Devoir de mathématiques

Exercice 1 On considère le nombre complexe $z = \dfrac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i}$.

1) Ecrire z sous forme algébrique puis sous forme trigonométrique.

2) Montrer que z^6 est un nombre réel.

Exercice 2 Calculer l'intégrale : $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{(1+e^x)^2}\,dx$

Exercice 3 Soit f la fonction définie pour tout nombre réel x par $f(x) = (2-x)e^{2x}$.
On désigne par $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal.

1) Soit F la fonction définie pour tout nombre réel x par $F(x) = -\dfrac{1}{2}xe^{2x} + \dfrac{5}{4}e^{2x}$.
Montrer que F est une primitive de f.

2) Soit $\mathcal{A}$ la partie de plan limitée par $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 2$.

Calculer l'aire de $\mathcal{A}$.

Exercice 4 Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2+x+1}$.

1) a) Calculer la limite de f en $+\infty$.

b) Etudier les variations de f

2) Soit F la primitive de f sur $[0; +\infty[$ qui s'annule en 0.
Déterminer le sens de variation de F sur $[0; +\infty[$.

3) On définit sur $[0; +\infty[$ les fonctions H et K par $H(x) = F(x) - x$, et $K(x) = F(x) - \dfrac{2}{3}x$.

a) Etudier sur $[0; +\infty[$ les variations de H et K.

b) Montrer que, pour tout $x \geq 0$, $\dfrac{2}{3}x \leq F(x) \leq x$.

c) En déduire la limite de F en $+\infty$.