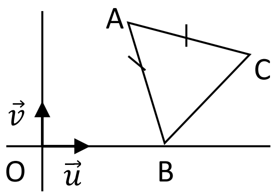
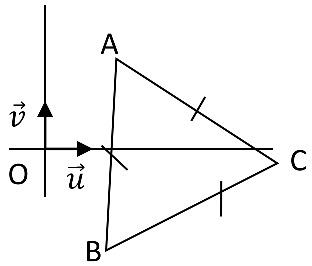
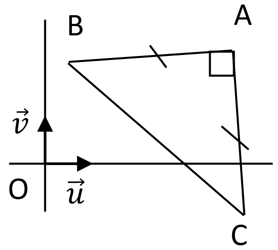
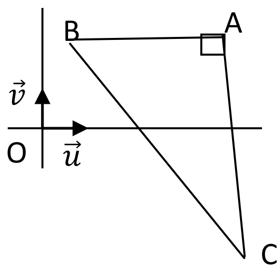
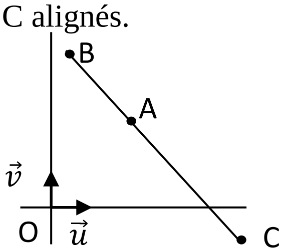
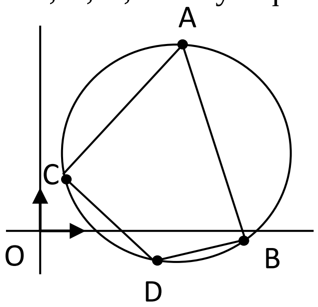
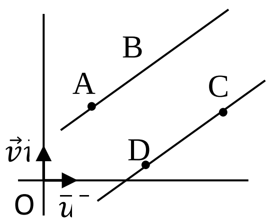
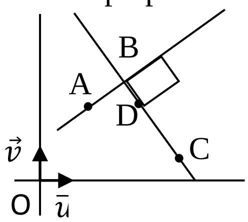
SUPPORTS DE COURS DE MATHS T^{le} D : Nombres Complexes

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O ; $\vec{u}$; $\vec{v}$).

Configurations	Caractérisations géométriques	Caractérisations complexes
Triangle ABC isocèle en A. 	AB = AC et mes$\widehat{A} = \alpha$ $(0 < \alpha < \pi)$.	$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{i\alpha}$ ou $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{-i\alpha}$
Triangle ABC équilatéral. 	AB = AC et mes$\widehat{A} = \frac{\pi}{3}$.	$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ ou $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$
Triangle ABC rectangle et isocèle en A. 	AB = AC et mes$\widehat{A} = \frac{\pi}{2}$.	$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = i$ ou $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = -i$
Triangle ABC rectangle en A. 	mes$\widehat{A} = \frac{\pi}{2}$	$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = bi$, avec $b \in \mathbb{R}^*$
Points A, B, C alignés. 	mes $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}\right) = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$	$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}^*$

Points A, B, C, D cocycliques 	$\operatorname{mes}\left(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}}\right)=\operatorname{mes}\left(\widehat{\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB}}\right)+k\pi,\quad k\in\mathbb{Z}$ et $\operatorname{mes}\left(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}}\right)\neq k\pi, k\in\mathbb{Z}$	$\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}:\frac{z_B-z_D}{z_A-z_D}\in\mathbb{R}^*$
Droites parallèles 	Il existe un nombre réel λ non nul tel que : $\overrightarrow{CD}=\lambda\,\overrightarrow{AB}$. ou $\operatorname{mes}\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}}\right)=\ k\pi\ ;k\in\mathbb{Z}$	$\arg\left(\frac{z_D-z_C}{z_B-z_A}\right)=k\pi$; $k\in\mathbb{Z}$ ou $\frac{z_D-z_C}{z_B-z_A}\in\mathbb{R}^*$
Droites perpendiculaires 	$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=0$ ou $\operatorname{mes}\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}}\right)=\frac{\pi}{2}+k\pi;\ k\in\mathbb{Z}$	$\arg\left(\frac{z_D-z_C}{z_B-z_A}\right)=\frac{\pi}{2}+$ $k\pi\ ;k\in\mathbb{Z}$ ou $\frac{z_D-z_C}{z_B-z_A}\in i\,\mathbb{R}^*$

Ecriture complexe d'une translation, d'une homothétie et d'une rotation

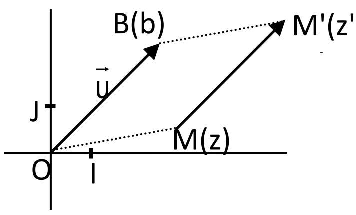
- **Translation**

$t_{\vec{u}}$ est la translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe b, M et M' sont les points du plan d'affixes respectives z et z'.

On a : $M'=t_{\vec{u}}(M)\Leftrightarrow\overrightarrow{MM'}=\vec{u}$.

$\Leftrightarrow z'-z=b$

$\Leftrightarrow z'=z+b$



La translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe b a pour écriture complexe : $z'=z+b$.

Exercice de fixation

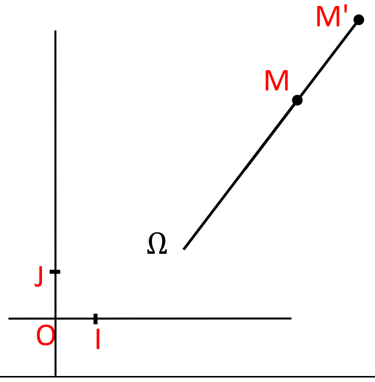
Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé.
On donne le vecteur $\vec{u}$ d'affixe $1-2i$.
1) Donne l'écriture complexe de la translation t de vecteur $\vec{u}$.
2) Détermine les affixes des images respectives A' et B' par t de chacun des points A et B, d'affixes respectives $3-i$ et 5.

- **Homothétie de centre Ω et de rapport** $k,\ k \in \mathbb{R}^*$

h est l'homothétie de centre Ω d'affixe Z_Ω et de rapport k, $k \in \mathbb{R}^*$.
M et M' sont les points du plan d'affixes respectives z et z'. On a :

$$M' = h(M) \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$$
$$\Leftrightarrow Z' - Z_\Omega = k(Z - Z_\Omega)$$
$$\Leftrightarrow Z' = k(Z - Z_\Omega) + Z_\Omega$$

L'homothétie de centre Ω d'affixe Z_Ω et de rapport k a pour écriture complexe : $Z' = k(Z - Z_\Omega) + Z_\Omega$



__Exercice de fixation__

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé.
Détermine l'écriture complexe associée à l'homothétie h de rapport – 2 et de centre Ω d'affixe $3 - i$.

- **Rotation de centre Ω et d'angle** $\theta,\ \theta \in]-\pi, \pi]$

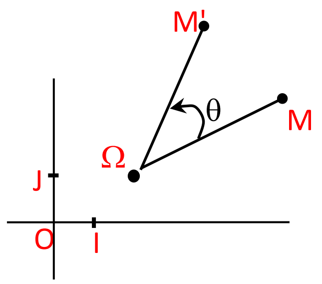
r est la rotation de centre de centre Ω d'affixe Z_Ω et d'angle orienté de mesure principale θ.
• M et M' sont les points du plan d'affixes respectives z et z' tels que M est distinct de Ω. On a :

$$M' = r(M) \Leftrightarrow \begin{cases} \Omega M' = \Omega M \\ Mes(\widehat{\overrightarrow{\Omega M};\overrightarrow{\Omega M'}}) = \theta \end{cases}$$

• $r(\Omega) = \Omega$

On a : $\frac{Z' - z_\Omega}{z - z_\Omega} = e^{i\theta}$
$z' = e^{i\theta}(z - z_\Omega) + z_\Omega$

La rotation de centre Ω d'affixe Z_Ω et d'angle orienté de mesure principale θ a pour écriture complexe :
$z' = e^{i\theta}(z - z_\Omega) + z_\Omega$

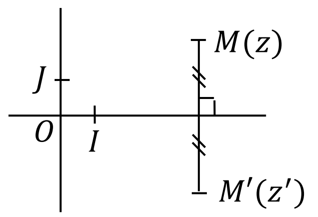
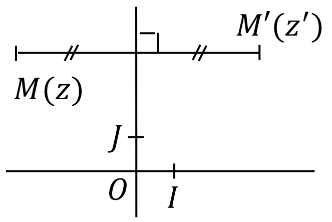
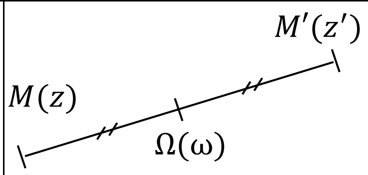
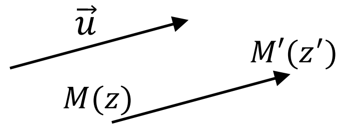
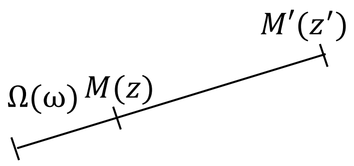
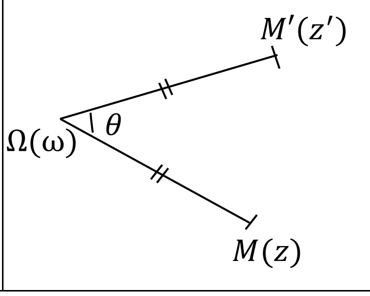


__Exercice de fixation__

....

	$a \in \mathbb{R}^*$		$a \notin \mathbb{R}^*, a = \lvert a\rvert . e^{i\theta}$	
	$a = 1$	$a \neq 1$	$\lvert a\rvert = 1$	$\lvert a\rvert \neq 1$
Bijection Complexe	$f(z) = z' = az + b$			
Transformations du plan	**Translation de vecteur $\vec{u}$**	**Homothétie de rapport k et de centre Ω**	**Rotation d'angle θ et de centre Ω**	**Similitude plane directe de rapport k, d'angle θ et de centre Ω**
Eléments Caractéristiques	**L'affixe de $\vec{u}$ est b.**	**- Rapport $k = \lvert a\rvert$ - Centre $\Omega(\omega)$ $\omega = \frac{b}{1-a}$**	**-Angle θ $\theta = \arg(a)$ - Centre $\Omega(\omega)$ $\omega = \frac{b}{1-a}$**	**- Rapport $k = \lvert a\rvert$ - Angle θ $\theta = \arg(a)$ - Centre $\Omega(\omega)$ $\omega = \frac{b}{1-a}$**

Le tableau suivant donne des transformations du plan et leurs écritures complexes

Transformation du Plan	Image $M'(z')$ d'un point $M(z)$	Définition géométrique	Ecriture complexe
Symétrie orthogonale d'axe (OI)		La droite (OI) est la médiatrice du segment $[MM']$	$z' = \bar{z}$
Symétrie orthogonale d'axe (OJ)		La droite (OJ) est la médiatrice du segment $[MM']$	$z' = -\bar{z}$
Symétrie centrale de centre $\Omega(\omega)$		$\overrightarrow{\Omega M'} = -\overrightarrow{\Omega M}$	$z' - \omega = -(z - \omega)$
Translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe b		$\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$	$z' = z + b$
Homothétie de Centre $\Omega(\omega)$ et de rapport k ($k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$)		$\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$	$z' - \omega = k(z - \omega)$
Rotation de centre $\Omega(\omega)$ et d'angle θ		$M \neq \Omega$ $\begin{cases} \Omega M' = \Omega M \\ mes(\widehat{\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}}) = \theta \end{cases}$	$z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$

$s_{(A\,;\,3\,;\,\frac{\pi}{6})} = h_{(A\,;\,3)} \circ r_{(A\,;\,\frac{\pi}{6})} = r_{(A\,;\,\frac{\pi}{6})} \circ h_{(A\,;\,3)}$ • $s_{(A\,;\,3\,;\,\frac{\pi}{6})} = h_{(A\,;\,3)} \circ r_{(A\,;\,\frac{\pi}{6})}$. $M \longmapsto^{r} M_1 \longmapsto^{h} M'$ • $s_{(A\,;3;\,\frac{\pi}{6})} = r_{(A\,;\,\frac{\pi}{6})} \circ h_{(A\,;\,3)}$ $M \longmapsto^{h} M_2 \longmapsto^{r} M'$