

TRAVAUX DIRIGES
ANALYSE 1

Exercice 1 : Soient $l \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite et f une application définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Ecrire à l'aide des quantificateurs les phrases suivantes:

1. $f(x)$ ne tend pas vers l quand x tend vers a .
2. $f(x)$ ne tend pas vers l quand x tend vers $+\infty$.

Exercice 2 : Ecrire avec les quantificateurs la définition d'une suite divergente.

Exercice 3 : Soit f la fonction réelle à valeurs réelles définie par: $f(x) = x$ si $x < 1$, $f(x) = x^2$ si $1 \leq x \leq 4$, et $f(x) = 8\sqrt{x}$ si $x > 4$.

1. Tracer le graphe de f .
2. f est-elle continue ?
3. Montrer que f est bijective et donner la formule définissant f^{-1} .

Exercice 4 : A partir de la définition de la limite d'une suite, démontrer les égalités suivantes:

$$(i) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0, \quad (ii) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n+1}{n+1} = 2, \quad (iii) \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(\ln n) = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0.$$

Exercice 5 : Les suites suivantes, sont-elles monotones? bornées? cauchy?

$$a_n = n^{(-1)^n}, \quad b_n = \cos \frac{n\pi}{2}, \quad c_n = \sin \frac{n\pi}{2}, \quad d_n = \cos \frac{\pi}{n},$$
$$e_n = \frac{n^2 + 2n + 1}{n^2 - 3}, \quad f_n = \frac{n}{2^n}, \quad g_n = \frac{2^n}{n!}, \quad h_n = \frac{n!}{n^n}.$$

Exercice 6 : Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ les suites définies tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n!}$.

1. Démontrer que $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont adjacentes.
2. En déduire que $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ convergent vers une même limite.
3. En calculant u_{10} et v_{10} donner un encadrement de la limite commune de ces deux suites.

Exercice 7 : En utilisant des suites extraites, établir la divergence des suites suivantes: $u_n = n^{-1+(-1)^n}$, $v_n = \cos(\pi\sqrt{n})$, $w_n = \sqrt{n} - E(\sqrt{n})$

Exercice 8 : Soit la suite $(u_n)_n$ définie par récurrence par: $u_0 > 2$, $u_{n+1} = u_n^2 - 2$.

1. Montrer que $u_n > 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. On suppose que la suite $(u_n)_n$ converge. Quelle est sa limite l ?
3. Montrer que la suite $(u_n)_n$ est croissante.
4. En déduire la nature de la suite $(u_n)_n$ (convergente ou pas).

Exercice 9 : Montrer que le polynôme $x^{30} + 14x^{17} - 7x^5 - 7$ admet au moins une racine dans l'intervalle $]0, 1[$.

Exercice 10 :

1. Montrer que pour tout réel $x > 0$ on a la double inégalité:

$$\frac{1}{x+1} < \log(x+1) - \log(x) < \frac{1}{x}$$

2. En déduire que pour tout entier $n \geq 1$, on a :

$$\log(n+1) < 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} < 1 + \log(n)$$

3. Posons $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \log(n)$. Montrer que la suite (u_n) est décroissante et convergente.

Exercice 11 :[Application des accroissement finis]

1. Soit $f : x \mapsto \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x + 2$. Étudier la fonction f . Tracer son graphe. Montrer que f admet un minimum local et un extremum local.
2. Soit $g : x \mapsto \sqrt{x}$. Appliquer le théorème des accroissements finis sur l'intervalle $[100, 101]$. En déduire l'encadrement : $10 + \frac{1}{22} \leq \sqrt{101} \leq 10 + \frac{1}{20}$.
3. Appliquer le théorème des accroissement finis pour montrer que $\ln(1+x) - \ln(x) \leq \frac{1}{x}$ pour tout x strictement positif.
4. Soit $h : x \mapsto e^x$. Que donne l'inégalité des accroissement finis sur $[0, x]$?

Exercice 12 :[Application règle de l'Hôpital (ou règle de Bernoulli)] Appliquer la règle de l'Hôpital pour calculer les limites des fonctions suivantes quand x tend vers 0

$$f : x \mapsto \frac{x}{(1+x)^n - 1}, \quad g : x \mapsto \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x}}, \quad h : x \mapsto \frac{1 - \cos(x)}{\tan(x)} \quad \text{et} \quad k : x \mapsto \frac{x - \sin(x)}{x^3}.$$

Exercice 13 : Etudier la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par:

$$f(x) = x \arctan x.$$

[Montrer que f est paire. Calculer f' et f'' . Etudier les asymptotes.]

Exercice 14 :

1. Calculer les dérivées des fonctions f_i suivantes définies par: $f_1(x) = x \ln(x)$, $f_2(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, $f_3(x) = \sqrt{1 + \sqrt{1+x^2}}$,
 $f_4(x) = \left(\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\right)^{\frac{1}{3}}$, $f_5(x) = x^x$, $f_6(x) = \arctan\left(\frac{1}{x}\right) + \arctan(x)$.
2. On note $\Delta(f) = \frac{f''}{f}$. Calculer $\Delta(fg)$.
3. Soit $f :]1, +\infty[\rightarrow]-1, +\infty[$ définie par $f(x) = x \ln(x) - x$. Montrer que f est une bijection. Notons $g = f^{-1}$. Calculer $g(0)$ et $g'(0)$.
4. Calculer les dérivées successives de $f(x) = \ln(1+x)$.
5. Calculer les dérivées successives de $f(x) = x^3 \ln(x)$.

Exercice 115 : On considère l'ensemble $X = \left\{(-1)^n + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^*\right\}$. Déterminer des majorants, minorants, $\inf(X)$, $\sup(X)$, $\min(X)$, $\max(X)$ s'il existent.