Les Cours du CNED

Mathématiques

Première ES et L

Corrigés des exercices

Rédaction :

Jean-Philippe Baurens
Sébastien Kernivinen
Annaïg Meudec

Coordination :

Jean Michel Le Laouénan

Sommaire

Corrigé séquence 1

Correction des exercices d'apprentissage du chapitre 2

Exercice 1 Soit $f(x)=3x^2-30x+83$ et $g(x)=-x^2-8x-15$.

a) Pour f : $a=3$; $b=-30$ et $c=83$.

Pour g : $a=-1$; $b=-8$ et $c=-15$.

b) Développons $3(x-5)^2+8$:

$$\begin{aligned}3(x-5)^2+8&=3(x^2-2\times x\times 5+5^2)+8\\&=3x^2-30x+75+8\\&=3x^2-30x+83\\&=f(x)\end{aligned}$$

On a bien $f(x)=3(x-5)^2+8$.

Développons $-(x+4)^2+1$:

$$\begin{aligned}-(x+4)^2+1&=-(x^2+2\times x\times 4+4^2)+1\\&=-x^2-8x-16+1\\&=-x^2-8x-15\\&=g(x)\end{aligned}$$

On a bien $g(x)=-(x+4)^2+1$.

c) Coordonnées du sommet de la parabole associée à f : $(5\,;8)$.

Coordonnées du sommet de la parabole associée à g : $(-4\,;1)$.

Exercice 2 Soit $f(x)=3(x+7)^2-2$ et $g(x)=-2(x+4)^2+5$.

a) Forme développée de f :

$$\begin{aligned}f(x)&=3(x+7)^2-2\\&=3(x^2+2\times 7x+49)-2\\&=3x^2+42x+145\end{aligned}$$

Forme développée de g :

$$g(x) = -2(x+4)^2 + 5$$
$$= -2(x^2 + 2\times 4x + 16) + 5$$
$$= -2x^2 - 16x - 27$$

b) Tableau de variation f puis de g.

x	$-\infty$		-7		$+\infty$
Variation de f		↘	-2	↗	

c) Coordonnées du sommet de la parabole associée à f : $(-7 ; -2)$.

Coordonnées du sommet de la parabole associée à g : $(-4 ; 5)$.

x	$-\infty$		-4		$+\infty$
Variation de g		↗	5	↘	

Exercice 3

Soit $f(x) = 2x^2 - 8x + 8$

$a > 0$; $\dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-(-8)}{2\times 2} = 2$ et $f(2) = 0$

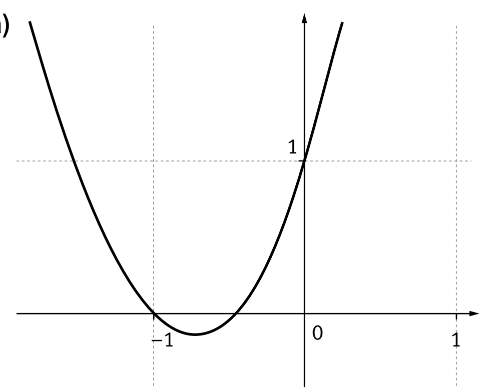
Tableau de variation de f :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
Variation de f		↘	0	↗	

Exercice 4

Soit $f(x) = 2x^2 + 3x + 1$

a)



f semble décroître sur l'intervalle $]-\infty ; -0{,}75[$ et croître sur l'intervalle $]-0{,}75 ; +\infty[$.

b) $a > 0$; $\dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-3}{2\times 2} = \dfrac{-3}{4}$ et $f\left(\dfrac{-3}{4}\right) = -\dfrac{1}{8}$

Tableau de variation de f :

x	$-\infty$		$-\dfrac{3}{4}$		$+\infty$
Variation de f		$\searrow$	$-\dfrac{1}{8}$	$\nearrow$	

Exercice 5

On considère la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = (x+3)^2 - 25$ *(Forme A).*

❶ **a)** Développons $(x+3)^2 - 25$:

$$\begin{aligned}(x+3)^2 - 25 &= (x^2 + 2\times x \times 3 + 3^2) - 25\\ &= x^2 + 6x + 9 - 25\\ &= x^2 + 6x - 16\end{aligned}$$

donc $f(x) = x^2 + 6x - 16$ *(Forme B).*

b) Développons $(x-2)(x+8)$:

$$\begin{aligned}(x-2)(x+8) &= x^2 + 8x - 2x - 16\\ &= x^2 + 6x - 16\\ &= f(x)\end{aligned}$$

donc $f(x) = (x-2)(x+8)$ *(Forme C).*

❷ **a)**

	Forme A	*Forme B*	*Forme C*
$f(0)$		x	
$f(-3)$	x		
$f(2)$			x

b) $f(0) = 0^2 + 6\times 0 - 16 = 0 + 0 - 16 = -16$; $f(-3) = (-3+3)^2 - 25 = 0^2 - 25 = -25$ et $f(2) = (2-2)(2+8) = 0\times 10 = 0$

	Forme A	*Forme B*	*Forme C*
$f(x)=0$			x
$f(x)=11$	x		
$f(x)=-16$		x	

b) $f(x)=0$

$(x-2)(x+8)=0$

$x-2=0$ ou $x+8=0$

$x=2$ ou $x=-8$

$S=\{-8\,;2\}$

$f(x)=11$

$(x+3)^2-25=11$

$(x+3)^2-25-11=0$

$(x+3)^2-36=0$

$(x+3)^2-6^2=0$

$(x+3-6)(x+3+6)=0$

$(x-3)(x+9)=0$

$x-3=0$ ou $x+9=0$

$x=3$ ou $x=-9$

$S=\{-9\,;3\}$

$f(x)=-16$

$x^2+6x-16=-16$

$x^2+6x-16+16=0$

$x^2+6x=0$

$x(x+6)=0$

$x=0$ ou $x+6=0$

$x=0$ ou $x=-6$

$S=\{-6\,;0\}$

Exercice 6

a) Voir graphique page suivante.

b) 1. $MB=4-x$

2. Aire du carré : $A_1(x)=x^2$

Aire du triangle : on peut voir cette aire comme un quart de l'aire du carré de côté [MB].

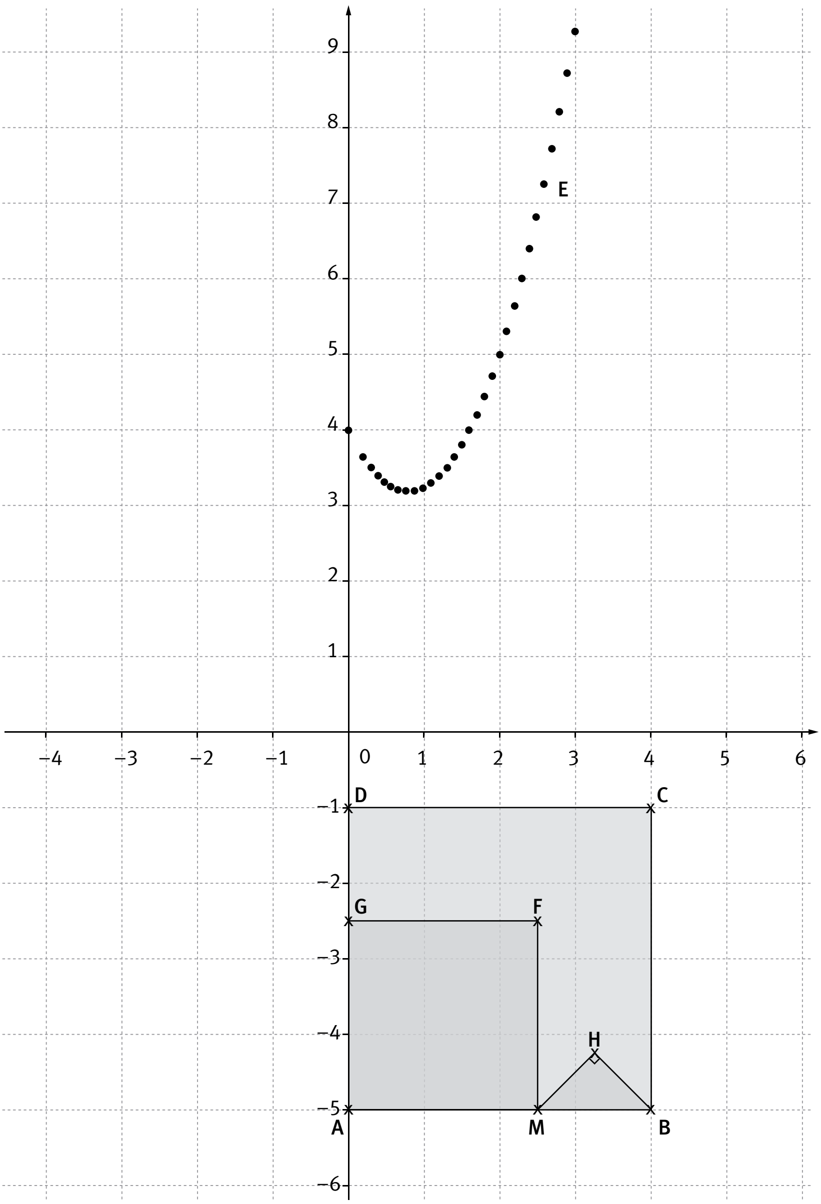
$$A_2(x)=\frac{(4-x)^2}{4}$$

Aire du motif : $A(x)=A_1(x)+A_2(x)=x^2+\dfrac{(4-x)^2}{4}$

3. $A(x)=x^2+\dfrac{4^2-2\times4\times x+x^2}{4}$

$A(x)=x^2+\dfrac{16-8\times x+x^2}{4}$

$A(x)=\dfrac{5}{4}x^2-2x+4$



	A	B	C
1	AM	Aire	
2	0	4	
3	0.25	3.58	
4	0.5	3.31	
5	0.75	3.2	
6	1	3.25	
7	1.25	3.45	
8	1.5	3.81	
9	1.75	4.33	
10	2	5	
11	2.25	5.83	
12	2.5	6.81	
13	2.75	7.95	
14	3	9.25	
15	3.25	10.7	
16	3.5	12.31	
17	3.75	14.08	
18	4	16	
19			
20			
21			
22			
23			
24			
25			

Conjecture : l'aire du motif peut être minimisée pour $x \approx 0{,}75$.

▸ Suite de la question 3.

Tableau de variation de A :

x	0	$\frac{4}{5}$	4
Variation de f	4 ↘	$\frac{16}{5}$	↗ 16

$a>0$; $\dfrac{-b}{2a}=\dfrac{-(-2)}{2\times\dfrac{5}{4}}=\dfrac{4}{5}$ et $A\left(\dfrac{4}{5}\right)=\dfrac{16}{5}$

$A(0)=4$ *et* $A(4)=16$

L'aire minimale est atteinte pour $x=\dfrac{4}{5}$; cette aire vaut alors $\dfrac{16}{5}$ unités d'aire.

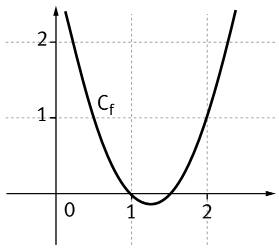
Correction de l'activité du chapitre 3

Activité 2

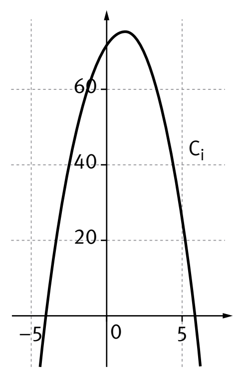
❶

Fonctions	f	g	h	i	j	k
$\Delta = b^2 - 4ac$	49	-3	0	900	0	-80

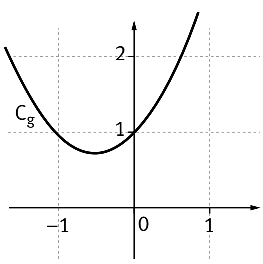
❷



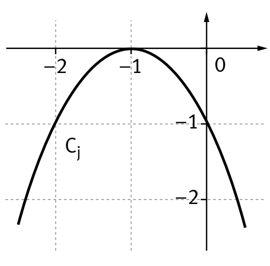
2 points d'intersection avec l'axe des abscisses : **2 solutions.**



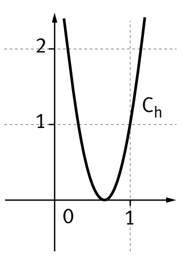
2 points d'intersection avec l'axe des abscisses : **2 solutions.**



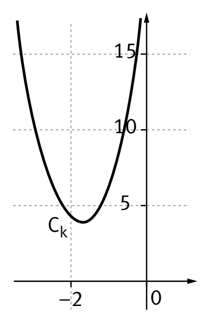
Pas de point d'intersection avec l'axe des abscisses : **0 solution.**



1 point d'intersection avec l'axe des abscisses : **1 solution.**



1 point d'intersection avec l'axe des abscisses : **1 solution.**



Pas de point d'intersection avec l'axe des abscisses : **0 solution.**

Fonctions	*f*	*g*	*h*	*i*	*j*	*k*
Signe de Δ (+ ; - ou 0)	+	–	0	+	0	–
Existence de solution(s) (oui ou non)	oui	non	oui	oui	oui	non
Si oui, nombre de solution(s)	2	/	1	2	1	/

Conjecture :

– Si le discriminant Δ est positif, l'équation du type $f(x)=0$ semble avoir deux solutions.

– Si le discriminant Δ est nul, l'équation du type $f(x)=0$ semble avoir une solution.

– Si le discriminant Δ est négatif, l'équation du type $f(x)=0$ semble ne pas avoir de solution.

Correction de l'activité du chapitre 3

Exercice 7

a) $f(x)=-0{,}5x^2+2{,}5x+3$

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2-4ac\\ &= 2{,}5^2-4\times(-0{,}5)\times 3\\ &= 12{,}25>0\end{aligned}$$

L'équation admet deux racines distinctes.

$\sqrt{\Delta}=\sqrt{12{,}25}=3{,}5$

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-2{,}5+3{,}5}{2\times(-0{,}5)}=-1$$
$$x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-2{,}5-3{,}5}{2\times(-0{,}5)}=6$$
donc $S=\{-1\,;6\}$

b) $f(x)=-2x^2+12x-18$

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2-4ac\\ &= 12^2-4\times(-2)\times(-18)\\ &= 0\end{aligned}$$

L'équation admet une racine double.

$\alpha=\frac{-b}{2a}=\frac{-12}{2\times(-2)}=3$ donc $S=\{3\}$

c) $f(x)=-0{,}5x^2+3x-9{,}5$

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2-4ac\\ &= 3^2-4\times(-0{,}5)\times(-9{,}5)\\ &= -10<0\end{aligned}$$

L'équation n'admet pas de racine.

d) $f(x)=5x^2+12x+3$

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2-4ac\\ &= 12^2-4\times 5\times 3\\ &= 84>0\end{aligned}$$

L'équation admet deux racines distinctes.

$\sqrt{\Delta}=\sqrt{84}=2\sqrt{21}$

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-12+2\sqrt{21}}{2\times 5}=\frac{-6+\sqrt{21}}{5}$$
$$x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-12-2\sqrt{21}}{2\times 5}=\frac{-6-\sqrt{21}}{5}$$
donc $S=\{\frac{-6-\sqrt{21}}{5}\,;\frac{-6+\sqrt{21}}{5}\}$

Exercice 8

a) $x^2-25=0$

$x^2-5^2=0$

$(x-5)(x+5)=0$

$x=5$ ou $x=-5$

$S=\{-5\,;\,5\}$

b) $3x^2+4x=0$

$x(3x+4)=0$

$3x+4=0$ ou $x=0$

$3x=-4$

$x=\dfrac{-4}{3}$

$S=\left\{0\,;\,\dfrac{-4}{3}\right\}$

c) $x^2+7=0$. Cette équation n'admet pas de solution.

d) $x^2-2x+1=0$

$x^2-2\times x\times 1+1^2=0$

$(x-1)^2=0$

$x=1$

$S=\{1\}$

e) $(3x)^2-2^2=0$

$(3x-2)(3x+2)=0$

$3x-2=0$ ou $3x+2=0$

$3x=2$ ou $3x=-2$

$x=\dfrac{2}{3}$ ou $x=\dfrac{-2}{3}$

$S=\left\{-\dfrac{2}{3}\,;\,\dfrac{2}{3}\right\}$

Exercice 9

a)

$3x^2+5x=2x^2-2x+4$

$3x^2+5x-2x^2+2x-4=0$

$x^2+7x-4=0$

$\Delta=7^2-4\times 1\times(-4)$

$\Delta=49+16$

$\Delta=65$

Cette équation admet deux solutions distinctes :

$$x_1 = \frac{-7+\sqrt{65}}{2\times 1} = \frac{-7+\sqrt{65}}{2}$$

$$x_2 = \frac{-7-\sqrt{65}}{2\times 1} = \frac{-7-\sqrt{65}}{2}$$

$$S = \left\{ \frac{-7-\sqrt{65}}{2} \,;\, \frac{-7+\sqrt{65}}{2} \right\}$$

b)

$$(2x+4)^2 = 3x+5$$

$$(2x)^2 + 2\times 2x \times 4 + 4^2 = 3x+5$$

$$4x^2 + 16x + 16 - 3x - 5 = 0$$

$$4x^2 + 13x + 11 = 0$$

$$\Delta = 13^2 - 4\times 4\times 11$$

$$\Delta = 169 - 176$$

$$\Delta = -7 > 0$$

Cette équation n'admet pas de solution.

Exercice 10

❶ Langage « naturel » :

Entrées : a, b et c (coefficients du trinôme)

Traitement :

– « Δ = »

Mettre $b^2 - 4ac$ dans Δ

Afficher Δ

– « Solutions : »

Si $\Delta > 0$ alors calculer $x_1 = \frac{b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ afficher « $x_1 ; x_2$ »

Si $\Delta = 0$ alors calculer $\alpha = \frac{b}{2a}$ afficher « α »

Sinon afficher « pas de solution »

FinSi

Fin de l'algorithme

❷ Langage « calculatrice » :

Texas Instrument

```
PROGRAM:SECDEG
:Input "A?",A
:Input "B?",B
:Input "C?",C
:B²-4AC→D
:Disp "DELTA=",D

:If D>0
:Then
:Disp "2 SOLUTIO
NS"
:Disp (-B-√(D))/
```

Casio

```
======SEC DEG ======
"A"?→A:"B"?→B:"C"?→C↵
"DELTA="↵
B²-4AC→D◢
If D>0↵
Then "X1="↵
(-B-√D)÷(2A)◢
"X2="↵
(-B+√D)÷(2A)◢
Else If D=0↵
Then "ALPHA="↵
-B÷(2A)◢
Else "PAS DE SOLUTION
"↵
IfEnd↵
```

```
(2A)▸Frac
:Disp (-B+√(D))/
(2A)▸Frac
:Else
:If D=0
:Then
:Disp "1 SOLUTIO
N"
:Disp -B/(2A)▸Fr
ac
:Else
:Disp "PAS DE SO
LUTION"
:End
:
```

❸ On retrouve les résultats de l'exercice 7.
Par exemple :

Texas Instrument

```
prgmSECDEG
A?-0.5
B?2.5
C?3
DELTA=
            12.25
2 SOLUTIONS
                6
               -1
             Done
```

Casio

```
A?
-0.5
B?
2.5
C?
3
DELTA=
            12.25
X1=
                6
X2=
               -1
         - Disp -
```

Exercice 11 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 - 9x + 360$ et représentée graphiquement par la parabole P.

Coordonnées des points d'intersection de P avec l'axes des abscisses.

On résout l'équation :

$$-x^2 - 9x + 360 = 0$$
$$\Delta = (-9)^2 - 4 \times (-1) \times 360$$
$$\Delta = 1521$$
$$\sqrt{\Delta} = 39$$

Cette équation admet deux solutions distinctes :

$$x_1 = \frac{9+39}{2\times(-1)} = -24$$
$$x_2 = \frac{9-39}{2\times(-1)} = 15$$

La parabole coupe l'axe des abscisses aux points de coordonnées (–24 ; 0) et (15 ; 0).

Exercice 12 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=-2x^2+22x+125$ et représentée graphiquement par la parabole P.

Pour déterminer les coordonnées des points d'intersection de P avec la droite d'équation y=5, on résout l'équation :

$$-2x^2+22x+125=5$$
$$-2x^2+22x+120=0$$
$$\Delta=22^2-4\times(-2)\times120$$
$$\Delta=1444$$
$$\sqrt{\Delta}=38$$

Cette équation admet deux solutions distinctes :

$$x_1=\frac{-22+38}{2\times(-2)}=-4$$
$$x_2=\frac{-22-38}{2\times(-2)}=+15$$

La parabole coupe la droite d'équation y = 5 aux points de coordonnées (15 ; 5) et (–4 ; 5).

Exercice 13 Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=4x^2+3x+2$ et $g(x)=5x^2+2x+1$. Pour déterminer les coordonnées des points d'intersection des paraboles P_f et P_g, on résout l'équation :

$$4x^2+3x+2=5x^2+2x+1$$
$$4x^2+3x+2-5x^2-2x-1=0$$
$$-x^2+x+1=0$$
$$\Delta=1^2-4\times(-1)\times1$$
$$\Delta=5$$

Cette équation admet deux solutions distinctes :

$$x_1=\frac{-1-\sqrt{5}}{2\times(-1)}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$
$$x_2=\frac{-1+\sqrt{5}}{2\times(-1)}=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

$$f(x_1)=g(x_1)=4x_1^2+3x_1+2=4\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2+3\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)+2$$
$$=4\times\frac{1+2\sqrt{5}+5}{4}+\frac{3}{2}+\frac{3\sqrt{5}}{2}+2$$
$$=6+2\sqrt{5}+\frac{3}{2}+\frac{3\sqrt{5}}{2}+2$$
$$=\frac{19}{2}+\frac{7}{2}\sqrt{5}$$
$$f(x_2)=g(x_2)=4x_2^2+3x_2+2=4\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2+3\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)+2$$
$$=4\left(\frac{1-2\sqrt{5}+5}{4}\right)+\frac{3}{2}-\frac{3\sqrt{5}}{2}+2$$
$$=6-2\sqrt{5}+\frac{3}{2}-\frac{3\sqrt{5}}{2}+2$$
$$=\frac{19}{2}-\frac{7\sqrt{5}}{2}$$

Les paraboles P_f et P_g se coupent aux points de coordonnées :

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\,;\,\frac{19}{2}+\frac{7}{2}\sqrt{5}\right) \text{ et } \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\,;\,\frac{19}{2}-\frac{7}{2}\sqrt{5}\right)$$

Exercice 14 Offre et demande

Les fonctions d'offre et de demande de la pomme de terre sur les marchés, exprimées en € par tonne, sont données par :

$$O(q)=2q^2+1{,}5q+17 \text{ et } D(q)=q^2-20q+110\,,$$

où q désigne la masse de pomme de terre exprimée en tonne. q est compris entre 1 et 10 tonnes.

❶ **a)** On résout l'équation :

$O(q)=43$

$2q^2+1{,}5q+17=43$

$2q^2+1{,}5q+17-43=0$

$2q^2+1{,}5q-26=0$

$\Delta=1{,}5^2-4\times2\times(-26)$

$\Delta=210{,}25$

Cette équation admet deux solutions :

$\sqrt{\Delta}=\sqrt{210,25}=14,5$

$x_1=\dfrac{-1,5+14,5}{2\times 2}=3,25$

$x_2=\dfrac{-1,5-14,5}{2\times 2}=-4.$ Cette solution est exclue car $x_2<0.$

Pour une masse de 3,25 tonnes, l'offre est de 43 €.

b) On résout l'équation :

$D(q)=26$

$q^2-20q+110=26$

$q^2-20q+110-26=0$

$q^2-20q+84=0$

$\Delta=(-20)^2-4\times 1\times 84$

$\Delta=64$

Cette équation admet deux solutions :

$\sqrt{\Delta}=\sqrt{64}=8$

$x_1=\dfrac{20+8}{2\times 1}=14$ Cette solution est exclue car $x_1>10$

$x_2=\dfrac{20-8}{2\times 1}=6$

Pour une masse de 6 tonnes, la demande est de 26 €.

❷ **a)** Tableau de variation de la fonction offre sur l'intervalle [1 ; 10] :

$a>0$ et $\dfrac{-b}{2a}=\dfrac{-1,5}{2\times 2}=\dfrac{-3}{8}$

$O(1)=20,5$ *et* $O(10)=232$

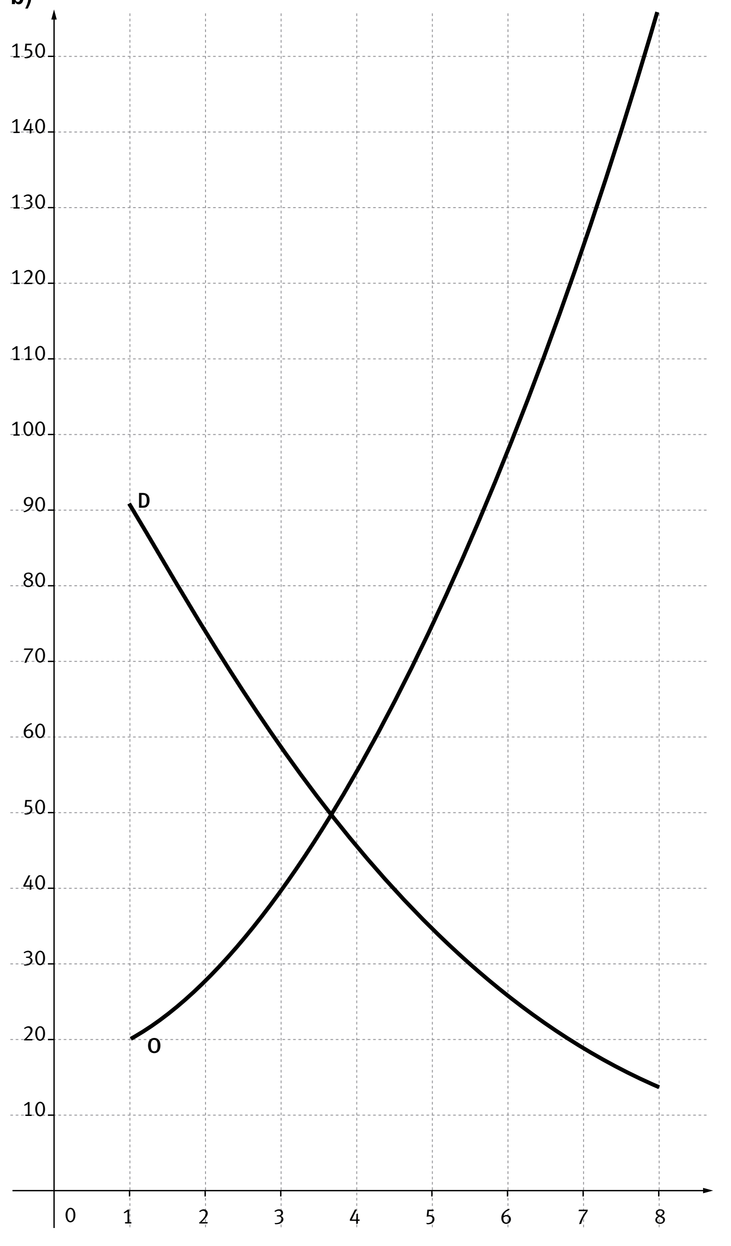
x	1	10
Variation de O	20,5 ↗	232

Tableau de variation de la fonction demande sur l'intervalle [1 ; 10] :

$a>0$ et $\dfrac{-b}{2a}=\dfrac{-(-20)}{2\times 1}=10$ et $D(10)=10$ $D(1)=91$

x	1	10
Variation de D	91 ↘	10

b)



❸ **a)** On détermine graphiquement l'abscisse du point d'intersection des deux courbes : $q \approx 3{,}75$.

La quantité d'équilibre du marché est environ de 3,75 tonnes.

b) On résout :

$$O(q)= D(q)$$
$$2q^2+1{,}5q+17=q^2-20q+110$$
$$2q^2+1{,}5q+17-(q^2-20q+110)=0$$
$$q^2+21{,}5q-93=0$$
$$\Delta=21{,}5^2-4\times1\times(-93)$$
$$\Delta=834{,}25$$

Cette équation admet deux solutions :

$$x_1=\frac{-21{,}5+\sqrt{834{,}25}}{2\times1}\approx 3{,}69$$

$x_2=\dfrac{-21{,}5-\sqrt{834{,}25}}{2\times1}\approx -25{,}19$ Cette solution est exclue car $x_2<0$

La quantité d'équilibre du marché est environ de 3,69 tonnes.

$$O(x_1)= D(x_1)\approx 3{,}69^2-20\times3{,}69+110$$
$$O(x_1)= D(x_1)\approx 49{,}80$$

Le prix d'équilibre du marché est environ égal à 49,80 € .

Exercice 15

❶ On calcule l'ordonnée y de la balle lorsque $x=12$:

$$y=-\frac{1}{2}\times\frac{10}{18^2(\cos(7°))^2}\times12^2+\tan(7°)\times12+3{,}5$$
$$=-\frac{20}{9\times(\cos(7°))^2}+\tan(7°)\times12+3{,}5$$
$$\approx 2{,}72$$

Le filet étant situé à 2,43 m, la balle passe au-dessus.

❷ Lorsque la balle touche le sol, $y=0$. On résout donc :

$$0=-\frac{1}{2}\times\frac{10}{18^2(\cos(7°))^2}\times x^2+\tan(7°)\times x+3{,}5$$
$$0=-\frac{5}{324\times(\cos(7°))^2}x^2+\tan(7°)\times x+3{,}5$$

$$\Delta=\left(\tan(7°)\right)^2-4\times\frac{-5}{324}(\cos(7°))^2\times3{,}5$$
$$\Delta=\left(\tan(7°)\right)^2+\frac{7}{162}(\cos(7°))^2$$
$$\Delta\approx 0{,}23>0$$

L'équation admet deux solutions :

$$x_1 = \frac{-\tan(7°\ ) + \sqrt{\tan(7°\ ) + \frac{7}{162}(\cos(7°\ ))^2}}{2 \times \frac{-5}{324(\cos(7°\ ))^2}} \approx 19,37$$

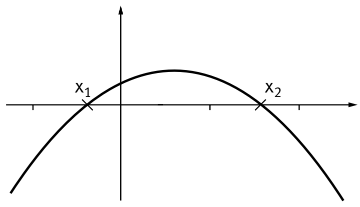
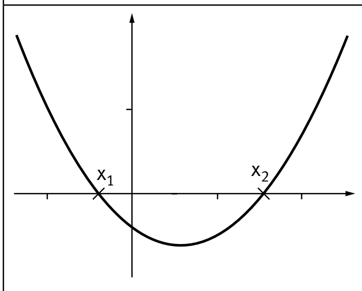
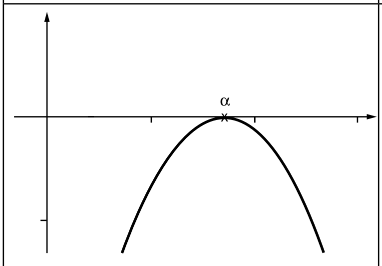
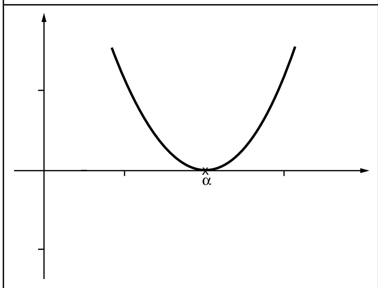
$$x_2 = \frac{-\tan(7°\ ) - \sqrt{\tan(7°\ ) + \frac{7}{162}(\cos(7°\ ))^2}}{2 \times \frac{-5}{324(\cos(7°\ ))^2}} \approx -11,53$$

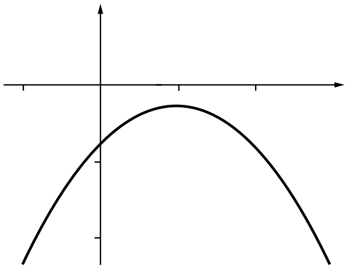
x_2 est exclue dans le contexte de l'énoncé.

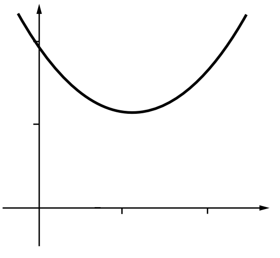
On ne retient que la première solution. Le fond du terrain adverse étant situé à 21 m de l'endroit d'où la balle de service est partie, le service est bon.

Correction de l'activité du chapitre 4

Activité 3

Graphique	P coupe-t-elle l'axe des abscisses ? Si oui, quel est le nombre de point(s) d'intersection ?	Signe de a	Signe de Δ	Tableau de signe
 	Oui 2 points d'intersection	$a<0$	$\Delta>0$	$\begin{array}{c|ccccccc} x & -\infty & & x_1 & & x_2 & & +\infty \\ \hline \text{Signe de } f & & - & 0 & + & 0 & - & \end{array}$
 	Oui 2 points d'intersection	$a>0$	$\Delta>0$	$\begin{array}{c|ccccccc} x & -\infty & & x_1 & & x_2 & & +\infty \\ \hline \text{Signe de } f & & + & 0 & - & 0 & + & \end{array}$
 	Oui 1 point d'intersection	$a<0$	$\Delta=0$	$\begin{array}{c|ccccc} x & -\infty & & \alpha & & +\infty \\ \hline \text{Signe de } f & & - & 0 & - & \end{array}$
 	Oui 1 point d'intersection	$a>0$	$\Delta=0$	$\begin{array}{c|ccccc} x & -\infty & & \alpha & & +\infty \\ \hline \text{Signe de } f & & + & 0 & + & \end{array}$

<table>
<tr>
<td></td>
<td>Non

pas de point d’intersection</td>
<td>$a < 0$</td>
<td>$\Delta < 0$</td>
<td><table><tr><td>x</td><td>$-\infty$ $+\infty$</td></tr><tr><td>Signe de f</td><td>$-$</td></tr></table></td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>Non

pas de point d’intersection</td>
<td>$a > 0$</td>
<td>$\Delta < 0$</td>
<td><table><tr><td>x</td><td>$-\infty$ $+\infty$</td></tr><tr><td>Signe de f</td><td>$+$</td></tr></table></td>
</tr>
</table>

Correction des exercices d'apprentisssage du chapitre 4

Exercice 16 **a)** Dressons le tableau de signes associé à la fonction $f : x \mapsto 2x^2+3x+1$

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2-4ac\\ &= 3^2-4\times2\times1 \quad \sqrt{\Delta}=\sqrt{1}=1\\ &= 9-8\\ &= 1\end{aligned}$$

$\Delta > 0$ donc f a donc deux racines distinctes :

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3+1}{2\times2} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3-1}{2\times2} = \frac{-4}{4} = -1$$

$a = 2 > 0$

On obtient le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
Signe de f		$+$	0	$-$	0	$+$	

En lisant la dernière ligne de ce tableau de signe :

$2x^2-3x+4>0$ ssi $x \in]-\infty;-1[\cup]-\frac{1}{2};+\infty[$

b) On détermine les racines de l'équation :

$x^2+3x+4=0$

$\Delta = 3^2-4\times1\times4$

$\Delta = -7$

Cette équation n'admet pas de solution réelle

Le trinôme x^2+3x+4 est de signe constant : celui de $a=1$ i.e. $x^2+3x+4>0$

c) On détermine les racines de l'équation :

$-2x^2+12x-18=0$

$\Delta = 12^2 - 4 \times (-2) \times (-18)$

$\Delta = 0$

Cette équation admet une solution :

$$\alpha = \frac{-12}{2 \times (-2)} = 3$$

Le trinôme $x^2 + 3x + 4$ est de signe constant : celui de $a = -1$ i.e. $x^2 + 3x + 4 < 0$.

Exercice 17

a) On étudie le signe du trinôme $2x^2 - 3x + 4$.

On cherche les racines éventuelles de l'équation :

$2x^2 - 3x + 4 = 0$

$\Delta = (-3)^2 - 4 \times 2 \times 4$

$\Delta = -23$

$\Delta < 0$

Le trinôme est de signe constant : celui de $a = 2 > 0$.

Donc $S = \mathbb{R}$

b) On étudie le signe du trinôme $-3x^2 + 30x - 75$.

On détermine les racines de l'équation :

$-3x^2 + 30x - 75 = 0$

$\Delta = 30^2 - 4 \times (-3) \times (-75)$

$\Delta = 0$

Le trinôme est de signe constant : celui de $a = \text{-}3 < 0$

sauf en $\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{-30}{2 \times (-3)} = 5$ où le trinôme s'annule.

Donc $S = \mathbb{R} \setminus \{5\}$

c) On étudie le signe du trinôme $7x^2 + 2x - 4$.

On détermine les racines de l'équation :

$7x^2 + 2x - 4 = 0$

$\Delta = 2^2 - 4 \times 7 \times (-4)$

$\Delta = 116 > 0$

Cette équation admet deux solutions distinctes :

$\sqrt{\Delta} = 2\sqrt{29}$

$$x_1 = \frac{-2 + 2\sqrt{29}}{2 \times 7} = \frac{-1 + \sqrt{29}}{7}$$

$$x_2 = \frac{-2 - 2\sqrt{29}}{2 \times 7} = \frac{-1 - \sqrt{29}}{7}$$

Comme $a=7>0$, on obtient le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		x_2		x_1		$+\infty$
Signe de $7x^2+2x-4$		+	0	−	0	+	

$$S=\left]\frac{-1-\sqrt{29}}{7}\,;\,\frac{-1+\sqrt{29}}{7}\right[$$

Exercice 18 a) $2x^2-3x+4\geq 5x+6$

$2x^2-3x+4-5x-6\geq 0$

$2x^2-8x-2\geq 0$

On étudie le signe du trinôme $2x^2-8x-2$:

On détermine les racines de l'équation $2x^2-8x-2=0$

$\Delta=(-8)^2-4\times 2\times(-2)$

$\Delta=64+16$

$\Delta=80>0$

L'équation admet deux racines distinctes :

$\sqrt{\Delta}=4\sqrt{5}$

$x_1=\dfrac{8+4\sqrt{5}}{2\times 2}=2+\sqrt{5}$

$x_2=\dfrac{8-4\sqrt{5}}{2\times 2}=2-\sqrt{5}$

Comme $a=2>0$, on obtient le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		$2-\sqrt{5}$		$2+\sqrt{5}$		$+\infty$
Signe $2x^2-8x-2$		+	0	−	0	+	

Donc $S=]-\infty;2-\sqrt{5}]\cup[2+\sqrt{5};+\infty[$

b) $-x^2+8x-7>3x^2+1$

$-x^2+8x-7-3x^2-1>0$

$-4x^2+8x-8>0$

On étudie le signe du trinôme $-4x^2+8x-8$:

On détermine les racines de l'équation $-4x^2+8x-8=0$

$\Delta = 8^2 - 4\times(-4)\times(-8)$

$\Delta = 64-128$

$\Delta = -64 < 0$

Le trinôme est de signe constant : celui de $a = -4 < 0$:

L'inéquation n'admet pas de solution $S=\varnothing$

Exercice 19 **a)** $R(x)=34x$

donc

$B(x)=R(x)-C(x)$

$B(x)=34x-(x^2+200)$

$B(x)=-x^2+34x-200$

b) $a<0$; $\dfrac{-b}{2a}=\dfrac{-34}{2\times(-1)}=17$; $B(17)=89$

$B(0)=-200$; $B(30)=-80$

d'où le tableau de variation suivant :

$$\begin{array}{c|ccccc}
x & 0 & & 17 & & 30 \\
\hline
\text{Variation de B} & & & 89 & & \\
 & & \nearrow & & \searrow & \\
 & -200 & & & & -80
\end{array}$$

Le bénéfice maximal est réalisé pour les bâches de 17 m de côté.

c) On résout :

$B(x)=0$

$-x^2+34x-200=0$

$\Delta = 34^2-4\times(-1)\times(-200)$

$\Delta = 356 > 0$

L'équation admet deux racines distinctes :

$\sqrt{\Delta}=2\sqrt{89}$

$x_1=\dfrac{-34+2\sqrt{89}}{2\times(-1)}=17-\sqrt{89}\approx 7{,}6$

$x_2=\dfrac{-34-2\sqrt{89}}{2\times(-1)}=17+\sqrt{89}\approx 26{,}4$

Le bénéfice est nul pour les bâches de 7,6 m ou 26,4 m de côté.

Correction des exercices d'approfondissement

Exercice I

Les racines de f sont : $x_1 = -2$ et $x_2 = 3$.

f peut s'écrire sous forme factorisée :

$f(x) = a(x-(-2))(x-3) = a(x+2)(x-3)$

Comme $f(0) = -30$, on a :

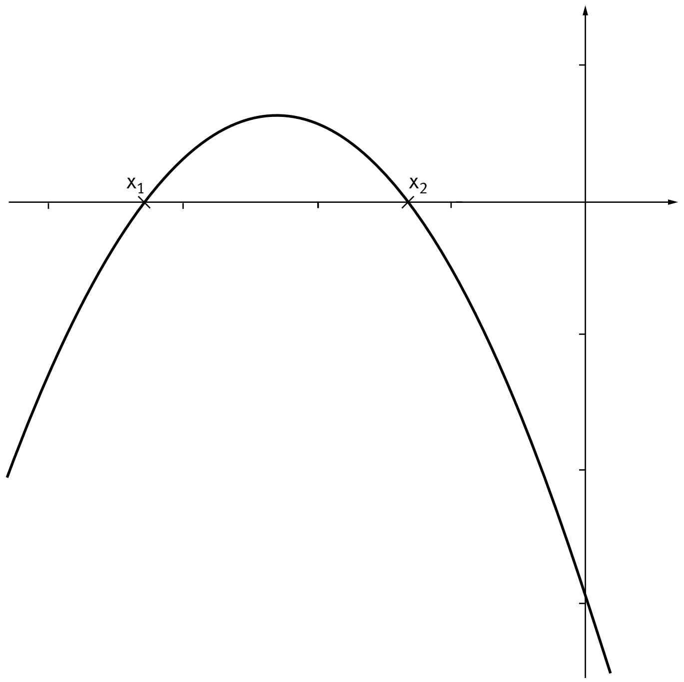
$-30 = a(0+2)(0-3)$

$-30 = -6a$

$a = 5$

Donc $f(x) = 5(x+2)(x-3)$

Exercice II



Exercice III

Si ce placement est rémunéré à p %, notons c le coefficient multiplicateur associé : $c = 1 + \dfrac{p}{100}$

Schéma :

1ère année : $1000 \xrightarrow[\times c]{\nearrow p\%} 1000\,c$

2e année $\quad 1000 + 1000c \xrightarrow[\times c]{\nearrow p\%} c\,(1000 + 1000\,c)$

On obtient l'équation suivante : $1000\times c^2+1000\times c=3209{,}60$

$1000\times c^2+1000\times c-3209{,}60=0$

$\Delta=1000^2-4\times1000\times(-3209{,}60)$

$\Delta=13838400>0$

L'équation admet deux solutions :

$\sqrt{\Delta}=3720$

$x_1=\dfrac{-1000+3720}{2\times1000}=\dfrac{34}{25}=1{,}36$

$x_2=\dfrac{-1000-3720}{2\times1000}=\dfrac{-59}{25}<0$ Cette solution est exclue dans ce contexte.

Le coefficient multiplicateur c est égal à 1,36 donc le taux du placement est de 3,6 %.

Exercice IV

a) $X^2=x^4$

b) On obtient donc (E') : $X^2-5X+6=0$

c) On résout l'équation (E') :

$X^2-5X+6=0$

$\Delta=(-5)^2-4\times1\times6$

$\Delta=25-24$

$\Delta=1>0$

L'équation admet deux solutions :

$\sqrt{\Delta}=1$

$\mathrm{X}_1=\dfrac{5+1}{2\times1}=3$

$X_2=\dfrac{5-1}{2\times1}=2$

Les deux solutions X_1 et X_2 sont positives.

Comme $x=\pm\sqrt{X}$ (avec X>0), on obtient :

$x_1=+\sqrt{3}$ et $x_1'=-\sqrt{3}$

$x_2=+\sqrt{2}$ et $x_2'=-\sqrt{2}$

donc $S=\{-\sqrt{3}\ ;\ \sqrt{3}\ ;\ -\sqrt{2}\ ;\ \sqrt{2}\}$

Exercice V

▶ On commence par étudier le signe du numérateur.

$x^2+3x-4=0$

$\Delta=3^2-4\times1\times(-4)$

$\Delta=9+16$

$\Delta=25>0$

L'équation admet deux solutions :

$\sqrt{\Delta}=5$

$x_1=\dfrac{-3+5}{2\times1}=1$

$x_2=\dfrac{-3-5}{2\times1}=-4$

x^2+3x-4 s'annule en -4 et en 1.

Le signe de x^2+3x-4 est positif sur $]-\infty\,;-4\,[\cup]1\,;+\infty[$.

Le signe de x^2+3x-4 est négatif sur $]-4;1[$.

On obtient le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		-4		1		$+\infty$
Signe de x^2+3x-4		$+$	0	$-$	0	$+$	

▶ Le tableau de signe du dénominateur est le suivant :

x	$-\infty$		$-2{,}5$		$+\infty$
Signe de $2x+5$		$-$	0	$+$	

▶ $-2{,}5$ est une valeur interdite (valeur qui annule le dénominateur).

En regroupant les informations précédentes, on obtient pour f le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		-4		$-2{,}5$		1		$+\infty$
Signe de x^2+3x-4		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
Signe de $2x+5$		$-$		$-$	‖	$+$		$+$	
Signe du quotient		$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$	

f s'annule en –4 et en 1.

f est strictement positive sur $]-4\ ;\ -2,5[\cup]1\ ;+\infty[$.

f est strictement négative sur $]-\infty\ ;\ -4[\cup]-2,5\ ;\ 1[$.

■

Corrigé séquence 2

Correction des activités du chapitre 2

Activité 1 Des variations

❶ Du 1/1/2000 au 1/1/2010 la population française est passée de 58 858 milliers à 62 794 milliers d'habitants.

a) Elle a donc augmenté de $62\ 794 - 58\ 858 = 3\ 936$ milliers d'habitants 1/1/2000 au 1/1/2010, soit de près de 4 millions d'habitants.

b) Le nombre CM vérifie l'équation : $CM \times 58\ 858 = 62\ 794$.

On en déduit $CM = \dfrac{62\ 794}{58\ 858} \approx 1{,}0669$.

c) Soit t % le pourcentage d'augmentation recherché.

On doit avoir $58\ 858 + \dfrac{t}{100} \times 58\ 858 = 62\ 794$, soit

$58\ 858(1 + \dfrac{t}{100}) = 62\ 794$, soit

$1 + \dfrac{t}{100} = \dfrac{62\ 794}{58\ 858} = CM$.

On en déduit : $\dfrac{t}{100} = CM - 1 \approx 0{,}0669$ soit $t = 6{,}69$.

Le pourcentage d'augmentation de la population française du 1/1/2000 au 1/1/2010 est donc de 6,69%.

❷ Du 1/1/2008 au 1/1/2009 la population allemande est passée de 84 191 milliers d'habitants à 82 002 habitants.

a) La population allemande a donc baissé de $84\ 191 - 82\ 002 = 2\ 189$ milliers d'habitants soit d'un peu plus de deux millions d'habitants du 1/1/2008 au 1/1/2009.

b) Le nombre CM vérifie l'équation : $CM \times 84\ 191 = 82\ 002$

On en déduit $CM = \dfrac{82\ 002}{84\ 191} \approx 0{,}9740$

c) Soit t % le pourcentage de diminution recherché.

On doit avoir $84\ 191 - \dfrac{t}{100} \times 84\ 191 = 82\ 002$, soit

$84\ 191(1 - \dfrac{t}{100}) = 82\ 002$, soit

$1 - \dfrac{t}{100} = \dfrac{82\ 002}{84\ 191} = CM$.

On en déduit : $-\dfrac{t}{100}=CM-1\approx 0{,}9740-1=-0{,}0260$ soit $t=2{,}60\%$

Le pourcentage de diminution de la population allemande du 1/1/2008 au 1/1/2009 est donc de 2,6%.

Activité 2

❶ Un indice boursier passe de $I_0=100$ *à* $I_1=107$.

a) Son coefficient multiplicateur est donc $CM=\dfrac{I_1}{I_0}=\dfrac{107}{100}=1{,}07$.

Le pourcentage t% d'augmentation vérifie $I_0+\dfrac{t}{100}\times I_0=I_1$, soit

$I_0(1+\dfrac{t}{100})=I_1$, soit

$1+\dfrac{t}{100}=\dfrac{I_1}{I_0}=CM=1{,}07.$

On en déduit que $\dfrac{t}{100}=0{,}07$ soit $t=7$.

Le pourcentage d'augmentation de cet indice est donc de 7%.

Attention : Un indice qui augmente d'abord de 7% et diminue ensuite de 7% ne revient pas à sa valeur initiale.

b) I_1 diminue de 7%. La nouvelle valeur de cet indice est donc

$$I_2=I_1-\frac{7}{100}\times I_1=107-\frac{7}{100}\times 107=99{,}51\,€.$$

❷ **a)** On a vu qu'augmenter de 7% correspondait à un coefficient multiplicateur de $CM=1+\dfrac{7}{100}=1{,}07$.

b) De même, augmenter de 20% correspond à un coefficient multiplicateur de $CM=1+\dfrac{20}{100}=1{,}2$.

c) De même, augmenter de 0,5% correspond à un coefficient multiplicateur de $CM=1+\dfrac{0{,}5}{100}=1{,}005$.

d) De même, augmenter de 120% correspond à un coefficient multiplicateur de $CM=1+\dfrac{120}{100}=2{,}2$.

e) Soit une quantité q_0 qui diminue de 10%. Sa nouvelle valeur est alors $q_1=q_0-\dfrac{10}{100}\times q_0=q_0(1-\dfrac{10}{100})=0{,}9q_0$.

Diminuer une quantité de 10% revient donc à la multiplier par $CM=1-\dfrac{10}{100}=0{,}9$.

f) De même, diminuer de 1,2% correspond à un coefficient de

$$CM = 1 - \frac{1,2}{100} = 1 - 0,012 = 0,988.$$

g) De même, diminuer de 95% correspond à un coefficient de

$$CM = 1 - \frac{95}{100} = 1 - 0,95 = 0,05.$$

h) De même, diminuer de 50% correspond à un coefficient de

$$CM = 1 - \frac{50}{100} = 1 - 0,5 = 0,5.$$

Correction des exercices d'apprentissage du chapitre 2

Exercice 1

Année	2009	2010	2011
Nombre de candidats	246	258	271
Nombre de reçus	221	224	249

❶ Soit t% le taux d'accroissement du nombre de candidats de 2009 à 2011.

On a $246(1+\frac{t}{100})=271$ soit,

$1+\frac{t}{100}=\frac{271}{246}=CM\approx 1{,}1016.$

On en déduit que $\frac{t}{100}=1{,}1016-1=0{,}1016$ soit $t=10{,}16\%$.

❷ Le taux de réussite pour une année donnée est égal au quotient du nombre de reçus sur le nombre de candidats. On peut donc compléter le tableau initial

Année	2009	2010	2011
Nombre de candidats	246	258	271
Nombre de reçus	221	224	249
Pourcentage de réussite	$\frac{221}{246}$ soit 89,84%	$\frac{224}{258}$ soit 86,82%	$\frac{249}{271}$ soit 91,88%

❸ Le taux de réussite au bac sur la période 2009-2010 est passé de 89,84% à 86,82% soit de 0,8984 à 0,8682. Il a donc diminué.

Soit t% le taux de diminution. On a :

$0{,}8984(1-\frac{t}{100})=0{,}8682$, soit

$1-\frac{t}{100}=\frac{0{,}8682}{0{,}8984}=CM\approx 0{,}9664$. On en déduit

$\frac{t}{100}=1-0{,}96640=0{,}0034$. On en déduit $t=0{,}34\%$.

Le taux d'évolution du pourcentage de réussite au bac est donc de –0,34%. Pour la période 2010-2011, on trouve un taux d'évolution du pourcentage de réussite au bac de 5,83%.

Exercice 2

Ancien prix en €	148	345	465	**$\frac{575}{0,92}=625$**
Nouveau prix en €	**$148\times 1,15=170,20$**	369,15	**$465\times 1,2=558$**	575
Coefficient multiplicateur	**1,15**	**$\frac{369,15}{345}=1,07$**	1,2	**0,92**
Evolution en %	+15%	**+7%**	**+20%**	–8%

Exercice 3

❶ Le prix TTC de l'article de 280 € HT sachant que la TVA est de 19,6% est de $280\times(1+\frac{19,6}{100})=334,88$ €.

❷ Soit p le prix HT en euro de l'article.

$p\times 1,196=203,32$ soit $p=\frac{203,32}{1,196}=170$€.

Le montant de la TVA est donc de 203,32–170 = 33,32€.

❸ On sait que la TVA s'applique sur le prix HT.
Soit p le prix HT de l'article.

$p\times 0,196=41,16$. On en déduit $p=\frac{41,16}{0,196}=210$€.

Le prix total de l'article est donc de : $210+41,16=251,16$€.

Exercice 4

❶ Le coefficient multiplicateur associé à une hausse de 4,56% est : $1+\frac{4,56}{100}=1,0456$.
Le nombre de clients utilisant un service mobile fourni par un opérateur en juin 2010 était donc de :

$59\,177\,200\times 1,0456=61\,875\,680$, résultat en accord avec le graphique.

❷ Le pourcentage du nombre de clients utilisant un service mobile dans la population française était pour l'année 2009 de $\frac{59\,177\,200}{64\,171\,800}\approx 0,9222$ soit 92,22%.

Le pourcentage du nombre de clients utilisant un service mobile dans la population française était pour l'année 2010 de $\frac{61\,875\,680}{64\,577\,800}\approx 0,9582$ soit 95,82%.

Le taux de pénétration a donc augmenté de 95,82 – 92,22 = 3,6 points de pourcentage.

❸ Soit N le nombre de SMS échangés en France en juin 2009. Ce nombre ayant augmenté de 65,26% de juin 2009 à juin 2010, on a :

$N(1+\dfrac{65,26}{100})=1,6526N=24\ 337\ 900.$

On en déduit $N=\dfrac{24\ 337\ 900}{1,6526}\approx 14\ 727\ 036.$

❹ En décembre 2007, on peut lire graphiquement le nombre de clients utilisant en France un service mobile était de 55,4 millions. En Juin 2010, il était de 61,9 millions.

Soit t % le pourcentage d'augmentation entre ces deux dates.

On a : $55,4(1+\dfrac{t}{100})=61,9$

soit $\dfrac{t}{100}\approx 0,1173$, soit $t=11,73\%$.

Le nombre de clients utilisant en France un service mobile fourni par un opérateur a donc augmenté de 11,73% de décembre 2007 à juin 2010.

Exercice 5

❶ Soit t % le pourcentage de baisse de population prévu sur la période 2009-2050 au Japon.

$127,6(1-\dfrac{t}{100})=95$, soit $1-\dfrac{t}{100}=\dfrac{95}{127,6}\approx 0,7445.$

On en déduit $\dfrac{t}{100}=1-0,7445=0,2555$ d'où $t=25,55.$

Le pourcentage de baisse de population prévu sur la période 2009-2050 au Japon est donc de 25,55%.

❷ En 2050, l'Allemagne devrait compter :

$82(1-\dfrac{13,4}{100})\approx 71$ millions d'habitants.

❸ Soit N le nombre d'habitants en Russie aujourd'hui exprimé en millions.

$N(1-\dfrac{21,2}{100})=117$, soit $N\times 0,788=117.$

On en déduit : $N=\dfrac{117}{0,788}\approx 148,5.$

Le nombre d'habitants en Russie aujourd'hui(2009) est donc de 148,5 millions.

Exercice 6

❶ Il est possible que la population d'une ville augmente de 205% en 30 ans.

Cela signifie qu'en trente ans, son nombre d'habitants est multiplié par $1+\dfrac{205}{100}=1+2,05=3,05.$

❷ Il n'est pas possible que la population d'une ville diminue de 120% en 50 ans.

En effet, celle-ci serait alors multipliée par $1-\dfrac{120}{100}=-0,2.$

Elle deviendrait alors négative.

De façon plus générale, une quantité ne peut pas diminuer de plus de 100%.

Exercice 7 Soit p le prix HT d'un DVD.

Avec un taux de 19,6%, ce DVD est vendu au prix de : $p(1+\frac{19,6}{100})=1,196p$.

Avec un taux de 5,5%, ce DVD serait vendu au prix de : $p(1+\frac{5,5}{100})=1,055p$.

Soit t % le pourcentage de diminution.

On a $1,196p(1-\frac{t}{100})=1,055p$, soit $1-\frac{t}{100}=\frac{1,055}{1,196}\approx 0,8821$.

On en déduit : $\frac{t}{100}=1-0,8821=0,1179$ soit $t=11,79\%$.

Exercice 8 Soit q la quantité de pommes de terre à acheter et soit p le prix au kilo en début de marché chez les deux marchants.

Le prix au kilo chez le premier vendeur après les 20% de produit en plus sera de : $\frac{p}{1,2}$.

Chez le voisin, le prix au kilo sera de $p(1-\frac{20}{100})=0,8p$.

Or $\frac{1}{1,2}\approx 0,833$ et le premier vendeur sera donc plus cher que son voisin.

Il vaut donc mieux acheter chez le voisin.

Exercice 9 ❶ Pour traiter cet exercice, il est recommandé de recopier les données sur une feuille de tableur.

Fichier Édition Affichage Insertion Format Outils Données Fenêtre Aide

Arial 10

B8 =100*B2/$B2

	A	B	C	D	E	F
1		1980-1981	1990-1991	2000-2001	2010-2011	
2	Premier degré	7396,3	6953,4	6552	6611,1	
3	Second degré	5309,2	5725,8	5614,4	5370,8	
4	Supérieur	1184,1	1717,1	2160,3	2347,7	
5	Total	13889,6	14396,3	14326,7	14329,6	
6						
7						
8	Premier degré	100	94,0	88,6	89,4	
9	Second degré	100	107,8	105,7	101,2	
10	Supérieur	100	145,0	182,4	198,3	
11	Total	100	103,6	103,1	103,2	
12						

Pour obtenir les indices bases 100 en 1980, il suffit d'écrire en cellule B8, la formule :

=100*B2/$B2, et de recopier cette formule vers le bas et vers la droite.

Pour le premier degré les effectifs ont baissé de (100 – 88,6)% soit 11,4% entre 1980 et 2000.

En 2010, les effectifs ont légèrement augmenté par rapport à 2000, de (89,4 –88,6) soit de 0,8 points. Ceci correspond à une hausse en % de 0,8/88,6 ≈ 0,009 soit 0,9%.

Pour le second degré, après une hausse de 7,8% de 1980 à 1990, les effectifs ont ensuite baissé.

Pour le supérieur, les effectifs ont presque doublé entre 1980 et 2010, puisqu'ils ont augmenté de 98,3%.

Globalement, le nombre total d'élèves ou étudiants a peu évolué depuis 1990.

❷

B7 =B4/B5

	A	B	C	D	E	F
1		1980-1981	1990-1991	2000-2001	2010-2011	
2	Premier degré	7396,3	6953,4	6552	6611,1	
3	Second degré	5309,2	5725,8	5614,4	5370,8	
4	Supérieur	1184,1	1717,1	2160,3	2347,7	
5	Total	13889,6	14396,3	14326,7	14329,6	
6						
7	Proportion d'étudiants	8,53%	11,93%	15,08%	16,38%	
8						

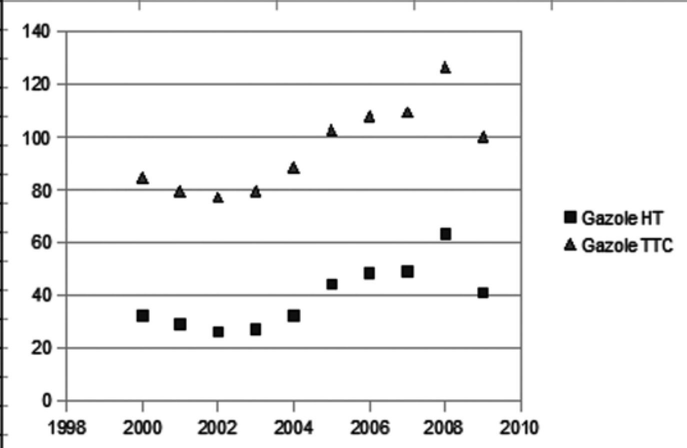
Pour obtenir la proportion d'étudiants dans la totalité des scolarisés pour chaque rentrée, il suffit d'écrire en cellule B7, la formule =B4/B5 et de recopier cette formule vers la droite.

La part des étudiants dans la totalité des scolarisés n'a cessé d'augmenter depuis 1980.

Exercice 10 ❶

K13

	A	B	C	D	E
1		Gazole HT			Gazole TTC
2	DATE	Prix de vente HTT (€/ hl)			Prix de vente TTC
3	2000	32,13			84,68
4	2001	29,12			79,6
5	2002	26,26			77,24
6	2003	27,15			79,35
7	2004	32,38			88,47
8	2005	44,16			102,68
9	2006	48,4			107,75
10	2007	48,97			109,49
11	2008	63,17			126,71
12	2009	41,02			100,24



Pour insérer un graphique montrant selon les années à la fois le prix HTT et TTC, il suffit de sélectionner les trois colonnes et d'insérer un diagramme type XY dispersion.

❷

	A	B	C	D	E	F
1		Gazole HT			Gazole TTC	
2	DATE	Prix de vente HTT (€/ hl)	Indice du prix de vente HTT,année de base 2006	Pourcentage d'évolution du prix de vente HTT par rapport à l'année 2006	Prix de vente TTC	% de taxe
3	2000	32,13	66,38	-33,62%	84,68	163,55%
4	2001	29,12	60,17	-39,83%	79,6	173,35%
5	2002	26,26	54,26	-45,74%	77,24	194,14%
6	2003	27,15	56,1	-43,90%	79,35	192,27%
7	2004	32,38	66,9	-33,10%	88,47	173,22%
8	2005	44,16	91,24	-8,76%	102,68	132,52%
9	2006	48,4	100	0,00%	107,75	122,62%
10	2007	48,97	101,18	1,18%	109,49	123,59%
11	2008	63,17	130,52	30,52%	126,71	100,59%
12	2009	41,02	84,75	-15,25%	100,24	144,37%
13						

Pour obtenir l'indice de vente HTT par rapport à l'année 2006, il suffit d'écrire en cellule C3 la formule =B3/B$9 et de la recopier vers le bas.

Pour obtenir le pourcentage d'évolution du prix de vente HTT par rapport à l'année 2006, il suffit d'écrire en cellule D3 la formule =C3-C$9 (si on utilise le symbole %, il faudra diviser par 100) et de la recopier vers le bas.

Enfin, le pourcentage de taxe s'obtient en écrivant en cellule F3 la formule = (E3-B3)/B3 et la recopier vers le bas.

❸ Les fluctuations du prix de vente HTT entre les années 2000 et 2009 par rapport à l'année 2006 sont importantes puisque les pourcentage d'évolution par rapport à 2006 varient entre –45,74% en 2002 et 30,52% en 2008. On peut remarquer que les taxes sont les plus fortes en 2002 (194,14%) et les moins fortes en 2008 (100,59%) si bien que pour le prix de vente TTC, les différences s'estompent quelque peu. Remarquons enfin que les taxes sur le gazole sont très élevées puisqu'elles multiplient le prix HT de ce gazole au minimum environ par 2 et au maximum environ par 3.

Exercice 11

❶ **À propos de vols dans un petit village des Alpes :**

L'an dernier il n'y a pas eu de vols. Alors si cette année il y en a eu trois, ça lui fait tout de suite 300% d'augmentation.

300% d'augmentation de 0 fait toujours 0. Cette dernière phrase est donc une erreur du journaliste.

❷ **À propos du prix de revient des CD.**

En quatre ans, les prix ont chuté de 300%. Un CD sorti d'usine (support+boîtier+livret de 4 pages) revient royalement à 8,50 € HT.

Un prix qui chuterait de 300% deviendrait négatif ; ceci est impossible ! La baisse maximale sur une quantité est de 100%.

❸ **À propos des transferts de joueurs de foot :**

Ce qui se passe depuis un mois dans la rubrique des transferts donne le vertige. En quatre ans en France, le montant des transactions a quadruplé : 400% d'inflation, ce n'est pas si mal !

Si le montant des transactions a quadruplé, il a augmenté de 300% et non de 400%. De plus le mot inflation n'est pas à proprement parlé bien employé ici.

Correction des activités du chapitre 3

Activité 3 Les économies de Pierre

Pierre a 100 € d'économie. Il en dépense d'abord 30% puis de nouveau 10% de ce qui lui reste.

À une baisse de 30% est associé le coefficient multiplicateur $1-\frac{30}{100}=0,7$.

À la suite de la baisse de 30%, Pierre dispose donc de $100\times 0,7=70$ €.

Il dépense ensuite 10% de ses 70€ restants.

À une baisse de 10% est associé le coefficient multiplicateur $1-\frac{10}{100}=0,9$.

À la suite de cette seconde baisse de 10%, il restera donc à Pierre $70\times 0,9=63$ €.

Soit t % le pourcentage de baisse résultant de ces deux opérations.

On a : $100\times(1-\frac{t}{100})=63$ soit $1-\frac{t}{100}=0,63$.

On en déduit : $\frac{t}{100}=1-0,63=0,37$ soit $t=37\%$.

Une baisse de 30% suivie d'une baisse de 10% correspond donc à une baisse de 37% (et non 40% !).

Activité 4 Maillots de bain

Soit p le prix initial d'un maillot de bain.

À l'augmentation de 10% du mois de Juin correspond un coefficient multiplicateur $CM=1+\frac{10}{100}=1,1$.

À l'issue de cette augmentation, le nouveau prix du maillot de bain est donc de : $p\times 1,1$ soit $1,1p$.

Au mois de septembre, les maillots de bain baissent de 10%.

Le coefficient multiplicateur est : $CM'=1-\frac{10}{100}=0,9$.

Le nouveau prix du maillot de bain à l'issue du mois de septembre sera donc de :

$1,1p\times 0,9=0,99p$.

Le maillot de bain ne retrouve donc pas son prix initial à la suite d'une hausse de 10% puis d'une baisse de 10%.

Correction des exercices d'apprentissage du chapitre 3

Exercice 12 Le coefficient multiplicateur CM_1 correspondant à l'augmentation de 7,5% du mois de Mai est : $CM_1 = 1 + \frac{7,5}{100} = 1,075$.

Le coefficient multiplicateur CM_2 correspondant à l'augmentation de 2,5% du mois de Décembre est : $CM_2 = 1 + \frac{2,5}{100} = 1,025$.

Le coefficient multiplicateur CM_{global} correspondant aux deux augmentations successives est :

$CM_{global} = CM_1 \times CM_2 = 1,075 \times 1,025 \approx 1,1019$.

Or $1,1019 = 1 + \frac{10,19}{100}$.

Le pourcentage d'augmentation du prix du gaz aura donc été d'environ 10,19% en France en 2005.

Exercice 13 Le coefficient multiplicateur CM_1 correspondant à la baisse de 7% est : $CM_1 = 1 - \frac{7}{100} = 0,93$.

Le coefficient multiplicateur CM_2 correspondant à l'augmentation de 8% est : $CM_2 = 1 + \frac{8}{100} = 1,08$.

Le coefficient multiplicateur CM_{global} correspondant aux deux évolutions successives est :

$CM_{global} = CM_1 \times CM_2 = 0,93 \times 1,08 = 1,0044$.

Ce coefficient multiplicateur est supérieur à 1, donc le nombre d'adhérents à la médiathèque entre le 1er janvier 2009 et le 31 décembre 2010 a augmenté.

Comme $1,0044 = 1 + \frac{0,44}{100}$, on peut dire que ce nombre a augmenté de 0,44% environ.

Exercice 14

Première étape	CM_1	Deuxième étape	CM_2	$CMglobal = CM_1 \times CM_2$	$t = CM - 1$	Résultante
augmentation de 20%	1,2	augmentation de 10%	1,1	1,32	0,32	augmentation de 32%
augmentation de 10%	1,1	dimunition de 10%	0,9	0,99	–0,01	dimunition de 1%
augmentation de 10%	1,1	augmentation de 20%	1,2	1,32	0,32	augmentation de 32%
augmentation de 10%	1,1	augmentation de 10%	1,1	1,21	0,21	augmentation de 21%
diminution de 20%	0,8	dimunition de 20%	0,8	0,64	–0,36	dimunition de 36%
augmentation de 10%	1,1	dimunition de 5%	0,95	1,045	0,045	augmentation de 4,5%
augmentation de 25%	1,25	dimunition de 20%	0,8	1	0	résultat constant
diminution de 3,2%	0,968	dimunition de 6,8%	0,932	0,9022	–0,0978	diminution d'environ 9,78%
augmentation de 12,5%	1,125	donc augmentation d'environ 23,33%	$x = \frac{1,3875}{1,125}$ $\approx 1,2333$	$1,3875 = 1,125 \times x$ permet de trouver x	0,3875	augmentation de 38,75%
dimunition de 25%	0,75	donc diminution de 15%	$x = \frac{0,6375}{0,75}$ $x = 0,85$	$0,6375 = 0,75 \times x$ permet de trouver x	–0,3625	dimunition de 36,25%
donc augmentation de 56,25%	$x = \frac{1}{0,64}$ $x = 1,5625$	dimunition de 36%	0,64	$1 = x \times 0,64$ permet de trouver x	0	résultat constant
augmentation de 20%	1,2	donc diminution de 16,67%	$x = \frac{1}{1,2}$ $\approx 0,8333$	$1 = 1,2 \times x$ permet de trouver x	0	résultat constant

Exercice 15

❶ L'augmentation du loyer de 8% est associée à un coefficient multiplicateur de $1 + \frac{8}{100} = 1,08$.

Au bout de 5 augmentations successives, le coefficient multiplicateur global est : $1,08 \times 1,08 \times 1,08 \times 1,08 \times 1,08 = 1,08^5$.

Au bout de 5 augmentations successives, le loyer est donc de :

$165 \times (1,08)^5 = 242$€ (résultat arrondi à 1€ près).

❷ Au bout de n années, le montant du loyer sera de $165\times(1{,}08)^n$.

Le loyer aura plus que doublé lorsque $(1{,}08)^n$ sera strictement plus grand que 2.

Or $(1{,}08)^9\approx 1{,}999$ et $(1{,}08)^{10}\approx 2{,}159$.

Donc, au bout de 10 ans le loyer aura plus que doublé.

Exercice 16

Une augmentation de 15% correspond au coefficient multiplicateur CM_1 :

$CM_1=1+\dfrac{15}{100}=1{,}15.$

Une augmentation de 7% correspond au coefficient multiplicateur CM_2 :

$CM_2=1+\dfrac{7}{100}=1{,}07.$

Une diminution de 9% correspond au coefficient multiplicateur CM_3 :

$CM_3=1-\dfrac{9}{100}=0{,}91.$

Une augmentation de 3% correspond au coefficient multiplicateur CM_4 :

$CM_4=1+\dfrac{3}{100}=1{,}03.$

Le coefficient multiplicateur global est :

$CM_{\text{global}}=CM_1\times CM_2\times CM_3\times CM_4=1{,}15\times1{,}07\times0{,}91\times1{,}03\approx1{,}1533$.

Entre le 1er janvier 2010 et le 1er janvier 2011, le prix de l'objet a donc augmenté de 15,33%.

Il vaudra donc : $98\times1{,}1533=113$ € arrondi à l'euro près le 1er janvier 2011.

Exercice 17

1/07/2007 au 30/06/2008	1/07/2008 au 30/06/2009	1/07/2009 au 30/06/2010
120	151	139

❶ Le pourcentage de variation de la production de blé de la première période à la seconde période est : $\dfrac{151-120}{120}\approx0{,}2583$ soit sensiblement 25,83%.

❷ Le pourcentage de variation de la production de blé de la seconde période à la troisième période est : $\dfrac{139-151}{151}\approx-0{,}0794$ soit sensiblement $-7{,}94$%.

❸ $CM_1\times CM_2=(1+0{,}2583)(1-0{,}0794)\approx1{,}1583$ d'où une augmentation de 15,83%.

❹ Le pourcentage de variation de la production de blé de la première période à la troisième période est : $\dfrac{139-120}{120}\approx0{,}1583$ soit une augmentation de 15,83%.

Exercice 18 Prenons pour mois de référence le mois de Janvier.

L'indice du mois de Février est donc 107.

L'indice du mois de Mars est 102.

Soit x le coefficient multiplicateur entre Février et Mars. On a :

$1{,}07 \times x = 1{,}02$ soit,

$x = \dfrac{1{,}02}{1{,}07} \approx 0{,}9532.$

On en déduit $t = 0{,}9532 - 1 = -0{,}0468$ soit $-4{,}68\%$.

On en déduit qu'à l'unité près, la fréquentation des salles de cinéma du propriétaire a baissé de 5% entre Février et Mars.

Exercice 19 ❶ Le prix d'un article augmente de 20%. Le coefficient multiplicateur associé est donc de :

$CM_1 = 1 + \dfrac{20}{100} = 1{,}2.$

On cherche le coefficient multiplicateur CM_2 associé à la variation qu'il faut appliquer pour le ramener à son prix normal.

On a : $CM_1 \times CM_2 = 1$, soit

$CM_2 = \dfrac{1}{CM_1} = \dfrac{1}{1{,}2} \approx 0{,}8333$.

On a donc $1 - \dfrac{t}{100} = 0{,}8333$ soit $t = 16{,}67\%$.

Il faut donc appliquer une baisse de 16,67% pour le ramener à son prix normal.

❷ **a)** Pour une augmentation de 100%, on a $CM_1 = 1 + \dfrac{100}{100} = 2.$

Donc $CM_2 = \dfrac{1}{CM_1} = \dfrac{1}{2} = 0{,}5.$

$1 - \dfrac{t}{100} = 0{,}5$ soit $t = 50\%$.

Il faut donc appliquer une baisse de 50% pour le ramener à son prix normal.

b) Pour une augmentation de 200%, on a $CM_1 = 1 + \dfrac{200}{100} = 3.$

Donc $CM_2 = \dfrac{1}{CM_1} = \dfrac{1}{3} \approx 0{,}3333.$

$1 - \dfrac{t}{100} = 0{,}3333$ soit $t = 66{,}66\%$.

Il faut donc appliquer une baisse de 66,66% pour le ramener à son prix normal.

c) Pour une diminution de 30%, on a $CM_2 = 1 - \dfrac{30}{100} = 0{,}7.$

Donc $CM_2 = \dfrac{1}{CM_1} = \dfrac{1}{0{,}7} \approx 1{,}4286$.

$1+\frac{t}{100}=1,4286$ soit $t=42,86\%$.

Il faut donc appliquer une augmentation de 42,86% pour le ramener à son prix normal.

Exercice 20 Le coefficient multiplicateur global associé aux trois variations est : $CM_{\text{global}}=(1+\frac{15,3}{100})(1-\frac{42}{100})(1+\frac{69}{100})=1,153\times0,58\times1,69\approx1,1302$.

Globalement, l'action a donc augmenté de 13,02%.

Si on avait appliqué trois fois de suite une augmentation de t %, le coefficient multiplicateur global aurait été de :

$$CM_{\text{global}}=(1+\frac{t}{100})(1+\frac{t}{100})(1+\frac{t}{100})=(1+\frac{t}{100})^3.$$

On doit donc avoir : $(1+\frac{t}{100})^3=1,1302$.

À cherchant à l'aide d'une calculatrice, on trouve que $(1,041)^3\approx1,128$ et $(1,042)^3\approx1,131$.

On en déduit $1+\frac{t}{100}=1,042$, soit $\frac{t}{100}=0,042$, soit $t=4,2\%$ arrondi à 0,1% près.

Correction des exercices d'approfondissement du chapitre 5

Exercice I

❶ La TVA est de 19,6%.

Produit	**A**	**B**	**C**	D
Prix hors taxe (€)	55	90	**120** ($=143{,}52/1{,}196$)	**250** ($=299/1{,}196$)
Prix taxes comprises (€)	**65,78** ($=55\times1{,}196$)	**107,64** ($=90\times1{,}196$)	143,52	299

❷ À la suite d'une décision ministérielle, le taux de TVA est ramené de 19,6% à 5,5%.

Produit	**A**	**B**	**C**	D
Prix hors taxe (€)	55	90	120	250
Prix taxes comprises (€)	**58,025** ($=55\times1{,}055$)	**94,95** ($=90\times1{,}055$)	**126,6** ($=120\times1{,}055$)	**263,75** ($=250\times1{,}055$)

❸ **a)** Pour un article quelconque, on note : x, son prix hors taxe.

y, son prix taxe à 19,6% comprise : on a donc $y=1{,}196x$.

z, son prix taxe à 5,5% comprise : on a donc $z=1{,}055x$.

De la relation $y=1{,}196x$, on déduit $x=\dfrac{y}{1{,}196}$.

En reportant cette valeur dans la relation $z=1{,}055x$, on trouve : $z=1{,}055\times\dfrac{y}{1{,}196}=\dfrac{1{,}055}{1{,}196}y=0{,}8821y$ à 10^{-4} près.

Donc $z=0{,}8821y$.

b) On a donc $z=(1-0{,}1179)y=(1-\dfrac{11{,}8}{100})y$ (en arrondissant).

Le consommateur bénéficie donc d'une réduction de 11,8% lors de cette baisse de TVA.

Exercice II

❶ On peut effectuer aisément les calculs à l'aide d'un tableur.

Après avoir recopié les données comme suit, il suffit d'écrire en cellule C2, =B2/B$1.

Mettre cette cellule en format pourcentage en cliquant par exemple sur % dans la barre d'outil et recopier cette formule vers le bas.

On peut s'assurer en cellule C11 que la somme fait bien 100% en écrivant la formule =SOMME(C2 : C10)

C2 =B2/B$1

	A	B	C	D	E
1	Dépenses (en milliards d'Euros)	341,4			
2	Enseignement et recherche	82,3	24,11%		
3	Collectivités territoriales	53,6	15,70%		
4	Dettes et engagements financiers	42,8	12,54%		
5	Défense	36,9	10,81%		
6	Travail, emploi et solidarité	24,5	7,18%		
7	Sécurité et justice	22,4	6,56%		
8	Union européenne	18,4	5,39%		
9	ement et aménagements durable	16,1	4,72%		
10	Autres missions	44,4	13,01%		
11			100,00%		

❷ **a)** Il suffit d'écrire en A6 la formule =A3/$B1.

On fixe la cellule B1 à l'aide de dollars pour qu'elle n'évolue pas lorsque l'on recopie la formule vers la droite.

On peut s'assurer que la somme obtenue fait bien 100% en écrivant en cellule G6 =SOMME(A6:F6).

A6 =A3/$B1

	A	B	C	D	E	F	G
1	Recettes	299,7					
2	TVA	Impôt sur le revenu	Impôt sur les sociétés	TIPP	Autres recettes fiscales	Autres recettes	
3	135	60,5	53,8	16,5	5,8	28,1	
4							
5	TVA	Impôt sur le revenu	Impôt sur les sociétés	TIPP	Autres recettes fiscales	Autres recettes	
6	45,05%	20,19%	17,95%	5,51%	1,94%	9,38%	100,00%
7							
8							
9							

❸ Si on veut diminuer le déficit de 41,7milliards d'euros de 10%, on veut donc réaliser une économie de 4,17milliars d'euros. La TVA devra donc passer de 135 milliards d'euros à 135+4,17 soit 139,17 milliards d'euros. Notons $x=\dfrac{t}{100}$ le pourcentage cherché.

On a $135(1+x)=139,17$ soit $1+x=\dfrac{139,17}{135}$ soit $x=\dfrac{139,17}{135}-1\approx 0,03088$ (ne pas oublier de remettre sa calculatrice en mode FLOAT pour avoir suffisamment de décimales) soit 3,09% à 0,01% près. Il faudrait donc augmenter la recette TVA de 3,09% pour réduire le déficit de 10%.

❹ Si on diminuait la dépense « Défense » de 15%, on réaliserait une économie de : $36{,}9\times\frac{15}{100}=36{,}9\times0{,}15=5{,}535$ milliards d'euros.

Le déficit passerait donc de 41,7 à $41{,}7-5{,}535=36{,}165$ milliards d'euros.

On aurait donc, en reprenant les notations précédentes, $41{,}7(1+x)=36{,}165$ soit $1+x=\frac{36{,}165}{41{,}7}$ soit $x=\frac{36{,}165}{41{,}7}-1\approx-0{,}13273$, soit une diminution de 13,27% à 0,01% près.

Une diminution du budget de la défense de 15% permettrait donc de réduire le déficit de 13,27%.

❺ Si on baisse la dépense « Sécurité, justice » de 1 milliard d'euros la première année, celle-ci passe de 22,4 à 21,4 milliards d'euros. Toujours avec les notations précédentes, on a $22{,}4(1+x)=21{,}4$ soit $1+x=\frac{21{,}4}{22{,}4}$ soit $x=\frac{21{,}4}{22{,}4}-1\approx-0{,}04464$ soit une baisse de 4,464% la première année.

La seconde année, la dépense « Sécurité, justice » passera de 21,4 à 20,4 milliard d'euros.

Onauradonc $21{,}4(1+x)=20{,}4$ soit $1+x=\frac{20{,}4}{21{,}4}$ soit $x=\frac{20{,}4}{21{,}4}-1\approx-0{,}046728$.

La seconde année, cela correspondra donc à une baisse de 4,673 %.

Exercice III

❶ Le capital acquis par Jean au bout d'un an est donc de $3000\times1{,}045=3\,135$ €.

Le montant des intérêts est donc de $3\,135-3\,000=135$ €.

Les intérêts peuvent aussi être obtenus par l'opération : $3000\times\frac{4{,}5}{100}=135$ €.

❷ Le capital acquis a été obtenu en multipliant C par $1+\frac{2{,}5}{100}=1{,}025$.

On obtient donc le capital C en divvisant le capital acquis par 1,025. D'où $C=\frac{7\,687{,}5}{1{,}025}=7\,500$ €.

Le montant des intérêts est donc de $7\,687{,}5-7\,500=187{,}5$ €.

❸ Le capital de 1 500 € placé à $t=a\%$ rapporte $1\,500\times\frac{a}{100}=15a$ d'intérêt annuel.

On a donc $15a=105$ d'où $a=\frac{105}{15}=7$.

Le taux d'intérêt t est donc : $t=7\%$.

Exercice IV

❶ Le taux d'inflation en France étant estimé à 1,65% pour l'année 2010, un article qui valait 1 000 € au début de l'année 2010 vaudra en fin d'année :

$$1\,000\times(1+\frac{1{,}65}{100})=1\,000\times1{,}0165=1\,016{,}5\text{ €}.$$

b) Soit P le prix de l'article en début d'année :

$$P \times 1{,}0165 = 1\,000 \text{ donc } P = \frac{1\,000}{1{,}0165} \approx 983{,}77 €.$$

❷ Le taux d'inflation au Venezuela étant estimé à 30% pour l'année 2010, un article qui valait 1 000 € au début de l'année 2010 vaudra en fin d'année :

$$1\,000 \times (1 + \frac{30}{100}) = 1\,000 \times 1{,}30 = 1\,300 €.$$

b) Soit P le prix de l'article en début d'année :

$$P \times 1{,}30 = 1\,000 \text{ donc } P = \frac{1\,000}{1{,}30} \approx 769{,}23 €.$$

Exercice V

On peut lire dans « *images économiques du monde* 2011 » le paragraphe suivant concernant la suppression d'emploi de fonctionnaires depuis 2007.

Les mesures les plus spectaculaires concernent la réduction des effectifs de la fonction publique d'État :

–23 000 en 2008, –30 600 en 2009, –33 700 prévus en 2010, sur un total de 2,5 millions au début de cette même année.

❶ Soit t % le pourcentage prévu de réduction de fonctionnaires pour l'année 2010.

$$\frac{t}{100} \times 2\,500\,000 = 33\,700 \text{ , soit } t = \frac{33\,700}{25000} = 1{,}348.$$

Le nombre de fonctionnaires devrait donc baisser de 1,348% pour l'année 2010.

❷ En fin d'année 2009, le nombre de fonctionnaires était de 2 500 000.

En début d'année 2009, il était de 2 500 000 + 30 600 = 2 530 600.

Soit t % le pourcentage de diminution du nombre de fonctionnaires en 2009.

$$2\,530\,600 \times (1 - \frac{t}{100}) = 2\,500\,000.$$

On en déduit $1 - \frac{t}{100} = \frac{2\,500\,000}{2\,530\,600} \approx 0{,}9858.$

On a donc $t = 1{,}42\%$.

Le nombre de fonctionnaires a donc baissé d'environ 1,42% en 2009.

En fin d'année 2008, le nombre de fonctionnaires était de 2 536 000.

En début d'année 2008, il était de 2 530 600 + 23 000 = 2 559 000.

Soit t % le pourcentage de diminution du nombre de fonctionnaires en 2008.

$$2\,559\,000 \times (1 - \frac{t}{100}) = 2\,530\,600.$$

On en déduit $1 - \frac{t}{100} = \frac{2\,530\,600}{2\,559\,000} \approx 0{,}9910$.

On a donc $t = 0{,}90\%$.

Le nombre de fonctionnaires a donc baissé d'environ 0,9% en 2008.

Exercice VI

❶ On donne en TeraWatt/heure (10^{12} watt/heure) la production d'électricité hydraulique de trois pays.

On peut recopier les données de l'énoncé dans une feuille de calcul.

B7 =100*B2/$B2 Ligne de saisie

	A	B	C	D	E
1	Année	1980	1990	2000	2009
2	Etats-Unis	282,2	295,8	278,4	274,9
3	Chine	58,2	126,7	222,5	615,6
4	France	69,5	53,8	67,8	57,7
5					
6	Année	1980	1990	2000	2009
7	Etats-Unis	100	104,8	98,7	97,4
8	Chine	100	217,7	382,3	1057,7
9	France	100	77,4	97,6	83,0
10					

En écrivant en cellule B7 la formule =100*B2/$B2 et en la copiant vers la droite et vers le bas, on obtient tous les indices demandés.

❷ Aux Etats-Unis, la production d'électricité hydraulique a très peu évolué entre 1980 et 2009.

En Chine, celle-ci a considérablement augmenté (presque de 1000%).

En France, elle a accusé une baisse de 22,6% entre 1980 et 1990,est ensuite en l'an 2000 presque revenue à son niveau de 1980, pour de nouveau accuser en 2009 une baisse de 17% par rapport au niveau de production de 1980.

❸ L'évolution entre 2008 et 2009 et de +7,1% pour les Etats-Unis, +5,5% pour la Chine et – 4,2% pour la France.

Soit q la production d'électricité hydraulique aux Etats-Unis en 2008.

$q \times 1{,}071 = 274{,}9.$

On en déduit $q = \dfrac{274{,}9}{1{,}071} = 256{,}7.$

La production d'électricité hydraulique aux Etats-Unis en 2008 était de 256,7 TeraWatt/heure.

En Chine, un raisonnement analogue conduit au calcul $q = \dfrac{615{,}6}{1{,}055} = 583{,}5.$

La production d'électricité hydraulique en Chine en 2008 était de 583,5 TeraWatt/heure.

En France, un raisonnement analogue conduit au calcul $q = \dfrac{57{,}7}{0{,}958} = 60{,}2.$

La production d'électricité hydraulique en France en 2008 était de 60,2 TeraWatt/heure.

Exercice VII

❶ Lors d'une année exceptionnelle, la production de fruits et de légumes d'un agriculteur a augmenté de x%.

Si on appelle Q la production d'une année normale, la production durant l'année exceptionnelle est : $Q(1+\frac{x}{100})$.

Le prix P d'une année normale a chuté de y%. Il est donc durant l'année exceptionnelle de $P(1-\frac{y}{100})$.

La recette pour une année normale est : $P\times Q$.

Lors de l'année exceptionnelle, elle est de $Q(1+\frac{x}{100})\times P(1-\frac{y}{100})$.

Le taux d'évolution t% est donc tel que :

$$\frac{t}{100}=\frac{Q(1+\frac{x}{100})\times P(1-\frac{y}{100})-PQ}{PQ}=(1+\frac{x}{100})(1-\frac{y}{100})-1=\frac{x}{100}-\frac{y}{100}-\frac{xy}{10000}$$

soit $t=x-y-\frac{xy}{100}$.

❷ **a)** Si $x=40$ et $y=30$, $t=40-30-\frac{40\times 30}{100}=-2\%$.

b) Si $x=30$ et $y=20$, $t=30-20-\frac{20\times 30}{100}=4\%$.

c) Supposons $x=40$.

$\frac{t}{100}=40-y-\frac{40y}{100}$.

On veut que $t\geq 0$, soit $40-y-\frac{40y}{100}\geq 0$, soit $40-1{,}4y\geq 0$ ou encore $1{,}4y\leq 40$, soit $y\leq\frac{40}{1{,}4}\approx 28{,}57$.

Il faut donc que la baisse des prix soit inférieure à 28,57% pour que la recette de l'agriculteur soit au moins égale à celle d'une année normale.

Exercice VIII

❶ On a $250\times(1+\frac{25}{100})(1-\frac{y}{100})=250$, ce qui équivaut à $1{,}25(1-0{,}01y)=1$ soit : $1-0{,}01y=\frac{1}{1{,}25}$ ou encore $0{,}01y=1-\frac{1}{1{,}25}=0{,}2$ soit $y=\frac{0{,}2}{0{,}01}=20$.

L'augmentation de 25% est donc compensée par une diminution de 20%.

❷ **a)** De la même manière, $P\times(1+\frac{x}{100})(1-\frac{y}{100})=P$, ce qui équivaut à :

$(1+\frac{x}{100})(1-\frac{y}{100})=1$. Par suite, $(100+x)(100-y)=10\,000$ soit,

$100-y=\frac{10\,000}{100+x}$ ou encore

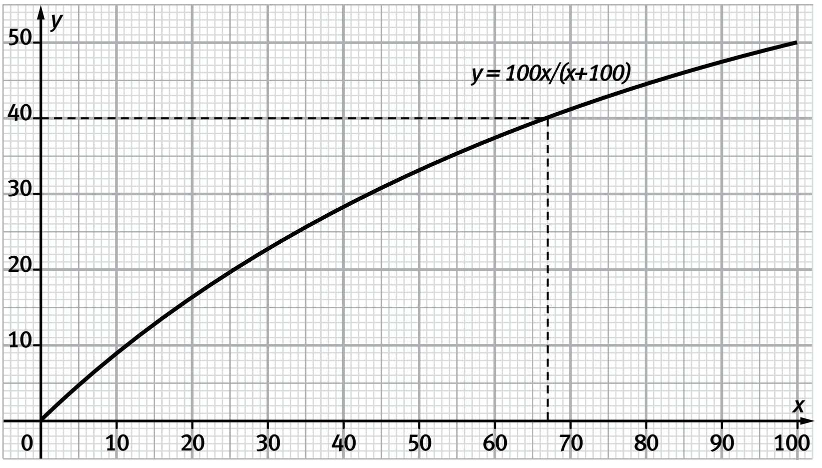
$$y=100-\frac{10\,000}{100+x}=\frac{100(100+x)-10\,000}{100+x}=\frac{100x}{100+x}.$$

On trouve bien : $y=\frac{100x}{100+x}$.

b) f est la fonction définie sur [0 ; 100] par $f(x) = \dfrac{100x}{x+100}$.

On peut par exemple utiliser le logiciel sinequanon.

On obtient le graphique ci-après.



❸ Avec un taux de 67% de bénéfice sur le prix de revient suivi d'une baisse de 40%, le graphique nous indique que l'on retrouve le prix de revient de l'article puisque le point M ayant environ pour coordonnées (67 ; 40) est un point de la courbe d'équation $y = \dfrac{100x}{x+100}$.

■

Corrigé séquence 3

Correction des activités du chapitre 2

Activité 1 Le côté sachant l'Aire

❶ Pour calculer la longueur de la diagonale d d'un rectangle de largeur $\ell = 3$ cm et de longueur $L = 4$ cm on applique le théorème de Pythagore : $d^2 = 3^2 + 4^2$ d'où $d = 5$.

❷ De la même façon, on complète le tableau.

ℓ	5	8	7	0,9	3,3	2
L	12	15	24	4	5,6	3
d^2	169	289	625	16,81	42,25	13

❸ Comme le nombre d est la longueur d'un segment, il est toujours positif ou nul.

❹ Le tableau complété est le suivant.

ℓ	5	8	7	0,9	3,3	2
L	12	15	24	4	5,6	3
d^2	169	289	625	16,81	42,25	13
d	13	17	25	4,1	6,5	3,60555127

❺ Pour savoir si les valeurs écrites dans la dernière ligne du tableau précédent sont exactes, ajoutons une ligne dans laquelle seront calculés les carrés des valeurs de la ligne d précédente.

ℓ	5	8	7	0,9	3,3	2
L	12	15	24	4	5,6	3
d^2	169	289	625	16,81	42,25	13
d	13	17	25	4,1	6,5	3,60555127
d^2	169	289	625	16,81	42,25	12,99999996

On observe dans les cinq premières colonnes que les résultats de la dernière ligne sont les mêmes que ceux à la troisième ligne. Par contre, la valeur donnée par la calculatrice pour d lorsque $d^2 = 13$ n'est pas exacte.

Attention : Les calculatrices calculent avec plus de chiffres qu'elles n'en affichent. Souvent, par défaut, elle affiche neuf décimales après la virgule et font leurs calculs avec 14 décimales après la virgule. Il faut donc régler l'affichage des décimales au maximum de chiffres pour observer le phénomène précédent car sinon, comme la calculatrice (ou le tableur) arrondit ses résultats, il se peut que le résultat affiché soit 13.

❻ Après la séquence de touches de la calculatrice suivante $\boxed{13}$ $\boxed{\sqrt{\ }}$ $\boxed{x^2}$ l'affichage est : 13. Ceci illustre les arrondis effectués par la calculatrice, évoqués précédemment.

Après la séquence de touches de la calculatrice suivante $\boxed{3{,}605551275}$ $\boxed{x^2}$ l'affichage est : 12,999999996.

Comme $17^2 = 189$, on peut écrire $\sqrt{189} = 17$. De la même façon, $6{,}5^2 = 42{,}25$ donc $\sqrt{42{,}25} = 6{,}5$.

Mais par contre, il n'existe pas de nombre décimal (ayant un nombre fini de décimales après la virgule) dont le carré soit égal à 13. La valeur exacte de d à mettre dans la dernière colonne du tableau s'écrit $\sqrt{13}$.

❼ Compléter les phrases :

*La racine carrée d'un nombre positif a est le nombre **positif** $\sqrt{a}$ dont le **carré** est a.*

*Le nombre $-\sqrt{a}$ est le nombre **négatif** dont le **carré** est a.*

Activité 2 Monsieur *Puissance-trois*

Lorsqu'un nombre arrive à l'oreille de M. *Puissance-trois*, celui-ci ne peut s'empêcher de multiplier ce nombre par son carré puis d'annoncer le résultat.

❶ Dans le tableau complété suivant, les valeurs ne sont pas arrondies :

Nombre de Sara	–20	–5	–2,7	–1,5	–1	–0,3	–0,01
Réponse de M. *Puissance-trois*	–8000	–125	–19,683	–3,375	–1	–0,027	0,000001

Nombre de Sara	0	0,01	0,3	1	1,5	2,7	5	20
Réponse de M. *Puissance-trois*	0	0,000001	0,027	1	3,375	19,683	125	8000

❷ Notons A le nombre de Sara. La réponse de M. *Puissance-trois* est $A \times A^2$.

Le nombre A peut être négatif, positif ou égal à zéro. Examinons ces cas dans le tableau de signes suivant :

	0	
Signe de A	$-$	$+$
Signe de A^2	$+$	$+$
Signe de $A \times A^2$	$-$	$+$

La lecture de la dernière ligne du tableau indique que la réponse de M. *Puissance-trois*.

a) Sera un nombre positif lorsque le nombre A sera lui-même un nombre positif.

b) Sera un nombre négatif lorsque le nombre A sera lui-même un nombre négatif.

c) Sera égal à zéro lorsque le nombre A sera lui-même égal à zéro.

❸ M. *Puissance-trois* a répondu –89,6 lorsque Sara lui a donné le nombre A (qu'elle garde secret). Il suffit que Sara donne le nombre opposé de celui qu'elle a donné (autrement dit, Sara doit donner $-A$) pour M. *Puissance-trois* lui réponde 89,6. Remarquons que comme –89,6 est négatif, le nombre A donné par Sara était lui aussi négatif (cf. question précédente). Par conséquent, le nombre $(-A)$ que donnera Sara sera un nombre positif.

❹ Chacun leur tour, Benjamin et Maxime donnent un nombre à M. *Puissance-trois*. Le nombre de Benjamin est toujours inférieur à celui de Maxime. La réponse de M. *Puissance-trois* à Benjamin sera inférieure à la réponse à Maxime. Le nombre le plus grand sera donc la réponse donnée à Maxime. C'est une conséquence de la propriété du cours « la fonction cube est croissante » qui sera démontrée en exercice d'approfondissement. Le résultat précédent se résume par la phrase suivante :

Deux nombres et leurs cubes sont rangés dans le même ordre.

Correction des exercices d'apprentissage du chapitre 2

Exercice 1 VRAI / FAUX

Répondre en justifiant.

a) $\sqrt{0,9} = 0,3$

C'est faux. En effet, on calcule $0,3 \times 0,3 = 0,09$.

b) $\sqrt{22,09} = 4,7$

C'est vrai. En effet, on calcule $4,7 \times 4,7 = 22,09$.

c) Un cube est toujours positif.
C'est faux.
Voici un contre-exemple $(-2)^3 = (-2) \times (-2)^2 = -2 \times 4 = -8$

d) L'image de tout nombre réel a par la fonction « carré » puis par la fonction « racine carrée » redonne a.
C'est faux comme le montre le contre-exemple $a = -5$ pour lequel $(-5)^2 = 25$ puis $\sqrt{25} = 5$ donc $\sqrt{(-5)^2} \neq -5$.

e) C'est faux. En effet, on ne peut pas appliquer la fonction « racine carrée » à un nombre strictement négatif, donc partant d'un nombre strictement négatif a on ne pourra pas retrouver a en appliquant successivement la fonction « racine carrée » puis « carré ».

f) Pour tout nombre réel x, on a $\sqrt{x^2} = x$.
C'est faux. Prenons $x = -2$. On calcule $\sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4} = 2 \neq -2$. N'importe quel nombre strictement négatif x aurait aussi convenu.

g) Pour tout $x \in \left[0;+\infty\right[$, on a $\left(\sqrt{x}\right)^2 = \sqrt{x^2}$.
C'est vrai. Soit $x \in \left[0;+\infty\right[$. On calcule $\sqrt{x^2} = x = (\sqrt{x})^2$.

h) Une fonction constante est une fonction qui n'est ni croissante ni décroissante.
C'est faux. En fait, une fonction constante est à la fois croissante et décroissante. En effet, soit f est une fonction constante. Si x_1 et x_2 sont deux nombres réels tels que $x_1 \leq x_2$ alors $f(x_1) = f(x_2)$ donc $f(x_1) \leq f(x_2)$. Ainsi f est croissante. De même, si x_1 et x_2 sont deux nombres réels tels que $x_1 \leq x_2$, comme $f(x_1) = f(x_2)$, $f(x_1) \geq f(x_2)$. Donc f est décroissante.

i) Une fonction qui n'est ni croissante ni décroissante est une fonction constante.
C'est faux.
En effet, une fonction peut être tantôt croissante, tantôt décroissante sans être constante ; comme l'est par exemple la fonction $x \mapsto x^2$ sur l'intervalle $[-1 ; 1]$. (elle décroît sur $[-1 ; 0]$ puis croît sur $[0 ; 1]$).

Exercice 2

- (P2) implique (P1). En effet, (P1) découle de la définition de la croissance de $x \mapsto \sqrt{x}$ (c'est-à-dire de (P2)) avec $x_1 = 3$ et $x_2 = 4$ d'une part, puis avec $x_1 = 4$ et $x_2 = 5$ d'autre part.
- (P5) implique (P4) puisqu'un nombre est strictement négatif lorsqu'il n'appartient pas au domaine de définition de la fonction « racine carrée » c'est-à-dire à $\left[0\,;+\infty\right[$.
- (P6) implique (P3) puisque un nombre est positif lorsqu'il appartient à $\left[0\,;+\infty\right[$.

Exercice 3

Un ballon de basket a un rayon compris entre 23,8cm et 24,5cm. Donner un encadrement de son volume en cm^3.

Notons R le rayon du ballon de basket. On sait que $23{,}8 \le R \le 24{,}5$.

Rappelons que le volume V du ballon (assimilable à une boule) est donné par la formule $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

Notons f la fonction $x \mapsto \frac{4}{3}\pi x^3$. Comme la fonction « cube » est une fonction croissante sur $\mathbb{R}$, la fonction f est aussi une fonction croissante sur $\mathbb{R}$ (car $\frac{4}{3}\pi > 0$).
La double inégalité $23{,}8 \le R \le 24{,}5$ implique donc que $f(23{,}8) \le f(R) \le f(24{,}5)$.

Autrement dit, $\frac{4}{3}\pi(23{,}8)^3 \le V \le \frac{4}{3}\pi(24{,}5)^3$.
D'où $56470{,}2201017... \le V \le 61600{,}8723504...$

Pour trouver un encadrement au cm^3, on n'a pas le droit de *rétrécir* l'encadrement donc on retient $56470 \le V \le 61601$.

Conclusion Le volume du ballon de basket est compris entre 56 470 cm^3 et 61 601 cm^3.

Exercice 4

Le volume de lait contenu dans le grand bol est $V = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\pi 15^3\right)$.

Le volume de lait que peut contenir un petit bol est $V = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\pi 10^3\right)$.

Un nombre de bols suffisant est un nombre entier supérieur ou égal à $\dfrac{\frac{4}{3}\pi 15^3}{\frac{4}{3}\pi 10^3}$.

On calcule $\dfrac{\frac{4}{3}\pi 15^3}{\frac{4}{3}\pi 10^3} = \left(\frac{15}{10}\right)^3 = \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{27}{8} = 3 + \frac{3}{8}$.

Le plus petit nombre de bols suffisant est donc égal à 4.

Exercice 5

Résolvons graphiquement l'équation $\sqrt{x} = 2$.

D'abord, on « *complique* » le problème :

$\sqrt{x} = 2$ équivaut à $\begin{cases} \sqrt{x} = y \\ y = 2 \end{cases}$

Ensuite, on « *interprète* » les équations :

- $y=\sqrt{x}$ équivaut à « Le point M de coordonnées $(x\ ;\ y)$ est sur la courbe de la fonction « racine-carrée ».
- $y=2$ équivaut à « Un point M de coordonnées $(x\ ;\ y)$ est sur la droite d'équation $y=2$ » (peu importe son abscisse x).

Donc $\begin{cases}\sqrt{x}=y\\ y=2\end{cases}$ équivaut à $\begin{cases}M(x\ ;\ y)\in\mathscr{C}\\ M(x\ ;\ y)\in\mathscr{D}\end{cases}$ équivaut à $M(x\ ;\ y)\in\mathscr{C}\cap\mathscr{D}$ où

– $\mathscr{C}$ est la courbe de la fonction « racine carrée ».

– $\mathscr{D}$ est la droite d'équation $y=2$ (cette droite est parallèle à l'axe des abscisses).

Enfin, on « *resimplifie* » (on ne s'intéresse qu'à x) :

$\sqrt{x}=2$ équivaut à « x est l'abscisse d'un point $M\in\mathscr{C}\cap\mathscr{D}$ ».

Résumons ce qui vient d'être dit :

« Les solutions de l'équation $\sqrt{x}=2$ sont les **abscisses** des points d'intersection de la courbe de la fonction « racine-carrée » et de la droite d'équation $y=2$ ».

La lecture sur le graphique ci-dessous nous indique que la courbe $\mathscr{C}$ et la droite $\mathscr{D}$ n'ont qu'un point d'intersection, son abscisse est égal à 4.

Conclusion : L'ensemble des solutions de l'équation $\sqrt{x}=2$ est $\boxed{\mathscr{S}=\{4\}}$.

De façon analogue, les solutions de l'équation $\sqrt{x}=7$ sont « les abscisses des points d'intersection de la courbe de la fonction « racine-carrée » et de la droite d'équation $y=7$ ». On lit sur le graphique $\boxed{\mathscr{S}=\{49\}}$.

Pour l'équation $\sqrt{x}=0$, la droite à considérer est la droite d'équation $y=0$, c'est-à-dire l'axe des abscisses.

La courbe $\mathscr{C}$ n'a qu'un seul point commun avec l'axe des abscisses, c'est le point O. Son abscisse est égale à zéro. Donc $\boxed{\mathscr{S}=\{0\}}$.

Pour l'équation $\sqrt{x}=-1$, la droite à considérer est la droite d'équation $y=-1$.

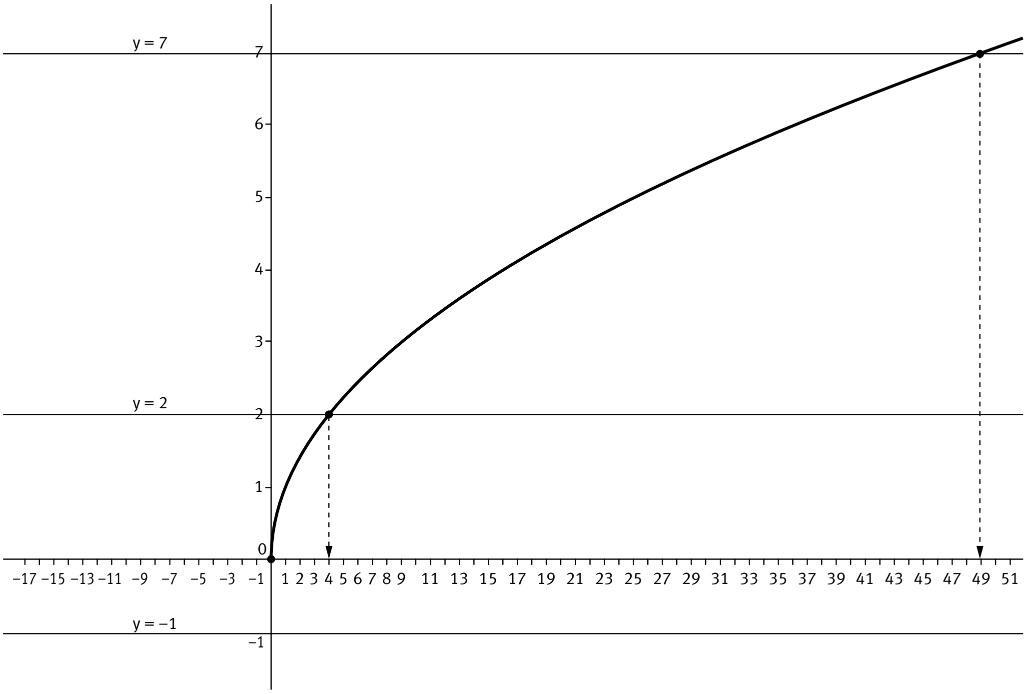
La courbe $\mathscr{C}$ ne coupe pas cette droite, autrement dit, il n'y a aucun point d'intersection. Donc $\boxed{\mathscr{S}=\varnothing}$.

Voir graphique page suivante.

Pour résoudre l'inéquation $\sqrt{x}\geq 3$, la démarche est analogue à la précédente.

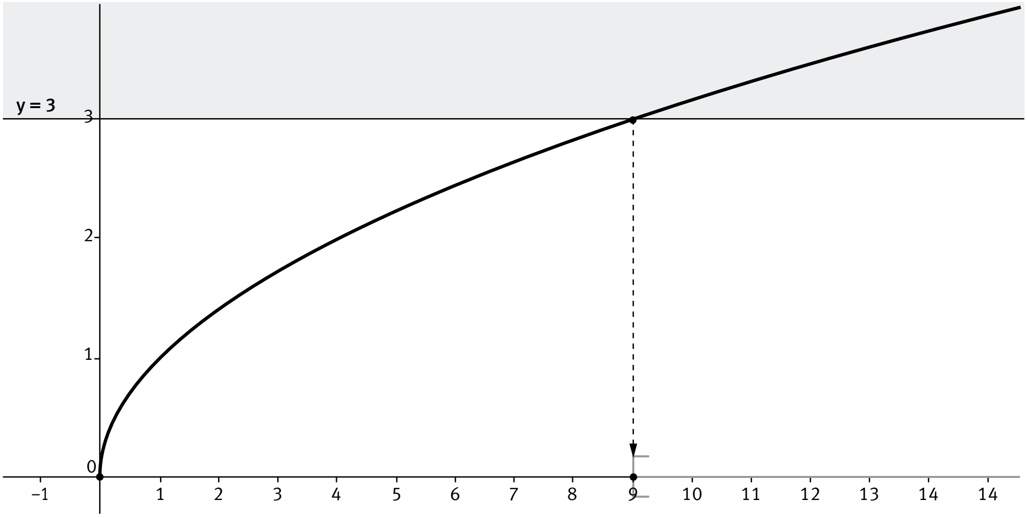
On aboutit à $\sqrt{x}\geq 3$ équivaut à $\begin{cases}\sqrt{x}=y\\ y\geq 3\end{cases}$ équivaut à $\begin{cases}M(x\ ;\ y)\in\mathscr{C}\\ M(x\ ;\ y)\in\mathscr{D}\end{cases}$ équivaut à $M(x\ ;\ y)\in\mathscr{C}\cap\mathscr{D}$ où

- $\mathscr{C}$ est la courbe de la fonction « racine carrée ».
- $\mathscr{D}$ est le demi-plan d'équation $y\geq 3$ (ce demi-plan est situé au-dessus de la droite d'équation $y=3$ (cette droite est parallèle à l'axe des abscisses)).



Donc : « Les solutions de l'équation $\sqrt{x} \geq 3$ sont les **abscisses** des points de la courbe de la fonction « racine-carrée » situé **au-dessus** de la droite d'équation $y = 3$ ».

Par lecture sur le graphique ci-dessous, les abscisses en question sont marquées en couleur sur l'axe des abscisses.



On lit $\boxed{\mathcal{S} = \left[9 ; +\infty\right[.}$

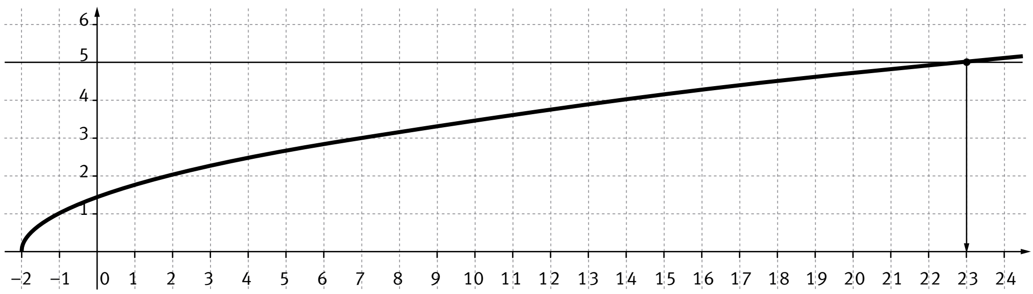
De manière analogue,

« Les solutions de l'équation $\sqrt{x} \leq 4$ sont les **abscisses** des points de la courbe

de la fonction « racine-carrée » situé **au-dessous** de la droite d'équation $y = 4$ ».
On lit $\mathcal{S} = \left[0\,;16\right]$.

Exercice 6

❶ Le calcul de $\sqrt{x+2}$ n'est possible que si $x+2 \geq 0$ c'est-à-dire si $x \geq -2$, ce qu'on écrit encore $x \in \left[-2\,;+\infty\right[$. Les solutions de l'équation $\sqrt{x+2} = 5$ sont les abscisses x des points d'intersection de la droite d'équation $y = 5$ et de la courbe de la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x+2}$.



Sur le graphique précédent, on lit l'abscisse de l'unique point d'intersection : on trouve $x = 23$. Donc $\boxed{\mathcal{S} = \left\{23\right\}}$.

❷ De même, le calcul de $\sqrt{x-2}$ n'est possible que si $x \in \left[2\,;+\infty\right[$. L'ensemble des solutions de $\sqrt{x-2} = 5$ se lit graphiquement : c'est l'abscisse de l'unique point d'intersection de la droite d'équation $y = 5$ et de la courbe de la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x-2}$. $\boxed{\mathcal{S} = \left\{27\right\}}$.

❸ Le calcul de $\sqrt{2-x}$ n'est possible que si $2-x \geq 0$ c'est-à-dire si $x \leq 2$, soit encore $x \in \left]-\infty\,;\ 2\right]$. De manière analogue à la résolution de la question 1, on trouve $\boxed{\mathcal{S} = \left\{-23\right\}}$.

Exercice 7

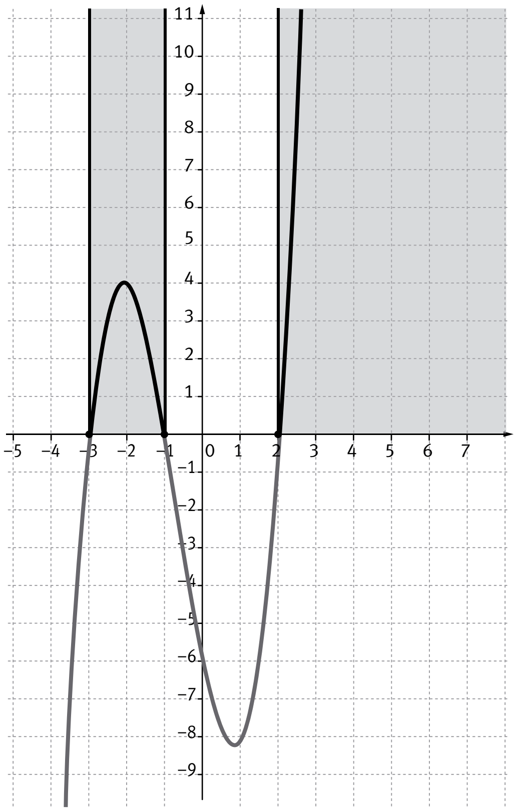
❶ Pour résoudre graphiquement l'inéquation $x^3 + 2x^2 - 5x - 6 \geq 0$ commençons par tracer la courbe de la fonction f définie par $f(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$.

Les points M de cette courbe ont des coordonnées de la forme :

$\left(x\,;x^3 + 2x^2 - 5x - 6\right)$.

Les solutions de l'inéquation $x^3 + 2x^2 - 5x - 6 \geq 0$ sont les abscisses x des points M de la courbe de f dont l'ordonnée $x^3 + 2x^2 - 5x - 6$ est positive ou égale à zéro.

Autrement dit, ce sont les abscisses des points M de la courbe situés dans le demi-plan supérieur (ce demi-plan contient sa frontière qui est l'axe des abscisses). Ces points sont en couleur sur la courbe. Leurs abscisses sont les nombres de l'intervalle $[-3\,;-1]$ et ceux de l'intervalle $\left[2\,;+\infty\right[$.



❷ **a)** En développant :

$$(x+1)(x-2)(x+3)=(x+1)(x^2+x-6)=x^3+2x^2-5x-6.$$

Ainsi $x^3+2x^2-5x-6=(x+1)(x-2)(x+3)$.

b) En remplaçant x^3+2x^2-5x-6 par son expression factorisée (obtenue au ❷**a**) l'inéquation $x^3+2x^2-5x-6\geq 0$ devient $(x+1)(x-2)(x+3)\geq 0$. Il s'agit donc de déterminer les valeurs de x pour lesquelles le produit $(x+1)(x-2)(x+3)$ a un signe positif.

Le tableau de signes suivant répond à la question (les signes « + » de la dernière ligne du tableau).

x	$-\infty$		-3		-1		2		$+\infty$
Signe de $x+1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $x-2$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
Signe de $x+3$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
Signe de $(x+1)(x-2)(x+3)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Ainsi $\mathcal{S}=[-3\,;-1]\cup[2\,;+\infty[$.

Correction des activités du chapitre 3

Activité 1 Notion (intuitive) de limite

❶ 1^er^ cas

Considérons la fonction f définie sur $\left[0\,;+\infty\right[$ par $f(x)=1+\sqrt{5x}$.

1. À la calculatrice, on calcule les images par f des valeurs de la 1^re^ ligne du tableau suivant. Ces valeurs sont donnée à 10^{-4}.

x	4	4,5	4,8	4,9	5	5,01	5,1	5,5	5,6	5,7
$f(x)$	5,4721	5,7434	5,8990	5,9497	6,0000	6,0050	6,0498	6,2440	6,2915	6,3385

2. La lecture du tableau nous incite à dire que : « La limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 5 est égale à **6**.

On écrit $\lim\limits_{x\to 5} f(x)=6$ ».

❷ 2^e^ cas

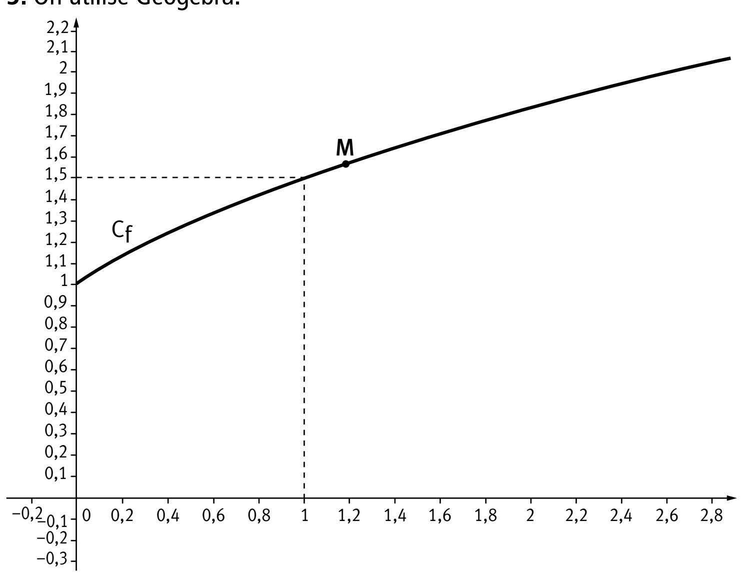
Considérons la fonction f définie sur $\left[0\,;1\right[\cup\left]1\,;+\infty\right[$ par $f(x)=\dfrac{x\sqrt{x}-1}{x-1}$.

1. La fonction f n'est pas définie en 1. Lorsque $x=1$, le numérateur de $f(x)$ vaut $1\sqrt{1}-1=0$ et son dénominateur vaut $1-1=0$. On peut dire que, lorsque x se rapproche de 1, $f(x)$ se rapproche de la forme "$\dfrac{0}{0}$".

2.

x	0	0,2	0,5	0,7	0,9	0,95	0,99	1,01	1,1	1,2
$f(x)$	1	1,138	1,293	1,381	1,462	1,481	1,496	1,504	1,537	1,573

3. On utilise Geogebra.



On observe que le déplacement d'un point M sur la courbe ne subit pas de « saut » , que la courbe semble continue pour des abscisses voisines de 1. On peut même lire la valeur limite que prend $f(x)$ lorsque x s'approche de 1 ; on lit $\frac{3}{2}$.

Si on tape f(1) dans la ligne de commande

le logiciel crée un calcul *non défini*, ce qui tient bien compte du fait que la fonction f n'est pas définie en $x=1$.

Cependant, nous venons d'observer que $\dfrac{x\sqrt{x}-1}{x-1}$ admet une limite (égale à $\frac{3}{2}$) lorsque x se rapproche de 1.

Nous justifierons à l'issue de la séquence 6 que la fonction f peut être prolongée (par continuité) en $x=1$ en adoptant la convention $f(1)=\frac{3}{2}$.

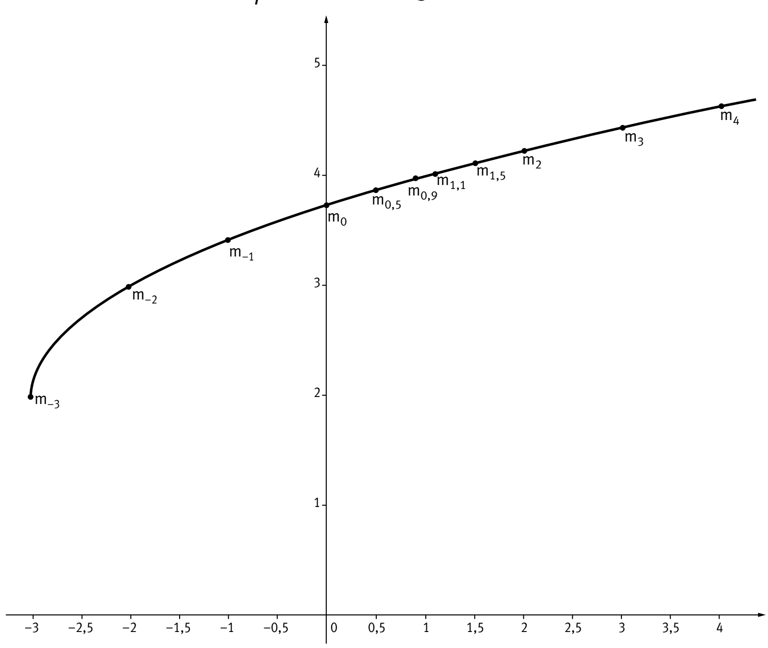
Activité 2 Nombre dérivé : approche graphique

Dans un repère, on considère la courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction f définie par $f(x)=\sqrt{x+3}+2$.

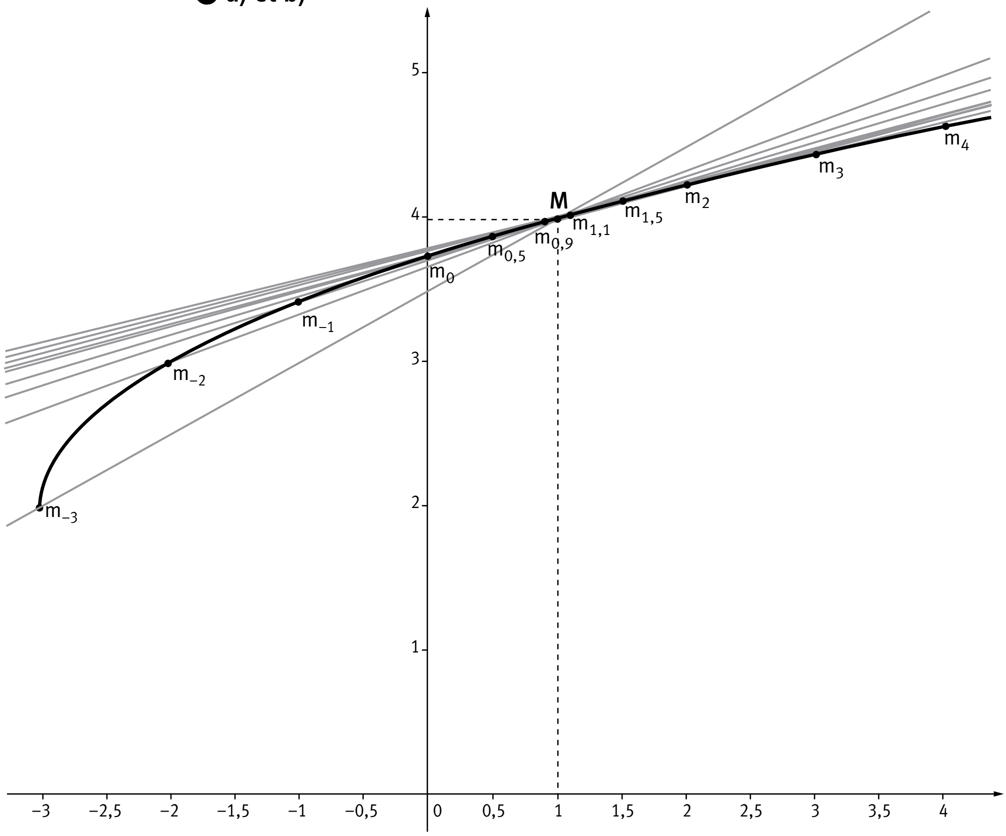
❶ **a)** On remplit le tableau à l'aide de la calculatrice. Les valeurs sont arrondies à 10^{-2}.

Point m (d'abscisse x)	m_{-3}	m_{-2}	m_{-1}	m_0	$m_{0,5}$	$m_{0,9}$	$m_{1,1}$	$m_{1,5}$	m_2	m_3	m_4
x	–3	–2	–1	0	0,5	0,9	1,1	1,5	2	3	4
$f(x)$	2	3	3,41	3,73	3,87	3,97	4,02	4,12	4,24	4,45	4,65

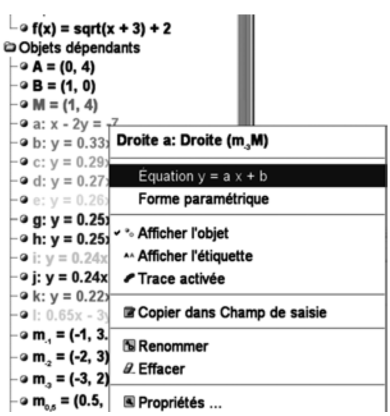
b) Pour le tracé de $\mathscr{C}_f$, on utilise Géogebra.



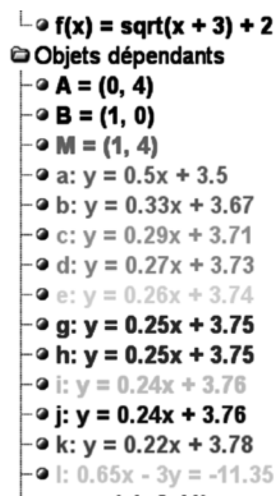
❷ **a) et b)**



c) Le calcul des coefficients directeurs des droites (Mm_{-3}) ,…, (Mm_4) peut s'obtenir directement à l'aide du logiciel Geogebra, en écrivant les équations réduites des droites en question dans la fenêtre algèbre (clic droit sur l'équation de la droite, puis choix « Équation y = ax + b » du menu contextuel).



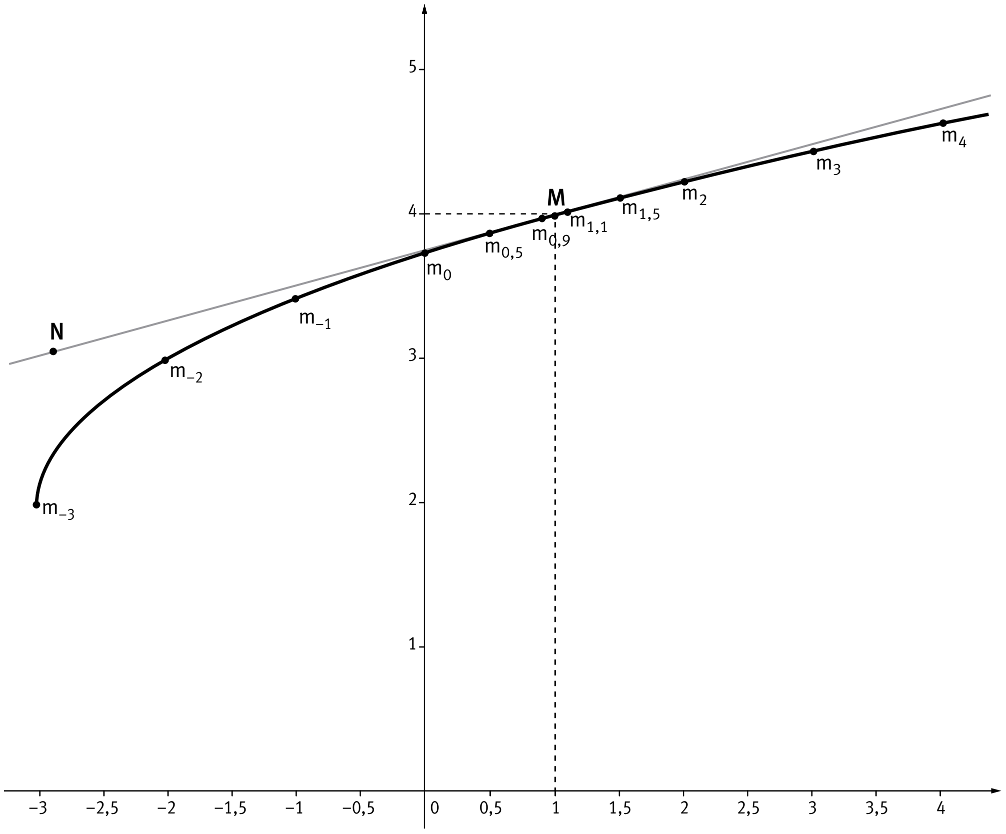
Ainsi on obtient :



Ce qui permet de remplir le tableau (l'objet nommé « a » est la droite (Mm_{-3}), « b » est la droite (Mm_{-2}), etc.).

Droite (Mm)	(Mm_{-3})	(Mm_{-2})	(Mm_{-1})	(Mm_0)	$(Mm_{0,5})$	$(Mm_{0,9})$	$(Mm_{1,1})$	$(Mm_{1,5})$	(Mm_2)	(Mm_3)	(Mm_4)
Coefficient directeur	0,5	0,33	0,29	0,27	0,26	0,25	0,25	0,24	0,24	0,22	0,22

❸ a) Pour tracer une droite Δ passant par le point M, on construit une droite passant par deux points, le point M et un autre point *libre* (nommé N) dans le plan. En déplaçant le point N, on peut *ajuster* la droite pour qu'elle tangente la courbe $\mathscr{C}_f$ au point M.



b) Le coefficient directeur lu est 0,25. On remarque que c'est le coefficient directeur des droites $(Mm_{0,9})$ et $(Mm_{1,1})$. Ces droites sont, parmi les sécantes précédentes, celles pour lesquelles le point m est le plus proche du point M. Ceci correspond bien à l'idée que l'on peut se faire de la tangente, c'est-à-dire que « la tangente est la droite obtenue comme la limite des droites sécantes (Mm) lorsque le point m se rapproche (infiniment près) du point M ».

Activité 3 Nombre dérivé : Approche historique

❶ **a)** Aujourd'hui, à la place de « *différentielle de l'abscisse* » on pourrait dire « *différence des abscisses* ».

b) Voici comment on pourrait réécrire le texte.

Triangle différentiel d'une courbe donnée par une équation : c'est un triangle rectangle, dont l'hypoténuse est une partie de la courbe, qui ne diffère qu'infiniment peu d'une ligne droite. Voir Courbe.

Considérons, par exemple, un point m et un autre point M qui en soit infiniment proche. Si pm est l'ordonnée du point m et PM celle du point M, alors Pp est la différence des abscisses des points m et M. En abaissant une perpendiculaire (MR) (à l'axe des ordonnées) telle que MR = Pp, la distance Rm sera égale à la différence des ordonnées des points m et M. Si ensuite on trace une tangente (TM) à la courbe passant par le point M, puisque m est infiniment proche de M, l'arc de courbe $\overset{\frown}{mM}$ *ne sera pas très différent d'un segment ; par conséquent MmR est un triangle rectangle et constitue le triangle différentiel de cette courbe.*

❷ La tangente (TM) est obtenue comme la limite des droites sécantes (mM) lorsque le point m se rapproche du point M.

❸ Le triangle différentiel est le triangle mRM pour lequel le point M est un point fixe et le point m se rapproche infiniment près du point M. L'intérêt de ce triangle est que son hypoténuse se rapproche de la droite tangente à la courbe au point M.

Correction des exercices d'apprentissage du chapitre 3

Exercice 1

« Dans la définition du nombre dérivé, h est toujours un nombre positif » : C'est Faux.

Le nombre dérivé de f en a est défini comme la limite de $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ lorsque h tend vers zéro.

Si h est négatif, cela signifie que $a+h$ se rapproche de a « par la gauche ».

« Dans la définition du nombre dérivé, *h peut être* égal à zéro » : C'est faux.

Faire $h=0$ reviendrait à calculer $\dfrac{f(a+0)-f(a)}{0}=\dfrac{f(a)-f(a)}{0}=\dfrac{0}{0}$ ce qui n'est pas *autorisé*. C'est d'ailleurs la raison pour laquelle on a *inventé* la notion de limite.

« Le nombre dérivé d'une fonction peut être le même en deux points différents ». C'est vrai.

Géométriquement, ceci signifie que la courbe d'une fonction a deux tangentes parallèles (en deux points différents). On peut facilement en dessiner une (cf. par exemple, exercice 3, question 2, ci-dessous).

Exercice 2

❶ Pour calculer le nombre dérivé de f définie par $f(x)=x^2-3x+1$ en $a=3$, nous devons effectuer le calcul de $\dfrac{f(3+h)-f(3)}{h}$ puis chercher la limite quand h tend vers zéro. Utilisons XCAS.

```
1 f(x) := x^2 - 3x + 1
                    x -> x^2-3·x+1
2 limite( (f(3+h)-f(3)) / h, h, 0)
                    3
3
```

Pour définir la fonction $x \mapsto x^2-3x+1$, on utilise le symbole d'affectation : =

La commande *limite(expr, var, val)* de XCAS calcule la limite de l'expression *expr* (qui dépend de la variable *var*) lorsque *var* tend vers *val*.

Donc, $f'(3)=3$.

❷ De même,

```
1 f(x) := (1 - x) / 2
                    x -> (1-x)/2
2 limite( (f(1/7+h) - f(1/7)) / h, h, 0)
                    -1/2
```

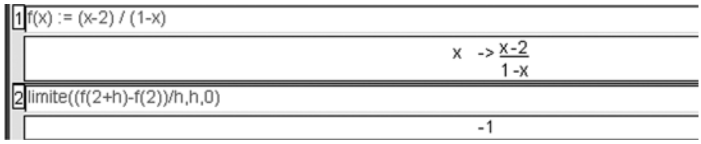
Donc, $f'(\frac{1}{7})=-\frac{1}{2}$.

❸

```
1 f(x) := -x^3+2x^2+1
                    x -> -x^3+2·x^2+1
2 limite((f(2+h)-f(2))/h,h,0)
                    -4
```

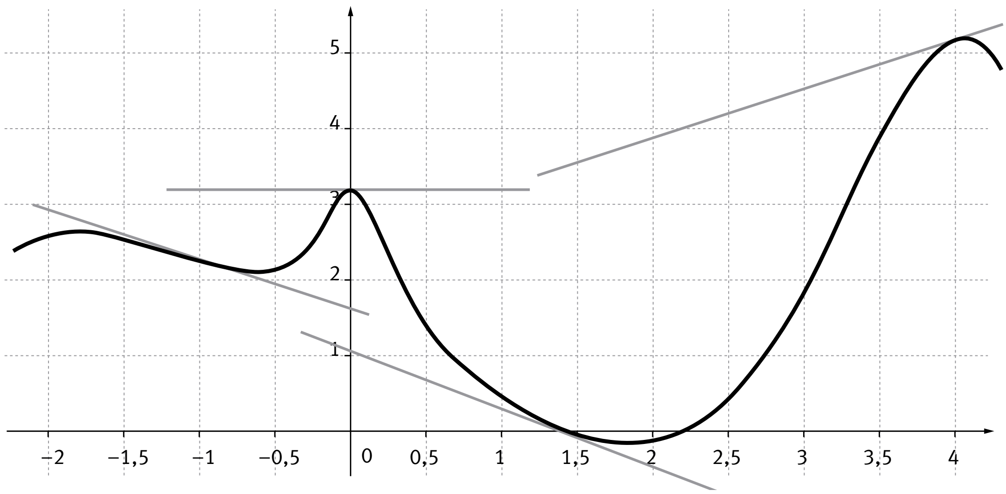
Donc, $f'(2)=-4$.

❹



Donc, $f'(2)=-1$.

Exercice 3 Voici la courbe $\mathscr{C}$ de la fonction f. Les tangentes aux points d'abscisses -1; 0; $1{,}5$; 4 sont tracées en gris.



❶ On lit $f(0)=3{,}2$; $f(1{,}5)=0$ et $f'(0)=0$; $f'\left(\dfrac{3}{2}\right)=-0{,}7$.

❷ Une équation de la tangente à $\mathscr{C}$

- au point d'abscisse -1 : $y-f(-1)=f'(-1)(x-(-1))$ soit $y-2{,}3=-0{,}7(x+1)$, ou encore $y=-0{,}7x+1{,}6$.
- au point d'abscisse 0 : $y=3{,}2$.
- au point d'abscisse $1{,}5$: $y-f(1{,}5)=f'(1{,}5)(x-1{,}5)$ soit $y=-0{,}7x+1$.
- au point d'abscisse 4 : $y-f(4)=f'(4)(x-4)$ soit $y=0{,}7x+2{,}5$.

Les tangentes aux points d'abscisses -1 et $1{,}5$ sont parallèles puisqu'elles ont le même coefficient directeur (égal à $-0{,}7$).

Exercice 4 On considère la fonction f définie par $f(x)=\sqrt{x+3}$.

❶ Pour montrer l'égalité $\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=\dfrac{1}{2+\sqrt{4+h}}$ on calcule la différence de chaque membre de cette égalité avec XCAS.

```
1 f(x) := sqrt(x+3)
                                        x -> √x+3
2 simplify( (f(1+h)-f(1))/h - 1/(2+sqrt(4+h)) )
                                        0
```

Comme cette différence est égale à zéro, l'égalité est bien vraie.

❷

```
1 f(x) := sqrt(x+3)
                                        x -> √x+3
2 limite((f(1+h)-f(1))/h,h,0)
                                        1/4
```

Donc $f'(1)=\dfrac{1}{4}$.

Exercice 5

Une usine fabrique chaque année jusqu'à 50 voitures de collection.

Le coût total de fabrication de x voitures est donné, en euros, par la fonction :

$C(x)=9x^3-710x^2+20000x$.

❶ **a)** Le coût total de fabrication de 12 voitures est $C(12)=153312$ €.

b) Le coût supplémentaire pour la fabrication de la 13^e voiture est

$C(13)-C(12)=159783-153312=6471$ €.

❷ $C_m(12)=6471$ €.

❸ Par définition $C'(12)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{C(12+h)-C(12)}{h}$.

XCAS donne

```
1 C(x):=9x^3-710x^2+20000x
                                        x -> 9*x^3-710*x^2+20000*x
2 limite((C(12+h)-C(12))/h,h,0)
                                        6848
```

Donc $C'(12)=6848$.

On remarque que $C'(12)$ ne diffère que de peu (environ 6%) de $C_m(12)$.

Dans la suite, on admet que $C'(x)=27x^2-1420x+20000$.

❹ À l'aide d'un tableur, on complète le tableau suivant :

x	0	1	2	3	4	…	28	29	30
$C(x)$	0	19299	37232	53853	69216	…	200928	202391	204000
$C(x+1)$	19299	37232	53853	69216	83375	…	202391	204000	205809
$C_m(x)$	19299	17933	16621	15363	14159	…	1463	1609	1809
$C'(x)$	20000	18601	17244	15929	14656	…	– 3296	– 3519	– 3700
Ecart $C'(x)-C_m(x)$	701	668	623	566	497	…	– 4759	– 5128	– 5509
Ecart relatif $\dfrac{C'(x)-C_m(x)}{C_m(x)}$	0,036	0,037	0,037	0,037	0,035	…	– 3,253	– 3,187	– 3,045

On constate que pour une faible production ($x\le 5$) on peut remplacer $C_m(x)$ par $C'(x)$ sans faire une trop grande erreur.

Correction des exercices d'approfondissement du chapitre 5

Exercice I Une fonction mystérieuse

Un élève de première voulant calculer 16^3 à la calculatrice a fait une faute de frappe ; il a ajouté une virgule avant le 3. Il a donc effectué le calcul de $16^{0,3}$. La calculatrice lui a répondu 2,2973967.

Intrigué par ce résultat (il s'attendait à obtenir une erreur) il demande à sa calculatrice le calcul de $16^{0,5}$. Il obtient 4. Il décide d'étudier plus finement la fonction f définie par $f(x) = x^{0,5}$.

❶

x	–9	–5	–1	0	0,5	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$f(x)$	Résultat non réel			0	0,7071	1	1,4142	1,7321	2	2,2361	2,4495	2,6458	2,8284	3

❷ Le calcul de $f(x)$ semble n'être possible que lorsque $x \geq 0$. Par conséquent, on conjecture que l'ensemble de définition de la fonction f est $\left[0\,;+\infty\right[$.

❸ On remarque que $f(9) = 3$; $f(4) = 2$. On a en tête que $\sqrt{9} = 3$; $\sqrt{4} = 2$ ce qui nous incite à penser que la fonction f ressemble à la fonction « racine carrée ».

Notons g cette fonction de sorte que $g(x) = \sqrt{x}$.

❹ La fonction h est donc définie par $h(x) = f(x) - g(x) = x^{0,5} - \sqrt{x}$.

Comme les fonctions f et g sont définies sur $\left[0\,;+\infty\right[$ la fonction h est aussi définie sur $\left[0\,;+\infty\right[$.

Lorsqu'on trace la courbe de la fonction h rien ne semble apparaître à l'écran

En fait, la courbe est confondue avec l'axe des abscisses, pour des abscisses x positives. On peut le voir, par exemple, en traçant non plus la courbe de la fonction h mais celle de $x \mapsto h(x)+1$. Nous conjecturons donc que pour $x \geq 0$ on a $h(x) = 0$; autrement dit que $x^{0,5} - \sqrt{x} = 0$ soit encore $x^{0,5} = \sqrt{x}$, c'est-à-dire que :

La fonction « puissance 0,5 » est la fonction « racine carrée ».

Ceci incite à proposer pour définir la fonction g, la (nouvelle) définition suivante :

« La racine carrée du nombre A est égale à $A^{0,5}$ ».

Avec cette définition, le calcul $\left(\sqrt{A}\right)^2 = A$ s'écrit $\left(A^{0,5}\right)^2 = A^{0,5\times 2} = A$; ce qu'on peut voir comme une généralisation à l'exposant « 0,5 », d'une règle de calcul (bien connue) sur les exposants entiers.

De manière plus générale, on constate que $\sqrt{A}\times\sqrt{B} = \sqrt{A\times B}$ s'écrit $A^{0,5}\times B^{0,5} = (A\times B)^{0,5}$.

Exercice II Démonstration de la croissance de la fonction « cube »

Dans cet exercice on souhaite donner une démonstration de la croissance de la fonction cube.
Pour cela, on se base uniquement sur le fait que le produit de deux nombres positifs est positif.

❶ On calcule

$$(y-x)(x^2+xy+y^2)=yx^2+xy^2+y^3-x^3-x^2y-xy^2=y^3-x^3.$$

On conclut $(y-x)(x^2+xy+y^2)=y^3-x^3$.

❷ Soit deux nombres réels x et y tels que $\boxed{x \le y}$.

a) D'abord, $0 \le y-x$ puisque $x \le y$.

- Donc le signe de x^2+xy+y^2 est le même que celui de $(y-x)(x^2+xy+y^2)$ puisque le signe ne change pas lorsqu'on le multiplie par le nombre positif $y-x$.

  En utilisant la question ❶, ceci revient encore à dire que le signe de x^2+xy+y^2 est le même que celui de y^3-x^3.

  Par conséquent, on aura $y^3-x^3 \ge 0$ seulement lorsque $x^2+xy+y^2 \ge 0$.

b)
- 1er cas : supposons que $0 \le x \le y$.
  Bien sûr, dans ce cas, les nombres x et y étant positifs le nombre x^2+xy+y^2 est aussi positif.

  D'après le **a)** ceci implique que $y^3-x^3 \ge 0$.

- 2e cas : supposons que $x \le 0 \le y$.

  Dans ce cas, les nombres x et y sont de signes contraires donc leur produit xy est négatif, donc $-xy \ge 0$.

  Mais $(x+y)^2 \ge 0$ (un carré est toujours positif) donc la somme $(x+y)^2-xy$ des deux nombres positifs $(x+y)^2$ et $-xy$ est positive. On a donc $0 \le (x+y)^2-xy$.
  On calcule $(x+y)^2-xy=x^2+2xy+y^2-xy=x^2+xy+y^2$;
  d'où $x^2+xy+y^2 \ge 0$.

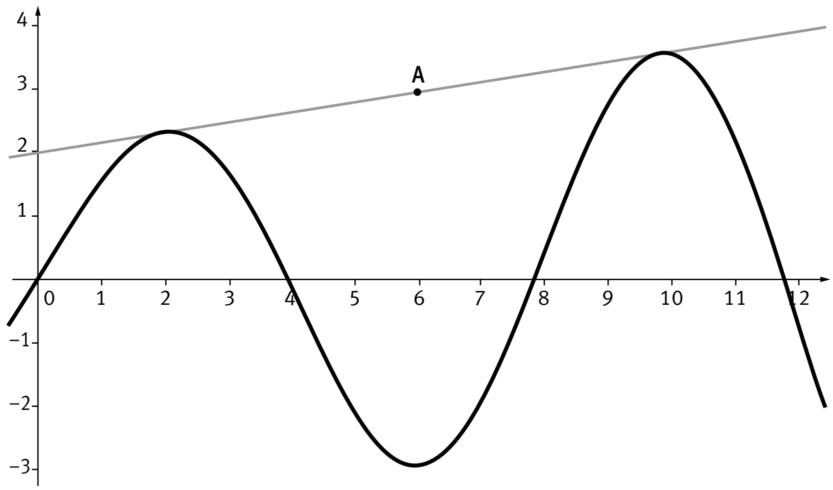
  D'après le **a)** ceci implique que $y^3-x^3 \ge 0$.

- 3e cas : supposons que $x \le y \le 0$.

  Dans ce cas $0 \le -y \le -x$. Appliquons le résultat du 1er cas en remplaçant x par $-y$ et y par $-x$. On conclut que $(-x)^3-(-y)^3 \ge 0$ soit $-x^3+y^3 \ge 0$, ce qu'il fallait démontrer.

Conclusion Nous venons de démontrer qu'étant donnés deux nombres réels x et y, si $x \le y$ alors $x^3 \le y^3$; ce qui prouve que la fonction « cube » est une fonction croissante sur $\mathbb{R}$.

Exercice III



La courbe précédente est celle d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $\left[-0,5\,;12,5\right]$. La droite rouge est tangente à la courbe aux points d'abscisses 2 et 10, coupe l'axe des ordonnées au point de coordonnées $(0;2)$ et passe par le point $A(6;3)$.

❶ $f'(2)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse 2.

Cette tangente est la droite (AB) passant par $A(6;3)$ et $B(0;2)$. Son coefficient directeur est égal à $\dfrac{2-3}{0-6}=\dfrac{1}{6}$, donc $f'(2)=\dfrac{1}{6}$. Comme le point C $(10;f(10))$ appartient à la droite *(AB)*, $\dfrac{f(10)-3}{10-6}=\dfrac{1}{6}$ donc $f(10)=\dfrac{11}{3}$.

❷ Par lecture graphique, le tableau de variations de f est

x	$-0,5$		2		6		10		12,5
$f(x)$		↗		↘		↗		↘	

❸ Préciser le nombre de solution(s) des équations suivantes

a) Les solutions de l'équation $f'(x)=0$ sont les abscisses x des points M de la courbe $\mathscr{C}_f$ en lesquels la tangente est horizontale. Il y en a trois (d'abscisses 2 ; 6 et 10).

b) $f'(x)=\dfrac{1}{2}$ a deux solutions.

c) $f'(x)=-0,1$ a deux solutions.

d) $f'(x)=-5$ n'a pas de solution.

❹ L'ensemble des solutions de l'équation $f'(x)-f'(2)=0$ est $\mathscr{S}=\{2\,;6,2\,;10\}$.

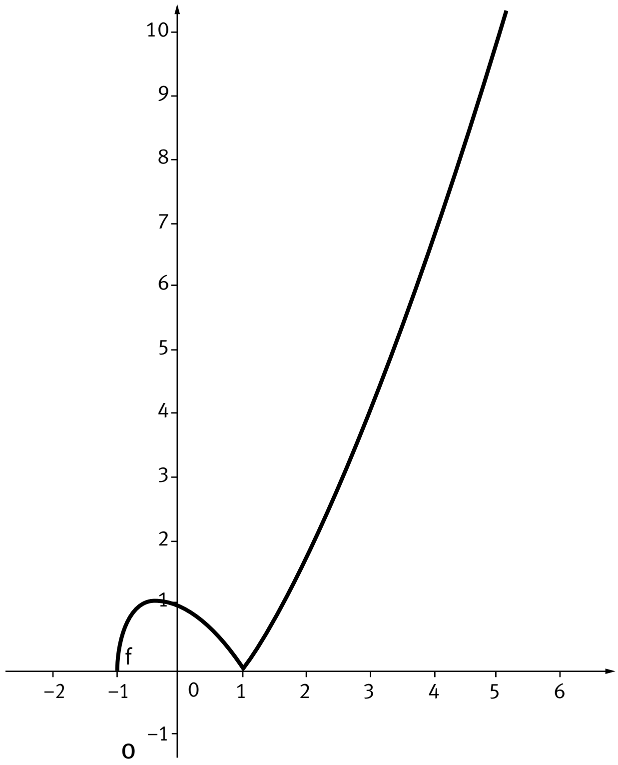
Exercice IV

On considère la fonction f définie pour $x \in \left]-1\,;+\infty\right[$ par $f(x)=\sqrt{x^3-x^2-x+1}$.

❶ **a)** À l'aide de la calculatrice remplir le tableau de valeurs (arrondies à deux décimales) suivant :

x	0	0,5	0,8	0,9	0,99	1,01	1,1	1,2	1,5	1,8	2
$\dfrac{f(x)}{x-1}$	–1	–1,22	–1,34	–1,38	–1,41	1,42	1,45	1,48	1,58	1,67	1,73

b)



❷ **a)** Posons $h=x-1$.

On calcule $\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=\dfrac{f(1+x-1)-f(1)}{x-1}=\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\dfrac{f(x)}{x-1}$ car $f(1)=0$.

b) Quand x tend vers 1, h tend vers $1-1$, c'est-à-dire vers zéro.

❸ Dans le cours, avant de définir ce qu'est le nombre dérivé d'une fonction f en $x=a$ nous avons pris la précaution d'imposer, au préalable, que le quotient $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ admette une limite lorsque h tend vers zéro, h restant différent de zéro.

Dans le cas précis de la fonction f, on observe que les valeurs de $\dfrac{f(x)}{x-1}$ subissent un « saut » lorsque x passe de valeurs proches de 1 mais inférieures à 1 (comme, par exemple, 0,9 puis 0,99), à des valeurs proches de 1 mais supérieures à 1 (comme, par exemple, 1,01 puis 1,1).

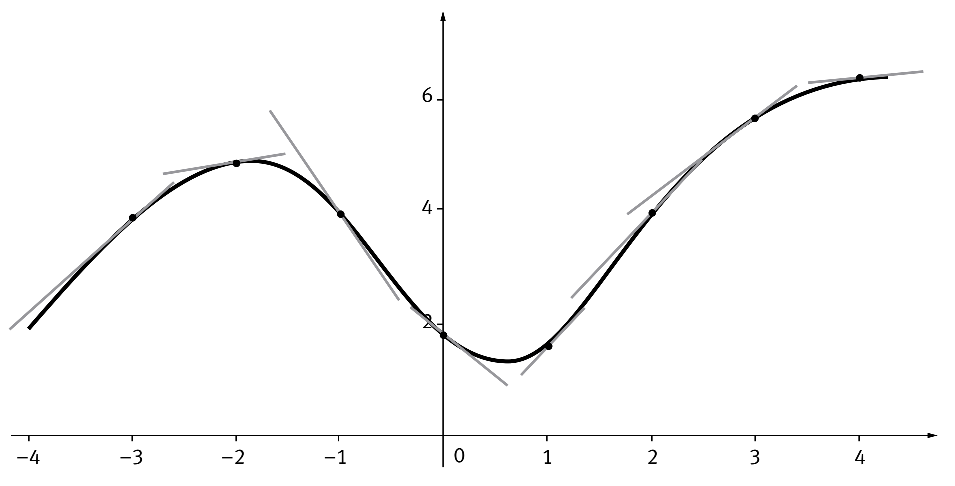
D'après la question 2 (a et b) ceci signifie que lorsque h se rapproche de 0, le quotient $\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$ subit un « saut », suivant que h s'approche de 0 par valeurs inférieures ou par valeurs supérieures.

On comprend que dans un tel cas on ne puisse choisir parmi les deux valeurs (tantôt proches de $-1{,}41$, tantôt de $1{,}42$) laquelle sera la limite. Ceci justifie l'intérêt de s'assurer au préalable que le quotient $\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$ a bien une limite (et pas « *deux limites* », comme ici).

Exercice V

Le but de cet exercice est de chercher à faire le lien entre les variations de la fonction et le signe du nombre dérivé.

Voici la courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction f. Les tangentes aux points d'abscisse $-3;\ -2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4$ sont tracées en gris.



❶ Les tangentes de coefficient directeur négatif sont celles aux points d'abscisses -1 et 0.

Les tangentes de coefficient directeur positif sont celles aux points d'abscisses $-3\,;-2\,;1\,;2\,;3\,;4$.

❷ **a)** On choisit un point de la courbe d'abscisse comprise entre 1 et 3 (on ne dit pas lequel). En ce point, le coefficient directeur de la tangente est positif.

b) Sur l'intervalle $[1\,;\,3]$, la fonction f est croissante.

❸ Compléter la phrase : Sur les deux intervalles $[-4\,;-2]$ et $[0{,}7\,;\,4]$ la courbe $\mathscr{C}_f$ « monte » autrement dit la fonction f est croissante et les tangentes ont toutes un coefficient directeur positif.

Exercice VI Un mobile se déplace sur un axe $(O\,;\vec{i})$.

Son abscisse (en mètre) à l'instant t (en seconde) est $x(t)=t^2-t+1$.

❶ À l'instant $t=2$ l'abscisse du mobile est égale à $x(2)=2^2-2+1=3$.

❷ **a)** On calcule $x(7)-x(2)=7^2-7+1-3=40$.

Donc, entre les instants $t=2$ et $t=7$ le mobile a parcouru 40 mètres.

b) Entre les instants $t=2$ et $t=7$ il s'est écoulé 5 secondes.

La vitesse moyenne du mobile entre les instants $t=2$ et $t=7$ est définie par

$$\text{Vitesse moyenne}=\frac{\text{distance parcourue}}{\text{temps écoulé}}$$

c) La vitesse moyenne du mobile entre les instants $t=2$ et $t=7$ est égale à

$V_{2\to 7}=\dfrac{40}{5}=8\ \text{m.s}^{-1}$ soit $28{,}8\ \text{km.h}^{-1}$.

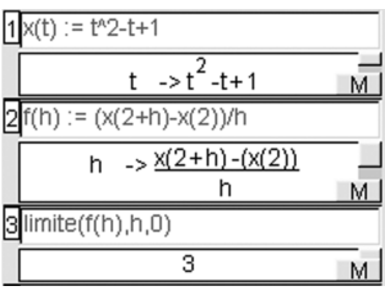
❸ Pour chaque instant t on écrit $h=t-2$.

a) h représente le temps écoulé depuis l'instant $t=2$.

On calcule $f(h)=\dfrac{x(2+h)-x(2)}{h}$.

b) La valeur de $f(h)$ pour $h=5$ est $f(5)$. C'est justement la valeur de $V_{2\to 7}$ donc $f(5)=8$.

Pour calculer $\lim\limits_{h\to 0} f(h)$, nous allons utiliser le logiciel XCAS.



On a obtenu que $\lim\limits_{h\to 0} f(h)=3$. Ceci signifie que la limite, lorsque h tend vers zéro, de la vitesse moyenne entre deux instants $t=2$ et $t=2+h$ (autrement dit entre l'instant $t=2$ et un instant très proche) est égale à $3\ \text{m.s}^{-1}$.

On dira que la **vitesse instantanée** à l'instant $t=2$ est égale à $3\ \text{m.s}^{-1}$.

Exercice VII Quatre bûches de bois cubiques ont respectivement pour côté (en cm) :

x; $x+1$; $x+2$ et $x+3$.

❶ Le volume occupé par la plus grande de ces bûches est égal au volume d'un cube de côté $x+3$, soit $(x+3)^3$.

Le volume occupé par les trois autres réunies est égale à $(x+2)^3+(x+1)^3+x^3$

x est solution de l'équation $(x+2)^3+(x+1)^3+x^3=(x+3)^3$

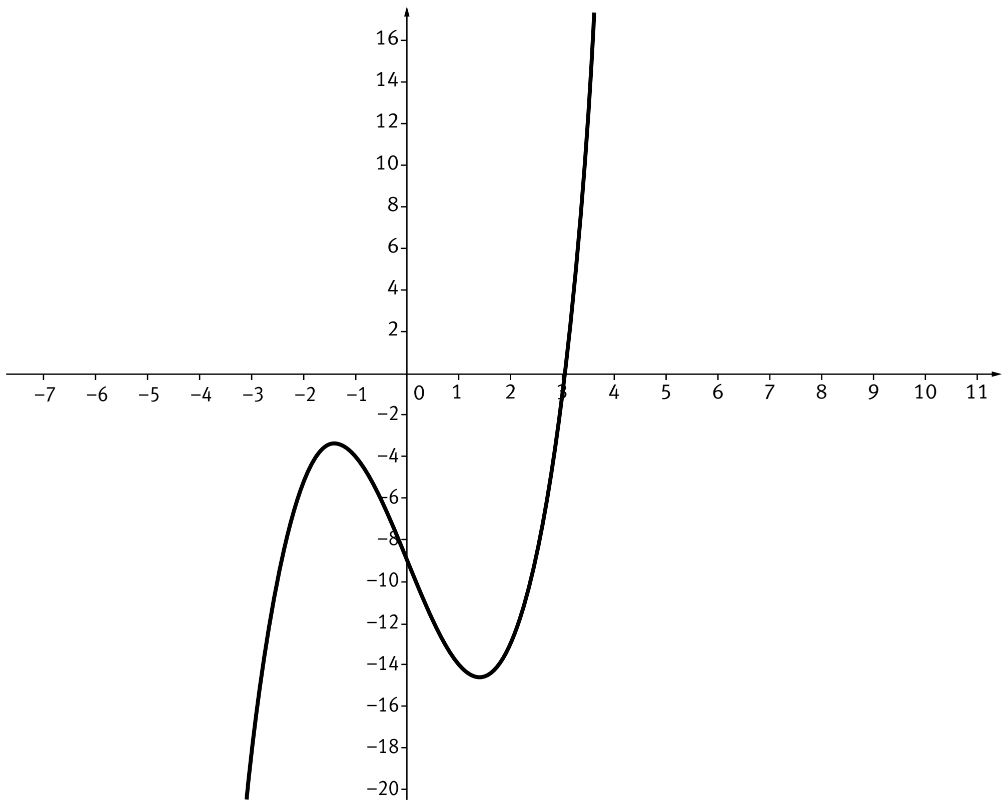
soit encore $(x+2)^3+(x+1)^3+x^3-(x+3)^3 = 0.$

On peut développer le membre de gauche de cette équation à l'aide du logiciel XCAS :

```
1 developper((x+2)^3+(x+1)^3+x^3-(x+3)^3)
        2*x^3+0-12*x-18                  M
```

Par conséquent, x est solution de l'équation $2x^3-12x-18=0$, ou encore (en divisant par 2) x est solution de l'équation $x^3-6x-9=0$.

❷ Graphiquement, on lit que la seule valeur de x possible est $x=3$.



■

Corrigé séquence 4

Correction des activités du chapitre 4

Activité 1 Médiane, quartiles, déciles d'une série à caractère discret

❶ On a demandé à 50 personnes prenant l'autobus, le nombre de fois où chacune de ces personnes a utilisé ce type de transport pendant la semaine écoulée.

Nombre de voyages en autobus : x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Effectif	3	3	5	7	6	9	5	4	5	3
Effectif cumulé croissant : n_i	3	6	11	18	24	33	38	42	47	50
Fréquence en %	6%	6%	10%	14%	12%	18%	10%	8%	10%	6%
Fréquence cumulée croissante en %	6%	12%	22%	36%	48%	66%	76%	84%	94%	100%

❷ Les effectifs cumulés croissants montrent que la médiane est égale à 6 : en effet, on doit calculer la demi-somme de la 25$^{\text{ième}}$ et de la 26$^{\text{ième}}$ valeurs de la série qui sont toutes les deux égales à 6.

❸ Les fréquences cumulées croissantes indiquent que la plus petite valeur q du caractère pour laquelle au moins 25% des données ont une valeur inférieure à q est $q = 4$, puisque pour $q = 3$ la fréquence cumulée croissante est égale à 22%, inférieure à 25%, et que pour $q = 4$ la fréquence cumulée croissante dépasse 25% (elle vaut 36%).

De même la plus petite valeur q' pour laquelle au moins 75% des données ont une valeur inférieure à q' est $q' = 7$, puisque pour $q' = 6$ la fréquence cumulée croissante est égale à 66%, inférieure à 75%, et que pour $q' = 7$ elle dépasse 75% (elle vaut 76%).

❹ La plus petite valeur d pour laquelle au moins 10% des données ont une valeur inférieure à d, est $d = 2$.

Enfin, la plus petite valeur du caractère pour laquelle au moins 90% des données ont une valeur inférieure à d', est $d' = 9$.

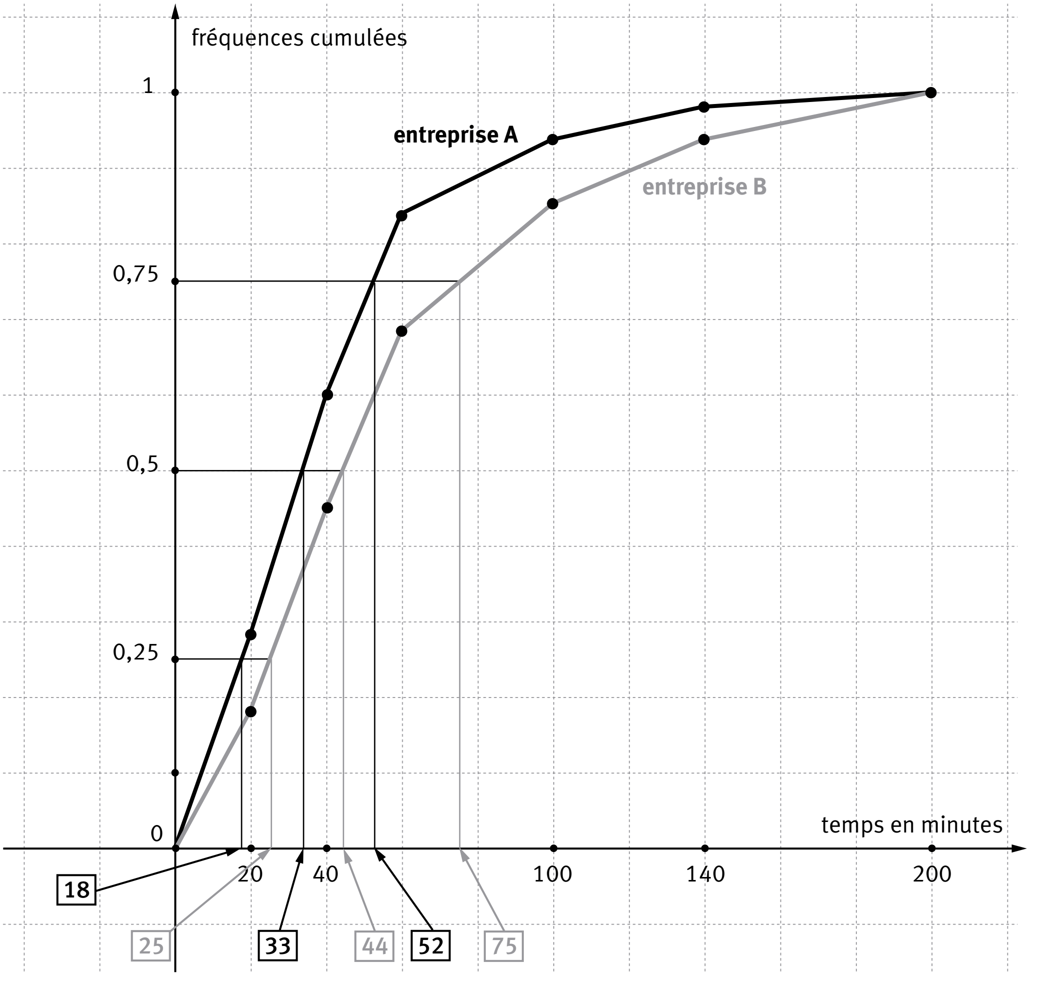
Activité 2 **Avec deux séries à caractère continu.**

❶ Voici le tableau complet pour l'entreprise B.

Temps en minutes x_i	[0 ; 20[	[20 ; 40[	[40 ; 60[	[60 ; 100[	[100 ; 140[	[140 ; 200]
Effectif n_i	29	43	38	27	13	10
Effectif cumulé croissant	29	72	110	137	150	160
Fréquence f_i (valeur approchée)	0,18	0,27	0,24	0,17	0,08	0,06
Fréquence cumulée croissante (valeur approchée)	0,18	0,45	0,69	0,86	0,94	1

❷ La classe médiane pour l'entreprise B est [40 ; 60[car c'est la première classe pour laquelle la fréquence cumulée croissante est supérieure à 0,5 (soit 50%).

❸ On a construit sur le même graphique les courbes des fréquences cumulées croissantes concernant les montants des achats dans les magasins A et B.



❹ On doit d'abord remarquer que les lectures graphiques ne donnent que des valeurs approchées, d'autant plus que nous n'avons pas de renseignements sur le temps consacré au sport à l'intérieur des classes de la série statistique. Les segments que l'on trace pour obtenir les courbes supposent que la répartition des données à l'intérieur de chaque classe est régulière.

Les abscisses des points des deux courbes d'ordonnées 0,5, 0,25 et 0,75 sont indiquées sur le graphique.

On observe que les abscisses pour l'entreprise A sont toutes inférieures aux abscisses correspondantes pour l'entreprise B.

Cela traduit la position des courbes : la courbe concernant l'entreprise A est « à gauche » de celle de l'entreprise B.

Et cela signifie que le temps consacré au sport dans l'entreprise A est, en général, moins élevés que dans l'entreprise B. En effet :

- 50% des employés de l'entreprise A consacre moins de 33 minutes au sport par semaine, alors que 50% des employés de l'entreprise B y consacre moins de 44 minutes ;
- 25% des employés de l'entreprise A consacre moins de 18 minutes au sport par semaine alors que 25% des employés de l'entreprise B y consacre moins de 25 minutes.
- 75% des employés de l'entreprise A consacre moins de 52 minutes au sport par semaine , alors que 75% des employés de l'entreprise B y consacre moins de 75 minutes.

On peut dire aussi que la courbe concernant l'entreprise A est « au dessus » de la courbe concernant l'entreprise B.

Cela signifie que pour un temps fixé (c'est-à-dire une abscisse fixée) l'ordonnée est plus grande sur la courbe qui concerne l'entreprise A .

Par exemple, si on choisit l'abscisse 120, on trouve environ l'ordonnée 0,95 sur la courbe concernant l'entreprise A et environ 0,9 sur la courbe concernant l'entreprise B. Cela signifie que, dans l'entreprise A, 95% des employés consacre moins de 120 minutes au sport par semaine, alors que, dans l'entreprise B, 90% y consacre moins de ce même temps. Et, donc, en proportion, il y a davantage d'employés consacrant plus de 120 minutes au sport dans l'entreprise B que dans l'entreprise A.

Et il en est de même pour toutes les abscisses que l'on peut fixer.

Toutes ces observations montrent que le temps consacré au sport par semaine dans l'entreprise A est inférieur aux temps consacré au sport dans l'entreprise B.

Correction des exercices d'apprentissage du chapitre 2

Exercice 1 Pour déterminer la médiane et les quartiles de la série statistiques on complète le tableau par les effectifs cumulés croissants et les fréquences cumulées croissantes.

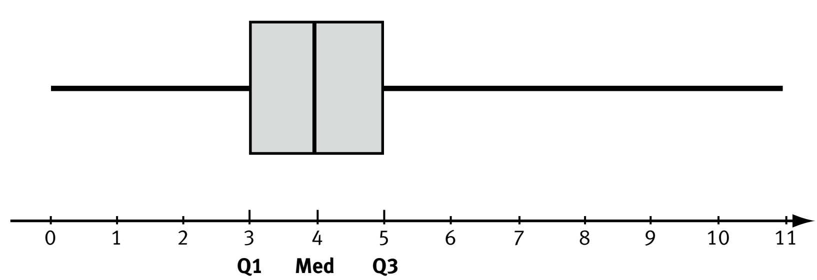
Nombre d'appels x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Nombre de nuits n_i	14	70	155	185	205	150	115	65	30	5	1	5
Effectifs cumulés croissants	14	84	239	424	629	779	894	959	989	994	995	1000
Fréquences cumulées croissantes	0,014	0,084	0,239	0,424	0,629	0,779	0,894	0,959	0,959	0,994	0,995	1

Il y a 1000 nuits, 1000 est un nombre pair, donc pour déterminer la médiane on doit faire la demi-somme du nombre d'appels de la 500$^{\text{ième}}$ nuit et de la 501$^{\text{ième}}$. On observe que, pour ces deux nuits, il y a eu le même nombre d'appels, c'est donc ce nombre qui est la médiane : médiane = 4.

Les fréquences cumulées croissantes montrent que la plus petite valeur de la série pour laquelle au moins 25% des données lui sont inférieures est 3 car il y a 23,9% des données qui sont inférieurs à 2, mais il y a 42,4% des données qui sont inférieurs à la valeur suivante qui est 3, donc $Q_1 = 3$.

De même, la plus petite valeur de la série pour laquelle au moins 75% des données lui sont inférieures est 5, donc $Q_3 = 5$.

Ces résultats sont confirmés par le logiciel sinequanon.



Exercice 2 On complète les données par les effectifs cumulés croissants et les fréquences cumulées croissantes pour les deux séries de 25 données chacune.

1^er^ sauteur

Hauteur	4,70	4,80	4,85	4,90	4,95	5,00	5,05	5,10	5,20
Nombre de sauts	1	1	1	3	12	4	1	1	1
Effectifs cumulés croissants	1	2	3	6	18	22	23	24	25
Fréquences cumulées croissantes	0,04	0,08	0,12	0,24	0,72	0,88	0,92	0,96	1

Il y a 25 sauts, 25 est un nombre impair, donc la médiane est la valeur du 13$^{\text{ième}}$ hauteur franchie, les effectifs cumulés croissants montrent qu'elle a été égale à 4,95 m, donc médiane = 4,95.

Les fréquences cumulées croissantes montrent que la plus petite donnée pour laquelle au moins 25% des valeurs lui sont inférieures est aussi 4,95 m, donc Q_1 = 4,95. On remarque que Q_1 est égal à la médiane, il y a donc au moins 25% des données qui correspondent à la valeur 4,95 ce qui montre une grande régularité.

De même, la plus petite valeur de la série pour laquelle au moins 75% des données lui sont inférieures est 5,00 m, donc Q_3 = 5.

On remarque que, dans cette série statistique, la médiane et le premier quartile sont confondus. D'après les définitions, il y a donc au moins 25% des données qui correspondent à cette valeur ce qui montre une grande régularité (on peut l'observer directement ici sur les valeurs de la série). On retrouvera une situation analogue dans l'exercice suivant (voir la remarque).

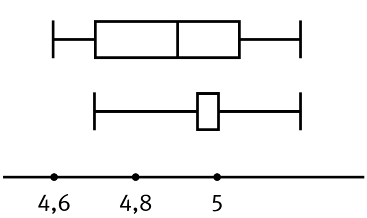
2^e^ sauteur

Hauteur	4,60	4,70	4,75	4,80	4,85	4,90	4,95	5,00	5,05	5,10	5,15	5,20
Nombre de sauts	3	2	2	3	2	2	1	3	2	1	1	3
Effectifs cumulés croissants	3	5	7	10	12	14	15	18	20	21	22	25
Fréquences cumulées croissantes	0,12	0,25	0,33	0,40	0,48	0,56	0,6	0,72	0,80	0,84	0,88	1

Comme pour le premier sauteur, on a complété le tableau et on trouve :

Médiane = 4,90 Q_1 = 4,70 et Q_3 = 5,05.

Les deux diagrammes en boîte sont assez différents.



Pour le premier sauteur (diagramme du bas) la « boîte » n'est pas très large, ses performances entre les deux quartiles sont donc très concentrées, alors que, pour le deuxième sauteur (diagramme du haut), les performances sont plus dispersées, aussi bien les performances extrêmes que les performances situées entre les deux quartiles. On peut aussi déterminer les écarts interquartiles (ce sont les largeurs des boîtes) :

Pour le premier sauteur : $Q_3 - Q_1 = 5 - 4,95 = 0,05$ et pour le deuxième sauteur : $Q_3 - Q_1 = 5,05 - 4,70 = 0,35$.

Donc pour le premier sauteur, 50% des performances autour de la médiane sont dans un intervalle d'amplitude 0,05 alors que, pour le deuxième sauteur cette amplitude est égale à 0,35.

Tout ceci permet de dire que les performances du premier sauteur sont beaucoup plus régulières que celles du second.

Exercice 3

❶ On cherche le plus grand des maximums de chaque diagramme en boîte. C'est donc au Royaume-Uni que se trouve la région ayant le PIB par habitant le plus élevé. De façon analogue, on trouve que la région ayant le PIB par habitant le moins élevé est située en Pologne.

❷ L'écart interquartile de chaque diagramme est la hauteur de la boîte. L'écart interquartile le plus grand est en Italie, le plus petit est en Suède, celui de la Tchéquie en est très proche.

❸ Dans le diagramme de la France, on observe que le troisième quartile Q_3 semble très voisin de la moyenne de l'Union Européenne. C'est le diagramme pour lequel l'écart est le plus grand entre le minimum et le premier quartile Q_1.

❹ Sur les diagrammes de la Belgique, de l'Allemagne, de l'Italie et de la Suède, on observe que la médiane est très proche de la moyenne de l'Union Européenne.

Remarque : Dans le diagramme en boîte de la Finlande, le petit triangle qui représente la médiane est en partie en dehors de la boîte. Or on sait que la médiane est toujours à l'intérieur de la boîte, on va donc considérer que la médiane est à l'intérieur du triangle ; on constate alors, en Finlande et en Hongrie, la même propriété que dans l'exercice précédent : le premier quartile et la médiane sont confondus, il y a donc au moins 25% des données qui correspondent à la médiane. De plus, en Finlande, la médiane est aussi très proche de la moyenne de l'Union Européenne.

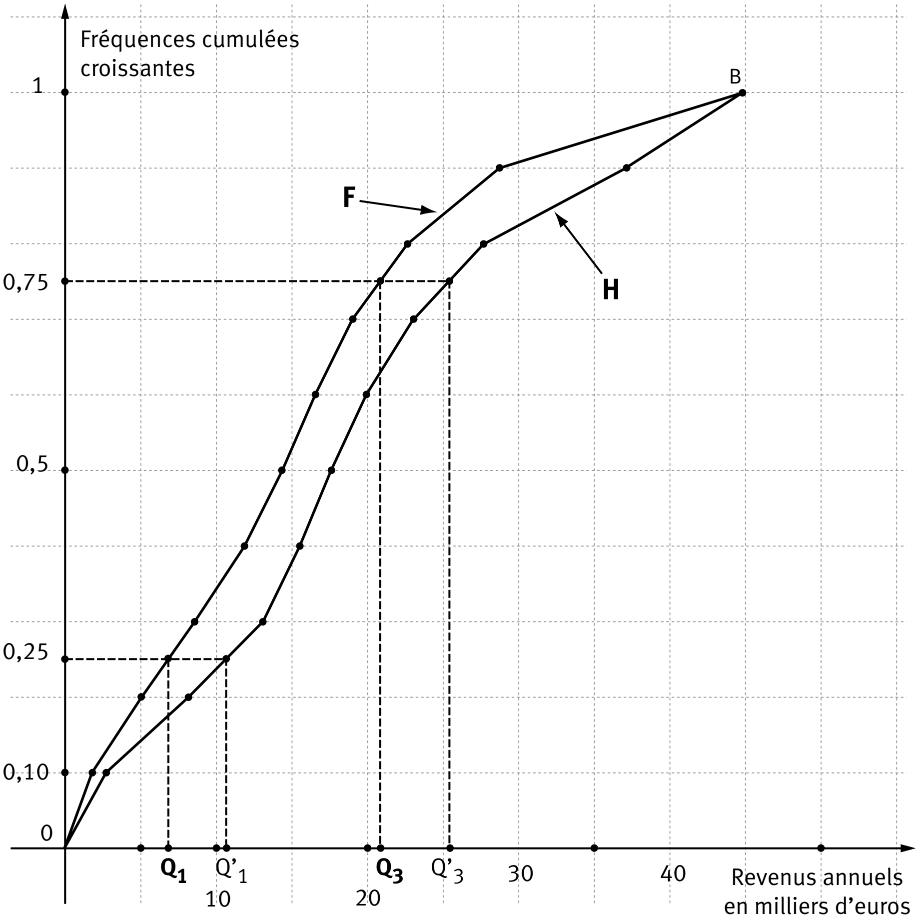
Exercice 4

❶ Les déciles sont les bornes des classes dont les fréquences sont toutes égale à 0,1 (ou 10%). Pour les femmes on obtient donc le tableau suivant où on a indiqué aussi les fréquences cumulées croissantes qui sont utiles dans les questions suivantes.

Classes	$\leq 1,8$	[1,8 : 5[	[5 ; 8,7[	[8,7 ; 12[	[12 ; 14,5[
Fréquences	0,10	0,10	0,10	0,10	0,10
Fréquences cumulées croissantes	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50

Classes	[14,5 ; 16,6[	[16,6 ; 19,1[	[19,1 ; 22,6[	[22,6 ; 28,9[	28,9 ≤
Fréquences	0,10	0,10	0,10	0,10	0,10
Fréquences cumulées croissantes	0,60	0,70	0,80	0,90	1

❷ Le tableau ci-dessus permet de constater que, pour tracer la courbe des fréquences cumulées croissantes il suffit de placer les points de coordonnées $(D_i ; \frac{i}{10})$ l'indice i prenant les valeurs entières 1, 2,…, 9 en complétant au début par l'origine et à la fin par le point de coordonnés (45 ; 1).



On observe que la courbe qui représente les fréquences cumulées croissantes des salaires des femmes est située **à gauche** de la courbe analogue pour les hommes.

Donc, pour une même ordonnée, l'abscisse du point sur la courbe concernant les femmes est plus à gauche que l'abscisse du point de même ordonnée sur la courbe concernant les hommes. Or, dire qu'une abscisse est « plus à gauche » qu'une autre signifie qu'elle est inférieure.

Ainsi, pour une fréquence cumulée donnée, les salaires des femmes sont inférieurs aux salaires des hommes : c'est ce qu'on a obtenu pour la médiane et les quartiles, c'est ce qui est donné pour chaque décile.

On peut dire aussi que la courbe qui représente les fréquences cumulées croissantes des salaires des femmes est située **au dessus** de la courbe analogue pour les hommes. Cela signifie que pour un salaire annuel donné (c'est-à-dire une abscisse fixée) l'ordonnée est plus grande sur la courbe qui concerne les femmes.

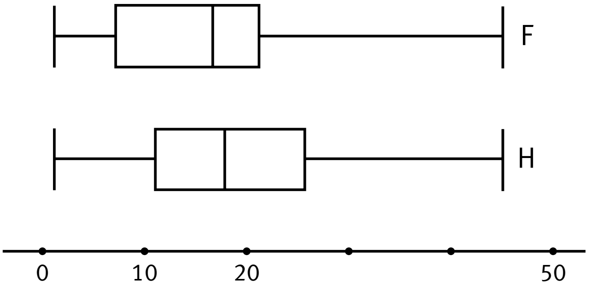
Par exemple, si on choisit l'abscisse 20, on trouve l'ordonnée 0,6 sur la courbe concernant les hommes et environ 0,73 sur celle des femmes ; ainsi, 60% des hommes gagne moins de 20000 € par an, mais cela concerne 73% des femmes : elles sont donc, en proportion, plus nombreuses à gagner moins de 20000 € et donc moins nombreuses à gagner plus de 20000 €.

Ces deux points de vue analysent la même situation d'inégalité.

❸ Pour les salaires des femmes on lit sur la courbe une valeur approchée des quartiles : $Q_1 \approx 7$ et $Q_3 \approx 21$.

Et pour les salaires des hommes, on lit : $Q'_1 \approx 11$ et $Q'_3 \approx 25{,}5$.

Pour les médianes, on prend les cinquièmes déciles. On peut donc construire les deux diagrammes en boîte.



Exercice 5

❶ Pour la série des 22 régions françaises, on trouve que

$\min X = 7{,}8$; $Q_1 = 8{,}3$; $\text{Med} = 8{,}95$; $Q_3 = 10$; $\max X = 12{,}7$.

L'écart interquartile $Q_3 - Q_1$ est donc égal à $10 - 8{,}3 = 1{,}7$.

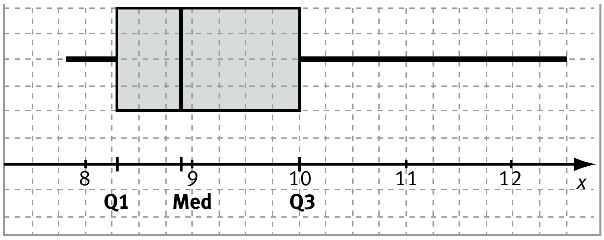
$1{,}5(Q_3 - Q_1) = 1{,}5 \times 1{,}7 = 2{,}55$.

$Q_1 - 2{,}55 = 8{,}3 - 2{,}55 = 5{,}75$ et $Q_3 + 2{,}55 = 10 + 2{,}55 = 12{,}55$.

La seule valeur aberrante de cette série est donc 12,7 qui représente le taux de chômage dans la région Nord-Pas-de-Calais.

❷ Le Nord-Pas-de-Calais se distingue par une part importante des secteurs les plus en difficulté dans son tissu productif suite à la crise, notamment les activités industrielles.

3



Correction des activités du chapitre 3 : moyenne, écart-type

Activité 3

❶ La moyenne des températures minimales est $\overline{x} = 9,8$.

❷ Dans le tableau suivant on indique les différences avec la moyenne (on dit aussi l' « écart à la moyenne »).

Température minimale en °C : x_i	8,8	12,2	13,5	12,7	8,5	7,7	5,2
Ecart : $x_i - \overline{x}$	-1	2,4	3,7	2,9	-1,3	-2,1	-4,6

La somme de ces différences est nulle, donc la moyenne de ces différences est nulle.

❸

Température minimale en °C : x_i	8,8	12,2	13,5	12,7	8,5	7,7	5,2
Ecart : $x_i - \overline{x}$	-1	2,4	3,7	2,9	-1,3	-2,1	-4,6
Carré de l'écart à la moyenne : $(x_i - \overline{x})^2$	1	5,76	13,69	8,41	1,69	4,41	21,16

On a complété le tableau et la moyenne de ces carrés vaut environ 8,0171 ainsi $V \approx 8,0171$.

❹ L'écart-type s est égal à la racine carrée de la variance, donc, pour les températures minimales, $s \approx 2,83$.

❺ On détermine la moyenne des températures maximales : $\overline{x'} = 18,46$.

Puis on trouve la variance $V' \approx 0,757$ et l'écart-type $s' \approx 0,87$ de la série statistique des températures maximales.

On avait obtenu l'écart-type s des température minimales : s ≈ 2,83. On constate que s' est inférieur au tiers de s, s' est beaucoup plus petit que s, cela nous indique que la série des températures maximales est plus régulière que la série des températures minimales.

Mais bien sûr, comme l'étude n'est faite que sur 7 jours, cela s'observe aussi directement sur les données. Cette activité, avec seulement 7 données dans chaque série, permet de comprendre les définitions de la variance et de l'écart-type qui seront efficaces quand les données seront très nombreuses.

Activité 4

Nombre de voyages en autobus : x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Effectif : n_i	3	3	5	7	6	9	5	4	5	3
Ecart à la moyenne : $x_i - \overline{x}$	-4,56	-3,56	-2,56	-1,56	-0,56	0,44	1,44	2,44	3,44	4,44
Carré de l'écart à la moyenne : $(x_i - \overline{x})^2$	20,7936	12,6736	6,5536	2,4336	0,3136	0,1936	2,0736	5,9536	11,8336	19,7136

Le nombre total de voyages est 50, la moyenne est $\overline{x} = 5,56.$

La variance est la moyenne des carrés des écarts à la moyenne : $V = 6,1264$.

Et l'écart-type est égal à la racine carrée de la variance : $s \approx 2,47$.

Activité 5

Temps en minute x_i	[0 ; 20[	[20 ; 40[	[40 ; 60[	[60 ; 100[	[100 ; 140[	[140 ; 200]
Centre des classes	10	30	50	80	120	170
Effectif n_i	35	41	30	12	5	2
Carré de l'écart à la moyenne	890,4256	96,8256	103,2256	1612.8256	6425.6256	16941.6256

L'entreprise A compte 125 employés. En utilisant les centres des classes, on trouve la moyenne : $\overline{x} = 39,84.$

Comme ci-dessus, en prenant les centres des classes, on obtient : $V = 988,78$ et $s \approx 31$.

Remarque : Ces activités ont fait manipuler la variance et l'écart-type pour bien en comprendre les définitions qui vont être données dans la partie Cours, mais, heureusement, les calculatrices ou les tableurs et une propriété du cours nous éviteront ensuite les calculs qui sont assez fastidieux.

Correction des exercices d'apprentissage du chapitre 3

Exercice 6

❶ Le cinquième devoir est noté 15, pour connaître la nouvelle moyenne, on a besoin de la somme des cinq notes. On sait que la moyenne aux quatre premiers devoirs est 12. Or, dans le cours, on a vu que « la moyenne multipliée par l'effectif est égale à la somme des valeurs de la série », donc $12\times4 = 48$ est la somme des notes des quatre premiers devoirs. La somme des cinq notes est donc $48 + 15 = 63$, la nouvelle moyenne est $\frac{63}{5}=12{,}6.$

❷ Soit x la note du cinquième devoir. La moyenne des cinq devoirs est donc $\frac{48+x}{5}.$ Pour trouver la note minimale du cinquième devoir pour avoir au minimum 13 de moyenne aux cinq devoirs, on résout l'inéquation $\frac{48+x}{5}\geq 13.$ Elle équivaut à $48+x\geq 65,$ soit $x\geq 17.$ Il suffit donc à l'élève d'avoir au moins 17.

Exercice 7

❶ Pour calculer le chiffre d'affaire moyen par magasin dans cette chaîne, on utilise l'égalité du cours concernant la moyenne d'une série statistique lorsqu'on connaît les moyennes de deux sous-groupes et leurs fréquences : $\overline{x} = f'\overline{x'}+f''\overline{x''}.$

Pour les magasins pour homme, $f'=0{,}6$ et $\overline{x'}=1{,}1$ million d'euros ; pour les magasins pour femme, $f''=0{,}4$ et $\overline{x''}=1{,}4$ million d'euros.

Donc le chiffre d'affaire moyen pour un magasin est :

$\overline{x}=0{,}6\times1{,}1+0{,}4\times1{,}4=1{,}22$ million d'euros.

❷ Le chiffre d'affaire de chaque magasin augmente de 5%.

On aura donc :

$$\overline{x}=0{,}6\times1{,}1\times1{,}05+0{,}4\times1{,}4\times1{,}05=1{,}05(0{,}6\times1{,}1+0{,}4\times1{,}4)$$
$$=1{,}05\times1{,}22=1{,}281 \text{ millions d'euros}$$

Cet exemple est un cas particulier du cas général qu'on démontrerait selon le même principe.

Si toutes les moyennes partielles augmentent ou diminuent de t%, la moyenne générale augmente ou diminue de t%.

❸ Le chiffre d'affaire de chaque magasin pour homme augmente de 5 % et celui de chaque magasin pour femme de 7%.

a) Comme il y a davantage de magasin pour homme que de magasin pour femme, l'augmentation du chiffre d'affaire moyen sera plus proche de 5% que de 7%, elle sera donc inférieure à 6%.

b) On calcule d'abord le nouveau chiffre d'affaire moyen des magasins pour homme ; le chiffre d'affaire de chaque magasin pour homme est multiplié par 1,05 et il en est de même du chiffre d'affaire moyen : $\overline{x'}=1{,}05\times1{,}1$ million d'euros. De façon analogue le chiffre d'affaire moyen des magasins pour femme est égal à $\overline{x''}=1{,}07\times1{,}4$ million d'euros.

On utilise enfin la même relation que dans la première question, avec ces nouveaux chiffres d'affaires moyens et les mêmes fréquences ; le nouveau chiffre d'affaire moyen est donc :

$\overline{x} = 0,6 \times 1,05 \times 1,1 + 0,4 \times 1,07 \times 1,4 = 1,2922$ million d'euros.

Le quotient du nouveau chiffre d'affaire moyen par le chiffre d'affaire moyen initial est $\dfrac{1,2922}{1,22} \approx 1,059$ ce qui montre que le pourcentage d'augmentation a été d'environ 5,9%, il est inférieur à 6% comme on l'avait prévu.

Exercice 8

❶ Une salle de spectacle a vendu pour une soirée 150 places à 12 € et 100 places à 10 €, le prix moyen d'une place est donc $\dfrac{150 \times 12 + 100 \times 10}{150 + 100} = 11,2$ €.

❷ On cherche un exemple montrant un effet de structure. Pour cela on suppose que, pour une autre soirée, les deux prix augmentent de 1 € : les places seront donc vendues 13€ et 11 €. Soient deux nombres entiers a et b non nuls tels que a places à 13 € ont été vendues ainsi que b places à 11 €. Le prix moyen d'une place pour le second spectacle est alors $\dfrac{a \times 13 + b \times 11}{a + b}$.

On cherche des valeurs de a et b telles que ce prix moyen soit inférieur à 11,2 €. Comme a est multiplié par 13 et b par 11, pour obtenir une moyenne inférieure à 11,2 on doit choisir une grande valeur de b par rapport à a.
Avec $a = 0$, la moyenne est bien sûr égale à 11, mais l'énoncé demande a non nul.

- On peut faire plusieurs essais en faisant varier a et b.
- On peut fixer a, par exemple $a = 10$ et faire des essais avec b pour obtenir $\dfrac{10 \times 13 + b \times 11}{10 + b} \leq 11,2$.
- On peut utiliser la table de valeurs de la calculatrice avec la fonction $b \rightarrow \dfrac{10 \times 13 + b \times 11}{10 + b}$.
- On peut utiliser la formule qui donne le prix moyen avec les fréquences : si on note x la fréquence des places vendues 11 €, la fréquence des places vendues 13 € est alors $1 - x$ et le prix moyen d'une place est $(1 - x) \times 13 + x \times 11$, c'est-à-dire $13 - 2x$. La fonction affine $x \rightarrow 13 - 2x$ est définie sur [0 ; 1], elle est décroissante ; la valeur 11,2 est atteinte lorsque $13 - 2x = 11,2$ soit $x = 0,9$. Ainsi, lorsque la proportion de places vendues à 11 € est supérieure à 90%, le prix moyen est inférieur à 11,2.

  Si on choisit $a = 10$, $b = 91$, le prix moyen d'une place est alors égal à 11,198 €, ce prix moyen est inférieur à celui du premier cas : c'est bien un exemple qui montre un effet de structure.

Exercice 9

Pour le premier sauteur, on trouve : $\overline{x} = 4,952$ et $s \approx 0,091$.

Pour le deuxième sauteur, on trouve : $\overline{x'} = 4,9$ et $s' \approx 0,187$.

La moyenne du second sauteur est légèrement inférieure à celle du premier.

L'écart-type des performances du second sauteur est supérieur à l'écart-type des performances du premier, cela signifie que les performances du second sont moins régulières que celles du premier (on peut bien sûr ici l'observer directement sur les données car il y en a seulement 25, mais, dans la pratique des statistiques où les effectifs sont très grands, il est utile d'avoir de telles informations).

Ces indicateurs permettent de faire des comparaisons statistiques des performances des deux sauteurs, mais d'autres critères peuvent compléter ces comparaisons, par exemple, le second sauteur a atteint plus souvent 5,20 m, la plus grande des hauteurs…

Exercice 10

❶ On obtient $\overline{x} = 4$ et $s \approx 1{,}93$.

❷ L'intervalle $[\overline{x} - s; \overline{x} + s]$ est à peu près l'intervalle [2,07 ; 5,93], il y a $185 + 205 + 150 = 540$ nuits pour lesquelles le nombre d'appels appartient à cet intervalle, c'est-à-dire 54% des 1000 nuits.

❸ De même, l'intervalle $[\overline{x} - 2s; \overline{x} + 2s]$, est à peu près l'intervalle [0,14 ; 7,86], et il y a $70 + 155 + 185 + 205 + 150 + 115 + 65 = 945$ nuits pour lesquelles le nombre d'appels appartient à cet intervalle, c'est-à-dire 94,5% des 1000 nuits.

Cet intervalle $[\overline{x} - 2s; \overline{x} + 2s]$, centré sur la moyenne et dont l'amplitude est égale à 4 fois l'écart-type, contient presque la totalité des effectifs : c'est généralement le cas et cela permet de compléter la description de la série statistique.

Correction des exercices d'approfondissement du chapitre 5

Pour ces exercices, il est vivement conseillé d'utiliser une calculatrice ou un tableur ou le logiciel sinequanon.

Exercice I

❶ La liste des notes obtenues par une classe au premier trimestre a pour médiane 10,5, les quartiles sont 8 et 14, puis la moyenne est 10,77 et l'écart-type vaut 3,78.

❷ Pour le second trimestre la médiane est 11, les quartiles sont 9 et 13, la moyenne est 10,77 et l'écart-type vaut 2,82.

❸ Les moyennes des deux trimestres sont identiques.

L'écart-type du second trimestre est inférieur à celui du premier, on peut en déduire que les notes du second trimestre sont moins dispersées que les notes du premier trimestre.

La comparaison des médianes et des quartiles permet de préciser un peu plus les différences entre ces deux séries de notes.

La médiane du second trimestre est supérieure à celle du premier trimestre, l'augmentation de la médiane (qui partage la série ordonnée en deux parties de même effectif) indique une progression du maximum des notes de la première moitié de la série.

De même le premier quartile du second trimestre est supérieur à celui du premier trimestre, ce qui indique que le maximum des notes qui forment le premier quart de la série ordonnée, a augmenté.

On observe donc une amélioration des notes les plus basses.

Comme la moyenne n'a pas évoluée, on prévoit que cela est compensé par l'évolution des notes les plus élevées : en effet, le troisième quartile a diminué.

Exercice II

Le tableau de l'énoncé donne, pour l'année 2008, le nombre de médecins généralistes et le nombre de médecins spécialistes pour 100 000 habitants (données de l'INSEE) dans chaque région.

Pour le nombre des médecins généralistes pour 100 000 habitants, on obtient : $\overline{x} \approx 155,3$ et s ≈ 17,9.

Pour le nombre des médecins spécialistes pour 100 000 habitants, on obtient : $\overline{x'} \approx 149,3$ et $s \approx 33,4$.

En moyenne, il y a moins de médecins spécialistes que de médecins généralistes, on peut cependant remarquer sur les données que, dans certaines régions particulières, c'est l'inverse. Les deux écart-types montrent que la répartition des médecins spécialistes est beaucoup plus irrégulière que celle des médecins généralistes.

Pour faire les deux diagrammes en boîte, on détermine pour chaque série la valeur minimale, la valeur maximale, la médiane et les quartiles.

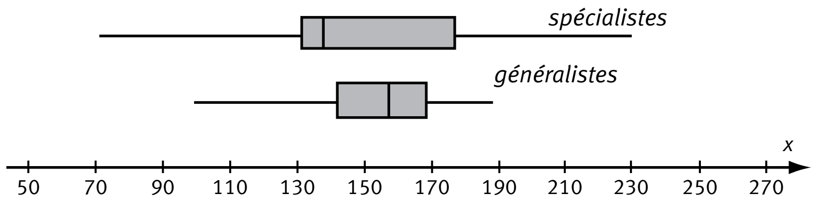
Pour le nombre de médecins généralistes pour 100 000 habitants, on a trouvé :

min = 99, Q1 = 142, médiane = 157,5, Q3 = 169 et max = 188.

Pour le nombre de médecins généralistes pour 100 000 habitants, on a trouvé :

min = 71, Q'1 = 131, médiane = 138, Q'3 = 172 et max = 230.

On peut réaliser le diagramme avec l'option « boîte à moustache multiple » dans « série simple » du logiciel sinequanon.



Ces deux diagrammes permettent de comparer rapidement les répartitions du nombre de médecins généralistes et du nombre de médecins spécialistes pour 100 000 habitants.

Les médianes sont rangées comme les moyennes : la médiane de la série concernant les médecins spécialistes est inférieure à celle qui concerne les médecins généralistes.

L'étendue de la série (maximum – minimum) est plus grande pour les médecins spécialistes, de même que l'écart-interquartile (la longueur du rectangle (la boîte)) : on en déduit que la répartition du nombre de médecins spécialistes pour 100 000 habitants est très irrégulière, ce qui confirme ce que l'on a observé avec les écart-types.

On a l'impression que le diagramme concernant les médecins spécialistes a été obtenu en « étirant » celui concernant les médecins généralistes, aussi bien vers la droite que vers la gauche, les écarts ont donc augmentés.

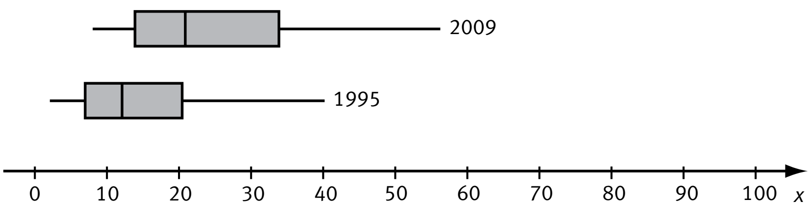
Exercice III On utilise le tableau indiquant le pourcentage de femmes élues au Parlement dans quelques pays du monde, obtenu à partir des données de l'INSEE.

Pour l'année 1995, on trouve $\overline{x} = 14,5$ et $s \approx 9,2,$ et aussi min = 2 , Q_1 = 7, médiane = 12, Q_3 = 20,5 et max=40.

Pour l'année 2009, on trouve $\overline{x'} = 24,5$ et $s' \approx 12,2,$ et aussi min = 8, Q'_1 = 14, médiane = 21, Q'_3 = 35 et max = 56.

On observe d'abord que tous ces indicateurs numériques ont augmenté.

Ils ont presque tous approximativement doublé sauf le minimum qui a été multiplié par 4, le maximum qui a augmenté de 40% et l'écart-type qui a augmenté d'environ 30% : c'est l'écart-type qui a le moins augmenté, les irrégularités ont moins augmenté que les données elles-mêmes.



En regardant les données des 41 pays, on observe une augmentation du pourcentage dans tous les pays, les 41 pays de la série de données ayant même globalement davantage progressé que l'ensemble du Monde puisque, en 2009, le pourcentage au niveau mondial est inférieur à la médiane, alors qu'en 1995, ce pourcentage était égal à la médiane.

Exercice IV

Pour trois classes on a déterminé les paramètres suivants (m désigne la médiane) :

$1\,ES_A$: l'effectif est $N = 30$ et

$x'_{min} = 5,\ Q'_1 = 9{,}5,\ m' = 12,\ Q'_3 = 13,\ x'_{max} = 15,\ \overline{x'} = 12{,}3$ et $s' = 2{,}7.$

$1\,ES_B$: l'effectif est N'=28 et

$x'_{min} = 5,\ Q'_1 = 9{,}5,\ m' = 12,\ Q'_3 = 13,\ x'_{max} = 15,\ \overline{x'} = 12{,}3$ et $s' = 2{,}7.$

$1\,ES_C$: l'effectif est N''=33 et

$x''_{min} = 4,\ Q''_1 = 7,\ m'' = 10,\ Q''_3 = 15,\ x''_{max} = 17,\ \overline{x''} = 12$ et $s'' = 4{,}1.$

Pour déterminer la médiane et les quartiles, la série statistique doit être ordonnée. Or, nous n'avons pas les informations nécessaires pour ordonner les trois classes quand elles sont réunies. On ne peut donc pas connaître la médiane et les quartiles pour l'ensemble des élèves.

On peut savoir quelle est la meilleure note et quelle est la plus basse en prenant la plus grande valeur des maximums et la plus petite valeur des minimums : la meilleure note est donc $X_{max} = x_{max} = 18,$ la plus basse est $X_{min} = x_{min} = 2.$

On a vu dans le cours qu'il est possible de calculer la moyenne d'une série statistique lorsqu'on connaît les moyennes et les effectifs de deux sous-groupes. Il en est de même avec trois groupes, trois classes :

$\overline{X} = \dfrac{\textit{somme des notes}}{\textit{effectif total}} = \dfrac{N\overline{x} + N'\overline{x'} + N''\overline{x''}}{N + N' + N''}$, car, pour chaque classe, la somme des notes est égale au produit de l'effectif par la moyenne.

D'où : $\overline{X} = \dfrac{\textit{somme des notes}}{\textit{effectif total}} = \dfrac{30 \times 11{,}5 + 28 \times 12{,}3 + 33 \times 12}{30 + 28 + 33} = \dfrac{1085{,}4}{91} \approx 11{,}93.$

Quant à l'écart-type, les calculs sont plus délicats.

On peut d'abord calculer la variance pour chacune des classes, puis l'expression $V = \dfrac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{i=p} n_i x_i^2\right) - \overline{x}^2$ permet de récupérer la somme $\sum_{i=1}^{i=p} n_i x_i^2$ pour chaque classe puisqu'on connaît les moyennes et les effectifs. On en déduit la somme des $n_i x_i^2$ pour l'ensemble des trois classes, ce qui permet ensuite de trouver l'écart-type.

Pourlaclassede 1_{ES_A} : $V = s^2 = 3{,}5^2 = 12{,}25$ donc $12{,}25 = \frac{1}{30}\left(\sum_{1ES_A} n_i x_i^2\right) - 11{,}5^2$ et enfin $\sum_{1ES_A} n_i x_i^2 = 30 \times \left(12{,}25 + 11{,}5^2\right) = 4335.$

De façon analogue, on trouve $\sum_{1ES_B} n_i x_i^2 = 4440{,}24$ et $\sum_{1ES_C} n_i x_i^2 = 5306{,}73.$

La variance pour l'ensemble des trois classes est donc :

$$\frac{1}{30+28+33}\left(\sum_{1ES} n_i x_i^2\right) - \overline{X}^2 = \frac{1}{91}(4335 + 4440{,}24 + 5306{,}73) - 11{,}93^2 \approx 12{,}42.$$

D'où l'écart-type $S \approx 3{,}52.$

On peut observer qu'on peut obtenir la moyenne et l'écart-type de l'ensemble des trois classes quand on connaît la moyenne et l'écart-type pour chaque classe, mais que l'analogue n'est pas possible pour la médiane et les quartiles.

Exercice V

❶ Le tableur est particulièrement indiqué pour la réalisation de cet exercice.

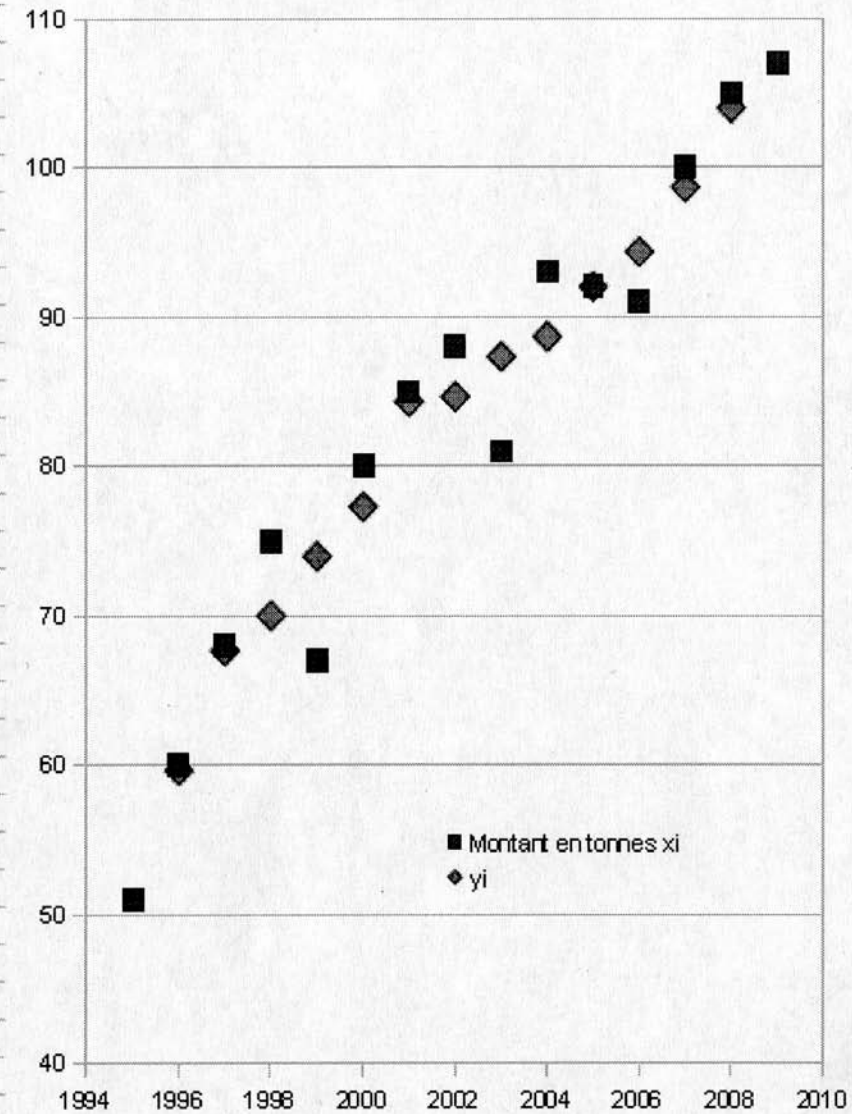
Pour construire la série des x_i, il suffit de sélectionner les colonnes A et B, d'insérer un diagramme, de choisir l'option XY dispersion. On obtient les carrés du graphique ci-après.

❷ Pour obtenir la série des y_i, il suffit d'écrire en cellule C3, la formule $=$(B2+B3+B4)/3 et de la recopier jusqu'en cellule C15.

L'évolution de ces moyennes est fournie par les losanges du graphique ci-après.

❸ Les y_i sont globalement croissants. Le calcul des moyennes représentées par les y_i permet de gommer les fluctuations les plus importantes de la série d'origine et de déterminer une tendance globale. On dit que l'on a lissé la série d'origine par des moyennes mobiles (ici, centrées d'ordre 3).

	A	B	C	D	E
1	année	Montant en tonnes x_i	y_i		
2	1995	51			
3	1996	60	59,67		
4	1997	68	67,67		



Exercice VI

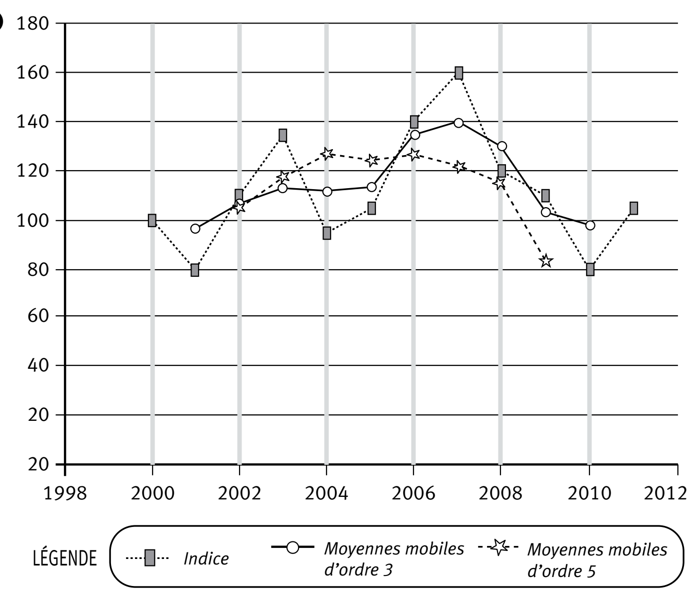
❶

D4 =(B3+B4+B5+B6+B7)/5

	A	B	C	D	E
1	Année	Indice	moyennes mobiles d'ordre 3	Moyennes mobiles d'ordre 5	
2	2000	100			
3	2001	80	96,67		
4	2002	110	108,33	105	
5	2003	135	113,33	117	
6	2004	95	111,67	127	
7	2005	105	113,33	124	
8	2006	140	135	127	
9	2007	160	140	122	
10	2008	120	130	115	
11	2009	110	103,33	83	
12	2010	80	98,33		
13	2011	105			
14					

Pour déterminer les moyennes mobiles d'ordre 3, il suffit d'écrire en cellule C3 la formule =(B2+B3+B4)/3 et pour déterminer les moyennes mobiles d'ordre 5, il suffit d'écrire en cellule D4. La formule =(B3+B4+B5+B6+B7)/5.

❷



Pour obtenir le graphiques ci-dessus, choisir l'option de diagramme XY dispersion puis points et lignes.

Les moyennes mobiles d'ordre 5 montrent moins d'irrégularités que celles d'ordre 4 qui elles-mêmes en montrent moins que les indices de départ.

Les moyennes mobiles d'ordre 5 montrent mieux la tendance générale. L'indice de la matière a globalement augmenté jusqu'en 2006 environ puis a eu tendance ensuite à décroître.

Exercice VII

Courbes de Lorentz

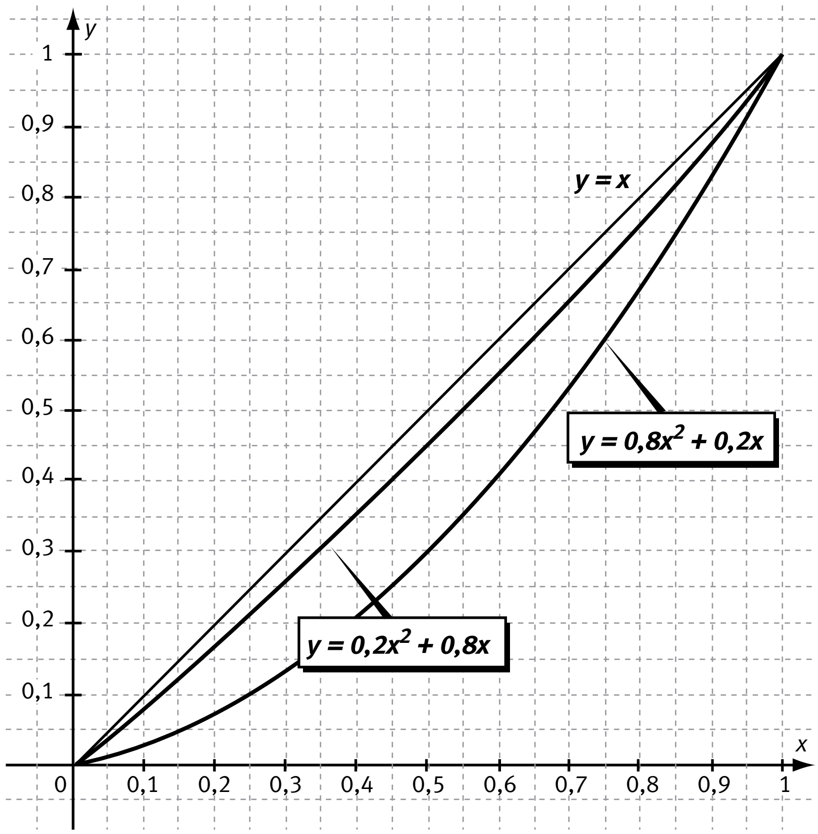
❶ **a)** La fonction f définie sur $[0\,;1]$ par $f(x)=0{,}2x^2+0{,}8x$ est une fonction polynôme du second degré. f est dérivable sur $[0\,;1]$ et $f'(x)=0{,}4x+0{,}8$.

Sur [0 ; 1], $f'(x)>0$ donc f est strictement croissante sur [0 ;1].

La fonction g définie sur $[0\,;1]$ par $g(x)=0{,}8x^2+0{,}2x$ est une fonction polynôme du second degré. g est dérivable sur $[0\,;1]$ et $g'(x)=1{,}6x+0{,}2$.

Sur [0 ; 1], $g'(x)>0$ donc g est strictement croissante sur [0 ;1].

On peut construire ces courbes et la droite d'équation y = x à l'aide du logiciel sinequanon.



❷ $f(0{,}5)=0{,}45$ et $g(0{,}5)=0{,}3$

Dans le pays F, 50% de personnes les plus pauvres possèdent 45% du patrimoine total.

On en déduit Med(F) = $0{,}45\times 165\ 000$ =74 250 €.

Dans le pays G, 50% de personnes les plus pauvres possèdent 30% du patrimoine total.

On en déduit Med(G) $=0{,}30\times 165\ 000$ =49 500 €.

De manière analogue $f(0{,}25)=0{,}2125$ et $g(0{,}25)=0{,}1$

On en déduit : Q_1(F)= $0{,}2125\times 165\ 000$ =35 062,5 €

et Q_1(G)= $0{,}1\times 165\ 000$ =16 500 €.

$f(0{,}75)=0{,}7125$ et $g(0{,}75)=0{,}6$

On en déduit : Q_3(F)= $0{,}7125\times 165\ 000$ =117 562,5 €

et Q_3(G)= $0{,}6\times 165\ 000$=99 000 €.

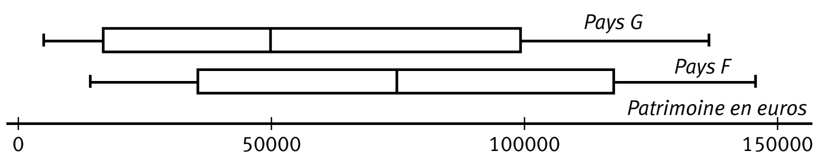
❸ De manière analogue, on a

$D_1(F)=0{,}082\times 165\ 000=13\ 530$ €.

et $D_1(G)=0{,}028\times 165\ 000=4\ 620$ €.

$D_9(F)=0{,}882\times 165\ 000=145\ 530$ €.

et $D_9(G)=0{,}828\times 165\ 000=136\ 620$ €.



La boîte à moustaches représentant le patrimoine du pays F est assez centrée autour de la médiane, et montre une répartition assez régulière du patrimoine total du pays, ce qui n'est pas le cas pour le pays G ou la répartition du patrimoine désavantage notamment les 50% les plus pauvres.

On peut lire aussi ce phénomène sur les courbes de Lorenz.

Plus la courbe de Lorenz se rapproche de la droite d'équation $y=x$, plus la répartition du patrimoine sera juste.

Exercice VIII

De 1961 à 2005, chaque différence de salaire considérée a à peu près doublé, donc les échelles de salaire sur cette période pour 80% de la population ont été globalement conservées.

Cependant**,** la différence des salaires annuels entre la médiane et le premier décile, c'est-à-dire, entre le salaire médian et le salaire le plus élevé des 10% les plus pauvres, a très peu évolué entre 1974 et 2005. Par contre, depuis 1974, les différences de salaire $9^{\text{ième}}$ décile-premier décile et neuvième décile – médiane ont progressé d'environ 4000€. On peut donc déduire de cette étude que les inégalités sociales se sont accrues depuis 1974 puisque c'est surtout les salaires des 10% les plus riches qui ont augmenté. ■

Corrigé séquence 5

Correction des activités du chapitre 2

Activité 1 Réinscription

Une enquête réalisée sur les lecteurs d'une bibliothèque révèle que chaque année :

– 98 % des lecteurs inscrits l'année précédente reprennent un abonnement,

– on compte 200 nouveaux abonnés.

Cette année, la bibliothèque compte 5000 abonnés. On note $u_0 = 5000$.

❶ $5000 \times 0,98 + 200 = 5100$

Le nombre abonnés au bout d'un an est 5 100 donc $u_1 = 5100$.

❷ $5100 \times 0,98 + 200 = 5198$

Le nombre abonnés au bout de deux ans est 5 198 donc $u_2 = 5198$.

❸ On note u_n le nombre d'abonnés au bout de n années.

a) u_{n+1} représente le nombre d'abonnés à la bibliothèque au bout de $n+1$ années.

b) Au bout de $n+1$ années, il y a $0,98 \times u_n$ réabonnements car 98 % des abonnés de l'année précédente se réabonnent. De plus, 200 nouvelles personnes s'abonnent donc on a bien $u_{n+1} = 0,98 \times u_n + 200$.

❹ **a)** u_5 est le nombre d'abonnés au bout de 5 ans. Pour pouvoir calculer u_5, on doit connaître le nombre d'abonnés au bout de 4 ans soit u_4. De la même façon, pour pouvoir calculer u_4, on doit connaître u_3.

b) $5198 \times 0,98 + 200 \approx 5294$ donc $u_3 = 5294$.

$5294 \times 0,98 + 200 \approx 5388$ donc $u_4 = 5388$.

$5388 \times 0,98 + 200 \approx 5480$ donc $u_5 = 5480$.

❺ La direction de la bibliothèque établit que le nombre d'inscrits au bout de n années est donné par la formule : $u_n = 10000 - 5000 \times 0,98^n$

a) $u_0 = 10000 - 5000 \times 0,98^0 = 5000$

$u_1 = 10000 - 5000 \times 0{,}98^1 = 5100$

$u_2 = 10000 - 5000 \times 0{,}98^2 = 5198$

On retrouve les résultats des questions ❶ et ❷.

b) On peut procéder au calcul direct de u_8 : $u_8 = 10000 - 5000 \times 0{,}98^8 \approx 5746$.

Au bout de 8 ans, la bibliothèque comptera 5746 abonnés.

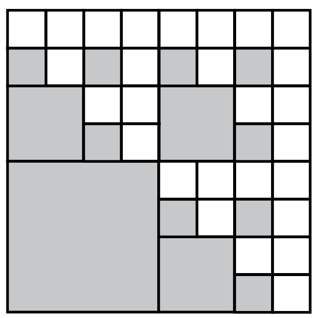
Activité 2 Coloriage

On effectue un coloriage en plusieurs étapes d'un carré de côté de longueur 4 cm.

❶ Après la première étape du coloriage, un carré est colorié donc $A_1 = 1$.

❷ Après la deuxième étape du coloriage, quatre carrés sont coloriés donc $A_4 = 4$.

❸ Après 3 coloriages, on obtient la figure suivante :



Donc $A_3 = 13$

❹ Compléter le tableau suivant :

Nombre n de coloriages	1	2	3	4
Nombre de carrés coloriés A_n	1	4	13	40

❺ **a)** Entre le premier et le deuxième coloriage, on ajoute 3 carrés coloriés. On a donc $A_2 = A_1 + 3$.

b) Entre le deuxième et le troisième coloriage, on ajoute 9 carrés coloriés. On a donc $A_3 = A_2 + 9$.

c) Entre le deuxième et le troisième coloriage, on ajoute 27 carrés coloriés. On a donc $A_4 = A_3 + 27$.

d) On remarque que d'une étape à la suivante, le nombre de carrés coloriés ajouté est une puissance de 3. On ajoute successivement 3^1 ; 3^2 ; 3^3 carrés. On peut conjecturer qu'entre le $n^{ième}$ coloriage et le $(n+1)^{ième}$ coloriage, on ajoutera 3^n carrés coloriés et donc que $A_{n+1} = A_n + 3^n$.

Correction des exercices d'apprentissage du chapitre 2

Exercice 1

❶ La suite u est définie explicitement.

❷ Comme $u_n = (n+3)\times 2^n$, on obtient :

$u_0 = (0+3)\times 2^0 = 3$

$u_1 = (1+3)\times 2^1 = 8$

$u_5 = (5+3)\times 2^5 = 256$

$u_{12} = (12+3)\times 2^{12} = 61440$

Exercice 2

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $\begin{cases} u_0 = 7 \\ u_{n+1} = 2u_n - 8 \end{cases}$

❶ La suite u est définie par récurrence.

❷ N'importe quel terme de la suite u est égal au terme précédent multiplié par 2 et diminué de 8.

❸ Ainsi u_1 est égal à 2 fois u_0 moins 8 : $u_1 = 2u_0 - 8 = 2\times 7 - 8 = 6$
De même $u_2 = 2u_1 - 8 = 2\times 6 - 8 = 4$, $u_3 = 2u_2 - 8 = 2\times 4 - 8 = 0$
Pour calculer u_6, on doit d'abord calculer u_4 et u_5.

$u_4 = 2u_3 - 8 = 2\times 0 - 8 = -8$

$u_5 = 2u_4 - 8 = 2\times(-8) - 8 = -24$

$u_6 = 2u_5 - 8 = 2\times(-24) - 8 = -56.$

Exercice 3

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = (n+2)(n-1)$.

❶ La suite (u_n) est définie explicitement donc

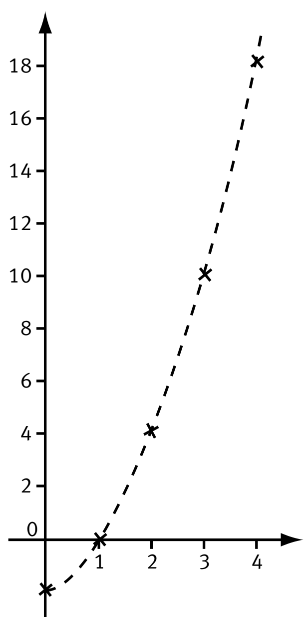
$u_0 = (0+2)(0-1) = -2,\quad u_1 = (1+2)(1-1) = 0,$

$u_2 = (2+2)(2-1) = 4,$

$u_3 = (3+2)(3-1) = 10$

et $u_4 = (4+2)(4-1) = 18.$

❷ Voir figure ci-contre.



❸ On peut conjecturer que cette suite est une suite croissante. La fonction associée à la suite (u_n) est $f(x) = (x+2)(x-1) = x^2 + x - 2$.

Le tableau de variation de f est le suivant :

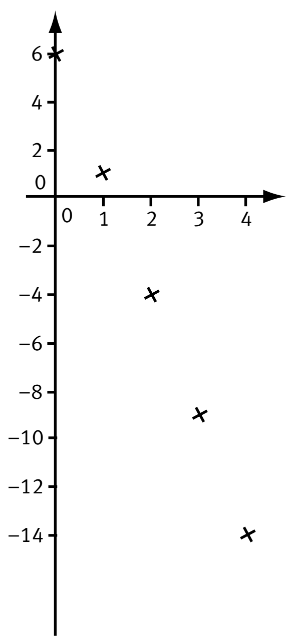
x	$-\infty$	$-0,5$	$+\infty$
Variation de f	↘		↗

donc f est croissante sur $[0;+\infty[$ et ainsi la suite u est une suite croissante.

Exercice 4 On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $\begin{cases} u_0 = 6 \\ u_{n+1} = u_n - 5 \end{cases}$

❶ La suite u est définie par récurrence donc $u_1 = u_0 - 5 = 6 - 5 = 1$,
$u_2 = u_1 - 5 = 1 - 5 = -4$, $u_3 = u_2 - 5 = -4 - 5 = -9$ et
$u_4 = u_3 - 5 = -9 - 5 = -14$.

❷



❸ Cette suite semble décroître. Calculons $u_{n+1} - u_n$. D'après la formule de récurrence, pour tout entier n, $u_{n+1} - u_n = -5 < 0$ ainsi $u_{n+1} < u_n$ donc la suite u est une suite décroissante.

Exercice 5 ❶ On remplace le « n » dans l'expression de u_n par $n+1$:

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= (n+1)^2 + 3(n+1) - 1 \\ &= n^2 + 2n + 1 + 3n + 3 - 1. \\ &= n^2 + 5n + 3 \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned} u_{n-1} &= (n-1)^2+3(n-1)-1 \quad \text{et} \quad u_{2n} = (2n)^2+3(2n)-1 \\ &= n^2-2n+1+3n-3-1 \qquad\qquad = 4n^2+6n-1 \\ &= n^2+n-3 \end{aligned}$$

❷ $v_{n+1} = 2(n+1)\big((n+1)+5\big)$; $v_{n-1} = 2(n-1)\big((n-1)+5\big)$ et $v_{2n} = 2(2n)\big(2n+5\big)$

$= 2(n+1)(n+6)$; $= 2(n-1)(n+4)$; $= 2(4n^2+10n)$

$= 2(n^2+6n+n+6)$; $= 2(n^2+4n-n-4)$; $= 8n^2+20n$

$= 2n^2+14n+12$; $= 2n^2+6n-8$

❸ $w_{n+1} = \dfrac{(n+1)^2}{(n+1)+1} = \dfrac{(n+1)^2}{n+2}$; $w_{n-1} = \dfrac{(n-1)^2}{(n-1)+1} = \dfrac{(n-1)^2}{n}$ et

$$w_{2n} = \frac{(2n)^2}{2n+1} = \frac{4n^2}{2n+1}$$

Exercice 6

❶ Pour tout entier naturel n, on a : $\begin{aligned}[t] a_{n+1} &= (n+1)\big((n+1)+3\big) \\ &= (n+1)(n+4) \\ &= n^2+5n+4 \end{aligned}$

❷ Pour tout entier naturel n, on a : $\begin{aligned}[t] a_{n+1}-a_n &= \left[n^2+5n+4\right]-\left[n(n+3)\right]. \\ &= n^2+5n+4-\left[n^2+3n\right] \\ &= n^2+5n+4-n^2-3n \\ &= 2n+4 \end{aligned}$

❸ Pour tout entier naturel n, $a_{n+1}-a_n = 2n+4 > 0$ donc $a_{n+1} > a_n$

Ainsi la suite a est une suite strictement croissante.

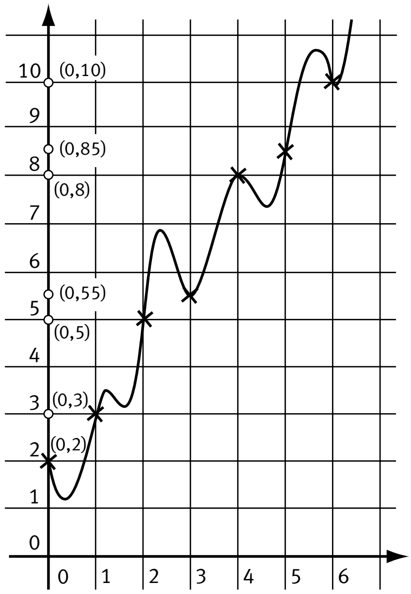
Exercice 7

Calculons $v_{n+v}-v_n$:

$$\begin{aligned} v_{n+v}-v_n &= \frac{(n+1)+1}{(n+1)+2}-\frac{n+1}{n+2} = \frac{n+2}{n+3}-\frac{n+1}{n+2} \\ &= \frac{(n+2)^2-(n+1)(n+3)}{(n+3)(n+2)} = \frac{n^2+4n+4-(n^2+4n+3)}{(n+3)(n+2)} \\ &= \frac{n^2+4n+4-n^2-4n-3}{(n+3)(n+2)} \\ &= \frac{1}{(n+3)(n+2)} > 0 \end{aligned}$$

donc $v_{n+v} > v_n$. Ainsi la suite (v_n) est croissante.

Exercice 8



Pour déterminer u_0, on lit l'ordonnée du point de la courbe d'abscisse 0 : $u_0 = 2$.

De même, $u_1 = 3$; $u_2 = 5$; $u_3 = 5{,}5$; $u_4 = 8$; $u_5 = 8{,}5$ et $u_6 = 10$.

On peut conjecturer cette suite est croissante.

Remarque : La fonction f n'est pas une fonction croissante sur $[0\,;+\infty[$.

Exercice 9

❶ La suite u désigne l'argent disponible sur le compte de Pierre ; u_n est l'argent disponible au bout de n années. $u_0 = 500$.

Un taux annuel de 3 % est associé au coefficient multiplicateur 1,03 donc $u_{n+1} = u_n \times 1{,}03$.

❷ La suite v désigne la largeur de la dune ; v_n désigne la largeur de la dune en (*2010+n*). $v_0 = 50$ désigne la largeur de la dune en 2010. $v_{n+1} = v_n - 5$

❸ w désigne le prix de la course en taxi ; w_n le prix pour n kilomètres parcourus $w_0 = 2$ et $w_n = 2 + n \times 1{,}48$ (ou $w_{n+1} = w_n + 1{,}48$).

❹ x désigne le nombre de bactéries présentes dans la culture ; x_n désigne le nombre de bactéries après n heures.

$x_0 = 100$ et $x_{n+1} = 2x_n$.

Exercice 10

❶ Le coefficient multiplicateur associé à la baisse de 10 % du nombre de malades est 0,9 donc :

$M_2 = M_1 \times 0{,}9 + 600 = 5100$

$M_3 = M_2 \times 0{,}9 + 600 = 5190$

❷ Le nombre de malades du jour précédent est multiplié par 0,9 et 600 nouveaux malades s'ajoutent donc $M_{n+1} = M_n \times 0{,}9 + 600$.
L'organisme établit que, pour tout entier $n \geq 1$, $M_n = 6000 - 1000 \times 0{,}9^{n-1}$.

❸ On retrouve $M_2 = 6000 - 1000 \times 0,9^{2-1} = 5100$

$M_3 = 6000 - 1000 \times 0,9^{3-1} = 5190$

❹ $M_{15} = 6000 - 1000 \times 0,9^{15-1} \approx 5771$

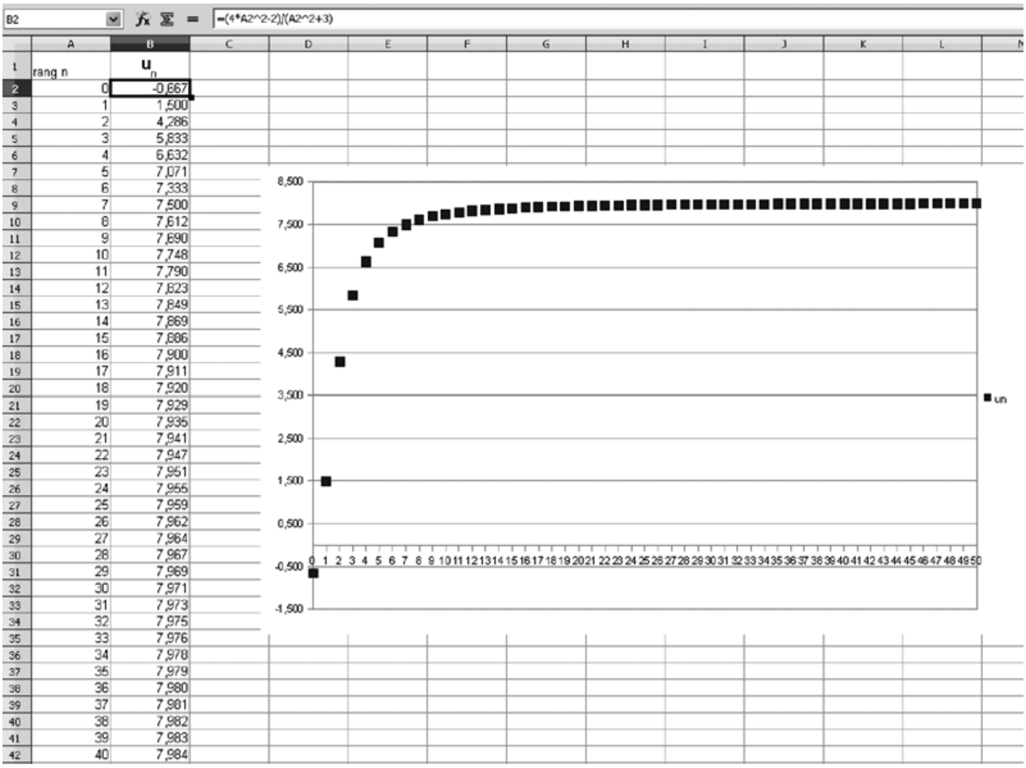
❺ $M_{16} = 6000 - 1000 \times 0,9^{16-1} \approx 5794$

$M_{17} = 6000 - 1000 \times 0,9^{17-1} \approx 5815$

Au bout du 17e jour, on dépasse le seuil épidémique.

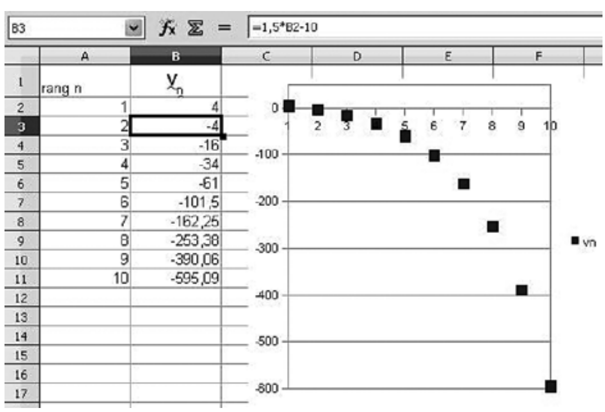
Correction des exercices d'apprentissage du chapitre 3

Exercice 11 Dans la cellule B2, rentrer la formule =(8*A2^2-2)/(A2^2+3) puis la « glisser-copier ».



rang n	u_n
0	-0,667
1	1,500
2	4,286
3	5,833
4	6,632
5	7,071
6	7,333
7	7,500
8	7,612
9	7,690
10	7,748
11	7,790
12	7,823
13	7,849
14	7,869
15	7,886
16	7,900
17	7,911
18	7,920
19	7,929
20	7,935
21	7,941
22	7,947
23	7,951
24	7,955
25	7,959
26	7,962
27	7,964
28	7,967
29	7,969
30	7,971
31	7,973
32	7,975
33	7,976
34	7,978
35	7,979
36	7,980
37	7,981
38	7,982
39	7,983
40	7,984

Exercice 12 ❶ Dans la cellule B3, rentrer la formule =1,5*B2-10 puis la « glisser-copier ».



rang n	v_n
1	4
2	-4
3	-16
4	-34
5	-61
6	-101,5
7	-162,25
8	-253,38
9	-390,06
10	-595,09

❷

B14 =SOMME(B2:B11)

	A	B	C
1	rang n	v_n	
2	1	4	
3	2	-4	
4	3	-16	
5	4	-34	
6	5	-61	
7	6	-101,5	
8	7	-162,25	
9	8	-253,38	
10	9	-390,06	
11	10	-595,09	
12			
13			
14	Somme	-1613,28	

Exercice 13

❶ Entrées : u_1, N (rang du terme à calculer), f (fonction associée à la formule de récurrence), A (variable qui sert à stocker les calculs) et B (variable qui sert à effectuer la somme)

Initialisation : A = u_1 ; i = 0 ; B = u_1

Traitement :

Pour i allant de 2 à k
Mettre f(A) dans A
Mettre B + A dans B
Mettre i+1 dans i
Fin du Pour

Sortie :

Afficher « u_k =» A
Afficher « Somme = » B

Fin de l'algorithme

❷

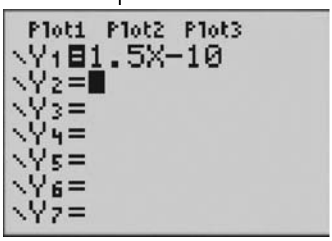
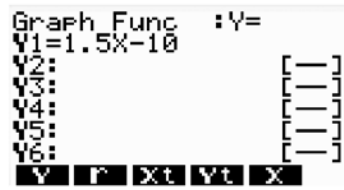
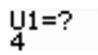
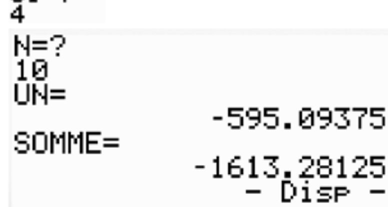
Texas Instrument

```
PROGRAM:RECC2
:Input "U1?",A
:Input "N?",N
:A→B
:For(I,2,N)
:Y₁(A)→A
:B+A→B
:End
:Disp "UN"
:Disp A
:Disp "SOMME"
:Disp B
```

Casio

```
======RECC2    ======
"U1="?→A↵
"N="?→N↵
A→B↵
For 2→I To N↵
Y1(A)→A↵
B+A→B↵
Next↵
"UN="◢
A◢
"SOMME="◢
B◢
```

❸

Texas Instrument	Casio
Avant de faire fonctionner l'algorithme, il faut rentrer l'expression de la fonction f associée à la formule de récurrence dans le menu « *f(x)* » dans Y_1 Y_1 = 1,5X-10   	Avant de faire fonctionner l'algorithme, il faut rentrer l'expression de la fonction f associée à la formule de récurrence dans le menu « *Graph* » dans Y_1 Y_1 = 1,5X-10   

Exercice 14 ❶ La hausse de 3% du montant de l'annuité est associée au coefficient multiplicateur 1,03.

$a_2 = a_1 \times 1{,}03 = 4000 \times 1{,}03 = 4120$

$a_3 = a_2 \times 1{,}03 = 4120 \times 1{,}03 = 4243{,}60$

❷ On a $a_{n+1} = a_n \times 1{,}03$

❸

B3 =B2*1,03

	A	B	C	D
1	Année n	Annuité a_n		
2	1	4000		
3	2	4120		
4	3	4244		
5	4	4371		
6	5	4502		
7	6	4637		
8	7	4776		
9	8	4919		Somme :
10	9	5067		107481
11	10	5219		
12	11	5376		
13	12	5537		
14	13	5703		
15	14	5874		
16	15	6050		
17	16	6232		
18	17	6419		
19	18	6611		
20	19	6810		

❹ On utilise la fonction somme du tableur. Dans la cellule D10, on rentre =SOMME(B2:B21).

Le montant total du prêt est de 107 481 €.

Exercice 15

❶ Calculer $c_1 = \dfrac{c_0}{2} = \dfrac{10000}{2} = 5000.$

❷ Comme d'une période à l'autre, la moitié des éléments se désintègre, $c_{n+1} = \dfrac{c_n}{2}.$

❸

B3 =B2/2

	A	B	C
1	nombre de périodes	Masse de césium	
2	0	10000,0	
3	1	5000,0	
4	2	2500,0	
5	3	1250,0	
6	4	625,0	
7	5	312,5	
8	6	156,3	
9	7	78,1	
10	8	39,1	
11	9	19,5	
12	10	9,8	
13	11	4,9	
14	12	2,4	
15	13	1,2	
16	14	0,6	
17	15	0,3	
18	16	0,2	
19	17	0,1	
20	18	0,0	

❹ D'après la feuille de calculs, la masse de césium 137 est inférieure à 5 g après 11 périodes.

❺ Chaque période correspondant à 30,15 ans, il faut $11 \times 30{,}15 = 331{,}65$ soit environ 332 ans pour que la masse d'éléments radioactifs soit inférieure à 5 g.

Correction des exercices d'approfondissement du chapitre 5

Exercice I

❶ c_1 représente le capital disponible au 1er janvier 2011. Une hausse de 4% correspondant à un coefficient multiplicateur de 1,04, c_0 est multiplié par 1,04 et on ajoute 600 : $c_1 = 1{,}04 \times 1200 + 600$.

❷ Chaque année, le capital de l'année précédente est multiplié par 1,04 et Pierre y ajoute 600 € : $c_{n+1} = 1{,}04c_n + 600$.

❸ On peut utiliser le tableur pour effectuer les calculs :

B3 =B2*1,04+600

	A	B
1	n	Montant des économies
2	0	1200
3	1	1848
4	2	2521,92
5	3	3222,8
6	4	3951,71
7	5	4709,78
8	6	5498,17
9	7	6318,09
10	8	7170,82
11	9	8057,65
12	10	8979,96
13	11	9939,16
14	12	10936,72
15	13	11974,19
16	14	13053,16
17	15	14175,28
18	16	15342,3
19	17	16555,99
20	18	17818,23
21	19	19130,96
22	20	20496,19
23	21	21916,04
24	22	23392,68
25	23	24928,39
26	24	26525,53
27	25	28186,55
28	26	29914,01
29	27	31710,57
30	28	33578,99
31	29	35522,15
32	30	37543,04

En (2010+20) soit en 2030, Pierre disposera de l'argent nécessaire pour acheter une voiture à 20 000 € comptant.

Exercice II

❷ Soit la suite v définie pour tout entier naturel n par $\begin{cases} v_0 = 8 \\ u_{n+1} = 1{,}5v_n - 1 \end{cases}$.

Représenter sur l'axe des abscisses les points M_0, M_1, M_2, M_3 et M_4 d'abscisse respective v_0, v_1, v_2, v_3 et v_4.

▸ 1re étape

Soit f la fonction définie par $f(x) = 1{,}5x - 1$ associée à la suite (v_n). Pour tout entier naturel n, on a $v_{n+1} = f(v_n)$.

Représenter dans un même repère la droite d' représentant la fonction f et la droite d d'équation $y = x$

▸ 2e étape

Placer le point $M_0(v_0\,;0)$ et le point A_0 de la droite d' d'abscisse v_0. A_0 a pour ordonnée v_1 car $f(v_0) = v_1$. Ainsi, A_0 a pour coordonnées $A_0(v_0\,;\,v_1)$.

▸ **3e étape**

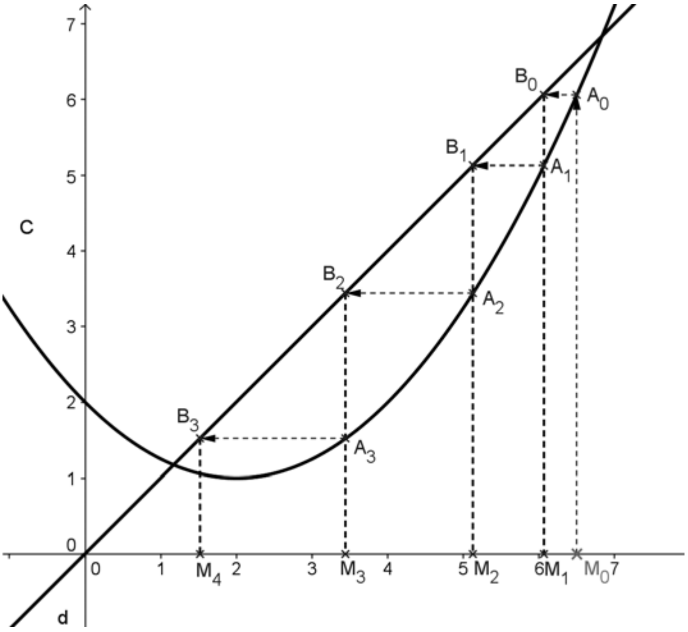
Placer le point B_0 situé sur la droite d et ayant la même ordonnée que A_0. Comme la droite d a pour équation $y = x$, l'abscisse de B_0 est égale à son ordonnée. Ainsi, B_0 a pour coordonnées $B_0(v_1 ; v_1)$.

▸ **4eétape**

Tracer la parallèle à l'axe des ordonnées passant par B_0. On obtient ainsi le point de l'axe des abscisses d'abscisse v_1 : c'est le point $M_1(v_1 ; 0)$.

▸ **5e étape**

On procède de la même façon pour obtenir le point M_2 puis M_3 puis M_4.



Exercice III On considère les suites suivantes définies sur $\mathbb{N}$ par :

$v_n = -6 + 0{,}5^n$ $\qquad w_n = 2n + 4$ $\qquad x_n = 10 + (-1)^n$

Compléter le tableau suivant :

n	0	1	2	5	10	20	50	100	1000	1001
v_n	-5	-5,5	-5,75	$\approx -5{,}9688$	$\approx -5{,}9990$	≈ -6	≈ -6	≈ -6	≈ -6	≈ -6
w_n	4	6	8	14	24	44	104	204	2004	2006
x_n	11	9	11	9	11	11	11	11	11	9

On peut émettre les conjectures suivantes : Quand « n devient très grand », les valeurs des termes de la suite (v_n) tendent vers –6.

Quand « n devient très grand », les valeurs des termes de la suite (w_n) deviennent de plus en plus grandes et tendent vers $+\infty$.

Quand « n devient très grand », les valeurs des termes de la suite (x_n) ne semblent tendre vers aucune valeur.

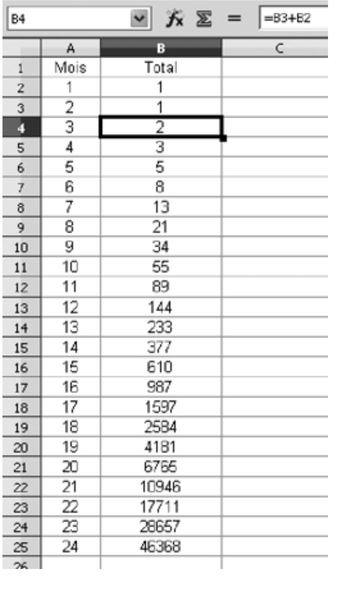
Exercice IV

Suite de Fibonacci

Mois n	**Nombre de couples mâtures** a_n	**Naissances** b_n	**Nombre de couples immatures** c_n	**Total** u_n
1	0	0	1	1
2	1	0	0	1
3	1	1	0	2
4	1	1	1	3
5	2	2	1	5
6	3	3	2	8
7	5	5	3	13

On a $u_n = a_n + b_n + c_n$ et, pour $n \geq 3$, $a_{n+1} = b_{n+1} = a_n + c_n$ et $c_{n+1} = b_n$ donc

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= a_{n+1} + b_{n+1} + c_{n+1} \\ &= (a_n + c_n) + (a_n + c_n) + (b_n) \\ &= (a_n + b_n + c_n) + a_n + c_n \\ &= u_n + (a_{n-1} + c_{n-1}) + (b_{n-1}) \\ &= u_n + a_{n-1} + b_{n-1} + c_{n-1} \\ &= u_n + u_{n-1} \end{aligned}$$



	A	B	C
1	Mois	Total	
2	1	1	
3	2	1	
4	3	2	
5	4	3	
6	5	5	
7	6	8	
8	7	13	
9	8	21	
10	9	34	
11	10	55	
12	11	89	
13	12	144	
14	13	233	
15	14	377	
16	15	610	
17	16	987	
18	17	1597	
19	18	2584	
20	19	4181	
21	20	6765	
22	21	10946	
23	22	17711	
24	23	28657	
25	24	46368	

On a donc $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$.

En utilisant une feuille de calculs, on trouve que le nombre de couples de lapins après 24 mois est de 46 368.

Remarque : Dans ce modèle, les lapins ne meurent jamais !

Exercice V Pyramide de Ponzi

❶ **a)** Après un an, aucun client ne quitte le système donc a_1 vaut 0.

b) De même, $a_2 = 0$ et $a_3 = 0$.

c) Quand les premiers clients quittent le système, ils reçoivent $c_4 = 100000 \times 1{,}2^3 = 172800$ pour avoir placé 100 000 € pendant 3 ans au taux annuel de 20 %.

❷ **a)** b_2 se compose de la façon suivante : 100 000 € placés à 20 % pendant un an et 100 000 nouveaux euros investis : $b_2 = 100000 \times 1{,}2 + 100000 = 220000$

b) b_3 se compose de la façon suivante : 100 000 € placés à 20 % pendant deux an, 100 000 € placés à 20 % pendant un an et 100 000 nouveaux euros investis $b_3 = 100000 \times 1{,}2^2 + 100000 \times 1{,}2 + 100000 = 364000$

b_4 se compose de la façon suivante : 100 000 € placés à 20 % pendant deux an, 100 000 € placés à 20 % pendant un an et 100 000 nouveaux euros investis $b_4 = 100000 \times 1{,}2^2 + 100000 \times 1{,}2 + 100000 = 364000$

❸ **a)** c_2 se décompose de la façon suivante : 100 000 € placés à 5 % dans une banque traditionnelle pendant un an et 100 000€ placés par de nouveaux clients.

$c_2 = 100000 \times 1{,}05 + 100000 = 205000$

b) c_3 se décompose de la façon suivante : 100 000 € placés à 5 % dans une banque traditionnelle pendant deux ans, 100 000 € placés à 5 % dans une banque traditionnelle pendant un an et 100 000€ placés par de nouveaux clients.

$c_3 = 205000 \times 1{,}05 + 100000 = 315250$

c_4 se décompose de la façon suivante : 100 000 € placés à 5 % dans une banque traditionnelle pendant trois ans, 100 000 € placés à 5 % dans une banque traditionnelle pendant deux ans, 100 000 € placés à 5 % dans une banque traditionnelle pendant un an et 100 000€ placés par de nouveaux clients moins les 364 000 € dus aux clients qui se retirent de la pyramide.

$$\begin{aligned} c_4 &= 315250 \times 1{,}05 + 100000 - 172800 \\ &= 258212{,}50 \end{aligned}$$

❹ On obtient :

Année *n*	Somme versée aux clients qui se retirent	Somme due aux clients dans le système	Somme disponible dans le pyramide
1	0	100 000	100 000
2	0	220 000	205 000
3	0	364 000	315 250

4	172 800	364 000	258212,50
5	172 800	364 000	198 323,13
6	172 800	364 000	135 439,28
7	172 800	364 000	69 411,25
8	172 800	364 000	81,81
9	172 800	364 000	-72 714,10

❺ Dès la $9^{ème}$ année, la pyramide ne peut plus rémunérer les clients se retirant.

■

Corrigé séquence 6

Correction des activités du chapitre 2

Activité 1

❶ Nombre dérivé d'une fonction f en un point d'abscisse a (a quelconque)

❶ Cas de la fonction « carré »

Pour compléter le tableau, on s'appuie sur l'interprétation graphique de $f'(a)$; à savoir, $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe C_f au point de coordonnées $(a\,;f(a))$.

Ainsi, en traçant les tangentes à C_f aux points de coordonnées $(-1\,;1)$, $(0;0)$, $(1\,;1)$, $(2\,;4)$, $(3\,;9)$, $(4\,;16)$ et $(5\,;25)$ on peut lire les coefficients directeurs suivants :

a	–1	0	1	2	3	4	5
$f'(a)$	–2	0	2	4	6	8	10

Le tableau précédent peut nous inciter à faire la conjecture suivante : $f'(a)=2a$.

❷ Cas d'une fonction constante

On considère la fonction f définie pour tout $x\in\mathbb{R}$ par $f(x)=3$.

Compléter les phrases suivantes.

$\mathscr{C}_f$ est une droite Δ parallèle à l'axe des abscisses.

La tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse a est donc la droite Δ, elle-même.

Le coefficient directeur de cette (droite) tangente est donc égal à zéro donc $f'(a)=0$.

❸ Cas d'une fonction affine

a) On considère la fonction affine f définie pour tout $x\in\mathbb{R}$ par $f(x)=7x+3$.

Compléter les phrases suivantes.

$\mathscr{C}_f$ est une **droite** Δ d'équation $y=7x+3$.

La tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse a est donc la droite Δ, elle-même.

Le coefficient directeur de cette (droite) tangente est donc égal à 7 donc $f'(a)=7$.

b) En observant les expressions de $f(x)$ et de $f'(x)$ précédentes, on peut compléter la phrase suivante ainsi :

Si g est la fonction affine définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $g(x) = mx + p$ (m et p sont des nombres fixés) alors pour tout réel a, on a $g'(a) = m$.

Correction des exercices d'apprentissage du chapitre 2

Exercice 1 *Démonstration de la formule de la dérivée de la fonction « carré »* $f : x \mapsto x^2$

On a posé $f(x) = x^2$.

❶ Fixons un nombre réel $h \neq 0$.

On calcule

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \frac{x^2+2xh+h^2-x^2}{h}$$
$$= \frac{2xh+h^2}{h} = \frac{(2x+h)h}{h} = 2x+h.$$

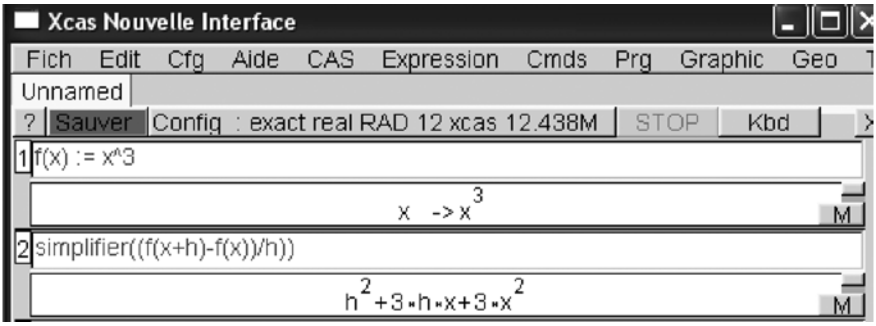
❷ Ainsi, en faisant tendre h vers zéro (on fait $h = 0$ dans le membre de droite des égalités précédentes), on vérifie que $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = 2x$. Par définition, ceci signifie que $f'(x) = 2x$.

Exercice 2 *Démonstration de la formule de la dérivée de la fonction « cube »* $f : x \mapsto x^3$

On a posé $f(x) = x^3$.

❶ Fixons un nombre réel $h \neq 0$.

Avec XCAS on calcule $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$



❷ Ainsi, en faisant tendre h vers zéro (on fait $h = 0$ dans le résultat précédent), on vérifie que $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = 3x^2$.

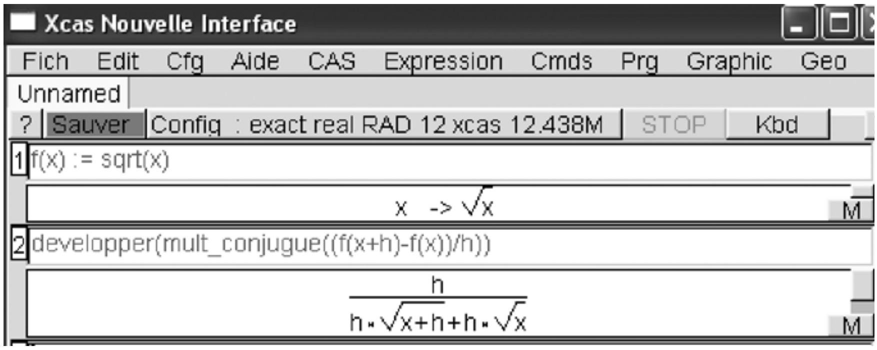
Par définition, ceci signifie que $f'(x) = 3x^2$.

Exercice 3

Démonstration de la formule de la dérivée de la fonction « racine-carrée » $f : x \mapsto \sqrt{x}$

On pose $f(x) = \sqrt{x}$

❶ Fixons un nombre réel $h \neq 0$. Avec XCAS on calcule $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$



On peut encore simplifier l'expression obtenue en mettant h en facteur au dénominateur ce qui conduit à $\dfrac{h}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}$, puis après simplification par h, à : $\dfrac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}$.

❷ En faisant tendre h vers zéro, on vérifie que $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

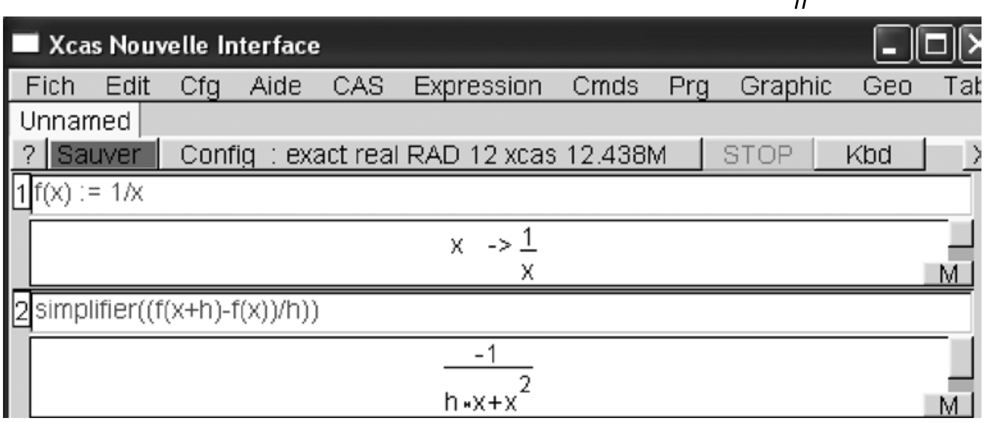
D'où, par définition du nombre dérivé de f en x, $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Exercice 4

Démonstration de la formule de la dérivée de la fonction « racine-carrée » $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$

On a posé $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

❶ Fixons un nombre réel $h \neq 0$. Avec XCAS on calcule $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$



❷ En faisant tendre h vers zéro, on vérifie que $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=-\dfrac{1}{x^2}$.

D'où, par définition du nombre dérivé de f en x, $f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$.

Correction des activités du chapitre 3

Activité 1

❶ En somme, c'est simple !

Les fonctions u et v sont définies sur $\mathbb{R}$ par $u(x)=7x+1$ et $v(x)=x^2$.

❶ Par définition du nombre dérivé de u en 3, $u'(3)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{u(3+h)-u(3)}{h}$.

On calcule $\dfrac{u(3+h)-u(3)}{h}=\dfrac{7(3+h)+1-(7(3)+1)}{h}=\dfrac{7h}{h}=7$, donc $u'(3)=7$.

De même, $v'(3)=6$ (voir le corrigé de l'exercice 1 du chapitre 2).

❷ On appelle f la fonction, définie sur $\mathbb{R}$, égale à la somme des deux fonctions u et v : $f=u+v$.

Le nombre dérivé de la fonction f en a est égal à $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

On calcule d'abord

$$\frac{f(3+h)-f(3)}{h}=\frac{(u+v)(3+h)-(u+v)(3)}{h}=\frac{\big(u(3+h)+v(3+h)\big)-\big(u(3)+v(3)\big)}{h}$$

$$=\frac{u(3+h)-u(3)+v(3+h)-v(3)}{h}$$

d'où $f'(3)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(3+h)-f(3)}{h}=13$.

On peut remarquer que $f'(3)=u'(3)+v'(3)$ puisque $13=7+6$, ou dit autrement $(u+v)'(3)=(u'+v')(3)$.

Ceci nous incite à émettre la conjecture suivante :

La dérivée de la somme de deux fonctions est égale à la somme des dérivées de ces fonctions.

❷ Un *produit dérivé* pas si docile !

On considère les fonctions u et v définies sur $\mathbb{R}$ par $u(x)=4x$ et $v(x)=0{,}25x$.

On a vu précédemment que les fonctions linéaires (*affines* plus généralement) u et v sont dérivables sur $\mathbb{R}$.

❶ Par définition, $u'(3)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{u(3+h)-u(3)}{h}$

On calcule $\dfrac{u(3+h)-u(3)}{h}=\dfrac{4(3+h)-4\times 3}{h}=\dfrac{4h}{h}=4$, donc $u'(3)=4$.

De même, $v'(3)=0{,}25$.

❷ On calcule $f(x) = u(x)v(x) = 4x \times 0,25x = x^2$.

À l'exercice précédent nous avons calculé $f'(3) = 6$. On peut aussi (par curiosité) calculer $u'(3) \times v'(3)$.

On trouve $u'(3) \times v'(3) = 4 \times 0,25 = 1$.

On observe que $(u \times v)'(3) \neq u'(3) \times v'(3)$.

Ceci nous incite à émettre la conjecture suivante :

La dérivée d'un produit de deux fonctions ***n'****est* ***pas*** *égale au produit des dérivées de ces fonctions.*

Correction des exercices d'apprentissage du chapitre 3

Exercice 1 ❶ $f(x)=x^2-7x+4$

On peut décomposer la fonction f comme la somme $u+v$ de deux fonctions u et v définies par $u(x)=x^2$ et $v(x)=-7x+4$. Le tableau des dérivées des fonctions usuelles (cours chapitre 2) nous indique que $u'(x)=2x$ et $v'(x)=-7$.

La propriété sur la dérivée d'une somme (cours chapitre 3) nous indique que $f'(x)=u'(x)+v'(x)$. Donc $f'(x)=2x-7$.

❷ $f(x)=\dfrac{-7x+1}{11}$

On peut écrire $f(x)=-\dfrac{7}{11}x+\dfrac{1}{11}$ et le tableau des dérivées des fonctions usuelles (fonctions affines) nous indique que $f'(x)=-\dfrac{7}{11}$.

❸ $f(x)=-0{,}1x^{10}-\dfrac{7}{5}x^5+\sqrt{3}$

On peut décomposer la fonction f comme la somme $u+v+w$ de trois fonctions u, v et w définies par $u(x)=-0{,}1x^{10}$, $v(x)=-\dfrac{7}{5}x^5$ et $w(x)=\sqrt{3}$.

Le tableau des dérivées des fonctions usuelles nous indique que $u'(x)=-0{,}1\times 10x^9$, $v'(x)=-\dfrac{7}{5}\times 5\times x^4$ et $w(x)=0$.

La propriété sur la dérivée d'une somme nous indique que $f'(x)=u'(x)+v'(x)+w'(x)$.

Donc $f'(x)=-0{,}1\times 10x^9-\dfrac{7}{5}\times 5\times x^4+0=-x^9-7x^4$.

❹ $f(x)=-\sqrt{2}x^2-7x+1$

f est une fonction polynôme du 2nd degré et, comme au ❶, on calcule $f'(x)=-\sqrt{2}\times 2x-7=-2\sqrt{2}x-7$.

❺ $f(x)=9x^4-\dfrac{3}{2}$.

On peut écrire $f(x)=u(x)+v(x)$ où $u(x)=9x^4$ et $v(x)=-\dfrac{3}{2}$.

Comme $u'(x)=9\times 4x^3$ et $v'(x)=0$, on conclut que $f'(x)=36x^3$.

❻ $f(x)=-x^5+\dfrac{5x}{7}$

Cette fois, en écrivant $f(x)=u(x)+v(x)$ où $u(x)=-x^5$ et $v(x)=\dfrac{5x}{7}$, on calcule $u'(x)=-5x^4$ et $v'(x)=\dfrac{5}{7}$ puis on conclut que $f'(x)=-5x^4-\dfrac{5}{7}$.

Exercice 2

❶ $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{2}$

On peut écrire $f(x)=\dfrac{1}{2}\sqrt{x}$. Le tableau des dérivées des fonctions usuelles nous indique que la dérivée de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Comme $(ku)'=ku'$ on conclut ($k=\dfrac{1}{2}$) que $f'(x)=\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=\dfrac{1}{4\sqrt{x}}=\dfrac{\sqrt{x}}{4x}$.

❷ $f(x)=\dfrac{5}{x}-2x^3$

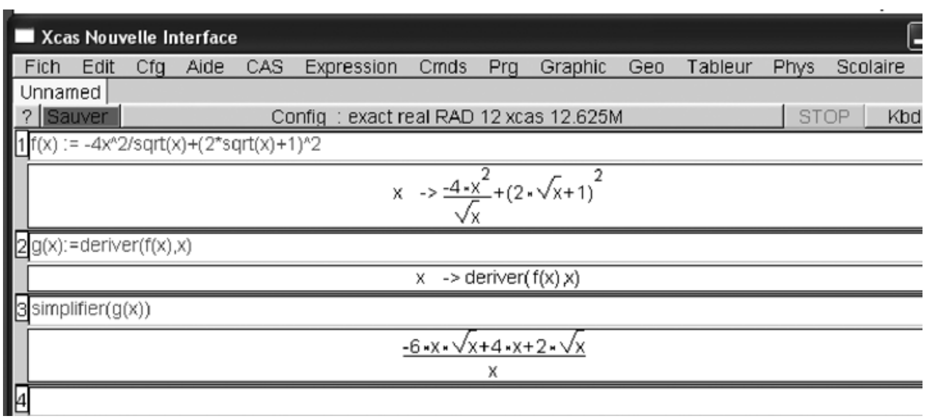
En écrivant $f=u+v$ où $u(x)=\dfrac{5}{x}=5\times\dfrac{1}{x}$ et $v(x)=-2x^3$,

comme $u'(x)=5\times\left(\dfrac{-1}{x^2}\right)$ et $v'(x)=-2\times 3x^2$

on conclut que $f'(x)=\dfrac{-5}{x^2}-6x^2=-\dfrac{6x^4+5}{x^2}$.

❸ $f(x)=\dfrac{-4x^2}{\sqrt{x}}+(2\sqrt{x}+1)^2$

Utilisons le logiciel XCAS pour effectuer ce calcul.



On a obtenu $f'(x)=\dfrac{-6x\sqrt{x}+4x+2\sqrt{x}}{x}$.

Exercice 3

Les deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=2x^3-x^2+x$ et $g(x)=2x^3-x^2+x+12$ ont pour dérivée la fonction $x \mapsto 6x^2-2x+1$.

Exercice 4

Calculer la dérivée de la fonction f d'abord en développant $f(x)$ puis en utilisant la formule donnant la dérivée d'un produit, dans les cas suivants.

❶ $f(x)=(x-3)(4-x)$

Développons : $f(x)=-x^2+7x-12$, puis dérivons : $f'(x)=-2x+7$.

Dérivons directement : $f'(x)=1\times(4-x)+(x-3)\times(-1)=-2x+7$.

❷ Développons : $f(x)=(3x-2)(3x+2)=9x^2-4$, puis dérivons : $f'(x)=18x$.

Dérivons directement : $f'(x)=3\times(3x+2)+(3x-2)\times 3=18x$.

❸ Développons : $f(x)=\sqrt{x}\left(x\sqrt{x}-\dfrac{\sqrt{x}}{x}\right)=x^2-1$, puis dérivons $f'(x)=2x$.

Dérivons directement :

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}\left(x\sqrt{x}-\frac{\sqrt{x}}{x}\right)+\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+x\times\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}x-\sqrt{x}\times 1}{x^2}\right)$$

$$f'(x)==\frac{x}{2}-\frac{1}{2x}+x+\frac{x}{2}-\frac{\frac{x}{2}-x}{x^2}=2x-\frac{1}{2x}+\frac{1}{2x}=2x.$$

Un choix judicieux de l'expression à dériver évite parfois des calculs inutiles !

Exercice 5

❶ $f(x)=\dfrac{5x+1}{3x-1}$

En écrivant $f=\dfrac{u}{v}$ où $u(x)=5x+1$ et $v(x)=3x-1$, on peut utiliser la propriété du cours sur la dérivée d'un quotient et calculer

$$f'(x)=\frac{5\times(3x-1)-(5x+1)\times 3}{(3x-1)^2}=\frac{2}{(3x-1)^2}.$$

❷ $f(x)=\dfrac{x}{3}-\dfrac{3}{x}$

Ecrivons $f=u+v$ où $u(x)=\dfrac{x}{3}$ et $v(x)=-\dfrac{3}{x}$.

Comme $u'(x)=\dfrac{1}{3}$ et $v'(x)=--\dfrac{3}{2x^2}$, on calcule $f'(x)=\dfrac{1}{3}-\dfrac{3}{2x^2}=\dfrac{2x^2-9}{6x^2}$.

❸ $f(x)=\dfrac{x^3-1}{x^2+1}$

En écrivant $f=\dfrac{u}{v}$ où $u(x)=x^3-1$ et $v(x)=x^2+1$, on peut utiliser la propriété du cours sur la dérivée d'un quotient et calculer

$$f'(x)=\frac{3x^2\times(x^2+1)-(x^3-1)\times 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{x^4+3x^2+2x}{(x^2+1)^2}.$$

Exercice 6

$f(x)=\dfrac{3x+6}{x+1}$

❶ Ecrivons d'abord $f=\dfrac{u}{v}$ où $u(x)=3x+6$ et $v(x)=x+1$.

Puis dérivons le quotient : $f'(x)=\dfrac{3\times(x+1)-(3x+6)\times 1}{(x+1)^2}=\dfrac{-3}{(x+1)^2}$.

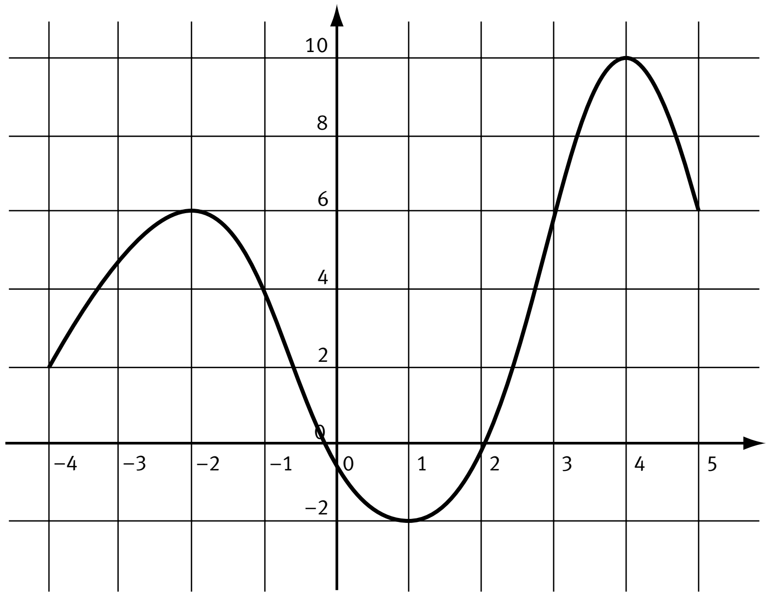
❷ En faisant *apparaitre* le dénominateur au numérateur on peut transformer $f(x)$ ainsi : $f(x)=\dfrac{3(x+1)+3}{x+1}=\dfrac{3(x+1)}{x+1}+\dfrac{3}{x+1}=3+\dfrac{3}{x+1}$.

Ensuite, dérivons cette dernière expression $f'(x)=0+3\times\dfrac{-1}{(x+1)^2}=\dfrac{-3}{(x+1)^2}$.

Correction des activités du chapitre 4

Activité 1 ❶ **Des tangentes horizontales**

La courbe suivante est celle d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-4\,;5]$.



❶ On peut compléter les phrases ainsi:

« Lorsque la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ est horizontale son coefficient directeur est égal à zéro ».

Les abscisses des points de la courbe $\mathscr{C}_f$ précédente où la tangente est horizontale sont :

$$x_1 = -2 \quad , \quad x_2 = 1 \quad , \quad x_3 = 4$$

On a donc $f'(x_1) = 0$, $f'(x_2) = 0$, $f'(x_3) = 0$.

❷ Compléter :

« Sur l'intervalle $[-4\,;-2]$ la fonction f est croissante ».

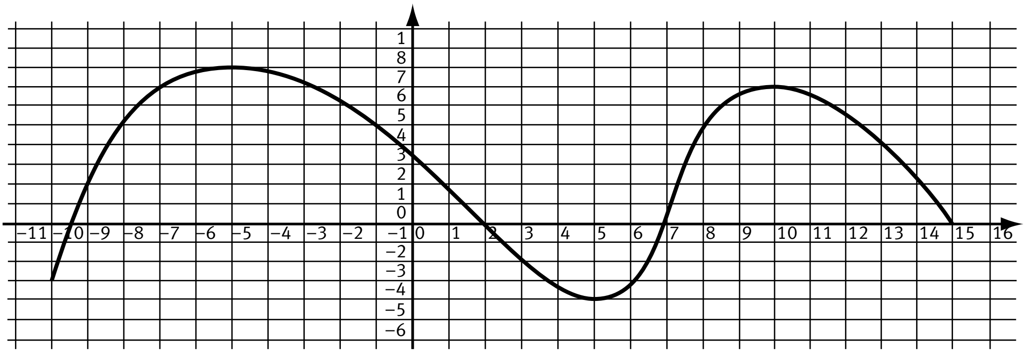
« Sur l'intervalle $[-2\,;1]$ la fonction f est décroissante ».

« Sur l'intervalle $[1\,;4]$ la fonction f est croissante ».

« Sur l'intervalle $[4\,;5]$ la fonction f est décroissante ».

❷ Variations et signe de la dérivée

La courbe suivante est celle d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-10\,;15]$.



Compléter les bornes des intervalles :

« Si $f'(x) \geq 0$ alors $x \in [-10\,;\,-5] \cup [5\,;\,10]$. »

« Si $f'(x) \leq 0$ alors $x \in [-5\,;\,5] \cup [10\,;15]$. »

Correction des exercices d'apprentissage du chapitre 4

Exercice 1 Soit f la fonction définie sur $\left[-4\,;3\right]$ par $f(x)=2x^3+3x^2-12x+1$.

❶ La dérivée f' du polynôme f est la somme des dérivées de ses monômes :
$f'(x)=2\times 3x^2+3\times 2x-12=6x^2+6x-12$.

❷ À l'aide des racines 1 et -2 de $f'(x)$ on peut factoriser $f'(x)=6(x-1)(x+2)$ puis faire le tableau de signe :

x	-4		-2		1		3
Signe de f'		$+$	0	—	0	$+$	

❸ Puis en déduire le tableau de variation de f sur $\left[-4\,;3\right]$.

x	-4		-2		1		3
Signe de f'		$+$	0	—	0	$+$	
f	-31	$\nearrow$	21	$\searrow$	-6	$\nearrow$	46

❹ Quels sont les extrema de f et en quels points sont-ils atteints ?

a) Sur $\left[-3\,;2\right]$,
f atteint son maximum 21 pour la seule valeur $x=-2$.
f atteint son minimum -6 pour la seule valeur $x=1$.

b) Sur $\left[-4\,;3\right]$,
f atteint son maximum 46 pour la seule valeur $x=3$.
f atteint son minimum -31 pour la seule valeur $x=-4$.

❺ L'équation $f(x)=0$ possède deux solutions dans l'intervalle $\left[-3\,;2\right]$ puisque $f(-3)>0$.

Exercice 2 Soit f la fonction définie sur $\left[-4\,;0\right[\cup\left]0\,;4\right]$ par $f(x)=2x+1-\dfrac{4}{x}$.

❶ On calcule $f'(x)=2-4\times(\dfrac{-1}{x^2})=\dfrac{2x^2+4}{x^2}$.

❷ Pour tout $x \in [-4\,;0[\cup]0\,;4]$ on sait que $x^2 > 0$ donc pour tout $x \in [-4\,;0[\cup]0\,;4]$, $2x^2 + 4 > 0$, par conséquent, le quotient $\dfrac{2x^2+4}{x^2}$ est lui aussi strictement positif lorsque $x \in [-4\,;0[\cup]0\,;4]$.

❸ On en déduit le tableau de variation suivant :

x	-4		0		4
Signe de f'		$+$	||	$+$	
f	-6	↗	||	↗	8

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $]-\infty\,;-2[\cup]-2\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{3x-1}{x+2}$.

❶ La propriété du cours sur la dérivée d'un quotient indique que $f'(x) = \dfrac{3\times(x+2)-(3x-1)\times 1}{(x+2)^2} = \dfrac{7}{(x+2)^2}$.

❷ Le dénominateur de $\dfrac{7}{(x+2)^2}$ est un carré (donc positif ou nul) qui ne s'annule que lorsque $x = 2$ (ce qui est écarté) donc pour tout $x \in]-\infty\,;-2[\cup]-2\,;+\infty[$ $f'(x) > 0$, puisque c'est le quotient de deux nombres strictement positifs.

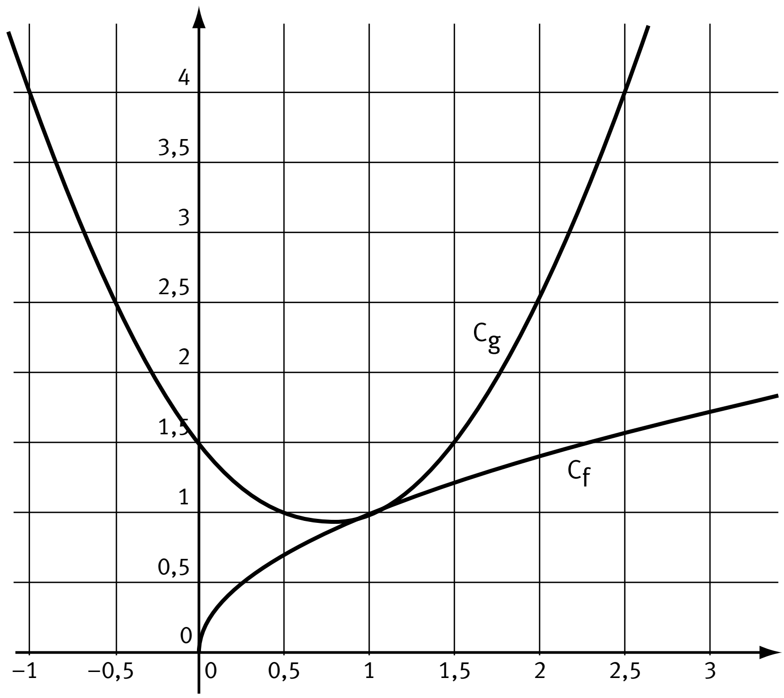
❸ Le tableau de variation de f en découle :

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
Signe de f'		$+$	||	$+$	
f		↗	||	↗	

Exercice 4

On considère les deux fonctions f et g définies par $f(x) = \sqrt{x}$ et $g(x) = \dfrac{2x^2-3x+3}{2}$.

❶ Traçons les courbes de ces deux fonctions à l'aide de *Geogebra* :



❷ **a)** On conjecture que les coordonnées de leur point d'intersection A sont $(1\,;1)$.

b) Les coordonnées $(x\ ;\ y)$ de leur point d'intersection vérifient $y = f(x) = g(x)$.

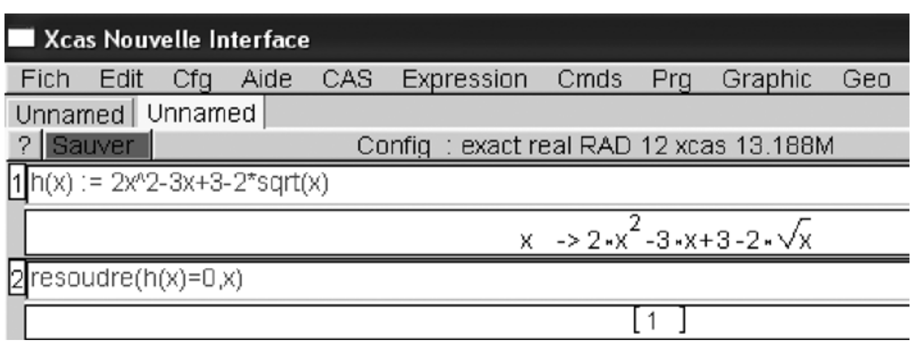
On résout donc $f(x) = g(x)$,

c'est-à-dire $\dfrac{2x^2 - 3x + 3}{2} = \sqrt{x} \quad \Leftrightarrow \quad 2x^2 - 3x + 3 = 2\sqrt{x}$.

On peut écrire cette équation sous la forme $h(x) = 0$

où $h(x) = 2x^2 - 3x + 3 - 2\sqrt{x}$.

Le logiciel XCAS nous indique une seule solution à cette équation :



Cette solution est $x = 1$.

Ceci peut se démontrer en remarquant que $h(x)=(\sqrt{x}-1)^2(2x+4\sqrt{x}+3)$ (développez pour le vérifier !) et que le facteur $2x+4\sqrt{x}+3$ ne peut pas s'annuler puisque pour tout $x\in\mathbb{R}^+$, $2x+4\sqrt{x}+3\geq 1$; par conséquent l'équation $f(x)=0$ est équivalente à $\sqrt{x}-1=0$ c'est-à-dire à $x=1$.

On dit que deux courbes sont tangentes en un point P lorsque le point P est commun à ces courbes et qu'au point P les (droites) tangentes à chacune des courbes sont les mêmes.

❸ Pour montrer qu'au point A, les deux courbes sont tangentes il suffit de montrer que les coefficients directeurs de leur tangente sont égaux puisqu'alors, ayant le point A en commun, ceci impliquera que les (droites) tangentes sont les mêmes. Calculons ces coefficients directeurs, c'est-à-dire $f'(1)$ et $g'(1)$.

On calcule $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ d'où $f'(1)=\dfrac{1}{2}$. En écrivant $g(x)=x^2-\dfrac{3}{2}x+\dfrac{3}{2}$, on calcule $g'(x)=2x-\dfrac{3}{2}$ d'où $g'(1)=2-\dfrac{3}{2}=\dfrac{1}{2}$. Comme $f'(1)=\dfrac{1}{2}=g'(1)$, les deux courbes sont tangentes au point A.

Exercice 5

L'explication de Valentin

« Si $f'(x)\geq 0$ pour tout $x\in I$, c'est qu'en tous les points M de la courbe $\mathscr{C}_f$ d'abscisse $x\in I$ la tangente à $\mathscr{C}_f$ a un coefficient directeur positif donc c'est une droite qui « monte » donc la fonction f est croissante ».

est une justification géométrique du deuxième cas du théorème 2 du cours. On l'a énoncé ainsi :

On considère une fonction f dérivable sur un intervalle I.

▸ Si pour tout réel $x\in I$, alors f est croissante sur I.

L'explication de Lenita

« Si la fonction f est croissante au voisinage de chaque point de la courbe $\mathscr{C}_f$ alors la courbe « monte » donc la tangente « ne peut aussi que monter » donc $f'(x)\geq 0$ ».

est une justification géométrique du deuxième cas du théorème 1 du cours. On l'a énoncé ainsi :

On considère une fonction f dérivable sur un intervalle I.

▸ Si f est croissante sur I alors pour tout réel $x\in I$, $f'(x)\geq 0$.

Exercice 6

Vrai / Faux :

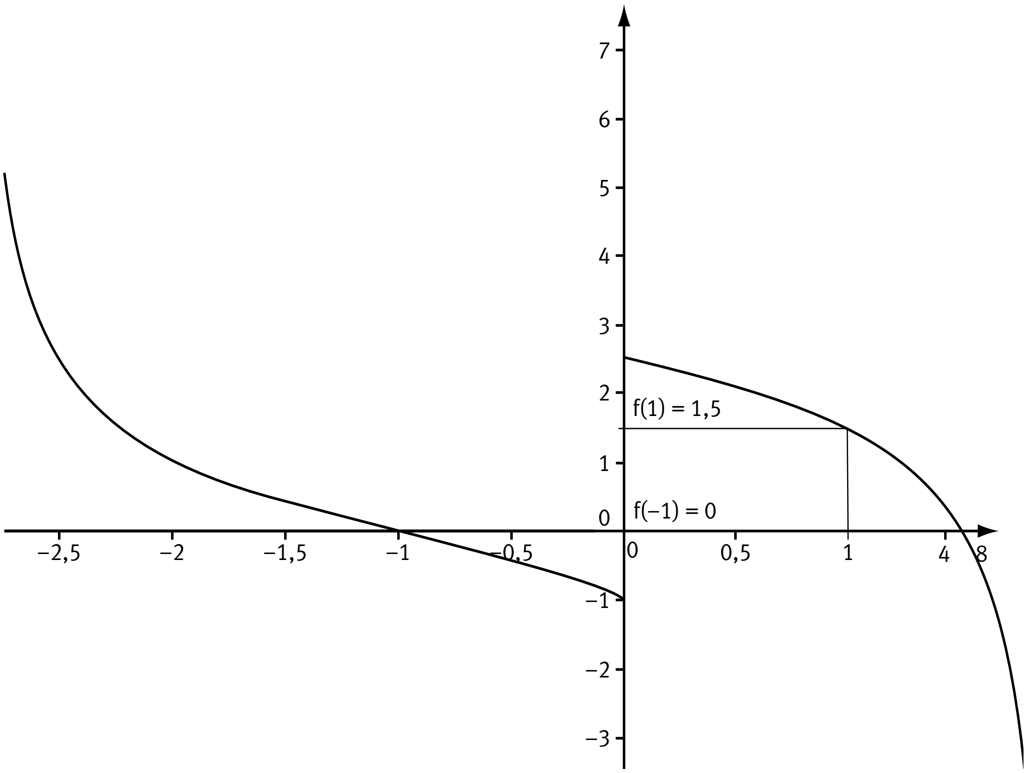
- « Si $f'(a)=0$ alors la tangente au point d'abscisse a est parallèle à (Ox) ».
  C'est vrai.
- « Si $f'(a)=0$ alors la fonction admet un extremum (c'est-à-dire un maximum ou un minimum) au point d'abscisse a ».

C'est faux. Par exemple, la valeur 0 n'est ni un minimum, ni un maximum de la fonction $f : x \mapsto x^3$ sur l'intervalle $\left[-2\,;2\right]$ et pourtant $f'(x) = 3x^2$ donc $f(0) = 0$, autrement dit la fonction f s'annule en $x = 0$.

Exercice 7 On considère une fonction f définie sur $\left]-\infty\,;0\right[\cup\left]0\,;+\infty\right[$.

On sait de plus que la fonction f est décroissante.

Avant de répondre aux questions, intéressons-nous au préalable à l'exemple suivant :

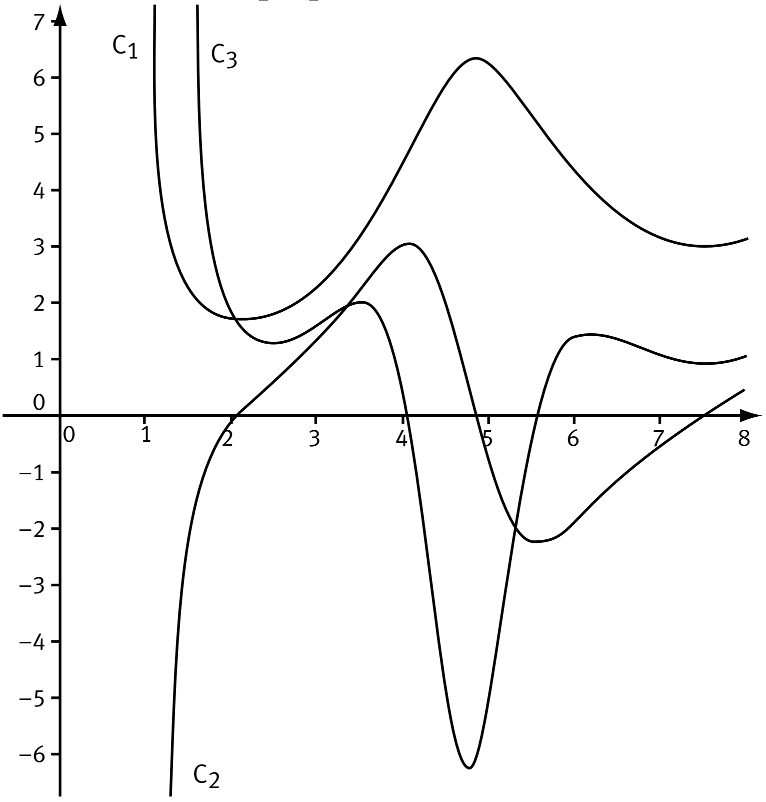


Dans l'énoncé de cet exercice, il est dit que la fonction f est décroissante sans plus de précision. Comme la fonction f n'est pas définie sur un intervalle mais sur la réunion de deux intervalles disjoints ($\left]-\infty\,;0\right[\cup\left]0\,;+\infty\right[$ est formé de deux *morceaux*) et que l'abscisse $-1 \in \left]-\infty;0\right[$ (1er morceau) et l'abscisse $1 \in \left]0\,;+\infty\right[$ (2ème morceau) ; on ne peut pas utiliser la définition de la décroissance d'une fonction (*une fonction qui conserve le sens des inégalités*).

❶ On ne peut donc pas affirmer que $f(-1) \geq f(1)$. Ceci peut aussi être illustré par le contre-exemple : $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ qui est bien une fonction définie sur $\left]-\infty\,;0\right[\cup\left]0\,;+\infty\right|$ et telle que $f(-1) = -1$ et $f(1) = 1$ donc pour laquelle $f(-1) < f(1)$.

❷ On ne peut pas, à plus forte raison, affirmer que $f(-1) > f(1)$ comme illustrer précédemment.

Exercice 8 Les trois courbes C_1, C_2, C_3 ci-dessous sont celles de trois fonctions *f*, *g* et *h* définies et dérivables sur $]1 ; 8]$.



La fonction *f* est la dérivée de la fonction *g* et la fonction *g* est la dérivée de la fonction *h*, autrement dit, $f = g'$ et $g = h'$.

Remarquons d'abord que la courbe C_1 reste au-dessus de l'axe des abscisses, autrement dit que la fonction qui lui est associée reste **positive**. Si c'était la courbe d'une dérivée alors la fonction dont elle serait la dérivée serait **croissante** sur tout l'intervalle $]1 ; 8]$, ce qui n'est le cas d'aucune des courbes C_2 et C_3. La courbe de la fonction C_1 ne peut donc être que celle de la fonction *h*.
Comme $g = h'$, la courbe de *g* est celle de h' donc la courbe de *g* coupe l'axe des abscisses en $x = a$ tel que $h'(a) = 0$, autrement dit en un point d'abscisse *a* où *h* a un extremum. Comme C_1 est la courbe de *h*, on peut *lire* les extrema de *h* sur la courbe C_1 : en dehors des bornes de l'intervalle $]1 ; 8]$, *h* admet un minimum en $x = 2$. C'est la courbe C_2 qui coupe l'axe des abscisses en $x = 2$. Donc C_2 ne peut que représenter la fonction h', c'est-à-dire *g*.

Par conséquent, la courbe C_3 est celle de la fonction *f*. On peut d'ailleurs vérifier que les abscisses des points où C_3 coupe l'axe des abscisses (4,1 et 5,5 environ) correspondent à des extrema pour la fonction *g* (courbe C_2).
En résumé, $C_f = C_3$, $C_g = C_2$ et $C_h = C_1$.

Correction des exercices d'approfondissement du chapitre 5

Exercice I

Démonstration du théorème 1 du cours

❶ Démontrons d'abord le premier point du théorème à savoir :

Si f est croissante sur I alors pour tout réel $x \in I$, $f'(x) \geq 0$.
Pour cela nous considérons une fonction f dérivable sur un intervalle I.
Supposons que f soit une fonction croissante. Nous allons démontrer que

Pour tout réel $x \in I$, $f'(x) \geq 0$.

Fixons d'abord arbitrairement un réel $a \in I$.

❶ Par définition $f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$.

❷ **a)** Pour tout $h > 0$, $a < a+h$ donc (f conserve l'ordre car f croissante) $f(a) < f(a+h)$.

A fortiori, pour tout $h > 0$, $f(a+h) \geq f(a)$.

b) Pour tout $h > 0, f(a+h) - f(a) \geq 0$ donc $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} \geq 0$, comme quotient de deux nombres positifs (le dénominateur h étant toujours non-nul).

❸ **a)** Pour tout $h < 0$, $a+h < a$ donc (f conserve l'ordre car f croissante) $f(a+h) < f(a)$.

A fortiori, pour tout $h < 0$, $f(a+h) \leq f(a)$.

b) Pour tout $h < 0$, $f(a+h) - f(a) \leq 0$ donc $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} \geq 0$, comme quotient de deux nombres négatifs (le dénominateur h étant toujours non-nul).

❹ En regroupant les résultats obtenus aux question 2b. et 3b. nous pouvons affirmer que

Pour tout $h \neq 0, \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} \geq 0$.

En faisant tendre h vers zéro, on peut conclure que $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} \geq 0$, autrement dit $f'(a) \geq 0$.

Comme le point a a été fixé arbitrairement dans l'intervalle I, le raisonnement précédent est valable pour tout les réels $a \in I$. On peut donc dire que pour tout réel $x \in I$, $f'(x) \leq 0$.

Conclusion : Si f est croissante sur I alors pour tout réel $x \in I$, $f'(x) \leq 0$.

❷ Démontrons ensuite le second point du théorème 1, à savoir :

Si f est décroissante sur I alors pour tout réel $x \in I$, $f'(x) \leq 0$.

Considérons une fonction f décroissante sur I.

❶ Par définition, dès que a et b sont deux réels de l'intervalle I vérifiant $a < b$ alors on a $f(a) < f(b)$. Donc, si $(a, b) \in I^2$ tels que $a < b$ alors, en multipliant par -1 l'inégalité précédente, $-f(a) > -f(b)$. Ceci est l'exacte définition du fait que la fonction $-f$ soit décroissante sur I.

En résumé, si f est une fonction décroissante sur un intervalle I alors $-f$ est croissante sur I.

❷ Le résultat de la partie I appliqué à la fonction croissante $-f$ dit que :

Pour tout réel $x \in I$, $(-f)'(x) \geq 0$.

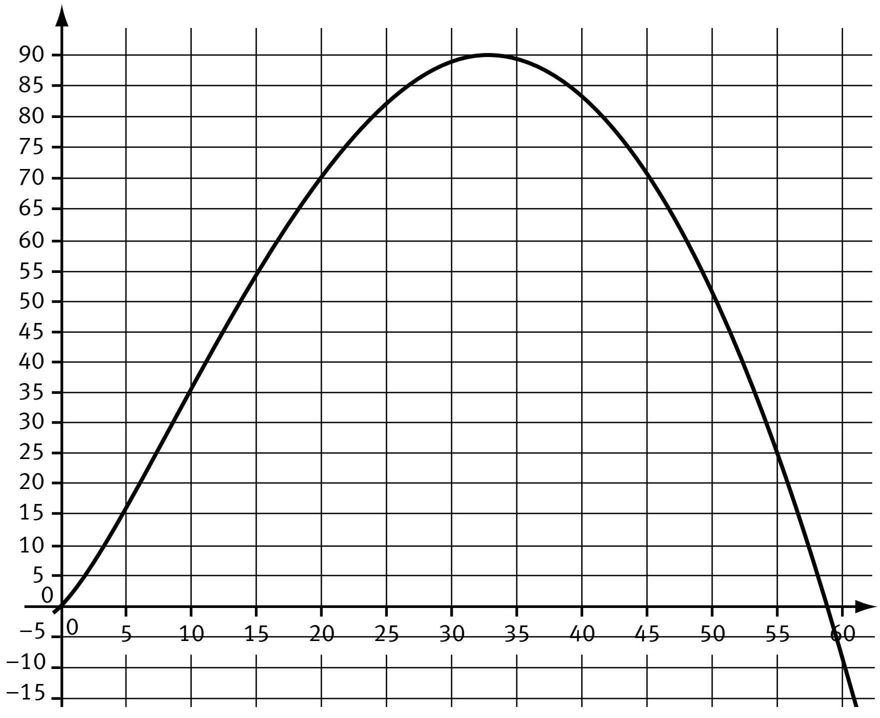
Comme $(-f)' = ((-1) \times f)' = (-1) \times f' = -f'$, ceci signifie que pour tout réel $x \in I, -f'(x) \geq 0$, soit encore (en multipliant par -1), pour tout réel $x \in I$, $f'(x) \leq 0$.

Conclusion : Si f est décroissante sur I alors pour tout réel $x \in I$, $f'(x) \leq 0$.

Exercice II

$f(x) = (2x+2)\sqrt{x+1} - 2 - x - \dfrac{x^2}{4}$. La fonction f est définie sur $]-1\,;+\infty[$.

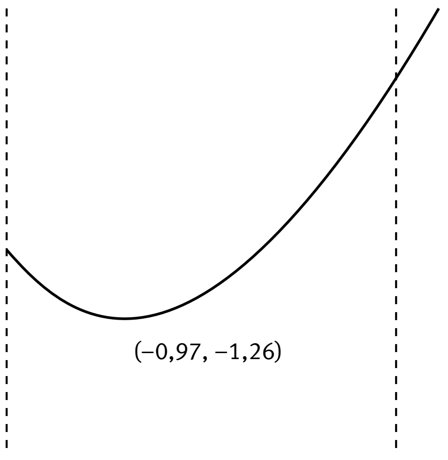
❶ **a)** À l'aide du logiciel Geogebra, traçons la courbe de f :



b) Par lecture graphique, on lit le signe de $f'(-1)$. La fonction semble croissante à partir de $x=-1$, on est donc tenté de dire que $f'(-1)$ est de signe positif sur la base d'un raisonnement graphique.

Cependant, en effectuant un agrandissement (*zoom*) on s'aperçoit que la courbe de f descend pour des abscisses très proches de (légèrement supérieures à) -1. Cette étude plus fine nous invite à conjecturer que $f'(-1)$ est de signe négatif. Mais rien ne nous dit que si on regarde d'encore plus près le phénomène ne s'inverse pas !

c) Donner une valeur approchée de la plus petite valeur a telle que $f'(a) \geq 0$.

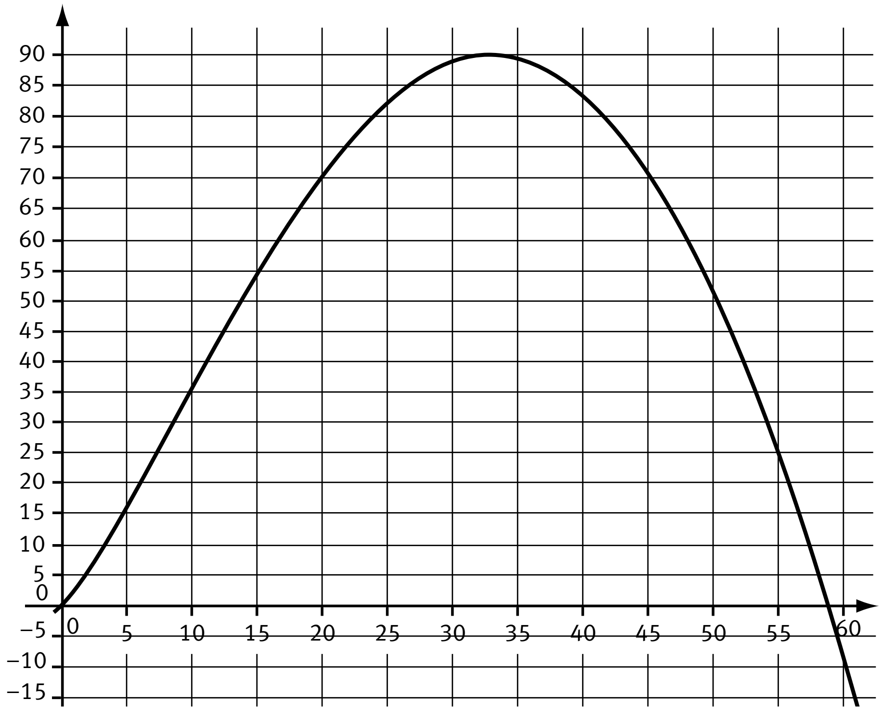


En effectuant un agrandissement et en utilisant l'outil nouveau point nous pouvons placer le pointeur de la souris près du minimum et ainsi en lire une abscisse approchée (les deux traits verticaux en pointillés matérialise les abscisses -1 et $-0,9$).

La fonction f semble donc être décroissante sur l'intervalle $[-1\,;-0,97]$.

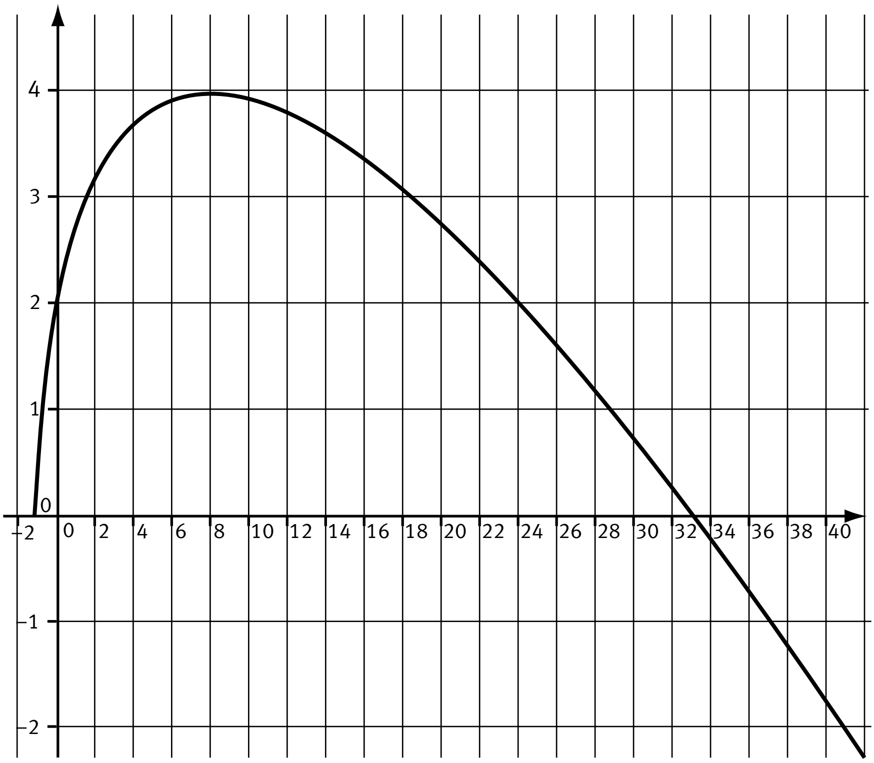
On prend $0,97$ comme valeur approchée de a.

d) À l'inverse, en effectuant une réduction (*zoom arrière*) de la fenêtre de la courbe.

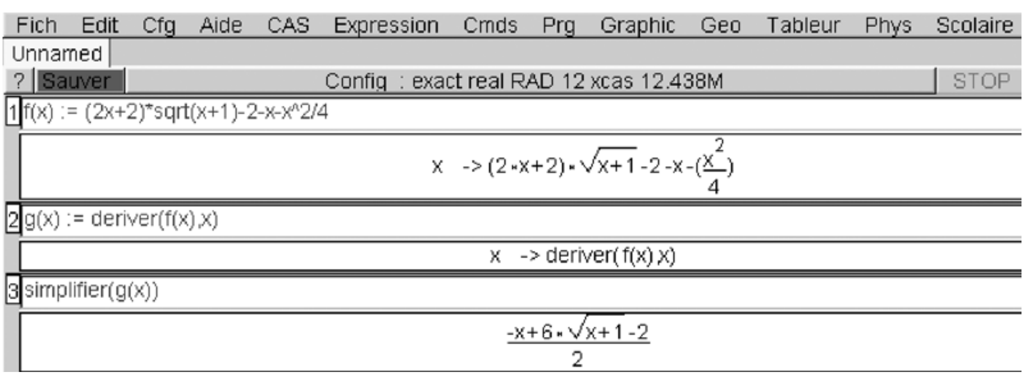


Graphiquement, la fonction f semble être croissante sur l'intervalle $[0,97\,;\,33]$ environ.

❷ **a)** Voici le tracé de la courbe de f' après saisie de « f'(x) » dans Geogebra.



❸ **a)** Vérifions que $f'(x) = 3\sqrt{x+1} - \dfrac{x}{2} - 1$ à l'aide du logiciel XCAS.



On a obtenu $f'(x) = \dfrac{-x+6\sqrt{x+1}-2}{2} = 3\sqrt{x+1} - \dfrac{x}{2} - 1.$

On peut calculer la valeur exacte de a ; on trouve $\boxed{a = -2(\sqrt{110} - 10).}$

b) À l'aide du raisonnement précédent sur la courbe de f, par définition du nombre réel a on peut affirmer que pour $x \in \left[a\,;+\infty\right[$, $f'(x) \geq 0$, c'est-à-dire, d'après le calcul précédent,

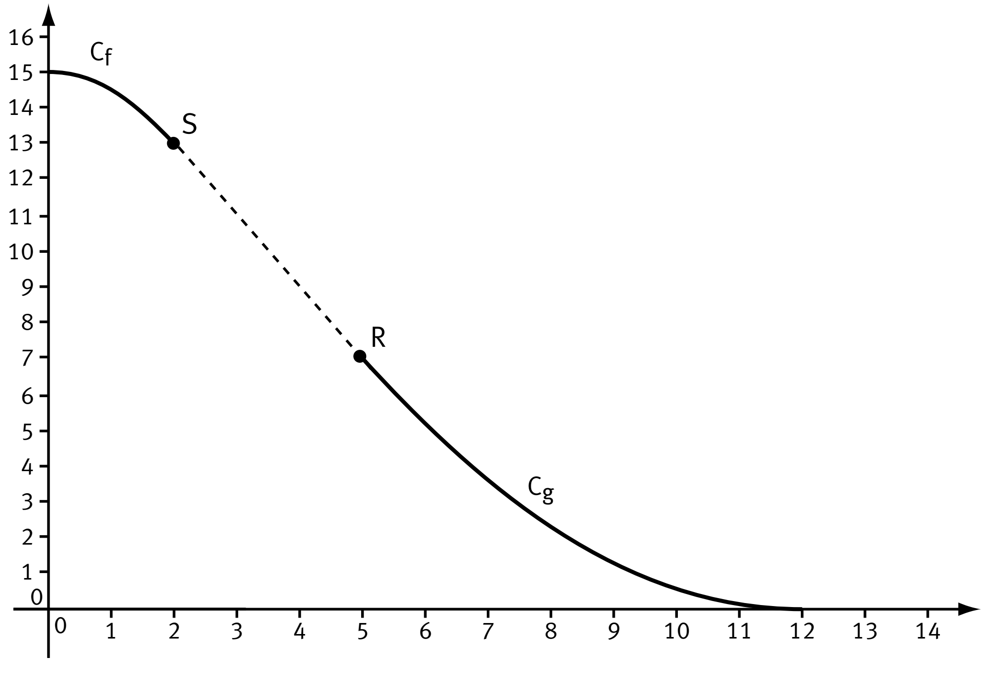
Pour $\boxed{x \in \left[-2(\sqrt{110}-10)\,;+\infty\right[,\ 3\sqrt{x+1} \geq \frac{x}{2}+1.}$

Exercice III

❶ **a)** On calcule $f(2)=13$ puis $f'(x)=-\frac{1}{2}2x=-x$ d'où $f'(2)=-2$. La tangente à la courbe C_f au point S d'abscisse 2 a pour équation $y-f(2)=f'(2)(x-2)$ soit $\boxed{y=-2x+17.}$

b) Comme $g(5)=\frac{5}{2}$ et $g'(x)=\frac{2}{7}(x-12)$ d'où $g'(5)=-2$, la tangente à la courbe C_g au point R d'abscisse 5 a pour équation $\boxed{y=-2x+17.}$

❷ **a) et b)**

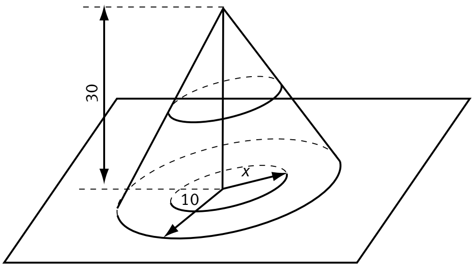


b) On lit le coefficient directeur de la droite (SR) dans la fenêtre algèbre : on lit $m=-2$.

c) Voir graphique ci-dessus.

d) On constate que la droite (SR) a la même équation que les tangentes aux courbes C_f et C_g ce qui permet aux fruits de suivre une trajectoire rectiligne respectant au mieux les courbures en S et en R.

Exercice IV



Le volume du cylindre (en cm^3) est $V = 30\pi x^2\left(1-\frac{x}{10}\right)$ où $0 \le x \le 10$.

Pour déterminer le volume maximum commençons par étudier les variations de la fonction $x \mapsto V(x)$.

Cette fonction (c'est une fonction polynôme de degré 3) est dérivable sur l'intervalle $[0\,;10]$ et on calcule (dérivée d'un produit) :

$$V'(x) = 30\pi(2x)\left(1-\frac{x}{10}\right)+30\pi x^2\left(-\frac{1}{10}\right) = 30\pi\left(2x-\frac{3x^2}{10}\right) = 3\pi(20x-3x^2)$$

soit $V'(x) = 3\pi\, x(20-3x)$.

Du signe de V' on peut déduire les variations de V :

x	0		$\frac{20}{3}$		10
Signe de V'	0	$+$	0	$-$	
V	0	$\nearrow$	$\frac{4000\pi}{9}$	$\searrow$	0

On constate que la fonction V atteint son maximum pour l'unique valeur $\boxed{x = \frac{20}{3}}$ de l'intervalle $[0\,;10]$.

Le volume maximum est alors $V(\frac{20}{3}) = \frac{4000\pi}{9}$ soit environ $1396{,}26$ cm^3.

Exercice V

❶ **a)** En arrondissant le nombre d'animaux $f(t)$ (en milliers) à l'unité près, on obtient le tableau :

t	10	28	29	30
Année 1980 + t	1990	2008	2009	2010
Nombre d'animaux	13889	18944	19081	19211

b) Entre 2009 et 2010, le nombre d'animaux a augmenté de 130.

❷ La fonction f est définie et dérivable sur l'intervalle $\left[0\,;+\infty\right[$ et on calcule (dérivée d'un quotient)

$$f'(t)=\frac{24(t+8)-(24t+10)\times 1}{(t+8)^2}=\frac{182}{(t+8)^2}.$$

Comme f' reste strictement positive sur l'intervalle $\left[0\,;+\infty\right[$ la fonction f est (strictement) croissante sur l'intervalle $\left[0\,;+\infty\right[$.

❸ **a)** On calcule $f'(28)=\dfrac{91}{648}\approx 140{,}4\times 10^{-3}$ et $f'(29)=\dfrac{91}{648}\approx 132{,}9\times 10^{-3}$.

b) On observe, par exemple, que 132,9 est une valeur approchée de 129 et que l'erreur commise en remplaçant 129 par 132,9 est de moins de 3%. (de 8% pour 140,4).

Autrement dit, $f'(28)$ et $f'(29)$ sont des (assez) bonnes approximations de la variation du nombre d'animaux entre l'année 28 (c'est-à-dire 2008) et l'année 29.

❹ En se basant sur le résultat précédent, on peut penser que $f'(30)$ et $f'(31)$ sont des valeurs approchant assez fidèlement la variation du nombre d'animaux entre 2010 et 2011.
On calcule donc $f'(30)\approx 1260\times 10^{-4}$ et $f'(31)\approx 1197\times 10^{-4}$.
Prenons la dernière de ces deux valeurs pour estimer l'augmentation du nombre d'animaux entre 2010 et 2011.
Pour l'année 2011, on peut prévoir un nombre d'animaux d'environ $19211+1197=20408$.

Exercice VI

G est la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;31]$ par $G(x)=50x^2-1{,}5x^3$.

❶ On calcule $G'(x)=50\times 2x-1{,}5\times 3x^2=100x-4{,}5x^2$.

❷

x	0	1	2	3	5	10	15	20	25	30
G'(x)	0	95,5	182	259,5	328	550	487,5	200	–312,5	–1050

❸ À partir des racines de $G'(x)$ (qui sont 0 et $\frac{200}{9}$) on déduit le signe de G' (qui est un polynôme de degré 2) puis les variations de G :

x	0		$\dfrac{200}{9}$		31
Signe de G'		+	0	—	
G'	0	$\nearrow$	$\dfrac{2\times 10^5}{243}$	$\searrow$	0

❹ Déterminer le jour où le nombre de malades augmente le plus revient à déterminer le jour où la vitesse de propagation du virus est maximale autrement dit à chercher un maximum de $G'(x)$.

Pour étudier les variations de G' calculons la dérivée de la fonction G'.

On calcule $(G')'(x) = 100 - 9x = 9 \times (\frac{100}{9} - x)$.

On en déduit le tableau suivant :

x	0		$\frac{100}{9}$		31
Signe de G'		$+$	0	$-$	
G'	0	$\nearrow$	$\frac{5000}{9}$	$\searrow$	-41900

On constate que la vitesse de propagation du virus est maximale lorsque $x = \dfrac{100}{9} \approx 11$.

Comme $\dfrac{5000}{9} \approx 555$, on conclut que c'est le 11ème jour après le début de l'épidémie que le virus sera le plus virulent et qu'au cours de ce seul 11ème jour, environ 555 personnes (nouvelles) seront infectées.

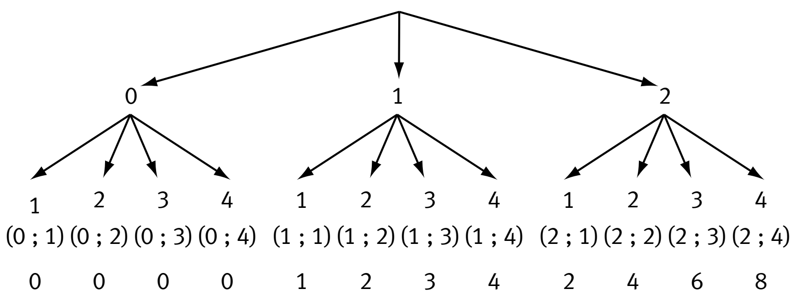
■

Corrigé séquence 7

Correction des exercices d'apprentissage du chapitre 2

Activité 1 Multiplier des numéros tirés au hasard

❶ Voici un arbre illustrant la situation :



Il y a douze éventualités que l'on peut écrire sous forme de couples, le premier numéro d'un couple correspondant à la boule rouge qui est tirée en premier, ainsi $\Omega = \{(0\,;1), (0\,;2)\ldots, (2\,;4)\}$.

Dans cette question on associe à chacun de ces couples le produit des deux nombres. Sous chaque couple possible, on a indiqué la valeur du produit. Les valeurs possibles pour ces produits sont 0, 1, 2, 3, 4, 6, 8.

On aurait pu illustrer la situation par un tableau analogue au suivant :

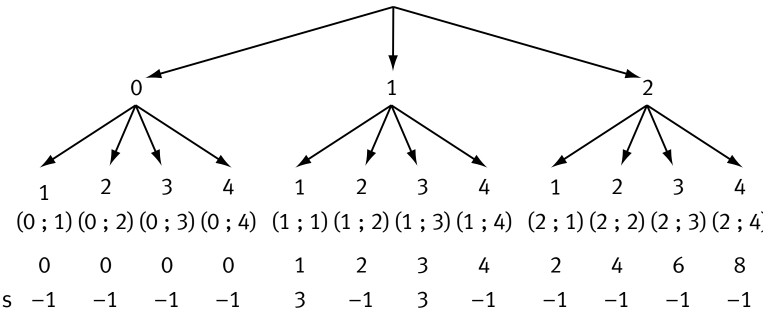
1er tirage / 2nd tirage	0	1	2
1	(0 ; 1)	(1 ; 1)	(2 ; 1)
2	(0 ; 2)	(1 ; 2)	(2 ; 2)
3	(0 ; 3)	(1 ; 3)	(2 ; 3)
4	(0 ; 4)	(1 ; 4)	(2 ; 4)

Comme on utilise la loi équirépartie sur l'ensemble Ω des couples, on peut en déduire la probabilité que le produit soit nul en comptant combien de couples ont pour produit 0 (cas favorables) ; et on fait de même pour les autres valeurs possibles du produit ; la probabilité se calcule dans le cadre de la loi équirépartie par la formule $p = \dfrac{\text{Nombre de cas favorables}}{\text{Nombre de cas possibles}}$ (il y a 12 cas possibles).

Valeur du produit	0	1	2	3	4	6	8
probabilité	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$

❷ Les gains sont 3 € et -1 €.

Pour déterminer la probabilité d'obtenir chacun de ces gains, on complète l'arbre en indiquant sous chaque produit le gain correspondant.



Comme dans la première question on détermine les probabilités.

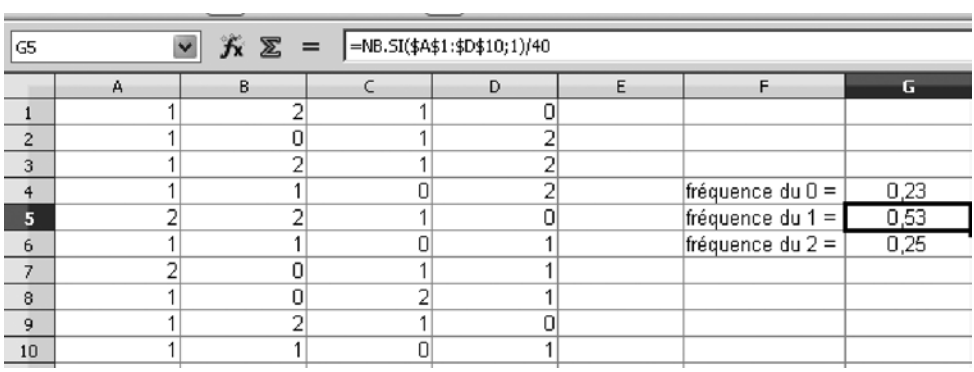
On obtient :

$P(\text{« gagner 3 € »}) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$ et $P(\text{« perdre 1 € »}) = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$.

Activité 2 Jouer à « Pile ou Face »

❶ Pour calculer la fréquence du 1 dans la plage rectangulaire de cellules A1 :D10 on en entré la formule = NB.SI($A$1:$D$10 ; 1) / 40

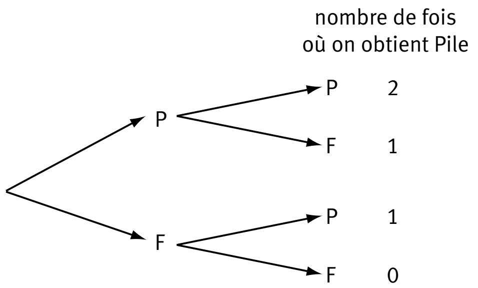
La formule analogue = NB.SI($A$1:$D$10 ; 2) / 40 calcule la fréquence du 2 dans la même plage de cellules.



G5 =NB.SI($A$1:$D$10;1)/40

	A	B	C	D	E	F	G
1	1	2	1	0			
2	1	0	1	2			
3	1	2	1	2			
4	1	1	0	2		fréquence du 0 =	0,23
5	2	2	1	0		fréquence du 1 =	0,53
6	1	1	0	1		fréquence du 2 =	0,25
7	2	0	1	1			
8	1	0	2	1			
9	1	2	1	0			
10	1	1	0	1			

On constate que le modèle de l'équiprobabilité n'est pas adapté (les fréquences simulées sont trop loin de 1/3).



❷ Dans cet arbre, les deux branches de gauche représentent les résultats possibles de la pièce verte et les quatre branches qui en sont issues représentent les résultats possibles de la pièce rouge. Il y a finalement 4 résultats possibles pour les deux pièces lancées ensembles. En utilisant la loi équirépartie pour ces 4 résultats, on trouve :

$p(\text{« 0 fois Pile »}) = \frac{1}{4}$, $p(\text{« 1 fois Pile »}) = \frac{1}{2}$ et $p(\text{« 2 fois Pile »}) = \frac{1}{4}$ ce qui est en accord avec la simulation.

❸ On lance trois pièces et on compte le nombre de fois où on a obtenu *Pile*.

Il y a quatre résultats possibles : 0, 1, 2 et 3.

Une simulation pour trois pièces montre encore que ces quatre résultats ne sont pas obtenus de façon équiprobable.

Un arbre, analogue au précédent, permet de faire une modélisation adaptée.

Grace à cet arbre, là encore on peut calculer les probabilités du nombre de *Pile* obtenus : $p(\text{« 0 fois Pile »}) = \frac{1}{8}$, $p(\text{« 1 fois Pile »}) = \frac{3}{8}$, $p(\text{« 2 fois Pile »}) = \frac{3}{8}$ et $p(\text{« 3 fois Pile »}) = \frac{1}{8}$.

Activité 3 Jeu promotionnel au casino

❶ a)

N (Nombre de « Pile » obtenu)	0	1	2
N^2	0	1	4

b) On observe que le carré du nombre de « Pile » obtenu à l'issue d'une partie est égal à la somme, en euros, gagné par le joueur.

❷

Texas

```
: EffDessin
: Input « N= », N
: 0 → Xmin : N → Xmax
: 100 → Xgrad
: 1.2 → Ymin : 1.8 → Ymax
: 0.1 → Ygrad
: DessFonct 1.5
: 0 → B
: For (K,1,N)
: (EntAlea(0,1)+EntAlea(0,1))² + B → B
: B/K → G
: Pt-Aff(K,G)
: End
: Pause
: Disp "Gain moyen=", G
```

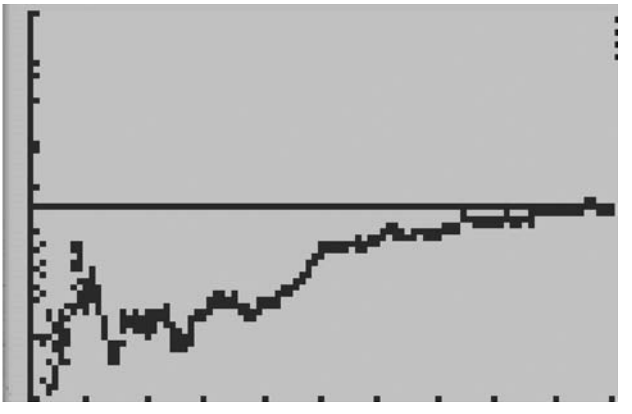
Casio

```
"N=" ? → N ↵
ViewWindow 0, N, 100, 1.2, 1.8, 0.1 ↵
Graph Y=1.5 ↵
P → B ↵
For 1 → I To N ↵
(RanInt#(0,1) + RanInt#(0,1))² + B →B ↵
B/I → G ↵
Plot I, G ↵
Next ◢
"Gain moyen=" ◢G◢
```

❸ En faisant fonctionner le programme précédent on a obtenu les résultats suivants :

Valeur de N en entrée	10	30	50	100	1000
Valeur de G en sortie (1ère simulation)	2	0,8	1,54	1,64	1,478
Valeur de G en sortie (2nde simulation)	1,3	1,4	1,7	1,49	1,493

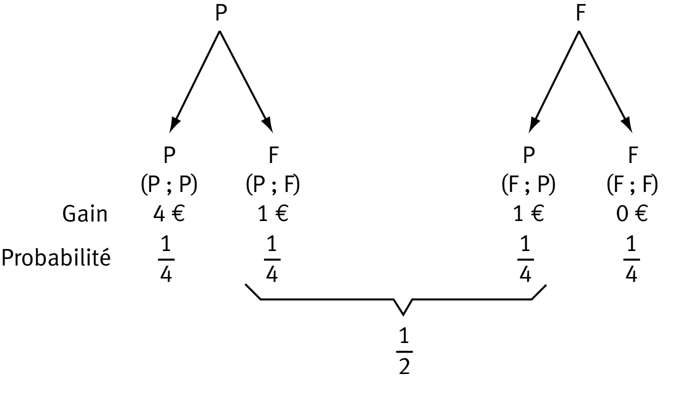
Pour N = 1000 nous avons obtenu l'affichage suivant :



❹ À partir des simulations précédentes, on observe que le gain moyen du joueur sur N parties simulées semble être voisin d'une valeur fixe proche de 1,5 et ceci semble d'autant plus vrai que N grandit. Si le jeu est gratuit, le joueur peut raisonnablement *espérer* gagner 1,5 €.

❺ Par conséquent, pour que le jeu soit équitable, le directeur du casino peut proposer le prix de 1,5 € à ses clients.

❻



Avec ce modèle théorique,

– Le joueur gagne 4 € avec la probabilité $\frac{1}{4}$ donc la somme (potentiellement gagnée) contribue en moyenne pour $\frac{1}{4} \times 4 = 1€$ dans ses gains totaux, à l'issue d'une partie.

– De même, il gagne 1 € avec la probabilité $\frac{1}{2}$ donc, en moyenne, $\frac{1}{2}\times 1=0,5$ € après une partie.

Au total, le gain du joueur sera en moyenne de $\boxed{1+0,5=1,5\text{€}.}$

On peut aussi raisonner sur un total de 1000 parties (jouées ou simulées).

Le joueur gagnera théoriquement 4 € dans un quart des cas c'est-à-dire, à 250 parties soit au total pour ces 250 parties, il gagnera $250\times 4=1000$ €.

Sur ces mêmes 1000 parties, il gagnera 1 € à 500 parties soit, au total pour ces 500 parties, un gain de $500\times 1=500$ €.

Et pour les 250 parties restantes, il ne gagnera rien.

Sur les 1000 parties, le gain sera au total de $1000+500=1500$€, soit en moyenne par partie un gain de $\boxed{\frac{1500}{1000}=1,5\text{€}.}$

On peut résumer ce résultat par l'égalité :

$$\boxed{\begin{aligned} G_{moyen} &= \left(4\times\frac{1}{4}\right)+\left(1\times\frac{1}{2}\right)+\left(0\times\frac{1}{4}\right)=1,5 \\ &= \frac{4\times 250+1\times 500+0\times 250}{1000}=1,5. \end{aligned}}$$

qui tient au fait que $\frac{250}{1000}=\frac{1}{4}$ et $\frac{500}{1000}=\frac{1}{2}$.

❼ Dix minutes avant la fermeture, le directeur du casino décide de multiplier par 10 les gains du jeu. Autrement dit, les gains $(4 \text{ €}, 1 \text{ €}, 0 \text{ €})$ sont remplacés par $(40 \text{ €}, 10 \text{ €}, 0 \text{ €})$.

Le calcul du gain moyen du joueur est analogue au précédent. Plus précisément, il s'en trouve modifié ainsi : $G_{moyen}=\left(40\times\frac{1}{4}\right)+\left(10\times\frac{1}{2}\right)+\left(0\times\frac{1}{4}\right)$

Avant d'effectuer le calcul, mettons 10 en facteur afin de retrouver le calcul précédent :

$$G_{moyen}=10\times\left(\left(4\times\frac{1}{4}\right)+\left(1\times\frac{1}{2}\right)+\left(0\times\frac{1}{4}\right)\right)=10\times 1,5=15 \text{ €}.$$

Par conséquent, le directeur du casino peut multiplier le prix d'une partie par 10 pour que le jeu reste équitable.

Correction des exercices d'apprentissage du chapitre 2

Exercice 1

❶ Le dé tombe à coup sûr sur l'une de ses faces ; autrement dit, la variable aléatoire X prend l'une des valeurs parmi 1, 2, 3, 4, 5, 6. Comme ces issues sont incompatibles (une seule issue à la fois), la somme de leur probabilité est égale à 1 ; c'est-à-dire : $1 = P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)+P(X=6)$.

Soit $1 = a+2a+3a+4a+5a+7a$, ou encore $1 = 22a$ d'où $a = \frac{1}{22}$.

❷ Pour un dé non truqué, chaque face a la même probabilité de sortir. Par exemple, $P(X=1)=P(X=2)$; ce qui n'est pas le cas pour le dé de l'exercice. Ce dé est donc truqué.

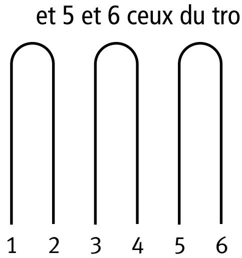
Exercice 2

Pour modéliser l'expérience aléatoire consistant à lancer deux fois de suite un dé équilibré, choisissons comme univers, l'ensemble des couples (i, j) de nombres où i et j sont des entiers compris entre 1 et 6. Il y en a 36, chacun équiprobable. La somme de deux nombres obtenus est supérieure ou égale à 2 et inférieure ou égale à 12 ; autrement dit, la variable aléatoire S prend des valeurs entre 2 et 12 (2 et 12 inclus). Parmi les nombres entiers entre 2 et 12, il n'y a que deux nombres divisibles par 6 : ce sont les nombres 6 et 12. Il y a exactement un résultat de deux lancers dont la somme soit égale à 12 : c'est le couple $(6,6)$. Parmi les 36 couples, ceux dont la somme est égale à 6 sont : $(1,5); (2,4); (3,3); (4,2); (5,1)$. Il y en a 5. Au total, il y a $1+5=6$ couples qui sont des issues favorables à l'événement « $\{S=6\} \cup \{S=12\}$ ».
Par conséquent, la probabilité de cet événement est :
$P(\{S=6\} \cup \{S=12\}) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

Exercice 3

❶ On peut obtenir une, deux ou trois boucles fermées. Donc X prend les valeurs 1, 2 et 3.

❷ Numérotons 1 et 2 les bouts du premier brin d'herbe, 3 et 4 ceux du second, et 5 et 6 ceux du troisième.



Nous écrirons $\{i\,j\}$ pour signifier que les bouts de numéros i et j ont été noués. Par exemple, $\{1\ 2\}$ signifie que le brins numéroté 1 est noué avec le brin numéroté 2.

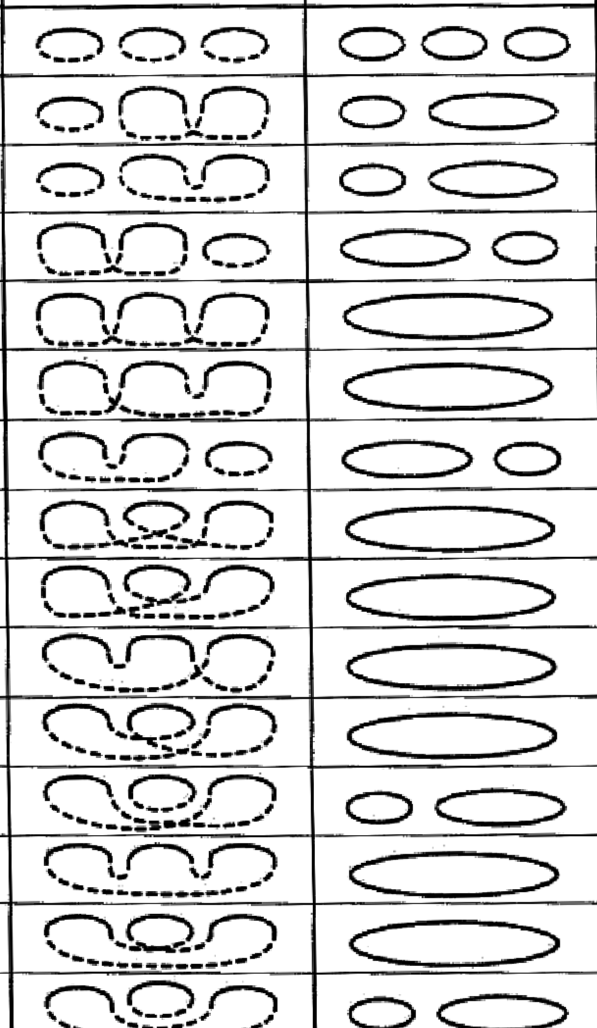
Pour énumérer tous les résultats possibles, procédons méthodiquement. Plaçons-nous d'abord dans une situation où le bout numéroté 1 est déjà noué ; par exemple avec le bout numéroté 2. Dans ce cas, il y a trois résultats possibles : {3 4} {5 6}, {3 5} {4 6} et {3 6} {4 5}.

Enumérons maintenant les façons de nouer le bout numéroté 1 avec un autre bout : {1 2}, {1 3}, {1 4}, {1 5}, {1 6}. Il y en a cinq. Chacune de ces trois façons donne trois résultats possibles analogues à ceux décrit pour {1 2}.

Au total, il y a donc $3 \times 5 = 15$ résultats possibles.

Ils sont rassemblés dans le tableau suivant :

Résultats possibles	***Liens***	***Schémas des boucles otenues***
{12} {34} {56}		
{12} {35} {46}		
{12} {36} {45}		
{13} {24} {56}		
{13} {25} {46}		
{13} {26} {45}		
{14} {23} {56}		
{14} {25} {36}		
{14} {26} {35}		
{15} {23} {46}		
{15} {24} {36}		
{15} {26} {34}		
{16} {23} {45}		
{16} {24} {35}		
{16} {25} {34}		



Ces 15 résultats sont équiprobables.

Donc la loi de probabilité de X est donnée par :

x_i	1	2	3
$P(X=x_i)$	$\frac{8}{15}$	$\frac{6}{15}=\frac{2}{5}$	$\frac{1}{15}$

On remarque que la probabilité d'obtenir une seule boucle est égale à $\frac{8}{15}$ et que $\frac{8}{15}>\frac{1}{2}$; cela peut expliquer que cette légende ait perduré.

❸ À l'aide du tableau précédent on calcule l'espérance de la variable aléatoire X :

$E(X)=1\times\frac{8}{15}+2\times\frac{2}{5}+3\times\frac{1}{15}=\frac{23}{15}\approx 1{,}5.$

Ceci signifie qu'en moyenne, le nombre de boucles fermées obtenues est proche de 1,5.

Exercice 4

❶ Pour modéliser l'expérience aléatoire consistant à lancer deux dés équilibrés, choisissons comme univers, l'ensemble des couples (i,j) de nombres où i et j sont des entiers compris entre 1 et 6. Il y en a 36, chacun équiprobable. Le maximum des deux nombres obtenus est supérieur ou égal à 1 et inférieur ou égal à 6 ; autrement dit, la variable aléatoire M prend des valeurs entre 1 et 6 (1 et 6 inclus). Le tableau à double entrées suivant liste **les valeurs prises par M** pour chacun des 36 couples :

1er dé / 2nd dé	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	2	3	4	5	6
3	3	3	3	4	5	6
4	4	4	4	4	5	6
5	5	5	5	5	5	6
6	6	6	6	6	6	6

La valeur « 4 » apparait 9 fois dans le tableau précédent, ceci signifie que 9 couples (i,j) ont un maximum égal à 4 ou encore que l'événement « $M=4$ » contient 9 issues élémentaires.

Maximum M	1	2	3	4	5	6
Nombre de couple(s)	1	3	5	7	9	11

On vérifie bien qu'on a 36 couples en tout (faire la somme de la 2ème ligne du tableau précédent).

❷ La loi de probabilité de M donnée dans le tableau suivant se déduit du précédent :

Valeur k de M	1	2	3	4	5	6
Probabilité de $\{M=k\}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$

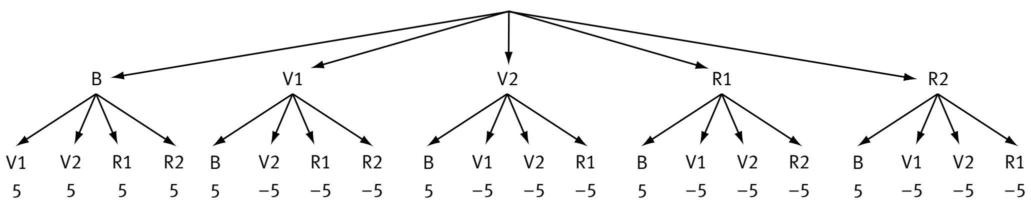
❸ Par définition de l'espérance

$$E(M)=1\times\frac{1}{36}+2\times\frac{3}{36}+3\times\frac{5}{36}+4\times\frac{7}{36}+5\times\frac{9}{36}+6\times\frac{11}{36}=\frac{161}{36}\approx 4,47.$$

Ce résultat signifie que le maximum des nombres obtenus lors du lancer de deux dés se rapproche en moyenne de 4,47 environ lorsqu'on répète de plus en plus de fois ces deux lancers.

Exercice 5

❶ Le joueur tire une boule, puis une seconde sans remettre la première boule tirée. L'arbre des possibles est donc :



❷ Sous chaque possibilité, on a indiqué la valeur prise par la variable aléatoire X. Si la boule blanche a été tirée le joueur gagne 10 € moins les 5 € qu'il a versé pour participer au jeu, son gain algébrique est donc égal à +5 €.

Si la boule blanche n'a pas été tirée, le joueur perd les 5 € qu'il a versé, son gain algébrique est égal à -5 €.

Les valeurs prises par X sont donc 5 et -5.

❸ L'arbre nous montre qu'il y a $4\times5 = 20$ issues. Comme les boules sont indiscernables au toucher, chaque événement élémentaire a la (même) probabilité $\frac{1}{20}$, soit 0,05.

L'événement (X=5) est formé de 8 événements élémentaires, donc $P(X=5)= 8\times0,05 = 0,4$.

Et l'événement (X=-5) est l'événement contraire du précédent, donc il a pour probabilité $P(X=-5) = 1-0,4 = 0,6$. La loi de probabilité de X est donc donnée par :

x_i	5	-5
$P(X=x_i)$	0,4	0,6

Correction des activités du chapitre 3

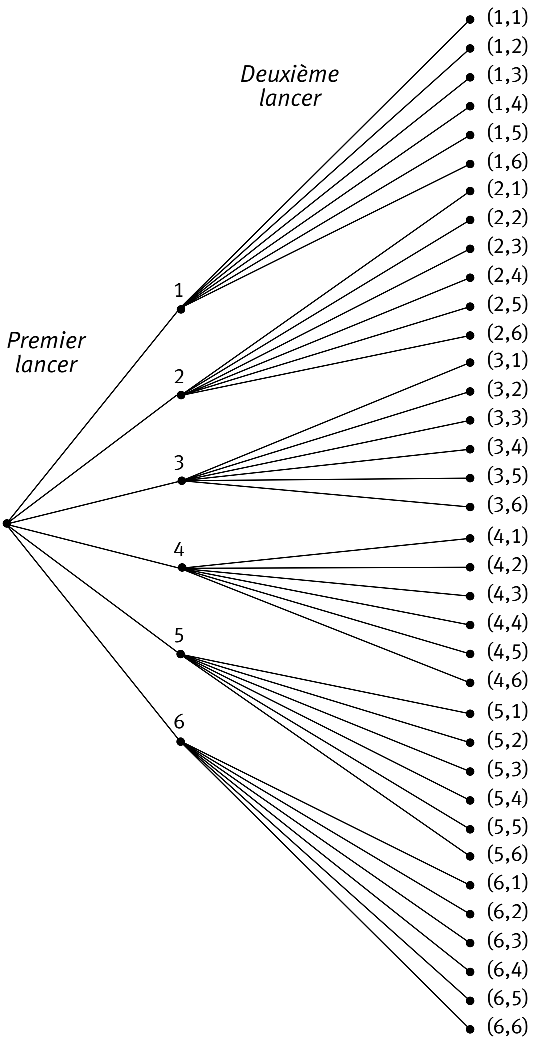
Activité 4 Sam, lanceur de dés récidiviste

❶ On peut énumérer les 36 issues :

(1,1) ; (1,2) ; (1,3) ; (1,4) ; (1,5) ; (1,6) ; (2,1) ; (2,2) ; (2,3) ; (2,4) ; (2,5) ; (2,6) ;

(3,1) ; (3,2) ; (3,3) ; (3,4) ; (3,5) ; (3,6) ; (4,1) ; (4,2) ; (4,3) ; (4,4) ; (4,5) ; (4,6) ;

(5,1) ; (5,2) ; (5,3) ; (5,4) ; (5,5) ; (5,6) ; (6,1) ; (6,2) ; (6,3) ; (6,4) ; (6,5) ; (6,6).



❷ Pour modéliser l'expérience aléatoire consistant à lancer deux fois un dé équilibré, choisissons comme univers, l'ensemble des couples (i, j) de nombres où i et j sont des entiers compris entre 1 et 6. Il y a 36 événements élémentaires (chaque couple $(i\,,j)$), chacun équiprobable. Donc la probabilité de chacun d'eux est égale à $\frac{1}{36.}$

❸ **a.** L'événement RB est constitué des issues $(1,6)$; $(2,6)$ et $(3,6)$.

b. RB est constitué de 3 issues élémentaires, chacune de probabilité $\frac{1}{36}$.

Donc $P(\text{RB}) = 3 \times \frac{1}{36}$ soit $\boxed{P(\text{RB}) = \frac{1}{12}.}$

❹ De même, $\text{RV} = \{(1,4)\,;(2,4)\,;(3,4)\,;(1,5)\,;(2,5)\,;(3,5)\}$ donc $P(\text{RV}) = \frac{6}{36}$ soit $\boxed{P(\text{RV}) = \frac{1}{6}.}$

et $\text{VR} = \{(4,1)\,;(4,2)\,;(4,3)\,;(5,1)\,;(5,2)\,;(5,3)\}$

donc $P(\text{VR}) = \frac{6}{36}$ soit $\boxed{P(\text{VR}) = \frac{1}{6}.}$

Enfin, $\text{VV} = \{(4,4)\,;(4,5)\,;(5,4)\,;(5,5)\}$ donc $P(\text{VV}) = \frac{4}{36}$ soit $\boxed{P(\text{VV}) = \frac{1}{9}.}$

❺ **a)** Il y a 3 issues favorables à l'événement R, parmi les 6 issues possibles donc

$P(\text{R}) = \frac{3}{6}$ soit $\boxed{P(\text{R}) = \frac{1}{2}.}$

b) De même, $P(V) = \frac{2}{6}$ soit $\boxed{P(V) = \frac{1}{3}}$

c) et $\boxed{P(B) = \frac{1}{6}.}$

❻ **a)** On remarque que $P(\text{R}) \times P(\text{B}) = P(\text{RB})$ puisque $\frac{1}{6} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$.

b) De même, on observe que $P(\text{RV}) = P(\text{R}) \times P(\text{V}) = P(\text{VR})$ et $P(\text{VV}) = P(\text{V}) \times P(\text{V})$.

❼ En s'appuyant sur l'observation précédente on peut imaginer que la *règle* observée se généralise et conjecturer que

$P(\text{RBB}) = P(\text{R}) \times P(\text{B}) \times P(\text{B}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{72}.$

De même, si cette règle se généralise on peut imaginer que $P(\text{RVB}) = P(\text{R}) \times P(\text{V}) \times P(\text{B}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}.$

Nous verrons que cette règle est valide sous certaines conditions. Sous ces conditions, elle permet le calcul de probabilités lorsqu'on répète une même expérience.

Activité 5 Un choix de clefs

❶ **a)** L'événement N correspond à 2 issues favorables pour 5 issues possibles et équiprobables donc $\boxed{P(\text{N}) = \frac{2}{5}.}$

b) L'événement R correspond à 3 issues favorables pour 5 issues possibles et équiprobables donc $\boxed{P(\text{R})=\frac{3}{5}.}$

❷ **a)** Dans le tableau ci-dessous nous avons indiqué le nombre de couples $(i\,,j)$ de numéros *i, j* de clefs.

	1 2	3 4 5
1 2	4	6
3 4 5	6	9

b) On en compte 4 correspondants à l'événement NN sur les $5\times 5=25$ au total.

Donc $\boxed{P(\text{NN})=\frac{4}{25}=0{,}16.}$

❸ Le tableau précédent nous indique qu'il y a 6 couples correspondant à l'événement NR donc $\boxed{P(\text{NR})=\frac{6}{25}=0{,}24.}$

❹ Le tableau précédent étant symétrique, il y a aussi 6 couples correspondant à l'événement RN donc $\boxed{P(\text{RN})=\frac{6}{25}=0{,}24.}$ Enfin, $\boxed{P(\text{RR})=\frac{9}{25}=0{,}36.}$

On observe que $P(\text{RN})=P(\text{R})\times P(\text{N})=P(\text{NR})$ et $P(\text{RR})=P(\text{R})\times P(\text{R})$.

Comme cela a déjà été dit à l'activité précédente, nous verrons que cette règle est valide sous certaines conditions (lesquelles conditions sont remplies dans les activités 4 et 5)

Activité 6 **Un choix de clefs :** ***un autre point de vue***

❶ La variable aléatoire X peut prend des valeurs parmi $\{0\,,1\,,2\}$.

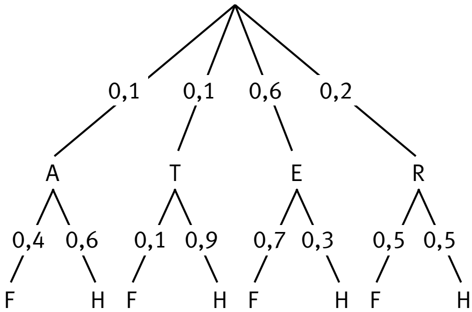
❷ La loi de probabilité de la variable aléatoire X est donnée par :

k	0	1	2
$(X=k)$	RR	RN, NR	NN
$P(X=k)$	$\left(\frac{3}{5}\right)^2$	$\frac{6}{25}+\frac{6}{25}$	$\left(\frac{2}{5}\right)^2$

Correction des exercices d'apprentissage du chapitre 3

Exercice 6

❶ Les premières branches de l'arbre indiquent les proportions dans chaque groupe. La proportion de personnel administratif est égale à $1-0{,}1-0{,}6-0{,}2$ soit $0{,}1$. Les deuxièmes branches de l'arbre indiquent, pour chaque groupe, les proportions d'hommes et de femmes dans ce groupe. Voici l'arbre complété :

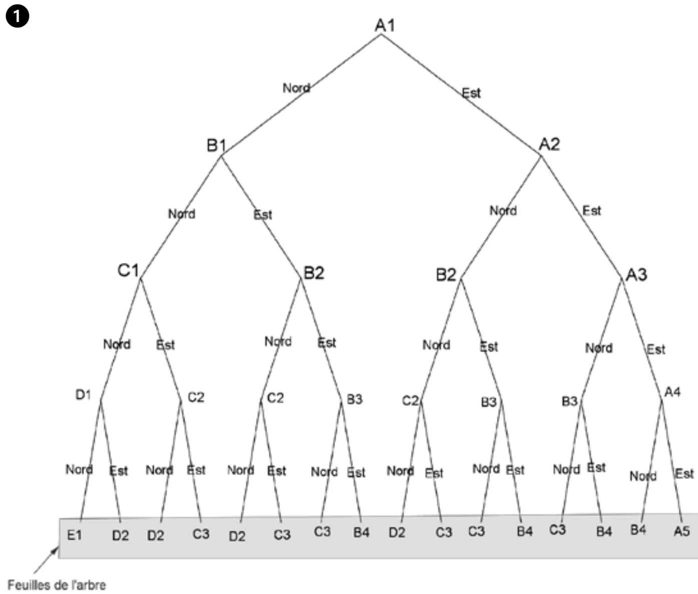


❷ Pour déterminer la part de personnel enseignant parmi les femmes, calculons d'abord le nombre N_F de femmes. Il y a au total $N_F = 100\times(0{,}1\times0{,}4+0{,}1\times0{,}1+0{,}6\times0{,}7+0{,}2\times0{,}1)=57$. Ensuite, calculons le nombre de femmes enseignantes, on en trouve : $0{,}7\times0{,}6\times100=42$. La proportion cherchée est donc égale à $\dfrac{42}{57}\approx 0{,}74$.

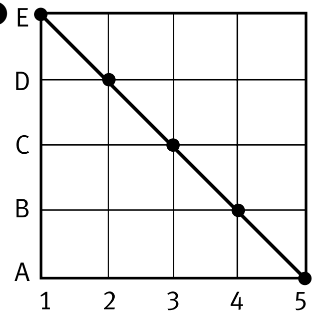
❸ La part de femmes parmi le personnel enseignant est donnée directement par l'arbre ; on lit 0,7.

Exercice 7

❶



Les positions finales du voilier après 4 milles nautiques parcourus sont les nœuds du quadrillage qu'on trouve dans les feuilles de l'arbre précédent (en bas). Une fois les répétitions supprimées, on lit E1, D2, C3, B4 et A5.

❷ 

On remarque que les points sont alignés

❸ **a)** Calculons pour chacune de ces positions finales, sa probabilité. D'abord, au départ le voilier est en A1. Puisqu'il a une chance sur deux de choisir d'aller vers le Nord, les deux premières positions B1 et A2 obtenues après un mille nautique parcouru ont la probabilité $\frac{1}{2}$ chacune. De même pour les branches suivantes. Ainsi, on peut pondérer l'arbre précédent avec, pour chaque branche, la probabilité $\frac{1}{2}$.

La position E1 ne peut être obtenue qu'en empruntant les branches Nord (4 fois). La probabilité de E1 est donc le produit des probabilités de ces branches, soit $P(\text{E1}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$ c'est-à-dire $\boxed{P(\text{E1}) = \frac{1}{16}.}$

De même, $\boxed{P(\text{A5}) = \frac{1}{16}.}$

La position D2 peut être obtenue par 4 chemins (4 feuilles dans l'arbre précédent). La première feuille D2 est l'événement {Nord - Nord - Nord - Est} et sa probabilité est $P(\text{"Nord - Nord - Nord - Est"}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$. De même, la deuxième feuille D2 est l'événement {Nord - Nord - Est - Nord} et $P(\text{"Nord - Nord - Est - Nord"}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$.

Finalement, l'événement D2 est la réunion de quatre événements incompatibles

$$\text{"Nord-Nord-Nord-Est"} \cup \text{"Nord-Nord-Est-Nord"} \cup \text{"Nord-Est-Nord-Nord"} \cup \text{"Est-Nord-Nord-Nord"}$$

(le voilier ne peut pas emprunter deux chemins différents !) donc la probabilité de D2 est la somme des probabilités de ces 4 événements de même probabilité $\frac{1}{16}$; donc $P(\text{D2}) = 4 \times \frac{1}{16} = \frac{4}{16}$ c'est-à-dire $\boxed{P(\text{D2}) = \frac{1}{4}.}$

De même, $P(\mathrm{B4}) = 4 \times \dfrac{1}{16} = \dfrac{4}{16}$ c'est-à-dire $\boxed{P(\mathrm{B4}) = \dfrac{1}{4}.}$

De manière analogue, comme 6 feuilles conduisent à la position C3, $P(\mathrm{C3}) = 6 \times \dfrac{1}{16}$ c'est-à-dire $\boxed{P(\mathrm{C3}) = \dfrac{3}{8}.}$

b) La position finale la plus probable est C3.

Correction des activités du chapitre 4

Activité 7 Faire un « six » avec un dé équilibré

k	0	1
$P(Y=k)$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$

Activité 8 Jouer à *Pile* ou *Face*

❶ La loi de probabilité de X est donnée par le tableau suivant.

X	0	1
$P(X=k)$	0,3	0,7

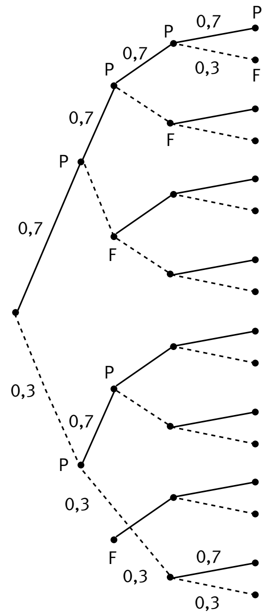
❷ Un chemin peut être décrit à l'aide d'une suite de 4 lettres P et F. Réciproquement, à un ***mot*** de 4 lettres P et F, correspond un seul chemin. Pour définir un chemin, il faut et il suffit de donner le ***mot*** de 4 lettres P et F correspondant.

k	0	1	2	3	4
Chemins tels que $(X=k)$	FFFF	PFFF, FPFF, FFPF, FFFP	PPFF, PFPF, PFFP, FPPF, FPFP, FFPP	PPPF, PPFP, PFPP, FPPP	PPPP
Nombre de chemins tels que $(X=k)$	1	4	6	4	1

❸ **a)** Voir schéma page suivante.

b) Les chemins contenant exactement 3 lettres « P » sont les chemins tels que « $X=3$ ». Enumérons-les : PPPF, PPFP, PFPP, FPPP. Il y en a donc 4. Pour tous ces chemins, il faut suivre trois fois une branche montante et une fois une branche descendante.

c) La probabilité de n'importe lequel de ces chemins s'obtient donc en multipliant 0,7 trois fois (car c'est la probabilité d'une branche montante) par 0,3 une fois (car c'est la probabilité d'une branche descendante) ; ainsi $P(\text{PPPF})=P(\text{PPFP})=P(\text{PFPP})=P(\text{FPPP})=(0,7)^3\times(0,3)^1=0,109.$



Chemins	Probabilité	Valeurs de X
PPPP	$(0,7)^4$	4
PPPF	$(0,7)^3 \times 0,3$	3
PPFP	$(0,7)^3 \times 0,3$	3
PPFF	$(0,7)^2 \times (0,3)^2$	2
PFPP	$(0,7)^3 \times 0,3$	3
PFPF	$(0,7)^2 \times (0,3)^2$	2
PFFP	$(0,7)^2 \times 0,3^2$	2
PFFF	$0,7 \times (0,3)^3$	1
FPPP	$(0,7)^3 \times 0,3$	3
FPPF	$(0,7)^2 \times (0,3)^2$	2
FPFP	$(0,7)^2 \times (0,3)^2$	2
FPFF	$0,7 \times (0,3)^3$	1
FFPP	$(0,7)^2 \times (0,3)^2$	2
FFPF	$0,7 \times (0,3)^3$	1
FFFP	$(0,7) \times (0,3)^3$	1
FFFF	$(0,3)^4$	0

d) Comme l'événement $\{X=3\}$ est constitué de 4 chemins de même probabilité 0,109, la probabilité de cet événement est égale à $P(X=3)=4\times(0,7)^3\times(0,3)^1=4\times 0,109$ soit $\boxed{P(X=3)=0,4116.}$

❹ Il y a 6 chemins contenant exactement deux lettres « P », chacun de probabilité $(0,7)^2(0,3)^2=0,0441$.

Donc la probabilité de leur réunion est égale à $P(X=2)=P(\{\text{PPFF, PFPF, PFFP, FPPF, FPFP, FFPP}\})=6\times(0,7)^2(0,3)^2=6\times 0,0441$ soit $\boxed{P(X=2)=0,2646.}$

De manière analogue, on calcule $P(X=1)=4\times 0,3^3\times 0,7^1$ soit $\boxed{P(X=1)=0,0756}$
Enfin, on calcule $P(X=0)=P(\{\text{FFFF}\})=0,3^4$ soit $\boxed{P(X=0)=0,0081.}$ De même, on calcule $P(X=0)=P(\{\text{PPPP}\})=0,3^4$, soit $\boxed{P(X=4)=0,2401.}$ En résumé, la loi de probabilité de X est donnée par :

k	0	1	2	3	4
$P(X=k)$	0,0081	0,0756	0,2646	0,4116	0,2401

Il est intéressant de reproduire le tableau précédent sans effectuer les multiplications à la deuxième ligne. Nous verrons pourquoi dans le cours.

k	0	1	2	3	4
$P(X=k)$	$0,3^4$	$4\times 0,3^3\times 0,7^1$	$6\times 0,7^2\times 0,3^2$	$4\times 0,3^1\times 0,7^3$	$0,7^4$

Correction des exercices d'apprentissage du chapitre 4

Exercice 8

❶ C'est la loi $\mathcal{B}(1,\frac{2}{5})$

❷ C'est la loi $\mathcal{B}(2,\frac{2}{5})$

Exercice 9

Notons X la variable aléatoire comptant le nombre de *pile* à l'issue des 10 lancers. La loi de X est la loi binomiale $\mathcal{B}(10,\frac{1}{2})$.

La probabilité cherchée est donc égale à $P(X=5)=\begin{pmatrix}10\\5\end{pmatrix}\frac{1}{2^5}\times\frac{1}{2^{10-5}}$.

Comme $\begin{pmatrix}10\\5\end{pmatrix}=252$, $P(X=10)=252\times\frac{1}{2^{10}}=\frac{63}{256}$.

Exercice 10

❶ C'est la loi $\mathcal{B}(100;0,2)$.

❷ $P(20\le X\le 25)=P(X=20)+P(X=21)+P(X=22)+P(X=23)$
$+\,P(X=24)+P(X=25)$

$$=\begin{pmatrix}100\\20\end{pmatrix}0,2^{20}0,8^{100-20}\times\begin{pmatrix}100\\21\end{pmatrix}0,2^{21}0,8^{100-21}\times\begin{pmatrix}100\\22\end{pmatrix}0,2^{22}0,8^{100-22}$$
$$\times\begin{pmatrix}100\\23\end{pmatrix}0,2^{23}0,8^{100-23}\times\begin{pmatrix}100\\24\end{pmatrix}0,2^{24}0,8^{100-24}\times\begin{pmatrix}100\\25\end{pmatrix}0,2^{25}0,8^{100-25}$$

$\approx 0,5065$ (avec le tableur ou la calculatrice).

Exercice 11

❶ La loi de X est $\mathcal{B}(7,\frac{1}{3})$.

Pour une calculatrice Texas	Pour une calculatrice Casio
: 7 nCr 4→C	7 nCr 4 → C ↵
: 1/3 →p	1/3 → P ↵
: 1 – p →q	1 – P → Q ↵
: C*p^4*q^(7-4)→s	C*P^4*Q^(7-4)→S ↵
: Disp "P(X=4)=", s	"P(X=4)=" ◢S◢

En faisant fonctionner ce programme, on obtient $\boxed{P(X=4)\approx 0,128.}$

❷ Pour vérifier le résultat précédent, dans une cellule du tableur Calc d'Open Office, on peut entrer la formule suivante :

=LOI.BINOMIALE(4;7;1/3;0)

Correction des activités du chapitre 5

Activité 9 Calculs d'espérances

❶ La variable aléatoire Y de l'activité 7 compte le nombre de 6 lorsqu'on lance une fois un dé équilibré. Sa loi est la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{6}$; autrement dit, $\boxed{\mathcal{B}(1\,,\frac{1}{6})}$. Par définition, son espérance est donnée par :
$\mathrm{E}(Y)=0\times P(Y=0)+1\times P(Y=1)=1\times\frac{1}{6}$ c'est-à-dire $\boxed{\mathrm{E}(Y)=\frac{1}{6}.}$

❷ La variable aléatoire X de la question 1 de l'activité 8 compte le nombre de *Pile* lorsqu'on lance une fois une pièce truquée (70% de *Pile*, 30% de *Face*). Sa loi est la loi de Bernoulli de paramètre $0{,}7$; autrement dit, $\boxed{\mathcal{B}(1\,;0{,}7)}$.

Par définition, son espérance est donnée par :

$\mathrm{E}(X)=0\times P(X=0)+1\times P(X=1)=1\times 0{,}7$ c'est-à-dire $\boxed{\mathrm{E}(X)=0{,}7.}$ La variable aléatoire X de la question 2 de l'activité 8 compte le nombre de *Pile* lorsqu'on lance quatre fois une pièce truquée (70% de *Pile*, 30% de *Face*). Sa loi est la loi binomiale de paramètre $n=4$ et $p=0{,}7$; autrement dit, $\boxed{\mathcal{B}(4;0{,}7)}$. Rappelons la loi de probabilité de X que nous avons obtenue à l'activité 8 :

k	0	1	2	3	4
$P(X=k)$	0,0081	0,0756	0,2646	0,4116	0,2401

Par définition, son espérance est donnée par :

$\mathrm{E}(X)=0\times P(X=0)+1\times P(X=1)+2\times P(X=2)+3\times P(X=3)+4\times P(X=4)$
$\mathrm{E}(X)=0\times 0{,}0081+1\times 0{,}0756+2\times 0{,}2646+3\times 0{,}4116+4\times 0{,}2401$ c'est-à-dire $\boxed{\mathrm{E}(X)=2{,}8.}$

❸ Dans ce dernier cas, en calculant $n\times p=4\times 0{,}7=2{,}8$, on remarque que $\mathrm{E}(X)=n\times p.$ Dans les autres cas (où $n=1$) on remarque la même résultat.

Activité 10 Faire un « six » avec un dé pipé

La variable aléatoire X est une variable de Bernoulli de paramètre 0,25.

La loi de probabilité de X est donnée par :

k	0	1
$P(X=k)$	0,75	0,25

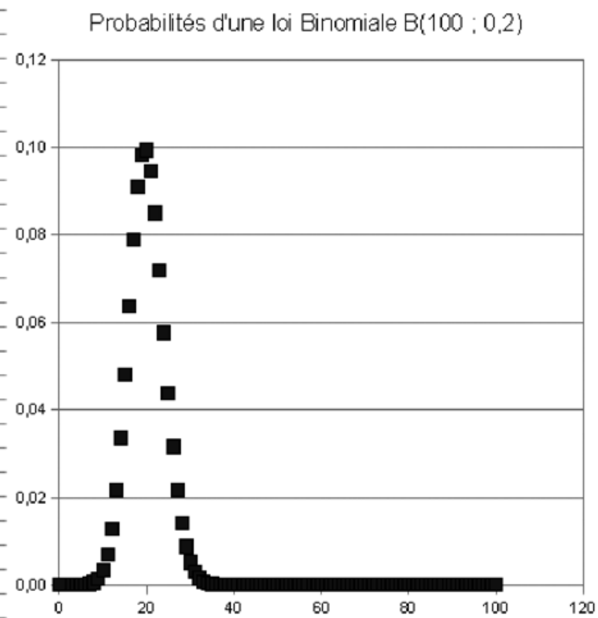
Son espérance est égale à $\mathrm{E}(X)=0\times P(X=0)+1\times P(X=1)$,
soit $\boxed{\mathrm{E}(X)=0{,}25.}$

Activité 11 Simulation avec le tableur

❶ La loi de X est la loi $\mathscr{B}(100;0,2)$.

❷ a) et b)

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	0	0,000000	0,000000		n =	100		
2	1	0,000000	0,000000		p =	0,2		
3	2	0,000000	0,000000					
4	3	0,000001	0,000002		Espérance =	20		
5	4	0,000003	0,000012					
6	5	0,000015	0,000075					
7	6	0,000059	0,000356					
8	7	0,000199	0,001393					
9	8	0,000578	0,004627					
10	9	0,001478	0,013303					
11	10	0,003363	0,033628					
12	11	0,006878	0,075663					
13	12	0,012754	0,153047					
14	13	0,021583	0,280585					
15	14	0,033531	0,469441					
16	15	0,048062	0,720927					
17	16	0,063832	1,021313					
18	17	0,078851	1,340473					
19	18	0,090898	1,636166					
20	19	0,098074	1,863411					
21	20	0,099300	1,986004					
22	21	0,094572	1,986004					
23	22	0,084900	1,867790					
24	23	0,071980	1,655541					
25	24	0,057734	1,385616					
26	25	0,043878	1,096946					
27	26	0,031643	0,822709					
28	27	0,021681	0,585389					
29	28	0,014131	0,395680					
30	29	0,008771	0,254366					
31	30	0,005190	0,155689					
32	31	0,002930	0,090819					
33	32	0,001579	0,050536					



c) La valeur la plus probable (autrement dit, celle qui a la plus grande probabilité) se lit sur l'axe des abscisses : c'est l'abscisse du point le plus haut.

On lit $x = 20$ et sa probabilité est 0,1.

d) Dans la cellule **C1**, on entre la formule =A1*B1 puis, dans la cellule **F4** on entre la formule =SOMME(C1:C100)

Il s'agit de la somme des nombres $k \times P(X = k)$ pour toutes les valeurs k prises par X (c'est-à-dire pour tous les entiers entre 0 et 100). Par définition, c'est l'espérance $\mathrm{E}(X)$ de X.

Correction des exercices d'apprentissage du chapitre 5

Exercice 12 À chaque tir, ou bien le tireur atteint sa cible, ou bien il ne l'atteint pas. Chaque tir est donc une épreuve de Bernoulli de paramètre $p=\frac{3}{4}$. Notons X la variable aléatoire égale au nombre de fois où le tireur atteint la cible (parmi les sept tirs). Une épreuve du championnat est donc la répétition de 7 de ces épreuves de Bernoulli. En raison des hypothèses faites sur les conditions de répétition des tirs, on considère qu'il s'agit de répétitions identiques et indépendantes. Par conséquent, la variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres $n=7$ et $p=\frac{3}{4}$.

Donc, l'espérance de X est une valeur témoignant assez bien du nombre moyen de fois où le tireur atteindra sa cible.

Comme $P(X=k)=\binom{7}{k}(\frac{3}{4})^k(1-\frac{3}{4})^{n-k}$, on calcule

$\mathrm{E}(X)=0\times P(X=0)+1\times P(X=1)+2\times P(X=2)+...+7\times P(X=7)$

soit : $\mathrm{E}(X)=\binom{7}{0}(\frac{3}{4})^0(\frac{1}{4})^7\times 0+\binom{7}{1}(\frac{3}{4})^1(\frac{1}{4})^6\times 1+\binom{7}{2}(\frac{3}{4})^2(\frac{1}{4})^5\times 2$

$+...+\binom{7}{7}(\frac{3}{4})^0(\frac{1}{4})^7\times 7$

En calculant les coefficients binomiaux à l'aide de la calculatrice :

$\binom{7}{0}=1$; $\binom{7}{1}=7$; $\binom{7}{2}=21$; $\binom{7}{3}=35$; $\binom{7}{4}=35$;
$\binom{7}{5}=21$; $\binom{7}{6}=7$; $\binom{7}{7}=1$.

D'où finalement : $\boxed{\mathrm{E}(X)=\frac{21}{4}.}$

Exercice 13 ❶ $\mathrm{E}(G)=900\times 10^6\times\frac{1}{2^{18}}-\left(1-\frac{1}{2^{18}}\right)\times 10^3\approx 2433$ €.

Pour être certain de gagner (en moyenne 2433 €), il faut, au départ, disposer d'une grosse fortune !

❷ $\mathrm{E}(G)=90000\times\frac{1}{2^{18}}-\left(1-\frac{1}{2^{18}}\right)\times 0{,}10\approx 0{,}24$ €. Le gain moyen est moins attractif, les risques aussi…

Correction des activités du chapitre 6

Activité 12 Intervalle de fluctuation et conditions

❷ Pile ou face

a) La colonne L_1 contient les nombres de 1 à 50 attribuant ainsi un nombre à chacun des 50 échantillons de taille 200 simulé.
La colonne L_2 donne la fréquence de Piles obtenus dans chacun de ces cinquante échantillons.

b) L'intervalle de fluctuation au seuil de 95% est l'intervalle

$[0,5-\frac{1}{\sqrt{200}}\ ;\ 0,5+\frac{1}{\sqrt{200}}]=[0,5-\frac{\sqrt{2}}{20}\ ;\ 0,5+\frac{\sqrt{2}}{20}]$ soit environ l'intervalle $[0,429\ ;\ 0,571]$.

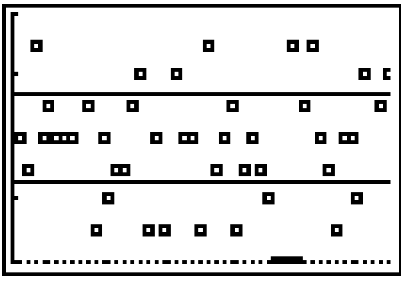
Les droites tracées ont pour équation y = 0,429 et y = 0,571.

c) On constate bien qu'environ 95% des échantillons, soit 47 ou 48 échantillons, sont dans l'intervalle de fluctuation.

❸ Cas où $n < 25$

a) Il suffit de remplacer 200 par 20 dans les deux instructions contenant le nombre 200 dans le programme précédent.

b) La propriété énoncée au début de l'activité n'est pas vérifiée, ce qui n'est pas surprenant car la condition $n \geq 25$ n'est pas réalisée.



Sur cette simulation, on a seulement 33 échantillons sur 50, soit 66% d'échantillons dont la fréquence de Pile se situe dans dans l'intervalle de de fluctuation au seuil de 95% soit [0,429 ; 0,571].

❹ Cas où p <0,2 ou p > 0,8.

a) et b)

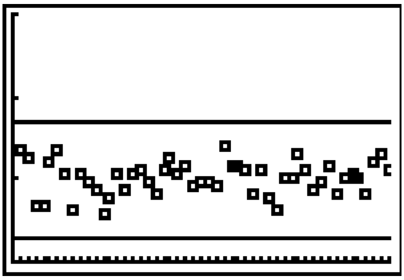
Pour $p = 0,1$

Il suffit de remplacer dans le programme initial donné dans le **2.** l'instruction **If rand<0.5** par l'instruction

If rand<0.1

L'intervalle de fluctuation au seuil de 95% est alors : $[0,1-\frac{1}{\sqrt{200}};0,1+\frac{1}{\sqrt{200}}]$ soit environ l'intervalle [0,029 ;0 ,171]. Traçons les droites d'équation $y = 0,029$ et y = 0,171.

On constate alors sur notre simulation que 100% des échantillons sont dans cet intervalle ;



La propriété énoncée au début de l'activité n'est pas vérifiée ce qui n' est pas surprenant car la condition $0,2 \leq p \leq 0,8$ n'est pas réalisée.

Pour p =0,9,

Il suffit de remplacer dans le programme initial donné dans le **2.** l'instruction **If rand<0.5** par l'instruction

If rand<0.9.

L'intervalle de fluctuation au seuil de 95% est alors : $[0,9-\frac{1}{\sqrt{200}};0,9+\frac{1}{\sqrt{200}}]$ soit environ l'intervalle [0,829 ;0 ,971]. Traçons les droites d'équation $y = 0,829$ et $y = 0,971$.

On constate alors sur notre simulation que 100% des échantillons sont dans cet intervalle;

La propriété énoncée au début de l'activité n'est pas vérifiée ce qui n' est pas surprenant car la condition $0,2 \leq p \leq 0,8$ n'est pas réalisée.

Activité 13 Aux urnes, citoyens

❶ Un électeur donné a deux choix possibles.

- Il fait confiance à Monsieur Z avec une probabilité $p = 0{,}52$.
- Il ne fait pas confiance à Monsieur Z avec une probabilité $q = 1 - p = 0{,}48$.

Le choix au hasard de 100 électeurs correspond à la répétition de façon indépendante de 100 fois l'épreuve Bernoulli précédente.

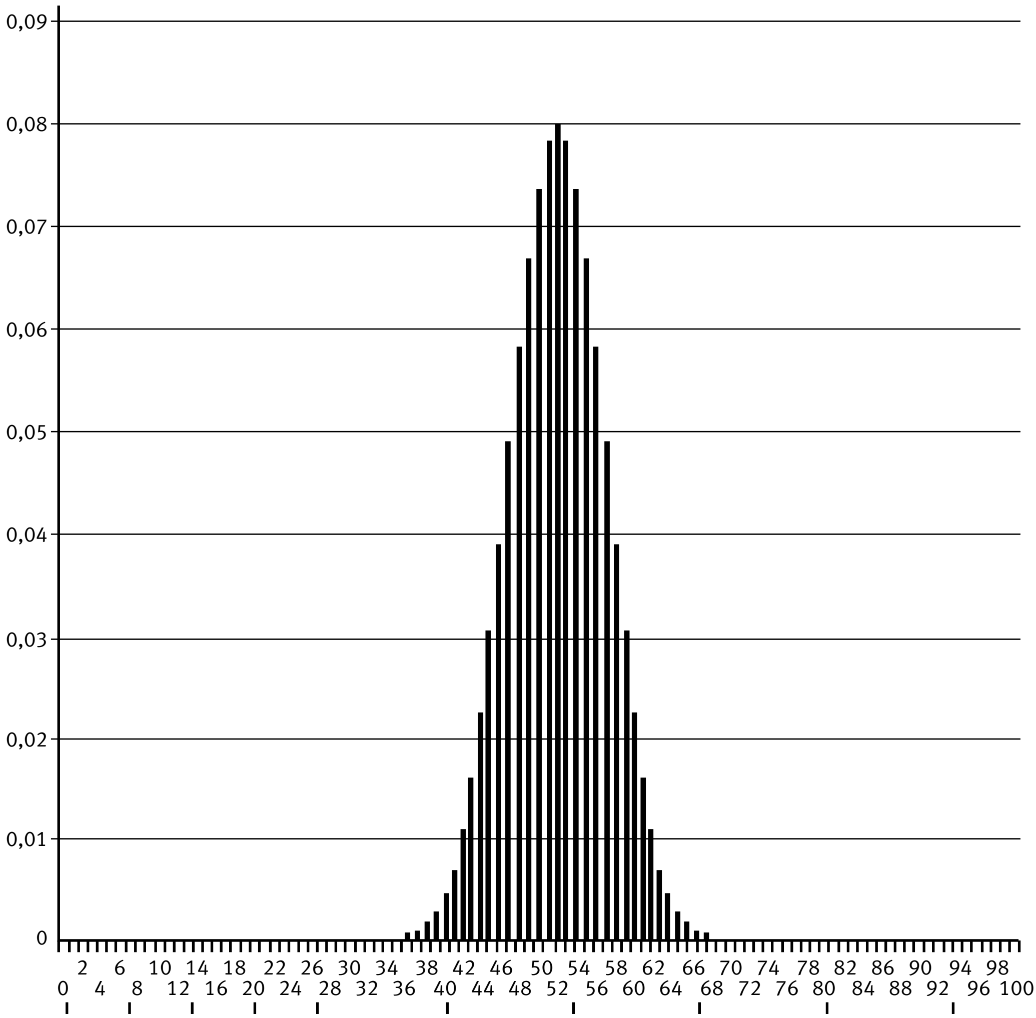
La variable X correspondant au nombre d'électeurs faisant confiance à Monsieur Z suit donc la loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0{,}52$.

❷ et ❸ On rentre dans la colonne A, les valeurs entières de k pour k variant de 0 à 50, à partir de la cellule A2.

En colonne B, on rentre les valeurs de P($X = k$) grâce à la formule LOI.BINOMIALE(A2 ;100 ;0,52 ; 0).

En colonne C, les valeurs de $P(X \leq k)$ peuvent s'obtenir directement grâce à la formule LOI.BINOMIALE(A2 ;100 ;0,52 ; 1).

37	35	0,000	0,000
38	36	0,000	0,001
39	37	0,001	0,002
40	38	0,002	0,003
41	39	0,003	0,006
42	40	0,004	0,011
43	41	0,007	0,018
44	42	0,011	0,029
45	43	0,016	0,044
46	44	0,022	0,067
47	45	0,030	0,097
48	46	0,039	0,135
49	47	0,048	0,184
50	48	0,058	0,242
51	49	0,066	0,308
52	50	0,073	0,382
53	51	0,078	0,460
54	52	0,080	0,539
55	53	0,078	0,617
56	54	0,074	0,691
57	55	0,067	0,758
58	56	0,058	0,816
59	57	0,049	0,865
60	58	0,039	0,904
61	59	0,030	0,934
62	60	0,022	0,956
63	61	0,016	0,972
64	62	0,011	0,983
65	63	0,007	0,990
66	64	0,004	0,994
67	65	0,003	0,997
68	66	0,002	0,998
69	67	0,001	0,999
70	68	0,000	1,000
71	69	0,000	1,000



❹ **a)** Dans la troisième colonne, on lit que le plus petit entier a tel que $P(X \leq a) > 0{,}025$ est $a = 42$ et le plus petit entier b tel que $P(X \leq b) \geq 0{,}975$ est $b = 62$.

b) L'intervalle $[\frac{a}{n}, \frac{b}{n}]$ est donc l'intervalle $[\frac{42}{100}; \frac{62}{100}] = [0{,}42\ ;\ 0{,}62]$.

L'intervalle de fluctuation au seuil de 95% considéré en seconde est l'intervalle $[0{,}52 - \frac{1}{\sqrt{100}}\ ;\ 0{,}52 + \frac{1}{\sqrt{100}}] = [0{,}42\ ;\ 0{,}62]$.

On trouve donc le même intervalle de fluctuation pour cette situation.

❺ Comme 0,41 n'appartient pas à l'intervalle de fluctuation au seuil de 95%, [0,42 ; 0,62], l'hypothèse $p = 0{,}52$ est rejetée au seuil de 5%. On peut donc émettre un doute sur le pourcentage de 52% énoncé par Monsieur Z.

Correction des exercices d'apprentissage du chapitre 6

Les corrigés des deux exercices suivants utilisent partiellement un article de la revue Repères IREM (octobre 2011) écrit par Yves DUCEL et Bruno SAURREREAU.

Exercice 14 Se poser la question de savoir si la situation est normale à Woburn, revient à se demander si l'échantillon de n = 5969 garçons observé peut-être considéré comme issu d'une population pour laquelle la proportion de cas de leucémie est p =0,00052 comme dans tout le pays.

On ne peut pas utiliser l'intervalle de fluctuation au seuil de 95% vu en seconde, $[p-\frac{1}{\sqrt{n}}, p+\frac{1}{\sqrt{n}}]$, car la condition $0,2 \le p \le 0,8$ n'est pas vérifiée.
On va utiliser l'intervalle de fluctuation au seuil de 95% d'une loi binomiale.

Pour cela, on considère l'épreuve de Bernoulli consistant à choisir un garçon dans la population des Etats –Unis.

Deux cas se présentent :
- Il est atteint de la leucémie avec une probabilité p = 0,00052.
- Il n'est pas atteint de leucémie avec une probabilité $q = 1 - p$.

On recommence de façon aléatoire l'expérience 5969. La probabilité d'avoir k garçons atteint de leucémie suit la loi binomiale de paramètres 5969 et 0,0052 soit $\mathscr{B}(5969;0,00052)$.

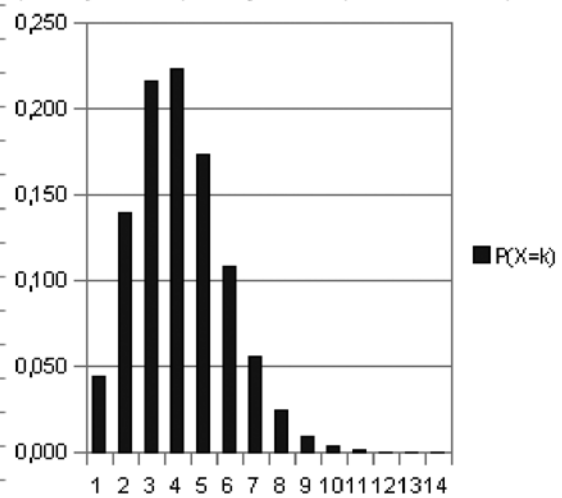
L'utilisation du tableur permet de déterminer
- a est le plus petit entier tel que $P(X \le a) > 0,025$ et
- b est le plus petit entier tel que $P(X \le b) \ge 0,975$.

On trouve donc dans la colonne C, a = 0 et b = 7.

Comme l'effectif observé dans l'échantillon est 9, on est conduit à décider que le nombre de cas de leucémie observé est anormal pour une proportion de référence p = 0,00052 valable dans tout le pays avec un risque d'erreur de 5%.

Commentaire Alors que les autorités locales et les experts gouvernementaux ont conclu, dans un premier temps, qu'il n'y avait rien d'étrange dans le nombre de cas de leucémie observé, à la suite d'actions et d'études entreprises par les familles avec leurs propres experts, Le Département de Santé Publique du Massachussets a officiellement confirmé en avril 1980 que le taux de leucémie constaté était anormalement élevé. La recherche des causes a conduit à soupçonner l'eau de la ville polluée par le trichloréthylène. Cette petite histoire illustre bien les enjeux de la démarche statistique.

	A	B	C	D	E
1	k	$P(X=k)$	$P(X<=k)$		
2	0	0,045	0,045		
3	1	0,139	0,184		
4	2	0,216	0,400		
5	3	0,224	0,624		
6	4	0,174	0,798		
7	5	0,108	0,905		
8	6	0,056	0,961		
9	7	0,025	0,986		
10	8	0,010	0,995		
11	9	0,003	0,999		
12	10	0,001	1,000		
13	11	0,000	1,000		
14	12	0,000	1,000		
15	13	0,000	1,000		
16	14	0,000	1,000		
17	15	0,000	1,000		
18	16	0,000	1,000		
19	17	0,000	1,000		
20	18	0,000	1,000		
21	19				
22	20				
23	21				
24	22				
25	23				
26	24				
27	25				
28	26				
29	27				
30	28				
31	29				
32	30				
33	31				
34	32				
35	33				
36	34				
37	35				



Exercice 15

❶ Le tableur Excel permet d'obtenir l'intervalle de fluctuation au seuil de 95% de la loi binomiale de paramètres 4040 et 0,5.

k	$P(X=k)$	$P(X<=k)$
1956	0,00165	0,02284727
1957	0,00176	0,0246071
1958	0,00187	0,02647928
1959	0,00199	0,02846901

k	$P(X=k)$	$P(X<=k)$
2080	0,00211	0,97153099
2081	0,00199	0,97352072
2082	0,00187	0,9753929
2083	0,00176	0,97715273

On lit que le plus petit entier tel que $P(X \leq a) > 0{,}025$ est $a = 1958$ et que le plus petit entier tel que $P(X \leq b) \geq 0{,}975$ est $b = 2082$.

L'intervalle de fluctuation au seuil de 95% de la loi binomiale de paramètres 4040 et 0,5 est donc l'intervalle $[\frac{1958}{4040};\frac{2082}{4040}]$ soit environ [0,4846 ; 0,5153].

L'intervalle de fluctuation au seuil de 95%, $[p-\frac{1}{\sqrt{n}};p+\frac{1}{\sqrt{n}}]$ est l'intervalle $[0{,}5-\frac{1}{\sqrt{4040}},0{,}5+\frac{1}{\sqrt{4040}}]$ soit environ [0,4843 ; 0,5157].

L'intervalle de fluctuation au seuil de 95% de la loi binomiale de paramètres 4040 et 0,5 est donc contenu dans l'intervalle $[p-\frac{1}{\sqrt{n}};p+\frac{1}{\sqrt{n}}]$.

❷ Buffon a obtenu 2049 fois Pile sur ses 4040 lancers.

Sa fréquence d'apparition de Pile, $\frac{2049}{4040}$, appartient bien à l'intervalle de fluctuation au seuil de 95% de la loi binomiale de paramètre 4040 et 0,5 (et à fortiori à l'intervalle $[p-\frac{1}{\sqrt{n}};p+\frac{1}{\sqrt{n}}]$).

On décidera donc que la pièce est équilibrée.

Correction des exercices d'approfondissement du chapitre 6

Exercice I

I - À l'aide d'une loi équirépartie

❶ Pour arriver sur le bord BC, la goutte d'eau doit emprunter 10 morceaux. Comme l'extrémité de départ du 1er morceau (le point A) est comptée comme un premier croisement et que l'extrémité d'arrivée du dernier morceau (sur le segment [BC]) n'est pas un croisement, la goutte rencontre 10 croisements.

❷ Comme on l'a dit, un trajet de la goutte emprunte 10 morceaux.

❸ Au premier croisement, la goutte peut choisir parmi deux morceaux : celui de droite ou bien celui de gauche. Puis au second croisement, elle peut à nouveau choisir parmi deux morceaux. Il y a donc $2\times 2=4$ chemins que la goutte peut emprunter et qui soient constitués de deux morceaux. Ainsi de suite… il y a $2^{10}=1024$ chemins qui soient constitués de 10 morceaux.

❹ Pour aller de A au milieu du segment [BC], la goutte d'eau doit emprunter autant de morceaux allant vers la droite que de morceaux allant vers la gauche. Comme au total, elle doit emprunter 10 morceaux, c'est qu'elle doit aller 5 fois à droite et 5 fois à gauche (par exemple, 2 fois à droite puis 3 fois à gauche, puis 1 fois à droite, puis 2 fois à gauche et enfin 2 fois à droite). Un trajet de A au milieu de [BC] contient donc 5 lettres « D » (et nécessairement 5 lettres « G » aussi).

❺ Réciproquement, un trajet auquel correspond une suite contenant 5 fois la lettre « G » – pas nécessairement consécutives – contiendra aussi nécessairement 5 lettres « D » ; donc un tel chemin aboutira au milieu du segment [BC].

❻ Les questions 4 et 5 permettent d'affirmer qu'il y a autant de chemin partant de A et aboutissant au milieu de [BC] que de façon de choisir 5 lettres « D » dans une suite de 10 lettres (les 5 autres lettres étant alors nécessairement des lettres « G »). Dans le cours, nous avons noté ce nombre $\binom{10}{5}$ qu'on lit « 5 parmi 10 ». C'est un coefficient binomial. La calculatrice nous indique que $\binom{10}{5}=252$. À chaque croisement, la goutte choisit au hasard le morceau de droite ou celui de gauche. Par conséquent, chacun des 2^{10} chemins sont équiprobables. Le nombres de cas favorables à l'événement « la goutte arrive au milieu du segment [BC] » est 252. La probabilité de cet événement est donc égale à $P\left(A\to m[BC]\right)=\dfrac{\text{Nombre de cas favorables}}{\text{Nombre de cas possibles}}=\dfrac{252}{2^{10}}=\dfrac{63}{256}\approx 0{,}25.$
La goutte a donc environ une chance sur quatre d'arriver au milieu de [BC].

II - À l'aide d'une loi binomiale

❶ Associons à chaque croisement, l'épreuve de Bernoulli suivante : Choisir ou bien « G », ou bien « D ».

Le parcourt d'une goutte d'eau peut être vu comme le schéma de Bernoulli consistant en la répétition de l'expérience précédente, à l'identique et de manières indépendantes.

La variable aléatoire X compte le nombre de succès « choix de G ». Comme $P("G") = P("D") = \frac{1}{2}$, la loi de X est la loi $\mathcal{B}(10, \frac{1}{2})$.

❷ La probabilité cherchée est donc égale à

$$P(X = 5) = \binom{10}{5}(\frac{1}{2})^5(1 - \frac{1}{2})^{10-5} = \binom{10}{5} \times \frac{1}{2^{10}} = 252 \times \frac{1}{2^{10}} \approx 0,25.$$

Exercice II

Le score X d'un candidat qui répond au hasard à chaque question suit une loi binomiale $\mathrm{B}(50;0,2)$. Le score éliminatoire est le plus petit entier n_0 vérifiant $P(X \geq n_0) \leq 0,01$.

Comme $P(X \geq n_0) = 1 - P(X \leq n_0 - 1)$, n_0 est le plus petit n vérifiant $P(X \geq n) \geq 0,99$.

On calcule :

$$P(X \geq 20) = P(X = 20) + P(X = 21) + P(X = 22) + P(X = 23) + ...$$
$$+ P(X = 49) + P(X = 50) = 0,9860...$$

et $P(X \geq 21) = 0,9937...$ donc $\boxed{n_0 = 21}$.

Exercice III

Une partie entre Caïn et Abel a deux issues possibles :
Abel gagne contre Caïn avec la probabilité p = 0,6.
Abel perd contre Caïn avec la probabilité $q = 1 - p = 0,4$.
La répétition de neuf parties consécutives indépendantes est donc la répétition de 9 épreuves de Bernoulli de paramètre 0,6.
La probabilité qu' Abel gagne k parties lors de ces neuf épreuves suit donc la loi binomiale de paramètre 9 et 0,6, soit $\mathcal{B}(9;0,6)$.
Caïn gagne le tournoi si Abel gagne moins de parties que lui, c'est-à-dire si Abel gagne 0,1, 2, 3 ou 4 parties.
En programmant la loi binomiale au tableur ainsi que les valeurs de $P(X \leq k)$, on obtient que Caïn a une probabilité de 0,266 de gagner un tournoi en 9 parties.

Commentaire Cet exemple est particulièrement instructif sur le rôle du hasard dans les compétitions sportives : alors qu'Abel est significativement plus fort que Caïn, ce dernier gagne encore plus du quart des tournois de 9 parties !

Exercice IV Pour déterminer *a* de l'intervalle de fluctuation $[\frac{a}{n},\frac{b}{n}]$ de la loi binomiale de paramètres *n* et *p* au seuil de 95% , on peut considérer l'algorithme suivant :

Lire N

Lire P

$S \leftarrow 0$

$K \leftarrow 0$

Tant que $S \leq 0{,}025$

$S \leftarrow S + \binom{k}{n} P^k (1-P)^{n-k}$

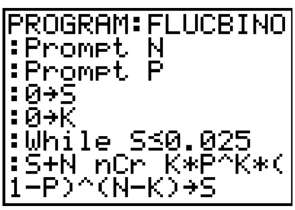
$K \leftarrow K+1$

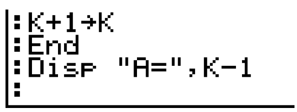
FIN

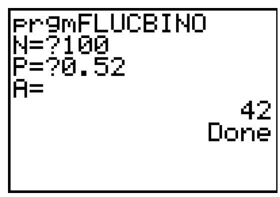
Ecrire « A= » , $K-1$

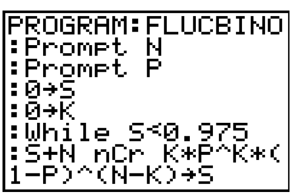
À la *k*-ième étape de la boucle « tant que », *S* est la variable qui contient le nombre $P(X \leq k)$.

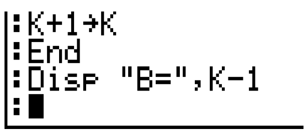
Pour obtenir la valeur de *b*, il suffira de remplacer 0,025 par 0,975 dans l'instruction "Tant que" et remplacer A par B dans la dernière ligne.

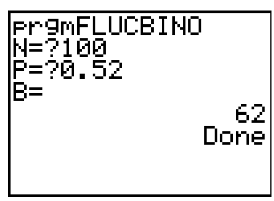












■

Corrigé séquence 8

Correction des activités du chapitre 2

Activité 1 La dune

A. Étude d'un exemple

❶ **a)** u_1 représente la largeur de la dune en 2011 : $u_1 = 100 - 1{,}5 = 98{,}5$.

b) u_2 représente la largeur de la dune en 2012 : $u_2 = 98{,}5 - 1{,}5 = 97$.

❷ u_{15} représente la largeur de la dune en 2025 : $u_{15} = 100 - 15 \times 1{,}5 = 77{,}5$.

❸ $u_{36} = 100 - 36 \times 1{,}5 = 46$ et $u_{37} = 100 - 37 \times 1{,}5 = 44{,}5$

Il faudra intervenir au bout de 37 ans soit en 2047.

B. Généralisation

❶ **a)**
$$\underset{(u_0)}{100} \xrightarrow{-1,5} \underset{(u_1)}{98{,}5} \xrightarrow{-1,5} \underset{(u_2)}{97} \xrightarrow{-1,5} \underset{(u_3)}{95{,}5}$$

b) $u_1 = u_0 + (-1{,}5)$

$u_2 = u_1 + (-1{,}5)$

$u_3 = u_2 + (-1{,}5)$

c) $u_0 \xrightarrow{-1,5} u_1 \xrightarrow{-1,5} u_2 \xrightarrow{-1,5} u_3 \quad \cdots \quad u_{n-1} \xrightarrow{-1,5} u_n \xrightarrow{-1,5} u_{n+1}$

Généralisation : $\boxed{u_{n+1} = u_n + (-1{,}5)}$

ce nombre est appelé la raison de la suite (u_n)

❷ **a)** $u_0 \xrightarrow{-1,5} u_1 \xrightarrow{-1,5} u_2 \xrightarrow{-1,5} u_3$

$+3 \times (-1{,}5)$

b) $u_3 = u_0 + 3 \times (-1{,}5)$

c) $u_0 \xrightarrow{-1,5} u_1 \xrightarrow{-1,5} u_2 \xrightarrow{-1,5} u_3 \quad \cdots \quad u_{n-1} \xrightarrow{-1,5} u_n$

$\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}_{+n\times(-1,5)}$

Généralisation : $\boxed{u_n = u_0 + n \times (-1,5)}$

Activité 2 Représentation graphique et sens de variation

Soient les suites (u_n) et (v_n) définies par récurrence par :

$$\begin{cases} u_0 = -2 \\ u_{n+1} = u_n + 3 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} v_0 = -2 \\ v_{n+1} = v_n - 0,5 \end{cases}$$

❶ Compléter le tableau suivant :

n	0	1	2	3	4	5
u_n	-2	1	4	7	10	13
v_n	-2	-2,5	-3	-3,5	-4	-4,5

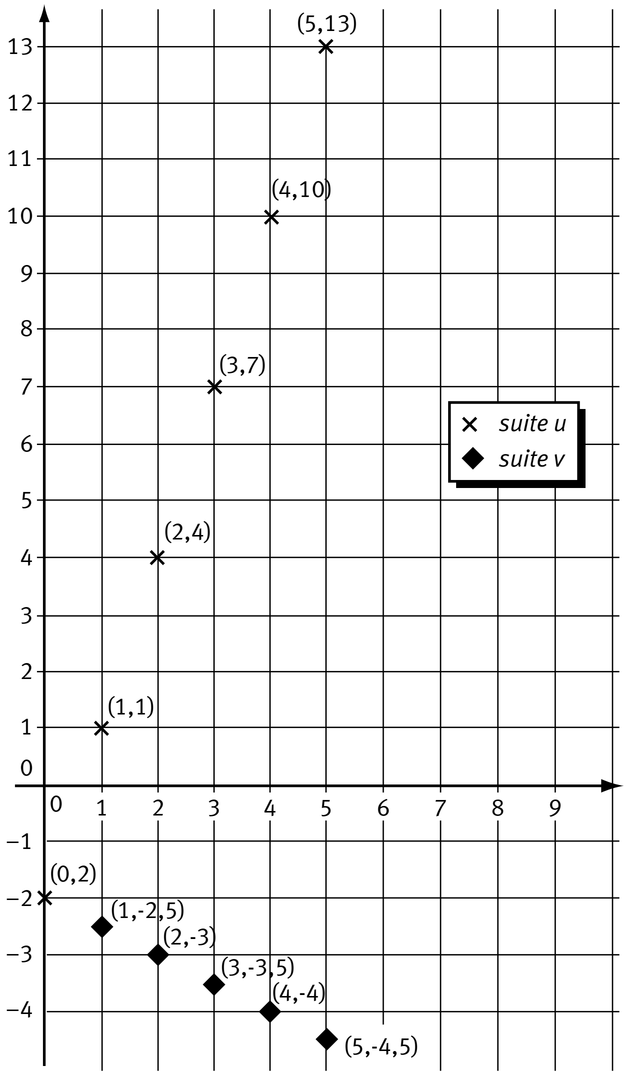
❷ Effectuer les calculs suivants :

$u_1 - u_0 = 3$	$v_1 - v_0 = -0,5$
$u_2 - u_1 = 3$	$v_2 - v_1 = -0,5$
$u_3 - u_2 = 3$	$v_3 - v_2 = -0,5$
$u_4 - u_3 = 3$	$v_4 - v_3 = -0,5$
$u_5 - u_4 = 3$	$v_5 - v_4 = -0,5$
$u_{n+1} - u_n = 3$	$v_{n+1} - v_n = -0,5$

La différence entre deux termes consécutifs de la suite est constante.

On dit que la **variation absolue** entre deux termes consécutifs de la suite est constante.

❸



Pour chacune des deux suites, les points semblent alignés.

Correction des exercices d'apprentissage du chapitre 2

Exercice 1

❶ Pour tout entier naturel n, $u_{n+1}-u_n=-5$ donc (u_n) est une suite arithmétique de raison –5 et de premier terme $u_0=2$.

❷ Pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=3(n+1)+10$ donc :

$$\begin{aligned} u_{n+1}-u_n &= 3(n+1)+10-(3n+10) \\ &= 3n+3+10-3n-10 \\ &= 3 \end{aligned}$$

donc (u_n) est une suite arithmétique de raison 3 et de premier terme $u_0=3\times 0+10=10$.

❸ Pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=\dfrac{1}{n+1}+8$ donc :

$$\begin{aligned} u_{n+1}-u_n &= \frac{1}{n+1}+8-\left(\frac{1}{n}+8\right) \\ &= \frac{n}{n(n+1)}+8-\frac{n+1}{n(n+1)}-8. \\ &= \frac{-1}{n(n+1)} \end{aligned}$$

La différence $u_{n+1}-u_n$ n'est pas constante donc (u_n) n'est pas une suite arithmétique.

❹ Pour tout entier naturel n, $u_{n+1}-u_n=u_n-3$. La différence $u_{n+1}-u_n$ n'est pas constante donc (u_n) n'est pas une suite arithmétique.

Exercice 2

❶ Pour tout entier naturel n, $u_{n+1}-u_n=-2u_n+6$. La différence $u_{n+1}-u_n$ n'est pas constante donc (u_n) n'est pas une suite arithmétique.

❷ Pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=13-5(n+1)$ donc

$$\begin{aligned} u_{n+1}-u_n &= 13-5(n+1)-(13-5n) \\ &= 13-5n-5-13+5n \\ &= -5 \end{aligned}$$

donc (u_n) est une suite arithmétique de raison -5 et de premier terme $u_0=13-5\times 0=13$.

❸ Pour tout entier naturel n,

$$\begin{aligned} u_{n+1}-u_n &= 2(n+1)^2+8-(2n^2+8) \\ &= 2n^2+4n+2+8-2n^2-8 \\ &= 4n+2 \end{aligned}$$

La différence $u_{n+1}-u_n$ n'est pas constante donc (u_n) n'est pas une suite arithmétique.

❹ Pour tout entier naturel n, $u_{n+1}-u_n=12-2u_n$. La différence $u_{n+1}-u_n$ n'est pas constante donc (u_n) n'est pas une suite arithmétique.

Exercice 3

Soit u une suite arithmétique de premier terme $u_0=10$ et de raison –7.

❶ Pour tout entier naturel n,

$$\begin{aligned} u_n &= u_0+n\times r \\ &= 10+n\times(-7) \\ &= 10-7n \end{aligned}$$

❷ $$\begin{aligned} u_{100} &= 10-7\times 100 \\ &= -690 \end{aligned}$$

Exercice 4

Soit u une suite arithmétique de premier terme $u_6=7$ et de raison 2,5.

❶ Pour tout entier naturel n,

$$\begin{aligned} u_n &= u_6+(n-6)\times r \\ &= 7+(n-6)\times(2{,}5) \end{aligned}$$

❷ $$\begin{aligned} u_{50} &= 7+(50-6)\times 2{,}5 \\ &= 117 \end{aligned}$$

Exercice 5

u est une suite arithmétique de raison r.

❶ $\begin{aligned} u_n &= u_0+n\times r \\ &= -12+n\times 1{,}5 \end{aligned}$ donc $\begin{aligned} u_{20} &= -12+20\times 1{,}5 \\ &= 18 \end{aligned}$

❷ $\begin{aligned} u_n &= u_7+(n-7)\times r \\ &= 3{,}5+(n-7)\times 2 \end{aligned}$ donc $\begin{aligned} u_{20} &= 3{,}5+(20-7)\times 2 \\ &= 29{,}5 \end{aligned}$

❸ $\begin{aligned} u_n &= u_1+(n-1)\times r \\ &= 151+(n-1)\times(-13) \end{aligned}$ donc $\begin{aligned} u_{20} &= 151+(20-1)\times(-13) \\ &= -96 \end{aligned}$

❹ $\begin{aligned} u_n &= u_{36}+(n-36)\times r \\ &= 72+(n-36)\times 1{,}2 \end{aligned}$ donc $\begin{aligned} u_{20} &= 72+(20-36)\times 1{,}2 \\ &= 52{,}8 \end{aligned}$

Exercice 6

u est une suite arithmétique de raison r.

❶ $u_5=u_3+(5-3)\times r$ donc $\begin{aligned} 21 &= 25+(5-3)\times r \\ -4 &= 2r \\ r &= -2 \end{aligned}$

❷ $u_{37} = u_{12} + (37-12)\times r$ donc $103 = 28 + (37-12)\times r$

$75 = 25r$

$r = 3$

❸ $u_{60} = u_{7} + (60-7)\times r$ donc $-31,5 = 21,5 + (60-7)\times r$

$-53 = 53r$

$r = -1$

❹ $u_{98} = u_{36}$ donc $r = 0$

Exercice 7

Soit u une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 15$ et de raison –3.

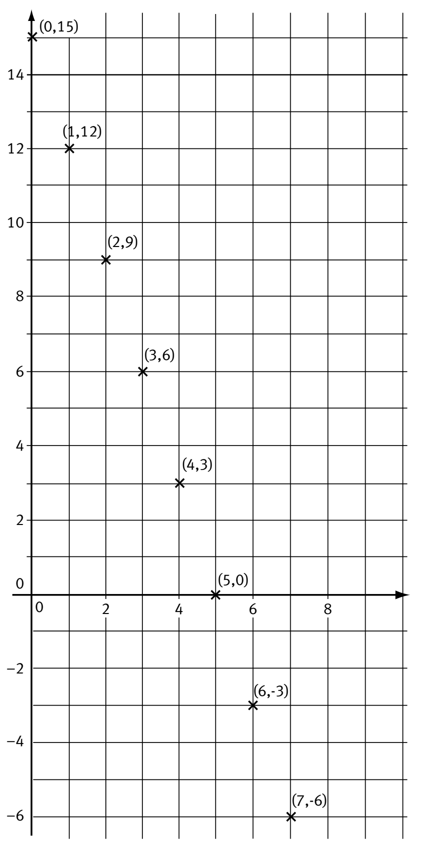
❶ Pour tout entier naturel n, $u_n = u_0 + n\times r$.

$= 15 - 3n$

❷ Comme $r = -3$, la suite u est une suite décroissante.

❸

n	0	1	2	3	4	5	6	7
u_n	15	12	9	6	3	0	-3	-6



❹ $u_n < -21$

$15 - 3n < -21$

$15 + 21 < 3n$

$36 < 3n$

$\dfrac{36}{3} < n$

On a donc $n = 13$.

Exercice 8

❶ Comme pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n + 8$, la raison de la suite est égale à 8 > 0. Donc la suite (u_n) est une suite croissante.

❷ Comme pour tout entier naturel n, $u_n = 7 - 6n$, la raison de la suite est égale à -6 < 0. Donc la suite (u_n) est une suite décroissante.

❸ Comme pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n$, la suite (u_n) est une suite constante.

Exercice 9

Intérêts simples

Un capital de 5 000 € est placé au taux annuel de 4 % à intérêts simples. Cela signifie que, chaque année, les intérêts sont fixes égaux à 4 % du capital initial.

On note C_0 le capital initial et C_n celui disponible au bout de n années.

❶ Calculons les intérêts liés à ce placement à intérêts simples : $5000 \times \dfrac{4}{100} = 200$

Ainsi, $C_1 = C_0 + 200$ $\quad$ et $C_2 = C_1 + 200$

$= 5000 + 200$ $\quad$ $= 5200 + 200$

$= 5200$ $\quad$ $= 5400$

❷ **a)** D'une année à la suivante, le capital augmente de 200 €. On a donc $C_{n+1} = C_n + 200$. Ainsi, la suite (C_n) est une suite arithmétique de raison 200 et de premier terme $C_0 = 5000$.

b) Comme (C_n) est une suite arithmétique, $C_n = C_0 + n \times 200$.

$= 5000 + 200n$

❸ On résout :

$C_n \geq 2 \times 5000$

$5000 + n \times 200 \geq 10000$

$200n \geq 10000 - 5000$

$n \geq \dfrac{5000}{200}$

$n \geq 25$

Le capital disponible aura doublé au bout de 25 ans.

Exercice 10

❶ Comme les points du graphique 1) sont alignés, il est associé à la suite arithmétique de premier terme $u_0 = -5$ et de raison 3.

❷ Comme les points du graphique 2) sont alignés, il est associé à la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 0$ et de raison –0,5.

❸ Comme les points du graphique 3) ne sont pas alignés, ce graphique n'est pas associé à une suite arithmétique.

Exercice 11

❶ $u_2 = u_1 + 70$ et $u_3 = u_2 + 70$

$= 200 + 70$ $\quad$ $= 270 + 70$

$= 270$ $\quad$ $= 340$

❷ D'un mètre au suivant, le prix augmente de 70 €. On a donc $u_{n+1} = u_n + 70$

Ainsi, la suite (u_n) est une suite arithmétique de premier terme $u_1 = 200$ et de raison 70.

$$u_n = u_1 + (n-1) \times r$$
$$= 200 + (n-1) \times 70$$

❸

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
u_n	200	270	340	410	480	550	620	690	760

200 + 270 + 340 + 410 + 480 + 550 + 620 + 690 + 760 = 4 320

Un puits de 9 mètres de profondeur revient à 4 320 €.

Correction des activités du chapitre 3

Activité 3 Placement à intérêts composés

A. Etude d'un exemple

Un capital de 2 000 € est placé au taux annuel de 5 % à intérêts composés. Cela signifie que, chaque année, les intérêts sont calculés sur le capital acquis.

On note C_0 le capital initial et C_n disponible au bout de n années.

❶ Le coefficient multiplicateur associé à une augmentation de 5 % est égal à $1+\dfrac{5}{100}=1{,}05$.

❷ **a)** C_1 est le capital disponible au bout d'un an.

$$\begin{aligned} C_1 &= C_0 \times 1{,}05 \\ &= 2000 \times 1{,}05 \\ &= 2100 \end{aligned}$$

b) C_2 est le capital disponible au bout de deux ans.

$$\begin{aligned} C_2 &= C_1 \times 1{,}05 \\ &= 2100 \times 1{,}05 \\ &= 2205 \end{aligned}$$

c) C_{10} est le capital disponible au bout de dix ans.

$$\begin{aligned} C_{10} &= C_0 \times 1{,}05^{10} \\ &= 2000 \times 1{,}05^{10} \\ &\simeq 3257{,}79 \end{aligned}$$

B. Généralisation

La suite définie précédemment est une suite arithmétique. Nous allons dégager quelques propriétés de ce type de suite.

❶ **a)**
$$\underset{(u_0)}{2000} \xrightarrow{\times 1{,}05} \underset{(u_1)}{2100} \xrightarrow{\times 1{,}05} \underset{(u_2)}{2205} \xrightarrow{\times 1{,}05} \underset{(u_3)}{2315{,}25}$$

b) $C_1 = C_0 \times 1{,}05$

$C_2 = C_1 \times 1{,}05$

$C_3 = C_2 \times 1{,}05$

c) $u_0 \xrightarrow{\times 1{,}05} u_1 \xrightarrow{\times 1{,}05} u_2 \xrightarrow{\times 1{,}05} u_3 \quad \cdots \quad u_{n-1} \xrightarrow{\times 1{,}05} u_n \xrightarrow{\times 1{,}05} u_{n+1}$

Généralisation : $\boxed{u_{n+1} = u_n \times 1{,}05}$

ce nombre est appelé la raison de la suite (u_n)

❷ **a)** $u_0 \xrightarrow{\times 1{,}05} u_1 \xrightarrow{\times 1{,}05} u_2 \xrightarrow{\times 1{,}05} u_3$

$\times(1{,}05)^3$

b) $C_3 = C_0 \times 1{,}05^3$

c) $u_0 \xrightarrow{\times 1{,}05} u_1 \xrightarrow{\times 1{,}05} u_2 \xrightarrow{\times 1{,}05} u_3 \quad \cdots \quad u_{n-1} \xrightarrow{\times 1{,}05} u_n$

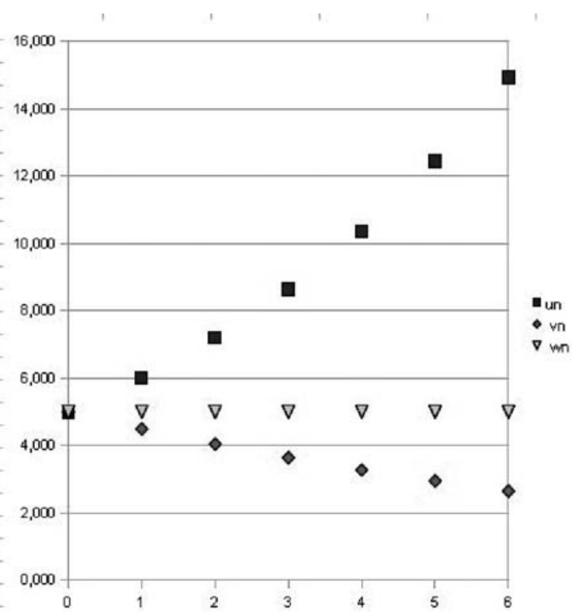
$\times(1{,}05)^n$

Généralisation : $\boxed{C_n = C_0 \times 1{,}05^n}$

Activité 4 Représentation graphique et sens de variation

❶

n	u_n	v_n	w_n
0	5,000	5,000	5
1	6,000	4,500	5
2	7,200	4,050	5
3	8,640	3,645	5
4	10,368	3,281	5
5	12,442	2,952	5
6	14,930	2,657	5



❷ La suite (u_n) semble être croissante.

La suite (v_n) semble être décroissante.

La suite (w_n) semble être constante.

❸

$\dfrac{u_1}{u_0}=1{,}2$	$\dfrac{v_1}{v_0}=0{,}9$	$\dfrac{v_1}{v_0}=1$
$\dfrac{u_2}{u_1}=1{,}2$	$\dfrac{v_2}{v_1}=0{,}9$	$\dfrac{v_2}{v_1}=1$
$\dfrac{u_3}{u_2}=1{,}2$	$\dfrac{v_3}{v_2}=0{,}9$	$\dfrac{v_3}{v_2}=1$
$\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=1{,}2$	$\dfrac{v_{n+1}}{v_n}=0{,}9$	$\dfrac{v_{n+1}}{v_n}=1$

Le rapport de deux termes consécutifs d'une même suite est constant.

On dit que la **variation relative** entre deux termes consécutifs de la suite est constante.

Correction des exercices d'apprentissage du chapitre 3

Exercice 12

❶ Pour tout entier naturel n, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=-2$ donc (u_n) est une suite géométrique de raison -2.

❷ Pour tout entier naturel n, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\dfrac{3(n+1)}{3n}=1+\dfrac{1}{n}$. Le rapport $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ n'est pas constant donc la suite (u_n) n'est pas une suite géométrique.

❸ Pour tout entier naturel n, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\dfrac{0{,}1\times 2^{n+1}}{0{,}1\times 2^n}=2$ donc (u_n) est une suite géométrique de raison 2.

❹ $u_0=5$ et, pour tout entier naturel n, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=u_n^{n-1}$. Le rapport $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ n'est pas constant donc la suite (u_n) n'est pas une suite géométrique.

Exercice 13

❶ $u_0=5$ et, pour tout entier naturel n, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=1+\dfrac{6}{u_n}$. Le rapport $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ n'est pas constant donc la suite (u_n) n'est pas une suite géométrique.

❷ Pour tout entier naturel n, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\dfrac{(n+1)^2}{n^2}=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^2$. Le rapport $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ n'est pas constant donc la suite (u_n) n'est pas une suite géométrique.

❸ Pour tout entier naturel n, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\dfrac{8\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n+1}}{8\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n}}=\dfrac{2}{3}$ donc (u_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{2}{3}$.

❹ Pour tout entier naturel n, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=3$ donc (u_n) est une suite géométrique de raison 3.

Exercice 14

Soit u une suite géométrique de premier terme $u_0=120000$ et de raison 0,3.

❶ Comme u est une suite géométrique, $u_n=u_0\times q^n$
$=120000\times 0{,}3^n$

❷ $u_{10}=120000\times 0{,}3^{10}\simeq 0{,}71$.

Exercice 15 Soit u une suite géométrique de premier terme $u_7 = 2$ et de raison 3.

❶ Comme u une suite géométrique, $u_n = u_7 \times q^{n-7}$.
$= 2 \times 3^{n-7}$

❷ $u_{17} = 2 \times 3^{17-7} = 118098$ **.**

Exercice 16 u est une suite géométrique de raison q donc

❶ $u_{20} = u_0 \times q^{20}$
$= -12 \times 1{,}5^{20}$
$\simeq -39903{,}08$

❷ $u_{20} = u_7 \times q^{20-7}$
$= 3{,}5 \times 2^{13}$
$= 28672$

❸ $u_{20} = u_1 \times q^{20-1}$
$= 1510000 \times 0{,}4^{19}$
$\simeq 0{,}04$

❹ $u_{20} = u_{36} \times q^{20-36}$
$= 16384 \times 2^{-16}$
$= 0{,}25$

Exercice 17 u est une suite géométrique de raison $q > 0$ donc

❶ $u_5 = u_3 \times q^{5-3}$
$81 = 9 \times q^2$
$q^2 = 9$
$q = +3$

❷ $u_{18} = u_{12} \times q^{18-12}$
$1000 = 0{,}001 \times q^6$
$q^6 = 10^6$
$q = +10$

❸ Comme $u_{60} = u_7$, $q = 1$.

Exercice 18 Soit u une suite géométrique de premier terme $u_0 = 4$ et de raison 1,25.

❶ Comme u est une suite géométrique, $u_n = u_0 \times q^n$

$$u_n = 4 \times 1{,}25^n$$

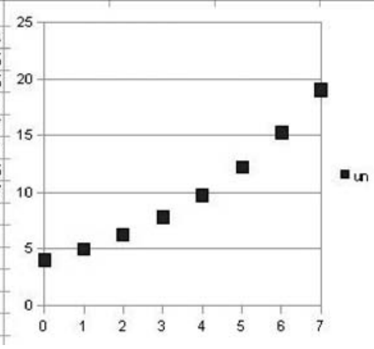
❷ Comme $q = 1{,}25 > 1$, la suite $a_n = 1{,}25^n$ est une suite croissante.

Comme $u_n = 4 \times a_n$, les suites (a_n) et (u_n) ont le même sens de variation.

Ainsi, (u_n) est une suite croissante.

❸

	A	B
1	n	u_n
2	0	4
3	1	5
4	2	6,25
5	3	7,81
6	4	9,77
7	5	12,21
8	6	15,26
9	7	19,07
10		
11		
12		
13		
14		
15		



❹

	A	B
1	n	u_n
2	0	4
3	1	5
4	2	6,25
5	3	7,81
6	4	9,77
7	5	12,21
8	6	15,26
9	7	19,07
10	8	23,84
11	9	29,8
12	10	37,25
13	11	46,57
14	12	58,21
15	13	72,76
16	14	90,95
17	15	113,69
18	16	142,11
19	17	177,64
20	18	222,04
21	19	277,56
22	20	346,94
23	21	433,68
24	22	542,1
25	23	677,63
26	24	847,03
27	25	1058,79
28	26	1323,49
29	27	1654,36
30	28	2067,95
31	29	2584,94
32	30	3231,17
33	31	4038,97
34	32	5048,71
35	33	6310,89
36	34	7888,61
37	35	9860,76
38	36	12325,95

À partir de $n = 36$, $u_n > 10000$.

Exercice 19

❶ La suite de terme général $u_n = 0,32^n$ est une suite décroissante car $q = 0,32$ et $0 < q < 1$.

❷ La suite de terme général $u_n = 5^n$ est une suite croissante car $q = 5$ et $q > 1$.

❸ La suite de terme général $u_n = 1^n$ est une suite constante car $q = 1$.

❹ La suite de terme général $a_n = 6^n$ est une suite croissante car $q = 6$ et $q > 1$. Comme $u_n = -2 \times a_n$ et $-2 < 0$, le sens de variation de la suite (u_n) est décroissant.

❺ La suite de terme général $a_n = \left(\frac{5}{4}\right)^n$ est une suite croissante car $q = \frac{5}{4}$ et $q > 1$. Comme $u_n = 7 \times a_n$ et 7 > 0, le sens de variation de la suite (u_n) est croissant.

❻ La suite de terme général $a_n = 0,6^n$ est une suite décroissante car $q = 0,6$ et $0 < q < 1$. Comme $u_n = 21 \times a_n$ et 21 > 0, le sens de variation de la suite (u_n) est décroissant.

❼ La suite de terme général $a_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$ est une suite décroissante car $q = \frac{1}{3}$ et $0 < q < 1$. Comme $u_n = -0,1 \times a_n$ et $-0,1 < 0$, le sens de variation de la suite (u_n) est croissant.

Exercice 20

❶ Comme $u_0 = -2$ et $q = 0,5$ donc $0 < q < 1$, le sens de variation de la suite (u_n) est croissant.

❷ Comme $u_0 = -3,1$ et $q = 5$ donc $q > 1$, le sens de variation de la suite (u_n) est décroissant.

❸ Comme $u_{n+1} = u_n$, la suite (u_n) est constante.

❹ Comme $u_0 = 6,5$ et $q = \frac{3}{2}$ donc $q > 1$, le sens de variation de la suite (u_n) est croissant.

❺ Comme $u_0 = 0,4$ et $q = 1,1$ donc $q > 1$, le sens de variation de la suite (u_n) est croissant.

Exercice 21

❶ Le coefficient multiplicateur associé à une augmentation de 3,5 % est égal à 1,035.

$$C_0 \xrightarrow{\times 1,035} C_1 \xrightarrow{\times 1,05} C_2$$

$$\begin{aligned} C_1 &= C_0 \times 1,035 \\ &= 5000 \times 1,035 \\ &= 5175 \end{aligned} \quad \text{et} \quad \begin{aligned} C_2 &= C_1 \times 1,035 \\ &= 5175 \times 1,035 \\ &= 5356,13 \end{aligned}$$

❷ **a)** D'une année à l'autre, le capital augmente de 3,5 %. Le capital est donc multiplié par 1,035. On a donc $C_{n+1} = C_n \times 1{,}035$. ($C_n$) est une suite géométrique de premier terme $C_0 = 5000$ et de raison $q = 1{,}035$.

b) Ainsi, $C_n = C_0 \times 1{,}035^n$.

❸

	A	B
1	n	C
2	0	5000
3	1	5175
4	2	5356,13
5	3	5543,59
6	4	5737,62
7	5	5938,43
8	6	6146,28
9	7	6361,4
10	8	6584,05
11	9	6814,49
12	10	7052,99
13	11	7299,85
14	12	7555,34
15	13	7819,78
16	14	8093,47
17	15	8376,74
18	16	8669,93
19	17	8973,38
20	18	9287,45
21	19	9612,51
22	20	9948,94
23	21	10297,16

Au bout de 21 années, le capital disponible sera le double du capital initial.

Exercice 22 Augmentation

❶ **a)**
$$M_1 = M_0 + 50 = 1500 + 50 = 1550 \quad \text{et} \quad M_2 = M_1 + 50 = 1550 + 50 = 1600$$

b) D'une année à l'autre, le salaire de Marie augmente de 50 €. On a donc $M_{n+1} = M_n + 50$. Ainsi, (M_n) est une suite arithmétique de premier terme $M_0 = 1500$ et de raison $r = 50$.

c) On a donc :
$$M_n = M_0 + n \times 50 = 1500 + 50n$$

d)
$$M_{20} = 1500 + 50 \times 20 = 2500$$

e) On résout :
$$M_n = 1800$$
$$1500 + 50n = 1800$$
$$50n = 1800 - 1500$$
$$n = 6$$

Au bout de six ans, le salaire de Marie sera égal à 1800 €.

❷ **a)** $J_1 = J_0 \times 1{,}03$ et $J_2 = J_1 \times 1{,}03$

$= 1545$ $\quad$ $= 1545 \times 1{,}03$

$= 1591{,}35$

b) D'une année à l'autre, le salaire de Jean augmente de 3 %. Il est donc multiplié par 1,03. On a donc $J_{n+1} = J_n \times 1{,}03$. Ainsi, (J_n) est une suite géométrique de premier terme $J_0 = 1500$ et de raison $q = 1{,}03$.

c) On a donc : $J_n = J_0 \times q^n$

$= 1500 \times 1{,}03^n$

d) $J_{20} \simeq 1500 \times 1{,}03^{20}$

$\simeq 2709{,}17$

e) En utilisant le tableur, on obtient :

$J_8 \simeq 1791{,}08$ et $J_7 \simeq 1844{,}81$. Au bout de sept ans, le salaire de Jean sera supérieur à 1800 €.

❸ En utilisant le tableur, on obtient :

	A	B	C
1	n	M_n	J_n
2	0	1500	1500
3	1	1550	1545
4	2	1600	1591,35
5	3	1650	1639,09
6	4	1700	1688,26
7	5	1750	1738,91
8	6	1800	1791,08
9	7	1850	1844,81
10	8	1900	1900,16
11	9	1950	1957,16
12	10	2000	2015,87
13	11	2050	2076,35
14	12	2100	2138,64
15	13	2150	2202,8
16	14	2200	2268,88
17	15	2250	2336,95
18	16	2300	2407,06
19	17	2350	2479,27
20	18	2400	2553,65
21	19	2450	2630,26
22	20	2500	2709,17
23	21	2550	2790,44
24			

Au bout de huit ans, le salaire mensuel de Jean devient supérieur à celui de Marie.

Correction des activités d'approfondissement du chapitre 5

Exercice I

L'hypothèse de MALTHUS (1766 – 1834)

❶ Le coefficient multiplicateur associé à une hausse de 2,8 % est égal à 1,028. Le coefficient multiplicateur global associé à une augmentation de 2,8 % par an pendant 25 ans est donc égal à $1{,}028^{25} \simeq 1{,}99$. En arrondissant, cela correspond à un doublement de population tous les vingt-cinq ans.

❷ **a)** $p_1 = p_0 \times 1{,}028 = 8000000 \times 1{,}028 = 8224000$ et $p_2 = p_1 \times 1{,}028 = 8224000 \times 1{,}028 = 8454272$

b) D'une année à l'autre, la population augmente de 2,8 %. Elle est donc multipliée par 1,028. On a donc $p_{n+1} = p_n \times 1{,}028$.

c) Ainsi, (p_n) est une suite géométrique de premier terme $p_0 = 8000000$ et de raison $q = 1{,}028$.

d) On a donc : $p_n = p_0 \times 1{,}028^n = 8000000 \times 1{,}028^n$

❸ **a)** $q_1 = q_0 + 400000 = 10400000$ et $q_2 = q_1 + 400000 = 10800000$

b) D'une année à l'autre, la population pouvant être nourrie par l'agriculture anglaise augmente de 400 000. On a donc $q_{n+1} = q_n + 400000$.

c) Ainsi, (q_n) est une suite arithmétique de premier terme $q_0 = 10000000$ et de raison $r = 400000$.

d) On a donc : $q_n = q_0 + r \times n = 10000000 + 400000n$

❹ $p_{25} = 8000000 \times 1{,}028^{25} \simeq 15955773$ et $q_{25} = 10000000 + 400000 \times 25 = 20000000$

❺ En utilisant le tableur, on obtient :

52	50	31 823 337	35 000 000
53	51	32 714 391	35 500 000
54	52	33 630 394	36 000 000
55	53	34 572 045	36 500 000
56	54	35 540 062	37 000 000
57	55	36 535 184	37 500 000
58	56	37 558 169	38 000 000
59	57	38 609 797	38 500 000
60	58	39 690 872	39 000 000
61	59	40 802 216	39 500 000
62	60	41 944 678	40 000 000

Selon l'hypothèse de Malthus, à partir de 1857, l'agriculture anglaise ne permet plus de nourrir la population anglaise.

Exercice II ❶ **a)** Comme la forêt possède 50 milliers d'arbre en 2010, $u_0 = 50$.

De plus, l'année $(n+1)$, 95 % des arbres de l'année n sont conservés soit $0{,}95 \times u_n$ et 3 milliers d'arbres sont plantés. On a donc, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}95 \times u_n + 3$

b)

n	0	1	2	3
u_n	50	50,5	50,98	51,43
$u_{n+1} - u_n$	/	0,5	0,48	0,45
$\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$	/	1,0100	1,0094	1,0089

Ni la différence $u_{n+1} - u_n$, ni le rapport $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ ne sont constants donc la suite (u_n) n'est ni arithmétique, ni géométrique.

❷ On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = 60 - u_n$.

a) $$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{60 - u_{n+1}}{60 - u_n} = \frac{60 - 0{,}95u_n - 3}{60 - u_n} = \frac{57 - 0{,}95u_n}{60 - u_n} = \frac{0{,}95(60 - u_n)}{60 - u_n} = 0{,}95$$

donc la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,95.

b) $$v_0 = 60 - u_0 = 60 - 50 = 10$$

Comme la suite (v_n) est une suite géométrique, pour tout entier naturel n, $v_n = v_0 \times 0{,}95^n = 10 \times 0{,}95^n$

c) Comme, pour tout entier naturel n, $v_n = 60 - u_n$, on a $u_n = 60 - 10 \times 0{,}95^n$

❸ En 2015, $n=5$. Calculons u_5 : $u_5=60-10\times0{,}95^5\simeq52{,}262$ donc la forêt comportera 52 262 arbres en 2015.

❹ **a)** Pour tout entier naturel n, on a :

$$\begin{aligned}u_{n+1}-u_n&=60-10\times0{,}95^{n+1}-(60-10\times0{,}95^n)\\&=-10\times0{,}95^{n+1}+10\times0{,}95^n\\&=10\times0{,}95^n(-0{,}95+1)\\&=10\times0{,}95^n\times0{,}05\\&=0{,}5\times0{,}95^n\end{aligned}$$

b) Donc, $u_{n+1}-u_n>0$. Ainsi, la suite (u_n) est une suite croissante.

❺ 10 % du nombre d'arbres de la forêt en 2010 correspond à 5 000 arbres. On cherche l'année à partir de laquelle le nombre d'arbres de la forêt aura dépassé 55 000 arbres :

C3 =0,95*C2+3

	A	B	C
1	Année	rang	Nombre d'arbres en milliers u_n
2	2010	0	50
3	2011	1	50,5
4	2012	2	50,98
5	2013	3	51,43
6	2014	4	51,85
7	2015	5	52,26
8	2016	6	52,65
9	2017	7	53,02
10	2018	8	53,37
11	2019	9	53,7
12	2020	10	54,01
13	2021	11	54,31
14	2022	12	54,6
15	2023	13	54,87
16	2024	14	55,12
17	2025	15	55,37

Ceci se produira en 2024.

❻

127	2135	125	59,98
128	2136	126	59,98
129	2137	127	59,99
130	2138	128	59,99
131	2139	129	59,99
132	2140	130	59,99
133	2141	131	59,99
134	2142	132	59,99
135	2143	133	59,99
136	2144	134	59,99
137	2145	135	59,99
138	2146	136	59,99
139	2147	137	59,99
140	2148	138	59,99
141	2149	139	59,99
142	2150	140	59,99
143	2151	141	59,99
144	2152	142	59,99
145	2153	143	59,99
146	2154	144	59,99
147	2155	145	59,99
148	2156	146	59,99
149	2157	147	59,99
150	2158	148	59,99
151			

Le nombre d'arbres semble se stabiliser à 60 000.

Exercice III Modèle de Harrod (1900 – 1978)

❶ Pour tout entier naturel n, $S_n = 0,2 \times Y_n$.

❷ On admet que, pour tout entier naturel n, $I_n = 2,2(Y_n - Y_{n-1})$.

À l'équilibre, $S_n = I_n$ donc $S_n = 2,2(Y_n - Y_{n-1})$. Or, $S_n = 0,2 \times Y_n$ donc

$$0,2Y_n = 2,2(Y_n - Y_{n-1})$$
$$0,2Y_n - 2,2Y_n = -2,2Y_{n-1}$$
$$Y_n = -\frac{2,2}{-2}Y_{n-1}$$
$$\boxed{Y_n = +1,1Y_{n-1}}$$

❸ On en déduit que la suite (Y_n) est une suite géométrique de raison 1,1 et de premier terme 500.

$$Y_n = Y_0 \times 1,1^n$$
$$= 500 \times 1,1^n$$

❹ Le revenu en 2020 correspond à Y_{10} : $Y_{10} = 500 \times 1,1^{10}$
$$= 1296,87123$$

Exercice IV

❶ L'accroissement de la population pendant la première année est égal à

$$p_1 - p_0 = 60000 - 40000$$
$$= 20000$$

L'accroissement de la population pendant la deuxième année est égal à

$$p_2 - p_1 = \frac{1}{2}(p_1 - p_0) \text{ en utilisant (R)}$$
$$= \frac{1}{2} \times 20000$$
$$= 10000$$

Ainsi, $p_2 = p_1 + 10000$
$$= 60000 + 10000$$
$$= 70000$$

$$p_3 - p_2 = \frac{1}{2}(p_2 - p_1) \text{ en utilisant (R)}$$
$$= \frac{1}{2} \times 10000$$
$$= 5000$$

Ainsi, $p_3 = p_2 + 5000$
$$= 70000 + 5000$$
$$= 705000$$

❷ a) $u_{n+1} = p_{n+2} - p_{n+1}$

$= \frac{1}{2}(p_{n+1} - p_n)$

$= \frac{1}{2}u_n$

Ainsi, la suite (u_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier $u_0 = p_1 - p_0 = 20000$

On a donc $u_n = u_0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = 20000 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$

b) Pour tout entier naturel *n*, on a :

$$\begin{aligned}v_{n+1} - v_n &= p_{n+2} - \frac{1}{2}p_{n+1} - (p_{n+1} - \frac{1}{2}p_n)\\ &= p_{n+2} - p_{n+1} - \frac{1}{2}(p_{n+1} - p_n)\\ &= \frac{1}{2}(p_{n+1} - p_n) - \frac{1}{2}(p_{n+1} - p_n)\\ &= 0\end{aligned}$$

Ainsi, (v_n) est une suite constante ; $v_0 = p_1 - \frac{1}{2}p_0$

$$= 60000 - \frac{1}{2} \times 40000$$

$$= 40000$$

donc, pour tout entier naturel *n*, $v_n = 40000$.

c) Pour tout entier naturel *n*, on a

$$\begin{aligned}2(v_n - u_n) &= 2\left(p_{n+1} - \frac{1}{2}p_n - (p_{n+1} - p_n)\right)\\ &= 2\left(\frac{1}{2}p_n\right)\\ &= p_n\end{aligned}$$

donc, $p_n = 2(v_n - u_n)$

$$= 2\left(40000 - 20000 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$$

$$= 80000 - 40000 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

d)

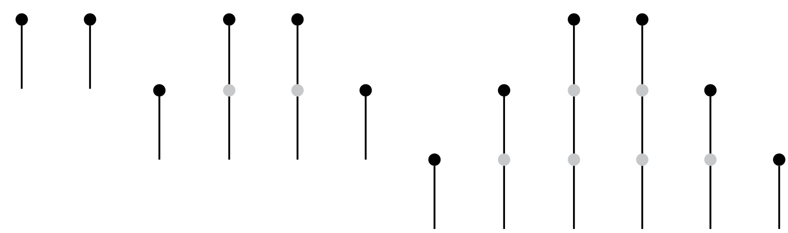
B2 =80000-40000*0,5^A2

	A	B	C	D
1	n	p_n		
2	0	40000		
3	1	60000		
4	2	70000		
5	3	75000		
6	4	77500		
7	5	78750		
8	6	79375		
9	7	79688		
10	8	79844		
11	9	79922		
12	10	79961		
13	11	79980		
14	12	79990		
15	13	79995		
16	14	79998		
17	15	79999		
18	16	79999		
19	17	80000		
20	18	80000		
21	19	80000		
22	20	80000		
23	21	80000		
24	22	80000		
25	23	80000		
26	24	80000		
27	25	80000		
28	26	80000		
29	27	80000		
30	28	80000		
31	29	80000		
32	30	80000		
33	31	80000		
34	32	80000		
35	33	80000		
36	34	80000		
37	35	80000		
38	36	80000		
39	37	80000		
40	38	80000		
41	39	80000		
42	40	80000		

Au bout d'un grand nombre d'années, on peut conjecturer que le nombre de libellules se stabilise à 80 000 individus.

Exercice V

Première étape Deuxième étape Troisième étape



Désignons par u_n le nombre d'allumettes nécessaire pour construire une pyramide de n étages.

$u_1 = 2$;

$u_2 = u_1 + 4 = u_1 + 2 \times 2$;

$u_3 = u_2 + 6 = u_2 + 3 \times 2$.

Le $n^{\text{ième}}$ étage de la pyramide comporte $2n$ allumettes.

D'une pyramide à l'autre, le nombre d'allumettes nécessaires augmente de $2n$.

On a donc $u_{n+1} = u_n + 2n$.

En utilisant le tableur, on obtient :

B3 =B2+2*A3

	A	B	C
1	n	u_n	
2	1	2	
3	2	6	
4	3	12	
5	4	20	
6	5	30	
7	6	42	
8	7	56	
9	8	72	
10	9	90	
11	10	110	
12	11	132	
13	12	156	
14	13	182	
15	14	210	
16	15	240	
17	16	272	
18	17	306	
19	18	342	
20	19	380	
21	20	420	

420 allumettes seront nécessaires pour réaliser une « pyramide » de 20 étages.

■