

BAC BLANC  
SESSION 2022

Série A1 : 3 H  
Série A2 : 2 H

# MATHEMATIQUES

Cette épreuve comporte trois (03) pages numérotées 1/3, 2/3 et 3/3  
L'usage de la calculatrice scientifique est autorisé

A1 : Coefficient : 3

A2 : Coefficient : 2

## EXERCICE 1 (2 points)

Ecris sur ta feuille de copie le numéro de chacune des affirmations ci-dessous suivi de **Vrai** si l'affirmation est vraie ou de **Faux** si l'affirmation est fausse.

N°	Affirmations
1	$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{3-x} = -\infty$
2	Pour tout nombre réel $a$ strictement positif, $\ln a > 0$
3	Soit une fonction $f$ et $(C)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, I, J)$ ; si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$ , alors la droite d'équation $y = 2$ est une asymptote horizontale à la courbe $(C)$ en $+\infty$ .
4	Si $A$ et $B$ sont deux événements d'un univers $\Omega$ , alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

## EXERCICE 2 (2 points)

Pour chacun des énoncés ci-dessous, trois réponses A, B et C sont proposées dont une seule permet d'avoir une affirmation juste.

Ecris, sur ta feuille de copie, le numéro de l'énoncé suivi de la lettre correspondant à la bonne réponse.

N°	Enoncé	Réponses		
		A	B	C
1	Pour tous nombres $a$ et $b$ strictement positifs, $\ln a + \ln b$ est égal à ....	$\ln(ab)$	$\ln a \times \ln b$	$\frac{\ln a}{\ln b}$
2	$\lim_{x \rightarrow -\infty} -x^3 - 3x^2 + 1$ est égale à ...	$+\infty$	$-\infty$	0
3	La dérivée de la fonction $f$ telle que $f(x) = \frac{x-1}{2x+3}$ est $f'$ telle que $f'(x)$ égale à ....	$\frac{-5}{(2x+3)^2}$	$\frac{1}{(2x+3)^2}$	$\frac{5}{(2x+3)^2}$
4	Dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ , l'ensemble des solutions du système d'équations $\begin{cases} \ln(x) - \ln(y) = -2 \\ 2 \ln(x) + \ln(y) = 5 \end{cases}$ est ...	$\{(e^3; e)\}$	$\{(e^2; e^3)\}$	$\{(e; e^3)\}$

**EXERCICE 3 (5 points)**

Une urne contient trois boules rouges, deux boules vertes et cinq boules blanches toutes indiscernables au toucher. Un élève tire simultanément et au hasard trois boules de l'urne.

*Les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.*

- 1) Justifie qu'il y a 120 possibilités pour l'élève de tirer les trois boules.
- 2) Calcule la probabilité des événements suivants :  
 A « L'élève tire trois boules de la même couleur »  
 B « L'élève tire trois boules de trois couleurs différentes »
- 3) Soit C, l'événement « L'élève tire exactement deux boules de même couleur »
  - a. Justifie  $P(A \cup B) = \frac{41}{120}$
  - b. Déduis - en  $P(C)$

**La suite de l'exercice 3 est uniquement pour la série A1**

- 4) On désigne par X, la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges tirées par l'élève dont la loi est donnée par le tableau suivant :

$X = x_i$	0	1	2	3	Total
$P(X = x_i)$	$\frac{35}{120}$		$\frac{21}{120}$		

- a. Recopie puis complète le tableau ci- dessus.
- b. Calcule l'espérance mathématique de X.

**EXERCICE 4 (6 points)**

On considère la fonction  $f$  dérivable sur  $]0; +\infty[$  et définie par :  $f(x) = -x + 3 + \ln(x)$ .

(C) est la courbe représentative de  $f$  dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

L'unité graphique : 2 cm.

- 1)
  - a. Détermine  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$
  - b. Donne une interprétation graphique de ce résultat.
- 2)
  - a. Justifie que pour tout réel  $x$  appartenant à  $]0; +\infty[$ ,  $f'(x) = \frac{1-x}{x}$ .
  - b. Démontre que  $f$  est strictement croissante sur  $]0; 1[$  et strictement décroissante sur  $]1; +\infty[$ .
  - c. Dresse le tableau de variation de  $f$  sur  $]0; +\infty[$ .
- 3) Justifie que l'équation  $f(x) = 0$  admet une solution unique notée  $\alpha$  comprise entre 4 et 5.
- 4)
  - a. Recopie et complète le tableau suivant (On donnera les arrondis d'ordre 1)

$x$	0,1	0,2	0,5	1	2	3	4	5
$f(x)$								

- b. Construis (C) sur l'intervalle  $]0; 5]$ .

(La suite de l'exercice 4 est uniquement pour la série A1)

5) Soit  $F$  la fonction numérique dérivable sur  $]0; +\infty[$  et définie par :

$$F(x) = -\frac{x^2}{2} + 2x + x \ln(x) \text{ et } J \text{ l'intégrale telle que } J = \int_1^e f(x) dx.$$

- Démontre que  $F$  est une primitive de  $f$  sur  $]0; +\infty[$ .
- Justifie que  $J = \frac{6e - e^2 - 3}{2}$ .
- Déduis – en  $\text{cm}^2$  une valeur approchée de l'aire de la portion du plan délimitée par la courbe  $(C)$ , l'axe des abscisses et les droites d'équation  $x = 1$  et  $x = e$ .  
( On prendra  $e = 2,71$  )

### EXERCICE 5 (5 points)

Une entreprise monte et vend des motos. Sa capacité journalière de montage est comprise entre 0 et 18 montages. On suppose que toute la production est vendue.

Le coût de production en milliers de francs de  $x$  motos est modélisé par :

$$C(x) = x^3 - 25x^2 + 280x + 400.$$

La recette de la vente des  $x$  motos est modélisée par :  $R(x) = 480x - 20x^2$ .

L'entreprise veut réaliser un bénéfice maximal.

En tant que stagiaire dans cette entreprise, la Directrice te demande de déterminer le nombre de motos à produire par jour pour que le bénéfice soit maximal.

À l'aide d'une production argumentée basée sur tes connaissances mathématiques, propose une solution à la directrice.

BAC BLANC  
SESSION 2022

**MATHEMATIQUES**

Série A1 : 3 H  
Série A2 : 2 H  
A1 : Coefficient : 3  
A2 : Coefficient : 2

Ce corrigé comporte cinq (05) pages numérotées 1/5, 2/5, 3/5, 4/5 et 5/5

**EXERCICE 1 (2 points)**

- 1. Vrai 0,5
- 2. Faux 0,5
- 3. Vrai 0,5
- 4. Faux 0,5

**EXERCICE 2 (2 points)**

- 1. A 0,5
- 2. A 0,5
- 3. C 0,5
- 4. C 0,5

**EXERCICE 3 (5 points)**

- 1) Un tirage est un ensemble de 3 boules pris parmi 10 boules. Donc le nombre de tirage possible est :  $C_{10}^3 = 120$ . 0,5+0,5 (0,5)
- 2)
  - Une éventualité de A est un ensemble de trois boules rouges ou de trois boules blanches. Donc  $P(A) = \frac{C_3^3 + C_5^3}{120} = \frac{11}{120}$ . 1 (0,0916)
  - Une éventualité de B est un ensemble de trois boules de couleurs différentes. Donc  $P(B) = \frac{C_3^1 \times C_2^1 \times C_5^1}{120} = \frac{30}{120} = \frac{1}{4}$ . 1 (0,0833)
- 3)
  - a. On a  $A \cap B = \emptyset$  Donc  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{41}{120}$ . 1 (0,3416)
  - b. Les évènements C et  $A \cup B$  sont des évènements contraires. Donc  $P(C) = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{41}{120} = \frac{79}{120}$ . 1 (0,6583)

(La suite de l'exercice 3 est uniquement pour la série A1)

4) a. On a :  $P(X = 1) = \frac{C_3^1 \times C_7^2}{120} = \frac{63}{120}$  et  $P(X = 3) = \frac{C_3^3}{120} = \frac{1}{120}$

$X = x_i$	0	1	2	3	Total
$P(X = x_i)$	$\frac{35}{120}$	$\frac{63}{120}$	$\frac{21}{120}$	$\frac{1}{120}$	1

b. Calculons l'espérance mathématique de X.

$E(X) = \frac{0 \times 35 + 1 \times 63 + 2 \times 21 + 3 \times 1}{120} = \frac{108}{120} = \frac{9}{10}$  (0,9)

**EXERCICE 4 (6 points)**

- 1) a.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x + 3) + \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$  0,5  
 b. Comme  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ , alors la droite d'équation  $x = 0$  est une asymptote verticale à (C). 0,5

- 2) a. Pour tout réel  $x$  appartenant à  $]0; +\infty[$ , on a :  $f'(x) = -1 + \frac{1}{x} = \frac{1-x}{x}$ . 1  
 b. Démontrons que  $f$  est strictement croissante sur  $]0; 1[$  et strictement décroissante sur  $]1; +\infty[$ .  
 Comme pour tout réel  $x$  appartenant à  $]0; +\infty[$ ,  $x > 0$ , alors le signe de  $f'(x)$  est celui de  $1 - x$ . On obtient le tableau suivant.

$x$	0	1	$+\infty$
$1 - x$		+	-
$f'(x)$		+	-

- c. Dressons le tableau de variation de  $f$  sur  $]0; +\infty[$ .

$x$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		+	-
$f(x)$		2	$-\infty$

*(Note: The table above shows a peak at x=1 with f(1)=2. The original image shows a peak at x=2 with f(2)=2. I will follow the original image's handwritten annotations.)*

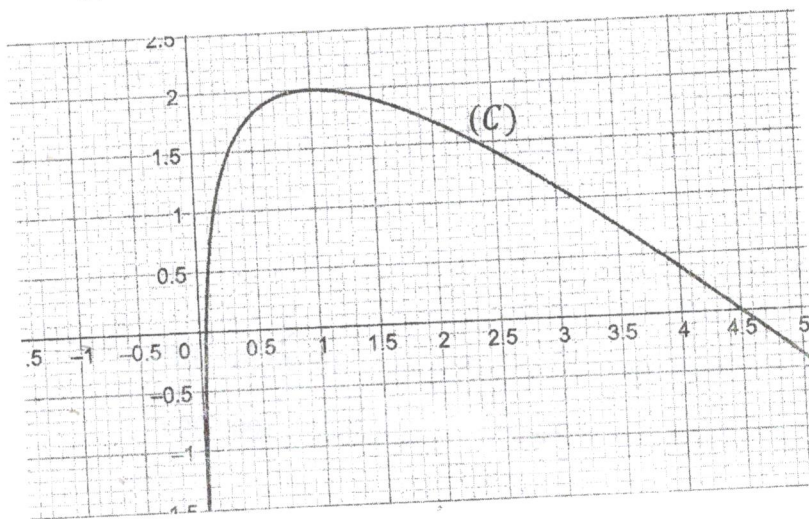
- 3) Justifions que l'équation  $f(x) = 0$  admet une solution unique notée  $\alpha$  comprise entre 4 et 5.  
 $f(4) = -1 + \ln 4 \approx 0,38$  et  $f(5) = -2 + \ln 5 \approx -0,39$   
 La fonction  $f$  est strictement décroissante sur  $]4; 5[$  et  $f(4) \times f(5) < 0$ . Donc l'équation  $f(x) = 0$  admet une solution unique notée  $\alpha$  comprise entre 4 et 5. 0,5

- 4) a. Recopie et complète le tableau suivant (On donnera les arrondis d'ordre 1)

$x$	0,1	0,2	0,5	1	2	3	4	5
$f(x)$	0,6	1,2	1,8	2	1,7	1,1	0,4	-0,4

*(Note: Handwritten red annotations below the table: 0,25 under 0,6; 0,25 under 1,2; 0,25 under 1,8; 0,25 under 1,1; 0,25 under 0,4.)*

b. Construction de (C) sur l'intervalle ]0; 5].



0,5

0,5 + 0,5

(La suite de l'exercice 4 est uniquement pour la série A1)

5)

a. Démontrons que  $F$  est une primitive de  $f$  sur  $]0; +\infty[$ .

Pour tout réel  $x$  appartenant à  $]0; +\infty[$ ,

on a :  $F'(x) = -x + 2 + \ln(x) + 1 = -x + 3 + \ln(x) = f(x)$ .

0,5 + 0,25

Donc  $F$  est une primitive de  $f$  sur  $]0; +\infty[$ .

b. Justifions que  $J = \frac{6e - e^2 - 3}{2}$ .

$$J = \int_1^e f(x) dx = \left| -\frac{x^2}{2} + 2x + x \ln(x) \right|_1^e = \frac{6e - e^2 - 3}{2}$$

0,5 + 0,25

c. Une valeur approchée de l'aire  $A$  de la portion du plan délimitée par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équation  $x = 1$  et  $x = e$  en  $\text{cm}^2$  est

$$A = \frac{6e - e^2 - 3}{2} \times 4 \text{ cm}^2 = 12e - 2e^2 - 6 \text{ cm}^2 = 11,83 \text{ cm}^2$$

0,5

**EXERCICE 5 (5 points)**

Le bénéfice des  $x$  motos est :  $B(x) = R(x) - C(x)$

$$B(x) = 480x - 20x^2 - (x^3 - 25x^2 + 280x + 400).$$

$$B(x) = -x^3 + 5x^2 + 200x - 400.$$

Étudions la  $B(x)$  sur  $[0; 18]$

Pour tout réel  $x$  appartenant à  $[0; 18]$ ,  $B'(x) = -3x^2 + 10x + 200$ .

$B'(x) = 0$ , équivaut à  $-3x^2 + 10x + 200 = 0$  équivaut à  $x = 10$  ou  $x = \frac{-20}{3}$

Donc, on obtient le tableau de signe suivant de  $B'(x)$ .

$x$ .	0		10		18
$B'(x)$ .		+	0	-	

Par la suite, on obtient le tableau de variation ci-dessous de  $B(x)$  sur  $[0 ; 18]$ .

$x$	0	10	18
$B'(x)$	+	0	-
$B(x)$	-400	1100	-1012

D'après le tableau de variation,  $B(x)$  atteint son maximum pour  $x = 10$  sur  $[0 ; 18]$ .

L'entreprise doit produire 10 motos pour réaliser un bénéfice maximal de 1 100 000 f.

**Proposition d'une Grille de correction de l'exercice 6**

Critères	Indicateurs	Barème de notation																				
<p><b>CM1 : Pertinence</b>                      Identification du modèle correspondant au problème posé (Interprétation correcte de la situation complexe, pertinence des choix opérés sur les données de la situation)</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Pour résoudre le problème, je vais déterminer la fonction bénéfice <math>B</math> et l'étudier sur l'intervalle <math>[0 ; 18]</math>. pour cela je vais</li> <li>• Dériver la fonction <math>B</math></li> <li>• Déterminer le sens de variation <math>B</math></li> <li>• Rechercher le maximum de la fonction <math>B</math> s'il existe sur <math>[0 ; 18]</math>.</li> </ul>	<p><b>0,75 point</b>                      1 ind sur 4 → 0,25                      2 ind sur 4 → 0,5                      A partir de                      3 ind sur 4 → 0,75</p>																				
<p><b>CM2 : Utilisation correcte des outils mathématiques en situation</b>                      (Concerne les étapes de la démarche)                      - Choix des outils appropriés                      - Application correcte des propriétés, règles et définitions</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Détermination de la fonction <math>B</math>  <math>B(x) = R(x) - C(x)</math>  <math>B(x) = -x^3 + 5x^2 + 200x - 400</math></li> <li>• Calcul de la dérivée de la fonction <math>B</math>  <math>B'(x) = -3x^2 + 10x + 200</math>.</li> <li>• Détermination du signe de la dérivée <math>B'</math></li> </ul> <table border="1" data-bbox="576 770 1046 853"> <tr> <td><math>x</math>.</td> <td>0</td> <td>10</td> <td>18</td> </tr> <tr> <td><math>B'(x)</math>.</td> <td>+</td> <td>0</td> <td>-</td> </tr> </table> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Tableau de variation de la fonction <math>B</math></li> </ul> <table border="1" data-bbox="576 909 1177 1160"> <tr> <td><math>x</math></td> <td>0</td> <td>10</td> <td>18</td> </tr> <tr> <td><math>B'(x)</math></td> <td>+</td> <td>0</td> <td>-</td> </tr> <tr> <td><math>B(x)</math></td> <td>- 400</td> <td>1100</td> <td>-1012</td> </tr> </table> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Détermination du maximum                      D'après le tableau de variation, la fonction <math>B</math> atteint son maximum pour <math>x = 10</math> sur <math>[0 ; 18]</math>.</li> <li>• Exactitude des formules</li> <li>• Justesse de l'argumentation</li> </ul>	$x$ .	0	10	18	$B'(x)$ .	+	0	-	$x$	0	10	18	$B'(x)$	+	0	-	$B(x)$	- 400	1100	-1012	<p><b>2,5 point :</b>                      1 ind sur 7 → 0,5 pt                      2 ind sur 7 → 1 pt                      3 ind sur 7 → 1,5 pt                      4 ind sur 7 → 2 pt                      A partir de                      5 ind sur 7 → 2,5 pt</p>
$x$ .	0	10	18																			
$B'(x)$ .	+	0	-																			
$x$	0	10	18																			
$B'(x)$	+	0	-																			
$B(x)$	- 400	1100	-1012																			
<p><b>CM3 : Cohérence de la réponse</b>                      - Cohérence entre les étapes de la démarche                      - Cohérence dans la démonstration</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Le résultat produit est conforme au résultat attendu (L'entreprise doit produire 10 motos pour réaliser un bénéfice maximal de 1 100 000 f)</li> <li>• Le résultat produit est en adéquation avec la démarche</li> <li>• La qualité des enchainements de la démarche</li> </ul>	<p><b>1,25 point :</b>                      1 ind sur 3 → 0,75 pt                      A partir de                      2 ind sur 3 → 1,25 pt</p>																				
<p><b>CP : Critère de perfectionnement</b>                      (Concision; Originalité, Bonne présentation)</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Propreté de la production (Présence des titres des étapes, pas de rature et de surcharge)</li> <li>• Démarche correcte non classique au-delà de la production attendue</li> <li>• Production juste en peu de mots (esprit de synthèse)- Bonne présentation</li> </ul>	<p><b>0,5 point :</b>                      1 ind sur 3 → 0,25 pt                      2 ind sur 3 → 0,5 pt</p>																				