Mon cahier d'habiletés

Livre du Professeur

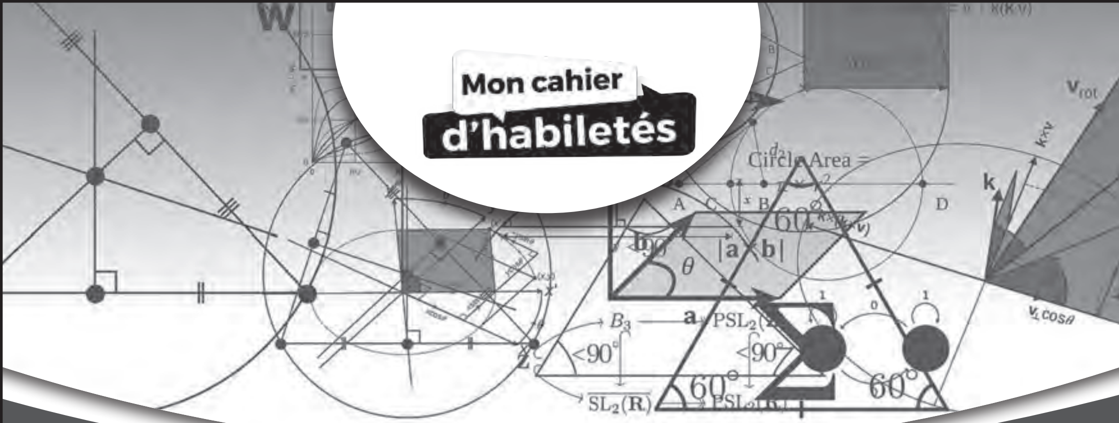
Maths

T^{le} D

CORRIGÉS DES EXERCICES

- Fixations
- Renforcements / Approfondissements
- Situations Complexes
- Devoirs de niveaux

MATÉRIALISEZ VOS IDÉES
JD Editions
L'Edition autrement



Mon cahier d'habiletés

Livre du Professeur

Maths

T^{le} D

CORRIGÉS DES EXERCICES

- Fixations
- Renforcements / Approfondissements
- Situations Complexes
- Devoirs de niveaux

JD Éditions
21 B.P. 3636 Abidjan 21
Côte d'Ivoire

SOMMAIRE

	Pages
Leçon 1 : Limites et continuité	5
Leçon 2 : Probabilité conditionnelle et variable aléatoire	24
Leçon 3 : Dérivabilité et étude de fonctions	39
Leçon 4 : Primitives d'une fonction	72
Leçon 5 : Fonctions logarithmes	79
Leçon 6 : Nombres complexes	102
Leçon 7 : Fonctions exponentielles et fonctions puissances	139
Leçon 8 : Nombres complexes et géométrie du plan	161
Leçon 9 : Suites numériques	177
Leçon 10 : Calcul intégral	198
Leçon 11 : Statistique à deux variables	215
Leçon 12 : Équations différentielles	232
Devoir de niveau 1	243
Devoir de niveau 2	247
Devoir de niveau 3	250

Ce document pourrait contenir des erreurs au fautes de frappes.
Prière les signaler à l'adresse : kyoussouphou@gmail.com

1 LIMITE ET CONTINUITÉ

EXERCICES DE FIXATION

1. Limite de référence

Exercice 1

$$a)\ \lim_{\substack{x\to 3\\ >}}\frac{1}{x-3}=+\infty\ ;\ b)\lim_{\substack{x\to 3\\ <}}\frac{1}{x-3}=-\infty$$

Exercice 2

$$a)\ \lim_{\substack{x\to -1\\ >}}\frac{1}{(x+1)^3}=+\infty\ ;\ b)\lim_{\substack{x\to 5\\ <}}\frac{1}{(x-5)^2}=+\infty$$

Exercice 3

$$a)\ \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}\ ;\ b)\ \lim_{x\to -\infty}\frac{3x^4-5x+8}{x^3-4}=\lim_{x\to -\infty}3x=-\infty\ ;\ c)\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1$$

2 Limite d'une restriction

Exercice 4

$$a)\ \lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=\lim_{x\to 3}x+3=6;\ b)\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x+3-4}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x+3}+2}=\frac{1}{4}$$

$$c)\ \lim_{\substack{x\to -2\\ <}}\frac{|x|-2}{2x+4}=\lim_{\substack{x\to -2\\ <}}\frac{-x-2}{2x+4}=-\frac{1}{2}$$

$$d)\ \forall x\in IR^*\setminus\{1\}\ ,\frac{x-\sqrt{x}}{x-1}=\frac{x^2-x}{(x-1)(x+\sqrt{x})}=\frac{x}{x+\sqrt{x}}=\frac{x\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+x}=\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$$

$$\forall x\in IR^*\setminus\{1\}\ ,\lim_{x\to 1}\frac{x-\sqrt{x}}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}=\frac{1}{2}$$

3. Lien entre limite à gauche, limite à droite et limite d'une fonction en un point

Exercices de fixation

Exercice5

1. (préciser « égale à f(a) ». V ; 2.F ; 3.F

Exercice 6

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} x^2 = 1 \quad et \quad \lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} (x+1) = 2$$

On a : $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} (x) \neq \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x)$ donc f n'admet pas de limite en 1

4. Limites et opération sur les fonctions.

Exercices de fixation

Exercice7

1. V ; 2. F ; 3. F ; 4.V

Exercice 8

On a $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \quad et \quad \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$ donc

$$\lim_{x \to +\infty} (f+g)(x) = \lim_{x \to +\infty} (x^2 + 2x + 5 + \frac{1}{x}) = +\infty$$

Exercice 9

On a : $\lim\limits_{x \to -3} f(x) = \lim\limits_{x \to -3} \dfrac{2x+3}{x+1} = \dfrac{3}{2} \quad et \quad \lim\limits_{x \to -3} g(x) = \lim\limits_{x \to -3} (x-8) = -11$

donc

$$\lim_{x \to -3} f(x) = \lim_{x \to -3} \frac{2x+3}{x+1} = \frac{3}{2} \quad et \quad \lim_{x \to -3} (f+g)(x) = \frac{3}{2} - 11 = -\frac{19}{2}$$

b) Limite du produit de deux fonctions

Exercice 10

1.V ; 2. F ; 3. V ; 4. F

Exercice 11

On a :

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty}(x^2+2x+5) = +\infty \quad et \quad \lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{2x+3} = \frac{1}{2}$$

donc

$$\lim_{x\to+\infty}(fg)(x) = +\infty$$

Exercice 12

On a : $\lim_{x\to2} f(x) = \lim_{x\to2}\frac{x+1}{x-4} = -\frac{3}{2}$ et $\lim_{x\to2} g(x) = \lim_{x\to2}(x-8) = -6$

donc $\lim_{x\to2}(fg)(x) = 9$

C) Limite du quotient de deux fonctions

Exercice 13

1. F ; 2.F ; 3.F ; 4.F

Exercice 14

On a : $\lim_{x\to2} f(x) = \lim_{x\to1}\frac{x+1}{x-4} = -\frac{2}{3}$ et $\lim_{x\to1} g(x) = \lim_{x\to1}(x-8) = -7$

donc $\lim_{x\to1}\frac{f}{g}(x) = \frac{2}{21}$

Exercice 15

$$\lim_{x\to0}\frac{f}{g}(x) = \lim_{x\to0}\frac{-1+\cos x}{\sin x} = \lim_{x\to0}\frac{\cos x-1}{x}\times\frac{x}{\sin x} = 0$$

car $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}=1$

Exercice 16

$$\lim_{x\to 0}\frac{f}{g}(x)=\lim_{x\to 0}\frac{f}{g}(x)=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x\tan x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x\cos x}{x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\times\cos x=1$$

car $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}=1$ et $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)=1$

5 Limite d'une fonction composée

Exercice 17

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{5x}\times\dfrac{5x}{x}=5$ car

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{5x}=\lim\limits_{X\to 0}\dfrac{\sin X}{X}=1$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4\pi x}{x^2}$, en posant $X=4\pi x$ on obtient

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4\pi x}{x^2}=\lim\limits_{X\to 0}(4\pi)^2\dfrac{1-\cos X}{X^2}=8\pi^2$

c) $\lim\limits_{x\to +\infty}\sqrt{\dfrac{3x-1}{x+2}}=\lim\limits_{x\to +\infty}\sqrt{\dfrac{3x}{x}}=\sqrt{3}$.

Conséquence

Exercice 18

a) $\lim\limits_{x\to -1}\sqrt{x^2+x+2}=\sqrt{2}$

b) $\lim\limits_{x\to +\infty}\sqrt{x^2+x+2}=+\infty$ *car* $\lim\limits_{x\to +\infty}(x^2+x+2)=+\infty$.

c) $\lim\limits_{x\to -\infty}\sqrt{x^2+x+2}=+\infty$ *car* $\lim\limits_{x\to -\infty}(x^2+x+2)=+\infty$.

Exercice 19

a) $\lim_{x\to -3}|7x-1| = 22$

b) $\lim_{x\to -\infty}|7x-1| = +\infty$

c) $\lim_{x\to +\infty}|7x-1| = +\infty$

6.Limite par comparaison

Exercice 20

a) $\lim_{x\to +\infty}(x+\sin x) = +\infty \quad car \ \lim_{x\to +\infty}(x-1) = +\infty$

b) Pour x > 0 , on a $-\frac{1}{x} \le \frac{\sin x}{x} \le \frac{1}{x}$ donc $\lim_{x\to +\infty}\frac{\sin x}{x} = 0$

c) On a $3x+E(x) \le 4x \quad et \ \lim_{x\to -\infty} 4x = -\infty$ donc

$\lim_{x\to -\infty}(3x+E(x)) = -\infty$

7. Calcul de limite à l'infini d'une fonction contenant des radicaux

Exercice 21

a) $$\lim_{x\to +\infty}\sqrt{x^2+x+1}-x = \lim_{x\to +\infty}\frac{x^2+x+1-x^2}{\sqrt{x^2+x+1}+x} = \lim_{x\to +\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1} = \frac{1}{2}$$

b) $$\lim_{x\to -\infty}\sqrt{x^2+x+1}+x = \lim_{x\to +\infty}\frac{x^2+x+1-x^2}{\sqrt{x^2+x+1}-x} = \lim_{x\to +\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{-\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-1} = -\frac{1}{2}$$

c) $$\lim_{x\to -\infty}2x+\sqrt{1-x} = \lim_{x\to -\infty}x\left(2-\frac{\sqrt{1-x}}{-x}\right) = \lim_{x\to -\infty}x\left(2-\sqrt{\frac{1-x}{x^2}}\right) = -\infty$$

8. Calcul de limite en utilisant la définition d'un nombre dérivé

Exercice 22

b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

9. Limite d'une fonction monotone sur un intervalle ouvert

Exercice 23

a). F ; b. V ; c. F ; d. V.

II. CONTINUITE

Exercice 24

1) ; 2)

Exercice 25

On a $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}}(-x) = 0$; $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\sqrt{x} = 0$ *et* $f(0) = 0$

On obtient $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x) = f(0)$ donc f est continue en 0

Exercice 26

On a

$\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to -1\\ <}}(2x-5) = -7$; $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to -1\\ >}}(x+1) = 0$ *et* $f(-1) = -7$

On obtient $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ <}} f(x) \neq \lim\limits_{\substack{x\to -1\\ >}} f(x)$ donc f n'est pas continue en -1.

2. Prolongement par continuité

Exercice 27

a) f n'est pas définie en 2 et $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2}(x+2) = 4$ donc f admet un prolongement par continuité en 2

b) g est définie par : $\begin{cases} g(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2} \ si \ x \neq 2 \\ g(2) = 4 \end{cases}$

Exercice 28

a) *f* n'est pas définie en 0 et donc f admet un prolongement par continuité en 0

b) *g* est définie par : $\begin{cases} g(x) = x\sin\dfrac{1}{x} \ si \ x \neq 0 \\ g(0) = 0 \end{cases}$

3. Continuité sur un intervalle

Exercice 29

1. V ; 2. F ; 3. V

4. Image d'un intervalle

Exercice 30

$$f\left([0;1]\right) = [f(0);f(1)] = [4;7]$$

Exercice 31

$$f\left(]-1;3]\right) =]\lim_{\substack{x\to-1 \\ >}} f(x);f(3)] =]5;19]$$

Exercice 32

$$f\left([7;13]\right) = [f(13);f(7)] = [-10;0]$$

Exercice 33

1. Sur $[-3;-1]$ f est continue et décroissante donc
$f\left([-3;-1]\right) = [f(-1);f(-3)] = [1;9]$

2. Sur $[1;4]$ f est continue et croissante donc
   $f([-3;-1]) = [f(1); f(4)] = [1;16]$

Exercice 34

1. f est décroissante sur donc $f([2;4]) = [f(4); f(2)] = [0;4]$
2. f est croissante sur $[4;+\infty[$ donc
   $f([4;+\infty]) = [f(4); \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)] = [0;+\infty]$
3. f est croissante sur $]-\infty;2[$ donc
   $f(]-\infty;2[) =]\lim\limits_{x \to -\infty} f(x); \lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ <}} f(x)[=]-\infty;4[$

5. Continuité d'une fonction composée

Exercice 35

1. V ; 2. V ; 3. F

6. Théorème des valeurs intermédiaires

Exercice 36

a). V ; b) . F ; c) . V

Exercice 37

F est continue sur $[1;2]$ et $f(1) = -3$ *et* $f(2) = 1$ soit $f(1) \times f(2) < 0$ donc l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans $[1;2]$.

7. Fonction continue et strictement monotone.

Exercice 38

a) f est continue et strictement décroissante sur $]1;+\infty[$ et
   $f(]1;+\infty[) =]\lim\limits_{x \to +\infty} f(x); \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x)[=]\,0;+\infty[$ donc f est une

   bijection de $]1;+\infty[$ dans $]0;+\infty[$

b) Soit $y \in]0;+\infty[$, $f(x)=y \Leftrightarrow \frac{1}{x-1}=y \Leftrightarrow x=\frac{1+y}{y}$ donc

$$f^{-1}:]0;+\infty[\to]1;+\infty[$$
$$x \mapsto \frac{1+x}{x}$$

__Exercice 39__

$$f: \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\to IR$$
$$x \mapsto tanx$$

f est une fonction continue et strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ donc la restriction de la fonction tangente à $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ est une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ sur IR.

III-ÉTUDE D'UNE BRANCHE INFINIE

1. Asymptotes

a) Asymptotes parallèles à l'un des axes

__Exercice 40__

$$D_f =]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{|x|} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{x} = 2$$

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-1}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{|x|} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{-x} = -2$$

$$\lim_{\substack{x\to -1\\<}} g(x) = \lim_{\substack{x\to -1\\<}} \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-1}} = \lim_{\substack{x\to -1\\<}} (2x-1)\times\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} = -\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to 1\\>}} g(x) = \lim_{\substack{x\to 1\\>}} \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-1}} = \lim_{\substack{x\to 1\\>}} (2x-1)\times\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} = +\infty \ .$$

Donc les droites d'équations $x=-1 \ \ et \ \ x=1$ sont des asymptotes verticales à (Cf) et les droites d'équations $y=2 \ \ et \ \ y=-2$ sont des asymptotes horizontales à (Cf).

b) Asymptotes non parallèles à l'un des axes

Exercice 41

$$\lim_{x\to+\infty}\left[g(x)-(2-x)\right] = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0 \ ; \ \lim_{x\to-\infty}\left[g(x)-(2-x)\right] = \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x} = 0$$

Donc la droite d'équation $y=2-x$ est asymptote oblique à la courbe de f en $-\infty$ et en $+\infty$

Exercice 42

$$\forall x\in]-\infty;0[,\ \lim_{x\to-\infty}\frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{2}{-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = -2$$

$$\lim_{x\to-\infty}(g(x)+2x) = \lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2-2x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{2}{x(1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}})(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}})} = 0$$

donc la droite d'équation $y=-2x$ est asymptote oblique à courbe de *f* en $-\infty$.

2. Direction asymptotique

Exercice 43

1. F ; 2. V ; 3. F ; 4. V ; 5 . V ; 6. V

Exercice 44

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (x^2 + \sqrt{x^2+1}) = +\infty$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(x + \sqrt{1 + \dfrac{1}{x^2}} \right) = +\infty$ donc la courbe de f

admet une branche parabolique de direction celle de (OJ).

IV- FONCTION PUISSANCE D'EXPOSANT RATIONNEL

Fonction racine nième

Exercice 45

La fonction f est strictement croissante sur IR+ et la fonction $x \mapsto \sqrt[3]{x}$ est la bijection réciproque de f sur IR+ donc elle est aussi croissante sur IR+.

Exercice 46

$b = a^7$; $a^{\frac{1}{10}} = b$

Exercice 47

$$a)\ \left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{2}{3}} \times \left(\frac{10}{21}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{7}{5} \times \frac{2\times5}{3\times7}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2}{3}} \quad ;$$

$$b)\ \left(5^{\frac{5}{2}}\right)^{\frac{6}{25}} = 5^{\frac{5}{3}\times\frac{6}{25}} = 5^{\frac{2}{5}}$$

$$c)\ \frac{7^{\frac{3}{4}}}{8^{\frac{3}{4}}} = \left(\frac{7}{8}\right)^{\frac{3}{4}} \quad ; \quad d)\ 2^{\frac{2}{3}} \times 2^{-\frac{3}{5}} = 2^{(\frac{2}{3}-\frac{3}{5})} = 2^{\frac{1}{15}}$$

EXERCICES DE RENFORCEMENT / D'APPROFONDISSEMENT

Exercice 1

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+x-2}-3x=+\infty$ car

$\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+x-2}=+\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to-\infty} -3x=+\infty$

2. $a)\ f(x)=\sqrt{x^2+x-2}-3x=|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}-3x=x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}-3\right)$

car si $x>1$, $|x|=x$

$b.\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ *car* $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}-3=-2$

Exercice 2

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+3}-\frac{x}{2}=\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}-\frac{1}{2}\right)=+\infty$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x-2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{1-\frac{2}{x}}=-1$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-4}-5x\right)=+\infty$

Exercice 3

$a)\ \lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+5x-3}-x=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{5x-3}{x\sqrt{1+\frac{5}{x}-\frac{3}{x^2}}+x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{5-\frac{3}{x}}{\sqrt{1+\frac{5}{x}-\frac{3}{x^2}}+1}=\frac{5}{2}$

$$b)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{4x^3+5x}-2x-1}{x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{4x+\frac{5}{x}}-2-\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}=+\infty$$

$$c)\ \lim_{x\to-\infty}\sqrt{9x^2-x+7}+3x=\lim_{x\to-\infty}\frac{-1+\frac{7}{x}}{-\sqrt{9-\frac{1}{x}+\frac{7}{x^2}}-3}=\frac{1}{6}$$

Exercice 4

a) $\lim_{x\to3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}=\lim_{x\to3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=f'(3)=\frac{1}{4}$ avec

$f(x)=\sqrt{x+1}\ et\ f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+1}}$

b) $\lim_{x\to-2}\frac{\sqrt{x^2-1}-\sqrt{3}}{x+2}=\lim_{x\to3}\frac{f(x)-f(-2)}{x+2}=f'(-2)=\frac{-2\sqrt{3}}{3}$

avec $f(x)=\sqrt{x^2-1}\ et\ f'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$

c) $\lim_{x\to0}\frac{x}{1+\cos x}=0$

Exercice 5

1. $1\le x\le2\Leftrightarrow0\le x-1\le1\Leftrightarrow0\le(x-1)^2\le1\Leftrightarrow-3\le(x-1)^2-3\le-2$

donc $f([1;2])=[-3;-2]$

2. $x\ge0\Leftrightarrow8-x^2\le0\ donc\quad f([0;+\infty[)=]-\infty;8]$

3. $\frac{3}{2}<x<5\Leftrightarrow3<2x<10\Leftrightarrow0<2x-3<7\Leftrightarrow2+\frac{1}{2x-3}>2+\frac{1}{7}\Leftrightarrow f(x)>\frac{15}{7}$

donc $f\left(\left]\frac{3}{2}\ ;\ 5\right[\right)=\left]\frac{15}{7};+\infty\right[$

Exercice 6

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x-3} = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1-\frac{3}{x}}{\sqrt{x-3}} = 0$

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$ donc la courbe de f admet une branche parabolique de direction celle de (OI)

Exercice 7

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1} + x^2 = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}+x^2}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}} + x = +\infty$

3. On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$ donc la courbe de *f* admet une branche
parabolique de direction celle de (OJ)

Exercice 8

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1} = +\infty$

2. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} -\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}} = -1$ et

$\lim\limits_{x\to-\infty} \left(f(x)+x\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+1} + x = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}-x} = 0$ donc la droite d'équation $y = -x$ est asymptote oblique à (Cf) en $-\infty$

Exercice 9

1. $f'(x) = \dfrac{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}}{(x+5)^2} = \dfrac{13}{(x+5)^2}$ soit $\forall x \in]-5;+\infty[$, $f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $]-5;+\infty[$

2. f est continue et strictement croissante sur $]-5;+\infty[$ donc f est une bijection de $]-5;+\infty[$ sur $]-\infty;2[$

3. $\forall y \in]-\infty;2[,\ f(x)=y \Leftrightarrow 2-\dfrac{13}{x+5}=y \Leftrightarrow x=\dfrac{3+5y}{2-y}$ donc

$$f^{-1}:]-\infty;2[\to]-5;+\infty[$$
$$x \mapsto \frac{3+5x}{2-x}$$

4. $\lim\limits_{\substack{x\to -5 \\ >}} f(x)=-\infty$ donc la droite d'équation $x=-5$ est asymptote verticale à (C)

5. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x-3}{x+5}=2$ donc la droite d'équation $y=2$ est asymptote horizontale à (C) en $+\infty$

Exercice 10

1. f est dérivable sur et $\forall x \in [-5;5]$, $f'(x)=3(x-3)^2$ on a $f'(x)>0$ donc f est strictement croissante sur $[-5;5]$ d'où f est une bijection de $[-5;5]$ sur $[-517;3]$
2. a) f est continue et strictement croissante sur $[-5;5]$ de plus $f(-5)=-517$, $f(5)=3$ soit $f(-5)\times f(5)<0$ donc l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution $\alpha \in [-5;5]$

   b) $\left.\begin{array}{l} f(4,7)=-0.087 \\ f(4,71)=0,000211 \end{array}\right\} f(4,7)\times f(4.71)<0$ donc

   $4,7<\alpha<4,71$

3. f est continue et strictement croissante sur $[-5;5]$ donc f est une bijection de $[-5;5]$ sur $[-517;3]$, or $-1\in[-517;3]$ donc l'équation $f(x)=-1$ admet une unique solution dans $[-5;5]$.

Exercice 11

1. pour $\alpha=-1$ on a $f(x)=\dfrac{1-x}{-x-1}$ et $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\>}} f(x)=-\infty$

   Pour $\alpha=1$ on a $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$ et $\lim\limits_{\substack{x\to1\\<}} f(x)=-\infty$

   On a $\alpha\notin D_f$ et $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=\pm\infty$ donc on ne peut pas faire un prolongement par continuité de f en α.

2. On a $1\notin D_f$ et $\lim\limits_{\substack{x\to1\\<}} f(x)=-\infty$ on ne peut pas faire un prolongement par continuité de f en 1

3. On a $0\notin D_f$ et $\lim\limits_{x\to0} f(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 2x}{2x}\times\dfrac{2x}{x}=2$ on peut faire un prolongement par continuité de f en 2. Soit g ce prolongement.

   g est définie par : $\begin{cases} g(x)=\dfrac{\sin 2x}{x} \quad si\ x\neq 0 \\ g(0)=2 \end{cases}$

Exercice 12

a) $$\lim_{x\to1} f(x)=\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x^2+3}-2x}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{x^2+3-4x^2}{(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2x)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{3(1-x)(1+x)}{(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2x)}=\lim_{x\to1}\frac{-3(1+x)}{\sqrt{x^2+3}+2x}=-\frac{3}{2}$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}-2}{1-\frac{1}{x}}=-3 \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{-3(1+\frac{1}{x})}{\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}+2}=-1$$

b) $$\lim_{x\to1} f(x)=\lim_{x\to1}\frac{2x(x-1)^2}{(x-1)^2(x+1)^2}=\lim_{x\to1}\frac{2x}{(x+1)^2}=\frac{1}{2}$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^3}{x^4}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{x}=0 \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x}=0$$

Exercice 13

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) - (2x-3) = \lim_{x \to -\infty} \frac{-8x+25}{x^2+5} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-8}{x} = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - (2x-3) = \lim_{x \to +\infty} \frac{-8x+25}{x^2+5} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-8}{x} = 0$$

Donc la droite d'équation $y = 2x - 3$ est asymptote oblique à (Cf) en $-\infty$ et en $+\infty$

Exercice 14

1.

- $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x) = -\infty$ donc (D_1) :

  x = 1 est asymptote à (C)
- $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} f(x) = +\infty$ donc (D_2) :

  x = -1 est asymptote à (C)
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) - (x+2) = 0$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - (x+2) = 0$ donc (D_3) :

  y = x+2 est asymptote à (C)

2.

$\forall x \in [-3;-1[, f(x) - (x+2) < 0$ car (C) est au dessous de (D_3)

$\forall x \in]1;3], f(x) - (x+2) < 0$ car (C) est au dessous de (D_3)

$\forall x \in]-1;1], f(x) - (x+2) > 0$ car (C) est au dessus de (D_3)

SITUATIONS COMPLEXES

Exercice 15

Hypothèse de ABOU : $f(t)<11 \Leftrightarrow \frac{210}{t}+10<11 \Leftrightarrow \frac{210-t}{t}<0$ donc

$f(t)<11$ pour $t \in]210\,;+\infty[$

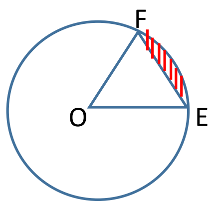
Hypothèse de KONAN : $\forall t>1$, $f(t)>10$, il n'existe donc pas de temps long pendant lequel $f(t)=10$. En effet la droite d'équation y = 10 étant une asymptote à la courbe de la fonction f, aucun temps ne peut corresponde à une température de 10 degrés.

Le jeudi correspond à $t=24\times 60=1440\,mn$. Ainsi pour $t\in]210;1440[$, on a $f(t)<11$. L'hypothèse de ABOU est donc celle qui est plausible.

Exercice 16

L'aire d'un secteur en radian : si α est en radian alors l'aire $A=\frac{\alpha R^2}{2}$

Posons EF = x et h la hauteur du triangle isocèle OEF.



L'aire du secteur OEF est : $\frac{\propto}{2}$

On a : OE = OF = 1. On a : x = 2htan $(\frac{\propto}{2})$ (relation trigonométrique dans un triangle rectangle). On a aussi :

h = cos $(\frac{\propto}{2})$. Si l'on désigne par S l'aire du triangle isocèle OEF, on a donc : S = $\frac{hx}{2}$, soit

S = h^2 tan $(\frac{\propto}{2})$ ou encore S = cos $(\frac{\propto}{2})$ sin $(\frac{\propto}{2})$. On a donc ; S = $\frac{1}{2}$ sin$\propto$.

Donc l'aire comprise entre [EF] et l'arc $\widehat{EF}$ est : $\frac{\propto}{2}-\frac{1}{2}\sin\propto$

Le problème revient donc à résoudre l'équation : $\frac{\propto}{2} - \frac{1}{2}\sin\propto = \frac{1}{2}\sin\propto$. Il s'agit de donner une approximation décimale d'une solution s'il existe de l'équation : 2sin x - x = 0.
Posons f(x) = 2sin x-x.
La fonction est continue sur]0 ; π[.
f (1,85) vaut environ 0,072 et f(1,9) = -0,007. f(1,8) et f(1,9) sont de signe contraire donc
$1{,}85 < \propto < 1{,}9$
1,9 radian est une bonne approximation de $\propto$. En dégré on obtient environs **109 degrés.**

2 PROBABILITÉ CONDITIONNELLE ET VARIABLE ALÉATOIRE

EXERCICES DE FIXATION

I- Probabilité conditionnelle

Définition

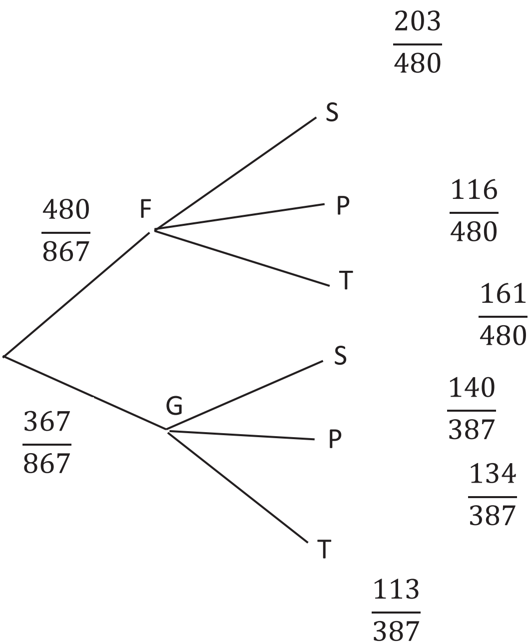
Exercice 1

On veut calculer $P_R(G)$.

L'événement $R \cap G$ est "On tire une boule rouge marquée Gagné".
On a : P(R) = 0,4 et P(R$\cap$G) = 0,3. Par suite : $P_R(G) = 0,75$.

2) Arbre pondéré :

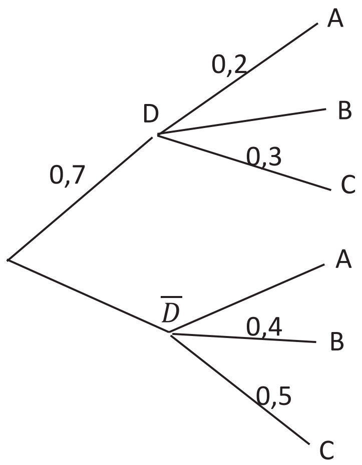
Exercice 2



Exercice 3 : Arbre pondéré P_1.

1- Complète l'arbre ci-dessous pour qu'il soit un arbre pondéré.

2- Calcule P(D∩B).



1- En complétant l'arbre, on a : P_D(B)= 0,5 et : $P_{\overline{D}}$(A)= 0,1.

2- P(D∩B) = P(D)× P_D(B) = 0,7×0,5 = 0,35.

Exercice 4 : Expérience aléatoire Σ_2.

Dans un pays, il y a 2 % de la population contaminée par un virus. On dispose d'un test de dépistage de ce virus qui a les propriétés suivantes :

- La probabilité qu'une personne contaminée ait un test positif est de 0,99(sensibilité du test);
- La probabilité qu'une personne non contaminée ait un test négatif est de 0,99 (spécificité du test).

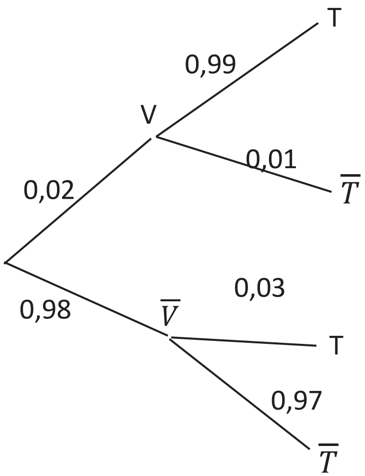
On fait passer un test à une personne choisie au hasard dans cette population.

On note : V l'événement « la personne est contaminée par le virus »

On note : T l'événement « le test est positif »

1. Construis l'arbre pondéré correspondant à cette situation.
2. Traduis par une probabilité la phrase : « Si le test est positif, il y a 40 % de chance que la personne soit contaminée.»
3. Détermine cette probabilité.

1- Arbre pondéré



2-a) Cela se traduit par : « Si la personne n'est pas contaminée, alors il y a 97 % de chance qu'il soit testé négatif ».
b) $P_{\overline{T}}(V) = 0,4$.
3-
$P(T) = P(V \cap T) + P(\overline{V} \cap T)$
$P(T) = 0,02 \times 0,99 + 0,98 \times 0,03$
$P(T) = 0,0492$.

3) Formule des probabilités totales

Exercice 5
En reprenant l'expérience aléatoire Σ_1 (page 33 du cahier), Calculons P(G).
$P(G) = P(R \cap G) + P(\overline{R} \cap G)$
$P(G) = 0,4 \times 0,75 + 0,6 \times 0,3$
$P(G) = 0,48$.
Exercice 6
Résolue dans la dernière question de l'exercice 4

4) Evènements indépendants
Exercice 7

1) VRAI 2) FAUX.

Propriété

Exercice 8

On a : C = $\bar{A} \cap \bar{B}$, d'où : P(C) = P($\bar{A}$)×P($\bar{B}$), car A et B étant indépendants, $\bar{A}$ et $\bar{B}$ le sont aussi.
Par suite : P(C) = 0,72.

II) Variable aléatoire
1) Définition

Exercice 9

	Fonction	Vrai/faux
1	X est la fonction de Ω vers ℝ, telle que : X(P) = 2 et X(F) = - 6.	VRAI
2	X est la fonction de Ω vers ℝ, telle que : X(P) = 2 et F n'a pas d'image par X.	FAUX
3	X est la fonction de Ω vers ℝ, telle que : X(P) =$\frac{1}{2}$ et X(F) = $\frac{1}{2}$.	VRAI

2**) Notation**

Exercice 10

a) (X = 1) = {2 ; 4 ; 6} ; b) (X = 0) = {1 ;3} ; c)) (X < 1) = {1 ;3 ; 5} ; d) (X > 2) = ∅.

3) Loi de probabilité d'une variable aléatoire

3-1. Définition

Remarque

On a : $p_1 + p_2 + … + p_n = 1$.

Exercice 11

X prend trois valeurs qui sont : -2 ; 0 ; 1. La loi de probabilité de X est donnée par le tableau suivant :

k	-2	*0*	*1*
P(X = *k*)	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$

3-2. Espérance mathématique d'une variable aléatoire

Exercice 12

E(X) = 4,72

3-3 Variance et écart-type d'une variable aléatoire

Définition

Exercice 13

V(X) = 31,2416 ; σ(X) = $\sqrt{31,2416} \cong$ 5,59.

3-4 Fonction de répartition d'une variable aléatoire

a) **Définition**

Exercice 14

Si x< 0, alors : F(x) = 0 ;

Si $0 \leq$x < 1, alors : F(x) = $\frac{1}{8}$;

Si $1 \leq$x < 2, alors : F(x) = $\frac{1}{2}$;

Si $2 \leq$x < 3, alors : F(x) = $\frac{7}{8}$;

Si x $\geq$ 3, alors : F(x) = 1.

III) Loi binomiale B(*n*, *p*)

1) Epreuve de Bernoulli ´

Définition

Exercice 15

X suit une binomiale B(10 ; $\frac{9}{11}$). La probabilité cherchée est : P(X= 6) = $C_{10}^{6}(\frac{9}{11})^{6}\times(\frac{2}{11})^{4}$.

Exercice 16

Le fait que la probabilité d'atteinte de la cible est constante au cours des 3 tirs montre que les trois épreuves sont indépendantes. X suit une loi binomiale B (3 ; 0,7).

Exercice 17

1- E(X) = 2,1 ; 2- V(X) = 0,63.

Exercice 18

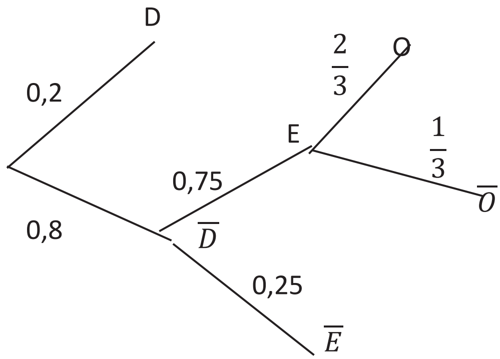
A chaque question aléatoirement choisie, l'élève donne soit une réponse correcte avec la probabilité de $\frac{1}{4}$, soit une réponse incorrecte avec la probabilité de $\frac{3}{4}$. L'élève répond au hasard à chacune des 10 questions du QCM. Il y a répétition de 10 épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes. La variable aléatoire X qui prend pour valeur le nombre de réponses correctes suit donc une binomiale $B(10 ; \frac{1}{4})$. On a :

$E(X) = 10\times\frac{1}{4}$; $V(X) = 10\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}$.

EXERCICES DE RENFORCEMENT / D'APPROFONDISSEMENT

Exercice 1

1- Arbre pondéré



2-a) Cette probabilité est : $P(\overline{D} \cap E \cap \overline{O}) = 0{,}8\times0{,}75\times\frac{1}{3} = 0{,}2$. Car la probabilité d'un chemin est le produit des probabilités sur ce chemin.

b) Cette probabilité est : $P(\overline{D} \cap E \cap O) = 0{,}8\times0{,}75\times\frac{4}{3} = 0{,}4$. Car la probabilité d'un chemin est le produit des probabilités sur ce chemin.

3- Pour être admis à ce concours, il faut être admis sur dossier ou bien être passé par l'écrit, subir l'oral et être admis à l'issue de l'oral. La probabilité cherchée est : $P(D) + P(\overline{D} \cap E \cap O)$ qui vaut 0,6.

Exercice 2

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

$P(A) = \frac{1}{2}$.

$P(B) = \frac{1}{6}$.

3- $P(C) = P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$; $P(C) = \frac{1}{2}$.

EXERCICE 3

Soit :

U_1 l'évènement : « Tirer une boule de l'urne U_1 » ;

U_2 l'évènement : « Tirer une boule de l'urne U_2 » ;

R l'évènement : « Tirer une boule rouge » ;

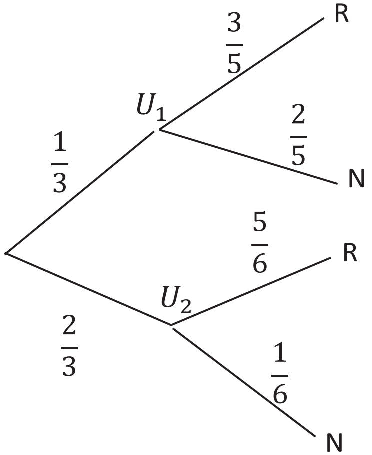
N l'évènement : « Tirer une boule noire ».

La répartition des boules dans l'urne fournit les probabilités suivantes :

$P_{U1}(R) = \frac{3}{5}$; $P_{U1}(N) = \frac{2}{5}$; $P_{U2}(R) = \frac{5}{6}$ et $P_{U2}(N) = \frac{1}{6}$.

Le dé étant parfaitement équilibré, on a : $P(U_1) = \frac{1}{3}$; $P(U_2) = \frac{2}{3}$.

Tous ces résultats sont résumés dans l'arbre pondéré ci-dessous :



$P(N) = P(N \cap U_1) + P(N \cap U_2)$
$\quad = P(U_1) \times P_{U1}(N) + P(U_2) \times P_{U2}(N)$

$= \frac{1}{3} \times \frac{2}{5} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{6}$

$P(N) = \frac{11}{45}$.

2- Cette probabilité est : $P_N(U_1)$.

On a : $P_N(U_1) = \frac{P(U_1) \times P_{U_1}(N)}{P(N)}$

$P_N(U_1) = \frac{6}{11}$.

EXERCICE 4

On considère les évènements suivants :
H : « la personne choisie est un homme » ;
F : « la personne choisie est une femme » ;
P : « la personne choisie présente le caractère P ».
On a les probabilités suivantes :
p(H) = 0,45 ; p(F) = 0,55 ; p(P/H) = 0,04 ; p(P/F) = 0,05.

1- Détermination de la proportion de personnes qui présentent le caractère P.

p(P) = p(H) p(P/H) + p(F) p(P/F)
p(P) = 0,45×0,04 + 0,55×0,05 = 0,0455 ; soit 4,55 % des personnes de cette population.

2- Il s'agit de déterminer p(H/P).

$p(H/P) = \frac{p(H)\, p(P/H)}{p(P)} = 0{,}4$.

Exercice 5

On considère les évènements suivants :
M : « la personne choisie est malade » ;
T : « la personne choisie est testée positif » ;
On en déduit les évènements suivants :
$\bar{M}$: « la personne choisie est saine » ;
$\bar{T}$: « la personne choisie est testée négatif ».
On a les probabilités suivantes :

P(M) = 0, 03 ;

$P_M(T)$ est la probabilité qu'une personne soit testée positif : $P_M(T) = 0,95$;
$P_{\overline{M}}$ (T) est la probabilité qu'une personne saine soit testée positif :
$P_{\overline{M}}$ (T) = 0,1.

1- a) Cette probabilité est P(M∩T)

$P(M\cap T) = P(M)\times P_M(T)$; $P(M\cap T) = 0,03\times 0,95 = 0,0285$.
b) Cette probabilité est $P(\overline{M}\cap T)$
$P(\overline{M}\cap T) = P(\overline{M})\times P_{\overline{M}}(T)$; $P(\overline{M}\cap T) = 0,97\times 0,1 = 0,097$.
c) Avec la formule des probabilités totales appliquée à {M ; $\overline{M}$}, on a :
$P(T) = P(M\cap T) + P(\overline{M}\cap T)$; $P(T) = 0,0285 + 0,097 = 0,1255$.
2-a) Cette probabilité est $P_T(\overline{M})$
$P_T(M) = \frac{P(M\cap T)}{P(T)}$; $P_T(M) = \frac{0,0285}{0,1255} = 0,2271$.
b) Cette probabilité est $P_T(\overline{M})$
$P_T(\overline{M}) = \frac{P(\overline{M}\cap T)}{P(T)}$; $P_T(\overline{M}) = \frac{0,097}{0,1255} = 0,7729$.
On pourrait remarquer que : $P_T(\overline{M}) = 1 - P_T(M)$.

c) Cette probabilité est $P_{\overline{T}}(M)$
$P_{\overline{T}}(M) = \frac{P(M\cap\overline{T})}{P(\overline{T})}$.
Avec la formule des probabilités totales appliquée à {T ; $\overline{T}$}, on a :
$P(M) = P(M\cap T) + P(M\cap\overline{T})$; d'où :
$P(M\cap\overline{T}) = P(M) - P(M\cap T) = 0,03 - 0,0285 = 0,0015$.

$$P_{\overline{T}}(M) = \frac{0,0015}{1-0,1255} = 0,0017.$$

d) Cette probabilité est $P_{\overline{T}}(\overline{M})$

$P_{\overline{T}}(\overline{M}) = 1 - P_{\overline{T}}(M)$; $P_{\overline{T}}(\overline{M}) = 1 - 0,0017 = 0,9983$.

Exercice 6

1)
A chaque règle choisie au hasard, il y a deux issues possibles : la règle présente un défaut avec une probabilité constante égale à 0,1 ou bien la règle ne présente aucun défaut une probabilité de 0,9 car le tirage est supposé fait avec remise. Il y a répétition de 8 épreuves de Bernoulli

identiques et indépendantes. La variable aléatoire X qui prend pour valeur le nombre de règles présentant un défaut suit donc une binomiale B(8 ; 0,1).
2) P(A) = P(X= 0) = $0{,}9^8$ = 0,43.
P(B) = P(X=2) = $C_8^2(0{,}1)^2(0{,}9)^6$= 0,149.
P(C)= 1−P(A) = 0,57.
3) a) E(X) = 8×0,1= 0,8. L'arrondi d'ordre 0 du résultat est 1.
b) En moyenne 1 règle sur 8 Choisies au hasard présente un défaut au contrôle.

Exercice 7
1) Le nombre de cas possibles : $C_5^2 \times C_5^2 = 100$.
Pour avoir un cas favorable à E : tirer exactement 1 boule blanche dans chaque urne ou bien 2 boules blanches dans une seule des deux urnes. Soit au total :
$C_3^1 \times C_2^1 \times C_2^1 \times C_3^1 + C_3^2 \times C_3^2 + C_2^2 \times C_2^2$= 46. D'où : P(E)= $\frac{46}{100} = 0{,}46$.
2)a) Les valeurs prises par X sont : 0 ;1 ; 2 ;3 ; 4.
La loi de probabilité est donnée par le tableau ci-dessous :

k	0	1	2	3	4
P(X=k)	0,03	0,24	0,46	0,24	0,03

b) E(X) =2.
Le nombre moyen de boules blanches tirées est 2. Le gain par boule blanche tirée étant de 600 F, le gain moyen est de 2×600 -1500 qui est -300. La gain étant non nul, le jeu n'est pas équitable.

Remarque
On peut considérer la variable aléatoire Y = 600X-1500. Cette variable aléatoire donne le gain du joueur. E(Y) = 600E(X) -1500 = -300.
Sur un grand nombre de tirages qui donnent lieu au jeu, ce jeu n'est pas favorable au joueur car le gain obtenu est négatif (perte).

1) On considère les évènements suivants :

B : « tirer exactement deux boules blanches »
U_1 : « tirer une et une seule boule blanche de U_1 »
$P(B|U_1) = \frac{P(B \cap U_1)}{P(U_1)}$; $P(B|U_1) = \frac{3}{5}$.

2) Soit l'évènement succès S : « tirer deux boules blanches ».

La probabilité d'un succès est : P(S) = $\frac{C_3^2}{C_5^2} = \frac{3}{10}$.
La variable aléatoire X prenant pour valeurs le nombre de succès au cours des 10 tirages suit une loi binomiale de paramètres 10 et $\frac{3}{10}$.

La probabilité cherchée est $P(X \geq 2)$.
$P(X \geq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1)$.
$P(X \geq 2) = 1 - (\frac{7}{10})^{\mathbf{10}} - C_{10}^{1}(\frac{3}{10})^{\mathbf{1}}(\frac{7}{10})^{\mathbf{9}} = 0{,}851$.

Exercice 8

1)

a) Pour réaliser A_n, on doit tirer une boule blanche de l'urne U_1 et la remettre dans l'urne U_2 puis tirer une boule blanche de l'urne U_2 et la remettre dans U_1 ou bien tirer une boule noire de l'urne U_1 et la remettre dans l'urne U_2 puis tirer une boule noire de l'urne U_2 et la remettre dans U_1.

$P(A_n) = \frac{n}{n+3} \times \frac{3}{4} + \frac{3}{n+3} \times \frac{2}{4}$; d'où : $P(A_n) = \frac{3}{4}(\frac{n+2}{n+3})$.

b) Cette limite vaut $\frac{3}{4}$.

2) Pour réaliser B_n, on doit tirer une boule noire de l'urne U_1 et la remettre dans l'urne U_2 puis tirer une boule blanche de l'urne U_2 et la remettre dans U_1.

$P(B_n) = \frac{3}{n+3} \times \frac{2}{4}$; d'où : $P(B_n) = \frac{6}{4(n+3)}$.

3) a) D'après les trois cas décrits dans l'énoncé, les gains algébriques du joueur en franc peuvent être : $2(n-10)$; $n-20$; -20. C'est pour n supérieur à 10, que le joueur peut espérer gagner.

b) Les valeurs prises par X sont : $2(n-10)$; $n-20$; -20.

La loi de probabilité est donnée par le tableau ci-dessous :

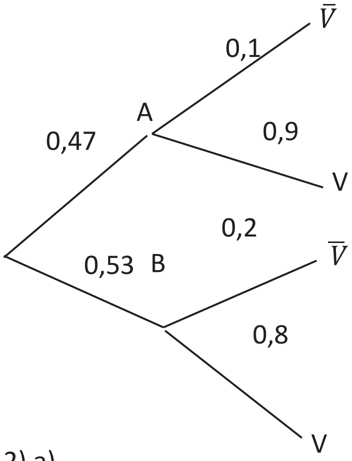
k	-20	$n-20$	$2(n-10)$
P(X=k)	$\frac{n}{4(n+3)}$	$\frac{3}{4}(\frac{n+2}{n+3})$	$\frac{6}{4(n+3)}$

c) $E(X) = \frac{3n^2-62n-240}{4(n+3)}$.

d) E(X) est strictement positive si et seulement si n est supérieur ou égal à 25. Dès que l'urne U_1 contient au moins 25 boules blanches, le jeu est favorable au joueur.

Exercice 9

1) Tous ces résultats sont résumés dans l'arbre pondéré ci-dessous :



2) a)

$P(V) = P(V \cap A) + P(V \cap B)$

$= P(A) \times P_A(V) + P(B) \times P_B(V)$

$= 0{,}47 \times 0{,}9 + 0{,}53 \times 0{,}8$

$P(V) = 0{,}847.$

b) Cette probabilité est : $P_V(A)$

$P_V(A) = \frac{P(V \cap A)}{P(V)}$; $P_V(A) = \frac{0{,}47 \times 0{,}9}{0{,}847} = \frac{423}{847}$, soit environ 50 %.

3. La personne choisie vote effectivement le candidat A si elle affirme voter le candidat A et dit la vérité ou affirme voter le candidat B et ne dit pas la vérité. Cette probabilité est : $P(A \cap V) + P(B \cap \overline{V})$

$P(A \cap V) + P(B \cap \overline{V}) = 0{,}47 \times 0{,}9 + 0{,}53 \times 0{,}2 = 0{,}529.$

4. En une demi-heure, on répète 10 expériences de Bernoulli indépendantes dont la probabilité de succès est 0,4. La variable aléatoire X qui compte le nombre de personnes qui accepte de répondre au cours de la demi-heure suit une loi binomiale de paramètres 10 et 0,4.

On a : $E(X) = 10 \times 0{,}4 = 4$. Cela signifie que l'institut de sondage espère en une demi-heure obtenir 4 personnes qui acceptent de répondre à l'enquête. Or : $\frac{1200}{4} = 300$, donc l'institut de sondage doit prévoir en moyenne 300 demi-heures, soit 150 heures pour parvenir à l'atteinte de son objectif.

Exercice 10

Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre d'ordinateurs tombés en panne parmi les 100 disponibles.

Les 100 ordinateurs tombant en panne de façon indépendante avec une probabilité de 0,01 à chaque panne, la variable aléatoire X suit une loi binomiale de probabilité de paramètres 100 et 0,01.

1. La probabilité qu'aucun ordinateur ne tombe en panne est : P(X = 0).

P(X = 0) = $(1 - 0{,}01)^{100}$; P(X = 0) = 0,366.

2. La probabilité qu'au moins un ordinateur tombe en panne est : P(X ≥ 1).

P(X ≥ 1) = 1− P(X = 0) = 0,634.

3. La probabilité qu'exactement trois ordinateurs tombent en panne est : P(X = 3).

P(X = 3) = $C_{100}^{3}(0{,}01)^3 \times (0{,}99)^{97}$; P(X = 3) =0,061.

4. La probabilité qu'au plus trois ordinateurs tombent en panne est : P(X ≤ 3).

P(X ≤ 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) ;

On a : P(X = 1) = $C_{100}^{1}(0{,}01)^1 \times (0{,}99)^{99}$ = 0,37 ;

P(X = 2) = $C_{100}^{2}(0{,}01)^2 \times (0{,}99)^{98}$ = 0,185.

P(X ≤ 3) = 0,366 + 0,37 + 0,185 + 0,061 = 0,982.

5. X suivant une loi binomiale de paramètres 100 et 0,01, le nombre moyen d'ordinateurs qui tombent en panne dans cette entreprise est 100×0,01 = 1.

SITUATIONS COMPLEXES

Exercices 11

Identification du problème à résoudre

Il s'agit de donner une argumentation au fabricant sur le bénéfice qu'il espère avoir basée sur ton cours de mathématiques.

Modélisation

Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de consoles conformes parmi les 400 produits et vendus par mois. Le fabricant faisant réaliser un test de conformité, dans les mêmes conditions, sur chacun de ses objets fabriqués, X suit une loi binomiale dont le succès est « la console de jeu est conforme » avec une probabilité de 0,93.

Calcul du bénéfice

L'espérance de la variable aléatoire X est 400×0,93 = 372. Cela signifie que le fabricant espère produire et vendre mensuellement 372 consoles conformes.

Le nombre de consoles non conformes que le fabricant espère produire et vendre est : 400 −372 = 28.
Le montant total des ventes en FCFA est donc :
290 000×372 + 150 000×28 = 112 080 000.
Le coût total de la production des 400 consoles en FCFA est :
160 000× 400 = 64 000 000.
Le bénéfice en FCFA que le fabricant espère réaliser est : 48 080 000.

Solution à la préoccupation du fabricant

Le bénéfice espéré par le fabricant de 45 000 000 FCFA est inférieur à 48 080 000 FCFA.
Il n'a donc pas à s'inquiéter. Il lui suffira de suivre ses activités correctement et il n'y aura pas de problème.

Exercices 12

Option 1

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de « faces » obtenu à l'issu des trois lancers.

X suit la loi binomiale de paramètres (3 ; $\frac{1}{2}$).

$P(X = 2) = C_3^2(\frac{1}{2})^2 \times (\frac{1}{2})^1$

$P(X = 2) = \frac{3}{8}$

Option 2

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de « faces » obtenu à l'issu des quatre lancers.

Y suit la loi binomiale de paramètre (4 ; $\frac{1}{2}$).

$P(Y=3) + P(Y=4) = C_4^3(\frac{1}{2})^3 \times (\frac{1}{2})^1 + (\frac{1}{2})^4$

$P(Y=3) + P(Y=4) = \frac{5}{16}$

Conclusion

$\frac{3}{8} > \frac{5}{16}$. Donc je choisis l'option1.

3 DÉRIVABILITÉ ET ÉTUDE DE FONCTIONS

EXERCICES DE FIXATION

1 DERIVABILITE D'UNE FONCTION EN a.

1. Définition

Exercice 1

Une équation de la tangente à gauche en A à la courbe de f est :
$y = f'_g(2)(x-2) + f(2)$. On a donc : $y = -4x + 8$.

Exercice 2

$\boldsymbol{\alpha}$ est ■	■ la tangente à droite à la courbe de f en a
$\boldsymbol{\beta}$ est ■	■ le nombre dérivé de f à droite en a
(D) est ■	■ le nombre dérivé de f à gauche en a
(Δ) est ■	■ la tangente à gauche à la courbe de f en a

Exercice 3

$$f(x) = x|x-1|$$

$$\begin{cases} \forall x \in \,]-\infty; 1[,\ f(x) = x(1-x) \\ \forall x \in \,]1; +\infty[,\ f(x) = x(x-1) \end{cases}$$

- $\lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ <}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ <}} \frac{x(1-x)}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ <}} \frac{-x(x-1)}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ <}} (-x) = -1$
  Donc $f'_g(1) = -1$
- $\lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ >}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ >}} \frac{x(x-1)}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ >}} x = 1$
  Donc $f'_d(1) = 1$

2. Propriété

Exercice 4

$$f(x) = \begin{cases} x^2, si\ x \geq 0 \\ 2x, si\ x < 0 \end{cases}$$

- $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{x^2}{x} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} x = 0$

  Donc $f'_d(0) = 0$
- $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{2x}{x} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} 2 = 2$

  Donc $f'_g(0) = 2$

$f'_g(0) \neq f'_d(0)$ donc f n'est pas dérivable en 0.

Exercice 5

$g(x) = x|x-2|$

$$\begin{cases} \forall x \in]-\infty; 2[, g(x) = x(2-x) \\ \forall x \in]2; +\infty[, g(x) = x(x-2) \end{cases}$$

- $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ <}} \frac{g(x)-g(2)}{x-2} = \lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ <}} \frac{x(2-x)}{x-2} = \lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ <}} \frac{-x(x-2)}{x-2} = \lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ <}} (-x) = -2$

  Donc $g'_g(2) = -2$
- $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ >}} \frac{g(x)-g(2)}{x-2} = \lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ >}} \frac{x(x-2)}{x-2} = \lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ >}} x = 2$

  Donc $g'_d(2) = 2$

$g'_g(0) \neq g'_d(0)$ donc g n'est pas dérivable en 2.

Exercice 6

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^2, si\ x < 1 \\ 1 - \sqrt{x}, si\ x \geq 1 \end{cases}$$

- $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} \frac{(x-1)^2}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} (x-1) = 0$

  Donc $f'_g(1) = 0$

- $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} \frac{1-\sqrt{x}}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} \frac{1-x}{(x-1)(1+\sqrt{x})} = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} \frac{-1}{1+\sqrt{x}} = -\frac{1}{2}$

  Donc $f'_d(1) = -\frac{1}{2}$

  $f'_g(1) \neq f'_d(1)$, donc f n'est pas dérivable en 1.

3. tangente verticale

Exercice 7

$f(x) = \sqrt{|1-x^2|}$

$$\begin{cases} \forall x \in \,]-\infty; -1[\, \cup \,]1; +\infty[, f(x) = \sqrt{x^2-1} \\ \forall x \in \,]-1; 1[, f(x) = \sqrt{1-x^2} \end{cases}$$

- $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} \frac{1-x^2}{(x-1)\sqrt{1-x^2}} = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} \frac{-(x-1)(x+1)}{(x-1)\sqrt{1-x^2}} =$
  $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} \frac{-(x+1)}{\sqrt{1-x^2}} = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}(-x-1) = -\infty$
- $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} \frac{x^2-1}{(x-1)\sqrt{x^2-1}} = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)\sqrt{1-x^2}} =$
  $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} \frac{(x+1)}{\sqrt{1-x^2}} = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}(x+1) = +\infty$

  $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ sont infinies, donc la représentation graphique de f admet une tangente verticale au point de coordonnées $(1\,;\,0)$.

Exercice 8

$f(x) = \sqrt{1-x^2}$

$D_f = [-1; 1]$

- $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} \frac{1-x^2}{(x-1)\sqrt{1-x^2}} = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} \frac{-(x-1)(x+1)}{(x-1)\sqrt{1-x^2}} =$
  $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} \frac{-(x+1)}{\sqrt{1-x^2}} = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}(-x-1) = -\infty$

  $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = -\infty$ donc la représentation graphique de f admet au point d'abscisse 1 une demi-tangente verticale dirigée vers le haut.

3. Dérivabilité sur un intervalle

Exercice 9

$f(x) = \sqrt{1-x^2}$

f est dérivable sur $]-1;1[$

- $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} \frac{1-x^2}{(x-1)\sqrt{1-x^2}} = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} \frac{-(x-1)(x+1)}{(x-1)\sqrt{1-x^2}} =$
  $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} \frac{-(x+1)}{\sqrt{1-x^2}} = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}(-x-1) = -\infty$ donc f n'est pas dérivable en 1
- $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x+1} = \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} \frac{1-x^2}{(x+1)\sqrt{1-x^2}} =$
  $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} \frac{-(x-1)(x+1)}{(x+1)\sqrt{1-x^2}} = \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} \frac{-(x-1)}{\sqrt{1-x^2}} = \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}(-x+1) = +\infty$ donc f n'est pas dérivable en -1

En conclusion, f est dérivable sur $]-1;1[$.

5. Tableau récapitulatif

Exercice 10

1. $f'(x) = 3x^2$
2. $f'(x) = -\frac{4}{x^5}$
3. $f'(x) = 0$

6. dérivées et opérations

Exercice 11

1. $f'(x) = 2x - \frac{1}{2\sqrt{x}}$
2. $f'(x) = 12x^2$
3. $f'(x) = \frac{(2x+1)(x^2+x+1)-(2x+1)(x^2+x+4)}{(x^2+x+1)^2} = \frac{-6x-3}{(x^2+x+1)^2}$
4. $f'(x) = \frac{2cosxsinx}{cos^4x} = \frac{2sinx}{cos^3x}$

7. Sens de variation

Exercice 12

1. $f'(x) = 2x$.
   $\forall x \in]0;+\infty[, f'(x) > 0$. Donc f est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.
2. $f'(x) = -3x^2$.
   $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, f'(x) < 0$. Donc f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
3. $f'(x) = 10x^4 + 3$.
   $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) > 0$. Donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

8. dérivées successives

Exercice 13

$f(x) = 2x^6 + 3x^2 - 5$

$\frac{df}{dx} = 12x^5 + 6x$

$\frac{d^2f}{dx^2} = 60x^4 + 6$

$\frac{d^3f}{dx^3} = 240x^3$

$\frac{d^4f}{dx^4} = 720x^2$

Exercice 14

La plus petite valeur de l'entier n pour laquelle $\frac{d^nf}{dx^n} = 0$ est 7.

Exercice 15

1) $f(x) = x^4 + 3x^2 + 1$

$\frac{df}{dx} = 4x^3 + 6x$

$\frac{d^2f}{dx^2} = 12x^2 + 6$

2) $f(x) = x^3 + 4x^2 + 2$

$\frac{df}{dx} = 3x^2 + 12x$

$\frac{d^2f}{dx^2} = 6x + 12$

$\frac{d^3f}{dx^3} = 6$

$\frac{d^4f}{dx^4} = 0$

3) $f(x) = sinx$

$\frac{df}{dx} = cosx$

$\frac{d^2f}{dx^2} = -sinx$

$\frac{d^3f}{dx^3} = -cosx$

4) $f\ (x) = cosx$

$\frac{df}{dx} = -sinx$

$\frac{d^2f}{dx^2} = -cosx$

$\frac{d^3f}{dx^3} = sinx$

$\frac{d^4f}{dx^4} = cosx$

9. point d'inflexion

Exercice 16

1) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$
f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$
On a : $f'(x) = 6x^2 - 6x$ et $f''(x) = 12x - 6$

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	

$f''(x)$ s'annule en $\frac{1}{2}$ en changeant de signe donc le point la courbe représentative de f d'abscisse $\frac{1}{2}$ est un point d'inflexion.

Exercice 17

$f(x) = x^4$

f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$

On a : $f'(x) = 4x^3$ et $f''(x) = 12x^2$

$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$, donc $f''(x)$ ne change pas de signe sur $\mathbb{R}$, alors la courbe représentative de f n'admet pas de point invariant.

2 DERIVEE D'UNE FONCTION COMPOSEE

1) Propriété

Exercice 18

1. f '(x) = 8 $(2x\text{-}1)^3$
2. f '(x) = -2sin (2x-3)
3. Prendre I = $]-2\,;+\infty\,[$; f '(x) = $\left(\frac{27}{(x+2)^4}\right)(4x\text{-}1)^2$
4. f '(x) = $\frac{x}{\sqrt{x^2+3}}$,

Exercice 19

$x \in]-1\,;1\,[$, $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$

Posons y = $f^{-1}(x)$. On a donc $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{cosy}$. Or $\cos^2 y + \sin^2 y = 1$ et

cosy > 0

Donc cosy = $\sqrt{1 - sin^2 y}$ soit cosy = $\sqrt{1 - x^2}$, d'où $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

2) Nombre dérivée de la réciproque d'une fonction continue et strictement monotone

Exercice 20

1. $f(x) = x^3$

$f(x) = 1 \Leftrightarrow x^3 = 1$

$\Leftrightarrow x = 1$

On a donc $f^{-1}(1) = 1$

$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 3x^2$

$f'(f^{-1}(1)) = f'(1) = 3$

$f'(f^{-1}(1)) \neq 0$ donc f^{-1} est dérivable en 1 et $(f^{-1})'(1) = \frac{1}{3}$

2. $f(x) = \frac{x}{1+x}$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{1+x} = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$

On a donc $f^{-1}(0) = 0$

$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$

$f'(f^{-1}(0)) = f'(0) = 1$

$f'(f^{-1}(0)) \neq 0$ donc f^{-1} est dérivable en 0 et $(f^{-1})'(0) = 1$

3 INEGALITE DES ACCROISSEMENTS FINIS

Exercice 21

Soit $f(x) = cosx$

$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = -sinx$

$\forall x \in [a; b], |f'(x)| \leq 1$, d'après le théorème de l'inégalité des accroissements finis, on a :

$|f(b) - f(a)| \leq |b - a|$, donc $|cosb - cosa| \leq |b - a|$

Exercice 22

Donner un encadrement de $\sqrt{401}$ (au lieu de 401)

1) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$; $|f'(x)| < \frac{1}{2\sqrt{400}}$;

$|f'(x)| < \frac{1}{40}$

$|\sqrt{401} - \sqrt{400}| < \frac{1}{40}|101 - 100|$;

$|\sqrt{401} - \sqrt{400}| < \frac{1}{40}$. Donc

$-\frac{1}{40} + 20 < \sqrt{401} < \frac{1}{40} + 20.$

Soit $19{,}975 < \sqrt{401} < 20{,}025$

Un majorant de l'erreur commise en remplaçant $\sqrt{401}$ par 20 est $\frac{1}{40}$.

4 EXEMPLES D'ETUDE DE FONCTIONS

Exercice 23

1. **Fonctions polynômes**

$g(x) = x^3 - 4x^2 - 3x + 10$

$D_g = \mathbb{R}$

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty}(x^3 - 4x^2 - 3x + 10)$$
$$= \lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty}(x^3 - 4x^2 - 3x + 10)$$
$$= \lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$$

g est une fonction polynôme donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}$; on a :

$\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = 3x^2 - 8x - 3 = 3(x + \frac{1}{3})(x - 3)$

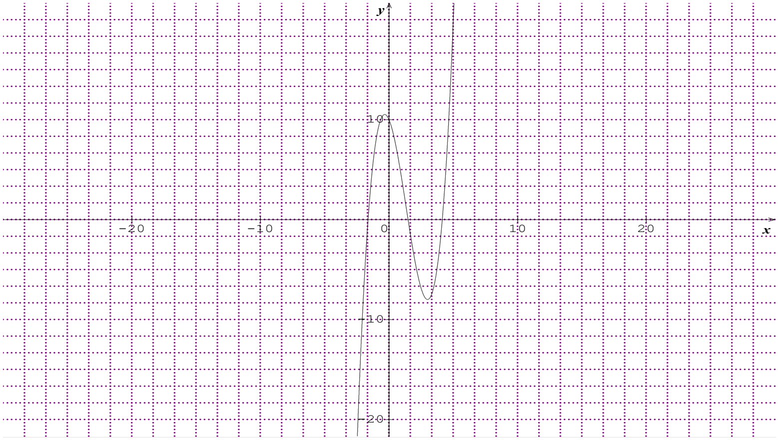
Le signe de $g'(x)$ donne : $\forall x \in \left]-\infty; -\frac{1}{3}\right[\cup]3; +\infty[, g'(x) > 0$, donc g est strictement croissante sur $\left]-\infty; -\frac{1}{3}\right[$ et sur $]3; +\infty[$

$\forall x \in \left]-\frac{1}{3}; 3\right[, g'(x) < 0$, donc g est strictement décroissante sur $\left]-\frac{1}{3}; 3\right[$

On en déduit le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		3		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{284}{27}$	$\searrow$	-8	$\nearrow$	$+\infty$

Représentation graphique



Fonctions rationnelles

Exercice 24

Voir l'exemple de la page 61 du cahier

Fonctions irrationnelles

Exercice 25

$h(x) = \sqrt{|x^2 + x - 2|}$

$D_h = \mathbb{R}$

- Déterminons les limites de h

$$\lim_{x \to -\infty} h(x) = \lim_{x \to -\infty} \sqrt{|x^2 + x - 2|} = +\infty$$

$$\text{car} \begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} |x^2 + x - 2| = +\infty \\ \lim\limits_{X \to +\infty} \sqrt{X} = +\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x \to +\infty} h(x) = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{|x^2 + x - 2|} = +\infty$$

$$\text{car} \begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} |x^2 + x - 2| = +\infty \\ \lim\limits_{X \to +\infty} \sqrt{X} = +\infty \end{cases}$$

$$\text{on a : }\begin{cases}\forall x \in]-\infty;-2[\cup]1;+\infty[, h(x)=\sqrt{x^2+x-2}\\ \forall x\in]-2;1[, h(x)=\sqrt{-x^2-x+2}\\ h(-2)=h(1)=0\end{cases}$$

- Etudions la dérivabilité de h en -2

$$\lim_{\substack{x\to-2\\<}}\frac{h(x)-h(-2)}{x+2}=\lim_{\substack{x\to-2\\<}}\frac{\sqrt{x^2+x-2}}{x+2}=\lim_{\substack{x\to-2\\<}}(x-1)\times\frac{1}{\sqrt{(x-1)(x+2)}}=-\infty$$

$$\text{car}\begin{cases}\lim\limits_{\substack{x\to-2\\<}} x-1=-3\\ \lim\limits_{\substack{x\to-2\\<}}\frac{1}{\sqrt{(x-1)(x+2)}}=+\infty\end{cases}$$

$$\lim_{\substack{x\to-2\\>}}\frac{h(x)-h(-2)}{x+2}=\lim_{\substack{x\to-2\\>}}\frac{\sqrt{-x^2-x+2}}{x+2}=\lim_{\substack{x\to-2\\>}}-(x-1)\times\frac{1}{\sqrt{-(x-1)(x+2)}}=+\infty$$

$$\text{car}\begin{cases}\lim\limits_{\substack{x\to-2\\>}}-(x-1)=3\\ \lim\limits_{\substack{x\to-2\\>}}\frac{1}{\sqrt{-(x-1)(x+2)}}=+\infty\end{cases}$$

$\lim\limits_{\substack{x\to-2\\<}}\frac{h(x)-h(-2)}{x+2}$ et $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\>}}\frac{h(x)-h(-2)}{x+2}$ sont infinies, donc la représentation graphique de h admet une tangente verticale au point d'abscisse-2.

- Etudions la dérivabilité de h en 1

$$\lim_{\substack{x\to1\\<}}\frac{h(x)-h(1)}{x-1}=\lim_{\substack{x\to1\\<}}\frac{\sqrt{-x^2-x+2}}{x-1}=\lim_{\substack{x\to1\\<}}-(x+2)\times\frac{1}{\sqrt{-(x-1)(x+2)}}=-\infty$$

$$\text{car}\begin{cases}\lim\limits_{\substack{x\to1\\<}}-(x+2)=-3\\ \lim\limits_{\substack{x\to1\\<}}\frac{1}{\sqrt{(x-1)(x+2)}}=+\infty\end{cases}$$

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ >}} \frac{h(x)-h(1)}{x-1} = \lim_{\substack{x\to 1\\ >}} \frac{\sqrt{x^2+x-2}}{x-1} = \lim_{\substack{x\to 1\\ >}} (x+2) \times \frac{1}{\sqrt{(x-1)(x+2)}} = +\infty$$

car $\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} x+2 = 3 \\ \lim\limits_{\substack{x\to -2\\ >}} \frac{1}{\sqrt{(x-1)(x+2)}} = +\infty \end{cases}$

$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} \frac{h(x)-h(1)}{x-1}$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} \frac{h(x)-h(1)}{x-1}$ sont infinies, donc la représentation graphique de h admet une tangente verticale au point d'abscisse 1.

- Étudions les variations de h sur $]-\infty; -2[\cup]1; +\infty[$

$\forall x \in]-\infty; -2[\cup]1; +\infty[, h'(x) = \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x-2}}$

$\forall x \in]-\infty; -2[\cup]1; +\infty[, 2\sqrt{x^2+x-2} > 0$ donc le signe de $h'(x)$ est celui de $2x+1$.

On a donc : $\forall x \in]-\infty; -2[, h'(x) < 0$ et $\forall x \in]1; +\infty[, h'^{(x)} > 0$.

h est strictement décroissante sur $]-\infty; -2[$ et strictement croissante sur $]1; +\infty[$

- Étudions les variations de h sur $]-2; 1[$

$\forall x \in]-2; 1[, h'^{(x)} = \frac{-2x-1}{2\sqrt{x^2+x-2}}$

$\forall x \in]-2; 1[, 2\sqrt{x^2+x-2} > 0$, donc le signe de $h'(x)$ est celui de $-2x-1$.

On a donc : $\forall x \in \left]-2; -\frac{1}{2}\right[, h'(x) > 0$ et $\forall x \in \left]-\frac{1}{2}; 1\right[, h'^{(x)} < 0$.

h est strictement croissante sur $\left]-2; -\frac{1}{2}\right[$ et strictement décroissante sur $\left]-\frac{1}{2}; 1\right[$

- Tableau de variations de h.

x	$-\infty$		-2		$-\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\|$	$+$	0	$-$	$\|$	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{3}{2}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

- Détermination d'asymptote

On a : $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+x-2}}{x} =$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-x\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} -\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}} = -1$

Puis, $\lim\limits_{x\to-\infty} [h(x)-(-x)] = \lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+x-2}+x =$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x-2}{\sqrt{x^2+x-2}-x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1-\frac{2}{x}}{-\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}-1} = -\frac{1}{2}$

Donc la droite d'équation $y = -x - \frac{1}{2}$ est une asymptote à la

courbe de h en $-\infty$.

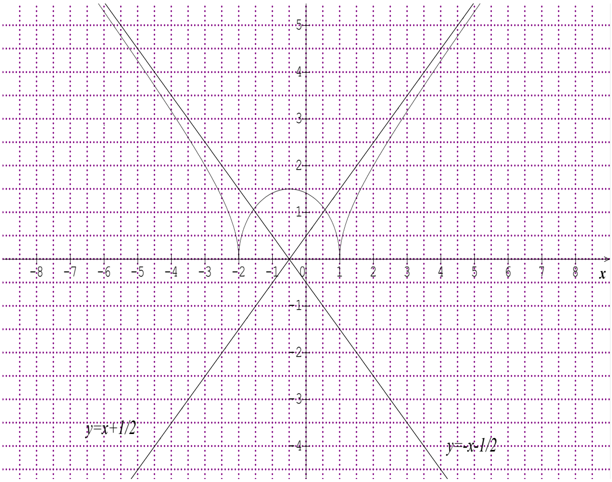
On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+x-2}}{x} =$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}} = 1$

Puis, $\lim\limits_{x\to+\infty} [h(x)-x] = \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+x-2}-x = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x-2}{\sqrt{x^2+x-2}+x} =$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1-\frac{2}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}-1} = \frac{1}{2}$

Donc la droite d'équation $y = x + \frac{1}{2}$ est une asymptote à la courbe de h en $+\infty$.



3. fonctions trigonométriques

Exercice 26

1) $f(x) = \cos(\frac{\pi}{2} - 3x)$

$D_f = \mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R}, \cos\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) = sin3x$; donc $f(x) = sin3x$

- Périodicité
  $\forall x \in \mathbb{R}, f\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = f(x)$, donc f est périodique de période $\frac{2\pi}{3}$, on peut donc réduire son étude à l'intervalle $\left[0; \frac{2\pi}{3}\right]$ et compléter sa représentation graphique grâce à la translation de vecteur $\frac{2\pi}{3}\overrightarrow{OI}$ et de la translation de vecteur $-\frac{2\pi}{3}\overrightarrow{OI}$.
- Dérivée
  $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 3cos3x$
- Etude du signe de la dérivée

$\forall x \in \mathbb{R}, 3cos3x \geq 0 \Leftrightarrow -\frac{\pi}{6} + \frac{k2\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{6} + \frac{k2\pi}{3} \ (k \in \mathbb{Z})$

Donnons les solutions de $f'(x) \geq 0$ sur $\left[0; \frac{2\pi}{3}\right]$

Pour k=0, $x \in \left[0; \frac{\pi}{6}\right]$

Pour k=1, $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{2\pi}{3}\right]$

On en déduit que : $\forall x \in \left]0; \frac{\pi}{6}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}; \frac{2\pi}{3}\right[, f'(x) > 0$

$\forall x \in \left]\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right[, f'(x) < 0$

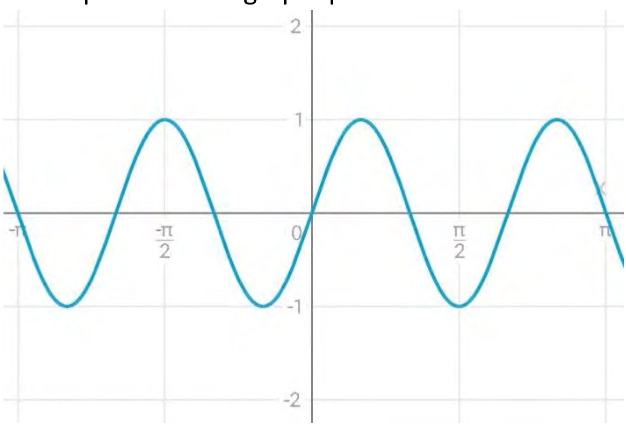
- Variations de f

  f est strictement croissante sur $\left]0; \frac{\pi}{6}\right[$ et sur $\left]\frac{\pi}{2}; \frac{2\pi}{3}\right[$ et f est strictement décroissante sur $\left]\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right[$.

- Tableau de variations

x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{2\pi}{3}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0

- Représentation graphique



2) $f(x) = \tan\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right)$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{5\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}\right\}$ $(k \in \mathbb{Z})$

- Périodicité

  $\forall x \in \mathbb{R}, f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = f(x)$, donc f est périodique de période $\frac{\pi}{2}$, on peut donc réduire son étude à l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ et compléter sa représentation graphique grâce à la translation de vecteur $\frac{\pi}{2}\overrightarrow{OI}$ et de la translation de vecteur $-\frac{\pi}{2}\overrightarrow{OI}$.

- Dérivée

  $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{-2}{cos^2(\frac{\pi}{3}-2x)}$

- Étude du signe de la dérivée

  $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) < 0$

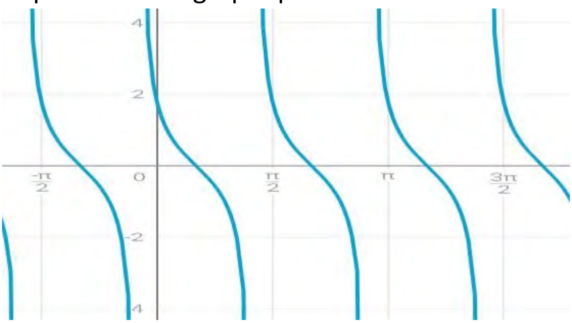
- Variations de f

  f est strictement décroissante sur $\left]0; \frac{5\pi}{12}\right[$ et sur $\left]\frac{5\pi}{12}; \frac{\pi}{2}\right[$

- Tableau de variations

x	0		$\frac{5\pi}{12}$		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$-$	||	$-$	
$f(x)$	$\sqrt{3}$	↘ $-\infty$	||	$-\infty$ ↘	$\sqrt{3}$

- Représentation graphique



EXERCICES DE RENFORCEMENT / D'APPROFONDISSEMENT

Dans l'énoncé, considérer $\sqrt{101}$ au lieu de $\sqrt{1001}$

Exercice 1

Soit $f(x) = \sqrt{x}$

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$;

$|f'(x)| < \frac{1}{2\sqrt{100}}$; $|f'(x)| < \frac{1}{2\times 10}$

$$\left|\sqrt{101} - \sqrt{100}\right| < \frac{1}{20}|101 - 100| ; \quad \left|\sqrt{101} - \sqrt{100}\right| < \frac{1}{20}$$

$$-\frac{1}{20} + 10 < \sqrt{101} < \frac{1}{20} + 10 \ ; \ -9{,}95 < \sqrt{101} < 10{,}05$$

$$10 < \sqrt{101} < 10{,}05.$$

Exercice 2

Soit $g(x) = tanx$

$$D_g = \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$$

- $\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right], g'(x) = \frac{1}{cos^2 x}$
  - $\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right],\ \frac{\sqrt{2}}{2} \leq cosx \leq 1$, alors $\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right],\ \frac{1}{2} \leq cos^2 x \leq 1$
  - Donc $\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right],\ 1 \leq \frac{1}{cos^2 x} \leq 2$
  - On a alors $\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right],\ 1 \leq g'(x) \leq 2.$
- On a : $\forall x \in \left[0 ; \frac{\pi}{4}\right],\ 1 \leq g'(x) \leq 2$, d'après le théorème de l'inégalité des accroissements finis, on a : $\forall x \in \left[0 ; \frac{\pi}{4}\right]$,
- $x - 0 \leq tanx - tan0 \leq 2(x - 0)$
  - Donc $\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right],\ x \leq tanx \leq 2x$

Exercice 3

Soit $f(x) = \sqrt{1 + x}$

$$\forall x \in \left[0; \frac{1}{2}\right], f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}$$

$$\forall x \in \left[0; \frac{1}{2}\right], \frac{1}{\sqrt{6}} \leq f'(x) \leq \frac{1}{2}$$

D'après le théorème de l'inégalité des accroissements finis, on a :

$\forall x \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$, $\frac{1}{\sqrt{6}}(x-0) \leq \sqrt{1+x} - 1 \leq \frac{1}{2}(x-0)$

Donc $\forall x \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$, $1 + \frac{x}{\sqrt{6}} \leq \sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{x}{2}$

Exercice 4

1. $h(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}}$

$D_g = [1; +\infty[$

1) a) $\forall x \in [1; +\infty[, h'(x) = -\frac{1}{2x\sqrt{x}}$

$\forall x \in [1; +\infty[, h'(x) < 0$, donc h est strictement décroissante sur $[1; +\infty[$.

$h(1) = 2$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = 1$

Tableau de variation

x	1	$+\infty$
$h'(x)$	$-$	
$h(x)$	2 ↘	1

b) Posons $f(x) = h(x) - x$

$\forall x \in [1; +\infty[, f(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}} - x$

$\forall x \in [1; +\infty[, f'(x) = -\frac{1}{2x\sqrt{x}} - 1$

$\forall x \in [1; +\infty[, f'(x) < 0$, donc f est strictement décroissante sur $[1; +\infty[$

$f(1) = 1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

Tableau de variation

x	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	
$f(x)$	1 ↘	$-\infty$

f est continue et strictement décroissante sur $[1;+\infty[$, donc f est une bijection de $[1;+\infty[$ dans $]-\infty;1]$. Comme $0 \in]-\infty;1]$, alors l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α dans $[1;+\infty[$. Par conséquent l'équation $h(x)=x$ admet une unique solution α dans $[1;+\infty[$.

2)a) $\forall x \in \left[1\,;+\infty\right[, |h'(x)| = \frac{1}{2x\sqrt{x}}$

$\forall x \in [1;+\infty[, 2x\sqrt{x} \geq 2$, alors $\frac{1}{2x\sqrt{x}} \leq \frac{1}{2}$. Donc $\forall x \in [1;+\infty[, |h'(x)| \leq \frac{1}{2}$.

b) $\forall x \in [1;+\infty[, |h'(x)| \leq \frac{1}{2}$, d'après le théorème de l'inégalité des accroissements finis, on a : $\forall x \in [1;+\infty[, |h(x)-h(\alpha)| \leq \frac{1}{2}|x-\alpha|$

comme $h(\alpha)=\alpha$, alors $\forall x \in [1;+\infty[, |h(x)-\alpha| \leq \frac{1}{2}|x-\alpha|$

Exercice 5

1) $\forall x \in]-1;1[, f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$; $f''(x) = \frac{1}{(1-x)^3}$; $f^{(3)}(x) = \frac{6}{(1-x)^4}$
   $\forall x \in]-1;1[, g'(x) = \frac{-1}{(1+x)^2}$; $f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3}$; $f^{(3)}(x) = \frac{-6}{(1-x)^4}$
2) $\forall x \in]-1;1[, f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$
   $\forall x \in]-1;1[, g^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}$

Exercice 6

1) $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1$
   Si la tangente à la courbe de f en 0 a pour équation $y=-3x+1$, alors $f'(0)=-3$ et $f(0)=1$
   $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$
   $f'(0) = -3 \Leftrightarrow b = -3$
   On a : $f'(1) = f'(-1)$, donc $3+2a-3 = 3-2a-3$

   On a donc : $a = 0$.

   Ainsi $f(x) = x^3 - 3x + 1$

2) $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$

   $\forall x \in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[, f'(x) > 0$

$\forall x \in]-1;1[, f'(x) < 0$

Par conséquent : f est strictement croissante sur $]-\infty;-1[$ et sur $]1;+\infty[$, puis f est strictement décroissante sur $]-1;1[$.

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

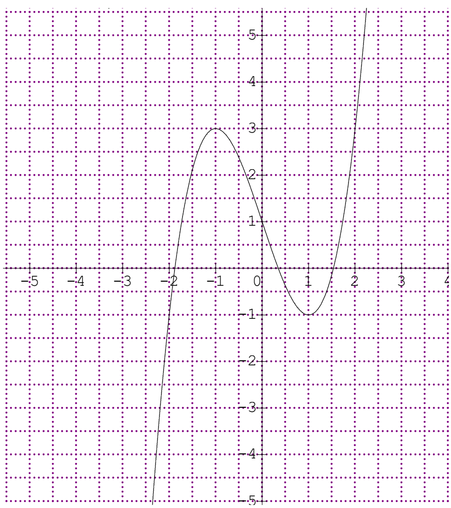
Tableau de variation

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Étude des branches paraboliques

- $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ donc la courbe représentative de f admet une branche parabolique de direction celle de (OJ) en +∞.
- $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ donc la courbe représentative de f admet une branche parabolique de direction celle de (OJ) en -∞.

Représentation graphique



Exercice 7

1) $f(x) = \frac{ax+2}{2x+1}$
Si la tangente à la courbe de f en 0 est parallèle à la droite d'équation $y = -5x + 2$, alors $f'(0) = -5$
$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}; f'(x) = \frac{a(2x+1)-2(ax+2)}{(2x+1)^2} = \frac{a-4}{(2x+1)^2}$
$f'(0) = -5 \Leftrightarrow a = -1.$
2) $f(x) = \frac{-x+2}{2x+1}$

$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}; f'(x) = \frac{-5}{(2x+1)^2}$

$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}, f'(x) < 0$ donc f est strictement décroissante sur $\left]-\infty; -\frac{1}{2}\right[$ et sur $\left]-\frac{1}{2}; +\infty\right[$

Tableau de variations

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	
$f(x)$	$-\frac{1}{2}$	↘ $-\infty$	‖	$-\infty$ ↘	$-\frac{1}{2}$

Exercice 8

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}; f(x) = \frac{x^2+ax+b}{x-1}$$

1) Si la tangente à la courbe de f au point de coordonnées $(-3\,; 1)$ est horizontale, alors $f'(-3) = 0$ et $f(-3) = 1$.
$f(-3) = 1 \Leftrightarrow -3a + b = -13.$ (1)

$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}; f'(x) = \frac{x^2-2x-a-b}{(x-1)^2}$

$f'(-3) = 0 \Leftrightarrow a + b = 15.$ (2)

(1) et (2) implique $\begin{cases} -3a + b = -13 \\ a + b = 15 \end{cases}$ donc $a = 7$ et $b = 8$.

2) On a : $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}; f(x) = \frac{x^2+7x+8}{x-1} = x + 8 + \frac{16}{x-1}$

$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}; f'(x) = \frac{x^2-2x-15}{(x-1)^2} = \frac{(x+3)(x-5)}{(x-1)^2}$

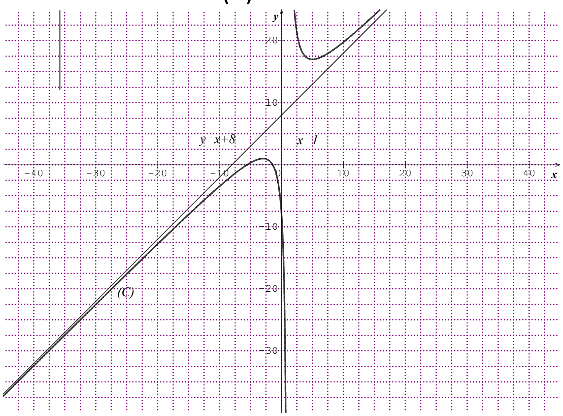
- $\forall x \in]-\infty; -3[\cup]5; +\infty[, f'(x) > 0$, donc f est strictement croissante sur$]-\infty; -3[$et sur $]5; +\infty[$.
- $\forall x \in]-3; 1[\cup]1; 5[, , f'(x) < 0$, donc f est strictement décroissante sur$]-3; 1[$ et sur $]1; 5[$

- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$; $\lim_{\substack{x\to1\\>}} f(x) = +\infty$ et $\lim_{\substack{x\to1\\<}} f(x) = -\infty$
- Tableau de variation

x	$-\infty$		-3		1		5		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	1	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	17	↗	$+\infty$

3)

- $\lim_{x\to+\infty} [f(x) - (x+8)] = \lim_{x\to-\infty} [f(x) - (x+8)] = 0$, donc la droite d'équation $y = x + 8$ est une asymptote à (C)en $-\infty$ et en $+\infty$.
- Comme $\lim_{\substack{x\to1\\>}} f(x) = +\infty$ et $\lim_{\substack{x\to1\\<}} f(x) = -\infty$, alors la droite d'équation $x = 1$ est une asymptote verticale à (C).



Exercice 9

$f(x) = \frac{x^2-2x+3}{2x(x-2)}$

1)a) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0; 2\}$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \frac{1}{2}$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \frac{1}{2}$; $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x) = -\infty$;

$\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ <}} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ >}} f(x) = +\infty$

c)

- Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \frac{1}{2}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \frac{1}{2}$, alors la droite d'équation $y = \frac{1}{2}$ est une asymptote horizontale à (C) en $+\infty$ et en $-\infty$.
- Comme $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x) = -\infty$, alors la droite d'équation $x = 0$ est une asymptote verticale à (C)
- Comme $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ <}} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ >}} f(x) = +\infty$, alors la droite d'équation $x = 2$ est une asymptote verticale à (C)

2) $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0; 2\}; f'(x) = \frac{-12x+12}{4x^2(x-2)^2}$

3.a) $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0; 2\}, 4x^2(x-2)^2 > 0$, donc le signe de $f'(x)$ est celui de $-12x + 12$

$\forall x \in]-\infty; 0[\cup]0; 1[, f'(x) > 0$, donc f est strictement croissante sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; 1[$

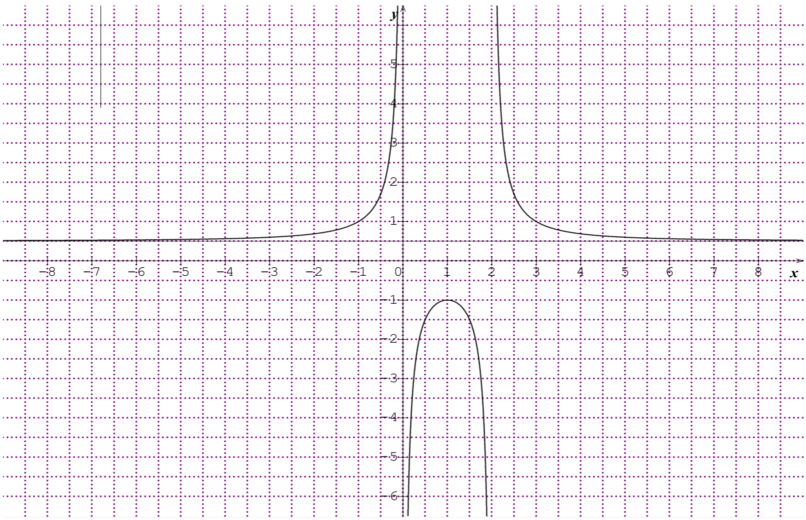
$\forall x \in]1; 2[\cup]2 + \infty[, f'(x) < 0$, donc f est strictement décroissante sur $]1; 2[$ et sur $]2; +\infty[$

b)

Tableau de variation

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\|\|$	$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	↗	$+\infty$ $\|\|$ $-\infty$	↗	-1	↘	$-\infty$ $\|\|$ $+\infty$	↗	$\frac{1}{2}$

4) Représentation graphique



Exercice 10

$$f(x) = |x-3| + \frac{1}{x-2}$$

1.a) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ <}} f(x) = -\infty$ et

$\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ >}} f(x) = +\infty$

c)

- $\forall x \in]-\infty; 3], f(x) = -x + 3 + \frac{1}{x-2}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} [f(x) - (-x+3)] = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x-2} = 0$, donc la droite d'équation

$y = -x + 3$ est une asymptote à (C)en –∞.

- $\forall x \in [3; +\infty[, f(x) = x - 3 + \frac{1}{x-2}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x-3)] = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x-2} = 0$, donc la droite d'équation $y = x-3$ est une asymptote à (C)en +∞.

2.a) $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ <}}\frac{f(x)-f(3)}{x-3} = \lim\limits_{\substack{x\to 3\\ <}}\frac{-x+3+\frac{1}{x-2}-1}{x-3} = \lim\limits_{\substack{x\to 3\\ <}}\frac{1-x}{x-2} = -2$

On a : $f'_g(3) = -2$

$\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ >}}\frac{f(x)-f(3)}{x-3} = \lim\limits_{\substack{x\to 3\\ >}}\frac{x-3+\frac{1}{x-2}-1}{x-3} = \lim\limits_{\substack{x\to 3\\ <}}\frac{x-3}{x-2} = 0$

On a : $f'_d(3) = -2$

Comme $f'_g \neq f'_d$, alors f n'est pas dérivable en 3 ; par contre, elle est dérivable à gauche en 3 et (C) admet à gauche en 3 une demi-tangente d'équation $y = -2x+7$, puis elle est dérivable à droite en 3 et (C) admet à droite en 3 une demi-tangente horizontale d'équation $y = 1$.

b) $\forall x \in]-\infty; 3[, f'(x) = -1 - \frac{1}{(x-2)^2}$

$\forall x \in]3; +\infty[, f'(x) = \frac{(x-3)(x-1)}{(x-2)^2}$

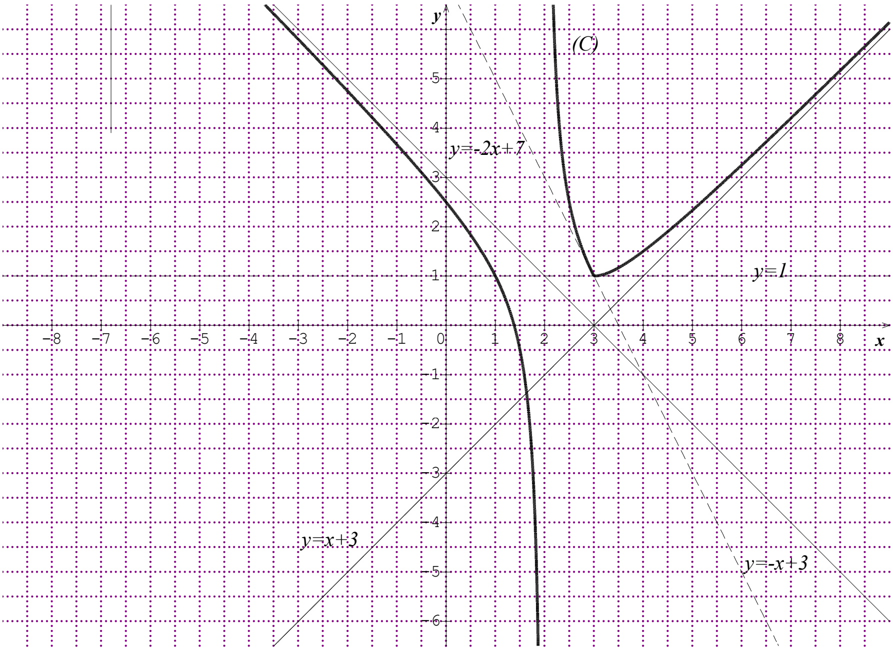
c) $\forall x \in]-\infty; 3[, f'(x) < 0$, donc f est strictement décroissante sur $]-\infty; 2[$ et sur $]2; 3[$

$\forall x \in]3; +\infty[, f'(x) > 0$, donc f est strictement croissante sur$]3; +\infty[$.

d)

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
$f(x)$		$-$	$\Vert$	$-$	$\Vert$	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

4.



Exercice 11

$f(x) = x - 3 + \frac{1}{|x-2|}$

1.a) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

b) $\forall x \in]-\infty; 2[, f(x) = x - 3 - \frac{1}{x-2}$

$\forall x \in]2, +\infty[, f(x) = x - 3 + \frac{1}{x-2}$

- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = x - 3 + \frac{1}{x-2} = +\infty$
- $\lim_{x\to-\infty} f(x) = x - 3 - \frac{1}{x-2} = -\infty$
- $\lim_{\substack{x\to 2 \\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 2 \\ <}} x - 3 - \frac{1}{x-2} = +\infty$
- $\lim_{\substack{x\to 2 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 2 \\ >}} x - 3 + \frac{1}{x-2} = +\infty$

2.a) $\forall x \in]-\infty; 2[, f'(x) = 1 + \frac{1}{(x-2)^2}$

$\forall x \in]-\infty; 2[, f'(x) > 0$, donc f est strictement croissante sur $]-\infty; 2[$.

$\forall x \in]2, +\infty[, f'(x) = \frac{(x-3)(x-1)}{(x-2)^2}$

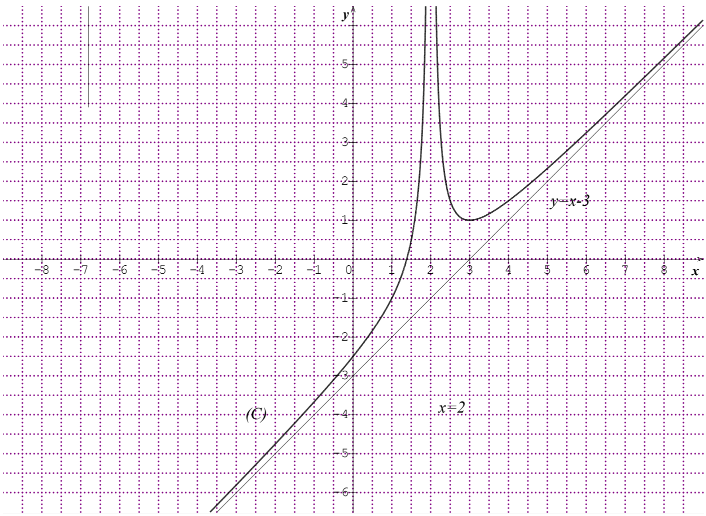
$\forall x \in]2; 3[, f'(x) < 0$ et $]3; +\infty[, f'(x) > 0$, donc f est strictement décroissante sur $]2; 3[$ et strictement croissante sur $]3; +\infty[$.

b)

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$-$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

3.

$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(x-3)] = \lim_{x\to-\infty}[f(x)-(x-3)] = 0$, donc la droite d'équation $y = x - 3$ est une asymptote à (C)en $+\infty$ et en $-\infty$.



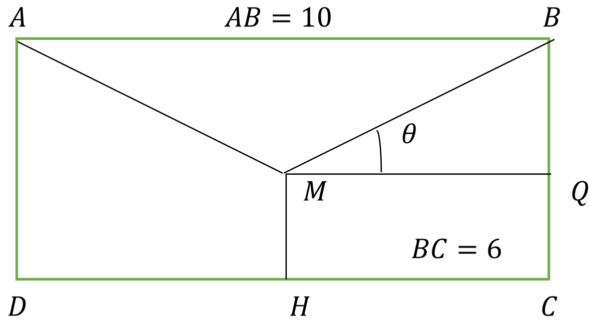
SITUATIONS COMPLEXES

Exercice 12.

Pour déterminer la valeur exacte de θ qui minimise la longueur totale des tuyaux, je vais étudier les variations d'une fonction.

- je vais déterminer en fonction de θ, une fonction g égale à la longueur totale des tuyaux.
- je vais déterminer la dérivée de g
- je vais étudier le signe de g' puis en déduire les variations de g.
- je vais déduire des variations de g, la valeur de θ pour laquelle g est minimale.

Déterminer en fonction de θ, la fonction g égale à la longueur totale des tuyaux.



- On a : $g(\theta) = AM + BM + MH$

$AM = BM$ et $BM = \frac{MQ}{cos\theta}$

$MQ = HC = 5$, donc $BM = \frac{5}{cos\theta}$

$MH = CQ = BC - BQ$

$BC = 6$ et $BQ = BM \times sin\theta = \frac{5sin\theta}{cos\theta}$, alors $MH = 6 - \frac{5sin\theta}{cos\theta}$

Ainsi, $g(\theta) = \frac{5}{cos\theta} + \frac{5}{cos\theta} + 6 - \frac{5sin\theta}{cos\theta}$

Donc $g(\theta) = 6 + \frac{10-5sin\theta}{cos\theta}$

- $\forall \theta \epsilon \left]0; \frac{\pi}{2}\right[, g'(\theta) = \frac{-5+10sin\theta}{cos^2\theta}$
- $\forall \theta \epsilon \left]0; \frac{\pi}{2}\right[, g'(\theta) > 0 \Leftrightarrow 1 - 2sin\theta > 0 \Leftrightarrow \theta \in \left]\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right[$
- g est strictement décroissante sur $\left]0; \frac{\pi}{6}\right[$ et strictement croissante sur $\left]\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right[$

On a le tableau de variation suivant :

θ	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$
$g'(\theta)$		$-$	0	$+$	
$g(\theta)$		$\searrow$	$6 + 5\sqrt{3}$	$\nearrow$	

- $g(\theta)$ atteint son minimum en $\frac{\pi}{6}$ donc la valeur exacte de θ qui minimise la longueur des tuyaux est $\frac{\pi}{6}$.

Exercice 13

Pour déterminer le nombre de parapluie à fabriquer par l'entreprise pour réaliser le bénéfice maximal, je vais étudier les variations de la fonction $b(x)$ qui représente le bénéfice journalier de l'entreprise en milliers de francs.

- Je vais déterminer la fonction $p(x)$ qui représente le prix de vente du parapluie en millier de francs.
- Je vais déterminer la fonction $b(x)$
- je vais déterminer la dérivée de $b(x)$
- je vais étudier le signe de $b(x)$ puis en déduire les variations de la fonction b.
- je vais déduire des variations de $la\ fonction\ b$, la valeur de x pour laquelle b est maximale.

$p(x) = 3x$, car chaque parapluie est vendu à 3000 f

$b(x) = p(x) - f(x) = -x^2 + 84x$

$$x \in [0;60],\ b'(x) = -2x + 84$$

$x \in [0;42], b'(x) > 0$ et $x \in [42;60], b'(x) < 0$

b est strictement croissante sur $[0;42]$ et strictement décroissante sur $[42;60]$

On a le tableau de variation suivant :

x	0		42		60
$b'(x)$		$+$	0	$-$	
$b(x)$		$\nearrow$	1764	$\searrow$	

b atteint le maximum en 42 donc pour que le bénéfice soit maximal, l'entreprise doit fabriquer quotidiennement 42 parapluie.

Exercice 14

Pour répondre à la préoccupation de ma mère, je vais utiliser le point d'intersection de la représentation graphique d'une fonction et d'une droite.

- Je vais déterminer la dérivée de $f(x)$
- Je vais étudier les variations de f
- Je vais construire (C) la courbe représentative de f dans un repère (O ; I ; J)
- Je vais construire la droite (D) d'équation $y = 1$
- Je vais déterminer graphiquement la valeur de x pour laquelle la courbe (C) est en dessous de la droite (D).

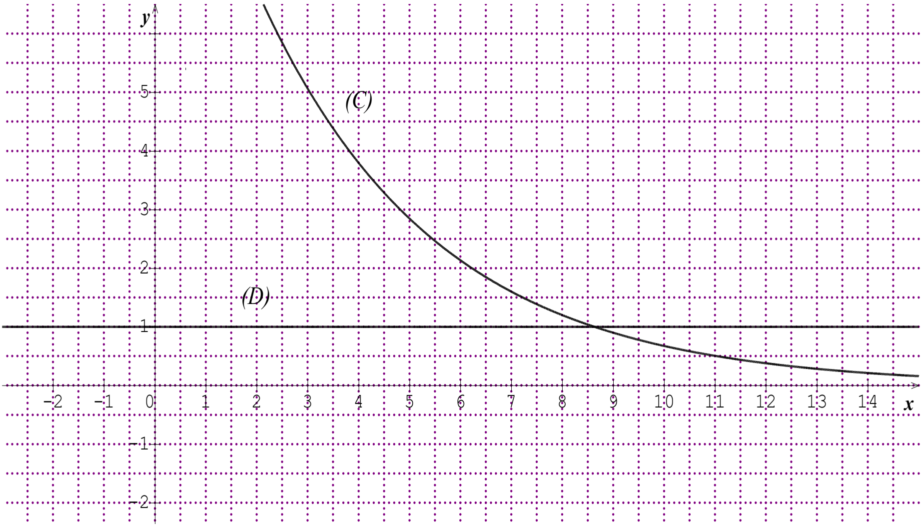
$\forall x \in [0;12], f(x) = 12 \times 0{,}75^x = 12e^{xln0{,}75}$

$\forall x \in [0;12], f'(x) = 12\ln(0{,}75)e^{xln0{,}75}$

$\forall x \in [0;12], e^{xln0{,}75} > 0$ et $12\ln(0{,}75) < 0$, donc $\forall x \in [0;12], f'^{(x)} < 0$

f est strictement décroissante sur $[0;12]$

Représentons f



La courbe (C) est en dessous de la droite (D) pour $x \geq 8{,}6$, donc c'est à partir de 9 ans que l'on peut dire que la concentration en anticorps maternel du bébé sera inférieure à un gramme par litre.

4 PRIMITIVES D'UNE FONCTION

EXERCICES DE FIXATION

I) Définition et premières propriétés

Exercice 1

g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme toute fonction polynôme et polynôme et pour tout nombre réel *x*, on a : *g*'(x) = $3x^2 + 2x - 12$. Ce qui donne : *g*'(x) = *f*(x). La fonction g est donc une primitive de *f* sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2

G ; H ; Q.

Propriété 1

Exercice 3

f ; v

Exercice 4

1. Toute fonction dérivable sur un intervalle I admet une primitive sur I. VRAI

2. Une fonction qui n'est pas continue sur un intervalle n'admet pas de primitive sur cet intervalle. FAUX

Propriété 2

Exercice 5

Les fonctions G et H définies sur $\mathbb{R}$ par :

G(x) = $\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 6$ et H(x) = $\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2$.

Propriété 3

Exercices 6

Réponds par vrai ou par faux

1- Si deux fonctions continues f et g sur $\mathbb{R}$ différent d'une constante non nulle, alors toute primitive de f est une primitive de g sur $\mathbb{R}$.	FAUX
2- Si f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, alors il existe une primitive F sur $\mathbb{R}$ et une seule telle que F(0) = 0.	VRAI

Exercice 7

1) G(x) = $x^2 - x + 5$
2) H(x) = $x^2 - x + \frac{3}{2}$.

II) Primitives de fonctions usuelles

Exercices 8

Exercice 1

Dans chacun des cas suivants, détermine les primitives sur]0 ; +∞[de la fonction f.

a) F(x) = $\frac{1}{4}x^4$+ c ; b) F(x) = $\frac{3x\sqrt[3]{x}}{4} + c$;
c) F(x) = $-\frac{1}{4x^4}$ + c ; d) F(x) = $\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}} + c$.

Exercice 9

a) F(x) = $2\sqrt{x} + c$; b) F(x) = $\frac{2}{3}x\sqrt{x}$+ c ; F(x) = $-$cosx + c ; d) F(x) = $-$sinx + c.

III) Propriétés

Propriété 1

Exercice 10

a) F(x) = $\frac{1}{2}x^2 - \cos x$; b) F(x) = $\frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{3}x\sqrt{x}$;
c) F(x) = $\sin x + \cos x$.

Exercice 11
a) F(x) = $-7\cos x$; b) F(x) = $-\frac{4}{3}x^3$;
c) F(x) = $-\frac{5}{x}$; d) F(x) = $\frac{18}{4}x^4$.

Exercice 12
a) F(x) = $\frac{8}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 + 3x$;
b) F(x) = $3x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{7}{2}x^2 - 9x$; c) F(x) = $-4\cos x + \frac{3}{x}$.

Propriété 2.
Exercice 13
a) F(x) = cos2x ; b) F(x) = $\frac{2}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}}$; c) F(x) = $\frac{1}{3x+1}$.

IV) Tableau récapitulatif des primitives

Exercice 14

a) F(x) = $\frac{1}{4}(x^2 - x + 6)^4$; b) F(x) = $-\frac{1}{2}\frac{1}{(x^2+3x+3)^2}$;
c) F(x) = $2\sqrt{x^2 + x + 1}$;
d) F(x) = .$\frac{-\cos^4 x}{4}$

EXERCICES DE RENFORCEMENT / D'APPROFONDISSEMENT

Exercice 1

$$f(x) = \begin{cases} 0 \; si \; x \in [0;1[\\ 1 \; si \; x = 1 \end{cases}$$

Faisons un raisonnement par l'absurde. Supposons que *f* admette une primitive F sur [0 ; 1].

F est dans ce cas dérivable sur [0 ; 1] de dérivée nulle sur [0 ; 1[et est par conséquent constante sur l'intervalle [0 ; 1[. Il existe donc une constante C telle que : $\forall x \in [0; 1[$,
F(x) = C. F étant dérivable sur [0 ; 1] est continue sur [0 ; 1] et par suite : $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} F(x) = F(1)$. D'où :
F(1) = C. Par suite F est constante sur l'intervalle [0 ; 1]. On en déduit que la fonction f est nulle sur [0 ; 1]. D'où contradiction, car f(1) = 1. La fonction f n'admet donc pas de primitive sur l'intervalle [0 ; 1].

Remarque
On a l'exemple d'une fonction f qui n'est pas continue sur l'intervalle [0 ; 1] et qui n'admet pas de primitive sur cet intervalle. Cependant, il existe des fonctions qui ne sont pas continues sur un intervalle et qui admettent des primitives sur cet intervalle.

Exercice 2

On vérifie que F est dérivable sur $\mathbb{R}$.
. Sur $]-\infty; 0], F(x) = -x^2$ et $f(x) = -2x$

$\forall x \in]-\infty; 0], F'(x) = f(x)$, donc F est une primitive de f sur $]-\infty; 0]$.

Sur $[0; +\infty[, F(x) = x^2$ et $f(x) = 2x$

$\forall x \in [0; +\infty[, F'(x) = f(x)$, donc F est une primitive de f sur $[0; +\infty[$.

F est donc une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3

a) F(x) = $x^3 - 2x^2 - 7x$ + C ; b) F(x) = $-x^5 + x^3 + 8x$ + C.

Exercice 4

F(x) = $\frac{1}{12}x^{12} + \frac{1}{4}x^8 + \frac{1}{4}x^4$ + C ; b) F(x) = $\frac{-2}{3(3x-2)^2}$.

Exercice 5

b) F(x) = $\frac{-2}{x^2+x-2}$ + C; b) F(x) = $\sqrt{sinx}$ +C

Exercice 6

$F(x) = \frac{1}{3}sin3x - \frac{1}{2}sinx + c$

$F\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow c = \frac{\sqrt{2}}{12}$, donc la primitive de f telle que $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$ est

$F(x) = \frac{1}{3}sin3x - \frac{1}{2}sinx + \frac{\sqrt{2}}{12}$.

Exercice 7

$h(x) = 2x - 3 + \frac{2}{(x-1)^2}$

2) $H(x) = x^2 - 3x - \frac{2}{x-1} + c$

$H(0) = 0 \Leftrightarrow c = -2$

Donc la primitive de h telle que $H(0) = 0$ est telle que :

$$H(x) = x^2 - 3x - \frac{2}{x-1} - 2$$

Exercice 8

1) $D =]-\infty; 3]$
2) $\forall x \in D, F(x) = \left(\frac{2}{5}x^2 - \frac{2}{5}x - \frac{12}{5}\right)\sqrt{3-x}$.
3) $\forall x \in D, G(x) = \left(\frac{2}{5}x^2 - \frac{2}{5}x - \frac{12}{5}\right)\sqrt{3-x} + \frac{24}{5}$.

Exercice 9

$$f(x) = \frac{a(x+3)+b}{(x+3)^3} = \frac{ax+3a+b}{(x+3)^3}$$

$a = 2$; $6 + b = 3$ donc $b = -3$.

$f(x) = \frac{2}{(x+3)^2} - \frac{3}{(x+3)^3}$.

2. $F(x) = -\frac{2}{x+3} + \frac{3}{2} \times \frac{1}{(x+3)^2} + c$.
3. $F(-2) = 0$

$$\frac{-1}{2} + c = 0$$

$c = \frac{1}{2}$.

Donc : $F(x) = -\frac{2}{x+3} + \frac{3}{2(x+3)^2} + \frac{1}{2}$.

Exercice 10

1) Il faut utiliser la relation : Pour tout nombre réel x, $\sin^3 x = \sin x(1-\cos^2 x)$.
2) Les primitives H sur $\mathbb{R}$ de h sont définies par : $H(x) = -cosx + \frac{cos^3 x}{3} + C$, où C est une constante réelle.
3) $H(x) = -cosx + \frac{cos^3 x}{3} - \frac{2}{3}$.

SITUATIONS COMPLEXES

Exercices 11

Pertinence

Je vais utiliser la leçon sur les primitives et l'étude d'une fonction numérique.
Pour juger de l'efficacité du bactéricide, je vais :

- Déterminer la primitive f de f' qui prend la valeur 10^3 en 0 ;
- Etudier les variations de f ;
- Déterminer le maximum de f ;
- Comparer ce maximum à 460000 ;
- Conclure.

Utilisation des outils mathématiques

(corrigé abrégé)

$f'(t) = -10^3t^2 + 310^2t + 10^4$ donc $f(t) = -\frac{10^3}{3}t^3 + 1500t^2 + 10000t + C$

$f(0) = 10^3$ donc $C = 10^3$. Donc

$f(t) = -\frac{10^3}{3}t^3 + 1500t^2 + 10000t + 10^3$

Étudions le signe de f '(t)

Deux zéros pour f'(t) qui sont : 5 et -2

t	$-\infty$		-2		5		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(t)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

f(5) = $\frac{140500}{3}$ soit environ 46833

Cohérence

Interprétation

Après l'introduction du bactéricide, le maximum de la population est d'environ 46 833 bactéries.

46 833 $<$ 460 000. Donc ce bactéricide est efficace

5 FONCTIONS LOGARITHMES

EXERCICES DE FIXATION

1 Définition et Propriétés

Exercice 1

1. La fonction ln est définie sur $]-\infty\ ;\ 0[$ faux
2. La fonction ln est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$, vrai
3. La fonction ln est décroissante sur $]0\ ;\ +\infty[$ faux

Exercice 2

1. $(\ln)'(\frac{1}{3}) = 3$ vrai
2. $\ln 6 < \ln 10$ vrai
3. Si $0 < x < 6$, alors $\ln 6 < \ln x$ faux

Exercice 3

1. * $\ln 4 + \ln 5 = \ln(4 \times 5) = \ln(20)$

* $\ln\sqrt{3} + \ln\sqrt{12} = \ln(\sqrt{3} \times \sqrt{12}) = \ln(\sqrt{36}) = \ln 6$
* $\ln 8 + \ln\frac{1}{4} = \ln(8 \times \frac{1}{4}) = \ln(2)$

2. $\ln(1+\sqrt{2}) + \ln(\sqrt{2} - 1) = \ln(\sqrt{2} - 1) + \ln(\sqrt{2} - 1)$

$= \ln[(\sqrt{2} - 1) \times (\sqrt{2} - 1)]$
$= \ln(2 - 1)$
$= \ln 1$
$= 0$

Exercice 4

* $\ln(4 \times 9) = \ln 4 + \ln 5$
* $\ln(4 \times \sqrt{2}) = \ln 4 + \ln\sqrt{2}$
* $\forall x \in]0\ ;\ +\infty[$, $\ln(7x) = \ln 7 + \ln x$

Propriétés

Exercice 5

	AFFIRMATIONS	REPONSES
a	$\ln(72) = 3\ln 2 + 2\ln 3$	vrai
b	$\ln\left(\frac{32}{343}\right) = 4\ln 2 - 3\ln 7$	faux
c	$\ln(0,8) = 2\ln 2 - \ln 5$	vrai
d	$\ln(625) = 5\ln 4$	faux
e	$\ln\left(\sqrt{\frac{1}{18}}\right) = -\frac{1}{2}\ln 2 + \ln 3$	faux
f	$\ln(8^3) + \ln 2 = 7\ln 2$	faux

Exercice 6

- $A = \ln 7 - \ln 21$

$= \ln\left(\frac{7}{21}\right)$
$= \ln\left(\frac{1}{3}\right)$

- $B = 3\ln 2 - \ln 4$

$= 3\ln 2 - 2\ln 2$
$= \ln 2$

- $C = 2\ln 3 - \ln 6 + \ln\frac{4}{3}$

$= \ln\left(\frac{9\times 4}{6\times 3}\right)$
$= \ln 2$

II Étude de la fonction ln

Exercice 7

1. $5 < 7 \Rightarrow \ln 5 < \ln 7$
2. $\frac{1}{2} < \sqrt{3} \Rightarrow \ln\frac{1}{2} < \ln\sqrt{3}$
3. $29^2 = 841$ et $(4\sqrt{5})^2 = 400$

$(4\sqrt{5})^2 < 29^2 \Rightarrow 4\sqrt{5} \leq 29 \Rightarrow \ln 4\sqrt{5} < \ln 29$

Exercice 8

- $\ln(e^{-5}) = -5$
- $\ln(e^{2}) + [\ln(e)]^2 + 2\ln(e^3) = 2 + 1 + 6 = 9$
- $\ln(e^{-5}) + [\ln(e^3)]^2 + 2\ln(e^{-1}) = -5 + 9 - 2 = 2$

Exercice 9

Soit (C) la courbe représentative de la fonction ln dans un repère (O; I, J).

$\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

D'où, (C) admet en $+\infty$ une branche parabolique dans la direction de la droite (OI).

Exercice 10

	Affirmations	Réponses
a	$\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}} x\ln x = +\infty$	faux
b	$\lim\limits_{x\to1} \frac{e\ln x}{x-1} = e$	vrai
c	$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2\ln x}{x+1} = 0$	faux
d	$\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\frac{x+1}{x} = 1$	vrai

Exercice 11

a) $\forall x\in]0\,;+\infty[$, $x - \ln x = x(1 - \frac{\ln x}{x})$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} (1 - \frac{\ln x}{x}) = 1 \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} (x - \ln x) = +\infty$$

b) $$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\ln x} = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} (\ln x + \frac{1}{\ln x}) = +\infty$$

c) $$\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x\to0\\>}} \ln x = -\infty \\ \lim\limits_{\substack{x\to0\\>}} \frac{1}{\ln x} = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{\substack{x\to0\\>}} (\ln x + \frac{1}{\ln x}) = -\infty$$

Exercice 12

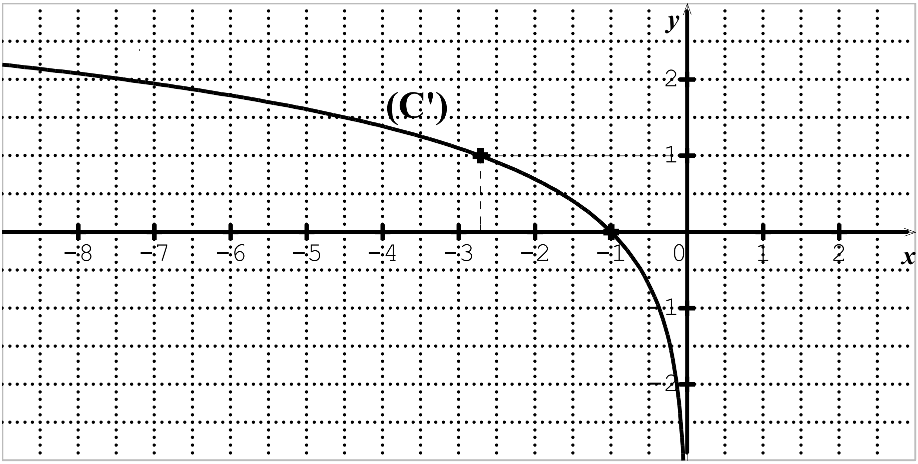
Soit (C) la courbe représentative de la fonction ln et (C') la courbe représentative de la fonction f.

(C) et (C') sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.

x	-1	-e	$-e^2$
f(x)	0	1	2

(C') admet en $-\infty$, une branche parabolique dans la direction de l'axe des abscisses.

L'axe des ordonnées est une asymptote



III Équations et inéquations faisant intervenir la fonction ln

Exercice 13

a) Contraintes sur l'inconnue

$1 - x > 0$

$x < 1$

$V_a =]-\infty ; 1[$

* $\ln(1-x) = -2 \Rightarrow 1-x = e^{-2}$

$\Rightarrow x = 1- e^{-2}$

* $1- e^{-2} \in V_a$

D'où, $S_a = \{1- e^{-2}\}$

b) Contraintes sur l'inconnue

$3x-4 > 0$ et $x^2 - 4 > 0$

$x > \frac{4}{3}$ et ($x < -2$ ou $x > 2$)

$V_b =]2 ; +\infty[$

* $\ln(3x-4) = \ln(x^2 - 4) \Rightarrow 3x-4 = x^2 - 4 \Rightarrow x^2 - 3x = 0 \Rightarrow x(x - 3) = 0$

$\Rightarrow x = 0$ ou $x = 3$

* $0 \notin V_b$ et $3 \in V_a$

D'où, $S_b = \{3\}$

c) * $V_C =]0 ; +\infty[$

* $2e\ln(x) + 1 = 0 \Rightarrow \ln x = -\frac{1}{2e}$

$\Rightarrow x = e^{\frac{-1}{2e}}$

$S_c = \{e^{\frac{-1}{2e}}\}$

d) * Contraintes sur l'inconnue

$x+5 > 0$ et $x - 2 > 0$

$x > -5$ et $x > 2$

$V_b =]2 ; +\infty[$

* $\ln(x+5) = 2\ln 2 - \ln(x - 2) \Rightarrow \ln[(x+5)(x - 2)] = \ln 4 \Rightarrow (x+5)(x - 2) = 4$

$\Rightarrow x^2 + 3x - 14 = 0$

$\Delta = 9 - 4(-14) = 65$

$x=\frac{-3-\sqrt{65}}{2}$ ou $x=\frac{-3+\sqrt{65}}{2}$

D'où, $S_d = \{\frac{-3+\sqrt{65}}{2}\}$

e) $S_e = \{1\}$

<u>Exercice 14</u>

a) * Contraintes sur l'inconnue

$1 - x^2 > 0$

$-1 < x < 1$

$V_a =]-1 ; 1[$

* $\ln(1 - x^2) > 1 \Rightarrow 1 - x^2 > e$ (impossible car $1- x^2 < 1$)

$S_a = \varnothing$

b) * Contraintes sur l'inconnue

$x^2 - 4e^2 > 0$

$x < -2e$ ou $x > 2e$

$V_b =]-\infty ; -2e[\cup]2e ; +\infty[$

* $\ln(x^2 - 4e^2) < 1 \Rightarrow x^2 - 4e^2 < e \Rightarrow x^2 < 4e^2 + e \Rightarrow -\sqrt{4e^2 + e} < x < \sqrt{4e^2 + e}$

* $S_b =]-\infty ; -\sqrt{4e^2+e}[\cup]\sqrt{4e^2+e} ; +\infty[$

c) * Contraintes sur l'inconnue

x+e > 0 et x-e < 0

x > -e et x < e

$V_b =]-e ; e[$

* $\ln(x + e) + \ln(x - e) \leq 2 + \ln3$

$\ln[(x + e)(x - e)] \leq 2 + \ln3$

$x^2 - e^2 \leq e^{2+ln3}$

$x^2 \leq e^2 + 3e^2$

$x^2 \leq 4e^2$

$-2e \leq x \leq 2e$

$S_c =]-e ; e[$

d) * Contraintes sur l'inconnue

2-x > 0

x < 2

$V_b =]-\infty ; 2[$

* $\ln(2 - x) > 2$

$2 - x > e^2$

$x < 2-e^2$

$S_d =]-\infty ; 2-e^2[$

e) * Contraintes sur l'inconnue

1 < x < 2 et x > 0

$V_b =]1 ; 2[$

* $\ln\frac{x-2}{1-x} < \ln x$

$\frac{x-2}{1-x} < x$

$\frac{x-2}{1-x} - x < 0$

$\frac{x-2+x^2-x}{1-x} < 0$

$\frac{x^2-2}{x-1} > 0$

$S_e =]\sqrt{2} ; 2[$

Exercice 15

$1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n > 0,95$

$\left(\frac{3}{4}\right)^n < 0,05$

$n\ln\left(\frac{3}{4}\right) < \ln(0,05)$

n > $\frac{ln(0,05)}{ln\left(\frac{3}{4}\right)}$

Et, $\frac{ln(0,05)}{ln\left(\frac{3}{4}\right)} \approx 10{,}41$ (à 10^{-2} près)

n = 11

Exercice 16

1. $\forall x \in]\frac{2}{5} ; +\infty[$;

f(x) = ln(5x - 2)

IV Fonction du type lnou

Exercice 16

f '(x) = $\frac{5}{5x-2}$

2. $\forall x \in]0 ; 2[$;

f(x) = ln(2x - x^2)

f '(x) = $\frac{2-2x}{2x-x^2}$

3. $\forall x \in]0 ; \frac{\pi}{2}[$;

f(x) = ln(sinx)

f '(x) = $\frac{cosx}{sinx}$

Exercice 17

1. $\forall x \in]-\infty ; 0[$; f(x) = ln|x| f '(x) = $\frac{1}{x}$
2. $\forall x \in]2 ; +\infty[$; f(x) = ln|2x - x^2|. f '(x) = $\frac{2-2x}{2x-x^2}$

Exercice 18

1. $\forall x \in]\frac{3}{2} ; +\infty[$;

f(x) = $\frac{2}{2x-3} = \frac{u'(x)}{u(x)}$ où u(x) = 2x - 3

F(x) = ln|2x - 3| + c (c$\in \mathbb{R}$)

2. $\forall x \in \mathbb{R}$;

f(x) = $\frac{2x+1}{x^2+x+1} = \frac{u'(x)}{u(x)}$ où u(x) = x^2 + x + 1

F(x) = ln|x^2 + x + 1| + c (c∈▯)

Exercice 19

1. $\forall x \in]0 ; \frac{\pi}{4}[$;

$f(x) = \frac{sinx}{cosx} = - \frac{-sinx}{cosx} = - \frac{u\prime(x)}{u(x)}$ où $u(x) = sinx$

$F(x) = \ln|cosx| + c$ ($c \in \mathbb{R}$)

2. $\forall x \in]0 ; \frac{\pi}{2}[$;

$f(x) = \frac{1+tan^2(x)}{tanx} = \frac{u\prime(x)}{u(x)}$ où $u(x) = tanx$

$F(x) = \ln|tanx| + c$ ($c \in \mathbb{R}$)

V Fonction logarithme de base a

Exercice 20

x	$\log_2(321)$	$\log_7(321)$	$\log_8\left(\frac{22}{131}\right)$
Valeur approchée de x par défaut à 10^{-5} près	8,32642	2,96593	-0,85799

Exercice 21

Affirmation	Réponse
$\log_2(3) = \log_3(2)$	faux
$\log'(5) = \frac{1}{5ln10}$	vrai
$\log_2(5) < \log_3(5)$	faux

Exercice 22

	Affirmation	Réponse
a	log(10) = 1	vrai
b	L'ensemble de définition de la fonction log est [0 ; +∞[	faux
c	$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{log(x)}{x} = +\infty$	vrai
d	$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} log(x) = 0$	faux
e	La fonction $\log_2$ est strictement croissante sur]0 ; +∞[	vrai

f	La fonction $\log_{10}$ est dérivable et croissante sur]0 ; +∞[	vrai
g	La fonction $log_{\frac{1}{2}}$ est strictement décroissante sur]0 ; +∞[	vrai

Exercice 23

* $\log_2(4) + \log_2(\frac{1}{2}) = \log_2(2)$

* $\log_3(9) - \log_3(27) = 2\log_3(3) - 3\log_3(3)$
$= -\log_3(3)$

- $\log_4(5) + 2\log_4(8) = \log_4(360)$

Exercice 24

1) A ; 2) B ; 3) A ; 4) B.

EXERCICES DE RENFORCEMENT / D'APPROFONDISSEMENT

Exercice 1

Soit f, g, h et k les fonctions numériques définies sur]0 ; +∞[par :
$f(x) = (\ln x)^2 - 4\ln x + 3$, $g(x) = \frac{3}{x-2}$, $h(x) = x\ln x$, $k(x) = \frac{ln(x+1)}{x}$

f s'annule pour	☒ e et e^3	☐ 0 et e^3	1 et 3
f ' s'annule pour	☐ $\frac{1}{4}$	☒ e^2	☐ Aucun nombre réel
Une primitive de g sur [0 ; 1] est la fonction G définie par :	☐ G(x) = 3ln(2-x)	☒ G(x) = 3ln(x-2)	☐ G(x) = -3ln(2-x)
La limite de k en zéro est :	☒ 1	☐ 0	☐ +∞
Pour tout x élément de]0 ; +∞[, h'(x) =	☐ lnx	☐ -1+lnx	☒ 1+lnx

Exercice 2

f est la fonction définie par : f(x) = $\ln\left(\frac{1}{(sinx)^3}\right)$

N°	Affirmation	
1	f '(x) = $\frac{-2}{tanx}$	faux
2	f '(x) = $\frac{-1}{(sinx)^3}$	faux
3	f '(x) = $\frac{-3}{sinx}$	faux
4	f est définie en $\frac{\pi}{2}$	vrai
5	f est dérivable en $\frac{\pi}{2}$	vrai

Exercice 3

log_2(x) = u

* $log_2(x^2) = 2log_2(x) = 2u$
* $log_2(\sqrt{x}) = \frac{1}{2}\, log_2(x) = \frac{1}{2}u$
* $log_2\left(\frac{x^2}{64}\right) = 2log_2(x) + 6log_2(2) = 2u + 6log_2(2)$

Exercice 4

a) * V_a =]0 ; +∞[

* 4ln3 = ln81 - ln$\frac{x}{3}$

4ln3 = 4ln3 - ln$\frac{x}{3}$

ln$\frac{x}{3}$ = 0

$\frac{x}{3}$ = 1

x = 3

S_a = {3}

b) * V_b =]0 ; +∞[

* ln(x^2) + (lnx - 4)(lnx)^2 = 0

2lnx + (lnx - 4)(lnx)^2 = 0

[2+ (lnx - 4)lnx]lnx = 0

lnx = 0 ou (lnx)^2 - 4lnx + 2 = 0

x = 1 ou (lnx)^2 - 4lnx + 2 = 0

$\Delta' = 4 - 2 = 0$

$\ln x = 2-\sqrt{2}$ ou $\ln x = 2+\sqrt{2}$

$x = e^{2-\sqrt{2}}$ ou $x = e^{2+\sqrt{2}}$

$S_b = \{1 ; e^{2-\sqrt{2}} ; e^{2+\sqrt{2}}\}$

c) * $V_c =]0 ; +\infty[$

* $(\ln x)^2 - \ln(x^3) + 2 = 0$

$(\ln x)^2 - 3\ln x + 2 = 0$

$\ln x = 1$ ou $\ln x = 2$

$x = e$ ou $x = e^2$

$S_c = \{e ; e^2\}$

d) $\sqrt{5^x} + \sqrt{5^{-x}} = 2,9$

$\sqrt{5^{2x}} + 1 = 2,9\sqrt{5^x}$ |on multiplie membre à membre par $\sqrt{5^x}$

$\left(\sqrt{5^x}\right)^2 - 2,9\sqrt{5^x} + 1 = 0$

$10\left(\sqrt{5^x}\right)^2 - 29\sqrt{5^x} + 10 = 0$

$\Delta = 441 = 21^2$

$\sqrt{5^x} = \frac{5}{2}$ ou $\sqrt{5^x} = \frac{2}{5}$

$\frac{x}{2}\ln 5 = \ln 5 - \ln 2$ ou $\frac{x}{2}\ln 5 = \ln 2 - \ln 5$

$x = 2 - \frac{ln4}{ln5}$ ou $x = \frac{ln4}{ln5} - 2$

$S_d = \{ 2 - \frac{ln4}{ln5} ; \frac{ln4}{ln5} - 2\}$

e) * Contraintes sur l'inconnue

$3-x > 0$ et $-x-6 > 0$

$x < 3$ et $x < -6$

$V_b =]-\infty ; -6[$

* $\log(3 - x) + \log(-x-6) = 1$

$\log[(x-3)(x+6)] = 1$

$(x-3)(x+6) = 10$

$x^2 + 3x - 28 = 0$

$x = -7$ ou $x = 4$

$S_e = \{-7\}$

f) $V_f =]-\infty ; -6[$

$log_4(x) = \frac{lnx}{ln4} = \frac{lnx}{2ln2} = \frac{1}{2}log_2(x) =$

$log_2(x)log_4(x) = 8$

$log_2(x)\frac{1}{2}log_2(x) = 8$

$(log_2 x)^2 = 16$

$log_2(x) = -4$ ou $log_2(x) = 4$

$x = 2^{-4}$ ou $x = 2^4$

$x = \frac{1}{16}$ ou $x = 16$

$S_f = \{\frac{1}{16} ; 16\}$

Exercice 5

a) * $V_a =]0 ; \frac{1}{3}[$

* $\ln x - \ln 2 \leq \ln(1-3x)$

$\ln x \leq \ln(1-3x) + \ln 2$

$\ln x \leq \ln[2(1-3x)]$

$x \leq 2(1 - 3x)$

$x \leq 2 - 6x$

$7x \leq 2$

$x \leq \frac{2}{7}$

$S_a =]0 ; \frac{2}{7}]$

b) * $V_b =]0 ; 2[$

* $log_{\frac{1}{3}}(4 - x^2) - log_{\frac{1}{3}}(x) < log_3(x)$

$- log_3(4 - x^2) + log_3(x) < log_3(x)$

$log_3(4 - x^2) > 0$

$x^2 < 3$

$-\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$

$S_a =]0 ; \sqrt{3}[$

Exercice 6

a) * $V_a =]0 ; +\infty[\times]0 ; +\infty[$

* $\begin{cases} ln(xy) = 4 \\ (lnx)(lny) = -12 \end{cases}$

$$\begin{cases} lnx + lny = 4 \\ (lnx)(lny) = -12 \end{cases}$$

lnx et lny sont les solutions éventuelles de l'équation :

$U^2 - 4U - 12 = 0$

$U = -2$ ou $U = 6$

($\ln x = -2$ et $\ln y = 6$) ou ($\ln x = 6$ ou $\ln y = -2$)

($x = e^{-2}$ et $y = e^6$) ou ($x = e^6$ et $y = e^{-2}$)

$S_a = \{(e^{-2} ; e^6) ; (e^6 ; e^{-2})\}$

b) * $V_b =]0 ; +\infty[\times]0 ; +\infty[$

* $\begin{cases} x + y = 15 \\ lnx + lny = -12 \end{cases}$

y = 15 - x

lnx + ln(15-x) = -12

$\ln(15x - x^2) = -12$

$15x - x^2 = e^{-12}$

$x^2 - 15x + e^{-12} = 0$

$\Delta = 225 - 4e^{-12}$

$x = \frac{15-\sqrt{225-4e^{-12}}}{2}$ et $y = 15 - \frac{15-\sqrt{225-4e^{-12}}}{2} = \frac{15+\sqrt{225-4e^{-12}}}{2}$

ou $x = \frac{15+\sqrt{225-4e^{-12}}}{2}$ et $y = 15 - \frac{15+\sqrt{225-4e^{-12}}}{2} = \frac{15-\sqrt{225-4e^{-12}}}{2}$

$S_b = \{(\frac{15-\sqrt{225-4e^{-12}}}{2} ; \frac{15+\sqrt{225-4e^{-12}}}{2}) ; (\frac{15+\sqrt{225-4e^{-12}}}{2} ; \frac{15-\sqrt{225-4e^{-12}}}{2})\}$

c) * Contraintes sur l'inconnue

xy> 0

(x > 0 et y > 0) ou (x < 0 et y < 0)

$V_c =]-\infty ; 0[\times]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[\times]0 ; +\infty[$

* $\begin{cases} log(xy) = 2 \\ x + y = 29 \end{cases}$

$$\begin{cases} xy = 100 \\ x + y = 29 \end{cases}$$

x et y sont les solutions éventuelles de l'équation ;

$X^2 - 29X + 100 = 0$

X = 4 ou X = 25

$S_c = \{(4 ; 25) ; (25 ; 4)\}$

Exercice 7

log(210) > 2

Supposons log(210) est un nombre rationnel

C'est-à-dire : $\log(210) = \frac{p}{q}$, on peut prendre : $p \in \mathbb{N}^*$ et $q \in \mathbb{N}^*$

$\frac{p}{q} > 2 \Rightarrow p > 2q$

$210 = 10^{\frac{p}{q}}$

$210^q = 10^p$ |on prend la puissance q membre à membre

$21^q = 10^{p-q}$ |on divise par 10^q membre à membre

$3^q \times 7^q = 2^{p-q} \times 5^{p-q}$ |on décompose en produit de facteurs premiers
Le nombre $3^q \times 7^q$ a deux décompositions distinctes en produits de facteurs premiers : $3^q \times 7^q$ et $2^{p-q} \times 5^{p-q}$
Ce qui est absurde car la décomposition d'un entier en produit de facteurs premiers est unique.
Donc, log(210) n'est pas un nombre rationnel.

Exercice 8

* Pour tous a et b éléments de $]0 ; +\infty[$;

$\frac{lna+lnb}{2} \leq \ln\frac{a+b}{2} \Leftrightarrow \ln a + \ln b \leq 2\ln\frac{a+b}{2}$

$\Leftrightarrow \ln(ab) \leq \ln\left[\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\right]$

$\Leftrightarrow \ln(ab) \leq \ln\left(\frac{a^2+2ab+b^2}{4}\right)$

* Pour tous a et b éléments de $]0 ; +\infty[$;

$\frac{a^2+2ab+b^2}{4} - ab = \frac{a^2-2ab+b^2}{4}$

$= \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$

$\left(\frac{a-b}{2}\right)^2 \geq 0$

$\frac{a^2+2ab+b^2}{4} - ab \geq 0$

$ab \leq \frac{a^2+2ab+b^2}{4}$

$\ln(ab) \leq \ln\left(\frac{a^2+2ab+b^2}{4}\right)$

$\frac{lna+lnb}{2} \leq \ln\frac{a+b}{2}$

Exercice 9

$S = 10\log\left(\frac{I}{I_0}\right)$

a) $I = 10^4 I_0$

$S_a = 10\log\left(\frac{10^4 I_0}{I_0}\right) = 10\log(10^4)$

$S_a = 40$ Db

b) $10\log\left(\frac{I}{I_0}\right) = 100$

$\log\left(\frac{I}{I_0}\right) = 10$

$\frac{I}{I_0} = 10^{10}$

$I = 10^{10}I_0$

$I = 10^{10}\times10^{-12}$ watt/m^2

$I = 10^{-2}$ watt/m^2

$I = 0{,}01$ watt/m^2

c) $S - S' = 1$

$10\log\left(\frac{I}{I_0}\right) - 10\log\left(\frac{I'}{I_0}\right) = 1$

$\log\left(\frac{I}{I'}\right) = \frac{1}{10}$

$\frac{I}{I'} = 10^{\frac{1}{10}}$

$\frac{I}{I'} = \sqrt[10]{10}$

$I' = \frac{I}{\sqrt[10]{10}}$

$(I' \approx 0{,}8 \times I)$

<u>Exercice 10 :</u>

1) $D_g =]-\infty; -1] \cup [-1; +\infty[= IR$

2) $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ >}} g(x) = \lim\limits_{\substack{x\to -1\\ <}} g(x) = g(-1) = 0$. *Donc g est continue en -1*

3) a. $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ <}} \frac{\ln(-x)}{x+1} = -1$ *et* $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ >}} \frac{(x+1)^2}{x+1} =$

0 donc g est dérivable à gauche et à droite en -1

mais $g'_g(-1) \neq g'_d(-1)$ d'où g n'est pas dérivable en -1.

b. La courbe de g admet donc un point anguleux au point d'abscisse -1.

<u>Exercice 11 :</u>

1. $a)$ $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 0$. $b)$ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x) = -\infty$

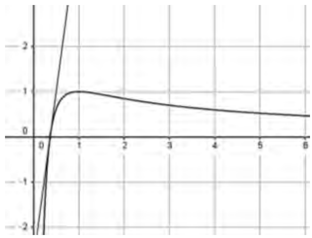
2. $a)$ $f'(x) = -\frac{\ln x}{x^2}$.

$b)$ $\forall x \in]0; 1[$ $f'(x) > 0$ et $\forall x \in]1; +\infty[$, $f'(x) <$ 0 donc f est croissante sur $]0; 1]$ et décroissante sur $[1; +\infty[$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	||	+	0	-	
$f(x)$	||		1		
	|| $-\infty$				0

3. $(T): y = f'(e^{-1})(x - e^{-1}) + f(e^{-1}) \quad or$
$f'(e^{-1}) = e^2 \ \ et\ f(e^{-1}) = 0$
$$y = e^2(x - e^{-1}) = e^2x - e$$

4.



Exercice 12 :

1. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1 = f(0)$ donc f est continue en 0
2. a) $g'(x) = \frac{-x^3}{1+x}$; $\forall x \geq O, g'(x) <$ 0 donc g est décroissante sur $[0; +\infty[$.

$g(0) = 0$. $Or\ g$ est décroissante sur $[0; +\infty[$, g est donc majorée par 0.
d'où $g(x) \leq 0$ par conséquent $\forall x \in [0; +\infty[, \ln(1 + x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$
b) Etudions le sens de variation de la fonction
m définie sur $[0; +\infty[$ par $m(x) = \ln(1 + x) - (x - \frac{x^2}{2})$
$m'(x) = \frac{x^2}{1+x}$. $\forall x \geq 0\,; m'(x) \geq$
0 donc la fonction m est croissante sur $[0; +\infty[$
$m(0) = 0$. $Or\ m$ est croissante sur $[0; +\infty[$ donc m est minorée par 0.
Donc $\forall x \geq 0, \ln(1 + x) - \left(x - \frac{x^2}{2}\right)$ $ou\ \forall x \geq 0,\ \ln(1 + x) \geq (x - \frac{x^2}{2})$.
c) $D'après\ \ a)\ et\ b)$: $\forall x \geq 0$, $(x - \frac{x^2}{2}) \leq \ln(1 + x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$
Ainsi $-\frac{x^2}{2} \leq \ln(1 + x) - x \leq -\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$. $D'o$ù $\forall x \geq 0,\ -\frac{1}{2} \leq \frac{\ln(1+x)-x}{x^2} \leq -\frac{1}{2} + \frac{x^2}{3}$
$On\ a\ \lim\limits_{x\to 0} -\frac{1}{2} + \frac{x^2}{3} = -\frac{1}{2}\ donc\ \lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)-x}{x^2} = -\frac{1}{2}\ donc\ \lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)-x}{x^2} = -\frac{1}{2} = f'(0)$.

3. a) $\forall x \geq 0, h'(x) = \frac{-x}{(x+1)^2}$

$\forall x \geq 0,\ \ h'(x) \leq 0$, h est donc décroissante sur $[0; +\infty[$.

$Or\ h(0) = 0$ donc $\forall x \geq 0,\ \ h(x) \leq 0$.

b) $\forall x \in [0; +\infty[, f'(x) = \frac{\frac{x}{1+x} - \ln(1+x)}{x^2} = \frac{h(x)}{x^2}$

c)$\forall x \in [0\,; +\infty[\,, h(x) \leq 0\ donc\ f$ est décroissante sur $[0\,; +\infty[$.

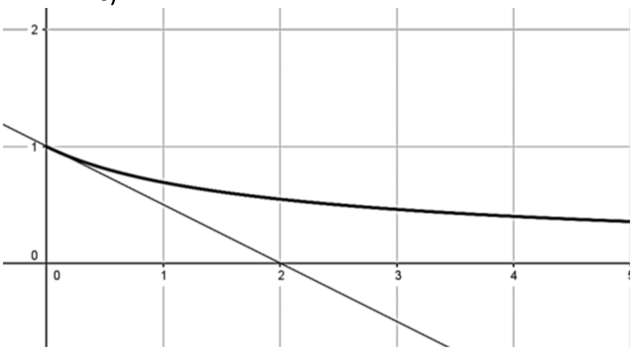
x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	
$f(x)$	1	0

4.

a) (T) :$y = -\frac{1}{2}x + 1$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ donc la droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale à (C) en $+\infty$.

c)



Exercice13 :

1. a) $\lim\limits_{\substack{x \to 4 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 4 \\ >}} (-2x + 5) + 3\ln(\frac{x+1}{x-4}) = +\infty$ car $\lim\limits_{\substack{x \to 4 \\ >}} \frac{x+1}{x-4} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (-2x + 5) + 3\ln(\frac{x+1}{x-4}) = -\infty$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x+1}{x-4} = 1$.

b) $f'(x) = \frac{-2x^2+6x-7}{(x+1)(x-4)}$; $\forall x > 4\,, -2x^2 + 6x - 7 < 0$ et $(x+1)(x-4) > 0$
Donc $\forall x > 4, f'(x) < 0$; f est donc strictement décroissante sur $]4; +\infty[$.

x	4	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$-\infty$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (-2x+5)] = \lim\limits_{x \to +\infty} 3\ln(\frac{x+1}{x-4}) = 0$.

Donc la droite (D) d'équation $y = -2x + 5$ est asymptote oblique à (C) en $+\infty$.

d) Signe de $3\ln(\frac{x+1}{x-4})$

$\frac{x+1}{x-4} = 1 + \frac{5}{x-4}$ d'où $\forall x > 4$, $\frac{x+1}{x-4} > 1$ donc $\ln\left(\frac{x+1}{x-4}\right) > 0$. Par conséquent pour tout x élément de $]4; +\infty[$ (C) est au-dessus de (D).

2. a) Soit $E(a, b)$ ce point . On a $f'(a) = -\frac{9}{2}$ et $f(a) = b$

Ainsi $\frac{-2a^2+6a-7}{(a+1)(a-4)} = -\frac{9}{2} \Longrightarrow a^2 - 3a - 10 = 0 \Rightarrow a = 5$ ou $a - 2$

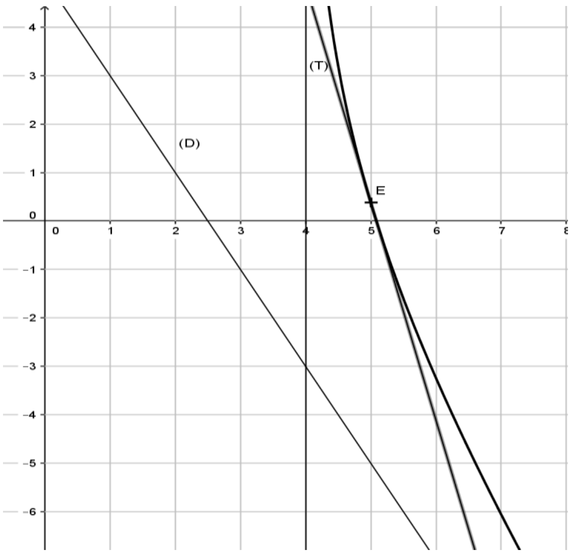
or $a > 4$ donc $a = 5$

D'où $= f(5) = -5 + 3ln6$. On a $E(5;\ -5 + 3ln6)$

b) (T): $y = -\frac{9}{2}(x - a) + f(a)$

(T) : $y = -\frac{9}{2}(x-5) - 5 + 3ln6 = -\frac{9}{2}x + \frac{35}{2} + 3ln6$

3.



4.

a) Soient $u(x) = lnx$; $u'(x) = \frac{1}{x}$; $v'(x) = 1$ et $v(x) = x$
Ainsi $K(x) = xlnx - x$.

b) $G'(x) = \ln(x+1) - 1 + \frac{x+1}{x+1} = \ln(x+1) = g(x)$; Donc
G est une primitive de g sur $I =]4; +\infty[$.

c) $H'(x) = \ln(x-4) + \frac{x-4}{x-4} - 1 = \ln(x-4) =$
$h(x)$. Donc H est une primitive de h sur $I =]4; +\infty[$.

d) $f(x) - (-2x+5) > 0$ donc $A = \int_5^6 \big(f(x) - (-2x+5)\big)dx$
$A = \int_5^6 3\ln\left(\frac{x+1}{x-4}\right) dx\ u.a = 3[\int_5^6 \ln(x+1)dx - \int_5^6 \ln(x-4)\,dx]u.a$.
D'après b) et c)
$A = 3[G(x) - H(x)]_5^6\ u.a = 3\big[\big(G(6) - H(6)\big) - \big(G(5) - H(5)\big)\big]u.a$
$A = 3(7ln7 - 2ln2 - 5ln5)\ u.a \approx 10{,}02\ u.a$

5.

a) f est continue et strictement décroissante sur $]4; +\infty[$
[Elle réalise une bijection de $]4; +\infty[$ dans IR
$0 \in IR$ donc l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique x_0.

b) $5 < x_0 < 5{,}5$

c) $5{,}08 < x_0 < 5{,}09$

<u>Exercice 14 :</u>

Partie I

1. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} g(x) = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x(lnx - 1 + \frac{1}{x}) = +\infty$
2. a) $g'(x) =$
   lnx donc g est décroissante sur $]0;1[$ et g est croissante sur $]1;+\infty[$

b)

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	||	$-$	0	$+$	
$g(x)$	|| 1	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

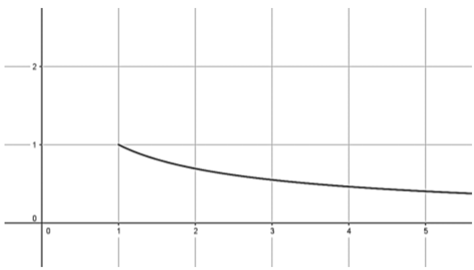
$$\forall x > 0, g(x) \geq 0$$

Partie II

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ *et* $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} \frac{lnx - ln1}{x-1} = ln'(1) = 1.$
2. $f'(x) = -\frac{g(x)}{x(x-1)^2}$; $\forall x > 1, g(x) > 0$, $x(x-1)^2 >$
   0 donc f est strictement décroissante sur $]1;+\infty[$

x	1		$+\infty$
$f'(x)$	||	$-$	
$f(x)$	|| 1	$\searrow$	0

3.



Partie III :

1. f réalise une bijecton de $]1\,;+\infty[$ $dans$ $]0\,;1\left[\right.$ or $\frac{1}{2}$ est élément de $\left]0\,;1\right[$ donc l'équation $f(x)=\frac{1}{2}$ admet une solution unique $\propto$ $dans$ $]1;+\infty[$.

On a $(3{,}5)=0{,}501$ et $f(3{,}6)=0{,}493$ donc $3{,}5<\propto<3{,}6$.

2.

a) $\forall x\in]1;+\infty[\,,h(x)=x\Leftrightarrow lnx+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}=x\ \Leftrightarrow lnx=\frac{1}{2}(x-1)$

Or $f(\alpha)=\frac{1}{2}\ \Leftrightarrow\ \frac{1}{\alpha-1}ln\alpha=\frac{1}{2}\ \Leftrightarrow ln\alpha=\frac{1}{2}(\alpha-1)$ Donc α est solution de l'équation $h(x)=x$. Ainsi $h(\propto)=\propto$.

b) $\forall x>0,\ \ h'(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{2}=\frac{x+2}{2x}$. On a $h'(x)>0$ donc h est strictement croissante sur $]1;+\infty[$

c) h est strictement croissante sur $]1;+\infty[$ donc sur $[3;4]$.
Ainsi $h([3;4])=[h(3);h(4)]\subset[3;4]$

Donc $h(x)\in[3;4]$.

On a $3\leq x\leq 4$ or $h'(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{2}$. Ainsi $\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\leq\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\leq\frac{1}{3}+\frac{1}{2}$

Donc $\frac{3}{4}\leq h'(x)\leq\frac{5}{6}$ d'où $|h'(x)|\leq\frac{5}{6}$.

3.

a) D'après les réponses de la question 2 :
on a $\forall\, n\in IN,\ \ 3\leq u_n\leq 4$ et $|h'(x)|\leq\frac{5}{6}$

Ainsi d'aprèste théorème des accroissements finis appliqué sur l'intervalle $[3;4]$
on a pour tout entier naturel n, $|h(u_n)-h(\propto)|\leq\frac{5}{6}|u_n-\propto|$ d'où $|u_{n+1}-\propto|\leq\frac{5}{6}|u_n-\propto|$.

b) Pour tout entier naturel n, $|u_{n+1}-\propto|\leq\frac{5}{6}|u_n-\propto|$

On a
$$\left|\begin{array}{l}|u_1-\propto|\leq\frac{5}{6}|u_0-\propto|\\|u_2-\propto|\leq\frac{5}{6}|u_1-\propto|\\|u_3-\propto|\leq\frac{5}{6}|u_2-\propto|\\\quad\vdots\\|u_n-\propto|\leq\frac{5}{6}|u_{n-1}-\propto|\end{array}\right.$$

En faisant le produit membre à membre on a : $|u_n-\propto|\leq\left(\frac{5}{6}\right)^n|u_0-\propto|$

ou $|u_n - \propto| \leq \left(\frac{5}{6}\right)^n |3-\propto|$ or $-0{,}6 < \propto < -0{,}5$ $d'o$ù $|3-\propto| < 0{,}5 < 1 \Longrightarrow$
$\left(\frac{5}{6}\right)^n |3-\propto| < \left(\frac{5}{6}\right)^n$

Ainsi $|u_n - \propto| \leq \left(\frac{5}{6}\right)^n$.

c) $|u_p - \propto| \leq \left(\frac{5}{6}\right)^p$. u_p valeur approchée de α à 10^{-3} près signifie que $\left(\frac{5}{6}\right)^p = 10^{-3}$

$\left(\frac{5}{6}\right)^p = 10^{-3} \iff p\ln\left(\frac{5}{6}\right) = \ln(0{,}001)$ d'où $p = 37{,}89$. On a $p = 38$.
Une valeur approchée de α à 10^{-3} près est $u_{38} \approx$
$3{,}513$ $(par\ lecture\ graphique)$

SITUATIONS COMPLEXES

Exercice 15

I l'intensité sonore pour une distance d .
$I_0 = 10^{-12} watt/m^2$
On a $I = \frac{k}{d^2}$, $k \in IR$. Calculons k
$S = 110\ db$ pour $d = 10\ m$ ainsi $10\log\left(\frac{k}{10^2 \times 10^{-12}}\right) = 110$
$\log(k \times 10^{10}) = 11 \Longrightarrow \log(k) = 1 \Rightarrow k = 10$

Calculons l'intensité sonore pour une distance 500 m.
$I = \frac{10}{500^2} = 4.10^{-5}$
Calculons le niveau sonore pour une intensité sonore de $I = 4.10^{-5}$
$S = 10\log\left(\frac{4.10^{-5}}{10^{-12}}\right) = 76{,}02db.$
Le niveau sonore perçu par les riverains n'est malheureusement pas conforme au vœu des riverains.

Exercice 16

Soit la suite (u_n) désignant la consommation de charbon l'année $2019 + n$
.
Avec $u_0 = 10.000$ ($année$ 2019)
On a ainsi $u_{n+1} = u_n - 0{,}08u_n = 0{,}92u_n$
La suite
(u_n) est une suite géométrique de raison 0,92 et de premier termes u_0 =1
0.000
On a donc $u_n = u_0 \times (0{,}92)^n = (0{,}92)^n \times 10.000$
Cherchons l'année à laquelle ce pays consommera moins de 2000 tonnes.
$u_n < 2000 \Longrightarrow (0{,}92)^n \times 10.000 < 2000$.
$(0{,}92)^n < 0{,}2 \Rightarrow n > \frac{\ln(0{,}2)}{\ln(0{,}92)} \Rightarrow n > 19{,}30$. Prenons $n = 20$
La consommation en charbon sera donc moins de 2000 tonnes à partir de 2039. Ce pays ne gagnera pas la lutte contre le réchauffement climatique.

6 NOMBRES COMPLEXES

EXERCICES DE FIXATION

FORME ALGEBRIQUE D'UN NOMBRE COMPLEXE

Exercice de fixation

Exercice 1

Les nombres complexes sont :

π ; $2i$; $5 - i$; 0 ; $\sqrt{7}$

Exercice 2

Le nombre complexe $\sqrt{2} - 4i$ a pour partie imaginaire : c)-4

Exercice 3

$Z_1 = 0 + i$, donc $\text{Re}(Z_1) = 0$ et $\text{Im}(Z_1) = 1$

$Z_2 = 7 - 9i$, donc $\text{Re}(Z_2) = 7$ et $\text{Im}(Z_2) = -9$

$Z_3 = -\frac{5}{3} + \frac{2}{3}i$, donc $\text{Re}(Z_3) = -\frac{5}{3}$ et $\text{Im}(Z_3) = \frac{2}{3}$

Exercice 4

1)$2 + (3 - x)i \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 3 - x = 0$

$\Leftrightarrow x = 3$

2)$(2x - 1) + 4i \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow 2x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

Exercice 5

$2 + (x - 1)i = 2 + i \Leftrightarrow x - 1 = 1$

$\Leftrightarrow x = 2$

Pour $x = 2$; on a $Z = 2 + (2 - 1)i = 2 + i$

Exercice 6

Les opposés des nombres

L'opposé de Z_1 est $-17+9i$

L'opposé de Z_2 est $\sqrt{2}i$

L'opposé de Z_1 est $5+6i$

Exercice 7

1) $Z_1+Z_2=2+i+3+2i=5+3i$

2) $Z_1+Z_2=-4+3i+5-8i=1-5i$

3) $Z_1+Z_2=-1-i-7-17i=-8-18i$

Exercice 8

1) $Z_1Z_2=(2+i)(3+2i)=6+4i+3i-2=4+7i$

2) $Z_1Z_2=(-4+3i)(5-8i)=-20+32i+15i+24=4+47i$

3) $Z_1Z_2=(-1-i)(-7-17i)=7+17i+7i-17=-10+24i$

Exercice 9

1) $\frac{1}{1+i}=\frac{1-i}{(1+i)(1-i)}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$

2) $\frac{1}{-4+3i}=\frac{-4-3i}{(-4+3i)(-4-3i)}=\frac{-4}{25}-\frac{3}{25}i$

3) $\frac{1}{-8+8i}=\frac{-8-8i}{(1+i)(1-i)}=-\frac{1}{16}-\frac{1}{16}i$

Exercice 10

Écrivons sous forme algébrique les nombres suivants

$(2+3i)^2=4+12i-9=-5+12i$

$(2+3i)^{-2}=\frac{1}{(2+3i)^2}=\frac{1}{-5+12i}=-\frac{5}{169}-\frac{12}{169}i$

$(1+i)^4=((1+i)^2)^2=(2i)^2=-4$

$(1+i)^{-4} = \frac{1}{(1+i)^4} = -\frac{1}{4}$

Exercice 11

$i^{403} = i^{4\times100+3} = -i$

$i^{2030} = i^{4\times507+2} = -1$

$i^{2022} = i^{4\times505+2} = -1$

$i^{2001} = i^{4\times500+1} = i$

Exercice 12

1)$Z \times Z' \neq 0 \Leftrightarrow Z \neq 0$ et $Z' \neq 0$

2)$ZZ' = 0 \Leftrightarrow Z = 0$ ou $Z' = 0$

Or $Z' \neq 0$ donc $Z = 0$

Exercice 13

Résolvons dans $\mathbb{C}$

$(3z-2-i)(z+2i) = 0 \Leftrightarrow 3z-2-i = 0$ ou $z+2i = 0$

$\Leftrightarrow 3z = 2+i$ ou $z = 2i$

$\Leftrightarrow z = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}i$ ou $z = 2i$

$S_{\mathbb{C}} = \left\{ \frac{2}{3} + \frac{1}{3}i\,; 2i \right\}$

Exercice 14

On a

- $\overline{0} = 0$
- $\overline{1+i} = 1-i$
- $\overline{1+i} = 1-i$
- $\overline{7} = 7$
- $\overline{-19} = -19$
- $\overline{3-4i} = 3+4i$
- $\overline{-38+6i} = -38-6i$

Exercice 15

$z \in \mathbb{C}$ donc $z = a + ib$ avec $(a; b) \in \mathbb{R}^2$

$z\bar{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2$

Comme $a^2 + b^2 > 0$ et $\text{Im}(z\bar{z}) = 0$

Alors $z\bar{z} \in \mathbb{R}_+$

Exercice 16

Calculons dans chacun des cas

1) $z + \bar{z} = 2 \times 3 = 6$

$z - \bar{z} = 2i \times 2 = 4i$

$z\bar{z} = 3^2 + 2^2 = 9 + 4 = 13$

2) $z + \bar{z} = 2 \times 7 = 14$

$z - \bar{z} = 2i \times 1 = 2i$

$z\bar{z} = 7^2 + 1^2 = 49 + 1 = 50$

Exercice 17

$\overline{z + z'} = \overline{2 + 3\imath - 1 + 5\imath} = \overline{1 + 8\imath} = 1 - 8i$

$\overline{zz'} = \overline{(2 + 3\imath)(-1 + 5\imath)} = \overline{-2 + 10\imath - 3\imath - 15} = \overline{-17 + 7\imath} = -17 - 7i$

$\overline{\left(\frac{z}{z\prime}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}\prime} = \frac{2-3i}{-1-5i} = \frac{(2-3i)(-1+5i)}{26} = \frac{-2+10i+3i+15}{26} = \frac{13}{26} + \frac{13}{26}i = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$

Exercice 18

Déterminons le module de chacun des nombre complexe

$|3 + 4i| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$

$|6 - 8i| = \sqrt{6^2 + (-8)^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10$

$\left|\sqrt{2} + \sqrt{7}i\right| = \sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2 + \left(\sqrt{7}\right)^2} = \sqrt{2 + 7} = \sqrt{9} = 3$

Exercice 19

L'équivalence est incomplète car si $z' = \bar{z}$ alors $|z| = |z'|$ si $z' = -\bar{z}$ alors $|z| = |z'|$

Exercice 20

$|1 + i| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

$|1 - i| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$

Donc $1 + i$ et $1 - i$ ont le même module

Exercice 21

Calculons

$|\bar{z}| = |z| = 2$

$|-\bar{z}| = |\bar{z}| = |z| = 2$

$|zz'| = |z| \times |z'| = 2 \times 3 = 6$

$\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|} = \frac{1}{2}$

$\left|\frac{z}{z\prime}\right| = \frac{|z|}{|z\prime|} = \frac{2}{3}$

Exercice 22

1) L'affixe du point A est $-7 + 5i$

2) L'affixe du point B est $3i$

3) L'affixe du vecteur $\vec{u}$ est $-3 + 9i$

Exercice 23

1) Le point image de $1 + i$ a pour coordonnées $(1; 1)$

2) Le point image de $-3i$ a pour coordonnées $(0; -3)$

3) Le vecteur image a pour coordonnées $(7; 0)$

4) Le vecteur image a pour coordonnées (1 ;1)

Exercice 24

L'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est $-2+3i-1-i$ soit $-3+2i$
L'affixe du vecteur $\overrightarrow{BC}$ est $4+3i+2-3i$ soit 6
L'affixe du vecteur $\overrightarrow{AC}$ est $4+3i-1-i$ soit $3+2i$

Exercice 25

Soit $a+ib$ l'affixe de B

On a : $a+ib+4-3i=1+i$

Soit $a+4+i(b-3)=1+i$

D'où $a+4=1$ et $b-3=1$

$a=-3$ et $b=4$

Donc $B(-3;4)$

Exercice 26

1.VRAI

2.VRAI

3.FAUX

Exercice 27

1)L'affixe du point I est le nombre complexe $\frac{1-i+4+5i}{2}$ soit $\frac{5}{2}+2i$

2) $\vec{w}+\vec{y}$ a pour affixe $1-2i+3+4i$ soit $4-2i$

3)$PQ=|4+5i-1+i|=|3+6i|=\sqrt{3^2+6^2}=\sqrt{9+36}=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$

Exercice 28

1. Le vecteur $3\vec{w}$ a pour affixe $3(2+3i)$ soit $6+9i$

2. Le vecteur $2\vec{w}-3\vec{y}$ a pour affixe $2(2+3i)-3(4-5i)$ soit $4+6i-12i+15i$

soit $-8+21i$

TRIGONOMETRIQUE D'UN NOMBRE COMPLEXE

Exercice 29

$\text{ARG}(1) = 0$

$\text{ARG}(i) = \frac{\pi}{2}$

$\text{ARG}(-i) = -\frac{\pi}{2}$

$\text{ARG}(-1) = \pi$

$\text{ARG}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \frac{\pi}{3}$

Exercice 30

a)VRAI

b)FAUX

Exercice 31

- $|1 + i\sqrt{3}| = \sqrt{1^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4} = 2$

  On a $\cos\theta = \frac{1}{2}$ et $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ donc $\theta = \frac{\pi}{3}$

- $|\sqrt{3} - 3i| = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + 3^2} = \sqrt{3+9} = 2\sqrt{3}$

  On a $\cos\theta = \frac{1}{2}$ et $\sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ donc $\theta = -\frac{\pi}{3}$

- $|-\sqrt{2} - i\sqrt{6}| = \sqrt{2+6} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

  On a $\cos\theta = -\frac{1}{2}$ et $\sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ donc $\theta = -\frac{2\pi}{3}$

Exercice 32

Déterminons la forme trigonométrique des nombres complexes

1.$|1 - i| = \sqrt{2}$; soit θ =ARG(Z)

$\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ donc $\theta = -\frac{\pi}{4}$

donc $1 - i = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$

2. $\left|\sqrt{3} - 3i\right| = 2\sqrt{3}$; soit $\theta = \mathrm{ARG}(\mathrm{Z})$

On a $\cos\theta = \frac{1}{2}$ et $\sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ donc $\theta = -\frac{\pi}{3}$

donc $\sqrt{3} - 3i = 2\sqrt{3}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$

3. $\left|-\sqrt{2} + i\sqrt{6}\right| = 2\sqrt{2}$; soit $\theta = \mathrm{ARG}(\mathrm{Z})$

On a $\cos\theta = -\frac{1}{2}$ et $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ donc $\theta = \frac{2\pi}{3}$

$-\sqrt{2} + i\sqrt{6} = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$

Exercice 33

Déterminons un argument de chacun des nombres complexes suivants

$\arg(zz') = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3} + 2k\pi = -\frac{\pi}{12} + 2k\pi\ ; k \in \mathbb{Z}$

$\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z) + 2k\pi = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi\ ; k \in \mathbb{Z}$

$\arg\left(\frac{z'}{z}\right) = \arg(z') - \arg(z) + 2k\pi = -\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} + 2k\pi = -\frac{7\pi}{12} + 2k\pi\ ; k \in \mathbb{Z}$

$\arg\left(\frac{z}{z\prime}\right) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} + 2k\pi = \frac{7\pi}{12} + 2k\pi\ ; k \in \mathbb{Z}$

$\arg(z^2) = 2\arg(z) + 2k\pi = 2 \times \frac{\pi}{4} + 2k\pi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi\ ; k \in \mathbb{Z}$

$\arg\left(\frac{z^2}{z\prime}\right) = 2 \times \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} + 2k\pi = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi\ ; k \in \mathbb{Z}$

Exercice 34

Écrivons chacun des nombres sous forme trigonométrique

- $|(2 + 2i)(1 - i)| = 4$ et $\arg((2 + 2i)(1 - i)) = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} + 2k\pi = 0 + 2k\pi$
  donc $(2 + 2i)(1 - i) = 4(\cos 0 + i\sin 0)$
- $\left|\frac{\sqrt{3}+i}{2i}\right| = 1$

$$\text{Arg}\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2i}\right) = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2} + 2k\pi = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

donc $\frac{\sqrt{3}+i}{2i} = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

- $\left|\frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2(1-i)}\right| = \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = 1$

  $\arg\left(\frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2(1-i)}\right) = -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} + 2k\pi = \frac{\pi}{12} + 2k\pi$

  donc $\frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2(1-i)} = \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$

- $|(1-i)^4| = |1-i|^4 = \left(\sqrt{2}\right)^4 = 4$

  $\arg((1-i)^4) = 4 \times \left(-\frac{\pi}{4}\right) + 2k\pi = \pi + 2k\pi$

  donc $(1-i)^4 = 4(\cos(\pi) + i\sin(\pi))$

Exercice 35

- $\sqrt{\mathbf{2}}\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) = \sqrt{2}\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{6}}{2}$
- $\mathbf{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = 2\left(-\frac{\sqrt{\mathbf{2}}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{\mathbf{2}} + i\sqrt{\mathbf{2}}$
- $3\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$

Exercice 36

Il n'existe pas de nombre réel θ tel que $\cos\theta + i\sin\theta = 0$

Ou bien 0 n'a pas d'argument

Exercice 37

Les nombres complexes écrits sous forme exponentielle

$1.2e^{i\theta}$

$3.7e^{-i\theta}$

Exercice 38

Ecrivons sous forme exponentielle

a) $2\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)=2e^{i\frac{2\pi}{3}}$

b) $|1+i|=\sqrt{2}$ et $\text{Arg}(1+i)=\frac{\pi}{4}$donc $1+i=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

c)$\left|3+i\sqrt{3}\right|=2\sqrt{3}$ et $\text{Arg}\left(3+i\sqrt{3}\right)=\frac{\pi}{6}$donc $3+i\sqrt{3}=2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}$

Exercice 39

Écrivons sous forme trigonométrique

1) $\frac{\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}}{\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}}=\frac{e^{i\frac{\pi}{12}}}{e^{i\frac{2\pi}{3}}}=e^{i\left(\frac{\pi}{12}-\frac{2\pi}{3}\right)}=e^{-i\frac{7\pi}{12}}=\cos\left(-\frac{7\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\frac{7\pi}{12}\right)$

2) $\frac{1+i\sqrt{3}}{1+i}=\frac{2e^{i\frac{\pi}{12}}}{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}}=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)$

3) $\frac{\sin\frac{\pi}{12}-i\cos\frac{\pi}{12}}{\sin\frac{\pi}{12}+i\cos\frac{\pi}{12}}=\frac{\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)-i\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)}{\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)}=\frac{e^{-i\frac{5\pi}{12}}}{e^{i\frac{5\pi}{12}}}=e^{-i\frac{5\pi}{6}}=\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$

4)$-2\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)=2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$

Exercice 40

Écrivons sous forme trigonométrique

1)$\left(1+i\sqrt{3}\right)^2=\left(2e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^2=4e^{i\frac{2\pi}{3}}=4\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$

2)$\left(\frac{\sqrt{3}+i}{1+i}\right)^3=\left(\frac{2e^{i\frac{\pi}{6}}}{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}\right)^3=\left(\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{12}}\right)^3=2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}=2\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\right.$
$\left.i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$

3)$\left(\frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{1-i}\right)^3=\left(\frac{2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}}{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}\right)^3=\left(2e^{i\frac{\pi}{12}}\right)^3=8e^{i\frac{\pi}{4}}=8\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$

Exercice 41

a)$(\cos x+i\sin x)^2=\cos 3x+i\sin 3x$

$$=\cos^3 x+3i\cos^2 x\sin x-3\cos x\sin^2 x-i\sin^3 x$$

$$= \cos^3 x - 3\cos x \sin^2 x + i(3\cos^2 x \sin x - \sin^3 x)$$

Par identification on a :

$\cos 3x = \cos^3 x - 3\cos x \sin^2 x$

b) On a $\cos 2x = 1 - \sin^2 x$ donc

$\cos 2x + \cos 3x = 1 - \sin^2 x + \cos^3 x - 3\cos x \sin^2 x = 1 + \cos^3 x - \sin^2 x\,(2 + 3\cos x)$

Exercice 42

Écrivons sous forme algébrique

1) $\dfrac{e^{i\frac{\pi}{3}} + e^{-i\frac{\pi}{3}}}{2} = \cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2}$

2) $\dfrac{e^{i\frac{\pi}{6}} - e^{-i\frac{\pi}{6}}}{2i} = \sin\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{2}$

3) $e^{i\frac{3\pi}{4}} + e^{-i\frac{3\pi}{4}} = 2\cos\dfrac{3\pi}{4} = -2 \times \dfrac{\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2}$

Exercice 43

Écrivons sous forme trigonométrique

1) $e^{i\theta} + 1 = e^{i\frac{\theta}{2}}e^{i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}} \times e^{-i\frac{\theta}{2}} = e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{i\frac{\theta}{2}} + e^{-i\frac{\theta}{2}}\right) = 2\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) \times e^{i\frac{\theta}{2}}$

Comme $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) > 0$ alors

$e^{i\theta} + 1 = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\left(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}\right)$

2) $e^{i\theta} - 1 = e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}}\right) = 2i\left(\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) \times e^{i\frac{\theta}{2}} = 2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2}\right)}$

Or $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) > 0$ donc

$$e^{i\theta} - 1 = 2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\left[\cos\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{2}\right)\right]$$

3)$e^{-i\theta}+1=e^{-i\frac{\theta}{2}}\left(e^{i\frac{\theta}{2}}+e^{-i\frac{\theta}{2}}\right)=2\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)\times e^{-i\frac{\theta}{2}}=$
$2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\left(\cos\left(-\frac{\theta}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\theta}{2}\right)\right)$

Exercice 44

Linéarisons

1) $\cos^3 x=\left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^3=\frac{1}{8}\left(e^{i3x}+3e^{i2x}e^{-i}+3e^{ix}e^{-i2x}+e^{-i3x}\right)$

$=\frac{1}{8}\left[e^{i3x}+e^{-i3x}+3\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)\right]=\frac{1}{8}(2\cos 3x+3\cos x)$

$=\frac{1}{4}\cos 3x+\frac{3}{8}\cos x$

2) $\sin^2 x\cos^2 x=\left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^2\left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^2=-\frac{1}{8}\left(e^{i2x}-e^{-i2x}\right)^2$

$=-\frac{1}{8}(2\cos 4x-2)=-\frac{1}{4}\cos 4x+\frac{1}{4}$

3) $\cos^4 x=\left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^4=\frac{1}{16}\left[e^{i4x}+e^{-i4x}+4\left(e^{i2x}+e^{-i2x}\right)+6\right]$

$=\frac{1}{16}(2\cos 4x+8\cos 2x+6)$

4)$\sin^5 x=\left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^5=\frac{1}{32i}\left[e^{i5x}-e^{-i5x}-5\left(e^{i3x}+e^{-i3x}\right)+\right.$
$\left.10\left(e^{i2x}-e^{-i2x}\right)\right]$

$=\frac{1}{32i}(2i\sin 5x-10i\sin 3x+20i\sin 2x)$

$=\frac{1}{16}\sin 5x-\frac{5}{16}\sin 3x+\frac{5}{8}\sin 2x$

3. RESOLUTION D’EQUATION DANS $\mathbb{C}$

Exercice 45

Déterminons les racines carrées de chacun des nombres suivants

1) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 - y^2 = 0 \\ 2xy = 1 \end{cases}$

$x^2 = \frac{1}{2}$ soit $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Si $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et si $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Les racines carrées de i sont $\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$

2) $\begin{cases} x^2 + y^2 = \sqrt{2} \\ x^2 - y^2 = 1 \\ 2xy = 1 \end{cases}$

$x^2 = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$ soit $x = \frac{\sqrt{1+\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}$ ou $x = -\frac{\sqrt{1+\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}$

Si $x = \frac{\sqrt{1+\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}$; $y = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{1+\sqrt{2}}}$ et si $x = -\frac{\sqrt{1+\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}$; $y = -\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{1+\sqrt{2}}}$

Les racines carrées de $1 + i$ sont $\frac{\sqrt{1+\sqrt{2}}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{1+\sqrt{2}}}i$ et $-\frac{\sqrt{1+\sqrt{2}}}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{1+\sqrt{2}}}i$

3) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ x^2 - y^2 = \sqrt{3} \\ 2xy = 1 \end{cases}$

$x^2 = \frac{2+\sqrt{3}}{2}$ Soit $x = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\sqrt{2}}$ ou $x = -\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\sqrt{2}}$

Si $x = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\sqrt{2}}$; $y = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2}}$ et si $x = -\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\sqrt{2}}$; $y = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2}}$

Les racines carrées de $\sqrt{3} + i$ sont $\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2}}i$ et $-\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2}}i$

Exercice 46 (le traiter après l'étude la racine nième d'un nombre complexe)

Exercice 47

Déterminons les racines cubiques de chacun des nombres complexes suivants

1) $1 = e^{i0}$ donc $z_k = e^{i\frac{2k\pi}{3}}$; $k \in \{0; 1; 2\}$

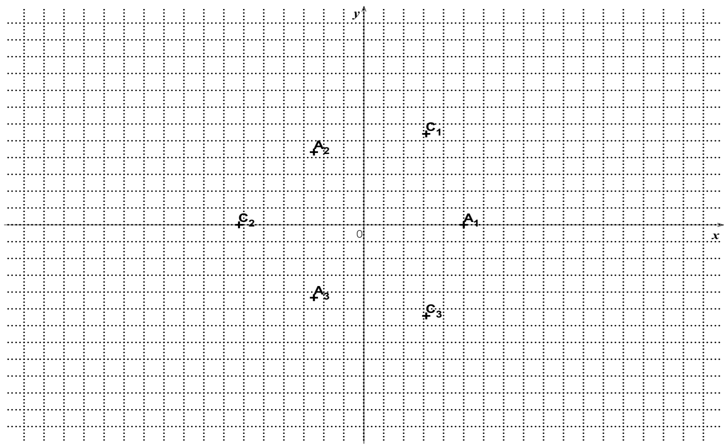
Les racines cubiques de 1 sont $1; -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

2)$1 - i = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$ donc $z_k = 2^{\frac{1}{6}}e^{i\left(-\frac{\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3}\right)}$; $k \in \{0; 1; 2\}$

Les racines cubiques de $1 - i$ sont $2^{\frac{1}{6}}e^{-i\frac{\pi}{12}}$; $2^{\frac{1}{6}}e^{i\frac{7\pi}{12}}$; $2^{\frac{1}{6}}e^{-i\frac{9\pi}{12}}$

3)$-2 = 2e^{i\pi}$ donc $z_k = 2^{\frac{1}{3}}e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\frac{2k\pi}{3}\right)}$; $k \in \{0; 1; 2\}$

Les racines carrées de -2 sont $2^{\frac{1}{3}}e^{i\frac{\pi}{3}}$; $2^{\frac{1}{3}}e^{i\pi}$ et $2^{\frac{1}{3}}e^{-i\frac{\pi}{3}}$



Exercice 48

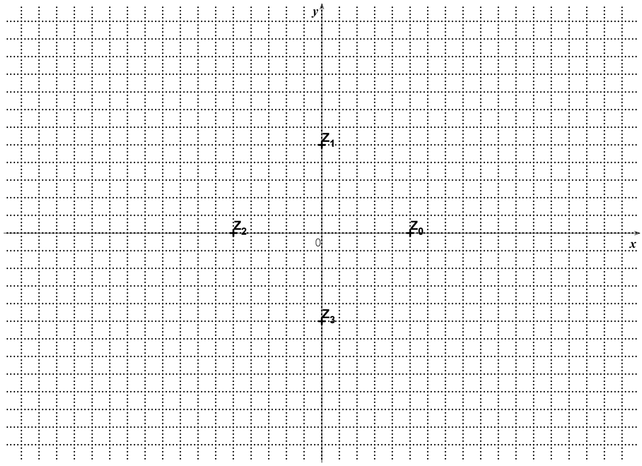
$1 = e^{i0}$ donc les racines quatrième de 1 sont les nombres complexes de la forme

$z_k = e^{i\frac{2k\pi}{4}}$; $k \in \{0; 1; 2; 3\}$

Soit $z_k = e^{i\left(\frac{k\pi}{2}\right)}$; $k \in \{0; 1; 2; 3\}$

Les racines quatrièmes de 1 sont : $1; e^{i\frac{\pi}{2}}$; $e^{i\pi}$; $e^{-i\frac{\pi}{2}}$

C'est-à-dire $1; i; -1; -i$



Exercice 49

Les racines n-ième d'un nombre complexe non nul sont les nombres complexes

de la forme $Z_k = \sqrt[n]{r}e^{i\left(\frac{\alpha}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)}$; $k \in \{0; 1; 2; \ ; \dots \dots . . ; n-1\}$

On a $Z_0 = \sqrt[n]{r}e^{i\left(\frac{\alpha}{n}+2\times\frac{0\pi}{n}\right)}$; $Z_1 = \sqrt[n]{r}e^{i\left(\frac{\alpha}{n}+\frac{2\pi}{n}\right)}$;.............. ; $Z_{n-1} = \sqrt[n]{r}e^{i\left(\frac{\alpha}{n}+\frac{2(n-1)\pi}{n}\right)}$

$$Z_0 + Z_1 + \cdots + Z_{n-1} = \sqrt[n]{r}e^{i\frac{\alpha}{n}}\left(1 + e^{i\frac{2\pi}{n}} + \left(e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)^2 + \cdots + \left(e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)^{n-1}\right)$$

$$= \sqrt[n]{r}e^{i\frac{\alpha}{n}} \times \frac{1-\left(e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)^n}{1-e^{i\frac{2\pi}{n}}} = \sqrt[n]{r}e^{i\frac{\alpha}{n}} \times \frac{1-1}{1-e^{i\frac{2\pi}{n}}} = 0$$

Exercice 50

Vérifions

1. a) on a : $1 + j + \bar{j} = 0$ donc $\bar{j} = -1 - j$

   b) $j^2 = \bar{j}$ donc $j^3 = j\bar{j}$

Or $j^3 = 1$ donc $j\bar{j} = 1$

c) $j^3 = 1$ donc $(j^3)^2 = 1^2$ d'où $j^6 = 1$

2) $j^{2021} = j^{3\times 573+1} = j$ car $j^3 = 1$

Exercice 51

Résolvons dans $\mathbb{C}$

1) $\Delta = -3 = \left(i\sqrt{3}\right)^2$ ainsi $Z = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ ou $Z = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$

$S_{\mathbb{C}} = \left\{\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}; \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right\}$

2) $\Delta = 3 + 4i = (2+i)^2$ ainsi $Z = \frac{4-3i+2+i}{2}$ ou $Z = \frac{4-3i-2-i}{2}$

$Z = 3 - i$ ou $Z = 1 - 2i$

$S_{\mathbb{C}} = \{3 - i; 1 - 2i\}$

3) $\Delta = 3 - 4i = (2-i)^2$ ainsi $Z = \frac{i\sqrt{3}+2-i}{2i}$ ou $Z = \frac{i\sqrt{3}-2+i}{2i}$

$Z = \frac{-1+\sqrt{3}}{2} - i$ ou $Z = \frac{1+\sqrt{3}}{2} + i$

$S_{\mathbb{C}} = \left\{\frac{-1+\sqrt{3}}{2} - i; \frac{1+\sqrt{3}}{2} + i\right\}$

4. NOMBRE COMPLEXE ET CONFIGURATION DU PLAN

Exercice 52

1) $|Z - i| = 2 \Leftrightarrow |Z_M - Z_A| = 2$ où $Z_A = i$

L'ensemble des points M est le cercle de centre A et de rayon 2

2) $|Z - 1 + 2i| = |Z + 2 - i| \Leftrightarrow |Z - (1-2i)| = |Z - (-2+i)|$

$\Leftrightarrow |Z_M - Z_B| = |Z_M - Z_C| \Leftrightarrow BM = CM$

Où $Z_B = 1 - 2i$ et $Z_C = -2 + i$

L'ensemble des points M est la médiatrice du segment $[BC]$.

Exercice 53

On a :

$\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} = \frac{\sqrt{3}+i}{2i} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

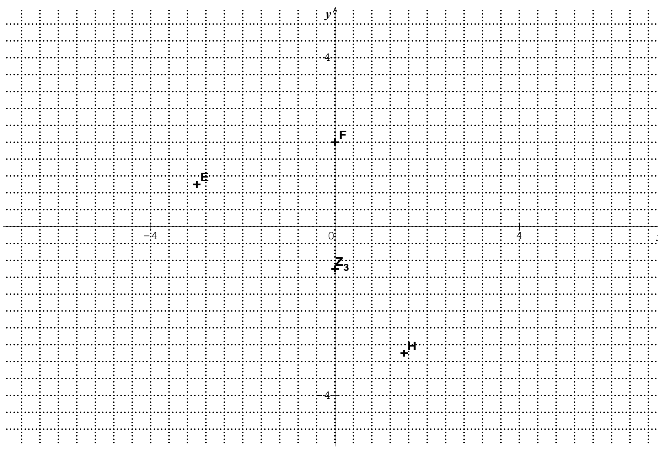
On a $\left|\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}\right| = \left|\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right| = 1 \Leftrightarrow \frac{AC}{AB} = 1 \Leftrightarrow AB = AC$ et $\text{Arg}\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right) = -\frac{\pi}{3}$

Donc ABC est un triangle équilatéral de sens indirect.

EXERCICES DE RENFORCEMENT / D'APPROFONDISSEMENT

Exercice 1

1)



2)$Z_{\overrightarrow{EF}} = 2i + 3 - i = 3 + i$

$Z_{\overrightarrow{FH}} = \frac{3}{2} - 3i - 2i = \frac{3}{2} - 5i$

$Z_{\overrightarrow{HE}} = -3 + i - \frac{3}{2} + 3i = -\frac{9}{2} + 4i$

$Z_{2\overrightarrow{FE}} = 2(-3 + i - 2i) = -6 - 2i$

3)I a pour affixe $\frac{-3+i+2i}{2}$ soit $\frac{-3+3i}{2}$

Exercice 2

Écrivons sous forme trigonométrique

1)$ab = 6\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{12}\right)\right) = 6\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

$ab^2 = 18\left(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}\right)$

$a^2b = 12\left(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}\right)$

$\frac{b}{a^2} = \frac{3}{4}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right)$

2)Déduisons -en la forme algébrique

$ab = 6\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 3 + 3i\sqrt{3}$

$\frac{a}{b} = \frac{a^2b}{ab^2} = \frac{12}{18}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = \frac{2}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{3}i$

Exercice 3

1)$|U| = \sqrt{2}$ et $\arg(1 - i) = \frac{\pi}{4}$

$|V| = 2$ et $\arg\left(\sqrt{3} - i\right) = -\frac{\pi}{6}$

2.a) $U.V = (1 - i)\left(\sqrt{3} - i\right) = \sqrt{3} - i + i\sqrt{3} + 1 = 1 + \sqrt{3} + i\left(-1 + \sqrt{3}\right)$

D'autre part $UV = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$

2.b) on a : $UV = UV$ donc $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ et $\sin\frac{\pi}{12} = \frac{-1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$

Exercice 4

a)$(\cos x + i\sin x)^4 = \cos 4x + i\sin^4 x$

$= \cos^4 x - 6\cos^2 x \sin^2 x + \sin^4 x + i(4\cos^3 x \sin x - 4\cos x \sin^3 x)$

Ainsi $\cos 4x = \cos^4 x - 6\cos^2 x \sin^2 x + \sin^4 x$

b) $\cos 5x + \cos 6x$

$= \cos^5 x - 10\cos^3 x \sin^2 x - 5\cos x \sin^4 x + \cos^6 x - 15\cos^4 x \sin^2 x - 15\cos^2 x \sin^4 x - \sin^6 x$

c)$\sin x - \sin 2x + \sin 3x - \sin 4x$

$= \sin x - 2\sin x \cos x + 3\cos^2 x \sin x - \sin^3 x - 4\cos^3 x \sin x + 4\cos x \sin^3 x$

Exercice 5

Linéarisons

1) $\cos^4 x = \frac{1}{16}(2\cos 4x + 8\cos 2x + 6)$

$\cos^2 x \sin^3 x = -\frac{1}{32}(2\sin 5x - 2\sin 3x - 4\sin x)$

$\cos^5 x - \sin^4 x = \frac{1}{2^4}\cos 5x + \frac{5}{2^4}\cos 3x + \frac{5}{2^3}\cos x - \frac{1}{2^3}\cos x - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{3}{2^3}$

2) Déterminons les racines carrées de chacun des nombres complexes suivants

$Z = 2i$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ x^2 - y^2 = 0 \\ 2xy = 2 \end{cases}$$

$x^2 = 1$ d'où $x = 1$ ou $x = -1$

Si $x = 1$, $y = 1$; si $x = -1$, $y = -1$

Les racines carrées de $2i$ sont $1 + i$ et $-1 - i$

$Z = 3 + 4i$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x^2 - y^2 = 3 \\ xy = 2 \end{cases}$$

$x^2 = 4$. D'où $x = 2$ ou $x = -2$

Si $x = 2$, $y = 1$; si $x = -2$, $y = -1$

Les racines carrées de $3 + 4i$ sont $2 + i$ et $-2 - i$

$Z = 8 + 6i$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ x^2 - y^2 = 8 \\ xy = 3 \end{cases}$$

$x^2 = 9$ d'où $x = 3$ ou $x = -3$

Si $x = 3$, $y = 1$; si $x = -3$, $y = -1$

Les racines carrées de $8 + 6i$ sont $3 + i$ et $-3 - i$

$Z = 5 - 12i$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ x^2 - y^2 = 5 \\ xy = -6 \end{cases}$$

$x^2 = 9$ d'où $x = 3$ ou $x = -3$

Si $x = 3$, $y = -2$; si $x = -3$, $y = 2$

Les racines carrées de $5 - 12i$ sont $3 - 2i$ et $-3 + 2i$

$Z = -7 + 24i$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x^2 - y^2 = -7 \\ xy = 12 \end{cases}$$

$x^2 = 9$ d'où $x = 3$ ou $x = -3$

Si $x = 3$, $y = 4$; si $x = -3$, $y = -4$

Les racines carrées de $-7+24i$ sont $3+4i$ et $-3-4i$

Exercice 6

1) Résolvons dans $\mathbb{C}$

$\Delta = \left(2^{\theta+1}\cos\theta\right)^2 = 4\times 2^{2\theta} = \left(i2^{\theta+1}\sin\theta\right)^2$

$Z = 2^{\theta}(\cos\theta + i\sin\theta)$ ou $Z = 2^{\theta}[\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)]$

$S_{\mathbb{C}} = \left\{2^{\theta}(\cos\theta + i\sin\theta)\,;2^{\theta}[\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)]\right\}$

2)OAB est équilatéral $\Leftrightarrow \frac{2^{\theta}e^{i\theta}}{2^{\theta}e^{-i\theta}} = e^{\pm i\frac{\pi}{3}} \Leftrightarrow e^{i2\theta} = e^{\pm i\frac{\pi}{3}} \Leftrightarrow 2\theta = \frac{\pi}{3}$ ou $2\theta = -\frac{\pi}{3}$

$\Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$ ou $\theta = -\frac{\pi}{6}$

Exercice 7

1) Résolvons dans $\mathbb{C}$

Soit a cette solution réelle on a :

$a^3 - a^2 - a - 2 + i(2-a) = 0$

$2 - a = 0$ et $a^3 - a^2 - a - 2 = 0$ donc $a = 2$

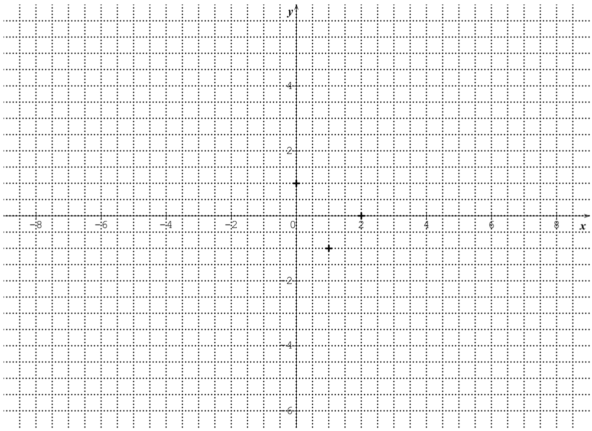
Ainsi $P(Z) = (Z-2)(Z^2 + Z + (1-i))$

$\Delta = -3 + 4i = (1+2i)^2$

$Z = 1 + i$ ou $Z = -i$

$S_{\mathbb{C}} = \{\,2\,;-1-i\,;\,i\,\}$

2.a)



2.b) $\frac{Z_A - Z_C}{Z_B - Z_C} = \frac{2-i}{-1-2i} = \frac{-1+2i}{1+i}$ = i, d'où le résultat

Exercice 8

1) on a : $(Z^2+1)(Z^2-4) = Z^4 - 3Z^2 - 4$

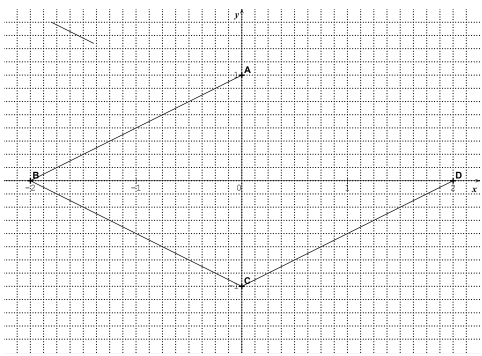
2) Résolvons dans $\mathbb{C}$

$(E) \Leftrightarrow Z^2+1=0$ ou $Z^2-4=0 \Leftrightarrow Z^2=-1$ ou $Z^2=4$

$\Leftrightarrow Z=i$ ou $Z=-i$ ou $Z=2$ ou $Z=-2$

$S_{\mathbb{C}} = \{i; -i; 2; -2\}$

3) figure



4)$Z_{\overrightarrow{BA}} = 2 + i$ et $Z_{\overrightarrow{CD}} = 2 + i$ donc $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$

D'où ABCD est un parallélogramme de plus $\frac{Z_A - Z_C}{Z_D - Z_B} = \frac{2i}{4} = \frac{1}{2}i$ et $\frac{1}{2}i \ \in i\mathbb{R}^*$

Donc $(AC) \perp (BD)$ par suite ABCD est un losange.

Exercice 9

Soit ib cette solution imaginaire pure

on a :$-b^2 + 2b + i(-b^3 + 5b^2 - 10b + 8) = 0$ d'où $b = 2$

Ainsi $P(Z) = (Z - 2i)(Z^2 + (1 - 3i)Z - 4)$

$\Delta = 8 - 6i = (-3 + i)^2$

$Z = \frac{-1+3i-3+i}{2}$ ou $Z = \frac{-1+3i+3-i}{2}$

$Z = -2 + 2i$ ou $Z = 1 + i$

$S_{\mathbb{C}} = \{2i; -2 + 2i; 1 + i\}$

Exercice 10

1) Déterminons les racines cubiques de 1

On a : $Z^3 = 1$

$S_{\mathbb{C}} = \left\{1; -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$

Les racines cubiques de 1 sont donc 1 ; $-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

2)$(2 - 1)^3 = 8 - 12i - 6 + i = 2 - 11i$

3)Déduisons Les racines cubiques de $2 - 11i$

On a $Z^3 = 2 - 11i \Leftrightarrow Z^3 = (2 - 1)^3 \Leftrightarrow \left(\frac{Z}{2-i}\right)^3 = 1$ d'après 1)

$Z = (2 - i) \times 1$ ou $Z = (2 - i)\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ou $Z = (2 - i)\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$S_{\mathbb{C}} = \left\{2 - i; \frac{-2+\sqrt{3}}{2} + \left(\frac{1}{2} + \sqrt{3}\right)i; \frac{-2-\sqrt{3}}{2} + \left(\frac{1}{2} - \sqrt{3}\right)i\right\}$

Les racines cubiques de $2-11i$ sont $2-i$; $\frac{-2+\sqrt{3}}{2}+\left(\frac{1}{2}+\sqrt{3}\right)i$ et $\frac{-2-\sqrt{3}}{2}+\left(\frac{1}{2}-\sqrt{3}\right)i$

Exercice 11

1)$a=\frac{9}{2}\times 2\sqrt{3}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)=9\sqrt{3}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$

2.a)On a $a=9\sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{3}}$

Les racines cinquièmes de a sont les nombres complexes de la forme

$$Z_k=\sqrt[5]{9\sqrt{3}}e^{i\left(-\frac{\pi}{15}+\frac{2k\pi}{5}\right)}\ ;\ k\in\{0;1;2;3;4\}$$

b) représentation graphique des racines cinquièmes de a

Exercice 12

1)$Z\in\mathbb{R}\Leftrightarrow \arg(Z)=k\pi$; $k\in Z$

$$\Leftrightarrow \arg\left(\frac{2(Z-2)}{Z-i}\right)=k\pi\quad \Leftrightarrow \arg\left(\frac{(Z-2)}{Z-i}\right)=k\pi$$

$$\Leftrightarrow \arg\left(\frac{Z-z_B}{Z-z_A}\right)=k\pi\ \ ou\ \ Z_A=i \text{ et } Z_B=2$$

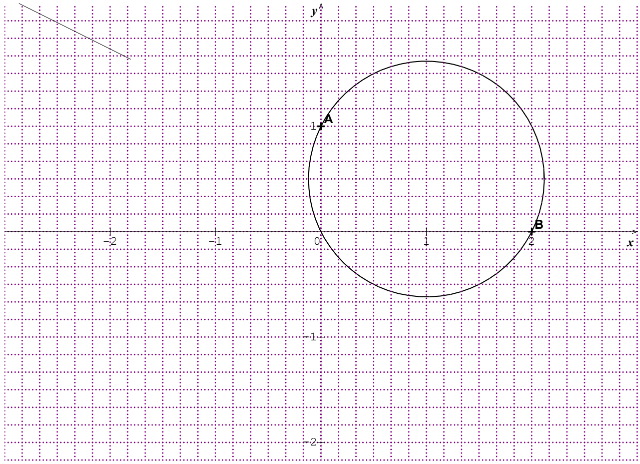
$$\Leftrightarrow \text{mes}\left(\widehat{\overrightarrow{MA}\,;\overrightarrow{MB}}\right)=k\pi$$

Ainsi l'ensemble des points M est la droite (AB) privée des points $A\ et\ B$

2)$Z\in i\mathbb{R}\Leftrightarrow \arg(Z)=\frac{\pi}{2}+k\pi$

$$\Leftrightarrow \text{mes}\left(\widehat{\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}}\right)=\frac{\pi}{2}+k\pi\ ;\ k\in Z$$

L'ensemble des points M est le cercle de diamètre AB privé des points A



Exercice 13

$f(Z) = \frac{iZ}{Z+i}$

1)$f(b) = 1 + 2i \Leftrightarrow \frac{ib}{b+i} = 1 + 2i \Leftrightarrow b(1+i) = 2 - i \Leftrightarrow b = \frac{2-i}{1+i} = \frac{1-3i}{2}$

2)$f(Z) - i = \frac{iZ}{Z+i} - i = \frac{1}{Z+i}$

Or $|f(Z) - i| = \frac{1}{|Z+i|} = \frac{1}{r}$ et $\arg(f(Z) - i)$ =$\arg\left(\frac{1}{Z+i}\right) = -\arg(Z+i) = -a$

Ainsi $f(Z) - i = \frac{1}{r}(\cos(-a) + i\sin(-a))$

3.a)$Z_A = -i$

$|f(Z) - i| = \sqrt{2} \Leftrightarrow |f(Z) - Z_A| = \sqrt{2} \Leftrightarrow \left|\frac{1}{Z+i}\right| = \sqrt{2} \Leftrightarrow |Z+i| = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow$
$|Z - Z_A| = \frac{\sqrt{2}}{2}$

L'ensemble (C) des points M est le cercle de centre A et de rayon $\frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\arg(f(Z) - i) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \Leftrightarrow \arg\left(\frac{1}{Z+i}\right) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \Leftrightarrow -\arg(Z+i) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$

$\Leftrightarrow \arg(Z - Z_A) = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \Leftrightarrow \mathrm{Mes}(\widehat{\vec{u}; \overrightarrow{AM}}) = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi\ ; k \in \mathbb{Z}$

L'ensemble (Γ) des points M est la demi-droite de repère $(A;\overrightarrow{e_1})$ privée de A

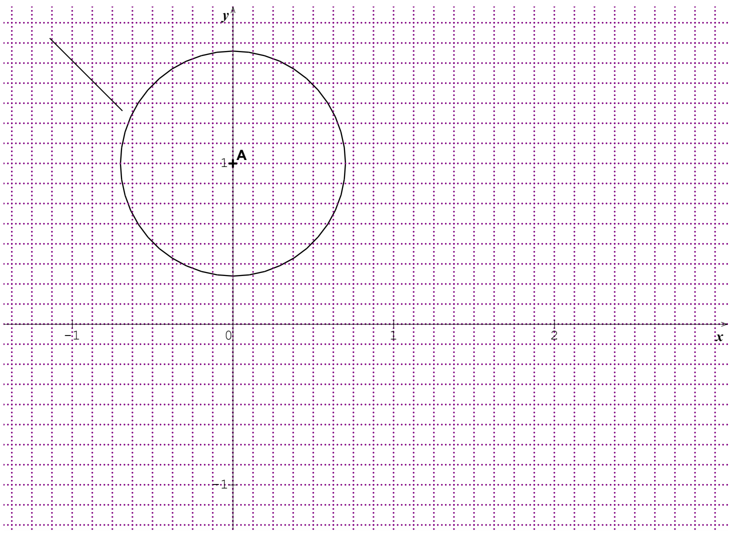
avec $\text{mes}(\widehat{\vec{u};\overrightarrow{e_1}}) = -\frac{\pi}{4}$

c) on a : $|f(b) - i| = |1 + 2i - i| = |1 + i| = \sqrt{2}$ donc $B \in (C)$

d'autre part $\arg(f(b) - i) = \arg(1 + i) = \frac{\pi}{4}$ donc $B \in (\Gamma)$

par suite B *appartient* à (C) et à (Γ)

Construction de (C) et à (Γ)



Exercice 14

Démontrons que Z est un réel

$|1 + iZ| = |1 - iZ| \Leftrightarrow |1 + iZ|^2 = |1 - iZ|^2 \Leftrightarrow$
$(1 - iZ)(1 - i\bar{Z}) = (1 - iZ)(1 + i\bar{Z})$

$\Leftrightarrow 1 - i\bar{Z} + iZ + Z\bar{Z} = 1 + i\bar{Z} - iZ + Z\bar{Z} \Leftrightarrow 2i\bar{Z} - 2iZ = 0 \Leftrightarrow$
$2i(\bar{Z} - Z) = 0$

$\Leftrightarrow \bar{Z} - Z = 0 \Leftrightarrow \bar{Z} = Z$

Donc $Z \in \mathbb{R}$

Exercice 15

Ecrivons sous forme algébrique

1) $2e^{\left(-i\frac{\pi}{4}\right)} \times e^{i\left(\frac{3\pi}{4}\right)} = 2e^{i\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right)} = 2e^{i\frac{\pi}{2}} = 2i$

2) $\frac{2\,e^{i\left(\frac{\pi}{4}\right)}}{e^{-i\left(\frac{3\pi}{4}\right)}} = \frac{2}{3}e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{3\pi}{4}\right)} = \frac{2}{3}e^{i\pi} = -\frac{2}{3}$

3) $\frac{2\,e^{-i\frac{\pi}{3}}}{3\,e^{-i\left(\frac{5\pi}{6}\right)}} = \frac{2}{3}e^{i\left(-\frac{\pi}{3}+\frac{5\pi}{6}\right)} = \frac{2}{3}e^{i\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3}i$

Exercice 16

Écrivons sous forme trigonométrique chacun des nombres suivants

1) $\frac{\tan\theta - i}{\tan\theta + i} = \frac{\sin\theta - i\cos\theta}{\sin\theta - i\cos\theta} = \frac{\cos\theta + i\sin\theta}{-\cos\theta + i\sin\theta} = \frac{\cos\theta + i\sin\theta}{\cos(\pi-\theta)+i\sin(\pi-\theta)} = \frac{e^{i\theta}}{e^{i(\pi-\theta)}} = e^{i(2\theta-\pi)}$

$$= \cos(2\theta - \pi) + i\sin(2\theta - \pi)$$

2) $\frac{1}{1+i\tan\theta} = \frac{\cos\theta}{\cos\theta + i\sin\theta} = \cos\theta\, e^{-i\theta} = \cos\theta\,(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta))$ car $\cos\theta > 0$

3) $e^{i\theta} + e^{2i\theta} = e^{i\theta}(1 + e^{i\theta}) = e^{i\theta}\left(e^{i\frac{\theta}{2}}e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}}e^{i\frac{\theta}{2}}\right) =$
$e^{i\theta}\left[e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{i\frac{\theta}{2}} + e^{-i\frac{\theta}{2}}\right)\right]$

$= 2\cos\theta\, e^{i\frac{3\theta}{2}}$ comme $\cos\theta > 0$, alors

$$e^{i\theta} + e^{2i\theta} = 2\cos\theta\left(\cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) + i\sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right)$$

4) $\frac{1+i\tan\theta}{1-i\tan\theta} = \frac{\cos\theta + i\sin\theta}{\cos\theta - i\sin\theta} = \frac{e^{i\theta}}{e^{-i\theta}} = e^{2i\theta} = \cos(2\theta) + i\sin(2\theta)$

Exercice 17

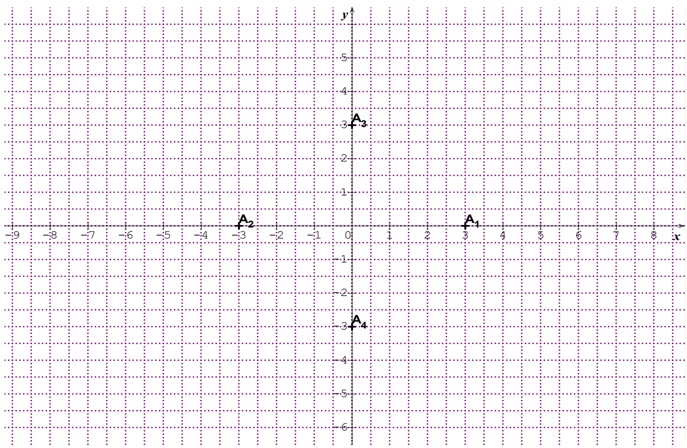
Déterminons les racines quatrième de 81

On a : $Z^4 = 81 \Leftrightarrow Z^4 = 3^4 \Leftrightarrow \left(\frac{Z}{3}\right)^4 = 1$ or les racines quatrième de 1 sont $1; -1; i$ et $-i$

Donc $Z = 3 \times 1$ ou $Z = 3 \times (-1)$ ou $Z = 3 \times i$ ou $Z = 3 \times (-i)$

Les racines quatrièmes de 81 sont $3; -3; 3i$ et $-3i$

Construction des points images



Exercice 18

1) Déterminons les racines n-ième de $-i$

On a $-i = e^{-i\frac{\pi}{2}}$ ainsi $Z^n = e^{-i\frac{\pi}{2}}$

$$Z_k = e^{i\left(-\frac{\pi}{2n}+\frac{2k\pi}{n}\right)}; k \in \{0; 1; 2; \dots \dots; n-1\}$$

Déterminons les racines n-ième de $1 + i$

On a : $1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ ainsi $Z^n = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

$$Z_k = 2^{\frac{1}{2n}}e^{i\left(\frac{\pi}{4n}+\frac{2k\pi}{n}\right)}; k \in \{0; 1; 2; \dots \dots; n-1\}$$

2.a) calculons

$$(9+i)^2 = 81 - 1 + 18i = 80 + 18i$$

2.b) Résolvons dans $\mathbb{C}$

$(E) \Leftrightarrow Z^2 + (7-1)Z - 8 - 8i = 0$ avec $Z = z^3$

$\Delta = (7-i)^2 + 4(8+8i) = 49 - 1 - 14i + 32 + 32i = 80 + 18i = (9+i)^2$

Ainsi $Z = \frac{-7+i+9+i}{2} = 1 + i$ ou $Z = \frac{-7+i-9-i}{2} = -8$

De plus on a :

$(E_1) : z^3 = 1 + i$ et $(E_2) : z^3 = -8$

Résolvons (E_1)

$(E_1): z^3 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ donc $Z_k = 2^{\frac{1}{6}}e^{i\left(\frac{\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3}\right)}; k \in \{0; 1; 2\}$

D'où $Z = 2^{\frac{1}{6}}e^{i\frac{\pi}{12}}$ ou $Z = 2^{\frac{1}{6}}e^{i\frac{3\pi}{4}}$ ou $Z = 2^{\frac{1}{6}}e^{i\frac{17\pi}{12}}$

Résolvons (E_2)

$(E_1): z^3 = 2^3e^{i\pi}$ donc $Z_k = 2e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\frac{2k\pi}{3}\right)}; k \in \{0; 1; 2\}$

D'où $Z = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ ou $Z = 2e^{i\pi}$ ou $Z = 2e^{i\frac{5\pi}{3}} = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$

$S_{\mathbb{C}} = \left\{ 2^{\frac{1}{6}}e^{i\frac{\pi}{12}};\ 2^{\frac{1}{6}}e^{i\frac{3\pi}{4}}\ ; 2^{\frac{1}{6}}e^{i\frac{17\pi}{12}}; 2e^{i\frac{\pi}{3}}\ ; 2e^{i\pi}\ ; 2e^{-i\frac{\pi}{3}} \right\}$

Exercice 19

Déterminons les entiers naturels tels que $\left(1 + i\sqrt{3}\right)^n$ soit un nombre réel positif. On a $\left(1 + i\sqrt{3}\right)^n = 2^n e^{i\frac{n\pi}{3}}$

Donc $\left(1 + i\sqrt{3}\right)^n \in \mathbb{R}_+ \Leftrightarrow \frac{n\pi}{3} = 2k\pi \Leftrightarrow n = 6k\ ; k \in \mathbb{Z}_+$

$n = 6k\ ; k \in \mathbb{Z}_+$

Exercice 20

$$\frac{1+Z}{1-Z} = -\overline{\left(\frac{1+Z}{1-Z}\right)} \Leftrightarrow (1+Z)(1-\bar{Z}) = (1-Z)(-1-\bar{Z})$$

$$\Leftrightarrow 1-\bar{Z}+Z-Z\bar{Z} = -1+\bar{Z}+Z+Z\bar{Z} \Leftrightarrow 2Z\bar{Z} = 2$$

$$\Leftrightarrow Z\bar{Z} = 1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{Z\bar{Z}} = 1$$

$$\Leftrightarrow |Z| = 1$$

Exercice 21

1.a) $Z = Re(Z) + i\, Im(Z)$

On a : $|\,Z\,| = \sqrt{\left(Re(Z)\right)^2 + \left(Im(Z)\right)^2}$ et $|\,Z\,| \geq 0$

Si $Re(Z) \leq 0$, alors $Re(Z) \leq |\,Z\,|$

Si $Re(Z) \geq 0$, alors on a

$|\,Z\,|^2 - \left(Re(Z)\right)^2 = \left(Re(Z)\right)^2 + \left(Im(Z)\right)^2 - \left(Re(Z)\right)^2 = \left(Im(Z)\right)^2$

Or $\left(Im(Z)\right)^2 \geq 0$ Donc $Re(Z) \leq |\,Z\,|$

Par suite pour tout nombre complexe Z on a : $Re(Z) \leq |\,Z\,|$

b) $Re(Z) = |\,Z\,|$ si $Re(Z) \geq 0$ et $\sqrt{\left(Re(Z)\right)^2 + \left(Im(Z)\right)^2} = Re(Z)$

d'où $Re(Z) \geq 0$ et $Im(Z) = 0$

2.a) on a : $|\,Z_1 + Z_2\,|^2 = (\,Z_1 + Z_2\,)\,(\,\overline{Z_1} + \overline{Z_2}\,)$

$= |\,Z_1\,|^2 + |Z_2\,|^2 + 2\,Re(\,Z_1 \times \overline{Z_2}\,)$ (1)

Or d'après 1.a) on a : $Re(\,Z_1 \times \overline{Z_2}\,) \leq |\,Z_1 \times \overline{Z_2}|$ (2)

D'où $Re(\,Z_1 \times \overline{Z_2}\,) \leq |\,Z_1|\,|\,\overline{Z_2}|$

De(1) et (2) on obtient :

$$|\,Z_1\,|^2 + |Z_2\,|^2 + 2Re(\,Z_1 \times \overline{Z_2}\,) \leq |\,Z_1\,|^2 + |Z_2\,|^2 + 2|\,Z_1|\,|\,\overline{Z_2}|$$

$|\,Z_1 + Z_2\,|^2 \leq |\,Z_1\,|^2 + |Z_2\,|^2 + 2|\,Z_1|\,|\,\overline{Z_2}|$

$|\,Z_1 + Z_2\,|^2 \leq |\,Z_1\,|^2 + |Z_2\,|^2 + 2|\,Z_1|\,|\,Z_2|$

$|\,Z_1 + Z_2\,|^2 \leq (\,|\,Z_1\,| + |Z_2\,|\,)^2$

Par suite $|\,Z_1 + Z_2\,| \leq |\,Z_1\,| + |Z_2\,|$

b) Si $Z_2 = \lambda\, Z_1$ avec $\lambda > 0$

on a d'une part

$|\,Z_1 + Z_2\,| = |Z_1 + \lambda\, Z_1| = |1 + \lambda\,||\,Z_1| = (1 + \lambda\,)|\,Z_1|$

et d'autre part

$|\,Z_1\,| + |Z_2\,| = |Z_1| + |\lambda\, Z_1| = |Z_1| + |Z_1||\lambda\,| = |1 + \lambda\,||\,Z_1| = (1 + \lambda\,)|\,Z_1|$

Donc Si $Z_2 = \lambda\, Z_1$ avec $\lambda > 0$ alors $|\,Z_1 + Z_2\,| = |\,Z_1\,| + |Z_2\,|$

3.a) Pour $n = 2$ on a $|\,Z_1 + Z_2\,| \leq |\,Z_1\,| + |Z_2\,|$

Supposons qu'il existe un entier naturel $n \geq 2$ tels que

$|\,Z_1 + Z_2 + \,\ldots. + Z_n| \leq |\,Z_1\,| + |\,Z_2\,| + \cdots.. + |\,Z_n\,|$

et montrons que

$|\,Z_1 + Z_2 + \,\ldots. + Z_{n+1}\,| \leq |\,Z_1\,| + |\,Z_2\,| + \cdots.. + |\,Z_{n+1}\,|$

on a : $|\,Z_1 + Z_2 + \,\ldots. + Z_n| \leq |\,Z_1\,| + |\,Z_2\,| + \cdots.. + |\,Z_n\,|$

d'où $|\,Z_1 + Z_2 + \,\ldots. + Z_n| + |\,Z_{n+1}\,| \leq |\,Z_1\,| + |Z_2\,| + \cdots.. + |\,Z_n\,| + |\,Z_{n+1}\,|\,(1)$

or $|\,Z_1 + Z_2 + \,\ldots. + Z_{n+1}\,| \leq |\,Z_1 + Z_2 + \,\ldots. + Z_n| + |\,Z_{n+1}\,|\ (2)$

donc de (1) et (2) on déduis que

$|\,Z_1 + Z_2 + \,\ldots. + Z_{n+1}\,| \leq |\,Z_1\,| + |\,Z_2\,| + \cdots.. + |\,Z_{n+1}\,|$

En conclusion

Pour tout entier naturel $n \geq 2$, on a

$| Z_1 + Z_2 + \ \ldots . + Z_n | \leq \ | Z_1 | + | Z_2 | + \cdots . . + | Z_n |$

b) on suppose que $Z_1;\ Z_2;\ \ldots . et\ Z_n$ sont tous non nuls

S'il existe des réels $\lambda_1\ ;\ \lambda_2;\ \lambda_3 , \ldots . ,\ \lambda_n$ tous strictement positifs tels que pour tout

$k = 1, \ldots . , n$ on a $Z_k = \ \lambda_k\, Z_1$

d'une part $| Z_1 + Z_2 + \ \ldots . + Z_n | = | \lambda_1\, Z_1 + \ \lambda_2\, Z_1 + \ \ldots . + \ \lambda_n\, Z_1 |$

$= |(\lambda_1 + \ \lambda_2 + \ \ldots . + \ \lambda_n)\, Z_1 |$

$= (\lambda_1 + \ \lambda_2 + \ \ldots . + \ \lambda_n) | Z_1 |$

D'autre part $| Z_1 | + |Z_2 | + \cdots . . + | Z_n | = | \lambda_1\, Z_1 | + | \lambda_2\, Z_1 | + \cdots . . + | \lambda_n\, Z_1 |$

$= \ \lambda_1 | Z_1 | + \ \lambda_2 | Z_1 | + \cdots . . + \lambda_n | Z_1 |$

$= (\lambda_1 + \ \lambda_2 + \ \ldots . + \ \lambda_n) | Z_1 |$

Par suite $| Z_1 + Z_2 + \ \ldots . + Z_n | = \ | Z_1 | + | Z_2 | + \cdots . . + | Z_n |$

EXERCICE 22

1) L'impédance complexe Z est égale à

$$Z = Z_R + \ Z_L + Z_C = R + jLw + \frac{1}{jCw} = \ R + \left(- \ \frac{1}{2} + \ i\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\ Lw + \frac{-\frac{1}{2} - \ i\frac{\sqrt{3}}{2}}{Cw}$$

$$= \ R - \frac{Lw}{2} - \ \frac{1}{2Cw} + i\ \left(\frac{Lw\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2Cw}\right) = \frac{2CRw - LCw^2 - 1}{2Cw} + i\ \frac{LCw^2\sqrt{3} - \sqrt{3}}{2Cw}$$

La partie réelle de l'impédance complexe Z est donc

$$R - \frac{Lw}{2} - \ \frac{1}{2Cw} = \frac{2CRw \ - \ LCw^2 \ - \ 1}{2Cw}$$

2) la résistance X correspond à la partie imaginaire de Z

On a donc $X = \frac{Lw\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2Cw} = \frac{LCw^2\sqrt{3} - \sqrt{3}}{2Cw}$

3) L'impédance de l'association correspondant au module de Z

On a $|Z| = \left| R - \frac{Lw}{2} - \frac{1}{2Cw} + i\left(\frac{Lw\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2Cw}\right) \right|$

$$= \sqrt{\left(R - \frac{Lw}{2} - \frac{1}{2Cw}\right)^2 + \left(\frac{Lw\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2Cw}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{2CRw - LCw^2 - 1}{2Cw}\right)^2 + \left(\frac{LCw^2\sqrt{3} - \sqrt{3}}{2Cw}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{2Cw}\sqrt{(2CRw - LCw^2 - 1)^2 + \left(LCw^2\sqrt{3} - \sqrt{3}\right)^2}$$

4) Le déphase entre l'impédance et le courant est

$$\varphi = \arg(Z)$$

$$\varphi = \arg\left(\frac{2CRw - LCw^2 - 1}{2Cw} + i\,\frac{LCw^2\sqrt{3} - \sqrt{3}}{2Cw}\right)$$

On a $\cos\varphi = \frac{2CRw - LCw^2 - 1}{\sqrt{(2CRw - LCw^2 - 1)^2 + \left(LCw^2\sqrt{3} - \sqrt{3}\right)^2}}$ et

$$\sin\varphi = \frac{LCw^2\sqrt{3} - \sqrt{3}}{\sqrt{(2CRw - LCw^2 - 1)^2 + \left(LCw^2\sqrt{3} - \sqrt{3}\right)^2}}$$

EXERCICE 23

1) Détermination de l'impédance complexe

$$Z = \frac{Z_R \times Z_L}{Z_R + Z_L}$$

$$Z = \frac{RjLw}{R + jLw} = \frac{\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)RLw}{R + \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)Lw} = \frac{\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)RLw}{\left(R - \frac{1}{2}Lw\right) + i\left(\frac{Lw\sqrt{3}}{2}\right)}$$

D'où l'impédance de l'association est

$$|\,Z\,| = \left|\frac{\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)RLw}{\left(R-\frac{1}{2}Lw\right)+i\left(\frac{Lw\sqrt{3}}{2}\right)}\right| = \frac{\left|\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)RLw\right|}{\left|\left(R-\frac{1}{2}Lw\right)+i\left(\frac{Lw\sqrt{3}}{2}\right)\right|} =$$

$$\frac{\left|-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right|\,|\,RLw\,|}{\left|\left(R-\frac{1}{2}Lw\right)+i\left(\frac{Lw\sqrt{3}}{2}\right)\right|}$$

$$= \frac{RLw}{\sqrt{\left(R-\frac{1}{2}Lw\right)^2+\left(\frac{Lw\sqrt{3}}{2}\right)^2}} = \frac{RLw}{\sqrt{R^2-RLw+(Lw)^2}}$$

2) Détermination de déphase φ

On a $\varphi = \arg(Z)$

et $Z = \dfrac{\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)RLw}{\left(R-\frac{1}{2}Lw\right)+i\left(\frac{Lw\sqrt{3}}{2}\right)} = \dfrac{-RLw+iLRw\sqrt{3}}{(2R-Lw)+iLw\sqrt{3}} =$

$$\frac{\left(-RLw+iLRw\sqrt{3}\right)\left((2R-Lw)-iLw\sqrt{3}\right)}{(2R-Lw)^2+\left(Lw\sqrt{3}\right)^2}$$

d'où $\varphi = \arg\left(\dfrac{\left(-RLw+iLRw\sqrt{3}\right)\left((2R-Lw)-iLw\sqrt{3}\right)}{(2R-Lw)^2+\left(Lw\sqrt{3}\right)^2}\right)$

3 a) l'amplification d'un filtre est égale au module de la fonction de transfert

Or $T = \dfrac{1}{1+jRCw}$ d'où $T = \dfrac{1}{1+\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)RCw} = \dfrac{1}{\left(1-\frac{1}{2}RCw\right)+i\left(\frac{RCw\sqrt{3}}{2}\right)}$

Donc $|\,T\,| = \dfrac{1}{\left|\left(1-\frac{1}{2}RCw\right)+i\left(\frac{RCw\sqrt{3}}{2}\right)\right|} = \dfrac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{1}{2}RCw\right)^2+\left(\frac{RCw\sqrt{3}}{2}\right)^2}} =$

$$\frac{1}{\sqrt{1-RCw+(RCw)^2}}$$

b) $\varphi = arg(T) = \arg\left(\dfrac{1}{\left(1-\frac{1}{2}RCw\right)+i\left(\frac{RCw\sqrt{3}}{2}\right)}\right) = -\arg\left(\left(1-\frac{1}{2}RCw\right)+\right.$
$\left.i\left(\frac{RCw\sqrt{3}}{2}\right)\right)$

SITUATIONS COMPLEXES

Exercice 24

$$arg\left(\frac{z-2i}{z-1+i}\right)=\frac{\pi}{2}+k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow arg\left(\frac{z-2i}{z-(1-i)}\right)=\frac{\pi}{2}+k\pi\ ,k\in\mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow mes\left(\widehat{\overrightarrow{MA}\ ;\ \overrightarrow{MB}}\right)=\frac{\pi}{2}+k\pi\ \ ,k\in\mathbb{Z}$$

où $z_A=2i$ et $z_B=1-i$

$mes\left(\widehat{\overrightarrow{MA}\ ;\ \overrightarrow{MB}}\right)=\frac{\pi}{2}+k\pi$ donc $Mes\left(\overrightarrow{MA}\ ;\ \overrightarrow{MB}\right)=\frac{\pi}{2}$ ou $Mes\left(\widehat{\overrightarrow{MA}\ ;\ \overrightarrow{MB}}\right)=-\frac{\pi}{2}$

Par suite, l'ensemble des points M est le cercle de diamètre $[AB]$ privé des points A et B

Exercice 25

Les sommets d'un hexagone sont les points images des nombres complexes solution de l'équation $(E)\ :\ Z^6=1$

En effet $Z^6=1 \Leftrightarrow Z^6=e^{i0}$

Les solutions sont les nombres complexes de la forme

$$Z_k=e^{i\left(\frac{2k\pi}{6}\right)}\ ;k\in\{0;1;2;3\ ;4\ ;\ 5\}\text{ soit }Z_k=e^{i\frac{k\pi}{3}}\ ;k\in\{0;1;2;3\ ;4\ ;\ 5\}$$

Donc $Z_0=1\ ;Z_1=e^{i\frac{\pi}{3}}\ ;Z_2=e^{i\frac{2\pi}{3}}\ ;Z_3=e^{i\pi}\ ;Z_4=e^{-2i\frac{\pi}{3}}$ et $Z_5=e^{-i\frac{\pi}{3}}$

Si M_0 ; M_1 ; M_2 ; M_3 ; M_4 et M_5 sont les points images respectives des nombres complexes Z_0 ; Z_1 ; Z_2 ; Z_3 ; Z_4 et Z_5 , alors M_0 ; M_1 ; M_2 ; M_3 ; M_4 et M_5 appartiennent au cercle de centre O et de rayon 1, donc $mes\left(\widehat{\overrightarrow{OM_k}\ ;\ \overrightarrow{OM_{k+1}}}\right)=\frac{\pi}{3}$ par suite OM_kM_{k+1} est un triangle équilatéral.

Connaissant A ici M_0, le triangle OM_kM_{k+1} étant équilatéral on utilise le rayon pour placer successivement sur le cercle à partir du point A les autres points M_1 ; M_2 ; M_3 ; M_4 et M_5

Ainsi nous avons construit l'hexagone $M_0\ M_1\ M_2\ M_3\ M_4\ M_5$..

7 FONCTIONS EXPONENTIELLES ET FONCTIONS PUISSANCES

EXERCICES DE FIXATION

Exercice 1

1) V ; 2) F ; 3) V : 4) F ; 5) F ; 6) V ; 7) F ; 8) V ; 9) V.

Exercice 2

a) $e^6 \times e^{-4} = e^2$

b) $e^8 \times e^3 = e^{11}$

c) $e^{-3} \times e^{-4} = e^{-7}$

d) $e^{-5} \times e^3 = e^{-2}$

e) $\frac{e^{1+ln3}}{e^{2+ln3}} = e^{1+ln3-2-ln3} = e^{-1}$

Exercice 3

a) $\frac{e^7}{e^3} = e^{7-3} = e^4$

b) $(e^{-5})^6 \times e^3 = e^{-27}$

c) $\frac{e^7 \times e^{-4}}{e^3} = e^{7-4-3} = e^0 = 1$

Exercice 4

a) $\frac{1}{(e^{-3})^2} \times \frac{(e^4)^{-1}}{e^2 \times e^{-6}} = e^{-6} \times 1 = e^{-6}$

b) $(e^{-2})^{-3} \times (e^{-4})^2 = e^6 \times e^{-8} = e^{-2}$

Étude de la fonction exp

Exercice 5

	Affirmations	Réponses
a	$e^x = 2 \Leftrightarrow x = 2$	faux
b	$e^x > 2 \Leftrightarrow \ln 2 < x$	vrai
c	$\ln(e^x) < 3 \Leftrightarrow x > 3$	faux
d	$x > -1 \Leftrightarrow e^{-1} < e^x$	vrai

Exercice 6

a) $\forall x \in]0\,;+\infty[$, $-2e^x + x = x(-2\frac{e^x}{x} + 1)$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \left(-2\frac{e^x}{x} + 1\right) = -\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} (-2e^x + x) = -\infty$$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0$ (limite de référence)

c) $\forall x \in]0\,;+\infty[$, $e^x - x = x(\frac{e^x}{x} - 1)$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{e^x}{x} - 1\right) = +\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} (2e^x - x) = +\infty$$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1+e^x}{e^x} = \lim\limits_{x\to+\infty} (e^{-x} + 1) = 1$

e) $\forall x \in]0\,;+\infty[$, $e^x - \ln x = x(\frac{e^x}{x} - \frac{\ln x}{x})$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{e^x}{x} - \frac{\ln x}{x}\right) = +\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} (e^x - \ln x) = -\infty$$

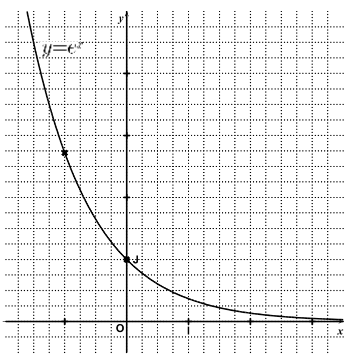
f) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}} \sqrt{x}\ln x = \lim\limits_{\substack{x\to0\\>}} x^{\frac{1}{2}}\ln x = 0$

g) $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} -x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} 4e^x = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} (-x + 4e^x) = +\infty$

Exercice 7

Cette courbe et celle de la fonction exp sont symétriques par rapport à la droite (OJ).

x	0	-1
e^x	1	e



Fonction du type e^u

Exercice 8

Pour tout x élément de]0 ; +∞[;

h(x) = $e^{\sqrt{2x}}$

h'(x) = $\frac{1}{\sqrt{2x}} e^{\sqrt{2x}}$

h'(x) = $\frac{\sqrt{2x}}{2x} e^{\sqrt{2x}}$

Exercice 9

a) Pour tout x élément de $\mathbb{R}$; f(x) = e^{2x+1} f '(x) = $2e^{2x+1}$

b) Pour tout x élément de $\mathbb{R}$; f(x) = xe^{x^2} f '(x) = (1 + $2x^2e^{x^2}$)

c) Pour tout x élément de $\mathbb{R}$; f(x) = $e^{\frac{-1}{2}x}$ f '(x) = $-\frac{1}{2}e^{\frac{-1}{2}x}$

d) Pour tout x élément de $\mathbb{R}$; f(x) = $\frac{e^{3x-1}}{x^2+1}$

f '(x) = $\frac{3e^{3x-1}(x^2+1)-e^{3x-1}(2x)}{(x^2+1)^2}$

f '(x) = $\frac{e^{3x-1}(3x^2-2x+3)}{(x^2+1)^2}$

Exercice 10

a) Pour tout x élément de $\mathbb{R}$;

f(x) = $4e^{4x-2}$

F(x) = e^{4x-2}

b) Pour tout x élément de $\mathbb{R}$;

g(x) = $2xe^{x^2}$

g(x) = $u'(x)e^{u(x)}$ où u(x) = x^2

G(x) = e^{x^2}

c) Pour tout x élément de $\mathbb{R}$;

h(x) = $(x + 2)e^{x^2+4x+1}$

h(x) = $\frac{1}{2}(2x + 4)e^{x^2+4x+1}$

h(x) = $\frac{1}{2}u'(x)e^{u(x)}$ où u(x) = x^2+4x+1

H(x) = $\frac{1}{2}e^{x^2+4x+1}$

Exercice 11

F(x) = $\frac{e^{\tan x}}{2} + C$

Équations et inéquations faisant intervenir

Exercice 12

a) $e^{3x} - 5^x = 0 \iff e^{3x} = 5^x$

$\iff 3x = x\ln 5$

$\iff x = \frac{\ln 5}{3}$

$S_a = \{\frac{\ln 5}{3}\}$

b) $e^{3x+4} = 2 \iff 3x+4 = \ln 2$

$\iff x = \frac{-4+\ln 2}{3}$

$S_b = \{\frac{-4+\ln 2}{3}\}$

c) $e^{\sin x} = \sqrt{e} \iff \sin x = \frac{1}{2}$

$\iff \sin x = \sin\frac{\pi}{3}$

$\iff x = \frac{\pi}{3} + 2p\pi$ ou $x = x = \pi - \frac{\pi}{3} + 2q\pi$ ($p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{Z}$)

$\iff x = \frac{\pi}{3} + 2p\pi$ ou $x = x = \frac{2\pi}{3} + 2q\pi$ ($p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{Z}$)

$S_c = \{\frac{\pi}{3} + 2p\pi ; \frac{2\pi}{3} + 2q\pi$ ($p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{Z}$)$\}$

d) $e^{-x} = 2e^x = 0 \iff -x = \ln 2 + x$

$\iff x = \frac{-\ln 2}{2}$

$S_d = \{\frac{-\ln 2}{2}\}$

e) $e^{2x} - 3e^x + 3 = 0 \iff (e^x)^2 - 3e^x + 3 = 0$

$\Delta = 9 - 12 = -4$

$\Delta < 0 \implies \forall x \in \mathbb{R}, e^{2x} - 3e^x + 3 > 0$

$S_e = \emptyset$

f) $e^{3x}(e^{x+3} - 1) = 0 \iff e^{x+3} = 1$

$\iff x+3 = 0$

$\iff = -3$

$S_f = \{-3\}$

Exercice 13

a) $3e^{2x} - 16e^x + 5 \geq 0 \iff 3(e^x)^2 - 16e^x + 5 \geq 0$

$\Delta' = 64 - 15 = 49$

$\frac{8-7}{3} = \frac{1}{3}$ et $\frac{8+7}{3} = 5$

$e^x \leq \frac{1}{3}$ ou $e^x \geq 5$

$x \leq -\ln 3$ ou $x > \ln 5$

$S_a =]-\infty\ ; -\ln 3] \cup [\ln 5\ ; +\infty[$

b) $e^{2x+3} < \ln 3 \Leftrightarrow 2x+3 < \ln(\ln 3)$

$\Leftrightarrow x < \frac{-3+ln(ln3)}{2}$

$S_b =]-\infty\ ; \frac{-3+ln(ln3)}{2}[$

c) $V_c =$ ⍰*

$\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1} < -1 \Rightarrow \frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1} + 1 < 0$

$\Rightarrow \frac{2e^{2x}}{e^{2x}-1} < 0 \qquad | 2e^{2x} > 0$

$\Rightarrow e^{2x} - 1 < 0$

$\Rightarrow x < 0$

$S_c =]-\infty\ ; 0[$

d) $2e^{2x+1} - 3e^x + 1 < 2e \Leftrightarrow 2ee^{2x} - 3e^x + 1-2e < 0$

$\Delta = 9 - 4(2e)(1-2e)$

$= 16e^2 - 8e + 9$ ($\approx 105,5$ à 10^{-1} près)

$\frac{3-\sqrt{16e^2-8e+9}}{4e} < e^x < \frac{3+\sqrt{16e^2-8e+9}}{4e}$

$e^x < \frac{3+\sqrt{16e^2-8e+9}}{4e}$

$x < \ln\left(\frac{3+\sqrt{16e^2-8e+9}}{4e}\right)$

$S_d =]-\infty\ ; \ln\left(\frac{3+\sqrt{16e^2-8e+9}}{4e}\right)[$

Fonction exponentielle de base e

Exercice 14

a) $\forall x \in \mathbb{R}$, $2^x = e^{x\ln 2}$

b) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\left(\frac{1}{2}\right)^x = e^{-x\ln 2}$

c) $\forall x \in \mathbb{R}$;

$\frac{3^x}{5^x} = \left(\frac{3}{5}\right)^x = e^{xln\frac{3}{5}}$

Exercice 15

Il suffit d'étudier la fonction f telle que : $f(x) = e^{x\ln 5}$

Exercice 16

Utiliser la formule $\ln (a^x) = x \ln a$

Exercice 17

a) $\forall x \in \mathbb{R}$;

$2^{2+x} \times 2^{-2x} = 2^{2-x}$

b) $\forall x \in \mathbb{R}$;

$\frac{2^x}{5^x} = \left(\frac{2}{5}\right)^x$

c) $\forall x \in \mathbb{R}$;

$7^{2-x} \times 7^{-2x} = 7^{2-3x}$

Exercice 18

$2 \times 9^x - 5 \times 3^x + 2 = 0 \Leftrightarrow 2 \times (3^x)^2 - 5 \times 3^x + 2 = 0$

$\Delta = 25 - 16 = 9$

$3^x = \frac{5-3}{4}$ ou $3^x = \frac{5+3}{4}$

$3^x = \frac{1}{2}$ ou $3^x = 2$

$x = \frac{-ln2}{ln3}$ ou $x = \frac{ln2}{ln3}$

$S = \{\frac{-ln2}{ln3} ; \frac{ln2}{ln3}\}$

Exercice 19

$2 \times 9^x - 5 \times 3^x + 2 > 0 \Leftrightarrow 2 \times (3^x)^2 - 5 \times 3^x + 2 = 0$

$\Leftrightarrow 3x < \frac{1}{2}$ ou $3x > 2$

$\Leftrightarrow x < \frac{-ln2}{ln3}$ ou $x > \frac{ln2}{ln3}$

$S =]-\infty ; \frac{-ln2}{ln3}[\cup]\frac{ln2}{ln3} ; +\infty[$

Exercice 20

$2^x < 2^{-x} \Leftrightarrow x < -x$

$\Leftrightarrow 2x < 0$

$\Leftrightarrow x < 0$

$S =]-\infty ; 0[$

Exercice 21

$(0,5)^x > 6 \Leftrightarrow -x\ln 2 > \ln 6$

$\Leftrightarrow x < \frac{-ln6}{ln2}$

$S =]-\infty ; \frac{-ln6}{ln2}[$

Fonctions puissances

Exercice 22

Df =]0 ; +∞[

* $\forall x \in]0 ; +\infty[$;

$f(x) = x^{-\sqrt{5}}$

$f'(x) = -\sqrt{5}\, x^{-\sqrt{5}-1}$

$f'(x) < 0$

D'où, f est strictement décroissante sur]0 ; +∞[

* $\forall x \in]0 ; +\infty[$;

$f(x) = \frac{1}{x^{\sqrt{5}}}$

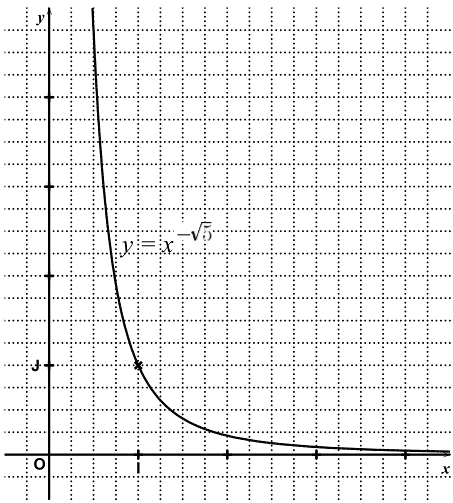
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

D'où, la droite (OI) est une asymptote à (C) en +∞

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = +\infty$

D'où, la droite (OJ) est une asymptote à (C)

*



Exercice 23

	Affirmation	Réponse
a	La fonction : $x \mapsto (2x - 1)^{\ln 2}$ est dérivable sur $]0 ; +\infty[$	faux
b	La fonction : $x \mapsto (e^{x-1})^{\ln 2}$ est dérivable sur $]0 ; +\infty[$	vrai
c	$\forall x \in]0 ; +\infty[$, $[(e^x - 1)^{\ln 2}]' = e^x \ln 2 \, (e^x - 1)^{-1+\ln 2}$	vrai

Exercice 24

a) Pour tout nombre réel x;

g(x) = $(1 + e^{-2x})^{\sqrt{7}}$

g'(x) = $-2\sqrt{7}\, e^{-2x}(1 + e^{-2x})^{\sqrt{7}-1}$

b) Pour tout nombre réel x;

g(x) = $(x^2 + e^{-x})^{ln2}$

g'(x) = $(\ln 2)(2x - e^{-x})(1 + e^{-x})^{ln2-1}$

c) Pour tout nombre réel x;

g(x) = $(3e^x + e^{-x})^{ln2}$

g'(x) = $(\ln 2)(3e^x - e^{-x})(3e^x + e^{-x})^{ln2-1}$

Exercice 25

Notons g la fonction donnée et G une primitive de g sur $\mathbb{R}$

a) Pour tout nombre réel x;

g(x) = $(e^x)^{1+ln2}$

g(x) = $e^{(1+ln2)x}$

G(x) = $\frac{1}{1+ln2} e^{(1+ln2)x}$

b) Pour tout nombre réel x;

g(x) = $(1 - 3e^{-3x})(x + e^{-3x})^{-1+ln3}$

g(x) = $u'(x)(u(x))^{-1+ln3}$ où $u(x) = x + e^{-3x}$

G(x) = $\frac{1}{ln3}(x + e^{-3x})^{ln3}$

EXERCICES DE RENFORCEMENT / D'APPROFONDISSEMENT

Exercice 1

1. FAUX
2. VRAI
3. FAUX
4. FAUX
5. VRAI

Exercice 2

1. A
2. B
3. A
4. B

Exercice 3

a) $\begin{cases} e^x - 2e^y = 1 & (1) \\ e^x + e^y = 4 & (2) \end{cases}$

(2) - (1) : $3e^y = 3$

$e^y = 1$

(2) : $e^x = 4 - 1 = 3$

$x = \ln 3$ et $y = 0$

$S_a = \{(\ln 3 \,;\, 0)\}$

b) $\begin{cases} e^x + 3e^y = 1 & (1) \\ e^x - 5e^y = 7 & (2) \end{cases}$

(1) - (2) : $8e^y = -6$ (impossible)

$S_b = \varnothing$

c) $\begin{cases} 5e^x - 3e^y = 7 & (1) \\ e^x - 5e^y = 11 & (2) \end{cases}$

(1) - 5(2) : $3e^y = 3$

$e^y = 1$

(2) : $e^x = 4 - 1 = 3$

$x = \ln 3$ et $y = 0$

$S_a = \{(\ln 3 \,;\, 0)\}$

Exercice 4

Pour tout réel x, $P(x) = 2x^3 - 5x^2 + x + 2$

1. a) $P(1) = 2 - 5 + 1 + 2 = 0$

b) 1 est un zéro de P.

D'où, pour tout réel x ;

$P(x) = (x - 1)(2x^2 + bx - 2)$ où $b \in$ ⍰ ;

Par identification des termes de degré 2

$b - 2 = -5$

$b = -3$

$P(x) = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0$ ou $2x^2 - 3x - 2 = 0$

$\Leftrightarrow x = 1$ ou $(x - 2)(2x + 1) = 0$ |2 est une solution évidente

$\Leftrightarrow x = 1$ ou $x = 2$ ou $x = -\frac{1}{2}$

$S_{1b} = \{-\frac{1}{2} ; 1 ; 2\}$

2. a) (E) : $2e^{3x} - 5e^{2x} + e^x + 2 = 0 \Leftrightarrow 2(e^x)^3 - 5(e^x)^2 + e^x + 2 = 0$

$\Leftrightarrow$ $e^x = 1$ ou $e^x = 2$

$\Leftrightarrow$ $x = 0$ ou $x = \ln 2$

$S_{2a} = \{0 ; \ln 2\}$

b) (I) : $2e^{3x} - 5e^{2x} + e^x + 2 \leq 0 \Leftrightarrow 2(e^x)^3 - 5(e^x)^2 + e^x + 2 \leq 0$

$\Leftrightarrow (e^x - 1)(e^x - 2)(2e^x + 1) \leq 0$

$\Leftrightarrow (e^x - 1)(e^x - 2) \leq 0$ $\quad | 2e^x + 1 > 0$

$\Leftrightarrow 1 \leq e^x \leq 2$

$\Leftrightarrow 0 \leq x \leq \ln 2$

$S_{2b} = [0 ; \ln 2]$

Exercice 5

Pour tout *x* élément de]0 ; +∞[;

$f(x) = e^{-\ln x} = \left(e^{\ln x}\right)^{-1} = \frac{1}{x}$

Exercice 6

$D_f = \mathbb{R}$

$f(x) = \frac{3}{e^{-x}+1}$

1. Pour tout réel x, on multipliant le numérateur et le dénominateur par e^x, $f(x) = \frac{3e^x}{e^x+1}$
2. Soit F la primitive cherchée

Pour tout réel x ;

$f(x) = 3\frac{u'(x)}{u(x)}$ où $u(x) = e^x + 1$

$F(x) = 3\ln|e^x + 1| + c \ (c \in \mathbb{R})$.

$F(0) = 0 \Leftrightarrow 3\ln 2 + c = 0$

$\Leftrightarrow c = -3\ln 2$

$\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = 3\ln|e^x + 1| - 3\ln 2$

Exercice 7

a) $\mathbf{5^x - 5^{-x} = 5}$ et poser $t = 5^x$. On a : $t - \frac{1}{t} = 5$

$x = log_5^{(\frac{5+\sqrt{29})}{2}}$

b) En divisant membre à membre par 9^x, on a :

$4^x + 6^x = 9^x \Leftrightarrow \left(\left(\frac{2}{3}\right)^x\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^x - 1 = 0$

Il suffit de poser $\left(\frac{2}{3}\right)^x = t$ et se ramener à l'équation du second degré $t^2 + t - 1 = 0$

$S_b = \{ log_{\frac{2}{3}}^{(\frac{-1+\sqrt{5})}{2}} \}$

Exercice 8

Le plan est muni d'un repère (O, I, J).

Représente graphiquement les fonctions f, g et h.

1. $f(x) = x^{0,75}$

$0 < 0,75 < 1$

D'où, la courbe représentative (C_f) de f a la même allure que la courbe représentative de la fonction : $x \mapsto \sqrt{x}$.

2. $g(x) = (0,5)^x$

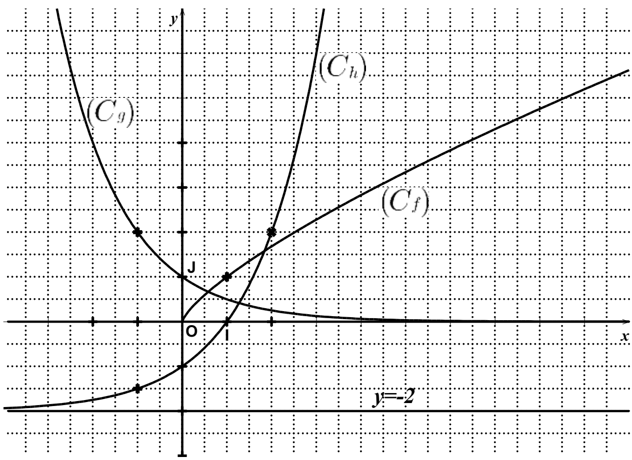
$0 < 0,5 < 1$

D'où, la courbe représentative (C_g) de g a la même allure que la courbe représentative de la fonction : $x \mapsto e^{-x}$.

3. $h(x) = 2^x - 2$

$2 > 1$

D'où, la courbe représentative (C_h) de h a la même allure que la courbe représentative de la fonction : $x \mapsto e^x$, translatée de $-2\overrightarrow{OJ}$.



Exercice 9

Fonction f de ℝ vers ℝ définie par : f(x) = $\frac{e^x-3}{e^x-1}$

1. x ∉ Df ⇔ e^x - 1 = 0

⇔ e^x = 1

⇔ x = 0

Df = ℝ *

2. a) * ∀x∈]0 ; +∞[, f(x) = $\frac{1-3e^{-x}}{1-e^{-x}}$ |on multiplie *f*(x) par $\frac{e^{-x}}{e^{-x}}$

$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty}(1-3e^{-x}) = 1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{1-e^{-x}} = 1 \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$

* $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty}(e^{x}-3) = -3 \\ \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{e^{x}-1} = -1 \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 3$

* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$

D'où, la droite d'équation : y = 1 est une asymptote à (C) en +∞.

* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 3$

D'où, la droite d'équation : y = 3est une asymptote à (C) en -∞.

b) * $\begin{cases} \lim\limits_{x\to0}(e^{x}-3) = -2 \\ \lim\limits_{\substack{x\to0 \\ <}}\frac{1}{e^{x}-1} = -\infty \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{\substack{x\to0 \\ <}} f(x) = +\infty$

* $\begin{cases} \lim\limits_{x\to0}(e^{x}-3) = -2 \\ \lim\limits_{\substack{x\to0 \\ >}}\frac{1}{e^{x}-1} = +\infty \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{\substack{x\to0 \\ >}} f(x) = -\infty$

* $\lim\limits_{\substack{x\to0 \\ <}} f(x) = +\infty$

D'où, la droite (OJ) est une asymptote à (C).

* $\lim\limits_{\substack{x\to0 \\ >}} f(x) = -\infty$

D'où, la droite (OJ) est une asymptote à (C).

3. a) ∀x∈ℝ* ;

f '(x) = $\frac{e^x(e^x-1)-(e^x-3)e^x}{(e^x-1)^2}$ = $\frac{2e^x}{(e^x-1)^2}$

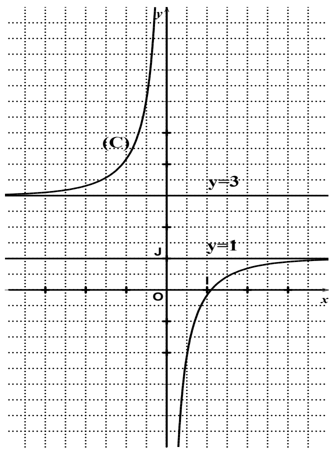
f '(x) > 0

D'où, f est strictement croissante sur]-∞ ; 0[et sur]0 ; +∞[

b)

f	$-\infty$	0	$+\infty$
f '(x)	+	‖	+
f(x)	3 ↗ $+\infty$	‖	$-\infty$ ↗ 1

4.



Exercice10

1. $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(x) = 2e^{2x} - 5e^{x} + 2$

$x \in \mathbb{R}$, $P(x) = 0 \Leftrightarrow 2(e^{x})^{2} - 5e^{x} + 2$

$\Leftrightarrow (e^{x} - 2)(2e^{x} - 1) = 0$ |2 est une solution de $2t^{2} - 5t + 2 = 0$

$\Leftrightarrow e^{x} = 2$ ou $e^{x} = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x = \ln 2$ ou $x = -\ln 2$

$S = \{-\ln 2 ; \ln 2\}$

2. $P(x) < 0 \Leftrightarrow (e^{x} - 2)(2e^{x} - 1) < 0$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2} < e^{x} < 2$

$\Leftrightarrow -\ln 2 < x < \ln 2$

D'où : $\forall x \in]-\infty ; -\ln 2[\cup]\ln 2 ; +\infty[$, $P(x) > 0$ et

$\forall x \in]-\ln 2 ; \ln 2[$, $P(x) < 0$

3. $x \notin Df \Leftrightarrow e^{x} - 1 = 0$

$\Leftrightarrow e^{x} = 1$

$\Leftrightarrow x = 0$

$Df = \mathbb{R}^*$

4. a) * $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} (2x+1) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{e^x - 1} = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

(Limite d'une somme)

* $\begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} (2x+1) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{e^x - 1} = -1 \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

(Limite d'une somme)

* $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$

b) * $\begin{cases} \lim\limits_{x \to 0} (2x+1) = 1 \\ \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{1}{e^x - 1} = -\infty \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = -\infty$

* $\begin{cases} \lim\limits_{x \to 0} (2x+1) = 1 \\ \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{1}{e^x - 1} = +\infty \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = +\infty$

c) * $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = -\infty$

D'où, la droite (OJ) est une asymptote à (C).

* $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = +\infty$

D'où, la droite (OJ) est une asymptote à (C).

5. a) $\forall$ x $\in \mathbb{R}^*$;

$f(x) = 2x + 1 + \frac{1}{e^x - 1}$

$f'(x) = 2 - \frac{e^x}{(e^x - 1)^2}$

$= \frac{2(e^{2x} - 2e^x + 1) - e^x}{(e^x - 1)^2}$

$= \frac{2e^{2x} - 5e^x + 2}{(e^x - 1)^2}$

$= \frac{P(x)}{(e^x - 1)^2}$

b) $\forall$ x $\in \mathbb{R}^*$;

$(e^x - 1)^2 > 0$

f '(x) a le même signe que P(x).

D'où : $\forall x \in]-\infty ; -\ln 2[\cup]\ln 2 ; +\infty[$, f '(x) > 0 et

$\forall x \in]-\ln 2 ; 0[\cup]0 ; \ln 2[$, f '(x) < 0 c)

x	$-\infty$	$-\ln 2$	0	$\ln 2$	$+\infty$
f '(x)		0	‖	0	
f(x)	$-\infty \nearrow$	$-2\ln 2-1$	$\searrow -\infty$ ‖ $+\infty \searrow$	$2\ln 2+2$	$\nearrow +\infty$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(2x+1)] = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x-1} = 0$

D'où, la droite (D) : y = 2x+1, est une asymptote à (C) en $+\infty$

6. a) $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-2x] = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{e^x-1}\right) = 1-1 = 0$

D'où, la droite (D) : y = 2x, est une asymptote à (C) en $-\infty$

b) $\forall$ x $\in$]$-\infty$; 0[;

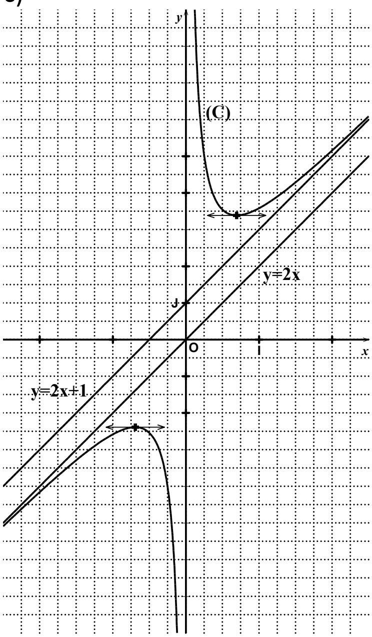
f(x) - 2x = $\frac{e^e}{e^x-1}$

$e^x > 0$ et $e^x - 1 < 0$

f(x) - 2x < 0

D'où, (C) est au-dessous de (D') sur]$-\infty$; 0[

c)



d) $\forall x \in \mathbb{R}^*$;

$f(x) = 2x + (1 + \frac{1}{e^{x}-1})$

$= 2x + \frac{e^{x}}{e^{x}-1}$

e) $\forall x \in]-\infty\ ; 0[$;

$f(x) = 2x + \frac{u'(x)}{u(x)}$ où $u(x) = e^x - 1$

D'où, les primitives de f sur $]-\infty\ ; 0[$ sont les fonctions numériques F_k définies par :

$F_k(x) = x^2 + \ln|e^x - 1| + k$ ($k \in \mathbb{R}$)

f) $F(-1) = 1$ et $\forall x \in]-\infty\ ; 0[$, $F(x) = x^2 + \ln|e^x - 1| + k$ (k∈⍰)

$F(-1) = 1 \Leftrightarrow 1 + \ln|e^{-1} - 1| + k = 1$

$\Leftrightarrow 1 + \ln\left|\frac{1-e}{e}\right| + k = 1$

$\Leftrightarrow \ln|e - 1| + k = 1$

$\Leftrightarrow k = 1 - \ln(e - 1)$

$\forall x \in]-\infty\ ; 0[$, $F(x) = x^2 + \ln|e^x - 1| + 1 - \ln(e - 1)$.

<u>Exercice11</u>

$D_f = \mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x^2e^{-x}$

1. ∀ x ∈ ⍰ ;

$f'(x) = (-x^2 + 2x)e^{-x}$

$= -x(x - 2)e^{-x}$

2. Pour tout réel x ;

$e^{-x} > 0$

$f'(x)$ a le même signe que $-x(x - 2)$

* $\forall x \in]-\infty\ ; 0[\cup]0\ ; 2[$, $f'(x) < 0$

D'où, f est strictement décroissante sur $]-\infty\ ; 0]$ et sur $[0\ ; +\infty[$.

* $\forall x \in]0\ ; 2[$, $f'(x) > 0$

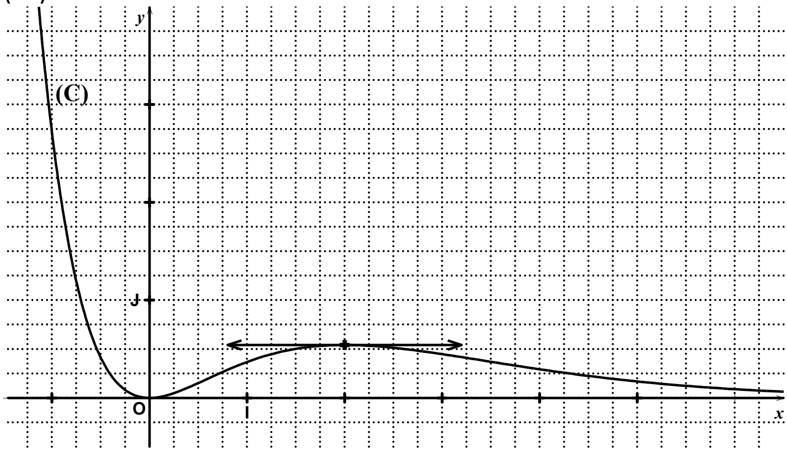
D'où, f est strictement croissante sur $[0\ ; 2]$.

*

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{4}{e^2}$	$\searrow$	0

3. $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$

D'où, (C) admet en $-\infty$ une branche parabolique de direction celle de la droite (OJ).



4. Dg = ℝ

$\forall x \in \mathbb{R}$;

$g(x) = -\frac{2}{e} e^{\frac{x}{2}}$

$g(x) < 0$

a) * f(-1) = e et f(0) = 0

* f est continue et strictement décroissante sur]-1 ; 0[

Et, f(0) < f(2) < f(-1)

D'où, il existe un unique nombre réel α compris entre -1 et 0 tel que : $f(\alpha) = f(2)$.

b) $f(\alpha) = f(2) \Leftrightarrow \frac{4}{e^2} = \frac{\alpha^2}{e^\alpha}$

$\Leftrightarrow \frac{4e^\alpha}{e^2} = \alpha^2$

$\Leftrightarrow \left(2\frac{e^{\frac{\alpha}{2}}}{e}\right)^2 = \alpha^2$

$\Leftrightarrow \left(-\frac{2}{e} e^{\frac{\alpha}{2}}\right)^2 = \alpha^2$

$\Leftrightarrow (g(\alpha))^2 = \alpha^2$

$\Leftrightarrow g(\alpha) = \alpha$ car : $g(\alpha) < 0$

5. a) * $g(-1) = -\frac{2}{e\sqrt{e}}$ et $g(0) = -\frac{2}{e}$

$g(-1) \approx -0{,}45$ et $g(0) \approx -0{,}74$ (arrondi d'ordre 2)

* g est continue et strictement décroissante sur $[-1 ; 0]$.

Et, $g(-1) \in [-1 ; 0]$ et $g(0) \in [-1 ; 0]$

D'où : $g([-1 ; 0]) \subset [-1 ; 0]$.

b) $\forall x \in [-1 ; 0]$;

$g'(x) = -\frac{1}{e}e^{\frac{x}{2}}$

$g''(x) = -\frac{1}{2e}e^{\frac{x}{2}}$

$g''(x) < 0$

D'où, g' est strictement décroissante sur $[-1 ; 0]$.

Par suite ;

$\forall x \in [-1 ; 0]$;

$g'(0) \leq g'(x) \leq g'(-1)$

$\frac{-1}{e} \leq g'(x) \leq \frac{-1}{e\sqrt{e}}$

$|g'(x)| \leq \frac{1}{e}$

6. a) * $\forall x \in [-1 ; 0]$, $|g'(x)| \leq \frac{1}{e}$

Et, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [-1 ; 0]$

Et, $\alpha \in [-1 ; 0]$

D'après l'inégalité des accroissements finis,

$\forall n \in \mathbb{N}$;

$|g(u_n) - g(\alpha)| \leq \frac{1}{e}|u_n - \alpha|$

$|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{e}|u_n - \alpha|$

* $|u_1 - \alpha| \leq \frac{1}{e}|u_0 - \alpha|$

$|u_2 - \alpha| \leq \frac{1}{e}|u_1 - \alpha|$

$|u_3 - \alpha| \leq \frac{1}{e}|u_2 - \alpha|$

…

$|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{e}|u_{n-1} - \alpha|$

En faisant le produit membre à membre et les simplifications nécessaires ;

$\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{e^n}|u_0 - \alpha|$

b) En majorant $|u_0 - \alpha|$ par 1, on a :

$\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{e^n}$

c) $\frac{1}{e^n} \leq 10^{-6} \Rightarrow |u_n - \alpha| \leq 10^{-6}$

$\frac{1}{e^n} \leq 10^{-6} \Rightarrow e^n \geq 10^6$

$\Rightarrow n \geq \ln(10^6)$

Et, $\ln(10^6) \approx 13,82$ (arrondi d'ordre 2)

On peut prendre : n = 14

SITUATIONS COMPLEXES

Exercice12

Le chiffre d'affaire moyen annuel, en FCFA, en 2000+x : $300 \times 164\,000 \times f(x)$.

$300 \times 164\,000 \times f(x) = 49\,200\,000 \times f(x)$

Soit A(x) le chiffre d'affaire moyen annuel, en milliards de FCFA, en 2000+x.

$A(x) = 0,0492 \times f(x)$

$= 0,0492(5 + xe^{0,2x-1})$

* La fonction A est dérivable sur [0 ; 20].

$\forall x \in [0 ; 20]$;

$A'(x) = 0,0492(1 + (0,2)x)e^{0,2x-1}$

$A'(x) > 0$

D'où, la fonction A est strictement croissante sur [0 ; 20]

* $A(0) = 0,246$

$A(20) = 20,01$ (par défaut à 10^{-2} près)

* La fonction A est continue et strictement croissante sur [0 ; 20].

Et, 3,936 est compris entre A(0) et A(20).

D'où, l'équation : $x \in [0 ; 20]$, $A(x) = 3,936$ admet une unique solution α.

Déterminons α un encadrement de α par balayage.

$A(10) = 1,58$ (par défaut à 10^{-2} près)

$A(15) = 5,69$ (par défaut à 10^{-2} près)

$10 < \alpha < 15$

x	11	12	13	14
A(x) par défaut à 10^{-2} près	1,58	2,04	3,41	4,41

$13 < \alpha < 14$

Soit N l'année cherchée.

N = 2010 + 14

= 2024

Exercice 13

Soit T l'heure du crime.

En prenant T comme l'origine du temps, on a :

$f(0) = 37$, $f(10 - T) = 32$ et $f(10,5 - T) = 31$

* $f(0) = 37 \iff A + 20 = 37$

$\iff A = 17$

* $\begin{cases} f(10 - T) = 32 \\ f(10{,}5 - T) = 31 \end{cases} \iff \begin{cases} 17e^{-k(10-T)} = 32 & (1) \\ 17e^{-k(10{,}5-T)} = 31 & (2) \end{cases}$

$\frac{(1)}{(2)}$ donne : $e^{-k(10-T-10{,}5+T)} = \frac{32}{31}$

$e^{(0{,}5)k} = \frac{32}{31}$

$\frac{k}{2} = \ln(\frac{32}{31})$

$k = 2\ln(\frac{32}{31})$

* $\forall t \in [0\,;+\infty[$;

$f(t) = 17e^{-2ln\left(\frac{32}{31}\right)t}$

$= 17\left(e^{ln\left(\frac{32}{31}\right)}\right)^{-2t}$

$= 17\left(\frac{32}{31}\right)^{-2t}$

$= 17\left(\frac{31}{32}\right)^{2t}$

* $f(10 - T) = 32 \iff 17\left(\frac{31}{32}\right)^{2(10-T)} = 12$

$\iff \left(\frac{31}{32}\right)^{2(10-T)} = \frac{12}{17}$

$\iff 2(10 - T)\ln\left(\frac{31}{32}\right) = \ln\left(\frac{12}{17}\right)$

$\iff 20 - 2T = \frac{ln\left(\frac{12}{17}\right)}{ln\left(\frac{31}{32}\right)}$

$\iff T = \frac{1}{2}(20 - \frac{ln\left(\frac{12}{17}\right)}{ln\left(\frac{31}{32}\right)})$

T = 4,515 (arrondi d'ordre 3)

$T \approx$ 4h 30min

Le crime a eu lieu aux environs de 4h 30min

8 NOMBRES COMPLEXES ET GÉOMÉTRIE DU PLAN

EXERCICES DE FIXATION

Exercice 1

1)$Z_{\overrightarrow{AB}} = Z_B - Z_A = 3i + 2 - 2i - 1 = 1 + i$

2) $AB = |Z_B - Z_A| = |1 + i| = \sqrt{2}$

3)$Mes\left(\widehat{\vec{u};\overrightarrow{AB}}\right) = arg(Z_B - Z_A) = arg(1 + i) = \frac{\pi}{4}$

Exercice 2

On a : $\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} = \frac{2-2i+1-i}{2i+1-i} = \frac{3-3i}{1+i} = \frac{3(1-i)}{1+i} = \frac{3(1-i)^2}{2} = -3i$

Par suite $Mes\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right) = -\frac{\pi}{2}$

Exercice 3

On a : $\frac{c-a}{b-a} = \frac{2-2i+1+i}{2i+1+i} = \frac{3-i}{1+3i} = \frac{3-i}{i(3-i)} = \frac{1}{i} = -i$

Donc $Arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) = Arg(-i) = -\frac{\pi}{2}$

Caractérisation des points alignés

Exercice 4

1) $\frac{c-a}{b-a} = \frac{2+i+3i}{1-i+3i} = \frac{2+4i}{1+2i} = \frac{2(1+2i)}{1+2i} = 2$

2) Comme $2 \in \mathbb{R}^*$; donc les points A, B et C sont alignés

Exercice 5

1)On a : $\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} = \frac{2-2i+1-i}{2i+1-i} = \frac{3-3i}{1+i} = \frac{3(1-i)}{1+i} = \frac{3(1-i)^2}{2} = -3i$

2) Comme $-3i \in i\mathbb{R}^*$ donc le triangle ABC est rectangle en A

Caractérisation complexe de l'angle droit

Exercice 6

1) $\frac{c-a}{b-a} = \frac{2-2i-3+i}{2i-3+i} = \frac{-1-i}{-3+3i} = \frac{1}{3} \times \frac{1+i}{1-i} = \frac{1}{3}i$

2) Les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires car $\frac{1}{3} \in i\mathbb{R}^*$

Caractérisation complexe des points cocycliques

Exercice 7

$\frac{c-a}{c-b} : \frac{d-a}{d-b} = \frac{3-i-2i}{3-i-2+2i} : \frac{2+2i-2i}{2+2i-2+2i} = \frac{3-3i}{1+i} : \frac{2}{4i} = \frac{3(1-i)}{1+i} \times 2i = -3i \times 2i$

$\frac{c-a}{c-b} : \frac{d-a}{d-b} = 6$

Comme $6 \in \mathbb{R}^*$alors les points A, B, C et D sont cocycliques

II) ECRITURES COMPLEXES DES SYMETRIES

Exercice 8

1)Faux
2)Faux
3)Vrai
4)Faux
5)Vrai

Exercice 9

$Z' = -Z + 2(1+i) = -Z' + 2i + 2$

Exercice 10

Z' est de la forme $-Z + 2a$ donc f est une symétrie centrale

On a : $3 - 2i = 2\left(\frac{3}{2} - i\right)$

Ainsi $Z' = -Z + 2\left(\frac{3}{2} - i\right)$

Ainsi le centre de f est le point A d'affixe $\frac{3}{2} - i$

III) Écriture complexe d'une translation

Exercice 11

z' = z - 1-2i

Exercice 12

Translation de vecteur de $\vec{u}\,(\frac{-1}{2}\ ;1)$

IV) ECRITURE COMPLEXE D'UNE ROTATION

Exercice 13

$$Z' = e^{i\frac{\pi}{3}}Z = \left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)Z$$

Exercice 14

On a $Z' = e^{-i\frac{\pi}{6}}Z + 3i$ donc f est la rotation d'angle $-\frac{\pi}{6}$ et de centre Ω d'affixe ω telle que

$$\omega = \frac{3i}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i} = \frac{3\left(\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)}{\frac{5-2\sqrt{3}}{4}} = \frac{12\left(\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)}{5-2\sqrt{3}}$$

ECRITURE COMPLEXE D'UNE HOMOTHETIE

Exercice de fixation

Exercice 15

On a $Z' = -\frac{2}{3}Z$

Exercice 16

Z' s'écrit sous la forme $Z' = kZ + b$ où $k = 7$ et $b = 3 - i$ donc f est l'homothétie de rapport 7 et de centre d'affixe $\omega = \frac{3-i}{-6} = -\frac{1}{2}+\frac{1}{6}i$

SIMILITUDE DIRECTE

Exercice de fixation

Exercice 17

1)Vrai
2)Vrai
3)Vrai

Exercice 18

1)Faux
2)Faux
3) Vrai

Exercice 19

Soit A et B les deux points invariants par S avec $A \neq B$; on a : $S(A) = A$ et $S(B) = B$ donc $AB = kAB$ d'où $k = 1$ ainsi S est un déplacement qui laisse invariant 2 points d'où

$S = Id$

Exercice 20

1)Vrai
2)Faux
3)Vrai
4)Vrai

IMAGE DE FIGURE SIMPLES PAR UNE SIMILITUDE DIRECTE ET PROPRIETE

ECRITURE COMPLEXE D'UNE SIMILITUDE DIRECTE

Exercice de fixation

Exercice 21

Z' est sous la forme $Z' = aZ + b$ où $a = 1 - i$ et $b = 0$ $(a \neq 1)$

Donc la transformation est une similitude directe plane

De plus son centre ω est telle que $\omega = 0$ d'où la similitude directe a pour centre O $(a \neq 1)$

Exercice 22

Le rapport k est tel que $k = \left|1 + i\sqrt{3}\right| = 2$; l'angle θ est tel que $\theta = Arg\left(1 + i\sqrt{3}\right)$ soit $\theta = \frac{\pi}{3}$

Son centre Ω d'affixe ω est tel que

$$\omega = \frac{\sqrt{3}(2-i)}{1-1-i\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}(2-i)}{-i\sqrt{3}} = 1 + 2i$$

Exercice 23

$$Z' = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}Z + \left(1 - \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)(1 - i)$$

$$= \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)Z + \left(1 - \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)(1 - i)$$

$$Z' = (1 + i)Z + (1 - 1 - i)(1 - i)$$

$$= (1 + i)Z - 1 - i$$

Exercice 24

$s = S_{\left(A\,;\,\frac{1}{2};-\frac{\pi}{6}\right)}$ et $s(B) = C$ donc $\begin{cases} AC = \frac{1}{2}AB \\ mes\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right) = -\frac{\pi}{6} \end{cases}$

Par suite $AC = \frac{5}{2}$ et $mes\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right) = -\frac{\pi}{6}$

Exercice 25

1)ABC est un triangle donc les points A, B et C sont trois points du plan deux à deux distincts, il existe donc une similitude directe S de centre A qui transforme B en C

2)$\begin{cases} S(A) = A \\ S(B) = C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 + i = a(1 + i) + b \\ 2 + i = a + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = i \\ b = 2 \end{cases}$

Ainsi $Z' = iZ + 2$

Exercice 26

On a $Z_A = i$ et $Z_B = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ donc A et B sont deux points distincts

2 est un nombre réel positif $\frac{2\pi}{3}$ est un nombre réel, A et B sont tel que $A \neq B$

Il existe une unique similitude directe de rapport 2 et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ qui transforme A en B

Exercice 27

A, B, C et D sont quatre points du plan tels que $A \neq C$ et $B \neq D$

Il existe donc une similitude directe S tel que $S(A) = B$ et $S(C) = D$

EXERCICES DE RENFORCEMENT / D'APPROFONDISSEMENT

Exercice 1

1) $r: Z' = e^{i\frac{\pi}{2}}Z + \left(1 - e^{i\frac{\pi}{2}}\right)i = iZ + (1 + i)$

2) On a $Z'_B = iZ_B + 1 + i = i(-4 - i) + 1 + i = 2 - 3i = Z_C$

Donc $r(B) = C$

3) On a $r_{\left(A;\frac{\pi}{2}\right)}(B) = C \Rightarrow \begin{cases} AB = AC \\ mes\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$

Donc ABC est un triangle rectangle et isocèle en A

Exercice 2

1)Z' est sous la forme $Z' = aZ + b$ on a $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$ donc c'est une similitude directe

$k = \left|1 - \sqrt{3}\right| = 2$ et $\theta = Arg\left(1 - i\sqrt{3}\right) = -\frac{\pi}{3}$ et de centre Ω d'affixe ω tel de

$\omega = \frac{-\sqrt{3}-i}{i\sqrt{3}} = \frac{-\sqrt{3}+3i}{3}$

2)$\left|(1-i\sqrt{3})Z-(\sqrt{3}+i)\right| = \left|1-i\sqrt{3}\right|\left|Z-\frac{\sqrt{3}+i}{1-i\sqrt{3}}\right| = 2|Z-i|$

Donc

$\left|(1-i\sqrt{3})Z-\sqrt{3}-i\right| = 6 \Leftrightarrow 2|Z-i| = 6 \Leftrightarrow |Z-i| = 3$; l'ensemble est un cercle de centre $J(i)$ et de rayon 3

Exercice 3

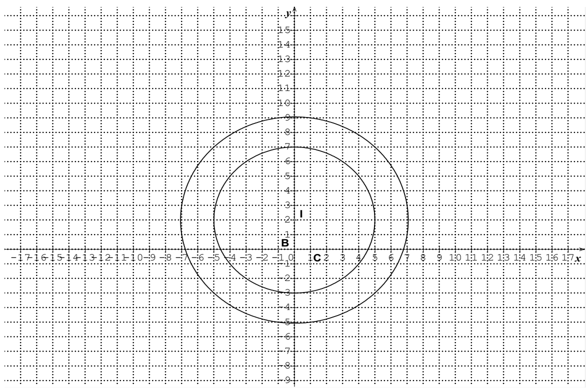
1)S a pour écriture complexe : $Z' = aZ+b$; $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$

$\begin{cases} S(I) = I \\ S(B) = C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2i = 2ia+b \\ 1-i = -a+b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1+i \\ b = 2 \end{cases}$ donc $Z' = (1+i)Z+2$

Le rapport $k = |1+i| = \sqrt{2}$; l'angle $\theta = Arg(1+i) = \frac{\pi}{4}$

Ainsi $s = S_{\left(I;\sqrt{2};\frac{\pi}{4}\right)}$

2)



3) $\frac{Z'-Z}{Z_I-Z} = \frac{2+iZ}{2i-Z} = -i$ donc le triangle IMM' est rectangle isocèle en M.

4)Les points $I(2i)$ et $K(1)$ sont deux points de la droite (D) donc les points $I = s(I)$ et $K' = s(K)$ avec $Z_{K'} = 3+i$ sont des points de (D')

5)$(\Gamma) = \mathcal{C}(I;5)$ donc $(\Gamma') = S(\Gamma)$ est tel que $(\Gamma') = \mathcal{C}\left(I;5\sqrt{2}\right)$

Exercice 4

1. a)$Z' = Z + 3 - 2i$

b)$\overrightarrow{AB}(-8; 12)$ donc $Z' = Z - 8 + 12i$

2. a)$Z' = -5Z$

b)$Z' = 3Z - 2\omega = 3Z + 4 - 2i$

3. a)$Z' = e^{-i\frac{\pi}{3}}Z = \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)Z$

b) $Z' = e^{i\frac{\pi}{3}}Z + (1 - i) - e^{i\frac{\pi}{3}}(1 - i) = e^{i\frac{\pi}{3}}Z + \left(1 - e^{i\frac{\pi}{3}}\right)(1 - i)$

$= \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)Z + \frac{1}{2}\left(\left(1 + \sqrt{3}\right) - i\left(1 + \sqrt{3}\right)\right)$

c) $Z' = e^{i\pi}Z + \left(1 - e^{i\pi}\right)(3 + 2i) = -Z + 2(3 + 2i) = -Z + 6 + 4i$

4. a) $Z' = 3e^{-i\frac{5\pi}{6}}Z + \left(1 - 3e^{-i\frac{5\pi}{6}}\right)(3 + 2i) = \left(-\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i\right)Z + \frac{9\sqrt{3}}{2} + i\left(\frac{13}{2} + 3\sqrt{3}\right)$

b) $Z = \frac{3}{4}e^{i\frac{\pi}{2}}Z + 4\left(1 - \frac{3}{4}e^{i\frac{\pi}{2}}\right) \times 4 = \frac{3}{4}iZ + 4 - 3i$

Exercice 5

1)$k = \left|2\left(1 + i\sqrt{3}\right)\right| = 2 \times 2 = 4$; $\theta = Arg\left(2\left(1 + i\sqrt{3}\right)\right) = \frac{\pi}{3}$

Le centre d'affixe ω tel que $\omega = \frac{3}{1-2-2i\sqrt{3}} = -\frac{1}{13}\left(1 - 2i\sqrt{3}\right)$

2)$Z_{A'} = 2\left(1 + i\sqrt{3}\right)(1 + i) + 3 = \left(5 - 2\sqrt{3}\right) + 2i\left(1 + \sqrt{3}\right)$

3)$O(0; 0)$ et $K\left(\sqrt{3} + i\right)$ sont deux points de (D) donc $S(D) = (OK')$

Or $O' = O$ et $Z_{K'} = 2\left(1 + i\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3} + i\right) + 3 = 8i + 3$

Ainsi $S((D)) = (OK')$

Exercice 6

1) S a pour écriture complexe : $Z' = aZ + b$; $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$

$$\begin{cases} S(A) = C \\ S(B) = D \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5 + i = ai + b \\ 1 + i = -a + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2(1 + i) \\ b = 3 - i \end{cases}$$

Donc S a pour écriture complexe : $Z' = 2(1 + i)Z + 3 - i$

2)$k = |2(1 + i)| = 2\sqrt{2}$; $\theta = Arg\big(2(1 + i)\big) = \frac{\pi}{4}$

$\Omega(\omega)$ le centre tel que $\omega = \frac{3-i}{-1-2i} = \frac{-1+7i}{5}$

3. a) On a $\frac{Z_A - Z_E}{Z_B - Z_E} = \frac{1+1-i}{-1+1-i} = \frac{1}{-i} = -i$ donc ABE est un triangle rectangle isocèle en E.

b) $S(ABE) = CDF$ donc CDF est un triangle rectangle isocèle en F.

Exercice 7

1.a)$\left|(1 - i\sqrt{3})Z - (\sqrt{3} + i)\right| = \left|1 - i\sqrt{3}\right| \left|Z - \frac{\sqrt{3}+i}{1-i\sqrt{3}}\right| = 2|Z - i|$

Donc $\left|(1 - i\sqrt{3})Z - (\sqrt{3} + i)\right| = 6 \Leftrightarrow 2|Z - i| = 6 \Leftrightarrow |Z - i| = 3$

b) $(\Gamma) = \mathcal{C}(A; 3)$

2.a) S a pour écriture complexe : $Z' = aZ + b$; $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$

$$\begin{cases} S(A) = O \\ S(B) = C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = ai + b \\ -4i = \sqrt{3}a + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{4i}{-\sqrt{3}+i} \\ b = -ai \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 - i\sqrt{3} \\ b = -\sqrt{3} - i \end{cases}$$

Ainsi l'écriture complexe de S est $Z' = (1 - i\sqrt{3})Z - \sqrt{3} - i$

b) $k = \left|1 - i\sqrt{3}\right| = 2$; $\theta = Arg\big(1 - i\sqrt{3}\big) = -\frac{\pi}{3}$ et le centre $\Omega(\omega)$ le tel que

$\omega = \frac{-\sqrt{3}-i}{i\sqrt{3}} = \frac{-\sqrt{3}+3i}{3}$

3.a)$(C) = S\big((\Gamma)\big)$ donc (C) est un cercle de centre $A' = S(A)$ et de rayon $2 \times 3 = 6$ avec

$Z_{A'} = (1 - i\sqrt{3})i - \sqrt{3} - i = 0$

Ainsi $(C) = \mathcal{C}(O;6)$

b) Construction de (C) est (Γ)

4. a) Construction de D et Ω où $D \in (\Omega B)$ et $\Omega D = 2\Omega B$

b) On a

Ω	A	B
Ω	O	C

et $\Omega \in (\Omega B)$

donc $\Omega C = 2\Omega B$ et $mes\left(\widehat{\overrightarrow{\Omega D};\overrightarrow{\Omega C}}\right) = -\frac{\pi}{3}$

d'où $\Omega D = \Omega C$ et $mes\left(\widehat{\overrightarrow{\Omega D};\overrightarrow{\Omega C}}\right) = -\frac{\pi}{3}$

ΩCD est un triangle isocèle qui a un angle $-\frac{\pi}{3}$ donc ΩCD est un triangle équilatéral

5a)$r_{(\Omega)}(C) = D$; $Mes\left(\widehat{\overrightarrow{\Omega C};\overrightarrow{\Omega D}}\right) = \frac{\pi}{3}$

Donc l'écriture complexe de r est :

$$Z' = e^{i\frac{\pi}{3}}Z + \left(1 - e^{i\frac{\pi}{3}}\right)\omega = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)Z + \frac{3i+\sqrt{3}}{3}$$

b) $Z_D = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(-4i) + \frac{3i+\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3} - 2i + i + \frac{\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{3} - i$

Exercice 8

1)$p(i\sqrt{3}) = (i\sqrt{3})^4 - 6(i\sqrt{3})^3 + 24(i\sqrt{3})^2 - 18(i\sqrt{3}) - 63 = 9 + 18i\sqrt{3} - 72 - 18i\sqrt{3} + 63 = 72 - 72 + 18i\sqrt{3} - 18i\sqrt{3} = 0$

$$\begin{aligned} p(-i\sqrt{3}) &= (-i\sqrt{3})^4 - 6(-i\sqrt{3})^3 + 24(-i\sqrt{3})^2 - 18(-i\sqrt{3}) + 63 \\ &= 9 - 18i\sqrt{3} - 72 + 18i\sqrt{3} + 63 \\ &= 72 - 72 - 18i\sqrt{3} + 18i\sqrt{3} = 0 \end{aligned}$$

$i\sqrt{3}et\ -i\sqrt{3}$ sont des zéros de P donc il existe un polynôme Q de degré 2 tels que

$P(Z) = \left(Z - i\sqrt{3}\right)\left(Z + i\sqrt{3}\right)Q(Z)$

Or $\left(Z - i\sqrt{3}\right)\left(Z + i\sqrt{3}\right) = Z^2 + 3$

Donc $P(Z) = (Z^2 + 3)Q(Z)$

$\Leftrightarrow \left(Z - i\sqrt{3}\right)\left(Z + i\sqrt{3}\right)Q(Z)$

$Z^4 - 6Z^3 + 24Z^2 - 18Z + 63 = (Z^2 + 3)(Z^2 - 6Z + 21)$

Ainsi $Q(Z) = Z^2 - 6Z + 21$

2) $P(Z) = 0 \Leftrightarrow Z - i\sqrt{3} = 0$ ou $Z + i\sqrt{3} = 0$ ou $Z^2 - 6Z + 21 = 0$ (E')

Résolvons (E') : $Z^2 - 6Z + 21 = 0$

$\triangle = 36 - 84 = 48 = 16 \times 3 = (4\sqrt{3})^2$

$Z = \frac{6-4\sqrt{3}}{2}$ ou $Z = \frac{6+4\sqrt{3}}{2}$

$Z = 3 - i2\sqrt{3}$ ou $3 + i2\sqrt{3}$

$S_{\mathbb{C}} = \left\{i\sqrt{3};\ -i\sqrt{3}; 3 + 2i\sqrt{3}; 3 - 2i\sqrt{3}\right\}$

3a) construction

$B = S_{(0;\vec{u})}(A); C = h_{(0;2)}(A); D = t_{2\overrightarrow{AB}}(C)$

$B = S_{(0;\vec{u})}$ donc $Z_B = -Z_A = -i\sqrt{3}$

C= $h_{(\Omega;2)}(A) \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega C} = 2\overrightarrow{\Omega A}$ donc $Z_C = 2(Z_A - Z_\Omega) + Z_\Omega$

$Z_C = 2\left(i\sqrt{3} + 3\right) + (-3) = 2i\sqrt{3} + 3$

$D = t_{2\overrightarrow{AB}}(C) \Leftrightarrow \overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow Z_D = 2(Z_B - Z_A) + Z_C$
$= 2\left(-i\sqrt{3} - i\sqrt{3}\right) + 2i\sqrt{3} + 3$

$Z_D = 3 - 2i\sqrt{3}$

c) On a $\frac{Z_C-Z_A}{Z_D-Z_A} = \frac{2i\sqrt{3}+3-i\sqrt{3}}{3-2i\sqrt{3}+3-i\sqrt{3}} = \frac{3+i\sqrt{3}}{3-3i\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\frac{(3+i\sqrt{3})(1+i\sqrt{3})}{9+27} = \frac{3+4i\sqrt{3}-3}{3\times 36} =$
$\frac{4i\sqrt{3}}{3\times 36} = \frac{i\sqrt{3}}{27}$

Comme $\frac{Z_C-Z_A}{Z_D-Z_A} = \frac{i\sqrt{3}}{27}$ alors le triangle ACD est rectangle en A

d)$\frac{Z_C-Z_A}{Z_D-Z_A} \times \frac{Z_D-Z_B}{Z_C-Z_B} = \frac{3+i\sqrt{3}}{3-3i\sqrt{3}} \times \frac{3-i\sqrt{3}}{3+3i\sqrt{3}} = \frac{3^2+(\sqrt{3})^2}{3^2+(3\sqrt{3})^2} = \frac{12}{9+27} = \frac{13}{36} = \frac{1}{3}$

Les points A, B, C et D ne sont pas alignés

Comme $\frac{1}{3} \in \mathbb{R}^*$ alors les points A, B, C et D appartiennent à un même cercle

4) $E = S_O(D)$ donc $Z_E = -Z_D$

D'où $Z_E = -3 + 2i\sqrt{3}$

a)$\frac{Z_C-Z_B}{Z_E-Z_B} = \frac{3+2i+i\sqrt{3}}{-3+2i+i\sqrt{3}} = \frac{3+3i\sqrt{3}}{-3+3i\sqrt{3}} = \frac{18-18i\sqrt{3}}{36} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = e^{-i\frac{\pi}{3}}$

b) $\frac{Z_C-Z_B}{Z_E-Z_B} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$ donc le triangle BEC est équilatéral

Exercice 9

1)Construction $A_0 = 0$; A_1 tel que $Z_{A_1} = i$

a)$A_n = S_{(A_{n-2};r;\alpha)}(A_{n-2})$

L'écriture complexe de S est donc ; $Z' = uZ + (1-u)Z_{A_n-1}$

Comme $A_n = S(A_{n-2})$ alors $Z_n = uZ + (1-u)Z_{n-1}$

b) Démontrons par récurrence

Pour $n = 2$; on a $Z_2 - Z_1 = (-u)i$

D'autre part on a : $Z_2 = re^{i\alpha}Z_0 + (1 - re^{i\alpha})Z_1 = uZ_0 + (1-u)Z_1 =$
$(1-u)Z_1$ car

$Z_0 = 0$

$Z_2 = 1Z_1 - uZ_1$ or $Z_1 = i$ donc $Z_2 - Z_1 = -u \times i$

La proposition est vraie pour $n = 2$

Supposons qu'il existe un entier naturel $n \geq 2$ tel que $Z_n - Z_{n-1} = (-u)^{n-1}i$ et montrons que $Z_{n+1} - Z_n = (-u)^n i$

On a $Z_{n+1} = uZ_{n-1} + (1-u)Z_n$

Donc $Z_{n+1} - Z_n = -u(Z_n - Z_{n-1}) = -u(-u)^{n-1}i = (-u)^n i$

Par suite pour tout $n \geq 2$, $Z_n - Z_{n-1} = (-u)^{n-1}i$

c) $Z_n - Z_{n-1} = (-u)^{n-1}i$

$Z_{n-1} - Z_{n-2} = (-u)^{n-2}i$

addition membre à membre

$Z_4 - Z_3 = (-u)^3 i$

$Z_3 - Z_2 = (-u)^2 i$

$Z_n - Z_2 = i\,(\,(-u)^2 + (-u)^3 + \cdots . + (-u)^{n-1}\,)$

$Z_n - Z_2 = i\,(\,(-u)^2 \times \frac{1-(-u)^{n-2}}{1+u})$ or $Z_2 = i\,(\,1-u\,)$ donc

$Z_n = i\,(\,1-u\,) + \; i\,(\,(-u)^2 \times \frac{1-(-u)^{n-2}}{1+u})$

2.a) on a

A_0	A_1
A_1	A_2

b) $Z_0 = 0$; $Z_1 = i$ et $Z_2 = -ui + i$ Car $Z_2 - Z_1 = (-u)i$

Ainsi l'application associé à S est définie par

$Z' = -uZ + i$ et $-u = -re^{i(\alpha+\pi)}$

L'équation au point fixe $f(Z) = Z$

Donc $Z = -uZ + i$ d'où $Z = \frac{i}{1+u}$

Ainsi S est la similitude directe de rapport r d'angle $\alpha + \pi$ et de centre Ω d'affixe $\frac{i}{1+u}$

c)Démontrons par récurrence que $A_{n+1} = S(A_n)$

L'écriture complexe de S est : $Z' = -uZ + i$ donc $Z_{n+1} = -u(Z_n) + i$

Supposons que $A_n = S(A_{n-1})$ et montrons que $A_{n+1} = S(A_n)$

Par suite $A_{n+1} = S(A_n)$

3) $S_O = Id_{\mathcal{P}}$ et $\forall n$; $S_{n+1} = S \circ S_n$

a) Démontrons que $\forall n \geq 0$; $A_{n+p} = S_n(A_p)$

Pour $n = 0$; on a $A_p = S_O(A_p)$ Car $S_O = Id$ et $A_p = A_p$ d

onc vraie pour $n = 0$

Supposons qu'il existe $n \geq 0$ tel que $A_{n+p} = S_n(A_p)$ et montrons que $A_{n+1+p} = S_{n+1}(A_p)$

On a $A_{n+p} = S_n(A_p)$ donc $S(A_{n+p}) = S\left(S_n(A_p)\right)$

Ainsi $S(A_{n+p}) = S \circ S_n(A_p) = S_{n+1}(A_p)$

Donc $A_{n+1+p} = S_{n+1}(A_p)$

Par suite $n \geq 0$, $A_{n+p} = S_n(A_p)$

SITUATIONS COMPLEXES

Exercice 10

1. Notons OABC le premier carré

Le second carré est OA'B'C' tel que $S(O) = O$; $S(A) = A'$; $S(B) = B'$; $S(C) = C'$

Où $B' = C$ et A' =mil$[OB]$;

Ainsi $OA' = \frac{1}{2}OB$ et $2OA^2 = OB^2$ donc $OA' = \frac{\sqrt{2}}{2}OA$ et mes$\left(\widehat{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OA'}}\right) = \frac{\pi}{4}$

Par suite $S = s_{\left(O;\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\pi}{4}\right)}$

L'écriture complexe de S est donc $Z' = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}Z = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)Z$

La reproduction du tableau s'en déduit grâce à un raisonnement identique

Exercice 11

Préoccupation du père

- Le nouveau champ est triangulaire car il est le transformé de l'ancien champ par une similitude
- L'aire du nouveau champ est égale à l'aire de l'ancien multiplié par le carré du rapport de l'homothétie soit : 10 ha
- Le plan du nouveau champ s'obtient grâce à la construction de l'image du triangle ABC par la similitude directe S

9 SUITES NUMÉRIQUES

EXERCICES DE FIXATION

I) RAPPEL SUR LES SUITES ARITHMETIQUES ET LES SUITES GEOMETRIQUES

Exercices de fixation

Exercice 1

U_n est une suite arithmétique de raison 7 donc $U_{n+1} = U_n + 7$

Exercice 2

V_n est une suite géométrique de raison 7 donc On a $V_{n+1} = 7\, V_n$

Exercice 3

$U_n = U_2 + (n-2) \times (-3) = -3n + 15$

Exercice 4

On a $V_n = V_4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-4} = 32 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-4}$

Donc $V_n = 32 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{-4} = 512 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n}$

Exercice 5

$U_4 + U_5 + \cdots + U_{16} = (16 - 4 + 1) \times \frac{U_4 + U_6}{2} = 13 \times \frac{U_4 + U_6}{2}$

Or $U_4 = -3 \times 4 + 15 = 3$ et $U_{16} = -3 \times 16 + 15 = -33$

Donc $U_4 + U_5 + \cdots + U_{16} = 13 \times \frac{3-33}{2} = 13 \times \left(\frac{-30}{2}\right) = -13 \times 15 = -195$

Exercice 6

On a $q = \frac{1}{2}$ et $V_4 = 32$ donc

$$V_4 + V_5 + \cdots + V_{16} = V_4 \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^9}{1-\frac{1}{2}} = 32 \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^9}{\frac{1}{2}} = 64 \times \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^9\right)$$

$$= 2^6 - \frac{2^6}{2^9} = 2^6 - \frac{1}{2^3}$$

II) LE RAISONNEMENT PAR RECURRENCE

Exercice de fixation

Exercice 7

$U_0 = 3^0 - 2$ donc $U_0 = -1$ (vrai)

Supposons que pour $k \geq 1$, $u_k = 3^k - 2$ puis montrons que : $u_{k+1} = 3^{k+1} - 2$

$u_{k+1} = 3u_k + 4$, or $u_k = 3^k - 2$ donc $u_{k+1} = 3\,(3^k - 2) + 4$ soit $u_{k+1} = 3^{k+1} - 2$

Exercice 8

Somme de n termes d'une suite arithmétique de premier terme 1 et de raison 1

On bien : $1 + 2 + 3 + \cdots + n += \frac{n(n+1)}{2}$

SUITES CROISSANTES, SUITES DECROISSANTES

Exercice 9

1.VRAI

2.VRAI

3.FAUX (préciser que son premier terme est positif)

SUITES MAJORES, MINOREES

Exercice 10

1.FAUX

2.VRAI

3.VRAI

4.FAUX

SUITE CONVERGENTE, SUITE DIVERGENTE

Exercice 11

1.VRAI

2.VRAI

Exercice 12

1.FAUX

2.VRAI

Exercice 13

1.VRAI

2.FAUX

3.VRAI

4.VRAI

Exercice 14

On a $U_n = \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 1$

Exercice 15

1)$U_n = f(n)$ où $f(n) = \frac{1}{n}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} f(n) = 0$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0$

2) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{x+1}{x+2} = 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 1$

3)On a $U_n = \frac{\ln(n+1)}{n+1} \times \frac{n+1}{n}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln(n+1)}{n+1} = 0$ $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n} = 1$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0$

4) $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = +\infty$ 5) $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 0$

Exercice 16

La limite de (U_n) est solution de l'équation $f(x) = x$ avec $x \geq 1$

$f(x) = x \Leftrightarrow 2\sqrt{x} + 1 = x \Leftrightarrow 2\sqrt{x} = x - 1 \Leftrightarrow 4x = (x-1)^2 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 1 = 0$

$\Delta = 32 = \left(4\sqrt{2}\right)^2$

Ainsi $x = \frac{6-4\sqrt{2}}{2}$ ou $x = \frac{6+4\sqrt{2}}{2}$

$x = 3 - 2\sqrt{2}$ ou $x = 3 + 2\sqrt{2}$

comme $x \geq 1$ donc La limite de (U_n) est $3 + 2\sqrt{2}$

Exercice 17

La limite l de (U_n) est solution de l'équation $f(x) = x$

$f(x) = x \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{x} = x; x > 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0$

Les solutions sont $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$; comme $l > 0$ alors $l = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Exercice 18

a) $-1 < 0{,}7 < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 0$

b) $5 > 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n = +\infty$

c) $-1 < \frac{3}{5} < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} W_n = 0$

Exercice 19

1)On a $-1 \leq (-1)^n \leq 1$ donc $n^2 - 1 \leq n^2 + (-1)^n \leq n^2 + 1$

Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} (n^2 - 1) = +\infty$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} (n^2 + (-1)^n) = +\infty$

2)$-1 \leq \sin n \leq 1$ donc $n - 1 \leq n + \sin n \leq n + 1$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}(n-1)=+\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(n+\sin n)=+\infty$

Exercice 20

1) On a $-1\leq \sin n\leq 1$ ainsi $-\frac{1}{n}\leq\frac{\sin n}{n}\leq\frac{1}{n}$

$\lim\limits_{n\to+\infty}-\frac{1}{n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\sin n}{n}=0$

2) On a $-1\leq(-1)^n\leq 1$ ainsi $-\frac{1}{n^2}\leq\frac{(-1)^n}{n^2}\leq\frac{1}{n^2}$

$\lim\limits_{n\to+\infty}-\frac{1}{n^2}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2}=0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}=0$

Exercice 21

1) A

2) C

3) C

4) C

5) A

Exercice 22

a) $\lim\limits_{n\to+\infty}(n\ln n)=+\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=+\infty$

b) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\ln n}{n^{0.3}}=0$

c) $\sqrt{n}\times\left(\frac{1}{2}\right)^n=\sqrt{n}\times\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{n^{\frac{1}{2}}}{2^n}$; comme $\frac{1}{2}>0$ et $2>1$ donc

$\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n}\times\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$

d) $U_n=\frac{n^4}{(1{,}05)^n}$; $1{,}05>1$ et $4>0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^4}{(1{,}05)^n}=0$

Exercice 23

a)$n^2 - 2^n = 2^n\left(\frac{n^2}{2^n} - 1\right)$; $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^2}{2^n} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(n^2 - 2^n) = -\infty$

car $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$

b) $n - \ln n = n\left(1 - \frac{\ln n}{n}\right)$; $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(n - \ln n) = +\infty$

c)$\frac{3^n}{n^2} = \frac{1}{\frac{n^2}{3^n}}$; $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^2}{3^n} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\frac{n^2}{3^n}} = +\infty$. d) $+\infty$

EXERCICES DE RENFORCEMENT / D'APPROFONDISSEMENT

Exercice 1

Pour $n = 1$ on a $1^2 = 1$ et $\frac{1(1+1)(2\times1+1)}{6} = \frac{6}{6} = 1$ donc vrai pour $n = 1$

Supposons qu'il existe un entier $n \geq 1$ tel que $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ et

montrons que $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$

$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{(n+1)[n(2n+1)+6(n+1)]}{6}$

$$= \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6} = \frac{(n+1)\left(2(n+2)\left(n+\frac{3}{2}\right)\right)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

Donc $\forall n$; $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Exercice 2

$n = 1$, 1 on a $1^3 = 1$ et $\frac{1^3(1+1)^2}{4} = \frac{4}{4} = 1$ donc vrai pour $n = 1$

Supposons qu'il existe un entier $n \geq 1$ tel que $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^3(n+1)^2}{4}$

et montrons que $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 + (n+1)^3 = \frac{(n+1)^3(n+2)^2}{4}$

On a $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 + (n+1)^3 = \frac{n^3(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = \frac{(n+1)^2(n^3+4n+4)}{4}$

$= \dfrac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$

Exercice 3

Attention : il s'agit de démontrer que :

$$1 \times 2 + 2 \times 3 + \ldots + n \times (n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

Pour $n = 1$; on a $1 \times 2 = 2$ et $\frac{1(1+1)(1+2)}{3} = 2$

Supposons qu'il existe $n \geq 1$ tel que $1 \times 2 + 2 \times 3 + \cdots \times n \times (n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

et montrons que $1 \times 2 + \cdots + n \times (n+1) + (n+1) \times (n+2) = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}$

$1 \times 2 + \cdots + n \times (n+1) + (n+1) \times (n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} + (n+1)(n+2)$

$\frac{n(n+1)(n+2)}{3} + (n+1)(n+2) = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}$

(Il suffit de réduire au même dénominateur et mettre $(n+1)(n+2)$ en facteur)

Exercice 4

Pour $n = 0$; on a $3^0 - 1 = 0$ et 0 est multiple de 8

Supposons qu'il existe $n \geq 0$ tel que $3^{2n} - 1$ est multiple de 8 et montrons que $3^{2(n+1)} - 1$ est multiple de 8

On a $3^{2(n+1)} - 1 = 3^{2n} \times 3^2 - 1 = 3^{2n} \times 3^2 - 3^2 + 8 = 3^2(3^{2n} - 1) + 8$

$3^{2n} - 1$ et 8 sont des multiples de 8 donc $3^2(3^{2n} - 1) + 8$ est multiple de 8 par suite $3^{2(n+1)} - 1$ est multiple de 8

Par suite $\forall\, n \geq 0$; $3^{2n} - 1$ est multiple de 8

Exercice 5

1) On a $U_{n+1} = \frac{2U_n + 1}{U_n + 3}$ donc $U_{n+1} = 2 - \frac{5}{U_n+3}$

On a $2 > 0$ donc $U_0 > 0$

Supposons qu'il existe $n \geq 0$ tel que $U_n > 0$ et montrons que $U_{n+1} > 0$

On a $U_n > 0$; $3 + U_n > 3$; $-\frac{5}{2} < -\frac{5}{U_n+3}$; $\frac{1}{3} < 2 - \frac{5}{U_n+3}$

Ainsi $U_{n+1} > 0$ car $\frac{1}{3} > 0$

Donc $\forall n$; $U_n > 0$ 000

2) a) $U_1 = \frac{2U_0+1}{U_0+3} = \frac{2\times2+1}{2+3} = \frac{5}{5} = 1$

b) On a $1 < 2$ donc $U_1 < U_0$

Supposons que $U_{n+1} < U_n$ et montrons que $U_{n+2} < U_{n+1}$

$U_{n+1} < U_n$; $-\frac{5}{U_{n+1}+3} < -\frac{5}{U_n+3}$; $2 - \frac{5}{U_{n+1}+3} < 2 - \frac{5}{U_n+3}$ donc $U_{n+2} < U_{n+1}$

Par suite $\forall n$; $U_{n+1} < U_n$ donc la suite (U_n) est décroissante.

3) Elle est décroissante et minorée par 0. Donc elle converge

Exercice 6

1.On a $V_{n+1} = U_{n+1} - 3 = \frac{1}{3}U_n + 2 - 3 = \frac{1}{3}U_n - 1 = \frac{1}{3}(U_n - 3) = \frac{1}{3}V_n$

Donc la suite (V_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et de premier terme

$V_0 = -1$

2.a) On a : $V_n = -\left(\frac{1}{3}\right)^n + 3$ comme $-1 < \frac{1}{3} < 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = 0$

2.b) On a $U_n = V_n + 3 = -\left(\frac{1}{3}\right)^n + 3$

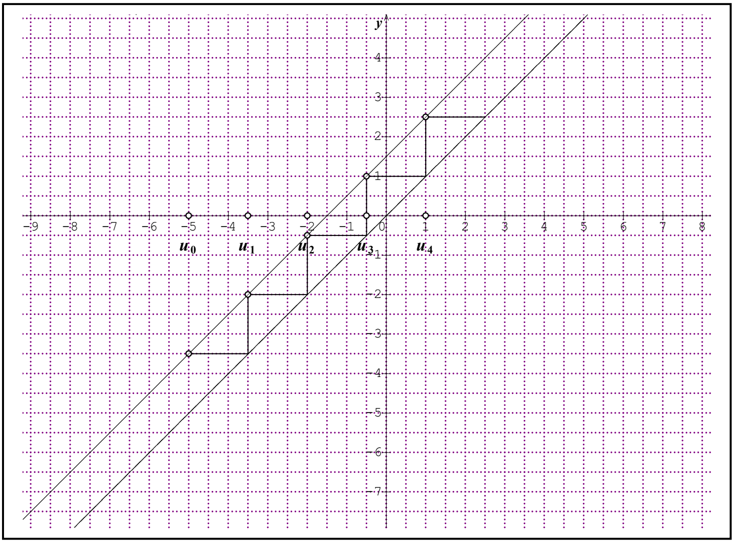
Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \left[-\left(\frac{1}{3}\right)^n + 3\right] = 3$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$

Exercice 7

1)(U_n) est une suite arithmétique de raison $\frac{3}{2}$ de premier terme -5

Donc $U_n = -5 + \frac{3}{2}n$

2)



3)$U_0 + U_1 + \cdots + U_{20} = 21 \times \left(\frac{U_0+U_{20}}{2}\right)$ où $U_{20} = -5 + 30 = 25$

Ainsi $U_0 + U_1 + \cdots + U_{20} = 21 \times \left(\frac{-5+25}{2}\right) = 21 \times 10 = 210$

Exercice 8

On a $U_n - 1 + U_{n+1} = 2U_n$ donc $U_{n+1} = U_n + 1$

D'où (U_n) est une suite arithmétique

Exercice 9

1.a)$1 > 0$ donc $U_0 > 0$; supposons qu'il existe un entier naturel n≥ 0 *tel que* $U_n > 0$ et montrons que $U_{n+1} > 0$

$U_n > 0$ donc $2U_n > 0$ et $2 + U_n > 0$ d'où $\frac{2U_n}{2+U_n} > 0$ donc $U_{n+1} > 0$

1.b) $V_{n+1} - V_n = \frac{2U_n}{2+U_n} - \frac{1}{U_n} = \frac{U_n}{2U_n} = \frac{1}{2}$ donc V_n est arithmétique

2.a) V_n est une suite arithmétique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme 1

Ainsi $V_n = 1 + \frac{1}{2}n = \frac{2+n}{2}$

D'où $U_n = \frac{1}{V_n} = \frac{2}{2+n}$

2.b)$S_n = V_0 + V_1 + \cdots + V_n = (n+1)\left(\frac{V_0+V_n}{2}\right) = \frac{(n+1)\left(2+\frac{1}{2}n\right)}{2} = \frac{1}{4}(n+1)(4+n)$

2.c) $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2}{2+n} = 0$ donc (U_n) est convergente

Exercice10

1.$U_1 = \frac{2U_0+V_0}{3} = \frac{2\times 2+8}{3} = \frac{12}{3} = 4$

$V_1 = \frac{U_0+3V_0}{4} = \frac{2+3\times 8}{4} = \frac{26}{4} = \frac{13}{2}$

2.a)$d_{n+1} = V_{n+1} - U_{n+1} = \frac{3V_n+U_n}{4} - \frac{2U_n+3V_n}{3} = \frac{1}{12}(3U_n + 9V_n - 8U_n - 4V_n)$

$= \frac{1}{12}(-5U_n + 5V_n) = \frac{5}{12}(V_n - U_n) = \frac{5}{12}d_n$

Donc (d_n) est une suite géométrique de raison $\frac{5}{12}$ et de premier terme

$d_0 = V_0 - U_0 = 6$

b)(d_n) est une suite géométrique de raison $\frac{5}{12}$ et de premier terme $d_0 = 6$

donc $d_n = 6 \times \left(\frac{5}{12}\right)^n$

c)On a $\frac{5}{12} > 0$ donc $\left(\frac{5}{12}\right)^n > 0$ d'où $d_n > 0$

b) $\lim\limits_{n \to +\infty} d_n = \lim\limits_{n \to +\infty} 6 \times \left(\frac{5}{12}\right)^n = 0$ car $-1 < \frac{5}{12} < 1$

3.a) $U_{n+1} - U_n = \frac{2U_n + 3V_n}{3} - U_n = \frac{V_n - U_n}{3} = \frac{d_n}{3}$

$V_{n+1} - V_n = \frac{U_n + 3V_n}{4} - V_n = \frac{U_n - V_n}{4} = -\frac{d_n}{4}$

b) $U_{n+1} - U_n = \frac{d_n}{3}$ or $d_n > 0$ donc $U_{n+1} - U_n > 0$ d'où (U_n) est croissante

$V_{n+1} - V_n = -\frac{d_n}{4}$ or $d_n > 0$ donc $U_{n+1} - U_n < 0$ d'où (V_n) est décroissante

c) (U_n) est croissante donc $U_0 < U_n$

(V_n) est décroissante donc $V_n < V_0$

De plus $d_n > 0$ donc $U_n < V_n$

Par suite $U_0 < U_n < V_n < V_0$

d) (U_n) est croissante et majorée par V_0 donc (U_n) converge

(V_n) est décroissante et minorée par U_0 donc (V_n) converge

4.a) $U_{n+1} - U_n = \frac{d_n}{3}$ donc

$$\left.\begin{array}{l} U_n - U_{n-1} = \frac{d_{n-1}}{3} \\ U_{n-1} - U_{n-2} = \frac{d_{n-2}}{3} \\ \ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots \\ U_2 - U_1 = \frac{d_1}{3} \\ U_1 - U_0 = \frac{d_0}{3} \end{array}\right\} \text{Addition membre à membre}$$

$U_n - U_0 = \frac{1}{3}\ (d_0 + d_1 + d_2 + \cdots .. + d_{n-1})$

$U_n - 2 = \frac{1}{3} \times 6 \times \frac{1-\left(\frac{5}{12}\right)^n}{1-\frac{5}{12}} = 2 \times \frac{1-\left(\frac{5}{12}\right)^n}{\frac{7}{12}} = 24 \times \frac{1-\left(\frac{5}{12}\right)^n}{7}$

Ainsi $U_n = \frac{24}{7} \times \left(1 - \left(\frac{5}{12}\right)^n\right) + 2$

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{24}{7} \times \left(1 - \left(\frac{5}{12}\right)^n\right) + 2 = \frac{24}{7} + 2 = \frac{38}{7}$

On a $\lim\limits_{n\to+\infty} d_n = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = \lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \frac{38}{7}$

Car (U_n) et (V_n) sont convergentes

Exercice 11

$\begin{cases} U_0 = \frac{1}{3} \\ U_{n+1} = \frac{3}{2}\ (U_n)^2 \end{cases}$ et $V_n = ln\left(\frac{3}{2}\ U_n\right)$

1. $V_0 = ln\left(\frac{3}{2}\ U_0\right) = -\ln 2$

2. $V_{n+1} = ln\left(\frac{3}{2}\ U_{n+1}\right) = ln\left(\frac{3}{2} \times \frac{3}{2}\ (U_n)^2\right) = ln\left(\left(\frac{3}{2}\ U_n\right)^2\right) =$
$2ln\left(\frac{3}{2}\ U_n\right)$

$V_{n+1} = 2\ V_n$ donc (V_n) est une suite géométrique de raison 2

3. $V_n = -ln2 \times 2^n = -2^n ln2$

4. $\lim V_n = \lim -2^n ln2 = -\infty$

5. $V_n = ln\left(\frac{3}{2}\ U_n\right)$ d'où $e^{V_n} = \frac{3}{2}\ U_n$ donc $\frac{2}{3}\ e^{V_n} = U_n$

$\lim\ U_n = \lim \frac{2}{3}\ e^{V_n} = 0$

6.a) $S_n = V_0 + V_1 + \cdots + V_{n-1}$

$S_n = V_0 \times \frac{1-2^n}{1-2} = V_0(1 - 2^n) = (1 - 2^n)ln2$

$T_n = U_0 \times U_1 \times \ldots \times U_{n-1}$

$T_n = \frac{2}{3}\, e^{V_0} \times \frac{2}{3}\, e^{V_1} \times \ldots \times \frac{2}{3}\, e^{V_{n-1}}$

$T_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n \times\ e^{V_0+V_1+\cdots+V_{n-1}} = \left(\frac{2}{3}\right)^n \times e^{S_n}$

$T_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n \times e^{(1-2^n)ln2} = \left(\frac{2}{3}\right)^n \times e^{ln2^{(1-2^n)}} = \left(\frac{2}{3}\right)^n \times\ 2^{(1-2^n)}$

Exercice 12

$\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \frac{4U_n - 3}{U_n} \end{cases}$

1.$f(x) = \frac{4x-3}{x}$

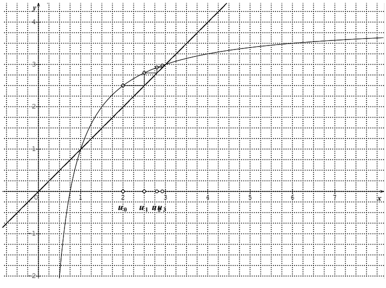
a)$\forall x \in]0;+\infty[\ ; f'(x) = \frac{4x-4x+3}{x^2} = \frac{3}{x^2}$

Or)$\forall x \in]0;+\infty[; x^2 > 0\ ; 3 > 0$ donc $\forall x \in]0;+\infty[\ ; f'(x) > 0$

Donc f est strictement croissante sur $]0;+\infty[$

x	0 $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty$ $\nearrow$ 4

b)



c) construction des quatre premier termes de la suite

2.a)$f([2;3]) = [f(2); f(3)]$ or $f(2) = \frac{5}{2}$ et $f(3) = \frac{9}{3} = 3$

Or $2 < \frac{5}{2}$ et $3 = 3$ donc $f([2;3]) \subset [2;3]$

b) $2 \leq 2 < 3$ donc $2 \leq U_0 < 3$

Supposons qu'il existe un entier $n \geq 0$ tel que $2 \leq U_n < 3$ et montrons que

$2 \leq U_{n+1} < 3$

On a : $U_{n+1} = 4 - \frac{3}{U_n}$ donc $2 \leq U_n < 3$

$-\frac{3}{2} \leq -\frac{3}{U_n} < -1$; $\frac{5}{2} \leq U_{n+1} < 3$

Donc $\forall n;\ 2 \leq U_{n+1} < 3$

c)On a $U_{n+1} = \frac{8-3}{2} = \frac{5}{2}$ et $2 < \frac{5}{2}$ donc $U_0 \leq U_1$

Supposons qu'il existe $n \geq 0$ tel que $U_n \leq U_{n+1}$ et montrons que $U_{n+1} \leq U_{n+2}$

On a $U_n \leq U_{n+1}$ et f est strictement croissante donc $f(U_n) \leq f(U_{n+1})$

D'où $U_{n+1} \leq U_{n+2}$

Par suite $\forall\ n \geq 0$; $U_n \leq U_{n+1}$ donc la suite (U_n) est strictement croissante

d)La suite (U_n) est croissante et majorée par 3 donc elle est convergente

3.a)$V_n = \frac{U_n-3}{U_n-1}$

On a $V_{n+1} = \frac{U_{n+1}-3}{U_{n+1}-1} = \frac{\frac{4U_n-3}{U_n}-3}{\frac{4U_n-3}{U_n}-1} = \frac{U_n-3}{3U_n-3} = \frac{1}{3}\left(\frac{U_n-3}{U_n-1}\right) = \frac{1}{3}V_n$

Donc (V_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et de premier terme V_0 tel que $V_0 = -1$

b) On a : $V_n = -\left(\frac{1}{3}\right)^n$ $(V_n = V_0 q^n)$

comme $-1 < \frac{1}{3} < 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n = 0$

c) On a $V_n = \frac{U_n - 3}{U_n - 1}$ donc $V_n U_n - V_n = U_n - 3$

D'où $V_n U_n - V_n = U_n - 3$ par suite $U_n = \frac{V_n - 3}{V_n - 1}$

Ainsi $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{V_n - 3}{V_n - 1} = 3$ Car $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n = 0$

Exercice 13

U_0 et $\forall n$, $U_{n+1} = 3U_n - 2n + 3$

1.$U_1 = 3U_0 - 2 \times 0 + 3 = 3U_0 + 3 = 3(U_0 + 1) = 3$

$U_2 = 3U_1 - 2 \times 1 + 3 = 3 \times 3(U_0 + 1) - 2 + 3 = 9(U_0 + 1) + 1 = 10$

2.a)On a U_0

Supposons qu'il existe $n \geq 0$ tel que $U_n \geq n$ et montrons que $U_{n+1} \geq n + 1$

On a $U_n \geq n$; $3U_n \geq 3n$; $3U_n - 2n + 3 \geq n + 3$; $U_{n+1} \geq n + 3$

Or $n + 3 \geq n + 1$ donc $U_{n+1} \geq n + 3$

Donc pour tout $n, U_n \geq n$

b)On a $U_n \geq n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = +\infty$

3.On a $U_{n+1} - U_n = 3U_n - 2n + 3 - U_n = 2U_n - 2n + 3$

Or $U_n \geq n$; $2U_n \geq 2n$; $2U_n - 2n \geq 0$; $2U_n - 2n + 3 \geq 3$

Donc $U_{n+1} - U_n \geq 0$

D'où la suite (U_n) est croissante

4.a)On a $V_{n+1} = U_{n+1} - (n + 1) + 1 = U_{n+1} - n = 3U_n - 2n + 3 - n = 3U_n - 3n + 3$

$$V_{n+1} = 3(U_n - n + 1) = 3V_n$$

Donc (V_n) est une suite géométrique de raison de 3 et de premier terme V_O tel que

$V_0 = U_0 + 1 = 1$

b) (V_n) est une suite géométrique de raison de 3 et de premier terme $U_O + 1$ or

$U_O + 1 = 1$

Donc $V_n = (U_0 + 1) \times 3^n$

Comme $V_n = U_n - n + 1$ alors $U_n = V_n + n - 1$

Donc $U_n = (U_0 + 1)3^n + n - 1$

Ainsi $U_n = 3^n + n - 1$

Exercice 14

$U_0 = \frac{n}{N}$ et $\forall n \geq 1$ $U_{n+1} = \frac{1+U_n}{3-U_n}$

1.$U_0 = 0{,}5$ donc $U_1 = \frac{1+0{,}5}{3-0{,}5} = \frac{1{,}5}{2{,}5} = \frac{3}{5}$

2.On pose $V_n = U_n - 1$

On a : $\frac{1}{V_n} = \frac{1}{U_n - 1}$ d'où $\frac{1}{V_{n+1}} = \frac{1}{U_{n+1} - 1}$

Donc $\frac{1}{V_{n+1}} = \frac{1}{\frac{1+U_n}{3-U_n} - 1} = \frac{1}{\frac{2U_n - 2}{3-U_n}}$

Déplus $\frac{1}{V_{n+1}} - \frac{1}{V_n} = \frac{3-U_n}{2(U_0-1)} - \frac{1}{U_n - 1} = \frac{3-U_n-2}{2(U_0-1)} = \frac{1-U_n}{2(U_0-1)} = -\frac{1}{2}$

Donc la suite $\left(\frac{1}{V_n}\right)$ est une suite arithmétique de raison $-\frac{1}{2}$ et de premier terme $\frac{1}{V_0}$

3.On a $\left(\frac{1}{V_n}\right)$ suite arithmétique donc $\frac{1}{V_n} = \frac{1}{V_0} - \frac{1}{2}n$

D'où $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{V_n} = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{V_0} - \frac{1}{2}n = -\infty$

Par suite $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = 0$ Car $V_n = \frac{2V_0}{2-n}$

Or $U_n = V_n + 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty} V_n + 1 = 1$

Interprétation : Après un très grand nombre de reproduction la proportion de souris noire est de 1

Exercice 15

$U_0 = 0$ et $\forall n;\ U_{n+1} = \sqrt{U_n + 6}$

1.On a $U_0 = 0$ et $0 \geq 0$ donc $U_0 \geq 0$

Supposons qu'il existe $n \geq 0$ tel que $U_n \geq 0$ et montrons que $U_{n+1} \geq 0$

On a $U_n \geq 0$; $U_n + 6 \geq 6$; $\sqrt{U_n + 6} \geq \sqrt{6} \geq 0$

Donc $U_{n+1} \geq 0$

Par suite $\forall n$; $U_n \geq 0$

On a $0 < 5$ donc $U_0 < 0$

Supposons qu'il existe $n \geq 0$ tel que $U_n < 5$ et montrons que $U_{n+1} < 5$

On a $U_n < 5$; $U_n + 6 < 11$; $\sqrt{U_n + 6} < \sqrt{11} < 5$

Donc $U_{n+1} < 5$

Par suite $\forall n$; $U_n < 5$

D'où (U_n) est majorée par 5

2.On a $U_1 = \sqrt{0 + 6} = \sqrt{6}$ et $0 < \sqrt{6}$ donc $U_0 < U_1$

Supposons qu'il existe $n \geq 0$ tel que $U_n \leq U_{n+1}$ et montrons que $U_{n+1} \leq U_{n+2}$

On a $U_n \leq U_{n+1}$; $U_n + 6 \leq U_{n+1} + 6$; $\sqrt{U_n + 6} \leq \sqrt{U_{n+1} + 6}$; $U_{n+1} \leq U_{n+2}$

Donc $\forall n\ ;\ U_n \leq U_{n+1}$

La suite (U_n) est donc croissante

3.(U_n) est croissante et majorée par 5 donc (U_n) converge

De plus $U_{n+1} = f(U_n)$ d'où sa limite l est solution de l'équation $f(x) = x$

$$f(x) = x \Leftrightarrow \sqrt{x+6} = x \Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Leftrightarrow (x-3)(x+2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 3 \text{ ou } x = -2$$

Comme $U_n > 0$ alors $l = 3$

4.On a $U_{n+1} - 3 = \sqrt{U_n + 6} - 3 = \frac{U_n+6-9}{\sqrt{U_n+6}+3} = \frac{U_n-3}{\sqrt{U_n+6}+3}$

Or $0 < \sqrt{U_n + 6}$ d'où $3 < \sqrt{U_n + 6} + 3$ Donc $\frac{1}{\sqrt{U_n+6}+3} < \frac{1}{3}$

Par suite $\frac{U_n-3}{\sqrt{U_n+6}+3} < \frac{1}{3}(U_n - 3)$

Donc $|U_{n+1} - 3| \leq \frac{1}{3}|U_n - 3|$

$$\left.\begin{array}{l} |U_n - 3| \leq \frac{1}{3}|U_{n-1} - 3| \\ |U_{n-1} - 3| \leq \frac{1}{3}|U_{n-2} - 3| \\ \ldots \qquad \ldots\ldots \\ \ldots \qquad \ldots\ldots\ldots \\ |U_2 - 3| \leq \frac{1}{3}|U_1 - 3| \\ |U_1 - 3| \leq \frac{1}{3}|U_0 - 3| \end{array}\right\} \text{multiplication membre à membre}$$

$$|U_n - 3| \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n |U_0 - 3|$$

Or $U_0 = 0$ donc $|U_n - 3| \leq 3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$

SITUATIONS COMPLEXES

Exercice 16

Pour le premier contrat

Soit $U_0 = 750.000$ le salaire de départ

L'année suivante, soit $U_1 = U_0 + U_0 \times 0{,}04 = 1{,}04 \times U_0$

Soit U_n le salaire annuel à l'année n on a : $U_{n+1} = U_n + U_n \times 0{,}04 = 1{,}04U_n$

Ainsi (U_n) est une suite géométrique de raison 1,04 et de premier terme 750.000

D'où $U_n = 750.000 \times (1{,}04)^n$

Pour 9 ans

On a : $U = 750.000 \times (1{,}04)^9 = 1\ 067\ 483{,}859$

Pour le deuxième contrat

Soit $V_0 = 750\ 000$ le salaire de départ

Soit V_n le salaire annuel à l'année n on a : $V_{n+1} = V_n + 30\ 000$

Ainsi (V_n) est une suite arithmétique de raison 30 000 et de premier terme 750 000

D'où $V_n = 750\ 000 + 30\ 000\ n$

Pour 9 ans

On a $V = 750\ 000 + 30\ 000 \times 9 = 1\ 020\ 000$

Le contrat le plus avantageux pour Monsieur Yao est le premier contrat

Exercice 17

f(0) = 1 et f(t) = 120t +1. Il s'agit d'une suite arithmétique de premier terme 1 et de raison 120. Calculons-la en fonction de t la somme :

S = f(0) + f(1) + f(2) + f(3) + … + f(t)

S = $\frac{t+1}{2}(f(0)+f(t))$ soit S = $\frac{t+1}{2}(120t+2)$,

donc S = $60t^2+61t+1$ (t> 0)

S $\geq 10^4 \Leftrightarrow 60t^2+61t-9999 \geq 0$ et t >0 donc $t \geq \frac{-61+7\sqrt{2403481}}{120}$;

t est un entier donc la plus petite valeur de t est : 13.

Le couvre-feu interviendra 13 jours après la déclaration du premier cas contrairement à l'affirmation du camarade de classe

10 CALCUL INTÉGRAL

EXERCICES DE FIXATION

Exercice 1

Coche les bonnes réponses dans chacun des cas suivants :

1) Soit F et G deux primitives d'une fonction f sur un intervalle I. Pour tous a et b de I, on a:

$\int_a^b f(x)dx =$

× F(b) - F(a) ☐ G(a) - F(b) × G(b) - G(a) × $[F(t)]_a^b$, ☐ $[F(t)]_b^a$

Exercice 2

La fonction étant continue f sur l'intervalle I y admet au moins une primitive. x_0 étant un élément de I, il existe une et une primitive de f sur I qui s'annule en x_0. Or F est une primitive de f qui s'annule en x_0. D'où le résultat.

Exercice 3

Calcule :

1) $\int_2^5 (2t-1)dt = [t^2-t]_2^5 = 18$; 2) $\int_3^1 \frac{1}{t^2}dt = \frac{-2}{3}$; 3) $\int_0^1 t^2 dt = [\frac{t^3}{3}]_0^1 = \frac{1}{3}$.

4) $\int_2^1 \frac{1}{t}dt$ (remplacer 0 par 2) $\int_2^1 \frac{1}{t}dt =$ - ln2

Premier exemple de la page

Lire plutôt : $\int_1^0 t^2 dt = -\frac{1}{3}$

Exercice 4

$\int_a^b \big(f(t) - 2g(t)\big)dt =$

☐ $2\int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t))dt$; ☐ $(2\int_a^b f(t)dt - \int_a^b g(t))dt$

☐ $(-2\int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t))dt$; × $\int_a^b f(t)dt - 2\int_a^b g(t)dt.$

2) Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I et a et b deux nombres réels de I , α et β deux nombres réels. On a :

$\int_a^b \left(\alpha f(t) - \beta g(t)\right)dt =$

☐ $\beta\int_a^b f(t)dt + \alpha\int_a^b g(t))dt$; ☐ $(\alpha-\beta)(\int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t))dt$

☐ $(\alpha+\beta)(\int_a^b f(t)dt - \int_a^b g(t))dt$; × $\alpha\int_a^b f(t)dt - \beta\int_a^b g(t)dt.$

Exercice 5

a) $1+\dfrac{\pi^2}{8}$; b) $\frac{82}{3}$;

c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^2 x)dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^2 x + cos^2 x)dx$ = $\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx$ = $\frac{\pi}{2}$.

b) Relation de Chasles

Exercice 6

L'intégrale vaut : 17

Exercice 7

$\int_{-2}^{3}|x-1|dx$ = $\int_{-2}^{1}(1-x)dx + \int_1^3(x-1)dx$ = $[x-\frac{x^2}{2}]_{-2}^{0}$ + $[\frac{x^2}{2}-x]_0^3$ = $\frac{11}{2}$.

3) Intégrale et inégalité

Exercice 8

En intégrant sur [1; 2], on a : 0 ≤ $\int_1^2 \frac{dx}{x}$ ≤ $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x}}$. Or : $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x}} = [2\sqrt{x}]_1^2$= $2\sqrt{2}$ – 2, donc :

0 ≤ ln2 ≤ $2\sqrt{2}$ – 2.

Exercice 9

a) La fonction $x \longmapsto sinx$ est continue et positive sur [0;$\frac{\pi}{2}$], d'où : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} sinxdx$ ≥ 0.

b) La fonction $x \longmapsto x^3$ est continue et négative sur $[-2; -1\ ]$, d'où :
$\int_{-2}^{-1} x^3dx$ ≤ 0.

6) Inégalités de la moyenne

Propriété

Exercice 11

La fonction $x \longmapsto sinx$ étant continue sur $[0\,;\frac{\pi}{2}]$, et pour tout nombre *x*,

$|\text{sin}x| \leq 1$. $|\int_0^{\frac{\pi}{2}} sinxdx| \leq \frac{\pi}{2}$. Or : $\frac{\pi}{2} \leq 2$, donc $|\int_0^{\frac{\pi}{2}} sinxdx| \leq 2$.

Valeur moyenne d'une fonction

Exercice 12

1) $\frac{1}{3}$; 2) $\frac{1}{2}(e^1 - e^{-1})$; 3) ln2.

7) Techniques de l'intégration par parties

Exercice 13

u(x) = x , u'(x) $= 1$; v'(x) $= sinx$, v(x) $= -cosx$.

$\int_0^{\pi} x \sin x\, dx = [-xcosx]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} -cosx\, dx$; $\int_0^{\pi} x \sin x\, dx = [-xcosx]_0^{\pi} + [sinx]_0^{\pi} = \pi$.

Exercice 14

u(x) = x , u'(x) $= 1$; v'(x) $= \sqrt{2x+1}$, v(x) $= \frac{1}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}}$;

$\int_0^1 x\sqrt{2x+1}\, dx = [\frac{x}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}}]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}}\, dx = [\frac{x}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}}]_0^1 - \frac{1}{15}[(2x+1)^{\frac{5}{2}}]_0^1$;

$\int_0^1 x\sqrt{2x+1}\, dx = \frac{2\sqrt{3}}{5} + \frac{1}{15}$.

Exercice 15

u(x) = lnx , u'(x) $= \frac{1}{x}$; v'(x) $= x$, v(x) $= \frac{x^2}{2}$.

$\int_1^e xlnxdx = [\frac{x^2}{2} lnx]_1^e - \int_1^e \frac{x}{2}\, dx$; $\int_1^e xlnxdx = [\frac{x^2}{2} lnx]_1^e - [\frac{x^2}{4}]_1^e = \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4}$.

8) Technique du changement de variable affine

Exercice 16

Posons : $u = x + 1$.

$\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx = \int_1^4 (\sqrt{u} - \frac{1}{\sqrt{u}}) du = [\frac{2}{3}u\sqrt{u}]_1^4 - [2\sqrt{u}]_1^4$; $\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx = \frac{8}{3}$.

Exercice 17

Posons : $u = 2x - 3$.

$\int_0^2 (2x-3)^4 dx = \frac{1}{2}\int_{-3}^{1} u^4 du$; $\int_0^2 (2x-3)^4 dx = \frac{122}{5}$.

9) Autres techniques d'intégration

a) Utilisation d'une primitive

Exercices de fixation

Exercice 18

1) Posons : $u = 2x^2 + 6x + 1$; $\int_{-2}^{3} \frac{2x+3}{2x^2+6x+1} dx = \int_{-2}^{3} \frac{u'}{2u} dx = [\frac{1}{2}\ln(|2x^2 + 6x + 1|]_{-2}^{3}$;

$\int_{-2}^{3} \frac{2x+3}{2x^2+6x+1} dx = \frac{1}{2}\ln(\frac{37}{3})$.

2) $u = x^2 + x + 1$; $\int_1^5 \frac{2x+1}{(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x+1}}dx = \int_1^5 u'u^{\frac{-3}{2}}dx = 2\left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{31}}\right)$.

3) $u = x^2 - 1$; $\int_2^4 \frac{2x dx}{(x^2-1)^{2/3}} = \int_2^4 u'u^{-2/3} dx = 3(2^{2/3} - 2^{\frac{1}{3}})$. 4) idem

b) Utilisation d'une linéarisation

Exercice 19

1) $2i\sin x = e^{ix} - e^{-ix}$;

$-8i\sin^3 x = (e^{ix} - e^{-ix})^3 = e^{3ix} - 3\,e^{2ix}\,e^{-ix} + 3\,e^{ix}\,e^{-2ix} - e^{-3ix}$;

$-8i\sin^3 x = (e^{3ix} - e^{-3ix}) - 3(e^{ix} - e^{-ix}) = 2i\sin 3x - 6i\sin x$;

$\sin^3 x = -\frac{1}{4}\sin 3x + \frac{3}{4}\sin x$;

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x dx = \frac{1}{12}[\cos 3x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{3}{4}[\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3}$.

2) $2\cos x = e^{ix} + e^{-ix}$

$32\cos^5 x = (e^{ix} + e^{-ix})^5 =$

$e^{5ix} + 5e^{4ix}\,e^{-ix} + 10\,e^{3ix}\,e^{-2ix} + 10e^{2ix}\,e^{-3ix} + 5e^{ix}\,e^{-4ix} + e^{-5ix}$

$32cos^5x = (e^{5ix} + e^{-5ix}) + 5(e^{3ix} + e^{-3ix}) + 10(e^{ix} + e^{-ix})$;

$32cos^5x = 2cos5x + 10cos3x + 20cosx$;

$cos^5x = \frac{1}{16}cos5x + \frac{5}{16}cos3x + \frac{5}{8}cosx$;

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^5xdx = \frac{1}{80}[sin5x]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{5}{48}[sin3x]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{5}{8}[sinx]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^5xdx = \frac{8}{15}$.

3) Calcul de $\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^2xcos^3xdx$

Deux méthodes :

a) $sin^2xcos^3x = (1 - cos^2x)cos^3x = cos^3x - cos^5x$;

On linéarise $cos^3x\ et\ cos^5x$ et après calcul, on obtient :

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^2xcos^3xdx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^3xdx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^5xdx = \frac{2}{15}$.

b)) $sin^2xcos^3x = cosx(1 - sin^2x)sin^2x = cosxsin^2x - cosxsin^4x$;

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^2xcos^3xdx = [\frac{sin^3x}{3}]_0^{\frac{\pi}{2}} - [\frac{sin^5x}{5}]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{15}$.

Fonctions du type : $x \longmapsto \int_a^x f(t)\,dt$

Exercice 20

La fonction $t \mapsto \frac{e^t}{\sqrt{1+e^t}}$ est continue sur $\mathbb{R}$. Il en résulte que la fonction $x \mapsto \int_0^x \frac{e^t}{\sqrt{1+e^t}}dt$ définie sur $\mathbb{R}$ est l'unique primitive de fonction $t \mapsto \frac{e^t}{\sqrt{1+e^t}}$ définie sur $\mathbb{R}$ et qui s'annule en 0.

11) Intégrale de fonction paire, impaire ou périodique

Propriété.
Exercice 21

1) $\int_{\pi}^{3\pi} sinxdx = \int_{0+\pi}^{2\pi+\pi} sinxdx$; $\int_{\pi}^{3\pi} sinxdx = \int_{0}^{2\pi} sinxdx$, car la fonction sinus est périodique de période 2π.
2) $\int_{-\pi}^{\pi} cosxdx = \int_{-\pi+2\pi}^{\pi+2\pi} cosxdx = \int_{\pi}^{3\pi} cosxdx$, car la fonction cosinus est périodique de période 2π.

Propriété
Exercice 22
1) $\int_{-\pi}^{\pi} sinxdx = 0$, car la fonction sinus est impaire sur l'intervalle $[-\pi;\ \pi]$.

2) $\int_{-\pi}^{\pi} cosxdx = 2\int_{0}^{\pi} cosxdx$, car la fonction cosinus est paire sur l'intervalle $[-\pi;\ \pi]$

12) Calcul d'aires
Exercice 23

Notons précisément OBCD le rectangle (R) tel que OB = *a* et OD = *b*.
Considérons le repère orthonormé (O, I, J) tel que l'unité soit le centimètre et : $\mathrm{I} \in [\mathrm{OB})$ et $\mathrm{J} \in [\mathrm{OD})$.
L'aire du rectangle (R) en cm^2 est l'aire de la partie du plan délimitée par les droites d'équation x = 0 et x = *a* et la courbe représentative de la fonction constante : $x \longmapsto b$. Cette aire vaut : $\int_{0}^{a} bdx = ab$.

Exercice 24
L'unité d'aire est 3×2 cm^2. La fonction f étant continue et positive sur [1 ; 2], l'aire en unité d'aire est : $\int_{1}^{2}(x^2 + x - 2)\mathrm{dx}$, soit $\frac{11}{6}$ u.a. Ce qui donne : 11 cm^2.

Exercice 25
L'unité d'aire est 9 cm^2. La fonction f étant continue et négative sur [-2 ; 0], l'aire en unité d'aire est : $-\int_{-2}^{0}(x^2 + x - 2)\mathrm{dx}$, soit $\frac{4}{3}$ u.a. Ce qui donne :

Exercice 26

Cette aire, en unité d'aire, vaut : $\int_0^3 (g(x) - f(x))dx$.
Ce qui donne 9 u.a.

Applications du calcul intégral

(Cette partie n'est pas inscrite au programme de TC/D, mais peut être utile pour la préparation des concours après le BAC)

Exercice 27

a) $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$, où $f(x) = cos^2\pi x$.

Par suite : $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \int_0^1 cos^2\pi x\, dx$. D'où : $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \frac{1}{2}$.

b) $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\frac{k}{n}}{\sqrt{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}}$

$\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$, où $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

D'où : $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \sqrt{2} - 1$.

Exercice 28

a) $n = 10$, $\int_1^2 \frac{1}{x} dx$.
La fonction f qui à $x \longmapsto \frac{1}{x}$ est continue positive et décroissante sur [1 ; 2].

$\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} f\left(1 + \frac{1}{10} i\right) \leq \int_1^2 \frac{1}{x} dx \leq \frac{1}{10}\sum_{i=0}^{9} f\left(1 + \frac{1}{10} i\right)$.

0,668771403 $\leq \int_1^2 \frac{1}{x} dx \leq$ 0,718771403.

D'où : 0,668 $\leq \int_1^2 \frac{1}{x} dx \leq$ 0,72.

0,694 est une valeur approchée de de $\int_1^2 \frac{1}{x} dx$ à 26×10^{-3} près.

b) $n = 20$, $\int_0^1 e^{-x^2}dx$.
La fonction f qui à $x \longmapsto e^{-x^2}$ est continue positive et décroissante sur [0 ; 1].

$\frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20} f(\frac{1}{20}i) \leq \int_0^1 e^{-x^2}dx \leq \frac{1}{20}\sum_{i=0}^{19} f(\frac{1}{10}i)$.

On a : $0{,}73086782 \leq \int_0^1 e^{-x^2}dx \leq 0{,}76247385$.

D'où : $0{,}73 \leq \int_0^1 e^{-x^2}dx \leq 0{,}77$

0,75 est une valeur approchée $\int_0^1 e^{-x^2}dx$ à 2×10^{-2} près.
c) $n = 15$, méthode identique

EXERCICES DE RENFORCEMENT / D'APPROFONDISSEMENT

Exercice 1

1) $\int_1^3 \frac{|x-2|}{(x^2-4x)^2}dx = \int_1^2 \frac{2-x}{(x^2-4x)^2}dx + \int_2^3 \frac{x-2}{(x^2-4x)^2}dx$.

En posant : $u(x) = x^2 - 4x$, l'intégrale se met sous la forme :

$\int_1^3 \frac{|x-2|}{(x^2-4x)^2}dx = -\frac{1}{2}\int_1^2 u'(x)u(x)^{-2}\,dx + \frac{1}{2}\int_1^2 u'(x)u(x)^{-2}\,dx$.

Après calcul, $\int_1^3 \frac{|x-2|}{(x^2-4x)^2}dx = \frac{1}{12}$.

2) En posant : $u(x) = 1 - x^2$, on a : $\int_0^1 x(1-x^2)^2dx = -\frac{1}{2}$
$\int_0^1 u'(x)u(x)^2\,dx$.

Après calcul, $\int_0^1 x(1-x^2)^2dx = \frac{1}{6}$.

3) En posant : $u(x) = 1 + x^3$, on a : $\int_0^2 \frac{x^2dx}{\sqrt{1+x^3}} = \frac{4}{3}$.

4) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} tan^2\,tdt = \int_0^{\frac{\pi}{4}}[(1+tan^2\,t) - 1]dt$.

D'où : $\int_0^{\frac{\pi}{4}} tan^2\,tdt = [tant]_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{\pi}{4}$. On conclut que : $\int_0^{\frac{\pi}{4}} tan^2\,tdt = 1-\frac{\pi}{4}$.

Exercice 2

1) Calcul de $\int_0^1 x\sqrt{1-x}dx$.

Posons : $u(x) = x$ et $v'(x) = \sqrt{1-x}$. On a : $u'(x) = 1$ et on prend :

$v(x) = (1-x)^{\frac{3}{2}}$.

Après calcul, $\int_0^1 x\sqrt{1-x}dx = \frac{4}{15}$.

2) Faire deux intégrations par parties.
3) Faire une intégration par parties, en posant : $u(x) = lnx$ et
4) $v'(x) = \frac{1}{3}x^3$.
5) Posons : $u(x) = \ln(1+x)$ et $v'(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$. On a : $u'(x) = \frac{1}{1+x}$ et on prend : $v(x) = -\frac{1}{1+x}$.

Après calcul, $\int_1^e \frac{\ln(1+t)}{(1+t)^2}dt = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}ln2 - \frac{1}{1+e} - \frac{1}{1+e}\ln(1+e)$.

Exercice 3

1) Calcul de $\int_0^1 x\sqrt{1-x}dx$.

Posons : $u = 1-x$. On a : $\int_0^1 x\sqrt{1-x}dx = \int_0^1 (1-u)\sqrt{u}du$. D'où :
$\int_0^1 x\sqrt{1-x}dx = \frac{4}{15}$.

2) Calcul de $\int_0^1 x(1-x)^n dx$.

Posons : $u = 1-x$. On a : $\int_0^1 x(1-x)^n dx = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$.

Exercice 4

1) Calcul de $\int_0^{2\pi} cos^4 x dx$.

On utilise 2cosx = $e^{ix} + e^{-ix}$ et la formule du binôme de Newton.
16$cos^4 x$ = e^{4ix} + 4$e^{3ix}e^{-ix}$ + 6$e^{2ix}e^{-2ix}$ + 4$e^{ix}e^{-3ix}$+ e^{-4ix}
16$cos^4 x$ = ($e^{4ix} + e^{-4ix}$) + 4($e^{2ix} + e^{-2ix}$) + 6. D'où :
$cos^4 x = \frac{1}{8}$cos4x + $\frac{1}{2}$cos2x + $\frac{3}{8}$. Par suite :
$\int_0^{2\pi} cos^4 x dx = [\frac{1}{32}sin4x + \frac{1}{4}sin2x + \frac{3}{8}x]_0^{2\pi}$
$\int_0^{2\pi} cos^4 x dx = \frac{3\pi}{4}$.

2) Calcul de $\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^3xcos^2xdx$.

On a : sin^3xcos^2x = $sin^3x(1 - sin^2x)$; d'où : $sin^3xcos^2x = sin^3x - sin^5x$.

On utilise 2$i$sinx = $e^{ix} - e^{-ix}$ et la formule du binôme de Newton.

D'où : sin^3x = $-\frac{1}{4}$sin3x + $\frac{3}{4}$sinx et sin^5x = $\frac{1}{16}$sin5x $-$ $\frac{5}{16}$sin3x + $\frac{5}{8}sinx$. Par suite :

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^3xcos^2xdx$ = $[\frac{1}{16}sin3x + \frac{1}{8}sinx - \frac{1}{16}\text{sin5x}]_0^{\frac{\pi}{2}}$.

On a : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^3xcos^2xdx$ = 0.

3) Calcul de $\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^2xcos^2xdx$.

On a : sin^2xcos^2x = $(1 - cos^2x)\,cos^2x$; d'où : $sin^2xcos^2x = cos^2x - cos^4x$.

cos^2x = $\frac{1+cos2x}{2}$ et $cos^4x = \frac{1}{8}$cos4x + $\frac{1}{2}$cos2x + $\frac{3}{8}$. D'où :

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^2xcos^2xdx$ = $\frac{\pi}{16}$.

4) Calcul de $\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^5 2xdx$

$sin^5 2x$ = $\frac{1}{16}$sin10x $-$ $\frac{5}{16}$sin6x + $\frac{5}{8}sin2x$. Par suite :

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^5 2xdx$ = 0

Exercice 5

1) I + J= $(a + b)\frac{\pi}{2}$.
2) I – J = $\frac{a-b}{2\omega} sin\omega\pi$.
3) I = $(a + b)\frac{\pi}{4} + \frac{a-b}{4\omega} sin\omega\pi$ et J = $(a + b)\frac{\pi}{4} - \frac{a-b}{4\omega} sin\omega\pi$.

Exercice 6

1) $I_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+5} I_n$
2) $I_0 = \frac{2}{3}$
3) $I_n = \frac{2n}{2n+3} \times \frac{2n-2}{2n+1} \times \ldots \times \frac{4}{7} \times \frac{2}{5} \times \frac{2}{3}$, pour $n \geq 1$ et $I_0 = \frac{2}{3}$.

   $I_n = \frac{2n\times(2n-2)\times\ldots\times 6\times 4\times 2}{(2n+3)\times(2n+1)\times\ldots\times 7\times 5} \times \frac{2}{3}$, pour $n \geq 1$ et $I_0 = \frac{2}{3}$.

Exercice 7

1) $I_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} cosx cos^{n+1}x dx$

Posons : $u(x) = cos^{n+1}x$ et $v'(x) = cosx$. On a : $u'(x) = -(n+1)sinx cos^n x$ et on prend : $v(x) = sinx$. D'où : $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$.

2) $I_{2p} = \frac{(2p-1)\times(2p-3)\times\ldots\times5\times3\times1}{2p\times(2p-2)\times\ldots\times4\times2}\frac{\pi}{2}$; $I_{2p+1} = \frac{2p\times(2p-2)\times\ldots\times4\times2}{(2p+1)\times(2p-1)\times\ldots\times5\times3}$, pour $p \geq 1$; $I_0 = \frac{\pi}{2}$ et $I_1 = 1$.

3) a) Pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[0 ; \frac{\pi}{2}]$, cos x est positif ou nul. Il s'ensuit que l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^n x dx$ est positive ou nulle pour tout entier naturel n. Cette intégrale ne peut s'annuler pour aucune valeur de n, sinon la fonction cosinus serait nulle sur $[0 ; \frac{\pi}{2}]$. On déduit que pour tout entier naturel$n$, I_n est un nombre réel strictement positif et donc non nul.

Il faut ensuite justifier que la suite (I_n) est décroissante.

On en déduit que pour tout entier naturel n : $\frac{I_{n+2}}{I_n} \leq \frac{I_{n+1}}{I_n} \leq 1$. En prenant $n = 2p$, on a le résultat demandé.

a) D'après 1) $\frac{I_{n+2}}{I_n} = \frac{n+1}{n+2}$ qui tend vers 1 lorsque n tend vers l'infini. Par conséquent, la suite $(\frac{I_{2p+2}}{I_{2p}})$ converge vers 1. On conclut que la suite $(\frac{I_{2p+1}}{I_{2p}})$ converge 1, d'après le théorème des gendarmes. Or :

$\frac{I_{2p+1}}{I_{2p}} = \frac{(2\times4\times6\times\ldots\times2p)^2}{[1\times3\times5\times\ldots\times(2p-1)]^2(2p+1)}\frac{2}{\pi}$,

donc : $\lim\limits_{p \to +\infty} \frac{(2\times4\times6\times\ldots\times2p)^2}{[1\times3\times5\times\ldots\times(2p-1)]^2(2p+1)} = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 8

1) $I_0 = e - 1$; $I_1 = 1$.

2) Posons : $u(x) = x^{n+1}$et $v'(x) = e^x$. On a : $u'(x) = (n+1)x^n$ et on prend :
$v(x) = e^x$. On obtient le résultat en appliquant la formule d'intégration par parties.

3) On a : $J = I_3 + 2 I_2 - 2I_1 + I_0$.

En utilisant 2), on obtient : $I_2 = e - 2$; $I_3 = 6 - 2e$. Par suite : $J = 7 - 3e$.

Exercice 9

1) f est définie et continue et strictement croissante sur $]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}[$. f est donc une bijection de $]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}[$ sur $f(]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}[)$ qui est $\mathbb{R}$.

2) a) La fonction $t \longmapsto \frac{1}{1+t^2}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$. Il s'ensuit qu'elle est intégrable sur $[0\,;x]$ pour tout x positif et sur $[x\,;0]$ pour tout x négatif. L'ensemble de définition de g est donc $\mathbb{R}$.

Un nombre réel x appartient à D_h si et seulement si x appartient à D_f et $f(x)$ appartient à D_g. $D_f =]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}[$ et $D_g = \mathbb{R}$. Par suite : $D_h =]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}[$.

b) h(0) = 0.

c) La fonction f est dérivable sur $]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}[$ et $f(]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}[) = \mathbb{R}$; la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ car la fonction $t \longmapsto \frac{1}{1+t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$. Par suite, la fonction h est dérivable sur $]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}[$ et : $\forall\ x \in]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}[$, $h'(x) = 1$.

d) De : $\forall\ x \in]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}[$, $h'(x) = 1$, on déduit que : $h(x) = x + C$. Or h(0) = 0, d'après 2b), donc $h(x) = x$ pour tout x appartenant $]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}[$. Par suite, $g\circ f(x) = x$. L'application f étant bijective d'après 1), en déduit que $f^{-1} = g$.

e) $I = f^{-1}(1)$. Or : $f^{-1}(1) = \frac{\pi}{4}$, donc : $I = \frac{\pi}{4}$.

NB. Le fait que $g\circ f(x) = x$ ne suffit pas pour conclure que f est bijective et que $f^{-1} = g$. Sans la consigne 1, où il est démontré que f est bijective, on devrait justifier que $f\circ g(y) = y$ pour tout nombre réel y.

Exercice 10

1) a) La fonction $t \longmapsto \frac{e^t}{t}$ est continue sur $]0\,;+\infty[$ comme quotient de fonctions continues sur $]0\,;+\infty[$. Par suite, *la* fonction F est dérivable sur $]0\,;+\infty[$. La fonction dérivée de F est la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ qui à $t \longmapsto \frac{e^t}{t}$. Cette dernière fonction étant positive sur $]0\,;+\infty[$, F est strictement croissante.

b) F(1) = 0, par suite F est négative sur $]0\,;1[$ et positive sur $]1\,;+\infty[$.

2) a) Pour tout x positif, $\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt$. Par suite : $f(x) = \int_1^x \frac{e^t-1}{t}\,dt$. Or la fonction $t \longmapsto \frac{e^t-1}{t}$ est (continue) positive sur $]0\,;+\infty[$, donc f est négative sur $]0\,;1[$ et positive sur $]1\,;+\infty[$.

b) D'après 2)a), on a :

(i) $\forall x \in]0\,;1[$, F(x) ≤ ln x ;
(ii) $\forall x \in]1\,;+\infty[$, ln x ≤ F(x).
De (i), on a : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} F(x) = -\infty$, car : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \ln(x) = -\infty$;
De (ii), on a : $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = +\infty$, car : $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$.
3) a) (T) : y = $e(x-1)$.
b) (C) est au-dessus de (T) sur]0 ; 1[et (C) est au-dessus de (T) sur]1 ; +∞[.
Indication : Etudiez la fonction le signe de la fonction H telle que : H(x) = F(x) $-\ e(x-1)$.

4) a) Pour démontrer que : $\forall\ t \in [1\,;+\infty[$, $e^t \geq \frac{e}{2}t^2$, il faut étudier le signe de la fonction φ définie sur [1 ; +∞[par : $\varphi(t) = e^t - \frac{e}{2}t^2$.
b) $\forall\ t \in [1\,;+\infty[$, $\frac{F(x)}{x} \geq \frac{e(x^2-1)}{4x}$. On en déduit que : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{F(x)}{x} = +\infty$.
De 2) (ii) et de 4)b) , on déduit que (C) admet une branche parabolique de direction celle de (OJ).
5) Construction de (T) et (C).

Exercice 11

a) Le triangle ABM étant rectangle en M, AM = 2Rcosθ. D'où : $AM^2 = 4R^2cos^2\theta$. Par suite, AM^2 est donc une fonction de θ définie sur [0 ; $\frac{\pi}{2}$] dont la valeur moyenne est : $\frac{1}{\frac{\pi}{2}-0}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 4R^2cos^2\theta d\theta$. Après calcul, cette valeur moyenne est : $2R^2$.
b) Le triangle ABM étant rectangle en M, et H le projeté de M sur la droite (AB), on a : AM^2 = $\overline{AH} \times \overline{AB}$. Le point H appartenant au segment [AB], on a : AM^2 = 2Rx, où x appartient à [0 ; 2R]. Par suite, AM^2 est donc une fonction de x définie sur [0 ; 2R] dont la valeur moyenne est $\frac{1}{2R}\int_0^{2R} 2Rxdx$. Après calcul, cette valeur moyenne est : $2R^2$.

Exercice 12

1-a) J + K = $\frac{\pi}{2}$; J—K = 0.

b) J = $\frac{\pi}{4}$; K = $\frac{\pi}{4}$.

2- I = $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2cos^2xsinxdx$ + 4K

I = $\frac{-2}{3}[cos^3x]_0^{\frac{\pi}{2}}$ + 4K ; I = $\frac{2}{3}+\pi$.

Exercice 13

1- $\forall \in]-1;\ +\infty[, f'(x)$ = $\frac{1}{2\sqrt{x+1}}$; $g'(x)$ = $\frac{3}{2}\sqrt{x+1}$.

2- $I = 2\sqrt{2} - 2$.

3- J = $\frac{2}{3}(2-\sqrt{2})$.

Exercice 14

1-a) $a = -1$; $b = c = \frac{1}{2}$.

b) I = $\frac{5}{2}ln2 - \frac{3}{2}ln3$.

2- Il faut faire une décomposition en éléments simples de $\frac{1}{x(x^2-1)^2}$, c'est-à-dire déterminer des nombres réels A, B, C, D et E tels que : $\frac{1}{x(x^2-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2-1} + \frac{Dx+E}{(x^2-1)^2}$.

Après une décomposition, on a : $\frac{1}{x(x^2-1)^2} = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2-1} + \frac{x}{(x^2-1)^2}$

J = $\frac{3}{2}ln3 - \frac{5}{2}ln2 + \frac{5}{48}$.

3-K= $\frac{1}{6}ln2 - \frac{1}{16}ln3 + \frac{1}{2}$J

K = $\frac{11}{16}ln3 - \frac{13}{12}ln2 + \frac{5}{96}$.

Exercice 15

1. $\frac{(2n)!}{n!n^n} = \frac{2n(2n-1)(2n-2)...(n+2)(n+1)\times n!}{n\times n\times n\times n\times ...\times n\times n!}$;

$\frac{(2n)!}{n!n^n} = \frac{2n(2n-1)(2n-2)...(n+2)(n+1)}{n\times n\times n\times n\times ...\times n}$ (Il y a n facteurs au numérateur et autant au dénominateur)

$\frac{(2n)!}{n!n^n} = \frac{n+1}{n}\frac{n+2}{n}\frac{n+3}{n}...\frac{n+n}{n}$

$\frac{(2n)!}{n!n^n}$ = (1+ $\frac{1}{n}$)× (1+ $\frac{2}{n}$)×... ×(1+ $\frac{n}{n}$).

2. ln(u_n) = $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln(1+\frac{k}{n})$ qui tend vers $\int_0^1 \ln(1+x)\,dx$ quand n tend vers l'infini.

   Par conséquent, en utilisant la continuité de la fonction, la suite (u_n) a pour limite $\frac{4}{e}$.

Exercice 16

1. La dérivée *f'* de *f* est continue sur le segment [a ; b] donc est bornée sur ce segment. Il existe donc un nombre réel M strictement positif tel que pour tout *x* appartenant à l'intervalle [*a* ; *b*], |*f'*(x)| ≤ M.

2. D'après l'inégalité des accroissements finis, $|f(u)-f(a)|$ ≤ M$|u-a|$, pour tout u appartenant à [*a* ; *b*]. Ce qui donne : $|f(u)-f(a)|$≤ M$(u-a)$. En intégrant, on obtient : $\int_a^b |f(x)-f(a)|dx$ ≤ M$\frac{(b-a)^2}{2}$.

3. a) En utilisant l'égalité de Chasles, on a : $\int_a^b f(x)dx$ = $\sum_{i=0}^{n-1}\int_{a+\frac{i(b-a)}{n}}^{a+\frac{(i+1)(b-a)}{n}} f(x)dx$. On obtient le résultat en faisant intervenir E_n.

   b) On a : $|E_n|$ ≤ $\sum_{i=0}^{n-1}\int_{a+\frac{b-a}{n}i}^{a+\frac{b-a}{n}(i+1)} |f(x)-f\left(a+\frac{b-a}{n}i\right)|dx.$

   Or d'après 2), on a : $\int_{a+\frac{b-a}{n}i}^{a+\frac{b-a}{n}(i+1)} |f(x)-\ f\left(a+\frac{b-a}{n}i\right)\ |\,dx$ ≤ M$\frac{(b-a)^2}{2n^2}$,

donc en sommant les n termes, on a : $|E_n|$ ≤ M$\frac{(b-a)^2}{2n}$.

4. M = 2. Il faut prendre $n \geq 10^4$.

Un calcul à la main serait très fastidieux pour déterminer : $\frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(a+\frac{b-a}{n}i)$ pour $a=0; b=1\ et\ n=10^4$ pour la fonction donnée. L'utilisation de calculatrices programmables ou d'ordinateurs s'avère très nécessaire à ce moment.

Exercice 17

1. $I_1 = \frac{1}{2}[\ln(1+x^2]_0^1$

2. La fonction qui à x associe $\frac{x^n}{1+x^2}$ définie sur [0 ;1] est continue et positive, il s'en suit que pour tout entier naturel n non nul, $I_n \geq 0$.

3. Il suffit de justifier que pour tout entier naturel n non nul, on a : $\frac{1}{2}x^n \leq \frac{x^n}{1+x^2} \leq x^n$.

4. a Il suffit de justifier que pour tout entier naturel n non nul,
on a : $\frac{x^{n+1}}{1+x^2} \leq \frac{x^n}{1+x^2}$.
b. (I_n) est décroissante et minorée converge. D'après 3. elle converge vers 0.

Exercice 18

1. $I_n = [(\ln t)^2]_{e^{n-1}}^{e^n}$
$= 2n - 1$.
2. (I_n) est non bornée. Car elle n'est pas majorée.
3. $(\frac{I_n}{n})$ converge vers 2.
4. Il suffit de remarquer en utilisant l'égalité de Chasles que :
$\sum_{k=1}^{n} I_k = \int_1^{e^n} \frac{2\ln t}{t}dt$.

SITUATIONS COMPLEXES

Exercice 19

La surface OABC en unités est donnée par : $\int_0^{550}\left(\frac{t^2}{100} - \frac{t}{4} + 125\right)dt$.

Soit environ 65599 m^2

Exercice 20

L'aire du champ de maïs est : e × 1.

L'aire du champ d'igname est : $\int_e^{e^2}(2-\ln x)dx$

La nouvelle A superficie du champ du cultivateur est : e × 1 + $\int_e^{e^2}(2-\ln x)dx$

A = e^2- e
A vaut environ : 4,67 UA

11 STATISTIQUE À DEUX VARIABLES

EXERCICES DE FIXATION

1. Déterminons $Cov(X,Y)$

On a : $\bar{X} = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = \frac{21}{6} = 3{,}5$; $\bar{Y} = \frac{12+13+15+19+21+22}{6} = \frac{102}{6} = 17$

Donc $Cov(X,Y) = \frac{1\times12+2\times13+3\times15+4\times19+5\times21+6\times22}{6} - 3{,}5 \times 17 = \frac{396}{6} - 59{,}5 = 6{,}5$

2. $V(X) = \frac{1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2}{6} - 3{,}5^2 = 2{,}91$ et $V(Y) = \frac{12^2+13^2+15^2+19^2+21^2+22^2}{6} - 17^2 = 15$

3. Calculons le coefficient de corrélation linéaire

$$r = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{V(X)} \times \sqrt{V(Y)}} = \frac{6{,}5}{1{,}7 \times 3{,}87} = 0{,}98$$

On a $0{,}87 < 0{,}98 < 1$, donc un ajustement linéaire est approprié

4. a) Déterminons une équation de la droite de régression (D) de Y en X

On a $a = \frac{Cov(X,Y)}{V(X)} = \frac{6{,}5}{2{,}91} = 2{,}23$ et $b = \bar{Y} - a\,\bar{X} = 17 - 2{,}23 \times 3{,}5 = 9{,}2$

donc $(D) : y = 2{,}23x + 9{,}2$

b) Déterminons une équation de la droite de régression (D') de X en Y

On a $a' = \frac{Cov(X,Y)}{V(Y)} = \frac{6{,}5}{15} = 0{,}43$ et $b' = \bar{X} - a'\bar{Y} = 3{,}5 - 0{,}43 \times 17 = -3{,}81$

donc $(D') : x = 0{,}43y - 3{,}81$

5. À la fin du septième mois on a : $x = 7$ donc le chiffre d'affaires est

Le chiffre d'affaires de cette pharmacie à la fin du 7e mois est de 25 millions.

EXERCICES DE RENFORCEMENT / D'APPROFONDISSEMENT

EXERCICE 1

Noter dans l'énoncé 9 salariés au lieu de 10

Déterminons le coefficient de corrélation linéaire

On a : $\bar{X} = \frac{15+20+26+34+37+43+44+50+52}{9} = 35{,}66$;

$$\bar{Y} = \frac{600+750+740+990+820+1075+995+910}{9} = \frac{7700}{9} = 855{,}55$$

$$Cov(X,Y) = \frac{286870}{9} - 35{,}66 \times 855{,}55 = 1365{,}53$$

$$V(X) = \frac{15^2+20^2+26^2+34^2+37^2+43^2+44^2+50^2+52^2}{9} - 35{,}66^2 = 152{,}25 \text{ et}$$

$$V(Y) = \frac{600^2+750^2+740^2+990^2+820^2+1075^2+995^2+910^2}{9} - 8555^2 =$$
$20117{,}53$

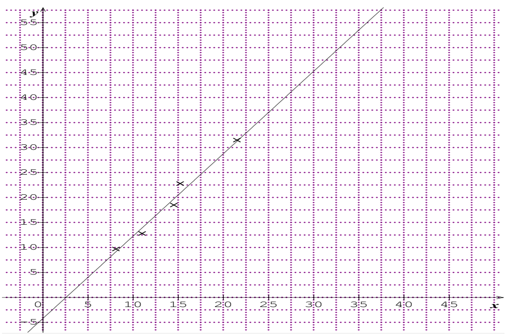
le coefficient de corrélation linéaire est donc

$$r = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{V(X)} \times \sqrt{V(Y)}} = \frac{1365{,}53}{12{,}33 \times 141{,}83} = 0{,}78$$

On a $0 < 0{,}78 < 0{,}87$, donc un ajustement linéaire n'est pas approprié

EXERCICE 2

1. Représentation du nuage de points



2. Déterminons les moyennes et les écarts types de X et Y

On a : $\bar{X} = \frac{8,1+11+14,4+15,2+21,5}{5} = 14,04$; $\bar{Y} = \frac{9,7+12,8+18,5+22,8+31,5}{5} = 18,96$

$V(X) = \frac{8,1^2+11^2+14,4^2+15,2^2+21,5^2}{5} - 14,04^2 = 20,33$ donc $\sigma_X = \sqrt{20,33} = 4,5$

$V(Y) = \frac{9,7^2+12,8^2+18,5^2+22,8^2+31,5^2}{5} - 18,96^2 = 56,72$ donc $\sigma_Y = \sqrt{56,72} = 7,53$

3. Déterminons une équation de la droite de régression (D) de Y en X

On a : $Cov(X,Y) = \frac{8,1\times 9,7+11\times 12,8+14,4\times 18,5+15,2\times 22,8+21,5\times 31,5}{5} - 14,04 \times 18,96 = 33,56$

Calculons le coefficient de corrélation linéaire

$$r = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{V(X)}\times\sqrt{V(Y)}} = \frac{33,56}{4,5 \times 7,53} = 0,99$$

On a $0,87 < 0,99 < 1$, donc un ajustement linéaire est approprié

On a $a = \frac{Cov(X,Y)}{V(X)} = \frac{33,56}{20,33} = 1,65$ et $b = \bar{Y} - a\,\bar{X} = 18,96 - 1,65 \times 3,5 = -4,22$

donc $(D) : y = 1,65x - 4,22$

EXERCICE 3

Dans l'énoncé, noter 248 ménages au lieu de 500

Y / X	1	2	3	TOTAL
Entre 0 et 100	71	24	37	132
Entre 100 et 200	37	4	12	53
Entre 200 et 300	36	11	16	63
TOTAL	144	39	65	248

1. Distribution marginale du nombre d'enfants en pourcentage

y_i	1	2	3
f_i	58	17,7	26,3

2. Distribution marginale des dépenses annuelles de fournitures

x_i	Entre 0 et100	Entre 100 et 200	Entre 200 et 300
n_i	132	53	63

3 . a) $58\ \%$ des ménages ont un enfant

b) $21{,}4\ \%$ des ménages ont des dépenses annuelles comprise entre 100 000 F CFA et 200 000 F CFA

EXERCICE 4

1. Déterminons la valeur de α

On a : $\overline{X} = \frac{1{,}2+1{,}4+1{,}6+1{,}8+2}{5} = 1{,}6$; $\overline{Y} = \frac{13+12+14+16+\alpha}{5} = \frac{55+\alpha}{5}$

$V(X) = \frac{1{,}2^2+14^2+1{,}6^2+1{,}8^2+2^2}{5} - 1{,}6^2 = 0{,}08$; $V(Y) = \frac{4\alpha^2-110\alpha+800}{25}$

Et $Cov(X,Y) = \frac{0{,}4\,\alpha - 4{,}4}{5}$

De plus $\frac{Cov(X,Y)}{V(X)} = \frac{0{,}4\,\alpha - 4{,}4}{0{,}4}$ or $\frac{Cov(X,Y)}{V(X)} = 9$ donc $\frac{0{,}4\,\alpha - 4{,}4}{0{,}4} = 9$

Soit $\alpha = 20$

2. Déterminons le coefficient de corrélation linéaire

Pour $\alpha = 20$ on a $Cov(X,Y) = 0{,}72$ et $V(Y) = 8$ donc $a' = 0{,}09$

On a $aa' = r^2$ or $aa' = 9 \times 0{,}09 = 0{,}81$

D'où $r^2 = 0,81$

Donc $r = 0,93$ car $Cov(X,Y)$ et r ont le même signe.

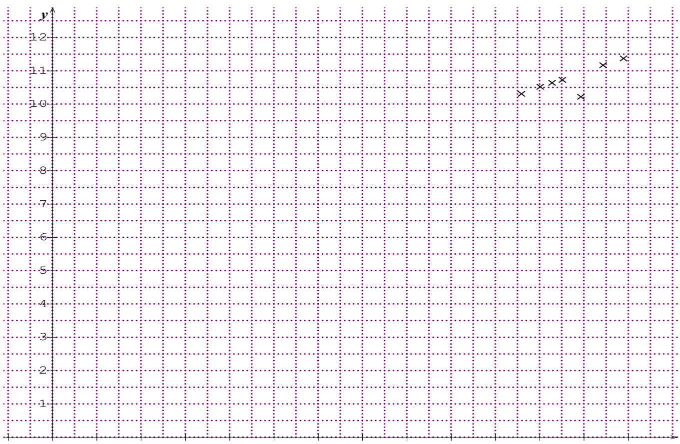
EXERCICE 5

1. On a $t_i = \ln(x_i)$ et $z_i = \ln(y_i)$

Tableau des valeurs

t_i	10,59	11,01	11,28	11,51	11,93	12,43	12,89
z_i	10,31	10,52	10,64	10,73	10,22	11 ,17	11,37

2. Représentation du nuage de points



3. Déterminons une équation de la droite de régression (D) de Z en T

On a : $\overline{T} = \frac{10,59 + \cdots ......+12,89}{7} = 11,66$; $\bar{Z} = \frac{10,31+\cdots ....+11,37}{7} = 10,80$

$V(T) = \frac{10,59^2+\cdots .... +12,89^2}{7} - 11,66^2 = 0,55$ et

$V(Z) = \frac{10,31^2+ ...... +11,37^2}{7} - 10,80^2 = 0,11$

$Cov(T,Z) = \frac{10,59\times 10,31+ .....+12,89\times 11,37}{7} - 11,66 \times 10,80 = 0,25$

On a $a = \frac{Cov(T,Z)}{V(T)} = \frac{0,25}{0,55} = 0,45$ et $b = \bar{Y} - a\,\bar{X} = 10,80 - 0,45 \times 11,66 = 5,45$

donc $(D) : z = 0,45t + 5,45$

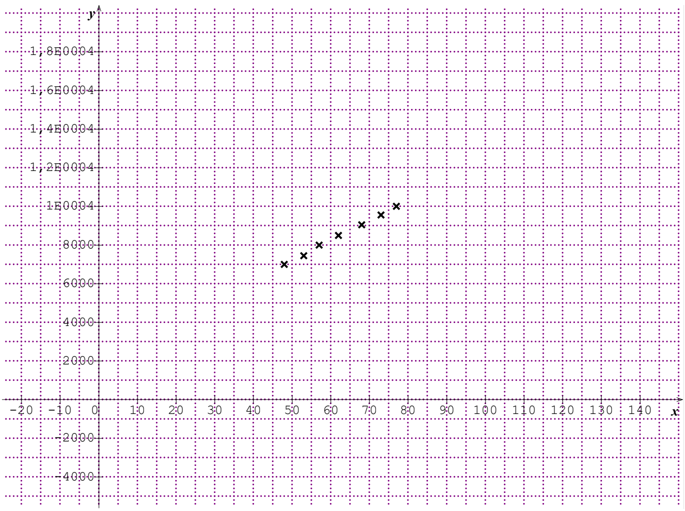
4. on a $z = lny$ et $t = lnx$

D'où $lny = 0,45\,lnx + 5,45$ donc $y = e^{5,45}\,x^{0,45}$

5. pour $x = 20\,000$ on a $y = e^{5,45}\,20\,000^{0,45} \simeq 20\,000$

EXERCICE 6

1. Représentation graphique du nuage de points



2. Déterminons les coordonnées du point moyen

On a $\bar{X} = \frac{48+53+57+62+68+73+77}{7} = 62,57$; $\bar{Y} = \frac{7000+7450+8000+8500+9050+9050+10000}{7} = 8507,14$

Donc $G(62,57\,;8507,14)$

3. Déterminons le coefficient de corrélation linéaire

On a : $Cov(X,Y) = 10038{,}8$; $V(X) = 97{,}38$ et $V(Y) = 1036731{,}24$

Donc $r = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{V(X)} \times \sqrt{V(Y)}} = \frac{10038{,}8}{9{,}86 \times 1018{,}2} = 0{,}99$

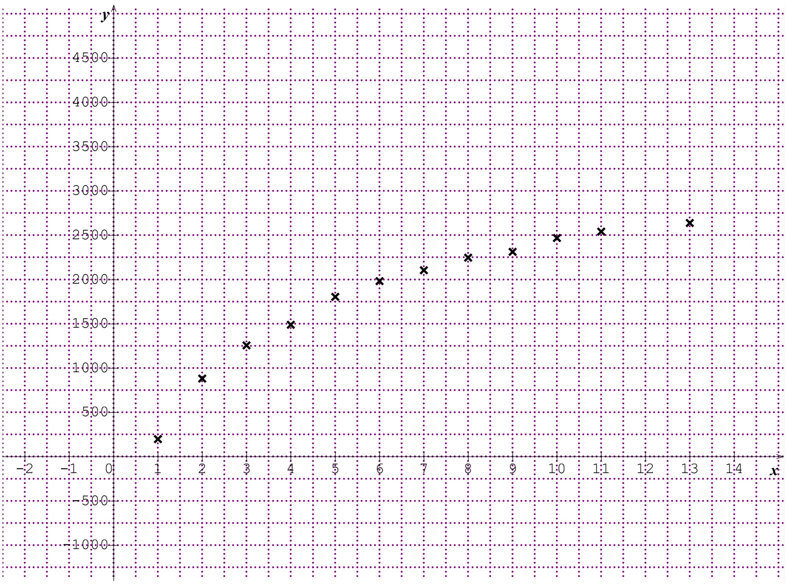
On a $0{,}87 < 0{,}99 < 1$, donc un ajustement linéaire est approprié

4. On a $a = \frac{Cov(X,Y)}{V(X)} = 103{,}08$ et $b = \bar{Y} - a\,\bar{X} = 2057{,}25$

donc $(D) : y = 1{,}03{,}08x + 2057{,}25$

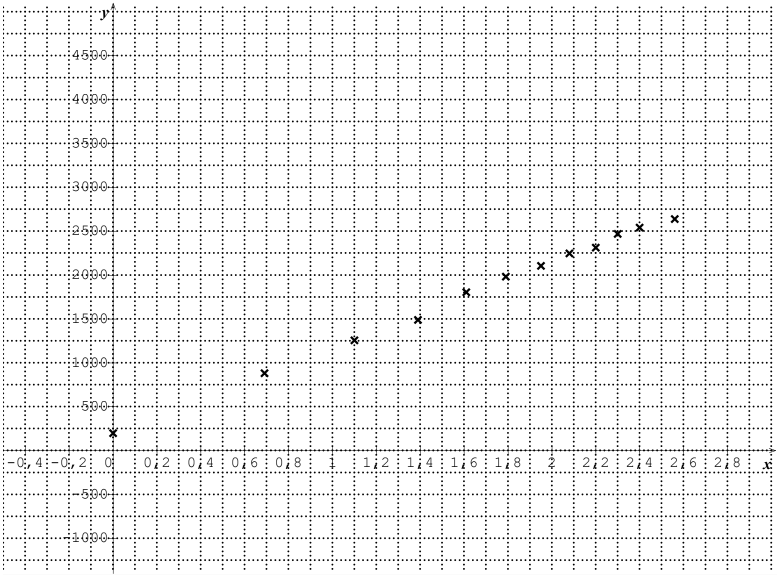
EXERCICE 7

1. Représentation graphique du nuage de points $(x_i\ ;\ y_i)$



2. Représentation graphique du nuage de points $(x'_i\ ;\ y_i)$ avec $x' = lnx$

x'_i	0	0,69	1,1	1,39	1,61	1,79	1,95	2,08	2,2	2,3	2,4	2,56
z_i	198	881	1256	1489	1804	1983	2104	2247	2312	2468	2541	2639



3. Déterminons le coefficient de corrélation linéaire de la série $(x';\ y)$

On a : $\overline{X'} = \frac{0+0{,}69+\ \ldots\ldots\ +2{,}4+2{,}56}{12} = 1{,}67$; $\overline{Y} = \frac{189+881+\cdots..+\ 2541+2639}{12} =$ $1826{,}83$

$$V(\,X') = \frac{0^2+0{,}69^2+\ \ldots\ldots\ +2{,}4^2+2{,}56^2}{12} - 1{,}67^2 = 0{,}55$$

$$V(\,Y) = \frac{189^2+881^2+\ \ldots\ldots+2541^2+2639^2}{12} - 1826{,}83^2 = 506825{,}31$$

$$Cov(\,X', Y) = 524{,}76$$

Donc

$$r = \frac{Cov(\,X4,Y)}{\sqrt{V(\,X4)}\times\sqrt{V(\,Y)}} = \frac{524{,}76}{0{,}74\times 711{,}93} = 0{,}99$$

On a $0{,}87 < 0{,}99 < 1$, donc un ajustement linéaire est approprié

4. Déterminons une équation de la droite de régression $(\,D\,)$ de Y en X'

On a $a = \frac{Cov(\,X\prime,Y)}{V(\,X\prime)} = \frac{524{,}76}{0{,}55} = 954{,}10$ et $b = \overline{Y} - a\,\overline{X'} = 233{,}49$

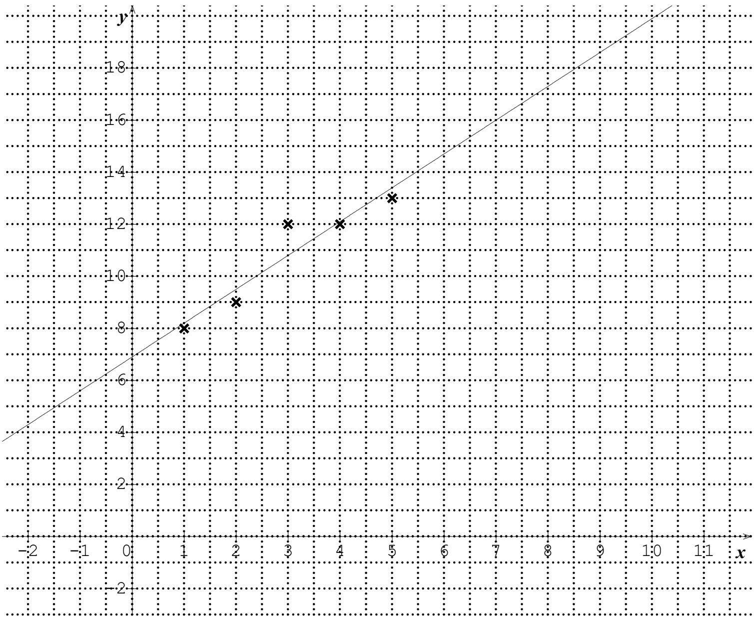
donc $(D): y = 954{,}10\,x' + 233{,}49$

5. On a $x' = lnx$ donc $(D): y = 954{,}10\,lnx + 233{,}49$

Ainsi $a = 954{,}10$ et $b = 233{,}49$

EXERCICE 8

1. Représentation graphique du nuage de points $(x_i\ ;\ y_i)$



2. Déterminons les coordonnées du point moyen G

On a : $\bar{X} = \frac{1+2+3+4+5}{5} = 3$; $\bar{Y} = \frac{8+9+12+12+13}{5} = 10{,}8$

Donc $G(3\ ;10{,}8)$

Dans la troisième question, il s’agit de déterminer la variance au lieu de la moyenne

3. $V(X) = \frac{1^2+2^2+3^2+4^2+5^2}{5} - 3^2 = 1{,}99$ donc $\sigma_X = \sqrt{1{,}99} = 1{,}41$

et $V(Y) = \frac{8^2+9^2+12^2+12^2+13^2}{5} - 10{,}8^2 = 3{,}75$ donc $\sigma_X = \sqrt{3{,}75} = 1{,}93$

4. Calculons la covariance de (X, Y)

$$Cov(X,Y) = \frac{1\times8+2\times9+3\times12+4\times12+5\times13}{5} - 1{,}99 \times 3{,}75 = 2{,}6$$

5. Calculons le coefficient de corrélation linéaire (X, Y)

$$r = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{V(X)}\times\sqrt{V(Y)}} = \frac{2{,}6}{1{,}41\times1{,}93} = 0{,}94$$

On a $0{,}87 < 0{,}94 < 1$, donc un ajustement linéaire est approprié

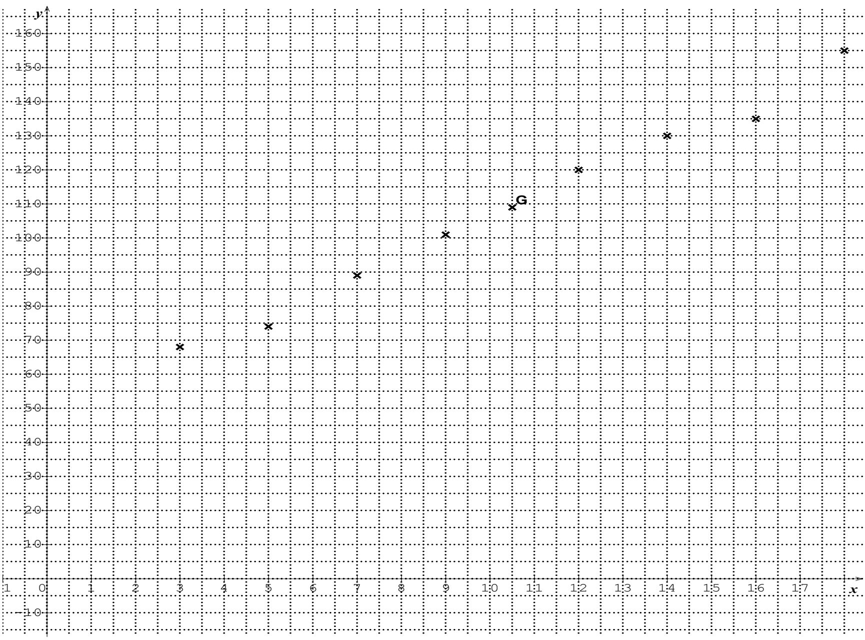
6. a) Déterminons une équation de la droite de régression (D) de Y en X

On a $a = \frac{Cov(X,Y)}{V(X)} = \frac{2{,}6}{1{,}99} = 1{,}3$ et $b = \bar{Y} - a\,\bar{X} = 10{,}8 - 1{,}3 \times 3 = 6{,}9$

donc $(D) : y = 1{,}3x + 6{,}9$

EXERCICE 9

1. Représentation graphique du nuage de points $(x_i\ ;\ y_i)$



2. a) Déterminons les coordonnées du point moyen G

On a : $\overline{X} = \frac{3+5+\cdots\ldots+16+18}{8} = 10{,}5$; $\overline{Y} = \frac{68+74+\cdots\ldots\ldots+135+155}{8} = 109$

donc $G(10{,}5\ ;109\ )$

b) Construction du point G

3. a) Déterminons la covariance de la série double $(x_i\ ;\ y_i)$

$$Cov(\ X,Y) = \frac{3\times68+5\times74+\ \ldots\ldots+16\times135+8\times155}{8} - 10{,}5 \times 109 = 145$$

b) Déterminons une équation de la droite de régression $(\ D\ )$ de y en fonction de x

On a : $V(\ X) = \frac{3^2+5^2+\ \ldots\ldots+16^2+18^2}{8} - 10{,}5^2\ = 25{,}25$

et $V(\ Y) = \frac{68^2+74^2+\ \ldots\ldots\ldots+135^2+155^2}{5} - 109^2\ = 840{,}5$

De plus $a = \frac{Cov(\ X,Y)}{V(\ X)} = \frac{145}{25{,}25} = \frac{580}{101}$ et $b = \overline{Y} - a\,\overline{X} = 109 - \frac{580}{101} \times 10{,}5 = \frac{4919}{101}$

donc $(\ D\ ) : y = \frac{580}{101}x + \frac{4919}{101}$

c) Calculons le coefficient de corrélation linéaire r

$$r = \frac{Cov(\ X,Y)}{\sqrt{V(\ X)}\times\sqrt{V(\ Y)}} = \frac{145}{5{,}02\ \times28{,}99} = 0{,}99$$

On a $0{,}87 < 0{,}99 < 1$, donc un ajustement linéaire est approprié

d) Pour : $x = 24$, on a : $y = \frac{580}{101}\ \times 24\ + \frac{4919}{101} = 186{,}52\ \simeq 187$

Dans sa $24^{ème}$ année un ouvrier a 187 000 F

EXERCICE 10

1. Le nombre 7 est le nombre de véhicule de 25 CV dont la durée des pneumatiques est de

4 milliers de kilomètres.

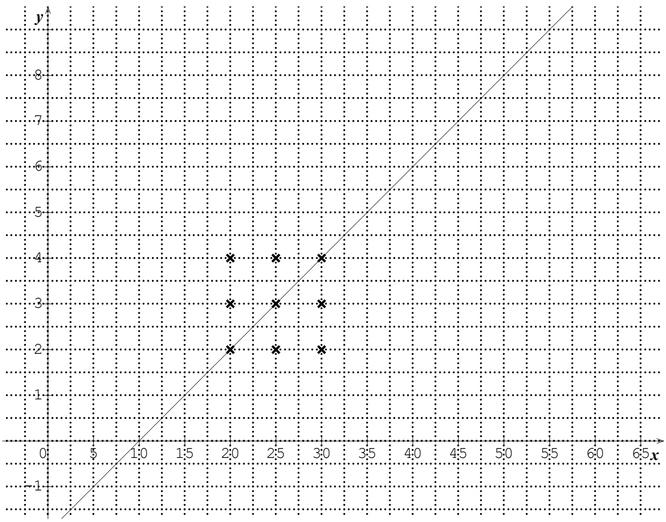
2. a) Série marginale de x

x	20	25	30
Fréquence	38	32	30

Série marginale de y

y	2	3	4
Fréquence	30	31	39

b) Représentation du nuage de points



c) La droite (D) passe par les points $A(20;2)$ et $B(25;3)$

Soit $M(x\,;y)$ un point du plan, on a : $\overrightarrow{AB}(5;1)$ et $\overrightarrow{AM}(x-20\,;y-2)$

$$M \in (AB) \iff det\left(\overrightarrow{AM}\,;\,\overrightarrow{AB}\right) = 0$$

Soit $x - 5y - 10 = 0$

Une équation de la droite (D) est donc $y = \frac{1}{5}x - 2$

3. a) On a

$\bar{X} = \frac{20\times38+25\times32+30\times30}{100} = \frac{2460}{100} = 24{,}6$ et $\bar{Y} = \frac{2\times30+3\times31+4\times39}{100} = \frac{309}{100} =$ 3,09

Donc $G\ (24{,}6\ ; 3{,}09\ )$

b) Déterminons la variance de x et la variance de y

$$V(X) = \frac{20^2\times38+25^2\times32+30^2\times30}{100} - 24{,}6^2 = 16{,}84$$

et $V(Y) = \frac{2^2\times30+3^2\times31+4^2\times39}{100} - 3{,}09^2 = 0{,}69$

c) Déterminons la covariance de (x, y)

$Cov(X,Y) = \frac{1}{100}(20\times2\times0 + 20\times3\times8 + 20\times4\times30 + 25\times2\times 5 + 25\times3\times20 + 25\times4\times7 + 30\times2\times35 + 30\times3\times3 + 30\times4\times 2) - 24{,}6\times3{,}09$

$$= \frac{1}{100}\times7940 - 76{,}01 = 3{,}39$$

d) Déterminons une équation de la droite de régression (D) de Y en X

On a $a = \frac{Cov(X,Y)}{V(X)} = \frac{3{,}39}{16{,}84} = 0{,}2$ et

$b = \bar{Y} - a\,\bar{X} = 3{,}09 - 0{,}2\times24{,}6 = -1{,}83$.

Donc (D) : $y = 0{,}2\,x - 1{,}83$

e) Déterminons une équation de la droite de régression (D') de X en Y

On a $a' = \frac{Cov(X,Y)}{V(Y)} = \frac{3{,}39}{0{,}69} = 4{,}91$ et $b' = \bar{X} - a'\,\bar{Y} = 24{,}6 - 4{,}91\times 3{,}09 = 9{,}43$.

Donc (D') : $x = 4{,}91\,y + 9{,}3$

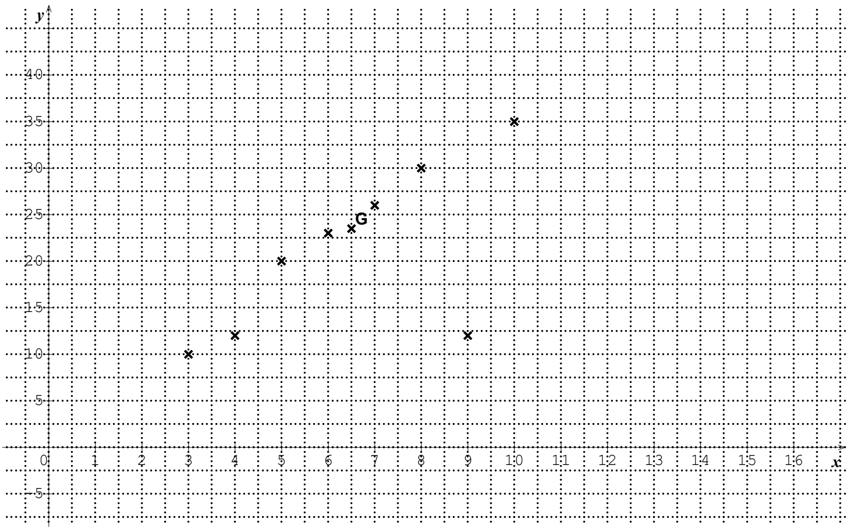
4. Calculons le coefficient de corrélation linéaire r

$$r = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{V(X)} \times \sqrt{V(Y)}} = \frac{3{,}39}{4{,}10 \times 0{,}83} = 0{,}99$$

On a $0{,}87 < 0{,}99 < 1$, donc un ajustement linéaire est approprié.

EXERCICE 11

1. Représentation graphique du nuage de points $(x_i \ ; \ y_i)$



2. Déterminons les coordonnées du point moyen G

On a : $\overline{X} = \frac{3+4+\cdots\ldots+9+10}{8} = 6{,}5$; $\overline{Y} = \frac{10+12+\cdots\ldots\ldots+32+35}{8} = 23{,}5$

donc $G(6{,}5\ ; 23{,}5\ )$ construction du point G (voir courbe)

3. a) Déterminons le coefficient de corrélation linéaire de la série double $(x_i \ ; \ y_i)$

On a : $Cov(X,Y) = \frac{3\times10+4\times12+\ \ldots\ldots+9\times32+10\times35}{8} - 6{,}5 \times 23{,}5 = 19{,}25$

$V(X) = \frac{3^2+4^2+\ \ldots\ldots+9^2+10^2}{8} - 6{,}5^2 = 5{,}25$ et $V(Y) = \frac{10^2+12^2+\ \ldots\ldots\ldots+32^2+35^2}{8} - 23{,}5^2 = 72{,}49$

D'où $r = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{V(X)} \times \sqrt{V(Y)}} = \frac{19,25}{2,29 \times 8,51} = 0,98$

b) On a $0,87 < 0,98 < 1$, donc un ajustement linéaire est approprié

4. Déterminons une équation de la droite de régression (D) de y en fonction de x

On a : $a = \frac{Cov(X,Y)}{V(X)} = \frac{19,25}{5,25} = 3,66$ et $b = \bar{Y} - a\,\bar{X} = 23,5 - 3,66 \times 6,5 = -0,33$

donc $(D) : y = 3,66\,x - 0,33$

5. a) Pour $x = 12$ on a $y = 3,66 \times 12 - 0,33 = 43,59 \simeq 44$

La quantité d'essence est d'environ 44 litres

b) Déterminons une équation de la droite de régression (D') de x en fonction de y

On a : $a' = \frac{Cov(X,Y)}{V(Y)} = \frac{19,25}{72,49} = 0,26$ et $b = \bar{X} - a'\,\bar{Y} = 6,5 - 0,26 \times 23,5 = 0,26$

donc $(D') : x = 0,26\,y + 0,26$

Pour $y = 50$ on a $x = 0,26 \times 50 + 0,26 = 13,26 \simeq 14$

Une voiture qui consomme 50 litres d'essence pour cette distance a une puissance d'environ14 Chevaux

SITUATIONS COMPLEXES

Exercice 12

- Déterminer une équation de la droite de régression de *y* en *x*.
  y = 86,05x +1014,85
- Estimer le coefficient de corrélation linéaire
  r = 0,96 d'où l'existence d'une forte corrélation linéaire
- Déterminer la plus petite valeur de *x* pour que :
  86,05*x* +1014,85 $\geq$ 3000
  x vaut 24
- Conclure

X = 24 correspond au mois de décembre 2019

12 ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

EXERCICES DE FIXATION

Exercice 1

Toute équation dans laquelle apparaissent l'inconnue est une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ et des dérivées successives de l'inconnue s'appelle une équation différentielle.

Exercice 2

$y' + 4 = 0$; $y'' + 2y' + y = 5$; $5y + 3 = 0$

ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DU TYPE $y' = ay$ (a EST UN NOMBRE RÉEL)

Exercices de fixation

Exercice 3

A

Exercice 4

B) $x \mapsto ke^{-2x}$, $k \in \mathbb{R}$

Exercice 5

La solution générale est $y = Ce^{2x}$, $C \in \mathbb{R}$

$y(1) = 0$ d' où $0 = Ce^2$ donc $C = 0$ ainsi $f(x) = 0$

Exercice 6

La solution générale est $y = Ce^{\frac{1}{3}x}$, $C \in \mathbb{R}$

$y(6) = 2$ d' où $2 = Ce^2$ donc $C = 2e^{-2}$ ainsi $g(x) = 2e^{\frac{1}{3}x-2}$

ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DU TYPE $y' = ay + b$ (a et b réel $\boldsymbol{a \neq 0}$)

Exercices de fixation

Exercice 7

A) $x \mapsto ke^{2x} - \frac{5}{2}$, $k \in \mathbb{R}$

Exercice 8

C) $x \mapsto ke^{4x} + 6$, $k \in \mathbb{R}$

Exercice 9

Les solutions sont : $y = ke^{2x} - 2$, $k \in \mathbb{R}$

$y(1) = 1$ d' où $1 = ke^2 - 2$ donc $k = 3e^{-2}$ ainsi $f(x) = 3e^{2x-2} - 2$

Exercice 10

Les solutions sont : $y = ke^{\frac{1}{3}x} - 6$, $k \in \mathbb{R}$

$y(0) = 2$ donne $2 = ke^0 - 6$ donc $k = 8$ ainsi $h(x) = 8e^{\frac{1}{3}x} - 6$

ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DU TYPE $y'' = 0$

Exercices de fixation

Exercice 11

B) $x \mapsto kx + p$, $k \in \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{R}$

Exercice 12

On a $y' = x$ et $y'' = 0$ donc $x \mapsto x + 8$ est une solution de l'équation différentielle $y'' = 0$

Exercice 13

On a $y'' = 0$ donc $y = ax + b$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$

$y(1) = 2$ donne $a + b = 2$

$y(0) = 1$ donne $b = 1$

D'où $a = 1$ donc la solution p est $p(x) = x + 1$

Exercice 14

On a $y'' = 0$ donc $y = ax + b$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$

$y(0) = 5$ donne $b = 5$

$y(2) = 9$ donne $2a + b = 9$

D'où $a = 2$ donc la solution u est $u(x) = 2x + 5$

ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DU TYPE $y'' = \omega^2 y$ (ω nombre réel non nul)

Exercices de fixation

Exercice 15

a) $(E) \Leftrightarrow y'' = y$

Les solutions sont les fonctions $y = Ae^{x} + B\,e^{-x}$, $A \in \mathbb{R}$, $B \in \mathbb{R}$

b) $(E) \Leftrightarrow y'' = 2^2 y$

Les solutions sont les fonctions $y = Ae^{2x} + B\,e^{-2x}$, $A \in \mathbb{R}$, $B \in \mathbb{R}$

c) $(E) \Leftrightarrow y'' = \left(\sqrt{3}\right)^2 y$

Les solutions sont les fonctions $y = Ae^{\sqrt{3}\,x} + B\,e^{-\sqrt{3}\,x}$, $A \in \mathbb{R}$, $B \in \mathbb{R}$

Exercice 16

a) $(E) \Leftrightarrow y'' = \left(\frac{1}{2}\right)^2 y$

Les solutions sont les fonctions $y = Ae^{\frac{1}{2}x} + B\,e^{-\frac{1}{2}x}$, $A \in \mathbb{R}$, $B \in \mathbb{R}$

b) $(E) \Leftrightarrow y'' = \left(\frac{3}{4}\right)^2 y$

Les solutions sont les fonctions $y = Ae^{\frac{3}{4}x} + B\,e^{-\frac{3}{4}x}$, $A \in \mathbb{R}$, $B \in \mathbb{R}$

c) $(E) \Leftrightarrow y'' = \left(\frac{7}{2}\right)^2 y$

Les solutions sont les fonctions $y = Ae^{\frac{7}{2}x} + B\,e^{-\frac{7}{2}x}$, $A \in \mathbb{R}$, $B \in \mathbb{R}$

Exercice 17

a) $(E) \Leftrightarrow y'' = 2^2 y$

Les solutions sont les fonctions $y = Ae^{2x} + Be^{-2x}, A \in \mathbb{R}, B \in \mathbb{R}$

$y(0) = 1$ donne $A + B = 1$

$y\left(\frac{1}{2}\right) = 2$ donne $Ae^1 + Be^{-1} = 2$

D'où $A = \frac{2 - e^{-1}}{e - e^{-1}}$ et $B = \frac{e - 2}{e - e^{-1}}$ donc la solution f est $f(x) = \frac{2 - e^{-1}}{e - e^{-1}} e^{2x} + \frac{e - 2}{e - e^{-1}} e^{-2x}$

b) $(E) \Leftrightarrow y'' = y$

Les solutions sont les fonctions $y = Ae^{x} + Be^{-x}, A \in \mathbb{R}, B \in \mathbb{R}$

$y(0) = 1$ donne $A + B = 1$

$y(2) = 2$ donne $Ae^2 + Be^{-2} = 2$

D'où $A = \frac{2 - e^{-2}}{e^2 - e^{-2}}$ et $B = \frac{e^{-2} - 2}{e^2 - e^{-2}}$ donc la solution f est $f(x) = \frac{2 - e^{-2}}{e^2 - e^{-2}} e^{x} + \frac{e^{-2} - 2}{e^2 - e^{-2}} e^{-x}$

Exercice 18

a) $(E) \Leftrightarrow f'' = \left(\frac{1}{3}\right)^2 f$

Les solutions sont les fonctions $y = A\, e^{\frac{1}{3}x} + B\, e^{-\frac{1}{3}x}, A \in \mathbb{R}, B \in \mathbb{R}$

$y\left(\frac{1}{3}\right) = 1$ donne $A\, e^{-\frac{1}{9}} + B\, e^{-\frac{1}{9}x} = 1$

$y(1) = 18$ donne $A\, e^{\frac{1}{3}} + B\, e^{\frac{2}{9}x} = 18$

D'où $A = \frac{18 - e^{-\frac{2}{9}}}{e^{\frac{1}{3}} - e^{-\frac{1}{9}}}$ et $B = \frac{e^{\frac{4}{9}} - 18\, e^{\frac{2}{9}}}{e^{\frac{1}{3}} - e^{-\frac{1}{9}}}$ donc la solution f est

$$f(x) = \frac{18 - e^{-\frac{2}{9}}}{e^{\frac{1}{3}} - e^{-\frac{1}{9}}} \; e^{\frac{1}{3}x} + \frac{e^{\frac{4}{9}} - 18\, e^{\frac{2}{9}}}{e^{\frac{1}{3}} - e^{-\frac{1}{9}}} \; e^{-\frac{1}{3}x}$$

b) $(E) \Leftrightarrow f'' = \left(\frac{3}{2}\right)^2 f$

Les solutions sont les fonctions $y = A\, e^{\frac{3}{2}x} + B\, e^{-\frac{3}{2}x}$, $A \in \mathbb{R}$, $B \in \mathbb{R}$

Lire f ' (0) = 0 au de f(0) = 0

On a $y' = \frac{3}{2} A\, e^{\frac{3}{2}x} - \frac{3}{2} B\, e^{-\frac{3}{2}x}$

De plus $\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$ d'où $\begin{cases} A + B = 1 \\ A - B = 0 \end{cases}$ donc $\begin{cases} A = \frac{1}{2} \\ A = \frac{1}{2} \end{cases}$

Par suite la solution cherchée est $f(x) = \frac{1}{2}\, e^{\frac{3}{2}x} + \frac{1}{2}\, e^{-\frac{3}{2}x}$

ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DU TYPE $y'' = -\omega^2 y$ (ω nombre réel non nul)

Exercices de fixation

Exercice 19

a) $(E) \Leftrightarrow y'' = -y$

Les solutions sont les fonctions $y = A\, cosx + B\, sinx$, $A \in \mathbb{R}$, $B \in \mathbb{R}$

b) $(E) \Leftrightarrow y'' = -2^2\, y$

Les solutions sont les fonctions $y = A\, cos2x + B\, sin2x$, $A \in \mathbb{R}$, $B \in \mathbb{R}$

c) $(E) \Leftrightarrow y'' = -3^2\, y$

Les solutions sont les fonctions $y = A\, cos3x + B\, sin3x$, $A \in \mathbb{R}$, $B \in \mathbb{R}$

Exercice 20

a) $(E) \Leftrightarrow y'' = -\left(\frac{1}{2}\right)^2 y$

Les solutions sont les fonctions $y = A\cos\left(\frac{1}{2}x\right) + B\sin\left(\frac{1}{2}x\right)$, $A \in \mathbb{R}$, $B \in \mathbb{R}$

b) $(E) \Leftrightarrow y'' = -\left(\frac{3}{4}\right)^2 y$

Les solutions sont les fonctions $y = A\cos\left(\frac{3}{4}x\right) + B\sin\left(\frac{3}{4}x\right)$, $A \in \mathbb{R}$, $B \in \mathbb{R}$

c) $(E) \Leftrightarrow y'' = -\left(\frac{7}{2}\right)^2 y$

Les solutions sont les fonctions $y = A\cos\left(\frac{7}{2}x\right) + B\sin\left(\frac{7}{2}x\right)$, $A \in \mathbb{R}$, $B \in \mathbb{R}$

Exercice 21

a) $(E) \Leftrightarrow y'' = -2^2 y$

La solution générale est f tel que $f(x) = A\cos(2x) + B\sin(2x)$, $A \in \mathbb{R}$, $B \in \mathbb{R}$

On a que $f'(x) = -2A\sin(2x) + 2B\cos(2x)$

On a $A = 1$ et $B = -1$ donc $f(x) = \cos(2x) - \sin(2x)$

b) $(E) \Leftrightarrow y'' = -y$

La solution générale est f tel que $f(x) = A\cos(x) + B\sin(x)$, $A \in \mathbb{R}$, $B \in \mathbb{R}$

On a $A = 1$ et $B = 4$ donc $f(x) = \cos(2x) + 4\sin(2x)$

Exercice 22

a) $(E) \Leftrightarrow y'' = -\left(\frac{1}{3}\right)^2 y$

Les solutions sont les fonctions $y = A\cos\left(\frac{1}{3}x\right) + B\sin\left(\frac{1}{3}x\right)$, $A \in \mathbb{R}$, $B \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} A\,cos\left(\frac{\pi}{9}\right) + B\,sin\left(\frac{\pi}{9}\right) = 1 \\ A\,cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + B\,sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = 18 \end{cases}$$ d'où

$$\begin{cases} A + \sqrt{3}\,B = 36 \\ (36 - \sqrt{3}\,B\,)cos\left(\frac{\pi}{9}\right) + B\,sin\left(\frac{\pi}{9}\right) = 1 \end{cases}$$

Donc $\begin{cases} A = 36 - \sqrt{3}\,B \\ B = \dfrac{1-36\,cos\left(\frac{\pi}{9}\right)}{\sqrt{3}\,cos\left(\frac{\pi}{9}\right)+sin\left(\frac{\pi}{9}\right)} \end{cases}$ par suite

$$y = \left[36 - \sqrt{3}\left(\frac{1-36\,cos\left(\frac{\pi}{9}\right)}{\sqrt{3}\,cos\left(\frac{\pi}{9}\right)+sin\left(\frac{\pi}{9}\right)}\right)\right] cos\left(\frac{1}{3}x\right) + \frac{1-36\,cos\left(\frac{\pi}{9}\right)}{\sqrt{3}\,cos\left(\frac{\pi}{9}\right)+sin\left(\frac{\pi}{9}\right)}\,sin\left(\frac{1}{3}x\right)$$

b) $(E) \Leftrightarrow y'' = -\left(\frac{3}{4}\right)^2 y$

Les solutions sont les fonctions $y = A\,cos\left(\frac{3}{4}x\right) + B\,sin\left(\frac{3}{4}x\right)$, $A \in \mathbb{R}$, $B \in \mathbb{R}$

$y(0) = 1$ et $y\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 2$ donc

$\begin{cases} A = 1 \\ B = \dfrac{2-cos\left(\frac{9\pi}{16}\right)}{sin\left(\frac{9\pi}{16}\right)} \end{cases}$ par suite $f(x) = cos\left(\frac{3}{4}x\right) + \left(\dfrac{2-cos\left(\frac{9\pi}{16}\right)}{sin\left(\frac{9\pi}{16}\right)}\right) sin\left(\frac{3}{4}x\right)$

EXERCICES DE RENFORCEMENT / D'APPROFONDISSEMENT

EXERCICE 1

1. $(E) \Leftrightarrow y'' = -2^2 y$

Les solutions sont : $y = A\,cos(2x) + B\,sin(2x)$, $A \in \mathbb{R}$, $B \in \mathbb{R}$

2. On a $f'(x) = -2A\, sin(\, 2x\,) + 2B\, cos(\, 2x\,)$

3. $\begin{cases} A\, cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + B\, sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \\ -2A\, sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + 2B\, cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1 \end{cases}$ $\begin{cases} B = 2 \\ -2\,A = -1 \end{cases}$

$\begin{cases} B = 2 \\ A = \frac{1}{2} \end{cases}$

Donc $f(x) = \frac{1}{2}\, cos(\, 2x\,) + 2sin(\, 2x\,)$

EXERCICE 2

1. a) $(E'_1) : y' = y$

La solution générale est $y = Ce^x$, $C \in \mathbb{R}$

On a $f'(x) = e^x$ donc f est solution de $(\, E'_1\,)$

b) $f(x) = e^x + k + 1$ est solution de (E_1) si et seulement si $e^x = e^x + k + 1$ donc $k = -1$

cette solution est donc $f(x) = e^x - 1$

2. Une solution de (E_2) est $f(x) = e^x - b$

3. Une solution de $(\,E\,)$ est $f(x) = e^x - \frac{b}{a}$

EXERCICE 3

1. $(E) \Leftrightarrow y'' = -\left(\frac{3}{2}\right)^2 y$

Les solutions sont les fonctions $t \mapsto A\, cos\left(\frac{3}{2}t\right) + B\, sin\left(\frac{3}{2}t\right)$, $A \in \mathbb{R}$, $B \in \mathbb{R}$

2. a) on a $f(\,0\,) = 1$ et $f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0$

b) $f'(t) = -\frac{3}{2}A\, sin\left(\frac{3}{2}t\right) + \frac{3}{2}B\, cos\left(\frac{3}{2}t\right)$

on a $\begin{cases} A = 1 \\ -\frac{3}{2}A\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)+\frac{3}{2}B\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0 \end{cases}$ donc $\begin{cases} A = 1 \\ B = A \end{cases}$ d'où

$\begin{cases} A = 1 \\ B = 1 \end{cases}$

par suite $f(t) = \cos\left(\frac{3}{2}t\right) + \sin\left(\frac{3}{2}t\right)$

3. $\frac{1}{\sqrt{2}} f(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos\left(\frac{3}{2}t\right) + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin\left(\frac{3}{2}t\right) = \cos\left(\frac{3}{2}t - \frac{\pi}{4}\right)$

Donc $f(t) = \sqrt{2}\ \cos\left(\frac{3}{2}t - \frac{\pi}{4}\right)$

EXERCICE 4

1. $(E) \Leftrightarrow y'' = -5^2 y$

Les solutions sont les fonctions $x \mapsto A\cos(5x) + B\sin(5x)$, $A \in \mathbb{R}$, $B \in \mathbb{R}$

2. on a $f'' = -5^2 f$; $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = -2$ et $f'^{(0)} = -5$

$f'(x) = -5A\sin(5x) + \frac{3}{2}B\cos(5x)$

on a $\begin{cases} A\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + B\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -2 \\ -5A\sin(0) + \frac{3}{2}B\cos(0) = (5 \end{cases}$ donc $\begin{cases} A = \sqrt{3} \\ B = -1 \end{cases}$

par suite $f(x) = \sqrt{3}\cos(5x) - \sin(5x)$

3. on a : $2\cos\left(5x + \frac{\pi}{6}\right) = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \cos(5x) - 2 \times \frac{1}{2} \sin(5x)$

$$= \sqrt{3}\cos(5x) - \sin(5x)$$

Par suite $f(x) = 2\cos\left(5x + \frac{\pi}{6}\right)$

EXERCICE 5

1. On a : $g'(x) = e^{2x} + 2xe^{2x}$

et $g'(x) - 2g(x) = e^{2x} + 2xe^{2x} - e^{2x} - 2xe^{2x} = e^{2x}$ donc est solution de (E)

2. les solutions de (G) sont les fonctions $x \mapsto Ce^{2x}$, $C \in \mathbb{R}$

3. $f - g$ solution de $(G) \Leftrightarrow (f-g)' = 2(f-g)$

$$\Leftrightarrow f' - 2f = g' - 2g$$

$$\Leftrightarrow f' - 2f = e^{2x}$$

$$\Leftrightarrow f \text{ solution de } (E)$$

4. on a $f - g = Ce^{2x}$ d'où $f(x) = Ce^{2x} + g(x) = Ce^{2x} + xe^{2x}$, $C \in \mathbb{R}$

5. $f(1) = 0$ donc $C = e^{-1}$

La solution est $h(x) = e^{2x}(x + e^{-1})$

EXERCICE 6

1. $(1) \Leftrightarrow y' = \frac{1}{n} y$

Les solutions sont les fonctions $x \mapsto Ce^{\frac{1}{n}x}$, $C \in \mathbb{R}$

2. On a $g(x) = ax + b$

g est solution de $(2) \Leftrightarrow g'(x) - \frac{1}{n} g(x) = -\frac{x+1}{n(n+1)}$

$$\Leftrightarrow a - \frac{1}{n}(ax+b) = -\frac{x+1}{n(n+1)}$$

$$\Leftrightarrow (-an + a)x + an^2 + na - bn - b = -x - 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a(n+1) = 1 \\ (-1-n)b = -1 - an(n+1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{n+1} \\ b = 1 \end{cases}$$

Donc $g(x) = \frac{1}{n+1} x + 1$

3. a) $h - g$ solution de $(1) \Leftrightarrow (h-g)' - \frac{1}{n}(h-g) = 0$

$$\Leftrightarrow h' - \frac{1}{n} h = g' - \frac{1}{n} g$$

$$\Leftrightarrow \quad h' - \frac{1}{n} f = - \frac{x+1}{n(n+1)}$$

$\Leftrightarrow h$ solution de (2)

b)) $h - g$ est solution de (1) donc $h - g = Ce^{\frac{1}{n}x}$

par suite $h(x) = Ce^{\frac{1}{n}x} + g(x)$ enfin $h(x) = Ce^{\frac{1}{n}x} + \frac{1}{n+1} x + 1$

SITUATIONS COMPLEXES

Les solutions sont les fonctions : $t \longmapsto ke^{-tln3}$, $k \in \mathcal{3}$.

2. $d\theta = -ln(3)\theta dt \Leftrightarrow \theta' = -\left(ln(3)\right)\theta$, donc θ est solution de l'équation

différentielle $y' = -yln3$.

, on a $\theta(t) = ke^{-tln3}$.

$\theta(0) = 100 - 10 \Leftrightarrow k \times e^0 = 90 \Leftrightarrow k = 90$.

Donc $\theta(t) = 90e^{-tln3}$.

. $\theta(t) < 15 \Leftrightarrow 90e^{-tln3} < 15 \Leftrightarrow e^{-tln3} < \frac{1}{6}$.

$$\Leftrightarrow -tln3 < ln\left(\frac{1}{6}\right) \Leftrightarrow t > \frac{ln\left(\frac{1}{6}\right)}{-ln3}.$$

Or $-\frac{ln\left(\frac{1}{6}\right)}{ln3} \simeq 1{,}63$, donc la température passera au-dessous de 15°C après 1 mn 37 s.

DEVOIR DE NIVEAU 1

Exercice 1

V

F

F

V

V

Exercice 2

1) C

2) D

3) A

4) C

Exercice 3

1. P = $\frac{C_3^2 \times C_3^2}{C_5^2 \times C_5^2} + \frac{C_3^1 \times C_2^1 \times C_2^1 \times C_3^1}{C_5^2 \times C_5^2} + \frac{C_2^2 \times C_2^2}{C_5^2 \times C_5^2}$

$= \frac{9+36+1}{100}$

$= \frac{46}{100}$

= 0,46

2.

a) loi de X

X	0	1	2	3	4
P(X = x_i	0,03	0,24	0,46	0,24	0,03

b) E(x) = 0×0,03 + 0,24 + 2×0,46 + 3×0,24 + 4×0,03

E(X) = 0,24 + 0,92 + 0,72 + 0,12

E(X) = 2

Il peut espérer gagner 200 F

Exercice 4

1. $\begin{cases} f(x) = \sqrt{x^2 - 2x} - x \;\; si\ x \in]-\infty; 0] \cup [2; +\infty[\\ f(x) = \sqrt{2x - x^2} - x \quad si \quad x \in [0; 2] \end{cases}$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} -\sqrt{1-\frac{2}{x}} - 1 = -\infty$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \sqrt{\frac{2}{x}-1} - 1 = +\infty$$

Donc f admet une demi-tangente dirigée vers le haut en 0.

$$\lim_{\substack{x \to 2 \\ >}} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{\substack{x \to 2 \\ >}} \sqrt{\frac{x}{x-2}} - 1 = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x \to 2 \\ <}} \frac{f(x)-f(0)}{x-2} = \lim_{\substack{x \to 2 \\ <}} -\sqrt{\frac{x}{2-x}} - 1 = -\infty$$

Donc f admet une demi-tangente dirigée vers le haut en 2.

2. a) $si\ x > 2,\ f(x) = \sqrt{x^2-2x} - x = \frac{-2}{\sqrt{1-\frac{2}{x}}+1}$

$\lim_{x \to +\infty} f(x)$ = -1, donc la droite d'équation y = - 1 est asymptote à la courbe de représentative de f.

b) $\lim_{x \to -\infty}[f(x)] = +\infty$

$$f(x) - (-2x+1) = \sqrt{x^2-2x} + x - 1 = \frac{2}{\sqrt{1-\frac{2}{x}}+1} - 1$$

$\lim_{x \to -\infty}[f(x) - (-2x+1) = 0$

donc la droite d'équation y = -2x + 1 est asymptote à la courbe de f en -∞.

3. a) $\forall x \in]-\infty; 0[, x - 1 < \sqrt{x^2-2x}$ car x< 0 et $\sqrt{x^2-2x} > 0$.

b) $\forall x \in]2; +\infty[$, x – 1 - $\sqrt{x^2-2x} > 0$ car (x- 1)² - (x² - 2x) = 1.

c) 1 – x - $\sqrt{2x-x^2} \geq 0$ si x >1, 1 – x - $\sqrt{2x-x^2} \leq 0$

si x < 1, on a : 1 – x ≥ $\sqrt{2x-x^2}$

2x² - 4x + 1 ≥ 0

x	0		$\frac{2-\sqrt{2}}{2}$		1
2x² - 4x + 1	1	+	0	-	-1

x	0		$\frac{2-\sqrt{2}}{2}$		2
1 – x - $\sqrt{2x-x^2}$	1	+	0	-	-1

S =]0 ; $\frac{2-\sqrt{2}}{2}$]

4. a) et 4.b). $\begin{cases} f'(x) = \dfrac{x-1-\sqrt{x^2-2x}}{\sqrt{x^2-2x}} & si\ x \in]-\infty; 0[\cup]2; +\infty[\\ f(x) = \dfrac{1-x-\sqrt{2x-x^2}}{\sqrt{2x-x^2}} & si\ \ x \in]0; 2[\end{cases}$

5.D'après la question 3, on a :

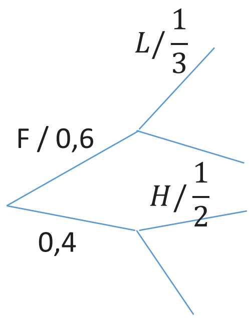
f est décroissante sur]-∞ ; 0[et sur $]\frac{2-\sqrt{2}}{2}$; 2[

f est croissante sur]0 ; $\frac{2-\sqrt{2}}{2}$[et sur]2; +∞[

x	-∞		0		$\frac{2-\sqrt{2}}{2}$		2		+∞
$f'(x)$		-	||	+	0	-	||	+	
$f(x)$	+∞ ↘		0	↗	$f(\frac{2-\sqrt{2}}{2})$	↘	-2	↗	1

6.

Exercice 5



P(L) = P(L∩F) + P(L∩H) = $0{,}6\times\frac{1}{3} + 0{,}4\times\frac{1}{2} = 0{,}4$

$P_L(F) = \frac{P(L\cap F)}{P(L)} = \frac{0{,}2}{0{,}4} = 0{,}5$

Exercice 6

Soit B le bénéfice qui est égal au prix de vente moins le coût de production.

En tenant compte des unités on a :

$B(x) = 2x - (x^2 - 60x)$

$B(X) = 58x - x^2$

$B'(x) = 50 - 2x$

Le bénéfice est maximal pour $x = 25$ et $25 \in [0 ; 40]$.

DEVOIR DE NIVEAU 2

Exercice 1

F

F

V

V

Exercice 2

1) D. ;

2) C ;

3) B ;

4) B

4) aucune des réponses n'est bonne.

f est croissante sur $]0 ; \sqrt{e}[$ et décroissante sur $]\sqrt{e} ; 3]$

5) f'(e) = -e f(e) = 0 ; y = -e(x – e) ; y = -ex + e²

L'équation de la tangente est plutôt : y = -ex + e²

Exercice 3

1. Ecris la forme trigonométrique de u et de v.

On a : u = $\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$; $v = 2(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + isin(\frac{2\pi}{3})$

2. $\frac{u}{v} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\frac{-5\pi}{12} + isin\frac{-5\pi}{12})$

3. $\frac{u}{v} = \frac{1+i}{-1+i\sqrt{3}} = \frac{(1+i)(-1-i\sqrt{3})}{4}$

$= \frac{-1+\sqrt{3}}{4} + i\frac{-1-\sqrt{3}}{4}$

Par identification on a :

$\text{Cos}(\frac{-5\pi}{12}) = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{-1+\sqrt{3}}{4} = \cos(\frac{5\pi}{12})$, donc $\cos(\frac{5\pi}{12}) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

$\text{Sin}(\frac{-5\pi}{12}) = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{-1-\sqrt{3}}{4}$ donc $\sin(\frac{5\pi}{12}) = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

Exercice 4

1. Epreuve à 2 issues, réponse juste avec la probabilité $\frac{1}{4}$ et fausse avec la probabilité $\frac{3}{4}$. Cette épreuve est répétée 6 fois de façon indépendante. La loi de X est $B(6; \frac{1}{4})$.

2. P(X = 3) = $C_6^3\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{3}{4}\right)^3$

3. P(X≥3) = $C_6^3\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{3}{4}\right)^3 + C_6^4\left(\frac{1}{4}\right)^4\left(\frac{3}{4}\right)^2 + C_6^5\left(\frac{1}{4}\right)^8\left(\frac{3}{4}\right) + \left(\frac{1}{4}\right)^6$

4. E(X) = $6\times\frac{1}{4}$; E(X) = $\frac{3}{2}$

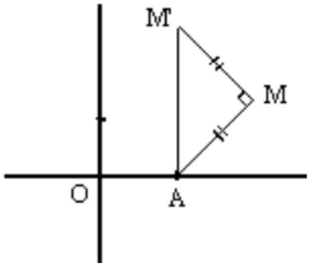
Exercice 5

1. T(A, $\sqrt{2}$; $\frac{\pi}{4}$) ; T est une similitude directe de centre A d'affixe 1, de rapport $\sqrt{2}$ d'angle $\frac{\pi}{4}$.

2. a) Dans le sujet, Il manque les chapeaux et les flèches des vecteurs.

Mes $(\overrightarrow{AM}\ ;\ \overrightarrow{AM'}) = \frac{\pi}{4}$

b)



3. T(O) = O' (0 ; - 1) et Soit C(1 ; 1) de (D), T(C) = C'(0 ; 1)

(D') est l'axe des ordonnées.

4. zz'= 1⇔ z((1 – i)z – i) = 1

(1 + i)z² - iz – 1 = 0

1 est une solution donc l'autre est $\frac{-1}{1+i}$

Soit $\frac{-1+i}{2}$.

$Z_{B'}$ = (1 + i)$\frac{-1+i}{2}$ - i = $-1-i$

5. A(1 ; 0) ; A'(-1 ; 0) ; B($\frac{-1+i}{2}$) et B(- 1 ; - 1)

$\frac{z_B-z_A}{z_B-z_{B'}} = \frac{-3+i}{1+3i} = i$

$\frac{z_{A'}-z_A}{z_{A'}-z_{B'}} = \frac{-2}{i} = 2i$

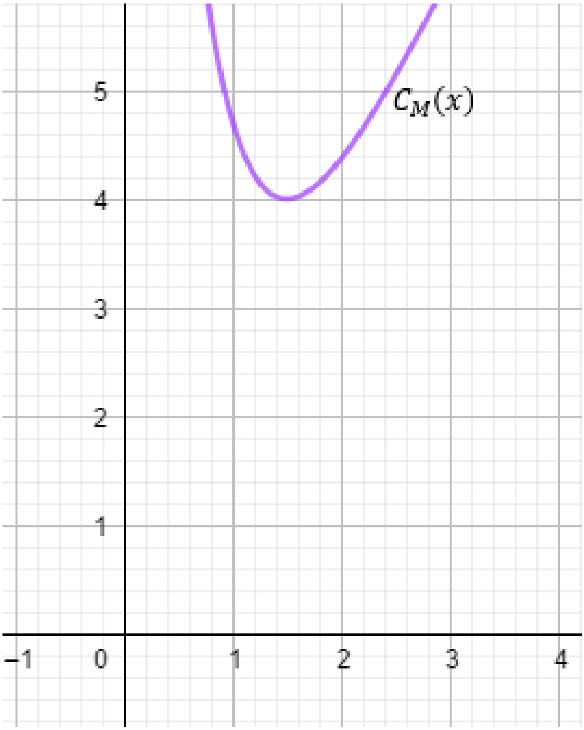
$\frac{z_B-z_A}{z_B-z_{B'}} : \frac{z_{A'}-z_A}{z_{A'}-z_{B'}} = \frac{1}{2}$ donc les points A, A', B et B' sont cocycliques.

Exercice 6

C_T(x) = 2x² + xe^{-2x+3}

1) $C_M(x) = 2x + e^{-2x+3}$

$C_M{}'(x) = 2(1 - e^{-2x+3})$; $C_M{}'(x) = 0$ si x = 1,5



$Si\ x = 1,5$; $C_M = 4$

2. B(x) = – 2x² + 7x - xe^{-2x+3}

B'(x) = -4x + 7 –(1- 2x)e^{-2x+3}

B'(x) = 0 pour x ≈ 2 soit B(x) = 5,26

Soit 5 2600 0000

DEVOIR DE NIVEAU 3

EXERCICE 1 (2 points)

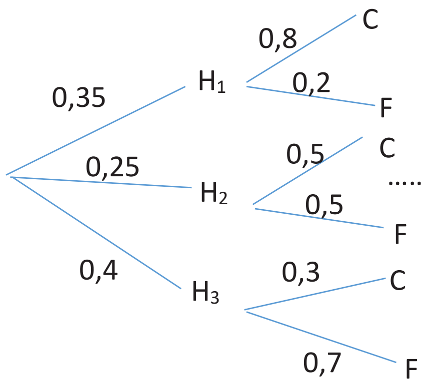
1.b) ; 2. d) ; 3.b) ; 4. d) .... 0, 5 point $\times$ 4

EXERCICE 2 (2 points)

1. F ; 2.F ; 3.F; 4.F........ .... 0, 5 point $\times$ 4

EXERCICE 3 (4 points)

1. a)



.... 1 point

b) $P(C\cap H_3) = 0{,}4 \times 0{,}3$ — 0,25 point

$P(C\cap H) = 0{,}12$ — 0,25 point

c) $P(C) = P(C\cap H_1) + P(C\cap H_2) + P(C\cap H_3)$ — 0,25 point

$P(C) = 0{,}35 \times 0{,}8 + 0{,}25 \times 0{,}5 + 0{,}4 \times 0{,}3$ — 0,25 point

$P(C) = 0{,}525$ — 0,25 point

d) $P_C(H_1) = \dfrac{P(C \cap H_1)}{P(C)}$ — 0,25 point

$P_C(H_1) = 0{,}533$ — 0,25 point

2.a) Justification correcte de X suit une loi binomiale — 0,25 point

Les paramètres sont : $n = 10$ et $p = 0{,}525$ — 0,25 point

b) $P(X = 5) = C_{10}^{5} \times p^5 \times (1- p)^5$ — 0,25 point

$P(X = 5) = C_{10}^{5} \times (0{,}525)^5 \times (0{,}475)^5$ — 0,25 point

$P(X = 5) = 0{,}243$ — 0,25 point

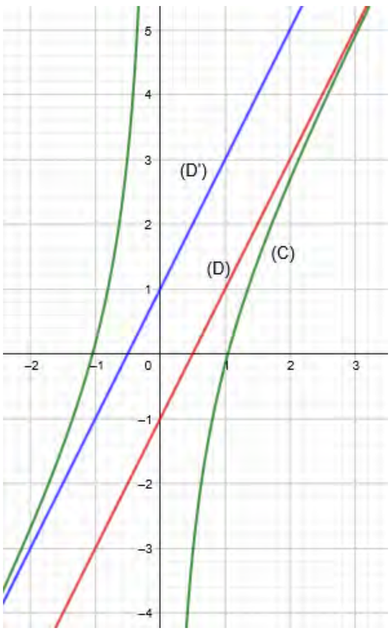
EXERCICE 4 (3 points)

1.	z = $\frac{2iz}{z-i}$	0,25 point
	z = 0 ou z = 3i	0,25 point × 2
2.	$z_{B'}$ = 4i ; $z_{C'}$ = -1 + i	0,25 point × 2
3.a)	Justification correcte de : z' – 2i = $\frac{-2}{z-i}$	0,75 point
b)	Traduction de M∈ C (A ; 1) équivaut à $\|z-i\|=1$	0,25 point
	Justification correcte de $\|z'-2i\|=2$	0,25 point
	M'appartient au cercle de centre B d'affixe 2i et de rayon 2	0,25 point× 2

EXERCICE 5 (5 points)

1.	D_f est symétrique par rapport à 0 ……………………… ……… Justification correcte de $f(-x)=-f(x)$ ……………………… <u>Interprétation graphique</u> Le point O est centre de symétrie de la courbe (C_f) ……………	0,25 point 0,25 point 0,25 point
2.a)	$\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ >}} f(x)=-\infty$	0,25 point
	La droite d'équation $x=0$ est asymptote à la courbe (C_f).	0,25 point
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$	0,25 point
3.a)	Justification correcte de $f(x)=2x-1-\frac{2}{e^x-1}$	0,5 point
b)	Démonstration correcte de (D_1) est une asymptote à(C_f) en $+\infty$	0,25 point
c)	Signe correcte de $f(x)-(2x-1)$ …………………………… La courbe (C_f) est au-dessous de la droite (D_1) sur $]0;+\infty[$ …..	0,25 point 0,25 point
4.a)	Justification correcte de $f'(x)=2+\frac{2e^x}{(e^x-1)^2}$	0,5 point

<table>
<tr><td>b)</td><td>Justification correcte de : $\forall\, x \in\ ]0;+\infty[\ f'(x) > 0$ ……………
f est strictement croissante sur $]0;+\infty[$ …………………………</td><td>0,25 point
0,25 point</td></tr>
<tr><td>c)</td><td><table>
<tr><td>x</td><td>0</td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>$f'(x)$</td><td></td><td>+</td></tr>
<tr><td>$f(x)$</td><td></td><td>$-\infty \nearrow +\infty$</td></tr>
</table></td><td>0,25 point</td></tr>
<tr><td>5.</td><td>Voir feuille annexe
Asymptotes…………………………………………………………
Courbe (C_f) ……………………………………………………</td><td>0.25×2 point
0.5 point</td></tr>
</table>



EXERCICE 6 (4 points)

1. x le nombre de sachets et B(x) le bénéfice. Le nombre recherché est l'abscisse du point où B atteint son maximum sur l'intervalle [1 ; 3].

Calculons la dérivée de B

$$B'(x) = -x + 1 + \frac{2}{x} = \frac{-x^2 + x + 2}{x}$$

2. Déterminons le signe de $B'(x)$sur [1 ; 3]

x	1		2		3
$B'(x)$		+	0	−	

3. Dressons le tableau de variation de $B(x)$ sur [1 ; 3]

x	1		2		3
$B'(x)$		+	0	−	
$B(x)$	$\frac{5}{2}$	↗	2+2ln2	↘	$\frac{1}{2}$+2ln3

4. Exploitation du tableau de variation de la fonction B

B atteint son maximum au point d'abscisse 2.
Le nombre de sachets de poudre de cacao à produire pour atteindre un bénéfice maximal est 2 000.

Corrigé abrégé du sujet 1

Exercice 1

1. **F**
2. **V**
3. **V**
4. **F**

Exercice 1

1. **D**
2. **B**
3. **C**
4. **A**

Exercice 3 (on pourra utiliser un arbre pondéré)

1. 0,7
2. 0,1
3. 0,52 × 0,3 = 0,156
4. 0,48 × 0,1 = 0,048
5. 0,156 + 0,048 = 0,204
6. $\frac{0{,}156}{0{,}204}$ soit environ 0,76

Exercice 4

1.

$$a = \sqrt{2}(\cos\frac{3\pi}{4} + \sin\frac{3\pi}{4})$$

$$b = 3\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4}) \quad .$$

$$c = 2\cos 0 + i\sin 0$$

2. ABC est un triangle isocèle rectangle en C Il suffit de vérifier que :

$$\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = i$$

3. S est la similitude directe de centre I, de rapport 2 et d'angle $\frac{\pi}{2}$

4.

$$z_{A'} = -1 - 4i$$

$$z_{B'} = -5 + 4i$$

5.

$$\frac{A'B'}{AB} = 2$$

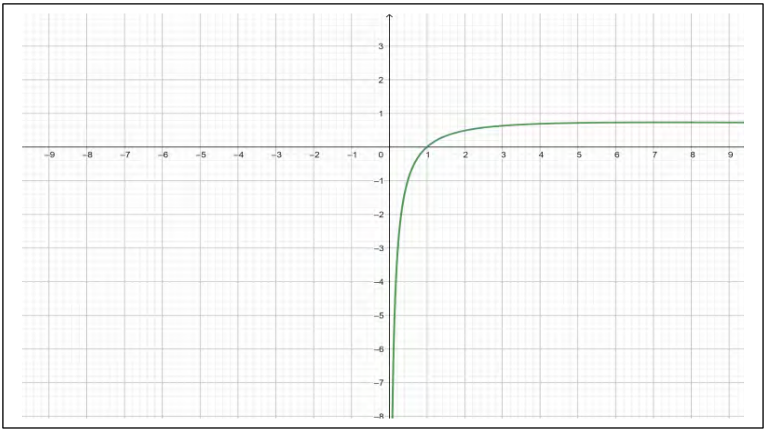
$$Mes(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{A'B'}) = \frac{\pi}{2}$$

6. $z' = (1+i)z + 1 + I$

$z_{I'} = 2 + 2i$

Exercice 5

1. En posant $X = \sqrt{x}$, on obtient le résultat
2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}} = -\infty$
3. La droite d'équation $y = 0$ est une asymptote à la courbe représentative de la fonction f en $+\infty$; la droite d'équation $x = 0$ est une asymptote à la courbe représentative de la fonction f en 0
4. Vérification immédiate
5. La fonction f est croissante sur $]0 ; e^2[$ et strictement décroissante sur $]e^2 ; +\infty[$
6. Tableau de variation
7.



8. **Vérification immédiate**

Exercice 6

La modélisation du problème conduit à l'inéquation : $2e^{-\frac{t}{12}} < 0{,}75\ f(0)$.

$f(0) = 2$ donc on a : $2e^{-\frac{t}{12}} < 0{,}75$.
Soit - t < 12ln(0,75) ou t > 3,4.
Mon petit frère ne peut pas recevoir la dose médicament B avant l'heure du rendez-vous.

Achevé d'imprimer sous les presses de : JD Éditions
Pour le compte de JD Éditions.
Tél. : 25 23 00 17 50
Mise en page : JD Éditions

De la même collection