Calcul de l'aire du triangle quelconque

Prérequis: Formule de l'aire du triangle rectangle

Enoncé de la propriété:

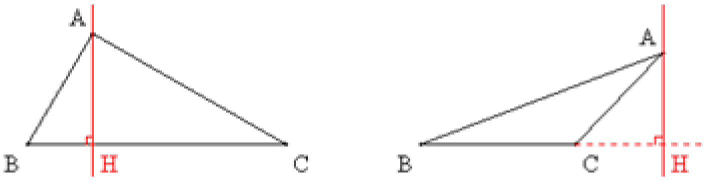
Si on appelle H le point d'intersection de la hauteur passant par A d'un triangle ABC et de la droite (BC) alors:

$$\boxed{\text{Aire(ABC)} = \frac{AH \times BC}{2}}$$

Idée: on sait calculer l'aire d'un triangle rectangle donc on découpe le triangle en somme ou différence de 2 triangles rectangles.

Démonstration:

Sur la figure ci-dessous, on a représenté les 2 cas de figure possibles:



L'aire d'un triangle (non rectangle) peut être décomposée en la somme ou la différence d'aires de 2 triangles rectangles:

- Si H appartient au segment [BC] alors: Aire(ABC) = Aire(ABH) + Aire(AHC)

$$\text{Aire(ABC)} = \frac{1}{2} \times AH \times BH + \frac{1}{2} \times AH \times HC$$

$$\text{Aire(ABC)} = \frac{1}{2} \times AH \times (BH + HC) = \frac{1}{2} \times AH \times BC$$

- Si H n'appartient pas au segment [BC] et, par exemple, H appartient à [BC) alors:

$$\text{Aire(ABC)} = \text{Aire(ABH)} - \text{Aire(AHC)}$$

$$\text{Aire(ABC)} = \frac{1}{2} \times AH \times BH - \frac{1}{2} \times AH \times HC$$

$$\text{Aire(ABC)} = \frac{1}{2} \times AH \times (BH - HC)$$

$$\text{Aire(ABC)} = \frac{1}{2} \times AH \times BC$$

Donc dans tous les cas, on obtient la même formule de l'aire (*base par hauteur divisé par 2*).

Fin de la démonstration

Théorème des milieux (1 et 2)

Prérequis: propriétés du parallélogramme

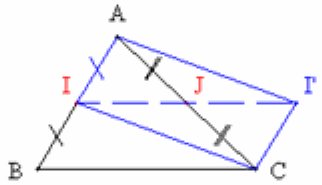
Enoncé de la propriété:

Si un segment joint les milieux de 2 des côtés d'un triangle alors il est parallèle au troisième côté de ce triangle et mesure la moitié du troisième côté de ce triangle.

Idée: on démontre que AI'CI puis IBCI' sont des parallélogrammes.

Démonstration:

On considère un triangle ABC. Les points I et J sont les milieux respectifs des côtés [AB] et [AC].
On appelle I' le symétrique de I par rapport à J.



Hypothèse: I' symétrique de I par rapport à J donc J milieu de [II'].
J milieu de [AC].
Propriété: Si les diagonales d'un quadrilatère ont le même milieu alors ce quadrilatère est un parallélogramme.
Conclusion: AI'CI est un parallélogramme d'où AI = I'C et (AI) // (I'C)
or I milieu de [AB] donc IB = AI = I'C et (IB) // (I'C).

Hypothèse: IB = I'C et (IB) // (I'C). De plus, C et I' sont du même "côté" de (AB).
Propriété: Si un quadrilatère (non croisé) a 2 côtés parallèles et de même longueur alors ce quadrilatère est un parallélogramme.
Conclusion: IBCI' est un parallélogramme d'où (II') // (BC) et II' = BC or J milieu de [II']
donc (IJ) // (BC) et IJ = $\frac{1}{2}$BC.

Fin de la démonstration

Théorème des milieux (3)

Prérequis: théorème des milieux (1)

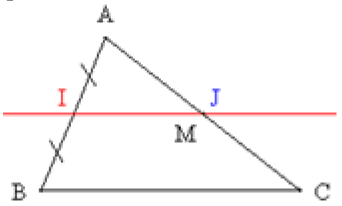
Enoncé de la propriété:

Si une droite passe par le milieu d'un des côtés d'un triangle et est parallèle à un deuxième côté de ce triangle alors elle passe par le milieu du troisième côté de ce triangle.

Idée: on utilise l'unicité de la parallèle à une droite donnée passant par un point donné et le théorème des milieux (1).

Démonstration:

On considère un triangle ABC. Les points I et J sont les milieux respectifs des côtés [AB] et [AC].
La parallèle à (BC) passant par I coupe (AC) en M.



Hypothèse: La parallèle à (BC) passant par I coupe (AC) en M.
I milieu de [AB] et J milieu de [AC].
Propriété: Si une droite joint les milieux de 2 des côtés d'un triangle alors elle est parallèle au troisième côté de ce triangle.
Conclusion: (IJ) // (BC) donc, par unicité de la parallèle passant par un point, M et J sont confondus.

Fin de la démonstration

Concours des médiatrices du triangle

Prérequis: propriétés de la médiatrice

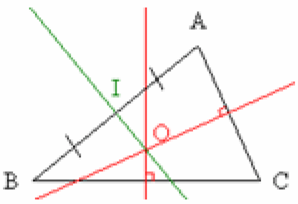
Enoncé de la propriété:

Les médiatrices du triangle sont concourantes. Leur point de concours est le centre du cercle circonscrit au triangle.

Idée: on utilise les propriétés de la médiatrice d'un segment.

Démonstration:

On considère le triangle ABC (non rectangle en C).
On appelle O le point d'intersection des médiatrices des segments [AC] et [BC] (existence évidente).
On appelle I le milieu du segment [AB].



Hypothèse: O appartient à la médiatrice de [AC] et de [BC].
Propriété: Si un point appartient à la médiatrice d'un segment alors il est équidistant des extrémités de ce segment.
Conclusion: OA = OC et OB = OC d'où O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

Concours des hauteurs du triangle

Prérequis: propriétés du parallélogramme, concours des médiatrices

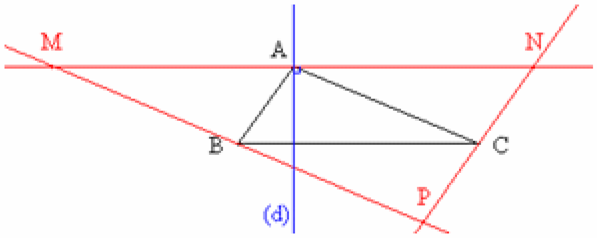
Enoncé de la propriété:

Les hauteurs du triangle sont concourantes. Leur point de concours est appelé l'orthocentre du triangle.

Idée: on construit le triangle MNP de telle façon que les hauteurs de ABC sont les médiatrices de MNP.

Démonstration:

On considère un triangle ABC.
La parallèle à (BC) passant par A coupe la parallèle à (AC) passant par B en M.
La parallèle à (BC) passant par A coupe la parallèle à (AB) passant par C en N.
La parallèle à (AC) passant par B coupe la parallèle à (AB) passant par C en P.
La droite (d) est la perpendiculaire à (MN) passant par A.



Hypothèse: (MA) // (BC) et (MB) // (AC).
Propriété: Si un quadrilatère a ses côtés opposés parallèles 2 à 2 alors c'est un parallélogramme.
Conclusion: MACB est un parallélogramme donc MA = BC.

De façon analogue, on démontre que ABCN est un parallélogramme d'où AN = BC.
On en déduit que MA = AN; or, les points A, M et N sont alignés donc A est le milieu de [MN].

Hypothèse: A milieu de [MN] et (d) perpendiculaire à (MN).
Propriété: Si une droite perpendiculaire à un segment passe par le milieu de ce segment alors elle est la médiatrice de ce segment.
Conclusion: (d) est la médiatrice de [MN].

Hypothèse: (MN) //(BC), (d) ⊥ (MN) et A appartient à (d).
Propriété: Si deux droites sont parallèles alors toute perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre.
Conclusion: (d) ⊥ (BC) donc (d) est la hauteur du triangle ABC passant par A.

De façon analogue, on démontre que:
-La médiatrice de [MP] est la hauteur du triangle ABC passant par B.
-La médiatrice de [NP] est la hauteur du triangle ABC passant par C.

Hypothèse: La médiatrice de [MN] est la hauteur du triangle ABC passant par A.
La médiatrice de [MP] est la hauteur du triangle ABC passant par B.
La médiatrice de [NP] est la hauteur du triangle ABC passant par C.
Propriété: Les médiatrices du triangle sont concourantes.
Conclusion: Les hauteurs du triangle ABC sont concourantes.

Fin de la démonstration

Concours des médianes du triangle

Prérequis: propriétés du parallélogramme, théorème des milieux.

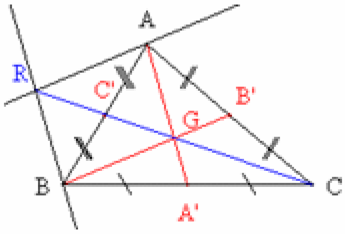
Enoncé de la propriété:

Les médianes du triangle sont concourantes. Leur point de concours est appelé le centre de gravité du triangle. Il est situé au $\frac{2}{3}$ de chaque médiane en partant du sommet.

Idée: on démontre que ARBG est un parallélogramme puis on utilise les propriétés de ses diagonales.

Démonstration:

On considère le triangle ABC.
A', B' et C' sont les milieux respectifs des côtés [BC], [AC] et [AB].
Les droites (AA') et (BB') se coupent en G (existence évidente).
Le point R est le symétrique du point C par rapport au point G.



Hypothèse: Dans le triangle ARC, R symétrique de C par rapport à G donc G milieu de [RC].
B' milieu de [AC].
Propriété: Si une droite passe par les milieux de 2 des côtés d'un triangle alors elle est parallèle au troisième côté de ce triangle.
Conclusion: (AR) // (GB') donc $\boxed{\text{(AR) // (BG)}}$.

Hypothèse: Dans le triangle BRC, R symétrique de C par rapport à G donc G milieu de [RC].
A' milieu de [BC].
Propriété: Si une droite passe par les milieux de 2 des côtés d'un triangle alors elle est parallèle au troisième côté de ce triangle.
Conclusion: (BR) // (GA') donc $\boxed{\text{(BR) // (AG)}}$.

Hypothèse: (AR) // (BG) et (BR) // (AG)
Propriété: Si un quadrilatère a ses côtés parallèles 2 à 2 alors ce quadrilatère est un parallélogramme.
Conclusion: ARBG est un parallélogramme.

Hypothèse: ARBG est un parallélogramme et C' milieu de [AB].
Propriété: Si un quadrilatère est un parallélogramme alors ses diagonales ont le même milieu.
Conclusion: C' est le milieu de [RG] donc G appartient à la droite (CC').
Donc les médianes du triangle sont concourantes.

De plus, RC' = C'G et RG = GC donc $C'G = \frac{1}{2}CG$ d'où $\boxed{CG = \frac{2}{3}CC'}$.

De façon analogue, on démontre que $AG = \frac{2}{3}AA'$ et $BG = \frac{2}{3}BB'$.

Fin de la démonstration

Concours des bissectrices du triangle

Prérequis: propriétés de la symétrie axiale, tangente à un cercle

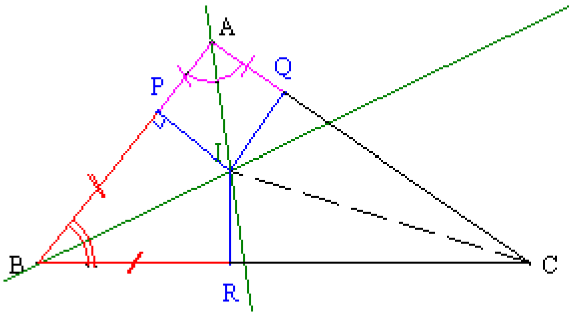
Enoncé de la propriété:

Les bissectrices du triangle sont concourantes. Leur point de concours est le centre du cercle inscrit dans le triangle.

Idée: (AI) et (BI) étant 2 bissectrices de ABC, on démontre que (CI) est la 3ème en calculant des angles.

Démonstration:

On considère le triangle ABC. (AI) et (BI) sont 2 bissectrices du triangle ABC.
Le point P appartient au segment [AB] tel que (IP) ⊥ (AB).
Le point Q appartient au segment [AC] tel que AQ = AP.
Le point R appartient au segment [BC] tel que BP = BR.



Hypothèse: (AI) bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$ et AP = AQ donc API et AQI sont symétriques par rapport à (AI).
Propriété: La symétrie axiale conserve les longueurs et la mesure des angles.
Conclusion: IP = IQ, $\widehat{AQI} = \widehat{API} = 90°$ et $\widehat{AIP} = \widehat{AIQ}$.

De façon analogue, les triangles BPI et BRI sont symétriques par rapport à (BI) d'où IP = IR, $\widehat{BIP} = \widehat{BIR}$ et $\widehat{BPI} = \widehat{BRI} = 90°$.

Hypothèse: $\widehat{API} = \widehat{AQI} = \widehat{BRI} = 90°$ et IP = IQ = IR.
Propriété: La tangente à un cercle en un point est la perpendiculaire au rayon du cercle issu de ce point.
Conclusion: Les points P, Q et R sont sur le cercle tangent aux côtés du triangle ABC c'est à dire le cercle inscrit dans le triangle ABC.

Hypothèse: Les triangles ICQ et ICR sont rectangles respectivement en Q et R. IQ = IR.
Propriété: Si 2 triangles rectangles ont 2 côtés de même longueurs alors ils sont "identiques".
Conclusion: $\widehat{ICQ} = \widehat{ICR}$ donc (IC) est la bissectrice de $\widehat{ACB}$.

Fin de la démonstration

Triangle rectangle et cercle (1)

Prérequis: symétrie centrale, propriétés du rectangle

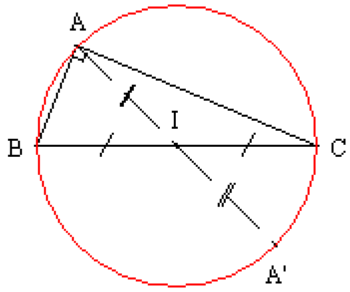
Enoncé de la propriété:

Si un triangle est rectangle alors son cercle circonscrit a pour diamètre l'hypoténuse de ce triangle.

Idée: on démontre que ABA'C est un parallélogramme puis un rectangle.

Démonstration:

On considère le triangle ABC rectangle en A. Le point I est le milieu du segment [BC].
La point A' est le symétrique du point A par rapport au point I.



Hypothèse: I milieu de [BC] et A' symétrique de A par rapport à I d'où I milieu de [AA'].
Propriété: Si les diagonales d'un quadrilatère ont même milieu alors ce quadrilatère est un parallélogramme.
Conclusion: ABA'C est un parallélogramme.

Hypothèse: ABA'C est un parallélogramme et $\widehat{BAC} = 90°$.
Propriété: Si un parallélogramme a un angle droit alors c'est un rectangle.
Conclusion: ABA'C est un rectangle.

Hypothèse: ABA'C est un rectangle.
Propriété: Si un quadrilatère est un rectangle alors ses diagonales sont de même longueur.
Conclusion: AA' = BC, or AI = IA' et BI = IC donc $AI = BI = CI = \frac{1}{2} BC$

donc [BC] est un diamètre du cercle circonscrit au triangle ABC.

Fin de la démonstration

Triangle rectangle et cercle (2)

Prérequis: propriétés du parallélogramme et du rectangle

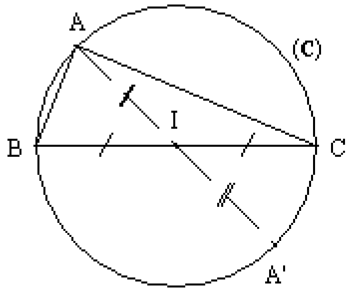
Enoncé de la propriété:

Si l'un des côtés d'un triangle est un diamètre de son cercle circonscrit alors ce triangle est rectangle.

Idée: on démontre que ABA'C est un parallélogramme puis un rectangle.

Démonstration:

On considère le triangle ABC. Le point I est le milieu du segment [BC].
(**C**) est le cercle de centre I, circonscrit au triangle ABC.
Le point A' est le symétrique du point A par rapport au point I.



Hypothèse: I milieu de [BC] et A' symétrique de A par rapport à I d'où I milieu de [AA'].
Propriété: Si les diagonales d'un quadrilatère ont même milieu alors ce quadrilatère est un parallélogramme.
Conclusion: ABA'C est un parallélogramme.

Hypothèse: ABA'C est un parallélogramme et $AI = BI = CI = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}AA'$ d'où $AA' = BC$.
Propriété: Si les diagonales d'un parallélogramme sont de même longueur alors ce parallélogramme est un rectangle.
Conclusion: ABA'C est un rectangle donc ABC est rectangle en A.

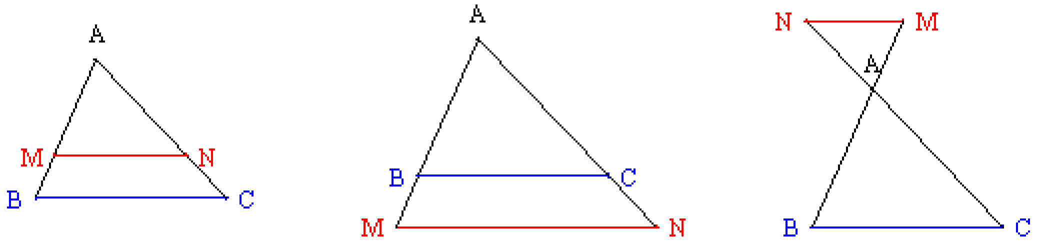
Fin de la démonstration

Théorème de Thalès

Prérequis: propriétés du parallélogramme, notion de hauteur, angles opposés par le sommet, symétrie centrale, cosinus.

Enoncé du théorème:

Soit ABC un triangle donné. *3 cas de figures*

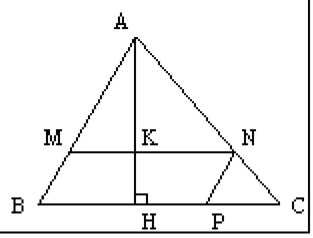


$$\text{Si}\ \begin{cases} (MB) \text{ et } (NC) \text{ sont sécantes en } A \\ \text{et } (MN) \parallel (BC) \end{cases} \text{ alors } \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

Idée: on utilise une hauteur puis on exprime des cosinus égaux (distinguer 2 cas de figures).

Démonstration:

1er cas de figure:



1 - (AH) est la hauteur de ABC passant par A et (MN) // (BC)
donc AKN est rectangle en K.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Dans le triangle ABH, } \cos \widehat{BAH} = \dfrac{AH}{AB} \\ \text{Dans le triangle AMK, } \cos \widehat{MAK} = \dfrac{AK}{AM} \end{array}\right\} \text{donc } \frac{AH}{AB} = \frac{AK}{AM} \text{ soit } \frac{AH}{AK} = \frac{AB}{AM}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Dans le triangle ABH, } \cos \widehat{CAH} = \dfrac{AH}{AC} \\ \text{Dans le triangle AMK, } \cos \widehat{NAK} = \dfrac{AK}{AN} \end{array}\right\} \text{donc } \frac{AH}{AC} = \frac{AK}{AN} \text{ soit } \frac{AH}{AK} = \frac{AC}{AN}$$

Des 2 égalités précédentes, on déduit que $\dfrac{AB}{AM} = \dfrac{AC}{AN}$ soit $\boxed{\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC}}$

Donc dans le 1er cas de figure, $\text{Si}\ \begin{cases} (MB) \text{ et } (NC) \text{ sont sécantes en } A \\ \text{et } (MN) \parallel (BC) \end{cases} \text{ alors } \dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC}$ (Propriété 1)

2 - MNPB est un parallélogramme donc (PN) // (BM) d'où (PN) // (AB) et BP = MN.
Appliquons la propriété 1 ci-dessus dans le triangle ABC.
(AN) et (BP) sont sécantes en C et (PN) // (AB) d'où $\dfrac{CN}{CA} = \dfrac{CP}{CB}$
Sachant que N appartient à [AC] et que P appartient à [BC], CA = CN + NA et CB = CP + PB.

$$\text{donc } \left.\begin{array}{l} \dfrac{CN}{CA} = \dfrac{CA - AN}{CA} = \dfrac{CA}{CA} - \dfrac{AN}{CA} = 1 - \dfrac{AN}{CA} = 1 - \dfrac{AN}{AC} \\ \dfrac{CP}{CB} = \dfrac{CB - BP}{CB} = \dfrac{CB}{CB} - \dfrac{BP}{CB} = 1 - \dfrac{BP}{CB} = 1 - \dfrac{BP}{BC} \end{array}\right\} \text{donc } 1 - \frac{AN}{AC} = 1 - \frac{BP}{BC} \text{ soit } \frac{AN}{AC} = \frac{BP}{BC}$$

or BP = MN donc $\boxed{\dfrac{AN}{AC} = \dfrac{MN}{BC}}$

2ème cas de figure:

Il est identique au cas précédent en permutant le nom des points.

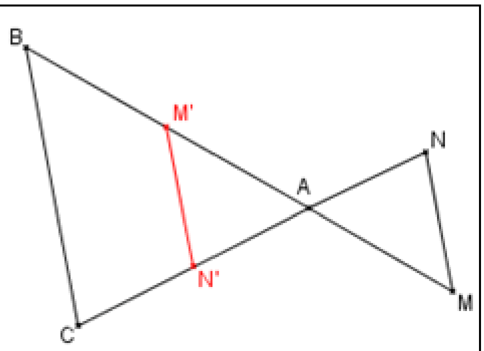
3ème cas de figure:

Par construction:
M' est le symétrique de M par rapport à A.
N' est le symétrique de N par rapport à A.

donc (M'N') est la droite symétrique de (MN) par rapport à A.

donc (M'N') // (MN).

On se retrouve donc dans les cas de figures 1 ou 2 selon la position des points M et N.



Fin de la démonstration

Réciproque du théorème de Thalès

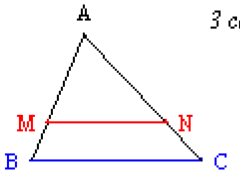
Prérequis: propriétés du parallélogramme, notion de hauteur, aire du triangle, symétrie centrale, cosinus.

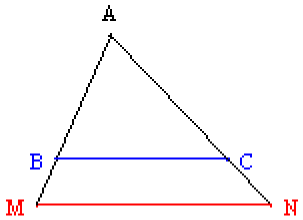
Enoncé du théorème:

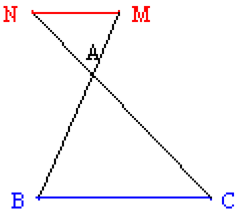
Soit ABC un triangle donné.

$$\boxed{\text{Si } \left\{ \begin{array}{c} A, B, M \text{ et } A, C, N \text{ sont alignés dans le même ordre} \\ \dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC} \end{array} \right\} \text{ alors } (MN) \,//\, (BC)}$$

3 cas de figure





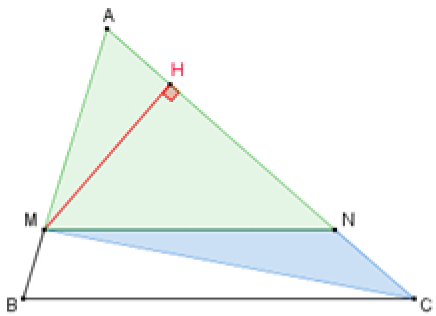


Démonstration:

1er cas de figure:

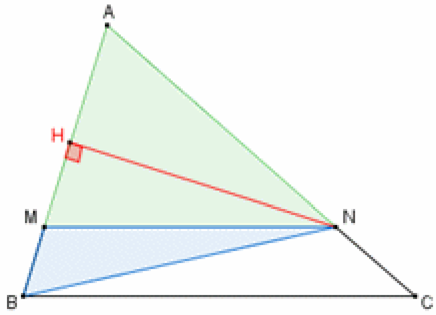
$$\text{Aire}(AMN) = \frac{AN \times MH}{2} \quad \text{et} \quad \text{Aire}(MNC) = \frac{MH \times NC}{2}$$

$$\text{D'où } \frac{\text{Aire}(AMN)}{\text{Aire}(MNC)} = \frac{AN}{NC}$$



$\text{Aire}(AMN) = \dfrac{AM \times NH}{2}$ et $\text{Aire}(MNB) = \dfrac{NH \times MB}{2}$

D'où $\dfrac{\text{Aire}(AMN)}{\text{Aire}(MNB)} = \dfrac{AM}{MB}$



or $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC}$ soit $\dfrac{AB}{AM} = \dfrac{AC}{AN}$

d'où $\dfrac{AM+MB}{AM} = \dfrac{AN+NC}{AN}$ soit $\cancel{1} + \dfrac{MB}{AM} = \cancel{1} + \dfrac{NC}{AN}$ donc $\boxed{\dfrac{AM}{NB} = \dfrac{AN}{NC}}$

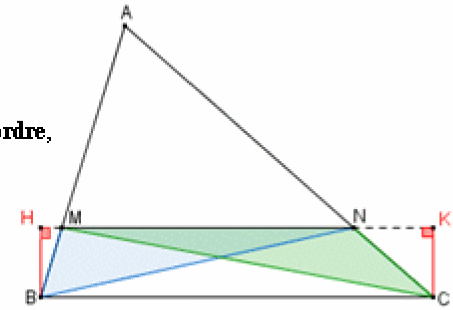
donc $\dfrac{\text{Aire}(AMN)}{\text{Aire}(MNB)} = \dfrac{\text{Aire}(AMN)}{\text{Aire}(MNC)}$ soit $\text{Aire}(MNB) = \text{Aire}(MNC)$

d'où $\dfrac{CK \times \cancel{MN}}{\cancel{2}} = \dfrac{BH \times \cancel{MN}}{\cancel{2}}$ soit $\boxed{CK = BH}$

De plus, $(HB) \perp (MN)$ et $(KC) \perp (MN)$ donc $(HB) \parallel (KC)$.

Comme les points A, M, B et A, N, C sont **alignés dans le même ordre**, on en déduit que HKCB est un parallélogramme.

Donc $(MN) \parallel (BC)$.



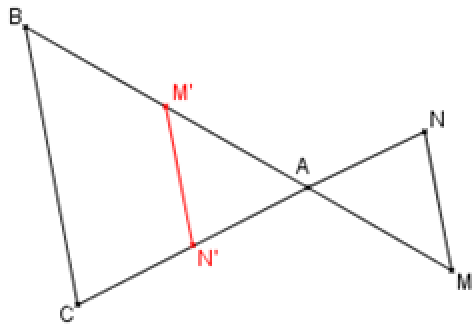
2ème cas de figure:

Il est identique au cas précédent en permutant le nom des points.

3ème cas de figure:

Par construction:
M' est le symétrique de M par rapport à A.
N' est le symétrique de N par rapport à A.
donc (M'N') est la droite symétrique de (MN) par rapport à A.
donc $(M'N') \parallel (MN)$.

On se retrouve donc dans les cas de figures 1 ou 2 selon la position des points M et N.



Fin de la démonstration