Devoir n°1 zone de mathématiques du premier semestre

Exercice 1 : (5, 5pts)

1) Donner la définition des types d'intervalles suivantes : [a ; b[;]a ; b[;]$-\infty$; b[**(0.25pt×3=0.75pt)**

2) Traduis chacune des inégalités suivantes en une appartenance de x à un intervalle : **(0.5pt ×6=3pts)**

$|2x+1| \leq 3$; $-3 \leq x \leq 5$; $x \leq -3$; $-10 \geq x$; $2 < x < 6$; $d(x, 2) \leq 3$

3) Soient les encadrements suivantes : $3 < x < 5$; $-2 < y < -1$. Encadrer x+y, x-y, xy, x^2-y^2

(0.25pt ×4=1pts)

4) On sait que 12,37 est une valeur approchée de x par défaut à 10^{-2} près ; 12,39 est une valeur approchée de y par excès à 10^{-2}. Comparer x et y. **(0.75pt)**

Exercice 2 : (8pts)

1) Détermine $I \cap$ J et $I \cup$ J dans les cas suivants : **(0.25pt × 6 = 1.5pts)**

I = [-2 ; 6] et J =]$-\infty$; 3] ; I = [-1 ; 7] et J =]-5 ; 10] ; $I = \{x \in \mathbb{R}/|x| < 5\}$ et $J = \{x \in \mathbb{R}/|x| > 3\}$

2) a, b, c sont des nombres réels. Simplifier : **(2pts)**

$A = \frac{(-a)^5(-ab)^4(-b)^5}{(a^2b^4)^{-3}(-a^2b^3)} \times \frac{(a^{-2}b)^4(-a^2b)^{-1}}{(-ab^{-1})^{-3}}$; $B = \frac{(-a^2b^3c)^2 \times a^3 \times c^2}{-ab^2(-c^2a)^2 \times bc}$

3) Écrire les nombres suivants à l'aide de puissances entières de nombres premiers : **2pts**

$A_1 = \frac{(5^2\times3^6)^{-3}}{(5^{-2}\times3^{-5})^2} \div \sqrt{\frac{3^7\times5^{10}}{(5^2\times3^{-3})^3}}$; $A_2 = \frac{5^3\times8^2\times9^3}{15^2\times12^4}$;

4) Soit $x, y\ et\ z$ trois nombres réels ; On suppose que $xyz = 1$ et on donne $B = \frac{x}{xy+x+1} + \frac{y}{yz+y+1} + \frac{z}{zx+z+1}$

Montre que $B = 1.$ **(1pt)**

(On pourra calculer $B - 1$ et utiliser l'hypothèse $xyz = 1$)

5) Résoudre dans IR les équations et inéquations suivantes : **(0.25pt × 6 = 1.5pts)**

$|3x+7| = |x-1|$; $|x-3| = 2x-4$; $|x-5| = \sqrt{4}$; $|3x+1| \leq 2x-1$; $|x+\pi| > -\sqrt{3}$;

$|3x+1| \leq 1$

Exercice 3 : (3. 5pts)

Soient a, b et c trois réels strictement positifs

2) Démontre que $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$ **(1pt)**
3) Donner deux autres inégalités du même type avec les réels a, b et c **(1pt)**
4) Démontre que $(a+b)(b+c)(a+c) = abc\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + \frac{b}{c} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} + \frac{c}{a} + 2\right)$ **(1pt)**

En déduire que $(a+b)(b+c)(a+c) \geq 8abc$ **(0. 5pt)**

Exercice 4 : (3pts)

Soit quatre entiers naturels consécutifs $n, n+1, n+2\ et\ n+3.$

b) a) Démontrer que $(n+1)(n+2) = n(n+3) + 2$ **(0.5pt)**

b) On pose $a = (n+1)(n+2)$ et $p = n(n+1)(n+2)(n+3)$.

Exprimer le produit p en fonction de a. **(1pt)**

c) En déduire $p + 1$ est un carré parfait. **(0.5pt)**

2) Trouver quatre entiers consécutifs dont le produit est égal à 5040 **(1pt)**