# Les Nombres Complexes : Partie 1 + Partie 2
## 2bac pc/svt

Réalisé Par : Youssef MIGROUNE
Prof de maths au lycée
Niveau : 2BAC PC/SVT

Youtube / MIGROUNE Math

# 1 - L'ensemble des nombres complexes

## a Notion de nombres complexe

**Théorème**

Il existe un ensemble noté $\mathbb{C}$ contenant $\mathbb{R}$ .

- Muni d'une addition notée $+$ et d'une multiplication notée $\times$ , possédant les mêmes propriétés comme dans $\mathbb{R}$ .
- Possédant un élément noté i dont le carré vaut $-1$ ; $\mathrm{i}^2 = -1$
- Où tout élément $z$ , appelé **nombre complexe** ou **complexe** , s'écrit de manière unique sous la forme $z = x + \mathrm{i}y$ , avec $x$ et $y$ des réels .

**Exemples des nombres complexes**

- $z = -1 + 3\mathrm{i}$
- $z = 4 - 2\mathrm{i}$
- $z = 16$
- $z = -6\mathrm{i}$

## Remarques

- $\mathbb{C} = \left\{ x + iy / (x; y) \in \mathbb{R}^2 \right\}$
- $z \in \mathbb{C} \iff \left[ z = x + iy \,;\ (x; y) \in \mathbb{R}^2 \right]$
- Contrairement à $\mathbb{R}$ , l'ensemble $\mathbb{C}$ n'est pas muni d'aucune relation d'ordre .

## b La forme algébrique d'un nombre complexe

### Définition

Soit $z \in \mathbb{C}$, alors il existe un unique couple $(x; y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $z = x + \mathrm{i}y$ .

- L'écriture $z = x + \mathrm{i}y$ s'appelle **la forme algébrique** du nombre complexe $z$
  - Le nombre $x$ est **la partie réelle** de $z$, notée $\mathtt{Re}(z)$
  - Le nombre $y$ est **la partie imaginaire** de $z$, notée $\mathtt{Im}(z)$
- Un nombre complexe est **réel** lorsque sa partie imaginaire est nulle :

$$z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \mathtt{Im}(z) = 0$$

- Un nombre complexe est dit **imaginaire pur** si sa partie réelle est nulle :

$$z \in \mathrm{i}\mathbb{R} \Leftrightarrow \mathtt{Re}(z) = 0$$

### Exemple

On considère le nombre complexe : $z = 8 + 3\mathrm{i}(3 - 2\mathrm{i})$

## C Égalité de deux nombres complexes

### Propriété

Soit $z$ et $z'$ deux nombres complexes .

$$z = z' \Leftrightarrow \Big(\mathtt{Re}(z) = \mathtt{Re}(z') \text{ et } \mathtt{Im}(z) = \mathtt{Im}(z')\Big)$$

$$z = 0 \Leftrightarrow \Big(\mathtt{Re}(z) = 0 \text{ et } \mathtt{Im}(z) = 0\Big)$$

### Exemple

On considère deux nombres complexes : $z = 2x - 3 + (1 - y)\mathrm{i}$ et
$z' = -2x\mathrm{i} + 3y$ avec $(x; y) \in \mathbb{R}^2$
Déterminons $x$ et $y$ sachant que $z = z'$

## a Addition et multiplication dans $\mathbb{C}$

### Propriété

Soit $z$ et $z'$ deux nombres complexes tels que : $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ avec $(x, x'; y; y') \in \mathbb{R}^4$. On a :

- $z + z' = (x + x') + i(y + y')$
- $z \times z' = (xx' - yy') + i(x'y + xy')$
- Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ ; $\lambda z = \lambda x + i(\lambda y)$

### Exemple

On considère les nombres complexes suivants : $z_1 = 5 - 4i$ ; $z_2 = 3 + 6i$ et $z_3 = 3 + i\sqrt{2}$ .
Écrivons les nombres complexes suivants sous forme algébrique : $z_1 + z_2$ ; $z_1 \times z_2$ ; $z_1 \times z_3$ et $-5z_2$

## Remarques

★ **Les identités remarquables** vues dans $\mathbb{R}$ restent aussi valable dans $\mathbb{C}$. Ainsi pour tous les nombres complexes $z_1$ et $z_2$, on a :

- $\left(z_1+z_2\right)^2 = z_1^2+2z_1z_2+z_2^2$
- $\left(z_1-z_2\right)^2 = z_1^2-2z_1z_2+z_2^2$
- $\left(z_1+z_2\right)\left(z_1-z_2\right) = z_1^2-z_2^2$

En particulier, on a pour tout $(a;b)\in\mathbb{R}^2$ :

- $\left(a+\mathrm{i}b\right)^2 = a^2-b^2+\mathrm{i}2ab$
- $\left(a-\mathrm{i}b\right)^2 = a^2-b^2-\mathrm{i}2ab$
- $\left(a+\mathrm{i}b\right)\left(a-\mathrm{i}b\right) = a^2+b^2$

★ Pour tous nombres complexes $z$ et $z'$, on a :

$$z\times z'=0 \Leftrightarrow \left(z=0 \text{ ou } z'=0\right)$$

## Applications

1. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on pose : $z_1 = 5 - \mathrm{i}z$ et $z_2 = z + \mathrm{i}\left(z^2 + 1\right)$ Écrire les nombres $z_1$ et $z_2$ sous leur forme algébrique dans chacun des cas suivants :

a) $z = \mathrm{i}$ | b) $z = 2 + 3\mathrm{i}$ | c) $z = (1 - 3\mathrm{i})^2$

2. Écrire sous forma algébrique le nombre complexe
$$z = \left(2 + \mathrm{i}\sqrt{3}\right)(3 - 4\mathrm{i})\left(1 + \frac{1}{2}\mathrm{i}\right)^2$$

# b Inverse d'un nombre complexe non nul
# Quotient de deux nombres complexes

## Propriété

Soit $z = x + \mathrm{i}y$ et $z' = x' + y'$ deux complexes où $x$ , $x'$ , $y$ et $y'$ des réels tels que $(x; y) \neq (0; 0)$ .

- **L'inverse** du nombre complexe $z$ est le nombre complexe noté $\frac{1}{z}$ ou $z^{-1}$ tel que :

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x + \mathrm{i}y} = \frac{x - \mathrm{i}y}{(x + \mathrm{i}y)(x - \mathrm{i}y)} = \frac{x}{x^2 + y^2} - \mathrm{i}\frac{y}{x^2 + y^2}$$

- **Le quotient** de $z'$ par $z$ est le nombre complexe noté $\frac{z'}{z}$ tel que $\frac{z'}{z} = z' \times \frac{1}{z}$ et on a :

$$\frac{z'}{z} = \frac{x' + y'}{x + \mathrm{i}y} = \frac{xx' + yy'}{x^2 + y^2} + \mathrm{i}\frac{xy' - x'y}{x^2 + y^2}$$

# Applications

1. Déterminer l'inverse du nombre complexe :
$z = (1-2\mathrm{i})(3+2\mathrm{i})$

2. Écrire sous forme algébrique le nombre complexe :
$z = \dfrac{1}{1+2\mathrm{i}} + \dfrac{1}{3-4\mathrm{i}}$

3. Calculer le nombre : $z = \dfrac{\sqrt{3}+2\mathrm{i}}{\sqrt{3}-2\mathrm{i}} + \dfrac{\sqrt{3}-2\mathrm{i}}{\sqrt{3}+2\mathrm{i}}$

4. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante : $(5-\mathrm{i})z = 4+3\mathrm{i}-z$

5. Soit $z \in \mathbb{C}$, on pose $f(z) = z^2 - z + 2$ .
Déterminer tous les complexes $z$ tels que $f(z) \in \mathbb{R}$

6. Soit $z$ un nombre complexe différent de $-\mathrm{i}$ .
Montrer que : $\dfrac{1}{z+\mathrm{i}} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \mathrm{Im}(z) = -1$

## Exercice 1

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

   $E_1$ : $(-1+4i)z+(1-2i)=iz+3$

   $E_2$ : $\dfrac{1+3iz}{1+3z}=i\dfrac{z+2}{z-5}$

2. Écrire sous forme algébrique le nombre complexe suivant :

   $$Z=(1+i)\left(\frac{2+i}{1-i}\right)^2-(1+3i)\left(\frac{2+i}{1-i}\right)+6$$

3. Soit $z=x+iy$ un nombre complexe tel que $(x;y)\in\mathbb{R}^2$.
   Déterminer tous les nombres complexes $z$ dans chacun des cas suivants :

   a) $iz^2\in\mathbb{R}$

   b) $z^2+z+1\in\mathbb{R}$

   c) $\dfrac{1-iz}{1+z}\in i\mathbb{R}$

   d) $\dfrac{z-1}{iz}\in\mathbb{R}$

## Exercice 2

Soit le nombre complexe : $j = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

1. Calculer $j^2$ et $j^3$
2. Soit $k \in \mathbb{N}$ . Calculer $j^k$ selon les valeurs de $k$
3. Vérifier que : $1 + j + j^2 = 0$
4. Calculer la somme : $1 + j + j^2 + ... + j^{2021}$

## a Affixe d'un point - Affixe d'un vecteur

### Définition

Le plan $\mathscr{P}$ est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j}\right)$.

- Soit $z = x + \mathrm{i}y$ où $(x; y) \in \mathbb{R}^2$ un nombre complexe.
  L'unique point $M$, de coordonnées $(x; y)$ dans $\left(O; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j}\right)$, est appelé **l'image** du complexe $z$ et on écrit $M(z)$.
- Soit $M$ un point de coordonnées $(x; y)$ dans $\left(O; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j}\right)$.
  le nombre complexe $z = x + \mathrm{i}y$ est appelé **l'affixe** du point $M$.
  On le note $\mathtt{Aff}(M)$ ou $z_M$ et on écrit $\mathtt{Aff}(M) = z$

## Remarque

Pour tous points $M$ et $N$ du plan $\mathscr{P}$ on a :

$$\texttt{Aff}(M) = \texttt{Aff}(N) \Leftrightarrow M = N$$

## Définition

Le plan $\mathscr{P}$ est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j}\right)$.
Soit $z = x + iy$ où $(x; y) \in \mathbb{R}^2$ un nombre complexe.
Le vecteur $\overrightarrow{u} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}$ est appelé **l'image vectorielle** du complexe $z$, et on écrit $\overrightarrow{u}(z)$.
De même le nombre $z$ est appelé **l'affixe** du vecteur $\overrightarrow{u}$, et on écrit $\texttt{Aff}(\overrightarrow{u}) = z$ ou parfois $z_{\overrightarrow{u}} = z$

## Remarques

- Soit $z$ un nombre complexe. On a :

$$z = \mathtt{Aff}(M) \Leftrightarrow z = \mathtt{Aff}(\overrightarrow{OM})$$

- Pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ on a :

$$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v} \Leftrightarrow \mathtt{Aff}(\overrightarrow{u}) = \mathtt{Aff}(\overrightarrow{v})$$

## Proposition

- Si $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$ sont deux vecteurs du plan d'affixes respectives $z_1$ et $z_2$, alors :

$$\mathtt{Aff}(\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2}) = \mathtt{Aff}(\overrightarrow{v_1}) + \mathtt{Aff}(\overrightarrow{v_2}) = z_1 + z_2$$

- Soit $A(a)$ et $B(b)$ deux points du plan complexe , alors :

$$\mathtt{Aff}(\overrightarrow{AB}) = \mathtt{Aff}(B) - \mathtt{Aff}(A) = b - a$$

## Applications

1. On considère les points $A, B$ et $C$ d'affixes respectives :
$a = -2 + \mathrm{i}$ , $b = 4 - 3\mathrm{i}$ et $c = -5 + 2\mathrm{i}$
   a) Placer dans le plan complexe les points $A$ , $B$ et $C$
   b) Déterminer les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ , $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{OA}$

2. Soit $A, B, C$ et $D$ des points du plan d'affixes respectives $a, b, c$ et $d$.
Montrer que :
$$ABCD \text{ est un parallélogramme} \Leftrightarrow a + c = b + d$$

3. Soit $A, B$ et $C$ des points du plan d'affixes respectives : $a = 3 - 4\mathrm{i}$ et $b = 7 - \mathrm{i}$ et $c = 1 + \mathrm{i}$. Et soit $M$ le point du plan défini par :
$-\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{0}$ .
Déterminer l'affixe du point $M$. Quelle est la nature du quadrilatère $ABMC$?

## Proposition

Si $\overrightarrow{u}$ est un vecteur d'affixe $z$ et $\alpha$ un nombre réel, alors :

$$\mathtt{Aff}(\alpha\overrightarrow{u}) = \alpha\mathtt{Aff}(\overrightarrow{u}) = \alpha z$$

## Remarque

Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont deux vecteurs du plan, alors pour tout $(\alpha;\beta) \in \mathbb{R}^2$ on a :

$$\mathtt{Aff}(\alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v}) = \alpha\mathtt{Aff}(\overrightarrow{u}) + \beta\mathtt{Aff}(\overrightarrow{v})$$

## b Interprétation complexe de la linéarité, du parallélisme et du barycentre

### Proposition

Soit $A, B$ et $C$ des points deux à deux distincts d'affixes respectives $a$ , $b$ et $c$.

Les points $A, B$ et $C$ sont alignés si et seulement si $\dfrac{b-a}{c-a} \in \mathbb{R}$



### Démonstration

1. Soit $A, B$ et $C$ des points deux à deux distincts d'affixes respectives : $a = 6 - \mathrm{i}$ , $b = 1 - 11\mathrm{i}$ et $c = 7 + \mathrm{i}$ .
   Montrer que les points $A, B$ et $C$ sont alignés
2. Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ du plan complexe tels que $\dfrac{z+5\mathrm{i}}{z-3\mathrm{i}} \in \mathbb{R}$

**Applications**

## Proposition

Soit $A, B, C$ et $D$ quatre points du plan d'affixes respectives $a$ , $b$ , $c$ et $d$ tels que $A \neq B$ et $C \neq D$.

Les droites $(AB)$ et $(CD)$ sont parallèles si et seulement si $\dfrac{d-c}{b-a} \in \mathbb{R}$

Démonstration

## Proposition

Soit $A$ et $B$ deux points du plan d'affixes respectives $a$ et $b$, et soit $(\alpha;\beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\alpha + \beta \neq 0$.

L'affixe du barycentre $G$ du système pondéré $\left\{\left(A;\alpha\right);\left(B;\beta\right)\right\}$ est le complexe : $g = \dfrac{\alpha a + \beta b}{\alpha + \beta}$

Soit $A, B, C$ et $D$ les points du plan d'affixes respectives :
$a = 2 + 3\mathrm{i}$ , $b = -5 + 4\mathrm{i}$ , $c = 7 - 2\mathrm{i}$ et $d = 8\mathrm{i}$

1. Déterminer l'affixe du vecteur : $\overrightarrow{u} = 2\overrightarrow{AB} - 5\overrightarrow{CD}$
2. Déterminer l'affixe du point $G$ centre de gravité du triangle $BCD$
3. Déterminer l'affixe du point $H$ barycentre des points pondérés $(B; -4)$ , $(G; 3)$ et $(D; -5)$

**Application**

# 4 - Conjugué d'un nombre complexe

## a Définition et interprétation géométrique

**Définition**

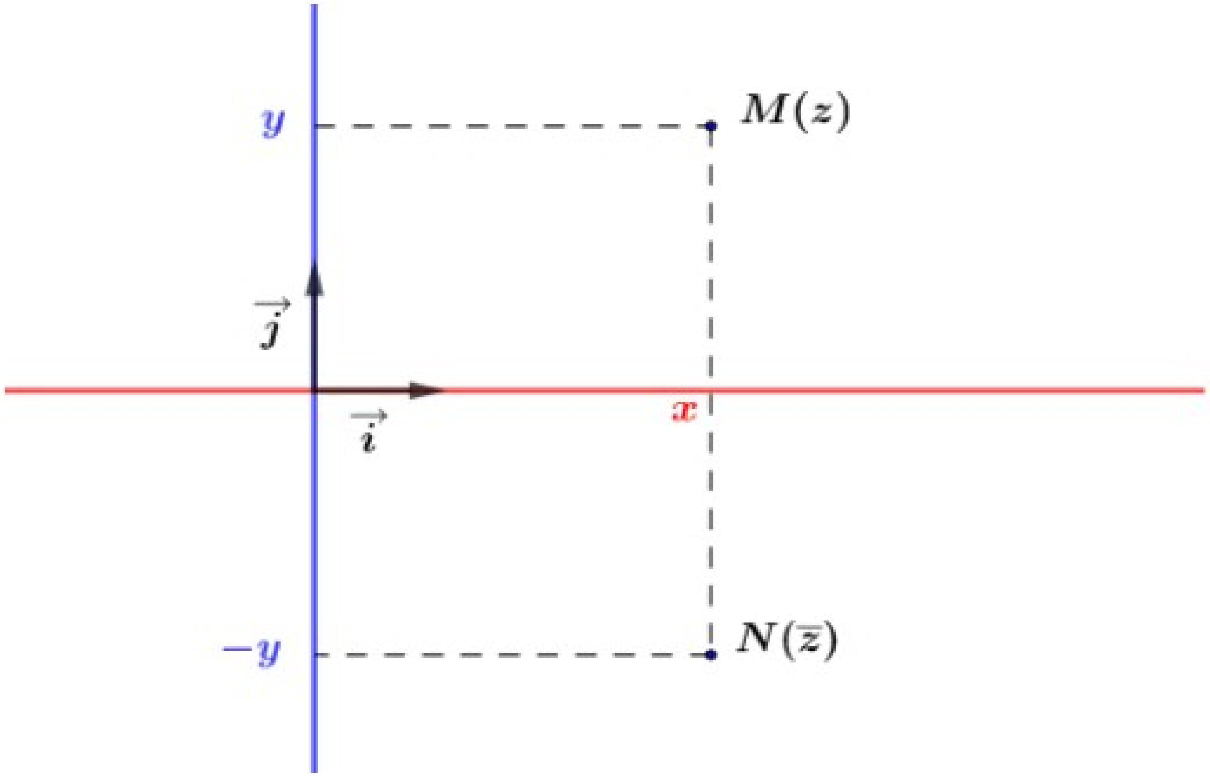
Soit $z = x + \mathrm{i}y$ un nombre complexe avec $(x; y) \in \mathbb{R}^2$.
On appelle **conjugué** de $z$ le nombre complexe $x - \mathrm{i}y$, noté $\overline{z}$, et on écrit :
$\overline{z} = \overline{x + \mathrm{i}y} = x - \mathrm{i}y$

**Exemples**

Déterminons les conjugués de ces nombres : $a = 3 + 5\mathrm{i}$ ; $b = -5\mathrm{i}$ ;
$c = 3 - 7\mathrm{i}$ ; $d = 11 + 2\sqrt{3}$ et $z = -6 + \mathrm{i}(2 + \mathrm{i})$

## Interprétation géométrique de la conjugaison

Soit $z = x + \mathrm{i}y$ un nombre complexe avec $(x; y) \in \mathbb{R}^2$.
La symétrie par rapport à l'axe des abscisses transforme le point $M(x; y)$ en $N(x; -y)$, d'affixe $\texttt{Aff}(N) = \overline{\texttt{Aff}(M)}$



## 2 Propriétés du conjugué

### Propriété

Étant donné $z \in \mathbb{C}$, on a :

$$\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}\left(z + \overline{z}\right)$$

$$\mathrm{Im}(z) = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(z - \overline{z}\right)$$

$$z.\overline{z} = \mathrm{Re}^2(z) + \mathrm{Im}^2(z)$$

On a donc :

$$z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \overline{z} = z$$

et

$$z \in \mathrm{i}\mathbb{R} \Leftrightarrow \overline{z} = -z$$

Démonstration

## Proposition

Soit $z$ et $z'$ deux nombres complexes. On a alors les propriétés suivantes :

- $\overline{z+z'} = \bar{z} + \overline{z'}$ et $\overline{z.z'} = \bar{z}.\overline{z'}$
- Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$; $\overline{\lambda z} = \lambda \bar{z}$
- Si $z \neq 0$ alors : $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$ et $\overline{\left(\frac{z'}{z}\right)} = \frac{\overline{z'}}{\bar{z}}$
- Si $z \neq 0$ et $n \in \mathbb{Z}$ alors : $\overline{z^n} = \left(\bar{z}\right)^n$

## Applications

1. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on pose :
$\alpha = (5+6\mathrm{i})^n + (5-6\mathrm{i})^n$ et $\beta = (\sqrt{3}+\mathrm{i})^n - (\sqrt{3}-\mathrm{i})^n$
Montrer que $\alpha$ est réel et que $\beta$ est imaginaire pur.

2. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct. Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ du plan complexe pour lesquels $2\mathrm{i}z - \overline{z}$ est réel.

3. Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Simplifier l'expression suivante : $\overline{\left(\dfrac{\mathrm{i}z+1}{z}\right)} - \overline{\dfrac{1-z}{\overline{z}}}$

4. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante : $\overline{z} = (1-\mathrm{i})\,z + 3 + 2\mathrm{i}$

5. Soit $z \in \mathbb{C}$, on pose : $f(z) = (z-2)\,(\overline{z}+\mathrm{i})$. Soit $M(z)$ un point du plan complexe.
Déterminer les ensembles suivants : $E = \left\{M(z) / f(z) \in \mathbb{R}\right\}$ et
$F = \left\{M(z) / f(z) \in \mathrm{i}\mathbb{R}\right\}$

# 5 - Module d'un nombre complexe

## a Définition et interprétation géométrique

### Définition

Soit $z = x + \mathrm{i}y$ un nombre complexe avec $(x;y) \in \mathbb{R}^2$.
**Le module** de $z$ est le réel positif noté $|z|$ défini par :
$|z| = \sqrt{z.\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$
On a alors : $|z| = \sqrt{\mathrm{Re}^2(z) + \mathrm{Im}^2(z)}$

### Exemples

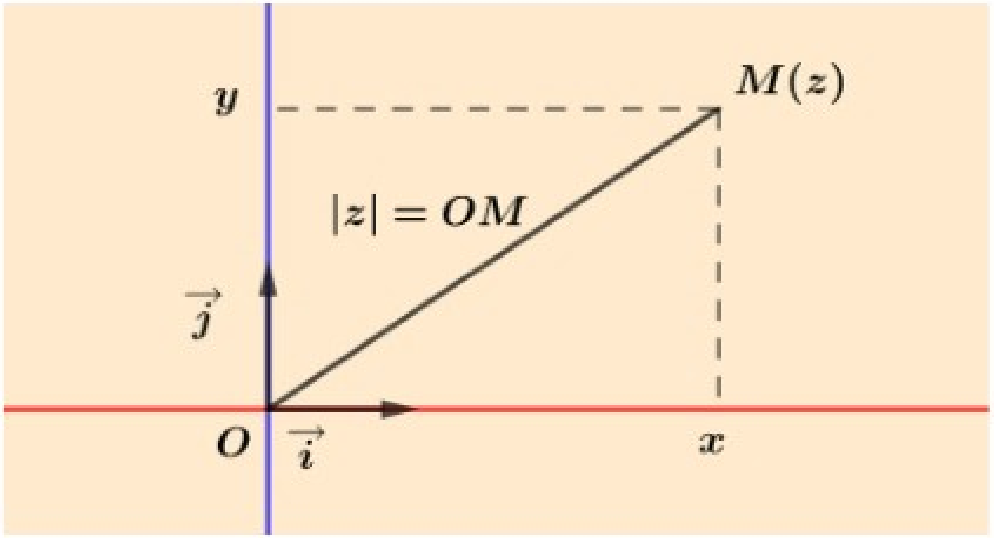
Déterminons le module des nombres complexes suivants : $a = 5 - 3\mathrm{i}$ ; $b = 2 + 5\mathrm{i}$ ; $c = -6$ ; $d = 3\sqrt{2}$ ; $e = -2\mathrm{i}$ ; $f = \cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta)$ et $g = 1 + \mathrm{i}\tan(\theta)$ avec $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$

## Remarques

- Le module d'un nombre réel est égal à sa valeur absolue.
- Pour tout $z \in \mathbb{C}$ on a : $|z|^2 = z.\bar{z}$ et $|\bar{z}| = |z|$

## Interprétation géométrique du module

Soit $M$ un point du plan complexe d'affixe $z = x + iy$ où $(x; y) \in \mathbb{R}^2$. On a $M(x; y)$ alors $\left\|\overrightarrow{OM}\right\| = OM = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$. Donc le module de $z$ est la distance $OM$



## Proposition

La distance entre deux points $A$ et $B$, d'affixes respectives $a$ et $b$, est $AB = \left\| \overrightarrow{AB} \right\| = |b - a|$



1. On considère les points $A, B$ et $C$ d'affixes respectives : $a = 1 + \mathrm{i}$ , $b = 2 + 3\mathrm{i}$ et $c = -1 + 2\mathrm{i}$ .
   Montrer que le triangle $ABC$ est rectangle isocèle en $A$.
2. Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ du plan dont l'affixe $z$ vérifie :

   a) $|z + 5 - 2\mathrm{i}| = 3$

   b) $|z - 2 + 3\mathrm{i}| = |z + 1 + 4\mathrm{i}|$

**Applications**

## b Propriétés du module

### Propriétés

Soit $z$ et $z'$ deux nombres complexes. On a les propriétés suivantes :

- $|z| \geqslant 0$ et $|\mathrm{Re}(z)| \leqslant |z|$ et $|\mathrm{Im}(z)| \leqslant |z|$
- $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$ et $|z - z'| = 0 \Leftrightarrow z = z'$
- $|z \times z'| = |z| \times |z'|$
- $|z| = |\overline{z}| = |-z| = |-\overline{z}|$
- Si $z \neq 0$ et $n \in \mathbb{Z}$ alors : $\left|\dfrac{z'}{z}\right| = \dfrac{|z'|}{|z|}$ et $|z^n| = |z|^n$

## Applications

1. Déterminer le module de chacun des nombres complexes suivants : $a = (2-3\mathrm{i})(-1+5\mathrm{i})$ , $b = \dfrac{4-3\mathrm{i}}{4+3\mathrm{i}}$ ,
$c = \left(\dfrac{1}{2} - \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2022}$ et $d = \left(\sqrt{2-\sqrt{2}} + \mathrm{i}\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)^{16}$

2. Déterminer géométriquement l'ensemble des points $M(z)$ du plan complexe tels que :

   a) $|1+\mathrm{i}z| = |z-2|$

   b) $\left|\bar{z} + 1 - \dfrac{1}{2}\mathrm{i}\right| = 2$

   c) $|\bar{z} + 6 + 2\mathrm{i}| = |\mathrm{i}z - 2 + 4\mathrm{i}|$

   d) $|\mathrm{i}z + 3| = \left|\dfrac{1}{\mathrm{i}}z - 4\mathrm{i} + 1\right|$

3. Pour tout $z \in \mathbb{C} - \left\{-\dfrac{1}{2}\mathrm{i}\right\}$, on pose : $Z = \dfrac{z+2\mathrm{i}}{2z+\mathrm{i}}$
Montrer l'équivalence suivant : $|Z| = 1 \Leftrightarrow |z| = 1$

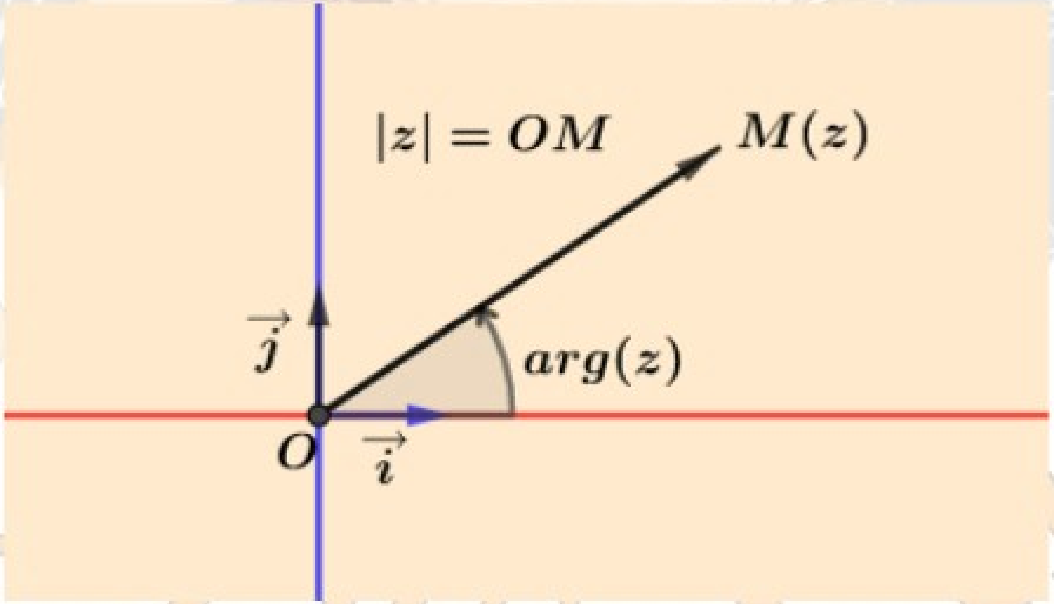
## a Argument d'un nombre complexe non nul

### Définition

Soit $z$ un nombre complexe non nul, d'image $M$ dans le plan complexe $\mathscr{P}$.

Toute mesure $\theta$ de l'angle orienté $\left(\widehat{\overrightarrow{i}\,;\overrightarrow{OM}}\right)$ s'appelle un **argument** de $z$.

On le note $\mathtt{arg}(z)$ et on écrit : $\mathtt{arg}(z) = \theta\,[2\pi]$



## Remarques

- Soit $z$ un nombre complexe non nul. Si $\theta$ est un argument de nombre complexe $z$, alors tout nombre réel de la forme $\theta + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ est aussi un argument de $z$. Dans la pratique, on prend souvent $\theta$ dans l'intervalle $]-\pi;\pi]$, c-à-d la mesure principale de l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{i}\,;\overrightarrow{OM}}\right)$
- Le nombre $0$ est l'unique nombre complexe qui n'a pas d'argument.

## b Forme trigonométrique d'un nombre complexe

### Propriété

- Soit $z = x + \mathrm{i}y$ un nombre complexe non nul avec $(x; y) \in \mathbb{R}^2$ et $\theta$ un argument de $z$. Alors $x = |z|\cos(\theta)$ et $y = |z|\sin(\theta)$
- Toute nombre complexe non nul $z$ s'écrit de manière unique sous la forme : $z = |z|\Big(\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta)\Big)$ avec $\theta$ un argument de $z$.

### Définition

Soit $z$ un nombre complexe non nul et $\theta$ un argument de $z$.
L'écriture $z = |z|\Big(\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta)\Big)$ est appelée une **écriture trigonométrique** ou **forme trigonométrique** du nombre complexe $z$.
Notation simplifiée : $z = \Big[\,|z|\,;\theta\Big]$

## Remarque

Toute nombre complexe non nul admet une infinité des formes trigonométriques.

Si $z \in \mathbb{C}^*$ alors : $\quad z = |z|\Big(\cos(\arg(z)) + \mathrm{i}\sin(\arg(z))\Big)$

## Propriétés

Soit $z$ un nombre complexe non nul. On a les équivalence suivantes :

1. $z \in \mathbb{R}^* \Leftrightarrow \arg(z) \equiv 0\,[\pi]$
2. $z \in \mathbb{R}^*_+ \Leftrightarrow \arg(z) \equiv 0\,[2\pi]$
3. $z \in \mathbb{R}^*_- \Leftrightarrow \arg(z) \equiv \pi\,[2\pi]$
4. $z \in \mathrm{i}\mathbb{R}^* \Leftrightarrow \arg(z) \equiv \dfrac{\pi}{2}\,[\pi]$
5. $z \in \mathrm{i}\mathbb{R}^*_+ \Leftrightarrow \arg(z) \equiv \dfrac{\pi}{2}\,[2\pi]$
6. $z \in \mathrm{i}\mathbb{R}^*_- \Leftrightarrow \arg(z) \equiv -\dfrac{\pi}{2}\,[2\pi]$

**Application 1**

Déterminer une forme trigonométrique de chacun des nombres complexes suivants : $a = \sqrt{3} + 3\mathrm{i}$ , $b = -2 + 2\mathrm{i}$ , $c = -\dfrac{1}{2} - \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ , $d = \sqrt{6} - \mathrm{i}\sqrt{2}$ et $e = 1 - \sqrt{3} + \mathrm{i}\left(\sqrt{3} - 1\right)$

## Application 2

1. Donner une forme trigonométrique de chacun des nombres complexes suivants :

   - $a = -3\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]$
   - $b = -2\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]$
   - $c = \sqrt{5}\left[\cos\left(\frac{2\pi}{11}\right) - \mathrm{i}\sin\left(\frac{2\pi}{11}\right)\right]$
   - $d = \frac{1}{4}\left[\sin\left(\frac{\pi}{9}\right) + \mathrm{i}\cos\left(\frac{\pi}{9}\right)\right]$

2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Donner une forme trigonométrique de chacun des nombres complexes suivants :

   ★ $a = \cos(\alpha) - \mathrm{i}\sin(\alpha)$
   ★ $b = -\cos(\alpha) + \mathrm{i}\sin(\alpha)$
   ★ $c = -\cos(\alpha) - \mathrm{i}\sin(\alpha)$
   ★ $d = \sin(\alpha) + \mathrm{i}\cos(\alpha)$
   ★ $e = \sin(\alpha) - \mathrm{i}\cos(\alpha)$
   ★ $f = -\sin(\alpha) + \mathrm{i}\cos(\alpha)$
   ★ $g = -\sin(\alpha) - \mathrm{i}\cos(\alpha)$
   ★ $h = \cos(\alpha) + \mathrm{i}\sin(\alpha)$

## Exercice 1

1. On considère le nombre complexe suivant : $z = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} + \mathrm{i}\frac{1}{2}$
   - a) Donner une forme trigonométrique de $z$
   - b) En déduire la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$
2. Soit le nombre complexe : $\lambda = 2 + \sqrt{2} + \mathrm{i}\sqrt{2}$.
   - a) Vérifier que le module du nombre complexe $\lambda$ est : $2\sqrt{2+\sqrt{2}}$
   - b) Montrer que : $\lambda = 2\left(1 + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) + \mathrm{i}2\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$
   - c) Montrer que $\lambda = 4\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) + \mathrm{i}4\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$, puis donner une forme trigonométrique de nombre complexe $\lambda$

Remarques : $\cos(x) + 1 = 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)$ et $\sin(x) = 2\cos\left(\frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{x}{2}\right)$ pour tout $x$ de $\mathbb{R}$

## Exercice 2

On rappelle que le plan complexe $\mathscr{P}$ est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O; \overrightarrow{i}\,; \overrightarrow{j}\right)$.

On considère les nombres complexes : $a = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$ et $b = -\sqrt{3} + \mathrm{i}$ .

1. Écrire les nombres $a$ et $b$ sous forme trigonométrique
2. Construire dans le plan complexe les points $A$ et $B$ images respectives des complexes $a$ et $b$
3. En utilisant les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$, construire le point $S$ image du complexe $a + b$
4. Vérifier que $OASB$ est un carré
5. En déduire un argument du complexe $a + b$

## Proposition

Pour des nombres complexes non nuls $a$ et $b$, on a :

1. $a = b \Leftrightarrow \left( |a| = |b| \text{ et } \arg(a) \equiv \arg(b)\, [2\pi] \right)$
2. $a = \overline{b} \Leftrightarrow \left( |a| = |b| \text{ et } \arg(a) \equiv -\arg(b)\, [2\pi] \right)$
3. $a = -b \Leftrightarrow \left( |a| = |b| \text{ et } \arg(a) \equiv \pi + \arg(b)\, [2\pi] \right)$

## Corollaire

Soit $a$ un nombre complexe non nul.

- Si $a = [m; \theta]$ alors : $\overline{a} = [m; -\theta]$ et $-a = [m; \pi + \theta]$
- En particulier, on a : $\arg(\overline{a}) = -\arg(a)\, [2\pi]$ et $\arg(-a) = \pi + \arg(a)\, [2\pi]$

## Propriétés

Soit $z$ et $z'$ deux nombres complexes non nuls tels que :
$z=[m;\theta]$ et $z'=[m';\theta']$ . On a les propriétés suivantes :

1) $z.z'=[m.m';\theta+\theta']$ et $\arg(z.z')\equiv\arg(z)+\arg(z')\,[2\pi]$
2) $\dfrac{1}{z}=\left[\dfrac{1}{m};-\theta\right]$ et $\arg\left(\dfrac{1}{z}\right)\equiv-\arg(z)\,[2\pi]$
3) $\dfrac{z}{z'}=\left[\dfrac{m}{m'};\theta-\theta'\right]$ et $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right)\equiv\arg(z)-\arg(z')\,[2\pi]$
4) Pour tout $n\in\mathbb{Z}$ : $z^n=[m^n;n\theta]$ et $\arg(z^n)\equiv n\times\arg(z)\,[2\pi]$

## Remarque

Si $z$ et $z'$ sont deux nombres complexes non nuls tels que $z+z'\neq 0$, alors on n'a pas en général : $\arg(z+z')\equiv\arg(z)+\arg(z')\,[2\pi]$.
Contre exemple : Prenons $z=1$ et $z'=\mathrm{i}$ ...

1. On considère les nombres complexes : $a = 2+2\mathrm{i}$ et $b = 1+\mathrm{i}\sqrt{3}$.
Déterminer une forme trigonométrique de chacun des nombres $ab$ , $\dfrac{1}{a}$ , $-b$ et $\dfrac{(\overline{a})^4}{b}$ .

2. On considère les nombres complexes :
$a = \sqrt{3} - \mathrm{i}$ , $b = 1 - \mathrm{i}$ et $z = \dfrac{a}{b}$ .

   a) Déterminer une forme trigonométrique de chacun des nombres $a$ , $b$ et $z$ .

   b) Écrire le nombre $z$ sous forme algébrique, puis en déduire les valeurs de $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$



**Applications**

## Exercice

On considère le nombre complexe : $z = \sqrt{2-\sqrt{3}} - \mathrm{i}\sqrt{2+\sqrt{3}}$

1. Calculer $z^2$ puis déterminer $\left|z^2\right|$ et $\arg\left(z^2\right)$.
2. En déduire une écriture trigonométrique du nombre complexe z.
3. En déduire les valeurs de $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ puis celles de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$
4. Vérifier que $z^{2016} \in \mathbb{R}^+$

## C Angle de deux vecteurs et argument d'un complexe

On rappelle que le plan complexe $\mathscr{P}$ est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O; \overrightarrow{i}\,; \overrightarrow{j}\right)$ .

### Propriétés

Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ vecteurs non nuls d'affixes respectives $z$ et $z\,'$, et soit $A, B, C$ et $D$ des points du plan complexe d'affixes respectives $a, b, c$ et $d$ tels que $A \neq B$ et $C \neq D$. Alors :

1. $\left(\overrightarrow{u}\,; \overrightarrow{v}\right) \equiv \arg\left(\dfrac{z\,'}{z}\right) [2\pi]$

2. $\left(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CD}\right) \equiv \arg\left(\dfrac{d-c}{b-a}\right) [2\pi]$

1. On considère les points $A, B$ et $C$ d'affixes respectives :
$a = \mathrm{i}$ , $b = 3\mathrm{i}$ et $c = -\sqrt{3} + 2\mathrm{i}$ .
Montrer que le triangle $ABC$ est équilatéral .

2. On considère les points $A, B$ et $C$ d'affixes respectives :
$a = -2$ , $b = 1 + \mathrm{i}$ et $c = -1 - 3\mathrm{i}$ .
Montrer que le triangle $ABC$ est rectangle isocèle en $A$ .

**Applications**

## Propriétés

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ vecteurs non nuls d'affixes respectives $z$ et $z'$, et soit $A, B, C$ et $D$ des points du plan complexe d'affixes respectives $a, b, c$ et $d$ tels que $A \neq B$ et $C \neq D$. Alors :

1

$$\left(\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires }\right) \Leftrightarrow \left(\arg\left(\frac{z'}{z}\right) \equiv 0\,[\pi]\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{z'}{z} \in \mathbb{R}$$

Et $(AB) \parallel (CD) \Leftrightarrow \arg\left(\frac{d-c}{b-a}\right) \equiv 0\,[\pi]$

2

$$\left(\overrightarrow{u} \text{ et } \overrightarrow{v} \text{ sont orthogonaux}\right) \Leftrightarrow \left(\arg\left(\frac{z'}{z}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\,[\pi]\right)$$
$$\Leftrightarrow \frac{z'}{z} \in i\mathbb{R}$$

Et $(AB) \perp (CD) \Leftrightarrow \arg\left(\dfrac{d-c}{b-a}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2}\,[\pi]$

3 Les points $A, B, C$ et $D$ sont cocycliques (Appartient au même cercle) si et seulement si : $\left(\dfrac{c-a}{b-a} \times \dfrac{b-d}{c-d}\right) \in \mathbb{R}$

## Applications

1. On considère les points $A, B$ et $C$ d'affixes respectives :
$a = 2\mathrm{i}$ , $b = \sqrt{2}(1+\mathrm{i})$ et $c = a + b$ .
Montrer que $OBCA$ est un losange et que $\arg(c) \equiv \dfrac{3\pi}{8}\ [2\pi]$ .

2. On considère dans le plan complexe les points suivants :
$M(6+4\mathrm{i})$ ; $N(-1)$ ; $P(2-2\mathrm{i})$ et $Q(-\dfrac{6}{5}+\dfrac{18}{5}\mathrm{i})$
   a) Montrer que le triangle $MNP$ est rectangle en $P$ .
   b) Montrer que les points $M, N, P$ et $Q$ sont cocycliques .

## a Équation $z^2 = a$ ; $a \in \mathbb{R}^*$

### Propriété

Soit $a$ un réel non nul .
Les solutions d'équation : $z^2 = a$ dans $\mathbb{C}$ est :

- $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$ si le réel $a$ est strictement positif .
- $\mathrm{i}\sqrt{-a}$ et $-\mathrm{i}\sqrt{-a}$ si le réel $a$ est strictement négatif .

## Exemples

1. Les solutions d'équation $z^2 = 5$ dans $\mathbb{C}$ sont : $\sqrt{5}$ et $-\sqrt{5}$
2. Les solutions d'équation $z^2 = -3$ dans $\mathbb{C}$ sont : $\mathrm{i}\sqrt{3}$ et $-\mathrm{i}\sqrt{3}$
3. Les solutions d'équation $z^2 = -1$ dans $\mathbb{C}$ sont : $\mathrm{i}$ et $-\mathrm{i}$

## Remarque

- L'équation $z^2 = 0$ admet $0$ comme unique solution .

## b Équation $az^2 + bz + c = 0$ ; $a, b$ et $c$ des réels et $a \neq 0$

Soit $a, b$ et $c$ des réels avec $a \neq 0$ . On considère l'équation :
$az^2 + bz + c = 0$ , d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ .
Montrons que $az^2 + bz + c = a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]$

## Propriété

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(\mathrm{E}) : az^2 + bz + c = 0$ où $a, b$ et $c$ sont des réels et $a \neq 0$ .

Soit $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant de l'équation $(\mathrm{E})$ et $\mathbb{S}$ son ensemble de solutions , alors on a :

- $1^{\text{ère}}$ cas : $\Delta > 0$
  - L'équation $(\mathrm{E})$ admet deux solutions réelles distincts $z_1$ et $z_2$ données par :

$$z_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

  - L'ensemble solution est : $\mathbb{S} = \left\{ \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} ; \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \right\}$
  - La factorisation est : $az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$

- $2^{\text{ème}}$ cas : $\Delta < 0$
  - L'équation $(\mathrm{E})$ admet deux solutions complexes conjuguées $z_1$ et $z_2$ données par :
$$z_1 = \frac{-b + \mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b - \mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}$$
  - L'ensemble solution est : $\mathrm{S} = \left\{ \frac{-b + \mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a} ; \frac{-b - \mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a} \right\}$
  - La factorisation est : $az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$
- $3^{\text{ème}}$ cas : $\Delta = 0$
  - L'équation $(\mathrm{E})$ admet une seule solution $z$ (solution double ) données par :
$$z = \frac{-b}{2a}$$
  - L'ensemble solution est : $\mathrm{S} = \left\{ \frac{-b}{2a} \right\}$
  - La factorisation est : $az^2 + bz + c = a\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2$

# Applications

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

   - $E_1$ : $z^2+16=0$
   - $E_2$ : $z^2-10z+29=0$
   - $E_3$ : $3z^2+2z+17=0$
   - $E_4$ : $z^2-3z+3=0$
   - $E_5$ : $z^2-\left(1+\sqrt{2}\right)z+\sqrt{2}=0$
   - $E_6$ : $z^3-8=0$

2. Soit $\theta \in \left]-\pi;\pi\right[$.
   Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2-2z\cos(\theta)+1=0$

3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

   - $E_1$ : $(2iz+3)^2+25=0$
   - $E_2$ : $\left(z^2+z+1\right)\left(3z^2-4z+2\right)=0$
   - $E_3$ : $\dfrac{z-8}{z+2}=z$
   - $E_4$ : $z^4-z^2-2=0$

## Propriété

Soit $a, b$ et $c$ trois nombres complexes avec $a \neq 0$ .
Les nombres complexes $z_1$ et $z_2$ vérifient : $z_1 + z_2 = -\dfrac{b}{a}$ et $z_1 \times z_2 = \dfrac{c}{a}$ si et seulement si $z_1$ et $z_2$ sont les deux racines de $az^2 + bz + c$

**Application**

Résoudre dans $\mathbb{C}^2$ le système suivant : $\begin{cases} z_1 + z_2 = 2 \\ z_1 \times z_2 = 17 \end{cases}$

## 2 - Notation exponentielle d'un complexe non nul

### a Définition et notation

**Définition**

Pour tout réel $\theta$ , on note $e^{i\theta}$ le nombre complexe de module $1$ et d'argument $\theta$. Autrement dit :

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$$

**Exemples**

- $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$
- $e^{i\pi} = -1$
- $e^{i\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$
- $e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$
- $e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i$
- $e^{i\frac{2017\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$

## Propriétés

Soit $\theta$ et $\theta'$ deux nombres réels . Alors :

1. $\left|e^{i\theta}\right| = 1$ et $\arg\left(e^{i\theta}\right) \equiv \theta\,[2\pi]$
2. $e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i\left(\theta+\theta'\right)}$
3. $e^{-i\theta} = \overline{e^{i\theta}} = \dfrac{1}{e^{i\theta}} = \cos(\theta) - i\sin(\theta)$
4. $\dfrac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i\left(\theta-\theta'\right)}$
5. $-e^{i\theta} = e^{i(\theta+\pi)}$
6. $e^{i\theta} = e^{i\theta'} \Leftrightarrow \theta \equiv \theta'\,[2\pi]$

## Définition

Soit $z$ un nombre complexe non nul de module $r$ et d'argument $\theta$ .
L'écriture $z = re^{i\theta}$ est appelée la notation exponentielle ou l'écriture exponentielle du nombre $z$ .

## Exemples

- La notation exponentielle du nombre $z = 1 + i\sqrt{3}$ est : $z = ...$
- La notation exponentielle du nombre $z = -2$ est : $z = ...$
- La notation exponentielle du nombre $z = -3\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + 3\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$ est : $z = ...$

## Remarque

Si $z = re^{i\theta}$ tel que $r > 0$, alors : $|z| = r$ et $\arg(z) \equiv \theta\,[2\pi]$

## Propriétés

Soit $z$ et $z'$ deux nombres complexes non nuls . Si $z = re^{i\theta}$ et $z' = r'e^{i\theta'}$ tels que $r > 0$ et $r' > 0$. Alors :

1. $z \times z' = rr'e^{i(\theta+\theta')}$
2. $\dfrac{z}{z'} = \dfrac{r}{r'}e^{i(\theta-\theta')}$
3. $z^n = r^n e^{in\theta}$
4. $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{r}e^{-i\theta}$
5. $\bar{z} = re^{-i\theta}$

Écrire sous forme exponentielle les nombres complexes suivants :
$a = 2 + 2i$ ; $b = 1 - i\sqrt{3}$ ; $ab$ ; $\dfrac{a}{b}$ et $a^4$ .

**Application**

**Exercice**

On considère les nombres complexes suivants :

$a = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $b = 2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}$

1. Montrer que $a^4$ est un réel négatif .
2. a. Déterminer la forme algébrique du nombre $\dfrac{a}{b}$ .
   b. Écrire sous forme trigonométrique le nombre $\dfrac{a}{b}$ .
   c. En déduire les valeurs de $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ .

# b Formules de Moivre et Euler

## Propriétés

- Pour tout réel $\theta$ et pour tout entier relatif $n$, on a :

$$\left(e^{\mathrm{i}\theta}\right)^{n} = e^{\mathrm{i}n\theta}$$

Alors :

$$\Big(\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta)\Big)^{n} = \cos(n\theta) + \mathrm{i}\sin(n\theta)$$

(Formule de Moivre)

- Pour tout réel $\theta$ :

$$\cos(\theta) = \frac{e^{\mathrm{i}\theta} + e^{-\mathrm{i}\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = \frac{e^{\mathrm{i}\theta} - e^{-\mathrm{i}\theta}}{2\mathrm{i}}$$

(Formules d'Euler)

# Applications

1. Déterminer la forme algébrique du nombre complexe :

$$\left(\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2018}$$

2. Soit $\alpha$ et $\beta$ deux nombres réels . Montrer que :

$$e^{\mathrm{i}\alpha}+e^{\mathrm{i}\beta}=2\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\times e^{\mathrm{i}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}$$

et

$$e^{\mathrm{i}\alpha}-e^{\mathrm{i}\beta}=2\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\times e^{\mathrm{i}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\pi}{2}\right)}$$

## C Applications trigonométriques des nombres complexes

### Développement de $\cos(n\theta)$ et $\sin(n\theta)$ ; $n \in \mathbb{N}^*$

**Exemples**

Développer :

1. $\cos(2\theta)$ et $\sin(2\theta)$ .
2. $\cos(3\theta)$ et $\sin(3\theta)$ .

### Linéarisation de $\cos^n(\theta)$ ; $\sin^m(\theta)$ et $\cos^n(\theta) \times \sin^m(\theta)$ pour $(n; m) \in \mathbb{N}^2$

**Exemples**

Linéariser :

1. $\cos^2(\theta)$ et $\sin^2(\theta)$
2. $\cos^3(\theta)$ et $\sin^3(\theta)$
3. $\cos^2(3\theta) \times \sin(4\theta)$

# 3 - Transformation remarquables du plan

## a La translation

**Définition**

Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur du plan .
**La translation** de vecteur $\overrightarrow{u}$ est la transformation du plan qui à tout point $M$ , associe l'unique point $M'$ tel que : $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{u}$ .

Déterminons l'écriture complexe de la translation $T$ de vecteur $\overrightarrow{u}$ d'affixe $a$ .
Soit $M(z)$ un point du plan complexe et $M'(z')$ son image par la translation $T$ . On a :

$$T(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{u} \Leftrightarrow \mathtt{Aff}(\overrightarrow{MM'}) = \mathtt{Aff}(\overrightarrow{u}) \Leftrightarrow z' = z + a$$

La relation $z' = z + a$ s'appelle **l'écriture complexe** de la translation $T$ de vecteur $\overrightarrow{u}(a)$ .

Soit $T$ la translation du vecteur $\overrightarrow{u}$ d'affixe $3-\mathrm{i}$ .

1. Déterminer l'écriture complexe de la translation $T$ .
2. Déterminer l'affixe du point $B$, l'image du point $A(1-2\mathrm{i})$ par la translation $T$ .
3. Déterminer l'affixe du point $E$ dont l'image par $T$ est le point $F(-3+\mathrm{i})$
4. Montrer que le point $K(5-4\mathrm{i})$ est l'image du point $H(-3\mathrm{i}+2)$ par la translation $T$ .
5. Montrer que $(AH) \parallel (BK)$ .

**Application**

## Exercice

Dans le plan complexe, on considère les points $A, B$ et $C$ d'affixes respectives : $a = 2 + \mathrm{i}$ ; $b = -2 + 3\mathrm{i}$ et $c = 1 - 4\mathrm{i}$ .

Soit $T$ la translation qui transforme le point $A$ au point $B$ .

1. Déterminer l'écriture complexe de la translation $T$ .
2. Montrer que l'affixe du point $D$ qui a pour image le point $C$ par la translation $T$ est : $d = 5 - 6\mathrm{i}$ .
3. Déterminer l'affixe du point $I$ milieu du segment $[BC]$ .
4. Soit $E$ le symétrique du point $D$ par rapport au point $I$ .
   Montrer que le point $E$ est l'image du point $B$ par la translation $T$ puis déterminer l'affixe du point $E$ .

## b L'homothétie

### Définition

Soit $\Omega$ un point du plan et $\lambda \in \mathbb{R}^*$ .
**L'homothétie** de centre $\Omega$ et de rapport $\lambda$ est la transformation du plan qui, à tout point $M$, associe l'unique point $M'$ tel que : $\overrightarrow{\Omega M'} = \lambda \overrightarrow{\Omega M}$ .

Déterminons l'écriture complexe de l'homothétie $H$ de centre $\Omega(\omega)$ et de rapport $\lambda$ .
Soit $M(z)$ un point du plan complexe et $M'(z')$ son image par la l'homothétie $H$ . On a :

$$H(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M'} = \lambda \overrightarrow{\Omega M} \Leftrightarrow \texttt{Aff}(\overrightarrow{\Omega M'}) = \texttt{Aff}(\overrightarrow{\Omega M}) \Leftrightarrow z' = \omega + \lambda(z - \omega)$$

La relation $z' = \omega + \lambda(z - \omega)$ s'appelle **l'écriture complexe** de l'homothétie $H$ de centre $\Omega(\omega)$ et de rapport $\lambda$ .

## Applications

Soit $H$ l'homothétie de centre $\Omega(-2+\mathrm{i})$ et de rapport $\lambda = -\dfrac{1}{2}$

1. Déterminer l'écriture complexe de l'homothétie $H$
2. Déterminer l'affixe du point $K$, l'image du point $N\left(-\dfrac{3}{2}-2\mathrm{i}\right)$ par l'homothétie $H$
3. Déterminer l'affixe du point $E$ dont l'image par l'homothétie $H$ est le point $F(1-3\mathrm{i})$
4. Montrer que le quadrilatère $EKFN$ est trapèze

## C La rotation

### Définition

Soit $\Omega$ un point du plan et $\theta \in \mathbb{R}$ .

**La rotation** $R$ de centre $\Omega$ et d'angle $\theta$ est la transformation du plan qui transforme $\Omega$ en $\Omega$, et tout point $M \neq \Omega$ en l'unique point $M'$ tel que :

$$\begin{cases} \Omega M' = \Omega M \\ \left(\overrightarrow{\overrightarrow{\Omega M}; \overrightarrow{\Omega M'}}\right) \equiv \theta\,[2\pi] \end{cases}$$

Déterminons l'écriture complexe de la rotation $R$ de centre $\Omega(\omega)$ et d'angle $\theta$ .
Soit $M(z)$ un point du plan complexe et $M'(z')$ son image par la rotation $R$ . On a :

$$R(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} \Omega M' = \Omega M \\ \left(\overrightarrow{\Omega M}; \overrightarrow{\Omega M'}\right) \equiv \theta\,[2\pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |z' - \omega| = |z - \omega| \\ \arg\left(\dfrac{z' - \omega}{z - \omega}\right) \equiv \theta\,[2\pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \frac{z' - \omega}{z - \omega} = e^{i\theta}$$

$$\Leftrightarrow z' = \omega + e^{i\theta}(z - \omega)$$

La relation $z' = \omega + e^{i\theta}(z - \omega)$ s'appelle **l'écriture complexe** de la rotation de centre $\Omega(\omega)$ et d'angle $\theta$ .

## Applications

Dans le plan complexe, on considère les points :
$\Omega\left(-1+\mathrm{i}\sqrt{3}\right)$ ; $A\left(-1-\mathrm{i}\sqrt{3}\right)$ et $B\left(2+\mathrm{i}\right)$
et soit $R$ la rotation de centre $\Omega$ et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$ .

1. Déterminer l'écriture complexe de la rotation $R$ .
2. 
   a. Déterminer $a'$ l'affixe du point $A'$ image du point $A$ par la rotation $R$ .
   b. Quelle la nature du triangle $\Omega AA'$ ?
3. Déterminer $d$ l'affixe du point $D$ sachant que : $R(D) = B$

## Exercice 3 (2017 Normale) || Nombres complexes || 3 pts

On considère les nombres complexes $a$ et $b$ tels que : $a = \sqrt{3} + \mathrm{i}$ et $b = \sqrt{3} - 1 + (\sqrt{3} + 1)\,\mathrm{i}$ .

1. a. Vérifier que : $b = (1 + \mathrm{i})a$ — $(0,25)$

   b. En déduire que : $|b| = 2\sqrt{2}$ et $\arg(b) \equiv \frac{5\pi}{12}\,[2\pi]$ — $(0,5)$

   c. En déduire de ce qui précède que : $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$ — $(0,5)$

2. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$ . On considère les points $A$ et $B$ d'affixes respectives : $a$ et $b$ et le point $C$ d'affixe $c = -1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$ .

   a. Vérifier que $c = \mathrm{i}a$ et en déduire que : $OA = OC$ et $\left(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OC}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi]$ — $(0,75)$

   b. Montrer que le point $B$ est l'image du point $A$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{OC}$ — $(0,5)$

   c. En déduire que le quadrilatère $OABC$ est un carré — $(0,5)$

## Exercice 2 ( 2019 Rattrapage ) || Nombres complexes || 3 pts

Partager

1. a. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 3z + 3 = 0$ $(0,75)$

   b. On pose $a = \dfrac{3}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$ , écrire $a$ sous forme trigonométrique $(0,5)$

2. Soit le nombre complexe : $b = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(1 + \mathrm{i})$ , vérifier que $b^2 = \mathrm{i}$ $(0,5)$

3. On pose $h = \cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ , montrer que : $h^4 + 1 = a$ $(0,5)$

4. Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$ , on considère le points $B$ d'affixe $b$ et $R$ la rotation de centre $O$ et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$

   a. Soit $c$ l'affixe du point $C$ image du point $B$ par la rotation $R$ .
   Montrer que $c = \mathrm{i}b$ $(0,5)$

   b. En déduire la nature du triangle $OBC$ $(0,25)$

## Exercice 2 ( 2019 Normale ) || Nombres complexes || 3 pts

Partager

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 2z + 4 = 0$ $(0,75)$
2. Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O; \overrightarrow{u}; \overrightarrow{v})$ , on considère les points $A, B, C$ et $D$ d'affixes respectives : $a = 1 - \mathrm{i}\sqrt{3}$ ; $b = 2 + 2\mathrm{i}$ ; $c = \sqrt{3} + \mathrm{i}$ et $d = -2 + 2\sqrt{3}$
   - a. Vérifier que : $a - d = -\sqrt{3}(c - d)$ $(0,5)$
   - b. En déduire que les points $A$, $C$ et $D$ sont alignés $(0,25)$
3. On considère $z$ l'affixe d'un point $M$ et $z'$ l'affixe de $M'$ image de $M$ par la rotation $R$ de centre $O$ et d'angle $-\dfrac{\pi}{3}$ .

   Vérifier que : $z' = \dfrac{1}{2}az$ $(0,5)$
4. Soient $H$ l'image du point $B$ par la rotation $R$ , $h$ son affixe et $P$ le point d'affixe $p$ tel que $p = a - c$
   - a. Vérifier que : $h = \mathrm{i}p$ $(0,5)$
   - b. Montrer que le triangle $OHP$ est rectangle et isocèle en $O$ $(0,5)$

# Questions indépendantes (2) || Exam Blanc 1

Partager

1. 
   - a Linéariser : $\sin^4(x)$
   - b Déterminer les primitives de la fonction : $x \mapsto \sin^4(x)$ sur $\mathbb{R}$
   - c Calculer l'intégral : $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^4(x)\ dx$

2. Soit le nombre complexe : $\mathrm{j} = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$
   - a Calculer $\mathrm{j}^2$ et $\mathrm{j}^3$
   - b Vérifier que : $1 + \mathrm{j} + \mathrm{j}^2 = 0$
   - c Calculer la somme : $1 + \mathrm{j} + \mathrm{j}^2 + \ldots + \mathrm{j}^{2021}$

3. Calculer la limite suivante : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\Big(\ln(x+2) - \ln(x+1)\Big)$

4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $\ln^2(x) - \ln\left(x^5\right) + 6 \leqslant 0$

# Exercice 2 || Nombres complexes || Exam Blanc 1

Partager

1. On considères dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E) : z^2 - \left(\sqrt{3}-1\right) z + 2 = 0$
   - a Vérifier que le discriminant de $(E)$ est : $\Delta = -\left(1+\sqrt{3}\right)^2$
   - b En déduire les solutions de l'équation $(E)$

2. Soient les nombres complexes : $a = 1 - \mathrm{i}$ ; $b = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$ et $c = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$
   - a Montrer que : $\dfrac{c}{a} = \dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
   - b En déduire que : $c = \sqrt{2}\left[\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)\right]$
   - c Vérifier que : $b = \mathrm{i} \times \overline{c}$ , puis en déduire une forme exponentielle de $b$

3. Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$ , on considère les points $A, B, C$ et $D$ d'affixes respectives : $a$ ; $b$ et $c$. Soit $z$ l'affixe d'un point $M$ et $z'$ l'affixe de $M'$ image de $M$ par la rotation $R$ de centre $O$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$

   a. Vérifier que : $z' = \left(\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) z$
   b. Déterminer l'image du point $A$ par la rotation $R$
   c. Vérifier que : $a + b = c$; puis en déduire que le triangle $ABC$ est isocèle en $C$
   d. Déterminer la nature du quadrilatère $OACB$

## Exercice

On considère le nombre complexe suivant : $a = \sqrt{2-\sqrt{2}} + i\sqrt{2+\sqrt{2}}$

1. Montrer que : $a^2 = -2\sqrt{2} + i2\sqrt{2}$
2. Écrire $a^2$ sous forme trigonométrique
3. En déduire que : $|a| = 2$ et $\arg(a) \equiv \frac{3\pi}{8}\ [2\pi]$
4. En déduire les valeurs de : $\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right)$

## Exercice

On considère le nombre complexe suivant : $a = \sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}}$

1. Écrire sous forme algébrique le nombre $\frac{a}{\overline{a}}$
2. Montrer que : $\arg\left(\frac{a}{\overline{a}}\right) \equiv \frac{\pi}{4}\,[2\pi]$
3. En déduire que : $\arg(a) \equiv \frac{\pi}{8}\,[2\pi]$
4. Soit $\theta$ un réel .
   - a En utilisant la formule de Moivre montrer que :

$$\cos(2\theta) + i\sin(2\theta) = 2\cos^2(\theta) - 1 + i2\cos(\theta)\sin(\theta)$$

   - b En déduire que : $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}$

## Exercice 3 || Exam 2021 Normal || 5 points

Partager

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - \sqrt{3}z + 1 = 0$ $(0,75)$
2. Soient les nombres complexes : $a = e^{i\pi/6}$ et $b = \dfrac{3}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
   - a. Écrire $a$ sous forme algébrique $(0,25)$
   - b. Vérifier que : $\overline{a} \times b = \sqrt{3}$ $(0,5)$

   Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \overrightarrow{u}; \overrightarrow{v})$, on considère les points $A$ , $B$ et $C$ d'affixes respectives $a$ , $b$ et $\overline{a}$
3. Montrer que le point $B$ est l'image du point $A$ par une homothétie $h$ de centre $O$ dont on déterminera le rapport $(0,5)$

4. Soient $z$ l'affixe d'un point $M$ et $z'$ l'affixe de $M'$ image de $M$ par la rotation $R$ de centre $A$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$
   - a. Écrire $z'$ en fonction de $z$ et $a$ $(0,5)$
   - b. Soit $d$ l'affixe du point $D$ image de $C$ par la rotation $R$, Montrer que : $d = a + 1$ $(0,25)$
   - c. Soit $I$ le point d'affixe le nombre $1$, montrer que $ADIO$ est losange $(0,5)$

5.
   - a. Vérifier que : $d - b = \frac{\sqrt{3}-1}{2}(1 - \mathrm{i})$, en déduire un argument du nombre $d - b$ $(0,75)$
   - b. Écrire le nombre $1 - b$ sous forme trigonométrique $(0,5)$
   - c. Déduire une mesure de l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{BI}; \overrightarrow{BD}}\right)$ $(0,5)$

## Exercice 2 (Exam 2021 Rattrapage)|| Nombres complexes || 5 pts

Partager

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 6z + 13 = 0$ $(0,75)$
2. Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$, on considère les points $A$ , $B$ et $C$ d'affixes respectives $a = 3 + 2\mathrm{i}$ , $b = 3 - 2\mathrm{i}$ et $c = -1 - 2\mathrm{i}$
   - a Écrire $\dfrac{c-b}{a-b}$ sous forme trigonométrique $(0,5)$
   - b En déduire la nature du triangle $ABC$ $(0,5)$

3. Soit $R$ la rotation de centre $B$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Soit $M$ un point du plan d'affixe $z$ et le point $M'$ d'affixe $z'$ l'image de $M$ par $R$, et soit $D$ le point d'affixe $d = -3 - 4\mathrm{i}$
   - a. Écrire $z'$ en fonction de $z$ $(0,5)$
   - b. Vérifier que $C$ est l'image de $A$ par $R$ $(0,25)$
4.
   - a. Montrer que les points $A$, $C$ et $D$ sont alignés $(0,5)$
   - b. Déterminer le rapport de l'homothétie $H$ de centre $C$ et qui transforme $A$ en $D$ $(0,5)$
   - c. Déterminer l'affixe $e$ du point $E$ pour que le quadrilatère $BCDE$ soit un parallélogramme $(0,5)$
5.
   - a. Montrer que $\frac{d-a}{e-b}$ est un nombre réel $(0,5)$
   - b. En déduire que le quadrilatère $ABED$ est un trapèze isocèle $(0,5)$