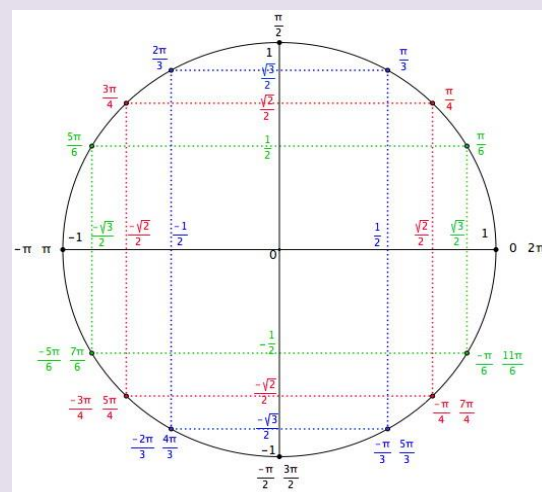


# TRIGONOMETRIE

◆ *Valeurs remarquables :*

$x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$		0



◆ *Les élémentaires:*

$\forall x \in \mathbb{R}$	$-1 \leq \cos x \leq 1$ $-1 \leq \sin x \leq 1$	$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$
$\forall x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}$	$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$	$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

◆ *Angles associés à  $x$  :*

	<b>Tour</b>	
	$\cos(x + 2\pi) = \cos x$ $\sin(x + 2\pi) = \sin x$ $\tan(x + 2\pi) = \tan x$	
<b>Angle opposé</b>	<b>Demi-tour</b>	<b>Quart de tour direct</b>
$\cos(-x) = \cos x$ $\sin(-x) = -\sin x$ $\tan(-x) = -\tan x$	$\cos(x + \pi) = -\cos x$ $\sin(x + \pi) = -\sin x$ $\tan(x + \pi) = -\tan x$	$\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$ $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$ $\tan\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{\tan x}$
<b>Quart de tour indirect</b>	<b>Angle supplémentaire</b>	<b>Angle complémentaire</b>
$\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin x$ $\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos x$ $\tan\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{\tan x}$	$\cos(\pi - x) = -\cos x$ $\sin(\pi - x) = \sin x$ $\tan(\pi - x) = -\tan x$	$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$ $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$ $\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{\tan x}$

◆ *Formules d'addition :*

$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$ $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$	$\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$
$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$ $\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$	$\tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$

◆ *Formules de duplication :*

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x$		$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$ $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$
$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$	$\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$	

◆ *Transformation de Produits en Sommes :*

$\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a - b) + \cos(a + b)]$	$\sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a - b) + \sin(a + b)]$
$\sin a \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a - b) - \cos(a + b)]$	$\cos a \sin b = -\frac{1}{2} [\sin(a - b) - \sin(a + b)]$

◆ *Transformation de Sommes en Produits :*

$\cos p + \cos q = 2 \cos\left(\frac{p + q}{2}\right) \cos\left(\frac{p - q}{2}\right)$	$\sin p + \sin q = 2 \sin\left(\frac{p + q}{2}\right) \cos\left(\frac{p - q}{2}\right)$
$\cos p - \cos q = -2 \sin\left(\frac{p + q}{2}\right) \sin\left(\frac{p - q}{2}\right)$	$\sin p - \sin q = 2 \sin\left(\frac{p - q}{2}\right) \cos\left(\frac{p + q}{2}\right)$

◆ *Equations trigonométriques :*

$\forall u \in \mathbb{R}, \forall v \in \mathbb{R}$	$\cos u = \cos v \Leftrightarrow \begin{cases} u = v + 2k\pi \\ u = -v + 2k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$
	$\sin u = \sin v \Leftrightarrow \begin{cases} u = v + 2k\pi \\ u = \pi - v + 2k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$
$\forall u \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \forall v \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$	$\tan u = \tan v \Leftrightarrow u = v + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

◆ *Equations particulières :*

$\cos t = 0 \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{2} + k\pi$	$\cos t = -1 \Leftrightarrow t = \pi + 2k\pi$
$\sin t = 0 \Leftrightarrow t = k\pi$	$\sin t = -1 \Leftrightarrow t = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$
$\cos t = 1 \Leftrightarrow t = 2k\pi$	
$\sin t = 1 \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$	

◆ *Factorisation de  $a \cos \omega x + b \sin \omega x$  :*

**Mettre  $\sqrt{a^2 + b^2}$  en facteur**

$$a \cos \omega x + b \sin \omega x = \sqrt{a^2 + b^2} \left( \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos \omega x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin \omega x \right)$$

**Factorisation en cosinus**

$$\text{Chercher } \alpha \in ]-\pi ; \pi] / \begin{cases} \cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ \sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{cases}$$

$$\text{On a alors : } a \cos \omega x + b \sin \omega x = \sqrt{a^2 + b^2} (\cos \alpha \cos \omega x + \sin \alpha \sin \omega x)$$

$$a \cos \omega x + b \sin \omega x = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(\omega x - \alpha)$$

**Factorisation en sinus**

$$\text{Chercher } \beta \in ]-\pi ; \pi] / \begin{cases} \sin \beta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ \cos \beta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{cases}$$

$$\text{On a alors : } a \cos \omega x + b \sin \omega x = \sqrt{a^2 + b^2} (\sin \beta \cos \omega x + \cos \beta \sin \omega x)$$

$$a \cos \omega x + b \sin \omega x = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\omega x + \beta)$$

◆ *Quelques résultats utiles :*

$\forall k \in \mathbb{Z},$	$\begin{cases} \cos(k\pi) = (-1)^k \\ \sin(k\pi) = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} \sin\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = (-1)^k \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = 0 \end{cases}$
$\forall x \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{Z},$	$\begin{cases} \cos(x + k\pi) = (-1)^k \cos x \\ \sin(x + k\pi) = (-1)^k \sin x \end{cases}$	$\begin{cases} \cos(k\pi - x) = (-1)^k \cos x \\ \sin(k\pi - x) = -(-1)^k \sin x \end{cases}$

# **NOMBRES COMPLEXES**

◆ *Les différentes formes d'un nombre complexe :*

Soient $(a, b, \theta) \in \mathbb{R}^3$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$		
Forme algébrique	Forme trigonométrique	Forme exponentielle
$z = a + ib$	$z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$	$z = r e^{i\theta}$
$a = \Re(z)$ et $b = \Im(z)$	$r =  z  = \sqrt{a^2 + b^2}$ et $\theta = \arg(z) \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \theta = \frac{a}{r} \\ \sin \theta = \frac{b}{r} \end{cases}$	

◆ *Egalité de deux nombres complexes :*

Avec les formes algébriques $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$	Avec les formes exponentielles $z = r e^{i\theta}$ et $z' = r' e^{i\theta'}$
$z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases}$	$z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} r = r' \\ \theta = \theta' + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$
<b>En particulier :</b> $z = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$	

◆ *Conjugué d'un nombre complexe :*

	Propriétés	
	Soit $z \in \mathbb{C}$	Soient Soit $z$ et $z' \in \mathbb{C}$
<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>z = a + ib \Leftrightarrow \bar{z} = a - ib</math></li> <li>• <math>z = re^{i\theta} \Leftrightarrow \bar{z} = re^{-i\theta}</math></li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>z + \bar{z} = 2\Re(z)</math></li> <li>• <math>z - \bar{z} = 2\Im(z)</math></li> <li>• <math>z\bar{z} =  z ^2</math></li> <li>• <math>\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}}</math> si <math>z \neq 0</math></li> <li>• <math>\overline{z^n} = \bar{z}^n \forall n \in \mathbb{Z}</math></li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'</math></li> <li>• <math>\overline{zz'} = \bar{z}\bar{z}'</math></li> <li>• <math>\frac{\bar{z}}{z'} = \frac{\bar{z}}{z'} \text{ si } z' \neq 0</math></li> </ul>

◆ *Module d'un nombre complexe :*

Propriétés		
<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math> z  = 0 \Leftrightarrow z = 0</math></li> <li>• <math> z + z'  \leq  z  +  z' </math></li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math> -z  =  z  \text{ et }  \bar{z}  =  z </math></li> <li>• <math> zz'  =  z  z' </math></li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>\left  \frac{z}{z'} \right  = \frac{ z }{ z' } \text{ avec } z' \neq 0</math></li> <li>• <math> z^n  =  z ^n \forall n \in \mathbb{Z}</math></li> </ul>

◆ *Arguments :*

Si  $z$  et  $z'$  sont deux nombres complexes non nuls, alors :

- $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')$

- $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')$

- $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z)$

- $\arg(z^n) = n\arg(z)$

◆ *Formules d'Euler et Formule de Moivre :*

<b>Formules d'Euler</b>	$\forall \theta \in \mathbb{R} :$ $\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$
<b>Formule de Moivre</b>	$\forall \theta \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z} :$ $(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta \quad \text{ou} \quad (e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$

◆ *Equation du second degré  $az^2 + bz + c = 0$  :*

<b>Discriminant <math>\Delta = b^2 - 4ac</math></b>	
<b><math>\Delta</math> est un réel</b>	Si $\Delta \geq 0$ alors $z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$
	Si $\Delta < 0$ alors $z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$
<b><math>\Delta</math> n'est pas un réel</b>	Pour $\delta = x + iy, \delta^2 = \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \\ 2xy = b \end{cases}$  Et alors $z_1 = \frac{-b - \delta}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b + \delta}{2a}$

◆ *Interprétation géométrique :*

**Soient  $M$  et  $M'$  deux points du plan complexe d'affixes respectives  $z$  et  $z'$**

- L'affixe du vecteur  $\overrightarrow{OM}$  est  $z$  ; la distance  $OM = |z|$  et  $(\vec{u}, \overrightarrow{OM}) = \arg(z)$
- $M$  appartient au cercle de centre  $O$  et de rayon 1  $\Leftrightarrow |z| = 1$
- $M$  appartient à l'axe des réels  $(O, \vec{u}) \Leftrightarrow \arg(z) = k\pi, k \in \mathbb{Z}$  ou  $z = 0$
- $M$  appartient à l'axe des imaginaires  $(O, \vec{v}) \Leftrightarrow \arg(z) = \pm \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- L'affixe du vecteur  $\overrightarrow{MM'}$  est  $z' - z$  et la distance  $MM' = |z' - z|$
- L'affixe du milieu de  $[MM']$  est  $\frac{z + z'}{2}$

**Soient  $A, B, C$  et  $D$  des points du plan complexe**

- L'affixe du centre de gravité du triangle  $ABC$  est  $\frac{z_A + z_B + z_C}{3}$
- L'affixe du vecteur  $\overrightarrow{AB}$  est  $z_B - z_A$
- $|z_B - z_A| = AB$  et  $\arg(z_B - z_A) = (\vec{u}, \overrightarrow{AB})$
- $\left| \frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \right| = \frac{CD}{AB}$  et  $\arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$

◆ *Caractérisation de configurations et de figures :*

- $\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}$  est un réel  $\Leftrightarrow (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = 0 \text{ ou } \pi \Leftrightarrow (AB) \parallel (CD)$
- $\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}$  est un imaginaire pur  $\Leftrightarrow (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \pm \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow (AB) \perp (CD)$
- $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$  est un imaginaire pur  $\Leftrightarrow (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \pm \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow ABC$  est rectangle en  $A$
- $\left| \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \right| = 1 \Leftrightarrow AB = AC \Leftrightarrow ABC$  est isocèle de sommet  $A$
- $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \pm i \Leftrightarrow AB = AC$  et  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \pm \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow ABC$  est rectangle isocèle en  $A$
- $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{\pm i \frac{\pi}{3}} \Leftrightarrow AB = AC$  et  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \pm \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow ABC$  est équilatéral

◆ *Caractérisation d'ensemble de points :*

L'ensemble des points  $M$  d'affixe  $z$  tel que

- $|z - z_A| = |z - z_B|$  est la médiatrice du segment  $[AB]$
- $|z - z_A| = r$  est le cercle de centre  $A$  et de rayon  $r$
- $\arg(z - z_A) = \theta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$  est la demi-droite d'origine  $A$  dirigée par le vecteur  $\vec{\omega}$  tel que  $(\vec{u}, \vec{\omega}) = \theta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- $\frac{z - z_B}{z - z_A}$  soit réel est la droite  $(AB)$  privée de  $A$
- $\frac{z - z_B}{z - z_A}$  soit un réel strictement négatif est le segment  $[AB]$  privée de  $A$  et  $B$
- $\frac{z - z_B}{z - z_A}$  soit un réel strictement positif est la droite  $(AB)$  privée du segment  $[AB]$
- $\frac{z - z_B}{z - z_A}$  soit imaginaire pur est le cercle de diamètre  $[AB]$  privé de  $A$  et  $B$

◆ *Transformations du plan :*

$M$  est le point d'affixe  $z$  et  $M'$  est le point d'affixe  $z'$

- **Translation :**  $M'$  est l'image de  $M$  par la translation de vecteur  $\vec{\omega}$  si et seulement si  $z' = z + z_{\vec{\omega}}$
- **Rotation de centre  $A$  :**  $M'$  est l'image de  $M$  par la rotation de centre  $A$  et d'angle  $\theta$  si et seulement si  $z' - z_A = e^{i\theta}(z - z_A)$
- **Rotation de centre  $O$  :**  $M'$  est l'image de  $M$  par la rotation de centre  $O$  et d'angle  $\theta$  si et seulement si  $z' = e^{i\theta}z$
- **Homothétie :**  $M'$  est l'image de  $M$  par l'homothétie de centre  $A$  et de rapport  $k \in \mathbb{R}^*$  si et seulement si  $z' - z_A = k(z - z_A)$
- **Similitude :**  $M'$  est l'image de  $M$  par la similitude de centre  $A$  et de rapport  $k \in \mathbb{R}^*$  si et seulement si  $z' - z_A = ke^{i\theta}(z - z_A)$

# **CALCUL DE LIMITES ET CONTINUITÉ**

# CALCUL DE LIMITES

## ◆ Formes indéterminées :

$\infty - \infty$	$0 \times \infty$
$  \left. \begin{array}{l}  f(x) = u(x) + v(x) \\  \lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = +\infty \\  \lim_{x \rightarrow x_0} v(x) = -\infty  \end{array} \right\} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \text{ est une FI}  $	$  \left. \begin{array}{l}  f(x) = u(x)v(x) \\  \lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = \pm\infty \\  \lim_{x \rightarrow x_0} v(x) = 0  \end{array} \right\} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \text{ est une FI}  $
$\frac{\infty}{\infty}$	$\frac{0}{0}$
$  \left. \begin{array}{l}  f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \\  \lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = \pm\infty \\  \lim_{x \rightarrow x_0} v(x) = \pm\infty  \end{array} \right\} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \text{ est une FI}  $	$  \left. \begin{array}{l}  f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \\  \lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = 0 \\  \lim_{x \rightarrow x_0} v(x) = 0  \end{array} \right\} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \text{ est une FI}  $

◆ *Limite d'une fonction polynôme ou d'une fonction rationnelle :*

- **Règle 1 :** en  $\pm\infty$ , la limite d'une fonction polynôme est égale à la limite de son monôme de plus haut degré
- **Règle 2 :** en  $\pm\infty$ , la limite d'une fonction rationnelle est égale à la limite du quotient du monôme de plus haut degré du numérateur par le monôme de plus haut degré du dénominateur

◆ *Limite de la composée de deux fonctions :*

$$\left. \begin{array}{l} \circ f(x) = v \circ u(x) \\ \circ \lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = b \\ \circ \lim_{x \rightarrow b} v(x) = \ell \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$$

◆ *Limite des fonctions trigonométriques :*

**NB :** En  $\pm\infty$ , les fonctions cosinus et sinus n'admettent pas de limite

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos t}{t} = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\tan t}{t} = 1$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos t}{t^2} = \frac{1}{2}$$

◆ *Théorèmes de comparaison :*

- **Théorème 1 :** au voisinage de  $+\infty$

Si  $f(x) \geq u(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = +\infty$ , alors,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

Si  $f(x) \leq v(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} v(x) = -\infty$ , alors,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

- **Théorème 2 :** au voisinage de  $+\infty$ ,

Si  $|f(x) - \ell| \leq u(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = 0$ , alors,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$

- **Théorème 3 :** Théorème des gendarmes : au voisinage de  $+\infty$ ,

Si  $u(x) \leq f(x) \leq v(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} v(x) = \ell$ , alors,  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$

## ◆ *Asymptotes et Branches infinies :*

- Si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$ , alors,  $(C_f)$  admet une asymptote verticale d'équation  $x = a$
- Si  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = b$ , alors,  $(C_f)$  admet une asymptote horizontale d'équation  $y = b$
- Si  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$ , alors,  $(C_f)$  admet une asymptote oblique d'équation  $y = ax + b$
- Si  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$ , alors,  $(C_f)$  admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées
- Si  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ , alors,  $(C_f)$  admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses
- Si  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$  ;  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a \in \mathbb{R}^*$  et  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - ax] = \pm\infty$ , alors,  $(C_f)$  admet une branche parabolique de direction la droite  $(\Delta): y = ax$
- Si  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$  ;  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a \in \mathbb{R}^*$  et  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - ax] = b \in \mathbb{R}$ , alors,  $(C_f)$  admet une asymptote oblique d'équation  $y = ax + b$

◆ *Les éléments de symétrie d'une fonction :*

- $f$  est paire si et seulement si  $\forall x \in D_f, -x \in D_f$  et  $f(-x) = f(x)$
- $f$  est impaire si et seulement si  $\forall x \in D_f, -x \in D_f$  et  $f(-x) = -f(x)$
- $(\Delta): x = a$  est un axe de symétrie de  $(C_f)$  si et seulement si  $\forall x \in D_f, 2a - x \in D_f$  et  $f(2a - x) = f(x)$
- $I(a, b)$  est un centre de symétrie de  $(C_f)$  si et seulement si  $\forall x \in D_f, 2a - x \in D_f$  et  $f(2a - x) + f(x) = 2b$

# CONTINUITÉ

## ◆ *Étude de la continuité en un point :*

$f$  est continue en  $x_0$ ,

Si  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$  ou si  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$

## ◆ *Théorème de continuité :*

- Toute fonction dérivable en  $x_0$  est continue en  $x_0$
  - Toute fonction dérivable sur  $I$  est continue sur  $I$
- NB : La réciproque est fautive, une fonction continue n'est pas toujours dérivable

## ◆ *Exemples de fonctions continues :*

- Les fonctions polynômes sont continues sur  $\mathbb{R}$
- Les fonctions rationnelles sont continues sur leur ensemble de définition
- Les fonctions cosinus et sinus sont continues sur  $\mathbb{R}$
- La fonction racine carrée est continue sur  $[0 ; +\infty[$
- La somme ou le produit de fonctions continues est continue

◆ *Bijection continue :*

- $f$  continue sur  $I$
  - $f$  strictement monotone sur  $I$
- $$\left. \begin{array}{l} \circ f \text{ continue sur } I \\ \circ f \text{ strictement monotone sur } I \end{array} \right\} \Rightarrow f \text{ réalise une bijection de } I \text{ sur } J$$

◆ *Solution de l'équation  $f(x) = k$*

- $f$  continue sur  $I$
  - $f$  strictement monotone sur  $I$
  - $k \in J = f(I)$
- $$\left. \begin{array}{l} \circ f \text{ continue sur } I \\ \circ f \text{ strictement monotone sur } I \\ \circ k \in J = f(I) \end{array} \right\} \Rightarrow f(x) = k \text{ admet une unique solution } \alpha \in I$$

◆ *Théorème des valeurs intermédiaires :*

*Résolution de l'équation  $f(x) = 0$  :*

- $f$  est continue sur  $[a, b]$
  - $f$  strictement monotone sur  $[a, b]$
  - $f(a) \times f(b) < 0$
- $$\left. \begin{array}{l} \circ f \text{ est continue sur } [a, b] \\ \circ f \text{ strictement monotone sur } [a, b] \\ \circ f(a) \times f(b) < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f(x) = 0 \text{ admet une unique solution } \alpha \in ]a, b[$$

# **DERIVATION ET NOTION DE PRIMITIVES**

# DERIVATION

## ◆ Etude de la dérivabilité en un point :

$f$  est dérivable en un point  $x_0$ , s'il existe un réel  $\ell$  tel que :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ell$$

ou

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ell$$

$$\text{ou encore } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \ell$$

$\ell = f'(x_0)$  est alors appelé nombre dérivé de  $f$  en  $x_0$

$$\left. \begin{array}{l} \circ \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ell_1 \\ \circ \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ell_2 \\ \circ \ell_1 \neq \ell_2 \end{array} \right\} \text{ou } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \pm\infty \Rightarrow f \text{ n'est pas dérivable en } x_0$$

◆ *Fonctions dérivées usuelles :*

<i>f'</i> désigne la fonction dérivée de <i>f</i> sur <i>I</i>		
Fonction	Dérivée	<i>I</i>
$f(x) = k$ ( <i>k</i> réel)	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$ ( $n \in \mathbb{N}^*$ )	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$] -\infty ; 0[$ ou $] 0 ; +\infty[$
$f(x) = \frac{1}{x^n}$ ( $n \geq 2$ )	$f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$	$] -\infty ; 0[$ ou $] 0 ; +\infty[$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$] 0 ; +\infty[$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \tan x$	$f'(x) = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$] -\frac{\pi}{2} + k\pi ; \frac{\pi}{2} + k\pi[ , k \in \mathbb{Z}$
$f(x) = \ln x$	$f'(x) = \frac{1}{x}$	$] 0 ; +\infty[$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$	$\mathbb{R}$

◆ *Opérations et dérivées :*

Opérations et dérivées		Dérivées successives
<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>(u + v)' = u' + v'</math></li> <li>• <math>(ku)' = ku'</math> (<math>k</math> réel)</li> <li>• <math>(uv)' = u'v + v'u</math></li> <li>• <math>\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}</math> (<math>u \neq 0</math>)</li> <li>• <math>\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}</math> (<math>v \neq 0</math>)</li> <li>• <math>(v \circ u)' = u' \times v' \circ u</math></li> <li>• <math>(u^n)' = nu'u^{n-1}</math> (<math>n \geq 2</math>)</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>\left(\frac{1}{u^n}\right)' = \frac{-nu'}{u^{n+1}}</math> (<math>n \geq 1</math>)</li> <li>• <math>(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}</math> (<math>u &gt; 0</math>)</li> <li>• <math>(\ln u)' = \frac{u'}{u}</math> (<math>u &gt; 0</math>)</li> <li>• <math>(\ln u )' = \frac{u'}{u}</math> (<math>u \neq 0</math>)</li> <li>• <math>(e^u)' = u'e^u</math></li> </ul>	$\left\{ \begin{array}{l} \circ f^{(0)} = f \\ \circ f^{(1)} = f' \\ \circ f^{(2)} = f'' \\ \circ f^{(n)} = [f^{(n-1)}]' \forall n \geq 1 \end{array} \right.$

## Dérivée d'une bijection réciproque

$$\left. \begin{array}{l} \circ f \text{ est bijective de } I \text{ sur } J \\ \circ f \text{ est dérivable sur } I \\ \circ \forall x \in I, f'(x) \neq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \circ f^{-1} \text{ est dérivable sur } J \\ \circ \forall y \in J, (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} \end{array} \right.$$

### ◆ Dérivée et sens de variation :

Soit  $f'$  la fonction dérivée de  $f$  sur  $I$  :

- Si  $\forall x \in I, f'(x) > 0$ , alors,  $f$  est strictement croissante sur  $I$
- Si  $\forall x \in I, f'(x) < 0$ , alors,  $f$  est strictement décroissante sur  $I$
- Si  $\forall x \in I, f'(x) = 0$ , alors,  $f$  est constante sur  $I$

◆ *Dérivée et extrémum relatif :*

Si  $f'$  s'annule  $x_0$  et change de signe alors  $f$  admet un extrémum relatif en  $x_0$

**Plus précisément**

$$\left. \begin{array}{l} \circ \forall x \in ]a ; x_0[, f'(x) < 0 \\ \circ \forall x \in ]x_0 ; b[, f'(x) > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f(x) \geq f(x_0) \text{ (minimum)}$$

$$\left. \begin{array}{l} \circ \forall x \in ]a ; x_0[, f'(x) > 0 \\ \circ \forall x \in ]x_0 ; b[, f'(x) < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f(x) \leq f(x_0) \text{ (maximum)}$$

# PRIMITIVES

## ◆ Primitives des fonctions usuelles :

<i>F est une primitive de f sur I si <math>F'(x) = f(x)</math></i>		
Fonction	Primitives	I
$f(x) = 0$	$F(x) = k$ ( <i>k réel</i> )	$\mathbb{R}$
$f(x) = x$	$F(x) = \frac{1}{2}x^2 + k$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$	$F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + k$ ( $n \in \mathbb{N}^*$ )	$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x^2}$	$F(x) = -\frac{1}{x} + k$	$] -\infty ; 0[$ ou $] 0 ; +\infty[$
$f(x) = \frac{1}{x^n}$ ( $n \geq 2$ )	$F(x) = -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} + k$ ( $n \geq 2$ )	$] -\infty ; 0[$ ou $] 0 ; +\infty[$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x} + k$	$] 0 ; +\infty[$
$f(x) = \sin x$	$F(x) = -\cos x + k$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \cos x$	$F(x) = \sin x + k$	$\mathbb{R}$

Fonction	Primitives	$I$
$f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$	$F(x) = \tan x + k$	$]-\frac{\pi}{2} + k\pi ; \frac{\pi}{2} + k\pi[ , k \in \mathbb{Z}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = \ln x  + k$	$]-\infty ; 0[$ ou $]0 ; +\infty[$
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x + k$	$\mathbb{R}$

◆ *Primitives et opérations :*

On suppose que $u$ est une fonction dérivable sur $I$			
$f = u' u^n$	$F = \frac{1}{n+1} u^{n+1} (n \in \mathbb{N}^*)$	$f = u' \cos u$	$F = \sin u$
$f = \frac{u'}{u^2}$	$F = -\frac{1}{u} (u \neq 0 \text{ sur } I)$	$f = u' \sin u$	$F = -\cos u$
$f = \frac{u'}{u^n}$	$F = -\frac{1}{(n-1)u^{n-1}}$ $(u \neq 0 \text{ sur } I \text{ et } n \geq 2)$	$f = \frac{u'}{u}$	$F = \ln u  (u \neq 0 \text{ sur } I)$
$f = \frac{u'}{\sqrt{u}}$	$F = 2\sqrt{u} (u > 0 \text{ sur } I)$	$f = u' e^u$	$F = e^u$

**FONCTIONS  
LOGARITHME NEPERIEN ET  
EXPONENTIELLE**

◆ *Définition et première propriétés :*

Logarithme népérien	Exponentielle
<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>\ln</math> est la primitive de la fonction <math>x \mapsto \frac{1}{x}</math> sur <math>]0; +\infty[</math> qui s'annule en 1</li> <li>• <math>D_{\ln} = ]0; +\infty[</math></li> <li>• <math>\ln 1 = 0</math> et <math>\ln e = 1</math></li> <li>• <math>\forall x \in ]0; 1[, \ln x &lt; 0</math> et <math>\forall x \in ]1; +\infty[, \ln x &gt; 0</math></li> <li>• <math>\forall x \in \mathbb{R}, \ln e^x = x</math></li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>\exp</math> ou <math>x \mapsto e^x</math> est la bijection réciproque de <math>\ln</math></li> <li>• <math>D_{\exp} = \mathbb{R}</math></li> <li>• <math>e^0 = 1</math> et <math>e^1 = e</math></li> <li>• <math>\forall x \in \mathbb{R}, e^x &gt; 0</math></li> <li>• <math>\forall x \in ]0; +\infty[, e^{\ln x} = x</math></li> </ul>

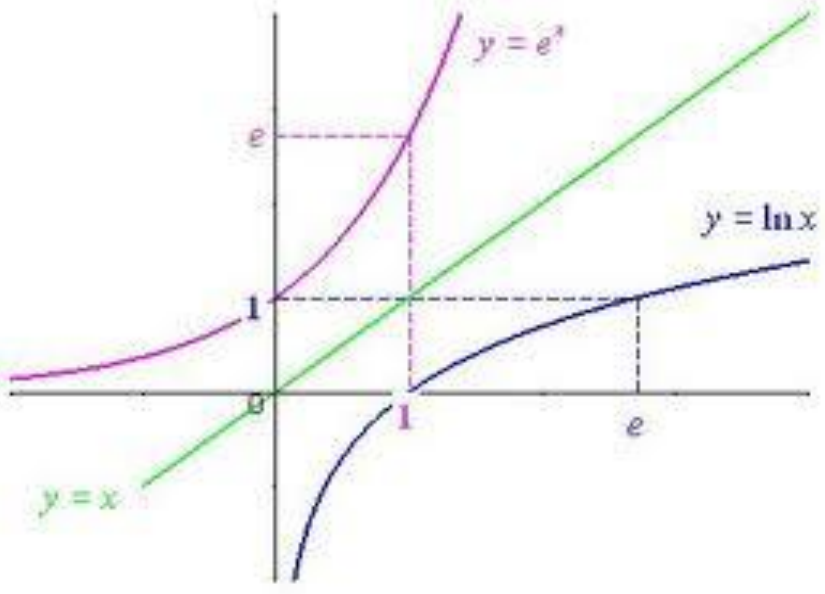
◆ *Propriétés algébriques :*

Logarithme népérien	Exponentielle
<p><math>\forall a \in ]0; +\infty[</math> et <math>\forall b \in ]0; +\infty[</math> on a :</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>\ln ab = \ln a + \ln b</math></li> <li>• <math>\ln \frac{1}{a} = -\ln a</math></li> <li>• <math>\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b</math></li> <li>• <math>\forall r \in \mathbb{R}, \ln a^r = r \ln a</math></li> <li>• <math>\ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b</math></li> <li>• <math>\ln a &lt; \ln b \Leftrightarrow a &lt; b</math></li> </ul>	<p><math>\forall a \in \mathbb{R}</math> et <math>\forall b \in \mathbb{R}</math> on a :</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>e^{a+b} = e^a e^b</math></li> <li>• <math>e^{-a} = \frac{1}{e^a}</math></li> <li>• <math>e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}</math></li> <li>• <math>\forall r \in \mathbb{R}, (e^a)^r = e^{ar}</math></li> <li>• <math>e^a = e^b \Leftrightarrow a = b</math></li> <li>• <math>e^a &lt; e^b \Leftrightarrow a &lt; b</math></li> </ul>

◆ *Limites utiles :*

Logarithme népérien	Exponentielle
<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty</math></li> <li>• <math>\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty</math></li> <li>• <math>\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0</math></li> <li>• <math>\forall r \in \mathbb{R}_+^*, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^r} = 0</math></li> <li>• <math>\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0</math></li> <li>• <math>\forall r \in \mathbb{R}_+^*, \lim_{x \rightarrow 0^+} x^r \ln x = 0</math></li> <li>• <math>\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1</math></li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0</math></li> <li>• <math>\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty</math></li> <li>• <math>\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty</math></li> <li>• <math>\forall r \in \mathbb{R}_+^*, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^r} = +\infty</math></li> <li>• <math>\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0</math></li> <li>• <math>\forall r \in \mathbb{R}_+^*, \lim_{x \rightarrow -\infty}  x ^r e^x = 0</math></li> <li>• <math>\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1</math></li> </ul>

◆ *Dérivées et représentations graphiques :*

Logarithme népérien	Exponentielle
<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>\forall x \in ]0 ; +\infty[ , \ln'x = \frac{1}{x}</math></li> <li>• <math>[\ln u(x)]' = [\ln u(x) ]' = \frac{u'(x)}{u(x)}</math></li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>\forall x \in \mathbb{R}, (e^x)' = e^x</math></li> <li>• <math>[e^{u(x)}]' = u'(x)e^{u(x)}</math></li> </ul>
	

### *Problème de Synthèse (2h)*

On considère la fonction numérique  $f$  de la variable  $x$ , définie par :  $f(x) = x + \frac{\ln|x|}{|x|}$

On désigne  $(\mathcal{C})$  sa courbe représentative dans un repère orthonormal  $(O ; \vec{i}, \vec{j})$  d'unité graphique 2 cm.

#### **PARTIE A**

On considère la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}^*$  par :

$$\begin{cases} g(x) = x^2 - 1 + \ln(-x) & \text{si } x < 0 \\ g(x) = x^2 + 1 - \ln x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

1. Etudier les variations de  $g$  et dresser son tableau de variations
2. Calculer  $g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$  et  $g(-1)$
3. Etudier le signe de  $g(x)$  pour tout  $x$  élément de  $\mathbb{R}^*$

#### **PARTIE B**

1. Déterminer l'ensemble de définition  $D_f$  de  $f$  et calculer les limites de  $f$  aux bornes de  $D_f$ .

- En déduire une asymptote à la courbe  $(\mathcal{C})$  de  $f$ .
2. Montrer que la droite  $(\Delta): y = x$  est une asymptote à la courbe  $(\mathcal{C})$  de  $f$  et étudier les positions relatives de  $(\mathcal{C})$  et  $(\Delta)$
  3. Etudier le sens de variations de  $f$  puis dresser son tableau de variation sur  $D_f$
  4. Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$ .  
Justifier l'encadrement  $0,6 < \alpha < 0,7$ .
  5. Tracer  $(\Delta)$  et  $(\mathcal{C})$
  6. Discuter graphiquement, suivant les valeurs de  $m$ , du nombre de solutions sur  $\mathbb{R}$  de l'équation  $f(x) = m$  où  $m$  est un paramètre réel.

## PARTIE C

1. On désigne par  $\varphi$  la restriction de  $f$  à l'intervalle  $]0 ; +\infty[$ 
  - a. Montrer que  $\varphi$  définit une bijection de  $]0 ; +\infty[$  sur un intervalle  $I$  à préciser
  - b. Dresser le tableau de variation de la réciproque  $\varphi^{-1}$  de  $\varphi$  puis tracer sa courbe représentative  $(\mathcal{C}')$  dans le même repère que  $(\mathcal{C})$
2. Calculer l'aire  $\mathcal{A}$  en  $cm^2$  du domaine plan limité par la courbe  $(\mathcal{C})$ , la droite  $(\Delta)$  et les droites d'équations respectives  $x = \alpha$  et  $x = e$ .  
Prouver que  $\mathcal{A} = 2(1 - \alpha^4)$

**On donne :**  $\ln(0,6) = -0,51$  et  $\ln(0,7) = -0,35$

**CALCUL INTEGRAL ET  
EQUATIONS DIFFERENTIELLES**

# CALCUL INTEGRAL

## ◆ *Intégrale et Primitives :*

- Si  $F$  est une primitive de  $f$  sur  $I$  alors  $\forall a, b \in I$  :

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

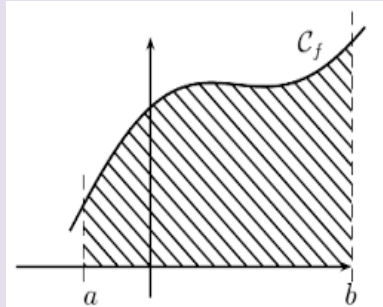
- Si  $g(x) = \int_a^x f(t)dt$ , alors,  $g'(x) = f(x)$  et donc  $g$  est la primitive de  $f$  qui s'annule en  $a$

◆ *Propriétés de l'intégrale :*

- **Relation de Chasles :**  $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$
- **Antisymétrie :**  $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$
- **Linéarité :**  $\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx$
- **Positivité :**  $f \geq 0$  sur  $[a ; b]$ ,  $a \leq b \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq 0$
- **Conservation de l'ordre :**  $f \geq g$  sur  $[a ; b]$ ,  $a \leq b \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$
- **Inégalité de la moyenne :** 
$$\begin{cases} m \leq f \leq M \Rightarrow m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a) \\ |f| \leq M \Rightarrow \left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq M|b-a| \end{cases}$$
- **Valeur moyenne :** la valeur moyenne de  $f$  sur  $[a ; b]$ :  $\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$
- **Intégration par parties :**  $\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$

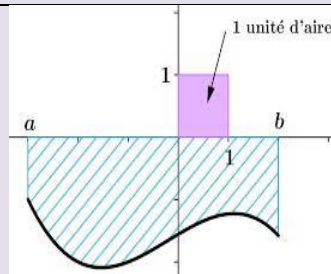
◆ *Calcul d'aires :*

***f* est positive**



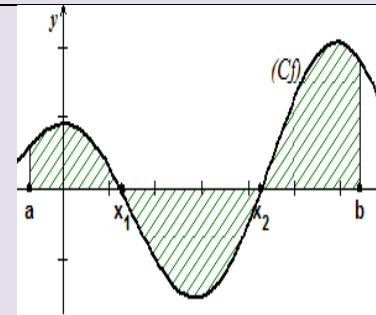
$$A = \int_a^b f(x) dx \times ua$$

***f* est négative**



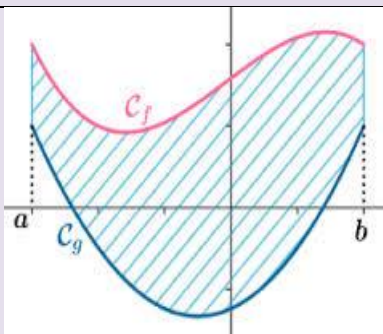
$$A = - \int_a^b f(x) dx \times ua$$

***f* est de signe quelconque**



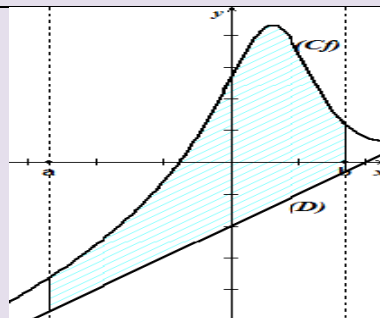
$$A = A_1 + A_2 + A_3$$

**Aire entre deux courbes**

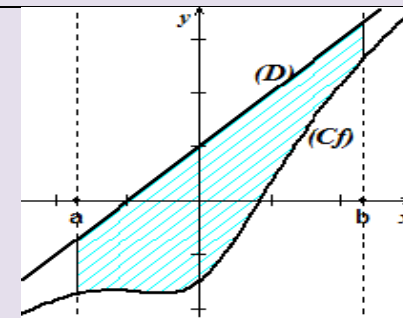


$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx \times ua$$

**Aires entre une courbe et une droite**



$$A = \int_a^b [f(x) - y] dx \times ua$$

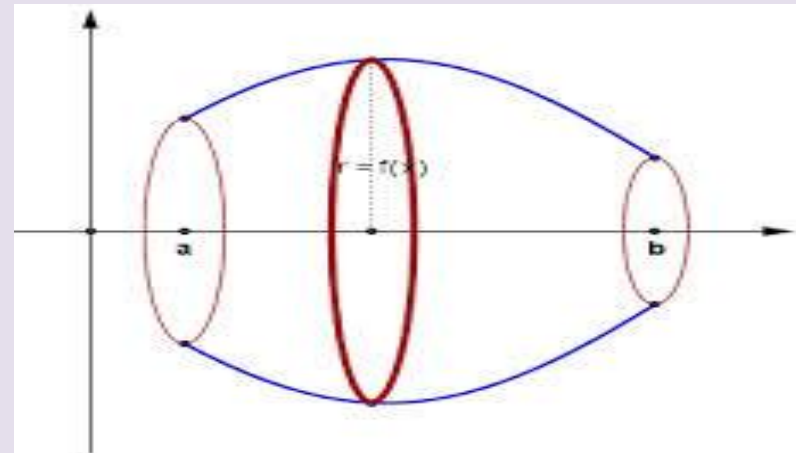


$$A = \int_a^b [y - f(x)] dx \times ua$$

◆ *Calcul de Volumes :*

**Volume du solide de révolution engendré par rotation autour de l'axe des abscisses**

L'espace étant rapporté à un repère orthogonal  $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , la rotation de la partie du plan  $(O ; \vec{i}, \vec{j})$  délimité par la courbe  $(C_f)$ , l'axe des abscisses et les droites d'équations  $x = a$  et  $x = b$  autour de l'axe des abscisses engendre un solide de révolution.



$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx \times uv$$

# EQUATIONS DIFFERENTIELLES

## Au programme

Equations différentielles	Solution générale	Solution particulière
$y' = ay$ ( $a$ réel)	$y = ke^{ax}$ avec $k \in \mathbb{R}$	Il existe une unique solution satisfaisant à la condition initiale $y(x_0) = y_0$
$y'' + \omega^2 y = 0$	$y = A \cos \omega x + B \sin \omega x$ avec $A \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathbb{R}$	Il existe une unique solution satisfaisant aux conditions initiales $y(x_0) = y_0$ et $y'(x_0) = y'_0$

## Hors programme

Equation différentielle	Solution
$ay'' + by' + c = 0$	<p>Elle s'exprime à l'aide des racines <math>r_1</math> et <math>r_2</math> de son équation caractéristique <math>ar^2 + br + c = 0</math>.</p> <ul style="list-style-type: none"><li>• Si <math>\Delta = b^2 - 4ac &gt; 0</math> alors <math>r_1</math> et <math>r_2</math> sont réels et <math display="block">y = Ae^{r_1x} + Be^{r_2x}</math></li><li>• Si <math>\Delta = b^2 - 4ac = 0</math> alors <math>r_1 = r_2 = r_0</math> est réel et <math display="block">y = (Ax + B)e^{r_0x}</math></li><li>• Si <math>\Delta = b^2 - 4ac &lt; 0</math> alors <math>r_1 = \alpha + i\beta</math> et <math>r_2 = \alpha - i\beta</math> sont complexes conjugués et <math display="block">y = e^{\alpha x}(A \cos \beta x + B \sin \beta x)</math></li></ul> <p>Dans tous les cas, Il existe une unique solution satisfaisant aux conditions initiales <math>y(x_0) = y_0</math> et <math>y'(x_0) = y'_0</math></p>

# SUITES NUMERIQUES

◆ *Généralités sur les suites numériques :*

- La suite  $(u_n)$  est croissante si pour tout  $n, u_{n+1} \geq u_n$
- La suite  $(u_n)$  est décroissante si pour tout  $n, u_{n+1} \leq u_n$
- La suite  $(u_n)$  est  $p$ -périodique,  $p$  entier positif, si pour tout  $n, u_{n+p} = u_n$
- Méthode pour étudier le sens de variation d'une suite :
  - ✓ Comparaison de  $u_{n+1} - u_n$  à 0

*Soit  $(u_n)$  est une suite:*

$$\begin{cases} \text{Si } u_{n+1} - u_n \geq 0 \text{ alors } (u_n) \text{ est croissante} \\ \text{Si } u_{n+1} - u_n \leq 0 \text{ alors } (u_n) \text{ est décroissante} \end{cases}$$

- ✓ Comparaison de  $\frac{u_{n+1}}{u_n}$  à 1

*Soit  $(u_n)$  est une suite à termes strictement positifs:*

$$\begin{cases} \text{Si } \frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1 \text{ alors } (u_n) \text{ est croissante} \\ \text{Si } \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1 \text{ alors } (u_n) \text{ est décroissante} \end{cases}$$

- La suite  $(u_n)$  est monotone si elle est croissante ou décroissante

## *Suites majorées – suites minorées – suites bornées*

- La suite  $(u_n)$  est majorée s'il existe un réel  $M$  tel que pour tout  $n, u_n \leq M$
- La suite  $(u_n)$  est minorée s'il existe un réel  $m$  tel que pour tout  $n, u_n \geq m$
- La suite  $(u_n)$  est bornée si elle est à la fois minorée et majorée
- La suite  $(u_n)$  est bornée  $\left\{ \begin{array}{l} \circ \text{ Si pour tout } n, m \leq u_n \leq M \\ \circ \text{ Si pour tout } n, |u_n| \leq M \end{array} \right.$

◆ *Suites arithmétiques :*

La suite  $(u_n)$  est arithmétique s'il existe un réel  $r$  tel que pour tout  $n$ ,  $u_{n+1} = u_n + r$

- Définition :

$$u_{n+1} = u_n + r ; r \text{ étant la raison de la suite arithmétique}$$

- Calcul de  $u_n$  en fonction de  $n$  :

$$\begin{cases} u_n = u_0 + nr \\ u_n = u_1 + (n - 1)r \\ u_n = u_p + (n - p)r \end{cases} \text{ en général}$$

- Somme des termes consécutifs :

$$\begin{cases} \circ u_p + u_{p+1} + \dots + u_n = \sum_{k=p}^n u_k = (n - p + 1) \left( \frac{u_p + u_n}{2} \right) \text{ en général} \\ \circ 1 + 2 + \dots + n = \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n + 1)}{2} \text{ en particulier} \end{cases}$$

- Convergence :

Une suite arithmétique  $(u_n)$  converge si et seulement si sa raison  $r = 0$

## ◆ Suites géométriques :

La suite  $(u_n)$  est géométrique s'il existe un réel  $q$  tel que pour tout  $n$ ,  $u_{n+1} = qu_n$

- Définition :

$$u_{n+1} = qu_n ; q \text{ étant la raison de la suite géométrique}$$

- Calcul de  $u_n$  en fonction de  $n$  :

$$\begin{cases} u_n = u_0 \times q^n \\ u_n = u_1 \times q^{n-1} \\ u_n = u_p \times q^{n-p} \text{ en général} \end{cases}$$

- Somme des termes consécutifs : ( $q \neq 1$ )

$$\begin{cases} \circ u_p + u_{p+1} + \dots + u_n = \sum_{k=p}^n u_k = u_p \times \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q} \text{ en général} \\ \circ 1 + q + q^2 + \dots + q^n = \sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \text{ en particulier} \end{cases}$$

- Convergence :

Une suite géométrique  $(u_n)$  converge vers 0 si et seulement si  $|q| < 1$

◆ *Démonstration par récurrence :*

Pour démontrer que pour tout entier  $n \geq n_0$ , une propriété  $P_n$  est vraie, il faut :

- **Initialisation** : vérifier que  $P_{n_0}$  est vraie
- **Hérédité** : supposer que  $P_n$  est vraie pour un certain  $n \geq n_0$  et démontrer que  $P_{n+1}$  est vraie
- **Conclusion** : pour tout  $n \geq n_0$ ,  $P_n$  est vraie

◆ *Limite de suites : suites convergentes – suites divergentes :*

- Une suite convergente vers un réel  $\ell$  est une suite qui admet une limite  $\ell$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$  :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$
- Une suite divergente vers  $\pm\infty$  est une suite qui admet une limite  $\pm\infty$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$  :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} = \pm\infty$
- Une suite divergente tout court est une suite qui n'admet pas de limite quand  $n$  tend vers  $+\infty$

◆ *Convergence des suites monotones :*

- Toute suite croissante et majorée converge
- Toute suite décroissante et minorée converge

◆ *Théorèmes de comparaison :*

**Théorème 1 :**

$$\left. \begin{array}{l} \circ v_n \leq u_n \leq w_n \\ \circ \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell \\ \circ \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \ell \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$$

**Théorème 1 (bis) :**

$$\left. \begin{array}{l} \circ |u_n - \ell| \leq v_n \\ \circ \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$$

**Théorème 2 :**

$$\left. \begin{array}{l} \circ u_n \geq v_n \\ \circ \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$$

$$\left. \begin{array}{l} \circ u_n \leq w_n \\ \circ \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = -\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$$

**COURBES PARAMETREES DU  
PLAN**

Le plan est muni d'un repère  $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ . Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ .  
On veut étudier la courbe  $(\Gamma)$  de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x(t) = f(t) \\ y(t) = g(t) \end{cases} ; t \in I$$

◆ *Equation cartésienne :*

En posant  $x = x(t)$  et  $y = y(t)$  ; l'équation obtenue en éliminant (si possible) la variable  $t$  entre  $x$  et  $y$  est appelée équation cartésienne de la courbe  $(\Gamma)$

◆ *Comparaison de  $M(t)$  et  $M(u(t))$  :*

On note  $M(t) (x(t) ; y(t))$  et donc  $M(u(t)) (x(u(t)) ; y(u(t)))$

$t \mapsto u(t)$  étant une fonction de  $t$  ; comparons  $M(t)$  et  $M(u(t))$

Résultat	Conclusion
$\begin{cases} x(u(t)) = x(t) \\ y(u(t)) = y(t) \end{cases}$	$M(t) = M(u(t))$
$\begin{cases} x(u(t)) = x(t) \\ y(u(t)) = -y(t) \end{cases}$	$M(t)$ et $M(u(t))$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses
$\begin{cases} x(u(t)) = -x(t) \\ y(u(t)) = y(t) \end{cases}$	$M(t)$ et $M(u(t))$ sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées
$\begin{cases} x(u(t)) = -x(t) \\ y(u(t)) = -y(t) \end{cases}$	$M(t)$ et $M(u(t))$ sont symétriques par rapport à l'origine du repère
$\begin{cases} x(u(t)) = y(t) \\ y(u(t)) = x(t) \end{cases}$	$M(t)$ et $M(u(t))$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$
$\begin{cases} x(u(t)) = -y(t) \\ y(u(t)) = -x(t) \end{cases}$	$M(t)$ et $M(u(t))$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = -x$

◆ *Réduction de l'intervalle d'étude :*

- **Comparaison de  $M(t)$  et  $M(t + p)$  :**

$$\begin{cases} x(t + p) = x(t) \\ y(t + p) = y(t) \end{cases} \Leftrightarrow M(t) = M(t + p) \Leftrightarrow x \text{ et } y \text{ sont de période commune } p$$

Une étude sur un intervalle de longueur  $p$  permet de tracer complètement  $(\Gamma)$

- **Comparaison de  $M(t)$  et  $M(-t)$  :**

✓ L'intervalle  $\left[-\frac{p}{2} ; \frac{p}{2}\right]$  est de longueur  $p$

✓  $\left[-\frac{p}{2} ; \frac{p}{2}\right] = \left[-\frac{p}{2} ; 0\right] \cup \left[0 ; \frac{p}{2}\right]$  et  $\forall t \in \left[0 ; \frac{p}{2}\right], -t \in \left[-\frac{p}{2} ; 0\right]$

✓  $M(-t) = S_{(?)}(M(t))$

**Conclusion :** On a  $(\Gamma) = (\Gamma_0) \cup S_{(?)}(\Gamma_0)$  où  $(\Gamma_0)$  est l'arc de  $(\Gamma)$  correspondant à  $\left[0 ; \frac{p}{2}\right]$  donc on peut restreindre le domaine d'étude à  $\left[0 ; \frac{p}{2}\right]$

- **Comparaison de  $M(t)$  et  $M\left(\frac{p}{2} + t\right)$  :**

- ✓ L'intervalle  $[0 ; p]$  est de longueur  $p$

- ✓  $[0 ; p] = \left[0 ; \frac{p}{2}\right] \cup \left[\frac{p}{2} ; p\right]$  et  $\forall t \in \left[0 ; \frac{p}{2}\right], \left(\frac{p}{2} + t\right) \in \left[\frac{p}{2} ; p\right]$

- ✓  $M\left(\frac{p}{2} + t\right) = S_{(?)}(M(t))$

**Conclusion :** On a  $(\Gamma) = (\Gamma_0) \cup S_{(?)}(M(t))$  où  $(\Gamma_0)$  est l'arc de  $(\Gamma)$  correspondant à  $\left[0 ; \frac{p}{2}\right]$  donc on peut restreindre le domaine d'étude à  $\left[0 ; \frac{p}{2}\right]$

- **Comparaison de  $M(t)$  et  $M\left(\frac{p}{2} - t\right)$  :**

- ✓ L'intervalle  $\left[-\frac{p}{4} ; \frac{3p}{4}\right]$  est de longueur  $p$

- ✓  $\left[-\frac{p}{4} ; \frac{3p}{4}\right] = \left[-\frac{p}{4} ; \frac{p}{4}\right] \cup \left[\frac{p}{4} ; \frac{3p}{4}\right]$  et  $\forall t \in \left[-\frac{p}{4} ; \frac{p}{4}\right], \left(\frac{p}{2} - t\right) \in \left[\frac{p}{4} ; \frac{3p}{4}\right]$

- ✓  $M\left(\frac{p}{2} - t\right) = S_{(?)}(M(t))$

**Conclusion :** On a  $(\Gamma) = (\Gamma_0) \cup S_{(?)}(M(t))$  où  $(\Gamma_0)$  est l'arc de  $(\Gamma)$  correspondant à  $\left[-\frac{p}{4} ; \frac{p}{4}\right]$  donc on peut restreindre le domaine d'étude à  $\left[-\frac{p}{4} ; \frac{p}{4}\right]$

◆ *Tableau conjoint des variations :*

Supposons que l'intervalle d'étude réduit trouvé est  $[a ; b]$

- Calculer  $x'(t)$  et  $y'(t)$
- Etudier le signe de  $x'(t)$  et  $y'(t)$  sur l'intervalle  $[a ; b]$
- Pour chaque valeur particulière  $t_0$  de  $t$  trouvée, calculer les quatre quantités  $x'(t_0)$  ;  $y'(t_0)$  ;  $x(t_0)$  et  $y(t_0)$
- Compléter le tableau ci-dessous par les signes  $x'(t)$  et  $y'(t)$  ainsi que les flèches indiquant les variations de  $x$  et  $y$

$t$	$a$	$t_0$	$t_1$	...	$b$
$x'(t)$	$x'(a)$	$x'(t_0)$	$x'(t_1)$		$x'(b)$
$y'(t)$	$y'(a)$	$y'(t_0)$	$y'(t_1)$		$y'(b)$
$x(t)$	$x(a)$	$x(t_0)$	$x(t_1)$		$x(b)$
$y(t)$	$y(a)$	$y(t_0)$	$y(t_1)$		$y(b)$

◆ *Notion de tangentes au point  $M(t_0)$ :*

- Si  $x'(t_0) = 0$  et  $y'(t_0) \neq 0$  alors  $(T): x = x(t_0)$  (verticale)
- Si  $x'(t_0) \neq 0$  et  $y'(t_0) = 0$  alors  $(T): y = y(t_0)$  (horizontale)
- Si  $x'(t_0) \neq 0$  et  $y'(t_0) \neq 0$  alors  $(T): y = \frac{y'(t_0)}{x'(t_0)}(x - x(t_0)) + y(t_0)$  (oblique)
- Le cas  $x'(t_0) = 0$  et  $y'(t_0) = 0$  est hors programme



◆ *Points d'intersection avec les axes du repère :*

- **Avec l'axe des abscisses :** Chercher  $M(t)(x(t); y(t))$  tel que  $y(t) = 0$
- **Avec l'axe des ordonnées :** Chercher  $M(t)(x(t); y(t))$  tel que  $x(t) = 0$

◆ *Les étapes du tracé de la courbe ( $\Gamma$ ) :*


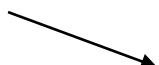
- Tracer un repère  $(O ; \vec{i}, \vec{j})$  (respecter l'unité graphique si elle est donnée)
- Placer les points  $M(a) ; M(t_0) ; M(t_1) ; \dots ; M(b)$  et tracer en chacun de ces points la tangente à la courbe
- Respecter l'évolution du tracer selon le tableau conjoint  
De  $M(a)$  vers  $M(t_0)$  ; de  $M(t_0)$  vers  $M(t_1)$  ; de  $M(t_1)$  vers  $\dots$  vers  $M(b)$

**1<sup>er</sup> cas**

$t$	
$x(t)$	
$y(t)$	

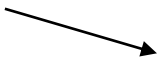

On se déplace vers la droite et vers le haut

**2<sup>ème</sup> cas**

$t$	
$x(t)$	
$y(t)$	

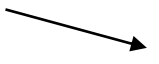
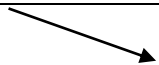
On se déplace vers la droite et vers le bas

**3<sup>ème</sup> cas**

$t$	
$x(t)$	
$y(t)$	

On se déplace vers la gauche et vers le haut

**4<sup>ème</sup> cas**

$t$	
$x(t)$	
$y(t)$	

On se déplace vers la gauche et vers le bas

# PROBABILITE

◆ *Dénombrement :*

• *Ordre et répétition*

<b>Ordre important</b>	<b>Répétitions possibles</b>	<b>Résultat possible</b>	<b>Nombre de résultats possibles</b>
<i>oui</i>	<i>oui</i>	<i>p – liste</i>	$n^p$
<i>oui</i>	<i>non</i>	<i>p – arrangement</i>	$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$
<i>non</i>	<i>non</i>	<i>p – combinaison</i>	$C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{(n-p)! p!}$

- *Problèmes de tirages*

<b>Types de tirages</b>	<b>ordre</b>	<b>Répétition</b>	<b>Résultat possible</b>	<b>Nombre de résultats possibles</b>
<b>Successifs avec remise</b>	On tient compte de l'ordre	Un élément peut être tiré plusieurs fois	$p - \text{liste}$	$n^p$
<b>Successifs sans remise</b>	On tient compte de l'ordre	Un élément n'est tiré qu'une seule fois	$p - \text{arrangement}$	$A_n^p$
<b>simultané</b>	On ne tient pas compte de l'ordre	Un élément n'est tiré qu'une seule fois	$p - \text{combinaison}$	$C_n^p$

- *Problèmes de lancés ou de jets*

<b>Objets lancés ou jetés</b>	<b>Nombre de faces</b>	<b>Nombre de lancés effectués</b>	<b>Calcul</b>
<b>Jeton ou pièce de monnaie</b>	<i>2 faces</i>	<i>n</i>	$2^n$
<b>Dé cubique</b>	<i>6 faces</i>	<i>n</i>	$6^n$
<b>Dé tétraédrique</b>	<i>4 faces</i>	<i>n</i>	$4^n$

- *Problèmes de cartes*

Dans un jeu de cartes, les mains sont composées de  $p$  cartes pris parmi 32 cartes ou 52 cartes et donc l'outil de calcul est la combinaison  $C_n^p$ .

**Voici la composition de chaque jeu :**

<b>Jeu de 32 Cartes</b>	<b>As</b>	<b>K</b>	<b>Q</b>	<b>J</b>	<b>10</b>	<b>9</b>	<b>8</b>	<b>7</b>	<b>Total</b>					
<i>Carreau</i>	1	1	1	1	1	1	1	1	8					
<i>Coeur</i>	1	1	1	1	1	1	1	1	8					
<i>Trêfle</i>	1	1	1	1	1	1	1	1	8					
<i>Pique</i>	1	1	1	1	1	1	1	1	8					
<b>Total</b>	4	4	4	4	4	4	4	4	32					
<b>Jeu de 52 Cartes</b>	<b>As</b>	<b>K</b>	<b>Q</b>	<b>J</b>	<b>10</b>	<b>9</b>	<b>8</b>	<b>7</b>	<b>6</b>	<b>5</b>	<b>4</b>	<b>3</b>	<b>2</b>	<b>Total</b>
<i>Carreau</i>	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	13
<i>Coeur</i>	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	13
<i>Trêfle</i>	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	13
<i>Pique</i>	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	13
<b>Total</b>	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	52

- *Règles de calcul sur les combinaisons*

- ✓ On multiplie les combinaisons si les différentes étapes sont reliées par un « et »
- ✓ On additionne les combinaisons si les différents cas sont reliés par un «ou»

- ◆ *Calcul des probabilités :*

- *Définition*

Soit  $\Omega = \{\omega_1 ; \omega_2 ; \dots ; \omega_n\}$  l'ensemble des éventualités d'une expérience aléatoire

Une probabilité  $P$  sur  $\Omega$  est parfaitement déterminée par la donnée des probabilités  $p_i = P(\omega_i)$  des évènements élémentaires  $\omega_i$  telles que :

- ✓ Pour tout  $i, 0 \leq p_i \leq 1$
- ✓  $P(\Omega) = p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$
- ✓ Pour tout évènement  $A \subset \Omega, P(A) =$   
*somme des probabilités des évènements élémentaires qui réalisent A*

- *Propriétés des probabilités*

Ensembles	Vocabulaire	Propriété
$\Omega$	Evènement certain	$P(\Omega) = 1$
$\emptyset$	Evènement impossible	$P(\emptyset) = 0$
$\{\omega_i\}$	Evènement élémentaire	$P(\omega_i) = p_i$
$A \subseteq \Omega$	Evènement quelconque	$0 \leq P(A) \leq 1$
$\bar{A}$	Evènement contraire de A	$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
$A \cap B = \emptyset$	A et B sont incompatibles	$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
$A \cup B$	Evènement A ou B	$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
$A \cap B$	Evènement A et B	

- *Calcul dans le cas d'équiprobabilité*

$$P(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$$

◆ *Probabilité conditionnelle :*

- *La formule pour calculer la probabilité de B sachant A*

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

- *Indépendance*

A et B sont indépendants si et seulement si  $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

- *Calcul de  $P(A \cap B)$*

✓ *Quand A et B sont indépendants :  $P(A \cap B) = P(A)P(B)$*

✓ *Quand A et B ne sont pas indépendants :  $P(A \cap B) = P(A)P_A(B)$*

- *Calcul de  $P(B)$  quand B est lié à un évènement A*

$$P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \bar{A})$$

◆ *Variables aléatoires :*

- *Loi de probabilité*

$x_i$	$x_1$	$x_2$	...	$x_n$
$p_i = P(X = x_i)$	$p_1$	$p_2$	...	$p_n$

- *Espérance mathématique ; Variance et Ecart – type*

$$✓ E(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \dots + x_np_n$$

$$✓ V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 \text{ avec}$$

$$E(X^2) = x_1^2p_1 + x_2^2p_2 + \dots + x_n^2p_n$$

$$✓ \sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

◆ *Schéma de Bernoulli de paramètres  $n$  et  $p$  - Loi binomiale*

• *Calcul des probabilités dans un schéma de Bernoulli de paramètres  $n$  et  $p$*

✓ Pour tout  $k, 0 \leq k \leq n$ , la probabilité d'obtenir exactement  $k$  succès est

$$p_k = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}$$

✓ La probabilité d'obtenir uniquement que des succès est  $p^n$

✓ La probabilité de n'obtenir aucun succès est  $(1 - p)^n$

✓ La probabilité d'obtenir au moins un succès est  $1 - (1 - p)^n$

• *Loi binomiale de paramètres  $n$  et  $p$*

**Soit**  $X$  la variable aléatoire égale au nombre de succès dans un schéma de Bernoulli de paramètres  $n$  et  $p$

✓ Pour tout  $k, 0 \leq k \leq n$ ,  $P(X = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}$

✓  $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - (1 - p)^n$

✓  $E(X) = np$

✓  $V(X) = np(1 - p)$

# **STATISTIQUES A DEUX VARIABLES**

◆ *Série statistique double :*

• *Définition*

Une série statistique double  $(x ; y)$  est constituée de  $n$  couples de nombres

$$(x_1 ; y_1), (x_2 ; y_2), \dots, (x_n ; y_n)$$

Valeurs du caractère $X$	$x_1$	$x_2$	...	$x_n$
Valeurs du caractère $Y$	$y_1$	$y_2$	...	$y_n$

• *Exemple*

On mesure en fonction de la masse suspendue l'allongement d'un ressort  
Les résultats sont regroupés dans le tableau suivant :

Masse suspendue $x_i$ en Kg	2	2,5	4	4,5	6,5	7	8	10
Allongement $y_i$ en cm	19	20	21	22	26	32	36	40

## ◆ Nuage de points et point moyen :

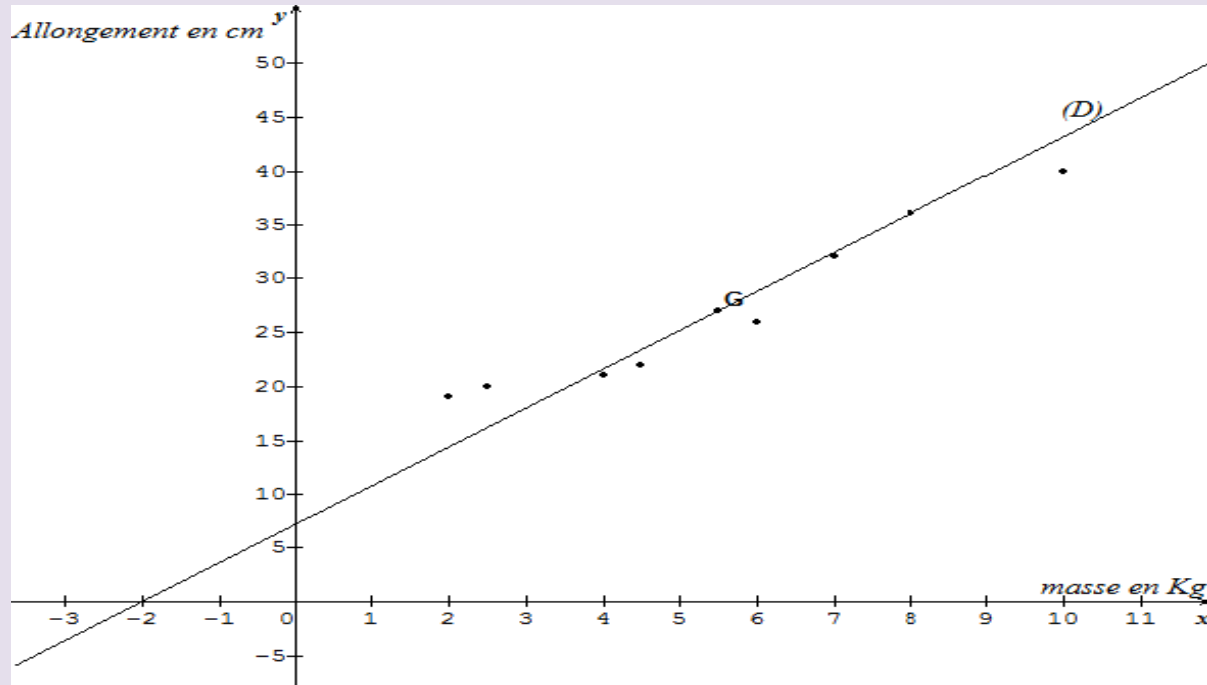
### • Définitions

✓ Le nuage de points associé est l'ensemble des  $n$  points de coordonnées  $(x_i ; y_i)$

✓ Le point moyen  $G$  associé est le point de coordonnées

$$x_G = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \quad \text{et} \quad y_G = \frac{y_1 + y_2 + \dots + y_n}{n}$$

### • Exemple



$$x_G = \frac{44}{8} = 5,5 \quad \text{et} \quad y_G = \frac{216}{8} = 27 \Leftrightarrow G(5,5 ; 27)$$

◆ *Ajustement affine par la méthode graphique :*

• *Définition*

On trace une droite  $(D)$  passant par  $G$  et « assez proche des points du nuage » puis on détermine son équation sous la forme  $y = mx + p$ .

En effet :  $(D)$  passe par  $A(x_A ; y_A)$  et  $B(x_B ; y_B) \Leftrightarrow \begin{cases} y_A = mx_A + p \\ y_B = mx_B + p \end{cases}$

• *Exemple*

Masse suspendue $x_i$ en Kg	2	2,5	4	4,5	6,5	7	8	10
Allongement $y_i$ en cm	19	20	21	22	26	32	36	40

Déterminons l'équation de la droite  $(D)$  passant par  $G(5,5 ; 27)$  et le septième point du nuage de points

$$\begin{cases} 27 = 5,5m + p \\ 36 = 8m + p \end{cases} \Leftrightarrow m = 3,6 \text{ et } p = 7,2 \Leftrightarrow (D): y = 3,6x + 7,2$$

## ◆ *Ajustement affine par la méthode de MAYER :*

- *Définition*

On fractionne le nuage de points en deux sous-nuages de même effectif de points moyens respectifs  $G_1$  et  $G_2$  (ou différent à une unité près si l'effectif est impair) alors puis on détermine l'équation de la droite  $(G_1 G_2)$  appelée droite de MAYER.

- *Exemple*

Déterminons la droite de Mayer du nuage de points

✓ Soit  $G_1$  le point moyen des quatre premiers points

$$G_1 \left( \frac{13}{4} ; \frac{82}{4} \right) \Leftrightarrow G_1(3,25 ; 20,5)$$

✓ Soit  $G_2$  le point moyen des quatre derniers points

$$G_2 \left( \frac{31,5}{4} ; \frac{134}{4} \right) \Leftrightarrow G_2(7,875 ; 33,5)$$

✓ Equation de la droite  $(G_1 G_2)$

$$(G_1 G_2): y = mx + p \Leftrightarrow \begin{cases} 20,5 = 3,25m + p \\ 33,5 = 7,875m + p \end{cases} \Leftrightarrow m = 2,8 \text{ et } p = 11,4$$

Donc  $(G_1 G_2) : y = 2,8x + 11,4$

◆ *Extrapolation et interpolation :*

- *Définition*

C'est faire des prévisions ou retrouver des résultats manquants sur la série statistique double à partir de l'équation  $y = mx + p$

- *Exemple*

En utilisant la droite (D):  $y = 3,6x + 7,2$

✓ Déterminons l'allongement prévisible pour une masse suspendue de 18 kg

$$x = 18 \Leftrightarrow y = 3,6 \times 18 + 7,2 = 72$$

**Pour une masse suspendue de 18 Kg, l'allongement à prévoir est de 72 cm**

✓ Estimons la masse suspendue ayant produit un allongement du ressort de 27 cm.

$$y = 27 \Leftrightarrow 27 = 3,6x + 7,2 \Leftrightarrow x = 5,5$$

**La masse de l'objet suspendu au ressort ayant produit un allongement du ressort de 27 cm est 5,5 Kg**

# **GEOMETRIE DANS L'ESPACE**

◆ *Egalité de deux vecteurs et Relation de Chasles :*

- *Egalité* :  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow ABCD$  est un parallélogramme
- *Relation de Chasles* :  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

◆ *Colinéarité :*

• *Définition*

$\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires si et seulement si, il existe un réel  $k$  tel que  $\vec{v} = k\vec{u}$

• *Parallélisme*

$(AB) // (CD) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{CD}$  sont colinéaires  $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} / \overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{CD}$

• *Appartenance à une droite et alignement*

✓  $M \in (AB) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AM}$  sont colinéaires  $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} / \overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$

✓  $A, B$  et  $C$  sont alignés  $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$  sont colinéaires  $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} / \overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$

## ◆ *Plans de l'espace et coplanarité :*

- *Définition*

Trois points non alignés  $A, B, C$  définissent un plan noté  $(ABC)$

- *Coplanarité*

✓ Les vecteurs  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$  sont coplanaires si et seulement si, il existe deux réels  $a$  et  $b$  tels que  $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$  ou si et seulement si,  $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w} = 0$

✓ Les points  $A, B, C, D$  sont coplanaires si et seulement si, il existe deux réels  $\alpha$  et  $\beta$  tels que  $\overrightarrow{AD} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}$  ou si et seulement si,  $(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD} = 0$

## ◆ *Produit scalaire et orthogonalité :*

- *Définition*

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\vec{u}, \vec{v})$$

- *Orthogonalité*

✓  $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

✓  $(AB) \perp (CD) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$

✓  $ABC$  est un triangle rectangle en  $A \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$

◆ *Géométrie analytique :*

Soit  $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  un repère de l'espace

Soit  $A(x_A, y_A, z_A)$  et  $B(x_B, y_B, z_B)$  deux points

Soit  $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$  deux vecteurs.

- Le vecteur  $\overrightarrow{AB}$  est tel que  $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$
- Le milieu  $I$  de  $[AB]$  est tel que  $I \left( \frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}, \frac{z_A + z_B}{2} \right)$
- Le vecteur  $\vec{u} + \vec{v}$  et  $k\vec{u}$  sont tels que  $\vec{u} + \vec{v} \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \\ z + z' \end{pmatrix}$  et  $k\vec{u} \begin{pmatrix} kx \\ ky \\ kz \end{pmatrix}$
- $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires si et seulement si  $\frac{x'}{x} = \frac{y'}{y} = \frac{z'}{z} = k$
- Si le repère  $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  est orthonormé alors :
  - ✓  $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$  et  $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
  - ✓  $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$

◆ *Produit Vectoriel :*

• *Définition*

✓  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires  $\Leftrightarrow \vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$

✓  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont non colinéaires

$$\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ et } \vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \Leftrightarrow \vec{u} \wedge \vec{v} \begin{pmatrix} |y & y'| \\ |z & z'| \\ |x & x'| \\ |x & x'| \\ |y & y'| \end{pmatrix}$$

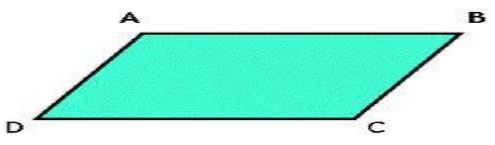
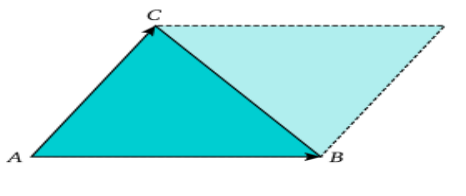
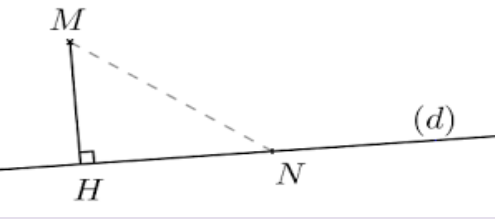
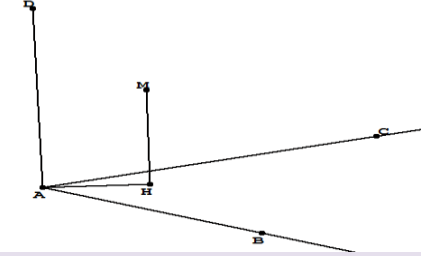
• *Propriétés*

✓  $\vec{v} \wedge \vec{u} = -\vec{u} \wedge \vec{v}$

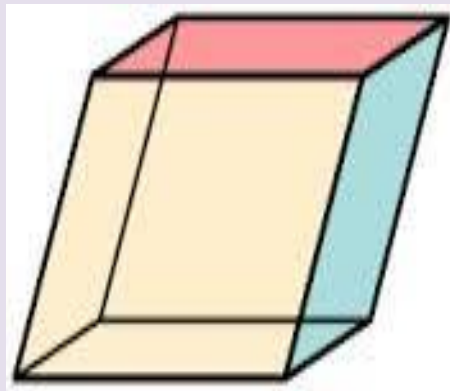
✓  $\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}$

✓  $(\vec{u} + \vec{v}) \wedge \vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{w} + \vec{v} \wedge \vec{w}$

◆ *Applications du produit vectoriel :*  
*Aires – Distances - Volumes :*

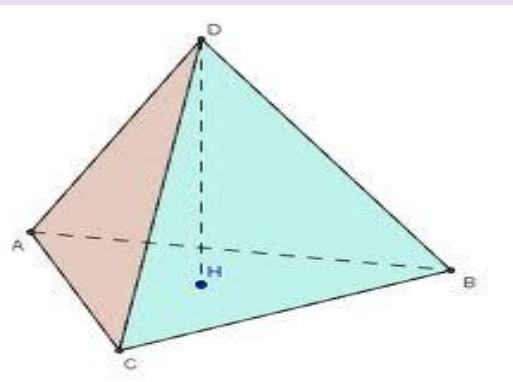
<p><b>Aire d'un Parallélogramme</b></p>		$\mathcal{A}_{ABCD} = \ \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}\  \times u_a$
<p><b>Aire d'un Triangle</b></p>		$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{\ \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\ }{2} \times u_a$
<p><b>Distance d'un point à une droite</b></p>		$d(M ; (AB)) = MH = \frac{\ \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{AB}\ }{\ \overrightarrow{AB}\ }$
<p><b>Distance d'un point à un plan</b></p>		$d(M ; (ABC)) = MH = \frac{ \overrightarrow{AM} \cdot (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) }{\ \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\ }$

**Volume d'un parallélépipède**



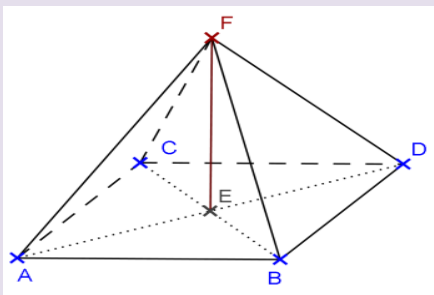
$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{ABCDEFGH} &= \mathcal{A}_{ABCD} \times d(E; (ABCD)) \times uv \\ &= \|\overrightarrow{AE} \cdot (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD})\| \times uv \end{aligned}$$

**Volume d'un tétraèdre**



$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{ABCD} &= \frac{1}{3} \times \mathcal{A}_{ABC} \times d(D; (ABC)) \times uv \\ &= \frac{1}{6} \|\overrightarrow{AD} \cdot (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC})\| \times uv \end{aligned}$$

**Volume d'une pyramide**



$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{ABCDE} &= \frac{1}{3} \times \mathcal{A}_{ABCD} \times d(E; (ABCD)) \times uv \\ &= \frac{1}{3} \|\overrightarrow{AE} \cdot (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD})\| \times uv \end{aligned}$$

# **LE RESOUTOUT**

### **Question1 :**

**Déterminer l'ensemble de définition  $D_f$  de  $f$**

- Ecrire les conditions d'existence de  $f(x)$
- Résoudre chacune des conditions
- Conclure

### **Ce qu'il faut savoir**

Soient  $P$  et  $Q$  deux fonctions polynômes et soit  $u$  une fonction de  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

- $f(x) = P(x) \Leftrightarrow D_f = \mathbb{R}$
- $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$  n'existe que si  $Q(x) \neq 0$
- $f(x) = \sqrt{P(x)}$  n'existe que si  $P(x) \geq 0$
- $f(x) = \frac{\sqrt{P(x)}}{Q(x)}$  n'existe que si  $P(x) \geq 0$  et  $Q(x) \neq 0$
- $f(x) = \frac{P(x)}{\sqrt{Q(x)}}$  n'existe que si  $Q(x) > 0$
- $f(x) = \sqrt{\frac{P(x)}{Q(x)}}$  n'existe que si  $Q(x) \neq 0$  et  $\frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0$
- $f(x) = \ln u(x)$  n'existe que si  $x \in D_u$  et  $u(x) > 0$
- $f(x) = \ln|u(x)|$  n'existe que si  $x \in D_u$  et  $u(x) \neq 0$
- $f(x) = e^{u(x)}$  n'existe que si  $x \in D_u \Leftrightarrow D_f = D_u$

## *Question 2 :*

*Etudier la continuité et la dérivabilité de  $f$  en  $x_0$  et interpréter graphiquement les résultats obtenus*

### *Continuité de $f$ en $x_0$*

- Calculer  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$  (et/ou)  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$
- Calculer  $f(x_0)$  si ce n'est pas donné
- Conclure

### *Ce qu'il faut savoir*

Si  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$  alors  $f$  est continue en  $x_0$

## *Dérivabilité de $f$ en $x_0$*

- Calculer  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  (et/ou)  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$
- Conclure

### *Ce qu'il faut savoir*

- ✓ Si  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ell$  alors  $f$  est dérivable en  $x_0$  et  $f'(x_0) = \ell$
- ✓ Si  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \neq \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  alors  $f$  n'est pas dérivable en  $x_0$
- ✓ Si  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \pm\infty$  (et/ou)  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \pm\infty$  alors  $f$  n'est pas dérivable en  $x_0$

## *Interprétation graphique des résultats obtenus*

### *Ce qu'il faut savoir*

→ Si  $f$  est dérivable en  $x_0$  alors  $(\mathcal{C}_f)$  admet au point d'abscisse  $x_0$  une tangente de coefficient directeur  $f'(x_0)$  et d'équation  $(T): y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

→ Si  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ell_1$  et  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ell_2$  avec  $\ell_1 \neq \ell_2$  alors  $(\mathcal{C}_f)$  admet au point de coordonnées  $(x_0 ; f(x_0))$  deux demi-tangentes de coefficients directeurs respectifs  $\ell_1$  et  $\ell_2$  et d'équations

$$(T_1): y = \ell_1(x - x_0) + f(x_0) \text{ et } (T_2): y = \ell_2(x - x_0) + f(x_0)$$

→ Si  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = -\infty$  et/ou  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty$  alors  $(\mathcal{C}_f)$  admet au point de coordonnées  $(x_0 ; f(x_0))$  une demi-tangente verticale dirigée vers le haut

→ Si  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty$  et/ou  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = -\infty$  alors  $(\mathcal{C}_f)$  admet au point de coordonnées  $(x_0 ; f(x_0))$  une demi-tangente verticale dirigée vers bas

### *Question 3 :*

*Calculer les limites de  $f$  aux bornes de son ensemble de définition et en déduire les asymptotes éventuelles*

- Calculer  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$  (et/ou)  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$  (si  $x_0$  est une borne de  $D_f$ )
- Calculer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  (et/ou)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  (si  $-\infty$  et/ou  $+\infty$  est une borne de  $D_f$ )
- Conclure

### *Ce qu'il faut savoir*

→ **Asymptote verticale**

Si on a

$\lim_{x \rightarrow x_0^\pm} f(x) = \pm\infty$  alors la droite d'équation  $x = x_0$  est une asymptote verticale à  $(C_f)$

→ **Asymptote horizontale**

Si on a

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$  alors la droite d'équation  $y = \ell$  est une asymptote horizontale à  $(C_f)$

### ***Question 4 :***

*Montrer que la droite d'équation  $y = ax + b$  est asymptote à  $(C_f)$  en  $\pm\infty$*

- Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)]$
- Conclure

#### ***Ce qu'il faut savoir***

→ Si on a  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$  alors la droite d'équation  $y = ax + b$  est une asymptote oblique à  $(C_f)$

### ***Question 5 :***

*Etudier les positions relatives de la courbe  $(C_f)$  et d'une droite  $(\Delta)$  d'équation  $y = ax + b$*

- Etudier le signe de  $f(x) - y$
- Conclure

#### ***Ce qu'il faut savoir***

→ Si  $\forall x \in I, f(x) - y > 0$  alors  $(C_f)$  est au-dessus de  $(\Delta)$  sur  $I$

→ Si  $\forall x \in I, f(x) - y < 0$  alors  $(C_f)$  est en-dessous de  $(\Delta)$  sur  $I$

### ***Question 6 :***

*Montrer que deux courbes  $(C_f)$  et  $(C_g)$  sont asymptotes en  $\pm\infty$*

- Calculer  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - g(x)]$
- Conclure

#### ***Ce qu'il faut savoir***

→ Si on a  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - g(x)] = 0$  alors  $(C_f)$  et  $(C_g)$  sont asymptotes en  $\pm\infty$

### ***Question 7 :***

*Etudier les positions relatives de deux courbes  $(C_f)$  et  $(C_g)$*

- Etudier le signe de  $f(x) - g(x)$
- Conclure

#### ***Ce qu'il faut savoir***

→ Si  $\forall x \in I, f(x) - g(x) > 0$  alors  $(C_f)$  est au-dessus de  $(C_g)$  sur  $I$

→ Si  $\forall x \in I, f(x) - g(x) < 0$  alors  $(C_f)$  est en-dessous de  $(C_g)$  sur  $I$

### *Question 8 : étudier les branches infinies de $f$*

- Calculer  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$  et au cas où  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a$  ( $a \in \mathbb{R}^*$ ) ;
- Calculer  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - ax]$
- Conclure

#### *Ce qu'il faut savoir*

→ Si  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$  alors  $(\mathcal{C}_f)$  admet une branche parabolique de direction asymptotique l'axe des ordonnées

→ Si  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$  alors  $(\mathcal{C}_f)$  admet une branche parabolique de direction asymptotique l'axe des abscisses

→ Si  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a$  ( $a \in \mathbb{R}^*$ ) et  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - ax] = \pm\infty$  alors  $(\mathcal{C}_f)$  admet une branche parabolique de direction asymptotique la droite d'équation  $y = ax$

→ Si  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a$  ( $a \in \mathbb{R}^*$ ) et  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - ax] = b$  ( $b \in \mathbb{R}$ ) alors  $(\mathcal{C}_f)$  admet une asymptote oblique d'équation  $y = ax + b$

**Question 9** : Montrer que le point  $\Omega(a ; b)$  est un centre de symétrie de  $(C_f)$

- Calculer  $f(2a - x) + f(x)$  (sous réserve que  $\forall x \in D_f, 2a - x \in D_f$ )
- Conclure

*Ce qu'il faut savoir*

→ Si  $f(2a - x) + f(x) = 2b$  alors  $\Omega(a ; b)$  est un centre de symétrie de  $(C_f)$

**Question 10** : Montrer que la droite d'équation  $x = a$  est un axe de symétrie de  $(C_f)$

- Calculer  $f(2a - x)$  (sous réserve que  $\forall x \in D_f, 2a - x \in D_f$ )
- Conclure

*Ce qu'il faut savoir*

→ Si  $f(2a - x) = f(x)$  alors la droite d'équation  $x = a$  est un axe de symétrie de  $(C_f)$

***Question 11 : Etudier le sens de variation de  $f$***

- Calculer  $f'(x)$
- Etudier le signe de  $f'(x)$
- Conclure

***Ce qu'il faut savoir***

- Si  $\forall x \in I, f'(x) > 0$  alors  $f$  est strictement croissante sur  $I$
- Si  $\forall x \in I, f'(x) < 0$  alors  $f$  est strictement décroissante sur  $I$
- Si  $\forall x \in I, f'(x) = 0$  alors  $f$  est constante sur  $I$

***Question 12 : Etudier les variations de  $f$***

- Calculer  $f'(x)$  ; étudier le signe de  $f'(x)$  et en déduire le sens de variation de  $f$
- Calculer les limites de  $f$  aux bornes de  $D_f$
- Dresser le tableau de variations de  $f$

***Ce qu'il faut savoir***

- Il faut vérifier l'harmonie entre les différents résultats portés dans le tableau de variations

### ***Question 13 :***

*Montrer que  $f$  définie une bijection d'un intervalle  $I$  sur un intervalle  $J$  à préciser*

(sous réserve que les variations de  $f$  sont déjà connues)

- Ecrire que  $f$  est continue sur  $I$  car elle est dérivable sur  $I$
- Ecrire que  $f$  est strictement croissante sur  $I$  (ou strictement décroissante sur  $I$ )
- Conclure alors que,  $f$  réalise une bijection de  $I$  sur  $J = f(I)$

#### ***Ce qu'il faut savoir***

→ l'intervalle  $J = f(I)$  doit être calculé ou doit être lu dans le tableau de variation et que  $J$  est de la même nature que  $I$

### ***Question 14 :***

*Montrer que  $f$  admet une bijection réciproque dont on donnera l'ensemble de définition*

- Montrer d'abord que,  $f$  réalise une bijection de  $I$  sur  $J = f(I)$
- Conclure alors que,  $f$  admet une bijection réciproque  $f^{-1}$  de  $J = f(I)$  sur  $I$

**Question 15 :** Donner les variations de la réciproque  $f^{-1}$  de  $f$

- Dire que  $f^{-1}$  a sur  $J$  le même sens de variation que  $f$  sur  $I$
- Dresser le tableau de variation de  $f^{-1}$  à partir de celui de  $f$

**Question 16 :**

Expliciter  $f^{-1}(x)$  pour tout  $x$  élément de  $J$  (ou donner l'expression de  $f^{-1}(x)$  pour tout  $x$  élément de  $J$ )

- Résoudre l'équation  $f(x) = y$
- On trouve  $x = f^{-1}(y)$
- Conclure en remplaçant le  $y$  dans  $f^{-1}(y)$  par  $x$

**Exemple :**  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} ; x \mapsto f(x) = 2x - 1$

$$f(x) = y \Leftrightarrow 2x - 1 = y \Leftrightarrow x = \frac{y+1}{2} = f^{-1}(y)$$

**Conclusion :**  $f^{-1}(x) = \frac{x+1}{2}$

**Question 17 :**

*Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  sur un intervalle  $I$  (ou  $I = ]a ; b[$ ) et que  $\alpha \in ]a ; b[$*

(sous réserve que les variations de  $f$  sont déjà connues)

- Ecrire que  $f$  est continue sur  $I$  car elle est dérivable sur  $I$
- Ecrire que  $f$  est strictement croissante sur  $I$  (ou strictement décroissante sur  $I$ )
- En déduire que,  $f$  réalise une bijection de  $I$  sur  $J = f(I)$
- Vérifier que  $0 \in J = f(I)$
- Conclure que l'équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha \in I$

*Pour montrer que  $\alpha \in ]a ; b[$*

- Calculer  $f(a)$  et  $f(b)$  puis  $f(a) \times f(b)$
- Conclure :

***Ce qu'il faut savoir***

→ Si  $f(a) \times f(b) < 0$  alors  $\alpha \in ]a ; b[$

### *Question 18 :*

*Montrer que l'équation  $f(x) = k$  admet une unique solution  $\alpha$  sur un intervalle  $I$  (ou  $I = ]a ; b[$ ) et que  $\alpha \in ]a ; b[$*

(sous réserve que les variations de  $f$  sont déjà connues)

- Ecrire que  $f$  est continue sur  $I$  car elle est dérivable sur  $I$
- Ecrire que  $f$  est strictement croissante sur  $I$  (ou strictement décroissante sur  $I$ )
- En déduire que,  $f$  réalise une bijection de  $I$  sur  $J = f(I)$
- Vérifier que  $k \in J = f(I)$
- Conclure que l'équation  $f(x) = k$  admet une unique solution  $\alpha \in I$

*Pour montrer que  $\alpha \in ]a ; b[$*

- Calculer  $f(]a ; b[)$  (intervalle ouvert de bornes  $f(a)$  et  $f(b)$ )
- Conclure :

*Ce qu'il faut savoir*

→ Si  $k \in f(]a ; b[)$  alors  $\alpha \in ]a ; b[$

**Question 19 :** Déterminer l'équation de la tangente  $(T)$  à  $(C_f)$  au point d'abscisse  $x_0$

- Ecrire l'équation sous la forme  $(T): y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$
- Calculer  $f'(x_0)$  et  $f(x_0)$
- Conclure

**Question 20 :**

Déterminer le point  $A$  d'abscisse  $a$  de  $(C_f)$  où la tangente  $(T)$  à  $(C_f)$  est parallèle à une droite d'équation  $y = mx + p$

- Résoudre  $f'(a) = m$  (puisque les deux coefficients directeurs sont égaux)
- Calculer  $f(a)$
- Conclure que  $A(a ; f(a))$

### ***Question 21 :***

*Déterminer le point A d'abscisse a de  $(C_f)$  où la tangente (T) à  $(C_f)$  est perpendiculaire à une droite d'équation  $y = mx + p$*

- Résoudre  $f'(a) = -\frac{1}{m}$  (puisque le produit des coefficients directeurs est  $-1$ )
- Calculer  $f(a)$
- Conclure  $A(a ; f(a))$

### ***Question 22 :***

*Démontrer qu'au point d'abscisse a la tangente (T) à  $(C_f)$  et la tangente (T') à  $(C_g)$  sont perpendiculaires*

- Calculer  $f'(a) \times g'(a)$
- Conclure

***Ce qu'il faut savoir***

Si  $f'(a) \times g'(a) = -1$ , alors (T) et (T') sont perpendiculaires

### ***Question 23 :***

***Déterminer le ou les points d'intersection de  $(C_f)$  et  $(C_g)$***

***Déterminer le ou les points où  $(C_f)$  et  $(C_g)$  se coupent (ou se rencontrent)***

- Résoudre  $f(x) = g(x)$
- Calculer  $f(x_1)$  ;  $f(x_2)$  ; ... (si  $x_1$  ;  $x_2$  ; ... sont les solutions trouvées)
- Conclure  $M_1(x_1 ; f(x_1))$  ;  $M_2(x_2 ; f(x_2))$  ; ...

### ***Question 24 :***

***Déterminer le ou les points d'intersection de  $(C_f)$  et de la droite  $(D): y = mx + p$***

***Déterminer le ou les points où  $(C_f)$  et  $(D)$  se coupent (ou se rencontrent)***

- Résoudre  $f(x) = y$
- Calculer  $f(x_1)$  ;  $f(x_2)$  ; ... (si  $x_1$  ;  $x_2$  ; ... sont les solutions trouvées)
- Conclure  
 $M_1(x_1 ; f(x_1))$  ;  $M_2(x_2 ; f(x_2))$  ; ...

### *Question 25 :*

*Déterminer les points d'intersections de  $(C_f)$  avec les axes du repère*

*Avec l'axe des abscisses*

- Résoudre  $f(x) = 0$  (puisque l'axe des abscisses a pour équation  $y = 0$ )

- Conclure

$M_1(x_1 ; 0) ; M_2(x_2 ; 0) ; \dots$  (si  $x_1 ; x_2 ; \dots$  sont les solutions trouvées)

*Avec l'axe des ordonnées*

- Calculer  $f(0)$  (puisque l'axe des ordonnées a pour équation  $x = 0$ )

- Conclure

$M_0(0 ; f(0))$

**Question 26 : Tracer la courbe  $(C_f)$**

- Construire le repère en respectant l'unité graphique
- Tracer les droites particulières (asymptotes ; tangentes ; ...)
- Placer les points particuliers (extrémums relatifs ; intersection avec les axes ; ...)
- Tracer la courbe en conformité avec le tableau de variations

**Question 27 : Tracer la courbe  $(C_{f^{-1}})$  à partir de la courbe  $(C_f)$**

- Ecrire que  $(C_{f^{-1}})$  et  $(C_f)$  sont symétriques par rapport à la droite d'équation  $y = x$
- Tracer  $(C_{f^{-1}})$  à partir de  $(C_f)$

**Question 28 : Soit  $g(x) = -f(x)$ ; sans étudier la fonction  $g$ , tracer  $(C_g)$  dans le même repère que  $(C_f)$**

- Ecrire :  $(C_g)$  et  $(C_f)$  sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses
- Tracer  $(C_g)$  à partir de  $(C_f)$

**Question 29 :** Soit  $g(x) = |f(x)|$ ; sans étudier la fonction  $g$ , tracer  $(C_g)$  dans le même repère que  $(C_f)$

- Ecrire :

Si  $f(x) \geq 0$  alors  $(C_g) = (C_f)$

Si  $f(x) \leq 0$  alors  $(C_g)$  et  $(C_f)$  sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses

- Tracer  $(C_g)$  à partir de  $(C_f)$

**Question 30 :** Soit  $g(x) = f(-x)$ ; sans étudier la fonction  $g$ , tracer  $(C_g)$  dans le même repère que  $(C_f)$

- Ecrire :  $(C_g)$  et  $(C_f)$  sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées

- Tracer  $(C_g)$  à partir de  $(C_f)$

**Question 31 :** Soit  $g(x) = f(|x|)$ ; sans étudier la fonction  $g$ , tracer  $(C_g)$  dans le même repère que  $(C_f)$

- Ecrire :  
Si  $x \geq 0$  alors  $(C_g) = (C_f)$   
Si  $x \leq 0$  alors  $(C_g)$  et  $(C_f)$  sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées
- Tracer  $(C_g)$  à partir de  $(C_f)$

**Question 32 :** Soit  $g(x) = f(x - a) + b$ ; sans étudier la fonction  $g$ , tracer  $(C_g)$  dans le même repère que  $(C_f)$

- Ecrire :  $(C_g)$  est l'image de  $(C_f)$  par la translation de vecteur  $a\vec{i} + b\vec{j}$
- Tracer  $(C_g)$  à partir de  $(C_f)$

### **Question 33 :**

*Calculer l'aire du domaine limité par  $(C_f)$ , l'axe des abscisses et les droites d'équations  $x = a$  et  $x = b$*

- Cas où  $(C_f)$  est au dessus de l'axe des abscisses sur  $[a ; b]$  (c.-à-d  $f \geq 0$  sur  $[a ; b]$ )

$$\begin{cases} a \leq x \leq b \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases}$$

$$\mathcal{A} = \int_a^b f(x) dx \times ua$$

- Cas où  $(C_f)$  est en dessous de l'axe des abscisses sur  $[a ; b]$  (c.-à-d  $f \leq 0$  sur  $[a ; b]$ )

$$\begin{cases} a \leq x \leq b \\ f(x) \leq y \leq 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{A} = - \int_a^b f(x) dx \times ua$$

- Pour exprimer l'aire en  $cm^2$ ,  $ua = \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\|$  dans un repère orthogonal  $(O ; \vec{i}, \vec{j})$

### *Question 34 :*

*Calculer l'aire du domaine limité par  $(C_f)$ , la droite  $(\Delta): y = mx + p$  et les droites d'équations  $x = a$  et  $x = b$*

- Cas où  $(C_f)$  est au-dessus de  $(\Delta)$  sur  $[a ; b]$

$$\begin{cases} a \leq x \leq b \\ mx + p \leq y \leq f(x) \end{cases}$$

$$\mathcal{A} = \int_a^b [f(x) - y] dx \times ua$$

- Cas où  $(C_f)$  est en-dessous de  $(\Delta)$  sur  $[a ; b]$

$$\begin{cases} a \leq x \leq b \\ f(x) \leq y \leq mx + p \end{cases}$$

$$\mathcal{A} = \int_a^b [y - f(x)] dx \times ua$$

**Question 35 :**

Calculer le volume du solide de révolution engendré par la rotation autour de l'axe des abscisses du domaine limité par  $(C_f)$ , l'axe des abscisses et les droites d'équations  $x = a$  et  $x = b$

- Ecrire :

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx \times uv$$

- Chercher  $f^2(x)$  avant de passer au calcul de l'intégrale
- Pour exprimer le volume en  $cm^3$ ,  $uv = \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\| \times \|\vec{k}\|$  dans un repère orthogonal  $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

**Question 36 :**

*Montrer que  $F$  est une primitive de  $f$  sur un intervalle  $I$*

- Calculer  $F'(x)$
- Conclure

*Ce qu'il faut savoir*

→ Si  $F'(x) = f(x)$  alors  $F$  est une primitive de  $f$

**Question 37 :**

*Déterminer les réels  $a$  et  $b$  (ou les réel  $a$ ,  $b$  et  $c$ ) pour que  $F$  soit une primitive de  $f$  sur un intervalle  $I$*

- Calculer  $F'(x)$  en fonction de  $a$  et  $b$  (ou en fonction de  $a$ ,  $b$  et  $c$ )
- Ecrire l'égalité  $F'(x) = f(x)$  et faire une identification des coefficients

**Question 38 :**

Soit  $F$  la fonction définie par  $F(x) = \int_a^x f(t) dt$  ; que représente  $F$  pour  $f$  ?

Il suffit d'écrire que  $F$  est la primitive de  $f$  qui s'annule-en  $a$

**Question 39 :**

Soit  $F$  la fonction définie par  $F(x) = \int_a^x f(t) dt$  ; montrer que  $F$  est dérivable et calculer sa dérivée

Il suffit d'écrire que  $F$  étant la primitive de  $f$  qui s'annule-en  $a$ , alors  $F$  est dérivable et  $F'(x) = f(x)$

**Question 40 :**

Donner une interprétation géométrique de l'intégrale  $\int_a^b f(x) dx$

(sous réserve que  $a < b$  et que  $\forall x \in [a ; b], f(x) \geq 0$ )

Ecrire simplement que  $\int_a^b f(x) dx$  est l'aire en unité d'aire du domaine limité par la courbe  $(C_f)$ , l'axe des abscisses et les droites d'équations  $x = a$  et  $x = b$

**LES PROBLEMES CLASSIQUES  
RESOLUS**

## *Classique 1 :*

*Equation différentielle avec second membre  $y' + ay = g(x)$*

On considère l'équation différentielle  $(E) : \frac{1}{2}y' + y = e^{-2x}$

- 1) On pose  $u(x) = axe^{-2x}$  où  $a$  est un réel.
- 2) Déterminer le nombre réel  $a$  pour que la fonction  $u : x \mapsto u(x)$  définie sur  $\mathbb{R}$  soit solution de  $(E)$
- 3) Résoudre l'équation différentielle  $(E_0) : \frac{1}{2}y' + y = 0$
- 4) Démontrer qu'une fonction  $y$  définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$ , est solution de  $(E)$  si et seulement si la fonction  $y - u$  est solution de  $(E_0)$ .
- 5) En déduire toutes les solutions de  $(E)$  puis la solution particulière  $f$  de  $(E)$ , dont la courbe représentative  $(\mathcal{C})$  dans un repère orthonormé  $(O ; \vec{i}, \vec{j})$  passe par le point  $A(0 ; -1)$

## Résolution

(1) *Déterminons le nombre*  $a$

$u$  est solution de  $(E)$  si  $\frac{1}{2}u'(x) + u(x) = e^{-2x}$

$$\frac{1}{2}u'(x) + u(x) = e^{-2x} \Rightarrow \frac{1}{2}ae^{-2x} = e^{-2x}$$

Par identification  $a = 2 \Rightarrow u(x) = 2xe^{-2x}$

(2) *Résolution de  $(E_0)$*  :  $\frac{1}{2}y' + y = 0$

$$\frac{1}{2}y' + y = 0 \Rightarrow y' = -2y \Rightarrow y = ke^{-2x}; k \in \mathbb{R}$$

(3) *Démonstration*

*Supposons que  $y$  est solution de  $(E)$  et montrons que  $y - u$  est solution de  $(E_0)$*

Si  $y$  est solution de  $(E)$ , alors on a  $\frac{1}{2}y'(x) + y(x) = e^{-2x}$  ;

or  $\frac{1}{2}u'(x) + u(x) = e^{-2x}$  d'où  $\frac{1}{2}y'(x) + y(x) = \frac{1}{2}u'(x) + u(x)$

$\Rightarrow \frac{1}{2}(y - u)'(x) + (y - u)(x) = 0$  et donc  $y - u$  est solution de  $(E_0)$

*Réciproquement, supposons que  $y - u$  est solution de  $(E_0)$  et montrons que  $y$  est solution de  $(E)$*

Si  $y - u$  est solution de  $(E_0)$ , alors on a  $\frac{1}{2}(y - u)'(x) + (y - u)(x) = 0$  d'où

$$\frac{1}{2}y'(x) - \frac{1}{2}u'(x) + y(x) - u(x) = 0 \implies \frac{1}{2}y'(x) + y(x) = \frac{1}{2}u'(x) + u(x)$$

Or  $\frac{1}{2}u'(x) + u(x) = e^{-2x}$  d'où  $\frac{1}{2}y'(x) + y(x) = e^{-2x}$  et donc  $y$  est solution de  $(E)$

*En conclusion  $y$  est solution de  $(E)$  si et seulement si  $y - u$  est solution de  $(E_0)$*

(4) *Déduction de toutes les solutions de  $(E)$*

Soit  $y$  une solution de  $(E)$ , on a d'après (3) et (2),  $y(x) - u(x) = ke^{-2x}$  ; d'où

$$y(x) = ke^{-2x} + u(x) \iff y(x) = ke^{-2x} + 2xe^{-2x} ; k \in \mathbb{R}$$

*Solution particulière  $f$  de  $(E)$*

$$f(x) = ke^{-2x} + 2xe^{-2x} \text{ et } f(0) = -1 \iff k = -1 \iff f(x) = (2x - 1)e^{-2x}$$

*Commentaires*

- Ces quatre questions sont toutes liées
- Tout candidat sérieux doit être en mesure de reproduire à l'identique le raisonnement du *classique 1*
- Attention !!! La réciproque dans la **question (3)** n'est pas facultative

**Classique 2 : Etude d'une suite récurrente**  $u_{n+1} = f(u_n)$

Soit  $f$  la fonction définie sur  $[0 ; 1]$  par  $f(x) = \frac{e^x}{e^x + x}$

- (1) Etudier les variations de la fonction  $f$
- (2) Soit  $g$  la définie sur  $[0 ; 1]$  par  $g(x) = f(x) - x$

Montrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  et que  $\alpha \in \left] \frac{1}{2} ; 1 \right[$

- (3) On pose  $I = \left[ \frac{1}{2} ; 1 \right]$

- (a) Montrer que pour tout élément  $x$  de  $I$ ,  $f(x) \in I$  et que  $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$
- (b) Montrer que pour tout élément  $x$  de  $I$ ,  $|f(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2}|x - \alpha|$

- (4) Soit  $(u_n)$  la suite définie pour tout  $n \in \mathbb{N}$  par 
$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

- (a) Montrer que pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n \in I$
- (b) Montrer que pour tout entier naturel  $n$ ,

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha| \text{ et que } |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^{n+1}}$$

- (c) Montrer que la suite  $(u_n)$  converge vers  $\alpha$
- (d) Déterminer le plus petit entier  $n_0$  pour lequel l'on a pour tout  $n \geq n_0$ ,  $|u_n - \alpha| \leq 10^{-3}$

**On donne :**  $\sqrt{e} \simeq 1,65$  ;  $e \simeq 2,72$  ;  $\ln 2 = 0,69$  et  $\ln 10 = 2,30$

## Résolution

(1) Variations de  $f$

$$f'(x) = \frac{(x-1)e^x}{(e^x + x)^2}; \forall x \in [0; 1], x - 1 \leq 0 \text{ et } \frac{e^x}{(e^x + x)^2} > 0 \text{ d'où } \frac{(x-1)e^x}{(e^x + x)^2} \leq 0$$

$\forall x \in [0; 1], f'(x) \leq 0$  alors  $f$  est décroissante

(2) Montrons que l'équation  $g(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$

$$g'(x) = f'(x) - 1; \forall x \in [0; 1], f'(x) \leq 0 \Rightarrow f'(x) - 1 < 0 \Rightarrow g'(x) < 0$$

La fonction  $g$  est continue car dérivable et est strictement décroissante sur  $[0; 1]$ .

Alors réalise une bijection de  $[0; 1]$  sur  $g([0; 1]) = [g(1); g(0)] = \left[-\frac{1}{e+1}; 1\right]$ .

Or  $0 \in \left[-\frac{1}{e+1}; 1\right]$  d'où l'équation  $g(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha \in [0; 1]$

Montrons que  $\alpha \in \left]\frac{1}{2}; 1\right[$

$$\begin{cases} g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{e}}{\sqrt{e+1}} - \frac{1}{2} = \frac{2\sqrt{e}-1}{2(\sqrt{e}+1)} \\ g(1) = \frac{e}{e+1} - 1 = -\frac{1}{e+1} \end{cases} \Rightarrow g\left(\frac{1}{2}\right) \times g(1) < 0 \text{ alors } \alpha \in \left]\frac{1}{2}; 1\right[$$

(3) On pose  $I = \left[\frac{1}{2}; 1\right]$

(a) Montrons que pour tout élément  $x$  de  $I$ ,  $f(x) \in I$

$x \in I \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \Leftrightarrow f(1) \leq f(x) \leq f\left(\frac{1}{2}\right)$  car  $f$  est décroissante sur  $I$

Or  $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{e}}{\sqrt{e+\frac{1}{2}}} = 0,76$  et  $f(1) = \frac{e}{e+1} = 0,73$  d'où

$\frac{1}{2} \leq 0,73 \leq f(x) \leq 0,76 \leq 1$  et donc  $f(x) \in I$

(b) Montrer que pour tout élément  $x$  de  $I$ ,  $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$

$x \in I \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \Leftrightarrow \sqrt{e} \leq e^x \leq e$  et  $0 \leq -(x-1) \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow 0 \leq -(x-1)e^x \leq \frac{e}{2}$

$\frac{1}{2} \leq x \leq 1$  et  $\sqrt{e} \leq e^x \leq e \Leftrightarrow \sqrt{e} + \frac{1}{2} \leq e^x + x \leq e + 1$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{e} + \frac{1}{2}\right)^2 \leq (e^x + x)^2 \leq (e + 1)^2$

$\frac{1}{(e+1)^2} \leq \frac{1}{(e^x+x)^2} \leq \frac{1}{\left(\sqrt{e}+\frac{1}{2}\right)^2}$  et  $0 \leq -(x-1)e^x \leq \frac{e}{2}$

$\Leftrightarrow 0 \leq -\frac{(x-1)e^x}{(e^x+x)^2} \leq \frac{e}{2\left(\sqrt{e}+\frac{1}{2}\right)^2} \leq \frac{e}{2(\sqrt{e})^2}$

On a alors  $0 \leq -f'(x) \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow |0| \leq |f'(x)| \leq \left|-\frac{1}{2}\right|$

et donc  $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$

(c) Montrer que pour tout élément  $x$  de  $I$ ,  $|f(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2} |x - \alpha|$

$\alpha \in I$  et  $\forall x \in I$ ,  $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$  alors d'après l'inégalité de la moyenne, on a :

$$\left| \int_{\alpha}^x f'(t) dt \right| \leq \frac{1}{2} |x - \alpha| \text{ d'où } |[f'(t)]_{\alpha}^x| \leq \frac{1}{2} |x - \alpha| \Leftrightarrow |f(x) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{2} |x - \alpha|$$

Or d'après (2),  $f(\alpha) = \alpha$  d'où  $\forall x \in I$ ,  $|f(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2} |x - \alpha|$

(4) Soit  $(u_n)$  la suite définie pour tout  $n \in \mathbb{N}$  par 
$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

(a) Montrons que pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n \in I$

Pour  $n = 0$ , on a  $u_0 = \frac{1}{2} \in I = \left[ \frac{1}{2} ; 1 \right]$

Supposons que pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n \in I$  et montrons que  $u_{n+1} \in I$

Si  $u_n \in I$ , alors  $f(u_n) = u_{n+1} \in I$  car d'après (3a) :  $\forall x \in I$ ,  $f(x) \in I$

Conclusion : Par récurrence, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n \in I$

(b) Démonstrations

✓ Montrons que pour tout entier naturel  $n$ ,  $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|$

Comme  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \in I$  ; posons  $x = u_n$  dans (3c) : On a

$$|f(u_n) - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|. \text{ Or } f(u_n) = u_{n+1} \text{ d'où } \forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|$$

### Autre façon de faire

Comme  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in I ; \alpha \in I$  et  $\forall x \in I, |f'(x)| \leq \frac{1}{2}$  alors d'après l'inégalité de la moyenne, on a :  $|\int_{\alpha}^{u_n} f'(t) dt| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|$  d'où  $|[f'(t)]_{\alpha}^{u_n}| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|$

$\Leftrightarrow |f(u_n) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|$ . Or d'après (2),  $f(\alpha) = \alpha$  et par définition

$f(u_n) = u_{n+1}$  d'où  $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|$

✓ Montrons que pour tout entier naturel  $n, |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^{n+1}}$

### Raisonnement par récurrence

Pour  $n = 0, |u_0 - \alpha| = \left| \frac{1}{2} - \alpha \right| ; \frac{1}{2} \leq \alpha \leq 1 \Rightarrow -1 \leq -\alpha \leq -\frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} - \alpha \leq 0$   
 $\Rightarrow |0| \leq \left| \frac{1}{2} - \alpha \right| \leq \left| -\frac{1}{2} \right| \Rightarrow |u_0 - \alpha| \leq \frac{1}{2}$

Supposons que pour tout entier naturel  $n, |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^{n+1}}$  et montrons que

$$|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^{n+2}}$$

Si  $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^{n+1}}$  alors  $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^{n+1}}$  et donc  $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^{n+2}}$

Conclusion : par récurrence,  $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^{n+1}}$

### Autre façon de faire

On sait que  $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|$ ; d'où :

$$|u_1 - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_0 - \alpha|$$

$$|u_2 - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_1 - \alpha|$$

$$|u_3 - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_2 - \alpha|$$

$\vdots$

$$|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_{n-1} - \alpha|$$

Le produit membre à membre donne après simplification :

$$|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha|$$

$$\frac{1}{2} \leq \alpha \leq 1 \Rightarrow -1 \leq -\alpha \leq -\frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} - \alpha \leq 0$$

$$\Rightarrow |0| \leq \left|\frac{1}{2} - \alpha\right| \leq \left|-\frac{1}{2}\right| \Rightarrow |u_0 - \alpha| \leq \frac{1}{2}$$

On a  $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \times \frac{1}{2}$  et donc  $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

(c) Montrons que la suite  $(u_n)$  converge vers  $\alpha$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n - \alpha| \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 0 \text{ car } \left|\frac{1}{2}\right| < 1 \text{ d'où } \lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n - \alpha| = 0$$

La suite  $(u_n - \alpha)$  converge vers 0 et donc la suite  $(u_n)$  converge vers  $\alpha$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha$$

(d) Déterminons le plus petit entier  $n_0$  pour lequel l'on a pour tout  $n \geq n_0$ ,

$$|u_n - \alpha| \leq 10^{-3}$$

On a  $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$  donc aura  $|u_n - \alpha| \leq 10^{-3}$  si  $\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \leq 10^{-3}$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \leq 10^{-3} \Rightarrow -(n+1) \ln 2 \leq -3 \ln 10 \Rightarrow n \geq \frac{3 \ln 10}{\ln 2} - 1$$

$\Rightarrow n \geq 9$  et donc  $n_0 = 9$ .

**Commentaires : Faire le même raisonnement pour les questions :**

- ✓ Déterminer le plus petit entier  $n_0$  pour lequel  $u_{n_0}$  est une valeur approchée de  $\alpha$  à  $10^{-3}$  près
- ✓ Déterminer le plus petit entier  $n_0$  pour lequel l'on a pour tout  $n \geq n_0$ ,  
 $|u_n - \alpha| \leq 10^{-3}$

## Problème de Synthèse 2

On considère la fonction  $f$  définie sur  $]0 ; +\infty[$  par  $f(x) = x + \ln\left(\frac{x}{2x+1}\right)$

On désigne par  $(\mathcal{C})$  la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormal  $(O ; \vec{i}, \vec{j})$  du plan d'unité graphique 4 cm.

### PARTIE A

1. Calculer les limites de  $f$  aux bornes de son ensemble de définition.
2. Etudier le sens de variation de  $f$  puis dresser son tableau de variation
3. a. Montrer la droite  $(\Delta)$  la droite d'équation  $y = x - \ln 2$  est une asymptote à la courbe  $(\mathcal{C})$  de  $f$   
b. Etudier la position relative de  $(\mathcal{C})$  et  $(\Delta)$
4. Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$  et justifier que  $\alpha \in \left[1 ; \frac{5}{4}\right]$
5. Tracer  $(\mathcal{C})$  et  $(\Delta)$
6. Soit  $t$  un réel compris entre 0 et 1
  - a. Calculer  $\mathcal{A}(t)$  en unité d'aire du domaine limité par la courbe  $(\mathcal{C})$ , la droite  $(\Delta)$  et les droites d'équations  $x = t$  et  $x = \frac{e^2 - 1}{2}$ .  
(On pourra s'aider d'une intégration par parties)

b. Déterminer  $\lim_{t \rightarrow 0^+} \mathcal{A}(t)$

7. Montrer que  $\alpha$  est solution de l'équation  $(2x + 1)e^{-x} = x$

## PARTIE B

On nomme  $g$  la fonction définie sur  $I = \left[1 ; \frac{5}{4}\right]$  par  $g(x) = (2x + 1)e^{-x}$

1. Etudier les variations de  $g$

En déduire que pour tout  $x$  élément de  $I$ ,  $g(x) \in I$

2. Montrer pour tout  $x$  élément de  $I$ ,  $|g'(x)| \leq \frac{3}{5}$  et que  $|g(x) - \alpha| \leq \frac{3}{5}|x - \alpha|$

3. Soit  $(u_n)$  la suite définie pour tout entier naturel  $n$  par : 
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = g(u_n) \end{cases}$$

a. Montrer que pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n \in I$

b. Montrer que pour tout entier naturel  $n$ ,  $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{3}{5}|u_n - \alpha|$

c. Montrer que pour tout entier naturel  $n$ ,  $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{4} \left(\frac{3}{5}\right)^n$

En déduire que  $(u_n)$  est convergente et donner sa limite

d. Déterminer le plus petit entier naturel  $n_0$  pour que  $u_{n_0}$  soit une valeur approchée de  $\alpha$  à  $10^{-2}$  près.

**On donne :**  $\ln 2 = 0,70$  ;  $\ln 3 = 1,09$  ;  $\ln 5 = 1,60$  ;  $\ln 7 = 1,94$  ;

$e^{-1} = 0,37$  ;  $e^{-1,25} = 0,2$

