Devoir de mathématiques

Exercice 1 *(Baccalauréat France métropolitaine, juin 2009)*

a. Pour $n=10$, $10w_{10}=11w_9+1=11\times 19+1=210$, d'où, $\underline{w_{10}=21}$.

b. D'après les valeurs de w_n pour les premiers entiers, on peut conjecturer que $w_n=2n+1$.

Démonstration de la conjecture : Démonstration par récurrence.
Initialisation : La relation est vraie pour tous les entiers $n\leq 10$.
Hérédité : Supposons que pour un certain entier n, $w_n=2n+1$ (hypothèse de récurrence), alors, $(n+1)w_{n+1}=(n+2)w_n+1=(n+2)(2n+1)+1$ d'après l'hypothèse de récurrence.
On a donc, $(n+1)w_{n+1}=2n^2+5n+3=(n+1)(2n+3)$, soit donc $w_{n+1}=2n+3=2(n+1)+1$.
Ainsi, l'expression est encore vraie au rang $n+1$.

On a ainsi démontré d'après le principe de récurrence que, $\boxed{\text{pour tout entier } n,\ w_n=2n+1}$.
On en déduit que $\underline{w_{2009}=2\times 2009+1=4019}$.

Exercice 2

Partie I. g est définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=x^3-3x-4$.

1. g est une fonction polynôme donc dérivable sur $\mathbb{R}$, et, pour tout x réel,
$g'(x)=3x^2-3=3(x^2-1)=3(x-1)(x+1)$.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
g		$\nearrow$	-2	$\searrow$	-6	$\nearrow$	

2. g est une fonction polynôme, donc continue sur $\mathbb{R}$. De plus, sa limite en $+\infty$ est la limite de son terme de plus haut degré : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x^3=+\infty$, et comme $g(1)=-6<0$, on en déduit, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, que il existe un unique réel $\alpha\in]1;+\infty[$ tel que $g(\alpha)=0$. Comme de plus, $g(x)<0$ pour tout $x\in]-\infty;1]$, on en déduit que $\underline{\alpha\in]1;+\infty[\text{ est la seule solution sur } \mathbb{R} \text{ de l'équation } g(x)=0}$.

3. On déduit de la question précédente le signe de g :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

Partie II. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$ par : $f(x)=\dfrac{x^3+2x^2}{x^2-1}$.

1. Limites en $-\infty$: f est une fonction rationnelle, donc sa limite en $-\infty$ est celle du rapport de ses termes de plus haut degré : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3}{x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty} x$, donc $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty}$.

Limites en -1 : Signe de x^2-1 :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
x^2-1		$+$	0	$-$	0	$+$	

$\lim\limits_{x\to-1}(x^3+2x^2)=1$ et $\lim\limits_{x\to-1^-}(x^2-1)=0^+$, d'où, $\boxed{\lim\limits_{x\to-1^-} f(x)=+\infty}$.

$\lim\limits_{x\to-1}(x^3+2x^2)=1$ et $\lim\limits_{x\to-1^+}(x^2-1)=0^-$, d'où, $\boxed{\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)=-\infty}$.
On en déduit que la droite d'équation $x=-1$ est asymptote verticale à $\mathcal{C}_f$.

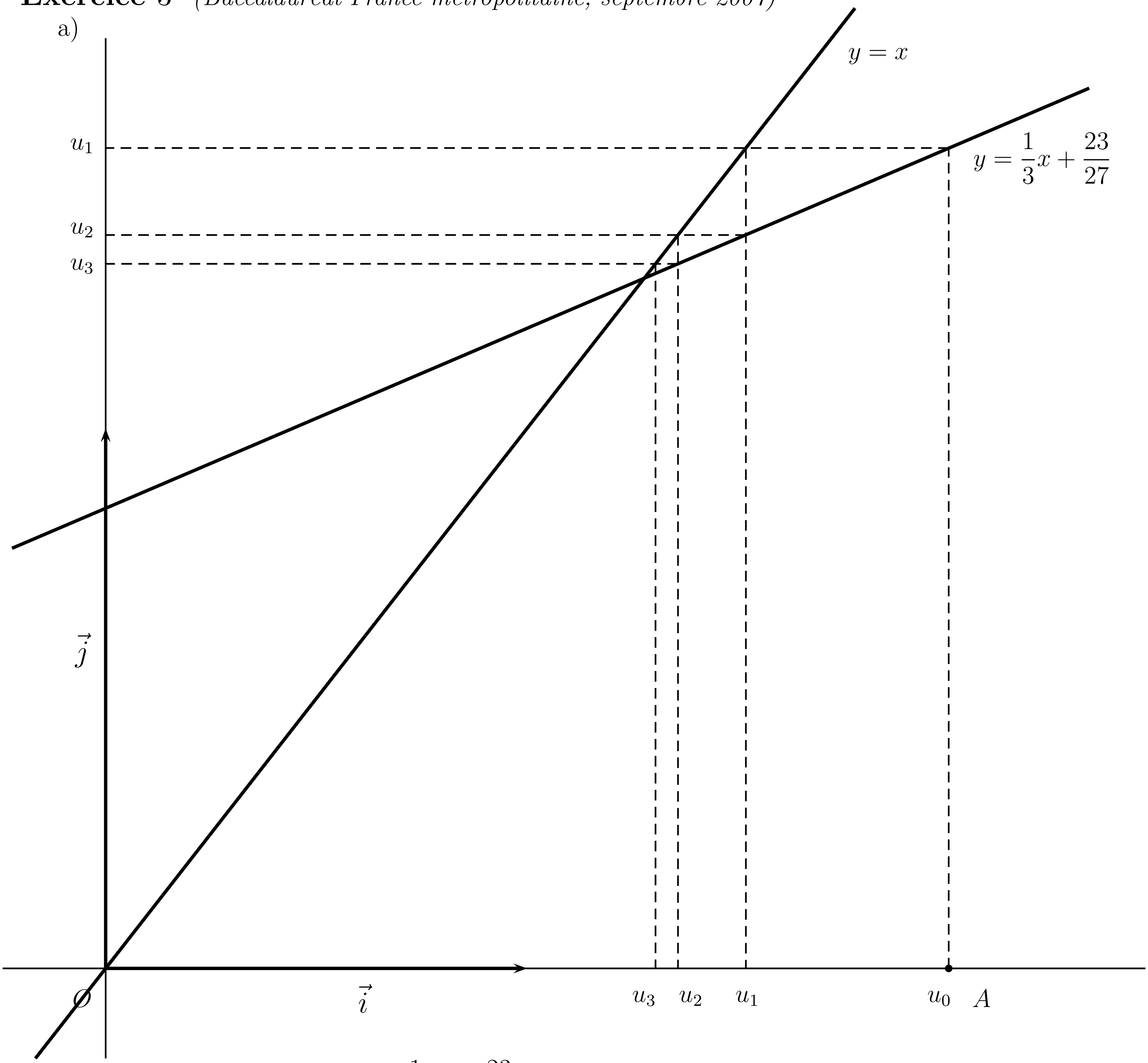
2. Pour tout x de $\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$, $x+2+\dfrac{x+2}{x^2-1}=\dfrac{(x+2)(x^2-1)+x+2}{x^2-1}=\dfrac{x^3+2x^2}{x^2-1}=f(x)$.

Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } x\in\mathbb{R}\setminus\{-1;1\},\ f(x)=x+2+\dfrac{x+2}{x^2-1}}$.

3. D'après le calcul précédent, pour tout x de $\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$, $f(x)-(x+2)=\dfrac{x+2}{x^2-1}$.
Donc, $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(x+2)\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x+2}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}=0$,
et de même, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x+2)\right]=0$.
Ainsi, la droite $\Delta : y=x+2$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ en $-\infty$ et $+\infty$.

Exercice 3 *(Baccalauréat France métropolitaine, septembre 2007)*

a)



b) Pour tout entier n, $u_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n + \dfrac{23}{27}$, ainsi, si (u_n) converge vers $l \in \mathbb{R}$, alors, d'après le théorème du point fixe, $l = \dfrac{1}{3}l + \dfrac{23}{27}$, soit $\dfrac{2}{3}l = \dfrac{23}{27}$, et donc, $\underline{l = \dfrac{23}{18}}$.

c) On veut démontrer par récurrence que pour tout entier n, $u_n \geq \dfrac{23}{18}$.

Initialisation. $u_0 = 2 \geq \dfrac{23}{18}$, donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

Hérédité. Supposons que pour un entier n, $u_n \geq \dfrac{23}{18}$.

Alors, $\dfrac{1}{3}u_n \geq \dfrac{1}{3} \times \dfrac{23}{18}$, et donc, $\dfrac{1}{3}u_n + \dfrac{23}{27} \geq \dfrac{1}{3} \times \dfrac{23}{18} + \dfrac{23}{27} = \dfrac{23}{27} \times \dfrac{3}{2} = \dfrac{23}{18}$, ainsi, $u_{n+1} \geq \dfrac{23}{18}$.

La propriété est donc encore vraie au rang $n+1$, et donc, d'après le principe de récurrence, $\boxed{\text{pour tout entier } n,\ u_n \geq \dfrac{23}{18}}$.

d) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{3}u_n + \dfrac{23}{27} - u_n = -\dfrac{2}{3}u_n + \dfrac{23}{27}$.

D'après la question précédente, $u_n \geq \dfrac{23}{18}$, et donc, $-\dfrac{2}{3}u_n \leq -\dfrac{2}{3} \times \dfrac{23}{18} = -\dfrac{23}{27}$.

On en déduit finalement que $u_{n+1} - u_n = -\frac{2}{3}u_n + \frac{23}{27} \leq -\frac{23}{27} + \frac{23}{27} = 0$, et ainsi que la suite (u_n) est décroissante.

Comme elle est de plus, d'après la question précédente minorée par $\frac{23}{18}$, elle est donc convergente vers une limite $l \in \mathbb{R}$.

D'après la question b), on en déduit donc que $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ converge vers } l = \frac{23}{18}}$.

Exercice 4 *(Baccalauréat France métropolitaine, juin 2005 4 points)*

Partie A Soit (u_n) et (v_n) deux suites adjacentes, avec par exemple (u_n) croissante et (v_n) décroissante.

Alors, d'après (2), pour tout entier n, $u_n \leq v_n$.

De plus, comme (v_n) est décroissante, pour tout entier n, $u_n \leq v_n \leq v_{n-1} \leq v_{n-2} \leq \cdots \leq v_1 \leq v_0$. Ainsi, la suite (u_n) est majorée par v_0, et comme elle est de plus croissante, on en déduit d'après (3) que (v_n) converge vers une limite $l \in \mathbb{R}$.

De même, comme (u_n) est croissante, pour tout entier n, $u_0 \leq u_1 \leq u_2 \leq \cdots \leq u_{n-1} \leq u_n \leq v_n$. Ainsi, la suite (v_n) est minorée par u_0, et comme elle est de plus décroissante, on en déduit d'après (3) que (u_n) converge vers une limite $l' \in \mathbb{R}$.

D'après (1), $\lim_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$, et comme d'après ce qui précède $\lim_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = l - l'$, on en déduit que $l - l' = 0$, soit $l = l'$. Ainsi (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite l.

Partie B

1. **Faux** Si (u_n) converge vers 0, (v_n) diverge. Par exemple $u_n = \frac{1}{n}$, alors $\lim_{n\to+\infty}(u_n) = 0$, tandis que $v_n = -2n$, et $\lim_{n\to+\infty}(v_n) = -\infty$.
2. **Vrai** Si pour tout entier n, $u_n \geq 2$, alors $\frac{1}{u_n} \leq \frac{1}{2}$, car la fonction inverse $x \mapsto \frac{1}{x}$ est décroissante, et donc $v_n = -\frac{2}{u_n} \geq \frac{-2}{2} = -1$, c'est-à-dire que (v_n) est minorée par -1.
3. **Faux** Si (u_n) est décroissante, alors pour tout entier n, $u_{n+1} \leq u_n$.
   On en déduit que $\frac{1}{u_{n+1}} \geq \frac{1}{u_n}$, car la fonction inverse $x \mapsto \frac{1}{x}$ est décroissante, et donc que $-\frac{2}{u_{n+1}} \leq -\frac{2}{u_n}$, c'est-à-dire $v_{n+1} \leq v_n$, donc (v_n) est aussi décroissante.
4. **Faux** Une suite est divergente si elle ne converge pas, donc si elle tend vers $+\infty$ ou $-\infty$, ou si elle ne tend vers aucune limite.
   Par exemple, la suite (u_n) définie par $u_n = (-1)^n$, qui vaut alternativement 1 et -1 ne converge vers aucune limite. (u_n) est donc divergente, et il en est de même de la suite (v_n) définie par $v_n = \frac{-2}{(-1)^n} = \frac{-2}{u_n} = -2(-1)^n$ qui vaut alternativement -2 et $+2$.