Lycée Municipal d'Abobo

Année scolaire 2021-2022

DISCIPLINE - RIGUEUR - SUCCES

DEVOIR DE NIVEAU DE MATHEMATIQUES

TC (4H)

Cette épreuve comporte 3 pages notées 1/3 ; 2/3 et 3/3 . L'usage de toute calculatrice est autorisé

EXERCICE 1

N°	Affirmation	Réponses
1	(a ; b) $\in \mathbb{Z}^2$ et (q ;r) $\in (\mathbb{Z}x\mathbb{N})$. Si q est le quotient de la division de a par b alors $0 \leq r < b$	
2	Toute fonction f derivable sur un intervalle K admet une primitive sur K .	
3	Tout nombre entier relatif non nul est de diviseur de 0 .	
4	Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $lnx < 0$ *si et seulement si* $x < 1$.	
5	A et B étant deux points du plan et k un nombre réel strictement positif ; la ligne de niveau k de l'application : $M \to \frac{MA}{MB}$ est un cercle si k$\neq$ 1.	

EXERCICE 2

Pour chacun des énoncés suivants, trois propositions sont faites dont une seule est exacte. Relève le numéro de l'énoncé suivi de la lettre indiquant la bonne réponse.

N°	Enoncé	Réponses a	Réponses b	Réponses c
1	Pour tout $x \in [-1 ; 1]$ *si* $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ *alors* $f'(x) =$	$\frac{x}{2\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}$
2	Pour tout x $\in \mathbb{R}$ $\mathrm{I}\cos x - \cos\frac{\pi}{4}\mathrm{I} \leq \cdots$	$x - \frac{\pi}{4}$	$\mathrm{I}\, x - \frac{\pi}{4}\,\mathrm{I}$	$\frac{\pi}{4} - x$
3	Une primitive sur] 1 ; +∞[de la fonction f définie par $f(x) = \frac{3}{1-x}$ est donnée par F(x) =	$\frac{-3}{(1-x)^2}$	$\ln(1-x)^3$	$-ln(x-1)^3$
4	La primitive sur] 0 ; +∞[de la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{x^3} - \frac{1}{\sqrt{x}}$ qui prend la valeur 0 en 1 de la fonction F définie par F(x) =	$\frac{1}{2x^2} - \sqrt{x} + 3$	$\frac{-1}{2x^2} - 2\sqrt{x} + \frac{5}{2}$	$\frac{-1}{x^2} - 2\sqrt{x} + 1$
5	$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln(1+x)}{x} + xlnx\right)$	0	1	2

EXERCICE 3

On considère trois nombres A ; B ; C et D tels que $A = 2^6 - 1$; $B = 3^6 - 1$; $C = 4^6 - 1$ et $D = 5^6 - 1$

1- Monter que les nombres A ; B ; C et D sont divisibles par 7.
2- Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = 2^n + 3^n + 4^n + 5^n$.
   Démontrer que $S_{n+6} - S_n$ est divisible par 7.
3- n étant un nombre entier naturel et r le reste de la division de n par 6, démontrer que :
   $S_n \equiv S_r \ [7]$.
4- Trouver les valeurs de n pour lesquelles S_n est divisibles par 7.
5- On pose $T_n = 100^n + 101^n + 102^n + 103^n$.
   Démontrer que $S_n \equiv T_n \ [\ 7\ ]$.
   Déduisez-en les valeurs de n pour lesquelles T_n est divisible par 7.

EXERCICE 4

ABC est un triangle équilatéral de côté a. (a étant un nombre réel strictement positif) On désigne par I le milieu du côté[BC].

1- On considère le système de points pondérés $\{(A,\ m); (B, 1); (, 1)\}$ où m désigne un nombre réel.
   a) Pour quelles valeurs de m le système admet-il un barycentre G_m ?
   b) Déterminer l'ensemble (E_m) des barycentre G_m lorsque m décrit $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$.
2- Pour la suite , on prendra m = 2 et on pose $G = G_2$.
   Exprimer alors AG^2 , BG^2 et CG^2 en fonction de a .
3- (Γ) est l'ensemble des points M du plan tels que $2MA^2 + MB^2 + MC^2 = 2a^2$.
   a- Justifier $A \in (\Gamma)$
   b- Déterminer la nature de (Γ) puis le construire .
4- (Δ) est l'ensemble des points M du plan tels que $-2MA^2 + MB^2 + MC^2 = 0$.
   a- Justifier que (Δ) est équivalent à l'ensemble des points M du plan tels que $MA^2 - MI^2 = \frac{a^2}{4}$.
   b- Déterminer la nature de (Δ) puis le construire.

EXERCICE 5

f est une fonction définie par sur l'intervalle]-∞ ; -1[∪]1 ; +∞[par $f(x) = -\frac{x}{2} + \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$. On note (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O,I,J).

L'unité graphique est de 2 cm.

Partie A

g est la fonction dérivable sur]1 ; +∞[et définie par $g(x) = 2 - x^2\sqrt{x^2 - 1}$.

1- Calculer la limite de g en $+\infty$.
2- Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation.
3- a) Démontrer que l'équation $x \in]1; +\infty[$, $g(x) = 0$ admet une solution unique $\propto$ et que $1 < \propto < 2$.
   b) Donner une valeur approchée de $\propto$ à 10^{-1} près.

4- Justifier que :

$\begin{cases} \forall\, x \in]1\,;\, \propto[, g(x) > 0 \\ \forall\, x \in]\propto;\, +\infty[, g(x) < 0 \end{cases}$

Partie B

1- Etudier la parité de la fonction f.

2- a)Calculer la limite de la fonction f en $+\infty$.

b) Démontrer que la droite (D) d'équation $y = -\frac{x}{2} + 1$ est asymptote à (C) en $+\infty$.

c) Etudier la position relative de (C) par rapport à (D) sur l'intervalle $]1; +\infty[$.

3 - Etudier la dérivabilité de la fonction f en 1 puis interpréter graphiquement le résultat.

4-On admet que f est dérivable sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$.

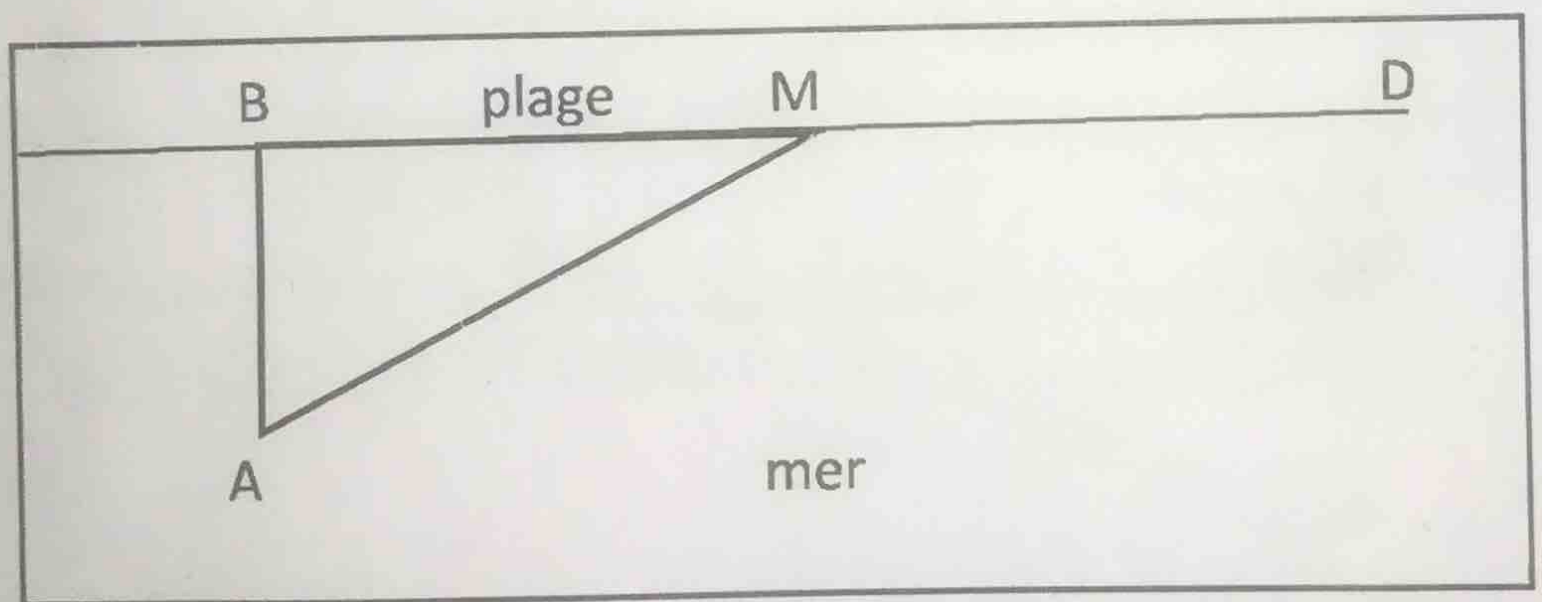
a) Démontrer que
$\forall\, x \in]1\,;\,+\infty[\,, f'(x) = \frac{g(x)}{2x^2\sqrt{x^2-1}}$.

b) Donner le sens de variation de f puis dresser son tableau

5-Démontrer que $f(\propto) = -\frac{\propto}{2} + \frac{2}{\propto^3}$

6-Tracer (D) et (D).

EXERCICE 6



BD = 6 ; AB = 2

BM = x

ABM est un triangle rectangle en B

Lors d'une sortie à la plage organisée par le conseil scolaire du lycée Municipal d'Abobo à la veille des congés de noël, le responsable de la plage décide de leur faire une réduction de 50% mais à condition de trouver la solution un problème auquel il est confronté. En effet un rameur étant en mer au point A à 2 km du point B sur la plage, désire regagner plus rapidement sa maison (D) sur la plage à 6 km de B. En barque il avance à une vitesse de 3km/h sur le tronçon AM et à pied il marche à la vitesse de 5km/h sur le tronçon MD. On suppose que la distance BM $= x$.

La préoccupation du responsable de la plage est de trouver la position du point M où doit accoster le rameur pour que son temps de parcours jusqu'au point D soit minimum. Le président du conseil sollicite les élèves de TC qui ont fait la sortie à la plage pour trouver la solution du problème pour bénéficier de la réduction.