

## Continuité

### Exercice 1

On considère la fonction  $f$  définie sur  $[3; +\infty[$  par :

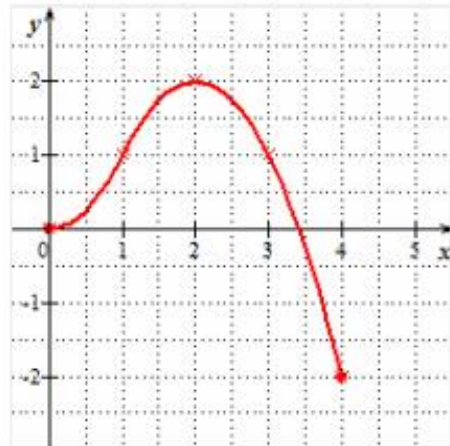
$$f(x) = E(x) \text{ pour } x \in [3; 4[$$

$$f(x) = -\frac{1}{4}x + 4 \text{ pour } x \in [4; +\infty[$$

- Tracer la représentation graphique de cette fonction dans un repère orthonormal du plan.
- Cette fonction est-elle continue sur  $[3; +\infty[$  ? Pourquoi ?

### Exercice 2

La fonction donnée ci dessous représente une fonction définie sur  $[0; 4]$ .



- Donner le tableau de variation de  $f$ .
  - La fonction  $f$  est-elle continue sur  $[0; 4]$  ?
- Sur l'intervalle  $[2; 4]$ , pour résoudre l'équation  $f(x) = \frac{3}{2}$ , quel théorème peut-on appliquer et pourquoi ?
  - En appliquant ce théorème à l'intervalle  $[2; 4]$ , montrer que l'équation  $f(x) = \frac{3}{2}$  admet une unique solution  $\alpha$ .
  - Donner une valeur approchée de  $\alpha$ .

### Exercice 3

Soit  $f$  la fonction définie sur  $] -\infty; 1[ \cup ] 1; +\infty[$  par :  $f(x) = \frac{2x^3 + 2x^2 - 10x + 11}{2(x-1)^2}$

On appelle  $C$  la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

- Montrer que  $f$  peut s'écrire sous la forme :  $f(x) = x + 3 + \frac{5}{2(x-1)^2}$
- Calculer la limite de  $f$  aux bornes de son intervalle de définition
  - Déterminer les asymptotes à la courbe
  - Etudier la position relative de la courbe  $C$  et de la droite  $\Delta$  d'équation :  $y = x + 3$
- On admet que le tableau de variations de  $f$  est le suivant :

| x      | $-\infty$  | 1          | 2,7        | $+\infty$ |
|--------|------------|------------|------------|-----------|
| $f(x)$ | $\nearrow$ | $\searrow$ | $\nearrow$ |           |
|        |            |            | 6,5        |           |

- Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  dans l'intervalle  $] -4; -1[$ .
  - Donner une valeur approchée de  $\alpha$  à  $10^{-2}$  près par défaut.
  - Combien l'équation  $f(x) = 10$  admet-elle de solutions dans l'intervalle  $] 1; +\infty[$  ? Justifier.
- Quels sont les points d'intersection de  $C$  avec l'axe des ordonnées ? l'axe des abscisses ?
  - Tracer dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  les asymptotes, la courbe  $C$ ,  $\alpha$  et les points d'intersection avec les axes

### Exercice 4

$f$  est la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par : 
$$\begin{cases} f(x) = x^2 - x - 4 & \text{si } x \leq 1 \\ f(x) = \frac{x-5}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

On note  $\mathcal{C}_f$  la courbe représentative de  $f$ .

- Montrer que  $f$  est continue en 1.
- $f$  est-elle dérivable en 1 ? Justifier
- La droite d'équation  $x = 0$  est-elle asymptote à  $\mathcal{C}_f$  ? Justifier
- La droite d'équation  $y = 1$  est-elle asymptote à  $\mathcal{C}_f$  ? Justifier.

## Dérivabilité

### Exercice 5

Etudier les variations de chacune des fonctions suivantes après avoir précisé les ensembles de définition et de dérivabilité.

a.  $f(x) = (x-1)^2(x+1)^3$

b.  $f(x) = \frac{1}{(4-5x)^3}$

c.  $f(x) = (x^4 - x^2 + 1)^3$

d.  $f(x) = \frac{1}{x^3(x^2-1)}$

e.  $g(x) = \left(\frac{3x-1}{2x-4}\right)^4$

f.  $f(x) = \frac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$

g.  $f(x) = \sqrt{2x^2 - 3x + 1}$

h.  $f(x) = x\sqrt{x-1}$

i.  $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}$

j.  $f(x) = \sqrt{\frac{x^2-1}{x^2+1}}$

### Exercice 6

Soit la fonction  $f$  définie sur  $] -\infty, 1]$  par :  $f(x) = 2x\sqrt{1-x}$

- 1) Déterminer la limite de  $f$  en  $-\infty$
- 2) Sur quelle intervalle la fonction  $f$  est-elle dérivable ? Pourquoi ? Déterminer alors la dérivée de la fonction  $f$  sur cet intervalle.
- 3) Dresser le tableau de variation de la fonction  $f$ . On donnera la valeur exacte de l'extremum de la fonction  $f$ .

### Exercice 7

Calculer les dérivées des fonctions suivantes et les écrire sous forme simplifiée :

$f_1(x) = \frac{1}{(x^2+1)^3}; \quad \mathcal{D} = \mathbb{R}$

$f_2(x) = (2x^3 + 2x^2)^5; \quad \mathcal{D} = \mathbb{R}$

$f_3(x) = \left(\frac{3x^2+5}{x+2}\right)^3; \quad \mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

$f_4(x) = \frac{3x-5}{\sqrt{x^2+2}}; \quad \mathcal{D} = \mathbb{R}$

$f_5(x) = \sqrt{\sqrt{3x+1}}; \quad \mathcal{D} = \mathbb{R}_+$

## Etude de fonctions - Problème de synthèse

### Exercice 8

- 1) Soit le polynôme  $P$  défini sur  $\mathbb{R}$  par :  $P(x) = x^3 - x^2 + 3x + 1$ 
  - a) Calculer les limites en  $+\infty$  et  $-\infty$  du polynôme  $P$
  - b) Déterminer les variations de  $P$  sur  $\mathbb{R}$ .
  - c) Démontrer que l'équation  $P(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  sur  $\mathbb{R}$  et que  $\alpha \in [-1, 0]$ .
  - d) Donner un encadrement de  $\alpha$  à  $10^{-5}$
  - e) Déterminer le signe de  $P(x)$  suivant les valeurs de  $x$
- 2) Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = x - \frac{2}{x^2+1}$   
On admet que :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ 
  - a) Déterminer la dérivée de  $f$  et montrer que :  $f'(x) = \frac{(x+1)P(x)}{(x^2+1)^2}$
  - b) A l'aide de la question 1e) déterminer le signe de  $f'(x)$  et dresser le tableau de variation de la fonction  $f$

### Exercice 9

Soit  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 5$$

1. Etudier les limites de  $f$  en  $+\infty$  et  $-\infty$  et dresser son tableau de variations.
2. Soit  $(E)$  l'équation

$$x^3 - 3x^2 = 5$$

Montrer que  $(E)$  admet une solution  $\alpha$  unique sur  $\mathbb{R}$  et déterminer une valeur approchée par défaut de  $\alpha$  à  $10^{-3}$ .

3. Montrer (en utilisant la définition de  $\alpha$ ) que

$$\alpha^2 = \frac{5}{\alpha - 3}$$

### Exercice 10

Soit  $f$  définie sur  $I = [-3; +\infty[$  par

$$f(x) = \sqrt{x^2(x+3)}$$

- a) Etudier la dérivabilité de  $f$  en  $-3$  et interpréter graphiquement le résultat.  
b) Etudier la dérivabilité de  $f$  en  $0$ , et interpréter graphiquement le résultat.
- Déterminer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f$ .
- Etudier les variations de  $f$  sur  $I$  et dresser son tableau de variations.
- Représenter sommairement la courbe représentative  $\mathcal{C}$  de  $f$  dans un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

### Exercice 11

Soit  $f$  la fonction définie par :  $f(x) = \sqrt{x^2 - x^3}$

- Déterminer l'ensemble de définition  $D_f$  de  $f$ .
- Démontrer que  $f$  est continue sur  $D_f$ .
- Etudier la dérivabilité de  $f$  en  $0$ . Donner une interprétation graphique du résultat.

### Exercice 12

On donne  $f$  la fonction définie par :  $f(x) = \frac{x^2 - 4}{|x| - 2}$

- Déterminer l'ensemble de définition  $D$  de  $f$ .
- Ecrire  $f$  sans valeur absolue
- Démontrer que  $f$  est continue sur  $D$ .
- Représenter la courbe représentative de  $f$ .

### Exercice 13

On considère la fonction suivante définie  $D = ]-2; 1[$

$$f(x) = E(x) \sin(x) \quad E \text{ désignant la fonction partie entière}$$

Etudier la continuité de  $f$  sur  $D$ .

### Exercice 14

1. Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer sa fonction dérivée :

- $f$  est définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = (x^3 - 2)^2$
- $g$  est définie sur  $[0; +\infty[$  par  $g(x) = \sqrt{3x+1}$
- $h$  est définie sur  $[0; +\infty[$  par  $h(x) = \frac{1}{5x+3}$

2. Déterminer les dérivées de chacune des fonctions suivantes :

- $f: x \mapsto \sqrt{x^2 - 1}$  sur  $[2; +\infty[$
- $h: x \mapsto \left(\frac{1}{x} - 2x\right)^3$  sur  $\mathbb{R}^*$

3. Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer son ensemble de définition et l'ensemble sur lequel elle est dérivable.

Déterminer alors la dérivée de chacune d'elles.

- $f(x) = x^2 - \frac{1}{x}$
- $g(x) = (2x+3)\sqrt{3x-5}$
- $h(x) = \frac{x^2+7}{x^2-x-6}$
- $k(x) = \frac{1}{(5x^2-3)^3}$
- $m(x) = (2x^3+3x-1)^4$
- $n(x) = \sqrt{x^4+x^2+1}$

4. On pose :  $g(x) = 2x^3 + x - 2$ .

- Etudier les variations de  $g$ .
- Démontrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet dans  $\mathbb{R}$  une solution unique  $\alpha$ .
- Déterminer une valeur approchée de  $\alpha$  à  $10^{-2}$  près.
- Etudier le signe de  $g(x)$  selon les valeurs de  $x$ .

### Exercice 15

#### PARTIE A

Soit  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = x^3 + 3x^2 + 2$

- Déterminer les limites de  $g$  en  $+\infty$  et en  $-\infty$ .
- Calculer  $g'(x)$  ; étudier son signe.
- Donner le tableau de variation de  $g$ . Calculer  $g(-4)$  et  $g(-3)$ .
- Montrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet une seule solution  $\alpha$ , comprise entre  $-4$  et  $-3$ .
- En déduire le signe de  $g(x)$  suivant les valeurs de  $x$ .

## PARTIE B

$f$  est la fonction définie sur  $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$  par  $f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2 + 2x + 1}$ .

On note  $\mathcal{C}$  la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormé.

- a) Déterminer la limite de  $f$  en  $+\infty$  et en  $-\infty$ .  
 b) Déterminer  $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$  (on pourra reconnaître l'identité remarquable :  $x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$ ).

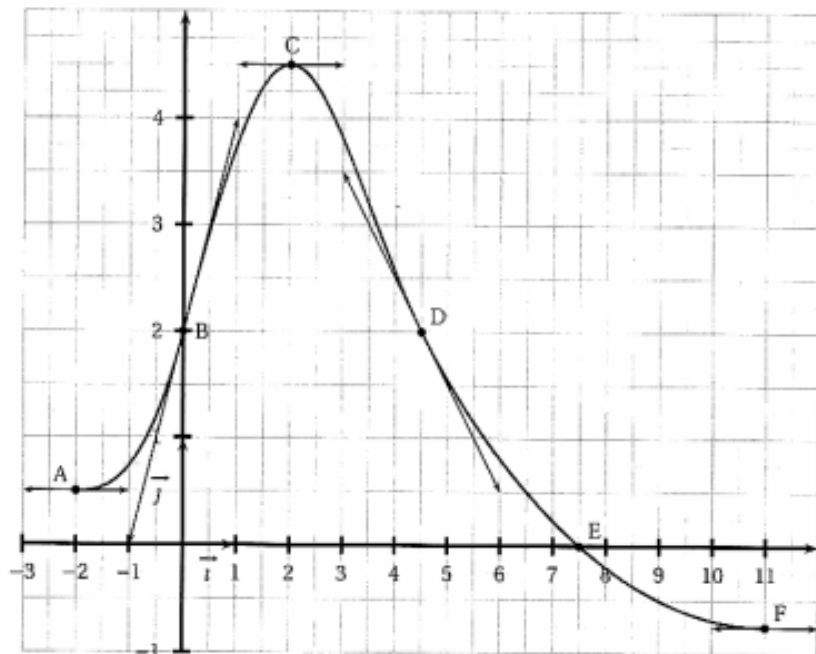
Donner un interprétation graphique du résultat.

- c) Calculer  $f'(x)$  et montrer que  $f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^3}$ .  
 d) Étudier le signe de  $f'(x)$  sur  $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ .  
 e) En déduire le sens de variation de  $f$ .  
 f) Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ ,  $f(x) = x - 2 + \frac{3x + 1}{x^2 + 2x + 1}$ .

En déduire que la droite d'équation  $y = x - 2$  est asymptote à  $\mathcal{C}$  en  $+\infty$ .

### Exercice 16

On considère la fonction  $f$  définie et dérivable sur l'intervalle  $[-2; 11]$ , et on donne sa courbe représentative  $\mathcal{C}_f$  dans un repère orthogonal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ , figure ci-dessous.



On sait que la courbe  $\mathcal{C}_f$  passe par les points A(-2; 0,5), B(0; 2), C(2; 4,5), D(4,5; 2), E(7,5; 0) et F(11; -0,75).

Les tangentes à la courbe  $\mathcal{C}_f$  aux points A, B, C, D et F sont représentées sur la figure. On utilisera les informations de l'énoncé et celles lues sur la figure pour répondre aux questions.

Pour chacune des questions, une seule des réponses A, B ou C est exacte. Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte 1 point. Une réponse inexacte enlève 0,25 point. L'absence de réponse ne rapporte aucun point et n'en enlève aucun. Si le total des points est négatif la note est ramenée à 0.

1.  $f'(0)$  est égal à :

A :  $\frac{1}{2}$

B : 2

C : 4

2.  $f'(x)$  est strictement positif sur l'intervalle :

A :  $]0; 11[$

B :  $]0; 7,5[$

C :  $] -2; 2[$

3. Une équation de la tangente à la courbe  $\mathcal{C}_f$  au point D est :

A :  $y = -x + 6,5$

B :  $y = x - 6,5$

C :  $y = -2x + 11$

### Exercice 17

On considère la fonction  $h$  définie par :  $h(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x$ .

- Dresser le tableau de variation de  $h$ .
- Pour  $k$  réel donné, étudier le nombre de solutions dans  $\mathbb{R}$  de l'équation  $h(x) = k$ .
- Démontrer que l'équation  $h(x) = 8$  a une solution unique  $\alpha$ . Donner un encadrement de  $\alpha$  à  $10^{-2}$  près.

### Exercice 18

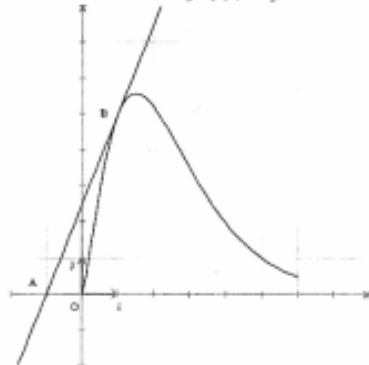
Soit  $f$  la fonction définie sur  $[-1; 1]$  par  $f(x) = (1 - x)\sqrt{1 - x^2}$ . On note  $\mathcal{C}$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  d'unité 4 cm.

- Justifier que  $f$  est dérivable sur  $] -1; 1[$  et que, pour tout  $x \in ] -1; 1[$ ,  $f'(x) = \frac{2x^2 - x - 1}{\sqrt{1 - x^2}}$ .
- Étudier le signe de  $f'(x)$  et dresser le tableau de variation de  $f$ .
- (a) Étudier la dérivabilité de  $f$  en  $-1$ .  
 (b) Étudier la dérivabilité de  $f$  en  $1$ .
- Déterminer l'équation réduite de la tangente  $T$  à  $\mathcal{C}$  au point d'abscisse 0 et étudier la position de  $\mathcal{C}$  par rapport à  $T$ .
- Tracer la courbe  $\mathcal{C}$  et sa tangente  $T$ .

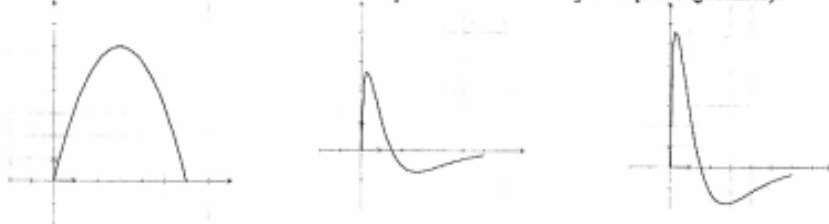
### Exercice 19

La courbe  $C_f$  ci-dessous représente une fonction  $f$  définie sur  $[0 ; 6]$ . Les points  $A$  et  $B$  ont pour coordonnées  $A(-1;0)$ ,  $B(1;5)$ .  $B$  est un point de  $C_f$  et la droite  $(AB)$  est tangente à  $C_f$ .

1. Déterminer  $f'(1)$ , où  $f'$  est la dérivée de la fonction  $f$ .



2. Une des trois courbes ci-dessous représente la fonction  $f'$ . Laquelle (justifier).



3. On appelle  $g$  la fonction définie sur  $[0 ; 6]$  par  $g(x) = \sqrt{f(x)}$ . Donner l'expression de sa dérivée  $g'$  (à l'aide de  $f$  et  $f'$ ), calculer  $g'(1)$ .

### Exercice 20

1. On considère  $P$  définie sur  $D = ]-1 ; +\infty[$  par

$$P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$$

- (a) Étudier les variations de  $P$

- (b) Montrer que  $P(x) = 0$  admet une unique racine réelle  $\alpha$  sur  $D$  et que  $1 \leq \alpha \leq 2$ .

2. On considère la fonction numérique  $f$  définie sur  $D$  par

$$f(x) = \frac{1-x}{1+x^3}$$

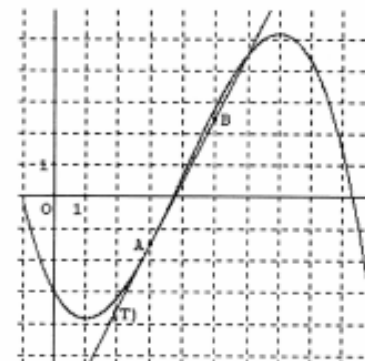
- (a) Déterminer les limites de  $f$  aux bornes de  $D$ .

- (b) Étudier les variations de  $f$  et dresser son tableau de variations.

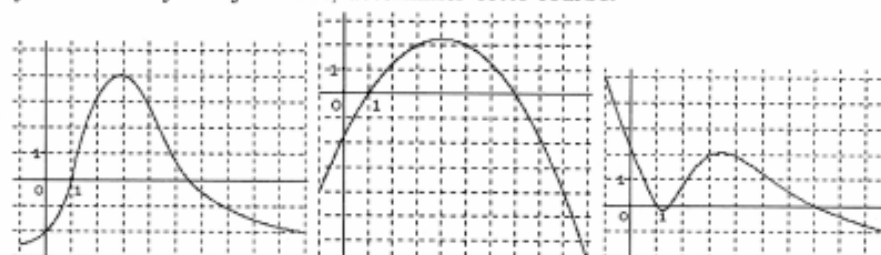
3. En utilisant la définition de  $\alpha$ , montrer que  $f(\alpha) = \frac{2(1-\alpha)}{3(1+\alpha^2)}$ .

### Exercice 21

Voici la courbe représentative d'une fonction  $f$  définie et dérivable sur  $[-1; 10]$ .



- La droite  $(T)$  qui passe par les points  $A(3; -1, 5)$  et  $B(5; 2, 5)$  est tangente à la courbe représentative de  $f$  au point  $A$ . Déterminer une équation de  $(T)$ .
  - Déterminer, en justifiant, les valeurs de  $f'(1)$  et  $f'(3)$ .
  - Déterminer graphiquement le tableau de variations de  $f$ .
- Parmi les courbes suivantes, une seule est la courbe représentative de la fonction  $f'$  dérivée de  $f$ . En justifiant, déterminer cette courbe.



Courbe 1

Courbe 2

Courbe 3

### Exercice 22

Soit le polynôme  $P$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $P(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1$

- 1) Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x)$

- 2) Déterminer la dérivée de  $P$ .

- 3) Étudier le signe de  $P'$  puis dresser le tableau de variation.

- 4) Montrer qu'il existe une unique solution  $\alpha$  sur  $\mathbb{R}$  à l'équation  $P(x) = 0$ . On citera le théorème utilisé.

- 5) Montrer que  $1 < \alpha < 2$  puis déterminer avec l'algorithme par dichotomie un encadrement à  $10^{-4}$  près de  $\alpha$ . On donnera le nombre de boucles nécessaires pour obtenir cette précision.

### Exercice 23

#### Partie A

Soit la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = 4x^3 - 3x - 8$ .

1. Etudier les limites de  $g$  en  $-\infty$  et en  $+\infty$ .
2. Etudier les variations de  $g$  et dresser son tableau de variation.
3. Démontrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  dans  $\mathbb{R}$ .
4. Déterminer une valeur approchée de  $\alpha$  d'amplitude inférieure à  $10^{-3}$ .
5. Déduis en le signe de  $g(x)$  sur  $\mathbb{R}$ .

#### Partie B

Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right\}$  par  $f(x) = \frac{x^3 + 1}{4x^2 - 1}$ .

1. Démontrer que, pour tout  $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right\}$ ,  $f'(x) = \frac{xg(x)}{(4x^2 - 1)^2}$ .
2. Dresser, en justifiant, le tableau de variation de  $f$  (on ne demande pas de calculer les limites de  $f$  aux bornes de son ensemble de définition).
3. Démontrer que  $f(\alpha) = \frac{3\alpha}{8}$ .

#### Partie C : Représentation graphique de la courbe de $f$ sur $[-4; 4]$ .

1. Recopier puis remplir le tableau de valeurs suivants :

| $x$    | -4 | -2,5 | -1 | 0 | 1 | 2 | 4 |
|--------|----|------|----|---|---|---|---|
| $f(x)$ |    |      |    |   |   |   |   |

2. Tracer la courbe  $\mathcal{C}_f$  en indiquant les tangentes horizontales et en s'aidant du tableau de valeurs de la question précédente.

### Exercice 24

Soit la fonction  $f$  définie sur  $[-2; 2]$  par :  $f(x) = x\sqrt{4 - x^2}$

- 1) Sur quel ensemble la fonction  $f$  est-elle dérivable ? Que se passe-t-il en 2 et -2 pour la courbe  $\mathcal{C}_f$  ?
- 2) Dériver la fonction  $f$  puis montrer que la fonction dérivée  $f'$  peut se mettre sous la forme :  $f'(x) = \frac{2(2 - x^2)}{\sqrt{4 - x^2}}$
- 3) Déterminer le signe de la dérivée  $f'$  puis dresser le tableau de variation de la fonction  $f$  sur  $[-2; 2]$ .
- 4) Tracer la courbe  $\mathcal{C}_f$ , les tangentes horizontales et les tangentes en 2 et -2 sur l'annexe 1 à rendre avec la copie.

### Exercice 25

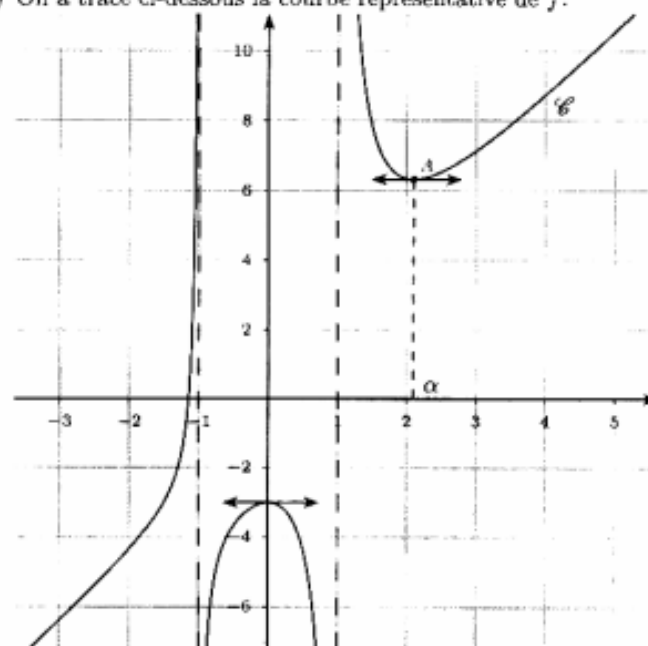
1.  $g$  est la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = x^3 - 3x - 3$ .

- (a) Etudier les limites de  $g$  en  $-\infty$  et en  $+\infty$ .
- (b) Etudier les variations de  $g$  et dresser son tableau de variations.
- (c) Montrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  dans  $\mathbb{R}$ .
- (d) Déduire des questions précédentes le signe de  $g(x)$ .

2.  $f$  est la fonction définie sur  $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$  par :  $f(x) = \frac{2x^3 + 3}{x^2 - 1}$ .

On note  $\mathcal{C}$  sa courbe représentative dans un repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  du plan.

- (a) Etudier les limites de  $f$  aux bornes de son ensemble de définition. En déduire que  $\mathcal{C}$  admet deux asymptotes dont on donnera des équations.
- (b) Démontrer que, pour tout  $x$  de  $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$ ,  $f'(x) = \frac{2xg(x)}{(x^2 - 1)^2}$ .
- (c) Dresser le tableau de variation de  $f$ .
- (d) On a tracé ci-dessous la courbe représentative de  $f$ .



Montrer que le point  $A$  de  $\mathcal{C}$  d'abscisse  $\alpha$  a pour ordonnée  $f(\alpha) = \frac{3(2\alpha + 3)}{\alpha^2 - 1}$ .

### Exercice 26

#### Fonction rationnelle et fonctions auxiliaire

Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = \frac{x^3 - 4}{x^2 + 1}$

On note  $\mathcal{C}_f$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé (unité 1cm)

#### 1) Étude d'une fonction auxiliaire

On pose :  $g(x) = x^3 + 3x + 8$

- Étudier les variations de la fonction  $g$ .
- Montrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  sur  $\mathbb{R}$  et que  $\alpha \in [-2; 0]$
- Déterminer un encadrement à  $10^{-3}$  à l'aide de votre calculatrice.
- Préciser le signe de  $g(x)$  selon les valeurs de  $x$

#### 2) Étude de la fonction $f$

- Déterminer les limites de  $f$  en  $+\infty$  et  $-\infty$
- Calculer  $f'(x)$  et montrer que :  $f'(x) = \frac{x(x^3 + 3x + 8)}{(x^2 + 1)^2}$
- À l'aide d'un tableau de signe donner le signe de  $f'(x)$  puis dresser le tableau de variation de la fonction  $f$ .
- En écrivant  $f(x) = \frac{x(x^3 - 4)}{x^3 + x}$ , montrer alors que  $f(\alpha) = \frac{3}{2}\alpha$
- En déduire un encadrement de  $f(\alpha)$
- Existe-t-il des tangentes à  $\mathcal{C}_f$  parallèles à la droite d'équation  $y = x$  ?

### Exercice 27

Soit  $f$  la fonction définie sur  $]0; +\infty[$  par :

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{2x}$$

et soit  $\mathcal{C}$  la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

- Étudier les variations de  $f$  sur l'intervalle  $]0; +\infty[$ .
  - Préciser les équations des asymptotes de  $\mathcal{C}$  ; pour déterminer l'une de ces asymptotes, on étudiera  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( f(x) - \frac{x}{\sqrt{3}} \right)$ .
  - Tracer la courbe  $\mathcal{C}$ .
- Soit  $m$  un nombre réel et soit  $\Delta$  la droite d'équation  $y = m$ . Discuter, suivant les valeurs de  $m$ , le nombre de points d'intersection de  $\Delta$  et de  $\mathcal{C}$ .
  - Pour tout  $m > \sqrt{2}$ , on appelle A et B les points d'intersection de  $\Delta$  et de  $\mathcal{C}$ . Soit I le milieu du segment [AB]. Montrer que, quand  $m$  décrit l'intervalle  $]\sqrt{2}; +\infty[$ , I décrit une partie, que l'on précisera, de la droite  $\Delta$  d'équation  $x = \frac{\sqrt{3}}{2}y$ .

### Exercice 28

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \frac{3(x-1)^3}{3x^2 + 1}$  et soit  $C$  sa courbe représentative

dans le plan rapporté à un repère orthonormal d'unité 1cm.

- Montrer qu'il existe un unique triplet de réels  $(a; b; c)$  que l'on déterminera, tel que pour tout  $x$  réel  $x$  :

$$f(x) = ax + b + \frac{cx}{3x^2 + 1}$$

- Déterminer les limites de  $f$  en  $-\infty$  et en  $+\infty$ .
- Montrer que  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et calculer sa dérivée.
- Dresser le tableau des variations de  $f$ .
- Donner l'équation de la tangente  $T$  à  $C$  au point d'abscisse 0. Tracer  $A$ ,  $T$  et la courbe  $C$ .
- Montrer que l'équation  $f(x) = 1$  a une solution unique dans  $\mathbb{R}$ . On notera  $\alpha$  cette solution. Donner une valeur approchée de  $\alpha$  à  $10^{-2}$  près par excès.

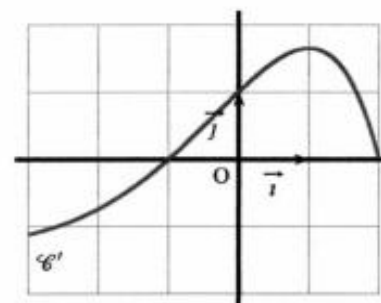
### Exercice 29

Le plan est muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

On considère une fonction  $f$  dérivable sur l'intervalle  $[-3; 2]$ .

On dispose des informations suivantes :

- $f(0) = -1$ .
- la dérivée  $f'$  de la fonction  $f$  admet la courbe représentative  $\mathcal{C}'$  ci-dessous.



Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse.

- Pour tout réel  $x$  de l'intervalle  $[-3, -1]$ ,  $f'(x) \leq 0$ .
- La fonction  $f$  est croissante sur l'intervalle  $[-1; 2]$ .
- Pour tout réel  $x$  de l'intervalle  $[-3; 2]$ ,  $f(x) \geq -1$ .
- Soit  $\mathcal{C}$  la courbe représentative de la fonction  $f$ .  
La tangente à la courbe  $\mathcal{C}$  au point d'abscisse 0 passe par le point de coordonnées  $(1; 0)$ .