

Chari

CONCOURS D'ENTREE AUX CYCLES DE TECHNICIEN SUPERIEUR ET  
TECHNICIEN DE L'ECOLE AFRICAINE DE LA METEOROLOGIE ET DE  
L'AVIATION CIVILE (EAMAC)

SESSION 2011

EPREUVE DE : MATHEMATIQUES

DUREE : 3 HEURES

⇒ Tech. / TS

**Exercice 1**

Soient les intégrales suivantes:

$$I = \int_0^{\pi} e^t \cos^2 t dt \text{ et } J = \int_0^{\pi} e^t \sin^2 t dt.$$

1. Calculer  $I + J$  et  $I - J$ .
2. En déduire les valeurs de  $I$  et  $J$ .

**Exercice 2**

Soit  $f_a$  la fonction définie par:

$$f_a(x) = \log(x^2 - 2ax + 1),$$

où  $-1 \leq a \leq 1$  et  $\log$  désigne la fonction logarithme népérien. On notera  $C_a$  la courbe représentative de  $f_a$  dans un repère orthonormé.

A) Dans cette partie du problème on suppose  $a = -1$ .

1. Etudier les variations de  $f_{-1}$  et tracer la courbe représentative  $C_{-1}$ .
2. a) Déterminer une primitive de la fonction  $g$  définie par:  $g(x) = \log(x + 1)$ .  
b) Calculer l'aire de ensemble des points de coordonnées  $(x, y)$  satisfaisant aux conditions:  
 $0 \leq x \leq e - 1$  et  $0 \leq y \leq f_{-1}(x)$ .

B) Dans cette partie, on suppose  $0 < a < 1$ .

1. Déterminer le domaine de définition de  $f_a$ .
2. Etudier les variations de la fonction  $f_a$ .
3. Montrer que la courbe  $C_a$  admet la droite d'équation  $x = a$  pour axe de symétrie.
4. Soit  $h$  la fonction définie par:  $h(x) = 2 \log x, x > 0$ .  
Donner, selon la valeur de  $x$ , le signe de l'expression:  $f_a(x) - h(x)$ .  
Cette expression admet-elle une limite quand  $x$  tend vers  $+\infty$ ?
5. Tracer la courbe représentative de  $h$  et utiliser ce qui précède pour tracer  $C_{\frac{2}{3}}$  dans le même repère.

C) Montrer que les courbes  $C_a$  et  $C_{-a}$  sont symétriques par rapport à la droite d'équation  $x = 0$ .

**CONCOURS D'ENTREE AUX CYCLES D'INGENIEUR ET DE  
CONTROLEUR DE LA CIRCULATION AERIENNE DE L'ECOLE  
AFRICAINNE DE LA METEOROLOGIE ET  
DE L'AVIATION CIVILE (EAMAC)  
SESSION 2011**

**EPREUVE DE : MATHEMATIQUES  
DUREE : 4 HEURES**

*⇒ Ingénieur  
Contrôleur*

**Exercice 1**

Calculer la valeur moyenne de la fonction:

$$f(x) = \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x + 4 \cos^2 x}$$

sur  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ .

**Exercice 2**

Etudier la convergence de l'intégrale suivante; et lorsqu'elle converge, calculer sa valeur:

$$\int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-\beta x}}{x} \cos \lambda x dx, \quad \beta \geq 0.$$

**Exercice 3**

Résoudre l'équation différentielle suivante:

$$xy' - y^2 + (2x + 1)y = x^2 + 2x, \text{ avec } \int_1^2 (x - y)^2 dx = 1.$$

**Exercice 4**

On considère la série entière:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{3n}}{(3n)!}.$$

1. Déterminer son rayon de convergence. Montrer que  $f$  vérifie une équation différentielle linéaire du troisième ordre à coefficients constants.

2. Résoudre l'équation différentielle obtenue.

3. En déduire la somme  $S$  de la série:  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(3n)!}$ .

**EXERCICE N°1**

On considère l'unité de masse de gaz parfait. On rappelle que dans une transformation réversible d'un fluide, la quantité de chaleur mise en jeu  $dQ$  (c'est-à-dire échangée avec le milieu extérieur) s'écrit sous les formes :

$$dQ = C_v dT + \ell dV \quad \text{lorsque la température varie de } dT \text{ et le volume de } dV.$$

$$dQ = C_p dT + h dP \quad \text{lorsque la température varie de } dT \text{ et la pression de } dP.$$

- 1) Ecrire les expressions des différentielles de l'énergie interne  $dU$ , de l'enthalpie  $dH$  et de l'entropie  $dS$ . En déduire les relations:

$$\ell = T \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_V, \quad h = -T \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_P, \quad C_p - C_v = T \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_V \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_P$$

- 2°) On considère l'unité de masse de gaz réel qui obéit à l'équation de Van der Waals :

$$\left( P + \frac{a}{V^2} \right) (V - b) = rT$$

- a) Etablir les expressions des coefficients  $\ell$  et  $h$ .  
b) Etablir l'expression du travail reçu par le gaz, au cours d'une compression isotherme réversible s'effectuant entre les volumes  $V_1$  et  $V_2$ , à la température  $T$ .

- 3°) Que devient l'expression de ce travail, aux basses pressions ( $b \ll V$ ) ?

- 4°) a) Déterminer la différence des chaleurs spécifiques  $C_p - C_v$  du gaz, en fonction des variables indépendantes  $P$ ,  $V$  et des constantes  $a$ ,  $b$  et  $r$ .

- b) En tenant compte du fait que  $\frac{a}{V^2} \ll P$  et  $b \ll V$ , trouver une formule approchée de  $C_p - C_v$  en fonction des variables  $P$  et  $T$ .

## EXERCICE N°2

Un point matériel M, de masse m, repéré par ses coordonnées polaires (r,  $\theta$ ), est soumis à la force Newtonienne :  $\vec{F} = \frac{-k}{r^2} \vec{e}_r$  (avec  $\overrightarrow{OM} = \vec{r} = r \vec{e}_r$ ), de la part d'un point O. k est une constante positive.

1°) Montrer que l'équation de la trajectoire de M peut être mise sous la forme :

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(\theta - \varphi_0)},$$

où  $\varphi_0$  est l'axe focal à l'origine, p le paramètre de la conique et e son excentricité. Donner les expressions de p et e.

2°) On choisira la solution correspondant à  $\varphi_0 = 0$ . Calculer l'énergie potentielle  $E_p$  de M en fonction de k, p,  $\theta$  et e. (On prendra l'origine des potentiels à l'infini).

3°) Calculer l'énergie cinétique  $E_c$  de M en fonction de k, p  $\theta$  et e.

4°) Calculer l'énergie mécanique E de M. Montrer que E est constante.

On rappelle les formules de BINET :

$$\rho = \frac{1}{r} ; \quad V^2 = C^2 \left( \rho^2 + \left( \frac{d\rho}{d\theta} \right)^2 \right) \quad \text{et} \quad \vec{\gamma} = -C^2 \rho^2 \left( \frac{d^2\rho}{d\theta^2} + \rho \right) \vec{e}_r$$

**EXERCICE N°1**

Dans ce problème, nous étudions le mouvement d'un satellite de Mars nommé Phobos. On supposera que tous les objets étudiés sont à répartition sphérique de masse.

**On donne :**

$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N.m}^2.\text{kg}^{-2}$  est la constante de gravitation universelle.

Distance entre le centre de Mars et celui de Phobos :  $r = 9,38 \cdot 10^3 \text{ km}$ .

Masse de Mars :  $m_M = 6,42 \cdot 10^{23} \text{ kg}$ .

La masse de Phobos sera notée  $m_P$ .

Période de rotation de Mars :  $T_M = 24\text{h } 37\text{min}$ .

On supposera que Phobos a un mouvement circulaire uniforme autour de Mars de vitesse  $v$  et on supposera que l'on travaille dans un référentiel galiléen centré sur Mars.

1°) Donner la définition d'un mouvement circulaire uniforme.

2°) Représenter le point d'application, la direction et le sens du vecteur accélération de Phobos sur un schéma.

3°) Donner l'expression (sans justification) de la norme du vecteur accélération de Phobos en fonction de  $v$  et  $r$ .

4°) Appliquer la deuxième loi de Newton à ce satellite.

5°) En déduire que l'expression de sa vitesse de révolution autour de Mars est :

$$v = \sqrt{\frac{Gm_M}{r}}$$

6°). Déterminer l'expression reliant  $v$ ,  $r$  et  $T_P$  (période de révolution de Phobos autour de Mars).

7°) Montrer que :  $\frac{T_P^2}{r^3} = 9,22 \cdot 10^{-13} \text{ s}^2 \text{ m}^{-3}$  Cette relation définit une loi. Donner son nom.

8°) En déduire la valeur de  $T_P$ .

9°) Dans quel plan faut-il placer un satellite pour qu'il soit immobile par rapport à la base relais sur Mars ? Justifier votre réponse sans calcul.

10°) Quelle est la période  $T_S$  de révolution d'un tel satellite ?

11°) Etablir l'expression de l'énergie mécanique du système Phobos-Mars. Déduire qu'elle est constante au cours du temps.

## EXERCICE N°2

- 1°) On établit une tension constante  $U$  aux bornes (A et B) des armatures d'un condensateur de capacité  $C_1$ . Calculer la charge maximale  $Q_{\max}$  du condensateur.
- 2°) Le condensateur étant chargé, on isole ses armatures et on le décharge dans une bobine d'inductance  $L_1$  et de résistance  $r_1$ .  
Etablir l'équation différentielle des oscillations électriques dans le circuit.
- a°) Donner l'expression de l'énergie totale électrique (condensateur) et magnétique (bobine) du circuit.
- b°) Montrer que l'énergie totale du circuit varie au cours du temps et préciser la forme sous laquelle se manifeste cette variation.
- c°) Quelle est la nature des oscillations électriques ainsi obtenues. Que se passera-t-il dans le circuit pendant un temps suffisamment long ?
- d°) Si la résistance de la bobine  $r_1$  est négligeable qu'elle serait la nature des oscillations ? Calculer la valeur de leur fréquence propre.

**On donne** :  $C_1 = 6,28 \mu\text{F}$  ,  $U = 50\text{V}$  et  $L_1 = 0,318\text{H}$ .

**CONCOURS D'ENTREE AU CYCLE DE CONTROLEUR DE LA  
 CIRCULATION AERIENNE DE L'ECOLE AFRICAINE DE LA  
 METEOROLOGIE ET  
 DE L'AVIATION CIVILE (EAMAC)  
 SESSION 2012  
 EPREUVE DE : MATHEMATIQUES  
 DUREE : 4 HEURES**

**Exercice 1 (4pts)**

Soit la suite  $(u_n)$  définie par:  $u_0 = a$  et  $u_{n+1} = u_n(2 - 9u_n)$ , avec  $a \in \mathbb{R}$ .

Pour quelles valeurs de  $a \in \mathbb{R}$  la suite  $(u_n)$  est-elle convergente? Calculer  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ , suivant les valeurs de  $a$ .

**Exercice 2 (6pts)**

Calculer les intégrales suivantes:

1.  $I = \int_1^{16} \arctan \sqrt{\sqrt{x} - 1} dx$

2.  $J = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \frac{2x^7 + 3x^6 - 10x^5 - 7x^3 - 12x^2 + x + 1}{x^2 + 2} dx.$

**Exercice 3 (4pts)**

On considère l'application linéaire  $f$  de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}^2$  définie par:  $f(x, y) = (5x - 4y, x)$ .

1° Ecrire la matrice  $A$  de  $f$  dans la base canonique.

2° Quelle est la matrice  $B$  de  $f$  dans la base  $\{(1, 1), (4, 1)\}$ .

3° En utilisant la matrice de changement de bases, calculer  $A^n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ).

**Exercice 4 (6pts)**

1. Calculer le développement limité au voisinage de  $t = 0$  et à l'ordre 3 de la fonction

$$g(t) = \arctan(1 + t).$$

2. On pose  $l = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x}{\frac{\pi}{4} - \arctan x}$ . Déterminer  $l$ .

3. Soit

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x}{\frac{\pi}{4} - \arctan x}, & \text{si } x \neq 1 \\ l, & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

Donner l'allure de la courbe d'équation  $y = f(x)$  au voisinage de  $x = 1$  (tangente, position de la courbe par rapport à la tangente).

**CONCOURS D'ENTREE AU CYCLE D'INGENIEUR DE L'ECOLE  
AFRICAINNE DE LA METEOROLOGIE ET DE L'AVIATION CIVILE  
(EAMAC)**

**SESSION 2012**

**EPREUVE DE : MATHEMATIQUES**

**DUREE : 4 HEURES**

**Exercice 1 (4pts)**

1. Déterminer le développement en série de Fourier des fonctions  $\cos^3 x$  et  $\cos^4 x$  sur  $[-\pi, \pi]$ .
2. En déduire les valeurs des intégrales suivantes:  $\int_{-\pi}^{\pi} \cos^6 x dx$  et  $\int_{-\pi}^{\pi} \cos^8 x dx$ .

**Exercice 2 (6pts)**

1. Démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwartz suivante: Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions Riemann intégrables sur  $[a, b]$ , alors  $\left( \int_a^b f(x)g(x) dx \right)^2 \leq \int_a^b f^2(x) dx \int_a^b g^2(x) dx$ .

2. On pose  $\mathcal{A} = \{f \in C^2[0, 1] \mid f(0) = f(1) = 0\}$ .

a) Déterminer

$$\min_{f \in \mathcal{A}} \int_0^1 (f''(x))^2 dx$$

- b) Déterminer la fonction  $f$  pour la quelle ce minimum est atteint.

**Exercice 3 (5pts)**

On considère la matrice:  $A = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 9 & 3 & 3 \\ -1 & 5 & 1 \\ 4 & 4 & 8 \end{pmatrix}$

1. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de  $A$ .

2. Calculer les nombres  $u_n, v_n, w_n$  définis pour  $n \geq 1$  par:  $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_{n-1} \\ v_{n-1} \\ w_{n-1} \end{pmatrix}$

avec  $u_0, v_0, w_0$  donnés.

**Exercice 4 (5pts)**

Soit  $X$  une variable aléatoire continue de fonction densité:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi a^2} \sqrt{a^2 - x^2}, & \text{si } x \in ]-a, a[, \quad a > 0 \\ 0, & \text{si } x \notin ]-a, a[. \end{cases}$$

1. Déterminer l'espérance mathématique et la dispersion de la v.a.  $X$
2. Déterminer la fonction de répartition de  $X$ .

**CONCOURS D'ENTREE AUX CYCLES DE TECHNICIEN SUPERIEUR ET  
TECHNICIEN DE L'ECOLE AFRICAINE DE LA METEOROLOGIE ET DE  
L'AVIATION CIVILE (EAMAC)  
SESSION 2012  
EPREUVE DE : MATHEMATIQUES  
DUREE : 3 HEURES**

**Exercice 1 (3pts)**

A l'aide d'une intégration par parties, calculer les intégrales suivantes:

1.  $I = \int_0^1 \ln(x+1) dx$

2.  $J = \int_{\frac{1}{e}}^e -\frac{\ln x}{x^2} dx$

**Exercice 2 (5pts)**

Soit  $f$  l'application de  $\mathbb{C}$  dans  $\mathbb{C}$  définie par:  $f(z) = z^3 + (2+3i)z^2 + (4+6i)z + 8$ .

1. a. Calculer  $f(i)$   
b. Déterminer deux nombres complexes  $a$  et  $b$  vérifiant:  $f(z) = (z-i)(z^2 + az + b)$  pour tout nombre complexe  $z$ .  
c. Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $(E)$ :  $f(z) = 0$ .
2. On désigne par  $z_1$  la solution de  $(E)$  ayant une partie imaginaire positive, par  $z_2$  la solution réelle et par  $z_3$  l'autre solution.  
Montrer qu'il existe un nombre complexe  $q$  tel que  $z_2 = qz_1$  et  $z_3 = qz_2$ .  
Soient  $A_1, A_2$ , et  $A_3$  les points du plan complexe d'affixes respectives  $z_1, z_2$  et  $z_3$ .  
Quelle est la nature du triangle  $A_1A_2A_3$ ? (Justifier).

**Exercice 3 (5pts)**

Soit la suite numérique de terme général  $u_n$ ,  $n$  appartenant à  $\mathbb{N}^*$ , définie par:

$$\begin{cases} u_1 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = \frac{n+1}{2n} u_n \end{cases}$$

1. Calculer  $u_2, u_3$  et  $u_4$ .
2. Montrer que, pour tout entier naturel non nul, on a:  $0 \leq u_{n+1} \leq u_n$   
En déduire que la suite  $(u_n)$  converge.

3. a. Montrer que la suite de terme général  $v_n$  définie par  $v_n = \frac{u_n}{n}$  ( $n > 0$ ) est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme  $v_1$ .
- b. En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$ .
- c. En déduire également l'expression de  $u_n$  en fonction de  $n$  et calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ .

#### Exercice 4 (7pts)

Partie I :

Soit l'équation différentielle (1) :  $y'' - 4y' + 4y = 0$ .

1. Déterminer une solution de (1) de la forme  $f_1(x) = e^{rx}$  où  $r$  est un nombre réel.
2. Montrer que la fonction  $f_2$  telle que  $f_2(x) = xe^{rx}$  est aussi une solution de (1) ( $r$  étant la valeur trouvée précédemment)
3. a. Vérifier que pour tout couple de réels  $(\lambda_1, \lambda_2)$  la fonction  $f_\lambda = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$  est solution de (1).
- b. Calculer  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  pour que  $f_\lambda(0) = \frac{1}{2}$  et  $f'_\lambda(0) = \frac{1}{2}$ .

Partie II :

$f$  et  $g$  sont les fonctions de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  définies par :

$$f(x) = \frac{1}{2}e^{2x}(-x+1) \text{ et } g(x) = \frac{1}{2}e^{-2x}(x+1)$$

( $C$ ) et ( $\Gamma$ ) leurs courbes représentatives.

On se propose de trouver les points d'intersection de ( $C$ ) et ( $\Gamma$ ) dont l'abscisse  $\alpha$  est strictement positive.

1. Montrer que  $\alpha$  est nécessairement strictement inférieur à 1.
2. Soit  $\varphi$  une fonction de  $]0, 1[$  sur  $\mathbb{R}$  définie par:  $\varphi(x) = -4x + \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ .
  - a. Montrer que  $\alpha$  est solution de l'équation  $\varphi(x) = 0$ .
  - b. Étudier les variations de  $\varphi$ .
  - c. En déduire que l'équation  $\varphi(x) = 0$  admet une unique solution qui est comprise entre 0,95 et 0,96.
3. Conclure.

### Exercice 1

Deux pendules identiques sont formés, chacun, d'une boule conductrice, supposée ponctuelle, de masse  $m = 10mg$  et d'un fil inextensible de longueur  $l = 20cm$ ; la masse du fil est négligeable. On électrise les boules de la même façon puis on les suspend au même point O. A l'équilibre les deux fils font entre eux un angle  $2\theta = 60^\circ$ .

- 1) Déterminer les forces qui s'exercent sur chacune des boules; en déduire les conditions d'équilibre d'une boule.
- 2) Quelle est la distance  $d$  qui sépare les deux boules à l'équilibre ?
- 3) Calculer la valeur absolue de la charge Q des boules.

### Exercice 2

On considère un galvanomètre à cadre mobile dont la résistance interne est  $R_g = 10\Omega$ . L'angle de déviation  $\theta$  de l'aiguille du galvanomètre est proportionnelle au courant  $i$  qui le traverse :  $\theta = ki$  où  $k$  est une constante. L'angle maximum de déviation  $\theta_{max}$  de l'aiguille du galvanomètre est subdivisé en  $N = 100$  graduations équidistantes sur le cadran.

- 1) Déterminer le courant maximum  $i_{max}$  que peut mesurer le galvanomètre si la chute de tension aux bornes du galvanomètre est  $u_{max} = 1V$ .
- 2) Déterminer la variation  $\Delta i$  de l'intensité si l'aiguille du galvanomètre dévie d'une graduation sur le cadran.
- 3) Pour disposer d'un ampèremètre de calibre 1A on monte en parallèle aux bornes du galvanomètre une résistance  $R_s$ . Déterminer la valeur de la résistance  $R_s$  et faire un schéma du montage.
- 4) Pour disposer d'un voltmètre de calibre 10V on monte en série à l'une des bornes du galvanomètre une résistance  $\rho$ .
  - a) Déterminer la valeur de la résistance  $\rho$  et faire un schéma du montage.
  - b) On suppose que la classe du voltmètre ainsi construit est  $C = 1,5$ ; c'est-à-dire que l'incertitude relative de construction est de 1,5% sur toute la plage de mesure. Déterminer l'incertitude  $\Delta U$  de mesure d'une tension  $U = 3V$  avec ce voltmètre.

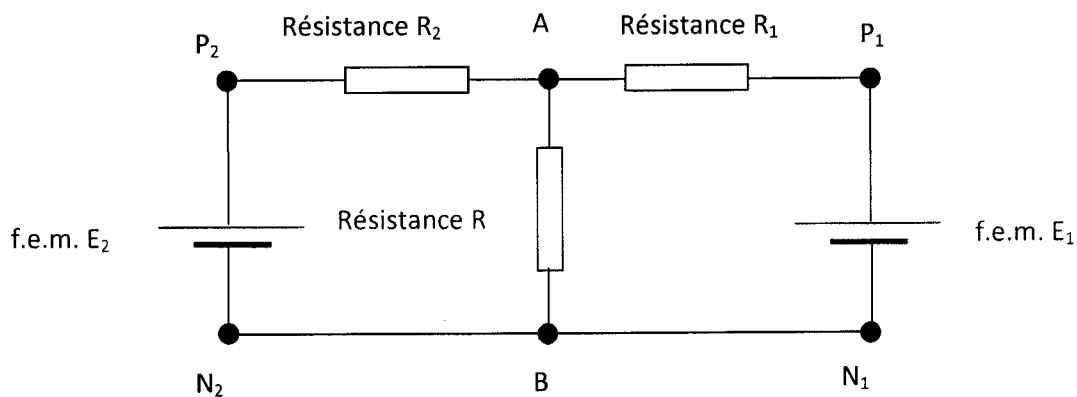
### Exercice 3

On considère un conducteur filiforme et circulaire, de rayon R et de centre O, placé dans le vide (perméabilité  $\mu_0$ ). Le conducteur est parcouru par un courant I constant. Le conducteur est étudié dans un repère cartésien  $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$  tel que le conducteur soit dans le plan  $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$  et l'axe  $(O, \vec{e}_z)$  est confondu avec l'axe de symétrie du conducteur.

- 1) Déterminer l'expression de l'induction magnétique élémentaire  $d\vec{B}$ , créé en un point M quelconque de l'espace, par un élément de courant  $I d\vec{l}$  situé en un point A de la circonférence du conducteur ;  $l$  est la circonférence du conducteur.
- 2) Déterminer l'expression de l'induction magnétique  $\vec{B}$  en un point M appartenant à l'axe  $(O, \vec{e}_z)$ .
- 3) Quelle est l'expression de l'induction magnétique  $\vec{B}$  au centre O du conducteur ?

#### Exercice 4

On considère le circuit électrique de la figure ci-dessous où on s'intéresse à la branche AB ; les générateurs de courant continu sont des générateurs idéaux.



Appliquer le théorème de Thévenin pour déterminer le courant  $I$  et la tension  $V_A - V_B$  dans la branche AB.

&&&&

**EXERCICE N°1** (5 pts)

Une barre homogène AB, de centre G, de longueur  $2\ell = 50$  cm et de poids  $P = 20$  N est suspendue à un crochet C par deux fils de longueur  $CA = a = 43,3$  cm et  $CB = b = 25$  cm.

- 1°) Faire un schéma descriptif simple en représentant toutes les forces en présence.
- 2°) Calculer l'angle  $\theta$  que fait la barre, à l'équilibre, avec le plan horizontal. En déduire les valeurs des angles  $\theta_A$  et  $\theta_B$  que font respectivement les fils tendus CA et CB par rapport à la verticale passant par C.
- 3°) Déterminer les tensions des fils à l'équilibre.

**EXERCICE N°2** (5 pts)

On considère un cylindre homogène d'axe  $zz'$ , de rayon R et de longueur infinie. Une distribution volumique de charge est à l'intérieur du cylindre avec la densité  $\rho$  (constante et positive).

- 1°) Déterminer le champ électrique  $\vec{E}$  créé par cette distribution en tout point de l'espace à une distance r de l'axe  $zz'$ .
- 2°) En déduire le potentiel électrique en tout point de l'espace.

**EXERCICE N°3** (5 pts)

Le centre de gravité G d'un solide continu, défini dans un domaine (D) dans un système de référence d'origine O est obtenu par la relation  $\vec{OG} = \frac{1}{M} \int_D \vec{OP} \rho(P) dD$  où  $\rho(P)$  désigne la densité massique du solide en P et M sa masse totale.  $dD$  désignant le domaine élémentaire.

On considère, dans le plan (Oxy), une plaque supposée homogène de densité 1 ayant la forme d'un triangle rectangle en O, Les deux autres sommets étant A(0, 6) et B(8, 0).

- 1°) Calculer la masse M de la plaque.
- 2°) Déterminer les coordonnées du centre de gravité G de la plaque.

**EXERCICE N°4** (5 pts)

Une spire filiforme circulaire de rayon R est parcourue par un courant d'intensité I dans le sens trigonométrique.

- 1°) Déterminer les caractéristiques du champ magnétique  $\vec{B}$  créé en un point M de l'axe  $x'x$  de la spire situé à une distance x du centre O de cette spire. On posera  $OM = x$ .
- 2°) Déterminer les composantes axiale  $B_x$  et radiale  $B_r$  du champ magnétique créé par la spire en un point N très voisin de M, tel que  $MN = r$  ( $r \ll x$ ), situé sur une perpendiculaire à l'axe au point M. On rappelle que le champ magnétique est à flux conservatif. (On pourrait calculer le flux du champ à travers une surface fermée cylindrique d'axe  $x'x$ , de rayon r, contenant les points M et N, de longueur élémentaire dx à partir du point M).

### Exercice 1

On considère un gaz parfait enfermé dans une enceinte diatherme ayant la forme d'un cylindre dont l'une des bases est un piston mobile. Le milieu extérieur est à la température constante  $T_0$  et à la pression constante  $P_0$ .

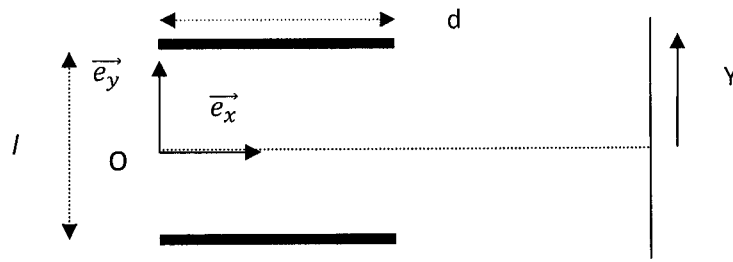
- 1) Déterminer l'expression du volume  $V_0$  occupé par le gaz lorsqu'il est en équilibre avec le milieu extérieur.
- 2) On prépare le système de manière que son volume soit égale  $\frac{V_0}{4}$  et on bloque le piston. Quel est le nouvel état d'équilibre du système ?
- 3) A partir cet état imposé au système, on débloque le piston ; décrire l'évolution de l'état du gaz.

### Exercice 2

Un canon à électrons est formé par deux plans métalliques parallèles ; le premier plan, appelé cathode  $C$  comporte un filament chauffé qui émet des électrons. L'autre plan appelé anode  $A$  est percé d'un trou qui laisse passer les électrons accélérés. Le canon à électrons permet donc d'obtenir un faisceau rectiligne d'électrons. Ce faisceau peut être dévié à travers les plaques d'un condensateur plan ; c'est le principe de fonctionnement d'un oscilloscope cathodique.

- 1) En supposant que la différence de potentiel électrique  $U = V_A - V_C$  entre l'anode et la cathode est positive, déterminer l'expression de la vitesse  $v$  des électrons à la sortie de l'anode ; on admet que les électrons sont émis sans vitesse initiale.
- 2) On considère un condensateur plan à plaques horizontales et on définit un repère cartésien d'étude  $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$  tel que les plaques soient parallèles au plan  $(O, \vec{e}_z, \vec{e}_x)$  et l'épaisseur du condensateur est parallèle à l'axe  $(O, \vec{e}_y)$ . On suppose que l'axe  $(O, \vec{e}_x)$  passe par le milieu des plaques avec le point  $O$  situé juste à l'entrée du champ électrique uniforme  $\vec{E} = -E\vec{e}_y$  entre les plaques. A partir du point  $O$ , avec une vitesse initiale  $\vec{v}_0 = v_0\vec{e}_x$ , un électron issu d'un canon à électrons, traverse le champ avant d'en sortir. La distance horizontale des plaques suivant l'axe  $(O, \vec{e}_x)$  est  $d$  ; voir le schéma de la figure 1 ci-dessous.
  - a) Montrer que la trajectoire de l'électron est parabolique à l'intérieur des plaques
  - b) On s'intéresse au point d'impact de l'électron, sur un écran perpendiculaire à l'axe  $(O, \vec{e}_x)$ . Si  $Y$  est la distance de ce point par rapport à l'axe  $(O, \vec{e}_x)$ , montrer que  $Y$  est proportionnel à la tension  $U$  appliquée entre les plaques du condensateur.

Figure 1 :



### Exercice 3

On considère une sphère, de centre  $O$  et de rayon  $R$ , dont la charge électrique totale  $Q$  est uniformément répartie dans le volume de la sphère.

- 1) Déterminer le champ électrique  $\vec{E}$  créé par cette sphère en tout  $M$  de l'espace en appliquant le théorème de Gauss.
- 2) Dédire du calcul précédent le potentiel électrique  $V$  créé par la sphère en tout point  $M$  de l'espace.

### Exercice 4

Les niveaux d'énergie  $E_n$  de l'atome d'hydrogène ont des valeurs discrètes données par la relation :

$$E_n = -\frac{E_0}{n^2}$$

Dans cette expression,  $n$  est un entier tel que  $n \geq 1$  et  $E_0 = 13,6 \text{ eV}$

- 1) Déterminer le niveau fondamental de l'atome
- 2) Déterminer l'expression de l'énergie d'un niveau excité
- 3) Quel est le niveau d'énergie de l'atome ionisé ?
- 4) Quelle énergie faut-il fournir à l'atome pour l'ioniser depuis son niveau fondamental ?
- 5) L'atome étant au niveau fondamental, il absorbe un photon pour passer à un niveau excité ; déterminer l'expression de la fréquence du photon absorbé.

&&&&

### Exercice 1

Le champ électromagnétique est représenté par le couple de vecteurs  $(\vec{E}, \vec{B})$ ; où  $\vec{E}$  est le champ électrique et  $\vec{B}$  est le champ d'induction magnétique.

- 1) En se plaçant dans le vide, de perméabilité  $\mu_0$  et de permittivité  $\epsilon_0$ , donner les équations de Maxwell en fonction du champ électromagnétique.
- 2) Montrer que lorsqu'on est en dehors des volumes chargés, le champ électrique et le champ d'induction magnétique vérifient l'équation des ondes.
- 3) Dans le cas d'un champ scalaire, donner la forme des solutions simples de l'équation des ondes.

### Exercice 2

En mécanique quantique, on convient de représenter l'état d'une particule ponctuelle, de masse  $m$ , par sa fonction d'onde  $\psi(\vec{r}, t)$ ; où  $\vec{r}$  est le vecteur-position de la particule et  $t$  est le temps. On suppose que la particule est soumise à une énergie potentielle  $U(\vec{r})$ .

- 1) Donner l'équation générale de Schrödinger que doit vérifier la fonction d'onde.
- 2) Donner la forme de la fonction d'onde lorsque l'énergie de la particule est indépendante du temps (état stationnaire).
- 3) Dédire de l'expression de  $\psi(\vec{r}, t)$  l'équation stationnaire de Schrödinger.

### Exercice 3

On considère une lentille mince convergente, de centre O et de distance focale  $f$ . On note F le foyer objet et F' le foyer image.

- 1) Déterminer la position d'un objet *réel* AB, sur l'axe optique de la lentille, pour que son image A'B' soit *réelle*; illustrer la situation par un schéma.
- 2) Déterminer la position d'un objet *réel* AB, sur l'axe optique de la lentille, pour que son image A'B' soit *virtuelle*; illustrer la situation par un schéma.

### Exercice 4

On considère à la surface de la terre un système formé par une masse ponctuelle  $m$  et un ressort linéaire à spires non jointives; on désigne par  $l_0$  la longueur au repos du ressort et  $k$  sa raideur. Une extrémité du ressort est reliée à un point fixe O situé sur une potence immobile par rapport à la

terre ; et on place la masse à l'autre extrémité A du ressort. On suppose que le point A ne peut se mouvoir que suivant seulement l'axe verticale passant par O.

Prendre l'origine du repère cartésien d'étude en O et en considérant l'axe vertical passant par le point O comme l'un des axes de coordonnées ; cet axe sera orienté vers le bas.

- 1) Définir le repère cartésien d'étude et donner un schéma du système
- 2) Déterminer les coordonnées  $(x, y, z)$  du point A dans le repère d'étude
- 3) Faire le bilan des forces qui s'exercent sur la masse ponctuelle
- 4) Déterminer l'allongement  $\Delta l$  du ressort lorsque le point A est en équilibre
- 5) A partir de la position d'équilibre du point A, on le déplace, suivant l'axe vertical, d'une distance  $a$  vers le bas. Quel est le mouvement ultérieur du point A lorsqu'il est abandonné à partir de sa nouvelle position ?

&&&&

**Exercice n°1** (5 pt)

La terre est assimilable à une sphère homogène de masse  $M$  et de rayon  $R$ . Un satellite géostationnaire est en orbite à l'altitude  $h$  au dessus de la terre.

- 1°) a) Dans quel référentiel étudie-t-on le mouvement d'un satellite?  
b) Qu'appelle-t-on satellite géostationnaire
- 2°) Faire un schéma en représentant la terre, la trajectoire du satellite et la force exercée par la terre sur le satellite.
- 3°) a) Montrer que le mouvement du satellite est uniforme  
b) Déterminer l'expression de sa vitesse en fonction de  $r = R+h$ ,  $G$  (constante de gravitation) et  $M$ .  
c) Le mouvement du satellite est-il indépendant de sa masse  $m$ ?
- 4°) a) exprimer l'altitude  $h$  en fonction de  $R$ , de la période  $T$  de rotation de la terre autour de son axe, de la masse  $M$  de la terre et de la constante  $G$  de gravitation.  
b) Calculer l'altitude  $h$  du satellite.

Données:  $R=6375\text{km}$ ,  $G=6,6710^{-11}\text{SI}$ ,  $T=86400\text{s}$  et  $M=6 \cdot 10^{24}\text{kg}$ .

**Exercice n°2** (5 pt)

Deux sources ponctuelles  $S_1$  et  $S_2$ , cohérentes et synchrones, produisent des interférences lumineuses à l'aide des fentes d'Young. La longueur d'onde de l'onde lumineuse est de  $0,589\mu\text{m}$ .

- 1°) Sur l'écran  $E$ , on numérote les franges brillantes successivement et on mesure la distance entre le milieu de la frange brillante affectée du numéro zéro et le milieu de la frange brillante affectée du numéro 15. On trouve  $1,77\text{ mm}$ . Sachant que  $D=0,60\text{m}$  (distance entre les sources et l'écran  $E$ ), déterminer  $a$ , distance entre les fentes. (1,5pt)
- 2°) Les sources  $S_1$  et  $S_2$  sont éclairées par une onde lumineuse de longueur d'onde  $\lambda_1=0,480\mu\text{m}$ .  
a) Calculer la fréquence  $N_1$  de l'onde lumineuse (0,5pt)  
b) Calculer la distance  $i_1$  séparant deux franges sombres consécutives sur l'écran  $E$ . (1pt)
- 3°)  $S_1$  et  $S_2$  sont maintenant éclairées par une onde lumineuse de longueur d'onde  $\lambda_2$ . On constate que le milieu de la seconde frange sombre occupe la place qu'occupait le milieu

de la seconde frange brillante du système précédent. La frange centrale est notée zéro. Déduire de cette expérience la longueur d'onde  $\lambda_2$  et la fréquence  $N_2$  de l'onde (2pts)

**Exercice n°3** (5 pt)

On considère une bobine de longueur  $\ell=12\text{cm}$  de rayon moyen  $r=1\text{cm}$ , comportant  $n=2500$  spires par mètre. Cette bobine est un solénoïde long par rapport au rayon des spires.

1°) La bobine est traversée par un courant d'intensité  $I$ . Le champ magnétique  $\vec{B}_b$  au centre de la bobine a une intensité de  $0,01\text{T}$ .

- Calculer  $I$ .
- Après avoir choisi un sens de parcourt du courant, indiquer sur un schéma comment se placerait une petite aiguille aimantée au centre de la bobine.

2°) la bobine d'axe horizontal, toujours traversée par le courant la courant  $I$ , est placée dans un champ magnétique horizontal  $\vec{B}_o$  uniforme d'intensité  $0,01\text{T}$ . La direction de ce champ est orthogonale à l'axe de la bobine.

- Dessiner les vecteurs  $\vec{B}_b$  et  $\vec{B}_o$  dans le plan horizontal. Quel est l'intensité du champ magnétique total existant à l'intérieur de la bobine ?
- De quel angle a tourné la petite aiguille par rapport à la position trouvée à la première question ?

3°) la bobine est maintenant en circuit ouvert. Dans ~~le~~ champ magnétique uniforme horizontal  $\vec{B}_o$ , un dispositif permet de faire tourner librement la bobine autour d'un axe vertical passant par son centre, avec une vitesse angulaire constante  $\omega=4\pi\text{rad/s}$ .

- A l'instant  $t=0$ , l'axe de la bobine est parallèle à  $\vec{B}_o$ . La normale aux spires étant orientée dans le sens de  $\vec{B}_o$ , calculer le flux  $\Phi_0$  à travers la bobine.
- A un instant  $t$ , la bobine a tourné d'un angle  $\alpha$ . Exprimer le flux  $\Phi(t)$  à travers la bobine.
- Calculer le flux  $\Phi(t)$  à travers la bobine à la date  $t=0,25\text{s}$

4°) Montrer que la bobine est le siège d'une force électromotrice d'induction  $e(t)$  à la date  $t$ . Calculer sa valeur maximale. Donnée :  $\mu_0= 4\pi \cdot 10^{-7}\text{SI}$ .

**Exercice n°4** (5 pt)

Un condensateur de capacité  $C= 12\text{nF}$  préalablement chargé sous une tension  $U_0= 12\text{V}$ , est branché à l'instant  $t=0$  aux bornes d'une bobine d'inductance  $L=9,0\text{mH}$ .

1°) a) Schématiser le circuit (L,C). (0,5pt)

b) L'orienter et désigner l'armature qui porte la charge positive +q. (1pt)

2°) a) exprimer en fonction de la charge q les tensions aux bornes du condensateur et de la bobine (0,5pt)

b) Etablir l'équation différentielle régissant l'évolution de q au cours du temps ((1pt)

3°) a) Donner l'expression générale des solutions de l'équation différentielle décrivant l'évolution de la charge q en fonction du temps. Expliciter les différents termes de cette solution. (0,5pt)

b) Donner l'expression de la période  $T_0$  du circuit oscillant. (0,5pt)

c) Déterminer q(t) en tenant compte des conditions initiales.

d) Donner avec des valeurs numériques les équations décrivant l'évolution en fonction du temps de la tension aux bornes du condensateur et de l'intensité du courant. (0,5pt)

**Exercice n°1(5pts)**

Un électron se déplace dans une région de l'espace munie d'un repère orthonormal

$R (o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . Cette particule est soumise à une accélération constante  $\vec{a} = -4 \cdot 10^{13} \vec{k}$ .

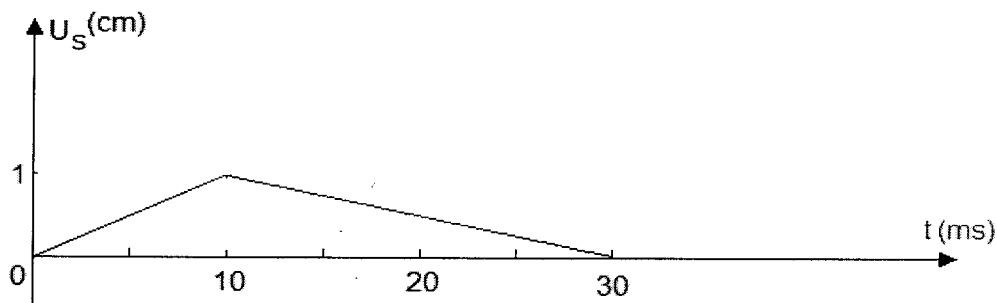
A date  $t = 0$ ,  $\vec{v}_0 = 2 \cdot 10^6 \vec{i} + 10^7 \vec{k}$  ; elle se trouve au point  $M_0$  de coordonnées  $(0 ; 0 ; 0,01)$ .

Les unités sont celles du système international.

1. Peut-on affirmer que le mouvement ne sera pas rectiligne ?(1pt)
2. Etablir les équations horaires du mouvement.(1pt)
3. En déduire l'équation cartésienne de la trajectoire.(1pt)
4. A quelle date  $t_1$ , la vitesse de l'électron est-elle parallèle à l'axe Ox? La vitesse est-elle alors minimale ?(1pt)
5. Entre quels instants, le mouvement est-il accéléré ? retardé ? (1pt)

**Exercice n°2(5pts)**

Un signal se propage le long d'une corde élastique homogène supposée indéfiniment longue, à la célérité  $c = 20 \text{m.s}^{-1}$ . L'élongation du mouvement du point-source en fonction du temps est représentée sur le graphe ci-dessous.



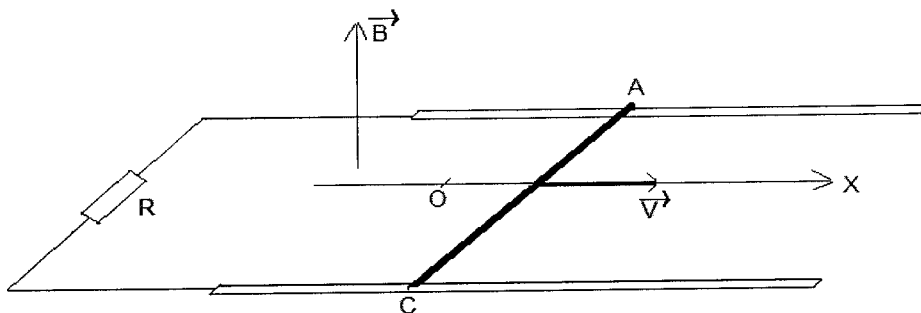
1. 1° Représenter graphiquement en fonction du temps l'élongation d'un point M de la corde situé à 0,5 m de S.(1pt)
- 2° Représenter graphiquement à l'instant  $t = 50 \text{ ms}$  l'aspect de la corde.(1pt)
- 3° Quel est l'aspect de la corde à l'instant  $t = 0,1 \text{ s}$ ?(1pt)

4° le signal précédent est entretenu au point-source S et se reproduit identiquement à lui-même. Quelles sont la période et la fréquence du phénomène? Quelle est la longueur d'onde de l'onde progressive qui se propage le long de la corde ?(1pt)

5° Quel est l'aspect de la corde à l'instant  $t = 0,1$  s? Que peut-on dire des points  $M_1$  et  $M_2$  d'abscisses respectives  $X_1 = 0,4$  m et  $X_2 = 1,6$  m ?(1pt)

### Exercice n°3(5pts)

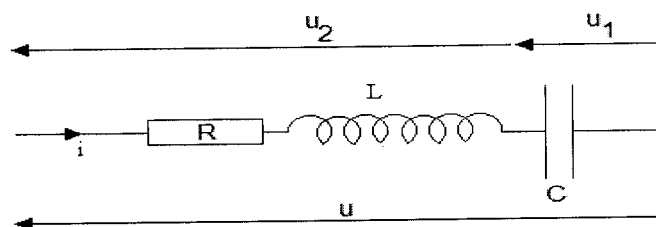
Une tige métallique AC se déplace en translation sur 2 rails horizontaux, conducteurs. La vitesse  $v$  est parallèle aux rails (voir figure).



1. Comment orienter le circuit pour avoir un courant induit positif lorsque  $v_x = v > 0$ ? Quel est alors le signe de  $\phi$  et de celui  $\frac{d\phi}{dt}$ ?(1pt)
2. Calculer l'intensité du courant induit si  $R = 2$ ,  $v = 4 \text{ m.s}^{-1}$ ,  $AC = l = 10 \text{ cm}$ ,  $B = 0,5$  T.(1,5pts)
3. Calculer la puissance de la force de Laplace dans les conditions précédentes.(1,5pts)
4. Donner l'expression de la f.è.m. induite  $e(t)$  si la tige a un mouvement sinusoïdal de vitesse  $v = 4 \cos 2 \pi t$ . Calculer sa valeur maximale et sa fréquence.(1pt)

### Exercice n°4(5pts)

Une portion de circuit électrique alimentée par une source de tension sinusoïdale de valeur efficace  $U$ , de pulsation  $\omega$ , comprend en série une bobine de résistance  $R$  et d'inductance  $L$ , et un condensateur de capacité  $C$  (voir figure)



L'intensité instantanée du courant qui parcourt le circuit et la tension d'alimentation à ses bornes peuvent s'écrire respectivement :

$$i(t) = I\sqrt{2} \sin(\omega t) \quad \text{et} \quad u(t) = U\sqrt{2} \sin(\omega t + \varphi)$$

Pour tous les calculs numériques on prendra :

$$U = 100\text{V}; \quad R = 10 \Omega$$
$$L = 0,30\text{H}; \quad C = 20 \cdot 10^{-6} \text{F}.$$

1. Donner sans démonstration les expressions littérales :
  - a) de l'impédance  $Z$  du circuit ; **(0,5pt)**
  - b) de la valeur efficace  $I$  de l'intensité qui parcourt le circuit ; **(0,5pt)**
  - c) Du déphasage de la tension par rapport à l'intensité. **(0,5pt)**

Construire le diagramme de Fresnel relatif au circuit. **(0,5pt)**

2. A.N. : Calculer  $Z$ ,  $I$   $\varphi$  (en radians) dans le cas où  $\omega = 314 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ . **(1pt)**
3. Soient  $u_1$  et  $u_2$  les valeurs instantanées des tensions qui apparaissent respectivement aux bornes du condensateur et de la bobine.
  - a) Calculer numériquement, dans les conditions précédentes, les valeurs efficaces  $U_1$  et  $U_2$  correspondant respectivement à  $u_1$  et  $u_2$ . **(1pt)**
  - b) Ecrire les expressions de  $u_1$  et  $u_2$  en fonction du temps. **(1pt)**

**Exercice 1** Soit  $f$  l'application de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  définie par :

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t = 0 \\ \frac{\text{Arctan}(t)}{t} & \text{si } t \neq 0 \end{cases} .$$

1. Montrer que  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$  et est paire.
2. Donner le développement limité à l'ordre 1 de  $f(t)$  au voisinage de 0. En déduire que  $f$  est dérivable en 0, et calculer  $f'(0)$ .
3. Justifier que  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ , et calculer  $f'(t)$ , pour  $t \in \mathbb{R}^*$ .
4. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout  $t \in \mathbb{R}^*$ ,  
$$\int_0^t \frac{w^2}{(1+w^2)} dw = -\frac{1}{2}t^2 f'(t).$$
5. En déduire le sens de variation de  $f$ .

**Exercice 2** Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue. Exprimer à l'aide de quantificateurs les assertions suivantes :

1. a.  $f$  est constante ;  
b.  $f$  n'est pas constante ;  
c.  $f$  s'annule ;  
d.  $f$  est périodique.

**Exercice 3** Soit  $(A, +, \cdot)$  un anneau tel que :  $\forall x \in A, x^2 = x$ .

1. Montrer que  $\forall x \in A, x + x = 0$ .
2. Montrer que  $A$  est commutatif.
3. Montrer que  $\forall x, y \in A, xy(x + y) = 0$ .

**Exercice 4** Soit  $A$  la matrice suivante

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculer  $A^2$  et vérifier que  $A^2 = A + 2I_3$ . En déduire que  $A$  est inversible et donner son inverse en fonction de  $A$ .

**ENTRANCE EXAMINATION TO THE CYCLES OF TECHNICIAN  
SUPERIOR AND TECHNICIAN OF THE AFRICAN SCHOOL OF  
THE METEOROLOGY AND THE CIVIL AVIATION (EAMAC)**

**SESSION 2019**

**TEST OF : MATHEMATICS**

**DURATION : 3 HOURS**

**Exercise 1 (5pts)**

One considers in  $\mathbb{C}$  the sequence of general term  $z_n$  defined by:

$$\begin{cases} z_0 = 1 \\ 2z_{n+1} = z_n + i \end{cases}$$

1. Show that, for each integer  $n$ , no vanishing, the module  $r_n$  of  $z_n$  is lower than 1.
2. We set  $z_n = x_n + iy_n$ ,  $x_n$  and  $y_n$  being real numbers and  $u_n = z_n - i$ 
  - a. Find a recurrence relation between  $u_{n+1}$  and  $u_n$ .
  - b. Deduce that the sequence  $(x_n)$  is a geometric sequence which converges towards 0 and the sequences of general terms  $y_n$  and  $r_n$  converge towards 1.
3. Calculate the minor term  $n_0$  such that, for each  $n$  equal or higher than  $n_0$ , one has :  
 $|z_n - i| < 10^{-5}$ .

**Exercise 2 (4pts)**

1. Solve the differential equation :  $9y'' + 4y = 4\sqrt{3}$ .
2. a. Determine among the solutions of this equation the solution  $h$  such that :  $h'(\frac{\pi}{2}) = \frac{4}{3}$   
and  $h''(\frac{\pi}{4}) = \frac{4}{9}$ .  
b. Write  $h(x)$  in the form  $A + B \cos(\omega x + \varphi)$  where  $A, B, \omega$  and  $\varphi$  are four reals that one will specify.
3. Solve in  $\mathbb{R}$  the equation  $h(x) = 0$ .

**Exercise 3 (5pts)**

$f$  is the numerical function defined on  $\mathbb{R}_+^*$  by :  $f(x) = \ln \left[ \frac{e}{2} \left( x + \frac{1}{x} \right) \right]$

One calls  $(C)$  the representative curve of  $f$  in an orthonormal reference  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

1. a. Study  $f$ , then show that  $f$  has a minimum; that one must specify

1/2

2. b. Show that the curve  $(\Gamma)$  of equation  $y = \ln\left(\frac{e}{2}x\right)$  is an asymptote of the curve  $(C)$ .
- c. Draw the curves  $(C)$  and  $(\Gamma)$  in the same orthonormal reference  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .
3. a. Establish that for any  $x$  in  $\mathbb{R}_+^*$ ,  $f'(x) < 1$
- b. Deduce the sign of  $(f(x) - x)$  and the position of the curve  $(C)$  according to the line  $(D)$  of equation  $y = x$
4. a. Deduce from previous results that the sequence  $(u_n)$  which verifies :

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R}_+^* \\ u_{n+1} = f(u_n) = \ln\left[\frac{e}{2}\left(u_n + \frac{1}{u_n}\right)\right] \end{cases}$$

is decreasing and undervalued by 1 for starting by row  $n = 1$  (for starting by row  $n = 0$  if  $u_0 \geq 1$ ).

- b. Show that the sequence  $(u_n)$  converges towards 1.

#### Exercise 4 (6pts)

1. A ballot box contains two white balls and  $n$  black balls, indistinguishable by touch. A player extracts simultaneously two balls from the ballot box and one notes  $A_2$  the event:  $A_2$  : « the player extracted two white balls ». Determine  $n$  so that the probability of  $p(A_2)$  is equal to  $1/15$ .  
**In the following part of the exercise, we will take  $n = 4$ .**
2. A player extracts simultaneously two balls from the ballot box and one notes :  
 $A_0$ : « The player extracts extracts two black balls » ;  
 $A_1$  : « The player extracts one black ball and one white ball » ;  
 $A_2$  : « The player extracts extracts two white balls ».  
  - a. Calculate  $p(A_0)$  and  $p(A_1)$ .
  - b. With this pulling, the player gets three points for each white ball extracted and two points for each black ball extracted. Let  $X$  be the random variable associated to the numbers of points obtained.  
Determine the law of probability of the random variable  $X$  and calculate its mean  $E(X)$ .
3. After this first pulling, the player drawn back the black balls and leaves the white ones, then extracts simultaneously two balls from the ballot box.  
  - a. Give  $p(B_0/A_2)$  and deduce  $p(B_0 \cap A_2)$  ; Calculate  $p(B_0/A_1)$  and  $p(B_0 \cap A_1)$ .  
Deduce that  $p(B_0) = \frac{41}{75}$ .
  - b. Show that  $p(B_2) = \frac{2}{75}$ . Deduce  $p(B_1)$ .

**Exercise N°1** (5 marks)

A spring with no jointed whorls, of stiffness  $k$ , and negligible mass is suspended to a vertical support by one of its ends. A solid  $S$  of mass  $m$  is fixed on the other lower end of the spring. The spring lengthens of  $x_0$  and a position of equilibrium is reached. From its equilibrium position, the spring is stretched by making the solid going down vertically, then it is released. It is noted that  $S$  carries out oscillations on both sides of its equilibrium position of amplitude  $a$  and period  $T_0$ . At the passage of the solid at its equilibrium position, the chronometer is activated locating if it goes up or down. The chronometer is stopped at the end of 20 oscillations. The experimental results are as follows:

$m$ (g)	20	40	60	80	100
$x_0$ (cm)	4.0	8.1	12.2	16.2	20.2
Duration of 20oscillations	8.2	11.5	13.90	16.06	17.91

- 1) Why the duration of 20 oscillations is measured instead of one? (0.5 marks)
- 2) In fact the amplitude of the movement is not constant in the time. Why? (0.5 marks)
- 3) Establish the relation between  $x_0$ ,  $g_0$  (intensity of the gravity),  $m$  and  $k$ . (0.5 marks)
- 4)  $T_0 = 2\pi\sqrt{(m/k)}$  is theoretically established.
  - a) Expose a method that allows determining the value of  $k$ . (0.5 marks)
  - b) Establish the relation giving  $T_0$  according to  $x_0$  and  $g_0$  (1 marks)
  - c) Calculate  $T_0^2$  by placing the values in a table. (0.5 marks)
  - d) Plot  $x_0 = f(T_0^2)$ . (1 marks)
  - e) Deduce  $g_0$  from the curve. (0.5 marks)

**Exercise N°2** (5 marks)

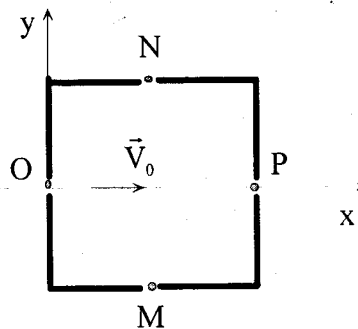
An experiment of luminous interferences using the slits of Young is carried out. Two punctual sources  $F_1$  and  $F_2$  synchronous and coherent are obtained from a device.  $F_1$  and  $F_2$  are separated by a distance  $a=0.75\text{mm}$ . A screen  $E$  orthogonal to the mediator plan of  $F_1$  and  $F_2$  is placed at a distance  $D = 2\text{m}$  of meddle  $I$  of  $F_1F_2$ . The monochromatic light emitted by the sources has as a wavelength  $\lambda$  in the air.

- 1) Schematize the experimental device. (0.5 marks)
- 2) What is observed on the screen  $E$ ? Justify the name of nonlocalised fringes. (0.5 marks)

- 3) Establish the expression of the difference in path between the luminous vibrations interfering at the point M of the screen E such as  $OM = x$ . (1 marks)
- 4) Knowing that the point M defined by  $OM = 9.43\text{mm}$  is located in the middle of the 6<sup>th</sup> brilliant fringe, the central fringe being noted zero, deduce the wavelength  $\lambda$  of the light used. (1 marks)
- 5) A glass strip of parallel face of index of refraction  $n=1.52$  and weak thickness  $e$  is applied to the source  $F_1$ .
  - a) Establish the expression of the new difference in path  $\delta'$ . Is the inter-fringe modified? (1 marks)
  - b) A displacement of  $8.25\text{mm}$  of the central fringe is observed. Justify the direction of displacement, and calculate the thickness  $e$  of the strip. (1 marks)

**Exercise N°3** (5 marks)

In the following device prevails a high vacuum. The force of gravity is neglected compared to the other forces.



A homokinetic beam of protons  $H^+$ , initially accelerated by a tension applied between two plates A and C, penetrates in O with a speed  $V_0 = 800\text{km/s}$  in an enclosure of square section of dimension  $2r = 50\text{cm}$  where openings O M P N are located at the middles of the sides.  $m_p = 1.67 \cdot 10^{-27}\text{kg}$ ;  $q = 1.6 \cdot 10^{-19}\text{C}$  for the proton are given.

- 1) a) What should be the sign of the potential difference  $U = V_A - V_C$ ? Make a diagram. (0.5 marks)
  - b) Calculate in joule and electron volt the kinetic energy of a proton which crosses the opening O. (0.5 marks)
- 2) In this enclosure prevails a uniform magnetic field  $\vec{B}$  so that the protons describe at the speed  $\vec{V}_0$  a quadrant of radius  $r$  before leaving by the opening M.
  - a) Give the expression of the force  $\vec{F}$  which is exerted on a proton of speed  $V_0$  in the magnetic field B. (0.5 marks)
  - b) Specify the direction and the sense of  $\vec{B}$ . (0.25 marks)
  - c) Establish the expression of the value of the magnetic field B according to  $V_0$ ,  $q$ ,  $m_p$  and  $r$ . Calculate numerically B. (1 marks)

- 3) The previous magnetic field  $\vec{B}$  is removed, and an electric field  $\vec{E}$  is applied so that the beam crosses the opening N after describing a parabolic trajectory in the reference mark (O, x, y).
- Give the expression of the force  $F'$  which is exerted on a proton in the uniform electric field  $E$ . (0.5 marks)
  - Specify on a diagram the direction and the sense of  $\vec{E}$  (0.25 marks)
  - Give the expression of the value of the electric field  $E$  according to  $m_p$ ,  $V_0$ ,  $q$  and  $r$ . Calculate numerically  $E$ . (1 marks)
- 4) The fields  $\vec{E}$  and  $\vec{B}$  preserving the previous directions and sense are applied simultaneously. Which relation should be checked by their values so that the protons leave the device by the opening P without being deviated. (0.5 marks)

**Exercise N°4** (5 marks)

A dipole RLC connected in series, consists of a coil and a condenser of capacity  $C = 0.5 \mu\text{F}$ , is supplied by a generator delivering a sinusoidal voltage of variable frequency  $N$ ; the effective voltage  $U$  at the boundaries of the generator is  $0.9\text{V}$

N(Hz)	2000	2100	2150	2200	2250	2275	2300	2325	2350	2375	2400	2450	2500	2600	2700	2800
I(mA)	22	32	42	57	84	102	120	130	118	100	85	60	43	30	22	16

- Plot the curve  $I = f(N)$  (1 marks)
- Determine using the plotted curve:
  - The frequency of resonance  $N_0$  (0.5 marks)
  - The corresponding effective Intensity  $I_0$ . (0.5 marks)
- Calculate the inductance  $L$  of the coil. (1 marks)
- Evaluate using the chart:
  - The bandwidth, (0.5 marks)
  - The factor of quality  $Q$  of the circuit. (0.5 marks)
- Calculate the resistance  $R$  of the circuit. (1 marks)

CONCOURS D'ENTRÉE A L'EAMAC

SESSION DE MAI 2013

EPREUVE DE MATHÉMATIQUES POUR LE CYCLE INGÉNIEUR

DURÉE: 4 HEURES

**EXERCICE 1: (6 points)**

On jette 3 fois un dé cubique parfait dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On note  $a, b, c$  les numéros obtenus. Soit  $Q(x) = ax^2 + bx + c$ .

Déterminer la probabilité de chacun des événements suivants:

A:  $Q(x)$  admet une racine réelle. (2 points)

B:  $Q(x)$  admet deux racines réelles distinctes. (2 points)

C:  $Q(x)$  admet aucune racine réelle. (2 points)

**EXERCICE 2: (5 points)**

Montrer que l'intégrale généralisée

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx$$

converge si et seulement si  $0 < \alpha < 2$ .

**EXERCICE 3: (5 points)**

1°) Montrer que  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^{2n+1} dt = \frac{2^{2n} (n!)^2}{(2n+1)!}$  (1 point).

2°) Soit  $(f_n)_{n \geq 1}$  la suite de fonctions définie sur  $[0, +\infty[$  par:

$$f_n(t) = \begin{cases} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n & \text{si } t \in [0, \sqrt{n}] \\ 0 & \text{si } t \in ]\sqrt{n}, +\infty[ \end{cases}$$

Etudier la convergence simple de  $(f_n)$  sur  $[0, +\infty[$  (1 point)

3°) Montrer que:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt \right) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt \quad (1 \text{ point})$$

4°) Montrer que :

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt = \sqrt{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^{2n+1} dt \quad \text{(1 point)}$$

5°) En déduire que :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

On admettra que :  $n! \cong \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$ . (1 point)

**EXERCICE 4: (4 points)**

On pose  $f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x e^{-nx}}{\text{Log} n}$ .

1°) Montrer que la fonction  $f$  est définie sur  $[0, +\infty[$  **(1 point)**

2°) Etudier la continuité de  $f$  sur  $[0, +\infty[$  **(1 point)**

3°) Montrer que la fonction  $f$  est dérivable sur  $]0, +\infty[$  **(1 point)**

4°) Montrer que  $f$  n'est pas dérivable en 0. **(1 point)**

# CONCOURS D'ENTREE A L'EAMAC - 2013

## Contrôleur de la circulation aérienne

### Epreuve de Physique

#### EXERCICE N°1

Soit le référentiel  $R_0(Ox_0, Oy_0, Oz_0)$  considéré comme galiléen,  $Oz_0$  étant dirigé vers la verticale ascendante. Soit  $\vec{g}$  le champ de pesanteur terrestre. Un disque de centre  $O$ , de rayon  $a$ , tourne dans le plan horizontal  $(Ox_0y_0)$ , autour de  $O$ , à la vitesse angulaire constante  $\omega$ . Ce disque est muni d'une rainure radiale, et dans cette rainure coulisse sans frottement une masselotte  $M$  de masse  $m$ . Soit  $R(Ox, Oy, Oz_c)$  un référentiel lié au disque,  $Ox$  étant porté par la rainure. On appelle  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ , les vecteurs unitaires respectifs des axes  $Ox, Oy, Oz_c$ .

- 1) La masselotte  $M$  est attachée à l'extrémité d'un ressort de constante de raideur  $k$ , de longueur à vide  $l_0$  ; ce ressort est fixé en  $O$  à son autre extrémité.
  - a) Ecrire la relation fondamentale de la dynamique, pour la masselotte  $M$ , dans le référentiel  $(R)$  lié au disque.
  - b) Montrer que  $M$  peut effectuer des oscillations harmoniques, dans  $(R)$ , autour d'une position d'équilibre  $x = x_c$ , sous réserve que  $k$  obéisse à une condition que l'on précisera. Calculer  $x_c$  et la période  $T$  des oscillations. Pensez-vous que la condition ci-dessus soit suffisante pour observer réellement des oscillations harmoniques autour de  $x_c$  ?
- 2) On supprime le ressort, la masselotte étant toujours astreinte à glisser sans frottement dans la rainure. A la date  $t = 0$ ,  $M$  est lâchée sans vitesse initiale à une distance  $x_1$  de  $O$ .
  - a) Donner l'expression de  $x(t)$  ainsi que le module de la réaction  $\vec{N}$  de la rainure sur  $M$ .
  - b) Application numérique : A quel moment  $M$  arrive-t-elle à l'extrémité du disque sachant que le disque effectue une rotation de un tour par seconde et que  $x_1 = \frac{a}{4}$  ?

## EXERCICE N°2

On considère une spire circulaire de rayon  $a$ , de centre  $O$ , placée dans le vide et parcourue par un courant  $I$ . On appelle  $Oz$  l'axe de la spire. Tout point  $M$  de l'espace est repéré par ses coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$ . On désigne par  $B_r, B_\theta, B_z$  les trois composantes cylindriques du champ magnétique  $\vec{B}$  créé par la spire en  $M$ . Par symétrie,  $B_r, B_\theta, B_z$  ne dépendent que des coordonnées  $r$  et  $z$  du point  $M$ .

- 1) Montrer que le champ magnétique  $\vec{B}$  créé par la spire en un point  $M$  d'abscisse  $z$  de l'axe  $Oz$ , a pour composante :

$$B_r(0, z) = 0 ; \quad B_\theta(0, z) = 0 ; \quad B_z(0, z) = \frac{B_0}{\left(1 + \left(\frac{z}{a}\right)^2\right)^{3/2}}$$

- 2) On considère un point  $M$  en dehors de l'axe  $Oz$ .

a) Montrer que la composante  $B_\theta(r, z)$  est nulle.

b) On suppose que le point  $M$  est voisin de l'axe  $Oz$  ( $r \ll a$ ) ; montrer que :

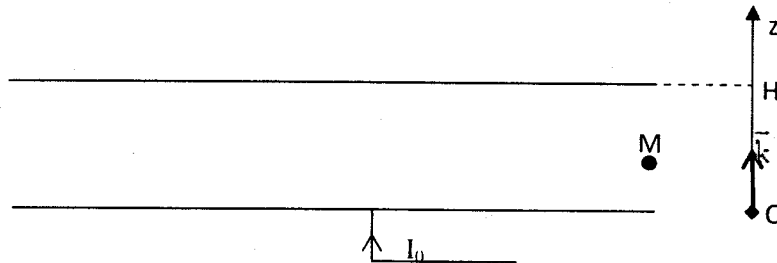
- $B_z(r, z) \approx B_z(0, z)$  à des termes du second ordre près en  $r$  (on pourra effectuer un développement limité des fonctions  $B_z(r, z)$  et  $B_z(0, z)$  au premier ordre).
- La composante  $B_r$  du champ magnétique normale à l'axe  $Oz$  peut s'écrire

$$B_r(r, z) \approx -\frac{r}{2} \frac{\partial}{\partial z} [B_z(0, z)]$$

à des termes du troisième ordre près en  $r$ .

### EXERCICE N°3

On modélise la basse atmosphère par beau temps selon le schéma électrique suivant. L'atmosphère est le milieu contenu entre les armatures d'un condensateur qu'on peut considérer comme plan ; ces armatures sont, d'une part, le sol supposé parfaitement conducteur, et d'autre part un plan conducteur à l'altitude  $H$  qui schématise l'ionosphère ; la surface en regard de ces armatures a une aire notée  $S$ . Tous les champs de vecteurs et de scalaires utilisés ne dépendent que de l'altitude  $z$  du point  $M$  où ils sont définis. On note  $\vec{k}$  le vecteur unitaire de l'axe  $Oz$  orienté suivant la verticale ascendante. L'atmosphère est un milieu légèrement conducteur de l'électricité ; sa permittivité est égale à celle du vide,  $\epsilon_0$ . En un point  $M$  règne un champ électrique  $\vec{E}$  qui a les propriétés du champ électrostatique.



Un courant permanent d'intensité  $I_0$  traverse verticalement l'atmosphère (le sens algébrique suivant lequel est compté  $I_0$  est celui du schéma). Le courant de retour est assuré par les orages dont il ne sera pas question. En un point  $M$  de l'atmosphère, on définit le vecteur densité de courant  $\vec{j}$  par :  $\vec{j} = \frac{I_0}{S} \vec{k}$ . Il est uniforme et relié au champ électrique en  $M$  par la relation :  $\vec{j} = \gamma \vec{E}$  où  $\gamma$  est la conductivité électrique au point  $M$  ; On admet qu'elle varie avec l'altitude suivant la loi  $\gamma = \gamma_0 e^{\frac{z}{a}}$  où  $\gamma_0$  et  $a$  sont des constantes.

$$\gamma_0 \exp\left(\frac{z}{a}\right)$$

Pour les applications numériques, on prendra :

$$H = 50000 \text{ m} ; S = 5,09 \cdot 10^{14} \text{ m}^2 ; a = 4000 \text{ m} ; I_0 = -1500 \text{ A} ; \epsilon_0 = \frac{1}{36 \pi \cdot 10^9} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$$

(Attention au signe de  $I_0$  !).

- 1) a) Exprimer littéralement le champ électrique  $\vec{E}$  en fonction de l'altitude  $z$ .
- b) Au niveau du sol, on mesure le champ électrique  $\vec{E}_c = E_c \vec{k}$  avec  $E_c = -100 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$ . Calculer littéralement puis numériquement  $\gamma_0$ .
- c) Calculer la différence de potentiel entre le sol et le point d'altitude  $z = 1,80 \text{ m}$ . Pourquoi un individu debout n'est pas électrocuté ?
- 2) a) Calculer littéralement la charge surfacique  $\sigma_0$  portée par le sol puis la charge totale  $Q_0$  portée par l'armature constituée par le sol.

- b) Calculer numériquement  $\sigma_0$  et  $Q_0$ .
  - c) Calculer littéralement la charge surfacique  $\sigma_H$  et la charge totale  $Q_H$  de l'armature à l'altitude  $H$ .
  - d) Calculer numériquement  $\sigma_H$  et  $Q_H$ .
- 3) Calculer littéralement puis numériquement la charge totale  $Q_a$  portée par l'atmosphère (armatures non comprises).

#### EXERCICE N°4

- 1) Soit un doublet électrique A (- q), B (+ q) porté par l'axe Ox, et tel que  $AO = OB = a$ . On étudie son action en un point M très éloigné repéré par ses coordonnées polaires  $r, \theta$  ( $r \gg a$ ).
- a) Retrouver l'expression du potentiel  $V$  créé en M par ce dipôle après avoir effectué un développement limité à l'ordre 1 en  $\frac{1}{r}$ .
  - b) En déduire les composantes  $E_r$  et  $E_\theta$  du champ électrique en coordonnées polaires puis l'allure des lignes de champ.
- 2) On soumet ce dipôle à l'action d'un champ uniforme  $\vec{E}_0$  de direction et sens Ox, et dont le potentiel s'annule en O.
- a) Justifier que le dipôle reste en équilibre.
  - b) En déduire, toujours en M éloigné, le potentiel résultant  $V'$  et les composantes  $E'_r$  et  $E'_\theta$  du champ résultant  $\vec{E}'$ .
  - c) Quelle est la nature de l'équipotentielle  $V' = 0$ ? Calculer les nouvelles composantes  $E'_r$  et  $E'_\theta$  du champ résultant  $\vec{E}'$ .

# CONCOURS D'ENTREE A L'EAMAC - Session 2013

## Cycle Ingénieur

### Epreuve de Physique

#### EXERCICE N°1

L'espace étant repéré par rapport à un référentiel galiléen  $Oxyz$  de vecteurs unitaires  $(\mathbf{Oz})$  (Oz axe vertical ascendant), on considère un objet ponctuel de masse  $m$  lancé en  $O$  au temps  $t = 0$  avec une vitesse initiale :

Le champ de gravitation terrestre sera considéré comme uniforme, et on posera  $g$ . On admettra que la résistance de l'air, dans le domaine considéré est de la forme  $\mathbf{R} = -h\mathbf{v}$  est la vitesse de l'objet et  $h$  une constante positive.

- 1) En partant de l'équation fondamentale de la dynamique, déterminer en fonction du temps les composantes de  $\mathbf{v}$ .
- 2) Déterminer en fonction du temps les coordonnées de l'objet.
- 3) Etudier les limites de  $\mathbf{v}$ .
- 4) En déduire l'allure de la trajectoire. On précisera les coordonnées de son sommet. On montrera qu'elle admet une asymptote et on représentera la courbe correspondante.
- 5) Déterminer l'équation de l'hodographe ; tracer la courbe correspondante en ayant soin de préciser les points correspondants respectivement au départ de l'objet, au sommet de la trajectoire et à la partie asymptotique de celle-ci.
- 6) En déduire de l'hodographe la vitesse minimale de l'objet et préciser si celle-ci est atteinte en un point situé sur la partie ascendante ou descendante de la trajectoire.

## EXERCICE N°2

Un endoscope est un appareil optique utilisé en investigation paraclinique permettant l'observation, sous faible grossissement, de cavités et de conduits naturels : appareil digestif, respiratoire. Le tube de l'endoscope comporte un objectif, un système optique transportant l'image objective et un oculaire. La lumière nécessaire à l'observation est conduite jusqu'à l'objet par un guide de lumière parallèle au tube endoscopique

*Conventions pour l'ensemble du problème :*

L'axe optique est orienté dans le sens de propagation de la lumière (de gauche à droite). Les objets et images perpendiculaires à l'axe optique sont mesurés algébriquement sur l'axe orienté vers le haut de la page. Les angles des rayons avec l'axe principal sont évalués algébriquement avec la convention habituelle (sens trigonométrique). Les conditions de l'approximation de Gauss sont supposées remplies.

- 1) On assimile l'objectif à une lentille mince convergente  $L_1$  de distance focale  $f_1$ . L'objet AB assimilé à un segment de droite perpendiculaire à l'axe optique (A sur l'axe) est placé, pour les conditions standard d'utilisation, à 50 mm devant le centre optique  $O_1$  de  $L_1$ . Déterminer par  $\overline{O_1A'B'}$  la position de l'image donnée par objectif. Calculer le grandissement  $\overline{A'B'}/\overline{AB}$ .
- 2) L'image  $A'B'$  est observée à travers un oculaire assimilé à une lentille mince convergente  $L_2$  de centre  $O_2$ , de distance focale image  $f_2$ .
  - a) Pour un œil normal effectuant une observation sans accommodation (observation à travers l'instrument d'une image située à l'infini), indiquer la place du foyer objet  $F_2$  de l'oculaire.
  - b) Calculer le grossissement commercial  $G_0$  de l'appareil défini par :

$\alpha$  étant l'angle sous lequel serait vu directement, par l'œil, l'objet AB placé à 250 mm ;  $\alpha'$  l'angle sous lequel est vu, à travers l'instrument, l'objet placé comme indiqué dans la question 1).

- 3) On admet que l'observateur, par la faculté d'accommodation de son œil, perçoit nettes les images situées de l'infini à 250 mm. Les positions respectives de l'oculaire et de l'objectif n'étant pas modifiées, dans quel intervalle de  $\overline{O_1O_2}$ , l'observateur a-t-il une perception nette de l'objet AB ? Calculer la latitude de mise au point ou profondeur de champ  $\overline{O_1O_2}$ .

### EXERCICE N°3

L'état d'équilibre thermodynamique d'un volume donné de sel paramagnétique ( $1 \text{ cm}^3$ ) est décrit par deux variables indépendantes : le champ magnétique appliqué  $B$  et la température absolue  $T$ .

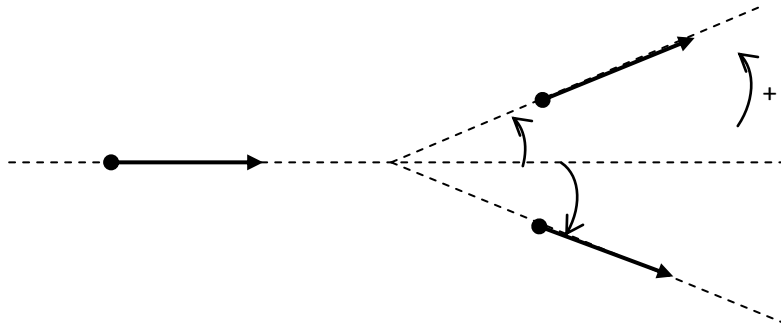
Le moment magnétique  $M$  (parallèle à  $B$ ) de l'unité de volume, est fonction de  $B$  et  $T$ . On fait passer, de manière réversible, le champ magnétique de la valeur  $B$  à  $B+dB$  et la température de la valeur  $T$  à  $T+dT$ . L'échantillon de sel reçoit alors du milieu extérieur le travail  $\delta W$  et la quantité de chaleur  $\delta Q$ .

- 1) a) Quel est le sens physique des coefficients calorimétriques  $\alpha$  et  $\beta$  ?  
b) En appliquant les deux principes sous leur forme différentielle, exprimer  $\alpha$  et  $\beta$  en fonction de  $T$ ,  $\alpha = \dots$ ,  $\beta = \dots$ .
- 2) Le sel étudié obéit à la loi de Curie, c'est-à-dire que son équation d'état est  $M = \frac{C}{T} B$  – où  $C$  est une constante.  
a) Calculer  $\alpha$  et  $\beta$  en fonction de  $B$  et  $T$ , puis en fonction de  $M$  et  $T$ .  
b) En déduire l'expression de  $\alpha$  en fonction de  $B$  et  $T$ . Il s'introduit dans ce calcul une fonction arbitraire de la température,  $f(T)$ . On lui attribuera la valeur donnée par l'expérience, soit :  $f(T) = A \exp(-T/T_0)$  – où  $A$  est une constante.
- 3) a) Le volume considéré ( $1 \text{ cm}^3$ ) de sel paramagnétique est initialement à l'équilibre à la température  $T_i$  dans le champ magnétique  $B_i$ . On annule lentement le champ de manière réversible et adiabatique. En fin d'opération, le sel est à la température  $T_f$  que l'on déterminera.  
b) Application numérique : Le sel considéré est du sulfate de gadolinium hydraté  $\text{Gd}_2(\text{SO}_4)_3 \cdot 8\text{H}_2\text{O}$ , pour lequel  $A = 2,65 \text{ J.degré}$ , et  $C = 78,7 \text{ J.degré.tesla}^{-2}$ . Calculer  $T_f$ , sachant que  $T_i = 2 \text{ K}$  et  $B_i = 0,71 \text{ T}$ .

## EXERCICE N°4

On considère un faisceau de photons monoénergétiques (d'énergie  $E$ , de fréquence  $\nu$ , de quantité de mouvement  $p$ , de longueur d'onde  $\lambda$ ) incidents interagissant avec des électrons cibles (de masse  $m$ ) supposés au repos dans le référentiel galiléen (R) du laboratoire.

Après le choc élastique, les photons ont une énergie  $E'$ , une fréquence  $\nu'$ , une quantité de mouvement  $p'$  et une longueur d'onde  $\lambda'$ ; les électrons ont une énergie  $E_e$ , une quantité de mouvement  $p_e$ . On note  $\theta$  l'angle entre la direction d'incidence et la direction de propagation des photons après le choc,  $\theta'$  l'angle entre la direction d'incidence et la direction de propagation des électrons après le choc. On utilisera les quadrivecteurs impulsion-énergie  $\vec{p}_\gamma$ ,  $\vec{p}_e$  du photon et de l'électron avant le choc, et  $\vec{p}'_\gamma$ ,  $\vec{p}'_e$  pour les mêmes particules après le choc.



- 1) Préciser les coordonnées des quatre quadrivecteurs  $\vec{p}_\gamma$ ,  $\vec{p}_e$ ,  $\vec{p}'_\gamma$ ,  $\vec{p}'_e$  à l'aide des quantités  $E$ ,  $\nu$ ,  $\lambda$ ,  $m$  et de la vitesse de la lumière  $c$ . Exprimer la pseudo-norme de chacun d'eux, et leur six produits scalaires deux à deux.
- 2) Ecrire la loi de conservation du quadrivecteur impulsion-énergie dans le choc des particules.
- 3) L'étude cinématique permet d'obtenir des relations entre trois des paramètres  $\theta$ ,  $\theta'$ ,  $\lambda'$ , la masse  $m$  étant donnée.
  - a) Exprimer  $\lambda'$  à partir de la loi de conservation du 2). En déduire la relation suivante :
   
$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m c} (1 - \cos \theta)$$

- b) Exprimer de même  $\theta'$  et en déduire la relation suivante :
   
$$\cos \theta' = \frac{1 - \frac{E'}{E} \cos \theta}{1 + \frac{E'}{E} \frac{m c^2}{E}}$$

- c) En déduire l'expression de la variation  $\Delta \lambda$  de la longueur d'onde associée aux photons en fonction  $\theta$  et de la constante de Planck  $h$ .

**CONCOURS D'ENTREE AU CYCLE DE CONTROLEUR DE LA  
 CIRCULATION AERIEENNE DE L'ECOLE AFRICAINE DE LA  
 METEOROLOGIE ET  
 DE L'AVIATION CIVILE (EAMAC)  
 SESSION 2013  
 EPREUVE DE : MATHEMATIQUES  
 DUREE : 4 HEURES**

**Exercice 1 (5pts)**

Soit la matrice  $A = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 2m+1 & 3 & m+2 \end{pmatrix}$ .

1. Déterminer le déterminant et le rang de  $A$ .
2. Discuter et résoudre le système suivant: 
$$\begin{cases} mx + y + z = m + 2 \\ x + my + z = 4 - m \\ (2m + 1)x + 3y + (m + 2)z = 2m + 7. \end{cases}$$

**Exercice 2 (4pts)**

Soit  $f \in C([0, +\infty[)$ ,  $a_n = \int_0^1 f(n+x) dx$ ,  $n \in \mathbb{N}$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ .

Déterminer  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f(nx) dx$ .

**Exercice 3 (5pts)**

1. Etudier la dérivabilité au point  $x_0 = 0$  de la fonction  $f$  définie par:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x \ln 2} - \frac{1}{2^x - 1}, & \text{si } x \neq 0, \\ \frac{1}{2}, & x = 0. \end{cases}$$

2. Déterminer le réel  $b$  pour que la fonction  $g$  définie par:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\arccos(1-x)}{\sqrt{x}}, & \text{si } x \in ]0, 1], \\ b, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

soit continue sur  $[0, 1]$ .

**Exercice 4 (6pts)**

Calculer la limite suivante:  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\ln \operatorname{ctgx} + 2x - \frac{\pi}{2}}{(1 - \tan x)^3}$ .

**CONCOURS D'ENTREE AU CYCLE D'INGENIEUR DE L'ECOLE  
AFRICAINNE DE LA METEOROLOGIE ET DE L'AVIATION CIVILE (EAMAC)  
SESSION 2013  
EPREUVE DE : MATHEMATIQUES  
DUREE : 4 HEURES**

**Exercice 1** (5 pts)

1. Montrer que si  $f \in \mathbb{R}[a, b]$ , alors  $\exists \theta \in ]a, b[$  tel que:  $\int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(t) dt$ .

2. Soit  $f \in C[a, b]$ ,  $a > 0$  et  $\int_a^b f(x) dx = 0$ . Montrer qu'il existe  $\theta \in ]a, b[$  tel que:

$$\int_a^{\theta} f(x) dx = \theta f(\theta).$$

**Exercice 2** (4 pts)

Déterminer la somme de la série  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ ,  $u_n = (-1)^{n-1} \frac{n}{(n+1)(n+2)} x^{n+1}$ .

**Exercice 3** (5 pts)

Déterminer l'extremum de la fonction  $f$  définie par:  $f(x, y, z) = 2x^3 yz - x^2 - y^2 - z^2$

**Exercice 4** (6 pts)

1) Exprimer  $\frac{\sin 3\alpha}{\sin \alpha}$  et  $\frac{\sin 4\alpha}{\sin \alpha}$  en fonction de  $\cos \alpha$ .

2) Dans  $M_n(\mathbb{R})$ , on considère la matrice suivante:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & & & \\ b & a & b & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & & b & a & b \\ & & & b & a \end{pmatrix}$$

4) et on désigne par  $P_n(\lambda)$  son polynôme caractéristique. Déterminer une relation de récurrence liant  $P_n, P_{n-1}, P_{n-2}$  (pour  $n \geq 4$ )

2/ 5) On pose  $\lambda = a + 2b \cos \alpha$ . Calculer directement  $P_2(\lambda)$  et  $P_3(\lambda)$  en fonction de  $\alpha$ . En déduire  $P_n(\lambda)$  en fonction de  $\alpha$ .

4 6) Déterminer les valeurs propres  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  de  $A$ .  
Montrer que le vecteur propre  $V_k$  associé à  $\lambda_k$  a pour composantes  $(\sin \omega, \sin 2\omega, \dots, \sin n\omega)$  en précisant la valeur de  $\omega$ .

**CONCOURS D'ENTREE AUX CYCLES DE TECHNICIEN SUPERIEUR ET  
TECHNICIEN DE L'ECOLE AFRICAINE DE LA METEOROLOGIE ET DE  
L'AVIATION CIVILE (EAMAC)**

**SESSION 2013**

EPREUVE DE : MATHÉMATIQUES

DURÉE : 3 HEURES

**Exercice 1 (4pts)**

1. Résoudre dans l'ensemble  $\mathbb{C}$  des nombres complexes, l'équation suivante:

$$iz^2 - 2iz + i - 2 = 0.$$

2. Donner une écriture trigonométrique de la solution imaginaire pure.

**Exercice 2 (6pts)**

Le PDG d'une entreprise vous confie que pendant une période d'hivers, ses observations lui ont permis de dresser le tableau suivant, dans lequel  $x$  désigne en degrés la température moyenne extérieure au cours de 24 heures et  $y$  la consommation en fuel (exprimée en litres) de sa chaudière au cours de ces même 24 heures.

$x_i$	-5	-3	0	5	10
$y_i$	40	38	34	27	20

Le PDG vous demande:

1. De calculer le coefficient de corrélation linéaire entre  $x$  et  $y$ .
2. De déterminer par la méthode des moindres carrés, l'équation de la droite d'ajustement de  $y$  en  $x$ .
3. Quelle estimation de consommation peut-t-il faire pour la durée d'une vague de froid de température journalière de  $-10^\circ$  pendant quatre jours?

**Exercice 3 (4pts)**

Déterminer les primitives des fonctions suivantes:  $f(x) = \sin^3 x$  et  $g(x) = \tan^4 x$ .

**Exercice 4 (6pts)**

On considère la fonction  $f(x) = x - \ln|x|$

1. Etudier les variations de cette fonction et tracer son graphique ( $C$ ). (unité graphique 1cm)
2. On coupe ( $C$ ) par la droite d'équation  $y = x + m$ . Montrer qu'il y a toujours deux points d'intersection,  $M_1$  et  $M_2$ , et trouver l'ensemble des positions du milieu,  $I$ , de  $[M_1M_2]$ .
3. Calculer l'aire de la partie du plan comprise entre la courbe ( $C$ ), la droite d'équation  $y = x$  et les droites d'équations  $x = 1$  et  $x = e$ .

<b>CONCOURS D'ENTREE A L'EAMAC</b> <b>NIVEAU : INGENIEUR</b> <b>SESSION 2013</b>	<b>PROPOSITION PHYSIQUE 2</b>  <b>DUREE : 3 HEURES</b>
--	--

**EXERCICE N°1 : 1**

- 1°) On considère un conducteur filiforme, de longueur  $2L$ , chargé uniformément avec la densité linéique de charge  $\lambda$ . On considère le point  $M$  de la médiatrice, situé à la distance  $d$  du centre  $O$  du segment.
- a°) Déterminer le champ électrostatique créé en  $M$  par la tige conductrice.
- b°) En déduire, en ce point  $M$ , le champ créé par le fil supposé infini.
- 2°) Le fil est disposé de manière à former une spire carrée de côté  $2a$ . On désigne par  $O'$  le point de concours des diagonales du carré et par  $\vec{O'z}$ , l'axe orthogonal au plan du carré. Déterminer le champ électrostatique créé par cette distribution de charges en un point  $P$  situé sur l'axe  $\vec{O'z}$ , à la distance  $z$  de  $O'$ .

**EXERCICE N°2 :**

Un point mobile  $M$  se déplace, relativement à un référentiel  $R(Oxyz)$ , le long d'une courbe d'équations paramétriques :

$$\begin{cases} x(t) = a \cos \omega t \\ y(t) = a \sin \omega t \\ z(t) = bt \end{cases} \quad \text{où } \omega, a \text{ et } b \text{ sont des constantes positives.}$$

- 1°) Quelle est la nature du mouvement du point mobile  $M$  ?
- 2°) Exprimer, dans la base  $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$  se rapportant à  $R$ , les composantes de sa vitesse et de son accélération. Calculer leurs normes dans le cas où  $\omega=2\pi \text{ rad/s}$ ;  $a=0,3\text{cm}$  et  $b = \frac{\pi}{5} \text{ cm/s}$
- 3°) Trouver la vitesse et l'accélération en coordonnées intrinsèques. En déduire le rayon de courbure de la trajectoire

**EXERCICE N°3**

Un méson  $\pi$  ayant une masse au repos  $m_\pi$  se désintègre pour donner un méson  $\mu$  (de masse  $m_\mu$  au repos) et un neutrino  $\nu$  de masse au repos  $m_\nu$ .

- 1°) Calculer les énergies cinétiques  $T_\mu$  et  $T_\nu$  du méson  $\mu$  et du neutrino. Le neutrino ayant une

masse nulle montrer que : 
$$T_\mu = \frac{(m_\pi - m_\mu)^2 c^2}{2m_\pi}$$

- 2°) On donne  $m_\pi=273m_e$ ,  $m_\mu=207m_e$  où  $m_e$  est la masse de l'électron. Calculer  $T_\mu$  et  $T_\nu$  en Mev sachant que l'énergie au repos d'un électron est égale à  $0.511\text{MeV}$ .
- 3°) Calculer en  $\text{MeV}/c$  les quantités de mouvement  $P_\mu$  et  $P_\nu$  des deux particules.

**EXERCICE N°4 :**

1°) On comprime de façon isotherme, un gaz parfait ( $\gamma = 1,4$ ), de la pression  $P_0 = 1\text{atm}$  à la pression  $P_1 = 20\text{atm}$  à la température  $T_0 = 273\text{K}$ . Le gaz est ensuite détendu adiabatiquement de façon réversible jusqu'à la pression  $P_0 = 1\text{atm}$ . Calculer la température finale  $T_1$  après cette double opération.

2°) a) On recommence les deux opérations précédentes à la température constante  $T_1$ . Calculer la nouvelle température finale  $T_2$  du gaz.

b) Trouver la formule générale de la température  $T_n$  du gaz, atteinte à la fin de  $n$  doubles opérations successives décrites précédemment.

Application numérique :  $n = 4$  et  $n = 5$ . Quel est l'intérêt de ce procédé ?

<b>CONCOURS D'ENTREE A L'EAMAC</b> <b>NIVEAU : TECHNICIEN ET TECHNICIEN SUPERIEUR</b> <b>SESSION 2013</b>	<b>EPREUVE DE PHYSIQUE</b> <b>DUREE : 3 HEURES</b>
---	---

**Exercice n°1 (5pts)**

Un joueur de tennis frappe la balle à une hauteur  $h= 2,40\text{m}$ . Le vecteur vitesse de la balle est dirigé vers le bas, fait un angle  $\alpha =10^\circ$  avec l'horizontale et a une valeur  $V_0=30\text{m/s}$ .

- 1°) Faire un schéma en représentant le vecteur vitesse  $\vec{V}_0$  dans un repère  $(O,x,y)$ . **(1pt)**
- 2°) Etablir les équations horaires du mouvement de la balle  $x(t)$  et  $y(t)$ . **(1pt)**
- 3°) En Déduire l'équation de la trajectoire. **(0,5pt)**
- 4°) la balle passera-t-elle au dessus du filet de  $0,91\text{m}$  situé à  $11,89\text{m}$  du joueur? **(1,5pt)**
- 5°) Quelle sera la vitesse de la balle en touchant le sol? **(1pt)**

**On donne** :  $g=10\text{N/kg}$ .

**Exercice n°2 (5pts)**

Dans une expérience de Melde, un vibreur de fréquence  $N=100\text{Hz}$ , produit sur une corde AB de longueur  $\ell = 1\text{m}$ , des ondes stationnaires avec un nœud à chaque extrémité (il n'y a pas d'autres nœuds). La corde est soumise à la tension  $F= 400\text{N}$ .

- 1°) Qu'appelle-t-on ondes stationnaires? **(0,5pt)**
- 2°) Schématiser l'aspect de la corde. **(0,5pt)**
- 3°) Calculer la masse  $M$  de la corde. **(1pt)**
- 4°) La largeur maximale d'un fuseau ou ventre est de  $4\text{mm}$ . Etablir l'expression de l'élongation d'un point  $M$  de la corde, situé à la distance  $x$  de l'extrémité fixe B. Faire l'application numérique pour  $x=25\text{cm}$ . **(1,5pt)**
- 5°) Quelles valeurs faut-il donner à la tension  $F$  pour obtenir  $K$  fuseaux. Faire une application numérique pour  $K=4$ . **(1,5pt)**

**Exercice n°3 (5pts)**

Une bobine de section circulaire est constituée par un fil de cuivre de longueur  $\lambda$  bobiné régulièrement. On suppose que les spires sont pratiquement situées dans un plan perpendiculaire à l'axe du solénoïde. La longueur de la bobine vaut  $\ell=1000\text{mm}$ , son inductance a pour valeur  $L= 85 \text{ mH}$ .

- 1°) Calculer la longueur  $\lambda$  du fil de cuivre. On donne  $\mu_0 = 4\pi 10^{-7}$  SI. (1pt)
- 2°) Cette bobine est montée en série avec un conducteur ohmique aux bornes d'un générateur de tension continue. Lorsqu'on ferme le circuit par l'intermédiaire d'un interrupteur K l'intensité du courant passe de 0 à sa valeur maximale  $I_{\max}=2A$  en une durée  $t_1=50ms$ . Calculer la valeur moyenne de la force électromotrice fém d'auto-induction (1pt)
- 3°) On ouvre maintenant l'interrupteur K.
- Que peut-on observer ? (0,5pt)
  - Comment annuler cet inconvénient en utilisant une diode et un conducteur ohmique. (0,5 pt)
  - Montrer que la dérivation introduite ne modifie pas le fonctionnement en régime permanent. (0,5pt)
- 4°) Calculer l'énergie électromagnétique libérée dans le circuit lors de l'ouverture de l'interrupteur. (1,5 pt)

#### **Exercice n°4 (5pts)**

- 1°) On branche un voltmètre aux bornes d'une source de courant alternatif. Il indique 220V. La fréquence du courant est 50Hz. Quelle est la valeur maximale de la tension de la source ? (0,5pt)
- 2°) On dispose en série aux bornes de la source précédente un conducteur ohmique de résistance R, une bobine B de résistance r et d'inductance L et un ampèremètre. L'ampèremètre indique  $I= 3,5A$ . Un voltmètre branché aux bornes du conducteur R indique  $U_R= 140V$  et aux de la bobine B,  $U_B=120,8V$ .
- Déterminer les impédances  $Z_R$  du conducteur ohmique,  $Z_B$  de la bobine et Z de l'ensemble de la bobine et du conducteur. (1,5pt)
  - Calculer les valeurs de R, r, et L. (1,5pt)
  - Déterminer le déphasage entre la tension aux bornes de la source et l'intensité du courant. (1pt)
  - Ecrire l'expression de l'intensité du courant en prenant comme origine des temps l'instant où la tension est maximale. (0,5pt)

**EXERCICE N°1**

Un corps parachuté, de masse  $m$  constante, subit dans son mouvement de chute verticale suivant l'axe  $(O,x)$  une force de freinage  $\vec{F} = -k\vec{v}$  où  $k$ , réel positif, désigne le coefficient de frottement visqueux puis  $\vec{v}$  et  $v$  sont respectivement le vecteur vitesse et son module. L'intensité de la pesanteur,  $g$ , au lieu de la chute est supposée uniforme. La vitesse initiale est nulle à l'origine du mouvement (à  $t=0$ ,  $v(t=0) = v_0=0$  et  $x(t=0) = 0$ ).

1°) Montrer que l'équation différentielle qui caractérise le mouvement du corps parachuté peut

se mettre sous la forme suivante : 
$$\frac{dv}{dt} = \alpha \left( 1 - \frac{v^2}{\beta^2} \right).$$

En précisant la dimension cinématique des constantes  $\alpha$  et  $\beta$ . Donner leurs expressions respectives en fonction de  $m$ ,  $g$  et  $k$ . En déduire la vitesse limite atteinte par le corps au cours du mouvement ?

2°) Déterminer la loi horaire du mouvement  $x(t)$ . On donne :  $g=10\text{m.s}^{-2}$  ;  $m= 25 \text{ kg}$  ; et  $k= 10 \text{ N.s/m}$ .

**EXERCICE N°2 :**

Un électron décrit une boucle de courant dans son mouvement circulaire uniforme autour du proton de l'atome d'hydrogène.

1°) En appliquant la loi de Biot et Savart déterminer les caractéristiques du vecteur champ magnétique créé par ce courant électronique au point où est placé le proton.

2°) Application numérique. Calculer l'intensité du champ magnétique.

On donne : la masse de l'électron  $m_e=9,31. 10^{-31}\text{Kg}$ ,  
la célérité de la lumière  $c= 3. 10^8\text{m/s}$ ,  
la perméabilité du vide  $\mu_0=4\pi. 10^{-7}\text{H/m}$ ,  
le rayon du cercle  $a= 0,53. 10^{-10}\text{m}$ .

**EXERCICE N°3 :**

Une caisse de poids  $1200\text{N}$  repose sur un plan incliné d'un angle  $\alpha$  sur l'horizontal. On tire sur la caisse avec une corde faisant un angle  $u$  avec la ligne de plus grande pente du plan. Le coefficient de frottement de la caisse sur le plan est  $k = \text{tg}\phi$ .

1°) Calculer la force  $\vec{T}$  capable de provoquer le glissement de la caisse.

2°) La force  $\vec{T}$  est une fonction de  $u$ . Déterminer l'angle le plus favorable à la traction de la caisse.

Application numérique :  $k = 0,3$  ; pente du plan définie par  $\sin\alpha = 0,15$

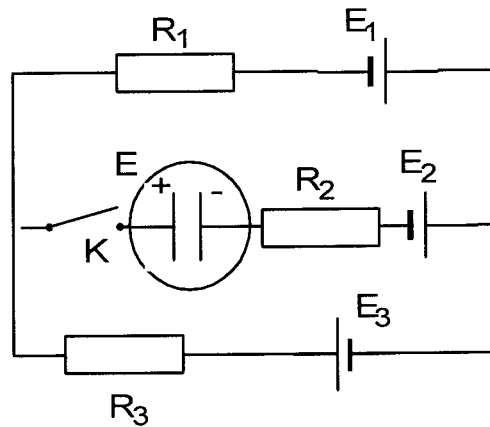
**EXERCICE N°4 :**

On considère le réseau de la figure suivante :

1°) L'interrupteur K étant fermé, déterminer les courants  $I_1$ ,  $I_2$  et  $I_3$  traversant les résistances  $R_1$ ,  $R_2$  et  $R_3$  respectivement

2°) L'interrupteur K étant ouvert, calculer la puissance dissipée dans la résistance  $R_1$ .

AN :  $R_1 = 3\Omega$ ,  $R_2 = 2\Omega$ ,  $R_3 = 3\Omega$ ,  $E_1 = 3V$ ,  $E_2 = 6V$ ,  $E_3 = 2V$ ,  $E = 1V$ .



### Exercice 1

On considère un gaz parfait enfermé dans une enceinte diatherme ayant la forme d'un cylindre dont l'une des bases est un piston mobile. Le milieu extérieur est à la température constante  $T_0$  et à la pression constante  $P_0$ .

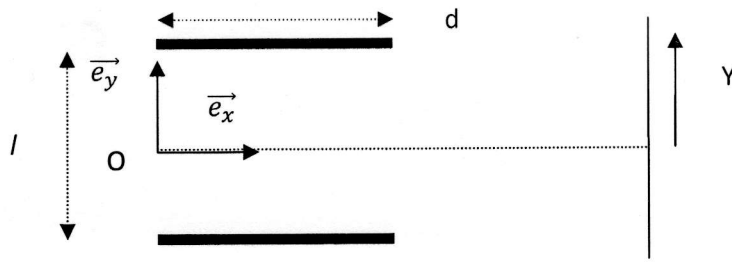
- 1) Déterminer l'expression du volume  $V_0$  occupé par le gaz lorsqu'il est en équilibre avec le milieu extérieur.
- 2) On prépare le système de manière que son volume soit égale  $\frac{V_0}{4}$  et on bloque le piston. Quel est le nouvel état d'équilibre du système ?
- 3) A partir cet état imposé au système, on débloque le piston ; décrire l'évolution de l'état du gaz.

### Exercice 2

Un canon à électrons est formé par deux plans métalliques parallèles ; le premier plan, appelé cathode  $C$  comporte un filament chauffé qui émet des électrons. L'autre plan appelé anode  $A$  est percé d'un trou qui laisse passer les électrons accélérés. Le canon à électrons permet donc d'obtenir un faisceau rectiligne d'électrons. Ce faisceau peut être dévié à travers les plaques d'un condensateur plan ; c'est le principe de fonctionnement d'un oscilloscope cathodique.

- 1) En supposant que la différence de potentiel électrique  $U = V_A - V_C$  entre l'anode et la cathode est positive, déterminer l'expression de la vitesse  $v$  des électrons à la sortie de l'anode ; on admet que les électrons sont émis sans vitesse initiale.
- 2) On considère un condensateur plan à plaques horizontales et on définit un repère cartésien d'étude  $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$  tel que les plaques soient parallèles au plan  $(O, \vec{e}_z, \vec{e}_x)$  et l'épaisseur du condensateur est parallèle à l'axe  $(O, \vec{e}_y)$ . On suppose que l'axe  $(O, \vec{e}_x)$  passe par le milieu des plaques avec le point  $O$  situé juste à l'entrée du champ électrique uniforme  $\vec{E} = -E\vec{e}_y$  entre les plaques. A partir du point  $O$ , avec une vitesse initiale  $\vec{v}_0 = v_0\vec{e}_x$ , un électron issu d'un canon à électrons, traverse le champ avant d'en sortir. La distance horizontale des plaques suivant l'axe  $(O, \vec{e}_x)$  est  $d$  ; voir le schéma de la figure 1 ci-dessous.
  - a) Montrer que la trajectoire de l'électron est parabolique à l'intérieur des plaques
  - b) On s'intéresse au point d'impact de l'électron, sur un écran perpendiculaire à l'axe  $(O, \vec{e}_x)$ . Si  $Y$  est la distance de ce point par rapport à l'axe  $(O, \vec{e}_x)$ , montrer que  $Y$  est proportionnel à la tension  $U$  appliquée entre les plaques du condensateur.

Figure 1 :



### Exercice 3

On considère une sphère, de centre  $O$  et de rayon  $R$ , dont la charge électrique totale  $Q$  est uniformément répartie dans le volume de la sphère.

- 1) Déterminer le champ électrique  $\vec{E}$  créé par cette sphère en tout  $M$  de l'espace en appliquant le théorème de Gauss.
- 2) Dédire du calcul précédent le potentiel électrique  $V$  créé par la sphère en tout point  $M$  de l'espace.

### Exercice 4

Les niveaux d'énergie  $E_n$  de l'atome d'hydrogène ont des valeurs discrètes données par la relation :

$$E_n = -\frac{E_0}{n^2}$$

Dans cette expression,  $n$  est un entier tel que  $n \geq 1$  et  $E_0 = 13,6 \text{ eV}$

- 1) Déterminer le niveau fondamental de l'atome
- 2) Déterminer l'expression de l'énergie d'un niveau excité
- 3) Quel est le niveau d'énergie de l'atome ionisé ?
- 4) Quelle énergie faut-il fournir à l'atome pour l'ioniser depuis son niveau fondamental ?
- 5) L'atome étant au niveau fondamental, il absorbe un photon pour passer à un niveau excité ; déterminer l'expression de la fréquence du photon absorbé.

&&&&

**Exercice 1 : 5 points**

Soit  $f$  une fonction définie sur  $\mathfrak{R}$  Soit  $x_0 \in \mathfrak{R}$ .

- 1) Donner la définition de dérivabilité en  $x_0$  pour la fonction  $f$ .
- 2) On suppose que  $f$  est 3 fois dérivable sur  $\mathfrak{R}$ . Ecrire la formule de Taylor-Young à l'ordre 3 près de  $x_0$

**Exercice 2 : 3 points**

Soit  $f : \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$  définie par  $f(0)=0$  et  $f(x) = x + \frac{\sqrt{x^2}}{x}$  si  $x \neq 0$ .

Déterminer l'ensemble des points où elle est continue.

**Exercice 3 : 5 points**

1. Soit  $A \in M_n(\mathbb{K})$  une matrice telle que  $A^k = 0$  pour un entier  $k$ . Montrer que

$$I_n = I_n - A + A - A^2 + A^2 - \dots + A^{k-1} - A^{k-1} + A^{k-1}$$

2. Montrer que la matrice  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  est telle que  $A^3 = 0$ . Calculer l'inverse

de la matrice  $B = I_3 - A$ .

**Exercice 4 : 7 points**

Soit  $A$  et  $B$  des parties d'un ensemble  $E$ . Montrer que :

- 1 -  $(A \Delta B = A \cap B) \Leftrightarrow (A = B = \emptyset)$ .
- 2 -  $(A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A) = (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)$ .
- 3 -  $A \Delta B = B \Delta A$ .
- 4 -  $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$ .
- 5 -  $A \Delta B = \emptyset \Leftrightarrow A = B$ .
- 6 -  $A \Delta C = B \Delta C \Leftrightarrow A = B$

# EAMAC – 2014 - SUJET M-I-5

## Exercice 1 (6 points)

Soient  $A, B$  deux sous-ensembles de  $E$ ,  $f$  une application définie par

$$f: P(E) \rightarrow P(A) \times P(B)$$

$$f(X) = (X \cap A, X \cap B)$$

1. Démontrer que  $f$  est injective ssi  $A \cup B = E$
2. Démontrer que  $f$  est surjective ssi  $A \cap B = \emptyset$
3. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que  $f$  soit bijective et déterminer  $f^{-1}$

## Exercice 2 (6 points)

Soit  $A$  un anneau commutatif. On appelle radical de l'idéal propre  $I$  l'ensemble

$$\sqrt{I} = \{x \in A / \exists n \in \mathbb{N}, x^n \in I\}.$$

1. Montrer que  $\sqrt{I}$  est un idéal
2. Que se passe-t-il si  $I = 0$
3. Montrer que  $\sqrt{\sqrt{I}} = \sqrt{I} \cap \sqrt{I} = \sqrt{I}$
4. Quel est le radical d'un idéal premier  $\mathcal{J}$ ?
5. Déterminer complètement le radical d'un idéal  $\mathcal{J} = \sqrt{m}$  de  $Z$  où  $m = p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}$
6. Déterminer  $I + J$ ,  $I \cap J$ ,  $\sqrt{I + J}$  pour :
  - (a)  $I = 8Z, J = 12Z$  dans  $Z$
  - (b)  $I = (X - 1), J = (X)$  dans  $Z[X]$

### **Exercice 3 (4 points)**

Soit  $(f_n)$  une suite de fonctions définie par

1. Etudier la convergence simple de cette suite sur  $\mathbb{R}$
2. Montrer que  $(f_n)$  converge uniformément sur  $[\alpha, +\infty[$
3. la convergence uniforme sur  $[0, +\infty[$

### **Exercice 4 (4 points)**

Etudier la série de terme général  $u_n$  lorsque :

1.  $\frac{1}{n}$

2.  $\frac{1}{n^2}$

3.  $\frac{1}{n^3}$



Une boîte contient **12** cartons, indiscernables au toucher, portant les **12** nombres complexes du tableau précédent (Chaque carton porte un seul nombre complexe):

2. On tire au hasard un carton de la boîte (On suppose l'équiprobabilité des tirages).

- Quelle est la probabilité de tirer un carton portant un nombre réel?
- Quelle est la probabilité de tirer un carton portant un nombre complexe dont le module est égal à  $\sqrt{2}$  ?
- Quelle est la probabilité de tirer un carton portant un nombre complexe dont un argument  $\theta$  est tel que:  $0 \leq \theta \leq \pi/2$  ?

3. Un jeu consiste à tirer un carton de la boîte précédente. Si le nombre complexe inscrit sur le carton tiré est de module **3**, le joueur gagne **10 000** points et le jeu s'arrête. Sinon, le carton tiré est remis dans la boîte et le joueur procède à un deuxième tirage; si ce carton porte un nombre complexe de module **3**, le joueur gagne **8 000** points, s'il est de module **2**, il gagne **5 000** points sinon il ne gagne rien et le jeu s'arrête.

Soit **X** la variable aléatoire égale au gain du joueur.

- Donner la loi de probabilité de **X** (On pourra s'aider d'un arbre).
- Calculer l'espérance mathématique de **X**.

#### Exercice 4 ( points)

1) On considère la fonction **g** définie sur **R** par :  $g(x) = -x^3 - x^2 - 2x + 2$ .

- Dresser le tableau de variations de **g**.
- Montrer que **g** réalise une bijection de **R** sur **R**.
- Montrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet dans **R** une unique solution  $\alpha$  telle que  $0,6 \leq \alpha \leq 0,7$ .

2) On considère la fonction **f** définie sur **R** par :  $f(x) = \frac{2xe^{-x}}{x^2 + 2}$ .

a) Calculer  $f'(x)$ , puis vérifier que  $f'(x) = \frac{2g(x)e^{-x}}{(x^2 + 2)^2}$

b) Dresser le tableau de variation de **f**.

c) Tracer la courbe représentative (C) de **f** dans un repère orthogonal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  avec  $\|\vec{i}\| = 1\text{cm}$ ,  $\|\vec{j}\| = 5\text{cm}$ .

3) On considère la suite numérique  $(U_n)$  définie pour tout entier naturel  $n \geq 1$  par :

$$U_n = \int_n^{n+1} f(t) dt .$$

On ne cherche pas à calculer l'intégrale  $U_n$

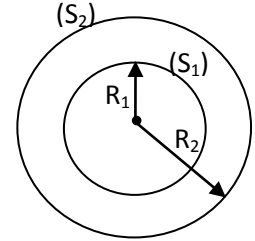
a) Montrer que pour tout entier naturel  $n \geq 1$ :  $0 \leq U_n \leq (1 - \frac{1}{e})e^{-n}$ . En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$ .

b) Déterminer un entier naturel  $n_0$  tel que pour tout  $n \geq n_0$ ,  $0 \leq U_n \leq 10^{-5}$ .

## EAMAC – 2014 - SUJET P-C-5

### Exercice 1

- I. Une sphère conductrice creuse ( $S_1$ ) de centre O et de rayon  $R_1$  porte une charge Q.
- 1) Déterminer le vecteur-champ électrique en tout point M de l'espace situé à la distance r du point O.
  - 2) Déterminer le potentiel électrique en tout point de l'espace.
- II. On place concentriquement à la sphère ( $S_1$ ) portant la charge Q, une autre sphère creuse conductrice ( $S_2$ ) de rayon  $R_2$  portant une charge  $Q_0$ .
- 1) Donner et justifier la répartition des charges sur ces conducteurs.
  - 2) Déterminer les vecteurs-champ électriques, en tout point M de l'espace tel que  $OM = r$ .
  - 3) Déterminer les potentiels, en tout point M de l'espace tel que  $OM = r$ . En déduire les potentiels électriques  $V_1$  de ( $S_1$ ) et  $V_2$  de ( $S_2$ ).
  - 4) Déterminer la capacité C du condensateur ainsi formé.
  - 5) On relie ( $S_2$ ) au sol, déterminer la nouvelle valeur  $V_1'$  du potentiel de ( $S_1$ ).



### Exercice 2

On considère le réseau électrique comprenant :

un générateur de force électromotrice  $E = 12 \text{ V}$  et de résistance interne  $r = 1 \Omega$  et des résistances, connectés selon le montage de la figure 1.

Les puissances consommées dans les résistances  $R_1, R_2, R_3, R_4$  sont respectivement :  $P_1 = 6 \text{ W}$  ;  $P_2 = 10 \text{ W}$  ;  $P_3 = 1,5 \text{ W}$  ;  $P_4 = 2,5 \text{ W}$ .

La différence de potentiel aux bornes des points A et D est :  $U_{AD} = 10 \text{ V}$ .

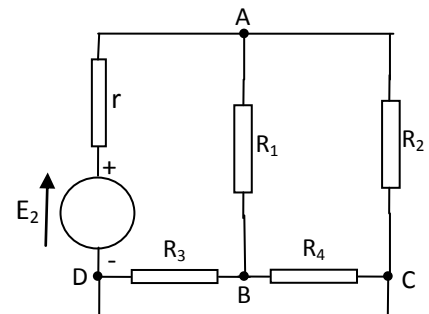


Figure 1

- 1) Déterminer la puissance disponible aux bornes du générateur ( $E, r$ ).
- 2) Calculer les intensités et les sens des courants dans les différentes branches du réseau.
- 3) On enlève la résistance  $R_3$  du circuit. Déterminer les éléments caractéristiques ( $E_{Th}, R_{Th}$ ) du générateur de tension de Thévenin correspondant au dipôle BD du réseau électrique restant. En déduire le schéma du modèle équivalent de Thévenin du dipôle BD, ainsi que l'intensité du courant passant par  $R_3$  dans le réseau électrique initial.

### Exercice 3

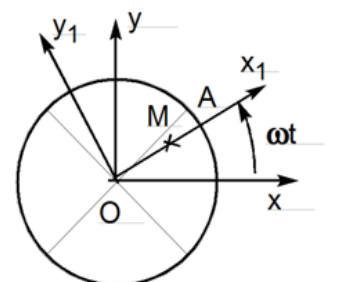
Dans un plan  $xOy$  d'un repère fixe orthonormé direct  $R(O; \vec{x}, \vec{y})$ , un disque de rayon  $r$  et de centre O tourne autour de l'axe  $Oz$  à une vitesse angulaire constante  $\omega$ .

Soit  $R_1(O; \vec{x}_1, \vec{y}_1)$  un repère orthonormé direct lié au disque.

Un point M part à l'instant  $t = 0$  du point O pour aller vers le point A à une vitesse linéaire constante  $V$ .

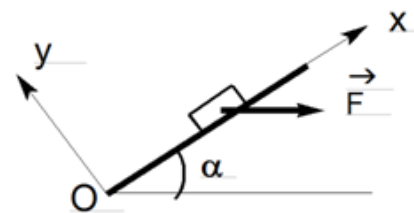
En exprimant les résultats sur  $R_1$ , déterminer pour le point M

- 1°/ - la loi horaire  $x_1(t)$  sur  $Ox_1$
- 2°/ - les vecteurs vitesses relative, d'entraînement et absolue
- 3°/ - les vecteurs accélérations relative et de Coriolis.



Exercice 4 :

Un corps matériel de poids  $P$  est placé sur un plan incliné d'un angle  $\alpha$  par rapport à l'horizontale. Soit  $f$  le coefficient de frottement de glissement. Dans le cas où  $(\cos \alpha - f \sin \alpha)$  est positif, on demande :



1°/ - d'énumérer les forces appliquées au corps

Matériel

2°/ - de déterminer la force horizontale  $F$  permettant de maintenir en équilibre ce corps matériel.

---

## EAMAC – 2014 - SUJET P-I-8

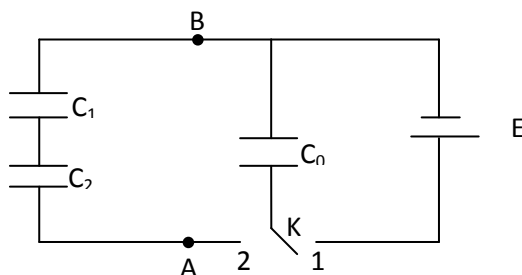
### EXERCICE I (5points)

Un point se déplace sur une hélice circulaire représenté paramétriquement dans le repère orthonormé direct  $Oxyz$  par les relations suivantes :

- 1) Montrer que le vecteur vitesse fait un angle constant avec l'axe  $Oz$ .
- 2) Déterminer les composantes du vecteur accélération et en déduire le rayon de courbure de la trajectoire.

### EXERCICE II (5points)

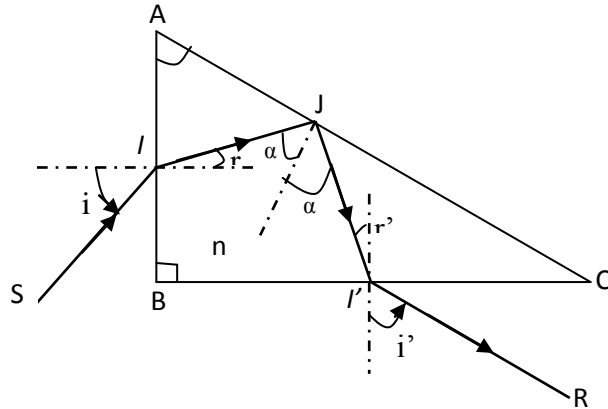
Soit le montage du schéma ci-dessous



- 1) On place l'interrupteur en position 1. Quelle est la charge  $Q_0$  de  $C_0$  ?
- 2) On place l'interrupteur dans la position 2. Calculer  $V_A - V_B$  à l'équilibre et les charges  $Q_0'$  ;  $Q_1$  et  $Q_2$  des condensateurs  $C_0$ ,  $C_1$ ,  $C_2$ .
- 3) Montrer la répartition des charges sur chaque condensateur et vérifier si le principe de conservation de la charge est respecté.

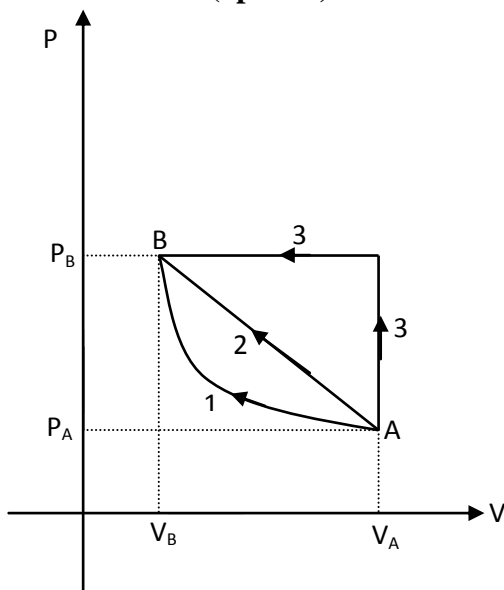
### EXERCICE III (5points)

Un prisme de verre, d'indice  $n = 1,60$  pour la radiation jaune utilisée, a pour section droite un triangle rectangle  $ABC$ . Un rayon lumineux  $SI$ , situé dans le plan de section droite, pénètre par la face  $AB$  sous l'angle d'incidence  $i$ , se réfléchit totalement sur l'hypoténuse  $AC$  et émerge à travers  $BC$  ; on notera  $i'$  l'angle d'émergence.



- 1) Calculer la déviation totale du rayon lumineux SI en fonction de  $i$  et  $i'$ .
- 2) On donne  $A = 60^\circ$ . Pour quelle valeur de l'angle d'incidence  $i$  le rayon émergent  $I'R$  est-il perpendiculaire au rayon incident SI ? En déduire les valeurs des angles de réfraction et de réflexion.
- 3) Le prisme et le rayon incident demeurent fixes ; on utilise une lumière bleue pour laquelle l'indice du prisme devient  $n + dn$ . Exprimer en fonction de l'angle  $A$  le pouvoir dispersif — .

#### EXERCICE IV(5points)



On considère deux moles d'oxygène supposé gaz parfait que l'on fait passer de l'état initial A ( $P_A, V_A, T_A$ ) à l'état final B ( $P_B = 3P_A, V_B, T$ ) par trois chemins distincts :

A1B (Transformation isotherme)

A2B (représenté par une droite)

A2B (voir figure)

Calculer les travaux et quantités de chaleur mises en jeu durant ces trois transformations en fonction de  $R$  et  $T$ .

Application numérique :

$T = 300\text{K}$  ; — — .

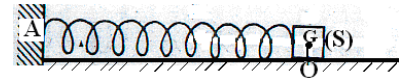
# EAMAC – 2014 - SUJET P-T-8

## Exercice 1 (5pt)

Les frottements sont négligeables.

On considère un ressort très long à spires non jointives de masse négligeable et de raideur  $K$ .

Le ressort est placé sur une table horizontale. On fixe l'une des extrémité du ressort et on accroche à son autre extrémité un solide ponctuel de masse  $m$ .



On déplace le solide de sa position d'équilibre d'une distance  $x_0 = 5\text{cm}$  et on l'abandonne sans vitesse initiale.

1.1 Faire le bilan des forces s'exerçant sur le solide et montrer que le système {ressort solide terre} est conservatif. (1pt)

1.2 Pour une position  $x$  quelconque donner l'expression de l'énergie mécanique du système en fonction de  $K$ ,  $m$ ,  $x$  et de la vitesse  $V$  du solide. (1pt)

1.3 Donner cette expression en fonction de  $K$  et  $x_0$ . Déduire l'expression de  $V$  en fonction de  $K$ ,  $m$ ,  $x_0$  et  $x$ . (0,75pt)

2.1 Montrer que l'énergie potentielle élastique du ressort peut s'écrire sous la forme :  $E_{pe} = a V^2 + b$ . (0,75pt)

2.2 L'expérience montre que  $E_{pe} = -0,1 V^2 + 2,5 \cdot 10^{-2}$ . Déduire les valeurs de  $m$  et de  $K$ . (0,75pt)

2.3 Calculer la vitesse du solide lors du passage par sa position d'équilibre. (0,75pt)

## Exercice 2 (5pt)

On relie l'extrémité  $O$  d'une lame vibrante à une corde tendue de longueur  $OO' = 2\text{m}$ . La lame vibrante subit des oscillations sinusoïdales verticales de fréquence  $N = 100\text{Hz}$  et d'amplitude  $a = 3\text{mm}$ . Ces vibrations se propagent le long de la corde avec une célérité  $c = 20\text{m/s}$ .

1 Calculer la longueur de l'onde  $\lambda$ . (0,5pt)

2 Décrire le phénomène observé au moment où la corde est éclairée par un stroboscope dont les fréquences prennent les valeurs:

$N_e = 200\text{ Hz}$  ;  $N_e = 25\text{ Hz}$  ;  $N_e = 50\text{ Hz}$  et  $N_e = 102\text{ Hz}$ . (1pt)

3 En considérant l'origine des temps l'instant où  $O$  passe par sa position d'équilibre dans le sens positif ; écrire l'équation horaire  $y_O$  du mouvement de la source  $O$  et donner l'élongation  $y_M$  d'un point  $M$  situé à la distance  $x$  de la source  $O$ . (1,5pt)

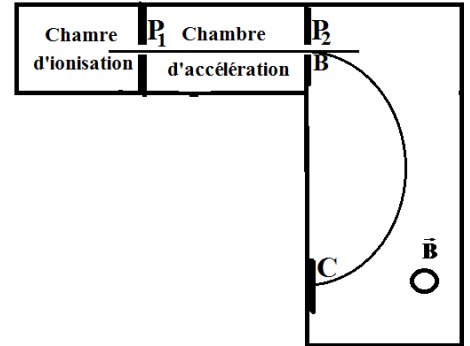
4 Déterminer l'expression des abscisses des points qui vibrent en phase avec la source  $O$ , préciser leur nombre et la valeur de l'abscisse du point le plus proche de  $O$ . (0,75pt)

5 Mêmes questions pour les points qui vibrent en opposition de phase avec  $O$ . (0,75pt)

6 présenter l'aspect de la corde à l'instant  $t = 0,03\text{s}$ . (0,5pt)

### Exercice 3 (5pt)

On place un élément chimique inconnu X dans une chambre d'ionisation. Elle produit des ions  $X^{n+}$  qui sont introduits avec une vitesse nulle en  $P_1$  (voir la figure).  
La masse des ions est notée  $m$  et on donne  $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$  C.



1. Entre  $P_1$  et  $P_2$  on applique une différence de potentiel  $U = U_{P_1P_2}$ .  
Exprimer la vitesse  $V_B$  des ions au trou B de la plaque  $P_2$  en fonction de  $n$ ,  $e$ ,  $m$  et  $U_{P_1P_2}$ .  
(0,75pt)

2. En B ouverture très petite, les ions pénètrent avec une vitesse horizontale dans une région où règne un champ magnétique perpendiculaire au plan de la figure. Les particules sont détectées au point C.

2.1 Indiquer le sens du champ magnétique. (0,5pt)

2.2 Déterminer la nature du mouvement dans le champ magnétique.  
(0,75pt)

2.3 Quelle est la vitesse en C? (0,5pt)

3. Exprimer la distance BC en fonction de  $m$ ,  $n$ ,  $e$ ,  $U_{P_1P_2}$  et  $B$  (où  $B$  est la norme du champ magnétique). (1pt)

4. On sait que X est : soit l'isotope de masse atomique 59 du nickel qui conduit à l'ion  $Ni^{2+}$ , soit de l'aluminium (isotope de masse atomique 27) qui conduit à  $Al^{3+}$ , soit de l'argent (isotope de masse atomique 108) qui conduit à  $Ag^+$ .

Calculer numériquement les distances BC correspondant à chacun des trois ions.

On donne :  $B = 1$  T ,  $U_{P_1P_2} = 1000$  V et  $m_p = 1,67 \cdot 10^{-27}$  kg (0,75pt)

5. On trouve approximativement  $BC = 27,4$  mm. Quel est l'élément X? (0,75pt)

### Exercice 4 (5pt)

Une bobine sans noyau de fer est formée de 2000 spires de 6cm de diamètre, réparties uniformément sur une longueur de 40 cm. Cette bobine est placée en série avec un condensateur de capacité réglable (boîte de condensateur) une résistance  $R = 60\Omega$  et un milliampèremètre de résistance négligeable. L'ensemble est branché aux bornes d'une prise de courant alternatif sinusoïdal de fréquence 50Hz, de tension efficace 120V. L'intensité efficace passe par un maximum 1,5A pour  $C=318\mu\text{F}$ .

On demande :

- 1.1 La valeur théorique de l'inductance de la bobine. On donne :  $\mu_0=4\pi \cdot 10^{-7}\text{S.I.}$  (0,5pt)
  - 1.2 La valeur de cette inductance déduite des résultats de l'expérience, expliquer le sens de la différence entre les deux valeurs trouvées. (0,5pt)
  - 1.3 La valeur de la résistance  $R'$  de la bobine. (0,5pt)
- 2 On considère maintenant une bobine dont on ne connaît ni la résistance  $R$  ni l'inductance  $L$ . On se propose de déterminer ces deux grandeurs. Pour cela on réalise le montage suivant : entre deux bornes A et B d'une prise de courant alternatif sinusoïdal, on branche en série, dans l'ordre une résistance connue  $r = 25 \Omega$  et la bobine à étudier. On appelle C le point de connexion de la résistance à la bobine.
- On dispose alors de trois voltmètres :  $V$  entre les bornes A et B ;  $V_1$  entre A et C et  $V_2$  entre C et B. Ils indiquent respectivement les valeurs efficaces :  $U=110\text{V}$ ,  $U_1=45,5\text{V}$  et  $U_2=80\text{V}$  des trois tensions :  $u=V_A - V_B$  ;  $u_1=V_A - V_C$  et  $u_2=V_C - V_B$
- On appelle  $i$  la valeur instantanée de l'intensité du courant de fréquence  $f=50\text{Hz}$ .
- 2.1 Faire le schéma du montage. (0,5pt)
  - 2.2 Construire le diagramme de Fresnel relatif à cette expérience représentant les trois tensions  $u_1$ ,  $u_2$  et  $u$ . (0,5pt)
  - 2.3 Calculer l'impédance de la bobine. (0,5pt)
  - 2.4 Déterminer la phase de  $u_2$  par rapport à  $i$ . (0,5pt)
  - 2.5 Calculer les valeurs des grandeurs  $R$  et  $L$ . (0,5pt)
  - 2.6 Calculer la puissance moyenne consommée dans le circuit. (1 pt)



Samabac