

Correction du devoir de mathématiques

Exercice 1

$$1) z = \frac{\sqrt{3} + i}{\sqrt{3} - i} = \frac{\sqrt{3} + i}{\sqrt{3} - i} \times \frac{\sqrt{3} + i}{\sqrt{3} + i} = \frac{(\sqrt{3} + i)^2}{4} = \frac{3 + 2\sqrt{3}i + i^2}{4} = \frac{2 + 2\sqrt{3}i}{4} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

$$|z| = \left| \frac{\sqrt{3} + i}{\sqrt{3} - i} \right| = \frac{|\sqrt{3} + i|}{|\sqrt{3} - i|} = \frac{4}{4} = 1 \text{ et, } z = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = e^{i\frac{\pi}{3}}$$

2) D'après ce qui précède, $z^6 = (e^{i\frac{\pi}{3}})^6 = e^{i6\frac{\pi}{3}} = e^{i2\pi} = 1$ et donc, $z^6 = 1$ est bien un nombre réel.

Exercice 2 Soit $f(x) = \frac{e^x}{(1 + e^x)^2}$. f est de la forme $\frac{u'}{u}$, avec $u = 1 + e^x$.

Ainsi, $F(x) = -\frac{1}{1 + e^x}$ est une primitive de f , et, $J = \int_0^1 \frac{e^x}{(1 + e^x)^2} dx = \left[-\frac{1}{1 + e^x} \right]_0^1 = -\frac{1}{1 + e} + \frac{1}{2}$

Exercice 3

1) Les fonctions $x \mapsto -\frac{1}{2}x$ et $x \mapsto e^{2x}$ sont dérivables sur \mathbb{R} ; de leur produit et somme, et donc de la

fonction F . De plus, $F'(x) = -\frac{1}{2}e^{2x} - xe^{2x} + \frac{5}{2}e^{2x} = e^{2x} \left(-\frac{1}{2} + \frac{5}{2} - x \right) = e^{2x} (2 - x)$

Ainsi, $F' = f$, et F est une primitive de f .

2) L'aire de \mathcal{A} est, par définition de l'intégrale :

$$I = \int_0^2 f(x) dx = [F(x)]_0^2 = \left[-\frac{1}{2}xe^{2x} + \frac{5}{4}e^{2x} \right]_0^2 = -e^4 + \frac{5}{4}e^4 - \frac{5}{4} = \frac{1}{4}e^4 - \frac{5}{4} = \frac{1}{4}(e^4 - 5)$$

Exercice 4

1) a) f est une fonction rationnelle, donc sa limite en $+\infty$ est égale à la limite du rapport de ses termes de plus haut degré : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$.

b) Le dénominateur $x^2 + x + 1$ a un discriminant $\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$ donc ne s'annule pas sur \mathbb{R} . Ainsi, la fonction rationnelle f est définie et dérivable sur \mathbb{R} , avec,

$$f'(x) = \frac{2x(x^2 + x + 1) - (x^2 + 1)(2x + 1)}{(x^2 + x + 1)^2} = \frac{x^2 - 1}{(x^2 + x + 1)^2} = \frac{(x - 1)(x + 1)}{(x^2 + x + 1)^2}$$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$x^2 - 1$	$+$	\emptyset	$-$	\emptyset
$(x^2 + x + 1)$	$+$	$ $	$+$	$ $
$f'(x)$	$+$	\emptyset	$-$	\emptyset
f	$\begin{matrix} & \nearrow & & \searrow & \nearrow \\ & & 2 & & \\ & & & & \frac{2}{3} \end{matrix}$			

2) On a donc, par définition de F , $F' = f$.

Or, d'après le tableau de variation précédent, pour tout $x \geq 0$, $F'(x) = f(x) \geq \frac{2}{3} > 0$.

Ainsi, F est croissante sur $[0; +\infty[$.

3) On définit sur $[0; +\infty[$ les fonctions H et K par $H(x) = F(x) - x$, et $K(x) = F(x) - \frac{2}{3}x$.

a) H et K sont, tout comme F dérivables sur \mathbb{R} , donc sur \mathbb{R}^+ , et

$$H'(x) = F'(x) - 1 = f(x) - 1 = \frac{-x}{x^2 + x + 1}.$$

Or, sur $[0; +\infty[$, $-x \leq 0$, et $x^2 + x + 1 > 0$ (car c'est un trinôme du second degré n'ayant pas de racine). Ainsi, $H'(x) \leq 0$ pour $x \in [0; +\infty[$, et donc, H est décroissante sur \mathbb{R}_+ .

De même, $K'(x) = F'(x) - \frac{2}{3} = f(x) - \frac{2}{3} \geq 0$, d'après le tableau de variation de f . Ainsi, K est croissante sur \mathbb{R}_+ .

b) On a de plus, $H(0) = F(0) - 0 = 0$, et donc, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $H(x) \leq 0 \iff F(x) \leq x$.

De même, $K(0) = F(0) - 0 = 0$, et donc, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $K(x) \geq 0 \iff F(x) \geq \frac{2}{3}x$.

En résumé, on a bien, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\frac{2}{3}x \leq F(x) \leq x$.

c) Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{3}x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$, d'après le théorème des gendarmes, on en déduit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty$.