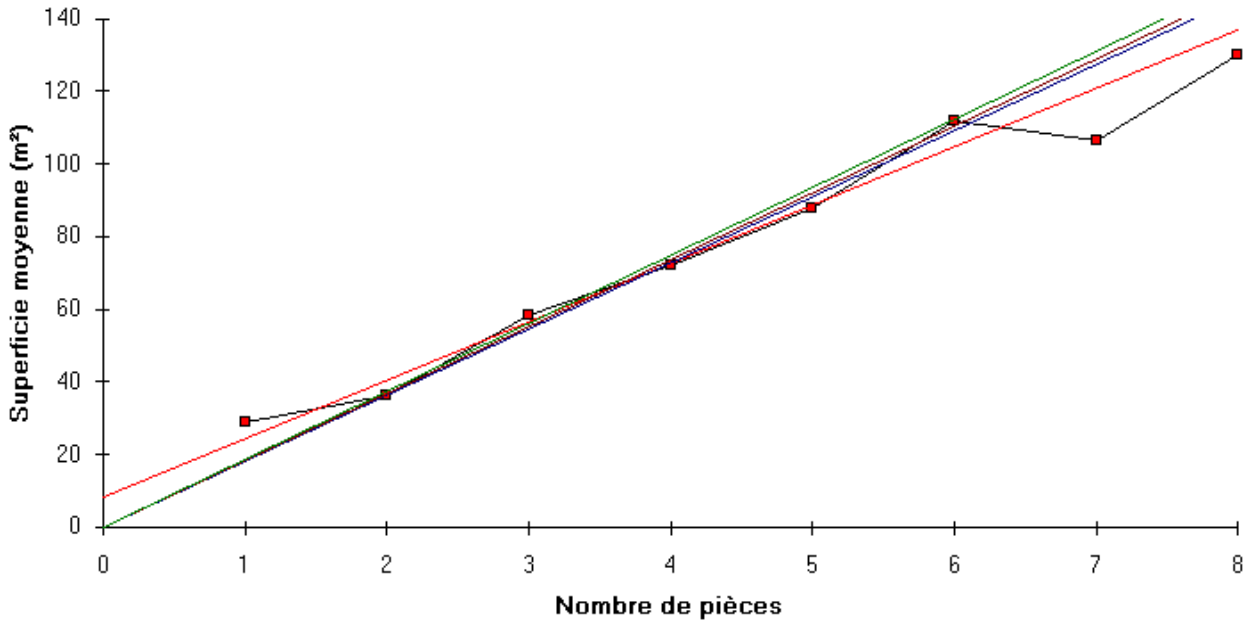
$X \setminus Y$	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90	90-100	100-160	$\sum_j n_{ij} \frac{y'_j}{x_i}$
1	15.000	100.000	70.000	45.000							230.000
2	7.500	150.000	385.000	180.000	82.500	32.500	37.500				875.000
3			11.667	225.000	1173.333	498.333	250.000	141.667			2300.000
4				11.250	137.500	893.750	450.000	212.500	166.250	130.000	2001.250
5						52.000	195.000	204.000	114.000	156.000	721.000
6							12.500	28.333	31.667	151.667	224.167
7									27.143	18.571	45.714
8										32.500	32.500
$\sum_i n_{ij} \frac{y'_j}{x_i}$	22.500	250.000	466.667	461.250	1393.333	1476.583	945.000	586.500	339.060	488.738	$\sum_{ij} n_{ij} \frac{y'_j}{x_i} =$ 6429,631

On en tire la valeur moyenne de $\frac{Y}{X}$:

$$b_3 = \frac{6\,429{,}631}{343} = 18{,}7453$$

Les droites tirées des trois modèles peuvent être tracées sur le graphique de régression :

$$y = 18{,}2107\,x\ ;\ y = 18{,}4334\,x\ ;\ y = 18{,}7453\,x.$$



Remarques sur le choix du modèle.

1) Lorsqu'on note que la variance conditionnée de *Y* pour *X* fixé reste sensiblement constante, on choisit le modèle 1 : minimiser $\sum (y_j - b\,x_i)^2$.

2) Lorsqu'on note que la variance conditionnée de *Y* pour *X* fixé reste sensiblement proportionnelle à *X*, on choisit le modèle 2 : minimiser $\sum \frac{(y_j - b\,x_i)^2}{x_i}$.

3) Lorsqu'on note que la variance conditionnée de *Y* pour *X* fixé reste sensiblement proportionnelle à X^2, on choisit le modèle 3 : minimiser $\sum \frac{(y_j - b\,x_i)^2}{x_i^2}$.

Ici, si la surface est sensiblement proportionnelle au nombre de pièces, ce qui justifie le choix d'un modèle de la forme $y = b\,x$, aucun sous-modèle, parmi les trois étudiés, ne s'impose plus qu'un autre.

Chapitre 6. Ligne de régression et corrélation.

Enoncés.

Exercice 2. Salaire et âge.

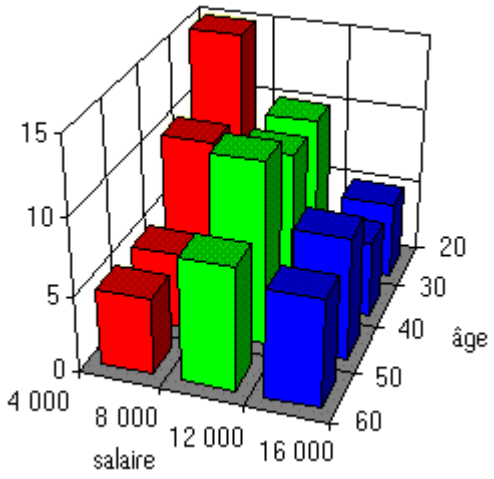
Dans une entreprise de 100 employés, nous nous intéressons au double caractère :
X : le salaire des employés,
Y : l'âge des employés.
Déterminer le pourcentage des variations de salaires expliquées par le facteur "âge".

$X \setminus Y$	20-30	30-40	40-50	50-60
4 000 - 8 000	15	10	5	5
8 000 - 12 000	10	10	12	8
12 000 - 16 000	5	5	8	7

Solution.

Le pourcentage des variations de salaires expliquées par le facteur "âge" est donné par le **rapport de corrélation** de X en Y.

$x'_i \setminus y'_j$	25	35	45	55	$n_{i.}$	$\overline{Y}_i$	$n_{i.} x'_i$	$n_{i.} x'^2_i$
6000	15	10	5	5	35	35	210000	1260000000
10000	10	10	12	8	40	39.5	400000	4000000000
14000	5	5	8	7	25	41.8	350000	4900000000
$n_{.j}$	30	25	25	20	$n = 100$		$\sum n_{i.} x'_i =$ 960000	10160000000
$\overline{X}_j$	2600	2300	2620	2080			$\overline{X} = 9\,600$	$s^2(X) = 9\,440\,000$
$n_{.j} y'_j$	750	875	1125	1100	$\sum n_{.j} y'_j = 3\,850$	$\overline{Y} = 38{,}50$		
$n_{.j} y'^2_j$	18750	30625	50625	60500	$\sum n_{.j} y'^2_j = 160\,500$	$s^2(Y) =$ 122,75		



La variance expliquée par la régression de X en Y est la variance de la moyenne conditionnelle de X :

$n_{.j}$	30	25	25	20	$n = 100$
$\overline{X}_j$	2 600	2 300	2 620	2 080	
$n_{.j}\,\overline{X}_j$	78 000	57 500	65 500	41 600	$\sum n_{.j}\,\overline{X}_j = 242\,600$
$n_{.j}\,\overline{X}_j{}^2$	202 800 000	132 250 000	171 610 000	86 528 000	$\sum n_{.j}\,\overline{X}_j{}^2 = 593\,188\,000$

$$s_b{}^2(X) = \frac{1}{n}\sum n_{.j}\,(\overline{X}_j - \overline{X})^2 = \frac{1}{n}\left(\sum n_{.j}\,\overline{X}_j{}^2 - \frac{1}{n}\left(\sum n_{.j}\,\overline{X}_j\right)^2\right)$$

$$s_b{}^2(X) = \frac{1}{100}\left(593\,188\,000 - \frac{1}{100}\,242\,600^2\right) = 46\,404$$

$$\eta^2_{X\,|\,Y} = \frac{s_b{}^2(X)}{s^2(X)} = \frac{46\,404}{9\,440\,000} = 4{,}92 \times 10^{-3}$$

La part de variance de X expliquée par la régression de X en Y est d'environ 0,5 %.

La petitesse du rapport de corrélation de X en Y indique qu'une part très minime de la variation du salaire est expliquée par l'âge.

Chapitre 6. Ligne de régression et corrélation.

Enoncés.

Exercice 3. Influence de la température sur le rendement d'une réaction.

Une série d'expériences dans une unité pilote en vue d'étudier l'influence de la température X sur le rendement d'une réaction chimique Y à pression constante a donné les résultats suivants :

X (°C)	51	52	54	56	57	58	59
Y (%)	21	18	15	12	8	6	4

1°/ Estimer, par la méthode des moindres carrés ordinaires, la droite $E_X(Y) = A + B\,X$.
2°/ Estimer la variance résiduelle.
3°/ Calculer les intervalles de confiance de A et B pour $\alpha = 5$ %.
4°/ Tester la signification du coefficient de régression estimé b pour $\alpha = 5$ %.
5°/ Faire une estimation ponctuelle et par intervalle de confiance ($\alpha = 5$ %) de la valeur moyenne de Y lorsque $X = 55$ °C.
6°/ Déterminer l'intervalle de prédiction à 95 % pour une mesure du rendement correspondant à une température de 55 °C.
7°/ En s'inspirant de la question 6, calculer et tracer l'hyperbole de sécurité du risque $\alpha = 5$ % autour de la droite de régression estimée $Y = a + b\,X$.
8°/ Ayant mesuré un rendement $Y_1 = 10$, en déduire graphiquement une estimation par intervalle de prévision à 95 % de la température X_1 correspondante.

Solution.

1°/ Tableau des calculs.

Les différents calculs nécessaires pour répondre aux questions peuvent se résumer en un tableau :

	Température en °C (X)	*Rendement (Y)*	*X Y*
	51	21	1071
	52	18	936
	54	15	810
	56	12	672
	57	8	456
	58	6	348
	59	4	236
Sommes : Σx, Σy, Σxy	387	84	4529
Moments d'ordre 1 : m_X, m_Y, m_{XY}	55.2857	12.0000	647.0000
Sommes des carrés : Σx^2, Σy^2.	21451	1250	
Moments d'ordre 2 : m_{X^2}, m_{Y^2}.	3064.4286	178.5714	
Moments centrés d'ordre 2	7.9184	34.5714	
Variances estimées : $\sigma_X{}^{*2}$, $\sigma_Y{}^{*2}$	9.2381	40.3333	
Ecarts-types estimés : $\sigma_X{}^*$, $\sigma_Y{}^*$	3.0394	6.3509	
Somme centrée conjointe d'ordre (1;1) : $\Sigma(x-m_X)(y-m_Y)$	–115		
Covariance estimée : $Cov^*(X, Y)$	– 19.1667		
Coefficient de corrélation r	– 0.9929		
Coefficient de détermination r^2	0.9859		
b	– 2.0747		
a	126.7036		
Ecart-type estimé de $\hat{B}$	0.1108		
Ecart-type estimé de $\hat{A}$	6.1435		
Corrélation de $\hat{A}$ et de $\hat{B}$	– 0.9987		
Q_T	242.0000		
Q_M	238.5954		
Q_R	3.4046		
q_T	40.3333		
q_M	238.5954		
$q_R = \sigma^{*2}$, variance résiduelle	0.6809		
écart-type résiduel : $\sigma^* = \sqrt{q_R}$	0.8252		
f	350.3974		
t_{obs}	18.7189		

Les formules utilisées dans ce tableau sont :

$$m_X = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=n} x_i \, , \; m_Y = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=n} y_i \, , \; m_{XY} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=n} x_i y_i \, .$$

$$m_{X^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=n} {x_i}^2, \; m_{Y^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=n} {y_i}^2.$$

Moments centrés d'ordre 2 : $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=n} (x_i - m_X)^2$ et $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=n} (y_i - m_Y)^2$.

Variances estimées : $\sigma_X{}^{*2} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{i=n} (x_i - m_X)^2$ et $\sigma_Y{}^{*2} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{i=n} (y_i - m_Y)^2$.

Covariance estimée : $Cov^*(X, Y) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{i=n} (x_i - m_X)(y_i - m_Y)$

Coefficient de corrélation estimé $r = \frac{Cov^*(X,Y)}{\sigma_X{}^* \sigma_Y{}^*}$

$B^* = b = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} (x_i - m_X)(y_i - m_Y)}{\sum_{i=1}^{i=n} (x_i - m_X)^2}$, $A^* = a = m_Y - b\, m_X$,

$\sigma_{\hat{A}}{}^* = \sigma^* \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{m_X{}^2}{(n-1)\sigma_X{}^{*2}}} = \sigma^* \sqrt{\frac{2}{n} + \frac{(m_X)^2}{(n-1)\sigma_X{}^{*2}}}$, $\sigma_{\hat{B}}{}^* = \frac{\sigma^*}{\sigma_X{}^* \sqrt{n-1}}$, $r(\hat{A}, \hat{B}) = -\frac{\sum_{i=1}^{i=n} x_i}{\sqrt{n \sum_{i=1}^{i=n} x_i{}^2}} = -\frac{m_X}{\sqrt{m_X{}^2}}$,

$Q_T = SCET = \sum_{i=1}^{i=n} (y_i - m_Y)^2$, somme totale des carrés des écarts, à $n - 1$ degrés de liberté, $q_T = \frac{Q_T}{n-1} = \sigma_Y{}^{*2}$.

$Q_M = SCEA = \sum_{i=1}^{i=n} (a + b\, x_i - m_Y)^2$, somme des carrés des écarts dûs à la régression, à 1 degré de liberté, $q_M = Q_M$.

$Q_R = \sum_{i=1}^{i=n} (a + b\, x_i - y_i)^2 = S^2$, somme résiduelle des carrés des écarts , à $n - 2$ degrés de liberté, $q_R = \frac{Q_R}{n-2} = \sigma^{*2}$.

$f = \frac{q_M}{q_R}$, $t_{obs} = \frac{b}{\sigma_B{}^*} = b\sqrt{n-1}\,\frac{\sigma_X{}^*}{\sigma^*} = \sqrt{f}$.

2°/ Estimation de la droite de régression.

La droite $E_X(Y) = A + B\,X$ peut être estimée par $y = a + b\,x = 126{,}7036 - 2{,}0747\,x$.

L'estimateur de B est $\hat{B} = \dfrac{n\sum_{i=1}^{i=n} X_i\, Y_i - \left(\sum_{i=1}^{i=n} X_i\right)\left(\sum_{i=1}^{i=n} Y_i\right)}{n\sum_{i=1}^{i=n} {X_i}^2 - \left(\sum_{i=1}^{i=n} X_i\right)^2}$. L'estimateur de A est $\hat{A} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=n} Y_i - \hat{B} \times \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=n} X_i$.

$$\boxed{y = 126{,}7036 - 2{,}0747\, x.}$$

3°/ Variance résiduelle.

$$\boxed{\sigma^{*\,2} = q_R = 0{,}6809}$$

4°/ Intervalles de confiance de *A* et de *B*.

L'estimateur de la variance résiduelle σ^2 possède $n - 2$ degrés de liberté.
La table de Student à $n - 2 = 5$ degrés de liberté donne la valeur seuil :

$$t_{0{,}975} = 2{,}571$$

- l'intervalle de confiance de A est donné par :

$$a \pm t_{0{,}975}\, \sigma_{\hat{A}}^{*} = 126{,}7036 \pm 2{,}571 \times 6{,}1435 = 126{,}7036 \pm 15{,}7949 = [110{,}9087\ ;\ 142{,}4985]$$

$$\boxed{A : [110{,}91\ ;\ 142{,}50]}$$

- l'intervalle de confiance de B est donné par :

$$b \pm t_{0{,}975}\, \sigma_{\hat{B}}^{*} = -2{,}0747 \pm 2{,}571 \times 0.1108 = -2{,}0747 \pm 0{,}2849 = [-2{,}3596\ ;\ -1{,}7898]$$

$$\boxed{B : [-2{,}3596\ ;\ -1{,}7898]}$$

5°/ Test du coefficient de régression *B*.

On teste l'une contre l'autre les hypothèses :

$(H_0) : B = 0.$
$(H_1) : B \neq 0.$

Pour faire ce test, on peut utiliser l'intervalle de confiance de B : la valeur 0 n'appartient pas à l'intervalle de confiance de B à 95 %.
Décision mathématique : on rejette l'hypothèse $(H_0) : B = 0$.

Conclusion pratique : jusqu'à plus ample information, comptenu de la taille de l'échantillon, nous admettrons que le coefficient B est significativement différent de 0.

Le **test de signification de *B*** peut se faire aussi à partir du tableau d'analyse de la variance :

Source	*S.C.E.*	*DDL*	*Carrés moyens*	*F*	*PROBA*
Totale	242,00	6			
Régression	238,60	1	238,60	350,40	8,01E-06
Résiduelle	3,40	5	0,68		

La probabilité critique est inférieure à 5 % : *B* est significativement différent de 0.

6°/ Estimation de la valeur moyenne de *Y* pour *X* fixé.

a) Estimation ponctuelle.

La valeur moyenne de *Y* lorsque *X* est fixé, est, dans le modèle linéaire, donnée par : $E_X(Y) = A + B\,X$.
On peut estimer $E_X(Y)$ par la **<u>formule de régression</u>** :

$$E_X^*(Y) = a + b\,x$$

Pour x = 55 °C, a = 126,7036, b = – 2,0747, on trouve :

$$E_{55}^*(Y) = 126{,}7036 - 2{,}0747 \times 55 = 12{,}5951$$

D'où l'estimation ponctuelle de $E_X^*(Y)$:

$$\boxed{E_{55}^*(Y) = 12{,}60}$$

b) Estimation par intervalle de confiance à 95 %.

On peut construire un intervalle de confiance de la moyenne de *Y* pour *X* fixé par :

$$a + b\,x \pm t_{0{,}975}\,\sigma^* \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(x - m_X)^2}{(n-1)\,\sigma_X^{*2}}}$$

où $t_{0{,}975}$ = 2,571 est la valeur seuil lue dans la table de Student à n – 2 degrés de liberté, pour une fonction de répartition égale à 0,975.

Cette formule donne l'intervalle de confiance :

$$12{,}5951 \pm 2{,}571 \times 0.8252 \times \sqrt{\frac{1}{7} + \frac{(55 - 55{,}2857)^2}{6 \times 9{,}2381}} = 12{,}5951 \pm 0{,}8060 = [11{,}7891\ ;\ 13{,}4011]$$

D'où l'estimation de $E_X(Y)$ par intervalle de confiance à 95 % :

$$\boxed{E_{55}^*(Y) : [11{,}79\ ;\ 13{,}40]}$$

7°/ Intervalle de prédiction de *Y* à 95 %.

L'intervalle de prédiction de la valeur de Y pour X fixé à x = 55 °C est donné par la formule :

$$a + b\,x \pm t_{0,975}\,\sigma^* \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(x - m_X)^2}{(n-1)\,\sigma_X{}^{*2}}}\,.$$

Il est donc égal à :

$$12{,}5951 \pm 2{,}571 \times 0{,}8252 \times \sqrt{1 + \frac{1}{7} + \frac{(55 - 55{,}2857)^2}{6 \times 9{,}2381}} = 12{,}5951 \pm 2{,}2695 = [10{,}3256\ ;\ 14{,}8646]$$

D'où l'estimation de Y par intervalle de prédiction à 95 % :

Y : [10,3256 ; 14,8646]

8°/ Hyperbole de sécurité à 95 %.

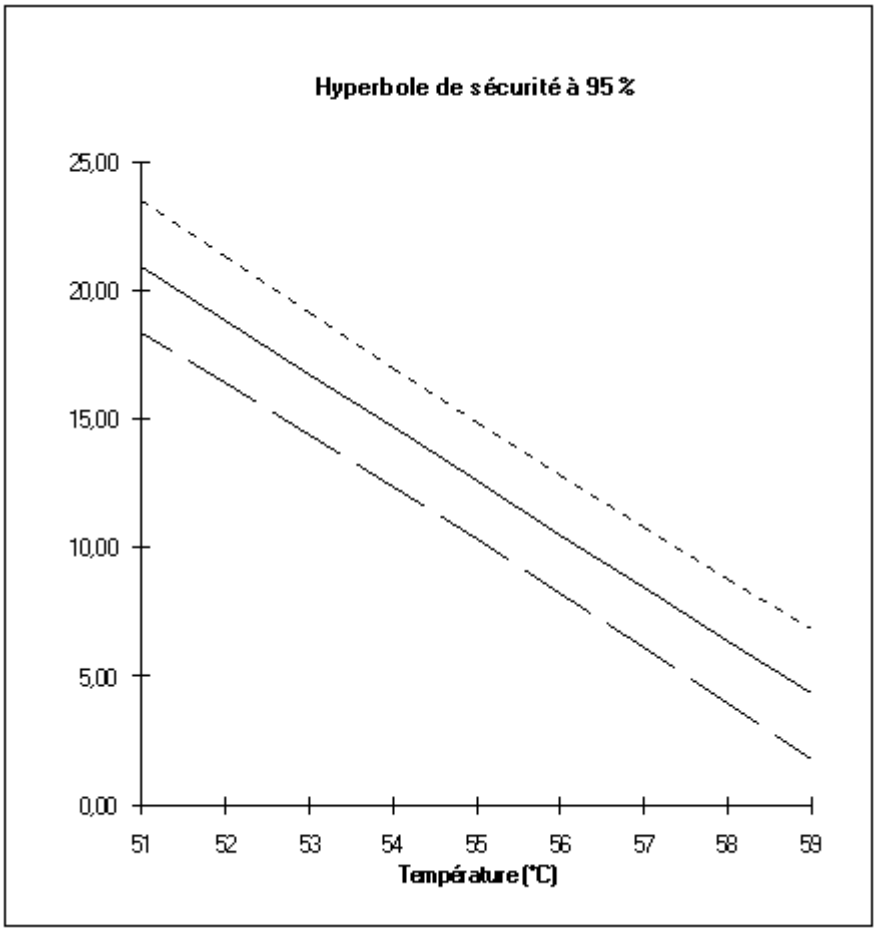
Les intervalles de prédiction à 95 % des valeurs de Y correspondant à chaque valeur de X sont contenues entre les deux branches d'une hyperbole, qu'on appelle l'hyperbole de sécurité, et dont l'équation est :

$$\left(\frac{a + b\,x - y}{t_{0,975}\,\sigma^*}\right)^2 - \left(\frac{x - m_X}{\sigma_X{}^* \sqrt{n-1}}\right)^2 = 1 + \frac{1}{n}$$

Avec les valeurs numériques déjà calculées, cette équation s'écrit :

$$\left(\frac{126{,}7036 - 2{,}0747 \times x - y}{2{,}571 \times 0{,}8252}\right)^2 - \left(\frac{x - 55{,}2857}{3{,}0394 \times \sqrt{6}}\right)^2 = 1 + \frac{1}{7}$$

$$(59{,}7211 - 0{,}9648\,x - 0{,}4713\,y)^2 - (0{,}1343\,x - 7{,}4259)^2 = 1{,}1429$$



Le centre de symétrie de l'hyperbole est le centre de gravité de la distribution statistique :

$$x_0 = m_X = 55{,}2857$$
$$y_0 = a + b\,m_X = m_Y = 12{,}0000$$

et les asymptotes sont les droites :

$$y = a + b\,x \pm t_{0,975}\,\sigma^* \frac{x - m_X}{\sigma_X^*\sqrt{n-1}} = 126{,}7036 - 2{,}0747\,x \pm 0{,}2850\,(x - 55{,}2857)$$

ou encore :

$$y - m_Y = \left(b \pm t_{0,975} \frac{\sigma^*}{\sigma_X^*\sqrt{n-1}} \right)(x - m_X)$$

$$\boxed{y - 12{,}0000 = (2{,}0747 \pm 0{,}2850)(x - 55{,}2857)}$$

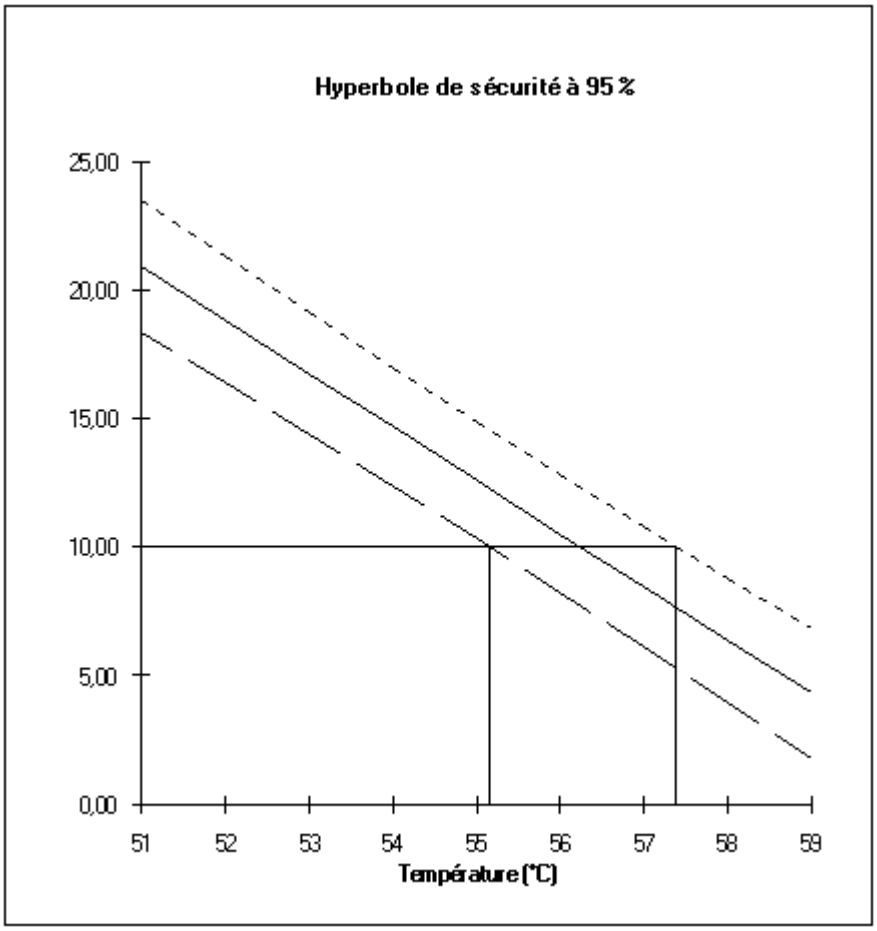
Les pentes des asymptotes sont les bornes de l'intervalle de confiance de *B*.
Cette hyperbole possède deux branches situées de part et d'autre de la droite $y = a + b.x$.
On peut la représenter graphiquement.

9°/ Intervalle de prévision de *X* pour une valeur de *Y*.

Si l'on trace une ligne horizontale à l'ordonnée $Y = 10$, elle coupe les branches de l'hyperbole de sécurité aux points d'abscisses :

$X_{inf} = 55{,}17$
$X_{sup} = 57{,}37$

L'intervalle de prévision à 95 % de la température X_1 correspondant à un rendement $Y_1 = 10$ est donc l'intervalle [55,17 °C ; 57,37 °C].



10°/ Conditions de validité.

a) Pour chaque valeur x_i de *X*, le résidu e_i suit une **LOI NORMALE**, de moyenne 0 et de variance σ^2 **indépendante de *X***, appelée variance résiduelle,

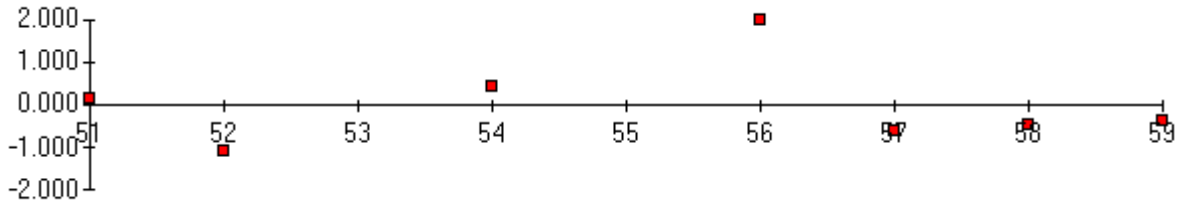
1. Normalité des résidus centrés réduits : 95 % d'entre eux doivent avoir leur valeur entre – 2 et + 2.
2. Indépendance de *e* et de *X* : la distribution des résidus centrés réduits en fonction de *X* doit être aléatoire.

Valeurs des résidus :

X (°C)	51	52	54	56	57	58	59
Y (%)	21	18	15	12	8	6	4

a	126.704						
b	-2.075						
résidu e_i	0.108	-0.817	0.332	1.482	-0.443	-0.369	-0.294
écart-type	0.753						
résidu réduit	0.144	-1.085	0.441	1.967	-0.588	-0.489	-0.390

Distribution des résidus réduits :



Sur le graphique précédent, on voit que tous les résidus réduits sont entre –2 et +2 . Cette répartition est compatible avec une loi normale centrée réduite.

D'autre part, il ne semble pas y avoir de relation évidente entre les différents résidus réduits : on peut considérer, qualitativement qu'ils sont répartis au hasard, donc qu'ils sont indépendants de *X*.

Pour être un peu plus quantitative, l'étude de la normalité des résidus pourrait se faire aussi par les tests des **coefficients d'aplatissement et de symétrie**.

b) Les résidus e_i correspondant aux diverses valeurs de *X* sont **indépendants** entre eux,

L'indépendance des valeurs successives des résidus est testée par le **Test de Durbin-Watson**.

On calcule d'abord un "**coefficient de corrélation des observations successives**", prenant sa valeur entre –1 et 1 :

$$\rho = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} e_i \, e_{i-1}}{\sum_{i=1}^{i=n} e_i^{\,2}} = -0{,}0742$$

puis le **coefficient de Durbin-Watson** $d = 2\,(1 - \rho)$, prenant sa valeur entre 0 et 4 : $d = 2{,}148$.
Voisin de 2, ce coefficient indique que les observations successives ne sont pas corrélées.
La table de Durbin-Watson donne, pour 7 observations, un intervalle de non-décision ayant des limites de l'ordre de 1 : la valeur observée est dans l'intervalle d'acceptation de l'hypothèse nulle : "les observations successives ne sont pas corrélées", au risque bilatéral de 5 %.
Si la valeur observée de *d* était inférieure à la borne inférieure de l'intervalle de non-décision, on pourrait rejeter l'hypothèse nulle ; si elle était dans cet intervalle, on ne pourrait pas prendre de décision.

Au total, les hypothèses de validité sont vérifiées, ce qui justifie l'analyse faite de la régression de *Y* par rapport à *X*.

Chapitre 7. Méthode des moindres carrés.

Exercices

Exercice 1. Taille et poids.
Exercice 2. Age et note.
Exercice 3. MCO, allométrie, régression orthogonale.

Exercice 1. Taille et poids.

Le tableau ci-dessous donne le classement de 100 individus suivant les deux caractères masse corporelle et taille (Chapitre 4, Exercice 3) :

$Y \backslash X$	$40 < x < 45$	$45 < x < 50$	$50 < x < 55$	$55 < x < 60$
$150 < y < 155$	20	9	1	0
$155 < y < 160$	2	18	4	1
$160 < y < 165$	0	5	12	6
$165 < y < 170$	0	1	7	14

Solution

1°/ Déterminer et reporter sur un graphique, l'ensemble des points qui constituent les lignes de régression.
2°/ Calculer les rapports de corrélation.
3°/ Calculer le coefficient de corrélation linéaire.
4°/ Déterminer les équations des droites de régression et les tracer sur le graphique.

HAUT

Exercice 2. Age et note.

Le tableau suivant donne la répartition d'un groupe de 305 étudiants de 1e année universitaire selon leur âge et la note moyenne globale obtenue à l'examen de fin de 1er semestre.
On introduit la variable X qui représente la note moyenne sur 20.
Les âges a_j des étudiants sont situés entre 17 ans et 20,5 ans au 1er juillet de l'année universitaire. Ils sont répartis en 7 classes d'amplitude 0,5 année, on pose :
$y_j = 2\,(a_j - 17{,}25)$.
La variable Y ainsi construite présente donc pour centre des 7 classes les valeurs $y_j \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

$X \setminus Y : y_j$	0	1	2	3	4	5	6
] 5 - 7]	1	2	6	6	7	4	
] 7 - 8]	2	4	6	5	5		1
] 8 - 9]	4	8	7	3	3	7	2
] 9 - 10]	7	15	14	10	7	4	3
] 10 - 11]	6	16	11	8	7	4	2
] 11 - 12]	5	12	10	3	2	3	3
] 12 - 13]	3	10	10	6	7	3	
] 13 - 15]	2	5	13	4	4	1	3
$n_{.j}$	30	72	77	45	42	25	14
$\overline{X}_j$	10,25	10,47	?	9,86	9,80	9,64	10,75
$s_j^2(X)$	3,363	3,188	5,593	5,375	?	4,710	4,205

Solution

1°/ Représenter le nuage des points (x_i, y_j) dans le plan $\mathbb{R}^2$.
2°/ Calculer les valeurs manquantes repérées par un ? dans le tableau ci-dessus, en explicitant les calculs.
3°/ Calculer la moyenne et l'écart-type de l'âge des étudiants.
4°/ Donner le tableau de distribution de la variable statistique de régression $(\overline{Z}_{|Y}, Y)$ définie par $\{ (\overline{X}_j, y_j) ; n_{.j} \}_{j \in \{1, \dots, 7\}}$.
a) Quel est son point moyen ?
b) Calculer $s^2(\overline{Z}_{|Y})$.
c) Dessiner la ligne de régression sur le nuage de points.
5°/ Donner la formule de décomposition de la variance de X.
a) Calculer la moyenne de la variance conditionnelle de X.
b) En déduire le rapport de corrélation $\eta^2_{X|Y}$. Commentaires.
6°/ Donner l'expression de la covariance de X et Y et la calculer.
En déduire la valeur du coefficient de corrélation linéaire $r(X, Y)$.
7°/ Déterminer l'équation de la droite de régression de X en Y.
La représenter sur le nuage de points. Commentaires.
8°/ On reprend la statistique de régression définie en 4° et on cherche à en déterminer un ajustement linéaire par la méthode des moindres carrés ordinaires.
a) Ecrire l'équation de la droite de régression qui s'ajuste au mieux à la variable statistique de régression obtenue en 4°.

b) Calculer le coefficient de corrélation linéaire $r(\overline{Z}_{|Y}, Y)$ associé à cette régression. Commentaires.

HAUT

Exercice 3. MCO, allométrie, régression orthogonale.

Une série d'expériences dans une unité pilote en vue d'étudier la relation entre deux grandeurs X et Y a donné les résultats suivants :

X	18,9	19,3	20,1	21,4	22,4
Y	21,9	22,8	25,8	27,9	30,3

Solution

1°/ Calculer la droite ajustée par la méthode des moindres carrés ordinaires (droite de régression).
2°/ Calculer la droite orthogonale (droite de régression orthogonale).
3°/ Calculer la droite d'allométrie (droite ajustée par la méthode des moindres rectangles).

HAUT

Chapitre 7. Méthode des moindres carrés.

Enoncés.

Exercice 1. Taille et poids.

Le tableau ci-dessous donne le classement de 100 individus suivant les deux caractères masse corporelle et taille (Chapitre 4, Exercice 3) :

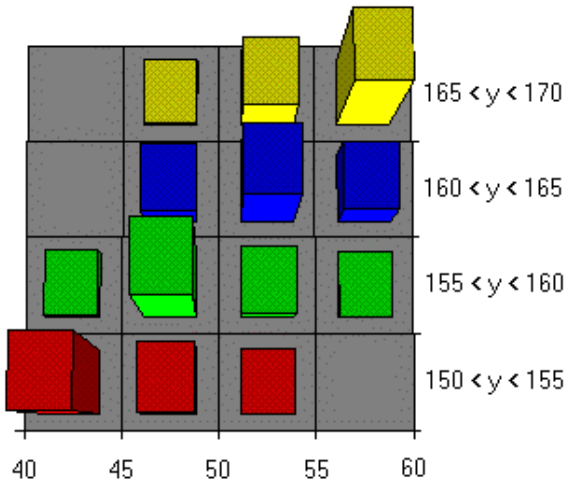
$Y \backslash X$	$40 < x < 45$	$45 < x < 50$	$50 < x < 55$	$55 < x < 60$
$150 < y < 155$	20	9	1	0
$155 < y < 160$	2	18	4	1
$160 < y < 165$	0	5	12	6
$165 < y < 170$	0	1	7	14

1°/ Déterminer et reporter sur un graphique, l'ensemble des points qui constituent les lignes de régression.
2°/ Calculer les rapports de corrélation.
3°/ Calculer le coefficient de corrélation linéaire.
4°/ Déterminer les équations des droites de régression et les tracer sur le graphique.

Solution.

1°/ Lignes de régression.

Le nuage de points a déjà été représenté dans l'Exercice 3 de la Séance 4 :



La ligne de régression de Y en X est une ligne polygonale joignant les points ayant :
— pour abscisses, les centres de classes de valeurs de X,
— pour ordonnées, les moyennes conditionnées de Y pour X fixé.

La ligne de régression de X en Y est une ligne polygonale joignant les points ayant :
— pour abscisses, les moyennes conditionnées de X pour Y fixé,
— pour ordonnées, les centres de classes de valeurs de Y.

Pour pouvoir tracer ces lignes de régression, il faut d'abord calculer les moyennes conditionnées de X en Y et de Y en X : l'hypothèse faite pour la répartition des valeurs à l'intérieur des classes est l'hypothèse habituelle de concentration de toutes les valeurs d'une classe au centre de la classe.
Le tableau des calculs est le suivant :

$y_j \backslash x_i$	42.5	47.5	52.5	57.5	$n_{.j}$	$\overline{X}_j$	$n_{.j}\overline{X}_j$	$n_{.j}\overline{X}_j^2$	$n_{.j}y_j$	$n_{.j}y_j^2$
152.5	20	9	1	0	30	44.33	1330.00	58963.33	4575.00	697687.50
157.5	2	18	4	1	25	48.30	1207.50	58322.25	3937.50	620156.25
162.5	0	5	12	6	23	52.72	1212.50	63919.84	3737.50	607343.75
167.5	0	1	7	14	22	55.45	1220.00	67654.55	3685.00	617237.50
$n_{i.}$	22	33	24	21	$n = 100$		$\sum n_{.j}\overline{X}_j = 4970.00$	$\sum n_{.j}\overline{X}_j^2 = 248859.97$	$\sum n_{.j}y_j = 15935.00$	$\sum n_{.j}y_j^2 = 2542425.00$
$\overline{Y}_i$	152.95	157.20	162.71	165.60						
$n_{i.}\overline{Y}_i$	3365	5187.5	3905	3477.5	$\sum n_{i.}\overline{Y}_i = 15935$				$\overline{Y} = 159.35$	$s^2(Y) = 31.83$
$n_{i.}\overline{Y}_i^2$	514692.05	815459.28	635376.04	575857.44	$\sum n_{i.}\overline{Y}_i^2 = 2541384.81$				$s_b^2(Y) = 21.43$	$\eta^2_{Y\|X} = 0.6732$
$n_{i.}x_i$	935.00	1567.50	1260.00	1207.50	$\sum n_{i.}x_i = 4970.00$		$\overline{X} = 49.70$	$s_b^2(X) = 18.51$		
$n_{i.}x_i^2$	39737.50	74456.25	66150.00	69431.25	$\sum n_{i.}x_i^2 = 249775.00$		$s^2(X) = 27.66$	$\eta^2_{X\|Y} = 0.6692$		

Les formules utilisées dans ce tableau sont :

$$n = \sum_{ij} n_{ij} \; ; \; n_{i.} = \sum_j n_{ij} \; ; \; n_{.j} = \sum_i n_{ij}$$

$$\overline{Y}_i = \frac{1}{n_{i.}} \sum_j n_{ij} y_j \; ; \; \overline{X}_j = \frac{1}{n_{.j}} \sum_i n_{ij} x_i$$

$$s^2(Y) = \frac{1}{n}\left(\sum n_{.j} y_j^2 - \frac{1}{n}\left(\sum n_{.j} y_j \right)^2 \right) \; ; \; s^2(X) = \frac{1}{n}\left(\sum n_{i.} x_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum n_{i.} x_i \right)^2 \right)$$

$$s_b^2(Y) = \frac{1}{n}\left(\sum n_{i.} \overline{Y}_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum n_{i.} \overline{Y}_i \right)^2 \right) \; ; \; s_b^2(X) = \frac{1}{n}\left(\sum n_{.j} \overline{X}_j^2 - \frac{1}{n}\left(\sum n_{.j} \overline{X}_j \right)^2 \right)$$

$$\eta^2_{Y|X} = \frac{s_b^2(Y)}{s^2(Y)} \; ; \; \eta^2_{X|Y} = \frac{s_b^2(X)}{s^2(X)}.$$

De ce tableau, on extrait les tableaux suivants qui permettent de tracer les lignes de régression.

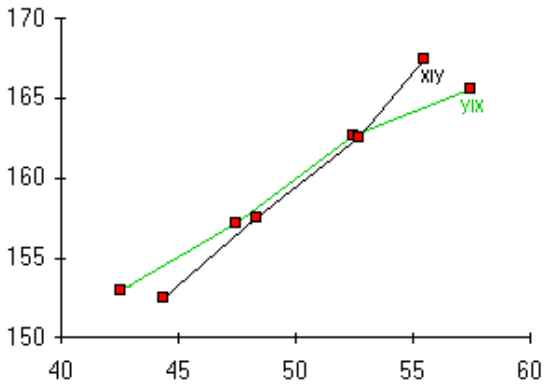
Régression de *Y* en *X* :

x_i	42.5	47.5	52.5	57.5
$\overline{Y}_i$	152.95	157.20	162.71	165.60

Régression de *X* en *Y* :

y_j	$\overline{X}_j$
152.5	44.33
157.5	48.30

162.5	52.72
167.5	55.45



Lignes de régression

2°/ Rapports de corrélation.

Les rapports de corrélation ont été calculés dans le tableau précédent :

$\eta^2_{Y|X} = 0.6732$
$\eta^2_{X|Y} = 0.6692$

3°/ Coefficient de corrélation linéaire.

Le coefficient de corrélation linéaire *r* de *X* et *Y* est donné par la formule :

$$r = \frac{Cov(X, Y)}{s(X)\,s(Y)}$$

Pour calculer la covariance *Cov* (*X*, *Y*) de *X* et *Y*, donnée par la formule :

$$Cov\,(X, Y) = \frac{1}{n}\left(\sum n_{ij}\, x_i\, y_j - \frac{1}{n}\left(\sum n_{i.}\, x_i \right)\left(\sum n_{.j}\, y_j \right) \right)$$

il faut calculer $\sum_{ij} n_{ij}\, x_i\, y_j = \sum_j n_{.j}\, \overline{X}_j\, y_j$, ce qui peut se faire en complétant le tableau précédent.

y_j	$n_{.j}$	$\overline{X}_j$	$n_{.j}\, \overline{X}_j\, y_j$
152.5	30	44.33	202 825,00
157.5	25	48.30	190 181,25
162.5	23	52.72	197 031,25
167.5	22	55.45	204 350,00
	n = 100		$\sum n_{.j}\, \overline{X}_j\, y_j$ = 794 387,50

$$Cov\,(X, Y) = \frac{1}{100}\left(794\,387{,}50 - \frac{1}{100} \times 4\,970{,}00 \times 15\,935{,}00 \right) = 24{,}18$$

$$r = \frac{24{,}18}{\sqrt{27{,}66} \times \sqrt{31{,}83}} = \frac{24{,}18}{5{,}26 \times 5{,}64} = 0{,}8149$$

Le coefficient de détermination est le carré du coefficient de corrélation linéaire :

$$r^2 = 0{,}6641$$

Le fait que les rapports de corrélation et le coefficient de détermination aient des valeurs proches montre que les régressions optimales sont pratiquement linéaires.

4°/ Droites de régression.

Les droites de régression sont déterminées par la méthode des moindres carrés ordinaire.

a) Régression linéaire de *Y* par rapport à *X*.

$$y - \overline{Y} = b\,(x - \overline{X})$$

$$b = \frac{Cov(X, Y)}{s^2(X)} = \frac{24{,}18}{27{,}66} = 0{,}8742$$

$$\overline{X} = \frac{1}{n} \sum n_{i.}\, x_i = 49{,}70$$

$$\overline{Y} = \frac{1}{n} \sum n_{.j}\, y_j = 159{,}35$$

$$y - 159{,}35 = 0{,}8742\,(x - 49{,}70)$$

$$\boxed{y = 115{,}90 + 0{,}8742\,x}$$

b) Régression linéaire de *X* par rapport à *Y*.

$$x - \overline{X} = b'\,(y - \overline{Y})$$

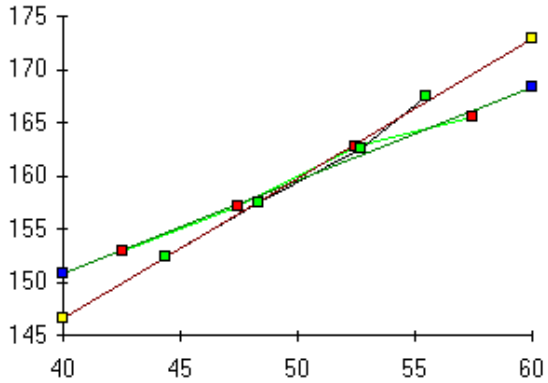
$$b' = \frac{Cov(X, Y)}{s^2(Y)} = \frac{24{,}18}{31{,}83} = 0{,}7597$$

$$x - 49{,}70 = 0{,}7597\,(y - 159{,}35)$$

$$y - 159{,}35 = 1{,}3163\,(x - 49{,}70)$$

$$\boxed{y = 93{,}93 + 1{,}3163\,x}$$

On peut représenter ces droites sur le même graphique que les lignes de régression :



Une droite de régression est très proche de la ligne de régression correspondante, comme on s'y attendait.

Chapitre 7. Méthode des moindres carrés.

Enoncés.

Exercice 2. Age et note.

Le tableau suivant donne la répartition d'un groupe de 305 étudiants de 1e année universitaire selon leur âge et la note moyenne globale obtenue à l'examen de fin de 1er semestre.
On introduit la variable X qui représente la note moyenne sur 20.
Les âges a_j des étudiants sont situés entre 17 ans et 20,5 ans au 1er juillet de l'année universitaire. Ils sont répartis en 7 classes d'amplitude 0,5 année, on pose :
$y_j = 2\,(a_j - 17{,}25)$.
La variable Y ainsi construite présente donc pour centre des 7 classes les valeurs $y_j \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

$X \setminus Y : y_j$	0	1	2	3	4	5	6
] 5 - 7]	1	2	6	6	7	4	
] 7 - 8]	2	4	6	5	5		1
] 8 - 9]	4	8	7	3	3	7	2
] 9 - 10]	7	15	14	10	7	4	3
] 10 - 11]	6	16	11	8	7	4	2
] 11 - 12]	5	12	10	3	2	3	3
] 12 - 13]	3	10	10	6	7	3	
] 13 - 15]	2	5	13	4	4	1	3
$n_{.j}$	30	72	77	45	42	25	14
$\overline{X}_j$	10,25	10,47	?	9,86	9,80	9,64	10,75
$s_j^2(X)$	3,363	3,188	5,593	5,375	?	4,710	4,205

1°/ Représenter le nuage des points (x_i, y_j) dans le plan $\mathbb{R}^2$.
2°/ Calculer les valeurs manquantes repérées par un ? dans le tableau ci-dessus, en explicitant les calculs.
3°/ Calculer la moyenne et l'écart-type de l'âge des étudiants.
4°/ Donner le tableau de distribution de la variable statistique de régression $(\overline{Z}_{|Y}, Y)$ définie par $\{ (\overline{X}_j, y_j) ; n_{.j} \}_{j \in \{1, \dots, 7\}}$.
a) Quel est son point moyen ?
b) Calculer $s^2(\overline{Z}_{|Y})$.
c) Dessiner la ligne de régression sur le nuage de points.
5°/ Donner la formule de décomposition de la variance de X.
a) Calculer la moyenne de la variance conditionnelle de X.
b) En déduire le rapport de corrélation $\eta^2_{X|Y}$. Commentaires.
6°/ Donner l'expression de la covariance de X et Y et la calculer.

En déduire la valeur du coefficient de corrélation linéaire r (X, Y).
7°/ Déterminer l'équation de la droite de régression de X en Y.
La représenter sur le nuage de points. Commentaires.
8°/ On reprend la statistique de régression définie en 4° et on cherche à en déterminer un ajustement linéaire par la méthode des moindres carrés ordinaires.
a) Ecrire l'équation de la droite de régression qui s'ajuste au mieux à la variable statistique de régression obtenue en 4°.
b) Calculer le coefficient de corrélation linéaire $r(\overline{Z}_{|Y}, Y)$ associé à cette régression. Commentaires.

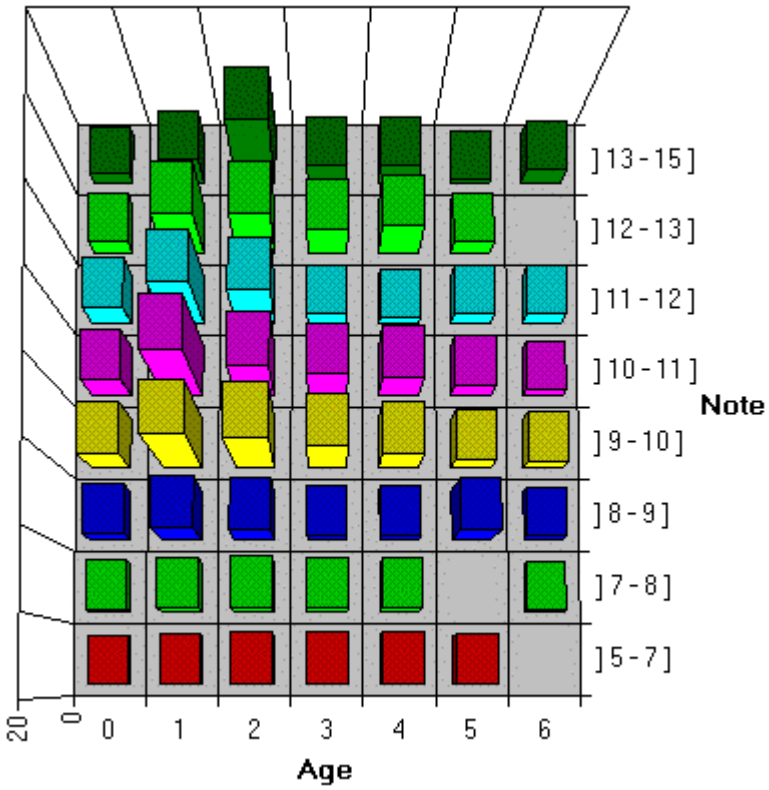
Solution.

1°/ Nuage de points.

Les points à représenter ont :
— pour abscisses les centres des classes de notes
— pour ordonnées les valeurs de Y, de 0 à 6.

$x_i \setminus y_j$	0	1	2	3	4	5	6
6	1	2	6	6	7	4	
7,5	2	4	6	5	5		1
8,5	4	8	7	3	3	7	2
9,5	7	15	14	10	7	4	3
10,5	6	16	11	8	7	4	2
11,5	5	12	10	3	2	3	3
12,5	3	10	10	6	7	3	
14	2	5	13	4	4	1	3
$n_{.j}$	30	72	77	45	42	25	14

On s'en fait une image plus nette avec une représentation 3D :



2°/ Valeurs manquantes.

x_i	n_{i3}	$n_{i3}\,x_i$
6	6	36,0
7,5	6	45,0
8,5	7	59,5
9,5	14	133,0
10,5	11	115,5
11,5	10	115,0
12,5	10	125,0
14	13	182,0
Total	$n_{.3} = 77$	$\sum_i n_{i3}\,x_i = 811,0$

$$\overline{X}_3 = \frac{1}{n_{.3}} \sum_{ij} n_{ij}\,x_i = \frac{1}{n_{.3}} \sum_i n_{i3}\,x_i = \frac{811}{77} = 10,53$$

x_i	n_{i5}	$n_{i5}\,x_i$	$n_{i5}\,x_i^{\,2}$
6	7	42,0	252,00
7,5	5	37,5	281,25
8,5	3	25,5	216,75
9,5	7	66,5	631,75
10,5	7	73,5	771,75
11,5	2	23,0	264,50

12,5	7	87,5	1093,75
14	4	56,0	784,00
Total	$n_{.5} = 42$	$\sum_i n_{i5} x_i = 411{,}5$	$\sum_i n_{i5} x_i^2 = 4\,295{,}75$

$$s_5^2(X) = \frac{1}{n_{.5}}\left(\sum_i n_{i5} x_i^2 - \frac{1}{n_{.5}}\left(\sum_i n_{i5} x_i \right)^2 \right) = \frac{1}{42}\left(4\,295{,}75 - \frac{1}{42} \times 411{,}5^2 \right) = 6{,}286$$

3°/ Moyenne et écart-type de l'âge.

Le centre a_j d'une classe d'âge est lié à y_j par $y_j = 2\,(a_j - 17{,}25)$, soit $a_j = \frac{y_j}{2} + 17{,}25$.
La moyenne $\overline{A}$ de l'âge est donc lié à la moyenne $\overline{Y}$ de Y par $\overline{A} = \frac{\overline{Y}}{2} + 17{,}25$.

La variance $s^2(A)$ de l'âge est lié à la variance $s^2(Y)$ de Y par $s^2(A) = \frac{1}{4} s^2(Y)$.

L'écart-type $s(A)$ de l'âge, racine carrée de la variance, est lié à l'écart-type $s(Y)$ de Y par $s(A) = \frac{1}{2} s(Y)$.

y_j	0	1	2	3	4	5	6	Total
$n_{.j}$	30	72	77	45	42	25	14	$n = \sum_j n_{.j} = 305$
$n_{.j} y_j$	0	72	154	135	168	125	84	$\sum_j n_{.j} y_j = 738$
$n_{.j} y_j^2$	0	72	308	405	672	625	504	$\sum_j n_{.j} y_j^2 = 2\,586$

$$\overline{Y} = \frac{1}{n} \sum_j n_{.j} y_j = \frac{738}{305} = 2{,}42$$

$$s^2(Y) = \frac{1}{n}\left(\sum_j n_{.j} y_j^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_j n_{.j} y_j \right)^2 \right) = \frac{1}{305}\left(2\,586 - \frac{1}{305} \times 738^2 \right) = 2{,}6239$$

$$\overline{A} = \frac{\overline{Y}}{2} + 17{,}25 = \frac{369}{305} + \frac{69}{4} = \frac{22\,521}{1\,220} = 18{,}46 \text{ ans.}$$

$$s(A) = \frac{1}{2} s(Y) = \frac{\sqrt{2{,}6239}}{2} = \frac{1{,}62}{2} = 0{,}81 \text{ an.}$$

$\overline{A} = 18{,}46$ ans.
$s(A) = 0{,}81$ an.

4°/ Variable statistique de régression.

La variable statistique de régression de X en Y a, pour modalités, les moyennes conditionnées de X en Y, associées aux valeurs de Y, et, pour effectifs correspondants, les effectifs marginaux de Y : $(\overline{Z}_{|Y}, Y) = \{ (\overline{X}_j, y_j) ; n_{.j} \}_{j \in \{1, \dots, 7\}}$.

$\overline{X}_j$	10,25	10,47	10,53	9,86	9,80	9,64	10,75
y_j	0	1	2	3	4	5	6
$n_{.j}$	30	72	77	45	42	25	14

a) Point moyen.

$\overline{X}_j$	10,25	10,47	10,53	9,86	9,80	9,64	10,75	
y_j	0	1	2	3	4	5	6	
$n_{.j}$	30	72	77	45	42	25	14	$n = \sum_j n_{.j} = 305$
$n_{.j}\ \overline{X}_j$	307,50	753,84	810,81	443,70	411,60	241,00	150,50	$\sum_j n_{.j}\ \overline{X}_j = 3\ 118,95$
$n_{.j}\ \overline{X}_j{}^2$	3 151,8750	7 892,7048	8 537,8293	4 374,882	4 033,6800	2 323,2400	1 617,8750	$\sum_j n_{.j}\ \overline{X}_j{}^2 = 31\ 932,0861$
$n_{.j}\ y_j$	0	72	154	135	168	125	84	$\sum_j n_{.j}\ y_j = 738$

Le point moyen de la distribution statistique a, pour coordonnées :

$$\overline{Y} = \frac{1}{n}\sum_j n_{.j}\ y_j = \frac{738}{305} = 2{,}42$$
$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_j n_{.j}\ \overline{X}_j = \frac{3118{,}95}{305} = 10{,}23$$

b) Variance.

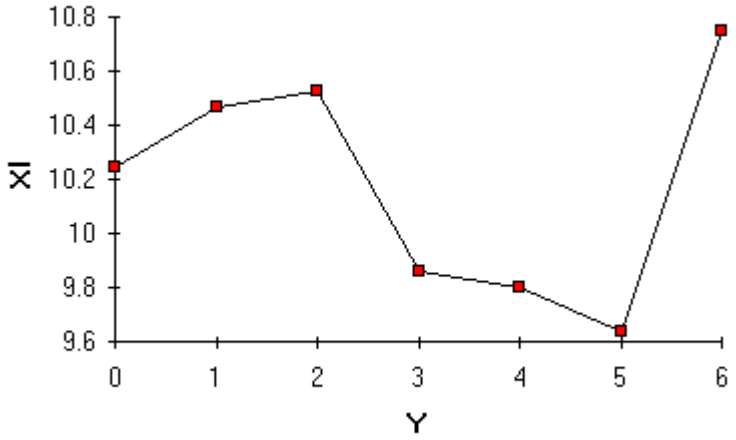
La variance de la moyenne conditionnée de *X* par *Y* est :

$$s^2(\overline{Z}_{|Y}) = s_b{}^2(X) = \frac{1}{n}\left(\sum_j n_{.j}\ \overline{X}_j{}^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_j n_{.j}\ \overline{X}_j\right)^2\right) = \frac{1}{305}\left(31\ 932{,}0861 - \frac{1}{305}\times 3\ 118{,}95^2\right) = 0{,}1229$$
$$= (0{,}35)^2.$$

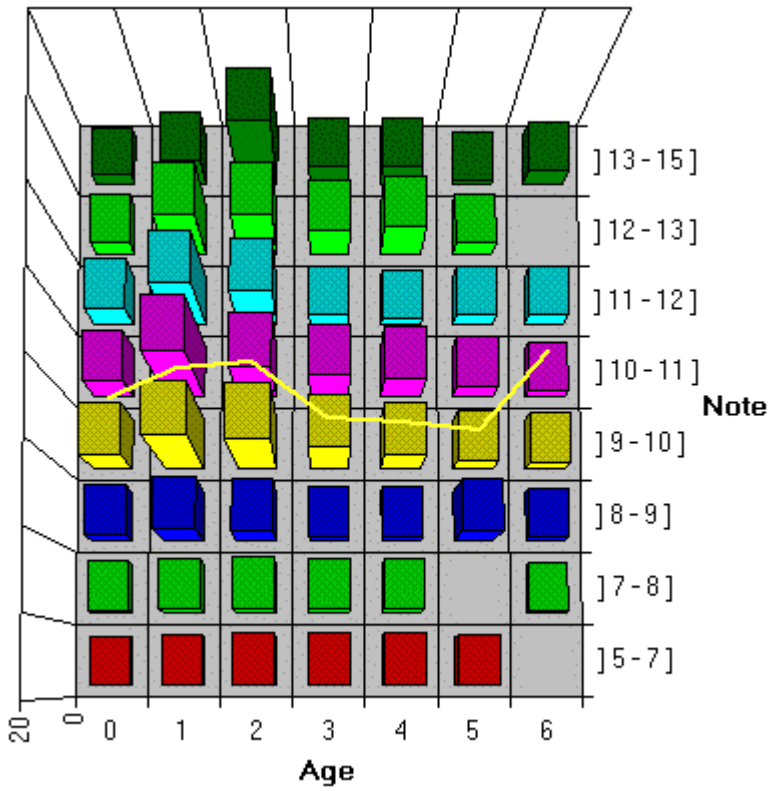
c) Ligne de régression.

La ligne de régression joint, par des segments de droite, les points ayant, pour abscisses, les valeurs de *Y* et, pour ordonnées, les moyennes conditionnées de *X* correspondant aux valeurs de *Y*.

y_j	0	1	2	3	4	5	6
$\overline{X}_j$	10,25	10,47	10,53	9,86	9,80	9,64	10,75
$n_{.j}$	30	72	77	45	42	25	14



Sur le nuage de points, cette ligne se traduit par une ligne de points reliés entre eux par des segments de droite : sur cette ligne, à chaque classe d'âge correspond une note moyenne.



5°/ Variance de *X*.

a) Formule de décomposition de la variance.

$$s^2(X) = s_w^2(X) + s_b^2(X)$$

Dans cette formule :

— $s^2(X)$ est la variance marginale de X,

— $s_w^2(X)$ est la variance intra-classe, moyenne de la variance conditionnelle de X en Y,

— $s_b^2(X)$ est la variance inter-classe, variance de la moyenne conditionnelle de X en Y.

Nous connaissons déjà :

— la variance inter-classe $s_b^2(X) = s^2(\overline{Z}_{|Y}) = 0{,}1229$,

— les variances conditionnelles de X en Y, données dans le tableau de l'énoncé, complété dans la question 2 :

y_j	0	1	2	3	4	5	6
$n_{.j}$	30	72	77	45	42	25	14
$\overline{X}_j$	10,25	10,47	10,53	9,86	9,80	9,64	10,75
$s_j^2(X)$	3,363	3,188	5,593	5,375	6,286	4,710	4,205

On complète ce tableau par les produits $n_{.j}\, s_j^2(X)$ et les sommes :

y_j	0	1	2	3	4	5	6	
$n_{.j}$	30	72	77	45	42	25	14	$n = \sum_j n_{.j} = 305$
$\overline{X}_j$	10,25	10,47	10,53	9,86	9,80	9,64	10,75	
$s_j^2(X)$	3,363	3,188	5,593	5,375	6,286	4,710	4,205	
$n_{.j}\, s_j^2(X)$	100,890	229,536	430,661	241,875	264,012	117,750	58,870	$\sum_j n_{.j}\, s_j^2(X) = 1\,443{,}594$

Nous en déduisons la moyenne de la variance conditionnelle :

$$s_w^2(X) = \frac{1}{n}\sum_j n_{.j}\, s_j^2(X) = \frac{1443{,}594}{305} = 4{,}7331$$

La variance de X est donc :

$$s^2(X) = s_w^2(X) + s_b^2(X) = 4{,}7331 + 0{,}1229 = 4{,}8560$$

b) Rapport de corrélation.

Le rapport de corrélation $\eta^2_{X|Y}$ est le rapport entre la part de variance de X expliquée par l'âge, $s_b^2(X)$, et la variance de X, $s^2(X)$:

$$\eta^2_{X|Y} = \frac{s_b^2(X)}{s^2(X)} = \frac{0{,}1229}{4{,}8560} = 2{,}53 \times 10^{-2}.$$

Ce rapport est très faible : l'âge n'intervient pratiquement pas dans la note obtenue.

6°/ Covariance et coefficient de corrélation linéaire.

a) Covariance.

La covariance de X et Y se calcule par la formule :

$$Cov(X, Y) = \frac{1}{n}\left(\sum_{ij} n_{ij}\, x_i\, y_j - \frac{1}{n}\left(\sum_i n_{i.}\, x_i \right)\left(\sum_j n_{.j}\, y_j \right) \right).$$

Nous connaissons déjà (voir question 4) :

$n = \sum_j n_{.j} = \sum_i n_{i.} = 305$
$\sum_i n_{i.} x_i = \sum_j n_{.j} \overline{X}_j = 3\,118{,}95$
$\sum_j n_{.j} y_j = 738$

Reste à calculer :

$$\sum_{ij} n_{ij} x_i y_j = \sum_j \left(\sum_i n_{ij} x_i \right) y_j = \sum_j n_{.j} \overline{X}_j y_j,$$

ce qui se fait dans le tableau suivant :

y_j	0	1	2	3	4	5	6	
$n_{.j}$	30	72	77	45	42	25	14	$n = \sum_j n_{.j} = 305$
$\overline{X}_j$	10,25	10,47	10,53	9,86	9,80	9,64	10,75	
$n_{.j} \overline{X}_j y_j$	0,00	753,84	1 621,62	1 331,10	1 646,40	1 205,00	903,00	$\sum_j n_{.j} \overline{X}_j y_j = 7\,460{,}96$

Nous déduisons du tableau la valeur de somme qui nous manquait pour calculer la covariance:

$$Cov\,(X, Y) = \frac{1}{305}\left(7\,460{,}96 - \frac{1}{305} \times 3\,118{,}95 \times 738 \right) = -0{,}282$$

b) Coefficient de corrélation linéaire.

Le coefficient de corrélation linéaire $r_{XY} = \frac{Cov(X, Y)}{s(X)\, s(Y)}$ peut maintenant être calculé :

$$r_{XY} = \frac{-0{,}282}{\sqrt{4{,}8560} \times \sqrt{2{,}6239}} = -7{,}9 \times 10^{-2}.$$

7°/ Droite de régression.

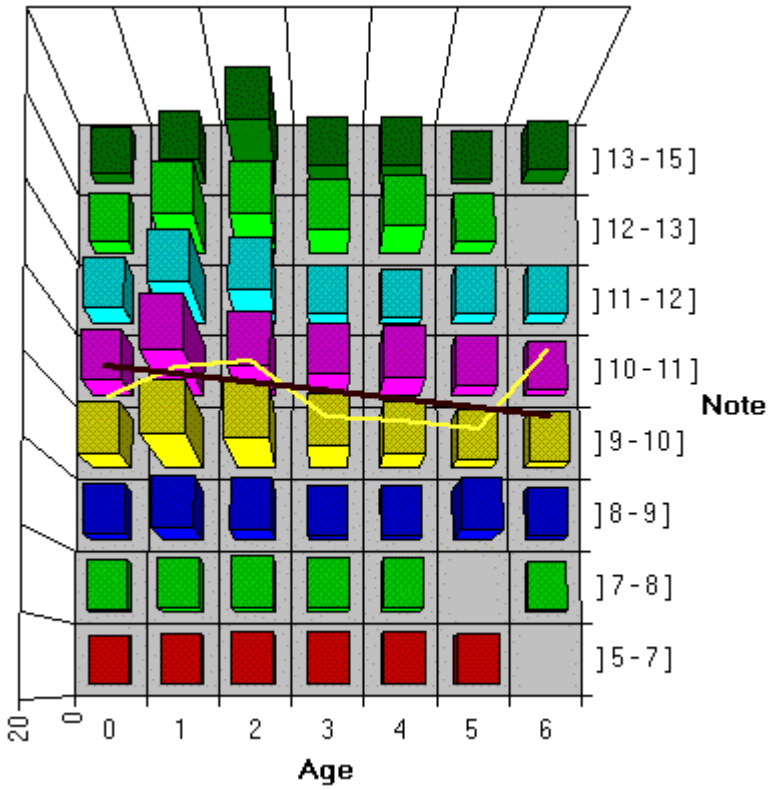
La droite de régression de X en Y a, pour équation :

$$x = a + b\, y$$

avec :
$b = \frac{Cov(X, Y)}{s^2(Y)} = -\frac{0{,}282}{2{,}6239} = -0{,}107$
$a = \overline{X} - b\, \overline{Y} = \frac{3118{,}95}{305} + 0{,}107 \times \frac{738}{305} = 10{,}49$

$$x = 10{,}49 - 0{,}107\, y$$

On peut tracer cette droite sur le schéma précédent :



On constate que cette droite de régression est très peu inclinée sur l'axe des âges : la note varie peu avec l'âge dans ce modèle linéaire.
On peut faire un "**test de signification de *b***" pour connaître le risque d'erreur que l'on prend en rejetant l'hypothèse $b = 0$, par test de Student, par test de Fisher-Snedecor, ou par analyse de variance ; ces différents tests seront étudiés plus tard. Ils permettront de déterminer si la valeur – 0,107 de b est significativement différente de 0, ou si la différence avec 0 n'est due qu'aux hasards de l'échantillonnage.

8°/ Méthode des moindres carrés.

Nous l'avons vu dans la question 4, la variable statistique de régression de X en Y a, pour modalités, les moyennes conditionnées de X en Y, associées aux valeurs de Y, et, pour effectifs correspondants, les effectifs marginaux de Y : $(\overline{Z}_{|Y}, Y) = \{ (\overline{X}_j, y_j) ; n_{.j} \}_{j \in \{1, \dots, 7\}}$.

a) Droite de régression.

La droite de régression qui s'ajuste au mieux à cette variable est calculée par la méthode des moindres carrés, elle est donnée par la relation :

$$z = a + b\,y$$

avec :

$$b = \frac{Cov\left(\overline{Z}_{|Y}, Y\right)}{s^2(Y)} \text{ et } a = \overline{\overline{Z}_{|Y}} - b\,\overline{Y}.$$

Nous connaissons déjà :

— la moyenne de la moyenne conditionnelle de X par Y : c'est la moyenne de X.

$$\overline{\overline{Z}_{|Y}} = \overline{X} = \frac{3118,95}{305} = 10,23$$

— la moyenne de *Y*.

$$\overline{Y} = \frac{738}{305} = 2,42$$

— la variance de *Y*.

$$s^2(Y) = 2,6239$$

Reste donc seulement à calculer la covariance de $\overline{Z}_{|Y}$ et *Y*.
Elle est donnée par la formule :

$$Cov(\overline{Z}_{|Y}, Y) = \frac{1}{n}\left(\sum_j n_{.j}\, \overline{X}_j\, y_j - \frac{1}{n}\left(\sum_j n_{.j}\, \overline{X}_j \right)\left(\sum_j n_{.j}\, y_j \right) \right).$$

Or on a :

$$\sum_j n_{.j}\, \overline{X}_j\, y_j = \sum_{ij} n_{ij}\, x_i\, y_j$$

et

$$\sum_j n_{.j}\, \overline{X}_j = \sum_{ij} n_{ij}\, x_i$$

donc :

$$Cov(\overline{Z}_{|Y}, Y) = \frac{1}{n}\left(\sum_{ij} n_{ij}\, x_i\, y_j - \frac{1}{n}\left(\sum_i n_{i.}\, x_i \right)\left(\sum_j n_{.j}\, y_j \right) \right) = Cov(X, Y)$$

On connaît sa valeur numérique :

$$Cov(\overline{Z}_{|Y}, Y) = Cov(X, Y) = -0,282.$$

Il vient alors :

$$b = \frac{Cov(X, Y)}{s^2(Y)} = -\frac{0,282}{2,6239} = -0,107$$
$$a = \overline{X} - b\,\overline{Y} = \frac{3118,95}{305} + 0,107 \times \frac{738}{305} = 10,49$$

$$z = 10,49 - 0,107\, y$$

La droite de régression de la moyenne conditionnelle $\overline{Z}_{|Y}$ de *X* en *Y* est confondue avec la droite de régression de *X* en *Y*.

b) Coefficient de corrélation linéaire.

Le coefficient de corrélation linéaire $r(\overline{Z}_{|Y}, Y)$ est donné par la formule :

$$r\left(\overline{Z}_{|Y}, Y\right) = \frac{Cov\left(\overline{Z}_{|Y}, Y\right)}{s\left(\overline{Z}_{|Y}\right) s(Y)}$$

Nous avons :

$$Cov\left(\overline{Z}_{|Y}, Y\right) = Cov\left(X, Y\right)$$

et

$$s^2\left(\overline{Z}_{|Y}\right) = s_b{}^2(X) = \eta^2_{X|Y}\, s^2(X)$$
$$s\left(\overline{Z}_{|Y}\right) = \eta_{X|Y}\, s(X)$$

en prenant $\eta_{X|Y} = \sqrt{\eta^2_{X|Y}} > 0$.

Il vient donc :

$$r\left(\overline{Z}_{|Y}, Y\right) = \frac{1}{\eta_{X|Y}} \frac{Cov\left(X, Y\right)}{s(X)\, s(Y)} = \frac{1}{\eta_{X|Y}}\, r_{XY}$$

Numériquement :

$$r\left(\overline{Z}_{|Y}, Y\right) = -\frac{7{,}9 \times 10^{-2}}{\sqrt{2{,}53 \times 10^{-2}}} = -0{,}50$$

Le coefficient de détermination de $\overline{Z}_{|Y}$ et Y est donc :

$$\left[\, r\left(\overline{Z}_{|Y}, Y\right) \right]^2 = (-0{,}50)^2 = 0{,}25$$

Ce coefficient de détermination mesure la validité de l'ajustement linéaire de la moyenne conditionnelle en Y : il est meilleur que l'ajustement linéaire de X en Y.
Cela se comprend intuitivement car, dans un cas, on résume le nuage de points par une droite, ce qui donne un mauvais ajustement, et, dans l'autre cas, on résume la ligne de régression (qui est déjà un résumé du nuage de points) par une droite : la ligne de régression se rapproche plus d'une droite que le nuage de points.

Chapitre 7. Méthode des moindres carrés.

Enoncés.

Exercice 3. MCO, allométrie, régression orthogonale.

Une série d'expériences dans une unité pilote en vue d'étudier la relation entre deux grandeurs X et Y a donné les résultats suivants :

X	18,9	19,3	20,1	21,4	22,4
Y	21,9	22,8	25,8	27,9	30,3

1°/ Calculer la droite ajustée par la méthode des moindres carrés ordinaires (droite de régression).
2°/ Calculer la droite orthogonale (droite de régression orthogonale).
3°/ Calculer la droite d'allométrie (droite ajustée par la méthode des moindres rectangles).

Solution.

1°/ Droite ajustée par la méthode des moindres carrés ordinaires.

Il s'agit de rendre minimum la somme $S^2 = \sum_{i=1}^{i=n} (a + b\,x_i - y_i)^2$.

Dans $\mathbb{R}^n$, considérons

- le vecteur X de composantes canoniques $(x_1, \dots, x_n)$,
- le vecteur Y de composantes canoniques $(y_1, \dots, y_n)$
- le vecteur $\mathbb{1}_n$ de composantes canoniques $(1, \dots, 1)$.

$\sum_{i=1}^{i=n} (a + b\,x_i - y_i)^2$ est le **carré de la norme euclidienne** du vecteur $a\,\mathbb{1}_n + b\,X - Y$.

Lorsque a et b varient, $a\,\mathbb{1}_n + b\,X$ parcourt le sous-espace vectoriel (P) engendré par les deux vecteurs $\mathbb{1}_n$ et X.

La norme de la différence $Y - (a\,\mathbb{1}_n + b\,X)$ est minimum lorsque ce vecteur est orthogonal à (P), c'est-à-dire lorsque $a\,\mathbb{1}_n + b\,X$ est la projection orthogonale de Y sur (P). Les constantes a et b doivent donc vérifier ce qu'on appelle les "**équations normales**" :

$$< Y - (a\,\mathbb{1}_n + b\,X) \mid \mathbb{1}_n > = 0 \text{ et } < Y - (a\,\mathbb{1}_n + b\,X) \mid X > = 0$$

Compte tenu de la bilinéarité du produit scalaire < . | . >, ces équations s'écrivent :

$$a < \mathbb{1}_n \mid \mathbb{1}_n > + b < X \mid \mathbb{1}_n > = < Y \mid \mathbb{1}_n >$$
$$a < \mathbb{1}_n \mid X > + b < X \mid X > = < Y \mid X >$$

Sous forme matricielle, ce système de deux équations à deux inconnues *a* et *b* peut s'écrire :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{pmatrix}$ a pour déterminant

$$n \sum_{i=1}^{i=n} x_i{}^2 - \left(\sum_{i=1}^{i=n} x_i \right)^2 = n^2\, Var\,(X)$$

qui n'est pas nul puisque *X* n'est pas proportionnel à $\mathbb{1}_n$ (les composantes de *X* ne sont pas toutes égales entre elles).
Donc cette matrice est inversible. On en déduit :

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{pmatrix} \right)^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{1}{n^2\, Var\,(X)} \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{i=n} x_i{}^2 & -\sum_{i=1}^{i=n} x_i \\ -\sum_{i=1}^{i=n} x_i & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{i=n} y_i \\ \sum_{i=1}^{i=n} x_i\, y_i \end{pmatrix}$$

En particulier, la deuxième composante donne

$$b = \frac{1}{n^2\, Var\,(X)} \left(n \sum_{i=1}^{i=n} x_i\, y_i - \left(\sum_{i=1}^{i=n} x_i \right) \left(\sum_{i=1}^{i=n} y_i \right) \right) = \frac{Cov(X,Y)}{Var\,(X)} = r\, \frac{\sigma_Y}{\sigma_X}$$

Comme la première équation normale $< Y - (a\,\mathbb{1}_n + b\,X) \mid \mathbb{1}_n > = 0$ s'écrit aussi :

$$n\,a = \sum_{i=1}^{i=n} y_i - b \sum_{i=1}^{i=n} x_i$$

on en déduit :

$$a = \overline{Y} - b\,\overline{X}$$

Cette relation, qui permet de calculer *a* quand on a déjà calculé *b*, indique que le point moyen ($\overline{X}$, $\overline{Y}$) est sur la droite ajustée par la méthode des moindres carrés ordinaires (droite de régression de *Y* par rapport à *X*).

Lorsque la droite $y = a + b\,x$ est la droite ajustée par la méthode des moindres carrés ordinaires, la somme $S^2 = \sum_{i=1}^{i=n} (a + b\,x_i - y_i)^2$ est égale à la variance de $(a\,1_n + b\,X) - Y$ qui est aussi la variance de $b\,X - Y$, au facteur $\frac{1}{n}$ près.

$$S^2 = \sum_{i=1}^{i=n} (a + b\,x_i - y_i)^2 = \sum_{i=1}^{i=n} (b\,(x_i - \overline{X}) - (y_i - \overline{Y}))^2 = n\,Var\,(b\,X - Y) = n\,Var\,(a\,1_n + b\,X - Y)$$

Application numérique.

Le calcul à la machine (programme de statistiques à deux dimensions d'une calculette) donne directement le résultat :

X	18,9	19,3	20,1	21,4	22,4
Y	21,9	22,8	25,8	27,9	30,3

$\sum_{i=1}^{i=n} x_i = 102{,}1$; $\sum_{i=1}^{i=n} y_i = 128{,}7$; $\sum_{i=1}^{i=n} x_i^2 = 2093{,}43$; $\sum_{i=1}^{i=n} y_i^2 = 3361{,}59$; $\sum_{i=1}^{i=n} x_i\,y_i = 2648{,}31$; $n = 5$.

$a_{MCO} = -\,22{,}648\,806\,738\,84$
$b_{MCO} = 2{,}369\,677\,117\,45$

La *droite ajustée par la méthode des moindres carrés ordinaires* (MCO) a pour équation :

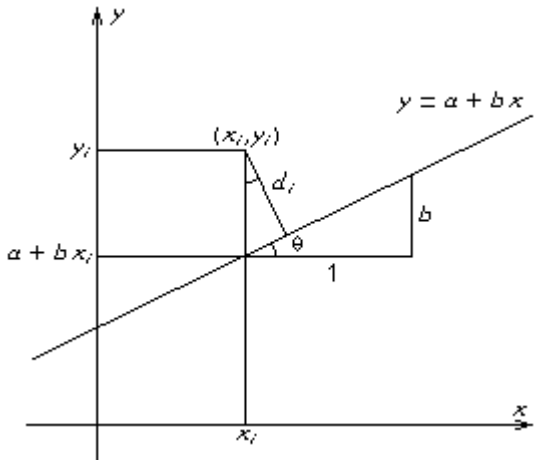
MCO : $y = -\,22{,}649 + 2{,}370\,x$

On peut compléter le tableau des valeurs expérimentales par les valeurs données par cette relation :

X	18,9	19,3	20,1	21,4	22,4
Y	21,9	22,8	25,8	27,9	30,3
Y_X	22,14	23,09	24,98	28,06	30,43

2°/ Droite de régression orthogonale.

a) Somme des carrés des distances des points à une droite.



$$\frac{d_i}{|y_i - a - b\,x_i|} = \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1+b^2}}$$

$$d_i^{\,2} = \frac{(a + b\,x_i - y_i)^2}{1+b^2}$$

Et la somme des carrés des distances des points expérimentaux (x_i, y_i) à la droite d'équation $y = a + b\,x$ est donnée par :

$$S_\perp^{\,2} = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{(a + b\,x_i - y_i)^2}{1+b^2} = \frac{1}{1+b^2} \sum_{i=1}^{i=n} (a + b\,x_i - y_i)^2 = \frac{1}{1+b^2}\, S^2$$

b) Détermination du minimum.

Pour que la somme $S_\perp^{\,2}$ soit minimum, il faut et il suffit que le vecteur $a\,\mathbb{1}_n + b\,X - Y$ soit ϕ-orthogonal au sous-espace défini par $\mathbb{1}_n$ et X, où ϕ est le produit scalaire de $\mathbb{R}^n$ défini, dans la base canonique, par la matrice $\left(\frac{1}{1+b^2}\right)^{\frac{1}{n}} Id_{\mathbb{R}^n}$, où $Id_{\mathbb{R}^n}$ est la matrice identité de $\mathbb{R}^n$.

La ϕ - orthogonalité au vecteur $\mathbb{1}_n$ se traduit par le fait que la droite passe par le centre de gravité $(\overline{X}, \overline{Y})$ des points expérimentaux :
ϕ - orthogonal au vecteur $\mathbb{1}_n \Leftrightarrow$ centré.

Elle est équivalente à la relation $\frac{\partial(S_\perp^{\,2})}{\partial a} = 0$, soit $\frac{1}{1+b^2}\frac{\partial(S^2)}{\partial a} = 0$

On a donc, là encore :

$$a = \overline{Y} - b\,\overline{X}$$

$$< a\,\mathbb{1}_n + b\,X - Y \mid \mathbb{1}_n > = 0$$

Et l'équation de la droite orthogonale est de la forme :

$$Y - \overline{Y} = b\,(X - \overline{Y})$$

La ϕ - orthogonalité au vecteur X traduit la relation $\frac{\partial(S_\perp^{\,2})}{\partial b} = 0$.

Notons $b_\perp$ le coefficient angulaire qui rend minimum la somme $S_\perp^{\,2}$ et b^{MCO} le coefficient angulaire qui rend minimum la somme S^2.

Le rapport entre les deux est noté k : $b_\perp = k\, b^{MCO}$.
Cherchons la valeur de k.

$$S_\perp{}^2 = \frac{1}{1+b^2}\, S^2 \Rightarrow S^2 = (1+b^2)\, S_\perp{}^2$$
$$\frac{\partial(S^2)}{\partial b} = 2\, b\, S_\perp{}^2 + (1+b^2)\, \frac{\partial(S_\perp{}^2)}{\partial b}$$

La relation $\frac{\partial(S_\perp{}^2)}{\partial b} = 0$ s'écrit

$$2\, b\, S_\perp{}^2 = \frac{\partial(S^2)}{\partial b},$$

ou encore, en divisant par 2 et en calculant le deuxième membre :

$$\frac{b}{1+b^2} \sum_{i=1}^{i=n} (a + b\, x_i - y_i)^2 = \sum_{i=1}^{i=n} x_i\, (a + b\, x_i - y_i)$$

$$\sum_{i=1}^{i=n} (a + b\, x_i - y_i)\left(x_i - \frac{b}{1+b^2}\, (a + b\, x_i - y_i)\right) = 0$$

$$< X - \frac{b}{1+b^2}\, (a\, 1_n + b\, X - Y) \mid a\, 1_n + b\, X - Y > = 0$$

Le vecteur $a\, 1_n + b\, X - Y$ est orthogonal au vecteur $X - \frac{b}{1+b^2}\, (a\, 1_n + b\, X - Y)$. Comme il est orthogonal à 1_n, il est orthogonal à $X - \frac{b}{1+b^2}\, (b\, X - Y) = \frac{1}{1+b^2}\, (X + b\, Y)$, donc à $X + b\, Y$.

$$< X + b\, Y \mid a\, 1_n + b\, X - Y > = 0$$

$$b^2 \sum_{i=1}^{i=n} x_i y_i + b\left(a \sum_{i=1}^{i=n} y_i + \sum_{i=1}^{i=n} x_i{}^2 - \sum_{i=1}^{i=n} y_i{}^2\right) + a \sum_{i=1}^{i=n} x_i - \sum_{i=1}^{i=n} x_i y_i = 0$$

Cette relation, jointe à la relation :

$$n\, a = \sum_{i=1}^{i=n} y_i - b \sum_{i=1}^{i=n} x_i$$

donne l'équation de b.

$$n\, b^2 \sum_{i=1}^{i=n} x_i y_i + b\left(\left(\sum_{i=1}^{i=n} y_i - b \sum_{i=1}^{i=n} x_i\right) \sum_{i=1}^{i=n} y_i + n \sum_{i=1}^{i=n} x_i{}^2 - n \sum_{i=1}^{i=n} y_i{}^2\right) + \left(\sum_{i=1}^{i=n} y_i - b \sum_{i=1}^{i=n} x_i\right)$$

$$\sum_{i=1}^{i=n} x_i - n \sum_{i=1}^{i=n} x_i y_i = 0$$

$$b^2 \left(n \sum_{i=1}^{i=n} x_i y_i - \left(\sum_{i=1}^{i=n} x_i \right) \left(\sum_{i=1}^{i=n} y_i \right) \right) + b \left(\left(n \sum_{i=1}^{i=n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{i=n} x_i \right)^2 \right) - \left(n \sum_{i=1}^{i=n} y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{i=n} y_i \right)^2 \right) \right)$$
$$- \left(n \sum_{i=1}^{i=n} x_i y_i - \left(\sum_{i=1}^{i=n} x_i \right) \left(\sum_{i=1}^{i=n} y_i \right) \right) = 0$$

En divisant par n^2, cette relation peut être écrite :

$$\boxed{b^2 \, Cov(X, Y) + b \, (Var(X) - Var(Y)) - Cov(X, Y) = 0.}$$

Le discriminant est positif :

$(Var(X) - Var(Y))^2 + 4 \, (Cov(X, Y))^2 = (Var(X) - Var(Y))^2 + 4 \, r^2 \, Var(X) \, Var(Y) > 0$

où r est le coefficient de corrélation linéaire de X et Y : $r = \frac{Cov(X, Y)}{\sigma_X \, \sigma_Y}$.

L'équation a donc deux racines réelles, dont le produit est – 1 : il y a deux droites solutions, orthogonales entre elles.

Notons b_1 le coefficient angulaire de la droite ajustée aux (x_i, y_i) par la méthode des moindres carrés ordinaires (régression de Y par rapport à X), b_2 le coefficient angulaire de la droite ajustée aux (y_i, x_i) par la méthode des moindres carrés ordinaires (régression de X par rapport à Y). L'équation de b s'écrit :

$$b^2 + b \left(\frac{1}{b_1} - \frac{1}{b_2} \right) - 1 = 0$$

et cette équation montre que le coefficient angulaire de la droite de régression orthogonale s'exprime en fonction des coefficients de régression de Y par rapport à X et de X par rapport à Y. La solution qui correspond à la droite de régression orthogonale est celle qui a le signe de la covariance (qui est aussi le signe de r).

e) Application numérique.

X	18,9	19,3	20,1	21,4	22,4
Y	21,9	22,8	25,8	27,9	30,3

$\sum_{i=1}^{i=n} x_i = 102{,}1$; $\sum_{i=1}^{i=n} y_i = 128{,}7$; $\sum_{i=1}^{i=n} x_i^2 = 2093{,}43$; $\sum_{i=1}^{i=n} y_i^2 = 3361{,}59$; $\sum_{i=1}^{i=n} x_i y_i = 2648{,}31$; $n = 5$.

$Var(X) = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^{i=n} x_i^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^{i=n} x_i \right)^2 \right) = 1{,}7096$; $Var(Y) = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^{i=n} y_i^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^{i=n} y_i \right)^2 \right) = 9{,}7704$; Cov

$$(X, Y) = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{i=n} x_i y_i - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{i=n} x_i \right)\left(\sum_{i=1}^{i=n} y_i \right)\right) = 4{,}0512$$

L'équation :

$$b^2\, Cov\,(X, Y) + b\,(Var\,(X) - Var\,(Y)) - Cov\,(X, Y) = 0$$

s'écrit, en divisant par $Cov\,(X, Y)$:

$$b^2 + b\left(\frac{1}{b_1} - \frac{1}{b_2}\right) - 1 = 0$$

$$b^2 - 1{,}9897\, b - 1 = 0$$

$$b = 0{,}5\,(1{,}9897 \pm \sqrt{1{,}9897^2 + 4}) = 2{,}405 \text{ ou } -0{,}418$$

Comme la covariance est positive, on obtient $b_\perp = 2{,}405$

La valeur de a s'en déduit par :

$$n\, a_\perp = \sum_{i=1}^{i=n} y_i - b_\perp \sum_{i=1}^{i=n} x_i$$

$$a_\perp = -23{,}379$$

L'équation de la droite de régression orthogonale est donc :

Droite de régression orthogonale : $y = -23{,}379 + 2{,}405\, x$

On peut compléter le tableau des valeurs expérimentales par les valeurs données par cette relation :

X	18,9	19,3	20,1	21,4	22,4
Y	21,9	22,8	25,8	27,9	30,3
$Y_\perp$	22,08	23,05	24,97	28,10	30,50

La droite de régression orthogonale définit l'**axe principal** de la distribution expérimentale dans $\mathbb{R}^2$: elle est définie par le vecteur propre unitaire correspondant à la plus grande valeur propre de la matrice des variances-covariances.

3°/ Droite d'allométrie.

Ici, la quantité à minimiser est la somme des surfaces des rectangles définis par les points expérimentaux et la droite.

$$S_{allo}^2 = \sum_{i=1}^{i=n} (a + b\, x_i - y_i)(x_i - \frac{y_i - a}{b}) = \frac{1}{b}\sum_{i=1}^{i=n} (a + b\, x_i - y_i)^2 = \frac{1}{b}\, S^2$$

On a donc

$$S^2 = b\, S_{allo}{}^2 = (1 + b^2)\, S_\perp{}^2.$$

Pour que la somme $S_{allo}{}^2$ soit minimum, il faut et il suffit que le vecteur $a\,\mathbb{1}_n + b\,X - Y$ soit orthogonal au sous-espace défini par $\mathbb{1}_n$ et X, pour le produit scalaire de $\mathbb{R}^n$ défini par la matrice diagonale dont les éléments sont $\frac{1}{b\frac{1}{n}}$.

Là encore, l'orthogonalité de $a\,\mathbb{1}_n + b\,X - Y$ et de $\mathbb{1}_n$ se traduit par le fait que la droite passe par le centre de gravité du nuage de points.

$$n\,a = \sum_{i=1}^{i=n} y_i - b \sum_{i=1}^{i=n} x_i$$

Cette relation est équivalente au fait que la dérivée partielle de $S_{allo}{}^2$ par rapport à a est nulle.

La nullité de la dérivée par rapport à b, ou, ce qui revient au même, l'orthogonalité par rapport au vecteur X se traduit par la relation :

$$S_{allo}{}^2 = \frac{\partial(S^2)}{\partial b}$$

$$\frac{1}{b}\sum_{i=1}^{i=n} (a + b\,x_i - y_i)^2 = 2 \sum_{i=1}^{i=n} (a + b\,x_i - y_i)\,x_i$$

$$\sum_{i=1}^{i=n} (a + b\,x_i - y_i)(a - b\,x_i - y_i) = 0$$

La relation $\sum_{i=1}^{i=n} (a + b\,x_i - y_i) = 0$ entraîne alors :

$$\sum_{i=1}^{i=n} (a + b\,x_i - y_i)(b\,x_i + y_i) = 0$$

$$b^2 \sum_{i=1}^{i=n} x_i{}^2 + ab \sum_{i=1}^{i=n} x_i + a \sum_{i=1}^{i=n} y_i - \sum_{i=1}^{i=n} y_i{}^2 = 0$$

Multiplions par n et utilisons la relation $\sum_{i=1}^{i=n} (a + b\,x_i - y_i) = 0$:

$$n\,b^2 \sum_{i=1}^{i=n} x_i{}^2 + (\sum_{i=1}^{i=n} y_i - b \sum_{i=1}^{i=n} x_i)\, b \sum_{i=1}^{i=n} x_i + (\sum_{i=1}^{i=n} y_i - b \sum_{i=1}^{i=n} x_i) \sum_{i=1}^{i=n} y_i - \sum_{i=1}^{i=n} y_i{}^2 = 0$$

$$b^2\left(n\sum_{i=1}^{i=n} x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{i=n} x_i\right)^2\right)-\left(n\sum_{i=1}^{i=n} y_i^2-\left(\sum_{i=1}^{i=n} y_i\right)^2\right)=0$$

soit, en divisant par n^2 :

$$b^2\,Var\,(X)=Var\,(Y)$$

$$|\,b\,|=\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}$$

Il y a donc deux solutions de signes opposés et la relation $S^2 = b\,S_{allo}^2$ montre qu'il faut retenir la solution positive $b_{allo}=\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}$.

Le coefficient angulaire $b_{MCO}=\frac{Cov(X,Y)}{Var(X)}=r\,\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}$ de la droite ajustée par la méthode des moindres carrés ordinaires est lié au coefficient b_{allo} ajusté par la méthode des moindres rectangles (droite d'allométrie) par la relation $b_{MCO} = r\,b_{allo}$, où r, coefficient de corrélation linéaire, est aussi le cosinus de l'angle des vecteurs X et Y dans $\mathbb{R}^n$.

On en déduit :

$$a=\overline{Y}-b_{allo}\,\overline{X}$$

Et l'équation de la droite d'allométrie est donnée par

Droite d'allométrie : $y=\overline{Y}+\frac{b_{MCO}}{r}(X-\overline{X})$

Application numérique.

$r=\frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X\,\sigma_Y}=\frac{4{,}0512}{\sqrt{1{,}7096\times 9{,}7704}}=0{,}991$; $b_{MCO}=2{,}370$; $\overline{Y}=25{,}74$; $\overline{X}=20{,}42$.

Droite d'allométrie : $y = -23{,}095 + 2{,}392\,x$

Ces valeurs permettent de dresser le tableau des valeurs théoriques de Y dans ce cas :

X	18,9	19,3	20,1	21,4	22,4
Y	21,9	22,8	25,8	27,9	30,3
Y_{allo}	22,11	23,07	24,98	28,09	30,49

Représentation graphique.

En fait, les trois droites ajustées à la distribution expérimentale sont très proches l'une de l'autre.

Lorsqu'on veut **étalonner** *Y* pour des valeurs de *X* connues sans incertitude, on utilise la droite ajustée par la méthode des moindres carrés ordinaires (*MCO*).
Lorsqu'on veut étudier les **corrélations** des variables *X* et *Y*, on utilise la droite de régression orthogonale.
Lorsqu'on veut étudier une **relation linéaire** entre les variables *X* et *Y* mesurées toutes deux avec une certaine incertitude, on utilise la droite d'allométrie.

Chapitre 8. Modèles non linéaires.

Exercices

Exercice 1. Nombre de contribuables soumis à l'impôt sur le revenu.
Exercice 2. PNB/hab et mortalité infantile.

Exercice 1. Nombre de contribuables soumis à l'impôt sur le revenu.

Le tableau ci-dessous donne le nombre de contribuables en France soumis à l'impôt sur le revenu en 1980 (revenus de 1979) par tranches de revenus :
$N(x)$ représente le nombre de revenus supérieurs au revenu x.

Revenu (10^3 F) $]x_i ; x_{i+1}]$	Nombre de contribuables (10^3)	$N(x_i)$	$y_i = \ln x_i$	$z_i = \ln(N(x_i))$
15-20	1 384	15 000	2,71	9,62
20-25	1 663	13 616	3,00	9,52
25-30	1 835	11 953	3,22	9,39
30-35	1 636	?	3,40	9,22
35-40	1 277	8 482	3,56	9,05
40-50	2 202	7 205	3,69	8,88
50-60	1 576	5 003	3,91	8,52
60-70	1 031	3 427	?	8,14
70-80	668	2 396	4,25	7,78
80-100	734	1 728	4,38	7,45
100-200	790	994	4,61	?
200-400	163	204	5,30	5,32
400-600	41	41	5,99	3,71

Solution

1°/ Calculer le revenu médian.
2°/ Compléter le tableau donné et en déduire, par la méthode des moindres carrés, un ajustement de z en fonction de y.
3°/ En déduire une estimation des constantes réelles positives C et a dans la relation : $N(x) = \frac{C}{x^a}$.
4°/ Retrouver la valeur du revenu médian en utilisant la loi ajustée.

HAUT

Exercice 2. PNB/hab et mortalité infantile.

Une étude faite sur 120 pays du monde (données 1985) portant sur le produit national brut par habitant X (exprimé en 10^3 dollars) et sur le taux de mortalité infantile Y (nombre annuel de décès d'enfants âgés de moins d'un an pour 1000 naissances vivantes au cours d'une année) donne le tableau suivant :

	Y	[0-20[	[20-40[	[40-70[	[70-100[	[100-140[	[140-190[	$n_{i.}$
X	$x_i \setminus y_j$	10	30	55	85	120	165	
[0,0-0,8[	0,4		3	5	9	26	10	53
[0,8-2,0[	1,4	2	6	9	7			24
[2-5[	3,5	5	7	1	3			16
[5-9[	7	8	1		1	1		11
[9-13[	11	10			1			11
[13-17[	15	4	1					5
$n_{.j}$		29	18	15	21	27	10	n = 120

1°/ Calculer les moyennes et les variances marginales.
Dessiner le nuage de la statistique dans $\mathbb{R}^2$.
2°/ Donner le tableau de la distribution de la variable statistique de régression $(X, \overline{Z}_{|X})$.
Dessiner la ligne de régression de Y en X.
Quel est le rapport de corrélation $\eta^2_{Y|X}$? Commentaires.
3°/ Déterminer la droite de régression de Y en X. La tracer sur le nuage.
Calculer le coefficient de corrélation linéaire $r(X, Y)$.
En déduire la variance résiduelle. Commentaires.
4°/ On pose $Z = ln\ Y$.
a) Calculer $\overline{Z}$, $s^2(Z)$, $r(X ; Z)$.
b) En déduire par la méthode des moindres carrés, le prédicteur de Y de la forme $y = \lambda\, a^x$, où λ et a sont des réels.
Comment peut-on justifier que ce modèle est meilleur que la droite de régression de Y en X ?
5°/ Les Emirats Arabes Unis ont un PNB/hab de 21 920 dollars. Donner une estimation, par chacun des modèles, du taux de mortalité infantile. Commentaires (On notera que ce taux est en réalité de 35).
6°/ Le Pérou et le Danemark ont, respectivement, un PNB/hab de 1 000 dollars et de 11 170 dollars. Donner une estimation du taux de mortalité. Commentaires. (On notera que ces taux sont, en réalité, respectivement de 94 et 8).

Solution

HAUT

Chapitre 8. Modèles non linéaires.

Enoncés.

Exercice 1. Nombre de contribuables soumis à l'impôt sur le revenu.

Le tableau ci-dessous donne le nombre de contribuables en France soumis à l'impôt sur le revenu en 1980 (revenus de 1979) par tranches de revenus :
$N(x)$ représente le nombre de revenus supérieurs au revenu x.

Revenu (10^3 F) $]x_i ; x_{i+1}]$	Nombre de contribuables (10^3)	$N(x_i)$	$y_i = \ln x_i$	$z_i = \ln(N(x_i))$
15-20	1 384	15 000	2,71	9,62
20-25	1 663	13 616	3,00	9,52
25-30	1 835	11 953	3,22	9,39
30-35	1 636	?	3,40	9,22
35-40	1 277	8 482	3,56	9,05
40-50	2 202	7 205	3,69	8,88
50-60	1 576	5 003	3,91	8,52
60-70	1 031	3 427	?	8,14
70-80	668	2 396	4,25	7,78
80-100	734	1 728	4,38	7,45
100-200	790	994	4,61	?
200-400	163	204	5,30	5,32
400-600	41	41	5,99	3,71

1°/ Calculer le revenu médian.
2°/ Compléter le tableau donné et en déduire, par la méthode des moindres carrés, un ajustement de z en fonction de y.
3°/ En déduire une estimation des constantes réelles positives C et a dans la relation : $N(x) = \frac{C}{x^a}$.
4°/ Retrouver la valeur du revenu médian en utilisant la loi ajustée.

Solution.

1°/ Revenu médian.

Le nombre total de contribuables est la somme des effectifs : $15\,000 \times 10^3$.
Pour calculer le revenu médian, il faut déjà

déterminer la classe médiane, c'est-à-dire celle
qui contient le $7\,500 \times 10^3$ ième- contribuable.
Pour cela nous calculons les effectifs cumulés des classes :

Revenu (10^3 F) $]x_i ; x_{i+1}]$	Nombre de contribuables (10^3)	Effectif cumulé (10^3)
15-20	1 384	1 384
20-25	1 663	3 047
25-30	1 835	4 882
30-35	1 636	6 518
35-40	1 277	7 795
40-50	2 202	9 997
50-60	1 576	11 573
60-70	1 031	12 604
70-80	668	13 272
80-100	734	14 006
100-200	790	14 796
200-400	163	14 959
400-600	41	15 000

C'est la classe des revenus de 35×10^3 F à 40×10^3 F qui contient le $7\,500 \times 10^3$ ième- contribuable : c'est donc la classe 35-40 qui est la **classe médiane**.

Dans cette classe, la valeur de la médiane tient compte de l'effectif de la classe précédant la classe médiane.
Dans l'hypothèse d'une répartition uniforme des effectifs dans la classe médiane, on fait une interpolation linéaire entre les points (35 ; 6 518) et (40 ; 7 795) :

$$M_e = 35 + (40 - 35) \times \frac{7500 - 6518}{7795 - 6518} = 35 + 5 \times \frac{982}{1277} = 38{,}845$$

Comme les revenus ont été groupés en classes, il est inutile d'attendre une telle précision de l'évaluation de la médiane, et nous dirons simplement, avec trois chiffres significatifs :

Le revenu médian est de $38{,}8 \times 10^3$ F

2°/ Ajustement linéaire par MCO.

Complétons, auparavant, le tableau par les valeurs manquantes.

Revenu (10^3 F) $]x_i ; x_{i+1}]$	Nombre de contribuables (10^3)	$N(x_i)$	$y_i = \ln x_i$	$z_i = \ln(N(x_i))$
15-20	1 384	15 000	2,71	9,62
20-25	1 663	13 616	3,00	9,52
25-30	1 835	11 953	3,22	9,39
30-35	1 636	?	3,40	9,22

35-40	1 277	8 482	3,56	9,05
40-50	2 202	7 205	3,69	8,88
50-60	1 576	5 003	3,91	8,52
60-70	1 031	3 427	?	8,14
70-80	668	2 396	4,25	7,78
80-100	734	1 728	4,38	7,45
100-200	790	994	4,61	?
200-400	163	204	5,30	5,32
400-600	41	41	5,99	3,71

Dans la colonne des $N(x_i)$, $N(x_3) = N(30)$ est le nombre de contribuables dont le revenu est supérieur à 30×10^3 F. Il est égal au nombre total de contribuables, $15\,000 \times 10^3$, moins le nombre de contribuables dont le revenu est inférieur à 30×10^3 F, soit l'effectif cumulé de la classe dont la limite supérieure est 30. Dans le tableau de la première question, on lit cet effectif cumulé : 4 882.

$$N(30) = (15\,000 - 4\,882) \times 10^3 = 10\,118 \times 10^3$$

Dans la colonne des $ln(x_i)$, $ln(x_7) = ln(60)$ se lit sur une calculette :

$$ln(60) = 4{,}09.$$

De même, dans la colonne des $ln(N(x_i))$, $ln(N(x_{10})) = ln(994)$ se lit sur une calculette :

$$ln(994) = 6{,}90.$$

Le tableau, ainsi complété, est le suivant :

Revenu (10^3 F) $]x_i ; x_{i+1}]$	Nombre de contribuables (10^3)	$N(x_i)$ (10^3)	$y_i = ln\, x_i$	$z_i = ln(N(x_i))$
15-20	1 384	15 000	2,71	9,62
20-25	1 663	13 616	3,00	9,52
25-30	1 835	11 953	3,22	9,39
30-35	1 636	10 118	3,40	9,22
35-40	1 277	8 482	3,56	9,05
40-50	2 202	7 205	3,69	8,88
50-60	1 576	5 003	3,91	8,52
60-70	1 031	3 427	4,09	8,14
70-80	668	2 396	4,25	7,78
80-100	734	1 728	4,38	7,45
100-200	790	994	4,61	6,90
200-400	163	204	5,30	5,32
400-600	41	41	5,99	3,71

En réalité, le calcul des logarithmes fournit le tableau, plus précis :

Revenu (10^3 F) $]x_i ; x_{i+1}]$	x_i	Nombre de contribuables (10^3)	$N(x_i)$	$y_i = \ln x_i$	$z_i = \ln(N(x_i))$
15-20	15	1384	15000	2.7081	9.6158
20-25	20	1663	13616	2.9957	9.5190
25-30	25	1835	11953	3.2189	9.3887
30-35	30	1636	10118	3.4012	9.2221
35-40	35	1277	8482	3.5553	9.0457
40-50	40	2202	7205	3.6889	8.8825
50-60	50	1576	5003	3.9120	8.5178
60-70	60	1031	3427	4.0943	8.1394
70-80	70	668	2396	4.2485	7.7816
80-100	80	734	1728	4.3820	7.4547
100-200	100	790	994	4.6052	6.9017
200-400	200	163	204	5.2983	5.3181
400-600	400	41	41	5.9915	3.7136
Total		15 000		52.0999	103.5008

Le tableau des calculs est le suivant :

n_i	y_i	z_i	$n_i y_i$	$n_i y_i^2$	$n_i z_i$	$n_i y_i z_i$
1384	2.7081	9.6158	3747.9415	10149.6137	13308.2748	36039.4762
1663	2.9957	9.5190	4981.9028	14924.4469	15830.0984	47422.7367
1835	3.2189	9.3887	5906.6371	19012.7315	17228.3334	55455.8660
1636	3.4012	9.2221	5564.3589	18925.4830	15087.3086	51314.9146
1277	3.5553	9.0457	4540.1795	16141.9183	11551.3609	41069.1085
2202	3.6889	8.8825	8122.9126	29964.4452	19559.3322	72152.0186
1576	3.9120	8.5178	6165.3483	24118.9842	13424.0418	52515.1603
1031	4.0943	8.1394	4221.2692	17283.3308	8391.7632	34358.7699
668	4.2485	7.7816	2837.9948	12057.2075	5198.0794	22084.0155
734	4.3820	7.4547	3216.4075	14094.3836	5471.7644	23977.4175
790	4.6052	6.9017	3638.0844	16753.9980	5452.3724	25109.1028
163	5.2983	5.3181	863.6257	4575.7632	866.8536	4592.8653
41	5.9915	3.7136	245.6500	1471.8035	152.2565	912.2392
15 000			54052.3124	199474.1094	131521.8395	467003.6912

Les formules utilisées pour trouver la droite ajustée par la méthode des moindres carrés, sont les suivantes :

$$z = a + b\,y$$

$$b = \frac{Cov(Y,Z)}{s^2(Y)} = \frac{n\sum_{i=0}^{i=12} n_i\, y_i\, z_i - \left(\sum_{i=0}^{i=12} n_i\, y_i\right)\left(\sum_{i=0}^{i=12} n_i\, z_i\right)}{n\sum_{i=0}^{i=12} n_i\, {y_i}^2 - \left(\sum_{i=0}^{i=12} n_i\, y_i\right)^2} = \frac{15\,000 \times 467\,003{,}6912 - 54\,052{,}3124 \times 131\,521{,}8395}{15\,000 \times 199\,474{,}1094 - (54\,052{,}3124)^2}$$

$$= -1{,}4761$$

$$a = \overline{Z} - b\,\overline{Y} = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=0}^{i=12} n_i\, z_i - b\sum_{i=0}^{i=12} n_i\, y_i\right) = \frac{131\,521{,}8395 + 1{,}4761 \times 54\,052{,}3124}{15\,000} = 14{,}0872$$

Avec les mêmes formules, le tableau de l'énoncé, moins précis, donne :

n_i	y_i	z_i	$n_i y_i$	$n_i y_i^2$	$n_i z_i$	$n_i y_i z_i$
1384	2.71	9.62	3750.64	10164.23	13314.08	36081.16
1663	3.00	9.52	4989.00	14967.00	15831.76	47495.28
1835	3.22	9.39	5908.70	19026.01	17230.65	55482.69
1636	3.40	9.22	5562.40	18912.16	15083.92	51285.33
1277	3.56	9.05	4546.12	16184.19	11556.85	41142.39
2202	3.69	8.88	8125.38	29982.65	19553.76	72153.37
1576	3.91	8.52	6162.16	24094.05	13427.52	52501.60
1031	4.09	8.14	4216.79	17246.67	8392.34	34324.67
668	4.25	7.78	2839.00	12065.75	5197.04	22087.42
734	4.38	7.45	3214.92	14081.35	5468.30	23951.15
790	4.61	6.90	3641.90	16789.16	5451.00	25129.11
163	5.30	5.32	863.90	4578.67	867.16	4595.95
41	5.99	3.71	245.59	1471.08	152.11	911.14
15 000			54066.50	199562.98	131526.49	467141.26

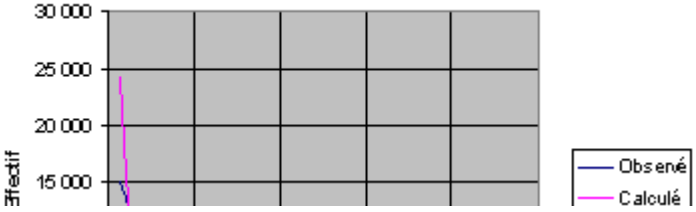
$$b = -1{,}48$$
$$a = 14{,}11$$

La comparaison des deux résultats montre que l'on peut conserver, avec trois chiffres significatifs, les valeurs :

$$\boxed{z = 14{,}1 - 1{,}48\, y}$$

3°/ Estimation de *C* et *a*.

La relation $N(x) = \frac{C}{x^a}$ entre nombrers positifs est équivalente à $ln\,(N(x)) = ln\,C - a\,ln\,x$.
En posant $z = ln\,(N(x))$ et $y = ln\,x$, cette relation s'écrit : $z = ln\,C - a\,y$.
L'identification avec l'expression $z = 14{,}1 -$



1,48 *y* montre que l'on doit prendre :

$$ln\ C = 14{,}1 + 3 \times 2{,}48 \times ln\ 10 \text{ et } a = 1{,}48$$

soit $C = e^{14{,}1} \approx 1{,}3 \times 10^6$ et $a = 1{,}48 \approx \frac{3}{2}$

$$N(x) = \frac{1{,}3 \times 10^6}{x^{1{,}48}}$$

4°/ Estimation de la médiane.

Si l'on prend pour évaluation de la médiane, la valeur de *x* pour laquelle $N(x) = 7\,500$ (il y a 7 500 milliers de revenus supérieurs à la médiane), on trouve.

$$1{,}48\ ln(M_e) = ln(1{,}3 \times 10^6) - ln(7\,500) = 14{,}1 - 8{,}923 = 5{,}177$$

$$M_e = e^{\frac{5{,}177}{1{,}48}} = 33,\ 06 \text{ (milliers de francs)}$$

Le revenu médian du modèle non linéaire est de $33{,}1 \times 10^3$ F

Cette valeur est à rapprocher de la valeur $38{,}8 \times 10^3$ F trouvée dans la première question sous l'hypothèse d'équirépartition des revenus dans la classe médiane : le revenu médian du modèle non linéaire est juste à côté la classe médiane [35 ; 40] des observations.

Chapitre 8. Modèles non linéaires.

Enoncés.

Exercice 2. PNB/hab et mortalité infantile.

Une étude faite sur 120 pays du monde (données 1985) portant sur le produit national brut par habitant X (exprimé en 10^3 dollars) et sur le taux de mortalité infantile Y (nombre annuel de décès d'enfants âgés de moins d'un an pour 1000 naissances vivantes au cours d'une année) donne le tableau suivant :

	Y	[0-20[	[20-40[	[40-70[	[70-100[	[100-140[	[140-190[	$n_{i.}$
X	$x_i \setminus y_j$	10	30	55	85	120	165	
[0,0-0,8[	0,4		3	5	9	26	10	53
[0,8-2,0[	1,4	2	6	9	7			24
[2-5[	3,5	5	7	1	3			16
[5-9[	7	8	1		1	1		11
[9-13[	11	10			1			11
[13-17[	15	4	1					5
$n_{.j}$		29	18	15	21	27	10	n = 120

1°/ Calculer les moyennes et les variances marginales.
Dessiner le nuage de la statistique dans R^2.
2°/ Donner le tableau de la distribution de la variable statistique de régression (X, $\overline{Z}_{|X}$).
Dessiner la ligne de régression de Y en X.
Quel est le rapport de corrélation $\eta^2_{Y|X}$? Commentaires.
3°/ Déterminer la droite de régression de Y en X. La tracer sur le nuage.
Calculer le coefficient de corrélation linéaire r (X, Y).
En déduire la variance résiduelle. Commentaires.
4°/ On pose $Z = ln\ Y$.
a) Calculer $\overline{Z}$, $s^2(Z)$, r (X ; Z).
b) En déduire par la méthode des moindres carrés, le prédicteur de Y de la forme $y = \lambda\, a^x$, où λ et a sont des réels.
Comment peut-on justifier que ce modèle est meilleur que la droite de régression de Y en X ?
5°/ Les Emirats Arabes Unis ont un PNB/hab de 21 920 dollars. Donner une estimation, par chacun des modèles, du taux de mortalité infantile. Commentaires (On notera que ce taux est en réalité de 35).
6°/ Le Pérou et le Danemark ont, respectivement, un PNB/hab de 1 000 dollars et de 11 170 dollars. Donner une estimation du taux de mortalité. Commentaires. (On notera que ces taux sont, en réalité, respectivement de 94 et 8).

Solution.

1°/ Moyennes et variances marginales.

Le tableau des calculs est le suivant.

$x_i \backslash y_j$	10	30	55	85	120	165	$n_{i.}$	$n_{i.}\,x_i$
0,4		3	5	9	26	10	53	21.2
1,4	2	6	9	7			24	33.6
3,5	5	7	1	3			16	56
7	8	1		1	1		11	77
11	10			1			11	121
15	4	1					5	75
$n_{.j}$	29	18	15	21	27	10	$n = 120$	383.80
$n_{.j}\,y_j$	290	540	825	1785	3240	1650	8330	
$n_{.j}\,y_j^2$	2900	16200	45375	151725	388800	272250	877250	2491.7431
$\overline{X}_j$	8.4931	3.1167	1.2067	1.9952	0.6444	0.4000		
$n_{.j}\,\overline{X}_j$	246.30	56.10	18.10	41.90	17.40	4.00	383.80	3.1983
$n_{.j}\,\overline{X}_j^2$	2091.8514	174.8450	21.8407	83.6005	11.2133	1.6000	2384.9509	9.6453
$\sum_i n_{ij}\,x_i^2$	2567.17	371.99	30.69	221.91	53.16	1.60	3246.52	
$s_j^2(X)$	16.3903	10.9525	0.5900	6.5862	1.5536	0.0000		
$n_{.j}\,s_j^2(X)$	475.3186	197.1450	8.8493	138.3095	41.9467	0.0000	861.5691	7.1797

$n_{i.}\,x_i^2$	$\overline{Y}_i$	$n_{i.}\,\overline{Y}_i$	$n_{i.}\,\overline{Y}_i^2$	$\sum_j n_{ij}\,y_j^2$	$s_i^2(Y)$	$n_{i.}\,s_i^2(Y)$
8.48	111.3208	5900	656792.4528	729500	1371.84	72707.55
47.04	53.7500	1290	69337.5000	83400	585.94	14062.50
196	35.6250	570	20306.2500	31500	699.61	11193.75
539	28.6364	315	9020.4545	23325	1300.41	14304.55
1331	16.8182	185	3111.3636	8225	464.88	5113.64
1125	14.0000	70	980.0000	1300	64.00	320.00
3246.52		8330	759548.0210	877250		117701.98
16.8250		69.4167	1510.8932			980.8498

$\overline{X} = 3.1983$
$s^2_b(X) = 9.6453$
$s^2_w(X) = 7.1797$
$s^2(X) = 16.8250$

$\overline{Y} = 69.4167$
$s^2_b(Y) = 1510.8932$
$s^2_w(Y) = 980.8498$
$s^2(Y) = 2491.7431$

Les formules utilisées sont les suivantes :

$n = \sum_{ij} n_{ij} = \sum_i n_{i.} = \sum_j n_{.j} = 120$

$\overline{X}_j = \frac{1}{n_{.j}} \sum_i n_{ij}\,x_i$

$$s_j^2(X) = \frac{1}{n_{.j}}\left(\sum_i n_{ij} x_i^2 - \frac{1}{n_{.j}}\left(\sum_i n_{ij} x_i \right)^2 \right)$$

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_j n_{.j} \overline{X}_j = \frac{1}{n}\sum_i n_{i.} x_i = \frac{1}{n}\sum_{ij} n_{ij} x_i = 3{,}1983$$

$$s_b^2(X) = \frac{1}{n}\left(\sum_j n_{.j} \overline{X}_j^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_j n_{.j} \overline{X}_j \right)^2 \right) = 9{,}6453$$

$$s_w^2(X) = \frac{1}{n}\sum_j n_{.j} s_j^2(X) = 7{,}1797$$

$$s^2(X) = \frac{1}{n}\left(\sum_i n_{i.} x_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_i n_{i.} x_i \right)^2 \right) = 16{,}8250$$

$$\overline{Y}_i = \frac{1}{n_{i.}}\sum_j n_{ij} y_j$$

$$s_i^2(Y) = \frac{1}{n_{i.}}\left(\sum_j n_{ij} y_j^2 - \frac{1}{n_{i.}}\left(\sum_j n_{ij} y_j \right)^2 \right)$$

$$\overline{Y} = \frac{1}{n}\sum_i n_{i.} \overline{Y}_i = \frac{1}{n}\sum_j n_{.j} y_j = \frac{1}{n}\sum_{ij} n_{ij} y_j = 69{,}4167$$

$$s_b^2(Y) = \frac{1}{n}\left(\sum_i n_{i.} \overline{Y}_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_i n_{i.} \overline{Y}_i \right)^2 \right) = 1\,510{,}8932$$

$$s_w^2(Y) = \frac{1}{n}\sum_i n_{i.} s_i^2(Y) = 980{,}8498$$

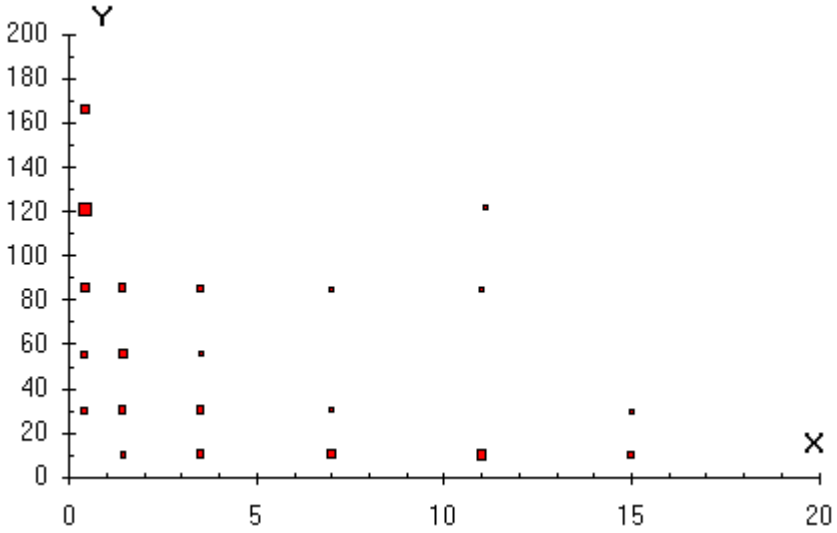
$$s^2(Y) = \frac{1}{n}\left(\sum_j n_{.j} y_j^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_j n_{.j} y_j \right)^2 \right) = 2\,491{,}7431$$

Du tableau de calculs, on peut extraire le tableau des moyennes et variances marginales :

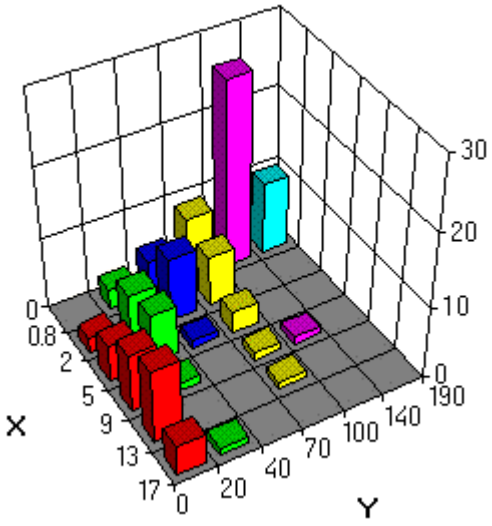
$x_i \backslash y_j$	10	30	55	85	120	165	$n_{i.}$	$\overline{Y}_i$	$s_i^2(Y)$
0,4		3	5	9	26	10	53	111.3208	1371.84
1,4	2	6	9	7			24	53.7500	585.94
3,5	5	7	1	3			16	35.6250	699.61
7	8	1		1	1		11	28.6364	1300.41
11	10			1			11	16.8182	464.88
15	4	1					5	14.0000	64.00
$n_{.j}$	29	18	15	21	27	10	$n = 120$	$\overline{Y} = 69{,}4167$	$s_w^2(Y) = 980{,}8498$
$\overline{X}_j$	8.4931	3.1167	1.2067	1.9952	0.6444	0.4000	$\overline{X} = 3{,}1983$		
$s_j^2(X)$	16.3903	10.9525	0.5900	6.5862	1.5536	0.0000	$s_w^2(X) = 7{,}1797$		

b) Nuage de points.

Le nuage de points dans R ² est le suivant :



En 3D, on obtient le graphique suivant :



2°/ Régression de *Y* en *X*.

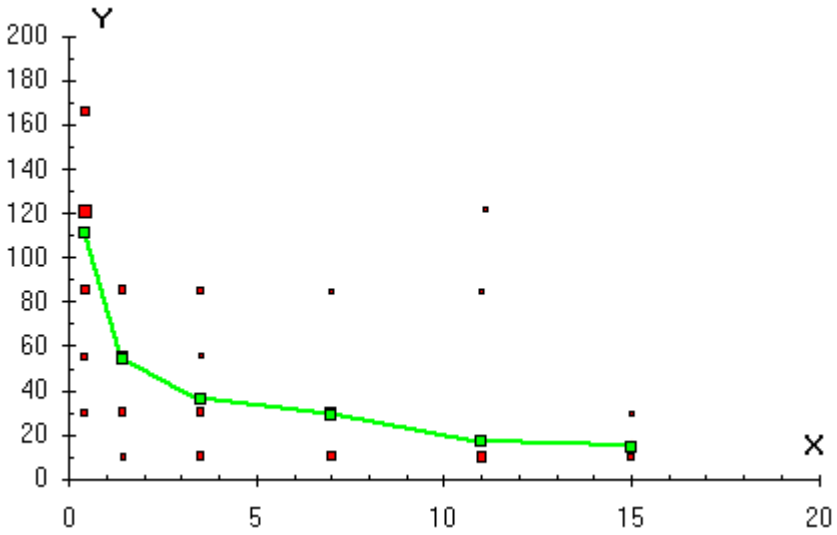
a) Variable de régression.

La variable de régression $(X, \overline{Z}_{|X})$ a, pour valeurs les couples $(x_i, \overline{Y}_i)$ avec les effectifs $n_{i.}$.
Le tableau de distribution de cette variable statistique est donc le suivant :

x_i	$\overline{Y}_i$	$n_{i.}$
0,4	111.3208	53
1,4	53.7500	24
3,5	35.6250	16
7	28.6364	11
11	16.8182	11
15	14.0000	5

b) Ligne de régression.

La ligne de régression de Y en X joint, par des segments de droite, les points $(x_i, \overline{Y}_i)$



c) Rapport de corrélation.

Le rapport de corrélation de Y en X est $\eta^2_{Y|X} = \dfrac{s_b^2(Y)}{s^2(Y)}$.

Dans la première question, nous avons calculé :

$$s_b^2(Y) = 1\,510{,}8932$$
$$s^2(Y) = 2\,491{,}7431$$

On en déduit la valeur du rapport de corrélation :

$$\eta^2_{Y|X} = \frac{1\,510{,}8932}{2\,491{,}7431} = 0{,}606$$

Ce n'est pas un rapport de corrélation très élevé : le prédicteur optimum de Y étant celui qui résulte de la ligne de régression, tout autre prédicteur de Y ne sera pas lui-même un excellent outil pour prédire la valeur de Y.

3°/ Régression linéaire.

a) Droite de régression.

La droite de régression de Y en X a, pour équation :

$$y = a + b\,x$$

avec :

$$b = \frac{Cov(X,Y)}{s^2(X)} \text{ et } a = \overline{Y} - b\,\overline{X}.$$

Nous connaissons déjà :

$$\overline{X} = 3{,}1983$$
$$\overline{Y} = 69{,}4167$$
$$s^2(X) = 16{,}8250$$

La covariance de X et Y se calcule par la formule :

$$Cov(X, Y) = \frac{1}{n}\left(\sum_{ij} n_{ij} x_i y_j - \frac{1}{n}\left(\sum_i n_{i.} x_i \right)\left(\sum_j n_{.j} y_j \right) \right).$$

Nous connaissons déjà (voir question 1) :

$$n = \sum_j n_{.j} = \sum_i n_{i.} = 120$$
$$\sum_i n_{i.} x_i = \sum_j n_{.j} \overline{X}_j = 383{,}80$$
$$\sum_j n_{.j} y_j = 8\ 330$$

Reste à calculer :

$$\sum_{ij} n_{ij} x_i y_j = \sum_i \left(\sum_j n_{ij} y_j \right) x_i = \sum_i n_{i.} x_i \overline{Y}_i,$$

ce qui se fait dans le tableau suivant :

x_i	$\overline{Y}_i$	$n_{i.}$	$n_{i.} x_i \overline{Y}_i$
0,4	111.3208	53	2 360.00
1,4	53.7500	24	1 806.00
3,5	35.6250	16	1 995.00
7	28.6364	11	2 205.00
11	16.8182	11	2 035.00
15	14.0000	5	1 050.00
		$n = 120$	$\sum_i n_{i.} x_i \overline{Y}_i = 11\ 451.00$

La covariance s'en déduit :

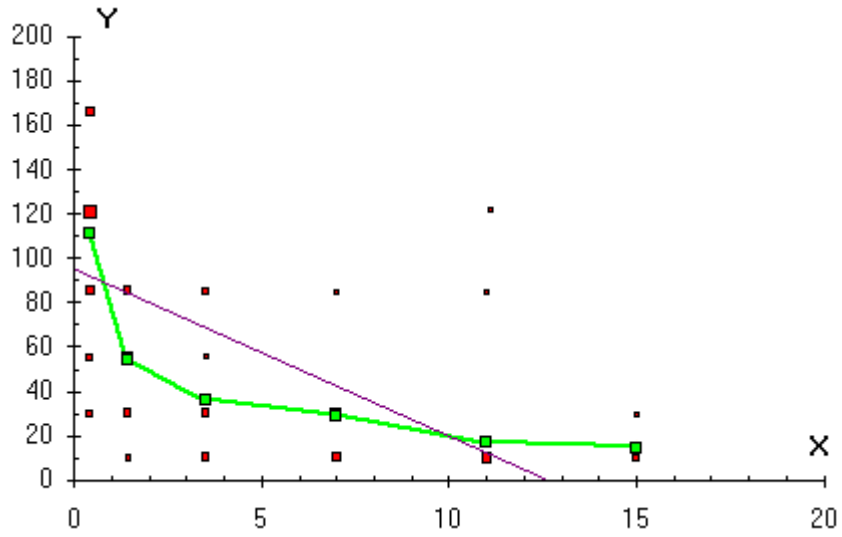
$$Cov(X, Y) = \frac{1}{120}\left(11\ 451{,}00 - \frac{1}{120} \times 383{,}80 \times 8\ 330 \right) = -126{,}5926$$

Les coefficients de la droite de régression $y = a + b\,x$ sont donc :

$$b = -\frac{126{,}5926}{16{,}8250} = -7{,}5241$$
$$a = 69{,}4167 + 7{,}5241 \times 3{,}1983 = 93{,}4810$$

$$y = 93{,}48 - 7{,}52\,x$$

Traçons cette droite de régression sur le graphique précédent :



b) Coefficient de corrélation linéaire.

Le coefficient de corrélation linéaire de X et Y est :

$$r_{XY} = \frac{Cov(X,Y)}{s(X)\,s(Y)} = \frac{126{,}5926}{\sqrt{16{,}8250} \times \sqrt{2\,491{,}7431}} = 0{,}618$$

Le coefficient de détermination en est le carré :

$$r_{XY}^{\,2} = 0{,}382$$

c) Variance résiduelle.

La variance résiduelle est la part de variance de Y non expliquée par la régression linéaire de Y en X.
La part de variance de Y expliquée par la régression linéaire de Y en X est $r_{XY}^{\,2}\, s^2(Y)$, la variance résiduelle est donc :

$$s^2_{rés}(Y) = (1 - r_{XY}^{\,2})\, s^2(Y) = (1 - 0{,}382) \times 2\,491{,}7431 = 0{,}618 \times 2\,491{,}7431 = 1\,539{,}25$$

La validité du prédicteur de Y donné par la régression linéaire, mesurée par le coefficient de détermination, est faible : $r_{XY}^{\,2} = 0{,}382$.
Elle est aussi, bien entendu, plus faible que la validité du prédicteur de Y donnée par la ligne de régression : $\eta^2_{Y|X} = 0{,}606$, puisque ce prédicteur est le meilleur que l'on puisse trouver.

4°/ Modèle exponentiel.

La forme de la ligne de régression fait penser à une fonction puissance négative.
On considère alors la variable $Z = \ln Y$.
Pour les valeurs y_j des centres de classes de Y, cette variable prend les valeurs $z_j = \ln y_j$.

a) Paramètres de *Z*.

En considérant que toutes les valeurs de *Y* dans une classe sont concentrées au centre de la classe, la moyenne de *Z* s'établit à :

$$\overline{Z} = \frac{1}{n} \sum_j n_{.j} z_j = \frac{1}{n} \sum_j n_{.j} \ln y_j$$

La variance de *Z* est, dans les mêmes conditions :

$$s^2(Z) = \frac{1}{n}\left(\sum_j n_{.j} z_j^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_j n_{.j} z_j \right)^2 \right)$$

La covariance de *X* et *Z* est :

$$Cov(X, Z) = \frac{1}{n}\left(\sum_{ij} n_{ij} x_i z_j - \frac{1}{n}\left(\sum_i n_{i.} x_i \right)\left(\sum_j n_{.j} z_j \right) \right).$$

avec :

$$\sum_{ij} n_{ij} x_i z_j = \sum_j \left(\sum_i n_{ij} x_i \right) z_j = \sum_j n_{.j} \overline{X}_j z_j$$

et :

$$\sum_i n_{i.} x_i = \sum_j n_{.j} \overline{X}_j = 383{,}80$$

Le coefficient de corrélation linéaire de *X* et *Z* est :

$$r_{XZ} = \frac{Cov(X, Z)}{s(X)\, s(Z)}$$

avec $s^2(X) = 16{,}8250$

Tableau des calculs :

y_j	10	30	55	85	120	165	*Total*
$n_{.j}$	29	18	15	21	27	10	$n = \sum_j n_{.j} = 120$
$\overline{X}_j$	8.4931	3.1167	1.2067	1.9952	0.6444	0.4000	
$n_{.j} \overline{X}_j$	246.30	56.10	18.10	41.90	17.40	4.00	$\sum_j n_{.j} \overline{X}_j = 383.80$
$z_j = \ln y_j$	2.303	3.401	4.007	4.443	4.787	5.106	
$n_{.j} z_j$	66.775	61.222	60.110	93.296	129.262	51.059	$\sum_j n_{.j} z_j = 461.724$
$n_{.j} z_j^2$	153.755	208.227	240.881	414.480	618.842	260.707	$\sum_j n_{.j} z_j^2 = 1896.891$
$n_{.j} \overline{X}_j z_j$	567.127	190.807	72.533	186.147	83.302	20.424	$\sum_j n_{.j} \overline{X}_j z_j = 1120.340$

Résultats :

$$\overline{Z} = \frac{1}{120} \times 461{,}724 = 3{,}848$$

$$s^2(Z) = \frac{1}{120}\left(1\,896{,}891 - \frac{1}{120} \times 461{,}724^2 \right) = 1{,}0026$$

$$Cov(X, Z) = \frac{1}{120}\left(1\,120{,}340 - \frac{1}{120} \times 383{,}80 \times 51{,}059 \right) = -2{,}970$$

$$r_{XZ} = -\frac{2{,}970}{\sqrt{16{,}8250} \times \sqrt{1{,}0026}} = -0{,}7231.$$

b) Prédicteur de *Y*.

Le prédicteur de *Y* de la forme $y = \lambda\, a^x$, où λ et *a* sont des réels, s'écrit aussi :

$$\ln y = \ln \lambda + x \ln a$$
$$z = \ln \lambda + x \ln a$$

La méthode des moindres carrés donne la droite de régression de *Z* en *X* : $z = a' + b'\, x$, avec :

$$b' = \frac{Cov(X, Z)}{s^2(X)} = -\frac{2{,}970}{16{,}8250} = -0{,}177$$
$$a' = \overline{Z} - b'\, \overline{X} = 3{,}848 + 0{,}177 \times 3{,}1983 = 4{,}4123$$
$$z = 4{,}4123 - 0{,}177\, x$$

Par identification avec $z = \ln \lambda + x \ln a$, on en déduit :

$$\ln \lambda = 4{,}4123, \text{ donc } \lambda = e^{4{,}4123} = 82{,}46$$
$$\ln a = -0{,}177, \text{ donc } a = e^{-0{,}177} = 0{,}838$$

Le prédicteur de *Y* de la forme $y = \lambda\, a^x$, obtenu par la méthode des moindres carrés, est donc :

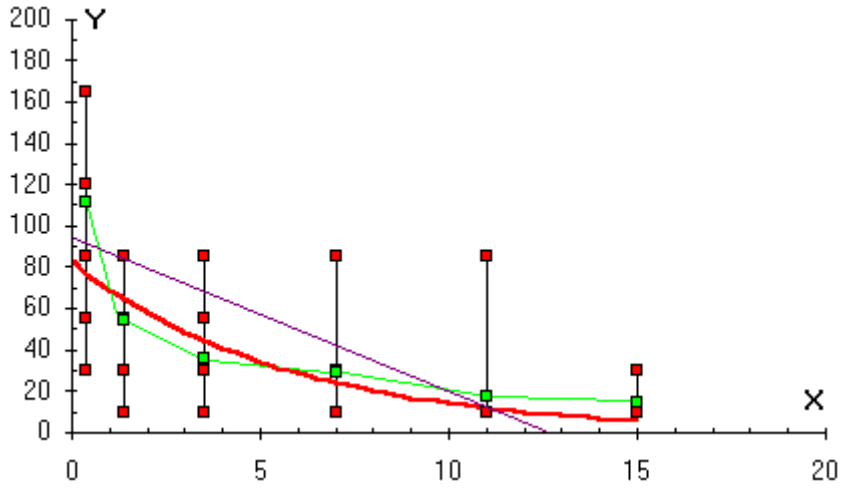
$$\boxed{y = 82{,}46 \times (0{,}838)^x}$$

La validité de ce prédicteur se mesure par la validité du prédicteur linéaire de *Z* en *X* : c'est le coefficient de détermination

$$r_{XZ}^2 = (-0{,}7231)^2 = 0{,}5229.$$

Ce coefficient est plus élevé que le coefficient de détermination du prédicteur linéaire de *Y* : le modèle exponentiel est donc meilleur que le modèle linéaire ($r_{XY}^2 = 0{,}382$).

Toutefois, ce coefficient reste moins élevé que celui de la ligne de régression, qu'on a trouvé de l'ordre de 60 % ($\eta^2_{Y|X} = 0{,}606$).



Droite de régression (violet), ligne de régression (vert) et modèle exponentiel (rouge).

5°/ Emirats Arabes Unis.

x = 21,920 (milliers de dollars)

a) Ligne de régression.

La ligne de régression s'arrête à x = 15.
On ne peut pas l'extrapoler : la ligne de régression ne donne donc aucune estimation.
Tout au plus, peut-on penser que la ligne de régression continue probablement de descendre, donc le taux de mortalité infantile des Emirats Arabes Unis doit être inférieur à $\bar{Y}_6$ = 14. Mauvaise intuition : le taux réel est de 35 et l'estimation de "inférieur à 14" est sous-estimée d'au moins un facteur 2.

b) Droite de régression.

$$y^* = 93{,}48 - 7{,}52\,x = 93{,}48 - 7{,}52 \times 21{,}92 = -71{,}36$$

Résultat absurde !
L'élévation du PNB par habitant ne ressuscite pas les morts.
La droite de régression est un trop mauvais modèle ici, pour être valable en dehors des limites de l'intervalle étudié.

c) Modèle exponentiel.

$$y^* = 82{,}46 \times (0{,}838)^{x} = 82{,}46 \times (0{,}838)^{21{,}92} = 1{,}71$$

Ce résultat n'est pas absurde a priori.
Il est cependant loin de la réalité, le taux réel étant de 35.
N'oublions pas, cependant, que le PNB par habitant n'explique que 52 % de la variation du taux de mortalité infantile dans ce modèle exponentiel.

6°/ Pérou et Danemark.

Pour le Pérou, x = 1,000.
Pour le Danemark, x = 11,170.

a) Ligne de régression.

Le point d'abscisse $x = 1$ est entre les points (0,4 ; 111,32) et (1,4 ; 53,75), son ordonnée s'obtient par interpolation linéaire :

$$y = 53{,}75 + (111{,}32 - 53{,}75) \times \frac{1{,}0 - 0{,}4}{1{,}4 - 1{,}0} = 53{,}75 + 0{,}6 \times 57{,}57 = 88{,}3 \text{ (le taux réel est 94).}$$

Le point d'abscisse $x = 11{,}170$ est entre les points (11 ; 16,82) et (15 ; 14), son ordonnée s'obtient par interpolation linéaire :

$$y = 14 + (16{,}82 - 14) \times \frac{11{,}17 - 11{,}00}{15{,}00 - 11{,}00} = 14 + 2{,}82 \times 0{,}0425 = 14{,}12 \text{ (le taux réel est 8).}$$

La ligne de régression donne une assez bonne approximation du taux de mortalité infantile.

b) Droite de régression.

Pérou : $y = 93{,}48 - 7{,}52 \times 1 = 85{,}96$
Danemark : $y = 93{,}48 - 7{,}52 \times 11{,}17 = 9{,}48$

La droite de régression donne ici une estimation comparable à celle de la ligne de régression.

c) Modèle exponentiel.

Pérou : $82{,}46 \times (0{,}838)^{1} = 69{,}1$
Danemark : $82{,}46 \times (0{,}838)^{11{,}17} = 11{,}45$

Le modèle exponentiel donne aussi d'assez bonnes estimations.

Chapitre 9. Analyse en composantes principales.

Exercices

Exercice 1. Axe principal d'un nuage de points.
Exercice 2. Inertie et axes principaux d'un nuage de points.
Exercice 3. Variance maximum de $a\,X + b\,Y$.
Exercice 4. PIB/hab et taux d'analphabétisme.

Exercice 1. Axe principal d'un nuage de points.

Calculer et dessiner le premier axe principal du nuage de huit points de R^2 défini par

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 8 & 3 & -2 & -5 & -8 & -3 \\ -4 & 0 & 4 & 4 & 4 & 0 & -4 & -4 \end{pmatrix}.$$

Solution

HAUT

Exercice 2. Inertie et axes principaux d'un nuage de points.

Soient deux variables à six valeurs $X = (0, 1, 0, 1, 1, 0)$ et $Y = (0, 1, 1, 0, 1, 0)$. Calculer moyennes, variances, covariance. Dessiner le nuage centré, placer les deux droites de régression et les deux axes principaux. Calculer l'inertie statistique du nuage de points par rapport aux deux axes principaux.	Solution

HAUT

Exercice 3. Variance maximum de $a\,X + b\,Y$.

Etant données deux variables X et Y mesurées sur n individus, existe-t'il deux réels a et b vérifiant la relation $a^2 + b^2 = 1$, qui maximisent la variance de la variable $a\,X + b\,Y$?	Solution

HAUT

Exercice 4. PIB/hab et taux d'analphabétisme.

Deux caractères X (PIB par habitant, en dollars) et Y (taux d'analphabétisme en pourcentage) ont été mesurés dans 10 pays choisis au hasard dans une liste de pays.
On affecte à chaque pays un "poids" proportionnel à sa population.
Les résultats sont les suivants :

Pays	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X	330	15 522	1 853	9 857	4 562	864	260	2 264	1 716	155
Y	90,2	0,9	7,7	0,9	0,8	65,0	57,6	5,3	8,3	66,8
Poids	0,006	0,005	0,010	0,020	0,213	0,020	0,658	0,025	0,033	0,011

On notera D la matrice diagonale des poids et 1 le vecteur ayant toutes ses coordonnées égales à 1 dans R^{10}.

Solution

1°/ En utilisant l'approche euclidienne de la régression, calculer la moyenne de X et de Y, la matrice des variances-covariance de X et Y, le coefficient de corrélation linéaire r_{XY}.
2°/ Calculer l'inertie totale du nuage de points par rapport à l'origine.
3°/ Calculer les axes principaux de la distribution statistique.
4°/ Calculer l'inertie du nuage de points par rapport aux axes principaux. Interprétation.
5°/ Donner les composantes principales de chacun des 10 pays étudiés. Représenter les dix pays dans un diagramme en composantes principales. Conclusion ?

HAUT

Chapitre 9. Analyse en composantes principales.

Enoncés.

Exercice 1. Axe principal d'un nuage de points.

Calculer et dessiner le premier axe principal du nuage de huit points de $\mathbb{R}^2$ défini par $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 8 & 3 & -2 & -5 & -8 & -3 \\ -4 & 0 & 4 & 4 & 4 & 0 & -4 & -4 \end{pmatrix}$.	

Solution.

Soit $M = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 8 & 3 & -2 & -5 & -8 & -3 \\ -4 & 0 & 4 & 4 & 4 & 0 & -4 & -4 \end{pmatrix}$ la matrice des données.
Chaque ligne correspond à une variable, chaque colonne correspond à un individu.
Pour chaque individu, on mesure la valeur des deux variables.
Chaque individu est représenté par un point de $\mathbb{R}^2$.
Chaque variable est représentée par un point de $\mathbb{R}^8$.
Comme rien n'est précisé dans l'énoncé, on supposera que chaque individu possède le **même poids statistique** de $\frac{1}{8}$.
La matrice diagonale D dont tous les éléments de la diagonale sont égaux à $\frac{1}{8}$:

$$D = \frac{1}{8} Id,$$

où Id est la matrice unité de $\mathbb{R}^8$, définit un **produit scalaire** dans $\mathbb{R}^8$.

1°/ Données centrées.

La moyenne d'une variable est le produit scalaire de cette variable par le vecteur $\mathbb{1}$:

$$\overline{X} = < X \mid \mathbb{1} > = {}^tX\, D\, 1$$
$$\overline{Y} = < Y \mid \mathbb{1} > = {}^tY\, D\, 1$$

Appelons Δ la matrice à 8 lignes et 2 colonnes, des données.
Δ est la transposée de M.
La première colonne est le vecteur X, la deuxième colonne est le vecteur Y.

$$\Delta = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 5 & 0 \\ 8 & 4 \\ 3 & 4 \\ -2 & 4 \\ -5 & 0 \\ -8 & -4 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$$

La matrice des moyennes $\overline{\Delta} = (\overline{X}\ \overline{Y})$ s'exprime par le produit de matrices :

$$\overline{\Delta} = (\overline{X}\ \overline{Y}) = {}^t1\ D\ \Delta.$$

$$= \frac{1}{8}(1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1) \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 5 & 0 \\ 8 & 4 \\ 3 & 4 \\ -2 & 4 \\ -5 & 0 \\ -8 & -4 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{8}(0 \quad 0)$$

$$= (0 \quad 0)$$

Les données sont centrées.
La matrice Z des données centrées est donc la matrice Δ des données : $Z = \Delta$.

2°/ Matrice des variances-covariances.

La matrice C des variances-covariances est donnée par la formule :

$$C = {}^tZ\ D\ Z$$

$$= \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 2 & 5 & 8 & 3 & -2 & -5 & -8 & -3 \\ -4 & 0 & 4 & 4 & 4 & 0 & -4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 5 & 0 \\ 8 & 4 \\ 3 & 4 \\ -2 & 4 \\ -5 & 0 \\ -8 & -4 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 204 & 72 \\ 72 & 96 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{C = \begin{pmatrix} 25{,}5 & 9 \\ 9 & 12 \end{pmatrix}}$$

3°/ Valeurs propres.

Les valeurs propres λ de la matrice des variances-covariances sont les nombres réels qui annulent le déterminant de la matrice $C - \lambda\ Id$, où Id est la matrice unité de R^8.
La somme des valeurs propres est la trace $25{,}5 + 12 = 37{,}5$ de C.
Le produit des valeurs propres est le déterminant $25{,}5 \times 12 - 9 \times 9 = 225$ de C.

Les valeurs propres sont solutions de l'équation aux valeurs propres :

$$\lambda^2 - 37{,}5\,\lambda + 225 = 0$$
$$2\,\lambda^2 - 75\,\lambda + 450 = 0$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{4}\left(75 + \sqrt{75^2 - 8\times 450}\right) = 30$$
$$\lambda_2 = \frac{1}{4}\left(75 - \sqrt{75^2 - 8\times 450}\right) = 7{,}5$$

4°/ Premier axe principal.

Le premier axe principal est déterminé par un vecteur propre relatif à la plus grande valeur propre λ_1 de la matrice *C* des variances-covariances.
Rappelons (voir Cours) que, pour une matrice quelconque $C = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, si λ est une valeur propre de *C*, le vecteur $u = \begin{pmatrix} d-\lambda \\ -c \end{pmatrix}$ vérifie :

$$(C - \lambda\, Id)\, u = \begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d-\lambda \\ -c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a-\lambda)(d-\lambda) - bc \\ cd - c\lambda - dc + c\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Det(C - \lambda\, Id) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Or, comme λ est valeur propre, λ vérifie l'équation aux valeurs propres

$$Det\,(C - \lambda\, Id) = \lambda^2 - (a + d)\lambda + (a\,d - b\,c) = 0$$

et la relation précédente se réduit à

$$(C - \lambda\, Id)\, u = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$
$$C\,u = \lambda\, u$$

ce qui montre que le vecteur $u = \begin{pmatrix} d-\lambda \\ -c \end{pmatrix}$ est vecteur propre de la matrice *C* pour la valeur propre λ.

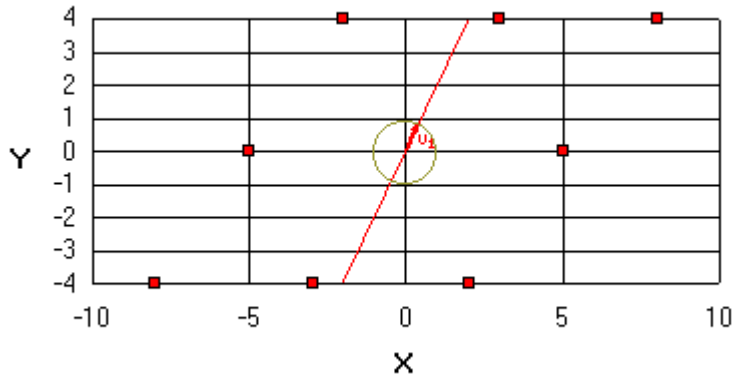
Le vecteur $\begin{pmatrix} 12-30 \\ -9 \end{pmatrix} = -9\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est donc vecteur propre de la matrice $C = \begin{pmatrix} 25{,}5 & 9 \\ 9 & 12 \end{pmatrix}$.
Il en est donc de même du vecteur $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.
La norme euclidienne de ce vecteur de R^2 est $\sqrt{2^2+1^2} = \sqrt{5}$.
Le premier axe principal est donc défini par le vecteur normé :

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{5}}{5}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\boxed{u_1 = \frac{\sqrt{5}}{5}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.}$$

5°/ Représentation graphique.

Dans R^2, on peut maintenant représenter graphiquement le nuage de points et son premier axe principal :



Propriété.

Le premier axe principal est la **droite de régression orthogonale** : c'est la droite pour laquelle la somme des carrés des distances des points du nuage à la droite est la plus petite possible.

Chapitre 9. Analyse en composantes principales.

Enoncés.

Exercice 2. Inertie et axes principaux d'un nuage de points.

Soient deux variables à six valeurs $X = (0, 1, 0, 1, 1, 0)$ et $Y = (0, 1, 1, 0, 1, 0)$. Calculer moyennes, variances, covariance. Dessiner le nuage centré, placer les deux droites de régression et les deux axes principaux. Calculer l'inertie statistique du nuage de points par rapport aux deux axes principaux.	

Solution.

Par convention, puisque rien n'est précisé dans le texte, les pondérations des individus et des variables sont implicites : $\frac{1}{6}$ pour les variables, 1 pour les individus.

Autrement dit :

- dans l'espace R^6 des variables, le produit scalaire est défini par la matrice $D = \frac{1}{6} Id$, où Id est la matrice unité de R^6,
- dans l'espace R^2 des individus, le produit scalaire est le produit scalaire euclidien canonique, défini par la matrice unité de R^2.

1°/ Moyennes.

Soit 1 le vecteur de R^6 dont les six coordonnées sont égales à 1.
Soit Δ la matrice des données :

$$\Delta = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Les moyennes des variables s'obtiennent par produit scalaire avec le vecteur 1.
La matrice des moyennes est donc :

$$\overline{\Delta} = (\overline{X}\ \overline{Y}) = {}^t1\ D\ \Delta = \frac{1}{6}\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\1&1\\0&1\\1&0\\1&1\\0&0\end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix}3&3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$\boxed{\overline{X} = \frac{1}{2}\ ;\ \overline{Y} = \frac{1}{2}}$$

2°/ Données centrées.

Les données centrées s'obtiennent par la formule :

$$Z = (Id - 1\ {}^t1\ D)\ \Delta$$

où *Id* est la matrice identité de R^6, matrice diagonale à six lignes et six colonnes, dont tous les éléments de la diagonale sont égaux à 1 et les autres à 0.

$$Z = \frac{1}{6}\begin{pmatrix}5&-1&-1&-1&-1&-1\\-1&5&-1&-1&-1&-1\\-1&-1&5&-1&-1&-1\\-1&-1&-1&5&-1&-1\\-1&-1&-1&-1&5&-1\\-1&-1&-1&-1&-1&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\1&1\\0&1\\1&0\\1&1\\0&0\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1&-1\\1&1\\-1&1\\1&-1\\1&1\\-1&-1\end{pmatrix}$$

3°/ Matrice des variances covariances.

La matrice *C* des variances-covariances s'obtient par la formule :

$$C = {}^tZ\ D\ Z$$

On obtient :

$$C = \frac{1}{24}\begin{pmatrix}-1&1&-1&1&1&-1\\-1&1&1&-1&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&-1\\1&1\\-1&1\\1&-1\\1&1\\-1&-1\end{pmatrix} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix}3&1\\1&3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}s^2(X)&Cov(X,Y)\\Cov(X,Y)&s^2(Y)\end{pmatrix}$$

Sur cette matrice, on voit les variances et la covariance :

$$\boxed{s^2(X) = \|X_0\|^2 = \frac{1}{4}\ ;\ s^2(Y) = \|Y_0\|^2 = \frac{1}{4}\ ;\ Cov(X,Y) = \langle X_0 \mid Y_0 \rangle = \frac{1}{12}}$$

où X_0 et Y_0 sont les variables centrées, et où normes et produits scalaires sont définis par la matrice *D*.

4°/ Régression linéaire.

a) Régression linéaire de *Y* en *X*.

Dans la régression linéaire de *Y* en *X*, *Y* est la variable à expliquer, *X* la variable explicative.
La matrice des variables explicatives centrées se réduit à un vecteur :

$$X_0 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

La matrice *c* des variances-covariances des variables explicatives se réduit à un nombre

$$c = s^2(X) = \| X_0 \|^2 = \frac{1}{4}$$

et son inverse se réduit à $c^{-1} = 4$.

La variable expliquée centrée est :

$$Y_0 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Le vecteur *d* des covariances de la variable expliquée et des variables explicatives se réduit à un nombre :

$$d = {}^tX_0\, D\, Y_0 = \langle X_0 \mid Y_0 \rangle = \frac{1}{24}\,(-1\ \ 1\ \ -1\ \ 1\ \ 1\ \ -1)\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{12} = Cov\,(X, Y).$$

La matrice *b* des coefficients de régression linéaire de *Y* par rapport aux variables explicatives se réduit à un nombre :

$$b = c^{-1}\, d = \frac{1}{3} = \frac{\langle X_0 \mid Y_0 \rangle}{\| X_0 \|^2} = \frac{Cov(X, Y)}{s^2(X)}$$

et le terme constant est :

$$a = \overline{Y} - b\,\overline{X} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$$

La droite régression de *Y* par rapport à *X* a donc pour équation : $y = \frac{1}{3}\,x + \frac{1}{3}$, soit encore :

$$\boxed{x - 3\,y + 1 = 0}$$

b) Régression linéaire de *X* en *Y*.

Le coefficient de régression linéaire est :

$$b = \frac{Cov(X,Y)}{s^2(Y)} = \frac{1}{3}$$

et le terme constant est :

$$a = \overline{X} - b\,\overline{Y} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$$

La droite de régression de *X* par rapport à *Y* a donc pour équation : $x = \frac{1}{3}\,y + \frac{1}{3}$, soit encore :

$$\boxed{3\,x - y - 1 = 0}$$

On remarquera que le produit des coefficients de régression linéaire de *Y* en *X* et de *X* en *Y* est $r_{XY}^{\,2} = \left(\frac{Cov(X,Y)}{s(X)\,s(Y)}\right)^2 = \frac{1}{9}$.

5°/ Axes principaux.

a) Valeurs propres de la matrice des variances-covariances.

$$C = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

La somme des valeurs propres de la matrice *C* est la trace de la matrice : c'est la somme des éléments de la diagonale, elle vaut $\frac{1}{2}$.
Le produit des valeurs propres est le déterminant de la matrice *C* : il vaut $\frac{8}{12^2} = \frac{1}{18}$.

Les valeurs propres sont les racines de l'équation aux valeurs propres :

$$\lambda^2 - \frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{18} = 0$$
$$18\,\lambda^2 - 9\,\lambda + 1 = 0$$

$$\lambda = \frac{1}{36}\left(9 \pm \sqrt{81 - 4 \times 18}\right) = \frac{1}{36}\left(9 \pm 3\right)$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{3}$$
$$\lambda_2 = \frac{1}{6}$$

b) Vecteurs propres.

On sait désormais, pour l'avoir déjà vérifié dans l'exercice 1, que le vecteur $\begin{pmatrix} d-\lambda \\ -c \end{pmatrix}$ est vecteur propre de la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ pour la valeur propre λ.

On peut donc prendre pour vecteur propre pour la valeur propre $\lambda_1 = \frac{1}{3}$, le vecteur $\begin{pmatrix} \frac{1}{4}-\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{12} \end{pmatrix} = -\frac{1}{12}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, ou encore, tout simplement, le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Le vecteur normé correspondant est $u_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On peut prendre pour vecteur propre pour la valeur propre $\lambda_2 = \frac{1}{6}$, le vecteur $\begin{pmatrix} \frac{1}{4}-\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{12} \end{pmatrix} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, ou encore, tout simplement, le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Le vecteur normé correspondant est $u_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

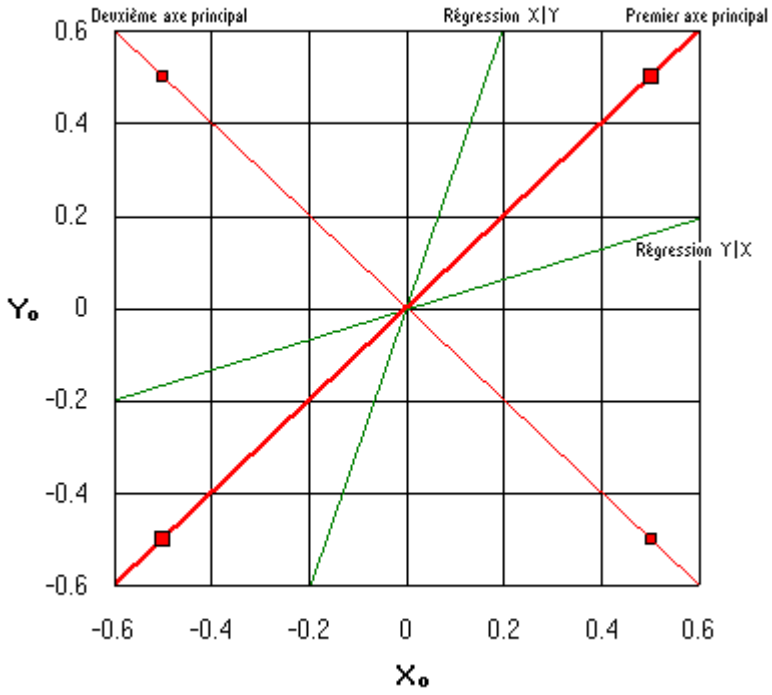
Les deux vecteurs

$$\boxed{u_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } u_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}$$

forment, dans $\mathbb{R}^2$, une base orthonormée pour le produit scalaire canonique.
Leurs directions déterminent les **axes principaux** : ceux-ci sont portés par les deux bissectrices du plan rapporté à deux axes canoniques.

6°/ Représentation graphique.

Portons, sur un même graphique, le nuage centré de points, les axes principaux, les droites de régression centrées (sans terme constant) :



7°/ Inertie statistique.

L'inertie statistique du nuage de points par rapport à un axe défini par un vecteur unitaire *u* est la moyenne des carrés des normes des projetés orthogonaux sur *u*.

Si M_i est un point du nuage, et *G* le centre de gravité du nuage, le vecteur $\overrightarrow{GM_i}$ a, pour coordonnées, la *i* [e] ligne de la matrice *Z* des données centrées, soit $(x_i - \overline{X}, y_i - \overline{Y})$.

Pour un vecteur unitaire $u = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$, le projeté orthogonal de $\overrightarrow{GM_i}$ sur *u* est

$$\overrightarrow{Gm_i} = < \overrightarrow{GM_i} \mid u > u = ((x_i - \overline{X}) \cos\alpha + (y_i - \overline{Y}) \sin\alpha) \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}.$$

Le carré de la norme de $\overrightarrow{Gm_i}$ est :

$$\| \overrightarrow{Gm_i} \|^2 = (x_i - \overline{X})^2 \cos^2\alpha + (y_i - \overline{Y})^2 \sin^2\alpha + 2 \sin\alpha \cos\alpha (x_i - \overline{X})(y_i - \overline{Y})$$

et l'inertie statistique du nuage de points par rapport à *u* est :

$$I_S(u) = s^2(X) \cos^2\alpha + s^2(Y) \sin^2\alpha + 2 \sin\alpha \cos\alpha \, Cov(X, Y) = \| X_0 \cos\alpha + Y_0 \sin\alpha \|^2$$

la norme étant prise dans $\mathbb{R}^6$.

$X_0 \cos\alpha + Y_0 \sin\alpha$ est le vecteur $Z\,u$ de $\mathbb{R}^6$.

En introduisant la matrice $C = {}^tZ\,D\,Z$, des variances-covariances, on obtient la formule :

$$I_S(u) = \| Z\,u \|^2 = {}^t(Z\,u)\,D\,(Z\,u) = {}^t u\,({}^t Z\,D\,Z)\,u = {}^t u\,C\,u.$$

$$\boxed{I_S(u) = {}^t u\,C\,u}$$

Pour un axe principal, u est vecteur propre de C pour une valeur propre λ, donc $C\,u = \lambda\,u$

$$I_S(u) = {}^t u\,C\,u = \lambda\,{}^t u\,u = \lambda\,\| u \|^2 = \lambda.$$

Ainsi :

$$\boxed{\begin{aligned} I_S(u_1) &= \lambda_1 = \frac{1}{3} \\ I_S(u_2) &= \lambda_2 = \frac{1}{6} \end{aligned}}$$

Chapitre 9. Analyse en composantes principales.

Enoncés.

Exercice 3. Variance maximum de *a X + b Y*.

Etant données deux variables *X* et *Y* mesurées sur *n* individus, existe-t'il deux réels *a* et *b* vérifiant la relation $a^2 + b^2 = 1$, qui maximisent la variance de la variable *a X + b Y* ?	

Solution.

1e remarque.

Comme la variance de – (*a X + b Y*) est égale à la variance de *a X + b Y*, on peut limiter l'étude au cas où ***b* est positif**.

2e remarque.

Etant donnés deux réels *a* et *b* vérifiant $a^2 + b^2 = 1$, avec *b* positif, il existe toujours un réel β compris entre 0 et π tel que l'on ait ***a* = *cos* β et *b* = *sin* β**.

1°/ Expression de la variance de *a X + b Y*.

$$s^2(a\,X + b\,Y) = a^2 s^2(X) + b^2 s^2(Y) + 2\,a\,b\,Cov(X, Y) = (a \;\; b)\begin{pmatrix} s^2(X) & Cov(X, Y) \\ Cov(X, Y) & s^2(Y) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

2°/ Réduction du problème en termes d'approche euclidienne.

La variance de la variable *a X + b Y* est égale à la variance de la variable centrée $a\,X_0 + b\,Y_0$ correspondante.
Soit *Z* la matrice centrée des données (matrice à *n* lignes et deux colonnes) : la première colonne est la variable centrée X_0, la deuxième colonne est la variable centrée Y_0.

Dans l'espace $\mathbb{R}^n$ des variables :

$$a\,X_0 + b\,Y_0 = Z\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

Le problème est ainsi ramené à la recherche d'un vecteur unitaire $u = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^2$ ($a^2 + b^2 = 1$) tel que la variance de la variable *Z u* soit maximum.

La matrice diagonale $D_{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} Id_n$ définit le produit scalaire de $\mathbb{R}^n$.

La variance d'une variable centrée est le carré de sa norme pour le produit scalaire de $\mathbb{R}^n$.

La variance de la variable $Z\,u$ est $\| Z\,u \|^2 = < Z\,u \mid Z\,u >_{D_{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{n} {}^t(Z\,u)\, Z\,u = \frac{1}{n} {}^t u\, {}^t Z\, Z\,u = {}^t u\, {}^t Z\, D_{\frac{1}{n}}\, Z\,u$.

Or ${}^t Z\, D_{\frac{1}{n}}\, Z = C = \begin{pmatrix} s^2(X) & Cov(X,Y) \\ Cov(X,Y) & s^2(Y) \end{pmatrix}$ est la matrice des variances-covariances de X et Y, donc la variance de Zu est ${}^t u\, C\, u$.
Comme on l'a vu dans l'exercice 2, c'est l'inertie statistique du nuage de points par rapport au vecteur u.

$$s^2(a\,X + b\,Y) = {}^t u\, C\, u = I_S(u)$$

Le problème est donc de trouver dans $\mathbb{R}^2$, un vecteur unitaire u tel que $I_S(u) = {}^t u\, C\, u$ soit maximum.

3°/ Résolution du problème.

Soient u_1 et u_2 une base orthonormale de $\mathbb{R}^2$ formée de vecteurs propres de la matrice C des variances-covariances de X et Y : u_1 et u_2 définissent les axes principaux du nuage de points dans $\mathbb{R}^2$.
On suppose que u_1 définit le premier axe principal, correspondant à la plus grande valeur propre λ_1 de C, et u_2 le deuxième axe principal, correspondant à la plus petite valeur propre λ_2 de C.

Tout vecteur unitaire u peut s'écrire :

$$u = < u \mid u_1 > u_1 + < u \mid u_2 > u_2.$$

$$\begin{aligned} {}^t u\, C\, u &= {}^t(< u \mid u_1 > u_1 + < u \mid u_2 > u_2)\, C\, (< u \mid u_1 > u_1 + < u \mid u_2 > u_2) \\ &= (< u \mid u_1 >)^2\, {}^t u_1\, C\, u_1 + (< u \mid u_2 >)^2\, {}^t u_2\, C\, u_2 + 2 < u \mid u_1 > < u \mid u_2 > {}^t u_1\, C\, u_2 \end{aligned}$$

Or u_1 est vecteur propre de C pour la valeur propre λ_1 et u_2 est vecteur propre de C pour la valeur propre λ_2, donc la relation précédente s'écrit :

$${}^t u\, C\, u = (< u \mid u_1 >)^2\, \lambda_1\, {}^t u_1\, u_1 + (< u \mid u_2 >)^2\, \lambda_2\, {}^t u_2\, u_2 + 2 < u \mid u_1 > < u \mid u_2 > \lambda_2\, {}^t u_1\, u_2.$$

Puisque les vecteurs u_1 et u_2 forment une base orthonormale de $\mathbb{R}^2$, leur produit scalaire euclidien ${}^t u_1\, u_2$ est nul, leurs normes euclidiennes ${}^t u_1\, u_1$ et ${}^t u_2\, u_2$ sont égale à 1 et il reste :

$${}^t u\, C\, u = (< u \mid u_1 >)^2\, \lambda_1 + (< u \mid u_2 >)^2\, \lambda_2$$

Notons **α l'angle des deux vecteurs u et u_1**, on a $< u \mid u_1 > = cos\ \alpha$ et $| < u \mid u_2 > | = | sin\ \alpha |$.
La relation précédente s'écrit :

$$I_S(u) = {}^t u\, C\, u = \lambda_1 \cos^2\alpha + \lambda_2 \sin^2\alpha.$$

Le problème est donc ramené à trouver un angle α, compris entre 0 et π, tel que $\lambda_1 \cos^2\alpha + \lambda_2 \sin^2\alpha$ soit maximum.
Or, on peut écrire :

$$\lambda_1 \cos^2\alpha + \lambda_2 \sin^2\alpha = \lambda_1 - (\lambda_1 - \lambda_2) \sin^2\alpha,$$

Le terme $(\lambda_1 - \lambda_2) \sin^2\alpha$ est un terme positif, nul seulement pour $\alpha = 0$ ou π.
$\lambda_1 - (\lambda_1 - \lambda_2) \sin^2\alpha$ possède donc pour valeur maximum λ_1, et cette valeur maximum est atteinte lorsque u et u_1 sont colinéaires : $u = u_1$ ou $u = -u_1$.

La réponse à notre problème initial est donc positive.

Il existe bien des réels a et b vérifiant $a^2 + b^2 = 1$ et tels que la variance de $a X + b Y$ soit maximum.

a et b sont les coordonnées d'un vecteur unitaire u_1 définissant le premier axe principal du nuage de points.

Par exemple :

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{\left(s^2(Y) - \lambda_1\right)^2 + \left(Cov(X,Y)\right)^2}} \begin{pmatrix} s^2(Y) - \lambda_1 \\ -Cov(X,Y) \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}\left(s^2(X) + s^2(Y) + \sqrt{\left(s^2(X) - s^2(Y)\right)^2 + 4\left(Cov(X,Y)\right)^2} \right)$$

mais on pourrait prendre aussi le vecteur $-u_1$, qui nous donne :

$$a = \frac{s^2(Y) - s^2(X) + \sqrt{\left(s^2(Y) - s^2(X)\right)^2 + 4\left(Cov(X,Y)\right)^2}}{\sqrt{\left(s^2(Y) - s^2(X) + \sqrt{\left(s^2(Y) - s^2(X)\right)^2 + 4\left(Cov(X,Y)\right)^2}\right)^2 + \left(Cov(X,Y)\right)^2}}$$

$$b = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{\left(s^2(Y) - s^2(X) + \sqrt{\left(s^2(Y) - s^2(X)\right)^2 + 4\left(Cov(X,Y)\right)^2}\right)^2 + \left(Cov(X,Y)\right)^2}}$$

Avec ces valeurs de a et b, la variance de $a X + b Y$ atteint sa valeur maximum $\lambda_1 = \frac{1}{2}\left(s^2(X) + s^2(Y) + \sqrt{\left(s^2(X) - s^2(Y)\right)^2 + 4\left(Cov(X,Y)\right)^2} \right)$.

Chapitre 9. Analyse en composantes principales.

Enoncés.

Exercice 4. PIB/hab et taux d'analphabétisme.

Deux caractères *X* (PIB par habitant, en dollars) et *Y* (taux d'analphabétisme en pourcentage) ont été mesurés dans 10 pays choisis au hasard dans une liste de pays.
On affecte à chaque pays un "poids" proportionnel à sa population.
Les résultats sont les suivants :

Pays	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X	330	15 522	1 853	9 857	4 562	864	260	2 264	1 716	155
Y	90,2	0,9	7,7	0,9	0,8	65,0	57,6	5,3	8,3	66,8
Poids	0,006	0,005	0,010	0,020	0,213	0,020	0,658	0,025	0,033	0,011

On notera *D* la matrice diagonale des poids et 1 le vecteur ayant toutes ses coordonnées égales à 1 dans R^{10}.

1°/ En utilisant l'approche euclidienne de la régression, calculer la moyenne de *X* et de *Y*, la matrice des variances-covariance de *X* et *Y*, le coefficient de corrélation linéaire r_{XY}.
2°/ Calculer l'inertie totale du nuage de points par rapport à l'origine.
3°/ Calculer les axes principaux de la distribution statistique.
4°/ Calculer l'inertie du nuage de points par rapport aux axes principaux. Interprétation.
5°/ Donner les composantes principales de chacun des 10 pays étudiés. Représenter les dix pays dans un diagramme en composantes principales. Conclusion ?

Solution.

1°/ Approche euclidienne.

La matrice *D* est la matrice diagonale ayant, pour éléments de la diagonale, les poids de chaque pays.

$$D = \begin{pmatrix} 0{,}006 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}005 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}010 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}020 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}213 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}020 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}658 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}025 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}033 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}011 \end{pmatrix}$$

Cette matrice diagonale, donc symétrique, dont tous les éléments de la diagonale sont des nombres strictement positifs, définit un produit scalaire dans l'espace R^{10} des variables.
Le produit scalaire de deux vecteurs u et v de R^{10} est $< u \mid v > = {}^t u\, D\, v$, où ${}^t u$ est la transposée du vecteur colonne u.

a) Moyennes.

La moyenne d'une variable est le produit scalaire de cette variable par le vecteur 1 :

$$\overline{X} = < X \mid 1 > = {}^t X\, D\, 1$$
$$\overline{Y} = < Y \mid 1 > = {}^t Y\, D\, 1$$

Appelons Δ la matrice à 10 lignes et 2 colonnes, des données.
La première colonne est le vecteur X, la deuxième colonne est le vecteur Y.

$$\Delta = \begin{pmatrix} 330 & 90{,}2 \\ 15\,522 & 0{,}9 \\ 1\,853 & 7{,}7 \\ 9\,857 & 0{,}9 \\ 4\,562 & 0{,}8 \\ 864 & 65{,}0 \\ 260 & 57{,}6 \\ 2\,264 & 5{,}3 \\ 1\,716 & 8{,}3 \\ 155 & 66{,}8 \end{pmatrix}$$

La matrice des moyennes $\overline{\Delta} = (\overline{X}\ \overline{Y})$ s'exprime par le produit de matrices :

$\overline{\Delta} = (\overline{X}\ \overline{Y}) = {}^t 1\, D\, \Delta.$

$$= (1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1) \begin{pmatrix} 0{,}006 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}005 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}010 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}020 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}213 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}020 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}658 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}025 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}033 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}011 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 330 & 90{,}2 \\ 15\,522 & 0{,}9 \\ 1\,853 & 7{,}7 \\ 9\,857 & 0{,}9 \\ 4\,562 & 0{,}8 \\ 864 & 65{,}0 \\ 260 & 57{,}6 \\ 2\,264 & 5{,}3 \\ 1\,716 & 8{,}3 \\ 155 & 66{,}8 \end{pmatrix}$$

$$= (1\ 570{,}259 \quad 41{,}1531)$$

b) Données centrées.

$$X_0 = X - 1\ \overline{X}$$
$$Y_0 = Y - 1\ \overline{Y}$$

La matrice des données centrées Z est donc donnée par la formule :

$$Z = \Delta - \overline{\Delta}\ {}^t 1 = (Id - 1\ {}^t 1\, D)\ \Delta$$

où Id est la matrice identité de R^{10}, matrice diagonale dont tous les éléments de la diagonale sont égaux à

1.

La matrice ($Id - 1\ {}^t1\ D$) est l'**opérateur de centrage**.

$$Z = \begin{pmatrix} 330 & 90{,}2 \\ 15\,522 & 0{,}9 \\ 1\,853 & 7{,}7 \\ 9\,857 & 0{,}9 \\ 4\,562 & 0{,}8 \\ 864 & 65{,}0 \\ 260 & 57{,}6 \\ 2\,264 & 5{,}3 \\ 1\,716 & 8{,}3 \\ 155 & 66{,}8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} (1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1) \begin{pmatrix} 0{,}006 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}005 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}010 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}020 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}213 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}020 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}658 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}025 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}033 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}011 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 330 & 90{,}2 \\ 15\,522 & 0{,}9 \\ 1\,853 & 7{,}7 \\ 9\,857 & 0{,}9 \\ 4\,562 & 0{,}8 \\ 864 & 65{,}0 \\ 260 & 57{,}6 \\ 2\,264 & 5{,}3 \\ 1\,716 & 8{,}3 \\ 155 & 66{,}8 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 330 & 90{,}2 \\ 15\,522 & 0{,}9 \\ 1\,853 & 7{,}7 \\ 9\,857 & 0{,}9 \\ 4\,562 & 0{,}8 \\ 864 & 65{,}0 \\ 260 & 57{,}6 \\ 2\,264 & 5{,}3 \\ 1\,716 & 8{,}3 \\ 155 & 66{,}8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} (0{,}006\ \ 0{,}005\ \ 0{,}010\ \ 0{,}020\ \ 0{,}213\ \ 0{,}020\ \ 0{,}658\ \ 0{,}025\ \ 0{,}033\ \ 0{,}011) \begin{pmatrix} 330 & 90{,}2 \\ 15\,522 & 0{,}9 \\ 1\,853 & 7{,}7 \\ 9\,857 & 0{,}9 \\ 4\,562 & 0{,}8 \\ 864 & 65{,}0 \\ 260 & 57{,}6 \\ 2\,264 & 5{,}3 \\ 1\,716 & 8{,}3 \\ 155 & 66{,}8 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0{,}994 & -0{,}005 & -0{,}010 & -0{,}020 & -0{,}213 & -0{,}020 & -0{,}658 & -0{,}025 & -0{,}033 & -0{,}011 \\ -0{,}006 & 0{,}995 & -0{,}010 & -0{,}020 & -0{,}213 & -0{,}020 & -0{,}658 & -0{,}025 & -0{,}033 & -0{,}011 \\ -0{,}006 & -0{,}005 & 0{,}990 & -0{,}020 & -0{,}213 & -0{,}020 & -0{,}658 & -0{,}025 & -0{,}033 & -0{,}011 \\ -0{,}006 & -0{,}005 & -0{,}010 & 0{,}980 & -0{,}213 & -0{,}020 & -0{,}658 & -0{,}025 & -0{,}033 & -0{,}011 \\ -0{,}006 & -0{,}005 & -0{,}010 & -0{,}020 & 0{,}787 & -0{,}020 & -0{,}658 & -0{,}025 & -0{,}033 & -0{,}011 \\ -0{,}006 & -0{,}005 & -0{,}010 & -0{,}020 & -0{,}213 & 0{,}980 & -0{,}658 & -0{,}025 & -0{,}033 & -0{,}011 \\ -0{,}006 & -0{,}005 & -0{,}010 & -0{,}020 & -0{,}213 & -0{,}020 & 0{,}342 & -0{,}025 & -0{,}033 & -0{,}011 \\ -0{,}006 & -0{,}005 & -0{,}010 & -0{,}020 & -0{,}213 & -0{,}020 & -0{,}658 & 0{,}975 & -0{,}033 & -0{,}011 \\ -0{,}006 & -0{,}005 & -0{,}010 & -0{,}020 & -0{,}213 & -0{,}020 & -0{,}658 & -0{,}025 & 0{,}967 & -0{,}011 \\ -0{,}006 & -0{,}005 & -0{,}010 & -0{,}020 & -0{,}213 & -0{,}020 & -0{,}658 & -0{,}025 & -0{,}033 & 0{,}989 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 330 & 90{,}2 \\ 15\,522 & 0{,}9 \\ 1\,853 & 7{,}7 \\ 9\,857 & 0{,}9 \\ 4\,562 & 0{,}8 \\ 864 & 65{,}0 \\ 260 & 57{,}6 \\ 2\,264 & 5{,}3 \\ 1\,716 & 8{,}3 \\ 155 & 66{,}8 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1\,240{,}259 & 49{,}0469 \\ 13\,951{,}741 & -40{,}2531 \\ 282{,}741 & -33{,}4531 \\ 8\,286{,}741 & -40{,}2531 \\ 2\,991{,}741 & -40{,}3531 \\ -706{,}259 & 23{,}8469 \\ -1\,310{,}259 & 16{,}4469 \\ 693{,}741 & -35{,}8531 \\ 145{,}741 & -32{,}8531 \\ -1\,415{,}259 & 25{,}6469 \end{pmatrix}$$

c) Matrice des variances-covariances.

La matrice C des variances-covariances s'obtient par la formule :

$$C = {}^tZ\, D\, Z$$

On obtient :

$$C = \begin{pmatrix} 5\,437\,527,09125 & -51\,349,1934272 \\ -51\,349,1934272 & 677,32798803 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 5\,437\,527,1 & -51\,349,2 \\ -51\,349,2 & 677,3 \end{pmatrix}$$

Dans cette matrice, on voit les variances de X et de Y et la covariance de X et Y :

$$s^2(X) = \| X_0 \|^2 = {}^tX_0\, D\, X_0 = 5\,437\,527,1$$
$$s^2(Y) = \| Y_0 \|^2 = {}^tY_0\, D\, Y_0 = 677,3$$
$$Cov(X, Y) = < X_0 \mid Y_0 > = {}^tX_0\, D\, Y_0 = -51\,349,2$$

Les variables centrées réduites $\frac{X_0}{s(X)} = \frac{X_0}{\| X_0 \|}$ et $\frac{Y_0}{s(Y)} = \frac{Y_0}{\| Y_0 \|}$ sont les vecteurs unitaires de R^{10} portés par X_0 et Y_0.

d) Coefficient de corrélation linéaire.

$$r_{XY} = \frac{Cov(X, Y)}{s(X)\, s(Y)} = \frac{< X_0 \mid Y_0 >}{\| X_0 \| \| Y_0 \|} = cos\,(X_0, Y_0) = -\frac{51\,349,2}{\sqrt{5\,437\,527,1} \times \sqrt{677,3}} = -0,8461$$

cos (147° 47' 32" 8) = – 0,8461
Les vecteurs X_0 et Y_0 font donc un angle de 147° 47' 32" 8 dans R^{10}.
Comme les variables centrées réduites $\frac{X_0}{s(X)} = \frac{X_0}{\| X_0 \|}$ et $\frac{Y_0}{s(Y)} = \frac{Y_0}{\| Y_0 \|}$, sont colinéaires aux variables centrées dans R^{10}, leur angle est le même que celui des variables centrées et le produit scalaire des variables centrées réduites est égal au coefficient de corrélation linéaire des variables centrées :

$$r_{XY} = \left\langle \frac{X_0}{\| X_0 \|} \,\middle|\, \frac{Y_0}{\| Y_0 \|} \right\rangle$$

Dans Z, les données sont déjà centrées.
Pour les réduire, il faut diviser la première colonne par $s(X) = \| X_0 \|$ et la deuxième colonne par $s(Y) = \| Y_0 \|$.
Cette opération se fait en multipliant à droite la matrice des données centrées Z par la matrice diagonale

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{s(X)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s(Y)} \end{pmatrix}.$$

Au total, les données centrées réduites s'obtiennent à partir des données par :

$$Z_r = Z\,S^{-1} = (Id - 1\,{}^t\!1\,D)\,\Delta\,S^{-1} = \begin{pmatrix} -0,5319 & 1,8846 \\ 5,9831 & -1,5467 \\ 0,1213 & -1,2854 \\ 3,5537 & -1,5467 \\ 1,2830 & -1,5505 \\ -0,3029 & 0,9163 \\ -0,5619 & 0,6320 \\ 0,2975 & -1,3776 \\ 0,0625 & -1,2623 \\ -0,6069 & 0,9855 \end{pmatrix}$$

La matrice des corrélations est la matrice $R = {}^tZ_r\,D\,Z_r = \begin{pmatrix} 1 & r_{XY} \\ r_{XY} & 1 \end{pmatrix}$.

2°/ Inertie totale.

L'inertie totale du nuage de points dans R ² par rapport à l'origine $G = (\overline{X}, \overline{Y})$ est la somme des variances de X et de Y :

$$I_T = s^2(X) + s^2(Y) = \| X_0 \|^2 + \| Y_0 \|^2$$

On l'obtient en prenant la trace de la matrice C des variances-covariances :

$$\boxed{I_T = 5\,438\,204,42}$$

C'est aussi la somme des valeurs propres de la matrice C.

3°/ Axes principaux.

Les axes principaux sont définis par les vecteurs propres de la matrice C des variances-covariances. Pour les calculer, il faut d'abord déterminer les valeurs propres de C ; ce sont les solutions λ_1 et λ_2 de l'équation :

$$Dét\,(C - \lambda\,Id) = 0$$

Leur somme est la trace de la matrice C, leur produit est le déterminant de la matrice C :

$$\lambda_1 + \lambda_2 = I_T = \| X_0 \|^2 + \| Y_0 \|^2$$
$$\lambda_1\,\lambda_2 = \| X_0 \|^2 + \| Y_0 \|^2 - (\langle X_0 \mid Y_0 \rangle)^2$$

Le discriminant de l'équation aux valeurs propres $Dét\,(C - \lambda\,Id) = 0$ est :

$$(\lambda_1 + \lambda_2)^2 - 4\,\lambda_1\,\lambda_2 = (Tr\,(C))^2 - 4\,Dét\,(C)$$
$$= 5\,438\,204,42^2 - 4 \times 1\,046\,249\,618,95$$
$$= 2,956\,988\,230\,69 \times 10^{13} > 0$$

Sa racine carrée est 5 437 819,62802

Les valeurs propres sont :

$\lambda_1 = \frac{1}{2}$ (5 438 204,42 + 5 437 819,63) = 5 438 012,02

$\lambda_2 = \frac{1}{2}$ (5 438 204,42 – 5 437 819,63) = 192,40

Si λ est une valeur propre, on a (voir Cours) :

$$\begin{pmatrix} s^2(X)-\lambda & Cov(X,Y) \\ Cov(X,Y) & s^2(Y)-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s^2(Y)-\lambda \\ -Cov(X,Y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (s^2(X)-\lambda)(s^2(Y)-\lambda)-(Cov(X,Y))^2 \\ (s^2(Y)-\lambda)\,Cov(X,Y)-(s^2(Y)-\lambda)\,Cov(X,Y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Det(C-\lambda\,Id) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

donc le vecteur $\begin{pmatrix} s^2(Y)-\lambda \\ -Cov(X,Y) \end{pmatrix}$ est un **vecteur propre de la matrice *C* des variances-covariances pour la valeur propre λ**.
Le carré de la norme de ce vecteur pour le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^2$ est donné par :

$$(s^2(Y)-\lambda \quad -Cov(X,Y))\begin{pmatrix} s^2(Y)-\lambda \\ -Cov(X,Y) \end{pmatrix} = (s^2(Y)-\lambda)^2 + (Cov(X,Y))^2$$

On peut donc prendre pour vecteur normé relatif à la valeur propre λ, le vecteur $u =$

$$\frac{1}{\sqrt{(s^2(Y)-\lambda)^2+(Cov(X,Y))^2}}\begin{pmatrix} s^2(Y)-\lambda \\ -Cov(X,Y) \end{pmatrix}$$, ou son opposé.

Ainsi, le premier axe principal du nuage de points est défini par le vecteur unitaire

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{(677{,}33-5\,438\,012{,}02)^2+(-51\,349{,}19)^2}}\begin{pmatrix} 5\,438\,012{,}02-677{,}33 \\ -51\,349{,}19 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}999\,955 \\ -0{,}009\,443 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{u_1 = \begin{pmatrix} 0{,}999\,955 \\ -0{,}009\,443 \end{pmatrix}}$$

Il est pratiquement confondu avec l'axe des *X*.
Le premier axe principal est la **droite de régression orthogonale**.
Le deuxième axe principal, orthogonal au premier, est pratiquement confondu avec l'axe des *Y* :

$$u_2 = \begin{pmatrix} 0{,}009\,443 \\ 0{,}999\,955 \end{pmatrix}$$

4°/ Inertie par rapport aux axes principaux.

L'inertie par rapport aux axes principaux est égale à la valeur propre correspondante :

λ_1 = 5 438 012,02 par rapport au premier axe principal,

λ_2 = 192,40 par rapport au deuxième axe principal.

Ces valeurs s'interprétent en termes de pourcentage de variance expliquée :

Le premier axe principal explique $\frac{5\,438\,012,02}{5\,438\,012,02 + 192,40}$ = 99,9965 % de la variance totale.

Le deuxième axe principal explique $\frac{192,40}{5\,438\,012,02 + 192,40}$ = 0,0035 % de la variance totale.

En d'autres termes, la dispersion observée des points dans le nuage est due presque uniquement aux variations de la PIB et pratiquement pas aux variations du taux d'analphabétisme.

5°/ Coordonnées factorielles.

La matrice V des vecteurs propres a, pour colonnes, les vecteurs propres u_1 et u_2 :

$$V = \begin{pmatrix} 0,999\,955 & 0,009\,443 \\ -0,009\,443 & 0,999\,955 \end{pmatrix}$$

S'agissant d'une matrice orthogonale, son inverse est égale à sa transposée :

$$V^{-1} = {}^tV = \begin{pmatrix} 0,999\,955 & -0,009\,443 \\ 0,009\,443 & 0,999\,955 \end{pmatrix}$$

Soit $(x_i \quad y_i)$, les coordonnées centrées d'un pays.
Les coordonnées factorielles du pays sont données par

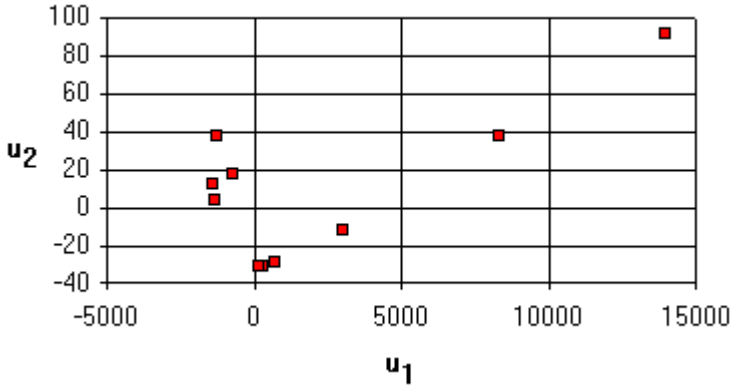
$$(x_i \quad y_i)\, V = (x_i \quad y_i) \begin{pmatrix} 0,999\,955 & 0,009\,443 \\ -0,009\,443 & 0,999\,955 \end{pmatrix}.$$

Ces formules, pour $i \in [1, 10]$ peuvent se condenser en une seule :

$$L = Z\, V$$

$$L = \begin{pmatrix} -1\,240,259 & 49,0469 \\ 13\,951,741 & -40,2531 \\ 282,741 & -33,4531 \\ 8\,286,741 & -40,2531 \\ 2\,991,741 & -40,3531 \\ -706,259 & 23,8469 \\ -1\,310,259 & 16,4469 \\ 693,741 & -35,8531 \\ 145,741 & -32,8531 \\ -1\,415,259 & 25,6469 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,999\,955 & 0,009\,443 \\ -0,009\,443 & 0,999\,955 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -1\,240,666 & 37,333 \\ 13\,951,493 & 91,495 \\ 283,044 & -30,782 \\ 8\,286,748 & 38,000 \\ 2\,991,987 & -12,100 \\ -706,452 & 17,177 \\ -1\,310,355 & 4,073 \\ 694,048 & -29,300 \\ 146,045 & -41,475 \\ -1\,415,437 & 12,281 \end{pmatrix}$$

Portons les dix points sur un diagramme en coordonnées rectangulaires.



Le point (0, 0) correspond au centre de gravité *G* de la distribution.

Sur ce diagramme, on voit nettement apparaître **deux groupes de pays** :

> — ceux qui ont la plus faible première composante principale (négative), ce qui correspond à la **PIB (Production Intérieure Brute) la plus faible** : ceux-là ont une deuxième composante principale entre 0 et 40, sans lien apparent avec la PIB par habitant, qui est la première composante principale.
> — les autres, qui se répartissent approximativement sur une **droite** : la deuxième composante principale dépend linéairement de la PIB par habitant.

Il est toujours délicat d'interpréter l'analyse en composantes principales, mais dans le cas présent, la première composante principale est pratiquement la variable *X* : c'est la PIB par habitant qui a le plus d'influence sur la dispersion des pays dans le graphique.
Le taux d'analphabétisme joue, par conséquent, un rôle moindre.
Le coefficient de corrélation linéaire négatif $r_{XY} = -0{,}85$ montre que le taux d'analphabétisme, pourcentage d'habitants illettrés dans la population de plus de 15 ans, a tendance à diminuer quand la PIB par habitant augmente, mais le taux de détermination $r_{XY}^2 = 0{,}72$ montre que le prédicteur linéaire du taux d'analphabétisme par la PIB n'explique que 72 % de la variation du taux d'analphabétisme.
Il y a donc certainement d'autres facteurs en jeu, notamment culturels : il y a des analphabètes riches et des intellectuels pauvres.

Chapitre 10. Régression linéaire multiple.

Exercices

Exercice 1. Deux variables explicatives, deux variables à expliquer.

Exercice 1. Deux variables explicatives, deux variables à expliquer.

Quatre caractères A (PIB par habitant en dollars), B (taux de croissance de la population en 1/1000), X (taux de mortalité infantile en 1/1000), Y (taux d'analphabétisme en 1/100) ont été mesurés dans 10 pays choisis au hasard dans une liste de pays.

Les résultats sont les suivants :

Pays	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	330	15 522	1 853	9 857	4 562	864	260	2 264	1 716	155
B	30	6	17	10	9	25	18	12	16	27
X	143	8	42	10	29	104	121	44	33	150
Y	90,2	0,9	7,7	0,9	0,8	65,0	57,6	5,3	8,3	66,8

Solution

Les deux variables A et B sont les variables explicatives, les variables X et Y sont les variables à expliquer.
On considère que la pondération des pays et des variables est uniforme (1 pour les pays, $\frac{1}{10}$ pour les variables, **pas de pondération par la population**).

1°/ Pour l'Iran, on a mesuré : $A = 2\,346$, $B = 27$.
Donner une estimation de X à partir du prédicteur de régression linéaire multiple de X par rapport à A et B.
Donner une estimation de Y à partir du prédicteur de régression linéaire multiple de Y par rapport à A et B.

2°/ Quel est le pourcentage de variance de X expliquée par la régression linéaire multiple de X par rapport à A et B ?
Quel est le pourcentage de variance de Y expliquée par la régression linéaire multiple de Y par rapport à A et B ?

HAUT

Chapitre 10. Régression linéaire multiple.

Enoncés.

Exercice 1. Deux variables explicatives, deux variables à expliquer.

Quatre caractères A (PIB par habitant en dollars), B (taux de croissance de la population en 1/1000), X (taux de mortalité infantile en 1/1000), Y (taux d'analphabétisme en 1/100) ont été mesurés dans 10 pays choisis au hasard dans une liste de pays.

Les résultats sont les suivants :

Pays	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	330	15 522	1 853	9 857	4 562	864	260	2 264	1 716	155
B	30	6	17	10	9	25	18	12	16	27
X	143	8	42	10	29	104	121	44	33	150
Y	90,2	0,9	7,7	0,9	0,8	65,0	57,6	5,3	8,3	66,8

Les deux variables A et B sont les variables explicatives, les variables X et Y sont les variables à expliquer.
On considère que la pondération des pays et des variables est uniforme (1 pour les pays, $\frac{1}{10}$ pour les variables, **pas de pondération par la population**).

1°/ Pour l'Iran, on a mesuré : $A = 2\,346$, $B = 27$.
Donner une estimation de X à partir du prédicteur de régression linéaire multiple de X par rapport à A et B.
Donner une estimation de Y à partir du prédicteur de régression linéaire multiple de Y par rapport à A et B.

2°/ Quel est le pourcentage de variance de X expliquée par la régression linéaire multiple de X par rapport à A et B ?
Quel est le pourcentage de variance de Y expliquée par la régression linéaire multiple de Y par rapport à A et B ?

Solution.

1°/ Régression linéaire multiple.

Le produit scalaire de $\mathbb{R}^{10}$ est défini par la matrice diagonale $D = \frac{1}{10}\,Id$.

Le produit scalaire de $\mathbb{R}^{2}$ est défini par la matrice unité.
Le programme de la procédure de régression linéaire multiple prédictive est **à connaître** :

a) Calcul des moyennes des variables explicatives et centrage du tableau des variables explicatives.

— Les moyennes s'obtiennent par produit scalaire dans R^{10} des variables avec le vecteur 1, dont les 10 coordonnées sont égales à 1.
— Le centrage d'une variable ou d'un tableau s'obtient par application de l'opérateur de centrage ($Id - 1\,{}^t1\,D$).

Soit Δ le tableau des données des variables explicatives :

$$\Delta = \begin{pmatrix} 330 & 30 \\ 15522 & 6 \\ 1853 & 17 \\ 9857 & 10 \\ 4562 & 9 \\ 864 & 25 \\ 260 & 18 \\ 2264 & 12 \\ 1716 & 16 \\ 155 & 27 \end{pmatrix};$$

$$\overline{\Delta} = {}^t1\,D\,\Delta = \frac{1}{10}\,(1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1) \begin{pmatrix} 330 & 30 \\ 15522 & 6 \\ 1853 & 17 \\ 9857 & 10 \\ 4562 & 9 \\ 864 & 25 \\ 260 & 18 \\ 2264 & 12 \\ 1716 & 16 \\ 155 & 27 \end{pmatrix} = \frac{1}{10}\,(37\,383 \quad 170) = (3\,783{,}3 \quad 17) = (\overline{A}\,,\ \overline{B}).$$

$$\Delta_0 = (Id - 1\,{}^t1\,D)\,\Delta = \begin{pmatrix} 0{,}9 & -0{,}1 & -0{,}1 & -0{,}1 & -0{,}1 & -0{,}1 & -0{,}1 & -0{,}1 & -0{,}1 & -0{,}1 \\ -0{,}1 & 0{,}9 & -0{,}1 & -0{,}1 & -0{,}1 & -0{,}1 & -0{,}1 & -0{,}1 & -0{,}1 & -0{,}1 \\ -0{,}1 & -0{,}1 & 0{,}9 & -0{,}1 & -0{,}1 & -0{,}1 & -0{,}1 & -0{,}1 & -0{,}1 & -0{,}1 \\ -0{,}1 & -0{,}1 & -0{,}1 & 0{,}9 & -0{,}1 & -0{,}1 & -0{,}1 & -0{,}1 & -0{,}1 & -0{,}1 \\ -0{,}1 & -0{,}1 & -0{,}1 & -0{,}1 & 0{,}9 & -0{,}1 & -0{,}1 & -0{,}1 & -0{,}1 & -0{,}1 \\ -0{,}1 & -0{,}1 & -0{,}1 & -0{,}1 & -0{,}1 & 0{,}9 & -0{,}1 & -0{,}1 & -0{,}1 & -0{,}1 \\ -0{,}1 & -0{,}1 & -0{,}1 & -0{,}1 & -0{,}1 & -0{,}1 & 0{,}9 & -0{,}1 & -0{,}1 & -0{,}1 \\ -0{,}1 & -0{,}1 & -0{,}1 & -0{,}1 & -0{,}1 & -0{,}1 & -0{,}1 & 0{,}9 & -0{,}1 & -0{,}1 \\ -0{,}1 & -0{,}1 & -0{,}1 & -0{,}1 & -0{,}1 & -0{,}1 & -0{,}1 & -0{,}1 & 0{,}9 & -0{,}1 \\ -0{,}1 & -0{,}1 & -0{,}1 & -0{,}1 & -0{,}1 & -0{,}1 & -0{,}1 & -0{,}1 & -0{,}1 & 0{,}9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 330 & 30 \\ 15522 & 6 \\ 1853 & 17 \\ 9857 & 10 \\ 4562 & 9 \\ 864 & 25 \\ 260 & 18 \\ 2264 & 12 \\ 1716 & 16 \\ 155 & 27 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3\,408{,}3 & 13 \\ 11\,783{,}7 & -11 \\ -1\,885{,}3 & 0 \\ 6\,118{,}7 & -7 \\ 823{,}7 & -8 \\ -2\,874{,}3 & 8 \\ -3\,478{,}3 & 1 \\ -1\,474{,}3 & -5 \\ -2\,022{,}3 & -1 \\ -3\,583{,}3 & 10 \end{pmatrix}$$

b) Calcul de la matrice des variances-covariances des variables explicatives.

$$C = {}^t\Delta_0\,D\,\Delta_0$$

$$= \frac{1}{10}\begin{pmatrix} -3\,408{,}3 & 11\,783{,}7 & -1\,885{,}3 & 6\,118{,}7 & 823{,}7 & -2\,874{,}3 & -3\,478{,}3 & -1\,474{,}3 & -2\,022{,}3 & -3\,583{,}3 \\ 13 & -11 & 0 & -7 & -8 & 8 & 1 & -5 & -1 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3\,408{,}3 & 13 \\ 11\,783{,}7 & -11 \\ -1\,885{,}3 & 0 \\ 6\,118{,}7 & -7 \\ 823{,}7 & -8 \\ -2\,874{,}3 & 8 \\ -3\,478{,}3 & 1 \\ -1\,474{,}3 & -5 \\ -2\,022{,}3 & -1 \\ -3\,583{,}3 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{C = \begin{pmatrix} 23\,160\,689{,}01 & -27\,626{,}1 \\ -27\,626{,}1 & 59{,}4 \end{pmatrix}.}$$

La connaissance des variances de *A* et *B* permet de normaliser les variables explicatives.

$$\Delta_n = \Delta_0 \begin{pmatrix} \frac{1}{s(A)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s(B)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3\,408{,}3 & 13 \\ 11\,783{,}7 & -11 \\ -1\,885{,}3 & 0 \\ 6\,118{,}7 & -7 \\ 823{,}7 & -8 \\ -2\,874{,}3 & 8 \\ -3\,478{,}3 & 1 \\ -1\,474{,}3 & -5 \\ -2\,022{,}3 & -1 \\ -3\,583{,}3 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2{,}0779\times10^{-4} & 0 \\ 0 & 0{,}1297 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}7082 & 1{,}6867 \\ 2{,}4485 & -1{,}4272 \\ -0{,}3917 & 0{,}0000 \\ 1{,}2714 & -0{,}9082 \\ 0{,}1712 & -1{,}0380 \\ -0{,}5973 & 1{,}0380 \\ -0{,}7228 & 0{,}1297 \\ -0{,}3063 & -0{,}6487 \\ -0{,}4202 & -0{,}1297 \\ -0{,}7446 & 1{,}2975 \end{pmatrix}$$

c) Inversion de la matrice *C*.

L'inverse d'une matrice $C = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est $C^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

L'inverse de la matrice $C = \begin{pmatrix} 23\,160\,689{,}01 & -27\,626{,}1 \\ -27\,626{,}1 & 59{,}4 \end{pmatrix}$ est

$$C^{-1} = \frac{1}{612\,543\,525{,}984}\begin{pmatrix} 59{,}4 & 27\,626{,}10 \\ 27\,626{,}10 & 23\,160\,689{,}01 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9{,}70\times10^{-8} & 4{,}51\times10^{-5} \\ 4{,}51\times10^{-5} & 3{,}78\times10^{-2} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{C^{-1} = \begin{pmatrix} 9{,}70\times10^{-8} & 4{,}51\times10^{-5} \\ 4{,}51\times10^{-5} & 3{,}78\times10^{-2} \end{pmatrix}}$$

d) Moyennes et centrage des variables à expliquer.

Soit *E* la matrice des variables à expliquer :

$$E = \begin{pmatrix} 143 & 90,2 \\ 8 & 0,9 \\ 42 & 7,7 \\ 10 & 0,9 \\ 29 & 0,8 \\ 104 & 65,0 \\ 121 & 57,6 \\ 44 & 5,3 \\ 33 & 8,3 \\ 150 & 66,8 \end{pmatrix}$$

$\overline{E} = {}^t\mathbb{1}\, D\, E = (68,4 \quad 30,35) = (\overline{X}, \overline{Y})$

$$E_0 = (Id - \mathbb{1}\,{}^t\mathbb{1}\, D)\, E = \begin{pmatrix} 74,6 & 59,85 \\ -60,4 & -29,45 \\ -26,4 & -22,65 \\ -58,4 & -29,45 \\ -39,4 & -29,55 \\ 35,6 & 34,65 \\ 52,6 & 27,25 \\ -24,4 & -25,05 \\ -35,4 & -22,05 \\ 81,6 & 36,45 \end{pmatrix}$$

e) Vecteurs des covariances des variables à expliquer et des variables explicatives.

$$d = \begin{pmatrix} Cov(A, X) & Cov(A, Y) \\ Cov(B, X) & Cov(B, Y) \end{pmatrix} = {}^t\Delta_0\, D\, E_0 = \begin{pmatrix} -177\,612,72 & -95\,631,725 \\ 366,9 & 236,08 \end{pmatrix}$$

f) Coefficients de régression.

$$b = C^{-1}\, d = \begin{pmatrix} 9,70\times10^{-8} & 4,51\times10^{-5} \\ 4,51\times10^{-5} & 3,78\times10^{-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -177\,612,72 & -95\,631,725 \\ 366,9 & 236,08 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6,76\times10^{-4} & 1,37\times10^{-3} \\ 5,86 & 4,61 \end{pmatrix}$$

g) Termes constants.

$$a = (\overline{X}, \overline{Y}) - (\overline{A}, \overline{B})\, b = \overline{E} - \overline{\Delta}\, b = (68,4 \quad 30,35) - (3\,783,3 \quad 17) \begin{pmatrix} -6,76\times10^{-4} & 1,37\times10^{-3} \\ 5,86 & 4,61 \end{pmatrix} = (-28,73 \quad -53,21)$$

h) Prédicteurs de la régression linéaire multiple.

$\hat{E} = (\hat{X}, \hat{Y}) = a + (A \quad B)\, b = (\overline{X}, \overline{Y}) + (A - \overline{A}, B - \overline{B})\, b = \overline{E} + (A - \overline{A}, B - \overline{B})\, b$

$$\hat{X} = -28,73 + (A \quad B) \begin{pmatrix} -6,76\times10^{-4} \\ 5,86 \end{pmatrix} = -28,73 - 6,76 \times 10^{-4} A + 5,86 B = a_x + b_{Ax} A + b_{Bx} B$$

$$\hat{Y} = -53,21 + (A \quad B) \begin{pmatrix} 1,37\times10^{-3} \\ 4,61 \end{pmatrix} = -53,21 + 1,37 \times 10^{-3} A + 4,61 B = a_y + b_{Ay} A + b_{By} B$$

$$\boxed{\hat{X} = -28,73 - 6,76 \times 10^{-4} A + 5,86 B}$$

$$\hat{Y} = -53{,}21 + 1{,}37 \times 10^{-3} A + 4{,}61 B$$

i) Résidus.

Le prédicteur de X (comme le prédicteur de Y) en fonction de A et B, permet de calculer les différences entre les valeurs prédites par le modèle de régression linéaire multiple et les valeurs observées des variables expliquées. La différence s'appelle le résidu.
Notons r_i le résidu de X et Y pour l'individu i.

$$\begin{aligned} r_i &= E_i - \hat{\hat{E}}_i \\ &= [[x_i \quad y_i]] - \overline{E} - [[A_i - \overline{A} \quad B_i - \overline{B}]]\, b \\ &= [[x_i \quad y_i]] - \overline{E} - \Delta_{0i}\, b \\ &= E_{0i} - \Delta_{0i}\, b \end{aligned}$$

La matrice des résidus de X et Y est donc :

$$E_0 - \Delta_0 b = \begin{pmatrix} -3{,}91 & 4{,}56 \\ 12{,}05 & 5{,}11 \\ -27{,}67 & -20{,}06 \\ -13{,}23 & -5{,}56 \\ 8{,}06 & 6{,}22 \\ -13{,}24 & 1{,}69 \\ 44{,}39 & 27{,}41 \\ 3{,}91 & 0{,}04 \\ -30{,}91 & -14{,}66 \\ 20{,}55 & -4{,}76 \end{pmatrix}$$

j) Prédiction pour des valeurs supplémentaires.

$$(A \quad B) = (2\,346 \quad 27)$$

$$(X^*, Y^*) = (-28{,}73 \quad -53{,}21) + (2\,346 \quad 27) \begin{pmatrix} -6{,}76 \times 10^{-4} & 1{,}37 \times 10^{-3} \\ 5{,}86 & 4{,}61 \end{pmatrix} = (-28{,}73 \quad -53{,}21) + (156{,}70 \quad 127{,}78)$$
$$= (127{,}96 \quad 74{,}57)$$

Le modèle de régression linéaire multiple prévoit pour l'Iran des valeurs à peu près du même ordre de grandeur que les vraies valeurs.
Les vraies valeurs sont $X = 105$ et $Y = 57$.

2°/ Coefficients de corrélation linéaire multiple.

La matrice des variances-covariances des variables explicatives est

$$C = \begin{pmatrix} 23160689{,}01 & -27626{,}1 \\ -27626{,}1 & 59{,}4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s^2(A) & Cov(A, B) \\ Cov(A, B) & s^2(B) \end{pmatrix}$$

La matrice des corrélations des variables explicatives est :

$$R = \begin{pmatrix} 1 & r_{AB} \\ r_{AB} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{Cov(A,B)}{s(A)s(B)} \\ \dfrac{Cov(A,B)}{s(A)s(B)} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -0,7448 \\ -0,7448 & 1 \end{pmatrix}$$

On peut calculer R par la formule

$$R = {}^t\Delta_n D \Delta_n,$$

où Δ_n est la matrice des données explicatives normalisées (c'est-à-dire centrées et réduites).

$$R = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} -0,7082 & 2,4485 & -0,3917 & 1,2714 & 0,1712 & -0,5973 & -0,7228 & -0,3063 & -0,4202 & -0,7446 \\ 1,6867 & -1,4272 & 0,0000 & -0,9082 & -1,0380 & 1,0380 & 0,1297 & -0,6487 & -0,1297 & 1,2975 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0,7082 & 1,6867 \\ 2,4485 & -1,4272 \\ -0,3917 & 0,0000 \\ 1,2714 & -0,9082 \\ 0,1712 & -1,0380 \\ -0,5973 & 1,0380 \\ -0,7228 & 0,1297 \\ -0,3063 & -0,6487 \\ -0,4202 & -0,1297 \\ -0,7446 & 1,2975 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -0,7448 \\ -0,7448 & 1 \end{pmatrix}$$

Son inverse est :

$$R^{-1} = \frac{1}{1-0,7448^2}\begin{pmatrix} 1 & 0,7448 \\ 0,7448 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,2460 & 1,6728 \\ 1,6728 & 2,2460 \end{pmatrix}$$

Soit E_n la matrice des variables à expliquer centrées réduites.

$$E_0 = (Id - 1\,{}^t1\,D)\,E = \begin{pmatrix} 74,6 & 59,85 \\ -60,4 & -29,45 \\ -26,4 & -22,65 \\ -58,4 & -29,45 \\ -39,4 & -29,55 \\ 35,6 & 34,65 \\ 52,6 & 27,25 \\ -24,4 & -25,05 \\ -35,4 & -22,05 \\ 81,6 & 36,45 \end{pmatrix}$$

La matrice des variances-covariances des variables à expliquer est :

$$\begin{pmatrix} s^2(X) & Cov(X,Y) \\ Cov(X,Y) & s^2(Y) \end{pmatrix} = {}^tE_0 D E_0 = \begin{pmatrix} 2741,44 & 1675,87 \\ 1675,87 & 1108,8345 \end{pmatrix}$$

$$s(X) = \sqrt{2741,44} = 52,3587623994$$

$$s(Y) = \sqrt{1108,8345} = 33,2991666562$$

$$E_n = E_0 \begin{pmatrix} \frac{1}{s(X)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s(Y)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 74{,}6 & 59{,}85 \\ -60{,}4 & -29{,}45 \\ -26{,}4 & -22{,}65 \\ -58{,}4 & -29{,}45 \\ -39{,}4 & -29{,}55 \\ 35{,}6 & 34{,}65 \\ 52{,}6 & 27{,}25 \\ -24{,}4 & -25{,}05 \\ -35{,}4 & -22{,}05 \\ 81{,}6 & 36{,}45 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1{,}9099 \times 10^{-2} & 0 \\ 0 & 3{,}0031 \times 10^{-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}4248 & 1{,}7973 \\ -1{,}1536 & -0{,}8844 \\ -0{,}5042 & -0{,}6802 \\ -1{,}1154 & -0{,}8844 \\ -0{,}7525 & -0{,}8874 \\ 0{,}6799 & 1{,}0406 \\ 1{,}0046 & 0{,}8183 \\ -0{,}4660 & -0{,}7523 \\ -0{,}6761 & -0{,}6622 \\ 1{,}5585 & 1{,}0946 \end{pmatrix}$$

La matrice des coefficients de corrélation des variables à expliquer et des variables explicatives est :

$$r = \begin{pmatrix} r_{XA} & r_{YA} \\ r_{XB} & r_{YB} \end{pmatrix} = {}^t\Delta_n \, D \, E_n$$

$$= \frac{1}{10} \begin{pmatrix} -0{,}7082 & 2{,}4485 & -0{,}3917 & 1{,}2714 & 0{,}1712 & -0{,}5973 & -0{,}7228 & -0{,}3063 & -0{,}4202 & -0{,}7446 \\ 1{,}6867 & -1{,}4272 & 0{,}0000 & -0{,}9082 & -1{,}0380 & 1{,}0380 & 0{,}1297 & -0{,}6487 & -0{,}1297 & 1{,}2975 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1{,}4248 & 1{,}7973 \\ -1{,}1536 & -0{,}8844 \\ -0{,}5042 & -0{,}6802 \\ -1{,}1154 & -0{,}8844 \\ -0{,}7525 & -0{,}8874 \\ 0{,}6799 & 1{,}0406 \\ 1{,}0046 & 0{,}8183 \\ -0{,}4660 & -0{,}7523 \\ -0{,}6761 & -0{,}6622 \\ 1{,}5585 & 1{,}0946 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -0{,}7049 & -0{,}5966 \\ 0{,}9092 & 0{,}9199 \end{pmatrix}$$

La matrice des corrélations multiples est :

$${}^t r \, R^{-1} \, r = \begin{pmatrix} -0{,}7049 & 0{,}9092 \\ -0{,}5966 & 0{,}9199 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2{,}2460 & 1{,}6728 \\ 1{,}6728 & 2{,}2460 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0{,}7049 & -0{,}5966 \\ 0{,}9092 & 0{,}9199 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}8284 & 0{,}8309 \\ 0{,}8309 & 0{,}8637 \end{pmatrix}$$

Dans cette matrice, on voit, sur la diagonale, les carrés des normes des projections orthogonales de X_n et Y_n sur l'hyperplan de R^{10} défini par les variables *A* et *B*.
Ce sont les carrés des coefficients de corrélation multiple :

$$R^2_{X\,;\,A,\,B} = 0{,}8284$$
$$R^2_{Y\,;\,A,\,B} = 0{,}8637$$

Ces coefficients donnent les pourcentages de variances des variables, expliqués par la régression linéaire multiple : 83 % pour *X*, 86 % pour *Y*.

La régression linéaire multiple explique 83 % de la variance de *X* et 86 % de la variance de *Y*.

Chapitre 11. Sondage stratifié.

Exercices

Exercice 1. Etudiants fumeurs.

Exercice 1. Etudiants fumeurs.

Un médecin désire connaître le nombre moyen m de cigarettes fumées par un étudiant en une journée. Il divise pour cela les étudiants en strates selon leur âge et fait une enquête qui donne les résultats suivants.

N° de strate	Classe d'âge	nombre d'étudiants	nombre d'observations	moyenne observée
1	12-14	1 100	8	0,75
2	14-16	900	8	2,1
3	16-18	700	7	3,6
4	18-20	600	7	5,2

1°/ Quelle estimation doit-il prendre pour m ?
2°/ On reprend les données précédentes et on suppose que le caractère X "nombre moyen de cigarettes fumées par un élève" ait les écarts-types 2, 3, 4, 5, sur les strates 1, 2, 3, 4. On désire faire un total de $n = 30$ observations.
a) Déterminer la variance de l'estimateur $\hat{m}$ de m dans le cas où l'on fait un sondage stratifié, les nombres d'observations par strate n_i étant choisis comme dans la question précédente.
b) Déterminer les valeurs de n_i approximativement proportionnelles aux effectifs des strates et la variance correspondante de l'estimateur $\hat{m}$.
c) Déterminer les valeurs de n_i optimales et la variance correspondante de l'estimateur $\hat{m}$.
d) Déterminer une estimation de la variance du caractère X sur la population totale. En déduire la variance de l'estimateur de m quand on fait un sondage non stratifié. Conclusion ?

Solution

HAUT

Chapitre 11. Sondage stratifié.

Enoncés.

Exercice 1. Etudiants fumeurs.

Un médecin désire connaître le nombre moyen m de cigarettes fumées par un étudiant en une journée. Il divise pour cela les étudiants en strates selon leur âge et fait une enquête qui donne les résultats suivants.

N° de strate	Classe d'âge	nombre d'étudiants	nombre d'observations	moyenne observée
1	12-14	1 100	8	0,75
2	14-16	900	8	2,1
3	16-18	700	7	3,6
4	18-20	600	7	5,2

1°/ Quelle estimation doit-il prendre pour m ?
2°/ On reprend les données précédentes et on suppose que le caractère X "nombre moyen de cigarettes fumées par un élève" ait les écarts-types 2, 3, 4, 5, sur les strates 1, 2, 3, 4. On désire faire un total de $n = 30$ observations.
a) Déterminer la variance de l'estimateur $\hat{m}$ de m dans le cas où l'on fait un sondage stratifié, les nombres d'observations par strate n_i étant choisis comme dans la question précédente.
b) Déterminer les valeurs de n_i approximativement proportionnelles aux effectifs des strates et la variance correspondante de l'estimateur $\hat{m}$.
c) Déterminer les valeurs de n_i optimales et la variance correspondante de l'estimateur $\hat{m}$.
d) Déterminer une estimation de la variance du caractère X sur la population totale. En déduire la variance de l'estimateur de m quand on fait un sondage non stratifié. Conclusion ?

Solution.

1°/ Estimation de la moyenne.

Dans un sondage stratifié, l'échantillon observé est la réunion de quatre échantillons, un par strate.
Pour la strate numéro i, on note $\hat{\overline{X}}_i$ la moyenne d'échantillonnage de l'échantillon de la strate.
$\hat{\overline{X}}_i$ est un estimateur sans biais de la moyenne m_i de la strate : $E(\hat{\overline{X}}_i) = m_i$.
La moyenne m est la moyenne des m_i pondérées par les effectifs N_i des strates :

$$m = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{i=4} N_i \, m_i$$

$$N = \sum_{i=1}^{i=4} N_i = 1\,100 + 900 + 700 + 600 = 3\,300$$

On obtient donc un estimateur sans biais de m en prenant la moyenne des $\hat{\overline{X}}_i$ pondérées par les effectifs N_i des strates :

$$\boxed{\hat{m} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{i=4} N_i \, \hat{\overline{X}}_i}$$

$$E(\hat{m}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{i=4} N_i \, E(\hat{\overline{X}}_i) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{i=4} N_i \, m_i = m.$$

L'estimation ponctuelle sans biais obtenue est :

$$m^* = \frac{1}{3\,300} (1\,100 \times 0{,}75 + 900 \times 2{,}1 + 700 \times 3{,}6 + 600 \times 5{,}2) = \frac{1}{3\,300} (825 + 1\,890 + 2\,520 + 3\,120) = \frac{8\,355}{3\,300} = 2{,}53$$

$\boxed{m^* = 2{,}53 \text{ cigarettes/jour/étudiant}}$

2°/ Variance de l'estimateur de la moyenne.

Variance de $\hat{m}$.

Les variables aléatoires $\hat{\overline{X}}_i$ sont indépendantes :

$$Var(\hat{m}) = \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^{i=4} N_i^{\,2} \, Var(\hat{\overline{X}}_i)$$

$$Var(\hat{\overline{X}}_i) = \frac{N_i - n_i}{N_i - 1} \frac{\sigma_i^{\,2}}{n_i} \text{ (tirage exhaustif à probabilités égales dans chaque strate)}$$

où $\sigma_i^{\,2}$ est la variance du nombre de cigarettes fumées par un élève de la strate i, et n_i le nombre d'observations dans la strate i.
Finalement :

$$\boxed{Var(\hat{m}) = \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^{i=4} N_i^{\,2} \frac{N_i - n_i}{N_i - 1} \frac{\sigma_i^{\,2}}{n_i}}$$

a) Variance avec les observations effectuées.

Avec :

N° de strate i	Classe d'âge	N_i	n_i	σ_i
1	12-14	1 100	8	2
2	14-16	900	8	3
3	16-18	700	7	4
4	18-20	600	7	5

nous obtenons :

$$Var\,(\hat{m}) = 0{,}3571$$

b) Echantillon représentatif.

Si nous prenons des **taux de sondage constants**, ou tout au moins voisins, puisque les n_i doivent être entiers, nous aurons :

$$\frac{n_1}{1100} = \frac{n_2}{900} = \frac{n_3}{700} = \frac{n_4}{600} = \frac{n}{3300} = \frac{30}{3300} = \frac{1}{110}$$

$n_1 = \frac{1100}{110} = 10$
$n_2 = \frac{900}{110} = 8$
$n_3 = \frac{700}{110} = 6$
$n_4 = 30 - n_1 - n_2 - n_3 = 6$

N° de strate i	Classe d'âge	N_i	n_i	σ_i
1	12-14	1 100	10	2
2	14-16	900	8	3
3	16-18	700	6	4
4	18-20	600	6	5

Nous obtenons :

$$Var\,(\hat{m}) = 0{,}3828$$

c) Estimateur optimal.

Nous admettons le résultat suivant :

La variance de l'estimateur $\hat{\bar{m}}$ est minimale lorsque les n_i sont proportionnels aux N_i et aux σ_i :
$n_i = \lambda N_i \sigma_i$.
Nous prendrons les entiers les plus proches de ces valeurs proportionnelles.

Les relations s'écrivent :

$$\frac{n_1}{1100 \times 2} = \frac{n_2}{900 \times 3} = \frac{n_3}{700 \times 4} = \frac{n_4}{600 \times 5} = \frac{n}{10\,700} = \frac{30}{10\,700} = \frac{3}{1\,070} = \lambda.$$

$$n_1 = \frac{6\,600}{1\,070} = 6$$
$$n_2 = \frac{8\,100}{1\,070} = 8$$
$$n_3 = \frac{9\,000}{1\,070} = 8$$
$$n_4 = 30 - n_1 - n_2 - n_3 = 8$$

N° de strate i	Classe d'âge	N_i	n_i	σ_i
1	12-14	1 100	6	2
2	14-16	900	8	3
3	16-18	700	8	4
4	18-20	600	8	5

Nous obtenons :

$$\boxed{Var\,(\hat{\bar{m}}) = 0{,}3480}$$

On remarquera que l'estimateur $\hat{\bar{m}}$ est plus efficace (variance plus petite) dans les conditions optimales que dans le sondage avec un échantillon représentatif.
Cette propriété vient du fait que lorsqu'on prend un échantillon représentatif, nous ne sommes pas censés connaître les écarts-types.
C'est la connaissance des écarts-types qui fait qu'il y a plus efficace qu'un échantillon représentatif.

d) Variance dans un échantillon non stratifié.

Considérons la population étudiée comme formée de quatre sous-populations pour lesquelles nous connaissons les variances σ_i^2 et dont les moyennes m_i sont inconnues.
La variance du caractère étudié X dans la population est donnée par :

$$Var\,(X) = \sigma^2 = s_w^2\,(X) + s_b^2\,(X)$$
$$s_w^2\,(X) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{i=4} N_i \sigma_i^2$$
$$s_b^2\,(X) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{i=4} N_i (m_i - m)^2$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{i=4} N_i \sigma_i^2 + \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{i=4} N_i (m_i - m)^2$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{i=4} N_i \sigma_i^2 + \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{i=4} N_i m_i^2 - m^2$$

$s_w^2(X) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{i=4} N_i \sigma_i^2$ est connu.

Les m_i et m sont inconnus, il faut les estimer.

— Estimation de $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{i=4} N_i m_i^2$.

Nous avons :

$$Var(\widehat{\overline{X}}_i) = \frac{N_i - n_i}{N_i - 1}\frac{\sigma_i^2}{n_i}$$ (tirage exhaustif à probabilités égales dans chaque strate)

et :

$$Var(\widehat{\overline{X}}_i) = E(\widehat{\overline{X}}_i^2) - m_i^2$$

donc :

$$E\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{i=4} N_i \widehat{\overline{X}}_i^2\right) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{i=4} N_i E(\widehat{\overline{X}}_i^2) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{i=4} N_i Var(\widehat{\overline{X}}_i) + \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{i=4} N_i m_i^2$$

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{i=4} N_i E(\widehat{\overline{X}}_i^2) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{i=4} N_i \frac{N_i - n_i}{N_i - 1}\frac{\sigma_i^2}{n_i} + \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{i=4} N_i m_i^2$$

$E(\widehat{\overline{X}}_i^2)$ est estimé par $\overline{x}_i^2$, par conséquent, $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{i=4} N_i m_i^2$ est estimé par

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{i=4} N_i \overline{x}_i^2 - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{i=4} N_i \frac{N_i - n_i}{N_i - 1}\frac{\sigma_i^2}{n_i}.$$

— Estimation de m^2.

Nous avons :

$$Var\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{i=4} N_i \widehat{\overline{X}}_i^2\right) = E\left[\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{i=4} N_i \widehat{\overline{X}}_i\right)^2\right] - \left[E\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{i=4} N_i \widehat{\overline{X}}_i\right)\right]^2$$

$$= E\left[\left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{i=4} N_i \hat{\overline{X}}_i \right)^2 \right] - m^2$$

$$m^2 = E\left[\left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{i=4} N_i \hat{\overline{X}}_i \right)^2 \right] - Var\left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{i=4} N_i \hat{\overline{X}}_i^2 \right)$$

$$= E\left[\left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{i=4} N_i \hat{\overline{X}}_i \right)^2 \right] - \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^{i=4} N_i^2 \, Var\,(\hat{\overline{X}}_i)$$

$$= E\left[\left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{i=4} N_i \hat{\overline{X}}_i \right)^2 \right] - \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^{i=4} N_i^2 \frac{N_i - n_i}{N_i - 1} \frac{\sigma_i^2}{n_i}$$

Par conséquent, m^2 sera estimé sans biais par $\left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{i=4} N_i \overline{x}_i \right)^2 - \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^{i=4} N_i^2 \frac{N_i - n_i}{N_i - 1} \frac{\sigma_i^2}{n_i}$,

où les $\overline{x}_i = m_i^*$ sont les réalisations des $\hat{\overline{X}}_i$.

— Au total, $\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{i=4} N_i \sigma_i^2 + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{i=4} N_i m_i^2 - m^2$ sera estimé sans biais par :

$$\sigma^{*2} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{i=4} N_i \sigma_i^2 + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{i=4} N_i \overline{x}_i^2 - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{i=4} N_i \frac{N_i - n_i}{N_i - 1} \frac{\sigma_i^2}{n_i} - \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{i=4} N_i \overline{x}_i \right)^2 + \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^{i=4} N_i^2 \frac{N_i - n_i}{N_i - 1} \frac{\sigma_i^2}{n_i}$$

$$= \frac{1}{N} \left(\sum_{i=1}^{i=4} N_i \overline{x}_i^2 - \frac{1}{N} \left(\sum_{i=1}^{i=4} N_i \overline{x}_i \right)^2 \right) + \sum_{i=1}^{i=4} \frac{N_i}{N} \left(n_i - \frac{N_i - n_i}{N_i - 1} + \frac{N_i}{N} \frac{N_i - n_i}{N_i - 1} \right) \frac{\sigma_i^2}{n_i}$$

$$= \frac{1}{N} \left(\sum_{i=1}^{i=4} N_i \overline{x}_i^2 - \frac{1}{N} \left(\sum_{i=1}^{i=4} N_i \overline{x}_i \right)^2 \right) + \sum_{i=1}^{i=4} \frac{N_i}{N} \left(n_i - \frac{N - N_i}{N} \frac{N_i - n_i}{N_i - 1} \right) \frac{\sigma_i^2}{n_i}$$

Tableau des calculs.

N° de strate i	Classe d'âge	N_i	n_i	$\bar{x}_i = m_i^*$	σ_i	$N_i\,\bar{x}_i$	$N_i\,\bar{x}_i{}^2$	$\frac{N_i}{N}$	$n_i - \frac{N-N_i}{N}\frac{N_i-n_i}{N_i-1}$	$\frac{\sigma_i{}^2}{n_i}$	$\frac{N_i}{N}\left(n_i - \frac{N-N_i}{N}\frac{N_i-n_i}{N_i-1}\right)\frac{\sigma_i{}^2}{n_i}$
1	12-14	1100	8	0.75	2	825	618.75	0.3333	7.3376	0.5000	1.2229
2	14-16	900	8	2.1	3	1890	3969.00	0.2727	7.2784	1.1250	2.2331
3	16-18	700	7	3.6	4	2520	9072.00	0.2121	6.2189	2.2857	3.0152
4	18-20	600	7	5.2	5	3120	16224.00	0.1818	6.1900	3.5714	4.0195
		3300	30			8355	29883.75				10.4908
							2.6456				13.1364

Résultats.

$$\sigma^{*\,2} = 13{,}1364$$

Conclusion.

Si nous considérons un sondage non stratifié de taille $n = 30$, alors l'estimateur sans biais $\widehat{\bar{X}}$ de m admettra une variance donnée par la formule :

$$Var\,(\widehat{\bar{X}}) = \frac{N-n}{N-1}\frac{\sigma^2}{n}.$$

(Echantillon exhaustif, tirage à probabilités égales).
L'estimation de cette variance sera :

$$\frac{3\,300-30}{3\,300-1} \times \frac{13{,}1364}{30} = 0{,}4340$$

Nous obtenons donc, avec le sondage non stratifié, un estimateur de la moyenne nettement moins efficace que l'estimateur de la moyenne dans un sondage stratifié ($Var\,(\widehat{m}) = 0{,}3571$).

Chapitre 12. Simulation d'un échantillon.

Exercices

Exercice 1. Calcul d'une intégrale.
Exercice 2. Echantillon de loi discrète finie.
Exercice 3. Echantillon de loi de Poisson.
Exercice 4. Echantillon de loi normale.
Exercice 5. Stock de sécurité.
Exercice 6. Loi exponentielle : méthode de Von Neumann.
Exercice 7. Echantillon de loi de Cauchy.
Exercice 8. Echantillon de loi de Bernoulli.
Exercice 9. Loi normale : méthode polaire.
Exercice 10. Loi continue : méthode du rejet.
Exercice 11. Calcul approché de π.

Exercice 1. Calcul d'une intégrale.

On considère l'intégrale $I = \int_0^1 f(x)\,dx$, et une variable aléatoire X distribuée uniformément sur l'intervalle [0, 1].

1°/ Montrer comment une suite de nombres aléatoires $X_1, \ldots, X_n$, permet de calculer une valeur approchée de l'intégrale I.

2°/ Application numérique : choisir au hasard 10 nombres dans une table de nombres au hasard et en déduire une une estimation ponctuelle de l'intégrale $I = \int_0^1 x^2\,dx$.

3°/ Le calcul effectué à partir de l'échantillon dans la deuxième question conduit-il à une estimation ponctuelle acceptable de I ? Comment peut-on l'améliorer ?

Solution

HAUT

Exercice 2. Echantillon de loi discrète finie.

Un dé comporte deux faces de couleur rouge, trois faces de couleur noire, une face de couleur blanche. On jette plusieurs fois le dé et on note les couleurs qui sortent. A l'aide d'une table de nombres au hasard, construire un échantillon correspondant à dix jets de dés.	Solution

HAUT

Exercice 3. Echantillon de loi de Poisson.

1°/ En choisissant dix nombres au hasard dans une table de nombres au hasard, construire un échantillon fictif de dix valeurs d'une variable aléatoire X obéissant à une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 1{,}5$. 2°/ Donner, à l'aide de l'échantillon ainsi construit, une estimation ponctuelle des probabilités $P(X = 1)$ et $P(X = 2)$.	Solution

HAUT

Exercice 4. Echantillon de loi normale.

A l'entrée d'une station de métro, un marchand de journaux remarque qu'entre 7 heures et 8 heures, une personne sur dix en moyenne achète un journal. Sachant qu'il passe en moyenne 400 personnes dans cette station entre 7 heures et 8 heures, et en admettant que chacune a une probabilité 0,1 d'acheter un journal : 1°/ Donner une approximation de la loi de probabilité du nombre de journaux X vendus dans cette station entre 7 heures et 8 heures ; 2°/ Calculer, à l'aide d'une table de nombres au hasard, un échantillon fictif de cinq valeurs de X. A l'aide de cet échantillon, donner une estimation ponctuelle de la moyenne de X.	Solution

HAUT

Exercice 5. Stock de sécurité.

Une entreprise a une production constante de 70 unités par mois et doit satisfaire une demande aléatoire D qui suit une loi de Gauss de paramètres
$\mu = E(D) = 70$ et $\sigma(D) = 6$.
Pour satisfaire à une éventuelle demande excédentaire (livrée en fin de mois) le fabricant a la possibilités de s'approvisionner en début de mois chez un concurrent pour constituer un stock de sécurité.

1°/ Quel doit être le stock de sécurité S pour que la probabilité de ne pas satisfaire à la demande (probabilité de défaillance) soit égale à 2,5 % ?

2°/ Le stock de sécurité est rétabli au niveau S au début de chaque mois, par achat ou rendu de l'excédent, suivant le cas. Pour avoir une idée de l'évolution des achats possibles, on emploie une méthode de simulation en construisant un échantillon de 10 valeurs de la demande D en utilisant une table de nombres au hasard. Construire un tel échantillon.

3°/ En fonction de l'échantillon obtenu, calculer les achats ou rendus correspondants pour maintenir le stock en début de mois au niveau S déterminé dans la première question.

Solution

HAUT

Exercice 6. Loi exponentielle : méthode de Von Neumann.

Construire, à l'aide d'une table de nombres au hasard, un échantillon fictif de taille 10 de la variable aléatoire X de une loi exponentielle $2\,e^{-2x}$, $x > 0$: 1. En utilisant la fonction de répartition de X. 2. Avec la méthode de Von Neumann.	Solution

HAUT

Exercice 7. Echantillon de loi de Cauchy.

Construire, à l'aide d'une table de nombres au hasard, un échantillon fictif de taille 10 de la variable aléatoire X de Cauchy.	Solution

HAUT

Exercice 8. Echantillon de loi de Bernoulli.

Construire, à l'aide d'une table de nombres au hasard, un échantillon fictif de taille 10 de la variable aléatoire X de Bernoulli, de paramètre $p = \frac{1}{3}$.	Solution

HAUT

Exercice 9. Loi normale : méthode polaire.

1. En utilisant une table de nombres au hasard, construire un échantillon de taille 10 de loi normale de paramètres $\mu = 4$, $\sigma^2 = 4$:

   a) En utilisant la fonction de répartition de la variable normale centrée réduite.
   b) En utilisant la variable polaire $X = \sqrt{-2 \ln U}\ cos\ 2\ \pi\ V$, où U et V sont des variables uniformes indépendantes dans l'intervalle [0, 1].

2. Comparez les moyennes des deux échantillons obtenus dans la première question.

Solution

HAUT

Exercice 10. Loi continue : méthode du rejet.

1. En utilisant une table de nombres au hasard, et la fonction de répartition de la variable normale centrée réduite, construire un échantillon de taille 10 de loi normale de paramètres $\mu = 1$, $\sigma^2 = 1$, contenu dans l'intervalle [0, 2].

2. On considère la densité de probabilité définie par la fonction :

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{pour } x \text{ compris entre 0 et 1} \\ 2 - x & \text{pour } x \text{ compris entre 1 et 2} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Avec pour constante $c = \sqrt{2\pi}$, utiliser l'échantillon obtenu dans la première question pour simuler un échantillon de loi f par la méthode du rejet.

Solution

HAUT

Exercice 11. Calcul approché de π.

Soit *f* une application définie sur l'intervalle réel [0, 1] à valeurs dans [0, 1] et continue. 1°/ On suppose qu'on possède un générateur de nombres au hasard de loi uniforme sur [0, 1]. Décrire une méthode donnant une valeur approchée de l'intégrale de *f*. 2°/ Que faut-il choisir comme application(s) *f* afin d'obtenir une valeur approchée de π.	Solution

HAUT

Chapitre 12. Simulation d'un échantillon.

Enoncés.

Exercice 1. Calcul d'une intégrale.

On considère l'intégrale $I = \int_0^1 f(x)\,dx$, et une variable aléatoire X distribuée uniformément sur l'intervalle [0, 1].
1°/ Montrer comment une suite de nombres aléatoires $X_1, \ldots, X_n$, permet de calculer une valeur approchée de l'intégrale I.
2°/ Application numérique : choisir au hasard 10 nombres dans une table de nombres au hasard et en déduire une une estimation ponctuelle de l'intégrale $I = \int_0^1 x^2\,dx$.
3°/ Le calcul effectué à partir de l'échantillon dans la deuxième question conduit-il à une estimation ponctuelle acceptable de I ? Comment peut-on l'améliorer ?

Solution.

1°/ Méthode de Monte-Carlo.

Si $f(x)$ est une fonction intégrable donnée, et si les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$, sont indépendantes et de loi uniforme sur l'intervalle [0 , 1], les $f(X_i)$ sont des variables aléatoires, admettant pour moyenne :

$$E\{f(X_i)\} = \int_0^1 f(x)\,dx.$$

Or la moyenne arithmétique des variables $f(X_i)$ est un estimateur sans biais et robuste de l'espérance mathématique des $f(X_i)$, qui converge en probabilité vers l'espérance mathématique $E\{f(X_i)\}$. Donc en prenant la moyenne des valeurs prises par les $f(X_i)$, on aura une estimation ponctuelle de la valeur de l'intégrale I.

2°/ Application numérique.

Choisissons 10 nombres de trois chiffres, soit 30 chiffres, dans la table des nombres au hasard, par exemple, dans la 8e ligne, à partir de 3e colonne :

64 07 85 32 05 96 54 79 57 43 96 97 30 72 12

Les valeurs de X et de $f(X) = X^2$ qui en résultent sont :

X	$f(X)$

0.640	0.409 600
0.785	0.616 225
0.320	0.102 400
0.596	0.355 216
0.547	0.299 209
0.957	0.915 849
0.439	0.192 721
0.697	0.485 809
0.307	0.094 249
0.212	0.044 944
Somme :	3.516 222

La moyenne de ces dix valeurs est, environ, 0,35. On peut donc prendre pour valeur approchée de l'intégrale :

$$I = 0{,}35$$

3°/ Validité de l'estimation.

La valeur théorique de l'intégrale I est :

$$I = \int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3} = 0{,}33$$

La valeur obtenue de 0,35 ne s'éloigne pas trop (6 %) de la vraie valeur de I.

La **loi forte des grands nombres de Borel-Cantelli** exprime que la moyenne arithmétique converge presque sûrement vers l'espérance mathématique : de façon précise, l'estimateur de l'espérance mathématique est asymptotiquement gaussien, ce qui signifie que plus l'échantillon $X_1, \ldots, X_n$, est de grande taille, plus la loi de probabilité de la moyenne arithmétique des $f(X_i)$ se rapproche d'une loi normale de moyenne I et d'écart-type inversement proportionnel à $\sqrt{n}$. Pour avoir une grande probabilité que la moyenne arithmétique ne s'écarte pas trop de la valeur de I, il faudra prendre un écart-type petit, donc de grandes valeurs de n : la valeur 10 est insuffisante pour être certain d'avoir une bonne approximation.

Pour améliorer l'estimation de la moyenne, il faut augmenter la taille de l'échantillon.

4°/ Remarque : estimation dans le plan.

Si l'on considère la fonction $f(x) = x^2$, définie sur l'intervalle [0, 1], un point pris au hasard dans le carré [0, 1] × [0, 1], il est soit au-dessus, soit en dessous, de la courbe $y = f(x)$. En prenant n points au hasard dans le carré, la proportion f_n de points situés en dessous de la courbe tend, en probabilité, vers la surface située sous la courbe, c'est-à-dire vers la valeur de l'intégrale I.

Chapitre 12. Simulation d'un échantillon.

Enoncés.

Exercice 2. Echantillon de loi discrète finie.

Un dé comporte deux faces de couleur rouge, trois faces de couleur noire, une face de couleur blanche. On jette plusieurs fois le dé et on note les couleurs qui sortent. A l'aide d'une table de nombres au hasard, construire un échantillon correspondant à dix jets de dés.	

Solution.

1°/ Les règles du jeu.

Pour fixer les idées, associons :

— aux faces 1 et 2, la couleur rouge,
— aux faces 3, 4, 5, la couleur noire,
— à la face 6, la couleur blanche.

Dans le tirage de nombres au hasard, les nombres tirés dans l'ensemble {0, 1, ... , 9}, ne représenteront une face que s'ils sont compris entre 1 et 6, les autres ne compteront pas.

2°/ Le tirage au sort.

Prenons, dans la table de nombres au hasard, par exemple les chiffres de la 1e ligne, à partir de la 8e colonne :
24 89 69 15 53 00 20 88 48 95 08 ...

On ne retient que les nombres compris entre 1 et 6 :
24 6 15 53 2 4 5 ...
Les jets de dés à retenir donnent, dans l'ordre d'apparition suivant ces nombres au hasard :

2, 4, 6, 1, 5, 5, 3, 2, 4, 5.

3°/ L'échantillon fictif.

Les couleurs des faces correspondant au nombres choisis au hasard sont :

{R, N, B, R, N, N, N, R, N, N}

Pour constituer notre échantillon fictif, comptons, dans cet ensemble, le nombre de faces rouges, de faces noires, de faces blanches, obtenues : on a obtenu 3 faces rouges, 6 noires, 1 blanche.

3 faces rouges, 6 noires, 1 blanche.

On pourrait considérer le triplet (3, 6, 1) comme une valeur de variable aléatoire de loi *multinomiale** (réalisation *n* fois d'une épreuve aléatoire ayant *k* résultats possibles).
Si on recommence pour un nombre suffisamment grand d'autres échantillons de taille 10, les fréquences d'apparition des triplets tendent à donner la loi multinomiale.
Les lois marginales donneront des estimations des probabilités des faces rouges, noires, blanches, soit $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{6}$.

* **Rappel** :
— loi hypergéométrique = tirage sans remise de *m* objets dans une urne contenant *n* objets répartis en *k* catégories.
— loi multinomiale = réalisation *n* fois d'une épreuve aléatoire ayant *k* résultats possibles avec des probabilités p_k.

Chapitre 12. Simulation d'un échantillon.

Enoncés.

Exercice 3. Echantillon de loi de Poisson.

1°/ En choisissant dix nombres au hasard dans une table de nombres au hasard, construire un échantillon fictif de dix valeurs d'une variable aléatoire X obéissant à une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 1{,}5$. 2°/ Donner, à l'aide de l'échantillon ainsi construit, une estimation ponctuelle des probabilités $P(X = 1)$ et $P(X = 2)$.	

Solution.

1°/ Constitution d'un échantillon de la loi de Poisson.

Dans la table de nombres au hasard, choisissons dix nombres de 0 à 1, par exemple des nombres de trois chiffres : à partir de la 2e ligne, 2e colonne, on lit

76 34 51 40 44 62 93 65 99 72 64 09 34 01 13

ces trente chiffres donne les 10 nombres compris entre 0 et 1 :

0,763 0,451 0,404 0,462 0,936 0,599 0,726 0,409 0,340 0,113

Ces dix nombres sont dix valeurs de la fonction de répartition d'une variable de Poisson de paramètre 1,5. Pour connaître les valeurs correspondantes de la variable de Poisson, il faut établir un tableau des premières valeurs de la fonction de répartition, jusqu'à ce que la fonction de répartition atteigne au moins la valeur la plus élevée parmi les valeurs précédentes, soit 0,936 :

n	$P(X = n)$	Répartition
0	0.22313016	0.22313016
1	0.33469524	0.55782540
2	0.25102143	0.80884683
3	0.12551072	0.93435755
4	0.04706652	0.98142406

Les valeurs de la variable aléatoire conduisant aux valeurs de fonction de répartition obtenues se déduisent de ce tableau :

nombre au hasard	fonction de répartition	valeur de X
763	0,763	2
451	0,451	1

404	0,404	1
462	0,462	1
936	0,936	4
599	0,599	2
726	0,726	2
409	0,409	1
340	0,340	1
113	0,113	0

L'échantillon fictif de X est donc :

$$\{2, 1, 1, 1, 4, 2, 2, 1, 1, 0\}$$

2°/ Estimation ponctuelle des probabilités.

Dans l'échantillon fictif que nous venons de construire, la valeur 1 figure 5 fois, la probabilité que $X = 1$ peut donc être estimée par la fréquence expérimentale 5/10 = 0,5. La valeur 2 figure 3 fois, conduisant à une estimation ponctuelle de $P(X = 2)$ égale à 0,3.

$$P(X = 1) = 0,5 \text{ ; } P(X = 2) = 0,3$$

Ces valeurs sont à comparer aux valeurs obtenues dans la question précédente par calcul à partir de la loi de Poisson de paramètre 1,5 :

$$P(X = 1) = 0,335 \text{ et } P(X = 2) = 0,251.$$

L'écart constaté s'explique aisément par les hasards de l'échantillonnage, compte tenu de la petite taille de l'échantillon.

En répétant l'épreuve autant de fois qu'il y a d'étudiants dans un groupe d'enseignement dirigé, on constatera que la **moyenne des résultats obtenus** par chacun d'eux indépendamment se rapproche déjà plus de la vraie valeur de ces probabilités.

Chapitre 12. Simulation d'un échantillon.

Enoncés.

Exercice 4. Echantillon de loi normale

A l'entrée d'une station de métro, un marchand de journaux remarque qu'entre 7 heures et 8 heures, une personne sur dix en moyenne achète un journal. Sachant qu'il passe en moyenne 400 personnes dans cette station entre 7 heures et 8 heures, et en admettant que chacune a une probabilité 0,1 d'acheter un journal : 1°/ Donner une approximation de la loi de probabilité du nombre de journaux X vendus dans cette station entre 7 heures et 8 heures ; 2°/ Calculer, à l'aide d'une table de nombres au hasard, un échantillon fictif de cinq valeurs de X. A l'aide de cet échantillon, donner une estimation ponctuelle de la moyenne de X.	

Solution.

1°/ Loi de probabilité du nombre de journaux vendus.

Notons X le nombre de journaux vendus par le marchand entre 7 heures et 8 heures. Pour une personne passant dans la station de métro entre 7 heures et 8 heures, de deux choises l'une :
— ou bien elle achète un journal (probabilité $p = 0{,}10$), c'est le succès ;
— ou bien elle n'en achète pas (probabilité $q = 1 - p = 0{,}90$), c'est l'échec.

Regarder si un personne déterminée achète ou non le journal constitue une **épreuve de Bernoulli**, avec deux résultats possibles : le succès de probabilité $p = 0{,}10$, et l'échec, de probabilité $q = 0{,}90$.
La répétition de cette épreuve de Bernoulli pour les $n = 400$ personnes qui passent, en moyenne, dans la station de métro entre 7 heures et 8 heures, conduit à un nombre de succès égal au nombre de journaux vendus.
Ainsi, la variable aléatoire X apparaît comme le nombre de succès dans une répétition d'épreuves de Bernoulli : on connaît dès lors sa loi de probabilité, c'est une **loi binomiale** dont les paramètres sont le nombre de répétitions $n = 400$ et la probabilité du succès $p = 0{,}10$.
On peut donc considérer que

Le nombre X de journaux vendus entre 7 heures et 8 heures suit à peu près une loi binomiale :

$$P(X = k) = B_{(400;0,1)}(k) = \binom{400}{k} 0{,}1^{k}\, 0{,}9^{400-k}$$

La loi binomiale reste une loi approchée car, en réalité, cette loi binomiale n'est que la loi conditionnelle de X lorsque le nombre de de passagers Y est égal à 400.
Pour calculer la loi marginale de X, il faudrait connaître la loi de probabilité marginale de Y, qu'on ne

connaît pas.
On suppose donc, implicitement, que Y ne s'écarte pas trop d'un jour à l'autre, de sa valeur moyenne 400.

2°/ Construction d'un échantillon fictif.

L'espérance mathématique de X est $n\,p = 40$, sa variance est $n\,p\,q = 36$. La valeur de cette variance est suffisante (supérieure à 20) pour que l'on puisse approcher la loi binomiale par une **loi normale** de paramètres $\mu = 40$ et $\sigma^2 = 36$, de sorte que la variable aléatoire $U = \frac{X - \mu}{\sigma}$ suit, à peu près, une loi normale centrée réduite.
Pour construire un échantillon aléatoire fictif de taille 5 de X, nous allons utiliser la méthode de Monte-Carlo :
— Choisir cinq nombres au hasard dans l'intervalle [0, 1] à l'aide de la table de nombres au hasard,
— Considérer ces nombres comme des valeurs de la fonction de répartition
— Calculer les valeurs correspondantes de la variable aléatoire (à l'aide d'une table des valeurs de la fonction de répartition de la variable aléatoire normale centrée réduite).

Nous utilisons une table de la fonction de répartition de la variable normale centrée réduite avec 4 décimales : nous prendrons des nombres au hasard avec quatre décimales. Prenons, par exemple, les nombres à partir de la 3e ligne 1e colonne :

00 88 96 79 38 24 77 00 70 91

nombres au hasard	fonction de répartition	u	$x = \mu + u\,\sigma = 40 + 6\,u$
0088	0,0088	– 2,40	25,6
9679	0,9679	1,85	51,1
3824	0,3824	– 0,30	38,2
7700	0,7700	0,74	44,4
7091	0,7091	0,55	43,3

En prenant les arrondis au nombre entier le plus proche, nous obtenons un échantillon fictif de 5 valeurs de X :

$$\{26, 51, 38, 44, 43\}$$

3°/ Estimation de la moyenne.

La moyenne de l'échantillon fictif donne une estimation ponctuelle de la moyenne de X :

$$\mu^* = 0{,}2\,(26 + 51 + 38 + 44 + 43) = 40{,}4$$

Remarque.

On constate que cette valeur est proche, en fait, de la valeur théorique de 40 dont on est parti pour construire l'échantillon fictif : ce n'est qu'un **coup de chance**, car l'écart-type de la moyenne d'un échantillon de taille 5 est $\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{6}{\sqrt{5}} = 2{,}7$. Et la table de la fonction de répartition indique que s'il y avait 95% de chances que l'on trouvât une valeur de moyenne entre 34,6 et 45,4, il n'y avait que 12% de chances que l'on trouvât une moyenne s'éloignant de la valeur 40 d'au plus 0,4. Nous reviendrons sur les

détails d'une telle analyse dans des séances ultérieures.

Chapitre 12. Simulation d'un échantillon.

Enoncés.

Exercice 5. Stock de sécurité.

Une entreprise a une production constante de 70 unités par mois et doit satisfaire une demande aléatoire D qui suit une loi de Gauss de paramètres
$\mu = E(D) = 70$ et $\sigma(D) = 6$.
Pour satisfaire à une éventuelle demande excédentaire (livrée en fin de mois) le fabricant a la possibilités de s'approvisionner en début de mois chez un concurrent pour constituer un stock de sécurité.

1°/ Quel doit être le stock de sécurité S pour que la probabilité de ne pas satisfaire à la demande (probabilité de défaillance) soit égale à 2,5 % ?

2°/ Le stock de sécurité est rétabli au niveau S au début de chaque mois, par achat ou rendu de l'excédent, suivant le cas. Pour avoir une idée de l'évolution des achats possibles, on emploie une méthode de simulation en construisant un échantillon de 10 valeurs de la demande D en utilisant une table de nombres au hasard. Construire un tel échantillon.

3°/ En fonction de l'échantillon obtenu, calculer les achats ou rendus correspondants pour maintenir le stock en début de mois au niveau S déterminé dans la première question.

Solution.

1°/ Stock de sécurité.

Si S est le stock de début de mois (stock de sécurité), la quantité livrable en fin de mois est la somme $S + 70$. Si D est quantité à livrer en fin de mois, on cherche la valeur de S vérifiant $P(D > S + 70) = 0{,}025$ ou, ce qui revient au même :

$$P\left(\frac{D-\mu}{\sigma} > \frac{S+70-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}025.$$

Comme la variable aléatoire $U = \frac{D-\mu}{\sigma}$ suit une **loi normale centrée réduite**, la valeur de $\frac{S+70-\mu}{\sigma}$ est donnée par la table de la fonction de répartition normale :

$$\frac{S+70-\mu}{\sigma} = 1{,}96, \text{ d'où } S = 1{,}96\,\sigma = 1{,}96 \times 6 = 11{,}76$$

$$\boxed{S = 12}$$

2°/ Construction d'un échantillon fictif.

Comme la table de la fonction de répartition normale est donnée avec quatre décimales, dans la table de nombres au hasard, prenons dix nombres de quatre chiffres, à partir de la 4e ligne 4e colonne par exemple : 85 50 47 36 50 91 19 09 15 98 75 60 58 33 15 94 03 80 04 21.

Nombres au hasard	Fonction de répartition	u	$d = 6\,u + 70$	D
8550	0,8550	1,06	76,36	76
4736	0,4736	- 0,07	69,60	70
5091	0,5091	0,02	70,12	70
1909	0,1909	- 0,86	64,84	65
1598	0,1598	- 1,00	64,00	64
7560	0,7560	0,69	74,14	74
5833	0,5833	0,21	71,26	71
1594	0,1594	- 1,00	64,00	64
0380	0,0380	- 1,76	59,44	59
0421	0,0421	- 1,73	59,62	60

L'échantillon des valeurs de D ainsi construit est :

{76, 70, 70, 65, 64, 74, 71, 64, 59, 60}

3°/ Achats et rendus nécessaires.

Dans l'échantillon construit dans la deuxième question, aucune valeur n'est supérieure à $S + 70 = 82$. Il n'y a donc pas de défaillance dans les livraisons. Les achats et rendus s'obtiennent immédiatement par écart avec la valeur de la production, qui est de 70 unités :

Stock de début	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12
Production du mois	70	70	70	70	70	70	70	70	70	70
Demande du mois	76	70	70	65	64	74	71	64	59	60
Reste en fin de mois	6	12	12	17	18	8	11	18	23	22
Achats en fin de mois pour reconstituer le stock de début	6					4	1			
Rendus en fin de mois pour reconstituer le stock de début				5	6			4	11	10

Bien entendu, on pourra compliquer un peu le problème en supposant que le concurrent n'entend pas reprendre plus d'unités qu'il n'en a fournies. Le stock de début de mois sera alors variable sans être inférieur à 12. Dans l'exemple précédent :

Stock de début	12	12	12	12	12	18	14	13	19	30
Production du mois	70	70	70	70	70	70	70	70	70	70
Demande du mois	76	69	70	65	64	74	71	64	59	60

Reste en fin de mois	6	12	12	17	18	14	13	19	30	40
Achats en fin de mois pour reconstituer le stock de début	6									
Rendus en fin de mois pour reconstituer le stock de début				5						

Chapitre 12. Simulation d'un échantillon.

Enoncés.

Exercice 6. Loi exponentielle : méthode de Von Neumann.

Construire, à l'aide d'une table de nombres au hasard, un échantillon fictif de taille 10 de la variable aléatoire X de une loi exponentielle $2\,e^{-2x}$, $x > 0$: 1. En utilisant la fonction de répartition de X. 2. Avec la méthode de Von Neumann.	

Solution.

1°/ Fonction de répartition.

On sait, d'après le cours, que l'on peut simuler un échantillon de loi exponentielle de paramètre 2 en prenant les valeurs de la variable $X = -\frac{1}{2} \ln U$, où U prend des valeurs au hasard dans l'intervalle]0, 1[, parce que cette fonction est la fonction réciproque, à la symétrie U —> $1 - U$ près, de la fonction de répartition de la loi exponentielle de paramètre 2.
C'est une simple application de la **méthode de Monte-Carlo**.

Prenons les nombres au hasard dans la table, à partir, par exemple de la 6e ligne, 3e colonne : 52 73 06 41 37 47 47 31 52 99. On peut alors dresser le tableau :

Nombre	U	X
52	0.52	0.33
73	0.73	0.16
06	0.06	1.41
41	0.41	0.45
37	0.37	0.50
47	0.47	0.38
47	0.47	0.38
31	0.31	0.59
52	0.52	0.33
99	0.99	0.01

Nous avons ainsi construit l'échantillon aléatoire {0,33 ; 0,16 ; 1,41 ; 0,45 ; 0,50 ; 0,38 ; 0,38 ; 0,59 ; 0,33 ; 0,01} de taille 10 de la variable exponentielle X. La moyenne de cet échantillon est 0,454.

2°/ Méthode de Von Neumann.

Cette méthode permet de simuler un échantillon de variable exponentielle de paramètre 1. Si le paramètre est λ, il faudra diviser les valeurs obtenues par λ.

Dans la liste des nombres au hasard, qu'on groupe par deux, pour avoir des nombres au hasard entre 0 et 1 avec deux décimales, on considère les **suites décroissantes jusqu'à ce qu'elles remontent**, et on compte le nombre de termes de la suite : si ce nombre est impair, c'est un échec, on passe à la suite suivante, jusqu'à obtenir un succès, constitué par une suite à nombre pair de termes.

En cas de succès, on retient pour valeur de variable pour l'échantillon, le premier terme de la suite, plus le nombre d'échecs depuis le dernier succès. Ça va devenir plus clair sur un exemple.

Utilisons les nombres au hasard déjà utilisés dans la première question, et les suivants dans la table :
52 73 06 41 37 47 47 31 52 99 89 82 22 81 86 55 09 27 52 72 49 11 30 93 33 29 54 17 54 48 47 42 04 79 54 68 64 07 85 32 05 96 54 79 57 43 96 97 30 72 12 19 ...

Prenons d'abord les deux premiers : 52 73. La suite croît d'entrée : elle a deux termes, c'est un succès.
$u_1 = 0{,}52$ et $u_2 = 0{,}73 > u_1 = 0{,}52$, on pose $t = u_1 = 0{,}52$ et $x_1 = 0 + t = 0{,}52$.

On prend ensuite les suivants dans la liste : 06 41, ↗, 2 termes, succès.
$u_1 = 0{,}06$, $u_2 = 0{,}41 > u_1 = 0{,}06$, $t = u_1 = 0{,}06$ et $x_2 = 0 + t = 0{,}06$.

37 47, ↗, 2 termes, succès.
$u_1 = 0{,}37$, $u_2 = 0{,}47 > u_1 = 0{,}37$, $t = u_1 = 0{,}37$ et $x_3 = 0 + t = 0{,}37$.

47 31 52 : ↘↗, 3 termes, c'est un nombre impair, donc un échec.
$u_1 = 0{,}47$, $u_2 = 0{,}31 < u_1 = 0{,}47$, $u_3 = 0{,}52 > u_2 = 0{,}31$, 1er échec car 3 est impair, on recommence.
99 89 82 22 81 : ↘↗, 5 termes, échec.
$u_1 = 0{,}99$, $u_2 = 0{,}89 < u_1 = 0{,}99$, $u_3 = 0{,}82 < u_2 = 0{,}89$, $u_4 = 0{,}22 < u_3 = 0{,}82$, $u_5 = 0{,}81 > u_4 = 0{,}22$, 2e échec car 5 est impair, on recommence.
86 55 09 27 : ↘↗, 4 termes, succès.
$u_1 = 0{,}86$, $u_2 = 0{,}55 < u_1 = 0{,}86$, $u_3 = 0{,}09 < u_2 = 0{,}55$, $u_4 = 0{,}27 > u_3 = 0{,}09$, on pose $t = u_1 = 0{,}86$ et $x_4 = 2$ (nombre d'échecs) + $t = 2{,}86$.

52 72, ↗, 2 termes, succès.
$u_1 = 0{,}52$, $u_2 = 0{,}72 > u_1 = 0{,}52$, $t = u_1 = 0{,}52$ et $x_5 = 0 + t = 0{,}52$.

49 11 30, ↘↗, 3 termes, échec.
$u_1 = 0{,}49$, $u_2 = 0{,}11 < u_1 = 0{,}49$, $u_3 = 0{,}30 > u_2 = 0{,}11$, 1er échec car 3 est impair, on recommence.
93 33 29 54, ↘↗, 4 termes, succès.
$u_1 = 0{,}93$, $u_2 = 0{,}33 < u_1 = 0{,}93$, $u_3 = 0{,}29 < u_2 = 0{,}33$, $u_4 = 0{,}54 > u_3 = 0{,}29$, on pose $t = u_1 = 0{,}93$ et $x_6 = 1 + t = 1{,}93$.

17 54, ↗, 2 termes, succès.
$u_1 = 0{,}17$, $u_2 = 0{,}54 > u_1 = 0{,}17$, $t = u_1 = 0{,}17$ et $x_7 = 0 + t = 0{,}17$.

48 47 42 04 79, ↘↗, 5 termes, échec.
$u_1 = 0{,}48$, $u_2 = 0{,}47 < u_1 = 0{,}48$, $u_3 = 0{,}42 < u_2 = 0{,}47$, $u_4 = 0{,}04 < u_3 = 0{,}42$, $u_5 = 0{,}79 > u_4 = 0{,}04$, échec.
54 68, ↗, 2 termes, succès.
$u_1 = 0{,}54$, $u_2 = 0{,}68 > u_1 = 0{,}54$, $t = u_1 = 0{,}54$ et $x_8 = 1 + t = 1{,}54$.

64 07 85, ↘↗, 3 termes, échec,
$u_1 = 0{,}64$, $u_2 = 0{,}07 < u_1 = 0{,}64$, $u_3 = 0{,}85 > u_2 = 0{,}07$, échec.
32 05 96, 3 termes, échec,
$u_1 = 0{,}32$, $u_2 = 0{,}05 < u_1 = 0{,}32$, $u_3 = 0{,}96 > u_2 = 0{,}05$, échec.
54 79, ↗, 2 termes succès.
$u_1 = 0{,}54$, $u_2 = 0{,}79 > u_1 = 0{,}54$, $t = u_1 = 0{,}54$ et $x_9 = 2 + t = 2{,}54$.

57 43 96, ↘↗, 3 termes, échec,
$u_1 = 0{,}57$, $u_2 = 0{,}43 < u_1 = 0{,}57$, $u_3 = 0{,}96 > u_2 = 0{,}43$, échec.
97 30 72, ↘↗, 3 termes, échec,
$u_1 = 0{,}97$, $u_2 = 0{,}30 < u_1 = 0{,}97$, $u_3 = 0{,}72 > u_2 = 0{,}30$, échec.
12 19, ↗, 2 termes, succès.
$u_1 = 0{,}12$, $u_2 = 0{,}19 > u_1 = 0{,}12$, $t = u_1 = 0{,}12$ et $x_{10} = 2 + t = 2{,}12$.

Nous avons constitué ainsi, d'après Von Neumann, un échantillon fictif de taille 10
{0,52 ; 0,06 ; 0,37 ; 2,86 ; 0,52 ; 1,93 ; 0,17 ; 1,54 ; 2,54 ; 2,12}
d'une variable de loi exponentielle de paramètre 1.
La moyenne de cet échantillon est 1,263.
Pour avoir un échantillon de loi exponentielle de paramètre $\lambda = 2$, il faut **diviser** les valeurs obtenues par 2 (l'espérance d'une variable exponentielle est l'inverse du paramètre) :
{0,26 ; 0,03 ; 0,18 ; 1,43 ; 0,26 ; 0,96 ; 0,09 ; 0,77 ; 1,27 ; 1,06}
et la moyenne de l'échantillon est 0,63.

Chapitre 12. Simulation d'un échantillon.

Enoncés.

Exercice 7. Echantillon de loi de Cauchy.

Construire, à l'aide d'une table de nombres au hasard, un échantillon fictif de taille 10 de la variable aléatoire X de Cauchy.	

Solution.

1°/ Fonction réciproque de la fonction de répartition.

La densité de probabilité d'une variable aléatoire de Cauchy est $f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$.

Sa fonction de répartition en est l'intégrale de $-\infty$ à x, elle vaut

$$F(t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{dx}{\pi(1+x^2)} = \frac{1}{\pi}\left(Arctan\ t + \frac{\pi}{2}\right).$$

La fonction réciproque est $F^{-1}(u) = tan\left(\pi u - \frac{\pi}{2}\right) = -\,cotan\ (\pi u)$.

2°/ Construction d'un échantillon fictif.

A l'aide de la table de nombres au hasard, on choisit vingt nombres au hasard de 0 à 9,
93 86 98 99 04 75 28 30 05 12
On en déduit dix valeurs de fonction de répartition.
Les valeurs correspondantes d'argument X s'obtiennent par la formule :

$$X = -\,cotan\ (\pi U)$$

Nombre	U	X
93	0,93	4,47
86	0,86	2,13
98	0,98	15,89
99	0,99	31,82
04	0,04	– 7,92
75	0,75	1,00
28	0,28	– 0,83
30	0,30	– 0,73
05	0,05	– 6,31
12	0,12	– 2,53

C'est la méthode de Monte-Carlo.
L'échantillon obtenu : {4,47 ; 2,13 ; 15,89 ; 31,82 ; – 7,92 ; 1,00 ; – 0,83 ; – 0,73 ; – 6,31 ; – 2,53} a pour

moyenne 3,7.

Chapitre 12. Simulation d'un échantillon.

Enoncés.

Exercice 8. Echantillon de loi de Bernoulli.

Construire, à l'aide d'une table de nombres au hasard, un échantillon fictif de taille 10 de la variable aléatoire X de Bernoulli, de paramètre $p = \frac{1}{3}$.	

Solution.

1°/ Méthode de Monte-Carlo.

Par définition de la variable de Bernoulli X, celle-ci prend la valeur 1 avec la probabilité $p = \frac{1}{3}$ et la valeur 0 avec la probabilité $q = 1 - p = \frac{2}{3}$.

On va choisir dix nombres u au hasard entre 0 et 1 (loi uniforme) : pour un nombre u entre $1 - p = \frac{2}{3} = 0{,}67$ et 1, on prend $x = 1$, sinon $x = 0$. Cette relation peut être écrite :

$$X = 1_{[1-p\,;\,1]}(U)$$

où $1_{[1-p\,;\,1]}$ est la **fonction caractéristique**, ou **fonction indicatrice**, de l'intervalle $[\,1 - p\,;\,1\,]$ de longueur p.

2°/ Construction d'un échantillon.

Considérons la suite de nombres au hasard prise dans la table : 03 57 14 03 17 80 47 85 94 49. On peut dresser le tableau suivant :

Nombre	03	57	14	03	17	80	47	85	94	49
U	0,03	0,57	0,14	0,03	0,17	0,80	0,47	0,85	0,94	0,49
X	0	0	0	0	0	1	0	1	1	1

L'échantillon de loi de Bernoulli obtenu est {0 ; 0 ; 0 ; 0 ; 0 ; 1 ; 0 ; 1 ; 1 ; 1}. Sa moyenne est 0,40.

Chapitre 12. Simulation d'un échantillon.

Enoncés.

Exercice 9. Loi normale : méthode polaire.

1. En utilisant une table de nombres au hasard, construire un échantillon de taille 10 de loi normale de paramètres $\mu = 4$, $\sigma^2 = 4$: a) En utilisant la fonction de répartition de la variable normale centrée réduite. b) En utilisant la variable polaire $X = \sqrt{-2 \ln U}\ cos\ 2\ \pi\ V$, où U et V sont des variables uniformes indépendantes dans l'intervalle [0, 1]. 2. Comparez les moyennes des deux échantillons obtenus dans la première question.	

Solution.

1°/ Construction d'échantillons fictifs.

a) Utilisation de la table de la fonction de répartition normale.

Dans la table de nombres au hasard, choisissons une suite de nombres, par exemple à partir de la première ligne :
02 22 85 19 48 74 55 24 89 69 15 53 00 20 88 48 95 08 85 76

Comme la table de la fonction de répartition normale comporte quatre décimales, nous prendrons des nombres aléatoires entre 0 et 1 avec 4 décimales, définis à partir de la suite précédente. Ceci permet de dresser le tableau suivant.

Nombres au hasard	0222	8519	4874	5524	8969	1553	0020	8848	9508	8576
$F(u)$	0,0222	0,8519	0,4874	0,5524	0,8969	0,1553	0,0020	0,8848	0,9508	0,8576
U	– 1,16	1,04	– 0,03	0,13	1,26	– 1,01	– 2,88	1,20	1,65	1,07
$X = 4 + 2\ U$	1,68	6,08	3,94	4,26	6,52	1,98	– 1,76	6,40	7,30	6,14

L'échantillon ainsi construit est {1,68 ; 6,08 ; 3,94 ; 4,26 ; 6,52 ; 1,98 ; – 1,76 ; 6,40 ; 7,30 ; 6,14}.

b) Utilisation d'une variable polaire.

Dans la table de nombres au hasard, choisissons une suite de nombres, par exemple, à partir de la cinquième ligne :
94 03 80 04 21 49 54 91 77 85 00 45 68 23 12 94 23 44 42 28 52 73 06 41 37 47 47 31 52 99 89 8

La variable polaire $X = \sqrt{-2 \ln U}\ cos\ 2\ \pi\ V$ où U et V sont des variables uniformes indépendantes dans l'intervalle [0, 1], est une variable de Gauss centrée réduite.

Elle permet, par le changement de variable $Y = 4 + 2X$ d'avoir un échantillon de variable normale de moyenne 4 et d'écart-type 2.

La suite de nombres au hasard permet de dresser le tableau suivant.

Nombres au hasard	940	380	421	495	491	778	500	456	823	129
U	0,940	0,380	0,421	0,495	0,491	0,778	0,500	0,456	0,823	0,129
Nombres au hasard	423	444	228	527	306	413	747	315	299	898
V	0,423	0,444	0,228	0,527	0,306	0,413	0,747	0,315	0,299	0,898
X	– 0,31	– 1,30	0,18	– 1,17	– 0,41	– 0,61	– 0,02	– 0,50	– 0,19	1,62
Y	3,38	1,40	4,36	1,66	3,18	2,78	3,96	3,00	3,62	7,24

L'échantillon ainsi construit est {3,38 ; 1,40 ; 4,36 ; 1,66 ; 3,18 ; 2,78 ; 3,96 ; 3,00 ; 3,62 ; 7,24}.

2°/ Comparaison des moyennes.

La moyenne du premier échantillon est 4,254, la moyenne du deuxième échantillon est 3,458.
Le problème de la comparaison des moyennes est de savoir si la différence qu'on observe entre ces deux valeurs signifie qu'il y a une différence de moyenne entre les populations (ou variables aléatoires) dont sont tirés ces échantillons.
En termes courants, la question posée est "Est-ce que la différence observée est significative ?".

Les deux échantillons sont tirés de populations normales d'écarts-types 2, de moyennes μ_X et μ_Y qu'il s'agit de comparer.
Dans la première population, la moyenne $\overline{X}$ d'un échantillon de taille 10 suit une loi normale de moyenne μ_X et d'écart-type $\frac{2}{\sqrt{10}}$.
Dans la deuxième population, la moyenne $\overline{Y}$ d'un échantillon de taille 10 suit une loi normale de moyenne μ_Y et d'écart-type $\frac{2}{\sqrt{10}}$.
La différence $\overline{X} - \overline{Y}$ suit donc une loi normale de moyenne $\mu_X - \mu_Y$ et dont la variance est la somme des variances $\frac{8}{10}$. L'écart-type est donc $\frac{2}{\sqrt{5}}$. De sorte que la variable aléatoire $\frac{\sqrt{5}}{2}[(\overline{X} - \overline{Y}) - (\mu_X - \mu_Y)]$ suit une loi de Gauss centrée réduite.

Le problème de la comparaison des moyennes revient, compte tenu des deux échantillons obtenus, à choisir entre les deux hypothèses :

$(H_0) : \mu_X - \mu_Y = 0$
$(H_1) : \mu_X - \mu_Y \neq 0$

Dans l'hypothèse (H_0), la variable $U = \frac{\sqrt{5}}{2}(\overline{X} - \overline{Y})$ suit une loi de Gauss centrée réduite.

D'après la table de la fonction de répartition de la variable normale centrée réduite, il y a donc 95 % de chances qu'elle soit dans l'intervalle [– 1,96, +1,96], puisque la fonction de répartition normale $F(u)$ vaut 0,975 pour $u = 1,96$.
Or la valeur observée de cette variable aléatoire U est :

$$u = \frac{\sqrt{5}}{2} (4{,}254 - 3{,}458) = 0{,}89$$

Cette valeur appartient à l'intervalle [– 1,96, +1,96] d'acceptation de l'hypothèse (H_0), et nous dirons en conclusion de ce test :

> Compte tenu de la taille des échantillons, la différence de moyennes observée entre les échantillons n'est pas significative au seuil de 5 % d'une différence de moyenne entre les populations dont sont tirés les échantillons.

Autrement dit, on peut admettre que les échantillons sont tirés d'une même population normale.

Chapitre 12. Simulation d'un échantillon.

Enoncés.

Exercice 10. Loi continue : méthode du rejet.

1. En utilisant une table de nombres au hasard, et la fonction de répartition de la variable normale centrée réduite, construire un échantillon de taille 10 de loi normale de paramètres $\mu = 1$, $\sigma^2 = 1$, contenu dans l'intervalle [0, 2].

2. On considère la densité de probabilité définie par la fonction :

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{pour } x \text{ compris entre 0 et 1} \\ 2 - x & \text{pour } x \text{ compris entre 1 et 2} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Avec pour constante $c = \sqrt{2\pi}$, utiliser l'échantillon obtenu dans la première question pour simuler un échantillon de loi f par la méthode du rejet.

Solution.

1°/ Echantillon de loi normale.

On connaît maintenant suffisamment bien la méthode de génération d'un échantillon de loi normale par la méthode de Monte-Carlo, pour l'appliquer directement sans commentaire.

On choisit des valeurs de $F(u)$ au hasard dans l'intervalle [0, 1] grâce à la table de nombres au hasard (13 e ligne, 3 e colonne).
On regarde dans la table de la fonction de répartition de la variable normale centrée réduite les valeurs de u correspondantes.
On obtient un échantillon de la variable normale Y de moyenne 1 et de variance 1 en prenant $Y = u + 1$.

$F(u)$	0.1893	0.8698	0.9904	0.7528	0.3005	0.1209	0.5735	0.9015	0.6189	0.3547	0.1632	0.2016	0.7852	0.8237
u	-0.8800	> 1	> 1	0.6830	-0.5230	< -1	0.1850	> 1	0.3020	-0.3720	-0.9810	-0.8370	0.7900	0.9300
$Y = u + 1$	0.12			1.683	0.477		1.185		1.302	0.628	0.019	0.163	1.79	1.93

$F(u)$	0.2633	0.6742	0.1193	0.9440	0.8218	0.0661	0.5467	0.0366	0.7682	0.9031	0.7190	0.3927	0.5438	0.5865
u	-0.6330	0.4520	< -1	> 1	0.9220	< -1	0.1180	< -1	0.7330	> 1	0.5800	-0.2720	0.11	0.214
$Y = u + 1$	0.367	1.452			1.922		1.118		1.733		1.58	0.728	1.11	1.214

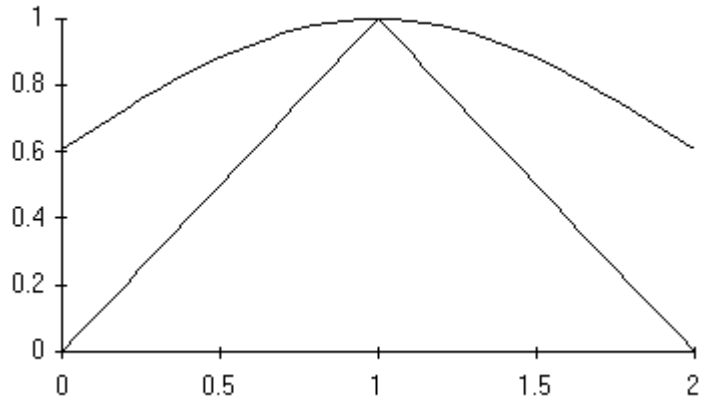
2°/ Méthode du rejet utilisant la loi *f*.

Pour appliquer la méthode du rejet, il faut d'abord être certain que, dans le support [0, 2] de f, il existe une

constante c telle que l'on ait, pour tout $x \in [0, 2]$:

$$f(x) \leq c\, g(x) = e^{-\frac{(x-1)^2}{2}}$$

C'est bien le cas, car, dans l'intervalle [0, 1], la dérivée seconde de g (loi de Gauss) est négative puisque l'intervalle est compris entre le point d'inflexion pour $x = 0$ et le maximum de g pour $x = 1$. Donc la dérivée de g est décroissante dans cet intervalle et elle décroît à partir de sa valeur $\frac{1}{\sqrt{2\,\pi}} < 1$, pour $x = 0$, jusqu'à la valeur 0 pour $x = 1$. Comme $\sqrt{2\pi}\ g(0)$ est strictement plus grand que 0, il en résulte que, pour tout x dans l'intervalle [0 , 1], $f(x)$ est inférieur ou égal à $c\, g(x)$ et, par symétrie, c'est le cas aussi dans l'intervalle [1, 2] :



On ne garde que les valeurs de Y qui sont dans le support de f, c'est-à-dire comprises entre 0 et 2. Pour cela on ne conserve que les valeurs de u qui sont entre – 1 et 1.

La "méthode du rejet" consiste à choisir un autre échantillon de nombres U au hasard dans [0, 1] et à les comparer aux valeurs de $\frac{f(Y)}{c\, g(Y)}$: si U est plus grand que $\frac{f(Y)}{c\, g(Y)}$, on rejette la valeur de Y, sinon on la garde comme valeur X dans l'échantillon de loi f.

$F(u)$	u	$Y = u + 1$	$\frac{f(Y)}{c\, g(Y)}$	U	X
0.1893	– 0.8800	0.1200	0.1767	0.2858	rejet
0.8698	> 1				
0.9904	> 1				
0.7528	0.6830	1.6830	0.4003	0.3291	1.683
0.3005	– 0.5230	0.4770	0.5469	0.9528	rejet
0.1209	< –1				
0.5735	0.1850	1.1850	0.8291	0.4236	1.185
0.9015	> 1				
0.6189	0.3020	1.3020	0.7306	0.9859	rejet
0.3547	– 0.3720	0.6280	0.6730	0.6632	0.628
0.1632	– 0.9810	0.0190	0.0307	0.1551	rejet
0.2016	– 0.8370	0.1630	0.2314	0.4663	rejet
0.7852	0.7900	1.7900	0.2869	0.5710	rejet
0.8237	0.9300	1.9300	0.1079	0.6435	rejet

0.2633	– 0.6330	0.3670	0.4484	0.0462	0.367
0.6742	0.4520	1.4520	0.6069	0.2487	1.452
0.1193	< – 1				
0.9440	> 1				
0.8218	0.9220	1.9220	0.1193	0.4485	rejet
0.0661	< – 1				
0.5467	0.1180	1.1180	0.8882	0.4568	1.118
0.0366	< – 1				
0.7682	0.7330	1.7330	0.3493	0.4166	rejet
0.9031	> 1				
0.7190	0.5800	1.5800	0.4969	0.1917	1.580
0.3927	– 0.2720	0.7280	0.7554	0.1309	0.728
0.5438	0.1100	1.1100	0.8954	0.6337	1.110
0.5865	0.2140	1.2140	0.8042	0.6105	1.214

Table de nombres au hasard :
L'échantillon de valeurs de $F(u)$ est choisi à partir de la 13 e ligne, 3 e colonne.
L'échantillon de valeurs de U est choisi à partir de la 10 e ligne, 1 e colonne.

En pratique :

Pour faire le calcul de l'échantillon fictif de loi f, on génèrera les valeurs du couple (U, Y) au fur et à mesure des besoins, jusqu'à ce qu'on ait obtenu un échantillon de valeurs de X de taille suffisante (ici 10 valeurs de X).

L'échantillon de loi f constitué ici est donc :

Echantillon de loi f : {1,683 ; 1, 185 ; 0,628 ; 0,367 ; 1,452 ; 1,118 ; 1,580 ; 0,728 ; 1,110 ; 1,214 }

Note.

La **moyenne arithmétique** de l'échantillon est 1,1065, avec un **écart-type** estimé pour la population de 0.4016.

$t_{obs} = \frac{1,1065-1}{0,4016}\sqrt{10} = 0,839$

La table de Student à 9 degrés de liberté indique que **la différence observée avec la moyenne théorique 1, n'est pas significative au seuil de 5 %** :

$t_{seuil} = 2,262$.

Chapitre 12. Simulation d'un échantillon.

Enoncés.

Exercice 11. Calcul approché de π.

Soit *f* une application définie sur l'intervalle réel [0, 1] à valeurs dans [0, 1] et continue. 1°/ On suppose qu'on possède un générateur de nombres au hasard de loi uniforme sur [0, 1]. Décrire une méthode donnant une valeur approchée de l'intégrale de *f*. 2°/ Que faut-il choisir comme application(s) *f* afin d'obtenir une valeur approchée de π.	

Solution.

1°/ Méthode de Monte-Carlo.

Si $f(x)$ est une fonction intégrable donnée, et si les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$, sont indépendantes et de loi uniforme sur l'intervalle [0 , 1], les $f(X_i)$ sont des variables aléatoires, admettant pour moyenne :

$$E\{f(X_i)\} = \int_0^1 f(x)\,dx.$$

Or la moyenne arithmétique des variables $f(X_i)$ est un estimateur sans biais (i.e. la moyenne arithmétique de $f(X_i)$ a pour espérance mathématique l'espérance mathématique de $f(X_i)$) mais cependant assez peu robuste (i.e. sensible à des observations aberrantes) de l'espérance mathématique des $f(X_i)$, qui converge en probabilité vers l'espérance mathématique $E\{f(X_i)\}$.
Donc en prenant la moyenne des valeurs prises par les $f(X_i)$, on aura une estimation ponctuelle de la valeur de l'intégrale *I*.

La méthode consiste alors à choisir *n* nombres x_i au hasard grâce au générateur de nombres au hasard.
On calcule les $f(x_i)$ correspondant et on en fait la moyenne.
Cette moyenne est une estimation de l'intégrale $\int_0^1 f(x)\,dx$.

2°/ Estimation de π.

Pour avoit une estimation de π, il faut choisir une application *f* dont l'intégrale sur [0, 1] est π.
Par exemple, l'intégrale $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}$ donne $\pi = 4\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$.

On choisira alors, par exemple, 10 nombres x_1, ... , x_{10}, au hasard entre 0 et 1.

On calculera les nombres $\frac{4}{1+x_i^2}$ correspondant : leur moyenne arithmétique donnera une estimation de π.

Application.

Dans une table de nombres au hasard, choisissons au hasard un nombre de départ, et notons les 30 chiffres qui suivent, par exemple (7e ligne, 5e colonne):

49 11 30 93 33 29 54 17 54 48 47 42 04 79 54.

Ces chiffres permettent d'écrire les 10 nombres au hasard entre 0 et 1 :

0,491 ; 0,130 ; 0,933 ; 0,329 ; 0,541 ; 0,754 ; 0, 484 ; 0,742 ; 0,047 ; 0,954.

Les valeurs correspondantes de $\frac{4}{1+x_i^2}$ sont :

3,223 ; 3,934 ; 2,138 ; 3,609 ; 3,094 ; 2,550 ; 3,241 ; 2,580 ; 3,991 ; 2,094.

La moyenne arithmétique de ces nombres est :

3,045

3,045 est une estimation (assez grossière) de π. L'erreur est seulement de l'ordre de 3 %.

Chapitre 13. Estimation ponctuelle et par intervalle de confiance.

Exercices

Exercice 1. Echantillons de loi uniforme.
Exercice 2. Echantillon de loi normale.
Exercice 3. Efficacité d'un estimateur.
Exercice 4. Estimateur de variance minimum.
Exercice 5. Intervalle de confiance du pourcentage de faces.
Exercice 6. Intervalle de confiance du pourcentage de votes favorables.
Exercice 7. Nombre de personnes à sonder par téléphone.
Exercice 8. Nombre de personnes devant accepter une proposition.
Exercice 9. Test d'équilibrage d'un dé.
Exercice 10. Pourcentage de garçons à la naissance.
Exercice 11. Masse de colis.
Exercice 12. Régime amaigrissant.
Exercice 13. Trempage d'assiettes.

Exercice 1. Echantillons de loi uniforme.

En utilisant une table de nombres aléatoires, engendrer 5 échantillons non exhaustifs de taille $n = 6$, de la variable X de réalisations équiprobables : {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}.

1°/ Calculer les cinq réalisations des variables aléatoires :

$$\hat{\overline{X}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=n} X_i \; ; \; \hat{s}'^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=n}(X_i - \hat{\overline{X}})^2 \; ; \; \hat{s}^2 = \frac{n}{n-1}\hat{s}'^2.$$

2°/ Calculer la moyenne des cinq valeurs de $\hat{\overline{X}}$ trouvées et montrer qu'elle fournit la même estimation $\overline{x} = \overline{X}^*$ de $\overline{X} = E(X)$ que celle donnée par la moyenne des 30 observations de X.

Solution

3°/ Calculer la moyenne des cinq valeurs $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=n}(x_i - \overline{x})^2$ de $\hat{s}'^2$.

Cette moyenne est une réalisation de l'estimateur de l'espérance de $\hat{s}'^2$.
Quelle grandeur $\hat{s}'^2$ estime-t'il ?
L'estimateur $\hat{s}'^2$ est-il sans biais ?
4°/ Calculer la moyenne des cinq valeurs de $\hat{s}^2 = \frac{n}{n-1}\hat{s}'^2$.
Cette moyenne est une réalisation de l'estimateur de l'espérance de $\hat{s}^2$.
Quelle grandeur $\hat{s}^2$ estime-t'il ?
L'estimateur $\hat{s}^2$ est-il sans biais ?

HAUT

Exercice 2. Echantillon de loi normale.

1°/ En utilisant une table de nombres aléatoires, engendrer un échantillon non exhaustif de taille $n = 10$, de la variable normale X de moyenne $\mu = 5$ et d'écart-type $\sigma = 2$. 2°/ Vérifier la normalité de l'échantillon obtenu à l'aide d'un graphique gausso-arithmétique. 3°/ Calculer une estimation sans biais de la moyenne de X donnée par cet échantillon. 4°/ Calculer une estimation sans biais de la variance de X, donnée par cet échantillon. 5°/ En déduire l'intervalle de confiance à 95 % de la moyenne.	Solution

HAUT

Exercice 3. Efficacité d'un estimateur.

Considérons les variables aléatoires $\hat{\overline{X}}_3$, $\hat{\overline{X}}_4$, $\hat{\overline{X}}_5$, qui représentent des moyennes d'échantillons aléatoires non exhaustifs (X_1, X_2, X_3), (X_4, X_5, X_6, X_7), $(X_8, X_9, X_{10}, X_{11}, X_{12})$ de taille n = 3, 4, 5, d'une variable aléatoire X.

1°/ Quelles sont les moyennes et les variances respectives de $\hat{\overline{X}}_3$, $\hat{\overline{X}}_4$, $\hat{\overline{X}}_5$?

2°/ En utilisant une table de nombres aléatoires, engendrer une réalisation de chacune des variables $\hat{\overline{X}}_3$, $\hat{\overline{X}}_4$, $\hat{\overline{X}}_5$.

Calculer les réalisations de $\hat{\overline{\overline{X}}} = \frac{1}{3}(\hat{\overline{X}}_3 + \hat{\overline{X}}_4 + \hat{\overline{X}}_5)$ et de $\hat{\overline{X}}_{12} = \frac{1}{12}\sum_i X_i$, où les X_i sont les variables aléatoires intervenant dans la construction des trois échantillons.

Solution

$\hat{\overline{\overline{X}}}$ et $\hat{\overline{X}}_{12}$ sont-ils des estimateurs sans biais de $E(X)$?

Pourquoi les réalisations calculées de $\hat{\overline{\overline{X}}}$ et $\hat{\overline{X}}_{12}$ ne sont-elles pas identiques ?

3°/ Quel est l'estimateur le plus efficace, de $\hat{\overline{\overline{X}}}$ ou de $\hat{\overline{X}}_{12}$?

4°/ Peut-on trouver des constantes a_3, a_4, a_5, telles que les estimateurs $\hat{\overline{X}}_{12}$ et $\hat{Y} = a_3 \hat{\overline{X}}_3 + a_4 \hat{\overline{X}}_4 + a_5 \hat{\overline{X}}_5$ aient la même efficacité ?

HAUT

Exercice 4. Estimateur de variance minimum.

On considère une circonscription électorale de 50 000 électeurs, comprenant 30 % d'hommes et 70 % de femmes.
Soient p la proportion, inconnue, de personnes votant pour l'opposition,
p_1 la proportion, inconnue, de femmes votant pour l'opposition,
p_2 la proportion, inconnue, d'hommes votant pour l'opposition.

1°/ Exprimer p en fonction de p_1 et p_2.

2°/ On interroge n_1 femmes et n_2 hommes sur leurs intentions de vote (on suppose que les votes seront conformes aux déclarations d'intention, on admettra que les deux échantillons sont indépendants et non exhaustifs).
Soient f_1 et f_2 les pourcentages observés d'intentions de vote pour l'opposition dans chacun des deux échantillons.
Déterminer a_1 et a_2 de façon que $f = a_1 f_1 + a_2 f_2$ soit une estimation sans biais de p.

3°/ Calculer la variance de l'estimateur $\hat{p}$ de p ainsi trouvé.

4°/ On suppose que l'on ne peut interroger plus de n personnes.
Calculer, en fonction de n, p_1, p_2, a_1, a_2, les valeurs de n_1 et n_2 qui rendent minimum la variance de $\hat{p}$.

Solution

HAUT

Exercice 5. Intervalle de confiance du pourcentage de faces.

On lance une pièce 1000 fois au hasard et on trouve 535 faces, donc $f = 0{,}535$. Est-ce que l'on peut rejeter l'hypothèse que la pièce est équilibrée ? (Utiliser un niveau de confiance 95 %).	Solution

HAUT

Exercice 6. Intervalle de confiance du pourcentage de votes favorables.

On sonde 500 personnes : 105 sont en faveur d'une réforme fiscale. Calculer, approximativement, un intervalle de confiance à 95 % pour la proportion p de personnes favorables à la réforme fiscale dans la population.	Solution

HAUT

Exercice 7. Nombre de personnes à sonder par téléphone.

On veut faire un sondage par téléphone pour connaître la proportion d'électeurs qui vont voter PS, mais on veut que, avec un niveau de confiance 95 %, l'erreur ne soit pas plus grande que ± 3 %. Combien de personnes faut-il sonder ?	Solution

HAUT

Exercice 8. Nombre de personnes devant accepter une proposition.

Mille personnes gagnent la possibilité de jouer un jeu pile ou face équilibré pour gagner 10 000 euros. Un entrepreneur propose à chaque joueur la somme de 4 500 euros pour jouer à sa place. Combien de personnes doivent accepter sa proposition pour que la probabilité qu'il perde de l'argent soit inférieure à 5 % ?	Solution

HAUT

Exercice 9. Test d'équilibrage d'un dé.

Un logiciel prétend simuler un jeu de dé équilibré. On veut le tester sur un échantillon d'un million d'épreuves où on suppose que seulement le six est gagnant. 1°/ Utiliser l'approximation normale pour calculer un intervalle de confiance à 99 % pour le nombre X de succès obtenu. 2°/ Que dire si l'on obtient 167 518 succès ?	Solution

HAUT

Exercice 10. Pourcentage de garçons à la naissance.

Sur 2424 naissances, on a observé 1270 garçons et 1154 filles. 1°/ Donner une estimation ponctuelle du pourcentage de garçons à la naissance dans la population étudiée, ainsi que l'intervalle de confiance de ce pourcentage pour un risque α fixé à 5 %. 2°/ Combien de naissances devrait-on recenser pour connaître le pourcentage de garçons dans la population étudiée, avec une précision égale à 0,5 % (avec un risque α fixé à 5 %) ? 3°/ Dans une maternité de cette population, on a observé 9 naissances de garçons sur les 15 naissances d'une semaine. Donner l'intervalle de confiance du pourcentage de garçons pour un risque α fixé à 5 %.	Solution

HAUT

Exercice 11. Masse de colis.

A la réception de colis, un responsable doute de l'exactitude des masses affichées sur les boîtes. Il prélève, au hasard, 25 boîtes qu'il pèse. Soit x^i la masse de i^e boîte. Il obtient

$$\sum_{i=1}^{i=25} x^i = 49{,}5 \text{ kg et } \sum_{i=1}^{i=25} x^{i\,2} = 98{,}3 \text{ kg}^2.$$

On supposera que les masses de la production suivent une loi normale.

1°/ Donner une estimation ponctuelle de la moyenne et de la variance de la masse des boîtes de la production.
2°/ Calculer l'intervalle de confiance de la variance, de l'écart-type et de la moyenne des masses de la production pour un risque α fixé à 5 %.
3°/ Sachant que la masse affichée sur chaque boîte est de 2 kg, les doutes du responsable sont-ils justifiés ?
4°/ Sachant que la variance de la production est de 0,01, calculer alors l'intervalle de confiance de la masse moyenne (α = 5 %).
5°/ En supposant que les estimations de la moyenne et de la variance, calculées à la 1 ^{e} question, aient été obtenues à partir d'un échantillon de 50 boîtes (et non de 25), déterminer alors l'intervalle de confiance de la moyenne et celui de l'écart-type des masses. On prendra encore α = 5 %.

Solution

HAUT

Exercice 12. Régime amaigrissant.

Pour mesurer l'impact d'un régime amaigrissant, un club a choisi au hasard un échantillon de 5 individus avant le régime, et un échantillon de 5 autres individus après. Les masses corporelles se présentent ainsi :

Avant	84	92	72	91	84
Après	81	88	74	81	90

1°/ Déterminer un intervalle de confiance à 95 % pour :
- a) la masse corporelle moyenne avant le régime.
- b) la masse corporelle moyenne après le régime.
- c) la perte moyenne de masse corporelle durant le régime.

Solution

2°/ Tout compte fait, on a décidé qu'il aurait peut-être été plus adapté de peser les mêmes individus avant et après le régime. On a obtenu :

Individu	1	2	3	4	5
Avant	84	92	72	91	84
Après	73	97	73	78	80

Sur la base de cet échantillon, déterminer un intervalle de confiance à 95 % pour la perte moyenne de masse corporelle durant le régime. Conclusion ?

HAUT

Exercice 13. Trempage d'assiettes.

Une firme produisant de la vaisselle en verre a mis au point un procédé de trempage moins coûteux qui permet au verre, une fois sur le feu, de supporter une plus forte température sans se casser. Pour tester le nouveau processus, on a choisi au hasard 5 assiettes parmi les quantités produites ; chacune d'elles est "coupée" en deux parties égales, une moitié étant trempée à l'aide du nouveau processus et l'autre moitié par l'ancien processus. Soumis à l'effet de la chaleur jusqu'au point de rupture, les deux parties de chaque assiette donnent les résultats suivant pour la température de rupture :

Nouveau processus	475	436	495	483	426
Ancien processus	485	438	493	486	433

Construire un intervalle de confiance à 95 % pour l'amélioration moyenne de la température de rupture.

Solution

HAUT

Chapitre 13. Estimation ponctuelle et par intervalle de confiance.

Enoncés.

Exercice 1. Echantillons de loi uniforme.

En utilisant une table de nombres aléatoires, engendrer 5 échantillons non exhaustifs de taille $n = 6$, de la variable X de réalisations équiprobables : {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}.

1°/ Calculer les cinq réalisations des variables aléatoires :

$$\widehat{\overline{X}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=n} X_i \; ; \; \hat{s}'^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=n}(X_i - \widehat{\overline{X}})^2 \; ; \; \hat{s}^2 = \frac{n}{n-1}\hat{s}'^2.$$

2°/ Calculer la moyenne des cinq valeurs de $\widehat{\overline{X}}$ trouvées et montrer qu'elle fournit la même estimation $\overline{x} = \overline{X}^*$ de $\overline{X} = E(X)$ que celle donnée par la moyenne des 30 observations de X.

3°/ Calculer la moyenne des cinq valeurs $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=n}(x_i - \overline{x})^2$ de $\widehat{s}'^2$.

Cette moyenne est une réalisation de l'estimateur de l'espérance de $\widehat{s}'^2$.
Quelle grandeur $\widehat{s}'^2$ estime-t'il ?
L'estimateur $\widehat{s}'^2$ est-il sans biais ?
4°/ Calculer la moyenne des cinq valeurs de $\widehat{s}^2 = \frac{n}{n-1}\widehat{s}'^2$.
Cette moyenne est une réalisation de l'estimateur de l'espérance de $\widehat{s}^2$.
Quelle grandeur $\widehat{s}^2$ estime-t'il ?
L'estimateur $\widehat{s}^2$ est-il sans biais ?

Solution.

Dans une table de nombres au hasard, choisissons au hasard un point de départ, par exemple 4e ligne, 5e colonne, et prenons les 30 chiffres qui suivent :

50 47 36 50 91 19 09 15 98 75 60 58 33 15 94.

Ces chiffres engendrent les 5 échantillons aléatoires non exhaustifs de taille $n = 6$:

$E_1 = (5, 0, 4, 7, 3, 6)$,
$E_2 = (5, 0, 9, 1, 1, 9)$,
$E_3 = (0, 9, 1, 5, 9, 8)$,
$E_4 = (7, 5, 6, 0, 5, 8)$,
$E_5 = (3, 3, 1, 5, 9, 4)$,

qui sont les réalisations d'un échantillon aléatoire (X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6), où les X_i sont des variables aléatoires indépendantes de même loi que X (X s'appelle la **variable parente**).

1°/ Réalisations des variables aléatoires.

Echantillon	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5
$\sum_{i=1}^{i=n} x_i$	25	25	32	31	25
$\sum_{i=1}^{i=n} {x_i}^2$	135	189	252	199	141
$\overline{X}^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=n} x_i$	$\frac{25}{6}$	$\frac{25}{6}$	$\frac{32}{6}$	$\frac{31}{6}$	$\frac{25}{6}$
$s'^{*2} = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{i=n} {x_i}^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{i=n} x_i\right)^2\right)$	$\frac{185}{36}$	$\frac{509}{36}$	$\frac{488}{36}$	$\frac{233}{36}$	$\frac{221}{36}$
$s^{*2} = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{i=n} {x_i}^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{i=n} x_i\right)^2\right)$	$\frac{185}{30}$	$\frac{509}{30}$	$\frac{488}{30}$	$\frac{233}{30}$	$\frac{221}{30}$

2°/ Estimation de la moyenne.

La somme des 30 réalisations de X est 25 + 25 + 32 + 31 + 25 = 138.
La moyenne des 30 réalisations de X est donc $\overline{x} = \frac{138}{30} = 4{,}60$.

$\boxed{\overline{x} = 4{,}60.}$

La moyenne des 5 réalisations de $\hat{\overline{X}}$ est $\frac{1}{5}\left(\frac{25}{6} + \frac{25}{6} + \frac{32}{6} + \frac{31}{6} + \frac{25}{6}\right) = \frac{1}{30}(25 + 25 + 32 + 31 + 25) = \frac{138}{30}$ $= \overline{x}$.

Cette moyenne est une estimation de l'espérance de $\hat{\overline{X}}$.

$E(\hat{\overline{X}}) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=n} X_i\right)$, avec $n = 6$.

$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=n} E(X_i) = \frac{1}{n} \times n\,E(X) = E(X) = \overline{X}$

La relation $E(\hat{\overline{X}}) = \overline{X}$ montre que $\hat{\overline{X}}$ est donc un **estimateur sans biais** de $\overline{X} = E(X)$.
La moyenne $\overline{x}$ de ses réalitions est une estimation ponctuelle sans biais de $\overline{X}$.

La vraie valeur de $\overline{X}$ est $\frac{1}{10}(0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9) = 4{,}5$.

$$\boxed{\begin{array}{l}\overline{X} = 4{,}50 \\ \overline{X}^* = \overline{x} = 4{,}60\end{array}}$$

3°/ Première estimation de la variance.

La moyenne des 5 réalisations de $\hat{s}'^2$ est : $\overline{\hat{s}'^2} = \frac{1}{5}\left(\frac{185}{36} + \frac{509}{36} + \frac{488}{36} + \frac{233}{36} + \frac{221}{36}\right) = \frac{1\,636}{180} = 9{,}09.$

$$\boxed{\overline{\hat{s}'^2} = 9{,}09}$$

Cette moyenne est une estimation de $E\,(\hat{s}'^2)$.

$$E\,(\hat{s}'^2) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=n}\,(X_i - \hat{\overline{X}})^2\right), \text{ avec } n = 6.$$

$$= E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=n}\left(X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=n} X_i\right)^2\right)$$

$$= E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{n-1}{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{j\neq i} X_j\right)^2\right)$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=n} E\left(\left(\frac{n-1}{n}\,(X_i - \overline{X}) - \frac{1}{n}\sum_{j\neq i}(X_j - \overline{X})\right)^2\right)$$ (on retranche et on ajoute $\frac{n-1}{n}$ fois $\overline{X}$ dans le carré).

Comme les variables X_i et X_j sont indépendantes pour $i \neq j$, leur covariance est nulle et il reste, en développant le carré :

$$E\,(\hat{s}'^2) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=n}\left(\left(\frac{n-1}{n}\right)^2 E\,((X_i - \overline{X})^2) + \frac{1}{n^2}\sum_{j\neq i} E\,((X_j - \overline{X})^2)\right)$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=n}\left(\left(\frac{n-1}{n}\right)^2 Var\,(X) + \frac{1}{n^2}\,(n-1)\,Var\,(X)\right)$$

$$= \frac{n-1}{n}\,Var\,(X) = \frac{5}{6}\,Var\,(X)$$

$$\boxed{E\,(\hat{s}'^2) = \frac{n-1}{n}\,Var\,(X)}$$

La moyenne des 5 réalisations de $\hat{s}'^2$ n'est pas une estimation de la variance de X, mais une estimation de $\frac{5}{6}\,Var\,(X)$.

L'estimateur $\hat{s}'^2$ est donc un **estimateur biaisé** de la variance de X.

$\hat{s}'^2$ s'appelle la **variance d'échantillonnage**.

4°/ Deuxième estimation de la variance.

Avec $\hat{s}^2 = \frac{n}{n-1}\hat{s}'^2$, la moyenne des 5 valeurs de $\hat{s}^2$ est :

$$\overline{\hat{s}^2} = \frac{n}{n-1}\overline{\hat{s}'^2} = \frac{6}{5}\overline{\hat{s}'^2} = \frac{1}{5}\left(\frac{185}{30} + \frac{509}{30} + \frac{488}{30} + \frac{233}{30} + \frac{221}{30}\right) = \frac{1\,636}{150} = 10{,}91.$$

$$\boxed{\overline{\hat{s}^2} = 10{,}91.}$$

Cette moyenne est une estimation de $E(\hat{s}^2) = \frac{n}{n-1}E(\hat{s}'^2) = \frac{n}{n-1}\frac{n-1}{n}Var(X) = Var(X)$.

$$\boxed{E(\hat{s}^2) = Var(X).}$$

L'estimateur $\hat{s}^2$ est donc une **estimateur sans biais** de la variance de X.

La vraie valeur de la variance de X est donnée par :

$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$
$E(X^2) = \frac{1}{10}(0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2 + 9^2) = \frac{1}{10} \times \frac{9 \times 10 \times 9}{6} = \frac{171}{6} = 28{,}5.$
$Var(X) = 28{,}5 - (4{,}5)^2 = 28{,}50 - 20{,}25 = 8{,}25 = \frac{33}{4}$

$$\boxed{Var(X) = \frac{33}{4} = 8{,}25}$$

On voit qu'ici, l'estimation non biaisée de la variance, $\overline{\hat{s}^2} = 10{,}91$, est plus éloignée de la vraie valeur 8,25 de la variance que l'estimation biaisée $\overline{\hat{s}'^2} = 9{,}09$.

Chapitre 13. Estimation ponctuelle et par intervalle de confiance.

Enoncés.

Exercice 2. Echantillon de loi normale.

1°/ En utilisant une table de nombres aléatoires, engendrer un échantillon non exhaustif de taille $n = 10$, de la variable normale X de moyenne $\mu = 5$ et d'écart-type $\sigma = 2$. 2°/ Vérifier la normalité de l'échantillon obtenu à l'aide d'un graphique gausso-arithmétique. 3°/ Calculer une estimation sans biais de la moyenne de X donnée par cet échantillon. 4°/ Calculer une estimation sans biais de la variance de X, donnée par cet échantillon. 5°/ En déduire l'intervalle de confiance à 95 % de la moyenne.	

Solution.

1°/ Echantillon de loi normale.

La table de fonction de répartition de variable normale centrée réduite dont nous disposons donne les valeurs de fonction de répartition avec quatre chiffres après la virgule : il suffira donc d'avoir des valeurs de fonction de répartition avec quatre chiffres après la virgule.
Pour avoir dix valeurs, il faudra donc choisir 40 nombres au hasard entre 0 et 9.

a) Echantillon de loi uniforme.

Dans une table de nombres au hasard, choisissons au hasard un point de départ, par exemple 4^e ligne, 5^e colonne, et prenons les 40 chiffres qui suivent :

50 47 36 50 91 19 09 15 98 75 60 58 33 15 94 03 80 04 21 49.

Ces chiffres, groupés par 4, engendrent un échantillon aléatoire de taille 10 d'une variable aléatoire continue X de **loi uniforme** sur l'intervalle [0,1] :

$$x_1 = 0{,}5047,$$
$$x_2 = 0{,}3650,$$
$$x_3 = 0{,}9119,$$
$$x_4 = 0{,}0915,$$
$$x_5 = 0{,}9875,$$
$$x_6 = 0{,}6058,$$
$$x_7 = 0{,}3315,$$
$$x_8 = 0{,}9403,$$
$$x_9 = 0{,}8004,$$
$$x_{10} = 0{,}2149,$$

qui est la réalisation d'un échantillon aléatoire $(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7, X_8, X_9, X_{10})$, où les X_i sont des variables aléatoires indépendantes de même loi uniforme sur [0, 1] que la **variable parente** X.

b) Echantillon de loi normale.

Soit Φ la fonction de répartition de la variable normale centrée réduite U.
Φ est une bijection strictement croissante de R sur]0, 1[.
On sait (Probabilités, Séance 14, Exercice 3) qu'alors la variable aléatoire $\Phi^{-1}(X)$ suit la même loi de probabilité que U : $\Phi^{-1}(X)$ est donc une variable normale centrée réduite.
La variable aléatoire $Y = \mu + \Phi^{-1}(X)\,\sigma$ est donc une variable normale de moyenne μ et d'écart-type σ.

$$Y = \mu + \Phi^{-1}(X)\,\sigma \hookrightarrow G(\mu, \sigma^2).$$

La table de la fonction de répartition de la variable normale centrée réduite, permet de calculer la valeur des $\Phi^{-1}(x_i)$ et les y_i s'en déduisent par la formule ($\mu = 5$ et $\sigma = 2$) :

$$y_i = 5 + 2\,\Phi^{-1}(x_i)$$

x_i	0,5047	0,3650	0,9119	0,0915	0,9875	0,6058	0,3315	0,9403	0,8004	0,2149	*Total*
$\Phi^{-1}(x_i)$	0,018	–0,345	1,353	–1,332	2,241	0,268	–0,436	1,557	0,843	–0,790	
y_i	5,024	4,310	7,705	2,337	9,483	5,537	4,128	8,115	6,686	3,421	56,745
y_i^2	25,236	18,574	59,369	5,461	89,924	30,656	17,044	65,847	44,704	11,703	368,516

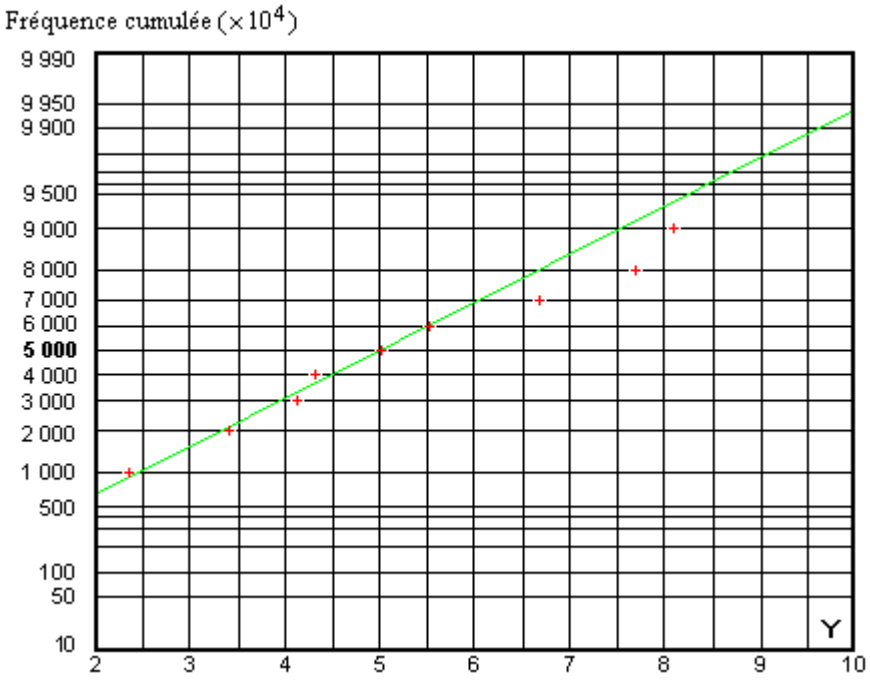
L'échantillon {5,024 ; 4,310 ; 7,705 ; 2,337 ; 9,483 ; 5,537 ; 4,128 ; 8,115 ; 6,686 ; 3,421} est un échantillon de loi normale de moyenne 5 et d'écart-type 2.

2°/ Vérification de la normalité de l'échantillon.

On classe les valeurs de Y obtenues par ordre croissant.
Comme les nombres aléatoires ont été choisis au hasard, on peut attribuer à chaque valeur une probabilité empirique 0,10.
Les valeurs de fonction de répartition empirique sont donc :

y_i	2,337	3,421	4,128	4,310	5,024	5,537	6,686	7,705	8,115	9,483
$F(y_i)$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1

Représentons ces points en **coordonnées gausso-arithmétiques** sans tenir compte du dernier point [le dernier point ne peut jamais être représenté car l'ordonnée 1 est à l'infini].



Grossièrement, on peut dire que les points (en rouge) sont assez bien alignés : la fonction de répartition empirique est donc proche d'une fonction de répartition de variable normale.
Elle est à rapprocher de la fonction de répartition de la variable normale de moyenne 5 et d'écart-type 2, représentée par la droite en vert dans ce graphique.

3°/ Estimation sans biais de la moyenne.

$$\sum_{i=1}^{i=10} y_i = 56{,}745$$

$$\overline{Y}^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=n} y_i = 5{,}6745$$

$$\boxed{\overline{Y}^* = 5{,}6745}$$

4°/ Estimation sans biais de la variance.

$$\sum_{i=1}^{i=10} y_i{}^2 = 368{,}516$$

$$\sigma^{*\,2} = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{i=n} y_i{}^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{i=n} y_i\right)^2\right) = \frac{1}{9}\left(368{,}516 - \frac{1}{10}(56{,}745)^2\right) = 5{,}169$$

Cette estimation sans biais de la variance permet une estimation de l'écart-type :

$$\boxed{\sigma^* = 2{,}273}$$

5°/ Intervalle de confiance à 95 %.

$$\overline{Y}^* \pm 1{,}96 \frac{\sigma^*}{\sqrt{10}} = 5{,}6745 \pm 1{,}409 = [4{,}266 ; 7{,}084]$$

Intervalle de confiance de la moyenne à 95 % : [4,27 ; 7,08]

Interprétation.

L'échantillon de loi normale obtenu indique que l'on peut considérer, avec 95 % de chance de succès, que la vraie valeur de la moyenne est entre 4,27 et 7,08.

Chapitre 13. Estimation ponctuelle et par intervalle de confiance.

Enoncés.

Exercice 3. Efficacité d'un estimateur.

Considérons les variables aléatoires $\hat{\overline{X}}_3$, $\hat{\overline{X}}_4$, $\hat{\overline{X}}_5$, qui représentent des moyennes d'échantillons aléatoires non exhaustifs (X_1, X_2, X_3), (X_4, X_5, X_6, X_7), $(X_8, X_9, X_{10}, X_{11}, X_{12})$ de taille n = 3, 4, 5, d'une variable aléatoire X.

1°/ Quelles sont les moyennes et les variances respectives de $\hat{\overline{X}}_3$, $\hat{\overline{X}}_4$, $\hat{\overline{X}}_5$?
2°/ En utilisant une table de nombres aléatoires, engendrer une réalisation de chacune des variables $\hat{\overline{X}}_3$, $\hat{\overline{X}}_4$, $\hat{\overline{X}}_5$.

Calculer les réalisations de $\hat{\overline{\overline{X}}} = \frac{1}{3}(\hat{\overline{X}}_3 + \hat{\overline{X}}_4 + \hat{\overline{X}}_5)$ et de $\hat{\overline{X}}_{12} = \frac{1}{12}\sum_i X_i$, où les X_i sont les variables aléatoires intervenant dans la construction des trois échantillons.
$\hat{\overline{\overline{X}}}$ et $\hat{\overline{X}}_{12}$ sont-ils des estimateurs sans biais de $E(X)$?
Pourquoi les réalisations calculées de $\hat{\overline{\overline{X}}}$ et $\hat{\overline{X}}_{12}$ ne sont-elles pas identiques ?
3°/ Quel est l'estimateur le plus efficace, de $\hat{\overline{\overline{X}}}$ ou de $\hat{\overline{X}}_{12}$?
4°/ Peut-on trouver des constantes a_3, a_4, a_5, telles que les estimateurs $\hat{\overline{X}}_{12}$ et $\hat{Y} = a_3 \hat{\overline{X}}_3 + a_4 \hat{\overline{X}}_4 + a_5 \hat{\overline{X}}_5$ aient la même efficacité ?

Solution.

1°/ Moyennes et variances.

a) Moyennes.

$$\hat{\overline{X}}_3 = \frac{1}{3}(X_1 + X_2 + X_3)$$
$$E(\hat{\overline{X}}_3) = \frac{1}{3}(E(X_1) + E(X_2) + E(X_3)) = \frac{1}{3} \times 3\,E(X) = E(X)$$

$$\hat{\overline{X}}_4 = \frac{1}{4}(X_4 + X_5 + X_6 + X_7)$$
$$E(\hat{\overline{X}}_4) = \frac{1}{4}(E(X_4) + E(X_5) + E(X_6) + E(X_7)) = \frac{1}{4} \times 4\,E(X) = E(X)$$

$$\hat{\overline{X}}_5 = \frac{1}{5}(X_8 + X_9 + X_{10} + X_{11} + X_{12})$$

$E(\hat{\overline{X}}_5) = \frac{1}{5}(E(X_8) + E(X_9) + E(X_{10}) + E(X_{11}) + E(X_{12})) = \frac{1}{5} \times 5\, E(X) = E(X)$

$$\boxed{E(\hat{\overline{X}}_3) = E(\hat{\overline{X}}_4) = E(\hat{\overline{X}}_5) = E(X)}$$

b) Variances.

Les variables X_1 à X_{12} sont indépendantes : la variance d'une somme est donc la somme des variances.

$$Var(\hat{\overline{X}}_3) = Var\left(\frac{1}{3}(X_1 + X_2 + X_3)\right) = \frac{1}{9} Var(X_1 + X_2 + X_3)$$
$$= \frac{1}{9}[Var(X_1) + Var(X_2) + Var(X_3)] = \frac{1}{9} \times 3\, Var(X) = \frac{1}{3} Var(X)$$

$$Var(\hat{\overline{X}}_4) = Var\left(\frac{1}{4}(X_4 + X_5 + X_6 + X_7)\right) = \frac{1}{16} Var(X_4 + X_5 + X_6 + X_7)$$
$$= \frac{1}{16}[Var(X_4) + Var(X_5) + Var(X_6) + Var(X_7)] = \frac{1}{16} \times 4\, Var(X) = \frac{1}{4} Var(X)$$

$$Var(\hat{\overline{X}}_5) = Var\left(\frac{1}{5}(X_8 + X_9 + X_{10} + X_{11} + X_{12})\right) = \frac{1}{25} Var(X_8 + X_9 + X_{10} + X_{11} + X_{12})$$
$$= \frac{1}{25}[Var(X_8) + Var(X_9) + Var(X_{10}) + Var(X_{11}) + Var(X_{12})] = \frac{1}{25} \times 5\, Var(X) = \frac{1}{5} Var(X)$$

$$\boxed{Var(\hat{\overline{X}}_3) = \frac{1}{3} Var(X)\ ;\ Var(\hat{\overline{X}}_4) = \frac{1}{4} Var(X)\ ;\ Var(\hat{\overline{X}}_5) = \frac{1}{5} Var(X)}$$

2°/ Estimations de la moyenne.

a) Echantillons.

Pour engendrer des échantillons de variable aléatoire uniforme sur l'intervalle [0, 9] de N, il suffit d'utiliser une table de nombres au hasard.
Commençons par exemple à la 6e ligne, 3e colonne :

52 73 06 41 37 47

Nous obtenons les échantillons aléatoires :

{5, 2, 7} ; {3, 0, 6, 4} ; {1, 3, 7, 4, 7}.

b) Réalisations de $\hat{\overline{\overline{X}}}$ et de $\hat{\overline{X}}_{12}$.

$\overline{\overline{X}}^* = \frac{1}{3}(\overline{X}_3^* + \overline{X}_4^* + \overline{X}_5^*)$
$\overline{\overline{X}}^* = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}(5 + 2 + 7) + \frac{1}{4}(3 + 0 + 6 + 4) + \frac{1}{5}(1 + 3 + 7 + 4 + 7)\right) = \frac{1}{120}(20 \times 14 + 10 \times 13 + 8 \times 22) =$
$\frac{586}{120} = 4{,}8833$

$\overline{X}_{12}^{*} = \frac{1}{12}$ (5 + 2 + 7 + 3 + 0 +6 + 4 + 1 + 3 + 7 + 4 + 7) = $\frac{49}{12}$ = 4,0833

c) Estimateurs.

$E\left(\hat{\overline{X}}\right) = \frac{1}{3}\left(E\left(\hat{X}_3\right) + E\left(\hat{X}_4\right) + E\left(\hat{X}_5\right)\right) = \frac{1}{3} \times 3\, E(X) = E(X)$.

$\hat{\overline{X}}$ est un estimateur sans biais de $E(X)$.

$E\left(\hat{X}_{12}\right) = \frac{1}{12} \sum_i E(X_i) = \frac{1}{12} \times 12\, E(X) = E(X)$.

$\hat{X}_{12}$ est un estimateur sans biais de $E(X)$.

On a donc là deux estimateurs sans biais de l'espérance mathématique $E(X)$.
Leurs réalisations sont différentes car il ne s'agit pas du même estimateur : leurs variances sont différentes.

$$Var\left(\hat{\overline{X}}\right) = Var\left(\frac{1}{3}\left(\hat{X}_3 + \hat{X}_4 + \hat{X}_5\right)\right) = \frac{1}{9}\left(Var\left(\hat{X}_3 + \hat{X}_4 + \hat{X}_5\right)\right)$$

$$Var\left(\hat{\overline{X}}\right) = \frac{1}{9}\left(Var\left(\frac{1}{3}(X_1 + X_2 + X_3) + \frac{1}{4}(X_4 + X_5 + X_6 + X_7) + \frac{1}{5}(X_8 + X_9 + X_{10} + X_{11} + X_{12})\right)\right).$$

Comme les variables X_i sont indépendantes, la variance de la somme est la somme des variances :

$$Var\left(\hat{\overline{X}}\right) = \frac{1}{9}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) Var(X) = \frac{47}{540}\, Var(X)$$

$$Var\left(\hat{X}_{12}\right) = \frac{1}{144} \times 12\, Var(X) = \frac{1}{12}\, Var(X).$$

$Var\left(\hat{\overline{X}}\right) = \frac{47}{540}\, Var(X)$; $Var\left(\hat{X}_{12}\right) = \frac{1}{12}\, Var(X)$.

3°/ Efficacité.

L'estimateur le plus efficace est celui qui possède la variance la plus faible.
Les relations $Var\left(\hat{\overline{X}}\right) = \frac{47}{540}\, Var(X)$, $Var\left(\hat{X}_{12}\right) = \frac{1}{12}\, Var(X)$ et $\frac{1}{12} = \frac{45}{540} < \frac{47}{540}$, montrent que $Var\left(\hat{X}_{12}\right)$ est plus petit que $Var\left(\hat{\overline{X}}\right)$.
L'estimateur le plus efficace est donc $\hat{X}_{12}$.

$\hat{X}_{12}$ est un estimateur plus efficace que $\hat{\overline{X}}$.

4°/ Constantes.

Posons :

$$\hat{\hat{Y}} = a_3 \hat{\overline{X}}_3 + a_4 \hat{\overline{X}}_4 + a_5 \hat{\overline{X}}_5$$

Nous voulons trouver des constantes a_3, a_4, a_5, telles que les estimateurs $\hat{\overline{X}}_{12}$ et $\hat{\hat{Y}}$ aient la **même espérance** et la **même variance**.

a) Espérance.

$$E(\hat{\hat{Y}}) = E(a_3 \hat{\overline{X}}_3 + a_4 \hat{\overline{X}}_4 + a_5 \hat{\overline{X}}_5) = a_3 E(\hat{\overline{X}}_3) + a_4 E(\hat{\overline{X}}_4) + a_5 E(\hat{\overline{X}}_5)$$
$$= (a_3 + a_4 + a_5) E(X)$$
$$E(\hat{\overline{X}}_{12}) = E(X)$$

Il faut donc que a_3, a_4, a_5, vérifient la relation :

$$\boxed{a_3 + a_4 + a_5 = 1}$$

b) Variance.

$$Var(\hat{\hat{Y}}) = Var(a_3 \hat{\overline{X}}_3 + a_4 \hat{\overline{X}}_4 + a_5 \hat{\overline{X}}_5)$$
$$= Var\left(\frac{a_3}{3}(X_1 + X_2 + X_3) + \frac{a_4}{4}(X_4 + X_5 + X_6 + X_7) + \frac{a_5}{5}(X_8 + X_9 + X_{10} + X_{11} + X_{12})\right)$$
$$= \left(\frac{{a_3}^2}{3} + \frac{{a_4}^2}{4} + \frac{{a_5}^2}{5}\right) Var(X)$$
$$Var(\hat{\overline{X}}_{12}) = \frac{1}{12} Var(X).$$

Il faut donc que a_3, a_4, a_5, vérifient la relation :

$$\boxed{\frac{{a_3}^2}{3} + \frac{{a_4}^2}{4} + \frac{{a_5}^2}{5} = \frac{1}{12}}$$

c) Solution.

Les nombres a_3, a_4, a_5, sont donc solutions du système d'équations :

$$a_3 + a_4 + a_5 = 1$$
$$20\,{a_3}^2 + 15\,{a_4}^2 + 12\,{a_5}^2 = 5$$

Pour trois inconnues, nous n'avons que deux équations.
Prenons, par exemple, a_5 comme paramètre :

$$a_5 = t.$$

Le système se réduit aux deux équations :

$$a_3 + a_4 = 1 - t$$
$$20\, a_3^{\,2} + 15\, a_4^{\,2} = 5 - 12\, t^2$$

$$a_3 + a_4 = 1 - t$$
$$4\, a_3^{\,2} + 3\, a_4^{\,2} = 1 - \frac{12}{5}\, t^2$$

La première équation donne :

$$a_3 = 1 - t - a_4$$
$$a_3^{\,2} = (1 - t - a_4)^2$$

La deuxième équation devient :

$$4\,(1 - t - a_4)^2 + 3\, a_4^{\,2} = 1 - \frac{12}{5}\, t^2$$
$$4\,(1 - t)^2 - 8\,(1 - t)\, a_4 + 7\, a_4^{\,2} = 1 - \frac{12}{5}\, t^2$$
$$7\, a_4^{\,2} - 8\,(1 - t)\, a_4 = 1 - \frac{12}{5}\, t^2 - 4\,(1 - t)^2$$
$$a_4^{\,2} - \frac{8}{7}\,(1 - t)\, a_4 = \frac{1}{7} - \frac{12}{35}\, t^2 - \frac{4}{7}\,(1 - t)^2$$
$$\left(a_4 - \frac{4}{7}\,(1 - t)\right)^2 - \frac{16}{49}\,(1 - t)^2 = \frac{1}{7} - \frac{12}{35}\, t^2 - \frac{4}{7}\,(1 - t)^2$$
$$\left(a_4 - \frac{4}{7}\,(1 - t)\right)^2 = -\frac{12}{49}\,(1 - t)^2 + \frac{1}{7} - \frac{12}{35}\, t^2$$
$$\left(a_4 - \frac{4}{7}\,(1 - t)\right)^2 = -\frac{12}{49}\,(1 - 2\,t + t^2) + \frac{1}{7} - \frac{12}{35}\, t^2$$
$$\left(a_4 - \frac{4}{7}\,(1 - t)\right)^2 = -\frac{12}{7}\left(\frac{1}{7} + \frac{1}{5}\right) t^2 + \frac{24}{49}\, t - \frac{5}{49}$$
$$\left(a_4 - \frac{4}{7}\,(1 - t)\right)^2 = -\frac{144}{245}\, t^2 + \frac{24}{49}\, t - \frac{5}{49}$$
$$\left(a_4 - \frac{4}{7}\,(1 - t)\right)^2 = -\frac{1}{245}(144\, t^2 - 120\, t + 25)$$
$$\left(a_4 - \frac{4}{7}\,(1 - t)\right)^2 = -\frac{1}{245}(12\, t - 5)^2$$

Pour qu'il y ait une solution, il faut que le deuxième membre soit positif.
Or il est négatif, sauf s'il est nul, soit pour $t = \frac{5}{12} = a_5$.
Dans ce cas, le premier membre est nul aussi et l'on a :

$$a_4 = \frac{4}{7}\,(1 - t) = \frac{4}{7} \times \frac{7}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$
$$a_3 = 1 - t - a_4 = \frac{7}{12} - \frac{4}{12} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

La seule solution du système est donc donnée par :

$$\boxed{\hat{\hat{Y}} = \frac{1}{12}(3\,\hat{\hat{X}}_3 + 4\,\hat{\hat{X}}_4 + 5\,\hat{\hat{X}}_5)}$$

$\hat{\hat{Y}}$ est la moyenne arithmétique des estimateurs $\hat{\hat{X}}_3$, $\hat{\hat{X}}_4$, $\hat{\hat{X}}_5$, pondérés par les effectifs des échantillons.

Autrement dit, pour que la moyenne des moyennes des trois échantillons ait la même efficacité que la moyenne des trois échantillons réunis, il faut pondérer les moyennes des échantillons par les effectifs.

On remarquera que, dans ce cas, on a :

$$\hat{\hat{Y}} = \frac{1}{12}(3\,\hat{\hat{X}}_3 + 4\,\hat{\hat{X}}_4 + 5\,\hat{\hat{X}}_5) = \frac{1}{12}\sum_i X_i = \hat{\hat{X}}_{12}$$

$$\boxed{\hat{\hat{Y}} = \hat{\hat{X}}_{12}}$$

et qu'il est donc naturel alors que $\hat{\hat{Y}}$ et $\hat{\hat{X}}_{12}$ aient la même espérance et la même variance, puisqu'il s'agit du même estimateur de l'espérance de X.

On peut dire aussi qu'il n'y a qu'un estimateur aussi efficace que $\hat{\hat{X}}_{12}$, c'est $\hat{\hat{X}}_{12}$.

Chapitre 13. Estimation ponctuelle et par intervalle de confiance.

Enoncés.

Exercice 4. Estimateur de variance minimum.

On considère une circonscription électorale de 50 000 électeurs, comprenant 30 % d'hommes et 70 % de femmes.
Soient p la proportion, inconnue, de personnes votant pour l'opposition,
p_1 la proportion, inconnue, de femmes votant pour l'opposition,
p_2 la proportion, inconnue, d'hommes votant pour l'opposition.

1°/ Exprimer p en fonction de p_1 et p_2.

2°/ On interroge n_1 femmes et n_2 hommes sur leurs intentions de vote (on suppose que les votes seront conformes aux déclarations d'intention, on admettra que les deux échantillons sont indépendants et non exhaustifs).
Soient f_1 et f_2 les pourcentages observés d'intentions de vote pour l'opposition dans chacun des deux échantillons.
Déterminer a_1 et a_2 de façon que $f = a_1 f_1 + a_2 f_2$ soit une estimation sans biais de p.

3°/ Calculer la variance de l'estimateur $\hat{p}$ de p ainsi trouvé.

4°/ On suppose que l'on ne peut interroger plus de n personnes.
Calculer, en fonction de n, p_1, p_2, a_1, a_2, les valeurs de n_1 et n_2 qui rendent minimum la variance de $\hat{p}$.

Solution.

1°/ Expression de p.

Parmi les 50 000 électeurs, il y a 50 000 × 0,70 = 35 000 femmes et 50 000 × 0,30 = 15 000 hommes.
Parmi les 50 000 × 0,70 = 35 000 femmes, il y en a 50 000 × 0,70 p_1 qui votent pour l'opposition.
Parmi les 50 000 × 0,30 = 15 000 hommes, il y en a 50 000 × 0,30 p_2 qui votent pour l'opposition.
Au total, il y a 50 000 (0,70 p_1 + 0,30 p_2) personnes votant pour l'opposition, soit une proportion :

$$\boxed{p = 0{,}70\, p_1 + 0{,}30\, p_2}$$

2°/ Estimateur sans biais de p.

Considérons l'échantillon de n_1 femmes.

On note $\hat{f}_1$ la variable aléatoire représentant la fréquence des votes pour l'opposition dans un échantillon de n_1 femmes.

$\hat{f}_1$ est un estimateur sans biais de p_1 : $E(\hat{f}_1) = p_1$.

De même, considérons l'échantillon de n_2 hommes.

On note $\hat{f}_2$ la variable aléatoire représentant la fréquence des votes pour l'opposition dans un échantillon de n_2 hommes.

$\hat{f}_2$ est un estimateur sans biais de p_2 : $E(\hat{f}_2) = p_2$.

Posons :

$$\hat{p} = a_1 \hat{f}_1 + a_2 \hat{f}_2.$$

Pour que $\hat{p}$ soit un estimateur sans biais de p, il faudra que l'on ait :

$$E(\hat{p}) = p$$

Or $E(\hat{p}) = a_1 E(\hat{f}_1) + a_2 E(\hat{f}_2) = a_1 p_1 + a_2 p_2$, donc il faudra prendre a_1 et a_2 vérifiant :

$$a_1 p_1 + a_2 p_2 = p.$$

Compte tenu de la relation $p = 0{,}70\, p_1 + 0{,}30\, p_2$ établie dans la première question, on voit qu'il suffit de prendre :

$$a_1 = 0{,}70$$
$$a_2 = 0{,}30$$

$\hat{p} = 0{,}70\, \hat{f}_1 + 0{,}30\, \hat{f}_2$ est un estimateur sans biais de p.

Il en résulte que si l'on observe la valeur f_1 pour $\hat{f}_1$ et la valeur f_2 pour $\hat{f}_2$, alors :

$f = 0{,}70\, f_1 + 0{,}30\, f_2$ est une estimation sans biais de p.

3°/ Variance de l'estimateur de *p*.

Par hypothèse, les échantillons sont aléatoires et indépendants.

Les variables aléatoires $\hat{f}_1$ et $\hat{f}_2$ sont donc indépendantes.

Il résulte de cette indépendance que la variance de $\hat{p} = a_1 \hat{f}_1 + a_2 \hat{f}_2$ est :

$$Var\,(\hat{p}) = a_1{}^2\, Var\,(\hat{f}_1) + a_2{}^2\, Var\,(\hat{f}_2)$$

Or on sait que la variance de $\hat{f}_1$ est $\frac{p_1(1-p_1)}{n_1}$ et que la variance de $\hat{f}_2$ est $\frac{p_2(1-p_2)}{n_2}$, de sorte que la variance de $\hat{p}$ est :

$$Var\,(\hat{p}) = a_1{}^2 \frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + a_2{}^2 \frac{p_2(1-p_2)}{n_2} = 0{,}49\,\frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + 0{,}09\,\frac{p_2(1-p_2)}{n_2}$$

$$\boxed{Var\,(\hat{p}) = 0{,}49\,\frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + 0{,}09\,\frac{p_2(1-p_2)}{n_2}}$$

4°/ Minimum de la variance.

Lorsque $n = n_1 + n_2$ est fixé, la variance de $\hat{p}$ n'est plus fonction que d'une seule variable, n_1 par exemple :

$$Var\,(\hat{p}) = a_1{}^2 \frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + a_2{}^2 \frac{p_2(1-p_2)}{n-n_1}$$

Pour que cette variance soit minimum, il faut que sa dérivée par rapport à n_1 soit nulle :

$$\frac{\partial}{\partial n_1}(Var\,(\hat{p})) = -a_1{}^2 \frac{p_1(1-p_1)}{n_1{}^2} + a_2{}^2 \frac{p_2(1-p_2)}{(n-n_1)^2} = 0$$

$$\frac{n_1{}^2}{a_1{}^2\, p_1(1-p_1)} = \frac{n_2{}^2}{a_2{}^2\, p_2(1-p_2)}$$

$$\frac{n_1}{a_1\sqrt{p_1(1-p_1)}} = \frac{n_2}{a_2\sqrt{p_2(1-p_2)}} = \frac{n_1+n_2}{a_1\sqrt{p_1(1-p_1)} + a_2\sqrt{p_2(1-p_2)}} =$$

$$\frac{n}{a_1\sqrt{p_1(1-p_1)} + a_2\sqrt{p_2(1-p_2)}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} n_1 &= n\,\frac{a_1\sqrt{p_1(1-p_1)}}{a_1\sqrt{p_1(1-p_1)} + a_2\sqrt{p_2(1-p_2)}} \\ n_2 &= n\,\frac{a_2\sqrt{p_2(1-p_2)}}{a_1\sqrt{p_1(1-p_1)} + a_2\sqrt{p_2(1-p_2)}} \end{aligned}}$$

Ces valeurs de n_1 et n_2 donnent une valeur de variance de :

$$Var\,(\hat{p}) = \frac{1}{n}\left(a_1 \sqrt{p_1\,(1-p_1)} + a_2 \sqrt{p_2\,(1-p_2)} \right)^2$$

donc un écart-type :

$$\sigma\,(\hat{p}) = a_1 \sqrt{\frac{p_1\,(1-p_1)}{n}} + a_2 \sqrt{\frac{p_2\,(1-p_2)}{n}}$$

$$\boxed{Var\,(\hat{p}) = \left(a_1 \sqrt{\frac{p_1\,(1-p_1)}{n}} + a_2 \sqrt{\frac{p_2\,(1-p_2)}{n}} \right)^2}$$

La dérivée seconde de $Var\,(\hat{p})$ par rapport à n_1 est :

$$\frac{\partial^2}{\partial {n_1}^2}(Var\,(\hat{p})) = 2\,{a_1}^2 \frac{p_1\,(1-p_1)}{{n_1}^3} + 2\,{a_2}^2 \frac{p_2\,(1-p_2)}{(n-n_1)^3}.$$

Elle est toujours positive.
Donc les valeurs trouvées pour n_1 et n_2 correspondent bien à un minimum de la variance de $\hat{p}$, donc à un **maximum d'efficacité** de l'estimateur de p.

Remarque.

En réalité, les valeurs trouvées pour n_1 et n_2 dépendent des valeurs inconnues p_1 et p_2 : elles restent donc inconnues.
Dans la mesure où p_1 et p_2 resteraient voisins de 0,5, en plus ou en moins, $p_1\,(1-p_1)$ et $p_2\,(1-p_2)$ seraient, au premier ordre près, voisins de la valeur maximum 0,25 et on pourrait prendre, en première approximation et compte tenu du fait que $a_1 + a_2 = 1$:

$$n_1 = n\,a_1 = 0{,}70\,n$$
$$n_2 = n\,a_2 = 0{,}30\,n$$

ce qui correspond à des échantillons respectant la proportion de femmes et d'hommes dans la population, donc à des échantillons représentatifs.

Chapitre 13. Estimation ponctuelle et par intervalle de confiance.

Enoncés.

Exercice 5. Intervalle de confiance du pourcentage de faces.

On lance une pièce 1000 fois au hasard et on trouve 535 faces, donc $f = 0{,}535$. Est-ce que l'on peut rejeter l'hypothèse que la pièce est équilibrée ? (Utiliser un niveau de confiance 95 %).	

Solution.

1°/ Choix d'un test.

Soit X le nombre de faces obtenues en 1000 lancers et p la probabilité d'obtenir face à un lancer. Le fait de regarder si l'on a obtenu face à un lancer est une **épreuve de Bernoulli**, avec deux résultats possibles : le succès, "on obtient face", de probabilité p, et l'échec, "on obtient pile", de probabilité $q = 1 - p$.
Lorsqu'on répète cette épreuve de Bernoulli pour les 1000 lancers, le nombre de succès est le nombre X de faces obtenues.
X, nombre de succès dans une répétition d'épreuves de Bernoulli, suit une **loi binomiale** dont les paramètres sont n, nombre de répétitions, égal à 1000, et p, probabilité du succès, ou probabilité d'obtenir face lors un lancer.
La fréquence $f = \frac{X}{1000}$ de faces suit la loi, déduite de la loi binomiale :

$$P\,(f = k \times 0{,}001) = P\,(X = k) = \binom{1000}{k} p^k\, q^{1000-k}.$$

On pourra donc utiliser un test avec la loi binomiale : **abaque de l'intervalle de confiance d'une proportion**.

2°/ Hypothèses à tester.

$(H_0) : p = p_0 = 0{,}500.$
$(H_1) : p \neq p_0.$

(Test bilatéral).

Dans l'hypothèse (H_0), qu'on appelle l'**hypothèse nulle**, la loi de probabilité de F s'écrit :

$$P\,(f = k \times 0{,}001) = P\,(X = k) = \frac{1}{2^{1000}}\binom{1000}{k}.$$

3°/ Pratique du test.

a) Un constat.

L'abaque de l'intervalle de confiance d'une proportion dont on dispose ne comporte que des valeurs de n jusqu'à 200 : au-dessus de cette valeur, on utilisera l'**approximation normale** de la loi binomiale.

Soit F la fonction de répartition de la variable normale centrée réduite. On peut approcher $P\,(X = k)$ par :

$$P\,(f = k \times 0{,}001) = P\,(X = k) = \frac{1}{2^{1000}}\binom{1000}{k} = F\left(\frac{k + \frac{1}{2} - 1000 \times 0{,}500}{\sqrt{1000 \times 0{,}500 \times 0{,}500}}\right) - F\left(\frac{k - \frac{1}{2} - 1000 \times 0{,}500}{\sqrt{1000 \times 0{,}500 \times 0{,}500}}\right)$$

Et la fonction de répartition de f est approchée par :

$$P\,(f \leq k \times 0{,}001) = F\left(\frac{k + \frac{1}{2} - 1000 \times 0{,}500}{\sqrt{1000 \times 0{,}500 \times 0{,}500}}\right) = F\left(\frac{k + \frac{1}{2}}{5\sqrt{10}} - 10\sqrt{10}\right)$$

Dans cette expression, le terme avec la fraction $\frac{1}{2}$ s'appelle la **correction de continuité**. Si k est grand, on n'en tient souvent pas compte.

Pour $k = 535$, on trouve :

$$P\,(f \leq 0{,}535) = F\,(2{,}245)$$

et la table de la fonction de répartition de la variable normale centrée réduite donne $F\,(2{,}245) = 0{,}9877$.

b) Le test.

La formule $P\,(f \leq 0{,}535) = 0{,}9877$ montre qu'il y a une probabilité $1 - 0{,}9877 = 0{,}0123$ d'obtenir une valeur aussi élevée que 535 lorsque $p = 0{,}500$, donc une probabilité $2 \times 0{,}0123 = 0{,}0246$ d'obtenir une valeur aussi différente de 500 si p vaut 0,500. Cette probabilité 0,0246 s'appelle la **probabilité critique du test bilatéral**. Elle mesure le **risque d'erreur** que l'on prend en rejetant l'hypothèse nulle $p = 0{,}500$.

Cette probabilité de 2,46 % est à comparer au risque de 5 % que l'on s'autorise à prendre au maximum : comme le risque d'erreur est inférieur au risque autorisé, on rejette l'hypothèse (H_0) et on accepte l'hypothèse alternative (H_1).

c) Conclusion pratique du test.

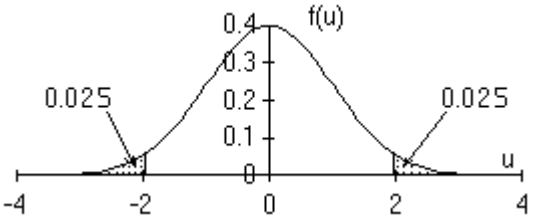
Jusqu'à plus ample information, compte tenu de la taille de l'échantillon, nous admettrons que la pièce n'est pas équilibrée ($pc = 2{,}5$ %).

Ce test ne peut s'appliquer que si l'**échantillon est aléatoire et indépendant**, ce qu'on suppose réalisé puisque la pièce est lancée au hasard.

d) Intervalle de confiance à 95 % des valeurs de *k*.

Une autre façon équivalente de faire le test consiste à regarder dans quel intervalle de valeurs de k on accepterait l'hypothèse (H_0), compte tenu du risque d'erreur $\alpha = 5$ %. Cet intervalle s'appelle l'**intervalle de confiance** à 95 %. Si la variable U est une variable normale centrée réduite, il y a 95 % de chance

qu'elle se trouve dans l'intervalle [– u ; u] lorsque $F(u) = 0{,}975$, comme le montre le dessin suivant :



La table de la fonction de répartition de la variable normale centrée réduite donne la valeur correspondante de u : $u = 1{,}96$. Il y correspond la valeur de k donnée par :

$$\frac{k+\frac{1}{2}}{5\sqrt{10}} - 10\sqrt{10} = 1{,}960$$

$$k = 5\sqrt{10}(1{,}96 + 10\sqrt{10}) - 0{,}5 = 530{,}5$$

A la valeur $-u = -1{,}96$, correspond la valeur de k donnée par :

$$\frac{k-\frac{1}{2}}{5\sqrt{10}} - 10\sqrt{10} = -1{,}960$$

$$k = 5\sqrt{10}(-1{,}96 + 10\sqrt{10}) + 0{,}5 = 469{,}5$$

L'intervalle d'acceptation de l'hypothèse (H_0) est l'intervalle de confiance à 95 % [469,5 ; 530,5] des valeurs de k.
La valeur observée 535 n'appartient pas à l'intervalle de confiance : **on rejette l'hypothèse (H_0)**.

e) Intervalle de confiance à 95 % d'une proportion.

Si l'on ne tient pas compte de la correction de continuité, la variable X suit, à peu près, une loi normale de moyenne $E(X) = n\,p_0 = 500$ et de variance $Var(X) = n\,p_0\,(1 - p_0)$, donc la proportion $f = \frac{X}{n}$ suit une loi normale de moyenne

$$E(f) = \frac{E(X)}{n} = \frac{n\,p_0}{n} = p_0$$

et de variance

$$Var(f) = \frac{Var(X)}{n^2} = \frac{n\,p_0(1-p_0)}{n^2} = \frac{p_0(1-p_0)}{n}.$$

L'intervalle d'acceptation de l'hypothèse (H_0) au seuil de 5 % est alors l'intervalle

$$p_0 \pm 1{,}96\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}} = 0{,}500 \pm 0{,}031 = [\ 0{,}469\ ;\ 0{,}531\ ].$$

La valeur observée $f_{obs} = 0{,}535$ de la fréquence n'appartient pas à l'intervalle d'acceptation : **on rejette l'hypothèse d'équiprobabilité des faces** ($\alpha = 5$ %).

Chapitre 13. Estimation ponctuelle et par intervalle de confiance.

Enoncés.

Exercice 6. Intervalle de confiance du pourcentage de votes favorables.

On sonde 500 personnes : 105 sont en faveur d'une réforme fiscale. Calculer, approximativement, un intervalle de confiance à 95 % pour la proportion p de personnes favorables à la réforme fiscale dans la population.	

Solution.

1°/ Intervalle de confiance à 95 % : abaque.

Pour $n = 500$ et $f = 0{,}21$, un abaque avec la valeur $n = 500$, indique l'intervalle de confiance de p à 95 % :

$$[0{,}175 ; 0{,}250].$$

L'abaque fourni s'arrête à $n = 200$: il est donc inutilisable ici et il faudra utiliser l'approximation normale.

2°/ Intervalle de confiance à 95 % : approximation normale.

L'approximation normale donne l'intervalle de confiance à 95 % : $f \pm 1{,}96 \sqrt{\frac{f(1-f)}{n}} = 0{,}210 \pm 0{,}036$,

soit l'intervalle

$$[0{,}174 ; 0{,}246]$$

Remarques.

— L'incertitude sur la lecture de l'abaque est au moins aussi grande que l'approximation que l'on fait en prenant la loi normale au lieu de la loi binomiale, même si l'on tient compte de la correction de continuité.
— L'abaque fourni s'arrête à $n = 200$.

> On utilisera donc l'approximation normale dès que n est supérieur ou égal à 200.
> Cette approximation normale n'est justifiée, en réalité, que pour des valeurs de variance $n\,p\,q$ suffisamment grandes (supérieures à 20, pour fixer les idées), elle ne le serait donc pas si p ou q était trop petit.

— La valeur observée est le centre de l'intervalle de confiance. L'intervalle de confiance sert alors à tester une hypothèse nulle (H_0) de la forme $p = p_0$ contre l'hypohtèse alternative (H_1) : $p \neq p_0$ (test bilatéral).
On regarde si p_0 appartient ou non à l'intervalle de confiance défini pour p à partir de f :

- si p_0 appartient à l'intervalle de confiance à 95 %, on accepte l'hypothèse (H_0),
- sinon on rejette l'hypothèse (H_0) et on accepte l'hypothèse (H_1).

Chapitre 13. Estimation ponctuelle et par intervalle de confiance.

Enoncés.

Exercice 7. Nombre de personnes à sonder par téléphone.

On veut faire un sondage par téléphone pour connaître la proportion d'électeurs qui vont voter PS, mais on veut que, avec un niveau de confiance 95 %, l'erreur ne soit pas plus grande que ± 3 %. Combien de personnes faut-il sonder ?	

Solution.

Soit p, la proportion, inconnue, d'électeurs qui vont voter PS dans la population. Si, dans un sondage sur n personnes, on observe une proportion f de personnes qui vont voter PS, l'intervalle de confiance à 95 % de p est donné par :

$$f \pm 1{,}96 \sqrt{\frac{f(1-f)}{n}}$$

L'erreur absolue, ou, plus rigoureusement, l'incertitude absolue, est, avec un niveau de confiance de 95 %, donnée par le terme :

$$1{,}96 \sqrt{\frac{f(1-f)}{n}}$$

Comme f est compris entre 0 et 1, $f(1-f)$ est maximum pour $f = 0{,}5$ et vaut alors 0,25, de sorte que l'incertitude est inférieure à $\frac{1{,}96 \times 0{,}5}{\sqrt{n}}$.

Pour être sûr que l'incertitude absolue soit inférieure à 3 %, il suffit de prendre :

$$\frac{1{,}96 \times 0{,}5}{\sqrt{n}} < 0{,}03$$

soit $n > \left(\frac{1{,}96 \times 0{,}5}{0{,}03}\right)^2 = 1067$.

Pour que l'erreur ne soit pas plus grande que 3 %, avec un niveau de confiance de 95 %, il faudra sonder au moins 1068 personnes.

On peut remarquer que pour que l'erreur soit inférieure à 1 %, soit 3 fois moins, il faudrait prendre :

$$n > \left(\frac{1{,}96 \times 0{,}5}{0{,}01}\right)^2 = 9603$$

soit 9 fois plus de personnes, ce qui coûterait 9 fois plus cher !

Chapitre 13. Estimation ponctuelle et par intervalle de confiance.

Enoncés.

Exercice 8. Nombre de personnes devant accepter une proposition.

Mille personnes gagnent la possibilité de jouer un jeu pile ou face équilibré pour gagner 10 000 euros. Un entrepreneur propose à chaque joueur la somme de 4 500 euros pour jouer à sa place. Combien de personnes doivent accepter sa proposition pour que la probabilité qu'il perde de l'argent soit inférieure à 5 % ?	

Solution.

Cet exercice fait suite à l'exercice 5 du Chapitre 5 de Probabilités.

Si N est le nombre de personnes qui acceptent l'offre de l'entrepreneur, le nombre X de fois qu'il gagne suit une loi binomiale de paramètres N et $p = 0,5$.
Son gain est :

$$G = 10000\,X - 4500\,N.$$

L'entrepreneur perd de l'argent si son gain est négatif, c'est-à-dire si $X < 0,45\,N$.

Si N est grand, l'approximation normale de la loi binomiale (de Moivre-Laplace) dit que X suit, approximativement, une loi normale de moyenne $N\,p = \frac{N}{2}$ et de variance $N\,p\,q = \frac{N}{4}$.

Dans ces conditions :

$$P\,(X < 0,45\,N\,) = F\left(\frac{0,45\,N - 0,5\,N}{\sqrt{0,25\,N}}\right) = F\left(-\frac{\sqrt{N}}{10}\right) = 1 - F\left(\frac{\sqrt{N}}{10}\right)$$

$$P\,(X < 0,45\,N\,) < 0,05 \Leftrightarrow 1 - F\left(\frac{\sqrt{N}}{10}\right) < 0,05$$

$\Leftrightarrow F\left(\frac{\sqrt{N}}{10}\right) > 0,95$. (La table de la fonction de répartition de la variable normale centrée réduite donne $F\,(1,645) = 0,95$).
$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{N}}{10} > 1,645$
$\Leftrightarrow N > (16,45)^{\,2} = 270,60$.

Pour que la probabilité que l'entrepreneur perde de l'argent soit inférieure à 5 %, il faut qu'au moins 271 personnes sur les 1000 qui ont gagné le droit de jouer, acceptent sa proposition de jouer à leur place, moyennant la perception immédiate de 4 500 euros.

Chapitre 13. Estimation ponctuelle et par intervalle de confiance.

Enoncés.

Exercice 9. Test d'équilibrage d'un dé.

Un logiciel prétend simuler un jeu de dé équilibré. On veut le tester sur un échantillon d'un million d'épreuves où on suppose que seulement le six est gagnant. 1°/ Utiliser l'approximation normale pour calculer un intervalle de confiance à 99 % pour le nombre X de succès obtenu. 2°/ Que dire si l'on obtient 167 518 succès ?	

Solution.

1°/ Intervalle de confiance à 99 %.

La table de la fonction de répartion de la variable normale centrée réduite $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}}$ donne $P(Z > 2{,}5758) = 0{,}005$.
L'intervalle de confiance à 99 % de la moyenne np de X est donc, dans l'approximation normale, lorsque $X = x = nf$:

$$n\left(f \pm 2{,}5758 \times \sqrt{\frac{f(1-f)}{n}}\right) = x \pm 2{,}5758 \times \sqrt{\frac{x(n-x)}{n}} = x \pm 2{,}5758 \times \sqrt{\frac{x\left(10^6-x\right)}{10^6}}$$

Intervalle de confiance de la moyenne de X à 99 % : $x \pm 2{,}5758 \times \sqrt{\frac{x\left(10^6-x\right)}{10^6}}$.

Lorsque le dé est équilibré (hypothèse (H_0)), $p = \frac{1}{6}$, X a une probabilité de 99 % de se trouver dans l'intervalle $np \pm 2{,}5758 \times \sqrt{npq} = 166\,667 \pm 960 = [165\,507 ; 167\,627]$.

Cet intervalle est l'intervalle d'acceptation au risque de 1 %, de l'hypothèse (H_0) : $p = \frac{1}{6}$ (le dé est équilibré).

Intervalle d'acceptation au risque de 1 %, de l'hypothèse (H_0) : le dé est équilibré : [165 507 ; 167 627].

2°/ Application numérique.

Pour $x = 167\,518$ et $n = 1\,000\,000$, l'intervalle de confiance à 99 % est :

$$167\,518 \pm 962 = [166\,556 ; 168\,480]$$

La valeur testée est $\frac{1}{6} \times 10^6 = 166\,667$.
Cette valeur appartient à l'intervalle de confiance à 99 %.
Si l'on accepte un risque d'erreur maximum 1 %, **on ne peut donc pas rejeter l'hypothèse que le dé est équilibré**.

Il revient au même de dire que la valeur observée 167 518 se trouve dans l'intervalle [165 507 ; 167 627] d'acceptation de l'hypothèse (H_0) : $p = \frac{1}{6}$ (le dé est équilibré). La conclusion est la même, on accepte l'hypothèse (H_0), les données ne montrent pas, au risque de 1 %, de différence significative.

Chapitre 13. Estimation ponctuelle et par intervalle de confiance.

Enoncés.

Exercice 10. Pourcentage de garçons à la naissance.

Sur 2424 naissances, on a observé 1270 garçons et 1154 filles. 1°/ Donner une estimation ponctuelle du pourcentage de garçons à la naissance dans la population étudiée, ainsi que l'intervalle de confiance de ce pourcentage pour un risque α fixé à 5 %. 2°/ Combien de naissances devrait-on recenser pour connaître le pourcentage de garçons dans la population étudiée, avec une précision égale à 0,5 % (avec un risque α fixé à 5 %) ? 3°/ Dans une maternité de cette population, on a observé 9 naissances de garçons sur les 15 naissances d'une semaine. Donner l'intervalle de confiance du pourcentage de garçons pour un risque α fixé à 5 %.	

Solution.

1°/ Estimation d'un pourcentage.

a) Loi de probabilité du nombre de garçons.

Le fait de déterminer le sexe d'un enfant à la naissance constitue une épreuve de Bernoulli avec deux résultats possibles :
— le succès, naissance d'un garçon, avec une probabilité p
— l'échec, naissance d'une fille, avec une probabilité 1 - p.
Lorsqu'on répète cette **épreuve de Bernoulli** pour les 2 424 naissances observées, le nombre X de succès, nombre de garçons, suit une **loi binomiale**, de paramètres n = 2 424 et p, inconnu, mais voisin de 0,5.
Cette loi binomiale peut être approchée par une **loi de Gauss**, puisque le produit $n\,p\,q$ est de l'ordre de 600.
La probabilité pour que $X = x_0$ est donc donnée par :

$$P(X = x_0) = F\left(\frac{x_0 + \frac{1}{2} - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - F\left(\frac{x_0 - \frac{1}{2} - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

b) Estimation ponctuelle de p.

La proportion $\tau = \frac{X}{n}$ de garçons à la naissance suit à peu près, d'après ce qui précède, une loi de Gauss de moyenne

$$\mu = \frac{E(X)}{n} = \frac{np}{n} = p$$

et de variance

$$\sigma^2 = \frac{Var(X)}{n^2} = \frac{npq}{n^2} = \frac{p(1-p)}{n}$$

La proportion observée $\tau_0 = \frac{x_0}{n}$ est une estimation ponctuelle de la proportion p :

$$\boxed{p^* = \tau_0 = \frac{1\,270}{2\,424} \approx 0{,}524}$$

c) Estimation de *p* par intervalle de confiance à 95 %.

La probabilité pour que la proportion $\tau = \frac{X}{n}$ prenne la valeur $\tau_0 = \frac{x_0}{n}$ est :

$$P(\tau = \tau_0) = P(X = x_0) = F\left(\frac{x_0 + \frac{1}{2} - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - F\left(\frac{x_0 - \frac{1}{2} - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) = F\left(\frac{\tau_0 - p + \frac{1}{2n}}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}\right) - F\left(\frac{\tau_0 - p - \frac{1}{2n}}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}\right)$$

et la probabilité pour que la proportion τ soit dans un intervalle $[\tau_{inf} ; \tau_{sup}]$ entourant symétriquement la valeur p est, avec la correction de continuité :

$$P(\tau_{inf} \leq \tau \leq \tau_{sup}) = F\left(\frac{\tau_{sup} - p + \frac{1}{2n}}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}\right) - F\left(\frac{\tau_{inf} - p - \frac{1}{2n}}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}\right)$$

En écrivant :

$$P(\tau_{inf} \leq \tau \leq \tau_{sup}) = 0{,}95$$

avec

$$\tau_{inf} = p - u\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} + \frac{1}{2n} \text{ et } \tau_{sup} = p + u\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} - \frac{1}{2n}$$

il vient :

$$F(u) - F(-u) = 0{,}95$$

et la table de la fonction de répartion de la loi normale centrée réduite donne :

$$u = 1{,}960.$$

D'où :

$$\tau_{inf} = p - 1{,}960\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} + \frac{1}{2n} \text{ et } \tau_{sup} = p + 1{,}960\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} - \frac{1}{2n}$$

$$\tau_{inf} = p - 1{,}960\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} + \frac{1}{2n} \leq \tau_0 \leq \tau_{sup} = p + 1{,}960\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} - \frac{1}{2n}$$

$$(p - \tau_0)^2 \leq \left(1{,}960\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} - \frac{1}{2n}\right)^2$$

En première approximation, si l'on néglige la correction de continuité (facteur $\frac{1}{2n}$) qui est ici de l'ordre de 2×10^{-4}, l'inéquation se réduit à :

$$p - 1{,}960\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \leq \tau_0 \leq p + 1{,}960\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

$$(p - \tau_0)^2 \leq \left(1{,}960\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right)^2$$

$$p^2 - 2\tau_0 p + \tau_0^2 \leq \frac{1{,}960^2}{n}(p - p^2)$$

$$p^2\left(1 + \frac{1{,}960^2}{n}\right) - 2\left(\tau_0 + \frac{1{,}960^2}{2n}\right)p + \tau_0^2 \leq 0$$

Cette inéquation définit, dans le plan (τ_0, p) l'intérieur d'une **ellipse**.

Comme le coefficient de p^2 est positif, les valeurs de p doivent être comprises entre les racines du trinôme.

$$\frac{1}{1+\frac{1{,}960^2}{n}} \times \left(\tau_0 + \frac{1{,}960^2}{2n} \pm \sqrt{\left(\tau_0 + \frac{1{,}960^2}{2n}\right)^2 - \left(1 + \frac{1{,}960^2}{n}\right)\tau_0^2}\right)$$

$$= \frac{1}{1+\frac{1{,}960^2}{n}} \times \left(\tau_0 + \frac{1{,}960^2}{2n} \pm 1{,}960\sqrt{\frac{\tau_0(1-\tau_0)}{n} + \left(\frac{1{,}960^2}{2n}\right)^2}\right)$$

$$= \frac{1}{1+\frac{1{,}960^2}{n}} \times \left(\tau_0 + \frac{1{,}960^2}{2n} \pm 1{,}960\sqrt{\frac{\tau_0(1-\tau_0)}{n}} \times \sqrt{1 + \frac{1{,}960^4}{4n\tau_0(1-\tau_0)}}\right)$$

Et puisqu'on a négligé la correction de continuité (facteur $\frac{1}{2n}$), on peut continuer de négliger les termes en $\frac{1}{n}$ devant 1, et réduire l'expression précédente à :

$$\tau_0 \pm 1{,}960\sqrt{\frac{\tau_0(1-\tau_0)}{n}}$$

Autrement dit, si l'on néglige la correction de continuité, ce qui suppose que n est assez grand, il est légitime de dire que l'écart-type $\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$ est connu avec suffisamment de précision en prenant la valeur

observée $\sqrt{\frac{\tau_0(1-\tau_0)}{n}}$.

La formule

$$p - 1{,}960\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \le \tau_0 \le p + 1{,}960\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

qui définit l'intervalle de confiance à 95 %, se réduit alors à :

$$p - 1{,}960\sqrt{\frac{\tau_0(1-\tau_0)}{n}} \le \tau_0 \le p + 1{,}960\sqrt{\frac{\tau_0(1-\tau_0)}{n}} .$$

soit :

$$\tau_0 - 1{,}960\sqrt{\frac{\tau_0(1-\tau_0)}{n}} \le p \le \tau_0 + 1{,}960\sqrt{\frac{\tau_0(1-\tau_0)}{n}}$$

C'est la formule classique donnant l'intervalle de confiance au risque de 5 %.

Numériquement, avec $\tau_0 = \frac{1\,270}{2\,424}$ et n = 2424, on trouve ici l'intervalle : 0,5239 ± 0,0199 = [0,5040 ; 0,5438]. Comme la correction de continuité était de l'ordre de 2×10^{-4}, il est inutile de conserver le quatrième chiffre après la virgule :

Intervalle de confiance à 95 % du pourcentage de garçons à la naissance : [0,504 ; 0,544]

2°/ Nombre de naissances à étudier pour connaître le pourcentage de garçons à 0,5 % (α = 5 %).

La précision est une grandeur relative.
Dire que la précision est 0,5 %, pour un risque de 5 %, c'est dire que le rapport de l'amplitude de l'intervalle de confiance à 95 %, à la valeur centrale de cet intervalle est 0,5 %, soit :

$$\frac{1{,}96 \times \sqrt{\frac{\tau_0(1-\tau_0)}{n}}}{\tau_0} \le 0{,}005$$

$$n \ge \frac{1-\tau_0}{\tau_0} \times \frac{1{,}960^2}{(5\times10^{-3})^2} = 1{,}5366 \times 10^5 \times \frac{1-\tau_0}{\tau_0}$$

Si le poucentage observé est le même que celui observé dans l'échantillon de 2424 naissances, il faudra prendre au moins

$$1{,}5366 \times 10^5 \times \frac{1\,154}{1\,270} = 1{,}3964 \times 10^5$$

soit environ 140 000 naissances pour connaître le pourcentage de garçons avec une précision de 0,5 %.

Taille minimum de l'échantillon : $1{,}3964 \times 10^5$ naissances

3°/ Intervalle de confiance d'un pourcentage avec un petit échantillon.

Comme on l'a dit au début de cet exercice, le nombre X de naissances de garçons suit une loi binomiale : les paramètres de cette loi sont ici le nombre de répétitions $n = 15$ et la probabilité inconnue de naissance d'un garçon p. Le nombre X suit la loi :

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \binom{15}{k} p^k (1-p)^{15-k}$$

La table de ces probablités lorsqu'on estime p par la valeur observée $\frac{9}{15} = 0{,}6$ est :

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$P(X = k)$	$1{,}07\times10^{-6}$	$2{,}42\times10^{-5}$	$2{,}54\times10^{-4}$	$1{,}65\times10^{-3}$	$7{,}42\times10^{-3}$	$2{,}45\times10^{-2}$	$6{,}12\times10^{-2}$	0,118	0,177	0,207	0,186	0,127	$6{,}34\times10^{-2}$	$2{,}19\times10^{-2}$	$4{,}70\times10^{-3}$	$4{,}70\times10^{-4}$

En termes de fréquences ($f = \frac{k}{15}$) et de fonction de répartition ($F = \sum_{i=0}^{i=k} P(X = i)$), ce tableau devient :

f	0	0,067	0,133	0,200	0,267	0,333	0,400	0,467	0,533	0,600	0,667	0,733	0,800	0,867	0,933	1,000
F	$1{,}07\times10^{-6}$	$2{,}52\times10^{-5}$	$2{,}79\times10^{-4}$	$1{,}93\times10^{-3}$	$9{,}35\times10^{-3}$	$3{,}38\times10^{-2}$	$9{,}50\times10^{-2}$	0,2131	0,3902	0,5968	0,7827	0,9095	0,9728	0,9948	0,9995	1,0000

Par interpolation linéaire entre les valeurs du tableau, on obtient les valeurs de f correspondant aux valeurs 0,025 et 0,975 de la fonction de répartition :

$f_{inf} = \frac{4}{15} + \frac{1}{15}\frac{0{,}0250 - 0{,}0094}{0{,}0338 - 0{,}0094} = 0{,}3093$, ce qui correspond à une valeur de k de $0{,}3093 \times 15 = 4{,}64$.

$f_{sup} = \frac{12}{15} + \frac{1}{15}\frac{0{,}9750 - 0{,}9728}{0{,}9948 - 0{,}9728} = 0{,}8067$, ce qui correspond à une valeur de k de $0{,}8067 \times 15 = 12{,}10$.

Intervalle de confiance à 95 % : [0,31 ; 0,81]

C'est un intervalle très large, et cela tient au petit nombre de naissances étudiées.

Pour les petites valeurs de n, au lieu de calculer la loi binomiale, il est plus précis et plus facile d'utiliser un **abaque** où ces calculs sont déjà faits (avec p au lieu de $f = \tau_0$) .

Sur l'abaque au risque de 5 %, on lit, pour un pourcentage observé de 0,60 et $n = 15$, l'intervalle de confiance [0,33 ; 0,84].

Intervalle de confiance à 95 % : [0,33 ; 0,84]

Chapitre 13. Estimation ponctuelle et par intervalle de confiance.

Enoncés.

Exercice 11. Masse de colis.

A la réception de colis, un responsable doute de l'exactitude des masses affichées sur les boîtes. Il prélève, au hasard, 25 boîtes qu'il pèse. Soit x^i la masse de i^e boîte. Il obtient

$$\sum_{i=1}^{i=25} x^i = 49{,}5 \text{ kg et } \sum_{i=1}^{i=25} x^{i\,2} = 98{,}3 \text{ kg}^2.$$

On supposera que les masses de la production suivent une loi normale.

1°/ Donner une estimation ponctuelle de la moyenne et de la variance de la masse des boîtes de la production.
2°/ Calculer l'intervalle de confiance de la variance, de l'écart-type et de la moyenne des masses de la production pour un risque α fixé à 5 %.
3°/ Sachant que la masse affichée sur chaque boîte est de 2 kg, les doutes du responsable sont-ils justifiés ?
4°/ Sachant que la variance de la production est de 0,01, calculer alors l'intervalle de confiance de la masse moyenne (α = 5 %).
5°/ En supposant que les estimations de la moyenne et de la variance, calculées à la 1 ^{e} question, aient été obtenues à partir d'un échantillon de 50 boîtes (et non de 25), déterminer alors l'intervalle de confiance de la moyenne et celui de l'écart-type des masses. On prendra encore α = 5 %.

Solution.

1°/ Estimation ponctuelle de la moyenne et de la variance.

Soit X la masse d'une boîte produite par le fournisseur : par hypothèse X suit une loi normale de moyenne μ et de variance σ^2.

La moyenne d'un échantillon est un estimateur **sans biais** (sa moyenne est μ) et **consistant** (sa variance tend vers 0 si n tend vers l'infini) de la moyenne μ de la population.
Une estimation ponctuelle de la moyenne μ est fournie par la moyenne de l'échantillon :

$$\mu^* = \frac{1}{25}\sum_{i=1}^{i=25} x_i = \frac{49{,}5}{25} = 1{,}98 \text{ kg}$$

Estimation ponctuelle de la moyenne : 1, 98 kg

La variable aléatoire $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{i=n} X_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{i=n} X_i\right)^2\right)$ est un estimateur **sans biais** (sa moyenne est σ^2) et **consistant** (sa variance tend vers 0 si n tend vers l'infini) de la variance σ^2 de la population.
Une estimation ponctuelle σ^{*2} de la variance σ^2 est fournie par la valeur de cette variable $\hat{\sigma}^2$ dans l'échantillon prélevé :

$$\sigma^{*2} = \frac{1}{24}\left(\sum_{i=1}^{i=25} x_i^2 - \frac{1}{25}\left(\sum_{i=1}^{i=25} x_i\right)^2\right) = \frac{1}{24}\left(98{,}3 - \frac{49{,}5^2}{25}\right) = 1{,}21 \times 10^{-2}$$

Estimation ponctuelle de la variance : $1{,}21 \times 10^{-2}$ kg ^{2}

Une estimation ponctuelle σ^* de l'écart-type s'en déduit en prenant la racine carrée :

Estimation ponctuelle de l'écart-type : 0, 11 kg

2°/ Intervalles de confiance à 95 %.

a) Moyenne.

Comme l'écart-type n'est pas connu, il faut l'estimer. Dans ce cas, il faut utiliser la **loi de Student** à $n - 1 = 24$ degrés de liberté : pour une valeur de fonction de répartition de 0,975, on lit, dans cette table, un seuil de 2,064 et l'intervalle de confiance au risque bilatéral de 5 % est donné par :

$$\mu^* \pm 2{,}064 \frac{\sigma^*}{\sqrt{n}} = 1{,}98 \pm 0{,}04 = [1{,}94 \text{ kg} ; 2{,}02 \text{ kg}]$$

Intervalle de confiance de la moyenne : [1,94 kg ; 2,02 kg] (α = 5 %).

b) Variance.

Pour $n - 1 = 24$ degrés de liberté, la **table de Pearson** fournit les valeurs :

$$\chi_{0{,}975}^2 = 39{,}4 \; ; \; \chi_{0{,}025}^2 = 12{,}4.$$

L'intervalle de confiance de la variance à 95 % est donc donné par :

$$\left[\frac{\nu\sigma^{*2}}{\chi_{0{,}975}^2} ; \frac{\nu\sigma^{*2}}{\chi_{0{,}025}^2}\right] = \left[\frac{24 \times 1{,}21 \times 10^{-2}}{39{,}4} ; \frac{24 \times 1{,}21 \times 10^{-2}}{12{,}4}\right] = [0{,}74 \times 10^{-2} ; 2{,}34 \times 10^{-2}]$$

Intervalle de confiance de la variance : [0,74 $\times 10^{-2}$ kg ^{2} ; 2,34 $\times 10^{-2}$ kg ^{2}] (α = 5 %).

L'intervalle de confiance de l'écart-type s'en déduit en prenant la racine carrée des bornes de l'intervalle de confiance de la moyenne ;

Intervalle de confiance de l'écart-type : [8,6 $\times 10^{-2}$ kg ; 15,3 $\times 10^{-2}$ kg] (α = 5 %).

3°/ Comparaison d'une moyenne observée et d'une moyenne théorique.

La valeur théorique $\mu_0 = 2$ kg appartient à l'intervalle de confiance [1,94 kg ; 2,02 kg] ($\alpha = 5$ %) de la moyenne : on ne peut donc pas rejeter l'hypothèse $\mu = \mu_0 = 2$ kg sans prendre un risque d'erreur supérieur à 5 %. La différence observée n'est pas significative, au seuil de 5 %.

Les soupçons du responsable ne sont pas justifiés (au risque de 5 %).

4°/ Intervalle de confiance quand la variance est connue.

Dans ce cas, la fonction discriminante $U = \frac{\hat{\mu} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ suit une loi de Gauss centrée réduite.

La valeur seuil, pour $\alpha = 0{,}05$, est 1,96 et la valeur observée est $u_0 = -1$.

Cette valeur seuil est contenue dans l'intervalle d'acceptation [– 1,96 ; + 1,96]. On accepte donc l'hypothèse $(H_0) : \mu = \mu_0$.

Le nouvel intervalle de confiance de la moyenne est $\mu^* \pm 1{,}96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}98 \pm 0{,}04 = [1{,}94 ; 2{,}02]$

Intervalle de confiance de la moyenne : [1,94 kg ; 2,02 kg] ($\alpha = 5$ %).

5°/ Intervalles de confiance pour un grand échantillon.

Si, pour une taille de $n = 50$, on considère qu'on a affaire à un grand échantillon, la fonction discriminante $U = \frac{\hat{\mu} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ suit, à peu près, une loi de Gauss centrée réduite (limite d'une loi de Student). Dans ce cas, l'intervalle de confiance de la moyenne est $\mu^* \pm 1{,}96 \frac{\sigma^*}{\sqrt{n}} = 1{,}98 \pm 0{,}03 = [1{,}95 ; 2{,}01]$

Intervalle de confiance de la moyenne : [1,95 kg ; 2,01 kg] ($\alpha = 5$ %).

La formule approchée de l'intervalle de confiance de l'écart-type pour les grands échantillons, $\sigma^* \pm 1{,}96 \frac{\sigma^*}{\sqrt{2n}}$, donne $0{,}11 \pm 0{,}02$.

Intervalle de confiance de l'écart-type : [0,09 kg ; 0,13 kg] ($\alpha = 5$ %).

L'intervalle de confiance de la variance s'en déduit en prenant le carré des bornes :

Intervalle de confiance de la variance : [$0{,}8 \times 10^{-2}$ kg ^{2} ; $1{,}7 \times 10^{-2}$ kg ^{2}] ($\alpha = 5$ %).

Cet intervalle est à comparer avec celui que donne la **table du khi deux**, pour $\nu = 49$ degrés de liberté, et un écart-type estimé $\sigma^* = 0{,}11$ kg :

$$\chi_{0{,}975}^{\,2} = 71 \; ; \; \chi_{0{,}025}^{\,2} = 32.$$

$$\left[\frac{\nu \sigma^{*2}}{\chi_{0{,}975}^{\,2}} \; ; \; \frac{\nu \sigma^{*2}}{\chi_{0{,}025}^{\,2}} \right] = [0{,}84 \times 10^{-2} \text{ kg}^2 \; ; \; 1{,}85 \times 10^{-2} \text{ kg}^2]$$

On en retiendra que plus la taille de l'échantillon est grande, plus les intervalles de confiance sont resserrés autour de la valeur cible.

Chapitre 13. Estimation ponctuelle et par intervalle de confiance.

Enoncés.

Exercice 12. Régime amaigrissant.

Pour mesurer l'impact d'un régime amaigrissant, un club a choisi au hasard un échantillon de 5 individus avant le régime, et un échantillon de 5 autres individus après. Les masses corporelles se présentent ainsi :

Avant	84	92	72	91	84
Après	81	88	74	81	90

1°/ Déterminer un intervalle de confiance à 95 % pour :
a) la masse corporelle moyenne avant le régime.
b) la masse corporelle moyenne après le régime.
c) la perte moyenne de masse corporelle durant le régime.

2°/ Tout compte fait, on a décidé qu'il aurait peut-être été plus adapté de peser les mêmes individus avant et après le régime. On a obtenu :

Individu	1	2	3	4	5
Avant	84	92	72	91	84
Après	73	97	73	78	80

Sur la base de cet échantillon, déterminer un intervalle de confiance à 95 % pour la perte moyenne de masse corporelle durant le régime. Conclusion ?

Solution.

1°/ Echantillons indépendants.

Les deux échantillons sont indépendants.

- Pour le premier échantillon : $\sum x_i = 84 + 92 + 72 + 91 + 84 = 423$; $\sum x_i^2 = 84^2 + 92^2 + 72^2 + 91^2 + 84^2 = 36041$.
  La moyenne du premier échantillon est $\frac{1}{5}(84 + 92 + 72 + 91 + 84) = \frac{423}{5} = 84{,}60$ kg.
  La variance estimée est : $\frac{1}{4}(36041 - \frac{1}{5}\,423^2) = 63{,}80$.
- Pour le deuxième échantillon : $\sum x_i = 81 + 88 + 74 + 81 + 90 = 414$; $\sum x_i^2 = 81^2 + 88^2 + 74^2 + 81^2 + 90^2 = 34442$.
  La moyenne du deuxième échantillon est $\frac{1}{5}(81 + 88 + 74 + 81 + 90) = \frac{414}{5} = 82{,}80$ kg.

La variance estimée est : $\frac{1}{4}(34442 - \frac{1}{5}414^2) = 40{,}70$.

L'intervalle de confiance à 95 % d'une moyenne, dans l'**hypothèse normale**, se calcule, à partir d'échantillons de taille 5, avec la loi de Student à 4 degrés de liberté :
$t_{0{,}975} = 2{,}776$.
Intervalle de confiance à 95 % : $\overline{x} \pm 2{,}776 \frac{\sigma^*}{\sqrt{n}}$.

On obtient par cette formule les intervalles :

- Premier échantillon (avant) : 84,60 ± 9,92, soit 84,6 ± 9,9 kg = [74,7 kg ; 94,5 kg]
- Deuxième échantillon (après) : 82,80 ± 7,92, soit 82,8 ± 7,9 kg = [74,9 kg ; 90,7 kg]

En réalité, ce qui nous intéresse ici, c'est d'avoir un intervalle de confiance pour la perte de masse corporelle.
La perte de masse corporelle est la valeur avant régime, moins la valeur après régime.
Pour cette perte, toujours dans l'**hypothèse normale** :

$\frac{{\sigma_2}^{*2}}{{\sigma_1}^{*2}} = \frac{63{,}8}{40{,}7} = 1{,}57$, alors que la table de Fischer-Snedecor à (4 ; 4) degrés de liberté donne la valeur seuil de 9,60 : les variances sont homogènes.
La variance estimée commune est $\sigma^{*2} = \frac{4 \times 63{,}8 + 4 \times 40{,}7}{8} = \frac{1}{2}(63{,}80 + 40{,}70) = 52{,}25$.

L'écart-type estimé commun est $\sigma^* = 7{,}23$ kg.
L'intervalle de confiance à 95 % se calcule avec la loi de Student à 8 degrés de liberté : $t_{0{,}975} = 2{,}306$.
Intervalle de confiance à 95 % : $\overline{x} \pm 2{,}306\ \sigma^* \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} = (84{,}60 - 82{,}80) \pm (2{,}306 \times 7{,}23 \times \sqrt{\frac{2}{5}}) = 1{,}80 \pm 10{,}54$, soit 1,8 ± 10,5 kg.

2°/ Séries appariées.

Individu	1	2	3	4	5	Somme
Avant	84	92	72	91	84	
Après	81	88	74	81	90	
Perte X	3	4	– 2	10	– 6	9
X^2	9	16	4	100	36	165

$\sum x_i = 9$; $\sum {x_i}^2 = 165$;
$\overline{x} = \frac{9}{5} = 1{,}80$; $\sigma^{*2} = \frac{1}{4}(165 - \frac{1}{5}9^2) = 37.20$; $\sigma^* = 6{,}10$ kg.
La loi de Student à 4 degrés de liberté donne $t_{0{,}975} = 2{,}776$.
L'intervalle de confiance à 95 % est donc $\overline{x} \pm 2{,}776 \frac{\sigma^*}{\sqrt{n}} = 1{,}80 \pm 7{,}57$ kg, soit 1,8 ± 7,6 kg.

En comparant cet intervalle de confiance à 95 % avec le précédent (1,8 ± 10,5 kg), on voit que celui qu'on obtient avec les séries appariées est **plus précis** : l'appariement est une caractéristique qu'il est souhaitable d'introduire chaque fois que c'est possible.

De toutes façons, la conclusion de ce test est que 0 appartient à l'intervalle de confiance de l'amaigrissement : les données ne sont pas suffisantes pour rejeter l'hypothèse que l'amaigrissement est nul.

Chapitre 13. Estimation ponctuelle et par intervalle de confiance.

Enoncés.

Exercice 13. Trempage d'assiettes.

Une firme produisant de la vaisselle en verre a mis au point un procédé de trempage moins coûteux qui permet au verre, une fois sur le feu, de supporter une plus forte température sans se casser. Pour tester le nouveau processus, on a choisi au hasard 5 assiettes parmi les quantités produites ; chacune d'elles est "coupée" en deux parties égales, une moitié étant trempée à l'aide du nouveau processus et l'autre moitié par l'ancien processus. Soumis à l'effet de la chaleur jusqu'au point de rupture, les deux parties de chaque assiette donnent les résultats suivant pour la température de rupture :

Nouveau processus	475	436	495	483	426
Ancien processus	485	438	493	486	433

Construire un intervalle de confiance à 95 % pour l'amélioration moyenne de la température de rupture.

Solution.

1°/ Loi de probabilité.

Il s'agit de deux séries appariées, avec un petit échantillon. Pour étudier la différence entre les deux, on peut raisonnablement faire l'hypothèse que la population des améliorations est normale. Mais comme la variance de cette population est inconnue, il faudra utiliser la **loi de Student**.

2°/ Intervalle de confiance.

Pour 4 degrés de liberté, la loi de Student donne la valeur seuil (fonction de répartition égale à 0,975) : 2,776.

Pour calculer l'intervalle de confiance de l'amélioration moyenne, complétons le tableau des données par les valeurs d'amélioration et de son carré :

Nouveau processus	475	436	495	483	426	Somme
Ancien processus	485	438	493	486	433	
Amélioration	– 10	– 2	+ 2	– 3	– 7	– 20

Carré	100	4	4	9	49	166

$$\mu \pm 2{,}776\,\frac{\sigma^*}{\sqrt{n}} = -4 \pm \frac{2{,}776}{\sqrt{5}}\sqrt{\frac{1}{4}\left(166 - \frac{1}{5}(-20)^2\right)} = -4 \pm 5{,}8$$

Intervalle de confiance de μ à 95 % : [– 9,8 ; 1,8].

Décision mathématique.

0 appartient à l'intervalle de confiance à 95 % de l'amélioration : on accepte l'hypothèse (H_0) :"Le nouveau procédé n'apporte pas d'amélioration".

Conclusion pratique.

Jusqu'à plus ample information, compte tenu de la taille de l'échantillon, les résultats ne montrent pas que le nouveau procédé apporte une amélioration (α = 5 %).

Chapitre 14. Test Khi-deux : conformité.

Exercices

Exercice 1. Equiprobabilité des sexes à la naissance (familles de 5 enfants).
Exercice 2. Influence de la place de départ dans une course.
Exercice 3. Equiprobabilité des sexes à la naissance (familles de 7 enfants).

Exercice 1. Equiprobabilité des sexes à la naissance (familles de 5 enfants).

L'étude de 320 familles ayant 5 enfants s'est traduite par la distribution suivante :

Classe	A	B	C	D	E	F	Total
Nombre de garçons	5	4	3	2	1	0	
Nombre de filles	0	1	2	3	4	5	
Nombre de familles	18	56	110	88	40	8	320

Solution

On veut comparer cette distribution à la distribution théorique qui correspond à l'équiprobabilité de la naissance d'un garçon et de la naissance d'une fille.

1°/ Quelle est la loi de probabilité du nombre de garçons dans une famille de cinq enfants, dans l'hypothèse d'équiprobabilité des naissances des garçons et des filles.

2°/ La comparaison de la distribution observée à la distribution théorique s'effectue par un test Khi deux. Que peut-on en conclure ?

HAUT

Exercice 2. Influence de la place de départ dans une course.

Au départ d'une course de chevaux, il y a habituellement huit positions de départ et la position numéro 1 est la plus proche de la palissade. On soupçonne qu'un cheval a plus de chances de gagner quand il porte un numéro faible, c'est-à-dire qu'il est plus proche de la palissade intérieure. Voici les données de 144 courses :

Numéro de départ	1	2	3	4	5	6	7	8
Nombre de victoires d'un cheval ayant ce numéro	29	19	18	25	17	10	15	11

1°/ Poser les hypothèses à tester (hypothèse nulle et hypothèse alternative).

2°/ Calculer le khi deux observé et la probabilité critique. Conclure.

Solution

HAUT

Exercice 3. Equiprobabilité des sexes à la naissance (familles de 7 enfants).

L'étude de N familles ayant k enfants s'est traduite par la distribution suivante :

k = 7								Total
Nombre de garçons	7	6	5	4	3	2	1	0	
Nombre de filles	0	1	2	3	4	5	6	7	
Nombre de familles	8	38	106	190	188	110	40	8	N = 688

On veut comparer cette distribution à la distribution théorique qui correspond à l'équiprobabilité de l'évènement "Naissance d'une fille" et de l'évènement "Naissance d'un garçon". On considère que la distribution théorique des garçons dans une famille de k enfants suit une loi binomiale (p = 0,5).

1°/ Quel test choisir ?
2°/ Calculer les probabilités théoriques.
3°/ Formuler les hypothèses H_0 et H_1.
4°/ Les conditions de validité sont-elles vérifiées ?
5°/ Interpréter les résultats du test . Quelle en est la conclusion ?

Solution

HAUT

Chapitre 14. Test Khi-deux - conformité.

Enoncés.

Exercice 1. Equiprobabilité des sexes à la naissance.

L'étude de 320 familles ayant 5 enfants s'est traduite par la distribution suivante :

Classe	A	B	C	D	E	F	Total
Nombre de garçons	5	4	3	2	1	0	
Nombre de filles	0	1	2	3	4	5	
Nombre de familles	18	56	110	88	40	8	320

On veut comparer cette distribution à la distribution théorique qui correspond à l'équiprobabilité de la naissance d'un garçon et de la naissance d'une fille.

1°/ Quelle est la loi de probabilité du nombre de garçons dans une famille de cinq enfants, dans l'hypothèse d'équiprobabilité des naissances des garçons et des filles.

2°/ La comparaison de la distribution observée à la distribution théorique s'effectue par un test Khi deux. Que peut-on en conclure ?

Solution.

1°/ Loi de probabilité du nombre de garçons.

Dans l'hypothèse (H_0) d'équiprobabilité des sexes, pour un enfant qui naît, de deux choses l'une, ou bien c'est un garçon (succès : probabilité $p = \frac{1}{2}$), ou bien c'est une fille (échec : probabilité $q = 1 - p = \frac{1}{2}$). Le fait de déterminer le sexe de l'enfant qui naît est une épreuve de Bernoulli. Lorsqu'on répète cette épreuve de Bernoulli pour les cinq enfants de la famille, le nombre X de garçons dans la famille apparaît comme le nombre de succès dans une répétition d'épreuves de Bernoulli : c'est une variable aléatoire qui est somme de cinq variables aléatoires de Bernoulli indépendantes, sa loi de probabilité est une **loi binomiale** de paramètres $n = 5$, nombre de répétitions de l'épreuve, et $p = \frac{1}{2}$, probabilité du succès de l'épreuve.

$$P(X = k) = \binom{5}{k} \frac{1}{2^k} \frac{1}{2^{5-k}} = \frac{1}{32} \binom{5}{k}$$

2°/ Distribution théorique du nombre de familles dans l'hypothèse d'équiprobabilité.

La probabilité $P(X = k)$ est la probabilité pour qu'une famille de 5 enfants ait k garçons, dans l'hypothèse d'équiprobabilité des naissances des garçons et des filles. Cette probabilité est donnée aussi par le rapport entre le nombre de cas favorables et le nombre de cas possibles, c'est-à-dire par le rapport entre le nombre

théorique de familles ayant k garçons et le nombre de famille étudiées, fixé à 320. Si l'on appelle c_k le nombre théorique de famille de cinq enfants ayant k garçons sur un effectif théorique de 320 familles de cinq enfants, ce nombre c_k est donné par la formule :

$$\frac{c_k}{320} = P(X = k) = \frac{1}{32}\binom{5}{k}$$

$$\boxed{c_k = 10\binom{5}{k}}$$

Cette formule conduit à la distribution théorique suivante :

Classe	A	B	C	D	E	F	Total
Nombre de garçons	5	4	3	2	1	0	
Nombre de filles	0	1	2	3	4	5	
o_k	18	56	110	88	40	8	320
c_k	10	50	100	100	50	10	320

3°/ Test Khi deux.

Comme les effectifs théoriques sont tous supérieurs à 5, le test Khi deux va pouvoir être utilisé, à condition que l'échantillon de 320 familles étudié soit aléatoire, ce qu'on posera comme hypothèse de travail, faute d'indication en ce sens dans l'énoncé.

La **valeur observée** de Khi 2 est :

$$\chi^2_{obs} = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{(c_k - o_k)^2}{c_k} = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{{o_k}^2}{c_k} - n = \frac{18^2}{10} + \frac{56^2}{50} + \frac{110^2}{100} + \frac{88^2}{100} + \frac{40^2}{50} + \frac{8^2}{10} - 320 = 11{,}96$$

Il y a 6 classes de familles étudiées et 1 relation entre elles, à savoir "l'effectif théorique total est 320". Le nombre de degrés de liberté est donc 6 – 1 = 5. Dans la **table de Pearson**, pour **5 degrés de liberté**, on lit :

$$F_5(11{,}1) = 0{,}950 \text{ et } F_5(12{,}8) = 0{,}975$$

Comme la valeur observée 11,96 est comprise entre 11,1 et 12,8, la **probabilité critique** est comprise entre 1 – 0,975 = 0,025 et 1 – 0,950 = 0,050.

Le risque d'erreur que l'on prendrait en rejetant l'hypothèse (H_0) d'équiprobabilité des naissances des garçons et des filles, donné par la probabilité critique, étant inférieur au seuil de 5 %, on peut rejeter cette hypothèse.

Compte tenu de la taille de l'échantillon, et sous réserve que l'échantillon ait été choisi de manière aléatoire, les données montrent qu'on peut **rejeter l'hypothèse d'équiprobabilité** des naissances des garçons et des filles à la naissance.

Comme le nombre de garçons dans l'échantillon est de 860, pour un total de 1600 enfants, la proportion de garçons est 860 / 1600 = 0,5375. On peut donc admettre, avec les réserves déjà exprimées, que la

probabilité de naissance d'un garçon est significativement plus élevé que 0,5.

Chapitre 14. Test Khi-deux - conformité.

Enoncés.

Exercice 2. Influence de la place de départ dans une course.

Au départ d'une course de chevaux, il y a habituellement huit positions de départ et la position numéro 1 est la plus proche de la palissade. On soupçonne qu'un cheval a plus de chances de gagner quand il porte un numéro faible, c'est-à-dire qu'il est plus proche de la palissade intérieure. Voici les données de 144 courses :

Numéro de départ	1	2	3	4	5	6	7	8
Nombre de victoires d'un cheval ayant ce numéro	29	19	18	25	17	10	15	11

1°/ Poser les hypothèses à tester (hypothèse nulle et hypothèse alternative).

2°/ Calculer le khi deux observé et la probabilité critique. Conclure.

Solution.

1°/ Hypothèses à tester.

L'hypothèse nulle (H_0) est l'hypothèse d'**équiprobabilité** des numéros de départ dans les places de premier à l'arrivée.

Nous prendrons comme hypothèse alternative (H_1) la non équiprobabilité des numéros de départ.

2°/ Test Khi deux.

Nous supposons que l'échantillon de 144 courses est un échantillon aléatoire. Dans l'hypothèse d'équiprobabilité, chaque numéro de départ a la même probabilité que les autres de conduire à une place de premier, soit $\frac{1}{8}$.

Dans cette hypothèse, les nombres de victoires d'un cheval portant le numéro de place de départ devraient être (effectifs théoriques) :

Numéro de départ	1	2	3	4	5	6	7	8
Nombre de victoires d'un cheval ayant ce numéro	18	18	18	18	18	18	18	18

Le χ^2 observé est

$$\chi^2_{obs} = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{(c_k - o_k)^2}{c_k} = \frac{1}{18}(11^2 + 1^2 + 0^2 + 7^2 + 1^2 + 8^2 + 3^2 + 7^2) = 16{,}33.$$

Le nombre de degrés de liberté est 8 – 1 = 7.

La table de Pearson pour $n = 7$ donne :

$$F_n(16{,}0) = 0{,}975 \text{ et } F_n(18{,}5) = 0{,}990$$

La probabilité critique est donc comprise entre 1 – 0,990 = 0,010 et 1 – 0,975 = 0,025. De toutes façons, elle est inférieure à 5 %, ce qui permet d'apporter une première conclusion :

Compte tenu de la taille de l'échantillon, et sous réserve de plus ample information sur la constitution de l'échantillon, la différence observée permet de rejeter l'hypothèse d'équiprobabilité.

Quant à savoir si la première place vers la palissade intérieure apporte significativement plus de chances de finir premier de la course, il n'est pas possible, dans l'état actuel de nos connaissances, d'apporter une réponse positive ou négative à cette question. Il faudra pour cela faire une analyse de variance : nous pourrons y revenir dans une séance ultérieure.

Chapitre 14. Test Khi-deux - conformité.

Enoncés.

Exercice 3. Equiprobabilité des sexes à la naissance (familles de 7 enfants).

L'étude de N familles ayant k enfants s'est traduite par la distribution suivante :

$k =$ 7								*Total*
Nombre de garçons	7	6	5	4	3	2	1	0	
Nombre de filles	0	1	2	3	4	5	6	7	
Nombre de familles	8	38	106	190	188	110	40	8	N = 688

On veut comparer cette distribution à la distribution théorique qui correspond à l'équiprobabilité de l'évènement "Naissance d'une fille" et de l'évènement "Naissance d'un garçon". On considère que la distribution théorique des garçons dans une famille de k enfants suit une loi binomiale (p = 0,5).

1°/ Quel test choisir ?
2°/ Calculer les probabilités théoriques.
3°/ Formuler les hypothèses H_0 et H_1.
4°/ Les conditions de validité sont-elles vérifiées ?
5°/ Interpréter les résultats du test . Quelle en est la conclusion ?

Solution.

1°/ Choix du test.

Le problème posé est de tester la conformité de la répartition observée d'effectifs dans un échantillon de taille 688, au modèle fourni par la loi binomiale de paramètres n = 7 et p = 0,5 résultant de l'équiprobabilité des naissances des garçons et des filles.

Dans la mesure où :
— l'échantillon est aléatoire,
— les effectifs théoriques sont tous supérieurs ou égaux à 5,
nous utiliserons un **test khi-deux**.

On pourrait envisager aussi d'utiliser un **test de Kolmogorov-Smirnov** , qui ne nécessite pas des effectifs théoriques supérieurs ou égaux à 5.

2°/ Probabilités théoriques.

La fréquence théorique des familles de 7 enfants ayant k garçons est égale à la probabilité pour qu'une famille de 7 enfants ait k garçons, c'est-à-dire à la probabilité pour que, dans une famille de 7 enfants, il y ait k garçons.

Les probabilités théoriques sont données par la loi binomiale : $P(X = k) = \frac{1}{2^7}\binom{7}{k}$

Nombre de garçons (famille de 7 enfants)	0	1	2	3	4	5	6	7
Probabilité	$\frac{1}{128}$	$\frac{7}{128}$	$\frac{21}{128}$	$\frac{35}{128}$	$\frac{35}{128}$	$\frac{21}{128}$	$\frac{7}{128}$	$\frac{1}{128}$

3°/ Hypothèses à tester.

On teste l'une contre l'autre les hypothèses :

H_0 : La probabilité des sexes est la même à la naissance (c'est-à-dire $p = 0{,}5$).

H_1 : La probabilité des sexes n'est pas la même à la naissance (c'est-à-dire $p \neq 0{,}5$).

4°/ Conditions de validité.

Pour que l'on puisse appliquer valablement un test de khi-deux, il faut que les conditions suivantes soient vérifiées :

— l'échantillon est aléatoire,

— les effectifs théoriques sont tous supérieurs ou égaux à 5,

Examinons si ces conditions sont vérifiées.

a) Echantillon aléatoire.

Aucune donnée ne figure dans l'énoncé sur le choix des familles et le mode de constitution de l'échantillon : nous ne pourrons donc ici que supposer que l'échantillon est aléatoire. Il faudra, bien sûr, émettre des réserves concernant ce point dans la conclusion du test.

b) Effectifs théoriques supérieurs ou égaux à 5.

Les effectifs théoriques s'obtiennent en multipliant les probabilités théoriques par l'effectif total de 688 familles : on peut donc compléter le tableau par les effectifs théoriques.

Nombre de garçons (famille de 7 enfants)	0	1	2	3	4	5	6	7
Probabilité	$\frac{1}{128}$	$\frac{7}{128}$	$\frac{21}{128}$	$\frac{35}{128}$	$\frac{35}{128}$	$\frac{21}{128}$	$\frac{7}{128}$	$\frac{1}{128}$
Effectif théorique	5,375	37,625	112,875	188,125	188,125	112,875	37,625	5,375

Sur ce tableau on constate que tous les effectifs théoriques sont supérieurs à 5.

5°/ Pratique du test.

Nombre de garçons (famille de 7 enfants)	0	1	2	3	4	5	6	7	
Effectif observé	8	40	110	188	190	106	38	8	
Effectif théorique	5.375	37.625	112.875	188.125	188.125	112.875	37.625	5.375	
Ecart absolu	2.625	2.375	2.875	0.125	1.875	6.875	0.375	2.625	

Carré	6.8906	5.6406	8.2656	0.0156	3.5156	47.2656	0.1406	6.8906	Khi-deux
Contribution au khi-deux	1.2820	0.1499	0.0732	0.0001	0.0187	0.4187	0.0037	1.2820	3.2283

La contribution au khi-deux s'obtient en divisant le carré de l'écart absolu par l'effectif théorique. χ^2 est la somme des contribution au khi-deux. La table du khi-deux à 7 degrés de liberté fournit, pour $\chi^2 = 3{,}2283$, une valeur de fonction de répartition compris entre 0,10 et 0,25, donc une probabilité critique comprise entre 0,75 et 0,90.

Décision mathématique.

La probabilité critique est supérieure à 5 % : on accepte H_0.

Conclusion pratique.

Jusqu'à plus ample information, compte tenu de la taille de l'échantillon, les données ne permettent pas de mettre en évidence une probabilité de naissance des garçons différence de la probabilité de naissance d'une fille. La différence n'est pas significative au seuil de 5 %.

6°/ Test de Kolmogorov-Smirnov.

Le grand avantage de ce test est qu'il s'applique même pour de petits effectifs dans les classes.

Les effectifs cumulés observés et théoriques, mettent en évidence des différences de fonction de répartition :

Nombre de garçons (famille de 7 enfants)	0	1	2	3	4	5	6	7
Effectif observé	8	40	110	188	190	106	38	8
Effectif théorique	5.375	37.625	112.875	188.125	188.125	112.875	37.625	5.375
Effectif observé cumulé	8	48	158	346	536	642	680	688
Effectif théorique cumulé	5.375	43	155.875	344	532.125	645	682.625	688
Ecart d'effectif cumulé	2.625	5	2.125	2	3.875	3	2.625	0
Ecart de fréquence cumulée	0.0038	0.0073	0.0031	0.0029	0.0056	0.0044	0.0038	0.0000

L'écart de fréquence cumulée s'obtient en divisant l'écart d'effectif cumulé par l'effectif total 688.

Le plus grand écart de fréquence cumulée d_{max} s'observe pour la 2e classe : $d_{max} = 0.0073$.

La table de Kolmogorov-Smirnov pour un effectif de 688 donne, pour $\alpha = 5$ %, une valeur seuil $d_{seuil} = \frac{1{,}36}{\sqrt{n}} = 0{,}0518$.

La valeur observée est inférieure à la valeur seuil : on accepte H_0.

Le test de Kolmogorov-Smirnov est plus puissant que le test de Khi-deux : il permet en principe de mettre en évidence des différences que le test de Pearson (Khi-deux) ne met pas en évidence.
Ici, la conclusion pratique est la même qu'avec le test Khi-deux : la différence observée n'est pas suffisante pour permettre d'affirmer que la probabilité de naître garçon est différente de 0,5.

Chapitre 15. Test Khi-deux : indépendance.

Exercices

Exercice 1. Dose et guérison.
Exercice 2. Antibiothérapie et infection.
Exercice 3. Diplôme et sexe.

Exercice 1. Dose et guérison.

Un traitement est administré à trois doses différentes D_1, D_2, D_3, à un groupe de sujets atteints d'une même maladie. L'expérimentation est faite en double aveugle. On compte le nombre de guérisons pour chaque dose. Les résultats sont les suivants :

	Sujets guéris	Sujets non guéris	Total
Dose D_1	30	30	60
Dose D_2	42	35	77
Dose D_3	58	31	89
Total	130	96	226

L'efficacité du traitement est-elle liée à la dose utilisée ?

1. Formuler l'hypothèse nulle testée.
2. Rappeler les conditions d'applications du test.
3. Interpréter les résultats obtenus.

Solution

HAUT

Exercice 2. Antibiothérapie et infection.

On désire tester l'effet d'une antibiothérapie systématique sur l'apparition d'une infection post-opératoire. Une expérience randomisée est conduite. Un premier groupe de patients reçoit une antibiothérapie. Un deuxième groupe reçoit un placebo. Les résultats sont les suivants :

	Sujets ayant reçu une antibiothérapie	Sujets ayant reçu un placebo
Infection post-opératoire	10	29
Pas d'infection post-opératoire	75	27

L'antibothérapie est-elle efficace dans la prévention des complications infectieuses ?

1. Formuler l'hypothèse nulle testée.
2. Rappeler les conditions d'applications du test.
3. Interpréter les résultats obtenus.

Solution

HAUT

Exercice 3. Diplôme et sexe.

Un échantillon aléatoire de 1367 diplômes d'université, délivrés en 1984, a donné la répartition suivante :

	Licence	Maîtrise	Doctorat
Masculin	534	144	22
Féminin	515	141	11

Solution

Le sexe et le niveau de diplôme obtenu sont-ils liés ?

1. Formuler l'hypothèse nulle testée.
2. Rappeler les conditions d'applications du test.
3. Interpréter les résultats obtenus.

HAUT

Chapitre 15. Test Khi-deux - indépendance.

Enoncés.

Exercice 1. Dose et guérison.

Un traitement est administré à trois doses différentes D_1, D_2, D_3, à un groupe de sujets atteints d'une même maladie. L'expérimentation est faite en double aveugle. On compte le nombre de guérisons pour chaque dose. Les résultats sont les suivants :

	Sujets guéris	Sujets non guéris	Total
Dose D_1	30	30	60
Dose D_2	42	35	77
Dose D_3	58	31	89
Total	130	96	226

L'efficacité du traitement est-elle liée à la dose utilisée ?

1. Formuler l'hypothèse nulle testée.
2. Rappeler les conditions d'applications du test.
3. Interpréter les résultats obtenus.

Solution.

1°/ Test utilisé.

S'agissant d'un problème d'indépendance de deux caractères qualitatifs, dose administrée et évolution de la maladie, nous utiliserons un test de χ^2.

Hypothèse (H_0) : les deux caractères sont indépendants.
Hypothèse (H_1) : les deux caractères ne sont pas indépendants.

Conditions d'application du test :

— Echantillon aléatoire indépendant.
— Tous les effectifs théoriques sont supérieurs ou égaux à 5.

2°/ Pratique du test.

Dans l'hypothèse (H_0), les deux caractères sont indépendants, donc la probabilité conjointe d'une modalité A_i et d'une modalité B_j est le produit des probabilités de A_i et de B_j.
La distribution théorique des effectifs, lorsque les effectifs marginaux théoriques sont choisis égaux aux

effectifs marginaux observés, est alors donnée par la formule :

$$c_{ij} = \frac{n_{i.}\, n_{.j}}{n}$$

formule dans laquelle :

c_{ij} est l'effectif théorique de la case de la *i*-ème ligne, *j*-ème colonne, du tableau de contingence ;
$n_{i.}$ est l'effectif marginal de la *i*-ème ligne ;
$n_{.j}$ est l'effectif marginal de la *j*-ème colonne ;
n est l'effectif total (*n* = 226).

Les effectifs théoriques sont donnés dans le tableau :

	Sujets guéris	Sujets non guéris	Total
Dose D_1	34,51	25,49	60
Dose D_2	44,29	32,71	77
Dose D_3	51,19	37,81	89
Total	130	96	226

Tous les effectifs théoriques sont supérieurs à 5. Dans chaque case du tableau de contingence 3 × 2, la variable aléatoire suit à peu près une loi de Gauss et la variable

$$\chi^2 = \sum_{(i,j)} \frac{(o_{ij} - c_{ij})^2}{c_{ij}} = \sum_{(i,j)} \frac{{o_{ij}}^2}{c_{ij}} - n$$

suit ce qu'on appelle une loi du Khi deux, ou loi de Pearson, à (3 – 1)(2 – 1) = 2 degrés de liberté.

La valeur observée de χ^2 est :

$$\chi^2_{obs} = 3{,}80$$

Le nombre de degrés de liberté du tableau de contingence 3 × 2 est 2 : ceci signifie que pour remplir les 6 = *l c* cases du tableau de contingence, étant fixés 4 = *l* + *c* – 1 des 5 effectifs marginaux, il suffit de choisir 2 des effectifs conjoints pour pouvoir remplir toutes les autres cases du tableau par addition ou soustraction.

La table de la loi de Pearson à 2 degrés de liberté donne :

$$F_2(2{,}77) = 0{,}750 \text{ et } F_2(4{,}61) = 0{,}900$$

Pour la valeur observée 3,80 de χ^2, la valeur de la fonction de répartition F_2 est donc comprise entre 0,750 et 0,900, donc la probabilité pour que χ^2 soit égal ou supérieur à 3,8 est comprise entre 0,10 et 0,25 : c'est la probabilité critique *p*. Elle est supérieure à 5 %, on ne peut pas rejeter l'hypothèse nulle (H_0).

3°/ Conclusion pratique.

Jusqu'à plus ample information, compte tenu de la taille de l'échantillon, on admettra que l'évolution de la maladie et la dose de médicament dans le traitement sont indépendants, au seuil de 5 %. Autrement dit, les données ne montrent **pas d'influence significative** de la dose de médicament sur l'évolution de la maladie.

Chapitre 15. Test Khi-deux - indépendance.

Enoncés.

Exercice 2. Antibiothérapie et infection.

On désire tester l'effet d'une antibiothérapie systématique sur l'apparition d'une infection post-opératoire. Une expérience randomisée est conduite. Un premier groupe de patients reçoit une antibiothérapie. Un deuxième groupe reçoit un placebo. Les résultats sont les suivants :

	Sujets ayant reçu une antibiothérapie	Sujets ayant reçu un placebo
Infection post-opératoire	10	29
Pas d'infection post-opératoire	75	27

L'antibothérapie est-elle efficace dans la prévention des complications infectieuses ?

1. Formuler l'hypothèse nulle testée.
2. Rappeler les conditions d'applications du test.
3. Interpréter les résultats obtenus.

Solution.

1°/ Test utilisé.

S'agissant d'un problème d'indépendance de deux caractères qualitatifs, antibiothérapie systèmatique et évolution de l'infection post-opératoire, nous utiliserons un test de χ^2.

Hypothèse (H_0) : les deux caractères sont indépendants.
Hypothèse (H_1) : les deux caractères ne sont pas indépendants.

Conditions d'application du test :

— Echantillon aléatoire indépendant.
— Tous les effectifs théoriques sont supérieurs ou égaux à 5.

2°/ Pratique du test.

Dans l'hypothèse (H_0), les deux caractères sont indépendants, donc la probabilité conjointe d'une modalité A_i et d'une modalité B_j est le produit des probabilités de A_i et de B_j.
La distribution théorique des effectifs, lorsque les effectifs marginaux théoriques sont choisis égaux aux

effectifs marginaux observés, est alors donnée par la formule :

$$c_{ij} = \frac{n_{i.}\, n_{.j}}{n}$$

formule dans laquelle :

c_{ij} est l'effectif théorique de la case de la *i*-ème ligne, *j*-ème colonne, du tableau de contingence ;
$n_{i.}$ est l'effectif marginal de la *i*-ème ligne ;
$n_{.j}$ est l'effectif marginal de la *j*-ème colonne ;
n est l'effectif total (*n* = 141).

Les effectifs théoriques sont donnés dans le tableau :

	Sujets ayant reçu une antibiothérapie	Sujets ayant reçu un placebo	Total
Infection post-opératoire	23,51	15,49	39
Pas d'infection post-opératoire	61,49	40,51	102
Total	85	56	141

Tous les effectifs théoriques sont supérieurs à 5. Dans chaque case du tableau de contingence 3 × 2, la variable aléatoire suit à peu près une loi de Gauss et la variable

$$\chi^2 = \sum_{(i,j)} \frac{(o_{ij} - c_{ij})^2}{c_{ij}} = \sum_{(i,j)} \frac{{o_{ij}}^2}{c_{ij}} - n$$

suit ce qu'on appelle une loi du Khi deux, ou loi de Pearson, à (2 – 1)(2 – 1) = 1 degré de liberté.

La valeur observée de χ^2 est :

$$\chi^2 = 27{,}02$$

Le nombre de degrés de liberté du tableau de contingence 2 × 2 est 1 : ceci signifie que pour remplir les 4 = *l c* cases du tableau de contingence, étant fixés 3 = *l* + *c* – 1 des 4 effectifs marginaux, il suffit de choisir 1 des effectifs conjoints pour pouvoir remplir toutes les autres cases du tableau par addition ou soustraction.

La table de la loi de Pearson à 1 degré de liberté donne :

$$F_1(7{,}88) = 0{,}995$$

Pour la valeur observée 27,02 de χ^2, la valeur de la fonction de répartition F_1 est donc supérieure à 0,995, donc la probabilité pour que χ^2 soit égal ou supérieur à 27,02 est inférieure à 0,005 : c'est la probabilité critique *p*. Elle est inférieure à 5 %, on peut rejeter l'hypothèse nulle (H_0).

3°/ Conclusion pratique.

Jusqu'à plus ample information, compte tenu de la taille de l'échantillon, on admettra que l'antibiothérapie systématique et l'absence d'infection post-opératoire sont liées ($p < 0{,}005$).

Remarquons toutefois que, d'une part, le fait de n'être pas statistiquement indépendants n'implique pas une relation de cause à effet entre les caractères et que, d'autre part, il subsiste toujours un risque d'erreur, ici très faible.

Chapitre 15. Test Khi-deux - indépendance.

Enoncés.

Exercice 3. Diplôme et sexe.

Un échantillon aléatoire de 1367 diplômes d'université, délivrés en 1984, a donné la répartition suivante :

	Licence	Maîtrise	Doctorat
Masculin	534	144	22
Féminin	515	141	11

Le sexe et le niveau de diplôme obtenu sont-ils liés ?

1. Formuler l'hypothèse nulle testée.
2. Rappeler les conditions d'applications du test.
3. Interpréter les résultats obtenus.

Solution.

1°/ Test utilisé.

S'agissant d'un problème d'indépendance de deux caractères qualitatifs, diplôme et sexe, nous utiliserons un test de χ^2.

Hypothèse (H_0) : les deux caractères sont indépendants.
Hypothèse (H_1) : les deux caractères ne sont pas indépendants.

Conditions d'application du test :

— Echantillon aléatoire indépendant.
— Tous les effectifs théoriques sont supérieurs ou égaux à 5.

2°/ Pratique du test.

Dans l'hypothèse (H_0), les deux caractères sont indépendants, donc la probabilité conjointe d'une modalité A_i et d'une modalité B_j est le produit des probabilités de A_i et de B_j.
La distribution théorique des effectifs, lorsque les effectifs marginaux théoriques sont choisis égaux aux effectifs marginaux observés, est alors donnée par la formule :

$$c_{ij} = \frac{n_{i.}\, n_{.j}}{n}$$

formule dans laquelle :

c_{ij} est l'effectif théorique de la case de la *i*-ème ligne, *j*-ème colonne, du tableau de contingence ;
$n_{i.}$ est l'effectif marginal de la *i*-ème ligne ;
$n_{.j}$ est l'effectif marginal de la *j*-ème colonne ;
n est l'effectif total (*n* = 1367).

Les effectifs théoriques sont donnés, à côté des effectifs observés, dans le tableau :

	Licence	Maîtrise	Doctorat	Total
Masculin	534 **537,16**	144 **145,94**	22 **16,90**	700
Féminin	515 **511,84**	141 **139,06**	11 **16,10**	667
Total	1049	285	33	1367

Tous les effectifs théoriques sont supérieurs à 5. Dans chaque case du tableau de contingence 3 × 2, la variable aléatoire suit à peu près une loi de Gauss et la variable

$$\chi^2 = \sum_{(i,j)} \frac{(o_{ij} - c_{ij})^2}{c_{ij}} = \sum_{(i,j)} \frac{{o_{ij}}^2}{c_{ij}} - n$$

suit ce qu'on appelle une loi du Khi deux, ou loi de Pearson, à (2 – 1)(3 – 1) = 2 degrés de liberté.

La valeur observée de χ^2 est :

$$\chi^2 = 3{,}25$$

Le nombre de degrés de liberté du tableau de contingence 2 × 3 est 2 : ceci signifie que pour remplir les 6 = *l c* cases du tableau de contingence, étant fixés 4 = *l* + *c* – 1 des 5 effectifs marginaux, il suffit de choisir 2 des effectifs conjoints pour pouvoir remplir toutes les autres cases du tableau par addition ou soustraction.

La table de la loi de Pearson à 2 degré de liberté donne :

$$F_2(2{,}77) = 0{,}750 \text{ et } F_2(4{,}61) = 0{,}900$$

Pour la valeur observée 3,25 de χ^2, la valeur de la fonction de répartition F_2 est donc comprise entre 0,750 et 0,900, donc la probabilité pour que χ^2 soit égal ou supérieur à 3,25 est comprise entre 0,10 et 0,25 : c'est la probabilité critique *p*. Elle est supérieure à 5 %, on ne peut pas rejeter l'hypothèse nulle (H_0), on l'accepte.

3°/ Conclusion pratique.

Jusqu'à plus ample information, compte tenu de la taille de l'échantillon, on admettra, au seuil de 5 %, que le diplôme obtenu et le sexe sont des caractères indépendants.

Chapitre 16. Test de Kolmogorov-Smirnov.

Exercices

Exercice 1. Equiprobabilité des sexes à la naissance.
Exercice 2. Influence de la place au départ d'une course.
Exercice 3. Durée de vie d'un appareil.
Exercice 4. Nombre de clients d'un antiquaire.

Exercice 1. Equiprobabilité des sexes à la naissance.

L'étude de 320 familles ayant 5 enfants s'est traduite par la distribution suivante :

Classe	A	B	C	D	E	F	Total
Nombre de garçons	5	4	3	2	1	0	
Nombre de filles	0	1	2	3	4	5	
Nombre de familles	18	56	110	88	40	8	320

On veut comparer cette distribution à la distribution théorique qui correspond à l'équiprobabilité de la naissance d'un garçon et de la naissance d'une fille.

1°/ Quelle est la loi de probabilité du nombre de garçons dans une famille de cinq enfants, dans l'hypothèse d'équiprobabilité des naissances des garçons et des filles.
2°/ La comparaison de la distribution observée à la distribution théorique s'effectue par un test de Kolmogorov-Smirnov. Que peut-on en conclure ?

Solution

HAUT

Exercice 2. Influence de la place au départ d'une course.

Au départ d'une course de chevaux, il y a habituellement huit positions de départ et la position numéro 1 est la plus proche de la palissade. On soupçonne qu'un cheval a plus de chances de gagner quand il porte un numéro faible, c'est-à-dire qu'il est plus proche de la palissade intérieure. Voici les données de 144 courses :

Numéro de départ	1	2	3	4	5	6	7	8
Nombre de victoires d'un cheval ayant ce numéro	29	19	18	25	17	10	15	11

1°/ Poser les hypothèses à tester (hypothèse nulle et hypothèse alternative).
2°/ La comparaison de la distribution observée à la distribution théorique s'effectue par un test de Kolmogorov-Smirnov. Que peut-on en conclure ?

Solution

HAUT

Exercice 3. Durée de vie d'un appareil.

On a testé un échantillon de 5 appareils. Leurs durées de vie en heures ont été {133 ; 169 ; 8 ; 122 ; 58}. On voudrait savoir si la durée de vie suit une loi de probabilité exponentielle. 1°/ Estimer le paramètre λ de la loi exponentielle $\lambda\, e^{-\lambda x}$. 2°/ Poser les hypothèses à tester (hypothèse nulle et hypothèse alternative). 3°/ La comparaison de la distribution observée à la distribution théorique s'effectue par un test de Kolmogorov-Smirnov. Que peut-on en conclure ?	Solution

HAUT

Exercice 4. Nombre de clients d'un antiquaire.

Un antiquaire pointilleux note le temps qu'il passe à attendre un client dans une journée continue de 10 heures à 18 heures. Il a ainsi noté les heures d'arrivée des clients :
{10h15 ; 10h40 ; 11h15 ; 11h27 ; 12h57 ; 13h03 ; 14h18 ; 15h23 ; 16h20 ; 16h24 ; 17h09}
Ces heures d'arrivée donnent, par différence, le temps d'attente, en minutes, entre deux clients :
{25 ; 35 ; 12 ; 90 ; 6 ; 75 ; 65 ; 57 ; 4 ; 45}
L'antiquaire sait que les clients arrivent indépendamment les uns des autres et il aimerait bien savoir si le nombre de clients qui arrivent dans une période de temps T ne dépend que de T, ou bien s'il dépend aussi de l'heure à partir de laquelle on mesure cette période T. Vous allez l'aider.

Solution

1°/ En supposant établi le fait que la somme de deux variables aléatoires indépendantes de lois gamma, de paramètres r et s, suit une **loi gamma** de paramètre $r + s$, montrer que, si le nombre de clients qui arrivent, indépendamment les uns des autres, dans une période de temps T ne dépend que de T, le temps d'attente entre deux clients suit une **loi exponentielle**, et que le nombre de clients qui arrivent pendant la période T suit une **loi de Poisson**.
2°/ Donner une estimation du temps d'attente moyen.
3°/ Poser les hypothèses à tester (hypothèse nulle et hypothèse alternative).
4°/ La comparaison de la distribution observée à la distribution théorique s'effectue par un test de Kolmogorov-Smirnov. Que peut-on en conclure ?

HAUT

Chapitre 16. Test de Kolmogorov-Smirnov.

Enoncés.

Exercice 1. Equiprobabilité des sexes à la naissance.

L'étude de 320 familles ayant 5 enfants s'est traduite par la distribution suivante :

Classe	A	B	C	D	E	F	Total
Nombre de garçons	5	4	3	2	1	0	
Nombre de filles	0	1	2	3	4	5	
Nombre de familles	18	56	110	88	40	8	320

On veut comparer cette distribution à la distribution théorique qui correspond à l'équiprobabilité de la naissance d'un garçon et de la naissance d'une fille.

1°/ Quelle est la loi de probabilité du nombre de garçons dans une famille de cinq enfants, dans l'hypothèse d'équiprobabilité des naissances des garçons et des filles.
2°/ La comparaison de la distribution observée à la distribution théorique s'effectue par un test de Kolmogorov-Smirnov. Que peut-on en conclure ?

Solution.

1°/ Loi de probabilité du nombre de garçons.

Dans l'hypothèse (H_0) d'équiprobabilité des sexes, pour un enfant qui naît, de deux choses l'une, ou bien c'est un garçon (succès : probabilité $p = \frac{1}{2}$), ou bien c'est une fille (échec : probabilité $q = 1 - p = \frac{1}{2}$). Le fait de déterminer le sexe de l'enfant qui naît est une épreuve de Bernoulli. Lorsqu'on répète cette épreuve de Bernoulli pour les cinq enfants de la famille, le nombre X de garçons dans la famille apparaît comme le nombre de succès dans une répétition d'épreuves de Bernoulli : c'est une variable aléatoire qui est somme de cinq variables aléatoires de Bernoulli indépendantes, sa loi de probabilité est une **loi binomiale** de paramètres $n = 5$, nombre de répétitions de l'épreuve, et $p = \frac{1}{2}$, probabilité du succès de l'épreuve.

$$P(X = k) = \binom{5}{k} \frac{1}{2^k} \frac{1}{2^{5-k}} = \frac{1}{32} \binom{5}{k}$$

2°/ Distribution théorique du nombre de familles dans l'hypothèse d'équiprobabilité.

La probabilité $P(X = k)$ est la probabilité pour qu'une famille de 5 enfants ait k garçons, dans l'hypothèse d'équiprobabilité des naissances des garçons et des filles. Cette probabilité est donnée aussi par le rapport

entre le nombre de cas favorables et le nombre de cas possibles, c'est-à-dire par le rapport entre le nombre théorique de familles ayant *k* garçons et le nombre de famille étudiées, fixé à 320. Si l'on appelle c_k le nombre théorique de famille de cinq enfants ayant *k* garçons sur un effectif théorique de 320 familles de cinq enfants, ce nombre c_k est donné par la formule :

$$\frac{c_k}{320} = P(X = k) = \frac{1}{32}\binom{5}{k}$$

$$\boxed{c_k = 10\binom{5}{k}}$$

Cette formule conduit à la distribution théorique suivante :

Classe	A	B	C	D	E	F	Total
Nombre de garçons	5	4	3	2	1	0	
Nombre de filles	0	1	2	3	4	5	
o_k	18	56	110	88	40	8	320
c_k	10	50	100	100	50	10	320

3°/ Test de Kolmogorov-Smirnov.

Les effectifs cumulés sont donc, en rangeant les nombres de garçons par ordre croissant :

Classe	F	E	D	C	B	A
Nombre de familles observées	8	48	136	246	302	320
Nombre de familles théoriques	10	60	160	260	310	320
Ecart absolu	2	12	24	14	8	0

La quatrième classe correspond à la plus grande différence de fonction de répartition :

$$D_{max} = \frac{24}{320} = 0{,}075$$

La table du test de Kolmogorov pour $\alpha = 0{,}05$ fournit, pour $n = 320$, la valeur seuil $\frac{1{,}36}{\sqrt{320}} = 0{,}076$.

$D_{max} < 0{,}076 \Rightarrow$ **on accepte l'hypothèse (H_0)** : "équiprobabilité des naissance des garçons et des filles".
Les données ne mettent pas en évidence une différence de probabilité des naissances des garçons et des filles (au seuil de 5 %).
En réalité, la proximité de D_{max} et du seuil ne permet pas de conclure de façon définitive.

On remarquera qu'avec le test de Khi-deux, on est amené à **rejeter l'hypothèse (H_0)** : la probabilité critique, pour ce test, est de l'ordre de grandeur de 5 % (comprise entre 2,5 % et 5 %), il y a donc, là aussi, doute sur la conclusion.

Conclusion : dans le doute, abstiens-toi !

Chapitre 16. Test de Kolmogorov-Smirnov.

Enoncés.

Exercice 2. Influence de la place au départ d'une course.

Au départ d'une course de chevaux, il y a habituellement huit positions de départ et la position numéro 1 est la plus proche de la palissade. On soupçonne qu'un cheval a plus de chances de gagner quand il porte un numéro faible, c'est-à-dire qu'il est plus proche de la palissade intérieure. Voici les données de 144 courses :

Numéro de départ	1	2	3	4	5	6	7	8
Nombre de victoires d'un cheval ayant ce numéro	29	19	18	25	17	10	15	11

1°/ Poser les hypothèses à tester (hypothèse nulle et hypothèse alternative).
2°/ La comparaison de la distribution observée à la distribution théorique s'effectue par un test de Kolmogorov-Smirnov. Que peut-on en conclure ?

Solution.

1°/ Hypothèses à tester.

(H_0) : équiprobabilité des numéros de départ.
(H_1) : non équiprobabilité des numéros de départ.

2°/ Test de Kolmogorov-Smirnov.

Pour un total de 144 courses, et une probabilité uniforme de victoire de $\frac{1}{8}$, les effectifs théoriques de victoires sont données dans le tableau suivant.

Numéro de départ	1	2	3	4	5	6	7	8
Nombre de victoires observées	29	19	18	25	17	10	15	11
Nombre de victoires théoriques	18	18	18	18	18	18	18	18

Les effectifs cumulés sont donc :

Numéro de départ	1	2	3	4	5	6	7	8
Nombre de victoires observées	29	48	66	91	108	118	133	144

Nombre de victoires théoriques	18	36	54	72	90	108	126	144
Ecart absolu	11	12	12	19	18	10	7	0

La plus grande différence de fonction de répartition est donc observée pour la 4e classe :

$$D_{max} = \frac{19}{144} = 0{,}132$$

Pour $n = 144$, la table du test de Kolmogorov pour $\alpha = 5\ \%$, donne une valeur seuil de $\frac{1{,}36}{\sqrt{144}} = 0{,}113$ et, pour $\alpha = 1\ \%$, une valeur seuil de $\frac{1{,}63}{\sqrt{144}} = 0{,}136$.

$D_{max} > 0{,}113 \Rightarrow$ on rejette (H_0). La différence observée est significative (au seuil de 5 %).
$D_{max} < 0{,}136 \Rightarrow$ la différence observée n'est pas significative (au seuil de 1 %).

Le test Khi deux donne le même résultat, avec une probabilité critique comprise entre 1 % et 2,5 %.

Chapitre 16. Test de Kolmogorov-Smirnov.

Enoncés.

Exercice 3. Durée de vie d'un appareil.

On a testé un échantillon de 5 appareils. Leurs durées de vie en heures ont été {133 ; 169 ; 8 ; 122 ; 58}. On voudrait savoir si la durée de vie suit une loi de probabilité exponentielle. 1°/ Estimer le paramètre λ de la loi exponentielle $\lambda\, e^{-\lambda x}$. 2°/ Poser les hypothèses à tester (hypothèse nulle et hypothèse alternative). 3°/ La comparaison de la distribution observée à la distribution théorique s'effectue par un test de Kolmogorov-Smirnov. Que peut-on en conclure ?	

Solution.

1°/ Estimation de λ.

L'espérance mathématique d'une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre λ est $E(X) = \frac{1}{\lambda}$. Pour estimer ponctuellement λ, il suffit d'estimer ponctuellement la moyenne, ce qui se fait en prenant la moyenne de l'échantillon, et de prendre l'inverse de cette estimation ponctuelle de la moyenne :

$$\frac{1}{\lambda^*} = \frac{1}{5}(133 + 169 + 8 + 122 + 58) = 98$$

$$\lambda^* = \frac{1}{98}.$$

2°/ Hypothèses à tester.

(H_0) : La durée de vie suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = \frac{1}{98}$.

(H_1) : La durée de vie ne suit pas une loi exponentielle de paramètre $\lambda = \frac{1}{98}$.

3°/ Test de Kolmogorov-Smirnov.

La fonction de répartition de la loi exponentielle est, pour les valeurs positives de x, donnée par la formpule :

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x} = 1 - e^{-\frac{x}{98}}$$

Durées de vie	8	58	122	133	169
Effectifs cumulés	1	2	3	4	5

Fréquences cumulées	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
Fonction de répartition théorique	0,078	0,447	0,712	0,743	0,822
Ecart absolu	0,122	0,047	0,112	0,057	0,178

Le plus grand écart est observé pour la 5e classe :

$$D_{max} = 0{,}178.$$

Pour $n = 5$, la table du test de Kolmogorov donne, pour $\alpha = 5$ %, la valeur seuil 0,5633.

$D_{max} < 0{,}5633 \Rightarrow$ on accepte (H_0). **La différence observée n'est pas significative (au seuil de 5 %)**.

Jusqu'à plus ample information, compte tenu de la taille de l'échantillon, la différence qu'on observe avec une loi exponentielle n'est pas significative (au seuil de 5 %).

Chapitre 16. Test de Kolmogorov-Smirnov.

Enoncés.

Exercice 4. Nombre de clients d'un antiquaire.

Un antiquaire pointilleux note le temps qu'il passe à attendre un client dans une journée continue de 10 heures à 18 heures. Il a ainsi noté les heures d'arrivée des clients : {10h15 ; 10h40 ; 11h15 ; 11h27 ; 12h57 ; 13h03 ; 14h18 ; 15h23 ; 16h20 ; 16h24 ; 17h09} Ces heures d'arrivée donnent, par différence, le temps d'attente, en minutes, entre deux clients : {25 ; 35 ; 12 ; 90 ; 6 ; 75 ; 65 ; 57 ; 4 ; 45} L'antiquaire sait que les clients arrivent indépendamment les uns des autres et il aimerait bien savoir si le nombre de clients qui arrivent dans une période de temps T ne dépend que de T, ou bien s'il dépend aussi de l'heure à partir de laquelle on mesure cette période T. Vous allez l'aider. 1°/ En supposant établi le fait que la somme de deux variables aléatoires indépendantes de lois gamma, de paramètres r et s, suit une **loi gamma** de paramètre $r + s$, montrer que, si le nombre de clients qui arrivent, indépendamment les uns des autres, dans une période de temps T ne dépend que de T, le temps d'attente entre deux clients suit une **loi exponentielle**, et que le nombre de clients qui arrivent pendant la période T suit une **loi de Poisson**. 2°/ Donner une estimation du temps d'attente moyen. 3°/ Poser les hypothèses à tester (hypothèse nulle et hypothèse alternative). 4°/ La comparaison de la distribution observée à la distribution théorique s'effectue par un test de Kolmogorov-Smirnov. Que peut-on en conclure ?	

Solution.

1°/ Distribution théorique.

Une réalisation d'évènements aléatoires successifs est appelée un **processus de Poisson** si, et seulement si, par définition :

1. Les évènements surviennent à des intervalles de temps (temps d'attente) indépendants.
2. Le nombre d'évènements survenant dans un intervalle de temps $[t\ ;\ t + T\ ]$, ne dépend que de T. (Si T est égal à 1, l'espérance mathématique du nombre d'évènements survenant dans le temps $[t\ ;\ t + 1]$ est appelé la **cadence** du processus).
3. Deux évènements ne peuvent survenir en même temps.

Les hypothèses faites montrent que l'antiquaire suppose que les temps d'attente de clients forment un processus de Poisson.

Dans ces conditions, si $p^0(h)$ est la probabilité qu'aucun évènement ne se produise pendant une durée h, la deuxième condition dit que $p^0(h)$ ne dépend que de h, et non de l'instant t à partir duquel est mesuré la

durée *h*. Alors si l'on considère trois instants *t*, *t* + *h*, *t* + *h* + *k*, la probabilité qu'il ne se passe rien entre *t* et *t* + *h* + *k* est, du fait de l'indépendance :

$$p_0(h + k) = p_0(h).\, p_0(k)$$

Et cette relation, caractéristique de l'exponentielle*, montre que $p^0(h)$ est une exponentielle, de la forme :

$$p_0(h) = e^{-c\,h}$$

* En effet, la relation $f(x + y) = f(x)\, f(y)$ donne, par dérivation par rapport à *x* ou par rapport à *y*, $f'(x + y) = f'(x)\, f(y) = f(x)\, f'(y)$

$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{f'(y)}{f(y)}$ = constante, et l'équation différentielle $f' + c\, f = 0$ a pour solution $f(x) = f(0)\, e^{-c\,x}$.

La relation $f(0) = (f(0))^2$ donne alors, pour $f \neq 0$, $f(0) = 1$ et $f(x) = e^{-c\,x}$.

La durée *T* séparant deux évènements consécutifs est une variable aléatoire : la probabilité que *T* soit supérieure à une valeur *t* est la probabilité qu'aucun évènement ne se produise dans le temps *t*. D'après la relation donnant $p^0(T)$, il est donné par la relation : $P(T > t) = e^{-c\,t}$ La fonction de répartition de *T* est donc $P(T < t) = 1 - e^{-c\,t}$ et la densité de probabilité de *T* est la dérivée $f(t) = c\, e^{-c\,t}$ Autrement dit, le temps séparant deux évènements consécutifs suit une **loi exponentielle** de paramètre *c*. Le temps d'attente entre deux clients suit une loi exponentielle.

Son espérance mathématique est $E(T) = \frac{1}{c}$ et la variable *c T* suit une loi gamma de paramètres *c* et *r* = 1.

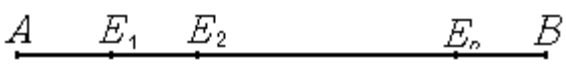
Rappelons que la **loi gamma** de paramètre λ et *a* est définie par

$$f_{(\lambda,\, a)}(x) = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} x^{a-1}\, e^{-\lambda\,x},\ x \geq 0,\ \text{avec}\ \Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-u}\, u^{x-1}\, du,\ \Gamma(n) = (n-1)\,!\ .$$

La durée *Y* séparant *k* + 1 évènements consécutifs est une variable aléatoire somme de *k* variables aléatoires $T_1, \ldots, T_k$ de même loi exponentielle. Donc la variable $c\,Y = c\,T_1 + \ldots + c\,T_k$, somme de *k* variables indépendantes de loi Γ_1, suit une loi Γ_k, ce qui résulte directement du fait que la fonction caractéristique d'une loi Gamma de paramètres λ et *a* est $\frac{\lambda^a}{(\lambda - i\,u)^a}$ et du fait que la fonction caractéristique d'une somme de variables aléatoires indépendantes est le produit des fonctions caractéristiques : si le paramètre l est le même, les *a* s'ajoutent on obtient encore une fonction caractéristique de loi Gamma. (voir aussi G. SAPORTA, Théories et Méthodes de la statistique, Technip, Paris, 1978, p.65).
La densité de probabilité de *Y* est donc :

$$f_k(y) = c\, e^{-c\,y}\, \frac{(c\,y)^{k-1}}{(k-1)\,!}$$

On en déduit que le nombre *N* d'évènements se produisant pendant une période de durée fixée *T* suit une **loi de Poisson** de paramètre *c T*.



En effet, appelons *AB* la période d'étude. La relation :

$$P\,(N = n) = P\,(N \geq n) - P\,(N \geq n + 1)$$

est évidente.
Or $P\,(N \geq n)$ est la probabilité que la durée AE_n soit inférieure ou égale à T.
Cette durée AE_n est somme de n durées $AE_1 + E_1E_2 + ... + E_{n-1}E_n$ indépendantes qui suivent toutes, comme le temps T séparant deux évènements consécutifs, introduit plus haut, une loi exponentielle de même paramètre c, de sorte que la durée AE_n suit la loi $f_n(y)$ et l'on a :

$$P\,(N \geq n) = \int_0^T c\,e^{-ct}\frac{(ct)^{n-1}}{(n-1)!}\,dt$$

La probabilité $P\,(N = n) = P\,(N \geq n) - P\,(N \geq n + 1)$ est alors donnée par la formule :

$$P\,(N = n) = \int_0^T c\,e^{-ct}\frac{(ct)^{n-1}}{(n-1)!}\,dt - \int_0^T c\,e^{-ct}\frac{(ct)^{n}}{n!}\,dt$$

Une intégration par parties, avec $u = \frac{(ct)^n}{n!}$, $du = c\frac{(ct)^{n-1}}{(n-1)!}\,dt$, $dv = c\,e^{-ct}\,dt$, $v = -e^{-ct}$, donne :

$$\int_0^T c\,e^{-ct}\frac{(ct)^{n}}{n!}\,dt = -\frac{(cT)^n}{n!}e^{-ct} + \int_0^T c\,e^{-ct}\frac{(ct)^{n-1}}{(n-1)!}\,dt$$

d'où :

$$P\,(N = n) = \frac{(cT)^n}{n!}e^{-cT}$$

Cette formule montre que le nombre d'évènements N survenant pendant une période T suit une **loi de Poisson** de paramètre $\lambda = c\,T$.

Pour $T = 1$, l'espérance de N est donnée par $E\,(N) = c$, ce qui montre que la constante c est la **cadence** du nombre de clients.

2°/ Estimation de la moyenne.

Si le temps d'attente suit une loi exponentielle $\lambda\,e^{-\lambda x}$, son espérance mathématique est $\frac{1}{\lambda}$, on peut l'estimer en prenant la moyenne de l'échantillon.

Estimation de la durée de vie moyenne $\frac{1}{\lambda}$: $\frac{1}{10}(25 + 35 + 12 + 90 + 6 + 75 + 65 + 57 + 4 + 45) = 41{,}4$, soit environ 40 minutes.

3°/ Hypothèses à tester.

(H^0) : Le temps d'attente suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = \frac{1}{41{,}4}$.

(H^1) : Le temps d'attente ne suit pas une loi exponentielle de paramètre $\lambda = \frac{1}{41{,}4}$.

4°/ Test de Kolmogorov-Smirnov.

Rangeons les temps d'attente observés par ordre croissant.
La fonction de répartition de la loi exponentielle de paramètre λ est $1 - e^{-\lambda x}$.
On obtient le tableau suivant :

x	4	6	12	25	35	45	57	65	75	90
Nombre de valeurs	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Fréquence cumulée	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00
$1 - e^{-\lambda x}$	0,10	0,14	0,26	0,46	0,58	0,68	0,76	0,80	0,85	0,89
Ecart absolu	0,00	0,06	0,04	0,06	0,08	0,08	0,04	0,00	0,05	0,11

La plus grande valeur de l'écart absolu s'observe pour la 10e classe :

$$D_{max} = 0,11$$

Pour n = 10 classes, la table de Kolmogorov pour $\alpha = 0,05$ donne une valeur seuil de 0,4087.

$D_{max} < 0,4087 \Rightarrow$ on accepte (H_0).
La différence qu'on observe avec la loi exponentielle n'est pas significative au seuil de 5 %.

Conclusion pratique.

Jusqu'à plus ample information, compte tenu de la taille de l'échantillon, nous pourrons admettre, au seuil de 5 %, que le temps d'attente entre deux clients suit une loi exponentielle de moyenne 41,4 minutes.

Nous pourrons rassurer l'antiquaire : le nombre de clients dans une période donnée ne dépend que de la durée de la période, plus longtemps il restera ouvert et plus de clients il aura.

Chapitre 17. Comparaison de deux moyennes - tests non paramétriques.

Exercices

Exercice 1. Effets d'un traitement.
Exercice 2. Contrôle de qualité des eaux.
Exercice 3. Classement de vins.
Exercice 4. Dosage sanguin.

Exercice 1. Effets d'un traitement.

Plusieurs sujets sont choisis au hasard dans une population et, parmi ceux-ci, certains sont tirés au sort pour recevoir un traitement (Groupe *A*), les autres devant servir de témoins (Groupe *B*).
Le traitement est censé modifier le résultat d'un dosage biologique.
Les résultats, exprimés en mg/l, sont les suivants :

Groupe *A*	6,50	5,50	8,00	7,00	6,00		
Groupe *B*	7,00	8,50	8,00	7,50	9,00	7,20	8,20

a) Quel test choisir ?
b) Préciser les hypothèses (H_0) et (H_1).
c) Rappeler, éventuellement, les conditions d'application du test utilisé.
d) Peut-on admettre ($\alpha = 5\%$), que le traitement modifie le paramètre biologique ?

Solution

HAUT

Exercice 2. Contrôle de qualité des eaux.

La concentration d'un produit dans les eaux d'une rivère fait l'objet d'un contrôle journalier. Les mesures sont effectuées sur des échantillons prélevés en deux points 1 et 2.

Point 1 (X)	5,32	5,00	5,14	5,00	5,35	5,17	5,11	5,26
Point 2 (Y)	5,33	5,13	5,16	5,09	5,49	5,32	5,24	5,23

1°/ Existe-t'il une différence significative entre les concentrations aux points 1 et 2 ?
2°/ On sait que le point 2 est en aval du point 1. On veut savoir si les rejets effectués, pendant une période de huit jours, par une usine située entre ces deux points, ont entraîné une élévation en produit polluant au point 2. Le tableau précédent correspond aux mesures effectuées pendant huit jours. Comment allez-vous modifier votre test dans ce cas-là ? Conclusion ?
Ne pas oublier de
a) Préciser les hypothèses (H_0) et (H_1).
b) Rappeler, éventuellement, les conditions d'application du test utilisé.
c) Interpréter les résultats et dire quelle conclusion peut en être tirée.

Solution

HAUT

Exercice 3. Classement de vins.

Pour comparer le vin de deux clos C et M, on a choisi au hasard différentes bouteilles, désignées par $C_1, \ldots, C_5$ et $M_1, \ldots, M_{10}$. Puis lors d'un test aveugle, un dégustateur les a classées suivant son ordre de préférence en commençant par la meilleure :
$M_7, M_5, M_3, M_{10}, M_2, M_6, C_3, M_1, C_5, M_4, M_9, C_4, M_8, C_1, C_2$.
Quelle est la probabilité critique (unilatérale) pour l'hypothèse nulle (H_0) selon laquelle les vins des deux clos sont de qualité équivalente ?

Solution

HAUT

Exercice 4. Dosage sanguin.

Plusieurs sujets sont choisis au hasard dans une population et, parmi ceux-ci, certains sont tirés au sort pour recevoir un certain traitement (A), les autres devant servir de témoins (B). Le traitement est censé rendre plus faible le résultat d'un dosage sanguin.

Les résultats sont indiqués dans le tableau suivant :

Résultats des dosages sanguins

Traités (A)	12	16	15		
Témoins (B)	17	15	18	20	19

1°/ Quel test choisir ?

2°/ Les conditions de validité sont-elles vérifiées ?

3°/ Formuler les hypothèses H_0 et H_1.

4°/ Interpréter les résultats du test . Quelle en est la conclusion ?

Solution

HAUT

Chapitre 17. Comparaison de deux moyennes - tests non paramétriques.

Enoncés.

Exercice 1. Effets d'un traitement.

Plusieurs sujets sont choisis au hasard dans une population et, parmi ceux-ci, certains sont tirés au sort pour recevoir un traitement (Groupe *A*), les autres devant servir de témoins (Groupe *B*).
Le traitement est censé modifier le résultat d'un dosage biologique.
Les résultats, exprimés en mg/l, sont les suivants :

Groupe *A*	6,50	5,50	8,00	7,00	6,00		
Groupe *B*	7,00	8,50	8,00	7,50	9,00	7,20	8,20

a) Quel test choisir ?
b) Préciser les hypothèses (H_0) et (H_1).
c) Rappeler, éventuellement, les conditions d'application du test utilisé.
d) Peut-on admettre ($\alpha = 5\%$), que le traitement modifie le paramètre biologique ?

Solution.

1°/ Choix d'un test.

On veut comparer des moyennes de populations à partir de deux échantillons.
Par hypothèse, les échantillons sont aléatoires et indépendants.
Il n'y a pas de raison a priori de supposer que les populations sont normales.
Les échantillons sont de petite taille.

Décision : on applique un **test de Wilcoxon**.

2°/ Hypothèses à tester.

On s'intéresse seulement au fait de savoir si le traitement modifie le paramètre biologique, non au fait qu'il l'augmente ou qu'il le diminue. Si l'on appelle μ_1 et μ_2 les moyennes, inconnues, des populations, traitée et témoin, on testera donc l'une contre l'autre les hypothèses :

$(H_0) : \mu_1 = \mu_2$
$(H_1) : \mu_1 \neq \mu_2$

(**Test bilatéral**).

3°/ Conditions d'application du test.

- Echantillons aléatoires indépendants : cette condition est pratiquement remplie si la population est suffisament nombreuse pour que les tailles d'échantillons apparaissent très petites devant la taille de la population.
- Il n'y a pas de raison a priori de supposer que les populations sont normales.
- Les échantillons sont de petite taille.

Les conditions d'application du test de Wilcoxon sont remplies.

4°/ Application du test.

a) Calcul des rangs.

On classe les valeurs mesurées pour les deux échantillons par ordre croissant, en soulignant les valeurs du premier échantillon (celui qui a la plus petite taille) et on calcule la somme des rangs des valeurs du premier échantillon (en ajoutant 0,5 pour chaque occurrence supplémentaire d'une valeur, ce qui évite d'avoir à faire des moyennes arithmétiques de sommes de rangs pour les diverses combinaisons possibles).

X	5,50	6,00	6,50	7,00	7,00	7,20	7,50	8,00	8,00	8,20	8,50	9,00	Total w_1
Rangs du 1er échantillon	1	2	3	4,5				8,5					19

b) Loi de Wilcoxon.

La somme W_1 de $n_1 = 5$ nombres différents choisis au hasard parmi les nombres de 1 à $n_1 + n_2 = 12$ prend des valeurs qui vont de 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15 à 8 + 9 + 10 + 11 + 12 = 50.
Les $\binom{12}{5} = 792$ combinaisons possibles de 5 nombres différents ont toutes la même probabilité si les deux populations sont homogènes (hypothèse (H_0)).
Une seule de ces 792 combinaisons, donne pour somme 15, c'est 1 + 2 + 3 + 4 + 5, de même que, de façon symétrique, une seule donne pour somme 50.
Une seule combinaison a pour somme 16 : 1 + 2 + 3 + 4 + 6.
Deux combinaisons ont pour somme 17 : 1 + 2 + 3 + 4 + 7, 1 + 2 + 3 + 5 + 6.
Trois combinaisons ont pour somme 18 : 1 + 2 + 3 + 4 + 8, 1 + 2 + 3 + 5 + 7, 1 + 2 + 4 + 5 + 6.
Cinq combinaisons ont pour somme 19 : 1 + 2 + 3 + 4 + 9, 1 + 2 + 3 + 5 + 8, 1 + 2 + 3 + 6 + 7, 1 + 2 + 4 + 5 + 7, 1 + 3 + 4 + 5 + 6.

Au total, 12 combinaisons de cinq nombres différents ont une somme inférieure ou égale à 19, sur les 792 combinaisons possibles.
En prenant une combinaison au hasard, on a donc une probabilité $\frac{12}{792} \approx 1{,}515 \times 10^{-2}$ de trouver une valeur aussi basse que 19 comme somme des rangs, lorsque l'hypothèse (H_0) est vérifiée.

A cette probabilité unilatérale correspond, par symétrie, une probabilité critique bilatérale de $3{,}3 \times 10^{-2}$, égale au double de la probabilité critique unilatérale.

Si l'on regarde la table de la loi de Wilcoxon correspondant à $n_1 = 5$ et $n_2 = 7$, on lit effectivement, pour $W_1 = 19$, une probabilité critique unilatérale de 0,0152, ce qui, d'un coup, valide notre calcul et nous indique comment est calculée cette table de la loi de Wilcoxon.

c) Décision mathématique.

La probabilité critique bilatérale $p = 3 \times 10^{-2}$ est inférieure au seuil $\alpha = 5\%$: on rejette l'hypothèse (H_0), et on accepte l'hypothèse (H_1).

d) Conclusion pratique.

Jusqu'à plus ample information, compte tenu de la taille de l'échantillon, nous admettrons que le traitement appliqué modifie de façon significative le paramètre biologique ($p = 3 \times 10^{-2}$).

Chapitre 17. Comparaison de deux moyennes - tests non paramétriques.

Enoncés.

Exercice 2. Contrôle de qualité des eaux.

La concentration d'un produit dans les eaux d'une rivère fait l'objet d'un contrôle journalier. Les mesures sont effectuées sur des échantillons prélevés en deux points 1 et 2.

Point 1 (X)	5,32	5,00	5,14	5,00	5,35	5,17	5,11	5,26
Point 2 (Y)	5,33	5,13	5,16	5,09	5,49	5,32	5,24	5,23

1°/ Existe-t'il une différence significative entre les concentrations aux points 1 et 2 ?
2°/ On sait que le point 2 est en aval du point 1. On veut savoir si les rejets effectués, pendant une période de huit jours, par une usine située entre ces deux points, ont entraîné une élévation en produit polluant au point 2. Le tableau précédent correspond aux mesures effectuées pendant huit jours. Comment allez-vous modifier votre test dans ce cas-là ? Conclusion ?
Ne pas oublier de
a) Préciser les hypothèses (H_0) et (H_1).
b) Rappeler, éventuellement, les conditions d'application du test utilisé.
c) Interpréter les résultats et dire quelle conclusion peut en être tirée.

Solution.

1°/ Test bilatéral.

a) Choix d'un test.

On veut comparer des moyennes de populations à partir de deux échantillons.
Par hypothèse, les échantillons sont aléatoires et indépendants.
Il n'y a pas de raison a priori de supposer que les populations sont normales.
Les échantillons sont de petite taille.

Décision : on applique un **test de Wilcoxon**.

b) Hypothèses à tester.

On s'intéresse seulement au fait de savoir s'il y a une modification de la concentration en produit polluant, non au fait qu'elle augmente ou qu'elle diminue. Si l'on appelle μ_1 et μ_2 les moyennes, inconnues, des populations, au point 1 et au point 2, on testera donc l'une contre l'autre les hypothèses :

$(H_0) : \mu_1 = \mu_2$

$(H_1) : \mu_1 \neq \mu_2$

(**Test bilatéral**).

c) Conditions d'application du test.

- Echantillons aléatoires indépendants : cette condition est pratiquement remplie si la population est suffisament nombreuse pour que les tailles d'échantillons apparaissent très petites devant la taille de la population.
- Il n'y a pas de raison a priori de supposer que les populations sont normales.
- Les échantillons sont de petite taille.

Les conditions d'application du test de Wilcoxon sont remplies.

d) Application du test.

— Calcul des rangs.

On classe les valeurs mesurées pour les deux échantillons par ordre croissant, en soulignant les valeurs du premier échantillon et on calcule la somme des rangs des valeurs du premier échantillon (en ajoutant 0,5 pour chaque occurrence supplémentaire d'une valeur, ce qui évite d'avoir à faire des moyennes arithmétiques de sommes de rangs pour les diverses combinaisons possibles).

Concentration	5,00	5,00	5,09	5,11	5,13	5,14	5,16	5,17	5,23	5,24	5,26	5,32	5,32	5,33	5,35	5,49	Total w_1
Rangs du 1er échantillon	1,5	1,5		4		6		8			11	12,5			15		59,5

— Loi de Wilcoxon.

La table des seuils de la loi de Wilcoxon, fournit, pour $n_1 = 8$ et $n_2 = 8$, la valeur seuil 49,0.
On calcule alors $n_1 (n_1 + n_2 + 1) - 49{,}0 = 87{,}0$.
L'intervalle d'acceptation de l'hypothèse (H_0) est donc [49,0 ; 87,0], pour $\alpha = 5$ %.

— Décision mathématique.

La valeur observée 59,5 appartient à l'intervalle d'acceptation [49,0 ; 87,0] : on accepte l'hypothèse (H_0).

— Conclusion pratique.

Jusqu'à plus ample information, compte tenu de la taille des échantillons, il n'y a pas de différence significative de concentration en produit polluant entre les prélèvements aux points 1 et 2 ($\alpha = 5$ %).

2°/ Test unilatéral.

a) Choix d'un test.

On veut comparer des moyennes de populations à partir de deux échantillons.
Par hypothèse, les échantillons sont aléatoires et indépendants.

Il n'y a pas de raison a priori de supposer que les populations sont normales.
Les échantillons sont de petite taille.

Décision : on applique un **test de Wilcoxon**.

b) Hypothèses à tester.

On s'intéresse au fait de savoir s'il y a une augmentation de la concentration en produit polluant, du point 1 au point 2.
Si l'on appelle μ_1 et μ_2 les moyennes, inconnues, des populations, au point 1 et au point 2, on testera donc l'une contre l'autre les hypothèses :

$(H_0) : \mu_1 = \mu_2$
$(H_1) : \mu_1 < \mu_2$

(**Test unilatéral**).
On admettra l'hypothèse H_1 pour les faibles valeurs de w_1.

c) Conditions d'application du test.

- Echantillons aléatoires indépendants : cette condition est pratiquement remplie si la population est suffisament nombreuse pour que les tailles d'échantillons apparaissent très petites devant la taille de la population.
- Il n'y a pas de raison a priori de supposer que les populations sont normales.
- Les échantillons sont de petite taille.

Les conditions d'application du test de Wilcoxon sont remplies.

d) Application du test.

— Calcul des rangs.

On classe les valeurs mesurées pour les deux échantillons par ordre croissant, en soulignant les valeurs du premier échantillon et on calcule la somme des rangs des valeurs du premier échantillon (en ajoutant 0,5 pour chaque occurrence supplémentaire d'une valeur, ce qui évite d'avoir à faire des moyennes arithmétiques de sommes de rangs pour les diverses combinaisons possibles).

Concentration	5,00	5,00	5,09	5,11	5,13	5,14	5,16	5,17	5,23	5,24	5,26	5,32	5,32	5,33	5,35	5,49	Total w_1
Rangs du 1er échantillon	1,5	1,5		4		6		8			11	12,5			15		59,5

— Loi de Wilcoxon.

La table des seuils utilisée précédemment donne seulement les valeurs de W_1 ayant une fonction de répartition égale à 0,025 : elle est donc insuffisante pour un test unilatéral avec un seuil de 5 %.
Il faut utiliser une table donnant les valeurs de W_1 ayant une fonction de répartition égale à 0,05, ou une table complète donnant la probabilité critique correspondant à 59,5.

La table complète de la loi de Wilcoxon, fournit, pour $n_1 = 8$, $n_2 = 8$ et $w_1 = 59{,}5$, par interpolation linéaire, la probabilité critique unilatérale 0,21.

— Décision mathématique.

La probabilité critique 0,21 est supérieure à 5 % : on accepte l'hypothèse (H_0).

— Conclusion pratique.

Jusqu'à plus ample information, compte tenu de la taille des échantillons, il n'y a pas d'augmentation significative de concentration en produit polluant entre les prélèvements aux points 1 et 2 (α = 5 %).

3°/ Séries appariées.

Lorsqu'on ajoute l'hypothèse supplémentaire que les eaux mesurées au point 2 sont les mêmes que les eaux mesurées au point 1 après passage vers l'usine contrôlée, les deux séries de mesures apparaissent comme des séries appariées.
Il faut alors modifier le test en utilisant le **test des signes et des rangs de Wilcoxon**.

Soit μ la médiane de la population des mesures $X_1 - X_2$.
On testera l'une contre l'autre les hypothèses :

(H_0) : μ = 0
(H_1) : μ < 0

(**Test unilatéral**).

La fonction discriminante est la somme W_+ des rangs des valeurs positives de $X_1 - X_2$, dans la suite ordonnée par ordre croissant des valeurs de $|X_1 - X_2|$.

On rejettera l'hypothèse H_0 et on admettra l'hypothèse H_1 pour les petites valeurs de W_+.

x_1	x_2	$\|x_1 - x_2\|$	*Signe*	*Tri*	$\|x_1 - x_2\|$	*Signe*	*Rang*	W_+	W_-
5.32	5.33	0.01	-1		0.01	-1	1	0	1
5.00	5.13	0.13	-1		0.02	-1	2	0	2
5.14	5.16	0.02	-1		0.03	1	3	3	0
5.00	5.09	0.09	-1		0.09	-1	4	0	4
5.35	5.49	0.14	-1		0.13	-1	5.5	0	5.5
5.17	5.32	0.15	-1		0.13	-1	5.5	0	5.5
5.11	5.24	0.13	-1		0.14	-1	7	0	7
5.26	5.23	0.03	1		0.15	-1	8	0	8
							Somme	3	33

Dans la table de la loi de W_+, on lit, pour n = 8, et pour le test unilatéral, une valeur seuil de 5 (pour α = 5 %).
La valeur observée $w_+ = 3$ est inférieure au seuil : on rejette H_0.

— Conclusion pratique.

Jusqu'à plus ample information, compte tenu de la taille des échantillons, il existe une **augmentation significative de concentration en produit polluant** entre les prélèvements aux points 1 et 2 ($\alpha = 5\ \%$).

Chapitre 17. Comparaison de deux moyennes - tests non paramétriques.

Enoncés.

Exercice 3. Classement de vins.

Pour comparer le vin de deux clos C et M, on a choisi au hasard différentes bouteilles, désignées par C_1, ... , C_5 et M_1, ... , M_{10}. Puis lors d'un test aveugle, un dégustateur les a classées suivant son ordre de préférence en commençant par la meilleure : M_7, M_5, M_3, M_{10}, M_2, M_6, C_3, M_1, C_5, M_4, M_9, C_4, M_8, C_1, C_2. Quelle est la probabilité critique (unilatérale) pour l'hypothèse nulle (H_0) selon laquelle les vins des deux clos sont de qualité équivalente ?	

Solution.

1°/ Choix d'un test.

S'agissant d'un classement, nous utiliserons un test sur les rangs (test de Wilcoxon). Les échantillons sont indépendants et aléatoires par hypothèse.

2°/ Test de Wilcoxon.

Pour faciliter le calcul de la somme des rangs, nous rangerons les vins en commençant par le pire, selon le dégustateur :

la somme des rangs du clos C est $w_1 = 1 + 2 + 4 + 7 + 9 = 23$.

La table des seuils à 0,025 de la loi de Wilcoxon pour $n_1 = 5$ et $n_2 = 10$, donne le seuil 23,7. Nous en déduisons que la probabilité critique unilatérale pour l'hypothèse (H_0) est un peu inférieure à 0,025.

Le calcul exact avec la table complète (5; 10) donne, avec $\binom{15}{5} = 3003$:

w_1	Nombre de Combinaisons	Fonction de Répartition
15	1	3.33×10^{-4}
16	1	6.66×10^{-4}
17	2	1.33×10^{-3}
18	3	2.33×10^{-3}
19	5	4.00×10^{-3}

20	7	6.33×10^{-3}
21	10	9.66×10^{-3}
22	13	1.40×10^{-2}
23	18	2.00×10^{-2}
24	23	2.76×10^{-2}
25	30	3.76×10^{-2}
26	36	4.96×10^{-2}
27	45	6.46×10^{-2}
28	53	8.23×10^{-2}
29	63	1.03×10^{-1}
30	72	1.27×10^{-1}

et dans ce tableau, nous voyons que la probabilité critique unilatérale est $p = 2.00 \times 10^{-2}$.

Décision mathématique.

La probabilité critique est inférieure à 5 % lorsque le test est unilatéral : nous rejetons l'hypothèse (H_0) pour accepter l'hypothèse (H_1) : pour le dégustateur, le vin du clos *C* est moins bon que le vin du clos *M*.

Conclusion pratique.

Jusqu'à plus ample information, compte tenu de la taille des échantillons, nous considérerons que le dégustateur préfère, en moyenne, le vin du clos *M* ($p = 0{,}02$).

Chapitre 17. Comparaison de deux moyennes - tests non paramétriques.

Enoncés.

Exercice 4. Dosage sanguin.

Plusieurs sujets sont choisis au hasard dans une population et, parmi ceux-ci, certains sont tirés au sort pour recevoir un certain traitement (A), les autres devant servir de témoins (B). Le traitement est censé rendre plus faible le résultat d'un dosage sanguin.
Les résultats sont indiqués dans le tableau suivant :

Résultats des dosages sanguins

Traités (A)	12	16	15		
Témoins (B)	17	15	18	20	19

1°/ Quel test choisir ?
2°/ Les conditions de validité sont-elles vérifiées ?
3°/ Formuler les hypothèses H_0 et H_1.
4°/ Interpréter les résultats du test . Quelle en est la conclusion ?

Solution.

1°/ Choix du test.

Le problème posé est de comparer les moyennes de deux populations à partir de deux échantillons pour lesquels l'énoncé fournit toutes les valeurs de variable aléatoire. Dans la mesure où rien ne laisse supposer que l'hypothèse normale soit justifiée, nous utiliserons un **test de Wilcoxon**. La petite taille des échantillons empêche d'utiliser le test de Mann et Whitney, approximation normale du test de Wilcoxon.

La phrase "Le traitement est censé rendre plus faible le résultat d'un dosage sanguin." de l'énoncé impose que le test soit un **test unilatéral**.

2°/ Conditions de validité du test.

Les deux échantillons sont tirés au sort. On peut supposer que la population dans laquelle ils sont tirés est de taille suffisante pour que les échantillons soient considérés comme aléatoires et indépendants, bien que le tirage soit exhaustif (sans remise). Les conditions d'applications du test de Wilcoxon sont alors réunies :

— On connaît les valeurs de variable aléatoire dans les deux échantillons.
— Les échantillons sont aléatoires et indépendants.

3°/ Hypothèses à tester.

Nous appellerons "Echantillon 1" l'échantillon de taille $n_1 = 3$ constitué des sujets traités (groupe A), et

"Echantillon 2", l'échantillon de taille $n_2 = 5$ constitué des sujets témoins (groupe B).

L'échantilllon 1 est tiré d'une population de moyenne μ_1 inconnue, d'écart-type σ_1 inconnu et de loi inconnue.
L'échantilllon 2 est tiré d'une population de moyenne μ_2 inconnue, d'écart-type σ_2 inconnu et de loi inconnue.

Pour répondre à la question :

> "Peut-on considérer, en acceptant un risque d'erreur maximum de 5 %, que l'échantillon 1 est tiré d'une population de moyenne μ_1 égale à la moyenne μ_2 de la population dont est tiré l'échantillon 2 ?"

nous testerons l'une contre l'autre les hypothèses :
$H_0 : \mu_1 = \mu_2$
$H_1 : \mu_1 < \mu_2$
(test unilatéral à gauche).

4°/ Pratique du test.

Le test de Wilcoxon est un test sur les rangs. Commençons donc par ranger les diverses valeurs obtenues par ordre croissant, en soulignant les valeurs correspondant au premier échantillon et en notant leurs rangs dans la série :

Valeurs	12	15	15	16	17	18	19	20
Rangs	1	2,5		4				

Dans l'hypothèse H_0, les huit valeurs sont des valeurs d'une même variable aléatoire parente. Les rangs qu'elles occupent sont comme les numéros de jetons que l'on tire au hasard et simultanément dans une urne contenant 8 jetons numérotés de 1 à 8. On tire au hasard 3 jetons dans l'urne : leur somme est une variable aléatoire W_1.
Il y a $\binom{8}{3} = 56$ combinaisons possibles, chacune ayant la même probabilité.

Il y a une seule combinaison de somme 6, c'est le tirage des jetons 1, 2, 3. Donc $P(W_1 = 6) = \frac{1}{56} = 1{,}79 \times 10^{-2}$.
Il y a une seule combinaison de somme 7, c'est le tirage des jetons 1, 2, 4.Donc $P(W_1 = 7) = \frac{1}{56} = 1{,}79 \times 10^{-2}$.
Il y a deux combinaisons de somme 8, les tirages {1, 2, 5} et {1, 3, 4}. Donc $P(W_1 = 8) = \frac{2}{56} = 3{,}57 \times 10^{-2}$.

La fonction de répartition de W_1 vérifie donc $F(6) = \frac{1}{56}$, $F(7) = \frac{2}{56}$, $F(8) = \frac{4}{56}$. Par interpolation linéaire entre 7 et 8, nous prendrons donc :

$$F(7{,}5) = \frac{3}{56}.$$

La probabilité d'avoir une somme aussi petite ou plus petite que 7,5 est la fonction de répartition $F(7{,}5) = \frac{3}{56} = 5{,}36 \times 10^{-2}$. C'est la valeur de la probabilité critique du test unilatéral de Wilcoxon.

Probabilité critique : 0,054

Décision mathématique.

Comme la probabilité critique est supérieure à 5 %, on ne peut pas rejeter l'hypothèse H_0 : on décide de l'accepter, sinon on prendrait un risque d'erreur supérieur au seuil autorisé.

Conclusion pratique.

Jusqu'à plus ample information, compte tenu de la taille des échantillons, les données ne permettent pas de mettre en évidence une diminution significative du dosage sanguin sous l'influence du traitement.

Chapitre 18. Comparaison de deux moyennes - test de Gauss.

Exercices

Exercice 1. Cabine pour skieurs.
Exercice 2. Action d'un analgésique.
Exercice 3. Capacité vitale et vapeurs nocives.
Exercice 4. Concentration d'un élément.

Exercice 1. Cabine pour skieurs.

Une cabine pour skieurs est conçue pour une charge limite de 5 tonnes. La capacité est limitée à 50 personnes. On suppose que la masse moyenne de tous les usagers (équipement compris) de la cabine est de 95 kg et l'écart-type de 16 kg. Quelle est la probabilité que la masse totale d'un groupe de 50 personnes choisies au hasard soit plus élevé que la charge limite de 5 tonnes ?	Solution

HAUT

Exercice 2. Action d'un analgésique.

L'action d'un analgésique sur une certaine population est parfaitement connue : il a un effet positif dans 75 % des cas.On tire au hasard 200 sujets de cette population. On observe alors 136 résultats positifs. Que peut-on penser, avec un risque α fixé à 5 % , puis à 1 % ?	Solution

HAUT

Exercice 3. Capacité vitale et vapeurs nocives.

On a mesuré la capacité vitale de 100 sujets sains : on a observé parmi eux 26 sujets ayant une capacité vitale inférieure à 4,15 litres. Sur 100 sujets exposés pendant plus de 5 ans à des vapeurs nocives, on a observé 40 sujets ayant une capacité vitale supérieure ou égale à 4,15 litres. La proportion de sujets ayant une capacité vitale inférieure à 4,15 litres diffère-t-elle de façon significative chez les sujets exposés et chez les sujets sains pour un risque α fixé à 5 % ?	Solution

HAUT

Exercice 4. Concentration d'un élément.

Un produit de référence synthétique a été préparé en vue de l'emploi d'une méthode d'analyse relative. Exprimée en poucentage, la teneur visée pour l'élément intéressant est $\mu_0 = 25{,}60$. Pour vérifier la préparation du produit, on effectue une série de $n = 40$ dosages : la valeur moyenne observée est $\overline{x} = 25,58$ et l'écart-type est $s_e = 0{,}2$.

1°/ Peut-on admettre que la concentration de l'élément dans le produit est μ_0 ? (On fixera $\alpha = 0{,}05$).

2°/ Calculer le risque β de deuxième espèce d'admettre que la teneur en élément dans le produit est égale à la valeur visée μ_0 alors que sa valeur réelle est $\mu_1 = 25{,}70$.

Solution

HAUT

Chapitre 18. Comparaison de deux moyennes : test de Gauss.

Enoncés.

Exercice 1. Cabine pour skieurs.

Une cabine pour skieurs est conçue pour une charge limite de 5 tonnes. La capacité est limitée à 50 personnes. On suppose que la masse moyenne de tous les usagers (équipement compris) de la cabine est de 95 kg et l'écart-type de 16 kg. Quelle est la probabilité que la masse totale d'un groupe de 50 personnes choisies au hasard soit plus élevé que la charge limite de 5 tonnes ?	

Solution.

1°/ Formulation du problème.

Un échantillon de taille 50 peut être considéré comme un **échantillon de grande taille** : dans ces conditions, la moyenne $\overline{X}$ d'un échantillon de taille 50 suit à peu près une **loi normale** de moyenne μ_0 = 95 kg et d'écart-type $\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{16}{\sqrt{50}} = 2{,}26$.

Dire que la masse totale d'un groupe de 50 personnes choisies au hasard est plus élevé que la charge limite de 5 tonnes, c'est dire que sa moyenne est supérieure à 100 kg.

2°/ Résolution du problème.

La table de la loi normale permet de résoudre le problème.

$$P(\overline{X} > 100) = 1 - P(\overline{X} \leq 100) = 1 - F\left(\frac{100-95}{16} \times \sqrt{50}\right) = 1 - F(2{,}21) = 1 - 0{,}9854 = 0{,}0146$$

La probabilité de surcharge, en prenant 50 personnes au hasard, est de 1 chance et demi sur 100.

S'agissant d'une affaire de sécurité, un tel risque est inacceptable : il faut prévoir un dispositif de mesure limitant la charge.

Chapitre 18. Comparaison de deux moyennes : test de Gauss.

Enoncés.

Exercice 2. Action d'un analgésique.

L'action d'un analgésique sur une certaine population est parfaitement connue : il a un effet positif dans 75 % des cas.On tire au hasard 200 sujets de cette population. On observe alors 136 résultats positifs. Que peut-on penser, avec un risque α fixé à 5 % , puis à 1 % ?	

Solution.

1°/ Position du problème.

Pour une personne de la population, la probabilité de réagir positivement à l'analgésique est $p = 0{,}75$. Regarder si une personne choisie réagit positivement ou non à l'analgésique constitue une **épreuve de Bernoulli**. Lorsqu'on répète 200 fois cette épreuve de Bernoulli (en supposant que la taille 200 est faible devant la taille de la population, pour que la probabilité de réaction positive reste égale à 0,75) le nombre de succès X suit une **loi binomiale** de paramètres $n = 200$ et $p = 0{,}75$.

La probabilité d'observer un résultat aussi petit que 136 résultats positifs, alors qu'on en attend, en moyenne, 150, est donnée par :

$$P\,(X \leq 136) = \sum_{k=0}^{k=136} \binom{200}{k} 0{,}75^{\,k}\, 0{,}25^{\,200-k}$$

Même une calculette ancienne comme *HP48SX* permet de calculer rapidement une telle expression : on trouve 0,01542.

2°/ Résolution du problème à l'aide d'une table.

La variance $n\,p\,q = 37{,}5$ de X est suffisamment grande (supérieure à 20) pour que l'on puisse approcher la loi binomiale par une **loi de Gauss** de moyenne $n\,p = 150$ et de variance $n\,p\,(1-p) = 37{,}5$. Avec la correction de continuité, on obtient :

$$P\,(X \leq 136) = F\left(\frac{136{,}5-150}{\sqrt{37{,}5}}\right) = F\,(-2{,}20) = 1 - F\,(2{,}20) = 1 - 0{,}9861 = 0{,}0139$$

La valeur est plus faible que la valeur donnée par la loi binomiale, elle serait encore plus faible (0,011) si l'on ne tenait pas compte de la correction de continuité.

3°/ Conclusion pratique.

Quelle que soit la méthode utilisée pour la déterminer, la probabilité critique que l'on trouve (1,4 % ou 1,5

%) est comprise entre 1 % et 5 %. C'est suffisant pour conclure :

— Au risque de **5 %**, la différence observée apparaît **significative** : on accepte l'hypothèse que l'échantillon est tiré d'une population où la proportion de gens réagissant positivement à l'antalgique est inférieure à la valeur de référence de 75 pour 100.

— Au risque de **1 %**, la différence observée n'est **pas significative** : la différence n'est pas assez grande pour qu'on puisse considérer que l'échantillon est tiré d'une population où la proportion de gens réagissant positivement à l'antalgique est inférieure à la valeur de référence de 75 pour 100.

Chapitre 18. Comparaison de deux moyennes : test de Gauss.

Enoncés.

Exercice 3. Capacité vitale et vapeurs nocives.

On a mesuré la capacité vitale de 100 sujets sains : on a observé parmi eux 26 sujets ayant une capacité vitale inférieure à 4,15 litres. Sur 100 sujets exposés pendant plus de 5 ans à des vapeurs nocives, on a observé 40 sujets ayant une capacité vitale supérieure ou égale à 4,15 litres. La proportion de sujets ayant une capacité vitale inférieure à 4,15 litres diffère-t-elle de façon significative chez les sujets exposés et chez les sujets sains pour un risque α fixé à 5 % ?	

Solution.

1°/ Position du problème.

Le problème est de savoir si l'on peut admettre ou non que les proportions observées $f_1 = 0{,}26$ et $f_2 = 0{,}60$ de personnes ayant une capacité vitale inférieure ou égale à 4,15 litres sont significatives d'une **augmentation** entre les proportions p_1 et p_2 de personnes ayant une capacité vitale inférieure ou égale à 4,15 litres dans la population saine et dans la population exposée. On teste donc l'une contre l'autre les hypothèses :
$(H_0)\ p_1 = p_2$
$(H_1)\ p_1 < p_2$
(**test unilatéral à droite**)

2°/ Choix du test.

On appelle :
— p_1 la proportion des gens ayant une capacité vitale inférieure ou égale à 4,15 litres dans la population saine,
— p_2 la proportion des gens ayant une capacité vitale inférieure ou égale à 4,15 litres dans la population exposée.
Dans un échantillon de 100 personnes tirées de la population saine, le nombre X_1 de personnes ayant une capacité vitale inférieure ou égale à 4,15 litres suit une **loi binomiale** de paramètres $n_1 = 100$, p_1 inconnu. Si l'échantillon est représentatif, la proportion p_1 est sans doute du même ordre de grandeur que la proportion $f_1 = 0{,}26$ observée. La variance $n_1 p_1 q_1$ est alors du même ordre de grandeur que $n_1 f_1 (1 - f_1) = 26 \times 0{,}74 = 19$.
Comme les nombres d'individus $n_1 p_1$ et $n_1 q_1$ sont de l'ordre de grandeur de $n_1 f_1 = 26$ et $n_1 (1 - f_1) = 74$, donc supérieurs à 10, on peut approcher la loi binomiale par une **loi de Gauss** de paramètres $n_1 p_1$ et $n_1 p_1 q_1$.

En négligeant, en première approximation, la correction de continuité, la variable aléatoire $F_1 = \frac{X_1}{n_1}$ suit

alors une loi de Gauss de paramètres $\mu_1 = p_1$ et $\sigma_1^2 = \frac{p_1 q_1}{n_1}$.

Comme la variance est inconnue, il faut l'estimer par $\hat{\sigma}_1^2 = \frac{F_1(1-F_1)}{n_1}$ et la variable aléatoire $\frac{F_1 - p_1}{\hat{\sigma}_1}$ suit une **loi de Student** à $\nu_1 = n_1 - 1$ degrés de liberté.
Le nombre de degrés de liberté est suffisamment élevé ($\nu_1 = 99$) pour que cette loi de Student soit très proche d'une **loi de Gauss centrée réduite**.

De même, dans un échantillon de 100 personnes tirées de la population exposée, le nombre X_2 de personnes ayant une capacité vitale inférieure ou égale à 4,15 litres suit une **loi binomiale** de paramètres $n_2 = 100$, p_2 inconnu. Si l'échantillon est représentatif, la proportion p_2 est sans doute du même ordre de grandeur que la proportion $f_2 = 0{,}60$ observée.
La variance $n_2 p_2 q_2$ est alors du même ordre de grandeur que $n_2 f_2 (1 - f_2) = 60 \times 0{,}40 = 24$. Comme elle est supérieure à 20, on peut approcher la loi binomiale par une **loi de Gauss** de paramètres $n_2 p_2$ et $n_2 p_2 q_2$. En négligeant, en première approximation, la correction de continuité, la variable aléatoire $F_2 = \frac{X_2}{n_2}$ suit alors une loi de Gauss de paramètres $\mu_2 = p_2$ et $\sigma_2^2 = \frac{p_2 q_2}{n_2}$.
Comme la variance est inconnue, il faut l'estimer par $\hat{\sigma}_2^2 = \frac{F_2(1-F_2)}{n_2}$, et la variable aléatoire $\frac{F_2 - p_2}{\hat{\sigma}_2}$ suit une loi de Student à $\nu_2 = n_2 - 1$ degrés de liberté.
Le nombre de degrés de liberté est suffisamment élevé ($\nu_2 = 99$) pour que cette loi de Student soit très proche d'une **loi de Gauss centrée réduite**.

La variable aléatoire $\frac{(F_1 - F_2) - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\hat{\sigma}_1^2 + \hat{\sigma}_2^2}}$ suit alors, à peu près, une loi de Gauss centrée réduite.
Dans l'hypothèse ($H_0 : p_1 = p_2$), cette variable aléatoire se réduit à la **fonction discriminante** :

$$\frac{F_1 - F_2}{\sqrt{\hat{\sigma}_1^2 + \hat{\sigma}_2^2}} = \frac{F_1 - F_2}{\sqrt{\frac{F_1(1-F_1)}{n_1} + \frac{F_2(1-F_2)}{n_2}}}$$

Comparaison de pourcentages dans deux échantillons de grande taille :

$$\frac{F_1 - F_2}{\sqrt{\frac{F_1(1-F_1)}{n_1} + \frac{F_2(1-F_2)}{n_2}}} \rightsquigarrow G(0, 1).$$

3°/ Réalisation du test.

Avec les échantillons étudiés, la fonction discriminante $\frac{F_1 - F_2}{\sqrt{\frac{F_1(1-F_1)}{n_1} + \frac{F_2(1-F_2)}{n_2}}}$ prend la valeur :

$$\frac{f_1 - f_2}{\sqrt{\frac{f_1(1-f_1)}{n_1} + \frac{f_2(1-f_2)}{n_2}}} = \frac{0{,}26 - 0{,}60}{\sqrt{\frac{0{,}26(1-0{,}26)}{100} + \frac{0{,}60(1-0{,}60)}{100}}} = \frac{-3{,}4}{\sqrt{0{,}26 \times 0{,}74 + 0{,}60 \times 0{,}40}} = -5{,}171$$

Or, dans l'hypothèse (H_0), la probabilité pour que la variable aléatoire $\frac{F_1 - F_2}{\sqrt{\hat{\sigma}_1^2 + \hat{\sigma}_2^2}}$ prenne une valeur inférieure ou égale à – 5,171 se lit dans la **table de Gauss**.

Elle est inférieure à 3×10^{-6} (la calculette *HP48SX* donne comme valeur $1{,}2 \times 10^{-7}$), c'est la probablité critique du **test de Gauss unilatéral à droite** : elle représente le risque d'erreur que l'on prend en rejetant l'hypothèse (H_0) quand on la teste contre l'hypothèse (H_1) $p_1 < p_2$.

Pour un risque maximum autorisé $\alpha = 5$ %, la probabilité critique est inférieure à α : on rejette l'hypothèse (H_0) avec un risque d'erreur très faible, et on accepte l'hypothèse (H_1) (avec un risque d'erreur β inconnu).

$\alpha = 5$ % : différence très significative ($p < 3 \times 10^{-6}$).

Chapitre 18. Comparaison de deux moyennes : test de Gauss.

Enoncés.

Exercice 4. Concentration d'un élément.

Un produit de référence synthétique a été préparé en vue de l'emploi d'une méthode d'analyse relative. Exprimée en poucentage, la teneur visée pour l'élément intéressant est $\mu_0 = 25{,}60$. Pour vérifier la préparation du produit, on effectue une série de $n = 40$ dosages : la valeur moyenne observée est $\overline{x} = 25,58$ et l'écart-type est $s_e = 0{,}2$. 1°/ Peut-on admettre que la concentration de l'élément dans le produit est μ_0 ? (On fixera $\alpha = 0{,}05$). 2°/ Calculer le risque β de deuxième espèce d'admettre que la teneur en élément dans le produit est égale à la valeur visée μ_0 alors que sa valeur réelle est $\mu_1 = 25{,}70$.	

Solution.

1°/ Comparaison des moyennes.

Pour $n \geq 30$, le théorème central limite permet d'utiliser un **test de Gauss**.
Les hypothèses à tester l'une contre l'autre sont :

$H_0 : \mu = \mu_0$.

$H_1 : \mu \neq \mu_0$. (Test bilatéral)

La fonction discriminante est : $U = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\dfrac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}} = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\dfrac{S_e}{\sqrt{n-1}}}$.

$\overline{X}$ est la moyenne d'un échantillon de taille n dans la population : $\overline{X} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=n} X_i$.

S_e est l'écart-type d'un échantillon de taille n : $S_e^2 = \dfrac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{i=n} X_i^2 - \dfrac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{i=n} X_i\right)^2\right)$.

$\hat{\sigma}^2$ est l'estimateur sans biais de la variance de la population : $\hat{\sigma}^2 = \dfrac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{i=n} X_i^2 - \dfrac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{i=n} X_i\right)^2\right)$.

La valeur observée de la fonction discriminante est : $u_{obs} = \dfrac{25{,}58 - 25{,}60}{\dfrac{0{,}2}{\sqrt{40-1}}} = -\dfrac{\sqrt{39}}{10} = -0,6245$.

La table de la fonction de répartition de la variable aléatoire normale centrée donne : $F(1,96) = 0,9750$

On en déduit : *Prob* ($U \in [-1,96 ; +1,96]$) = 0, 95 et l'intervalle d'acceptation de l'hyptohèse H_0 est :

Intervalle d'acceptation de H_0 : [– 1, 96 ; + 1, 96].

La valeur observée de la fonction discriminante appartient à l'intervalle d'acceptation de l'hypothèse H_0 : on accepte donc l'hypothèse H_0. La différence observée entre l'échantillon et la valeur de référence n'est pas significative, au seuil de 5 %, d'une différence entre la concentration de l'élément dans le produit et la teneur visée.

Différence non significative au seuil de 5 %.

Autre méthode : Probabilité critique.

Pour $u = 0,6425$, la table de la fonction de répartition de la variable aléatoire normale centrée réduite donne :
$F (0,6425) = 0,7397$.
On en déduit *Prob* ($U \in [0,6425 ; +\infty [$) = 1 – 0, 739 7 = 0, 260 3.
Par symétrie de la loi de Gauss : *Prob* ($U \in] -\infty ; -0,6425]$) = 0, 260 3, de sorte que l'on a :

Probabilité critique *p* (Test bilatéral) = *Prob* ($U \notin [-0,6425 ; +0,6425]$) = 2 × 0, 260 3 = 0, 520 6.

La probabilité critique *p* est supérieure à 5 % donc le risque d'erreur que l'on prendrait en rejetant l'hypothèse H_0 est supérieur à 5 % : on ne peut prendre un tel risque.
On ne peut donc rejeter l'hypothèse H_0 : il faut donc l'accepter.
Les données ne mettent pas en évidence une différence significative entre la valeur observée et la valeur visée au seuil de 5 %.

2°/ Risque d'erreur β.

Le risque d'erreur de deuxième espèce β est, par définition, la probabilité d'accepter l'hypothèse H_0 : $\mu = \mu_0$ alors que μ prend une autre valeur que μ_0, en l'occurrence μ prend la valeur μ_1.
Or on accepte l'hypothèse H_0 tant que la valeur observée u_{obs} est inférieure à la valeur seuil 1,96, donc β est donné par la relation :

$$\beta = Prob\left[\left| \frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}} \right| < 1,96 \text{ sachant } \mu = \mu_1 \right]$$

Comme la variable aléatoire $U = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}}$ suit, à peu près, une loi de Gauss réduite de moyenne $\frac{\mu_1 - \mu_0}{\frac{\sigma^*}{\sqrt{n}}}$ et d'écart-type 1, la probabilité pour que *U* soit compris entre – 1, 96 et + 1, 96 est donnée par :

$$\beta = F\left(1,960 - \frac{\mu_1 - \mu_0}{\frac{\sigma^*}{\sqrt{n}}} \right) - F\left(-1,960 - \frac{\mu_1 - \mu_0}{\frac{\sigma^*}{\sqrt{n}}} \right) = F\,(1,96 - \sqrt{10}) - F\,(-1,96 - \sqrt{10})$$

$= F(-1,202) - F(-5,122) = F(5,122) - F(1,202)$

La table de la fonction de répartition de la variable aléatoire normale centrée réduite donne :

$F(5,122) \approx 1$

$F(1,202) = 0,8853$

On trouve ainsi :

$$\boxed{\beta = 0,1147}$$

Chapitre 19. Comparaison de deux moyennes - test de Student.

Exercices

Exercice 1. Masse de colis.
Exercice 2. Tumeurs de souris.
Exercice 3. Contrôle de fabrication.
Exercice 4. Mesure de *pH*.
Exercice 5. Traitement et viscosité sanguine.
Exercice 6. Traitement et paramètre biologique.
Exercice 7. Résistance d'une corde de nylon.
Exercice 8. Masse de sachets de médicaments.

Exercice 1. Masse de colis.

A la réception de colis, un responsable veut vérifier l'exactitude des masses affichées sur les boîtes. Il prélève, au hasard, 25 boîtes qu'il pèse. Soit x^i la masse de la i^e boîte. Il obtient :

$$\sum_{i=1}^{i=25} x^i = 49{,}5 \text{ kg et } \sum_{i=1}^{i=25} x^{i\,2} = 98{,}3 \text{ kg}^2.$$

1°/ Donner une estimation ponctuelle de la moyenne et de la variance de la masse des boîtes de la production.
2°/ On connaît la masse moyenne attendue $\mu_0 = 2{,}00$ kg, correspondant à la norme de fabrication. Les masses de la production suivent une loi normale.

a) Peut-on dire que la masse moyenne des boîtes envoyées dans les colis satisfait la norme de fabrication, pour un risque $\alpha = 5\ \%$?
b) Sachant que la variance de la production est $\sigma^2 = 0{,}01$, peut-on dire que la masse moyenne des boîtes envoyées dans les colis satisfait la norme de fabrication pour un risque $\alpha = 5\ \%$?

Solution

HAUT

Exercice 2. Tumeurs de souris.

On a mesuré les dimensions d'une tumeur chez des souris traitées ou non avec une substance antitumorale. On a obtenu les résultats suivants :

Souris témoins $n_1 = 20$ $\overline{x}_1 = 7{,}075$ cm ^{2} $\sigma_1^* = 0{,}576$ cm ^{2}

Souris traitées $n_2 = 18$ $\overline{x}_2 = 5{,}850$ cm ^{2} $\sigma_2^* = 0{,}614$ cm ^{2}

La différence observée est-elle significative ?

Solution

HAUT

Exercice 3. Contrôle de fabrication.

Pour un contrôle de fabrication, on a prélevé au hasard 30 unités dont on a mesuré le volume. On a trouvé un volume moyen $\overline{x}$ = 49 cm ³ et estimé l'écart-type σ* = 3 cm ³. On veut savoir si la moyenne de la fabrication est conforme à la norme μ_0 = 50 cm ³.

1°/ Donner la valeur de la fonction discriminante.

2°/ La **diminution** observée pour le volume moyen dans la fabrication testée, par rapport à la norme μ_0 attendue est-elle significative (**test unilatéral**) :

— pour α = 5 % ?
— pour α = 1 % ?

Calculer la probabilité critique.

Solution

3°/ La **différence** observée pour le volume moyen dans la fabrication testée, par rapport à la norme μ_0 attendue est-elle significative (**test bilatéral**) :

— pour α = 5 % ?
— pour α = 1 % ?

Calculer la probabilité critique.

4°/ Pour un risque bilatéral α fixé à 5 %, calculer le risque de deuxième espèce β lorsque le volume moyen de la production vaut :

μ_1 = 49 cm ³,
μ_1 = 48 cm ³,
μ_1 = 47 cm ³.

HAUT

Exercice 4. Mesure de *pH*.

Le *pH* (degré d'acidité) a été mesuré dans deux types de solutions chimiques *A* et *B*. Dans la solution *A*, six mesures ont été faites, avec un *pH* moyen de 7,52 et un écart-type estimé de 0,024. Dans la solution *B*, cinq mesures ont été faites, avec un *pH* moyen de 7,49 et un écart-type estimé de 0,032. Déterminer si, au seuil de signification de 0,05, les deux solutions ont des *pH* différents.	Solution

HAUT

Exercice 5. Traitement et viscosité sanguine.

Onze volontaires ont accepté de suivre un traitement qui peut éventuellement modifier la viscosité sanguine. Les résultats avant et après traitement sont les suivants :

Individu	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Valeur avant traitement	2,40	2,60	2,55	2,85	3,15	3,15	2,15	2,70	2,75	2,45	2,65
Valeur après traitement	2,45	2,55	2,55	2,40	2,85	2,90	2,00	2,40	2,60	2,40	2,30

Les viscosités avant et après traitement diffèrent-elles statistiquement ? Le traitement a-t'il eu un effet ? (On fixe le risque α à 5 %).

Solution

HAUT

Exercice 6. Traitement et paramètre biologique.

Pour étudier l'action d'un produit sur un paramètre biologique, on a mesuré, sur un échantillon de 10 individus, la valeur du paramètre avant et après le traitement. Les résultats sont les suivants :

Individu	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Valeur avant traitement	5,33	6,13	5,66	4,50	5,35	6,32	4,24	5,83	6,27	4,86
Valeur après traitement	5,32	6,00	5,64	4,59	5,49	6,17	4,11	5,86	6,13	4,68

Le traitement modifie-t-il de façon significative le paramètre biologique ($\alpha = 5\ \%$) ?

Solution

HAUT

Exercice 7. Résistance d'une corde de nylon.

Un laboratoire de recherche et développement a mis au point un nouveau processus de production permettant d'accroître, on l'espère, la résistance de la corde de nylon. A partir de 6 fournées choisies au hasard, il teste le nouveau processus sur chaque demi-fournée et l'ancien processus sur chacune des demi-fournées restantes. On enregistre ainsi la force de rupture d'une corde testée à partir de chaque demi-fournée :

Fournée	1	2	3	4	5	6
Ancien processus	620	600	640	630	570	600
Nouveau processus	660	620	670	620	580	630

Construire un intervalle de confiance pour apprécier l'amélioration due au nouveau processus?

Solution

HAUT

Exercice 8. Masse de sachets de médicaments.

Afin de contrôler un lot de fabrication d'un médicament divisé en sachets, on a prélevé un échantillon aléatoire de 15 sachets que l'on a pesés.

1°/ Comparer, au risque $\alpha = 5\ \%$ et $\alpha = 1\ \%$, la masse moyenne du lot à la valeur donnée par la norme de fabrication : 1, 50 g :
— dans le cas où l'hypothèse alternative est :
" la masse moyenne du lot est différente de 1, 50 g "
— dans le cas où l'hypothèse alternative est :
" la masse moyenne du lot est supérieure à 1, 50 g "
N.B. La somme observée des masses des sachets est de 23, 25 grammes et la somme de leurs carrés est 36, 1690.

2°/ Reprendre la question précédente dans le cas où la fabrication est considérée comme normale et où l'écart-type de la masse d'un sachet vaut 0, 095 gramme. On se placera dans le cas d'un test bilatéral et dans le cas d'un test unilatéral. On calculera, dans chaque cas, le risque de dire que la masse moyenne du lot correspond à la norme du fabricant, alors qu'elle en diffère, en réalité, de 0,1 gramme.

Solution

HAUT

Chapitre 19. Comparaison de deux moyennes - test de Student.

Enoncés.

Exercice 1. Masse de colis.

A la réception de colis, un responsable veut vérifier l'exactitude des masses affichées sur les boîtes. Il prélève, au hasard, 25 boîtes qu'il pèse. Soit x^i la masse de la i^e boîte. Il obtient :

$$\sum_{i=1}^{i=25} x^i = 49{,}5 \text{ kg et } \sum_{i=1}^{i=25} x^{i\,2} = 98{,}3 \text{ kg}^2.$$

1°/ Donner une estimation ponctuelle de la moyenne et de la variance de la masse des boîtes de la production.
2°/ On connaît la masse moyenne attendue $\mu_0 = 2{,}00$ kg, correspondant à la norme de fabrication. Les masses de la production suivent une loi normale.

a) Peut-on dire que la masse moyenne des boîtes envoyées dans les colis satisfait la norme de fabrication, pour un risque $\alpha = 5\ \%$?
b) Sachant que la variance de la production est $\sigma^2 = 0{,}01$, peut-on dire que la masse moyenne des boîtes envoyées dans les colis satisfait la norme de fabrication pour un risque $\alpha = 5\ \%$?

Solution.

1°/ Estimations ponctuelles.

La moyenne d'un échantillon est un estimateur **sans biais** (sa moyenne est μ) et **consistant** (sa variance tend vers 0 si *n* tend vers l'infini) de la moyenne μ de la population.
Une estimation ponctuelle de la moyenne μ est fournie par la moyenne empirique de l'échantillon :

$$\mu^* = \frac{1}{25}\sum_{i=1}^{i=25} x_i = \frac{49{,}5}{25} = 1{,}98 \text{ kg}$$

Estimation ponctuelle de la moyenne : 1, 98 kg

La variable aléatoire $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{i=n} X_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{i=n} X_i\right)^2\right)$ est un estimateur **sans biais** (sa moyenne est σ^2) et **consistant** (sa variance tend vers 0 si *n* tend vers l'infini) de la variance σ^2 de la population.
Une estimation ponctuelle σ^{*2} de la variance σ^2 est fournie par la valeur de cette variable $\hat{\sigma}^2$ dans l'échantillon prélevé :

$$\sigma^{*2} = \frac{1}{24}\left(\sum_{i=1}^{i=25} x_i^{\,2} - \frac{1}{25}\left(\sum_{i=1}^{i=25} x_i\right)^2\right) = \frac{1}{24}\left(98{,}3 - \frac{49{,}5^2}{25}\right) = 1{,}21 \times 10^{-2}$$

Estimation ponctuelle de la variance : $1{,}21 \times 10^{-2}$ kg ^{2}

2°/ Comparaison de la moyenne d'un échantillon à une valeur de référence.

a) Comparaison de moyennes : variance inconnue.

Dans le cas d'un petit échantillon de loi normale, avec une variance inconnue, la fonction discriminante

$$T = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{\tilde{\sigma}}{\sqrt{n}}}$$

suit une **loi de Student à *n* – 1 degrés de liberté**.

La valeur observée de la fonction discriminante est :

$$t_{obs} = \frac{1{,}98 - 2}{0{,}11} \times \sqrt{25} = \frac{10}{11} = 0{,}9091$$

Pour un test bilatéral, la probabilité critique correspondante est :

$$p = P\,(\,|\,T\,|\,>\,t_{obs}) = P\,(\,|\,T\,|\,>\,0{,}9091) = 2\,(\,1 - F_{24}\,(0{,}9091)).$$

La table de Student donne, pour $n - 1 = 24$ degrés de liberté :

$$F_{24}\,(0{,}857) = 0{,}80 \text{ et } F_{24}\,(1{,}059) = 0{,}85$$

$F_{24}\,(0{,}9091)$ est entre les deux, donc la probabilité critique est comprise entre 0,30 et 0,40.
La calculette *HP48SX* donne la valeur 0,3723.

En autorisant un risque d'erreur maximum de 5 % quand on rejette l'hypothèse

$$(H_0) : \mu = \mu_0$$

contre l'hypothèse bilatérale :

$$(H_1) : \mu \neq \mu_0$$

on voit qu'on ne peut pas rejeter (H_0), le risque d'erreur serait trop grand, compris entre 30 et 40 %.

Décision mathématique :

On accepte (H_0).

Conclusion pratique :

Jusqu'à plus ample information, compte tenu de la taille de l'échantillon, nous considérerons que la masse moyenne des boîtes envoyées dans les colis satisfait la norme de fabrication, au seuil de 5%.

b) Comparaison de moyennes : variance connue.

Lorsque la variance est connue, la fonction discriminante

$$U = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

suit, sous l'hypothèse (H_0), une loi de Gauss centrée réduite.

Cette fonction discriminante prend ici la valeur :

$$u_{obs} = \frac{1{,}98 - 2}{0{,}10} \times \sqrt{25} = 1{,}000$$

La probabilité critique bilatérale correspondante se lit à l'aide de la table de Gauss :

$p = P(|U| > 1) = 2(1 - F(1)) = 2(1 - 0{,}8413) = 0{,}1356 > 5\ \%$.

Pour $\alpha = 5\ \%$, on ne peut rejeter (H_0).

Décision mathématique :

On accepte (H_0).

Conclusion pratique :

Jusqu'à plus ample information, compte tenu de la taille de l'échantillon, nous considérerons que la masse moyenne des boîtes envoyées dans les colis satisfait la norme de fabrication, pour un risque $\alpha = 5\ \%$.

Chapitre 19. Comparaison de deux moyennes - test de Student.

Enoncés.

Exercice 2. Tumeurs de souris.

On a mesuré les dimensions d'une tumeur chez des souris traitées ou non avec une substance antitumorale. On a obtenu les résultats suivants : Souris témoins $n_1 = 20$ $\overline{x}_1 = 7{,}075$ cm² $\sigma_1^* = 0{,}576$ cm² Souris traitées $n_2 = 18$ $\overline{x}_2 = 5{,}850$ cm² $\sigma_2^* = 0{,}614$ cm² La différence observée est-elle significative ?	

Solution.

1°/ Position du problème.

S'agissant de recherche si la substance antitumorale a, ou non, un effet de diminution sur la tumeur, nous utiliserons un **test unilatéral**.
Les hypothèses à tester l'une contre l'autre sont :

- $(H_0) : \mu_1 = \mu_2$
- $(H_1) : \mu_1 > \mu_2$

en appelant μ_1 la moyenne de la population dont est tiré l'échantillon témoin, μ_2 la moyenne de la population dont est tiré l'échantillon 2.

Les tailles sont trop petites (inférieures à 30) pour que l'on puisse appliquer un test de Gauss en invoquant le théorème central limite.

On ne connaît pas la dimension des tumeurs pour chaque souris, donc on ne peut pas appliquer un test de rangs qui permettrait de ne pas faire d'hypothèse sur les lois de probabilités.

Comme les variances des populations sont inconnues, pour comparer les moyennes des deux populations, on peut utiliser un test de Student : il faut faire l'**hyptohèse que les populations sont normales**.
De plus, il faut teste l'**homogénéité des variances**. S'il s'avère possible de faire une estimation commune :

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{(n_1 - 1)\tilde{\sigma}_1^2 + (n_2 - 1)\tilde{\sigma}_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

de la variance des deux populations, le test des hypothèses (H_0) et (H_1) utilisera la fonction discriminante

$$T = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\hat{\sigma}\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$

Dans l'hypothèse (H_0), cette fonction discriminante suit une **loi de Student à ($n1 + n2 - 2$) degrés de liberté**.

2°/ Test d'homogénéité des variances.

Pour tester l'homogénéité des variances on fait le rapport de la plus grande estimation ponctuelle de variance à la plus petite.

$$f = \frac{0{,}614^2}{0{,}576^2} = 1{,}136$$

La table de la loi *F* de Fischer-Snedecor à (17 ; 19) degrés de liberté donne une valeur seuil comprise entre 2,62 et 2,51. Donc, de toutes façons, la valeur observée appartient à l'intervalle d'acceptation (au seuil de 5 %) : on accepte l'hypothèse d'égalité des variances.
On peut alors grouper les deux échantillons pour avoir une estimation ponctuelle de la variance commune :

$$\sigma^{*2} = \frac{(n_1 - 1)\,\sigma_1^{*2} + (n_2 - 1)\,\sigma_2^{*2}}{n_1 + n_2 - 2} = \frac{19 \times 0{,}576^2 + 17 \times 0{,}614^2}{36} = 0{,}3531$$

$$\sigma^* = 0{,}5942.$$

3°/ Test d'égalité des moyennes.

La fonction discriminante prend la valeur :

$$t_{obs} = \frac{7{,}075 - 5{,}850}{0{,}5942 \times \sqrt{\frac{1}{20} + \frac{1}{18}}} = 6{,}345$$

La table de Student à 36 degrés de liberté donne une idée de la probabilité critique correspondante :

$$p = 2\,(1 - F_{36}\,(6{,}345)) < 2 \times 10_{-3}$$

Cette probabilité critique est inférieure à 5 % : la différence est significative.

Chapitre 19. Comparaison de deux moyennes - test de Student.

Enoncés.

Exercice 3. Contrôle de fabrication.

Pour un contrôle de fabrication, on a prélevé au hasard 30 unités dont on a mesuré le volume. On a trouvé un volume moyen $\overline{x}$ = 49 cm ³ et estimé l'écart-type σ* = 3 cm ³. On veut savoir si la moyenne de la fabrication est conforme à la norme μ_0 = 50 cm ³.

1°/ Donner la valeur de la fonction discriminante.

2°/ La **diminution** observée pour le volume moyen dans la fabrication testée, par rapport à la norme μ_0 attendue est-elle significative (**test unilatéral**) :

— pour α = 5 % ?
— pour α = 1 % ?

Calculer la probabilité critique.

3°/ La **différence** observée pour le volume moyen dans la fabrication testée, par rapport à la norme μ_0 attendue est-elle significative (**test bilatéral**) :

— pour α = 5 % ?
— pour α = 1 % ?

Calculer la probabilité critique.

4°/ Pour un risque bilatéral α fixé à 5 %, calculer le risque de deuxième espèce β lorsque le volume moyen de la production vaut :

μ_1 = 49 cm ³,
μ_1 = 48 cm ³,
μ_1 = 47 cm ³.

Solution.

1°/ Fonction discriminante.

En l'absence d'élément d'information, on ne pourra que supposer que, dans la population des échantillons aléatoires de taille 30 que l'on peut tirer de la fabrication, la moyenne $\overline{X}$ de l'échantillon suit une loi de Gauss, soit du fait que la masse *X* elle-même suive une loi de Gauss, soit que l'on considère que l'échantillon est de taille suffisante pour que le théorème central limite s'applique et permette de considérer $\overline{X}$ pratiquement comme une variable normale.

Soit μ la moyenne de la population dont est tiré l'échantillon. La variable aléatoire $\frac{\overline{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ suit une loi de

Gauss centrée réduite.

Soit $\hat{\sigma}^2$ l'estimateur de la variance de la population dont est tiré l'échantillon : $(n-1)\frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma^2}$ suit une loi de Khi-deux à $n-1$ degrés de liberté, et il en résulte , en faisant le rapport entre une variable de Gauss centrée réduite et la racine carrée d'une variable Khi-deux divisée par son nombre de degrés de liberté,

que la variable $\frac{\overline{X}-\mu}{\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}}$ suit une loi de Student à $n-1$ degrés de liberté.

Dans l'hypothèse $(H_0) : \mu = \mu_0$, cette variable s'écrit $\frac{\overline{X}-\mu_0}{\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}}$.

On peut prendre cette variable pour fonction discriminante, puisque sa valeur peut être déterminée à partir d'un échantillon et qu'on connaît sa loi de probabilité.

La valeur observée de la fonction discriminante est :

$$t_{obs} = \frac{49-50}{3} \times \sqrt{30} = -\frac{\sqrt{30}}{3} = -1{,}826$$

$$\boxed{t_{obs} = -1{,}826}$$

2°/ Comparaison de moyennes : test unilatéral.

On teste l'une contre l'autre les hypothèses :

$(H_0) : \mu = \mu_0$.
$(H_1) : \mu < \mu_0$.

Dans l'hypothèse (H_0), la fonction discriminante suit une loi de Student à 29 degrés de liberté.
Dans l'hypothèse (H_1), elle suit une "loi de Student décentrée", décentrée à gauche car $\mu - \mu_0$ est négatif.

Pour que l'on accepte l'hypothèse (H_0), contre l'hypothèse (H_1), il faut que la fonction discriminante ne soit pas trop loin à gauche de 0.
La probabilité critique est donc la queue de probabilité à gauche de la valeur observée de la fonction discriminante :

$$p = P(T < t_{obs}) = F_{29}(-1{,}826)$$

La table de Student à 29 degrés de liberté fournit les valeurs :

$F_{29}(1{,}699) = 0{,}950$ et $F_{29}(2{,}045) = 0{,}975$

Par symétrie de la loi de Student, on a donc :

$F_{29}(-1{,}699) = 1 - F_{29}(1{,}699) = 1 - 0{,}950 = 0{,}050$
$F_{29}(-2{,}045) = 1 - F_{29}(2{,}045) = 1 - 0{,}975 = 0{,}025$

Comme – 1,826 est compris entre – 1,699 et – 2,045 et que la fonction F_{29} est croissante comme toute fonction de répartition, la probabilité critique F_{29} (– 1,826) est comprise entre 0,025 et 0,050, c'est-à-dire entre 2,5 % et 5 %.
La calculette (*HP48SX*) fournit la valeur $p = 3{,}9 \times 10^{-2}$.

$$2{,}5\ \% < p < 5\ \%$$

Décision mathématique :

— Pour un risque d'erreur maximum autorisé (risque de première espèce) de 5 %, on rejette l'hypothèse (H_0), avec un risque d'erreur p compris entre 2,5 % et 5 %.

— Pour un risque d'erreur maximum autorisé (risque de première espèce) de 1 %, on accepte l'hypothèse (H_0), avec un risque d'erreur de deuxième espèce β inconnu, puisqu'on ne connaît pas μ.

Conclusion pratique :

Jusqu'à plus ample information, compte tenu de la taille de l'échantillon :

— La différence de volume observé entre l'échantillon et la valeur de référence est significative (au seuil de 5 %).
— La différence de volume observé entre l'échantillon et la valeur de référence n'est pas significative (au seuil de 1 %).

Remarque :

La loi de Gauss fournit, pour une valeur observée de – 1,826, une probabilité critique de 1 – 0,9662 = 0,0338 qui conduit au même résultat.

3°/ Comparaison de moyennes : test bilatéral.

On teste l'une contre l'autre les hypothèses :

$(H_0) : \mu = \mu_0$.
$(H_1) : \mu \neq \mu_0$.

Dans l'hypothèse (H_0), la fonction discriminante suit une loi de Student à 29 degrés de liberté. Dans l'hypothèse (H_1), elle suit une "loi de Student décentrée", décentrée à gauche ou décentrée à droite car $\mu - \mu_0$ est de signe indéterminé.

Pour que l'on accepte l'hypothèse (H_0), contre l'hypothèse (H_1), il faut que la fonction discriminante ne soit pas trop loin à gauche ou à droite de 0.
La probabilité critique est donc la queue de probabilité à l'extérieur de l'intervalle $[-|t_{obs}|, +|t_{obs}|]$ où $|t_{obs}|$ est la valeur observée de la fonction discriminante :

$$p = P(|T| > |t_{obs}|) = 2\,F_{29}(-1{,}826)$$

Le calcul fait dans la question précédente montre que cette probabilité critique bilatérale est comprise

entre 5 % et 10 % :

$$\boxed{5\ \% < p < 10\ \%}$$

Décision mathématique :

— Pour un risque d'erreur maximum autorisé (risque de première espèce) de 5 % ou de 1 %, on accepte l'hypothèse (H_0), avec un risque d'erreur de deuxième espèce β inconnu, puisqu'on ne connaît pas μ.

Conclusion pratique :

Jusqu'à plus ample information, compte tenu de la taille de l'échantillon :

— La différence de volume observé entre l'échantillon et la valeur de référence n'est pas significative (au seuil de 5 % donc aussi au seuil de 1 %).

Remarque :

Bien que la loi de Gauss, qu'on peut envisager d'utiliser comme approximation, conduise à minimiser la probabilité critique, elle donne ici une valeur de 2 × 0,0338 = 7,76 % qui conduit à la même conclusion : acceptation de (H_0), la différence n'est pas significative.

4°/ Risque de deuxième espèce.

Le calcul du risque d'erreur de deuxième espèce β peut se faire, dans l'hypothèse normale, lorsque l'hypothèse alternative (H_1) n'est pas une hypothèse composite du type $\mu \neq \mu_0$, mais une hypothèse simple du type $\mu = \mu_1$.
On teste donc les deux hypothèses :
(H_0) : $\mu = \mu_0$
(H_1) : $\mu = \mu_1$

On accepte l'hypothèse (H_0) (au seuil de 5%) si la valeur de la fonction discriminante est comprise entre – 1,960 et + 1,960.
Le risque d'accepter (H_0) alors que c'est (H_1) qui est vraie est la probabilité de trouver la fonction discriminante dans l'intervalle [– 1,960 ; + 1,960] .
Mais dans l'hypothèse (H_1), la loi de probabilité de la fonction discriminante *U*, n'est une loi de Gauss centrée réduite, mais une loi de Gauss, toujours réduite, mais centrée sur $\frac{\mu_1 - \mu_0}{\frac{\sigma^*}{\sqrt{n}}}$, puisque $\overline{X}$ a pour moyenne μ_1.
On obtient donc :

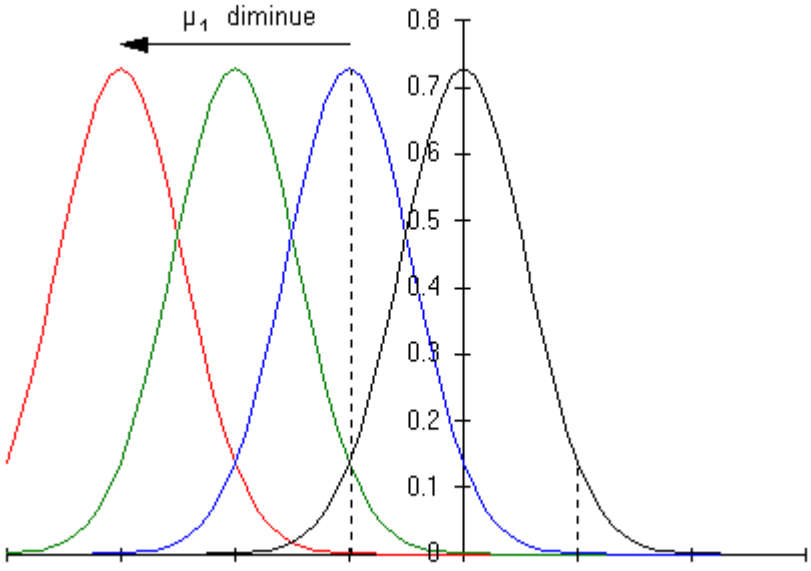
$$\beta = P(|U| < 1{,}960) = F\left(1{,}960 - \frac{\mu_1 - \mu_0}{\frac{\sigma^*}{\sqrt{n}}}\right) - F\left(-1{,}960 - \frac{\mu_1 - \mu_0}{\frac{\sigma^*}{\sqrt{n}}}\right)$$

En fonction des valeurs de μ_1, on peut dresser, à l'aide de la Table de la fonction de répartition de la

variable normale centrée réduite, le tableau de résultats suivants.

μ_1	49 cm ^{3}	48 cm ^{3}	47 cm ^{3}
$\frac{\mu_1 - \mu_0}{\frac{\sigma^*}{\sqrt{n}}}$	– 1,826	– 3,651	– 5,477
$1{,}960 - \frac{\mu_1 - \mu_0}{\frac{\sigma^*}{\sqrt{n}}}$	3,786	5,611	7,437
$-1{,}960 - \frac{\mu_1 - \mu_0}{\frac{\sigma^*}{\sqrt{n}}}$	– 0,1343	1,691	3,517
$F\left(1{,}960 - \frac{\mu_1 - \mu_0}{\frac{\sigma^*}{\sqrt{n}}}\right)$	0,9999	1,0000	1,0000
$F\left(-1{,}960 - \frac{\mu_1 - \mu_0}{\frac{\sigma^*}{\sqrt{n}}}\right)$	0,4466	0,9546	0,9998
β	0,5533	0,0454	0,0002

Sur ce tableau, on voit qu'en acceptant l'hypothèse (H_0) (au seuil de 5%), on avait un peu plus d'une chance sur 2 de se tromper si la moyenne de la production était en réalité 49 cm ^{3}, mais les données n'étaient pas suffisantes pour pouvoir rejeter cette hypothèse.
Par contre on avait peu de chances de se tromper en acceptant (H_0) (au seuil de 5%), si la moyenne de production était en réalité 48 cm ^{3} ou 47 cm ^{3}.



Au fur et à mesure que μ_1 diminue, la loi de probabilité de la fonction discriminante se déplace à gauche lorsque $\mu = \mu_1 < \mu_0$:
la surface β sous la courbe, dans l'intervalle d'acceptation [– 1,960 ; + 1,960] de (H_0) (au seuil de 5%), diminue.

Chapitre 19. Comparaison de deux moyennes - test de Student.

Enoncés.

Exercice 4. Mesure de *pH*.

Le *pH* (degré d'acidité) a été mesuré dans deux types de solutions chimiques *A* et *B*. Dans la solution *A*, six mesures ont été faites, avec un *pH* moyen de 7,52 et un écart-type estimé de 0,024. Dans la solution *B*, cinq mesures ont été faites, avec un *pH* moyen de 7,49 et un écart-type estimé de 0,032. Déterminer si, au seuil de signification de 0,05, les deux solutions ont des *pH* différents.	

Solution.

1°/ Présentation des données.

Echantillon 1	*Echantillon 2*
Taille : $n_1 = 6$ Moyenne : $\overline{x}_1 = 7{,}52$ Ecart-type estimé : $\sigma_1^* = 0{,}024$	Taille : $n_2 = 5$ Moyenne : $\overline{x}_2 = 7{,}49$ Ecart-type estimé : $\sigma_2^* = 0{,}032$
L'échantillon 1 est tiré d'une population de : • loi inconnue • moyenne μ_1 inconnue • écart-type σ_1 inconnu	L'échantillon 2 est tiré d'une population de : • loi inconnue • moyenne μ_2 inconnue • écart-type σ_2 inconnu

Pour pouvoir appliquer un test de comparaison de moyennes, il faut faire ici l'hypothèse que, dans chaque solution, les résultats des mesures sont distribués normalement.
Sous cette hypothèse, on teste l'une contre l'autre les deux hypothèses :

$(H_0) : \mu_1 = \mu_2$

$(H_1) : \mu_1 \neq \mu_2$

(test bilatéral)

2°/ Comparaison des variances.

$$f_{obs} = \frac{{\sigma_2}^{*2}}{{\sigma_1}^{*2}} = \frac{16}{9} = 1{,}778$$

La table de la loi *F* de Fischer-Snedcecor à (4 ; 5) degrés de liberté donne :

$$F_{(4;5)}(7{,}39) = 0{,}975$$

f_{obs} est inférieur à 7,39 : les variances sont compatibles. On peut prendre comme estimation ponctuelle commune de la variance des deux populations la valeur

$$\sigma^{*2} = \frac{(n_1 - 1)\sigma_1^{*2} + (n_2 - 1)\sigma_2^{*2}}{n_1 + n_2 - 2} = 7{,}75 \times 10_{-4}.$$

3°/ Comparaison des moyennes.

$$t_{obs} = \frac{\overline{x_1} - \overline{x_2}}{\sigma^* \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} = 1{,}78$$

La table de la fonction de répartition de la variable de Student à 9 degrés de liberté fournit $t_{0,975} = 2, 262$ de sorte que l'intervalle d'acceptation de (H_0) est] – 2, 262 ; + 2, 262 [.
La valeur observée est dans l'intervalle d'acceptation : on accepte (H_0), la différence observée entre les échantillons n'est pas significative d'une différence de moyenne entre les populations, au seuil de 5 %.

Conclusion pratique.

Jusqu'à plus ample information, compte tenu de la taille des échantillons, on considèrera que les solutions *A* et *B* ont le même *pH*, au seuil de 5 %.

Chapitre 19. Comparaison de deux moyennes - test de Student.

Enoncés.

Exercice 5. Traitement et viscosité sanguine.

Onze volontaires ont accepté de suivre un traitement qui peut éventuellement modifier la viscosité sanguine. Les résultats avant et après traitement sont les suivants :

Individu	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Valeur avant traitement	2,40	2,60	2,55	2,85	3,15	3,15	2,15	2,70	2,75	2,45	2,65
Valeur après traitement	2,45	2,55	2,55	2,40	2,85	2,90	2,00	2,40	2,60	2,40	2,30

Les viscosités avant et après traitement diffèrent-elles statistiquement ? Le traitement a-t'il eu un effet ? (On fixe le risque α à 5 %).

Solution.

1°/ Position du problème.

Comme les valeurs avant et après traitement constituent des échantillons appariés, donc non indépendants, il faut constituer un nouvel échantillon en prenant les valeurs de différence ; on prendra la **diminution de viscosité**, définie par

X = Valeur avant traitement – Valeur après traitement.

Individu	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Diminution X	– 0,05	0,05	0,00	0,45	0,30	0,25	0,15	0,30	0,15	0,05	0,35

Les onze valeurs de X constituent un échantillon indépendant, tiré d'une population de moyenne μ inconnue et de variance σ^2 inconnue, dont il faudra comparer la moyenne à 0 par un test bilatéral puisque la question est d'étudier seulement la "différence" et non l'augmentation ou la diminution. Nous testerons donc l'une contre l'autre les deux hypothèses :

$(H_0) : \mu = 0,$
$(H_1) : \mu \neq 0.$

S'agissant d'un petit échantillon, il faudra faire l'hypothèse que **la population est normale**.
En réalité, grâce au test des signes et des rangs de Wicoxon, nous verrons que l'hypothèse normale n'est pas indispensable.
Si la population est normale, comme sa variance σ^2 est inconnue, il faut l'estimer et la variable aléatoire T

$= \frac{\overline{X} - \mu}{\frac{\tilde{\sigma}}{\sqrt{n}}}$ suit une loi de Student à $\nu = n - 1$ degrés de liberté.

Sous l'hypothèse H_0, $\mu = 0$, cette variable aléatoire devient la fonction discriminante $T = \frac{\overline{X}}{\frac{\tilde{\sigma}}{\sqrt{n}}}$.

2°/ Réalisation du test.

Individu	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Diminution X	– 0,05	0,05	0,00	0,45	0,30	0,25	0,15	0,30	0,15	0,05	0,35
X^2	0,0025	0,0025	0,0000	0,2025	0,0900	0,0625	0,0225	0,0900	0,0225	0,0025	0,1225

$\sum_{i=1}^{i=11} x_i = 2{,}00$

$\sum_{i=1}^{i=11} x_i^{\,2} = 0{,}6200$

$\overline{x} = \frac{1}{11} \sum_{i=1}^{i=11} x_i = \frac{2}{11} = 0{,}1818$

$\sigma^{*2} = \frac{1}{10}\left(\sum_{i=1}^{i=11} x_i^{\,2} - \frac{1}{11}\left(\sum_{i=1}^{i=11} x_i \right)^2 \right) = \frac{1}{10}\left(0{,}6200 - \frac{4}{11} \right) = 2{,}564 \times 10^{-2}$

$\sigma^* = 0{,}1601$

La fonction discriminante prend la valeur

$$t_0 = \frac{0{,}1818}{0{,}1601} \times \sqrt{11} = 3{,}766$$

La probabilité critique bilatérale p est :

$$p = 2 \times (1 - F_{10}(3{,}766))$$

La table de Student à 10 degrés de liberté fournit les valeurs :

$$F_{10}(3{,}169) = 0{,}995 \text{ et } F_{10}(4{,}587) = 0{,}999.$$

$F_{10}(3{,}766)$ est entre ces deux valeurs et p est compris entre 0,002 et 0,010.

La calculette donne la valeur $3{,}7 \times 10^{-3}$.
De toutes façons, la probabilité critique est inférieure à 5 % : on rejette (H_0).

Conclusion pratique.

Jusqu'à plus ample information, compte tenu de la taille de l'échantillon, la différence observée entre les valeurs avant et après traitement est significative (au seuil de 1 % et, a fortiori, au seuil de 5 %).

Autrement dit, sous réserve que l'échantillon soit aléatoire et que la distribution des valeurs de viscosité soit normale, ce qui reste à vérifier, nous admettrons que le traitement a un effet sur la viscosité. S'il y a un effet significatif, cet effet va dans le sens, indiqué par l'échantillon, d'une diminution.

3°/ Test des signes et des rangs de Wilcoxon.

A défaut de normalité de la population dont est tiré l'échantillon, on pourrait toujours faire un test des signes et des rangs de Wilcoxon, puisqu'on dispose de toutes les valeurs mesurées dans l'échantillon.
On a déjà calculé la diminution de viscosité X dans l'échantillon.
On prend les valeurs absolues de X, on les trie par ordre croissant, on attribue à chaque valeur un rang (rang moyen pour les ex aequo).
On additionne les rangs des valeurs correspondant à un signe positif, ce qui donne une valeur pour la variable aléatoire W_+, qui est la fonction discriminante.

Individu	Diminution X	$\lvert X \rvert$	Signe (X)	Tri	$\lvert X \rvert$	Signe (X)	Rang	W_+
1	-0.05	0.05	-1		0.00	0	1	0
2	0.05	0.05	1		0.05	-1	3	0
3	0.00	0.00	0		0.05	1	3	3
4	0.45	0.45	1		0.05	1	3	3
5	0.30	0.30	1		0.15	1	5.5	5.5
6	0.25	0.25	1		0.15	1	5.5	5.5
7	0.15	0.15	1		0.25	1	7	7
8	0.30	0.30	1		0.30	1	8.5	8.5
9	0.15	0.15	1		0.30	1	8.5	8.5
10	0.05	0.05	1		0.35	1	10	10
11	0.35	0.35	1		0.45	1	11	11
							Somme	62

Pour n = 11, la table de la loi de W_+ fournit :

— pour le test unilatéral, les valeurs seuils B = 13 (α = 5 %) et B = 7 (α = 1 %).
Intervalles d'acceptation de H_0 : $[0 ; \frac{n(n+1)}{2} - 13] = [0 ; 53]$ (α = 5 %) et $[0 ; \frac{n(n+1)}{2} - 7] = [0 ; 59]$ (α = 1 %).

— pour le test bilatéral, les valeurs seuils B = 10 (α = 5 %) et B = 5 (α = 1 %).
Intervalles d'acceptation de H_0 : $[10 ; \frac{n(n+1)}{2} - 10] = [10 ; 56]$ (α = 5 %) et $[5 ; \frac{n(n+1)}{2} - 5] = [5 ; 61]$ (α = 1 %).

On voit donc que, pour le test bilatéral, la probabilité critique correspondant à $W_+ = 62$ est inférieure à 1 %.
Elle est donc inférieure à 0,5 % pour le test unilatéral.

La différence apparaît, avec ce test, significative au seuil de 5 %, ainsi qu'au seuil de 1 %.

Conclusion pratique.

Jusqu'à plus ample information, compte tenu de la taille de l'échantillon, la différence observée entre les valeurs avant et après traitement est significative (au seuil de 1 % et, a fortiori, au seuil de 5 %).

Autrement dit, sous réserve que l'échantillon soit aléatoire, nous admettrons que le traitement a un effet sur la viscosité.
Cet effet va dans le sens, indiqué par l'échantillon, d'une diminution.

La conclusion du test est la même qu'avec le test de Student, mais **nous avons pu nous passer de l'hypothèse que *X* suit une loi normale**.

Chapitre 19. Comparaison de deux moyennes - test de Student.

Enoncés.

Exercice 6. Traitement et paramètre biologique.

Pour étudier l'action d'un produit sur un paramètre biologique, on a mesuré, sur un échantillon de 10 individus, la valeur du paramètre avant et après le traitement. Les résultats sont les suivants :

Individu	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Valeur avant traitement	5,33	6,13	5,66	4,50	5,35	6,32	4,24	5,83	6,27	4,86
Valeur après traitement	5,32	6,00	5,64	4,59	5,49	6,17	4,11	5,86	6,13	4,68

Le traitement modifie-t-il de façon significative le paramètre biologique ($\alpha = 5\ \%$) ?

Solution.

1°/ Test de Student.

Les valeurs avant traitement et les valeurs après traitement ne constituent pas deux échantillons indépendants mais constituent deux séries appariées. Pour les comparer, nous comparerons leurs différences à la valeur de référence zéro.

Individu	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Somme
Valeur avant traitement	5,33	6,13	5,66	4,50	5,35	6,32	4,24	5,83	6,27	4,86	
Valeur après traitement	5,32	6,00	5,64	4,59	5,49	6,17	4,11	5,86	6,13	4,68	
Diminution x_i	0,01	0,13	0,02	– 0,09	– 0,14	0,15	0,13	– 0,03	0,14	0,18	0,50
Carré de la diminution x_i^2	0,0001	0,0169	0,0004	0,0081	0,0196	0,0225	0,0169	0,0009	0,0196	0,0324	0,1374

Des valeurs de sommes de la dernière colonne, on déduit les paramètres de la distribution des diminutions :

$n = 10$

$$\overline{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=n} x_i = 0{,}05$$

$$\sigma^{*2} = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{i=n} x_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{i=n} x_i\right)^2\right) = 1{,}249 \times 10^{-2}$$

La valeur observée de la fonction discriminante $T = \dfrac{\overline{X}}{\dfrac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}}$ est :

$$t_{obs} = 1,\ 415$$

La table de Student à 9 degrés de liberté, permet de calculer l'intervalle d'acceptation de l'hypothèse nulle : c'est l'intervalle] – 2, 262 ; + 2, 262 [. La valeur observée appartient à l'intervalle d'acceptation : on accepte l'hypothèse d'égalité des moyennes. La différence observée n'est pas significative au seuil de 5 %.

Ce test nécessite l'hypothèse de normalité de la variable aléatoire X = diminution de la valeur du paramètre.

2°/ Test des signes et des rangs de Wicoxon.

Comme on connaît toutes les valeurs mesurées, on peut se passer de l'hypothèse de normalité en pratiquant un test des signes et des rangs de Wilcoxon.

H_0 : $\mu = 0$.

H_1 : $\mu \neq 0$ (test bilatéral)

H_{1+} : $\mu > 0$ (test unilatéral, on accepte H_{1+} si la diminution est suffisamment positive)

Individu	Diminution X	$\lvert X \rvert$	Signe (X)	Tri	$\lvert X \rvert$	Signe (X)	Rang	W_+
1	0.01	0.01	1		0.01	1	1	1
2	0.13	0.13	1		0.02	1	2	2
3	0.02	0.02	1		0.03	-1	3	0
4	-0.09	0.09	-1		0.09	-1	4	0
5	-0.14	0.14	-1		0.13	1	5.5	5.5
6	0.15	0.15	1		0.13	1	5.5	5.5
7	0.13	0.13	1		0.14	-1	7.5	0
8	-0.03	0.03	-1		0.14	1	7.5	7.5
9	0.14	0.14	1		0.15	1	9	9
10	0.18	0.18	1		0.18	1	10	10
							Somme	40.5

Pour $n = 10$, la table de la loi de W_+ fournit :

— Pour le test bilatéral, des valeurs seuils 8 (α = 5 %) et 3 (α = 1 %),

Intervalles d'acceptation de H_0 : $[8 ; \frac{n(n+1)}{2} - 8] = [8 ; 47]$ (α = 5 %) et $[3 ; \frac{n(n+1)}{2} - 3] = [3 ; 52]$ (α = 1 %).

— Pour le test unilatéral, des valeurs seuils 10 (α = 5 %) et 4 (α = 1 %),

Intervalles d'acceptation de H_0 : $[0 ; \frac{n(n+1)}{2} - 10] = [0 ; 45]$ (α = 5 %) et $[0 ; \frac{n(n+1)}{2} - 4] = [0 ;$

51] (α = 1 %).

Dans tous les cas, la valeur observée 40,5 de W_+ appartient à l'intervalle d'acceptation de l'hypothèse H_0 : la différence observée n'est donc pas significative.

Conclusion pratique.

Jusqu'à plus ample information, compte tenu de la taille de l'échantillon, la différence observée entre les valeurs avant et après traitement n'est pas significative (au seuil de 5 %).

Autrement dit, sous réserve que l'échantillon soit aléatoire, nous admettrons que le traitement n'a pas d'effet sur la viscosité.

La conclusion du test est la même qu'avec le test de Student, mais **nous avons pu nous passer de l'hypothèse que *X* suit une loi normale**.

Chapitre 19. Comparaison de deux moyennes - test de Student.

Enoncés.

Exercice 7. Résistance d'une corde de nylon.

Un laboratoire de recherche et développement a mis au point un nouveau processus de production permettant d'accroître, on l'espère, la résistance de la corde de nylon. A partir de 6 fournées choisies au hasard, il teste le nouveau processus sur chaque demi-fournée et l'ancien processus sur chacune des demi-fournées restantes. On enregistre ainsi la force de rupture d'une corde testée à partir de chaque demi-fournée :

Fournée	1	2	3	4	5	6
Ancien processus	620	600	640	630	570	600
Nouveau processus	660	620	670	620	580	630

Construire un intervalle de confiance pour apprécier l'amélioration due au nouveau processus?

Solution.

1°/ Test de Student.

Fournée	1	2	3	4	5	6	Somme
Ancien processus	620	600	640	630	570	600	
Nouveau processus	660	620	670	620	580	630	
Amélioration	40	20	30	– 10	10	30	120
Carré	1600	400	900	100	100	900	4000

$\overline{x} = 20$, $\sigma^{*2} = \frac{1}{5}(4000 - \frac{1}{6}\,120^2) = 320$, $\sigma^* = 17{,}89$.

Sous l'**hypothèse normale**, la table de Student à 5 degrés de liberté permet de calculer un intervalle de confiance à 95 % pour l'amélioration :

$$t_{0,975} = 2{,}571$$

$$\overline{x} \pm 2{,}571 \frac{\sigma^*}{\sqrt{n}} = 20{,}00 \pm 18{,}78$$

Décision mathématique.

0 n'appartient pas à l'intervalle de confiance à 95 %, l'amélioration est significativement différente de 0, il y a amélioration.

Conclusion pratique.

Jusqu'à plus ample information, compte tenu de la taille de l'échantillon, on admettra que le nouveau processus de production apporte une amélioration de la résistance de la corde de nylon (α = 5 %).

2°/ Test des signes et des rangs de Wilcoxon.

En réalité, on ne sait pas si l'hypothèse normale est justifiée ou non.
Comme on connaît toutes les valeurs mesurées, on peut se passer de l'hypothèse normale, avec le test des signes et des rangs de Wilcoxon.
On calcule les valeurs absolues et les signes, on trie suivant les valeurs absolues croissantes, on attribue les rangs et on fait la somme des rangs correspondants aux valeurs positives de l'amélioration.

Fournée	Amélioration X	$\lvert X \rvert$	Signe (X)	Tri	$\lvert X \rvert$	Signe (X)	Rang	W_+
1	40	40	1		10	-1	1.5	0
2	20	20	1		10	1	1.5	1.5
3	30	30	1		20	1	3	3
4	-10	10	-1		30	1	4.5	4.5
5	10	10	1		30	1	4.5	4.5
6	30	30	1		40	1	6	6
							Somme	19.5

La table de la loi de W_+ donne, pour n = 6 et α = 5 % :

- la valeur seuil B = 0 pour le test bilatéral.
  On accepte toujours l'hypothèse H_0 : μ = 0, pour un échantillon aussi petit.
- la valeur seuil B = 2 pour le test unilatéral.
  Intervalle d'acceptation [0 ; $\frac{n(n+1)}{2} - B$] = [0 ; 19].

La valeur observée 19,5 de W_+ n'est pas dans cet intervalle : on rejette H_0 et on accepte H_{1+} : $\mu > 0$.

Conclusion pratique.

Jusqu'à plus ample information, compte tenu de la taille de l'échantillon, on admettra que le nouveau processus de production apporte une amélioration de la résistance de la corde de nylon (α = 5 %).

Ce test est moins puissant que celui de Student, mais il permet de se passer de l'hypothèse de normalité de la population.

Chapitre 19. Comparaison de deux moyennes - test de Student.

Enoncés.

Exercice 8. Masse de sachets de médicaments.

Afin de contrôler un lot de fabrication d'un médicament divisé en sachets, on a prélevé un échantillon aléatoire de 15 sachets que l'on a pesés. 1°/ Comparer, au risque $\alpha = 5\ \%$ et $\alpha = 1\ \%$, la masse moyenne du lot à la valeur donnée par la norme de fabrication : 1, 50 g : — dans le cas où l'hypothèse alternative est : " la masse moyenne du lot est différente de 1, 50 g " — dans le cas où l'hypothèse alternative est : " la masse moyenne du lot est supérieure à 1, 50 g " N.B. La somme observée des masses des sachets est de 23, 25 grammes et la somme de leurs carrés est 36, 1690. 2°/ Reprendre la question précédente dans le cas où la fabrication est considérée comme normale et où l'écart-type de la masse d'un sachet vaut 0, 095 gramme. On se placera dans le cas d'un test bilatéral et dans le cas d'un test unilatéral. On calculera, dans chaque cas, le risque de dire que la masse moyenne du lot correspond à la norme du fabricant, alors qu'elle en diffère, en réalité, de 0,1 gramme.	

Solution.

1°/ Comparaison de moyennes : petit échantillon / population de référence, variance inconnue.

Si X désigne la variable aléatoire " masse d'un sachet du lot de fabrication ", la loi de probabilité de X est inconnue.
Comme l'échantillon prélevé est petit ($n = 15 < 30$), on ne peut tirer de conclusion d'un test que si l'on suppose que X suit une loi de Gauss, de moyenne μ inconnue et d'écart-type σ inconnu.

Hypothèse : X suit une loi normale.
Cette hypothèse ne soulève pas de difficulté, c'est simplement la " loi des erreurs ".

Sous cette hypothèse, la fonction discriminante $T = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\dfrac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}}$ suit une loi de Student à $\nu = n - 1$ degrés de liberté.
On utilisera donc un **test de Student à 14 degrés de liberté**.
Suivant l'hypothèse alternative $(H_1) : \mu \neq \mu_0$ ou $(H'_1) : \mu > \mu_0$, que l'on teste contre l'hypothèse nulle $H_0 : \mu = \mu_0$, on fera un test bilatéral ou unilatéral à droite.

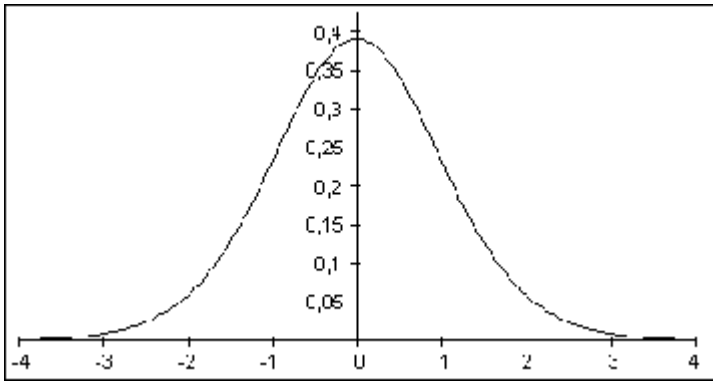
La valeur observée de $\overline{X}$ est $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=n} x_i = \frac{23,25}{15} = 1,55$ grammes

La valeur observée de $\hat{\sigma}^2$ est $\sigma^{*2} = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{i=n} x_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{i=n} x_i\right)^2\right) = \frac{1}{14}\left(36,169 - \frac{23,25^2}{15}\right) = 9,393 \times 10^{-3}$.

La valeur observée de $\hat{\sigma}$ en est la racine carrée : $\sigma^* = 0,097$.

La valeur observée de T est donc $t_{obs} = \frac{1,55 - 1,50}{0,097} \times \sqrt{15} = 1,998$.

La loi de Student à 14 degrés de liberté $f_{14}(t) = \frac{429}{2048}\sqrt{7}\left(1 + \frac{t^2}{14}\right)^{-\frac{15}{2}}$ permet de déterminer l'intervalle d'acceptation de l'hypothèse (H_0).



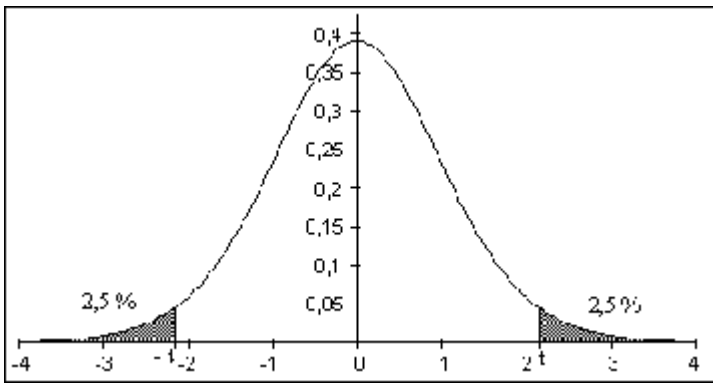
a) $\alpha = 0,05$.

— Test bilatéral.

On cherche la valeur de t telle que la surface hachurée soit égale à 0, 05 :

La table de la fonction de répartition de la variable de Student à 14 degrés de liberté fournit :

$$F_{14}(2,145) = 0,975$$



On en déduit : $Prob(T \in [-2,145 ; +2,145]) = 0,95$ et l'intervalle d'acceptation de H_0 est : $[-2,145 ; +2,145]$.

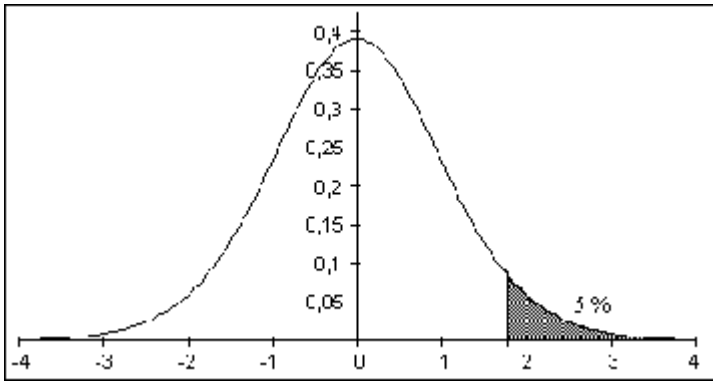
La valeur observée $t_{obs} = 1,998$ est dans l'intervalle d'acceptation : on accepte H_0.
La différence observée n'est pas significative au seuil de 5 %. On accepte le lot de fabrication.

— Test unilatéral à droite.

On cherche la valeur de t telle que la surface hachurée soit égale à 5 % :

La table de la fonction de répartition de la variable de Student à 14 degrés de liberté fournit :

$$F_{14}(1,761) = 0,950$$



On en déduit : Prob (T ∈] – ∞ ; 1, 761]) = 0, 950 et l'intervalle d'acceptation de H_0 est :
] – ∞ ; 1, 761].

La valeur observée t_{obs} = 1, 998 n'est pas dans l'intervalle d'acceptation : on rejette H_0.
La différence observée est significative au seuil de 5 %. On rejette le lot de fabrication.

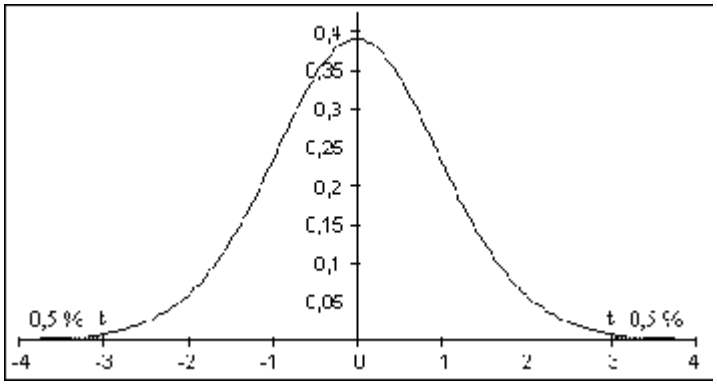
b) α = 0, 01

— Test bilatéral.

On cherche la valeur de *t* telle que la surface hachurée soit égale à 0, 01 :

La table de la fonction de répartition de la variable de Student à 14 degrés de liberté fournit :

$$F_{14}(2{,}977) = 0{,}995$$



On en déduit : *Prob* ($T \in [– 2{,}977 ; + 2{,}977]$) = 0, 995 et l'intervalle d'acceptation de H_0 est :
[– 2,977 ; + 2,977].

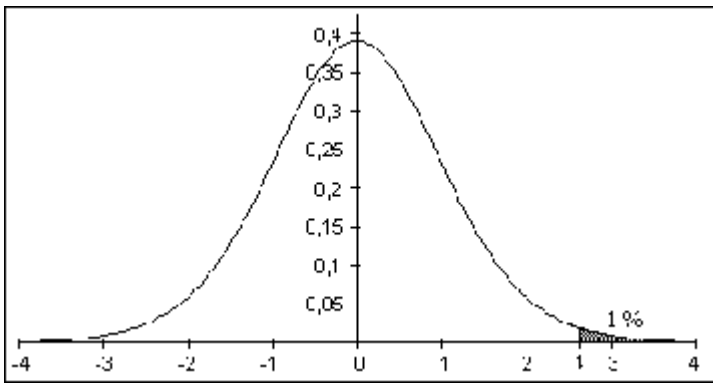
La valeur observée t_{obs} = 1,998 est dans l'intervalle d'acceptation : on accepte H_0.
La différence observée n'est pas significative au seuil de 1 %. On accepte le lot de fabrication.

— Test unilatéral à droite.

On cherche la valeur de *t* telle que la surface hachurée soit égale à 1 % :

La table de la fonction de répartition de la variable de Student à 14 degrés de liberté fournit :

$$F_{14}(2{,}624) = 0{,}990$$



On en déduit : *Prob* ($T \in] – \infty ; 2{,}624]$) = 0, 990 et l'intervalle d'acceptation de H_0 est :
] – ∞ ; 2,624].

La valeur observée t_{obs} = 1, 998 est dans l'intervalle d'acceptation : on accepte H_0.
La différence observée n'est pas significative au seuil de 1 %. On accepte le lot de fabrication.

2°/ Comparaison de moyennes : petit échantillon / population de référence, variance connue.

Par hypothèse, *X* suit une loi normale de moyenne μ inconnue et de variance connue $\sigma^2 = (0, 095)^2$.

La fonction discriminante $U = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ suit une loi de Gauss centrée réduite. On utilisera donc un **test de Gauss**.

La valeur observée de la fonction discriminante est $u_{obs} = \frac{1,55 - 1,50}{0,095} \times \sqrt{15} = 2,038$.

α	Test de Gauss	Lu dans la table	Intervalle d'acceptation (IA)	Décision mathématique
0, 05	Bilatéral	F (1,960) = 0, 975 0	] – 1, 96 ; + 1, 96 [	On rejette H_0
0, 05	Unilatéral à droite	F (1,645) = 0, 950 0	] – ∞ ; 1, 645 [	On rejette H_0
0, 01	Bilatéral	F (2,575) = 0, 995 0	] – 2, 575 ; + 2, 575 [	On accepte H_0
0, 01	Unilatéral à droite	F (2,327) = 0, 990 0	] – ∞ ; 2, 327 [	On accepte H_0

Risque β.

Soit *IA* l'intervalle d'acceptation.

$$\beta = Prob\left[IA \,\middle|\, U \rightsquigarrow G\left(\frac{\Delta\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}; 1\right)\right] = Prob\left[IA \mid U \rightsquigarrow G\left(\frac{0,1}{0,095} \times \sqrt{15}; 1\right)\right]$$

$\beta = Prob$ [IA | $U \rightsquigarrow G$ (4, 077 ; 1)].

α	Test de Gauss	Borne supérieure	Borne inférieure	β
0,05	Bilatéral	F (1,96 – 4,077) = F (– 2,117) = 1 – 0,9829 = 0,0171	F (– 1,96 – 4,077) = F (– 6,037) = 0	0,0171
0,05	Unilatéral à droite	F (1,645 – 4,077) = F (– 2,432) = 1 – 0,9925 = 0,0075	F (–∞) = 0	0,0075
0,01	Bilatéral	F (2,575 – 4,077) = F (– 1,502) = 1 – 0,9335 = 0,0665	F (– 2,575 – 4,077) = F (– 6,652) = 0	0,0665
0,01	Unilatéral à droite	F (2,327 – 4,077) = F (– 1,750) = 1 – 0,9599 = 0,0401	F (–∞) = 0	0,0401

Chapitre 21. Analyse de variance à un facteur contrôlé.

Exercices

Exercice 1. Cultures pour BCG.

Exercice 1. Cultures pour BCG.

Disposant de 5 milieux A, B, C, D, E, pour la culture du BCG, on se propose de savoir si, dans l'ensemble, les milieux sont équivalents ou, au contraire, certains favorisent la croissance plus que d'autres (nombre de colonies plus élevé).

On a donc ensemencé, à partir d'une même suspension de BCG, 8 tubes par milieu de culture. Le tableau suivant donne le nombre de colonies obtenues pour chaque tube :

Milieu de culture Résultats	A $i = 1$	B $i = 2$	C $i = 3$	D $i = 4$	E $i = 5$
x_{i1}	10	11	7	12	7
x_{i2}	12	18	14	9	6
x_{i3}	6	13	9	7	7
x_{i4}	13	8	10	8	5
x_{i5}	9	15	9	13	6
x_{i6}	10	16	11	14	7
x_{i7}	8	9	7	10	9
x_{i8}	9	13	9	11	6

1°/ Le nombre de colonies peut-il être considéré comme distribué normalement dans chacune des populations de mesure ?

2°/ La variance du nombre de colonies dans chacune des populations de mesures peut-elle être considérée comme indépendante du milieu de culture ?

3°/ Construire le tableau d'analyse de la variance. Quelle est la valeur estimée de la variance résiduelle ?

4°/ Au risque 5 %, peut-on considérer que le milieu de culture possède une influence sur la croissance du BCG ?

5°/ Peut-on séparer les milieux de culture en groupes ne présentant pas de différence significative au seuil de 5 % ? Si oui, faire cette répartition en groupes homogènes, en indiquant les milieux et les moyennes correspondantes du nombre de colonies.

Solution

HAUT

Chapitre 21. Analyse de variance à un facteur contrôlé.

Enoncés.

Exercice 1. Cultures pour BCG.

Disposant de 5 milieux A, B, C, D, E, pour la culture du BCG, on se propose de savoir si, dans l'ensemble, les milieux sont équivalents ou, au contraire, certains favorisent la croissance plus que d'autres (nombre de colonies plus élevé).

On a donc ensemencé, à partir d'une même suspension de BCG, 8 tubes par milieu de culture. Le tableau suivant donne le nombre de colonies obtenues pour chaque tube :

Milieu de culture Résultats	A $i = 1$	B $i = 2$	C $i = 3$	D $i = 4$	E $i = 5$
x_{i1}	10	11	7	12	7
x_{i2}	12	18	14	9	6
x_{i3}	6	13	9	7	7
x_{i4}	13	8	10	8	5
x_{i5}	9	15	9	13	6
x_{i6}	10	16	11	14	7
x_{i7}	8	9	7	10	9
x_{i8}	9	13	9	11	6

1°/ Le nombre de colonies peut-il être considéré comme distribué normalement dans chacune des populations de mesure ?

2°/ La variance du nombre de colonies dans chacune des populations de mesures peut-elle être considérée comme indépendante du milieu de culture ?

3°/ Construire le tableau d'analyse de la variance. Quelle est la valeur estimée de la variance résiduelle ?

4°/ Au risque 5 %, peut-on considérer que le milieu de culture possède une influence sur la croissance du BCG ?

5°/ Peut-on séparer les milieux de culture en groupes ne présentant pas de différence significative au seuil de 5 % ? Si oui, faire cette répartition en groupes homogènes, en indiquant les milieux et les moyennes correspondantes du nombre de colonies.

Solution.

1°/ Choix d'un test.

Il s'agit là de comparer, dans leur ensemble, cinq moyennes.

Hypothèse (H_0) : les 5 échantillons peuvent être considérés comme tirés d'une même population.

Hypothèse (H_1) : les 5 échantillons ne peuvent pas être considérés comme tirés d'une même population.

Dans l'hypothèse (H_0), la variance du nombre *X* de colonies peut être estimée de deux façons : variance résiduelle, c'est-à-dire variance de la différence entre *X* et son espérance, et variance de la moyenne de *X* dans chaque milieu de culture.

Le rapport de ces deux estimations de la variance de *X* suit une loi de Fisher-Snedecor, ce qui permet d'appliquer le test dit d'**analyse de la variance**, à un facteur étudié.

2°/ Conditions d'application du test.

Il faut que les conditions suivantes soient vérifiées :

a) Le facteur étudié *X* (nombre de colonies) est **distribué normalement** dans chacune des populations de mesures (milieu de culture).

b) Le facteur contrôlé *A* (milieu de culture) est suceptible de modifier la valeur moyenne du facteur étudié *X*, mais **pas sa variance**.

3°/ Vérification de la normalité.

Deux moyens :

— Histogramme des résidus : approche qualitative.

— Test du coefficient de symétrie et du coefficient d'aplatissement : mesure quantitative de l'écart par rapport à une loi de Gauss.

a) Histogramme des résidus.

On numérote les 40 mesures par colonnes de 1 à 40 et on les regroupe en classes ($\sqrt{n}$ classes environ, pour *n* mesures). Ici, pour simplifier, on va répartir les mesures en 7 classes :

5 - 6	7 - 8	9 - 10	11 - 12	13 - 14	15 - 16	17 - 18
		1				
		5				
		6				
	7	8				
	12	15				
	17	19				
	23	20		4		
3	27	21	2	11		
34	28	24	9	16		
36	33	26	22	18		
37	35	31	25	29	13	
40	38	39	32	30	14	10

La distribution ressemble plutôt à une **distribution bimodale**, mais on ne sait pas si la différence apparente avec une loi de Gauss est due au hasard, ni même si elle est suffisante pour dire que la distribution n'est pas normale.

b) Coefficients de Karl Pearson.

Il y a deux coefficients de Karl Pearson, le coefficient d'asymétrie et le coefficient d'aplatissement.

— Le coefficient d'asymétrie est $\beta_1 = \frac{{\mu_3}^2}{{\mu_2}^3}$ où μ_3 et μ_2 sont les moments centrés d'ordre 3 et 2 respectivement.

— Le coefficient d'aplatissement est $\beta_1 = \frac{\mu_4}{{\mu_2}^2}$ où μ_4 et μ_2 sont les moments centrés d'ordre 4 et 2 respectivement.

On peut estimer ces coefficients en prenant les moments centrés expérimentaux correspondants.
Comme ce calcul nécessite quand même pas mal d'opérations, on le fait faire par un ordinateur (Excel, ou n'importe quel autre tableur, suffit pour ce genre d'opérations) :

Milieu de culture	A	B	C	D	E	Total
Résultats	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$i = 4$	$i = 5$	
x_{i1}	10	11	7	12	7	
x_{i2}	12	18	14	9	6	
x_{i3}	6	13	9	7	7	
x_{i4}	13	8	10	8	5	
x_{i5}	9	15	9	13	6	
x_{i6}	10	16	11	14	7	
x_{i7}	8	9	7	10	9	
x_{i8}	9	13	9	11	6	
Sommes	77	103	76	84	53	393
Moyenne $\overline{x}$						9.825
Ecarts avec la moyenne	0.175	1.175	-2.825	2.175	-2.825	
	2.175	8.175	4.175	-0.825	-3.825	
	-3.825	3.175	-0.825	-2.825	-2.825	
	3.175	-1.825	0.175	-1.825	-4.825	
	-0.825	5.175	-0.825	3.175	-3.825	
	0.175	6.175	1.175	4.175	-2.825	
	-1.825	-0.825	-2.825	0.175	-0.825	
	-0.825	3.175	-0.825	1.175	-3.825	
Carrés des Ecarts	0.031	1.381	7.981	4.731	7.981	
	4.731	66.831	17.431	0.681	14.631	
	14.631	10.081	0.681	7.981	7.981	
	10.081	3.331	0.031	3.331	23.281	
	0.681	26.781	0.681	10.081	14.631	
	0.031	38.131	1.381	17.431	7.981	
	3.331	0.681	7.981	0.031	0.681	
	0.681	10.081	0.681	1.381	14.631	
Sommes	34.195	157.295	36.845	45.645	91.795	365.775
Moyenne m_2						9.144
Cubes des Ecarts	0.005	1.622	-22.545	10.289	-22.545	

	10.289	546.340	72.773	-0.562	-55.962	
	-55.962	32.006	-0.562	-22.545	-22.545	
	32.006	-6.078	0.005	-6.078	-112.329	
	-0.562	138.590	-0.562	32.006	-55.962	
	0.005	235.457	1.622	72.773	-22.545	
	-6.078	-0.562	-22.545	0.005	-0.562	
	-0.562	32.006	-0.562	1.622	-55.962	
Sommes	-20.858	979.381	27.625	87.510	-348.413	725.246
Moyenne m_3						18.131
β_1*	0.430					
Puissances 4 des Ecarts	0.001	1.906	63.690	22.379	63.690	
	22.379	4466.332	303.827	0.463	214.055	
	214.055	101.619	0.463	63.690	63.690	
	101.619	11.093	0.001	11.093	541.988	
	0.463	717.202	0.463	101.619	214.055	
	0.001	1453.945	1.906	303.827	63.690	
	11.093	0.463	63.690	0.001	0.463	
	0.463	101.619	0.463	1.906	214.055	
Sommes	350.074	6854.179	434.504	504.978	1375.687	9519.424
Moyenne m_4						237.986
β_2*	2.846					

Il faut ensuite comparer les résultats obtenus : β_1* = 0,430 et β_2* = 2,846, aux résultats théoriques $\beta_1 = 0$ et $\beta_2 = 3$ donnés par la loi de Gauss. Pour cela, on utilise des tables donnant les valeurs critiques de ces coefficients en fonction du nombre *n* de mesures.

La table du coefficient d'asymétrie donne, pour *n* = 40 et α = 5 %, une valeur seuil de 0,587.
Avec un β_1 = 0,430 inférieur à ce seuil, on ne peut pas rejeter l'hypothèse de normalité.

La table du coefficient d'aplatissement donne, pour *n* = 40 et α = 5 %, une valeur seuil de 2,07.
Avec un β_2 = 2,846 plus proche de 3 que le seuil, on ne peut pas rejeter l'hypothèse de normalité.

c) Conclusion de cette étude.

Au seuil de 5 %, on ne peut pas rejeter l'hypothèse de **normalité de la population**.

4°/ Homogénéité de la variance.

Pour vérifier que la variance des mesures ne dépend pas du milieu de culture, on pratique un **test de Bartlett**.

Pour chaque modalité du facteur étudié (pour chaque milieu de culture), on peut calculer l'ECART-TYPE DU RESIDU (différence entre *X* et sa moyenne), qui est aussi l'écart-type du nombre *X* de colonies. Le test de Bartlett est un test d'égalité de *p* variances.

La fonction discriminante est $B = \frac{Q}{C}$,

avec $Q = \nu \, ln \, S^2 - \sum_{i=1}^{i=k} \nu_i \, ln \, S_i^2$ et $C = 1 + \frac{1}{3(k-1)}\left(\sum_{i=1}^{i=k} \frac{1}{\nu_i} - \frac{1}{\nu} \right)$.

k est le nombre de modalités du facteur contrôlé : $k = 5$.

$\nu_i = n_i - 1$, n_i étant l'effectif de l'échantillon i : $\nu_i = 7$, pour tout i, $1 \le i \le 5$.

$\nu = \sum_{i=1}^{i=k} \nu_i = 35$.

$\nu_i S_i^2$ est la somme des carrés des écarts dans le milieu i : $\hat{\sigma}_i^2 = S_i^2$.

$\nu S^2 = \sum_{i=1}^{i=k} \nu_i S_i^2$ est la somme totale des carrés des écarts.

$\hat{\sigma}^2 = S^2 = \frac{1}{\nu} \sum_{i=1}^{i=k} \nu_i S_i^2$

Q ne prend que des valeurs positives, petites lorsque les variances sont égales.
Sous H_0, B suit à peu près une **loi du Khi-deux à $k - 1 = 4$ degrés de liberté**.

Lorsque tous les n_i sont égaux à un même nombre q (q mesures pour chaque modalité), et que le nombre de modalités est noté p, le TEST DE BARTLETT consiste, en pratique, à comparer la valeur de la probabilité critique associée à

$$\chi^2 = \frac{q-1}{1+\frac{p+1}{3p(q-1)}} \left(p \, ln \, \hat{\sigma}^2 - \sum_{i=1}^{i=p} ln \, \hat{\sigma}_i^2 \right)$$

observé, à la valeur 5 %, pour $p - 1$ degrés de liberté.

Dans l'expression de χ^2, $\hat{\sigma}^2$ se réduit à la moyenne arithmétique $\frac{1}{p} \sum_{i=1}^{i=p} \hat{\sigma}_i^2$ des $\hat{\sigma}_i^2$.

Dans le tableau de calculs précédent, reprenons les carrés des écarts.
Les estimateurs de variance $\hat{\sigma}_i^2$ dans chaque milieu s'obtiennent en divisant par $q - 1 = 7$ la somme des carrés des écarts pour le milieu considéré.
L'écart-type estimé est la racine carrée de la variance estimée.

Milieu de culture Résultats	*A* $i = 1$	*B* $i = 2$	*C* $i = 3$	*D* $i = 4$	*E* $i = 5$	*Total*
x_{i1}	10	11	7	12	7	
x_{i2}	12	18	14	9	6	
x_{i3}	6	13	9	7	7	
x_{i4}	13	8	10	8	5	
x_{i5}	9	15	9	13	6	
x_{i6}	10	16	11	14	7	
	8	9	7	10	9	

x_{i7}						
x_{i8}	9	13	9	11	6	
Total T_i	77	103	76	84	53	$T_G = 393$
T_i^2	5929	10609	5776	7056	2809	32179
Somme des x_{ij}^2	775	1409	758	924	361	4227
$\sigma_i^{*2} = \frac{1}{7}\left(\sum_{j=1}^{j=8} x_{ij}^2 - \frac{1}{8}\left(\sum_{j=1}^{j=8} x_{ij}\right)^2\right)$	4.839	11.839	5.143	6.000	1.411	29.232
σ_i^*, estimation de l'écart-type de X	2.200	3.441	2.268	2.449	1.188	11.546

Hypothèse (H_0) : La variance de X a une valeur constante, indépendante du milieu.
Hypothèse (H_1) : La variance de X dépend du milieu de culture.

Dans l'hypothèse (H_0), on peut prendre pour estimation commune de σ^2, variance de X, la moyenne arithmétique des σ_i^{*2} :

$$\sigma^{*2} = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{i=5} \sigma_i^{*2} = \frac{29{,}232}{5} = 5{,}8464.$$

$$\chi^2_{obs} = \frac{8-1}{1+\frac{5+1}{2\times 5\times(8-1)}}\left(5\ ln\ 5{,}8464 - \sum_{i=1}^{i=5} ln\ \hat{\sigma}_i^2\right) = 6{,}67$$

χ^2 suit une loi de Pearson à $p - 1 = 4$ degrés de liberté.

La table de Pearson à 4 degrés de liberté fournit la valeur seuil 9,49 :

$$F_4\,(9{,}49) = 0{,}950$$

$6{,}67 < 9{,}49 \Rightarrow$ on accepte (H_0).
La variance de X a une valeur constante, indépendante du milieu.

Recherche des résidus suspects (méthode de Grubbs).

Si l'on avait été amené à rejeter (H_0), on rechercherait d'où vient le rejet : on s'aperçoit que la plus grosse contribution à la variance est celle du deuxième milieu de culture et, dans ce deuxième milieu de culture, la plus grosse contribution vient de la deuxième mesure, 18 colonies, qui est d'ailleurs la seule mesure à ce niveau.
C'est le premier **résidu suspect**.
On refait le calcul sans cette mesure, et on recommence jusqu'à ce que l'on accepte (H_0) : on met ainsi en évidence les résidus supects, c'est la méthode de Grubbs.

Pour un résidu suspect, on vérifiera qu'il n'y a pas d'erreur de saisie ou d'erreur de mesure ! S'il n'y a aucune erreur, il faudrait bien admettre que la variance dépend du milieu de culture, au seuil de 5 %.
Dans ce cas, on pourrait quand même faire une analyse de variance, le calcul reste à peu près valable : le

test est **robuste**.

5°/ Tableau d'analyse de la variance.

Nous avons ici :

- facteur étudié A = milieu de culture
  p = 5 modalités
- variable à analyser X = nombre de colonies
  q = 8 mesures (8 répétitions).
- $n = p\,q$ = 40 mesures au total.

Milieu de culture Résultats	A $i = 1$	B $i = 2$	C $i = 3$	D $i = 4$	E $i = 5$	*Total*
x_{i1}	10	11	7	12	7	
x_{i2}	12	18	14	9	6	
x_{i3}	6	13	9	7	7	
x_{i4}	13	8	10	8	5	
x_{i5}	9	15	9	13	6	
x_{i6}	10	16	11	14	7	
x_{i7}	8	9	7	10	9	
x_{i8}	9	13	9	11	6	
T_i	77	103	76	84	53	$T_G = 393$
$T_i^{\,2}$	5929	10609	5776	7056	2809	32179
Somme des $x_{ij}^{\,2}$	775	1409	758	924	361	4227

Les sommes des carrés des écarts (S.C.E.) sont données par les formules :

$$SCEA = \frac{1}{q}\sum_{i=1}^{i=p} T_i^{\,2} - \frac{T_G^{\,2}}{n} = \frac{32179}{8} - \frac{393^2}{40} = \frac{3223}{20} = 161{,}15$$

$$SCER = \sum_{i=1}^{i=p}\sum_{j=1}^{j=q} x_{ij}^{\,2} - \frac{1}{q}\sum_{i=1}^{i=p} T_i^{\,2} = 4227 - \frac{32179}{8} = \frac{1637}{8} = 204{,}625$$

$$SCET = SCEA + SCER = \sum_{i=1}^{i=p}\sum_{j=1}^{j=q} x_{ij}^{\,2} - \frac{T_G^{\,2}}{n} = 4227 - \frac{393^2}{40} = \frac{14361}{40} = 365{,}775$$

Les carrés moyens (C.M.) s'obtiennent en divisant les sommes des carrés des écarts (S.C.E.) par les nombres de degrés de liberté (D.D.L.) :

$$CMT = \frac{365{,}775}{39} = 9.3788$$

$$CMEA = \frac{161{,}115}{4} = 40{,}2875$$

$$CMR = \frac{204{,}625}{35} = 5{,}8464$$

La valeur du facteur $F = \frac{CMEA}{CMR}$ s'en déduit : $F = 6{,}8910$.
La table de la loi de Fisher-Snedecor à (4;35) degrés de liberté, donne

$$F(4;30)\ (3{,}25) = 0{,}975 \text{ et } F(4;40)\ (3{,}13) = 0{,}975.$$

Par interpolation linéaire, on a donc : $F(4;35)\ (3{,}19) = 0{,}975$. Autrement dit, la valeur seuil pour $\alpha = 5\ \%$, est 3,19. La probabilité critique correspondant à $F = 6{,}8910$, égale à deux fois la queue de probabilité à droite de 6,8910, est donc bien inférieure à 5 %. La calculette (*HP 48SX*) donne la valeur $3{,}35 \times 10^{-4}$.

On peut alors dresser le **tableau d'analyse de variance** :

Source de Variation	S.C.E.	D.D.L.	C.M.	*F*	PROBA
Totale	365.775	39	9.3788		
Facteur A	161.15	4	40.2875	6.8910	*pc* << 5 %
Résiduelle	204.625	35	5.8464		

La **variance résiduelle** est estimée par le carré moyen ayant pour source la variation résiduelle :
$\sigma_R^{*\,2} = 5{,}8464$.

Décision mathématique.

La probabilité critique est plus petite que 5 % : on rejette l'hypothèse (H_0).

Conclusion pratique :

Jusqu'à plus ample information, compte tenu de la taille de l'échantillon, la différence observée apparaît significative, le milieu de culture a une influence sur le nombre de colonies de BCG ($pc < 0{,}025$).

6°/ Groupes homogènes.

Lorsque le facteur contrôlé (milieu de culture) a une influence sur le facteur étudié (nombre de colonies), il faut regarder si l'on peut regrouper les milieux de culture en ensembles au sein desquels il n'y a pas de différence significative.
C'est ce qu'on appelle la recherche des groupes homogènes.
Cette recherche se fait par le TEST DE NEWMANN-KEULS.
Bien entendu, s'il n'y a pas de différence significative, la recherche de groupes homogènes est sans objet : toutes les modalités du facteur étudié font partie du même groupe homogène.

Commençons par classer les moyennes correspondant aux diverses modalités du facteur étudié par **ordre décroissant**.

B	*D*	*A*	*C*	*E*
12.875	10.500	9.625	9.500	6.625

Le problème est alors de savoir si, à partir du milieu *B*, l'on peut constituer des groupes de milieux de culture dans lesquels la différence de moyennes n'est pas significative (au seuil de 5 %).
Pour cela, la table RANGE STUDENTISE ($\alpha = 5\ \%$) donne, suivant le nombre de moyennes à regrouper et suivant le nombre de degrés de liberté $n - p$ de la variance résiduelle, une valeur seuil t_s qui permet de calculer la PLUS PETITE AMPLITUDE SIGNIFICATIVE (P.P.A.S.) par la formule :

$$PPAS = t_s \sqrt{\frac{\sigma_R^{*2}}{q}}$$

La variance résiduelle a été calculée plus haut : $\sigma_R^{*2} = 5{,}8464$, et $q = 8$ mesures.

Nombre de moyennes	2	3	4	5
t_s	2,87	3,46	3,82	4,07
PPAS	2,45	2,96	3,27	3,48

La comparaison des différences de moyennes avec les PPAS permet alors de constituer des groupes homogènes, dans lesquels il n'y a pas de différence significative des moyennes : tant que la différence reste inférieure à la plus petite amplitude significative, le milieu fait partie du même groupe homogène.

Milieu	*B*	*D*	*A*	*C*	*E*
Moyenne	12.875	10.500	9.625	9.500	6.625
Différence	0	2.375	3.250	3.375	6.250
PPAS		2.45	2.96	3.27	3.48
Groupe 1	**oui**	**oui** 2.375 < 2.45	non 3.250 > 2.96	non	non
Différence		0	0.875	1.000	3.875
PPAS			2.45	2.96	3.27
Groupe 2		**oui**	**oui**	**oui**	non
Différence			0	0,125	3,000
PPAS				2.45	2.96
Partie du Groupe 2			**oui**	**oui** 0.125 < 2.45	non 3.000 > 2.96
Différence				0	2.875
PPAS					2.45
Partie du Groupe 2				**oui**	non
Différence					0
Groupe 3					**oui**

Résultat du test de Newmann-Keuls.

Il y a **trois groupes homogènes** :

— Le premier est constitué des milieux *B* et *D*.
— Le deuxième est constitué des milieux *D*, *A* et *C*.
— Le troisième est constitué du milieu *E*.

Chapitre 22. Analyse de variance à deux facteurs contrôlés.

Exercices

Exercice 1. Titrage du glucose par plusieurs laboratoires.

Exercice 1. Titrage du glucose par plusieurs laboratoires.

Pour tester la fiabilité de 4 laboratoires d'analyse, on utilise 4 solutions ayant le même titre de glucose dans du sérum physiologique additionné de quantités variables de galactose. Chaque laboratoire reçoit un échantillon de chaque solution et fournit le résultat de ses mesures. L'ensemble des résultats, exprimés en grammes de glucose par litre de solution, est regroupé dans le tableau suivant :

Facteur A . Laboratoire

Facteur B. Solution	1	2	3	4
1	1.05	1.15	1.08	1.13
2	1.12	1.15	1.11	1.09
3	1.02	1.10	1.04	1.05
4	1.09	1.11	1.07	1.10

1°/ Le taux de glucose peut-il être considéré comme distribué normalement dans chacune des populations de mesures ?

Solution

2°/ La variance du taux de glucose dans chacune des populations de mesures peut-elle être considérée comme indépendante du laboratoire et de la solution ?

3°/ Quelle est la valeur estimée de la variance résiduelle ?

4°/ Au risque 5 %, peut-on considérer que le choix du laboratoire a une influence sur la mesure du taux de glucose ?

5°/ Au risque 5 %, peut-on considérer que la quantité de galactose présente dans la solution a une influence sur la mesure du taux de glucose ?

6°/ Peut-on séparer les laboratoires en groupes homogènes ne présentant pas de différence significative, au seuil de 5 % ?

7°/ Peut-on séparer les solutions en groupes homogènes ne présentant pas de différence significative, au seuil de 5 % ?

HAUT

Chapitre 22. Analyse de variance à deux facteurs contrôlés.

Enoncés.

Exercice 1. Titrage du glucose par plusieurs laboratoires.

Pour tester la fiabilité de 4 laboratoires d'analyse, on utilise 4 solutions ayant le même titre de glucose dans du sérum physiologique additionné de quantités variables de galactose. Chaque laboratoire reçoit un échantillon de chaque solution et fournit le résultat de ses mesures. L'ensemble des résultats, exprimés en grammes de glucose par litre de solution, est regroupé dans le tableau suivant :

Facteur A . Laboratoire

Facteur B. Solution	1	2	3	4
1	1.05	1.15	1.08	1.13
2	1.12	1.15	1.11	1.09
3	1.02	1.10	1.04	1.05
4	1.09	1.11	1.07	1.10

1°/ Le taux de glucose peut-il être considéré comme distribué normalement dans chacune des populations de mesures ?

2°/ La variance du taux de glucose dans chacune des populations de mesures peut-elle être considérée comme indépendante du laboratoire et de la solution ?

3°/ Quelle est la valeur estimée de la variance résiduelle ?

4°/ Au risque 5 %, peut-on considérer que le choix du laboratoire a une influence sur la mesure du taux de glucose ?

5°/ Au risque 5 %, peut-on considérer que la quantité de galactose présente dans la solution a une influence sur la mesure du taux de glucose ?

6°/ Peut-on séparer les laboratoires en groupes homogènes ne présentant pas de différence significative, au seuil de 5 % ?

7°/ Peut-on séparer les solutions en groupes homogènes ne présentant pas de différence significative, au seuil de 5 % ?

Solution.

1°/ Tableau d'analyse de variance.

Nous avons ici :
facteur étudié 1 = Laboratoire
p = 4 modalités
facteur étudié 2 = Solution
q = 4 modalités
variable à analyser X = taux de glucose mesuré
1 seule mesure par traitement (modèle additif complet sans répétition)
$n = p\,q$ = 16 mesures au total.

	Facteur A : Laboratoire					
Facteur B Solution	1	2	3	4	**Total**	$T_{.j}^2$
1	1,05	1,15	1,08	1,13	4,41	19,45
2	1,12	1,15	1,11	1,09	4,47	19,98
3	1,02	1,10	1,04	1,05	4,21	17,72
4	1,09	1,11	1,07	1,10	4,37	19,10
Total	4,28	4,51	4,30	4,37	**17,46**	**76,25**
$T_{i.}^2$	18,32	20,34	18,49	19,10	**76,25**	
$\sum_{i,j} x_{ij}^2$	4,59	5,09	4,63	4,78	**19,08**	

Les formules donnant les S.C.E. (sommes des carrés des écarts) :

$$SCT = \sum_{i=1}^{i=p}\sum_{j=1}^{j=q} x_{ij}{}^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{i=p}\sum_{j=1}^{j=q} x_{ij}\right)^2$$

$$SCEA = \frac{1}{q}\sum_{i=1}^{i=p}\left(\sum_{j=1}^{j=q} x_{ij}\right)^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{i=p}\sum_{j=1}^{j=q} x_{ij}\right)^2$$

$$SCEB = \frac{1}{p}\sum_{j=1}^{j=q}\left(\sum_{i=1}^{i=p} x_{ij}\right)^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{i=p}\sum_{j=1}^{j=q} x_{ij}\right)^2$$

$$SCR = SCT - SCEA - SCEB$$

conduisent alors au tableau d'analyse de variance suivant :

Source de variation	S.C.E.	DDL	Carrés Moyens	F	Proba critique	E.T.	C.V.
Totale	0,021775	15	$1{,}79 \times 10^{-3}$				
Facteur *A*	0,008125	3	$2{,}71 \times 10^{-3}$	5,57	$1{,}94 \times 10^{-2}$		
Facteur *B*	0,009275	3	$3{,}09 \times 10^{-3}$	6,36	$1{,}33 \times 10^{-2}$		
Résiduelle	0,004375	9	$4{,}86 \times 10^{-4}$			$2{,}20 \times 10^{-2}$	$2{,}02 \times 10^{-2}$

Les probabilités critiques ont été calculées avec une calculette *HP 48 SX* en tapant :
3 9 5,57 UTPF [ENTER]
3 9 6,36 UTPF [ENTER].

A défaut de machine à calculer donnant les probabilités de la loi F de Snedecor, on peut utiliser les tables de la fonction de répartition de la loi de Snedecor. La table pour $n_1 = 3$ et $n_2 = 9$ donne :

Pour $P = 0{,}950$, $F_{(3\,;\,9)}(3{,}86) = 0{,}950$

Pour $P = 0{,}975$, $F_{(3\,;\,9)}(4{,}72) = 0{,}975$

Donc, pour $F_{(3\,;\,9)}(5{,}57)$ et $F_{(3\,;\,9)}(6{,}36)$, sont encore plus proches de 1 que 0,975 et, par passage au

complémentaire à 1, la probabilité critique est encore plus proche de 0 que 0,025.

$\alpha_1 < 0{,}025 < 0{,}05 \Rightarrow$ Influence significative du facteur Laboratoire

$\alpha_2 < 0{,}025 < 0{,}05 \Rightarrow$ Influence significative du facteur Solution.

Comme pour l'analyse de variance à un facteur étudié, la table Range Studentisé (test de Newmann-Keuls) permet de déterminer, suivant le nombre de moyennes à regrouper, de déterminer une valeur seuil t_s et les *PPAS* correspondantes, pour chaque facteur.
On en déduit alors les groupes homogènes de laboratoires et les groupes homogènes de solution.
Ce calcul sera fait automatiquement par le logiciel STATITCF lorsqu'on choisit les options standards d'analyse.

2°/ Vérification des hypothèses de validité.

De même, le logiciel calculera les **coefficients d'aplatissement et de symétrie de Karl Pearson** de la distribution de valeurs des taux de glucose pour vérifier la normalité de la distribution, qui implique la normalité dans chaque populations de mesures lorsque H_0 est vraie.

Pour vérifier que les facteurs étudiés n'ont pas d'influence sur la variance, le logiciel STATITCF fera un **test de Bartlett pour chaque facteur** (Voir Chapitre 21, Exercice 1).

3°/ Résultats donnés par l'ordinateur.

Le logiciel utilisé est STATITCF.

***** A N A L Y S E D E V A R I A N C E *****

CARACTERISTIQUES DU FICHIER : A:AVA2
TITRE : Analyse de Variance 2 facteurs

NOMBRE D' OBSERVATIONS : 16
NOMBRE DE VARIABLES : 3

***** NO ET NOMS DES VARIABLES *****

1. Labo / 2. Solu / 3. Gluc /

Etude de l'influence du choix du laboratoire et du taux de galactose sur la mesure du taux de glucose d'une solution dans du sérum physiologique.

DISPOSITIF DE L'ESSAI : FACTORIEL, 2 FACTEURS EN RANDOMISATION TOTALE
==========

FACTEUR 1 = 4 Laboratoires
1 = Laboratoire 1 (L 1) 2 = Laboratoire 2 (L 2) 3 = Laboratoire 3 (L 3) 4 = Laboratoire 4 (L 4)

FACTEUR 2 = 4 Solutions
1 = Solution 1 (S 1) 2 = Solution 2 (S 2) 3 = Solution 3 (S 3) 4 = Solution 4 (S 4)

1 VARIABLE(S) A ANALYSER

==========
1e VARIABLE : (Gluc) Glucose (g/l)

==========
ANALYSE DE LA 1re VARIABLE : Glucose (g/l) (Gluc)
==========

HISTOGRAMME DES RESIDUS VARIABLE Gluc : Glucose (g/l)
==========

5 I 13 21
4 I 22 23
3 I 11 31 32 12
2 I 24 34 33 14
1 I 42 43 44 41
I----------

EFFECTIFS 3 5 5 3

BORNES -0.03 -0.02 -0.00 0.01 0.03

MINIMUM : -0.03 MAXIMUM : 0.03 INTERVALLE : 0.01

INDICES DE NORMALITE (coefficients de K.PEARSON)

SYMETRIE (valeur idéale théorique = 0) : BETA 1 = 0.08 PROBA = 0.6070
APLATISSEMENT (valeur idéale théorique = 3) : BETA 2 = 2.29 PROBA = 0.5134

RESIDUS SUSPECTS (méthode de GRUBBS)

NEANT

TABLEAU DES ECARTS-TYPES DES RESIDUS
==========

ECARTS-TYPES FACTEUR 1 = Laboratoires

F1	1 (L1)	2 (L2)	3 (L3)	4 (L4)
	0.03	0.01	0.01	0.02

KHI2 = 0.841 PROBA = 0.840

ECARTS-TYPES FACTEUR 2 = Solutions

F2	1 (S1)	2 (S2)	3 (S3)	4 (S4)
	0.02	0.02	0.01	0.02

KHI2 = 2.58 PROBA = 0.461

ANALYSE DE VARIANCE
==========

TABLEAU DES MOYENNES
==========

MOYENNE GENERALE = 1.09

MOYENNES FACTEUR 1 = Laboratoires

F1	1 (L1)	2 (L2)	3 (L3)	4 (L4)
	1.07	1.13	1.08	1.09

MOYENNES FACTEUR 2 = Solutions

F2	1 (S1)	2 (S2)	3 (S3)	4 (S4)
	1.10	1.12	1.05	1.09

test de NEWMAN-KEULS - seuil = 5%
==========

FACTEUR 1 : Laboratoires

NOMBRE DE MOYENNES	2	3	4
VALEURS DES PPAS	0.04	0.04	0.05

F1	LIBELLES	MOYENNES	GROUPES HOMOGENES	
2	L 2	1.13	A	
4	L 4	1.09	A	B
3	L 3	1.08		B
1	L 1	1.07		B

FACTEUR 2 : Solutions

NOMBRE DE MOYENNES	2	3	4
VALEURS DES PPAS	0.04	0.04	0.05

F2	LIBELLES	MOYENNES	GROUPES HOMOGENES	
2	S 2	1.12	A	
1	S 1	1.10	A	
4	S 4	1.09	A	
3	S 3	1.05		B

4°/ Interprétation des résultats.

a) Histogramme des résidus.

L'histogramme symétrique autour de la valeur 0, avec un maximum en 0, est compatible avec une distribution normale des écarts.

b) Coefficients de Karl Pearson.

Les probabilités de 0,61 et 0,51, supérieures à 0,05, montrent que les coefficients de symétrie et d'aplatissement sont compatibles avec une distribution normale.

c) Résidus suspects (méthode de Grubbs).

Aucune anomalie flagrante dans les résultats des mesures n'est détectée.

d) Ecarts-types des résidus : test de Bartlett.

Le test de Bartlett conduit à des probabilités de 0,84 et 0,46 suivant le facteur : ces probabilités sont compatibles (supérieures à 0,05) avec une variance indépendante du laboratoire et indépendante de la solution.

Essayons de retrouver ces résultats par calcul direct.

1. Facteur Laboratoire.

La variance estimée des $q = 4$ mesures x_{ij} dans le laboratoire i, i variant de 1 à $p = 4$, est calculée par la formule :

$$\sigma_i^{*2} = \frac{1}{3}\left(\sum_{j=1}^{j=4} x_{ij}^{\,2} - \frac{1}{4}\left(\sum_{j=1}^{j=4} x_{ij}\right)^2\right)$$

La variable aléatoire de Bartlett (ou "statistique" de Bartlett) est donnée par la formule :

$$\chi^2 = \frac{q-1}{1+\frac{p+1}{3p(q-1)}}\left(p \ln \hat{\sigma}^2 - \sum_{i=1}^{i=p} \ln \hat{\sigma}_i^{\,2}\right)$$

où $\hat{\sigma}^2$ est ici la moyenne arithmétique des $\hat{\sigma}_i^{\,2}$.

$\sigma^{*2} = 1{,}4517 \times 10^{-3}$

La valeur de χ^2 se calcule à l'aide du tableau suivant :

	Facteur Laboratoire				Total
Solution 1	1.05	1.15	1.08	1.13	
Solution 2	1.12	1.15	1.11	1.09	
Solution 3	1.02	1.10	1.04	1.05	
Solution 4	1.09	1.11	1.07	1.1	
$\sum_{j=1}^{j=4} x_{ij}$	4.28	4.51	4.30	4.37	
$\sum_{j=1}^{j=4} x_{ij}^{\,2}$	4.5854	5.0871	4.625	4.7775	
σ_i^{*2}	$1{,}9333 \times 10^{-3}$	$6{,}9167 \times 10^{-4}$	$8{,}3333 \times 10^{-4}$	$1{,}0917 \times 10^{-3}$	
σ^{*2}					$1{,}1375 \times 10^{-3}$
	-6.2485	-7.2764	-7.0901	-6.8200	

$ln\ (\sigma_i{}^{*\,2})$					
$ln\ (\sigma^{*\,2})$					-6.7789
$4\ ln\ (\sigma^{*\,2}) - \sum_{i=1}^{i=p} ln\ \hat{\sigma}_i{}^2$	0,319				
$\frac{3}{1+\frac{5}{36}} = \frac{108}{41}$	2,634				
χ^2	0,841				

Pour 3 degrés de liberté, une valeur de χ^2 de 0,841 correspond, selon la table de la loi de Pearson, à une valeur de fonction de répartition comprise entre 0,10 et 0,25, donc à une probabilité critique comprise entre 0,75 et 0,90, nettement supérieure à 0,05 : la différence entre les variances correspondant aux divers laboratoires n'est pas significative au seuil de 5 %.
On peut donc admettre, jusqu'à plus ample information, que **le facteur "laboratoire" n'a pas d'influence sur la variance** des résultats des mesures.

2. Facteur Solution.

La variance estimée des $p = 4$ mesures x_{ij} dans la solution j, i variant de 1 à $q = 4$, est calculée par la formule :

$$\sigma_j{}^{*\,2} = \frac{1}{3}\left(\sum_{i=1}^{i=4} x_{ij}{}^2 - \frac{1}{4}\left(\sum_{i=1}^{i=4} x_{ij}\right)^2\right)$$

La variable aléatoire de Bartlett (ou "statistique" de Bartlett) est donnée par la formule :

$$\chi^2 = \frac{p-1}{1+\frac{q+1}{3q(p-1)}}\left(q\ ln\ \hat{\sigma}^2 - \sum_{j=1}^{j=q} ln\ \hat{\sigma}_j{}^2\right)$$

où $\hat{\sigma}^2$ est la moyenne arithmétique $\frac{1}{q}\sum_{j=1}^{j=q} ln\ \hat{\sigma}_j{}^2$ des $\hat{\sigma}_j{}^2$.

La valeur de χ^2 se calcule à l'aide du tableau suivant :

	Facteur Solution				Total
Laboratoire 1	1.05	1.12	1.02	1.09	
Laboratoire 2	1.15	1.15	1.1	1.11	
Laboratoire 3	1.08	1.11	1.04	1.07	
Laboratoire 4	1.13	1.09	1.05	1.1	
$\sum_{i=1}^{i=4} x_{ij}$	4.41	4.47	4.21	4.37	
	4.8683	4.9971	4.4345	4.7751	

$\sum_{i=1}^{i=4} x_{ij}^{\,2}$					
$\sigma_j^{*\,2}$	$2{,}0917 \times 10^{-3}$	$6{,}2500 \times 10^{-4}$	$1{,}1583 \times 10^{-3}$	$2{,}9167 \times 10^{-4}$	
$\sigma^{*\,2}$					$1{,}0417 \times 10^{-3}$
$ln\,(\sigma_j^{*\,2})$	-6.1698	-7.3778	-6.7608	-8.1399	
$ln\,(\sigma^{*\,2})$					-6.8669
$4\,ln\,(\sigma^{*\,2}) - \sum_{j=1}^{j=4} ln\,\hat{\sigma}_j^{\,2}$	0,9806				
$\frac{3}{1+\frac{5}{36}} = \frac{108}{41}$	2.634				
$\chi^{\,2}$	2,58				

Pour 3 degrés de liberté, une valeur de $\chi^{\,2}$ de 2,58 correspond, selon la table de la loi de Pearson, à une valeur de fonction de répartition comprise entre 0,50 et 0,75, donc à une probabilité critique comprise entre 0,25 et 0,50, supérieure à 0,05 : la différence entre les variances correspondant aux diverses solutions n'est pas significative au seuil de 5 %.
On peut donc admettre, jusqu'à plus ample information, que **le facteur "solution" n'a pas d'influence sur la variance** des résultats des mesures.

Globalement, les conclusions sont les mêmes que celles de l'ordinateur, mais les résultats numériques sont différents, sans que l'origine de la différence ait pu être exactement déterminée : sans doute la différence résulte-t'elle d'erreurs d'arrondis.

e) Test de Newman-Keuls.

Le nombre de degrés de liberté de la variance résiduelle est 9.
La table Range Studentisé donne, pour un nombre de degrés de liberté 9, suivant le nombre de moyennes à comparer, les valeurs :

Nombre de moyennes	2	3	4
t_s	3,20	3,95	4,41

La variance résiduelle est $4{,}86 \times 10^{-4}$.
Le nombre de mesures pour chaque laboratoire est 4.
Le nombre de mesures pour chaque solution est 4.
On en déduit les PPAS (plus petites amplitudes significatives) $t_s \sqrt{\frac{4{,}86 \times 10^{-4}}{4}}$ pour chacun des deux facteurs :

Nombre de moyennes	2	3	4
PPAS	0,035	0,044	0,049

Pour constituer des groupes homogènes, il faut avoir un chiffre significatif de plus dans la valeur des moyennes : on les recalcule à partir du tableau

	Facteur A . Laboratoire					
Facteur B Solution	1	2	3	4	**Total**	$T_{.j}^2$
1	1,05	1,15	1,08	1,13	4,41	19,45
2	1,12	1,15	1,11	1,09	4,47	19,98
3	1,02	1,10	1,04	1,05	4,21	17,72
4	1,09	1,11	1,07	1,10	4,37	19,10
Total	4,28	4,51	4,30	4,37	**17,46**	**76,25**
$T_{i.}^2$	18,32	20,34	18,49	19,10	**76,25**	
$\sum_{i,j} x_{ij}^2$	4,59	5,09	4,63	4,78	**19,08**	

et on les classe par ordre décroissant.

Le tableau des moyennes dans chaque laboratoire :

F1	2 (L2)	4 (L4)	3 (L3)	1 (L1)
	1,128	1,093	1,075	1,070

montre alors que :

— les laboratoires 2 et 4 forment un groupe homogène.
— les laboratoires 4, 3, 1, forment un groupe homogène.

Le tableau des moyennes pour chaque solution :

F2	2 (S2)	1 (S1)	4 (S4)	3 (S3)
	1,118	1,103	1,093	1,053

montre alors que :

— les solutions 2, 1, 4, forment un groupe homogène.
— la solution 3 forme, à elle seule, un groupe homogène.

Conclusion :
— le choix du laboratoire a une influence significative sur le résultat de la mesure du taux de glucose (α = 5 %).
— la concentration en galactose a une influence significative sur le résultat de la mesure du taux de glucose (α = 5 %).

INDEX : A-B-C-D-E-F-G-H-I-J-K-L-M-N-O-P-Q-R-S-T-U-V-W-Y-Z

1089 588
$2^m - 3^n = 1$ 653
2^p+3^p 692
$7^{7^{\wedge}7} - 3$ est multiple de 10 655
$7x - 9y = 1$ 656

A

abaque de l'intervalle de confiance d'un pourcentage 3767
Abel 1743
abélien 375 398
absence de corrélation 3837
accidents sur une autoroute 3184
accroissements finis 1539 2328
accroissements finis et racine(x) 1660
ACP 3858
action d'un analgésique 4338
addition 370
addition dans R^n 3848
addition de 2 matrices 953
addition de matrices 1053
adhérence d'une boule ouverte 2190
adhérence d'une partie de R^p 2205
adhérence d'une partie d'un espace normé 2178
adresses au hasard 2876
affixe 2689
âge et couleur de fleurs 2957
âge et notes d'étudiants 4095
âges des trois filles 628
ajustement linéaire 3842
ajustement linéaire par MCO 4120
alarme et intrusion 2942
aléa d'échantillonnage 3886
algèbre 954
algèbre de Bernoulli 2987
algèbre de Bernoulli d'événements 2816
algèbre de convolution 2699
algèbre de matrices 1054
algèbre des matrices carrées 955 1055
algèbre d'événements 2986
algèbre d'événements engendrée par une partition 2818
algèbre engendrée par un événement 2816
algèbre grossière d'événements 2815
algèbre linéaire 842
algèbre, structures 368
algébriquement clos 2689
algorithme d'Euclide 665 704
algorithme d'Euclide dans Z[X] 740
allergie à un médicament 3186
allométrie 4106
amplitude d'une classe 3799 3975
analyse 1184
analyse bivariée 3825
analyse compartimentale 2029
analyse compartimentale à 3 compartiments 2041
analyse de variance 3945
analyse de variance à 2 facteurs contrôlés 3948 4391
analyse de variance à un facteur contrôlé 3938 3945 4380
analyse de variance à un facteur étudié 4383
analyse de variance en cas d'absence d'interaction des 2 facteurs 3953
analyse en composantes principales 3858
analyse univariée 3795
analytique 2693
angle de deux vecteurs 2149 3851
angle de deux vecteurs de R^3 2117
anneau 438 481
anneau commutatif 481
anneau de Boole 24 503 2863
anneau de Boole de parties 513
anneau de Boole et treillis de Boole 508
anneau de Boole intègre 516
anneau de polynômes 700
anneau des fonctions intégrables sur un intervalle fermé 1808
anneau des nombres duaux 498

anneau euclidien 701
anneau intègre 482 491
anneau principal 701 959
anneau Q[X] 701
anneau quotient 492
anneau quotient Z / *n* Z 496
anneau unitaire 481
année de naissance 588
anniversaires 2856
antibiothérapie et infection 4293
antisymétrie 196
antisymétrisé d'un endomorphisme 1107
aplatissement 4385
appartenance 8 38 65 67
appels téléphoniques et loi binomiale 3416
application 102
application composée 107
application composée non différentiable 2343
application constante sur Q et son complémentaire 1278 1288
application continue en un point 2227
application continue périodique 1275
application continue sur [0;1] avec $f(0) = f(1)$ 1451
application continûment dérivable 1461
application contractante 2257
application croissante 2992
application croissante d'un intervalle sur lui-même 1244
application de classe C^1 2340
application dérivable 1459
application dérivable en un point 1459 2283
application dérivable non de classe C^1 2337
application différentiable en un point 2283
application et fonction 137
application hölderienne 2212
application homogène 2415
application identique 103
application identique de N 346
application linéaire 857 951 974 992 1051
application linéaire de R^3 dans R^2 995
application linéaire définie par une matrice 1047
application linéaire injective de R^p dans R^p 2105
application linéaire lipschitzienne 2244
application lipschitzienne 2212 2257
application monotone surjective 1276
application multilinéaire continue 2241
application $n \rightarrow n^2$ 345
application n'ayant pas de limite 2211
application non continue bijective 1283
application non continue de module continu 1282
application ouverte 2407
application produit 2234
application réciproque 106 161
application uniformément continue 2258
application vide 226
applications 100
applications bijectives d'un ensemble fini 225
applications continues dans R^p 2226
applications de classe C^1 2325
applications de N dans N 329
applications linéairement indépendantes 901
applications linéaires 950
approche euclidienne de la régression 3853 4155
approximation de la loi binomiale par une loi de Poisson 3171 3172
approximation de rang 1 d'un nuage de points 3869
approximation d'une fonction continue sur un intervalle fermé 1804
approximation normale de la loi binomiale 3705 3707 3709
arc paramétré simple compact 2632
Arc sinus 1534
Arc tangente 1523 1657
Archimède 26
archimédien 518
Arcsin(1-x) 1487
argument d'un nombre complexe 2690
arithmétique 556
arrangement 216
assemblage 4

assertion 4
assiettes 4272
associativité 86 371
assurance de navires et économie d'échelle 3181
asymétrie 4385
asymptote oblique 1664
asymptotes obliques 1661
asymptotiquement gaussien 3887
atropine 2028
attracteur universel 387
automorphisme 998 1136
axe imaginaire 2689
axe principal 3857 4112
axe principal d'un nuage de points 4141
axe réel 2689
axes factoriels 3859
axes principaux 3859 3865 4148 4159
axiome 5
axiome d'Archimède 26
axiome des intervalles emboîtés 26
axiome des probabilités totales 2819
axiome du choix 130
axiome explicite 139
axiome implicite 139

B

B(n;p) 3080
baignoire parallélépipédique 2550
balance 2062
ballon de foot-ball 3163
Bartlett 3944
base 977 999 1016
base canonique de R^n 3849
base de l'image 976 1000
base de sondage 3882
base de sous-espace vectoriel 909
base de vecteurs propres 1158
base d'origine duale 2160
base du noyau 976 1000 1018 1025
base du noyau d'une matrice 1023
base du noyau et base de l'image 985
base duale 952 2160 2283
base d'un espace vectoriel 867
base d'un sous-espace vectoriel 915
base d'une intersection de sous-espaces vectoriels 913
base normée 2131
base orthogonale 978 2131
base orthonormée 2131 3852
base orthonormée pour un produit scalaire de R^3 2113
base propre 990 1056 1137
base propre orthonormée 3861
bases des sous-espaces propres 1145 1148 1150 1153
Bayes 2906
BCG 4382
Bernoulli 2012 2736 2987 2990 3079 3689
Bernstein 153
Beta d'Euler 2686
Bezout 632
biais 3886
biaisé 3892
biconditionnel 503
bien ordonné 198
Bienaymé-Tchebichev 3669
bijection 106
bijection de N sur N^2 167
bijection impaire 389 392 394 396
bijections de N^2 sur N 348
bilinéarité 3849
bille dans un liquide 2055
billet gagnant 2978
binôme 489
boîtes et couleurs de comprimés 2951
Bolzano 1438
bon ordre 154 198
Bonnet 1817
Boole 503 504 2862
bord orienté 2624
Borel-Cantelli 3691
borne inférieure 199 1188
borne inférieure d'une partie 1327
borne supérieure 199 1188
borne supérieure d'une partie 1326
bornes de parties de R 1373
bornes d'un ensemble 1370
bornes inférieures de deux nombres entiers 305
boule fermée dans un espace normé 2174
boule ouverte 2067
boule ouverte d'un espace normé 2171
boules de couleurs variées 3216
boules unités dans R^2 2101
bromure d'éthylène 2036

C

C^1-difféomorphisme 2373 2407
cabine pour skieurs 4337
cadence 3189
CAG 3888
Cailey 959 1059
Cailey-Hamilton 959 1059
calcul approché de racine(26) 1593
calcul approché de racine(e) 1595
calcul de Boole 2862
calcul de déterminants 1118
calcul de déterminants littéraux 1126
calcul de la différentielle d'une application composée 2412
calcul de la loi de Wilcoxon 3771
calcul de l'inverse d'une matrice 891
calcul de π par la méthode de Monte-Carlo 4217
calcul de primitives 1860
calcul des déterminants 1029
calcul différentiel 1641
calcul d'un déterminant 1108
calcul matriciel 1049
calcul symbolique 2781
camembert 4058
Cantelli 3691
Cantor 152 518
capacité vitale et vapeurs nocives 4340
caractère 3792
caractère continu 3793
caractère discret 3792
caractère mixte 3793
caractère qualitatif 3792 3898
caractère quantitatif 3792 3891 3894
caractéristique 2 509
caractéristiques d'un estimateur 3886
cardinal 152
cardinal de l'ensemble des parties 162
cardinal de R 352
cardinaux de réunions 265
cardinaux d'intersections 265
carré d'un endomorphisme de R^4 1157
carré d'un endomorphisme diagonalisable 1181
carré d'un endomorphisme inversible 1181
carré d'une loi constante sur un intervalle 3526
carré d'une variable de Student 3653
carré d'une variable normale centrée réduite 3610 3617
carré moyen 3841
carré moyen résiduel 3947
carré parfait 580
carrés modulo 4 659
cartogramme 3797
Cassini 2735
Cauchy 26 518 1742 1819 1919 2691 2694 3582
cause 2908
centrage 4166
centre d'un groupe 441
centre d'une boule fermée 2174
centre d'une boule ouverte 2067 2171
centrée 3546 3817
chaîne de Markov discrète 3743
chaîne de Markov simple 3742
chaîne simple homogène de Markov 3742
chaînes de Markov 3741
champ de vecteurs 2317
champ scalaire 2388
champ vectoriel 2390
changement de base 891 1034
changement de base dans un produit scalaire 2127
changement de variables 2352 2407
changement de variables dans les intégrales doubles 2656
changement de variables dans une équation aux dérivées partielles 2353
changement de variables implicite 2517
changement de variables implicite dans R^2 2523
changement de variables non linéaire 2370
chapeau 3126
charge d'un condensateur 2025 2054

chasseur et cible 2887
chemin 2622
chemins et intégrale double 2640
chèques émis et chèques sans provision 3389
chevalier de Méré 2884
cible 2979
circuit électrique 2024 2033
circulation d'un champ de vecteurs 2623
circulation d'un gradient sur un lacet 2638
circulation sur une courbe fermée 2636
classe d'équivalence 173
classe médiane 4120
classe modale 3802
classement de vins 4327
classes 3799
clôture algébrique 2689
CM 3841
coefficents binomiaux égaux 319
coefficient binomial 244 257 282
coefficient d'aplatissement 3820
coefficient d'aplatissement de Karl Pearson 3783
coefficient d'aplatissement de Pearson 3820
coefficient d'aplatissement de Yule 3820
coefficient d'asymétrie 3819
coefficient d'asymétrie de Fisher 3819
coefficient d'asymétrie de Karl Pearson 3784
coefficient d'asymétrie de Pearson 3819
coefficient d'asymétrie de Pearson basé sur les moments centrés 3819
coefficient d'asymétrie de Yule 3819
coefficient de corrélation des observations successives 4084
coefficient de corrélation linéaire 2151 3398 3844 3855 4055 4071 4091 4102 4158
coefficient de corrélation linéaire multiple 3876 3878
coefficient de détermination 4056 4071
coefficient de Fourier 2700
coefficient de régression 3843
coefficient de symétrie 4084
coefficient de variation 3817
coefficients binomiaux pairs 313
coefficients d'aplatissement 4084
coefficients de corrélation linéaire multiple 4169
coefficients de Karl Pearson 4383
coefficients de régressioin 4168
coefficients d'une série de Fourier 2484
coïncidence de deux anniversaires 2856
col 2425 2433
combinaison 216
combinaison linéaire 866 893 922 925
combinaison linéaire de 2 variables aléatoires à valeurs entières 3363
combinaison linéaire de variables normales 3551
commutativité 372
commutativité de la réunion 80
commutativité de l'intersection 80
compact 1438
compact à bord 2624 2641
compact à bord élémentaire 2641
comparaison de moyennes 4212
comparaison de moyennes dans des échantillons appariés 4270
comparaison de moyennes dans des échantillons indépendants 4269
comparaison de moyennes par le test de Student 4346
comparaison de variances 3654
comparaison d'une moyenne à une valeur de référence 3931
comparaison d'une moyenne observée et d'une moyenne théorique 4267
comparer les variances de 2 populations 3666
compatibilité à gauche 421
compatibilité du passage à la limite 1223
complément 504
complémentaire 43 69 72 75 76 82
complémentation 2809
Compléments de math en 2e année de pharmacie 2688
complet 26 518 1291
compléter une famille libre en base 904 937
comportement aléatoire d'une souris 3758
composantes contravariantes 891 2160
composantes covariantes 2160 2316
composantes principales 3868
composé de deux sous-groupes 415

composée d'applications continues 2234
composée de deux applications linéaires 951
composition 107
composition de bijections 148
composition d'injections et surjections 139
concentration 3821 4023
concentration d'un élément 4343
concentration d'un produit administré par voie orale 2029
condensateur 2025 2054
condition de normalisation 2989
condition de normalisation d'un couple aléatoire discret 3290
condition de qualification des contraintes 2590
condition nécessaire et suffisante 112
conditionnée 3827
conditionnel 503
conditionnelle 3826
conditions de Cauchy 2691 2738 2745
conditions de Lagrange 2559
conditions du 1er ordre pour les extrema liés 2537
conditions du 2e ordre 2590
conducteur distrait et passagère larguée 3166
congru 630
congruence 630
conique du genre ellipse 2637
conjecture de Goldbach 615
conjonction 4 503
connecteur 4
connecteur de Peirce 25
connecteur de Scheffer 24
connecteur NAND 23
connecteur NOR 23
conséquence 2908
consommation d'énergie 3966
constante d'Euler-Mascheroni 1531 1777
construction formative 4
construction formative auxiliaire 139
construction géométrique de la limite d'une suite 1391
contenu dans 39
continuité de fonctions de la partie entière d'un réel 1267
continuité de fonctions numériques d'une variable réelle 1241
continuité de la distance 2248
continuité de la fonction inverse 2239
continuité de la norme 2103
continuité de la somme 1244
continuité de *x E (1/x)* 1270
continuité des dérivées partielles 2326
continuité des opérations d'espace vectoriel 2234
continuité du maximum 1286
continuité du produit 1244
continuité du rapport 1244
continuité d'un polynôme 2238
continuité d'une application 2237
continuité d'une application définie par intervalle 1277
continuité d'une application d'espaces normés 2085
continuité d'une application monotone surjective 1276
continuité d'une fonction contractante 1279
continuité d'une fonction puissance 2237
continuité d'une forme linéaire sur R^p 2246
continuité d'une intégrale 2467
continuité en un point 2267
continuité et dérivabilité 2310
continuité et différentiabilité 2307
continuité globale et continuité partielle 2272
continuité par rapport à l'ensemble des variables 2267
continuité partielle 2267
continuité partielle par rappport à une variable 2269
continûment dérivable en un point 2326
contraction 2257
contragrédient 1047
contraintes égalités 2538
contraires 2821
contribuables soumis à l'impôt sur le revenu 4119
contrôle de fabrication 277 4360
contrôle de qualité des eaux 4322
convention d'Einstein 953 2161

convergence à l'infini d'intégrales de fonctions élémentaires 1892
convergence absolue 1916 1918
convergence au sens de Bernoulli 3684
convergence de 2 séries entières 1956
convergence de 2 suites dont le produit converge 1318
convergence de 2 suites dont une forme quadratique converge 1319
convergence de l'intégrale de f(t)/t 1905
convergence de séries numériques 1762
convergence de séries numériques 1789 1795
convergence de suites de nombres réels 1307 1311
convergence de suites liées 1401
convergence du maximum de deux suites convergentes 1323
convergence d'une loi de Poisson vers une loi de Gauss 3719
convergence d'une série numérique 1740
convergence d'une suite dans R^3 2202
convergence d'une suite de fonctions continues 2088
convergence d'une suite de polynôme à 2 variables 1420
convergence d'une suite définie à partir d'une suite convergente 1320
convergence d'une suite définie par récurrence 1367
convergence d'une suite dont une fonction homographique converge 1321
convergence d'une suite numérique 1322
convergence en loi 3684 3723
convergence en moyenne 2086 2107 2797
convergence en moyenne quadratique 2086 2108 3687
convergence en probabilité 3686 3731 3733
convergence et valeur d'intégrales de fonctions élémentaires 1896
convergence légale 3684
convergence légale et convergence en moyenne quadratique 3723
convergence légale et convergence en probabilité 3726
convergence normale 1916 1918
convergence presque sûre 3688
convergence presque sûre de la moyenne arithmétique 3718
convergence presque sûre et convergence en probabilité 3735
convergence presque sûre vers l'espérance mathématique 3718
convergence stochastique de Slutski 3686
convergence uniforme 1918 2086 2108 2112
convergence uniforme d'une suite de fonctions intégrables 1810
convergence vers une variable normale 3685
convergent 3887
convolution 2698 2771 3469
convolution de deux exponentielles 2781
coordonnées cartésiennes 2351
coordonnées factorielles 3866 4161
coordonnées locales 2351
coordonnées polaires de l'espace 2659
coordonnées polaires du plan 2366 2368 2649 2658
corps 440 518
corps algébriquement clos 775
corps archimédien 26 1217
corps archimédien complet 26
corps commutatif 518
corps de base 844
corps des réels 26
corps fini 440 518 669 671
corps R des nombres réels 518
correct 3887
correction de continuité 3706 3920
corrélation 3836 2839 4115
corrélation des composantes principales 3869
corrélation linéaire 3845 3855
correspondance 101
correspondance et application 135
cos(1/2) 1567
cos(11π/12) 2724
cosinus 1250
cosinus hyperbolique 1571
couleur et parité de dés 2944
couple de variables de Bernoulli définies par une loi géométrique 3392
coupure 2692 2746
courbe à tangente verticale et tangente horizontale 1722
courbe cumulative de fréquences 3800
courbe cumulative d'effectifs 3800
courbe de Gauss 3586 3818
courbe de Lissajous 1718
courbe de Lorenz 3821 4023

courbe de niveau 2321
courbe de régression 3835 4067
courbe en cloche 3818
courbe en escalier 3797 4057
courbes de régression de 2 variables indépendantes 3838
course et victoire 4281
covariance 3295 3832 4054 4101
covariance de 2 variables statistiques quantitatives réelles 3855
covariance et corrélation de la somme et du maximum 3403
covariance et fonction génératrice conjointe 3295
covariantes 2316
crédibilité d'une hypothèse 3918
critère d'Abel 1743
critère d'ahérence d'un point 2189
critère de bijectivité 131 143
critère de Cauchy 1742
critère de d'Alembert 1741
critère de différentiabilité 2327
critère de surjectivité 127 130 160
critère d'exactitude 2614
critère d'indépendance 2839
critère d'injectivité 128 131 161
critères de continuité en un point 2228
critères de convergence d'une série numérique 1737
critères de non continuité en un point 2229
croissance de l'intégration 1809
croissance d'une probabilité 2823
culture de bactéries 2031
culture de Giardia intestinalis 2033
culture d'Escherichia coli 2033
cultures pour BCG 4382
cycle 449
cyclique 398

D

d'Alembert 775 1355 1741 1917
déciles 3809 3986
déciles et percentiles 3810
décomposition d'un événement en événements élémentaires 2854
décomposition d'une permutation en cycles 465
décomposition d'une permutation en transpositions 465
décomposition d'une permutation en transpositions simples 465
décomposition en facteurs premiers 591
défaut d'un endomorphisme 1017
degré d'homogénéité 2406
degré d'un polynôme 700
degrés de liberté 3596
démographie 3791
démonstration 5 139
dénombrements 316
densité de fréquence 3799
densité de population 3974
densité de probabilité 3439
densité de probabilité ax exp(-bx) sur [0;+∞[3456
densité de probabilité ax exp(-x²/4) sur [0;+∞[3460
densité de probabilité d'une variable de Fischer-Snedecor 3658
densité de probabilité d'une variable normale 3586
densité de probabilité λ exp(-2|t|) 3452
densité de probabilité linéaire sur [0;3] 3462
densité de probabilité linéaire sur [0;5] 3451
densité de probabilité parabolique sur [1;2[3465
densité d'effectif 3799
densité des irrationnels 355
densité des rationnels 354 1312
densités de fréquences 3994 4021
densités d'effectifs 4039
dérivabilité des fonctions numériques d'une variable réelle 1458
dérivabilité d'une fonction définie par intervalles 1489
dérivabilité d'une intégrale 2468
dérivabilité en 0 1479
dérivabilité en un point 1459
dérivabilité et croissance de *f(x)/x* 1529
dérivable 2691
dérivable en un point 2745
dérivation des fonctions implicites 2496
dérivation d'une intégrale généralisée dépendant d'un paramètre 2489
dérivation d'une série entière 1923
dérivation terme à terme 1923
dérivée au sens des distributionsd et dérivbée au sens des fonctions 2697
dérivée continue 1461
dérivée de fonctions élémentaires 1653
dérivée de fonctions numériques 1475
dérivée de fonctions usuelles 1462
dérivée d'un produit 1462
dérivée d'un quotient 1462
dérivée d'une application composée 1460
dérivée d'une application réciproque 1463
dérivée d'une distribution 2697
dérivée d'une fonction impaire 818
dérivée d'une fonction paire 818
dérivée d'une fonction polynomiale implicite de degré 2 2503
dérivée d'une fonction polynomiale implicite de degré 3 2505
dérivée d'une somme 1462
dérivée en un point suivant un vecteur 2281
dérivée logarithmique 1513
dérivée n-ième 1656
dérivée partielle en un point par rapport à une variable 2282
dérivée suivant un vecteur 2317
dérivée totale en un point 2283
dérivées partielles dans un changement de variables implicite 2534
dérivées partielles d'ordre 3 2349
dérivées partielles d'une fonction implicite en sinus 2510
dérivées partielles d'une fonction polynomiale implicite de degré 2 2507
dérivées partielles et dérivée totale 2280 2290 2301
dérivées partielles secondes 2330
dérivées partielles secondes non égales 2346
dérivées partielles successives 2387
désintégration du radium 2033
déteminant d'un endomorphisme 1106

déterminant de 3 vecteurs 890
déterminant de la matrice de 3 vecteurs 893
déterminant de la matrice hessienne du lagrangien 2590
déterminant d'un endomorphisme 957 1057
déterminant d'une famille de vecteurs 957 1057
déterminant d'une matrice 957 1057 1106
déterminant non symétrique 1131
déterminant symétrique 1128
déterminants 1029 1105
déterminants $n \times n$ 1032
détermination du mode 3984
détermination d'un polynôme par ses dérivées en un point 807
détermination principale du logarithme 2692 2746
déterminations 2692 2746
deuxième année de pharmacie 2688
deuxième théorème de la moyenne 1817
développement en série de Fourier 2486
développement en série de Taylor 811
développement limité à l'infini 1732
développement limité à l'ordre 2005 1622
développement limité de $(1+x)^n$ 1612
développement limité de 1-cos(x)+ln(cos(x)) 1731
développement limité de l'exponentielle 1607
développement limité de ln(1+x) 1611
développement limité du sinus 1610
développement limité d'une fonction 1591
développement limité d'une fonction impaire 1607
développement limité d'une fonction numérique 1412
développement limité d'une fonction paire 1609
développement limité en 0 1732
développement limité et limite 1569 1575
développement limité généralisé 1730
développements limité de fonction élémentaires 1671
développements limités 1536
développements limités au voisinage de $+\infty$ 1619
développements limités au voisinage de 0 1606 1613 1668
développements limités au voisinage de $\pi/2$ 1616
développements limités de sinus et cosinus 1589
dfifférence symétrique 434
diagonalisable 1145 1148 1150 1153
diagonalisation 1145 1156 1159 1160 1163 1166 1168
diagonalisation de la matrice des variances-covariances 3863
diagonalisée 1145 1148 1150 1153
diagramme circulaire 3797 3968
diagramme cumulatif des fréquences 3977 3984
diagramme de Venn 68
diagramme différentiel 3797
diagramme en barres 3969
diagramme en bâtons 3795 3797 3971 4057
diagramme intégral 3797
diagramme polygonal 3795
diagramme triangulaire 4048
difféomorphisme 2373 2407 2420
différence 70 71
différence de 2 variables géométriques 3168
différence des distances à deux points fixes 2733
différence symétrique 48 90 93 99 187 513
différentielle d'application composée 2404
différentielle d'une application composée 2343
différentielle d'une application en un point 2283
différentielle exacte 2637
différentielle fermée 2637
dimension 1016
dimension de la somme et de l'intersection 913 914
dimension de la somme et de l'intersection de sous-espaces 940
dimension de sous-espaces vectoriels 870
dimension des sous-espaces propres 1156
dimension d'un espace de fonctions continues 2109
dimension d'un espace vectoriel 867
dimension d'un sous-espace propre 1056
dimension d'un sous-espace vectoriel 903
dimensions de l'image et du noyau d'une application linéaire 951
diplôme et sexe 4296
Dirac 2696 3469
direction factorielle 3860

direction principale 3860
discernables 2866
disjonction 4 503
dispersion 4001
disque de convergence d'une série entière 1916
distance 2066
distance définie par la fonction Arc tangente 2080
distance définie par une borne inférieure 2073
distance définie par une fonction homographique 2074
distance d'un point à une ellipse 2561
distance d'un point au noyau d'une forme linaire 2263
distance euclidienne 3811
distance plus fine 2067
distances entre 2 applications continues 2076
distances équivalentes 2067
distribution de 2 caractères et loi multinomiale 3422
distribution de Dirac 2696 3469
distribution de Heaviside 2696
distribution d'échantillonnage 3886
distribution des résidus réduits 4084
distribution impaire 2791
distribution normale de notes 3578
distribution paire 2791
distribution périodique 2700
distribution régulière 2702
distribution statistique 3793 3794
distribution statistique constante 3794
distribution tempérée 2703
distributions 2696 2763
distributivité 87 481
distributivité de l'intersection 71
divergence 2390
divergence du gradient 2390
divergence d'un rotationnel 2391
divergence d'une série entière 1916
diviseur de $(n+1)^n - 1$ 578
diviseur de $(p-1)! + 1$ 673
diviseur de $(p-1)! + 1$ 689
diviseur de $(p-1)!$ 687
diviseur de $(p-2)!-1$ 691
diviseur de $(p^2-1)! - p^{p-1}$ 689
diviseur de $n^7 - n$ 686
diviseur de $n^{p-1}-1$ 672
diviseur de zéro 482
diviseur de zéro à droite 482
diviseur de zéro à gauche 482
divisibilité 205
divisibilité dans Q[X] 702
divisibilité dans R[X] 745
divisibilité d'une factorielle 695
division aux puissances croissantes par $1 - 2x\cos\theta + x^2$ 833
division de 2^n-1 par n 697
division de deux polynômes par puissances croissantes 738
division d'un cube par 7 650
division d'un cube par 9 651
division euclidienne 629
division euclidienne dans C[X] 731
division euclidienne dans Z[X] 730
division euclidienne de polynômes 703
division euclidienne par $(X-1)^2$ 771
division euclidienne par puissances croissantes 1942
division euclidienne par X^2+1 753
division euclidienne par X^5-1 751
division par 10 648
division par 27 660
division par 29 694
division par puissances croissantes 805
divisions euclidiennes dans C[X] 788
divisions euclidiennes dans Z[X] 787
domaine de continuité et de dérivabilité 1480
domaine de convergence de séries entières 1938
données centrées 4146 4156
données centrées réduites 3878
données statistiques 3791
dosage sanguin 4329

dose et guérison 4290
droite ajustée par la méthode des moindres carrés 2143
droite ajustée par la méthode des moindres carrés ordinaires 3843
droite de régression 3843 4056 4068 4092 4102
droite de régression orthogonale 3857 3869 4144 4160
droites ajustées 4115
dual de R^p 2156
dualité 2156
dualité dans R^p 2153
Durbin-Watson 3785
durée de vie d'un appareil 4308

E

e 1351
EASI 3882
écart absolu moyen 3810
écart moyen à la moyenne 3805
écart résiduel 3939
écarts expliqués 3938
écart-type 2999 3810
écart-type d'une somme de variables aléatoires 2151
échantillon 3792 3880
échantillon aléatoire simple 3882
échantillon aléatoire simple et indépendant 3882
echantillon exhaustif, tirage à probabilités égales 3893
échantillon indépendant 3902
echantillon non exhaustif, tirage à probabilités égales 3891
échantillonnage à plusieurs degrés 3884
échantillonnage systématique 3884
effectif d'une modalité 3793
effet d'un traitement sur un dosage biologique 4319
effet significatif 3115
efficacité d'un estimateur 4241
égalité de 2 sous-espaces vectoriels 908
Einstein 31 953 2161
élasticité 3846
élément absorbant 78 387
élément algébrique sur un corps 775
élément maximal 199
élément maximum d'une partie 1346
élément minimal 199
élément neutre 77 373
élément nilpotent 419
élément régulier 482 491
éléments d'ordre 2 427
éléments inversibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 496
ellipse de l'intervalle de confiance d'un pourcentage 4262
encadrement de π à l'aide d'intégrales 1841
encadrement d'une racine carrée 357
endomorphisme 1000 1016
endomorphisme à noyau et image supplémentaires 1006 1102
endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ 984
endomorphisme d'espace vectoriel 997
endomorphisme diagonalisable 1145 1148 1150 1153 1181
endomorphisme dont le noyau et l'image coïncident 1005
endomorphisme d'un espace vectoriel 951
endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie 951
endomorphisme idempotent 1010 1180
endomorphisme inversible 1180
endomorphisme involutif 1181
endomorphisme nilpotent 998 1005
endomorphisme symétrique 1182
endomorphisme triangulaire 958 1058
endomorphismes qui commutent 1048
énergie cinétique 2057
énergie de vibration 2057
énergie potentielle 2057
énergie quantifiée 2057
enigme d'Einstein 31
énoncé de Bernoulli 3689
énoncé de Kintchine 3689
enquête par sondage 3880
ensemble 36
ensemble bien ordonné 198
ensemble connexe de R 1438
ensemble d'arrivée 101
ensemble de définition 101
ensemble de départ 101
ensemble de parties 73
ensemble des cardinaux 155
ensemble des parties de l'ensemble fondamental 2817
ensemble d'indices 44
ensemble fini 225
ensemble fini à nombre pair d'éléments 187
ensemble fondamental 2807
ensemble fondamental associé au jet de 2 dés 2857
ensemble fondamental d'expériences aléatoires 2851

ensemble produit 47 73
ensemble quotient 174
ensemble somme 48
ensemble totalement ordonné 197
ensemble vide 4 41
ensembles bornés 1343
entier sous forme irrationnelle 360
entière 2693
enveloppe linéaire d'une famille de vecteurs 929
épimorphisme 1047
épreuve de Bernoulli 3571 3704
équation aux dérivées partielles d'ordre 1 linéaire 2373
équation aux dérivées partielles d'ordre 1 linéaire avec second membre 2380
équation aux dérivées partielles du 1er ordre linéaire 2363
équation aux dérivées partielles d'une fonction génératrice 3354
équation caractéristique 1980
équation de l'analyse de la variance 3938 3945
équation de récurrence $u_{n+2} = a\,u_{n+1} + b\,u_n$ 1420
équation différentielle à variables séparées 2002
équation différentielle de Bernoulli 2012 2020
équation différentielle de Lagrange 2023
équation différentielle de Ricatti 2021
équation différentielle d'un circuit électrique 2024
équation différentielle d'une famille de courbes 2015
équation différentielle d'une fonction numérique 1412
équation différentielle d'une suite de polynômes 821
équation différentielle homogène 2004
équation différentielle linéaire avec second membre 1958
équation différentielle linéaire du 2e ordre à un paramètre 2043
équation différentielle linéaire sans second membre 1958
équation différentierlle linéaire 1958
équation diophantienne 661
équation du 2e degré ayant pour coefficient une intégrale 1840
équation fonctionnelle dans R[X] 749
équation fondamentale de la dynamique 2057
équation intégrale de Volterra 2779
équations aux dérivées partielle d'ordre 1 2350
équations dans R 363
équations différentielles à variables séparées 2016
équations différentielles du 2e ordre 2049
équations différentielles linéaires 1957
équations différentielles linéaires d'ordre supérieur à 2 1990
équations différentielles linéaires du 1er ordre 1965 2007 2010
équations différentielles linéaires du 2e ordre à coefficients constants 1980 2045
équations normales 4106
équipotence 152 190
équipotent 152
équipotentielle 2317
équiprobabilité 2806 2827
équiprobabilité des sexes à la naissance 4278 4304
équiprobabilité des sexes à la naissance dans une famille de 7 enfants 4283
équivalence 4
équivalence de couples d'entiers naturels 193
équivalence de deux distances 2067
équivalence de nombres premiers 185
équivalence de nombres réels 191
équivalence de normes 2084
équivalence de parties 182 187
équivalence des normes de R^p 2084
équivalent du coefficient binomial C(2n;n) 1400
équivaut à 4
Erlang 3597
Escherichia coli 2033
espace de Hilbert 2794
espace des individus 3853
espace des variables 3853
espace métrique 2066
espace normé réel 2082 2154
espace probabilisable 2809
espace probabilisé 2819
espace vectoriel complexe 844
espace vectoriel d'applications 854
espace vectoriel dual 952
espace vectoriel euclidien 3848 3850
espace vectoriel fini 949

espace vectoriel produit 846
espace vectoriel quotient 847
espace vectoriel rationnel 844
espace vectoriel réel 844
espace vectoriel R^n 3848
espace vectoriel sur un sous-corps 948
espace vectoriel sur une extension du corps de base 948
espaces probabilisables 2806
espaces vectoriels 843
espaces vectoriels réels 859
espérance conditionnelle 3289
espérance de la variable hypergéométrique 3209
espérance de l'estimateur de la moyenne 3899
espérance d'une combinaison linéaire de variables aléatoires 2995
espérance d'une variable de Fischer-Snedecor 3661
espérance et variance à partir de la fonction génératrice 3222
espérance et variance de la loi Gamma 3595
espérance et variance d'une variable aléatoire constante 3520
espérance et variance d'une variable de Cauchy 3637
espérance et variance d'une variable de Fischer-Snedecor 3652
espérance et variance d'une variable de Khi deux 3610
espérance et variance d'une variable de Student 3628
espérance et variance d'une variable de Student 3634
espérance et variance d'une variable de Student à 2 degrés de liberté 3638
espérance et variance d'une variable normale 3544
espérance mathématique de la loi de Poisson 3173
espérance mathématique de la loi Gamma 3602
espérance mathématique de la loi géométrique 3130
espérance mathématique de la loi hypergéométrique 3197
espérance mathématique d'une constante 2995
espérance mathématique d'une fonction aléatoire 2996
espérance mathématique d'une loi constante 3508
espérance mathématique d'une variable aléatoire continue 3441
espérance mathématique d'une variable aléatoire réelle discrète 2994
espérance mathématique et fonction génératrice conjointe 3295
estimateur asymptotiquement gaussien 3887
estimateur biaisé de la variance 3892
estimateur CAG 3888
estimateur convergent 3887
estimateur correct 3887
estimateur de la moyenne 3891 3894 3899
estimateur de la variance 3892 3897
estimateur de variance 3641
estimateur de variance minimum d'un pourcentage 4247
estimateur d'un paramètre 3885
estimateur meilleur qu'un autre 3888
estimateur précis 3888
estimateur robuste 3886
estimateur sans biais 3886
estimateur sans biais de la variance 3893
estimation de la droite de régression 4079
estimation de la moyenne 4174 4237
estimation de la variance 4237
estimation de la variance de l'estimateur de la moyenne 3900
estimation de moyenne et variance par simulation d'échantillons 4233
estimation des paramètres 3885
estimation d'un pourcentage 3913
estimation d'une moyenne 3914
estimation d'une variance 3915
estimation en analyse de variance 3947 3958
estimation par intervalle de confiance 3913 4081 4219
estimation ponctuelle 3885 3913 4081 4219
estimation ponctuelle de la moyenne 4265
estimation ponctuelle de la variance 4266
estimation ponctuelle sans biais de la variance 3901
et 4
ET 78 503
étalonnage 4115
étendue 3809 3975
étoile 3829
étoilé 2608
étranger 631
étude de fonctions définies sur un intervalle 1690
étude d'une fonction 1682
étude d'une fonction numérique 1409
Euclide 665

Euler 587 1400 2406 2480 2491 2686 2690 3593
Euler-Mascheroni 1531
événement 2807
événement aléatoire 2807
événement impossible 2822
événements compatibles indépendants 2882
événements contraires 2821
événements élémentaires 2986
événements élémentaires équiprobables 2827
événements incompatibles 2819
événements incompatibles non indépendants 2882
événements indépendants 2947 2982
événements indépendants dans leur ensemble 2905
événements indépendants en probabilité 2902
exactitude d'une forme différentielle avec Arctg et Ln 2613
exactitude d'une forme différentielle avec fonctions homographiques 2618
exactitude d'une forme différentielle avec puissances 2616
exactitude d'une forme différentielle d'ordre 1 2608
exhaustif 2897
existence d'une limite d'une application d'espaces normés 2212
expérience aléatoire 2807
expérience déterministe 2807
exponentielle 1248
exponentielle complexe 1250 1922 1937 1950
exponentielle d'une matrice 1922
exponentielle l'emporte sur puissance 1223 1239
expression irrationnelle d'un entier 360
extension d'un corps 775
extrema libres 2438
extrema liés 2537
extrema liés sous contrainte 2565
extrema relatifs 2438
extrema relatifs dans R^2 2445
extrema sur un compact 2582
extremum 2425
extremum relatif 2424
extremum relatif lié 2579

F

facteurs irréductibles dans R[X] 766
factorisation 590
famille de courbes paramétriques à points de rebroussement 1711
famille de fonctions implicites à points d'arrêt 1703
famille de fonctions ln(ch(x) - m sh(x)) 1700
famille de fonctions $x^{(1-x^{\alpha})}$ 1675
famille indexée 44
famille libre 865 890 909 922 925 927 1016
famille libre dérivée d'un polynôme 949
famille libre maximale 867 949
famille liée 865 890
famille linéairement indépendante 865
famille vide 44
familles équivalentes 948
familles libres 864 894 911 928
familles libres dans R^3 888
familles liées 894
fautes d'impression dans un livre 3123 3187
Fermat 586 662 669 672 684
fermé d'un espace normé 2175
feux rouges Paris-Orly 3125
finesse 2067
Fischer-Snedecor 3651
Fisher 3819
fluctuation 3565
fluctuation d'échantillonnage 3886
flux du rotationnel 2624
fonction 101
fonction (ln|x-2|)/ln|x| 1583
fonction à décroissance rapide 2702
fonction analytique 1356 2693 2737 2746
fonction Beta d'Euler 2686 3651 3659
fonction caractéristique 229 4210
fonction caractéristique a $\exp(-u^2)$ 3496
fonction caractéristique de la loi de Cauchy 3583
fonction caractéristique de la loi Gamma 2643 3594 3602
fonction caractéristique de la somme de 2 variables indépendantes 3473
fonction caractéristique d'un couple 3502
fonction caractéristique d'un couple aléatoire 3471
fonction caractéristique d'une combinaison linéaire 3491
fonction caractéristique d'une loi constante sur un intervalle 3484 3504
fonction caractéristique d'une loi exponentielle 3504
fonction caractéristique d'une loi k |x| exp(-|x|) 3487
fonction caractéristique d'une variable aléatoire non continue 3493
fonction caractéristique d'une variable aléatoire réelle 3470
fonction caractéristique d'une variable aléatoire réelle à densité 3470
fonction caractéristique d'une variable aléatoire réelle entière 3470
fonction caractéristique d'une variable de Bernoulli 3484
fonction caractéristique d'une variable exponentielle 3491
fonction caractéristique d'une variable normale 3497 3548 3579
fonction caractéristique en cosinus 3484
fonction caractéristique et indépendance 3499
fonction caractéristique et moments 3474 3487
fonction caractéristique et transformation de Fourier 3468
fonction caractéristique et transformation de Laplace 3505
fonction caractéristique sin(u)/u 3500
fonction continue à droite 2992
fonction de base 2696
fonction de carré sommable 2700
fonction de Heaviside 2696
fonction de Morse 2057
fonction de répartition 3437 3977
fonction de répartition bijective croissante 3522
fonction de répartition de la variable normale centrée réduite 3547
fonction de répartition d'une loi constante 3520
fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle discrète 2991
fonction de répartition d'une variable de Bernoulli 2993
fonction de répartition empirique 3984 3994 4000 4019 4027
fonction de variable complexe 2691
fonction discriminante 3918
fonction dont l'intégrale égale la norme en moyenne quadratique 1845
fonction doublement périodique 1284
fonction en escalier 2992
fonction en escalier à support compact 1802

fonction entière 2693 2746
fonction et intégrale de la dérivée seconde 1854
fonction exp(1/x) racine(x(x+2)) 1638
fonction exp(*x*) / x^e 1477
fonction Gamma 3634
fonction Gamma d'Euler 1400 2491 2686 3490 3593 3609 3651 3658
fonction génératrice 3082 3218
fonction génératrice conjointe 3281
fonction génératrice de la loi de Poisson 3182
fonction génératrice de la loi multinomiale 3424
fonction génératrice de X+1 3272
fonction génératrice de X^2 3272
fonction génératrice d'un couple 3337
fonction génératrice d'un couple aléatoire discret 3290
fonction génératrice d'un triplet aléatoire 3371 3376
fonction génératrice d'une combinaison linéaire 3363
fonction génératrice d'une somme de variables aléatoires indépendantes 3219
fonction génératrice d'une somme de variables de Bernoulli 3274
fonction génératrice d'une somme de variables de Poisson 3276
fonction génératrice d'une variable aléatoire à valeurs entières 3219
fonction génératrice d'une variable binomiale 3081 3247
fonction génératrice d'une variable binomiale négative 3257
fonction génératrice d'une variable de Bernoulli 3245
fonction génératrice d'une variable de Poisson 3249
fonction génératrice d'une variable géométrique sur N 3252
fonction génératrice d'une variable géométrique sur N* 3250
fonction génératrice en $\exp(1+u^2)$ 3266
fonction génératrice et fonction caractéristique 3470
fonction génératrice et indépendance 3294
fonction génératrice et loi de probabilité conjointe 3291
fonction génératrice et lois conditionnelles 3293
fonction génératrice et lois marginales 3292
fonction génératrice exponentielle d'un couple 3359
fonction génératrice fraction rationnelle d'un couple 3406
fonction génératrice fraction rationnelle pour un couple 3379
fonction génératrice polynôme 3220
fonction génératrice polynômiale 3243
fonction génératrice polynomiale d'un couple 3345
fonction génératrice produit d'un polynôme et d'une exponentielle 3347
fonction génératrice $s/(2-s^2)$ 3273
fonction harmonique 2389 2691 2738
fonction harmonique à variables séparées 2399
fonction harmonique dans R^2 2401
fonction harmonique dans R^3 2403
fonction holomorphe 2692
fonction homogène de degré 1 903
fonction homogène de degré α 2406
fonction implicite de classe C^1 2513
fonction indicatrice 169
fonction indicatrice 229 513 2987 3507 4210
fonction indicatrice de Q 1282
fonction indicatrice d'un connecteur 3016
fonction intégrable 1806
fonction localement sommable 2696
fonction méromorphe 2693 2746
fonction monogène en un point 2692
fonction multiforme 2692 2746
fonction numérique continue 1243
fonction numérique continue dans un intervalle 1243
fonction numérique continue en un point 1242
fonction périodique majorée 1273
fonction périodique possédant une limite 1236
fonction périodiques de carré intégrable 2793
fonction uniforme 2692
fonction $x^2 \ln(x)$ 1579
fonction $x^3 \sin(1/x)$ 1581
fonctions définies par une intégrale 1850
fonctions d'une variable de Poisson 3185
fonctions harmoniques conjuguées 2691
fonctions impaires 943
fonctions implicites 2496
fonctions paires 943
fonctions symétriques des zéros d'un polynôme de degré 4 780
forme 2083
forme bilinéaire symétrique positive non dégénérée 3850

forme coordonnée 2156 2160
forme définie positive 2083
forme différentielle fermée 2608 2614
forme linéaire 903 952
forme positive non dégénérée 2083
forme quadratique positive non dégénérée 2083
formes coordonnées 952 2283
formes différentielles exactes 2607
formes linéaires 2156
formes linéaires continues 2245
formes linéaires sur R^p 2254
formule de Bayes 2906 2951
formule de Bienaymé-Tchebichev 3731
formule de décomposition de la variance 4100
formule de Koenig 2999
formule de König 3811
formule de la covariance 3295 3832
formule de la variance 2999 3811
formule de Leibnitz 811 2482
formule de l'intégrale de Cauchy 2694
formule de Mac Laurin 1537
formule de Markov 3668 3731
formule de Parseval-Plancherel 2700 2703 2795
formule de Poincaré 278 2825 2876
formule de probabilité des causes 2908
formule de réciprocité 2703 2802 3580
formule de régression 4081
formule de Simpson 838
formule de Stirling 1317 1400 2494
formule de Taylor 1942
formule de Taylor-Lagrange 1537 2328
formule de Taylor-Mac Laurin 2328
formule de Taylor-Young 1537 2328
formule des accroissements finis 1539 2328
formule d'Euler 2480 2690
formule d'inclusion-exclusion 95
formule d'interpolation de Lagrange 841
formule du binôme 209 489 559 578 684 692 3081
formule sommatoire de Poisson 2703
formules de trigonométrie 1415
Fourier 2484 2700 3469
fréquence 3084
fréquence d'une modalité 3794
frontière d'une partie d'un espace normé 2179
Fubini 2469 2485 2648
fumarate d'atropine 2028

G

gain dans le jeu de 5000 3052
gain dans le jeu des métiers 3049
gain dans un jet de dé 3071
Gamma 1400 2643 3593 3602
Gamma d'Euler 2491
Gauss 592 922 2493 2684 3542 3586
gaussien 3887
gausso-arithmétique 3788 4239
généralisation de la notion de moyenne 3807
générateurs 866
Geom(p) 3128
Geom*(p) 3128
géométrique 3128
Giardia intestinalis 2033
Gini 3821 4025
glycémie 3571
Goldbach 615
Gosset (William E.) 3629
gradient 2315 2316 2388 2433
gradient des contraintes 2538
grain 3884
grand théorème de Fermat 662
graphe 101
Grassmann 940
Green-Riemann 2624
grossesse et réactions secondaires à un vaccin 2974
groupe 375 398
groupe à éléments d'ordre 2 427
groupe abélien 91 375 398 427 442 844
groupe commutatif 398
groupe cyclique 398 418
groupe de permutations 444
groupe des parties 434
groupe d'ordre 6 non abélien 431
groupe fini 400
groupe fini d'ordre premier 430
groupe monogène 398 418
groupe non commutatif 432
groupe quotient 492
groupe simple 671
groupe symétrique 1106
groupe symétrique abélien 464
groupe symétrique de degré *n* 444 462
groupes cycliques $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 438
groupes d'ordre 3 435
groupes d'ordre inférieur ou égal à 5 430
groupes homogènes 3948 4389 4401
Grubbs 4387

H

Hamilton 959 1059
Hamilton-Cailey 1137
hamster doué ou non d'apprentissage 3150
harmoniques conjuguées 2745
Hartley 3943
Heaviside 2696
hessienne 2425
hexagones réguliers 3163
Hilbert 2794
histogramme des densités 3799
histogramme des densités de fréquences 3979 3983 3994 4019 4026
histogramme des effectifs 3796 3976
histogramme des fréquences cumulées 4000
histogramme des résidus 4383
Hölder 2212
hölderienne 2228
holomorphe 2692 2745
homéomorphe 2102
homéomorphisme de R^p dans R^p 2105
homogène 3742
homogénéité de la variance 4385 4395
Hooke 2057
hydrolyse du fumarate d'atropine 2028
hyperbole de sécurité 4082
hyperplan 899
hypothèse alternative 3917
hypothèse multiple 3917
hypothèse non paramétrique 3917
hypothèse nulle 3917
hypothèse paramétrique 3917
hypothèse simple 3917

I

idéal 492
idéal monogène 701
idempotence 76
idempotence 503
idempotent 1010
identité de Bezout 665
identité de Vandermonde 3196
identité d'Euler 2406
identités remarquables 557
image 101
image 992
image 997
image 1000
image de Laplace 2479
image d'un compact 1438
image d'un connexe 1438
image d'un intervalle fermé 1438
image d'un intervalle par une fonction continue 1244
image d'un vecteur et matrice de l'endomorphisme 1074
image d'une application linéaire 951
image d'une matrice 1052
image d'une suite convergente par une application dérivable 1515
image réciproque 101 127
immigration 3979
implication 4 81
implique 4
impossible 2822
inclusion 39 65 67 81
inclusion et intersection 88
inclusion et réunion 89
incompatibilité 2970
incompatibles 2819
indépendance 2900 2902 2968
indépendance de 2 variables de Bernoulli 3394
indépendance de 2 variables normales 3579
indépendance de 2 variables statistiques 3838
indépendance de variables aléatoires à densité 3442
indépendance d'un couple aléatoire discret 3288
indépendance d'une famille de variables aléatoires 3296
indépendance et corrélation 3837
indépendance et incompatibilité 2904
indépendance linéaire 865 890
indépendants 2902
indicatrice 229 2987
indice de concentration de Gini 3821
indice de Gini 3822 4025
indice d'inégalité 3822
indiscernables 2866
inégalité 358 3822
inégalité de Bienaymé-Tchebichev 3669 3676 3732
inégalité de Kolmogorov 3671 3678
inégalité de Markov 3677 3731
inégalité de Schwarz 1808 2083 2107 3670 3681 3852
inégalité du triangle 358 2066
inertie et axes principaux d'un nuage de points 4145
inertie mécanique 3859
inertie minimale 3812
inertie par rapport à un point 3812
inertie par rapport au point moyen 3812
inertie par rapport aux axes principaux 4160
inertie statistique 3859 4150
inertie totale 3859 4159
Inf et Sup de 2 variables géométriques 3156
influence de la place de départ dans une course 4281 4306
influence du regroupement en classes 3995
initiation à la théorie des sondages 3880
injection 104 126 137
injection canonique 104
injection croissante 216
injections croissantes 258
injectivité 149
injectivité d'une application de classe C^1 sur]0;1[1528
injectivité d'une application linéaire 996
injectivité d'une section 131

intégrabilité d'une intégrale 2469
intégrale absolument convergente 1819
intégrale convergente 1819
intégrale curviligne 2623
intégrale curviligne d'une différentielle exacte 2634
intégrale dans un domaine limité par 2 paraboles 2669
intégrale dans un domaine limité par 3 hyperboles et une droite 2671
intégrale dans un domaine limité par 4 paraboles 2673
intégrale dans un domaine limité par une cubique 2678
intégrale dans un domaine triangulaire 2676
intégrale de fonctions élémentaires 1909
intégrale de Gauss 2493 2684
intégrale de Riemann 1801
intégrale de Riemann d'une fonction continue sur un intervalle fermé 1805
intégrale d'une fonction en escalier à support compact 1803
intégrale d'une fonction positive 1809
intégrale d'une puissance de cosinus 3639
intégrale égale à la norme en moyenne quadratique 1845
intégrale généralisée 1819
intégrale impropre 1819
intégrale propre dépendant d'un paramètre 1818
intégrale propre dépendant d'un paramètre 2466
intégrale singulière d'une équation différentielle 2005
intégrale sur un arc de parabole 2631
intégrales curvilignes 2621
intégrales doubles 2647
intégrales doubles dans R^2 2652
intégration 1801 1807
intégration des fonctions de variable complexe 2694
intégration d'une fraction rationnelle de sh et ch 1815
intégration d'une fraction rationnelle de sinus et cosinus 1815
intégration et théorème des valeurs intermédiaires 1847
intégration par changement de variable 1815
intégration par parties 1816
intègre 482
intensité dans un circuit électrique 2033
intérêts composés 2033
intérieur d'une boule fermée 2191
intérieur d'une partie d'un espace normé 2176
interprétation de la loi binomiale 3082
interprétation de la loi binomiale négative 3260
interprétation de la loi de Fischer-Snedecor 3653
interprétation de la loi de Pascal 3260
interprétation de la loi de Student 3629
interprétation de la loi du Khi deux 3611
interprétation de la loi Gamma 3596
interprétation de la loi hypergéométrique 3195
interprétation des résultats donnés par StatITCF 4397
interprétation d'un déterminant 1107
interprétation d'une matrice 1051
interquartile 3985
intersection 46 69 77
intersection de boules 2194
intersection de deux sous-espaces vectoriels 857 861 917
intersection de sous-groupes 418
intersection du noyau et de l'image 1020
intersection d'une suite de sous-espaces vectoriels 947
intersecvtion d'une courbe et d'une corde 1481
intervalle 1438
intervalle de confiance 3888 3913
intervalle de confiance de A et B 4080
intervalle de confiance de la moyenne 3901 4237 4266
intervalle de confiance de la variance 4266
intervalle de confiance d'un pourcentage 4251 4254
intervalle de confiance d'une proportion 3767
intervalle de confiance pour les grands échantillons 3889
intervalle de fluctuation 3565
intervalle de prédiction 4081
intervalle de prévision 4083
intervalle de sécurité 3570
intervalle fermé 1438
intervalle interquartile 3809 3985 4001 4020
intervalle médian 3803
inverse de la transposée 1047
inverse d'un automorphisme 1137
inverse d'un automorphisme diagonalisable 1181

inverse d'une hyperbole 2736
inverse d'une matrice diagonalisable 1182
inverse en convolution 2776
inverser une matrice 890
inverses de carrés d'entiers 625
inverses des racines carrées d'entiers 1779
inversion 445
inversion d'une matrice 981 1075
inversion d'une matrice par diverses méthodes 1038
involution 1027
iodure de potassium 2036
irrationalité de cos(1) 1604
irrationalité de e 1351 1770
irrationalité de nombres réels 365
irrationalité d'un radical 364
irrationalité d'une somme de radicaux 367
isomorphisme 1055
isomorphisme de groupes 376
isomorphisme d'espace vectoriel 955
isomorphismes de groupes de R 391

J

jacobienne 2316
jet de 2 dés 2975
jet de 3 dés 2977
jet de 3 pièces 3072
jet de 5 dés 3263 3428
jet de 6 pièces 2880 2971
jet de 10 dés 3114
jet de dé 3971
jet de dé jusqu'au succès 3147 3153
jet de dé jusqu'au succès à 3 joueurs 3159
jet de dés 2891
jets de dés 2884
jets d'un dé 3707
jets d'une pièce 3709
jets successifs d'un dé 3386
jeu de dé en 2 lancers 3074
jeu de fléchettes 3267
Joukovski 2740
journaux et métro 3704

K

Keuls 3787
Khi deux 3596
Khi deux 3918
Kintchine 3689
Koenig 2999
Kolmogorov 3671
Kolmogorov-Smirnov 3786 3923 4299 3192
König 3811
Kronecker 820

L

Lagrange 671 689 841 1537 1959 2023 2328 2538
lagrangien 2539
lancers successifs indépendants 2948
langage mathématique 26
Laplace 2479 3542
Laplace-Gauss 3542
laplacien 2389
laplacien en coordonnées polaires du plan 2397
Laurent 2694
Lebesgue 1806
Leibnitz 811 2482
lemme de Bernstein 153 154 164
lemme de Gauss 592
lemniscate de Bernoulli 2736
leptokurtique 3821
lettre 4
Levenne 3944
Lévy 3684
L'Hopital 1540
libre 865
liée 865
ligne de régression 4056 4068 4129
lignes de champ 2691
lignes de niveau 2691
lignes de niveau et lignes de champ 2743
lignes de régression 4090
limite de x f(x) lorsque l'intégrale de f converge en 0 1907
limite d'une application d'espaces normés 2210
limite d'une intégrale dont les bornes dépendent d'un paramètre 1849
limite d'une suite 1290
limite d'une suite dans R^p 2196
limite en un point de R^3 2224
limite finie d'une fonction numérique 1221
limite infinie d'une fonction numérique 1222
limites dans R^2 ou R^3 2209
limites de fonctions 1624
limites de fonctions à l'infini 1735
limites de fonctions en 0 1673 1733
limites de fonctions numériques 1220 1230 1240
limites d'une fonction numérique 1410
limites en (0;0) 2216
limites en 0 1632
linéairement indépendants 865
linéarité de l'intégration 1807
Liouville 670 687
Lipschitz 2212
lipschitzienne 2228
Lissajous 1718
localement sommable 2696
logarithme 1523
logarithme népérien 1245
logique 31
log-log 3847
loi binomiale 3078 3080 3571 3704
loi binomiale et approximation normale 3711
loi binomiale et loi multinomiale 3420
loi binomiale négative 3257 3720
loi binomiale négative et loi de Poisson 3722
loi conditionnelle 3287
loi conditionnelle binomiale 3278
loi conditionnelle binomiale pour 2 variables binomiales 3411 3416
loi conditionnelle binomiale pour 2 variables de Poisson 3413
loi conjointe dans 4 jets de pièce de monnaie 3401
loi conjointe de 2 variables aléatoires 3397
loi conjointe de 2 variables aléatoires à 3 valeurs entières 3328
loi conjointe de 2 variables aléatoires à une infinité de valeurs entières 3331
loi conjointe de 2 variables aléatoires indépendantes 3400
loi conjointe de 2 variables de Poisson 3331
loi conjointe de n variables aléatoires entières de somme constante 3419
loi conjointe du maximum et du minimum dans un tirage exhaustif 3382
loi conjointe d'un vecteur aléatoire 3405
loi constante 3506
loi constante sur [0;1] × [0;2] 3538
loi constante sur $[0;1]^2$ 3530

loi constante sur $[0;2]^2$ 3532
loi constante sur le disque unité 3539
loi de Bernoulli 2990 3079
loi de Cauchy 3582 3627 3629 3637
loi de composition externe 844
loi de composition interne 370
loi de Fischer-Snedecor 3650 3658 3781
loi de Fischer-Snedecor pour 2 échantillons 3663
loi de Gauss 3542 3818
loi de Gauss centrée réduite 3498
loi de groupe 375
loi de groupe et associativité 384
loi de groupe et symétrie 386
loi de Hooke 2057
loi de Karl Pearson 3780
loi de Khi deux 3634 3780
loi de la racine carrée d'une variable exponentielle 3590
loi de Laplace-Gauss 3542
loi de Laplace-Gauss à n dimensions 3553
loi de Lorentz 3582 3629
loi de Pascal 3257
loi de Poisson 3170 3718 3722 3768 4310
loi de Poisson dans un processus de Poisson 3190
loi de probabilité 3791
loi de probabilité conjointe 3285
loi de probabilité constante 3507
loi de probabilité de Fischer-Snedecor à (n_1,n_2) degrés de liberté 3651
loi de probabilité de Student à n degrés de liberté 3627
loi de probabilité de tg (θ) pour θ constant sur un intervalle 3582
loi de probabilité du module d'un couple de variables normales 3590
loi de probabilité d'un couple aléatoire discret 3285
loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète 2988
loi de probabilité et fonction génératrice 3220
loi de probabilité non uniforme sur {0;1;…;n} 3042
loi de probabilité normale 3542
loi de référence 3885
loi de Student 3626 3634 3779
loi de Student à un degré de liberté 3582
loi de Student pour un échantillon 3641
loi de Student-Fischer 3627
loi de Wilcoxon 2955 3769 3926
loi d'Erlang 3596 3597 3717
loi des fréquences 3084
loi des phénomènes rares 3171
loi du Khi deux 3606
loi du Khi deux à 1 degré de liberté 3620
loi du Khi deux à 2 degrés de liberté 3622
loi du Khi deux de Karl Pearson 3609
loi du Khi deux de Karl Pearson à n degrés de liberté 3596
loi du logarithme d'une variable de loi constante 3528
loi du maximum de 2 variables aléatoires uniformes 3018
loi du minimum d'une partie à k éléments sur n 3020
loi exponentielle 3464 3491 3529 3596 3609 3611 3625 3679 3716 4310
loi exponentielle dans un processus de Poisson 3190
loi faible des grands nombres 3572 3689 3733
loi forte des grands nombres 3691 3718 3739
loi Gamma 2643 3593 3602 3609 3611 3618 3621 3625 3627 3717 4310
loi Gamma dans un processus de Poisson 3190
loi géométrique 3127
loi géométrique sur N 3128
loi géométrique sur N* 3128
loi hypergéométrique 309 312 3193
loi log-normale 3575
loi marginale 3286
loi marginale d'une loi de Laplace-Gauss à n dimensions 3553
loi marginale d'une loi multinomiale 3421
loi multinomiale 2866 3053 3419 3620
loi normale 3541
loi normale centrée réduite 3546
loi T 3627
loi uniforme 3054 3902
lois conjointes discrètes 3284
lois du minimum et du maximum d'une partie à 3 éléments sur 5 3028
longueur d'un cycle 449
Lorenz 3582 3821 4023

M

Mac Laurin 1537 2328
machines et défectuosité des pièces fabriquées 2946
machines et défectuosité des pièces fabriquées 2961
majorant 199
majoration de la dérivée d'une fonction 2 fois dérivable 1598
majoration de n ! 1208
majoration et minoration de fonctions 1523
maladie et test sanguin 2943
Mann-Whitney 3926
marche aléatoire sur une droite 3750
marginale 3826
mariage et date 4043
Markov 3668
Mascheroni 1531
masse de colis 4355
masse de sachets de médicament 4376
matchs d'une équipe 2889
matrice 1050
matrice carrée 954 1055
matrice conjuguée 1027
matrice dans un changement de base 1034
matrice dans une base propre 1138
matrice de changement de base 1145 1148 1150 1153
matrice de l'application identique 1036 1047
matrice de probabilité 3744
matrice de produit scalaire 2138
matrice de transition 3750
matrice d'endomorphisme 955
matrice des coefficients de corrélation linéaire 3878
matrice des corrélations 3878
matrice des poids 3850
matrice des poids 4155
matrice des probabilités de passage 3743
matrice des variances-covariances 3860 4146 4158 4166
matrice diagonale 954
matrice diagonalisable 956 990 1056 1156 1183
matrice d'un endomorphisme 985 1055
matrice d'un endomorphisme dans une nouvelle base 1036
matrice d'un isomorphisme 1055
matrice d'un produit scalaire 2126 2129 3851
matrice d'un projecteur orthogonal 2150
matrice d'une application linéaire 953 974 1078
matrice d'une famille de vecteurs 868
matrice d'une forme linéaire 1079
matrice en escalier 928
matrice hessienne 2425 2432
matrice hessienne dans R^2 2446
matrice hessienne du lagrangien 2590
matrice inversible 955 1038 1046 1055 1057
matrice jacobienne 2282 2283 2316 2351
matrice jacobienne d'un changement de variables 2351
matrice jacobienne d'un changement de variables implicite 2529
matrice jacobienne d'une application composée 2343 2405
matrice $n \times n$ à éléments 1 1171
matrice $n \times n$ à éléments 1 sur la 2e diagonale, 0 ailleurs 1173
matrice $n \times n$ à éléments α sur la 1e diagonale, β ailleurs 1176
matrice réelle symétrique dont une puissance vaut 1 1179
matrice symétrique 2083
matrice triangulaire 978
matrice unité 954 1054 1055
maximal 199
maximisation dans R^2 2595
maximisation dans R^3 2600
maximum 199
maximum absolu 2438
maximum de 2 variables uniformes 3034
maximum et minimum d'une fonction 1651
maximum et minimum d'une fonction continue positive 2110
maximum local 2590
médiale 3823
médiane 3803 3978 3985 3993 3995 4000 4020
meilleur qu'un autre estimateur 3888
mélange de sérums pour économiser des tests 3103
Méré 2884

méromorphe 2693
Mersenne 585 669
mésokurtique 3821
mesure de pH 4365
mesure d'un compact 2681
méthanol 2036
méthode aléatoire de sondage 3882
méthode de disjonction des cas 19 28
méthode de Grubbs 4387
méthode de Monte-Carlo 3902 4205
méthode de Monte-Carlo et fonction de répartition 3903
méthode de Monte-Carlo pour calculer une intégrale 4193
méthode de Politz 3881
méthode de rejet de Von Neumann 3909
méthode de Simpson 838
méthode de variation des constantes de Lagrange 1959
méthode de Von Neumann 4205
méthode des déterminants pour inverser une matrice 1042
méthode des moindres carrés 2143 3841 4103
méthode des moindres carrés ordinaires 3842 4077
méthode des quotas 3881
méthode des trapèzes 838
méthode des unités-types 3881
méthode du changement de base pour inverser une matrice 1041
méthode du pivot de Gauss 922
méthode du pivot pour inverser une matrice 1040
méthode du rang moyen 3927
méthode empirique de sondage 3881
méthode polaire de simulation de la loi normale 3911
méthode statistique 3791
méthodes de simulation d'un échantillon 3902
mineur d'un déterminant 1108
minimal 199
minimalisation d'une norme 2134
MINIMAX 212
minimum 199
minimum absolu 2438 2458
minimum de 2 variables exponentielles 3606
minimum de 2 variables uniformes 3034
minimum de l'écart absolu moyen 4009
minimum local 2590
minimum relatif 2463
minorant 199
minoration d'une application continûment dérivable 1514
Möbius 95
modalité d'un caractère 3792
modalités incompatibles et exhaustives 3792
mode 3802 3984 3995 4000 4019 4021
modèle 2819 3948
modèle à élasticité constante 3846
modèle additif 3954
modèle avec répétitions 3948
modèle complet 3948
modèle complet équilibré additif 3958
modèle équilibré 3949
modèle exponentiel 3846 4131
modèle linéaire 4072
modèle non linéaire 4124
modèle orthogonal 3949
modèle sans répétition 3948
modèle sans répétition 3953
modèle théorique 3791
modélisation 2806
modélisation d'activités matinales 2852
modélisation du jet de 2 dés 2874 2895
modélisation du jet de 3 dés 2849
modélisation du jet de 6 pièces 2880 2971
modélisation d'un jet de dé 2892 3062
modélisation d'un jeu de cartes 2936
modélisation par la loi binomiale 3098
modélisations de la loi géométrique 3144
module 844
module d'un nombre complexe 2690
module d'une intégrale 1809
modus ponens 5 139
moindres carrés 2143 2146

moindres carrés ordinaires 4106
moment centré d'ordre n 2998
moment centré d'ordre *r* 3817
moment cinétique 2062
moment d'inertie 2062
moment d'ordre n 2997
moment d'ordre *r* 3817
moment factoriel d'ordre k 3221
moments 3474
moments et moment factoriels 3223
moments factoriels 275
monogène 398 2692
monogène en un point 2745
monomorphisme 1046
Monte-Carlo 3902
morphisme de groupes 436
morphismes de noyaux et images supplémentaires 1007
Morse 2057
mouvement d'une bille dans un liquide 2055
moyenne 2994 3804 4001
moyenne arithmético-géométrique 1393
moyenne arithmétique 3808
moyenne conditionnée 3805 4054
moyenne conditionnelle 3831 4016
moyenne du produit par un scalaire 3805
moyenne d'une fonction sur un intervalle 1812
moyenne d'une somme 3805
moyenne d'une variable continue 3806
moyenne d'une variable statistique 3854
moyenne empirique aléatoire 3931
moyenne géométrique 3808 3997
moyenne harmonique 3808 3992
moyenne marginale 3831 4053
moyenne quadratique 3808
moyennes 4145 4156 4166
moyennes et variances marginales 4126
multiforme 2692
multiple de 3 610
multiple de 5 612
multiple de 7 575 584 652
multiple de 9 616
multiple de 13 577
multiple de 42 686
multiple de 121 617
multiple de 225 1210
multiple de 343 579
multiple de 20801 582
multiple formé de 1 663
multiples d'un irrationnel modulo 1 1759
multiples d'un rationnel modulo 1 1759
multiplicateurs de Lagrange 2538
multiplication 370
multiplication de micro-organismes 2027
multiplication d'une matrice par un scalaire 953 1053
multiplication par les scalaires 844
multiplication par un scalaire dans R^n 3848

N

$n^4 + 4^n$ n'est pas premier 618
nabla 2316 2388
NAND 23 503
négation 4 503
Newmann-Keuls 3787 4389
Newton 489
NI 25 503
nilpotent 419 998
niveau de confiance d'un intervalle de confiance 3890
niveau d'un test 3917
nombre au hasard 3902
nombre d'applications 216 229
nombre d'applications croissantes 233
nombre d'applications strictement croissantes 233
nombre d'arrangements 308
nombre de bijections 216 231
nombre de clients chez un antiquaire 3189 4310
nombre de combinaisons 308
nombre de couples 237
nombre de couples croissants 262
nombre de cycles dans S_n 473
nombre de Fermat 669
nombre de garçons dans une famille de n enfants 3121
nombre de Mersenne 669
nombre de n-uples 237
nombre de parties 243 271
nombre de parties à k éléments 244 257
nombre de parties contenant une partie donnée 269
nombre de partitions 275
nombre de partitions et moments 3223
nombre de personnes à sonder 4255
nombre de personnes devant accepter une proposition 4257
nombre de pièces et superficie 4039 4066
nombre de relations binaires 238
nombre de relations binaires spéciales 239
nombre de succès dans la répétition d'une épreuve de Bernoulli 3082
nombre de transpositions dans S_n 473
nombre d'éléments 152
nombre d'éléments de l'ensemble des parties 160
nombre d'enfants et catégorie socio-professionnelle 4057
nombre d'essais nécessaires au succès 3117
nombre d'étudiants suivant la taille 3574
nombre d'injections 216 231
nombre d'inversions d'une permutation 445 465
nombre d'ordres totaux 238
nombre et couleur de fleurs 2940
nombre formé de 1 659 663
nombre premier 207 631
nombres au hasard 3766
nombres complexes 524 2689
nombres de 6 chiffres 620
nombres de Fermat 586 684
nombres de Fermat étrangers 685
nombres de Mersenne 585
nombres duaux 498
nombres étrangers 631 658
nombres premiers 185 608 669
nombres réels 330 518
non 4
NON 503
non dégénérescence 2066 3849
non équivalence des normes d'une fonction continue 2087
non exhaustif 2897
NOR 23 503
normale à une courbe de niveau 2321
normalement convergente 1916
normalité 4383 4395
norme 2082
norme de convergence en moyenne 2086 2107 2797
norme de convergence en moyenne quadratique 2086 2108
norme de convergence uniforme 1854 2086 2108 2112
norme de la projection orthogonale 2151
norme de R^p 2084

norme d'un espace vectoriel réel 2154
norme d'un projecteur 2257
norme d'un vecteur 3851
norme d'une application linéaire 2204
norme d'une forme linéaire 2263
norme d'une forme linéaire sur R^p 2247
norme en moyenne quadratique d'une fonction et de sa dérivée 1843
norme euclidienne 2083 4106
norme euclidienne dans R^2 2098
norme euclidienne d'une forme linéaire 2156 2160
norme plus fine 2084
norme produit dans R^2 2098
normes 2081
normes dans R^2 2097
normes dans R^p 2102
normes d'une application continue 2086
normes d'une fonction numérique continue sur un intervalle fermé 2106
normes équivalentes 2084
note d'examen d'un étudiant qui fait des impasses 3208
notes dans un examen 3975
noyau 992 997 1000 1025 1160 1163 1166 1168
noyau d'un endomorphisme 1088 1182
noyau d'une application linéaire 857 910 951 974
noyau d'une forme linéaire 994
noyau d'une forme linéaire sur R^p 2246
noyau d'une matrice 1023 1052
noyau d'une puissance d'endomorphisme 1046
noyau et image d'un endomorphisme 985 1095
noyau et image supplémentaires 1006 1102
noyaux de formes linéaires 944
noyaux et images supplémentaires 1007
nuage de points 3828 4066 4096
nuits de travail d'un étudiant 3755

O

objet de la statistique 3791
oblicité à droite 3819
oblicité à gauche 3819
observation à deux niveaux 3351
opérateur de centrage 4157
opérateurs booléens 503
optimisation sous contraintes égalités 2557
ordre de multiplicité des valeurs propres 1156
ordre de multiplicité d'un pôle 2692 2745
ordre de multiplicité d'une valeur propre 956 1056
ordre des cardinaux 154
ordre d'un élément 400
ordre d'un groupe 420 421
ordre d'une équation différentielle linéaire 1958
ordre d'une permutation 450 465
ordre d'une permutation de S_8 472
ordre total 26 154 197
ordres totaux 238
orthogonal d'un sous-espace vectoriel 2249
orthogonalité 3852
orthonormalisation 2131
oscillateur harmonique 2057
oscillation d'une balance à plateaux 2062
ou 4
OU 78 503
OU exclusif 503
ouvert d'un espace normé 2172
ouverts et fermés de R^p 2170
ouverts et fermés pour la norme euclidienne 2189
ovales de Cassini 2735

P

panel 3881
papier gausso-arithmétique 3788 4239
papier log-log 3847
paradoxe du chevalier de Méré 2884
paramètre 3885
paramètre de tendance centrale 3802
paramètre d'une loi de Bernoulli 3079
paramètre d'une loi de Poisson 3171
paramètre d'une loi exponentielle 3596
paramètre d'une loi géométrique 3128
paramètres caractéristiques d'une distribution statistique 3802
paramètres de dispersion 3809
paramètres de forme 3819
paramètres de position 3802
paramètres de tendance centrale 4027
paramètres d'une loi binomiale 3080
paramètres d'une loi Gamma 3593
paramètres d'une loi hypergéométrique 3194
paramètres d'une loi normale 3542 3567
parente 3888
parité des coefficients binomiaux 325
parité d'un cycle 468
parité d'une permutation 447
Parseval-Plancherel 2700
partie 39
partie de pile ou face en séries de 3 lancers 3107
partie entière 137
partie entière de $n\,!\,E$ 1602
partie entière des mutliples d'un réel 1217 1218
partie entière d'un nombre réel 1189 1211
partie étoilée 2608
partie imaginaire 2689
partie libre 865
partie liée 902
partie pleine 40 75
partie principale d'un infiniment petit 1666
partie réduite 42
partie réelle 2689
partie vide 75
parties à k éléments 234
parties à nombre pair d'éléments 259
partition 48
Pascal 3257
passagers dans un avion 273
Pearson 3596 3609 3819 3918
pêche et ferrage du poisson 3395
peigne de Dirac 2700
Peirce 503
pentagones réguliers 3163
percentiles 3810
permutation 216 444
permutation circulaire 449
permutation de {1, … , 9} 465
permutation de {1, … , 10} 469 477
permutation impaire 447
permutation impaire d'ordre pair 472
permutation paire 447
permutations 231 1106
permutations dans S_9 475
permutations paires de S_3 467
petit théorème de Fermat 672 693
PGCD 622 631
PGCD dans Z[X] 801 808
PGCD de deux polynômes et algorithme d'Euclide 740
PGCD de X^n-1 et X^p-1 736 792
PGCD et algorithme d'Euclide 665
PGCD et PPCM dans R[X] 758
PGCD et zéros 760
phénomènes rares 3171
PIB par habitant et analphabétisme 4155
pièces défectueuses dans un échantillon 3206
pivot de Gauss 922
place de départ dans une course 4281
placement à intérêts composés 2033

plan complet équilibré 3957
plan tangent 2433
Plancherel 2700
platikurtique 3821
plurimodale 3803
plus court chemin sous contrainte 2574
plus fine 2067
plus grand commun diviseur 631
plus grand élément de *f(x)/x* 1485
plus petit commun multiple 207 631
plus petit élément 198
plus petite amplitude significative 3787 3948 4389
PNB par habitant et mortalité infantile 4125
poarabole ajustée par la méthode des moindres carrés 2146
poids 3850
poids et taille 4041
Poincaré 278 2608 2825
point à tangente verticale 1664
point adhérent à une partie d'un espace normé 2177
point commun à une tangente et à l'axe des x 1651
point critique 2424 2692 2746
point d'arrêt 1687
point de rebroussement 1664
point essentiel 2692 2746
point fixe 1244
point fixe d'une application continue 1274
point fixe d'une application monotone 1366
point fixe d'une suite définie par récurrence 1329
point hyperbolique 2435
point moyen 3804
points critiques 2590
points critiques d'un monôme à deux variables 2572
points critiques d'un polynôme 2442 2452
points critiques d'une application 2430
points singuliers de Arc cos(z) 2749
points singuliers de Arc tg(z) 2746
points stationnaires du lagrangien 2595
Poisson 2703 3171 4310
poissons de couleurs variées 3214
pôle 1939 2692 2745
Politz 3881
polygone statistique 3795
polynôme 700
polynôme à zéros simples dans C[X] 775
polynôme caractéristique 1058 1145 1148 1150 1153 1156 1160 1163 1166 1168
polynôme caractéristique d'un endomorphisme 958
polynôme caractéristique d'une équation différentielle linéaire 1959
polynôme irréductible dans Q[X] 779
polynôme minimal 959 1059 1150 1154 1160 1163 1166 1168
polynôme unitaire 700
polynômes de Tchebichef 1430
polynômes divisibles par leur dérivée 762
polynômes étrangers 744
polynômes P_n *(a,b)* 1415
pondération 3826
population 3791
population de référence 3885
population et superficie 3973
population mère 3885
position relative d'une fonction et de son développement limité 1727
positivité 2066 3849
potentiel 2322
potentiels croissants 2433
pourcentage de garçons à la naissance 4260
PPAS 3948 4389
PPCM 207 622 631
précis 3888
précision d'un estimateur 3888
prédicteur d'une variable statistique 3845
prédicteur et estimation 3845
prédicteur linéaire 3855
prédicteurs de la régression linéaire multiple 4168
prédiction de valeurs supplémentaires 4169
premier 631
premier axe factoriel 3859

premier théorème de la moyenne 1811
primitive 1813
primitive de fraction rationnelle de fonctions trigonométriques 1889
primitive d'une fonction numérique 1413
primitives de fonctions élémentaires 1860
primitives de fonctions trigonométriques 1886
primitives de fractions rationnelles 1874
primitives usuelles 1814
principe de non-injection 267
principe de récurrence 215
principe des intervalles emboîtés 518
principe des intervalles emboîtés 2208
principe des tiroirs 267
probabilité 2806 2819
probabilité conditionnée de A par B 2901 2903
probabilité conditionnelle 2900
probabilité conditionnelle dans une chaîne de Markov 3742
probabilité conditionnelle de A sachant que B est réalisé 2903
probabilité conditionnelle d'une intersection 2959
probabilité conditionnelle d'une partie 2963
probabilité critique 3115 3918 4252
probabilité de passage 3742
probabilité de présence 3742
probabilité des causes 2908
probabilité d'une réunion finie 2824
probabilité d'une valeur 2988
probabilités 2805
probabilités inégales 3884
probabilités totales 2819
problème amusant 31
problème des Sophie 3069
processus de Poisson 3189 3716 4310
produit de 2 matrices 1080
produit de 2 nombres 3037
produit de 2 variables uniformes 3034
produit de 3 entiers consécutifs 580
produit de 4 entiers consécutifs 574
produit de convolution 2698 2798 3469
produit de deux cycles 471
produit de deux déterminants 1109
produit de deux matrices 954
produit de fonctions de carré intégrable 1820
produit de fonctions génératrices 3219
produit de fonctions intégrables 1808
produit de matrices 1054
produit des distances à deux points fixes 2735
produit des valeurs propres 957 1057
produit des valeurs propres 1107
produit du PGCD et du PPCM 622 631
produit d'une famille vide 2905
produit d'une matrice par sa transposée 1028
produit d'une variable de Bernoulli et d'une variable de Poisson 3261
produit hermitien 2794
produit scalaire 2083
produit scalaire canonique 3850
produit scalaire dans l'espace des variables 3854
produit scalaire dans R^3 2113
produit scalaire dans R^n 3849
produit scalaire de vecteurs unitaires 2149
produit scalaire défini par une matrice diagonale à éléments positifs 3850
produit scalaire euclidien 977 2083 2155
produit scalaire standard 2083
produits scalaires dans R^3 2124
progression arithmétique 1186
progression géométrique 1187
projecteur 1010
projecteur orthogonal 2249
projection orthogonale 2118 2135 2258
projections 2234
projet d'aménagement 3993
projeté orthogonal 3852
projeté orthogonal sur un plan 3871
prolongement 111
prolongement par continuité 1726
prolongement par continuité en un point 1280

proposition 4
propriétés d'une partie 75
propriéts d'une probabilité 2820
protozoaires 2033
publicité dans des magazines 278
puissance 208
puissance 1/3 1522 1573
puissance 100^{e} d'une matrice 1086
puissance d'un test 3917
puissance extérieure *n* -ième 1107
puissance l'emporte sur logarithme 1223 1238
puissance *n* -ième d'un automorphisme de R^3 1096
puissance *n* -ième d'un endomorphisme 980
puissance *n* -ième d'un endomorphisme de R^4 1092
puissance *n* -ième d'une matrice 1082
puissance *n* -ième d'une matrice 3 × 3 1136
puissance symbolique 820
puissances de 2 + racine(3) 1213
puissances d'un automorphisme 1140
puissances d'un endomorphisme 1021
puissances d'un nombre complexe de module 1 1759
puissances d'une matrice 1027
puissances d'une permutation 465
puissances *p* -ièmes des entiers 824
pyramide des âges 3981
Pythagore 2135 2137

Q

qualification des contraintes 2590
qualitatif 3792
quantificateur 6
quantificateur existentiel 6
quantificateur universel 6
quantification de l'énergie 2057
quantitatif 3792
quartiles 3809 3993
quotas 3881
quotient 630

R

R 518
R n'est pas dénombrable 352
rachat de gain aléatoire au jeu de pile ou face 3110
racine carrée 357
racine carrée d'une variable de Fischer-Snedecor 3629
racine carrée d'une variable de Khi deux 3629
racine réelle d'un polynôme 809 1447
racine réelle d'une application 1449
racine(ax) 1666
racine(x) 1660
racines du polynôme caractéristique 1058
radar 4045
radium 2033
raisonnement inductif 3791
rang 1025 1160 1163 1166 1168
rang d'un endomorphisme 986 1017
rang d'un endomorphisme de R^3 1088
rang d'un endomorphisme de R^4 1090
rang d'un endomorphisme d'espace vectoriel 951
rang d'un épimorphisme 1047
rang d'un monomorphisme 1046
rang d'un système de vecteurs de R^3 895
rang d'un système de vecteurs de R^4 897
rang d'une application linéaire 868
rang d'une famille de vecteurs 868 915 929 932 935
rang d'une matrice 1023 1027 1052
rang d'une matrice 4 × 4 1133
rang d'une puissance de matrice 1047
range studentisé 3787 3948
rangs complémentaires 1009
rangs de l'intersection et de la réunion de 2 familles 940
rapport de 2 variables de Khi deux 3653 3664
rapport de 2 variables normales centrées réduites indépendantes 3629
rapport de contraction 2257
rapport de corrélation 3836 4055 4060 4071 4101 4129
rapport des déciles 3986 4021 4022 4030
rapport des distances à 2 points fixes 2719
rapport d'exhausitivité 3200
rapports de corrélation 4091
rares 3171
rat et labyrinthe 3030
rationnel 26
rayon de convergence de la série dérivée 1944
rayon de convergence de séries entières 1936
rayon de convergence d'une série entière 1915 1916
rayon d'une boule fermée 2174
rayon d'une boule ouverte 2067 2171
réalisation d'un événement 2807
recensement 3880
recherche des axes principaux 3865
réciprocité 2802
réciprocité de la transformation de Fourier 3472
récurrence 215
réduction des données 3857
réduction d'une famille de vecteurs 930
réduction d'une matrice de vecteurs colonnes 922
réduite 3546 3817
réel 26
réel dont les puissances sont entières 626
réels 1737
réels modulo 1 1739 1759
référentiel 2807
réflexivité 172
refroidissement d'un corps dans une enceinte 2026
région critique 3918
région d'acceptation 3918
région de refus 3918
règle de Cauchy 1293
règle de Cauchy pour les séries entières 1919
règle de d'Alembert 1355
règle de d'Alembert pour les séries entières 1917
règle de L'Hôpital 1540 1733
règle de modus ponens 5
Règles de calcul des limites 1223

règles de convergence 1328
règles de convergence d'une suite 1440
règles de convergence d'une suite de nombres réels 1292
régression 4128
régression et corrélation 3835
régression linéaire 4146
régression linéaire multiple 4165
régression multiple 3871
régression orthogonale 3857 4106
régression orthogonale dans R^2 3848
régression pas à pas 3878
regroupement en classes 3975
régulier 482
régulier à droite 482
régulier à gauche 482
régulière 2702
rejet 3909
relation 4
relation de divisibilité 205 669
relation de finesse 2067
relation de finesse entre normes 2084
relation de Grassmann 940
relation d'équivalence 172
relation d'ordre 196 503
relation d'ordre entre les cardinaux 167
relation entre coefficients binomiaux 319
relation entre sous-espaces vectoriels 863
relation entre une fonction et l'intégrale de sa dérivée seconde 1854
relation linéaire 4115
relation vraie 5
relations binaires 238
relations binaires réflexives 239
relations binaires symétriques 239
relations équivalentes 7 18 27 30
remplace 6
rémunérations 3983
répartition conjointe de 2 caractères 2871 2873
répartiton au hasard des résidus 3945
répertoire des entreprises 3882
réponses au hasard à un QCM 3101
représentation en étoile 3829 4045
représentation graphique 3795
représentation graphique d'une variable qualitative bidimensionnelle 3828
représentation graphique d'une variable quantitative bidimensionnelle 3828
représentation paramétrique d'une courbe 1717
représentation triangulaire 3829
résidu 2694
résidus 2751 4169
résidus indépendants 4084
résidus suspects 4387
résistance d'une corde de nylon 4374
résolution d'une équation différentielle linéaire 1959
reste 630
reste de Lagrange 1537
restes de divisions euclidiennes 612
restriction 110
restriction d'une application linéaire à un sous-espace 996
résultat élémentaire 2807
rétraction 109 130
rétraction d'une bijection 134
retrouver son chapeau 3126
réunion 45 67 69 81
réunion de 2 sous-espaces vectoriels 946
réunion de boules 2194
réunion de deux sous-espaces vectoriels 861
réunion de deux sous-groupes 417
réunion fermée de boules fermées 2199
Ricatti 2021
Riemann 1350 1801 2624
risque d'erreur de 1ère espèce 3917
risque d'erreur de 2e espèce 3917
robuste 3886
Rolle 811
rotationnel 2391
rotationnel d'un gradient 2391

S

S_3 467
S_8 472
S_9 475
S_{10} 477
salaire des agents de l'état 4018
salaire et âge 4075
salaire moyen et dispersion 4015
salaires dans une entreprise 4014
SANS 503
sans biais 3886
SCADD 3958
SCE 3841 3939
SCEA 3951
SCEAB 3951
SCEB 3951
Scheffer 503
schéma d'axiome 5
schémas d'axiomes 139
Schwarz 1808 2330 3670
SCR 3939 3951
SCT 3939 3951
second membre d'une équation différentielle linéaire 1958
secteurs 3795 3968 3973
section 108 130
section d'une bijection 133
segment 2608
sens direct 2624
série $(-a)^n/n$ 1784
série $1/ (n(\ln(n))^2)$ 1780
série $1/(n \ln n)$ 1517
série $1/n^{½}$ 1519
série $1/n^2$ 2786
série à terme général logarithmique 1953
série convergente 1740
série de cosinus 2791
série de Fourier 2484 2700
série de Fourier d'une distribution périodique 2700
série de Fourier d'une fonction périodique 2700
série de Laurent 2694
série de Riemann 1350
série de sinus 2791
série de Taylor 2328
série de terme général f(n) 1819
série définie à partir d'une fonction 2 fois dérivable 1599
série définies à partir de l'exponentielle 1770
série des inverses des racines carrées d'entiers 1779
série entière 1356 1915
série entière de l'exponentielle 1922 1945
série entière dérivée 1946
série entière d'une fonction analytique 1924
série entière d'une fonction génératrice au voisinage de 1 3221
série exponentielle 1351 1857
série f(n) et intégrale de f 1774
série géométrique 1921 1940
série harmonique 1777
série harmonique alternée 1601 1777
série $n^{-\alpha} (\ln(n))^{\beta}$ 1787
série normalement convergente 1916
série numérique définie à partir d'une suite convergente 1768
série oscillante 1952
séries alternées 1743
séries appariées 4270 4371
séries de Fourier 2783
séries dérivées de la série géométrique 1940
séries dérivées de l'exponentielle 1948
séries entières 1914
séries numériques 1737
seuils de la loi de Wilcoxon 3769
sexe et études supérieures 3433
sexe et fumeurs 2984
SGEASM 1959
SGESSM 1959
signature d'une permutation 446 465 472

signe 4
signes et rangs de Wilcoxon 4369
simple 448 3742
Simpson 838
simulation de la loi de Fisher-Snedecor 3912
simulation de la loi de Khi deux 3911
simulation de la loi de Student 3911
simulation de la loi normale 3911
simulation d'un échantillon 3902 4181
simulation d'un échantillon de loi continue par méthode de rejet 4214
simulation d'un échantillon de loi de Bernoulli 4210
simulation d'un échantillon de loi de Cauchy 4208
simulation d'un échantillon de loi de Poisson 4197
simulation d'un échantillon de loi discrète finie 4195
simulation d'un échantillon de loi exponentielle 4205
simulation d'un échantillon de loi normale 4199 4237
simulation d'un échantillon de loi normale par méthode polaire 4211
simulation d'un échantillon de variable binomiale 3903
simulation d'un échantillon de variable binomiale négative 3903
simulation d'un échantillon de variable de Bernoulli 3903
simulation d'un échantillon de variable géométrique 3903
simulation d'une demande de produit 4202
simulation d'une loi Gamma 3908
simulation d'une variable binomiale 3906
simulation d'une variable continue 3905
simulation d'une variable de Cauchy 3908
simulation d'une variable discrète 3905
simulation d'une variable exponentielle 3908
simulation d'une variable géométrique 3905
sin(2x)-3cos(x) 1511
singularité à l'infini 2692 2746
singularité artificielle 2295 2692 2745
singularités des fonctions de variable complexe 2692
sinh 392
sinus 1250 1523
sinus hyperbolique 392
SIREN 3882
Slutski 3686
Smirnov 3192 3786 3923 4299
S_n 473
Snedecor 3651
solution de $2^p+1=0$ (mod p) 693
solution élémentaire d'un opérateur différentiel 2774
solution unique d'une équation différentielle linéaire du 1^{er} ordre 1976
solutions réelles d'une équation transcendante 1484
somme de 2 endomorphismes diagonalisables 1183
somme de 2 matrices 1053
somme de 2 nombres premiers 615
somme de 2 variables uniformes 3034
somme de 3 nombres premiers 615
somme de bornes inférieures 305
somme de cardinaux 264
somme de carrés de variables normales centrées réduites 3611
somme de carrés de variables normales centrées réduites indépendantes 3617
somme de carrés d'entiers 306
somme de carrés d'entiers consécutifs 2150
somme de Cauchy-Riemann 1806
somme de coefficients binomiaux 283 284 300 320
somme de cosinus 833
somme de deux parties 187
somme de deux sous-espaces vectoriels 917
somme de produits de coefficients binomiaux 309 311
somme de sinus 833
somme de variables aléatoires géométriques indépendantes 3260
somme de variables aléatoires indépendantes 3219
somme de variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle 3596
somme de variables aléatoires indépendantes de loi Gamma 3594
somme de variables de Khi deux 3594
somme de variables géométriques de même paramètre 3720
somme de variables normales indépendantes 3550
somme d'entiers consécutifs 2150
somme dérivée de coefficients binomiaux 322
somme dérivée seconde de coefficients binomiaux 324
somme des carrés de 1 à *n* 1204
somme des carrés des écarts 3841

somme des carrés des écarts de l'influence de l'interaction de A et B 3951
somme des carrés des écarts expliquée 3939
somme des carrés des écarts expliquée par A 3951
somme des carrés des écarts expliquée par B 3951
somme des carrés des écarts résiduelle 3939 3951
somme des carrés des écarts totale 3939 3951
somme des carrés des entiers successifs 580
somme des cubes de 1 à *n* 1205
somme des cubes de 3 entiers consécutifs 616
somme des distances à deux points fixes 2731
somme des entiers de 1 à *n* 1203
somme des entiers impairs de 1 à 2*n*-1 1203
somme des inverses de racines d'entiers 1215
somme des inverses des puissances de 2 1207
somme des puissances *p*-ièmes des entiers 824
somme d'inverse de produits de 2 entiers impairs 1206
somme directe de l'image et du noyau 987 1182
somme directe de sous-espaces vectoriels 906
somme directe du noyau et de l'image 1001 1102
somme directe topologique 2249 2257
somme du noyau et de l'image d'un endomorphisme 1046 1047
somme d'une série 1740
somme intégrale de coefficients binomiaux 304
sondage élémentaire 3882 3891
sondage élémentaire pour un caractère qualitatif 3893
sondage raisonné 3881
sondage stratifié 3883 4172
sondages 3880
Sophie 3069
sous-corps 520
sous-corps de R 522
sous-espace propre 956
sous-espace propre d'une matrice 1056
sous-espace vectoriel 845
sous-espace vectoriel de R^4 857
sous-espace vectoriel engendré 862 888 909 912 915
sous-espaces propres 1158 1160 1163 1166 1168
sous-espaces propres d'une matrice 1043
sous-espaces vectoriels 942
sous-espaces vectoriels de R^n 861 863
sous-famille complète 932
sous-famille linéairement complète 932
sous-groupe 399
sous-groupe additif 845
sous-groupe engendré par une partie 418
sous-groupes additifs de R 1738 1756
sous-groupes additifs de Z 437
sous-groupes partout denses 1738
SPEASM 1959
spectroscopie infrarouge 2057
statistique descriptive à un caractère 3795
statistique descriptive ou déductive 3791
statistique mathématique ou inductive 3791
statistiques 3789
statistiques : cours, 1ère partie 3790
StatITCF 4395
statut et branche d'activité 4037
stérogramme 3828
Stirling 1317 2494
stock de sécurité 4202
strate 3883
structure d'algèbre 954
Student 3627
Student-Fischer 3627
suite convergente 1290
suite convergente de fonctions continues 2088
suite convergente définie par une fonction à dérivée bornée 1495
suite croissante majorée 1292 1328 1348 1353 1440
suite de Cauchy 26 518 1291 2197
suite de factorielles 1315
suite de factorielles sur puissance 1316
suite de fonctions de base tendant vers 0 2696
suite de nombres premiers 610 613
suite de variables exponentielles 3716
suite décroissante de boules fermées 2196

suite décroissante de fermés non vides de R^p 2207
suite décroissante minorée 1292 1328 1348 1440
suite définie par le rapport de deux applications continues 1453
suite définie par récurrence 1384 1414
suite définie par un développement décimal 1314
suite divergente définie par une fonction numérique continue 1493
suite régulière 1291
suite uniformément convergente de fonctions continues 2088
suites convergentes liées 1396
suites de nombres réels 1289
suites définies par récurrence 1357
suites d'entiers consécutifs non premiers 614
suites et fonctions continues 1437
suites liées 1384
suites liées encadrant leur limite 1407
supplémentaire d'un sous-espace vectoriel 911
support d'un chemin 2622
support d'une distribution 2698
surface de niveau 2433
surface d'un hexagone régulier de côté *a* 3165
surface d'un pentagone régulier de côté *a* 3165
surjection 105 137
surjection canonique 174
surjectivité 149
surjectivité d'une application linéaire 996
surjectivité d'une rétraction 131
symbole de Kronecker 820
symétrie 172 2066 3849
symétrique 374
symétrique d'une distribution 2792
symétrique d'une fonction 2792
système complet d'événements 2818 2865 2906
système de congruences 665
système de congruences dans Z[X] 732 794
système de générateurs 866
système de générateurs minimal 867
système de vecteurs linéairement indépendants 865
système décimal 267
système libre 977
systèmes d'équations différentielles linéaires 2039
systèmes d'équations différentielles linéaires 2051

T

table cumulée de la loi de Poisson 3768
table de la fonction de répartition de la variable normale centrée réduite 3778
table de la loi de Fischer-Snedecor 3781
table de la loi de Khi deux 3780
table de la loi de Student 3779
table de nombres au hasard 3766
table de vérité 7 19 29
table des seuils de la loi de Wilcoxon 3769
table des signes et des rangs de Wilcoxon 3770
table du coefficient d'aplatissement 3783
table du coefficient d'asymétrie 3784
table du test de Durbin-Watson à un régresseur 3785
table du test de Kolmogorov-Smirnov 3786
table Range studentisé 3787
tableau d'analyse de la variance 3942 3945 4389 4394
tableau d'analyse de la variance à 2 facteurs contrôlés 3957
tableau d'analyse de la variance dans un modèle additif 3957
tableau de contingence 3825
tables de vérité 21
taille des élèves d'un collège 4026
taille d'exploitations agricoles 3999
taille et poids 4090
tangente à la parabole 1526
tangente à une courbe de niveau 2323
tangente hyperbolique 393
tanh 394
tau de Hilbert 4
taux de sondage 3882
taux d'inertie totale expliquée par une direction 3859
taux d'intérêt moyen 3997
Taylor 811
Taylor-Lagrange 1537 2328
Taylor-Mac Laurin 2328
Taylor-Young 1537 2328
Tchebichef 1430
Tchebichev 3669
technique de la régression pas à pas 3878
temp d'attente 3189
température et rendement d'une réaction chimique 4077
temps d'attente dans un métro 3161
temps d'attente du premier arrivé 3536
temps minimum d'un trajet rail-route 2569
tend vers l'infini 1222
tendance centrale 4027
tendance de la loi hypergéométrique vers la loi binomiale 3200
terme 4
ternsion artérielle et traitement 2966
territoire de vente d'un représentant 3762
terst des signes et des rangs 3928
test 3880
test asymptotique de niveau alpha 3919
test d'absence d'action du facteur A 3953
test d'absence d'action du facteur B 3953
test d'absence d'interaction des facteurs A et B 3953
test d'additivité de Tukey 3958
test d'ajustement de Kolmogorov-Smirnov 3923
test de Bartlett 3944 3945 4385 4398
test de comparaison de moyenne à une valeur de référence 3931
test de comparaison de variance à une valeur de référence 3933
test de conformité à une valeur standard 3930
test de Durbin-Watson 4084
test de Durbin-Watson à un régresseur 3785
test de Fischer-Snedecor 3942
test de Fischer-Snedecor de l'analyse de variance 3941
test de Gauss 3931 3934 4332
test de Gauss unilatéral à droite 4342
test de Hartley 3943 3945
test de Khi deux 3933
test de Kolmogorov-Smirnov 3192 3786 4285 4299 4313
test de Levenne 3944 3945
test de Mann-Whitney 3926
test de Newmann-Keuls 3787 3948 4389
test de normalité 3930
test de normalité d'un échantillon 3945

test de signification de B 4081
test de Student 3932 3935 4272 4346 4371 4374 4376
test de variance (2 échantillons) 3942
test de variance (plusieurs échantillons) 3943
test de Wilcoxon 3925 4319 4322 4327 4329
test d'équilibrage d'un dé 4258
test des rangs 3925
test des signes et des rangs de Wilcoxon 4369 4372 4375
test d'homogénéité 3923 3933
test d'homogénéité de 2 moyennes 3934
test d'homogénéité de plusieurs moyennes 3938
test d'homogénéité des variances 3945
test d'hypothèses 3917
test d'indépendance 3921
test d'indépendance des échantillons 3945
test du coefficient d'aplatissement 3945
test du coefficient de régression B 4080
test du coefficient de symétrie 3945
test du Khi deux de Pearson 3918
test Khi deux 4279 4281 4283 4293
test Khi deux d'indépendance 4286 4296
test non paramétrique 3918
tests en analyse de variance 3947 3952
tests non paramétriques 4314
tests paramériques 3930
tests statistiques 3917
texte démonstratif 5 139
théorème 5
théorème central limite 3685
théorème de Bernoulli 3572
théorème de Bezout 437 497 632 656
théorème de Bézout dans Q[X] 704
théorème de Bézout dans Z[X] 742
théorème de Bolzano 1438 2106
théorème de Bonnet 1817
théorème de Borel-Cantelli 3691 3718 3739
théorème de Cailey-Hamilton 959 991 1059
théorème de Cantor 152 169
théorème de Cauchy 1819 2694
théorème de convergence dominée 1920
théorème de d'Alembert 775
théorème de dérivabilité sous le signe somme 2468
théorème de différenciation d'une application composée 2405
théorème de Fermat 400 421 689 697
théorème de Fubini 2469 2648
théorème de Green-Riemann 2624 2638 2642
théorème de la moyenne 1811 1817
théorème de la moyenne conditionnée 3806 3833
théorème de la variance conditionnée 3815 3834
théorème de la variance conditionnelle 3387
théorème de Lagrange 400 421 671
théorème de Lebesgue 1806
théorème de l'espérance conditionnelle 3289 3387
théorème de Liouville 670 687
théorème de Poincaré 2608 2637
théorème de Pythagore 2135 2137
théorème de Rolle 811
théorème de Schwarz 2330
théorème de Wedderburn 518
théorème de Weierstrass 1244 1274 1438 2106
théorème de Wilson 669 673 689 694 695
théorème des accroissements finis 1439 1492 2328
théorème des extrema liés 2538
théorème des fonctions implicites 2496
théorème des gendarmes 1223 1292
théorème des multiplicateurs de Lagrange 2538 2589
théorème des résidus 2695
théorème des séries alternées 1743
théorème des valeurs intermédiaires 1438 1847
théorème des valeurs intermédiaires pour la dérivée 1439 1455
théorème d'intégration sous le signe somme 2469
théorème d'inversion globale 2407
théorème d'inversion locale 2407
théorème du changement de variables 2352
théorème du changement de variables dans les intégrales 2657
théorème du changement de variables implicite 2517

théorème du minimax 212 512
théorème du point fixe 1244
théorèmes de Cantor 155
théorèmes de Paul Lévy 3684
théorie 4
théorie de l'échantillonnage 3880
théorie de l'estimation 3880
théorie des ensembles 2 8
théorie des sondages 3880
théorie égalitaire 8
théorie logique 5
théorie quantifiée 6
tirage à 2 niveaux 3384
tirage avec remise 3083
tirage de boules de couleur dans une urne 3064
tirage de cartes 2897
tirage équiprobable 3884
tirage exhaustif 2897 3195
tirage exhaustif de boules 3039 3044
tirage non exhaustif 2897 3083 3791
tirage par grappe 3884
tirage sans remise 3195
tirages avec remise jusqu'au succès 3146
tirages sans remise 2955
titrage du glucose par plusieurs laboratoires 4393
tombola 2978
total 154
totalement ordonné 197 518
trace 2390
trace du produit d'une matrice par sa transposée 1047
traitement et paramètre biologique 4371
traitement et viscosité sanguine 4367
trajectoires orthogonales d'une famille de courbes 2022
trajet en tramway 3254
transformation de Fourier 2702 2797
transformation de Joukovski 2740
transformation de Laplace 2479 3505
transformation par quantile 3903
transformé 101
transformée de Fourier 2643 3579
transformée de Fourier de la loi Gamma 2643
transformée de Fourier d'une distribution tempérée 2703
transformée de Fourier d'une fonction 2702
transformée de Fourier d'une fonction numérique intégrable 3469
transformée de Laplace d'une fonction périodique 2479
transitivité 172
transitivité de l'indépendance linéaire 948
transport d'une norme par une application linéaire 2105
transposition 448
transposition simple 448
trapèzes 838
treillis 200 212 504 631
treillis complémenté 504
treillis de Boole 504
treillis distributif 504
trempage d'assiettes 4272
triangulaire 3829
tribu 2809 2860
tribu d'événements 2808
tribu engendrée par 2 événements 2861
truite et loi de Poisson 3413
Tukey 3958
tumeurs de souris 4358
tuyaux d'orgue 3795 3828 3967 3974 4037
type de point critique 2590

U

unaire 503
uniforme 2692 2746
union 77
unité primaire 3884
unité secondaire 3884
unité-type 3881
utilisation de la table de fonction de répartition d'une variable de Fischer 3654
utilisation de la table de fonction de répartition d'une variable de Khi deux 3612
utilisation de la table de la fonction de répartition normale 3552

V

VA iid 3902
vaccin et peste 3115
valeur moyenne 1812
valeur principale de Cauchy 1819
valeur principale d'une intégrale 1819
valeur propre 956
valeur propre d'une matrice 1056
valeurs propres 1145 1148 1150 1153 1156 1157
valeurs propres de la matrice des variances-covariances 4148
valeurs propres de la matrice hessienne 2433
valeurs propres d'une matrice de probabilité 3744
validité du prédicteur 3877
validité d'un prédicteur 3846
valuation 591
valuation de 2 dans 1000! 627
Van der Monde 1126
Vandermonde 3196
variable aléatoire 2986
variable aléatoire absolument continue 3438
variable aléatoire constante sur un intervalle 3507
variable aléatoire continue 3440
variable aléatoire de Bernoulli 3079
variable aléatoire de Student à ν degrés de liberté 3628
variable aléatoire discrète à n dimensions 3296
variable aléatoire discrète finie 2986
variable aléatoire discrète infinie 2986
variable aléatoire dont la fonction de répartition est bijective 3524
variable aléatoire non continue 3493
variable aléatoire normale 3542
variable aléatoire réelle 2986
variable aléatoire réelle à densité 3436
variable aléatoire réelle de loi normale 3542
variable aléatoire réelle discrète 2985
variable binomiale 3247
variable centrée 3817
variable conjointe 3825
variable de Bernoulli 2987 3245
variable de décision 3918
variable de Khi deux à ν degrés de liberté 3609
variable de Poisson 3171 3249
variable de Poisson et loi d'Erlang 3597
variable géométrique sur N 3252
variable géométrique sur N* 3250
variable indicatrice de Bernoulli 2987
variable mixte 3829
variable normale 3497
variable normale centrée réduite 3778
variable parente 3888
variable réduite 3817
variable relative 4048
variable statistique 3793
variable statistique à 2 dimensions 3825
variable statistique conditionnnelle 3826
variable statistique constante 3794
variable statistique continue 3799
variable statistique de R^2 4012
variable statistique de régression 3835 4098
variable statistique de régression linéaire 3843
variable statistique marginale 3826
variables à expliquer 4165
variables aléatoires à densité indépendantes dans leur ensemble 3442
variables aléatoires à valeurs entières indépendantes 3082
variables aléatoires géométriques indépendantes 3409
variables aléatoires indépendantes 3219
variables aléatoires indépendantes 2 à 2 3296
variables aléatoires indépendantes dans leur ensemble 3296
variables construites à partir de 3 variables aléatoires indépendantes 3325
variables dépendantes dans un triplet aléatoire 3375
variables explicatives 4165
variables indépendantes dans un triplet aléatoire 3370
variables normales à covariance nulle 3580
variables normales indépendantes 3580
variables statistiques à 2 valeurs 4053
variance 2999 3810 3812

variance avec valeurs concentrées au centre des classes 4029
variance avec valeurs réparties unifomément dans les classes 4029
variance conditionnée 3814 4054
variance conditionnelle 3832 4016 4070
variance de $a\,X + b$ 3000
variance de la loi de Poisson 3174
variance de la loi Gamma 3602
variance de la loi géométrique 3131
variance de la loi hypergéométrique 3198
variance de la variable hypergéométrique 3211
variance de l'estimateur de la moyenne 3900
variance de l'estimateur de la moyenne suivant le type de sondage 4175
variance de n entiers 2149
variance d'échantillonnage 3892
variance d'une composante principale 3869
variance d'une variable aléatoire constante sur un intervalle 3508
variance d'une variable aléatoire continue 3441
variance d'une variable aléatoire de Bernoulli 3001
variance d'une variable de Fischer-Snedecor 3661
variance d'une variable statistique 3855
variance d'une variable statistique constante sur un intervalle 3816
variance d'une variable statistique de R^2 4012
variance d'une variable statistique réelle continue 3815
variance empirique aléatoire 3931
variance et fonction génératrice conjointe 3295
variance expérimentale 3892
variance expliquée 3836 4076
variance expliquée par les axes principaux 4161
variance interclasse 3815 4016
variance inter-population 3834
variance intraclasse 3815 4016
variance intra-population 3834
variance marginale 3831 4053
variance maximum de aX+bY 4152
variance minimale d'un esstimateur 3888
variance minimum 4247
variance résiduelle 3837 3842
Vauban 3791
vecteur aléatoire 3405
vecteur de probabilité constant 3757
vecteur des covariances 4168
vecteur propre 956
vecteur propre d'une matrice 1056
vecteur propre pour la valeur propre 1 3757
vecteur unité de R^n 3854
vecteurs linéairement indépendants 865 1016
vecteurs propres 1158
vecteurs propres de la matrice des variances-covariances 4148
vecteurs propres d'un endomorphisme 988
vecteurs propres et valeurs propres d'une matrice 1038
Venn 68
vérification de la normalité d'un échantillon 4238
vérification des hypothèses 4395
vitesse moyenne 3992
vocabulaire statistique 3791
voisinage d'un point dans un espace normé 2173
Volterra 2779
Von Neumann 3909
voyageurs dans un train 2865 3024

W

Waring 689
Watson 3785
Wedderburn 518
Weierstrass 1244 1438
Whitney 3926
Wilcoxon 2955 3926 4369
Wilson 669 673
Wilson 689

Y

Young 1537 2328
Yule 3819

Z

Z/*n* Z 438 496
Z/*p* Z 671
zéro d'ordre 4 d'un polynôme 774
zéros doubles d'un polynôme 769
zéros d'un polynôme de degré 4 764
zéros rationnels d'un polynôme de Z[X] 776
zéros réels d'un polynôme de degré *n* 1483
Z-module 844
Z-modules monogènes 1738