TS Exercices sur les fonctions puissances et racines *n*-ièmes

1 Calculer sans utiliser la calculatrice en détaillant les étapes de calcul.

$A=\sqrt[4]{5}\times\sqrt[4]{125}$; $B=5^{\frac{2}{3}}\times\sqrt[6]{25}$; $C=\sqrt[5]{81}\times 3^{\frac{1}{5}}$.

2 1°) Développer $\left(2+\sqrt{2}\right)^3$ et $\left(2-\sqrt{2}\right)^3$.

2°) En déduire la valeur exacte de $A=\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}-\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$.

3 Soit a un réel strictement positif. Simplifier $A=\dfrac{\sqrt[3]{a^5}\times\left(\sqrt[4]{a^7}\right)^2}{\left(a^2\right)^2\times\sqrt[5]{a^2}\times\sqrt[5]{a^3}}$.

4 Calculer $A=\dfrac{27^{-\frac{2}{3}}\times 49^{\frac{1}{2}}\times 16^{\frac{5}{4}}}{\left(\sqrt[5]{243}\right)^2}$.

5 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sqrt[3]{5-2x}=2$.

On commencera par préciser le domaine de résolution de l'équation.

6 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{3}}-2=0$.

On commencera par préciser le domaine de résolution de l'équation.

7 Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $f : x \mapsto \sqrt[3]{1+x^2}$; justifier que f est dérivable sur son ensemble de définition et calculer $f'(x)$.

8 Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $f : x \mapsto x^{\frac{2}{3}}\ln x$; justifier que f est dérivable sur son ensemble de définition et calculer $f'(x)$.

9 On considère la fonction $f : x \mapsto (2-x)^{-\frac{5}{3}}$.

1°) Donner l'ensemble de définition de *f*.

2°) Justifier que *f* est dérivable sur son ensemble de définition et calculer $f'(x)$.

3°) Étudier les limites de *f* aux bornes de son ensemble de définition.

4°) Dresser le tableau de variation de *f*.

10 On considère la fonction $f : x \mapsto x^3-6\ln x+1$ et l'on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1°) Donner l'ensemble de définition de *f*.

2°) Étudier la limite de *f* en 0 à droite. Que peut-on en déduire pour $\mathcal{C}$?

3°) Étudier la limite de *f* en $+\infty$.

4°) Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de *f* ; on détaillera le signe de $f'(x)$.

Calculer l'extremum de *f* (valeur exacte).

5°) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$. En déduire que $\mathcal{C}$ présente une branche parabolique en $+\infty$ dont on précisera la direction.

6°) Faire un petit tableau de valeurs et tracer $\mathcal{C}$ en prenant 1 cm pour unité graphique.

Tracer la tangente horizontale ainsi que la tangente *T* au point A d'abscisse 1.

Bien mettre les pointillés en abscisse et en ordonnées **avec les valeurs exactes** au point correspondant à l'extremum.

11 Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $f : x \mapsto x\times 2^x$. Justifier que *f* est dérivable sur son ensemble de définition et calculer $f'(x)$.

12 Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $f : x \mapsto x^2\times 3^{-x}$. Déterminer sa limite en $+\infty$.

13 Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{2}$.