



# TECHNIQUES DE REDACTION ET CALCULS DE LIMITES NIVEAU Tle S

**NB : les exemples sont exhaustifs et ont pour but d'expliquer une méthode ou de montrer comment rédiger, ce document n'est pas un recueil d'exercices**

**PARTIE A : Technique de rédaction efficace.**

Le calcul des limites obéit à 2 ou 3 étapes :

**Etape 1 : TRAVAIL AU BROUILLON**

- Vérification au brouillon (calculs de base : remplacer par la valeur réel ou infini ou utiliser la composée)
- Transformation si forme indéterminée

**Etape 2 : REDACTION CLAIRE ET SUCCINTE**

En 5 lignes maximum avec justification à la fin qui se présente en :

Ligne 1 ou 2 : Ecriture de la fonction et de son expression ou avec le début de la transformation : (factorisation normale ou forcée, expression conjuguée avec radical, taux de variation, changement d'écriture, amplificateur trigonométrique, principe du multiplier-diviser). Et conclure si pas de forme indéterminée. Sinon ;

Ligne 2, 3 ou 4 : Les grandes étapes de la démonstration du brouillon (sauter plusieurs lignes de la démonstration car le professeur s'intéresse au début et la fin de la démonstration)

Etape 3 : Ligne 2 : plaquer le résultat et conclure si pas de forme indéterminée puis justifier avec les limites de référence et les limites et opérations (somme, produit, quotient, composée) avec chacun des blocs de calculs (Car...).

Ligne 3 ou 4 ou 5 : Conclure avec la forme finale de la démonstration et justifier avec les limites de référence et les limites et opérations (somme, produit, quotient, composée) avec chacun des blocs de calculs (Car...)

**Exemple de rédaction :**

Cas 1 :  $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 - 5x - 3$  ; Cas 2 :  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 5x - 6}{x - 1}$  ; Cas 3 :  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{1-x}}{x}$

**Réponses :**

Cas 1 : Au brouillon il n'y a pas de F.I donc je rédige direct.

$$\lim_{x \rightarrow 2} x^2 - 5x - 3 = -9 \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 2^2 = 4 \\ \lim_{x \rightarrow 2} -5x = -10 \text{ (par la somme)} \\ \lim_{x \rightarrow 2} -3 = -3 \end{cases}$$

Cas 2 : Au brouillon on obtient :  $\frac{0}{0}$  (F.I) alors je transforme : (méthode recommandée : factoriser et simplifier) Donc :

Je factorise  $P(x) = x^2 + 5x - 6$

$\Delta = 5^2 - 4(1)(-6) = 49$ . On a :  $x = -6$  ou  $x = 1$ . Donc  $P(x) = 1(x - 1)(x + 6)$

La rédaction propre :

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 5x - 6}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1(x - 1)(x + 6)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} (x + 6) \\ \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 5x - 6}{x - 1} &= 7 \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1} x = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1} 6 = 6 \end{cases} \text{ (par la somme)}\end{aligned}$$

Cas 3 : Au brouillon on obtient  $\frac{0}{0}$  (F.I) Donc je transforme : En présence de racine carrée je fais l'expression conjuguée puis je factorise et simplifie si possible.

$$\begin{aligned}\text{On a : } \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}}{x} &= \frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x})(\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x})}{x(\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x})} = \frac{(\sqrt{x+1})^2 - (\sqrt{1-x})^2}{x(\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x})} = \frac{(x+1)-(1-x)}{x(\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x})} \\ &= \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}}{x} = \frac{2x}{x(\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x})} = \frac{2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x}}\end{aligned}$$

Puis je vérifie une dernière fois :  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x}} = \frac{2}{1+1} = 1$ .

Donc je rédige propre maintenant :

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x})(\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x})}{x(\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x(\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x}} \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}}{x} &= 1 \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} 2 = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x+1} + \sqrt{1-x} = 2 \end{cases} \text{ (par quotient)}\end{aligned}$$

NB : Tout début n'est pas facile, on acquiert de la maîtrise avec l'habitude. Des entraînements quotidiens sont nécessaires afin d'acquérir les réflexes, la rapidité d'exécution et la lucidité dans la production.

AU BOULOT SOLDAT !!!

## ◀ Proverbes 13:4 ▶

### Versets Parallèles

#### Louis Segond Bible

L'âme du paresseux a des désirs qu'il ne peut satisfaire; Mais l'âme des hommes diligents sera rassasiée.

#### Martin Bible

L'âme du paresseux ne fait que souhaiter, et il n'a rien; mais l'âme des diligents sera engraisée.

#### Darby Bible

L'ame du paresseux desire, et il n'y a rien; mais l'ame des diligents sera engraisée.

#### King James Bible

The soul of the sluggard desireth, and hath nothing; but the soul of the diligent shall be made fat.

#### English Revised Version

The soul of the sluggard desireth, and hath nothing; but the soul of the diligent shall be made fat.

### Contexte

#### Proverbes 13

...<sup>3</sup> Celui qui veille sur sa bouche garde son âme; Celui qui ouvre de grandes lèvres court à sa perte. <sup>4</sup> L'âme du paresseux a des désirs qu'il ne peut satisfaire; Mais l'âme des hommes diligents sera rassasiée. <sup>5</sup> Le juste hait les paroles mensongères; Le méchant se rend odieux et se couvre de honte....

### Références Croisées

#### Proverbes 6:6

Va vers la fourmi, paresseux; Considère ses voies, et deviens sage.

#### Proverbes 10:4

Celui qui agit d'une main lâche s'appauvrit, Mais la main des diligents enrichit.

**PARTIE B : CONNAITRE SES LIMITES DE REFERENCES ET LES CAS USUELS NON INDETERMINEES ET LES FORMES INDETERMINEES A LA SUITE DES OPERATIONS**

**1- Limites de références**

Limites en un réel ( $k$ est une constante)	Limite en l'infini
$\lim_{x \rightarrow 0} k = k$ ou $\lim_{x \rightarrow k} k = k$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} k = k$ ou $\lim_{x \rightarrow -\infty} k = k$
$\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$ ; $\lim_{x \rightarrow 0} x^n = 0$ ; $n > 0, x \neq 0$ .	$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$ ; $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = +\infty$ si $n$ pair et si $n$ impair alors $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = -\infty$
$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} = 0$ ; $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[n]{x} = 0$ ; $n > 0, x \neq 0$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$ Les fonctions racines de $x$ sont définies positives donc toujours en $+\infty$ sauf en cas de fonction composée.
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ ; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$ ; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$
$\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$ ; $\lim_{x \rightarrow 0} e^x = 1$ ; $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$ ; $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ ; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ ;	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ ; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ . (Leur inverses $\frac{x}{\ln x}$ et $\frac{x}{e^x}$ produisent à des résultats inverses)
$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^a} = 0$ ; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^a} = +\infty$
Valeurs utiles en 0 et 1 : $\cos(0) = 1$ ; $\sin(0) = 0$ ; $\tan(0) = 0$ ; $\ln(1) = 0$ , $\ln(e) = 1$ ; $e^0 = 1$ ; $e^{-1} = \frac{1}{e}$ ; $e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$ .	$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ ; $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$ ; $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0$
$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{x-a} = +\infty$ ; $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{x-a} = -\infty$ ; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$ . (signe de $x$ à droite et signe contraire à gauche) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{(x-a)^2} = +\infty$ ; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = +\infty$ ; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = -\infty$ Pour $n$ impair, on a : $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{(x-a)^n} = +\infty$ ; $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{(x-a)^n} = -\infty$ ; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^n} = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^n} = +\infty$ Pour $n$ pair, on a : $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{(x-a)^n} = +\infty$ ; $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{(x-a)^n} = +\infty$ ; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^n} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^n} = +\infty$	<b>Croissances comparées :</b> $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{e^x} = 0$ ; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{\ln x} = +\infty$ ; $\lim_{x \rightarrow 0} x^n \ln x = 0$

NB : En l'infini, les fonction cos, sin ou tan n'ont pas de limite, c'est pourquoi l'on procède par des encadrements.

En l'infini, pour les polynômes, on privilégie la prise en compte du monôme de plus haut degré.

Ne pas oublier la limite de la composée : très utilisée avec la combinaison de deux fonctions : Exemples :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \ln(\cos x) ; \lim_{x \rightarrow 0} \cos(\sin(x)) ; \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \sqrt{\tan x} ; \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\sqrt{x}} ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x^2 - 4x) ; \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{\frac{2x-2}{1-x}} ;$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin(x-2)}{x-2}$$

➤ Transformation particulière :  $x^x = e^{x \ln x}$ ,  $x > 0$ . (BONUS)

## 2- Cas usuels non indéterminés de type quotient

I = infini ; O = zéro ; R = réel non nul ; X = fois (multiplié par) ; / = sur (divisé par)

- IRI correspond à : Infini sur réel non nul = Infini (règle de signe)
- ORO correspond à zéro sur réel non nul = zéro
- ROI correspond à réel non nul sur zéro = Infini (règle de signe)
- RIO correspond à réel non nul sur Infini = zéro
- OIO correspond à zéro sur Infini = zéro (car cela correspond) O X 1/I qui équivaut à O X O = I)
- IOI correspond à Infini sur zéro = Infini (règle de signe) (car cela correspond à I X 1/O qui équivaut à I X I = I)

## 3- Les formes indéterminées

- O/O correspond à : zéro sur zéro
- I/I correspond à : Infini sur Infini
- O X I ou I X O correspond à : zéro fois Infini ou Infini fois zéro
- +I-I ou -I+I correspond à : plus l'infini moins l'infini ou moins l'infini plus l'infini

# ◀ Proverbes 14:23 ▶

## Versets Parallèles

### Louis Segond Bible

Tout travail procure l'abondance, Mais les paroles en l'air ne mènent qu'à la disette.

### Martin Bible

En tout travail il y a quelque profit, mais le babil des lèvres ne tourne qu'à disette.

### Darby Bible

En tout travail il y a profit, mais la parole des levres ne mene qu'à la disette.

### King James Bible

In all labour there is profit: but the talk of the lips *tendeth* only to penury.

### English Revised Version

In all labour there is profit: but the talk of the lips *tendeth* only to penury.

## Contexte

### Proverbes 14

...<sup>22</sup>Ceux qui méditent le mal ne s'égarent-ils pas? Mais ceux qui méditent le bien agissent avec bonté et fidélité. <sup>23</sup>Tout travail procure l'abondance, Mais les paroles en l'air ne mènent qu'à la disette. <sup>24</sup>La richesse est une couronne pour les sages; La folie des insensés est toujours de la folie....

## Références Croisées

### Proverbes 14:22

Ceux qui méditent le mal ne s'égarent-ils pas? Mais ceux qui méditent le bien agissent avec bonté et fidélité.

### Proverbes 14:24

La richesse est une couronne pour les sages; La folie des insensés est toujours de la folie.

## PARTIE C : ASTUCES POUR LEVER LES FORMES INDETERMINEES AU CAS PAR CAS :

## Cas 1 : O/O (zéro sur zéro)

N°	Type de fonction et exemples	Astuce
1	<p>Limite en un réel <math>a</math> de Fonction rationnelle : quotient de deux polynômes</p> <p>Exemple : <math>\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-9}{x^2-6x+9}</math> ; <math>\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{x-2}</math> ;  <math>\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x-2}{1-x}</math></p>	<ol style="list-style-type: none"> <li>Factoriser (numérateur et dénominateur par l'expression qui annule de forme <math>x</math> ou <math>x - a</math>) et simplifier puis calculer</li> <li>Taux de variation : <math>\frac{f(x)-f(a)}{x-a}</math> ; Bien choisir <math>f(x)</math> ; vérifier <math>f(a)</math> faire apparaître (ou arranger un peu) la forme et se rappeler de la dérivée <math>f'(x)</math> calculée en <math>a</math> notée <math>f'(a)</math></li> </ol>
2	<p>Limite en un réel <math>a</math> de Fonction irrationnelle : quotient comportant les racines carrées</p> <p>Exemple : <math>\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-9}{\sqrt{x}-\sqrt{3}}</math> ;  <math>\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-2}</math> ;  <math>\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x-\sqrt{x}}{x}</math></p>	<ol style="list-style-type: none"> <li>Faire l'expression conjuguée soit du numérateur ou dénominateur (souvent des deux cas en même temps) puis arranger, factoriser et simplifier avant de conclure et justifier.</li> <li>Si la factorisation avec racines est vite perceptible alors appliquer : rappel :  <math>x - a = (\sqrt{x} - \sqrt{a})(\sqrt{x} + a)</math></li> <li>Dans certains cas, le taux de variation. Rappel :  <math>(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}</math></li> </ol>
3	<p>Limites en un réel <math>a</math> de fonctions trigonométriques (cos, sin, tan)</p> <p>Exemple :  <math>\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x}</math> ; <math>\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{2x}</math> ;  <math>\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - 1}{x - \frac{\pi}{2}}</math> ;  <math>\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 5x}{-6x}</math> ; <math>\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + \cos x - 1}{x}</math></p> <p>Principe de l'éclatement ou regroupement :</p> $\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$	<ol style="list-style-type: none"> <li>Utiliser le taux de variation (souvent arranger un peu au préalable)</li> <li>L'amplificateur trigonométrique (même principe que l'expression conjuguée) : Ex : <math>\cos x - 1</math> et <math>\cos x + 1</math>. Puis manipuler avec les propriétés de trigonométrie de 1<sup>ere</sup> S et 2<sup>nde</sup> S</li> <li>Principe du multiplier et diviser par la même expression</li> <li>Le changement d'écriture ou de variable. En posant X, tenir compte des contraintes puis réécrire en faisant apparaître une limite de référence.</li> <li>L'éclatement rapide ou regroupement faisant apparaître les limites de référence.</li> </ol>
4	<p>Limite en un réel <math>a</math> de Fonction comportant <math>\ln</math> ou <math>\log</math> ou expo :</p> <p>Exemple : <math>\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x-1)}{x}</math> ; <math>\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x \ln x}{x^2-x}</math> ;  <math>\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x-1}{x}</math> ; <math>\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{e^{1-x}-1}</math></p>	<ol style="list-style-type: none"> <li>Le changement d'écriture ou de variable. En posant X, tenir compte des contraintes puis réécrire en faisant apparaître une limite de référence.</li> <li>Utiliser le taux de variation (souvent arranger un peu au préalable)</li> <li>L'éclatement ou contraction des termes si possibles</li> <li>Factoriser et simplifier ou Suivre la guidance de l'énoncée</li> </ol>

Cas 2 : l/l (infini sur infini)

N°	Type de fonction et exemples	Astuce
1	<p>Limite en l'infini de Fonction rationnelle : quotient de deux polynômes</p> <p>Exemple : <math>\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2-9}{x^2-6x+9}</math> ; <math>\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2-4}{x-2}</math> ;  <math>\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x-2}{1-x}</math></p>	<p>Factoriser (numérateur et dénominateur par le monôme de plus haut degré) et simplifier puis calculer</p> <p>C'est cette méthode qui permet de faire appliquer directement le quotient simplifié des monômes de plus haut degré A L'INFINI</p>
2	<p>Limite en l'infini de Fonction irrationnelle : quotient comportant les racines carrées</p> <p>Exemple : <math>\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2-9}{\sqrt{x}-\sqrt{3}}</math> ;  <math>\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+3}-2}{x-2}</math> ;  <math>\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-\sqrt{x}}{x}</math></p>	<p>Factoriser (numérateur et dénominateur par le monôme de plus haut degré) et simplifier puis calculer</p> <p>C'est cette méthode qui permet de faire appliquer directement le quotient simplifié des monômes de plus haut degré A L'INFINI</p> <p>Faire l'expression conjuguée et Factoriser (numérateur et dénominateur par le monôme de plus haut degré) et simplifier puis calculer est en général une perte de temps même si ça marche</p>
3	<p>Limites en l'infini de fonctions trigonométriques (cos, sin, tan)</p> <p>Exemple :</p> <p><math>\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos x - 1}{x}</math> ; <math>\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sin 3x}{2x}</math> ;  <math>\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x - 1}{x^2 + 3}</math> ;  <math>\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\tan 5x}{-6x}</math> ; <math>\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x + \cos x - 1}{x}</math> ;</p> <p>Les fonctions comportant sin, cos et tan n'ont pas de résultat prévisible quant à leurs limites en l'infini, d'où la nécessité d'un encadrement</p>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1) Utiliser le théorème des gendarmes : encadrer pas à pas : <math>a(x) \leq f(x) \leq b(x)</math> puis calculer limite de <math>a(x)</math> et de <math>b(x)</math>. Comme on obtient le même résultat alors c'est aussi la limite de <math>f(x)</math></li> <li>2) Utiliser une propriété de comparaison après un encadrement soigneux.</li> <li>3) Le changement d'écriture ou de variable. En posant X, tenir compte des contraintes puis réécrire en faisant apparaître une limite de référence.</li> <li>4) Si tangente, faire apparaître sin et cos puis encadrer et conclure</li> </ol>
4	<p>Limite en l'infini de Fonction comportant ln ou log ou expo :</p> <p>Exemple : <math>\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x-1)}{x}</math> ; <math>\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x \ln x}{x^2 - x}</math> ;  <math>\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 1}{x}</math> ; <math>\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-1}{e^{1-x}-1}</math> ; ; <math>\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \ln x}{e^{2x}}</math></p>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1) Factoriser (numérateur et dénominateur par le monôme de plus haut degré) et simplifier puis calculer</li> <li>2) Utiliser les propriétés de croissance comparées.</li> <li>3) Le changement d'écriture ou de variable. En posant X, tenir compte des contraintes puis réécrire en faisant apparaître une limite de référence.</li> <li>4) Suivre la guidance de l'énoncé</li> </ol>

**Cas 3 : +|-| ou -|+| (plus l'infini moins l'infini)**

N°	Type de fonction et exemples	Astuce
1	<p><b>Limite en l'infini de Fonction du type :</b> <math>ax + b \pm \sqrt{cx^2 + dx + k}</math> ou <math>\sqrt{cx^2 + dx + k} \pm ax + b</math></p> <p><b>Ou</b> <math>\sqrt{ax^2 + b} - \sqrt{cx^2 + dx + k}</math></p> <p><b>Ou</b> <math>\sqrt{ax^2 + b} - \sqrt{cx^2 + dx + k}</math> ou <math>\sqrt{ax + b} - \sqrt{cx + k}</math></p> <p><b>Exemple :</b></p> $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2x + 1 + \sqrt{x^2 + 3x + 1} ;$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2x + 1 + \sqrt{4x^2 + 1} ;$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2x + 1 - \sqrt{4x^2 + 1}$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{2x + 1} - \sqrt{4x + 1}$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{2x + 1} - \sqrt{3x + 5}$	<p><b>Règle de base :</b> En cas de forme indéterminée Comparer les valeurs absolues des coefficients des monômes de plus haut degré : <math> a </math> et <math>\sqrt{c}</math>. Ou bien <math>\sqrt{a}</math> et <math>\sqrt{c}</math> selon le cas.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- S'il y a égalité : appliquer rapidement l'expression conjuguée puis factoriser simplifier si possible et calculer et justifier</li> <li>- S'il y a différence : appliquer rapidement la factorisation forcée en commençant par la racine carrée, puis éclater sous la racine, puis mettre le monôme libre de plus haut degré en facteur et conclure en justifiant</li> </ul> <p><b>NB :</b> Faire une expression conjuguée serait très laborieuse.</p> <p>S'il n'y a pas de forme indéterminée, plaquer la réponse et justifier à coté avec chaque bloc.</p>
2	<p><b>Limite en l'infini de Fonction à différence de polynômes</b></p>	<p>Etablir une factorisation forcée en mettant facteur le monôme de plus haute degré (ou prendre directement le monôme de plus haut degré)</p>
3	<p><b>Limites en l'infini de fonctions contenant cos, sin, tan</b></p> <p><b>Exemple :</b> <math>\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \cos x - 1}{x}</math> ; <math>\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sin 3x}{2x}</math> ;</p> $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x - 1}{x^2 + 3}$ ; $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\tan 5x}{-6x}$ ; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x + \cos x - 1}{x}$ ;	<p>Utiliser le théorème des gendarmes : encadrer pas à pas : <math>a(x) \leq f(x) \leq b(x)</math> puis calculer limite de <math>a(x)</math> et de <math>b(x)</math>. Comme on obtient le même résultat alors c'est aussi la limite de <math>f(x)</math></p> <p>Utiliser une propriété de comparaison après un encadrement soigneux (avec ou sans changement d'écriture).</p> <p>5) Si tangente, faire apparaître sin et cos puis encadrer et conclure</p>
4	<p><b>Limite en l'infini ou en un réel a de Fonction comportant ln ou log ou expo :</b></p> <p><b>Exemple :</b> <math>\lim_{x \rightarrow +\infty} x - \ln x</math> ;</p> $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x - e^x$ ; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x^2 + 1) - \ln x$ ; $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{3x} - x^2$ ; ; $\lim_{x \rightarrow 0} 2 \ln x + \frac{1}{e^x}$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} + \ln x$	<ol style="list-style-type: none"> <li>1) Utiliser les propriétés de croissance comparées c'est-à-dire Factoriser (l'expression qui croit plus vite) et simplifier puis calculer</li> <li>2) Le changement d'écriture ou de variable si recommandé par l'exercice. En posant X, tenir compte des contraintes puis réécrire en faisant apparaître une limite de référence.</li> <li>3) Le regroupement ou réduction (Par exemple <math>\ln a - \ln b = \ln \left(\frac{a}{b}\right)</math>)</li> </ol>

## Cas 4 : O X I ou I X O (zéro fois infini)

N°	Type de fonction et exemples	Astuce
1	<p>Limite en un réel <math>a</math> de Fonction rationnelle : quotient de deux polynômes</p> <p>Exemple : <math>\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 6x + 9) \times \frac{5}{(x-3)^2}</math> ;</p> <p>Limite en l'infini de Fonction rationnelle : quotient de deux polynômes</p>	<p>En un réel, Regrouper en un bloc puis factoriser-simplifier si possible et calculer puis conclure</p> <p>En l'infini, Regrouper en un bloc puis factoriser-simplifier par les monômes de plus haut degré si possible et calculer puis conclure</p>
2	<p>Limite en un réel <math>a</math> de Fonction irrationnelle : quotient comportant les racines carrées</p> <p>Exemples : <math>\lim_{x \rightarrow 0} x \sqrt{\frac{2}{x^2}}</math> ; <math>\lim_{x \rightarrow +\infty} x \sqrt{\frac{2}{x^2+1}}</math> ;</p> <p><math>\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} \times \sqrt{\frac{1}{x+3}}</math></p> <p>Limite en l'infini de Fonction irrationnelle : quotient comportant les racines carrées</p>	<p>En un réel, Regrouper en un bloc puis factoriser-simplifier par les monômes de plus haut degré si possible et calculer puis conclure</p> <p>En l'infini, Regrouper en un bloc puis factoriser-simplifier par les monômes de plus haut degré si possible et calculer puis conclure</p>
3	<p>Limite en un réel <math>a</math> ou en l'infini de Fonction comportant <math>\ln</math> ou <math>\log</math> ou <math>expo</math> :</p> <p>Exemple : <math>\lim_{x \rightarrow +\infty} x(e^{-x} + 1)</math> ; <math>\lim_{x \rightarrow 0} x \ln(1 + \frac{1}{x})</math> ; <math>\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln(1 + \frac{1}{x})</math> ; <math>\lim_{x \rightarrow 0} x(e^x - 1)</math> ;</p> <p><math>\lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^2 + 3x)e^x</math></p>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1) Le développement (éliminer le produit des facteurs en développant)</li> <li>2) Le changement d'écriture ou de variable. En posant <math>X</math>, tenir compte des contraintes puis réécrire en faisant apparaître une limite de référence. (passage de l'infini en réel de façon général)</li> <li>3) Factoriser et simplifier ou Suivre la guidance de l'énoncé</li> </ol>

## ▶ Proverbes 24:34 ▶

### Versets Parallèles

#### Louis Segond Bible

Et la pauvreté te surprendra, comme un rôdeur, Et la disette, comme un homme en armes.

#### Martin Bible

Et ta pauvreté viendra [comme] un passant; et ta disette, comme un soldat.

#### Darby Bible

et ta pauvrete viendra comme un voyageur, et ton denuement comme un homme arme.

#### King James Bible

So shall thy poverty come as one that travelleth; and thy want as an armed man.

#### English Revised Version

So shall thy poverty come as a robber; and thy want as an armed man.

### Contexte

#### Proverbes 24

...<sup>33</sup>Un peu de sommeil, un peu d'assoupissement, Un peu croiser les mains pour dormir!... <sup>34</sup>Et la pauvreté te surprendra, comme un rôdeur, Et la disette, comme un homme en armes.

### Références Croisées

#### Proverbes 6:11

Et la pauvreté te surprendra, comme un rôdeur, Et la disette, comme un homme en armes.

#### Proverbes 24:33

Un peu de sommeil, un peu d'assoupissement, Un peu croiser les mains pour dormir!...

**PARTIE D : REDACTION PARTICULIERE DE LIMITE REEL SUR ZERO. (type ROI)**

Ce modèle fait beaucoup apparaitre le concept de limite à gauche et limite à droite.

Souvent le candidat lui-même devra discuter en décelant cela.

Si :

$\lim_{x \rightarrow a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\text{réel}}{0}$ , ce n'est pas une forme indéterminée mais pour une rédaction rigoureuse

alors il faut éclater comme ci :  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \rightarrow a} P(x) \times \frac{1}{Q(x)}$  et conclure pour chaque partie.

Si on a :  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{P(x)}{(x-a)(x+c)}$  alors on rédige comme suit:  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{P(x)}{(x-a)(x+c)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{P(x)}{(x+c)} \times \frac{1}{x-a}$  puis

conclure : Car  $\frac{1}{x-a}$  est une expression faisant partie des limites de référence.

**Exemple 1** :  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-5}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} (x-5) \times \frac{1}{x-3}$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-5}{x-3} = +\infty \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x-3} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 3} (x-5) = -2 \end{cases} \text{ (par produit)}$$

**Exemple 2** :  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+1}{x^2-x-6} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+1}{(x-3)(x+2)}$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+1}{x^2-x-6} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+1}{(x+2)} \times \frac{1}{x-3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+1}{x^2-x-6} = +\infty \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x-3} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 3} \left( \frac{x+1}{x+2} \right) = \frac{4}{7} \end{cases} \text{ (par produit)}$$

Merci et bon usage

DJAHASHIKAN : 0709521305/0506448812