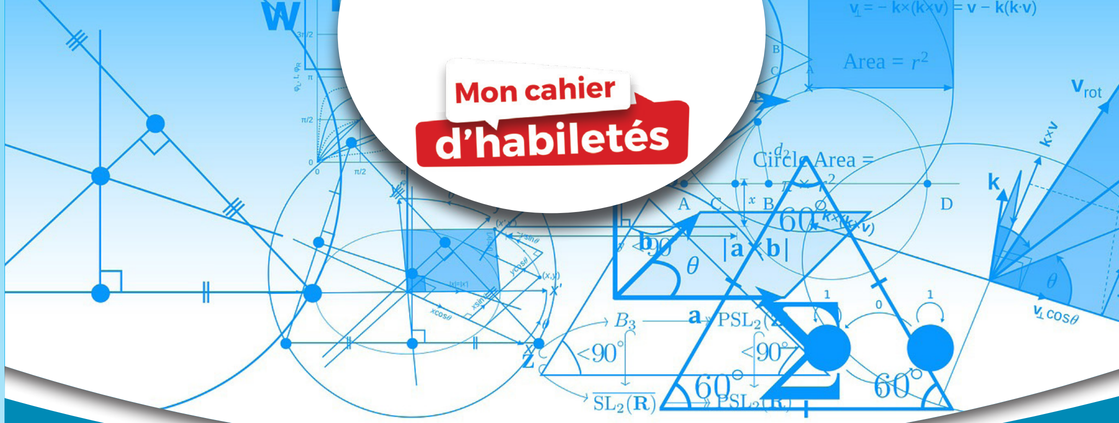


Mon cahier d'habiletés

Livre du Professeur

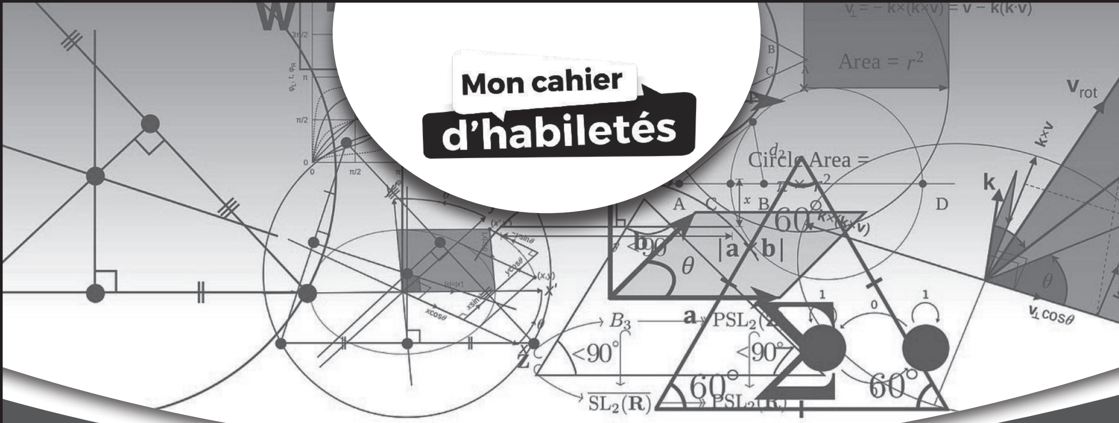
Maths

T^{le} C

CORRIGÉS DES EXERCICES

- Fixations
- Renforcements / Approfondissements
- Situations Complexes
- Devoirs de niveaux

MATÉRIALISEZ VOS IDÉES
JD Editions
L'Edition autrement



Mon cahier d'habiletés

Livre du Professeur

Maths

$T^{le}C$

CORRIGÉS DES EXERCICES

- Fixations
- Renforcements / Approfondissements
- Situations Complexes
- Devoirs de niveaux

JD Éditions
21 B.P. 3636 Abidjan 21
Côte d'Ivoire

SOMMAIRE

Pages

Leçon 1 : Barycentre et lignes de niveaux	*7*
Leçon 2 : Limite et continuité	*24*
Leçon 3: Divisibilité dans $\mathbb{Z}$	*43*
Leçon 4 : Dérivabilité et étude de fonctions	*62*
Leçon 5 : Géométrie analytique de l'espace	*93*
Leçon 6 : Primitive	*115*
Leçon 7: Coniques	*122*
Leçon 8 : Fonctions logarithmes	*146*
Leçon 9: Nombres complexes	*169*
Leçon 10 :Fonctions exponentielles et fonctions puissances	*204*
Leçon 11 : PPCM et PGCD de deux entiers relatifs	*224*
Leçon 12 :Nombres complexes et géométrie du plan	*246*
Leçon 13 : Suites numériques	*261*
Leçon 14: Isométries du plan	*281*
Leçon 15 : Calcul intégral	*303*
Leçon 16: Probabilité conditionnelle et variable aléatoire	*319*
Leçon 17: Similitudes du plan	*333*
Leçon 18 : Équations différentielles	*357*
Leçon 19: Statistique à deux variables	*368*

Ce document pourrait contenir des erreurs au fautes de frappes.
Prière les signaler à l'adresse : kyoussouphou@gmail.com

1 BARYCENTRE ET LIGNES DE NIVEAUX

EXERCICES DE FIXATION

I- Barycentre de n points pondérés

<u>Exercice 1</u>

1) On a : $1-4-2+2+3=0$ donc P n'admet pas de barycentre
   On a : $3-1-2+4-5=-1$ *et* $-1\neq 0$ donc Q admet un unique barycentre.
   On a : $2-3-1-1+6=3$ *et* $3\neq 0$ donc R admet un unique barycentre.
   On a : $3-4-2+8-5=0$ donc S n'admet pas de barycentre
2) Soit K le barycentre de Q , on a :
   $3\overrightarrow{KA}-\overrightarrow{KB}-2\overrightarrow{KC}+4\overrightarrow{KD}-5\overrightarrow{KE}=\vec{0}$
   Soit G le barycentre de R , on a :
   $2\overrightarrow{GA}-3\overrightarrow{GB}-\overrightarrow{GC}-\overrightarrow{GD}+6\overrightarrow{GE}=\vec{0}$

<u>Exercice 2</u>

1. $(2;4;-1)$ avec $a=2$; $b=4$ *et* $c=-1$ car $2+4-1\neq 0$
2. $(-5;3;2)$ avec $a=-5$; $b=3$ *et* $c=2$ car $-5+3+2=0$

Propriété de l'homogénéité

Exercices de fixation

<u>Exercice 3</u>

1. Les systèmes F , E et L ont le même barycentre
2. On a $4-3-2+2+6=7$ donc le système
   $M=\left\{\left(A,\frac{4}{7}\right);\left(B,\frac{-3}{7}\right);\left(C,\frac{-2}{7}\right);\left(D,\frac{2}{7}\right);\left(E,\frac{6}{7}\right)\right\}$ a le même barycentre que le système E et la somme des pondérations vaut 1.

<u>Exercice 4</u>

$P=\{(A,-12);(B,9);(C,6);(D,-6);(E,-12)\}$

$Q=\{(A,4);(B,-3);(C,-2);(D,2);(E,4)\}$

$R=\left\{\left(A,\frac{4}{5}\right);\left(B,\frac{-3}{5}\right);\left(C,\frac{-2}{5}\right);\left(D,\frac{2}{5}\right);\left(E,\frac{4}{5}\right)\right\}$.

Propriété de réduction de la somme

Exercices de fixation

Exercice 5

1. V ; 2.F ; 3.V ; 4. F ; 5. V.

Exercice 6

- $-2\overrightarrow{MP}-5\overrightarrow{QM}-3\overrightarrow{MR}=-5\overrightarrow{QP}-3\overrightarrow{PR}$
- $4\overrightarrow{MP}-7\overrightarrow{MQ}+4\overrightarrow{MR}=-7\overrightarrow{PQ}+4\overrightarrow{PR}$
- $\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{MQ}-\overrightarrow{RM}=\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{MQ}+\overrightarrow{MR}=3\overrightarrow{MG}$ où $G=bar\{(P,1);(Q,1);(R,1)\}$

Propriété des coordonnées du barycentre

Exercices de fixation

Exercice 7

$G=bar\{(E,-2);(F,3);(K,1)\}$ avec
$E(2;-1;5)$, $F(0;2;-4)$ *et* $K(3;6;1/2)$

Soit $G(x_G;y_G;z_G)$ on a : $x_G=\frac{-2\times2+3\times0+1\times3}{-2+3+1}=\frac{-4+3}{2}=-\frac{1}{2}$

$y_G=\frac{-2\times(-1)+3\times2+1\times6}{-2+3+1}=\frac{2+6+6}{2}=\frac{14}{2}=7$ et

$$z_G = \frac{-2\times5+3\times(-4)+1\times\frac{1}{2}}{-2+3+1} = \frac{-10-12+\frac{1}{2}}{2} = -\frac{43}{4}$$ d’où

$$G\left(-\frac{1}{2};7;-\frac{43}{4}\right)$$

Propriété des barycentres partielles

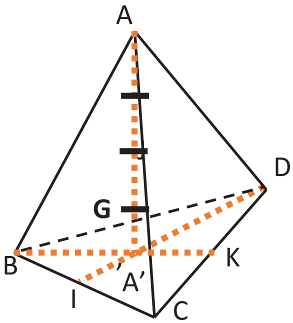
Exercices de fixation

<u>Exercice 8</u>

$G = bar\{(A,1);(B,1);(C,1);(D,1)\}$ et $A' = bar\{(B,1);(C,1);(D,1)\}$

donc $G = bar\{(A,1);(A',3)\}$ soit $\overrightarrow{GA}+3\overrightarrow{GA'}=\vec{0} \Leftrightarrow$

$\overrightarrow{GA}+3\overrightarrow{GA}+3\overrightarrow{AA'}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AA'}$; les points A , G et A’ sont alignés ainsi le point G appartient à la droite (AA’)

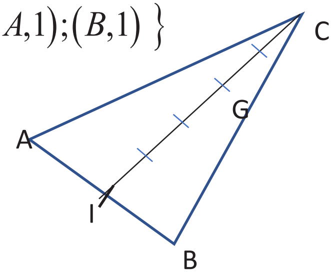


<u>Exercice 9</u>

Soit $G = bar\{(A,1);(B,1);(C,3)\}$ $et\ I = bar\{(A,1);(B,1)\}$

donc $G = bar\{(I,2);(C,3)\}$

soit $2\overrightarrow{GI}+3\overrightarrow{GC}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{IG}=\frac{3}{5}\overrightarrow{IC}$

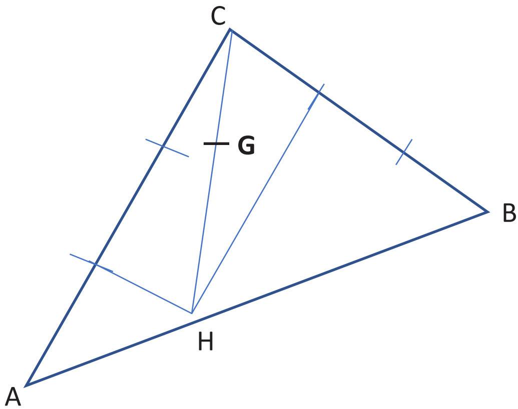


Exercice 10

$H = bar\{(A,2);(B,1)\}$ donc $\overrightarrow{CH} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$

$G = bar\{(H,3);(C,4)\}$ donc $\overrightarrow{AG} = \frac{3}{7}\overrightarrow{AH} + \frac{4}{7}\overrightarrow{AC}$

$H = bar\{(A,2);(B,1)\}$ donc $G = bar\{(A,2);(B,1);(C,4)\}$



3. Ensemble des barycentres de points pondérés

Exercices de fixation

Exercice 11

$\overrightarrow{AM} + 2\overrightarrow{AB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} + 2\overrightarrow{AM} + 2\overrightarrow{MB} = \vec{0} \Leftrightarrow -3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} = \vec{0}$ donc

$M = bar\{(A,-3);(B,2)\}$

II- Ligne de niveau

Exercices de fixation

Exercice12

$MB^2 + MC^2 - MA^2 = 0$ soit $G = bar\{(A,-1);(B,1);(C,1)\}$
donc $-\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 0$ et $MG^2 + GB^2 + GC^2 - GA^2 = 0$

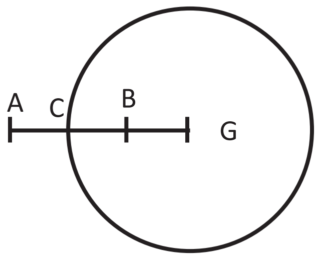
On a $AC + CB = AB$ et $AC = CB$ donc C est le milieu de [AB]

On obtient $\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{CA}$ *soit* $GB = 1$; $\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{BA}$ *soit* $GC = 2$ *et* $AG = 3$

$MG^2 + GB^2 + GC^2 - GA^2 = 0 \Leftrightarrow MG^2 = 9 - 1 - 4$

$\Leftrightarrow MG^2 = 4$ donc $M \in \mathbf{C}(G,2)$

$\Leftrightarrow MG = 2$



Exercice 13

ABCD est un parallélogramme de centre O. Déterminons l'ensemble des points M tel que $MA^2 + MB^2 - MC^2 - MD^2 = 0$

ABCD est un parallélogramme de centre O
$\Leftrightarrow \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CO}$ *et* $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{DO}$

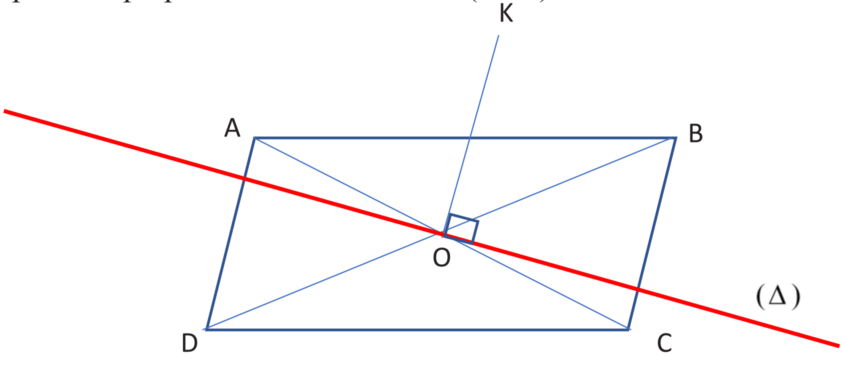
$\Leftrightarrow OA = CO$ *et* $OB = DO$

$MA^2 + MB^2 - MC^2 - MD^2 = 0 \Leftrightarrow$
$OA^2 + OB^2 - OC^2 - OD^2 - 2OM \bullet (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD}) = 0$

$\Leftrightarrow -2\overrightarrow{OM} \bullet (2(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) = 0$

Posons $\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) = 0$

On obtient donc $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OK} = 0$ ainsi le point M décrit la droite (Δ) passant par O et perpendiculaire à la droite (OK)



Ligne de niveau k de l'application $M \mapsto \frac{MA}{MB}$

Exercice 14

$\frac{MA}{MB} = 2 \Leftrightarrow MA^2 - 4MB^2 = 0$ soit $G = bar\{(A,1)\ ;(B,-4)\}$, on a

$\overrightarrow{GA} - 4\overrightarrow{GB} = \vec{0} \Leftrightarrow GA = 4GB$

$$\Leftrightarrow GA^2 - 4GB^2 - 3MG^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow MG^2 = \frac{1}{3}(GA^2 - 4GB^2) = \frac{1}{3}(16GB^2 - 4GB^2)$$

$\Leftrightarrow MG^2 = 4GB^2$ donc $\Leftrightarrow MG = 2GB$ Ainsi $M \in \mathbf{C}$ $(G, 2GB)$ privé de B

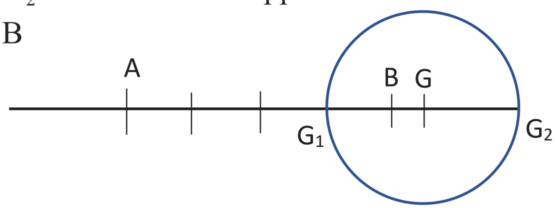
Exercice 15

$\frac{MA}{MB} = 3 \Leftrightarrow MA^2 - 9MB^2 = 0$

$[G_1G_2]$ soit $G_1 = bar\{(A,1)\ ;(B,3)\}$ *et* $G_2 = bar\{(A,1)\ ;(B,-3)\}$

$\Leftrightarrow 4\overrightarrow{G_1M} \cdot (-2\overrightarrow{G_2M}) = 0$

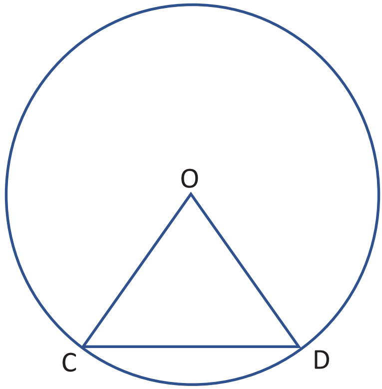
$\Leftrightarrow \overrightarrow{G_1M} \cdot \overrightarrow{G_2M} = 0$ donc M appartient au cercle de diamètre $[G_1G_2]$ privé de B



Ligne de niveau k de l'application : $M \mapsto Mes\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right) = \alpha$

Exercice 16

L'ensemble des points M tel que $Mes\left(\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MD}\right) = \frac{\pi}{6}$. On construit le triangle OCD isocèle en O tel que $Mes\left(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}\right) = \frac{\pi}{3}$ et (C) le cercle de centre O passant par C et D. L'ensemble cherché est le grand arc $\overset{\frown}{CD}$ privé des points C et D.



III. Utilisation du barycentre

Exercice 17

$\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow I = bar\{(A,1);(B,2)\}$; de même

$C = bar\{(D,1);(I,3)\}$ et $M = bar\{(A,1);(D,1)\}$.

On a : $C = bar\{(D,1);(I,3)\} = bar\{(A,1);(D,1);(B,2)\}$

soit $C = bar\{(M,2);(B,2)\}$? d'où le résultat.

Exercice 18

Justifions que les droites (AJ) , (BK) et (CI) sont concourantes

$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow I = bar\{(A,2);(B,1)\}$;

$\overrightarrow{CJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{CB} \Leftrightarrow J = bar\{(C,3);(B,1)\}$

$\overrightarrow{CK} = \frac{2}{5}\overrightarrow{CA} \Leftrightarrow K = bar\{(C,3);(A,2)\}$. Soit

$G = bar\{(A,2);(B,1);(C,3)\}$

On a $G = bar\{(J,4);(A,2)\} \Leftrightarrow G \in (AJ)$.

$G = bar\{(K,5);(B,1)\} \Leftrightarrow G \in (KB)$.

$G = bar\{(I,3);(C,3)\} \Leftrightarrow G \in (CI)$.

Ainsi, les droites (AJ) , (BK) et (CI) sont concourantes en G.

EXERCICES DE RENFORCEMENT / D'APPROFONDISSEMENT

Exercice 1

1. B ; 2.A ; 3.C

Exercice 2

1. $\vec{u} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{CB}$

   $\vec{v} = 4\overrightarrow{MD} - 2\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MC} = 4\overrightarrow{AD} - 2\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{BD}$

2. $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 4\overrightarrow{MO}$
   car $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$

$$\begin{aligned}
-3\overrightarrow{MA} + 12\overrightarrow{MD} - 6\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} &= -3\overrightarrow{DA} - 6\overrightarrow{DB} - 3\overrightarrow{DC} \\
&= -3\overrightarrow{DB} - 3\overrightarrow{BA} - 6\overrightarrow{DB} - 3\overrightarrow{DB} - 3\overrightarrow{BC} \\
&= -12\overrightarrow{DB} - 3(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}) \\
&= -12\overrightarrow{DB} + 3\overrightarrow{DB} \\
&= -9\overrightarrow{DB}
\end{aligned}$$

Exercice3

Utiliser ABCD au lieu de ABGD de centre I

$\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MD}\right\|=AB$ soit $G_1=bar\{(A,1);(B,1);(D,-1)\}$ on obtient $MG_1=AB$ donc l'ensemble des points M est le cercle de centre G_1 et de rayon AB

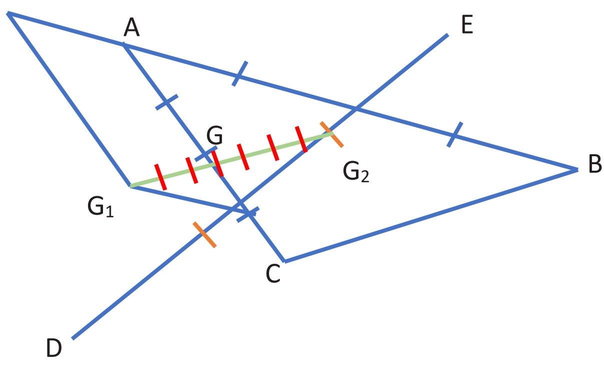
Exercice 4

1. $(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB})(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC})=0$ Soit I le milieu de [AB] et J le milieu de [BC] . on obtient $2\overrightarrow{MI}.2\overrightarrow{MJ}=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MI}.\overrightarrow{MJ}=0$ donc l'ensemble des points M est le cercle de diamètre [IJ]
2. $(\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}).(\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC})=0$ soit $K=bar\{(A,1);(B,-2)\}$ *et* $P=bar\{(B,1);(C,2)\}$ On obtient $-\overrightarrow{MK}.(3\overrightarrow{MP})=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MK}.\overrightarrow{MP}=0$ donc l'ensemble des points M est le cercle de diamètre [KP]

Exercice 5

$G_1=bar\{(A,2);(B,-1);(C,3)\}$ *soit* $\overrightarrow{AG_1}=-\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$; et G_2 le barycentre de (D,1) et (E, 2)

On a : $G=bar\{(G_1,4);(G_2,3)\}$ *soit* $\overrightarrow{G_1G}=\frac{3}{7}\overrightarrow{G_1G_2}$



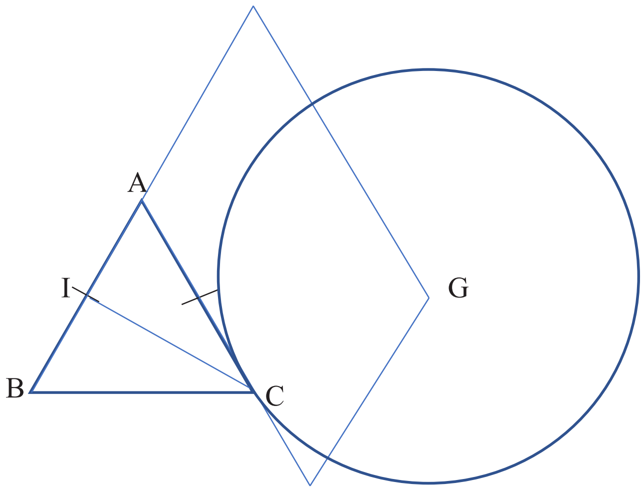
Exercice 6

$\left\|\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}\right\|$ soit

$G\ =bar\{(A,1);(B,-2);(C,3)\}$ et I le milieu de [AB]. On obtient

$\Leftrightarrow MG=IC \Leftrightarrow MG=IC$ donc l'ensemble des points M est le cercle de centre G et de rayon IC.

$G\ =bar\{(A,1);(B,-2);(C,3)\} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG}=-\overrightarrow{AB}+\dfrac{3}{2}\overrightarrow{AC}$



Exercice 7

Construisons l'ensemble des points M du plan tels que

$$MI^2=\frac{3+\frac{17}{4}-2\times\frac{1}{4}-\frac{17}{4}}{2}=\frac{5}{4}\Leftrightarrow MI=\frac{\sqrt{5}}{2}$$

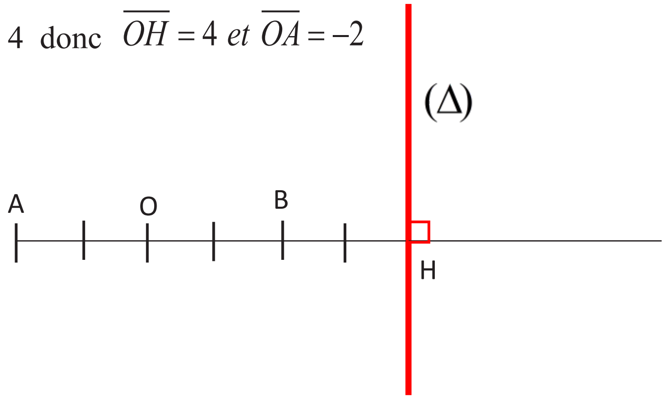
Soit O le milieu de [AB] et H le projeté orthogonal de M sur (OA)

$MA^2-MB^2=2AB^2 \Leftrightarrow OA^2-OB^2-2\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{BA}=2AB^2$; on a :

$\overrightarrow{BA}=2\overrightarrow{OA} \qquad \Leftrightarrow -4\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OA}=2AB^2$

$$\Leftrightarrow \overline{OH}\times\overline{OA}=-\frac{1}{2}AB^2$$

Prenons AB = 4 donc $\overline{OH} = 4$ *et* $\overline{OA} = -2$

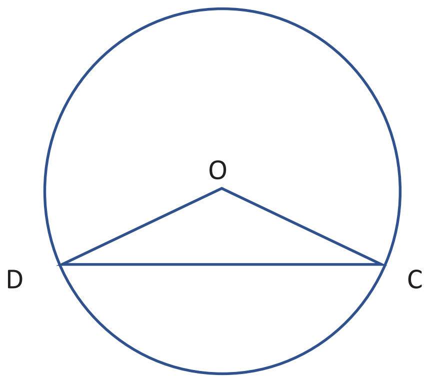


Exercice 8

L'ensemble des points M tel que : $Mes\left(\overrightarrow{MC},\overrightarrow{MD}\right) = -\dfrac{\pi}{3}$ ou $Mes\left(\overrightarrow{MC},\overrightarrow{MD}\right) = \dfrac{2\pi}{3}$.

On construit le triangle OCD isocèle en O tel que $Mes\left(\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OD}\right) = -\dfrac{2\pi}{3}$ et (C) le cercle de centre O passant par C et D.

L'ensemble cherché est le grand arc $\overset{\frown}{CD}$ privé des points C et D. Il faut ensuite examiner le second cas. Au total l'ensemble cherché est la réunion des deux arcs capables d'extrémités C et D.



Exercice 9

$$A = bar\{(E,1);(F,1)\} = bar\{(E,3);(F,3)\}$$

$$C = bar\{(F,3);(G,1)\} = bar\{(F,-3);(G,-1)\}$$

$$B = bar\{(E,3);(G,-1)\} = bar\{(E,3);(F,3);(F,-3);(G,-1)\}$$

$$= bar\{(A,6);(C,-4)\}$$

$$B = bar\{(A,3);(C,-2)\}$$

Exercice 10

1. ABC est équilatéral, I est le milieu de [BC] et soit E le milieu de [AB].
   H le projeté orthogonal de I sur (AB) donc H est le milieu de [EB], ainsi
   On a : $\overrightarrow{AH} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$ d'où $H = bar\{(A,1);(B,3)\}$
2. I milieu de [BC] donc
   $I = bar\{(B,1);(C,1)\} = bar\{(B,2);(C,2)\}$

   K milieu de [IJ] donc

   $K = bar\{(I,1);(J,1)\} = bar\{(I,4);(J,4)\}$

   D'où

   $K = bar\{(B,2);(C,2);(A,1);(B,3)\} = bar\{(A,1);(B,5);(C,2)\}$

Exercice 11

1. Soit $G(x_G;y_G)$ avec
   $x_G = \frac{2\times3+3(-1)}{2+3} = \frac{3}{5}$ $\quad et \quad$ $y_G = \frac{2\times4+3\times2}{2+3} = \frac{14}{5}$ soit
   $G\left(\frac{3}{5};\frac{14}{5}\right)$

2. Soit $K = bar\{(A,4);(B,5)\}$ donc $K\left(\frac{7}{9};\frac{26}{9}\right)$

$\left\|4\overrightarrow{MA}+5\overrightarrow{MB}\right\| = 45 \Leftrightarrow 9MK = 45 \Leftrightarrow MK = 5$ donc L'ensemble des points M est le cercle de centre K et de rayon 5 .

$(C_1):\left(x-\frac{7}{9}\right)^2+\left(y-\frac{26}{9}\right)^2 = 25$

3. Soit $R = bar\{(A,3);(B,2)\}$ *et* $S = bar\{(A,7);(B,-2)\}$

donc $R\left(\frac{7}{5};\frac{16}{5}\right)$ et $S\left(\frac{23}{5};\frac{24}{5}\right)$ soit P le milieu de [RS], on a $P(3;4)$.

$\left\|3\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}\right\| = \left\|7\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}\right\| \Leftrightarrow MR = MS$ donc M appartient à la médiatrice (Δ) du segment [RS].

Une équation de (Δ) : $M \in (\Delta) \Leftrightarrow \overrightarrow{MP}.\overrightarrow{RS} = 0$ avec

$\overrightarrow{RS}\left(\frac{16}{5};\frac{8}{5}\right)$ *et* $\overrightarrow{MP}(3-x;4-y)$

$M \in (\Delta) \Leftrightarrow \frac{16}{5}(3-x)+\frac{8}{5}(4-y) = 0 \Leftrightarrow 2x+y-10 = 0$

$(C_2): 2x+y-10 = 0$

Exercice 12

$C = bar\{(A,1);(B,1);(G,-3)\}$ on a :

$\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}-3\overrightarrow{CG} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC} = \vec{0}$ donc

$G = bar\{(A,1);(B,1);(C,1)\}$, donc G est le centre de gravité du triangle ABC.

Exercice 13

1. $\frac{KD}{KI} = \frac{KR}{KJ} = \frac{DR}{IJ} = \frac{2}{3}$ et $\frac{AK}{KJ} = 4$

2. On a :

$$\overrightarrow{KD} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{KI} \Leftrightarrow K = bar\{(D,3);\ (I,2)\} = bar\{(D,3);\ (B,1);(C,1)\}$$

On a aussi :

$$\overrightarrow{AK} = 4\overrightarrow{KJ} \Leftrightarrow K = bar\{(A,1);\ (J,4)\} = bar\{(A,1);\ (D,2);(C,2)\}$$

On sait que $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DB} \Leftrightarrow D = bar\{(A,2);(B,-2);(C,2)\}$

d'où

$$K = bar\{(A,2);\ (D,1);(C,2);(B,1);(B,-2);(C,1)\}$$

$$K = bar\{(A,2);(B,-1);(C,3);(D,1)\}$$

Exercice 14

Dans l'énoncé, écrire $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ au lieu de $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

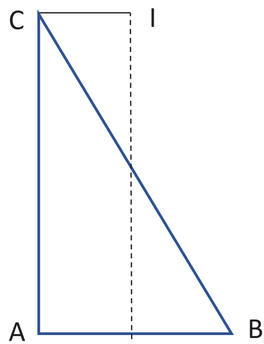
1. $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{IA} - 2\overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IC} = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow I = bar\{(A,1);(B,-2);(C,-1)\}$$

2. $MA^2 - 2MB^2 - MC^2 = -3 \Leftrightarrow -2MI^2 + IA^2 - 2IB^2 - IC^2 = -3$

$$IA^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2^2 = \frac{17}{4}\ ;\ IB^2 = \frac{1}{4}\ ;\ IC^2 = \frac{17}{4}$$

$$MI^2 = \frac{3 + \frac{17}{4} - 2\times\frac{1}{4} - \frac{17}{4}}{2} = \frac{5}{4} \Leftrightarrow MI = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$



(S) est donc la sphère de centre I et de rayon $\frac{\sqrt{5}}{2}$

Exercice 15

$$L = bar\{(A,-1);(C,-3)\}\ ;\ I = bar\{(B,3);(C,3)\}$$

$$M = bar\{(A,-1);(B,3)\} = bar\{(A,-1);(C,-3);(B,3);(C,3)\}$$

$$= bar\{(L,-4);(I,6)\} = bar\{(L,-2);(I,3)\}$$

Donc les points M, L et I sont alignés.

Exercice 16

1. $A' = bar\{(B,1);(C,1)\} = bar\left\{(B,\frac{1}{2});(C,\frac{1}{2})\right\}$

$$G = bar\{(A',1);(A,1)\} = bar\left\{(B,\frac{1}{2});(C,\frac{1}{2});(A,1)\right\}$$

$$= bar\{(B,1);(C,1);(A,2)\}$$

2. on a : $AA' = \frac{\sqrt{3}}{2}$ donc $GA = \frac{\sqrt{3}}{4}$, $GB = \frac{\sqrt{7}}{4} = GC$

$$2MA^2 + MB^2 + MC^2 = 2 \Leftrightarrow 4MG^2 + 2GA^2 + GB^2 + GC^2 = 2$$

$$\Leftrightarrow MG^2 = \frac{1 - 2\times\frac{3}{16} - \frac{7}{16} - \frac{7}{16}}{4} = \frac{3}{16}$$

$MG = \frac{\sqrt{3}}{4}$ donc $M \in C\left(G;\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$

Exercice 17

On a : $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ donc $I = bar\{(A,2);(B,1)\}$ et

$\overrightarrow{BL} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$ *donc* $L = bar\{(B,1);(C,2)\}$

$\overrightarrow{AJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ *donc* $J = bar\{(A,1);(B,2)\}$ et

$\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ *donc* $M = bar\{(A,1);(C,2)\}$

$$\overrightarrow{AN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} \ \ donc \ \ N \ = bar\{(A,2);(C,1)\} \text{ et}$$

$$\overrightarrow{BK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} \ \ donc \ \ K \ = bar\{(B,2);(C,1)\}$$

Soit $G = bar\{(A,2);(B,2);(C,2)\}$ (G est le centre de gravité de du triangle ABC) on a donc

$G = bar\{(I,3);(L,3)\}$ donc $G \in (IL)$

$G = bar\{(J,3);(M,3)\}$ donc $G \in (JM)$

$G = bar\{(N,3);(K,3)\}$ donc $G \in (NK)$. il vient que les droites (IL) , (JM) et (NK) sont concourantes.

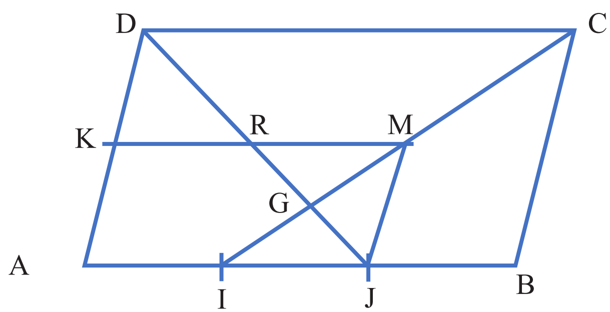
<u>Exercice 18</u>

Soit $(DJ) \cap (KM) = \{R\}$ et $JM = AK = KD \ \ et \ \ (JM)//(KD)$ donc le quadrilatère KDMJ est un parallélogramme. Ainsi R est le milieu de [KM]

I est le milieu de [AJ] d'où (IR) // (JM) et comme (RM) // (IJ) , on a : IRMJ est un parallélogramme de centre G, ainsi G est le milieu de [IM]. On a donc les points I, G et M alignés (1)

Dans le triangle IBC, J est le milieu de [IB] , $JM = \frac{1}{2}BC$ et (JM) // (BC) donc M est le milieu de [IC]. On a aussi I, M et C alignés (2)

Finalement d'après (1) et (2) : les points C , M , G et I sont alignés.



Exercice 19

On a : $3\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{GB}=\vec{0} \Leftrightarrow 18\overrightarrow{GA}+12\overrightarrow{GB}=\vec{0}$

Pour 18kg de boule rouge il faut 12kg de boule verte.

Le montant équivalent est $12\times 2500F=30.000F$.

Le père disposant d'un montant de 27.000F qui est moins de 30.000F, ne peut donc pas acheter la boule verte.

2 LIMITE ET CONTINUITÉ

EXERCICES DE FIXATION

1. Limite de référence

Exercice 1

$$a)\ \lim_{\substack{x\to 3\\ >}} \frac{1}{x-3} = +\infty \ ;\ b)\lim_{\substack{x\to 3\\ <}} \frac{1}{x-3} = -\infty$$

Exercice 2

$$a)\ \lim_{\substack{x\to -1\\ >}} \frac{1}{(x+1)^3} = +\infty \ ;\ b)\lim_{\substack{x\to 5\\ <}} \frac{1}{(x-5)^2} = +\infty$$

Exercice 3

$$a)\ \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \ ;\ b)\ \lim_{x\to -\infty} \frac{3x^4-5x+8}{x^3-4} = \lim_{x\to -\infty} 3x = -\infty \ ;\ c)\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = 1$$

2 Limite d'une restriction

Exercice 4

$$a)\ \lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x-3} = \lim_{x\to 3} x+3 = 6;\ b)\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{x+3-4}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{\sqrt{x+3}+2} = \frac{1}{4}$$

$$c)\ \lim_{\substack{x\to -2\\ <}} \frac{|x|-2}{2x+4} = \lim_{\substack{x\to -2\\ <}} \frac{-x-2}{2x+4} = -\frac{1}{2}$$

$$d)\ \forall x \in IR^*\setminus\{1\}\ ,\ \frac{x-\sqrt{x}}{x-1} = \frac{x^2-x}{(x-1)(x+\sqrt{x})} = \frac{x}{x+\sqrt{x}} = \frac{x\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+x} = \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$$

$$\forall x \in IR^*\setminus\{1\}\ ,\lim_{x\to 1} \frac{x-\sqrt{x}}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} = \frac{1}{2}$$

3. Lien entre limite à gauche, limite à droite et limite d'une fonction en un point

Exercices de fixation

Exercice5

1. (préciser « égale à f(a) ». V ; 2.F ; 3.F

Exercice 6

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} x^2 = 1 \quad et \quad \lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} (x+1) = 2$$

On a : $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} (x) \neq \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x)$ donc f n'admet pas de limite en 1

4. Limites et opération sur les fonctions.

Exercices de fixation

Exercice7

1. V ; 2. F ; 3. F ; 4.V

Exercice 8

On a $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \quad et \quad \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$ donc

$$\lim_{x \to +\infty} (f+g)(x) = \lim_{x \to +\infty} (x^2 + 2x + 5 + \frac{1}{x}) = +\infty$$

Exercice 9

On a : $\lim\limits_{x \to -3} f(x) = \lim\limits_{x \to -3} \dfrac{2x+3}{x+1} = \dfrac{3}{2} \quad et \quad \lim\limits_{x \to -3} g(x) = \lim\limits_{x \to -3} (x-8) = -11$

donc

$$\lim_{x \to -3} f(x) = \lim_{x \to -3} \frac{2x+3}{x+1} = \frac{3}{2} \quad et \quad \lim_{x \to -3} (f+g)(x) = \frac{3}{2} - 11 = -\frac{19}{2}$$

b) Limite du produit de deux fonctions

Exercice 10

1.V ; 2. F ; 3. V ; 4. F

Exercice 11

On a :

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty}(x^2+2x+5) = +\infty \; et \; \lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{2x+3} = \frac{1}{2}$$

donc

$$\lim_{x\to+\infty}(fg)(x) = +\infty$$

Exercice 12

On a : $\lim_{x\to2} f(x) = \lim_{x\to2} \frac{x+1}{x-4} = -\frac{3}{2} \; et \; \lim_{x\to2} g(x) = \lim_{x\to2}(x-8) = -6$

donc $\lim_{x\to2}(fg)(x) = 9$

C) Limite du quotient de deux fonctions

Exercice 13

1. F ; 2.F ; 3.F ; 4.F

Exercice 14

On a : $\lim_{x\to2} f(x) = \lim_{x\to1} \frac{x+1}{x-4} = -\frac{2}{3} \; et \; \lim_{x\to1} g(x) = \lim_{x\to1}(x-8) = -7$

donc $\lim_{x\to1} \frac{f}{g}(x) = \frac{2}{21}$

Exercice 15

$$\lim_{x\to0} \frac{f}{g}(x) = \lim_{x\to0} \frac{-1+\cos x}{\sin x} = \lim_{x\to0} \frac{\cos x - 1}{x} \times \frac{x}{\sin x} = 0$$

car $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}=1$

Exercice 16

$$\lim_{x\to 0}\frac{f}{g}(x)=\lim_{x\to 0}\frac{f}{g}(x)=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x\tan x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x\cos x}{x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\times\cos x=1$$

car $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}=1$ et $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)=1$

5 Limite d'une fonction composée

Exercice 17

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{5x}\times\dfrac{5x}{x}=5$ car

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{5x}=\lim\limits_{X\to 0}\dfrac{\sin X}{X}=1$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4\pi x}{x^2}$, en posant $X=4\pi x$ on obtient

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4\pi x}{x^2}=\lim\limits_{X\to 0}(4\pi)^2\dfrac{1-\cos X}{X^2}=8\pi^2$

c) $\lim\limits_{x\to +\infty}\sqrt{\dfrac{3x-1}{x+2}}=\lim\limits_{x\to +\infty}\sqrt{\dfrac{3x}{x}}=\sqrt{3}$.

Conséquence

Exercice 18

a) $\lim\limits_{x\to -1}\sqrt{x^2+x+2}=\sqrt{2}$

b) $\lim\limits_{x\to +\infty}\sqrt{x^2+x+2}=+\infty$ *car* $\lim\limits_{x\to +\infty}(x^2+x+2)=+\infty$.

c) $\lim\limits_{x\to -\infty}\sqrt{x^2+x+2}=+\infty$ *car* $\lim\limits_{x\to -\infty}(x^2+x+2)=+\infty$.

Exercice 19

a) $\lim_{x \to -3} |7x-1| = 22$

b) $\lim_{x \to -\infty} |7x-1| = +\infty$

c) $\lim_{x \to +\infty} |7x-1| = +\infty$

6.Limite par comparaison

Exercice 20

a) $\lim_{x \to +\infty} (x+\sin x) = +\infty \quad car \ \lim_{x \to +\infty} (x-1) = +\infty$

b) Pour x > 0 , on a $-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}$ donc $\lim_{x \to +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$

c) On a $3x + E(x) \leq 4x \quad et \ \lim_{x \to -\infty} 4x = -\infty$ donc

$\lim_{x \to -\infty} (3x + E(x)) = -\infty$

7. Calcul de limite à l'infini d'une fonction contenant des radicaux

Exercice 21

a) $$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2+x+1} - x = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2+x+1-x^2}{\sqrt{x^2+x+1}+x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1} = \frac{1}{2}$$

b) $$\lim_{x \to -\infty} \sqrt{x^2+x+1} + x = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2+x+1-x^2}{\sqrt{x^2+x+1}-x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1+\frac{1}{x}}{-\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-1} = -\frac{1}{2}$$

c) $$\lim_{x \to -\infty} 2x + \sqrt{1-x} = \lim_{x \to -\infty} x\left(2 - \frac{\sqrt{1-x}}{-x}\right) = \lim_{x \to -\infty} x\left(2 - \sqrt{\frac{1-x}{x^2}}\right) = -\infty$$

8. Calcul de limite en utilisant la définition d'un nombre dérivé

Exercice 22

b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

9. Limite d'une fonction monotone sur un intervalle ouvert

Exercice 23

a). F ; b. V ; c. F ; d. V.

II. CONTINUITE

Exercice 24

1) ; 2)

Exercice 25

On a $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} (-x) = 0$; $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \sqrt{x} = 0$ *et* $f(0) = 0$

On obtient $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = f(0)$ donc f est continue en 0

Exercice 26

On a

$\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} (2x-5) = -7$; $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} (x+1) = 0$ *et* $f(-1) = -7$

On obtient $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} f(x) \neq \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} f(x)$ donc f n'est pas continue en -1.

2. Prolongement par continuité

Exercice 27

a) f n'est pas définie en 2 et $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} (x+2) = 4$ donc f admet un prolongement par continuité en 2

b) g est définie par : $\begin{cases} g(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2} \; si \; x \neq 2 \\ g(2) = 4 \end{cases}$

Exercice 28

a) *f* n'est pas définie en 0 et donc f admet un prolongement par continuité en 0

b) *g* est définie par : $\begin{cases} g(x) = x\sin\dfrac{1}{x} \; si \; x \neq 0 \\ g(0) = 0 \end{cases}$

3. Continuité sur un intervalle

Exercice 29

1. V ; 2. F ; 3. V

4. Image d'un intervalle

Exercice 30

$$f([0;1]) = [f(0); f(1)] = [4;7]$$

Exercice 31

$$f(]-1;3]) =]\lim_{\substack{x\to -1 \\ >}} f(x); f(3)] =]5;19]$$

Exercice 32

$$f([7;13]) = [f(13); f(7)] = [-10;0]$$

Exercice 33

1. Sur $[-3;-1]$ f est continue et décroissante donc $f([-3;-1]) = [f(-1); f(-3)] = [1;9]$

2. Sur $[1;4]$ f est continue et croissante donc

$$f\left([-3;-1]\right)=[f(1);f(4)]=[1;16]$$

Exercice 34

1. f est décroissante sur donc $f\left([2;4]\right)=[f(4);f(2)]=[0;4]$
2. f est croissante sur $[4;+\infty[$ donc

$$f\left([4;+\infty]\right)=[f(4);\lim_{x\to+\infty} f(x)]=[0;+\infty]$$

3. f est croissante sur $]-\infty;2[$ donc

$$f\left(]-\infty;2[\right)=]\lim_{x\to-\infty} f(x);\lim_{\substack{x\to2\\<}} f(x)[=]-\infty;4[$$

5. Continuité d'une fonction composée

Exercice 35

1. V ; 2. V ; 3. F

6. Théorème des valeurs intermédiaires

Exercice 36

a). V ; b) . F ; c) . V

Exercice 37

F est continue sur $[1;2]$ et $f(1)=-3$ *et* $f(2)=1$ soit $f(1)\times f(2)<0$ donc l'équation $f(x)=0$ admet au moins une solution dans $[1;2]$.

7. Fonction continue et strictement monotone.

Exercice 38

a) f est continue et strictement décroissante sur $]1;+\infty[$ et

$$f\left(]1;+\infty[\right)=]\lim_{x\to+\infty} f(x);\lim_{\substack{x\to1\\>}} f(x)[=]\,0;+\infty[$$ donc f est une bijection de $]1;+\infty[$ dans $]0;+\infty[$

b) Soit $y \in]0;+\infty[$, $f(x)=y \Leftrightarrow \dfrac{1}{x-1}=y \Leftrightarrow x=\dfrac{1+y}{y}$ donc

$$f^{-1} :]0;+\infty[\to]1;+\infty[$$
$$x \mapsto \frac{1+x}{x}$$

Exercice 39

$$f : \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\to IR$$
$$x \mapsto tanx$$

f est une fonction continue et strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ donc la restriction de la fonction tangente à $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ est une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ sur IR.

III-ÉTUDE D'UNE BRANCHE INFINIE

1. Asymptotes

a) Asymptotes parallèles à l'un des axes

Exercice 40

$$D_f =]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{|x|} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{x} = 2$$

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-1}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{|x|} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{-x} = -2$$

$$\lim_{\substack{x\to -1\\ <}} g(x) = \lim_{\substack{x\to -1\\ <}} \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-1}} = \lim_{\substack{x\to -1\\ <}} (2x-1)\times\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} = -\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ >}} g(x) = \lim_{\substack{x\to 1\\ >}} \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-1}} = \lim_{\substack{x\to 1\\ >}} (2x-1)\times\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} = +\infty \ .$$

Donc les droites d'équations $x=-1 \;\; et \;\; x=1$ sont des asymptotes verticales à (Cf) et les droites d'équations $y=2 \;\;\; et \;\; y=-2$ sont des asymptotes horizontales à (Cf).

b) Asymptotes non parallèles à l'un des axes

Exercice 41

$$\lim_{x\to+\infty}\left[g(x)-(2-x)\right] = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0 \;\; ; \;\; \lim_{x\to-\infty}\left[g(x)-(2-x)\right] = \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x} = 0$$

Donc la droite d'équation $y=2-x$ est asymptote oblique à la courbe de f en $-\infty$ et en $+\infty$

Exercice 42

$$\forall x \in]-\infty;0[, \; \lim_{x\to-\infty}\frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{2}{-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = -2$$

$$\lim_{x\to-\infty}(g(x)+2x) = \lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2-2x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{2}{x(1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}})(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}})} = 0$$

donc la droite d'équation $y=-2x$ est asymptote oblique à courbe de *f* en $-\infty$.

2. Direction asymptotique

Exercice 43

1. F ; 2. V ; 3. F ; 4. V ; 5 . V ; 6. V

Exercice 44

a) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (x^2 + \sqrt{x^2+1}) = +\infty$

b) $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left(x + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} \right) = +\infty$ donc la courbe de f admet une branche parabolique de direction celle de (OJ).

IV- FONCTION PUISSANCE D'EXPOSANT RATIONNEL

Fonction racine nième

Exercice 45

La fonction f est strictement croissante sur IR+ et la fonction $x \mapsto \sqrt[3]{x}$ est la bijection réciproque de f sur IR+ donc elle est aussi croissante sur IR+.

Exercice 46

$b = a^7$; $a^{\frac{1}{10}} = b$

Exercice 47

$a)\ \left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{2}{3}} \times \left(\frac{10}{21}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{7}{5} \times \frac{2\times 5}{3\times 7}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2}{3}}$;

$b)\ \left(5^{\frac{5}{2}}\right)^{\frac{6}{25}} = 5^{\frac{5}{3}\times\frac{6}{25}} = 5^{\frac{2}{5}}$

$c)\ \frac{7^{\frac{3}{4}}}{8^{\frac{3}{4}}} = \left(\frac{7}{8}\right)^{\frac{3}{4}}$; $d)\ 2^{\frac{2}{3}} \times 2^{-\frac{3}{5}} = 2^{(\frac{2}{3}-\frac{3}{5})} = 2^{\frac{1}{15}}$

EXERCICES DE RENFORCEMENT / D'APPROFONDISSEMENT

Exercice 1

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+x-2}-3x=+\infty$ car

$\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+x-2}=+\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to-\infty} -3x=+\infty$

2. a) $f(x)=\sqrt{x^2+x-2}-3x=|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}-3x=x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}-3\right)$

car si $x > 1$, $|x|=x$

b. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ *car* $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}-3=-2$

Exercice 2

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+3}-\frac{x}{2}=\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}-\frac{1}{2}\right)=+\infty$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x-2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{1-\frac{2}{x}}=-1$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-4}-5x\right)=+\infty$

Exercice 3

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+5x-3}-x=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{5x-3}{x\sqrt{1+\frac{5}{x}-\frac{3}{x^2}}+x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{5-\frac{3}{x}}{\sqrt{1+\frac{5}{x}-\frac{3}{x^2}}+1}=\frac{5}{2}$

$$b)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{4x^3+5x}-2x-1}{x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{4x+\frac{5}{x}}-2-\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}=+\infty$$

$$c)\ \lim_{x\to-\infty}\sqrt{9x^2-x+7}+3x=\lim_{x\to-\infty}\frac{-1+\frac{7}{x}}{-\sqrt{9-\frac{1}{x}+\frac{7}{x^2}}-3}=\frac{1}{6}$$

Exercice 4

a) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{f(x)-f(3)}{x-3}=f'(3)=\dfrac{1}{4}$ avec

$f(x)=\sqrt{x+1}\ et\ f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}$

b) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{\sqrt{x^2-1}-\sqrt{3}}{x+2}=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{f(x)-f(-2)}{x+2}=f'(-2)=\dfrac{-2\sqrt{3}}{3}$

avec $f(x)=\sqrt{x^2-1}\ et\ f'(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$

c) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{1+\cos x}=0$

Exercice 5

1. $1\le x\le 2\Leftrightarrow 0\le x-1\le 1\Leftrightarrow 0\le(x-1)^2\le 1\Leftrightarrow -3\le(x-1)^2-3\le -2$

donc $f([1;2])=[-3;-2]$

2. $x\ge 0\Leftrightarrow 8-x^2\le 0\ donc\quad f([0;+\infty[)=]-\infty;8]$

3. $\dfrac{3}{2}<x<5\Leftrightarrow 3<2x<10\Leftrightarrow 0<2x-3<7\Leftrightarrow 2+\dfrac{1}{2x-3}>2+\dfrac{1}{7}\Leftrightarrow f(x)>\dfrac{15}{7}$

donc $f\left(\left]\dfrac{3}{2}\,;\,5\right[\right)=\left]\dfrac{15}{7};+\infty\right[$

Exercice 6

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x-3} = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1-\frac{3}{x}}{\sqrt{x-3}} = 0$

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ donc la courbe de f admet une branche parabolique de direction celle de (OI)

Exercice 7

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1}+x^2 = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}+x^2}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+x = +\infty$

3. On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ donc la courbe de *f* admet une branche
parabolique de direction celle de (OJ)

Exercice 8

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1} = +\infty$

2. $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} -\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = -1$ et

$\lim\limits_{x\to-\infty} \left(f(x)+x\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+1}+x = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x} = 0$ donc la droite d'équation $y=-x$ est asymptote oblique à (Cf) en $-\infty$

Exercice 9

1. $f'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}}{(x+5)^2} = \frac{13}{(x+5)^2}$ soit $\forall x \in]-5;+\infty[$, $f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $]-5;+\infty[$

2. f est continue et strictement croissante sur $]-5;+\infty[$ donc f est une bijection de $]-5;+\infty[$ sur $]-\infty;2[$

3. $\forall y \in]-\infty;2[,\ f(x)=y \Leftrightarrow 2-\dfrac{13}{x+5}=y \Leftrightarrow x=\dfrac{3+5y}{2-y}$ donc

$$f^{-1}:]-\infty;2[\to]-5;+\infty[$$
$$x \mapsto \frac{3+5x}{2-x}$$

4. $\lim\limits_{\substack{x\to -5 \\ >}} f(x)=-\infty$ donc la droite d'équation $x=-5$ est asymptote verticale à (C)

5. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x-3}{x+5}=2$ donc la droite d'équation $y=2$ est asymptote horizontale à (C) en $+\infty$

<u>Exercice 10</u>

1. f est dérivable sur et $\forall x \in [-5;5]$, $f'(x)=3(x-3)^2$ on a $f'(x)>0$ donc f est strictement croissante sur $[-5;5]$ d'où f est une bijection de $[-5;5]$ sur $[-517;3]$
2. a) f est continue et strictement croissante sur $[-5;5]$ de plus $f(-5)=-517$, $f(5)=3$ soit $f(-5)\times f(5)<0$ donc l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution $\alpha \in [-5;5]$

   b) $\left.\begin{array}{l} f(4,7)=-0.087 \\ \\ f(4,71)=0,000211 \end{array}\right\} f(4,7)\times f(4.71)<0$ donc

   $4,7<\alpha<4,71$

3. f est continue et strictement croissante sur $[-5;5]$ donc f est une bijection de $[-5;5]$ sur $[-517;3]$, or $-1\in[-517;3]$ donc l'équation $f(x)=-1$ admet une unique solution dans $[-5;5]$.

Exercice 11

1. pour $\alpha = -1$ on a $f(x) = \dfrac{1-x}{-x-1}$ et $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} f(x) = -\infty$

   Pour $\alpha = 1$ on a $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x) = -\infty$

   On a $\alpha \notin D_f$ et $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = \pm\infty$ donc on ne peut pas faire un prolongement par continuité de f en α .

2. On a $1 \notin D_f$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x) = -\infty$ on ne peut pas faire un prolongement par continuité de f en 1

3. On a $0 \notin D_f$ et $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 2x}{2x} \times \dfrac{2x}{x} = 2$ on peut faire un prolongement par continuité de f en 2. Soit g ce prolongement.

   g est définie par : $\begin{cases} g(x) = \dfrac{\sin 2x}{x} \ \ si \ x \neq 0 \\ g(0) = 2 \end{cases}$

Exercice 12

a) $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x^2+3} - 2x}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2+3-4x^2}{(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2x)}$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{3(1-x)(1+x)}{(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2x)} = \lim_{x \to 1} \frac{-3(1+x)}{\sqrt{x^2+3}+2x} = -\frac{3}{2}$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{-\sqrt{1+\frac{3}{x^2}} - 2}{1 - \frac{1}{x}} = -3 \quad ; \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{-3(1+\frac{1}{x})}{\sqrt{1+\frac{3}{x^2}} + 2} = -1$$

b) $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2x(x-1)^2}{(x-1)^2(x+1)^2} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2x}{(x+1)^2} = \dfrac{1}{2}$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{2x^3}{x^4} = \lim_{x \to -\infty} \frac{2}{x} = 0 \ ; \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{x} = 0$$

Exercice 13

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)-(2x-3)=\lim_{x\to-\infty}\frac{-8x+25}{x^2+5}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-8}{x}=0$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-(2x-3)=\lim_{x\to+\infty}\frac{-8x+25}{x^2+5}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-8}{x}=0$$

Donc la droite d'équation $y=2x-3$ est asymptote oblique à (Cf) en $-\infty$ et en $+\infty$

Exercice 14

1.

- $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} f(x)=+\infty$; $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} f(x)=-\infty$ donc (D_1) :

  x = 1 est asymptote à (C)

- $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ <}} f(x)=-\infty$; $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ >}} f(x)=+\infty$ donc (D_2) :

  x = -1 est asymptote à (C)

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-(x+2)=0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(x+2)=0$ donc (D_3) :

  y = x+2 est asymptote à (C)

2.

$\forall x\in[-3;-1[, f(x)-(x+2)<0$ car (C) est au dessous de (D_3)

$\forall x\in]1;3], f(x)-(x+2)<0$ car (C) est au dessous de (D_3)

$\forall x\in]-1;1], f(x)-(x+2)>0$ car (C) est au dessus de (D_3)

SITUATIONS COMPLEXES

Exercice 15

Hypothèse de ABOU : $f(t) < 11 \Leftrightarrow \frac{210}{t} + 10 < 11 \Leftrightarrow \frac{210-t}{t} < 0$ donc

$f(t) < 11$ pour $t \in]210 ; +\infty[$

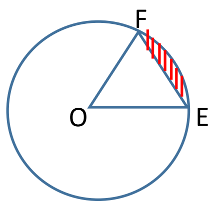
Hypothèse de KONAN : $\forall t > 1$, $f(t) > 10$, il n'existe donc pas de temps long pendant lequel $f(t) = 10$. En effet la droite d'équation y = 10 étant une asymptote à la courbe de la fonction f, aucun temps ne peut corresponde à une température de 10 degrés.

Le jeudi correspond à $t = 24 \times 60 = 1440\,mn$. Ainsi pour $t \in]210 ; 1440[$, on a $f(t) < 11$. L'hypothèse de ABOU est donc celle qui est plausible.

Exercice 16

L'aire d'un secteur en radian : si α est en radian alors l'aire $A = \frac{\alpha R^2}{2}$

Posons EF = x et h la hauteur du triangle isocèle OEF.



L'aire du secteur OEF est : $\frac{\propto}{2}$

On a : OE = OF = 1. On a : x = 2htan $(\frac{\propto}{2})$ (relation trigonométrique dans un triangle rectangle). On a aussi :

h = cos $(\frac{\propto}{2})$. Si l'on désigne par S l'aire du triangle isocèle OEF, on a donc : S = $\frac{hx}{2}$, soit

S = h^2 tan $(\frac{\propto}{2})$ ou encore S = cos $(\frac{\propto}{2})$ sin $(\frac{\propto}{2})$. On a donc ; S = $\frac{1}{2}$ sin$\propto$.

Donc l'aire comprise entre [EF] et l'arc $\widehat{EF}$ est : $\frac{\propto}{2} - \frac{1}{2}$ sin $\propto$

Le problème revient donc à résoudre l'équation : $\frac{\propto}{2} - \frac{1}{2}\sin\propto = \frac{1}{2}\sin\propto$. Il s'agit de donner une approximation décimale d'une solution s'il existe de l'équation : 2sin x - x = 0.

Posons f(x) = 2sin x-x.

La fonction est continue sur]0 ; π[.

f (1,85) vaut environ 0,072 et f(1,9) = -0,007. f(1,8) et f(1,9) sont de signe contraire donc

$1{,}85 < \propto < 1{,}9$

1,9 radian est une bonne approximation de $\propto$. En dégré on obtient environs **109 degrés.**

3 DIVISIBILITÉ DANS $\mathbb{Z}$

EXERCICES DE FIXATION

L'ensemble N

Exercice 1

1. VRAI ; 2. FAUX ; 3. VRAI

Exercice de fixation

Exercice 2

1) On suppose que a $\leq$ b.

Il existe un entier naturel d tel que a + d = b Par suite :
(a + d) + c = b + c. Ce qui donne :

(a + c) + d = b +c, soit $a + c \leq b + c$.

Réciproquement, supposons que $a + c \leq b + c$.

Il existe un entier naturel d tel que : (a + c) + d = b + c. Par suite :
a + d + c = b +c, soit : a + d = b

D'où : a $\leq$ b.

. On suppose que a $\leq$ b.

Il existe un entier naturel d tel que : a + d = b . Par suite :
(a + d) × c = b ×c.

Ce qui donne : $a \times c$ + d×c = $b \times c$. c et d étant deux entiers naturels, c ×d l'est aussi. D'où : $a \times c \leq b \times c$.

Examinons la réciproque
Supposons que $a \times c \leq b \times c$, il existe donc un entier k tel que :
a×c +k = b×c ; cette égalité indique k est un multiple de c. posons
k = p×c où p est un entier naturel . On a donc : a×c + p×c = b×c , soit :
c× (a+p) = b×c , soit : a+p = b. Il en résulte donc que : a $\leq$ b.

Exercice 3

1) 0 ; 2) 1 ; 3) 10.

Démonstration par récurrence

Exercice 4

a) Démontrons que si 5 divise $6^n + 1$ alors 5 divise $6^{n+1} + 1$.

On suppose que 5 divise $6^n + 1$. Il existe un entier k tel que $6^n + 1 = 5k$. D'où : $6^n = 5k-1$. On a :

$6^{n+1} + 1 = 5(6k-1)$.

b) $6^9 + 1 = 2$ et 5 ne divise pas 2.

Exercices 5

1. $1 = (1 + a)^0 \geq 1 + 0 \times a$; Soit k un entier naturel tel que $(1 + a)^k \geq 1 + ka$.
On a : $(1 + a)^{k+1} \geq 1 + (k+1)a + ka^2 \geq 1 + (k+1)a$. Conclus
2. $0 \times 0! = 0$; $(0 + 1)! - 1 = 0$. D'où : $0 \times 0! = (0 + 1)! - 1$.
Soit p un entier naturel tel que $\sum_{k=0}^{p} k \times k! = (p + 1)! - 1$.
On a : $\sum_{k=0}^{p+1} k \times k! = \sum_{k=0}^{p} k \times k! + (p + 1) \times (p + 1)!$

Or $\sum_{k=0}^{p} k \times k! = (p + 1)! - 1$, donc
$\sum_{k=0}^{p+1} k \times k! = (p + 2)) \times (p + 1)! - 1 = (p + 2)! - 1$. Conclus.

3. On a : $4! = 16$; $4^2 = 16$. D'où : $4! \geq 4^2$. Soit k un entier naturel supérieur ou égal à 4 tel que $k! \geq k^2$.

On a : $(k + 1)! = (k + 1) \times k! \geq (k + 1) \times k^2$; d'où : $(k + 1) \times k^2 - (k + 1)^2 = (k + 1)(k^2 - k - 1)$. On doit établir que $k^2 - k - 1 \geq 0$. On a :

$k^2 - k - 1 = (k^2 - 2k + 1) + (k - 2) = (k - 1)^2 + k - 2$;
$(k - 1)^2 + k - 2 \geq 0$, car $k \geq 4$. Par conséquent :
$(k + 1) \times k^2 \geq (k + 1)^2$.

On en déduit que : $(k + 1)! \geq (k + 1)^2$. Conclus.

Division euclidienne dans N

Exercice de fixation

Exercice 5 (remarque : erreur de numérotation)

1) $q = 2$; 2) $q = 7$; 3) $q = 0$.

Exercices de fixation

Exercice 6

1) VRAI ; 2) FAUX ; 3) FAUX.

Exercice 7

1) $(q; r) = (6; 23)$; 2) $(q; r) = (14; 0)$; 3) $(q; r) = (0\,; 80)$.

Numération

Exercices de fixation

Exercice 8

1) VRAI ; 2) VRAI ; 3) FAUX ; 4) VRAI.

Exercice 9

1) $x = \overline{200020}^3$; 2) $x = \overline{1333}^4$; 3) $x = \overline{2633}^8$; 4) $x = \overline{59B}^{16}$.

Exercice 10

1) $x = 17$; 2) $x = 82$; 3) $x = 436$; 4) $x = 8^4 + 2 \times 8^3 + 3 \times 8^2 + 8 + 7 = 5323$;

5) $x = 10 \times 16^5 + 15 \times 16^4 + 11 \times 16^3 + 16^2 + 2 \times 16 =$11 514 144.

L'ensemble Z

Exercices de fixation

Exercice 11

1. Supposons que $a \leq b$.

$b + c - (a + c) = b - a$; Or $a \leq b$, donc $b - a$ est un entier naturel. Par suite $a + c \leq b + c$.

Réciproquement, supposons que $a + c \leq b + c$.

On a : $b - a = b + c - (a + c)$; or $a + c \leq b + c$, donc $b + c - (a + c)$ est un entier naturel. D'où le résultat.

2. et 3). On a : $bc - ac = c(b - a)$, d'où on obtient le résultat.

Exercice 12

1)a) E est non vide car 0 appartient à E.

E est majoré (même borné) par 2, car :

$\forall\, n \in \mathbb{Z}, (n+1)^2 < 9 \Leftrightarrow -4 < n < 2$.

b) E étant une partie non vide et majorée de $\mathbb{Z}$ a un plus grand élément.

2. E est une partie non vide et minorée de $\mathbb{Z}$ a un plus petit élément.

Division euclidienne dans Z

Exercices de fixation

Exercice 13

1) FAUX ; 2) FAUX ; 3) VRAI ; 4) VRAI ; 5) FAUX.

Exercice 14

1) $(q; r) = (8\,;\,12)$; 2) $(q; r) = (-8\,;\,12)$; 3) $(q; r) = (-9\,;\,13)$; 4) $(q; r) = (9\,;\,13)$.

Diviseurs d'un entier relatif

Exercices de fixation

Exercice 15

1) VRAI ; 2) VRAI ; 3) VRAI ; 4) FAUX ; 5) FAUX ; 6 VRAI.

Exercice 16

1) 48 = 16×3 ;

2) Les diviseurs de 12 dans Z sont :
$-12; -6; -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 4; 6; 12.$

3) Les diviseurs de 15 dans Z sont : $-15; -5; -3; -1; 1; 3; 5; 15$

Exercice 17

$a|b$ et $b|a$ si seulement si $|a| = |b|$. D'où le résultat.

Exercice 18

Soit d un diviseur commun de $2n + 3$ et $n + 1$. Par suite d divise $(2n + 3) -2(n + 1)$. D'où d divise 1. Le résultat s'en déduit

Congruence modulo *n*

Exercices de fixation

Exercice 19

1) $10 - (-1) = 11$ et 11 est divisible par 11.

2) $-7 - (-25) = 18$ et 18 est divisible par 3.

Exercice 20

1) VRAI ; 2) FAUX ; 3) VRAI.

Exercice 21

$b \equiv -4$ [7], d'où : $b \equiv 3$ [7]. D'où le résultat.

Exercice 22

C'est la contraposée de la propriété.

Exercice 23

1. $a \equiv 2[5]$ et $b \equiv 3[5]$, d'où : alors $a + b \equiv 2 + 3[5]$,
Or $2 + 3 \equiv 0$ [5], donc $a + b \equiv 0$ [5], c'est-à-dire $a + b$ est un multiple de 5.

2. $a \equiv b$ [3], d'où : $a + a \equiv b + b$ [3], c'est-à-dire $2a \equiv 2b$ [3].

3. même type de raisonnement

Exercice 24

1. Les restes sont : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6.

2. Si $n = 3k,$ le reste est 1 ;

Si $n = 3k + 1$, le reste est 2 ;

Si $n = 3k + 2$, le reste est 4, $k \in \mathbb{N}$.

3. $7^n \equiv (-1)^n\ [n]$

Si n est pair, le reste est 1 ; si n est impair, le reste est 7.

1. Par récurrence

Critères de divisibilité

Exercice 25

a) Vrai ; b) Faux ; c) Faux ; d) Vrai ; e) Vrai ; f) Vrai ; g) Vrai ; h) Faux ; i) Vrai .

I. Nombres premiers

Exercices de fixation

Exercice 26

1) Faux ; 2) Vrai ; 3) Faux.

Exercice 27

a) 3 ; b) 3 ; c) 13 ; d) 2 ; e) 43 ; f) 2.

Exercice 28

1) Vrai ; 2) Faux ; 3) Faux.

Exercice 29

1. On a : $\sqrt{163} \approx 12{,}76$. Les nombres premiers inférieurs ou égaux à $\sqrt{163}$ sont : 2, 3, 5, 7, 11.

163 n'est pas divisible par 2 car son chiffre des unités 3 n'est pas pair ;

163 n'est pas divisible par 3 car la somme de ses chiffres qui est 10 n'est pas divisible par 3 ;

163 n'est pas divisible par 5 car son chiffre des unités n'est ni 0 ni 5;

163 n'est pas divisible par 7 car le reste de la division euclidienne de 163 par 7 est 2, qui n'est 0 : $163 = 7 \times 23 + 2 \; et \; 0 < 2 < 7$;

163 n'est pas divisible par 11 car : $1 - 6 + 3 = -2$, et -2 n'est pas divisible par 11.

Le nombre 163 n'étant divisible par aucun des nombres premiers inférieurs à $\sqrt{163}$ est premier.

2. (Vous devez apporter les justifications nécessaires)

a) 491 est premier ;

b) 1789 est premier ;

c) 2021 n'est pas premier ;

d) 2419 n'est pas premier ;

e) 911 est premier.

Décomposition en produit de facteurs premiers

Exercice 30

a) $24 = 2^3 \times 3$; b) $135 = 3^3 \times 5$; c) $224 = 2^5 \times 7$.

EXERCICES DE RENFORCEMENT / D'APPROFONDISSEMENT

Exercice 1

1. Ici les intervalles sont des intervalles de $\mathbb{N}$.

L'intervalle] a ; b[de $\mathbb{N}$ est défini comme suit : a et b sont dans $\mathbb{N}$ et $a \leq b$,

] a ; b[$= \{ n \in \mathbb{N} \mid a \leq n \leq b\}$.

a) Supposons que l'intervalle] 0 ;1[contienne un entier naturel. Dans ce cas, il contient un plus petit élément. Car toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément. Soit α ce plus petit élément.

On a : $0 < \alpha < 1$. D'où : $0 < \alpha^2 < \alpha < 1$. On en déduit que $0 < \alpha^2 < 1$. Or α étant un entier naturel, α^2 l'est aussi. Par suite α^2 appartient à l'intervalle] 0 ;1[. Ce qui contredit le fait que α est le plus petit élément de l'intervalle] 0 ;1[. Par suite l'intervalle] 0 ;1[ne contient aucun entier naturel.

b) Supposons que l'intervalle] n ; $n+1$[contienne un entier naturel α. Par conséquent :

$0 < \alpha - n < 1$. Or $\alpha - n$ appartient à $\mathbb{N}$, car $n < \alpha$, et évidemment à l'intervalle] 0 ;1[. D'après ce qui précède,

] 0 ;1[ne contient aucun élément d'après a). Par suite l'intervalle] n ; $n+1$[ne contient aucun entier naturel.

2. On suppose que $a < b$.

L'intervalle $]\, a\,;\, a+1[$ ne contient aucun entier naturel. Par suite, l'entier naturel b est supérieur ou égal à $a + 1$. D'où : $a + 1 \leq b$.

Réciproquement, supposons que $a + 1 \leq b$.

On a : $a < a + 1 \leq b$. D'où : $a < b$.

Démontrons que : $a + b - 1 \leq ab$.

$$\begin{aligned} a + b - 1 - ab &= (a-1) + b(1-a) \\ &= (a-1)(1-b) \end{aligned}$$

Comme a et b sont des entiers naturels non nuls, $a - 1$ est un entier naturel, et $1 - b$ est un entier négatif ou nul. Par conséquent, $(a-1)(1-b)$ est un entier négatif ou nul. On en déduit que :

$a + b - 1 \leq ab$. Or par hypothèse, $ab < c$, donc : $a + b - 1 < c$. Par conséquent, d'après b) on a : $a + b \leq c$.

Exercice 2

On suppose qu'il existe un entier relatif k tel que : $a + b = k$. Par suite : $b = k - a$. Les nombres k et a étant des entiers relatifs, $k - a$ l'est et par suite b aussi l'est.

Exercice 3

A l'ordre 1, on a : $1 = \frac{1\times 2}{2}$. La propriété est donc vraie à l'ordre 1.

Supposons-la vraie à l'ordre k et démontrons qu'elle reste vraie à l'ordre k+1, c'est-à-dire :

$\sum_{j=1}^{k+1} j = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$.

On a : $\sum_{j=1}^{k+1} j = \sum_{j=1}^{k} j + (k+1)$

$=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)$, car la propriété est vraie à l'ordre k.

$=\frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}$

$=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$.

La propriété est donc vraie à l'ordre $k+1$.

Par suite, pour tout entier naturel n non nul, on a : $\sum_{k=1}^{n} k=\frac{n(n+1)}{2}$.

Exercice 4

A l'ordre 1, on a : $1^2=\frac{1\times2\times3}{6}$. La propriété est donc vraie à l'ordre 1.

Supposons-la vraie à l'ordre k et démontrons qu'elle reste vraie à l'ordre k+1, c'est-à-dire :

$\sum_{j=1}^{k+1} j^2=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$.

On a : $\sum_{j=1}^{k+1} j^2=\sum_{j=1}^{k} j^2+(k+1)^2$

$=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2$, car la propriété est vraie à l'ordre k.

$=\frac{k(k+1)+(2k+1)+6(k+1)^2}{6}$

$=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$.

La propriété est donc vraie à l'ordre $k+1$.

Par suite, pour tout entier naturel n non nul, on a :
$\sum_{k=1}^{n} k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Exercice 5

A l'ordre 2, on a : $\frac{2^3}{2} = 4$; $C_4^2 = 2$; $2^3 = 8$. Par suite : $\frac{2^3}{2} < C_4^2 < 2^3$. La propriété est vraie à l'ordre 2.

Supposons que pour un entier naturel k supérieur ou égal à 2, l'encadrement proposé soit vrai et démontrons qu'il reste vrai pour l'entier $k + 1$, c'est-à-dire : $\frac{2^{2k+1}}{k+1} < C_{2k+2}^{k+1} < 2^{2k+1}$.0-+

On a :

$$C_{2k+2}^{k+1} = \frac{(2k+2)!}{k!k!}$$

$$= \frac{(2k+2)(2k+1)}{(k+1)^2} C_{2k}^{k}$$

$$= \frac{2(2k+1)}{k+1} C_{2k}^{k}$$

On a : $\frac{2^2 k}{k+1} < \frac{2(2k+1)}{k+1} < \frac{2(2k+2)}{k+1}$

D'où : $\frac{2^2 k}{k+1} < \frac{2(2k+1)}{k+1} < 2^2$ (*)

D'après l'hypothèse de récurrence, on a : $\frac{2^{2k-1}}{k} < C_{2k}^{k} < 2^{2k-1}$ (**)

En multipliant membre à membre (*) et (**), on a :
$\frac{2^{2k+1}}{k+1} < C_{2k+2}^{k+1} < 2^{2k+1}$.

Ce qui prouve que la propriété est vraie à l'ordre $k + 1$.

Par suite, pour tout entier naturel n, supérieur ou égal à 2, on a :
$\frac{2^{2n-1}}{n} < C_{2n}^{n} < 2^{2n-1}$.

Exercice 6

A l'ordre 1, on a :

$$S_{1,p} = \frac{1}{(p+1)!}$$

$= \frac{1}{p}\frac{p}{(p+1)!}$

$= \frac{1}{p}\frac{(p+1)-1}{(p+1)!}$

$= \frac{1}{p}\,[\frac{1}{p!} - \frac{1}{(p+1)!}\,]$. La proposition est vraie à l'ordre 1.

Supposons-la vraie à l'ordre k et démontrons qu'elle reste vraie à l'ordre k+1, c'est-à-dire :

$S_{(k+1),p} = \frac{1}{p}[\frac{1}{p!} - \frac{(k+1)!}{(k+1+p)!}]$. On a :

$S_{(k+1),p} = \sum_{j=1}^{k+1} \frac{1}{j(j+1)\ldots(j+p+1)}$

$= \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j(j+1)\ldots(j+p)} + \frac{1}{(k+1)\ldots(k+p+1)}$

$= \frac{1}{p}[\frac{1}{p!} - \frac{k!}{(k+p)!}] + \frac{1}{(k+1)\ldots(k+p+1)}$, d'après l'hypothèse de récurrence.

$= \frac{1}{p}[\frac{1}{p!} - \frac{k!}{(k+p)!}] + \frac{k!}{(k+p+1)!}$

$= \frac{1}{p}[\frac{1}{p!} - \frac{(k+1)!}{(k+1+p)!}]$.

Exercice 7

On doit avoir : $0 \leq x \leq y$

$x^2 - y^2 = 9 \Leftrightarrow (x - y)(x + y) = 9$

Les diviseurs de 9 sont 1, 3 et 9.

D'où : $\begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 9 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x - y = 3 \\ x + y = 3 \end{cases}$ Par suite : S = {(5 ; 4), (3 ; 0)}

Exercice 8

Pour tout entier n, on a :
$n^2 + 5n + 4 = (n+1)(n+4)$ et $n^2 + 5n + 2 = (n+1)(n+2)$.

D'où le résultat.

Exercice 9

Soit $P(n)$ la proposition : pour tout entier naturel n, $3^{2n} - 2^n$ est divisible par 7.

- $3^0 - 2^0 = 0$, alors $3^0 - 2^0$ est divisible par 7 ; donc $P(0)$ est vrai.
- Supposons que pour un entier naturel k, $P(k)$ est vraie ; c'est-à-dire que $3^{2k} - 2^k$ est divisible par 7.
  Démontrons que : $P(k+1)$ est vraie
  On a : $3^{2k} - 2^k$ est divisible par 7, donc $3^{2k} \equiv 2^k[7]$
  On a aussi : $3^2 \equiv 2[7]$; donc $3^{2k} \times 3^2 \equiv 2^k \times 2[7]$
  Ainsi $3^{2k+2} \equiv 2^{k+1}[7]$, alors $3^{2(k+1)} - 2^{k+1}$ est divisible par 7, donc $P(k+1)$ est vraie
- En conclusion, pour tout entier naturel n, $3^{2n} - 2^n$ est divisible par 7.

Exercice 10

Soit $P(n)$ la proposition : pour tout entier naturel n non nul, $3^{2n} + 2^{6n-5}$ est divisible par

- $3^2 + 2 = 11$, alors $3^2 + 2$ est divisible par 11 ; donc $P(0)$ est vrai.
- Supposons que pour un entier naturel k, $P(k)$ est vraie ; c'est-à-dire que $3^{2k} + 2^{6k-5}$ est divisible par 11.
  Démontrons que : $P(k+1)$ est vraie
  On a : $3^{2k} + 2^{6k-5}$ est divisible par 11, donc $3^{2k} \equiv -2^{6k-5}[11]$
  On a aussi : $3^2 \equiv 2^6[11]$; donc $3^{2k} \times 3^2 \equiv -2^{6k-5} \times 2^6[11]$
  Ainsi $3^{2k+2} \equiv -2^{6k+1}[11]$, alors $3^{2(k+1)} + 2^{6(k+1)-5}$ est divisible par 11, donc $P(k+1)$ est vraie
- En conclusion, pour tout entier naturel n non nul, $3^{2n} + 2^{6n-5}$ est divisible par 11.

Exercice 11

Soit d un diviseur positif commun de $2n + 3$ et $3n + 2$. Par suite d divise $3(2n + 3) - 2(3n + 2)$ qui vaut 5. D'où le résultat.

Exercice 12

Soit r et r' les restes respectifs dans la division euclidienne de n par q et de q par b. On a :

$n = aq + r$, où $0 \leq r < a$ et $q = bq' + r'$, où $0 \leq r' < b$.

Par suite : $n = abq' + ar' + r$.

$r < a \Longrightarrow r \leq a - 1$; $r' < b \Longrightarrow r' \leq b - 1$

D'où : $ar' + r \leq ab - a + r$. Comme $r \leq a - 1$,
$0 \leq ar' + r \leq ab - 1$. Par conséquent : $0 \leq ar' + r < ab$. D'où le résultat.

Exercice 13

On a : $842 = 256 \times 3 + 74$ et : $842 = 375 \times 2 + 92$.

D'où : $96842 = 256 \times 378 + 74$ et $96842 = 375 \times 258 + 92$.

Conclus.

Exercice 14

Le reste de la division euclidienne de 100^{1000} par 13 est 9.

Exercice 15

Le reste de la division euclidienne de 7077^{2022} par 11 est 5.

Exercice 16

a) $3^3 \equiv 1\ [13]$, donc : $\forall k \in \mathbb{N}$, $3^{3k} \equiv 1\ [13]$.

En posant : $n = 3k + r$, avec $r \in \{0;\ 1; 2\}$, on a :
$3^{2n} + 3^n + 1 \equiv 3^{2r} + 3^r + 1\ \ [13]$.

Si r vaut 1 ou 2, c'est-à-dire si n n'est pas multiple de 3, alors $3^{2n} + 3^n + 1 \equiv 0 \ \ [13]$;

b) Si n n'est pas multiple de 3, alors $3^{2n} + 3^n + 1 \equiv 3\ [13]$; le reste est donc 3.

Exercice 17

a) Soit d un entier naturel qui divise $12n + 7$ et $3n + 1$. Par suite d divise $12n + 7 - 4(3n + 1)$, c'est-à-dire d divise 3.

b) Si d divise 3, alors d vaut 1 ou 3. Justifions que d ne peut valoir 3.
Supposons par l'absurde que 3 divise $3n + 1$. Il existerait un entier k tel que $3n + 1 = 3k$. Ce qui voudrait dire que $3n + 1$est un multiple de 3, ce qui est faux. On en déduit que d est égal à 1.

La fraction $\frac{12n+7}{3n+1}$ est donc irréductible.

NB. On pourrait le même raisonnement avec $12n + 7$.

Exercice 18 (indication)

$3548 \equiv 8\ [10]$, car tout nombre est congru au chiffre des unités modulo 10. Par suite :

$3548^9 \equiv 8^9\ [10]$. Or : $8^9 \equiv 8\ [10]$, donc : $3548^9 \equiv 8\ [10]$.

De même : $2537^{31} \equiv 3\ [10]$. Par suite : $3548^9 \times 2537^{31} \equiv 8 \ \times 3[10]$. Finalement :

$3548^9 \times 2537^{31} \equiv 4[10]$. Le chiffre des unités de $3548^9 \times 2537^{31}$ est donc 4.

Exercice 19 (Indication)

Il suffit de transiter par la base 10.

Exercice 20

Soit *b* cette base de numération si, elle existe. Compte tenu du fait que ce nombre s'écrit 30407 dans la base *b*, si *b* existe doit être supérieur ou égale à 8 car le plus chiffre que figure dans ce nombre est 7.

On doit avoir : $3\ b^4 + 4b^2 + 7 = 12551$.

Une seule solution convient : c'est 8. La base cherchée est 8.

Exercice 21

Il faut d'abord déterminer cette base b $(b \geq 7)$:

On a : $(3\ b + 6) + (4b + 5) = b^2 + 3$.

Cette base est 8.

Ensuite, faire le produit dans cette base. On peut transiter par la base 10 ou le faire directement.

On trouve : $36 \times 45 = 2126$.

Exercice 22

Soit *b* cette base, si elle existe. Dans ce cas, *b* doit être supérieure ou égal à 4.

On doit avoir :

$(b^2 + 2b + 2)(\ b^2 + 3) = \ b^4 + 3b^3 + b^2 + 2b + 1$. Après simplifications, on obtient :

$b^3 - 4b^2 - 4b - 5 = 0$ (*).

D'où : $b(b^2 - 4b - 4) = 5$. Par suite, b est un diviseur de 5.

5 étant un nombre premier, b vaut 1 ou 5. Or, b doit être supérieure ou égal à 4, donc le seul candidat qui reste est 5.

Question : 5 convient-il ? Je vous laisse le temps de vérifier que 5 est solution de (*). La base cherchée est 5.

Exercice 23

Soit N ce nombre, N = $\overline{342x}$.

On peut écrire : N= $3b^3 + 4b^2 + 2b^2 + x$

1) Pour b = 6, $N \equiv$ x+4 [5]. Comme x est un entier naturel inférieur ou égal à 5, on a : $x = 1$.
2) Pour b = 7, $N \equiv$ x [3]. Comme x est un entier naturel inférieur ou égal à 6, on a : $x = 0$, ou $x = 0$ ou $x = 6$
3) Pour b = 17, $N \equiv x$ +5 [12]. Comme x est un entier naturel inférieur ou égal à 16, on a :
$x = 7$.

Exercice 24

1) $4^3 \equiv 1$ [7], puis on écrit $n = 3p + r$, pour $r = 0, 1, 2$. Par suite : $4^n \equiv 4^r$ [7]

Le reste de la division euclidienne de 4^n par 7 est :

   a. 1 si $n = 3p$;
   b. 4 si $n = 3p$ +1;
   c. 2 si $n = 3p + 2$.

2) A = $4^4 + 3 \times 4^3 + 3 \times 4^2 + 2 \times 4 + 1$. D'où :
A $\equiv 4 + 3 \times 1 + 3 \times 2 + 2 \times 4 + 1$ [7]. Par suite : A $\equiv 1$ [7].
Le reste de la division euclidienne de A par 7 est 1.

Exercice 25

1) Il suffit de trouver un nombre premier de la forme $4k$ + 3 pour justifier que X est non vide. Pour $k = 0$, $k = 1$ ou $k = 2$, on obtient 3 ; 7 ; 11 qui sont tous premiers.
2) Soit deux éléments de la forme indiquée : appelons-les $4p$ + 3 et $4q$ + 3

On a : $(4p + 3)(4q + 3) = 4(4pq + p + q) + 1$. En posant :
$k = 4pq + p + q$, on a le résultat.

3) Le seul nombre entier naturel pair qui est premier est 2. Tous les autres nombres premiers sont forcément impairs. Ils sont donc de la forme $4\,k + 1$ ou $4\,k + 3$. L'entier a n'est pas pair. Supposons par l'absurde que a n'admet pas de diviseur premier de la forme $4\,k + 3$. Dans ces conditions, tous les diviseurs de a sont de la forme $4k + 1$. D'après la consigne 2) a s'écrit sous la forme $4h + 1$. Dans ces conditions, $a \equiv 1$ [4].
Or $a = 4p_1 \times \cdot \cdot \cdot \times p_n - 1$, donc
$a \equiv -1$ [4]. Mais 1 n'est pas congru à – 1 modulo 4.
D'où contradiction.

Par suite, a admet un diviseur premier de la forme $4k + 1$.

4) Raisonnons par l'absurde que X ne peut être fini. Supposons que X soit fini. Dans ce cas, il contient tous les nombres premiers de la forme $4\,k + 3$ comme indiqué au 3). D'après ce 3), a admet un diviseur premier p de la forme $p = 4k + 3$. On en déduit que : $a \equiv 0\ [p]$. L'entier p étant de la forme $4k + 3$ est un élément de X. Il est par conséquent l'un des p_i. Par suite : $a \equiv -1\ [p]$. Le nombre p étant premier est supérieur ou égal à 2, on ne peut donc pas avoir : $0 \equiv -1\ [p]$. D'où contradiction. Par suite X a une infinité d'éléments. Il existe donc une infinité de nombres premiers de la forme $4k + 3$.

NB. Il n'est pas dit que tous les nombres de la forme $4k + 3$ sont premiers. Par exemple $k = 3$ et $k = 6$ où on trouve 15 et 27 qui ne sont pas premiers.

Exercice 26

1) La préoccupation de l'agent est de déterminer la Clé RIB.
2) Les parties du cours sollicitées sont :
    a. Numération décimale ;
    b. Division euclidienne ;
    c. Congruence.

3) Solution argumentée au problème de l'agent

Il s'agit d'écrire N dans sa décomposition en base 10. Mais comme il y a assez de chiffres, on va procéder à des regroupements en suivant la structure de numéro de compte. Mais ce regroupement bien que facilitant les calculs n'est pas nécessaire. On peut écrire :

N = 23104×10^{18}+ 15231×10^{14}+ 00006462113×10^{2}+R. Par suite, on a :

N = A× 10^{18} +B× 10^{13}+ C× 10^{2} + R

On va déterminer les restes de la division euclidiennes des nombres A, B, C par 97 puisqu'il faut que N soit divisible par 97.

23104 = 97×238 +18, d'où : A ≡ 18 [97]

15231 = 97× 157 + 2, d'où : B ≡ 2 [97]

64621113 = 97×66619 + 70, d'où : C ≡ 70 [97]

On justifie que : $10^{2} \equiv 3$ [97], $10^{12} \equiv 50$ [97] et $10^{18} \equiv 89$ [97]. Par suite :

N ≡ 1842 + R [97]. Comme 1842 $\equiv 96$ [97], on a : N ≡ 96 + R [97].

Par suite : N ≡ 0 [97] ⟺ R ≡ 1 [97].

Par suite R contient deux chiffres : 0 et 1. En conclusion, on a : R = 01.

4 DÉRIVABILITÉ ET ÉTUDE DE FONCTIONS

EXERCICES DE FIXATION

1 DERIVABILITE D'UNE FONCTION EN a.

1. Définition

Exercice 1

Une équation de la tangente à gauche en A à la courbe de f est :
$y = f'_g(2)(x-2) + f(2)$. On a donc : $y = -4x + 8$.

Exercice 2

$\boldsymbol{\alpha}$ est ■	■ la tangente à droite à la courbe de f en a
$\boldsymbol{\beta}$ est ■	■ le nombre dérivé de f à droite en a
(D) est ■	■ le nombre dérivé de f à gauche en a
(Δ) est ■	■ la tangente à gauche à la courbe de f en a

Exercice 3

$$f(x) = x|x-1|$$

$$\begin{cases} \forall x \in \,]-\infty; 1[, f(x) = x(1-x) \\ \forall x \in \,]1; +\infty[, f(x) = x(x-1) \end{cases}$$

- $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} \frac{x(1-x)}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} \frac{-x(x-1)}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} (-x) = -1$
  Donc $f'_g(1) = -1$
- $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} \frac{x(x-1)}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} x = 1$
  Donc $f'_d(1) = 1$

2. Propriété

Exercice 4

$$f(x) = \begin{cases} x^2, si\ x \geq 0 \\ 2x, si\ x < 0 \end{cases}$$

- $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{x^2}{x} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} x = 0$

  Donc $f'_d(0) = 0$
- $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{2x}{x} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} 2 = 2$

  Donc $f'_g(0) = 2$

$f'_g(0) \neq f'_d(0)$ donc f n'est pas dérivable en 0.

Exercice 5

$g(x) = x|x-2|$

$$\begin{cases} \forall x \in]-\infty; 2[, g(x) = x(2-x) \\ \forall x \in]2; +\infty[, g(x) = x(x-2) \end{cases}$$

- $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ <}} \frac{g(x)-g(2)}{x-2} = \lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ <}} \frac{x(2-x)}{x-2} = \lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ <}} \frac{-x(x-2)}{x-2} = \lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ <}} (-x) = -2$

  Donc $g'_g(2) = -2$
- $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ >}} \frac{g(x)-g(2)}{x-2} = \lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ >}} \frac{x(x-2)}{x-2} = \lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ >}} x = 2$

  Donc $g'_d(2) = 2$

$g'_g(0) \neq g'_d(0)$ donc g n'est pas dérivable en 2.

Exercice 6

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^2, si\ x < 1 \\ 1 - \sqrt{x}, si\ x \geq 1 \end{cases}$$

- $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} \frac{(x-1)^2}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} (x-1) = 0$

  Donc $f'_g(1) = 0$

- $\lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ >}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ >}} \frac{1-\sqrt{x}}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ >}} \frac{1-x}{(x-1)(1+\sqrt{x})} = \lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ >}} \frac{-1}{1+\sqrt{x}} = -\frac{1}{2}$

  Donc $f'_d(1) = -\frac{1}{2}$

  $f'_g(1) \neq f'_d(1)$, donc f n'est pas dérivable en 1.

3. tangente verticale

Exercice 7

$f(x) = \sqrt{|1-x^2|}$

$$\begin{cases} \forall x \in]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[, f(x) = \sqrt{x^2-1} \\ \forall x \in]-1; 1[, f(x) = \sqrt{1-x^2} \end{cases}$$

- $\lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ <}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ <}} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ <}} \frac{1-x^2}{(x-1)\sqrt{1-x^2}} = \lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ <}} \frac{-(x-1)(x+1)}{(x-1)\sqrt{1-x^2}} =$
  $\lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ <}} \frac{-(x+1)}{\sqrt{1-x^2}} = \lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ <}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}(-x-1) = -\infty$
- $\lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ >}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ >}} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ >}} \frac{x^2-1}{(x-1)\sqrt{x^2-1}} = \lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ >}} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)\sqrt{1-x^2}} =$
  $\lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ >}} \frac{(x+1)}{\sqrt{1-x^2}} = \lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ >}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}(x+1) = +\infty$

  $\lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ <}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ >}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ sont infinies, donc la représentation graphique de f admet une tangente verticale au point de coordonnées $(1\,;\ 0)$.

Exercice 8

$f(x) = \sqrt{1-x^2}$

$D_f = [-1; 1]$

- $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} \frac{1-x^2}{(x-1)\sqrt{1-x^2}} = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} \frac{-(x-1)(x+1)}{(x-1)\sqrt{1-x^2}} =$
  $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} \frac{-(x+1)}{\sqrt{1-x^2}} = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}(-x-1) = -\infty$

  $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = -\infty$ donc la représentation graphique de f admet au point d'abscisse 1 une demi-tangente verticale dirigée vers le haut.

3. Dérivabilité sur un intervalle

Exercice 9

$f(x) = \sqrt{1-x^2}$

f est dérivable sur $]-1;1[$

- $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} \frac{1-x^2}{(x-1)\sqrt{1-x^2}} = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} \frac{-(x-1)(x+1)}{(x-1)\sqrt{1-x^2}} =$
  $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} \frac{-(x+1)}{\sqrt{1-x^2}} = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}(-x-1) = -\infty$ donc f n'est pas dérivable en 1
- $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x+1} = \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} \frac{1-x^2}{(x+1)\sqrt{1-x^2}} =$
  $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} \frac{-(x-1)(x+1)}{(x+1)\sqrt{1-x^2}} = \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} \frac{-(x-1)}{\sqrt{1-x^2}} = \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}(-x+1) = +\infty$ donc f n'est pas dérivable en -1

En conclusion, f est dérivable sur $]-1;1[$.

5. Tableau récapitulatif

Exercice 10

1. $f'(x) = 3x^2$
2. $f'(x) = -\frac{4}{x^5}$
3. $f'(x) = 0$

6. dérivées et opérations

Exercice 11

1. $f'(x) = 2x - \frac{1}{2\sqrt{x}}$
2. $f'(x) = 12x^2$
3. $f'(x) = \frac{(2x+1)(x^2+x+1)-(2x+1)(x^2+x+4)}{(x^2+x+1)^2} = \frac{-6x-3}{(x^2+x+1)^2}$
4. $f'(x) = \frac{2cosxsinx}{cos^4x} = \frac{2sinx}{cos^3x}$

7. Sens de variation

Exercice 12

1. $f'(x) = 2x$.
   $\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) > 0$. Donc f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.
2. $f'(x) = -3x^2$.
   $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, f'(x) < 0$. Donc f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
3. $f'(x) = 10x^4 + 3$.
   $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) > 0$. Donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

8. dérivées successives

Exercice 13

$f(x) = 2x^6 + 3x^2 - 5$

$\frac{df}{dx} = 12x^5 + 6x$

$\frac{d^2f}{dx^2} = 60x^4 + 6$

$\frac{d^3f}{dx^3} = 240x^3$

$\frac{d^4f}{dx^4} = 720x^2$

Exercice 14

La plus petite valeur de l'entier n pour laquelle $\frac{d^nf}{dx^n} = 0$ est 7.

Exercice 15

1) $f(x) = x^4 + 3x^2 + 1$

$\frac{df}{dx} = 4x^3 + 6x$

$\frac{d^2f}{dx^2} = 12x^2 + 6$

2) $f(x) = x^3 + 4x^2 + 2$

$\frac{df}{dx} = 3x^2 + 12x$

$\frac{d^2f}{dx^2} = 6x + 12$

$\frac{d^3f}{dx^3} = 6$

$\frac{d^4f}{dx^4} = 0$

3) $f(x) = sinx$

$\frac{df}{dx} = cosx$

$\frac{d^2f}{dx^2} = -sinx$

$\frac{d^3f}{dx^3} = -cosx$

4) $f\ (x) = cosx$

$\frac{df}{dx} = -sinx$

$\frac{d^2f}{dx^2} = -cosx$

$\frac{d^3f}{dx^3} = sinx$

$\frac{d^4f}{dx^4} = cosx$

9. point d'inflexion

Exercice 16

1) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$
   f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$
   On a : $f'(x) = 6x^2 - 6x$ et $f''(x) = 12x - 6$

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	

$f''(x)$ s'annule en $\frac{1}{2}$ en changeant de signe donc le point la courbe représentative de f d'abscisse $\frac{1}{2}$ est un point d'inflexion.

Exercice 17

$f(x) = x^4$

f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$

On a : $f'(x) = 4x^3$ et $f''(x) = 12x^2$

$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$, donc $f''(x)$ ne change pas de signe sur $\mathbb{R}$, alors la courbe représentative de f n'admet pas de point invariant.

2 DERIVEE D'UNE FONCTION COMPOSEE

1) Propriété

Exercice 18

1. f '(x) = 8 $(2x\text{-}1)^3$
2. f '(x) = -2sin (2x-3)
3. Prendre I = $]-2\,;+\infty\,[$; f '(x) = $\left(\frac{27}{(x+2)^4}\right)(4x\text{-}1)^2$
4. f '(x) = $\frac{x}{\sqrt{x^2+3}}$,

Exercice 19

$x \in]-1\,;1\,[$, $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$

Posons y = $f^{-1}(x)$. On a donc $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{cosy}$. Or $\cos^2 y + \sin^2 y = 1$ et cosy > 0

Donc cosy = $\sqrt{1 - sin^2 y}$ soit cosy = $\sqrt{1 - x^2}$, d'où $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

2) Nombre dérivée de la réciproque d'une fonction continue et strictement monotone

Exercice 20

1. $f(x) = x^3$

   $f(x) = 1 \Leftrightarrow x^3 = 1$

   $\Leftrightarrow x = 1$

On a donc $f^{-1}(1) = 1$

$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 3x^2$

$f'\big(f^{-1}(1)\big) = f'(1) = 3$

$f'\big(f^{-1}(1)\big) \neq 0$ donc f^{-1} est dérivable en 1 et $(f^{-1})'(1) = \frac{1}{3}$

2. $f(x) = \frac{x}{1+x}$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{1+x} = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$

On a donc $f^{-1}(0) = 0$

$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$

$f'\big(f^{-1}(0)\big) = f'(0) = 1$

$f'\big(f^{-1}(0)\big) \neq 0$ donc f^{-1} est dérivable en 0 et $(f^{-1})'(0) = 1$

3 INEGALITE DES ACCROISSEMENTS FINIS

Exercice 21

Soit $f(x) = cosx$

$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = -sinx$

$\forall x \in [a; b], |f'(x)| \leq 1$, d'après le théorème de l'inégalité des accroissements finis, on a :

$|f(b) - f(a)| \leq |b - a|$, donc $|cosb - cosa| \leq |b - a|$

Exercice 22

Donner un encadrement de $\sqrt{401}$ (au lieu de 401)

1) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$; $|f'(x)| < \frac{1}{2\sqrt{400}}$;

$|f'(x)| < \frac{1}{40}$

$\left|\sqrt{401} - \sqrt{400}\right| < \frac{1}{40}|101 - 100|$;

$\left|\sqrt{401} - \sqrt{400}\right| < \frac{1}{40}$. Donc

$-\frac{1}{40} + 20 < \sqrt{401} < \frac{1}{40} + 20.$

Soit $19{,}975 < \sqrt{401} < 20{,}025$

Un majorant de l'erreur commise en remplaçant $\sqrt{401}$ par 20 est $\frac{1}{40}$.

4 EXEMPLES D'ETUDE DE FONCTIONS

Exercice 23

1. **Fonctions polynômes**

$g(x) = x^3 - 4x^2 - 3x + 10$

$D_g = \mathbb{R}$

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty}(x^3 - 4x^2 - 3x + 10)$$
$$= \lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty}(x^3 - 4x^2 - 3x + 10)$$
$$= \lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$$

g est une fonction polynôme donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}$; on a :

$\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = 3x^2 - 8x - 3 = 3(x + \frac{1}{3})(x - 3)$

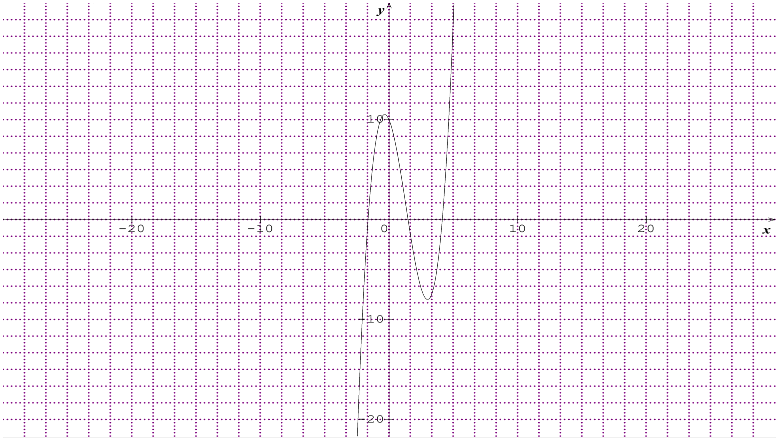
Le signe de $g'(x)$ donne : $\forall x \in \left]-\infty; -\frac{1}{3}\right[\cup$ $]3; +\infty[, g'(x) > 0$, donc g est strictement croissante sur $\left]-\infty; -\frac{1}{3}\right[$ et sur $]3; +\infty[$

$\forall x \in \left]-\frac{1}{3}; 3\right[, g'(x) < 0$, donc g est strictement décroissante sur $\left]-\frac{1}{3}; 3\right[$

On en déduit le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		3		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	↗	$\frac{284}{27}$	↘	-8	↗	$+\infty$

Représentation graphique



Fonctions rationnelles

Exercice 24

Voir l'exemple de la page 61 du cahier

Fonctions irrationnelles

Exercice 25

$h(x) = \sqrt{|x^2 + x - 2|}$

$D_h = \mathbb{R}$

- Déterminons les limites de h

$$\lim_{x \to -\infty} h(x) = \lim_{x \to -\infty} \sqrt{|x^2 + x - 2|} = +\infty$$

$$\text{car} \begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} |x^2 + x - 2| = +\infty \\ \lim\limits_{X \to +\infty} \sqrt{X} = +\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x \to +\infty} h(x) = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{|x^2 + x - 2|} = +\infty$$

$$\text{car} \begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} |x^2 + x - 2| = +\infty \\ \lim\limits_{X \to +\infty} \sqrt{X} = +\infty \end{cases}$$

$$\text{on a : }\begin{cases}\forall x \in]-\infty; -2[\cup]1; +\infty[, h(x) = \sqrt{x^2 + x - 2} \\ \forall x \in]-2; 1[, h(x) = \sqrt{-x^2 - x + 2} \\ h(-2) = h(1) = 0\end{cases}$$

- Etudions la dérivabilité de h en -2

$$\lim_{\substack{x \to -2 \\ <}} \frac{h(x)-h(-2)}{x+2} = \lim_{\substack{x \to -2 \\ <}} \frac{\sqrt{x^2+x-2}}{x+2} = \lim_{\substack{x \to -2 \\ <}} (x-1) \times \frac{1}{\sqrt{(x-1)(x+2)}} = -\infty$$

$$\text{car}\begin{cases}\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ <}} x - 1 = -3 \\ \lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ <}} \frac{1}{\sqrt{(x-1)(x+2)}} = +\infty\end{cases}$$

$$\lim_{\substack{x \to -2 \\ >}} \frac{h(x)-h(-2)}{x+2} = \lim_{\substack{x \to -2 \\ >}} \frac{\sqrt{-x^2-x+2}}{x+2} = \lim_{\substack{x \to -2 \\ >}} -(x-1) \times \frac{1}{\sqrt{-(x-1)(x+2)}} = +\infty$$

$$\text{car}\begin{cases}\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ >}} -(x-1) = 3 \\ \lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ >}} \frac{1}{\sqrt{-(x-1)(x+2)}} = +\infty\end{cases}$$

$\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ <}} \frac{h(x)-h(-2)}{x+2}$ et $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ >}} \frac{h(x)-h(-2)}{x+2}$ sont infinies, donc la représentation graphique de h admet une tangente verticale au point d'abscisse -2.

- Etudions la dérivabilité de h en 1

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} \frac{h(x)-h(1)}{x-1} = \lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} \frac{\sqrt{-x^2-x+2}}{x-1} = \lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} -(x+2) \times \frac{1}{\sqrt{-(x-1)(x+2)}} = -\infty$$

$$\text{car}\begin{cases}\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} -(x+2) = -3 \\ \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} \frac{1}{\sqrt{(x-1)(x+2)}} = +\infty\end{cases}$$

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} \frac{h(x)-h(1)}{x-1} = \lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} \frac{\sqrt{x^2+x-2}}{x-1} = \lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} (x+2) \times \frac{1}{\sqrt{(x-1)(x+2)}} = +\infty$$

car $\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} x+2 = 3 \\ \lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ >}} \frac{1}{\sqrt{(x-1)(x+2)}} = +\infty \end{cases}$

$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} \frac{h(x)-h(1)}{x-1}$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} \frac{h(x)-h(1)}{x-1}$ sont infinies, donc la représentation graphique de h admet une tangente verticale au point d'abscisse 1.

- Étudions les variations de h sur $]-\infty; -2[\cup]1; +\infty[$

$\forall x \in]-\infty; -2[\cup]1; +\infty[, h'(x) = \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x-2}}$

$\forall x \in]-\infty; -2[\cup]1; +\infty[, 2\sqrt{x^2+x-2} > 0$ donc le signe de $h'(x)$ est celui de $2x+1$.

On a donc : $\forall x \in]-\infty; -2[, h'(x) < 0$ et $\forall x \in]1; +\infty[, h'^{(x)} > 0$.

h est strictement décroissante sur $]-\infty; -2[$ et strictement croissante sur $]1; +\infty[$

- Étudions les variations de h sur $]-2; 1[$

$\forall x \in]-2; 1[, h'^{(x)} = \frac{-2x-1}{2\sqrt{x^2+x-2}}$

$\forall x \in]-2; 1[, 2\sqrt{x^2+x-2} > 0$, donc le signe de $h'(x)$ est celui de $-2x-1$.

On a donc : $\forall x \in \left]-2; -\frac{1}{2}\right[, h'(x) > 0$ et $\forall x \in \left]-\frac{1}{2}; 1\right[, h'^{(x)} < 0$.

h est strictement croissante sur $\left]-2; -\frac{1}{2}\right[$ et strictement décroissante sur $\left]-\frac{1}{2}; 1\right[$

- Tableau de variations de h.

x	$-\infty$		-2		$-\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\|$	$+$	0	$-$	$\|$	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{3}{2}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

- Détermination d'asymptote

On a : $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{h(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+x-2}}{x} =$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}}{x} = \lim_{x\to-\infty} -\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}} = -1$$

Puis, $\lim\limits_{x\to-\infty}[h(x)-(-x)] = \lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+x-2}+x =$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x-2}{\sqrt{x^2+x-2}-x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{1-\frac{2}{x}}{-\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}-1} = -\frac{1}{2}$$

Donc la droite d'équation $y = -x - \frac{1}{2}$ est une asymptote à la

courbe de h en $-\infty$.

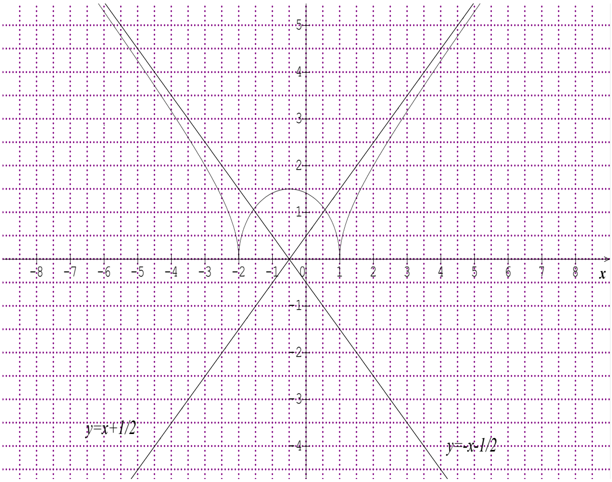
On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{h(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+x-2}}{x} =$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}} = 1$$

Puis, $\lim\limits_{x\to+\infty}[h(x)-x] = \lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x-2}-x = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x-2}{\sqrt{x^2+x-2}+x} =$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\frac{2}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}-1} = \frac{1}{2}$$

Donc la droite d'équation $y = x + \frac{1}{2}$ est une asymptote à la courbe de h en $+\infty$.



3. fonctions trigonométriques

Exercice 26

1) $f(x) = \cos(\frac{\pi}{2} - 3x)$

$D_f = \mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R}, \cos\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) = sin3x$; donc $f(x) = sin3x$

- Périodicité
  $\forall x \in \mathbb{R}, f\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = f(x)$, donc f est périodique de période $\frac{2\pi}{3}$, on peut donc réduire son étude à l'intervalle $\left[0; \frac{2\pi}{3}\right]$ et compléter sa représentation graphique grâce à la translation de vecteur $\frac{2\pi}{3}\overrightarrow{OI}$ et de la translation de vecteur $-\frac{2\pi}{3}\overrightarrow{OI}$.
- Dérivée
  $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 3cos3x$
- Etude du signe de la dérivée

$\forall x \in \mathbb{R}, 3cos3x \geq 0 \Leftrightarrow -\frac{\pi}{6} + \frac{k2\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{6} + \frac{k2\pi}{3} \ (k \in \mathbb{Z})$

Donnons les solutions de $f'(x) \geq 0$ sur $\left[0; \frac{2\pi}{3}\right]$

Pour k=0, $x \in \left[0; \frac{\pi}{6}\right]$

Pour k=1, $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{2\pi}{3}\right]$

On en déduit que : $\forall x \in \left]0; \frac{\pi}{6}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}; \frac{2\pi}{3}\right[, f'(x) > 0$

$\forall x \in \left]\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right[, f'(x) < 0$

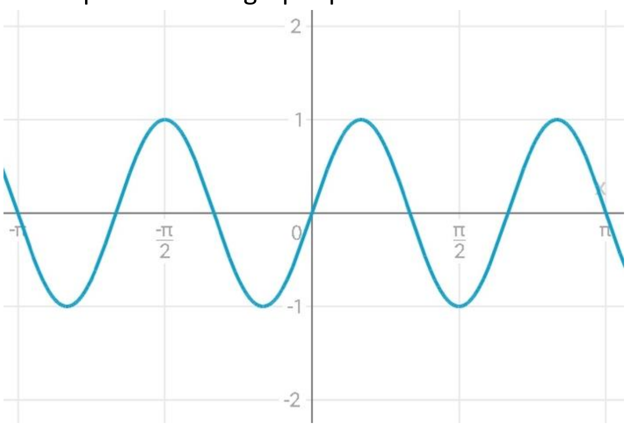
- Variations de f

f est strictement croissante sur $\left]0; \frac{\pi}{6}\right[$ et sur $\left]\frac{\pi}{2}; \frac{2\pi}{3}\right[$ et f est strictement décroissante sur $\left]\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right[$.

- Tableau de variations

x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{2\pi}{3}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↗	1	↘	-1	↗	0

- Représentation graphique



2) $f(x) = \tan\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right)$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{5\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}\right\}$ $(k \in \mathbb{Z})$

- Périodicité

  $\forall x \in \mathbb{R}, f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = f(x)$, donc f est périodique de période $\frac{\pi}{2}$, on peut donc réduire son étude à l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ et compléter sa représentation graphique grâce à la translation de vecteur $\frac{\pi}{2}\overrightarrow{OI}$ et de la translation de vecteur $-\frac{\pi}{2}\overrightarrow{OI}$.

- Dérivée

  $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{-2}{cos^2(\frac{\pi}{3}-2x)}$

- Étude du signe de la dérivée

  $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) < 0$

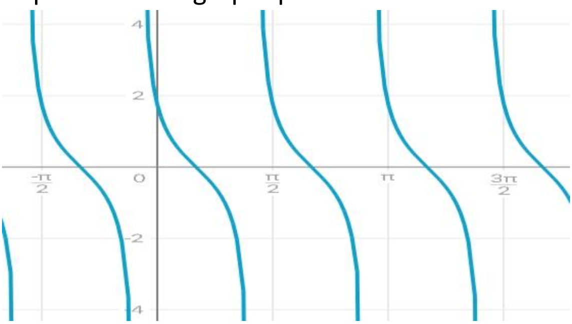
- Variations de f

  f est strictement décroissante sur $\left]0; \frac{5\pi}{12}\right[$ et sur $\left]\frac{5\pi}{12}; \frac{\pi}{2}\right[$

- Tableau de variations

x	0		$\frac{5\pi}{12}$		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$-$	||	$-$	
$f(x)$	$\sqrt{3}$	↘	$-\infty$ || $-\infty$	↘	$\sqrt{3}$

- Représentation graphique



EXERCICES DE RENFORCEMENT / D'APPROFONDISSEMENT

Dans l'énoncé, considérer $\sqrt{101}$ au lieu de $\sqrt{1001}$

Exercice 1

Soit $f(x) = \sqrt{x}$

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$;

$|f'(x)| < \frac{1}{2\sqrt{100}}$; $|f'(x)| < \frac{1}{2\times 10}$

$$\left|\sqrt{101} - \sqrt{100}\right| < \frac{1}{20}|101 - 100| \; ; \; \left|\sqrt{101} - \sqrt{100}\right| < \frac{1}{20}$$

$$-\frac{1}{20} + 10 < \sqrt{101} < \frac{1}{20} + 10 \; ; \; -9{,}95 < \sqrt{101} < 10{,}05$$

$$10 < \sqrt{101} < 10{,}05.$$

Exercice 2

Soit $g(x) = tanx$

$$D_g = \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$$

- $\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right], g'(x) = \frac{1}{cos^2 x}$
  - $\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$, $\frac{\sqrt{2}}{2} \leq cosx \leq 1$, alors $\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$, $\frac{1}{2} \leq cos^2 x \leq 1$
  - Donc $\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$, $1 \leq \frac{1}{cos^2 x} \leq 2$
  - On a alors $\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$, $1 \leq g'(x) \leq 2.$
- On a : $\forall x \in \left[0\,; \frac{\pi}{4}\right]$, $1 \leq g'(x) \leq 2$, d'après le théorème de l'inégalité des accroissements finis, on a : $\forall x \in \left[0\,; \frac{\pi}{4}\right]$,
- $x - 0 \leq tanx - tan0 \leq 2(x - 0)$
  - Donc $\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$, $x \leq tanx \leq 2x$

Exercice 3

Soit $f(x) = \sqrt{1 + x}$

$$\forall x \in \left[0; \frac{1}{2}\right], f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}$$

$$\forall x \in \left[0; \frac{1}{2}\right], \frac{1}{\sqrt{6}} \leq f'(x) \leq \frac{1}{2}$$

D'après le théorème de l'inégalité des accroissements finis, on a :

$\forall x \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$, $\frac{1}{\sqrt{6}}(x-0) \leq \sqrt{1+x} - 1 \leq \frac{1}{2}(x-0)$

Donc $\forall x \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$, $1 + \frac{x}{\sqrt{6}} \leq \sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{x}{2}$

Exercice 4

1. $h(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}}$

$D_g = [1; +\infty[$

1) a) $\forall x \in [1; +\infty[, h'(x) = -\frac{1}{2x\sqrt{x}}$

$\forall x \in [1; +\infty[, h'(x) < 0$, donc h est strictement décroissante sur $[1; +\infty[$.

$h(1) = 2$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = 1$

Tableau de variation

x	1	$+\infty$
$h'(x)$	$-$	
$h(x)$	2 ↘	1

b) Posons $f(x) = h(x) - x$

$\forall x \in [1; +\infty[, f(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}} - x$

$\forall x \in [1; +\infty[, f'(x) = -\frac{1}{2x\sqrt{x}} - 1$

$\forall x \in [1; +\infty[, f'(x) < 0$, donc f est strictement décroissante sur $[1; +\infty[$

$f(1) = 1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

Tableau de variation

x	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	
$f(x)$	1 ↘	$-\infty$

f est continue et strictement décroissante sur $[1;+\infty[$, donc f est une bijection de $[1;+\infty[$ dans $]-\infty;1]$. Comme $0 \in\,]-\infty;1]$, alors l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α dans $[1;+\infty[$. Par conséquent l'équation $h(x)=x$ admet une unique solution α dans $[1;+\infty[$.

2)a) $\forall x \in \left[1\,;+\infty\right[, |h'(x)| = \frac{1}{2x\sqrt{x}}$

$\forall x \in [1;+\infty[, 2x\sqrt{x} \geq 2$, alors $\frac{1}{2x\sqrt{x}} \leq \frac{1}{2}$. Donc $\forall x \in [1;+\infty[, |h'(x)| \leq \frac{1}{2}$.

b) $\forall x \in [1;+\infty[, |h'(x)| \leq \frac{1}{2}$, d'après le théorème de l'inégalité des accroissements finis, on a : $\forall x \in [1;+\infty[, |h(x)-h(\alpha)| \leq \frac{1}{2}|x-\alpha|$

comme $h(\alpha)=\alpha$, alors $\forall x \in [1;+\infty[, |h(x)-\alpha| \leq \frac{1}{2}|x-\alpha|$

Exercice 5

1) $\forall x \in\,]-1;1[, f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$; $f''(x) = \frac{1}{(1-x)^3}$; $f^{(3)}(x) = \frac{6}{(1-x)^4}$
   $\forall x \in\,]-1;1[, g'(x) = \frac{-1}{(1+x)^2}$; $f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3}$; $f^{(3)}(x) = \frac{-6}{(1-x)^4}$
2) $\forall x \in\,]-1;1[, f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$
   $\forall x \in\,]-1;1[, g^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}$

Exercice 6

1) $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1$
   Si la tangente à la courbe de f en 0 a pour équation $y=-3x+1$, alors $f'(0)=-3$ et $f(0)=1$
   $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$
   $f'(0) = -3 \Leftrightarrow b = -3$
   On a : $f'(1) = f'(-1)$, donc $3+2a-3 = 3-2a-3$

   On a donc : $a = 0$.

   Ainsi $f(x) = x^3 - 3x + 1$

2) $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$

   $\forall x \in\,]-\infty;-1[\, \cup\,]1;+\infty[, f'(x) > 0$

$\forall x \in]-1;1[, f'(x) < 0$

Par conséquent : f est strictement croissante sur $]-\infty;-1[$ et sur $]1;+\infty[$, puis f est strictement décroissante sur $]-1;1[$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

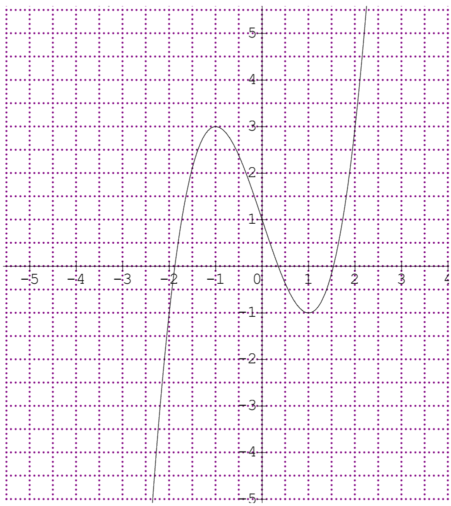
Tableau de variation

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Étude des branches paraboliques

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ donc la courbe représentative de f admet une branche parabolique de direction celle de (OJ) en +∞.
- $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ donc la courbe représentative de f admet une branche parabolique de direction celle de (OJ) en -∞.

Représentation graphique



Exercice 7

1) $f(x) = \frac{ax+2}{2x+1}$

   Si la tangente à la courbe de f en 0 est parallèle à la droite d'équation $y = -5x + 2$, alors $f'(0) = -5$

   $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}; f'(x) = \frac{a(2x+1)-2(ax+2)}{(2x+1)^2} = \frac{a-4}{(2x+1)^2}$

   $f'(0) = -5 \Leftrightarrow a = -1.$

2) $f(x) = \frac{-x+2}{2x+1}$

   $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}; f'(x) = \frac{-5}{(2x+1)^2}$

   $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}, f'(x) < 0$ donc f est strictement décroissante sur $\left]-\infty; -\frac{1}{2}\right[$ et sur $\left]-\frac{1}{2}; +\infty\right[$

   Tableau de variations

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\|$	$-$	
$f(x)$	$-\frac{1}{2}$	$\searrow$	$-\infty$ $\|$ $-\infty$	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$

Exercice 8

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}; f(x) = \frac{x^2+ax+b}{x-1}$$

1) Si la tangente à la courbe de f au point de coordonnées $(-3\,;1)$ est horizontale, alors $f'(-3) = 0$ et $f(-3) = 1$.

   $f(-3) = 1 \Leftrightarrow -3a + b = -13.$ (1)

$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}; f'(x) = \frac{x^2-2x-a-b}{(x-1)^2}$

   $f'(-3) = 0 \Leftrightarrow a + b = 15.$ (2)

(1) et (2) implique $\begin{cases} -3a + b = -13 \\ a + b = 15 \end{cases}$ donc $a = 7$ et $b = 8$.

2) On a : $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}; f(x) = \frac{x^2+7x+8}{x-1} = x + 8 + \frac{16}{x-1}$

$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}; f'(x) = \frac{x^2-2x-15}{(x-1)^2} = \frac{(x+3)(x-5)}{(x-1)^2}$

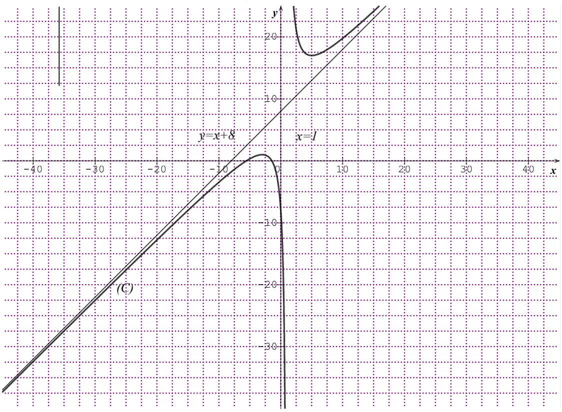
- $\forall x \in]-\infty; -3[\cup]5; +\infty[, f'(x) > 0$, donc f est strictement croissante sur$]-\infty; -3[$et sur $]5; +\infty[$.
- $\forall x \in]-3; 1[\cup]1; 5[, , f'(x) < 0$, donc f est strictement décroissante sur$]-3; 1[$ et sur $]1; 5[$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} f(x) = -\infty$
- Tableau de variation

x	$-\infty$		-3		1		5		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	1	↘ $-\infty$	‖ $+\infty$	↘	17	↗	$+\infty$

3)

- $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x) - (x+8)] = \lim\limits_{x\to-\infty}[f(x) - (x+8)] = 0$, donc la droite d'équation $y = x + 8$ est une asymptote à (C)en $-\infty$ et en $+\infty$.
- Comme $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} f(x) = -\infty$, alors la droite d'équation $x = 1$ est une asymptote verticale à (C).



Exercice 9

$f(x) = \frac{x^2-2x+3}{2x(x-2)}$

1)a) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0; 2\}$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \frac{1}{2}$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \frac{1}{2}$; $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = -\infty$;

$\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ <}} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ >}} f(x) = +\infty$

c)

- Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \frac{1}{2}$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \frac{1}{2}$, alors la droite d'équation $y = \frac{1}{2}$ est une asymptote horizontale à (C) en $+\infty$ et en $-\infty$.
- Comme $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = -\infty$, alors la droite d'équation $x = 0$ est une asymptote verticale à (C)
- Comme $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ <}} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ >}} f(x) = +\infty$, alors la droite d'équation $x = 2$ est une asymptote verticale à (C)

2) $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0; 2\}; f'(x) = \frac{-12x+12}{4x^2(x-2)^2}$

3.a) $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0; 2\}, 4x^2(x-2)^2 > 0$, donc le signe de $f'(x)$ est celui de $-12x + 12$

$\forall x \in]-\infty; 0[\cup]0; 1[, f'(x) > 0$, donc f est strictement croissante sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; 1[$

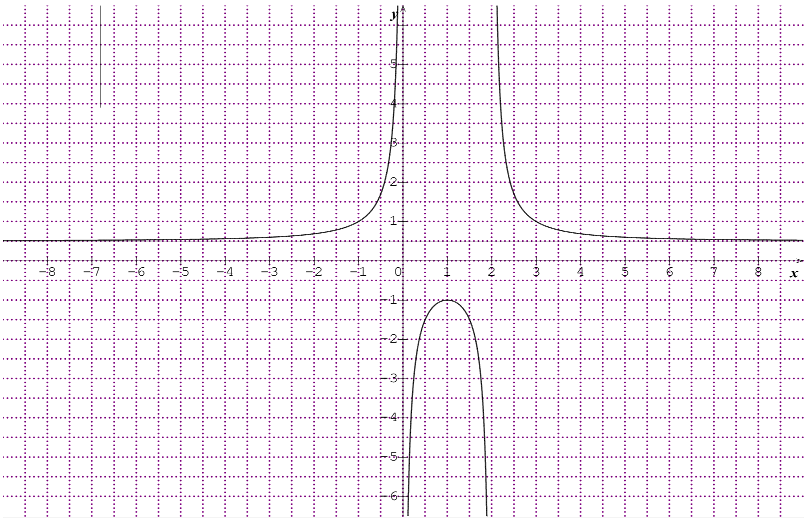
$\forall x \in]1; 2[\cup]2 + \infty[, f'(x) < 0$, donc f est strictement décroissante sur $]1; 2[$ et sur $]2; +\infty[$

b)

Tableau de variation

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	-1	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↗	$\frac{1}{2}$

4) Représentation graphique



Exercice 10

$$f(x) = |x-3| + \frac{1}{x-2}$$

1.a) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ <}} f(x) = -\infty$ et

$\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ >}} f(x) = +\infty$

c)

- $\forall x \in]-\infty; 3], f(x) = -x + 3 + \frac{1}{x-2}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - (-x+3)] = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x-2} = 0$, donc la droite d'équation

$y = -x + 3$ est une asymptote à (C)en –∞.

- $\forall x \in [3; +\infty[, f(x) = x - 3 + \frac{1}{x-2}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x-3)] = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x-2} = 0$, donc la droite d'équation $y = x - 3$ est une asymptote à (C)en $+\infty$.

2.a) $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ <}}\frac{f(x)-f(3)}{x-3} = \lim\limits_{\substack{x\to 3\\ <}}\frac{-x+3+\frac{1}{x-2}-1}{x-3} = \lim\limits_{\substack{x\to 3\\ <}}\frac{1-x}{x-2} = -2$

On a : $f'_g(3) = -2$

$\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ >}}\frac{f(x)-f(3)}{x-3} = \lim\limits_{\substack{x\to 3\\ >}}\frac{x-3+\frac{1}{x-2}-1}{x-3} = \lim\limits_{\substack{x\to 3\\ <}}\frac{x-3}{x-2} = 0$

On a : $f'_d(3) = -2$

Comme $f'_g \neq f'_d$, alors f n'est pas dérivable en 3 ; par contre, elle est dérivable à gauche en 3 et (C) admet à gauche en 3 une demi-tangente d'équation $y = -2x + 7$, puis elle est dérivable à droite en 3 et (C) admet à droite en 3 une demi-tangente horizontale d'équation $y = 1$.

b) $\forall x \in]-\infty; 3[, f'(x) = -1 - \frac{1}{(x-2)^2}$

$\forall x \in]3; +\infty[, f'(x) = \frac{(x-3)(x-1)}{(x-2)^2}$

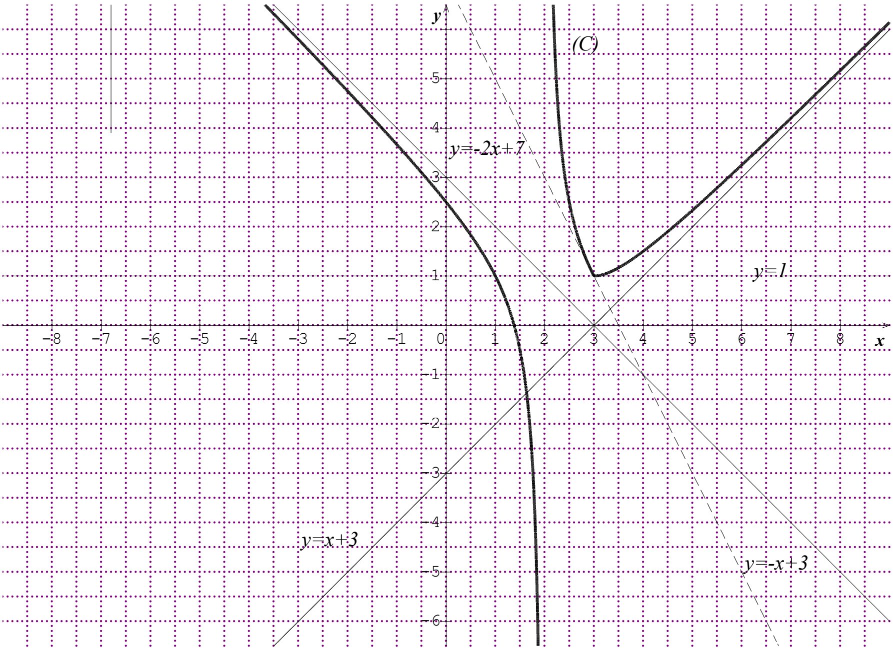
c) $\forall x \in]-\infty; 3[, f'(x) < 0$, donc f est strictement décroissante sur $]-\infty; 2[$ et sur $]2; 3[$

$\forall x \in]3; +\infty[, f'(x) > 0$, donc f est strictement croissante sur$]3; +\infty[$.

d)

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
$f(x)$		$-$	‖	$-$	‖	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

4.



Exercice 11

$f(x) = x - 3 + \frac{1}{|x-2|}$

1.a) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

b) $\forall x \in \,]-\infty; 2[, f(x) = x - 3 - \frac{1}{x-2}$

$\forall x \in \,]2, +\infty[, f(x) = x - 3 + \frac{1}{x-2}$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = x - 3 + \frac{1}{x-2} = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = x - 3 - \frac{1}{x-2} = -\infty$
- $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ <}} x - 3 - \frac{1}{x-2} = +\infty$
- $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ >}} x - 3 + \frac{1}{x-2} = +\infty$

2.a) $\forall x \in]-\infty; 2[, f'^{(x)} = 1 + \frac{1}{(x-2)^2}$

$\forall x \in]-\infty; 2[, f'^{(x)} > 0$, donc f est strictement croissante sur $]-\infty; 2[$.

$\forall x \in]2, +\infty[, f'(x) = \frac{(x-3)(x-1)}{(x-2)^2}$

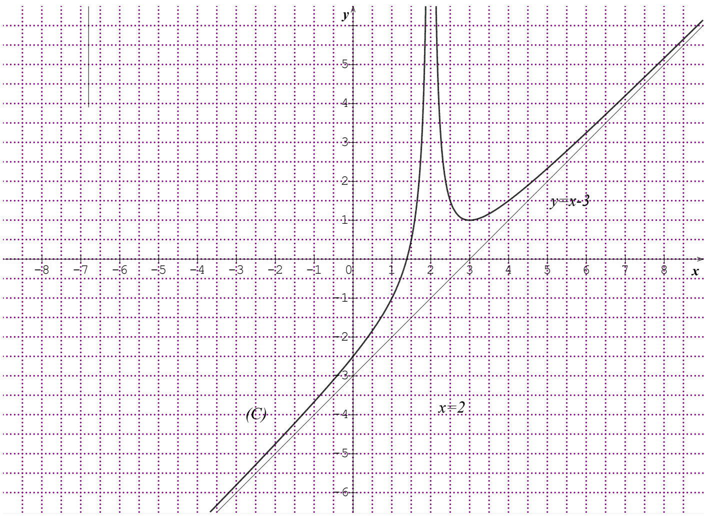
$\forall x \in]2; 3[, f'^{(x)} < 0$ et $]3; +\infty[, f'^{(x)} > 0$, donc f est strictement décroissante sur $]2; 3[$ et strictement croissante sur $]3; +\infty[$.

b)

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\|$	$-$		$+$	
$f(x)$			$+\infty$ $\|$ $+\infty$				$+\infty$
	$-\infty$		$\|$		1		

3.

$\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (x-3)] = \lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - (x-3)] = 0$, donc la droite d'équation $y = x - 3$ est une asymptote à (C)en $+\infty$ et en $-\infty$.



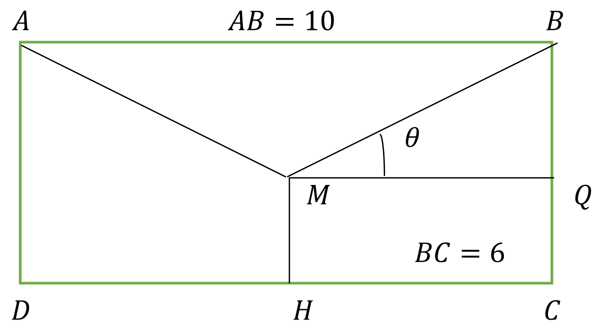
SITUATIONS COMPLEXES

Exercice 12.

Pour déterminer la valeur exacte de θ qui minimise la longueur totale des tuyaux, je vais étudier les variations d'une fonction.

- je vais déterminer en fonction de θ, une fonction g égale à la longueur totale des tuyaux.
- je vais déterminer la dérivée de g
- je vais étudier le signe de g' puis en déduire les variations de g.
- je vais déduire des variations de g, la valeur de θ pour laquelle g est minimale.

Déterminer en fonction de θ, la fonction g égale à la longueur totale des tuyaux.



- On a : $g(\theta) = AM + BM + MH$

$AM = BM$ et $BM = \frac{MQ}{cos\theta}$

$MQ = HC = 5$, donc $BM = \frac{5}{cos\theta}$

$MH = CQ = BC - BQ$

$BC = 6$ et $BQ = BM \times sin\theta = \frac{5sin\theta}{cos\theta}$, alors $MH = 6 - \frac{5sin\theta}{cos\theta}$

Ainsi, $g(\theta) = \frac{5}{cos\theta} + \frac{5}{cos\theta} + 6 - \frac{5sin\theta}{cos\theta}$

Donc $g(\theta) = 6 + \frac{10-5sin\theta}{cos\theta}$

- $\forall\theta\epsilon \left]0;\frac{\pi}{2}\right[, g'(\theta)=\frac{-5+10sin\theta}{cos^2\theta}$
- $\forall\theta\epsilon \left]0;\frac{\pi}{2}\right[, g'(\theta)>0 \Leftrightarrow 1-2sin\theta>0 \Leftrightarrow \theta \in \left]\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right[$
- g est strictement décroissante sur $\left]0;\frac{\pi}{6}\right[$ et strictement croissante sur $\left]\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right[$

On a le tableau de variation suivant :

θ	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$
$g'(\theta)$		$-$	0	$+$	
$g(\theta)$		$\searrow$	$6+5\sqrt{3}$	$\nearrow$	

- $g(\theta)$ atteint son minimum en $\frac{\pi}{6}$ donc la valeur exacte de θ qui minimise la longueur des tuyaux est $\frac{\pi}{6}$.

Exercice 13

Pour déterminer le nombre de parapluie à fabriquer par l'entreprise pour réaliser le bénéfice maximal, je vais étudier les variations de la fonction $b(x)$ qui représente le bénéfice journalier de l'entreprise en milliers de francs.

- Je vais déterminer la fonction $p(x)$ qui représente le prix de vente du parapluie en millier de francs.
- Je vais déterminer la fonction $b(x)$
- je vais déterminer la dérivée de $b(x)$
- je vais étudier le signe de $b(x)$ puis en déduire les variations de la fonction b.
- je vais déduire des variations de $la\ fonction\ b$, la valeur de x pour laquelle b est maximale.

$p(x)=3x$, car chaque parapluie est vendu à 3000 f

$b(x)=p(x)-f(x)=-x^2+84x$

$x \in [0;60], b'(x) = -2x + 84$

$x \in [0;42], b'(x) > 0$ et $x \in [42;60], b'(x) < 0$

b est strictement croissante sur $[0;42]$ et strictement décroissante sur $[42;60]$

On a le tableau de variation suivant :

x	0		42		60
$b'(x)$		$+$	0	$-$	
$b(x)$		$\nearrow$	1764	$\searrow$	

b atteint le maximum en 42 donc pour que le bénéfice soit maximal, l'entreprise doit fabriquer quotidiennement 42 parapluie.

Exercice 14

Pour répondre à la préoccupation de ma mère, je vais utiliser le point d'intersection de la représentation graphique d'une fonction et d'une droite.

- Je vais déterminer la dérivée de $f(x)$
- Je vais étudier les variations de f
- Je vais construire (C) la courbe représentative de f dans un repère (O ; I ; J)
- Je vais construire la droite (D) d'équation $y = 1$
- Je vais déterminer graphiquement la valeur de x pour laquelle la courbe (C) est en dessous de la droite (D).

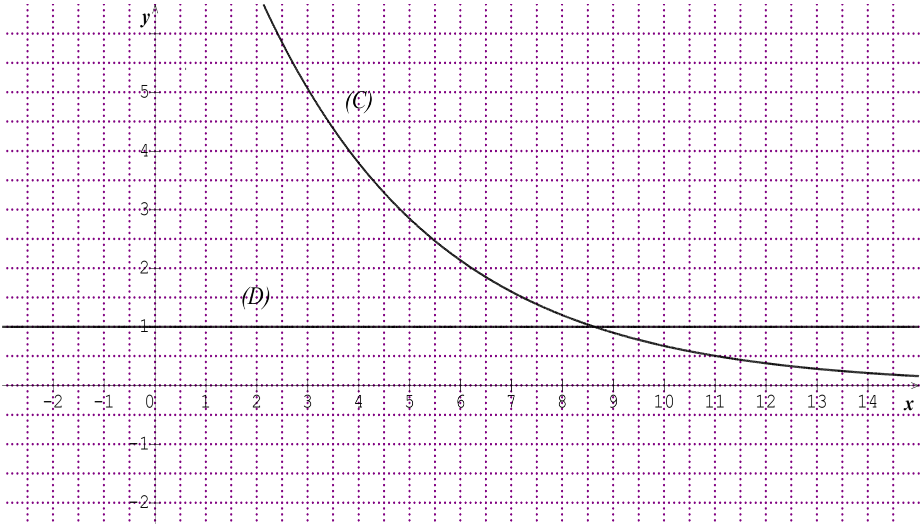
$\forall x \in [0;12], f(x) = 12 \times 0{,}75^x = 12e^{xln0{,}75}$

$\forall x \in [0;12], f'(x) = 12\ln(0{,}75)e^{xln0{,}75}$

$\forall x \in [0;12], e^{xln0{,}75} > 0$ et $12\ln(0{,}75) < 0$, donc $\forall x \in [0;12], f'^{(x)} < 0$

f est strictement décroissante sur $[0;12]$

Représentons f



La courbe (C) est en dessous de la droite (D) pour $x \geq 8{,}6$, donc c'est à partir de 9 ans que l'on peut dire que la concentration en anticorps maternel du bébé sera inférieure à un gramme par litre.

5 GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE DE L'ESPACE

EXERCICES DE FIXATION

1. VECTEUR NORMAL A UN PLAN DE L'ESPACE

Exercice 1

Les vecteurs $\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{DH}, \overrightarrow{CG}\ et\ \overrightarrow{BF}$ sont normaux au plan (ABC), car chacune des droites (AE), (DH), (CG) et (BF) sont perpendiculaires au plan (ABC),

Exercice 2

$\vec{n}\begin{pmatrix}1\\4\\0\end{pmatrix}$

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-4\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-8\\2\\-2\end{pmatrix}$ sont deux vecteurs non colinéaires du plan (P).

$\vec{n}.\overrightarrow{AB} = 1 \times (-4) + 4 \times 1 + 0 \times 1 = 0$

$\vec{n}.\overrightarrow{AC} = 1 \times (-8) + 4 \times 2 + 0 \times (-2) = 0$

$\vec{n}$ est orthogonal est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (P). Donc $\vec{n}$ est normal à (P).

Exercice 3

$A(-1; -1; 0); B(6; -5; 1)$ et $C(1; 2; -2)$

Soit $\vec{n}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ un vecteur normal au plan (ABC).

On a : $\vec{n}.\overrightarrow{AB} = \vec{n}.\overrightarrow{AC} = 0$

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}7\\-4\\1\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\3\\-2\end{pmatrix}$

On a : $\vec{n}.\overrightarrow{AB} = 0 \Leftrightarrow 7x - 4y + z = 0$

$\vec{n}.\overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow 2x + 3y - 2z = 0$

On a : $\begin{cases} 7x - 4y + z = 0 \\ 2x + 3y - 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -7x + 4y \\ 16x - 5y = 0 \end{cases}$

Pour $x = 5, y = 16\ et\ z = 29$. Donc $\vec{n}\begin{pmatrix} 5 \\ 16 \\ 29 \end{pmatrix}$ un vecteur normal au plan (ABC).

2. CARACTERISATION D'UN PLAN A L'AIDE D'UN POINT ET D'UN VECTEUR NORMAL

Exercice 3

$A(1; 0; 2)$ et $\vec{n}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

Soit $M(x; y; z)$ un point de (P). On a : $\vec{n}.\overrightarrow{AM} = 0$

$\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x-1 \\ y \\ z-2 \end{pmatrix}$**.** Donc $\vec{n}.\overrightarrow{AM} = 0 \Leftrightarrow -(x-1) + 3(z-2) = 0$

$$\Leftrightarrow -x + 3y - 5 = 0$$

L'ensemble des points $M(x; y; z)$ de (P) vérifie la relation : $-x + 3y - 5 = 0$.

3. EQUATION CARTESIENNE D'UN PLAN DE L'ESPACE

Exercice 4

a) $\vec{n}\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -7 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à (P)

b) $\vec{n}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à (P)

c) $\vec{n}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -8 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à (P)

d) $\vec{n}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à (P)

Exercice 5

2. les points $A(1;1;2)$; $B(0;-4;0)$ et $C(4;2;1)$ sont des points de (P).

Exercice 6

3. une équation cartésienne de (Q) est de la forme : $4x-5y+6z+d=0$

$A \in (P)$, donc $4\times 1-5(-2)+6\times 3+d=0$, alors $d=-32$.

4. REPRESENTATION PARAMETRIQUE D'UNE DROITE DE L'ESPACE

Exercice 7

Une équation paramétrique de la droite (D)passant par le point $A(2\,;-1\,;-4)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$ est : $\begin{cases}x=2+t\\y=-1-2t\\z=-4+2t\end{cases}$; $t\in\mathbb{R}$.

Exercice 8

Une équation paramétrique de la droite (D) passant par les points $A(2;-1;-4)$ et $B(1;1;-1)$.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\-2\\-3\end{pmatrix}$; donc $\begin{cases}x=2+t\\y=-1-2t\\z=-4-3t\end{cases}$; $t\in\mathbb{R}$.

Exercice 9

$\begin{cases}x=1+3t\\y=2t\\z=2-5t\end{cases}$; $t\in\mathbb{R}$ est une équation paramétrique de la droite (D).

$\begin{cases} x = 1 + 6t \\ y = 4t \\ z = 2 - 10t \end{cases}$; $t \in \mathbb{R}$ et $\begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = -2t \\ z = 2 + 5t \end{cases}$; $t \in \mathbb{R}$ sont deux autres équations paramétriques de la droite (D).

Exercice 10

1. $\frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{7} = \frac{z-3}{2}$ une équation paramétrique de (L) est :
$\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 1 + 7t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$; $t \in \mathbb{R}$

5 DISTANCE D'UN POINT A UN PLAN DE L'ESPACE

Exercice 11

$A(1; 0; -1)$ et (P) d'équation $2x - 5y + 3z + 1 = 0$

$d\big(A; (P)\big) = \frac{|2\times1-5\times0+3\times(-1)+1|}{\sqrt{2^2+(-5)^2+3^2}} = 0$

Remarque : $d\big(A; (P)\big) = 0$ donc $A \in (P)$.

Exercice 12

$A(1; 2; -1)$ et (P) d'équation $y = 2x + 1$

$y = 2x + 1 \Leftrightarrow 2x - y + 1 = 0$

$d\big(A; (P)\big) = \frac{|2\times1-2+1|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$

6 POSITION RELATIVES DE DEUX DROITES DE L'ESPACE

Erreur de numérotation des exercices

Exercice 14

(D) : $\begin{cases} x = 5 - t \\ y = 7t \\ z = -1 + 2t \end{cases}$; $t \in \mathbb{R}$ et (L) est :

$\begin{cases} x = 4 + k \\ y = 7 - 3k \\ z = 2 + k \end{cases}$; $k \in \mathbb{R}$

Les droites (D) et (L) ont pour vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\7\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\-3\\1\end{pmatrix}$.

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, alors il existe un nombre réel non nul r tel que : $\vec{u} = r\,\vec{v}$

$\frac{-1}{1} \neq \frac{7}{-3}$ donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires, alors (D) et (L) sont sécantes ou non coplanaires.

(D) et (L) ont un point commun si et seulement s'il existe un couple $(t;k)$ de nombres réels tel que : $\begin{cases} 5-t = 4+k \\ 7t = 7-3k \\ -1+2t = 2+k \end{cases}$ Ce système n'admet pas de couple de solution, donc les droites (D) et (L) sont non coplanaires.

Exercice 15

(D) : $\begin{cases} x = 5-t \\ y = 7t \\ z = -1+2t \end{cases}$; $t \in \mathbb{R}$ et (L) est :

$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1+3k \\ z = -2+k \end{cases}$; $k \in \mathbb{R}$

Les droites (D) et (L) ont pour vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\7\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}$.

les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont évidemment non colinéaires. Les (D) et (L) ne sont pas parallèles. Elles sont soit sécantes, soit non coplanaires.

Le système $\begin{cases} 5-t = 1 \\ 1+3k = 7t \\ -1+2t = -2+k \end{cases}$ a pour unique solution le couple (4 ; 9) ; il en résulte que les droites (D) et (L) sont sécantes au point I tel que : I (1 ; 28 ; 7)

Exercice 16

$A(-4; 2; 1); B(-1; 1; 3)$; $C(0; 5; -2)$ et $D(9; 2; 4)$.
$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}9\\-3\\6\end{pmatrix}$
$\overrightarrow{CD} = 3\,\overrightarrow{AB}$ donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires alors les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

7 POSITION RELATIVES D'UNE DROITE ET D'UN PLAN DE L'ESPACE

Exercice 17

1. $(D): \begin{cases} x = 3 + 2k \\ y = 5 - 2k \\ z = 3 + 2k \end{cases}$ et $(P) : 2x + y - z = 0$

$\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-2\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (D) et $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à (P).

$\vec{u}.\vec{n} = 2 \times 2 - 2 \times 1 + 2 \times (-1) = 0$

$\vec{u}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux donc (D) et (P) sont parallèles.

Exercice 18

$(D): \begin{cases} x = 2 - 3k \\ y = 3 + k \\ z = 1 - k \end{cases}$ et $(P) : 4x + y - 10z = 0$

$\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\1\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (D) et $\vec{n}\begin{pmatrix}4\\1\\-10\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à (P).

$\vec{u}.\vec{n} = -3 \times 4 + 1 \times 1 + (-1) \times (-10) = -1$

$\vec{u}.\vec{n} \neq 0$ donc (D) et (P) sont sécants.

$$4(2 - 3k) + 3 + k - 10(1 - k) = 0 \Leftrightarrow k = 1$$

On a donc $I(-1; 4; 0)$

8.POSITION RELATIVES DE DEUX PLANS DE L'ESPACE,

Exercice 19

1. $(P): x + 2y + z - 3 = 0$ et $(Q): x - y + z - 2 = 0$

Les plans (P) et (Q) ont pour vecteurs normaux respectifs $\vec{n}(1; 2; 1)$ et $\overrightarrow{n'}(1; -1; 1)$

$\vec{n}.\overrightarrow{n'} = 1 \times 1 + 2 \times (-1) + 1 \times 1 = 0$

Les vecteurs $\vec{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ sont orthogonaux, donc les plans (P) et (Q) sont perpendiculaires.

Tous les ponts de la droite d'intersection (Δ) ont leur coordonnées qui vérifie le système : $\begin{cases} x + 2y + z - 3 = 0 \\ x - y + z - 2 = 0 \end{cases}$

Posons $z = \lambda$

On a : $\begin{cases} x + 2y = 3 - \lambda \\ x - y = 2 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$ puis : $\begin{cases} x = \frac{7}{3} - \lambda \\ y = \frac{1}{3} \\ z = \lambda \end{cases}$

Donc, une représentation paramétrique de (Δ) est :

$\begin{cases} x = \frac{7}{3} - \lambda \\ y = \frac{1}{3} \\ z = \lambda \end{cases}$ avec λ un réel

Exercice 20

$(P): x + y - z + 1 = 0$ et $(Q): x - y + z - 2 = 0$

Les plans (P) et (Q) ont pour vecteurs normaux respectifs $\vec{n}(1; 1; -1)$ et $\overrightarrow{n'}(1; -1; 1)$

$\frac{1}{1} \neq \frac{1}{-1}$

Les vecteurs $\vec{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ ne sont pas colinéaires, donc les plans (P) et (Q) sont sécants.

Tous les ponts de la droite d'intersection (Δ) ont leur coordonnées qui vérifie le système : $\begin{cases} x+y-z+1=0 \\ x-y+z-2=0 \end{cases}$

Posons $z=\lambda$

On a : $\begin{cases} x+y=-1+\lambda \\ x-y=2-\lambda \\ z=\lambda \end{cases}$ puis : $\begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ y=-\frac{3}{2}+\lambda \\ z=\lambda \end{cases}$

Donc, une représentation paramétrique de (Δ) est :

$\begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ y=-\frac{3}{2}+\lambda \\ z=\lambda \end{cases}$ avec λ un réel

EXERCICES DE RENFORCEMENT/ APPROFONDISSEMENT

Exercice 1

1) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-4\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-8\\2\\-2\end{pmatrix}$

$\frac{-4}{-8}\neq\frac{1}{-2}$ alors $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires, donc les points A, B et C ne sont pas alignés, par conséquent A, B et C définissent un plan.

2) Si $\vec{n}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ est normal à (ABC), alors $\vec{n}.\overrightarrow{AB}=\vec{n}.\overrightarrow{AC}=0$

On a donc : $\begin{cases} -4x+y+z=0 \\ -8x+2y-2z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=4x-y \\ -16x+4y=0 \end{cases}$

Pour $x=1, y=4\ et\ z=0$. Donc $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\4\\0\end{pmatrix}$ un vecteur normal au plan (ABC).

Exercice 2

Même méthode que l'exercice 1

Exercice 3

1. $\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 1 - 2t \\ z = -1 - t \end{cases}$

1) Si $x = 0$ alors $t = -\frac{3}{2}$; donc $y = 4$ et $z = \frac{1}{2}$

$A\left(0; 4; \frac{1}{2}\right) \in (D)$.

2) Si $y = -4$ alors $t = \frac{5}{2}$; donc $x = 8$ et $z = -\frac{7}{2}$

$B\left(8; -4; -\frac{7}{2}\right) \in (D)$.

3) Si $z = 6$ alors $t = -7$; donc $x = 11$ et $y = 15$

$C(-11 ; 15 ; 6) \in (D)$.

4) $\begin{cases} 3 + 2t = -5 \\ 1 - 2t = 9 \\ -1 - t = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -4 \\ t = -4 \\ t = -5 \end{cases}$ (absurde)

donc $k \notin (D)$

5) $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (D).

6) $\vec{v} = -7\vec{u}$; $\vec{v}\begin{pmatrix} -14 \\ 14 \\ 7 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (D).

7) $\begin{cases} x = 3 - 14t \\ y = 1 + 14t \\ z = -1 + 7t \end{cases}$ est une autre représentation paramétrique de (D).

Exercice 4

1) $(xoy): z = 0$

$(xoz): y = 0$

$(yoz): x = 0$

2)

$$(D): \begin{cases} x = 1 + 3k \\ y = 2 + 2k \\ z = 3 + k \end{cases}$$

a) $z = 0$, alors $k = -3$; donc $B(-8; -4; 0) \in (D) \cap (xoy)$

b) $y = 0$, alors $k = -1$; donc $C(-2; 0; 2) \in (D) \cap (xoz)$

c) $x = 0$, alors $k = -\frac{1}{3}$; donc $E(0; \frac{4}{3}; \frac{8}{3}) \in (D) \cap (yoz)$

Exercice 5

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}$

Soit $\vec{n}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ un vecteur normal au plan (ABC).

On a : $\vec{n}.\overrightarrow{AB} = \vec{n}.\overrightarrow{AC} = 0$ donc $\begin{cases} -3x + y - 6z = 0 \\ x - 3y - 4z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} -8y - 18z = 0 = 0 \\ x = 3y + 4z \end{cases}$

Si $z = 1$, alors $y = -\frac{9}{4}$ et $x = -\frac{11}{4}$

Donc $\vec{n}\begin{pmatrix} -\frac{11}{4} \\ -\frac{9}{4} \\ 1 \end{pmatrix}$ un vecteur normal au plan (ABC).

Une équation cartésienne du plan (ABC) est de la forme :

$-\frac{11}{4}x - \frac{9}{4}y + z + d = 0$

$A \in (ABC)$ donc $-\frac{11}{4} \times 2 - \frac{9}{4} + 3 + d = 0$; on a $d = \frac{19}{4}$

$-\frac{11}{4}x - \frac{9}{4}y + z + \frac{19}{4} = 0$ est une équation cartésienne du plan (ABC).

Exercice 6

$\begin{cases} x - 3y + 2z + 6 = 0 \\ 2x + 5y - z - 9 = 0 \end{cases}$

Posons $z = \lambda$

On a : $\begin{cases} x - 3y = -6 - 2\lambda \\ 2x + 5y = 9 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$ puis

: $\begin{cases} x = -\frac{7}{11}\lambda - \frac{3}{11} \\ y = \frac{5}{11}\lambda + \frac{21}{11} \\ z = \lambda \end{cases}$

Donc, une représentation paramétrique de (D) est :

$\begin{cases} x = -\frac{7}{11}\lambda - \frac{3}{11} \\ y = \frac{5}{11}\lambda + \frac{21}{11} \\ z = \lambda \end{cases}$ avec λ un réel

Exercice 7

1) $\vec{n}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (P'). Si (P') et (P) sont parallèles, alors $\vec{n}$ est aussi un vecteur normal au plan (P).

Donc (P): $2x - y + z + d = 0$

$A \in (P) \Leftrightarrow d = 3$ donc une équation cartésienne du plan (P) est : $2x - y + z + 3 = 0$

Exercice 8

1) $\vec{n}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{n'}\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ sont des vecteurs normaux respectifs au plans (P) et (P').

   $\frac{-3}{2} \neq \frac{4}{-1}$ alors $\vec{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ ne sont pas colinéaires donc (P) et (P') sont sécants.

2) $\vec{n} \cdot \overrightarrow{n'} = 0$ alors $\vec{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ ne sont orthogonaux donc (P) et (P') sont orthogonaux.

Exercice 9

1) C(1 ;1 ;0) ; H(0 ;1 ;1) et I(0 ;0 ;$\frac{1}{2}$)

$\overrightarrow{CH}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{HI}\begin{pmatrix}0\\-1\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

Soit $\vec{n}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ un vecteur normal au plan (CHI).

On a : $\vec{n}.\overrightarrow{CH} = \vec{n}.\overrightarrow{HI} = 0$ donc $\begin{cases}-x+z=0\\-y-\frac{1}{2}z=0\end{cases}$

Si $z = 2$, alors $y = -1$ et $x = 2$

Donc $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$ un vecteur normal au plan (CHI).

2) Une équation cartésienne du plan (CHI) est : $2x - y + 2z - 1 = 0$

Exercice 10

a) (D_1): $\begin{cases}x = 2-k\\y = 4k\\z = 3+2k\end{cases}$

b) $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\3\\5\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (L). Comme (L) et (D_2) sont paralléles, alors $\vec{v}$ est également un vecteur directeur de (D_2). Une équation paramétrique de (D_2) est : $\begin{cases}x = 2+2k\\y = 3k\\z = 3+5k\end{cases}$

c) $\vec{u}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (D_3). Une équation paramétrique de (D_3) est : $\begin{cases}x = 2\\y = k\\z = 3\end{cases}$

Exercice 11

Une équation cartésienne du plan (ABC) est : $\frac{1}{2}x + y - z - \frac{11}{2} = 0$

Une équation paramétrique de (PQ) est : $\begin{cases} x = -5 + 5k \\ y = -2 + 6k \\ z = -5 + 2k \end{cases}$

a) On détermine la valeur de k et on obtient les coordonnées du point I, intersection de la droite (PQ) et du plan (ABC) a : I $(\frac{-15}{13} ; \frac{10}{13} ; \frac{-45}{13})$

Erreur sur les coordonnées (exercice à reformuler à la prochaine édition)

Exercice 12

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires alors $\frac{1}{2-m} = \frac{m}{-3} = \frac{m-1}{-2}$ donc $m = 3$.

Pour $m = 3$, (D_1) et (D_2) sont parallèles.

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux alors $\vec{u}.\vec{v} = 0$, donc $m = -\frac{1}{2}$.
  Pour $m = -\frac{1}{2}$, (D_1) et (D_2) sont orthogonaux.

Exercice 13

$\vec{v}\begin{pmatrix} -2 \\ m-1 \\ -2 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à (P_m) et $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ m \\ m-2 \end{pmatrix}$

$\vec{u}.\vec{v} = 0 \Leftrightarrow m = 1$ ou $m = 2$

- Si $m = 1$ ou $m = 2$ alors (D_m) et (P_m) sont parallèles.
- Si $m \neq 1$ ou $m \neq 2$ alors (D_m) et (P_m) sont secants.

Exercice 14

Les droites (D_1) et (D_2) ont pour vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\-4\\-1\end{pmatrix}$.

$\frac{1}{-2} \neq \frac{-4}{1}$ donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires, alors (D_1) et (D_2) sont sécantes ou non coplanaires.

(D_1) et (D_2) ont un point commun si et seulement s'il existe un couple $(t; k)$ de nombres réels tel que : $\begin{cases} 2-2k=7+t \\ 1+k=3-4t \\ k=-1-t \end{cases}$

Des deux dernières relations, on tire : t = 1 et k = -2. Ces valeurs ne vérifient pas la première relation. Ce système n'a pas de solution, donc Les droites (D_1) et (D_2) ne sont pas coplanaires.

1) $(P): 2x-y+z-5=0$
2) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0\\-2\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-2\\1\\-3\end{pmatrix}$

Soit $\vec{n}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ un vecteur normal au plan (ABC).

On a : $\vec{n}.\overrightarrow{AB} = \vec{n}.\overrightarrow{AC} = 0$ donc $\begin{cases} -2y-2z=0 \\ -2x+y-3z=0 \end{cases}$

Si $z=-1$, alors $y = 1$ et $x=2$

Donc $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ un vecteur normal au plan (ABC).

Une équation cartésienne du plan $(P') =$ (ABC) est : $2x+y-z+1=0$

Exercice 15

On considère le repère $(B; \overrightarrow{BI}; \overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BF})$

$F(0; 0; 1); I(1; 0; 0); M\left(\frac{1}{2}; 1; 1\right); D(-1; 1; 0)$ et $L(1; 0; 1)$

On a : $\overrightarrow{FM}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\1\\0\end{pmatrix}; \overrightarrow{DL}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{FI}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$.

$\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (FMI).

$\vec{n}$ et $\overrightarrow{DL}$ ne sont pas colinéaires donc (DL) n'est pas perpendiculaire au plan (FMI).

Exercice 16

1) $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ un vecteur normal au plan (P).

$\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (D).

$\vec{u}.\vec{v} = -3$. Comme $\vec{u}.\vec{v} \neq 0$ donc (D) et (P) sont sécants.

2) 1-t-2t-1-3 = 0 donc t= -1. On a donc : I(2 ; -2 ; -1).

Exercice 17

1) Les points $A(3; 5; 1)$ et $B(5; 3; 2)$ appartiennent aux trois droites $(D), (L)$ et (H) donc ces trois droites sont confondues. (On aurait pu utiliser un point et un vecteur directeur)
2) (Q): $\begin{cases}16x - 2y - 11z = 0\\ 14x - y - 10z = 0\end{cases}$ et (S): $\frac{x-3}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-4}{4}$

Les points de coordonnées $(3; 2; 4)$ et (0 ; 0 ; 0) appartiennent respectivement à (Q) et à (S), donc les deux systèmes représentent la même droite.

Exercice 18

1) Réponse : D : $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 + t \\ z = -3 - 3t \end{cases}$
2) Réponse : D
3) Réponse B :$\frac{3}{\sqrt{11}}$

Exercice 19

On a : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

1) Une équation cartésienne du plan (ABC) est : $5x - 2y + z - 13 = 0$
2) $BC^2 = AB^2 + AC^2$ donc ABC est rectangle en A.
   L'aire $\mathcal{A}$ de ABC est : $\mathcal{A} = \frac{1}{2} \times AB \times AC = \frac{\sqrt{30}}{2}$
3) $d(D; (ABC)) = \frac{|5\times3-2\times(-2)+1\times5-13|}{\sqrt{5^2+(-2)^2+2^2}} = \frac{\sqrt{33}}{3}$
4) Le volume $\mathcal{V}$ du tétraèdre $ABCD$ est : $\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \mathcal{A} \times h$
   $h = d(D; (ABC))$ donc $\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{30}}{2} \times \frac{\sqrt{33}}{3} = \frac{\sqrt{110}}{6}$

Exercice 20

$\vec{n}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{n'}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont des vecteurs normaux respectifs de (P)et (P').

1) $\vec{n}.\overrightarrow{n'} = 0$ donc (P) et (P') sont perpendiculaires.
2) $B(-\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}; 0)$ et $C(0; -\frac{1}{3}; \frac{1}{3})$ sont deux points de la droite (D), de plus *B* et *C* appartiennent aux deux plans (P)et (P'), donc (P)et (P') sont sécants selon la droite (D).

3) $AH = d(A, (P)) = \frac{2}{\sqrt{6}}$

$AH' = d\big(A, (P')\big) = \frac{2}{\sqrt{3}}$

$AK^2 = AH^2 + HK^2 = AH^2 + AH'^2 = \frac{4}{6} + \frac{4}{3} = 2$

$AK = \sqrt{2}$

4) Soit $M(-\frac{1}{3} + t; -\frac{1}{3}; t)$ un point de (D)

$\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} -\frac{1}{3}+t \\ -\frac{4}{3} \\ t-1 \end{pmatrix}$

$$f(t) = \sqrt{(-\frac{1}{3} + t)^2 + (-\frac{4}{3})^2 + (t-1)^2} = \sqrt{2t^2 - \frac{8}{3}t + \frac{26}{9}}$$

$f(t)$ est la distance AM lorsque M parcourt (D)

Le minimum de $f(t)$ est la distance AK.

$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \dfrac{2t - \frac{4}{3}}{\sqrt{2t^2 - \frac{8}{3}t + \frac{26}{9}}}$

f atteint son minimum relatif en $\frac{2}{3}$ et il vaut $\sqrt{2}$.

Donc la distance $AK = \sqrt{2}$.

Exercice 21

a) (D) : $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 4 - 2t \\ z = 2 - 2t \end{cases}$

- Dans (XOY) , $z = 0$, donc $t = 1$. On a : $x = 2$ et $y = 2$.

$(D) \cap (XOY) = A(2; 2; 0)$

- Dans (XOZ) , $y = 0$, donc $t = 2$. On a : $x = 3$ et $z = -2$.

$(D) \cap (XOY) = B(3; 0; -2)$

- Dans (YOZ) , $x = 0$, donc $t = -1$. On a : $y = 6$ et $z = 4$.

$(D) \cap (XOY) = A(0; 6; 4)$

b) (D) : $\begin{cases} x = 3 \\ y = \frac{9}{2} - 3t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$

- Dans (XOY) , $z = 0$, donc $t = -\frac{1}{2}$.
  On a : $x = 3$ et $y = 6$.

$(D) \cap (XOY) = A(3; 6; 0)$

- Dans (XOZ) , $y = 0$, donc $t = \frac{3}{2}$. On a :
  $x = 3$ et $z = 4$.

$(D) \cap (XOY) = B(3; 0; 4)$

- Dans (YOZ) , $x = 0$, donc (D) est parallèle à (XOY)

Exercice 22

1) (D) : $\begin{cases} x = -7 + t \\ y = 2t \\ z = 4 - 2t \end{cases}$
2) $H(-5; 4; 0)$
3) $d\big(A; (P)\big) = AH = \sqrt{(-5+7)^2 + 4^2 + (-4)^2} = 6$
4) $d\big(A; (P)\big) = \frac{|1\times(-7)+(-2)\times 4-3|}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}} = 6$

Exercice 23

Si (P) est perpendiculaires à (P_1) et (P_2) alors la droite d'intersection (D) de (P_1) et (P_2) est perpendiculaire à (P).

$$(D): \begin{cases} x - 2y + z + 5 = 0 \\ 4x + y - z - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (D): \begin{cases} x = \frac{1}{9}t - \frac{1}{9} \\ y = \frac{5}{9}t + \frac{22}{9} \\ z = t \end{cases}$$

$\vec{v}\begin{pmatrix} \frac{1}{9} \\ \frac{5}{9} \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (D) donc $\vec{v}$ est un vecteur normal à (P).

On a donc $(P): \frac{1}{9}x + \frac{5}{9}y + z - \frac{2}{3} = 0$.

Exercice 24

Méthode 1

$M(t; -1; 1-2t)$ un point de (D)

$\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} t+1 \\ -2 \\ -1-2t \end{pmatrix}$

$f(t) = \sqrt{(t+1)^2 + (-2)^2 + (-1-2t)^2} = \sqrt{5t^2 + 6t + 6}$

$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{5t+3}{\sqrt{5t^2+6t+6}}$

f atteint son minimum relatif en $-\frac{3}{5}$ et il vaut $\frac{\sqrt{105}}{5}$

Donc la distance de (D) à A est $\frac{\sqrt{105}}{5}$

Méthode 2

a) $(P): x - 2z + 5 = 0$

b) $t - 2(1-2t) + 5 = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{3}{5}$

Donc $H(-\frac{3}{5}; -1; \frac{11}{5})$

c) La distance du point A à la droite (D) est AH

$\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix} \frac{2}{5} \\ -2 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ donc $AH = \sqrt{\frac{21}{5}} = \frac{\sqrt{105}}{5}$

Exercice 25

1) Le point $A(1; 1; 1)$ appartient à (P_m) pour $m = -8$ ou $m = 2$.

2) $(P_1) : \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}z - 3 = 0$ et $(P_{-4}) : 4x - 5y - 2z - 3 = 0$

Les plans (P_1) et (P_{-4}) ont pour vecteurs normaux respectifs $\vec{n}\begin{pmatrix}\frac{1}{4}\\0\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{n'}\begin{pmatrix}4\\-5\\-2\end{pmatrix}$

Les vecteurs $\vec{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ ne sont pas colinéaires, donc les plans (P_1) et (P_{-4}) sont sécants.

(D): $\begin{cases}\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}z-3=0\\4x-5y-2z-3=0\end{cases} \Leftrightarrow (D)$: $\begin{cases}x=-2t+12\\y=-2t+9\\z=t\end{cases}$

3) $(P_0): -y-3=0$
$y=-3$, alors $t=6$
$B(0;-3;6)$

4) $\frac{1}{4}m^2(0)+(m-1)(-3)+\frac{1}{2}m(6)-3=0$ donc pour tout nombre réel m, $B \in (P_m)$

5) Soit C un point appartenant à (P_m), pour tout nombre réel m.
On a $C \in (P_1) \cap (P_{-4})$ donc $C \in (D)$.
On a donc $C \in (P_0) \cap (D)$, alors $C = B$.
B est donc l'unique point appartenant à (P_m), pour tout nombre réel m.

1 **Exercice 2**

.a) $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan d'équation $8x+9y+5z-11=0$ et les coordonnées de I vérifient l'équation $8x+9y+5z-11=0$, donc
$8x+9y+5z-11=0$ est une équation cartésienne de (P).
b) On a :
$E(0;0;1)$; $H(0;1;1)$; $F(1;0;1)$; $C(1;1;0)$ et $D(0;1;0)$

$(EH):\begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 1 \end{cases}$

$(FE):\begin{cases} x = -t \\ y = 0 \\ z = 1 \end{cases}$ $\qquad (CD):\begin{cases} x = -t \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$

Les coordonnées de J vérifient l'équation de la droite (EH) et du plan (P)

Les coordonnées de K vérifient l'équation de la droite (FE) et du plan (P)

Les coordonnées de L vérifient l'équation de la droite (CD) et du plan (P)

2.a)

- Les coordonnées de J et de I vérifient l'équation paramétrique: $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}t \\ z = t \end{cases}$

Ce système est bien une représentation paramétrique de la droite (IJ)

- Les coordonnées de k et de L vérifient l'équation paramétrique: $\begin{cases} x = \frac{3}{4} - \frac{1}{2}t \\ y = t \\ z = 1 - t \end{cases}$

Ce système est bien une représentation paramétrique de la droite (KL)

b) Les droites (IJ) et (KL) ont pour vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}\begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

$\frac{-\frac{1}{2}}{-1} \neq \frac{1}{\frac{1}{3}}$ donc $\overrightarrow{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires, alors (IJ) et (KL) sont sécantes ou non coplanaires.

(IJ) et (KL) ont un point commun si et seulement s'il existe un couple $(t;k)$ de nombres réels tel que : $\begin{cases} 1-t=\frac{3}{4}-\frac{1}{2}k \\ \frac{1}{3}+\frac{1}{3}t=k \\ t=1-k \end{cases}$

On obtient $(t;k)=(\frac{1}{2};\frac{1}{2})$, donc $O(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{2})$.

SITUATION COMPLEXE

Pour vérifier si l'écran est conforme, je vais utiliser la géométrie analytique de plan pour déterminer la distance AK.

- Je vais déterminer la distance AH
- je vais déterminer la distance AH'
- je vais déterminer la distance AK
- je vais vérifier si la distance AK est comprise entre 1 et 1,5 pouce

    - $AH=d(A,(P))=\frac{2}{\sqrt{6}}$
    - $AH'=d(A,(P'))=\frac{2}{\sqrt{3}}$
    - $AK^2=AH^2+HK^2=AH^2+AH'^2=\frac{4}{6}+\frac{4}{3}=2$

      $AK=\sqrt{2}$

      $\sqrt{2}\in[1;1{,}5]$, donc l'écran est conforme.

6 PRIMITIVES D'UNE FONCTION

EXERCICES DE FIXATION

I) Définition et premières propriétés

Exercice 1

g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme toute fonction polynôme et polynôme et pour tout nombre réel *x*, on a : *g*'(x) = $3x^2 + 2x - 12$. Ce qui donne : *g*'(x) = *f*(x). La fonction g est donc une primitive de *f* sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2

G ; H ; Q.

Propriété 1

Exercice 3
f ; v

Exercice 4

1. Toute fonction dérivable sur un intervalle I admet une primitive sur I. VRAI

2. Une fonction qui n'est pas continue sur un intervalle n'admet pas de primitive sur cet intervalle. FAUX

Propriété 2

Exercice 5
Les fonctions G et H définies sur $\mathbb{R}$ par :
G(x) = $\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 6$ et H(x) = $\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2$.

Propriété 3

Exercices 6

Réponds par vrai ou par faux

1- Si deux fonctions continues *f* et g sur $\mathbb{R}$ différent d'une constante non nulle, alors toute primitive de *f* est une primitive de g sur $\mathbb{R}$.	FAUX
2- Si *f* est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, alors il existe une primitive F sur $\mathbb{R}$ et une seule telle que F(0) = 0.	VRAI

Exercice 7

1) G(x) = $x^2 - x + 5$
2) H(x) = $x^2 - x + \frac{3}{2}$.

II) Primitives de fonctions usuelles

Exercices 8

Exercice 1

Dans chacun des cas suivants, détermine les primitives sur]0 ; +∞[de la fonction *f*.

a) F(x) = $\frac{1}{4}x^4$+ c ; b) F(x) = $\frac{3x\sqrt[3]{x}}{4} + c$;

c) F(x) = $-\frac{1}{4x^4}$ + c ; d) F(x) = $\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}} + c$.

Exercice 9

a) F(x) = $2\sqrt{x} + c$; b) F(x) = $\frac{2}{3}x\sqrt{x}$+ c ; F(x) = $-$cosx + c ; d) F(x) = $-$sinx + c.

III) Propriétés

Propriété 1

Exercice 10

a) F(x) = $\frac{1}{2}x^2 - \cos x$; b) F(x) = $\frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{3}x\sqrt{x}$;
c) F(x) = $\sin x + \cos x$.

Exercice 11

a) F(x) = $-7\cos x$; b) F(x) = $-\frac{4}{3}x^3$;
c) F(x) = $-\frac{5}{x}$; d) F(x) = $\frac{18}{4}x^4$.

Exercice 12

a) F(x) = $\frac{8}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 + 3x$;
b) F(x) = $3x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{7}{2}x^2 - 9x$; c) F(x) = $-4\cos x + \frac{3}{x}$.

Propriété 2.
Exercice 13

a) F(x) = cos2x ; b) F(x) = $\frac{2}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}}$; c) F(x) = $\frac{1}{3x+1}$.

IV) Tableau récapitulatif des primitives

Exercice 14

a) F(x) = $\frac{1}{4}(x^2 - x + 6)^4$; b) F(x) = $-\frac{1}{2}\frac{1}{(x^2+3x+3)^2}$;
c) F(x) = $2\sqrt{x^2+x+1}$;
d) F(x) = .$\frac{-\cos^4 x}{4}$

EXERCICES DE RENFORCEMENT / D'APPROFONDISSEMENT

Exercice 1

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \in [0;1[\\ 1 \text{ si } x = 1 \end{cases}$$

Faisons un raisonnement par l'absurde. Supposons que *f* admette une primitive F sur [0 ; 1].

F est dans ce cas dérivable sur [0 ; 1] de dérivée nulle sur [0 ; 1[et est par conséquent constante sur l'intervalle [0 ; 1[. Il existe donc une constante C telle que : $\forall x \in [0;1[$,
F(x) = C. F étant dérivable sur [0 ; 1] est continue sur [0 ; 1] et par suite : $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} F(x) = F(1)$. D'où :
F(1) = C. Par suite F est constante sur l'intervalle [0 ; 1]. On en déduit que la fonction f est nulle sur [0 ; 1]. D'où contradiction, car $f(1) = 1$. La fonction f n'admet donc pas de primitive sur l'intervalle [0 ; 1].

Remarque

On a l'exemple d'une fonction f qui n'est pas continue sur l'intervalle [0 ; 1] et qui n'admet pas de primitive sur cet intervalle. Cependant, il existe des fonctions qui ne sont pas continues sur un intervalle et qui admettent des primitives sur cet intervalle.

Exercice 2

On vérifie que F est dérivable sur $\mathbb{R}$.
. Sur $]-\infty; 0], F(x) = -x^2$ et $f(x) = -2x$

$\forall x \in]-\infty; 0], F'(x) = f(x)$, donc F est une primitive de f sur $]-\infty; 0]$.

Sur $[0; +\infty[, F(x) = x^2$ et $f(x) = 2x$

$\forall x \in [0; +\infty[, F'(x) = f(x)$, donc F est une primitive de f sur $[0; +\infty[$.

F est donc une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3

a) F(x) = $x^3 - 2x^2 - 7x + C$; b) F(x) = $-x^5 + x^3 + 8x + C$.

Exercice 4

F(x) = $\frac{1}{12}x^{12} + \frac{1}{4}x^8 + \frac{1}{4}x^4 + C$; b) F(x) = $\frac{-2}{3(3x-2)^2}$.

Exercice 5

b) F(x) = $\frac{-2}{x^2+x-2} + C$; b) F(x) = $\sqrt{sinx}$ +C

Exercice 6

F$(x) = \frac{1}{3}sin3x - \frac{1}{2}sinx + c$

$F\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow c = \frac{\sqrt{2}}{12}$, donc la primitive de f telle que $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$ est

$F(x) = \frac{1}{3}sin3x - \frac{1}{2}sinx + \frac{\sqrt{2}}{12}$.

Exercice 7

$h(x) = 2x - 3 + \frac{2}{(x-1)^2}$

2) $H(x) = x^2 - 3x - \frac{2}{x-1} + c$

$H(0) = 0 \Leftrightarrow c = -2$

Donc la primitive de h telle que $H(0) = 0$ est telle que :

$$H(x) = x^2 - 3x - \frac{2}{x-1} - 2$$

Exercice 8

1) $D =]-\infty; 3]$
2) $\forall x \in D, F(x) = (\frac{2}{5}x^2 - \frac{2}{5}x - \frac{12}{5})\sqrt{3-x}$.
3) $\forall x \in D, G(x) = (\frac{2}{5}x^2 - \frac{2}{5}x - \frac{12}{5})\sqrt{3-x} + \frac{24}{5}$.

Exercice 9

$$f(x) = \frac{a(x+3)+b}{(x+3)^3} = \frac{ax+3a+b}{(x+3)^3}$$

$a = 2$; $6 + b = 3$ donc $b = -3$.

$f(x) = \frac{2}{(x+3)^2} - \frac{3}{(x+3)^3}$.

2. $F(x) = -\frac{2}{x+3} + \frac{3}{2} \times \frac{1}{(x+3)^2} + c$.
3. $F(-2) = 0$

$$\frac{-1}{2} + c = 0$$

$c = \frac{1}{2}$.

Donc : $F(x) = -\frac{2}{x+3} + \frac{3}{2(x+3)^2} + \frac{1}{2}$.

Exercice 10

1) Il faut utiliser la relation : Pour tout nombre réel x, $\sin^3 x = \sin x(1-\cos^2 x)$.
2) Les primitives H sur $\mathbb{R}$ de h sont définies par : $H(x) = -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + C$, où C est une constante réelle.
3) $H(x) = -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} - \frac{2}{3}$.

SITUATIONS COMPLEXES

Exercices 11

Pertinence

Je vais utiliser la leçon sur les primitives et l'étude d'une fonction numérique.

Pour juger de l'efficacité du bactéricide, je vais :

- Déterminer la primitive f de f' qui prend la valeur 10^3 en 0 ;
- Etudier les variations de f ;
- Déterminer le maximum de f ;
- Comparer ce maximum à 460000 ;
- Conclure.

Utilisation des outils mathématiques

(corrigé abrégé)

$f'(t) = -10^3 t^2 + 310^2 t + 10^4$ donc $f(t) = -\frac{10^3}{3}t^3 + 1500t^2 + 10000t + C$

$f(0) = 10^3$ donc $C = 10^3$. Donc

$$f(t) = -\frac{10^3}{3}t^3 + 1500t^2 + 10000t + 10^3$$

Étudions le signe de f ’(t)
Deux zéros pour f’(t) qui sont : 5 et -2

t	$-\infty$		-2		5		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(t)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

f(5) = $\frac{140500}{3}$ soit environ 46833

Cohérence

Interprétation
Après l’introduction du bactéricide, le maximum de la population est d’environ 46 833 bactéries.

46 833 $<$ 460 000. Donc ce bactéricide est efficace

7 CONIQUES

EXERCICES DE FIXATION

Distance d'un point à une droite

1.

A(-3 ; $\sqrt{2}$)
(D) : x + $2\sqrt{2}$y - 1 = 0
d(A, (D)) = $\frac{|-3+4-1|}{\sqrt{1+8}}$ =0

2.

E(2 ; -1)
(Δ) : y = x (la 1ère bissectrice)
(Δ) : x - y = 0
d(A, (Δ)) = $\frac{|2-(-1)|}{\sqrt{1+1}} = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

PARABOLE

Exercices de fixation

3

1. faux
2. vrai
3. $y^2 = -2x$
   Axe focal : droite de repère (O, $\vec{\imath}$)
   faux
4. $y^2 = 2(-1)x$
   Foyer : F($\frac{-1}{2}$; 0)
   Vrai
5. $y^2 = 4x$
   $y^2 = 2(2)x$
   Foyer : F(1 ; 0)
   vrai
6. $y^2 = 4x$
   $x^2 = 2(2)y$
   Directrice (D) : y = -1
   Faux

4

Directrice (D) : x - 4 = 0

Foyer F(0 ; 2)
Soit M(x ; y) un point du plan et H(4 ; y) son projeté orthogonal sur (D).

$\overrightarrow{FM}\begin{vmatrix} x \\ y-2 \end{vmatrix}$

$\frac{MF}{d(M,(D))} = 1 \iff MF^2 = (d(M, (D)))^2$

$\iff x^2 + (y-2)^2 = \left(\frac{|x-4|}{\sqrt{1}}\right)^2$

$\iff x^2 + (y-2)^2 = (x - 4)^2$

$\iff x^2 + y^2 - 4y + 4 = x^2 - 8x + 16$

$\iff y^2 + 8x - 4y - 12 = 0$

Méthode 2

Directrice (D) : x = 4
Foyer F(0 ; 2)
S : sommet de la parabole
P : paramètre de la parabole

La directrice est parallèle à l'axe des ordonnées
D'où l'axe focal est la droite d'équation : y = 2
$y_S = 2$
$x_S = \frac{0+4}{2} = 2$
P = |4 - 0| = 4 : paramètre de la parabole

F est situé à gauche de (D)
D'où : dans le repère $(S, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$,
la parabole a pour équation réduite : $Y^2 = -2pX$ où : $\begin{cases} X = x-2 \\ Y = y-2 \end{cases}$

$Y^2 = -8X$

Dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$,
$(y-2)^2 = -8(x-2)$
$y^2 - 4y + 4 = -8x + 16$
$y^2 + 8x - 4y - 12 = 0$

5
Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

(P) : $y^2 = x$

$y^2 = 2\frac{1}{2}x$

Axe focal : droite de repère $(O, \vec{\imath})$.

Foyer : le point F($\frac{1}{4}$, 0)

Directrice : la droite d'équation x = $\frac{-1}{4}$.

6

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$).

(P) : $x^2 = y$

$x^2 = 2\frac{1}{2}y$

Axe focal : droite de repère (O, $\vec{\jmath}$).

Foyer : le point F(0 ; $\frac{1}{4}$)

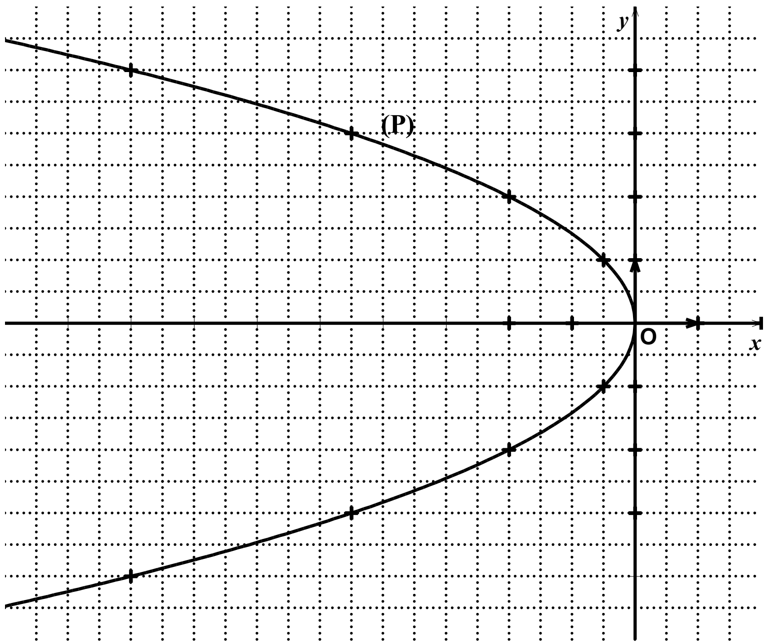
Directrice : la droite d'équation y = $\frac{-1}{4}$.

7

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$).

(P) : $y^2 = -2x$

x	0	$\frac{-1}{2}$	-2	$\frac{-9}{2}$	-8
y	0	1	2	3	4
		-1	-2	-3	-4



ELLIPSE
Exercices de fixation

8

1. Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
   1. vrai
   2. faux
   3. faux
   4. faux
   5. vrai
   6. faux

9

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Conique (C)

Excentricité de (C) : $e = \frac{1}{3}$

Directrice la droite (D) : x = 9

Un foyer, le point F(1 ; -1).

M(x, y) un point de (C).

$MF = \frac{1}{3}d(M, (D))$

$MF^2 = \frac{1}{9}(d(M, (D)))^2$

$9[(x - 1)^2 + (y + 1)^2] = \left(\frac{|x-4|}{\sqrt{1^2+0^2}}\right)^2$

$9[(x - 1)^2 + (y + 1)^2] = (x - 4)^2$

$9[x^2 - 2x + 1 + y^2 + 2y + 1] = x^2 - 8x + 16$

$8x^2 + 9y^2 - 10x + 18y + 2 = 0$

10

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Conique (C) : $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$

(C) : $\frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$

$c = \sqrt{16 - 9} = \sqrt{7}$

$e = \frac{\sqrt{7}}{4}$

Axe focal : droite de repère $(O, \vec{i})$.

Les sommets : les points A(4 ; 0), A'(-4 ; 0), B(0 ; 3) et B'(0 ; -3).

Les foyers : Les points F($\sqrt{7}$; 0) et F'($\sqrt{7}$; 0).

Les directrices : les droites d'équations : x = $\frac{16}{\sqrt{7}}$ et x = - $\frac{16}{\sqrt{7}}$.

C'est-à-dire : x = $\frac{16\sqrt{7}}{7}$ et x = - $\frac{16\sqrt{7}}{7}$.

11

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$).

Conique (C) : $x^2 + \frac{y^2}{8} = 1$

(C) : $\frac{x^2}{1^2} + \frac{y^2}{(2\sqrt{2})^2} = 1$

$c = \sqrt{8-1} = \sqrt{7}$

$e = \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{14}}{4}$

Axe focal : droite de repère (O, $\vec{j}$).

Les sommets : les points A(1 ; 0), A'(-1 ; 0), B(0 ; $2\sqrt{2}$) et B'(0 ; -$2\sqrt{2}$).

Les foyers : Les points F(0 ; $\sqrt{7}$) et F'(0 ; $\sqrt{7}$).

Les directrices : les droites d'équations : y = $\frac{3}{\sqrt{7}}$ et y = - $\frac{3}{\sqrt{7}}$.

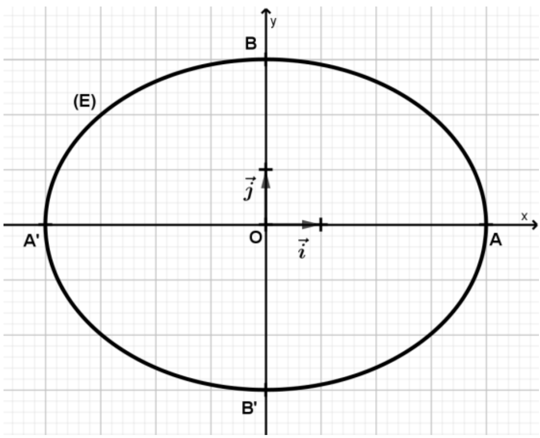
C'est-à-dire : y = $\frac{3\sqrt{7}}{7}$ et y = - $\frac{3\sqrt{7}}{7}$.

12

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$).

(C) : $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$

Les sommets : les points A(4 ; 0), A'(-4 ; 0), B(0 ; 3) et B'(0 ; -3).



HYBERBOLE
Exercices de fixation

13

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
Conique (C)
Excentricité de (C) : $e = 4$
Directrice la droite (D) : $y = 3$
Un foyer, le point $F(5 ; 2)$.
$M(x, y)$ un point de (C).

$MF = 4d(M, (D))$
$MF^2 = 16(d(M, (D)))^2$
$(x - 5)^2 + (y - 2)^2 = 16(y - 3)^2$

$x^2 - 10x + 25 + y^2 - 4y + 4 = 16(y^2 - 6y + 9)$
$x^2 + 15y^2 - 10x + 92y - 115 = 0$

14

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
Conique (C) : $x^2 - \frac{y^2}{8} = 1$
(C) : $\frac{x^2}{1^2} - \frac{y^2}{(2\sqrt{2})^2} = 1$
$c = \sqrt{8+1} = 3$
$e = \frac{3}{1} = 3$
Axe focal : droite de repère $(O, \vec{\imath})$.
Les sommets : les points $A(1 ; 0)$ et $A'(-1 ; 0)$.

Les foyers : Les points $F(0 ; 3)$ et $F'(0 ; -3)$.
Les directrices : les droites d'équations : $x = \frac{1}{3}$ et $x = -\frac{1}{3}$.
Les asymptotes : les droites d'équations : $y = 2\sqrt{2}x$ et $y = -2\sqrt{2}x$.

15

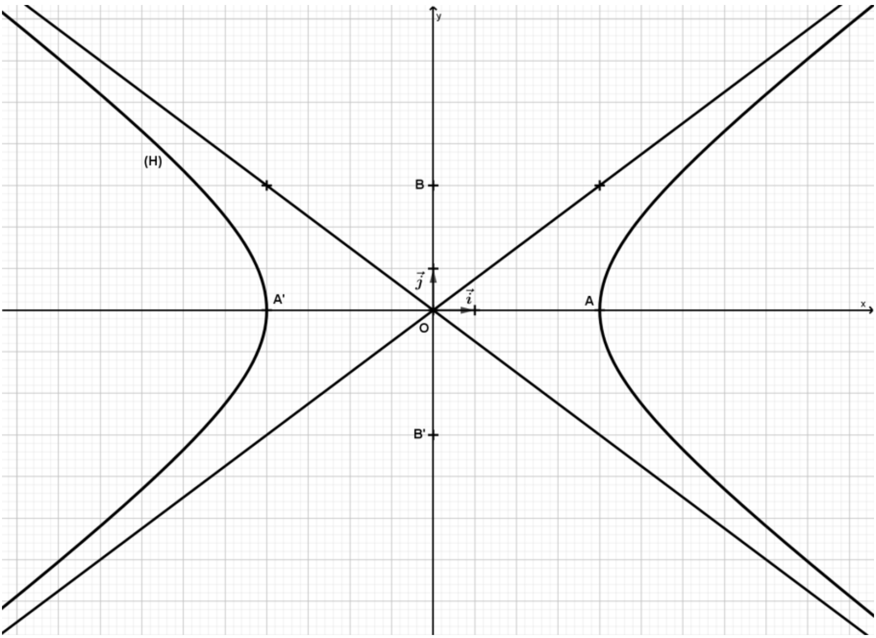
Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
Conique (C) : $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$
(C) : $\frac{x^2}{4^2} - \frac{y^2}{3^2} = 1$
$c = \sqrt{16+9} = 5$
$e = \frac{5}{4}$

Axe focal : droite de repère (O, $\vec{\imath}$).
Les sommets : les points A(4 ; 0) et A'(-4 ; 0)

Les foyers : Les points F(5 ; 0) et F'(-5 ; 0).
Les directrices : les droites d'équations : x = $\frac{16}{5}$ et x = - $\frac{16}{5}$.
Les asymptotes : les droites d'équations : y = $\frac{3}{4}$x et y = -$\frac{3}{4}$x.

16

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$).
(C) : $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$
(C) est une hyperbole
Les sommets : les points A(4 ; 0) et A'(-4 ; 0).
Les asymptotes : les droites d'équations : y = $\frac{3}{4}$x et y = -$\frac{3}{4}$x.



EXERCICES DE RENFORCEMENT

Exercice 1

1. $y^2 = x$ $y^2 = 2\frac{1}{2}x$ On a une parabole Paramètre : $\frac{1}{2}$ Sommet : O Axe focal : droite de repère $(O; \vec{\imath})$ Foyer : point $F(\frac{1}{4} ; 0)$ Directrice : droite (D) : $x = -\frac{1}{4}$	2. $y^2 = -x$ $y^2 = 2\frac{-1}{2}x$ On a une parabole Paramètre : $\frac{1}{2}$ Sommet : O Axe focal : droite de repère $(O; \vec{\imath})$ Foyer : point $F(\frac{-1}{4} ; 0)$ Directrice : droite (D) : $x = \frac{1}{4}$
3. $y = x^2$ $x^2 = y$ $x^2 = 2\frac{1}{2}y$ On a une parabole Paramètre : $\frac{1}{2}$ Sommet : le point O Axe focal : la droite de repère $(O ; \vec{\jmath})$ Foyer : le point $F(0 ; \frac{1}{4})$ Directrice : la droite (D) : $y = -\frac{-1}{4}$	4. $y = -x^2$ $x^2 = -y$ $x^2 = 2\frac{-1}{2}y$ On a une parabole Paramètre : $\frac{1}{2}$ Sommet : O Axe focal : la droite de repère $(O ; \vec{\jmath})$ Foyer : le point $F(0 ; \frac{-1}{4})$ Directrice : la droite (D) : $y = \frac{1}{4}$
5. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ $\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$ On a une ellipse Demi distance focale c : $c = \sqrt{25 - 16}$ $= 3$ Excentricité e : $e = \frac{3}{5}$ Sommets : A(5 ; 0), A'(-5 ; 0), B(0 ; 3) et B'(0 ; -3) Axe focal : (AA') Foyers : F(3 ; 0) et F'(-3 ; 0) Directrices : (D) : $x = \frac{25}{3}$ et (D') : $x = \frac{-25}{3}$	6. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$ $\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{5^2} = 1$ On a une ellipse Demi distance focale c : $c = \sqrt{25 - 16}$ $= 3$ Excentricité e : $e = \frac{3}{5}$ Sommets : A(3 ; 0), A'(-3 ; 0), B(0 ; 5) et B'(0 ; -5) Axe focal : (BB') Foyers : F(0 ; 3) et F'(0 ; -3) Directrices : (D) : $y = \frac{25}{3}$ et (D') : $y = \frac{-25}{3}$

7. $x^2 + 2y^2 = 1$ $\frac{x^2}{1^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = 1$ On a une ellipse Demi distance focale c : c = $\sqrt{1-\frac{1}{2}}$ $= \frac{\sqrt{2}}{2}$ Excentricité e : e = $\frac{\sqrt{2}}{2}$ Sommets : A(1 ; 0), A'(-1 ; 0), B(0 ; $\frac{\sqrt{2}}{2}$) et B'(0 ; -$\frac{\sqrt{2}}{2}$) Axe focal : (AA') Foyers : F($\frac{\sqrt{2}}{2}$; 0) et F'(-$\frac{\sqrt{2}}{2}$; 0) Directrices : (D) : x = $\sqrt{2}$ et (D') : x =-$\sqrt{2}$	8. $x^2 - y^2 = 1$ $\frac{x^2}{1^2} - \frac{y^2}{1^2} = 1$ On a une hyperbole Demi distance focale c : c = $\sqrt{1+1}$ $= \sqrt{2}$ Excentricité e : e = $\sqrt{2}$ Sommets : A(1 ; 0) et A'(-1 ; 0) Axe focal : (AA') Foyers : F($\sqrt{2}$; 0) et F'(-$\sqrt{2}$; 0) Directrices : (D) : x =$\frac{\sqrt{2}}{2}$ et (D') : x =-$\frac{\sqrt{2}}{2}$ Asymptotes : (Δ) : y = x et (Δ') : y = -x
9. $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{144} = 1$ $\frac{x^2}{5^2} - \frac{y^2}{12^2} = 1$ On a une hyperbole Demi distance focale c : c = $\sqrt{25+144}$ = 13 Excentricité e : e = $\frac{13}{25}$ Sommets : A(5 ; 0) et A'(-5 ; 0) Axe focal : (AA') Foyers : C(13 ; 0) et C'(-13 ; 0) Directrices : (D) : x =$\frac{25}{13}$ et (D') : x =-$\frac{25}{13}$ Asymptotes : (Δ) : y=$\frac{12}{5}$x et (Δ') : y = -$\frac{12}{5}$x	10. $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$ $\frac{x^2}{8^2} - \frac{y^2}{6^2} = 1$ On a une hyperbole Demi distance focale c : c = $\sqrt{64+36}$ = 10 Excentricité e : e = $\frac{10}{8} = \frac{5}{4}$ Sommets : A(8 ; 0) et A'(-8 ; 0) Axe focal : (AA') Foyers : C(10 ; 0) et C'(-10 ; 0) Directrices : (D) : x =$\frac{32}{5}$ et (D') : x =-$\frac{32}{5}$ Asymptotes : (Δ) : y = $\frac{3}{4}$ x et (Δ') : y = -$\frac{3}{4}$x

Exercice 2

1. $y = x^2 + x + 1$
   On a une parabole
   $y = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + 1 - \frac{1}{4}$
   $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = 2\frac{1}{2}(y - \frac{3}{4})$
   Sommet : $S(\frac{-1}{2} ; \frac{3}{4})$
   En posant : $\begin{cases} X = x + \frac{1}{2} \\ Y = y - \frac{3}{4} \end{cases}$
   Dans le repère $(S; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ la parabole a pour équation :
   $X^2 = 2\frac{1}{2}y$
   Paramètre : $\frac{1}{2}$
   Axe focal : la droite de repère $(S ; \vec{\jmath})$

   Foyer : le point $F(0 ; \frac{1}{4})$
   Directrice : la droite (D) :
   $Y = \frac{-1}{4}$

   $\begin{cases} x = X - \frac{1}{2} \\ y = Y + \frac{3}{4} \end{cases}$
   Dans le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$
   Foyer : $F(0-\frac{1}{2} ; \frac{1}{4}+\frac{3}{4})$, $F(-\frac{1}{2} ; 1)$
   Directrice : (D) : $y = Y + \frac{3}{4}$
   $y = \frac{1}{2}$

2. $y^2 + y - 2x = 0$
   $\left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = 2x + \frac{1}{4}$
   $\left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = 2(x - \frac{1}{8})$
   Sommet : $S(\frac{1}{8} ; \frac{-1}{2})$
   En posant : $\begin{cases} X = x - \frac{1}{8} \\ Y = y + \frac{1}{2} \end{cases}$
   Dans le repère $(S; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ la parabole a pour équation : $Y^2 = 2X$
   On a une parabole
   Paramètre : 1
   Axe focal : la droite de repère $(S ; \vec{\imath})$

   Foyer : le point $F(\frac{1}{2} ; 0)$
   Directrice : la droite (D) : $X = \frac{-1}{2}$

   $\begin{cases} x = X + \frac{1}{8} \\ y = Y - \frac{1}{2} \end{cases}$
   Dans le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$
   Foyer : $F(\frac{1}{2} + \frac{1}{8}; 0 + \frac{1}{2})$, $F(\frac{5}{8} ; \frac{1}{2})$
   Directrice : (D) : $x = X + \frac{1}{8}$
   $x = \frac{-3}{8}$

3. $y = \sqrt{2x + 3}$
   $y^2 = 2x + 3$ et $y \geq 0$
   $y^2 = 2x + 3$ et $y \geq 0$
   $y^2 = 2(x + \frac{3}{2})$ et $y \geq 0$
   Sommet : $S(\frac{-3}{2} ; 0)$
   On a un arc de parabole
   Paramètre : 1
   Axe focal : la droite de repère $(S ; \vec{\imath})$
   Foyer : $F(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}; 0)$, $F(-1 ; 0)$

4. $x^2 + x + 2y^2 + y = 0$
   $x^2 + x + 2(y^2 + \frac{y}{2}) = 0$
   $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + 2\left(y + \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$
   $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + 2\left(y + \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{3}{8}$
   $\frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}{\frac{3}{8}} + \frac{\left(y+\frac{1}{4}\right)^2}{\frac{3}{16}} = 1$
   $\frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\right)^2} + \frac{\left(y+\frac{1}{4}\right)^2}{\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2} = 1$

Directrice : (D) : $x = \frac{-1}{2} - \frac{3}{2}$ $x = -2$	On a une ellipse Centre : le point $K(\frac{-1}{2} ; \frac{-1}{4})$ Demi distance focale c : $c = \sqrt{\frac{3}{8} - \frac{3}{16}}$ $= \sqrt{\frac{3}{16}}$ $= \frac{\sqrt{3}}{4}$ Excentricité e : $e = \frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ Sommets : $A(\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2}; 0 - \frac{1}{4})$, $A'(-\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2}; 0 - \frac{1}{4})$, $B(0 - \frac{1}{2} ; \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{4})$ et $B'(0 - \frac{1}{2} ; -\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{4})$ Soit $A(\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} ; \frac{-1}{4})$, $A'(-\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2}; -\frac{1}{4})$, $B(\frac{-1}{2} ; \frac{\sqrt{3}-1}{4})$ et $B'(\frac{-1}{2} ; -\frac{\sqrt{3}-1}{4})$ Axe focal : (AA') Foyers : $A(\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{2}; 0 - \frac{1}{4})$, $A'(-\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{2}; 0 - \frac{1}{4})$ Soit $A(\frac{\sqrt{3}-2}{4}; \frac{-1}{4})$, $A'(\frac{-\sqrt{3}-2}{4} ; \frac{-1}{4})$, Directrices : (D) : $x = \frac{3}{8} \times \frac{4}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2}$ et (D') : $x = -\frac{3}{8} \times \frac{4}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2}$ Soit (D) : $x = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$ et (D') : $x = \frac{-\sqrt{3}-1}{2}$
5. $y = -2\sqrt{-x^2 + x}$ $y^2 = 4(-x^2 + x)$ et $y \geq 0$ $4(x^2 - x) + y^2 = 0$ et $y \geq 0$ $4(x - \frac{1}{2})^2 + y^2 = 1$ et $y \geq 0$ $\frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}{\frac{1}{4}} + y^2 = 1$ et $y \geq 0$ $\frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} + y^2 = 1$ et $y \geq 0$ On a un arc d'ellipse Demi distance focale c : $c = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$	6. $x^2 - y^2 + x + y + 1 = 0$ $x^2 + x - (y^2 - y) = -1$ $(x + \frac{1}{2})^2 - (y - \frac{1}{2})^2 = -1$ $-(x + \frac{1}{2})^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = 1$ On a une hyperbole Demi distance focale c : $c = \sqrt{2}$ Excentricité e : $e = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$ Centre : $K(\frac{-1}{2} ; \frac{1}{2})$ Sommets : $B(\frac{-1}{2} ; \frac{1}{2}+1)$ et $B'(\frac{-1}{2} ; \frac{1}{2}-1)$ $B(\frac{-1}{2} ; \frac{3}{2})$ et $B'(\frac{-1}{2} ; \frac{-1}{2})$ Directrices : (D) : $y = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}$

Excentricité e = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ Centre le point K($\frac{1}{2}$; 0) Sommets : A($\frac{1}{2}$+$\frac{1}{2}$; 0), A'($\frac{-1}{2}$+$\frac{1}{2}$; 0), B($\frac{1}{2}$; 1) et B'($\frac{1}{2}$; -1) Soit A(1 ; 0), A'(0 ; 0), B($\frac{1}{2}$; 1) et B'($\frac{1}{2}$; -1) Axe focal : (BB') Foyers : F($\frac{1}{2}$; $\frac{\sqrt{3}}{2}$) et F'($\frac{1}{2}$; -$\frac{\sqrt{3}}{2}$) Directrices : (D) : x = $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \times \frac{2}{\sqrt{3}}$ (D') : x = $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \times \frac{2}{\sqrt{3}}$ (D) : x = $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ (D') : x = $\frac{1-\sqrt{3}}{2}$	(D') : y = $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}$ (D) : y = $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$ (D') : y = $\frac{1-\sqrt{2}}{2}$ Asymptotes : (Δ) : y - $\frac{1}{2}$ = x + $\frac{1}{2}$ (Δ') : y - $\frac{1}{2}$ = -(x + $\frac{1}{2}$) (Δ) : y = x + 1 (Δ') : y = -x

Exercice 3

a) $x^2 + 2x + y^2 + 3x - 2y + 1 = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 + (y - 1)^2 = -1 + 1 + \frac{25}{2}$

$\Leftrightarrow \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 + (y - 1)^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2$

On a un cercle

Centre : K($\frac{-5}{2}$; 1)

Rayon : $\frac{5}{2}$

b) ($a \geq 0$ et $b \geq 0$ et $a+b = 0$) $\Leftrightarrow$ $a = 0$ et $b = 0$

$(x - y + 1)^2 + (x + y - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow (x - y + 1)^2 = 0$ et $(x + y - 1)^2 = 0$

$\Leftrightarrow x - y + 1 = 0$ et $x + y - 1 = 0$

On a l'intersection de deux droites d'équations respectives : $x - y + 1 = 0$ et $x + y - 1 = 0$, soit le point de coordonnées (0 ;1)

c) $x(x - 1) + (y - 2)(y - 3) = 0$

$x^2 - x + y^2 - 5y + 6 = 0$

$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = - 6 + \frac{1}{4} + \frac{25}{4}$

$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$

On a le cercle de centre K($\frac{1}{2}$; $\frac{5}{2}$) et de rayon $\frac{\sqrt{2}}{2}$

4

(P) parabole de Foyer F(1 ; 2) et (D) directrice

a) (D) : $x = 2$

Soit M(x , y) un point du plan

$M \in (P) \Leftrightarrow \frac{MF}{d(M,(D))} = 1$

$\Leftrightarrow MF^2 = (d(M, (D)))^2$

$\Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y-2)^2 = \left(\frac{|x-2|}{\sqrt{1}}\right)^2$

$\Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = (x - 2)^2$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = x^2 - 4x + 4$

$\Leftrightarrow y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$

b) (D) : $y = \frac{1}{2}$

Soit M(x , y) un point du plan

$M \in (P) \Leftrightarrow \frac{MF}{d(M,(D))} = 1$

$\Leftrightarrow MF^2 = (d(M, (D)))^2$

$\Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y-2)^2 = \left|y - \frac{1}{2}\right|^2$

$\Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = (y - \frac{1}{2})^2$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = y^2 - y + \frac{1}{4}$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 3y + \frac{19}{4} = 0$

c) (D) : $y = 0$

Soit M(x , y) un point du plan

$M \in (P) \Leftrightarrow \frac{MF}{d(M,(D))} = 1$

$\Leftrightarrow MF^2 = (d(M, (D)))^2$

$\Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y-2)^2 = |y|^2$

$\Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = y^2$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = y^2$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 4y + 5 = 0$

d) (D) : $x = 0$

Soit M(x , y) un point du plan

$M \in (P) \Leftrightarrow \frac{MF}{d(M,(D))} = 1$

$\Leftrightarrow MF^2 = (d(M, (D)))^2$

$\Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y-2)^2 = |x|^2$

$\Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = x^2$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = x^2$

$\Leftrightarrow y^2 - 2x - 4y + 5 = 0$

5

(P) : $y^2 - 6y + 2x + 10 = 0$

(P) est une parabole

* Pour $x = -5$, $y = 0$ ou $y = 6$
* Pour $x = -1$,

$y^2 - 6y - 2 + 10 = 0$

$y^2 - 6y + 8 = 0$

$(y - 2)(y - 4) = 0$ |2 est un zéro évident

$y = 2$ ou $y = 4$

* (P) : $y^2 - 6y + 2x + 10 = 0$

$y^2 - 6y = -2x - 10$

$(y - 3)^2 = -2x - 1$

$(y - 3)^2 = 2(-1)(x + \frac{1}{2})$

* (P) est une parabole de sommet $S(\frac{-1}{2} ; 3)$
* Excentricité e : $e = 1$
* Axe focal : droite de repère $(S ; \vec{i})$
* Foyer F, $F(\frac{-1}{2} - \frac{1}{2}; 3 + 0)$ Soit $F(-1 ; 3)$

*Directrice (D) : $x = \frac{-1}{2} + \frac{1}{2} = 0$, soit $x = 0$

* Tangente (T_2) à (P) au point de coordonnées $(-1 ; 2)$

$(y - 3)(2 - 3) = -(x + \frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{2})$

$-y + 3 = -x$

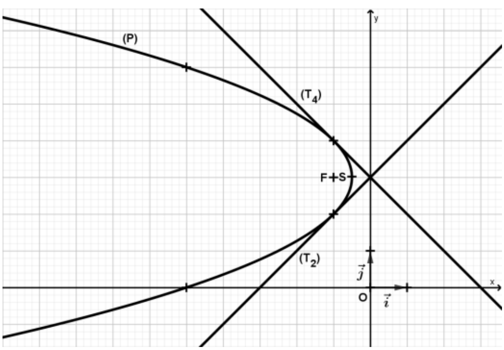
$y = x + 3$

Tangente (T_4) à (P) au point de coordonnées $(-1 ; 4)$

$(y - 3)(4 - 3) = -(x + \frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{2})$

$y - 3 = -x$

$y = -x + 3$



6

$3x^2 + 4y^2 + x - 39 = 0$

$3(x^2 + \frac{1}{3}x) + 4y^2 = 39$

$3\left(x + \frac{1}{6}\right)^2 + 4y^2 = 39 + \frac{1}{12}$

$3\left(x + \frac{1}{6}\right)^2 + 4y^2 = \frac{469}{12}$

$\frac{\left(x+\frac{1}{6}\right)^2}{\frac{469}{36}} + \frac{y^2}{\frac{469}{48}} = 1$

$\frac{\left(x+\frac{1}{6}\right)^2}{\left(\frac{\sqrt{469}}{6}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{\sqrt{469}}{4\sqrt{3}}\right)^2} = 1$

On a une ellipse

Demi distance focale c : c = $\sqrt{\frac{469}{36} - \frac{469}{48}} = \frac{\sqrt{469}}{12}$

Excentricité e : $\frac{\sqrt{469}}{12} \times \frac{6}{\sqrt{469}} = \frac{1}{2}$

Centre : le point K($\frac{-1}{6}$; 0)

Sommets : les points A($\frac{-1}{6} + \frac{\sqrt{469}}{6}$; 0), A'($\frac{-1}{6}$ - $\frac{\sqrt{469}}{6}$; 0), B($\frac{-1}{6}$; 0+$\frac{\sqrt{469}}{4\sqrt{3}}$) et B'($\frac{-1}{6}$; 0-$\frac{\sqrt{469}}{4\sqrt{3}}$)

A($\frac{-1+\sqrt{469}}{6}$; 0), A'($\frac{-1-\sqrt{469}}{6}$; 0), B($\frac{-1}{6}$; $\frac{\sqrt{469}}{4\sqrt{3}}$) et B'($\frac{-1}{6}$; $\frac{\sqrt{469}}{4\sqrt{3}}$)

Foyers : les points F($\frac{-1}{6} + \frac{\sqrt{469}}{12}$; 0) et F'($\frac{-1}{6}$ - $\frac{\sqrt{469}}{12}$; 0)

F($\frac{\sqrt{469}-2}{12}$; 0) et F'(- $\frac{\sqrt{469}+2}{12}$; 0)

Directrices : (D) : x = - $\frac{1}{6}$ + $\frac{469}{36} \times \frac{12}{\sqrt{469}}$ et (D') : x = - $\frac{1}{6}$ - $\frac{469}{36} \times \frac{12}{\sqrt{469}}$

(D) : x = - $\frac{1}{6}$ + $\frac{\sqrt{469}}{3}$ et (D') : x = - $\frac{1}{6}$ - $\frac{\sqrt{469}}{3}$

(D) : x = $\frac{-1+2\sqrt{469}}{6}$ et (D') : x = $\frac{-1-2\sqrt{469}}{6}$

Pour x = 3, y = - $\frac{3}{2}$ ou y = $\frac{3}{2}$

* Tangente (T) au point de coordonnées (3 ; - $\frac{3}{2}$)

$3(x + \frac{1}{6})(3 + \frac{1}{6}) + 4y(-\frac{3}{2}) = \frac{469}{12}$

$3(6x + 1)(19) - 216y = 1407$

$342x - 216y = 1350$

$19x - 12y - 75 = 0$

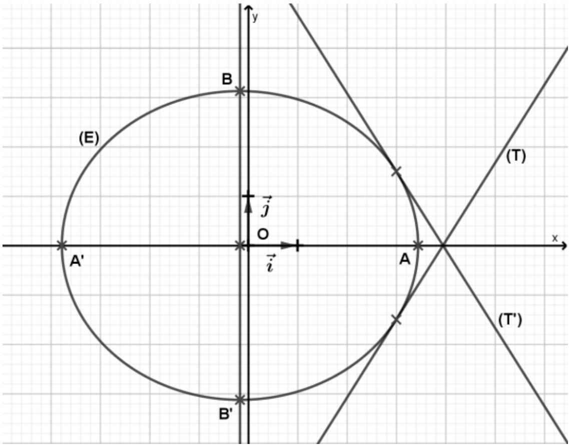
* Tangente (T') au point de coordonnées (3 ; $\frac{3}{2}$)

$3(x + \frac{1}{6})(3 + \frac{1}{6}) + 4y(\frac{3}{2}) = \frac{469}{12}$

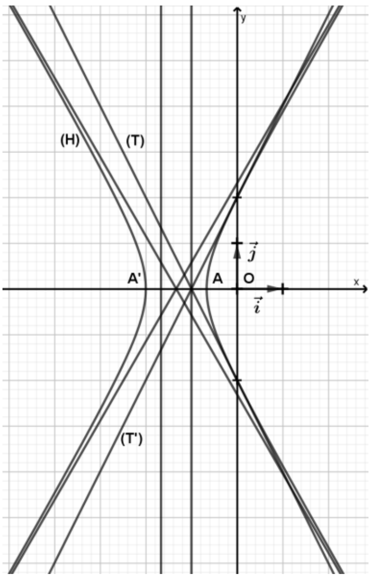
$3(6x + 1)(19) + 216y = 1407$

$342x + 216y = 1350$

$19x + 12y - 75 = 0$



7



(H) : $-3x^2 + y^2 - 8x - 4 = 0$

$-3x^2 + y^2 - 8x = 4$

$3x^2 - y^2 + 8x = -4$

$3(x^2 + \frac{8}{3}x) - y^2 = -4$

$3\left(x + \frac{4}{3}\right)^2 - y^2 = -4 + \frac{16}{3}$

$3\left(x + \frac{4}{3}\right)^2 - y^2 = \frac{4}{3}$

$\frac{\left(x+\frac{4}{3}\right)^2}{\frac{4}{9}} - \frac{y^2}{\frac{4}{3}} = 1$

$\frac{\left(x+\frac{4}{3}\right)^2}{\left(\frac{2}{3}\right)^2} - \frac{y^2}{\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2} = 1$

On a une hyperbole

Demi distance focale c : $c = \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{4}{3}} = \frac{4}{3}$

Excentricité e : $\frac{4}{3} \times \frac{3}{2} = 2$

Centre : le point $K(\frac{-4}{3}\ ;\ 0)$

Sommets : les points $A(\frac{-2}{3} + \frac{2}{3};\ 0)$ et $A'(\frac{-4}{3} - \frac{2}{3};\ 0)$

$A(\frac{-2}{3}\ ;\ 0)$ et $A'(-2\ ;\ 0)$

Foyers : les points $F(\frac{-4}{3} + \frac{4}{3};\ 0)$ et $F'(\frac{-4}{3} - \frac{4}{3};\ 0)$

$F(0\ ;\ 0)$ et $F'(\frac{-8}{3}\ ;\ 0)$

Directrices : (D) : $x = -\frac{4}{3} + \frac{4}{9} \times \frac{3}{4}$ et (D') : $x = -\frac{4}{3} - \frac{4}{9} \times \frac{3}{4}$

(D) : $x = -1$ et (D') : $x = -\frac{5}{3}$

Asymptotes : $(\Delta) : y = \sqrt{3}(x + \frac{4}{3})$ et $(\Delta') : y = -\sqrt{3}(x + \frac{4}{3})$

$(\Delta) : y = \sqrt{3}x + \frac{4\sqrt{3}}{3}$ et $(\Delta') : y = -\sqrt{3}x - \frac{4\sqrt{3}}{3}$

* Pour $x = 0$, $y = -2$ ou $y = 2$

* Tangente (T) au point de coordonnées $(0\ ;\ -2)$

$3\left(x + \frac{4}{3}\right)^2 - y^2 = \frac{4}{3}$

$3(x + \frac{4}{3})(0 + \frac{4}{3}) - y(-2) = \frac{4}{3}$

$3(3x+4)(4) + 18y = 12$

$36x + 18y = -36$

$2x + y = -2$

* Tangente (T') au point de coordonnées (0 ; 2)

$3\left(x+\frac{4}{3}\right)^2 - y^2 = \frac{4}{3}$

$3(x+\frac{4}{3})(0+\frac{4}{3}) - y(2) = \frac{4}{3}$

$3(3x+4)(4) - 18y = 12$

$36x - 18y = -36$

$2x - y = -2$

Exercice 8

(E) : $|z + 1 - i| = 2\mathrm{re}(z)$

$|x+1+i(y-1)| = 2x$

$\sqrt{(x+1)^2+(y-1)^2} = 2x$

$(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 4x^2$ et $x \geq 0$

$3x^2 - 2x - (y - 1)^2 = 1$ et $x \geq 0$

$3\left(x-\frac{2}{3}\right)^2 - (y - 1)^2 = 1$ et $x \geq 0$

$\frac{\left(x-\frac{2}{3}\right)^2}{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} - \frac{(y-1)^2}{(1)^2} = 1$ et $x \geq 0$

On a une hyperbole

Demi distance focale c : $c = \sqrt{\frac{1}{3}+1} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

Excentricité e : $\frac{2\sqrt{3}}{3} \times 3 = 2\sqrt{3}$

Centre : le point K $(\frac{2}{3} ; 1)$

Axe focal : droite de repère $(K ; \vec{\imath})$

Sommets : les points $A(\frac{2}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3} ; 1)$ et $A'(\frac{2}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3} ; 1)$

$A(\frac{2+\sqrt{3}}{3} ; 1)$ et $A'(\frac{2-\sqrt{3}}{3} ; 1)$

Foyers : les points $F(\frac{2}{3} + \frac{2\sqrt{3}}{3} ; 1)$ et $F'(\frac{2}{3} - \frac{2\sqrt{3}}{3} ; 1)$

$F(\frac{2+2\sqrt{3}}{3} ; 1)$ et $F'(\frac{2-2\sqrt{3}}{3} ; 1)$

Directrices : (D) : $x = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$ et (D') : $x = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$

(D) : $x = \frac{4+\sqrt{3}}{6}$ et (D') : $x = \frac{4-\sqrt{3}}{6}$

Asymptotes : (Δ) : $y-1 = \sqrt{3}(x - \frac{2}{3})$ et (Δ') : $y-1 = -\sqrt{3}(x - \frac{2}{3})$

(Δ) : $y = \sqrt{3}x - \frac{2\sqrt{3}}{3} + 1$ et (Δ') : $y = -\sqrt{3}x + \frac{2\sqrt{3}}{3} + 1$

Exercice 10

Notons (D) la droite d'équation : $x - 2y + 5 = 0$ et $M(x\,;\,y)$ un point de la courbe donnée

a) $(\Gamma) : (x - 2y + 5)^2 = 5[(x - 1)^2 + (y + 3)^2]$

Soit F le point de coordonnées (1 ; -3)

$$(x - 2y + 5)^2 = 5[(x - 1)^2 + (y + 3)^2] \Leftrightarrow 5MF^2 = 5\left(\frac{|x-2y+5|}{\sqrt{5}}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow MF = \frac{|x-2y+5|}{\sqrt{5}} \quad |a \geq 0 \text{ et } b \geq 0 : a^2 = b^2 \Leftrightarrow a = b$$

$$\Leftrightarrow MF = d(M, (D))$$

D'où, (Γ) est la parabole de Foyer F et de directrice (D).

b) $(\Gamma) : (x - 2y + 5)^2 = 5[x^2 + y^2 - 4x + 2y + 5]$

$$(x - 2y + 5)^2 = 5[(x - 2)^2 + (y + 1)^2 - 1 - 5 + 5]$$

$$(x - 2y + 5)^2 = 5[(x - 2)^2 + (y + 1)^2]$$

Soit F le point de coordonnées (2 ; -1)

$$(x - 2y + 5)^2 = 5[(x - 2)^2 + (y + 1)^2] \Leftrightarrow 5MF^2 = 5\left(\frac{|x-2y+5|}{\sqrt{5}}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow MF = \frac{|x-2y+5|}{\sqrt{5}} \quad |a \geq 0 \text{ et } b \geq 0 : a^2 = b^2 \Leftrightarrow a = b$$

$$\Leftrightarrow MF = d(M, (D))$$

D'où, (Γ) est la parabole de foyer F et de directrice (D).

c) $(\Gamma) : (x - 2y + 5)^2 = (x - 1)^2 + (y + 4)^2$

Soit F le point de coordonnées (1 ; -4)

$$(x - 2y + 5)^2 = (x - 1)^2 + (y + 4)^2 \Leftrightarrow MF^2 = 5\left(\frac{|x-2y+5|}{\sqrt{5}}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow MF = \sqrt{5}\,\frac{|x-2y+5|}{\sqrt{5}}$$

$$\Leftrightarrow MF = \sqrt{5}d(M, (D))$$

D'où, (Γ) est l'hyperbole de Foyer F, de directrice (D) et d'excentricité $\sqrt{5}$.

d) $(\Gamma) : (x - 2y + 5)^2 = 10[(x - 1)^2 + (y + 2)^2]$

Soit F le point de coordonnées (1 ; -2)

$$(x - 2y + 5)^2 = 10[(x - 1)^2 + (y + 3)^2] \Leftrightarrow 10MF^2 = 5\left(\frac{|x-2y+5|}{\sqrt{5}}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow MF = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{|x-2y+5|}{\sqrt{5}}$$

$$\Leftrightarrow MF = \frac{\sqrt{2}}{2} \times d(M, (D))$$

D'où, (Γ) est l'ellipse de Foyer F, de directrice (D) et d'excentricité $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

10

$(\Gamma) : (x - 1)^2 + (y - 4)^2 = 2(x + 4)^2$

Notons (D) la droite d'équation : $x+4 = 0$ et $M(x ; y)$ un point de la courbe donnée

Soit F le point de coordonnées (1 ; -3)

$(x - 1)^2 + (y - 4)^2 = 2(x + 4)^2 \Leftrightarrow MF^2 = 2(d(M,(D)))^2$

$\Leftrightarrow MF = \sqrt{2} \times d(M , (D))$

D'où, (Γ) est l'hyperbole de Foyer F, de directrice (D) et d'excentricité $\sqrt{2}$.

11

$(\Gamma) : x^2 - y^2 + 4x - 2y + 3 = 0$

$(x + 2)^2 - (y + 1)^2 = -3 + 4 - 1$

$(x + 2)^2 = (y + 1)^2$

$x + 2 = -(y + 1)$ ou $x + 2 = y + 1$

$y = -x - 3$ ou $y = x + 1$

$(D) : y = -x - 3$, $(D') : y = x + 1$

$(\Gamma) = (D) \cup (D')$

12

$(\Gamma) : y^2 - 4y + 4 = 0$

$(y - 2)^2 = 0$

$y - 2 = 0$

$(D) : y = 2$

$(\Gamma) = (D)$

13

$(C) : x^2 - 3y^2 + 8x + 12y + 16 = 0$

1. * $x^2 + 8x - 3(y^2 - 4y) = -16$

   $(x + 4)^2 - 3(y - 2)^2 = -16 + 16 - 12$

   $(x + 4)^2 - 3(y - 2)^2 = -12$

   $-\frac{(x+4)^2}{(2\sqrt{3})^2} + \frac{(y-2)^2}{2^2} = 1$

   * (Γ) est une hyperbole de centre le pont K(-4 ; 2)
   * Demi distance focale c : $c = \sqrt{12 + 4} = 4$

     Foyers : les points F(-4 ; 2+4) et F'(-4 ; 2-4)

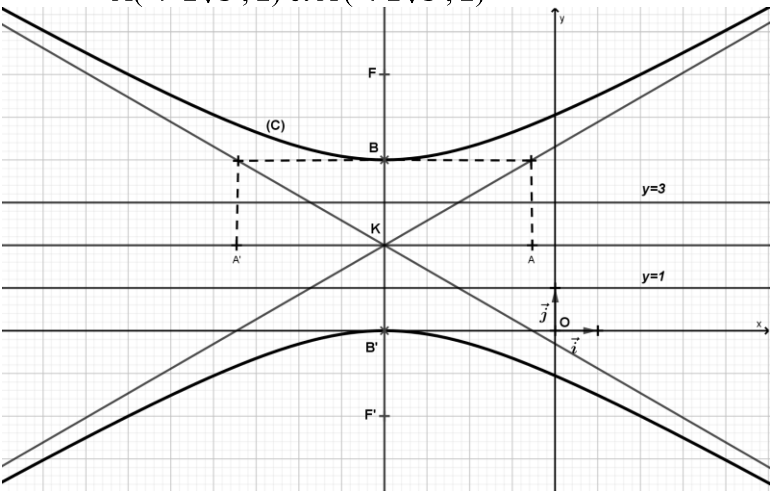
     F(-4 ; 6) et F'(-4 ; -2)
   * Directrices : les droites $(D) : y = 2 + \frac{4}{4}$ et $(D') : y = 2 - \frac{4}{4}$

     $(D) : y = 3$ et $(D') : y = 1$
   * Sommets : les points B(-4 ; 2+2) et B'(-4 ; 2-2)

     B(-4 ; 4) et B'(-4 ; 0)

Autres points intervenant dans la construction des asymptotes :

$A(-4+2\sqrt{3}\ ;\ 2)$ et $A'(-4-2\sqrt{3}\ ;\ 2)$



2. Excentricité de (C) e : $e = \frac{4}{2} = 2$

   P = F

   L'ensemble de points M du plan tels que : MP = 2d(M, (D)) est l'hyperbole (C).

14

$(C_m) : 2mx^2 - (m-1)y^2 - 8mx + 12m - 2 = 0$

1. * m = 0 :

   $(C_m) : y^2 - 2 = 0$

   $y = \sqrt{2}$ ou $y = -\sqrt{2}$

   (C_0) est une réunion de deux droites

 * m = 1 :

   $(C_1) : 2x^2 - 8x + 10 = 0$

   $x^2 - 4x + 5 = 0$

   $(x - 2)^2 + 1 = 0$ (impossible)

   $(C_1) = \varnothing$

 * $m = \frac{1}{2}$:

   $(C_{\frac{1}{2}}) : x^2 + \frac{1}{2}y^2 - 4x + 4 = 0$

   $(x^2 - 4x) + \frac{1}{2}y^2 = -4$

   $(x - 2)^2 + \frac{1}{2}y^2 = -4 + 4$

$(x - 2)^2 + \frac{1}{2}y^2 = 0$

$x = 2$ et $y = 0$

$(C_{\frac{1}{2}}) = \{K\}$ où $K(2 ; 0)$

2. $m \neq 0$ et $m \neq 1$ et $m \neq \frac{1}{2}$

$2m(x^2 - 4x) - (m-1)y^2 = -12m + 2$

$2m(x - 2)^2 - (m-1)y^2 = -12m + 2 + 8m$

$2m(x - 2)^2 - (m-1)y^2 = -(4m - 2)$

<u>Cas 1</u> : $m \in]1 ; +\infty[$

$2m > 0$, $m-1 > 0$ et $4m - 2 > 0$

$$\frac{(x-2)^2}{\frac{-(4m-2)}{2m}} - \frac{y^2}{\frac{-(4m-2)}{m-1}} = 1$$

$$-\frac{(x-2)^2}{\frac{4m-2}{2m}} + \frac{y^2}{\frac{4m-2}{m-1}} = 1$$

$$-\frac{(x-2)^2}{\left(\sqrt{\frac{2m-1}{m}}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\sqrt{\frac{4m-2}{m-1}}\right)^2} = 1$$

(C_m) est une hyperbole

Centre : le point $K(2 ; 0)$

Axe focal : droite de repère $(K, \vec{j})$

Demi distance focale c : $c = \sqrt{\frac{2m-1}{m} + \frac{4m-2}{m-1}} = \sqrt{\frac{(2m-1)(3m-1)}{m(m-1)}}$

Excentricité e : $e = \sqrt{\frac{(2m-1)(3m-1)}{m(m-1)}} \times \sqrt{\frac{m-1}{4m-2}} = \sqrt{\frac{3m-1}{2m}}$

Sommets : les points $B\left(2 ; \sqrt{\frac{4m-2}{m-1}}\right)$ et $B'\left(2 ; -\sqrt{\frac{4m-2}{m-1}}\right)$

Foyers : les points $F\left(2 ; \sqrt{\frac{(2m-1)(3m-1)}{m(m-1)}}\right)$ et $F'\left(2 ; -\sqrt{\frac{(2m-1)(3m-1)}{m(m-1)}}\right)$

Directrices : les droites $(D_m) : y = \frac{4m-2}{m-1} \times \sqrt{\frac{m(m-1)}{(2m-1)(3m-1)}}$ et

$(D_m') : y = -\frac{4m-2}{m-1} \times \sqrt{\frac{m(m-1)}{(2m-1)(3m-1)}}$

$(D_m) : y = 2\sqrt{\frac{(2m-1)m}{(m-1)(3m-1)}}$ ou $(D_m') : y = -2\sqrt{\frac{(2m-1)m}{(m-1)(3m-1)}}$

Asymptotes : les droites $(\Delta_m) : y = \sqrt{\frac{4m-2}{m-1}} \times \sqrt{\frac{m}{2m-1}}(x-2)$ et

$(\Delta_m') : y = -\sqrt{\frac{4m-2}{m-1}} \times \sqrt{\frac{m}{2m-1}}(x-2)$

$$(\Delta_m) : y = \sqrt{\frac{2m}{m-1}}\,x - 2\sqrt{\frac{2m}{m-1}} \text{ et } (\Delta_m') : y = -\sqrt{\frac{2m}{m-1}}\,x + 2\sqrt{\frac{2m}{m-1}}$$

<u>Cas 2</u> : $m \in]\frac{1}{2} ; 1[$

$2m > 0$, $m-1 < 0$ et $4m-2 > 0$

$$\frac{(x-2)^2}{\frac{-4m+2}{2m}} - \frac{y^2}{\frac{-(4m-2)}{m-1}} = 1$$

$$-\frac{(x-2)^2}{\frac{4m-2}{2m}} - \frac{y^2}{\frac{-4m+2}{m-1}} = 1 \text{ (Impossible : somme de deux nombres négatifs)}$$

<u>Cas 3</u> : $m \in]0 ; \frac{1}{2}[$

$2m > 0$, $m-1 < 0$ et $4m-2 < 0$

$$\frac{(x-2)^2}{\frac{-(4m-2)}{2m}} - \frac{y^2}{\frac{-(4m-2)}{m-1}} = 1$$

$$\frac{(x-2)^2}{\frac{-(4m-2)}{2m}} + \frac{y^2}{\frac{4m-2}{m-1}} = 1$$

$$\frac{(x-2)^2}{\left(\sqrt{\frac{-(2m-1)}{m}}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\sqrt{\frac{4m-2}{m-1}}\right)^2} = 1$$

(C_m) est une ellipse

<u>Cas 4</u> : $m \in]-\infty ; 0[$

$2m < 0$, $m-1 < 0$ et $4m-2 < 0$

$$\frac{(x-2)^2}{\frac{-(4m-2)}{2m}} - \frac{y^2}{\frac{-(4m-2)}{m-1}} = 1$$

$$-\frac{(x-2)^2}{\frac{4m-2}{2m}} + \frac{y^2}{\frac{4m-2}{m-1}} = 1$$

$$-\frac{(x-2)^2}{\left(\sqrt{\frac{2m-1}{m}}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\sqrt{\frac{4m-2}{m-1}}\right)^2} = 1$$

(C_m) est une hyperbole

15

A et B sont des points tels que : A(1 ; 0) et B(0 ; 2).
Notons (P) la parabole cherchée.
Soit $y = ax + b$ l'équation de l'axe focal de (P), (a et b sont des nombres réels).
$(P) = (C_1) \cup (C_2)$
$(C_1) : y = ax + b + c\sqrt{x}$ où c est un nombre réel
$(C_2) : y = ax + b - c\sqrt{x}$

Prenons :
$H \in (C_1)$; $H \in (C_2)$ et $K \in (C_2)$

Soit f et g les fonctions définies sur $[0 ; +\infty[$ par : $f(x) = ax + b + c\sqrt{x}$ et $g(x) = ax + b + c\sqrt{x}$

* $f(0) = 2$
  $b = 2$
* $\forall x \in [0 ; +\infty[$, $g(x) = ax + 2 - c\sqrt{x}$
  $\forall x \in]0 ; +\infty[$;
  $g'(x) = a - \frac{c}{2\sqrt{x}}$
  $g'(1) = 0$
  $a - \frac{c}{2} = 0$
  $c = 2a$
  $g(1) = 0$
  $a + 2 - c = 0$
  $a + 2 - 2a = 0$
  $-a + 2 = 0$
  $a = 2$
  $c = 4$
* $(P) = (C_1) \cup (C_2)$
  $(C_1) : y = 2x + 2 + 4\sqrt{x}$
  $(C_2) : y = 2x + 2 - 4\sqrt{x}$
  $(P) : y = 2x + 2 + 4\sqrt{x}$ ou $y = 2x + 2 - 4\sqrt{x}$
  $y - 2x - 2 = 4\sqrt{x}$ ou $y - 2x - 2 = - 4\sqrt{x}$
  $(y - 2x - 2)^2 = (4\sqrt{x}y)^2$
  $y^2 + 4x^2 + 4 - 4xy - 4y + 8x = 16x$

  $(P) : 4x^2 + y^2 - 4xy - 8x - 4y + 4 = 0$

16

Ecrire $MO^2 = MA \times MB$ au lieu de $MO = MA \times MB$

$MO^2 = MA \times MB \Leftrightarrow MO^4 = MA^2 \times MB^2$
$MO^4 = x^4 + y^4 + 2x^2y^2$
$MA^2 \times MB^2 = x^4 + y^4 - 2x^2 + 2y2 + 2x^2y^2 + 1$
$MO^4 = MA^2 \times MB^2 \Leftrightarrow 2x^2 - 2y^2 + 1 = 0$ soit : $\frac{x^2}{\frac{1}{2}} - \frac{y^2}{\frac{1}{2}} = 1$ (Hyperbole équilatère)

17

Données manquantes dans l'énoncé (voir prochaine édition)

8 FONCTIONS LOGARITHMES

EXERCICES DE FIXATION

1 Définition et Propriétés

Exercice 1

1. La fonction ln est définie sur $]-\infty\ ;\ 0[$ — faux
2. La fonction ln est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$, — vrai
3. La fonction ln est décroissante sur $]0\ ;\ +\infty[$ — faux

Exercice 2

1. $(\ln)'(\frac{1}{3}) = 3$ — vrai
2. $\ln 6 < \ln 10$ — vrai
3. Si $0 < x < 6$, alors $\ln 6 < \ln x$ — faux

Exercice 3

1. * $\ln 4 + \ln 5 = \ln(4\times 5) = \ln(20)$

* $\ln\sqrt{3} + \ln\sqrt{12} = \ln(\sqrt{3} \times \sqrt{12}) = \ln(\sqrt{36}) = \ln 6$
* $\ln 8 + \ln\frac{1}{4} = \ln(8\times \frac{1}{4}) = \ln(2)$

2. $\ln(1+\sqrt{2}) + \ln(\sqrt{2} - 1) = \ln(\sqrt{2} - 1) + \ln(\sqrt{2} - 1)$

$= \ln[(\sqrt{2} - 1)\times(\sqrt{2} - 1)]$
$= \ln(2 - 1)$
$= \ln 1$
$= 0$

Exercice 4

* $\ln(4\times 9) = \ln 4 + \ln 5$
* $\ln(4\times \sqrt{2}) = \ln 4 + \ln\sqrt{2}$
* $\forall x\in]0\ ;\ +\infty[$, $\ln(7x) = \ln 7 + \ln x$

Propriétés

Exercice 5

	AFFIRMATIONS	REPONSES
a	$\ln(72) = 3\ln2 + 2\ln3$	vrai
b	$\ln\left(\frac{32}{343}\right) = 4\ln2 - 3\ln7$	faux
c	$\ln(0,8) = 2\ln2 - \ln5$	vrai
d	$\ln(625) = 5\ln4$	faux
e	$\ln\left(\sqrt{\frac{1}{18}}\right) = -\frac{1}{2}\ln2 + \ln3$	faux
f	$\ln(8^3) + \ln2 = 7\ln2$	faux

Exercice 6

- $A = \ln7 - \ln21$

$= \ln\left(\frac{7}{21}\right)$
$= \ln\left(\frac{1}{3}\right)$

- $B = 3\ln2 - \ln4$

$= 3\ln2 - 2\ln2$
$= \ln2$

- $C = 2\ln3 - \ln6 + \ln\frac{4}{3}$

$= \ln\left(\frac{9\times4}{6\times3}\right)$
$= \ln2$

II Étude de la fonction ln

Exercice 7

1. $5 < 7 \Rightarrow \ln5 < \ln7$
2. $\frac{1}{2} < \sqrt{3} \Rightarrow \ln\frac{1}{2} < \ln\sqrt{3}$
3. $29^2 = 841$ et $(4\sqrt{5})^2 = 400$

$(4\sqrt{5})^2 < 29^2 \Rightarrow 4\sqrt{5} \leq 29 \Rightarrow \ln4\sqrt{5} < \ln29$

Exercice 8

- $\ln(e^{-5}) = -5$
- $\ln(e^2) + [\ln(e)]^2 + 2\ln(e^3) = 2 + 1 + 6 = 9$
- $\ln(e^{-5}) + [\ln(e^3)]^2 + 2\ln(e^{-1}) = -5 + 9 - 2 = 2$

Exercice 9

Soit (C) la courbe représentative de la fonction ln dans un repère (O; I, J).

$\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

D'où, (C) admet en $+\infty$ une branche parabolique dans la direction de la droite (OI).

Exercice 10

	Affirmations	Réponses
a	$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} x\ln x = +\infty$	faux
b	$\lim\limits_{x \to 1} \frac{e\ln x}{x-1} = e$	vrai
c	$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2 \ln x}{x+1} = 0$	faux
d	$\lim\limits_{x \to +\infty} x\ln \frac{x+1}{x} = 1$	vrai

Exercice 11

a) $\forall x \in]0\,;+\infty[$, $x - \ln x = x(1 - \frac{\ln x}{x})$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} (1 - \frac{\ln x}{x}) = 1 \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} (x - \ln x) = +\infty$$

b) $$\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{\ln x} = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} (\ln x + \frac{1}{\ln x}) = +\infty$$

c) $$\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \ln x = -\infty \\ \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{1}{\ln x} = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} (\ln x + \frac{1}{\ln x}) = -\infty$$

Exercice 12

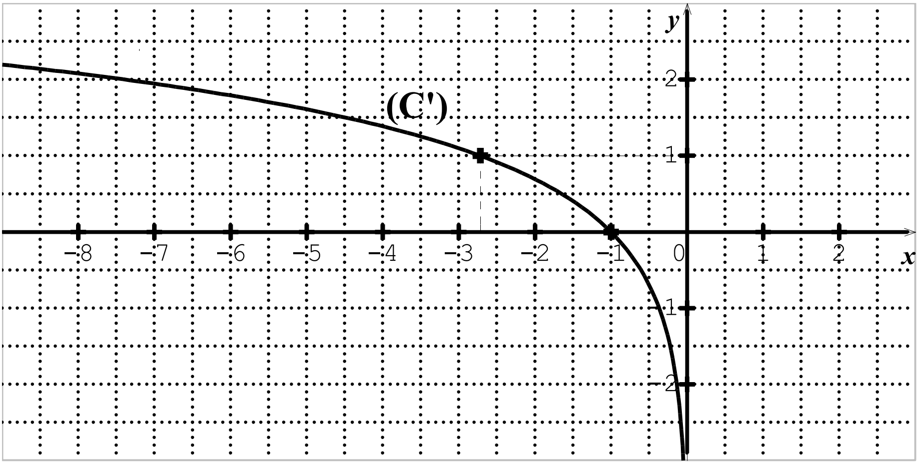
Soit (C) la courbe représentative de la fonction ln et (C') la courbe représentative de la fonction f.

(C) et (C') sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.

x	-1	-e	$-e^2$
f(x)	0	1	2

(C') admet en $-\infty$, une branche parabolique dans la direction de l'axe des abscisses.

L'axe des ordonnées est une asymptote



III Équations et inéquations faisant intervenir la fonction ln

Exercice 13

a) Contraintes sur l'inconnue

$1 - x > 0$

$x < 1$

$V_a =]-\infty ; 1[$

* $\ln(1-x) = -2 \Rightarrow 1-x = e^{-2}$

$\Rightarrow x = 1- e^{-2}$

* $1- e^{-2} \in V_a$

D'où, $S_a = \{1- e^{-2}\}$

b) Contraintes sur l'inconnue

$3x-4 > 0$ et $x^2 - 4 > 0$

$x > \frac{4}{3}$ et ($x < -2$ ou $x > 2$)

$V_b =]2\ ;+\infty[$

* $\ln(3x-4) = \ln(x^2 - 4) \Rightarrow 3x-4 = x^2 - 4 \Rightarrow x^2 - 3x = 0 \Rightarrow x(x - 3) = 0$

$\Rightarrow x = 0$ ou $x = 3$

* $0 \notin V_b$ et $3 \in V_a$

D'où, $S_b = \{3\}$

c) * $V_C =]0\ ;+\infty[$

* $2e\ln(x) + 1 = 0 \Rightarrow \ln x = -\frac{1}{2e}$

$\Rightarrow x = e^{\frac{-1}{2e}}$

$S_c = \{e^{\frac{-1}{2e}}\}$

d) * Contraintes sur l'inconnue

$x+5 > 0$ et $x - 2 > 0$

$x > -5$ et $x > 2$

$V_b =]2\ ;+\infty[$

* $\ln(x+5) = 2\ln 2 - \ln(x - 2) \Rightarrow \ln[(x+5)(x - 2)] = \ln 4 \Rightarrow (x+5)(x - 2) = 4$

$\Rightarrow x^2 + 3x - 14 = 0$

$\Delta = 9 - 4(-14) = 65$

$x=\frac{-3-\sqrt{65}}{2}$ ou $x=\frac{-3+\sqrt{65}}{2}$

D'où, $S_d = \{\frac{-3+\sqrt{65}}{2}\}$

e) $S_e = \{1\}$

<u>Exercice 14</u>

a) * Contraintes sur l'inconnue

$1 - x^2 > 0$

$-1 < x < 1$

$V_a =]-1\ ;1[$

* $\ln(1 - x^2) > 1 \Rightarrow 1 - x^2 > e$ (impossible car $1- x^2 < 1$)

$S_a = \varnothing$

b) * Contraintes sur l'inconnue

$x^2 - 4e^2 > 0$

$x < -2e$ ou $x > 2e$

$V_b =]-\infty\ ;-2e[\cup]2e\ ;+\infty[$

* $\ln(x^2 - 4e^2) < 1 \Rightarrow x^2 - 4e^2 < e \Rightarrow x^2 < 4e^2 + e \Rightarrow -\sqrt{4e^2+e} < x < \sqrt{4e^2+e}$

$* S_b =]-\infty ; -\sqrt{4e^2+e}[\cup]\sqrt{4e^2+e} ; +\infty[$

c) * Contraintes sur l'inconnue

x+e > 0 et x-e < 0

x > -e et x < e

$V_b =]-e ; e[$

* $\ln(x + e) + \ln(x - e) \leq 2 + \ln 3$

$\ln[(x + e)(x - e)] \leq 2 + \ln 3$

$x^2 - e^2 \leq e^{2+ln3}$

$x^2 \leq e^2 + 3e^2$

$x^2 \leq 4e^2$

$-2e \leq x \leq 2e$

$S_c =]-e ; e[$

d) * Contraintes sur l'inconnue

2-x > 0

x < 2

$V_b =]-\infty ; 2[$

* $\ln(2 - x) > 2$

$2 - x > e^2$

$x < 2-e^2$

$S_d =]-\infty ; 2-e^2[$

e) * Contraintes sur l'inconnue

1 < x < 2 et x > 0

$V_b =]1 ; 2[$

* $\ln\frac{x-2}{1-x} < \ln x$

$\frac{x-2}{1-x} < x$

$\frac{x-2}{1-x} - x < 0$

$\frac{x-2+x^2-x}{1-x} < 0$

$\frac{x^2-2}{x-1} > 0$

$S_e =]\sqrt{2} ; 2[$

<u>Exercice 15</u>

$1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n > 0,95$

$\left(\frac{3}{4}\right)^n < 0,05$

$n\ln\left(\frac{3}{4}\right) < \ln(0,05)$

$n > \frac{ln(0,05)}{ln\left(\frac{3}{4}\right)}$

Et, $\frac{ln(0,05)}{ln\left(\frac{3}{4}\right)} \approx 10,41$ (à 10^{-2} près)

n = 11

Exercice 16

1. $\forall x \in]\frac{2}{5} ; +\infty[$;

f(x) = ln(5x - 2)

IV Fonction du type lnou

Exercice 16

$f'(x) = \frac{5}{5x-2}$

2. $\forall x \in]0 ; 2[$;

$f(x) = \ln(2x - x^2)$

$f'(x) = \frac{2-2x}{2x-x^2}$

3. $\forall x \in]0 ; \frac{\pi}{2}[$;

f(x) = ln(sinx)

$f'(x) = \frac{cosx}{sinx}$

Exercice 17

1. $\forall x \in]-\infty ; 0[$; $f(x) = \ln|x|$ $f'(x) = \frac{1}{x}$
2. $\forall x \in]2 ; +\infty[$; $f(x) = \ln|2x - x^2|$. $f'(x) = \frac{2-2x}{2x-x^2}$

Exercice 18

1. $\forall x \in]\frac{3}{2} ; +\infty[$;

$f(x) = \frac{2}{2x-3} = \frac{u'(x)}{u(x)}$ où u(x) = 2x - 3

$F(x) = \ln|2x - 3| + c$ ($c \in \mathbb{R}$)

2. $\forall x \in \mathbb{R}$;

$f(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+1} = \frac{u'(x)}{u(x)}$ où $u(x) = x^2 + x + 1$

$F(x) = \ln|x^2 + x + 1| + c$ (c∈⍰)

Exercice 19

1. $\forall x \in]0 ; \frac{\pi}{4}[$;

f(x) = $\frac{sinx}{cosx}$ = - $\frac{-sinx}{cosx}$ = - $\frac{u'(x)}{u(x)}$ où u(x) = sinx

F(x) = ln|cosx| + c (c $\in \mathbb{R}$)

2. $\forall x \in]0 ; \frac{\pi}{2}[$;

f(x) = $\frac{1+tan^2(x)}{tanx}$ = $\frac{u'(x)}{u(x)}$ où u(x) = tanx

F(x) = ln|tanx| + c (c$\in \mathbb{R}$)

V Fonction logarithme de base a

Exercice 20

x	$\log_2(321)$	$\log_7(321)$	$\log_8\left(\frac{22}{131}\right)$
Valeur approchée de x par défaut à 10^{-5} près	8,32642	2,96593	-0,85799

Exercice 21

Affirmation	Réponse
$\log_2(3)$ = $\log_3(2)$	faux
log'(5) = $\frac{1}{5ln10}$	vrai
$\log_2(5)$ < $\log_3(5)$	faux

Exercice 22

	Affirmation	Réponse
a	log(10) = 1	vrai
b	L'ensemble de définition de la fonction log est [0 ; +∞[	faux
c	$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{log(x)}{x}$ = +∞	vrai
d	$\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ >}} log(x)$ = 0	faux
e	La fonction $\log_2$ est strictement croissante sur]0 ; +∞[	vrai

f	La fonction $\log_{10}$ est dérivable et croissante sur]0 ; +∞[	vrai
g	La fonction $log_{\frac{1}{2}}$ est strictement décroissante sur]0 ; +∞[	vrai

Exercice 23

* $\log_2(4) + \log_2(\frac{1}{2}) = \log_2(2)$

* $\log_3(9) - \log_3(27) = 2\log_3(3) - 3\log_3(3)$
$= -\log_3(3)$

- $\log_4(5) + 2\log_4(8) = \log_4(360)$

Exercice 24

1) A ; 2) B ; 3) A ; 4) B.

EXERCICES DE RENFORCEMENT / D'APPROFONDISSEMENT

Exercice 1

Soit f, g, h et k les fonctions numériques définies sur]0 ; +∞[par :
$f(x) = (\ln x)^2 - 4\ln x + 3$, $g(x) = \frac{3}{x-2}$, $h(x) = x\ln x$, $k(x) = \frac{ln(x+1)}{x}$

f s'annule pour	☒ e et e^3	☐ 0 et e^3	1 et 3
f ' s'annule pour	☐ $\frac{1}{4}$	☒ e^2	☐ Aucun nombre réel
Une primitive de g sur [0 ; 1] est la fonction G définie par :	☐ G(x) = 3ln(2-x)	☒ G(x) = 3ln(x-2)	☐ G(x) = -3ln(2-x)
La limite de k en zéro est :	☒ 1	☐ 0	☐ +∞
Pour tout x élément de]0 ; +∞[, h'(x) =	☐ lnx	☐ -1+lnx	☒ 1+lnx

Exercice 2

f est la fonction définie par : $f(x) = \ln\left(\frac{1}{(sinx)^3}\right)$

N°	Affirmation	
1	$f'(x) = \frac{-2}{tanx}$	faux
2	$f'(x) = \frac{-1}{(sinx)^3}$	faux
3	$f'(x) = \frac{-3}{sinx}$	faux
4	f est définie en $\frac{\pi}{2}$	vrai
5	f est dérivable en $\frac{\pi}{2}$	vrai

Exercice 3

$log_2(x) = u$

* $log_2(x^2) = 2log_2(x) = 2u$
* $log_2(\sqrt{x}) = \frac{1}{2}\, log_2(x) = \frac{1}{2}u$
* $log_2\left(\frac{x^2}{64}\right) = 2log_2(x) + 6log_2(2) = 2u + 6log_2(2)$

Exercice 4

a) * $V_a =]0\,;+\infty[$

* $4\ln3 = \ln81 - \ln\frac{x}{3}$

$4\ln3 = 4\ln3 - \ln\frac{x}{3}$

$\ln\frac{x}{3} = 0$

$\frac{x}{3} = 1$

$x = 3$

$S_a = \{3\}$

b) * $V_b =]0\,;+\infty[$

* $\ln(x^2) + (\ln x - 4)(\ln x)^2 = 0$

$2\ln x + (\ln x - 4)(\ln x)^2 = 0$

$[2 + (\ln x - 4)\ln x]\ln x = 0$

$\ln x = 0$ ou $(\ln x)^2 - 4\ln x + 2 = 0$

$x = 1$ ou $(\ln x)^2 - 4\ln x + 2 = 0$

$\Delta' = 4 - 2 = 0$

$\ln x = 2-\sqrt{2}$ ou $\ln x = 2+\sqrt{2}$

$x = e^{2-\sqrt{2}}$ ou $x = e^{2+\sqrt{2}}$

$S_b = \{1 ; e^{2-\sqrt{2}} ; e^{2+\sqrt{2}}\}$

c) * $V_c =]0 ; +\infty[$

* $(\ln x)^2 - \ln(x^3) + 2 = 0$

$(\ln x)^2 - 3\ln x + 2 = 0$

$\ln x = 1$ ou $\ln x = 2$

$x = e$ ou $x = e^2$

$S_c = \{e ; e^2\}$

d) $\sqrt{5^x} + \sqrt{5^{-x}} = 2,9$

$\sqrt{5^{2x}} + 1 = 2,9\sqrt{5^x}$ |on multiplie membre à membre par $\sqrt{5^x}$

$\left(\sqrt{5^x}\right)^2 - 2,9\sqrt{5^x} + 1 = 0$

$10\left(\sqrt{5^x}\right)^2 - 29\sqrt{5^x} + 10 = 0$

$\Delta = 441 = 21^2$

$\sqrt{5^x} = \frac{5}{2}$ ou $\sqrt{5^x} = \frac{2}{5}$

$\frac{x}{2}\ln 5 = \ln 5 - \ln 2$ ou $\frac{x}{2}\ln 5 = \ln 2 - \ln 5$

$x = 2 - \frac{ln4}{ln5}$ ou $x = \frac{ln4}{ln5} - 2$

$S_d = \{ 2 - \frac{ln4}{ln5} ; \frac{ln4}{ln5} - 2\}$

e) * Contraintes sur l'inconnue

$3-x > 0$ et $-x-6 > 0$

$x < 3$ et $x < -6$

$V_b =]-\infty ; -6[$

* $\log(3 - x) + \log(-x-6) = 1$

$\log[(x-3)(x+6)] = 1$

$(x-3)(x+6) = 10$

$x^2 + 3x - 28 = 0$

$x = -7$ ou $x = 4$

$S_e = \{-7\}$

f) $V_f =]-\infty ; -6[$

$log_4(x) = \frac{lnx}{ln4} = \frac{lnx}{2ln2} = \frac{1}{2}log_2(x) =$

$log_2(x)log_4(x) = 8$

$log_2(x)\frac{1}{2}log_2(x) = 8$

$(log_2 x)^2 = 16$
$log_2(x) = -4$ ou $log_2(x) = 4$
$x = 2^{-4}$ ou $x = 2^4$
$x = \frac{1}{16}$ ou $x = 16$
$S_f = \{\frac{1}{16} ; 16\}$

Exercice 5

a) * $V_a =]0 ; \frac{1}{3}[$

* $\ln x - \ln 2 \leq \ln(1-3x)$
$\ln x \leq \ln(1-3x) + \ln 2$
$\ln x \leq \ln[2(1-3x)]$
$x \leq 2(1 - 3x)$
$x \leq 2 - 6x$
$7x \leq 2$
$x \leq \frac{2}{7}$
$S_a =]0 ; \frac{2}{7}]$

b) * $V_b =]0 ; 2[$

* $log_{\frac{1}{3}}(4 - x^2) - log_{\frac{1}{3}}(x) < log_3(x)$
$- log_3(4 - x^2) + log_3(x) < log_3(x)$
$log_3(4 - x^2) > 0$
$x^2 < 3$
$-\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$
$S_a =]0 ; \sqrt{3}[$

Exercice 6

a) * $V_a =]0 ; +\infty[\times]0 ; +\infty[$

* $\begin{cases} ln(xy) = 4 \\ (lnx)(lny) = -12 \end{cases}$

$$\begin{cases} lnx + lny = 4 \\ (lnx)(lny) = -12 \end{cases}$$

lnx et lny sont les solutions éventuelles de l'équation :
$U^2 - 4U - 12 = 0$
$U = -2$ ou $U = 6$
($\ln x = -2$ et $\ln y = 6$) ou ($\ln x = 6$ ou $\ln y = -2$)
($x = e^{-2}$ et $y = e^6$) ou ($x = e^6$ et $y = e^{-2}$)

$S_a = \{(e^{-2} ; e^6) ; (e^6 ; e^{-2})\}$

b) * $V_b =]0 ; +\infty[\times]0 ; +\infty[$

* $\begin{cases} x + y = 15 \\ lnx + lny = -12 \end{cases}$

$y = 15 - x$

$\ln x + \ln(15-x) = -12$

$\ln(15x - x^2) = -12$

$15x - x^2 = e^{-12}$

$x^2 - 15x + e^{-12} = 0$

$\Delta = 225 - 4e^{-12}$

$x = \frac{15-\sqrt{225-4e^{-12}}}{2}$ et $y = 15 - \frac{15-\sqrt{225-4e^{-12}}}{2} = \frac{15+\sqrt{225-4e^{-12}}}{2}$

ou $x = \frac{15+\sqrt{225-4e^{-12}}}{2}$ et $y = 15 - \frac{15+\sqrt{225-4e^{-12}}}{2} = \frac{15-\sqrt{225-4e^{-12}}}{2}$

$S_b = \{(\frac{15-\sqrt{225-4e^{-12}}}{2} ; \frac{15+\sqrt{225-4e^{-12}}}{2}) ; (\frac{15+\sqrt{225-4e^{-12}}}{2} ; \frac{15-\sqrt{225-4e^{-12}}}{2})\}$

c) * Contraintes sur l'inconnue

$xy > 0$

$(x > 0$ et $y > 0)$ ou $(x < 0$ et $y < 0)$

$V_c =]-\infty ; 0[\times]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[\times]0 ; +\infty[$

* $\begin{cases} log(xy) = 2 \\ x + y = 29 \end{cases}$

$$\begin{cases} xy = 100 \\ x + y = 29 \end{cases}$$

x et y sont les solutions éventuelles de l'équation ;

$X^2 - 29X + 100 = 0$

$X = 4$ ou $X = 25$

$S_c = \{(4 ; 25) ; (25 ; 4)\}$

<u>Exercice 7</u>

$\log(210) > 2$

Supposons log(210) est un nombre rationnel

C'est-à-dire : $\log(210) = \frac{p}{q}$, on peut prendre : $p \in \mathbb{N}^*$ et $q \in \mathbb{N}^*$

$\frac{p}{q} > 2 \Rightarrow p > 2q$

$210 = 10^{\frac{p}{q}}$

$210^q = 10^p$ |on prend la puissance q membre à membre

$21^q = 10^{p-q}$ |on divise par 10^q membre à membre

$3^q \times 7^q = 2^{p-q} \times 5^{p-q}$ |on décompose en produit de facteurs premiers
Le nombre $3^q \times 7^q$ a deux décompositions distinctes en produits de facteurs premiers : $3^q \times 7^q$ et $2^{p-q} \times 5^{p-q}$
Ce qui est absurde car la décomposition d'un entier en produit de facteurs premiers est unique.
Donc, log(210) n'est pas un nombre rationnel.

Exercice 8
* Pour tous a et b éléments de $]0 ; +\infty[$;
$\frac{\ln a+\ln b}{2} \leq \ln\frac{a+b}{2} \Leftrightarrow \ln a + \ln b \leq 2\ln\frac{a+b}{2}$
$\Leftrightarrow \ln(ab) \leq \ln\left[\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\right]$
$\Leftrightarrow \ln(ab) \leq \ln\left(\frac{a^2+2ab+b^2}{4}\right)$
* Pour tous a et b éléments de $]0 ; +\infty[$;
$\frac{a^2+2ab+b^2}{4} - ab = \frac{a^2-2ab+b^2}{4}$
$= \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$
$\left(\frac{a-b}{2}\right)^2 \geq 0$
$\frac{a^2+2ab+b^2}{4} - ab \geq 0$
$ab \leq \frac{a^2+2ab+b^2}{4}$
$\ln(ab) \leq \ln\left(\frac{a^2+2ab+b^2}{4}\right)$
$\frac{\ln a+\ln b}{2} \leq \ln\frac{a+b}{2}$

Exercice 9
$S = 10\log\left(\frac{I}{I_0}\right)$

a) $I = 10^4 I_0$

$S_a = 10\log\left(\frac{10^4 I_0}{I_0}\right) = 10\log(10^4)$
$S_a = 40$ Db

b) $10\log\left(\frac{I}{I_0}\right) = 100$

$\log\left(\frac{I}{I_0}\right) = 10$
$\frac{I}{I_0} = 10^{10}$

I = $10^{10}I_0$

I = $10^{10}\times10^{-12}$ watt/m^2

I = 10^{-2} watt/m^2

I = 0,01 watt/m^2

c) S - S' = 1

$10\log\left(\frac{I}{I_0}\right) - 10\log\left(\frac{I'}{I_0}\right) = 1$

$\log\left(\frac{I}{I'}\right) = \frac{1}{10}$

$\frac{I}{I'} = 10^{\frac{1}{10}}$

$\frac{I}{I'} = \sqrt[10]{10}$

$I' = \frac{I}{\sqrt[10]{10}}$

($I' \approx 0{,}8 \times I$)

Exercice 10 :

1) $D_g =]-\infty;-1] \cup [-1;+\infty[= IR$

2) $\lim\limits_{\substack{x\to-1 \\ >}} g(x) = \lim\limits_{\substack{x\to-1 \\ <}} g(x) = g(-1) = 0\,.\textit{Donc } g \textit{ est continue en } -1$

3) a. $\lim\limits_{\substack{x\to-1 \\ <}} \frac{\ln(-x)}{x+1} = -1 \;\; et \;\; \lim\limits_{\substack{x\to-1 \\ >}} \frac{(x+1)^2}{x+1} =$

0 donc g est dérivable à gauche et à droite en -1

mais $g'_g(-1) \neq g'_d(-1)$ d'où g n'est pas dérivable en -1.

b. La courbe de g admet donc un point anguleux au point d'abscisse -1.

Exercice 11 :

1. $a)$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0\,.$ $b)$ $\lim\limits_{\substack{x\to0 \\ >}} f(x) = -\infty$

2. $a)$ $f'(x) = -\frac{\ln x}{x^2}.$

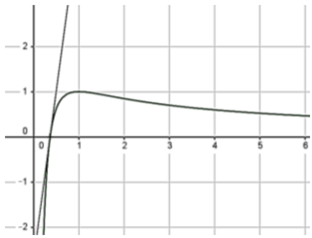
$b)$ $\forall x \in]0;1[$ $f'(x) > 0$ et $\forall x \in]1;+\infty[$, $f'(x) <$
0 donc f est croissante sur $]0;1]$ et décroissante sur $[1;+\infty[$

x	0		1		+∞
$f'(x)$	‖	+	0	-	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	1	↘	0

3. $(T): y = f'(e^{-1})(x - e^{-1}) + f(e^{-1}) \quad or$
$f'(e^{-1}) = e^2 \;\; et\; f(e^{-1}) = 0$

$$y = e^2(x - e^{-1}) = e^2x - e$$

4.



Exercice 12 :

1. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1 = f(0)$ donc f est continue en 0
2. a) $g'(x) = \frac{-x^3}{1+x}$; $\forall x \geq O, g'(x) <$
   0 donc g est décroissante sur $[0; +\infty[$.

$g(0) = 0$. $Or\ g$ est décroissante sur $[0; +\infty[$, g est donc majorée par 0.
d'où $g(x) \leq 0$ par conséquent $\forall x \in [0; +\infty[\,, \ln(1 + x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$
b) Etudions le sens de variation de la fonction
m définie sur $[0; +\infty[$ par $m(x) = \ln(1 + x) - (x - \frac{x^2}{2})$
$m'(x) = \frac{x^2}{1+x}$. $\quad \forall x \geq 0\,; m'(x) \geq$
0 donc la fonction m est croissante sur $[0; +\infty[$
$m(0) = 0\,. Or\ m$ est croissante sur $[0; +\infty[$ donc m est minorée par 0.
Donc $\forall x \geq 0, \ln(1 + x) - \left(x - \frac{x^2}{2}\right)$ ou $\forall x \geq 0,\ \ln(1 + x) \geq (x - \frac{x^2}{2})$.
c) $D'après\ \ a)\ et\ b)$: $\forall x \geq 0\,,\ (x - \frac{x^2}{2}) \leq \ln(1 + x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$
Ainsi $-\frac{x^2}{2} \leq \ln(1 + x) - x \leq -\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$. $\quad D'o$ù $\forall x \geq 0,\ -\frac{1}{2} \leq$
$\frac{\ln(1+x)-x}{x^2} \leq -\frac{1}{2} + \frac{x^2}{3}$
$On\ a\ \lim\limits_{x\to 0} -\frac{1}{2} + \frac{x^2}{3} = -\frac{1}{2}\ donc\ \lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)-x}{x^2} = -\frac{1}{2}\ donc\ \lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} =$
$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)-x}{x^2} = -\frac{1}{2} = f'(0)$.

3. a) $\forall x \geq 0, h'(x) = \frac{-x}{(x+1)^2}$

$\forall x \geq 0,\ \ h'(x) \leq 0$, h est donc décroissante sur $[0; +\infty[$.

$Or\ h(0) = 0$ donc $\forall x \geq 0,\ \ h(x) \leq 0$.

b) $\forall x \in [0; +\infty[, f'(x) = \frac{\frac{x}{1+x} - \ln(1+x)}{x^2} = \frac{h(x)}{x^2}$

c)$\forall x \in [0\,; +\infty[\,, h(x) \leq 0\ donc\ f$ est décroissante sur $[0\,; +\infty[$.

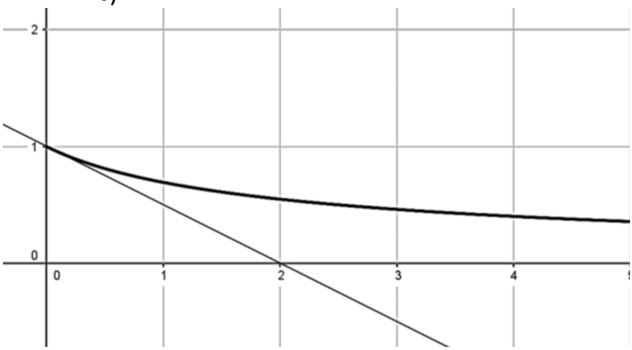
x	0 $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$-$
$f(x)$	$1 \searrow 0$

4.

a) (T) :$y = -\frac{1}{2}x + 1$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ donc la droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale à (C) en $+\infty$.

c)



Exercice13 :

1. a) $\lim\limits_{\substack{x \to 4 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 4 \\ >}} (-2x + 5) + 3\ln(\frac{x+1}{x-4}) = +\infty$ car $\lim\limits_{\substack{x \to 4 \\ >}} \frac{x+1}{x-4} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (-2x + 5) + 3\ln(\frac{x+1}{x-4}) = -\infty$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x+1}{x-4} = 1$.

b) $f'(x) = \frac{-2x^2+6x-7}{(x+1)(x-4)}$; $\forall x > 4\,, -2x^2 + 6x - 7 < 0$ et $(x + 1)(x - 4) > 0$
Donc $\forall x > 4, f'(x) < 0$; f est donc strictement décroissante sur $]4; +\infty[$.

x	4		$+\infty$
$f'(x)$	$\|$	$-$	
$f(x)$	$\|$ $+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

c) $\lim_{x\to+\infty} [f(x) - (-2x + 5)] = \lim_{x\to+\infty} 3\ln(\frac{x+1}{x-4}) = 0$.

Donc la droite (D) d'équation $y = -2x + 5$ est asymptote oblique à (C) en $+\infty$.

d) Signe de $3\ln(\frac{x+1}{x-4})$

$\frac{x+1}{x-4} = 1 + \frac{5}{x-4}$ d'où $\forall x > 4$, $\frac{x+1}{x-4} > 1$ donc $\ln\left(\frac{x+1}{x-4}\right) > 0$. Par conséquent pour tout x élément de $]4; +\infty[$ (C) est au-dessus de (D).

2. a) Soit $E(a, b)$ ce point . On a $f'(a) = -\frac{9}{2}$ et $f(a) = b$

Ainsi $\frac{-2a^2+6a-7}{(a+1)(a-4)} = -\frac{9}{2} \Longrightarrow a^2 - 3a - 10 = 0 \Rightarrow a = 5$ ou $a - 2$

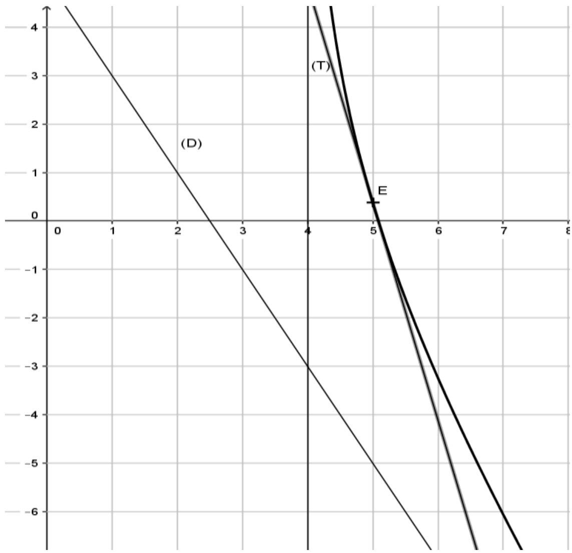
or $a > 4$ donc $a = 5$

D'où $= f(5) = -5 + 3ln6$. On a $E(5;\ -5 + 3ln6)$

b) (T): $y = -\frac{9}{2}(x - a) + f(a)$

(T) : $y = -\frac{9}{2}(x - 5) - 5 + 3ln6 = -\frac{9}{2}x + \frac{35}{2} + 3ln6$

3.



4.

a) Soient $u(x) = lnx$; $u'(x) = \frac{1}{x}$; $v'(x) = 1\ et\ v(x) = x$
Ainsi $K(x) = xlnx - x$.

b) $G'(x) = \ln(x+1) - 1 + \frac{x+1}{x+1} = \ln(x+1) = g(x)$; Donc
G est une primitive de g sur $I =]4; +\infty[$.

c) $H'(x) = \ln(x-4) + \frac{x-4}{x-4} - 1 = \ln(x-4) =$
$h(x)$. Donc H est une primitive de $h\ sur\ I =]4; +\infty[$.

d) $f(x) - (-2x+5) > 0$ donc $A = \int_5^6 \big(f(x) - (-2x+5)\big)dx$
$A = \int_5^6 3\ln\left(\frac{x+1}{x-4}\right) dx\ u.a = 3[\int_5^6 \ln(x+1)dx - \int_5^6 \ln(x-4)\,dx]u.a$.
D'après b) et c)
$A = 3[G(x) - H(x)]_5^6\ u.a = 3\big[\big(G(6) - H(6)\big) - \big(G(5) - H(5)\big)\big]u.a$
$A = 3(7ln7 - 2ln2 - 5ln5)\ u.a\ \approx 10{,}02\ u.a$

5.

a) f est continue et strictement décroissante sur $]4; +\infty[$
[Elle réalise une bijection de $]4; +\infty[$ dans IR
$0 \in IR$ donc l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique x_0.

b) $5 < x_0 < 5{,}5$

c) $5{,}08 < x_0 < 5{,}09$

Exercice 14 :

Partie I

1. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} g(x) = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x(lnx - 1 + \frac{1}{x}) = +\infty$
2. a) $g'(x) =$
   lnx donc g est décroissante sur $]0;1[$ et g est croissante sur $]1;+\infty[$

b)

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$g(x)$	‖ 1	↘	0	↗	$+\infty$

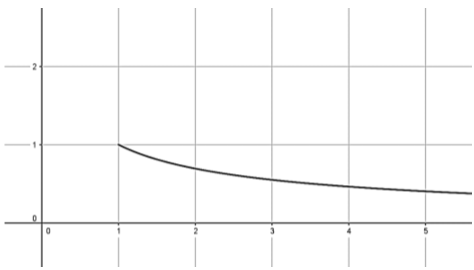
$$\forall x > 0, g(x) \geq 0$$

Partie II

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} \frac{lnx - ln1}{x-1} = ln'(1) = 1.$
2. $f'(x) = -\frac{g(x)}{x(x-1)^2}$; $\forall x > 1, g(x) > 0 , x(x-1)^2 >$
   0 donc f est strictement décroissante sur $]1;+\infty[$

x	1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	
$f(x)$	‖ 1	↘	0

3.



Partie III :

1. f réalise une bijecton de $]1\,;+\infty[$ $dans$ $]0\,;1\left[\right.$ or $\frac{1}{2}$ est élément de $\left.\right]0\,;1[$
   donc l'équation $f(x)=\frac{1}{2}$ admet une solution unique $\propto$
   $dans$ $]1;+\infty[$.

On a $(3{,}5)=0{,}501$ et $f(3{,}6)=0{,}493$ donc $3{,}5<\propto<3{,}6$.

2.
   a) $\forall x\in]1;+\infty[\,,h(x)=x\Leftrightarrow lnx+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}=x\ \Leftrightarrow lnx=\frac{1}{2}(x-1)$

Or $f(\alpha)=\frac{1}{2}\ \Leftrightarrow\ \frac{1}{\alpha-1}ln\alpha=\frac{1}{2}\ \Leftrightarrow ln\alpha=\frac{1}{2}(\alpha-1)$ Donc
α est solution de l'équation $h(x)=x$. Ainsi $h(\propto)=\propto$.

   b) $\forall x>0,\ \ h'(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{2}=\frac{x+2}{2x}$. On a $h'(x)>$
   0 donc h est strictement croissante sur $]1;+\infty[$
   c) h est strictement croissante sur $]1;+\infty[$ donc sur $[3;4]$.
   Ainsi $h([3;4])=[h(3);h(4)]\subset[3;4]$

Donc $h(x)\in[3;4]$.

On a $3\leq x\leq 4$ or $h'(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{2}$ .Ainsi $\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\leq\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\leq\frac{1}{3}+\frac{1}{2}$

Donc $\frac{3}{4}\leq h'(x)\leq\frac{5}{6}$ d'où $|h'(x)|\leq\frac{5}{6}$.

3.
   a) D'après les réponses de la question 2 :
   on a $\forall\, n\in IN,\ \ 3\leq u_n\leq 4$ et $|h'(x)|\leq\frac{5}{6}$

Ainsi d'aprèste théorème des accroissements finis appliqué sur l'intervalle $[3;4]$
on a pour tout entier naturel n, $|h(u_n)-h(\propto)|\leq\frac{5}{6}|u_n-\propto|$ d'où $|u_{n+1}-\propto|\leq\frac{5}{6}|u_n-\propto|$.

   b) Pour tout entier naturel n, $|u_{n+1}-\propto|\leq\frac{5}{6}|u_n-\propto|$

$$\text{On a}\quad\left|\begin{array}{l}|u_1-\propto|\leq\frac{5}{6}|u_0-\propto|\\ |u_2-\propto|\leq\frac{5}{6}|u_1-\propto|\\ |u_3-\propto|\leq\frac{5}{6}|u_2-\propto|\\ \quad\vdots\\ |u_n-\propto|\leq\frac{5}{6}|u_{n-1}-\propto|\end{array}\right.$$

En faisant le produit membre à membre on a : $|u_n-\propto|\leq\left(\frac{5}{6}\right)^n|u_0-\propto|$

ou $|u_n - \propto| \leq \left(\frac{5}{6}\right)^n |3-\propto|$ or $-0{,}6 < \propto < -0{,}5$ $d'o$ù $|3-\propto| < 0{,}5 < 1 \Longrightarrow$
$\left(\frac{5}{6}\right)^n |3-\propto| < \left(\frac{5}{6}\right)^n$
Ainsi $|u_n - \propto| \leq \left(\frac{5}{6}\right)^n$.

c) $|u_p - \propto| \leq \left(\frac{5}{6}\right)^p$. u_p valeur approchée de α à 10^{-3} près signifie que $\left(\frac{5}{6}\right)^p = 10^{-3}$

$\left(\frac{5}{6}\right)^p = 10^{-3} \iff p\ln\left(\frac{5}{6}\right) = \ln(0{,}001)$ d'où $p = 37{,}89$. On a $p = 38$.
Une valeur approchée de α à 10^{-3} près est $u_{38} \approx$ $3{,}513$ $(par\ lecture\ graphique)$

SITUATIONS COMPLEXES

Exercice 15

I l'intensité sonore pour une distance d .
$I_0 = 10^{-12} watt/m^2$
On a $I = \frac{k}{d^2}$, $k \in IR$. Calculons k
$S = 110\ db$ pour $d = 10\ m$ ainsi $10\log\left(\frac{k}{10^2 \times 10^{-12}}\right) = 110$
$\log(k \times 10^{10}) = 11 \Longrightarrow \log(k) = 1 \Rightarrow k = 10$

Calculons l'intensité sonore pour une distance 500 m.
$I = \frac{10}{500^2} = 4.10^{-5}$
Calculons le niveau sonore pour une intensité sonore de $I = 4.10^{-5}$
$S = 10\log\left(\frac{4.10^{-5}}{10^{-12}}\right) = 76{,}02db.$
Le niveau sonore perçu par les riverains n'est malheureusement pas conforme au vœu des riverains.

Exercice 16

Soit la suite (u_n) désignant la consommation de charbon l'année $2019+n$
.
Avec $u_0 = 10.000 \ (\,année\ 2019)$
On a ainsi $u_{n+1} = u_n - 0{,}08u_n = 0{,}92u_n$
La suite
(u_n) est une suite géométrique de raison 0,92 et de premier termes u_0 =1
0.000
On a donc $u_n = u_0 \times (0{,}92)^n = (0{,}92)^n \times 10.000$
Cherchons l'année à laquelle ce pays consommera moins de 2000 tonnes.
$u_n < 2000 \Longrightarrow (0{,}92)^n \times 10.000 < 2000$.
$(0{,}92)^n < 0{,}2 \Rightarrow n > \frac{\ln(0{,}2)}{\ln(0{,}92)} \Rightarrow n > 19{,}30$. Prenons $n = 20$
La consommation en charbon sera donc moins de 2000 tonnes à partir de 2039. Ce pays ne gagnera pas la lutte contre le réchauffement climatique.

9 NOMBRES COMPLEXES

EXERCICES DE FIXATION

FORME ALGEBRIQUE D'UN NOMBRE COMPLEXE

Exercice de fixation

Exercice 1

Les nombres complexes sont :

π ; $2i$; $5 - i$; 0 ; $\sqrt{7}$

Exercice 2

Le nombre complexe $\sqrt{2} - 4i$ a pour partie imaginaire : c)-4

Exercice 3

$Z_1 = 0 + i$, donc $\text{Re}(Z_1) = 0$ et $\text{Im}(Z_1) = 1$

$Z_2 = 7 - 9i$, donc $\text{Re}(Z_2) = 7$ et $\text{Im}(Z_2) = -9$

$Z_3 = -\frac{5}{3} + \frac{2}{3}i$, donc $\text{Re}(Z_3) = -\frac{5}{3}$ et $\text{Im}(Z_3) = \frac{2}{3}$

Exercice 4

1)$2 + (3 - x)i \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 3 - x = 0$

$\Leftrightarrow x = 3$

2)$(2x - 1) + 4i \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow 2x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

Exercice 5

$2 + (x - 1)i = 2 + i \Leftrightarrow x - 1 = 1$

$\Leftrightarrow x = 2$

Pour $x = 2$; on a $Z = 2 + (2 - 1)i = 2 + i$

Exercice 6

Les opposés des nombres

L'opposé de Z_1 est $-17+9i$

L'opposé de Z_2 est $\sqrt{2}i$

L'opposé de Z_1 est $5+6i$

Exercice 7

1) $Z_1+Z_2=2+i+3+2i=5+3i$

2) $Z_1+Z_2=-4+3i+5-8i=1-5i$

3) $Z_1+Z_2=-1-i-7-17i=-8-18i$

Exercice 8

1) $Z_1Z_2=(2+i)(3+2i)=6+4i+3i-2=4+7i$

2) $Z_1Z_2=(-4+3i)(5-8i)=-20+32i+15i+24=4+47i$

3) $Z_1Z_2=(-1-i)(-7-17i)=7+17i+7i-17=-10+24i$

Exercice 9

1) $\frac{1}{1+i}=\frac{1-i}{(1+i)(1-i)}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$

2) $\frac{1}{-4+3i}=\frac{-4-3i}{(-4+3i)(-4-3i)}=\frac{-4}{25}-\frac{3}{25}i$

3) $\frac{1}{-8+8i}=\frac{-8-8i}{(1+i)(1-i)}=-\frac{1}{16}-\frac{1}{16}i$

Exercice 10

Écrivons sous forme algébrique les nombres suivants

$(2+3i)^2=4+12i-9=-5+12i$

$(2+3i)^{-2}=\frac{1}{(2+3i)^2}=\frac{1}{-5+12i}=-\frac{5}{169}-\frac{12}{169}i$

$(1+i)^4=((1+i)^2)^2=(2i)^2=-4$

$(1+i)^{-4} = \frac{1}{(1+i)^4} = -\frac{1}{4}$

Exercice 11

$i^{403} = i^{4\times100+3} = -i$

$i^{2030} = i^{4\times507+2} = -1$

$i^{2022} = i^{4\times505+2} = -1$

$i^{2001} = i^{4\times500+1} = i$

Exercice 12

1)$Z \times Z' \neq 0 \Leftrightarrow Z \neq 0$ et $Z' \neq 0$

2)$ZZ' = 0 \Leftrightarrow Z = 0$ ou $Z' = 0$

Or $Z' \neq 0$ donc $Z = 0$

Exercice 13

Résolvons dans $\mathbb{C}$

$(3z-2-i)(z+2i) = 0 \Leftrightarrow 3z-2-i = 0$ ou $z+2i = 0$

$\Leftrightarrow 3z = 2+i$ ou $z = 2i$

$\Leftrightarrow z = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}i$ ou $z = 2i$

$S_{\mathbb{C}} = \left\{ \frac{2}{3} + \frac{1}{3}i \,; 2i \right\}$

Exercice 14

On a

- $\overline{0} = 0$
- $\overline{1+i} = 1-i$
- $\overline{1+i} = 1-i$
- $\overline{7} = 7$
- $\overline{-19} = -19$
- $\overline{3-4i} = 3+4i$
- $\overline{-38+6i} = -38-6i$

Exercice 15

$z \in \mathbb{C}$ donc $z = a + ib$ avec $(a; b) \in \mathbb{R}^2$

$z\bar{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2$

Comme $a^2 + b^2 > 0$ et $\text{Im}(z\bar{z}) = 0$

Alors $z\bar{z} \in \mathbb{R}_+$

Exercice 16

Calculons dans chacun des cas

1) $z + \bar{z} = 2 \times 3 = 6$

$z - \bar{z} = 2i \times 2 = 4i$

$z\bar{z} = 3^2 + 2^2 = 9 + 4 = 13$

2) $z + \bar{z} = 2 \times 7 = 14$

$z - \bar{z} = 2i \times 1 = 2i$

$z\bar{z} = 7^2 + 1^2 = 49 + 1 = 50$

Exercice 17

$\overline{z + z'} = \overline{2 + 3\imath - 1 + 5\imath} = \overline{1 + 8\imath} = 1 - 8i$

$\overline{zz'} = \overline{(2 + 3\imath)(-1 + 5\imath)} = \overline{-2 + 10\imath - 3\imath - 15} = \overline{-17 + 7\imath} = -17 - 7i$

$\overline{\left(\frac{z}{z\prime}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}\prime} = \frac{2-3i}{-1-5i} = \frac{(2-3i)(-1+5i)}{26} = \frac{-2+10i+3i+15}{26} = \frac{13}{26} + \frac{13}{26}i = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$

Exercice 18

Déterminons le module de chacun des nombre complexe

$|3 + 4i| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$

$|6 - 8i| = \sqrt{6^2 + (-8)^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10$

$|\sqrt{2} + \sqrt{7}i| = \sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2 + \left(\sqrt{7}\right)^2} = \sqrt{2 + 7} = \sqrt{9} = 3$

Exercice 19

L'équivalence est incomplète car si $z' = \bar{z}$ alors $|z| = |z'|$ si $z' = -\bar{z}$ alors $|z| = |z'|$

Exercice 20

$|1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$

$|1-i| = \sqrt{1^2+(-1)^2} = \sqrt{2}$

Donc $1+i$ et $1-i$ ont le même module

Exercice 21

Calculons

$|\bar{z}| = |z| = 2$

$|-\bar{z}| = |\bar{z}| = |z| = 2$

$|zz'| = |z| \times |z'| = 2 \times 3 = 6$

$\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|} = \frac{1}{2}$

$\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|} = \frac{2}{3}$

Exercice 22

1) L'affixe du point A est $-7+5i$

2) L'affixe du point B est $3i$

3) L'affixe du vecteur $\vec{u}$ est $-3+9i$

Exercice 23

1) Le point image de $1+i$ a pour coordonnées $(1;1)$

2) Le point image de $-3i$ a pour coordonnées $(0;-3)$

3) Le vecteur image a pour coordonnées $(7;0)$

4) Le vecteur image a pour coordonnées (1 ;1)

Exercice 24

L'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est $-2+3i-1-i$ soit $-3+2i$
L'affixe du vecteur $\overrightarrow{BC}$ est $4+3i+2-3i$ soit 6
L'affixe du vecteur $\overrightarrow{AC}$ est $4+3i-1-i$ soit $3+2i$

Exercice 25

Soit $a+ib$ l'affixe de B

On a : $a+ib+4-3i=1+i$

Soit $a+4+i(b-3)=1+i$

D'où $a+4=1$ et $b-3=1$

$a=-3$ et $b=4$

Donc $B(-3;4)$

Exercice 26

1.VRAI

2.VRAI

3.FAUX

Exercice 27

1)L'affixe du point I est le nombre complexe $\frac{1-i+4+5i}{2}$ soit $\frac{5}{2}+2i$

2) $\vec{w}+\vec{y}$ a pour affixe $1-2i+3+4i$ soit $4-2i$

3)$PQ=|4+5i-1+i|=|3+6i|=\sqrt{3^2+6^2}=\sqrt{9+36}=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$

Exercice 28

1. Le vecteur $3\vec{w}$ a pour affixe $3(2+3i)$ soit $6+9i$

2. Le vecteur $2\vec{w}-3\vec{y}$ a pour affixe $2(2+3i)-3(4-5i)$ soit $4+6i-12i+15i$

   soit $-8+21i$

TRIGONOMETRIQUE D'UN NOMBRE COMPLEXE

Exercice 29

ARG$(1) = 0$

ARG$(i) = \frac{\pi}{2}$

ARG$(-i) = -\frac{\pi}{2}$

ARG$(-1) = \pi$

ARG$\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right) = \frac{\pi}{3}$

Exercice 30

a)VRAI

b)FAUX

Exercice 31

- $\left|1 + i\sqrt{3}\right| = \sqrt{1^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4} = 2$

  On a $\cos\theta = \frac{1}{2}$ et $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ donc $\theta = \frac{\pi}{3}$

- $\left|\sqrt{3} - 3i\right| = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + 3^2} = \sqrt{3+9} = 2\sqrt{3}$

  On a $\cos\theta = \frac{1}{2}$ et $\sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ donc $\theta = -\frac{\pi}{3}$

- $\left|-\sqrt{2} - i\sqrt{6}\right| = \sqrt{2+6} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

  On a $\cos\theta = -\frac{1}{2}$ et $\sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ donc $\theta = -\frac{2\pi}{3}$

Exercice 32

Déterminons la forme trigonométrique des nombres complexes

1.$|1 - i| = \sqrt{2}$; soit θ =ARG(Z)

$\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ donc $\theta = -\frac{\pi}{4}$

donc $1 - i = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$

2. $\left|\sqrt{3} - 3i\right| = 2\sqrt{3};$ soit $\theta = \mathrm{ARG(Z)}$

On a $\cos\theta = \frac{1}{2}$ et $\sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ donc $\theta = -\frac{\pi}{3}$

donc $\sqrt{3} - 3i = 2\sqrt{3}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$

3. $\left|-\sqrt{2} + i\sqrt{6}\right| = 2\sqrt{2}$; soit $\theta = \mathrm{ARG(Z)}$

On a $\cos\theta = -\frac{1}{2}$ et $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ donc $\theta = \frac{2\pi}{3}$

$-\sqrt{2} + i\sqrt{6} = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$

Exercice 33

Déterminons un argument de chacun des nombres complexes suivants

$\arg(zz') = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3} + 2k\pi = -\frac{\pi}{12} + 2k\pi\ ; k \in \mathbb{Z}$

$\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z) + 2k\pi = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi\ ; k \in \mathbb{Z}$

$\arg\left(\frac{z'}{z}\right) = \arg(z') - \arg(z) + 2k\pi = -\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} + 2k\pi = -\frac{7\pi}{12} + 2k\pi\ ; k \in \mathbb{Z}$

$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} + 2k\pi = \frac{7\pi}{12} + 2k\pi\ ; k \in \mathbb{Z}$

$\arg(z^2) = 2\arg(z) + 2k\pi = 2 \times \frac{\pi}{4} + 2k\pi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi\ ; k \in \mathbb{Z}$

$\arg\left(\frac{z^2}{z'}\right) = 2 \times \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} + 2k\pi = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi\ ; k \in \mathbb{Z}$

Exercice 34

Écrivons chacun des nombres sous forme trigonométrique

- $|(2 + 2i)(1 - i)| = 4$ et $\arg((2 + 2i)(1 - i)) = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} + 2k\pi = 0 + 2k\pi$
  donc $(2 + 2i)(1 - i) = 4(\cos 0 + i\sin 0)$

- $\left|\frac{\sqrt{3}+i}{2i}\right| = 1$

$$\text{Arg}\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2i}\right) = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2} + 2k\pi = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

donc $\frac{\sqrt{3}+i}{2i} = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

- $\left|\frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2(1-i)}\right| = \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = 1$

$$\arg\left(\frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2(1-i)}\right) = -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} + 2k\pi = \frac{\pi}{12} + 2k\pi$$

donc $\frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2(1-i)} = \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$

- $|(1-i)^4| = |1-i|^4 = \left(\sqrt{2}\right)^4 = 4$

$$\arg((1-i)^4) = 4 \times \left(-\frac{\pi}{4}\right) + 2k\pi = \pi + 2k\pi$$

donc $(1-i)^4 = 4(\cos(\pi) + i\sin(\pi))$

Exercice 35

- $\sqrt{\mathbf{2}}\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) = \sqrt{2}\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{6}}{2}$
- $\mathbf{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = 2\left(-\frac{\sqrt{\mathbf{2}}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{\mathbf{2}} + i\sqrt{\mathbf{2}}$
- $3\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$

Exercice 36

Il n’existe pas de nombre réel θ tel que $\cos\theta + i\sin\theta = 0$

Ou bien 0 n’a pas d’argument

Exercice 37

Les nombres complexes écrits sous forme exponentielle

1.$2e^{i\theta}$

3.$7e^{-i\theta}$

Exercice 38

Ecrivons sous forme exponentielle

a) $2\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)=2e^{i\frac{2\pi}{3}}$

b) $|1+i|=\sqrt{2}$ et $\text{Arg}(1+i)=\frac{\pi}{4}$donc $1+i=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

c)$\left|3+i\sqrt{3}\right|=2\sqrt{3}$ et $\text{Arg}\left(3+i\sqrt{3}\right)=\frac{\pi}{6}$donc $3+i\sqrt{3}=2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}$

Exercice 39

Écrivons sous forme trigonométrique

1) $\frac{\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}}{\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}}=\frac{e^{i\frac{\pi}{12}}}{e^{i\frac{2\pi}{3}}}=e^{i\left(\frac{\pi}{12}-\frac{2\pi}{3}\right)}=e^{-i\frac{7\pi}{12}}=\cos\left(-\frac{7\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\frac{7\pi}{12}\right)$

2) $\frac{1+i\sqrt{3}}{1+i}=\frac{2e^{i\frac{\pi}{12}}}{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}}=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)$

3) $\frac{\sin\frac{\pi}{12}-i\cos\frac{\pi}{12}}{\sin\frac{\pi}{12}+i\cos\frac{\pi}{12}}=\frac{\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)-i\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)}{\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)}=\frac{e^{-i\frac{5\pi}{12}}}{e^{i\frac{5\pi}{12}}}=e^{-i\frac{5\pi}{6}}=\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$

4)$-2\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)=2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$

Exercice 40

Écrivons sous forme trigonométrique

1)$\left(1+i\sqrt{3}\right)^2=\left(2e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^2=4e^{i\frac{2\pi}{3}}=4\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$

2)$\left(\frac{\sqrt{3}+i}{1+i}\right)^3=\left(\frac{2e^{i\frac{\pi}{6}}}{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}\right)^3=\left(\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{12}}\right)^3=2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}=2\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\right.$
$\left.i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$

3)$\left(\frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{1-i}\right)^3=\left(\frac{2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}}{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}\right)^3=\left(2e^{i\frac{\pi}{12}}\right)^3=8e^{i\frac{\pi}{4}}=8\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$

Exercice 41

a)$(\cos x+i\sin x)^2=\cos 3x+i\sin 3x$

$$=\cos^3 x+3i\cos^2 x\sin x-3\cos x\sin^2 x-i\sin^3 x$$

$$= \cos^3 x - 3\cos x \sin^2 x + i(3\cos^2 x \sin x - \sin^3 x)$$

Par identification on a :

$\cos 3x = \cos^3 x - 3\cos x \sin^2 x$

b) On a $\cos 2x = 1 - \sin^2 x$ donc

$\cos 2x + \cos 3x = 1 - \sin^2 x + \cos^3 x - 3\cos x \sin^2 x = 1 + \cos^3 x - \sin^2 x\,(2 + 3\cos x)$

Exercice 42

Écrivons sous forme algébrique

1) $\frac{e^{i\frac{\pi}{3}}+e^{-i\frac{\pi}{3}}}{2} = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

2) $\frac{e^{i\frac{\pi}{6}} - e^{-i\frac{\pi}{6}}}{2i} = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

3) $e^{i\frac{3\pi}{4}} + e^{-i\frac{3\pi}{4}} = 2\cos\frac{3\pi}{4} = -2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2}$

Exercice 43

Écrivons sous forme trigonométrique

1) $e^{i\theta} + 1 = e^{i\frac{\theta}{2}}e^{i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}} \times e^{-i\frac{\theta}{2}} = e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{i\frac{\theta}{2}} + e^{-i\frac{\theta}{2}}\right) = 2\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) \times e^{i\frac{\theta}{2}}$

Comme $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) > 0$ alors

$e^{i\theta} + 1 = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\left(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}\right)$

2) $e^{i\theta} - 1 = e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}}\right) = 2i\left(\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) \times e^{i\frac{\theta}{2}} = 2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2}\right)}$

Or $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) > 0$ donc

$$e^{i\theta} - 1 = 2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\left[\cos\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{2}\right)\right]$$

3)$e^{-i\theta}+1=e^{-i\frac{\theta}{2}}\left(e^{i\frac{\theta}{2}}+e^{-i\frac{\theta}{2}}\right)=2\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)\times e^{-i\frac{\theta}{2}}=$
$2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\left(\cos\left(-\frac{\theta}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\theta}{2}\right)\right)$

Exercice 44

Linéarisons

1) $\cos^3 x=\left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^3=\frac{1}{8}\left(e^{i3x}+3e^{i2x}e^{-i}+3e^{ix}e^{-i2x}+e^{-i3x}\right)$

$$=\frac{1}{8}\left[e^{i3x}+e^{-i3x}+3\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)\right]=\frac{1}{8}(2\cos 3x+3\cos x)$$

$$=\frac{1}{4}\cos 3x+\frac{3}{8}\cos x$$

2) $\sin^2 x\cos^2 x=\left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^2\left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^2=-\frac{1}{8}\left(e^{i2x}-e^{-i2x}\right)^2$

$$=-\frac{1}{8}(2\cos 4x-2)=-\frac{1}{4}\cos 4x+\frac{1}{4}$$

3) $\cos^4 x=\left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^4=\frac{1}{16}\left[e^{i4x}+e^{-i4x}+4\left(e^{i2x}+e^{-i2x}\right)+6\right]$

$$=\frac{1}{16}(2\cos 4x+8\cos 2x+6)$$

4)$\sin^5 x=\left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^5=\frac{1}{32i}\left[e^{i5x}-e^{-i5x}-5\left(e^{i3x}+e^{-i3x}\right)+\right.$
$\left.10\left(e^{i2x}-e^{-i2x}\right)\right]$

$$=\frac{1}{32i}(2i\sin 5x-10i\sin 3x+20i\sin 2x)$$

$$=\frac{1}{16}\sin 5x-\frac{5}{16}\sin 3x+\frac{5}{8}\sin 2x$$

3. RESOLUTION D'EQUATION DANS $\mathbb{C}$

Exercice 45

Déterminons les racines carrées de chacun des nombres suivants

1) $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x^2-y^2=0 \\ 2xy=1 \end{cases}$

$x^2=\frac{1}{2}$ soit $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

Si $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$; $y=\frac{\sqrt{2}}{2}$ et si $x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$; $y=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

Les racines carrées de i sont $\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}$

2) $\begin{cases} x^2+y^2=\sqrt{2} \\ x^2-y^2=1 \\ 2xy=1 \end{cases}$

$x^2=\frac{1+\sqrt{2}}{2}$ soit $x=\frac{\sqrt{1+\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}$ ou $x=-\frac{\sqrt{1+\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}$

Si $x=\frac{\sqrt{1+\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}$; $y=\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{1+\sqrt{2}}}$ et si $x=-\frac{\sqrt{1+\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}$; $y=-\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{1+\sqrt{2}}}$

Les racines carrées de $1+i$ sont $\frac{\sqrt{1+\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{1+\sqrt{2}}}i$ et $-\frac{\sqrt{1+\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{1+\sqrt{2}}}i$

3) $\begin{cases} x^2+y^2=2 \\ x^2-y^2=\sqrt{3} \\ 2xy=1 \end{cases}$

$x^2=\frac{2+\sqrt{3}}{2}$ Soit $x=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\sqrt{2}}$ ou $x=-\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\sqrt{2}}$

Si $x=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\sqrt{2}}$; $y=\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2}}$ et si $x=-\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\sqrt{2}}$; $y=-\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2}}$

Les racines carrées de $\sqrt{3}+i$ sont $\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2}}i$ et $-\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2}}i$

Exercice 46 (le traiter après l'étude la racine nième d'un nombre complexe)

Exercice 47

Déterminons les racines cubiques de chacun des nombres complexes suivants

1) $1 = e^{i0}$ donc $z_k = e^{i\frac{2k\pi}{3}}$; $k \in \{0; 1; 2\}$

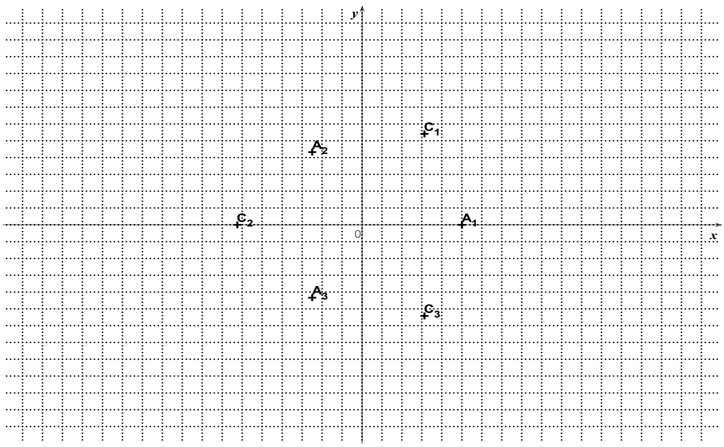
Les racines cubiques de 1 sont $1; -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

2)$1 - i = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$ donc $z_k = 2^{\frac{1}{6}}e^{i\left(-\frac{\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3}\right)}$; $k \in \{0; 1; 2\}$

Les racines cubiques de $1 - i$ sont $2^{\frac{1}{6}}e^{-i\frac{\pi}{12}}$; $2^{\frac{1}{6}}e^{i\frac{7\pi}{12}}$; $2^{\frac{1}{6}}e^{-i\frac{9\pi}{12}}$

3)$-2 = 2e^{i\pi}$ donc $z_k = 2^{\frac{1}{3}}e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\frac{2k\pi}{3}\right)}$; $k \in \{0; 1; 2\}$

Les racines carrées de -2 sont $2^{\frac{1}{3}}e^{i\frac{\pi}{3}}$; $2^{\frac{1}{3}}e^{i\pi}$ et $2^{\frac{1}{3}}e^{-i\frac{\pi}{3}}$



Exercice 48

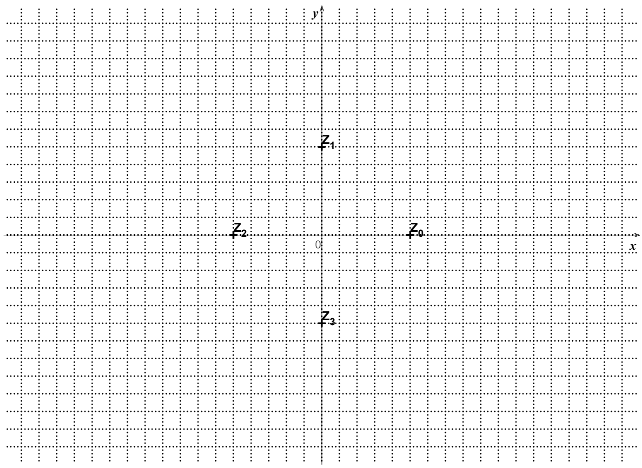
$1 = e^{i0}$ donc les racines quatrième de 1 sont les nombres complexes de la forme

$z_k = e^{i\frac{2k\pi}{4}}$; $k \in \{0; 1; 2; 3\}$

Soit $z_k = e^{i\left(\frac{k\pi}{2}\right)}$; $k \in \{0; 1; 2; 3\}$

Les racines quatrièmes de 1 sont : $1; e^{i\frac{\pi}{2}}$; $e^{i\pi}$; $e^{-i\frac{\pi}{2}}$

C'est-à-dire $1; i; -1; -i$



Exercice 49

Les racines n-ième d'un nombre complexe non nul sont les nombres complexes

de la forme $Z_k = \sqrt[n]{r}e^{i\left(\frac{\alpha}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)}$; $k \in \{0; 1; 2; \ ; \dots \dots . . ; n-1\}$

On a $Z_0 = \sqrt[n]{r}e^{i\left(\frac{\alpha}{n}+2\times\frac{0\pi}{n}\right)}$; $Z_1 = \sqrt[n]{r}e^{i\left(\frac{\alpha}{n}+\frac{2\pi}{n}\right)}$;………….. ; $Z_{n-1} = \sqrt[n]{r}e^{i\left(\frac{\alpha}{n}+\frac{2(n-1)\pi}{n}\right)}$

$$Z_0 + Z_1 + \cdots + Z_{n-1} = \sqrt[n]{r}e^{i\frac{\alpha}{n}}\left(1 + e^{i\frac{2\pi}{n}} + \left(e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)^2 + \cdots + \left(e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)^{n-1}\right)$$

$$= \sqrt[n]{r}e^{i\frac{\alpha}{n}} \times \frac{1-\left(e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)^n}{1-e^{i\frac{2\pi}{n}}} = \sqrt[n]{r}e^{i\frac{\alpha}{n}} \times \frac{1-1}{1-e^{i\frac{2\pi}{n}}} = 0$$

Exercice 50

Vérifions

1. a) on a : $1 + j + \bar{j} = 0$ donc $\bar{j} = -1 - j$

   b) $j^2 = \bar{j}$ donc $j^3 = j\bar{j}$

Or $j^3 = 1$ donc $j\bar{j} = 1$

c) $j^3 = 1$ donc $(j^3)^2 = 1^2$ d'où $j^6 = 1$

2) $j^{2021} = j^{3\times 573+1} = j$ car $j^3 = 1$

Exercice 51

Résolvons dans $\mathbb{C}$

1) $\Delta = -3 = \left(i\sqrt{3}\right)^2$ ainsi $Z = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ ou $Z = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$

$S_{\mathbb{C}} = \left\{\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}; \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right\}$

2)$\Delta = 3 + 4i = (2 + i)^2$ ainsi $Z = \frac{4-3i+2+i}{2}$ ou $Z = \frac{4-3i-2-i}{2}$

$Z = 3 - i$ ou $Z = 1 - 2i$

$S_{\mathbb{C}} = \{3 - i; 1 - 2i\}$

3)$\Delta = 3 - 4i = (2 - i)^2$ ainsi $Z = \frac{i\sqrt{3}+2-i}{2i}$ ou $Z = \frac{i\sqrt{3}-2+i}{2i}$

$Z = \frac{-1+\sqrt{3}}{2} - i$ ou $Z = \frac{1+\sqrt{3}}{2} + i$

$S_{\mathbb{C}} = \left\{\frac{-1+\sqrt{3}}{2} - i; \frac{1+\sqrt{3}}{2} + i\right\}$

4. NOMBRE COMPLEXE ET CONFIGURATION DU PLAN

Exercice 52

1)$|Z - i| = 2 \Leftrightarrow |Z_M - Z_A| = 2$ où $Z_A = i$

L'ensemble des points M est le cercle de centre A et de rayon 2

2)$|Z - 1 + 2i| = |Z + 2 - i| \Leftrightarrow |Z - (1 - 2i)| = |Z - (-2 + i)|$

$\Leftrightarrow |Z_M - Z_B| = |Z_M - Z_C| \Leftrightarrow BM = CM$

Où $Z_B = 1 - 2i$ et $Z_C = -2 + i$

L'ensemble des points M est la médiatrice du segment $[BC]$.

Exercice 53

On a :

$\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} = \frac{\sqrt{3}+i}{2i} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

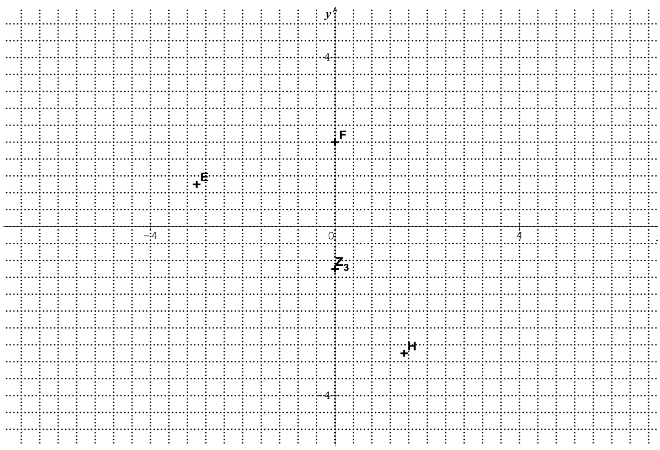
On a $\left|\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}\right| = \left|\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right| = 1 \Leftrightarrow \frac{AC}{AB} = 1 \Leftrightarrow AB = AC$ et $\mathrm{Arg}\left(\widehat{\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}}\right) = -\frac{\pi}{3}$

Donc ABC est un triangle équilatéral de sens indirect.

EXERCICES DE RENFORCEMENT / D'APPROFONDISSEMENT

Exercice 1

1)



2)$Z_{\overrightarrow{EF}} = 2i + 3 - i = 3 + i$

$Z_{\overrightarrow{FH}} = \frac{3}{2} - 3i - 2i = \frac{3}{2} - 5i$

$Z_{\overrightarrow{HE}} = -3 + i - \frac{3}{2} + 3i = -\frac{9}{2} + 4i$

$Z_{2\overrightarrow{FE}} = 2(-3 + i - 2i) = -6 - 2i$

3)I a pour affixe $\frac{-3+i+2i}{2}$ soit $\frac{-3+3i}{2}$

Exercice 2

Écrivons sous forme trigonométrique

1)$ab = 6\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{12}\right)\right) = 6\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

$ab^2 = 18\left(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}\right)$

$a^2b = 12\left(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}\right)$

$\frac{b}{a^2} = \frac{3}{4}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right)$

2)Déduisons -en la forme algébrique

$$ab = 6\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 3 + 3i\sqrt{3}$$

$\frac{a}{b} = \frac{a^2b}{ab^2} = \frac{12}{18}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = \frac{2}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{3}i$

Exercice 3

1)$|U| = \sqrt{2}$ et $\arg(1 - i) = \frac{\pi}{4}$

$|V| = 2$ et $\arg(\sqrt{3} - i) = -\frac{\pi}{6}$

2.a) $U.V = (1 - i)(\sqrt{3} - i) = \sqrt{3} - i + i\sqrt{3} + 1 = 1 + \sqrt{3} + i(-1 + \sqrt{3})$

D'autre part $UV = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$

2.b) on a : $UV = UV$ donc $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ et $\sin\frac{\pi}{12} = \frac{-1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$

Exercice 4

a)$(\cos x + i\sin x)^4 = \cos 4x + i\sin^4 x$

$= \cos^4 x - 6\cos^2 x \sin^2 x + \sin^4 x + i(4\cos^3 x \sin x - 4\cos x \sin^3 x)$

Ainsi $\cos 4x = \cos^4 x - 6\cos^2 x \sin^2 x + \sin^4 x$

b) $\cos 5x + \cos 6x$

$= \cos^5 x - 10\cos^3 x \sin^2 x - 5\cos x \sin^4 x + \cos^6 x - 15\cos^4 x \sin^2 x - 15\cos^2 x \sin^4 x - \sin^6 x$

c)$\sin x - \sin 2x + \sin 3x - \sin 4x$

$= \sin x - 2\sin x \cos x + 3\cos^2 x \sin x - \sin^3 x - 4\cos^3 x \sin x + 4\cos x \sin^3 x$

Exercice 5

Linéarisons

1) $\cos^4 x = \frac{1}{16}(2\cos 4x + 8\cos 2x + 6)$

$\cos^2 x \sin^3 x = -\frac{1}{32}(2\sin 5x - 2\sin 3x - 4\sin x)$

$\cos^5 x - \sin^4 x = \frac{1}{2^4}\cos 5x + \frac{5}{2^4}\cos 3x + \frac{5}{2^3}\cos x - \frac{1}{2^3}\cos x - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{3}{2^3}$

2) Déterminons les racines carrées de chacun des nombres complexes suivants

$Z = 2i$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ x^2 - y^2 = 0 \\ 2xy = 2 \end{cases}$$

$x^2 = 1$ d'où $x = 1$ ou $x = -1$

Si $x = 1$, $y = 1$; si $x = -1$, $y = -1$

Les racines carrées de $2i$ sont $1 + i$ et $-1 - i$

$Z = 3 + 4i$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x^2 - y^2 = 3 \\ xy = 2 \end{cases}$$

$x^2 = 4$. D'où $x = 2$ ou $x = -2$

Si $x = 2$, $y = 1$; si $x = -2$, $y = -1$

Les racines carrées de $3 + 4i$ sont $2 + i$ et $-2 - i$

$Z = 8 + 6i$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ x^2 - y^2 = 8 \\ xy = 3 \end{cases}$$

$x^2 = 9$ d'où $x = 3$ ou $x = -3$

Si $x = 3$, $y = 1$; si $x = -3$, $y = -1$

Les racines carrées de $8 + 6i$ sont $3 + i$ et $-3 - i$

$Z = 5 - 12i$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ x^2 - y^2 = 5 \\ xy = -6 \end{cases}$$

$x^2 = 9$ d'où $x = 3$ ou $x = -3$

Si $x = 3$, $y = -2$; si $x = -3$, $y = 2$

Les racines carrées de $5 - 12i$ sont $3 - 2i$ et $-3 + 2i$

$Z = -7 + 24i$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x^2 - y^2 = -7 \\ xy = 12 \end{cases}$$

$x^2 = 9$ d'où $x = 3$ ou $x = -3$

Si $x = 3$, $y = 4$; si $x = -3$, $y = -4$

Les racines carrées de $-7+24i$ sont $3+4i$ et $-3-4i$

Exercice 6

1) Résolvons dans $\mathbb{C}$

$\Delta = \left(2^{\theta+1}\cos\theta\right)^2 = 4\times 2^{2\theta} = \left(i2^{\theta+1}\sin\theta\right)^2$

$Z = 2^{\theta}(\cos\theta + i\sin\theta)$ ou $Z = 2^{\theta}[\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)]$

$S_{\mathbb{C}} = \left\{2^{\theta}(\cos\theta + i\sin\theta)\,;2^{\theta}[\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)]\right\}$

2)OAB est équilatéral $\Leftrightarrow \frac{2^{\theta}e^{i\theta}}{2^{\theta}e^{-i\theta}} = e^{\pm i\frac{\pi}{3}} \Leftrightarrow e^{i2\theta} = e^{\pm i\frac{\pi}{3}} \Leftrightarrow 2\theta = \frac{\pi}{3}$ ou $2\theta = -\frac{\pi}{3}$

$$\Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{6} \text{ ou } \theta = -\frac{\pi}{6}$$

Exercice 7

1) Résolvons dans $\mathbb{C}$

Soit a cette solution réelle on a :

$a^3 - a^2 - a - 2 + i(2-a) = 0$

$2 - a = 0$ et $a^3 - a^2 - a - 2 = 0$ donc $a = 2$

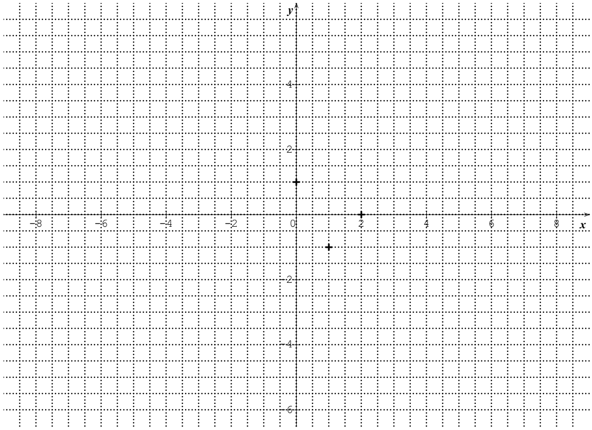
Ainsi $P(Z) = (Z-2)(Z^2 + Z + (1-i))$

$\Delta = -3 + 4i = (1+2i)^2$

$Z = 1 + i$ ou $Z = -i$

$S_{\mathbb{C}} = \{\,2\,;-1-i\,;\,i\,\}$

2.a)



2.b) $\frac{Z_A - Z_C}{Z_B - Z_C} = \frac{2-i}{-1-2i} = \frac{-1+2i}{1+i}$ = i, d'où le résultat

Exercice 8

1) on a : $(Z^2 + 1)(Z^2 - 4) = Z^4 - 3Z^2 - 4$

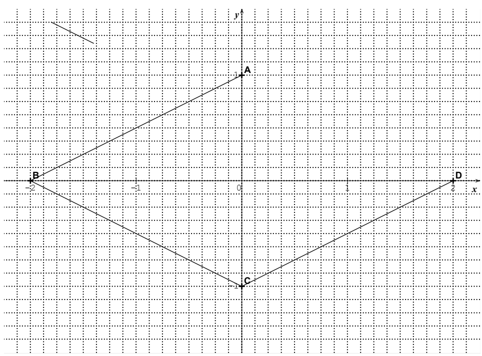
2) Résolvons dans $\mathbb{C}$

$(E) \Leftrightarrow Z^2 + 1 = 0$ ou $Z^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow Z^2 = -1$ ou $Z^2 = 4$

$\Leftrightarrow Z = i$ ou $Z = -i$ ou $Z = 2$ ou $Z = -2$

$S_{\mathbb{C}} = \{i; -i; 2; -2\}$

3) figure



4)$Z_{\overrightarrow{BA}} = 2 + i$ et $Z_{\overrightarrow{CD}} = 2 + i$ donc $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$

D'où ABCD est un parallélogramme de plus $\frac{Z_A - Z_C}{Z_D - Z_B} = \frac{2i}{4} = \frac{1}{2}i$ et $\frac{1}{2}i \ \in i\mathbb{R}^*$

Donc $(AC) \perp (BD)$ par suite ABCD est un losange.

Exercice 9

Soit ib cette solution imaginaire pure

on a :$-b^2 + 2b + i(-b^3 + 5b^2 - 10b + 8) = 0$ d'où $b = 2$

Ainsi $P(Z) = (Z - 2i)(Z^2 + (1 - 3i)Z - 4)$

$\Delta = 8 - 6i = (-3 + i)^2$

$Z = \frac{-1+3i-3+i}{2}$ ou $Z = \frac{-1+3i+3-i}{2}$

$Z = -2 + 2i$ ou $Z = 1 + i$

$S_{\mathbb{C}} = \{2i; -2 + 2i; 1 + i\}$

Exercice 10

1) Déterminons les racines cubiques de 1

On a : $Z^3 = 1$

$S_{\mathbb{C}} = \left\{1; -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$

Les racines cubiques de 1 sont donc 1 ; $-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

2)$(2 - 1)^3 = 8 - 12i - 6 + i = 2 - 11i$

3)Déduisons Les racines cubiques de $2 - 11i$

On a $Z^3 = 2 - 11i \Leftrightarrow Z^3 = (2 - 1)^3 \Leftrightarrow \left(\frac{Z}{2-i}\right)^3 = 1$ d'après 1)

$Z = (2 - i) \times 1$ ou $Z = (2 - i)\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ou $Z = (2 - i)\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$S_{\mathbb{C}} = \left\{2 - i; \frac{-2+\sqrt{3}}{2} + \left(\frac{1}{2} + \sqrt{3}\right)i; \frac{-2-\sqrt{3}}{2} + \left(\frac{1}{2} - \sqrt{3}\right)i\right\}$

Les racines cubiques de $2-11i$ sont $2-i$; $\frac{-2+\sqrt{3}}{2}+\left(\frac{1}{2}+\sqrt{3}\right)i\ et\ \frac{-2-\sqrt{3}}{2}+\left(\frac{1}{2}-\sqrt{3}\right)i$

Exercice 11

1)$a=\frac{9}{2}\times 2\sqrt{3}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)=9\sqrt{3}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$

2.a)On a $a=9\sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{3}}$

Les racines cinquièmes de a sont les nombres complexes de la forme

$$Z_k=\sqrt[5]{9\sqrt{3}}e^{i\left(-\frac{\pi}{15}+\frac{2k\pi}{5}\right)} ; k\in\{0;1;2;3;4\}$$

b) représentation graphique des racines cinquièmes de a

Exercice 12

1)$Z\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\arg(Z)=k\pi$; $k\in Z$

$\Leftrightarrow\arg\left(\frac{2(Z-2)}{Z-i}\right)=k\pi \quad \Leftrightarrow\arg\left(\frac{(Z-2)}{Z-i}\right)=k\pi$

$\Leftrightarrow\arg\left(\frac{Z-z_B}{Z-z_A}\right)=k\pi\ \ ou\ \ Z_A=i$ et $Z_B=2$

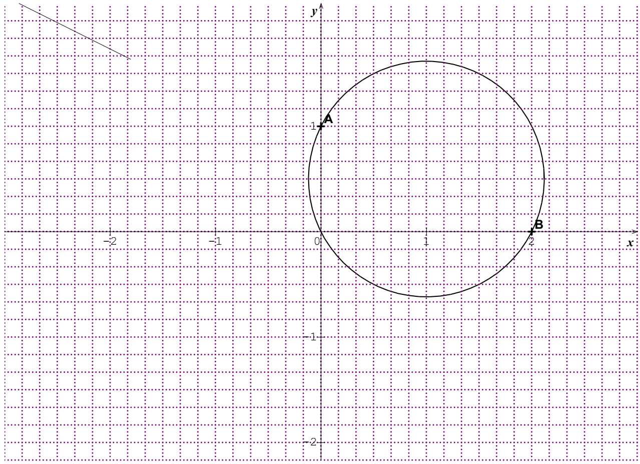
$\Leftrightarrow$mes$\left(\widehat{\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}}\right)=k\pi$

Ainsi l'ensemble des points M est la droite (AB) privée des points $A\ et\ B$

2)$Z\in i\mathbb{R}\Leftrightarrow\arg(Z)=\frac{\pi}{2}+k\pi$

$\Leftrightarrow$ mes$\left(\widehat{\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}}\right)=\frac{\pi}{2}+k\pi$; $k\in Z$

L'ensemble des points M est le cercle de diamètre AB privé des points A



Exercice 13

$f(Z) = \frac{iZ}{Z+i}$

1)$f(b) = 1 + 2i \Leftrightarrow \frac{ib}{b+i} = 1 + 2i \Leftrightarrow b(1+i) = 2 - i \Leftrightarrow b = \frac{2-i}{1+i} = \frac{1-3i}{2}$

2)$f(Z) - i = \frac{iZ}{Z+i} - i = \frac{1}{Z+i}$

Or $|f(Z) - i| = \frac{1}{|Z+i|} = \frac{1}{r}$ et $\arg(f(Z) - i)$ =$\arg\left(\frac{1}{Z+i}\right) = -\arg(Z+i) = -a$

Ainsi $f(Z) - i = \frac{1}{r}(\cos(-a) + i\sin(-a))$

3.a)$Z_A = -i$

$|f(Z) - i| = \sqrt{2} \Leftrightarrow |f(Z) - Z_A| = \sqrt{2} \Leftrightarrow \left|\frac{1}{Z+i}\right| = \sqrt{2} \Leftrightarrow |Z+i| = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow$
$|Z - Z_A| = \frac{\sqrt{2}}{2}$

L'ensemble (C) des points M est le cercle de centre A et de rayon $\frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\arg(f(Z) - i) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \Leftrightarrow \arg\left(\frac{1}{Z+i}\right) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \Leftrightarrow -\arg(Z+i) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$

$\Leftrightarrow \arg(Z - Z_A) = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \Leftrightarrow \mathrm{Mes}\left(\widehat{\vec{u};\overrightarrow{AM}}\right) = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi\ ; k \in \mathbb{Z}$

L'ensemble (Γ) des points M est la demi-droite de repère $(A;\overrightarrow{e_1})$ privée de A

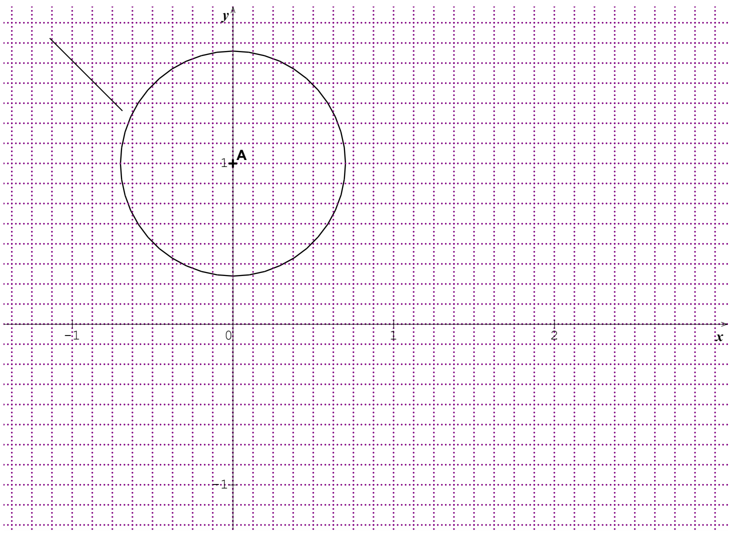
avec $\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{u};\overrightarrow{e_1}}) = -\frac{\pi}{4}$

c) on a : $|f(b) - i| = |1 + 2i - i| = |1 + i| = \sqrt{2}$ donc $B \in (C)$

d'autre part $\arg(f(b) - i) = \arg(1 + i) = \frac{\pi}{4}$ donc $B \in (\Gamma)$

par suite B *appartient* à (C) et à (Γ)

Construction de (C) et à (Γ)



Exercice 14

Démontrons que Z est un réel

$|1 + iZ| = |1 - iZ| \Leftrightarrow |1 + iZ|^2 = |1 - iZ|^2 \Leftrightarrow$
$(1 - iZ)(1 - i\bar{Z}) = (1 - iZ)(1 + i\bar{Z})$

$\Leftrightarrow 1 - i\bar{Z} + iZ + Z\bar{Z} = 1 + i\bar{Z} - iZ + Z\bar{Z} \Leftrightarrow 2i\bar{Z} - 2iZ = 0 \Leftrightarrow$
$2i(\bar{Z} - Z) = 0$

$\Leftrightarrow \bar{Z} - Z = 0 \Leftrightarrow \bar{Z} = Z$

Donc $Z \in \mathbb{R}$

Exercice 15

Ecrivons sous forme algébrique

1) $2e^{\left(-i\frac{\pi}{4}\right)} \times e^{i\left(\frac{3\pi}{4}\right)} = 2e^{i\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right)} = 2e^{i\frac{\pi}{2}} = 2i$

2) $\frac{2\,e^{i\left(\frac{\pi}{4}\right)}}{e^{-i\left(\frac{3\pi}{4}\right)}} = \frac{2}{3}e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{3\pi}{4}\right)} = \frac{2}{3}e^{i\pi} = -\frac{2}{3}$

3) $\frac{2\,e^{-i\frac{\pi}{3}}}{3\,e^{-i\left(\frac{5\pi}{6}\right)}} = \frac{2}{3}e^{i\left(-\frac{\pi}{3}+\frac{5\pi}{6}\right)} = \frac{2}{3}e^{i\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3}i$

Exercice 16

Écrivons sous forme trigonométrique chacun des nombres suivants

1) $\frac{\tan\theta - i}{\tan\theta + i} = \frac{\sin\theta - i\cos\theta}{\sin\theta - i\cos\theta} = \frac{\cos\theta + i\sin\theta}{-\cos\theta + i\sin\theta} = \frac{\cos\theta + i\sin\theta}{\cos(\pi-\theta)+i\sin(\pi-\theta)} = \frac{e^{i\theta}}{e^{i(\pi-\theta)}} = e^{i(2\theta-\pi)}$

$= \cos(2\theta-\pi) + i\sin(2\theta-\pi)$

2) $\frac{1}{1+i\tan\theta} = \frac{\cos\theta}{\cos\theta + i\sin\theta} = \cos\theta\, e^{-i\theta} = \cos\theta\,(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta))$ car $\cos\theta > 0$

3) $e^{i\theta} + e^{2i\theta} = e^{i\theta}\left(1 + e^{i\theta}\right) = e^{i\theta}\left(e^{i\frac{\theta}{2}}e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}}e^{i\frac{\theta}{2}}\right) =$
$e^{i\theta}\left[e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{i\frac{\theta}{2}} + e^{-i\frac{\theta}{2}}\right)\right]$

$= 2\cos\theta\, e^{i\frac{3\theta}{2}}$ comme $\cos\theta > 0$, alors

$e^{i\theta} + e^{2i\theta} = 2\cos\theta\left(\cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) + i\sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right)$

4) $\frac{1+i\tan\theta}{1-i\tan\theta} = \frac{\cos\theta + i\sin\theta}{\cos\theta - i\sin\theta} = \frac{e^{i\theta}}{e^{-i\theta}} = e^{2i\theta} = \cos(2\theta) + i\sin(2\theta)$

Exercice 17

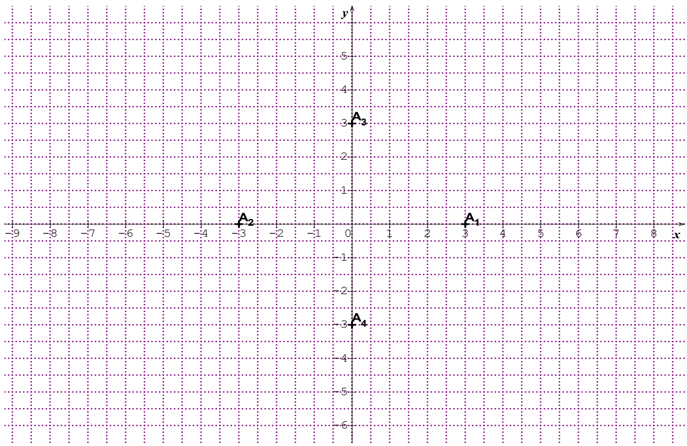
Déterminons les racines quatrième de 81

On a : $Z^4 = 81 \Leftrightarrow Z^4 = 3^4 \Leftrightarrow \left(\frac{Z}{3}\right)^4 = 1$ or les racines quatrième de 1 sont $1; -1; i$ et $-i$

Donc $Z = 3 \times 1$ ou $Z = 3 \times (-1)$ ou $Z = 3 \times i$ ou $Z = 3 \times (-i)$

Les racines quatrièmes de 81 sont $3; -3; 3i$ et $-3i$

Construction des points images



Exercice 18

1) Déterminons les racines n-ième de $-i$

On a $-i = e^{-i\frac{\pi}{2}}$ ainsi $Z^n = e^{-i\frac{\pi}{2}}$

$$Z_k = e^{i\left(-\frac{\pi}{2n}+\frac{2k\pi}{n}\right)}; k \in \{0; 1; 2; \dots\dots; n-1\}$$

Déterminons les racines n-ième de $1 + i$

On a : $1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ ainsi $Z^n = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

$$Z_k = 2^{\frac{1}{2n}}e^{i\left(\frac{\pi}{4n}+\frac{2k\pi}{n}\right)}; k \in \{0; 1; 2; \dots\dots; n-1\}$$

2.a) calculons

$$(9+i)^2 = 81-1+18i = 80+18i$$

2.b) Résolvons dans $\mathbb{C}$

$(E) \Leftrightarrow Z^2+(7-1)Z-8-8i=0$ avec $Z=z^3$

$\Delta = (7-i)^2+4(8+8i) = 49-1-14i+32+32i = 80+18i = (9+i)^2$

Ainsi $Z=\frac{-7+i+9+i}{2}=1+i$ ou $Z=\frac{-7+i-9-i}{2}=-8$

De plus on a :

$(E_1) : z^3 = 1+i$ et $(E_2) : z^3 = -8$

Résolvons (E_1)

(E_1): $z^3 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ donc $Z_k = 2^{\frac{1}{6}}e^{i\left(\frac{\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3}\right)}; k \in \{0;1;2\}$

D'où $Z = 2^{\frac{1}{6}}e^{i\frac{\pi}{12}}$ ou $Z = 2^{\frac{1}{6}}e^{i\frac{3\pi}{4}}$ ou $Z = 2^{\frac{1}{6}}e^{i\frac{17\pi}{12}}$

Résolvons (E_2)

(E_1): $z^3 = 2^3e^{i\pi}$ donc $Z_k = 2e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\frac{2k\pi}{3}\right)}; k \in \{0;1;2\}$

D'où $Z = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ ou $Z = 2e^{i\pi}$ ou $Z = 2e^{i\frac{5\pi}{3}} = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$

$$S_{\mathbb{C}} = \left\{ 2^{\frac{1}{6}}e^{i\frac{\pi}{12}};\ 2^{\frac{1}{6}}e^{i\frac{3\pi}{4}};\ 2^{\frac{1}{6}}e^{i\frac{17\pi}{12}};\ 2e^{i\frac{\pi}{3}};\ 2e^{i\pi};\ 2e^{-i\frac{\pi}{3}} \right\}$$

Exercice 19

Déterminons les entiers naturels tels que $\left(1+i\sqrt{3}\right)^n$ soit un nombre réel positif. On a $\left(1+i\sqrt{3}\right)^n = 2^n e^{i\frac{n\pi}{3}}$

Donc $\left(1+i\sqrt{3}\right)^n \in \mathbb{R}_+ \Leftrightarrow \frac{n\pi}{3} = 2k\pi \Leftrightarrow n = 6k\ ; k \in \mathbb{Z}_+$

$n = 6k\ ; k \in \mathbb{Z}_+$

Exercice 20

$$\frac{1+Z}{1-Z} = -\overline{\left(\frac{1+Z}{1-Z}\right)} \Leftrightarrow (1+Z)(1-\bar{Z}) = (1-Z)(-1-\bar{Z})$$

$$\Leftrightarrow 1-\bar{Z}+Z-Z\bar{Z} = -1+\bar{Z}+Z+Z\bar{Z} \Leftrightarrow 2Z\bar{Z} = 2$$

$$\Leftrightarrow Z\bar{Z} = 1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{Z\bar{Z}} = 1$$

$$\Leftrightarrow |Z| = 1$$

Exercice 21

1.a) $Z = Re(Z) + i\, Im(Z)$

On a : $|\, Z\,| = \sqrt{\left(Re(Z)\right)^2 + \left(Im(Z)\right)^2}$ et $|\, Z\,| \geq 0$

Si $Re(Z) \leq 0$, alors $Re(Z) \leq |\, Z\,|$

Si $Re(Z) \geq 0$, alors on a

$|\, Z\,|^2 - \left(Re(Z)\right)^2 = \left(Re(Z)\right)^2 + \left(Im(Z)\right)^2 - \left(Re(Z)\right)^2 = \left(Im(Z)\right)^2$

Or $\left(Im(Z)\right)^2 \geq 0$ Donc $Re(Z) \leq |\, Z\,|$

Par suite pour tout nombre complexe Z on a : $Re(Z) \leq |\, Z\,|$

b) $Re(Z) = |\, Z\,|$ si $Re(Z) \geq 0$ et $\sqrt{\left(Re(Z)\right)^2 + \left(Im(Z)\right)^2} = Re(Z)$

d'où $Re(Z) \geq 0$ et $Im(Z) = 0$

2.a) on a : $|\, Z_1 + Z_2\,|^2 = (\,Z_1 + Z_2\,)\,(\,\overline{Z_1} + \overline{Z_2}\,)$

$$= |\, Z_1\,|^2 + |Z_2\,|^2 + 2\, Re(\,Z_1 \times \overline{Z_2}\,) \quad (1)$$

Or d'après 1.a) on a : $Re(\,Z_1 \times \overline{Z_2}\,) \leq |\,Z_1 \times \overline{Z_2}|$ (2)

D'où $Re(\,Z_1 \times \overline{Z_2}\,) \leq |\,Z_1|\,|\overline{Z_2}|$

De(1) et (2) on obtient :

$$| Z_1 |^2 + |Z_2 |^2 + 2Re(Z_1 \times \overline{Z_2}) \leq | Z_1 |^2 + |Z_2 |^2 + 2| Z_1| | \overline{Z_2}|$$

$| Z_1 + Z_2 |^2 \leq | Z_1 |^2 + |Z_2 |^2 + 2| Z_1| | \overline{Z_2}|$

$| Z_1 + Z_2 |^2 \leq | Z_1 |^2 + |Z_2 |^2 + 2| Z_1| | Z_2|$

$| Z_1 + Z_2 |^2 \leq (| Z_1 | + |Z_2 |)^2$

Par suite $| Z_1 + Z_2 | \leq | Z_1 | + |Z_2 |$

b) Si $Z_2 = \lambda Z_1$ avec $\lambda > 0$

on a d'une part

$| Z_1 + Z_2 | = |Z_1 + \lambda Z_1| = |1 + \lambda || Z_1| = (1 + \lambda)| Z_1|$

et d'autre part

$| Z_1 | + |Z_2 | = |Z_1| + |\lambda Z_1| = |Z_1| + |Z_1||\lambda | = |1 + \lambda || Z_1| = (1 + \lambda)| Z_1|$

Donc Si $Z_2 = \lambda Z_1$ avec $\lambda > 0$ alors $| Z_1 + Z_2 | = | Z_1 | + |Z_2 |$

3.a) Pour $n = 2$ on a $| Z_1 + Z_2 | \leq | Z_1 | + |Z_2 |$

Supposons qu'il existe un entier naturel $n \geq 2$ tels que

$| Z_1 + Z_2 + \ldots . + Z_n| \leq | Z_1 | + | Z_2 | + \cdots . . +| Z_n |$

et montrons que

$| Z_1 + Z_2 + \ldots . + Z_{n+1} | \leq | Z_1 | + | Z_2 | + \cdots . . +| Z_{n+1} |$

on a : $| Z_1 + Z_2 + \ldots . + Z_n| \leq | Z_1 | + | Z_2 | + \cdots . . +| Z_n |$

d'où $| Z_1 + Z_2 + \ldots . + Z_n| + | Z_{n+1} | \leq | Z_1 | + |Z_2 | + \cdots . . +| Z_n | + | Z_{n+1} |$ (1)

or $| Z_1 + Z_2 + \ldots . + Z_{n+1} | \leq | Z_1 + Z_2 + \ldots . + Z_n| + | Z_{n+1} |$ (2)

donc de (1) et (2) on déduis que

$| Z_1 + Z_2 + \ldots . + Z_{n+1} | \leq | Z_1 | + | Z_2 | + \cdots . . +| Z_{n+1} |$

En conclusion

Pour tout entier naturel $n \geq 2$, on a

$| Z_1 + Z_2 + \ldots . + Z_n| \leq \ | Z_1 | + | Z_2 | + \cdots . . +| Z_n |$

b) on suppose que $Z_1;\ Z_2;\ \ldots . et\ Z_n$ sont tous non nuls

S'il existe des réels λ_1 ; λ_2; λ_3 , …. , λ_n tous strictement positifs tels que pour tout

$k = 1, \ldots ., n$ on a $Z_k = \ \lambda_k Z_1$

d'une part $| Z_1 + Z_2 + \ldots . + Z_n| = | \lambda_1 Z_1 + \ \lambda_2 Z_1 + \ \ldots . + \ \lambda_n Z_1|$

$= |(\lambda_1 + \ \lambda_2 + \ \ldots . + \ \lambda_n) Z_1|$

$= (\lambda_1 + \ \lambda_2 + \ \ldots . + \ \lambda_n)| Z_1|$

D'autre part $| Z_1 | + |Z_2 | + \cdots . . +| Z_n | = | \lambda_1 Z_1 | + | \lambda_2 Z_1 | + \cdots . . +| \lambda_n Z_1 |$

$= \ \lambda_1| Z_1 | + \ \lambda_2| Z_1 | + \cdots . . + \lambda_n| Z_1 |$

$= (\lambda_1 + \ \lambda_2 + \ \ldots . + \ \lambda_n)| Z_1|$

Par suite $| Z_1 + Z_2 + \ldots . + Z_n| = \ | Z_1 | + | Z_2 | + \cdots . . +| Z_n |$

EXERCICE 22

1) L'impédance complexe Z est égale à

$$Z = Z_R + \ Z_L + Z_C = R + jLw + \frac{1}{jCw} = \ R + \left(- \ \frac{1}{2} + \ i \ \frac{\sqrt{3}}{2}\right) Lw + \frac{- \frac{1}{2} - \ i \frac{\sqrt{3}}{2}}{Cw}$$

$$= \ R - \frac{Lw}{2} - \ \frac{1}{2Cw} + i \ \left(\frac{Lw\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2Cw}\right) = \frac{2CRw - LCw^2 - 1}{2Cw} + i \ \frac{LCw^2\sqrt{3} - \sqrt{3}}{2Cw}$$

La partie réelle de l'impédance complexe Z est donc

$$R - \frac{Lw}{2} - \ \frac{1}{2Cw} = \frac{2CRw \ - \ LCw^2 \ - \ 1}{2Cw}$$

2) la résistance X correspond à la partie imaginaire de Z

On a donc $X = \frac{Lw\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2Cw} = \frac{LCw^2\sqrt{3} - \sqrt{3}}{2Cw}$

3) L'impédance de l'association correspondant au module de Z

On a $| Z | = \left| R - \frac{Lw}{2} - \frac{1}{2Cw} + i\left(\frac{Lw\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2Cw}\right)\right|$

$$= \sqrt{\left(R - \frac{Lw}{2} - \frac{1}{2Cw}\right)^2 + \left(\frac{Lw\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2Cw}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{2CRw - LCw^2 - 1}{2Cw}\right)^2 + \left(\frac{LCw^2\sqrt{3} - \sqrt{3}}{2Cw}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{2Cw}\sqrt{(2CRw - LCw^2 - 1)^2 + \left(LCw^2\sqrt{3} - \sqrt{3}\right)^2}$$

4) Le déphase entre l'impédance et le courant est

$$\varphi = \arg(Z)$$

$$\varphi = \arg\left(\frac{2CRw - LCw^2 - 1}{2Cw} + i\,\frac{LCw^2\sqrt{3} - \sqrt{3}}{2Cw}\right)$$

On a $\cos\varphi = \frac{2CRw - LCw^2 - 1}{\sqrt{(2CRw - LCw^2 - 1)^2 + \left(LCw^2\sqrt{3} - \sqrt{3}\right)^2}}$ et

$$\sin\varphi = \frac{LCw^2\sqrt{3} - \sqrt{3}}{\sqrt{(2CRw - LCw^2 - 1)^2 + \left(LCw^2\sqrt{3} - \sqrt{3}\right)^2}}$$

EXERCICE 23

1) Détermination de l'impédance complexe

$$Z = \frac{Z_R \times Z_L}{Z_R + Z_L}$$

$$Z = \frac{RjLw}{R + jLw} = \frac{\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)RLw}{R + \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)Lw} = \frac{\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)RLw}{\left(R - \frac{1}{2}Lw\right) + i\left(\frac{Lw\sqrt{3}}{2}\right)}$$

D'où l'impédance de l'association est

$$| Z | = \left| \frac{\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)RLw}{\left(R-\frac{1}{2}Lw\right)+i\left(\frac{Lw\sqrt{3}}{2}\right)} \right| = \frac{\left|\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)RLw\right|}{\left|\left(R-\frac{1}{2}Lw\right)+i\left(\frac{Lw\sqrt{3}}{2}\right)\right|} =$$

$$\frac{\left|-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right| \, | RLw |}{\left|\left(R-\frac{1}{2}Lw\right)+i\left(\frac{Lw\sqrt{3}}{2}\right)\right|}$$

$$= \frac{RLw}{\sqrt{\left(R-\frac{1}{2}Lw\right)^2+\left(\frac{Lw\sqrt{3}}{2}\right)^2}} = \frac{RLw}{\sqrt{R^2-RLw+(Lw)^2}}$$

2) Détermination de déphase φ

On a $\varphi = \arg(Z)$

et $$Z = \frac{\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)RLw}{\left(R-\frac{1}{2}Lw\right)+i\left(\frac{Lw\sqrt{3}}{2}\right)} = \frac{-RLw+iLRw\sqrt{3}}{(2R-Lw)+iLw\sqrt{3}} =$$

$$\frac{\left(-RLw+iLRw\sqrt{3}\right)\left((2R-Lw)-iLw\sqrt{3}\right)}{(2R-Lw)^2+\left(Lw\sqrt{3}\right)^2}$$

d'où $$\varphi = \arg\left(\frac{\left(-RLw+iLRw\sqrt{3}\right)\left((2R-Lw)-iLw\sqrt{3}\right)}{(2R-Lw)^2+\left(Lw\sqrt{3}\right)^2}\right)$$

3 a) l'amplification d'un filtre est égale au module de la fonction de transfert

Or $T = \frac{1}{1+jRCw}$ d'où $$T = \frac{1}{1+\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)RCw} = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}RCw\right)+i\left(\frac{RCw\sqrt{3}}{2}\right)}$$

Donc $$| T | = \frac{1}{\left|\left(1-\frac{1}{2}RCw\right)+i\left(\frac{RCw\sqrt{3}}{2}\right)\right|} = \frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{1}{2}RCw\right)^2+\left(\frac{RCw\sqrt{3}}{2}\right)^2}} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-RCw+(RCw)^2}}$$

b) $$\varphi = arg(T) = \arg\left(\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}RCw\right)+i\left(\frac{RCw\sqrt{3}}{2}\right)}\right) = -\arg\left(\left(1-\frac{1}{2}RCw\right)+ i\left(\frac{RCw\sqrt{3}}{2}\right)\right)$$

SITUATIONS COMPLEXES

Exercice 24

$$arg\left(\frac{z-2i}{z-1+i}\right)=\frac{\pi}{2}+k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}\iff arg\left(\frac{z-2i}{z-(1-i)}\right)=\frac{\pi}{2}+k\pi\ ,k\in\mathbb{Z}$$

$$\iff mes(\overrightarrow{MA}\ ;\ \overrightarrow{MB})=\frac{\pi}{2}+k\pi\ \ ,k\in\mathbb{Z}$$

où $z_A=2i$ et $z_B=1-i$

$mes(\widehat{\overrightarrow{MA}\ ;\ \overrightarrow{MB}})=\frac{\pi}{2}+k\pi$ donc $Mes(\overrightarrow{MA}\ ;\ \overrightarrow{MB})=\frac{\pi}{2}$ ou $Mes\left(\widehat{\overrightarrow{MA}\ ;\ \overrightarrow{MB}}\right)=-\frac{\pi}{2}$

Par suite, l'ensemble des points M est le cercle de diamètre $[AB]$ privé des points A et B

Exercice 25

Les sommets d'un hexagone sont les points images des nombres complexes solution de l'équation $(E)\ :\ Z^6=1$

En effet $Z^6=1\iff Z^6=e^{i0}$

Les solutions sont les nombres complexes de la forme

$$Z_k=e^{i\left(\frac{2k\pi}{6}\right)}\ ;k\in\{0;1;2;3\ ;4\ ;\ 5\}\text{ soit }Z_k=e^{i\frac{k\pi}{3}}\ ;k\in\{0;1;2;3\ ;4\ ;\ 5\}$$

Donc $Z_0=1\ ;Z_1=e^{i\frac{\pi}{3}}\ ;Z_2=e^{i\frac{2\pi}{3}}\ ;Z_3=e^{i\pi}\ ;Z_4=e^{-2i\frac{\pi}{3}}$ et $Z_5=e^{-i\frac{\pi}{3}}$

Si M_0 ; M_1 ; M_2 ; M_3 ; M_4 et M_5 sont les points images respectives des nombres complexes Z_0 ; Z_1 ; Z_2 ; Z_3 ; Z_4 et Z_5 , alors M_0 ; M_1 ; M_2 ; M_3 ; M_4 et M_5 appartiennent au cercle de centre O et de rayon 1, donc $mes(\widehat{\overrightarrow{OM_k}\ ;\ \overrightarrow{OM_{k+1}}})=\frac{\pi}{3}$ par suite OM_kM_{k+1} est un triangle équilatéral.

Connaissant A ici M_0, le triangle OM_kM_{k+1} étant équilatéral on utilise le rayon pour placer successivement sur le cercle à partir du point A les autres points M_1 ; M_2 ; M_3 ; M_4 et M_5

Ainsi nous avons construit l'hexagone $M_0\ M_1\ M_2\ M_3\ M_4\ M_5$..

10 FONCTIONS EXPONENTIELLES ET FONCTIONS PUISSANCES

EXERCICES DE FIXATION

Exercice 1

1) V ; 2) F ; 3) V : 4) F ; 5) F ; 6) V ; 7) F ; 8) V ; 9) V.

Exercice 2

a) $e^6 \times e^{-4} = e^2$

b) $e^8 \times e^3 = e^{11}$

c) $e^{-3} \times e^{-4} = e^{-7}$

d) $e^{-5} \times e^3 = e^{-2}$

e) $\frac{e^{1+ln3}}{e^{2+ln3}} = e^{1+ln3-2-ln3} = e^{-1}$

Exercice 3

a) $\frac{e^7}{e^3} = e^{7-3} = e^4$

b) $(e^{-5})^6 \times e^3 = e^{-27}$

c) $\frac{e^7 \times e^{-4}}{e^3} = e^{7-4-3} = e^0 = 1$

Exercice 4

a) $\frac{1}{(e^{-3})^2} \times \frac{(e^4)^{-1}}{e^2 \times e^{-6}} = e^{-6} \times 1 = e^{-6}$

b) $(e^{-2})^{-3} \times (e^{-4})^2 = e^6 \times e^{-8} = e^{-2}$

Étude de la fonction exp

Exercice 5

	Affirmations	Réponses
a	$e^x = 2 \Leftrightarrow x = 2$	faux
b	$e^x > 2 \Leftrightarrow \ln 2 < x$	vrai
c	$\ln(e^x) < 3 \Leftrightarrow x > 3$	faux
d	$x > -1 \Leftrightarrow e^{-1} < e^x$	vrai

Exercice 6

a) $\forall x \in]0\,;+\infty[$, $-2e^x + x = x(-2\frac{e^x}{x} + 1)$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(-2\frac{e^x}{x}+1\right) = -\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}(-2e^x + x) = -\infty$$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0$ (limite de référence)

c) $\forall x \in]0\,;+\infty[$, $e^x - x = x(\frac{e^x}{x} - 1)$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{e^x}{x}-1\right) = +\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}(2e^x - x) = +\infty$$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1+e^x}{e^x} = \lim\limits_{x\to+\infty}(e^{-x}+1) = 1$

e) $\forall x \in]0\,;+\infty[$, $e^x - \ln x = x(\frac{e^x}{x} - \frac{\ln x}{x})$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{e^x}{x}-\frac{\ln x}{x}\right) = +\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}(e^x - \ln x) = -\infty$$

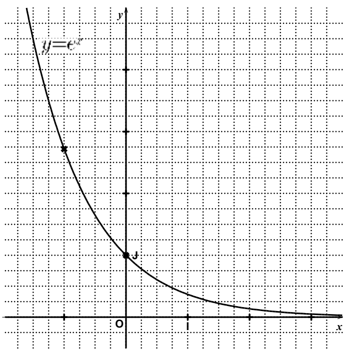
f) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \sqrt{x}\ln x = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} x^{\frac{1}{2}}\ln x = 0$

g) $$\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} -x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} 4e^x = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to-\infty}(-x + 4e^x) = +\infty$$

Exercice 7

Cette courbe et celle de la fonction exp sont symétriques par rapport à la droite (OJ).

x	0	-1
e^x	1	e



Fonction du type e^u

Exercice 8

Pour tout x élément de]0 ; +∞[;

h(x) = $e^{\sqrt{2x}}$

h'(x) = $\frac{1}{\sqrt{2x}} e^{\sqrt{2x}}$

h'(x) = $\frac{\sqrt{2x}}{2x} e^{\sqrt{2x}}$

Exercice 9

a) Pour tout x élément de $\mathbb{R}$; f(x) = e^{2x+1} f '(x) = $2e^{2x+1}$

b) Pour tout x élément de $\mathbb{R}$; f(x) = xe^{x^2} f '(x) = $(1 + 2x^2e^{x^2})$

c) Pour tout x élément de $\mathbb{R}$; f(x) = $e^{\frac{-1}{2}x}$ f '(x) = $-\frac{1}{2}e^{\frac{-1}{2}x}$

d) Pour tout x élément de $\mathbb{R}$; f(x) = $\frac{e^{3x-1}}{x^2+1}$

f '(x) = $\frac{3e^{3x-1}(x^2+1)-e^{3x-1}(2x)}{(x^2+1)^2}$

f '(x) = $\frac{e^{3x-1}(3x^2-2x+3)}{(x^2+1)^2}$

Exercice 10

a) Pour tout x élément de $\mathbb{R}$;

f(x) = $4e^{4x-2}$

F(x) = e^{4x-2}

b) Pour tout x élément de $\mathbb{R}$;

g(x) = $2xe^{x^2}$

g(x) = $u'(x)e^{u(x)}$ où u(x) = x^2

G(x) = e^{x^2}

c) Pour tout x élément de $\mathbb{R}$;

h(x) = $(x + 2)e^{x^2+4x+1}$

h(x) = $\frac{1}{2}(2x + 4)e^{x^2+4x+1}$

h(x) = $\frac{1}{2}u'(x)e^{u(x)}$ où u(x) = x^2+4x+1

H(x) = $\frac{1}{2}e^{x^2+4x+1}$

Exercice 11

F(x) = $\boldsymbol{\frac{e^{tanx}}{2} + C}$

Exercice 12

a) $e^{3x} - 5^x = 0 \Leftrightarrow e^{3x} = 5^x$

$\Leftrightarrow 3x = x\ln 5$

$\Leftrightarrow x = \frac{ln5}{3}$

$S_a = \{\frac{ln5}{3}\}$

b) $e^{3x+4} = 2 \Leftrightarrow 3x+4 = \ln 2$

$\Leftrightarrow x = \frac{-4+ln2}{3}$

$S_b = \{\frac{-4+ln2}{3}\}$

c) $e^{\sin x} = \sqrt{e} \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \sin x = \sin\frac{\pi}{3}$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2p\pi$ ou $x = x = \pi - \frac{\pi}{3} + 2q\pi$ ($p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{Z}$)

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2p\pi$ ou $x = x = \frac{2\pi}{3} + 2q\pi$ ($p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{Z}$)

$S_c = \{\frac{\pi}{3} + 2p\pi ; \frac{2\pi}{3} + 2q\pi$ ($p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{Z}$)$\}$

d) $e^{-x} = 2e^x = 0 \Leftrightarrow -x = \ln 2 + x$

$\Leftrightarrow x = \frac{-ln2}{2}$

$S_d = \{\frac{-ln2}{2}\}$

e) $e^{2x} - 3e^x + 3 = 0 \Leftrightarrow (e^x)^2 - 3e^x + 3 = 0$

$\Delta = 9 - 12 = -4$

$\Delta < 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, e^{2x} - 3e^x + 3 > 0$

$S_e = \varnothing$

f) $e^{3x}(e^{x+3} - 1) = 0 \Leftrightarrow e^{x+3} = 1$

$\Leftrightarrow x+3 = 0$

$\Leftrightarrow = -3$

$S_f = \{-3\}$

Exercice 13

a) $3e^{2x} - 16e^x + 5 \geq 0 \Leftrightarrow 3(e^x)^2 - 16e^x + 5 \geq 0$

$\Delta' = 64 - 15 = 49$

$\frac{8-7}{3} = \frac{1}{3}$ et $\frac{8+7}{3} = 5$

$e^x \leq \frac{1}{3}$ ou $e^x \geq 5$

$x \leq -\ln 3$ ou $x > \ln 5$

$S_a =]-\infty \,;\, -\ln 3] \cup [\ln 5 \,;\, +\infty[$

b) $e^{2x+3} < \ln 3 \Leftrightarrow 2x+3 < \ln(\ln 3)$

$\Leftrightarrow x < \frac{-3+ln(ln3)}{2}$

$S_b =]-\infty \,;\, \frac{-3+ln(ln3)}{2}[$

c) V_c = ⍰*

$\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1} < -1 \Rightarrow \frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1} + 1 < 0$

$\Rightarrow \frac{2e^{2x}}{e^{2x}-1} < 0 \qquad | 2e^{2x} > 0$

$\Rightarrow e^{2x} - 1 < 0$

$\Rightarrow x < 0$

$S_c =]-\infty \,;\, 0[$

d) $2e^{2x+1} - 3e^x + 1 < 2e \Leftrightarrow 2ee^{2x} - 3e^x + 1-2e < 0$

$\Delta = 9 - 4(2e)(1-2e)$

$= 16e^2 - 8e + 9$ ($\approx 105{,}5$ à 10^{-1} près)

$\frac{3-\sqrt{16e^2-8e+9}}{4e} < e^x < \frac{3+\sqrt{16e^2-8e+9}}{4e}$

$e^x < \frac{3+\sqrt{16e^2-8e+9}}{4e}$

$x < \ln\left(\frac{3+\sqrt{16e^2-8e+9}}{4e}\right)$

$S_d =]-\infty \,;\, \ln\left(\frac{3+\sqrt{16e^2-8e+9}}{4e}\right)[$

Fonction exponentielle de base e

Exercice 14

a) $\forall x \in \mathbb{R},\ 2^x = e^{x\ln 2}$

b) $\forall x \in \mathbb{R},\ \left(\frac{1}{2}\right)^x = e^{-x\ln 2}$

c) $\forall x \in \mathbb{R}$;

$\frac{3^x}{5^x} = \left(\frac{3}{5}\right)^x = e^{xln\frac{3}{5}}$

Exercice 15

Il suffit d'étudier la fonction f telle que : $f(x) = e^{x\ln 5}$

Exercice 16

Utiliser la formule $\ln(a^x) = x \ln a$

Exercice 17

a) $\forall x \in \mathbb{R}$;

$2^{2+x} \times 2^{-2x} = 2^{2-x}$

b) $\forall x \in \mathbb{R}$;

$\frac{2^x}{5^x} = \left(\frac{2}{5}\right)^x$

c) $\forall x \in \mathbb{R}$;

$7^{2-x} \times 7^{-2x} = 7^{2-3x}$

Exercice 18

$2 \times 9^x - 5 \times 3^x + 2 = 0 \Leftrightarrow 2 \times (3^x)^2 - 5 \times 3^x + 2 = 0$

$\Delta = 25 - 16 = 9$

$3^x = \frac{5-3}{4}$ ou $3^x = \frac{5+3}{4}$

$3^x = \frac{1}{2}$ ou $3^x = 2$

$x = \frac{-ln2}{ln3}$ ou $x = \frac{ln2}{ln3}$

$S = \{\frac{-ln2}{ln3} ; \frac{ln2}{ln3}\}$

Exercice 19

$2 \times 9^x - 5 \times 3^x + 2 > 0 \Leftrightarrow 2 \times (3^x)^2 - 5 \times 3^x + 2 = 0$

$\Leftrightarrow 3x < \frac{1}{2}$ ou $3x > 2$

$\Leftrightarrow x < \frac{-ln2}{ln3}$ ou $x > \frac{ln2}{ln3}$

$S =]-\infty ; \frac{-ln2}{ln3}[\cup]\frac{ln2}{ln3} ; +\infty[$

Exercice 20

$2^x < 2^{-x} \Leftrightarrow x < -x$

$\Leftrightarrow 2x < 0$

$\Leftrightarrow x < 0$

$S =]-\infty ; 0[$

Exercice 21

$(0,5)^x > 6 \Leftrightarrow -x\ln2 > \ln6$

$\Leftrightarrow x < \frac{-ln6}{ln2}$

$S =]-\infty ; \frac{-ln6}{ln2}[$

Fonctions puissances

Exercice 22

Df =]0 ; +∞[

* $\forall x \in]0 ; +\infty[$;

$f(x) = x^{-\sqrt{5}}$

$f'(x) = -\sqrt{5}\, x^{-\sqrt{5}-1}$

$f'(x) < 0$

D'où, f est strictement décroissante sur]0 ; +∞[

* $\forall x \in]0 ; +\infty[$;

$f(x) = \frac{1}{x^{\sqrt{5}}}$

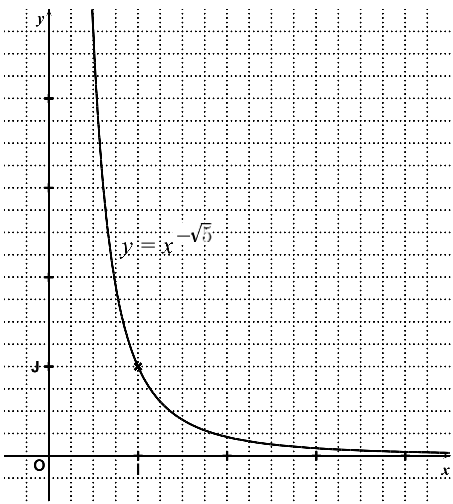
$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$

D'où, la droite (OI) est une asymptote à (C) en +∞

$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = +\infty$

D'où, la droite (OJ) est une asymptote à (C)

*



Exercice 23

	Affirmation	Réponse
a	La fonction : $x \mapsto (2x - 1)^{\ln 2}$ est dérivable sur $]0 ; +\infty[$	faux
b	La fonction : $x \mapsto (e^{x-1})^{\ln 2}$ est dérivable sur $]0 ; +\infty[$	vrai
c	$\forall x \in]0 ; +\infty[, [(e^x - 1)^{\ln 2}]' = e^x \ln 2 \, (e^x - 1)^{-1+\ln 2}$	vrai

Exercice 24

a) Pour tout nombre réel x;

g(x) = $(1 + e^{-2x})^{\sqrt{7}}$

g'(x) = $-2\sqrt{7}\, e^{-2x}(1 + e^{-2x})^{\sqrt{7}-1}$

b) Pour tout nombre réel x;

g(x) = $(x^2 + e^{-x})^{ln2}$

g'(x) = (ln2)(2x - e^{-x})$(1 + e^{-x})^{ln2-1}$

c) Pour tout nombre réel x;

g(x) = $(3e^x + e^{-x})^{ln2}$

g'(x) = (ln2)(3e^x - e^{-x})$(3e^x + e^{-x})^{ln2-1}$

Exercice 25

Notons g la fonction donnée et G une primitive de g sur $\mathbb{R}$

a) Pour tout nombre réel x;

g(x) = $(e^x)^{1+ln2}$

g(x) = $e^{(1+ln2)x}$

G(x) = $\frac{1}{1+ln2} e^{(1+ln2)x}$

b) Pour tout nombre réel x;

g(x) =$(1 - 3e^{-3x})(x + e^{-3x})^{-1+ln3}$

g(x) = $u'(x)(u(x))^{-1+ln3}$ où u(x) = x + e^{-3x}

G(x) = $\frac{1}{ln3}(x + e^{-3x})^{ln3}$

EXERCICES DE RENFORCEMENT / D'APPROFONDISSEMENT

Exercice 1

1. FAUX
2. VRAI
3. FAUX
4. FAUX
5. VRAI

Exercice 2

1. A
2. B
3. A
4. B

Exercice 3

a) $\begin{cases} e^x - 2e^y = 1 & (1) \\ e^x + e^y = 4 & (2) \end{cases}$

(2) - (1) : $3e^y = 3$

$e^y = 1$

(2) : $e^x = 4 - 1 = 3$

$x = \ln 3$ et $y = 0$

$S_a = \{(\ln 3 ; 0)\}$

b) $\begin{cases} e^x + 3e^y = 1 & (1) \\ e^x - 5e^y = 7 & (2) \end{cases}$

(1) - (2) : $8e^y = -6$ (impossible)

$S_b = \varnothing$

c) $\begin{cases} 5e^x - 3e^y = 7 & (1) \\ e^x - 5e^y = 11 & (2) \end{cases}$

(1) - 5(2) : $3e^y = 3$

$e^y = 1$

(2) : $e^x = 4 - 1 = 3$

$x = \ln 3$ et $y = 0$

$S_a = \{(\ln 3 ; 0)\}$

Exercice 4

Pour tout réel x, $P(x) = 2x^3 - 5x^2 + x + 2$

1. a) $P(1) = 2 - 5 + 1 + 2 = 0$

b) 1 est un zéro de P.

D'où, pour tout réel x ;

$P(x) = (x - 1)(2x^2 + bx - 2)$ où $b \in \mathbb{R}$;

Par identification des termes de degré 2

$b-2 = -5$

$b = -3$

$P(x) = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0$ ou $2x^2 - 3x - 2 = 0$

$\Leftrightarrow x = 1$ ou $(x - 2)(2x + 1)= 0$ |2 est une solution évidente

$\Leftrightarrow x = 1$ ou $x = 2$ ou $x = -\frac{1}{2}$

$S_{1b} = \{-\frac{1}{2} ; 1 ; 2\}$

2. a) (E) : $2e^{3x} - 5e^{2x} + e^x + 2 = 0 \Leftrightarrow 2(e^x)^3 - 5(e^x)^2 + e^x + 2 = 0$

$\Leftrightarrow e^x = 1$ ou $e^x = 2$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x = \ln 2$

$S_{2a} = \{0 ; \ln 2\}$

b) (I) : $2e^{3x} - 5e^{2x} + e^x + 2 \leq 0 \Leftrightarrow 2(e^x)^3 - 5(e^x)^2 + e^x + 2 \leq 0$

$\Leftrightarrow (e^x - 1)(e^x - 2)(2e^x + 1) \leq 0$

$\Leftrightarrow (e^x - 1)(e^x - 2) \leq 0$ $\quad | 2e^x + 1 > 0$

$\Leftrightarrow 1 \leq e^x \leq 2$

$\Leftrightarrow 0 \leq x \leq \ln 2$

$S_{2b} = [0 ; \ln 2]$

Exercice 5

Pour tout *x* élément de $]0 ; +\infty[$;

$f(x) = e^{-\ln x} = \left(e^{\ln x}\right)^{-1} = \frac{1}{x}$

Exercice 6

$D_f = \mathbb{R}$

$f(x) = \frac{3}{e^{-x}+1}$

1. Pour tout réel x, on multipliant le numérateur et le dénominateur par e^x, $f(x) = \frac{3e^x}{e^x+1}$
2. Soit F la primitive cherchée

Pour tout réel x ;

$f(x) = 3\frac{u'(x)}{u(x)}$ où $u(x) = e^x + 1$

$F(x) = 3\ln|e^x + 1| + c \ (c \in \mathbb{R})$.

$F(0) = 0 \Leftrightarrow 3\ln 2 + c = 0$

$\Leftrightarrow c = -3\ln 2$

$\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = 3\ln|e^x + 1| - 3\ln 2$

Exercice 7

a) $\mathbf{5^x - 5^{-x} = 5}$ et poser $t = 5^x$. On a : $t - \frac{1}{t} = 5$

$x = log_5^{(\frac{5+\sqrt{29})}{2}}$

b) En divisant membre à membre par 9^x, on a :

$4^x + 6^x = 9^x \Leftrightarrow \left(\left(\frac{2}{3}\right)^x\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^x - 1 = 0$

Il suffit de poser $\left(\frac{2}{3}\right)^x$ = t et se ramener à l'équation du second degré $t^2 + t - 1 = 0$

$S_b = \{ log_{\frac{2}{3}}^{(\frac{-1+\sqrt{5})}{2}} \}$

Exercice 8

Le plan est muni d'un repère (O, I, J).

Représente graphiquement les fonctions f, g et h.

1. $f(x) = x^{0,75}$

$0 < 0,75 < 1$

D'où, la courbe représentative (C_f) de f a la même allure que la courbe représentative de la fonction : $x \mapsto \sqrt{x}$.

2. $g(x) = (0,5)^x$

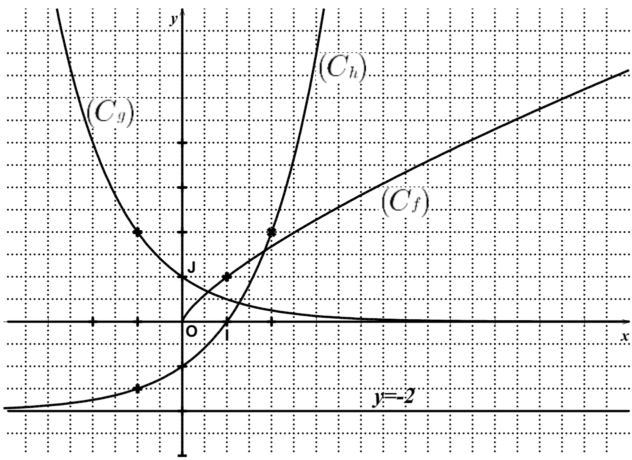
$0 < 0,5 < 1$

D'où, la courbe représentative (C_g) de g a la même allure que la courbe représentative de la fonction : $x \mapsto e^{-x}$.

3. $h(x) = 2^x - 2$

$2 > 1$

D'où, la courbe représentative (C_h) de h a la même allure que la courbe représentative de la fonction : $x \mapsto e^x$, translatée de $-2\overrightarrow{OJ}$.



Exercice 9

Fonction f de ℝ vers ℝ définie par : f(x) = $\frac{e^x-3}{e^x-1}$

1. x ∉ Df ⇔ e^x - 1 = 0

⇔ e^x = 1

⇔ x = 0

Df = ℝ *

2. a) * ∀x∈]0 ; +∞[, f(x) = $\frac{1-3e^{-x}}{1-e^{-x}}$ |on multiplie *f*(x) par $\frac{e^{-x}}{e^{-x}}$

$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty}(1-3e^{-x}) = 1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{1-e^{-x}} = 1 \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$

* $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty}(e^{x}-3) = -3 \\ \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{e^{x}-1} = -1 \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 3$

* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$

D'où, la droite d'équation : y = 1 est une asymptote à (C) en +∞.

* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 3$

D'où, la droite d'équation : y = 3est une asymptote à (C) en -∞.

b) * $\begin{cases} \lim\limits_{x\to0}(e^{x}-3) = -2 \\ \lim\limits_{\substack{x\to0\\<}}\frac{1}{e^{x}-1} = -\infty \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{\substack{x\to0\\<}} f(x) = +\infty$

* $\begin{cases} \lim\limits_{x\to0}(e^{x}-3) = -2 \\ \lim\limits_{\substack{x\to0\\>}}\frac{1}{e^{x}-1} = +\infty \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{\substack{x\to0\\>}} f(x) = -\infty$

* $\lim\limits_{\substack{x\to0\\<}} f(x) = +\infty$

D'où, la droite (OJ) est une asymptote à (C).

* $\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}} f(x) = -\infty$

D'où, la droite (OJ) est une asymptote à (C).

3. a) ∀x∈⍰* ;

f '(x) = $\frac{e^x(e^x-1)-(e^x-3)e^x}{(e^x-1)^2}$ = $\frac{2e^x}{(e^x-1)^2}$

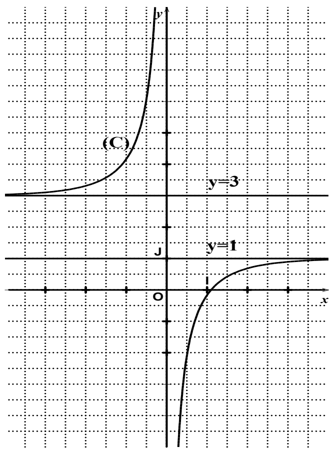
f '(x) > 0

D'où, f est strictement croissante sur]-∞ ; 0[et sur]0 ; +∞[

b)

f	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	||	+
$f(x)$	$3 \nearrow +\infty$	||	$-\infty \nearrow 1$

4.



Exercice10

1. $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(x) = 2e^{2x} - 5e^{x} + 2$

$x \in \mathbb{R}$, $P(x) = 0 \Leftrightarrow 2(e^{x})^{2} - 5e^{x} + 2$

$\Leftrightarrow (e^{x} - 2)(2e^{x} - 1) = 0$ |2 est une solution de $2t^{2} - 5t + 2 = 0$

$\Leftrightarrow e^{x} = 2$ ou $e^{x} = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x = \ln 2$ ou $x = -\ln 2$

$S = \{-\ln 2 \ ; \ln 2\}$

2. $P(x) < 0 \Leftrightarrow (e^{x} - 2)(2e^{x} - 1) < 0$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2} < e^{x} < 2$

$\Leftrightarrow -\ln 2 < x < \ln 2$

D'où : $\forall x \in]-\infty \ ; -\ln 2[\cup]\ln 2 \ ; +\infty[$, $P(x) > 0$ et

$\forall x \in]-\ln 2 \ ; \ln 2[$, $P(x) < 0$

3. $x \notin Df \Leftrightarrow e^{x} - 1 = 0$

$\Leftrightarrow e^{x} = 1$

$\Leftrightarrow x = 0$

$Df = \mathbb{R}^*$

4. a) * $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} (2x+1) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{e^x - 1} = 0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

(Limite d'une somme)

* $\begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} (2x+1) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{e^x - 1} = -1 \end{cases}$ $\Rightarrow$ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

(Limite d'une somme)

* $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$

b) * $\begin{cases} \lim\limits_{x \to 0} (2x+1) = 1 \\ \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{1}{e^x - 1} = -\infty \end{cases}$ $\Rightarrow$ $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = -\infty$

* $\begin{cases} \lim\limits_{x \to 0} (2x+1) = 1 \\ \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{1}{e^x - 1} = +\infty \end{cases}$ $\Rightarrow$ $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = +\infty$

c) * $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = -\infty$

D'où, la droite (OJ) est une asymptote à (C).

* $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = +\infty$

D'où, la droite (OJ) est une asymptote à (C).

5. a) $\forall$ x $\in$ ℝ* ;

f(x) = 2x + 1 + $\frac{1}{e^x - 1}$

f '(x) = 2 - $\frac{e^x}{(e^x - 1)^2}$

= $\frac{2(e^{2x} - 2e^x + 1) - e^x}{(e^x - 1)^2}$

= $\frac{2e^{2x} - 5e^x + 2}{(e^x - 1)^2}$

= $\frac{P(x)}{(e^x - 1)^2}$

b) $\forall$ x $\in$ ℝ* ;

$(e^x - 1)^2 > 0$

f '(x) a le même signe que P(x).

D'où : $\forall x \in]-\infty ; -\ln 2[\cup]\ln 2 ; +\infty[$, f '(x) > 0 et

$\forall x \in]-\ln 2 ; 0[\cup]0 ; \ln 2[$, f '(x) < 0 c)

x	$-\infty$		$-\ln 2$		0		$\ln 2$		$+\infty$
f '(x)			0		||		0		
f(x)	$-\infty$	↗	$-2\ln 2-1$	↘	$-\infty$ || $+\infty$	↘	$2\ln 2+2$	↗	$+\infty$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(2x+1)]$ = $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x-1}$ = 0

D'où, la droite (D) : y = 2x+1, est une asymptote à (C) en $+\infty$

6. a) $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-2x]$ = $\lim\limits_{x\to-\infty}(1\ +\frac{1}{e^x-1})$= 1 – 1 = 0

D'où, la droite (D) : y = 2x, est une asymptote à (C) en $-\infty$

b) $\forall$ x $\in$ $]-\infty\ ;0[$;

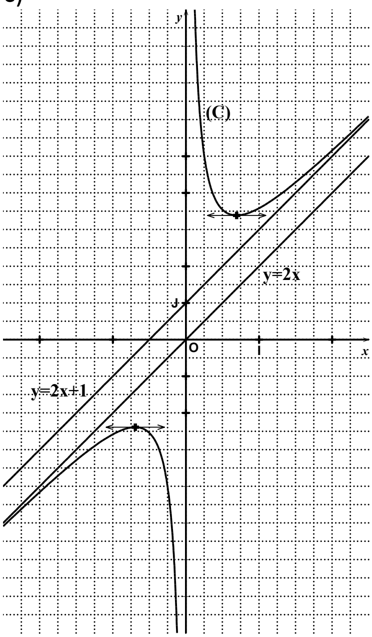
f(x) - 2x = $\frac{e^e}{e^x-1}$

$e^x > 0$ et $e^x - 1 < 0$

f(x) - 2x < 0

D'où, (C) est au-dessous de (D') sur $]-\infty\ ;0[$

c)



d) $\forall x \in \mathbb{R}^*$;

$f(x) = 2x + (1 + \frac{1}{e^x - 1})$

$= 2x + \frac{e^x}{e^x - 1}$

e) $\forall x \in]-\infty ; 0[$;

$f(x) = 2x + \frac{u'(x)}{u(x)}$ où $u(x) = e^x - 1$

D'où, les primitives de f sur $]-\infty ; 0[$ sont les fonctions numériques F_k définies par :

$F_k(x) = x^2 + \ln|e^x - 1| + k$ $(k \in \mathbb{R})$

f) $F(-1) = 1$ et $\forall x \in]-\infty ; 0[$, $F(x) = x^2 + \ln|e^x - 1| + k$ $(k \in \mathbb{R})$

$F(-1) = 1 \Leftrightarrow 1 + \ln|e^{-1} - 1| + k = 1$

$\Leftrightarrow 1 + \ln\left|\frac{1-e}{e}\right| + k = 1$

$\Leftrightarrow \ln|e - 1| + k = 1$

$\Leftrightarrow k = 1 - \ln(e - 1)$

$\forall x \in]-\infty ; 0[$, $F(x) = x^2 + \ln|e^x - 1| + 1 - \ln(e - 1)$.

Exercice11

$D_f = \mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 e^{-x}$

1. $\forall x \in \mathbb{R}$;

$f'(x) = (-x^2 + 2x)e^{-x}$

$= -x(x - 2)e^{-x}$

2. Pour tout réel x ;

$e^{-x} > 0$

$f'(x)$ a le même signe que $-x(x - 2)$

* $\forall x \in]-\infty ; 0[\cup]0 ; 2[$, $f'(x) < 0$

D'où, f est strictement décroissante sur $]-\infty ; 0]$ et sur $[0 ; +\infty[$.

* $\forall x \in]0 ; 2[$, $f'(x) > 0$

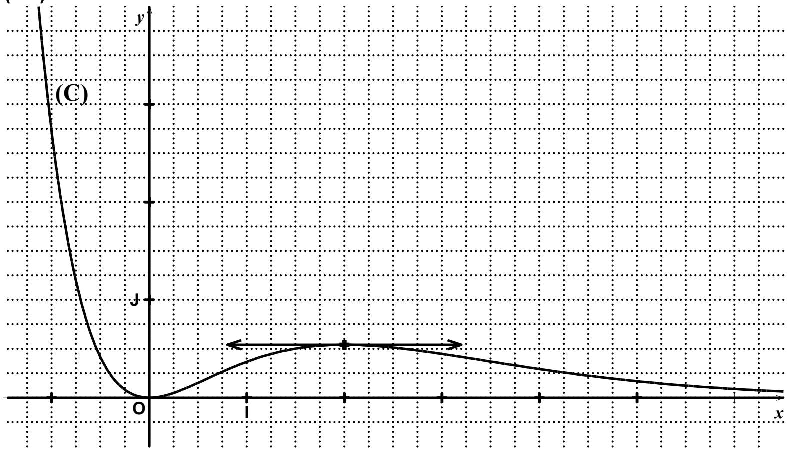
D'où, f est strictement croissante sur $[0 ; 2]$.

*

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{4}{e^2}$	$\searrow$	0

3. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$

D'où, (C) admet en -∞ une branche parabolique de direction celle de la droite (OJ).



4. Dg = $\mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R}$;

g(x) = $-\frac{2}{e}e^{\frac{x}{2}}$

g(x) < 0

a) * f(-1) = e et f(0) = 0

* f est continue et strictement décroissante sur]-1 ; 0[

Et, f(0) < f(2) < f(-1)

D'où, il existe un unique nombre réel α compris entre -1 et 0 tel que : f(α) = f(2).

b) f(α) = f(2) $\Leftrightarrow$ $\frac{4}{e^2} = \frac{\alpha^2}{e^\alpha}$

$\Leftrightarrow \frac{4e^\alpha}{e^2} = \alpha^2$

$\Leftrightarrow \left(2\frac{e^{\frac{\alpha}{2}}}{e}\right)^2 = \alpha^2$

$\Leftrightarrow \left(-\frac{2}{e}e^{\frac{\alpha}{2}}\right)^2 = \alpha^2$

$\Leftrightarrow (g(\alpha))^2 = \alpha^2$

$\Leftrightarrow g(\alpha) = \alpha$ car : $g(\alpha) < 0$

5. a) * $g(-1) = -\frac{2}{e\sqrt{e}}$ et $g(0) = -\frac{2}{e}$

$g(-1) \approx -0,45$ et $g(0) \approx -0,74$ (arrondi d'ordre 2)

* g est continue et strictement décroissante sur [-1 ; 0].

Et, $g(-1) \in [-1 ; 0]$ et $g(0) \in [-1 ; 0]$

D'où : $g([-1 ; 0]) \subset [-1 ; 0]$.

b) $\forall x \in [-1 ; 0]$;

$g'(x) = -\frac{1}{e}e^{\frac{x}{2}}$

$g''(x) = -\frac{1}{2e}e^{\frac{x}{2}}$

$g''(x) < 0$

D'où, g' est strictement décroissante sur [-1 ; 0].

Par suite ;

$\forall x \in [-1 ; 0]$;

$g'(0) \leq g'(x) \leq g'(-1)$

$\frac{-1}{e} \leq g'(x) \leq \frac{-1}{e\sqrt{e}}$

$|g'(x)| \leq \frac{1}{e}$

6. a) * $\forall x \in [-1 ; 0]$, $|g'(x)| \leq \frac{1}{e}$

Et, $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [-1 ; 0]$

Et, $\alpha \in [-1 ; 0]$

D'après l'inégalité des accroissements finis,

$\forall n \in \mathbb{N}$;

$|g(u_n) - g(\alpha)| \leq \frac{1}{e}| u_n - \alpha|$

$|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{e}| u_n - \alpha|$

* $|u_1 - \alpha| \leq \frac{1}{e}|u_0 - \alpha|$

$|u_2 - \alpha| \leq \frac{1}{e}|u_1 - \alpha|$

$|u_3 - \alpha| \leq \frac{1}{e}|u_2 - \alpha|$

…

$|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{e}|u_{n-1} - \alpha|$

En faisant le produit membre à membre et les simplifications nécessaires ;

$\forall n \in$?, $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{e^n}|u_0 - \alpha|$

b) En majorant $|u_0 - \alpha|$ par 1, on a :

$\forall n \in$?, $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{e^n}$

c) $\frac{1}{e^n} \leq 10^{-6} \Rightarrow |u_n - \alpha| \leq 10^{-6}$

$\frac{1}{e^n} \leq 10^{-6} \Rightarrow e^n \geq 10^6$

$\Rightarrow n \geq \ln(10^6)$

Et, $\ln(10^6) \approx 13{,}82$ (arrondi d'ordre 2)

On peut prendre : n = 14

SITUATIONS COMPLEXES

Exercice12

Le chiffre d'affaire moyen annuel, en FCFA, en 2000+x : $300 \times 164\,000 \times f(x)$.

$300 \times 164\,000 \times f(x) = 49\,200\,000 \times f(x)$

Soit A(x) le chiffre d'affaire moyen annuel, en milliards de FCFA, en 2000+x.

$A(x) = 0{,}0492 \times f(x)$

$= 0{,}0492(5 + xe^{0,2x-1})$

* La fonction A est dérivable sur [0 ; 20].

$\forall x \in [0 ; 20]$;

$A'(x) = 0{,}0492(1 + (0{,}2)x)e^{0,2x-1}$

$A'(x) > 0$

D'où, la fonction A est strictement croissante sur [0 ; 20]

* A(0) = 0,246

A(20) = 20,01 (par défaut à 10^{-2} près)

* La fonction A est continue et strictement croissante sur [0 ; 20].

Et, 3,936 est compris entre A(0) et A(20).

D'où, l'équation : $x \in [0 ; 20]$, A(x) = 3,936 admet une unique solution α.

Déterminons α un encadrement de α par balayage.

A(10) = 1,58 (par défaut à 10^{-2} près)

A(15) = 5,69 (par défaut à 10^{-2} près)

$10 < \alpha < 15$

x	11	12	13	14
A(x) par défaut à 10^{-2} près	1,58	2,04	3,41	4,41

$13 < \alpha < 14$

Soit N l'année cherchée.

N = 2010 + 14

= 2024

Exercice 13

Soit T l'heure du crime.

En prenant T comme l'origine du temps, on a :

f(0) = 37,   f(10 - T) = 32   et   f(10,5 - T) = 31

* f(0) = 37 $\Leftrightarrow$ A + 20 = 37

$\Leftrightarrow$ A = 17

* $\begin{cases} f(10-T) = 32 \\ f(10{,}5-T) = 31 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 17e^{-k(10-T)} = 32 \quad (1) \\ 17e^{-k(10{,}5-T)} = 31 \quad (2) \end{cases}$

$\frac{(1)}{(2)}$ donne : $e^{-k(10-T-10{,}5+T)} = \frac{32}{31}$

$e^{(0{,}5)k} = \frac{32}{31}$

$\frac{k}{2} = \ln(\frac{32}{31})$

k = $2\ln(\frac{32}{31})$

* $\forall t \in [0 ; +\infty[$;

f(t) = $17e^{-2ln\left(\frac{32}{31}\right)t}$

$= 17\left(e^{ln\left(\frac{32}{31}\right)}\right)^{-2t}$

$= 17\left(\frac{32}{31}\right)^{-2t}$

$= 17\left(\frac{31}{32}\right)^{2t}$

* f(10 - T) = 32 $\Leftrightarrow$ $17\left(\frac{31}{32}\right)^{2(10-T)} = 12$

$\Leftrightarrow \left(\frac{31}{32}\right)^{2(10-T)} = \frac{12}{17}$

$\Leftrightarrow$ $2(10 - T)\ln\left(\frac{31}{32}\right) = \ln\left(\frac{12}{17}\right)$

$\Leftrightarrow$ $20 - 2T = \frac{ln\left(\frac{12}{17}\right)}{ln\left(\frac{31}{32}\right)}$

$\Leftrightarrow$ $T = \frac{1}{2}(20 - \frac{ln\left(\frac{12}{17}\right)}{ln\left(\frac{31}{32}\right)})$

T = 4,515 (arrondi d'ordre 3)

T $\approx$ 4h 30min

Le crime a eu lieu aux environs de 4h 30min

11 PPCM ET PGCD DE DEUX ENTIERS RELATIFS

EXERCICES DE FIXATION

I. Multiple d'un entier naturel

Exercices de fixation

Exercice 1

1. $0 = 0 \times n$, pour tout entier relatif n.
2. $-4 = 2 \times (-2)$.
3. $ab = a \times (b) = b \times (a)$.
4. Dans ce cas b est un diviseur de a et on a : : $|a| \geq |b|$.

Exercice 2

a) $2\mathbb{Z}$; b) $3\mathbb{Z}$; c) $6\mathbb{Z}$.
On va supposer dans toute la suite que n est nombre un entier naturel.

Exercice 3

$x = np$ et $y = nq$; on a : $x - y = n(p - q)$ et $kx = n(kp)$. D'où le résultat.

PPCM et PGCD de deux nombres entiers relatifs non nuls
Exercices de fixation
Exercice 4
Calcule le PPCM des deux nombres a et b dans chacun des cas suivants :
1) $a = 4$ et $b = 6$; 2) $a = -4$ et $b = 6$; 3) $a = 4$ et $b = -6$; 4) $a = -4$ et $b = -6$.
1) PPCM(4 ; 6) = 12 ; 2) ; PPCM(-4 ; 6) = 12 ; 3) PPCM(4 ; -6) $= 12$; 4) PPCM(-4; -6) = 12.
Exercice 5
Supposons que PPCM(a ; b) = a.
Dans ce cas a est un multiple de b. D'où : $a \in b\mathbb{Z}$.
Réciproquement, supposons que $a \in b\mathbb{Z}$.

a est un multiple de b. Puisque a est multiple de a, l'entier a est multiple commun de a et b. Le PPCM de a et b est donc a.

Exercice 6

PPCM(24 ; 30) = 120. D'où le résultat.

Exercice 7

PPCM(20 ; 30) = PPCM(5×4 ; 5×6) = 5 PPCM(4 ; 6) = 60

PGCD de deux entiers relatifs

Exercices de fixation

Exercice 8

1. FAUX ; 2. VRAI ; 3. VRAI.

Exercice 9

1) PGCD(6 ; 12) = 6 ; 2) PGCD($-$ 8 ; 34) = 2 ; 3) PGCD(-6 ; 12) = 6 ; PGCD(-6 ; -12) = 6.

Exercice 10

Immédiat

Exercice 11

PGCD(24 ; 30) = 6. On en déduit que tout diviseur commun à 24 et 30 est un diviseur de 6.

Exercice 12

Il suffit de déterminer le PGCD (2730 ; 5610)

Exercice 13

PGCD(28 ; 35) = 7× PGCD(4 ; 5) ; PGCD(28 ; 35) = 7.

Exercice 14

1) PGCD(39 ; 65) = 13 ; Puisque 26 est un multiple de 13, il existe deux entiers relatifs u et v tels que : 26 = 39 u + 65 v.

2) Par la division Euclidienne, on a : 26 = 39×($-$ 1) + 65×1.

Exercice 15

Le dernier reste non nul dans cette méthode des divisions Euclidiennes successives étant 36, on a : PGCD (360 ; 252) = 36.

Exercice 16

a)

Dividende	92276	30621	413
Diviseur	30621	413	59
Reste	413	**59**	0

PGCD(92276 ; 30621) = 59

b)

Dividende	871	533	338	195	143	52	39
Diviseur	533	338	195	143	52	39	13
Reste	338	195	143	52	39	**13**	0

PGCD(871 ; 533) = 13

e)

Dividende	2021	53	7	4	3
Diviseur	53	7	4	3	1
Reste	7	4	3	**1**	0

PGCD(2021 ; 53) = 1, etc

Nombres premiers entre eux
Exercices de fixation
Exercice 17

1. PGCD(9 ; 4) = 1, d'où 9 et 4 sont premiers entre eux.
2. PGCD(2 ; 6) = 2, d'où 2 et 6 ne sont pas premiers entre eux

Exercice18

Posons : $a = 12a'$ et $b = 12b'$ où a' et b' premiers entre eux et $a' < b'$.

De l'égalité $a + b$ = 252, on déduit que : $a' + b'$ = 21. Les couples $(a' ; b')$ cherchés sont : (1 ; 20) ; (2 ; 19) ; (3 ; 20) ; (4 ; 17) ; (5 ; 16) ; (8 ; 13) ; (10 ; 11). Il suit que les couples $(a ; b)$ cherchés sont : (12 ; 240) ; (24 ; 228) ; (36 ; 216) ; (48 ; 204) ; (60 ; 192) ; (96 ; 156) ; (120 ; 132).

Exercice 19
On a : $5(2n+3) - 2(5n+7) = 1$. Les entiers $2n+3$ et $5n+7$ sont donc premiers entre eux d'après le théorème de Bézout.

Exercice 20
Les seuls diviseurs communs de a et b sont -1 et 1, implique que PGCD (a, b) = 1 , par définition
PGCD (a, b) = 1, implique que les nombres a et b sont premiers, par définition
PGCD (a, b) = 1 implique les entiers a et b vérifient l'identité de Bézout les entiers a et b vérifient l'identité de Bézout implique que les entiers a et b sont premiers entre-eux et donc les plus grand diviseurs communs sont ; 1 et -1

Exercice 21
Immédiat voir point méthode, page 216

Exercice 22
5 étant un nombre premier qui ne divise pas 21 est premier avec 21.

Exercice 23
Les couples cherchés sont les couples de la forme $(-9k\ ;\ 4k)$ où k est un entier relatif quelconque.
NB. On pourrait écrire sous la forme $(9k\ ;\ -4k)$ où k est un entier relatif quelconque.

Exercice 24
1) $S = \{5k, k \in \mathbb{Z}\}$; 2) $S = \{7k-1, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{7k+2, k \in \mathbb{Z}\}$;
3) En écrivant $x^2 + x - 12 = (x-3)(x+4)$, on obtient :
$S = \{11k-4, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{11k+3, k \in \mathbb{Z}\}$.

Exercice 25
1. FAUX ; 2. VRAI.

Exercice 26
PPCM(6 ; 17) = 6×17 car 6 et 17 sont premiers entre eux. PPCM(6 ; 17) = 102.

Exercice 27
6 et 11 divisent 660 or 6 et 11 sont premiers entre eux donc 6×11 divise 660.

Exercice 28
1) $2x \equiv 4$ [5] $\Leftrightarrow 2(x-2) \equiv 0$ [5]. Ce qui équivaut à $x - 2 \equiv 0$ [5], car 2 et 5 sont premiers entre eux. Les solutions cherchées sont les entiers relatifs x de la forme $5k$ + 2 où k est un entier relatif quelconque.
2) $3x \equiv -1$ [10] $\Leftrightarrow$ 2) $3x \equiv 9$ [10]. Ce qui équivaut à $x \equiv 3$ [10], car 2 et 10 sont premiers entre eux. Les solutions cherchées sont les entiers relatifs x de la forme $10k$ + 3 où k est un entier relatif quelconque.

Exercice 29
Prendre l'énoncé ci-dessous :
Sachant que PPCM(108; 150) = 2700, calcule PGCD(108 ; 150).
Réponse
PGCD(108 ; 150) = 6.
.
Exercice 30
Posons : $a = a'd$ et $b = b'd$ où PGCD(a'; b') = 1. De la relation $md = ab$, on obtient :
$m = a'b'd$. Utilisant l'égalité $2m + d = 39$ avec ce qui précède, on a : $d(2a'b' + 1) = 39$.

d est par conséquent un diviseur de 39 vérifiant 1 < d < 13. On en déduit que d = 3. De l'égalité $d(2a'b' + 1) = 39$, on obtient : $a'b' = 6$ et PGCD(a'; b') = 1.
Les couples (a'; b') sont : (1 ; 6) , (2 ; 3) , (3 ; 2) , (6, 1).
Les couples (a ; b) cherchés sont : (3 ; 18) , (6 ; 9) , (9 ; 6) , (18, 3).
Exercice 32
1) PPCM(3^2×7; 2^3×5) = 2^3× 3^2×5×7 = 2520 ; PGCD(3^2×7; 2^3×5) = 2^0× 3^0×5^0×7^0 = 1 ;
2) PPCM(2^2×3×7^2 ; 3^2×5^3) = 2^2×3^2×5^3× 7^2 = 220 500 ; PGCD(2^2×3×7^2 ; 3^2×5^3) = 2^0×3×5^0× 7^0 = 3

Application à la résolution d'équations à inconnues entières.

Exercices de fixation

Exercice 33

a) Les solutions sont les couples $(3k\,;\,2k)$, où k est un entier relatif quelconque.

b) Pas de solution car le PGCD de 6 et 15 ne divise pas 7.

c) Une solution particulière de l'équation $(x\,;y) \in \mathbb{Z}^2$, $29x - 11y = 1$ est $(-3\,;\,-8)$. On en déduit que (15 ; 40) est une solution particulière de $(x\,;y) \in \mathbb{Z}^2$, $29x - 11y = -5$.

Les solutions sont les couples $(11k + 15\,;\,29k + 40)$, où k est un entier relatif quelconque.

NB. On peut les écrire sous la forme $(11p + 4\,;\,29p + 11)$, où p est un entier relatif quelconque.

Etc.

Exercice 34

1) $3x \equiv 1\,[11] \Leftrightarrow 3x \equiv 12\,[11]$. Ce qui donne $x \equiv 4\,[11]$. Car 3 est premier avec 11

Les solutions cherchées sont les entiers relatifs x de la forme $11k + 4$ où k est un entier relatif quelconque.

2) Pas de solution

3) $2x \equiv 1\,[7] \Leftrightarrow 2x \equiv 8\,[7]$. Ce qui donne $x \equiv 4\,[7]$. Car 2 est premier avec 7.

Les solutions cherchées sont les entiers relatifs x de la forme $7k + 4$ où k est un entier relatif quelconque

Exercice 35

1) PGCD(15 ; 10) = 5. L'entier 25 étant un multiple de 5, (E) admet au moins une solution.

2) $15\,x \equiv 25\ [10] \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}/\ \ 15x = 25 + 10k$

$15x = 25 + 10k \quad \Leftrightarrow 3x = 5 + 2k$

$3x = 5 + 2k \Leftrightarrow 3x \ \equiv\ 5\ [2]$

$3x \ \equiv\ 5\ [2] \Leftrightarrow 3x \ \equiv\ 3\ [2]$

$3x \ \equiv\ 3\ [2] \Leftrightarrow x \ \equiv\ 1\ [2]$. Car 3 est premier avec 2.

Les solutions cherchées sont les nombres entiers relatifs de la forme $2k + 1$ où k est un entier relatif quelconque.

EXERCICES DE RENFORCEMENT/APPROFONDISSEMENT

Exercice 1

1.a) Soit p un élément de nZ. Il existe un entier relatif k tel que : $p = nk$. Par suite : $p = (-n)(-k)$. On en déduit que p est élément de $(-n)$Z, car $-k$ est élément de Z. Réciproquement, soit p un élément de $(-n)$Z. Il existe un entier relatif k tel que $p = -nk$. Par suite : $p = n(-k)$. On en déduit que p est élément de nZ, car $-k$ est élément de Z.

b) Il suffit de vérifier que 0 appartient à tous les nZ.

2. a) Soit (x ; y) un couple d'entiers naturels de PGCD 18 et de somme 360.

Il existe un couple (x', y') d'entiers naturels tels que x = 18x' et y = 18y' avec PGCD(x', y') = 1.

On a donc : $\begin{cases} PGCD(x'; y') = 1 \\ x' + y' = 20 \end{cases}$

Les couples (x ; y) cherchés sont : (18, 342) ; (342, 18) ; (54, 306) ; (306, 54) ; (126, 234) ; (234, 126) ; (162, 198) ; (198, 162).

b) Soit (x ; y) un couple d'entiers naturels non nuls de PGCD 18 et de produit 6480.

Il existe un couple (x' ; y') d'entiers naturels tels que x=18x' et y=18y' avec PGCD(x', y') = 1.

On a donc : $\begin{cases} PGCD(x';y') = 1 \\ x'y' = 20 \end{cases}$

Les diviseurs positifs de 20 sont : 1, 2, 4, 5, 10, 20.

Les couples (x ; y) cherchés sont : (18, 360) ; (18, 360) ; (72, 90) ; (90, 72).

Exercice 2

Soit (x ; y) un couple d'entiers naturels non nuls de PGCD 18 et de PPCM 540.

Il existe un couple (x', y') d'entiers naturels tels que x=18x' et y=18y' avec PGCD(x', y') = 1. On a :

$18\times540 = 18^2x'y'$. D'où : x'y' = 30. Par conséquent :

$$\begin{cases} PGCD(x';y') = 1 \\ x'y' = 30 \end{cases}$$

Les diviseurs positifs de 30 sont : 1, 2, 3, 5, 6,10, 15, 30.

Les couples (x ; y) cherchés sont : (18, 540) ; (540, 18) ; (36, 270) ; 270, 36) ; (54, 180) ; (180, 540) ; (108, 90) ; (90, 108).

Exercice 3

Soit (x ; y) un couple d'entiers naturels non nuls. Soit d et m respectivement le PGCD et le PPCM de x et y. On a dm = xy.

Il existe un couple (x', y') d'entiers naturels non nuls tels que x=dx' et y= dy', avec PGCD(x', y') = 1. Par suite, on a : m = dx'y'. Il suit que : d(1 + x'y') = 203, avec PGCD(x', y') = 1. Les diviseurs de 203 sont 1, 7, 29, 203. On a à résoudre :

(a) $\begin{cases} d = 1 \\ PGCD(x';y') = 1 \\ x'y' = 202 \end{cases}$; (b) $\begin{cases} d = 7 \\ PGCD(x';y') = 1 \\ x'y' = 28 \end{cases}$;

(c) $\begin{cases} d = 29 \\ PGCD(x';y') = 1 \\ x'y' = 6 \end{cases}$

Avec (a), les couples (x ; y) sont : (1, 202) ; (202, 1) ; (2, 101), (101, 2).

Avec (b), les couples (x ; y) sont : (7, 196) ; (196, 7) ; (28, 49) ; (49, 28).

Avec (c), les couples (x ; y) sont : (29, 174) ; (174, 29) ; (58, 87) ; (87, 58).

On a ainsi toutes les solutions.

Exercice 4

Soit x et y des entiers naturels deux entiers naturels non nuls dont la somme est 1008 et dont le PGCD est 24. On va supposer que x ≤ y.

Posons : x = 24x' et y = 24y'. On a : $\begin{cases} x' + y' = 42 \\ PGCD(x', y') = 1 \\ x' \leq y' \end{cases}$

Les résultats peuvent être présentés sous forme de couples (x, y) avec x ≤ y.

Les nombres x et y cherchés sont : (24, 984) ; (120, 888) ; (264, 744) ; (312, 696) ; (408, 600) ;

(456, 552).

Exercice 5

1) Méthode 1

Si d est un diviseur de a et b, alors d divise a et a + b. Il en résulte que si a et b sont premiers entre eux, il en est de même de a et de a + b. De même b et a + b sont premiers entre eux. Il en résulte que a + b est premier avec le produit ab.

Autre méthode

Soit d un diviseur commun positif de a +b et ab. Il s'agit de démontrer que d est égal à 1.

d|(a+b) et d|ab donc d|[a(a+b)-ab], d|a^2 ; de même d|[b(a+b)-ab] et d|b^2. Les nombres a et b étant premiers entre eux, il en est de même de a^2 et b^2. Par suite d est égal à 1. D'où le résultat.

1) Réciproque

Soit a et b deux entiers naturels non nuls tels que a +b et ab sont premiers entre eux. Si a et b n'étaient pas premiers entre eux, ils auraient un diviseur commun d plus grand que 1. d diviserait donc a +b et ab. Ce qui n'est pas possible. Il en résulte que a et b sont premiers entre eux.

Exercice 6

Soit N le nombre cherché. On peut déduire que N +1 est un multiple commun de 8, 15, 18 et 24. N ne sera le plus petit possible que si N +1 est le Plus Petit Commun Multiple de 8, 15, 18 et 24. Ce PPCM est 360. N est donc égal à 359.

Exercice 7

Soit a et b deux entiers naturels non nuls et m le PPCM de a et b. Il s'agit de démontrer que :

PGCD (a, b) = PGCD (a + b, m).

Soit d un diviseur commun de a et b. Posons a = a'δ et b= b'δ où δ = PGCD (a, b). On a m = a'b'δ**,** car m δ = ab**.**

Par suite, PGCD (a + b, m) = δPGCD(a' + b', a'b').

Les nombres a' et b' étant premiers entre eux, il en est de même de a' + b' et de a'b' (Voir exercice 6). On en déduit que : PGCD (a + b, m) = δ.

Exercice 8

1) On a : n = 10^2a + 10b + c, n'= 10^2c + 10b + a, Par suite : d= 99u.
2) d = $11\times3^2\times$u, avec $0\leq$ u ≤9. Dans cette décomposition de d en produit de facteurs premiers, 11 a un exposant impair. Donc d ne peut être le carré d'un entier naturel.
3) On a : d = 11×9(a-c) et n = 10^2a + 10(a + c) + c, c'est-à-dire : n = 11(10a + c).

L'entier 11 divisant d et n, divise le PGCD de d et n. Par suite le PGCD de d et n étant supérieur ou égal à 11, ces deux nombres ne peuvent être premiers entre eux.

4) On a : d = 99(a-c), c'est-à-dire : d= $3^2 \times 11$b.

L'entier b est égal à a-c et puisque a est plus que c, l'entier b n'est pas nul.

Les entiers d et n sont premiers entre eux si et seulement si aucun des nombres 3, 11 et b ne divisent n. D'où les cas suivants qui ont lieu simultanément :

Premier cas : 3 ne divise pas n.

3 ne divise pas n si et seulement si la somme de ses chiffres ne divise pas n (critère de divisibilité par 3). Or, a = b + c, d'où : a + b + c = 2(b+ c). Par suite, 3 ne divise pas n si et seulement si 3 ne divise pas 2(b+ c). Comme 2 est premier avec 3, si seulement si b + c n'est pas divisible par 3.

Deuxième cas : 11 ne divise pas n.

11 ne divise pas n si et seulement si a-b +c n'est pas divisible par 11 (critère de divisibilité par 11). Or, a = b + c, d'où : a - b + c = 2c. Par suite, n n'est pas divisible par 11, si et seulement si 2c l'est pas divisible par 11. Comme 11 et 2 sont premier entre eux, cela est équivalent à c n'est pas divisible par 11. Puisque l'entier c est inférieur à 11, cela équivaut à c est différent de 0.

Troisième cas : b ne divise pas n. ($1 \leq b \leq n$)

n= 100(b+ c) +10b + c, d'où : n = 110 b + 101 c.

Si b ne divise pas n (b >1, car 1 divise tout nombre entier naturel non nul), alors 101c n'est pas congru à 0 modulo b. Puisque 101 est un nombre premier qui ne divise pas b, cela veut dire que b n'est pas un diviseur de c quand b est supérieur à 1. Le cas b= 1 est pris en compte dans la suite.

On récapitule :

Les nombre n cherchés vérifient :

$n = \overline{abc}$; b ≠ 0 ; c ≠ 0 ; b + c = 2 ; b + c = 4 ; b + c = 5 ; b + c = 7 ; b + c = 8 ; b ne divise pas c lorsque b>1.

- Si b + c = 2, alors : b = c = 1. Un seul nombre trouvé : 211 ;
- Si b + c = 4, alors : b = 1, c= 3 ou b = 3, c = 1. Les nombres sont : 413 et 431 ;
- Si b +c = 5, alors : b = 1 et c = 4 ou b = 2, c = 3 ou b = 3, c = 2 ou b = 4, c = 1. Les nombres sont : 514, 523, 532 et 541.
- Si b + c = 7, alors les nombres cherchés sont : 716, 725, 734, 743, 752, 761.
- Si b + c = 8, alors les nombres cherchés sont : 817, 835, 853, 871.

Exercice 9

$n^2 + n + 7 \equiv 2^2 + 2 + 7$ [13]. Ce qui équivaut à $(n^2 - 2^2) + (n - 2) \equiv 0$ [13]. Ce qui équivaut encore à

$(n-2)(n + 3) \equiv 0$ [13]. Puisque 13 est premier, on a : $n \equiv 2$ [13] ou $n \equiv 10$ [13]. D'où : $n = 13k + 2$ ou

$n = 13k + 10$, k étant un entier relatif.

Exercice 10

On a :

$6355 \equiv 55$ [n] et $n > 55$; $1705 \equiv 25$ [n] et $n > 25$; $1271 \equiv 11$ [n] et $n > 11$.

D'où :

$6300 \equiv 0$ [n] ; $1680 \equiv 0$ [n] ; $1260 \equiv 0$ [n] et $n > 55$.

Les nombres n cherchés sont ceux qui sont les diviseurs communs à 6300 ; 1680 et 1260 qui sont supérieurs à 55.

Les diviseurs communs à 6300 ; 1680 et 1260 sont les diviseurs de leurs PGCD.

PGCD(6300, 1680, 1260) = 420.

Parmi les 24 diviseurs positifs de 420, seuls 7 sont supérieurs à 55. Ce sont : 60, 70, 84, 105, 140, 210, 420.

Exercice 11

1) On écrit $n = mq + r$, avec $0 \leq r < m$.

Effectuons la division euclidienne de $a^n - 1$ par $a^m - 1$. On a :

$a^n - 1 = (a^m - 1)(a^{(q-1)m+r} + a^{(q-2)m+r} + \ldots + a^r) + (a^r - 1)$. Or, $0 \leq a^r - 1 < a^m - 1$, donc :

le reste de la division euclidienne de $a^n - 1$ par $a^m - 1$ est $a^r - 1$.

2)

En appliquant l'algorithme d'Euclide, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathrm{PGCD}(a^n - 1, a^m - 1) &= \mathrm{PGCD}(a^m - 1, a^r - 1) \\ &= \ldots \\ &= a^{\mathrm{PGCD}(n\,;\,m)} - 1. \end{aligned}$$

Exercice 12

En écrivant, pour tout entier relatif n, $10n^2 + 51n + 65 = (5n + 13)(2n + 5)$. Puis :

$2(7n + 18) - 7(2n + 5) = 1$, par suite $7n + 18$ est premier avec $2n + 5$. Ensuite :

$-5(7n + 18) + 7(5n + 13) = 1$, il en résulte que $7n + 18$ est premier avec $5n + 13$.

$7n + 18$ étant premier avec $2n + 5$ et avec $5n + 13$, est premier avec leur produit. D'où le résultat.

Exercice 13

Cette équation est équivalente à $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$, $5x + 3y = 7$.

Une solution particulière de cette équation est $(2 ; -1)$.

On a :

$5x + 3y = 7$

$5 \times 2 + 3 \times (-1) = 7$

D'où : $5(2-x) = 3(y+1)$. (*)

5 divise le produit des deux facteurs $3(y+1)$. Il est premier avec 3 donc d'après le théorème de Gauss, il divise nécessairement $y+1$. Par suite, il existe un entier relatif k tel que : $y = 5k - 1$, où $k \in \mathbb{Z}$. En remplaçant cette valeur dans (*), on a : $x = -3k + 2$.

Les solutions sont les couples (x, y) d'entiers relatifs tels que : $x = -3k + 2$ et $y = 5k - 1$, où $k \in \mathbb{Z}$.

Exercice 14

1) En utilisant l'algorithme d'Euclide, on obtient le tableau ci-dessous :

Dividende	2854	567	19	16
Diviseur	567	19	16	3
Reste	19	16	3	**1**
Quotient	5	29	1	5

Le dernier reste non nul dans l'algorithme d'Euclide est 1. Par suite, 2854 et 567 sont premiers entre eux.

2) $2854 = 567\times5 + \underline{19}$
   $567 = 19\times29 + \underline{16}$
   $19 = 16\times1 + \underline{3}$
   $16 = 3\times5 + \underline{1}$
   Par suite, en utilisant des différents restes, on a :
   $1 = 16 - 3\times5$
   $= 16-(19-16\times1)\times5$
   $= 16\times6 - 19\times5$
   $= (567-19\times29)\times6-19\times5$
   $= 567\times6 - 179\times19$
   $= 567\times6 - 179\times(2854-567\times5)$
   $= 901\times567-179\times2854$

On trouve : $u = 901$ et $v = -179$.

3) En multipliant chaque membre de l'égalité : $567u + 2\,854v = 1$, on obtient :

$567 \times 4505 + 2854 \times (-895) = 5$. Par suite, une solution particulière de l'équation (E) est $(4505 ; -895)$. Par suite, on a :

$567x + 2\,854y = 5$

$567 \times 4505 + 2854 \times (-895) = 5$

On a :

$567(4505 - x) = 2854(y + 895)$ (*)

567 divise le produit de deux facteurs $2854(y+895)$, il est premier avec 2854, donc d'après le théorème de Gauss, il divise nécessairement $y+895$. Il existe donc un entier relatif k tel que : $y = 567k - 895$. En remplaçant y dans (*), on obtient : : $x = -2854k + 4505$.

Les solutions sont les couples (x, y) d'entiers relatifs tels que : $x = -2854k + 4505$ et $y = 567k - 895$, où $k \in \mathbb{Z}$.

Exercice 15

Première méthode

$x \equiv 7\ [8] \Leftrightarrow x \equiv -1\ [8]$;

$\Leftrightarrow x + 1 \equiv 0\ [8]$;

$x \equiv 11\ [12] \Leftrightarrow x \equiv -1\ [12]$

$\Leftrightarrow x + 1 \equiv 0\ [12]$.

$x + 1$ est à la fois multiple de 8 et de 12, est multiple du PPCM de 8 et de 12. Or le PPCM de 8 et 12 est 24, donc les solutions du système proposé sont les entiers relatifs x tels que :

$x = -1 + 24k, k \in \mathbb{Z}$. Ce qui peut se mettre sous la forme : $x = 24k + 23, k \in \mathbb{Z}$.

Deuxième méthode

$x \equiv 7\ [8] \Leftrightarrow x = 8p + 7, p \in \mathbb{Z}$

$x \equiv 11\ [12] \Leftrightarrow x = 12q + 11, q \in \mathbb{Z}$.

Par suite : $8p + 7 = 12q + 11$, d'où : $8p - 12q = 4$, c'est-à-dire : (E), $2p - 3q = 1$.

Une solution particulière de l'équation (E) est (2 ; 1). On peut écrire :

$2p = 3q + 1$

$2 \times 2 = 3 \times 1 + 1$

D'où : $2(p - 2) = 3(q - 1)$ (*)

2 divise le produit de deux facteurs 3(q–1), or il est premier avec 3, donc il divise nécessairement q–1. Il existe donc un entier relatif k tel que q–1= 2k ; par suite : q = 2k + 1. Si on remplace la valeur trouvée de q dans (*), on trouve p = 3k + 2.

On en déduit que : $x = 24k + 23$, $k \in \mathbb{Z}$

Exercice 16

$x \equiv 7\ [129] \Leftrightarrow x = 129p + 7,\ p \in \mathbb{Z}$
$x \equiv 11\ [1223] \Leftrightarrow x = 1223q + 11,\ q \in \mathbb{Z}$.
D'où : (E), $129p - 1223q = 4$.
Déterminons par l'algorithme d'Euclide, une solution particulière de (E).
On obtient le tableau ci-dessous :

Dividende	1223	129	62	5
Diviseur	129	62	5	2
Reste	62	5	2	**1**
Quotient	9	2	15	2

Le dernier reste non nul dans l'algorithme d'Euclide est 1. Par suite, 1223 et 129 sont premiers entre eux.
On écrit les différents restes à partir des différents restes :
$1 = 5 - 2\times2$;
$2 = 62 - 5\times12$;
$5 = 129 - 62\times2$;
$62 = 1223 - 129\times9$.
Par suite, on a :

$$\begin{aligned}1 &= 5 - 2\times2\\ &= 5 - (62 - 5\times12)\times2\\ &= 25\times5 - 62\times2\\ &= 25\times(129 - 62\times2) - 62\times2\\ &= 25\times129 - 52\times62\\ &= 25\times129 - 52\times(1223 - 129\times9)\\ &= 493\times129 - 52\times1223\end{aligned}$$

Une solution particulière de l'équation $129p - 1223q = 1$ est (493 ; 52).
On en déduit que (1972 ; 208) est une solution particulière de (E).
On a :

$129p - 1223q = 4$
$129\times1972 - 1223\times208 = 4$
D'où : $129\times(p-1972) = 1223(q-208)$ (*)
129 divise $1223(q-208)$, or il est premier avec 1223, d'après le théorème de Gauss, il divise $q-208$. Par suite, il existe un entier relatif k tel que : $q = 208 + 129k$, $k\in \mathbb{Z}$. En remplaçant cette valeur dans (*), on trouve : $p = 1972k + 1223$.
Les solutions de (E) sont donc les couples (p, q) d'entiers relatifs tels que : $p = 1972k + 1223$ et $q = 129k + 208$, $k\in \mathbb{Z}$.
On en déduit que : $x = 157767k + 254395$, $k \in \mathbb{Z}$.

Remarque

Au lieu d'utiliser le théorème de Gauss, après avoir obtenu une solution particulière de (E), on pourrait utiliser la méthode suivante :
Posons : $u = 1972$ et $v = 1223$. On a : $129u + 7 = 1223v + 11$. Or : $129u + 7 = 254395$, donc :

$$\begin{cases} x \equiv 7\ [129] \\ x \equiv 11\ [1223] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \equiv 254395\ [129] \\ x \equiv 254395\ [1223] \end{cases}$$

Par suite, $x - 254395$ est multiple commun de 129 et de 1223, donc de leur PPCM. Or le PPCM de 129 et de 1223 est 157767, donc les solutions du système proposé sont les nombres entiers relatifs de la forme $x = 254395 + 157767k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Exercice 17

$$\begin{aligned} 15x \equiv 9\ [12] &\Leftrightarrow 15x - 9 = 12p,\ p\in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow 5x - 3 = 4p,\ p\in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow 5x \equiv 15\ [4] \\ &\Leftrightarrow x \equiv 3\ [4], \text{ car 5 et 4 sont premiers entre eux.} \\ &\Leftrightarrow x - 3 = 4p,\ p\in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4x \equiv 5\ [7] &\Leftrightarrow 4x \equiv 12\ [7] \\ &\Leftrightarrow x \equiv 3\ [7], \text{ car 4 et 7 sont premiers entre eux.} \\ &\Leftrightarrow x - 3 = 7q,\ q\in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Les solutions sont les nombres x tels que $x - 3$ est multiple de 4 et de 7, donc du PPCM de 4 et 7.
Par suite : $x = 28k + 3$, $k\in \mathbb{Z}$.
Je vous laisse le soin d'essayer d'autres méthodes.

Exercice 18

Pour tout élément x de $\mathbb{Z}$, $x^2 \equiv 7\ [9] \iff x^2 \equiv 16\ [9]$, car : $7 \equiv 16\ [9]$

$\iff (x-4)(x+4) \equiv 0\ [9]$,

Un entier relatif x est solution de l'équation proposée si et seulement si $(x-4)(x+4)$ est multiple de 9. Ce qui équivalent à : soit $x-4$ est multiple de 9, soit $x+4$ est multiple de 9, soit $x-4$ et $x+4$ sont tous les deux multiples de 3.

$\begin{cases} x-4 \equiv 0[3] \\ x+4 \equiv 0\ [3] \end{cases} \iff \begin{cases} x \equiv 1[3] \\ x \equiv -1\ [3] \end{cases}$

Ce système n'a pas de solution car 1 n'est pas congru à -1 modulo 3. Avec les deux premiers cas, on a l'ensemble de solutions de l'équation : $\{4 + 9k \mid k\in \mathbb{Z}\} \cup \{-4 + 9k \mid k\in \mathbb{Z}\}$.

Exercice 19

Examinons les cas selon les restes de la division euclidienne de x par 3.

Premier cas : $x \equiv 0\ [3]$

On a : x^3, $-13x^2$, $-5x$ sont congrus à 0 modulo 3. Par suite : $x^3 - 13x^2 - 5x + 7 \equiv 7\ [3]$. Comme 7 n'est pas congru à 0 modulo 3, ce cas est impossible.

Deuxième cas : $x \equiv 1\ [3]$

x^3, x^2, x sont donc congrus à 1 modulo 3. Par suite : $x^3 - 13x^2 - 5x + 7 \equiv 1 - 13 - 5 + 7\ [3]$.

Or : $1 - 13 - 5 + 7 \equiv 1\ [3]$, donc ce cas est impossible.

Troisième cas : $x \equiv 2\ [3]$

x^3, x^2, x sont donc respectivement congrus à 2, 1, 2 modulo 3. Par suite : $x^3 - 13x^2 - 5x + 7 \equiv 2 - 13 - 10 + 7\ [3]$. Or : $2 - 13 - 10 + 7 \equiv 1\ [3]$, donc ce cas est impossible.

L'équation proposée n'admet donc pas de solution.

Exercice 20

1) Lorsque je range les livres par 10, il m'en reste 3 se traduit par : x = 10q + 3, où q est un entier naturel.

Lorsque je range les livres par 17, il m'en reste 2 se traduit par x = 17p + 2, où p est un entier naturel.
Il en résulte que : 17p −10q = 1. On trouve : p = 10k + 3 et q = 17k + 5.
Par suite : x = 170k + 53.
Tous les nombres possibles sont de la forme 170k + 53, où k est un entier naturel.

2) Le nombre minimum de livres est 53.

Exercice 21

Les nombres de positions de chaque roue, 47, 53, 59, 61, 64, 65, 67, 69, 71 et 73, sont des nombres premiers entre eux (dans leur ensemble). Avant de revenir à la position initiale, il faut que chaque roue ait fait un ou plusieurs tours complets. Ainsi, il faut que le nombre de caractères entrés soit un multiple de chacun des nombres 47, 53, 59, 61, 64, 65, 67, 69, 71 et 73. Puisque ces nombres sont premiers entre eux, le plus petit nombre de caractères à entrer avant de revenir à la position initiale, qui est le plus petit commun multiple de 47, 53, 59, 61, 64, 65, 67, 69, 71 et 73, qui est : $47 \times 53 \times 59 \times 61 \times 64 \times 65 \times 67 \times 69 \times 71 \times 73$.
Je vous laisse le calcul.

Exercice 22

Soit x le temps, en secondes, depuis minuit, où les deux signaux sont émis en même temps. Comme le temps écoulé est compté en secondes, x est un nombre entier naturel. Le cas du signal jaune se traduit par : $x \equiv 2\ [15]$ et celui du signal rouge par : $x \equiv 8\ [28]$. Le problème posé se ramène au système suivant :

$$\begin{cases} x \equiv 2\ [15] \\ x \equiv 8\ [28] \end{cases}$$

De ce système, il résulte l'équation (E), 15u – 28v = 6. En utilisant le théorème de Gauss après avoir déterminé une solution particulière de l'équation (E), les solutions du système de congruences sont les entiers naturels x tels que $x = 420k - 1168$. La plus petite valeur de k pour laquelle x est un entier naturel est 3. On obtient alors : $x = 92$. C'est 1min 32 s après minuit que les deux signaux émettront en même temps.

Exercice 23

Soit x le nombre de pièces d'or.
Après le partage équitable du butin chacun des 17 cuisiniers au départ, il reste 3 pièces d'or pour le cuisinier. Si q est la part de chaque pirate, alors on a : x = 17q + 3. Ce qui se traduit par : $x \equiv 3\ [17]$.
Mais les pirates se querellent, et six d'entre eux sont tués ; le cuisinier recevrait alors quatre pièces se traduit par : $x \equiv 4\ [11]$. Car il reste que 11 pirates après la mort de six d'entre eux.
Dans un naufrage ultérieur, seul le butin, six pirates et le cuisinier sont sauvés et le partage laisserait cinq pièces d'or à ce dernier se traduit par : $x \equiv 5\ [6]$.
Le problème posé se ramène au système suivant d'inconnue l'entier naturel x :

$$\begin{cases} x \equiv 3\ [17] \\ x \equiv 4\ [11] \\ x \equiv 5\ [6] \end{cases}$$

Les entiers naturels 17, 11 et 6 étant deux à deux premiers entre eux, on peut résoudre un système de deux équations avant de tenir compte de la troisième équation. On va commencer par résoudre le système :
$$\begin{cases} x \equiv 3\ [17] \\ x \equiv 4\ [11] \end{cases}$$

Puisque 17 et 11 sont premiers entre eux, d'après le théorème de Bézout, il existe deux entiers p et q tels que : (E_1), 17p + 11q = 1. (On peut aussi traduire les congruences précédentes et obtenir cette équation d'inconnues p et q).
Une solution particulière de (E_1) est $(2\ ;\ -3)$. En utilisant le théorème de Gauss, la solution générale de (E_1) est $x = 187k + 37$.
Pour résoudre le système de départ des trois congruences, on a à résoudre le système suivant : $\begin{cases} x \equiv 37\ [187] \\ x \equiv 5\ [6] \end{cases}$

187 et 6 étant premiers entre eux, d'après le théorème de Bézout, il existe deux entiers u et v tels que :
(E_2), 187u + 6v = 1. En utilisant l'algorithme d'Euclide, une solution particulière de (E_2) est (1 ; -31). En utilisant le théorème de Gauss, la solution générale de (E_2) est : x = 1122 k -5947. La plus petite valeur de k pour laquelle x est un entier naturel correspond à la fortune minimale que peut espérer le cuisinier quand il décide d'empoisonner le reste des pirates. Il s'agit de 785 pièces d'or. Cela vaut le coup !

SITUATION COMPLEXE

1) Les préoccupations exprimées par l'astronome sont de trois ordres :
   a. Déterminer la date exacte de la prochaine apparition simultanée des deux corps célestes ;
   b. Déterminer le nombre de jours qui s'écouleront entre le 7 décembre et la date de la prochaine apparition simultanée des deux corps ;
   c. Déterminer au cas où il rate la première date, le nombre de jours minimum qu'il devra attendre jusqu'à la prochaine apparition simultanée des deux astres.

2) Les parties du d'arithmétique qui peuvent être utilisées pour résoudre les problèmes posés par l'astronome :
   a. Multiple ;
   b. Congruence ;
   c. Théorème de Bézout ;
   d. Théorème de Gauss ;
3) Résolution des préoccupations soulevées par l'astronome

Soit :
- u le nombre de périodes effectuées par le corps A entre le 7 décembre 2019 et le jour de la prochaine apparition simultanée des deux corps célestes ;
- v le nombre de périodes effectuées par le corps B entre le 7 décembre 2019 et le jour de la prochaine apparition simultanée des deux corps célestes ;

Le corps A aura effectué 105u jours entre ces deux dates et le corps B aura effectué 81v + 6 jours, puisqu'il y a 6 jours de décalage (entre le 7 décembre et le 13 décembre de la même année).

A la prochaine apparition simultanée des deux corps, on aura : $105u = 81v + 6$. Ce qui donne :
(E), $35u - 27v = 2$.
Une solution particulière de (E) est $(-20 ; -26)$. En utilisant le théorème de Gauss, la solution générale de l'équation (E) est constituée les couples (u, v) tels que : $u = 27k - 20$ et $v = 35k - 26$, où k est un entier relatif quelconque. Les deux corps auront fait chacun $105(27k-20)$ jours, soit $2835k-2100$ jours.
Pour la valeur k égale à 1, on a le nombre minimum de jours qui s'écouleront entre le 7 décembre et la date de la prochaine apparition simultanée des deux corps, soit 735 jours.

Le 7 décembre 2019 était un samedi. Jusqu'au 31 décembre 2019, il y a eu 24 jours. L'année 2020 est une année bissextile, donc compte 366 jours. Au 31 décembre 2020, il se sera écoulé un nombre de jours égal à $24 + 366 = 390$. C'est le 345ème jour de 2021 qui sera la date de cette apparition simultanée. Ce sera le 11 décembre 2021 que les corps célestes A et B apparaitront simultanément.

Si pour des contraintes de temps, l'astronome n'a pu observer le moment de l'apparition simultanée des deux astres, il pourra (si Dieu lui donne la vie) à la valeur correspondante de k égal à 2, soit :
$2835 \times 2 - 2100 = 3570$. Or, il s'est écoulé 735 jours depuis le 7 décembre 2019 jusqu'au 11 décembre 2021. Il restera 2835 jours. Dans le cas où l'astronome rate la date du 11 décembre 2021, il devra encore attendre 2835 jours pour voir l'apparition simultanée des deux corps A et B.

12 NOMBRES COMPLEXES ET GÉOMÉTRIE DU PLAN

EXERCICES DE FIXATION

Exercice 1

1)$Z_{\overrightarrow{AB}} = Z_B - Z_A = 3i + 2 - 2i - 1 = 1 + i$

2) $AB = |Z_B - Z_A| = |1 + i| = \sqrt{2}$

3)$Mes\left(\widehat{\vec{u};\overrightarrow{AB}}\right) = arg(Z_B - Z_A) = arg(1 + i) = \frac{\pi}{4}$

Exercice 2

On a : $\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} = \frac{2-2i+1-i}{2i+1-i} = \frac{3-3i}{1+i} = \frac{3(1-i)}{1+i} = \frac{3(1-i)^2}{2} = -3i$

Par suite $Mes\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right) = -\frac{\pi}{2}$

Exercice 3

On a : $\frac{c-a}{b-a} = \frac{2-2i+1+i}{2i+1+i} = \frac{3-i}{1+3i} = \frac{3-i}{i(3-i)} = \frac{1}{i} = -i$

Donc $Arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) = Arg(-i) = -\frac{\pi}{2}$

Caractérisation des points alignés

Exercice 4

1) $\frac{c-a}{b-a} = \frac{2+i+3i}{1-i+3i} = \frac{2+4i}{1+2i} = \frac{2(1+2i)}{1+2i} = 2$

2) Comme $2 \in \mathbb{R}^*$; donc les points A, B et C sont alignés

Exercice 5

1)On a : $\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} = \frac{2-2i+1-i}{2i+1-i} = \frac{3-3i}{1+i} = \frac{3(1-i)}{1+i} = \frac{3(1-i)^2}{2} = -3i$

2) Comme $-3i \in i\mathbb{R}^*$ donc le triangle ABC est rectangle en A

Caractérisation complexe de l'angle droit

Exercice 6

1) $\frac{c-a}{b-a} = \frac{2-2i-3+i}{2i-3+i} = \frac{-1-i}{-3+3i} = \frac{1}{3} \times \frac{1+i}{1-i} = \frac{1}{3}i$

2) Les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires car $\frac{1}{3} \in i\mathbb{R}^*$

Caractérisation complexe des points cocycliques

Exercice 7

$\frac{c-a}{c-b} : \frac{d-a}{d-b} = \frac{3-i-2i}{3-i-2+2i} : \frac{2+2i-2i}{2+2i-2+2i} = \frac{3-3i}{1+i} : \frac{2}{4i} = \frac{3(1-i)}{1+i} \times 2i = -3i \times 2i$

$\frac{c-a}{c-b} : \frac{d-a}{d-b} = 6$

Comme $6 \in \mathbb{R}^*$alors les points A, B, C et D sont cocycliques

II) ECRITURES COMPLEXES DES SYMETRIES

Exercice 8

1)Faux
2)Faux
3)Vrai
4)Faux
5)Vrai

Exercice 9

$Z' = -Z + 2(1+i) = -Z' + 2i + 2$

Exercice 10

Z' est de la forme $-Z + 2a$ donc f est une symétrie centrale

On a : $3 - 2i = 2\left(\frac{3}{2} - i\right)$

Ainsi $Z' = -Z + 2\left(\frac{3}{2} - i\right)$

Ainsi le centre de f est le point A d'affixe $\frac{3}{2} - i$

III) Écriture complexe d'une translation

Exercice 11

z' = z - 1-2i

Exercice 12

Translation de vecteur de $\vec{u}\,(\frac{-1}{2}\ ;1)$

IV) ECRITURE COMPLEXE D'UNE ROTATION

Exercice 13

$$Z' = e^{i\frac{\pi}{3}}Z = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)Z$$

Exercice 14

On a $Z' = e^{-i\frac{\pi}{6}}Z + 3i$ donc f est la rotation d'angle $-\frac{\pi}{6}$ et de centre Ω d'affixe ω telle que

$$\omega = \frac{3i}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i} = \frac{3\left(\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)}{\frac{5-2\sqrt{3}}{4}} = \frac{12\left(\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)}{5-2\sqrt{3}}$$

ECRITURE COMPLEXE D'UNE HOMOTHETIE

Exercice de fixation

Exercice 15

On a $Z' = -\frac{2}{3}Z$

Exercice 16

Z' s'écrit sous la forme $Z' = kZ + b$ où $k = 7$ et $b = 3 - i$ donc f est l'homothétie de rapport 7 et de centre d'affixe $\omega = \frac{3-i}{-6} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{6}i$

SIMILITUDE DIRECTE

Exercice de fixation

Exercice 17

1)Vrai
2)Vrai
3)Vrai

Exercice 18

1)Faux
2)Faux
3) Vrai

Exercice 19

Soit A et B les deux points invariants par S avec $A \neq B$; on a : $S(A) = A$ et $S(B) = B$ donc $AB = kAB$ d'où $k = 1$ ainsi S est un déplacement qui laisse invariant 2 points d'où

$S = Id$

Exercice 20

1)Vrai
2)Faux
3)Vrai
4)Vrai

IMAGE DE FIGURE SIMPLES PAR UNE SIMILITUDE DIRECTE ET PROPRIETE

ECRITURE COMPLEXE D'UNE SIMILITUDE DIRECTE

Exercice de fixation

Exercice 21

Z' est sous la forme $Z' = aZ + b$ où $a = 1 - i$ et $b = 0$ $(a \neq 1)$

Donc la transformation est une similitude directe plane

De plus son centre ω est telle que $\omega = 0$ d'où la similitude directe a pour centre O $(a \neq 1)$

Exercice 22

Le rapport k est tel que $k = \left|1 + i\sqrt{3}\right| = 2$; l'angle θ est tel que $\theta = Arg\left(1 + i\sqrt{3}\right)$ soit $\theta = \frac{\pi}{3}$

Son centre Ω d'affixe ω est tel que

$$\omega = \frac{\sqrt{3}(2-i)}{1-1-i\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}(2-i)}{-i\sqrt{3}} = 1 + 2i$$

Exercice 23

$$Z' = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}Z + \left(1 - \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)(1-i)$$

$$= \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)Z + \left(1 - \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)(1-i)$$

$$Z' = (1+i)Z + (1-1-i)(1-i)$$

$$= (1+i)Z - 1 - i$$

Exercice 24

$s = S_{\left(A\,;\,\frac{1}{2};-\frac{\pi}{6}\right)}$ et $s(B) = C$ donc $\begin{cases} AC = \frac{1}{2}AB \\ mes\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right) = -\frac{\pi}{6} \end{cases}$

Par suite $AC = \frac{5}{2}$ et $mes\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right) = -\frac{\pi}{6}$

Exercice 25

1)ABC est un triangle donc les points A, B et C sont trois points du plan deux à deux distincts, il existe donc une similitude directe S de centre A qui transforme B en C

2)$\begin{cases} S(A) = A \\ S(B) = C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 + i = a(1+i) + b \\ 2 + i = a + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = i \\ b = 2 \end{cases}$

Ainsi $Z' = iZ + 2$

Exercice 26

On a $Z_A = i$ et $Z_B = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ donc A et B sont deux points distincts

2 est un nombre réel positif $\frac{2\pi}{3}$ est un nombre réel, A et B sont tel que $A \neq B$

Il existe une unique similitude directe de rapport 2 et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ qui transforme A en B

Exercice 27

A, B, C et D sont quatre points du plan tels que $A \neq C$ et $B \neq D$

Il existe donc une similitude directe S tel que $S(A) = B$ et $S(C) = D$

EXERCICES DE RENFORCEMENT / D'APPROFONDISSEMENT

Exercice 1

1) $r: Z' = e^{i\frac{\pi}{2}}Z + \left(1 - e^{i\frac{\pi}{2}}\right)i = iZ + (1 + i)$

2) On a $Z'_B = iZ_B + 1 + i = i(-4 - i) + 1 + i = 2 - 3i = Z_C$

Donc $r(B) = C$

3) On a $r_{\left(A;\frac{\pi}{2}\right)}(B) = C \Rightarrow \begin{cases} AB = AC \\ mes\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$

Donc ABC est un triangle rectangle et isocèle en A

Exercice 2

1)Z' est sous la forme $Z' = aZ + b$ on a $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$ donc c'est une similitude directe

$k = \left|1 - \sqrt{3}\right| = 2$ et $\theta = Arg\left(1 - i\sqrt{3}\right) = -\frac{\pi}{3}$ et de centre Ω d'affixe ω tel de

$\omega = \frac{-\sqrt{3}-i}{i\sqrt{3}} = \frac{-\sqrt{3}+3i}{3}$

2)$\left|(1-i\sqrt{3})Z-(\sqrt{3}+i)\right|=|1-i\sqrt{3}|\left|Z-\frac{\sqrt{3}+i}{1-i\sqrt{3}}\right|=2|Z-i|$

Donc

$\left|(1-i\sqrt{3})Z-\sqrt{3}-i\right|=6 \Leftrightarrow 2|Z-i|=6 \Leftrightarrow |Z-i|=3$; l'ensemble est un cercle de centre $J(i)$ et de rayon 3

Exercice 3

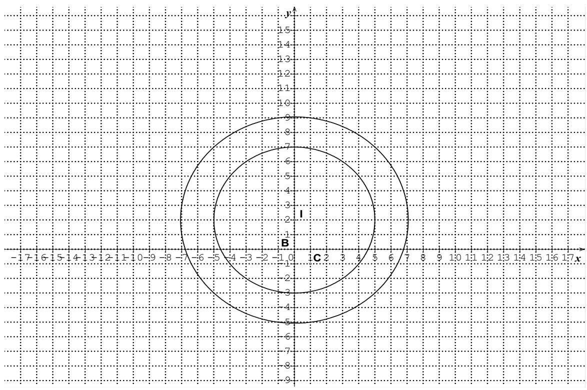
1)S a pour écriture complexe : $Z'=aZ+b$; $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$

$\begin{cases} S(I)=I \\ S(B)=C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2i=2ia+b \\ 1-i=-a+b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1+i \\ b=2 \end{cases}$ donc $Z'=(1+i)Z+2$

Le rapport $k=|1+i|=\sqrt{2}$; l'angle $\theta=Arg(1+i)=\frac{\pi}{4}$

Ainsi $s=S_{\left(I;\sqrt{2};\frac{\pi}{4}\right)}$

2)



3) $\frac{Z'-Z}{Z_I-Z}=\frac{2+iZ}{2i-Z}=-i$ donc le triangle IMM' est rectangle isocèle en M.

4)Les points $I(2i)$ et $K(1)$ sont deux points de la droite (D) donc les points $I=s(I)$ et $K'=s(K)$ avec $Z_{K'}=3+i$ sont des points de (D')

5)$(\Gamma)=\mathcal{C}(I;5)$ donc $(\Gamma')=S(\Gamma)$ est tel que $(\Gamma')=\mathcal{C}(I;5\sqrt{2})$

Exercice 4

1. a) $Z' = Z + 3 - 2i$

b) $\overrightarrow{AB}(-8; 12)$ donc $Z' = Z - 8 + 12i$

2. a) $Z' = -5Z$

b) $Z' = 3Z - 2\omega = 3Z + 4 - 2i$

3. a) $Z' = e^{-i\frac{\pi}{3}}Z = \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)Z$

b) $Z' = e^{i\frac{\pi}{3}}Z + (1-i) - e^{i\frac{\pi}{3}}(1-i) = e^{i\frac{\pi}{3}}Z + \left(1 - e^{i\frac{\pi}{3}}\right)(1-i)$

$= \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)Z + \frac{1}{2}\left(\left(1+\sqrt{3}\right) - i\left(1+\sqrt{3}\right)\right)$

c) $Z' = e^{i\pi}Z + \left(1 - e^{i\pi}\right)(3+2i) = -Z + 2(3+2i) = -Z + 6 + 4i$

4. a) $Z' = 3e^{-i\frac{5\pi}{6}}Z + \left(1 - 3e^{-i\frac{5\pi}{6}}\right)(3+2i) = \left(-\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i\right)Z + \frac{9\sqrt{3}}{2} + i\left(\frac{13}{2} + 3\sqrt{3}\right)$

b) $Z = \frac{3}{4}e^{i\frac{\pi}{2}}Z + 4\left(1 - \frac{3}{4}e^{i\frac{\pi}{2}}\right) \times 4 = \frac{3}{4}iZ + 4 - 3i$

Exercice 5

1) $k = \left|2\left(1+i\sqrt{3}\right)\right| = 2 \times 2 = 4$; $\theta = Arg\left(2\left(1+i\sqrt{3}\right)\right) = \frac{\pi}{3}$

Le centre d'affixe ω tel que $\omega = \frac{3}{1-2-2i\sqrt{3}} = -\frac{1}{13}\left(1 - 2i\sqrt{3}\right)$

2) $Z_{A'} = 2\left(1+i\sqrt{3}\right)(1+i) + 3 = \left(5 - 2\sqrt{3}\right) + 2i\left(1+\sqrt{3}\right)$

3) $O(0; 0)$ et $K\left(\sqrt{3}+i\right)$ sont deux points de (D) donc $S(D) = (OK')$

Or $O' = O$ et $Z_{K'} = 2\left(1+i\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}+i\right) + 3 = 8i + 3$

Ainsi $S((D)) = (OK')$

Exercice 6

1) S a pour écriture complexe : $Z' = aZ + b$; $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$

$\begin{cases} S(A) = C \\ S(B) = D \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5 + i = ai + b \\ 1 + i = -a + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2(1+i) \\ b = 3 - i \end{cases}$

Donc S a pour écriture complexe : $Z' = 2(1+i)Z + 3 - i$

2)$k = |2(1+i)| = 2\sqrt{2}$; $\theta = Arg\big(2(1+i)\big) = \frac{\pi}{4}$

$\Omega(\omega)$ le centre tel que $\omega = \frac{3-i}{-1-2i} = \frac{-1+7i}{5}$

3. a) On a $\frac{Z_A - Z_E}{Z_B - Z_E} = \frac{1+1-i}{-1+1-i} = \frac{1}{-i} = -i$ donc ABE est un triangle rectangle isocèle en E.

b) $S(ABE) = CDF$ donc CDF est un triangle rectangle isocèle en F.

Exercice 7

1.a)$\left|(1 - i\sqrt{3})Z - (\sqrt{3} + i)\right| = \left|1 - i\sqrt{3}\right| \left|Z - \frac{\sqrt{3}+i}{1-i\sqrt{3}}\right| = 2|Z - i|$

Donc $\left|(1 - i\sqrt{3})Z - (\sqrt{3} + i)\right| = 6 \Leftrightarrow 2|Z - i| = 6 \Leftrightarrow |Z - i| = 3$

b) $(\Gamma) = \mathcal{C}(A; 3)$

2.a) S a pour écriture complexe : $Z' = aZ + b$; $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$

$\begin{cases} S(A) = O \\ S(B) = C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = ai + b \\ -4i = \sqrt{3}a + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{4i}{-\sqrt{3}+i} \\ b = -ai \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 - i\sqrt{3} \\ b = -\sqrt{3} - i \end{cases}$

Ainsi l'écriture complexe de S est $Z' = (1 - i\sqrt{3})Z - \sqrt{3} - i$

b) $k = \left|1 - i\sqrt{3}\right| = 2$; $\theta = Arg(1 - i\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}$ et le centre $\Omega(\omega)$ le tel que

$\omega = \frac{-\sqrt{3}-i}{i\sqrt{3}} = \frac{-\sqrt{3}+3i}{3}$

3.a)$(C) = S\big((\Gamma)\big)$ donc (C) est un cercle de centre $A' = S(A)$ et de rayon $2 \times 3 = 6$ avec

$Z_{A'} = (1 - i\sqrt{3})i - \sqrt{3} - i = 0$

Ainsi $(C) = \mathcal{C}(O;6)$

b) Construction de (C) est (Γ)

4. a) Construction de D et Ω où $D \in (\Omega B)$ et $\Omega D = 2\Omega B$

b) On a

Ω	A	B
Ω	O	C

et $\Omega \in (\Omega B)$

donc $\Omega C = 2\Omega B$ et $mes\left(\widehat{\overrightarrow{\Omega D};\overrightarrow{\Omega C}}\right) = -\frac{\pi}{3}$

d'où $\Omega D = \Omega C$ et $mes\left(\widehat{\overrightarrow{\Omega D};\overrightarrow{\Omega C}}\right) = -\frac{\pi}{3}$

ΩCD est un triangle isocèle qui a un angle $-\frac{\pi}{3}$ donc ΩCD est un triangle équilatéral

5a)$r_{(\Omega)}(C) = D$; $Mes\left(\widehat{\overrightarrow{\Omega C};\overrightarrow{\Omega D}}\right) = \frac{\pi}{3}$

Donc l'écriture complexe de r est :

$$Z' = e^{i\frac{\pi}{3}}Z + \left(1 - e^{i\frac{\pi}{3}}\right)\omega = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)Z + \frac{3i+\sqrt{3}}{3}$$

b) $Z_D = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(-4i) + \frac{3i+\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3} - 2i + i + \frac{\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{3} - i$

Exercice 8

1)$p(i\sqrt{3}) = (i\sqrt{3})^4 - 6(i\sqrt{3})^3 + 24(i\sqrt{3})^2 - 18(i\sqrt{3}) - 63 = 9 + 18i\sqrt{3} - 72 - 18i\sqrt{3} + 63 = 72 - 72 + 18i\sqrt{3} - 18i\sqrt{3} = 0$

$$\begin{aligned} p(-i\sqrt{3}) &= (-i\sqrt{3})^4 - 6(-i\sqrt{3})^3 + 24(-i\sqrt{3})^2 - 18(-i\sqrt{3}) + 63 \\ &= 9 - 18i\sqrt{3} - 72 + 18i\sqrt{3} + 63 \\ &= 72 - 72 - 18i\sqrt{3} + 18i\sqrt{3} = 0 \end{aligned}$$

$i\sqrt{3} et\ -i\sqrt{3}$ sont des zéros de P donc il existe un polynôme Q de degré 2 tels que

$$P(Z) = (Z - i\sqrt{3})(Z + i\sqrt{3})Q(Z)$$

Or $(Z - i\sqrt{3})(Z + i\sqrt{3}) = Z^2 + 3$

Donc $P(Z) = (Z^2 + 3)Q(Z)$

$\Leftrightarrow (Z - i\sqrt{3})(Z + i\sqrt{3})Q(Z)$

$$Z^4 - 6Z^3 + 24Z^2 - 18Z + 63 = (Z^2 + 3)(Z^2 - 6Z + 21)$$

Ainsi $Q(Z) = Z^2 - 6Z + 21$

2) $P(Z) = 0 \Leftrightarrow Z - i\sqrt{3} = 0$ ou $Z + i\sqrt{3} = 0$ ou $Z^2 - 6Z + 21 = 0$ (E')

Résolvons (E') : $Z^2 - 6Z + 21 = 0$

$\triangle = 36 - 84 = 48 = 16 \times 3 = (4\sqrt{3})^2$

$Z = \frac{6-4\sqrt{3}}{2}$ ou $Z = \frac{6+4\sqrt{3}}{2}$

$Z = 3 - i2\sqrt{3}$ ou $3 + i2\sqrt{3}$

$S_{\mathbb{C}} = \{i\sqrt{3};\ -i\sqrt{3}; 3 + 2i\sqrt{3}; 3 - 2i\sqrt{3}\}$

3a) construction

$B = S_{(0;\vec{u})}(A); C = h_{(0;2)}(A); D = t_{2\overrightarrow{AB}}(C)$

$B = S_{(0;\vec{u})}$ donc $Z_B = -Z_A = -i\sqrt{3}$

C= $h_{(\Omega;2)}(A) \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega C} = 2\overrightarrow{\Omega A}$ donc $Z_C = 2(Z_A - Z_\Omega) + Z_\Omega$

$Z_C = 2(i\sqrt{3} + 3) + (-3) = 2i\sqrt{3} + 3$

$D = t_{2\overrightarrow{AB}}(C) \Leftrightarrow \overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow Z_D = 2(Z_B - Z_A) + Z_C$

$= 2(-i\sqrt{3} - i\sqrt{3}) + 2i\sqrt{3} + 3$

$Z_D = 3 - 2i\sqrt{3}$

c) On a $\frac{Z_C-Z_A}{Z_D-Z_A}=\frac{2i\sqrt{3}+3-i\sqrt{3}}{3-2i\sqrt{3}+3-i\sqrt{3}}=\frac{3+i\sqrt{3}}{3-3i\sqrt{3}}=\frac{1}{3}\frac{(3+i\sqrt{3})(1+i\sqrt{3})}{9+27}=\frac{3+4i\sqrt{3}-3}{3\times 36}=$ $\frac{4i\sqrt{3}}{3\times 36}=\frac{i\sqrt{3}}{27}$

Comme $\frac{Z_C-Z_A}{Z_D-Z_A}=\frac{i\sqrt{3}}{27}$ alors le triangle ACD est rectangle en A

d)$\frac{Z_C-Z_A}{Z_D-Z_A}\times\frac{Z_D-Z_B}{Z_C-Z_B}=\frac{3+i\sqrt{3}}{3-3i\sqrt{3}}\times\frac{3-i\sqrt{3}}{3+3i\sqrt{3}}=\frac{3^2+(\sqrt{3})^2}{3^2+(3\sqrt{3})^2}=\frac{12}{9+27}=\frac{13}{36}=\frac{1}{3}$

Les points A, B, C et D ne sont pas alignés

Comme $\frac{1}{3}\in\mathbb{R}^*$ alors les points A, B, C et D appartiennent à un même cercle

4) $E=S_O(D)$ donc $Z_E=-Z_D$

D'où $Z_E=-3+2i\sqrt{3}$

a)$\frac{Z_C-Z_B}{Z_E-Z_B}=\frac{3+2i+i\sqrt{3}}{-3+2i+i\sqrt{3}}=\frac{3+3i\sqrt{3}}{-3+3i\sqrt{3}}=\frac{18-18i\sqrt{3}}{36}=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i=e^{-i\frac{\pi}{3}}$

b) $\frac{Z_C-Z_B}{Z_E-Z_B}=e^{-i\frac{\pi}{3}}$ donc le triangle BEC est équilatéral

Exercice 9

1)Construction $A_0=0$; A_1 tel que $Z_{A_1}=i$

a)$A_n=S_{(A_{n-2};r;\alpha)}(A_{n-2})$

L'écriture complexe de S est donc ; $Z'=uZ+(1-u)Z_{A_n-1}$

Comme $A_n=S(A_{n-2})$ alors $Z_n=uZ+(1-u)Z_{n-1}$

b) Démontrons par récurrence

Pour $n=2$; on a $Z_2-Z_1=(-u)i$

D'autre part on a : $Z_2=re^{i\alpha}Z_0+(1-re^{i\alpha})Z_1=uZ_0+(1-u)Z_1=$ $(1-u)Z_1$ car

$Z_0=0$

$Z_2=1Z_1-uZ_1$ or $Z_1=i$ donc $Z_2-Z_1=-u\times i$

La proposition est vraie pour $n = 2$

Supposons qu'il existe un entier naturel $n \geq 2$ tel que $Z_n - Z_{n-1} = (-u)^{n-1}i$ et montrons que $Z_{n+1} - Z_n = (-u)^n i$

On a $Z_{n+1} = uZ_{n-1} + (1-u)Z_n$

Donc $Z_{n+1} - Z_n = -u(Z_n - Z_{n-1}) = -u(-u)^{n-1}i = (-u)^n i$

Par suite pour tout $n \geq 2$, $Z_n - Z_{n-1} = (-u)^{n-1}i$

$$\left.\begin{array}{l} \text{c) } Z_n - Z_{n-1} = (-u)^{n-1}i \\ \quad Z_{n-1} - Z_{n-2} = (-u)^{n-2}i \\ \\ \quad Z_4 - Z_3 = (-u)^3 i \\ \quad Z_3 - Z_2 = (-u)^2 i \end{array}\right\} \text{addition membre à membre}$$

$$Z_n - Z_2 = i\,(\,(-u)^2 + (-u)^3 + \cdots . + (-u)^{n-1}\,)$$

$Z_n - Z_2 = i\,(\,(-u)^2 \times \frac{1-(-u)^{n-2}}{1+u})$ or $Z_2 = i\,(\,1-u\,)$ donc

$$Z_n = i\,(\,1-u\,) + \; i\,(\,(-u)^2 \times \frac{1-(-u)^{n-2}}{1+u})$$

2.a) on a

A_0	A_1
A_1	A_2

b) $Z_0 = 0$; $Z_1 = i$ et $Z_2 = -ui + i$ Car $Z_2 - Z_1 = (-u)i$

Ainsi l'application associé à S est définie par

$Z' = -uZ + i$ et $-u = -re^{i(\alpha+\pi)}$

L'équation au point fixe $f(Z) = Z$

Donc $Z=-uZ+i$ d'où $Z=\frac{i}{1+u}$

Ainsi S est la similitude directe de rapport r d'angle $\alpha+\pi$ et de centre Ω d'affixe $\frac{i}{1+u}$

c)Démontrons par récurrence que $A_{n+1}=S(A_n)$

L'écriture complexe de S est : $Z'=-uZ+i$ donc $Z_{n+1}=-u(Z_n)+i$

Supposons que $A_n=S(A_{n-1})$ et montrons que $A_{n+1}=S(A_n)$

Par suite $A_{n+1}=S(A_n)$

3) $S_O=Id_{\mathcal{P}}$ et $\forall n$; $S_{n+1}=S\circ S_n$

a) Démontrons que $\forall n\geq 0$; $A_{n+p}=S_n(A_p)$

Pour $n=0$; on a $A_p=S_O(A_p)$ Car $S_O=Id$ et $A_p=A_p$ d

onc vraie pour $n=0$

Supposons qu'il existe $n\geq 0$ tel que $A_{n+p}=S_n(A_p)$ et montrons que $A_{n+1+p}=S_{n+1}(A_p)$

On a $A_{n+p}=S_n(A_p)$ donc $S(A_{n+p})=\ S\left(S_n(A_p)\right)$

Ainsi $S(A_{n+p})=S\circ S_n(A_p)=S_{n+1}(A_p)$

Donc $A_{n+1+p}=S_{n+1}(A_p)$

Par suite $n\geq 0$, $A_{n+p}=S_n(A_p)$

SITUATIONS COMPLEXES

Exercice 10

1. Notons OABC le premier carré

Le second carré est OA’B’C’ tel que $S(O) = O$; $S(A) = A'$; $S(B) = B'$; $S(C) = C'$

Où $B' = C$ et A' =mil$[OB]$;

Ainsi $OA' = \frac{1}{2}OB$ et $2OA^2 = OB^2$ donc $OA' = \frac{\sqrt{2}}{2}OA$ et mes$\left(\widehat{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OA'}}\right) = \frac{\pi}{4}$

Par suite $S = s_{\left(O;\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\pi}{4}\right)}$

L’écriture complexe de S est donc $Z' = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}Z = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)Z$

La reproduction du tableau s’en déduit grâce à un raisonnement identique

Exercice 11

Préoccupation du père

- Le nouveau champ est triangulaire car il est le transformé de l’ancien champ par une similitude
- L’aire du nouveau champ est égale à l’aire de l’ancien multiplié par le carré du rapport de l’homothétie soit : 10 ha
- Le plan du nouveau champ s’obtient grâce à la construction de l’image du triangle ABC par la similitude directe S

13 SUITES NUMÉRIQUES

EXERCICES DE FIXATION

I) RAPPEL SUR LES SUITES ARITHMETIQUES ET LES SUITES GEOMETRIQUES

Exercices de fixation

Exercice 1

U_n est une suite arithmétique de raison 7 donc $\boldsymbol{U_{n+1} = U_n + 7}$

Exercice 2

V_n est une suite géométrique de raison 7 donc On a $V_{n+1} = 7\,V_n$

Exercice 3

$U_n = U_2 + (n-2) \times (-3) = -3n + 15$

Exercice 4

On a $V_n = V_4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-4} = 32 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-4}$

Donc $V_n = 32 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{-4} = 512 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n}$

Exercice 5

$U_4 + U_5 + \cdots + U_{16} = (16 - 4 + 1) \times \frac{U_4 + U_6}{2} = 13 \times \frac{U_4 + U_6}{2}$

Or $U_4 = -3 \times 4 + 15 = 3$ et $U_{16} = -3 \times 16 + 15 = -33$

Donc $U_4 + U_5 + \cdots + U_{16} = 13 \times \frac{3-33}{2} = 13 \times \left(\frac{-30}{2}\right) = -13 \times 15 = -195$

Exercice 6

On a $q = \frac{1}{2}$ et $V_4 = 32$ donc

$$V_4 + V_5 + \cdots + V_{16} = V_4 \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^9}{1-\frac{1}{2}} = 32 \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^9}{\frac{1}{2}} = 64 \times \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^9\right)$$

$$= 2^6 - \frac{2^6}{2^9} = 2^6 - \frac{1}{2^3}$$

II) LE RAISONNEMENT PAR RECURRENCE

Exercice de fixation

Exercice 7

$U_0 = 3^0 - 2$ donc $U_0 = -1$ (vrai)

Supposons que pour $k \geq 1$, $u_k = 3^k - 2$ puis montrons que : $u_{k+1} = 3^{k+1} - 2$

$u_{k+1} = 3u_k + 4$, or $u_k = 3^k - 2$ donc $u_{k+1} = 3(3^k - 2) + 4$ soit $u_{k+1} = 3^{k+1} - 2$

Exercice 8

Somme de n termes d'une suite arithmétique de premier terme 1 et de raison 1

On bien : $1 + 2 + 3 + \cdots + n += \frac{n(n+1)}{2}$

SUITES CROISSANTES, SUITES DECROISSANTES

Exercice 9

1.VRAI

2.VRAI

3.FAUX (préciser que son premier terme est positif)

SUITES MAJORES, MINOREES

Exercice 10

1.FAUX

2.VRAI

3.VRAI

4.FAUX

SUITE CONVERGENTE, SUITE DIVERGENTE

Exercice 11

1.VRAI

2.VRAI

Exercice 12

1.FAUX

2.VRAI

Exercice 13

1.VRAI

2.FAUX

3.VRAI

4.VRAI

Exercice 14

On a $U_n = \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 1$

Exercice 15

1)$U_n = f(n)$ où $f(n) = \frac{1}{n}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} f(n) = 0$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0$

2) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{x+1}{x+2} = 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 1$

3)On a $U_n = \frac{\ln(n+1)}{n+1} \times \frac{n+1}{n}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln(n+1)}{n+1} = 0$ $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n} = 1$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0$

4) $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = +\infty$ 5) $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 0$

Exercice 16

La limite de (U_n) est solution de l'équation $f(x) = x$ avec $x \geq 1$

$f(x) = x \Leftrightarrow 2\sqrt{x} + 1 = x \Leftrightarrow 2\sqrt{x} = x - 1 \Leftrightarrow 4x = (x-1)^2 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 1 = 0$

$\Delta = 32 = \left(4\sqrt{2}\right)^2$

Ainsi $x = \frac{6-4\sqrt{2}}{2}$ ou $x = \frac{6+4\sqrt{2}}{2}$

$x = 3 - 2\sqrt{2}$ ou $x = 3 + 2\sqrt{2}$

comme $x \geq 1$ donc La limite de (U_n) est $3 + 2\sqrt{2}$

Exercice 17

La limite l de (U_n) est solution de l'équation $f(x) = x$

$f(x) = x \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{x} = x; x > 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0$

Les solutions sont $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$; comme $l > 0$ alors $l = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Exercice 18

a) $-1 < 0{,}7 < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 0$

b) $5 > 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n = +\infty$

c) $-1 < \frac{3}{5} < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} W_n = 0$

Exercice 19

1)On a $-1 \leq (-1)^n \leq 1$ donc $n^2 - 1 \leq n^2 + (-1)^n \leq n^2 + 1$

Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} (n^2 - 1) = +\infty$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} (n^2 + (-1)^n) = +\infty$

2)$-1 \leq \sin n \leq 1$ donc $n - 1 \leq n + \sin n \leq n + 1$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}(n-1)=+\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(n+\sin n)=+\infty$

Exercice 20

1) On a $-1\leq \sin n\leq 1$ ainsi $-\frac{1}{n}\leq\frac{\sin n}{n}\leq\frac{1}{n}$

$\lim\limits_{n\to+\infty}-\frac{1}{n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\sin n}{n}=0$

2) On a $-1\leq(-1)^n\leq 1$ ainsi $-\frac{1}{n^2}\leq\frac{(-1)^n}{n^2}\leq\frac{1}{n^2}$

$\lim\limits_{n\to+\infty}-\frac{1}{n^2}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2}=0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}=0$

Exercice 21

1) A

2) C

3) C

4) C

5) A

Exercice 22

a) $\lim\limits_{n\to+\infty}(n\ln n)=+\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=+\infty$

b) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\ln n}{n^{0.3}}=0$

c) $\sqrt{n}\times\left(\frac{1}{2}\right)^n=\sqrt{n}\times\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{n^{\frac{1}{2}}}{2^n}$; comme $\frac{1}{2}>0$ et $2>1$ donc

$\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n}\times\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$

d) $U_n=\frac{n^4}{(1{,}05)^n}$; $1{,}05>1$ et $4>0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^4}{(1{,}05)^n}=0$

Exercice 23

a)$n^2 - 2^n = 2^n\left(\frac{n^2}{2^n} - 1\right)$; $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n^2}{2^n} = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} (n^2 - 2^n) = -\infty$

car $\lim\limits_{n \to +\infty} 2^n = +\infty$

b) $n - \ln n = n\left(1 - \frac{\ln n}{n}\right)$; $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} (n - \ln n) = +\infty$

c)$\frac{3^n}{n^2} = \frac{1}{\frac{n^2}{3^n}}$; $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n^2}{3^n} = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{\frac{n^2}{3^n}} = +\infty$. d) $+\infty$

EXERCICES DE RENFORCEMENT / D'APPROFONDISSEMENT

Exercice 1

Pour $n = 1$ on a $1^2 = 1$ et $\frac{1(1+1)(2\times1+1)}{6} = \frac{6}{6} = 1$ donc vrai pour $n = 1$

Supposons qu'il existe un entier $n \geq 1$ tel que $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ et

montrons que $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$

$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{(n+1)[n(2n+1)+6(n+1)]}{6}$

$= \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6} = \frac{(n+1)\left(2(n+2)\left(n+\frac{3}{2}\right)\right)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$

Donc $\forall n$; $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Exercice 2

$n = 1$, 1 on a $1^3 = 1$ et $\frac{1^3(1+1)^2}{4} = \frac{4}{4} = 1$ donc vrai pour $n = 1$

Supposons qu'il existe un entier $n \geq 1$ tel que $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^3(n+1)^2}{4}$

et montrons que $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 + (n+1)^3 = \frac{(n+1)^3(n+2)^2}{4}$

On a $1^3+2^3+\cdots+n^3+(n+1)^3=\frac{n^3(n+1)^2}{4}+(n+1)^3=\frac{(n+1)^2(n^3+4n+4)}{4}$

$= \dfrac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$

Exercice 3

Attention : il s'agit de démontrer que :

$$1\times 2+2\times 3+\ldots.+n\times(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

Pour $n=1$; on a $1\times 2=2$ et $\frac{1(1+1)(1+2)}{3}=2$

Supposons qu'il existe $n\geq 1$ tel que $1\times 2+2\times 3+\cdots\times n\times(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

et montrons que $1\times 2+\cdots+n\times(n+1)+(n+1)\times(n+2)=\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}$

$1\times 2+\cdots+n\times(n+1)+(n+1)\times(n+2)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}+(n+1)(n+2)$

$\frac{n(n+1)(n+2)}{3}+(n+1)(n+2)=\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}$

(Il suffit de réduire au même dénominateur et mettre $(n+1)(n+2)$ en facteur)

Exercice 4

Pour $n=0$; on a $3^0-1=0$ et 0 est multiple de 8

Supposons qu'il existe $n\geq 0$ tel que $3^{2n}-1$ est multiple de 8 et montrons que $3^{2(n+1)}-1$ est multiple de 8

On a $3^{2(n+1)}-1=3^{2n}\times 3^2-1=3^{2n}\times 3^2-3^2+8=3^2(3^{2n}-1)+8$

$3^{2n}-1$ et 8 sont des multiples de 8 donc $3^2(3^{2n}-1)+8$ est multiple de 8 par suite $3^{2(n+1)}-1$ est multiple de 8

Par suite $\forall\, n\geq 0$; $3^{2n}-1$ est multiple de 8

Exercice 5

1) On a $U_{n+1} = \frac{2U_n + 1}{U_n + 3}$ donc $U_{n+1} = 2 - \frac{5}{U_n+3}$

On a $2 > 0$ donc $U_0 > 0$

Supposons qu'il existe $n \geq 0$ tel que $U_n > 0$ et montrons que $U_{n+1} > 0$

On a $U_n > 0$; $3 + U_n > 3$; $-\frac{5}{2} < -\frac{5}{U_n+3}$; $\frac{1}{3} < 2 - \frac{5}{U_n+3}$

Ainsi $U_{n+1} > 0$ car $\frac{1}{3} > 0$

Donc $\forall n$; $U_n > 0$ 000

2) a) $U_1 = \frac{2U_0+1}{U_0+3} = \frac{2\times2+1}{2+3} = \frac{5}{5} = 1$

b) On a $1 < 2$ donc $U_1 < U_0$

Supposons que $U_{n+1} < U_n$ et montrons que $U_{n+2} < U_{n+1}$

$U_{n+1} < U_n$; $-\frac{5}{U_{n+1}+3} < -\frac{5}{U_n+3}$; $2 - \frac{5}{U_{n+1}+3} < 2 - \frac{5}{U_n+3}$ donc $U_{n+2} < U_{n+1}$

Par suite $\forall n$; $U_{n+1} < U_n$ donc la suite (U_n) est décroissante.

3) Elle est décroissante et minorée par 0. Donc elle converge

Exercice 6

1.On a $V_{n+1} = U_{n+1} - 3 = \frac{1}{3}U_n + 2 - 3 = \frac{1}{3}U_n - 1 = \frac{1}{3}(U_n - 3) = \frac{1}{3}V_n$

Donc la suite (V_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et de premier terme

$V_0 = -1$

2.a) On a : $V_n = -\left(\frac{1}{3}\right)^n + 3$ comme $-1 < \frac{1}{3} < 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = 0$

2.b) On a $U_n = V_n + 3 = -\left(\frac{1}{3}\right)^n + 3$

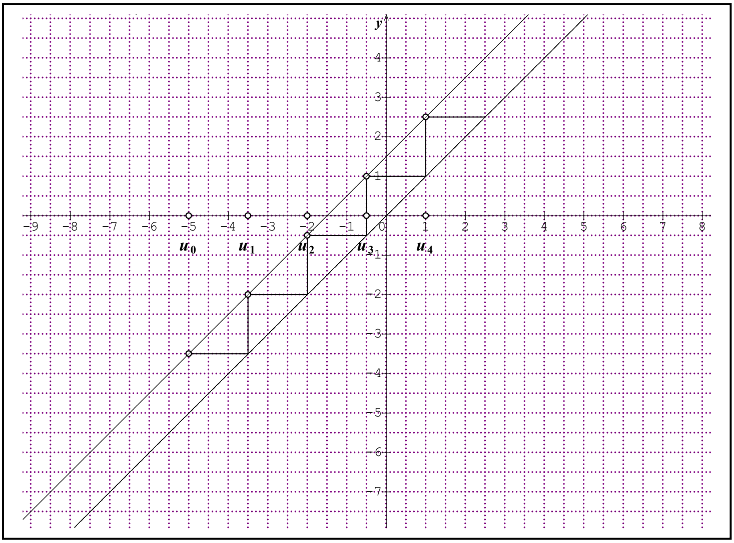
Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \left[-\left(\frac{1}{3}\right)^n + 3\right] = 3$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$

Exercice 7

1)(U_n) est une suite arithmétique de raison $\frac{3}{2}$ de premier terme -5

Donc $U_n = -5 + \frac{3}{2}n$

2)



3)$U_0 + U_1 + \cdots + U_{20} = 21 \times \left(\frac{U_0+U_{20}}{2}\right)$ où $U_{20} = -5 + 30 = 25$

Ainsi $U_0 + U_1 + \cdots + U_{20} = 21 \times \left(\frac{-5+25}{2}\right) = 21 \times 10 = 210$

Exercice 8

On a $U_n - 1 + U_{n+1} = 2U_n$ donc $U_{n+1} = U_n + 1$

D'où (U_n) est une suite arithmétique

Exercice 9

1.a)$1 > 0$ donc $U_0 > 0$; supposons qu'il existe un entier naturel n≥ $0 \ \ tel\ que\ U_n > 0$ et montrons que $U_{n+1} > 0$

$U_n > 0$ donc $2U_n > 0$ et $2 + U_n > 0$ d'où $\frac{2U_n}{2+U_n} > 0$ donc $U_{n+1} > 0$

1.b) $V_{n+1} - V_n = \frac{2U_n}{2+U_n} - \frac{1}{U_n} = \frac{U_n}{2U_n} = \frac{1}{2}$ donc V_n est arithmétique

2.a) V_n est une suite arithmétique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme 1

Ainsi $V_n = 1 + \frac{1}{2}n = \frac{2+n}{2}$

D'où $U_n = \frac{1}{V_n} = \frac{2}{2+n}$

2.b)$S_n = V_0 + V_1 + \cdots + V_n = (n+1)\left(\frac{V_0+V_n}{2}\right) = \frac{(n+1)\left(2+\frac{1}{2}n\right)}{2} =$
$\frac{1}{4}(n+1)(4+n)$

2.c) $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2}{2+n} = 0$ donc (U_n) est convergente

Exercice10

1.$U_1 = \frac{2U_0+V_0}{3} = \frac{2\times2+8}{3} = \frac{12}{3} = 4$

$V_1 = \frac{U_0+3V_0}{4} = \frac{2+3\times8}{4} = \frac{26}{4} = \frac{13}{2}$

2.a)$d_{n+1} = V_{n+1} - U_{n+1} = \frac{3V_n+U_n}{4} - \frac{2U_n+3V_n}{3} = \frac{1}{12}(3U_n + 9V_n - 8U_n - 4V_n)$

$= \frac{1}{12}(-5U_n + 5V_n) = \frac{5}{12}(V_n - U_n) = \frac{5}{12}d_n$

Donc (d_n) est une suite géométrique de raison $\frac{5}{12}$ et de premier terme

$d_0 = V_0 - U_0 = 6$

b)(d_n) est une suite géométrique de raison $\frac{5}{12}$ et de premier terme $d_0 = 6$

donc $d_n = 6 \times \left(\frac{5}{12}\right)^n$

c)On a $\frac{5}{12} > 0$ donc $\left(\frac{5}{12}\right)^n > 0$ d'où $d_n > 0$

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} d_n = \lim\limits_{n\to+\infty} 6\times\left(\frac{5}{12}\right)^n = 0$ car $-1 < \frac{5}{12} < 1$

3.a) $U_{n+1} - U_n = \frac{2U_n+3V_n}{3} - U_n = \frac{V_n-U_n}{3} = \frac{d_n}{3}$

$V_{n+1} - V_n = \frac{U_n+3V_n}{4} - V_n = \frac{U_n-V_n}{4} = -\frac{d_n}{4}$

b) $U_{n+1} - U_n = \frac{d_n}{3}$ or $d_n > 0$ donc $U_{n+1} - U_n > 0$ d'où (U_n) est croissante

$V_{n+1} - V_n = -\frac{d_n}{4}$ or $d_n > 0$ donc $U_{n+1} - U_n < 0$ d'où (V_n) est décroissante

c) (U_n) est croissante donc $U_0 < U_n$

(V_n) est décroissante donc $V_n < V_0$

De plus $d_n > 0$ donc $U_n < V_n$

Par suite $U_0 < U_n < V_n < V_0$

d) (U_n) est croissante et majorée par V_0 donc (U_n) converge

(V_n) est décroissante et minorée par U_0 donc (V_n) converge

4.a) $U_{n+1} - U_n = \frac{d_n}{3}$ donc

$$\left.\begin{array}{l}
U_n - U_{n-1} = \frac{d_{n-1}}{3} \\
U_{n-1} - U_{n-2} = \frac{d_{n-2}}{3} \\
\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots. \\
\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots. \\
U_2 - U_1 = \frac{d_1}{3} \\
U_1 - U_O = \frac{d_0}{3}
\end{array}\right\} \text{Addition membre à membre}$$

$U_n - U_0 = \frac{1}{3}\ (d_0 + d_1 + d_2 + \cdots .. + d_{n-1})$

$U_n - 2 = \frac{1}{3} \times 6 \times \frac{1-\left(\frac{5}{12}\right)^n}{1-\frac{5}{12}} = 2 \times \frac{1-\left(\frac{5}{12}\right)^n}{\frac{7}{12}} = 24 \times \frac{1-\left(\frac{5}{12}\right)^n}{7}$

Ainsi $U_n = \frac{24}{7} \times \left(1 - \left(\frac{5}{12}\right)^n\right) + 2$

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{24}{7} \times \left(1 - \left(\frac{5}{12}\right)^n\right) + 2 = \frac{24}{7} + 2 = \frac{38}{7}$

On a $\lim\limits_{n\to+\infty} d_n = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = \lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \frac{38}{7}$

Car (U_n) et (V_n) sont convergentes

Exercice 11

$\begin{cases} U_0 = \frac{1}{3} \\ U_{n+1} = \frac{3}{2}\ (U_n)^2 \end{cases}$ et $V_n = ln\left(\frac{3}{2}\ U_n\right)$

1. $V_0 = ln\left(\frac{3}{2}\ U_0\right) = -\ln 2$

2. $V_{n+1} = ln\left(\frac{3}{2}\ U_{n+1}\right) = ln\left(\frac{3}{2} \times \frac{3}{2}\ (U_n)^2\ \right) = ln\left(\left(\frac{3}{2}\ U_n\right)^2\right) =$
$2ln\left(\frac{3}{2}\ U_n\right)$

$V_{n+1} = 2\ V_n$ donc (V_n) est une suite géométrique de raison 2

3. $V_n = -ln2 \times 2^n = -2^n ln2$

4. $\lim V_n = \lim -2^n ln2 = -\infty$

5. $V_n = ln\left(\frac{3}{2}\ U_n\right)$ d'où $e^{V_n} = \frac{3}{2}\ U_n$ donc $\frac{2}{3}\ e^{V_n} = U_n$

$\lim\ U_n = \lim \frac{2}{3}\ e^{V_n} = 0$

6.a) $S_n = V_0 + V_1 + \cdots + V_{n-1}$

$S_n = V_0 \times \frac{1-2^n}{1-2} = V_0(1-2^n) = (1-2^n)ln2$

$$T_n = U_0 \times U_1 \times \ldots \times U_{n-1}$$

$$T_n = \frac{2}{3}\, e^{V_0} \times \frac{2}{3}\, e^{V_1} \times \ldots \times \frac{2}{3}\, e^{V_{n-1}}$$

$$T_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n \times\ e^{V_0+V_1+\cdots+V_{n-1}} = \left(\frac{2}{3}\right)^n \times e^{S_n}$$

$$T_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n \times e^{(1-2^n)ln2} = \left(\frac{2}{3}\right)^n \times e^{ln2^{(1-2^n)}} = \left(\frac{2}{3}\right)^n \times\ 2^{(1-2^n)}$$

Exercice 12

$$\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \frac{4U_n-3}{U_n} \end{cases}$$

1.$f(x) = \frac{4x-3}{x}$

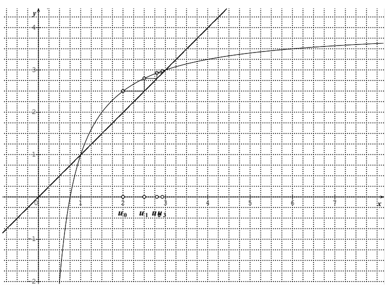
a)$\forall x \in]0;+\infty[\,; f'(x) = \frac{4x-4x+3}{x^2} = \frac{3}{x^2}$

Or)$\forall x \in]0;+\infty[; x^2 > 0\,; 3 > 0$ donc $\forall x \in]0;+\infty[\,; f'(x) > 0$

Donc f est strictement croissante sur $]0;+\infty[$

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	4

b)



c) construction des quatre premier termes de la suite

2.a)$f([2;3]) = [f(2); f(3)]$ or $f(2) = \frac{5}{2}$ et $f(3) = \frac{9}{3} = 3$

Or $2 < \frac{5}{2}$ et $3 = 3$ donc $f([2;3]) \subset [2;3]$

b) $2 \leq 2 < 3$ donc $2 \leq U_0 < 3$

Supposons qu'il existe un entier $n \geq 0$ tel que $2 \leq U_n < 3$ et montrons que

$2 \leq U_{n+1} < 3$

On a : $U_{n+1} = 4 - \frac{3}{U_n}$ donc $2 \leq U_n < 3$

$-\frac{3}{2} \leq -\frac{3}{U_n} < -1$; $\frac{5}{2} \leq U_{n+1} < 3$

Donc $\forall n;\ 2 \leq U_{n+1} < 3$

c)On a $U_{n+1} = \frac{8-3}{2} = \frac{5}{2}$ et $2 < \frac{5}{2}$ donc $U_0 \leq U_1$

Supposons qu'il existe $n \geq 0$ tel que $U_n \leq U_{n+1}$ et montrons que $U_{n+1} \leq U_{n+2}$

On a $U_n \leq U_{n+1}$ et f est strictement croissante donc $f(U_n) \leq f(U_{n+1})$

D'où $U_{n+1} \leq U_{n+2}$

Par suite $\forall\ n \geq 0$; $U_n \leq U_{n+1}$ donc la suite (U_n) est strictement croissante

d)La suite (U_n) est croissante et majorée par 3 donc elle est convergente

3.a)$V_n = \frac{U_n-3}{U_n-1}$

On a $V_{n+1} = \frac{U_{n+1}-3}{U_{n+1}-1} = \frac{\frac{4U_n-3}{U_n}-3}{\frac{4U_n-3}{U_n}-1} = \frac{U_n-3}{3U_n-3} = \frac{1}{3}\left(\frac{U_n-3}{U_n-1}\right) = \frac{1}{3}V_n$

Donc (V_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et de premier terme V_0 tel que $V_0 = -1$

b) On a : $V_n = -\left(\frac{1}{3}\right)^n$ $(V_n = V_0 q^n)$

comme $-1 < \frac{1}{3} < 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n = 0$

c) On a $V_n = \frac{U_n - 3}{U_n - 1}$ donc $V_n U_n - V_n = U_n - 3$

D'où $V_n U_n - V_n = U_n - 3$ par suite $U_n = \frac{V_n - 3}{V_n - 1}$

Ainsi $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{V_n - 3}{V_n - 1} = 3$ Car $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n = 0$

Exercice 13

U_0 et $\forall n$, $U_{n+1} = 3U_n - 2n + 3$

1.$U_1 = 3U_0 - 2 \times 0 + 3 = 3U_0 + 3 = 3(U_0 + 1) = 3$

$U_2 = 3U_1 - 2 \times 1 + 3 = 3 \times 3(U_0 + 1) - 2 + 3 = 9(U_0 + 1) + 1 = 10$

2.a)On a U_0

Supposons qu'il existe $n \geq 0$ tel que $U_n \geq n$ et montrons que $U_{n+1} \geq n + 1$

On a $U_n \geq n$; $3U_n \geq 3n$; $3U_n - 2n + 3 \geq n + 3$; $U_{n+1} \geq n + 3$

Or $n + 3 \geq n + 1$ donc $U_{n+1} \geq n + 3$

Donc pour tout $n, U_n \geq n$

b)On a $U_n \geq n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = +\infty$

3.On a $U_{n+1} - U_n = 3U_n - 2n + 3 - U_n = 2U_n - 2n + 3$

Or $U_n \geq n$; $2U_n \geq 2n$; $2U_n - 2n \geq 0$; $2U_n - 2n + 3 \geq 3$

Donc $U_{n+1} - U_n \geq 0$

D'où la suite (U_n) est croissante

4.a)On a $V_{n+1} = U_{n+1} - (n + 1) + 1 = U_{n+1} - n = 3U_n - 2n + 3 - n = 3U_n - 3n + 3$

$$V_{n+1} = 3(U_n - n + 1) = 3V_n$$

Donc (V_n) est une suite géométrique de raison de 3 et de premier terme V_O tel que

$V_0 = U_0 + 1 = 1$

b) (V_n) est une suite géométrique de raison de 3 et de premier terme $U_O + 1$ or

$U_O + 1 = 1$

Donc $V_n = (U_0 + 1) \times 3^n$

Comme $V_n = U_n - n + 1$ alors $U_n = V_n + n - 1$

Donc $U_n = (U_0 + 1)3^n + n - 1$

Ainsi $U_n = 3^n + n - 1$

Exercice 14

$U_0 = \frac{n}{N}$ et $\forall n \geq 1$ $U_{n+1} = \frac{1+U_n}{3-U_n}$

1.$U_0 = 0{,}5$ donc $U_1 = \frac{1+0{,}5}{3-0{,}5} = \frac{1{,}5}{2{,}5} = \frac{3}{5}$

2.On pose $V_n = U_n - 1$

On a : $\frac{1}{V_n} = \frac{1}{U_n-1}$ d'où $\frac{1}{V_{n+1}} = \frac{1}{U_{n+1}-1}$

Donc $\frac{1}{V_{n+1}} = \frac{1}{\frac{1+U_n}{3-U_n}-1} = \frac{1}{\frac{2U_n-2}{3-U_n}}$

Déplus $\frac{1}{V_{n+1}} - \frac{1}{V_n} = \frac{3-U_n}{2(U_0-1)} - \frac{1}{U_n-1} = \frac{3-U_n-2}{2(U_0-1)} = \frac{1-U_n}{2(U_0-1)} = -\frac{1}{2}$

Donc la suite $\left(\frac{1}{V_n}\right)$ est une suite arithmétique de raison $-\frac{1}{2}$ et de premier terme $\frac{1}{V_0}$

3.On a $\left(\frac{1}{V_n}\right)$ suite arithmétique donc $\frac{1}{V_n} = \frac{1}{V_0} - \frac{1}{2}n$

D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{V_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{V_0} - \frac{1}{2}n = -\infty$

Par suite $\lim_{n \to +\infty} V_n = 0$ Car $V_n = \frac{2V_0}{2-n}$

Or $U_n = V_n + 1$ donc $\lim_{n \to +\infty} U_n = \lim_{n \to +\infty} V_n + 1 = 1$

Interprétation : Après un très grand nombre de reproduction la proportion de souris noire est de 1

Exercice 15

$U_0 = 0$ et $\forall n;\ U_{n+1} = \sqrt{U_n + 6}$

1.On a $U_0 = 0$ et $0 \geq 0$ donc $U_0 \geq 0$

Supposons qu'il existe $n \geq 0$ tel que $U_n \geq 0$ et montrons que $U_{n+1} \geq 0$

On a $U_n \geq 0$; $U_n + 6 \geq 6$; $\sqrt{U_n + 6} \geq \sqrt{6} \geq 0$

Donc $U_{n+1} \geq 0$

Par suite $\forall n$; $U_n \geq 0$

On a $0 < 5$ donc $U_0 < 0$

Supposons qu'il existe $n \geq 0$ tel que $U_n < 5$ et montrons que $U_{n+1} < 5$

On a $U_n < 5$; $U_n + 6 < 11$; $\sqrt{U_n + 6} < \sqrt{11} < 5$

Donc $U_{n+1} < 5$

Par suite $\forall n$; $U_n < 5$

D'où (U_n) est majorée par 5

2.On a $U_1 = \sqrt{0 + 6} = \sqrt{6}$ et $0 < \sqrt{6}$ donc $U_0 < U_1$

Supposons qu'il existe $n \geq 0$ tel que $U_n \leq U_{n+1}$ et montrons que $U_{n+1} \leq U_{n+2}$

On a $U_n \leq U_{n+1}$; $U_n + 6 \leq U_{n+1} + 6$; $\sqrt{U_n + 6} \leq \sqrt{U_{n+1} + 6}$; $U_{n+1} \leq U_{n+2}$

Donc $\forall n$; $U_n \leq U_{n+1}$

La suite (U_n) est donc croissante

3.(U_n) est croissante et majorée par 5 donc (U_n) converge

De plus $U_{n+1} = f(U_n)$ d'où sa limite l est solution de l'équation $f(x) = x$

$$f(x) = x \Leftrightarrow \sqrt{x+6} = x \Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Leftrightarrow (x-3)(x+2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 3 \text{ ou } x = -2$$

Comme $U_n > 0$ alors $l = 3$

4.On a $U_{n+1} - 3 = \sqrt{U_n + 6} - 3 = \frac{U_n+6-9}{\sqrt{U_n+6}+3} = \frac{U_n-3}{\sqrt{U_n+6}+3}$

Or $0 < \sqrt{U_n + 6}$ d'où $3 < \sqrt{U_n + 6} + 3$ Donc $\frac{1}{\sqrt{U_n+6}+3} < \frac{1}{3}$

Par suite $\frac{U_n-3}{\sqrt{U_n+6}+3} < \frac{1}{3}(U_n - 3)$

Donc $|U_{n+1} - 3| \leq \frac{1}{3}|U_n - 3|$

$$\left.\begin{array}{l}
|U_n - 3| \leq \frac{1}{3}|U_{n-1} - 3| \\
|U_{n-1} - 3| \leq \frac{1}{3}|U_{n-2} - 3| \\
\quad .... \qquad\qquad .... \\
\quad ...... \qquad\qquad .... \\
|U_2 - 3| \leq \frac{1}{3}|U_1 - 3| \\
|U_1 - 3| \leq \frac{1}{3}|U_0 - 3|
\end{array}\right\} \text{multiplication membre à membre}$$

$$| U_n - 3 | \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n | U_0 - 3 |$$

Or $U_0 = 0$ donc $| U_n - 3 | \leq 3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$

SITUATIONS COMPLEXES

Exercice 16

Pour le premier contrat

Soit $U_0 = 750.000$ le salaire de départ

L'année suivante, soit $U_1 = U_0 + U_0 \times 0{,}04 = 1{,}04 \times U_0$

Soit U_n le salaire annuel à l'année n on a : $U_{n+1} = U_n + U_n \times 0{,}04 = 1{,}04 U_n$

Ainsi (U_n) est une suite géométrique de raison 1,04 et de premier terme 750.000

D'où $U_n = 750.000 \times (1{,}04)^n$

Pour 9 ans

On a : $U = 750.000 \times (1{,}04)^9 = 1\,067\,483{,}859$

Pour le deuxième contrat

Soit $V_0 = 750\,000$ le salaire de départ

Soit V_n le salaire annuel à l'année n on a : $V_{n+1} = V_n + 30\,000$

Ainsi (V_n) est une suite arithmétique de raison 30 000 et de premier terme 750 000

D'où $V_n = 750\,000 + 30\,000\, n$

Pour 9 ans

On a $V = 750\,000 + 30\,000 \times 9 = 1\,020\,000$

Le contrat le plus avantageux pour Monsieur Yao est le premier contrat

Exercice 17

f(0) = 1 et f(t) = 120t +1. Il s'agit d'une suite arithmétique de premier terme 1 et de raison 120. Calculons-la en fonction de t la somme :

S = f(0) + f(1) + f(2) + f(3) + … + f(t)

S = $\frac{t+1}{2}(f(0)+f(t))$ soit S = $\frac{t+1}{2}(120t+2)$,

donc S = $60t^2+61t+1$ (t$>$ 0)

S $\geq$ 10^4 $\Leftrightarrow 60t^2+61t-9999\geq 0$ et t $>$ 0 donc $t \geq \dfrac{-61+7\sqrt{2403481}}{120}$;

t est un entier donc la plus petite valeur de t est : 13.

Le couvre-feu interviendra 13 jours après la déclaration du premier cas contrairement à l'affirmation du camarade de classe

14 ISOMÉTRIES DU PLAN

EXERCICES DE FIXATION

Exercice de fixation

Exercice 1

1)Faux

2)Faux

3)Faux

4)Vrai

5)Faux

6)Faux

Exercice 2

1)ABC est un triangle équilatéral de sens direct donc $AB = AC$ et $mes\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right) = \frac{\pi}{3}$ donc $r(B) = C$ de même $AN = AM$ et $mes\left(\widehat{\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AN}}\right) = \frac{\pi}{3}$ donc $r(M) = N$

2) $r(B) = C$ et $r(M) = N$ donc $BM = CM$

3)L'angle de r est $\frac{\pi}{3}$ donc $mes\left(\widehat{\overrightarrow{BM};\overrightarrow{CN}}\right) = \frac{\pi}{3}$

DES PROPRIETES DE CONSERVATION

Exercice de fixation

Exercice 3

1)Faux ; 2)Vrai ; 3)Vrai ; 4)Vrai ; 5)Faux

Conservation du barycentre

Exercice 4

S_O

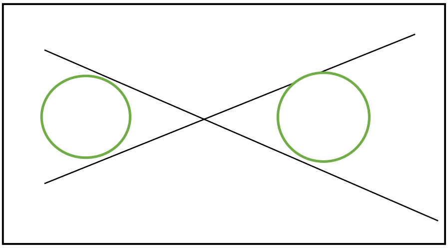
O	A	D
O	B	C

G_2 est le centre de gravité de OAD or G_3 est le centre de gravité de OBC

D'où $G_3 = S_o(G_2)$

O est le milieu de $[G_2G_3]$ et le milieu de $[GG']$ donc le quadrilatère G_2GG_3G' est un parallélogramme.

Exercice 5



S_K

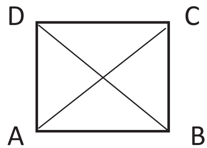
A	B	(C)
A'	B'	(C')

(KA) est la tangente à (C) en A donc (KA') est la tangente à (C') en A' (conservation du contact) ; Or (KA)=(KA') donc la droite (KA) est la tangente à (C') en A'

Même raisonnement pour la droite (KB)

Conservation de l'alignement

Exercice 6



	B	O	D
r	D	O'	D'

Comme B, O et D sont alignés, donc les D, O' et D' sont alignés comme image de points alignés par une isométrie.

Exercice 7

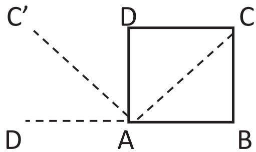
1)Faux

2)Faux

3)Vrai

4)Vrai

Exercice 8



(AC)	(BD)	
(AC')	(BD')	r

Comme $(AC) \perp (BD)$ alors $(AC') \perp (BD')$

IMAGE PAR UNE ISOMETRIE DE QUELQUES CONFIGURATION PLANES

Exercice 9

1)Faux

2)Vrai

3)Faux

4)Vrai

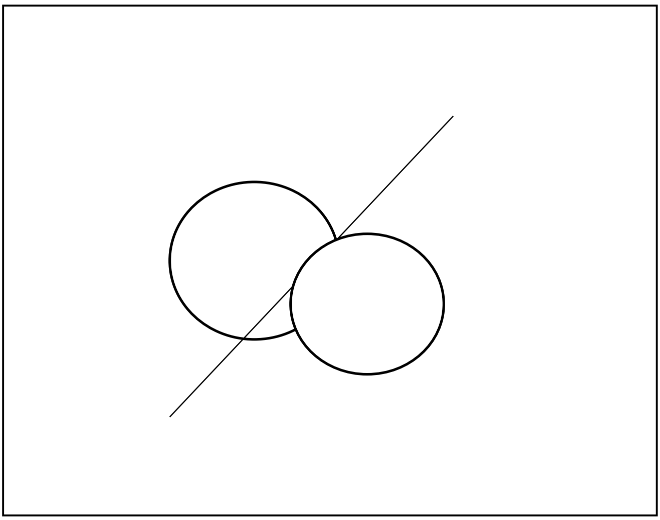
Exercice 10

1)Vrai

2)Vrai

3)Faux

Exercice 11



DECOMPOSITION DES ISOMETRIES

Exercice 12

Remplacer dans l'énoncé S $_{(\,)}$ par $S_{(\Delta)}$

a)$(\Delta) = t_{-\frac{1}{2}\vec{u}}\big((D'')\big) = (D')$

b) $(\Delta) = (D'')$=$t_{\frac{1}{2}\vec{u}}\big((D')\big)$

c) $(\Delta) = (D')$=$t_{\frac{1}{2}\vec{u}}\big((D)\big)$

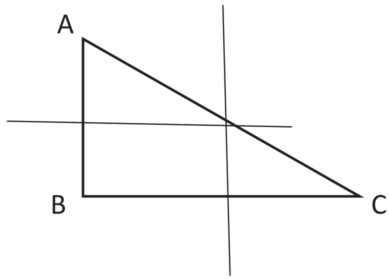
d) $(\Delta) = t_{\frac{1}{2}\vec{u}}\big((D'')\big)$

Exercice 13

1) (D) $= t_{-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}}\big((BC)\big)$

2)construction

3) $(\Delta) = t_{\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}}\big((AB)\big)$



Décomposition d'une rotation

Exercice 14

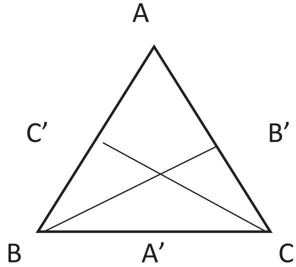
Ecrire $S_{(AB)}$ et $S_{(D)}$ au lieu de respectivement S(AB) et S(D)

Figure

(D) $= r_{\left(0;-\frac{\pi}{3}\right)}\big((OA)\big)$

$(D_1) = r_{\left(B;\frac{\pi}{6}\right)}\big((AB)\big)$

$r_{\left(A;\frac{2\pi}{3}\right)} = S_{(AB)}{\circ}S_{(AC)}$



COMPOSEE D'ISOMETRIES

Exercice 15

1)Vrai ; 2)Faux ; 3)Faux ; 4) Faux ; 5)Faux ; 6)Vrai ; 7)Faux ; 8)Faux

Exercice 16

Nature de l'isométrie f	rotation	Symétrie orthogonale	déplacement	translation	Symétrie orthogonale
Nature de l'isométrie g	Antidéplacements	Antidéplacement	translation	Symétrie centrale	Antidéplacement
Nature de l'isométrie g ∘ f	Antidéplacement	déplacement	déplacement	déplacement	translation

Nature de la composée de deux isométries

Exercice 17

1)

$r_{\left(0;\frac{2\pi}{3}\right)} \circ S_{(BO)}$ est la composée d'un déplacement et d'un antidéplacement.

c'est un antidéplacement, une symétrie orthogonale soit une symétrie glissée, comme $0 \in (OB)$, donc il s'agit d' une symétrie orthogonale.

$r_{\left(A;\frac{\pi}{3}\right)} \circ S_{(BC)}$, $A \notin (BC)$ donc c'est une symétrie glissée.

$t_{\overrightarrow{BC}} \circ S_o = t_{\overrightarrow{BC}} \circ r_{(0;\pi)}$, c'est donc une notation d'angle π.

2) $r_{\left(A;\frac{\pi}{3}\right)} \circ S_{(BC)} = S_{(AI)} \circ S_{(AB)} \circ S_{(BC)}$

Exercice 18

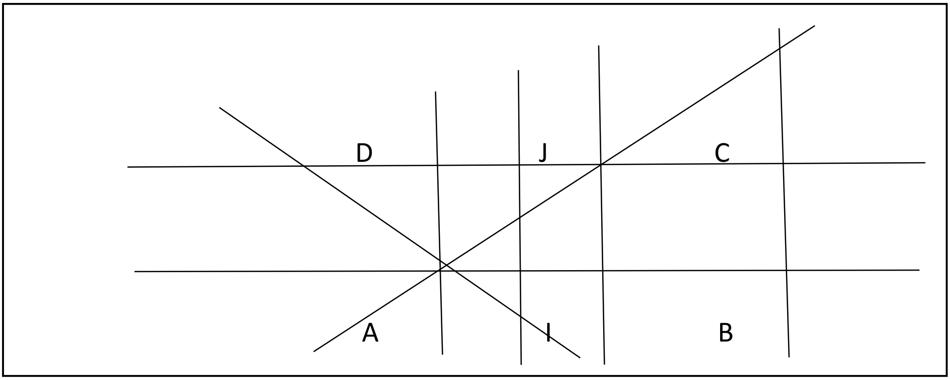
Ecrire $S_{(IJ)}$ et $S_{(CI)}$ au lieu de respectivement S(IJ) et S(CI) etc.

$S_{(IJ)} \circ S_{(CI)} = r_{\left(I;\frac{\pi}{2}\right)}$; $S_{(IJ)} \circ S_{(AD)} = t_{\overrightarrow{AB}}$; $S_{\overrightarrow{AI}} \circ S_{(AD)} = S_{(L)} \circ S_{(AD)} \circ S_{(AD)} = S_{(L)}$ où (L)=médiatrice [AI]

$r_{\left(A;\frac{\pi}{2}\right)} \circ t_{\overrightarrow{AI}} = S_{(D2)} \circ S_{(AD)} \circ S_{(AD)} \circ S_{(D1)}$ où $(D_2) = r_{\left(A;\frac{\pi}{4}\right)}(AD)$ et $(D_1) = t_{-\frac{1}{2}\overrightarrow{AI}}(AD) = S_{(D2)} \circ S_{(D1)} = r_{\left(\Omega;\frac{\pi}{2}\right)}$ où $\{4\Omega\} = (D2) \cap (D1)$.

$r_{\left(A;\frac{\pi}{2}\right)} \circ S_{(AB)}=S_{(AJ)} \circ S_{(AB)} \circ S_{(AB)}=S_{(AJ)}$.

$S_{(AB)} \circ r_{\left(A;\frac{\pi}{2}\right)}=S_{(AB)} \circ S_{(AB)} \circ S_{(D2)}=S_{(D2)}$.



Classification et détermination des isométries du plan

Erreur de numérotation

Exercice 1

$K = milieu[AB]$ et $L = milieu[DC]$ l'antidéplacement h qui applique A sur B et D sur C est $S_{(KL)} \circ t_{(\overrightarrow{B'A})}$ où $B' = S_{(KL)}(B)$.

Exercice 2

1)ABC est un triangle donc les points A,B et C sont non alignés, de plus, $AB = AC$; $AC = AB$ et $BC = CB$ car ABC est équilatéral donc f est une isométrie.

2)Sur $I' = f(I)$ on a $AI = AI'$ et $BI = BI'$ or $AI = BI$ donc $I' = I$.

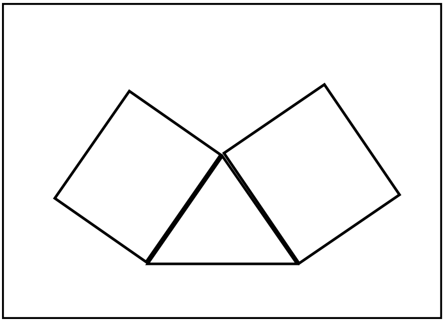
3)$f\left(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA}\right) = \left(\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CA}\right)$ donc f transforme un angle en son opposé.

c'est donc un antidéplacement qui a deux points fixes, c'est donc la symétrie orthogonale d'axe (AI).

4)La rotation de centre I et d'angle $\frac{2\pi}{3}$

UTILISATION DES ISOMETRIES

Exercice19



$r_N \circ r_M(B) = r_N(A) = C$

$r_N \circ r_M$ est la composée de deux rotations de centre distincts dont l a somme des mesures des angles est égale à π donc $r_N \circ r_M = r_{(;\pi)} = S_O$ car O =mil$[BC]$

$O' = r_M(O)$ donc $r_N \circ r_M(O) = r_N(O') = O$ car $r_N \circ r_M = S_O$

Mes$\left(\widehat{\overrightarrow{ON};\overrightarrow{OM}}\right)$ = Mes $\left(\widehat{\overrightarrow{ON};\overrightarrow{OO'}}\right)$ + Mes $\left(\widehat{\overrightarrow{OO'};\overrightarrow{OM}}\right) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

Donc le triangle OMN est rectangle en O

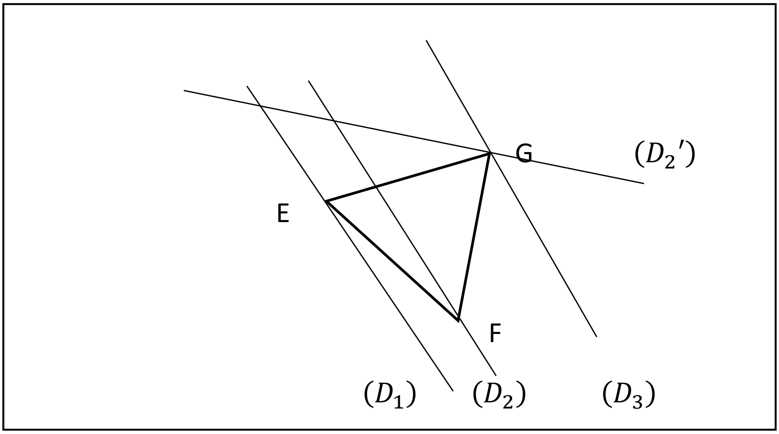
Utiliser une isométrie pour construire

Exercice 20

$E \in (D_1)$; considérons la rotation r de centre E et d'angle $\frac{\pi}{3}$

$r(D_1) = (D_2')$; $(D_2') \cap (D_3) = \{G\}$ et $F = r^{-1}(G)$

Donc EFG est équilatéral et $E \in (D_1)$; $F \in (D_2)$ et $G \in (D_3)$



Exercice 21

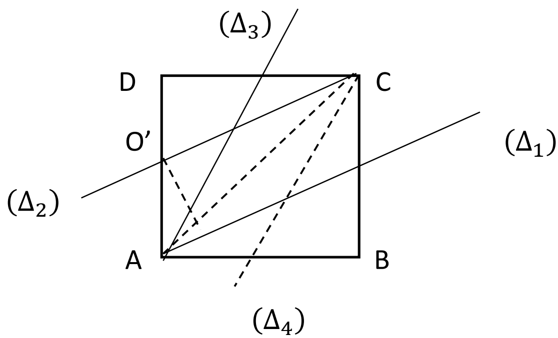
Enoncé à reprendre en y ajoutant la figure (prochaine réédition)

EXERCICES DE RENFORCEMENT/ APPROFONDISSEMENT

Exercice 1

1.B ; 2.B ; 3.C ; 4.C ; 5.B

Exercice 2



On a $h = g \circ f$

1.$f = r_{\left(A;\frac{\pi}{2}\right)}$ et $g = r_{\left(C;\frac{\pi}{2}\right)}$

On a $f = r_{\left(A;\frac{\pi}{2}\right)} = S_{(AC)} \circ S_{(AB)}$ et $g = r_{\left(C;\frac{\pi}{2}\right)} = S_{(CB)} \circ S_{(AC)}$

Donc $g \circ f = r_{\left(C;\frac{\pi}{2}\right)} \circ r_{\left(A;\frac{\pi}{2}\right)} = S_{(CB)} \circ S_{(AC)} \circ S_{(AC)} \circ S_{(AB)} = S_{(CB)} \circ S_{(AB)} = r_{(B;\pi)} = S_B$

Car $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$ et $(CB) \cap (AB) = \{B\}$

Remarque :

On aurait pu constater que : $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$ et conclure *g of* est une rotation d'angle π c'est-à-dire une symétrie centrale. Il suffit alors de constater que (*g of*) (B) = B*, pour conclure que g of est la symétrie centrale de centre B*.

2. $f = r_{\left(A;\frac{\pi}{4}\right)}$ et $g = r_{\left(C;-\frac{\pi}{4}\right)}$

On a $r_{\left(C;-\frac{\pi}{4}\right)} = S_{(\Delta_2)} \circ S_{(AC)}$ où $(\Delta_2) = r_{\left(C;-\frac{\pi}{8}\right)}((AC))$

$r_{\left(A;\frac{\pi}{4}\right)} = S_{(AC)} \circ S_{(\Delta_1)}$ où $(\Delta_1) = r_{\left(A;-\frac{\pi}{8}\right)}((AC))$

Ainsi $g \circ f = S_{(\Delta_2)} \circ S_{(AC)} \circ S_{(AC)} \circ S_{(\Delta_1)} = S_{(\Delta_2)} \circ S_{(\Delta_1)} = t_{2\overrightarrow{OO'}}$

Car $(\Delta_1) \parallel (\Delta_2)$ et $O \in (\Delta_1)$ et $O' = P_{(\Delta_2)}(O)$

3. $f = S_{(AB)}$ et $g = S_{(AC)}$

$g \circ f = S_{(AC)} \circ S_{(AB)} = r_{\left(A;\frac{\pi}{2}\right)}$ Car $(AB) \cap (AC) = \{A\}$ et mes$\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right) = \frac{\pi}{4}$

4.$f = S_{(AB)}$ et $g = S_{(CD)}$; on a $(AB) \parallel (AC)$ donc $g \circ f = S_{(CD)} \circ S_{(AB)} = t_{2\overrightarrow{AD}}$

Car $D = P_{(CD)}(A)$

5. $f = S_{(AC)}$ et $g = S_{(BD)}$

On a $(AC) \perp (BD)$ et posons $(AC) \cap (BD) = \{\Omega\}$

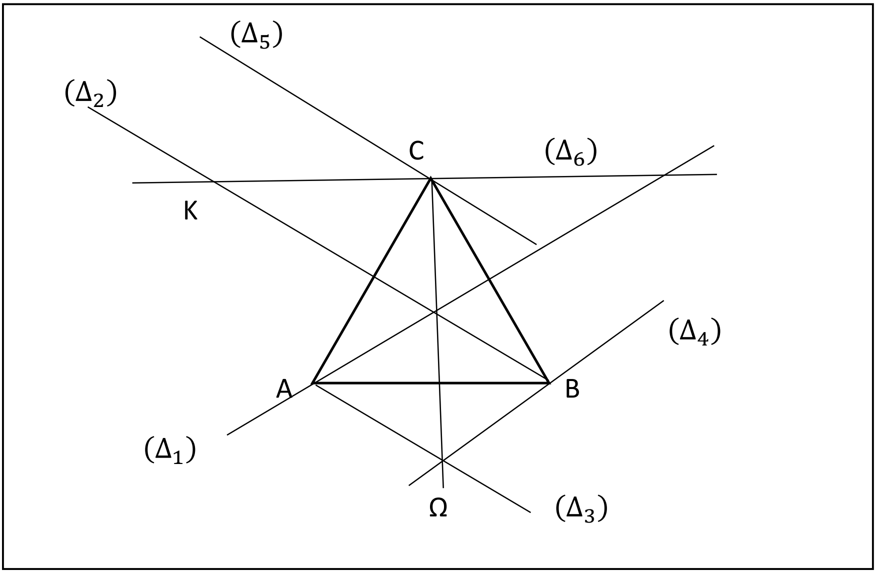
Donc $g \circ f = S_{(BD)} \circ S_{(AC)} = r_{(\Omega;\Pi)} = S_\Omega$ Car mes$\left(\widehat{\overrightarrow{AC};\overrightarrow{BD}}\right) = \frac{\pi}{2}$

$6. f = r_{\left(A;\frac{\pi}{2}\right)}$ et $g = S_{(AC)}$

On a $r_{\left(A;\frac{\pi}{2}\right)} = S_{(AC)} \circ S_{(AB)}$

Donc $g \circ f = S_{(AC)} \circ S_{(AC)} \circ S_{(AB)} = S_{(AB)}$

Exercice 3



$r = r_{\left(A;\frac{\pi}{3}\right)}$; $r_1 = r_{\left(B;\frac{\pi}{3}\right)}$; $r_2 = r_{\left(C;\frac{\pi}{3}\right)}$; $r_1^{-1} = r_{\left(B;-\frac{\pi}{3}\right)}$

$r_1 = S_{(\Delta_4)} \circ S_{(AB)} =$ où $(\Delta_4) = r_{\left(B;\frac{\pi}{6}\right)}((AB))$

$S_{(CB)} = S_{(\Delta_1)} \circ S_{(AB)}$ où $(\Delta_3) = r_{\left(A;-\frac{\pi}{6}\right)}((AB))$

$r = S_{(\Delta_4)} \circ S_{(AB)} \circ S_{(AB)} \circ S_{(\Delta_3)} = S_{(\Delta_4)} \circ S_{(\Delta_3)} = r_{\left(\Omega;\frac{2\pi}{3}\right)} = r'$ ou

$\{\Omega\} = (\Delta_4) \cap (\Delta_3)$

On a $r' = S_{(\Omega C)} \circ S_{(\Omega B)}$ et $r_2 = S_{(CB)} \circ S_{(\Omega C)}$

$r_2 \circ r' = S_{(CB)} \circ S_{(\Omega C)} \circ S_{(\Omega C)} \circ S_{(\Omega B)} = S_{(CB)} \circ S_{(\Omega B)}$

$r_2 \circ r' = r_{\left(B;2\times\frac{\pi}{2}\right)} = r_{(B;\pi)} = S_B$

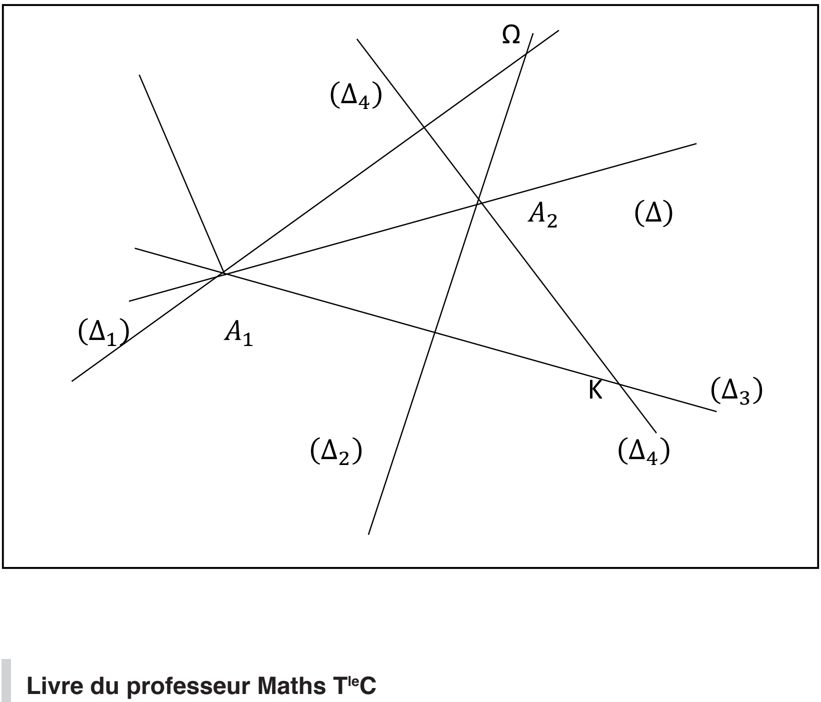
On a $r = S_{(AB)} \circ S_{(\Delta_3)}$ et $r_1^{-1} = S_{(\Delta_2)} \circ S_{(AB)}$ ou $(\Delta_2) = r_{(B;-\frac{\pi}{6})}((AB))$

Donc $r_1^{-1} \circ r = S_{(\Delta_2)} \circ S_{(AB)} \circ S_{(AB)} \circ S_{(\Delta_3)} = S_{(\Delta_2)} \circ S_{(\Delta_3)} = t_{\overrightarrow{AC}}$ car $(\Delta_2) // (\Delta_3)$

De plus $t_{\overrightarrow{AC}} = S_{(\Delta_5)} \circ S_{(\Delta_2)}$ et $r_2 = S_{(\Delta_6)} \circ S_{(\Delta_5)}$ ou $(\Delta_5) = t_{\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}}(\Delta_2)$ *et* $(\Delta_6) = r_{\left(C;-\frac{\pi}{6}\right)}(\Delta_5)$

Ainsi, $r_2 \circ r_1^{-1} \circ r = r_2 \circ t_{\overrightarrow{AC}} = S_{(\Delta_6)} \circ S_{(\Delta_5)} \circ S_{(\Delta_5)} \circ S_{(\Delta_2)} = S_{(\Delta_6)} \circ S_{(\Delta_2)} = r_{\left(K\,;\,\frac{\pi}{3}\right)}$ Où $\{K\} = (\Delta_6) \cap (\Delta_2)$

Exercice 4



1.Construction de (Δ_1) tel que $r_1 = S_{(D)} \circ S_{(\Delta_1)}$ où $r_1 = r_{\left(A_1;\frac{\pi}{3}\right)}$; (Δ_1) est la droite passant par A_1 et tel que mes$\left(\vec{u};\widehat{\overrightarrow{A_2A_1}}\right) = -\frac{\pi}{6}$; $\vec{u}$ est un vecteur directeur de (Δ_1)

Construction de (Δ_2) tel que $r_2 = r_{\left(A_2;\frac{3\pi}{4}\right)} = S_{(\Delta_2)} \circ S_{(D)}$; (Δ_2) est la droite passant par A_2 et tel que mes$\left(\vec{v};\widehat{\overrightarrow{A_2A_1}}\right) = -\frac{3\pi}{8}$

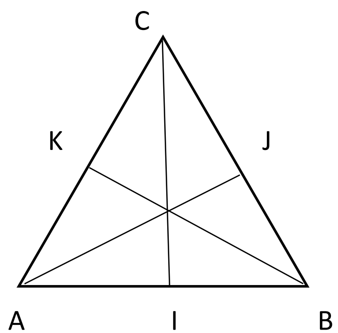
2. $r_2 \circ r_1 = S_{(\Delta_2)} \circ S_{(D)} \circ S_{(D)} \circ S_{(\Delta_1)} = S_{(\Delta_2)} \circ S_{(\Delta_1)} = r_{\left(\Omega;\frac{5\pi}{12}\right)}$ où $\{\Omega\} = (\Delta_1) \cap (\Delta_2)$

3. $r_1 = S_{(\Delta_3)} \circ S_{(D)}$ où $(\Delta_3) = r_{\left(A_1;-\frac{\pi}{6}\right)}\left((D)\right)$

$r_2 = S_{(D)} \circ S_{(\Delta_4)}$ où $(\Delta_4) = r_{\left(A_2;\frac{3\pi}{8}\right)}\left((D)\right)$

$r_1 \circ r_2 = S_{(\Delta_3)} \circ S_{(D)} \circ S_{(D)} \circ S_{(\Delta_4)} = S_{(\Delta_3)} \circ S_{(\Delta_4)} = r_{\left(K;\frac{5\pi}{12}\right)}$ où $\{K\} = (\Delta_3) \cap (\Delta_4)$

Exercice 5

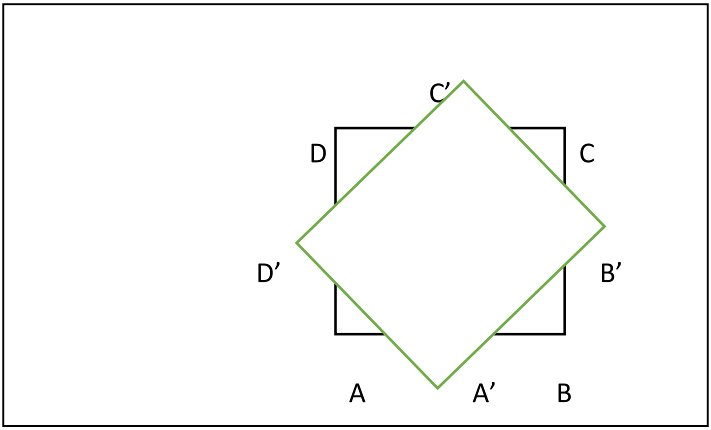


$r_{\left(A;\frac{\pi}{3}\right)} = S_{(AJ)} \circ S_{(AB)}$

$r_{\left(A;\frac{2\pi}{3}\right)} = S_{(AC)} \circ S_{(AB)}$

$r_{\left(G;\frac{2\pi}{3}\right)} = S_{(GI)} \circ S_{(GA)}$

Exercice 6



1.O est le centre du carré ABCD et la rotation a pour centre O donc
$r_{\left(O;\frac{\pi}{4}\right)}(O) = O$

Donc O est le centre de A'B'C'D'

2.O=bar$\{(A,1);(B,1);(C,1);(D,1)\}$

Donc $f(O) = \text{bar}\{(A',1);(B',1);(C',1);(D',1)\}$ or
O=bar$\{(A,1);(B,1);(C,1);(D,1)\}$

Donc $f(O) = O$

3.f est une isométrie qui a un point invariant donc f une rotation f^{-1} également

Exercice 7 (corrigé abrégé)

Faire la figure

1. On a : OP = OA' et QP = QA' (tangentes en P et en A' issue du point Q)

Donc, la droite (OQ) est la médiatrice de [PA'] ; or en considérant le triangle AA'P, rectangle en P, on a : (PA') parallèle à (Δ), donc les droites (OQ) et (PA) sont parallèles ; $M = t(A)$, donc les droites (AM) et (OQ) sont parallèles/ on a donc, (AM) et (PA) parallèles, d'où le résultat.

2. $t_{\overrightarrow{OQ}} = f \circ S_{(\Delta)}$ donc f est une symétrie orthogonale d'axe parallèle a (Δ)

Ainsi $f = S_{(\Delta')}$ où $(\Delta') = t_{\frac{1}{2}\overrightarrow{OQ}}(\Delta)$. (Δ') est la médiatrice de [OQ].

3.

Q	M
O	P

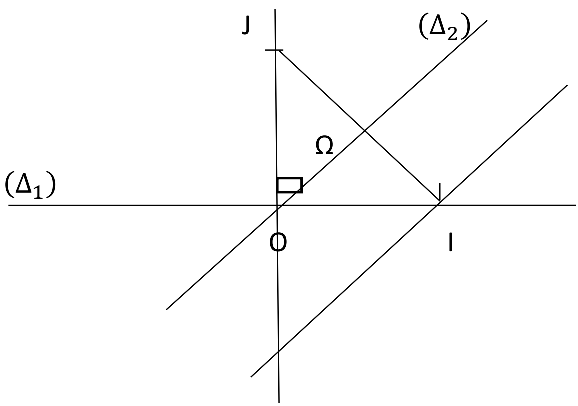
$QM = OP$, il existe exactement deux isométries qui appliquent Q sur M et O sur P.

L'un est un déplacement et l'autre est un retournement.

Le retournement est la symétrie orthogonale d'axe (Δ'), médiatrice de [OQ].

$\overrightarrow{QO} \neq \overrightarrow{MP}$, donc le déplacement qui transforme Q en M et O sur Q est la rotation de centre Ω qui applique O sur Q, où Ω est l'intersection des droites (QM) et (OP)/

Exercice 8



$r_2 \circ t \circ r_1$ est une
rotation d'angle π donc une symétrie centrale

$(\Delta_1) = r_{\left(I;-\frac{\pi}{4}\right)}\big((OI)\big)$; $(\Delta_2) = t_{\frac{1}{2}\overrightarrow{IJ}}(\Delta_1)$

On a $t_{\overrightarrow{IJ}} = S_{(\Delta_2)} \circ S_{(\Delta_1)}$ et $r_1 = S_{(\Delta_1)} \circ S_{(OI)}$ donc

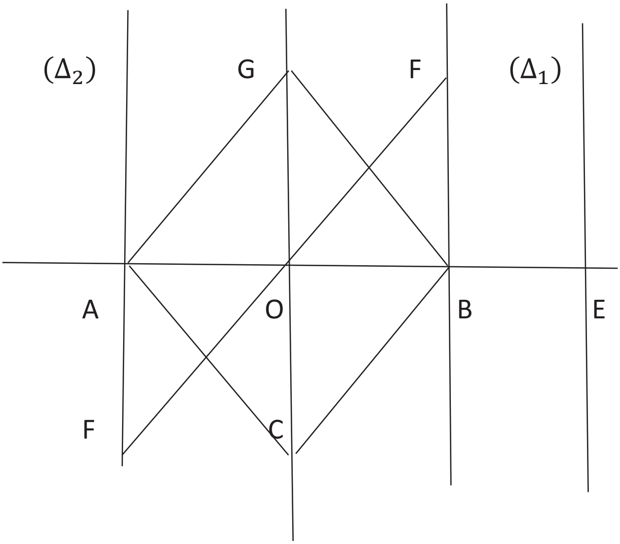
$t_{\overrightarrow{IJ}} \circ r_{\left(I\,;\frac{\pi}{2}\right)} = S_{(\Delta_2)} \circ S_{(\Delta_1)} \circ S_{(\Delta_1)} \circ S_{(OI)} = S_{(\Delta_2)} \circ S_{(OI)} = r_{\left(O;\frac{\pi}{2}\right)}$

D'autre part : $r_{\left(J;\frac{\pi}{2}\right)} = S_{(IJ)} \circ S_{(OJ)}$ et $r_{\left(O;\frac{\pi}{2}\right)} = S_{(OJ)} \circ S_{(\Delta_2)}$

Donc $r_2 \circ t \circ r_1 = S_{(IJ)} \circ S_{(OJ)} \circ S_{(OJ)} \circ S_{(\Delta_2)} = S_{(IJ)} \circ S_{(\Delta_2)} = r_{(\Omega;\pi)} = S_\Omega$

Où $\{\Omega\} = (IJ) \cap (\Delta_2)$

Exercice 9



2. $t_{\overrightarrow{EO}} \circ S_{(BF)} = S_{(\ \ )}$ car $(EO) \perp (BF)$; $(\Delta_1) = \ t_{-\frac{1}{2}\overrightarrow{EO}}\big((BF)\big)$
or $t_{\overrightarrow{EO}} = S_{(\Delta_1)} \circ S_{(BF)}$

Ainsi . $t_{\overrightarrow{EO}} \circ S_{(BF)} = S_{(\Delta_1)} \circ S_{(BF)} \circ S_{(BF)} = S_{(\Delta_1)}$

3. $t_{\overrightarrow{CE}} \circ S_{(OC)}$; $\overrightarrow{CE}$ n'est pas normal à (OC) donc c'est une symétrie glissée

$t_{\overrightarrow{CE}} \circ S_{(OC)} = t_{\overrightarrow{CO}} \circ t_{\overrightarrow{OE}} \circ S_{(OC)} = t_{\overrightarrow{CO}} \circ \left(S_{(\Delta_2)} \circ S_{(OC)} \circ S_{(OC)}\right) = t_{\overrightarrow{CO}} \circ S_{(\Delta_2)}$

Où $(\Delta_2) = \ t_{\frac{1}{2}\overrightarrow{OE}}\big((OC)\big)$

$\overrightarrow{CO}$ est un vecteur directeur de (Δ_2) d'où $t_{\overrightarrow{CE}} \circ S_{(OC)}$ est la symétrie glissée d'axe (Δ_2) et de vecteur $\overrightarrow{CO}$

EXERCICE 10

Construis les triangles ABP, CBQ, CDR, et ADS tous de sens direct.

On vérifie que : r'o r (R) = Q et r'o r (S) = P. Or, r'o r est une translation car la somme des angles est nulle. Il en résulte que : $\overrightarrow{RQ} = \overrightarrow{SP}$, le spoints R, S et P sont non alignés d'où le résultat.

Exercice 11

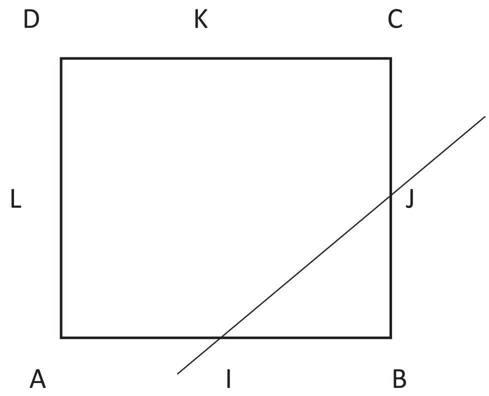
Enoncé incomplète (voir prochaine édition)

Exercice 12

Enoncé incomplète (voir prochaine édition)

Exercice 13

1.



2.On pose $f = S_{(IK)} \circ r_{\left(A;\frac{\pi}{2}\right)}$; c'est la composée d'une symétrie orthogonale et d'une rotation dont le centre n'appartient pas à l'axe donc f est une symétrie glissée

3.$f(A) = S_{(IK)}\left(r_{\left(A;\frac{\pi}{2}\right)}(A)\right) = S_{(IK)}(A) = B$

$f(B) = S_{(IK)}\left(r_{\left(A;\frac{\pi}{2}\right)}(B)\right) = S_{(IK)}(D) = C$

4.L'axe de la symétrie glissée f est la droite passant par le milieu de $[AB]$ et de $[BC]$: c'est la droite (IJ)

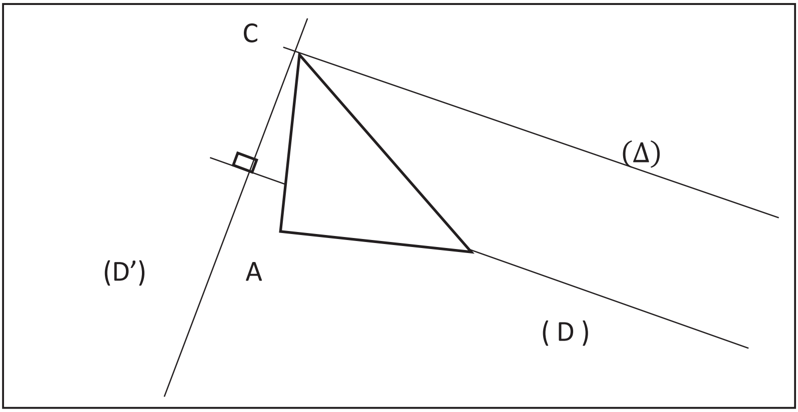
5.$f(I) = S_{(IK)}\left(r_{\left(A;\frac{\pi}{2}\right)}(I)\right) = S_{(IK)}(L) = J$ ainsi $f(I) = J$

6.f est une symétrie glissée d'axe (IJ) donc $f = t_{\vec{u}} \circ S_{(IJ)}$

Or $f(I) = J$ donc $t_{\vec{u}} \circ S_{(IJ)}(I) = t_{\vec{u}}(I) = J$ d'où $\vec{u} = \overrightarrow{IJ}$

Ainsi $f = t_{\overrightarrow{IJ}} \circ S_{(IJ)}$

Exercice 14



<u>Première solution</u>

Soit $r = r_{\left(A;\frac{\pi}{2}\right)}$

On construit $(D') = r\big((D)\big)$

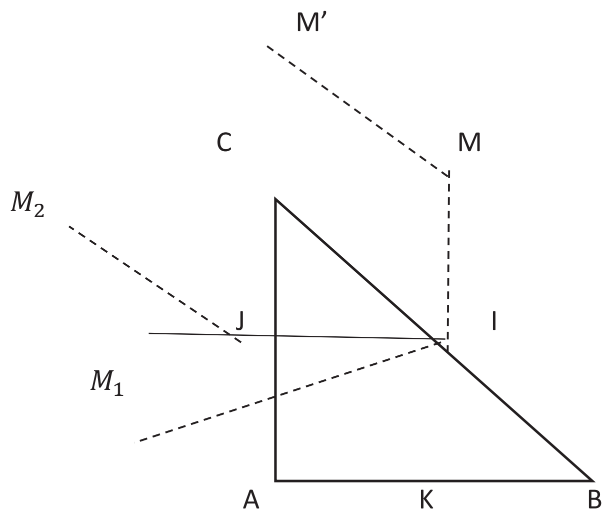
Soit {C} = $(D') \cap (\Delta)$

Ensuite on construit $B = r^{-1}(C)$. Ainsi $B \in (D)$ $C \in (\Delta)$ et le triangle ABC est rectangle isocèle en A

En considérant $r' = r_{\left(A;-\frac{\pi}{2}\right)}$ on a une autre solution

On a au total deux solutions au problème posé

Exercice 15



b) $f = r_{\left(I;\frac{\pi}{2}\right)} \circ t_{\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}}$ et $g = t_{\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}} \circ r_{\left(I;\frac{\pi}{2}\right)}$

$$f(K) = r_{\left(I;\frac{\pi}{2}\right)}\left(t_{\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}}(K)\right) = r_{\left(I;\frac{\pi}{2}\right)}(J) = K$$

$$g(J) = t_{\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}}\left(r_{\left(I;\frac{\pi}{2}\right)}(J)\right) = t_{\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}}(K) = J$$

c)f est la composée d’une rotation et d’une translation donc f est une rotation d’angle $\frac{\pi}{2}$ comme $f(K) = K$ alors $f = r_{\left(K;\frac{\pi}{2}\right)}$

g est la composée d’une rotation et d’une translation donc g est une rotation d’angle $\frac{\pi}{2}$ comme $g(J) = J$ alors $g = r_{\left(J;\frac{\pi}{2}\right)}$

2.a)$g \circ f^{-1}(A) = g\left(f^{-1}(A)\right) = r_{\left(J;\frac{\pi}{2}\right)}\left(r_{\left(K;-\frac{\pi}{2}\right)}(A)\right) = r_{\left(J;\frac{\pi}{2}\right)}(I) = C$

Ainsi $g \circ f^{-1}(A) = C$

2.b) $g \circ f^{-1}$ est la composée de deux rotations de centres distincts dont la somme des mesures des angles est égale à 0

Donc $g \circ f^{-1}$ est une translation

Comme $g \circ f^{-1}(A) = C$ alors le vecteur de la translation $g \circ f^{-1}$ est $\overrightarrow{AC}$

c)$f(M) = M_1$ et $g(M) = M_2$

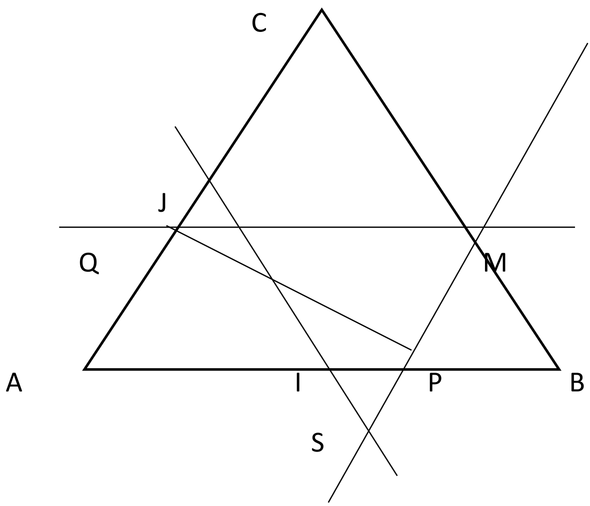
Donc $f^{-1}(M_1) = M$ et $g(M) = M_2$

Par suite $g \circ f^{-1}(M_1) = g\big(f^{-1}(M_1)\big) = g(M) = M_2$

Donc $M_2 = t_{\overrightarrow{AC}}(M_1)$ d'où $\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{AC}$

Ainsi le quadrilatère ACM_2M_1 est un parallélogramme.

Exercice 16



1.Lorsque M décrit le segment $[BC]$; O décrit le segment $[IJ]$

En effet :

2.O =mil$[PQ]$ et (QT) // (PI) donc QTPI est un parallélogramme donc O =mil$[IT]$ car $QT = IP$

3.ABC est un triangle équilatéral et (QM) est parallèle à $(AB)donc$ QC=CM

Or mes$\left(\widehat{\overrightarrow{CQ};\overrightarrow{CM}}\right) = \frac{\pi}{3}$ donc QCM est un triangle isocèle avec un angle de $\frac{\pi}{3}$; c'est donc un triangle équilatéral de sens direct

JAI est un triangle équilatéral et (QT) est parallèle à (AI) donc $JQ = JT$

Or mes$\left(\widehat{\overrightarrow{JQ};\overrightarrow{JT}}\right) = \frac{\pi}{3}$ donc le triangle QTJ est équilatéral de sens direct

4. $f = r \circ s$ où $r = r_{\left(Q;\frac{\pi}{3}\right)}$ et $s = S_O$

a)$f(P) = r \circ s(P) = r(Q) = Q$

$f(A) = r \circ s(A) = r(M) = C$

$f(I) = r \circ s(I) = r(T) = J$

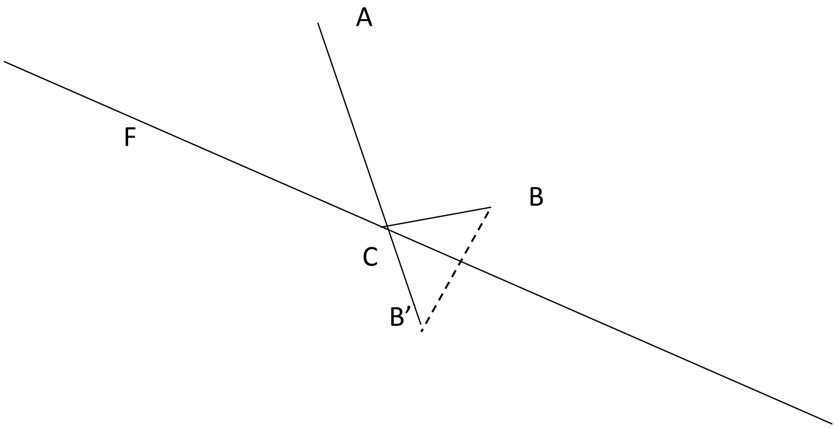
b)f est la composée de deux rotations de centres distincts donc f est une rotation d'angle α tel que $\alpha = \frac{\pi}{3} + \pi = \frac{4\pi}{3}$ d'où $\alpha = -\frac{2\pi}{3}$ donc, f est une rotation d'angle $-\frac{2\pi}{3}$

Situations complexes

17

On construit $B' = S_{(F)}(B)$ ainsi la plus petite distance de A à B' est AB' et (AB') coupe (F) en C ; F étant la médiatrice de $[BB']$ donc $CB' = CB$

Ainsi $AC + CB$ est minimum



Exercice 18

VP_1P_2 est un triangle équilatéral

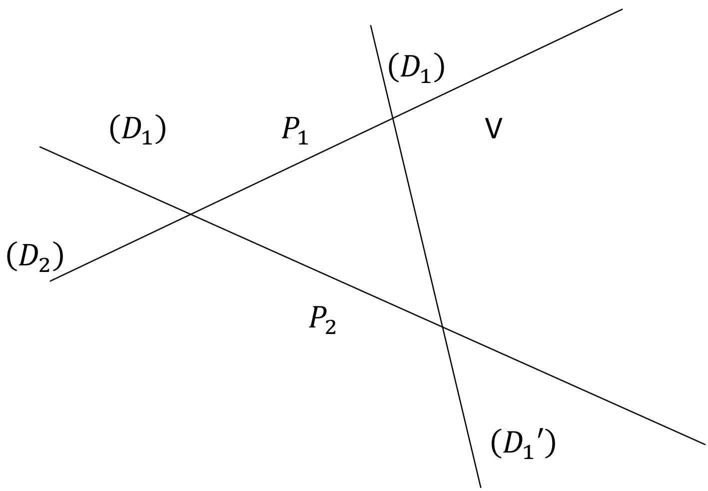
Considérons la rotation r de centre V et d’angle $\frac{\pi}{3}$

On construit $(D_1') = r\big((D_1)\big)$

$(D_1') \cap (D_2) = \{P_2\}$ et $\{P_1\} = r^{-1}(P_2)$

Ainsi $P_1 \in (D_1)$; $P_2 \in (D_2)$ et VP_1P_2 est un triangle équilatéral

D’où



15 CALCUL INTÉGRAL

EXERCICES DE FIXATION

Exercice 1

Coche les bonnes réponses dans chacun des cas suivants :

1) Soit F et G deux primitives d'une fonction f sur un intervalle I. Pour tous a et b de I, on a:

$\int_a^b f(x)dx =$

× F(b) - F(a) ☐ G(a) - F(b) × G(b) - G(a) × $[F(t)]_a^b$, ☐ $[F(t)]_b^a$

Exercice 2

La fonction étant continue f sur l'intervalle I y admet au moins une primitive. x_0 étant un élément de I, il existe une et une primitive de f sur I qui s'annule en x_0. Or F est une primitive de f qui s'annule en x_0. D'où le résultat.

Exercice 3

Calcule :

1) $\int_2^5 (2t-1)dt = [t^2 - t]_2^5 = 18$; 2) $\int_3^1 \frac{1}{t^2}dt = \frac{-2}{3}$; 3) $\int_0^1 t^2 dt = [\frac{t^3}{3}]_0^1 = \frac{1}{3}$.

4) $\int_2^1 \frac{1}{t}dt$ (remplacer 0 par 2) $\int_2^1 \frac{1}{t}dt =$ - ln2

Premier exemple de la page

Lire plutôt : $\int_1^0 t^2 dt = -\frac{1}{3}$

Exercice 4

$\int_a^b \big(f(t) - 2g(t)\big)dt =$

☐ $2\int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t))dt$; ☐ $(2\int_a^b f(t)dt - \int_a^b g(t))dt$

☐ $(-2\int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t))dt$; × $\int_a^b f(t)dt - 2\int_a^b g(t)dt$.

2) Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I et a et b deux nombres réels de I , α et β deux nombres réels. On a :

$\int_a^b\big(\alpha f(t)-\beta g(t)\big)dt =$

☐ $\beta\int_a^b f(t)dt+\alpha\int_a^b g(t))dt$; ☐ $(\alpha-\beta)(\int_a^b f(t)dt+\int_a^b g(t))dt$

☐ $(\alpha+\beta)(\int_a^b f(t)dt-\int_a^b g(t))dt$; × $\alpha\int_a^b f(t)dt-\beta\int_a^b g(t)dt.$

Exercice 5

a) $1+\dfrac{\pi^2}{8}$; b) $\frac{82}{3}$;

c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^2 x)dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^2 x+cos^2x)dx$ = $\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx$ = $\frac{\pi}{2}$.

b) Relation de Chasles

Exercice 6

L'intégrale vaut : 17

Exercice 7

$\int_{-2}^{3}|x-1|dx$ = $\int_{-2}^{1}(1-x)dx+\int_1^3(x-1)dx$ = $[x-\frac{x^2}{2}]_{-2}^{0}$ + $[\frac{x^2}{2}-x]_0^3$ = $\frac{11}{2}$.

3) Intégrale et inégalité

Exercice 8

En intégrant sur [1; 2], on a : 0 ≤ $\int_1^2\frac{dx}{x}$ ≤ $\int_1^2\frac{dx}{\sqrt{x}}$. Or : $\int_1^2\frac{dx}{\sqrt{x}}=[2\sqrt{x}]_1^2$= $2\sqrt{2}-2$, donc :

0 ≤ ln2 ≤ $2\sqrt{2}-2$.

Exercice 9

a) La fonction $x\longmapsto sinx$ est continue et positive sur [0;$\frac{\pi}{2}$], d'où : $\int_0^{\frac{\pi}{2}}sinxdx$ ≥ 0.

b) La fonction $x\longmapsto x^3$ est continue et négative sur $[-2;-1]$, d'où :

$\int_{-2}^{-1}x^3dx$ ≤ 0.

6) Inégalités de la moyenne

Propriété

Exercice 11

La fonction $x \longmapsto sinx$ étant continue sur $[0 ; \frac{\pi}{2}]$, et pour tout nombre *x*, $|\sin x| \leq 1$. $|\int_0^{\frac{\pi}{2}} sinxdx| \leq \frac{\pi}{2}$. Or : $\frac{\pi}{2} \leq 2$, donc $|\int_0^{\frac{\pi}{2}} sinxdx| \leq 2$.

Valeur moyenne d'une fonction

Exercice 12

1) $\frac{1}{3}$; 2) $\frac{1}{2}(e^1 - e^{-1})$; 3) ln2.

7) Techniques de l'intégration par parties

Exercice 13

u$(x) = x$, u'$(x) = 1$; v'$(x) = sinx$, v$(x) = -cosx$.

$\int_0^{\pi} x \sin x \, dx = [-xcosx]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} -cosx \, dx$; $\int_0^{\pi} x \sin x \, dx = [-xcosx]_0^{\pi} + [sinx]_0^{\pi} = \pi$.

Exercice 14

u$(x) = x$, u'$(x) = 1$; v'$(x) = \sqrt{2x+1}$, v$(x) = \frac{1}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}}$;

$\int_0^1 x\sqrt{2x+1} \, dx = [\frac{x}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}}]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}} \, dx = [\frac{x}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}}]_0^1 - \frac{1}{15}[(2x+1)^{\frac{5}{2}}]_0^1$;

$\int_0^1 x\sqrt{2x+1} \, dx = \frac{2\sqrt{3}}{5} + \frac{1}{15}$.

Exercice 15

u$(x) = lnx$, u'$(x) = \frac{1}{x}$; v'$(x) = x$, v$(x) = \frac{x^2}{2}$.

$\int_1^e xlnxdx = [\frac{x^2}{2} lnx]_1^e - \int_1^e \frac{x}{2} \, dx$; $\int_1^e xlnxdx = [\frac{x^2}{2} lnx]_1^e - [\frac{x^2}{4}]_1^e = \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4}$.

8) Technique du changement de variable affine

Exercice 16

Posons : $u = x + 1$.

$\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx = \int_1^4 (\sqrt{u} - \frac{1}{\sqrt{u}}) du = [\frac{2}{3} u\sqrt{u}]_1^4 - [2\sqrt{u}]_1^4$; $\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx = \frac{8}{3}$.

Exercice 17

Posons : $u = 2x - 3$.

$\int_0^2 (2x-3)^4 dx = \frac{1}{2}\int_{-3}^{1} u^4 du$; $\int_0^2 (2x-3)^4 dx = \frac{122}{5}$.

9) Autres techniques d'intégration

a) Utilisation d'une primitive

Exercices de fixation

Exercice 18

1) Posons : $u = 2x^2 + 6x + 1$; $\int_{-2}^{3} \frac{2x+3}{2x^2+6x+1} dx = \int_{-2}^{3} \frac{u'}{2u} dx = [\frac{1}{2}\ln(|2x^2 + 6x + 1|]_{-2}^{3}$;

$\int_{-2}^{3} \frac{2x+3}{2x^2+6x+1} dx = \frac{1}{2}\ln(\frac{37}{3})$.

2) $u = x^2 + x + 1$; $\int_1^5 \frac{2x+1}{(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x+1}}dx = \int_1^5 u'u^{\frac{-3}{2}}dx = 2\left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{31}}\right)$.

3) $u = x^2 - 1$; $\int_2^4 \frac{2xdx}{(x^2-1)^{2/3}} = \int_2^4 u'u^{-2/3}dx = 3(2^{2/3} - 2^{\frac{1}{3}})$. 4) idem

b) Utilisation d'une linéarisation

Exercice 19

1) $2isinx = e^{ix} - e^{-ix}$;

$-8isin^3x = (e^{ix} - e^{-ix})^3 = e^{3ix} - 3e^{2ix}e^{-ix} + 3e^{ix}e^{-2ix} - e^{-3ix}$;

$-8isin^3x = (e^{3ix} - e^{-3ix}) - 3(e^{ix} - e^{-ix}) = 2isin3x - 6isinx$;

$sin^3x = -\frac{1}{4}sin3x + \frac{3}{4}\ sinx$;

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^3xdx = \frac{1}{12}[cos3x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{3}{4}[\ cosx]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3}$.

2) $2cosx = e^{ix} + e^{-ix}$

$32cos^5x = (e^{ix} + e^{-ix})^5 =$

$e^{5ix} + 5e^{4ix}e^{-ix} + 10e^{3ix}e^{-2ix} + 10e^{2ix}e^{-3ix} + 5e^{ix}e^{-4ix} + e^{-5ix}$

$32cos^5x = (e^{5ix} + e^{-5ix}) + 5(e^{3ix} + e^{-3ix}) + 10(e^{ix} + e^{-ix})$;

$32cos^5x = 2cos5x + 10cos3x + 20cosx$;

$cos^5x = \frac{1}{16}cos5x + \frac{5}{16}cos3x + \frac{5}{8}cosx$;

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^5xdx = \frac{1}{80}[sin5x]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{5}{48}[sin3x]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{5}{8}[sinx]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^5xdx = \frac{8}{15}$.

3) Calcul de $\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^2xcos^3xdx$

Deux méthodes :

a) $sin^2xcos^3x = (1 - cos^2x)cos^3x = cos^3x - cos^5x$;

On linéarise $cos^3x\ et\ cos^5x$ et après calcul, on obtient :

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^2xcos^3xdx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^3xdx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^5xdx = \frac{2}{15}$.

b)) $sin^2xcos^3x = cosx(1 - sin^2x)sin^2x = cosxsin^2x - cosxsin^4x$;

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^2xcos^3xdx = [\frac{sin^3x}{3}]_0^{\frac{\pi}{2}} - [\frac{sin^5x}{5}]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{15}$.

Fonctions du type : $x \longmapsto \int_a^x f(t)\,dt$

Exercice 20

La fonction $t \mapsto \frac{e^t}{\sqrt{1+e^t}}$ est continue sur $\mathbb{R}$. Il en résulte que la fonction $x \mapsto \int_0^x \frac{e^t}{\sqrt{1+e^t}}dt$ définie sur $\mathbb{R}$ est l'unique primitive de fonction $t \mapsto \frac{e^t}{\sqrt{1+e^t}}$ définie sur $\mathbb{R}$ et qui s'annule en 0.

11) Intégrale de fonction paire, impaire ou périodique

Propriété.
Exercice 21

1) $\int_{\pi}^{3\pi} sinxdx = \int_{0+\pi}^{2\pi+\pi} sinxdx$; $\int_{\pi}^{3\pi} sinxdx = \int_{0}^{2\pi} sinxdx$, car la fonction sinus est périodique de période 2π.
2) $\int_{-\pi}^{\pi} cosxdx = \int_{-\pi+2\pi}^{\pi+2\pi} cosxdx$ = $\int_{\pi}^{3\pi} cosxdx$, car la fonction cosinus est périodique de période 2π.

Propriété
Exercice 22
1) $\int_{-\pi}^{\pi} sinxdx$ = 0, car la fonction sinus est impaire sur l'intervalle $[-\pi;\ \pi]$.

2) $\int_{-\pi}^{\pi} cosxdx = 2\int_{0}^{\pi} cosxdx$, car la fonction cosinus est paire sur l'intervalle $[-\pi;\ \pi]$

12) Calcul d'aires
Exercice 23

Notons précisément OBCD le rectangle (R) tel que OB = *a* et OD = *b*.
Considérons le repère orthonormé (O, I, J) tel que l'unité soit le centimètre et : $\mathrm{I} \in [\mathrm{OB})$ et $\mathrm{J} \in [\mathrm{OD})$.
L'aire du rectangle (R) en cm^2 est l'aire de la partie du plan délimitée par les droites d'équation x = 0 et x = *a* et la courbe représentative de la fonction constante : $x \longmapsto b$. Cette aire vaut : $\int_{0}^{a} bdx = ab$.

Exercice 24
L'unité d'aire est 3×2 cm^2. La fonction f étant continue et positive sur [1 ; 2], l'aire en unité d'aire est : $\int_{1}^{2}(x^2 + x - 2)\mathrm{dx}$, soit $\frac{11}{6}$ u.a. Ce qui donne : 11 cm^2.

Exercice 25
L'unité d'aire est 9 cm^2. La fonction f étant continue et négative sur [-2 ; 0], l'aire en unité d'aire est : $-\int_{-2}^{0}(x^2 + x - 2)\mathrm{dx}$, soit $\frac{4}{3}$ u.a. Ce qui donne :

Exercice 26

Cette aire, en unité d'aire, vaut : $\int_0^3 (g(x) - f(x))dx$.
Ce qui donne 9 u.a.

Applications du calcul intégral

(Cette partie n'est pas inscrite au programme de TC/D, mais peut être utile pour la préparation des concours après le BAC)

Exercice 27

a) $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$, où $f(x) = cos^2\pi x$.

Par suite : $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \int_0^1 cos^2\pi x\, dx$. D'où : $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \frac{1}{2}$.

b) $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\frac{k}{n}}{\sqrt{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}}$

$\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$, où $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

D'où : $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \sqrt{2} - 1$.

Exercice 28

a) $n = 10$, $\int_1^2 \frac{1}{x}dx$.
La fonction f qui à $x \longmapsto \frac{1}{x}$ est continue positive et décroissante sur [1 ; 2].

$\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} f\left(1 + \frac{1}{10}i\right) \leq \int_1^2 \frac{1}{x}dx \leq \frac{1}{10}\sum_{i=0}^{9} f\left(1 + \frac{1}{10}i\right)$.

$0{,}668771403 \leq \int_1^2 \frac{1}{x}dx \leq 0{,}718771403$.

D'où : $0{,}668 \leq \int_1^2 \frac{1}{x}dx \leq 0{,}72$.

0,694 est une valeur approchée de de $\int_1^2 \frac{1}{x}dx$ à 26×10^{-3} près.

b) n = 20, $\int_0^1 e^{-x^2}dx$.

La fonction f qui à $x \longmapsto e^{-x^2}$ est continue positive et décroissante sur [0 ; 1].

$\frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20} f(\frac{1}{20}i) \leq \int_0^1 e^{-x^2}dx \leq \frac{1}{20}\sum_{i=0}^{19} f(\frac{1}{10}i)$.

On a : 0,73086782 ≤ $\int_0^1 e^{-x^2}dx \leq$ 0,76247385.

D'où : 0,73 ≤ $\int_0^1 e^{-x^2}dx \leq$ 0,77

0,75 est une valeur approchée $\int_0^1 e^{-x^2}dx$ à 2×10^{-2} près.

c) n = 15, méthode identique

EXERCICES DE RENFORCEMENT / D'APPROFONDISSEMENT

Exercice 1

1) $\int_1^3 \frac{|x-2|}{(x^2-4x)^2}dx = \int_1^2 \frac{2-x}{(x^2-4x)^2}dx + \int_2^3 \frac{x-2}{(x^2-4x)^2}dx.$

En posant : $u(x) = x^2 - 4x$, l'intégrale se met sous la forme :

$\int_1^3 \frac{|x-2|}{(x^2-4x)^2}dx = -\frac{1}{2}\int_1^2 u'(x)u(x)^{-2}\,dx + \frac{1}{2}\int_1^2 u'(x)u(x)^{-2}\,dx.$

Après calcul, $\int_1^3 \frac{|x-2|}{(x^2-4x)^2}dx = \frac{1}{12}$.

2) En posant : $u(x) = 1 - x^2$, on a : $\int_0^1 x(1-x^2)^2dx = -\frac{1}{2}$ $\int_0^1 u'(x)u(x)^2\,dx.$

Après calcul, $\int_0^1 x(1-x^2)^2dx = \frac{1}{6}$.

3) En posant : $u(x) = 1 + x^3$, on a : $\int_0^2 \frac{x^2dx}{\sqrt{1+x^3}} = \frac{4}{3}$.

4) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} tan^2\,tdt = \int_0^{\frac{\pi}{4}}[(1 + tan^2\,t) - 1]dt.$

D'où : $\int_0^{\frac{\pi}{4}} tan^2\,tdt = [tant]_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{\pi}{4}$. On conclut que : $\int_0^{\frac{\pi}{4}} tan^2\,tdt = 1 - \frac{\pi}{4}$.

Exercice 2

1) Calcul de $\int_0^1 x\sqrt{1-x}dx$.

Posons : $u(x) = x$ et $v'(x) = \sqrt{1-x}$. On a : $u'(x) = 1$ et on prend :

$v(x) = (1-x)^{\frac{3}{2}}$.

Après calcul, $\int_0^1 x\sqrt{1-x}dx = \frac{4}{15}$.

2) Faire deux intégrations par parties.
3) Faire une intégration par parties, en posant : $u(x) = lnx$ et
4) $v'(x) = \frac{1}{3}x^3$.
5) Posons : $u(x) = \ln(1+x)$ et $v'(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$. On a : $u'(x) = \frac{1}{1+x}$ et on prend : $v(x) = -\frac{1}{1+x}$.

Après calcul, $\int_1^e \frac{\ln(1+t)}{(1+t)^2}dt = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}ln2 - \frac{1}{1+e} - \frac{1}{1+e}\ln(1+e)$.

Exercice 3

1) Calcul de $\int_0^1 x\sqrt{1-x}dx$.

Posons : $u = 1-x$. On a : $\int_0^1 x\sqrt{1-x}dx = \int_0^1 (1-u)\sqrt{u}du$. D'où :
$\int_0^1 x\sqrt{1-x}dx = \frac{4}{15}$.

2) Calcul de $\int_0^1 x(1-x)^n dx$.

Posons : $u = 1-x$. On a : $\int_0^1 x(1-x)^n dx = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$.

Exercice 4

1) Calcul de $\int_0^{2\pi} cos^4 x dx$.

On utilise 2cosx = e^{ix}+ e^{-ix} et la formule du binôme de Newton.
16cos^4x = e^{4ix} + 4$e^{3ix}e^{-ix}$ + 6$e^{2ix}e^{-2ix}$ + 4$e^{ix}e^{-3ix}$+ e^{-4ix}
16cos^4x = ($e^{4ix} + e^{-4ix}$) + 4($e^{2ix} + e^{-2ix}$) + 6. D'où :
$cos^4x = \frac{1}{8}$cos4x + $\frac{1}{2}$cos2x + $\frac{3}{8}$. Par suite :
$\int_0^{2\pi} cos^4 x dx = [\frac{1}{32}sin4x + \frac{1}{4}sin2x + \frac{3}{8}x]_0^{2\pi}$
$\int_0^{2\pi} cos^4 x dx = \frac{3\pi}{4}$.

2) Calcul de $\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^3xcos^2xdx$.

On a : $sin^3xcos^2x = sin^3x(1 - sin^2x)$; d'où : $sin^3xcos^2x = sin^3x - sin^5x$.

On utilise $2i$sinx = $e^{ix} - e^{-ix}$ et la formule du binôme de Newton.

D'où : $sin^3x = -\frac{1}{4}$sin3x + $\frac{3}{4}$sinx et $sin^5x = \frac{1}{16}$sin5x $-$ $\frac{5}{16}$sin3x + $\frac{5}{8}sinx$. Par suite :

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^3xcos^2xdx = [\frac{1}{16}sin3x + \frac{1}{8}sinx - \frac{1}{16}\sin 5x]_0^{\frac{\pi}{2}}$.

On a : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^3xcos^2xdx = 0$.

3) Calcul de $\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^2xcos^2xdx$.

On a : $sin^2xcos^2x = (1 - cos^2x)\,cos^2x$; d'où : $sin^2xcos^2x = cos^2x - cos^4x$.

$cos^2x = \frac{1+cos2x}{2}$ et $cos^4x = \frac{1}{8}$cos4x + $\frac{1}{2}$cos2x + $\frac{3}{8}$. D'où :

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^2xcos^2xdx = \frac{\pi}{16}$.

4) Calcul de $\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^5 2xdx$

$sin^5 2x = \frac{1}{16}$sin10x $-$ $\frac{5}{16}$sin6x + $\frac{5}{8}sin2x$. Par suite :

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^5 2xdx = 0$

Exercice 5

1) I + J= $(a + b)\frac{\pi}{2}$.
2) I – J = $\frac{a-b}{2\omega} sin\omega\pi$.
3) I = $(a + b)\frac{\pi}{4} + \frac{a-b}{4\omega} sin\omega\pi$ et J = $(a + b)\frac{\pi}{4} - \frac{a-b}{4\omega} sin\omega\pi$.

Exercice 6

1) $I_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+5} I_n$
2) $I_0 = \frac{2}{3}$
3) $I_n = \frac{2n}{2n+3} \times \frac{2n-2}{2n+1} \times ... \times \frac{4}{7} \times \frac{2}{5} \times \frac{2}{3}$, pour $n \geq 1$ et $I_0 = \frac{2}{3}$.

   $I_n = \frac{2n\times(2n-2)\times....\times6\times4\times2}{(2n+3)\times(2n+1)\times...\times7\times5} \times \frac{2}{3}$, pour $n \geq 1$ et $I_0 = \frac{2}{3}$.

Exercice 7

1) $I_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} cosx cos^{n+1}x dx$

Posons : $u(x) = cos^{n+1}x$ et $v'(x) = cosx$. On a : $u'(x) = -(n+1)sinx cos^n x$ et on prend : $v(x) = sinx$. D'où : $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$.

2) $I_{2p} = \frac{(2p-1)\times(2p-3)\times\ldots\times5\times3\times1}{2p\times(2p-2)\times\ldots\times4\times2}\frac{\pi}{2}$; $I_{2p+1} = \frac{2p\times(2p-2)\times\ldots\times4\times2}{(2p+1)\times(2p-1)\times\ldots\times5\times3}$, pour $p \geq 1$; $I_0 = \frac{\pi}{2}$ et $I_1 = 1$.

3) a) Pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[0 ; \frac{\pi}{2}]$, cos x est positif ou nul. Il s'ensuit que l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^n x dx$ est positive ou nulle pour tout entier naturel n. Cette intégrale ne peut s'annuler pour aucune valeur de n, sinon la fonction cosinus serait nulle sur $[0 ; \frac{\pi}{2}]$. On déduit que pour tout entier naturel$n$, I_n est un nombre réel strictement positif et donc non nul.

Il faut ensuite justifier que la suite (I_n) est décroissante.

On en déduit que pour tout entier naturel n : $\frac{I_{n+2}}{I_n} \leq \frac{I_{n+1}}{I_n} \leq 1$. En prenant $n = 2p$, on a le résultat demandé.

a) D'après 1) $\frac{I_{n+2}}{I_n} = \frac{n+1}{n+2}$ qui tend vers 1 lorsque n tend vers l'infini. Par conséquent, la suite $(\frac{I_{2p+2}}{I_{2p}})$ converge vers 1. On conclut que la suite $(\frac{I_{2p+1}}{I_{2p}})$ converge 1, d'après le théorème des gendarmes. Or :

$$\frac{I_{2p+1}}{I_{2p}} = \frac{(2\times4\times6\times\ldots\times2p)^2}{[1\times3\times5\times\ldots\times(2p-1)]^2(2p+1)}\frac{2}{\pi},$$

donc : $$\lim_{p \to +\infty} \frac{(2\times4\times6\times\ldots\times2p)^2}{[1\times3\times5\times\ldots\times(2p-1)]^2(2p+1)} = \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 8

1) $I_0 = e - 1$; $I_1 = 1$.

2) Posons : $u(x) = x^{n+1}$et $v'(x) = e^x$. On a : $u'(x) = (n+1)x^n$ et on prend :
$v(x) = e^x$. On obtient le résultat en appliquant la formule d'intégration par parties.

3) On a : $J = I_3 + 2 I_2 - 2I_1 + I_0$.

En utilisant 2), on obtient : $I_2 = e - 2$; $I_3 = 6 - 2e$. Par suite : $J = 7 - 3e$.

Exercice 9

1) f est définie et continue et strictement croissante sur $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$. f est donc une bijection de $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$ sur $f(]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[)$ qui est $\mathbb{R}$.
2) a) La fonction $t \longmapsto \frac{1}{1+t^2}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$. Il s'ensuit qu'elle est intégrable sur $[0 ; x]$ pour tout x positif et sur $[x ; 0]$ pour tout x négatif. L'ensemble de définition de g est donc $\mathbb{R}$.

Un nombre réel x appartient à D_h si et seulement si x appartient à D_f et $f(x)$ appartient à D_g. $D_f =]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$ et $D_g = \mathbb{R}$. Par suite : $D_h =]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$.

b) h(0) = 0.

c) La fonction f est dérivable sur $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$ et $f(]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[) = \mathbb{R}$; la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ car la fonction $t \longmapsto \frac{1}{1+t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$. Par suite, la fonction h est dérivable sur $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$ et : $\forall\ x \in]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$, $h'(x) = 1$.

d) De : $\forall\ x \epsilon]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$, $h'(x)= 1$, on déduit que : $h(x) = x + C$. Or h(0) = 0, d'après 2b), donc $h(x) = x$ pour tout x appartenant $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$. Par suite, $gof(x) = x$. L'application f étant bijective d'après 1), en déduit que $f^{-1} = g$.

e) $I = f^{-1}(1)$. Or : $f^{-1}(1) = \frac{\pi}{4}$, donc : $I = \frac{\pi}{4}$.

NB. Le fait que $gof(x) = x$ ne suffit pas pour conclure que f est bijective et que $f^{-1} = g$. Sans la consigne 1, où il est démontré que f est bijective, on devrait justifier que $fog(y) = y$ pour tout nombre réel y.

Exercice 10

1) a) La fonction $t \longmapsto \frac{e^t}{t}$ est continue sur $]0 ; +\infty[$ comme quotient de fonctions continues sur $]0 ; +\infty[$. Par suite, *la* fonction F est dérivable sur $]0 ; +\infty[$. La fonction dérivée de F est la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ qui à $t \longmapsto \frac{e^t}{t}$. Cette dernière fonction étant positive sur $]0 ; +\infty[$, F est strictement croissante.

b) F(1) = 0, par suite F est négative sur $]0 ; 1[$ et positive sur $]1 ; +\infty[$.

2) a) Pour tout x positif, $\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt$. Par suite : $f(x) = \int_1^x \frac{e^t-1}{t}\,dt$. Or la fonction $t \longmapsto \frac{e^t-1}{t}$ est (continue) positive sur $]0 ; +\infty[$, donc f est négative sur $]0 ; 1[$ et positive sur $]1 ; +\infty[$.

b) D'après 2)a), on a :

(i) $\forall x \in]0 ; 1[$, $F(x) \leq \ln x$;
(ii) $\forall x \in]1 ; +\infty[$, $\ln x \leq F(x)$.
De (i), on a : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} F(x) = -\infty$, car : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \ln(x) = -\infty$;
De (ii), on a : $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = +\infty$, car : $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$.
3) a) (T) : y = $e(x-1)$.
b) (C) est au-dessus de (T) sur]0 ; 1[et (C) est au-dessus de (T) sur]1 ; +∞[.
Indication : Etudiez la fonction le signe de la fonction H telle que : $H(x) = F(x) - e(x-1)$.

4) a) Pour démontrer que : $\forall\, t \in [1 ; +\infty[$, $e^t \geq \frac{e}{2}t^2$, il faut étudier le signe de la fonction φ définie sur [1 ; +∞[par : $\varphi(t) = e^t - \frac{e}{2}t^2$.
b) $\forall\, t \in [1 ; +\infty[$, $\frac{F(x)}{x} \geq \frac{e(x^2-1)}{4x}$. On en déduit que : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{F(x)}{x} = +\infty$.
De 2) (ii) et de 4)b) , on déduit que (C) admet une branche parabolique de direction celle de (OJ).
5) Construction de (T) et (C).

Exercice 11

a) Le triangle ABM étant rectangle en M, AM = 2Rcosθ. D'où : $AM^2 = 4R^2cos^2\theta$. Par suite, AM^2 est donc une fonction de θ définie sur [0 ; $\frac{\pi}{2}$] dont la valeur moyenne est : $\frac{1}{\frac{\pi}{2}-0}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 4R^2cos^2\theta d\theta$. Après calcul, cette valeur moyenne est : $2R^2$.
b) Le triangle ABM étant rectangle en M, et H le projeté de M sur la droite (AB), on a : $AM^2 = \overline{AH} \times \overline{AB}$. Le point H appartenant au segment [AB], on a : $AM^2 = 2Rx$, où x appartient à [0 ; 2R]. Par suite, AM^2 est donc une fonction de x définie sur [0 ; 2R] dont la valeur moyenne est $\frac{1}{2R}\int_0^{2R} 2Rxdx$. Après calcul, cette valeur moyenne est : $2R^2$.

Exercice 12

1-a) J + K = $\frac{\pi}{2}$; J—K = 0.

b) J = $\frac{\pi}{4}$; K = $\frac{\pi}{4}$.

2- I = $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2cos^2xsinxdx$ + 4K

I = $\frac{-2}{3}[cos^3x]_0^{\frac{\pi}{2}}$ + 4K ; I = $\frac{2}{3} + \pi$.

Exercice 13

1- $\forall \in]-1; +\infty[, f'(x)$ = $\frac{1}{2\sqrt{x+1}}$; $g'(x)$ = $\frac{3}{2}\sqrt{x+1}$.

2- $I = 2\sqrt{2} - 2$.

3- J = $\frac{2}{3}(2 - \sqrt{2})$.

Exercice 14

1-a) $a = -1$; $b = c = \frac{1}{2}$.

b) I = $\frac{5}{2}ln2 - \frac{3}{2}ln3$.

2- Il faut faire une décomposition en éléments simples de $\frac{1}{x(x^2-1)^2}$, c'est-à-dire déterminer des nombres réels A, B, C, D et E tels que : $\frac{1}{x(x^2-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2-1} + \frac{Dx+E}{(x^2-1)^2}$.

Après une décomposition, on a : $\frac{1}{x(x^2-1)^2} = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2-1} + \frac{x}{(x^2-1)^2}$

J = $\frac{3}{2}ln3 - \frac{5}{2}ln2 + \frac{5}{48}$.

3-K= $\frac{1}{6}ln2 - \frac{1}{16}ln3 + \frac{1}{2}$J

K = $\frac{11}{16}ln3 - \frac{13}{12}ln2 + \frac{5}{96}$.

Exercice 15

1. $\frac{(2n)!}{n!n^n} = \frac{2n(2n-1)(2n-2)...(n+2)(n+1)\times n!}{n\times n\times n\times n\times ...\times n\times n!}$;

$\frac{(2n)!}{n!n^n} = \frac{2n(2n-1)(2n-2)...(n+2)(n+1)}{n\times n\times n\times n\times ...\times n}$ (Il y a n facteurs au numérateur et autant au dénominateur)

$\frac{(2n)!}{n!n^n} = \frac{n+1}{n}\frac{n+2}{n}\frac{n+3}{n}...\frac{n+n}{n}$

$\frac{(2n)!}{n!n^n}$ = (1+ $\frac{1}{n}$)× (1+ $\frac{2}{n}$)×… ×(1+ $\frac{n}{n}$).

2. ln(u_n) = $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln(1+\frac{k}{n})$ qui tend vers $\int_0^1 \ln(1+x)\,dx$ quand n tend vers l'infini.

   Par conséquent, en utilisant la continuité de la fonction, la suite (u_n) a pour limite $\frac{4}{e}$.

Exercice 16

1. La dérivée *f'* de *f* est continue sur le segment [a ; b] donc est bornée sur ce segment. Il existe donc un nombre réel M strictement positif tel que pour tout *x* appartenant à l'intervalle [*a* ; *b*], |*f'*(x)| ≤ M.

2. D'après l'inégalité des accroissements finis, $|f(u) - f(a)|$ ≤ M$|u - a|$, pour tout u appartenant à [*a* ; *b*]. Ce qui donne : $|f(u) - f(a)|$≤ M$(u - a)$. En intégrant, on obtient : $\int_a^b |f(x) - f(a)|dx$ ≤ M$\frac{(b-a)^2}{2}$.

3. a) En utilisant l'égalité de Chasles, on a : $\int_a^b f(x)dx$ = $\sum_{i=0}^{n-1}\int_{a+\frac{i(b-a)}{n}}^{a+\frac{(i+1)(b-a)}{n}} f(x)dx$. On obtient le résultat en faisant intervenir E_n.

   b) On a : |E_n| ≤ $\sum_{i=0}^{n-1}\int_{a+\frac{b-a}{n}i}^{a+\frac{b-a}{n}(i+1)} |f(x) - f\left(a+\frac{b-a}{n}i\right)|dx.$

   Or d'après 2), on a : $\int_{a+\frac{b-a}{n}i}^{a+\frac{b-a}{n}(i+1)} |f(x) - f\left(a+\frac{b-a}{n}i\right)|\,dx$ ≤ M$\frac{(b-a)^2}{2n^2}$,

donc en sommant les n termes, on a : $|E_n|$ ≤ M$\frac{(b-a)^2}{2n}$.

4. M = 2. Il faut prendre $n \geq 10^4$.

Un calcul à la main serait très fastidieux pour déterminer : $\frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(a + \frac{b-a}{n}i)$ pour $a = 0; b = 1 \text{ } et \text{ } n = 10^4$ pour la fonction donnée. L'utilisation de calculatrices programmables ou d'ordinateurs s'avère très nécessaire à ce moment.

Exercice 17

1. $I_1 = \frac{1}{2}[\ln(1+x^2]_0^1$

2. La fonction qui à x associe $\frac{x^n}{1+x^2}$ définie sur [0 ;1] est continue et positive, il s'en suit que pour tout entier naturel n non nul, $I_n \geq 0$.

3. Il suffit de justifier que pour tout entier naturel n non nul, on a : $\frac{1}{2}\,x^n \leq \frac{x^n}{1+x^2} \leq x^n$.

4. a Il suffit de justifier que pour tout entier naturel n non nul, on a : $\frac{x^{n+1}}{1+x^2} \leq \frac{x^n}{1+x^2}$.

b. (I_n) est décroissante et minorée converge. D'après 3. elle converge vers 0.

Exercice 18

1. $I_n = [(\ln t)^2]_{e^{n-1}}^{e^n}$
$= 2\,n - 1.$

2. (I_n) est non bornée. Car elle n'est pas majorée.

3. $(\frac{I_n}{n})$ converge vers 2.

4. Il suffit de remarquer en utilisant l'égalité de Chasles que :
$\sum_{k=1}^{n} I_k = \int_1^{e^n} \frac{2\ln t}{t}\,dt.$

SITUATIONS COMPLEXES

Exercice 19

La surface OABC en unités est donnée par : $\int_0^{550}\left(\frac{t^2}{100} - \frac{t}{4} + 125\right)dt$.

Soit environ 65599 m^2

Exercice 20

L'aire du champ de maïs est : e × 1.

L'aire du champ d'igname est : $\int_e^{e^2}(2-\ln x)dx$

La nouvelle A superficie du champ du cultivateur est : e × 1 + $\int_e^{e^2}(2-\ln x)dx$

A = e^2- e
A vaut environ : 4,67 UA

16 PROBABILITÉ CONDITIONNELLE ET VARIABLE ALÉATOIRE

EXERCICES DE FIXATION

I- Probabilité conditionnelle

Définition

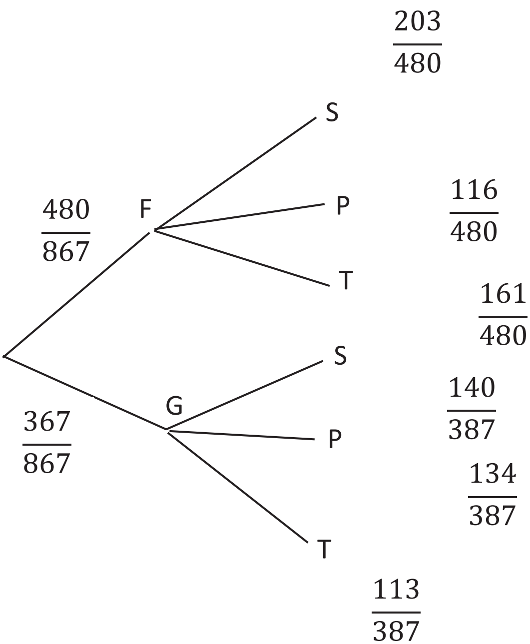
Exercice 1

On veut calculer P_R(G).

L'événement $R \cap G$ est "On tire une boule rouge marquée Gagné".
On a : P(R) = 0,4 et P(R∩G) = 0,3. Par suite : P_R(G) = 0,75.

2) Arbre pondéré :

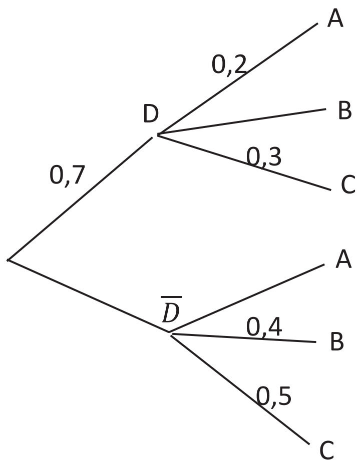
Exercice 2



Exercice 3 : Arbre pondéré P_1.

1- Complète l'arbre ci-dessous pour qu'il soit un arbre pondéré.

2- Calcule P(D∩B).



1- En complétant l'arbre, on a : P_D(B)= 0,5 et : $P_{\overline{D}}$(A)= 0,1.

2- P(D∩B) = P(D)× P_D(B) = 0,7×0,5 = 0,35.

Exercice 4 : Expérience aléatoire Σ_2.

Dans un pays, il y a 2 % de la population contaminée par un virus. On dispose d'un test de dépistage de ce virus qui a les propriétés suivantes :

- La probabilité qu'une personne contaminée ait un test positif est de 0,99(sensibilité du test);
- La probabilité qu'une personne non contaminée ait un test négatif est de 0,99 (spécificité du test).

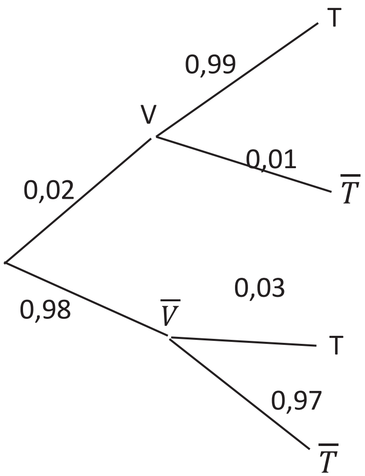
On fait passer un test à une personne choisie au hasard dans cette population.

On note : V l'événement « la personne est contaminée par le virus »

On note : T l'événement « le test est positif »

1. Construis l'arbre pondéré correspondant à cette situation.
2. Traduis par une probabilité la phrase : « Si le test est positif, il y a 40 % de chance que la personne soit contaminée.»
3. Détermine cette probabilité.

1- Arbre pondéré



2-a) Cela se traduit par : « Si la personne n'est pas contaminée, alors il y a 97 % de chance qu'il soit testé négatif ».

b) $P_{\overline{T}}$(V) = 0,4.

3-

P(T) = P(V∩T) + P($\overline{\mathrm{V}}$ ∩T)

P(T) = 0,02×0,99+0,98×0,03

P(T) = 0,0492.

3) Formule des probabilités totales

Exercice 5

En reprenant l'expérience aléatoire Σ_1 (page 33 du cahier), Calculons P(G).

P(G) = P(R∩G) + P($\overline{\mathrm{R}}$ ∩G)

P(G) = 0,4×0,75+0,6×0,3

P(G) = 0,48.

Exercice 6

Résolue dans la dernière question de l'exercice 4

4) Evènements indépendants

Exercice 7

1) VRAI 2) FAUX.

Propriété

Exercice 8

On a : C = $\bar{A} \cap \bar{B}$, d'où : P(C) = P($\bar{A}$)×P($\bar{B}$), car A et B étant indépendants, $\bar{A}$ et $\bar{B}$ le sont aussi.

Par suite : P(C) = 0,72.

II) Variable aléatoire

1) Définition

Exercice 9

	Fonction	Vrai/faux
1	X est la fonction de Ω vers $\mathbb{R}$, telle que : X(P) = 2 et X(F) = - 6.	VRAI
2	X est la fonction de Ω vers $\mathbb{R}$, telle que : X(P) = 2 et F n'a pas d'image par X.	FAUX
3	X est la fonction de Ω vers $\mathbb{R}$, telle que : X(P) =$\frac{1}{2}$ et X(F) = $\frac{1}{2}$.	VRAI

2) Notation

Exercice 10

a) (X = 1) = {2 ; 4 ; 6} ; b) (X = 0) = {1 ;3} ; c)) (X $<$ 1) = {1 ;3 ; 5} ; d) (X $>$ 2) = Ø.

3) Loi de probabilité d'une variable aléatoire

3-1. Définition

Remarque

On a : $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$.

Exercice 11

X prend trois valeurs qui sont : -2 ; 0 ; 1. La loi de probabilité de X est donnée par le tableau suivant :

k	-2	*0*	*1*
P(X = k)	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$

3-2. Espérance mathématique d'une variable aléatoire

Exercice 12

$E(X) = 4{,}72$

3-3 Variance et écart-type d'une variable aléatoire

Définition

Exercice 13

$V(X) = 31{,}2416$; $\sigma(X) = \sqrt{31{,}2416} \cong 5{,}59$.

3-4 Fonction de répartition d'une variable aléatoire

a) **Définition**

Exercice 14

Si $x < 0$, alors : $F(x) = 0$;

Si $0 \leq x < 1$, alors : $F(x) = \frac{1}{8}$;

Si $1 \leq x < 2$, alors : $F(x) = \frac{1}{2}$;

Si $2 \leq x < 3$, alors : $F(x) = \frac{7}{8}$;

Si $x \geq 3$, alors : $F(x) = 1$.

III) Loi binomiale B(*n*, *p*)

1) Epreuve de Bernoulli ´

Définition

Exercice 15

X suit une binomiale $B(10 ; \frac{9}{11})$. La probabilité cherchée est : $P(X= 6) = C_{10}^{6}(\frac{9}{11})^{6}\times(\frac{2}{11})^{4}$.

Exercice 16

Le fait que la probabilité d'atteinte de la cible est constante au cours des 3 tirs montre que les trois épreuves sont indépendantes. X suit une loi binomiale B (3 ; 0,7).

Exercice 17

1- $E(X) = 2{,}1$; 2- $V(X) = 0{,}63$.

Exercice 18

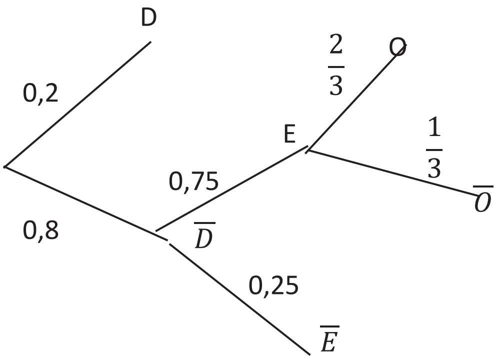
A chaque question aléatoirement choisie, l'élève donne soit une réponse correcte avec la probabilité de $\frac{1}{4}$, soit une réponse incorrecte avec la probabilité de $\frac{3}{4}$. L'élève répond au hasard à chacune des 10 questions du QCM. Il y a répétition de 10 épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes. La variable aléatoire X qui prend pour valeur le nombre de réponses correctes suit donc une binomiale B(10 ; $\frac{1}{4}$). On a :

$E(X) = 10\times\frac{1}{4}$; $V(X) = 10\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}$.

EXERCICES DE RENFORCEMENT / D'APPROFONDISSEMENT

Exercice 1

1- Arbre pondéré



2-a) Cette probabilité est : $P(\overline{D} \cap E \cap \overline{O}) = 0{,}8\times0{,}75\times\frac{1}{3} = 0{,}2$. Car la probabilité d'un chemin est le produit des probabilités sur ce chemin.

b) Cette probabilité est : $P(\overline{D} \cap E \cap O) = 0{,}8\times0{,}75\times\frac{4}{3} = 0{,}4$. Car la probabilité d'un chemin est le produit des probabilités sur ce chemin.

3- Pour être admis à ce concours, il faut être admis sur dossier ou bien être passé par l'écrit, subir l'oral et être admis à l'issue de l'oral. La probabilité cherchée est : $P(D) + P(\overline{D} \cap E \cap O)$ qui vaut 0,6.

Exercice 2

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

P(A) = $\frac{1}{2}$.

P(B) = $\frac{1}{6}$.

3- P(C) = P(A/B) = $\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$;   P(C) = $\frac{1}{2}$.

EXERCICE 3

Soit :

U_1 l'évènement : « Tirer une boule de l'urne U_1 » ;

U_2 l'évènement : « Tirer une boule de l'urne U_2 » ;

R l'évènement : « Tirer une boule rouge » ;

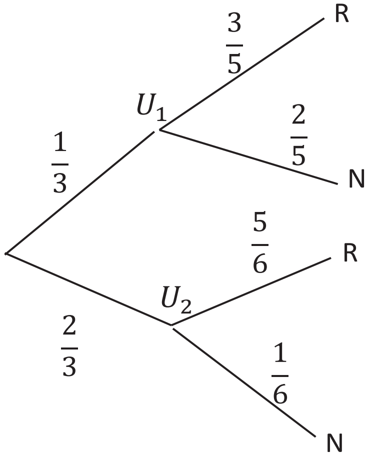
N l'évènement : « Tirer une boule noire ».

La répartition des boules dans l'urne fournit les probabilités suivantes :

$P_{U1}(R) = \frac{3}{5}$; $P_{U1}(N) = \frac{2}{5}$; $P_{U2}(R) = \frac{5}{6}$ et $P_{U2}(N) = \frac{1}{6}$.

Le dé étant parfaitement équilibré, on a : P(U_1) = $\frac{1}{3}$; P(U_2) = $\frac{2}{3}$.

Tous ces résultats sont résumés dans l'arbre pondéré ci-dessous :



P(N) = P(N∩U$_1$) + P(N∩U$_2$)
= P(U$_1$)× P_{U1}(N) + P(U$_2$)× P_{U2}(N)

= $\frac{1}{3}\times\frac{2}{5}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{6}$

P(N) = $\frac{11}{45}$.

2- Cette probabilité est : $P_N(U_1)$.

On a : $P_N(U_1) = \frac{P(U_1)\times P_{U_1}(N)}{P(N)}$

$P_N(U_1) = \frac{6}{11}$.

EXERCICE 4

On considère les évènements suivants :
H : « la personne choisie est un homme » ;
F : « la personne choisie est une femme » ;
P : « la personne choisie présente le caractère P ».
On a les probabilités suivantes :
p(H) = 0,45 ; p(F) = 0,55 ; p(P/H) = 0,04 ; p(P/F) = 0,05.

1- Détermination de la proportion de personnes qui présentent le caractère P.

p(P) = p(H) p(P/H) + p(F) p(P/F)
p(P) = 0,45×0,04 + 0,55×0,05 = 0,0455 ; soit 4,55 % des personnes de cette population.

2- Il s'agit de déterminer p(H/P).

p(H/P) = $\frac{\mathrm{p(H)\ p(P/H)}}{\mathrm{p(P)}}$ = 0,4.

Exercice 5

On considère les évènements suivants :
M : « la personne choisie est malade » ;
T : « la personne choisie est testée positif » ;
On en déduit les évènements suivants :
$\bar{M}$: « la personne choisie est saine » ;
$\bar{T}$: « la personne choisie est testée négatif ».
On a les probabilités suivantes :

$P(M) = 0,03$;

$P_M(T)$ est la probabilité qu'une personne soit testée positif : $P_M(T) = 0,95$;
$P_{\overline{M}}(T)$ est la probabilité qu'une personne saine soit testée positif :
$P_{\overline{M}}(T) = 0,1$.

1- a) Cette probabilité est $P(M\cap T)$

$P(M\cap T) = P(M)\times P_M(T)$; $P(M\cap T) = 0,03\times 0,95 = 0,0285$.
b) Cette probabilité est $P(\overline{M}\cap T)$
$P(\overline{M}\cap T) = P(\overline{M})\times P_{\overline{M}}(T)$; $P(\overline{M}\cap T) = 0,97\times 0,1 = 0,097$.
c) Avec la formule des probabilités totales appliquée à $\{M ; \overline{M}\}$, on a :
$P(T) = P(M\cap T) + P(\overline{M}\cap T)$; $P(T) = 0,0285 + 0,097 = 0,1255$.
2-a) Cette probabilité est $P_T(\overline{M})$
$P_T(M) = \frac{P(M\cap T)}{P(T)}$; $P_T(M) = \frac{0,0285}{0,1255} = 0,2271$.
b) Cette probabilité est $P_T(\overline{M})$
$P_T(\overline{M}) = \frac{P(\overline{M}\cap T)}{P(T)}$; $P_T(\overline{M}) = \frac{0,097}{0,1255} = 0,7729$.
On pourrait remarquer que : $P_T(\overline{M}) = 1 - P_T(M)$.

c) Cette probabilité est $P_{\overline{T}}(M)$
$P_{\overline{T}}(M) = \frac{P(M\cap\overline{T})}{P(\overline{T})}$.
Avec la formule des probabilités totales appliquée à $\{T ; \overline{T}\}$, on a :
$P(M) = P(M\cap T) + P(M\cap\overline{T})$; d'où :
$P(M\cap\overline{T}) = P(M) - P(M\cap T) = 0,03 - 0,0285 = 0,0015$.

$$P_{\overline{T}}(M) = \frac{0,0015}{1-0,1255} = 0,0017.$$

d) Cette probabilité est $P_{\overline{T}}(\overline{M})$

$P_{\overline{T}}(\overline{M}) = 1 - P_{\overline{T}}(M)$; $P_{\overline{T}}(\overline{M}) = 1 - 0,0017 = 0,9983$.

Exercice 6

1)
A chaque règle choisie au hasard, il y a deux issues possibles : la règle présente un défaut avec une probabilité constante égale à 0,1 ou bien la règle ne présente aucun défaut une probabilité de 0,9 car le tirage est supposé fait avec remise. Il y a répétition de 8 épreuves de Bernoulli

identiques et indépendantes. La variable aléatoire X qui prend pour valeur le nombre de règles présentant un défaut suit donc une binomiale B(8 ; 0,1).
2) P(A) = P(X= 0) = $0{,}9^8$ = 0,43.
P(B) = P(X=2) = $C_8^2(0{,}1)^2(0{,}9)^6$= 0,149.
P(C)= 1−P(A) = 0,57.
3) a) E(X) = 8×0,1= 0,8. L'arrondi d'ordre 0 du résultat est 1.
b) En moyenne 1 règle sur 8 Choisies au hasard présente un défaut au contrôle.

Exercice 7
1) Le nombre de cas possibles : $C_5^2 \times C_5^2 = 100$.
Pour avoir un cas favorable à E : tirer exactement 1 boule blanche dans chaque urne ou bien 2 boules blanches dans une seule des deux urnes. Soit au total : $C_3^1 \times C_2^1 \times C_2^1 \times C_3^1 + C_3^2 \times C_3^2 + C_2^2 \times C_2^2$= 46. D'où : P(E)= $\frac{46}{100} = 0{,}46$.
2)a) Les valeurs prises par X sont : 0 ;1 ; 2 ;3 ; 4.
La loi de probabilité est donnée par le tableau ci-dessous :

k	0	1	2	3	4
P(X=k)	0,03	0,24	0,46	0,24	0,03

b) E(X) =2.
Le nombre moyen de boules blanches tirées est 2. Le gain par boule blanche tirée étant de 600 F, le gain moyen est de 2×600 -1500 qui est -300. La gain étant non nul, le jeu n'est pas équitable.

Remarque
On peut considérer la variable aléatoire Y = 600X-1500. Cette variable aléatoire donne le gain du joueur. E(Y) = 600E(X) -1500 = -300.
Sur un grand nombre de tirages qui donnent lieu au jeu, ce jeu n'est pas favorable au joueur car le gain obtenu est négatif (perte).

1) On considère les évènements suivants :

B : « tirer exactement deux boules blanches »
U_1 : « tirer une et une seule boule blanche de U_1 »
$P(B|U_1) = \frac{P(B\cap U_1)}{P(U_1)}$; $P(B|U_1) = \frac{3}{5}$.

2) Soit l'évènement succès S : « tirer deux boules blanches ».

La probabilité d'un succès est : P(S) = $\frac{C_3^2}{C_5^2} = \frac{3}{10}$.
La variable aléatoire X prenant pour valeurs le nombre de succès au cours des 10 tirages suit une loi binomiale de paramètres 10 et $\frac{3}{10}$.

La probabilité cherchée est P(X ≥ 2).
P(X ≥ 2) = 1−P(X =0) −P(X=1).
P(X ≥ 2) = $1-(\frac{7}{10})^{\mathbf{10}} - C_{10}^{1}(\frac{3}{10})^{\mathbf{1}}(\frac{7}{10})^{\mathbf{9}}$ **=** 0,851.

Exercice 8

1)

a) Pour réaliser A_n, on doit tirer une boule blanche de l'urne U_1 et la remettre dans l'urne U_2 puis tirer une boule blanche de l'urne U_2 et la remettre dans U_1 ou bien tirer une boule noire de l'urne U_1 et la remettre dans l'urne U_2 puis tirer une boule noire de l'urne U_2 et la remettre dans U_1.

$P(A_n) = \frac{n}{n+3} \times \frac{3}{4} + \frac{3}{n+3} \times \frac{2}{4}$; d'où : $P(A_n) = \frac{3}{4}(\frac{n+2}{n+3})$.

b) Cette limite vaut $\frac{3}{4}$.

2) Pour réaliser B_n, on doit tirer une boule noire de l'urne U_1 et la remettre dans l'urne U_2 puis tirer une boule blanche de l'urne U_2 et la remettre dans U_1.

$P(B_n) = \frac{3}{n+3} \times \frac{2}{4}$; d'où : $P(B_n) = \frac{6}{4(n+3)}$.

3) a) D'après les trois cas décrits dans l'énoncé, les gains algébriques du joueur en franc peuvent être : $2(n-10)$; $n-20$; -20. C'est pour n supérieur à 10, que le joueur peut espérer gagner.

b) Les valeurs prises par X sont : $2(n-10)$; $n-20$; -20.

La loi de probabilité est donnée par le tableau ci-dessous :

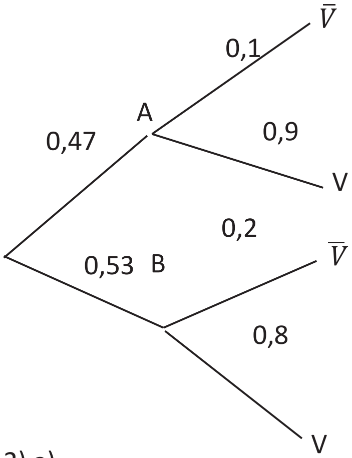
k	-20	$n-20$	$2(n-10)$
P(X=k)	$\frac{n}{4(n+3)}$	$\frac{3}{4}(\frac{n+2}{n+3})$	$\frac{6}{4(n+3)}$

c) $E(X) = \frac{3n^2-62n-240}{4(n+3)}$.

d) E(X) est strictement positive si et seulement si *n* est supérieur ou égal à 25. Dès que l'urne U_1 contient au moins 25 boules blanches, le jeu est favorable au joueur.

Exercice 9

1) Tous ces résultats sont résumés dans l'arbre pondéré ci-dessous :



2) a)

P(V) = P(V∩ A) + P(V∩ B)

= P(A)×P_A(V) + P(B)×P_B(V)

= 0,47×0,9 + 0,53×0,8

P(V) = 0,847.

b) Cette probabilité est : $P_V(A)$

$P_V(A) = \frac{P(V\cap A)}{P(V)}$; $P_V(A) = \frac{0{,}47\times 0{,}9}{0{,}847} = \frac{423}{847}$, soit environ 50 %.

3. La personne choisie vote effectivement le candidat A si elle affirme voter le candidat A et dit la vérité ou affirme voter le candidat B et ne dit pas la vérité.

Cette probabilité est : P(A∩ V) + P(B∩ $\overline{V}$)

P(A∩ V) + P(B∩ $\overline{V}$) = 0,47×0,9 + 0,53×0,2 = 0,529.

4. En une demi-heure, on répète 10 expériences de Bernoulli indépendantes dont la probabilité de succès est 0,4. La variable aléatoire X qui compte le nombre de personnes qui accepte de répondre au cours de la demi-heure suit une loi binomiale de paramètres 10 et 0,4.

On a : E(X) = 10×0,4 = 4. Cela signifie que l'institut de sondage espère en une demi-heure obtenir 4 personnes qui acceptent de répondre à l'enquête. Or : $\frac{1200}{4} = 300$, donc l'institut de sondage doit prévoir en moyenne 300 demi-heures, soit 150 heures pour parvenir à l'atteinte de son objectif.

Exercice 10

Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre d'ordinateurs tombés en panne parmi les 100 disponibles.

Les 100 ordinateurs tombant en panne de façon indépendante avec une probabilité de 0,01 à chaque panne, la variable aléatoire X suit une loi binomiale de probabilité de paramètres 100 et 0,01.

1. La probabilité qu'aucun ordinateur ne tombe en panne est : P(X = 0).

P(X = 0) = $(1-0{,}01)^{100}$; P(X = 0) = 0,366.

2. La probabilité qu'au moins un ordinateur tombe en panne est : P(X ≥ 1).

P(X ≥ 1) = 1− P(X = 0) = 0,634.

3. La probabilité qu'exactement trois ordinateurs tombent en panne est : P(X = 3).

P(X = 3) = $C_{100}^{3}(0{,}01)^3 \times (0{,}99)^{97}$; P(X = 3) =0,061.

4. La probabilité qu'au plus trois ordinateurs tombent en panne est : P(X ≤ 3).

P(X ≤ 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) ;

On a : P(X = 1) = $C_{100}^{1}(0{,}01)^1 \times (0{,}99)^{99}$ = 0,37 ;

P(X = 2) = $C_{100}^{2}(0{,}01)^2 \times (0{,}99)^{98}$ = 0,185.

P(X ≤ 3) = 0,366 + 0,37 + 0,185 + 0,061 = 0,982.

5. X suivant une loi binomiale de paramètres 100 et 0,01, le nombre moyen d'ordinateurs qui tombent en panne dans cette entreprise est 100×0,01 = 1.

SITUATIONS COMPLEXES

Exercices 11

Identification du problème à résoudre

Il s'agit de donner une argumentation au fabricant sur le bénéfice qu'il espère avoir basée sur ton cours de mathématiques.

Modélisation

Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de consoles conformes parmi les 400 produits et vendus par mois. Le fabricant faisant réaliser un test de conformité, dans les mêmes conditions, sur chacun de ses objets fabriqués, X suit une loi binomiale dont le succès est « la console de jeu est conforme » avec une probabilité de 0,93.

Calcul du bénéfice

L'espérance de la variable aléatoire X est 400×0,93 = 372. Cela signifie que le fabricant espère produire et vendre mensuellement 372 consoles conformes.

Le nombre de consoles non conformes que le fabricant espère produire et vendre est : 400 −372 = 28.
Le montant total des ventes en FCFA est donc :
290 000×372 + 150 000×28 = 112 080 000.
Le coût total de la production des 400 consoles en FCFA est :
160 000× 400 = 64 000 000.
Le bénéfice en FCFA que le fabricant espère réaliser est : 48 080 000.
Solution à la préoccupation du fabricant
Le bénéfice espéré par le fabricant de 45 000 000 FCFA est inférieur à 48 080 000 FCFA.
Il n'a donc pas à s'inquiéter. Il lui suffira de suivre ses activités correctement et il n'y aura pas de problème.

Exercices 12

Option 1

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de « faces » obtenu à l'issu des trois lancers.

X suit la loi binomiale de paramètres (3 ; $\frac{1}{2}$).

P(X = 2) = $C_3^2(\frac{1}{2})^2 \times (\frac{1}{2})^1$

P(X = 2) = $\frac{3}{8}$

Option 2

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de « faces » obtenu à l'issu des quatre lancers.

Y suit la loi binomiale de paramètre (4 ; $\frac{1}{2}$).

P (Y=3) + P(Y= 4) = $C_4^3(\frac{1}{2})^3 \times (\frac{1}{2})^1 + (\frac{1}{2})^4$

P (Y=3) + P(Y= 4) = $\frac{5}{16}$

Conclusion

$\frac{3}{8} > \frac{5}{16}$. Donc je choisis l'option1.

17 SIMILITUDES DU PLAN

EXERCICES DE FIXATION

1.Définition d'une similitude

Exercices de fixation

Exercice 1

1.F ; 2.F ; 3.V ; 4.F ; 5.V ; 6.F ; 7.F

2.Définition d'une similitude directe

Exercices de fixation

Exercice 2

1.F ; 2.V ; 3.F ; 4.F ; 5.V ; 6.F

3.Défintion d'une similitude directe

Exercices de fixation

Exercice 3

1.F ; 2.V ; 3.V ; 4.V ; 5.V ; 6.F ; 7.V

Exercice 4

a) ; b) ; c) ; g) ; h)

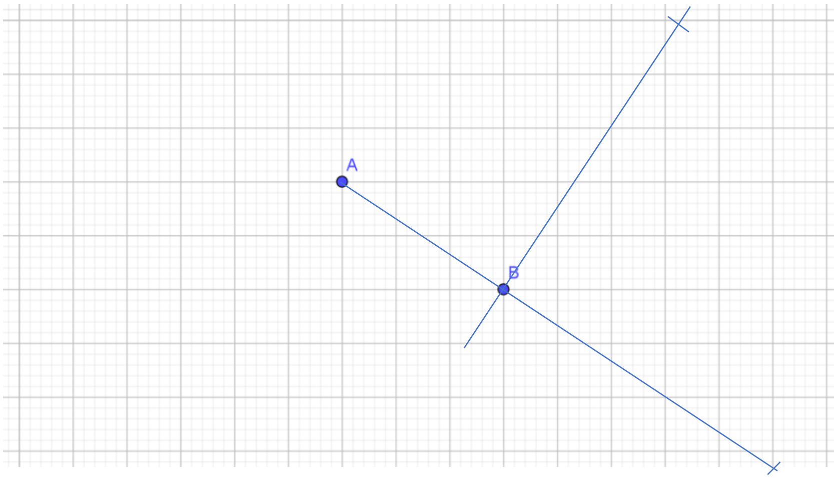
Exercice 5

a) $\frac{4}{7}$; b) $\frac{5}{7}$; c) 1

Exercice 6

On a $h_{(B;-2)}(A) = A_1$ et $r_{\left(B;\frac{\pi}{2}\right)}(A_1) = A'$

donc $r_{\left(B;\frac{\pi}{2}\right)} \circ h_{(B;-2)}(A) = A'$



4.Caractérisation d'une similitude directe

Exercices de fixation

Exercice 7

a) $h_{\left(A;-\frac{4}{3}\right)} = h_{\left(A;\frac{4}{3}\right)} \circ r_{(A;\pi)}$

b) $r_{\left(A;-\frac{\pi}{4}\right)} \circ h_{\left(A;-\frac{1}{5}\right)}$

c) $r_{\left(A;\frac{\pi}{2}\right)} \circ h_{\left(A;\frac{5}{7}\right)}$

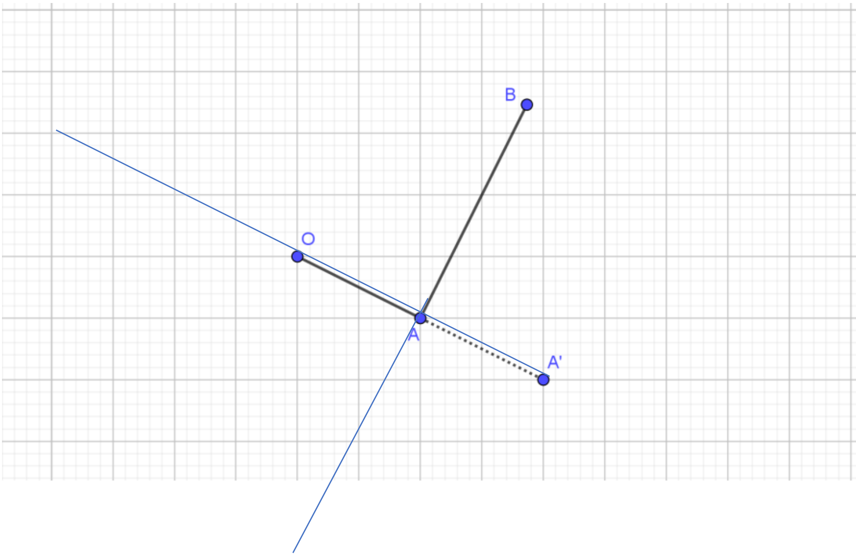
5.Définition d'une similitude directe de rapport distinct de 1

Exercices de fixation

Exercice 8

La rotation de centre Ω et d'angle orienté $\hat{\theta}$ est une similitude **directe** de centre $\boldsymbol{\Omega}$ de rapport **1** et d'angle orienté $\boldsymbol{\hat{\theta}}$

Exercice 9

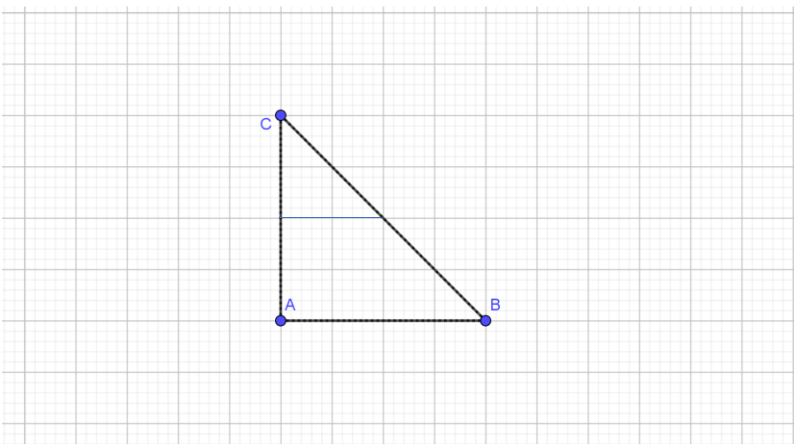


6.Détermination d'une similitude directe

Exercices de fixation

Exercice 10

1.Construction



2. $k = \frac{BA}{BC}$ or $\frac{BA}{BC} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

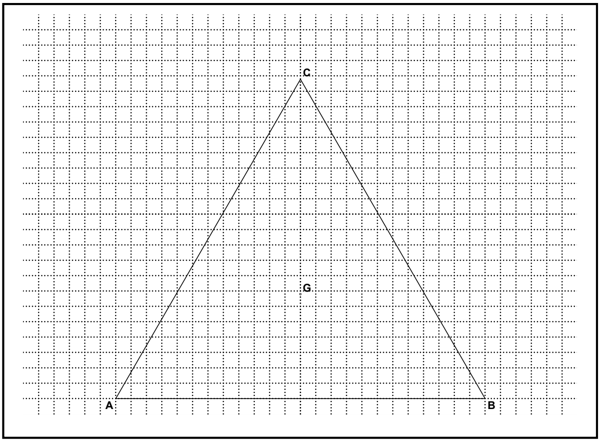
$\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA}}) = \frac{\pi}{4}$ Ainsi S'=$S_{\left(C;\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\pi}{4}\right)}$

Exercice 11

Soit B'=mil$[AC]$; on a $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{BB\prime}{BC}$ d'où $BB' = \frac{\sqrt{3}}{2}BC$

Or $BG = \frac{2}{3}\ BB'$ d'où $BG = \frac{\sqrt{3}}{3}BC$

Comme $= \frac{BG}{BC}$, donc $k = \frac{\sqrt{3}}{3}$ et $\theta = \text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BG}}) = \frac{\pi}{6}$



Exercices de fixation

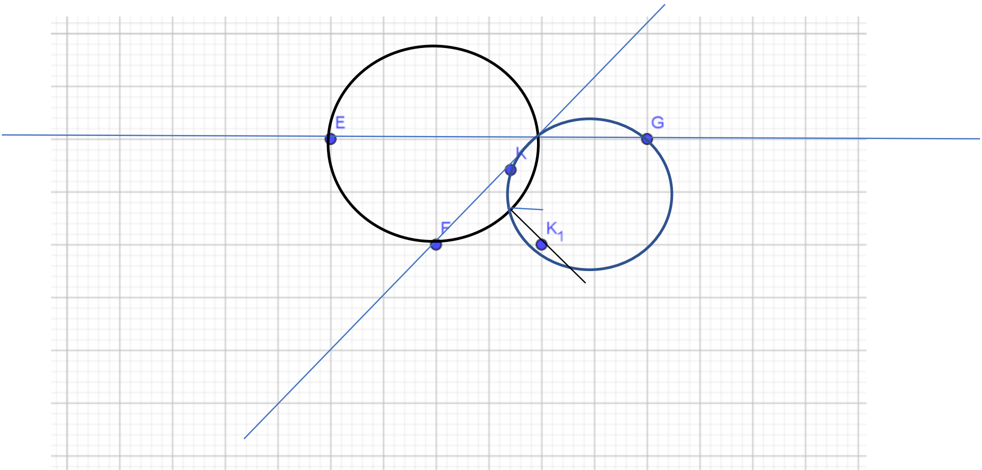
Exercice 12

(EG) et (FK) ne sont pas parallèles, soit I le point d'intersection des droites (EG) et (FK)

On a : $\theta = \text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{EG};\overrightarrow{FK}}) = \frac{\pi}{4}$ et $k = \frac{BG}{BC} = \frac{1}{3}$

(EG) et (FK) ne sont pas parallèles ; $(EG) \cap (FK) = \{I\}$

$\mathcal{C}_{(IEF)} \cap \mathcal{C}_{(IKG)} = \{O\}$



7. Figures semblables

Exercices de fixation

Exercice 13

1.V ; 2.F ; 3.V ; 4.V ; 5.F

Exercice 14

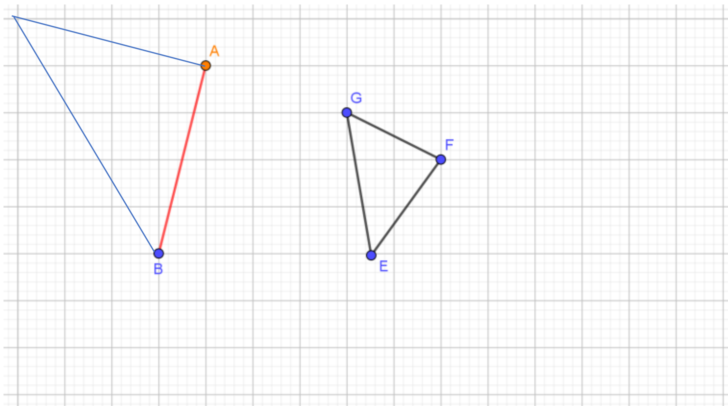
a) On a $\text{mes}(\widehat{C}) = \text{mes}(\widehat{D})$ et $\text{mes}(\widehat{B}) = \text{mes}(\widehat{F})$ donc les triangles ABC et EDF sont

semblables en application de la proposition 2

b) On a $\text{mes}(\widehat{B}) = \text{mes}(\widehat{C})$ et $\frac{BA}{ED} = \frac{BC}{EF}$ donc les triangles ABC et EDF sont semblables en application de la proposition 3

Exercice 15

1.



2. A partir de (AB) on construis deux angles de même mesure que deux angles

du triangle EFG

$mes\ \widehat{EFG} = mes\ \widehat{BAC}$ et $mes\ \widehat{FEG} = mes\ \widehat{ABC}$

9.Images de quelques configurations planes par une similitude

Exercices de fixation

Exercice 16

1.F

2.V

3.F

4.V

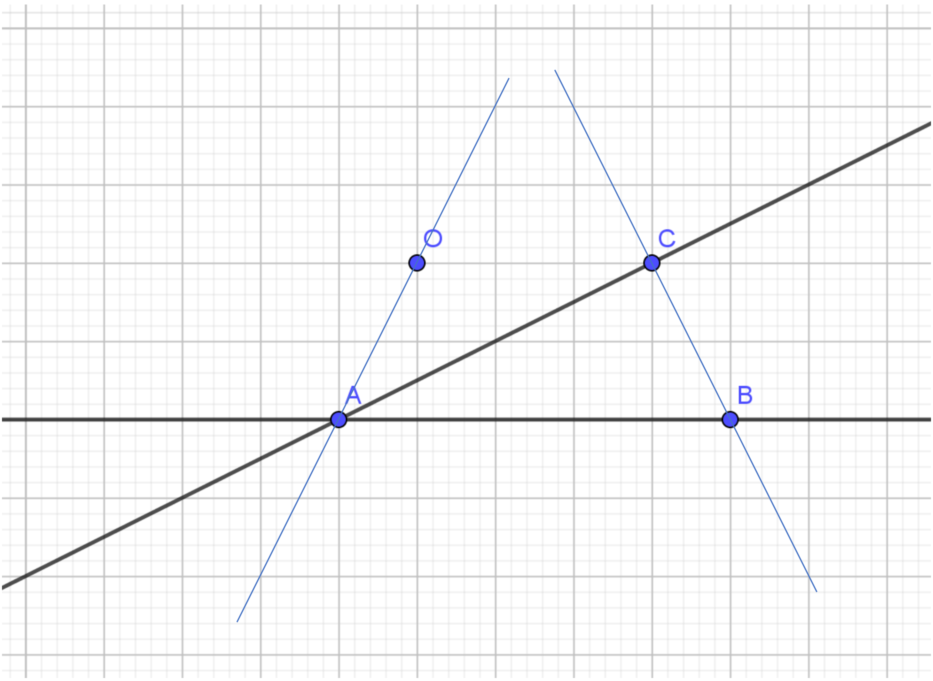
Exercice 17

1) $S_1\big((AC)\big) = (BC)$ car $S_1(A) = B$

2) $S_2\big((AC)\big) = (OA)$

3) $S_3([AC)) = [A'B')$

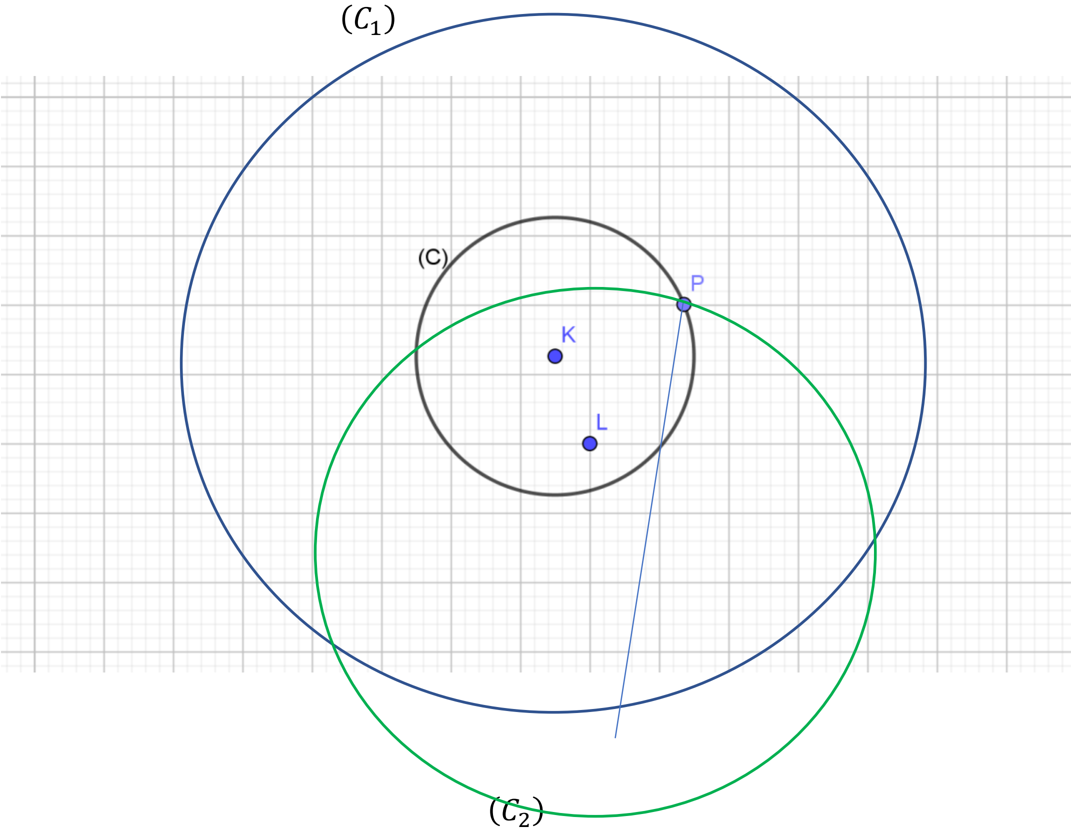
4) $S_4([AC]) = [A''C'']$



Exercice 18

Construction

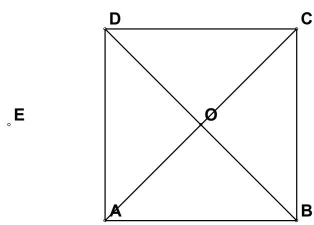
$(C_1) = \mathbf{C}(K; 2{,}5KP)$ et $(C_2) = \mathbf{C}(K'; 2KP)$ où $K' = S_{(P;2;\frac{\pi}{})}(K)$



10.Des propriétés de conservation

Exercices de fixation

Exercice 19



1)

S

O	D	B
O’	D’	B’

O’, D’ et B’ sont alignés car images respectives par S des points O, D et B.

2)

S

O	D	B	D
O’	D’	B’	D’

Comme S est une similitude directe plane alors Mes$\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{DO}}\right)$ = Mes $\left(\widehat{\overrightarrow{AB'};\overrightarrow{D'O'}}\right)$

(Conservation des angles orientés)

3)

S

O	D	B	$[BD]$
O’	D’	B’	$[B'D']$

O est le milieu de $[BD]$ donc son image par S, O’ est le milieu de l’image de $[BD]$ qui est $[B'D']$ d’où $O' =$ mil$[B'D']$

Exercice 20

1. Construction voir exercice 19

2. ABCD est un carré donc $(AC) \perp (BD)$ Or

S

A	C	B	D
A	C’	B’	D’

d’après la propriété de conservation de l’orthogonalité on a : $(AC') \perp (B'D')$.

11. Utilisation des similitudes

Exercices de fixation

Exercice 21

On sait que le point Ω, centre du cercle $(\mathcal{C})$ décrit l'axe médian (L) des droites parallèles (D) et (D')

L'idée est de justifier qu'il existe une similitude directe S' de centre O qui applique le point Ω sur le point P. Si on justifie que l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{O\Omega};\overrightarrow{OP}})$ et le rapport $\frac{OP}{O\Omega}$ sont constants lorsque le point M varie, la similitude directe S est parfaitement déterminée.

$P_{(D)}(O) = A$; $P_{(D')}(O) = B$ et $\mathcal{C}_0 = \mathcal{C}([AB])$

Justifions que $(\widehat{\overrightarrow{O\Omega};\overrightarrow{OP}}) = (\widehat{\overrightarrow{O\mathrm{K}};\overrightarrow{ON_1}})$

$(D) \parallel (D')$ d'après Thalès $\frac{KO}{KA} = \frac{\Omega O}{\Omega M}$

Or $KA = KN_1$ et $\Omega M = \Omega P$ donc $\frac{OK}{KN_1} = \frac{\Omega O}{\Omega P}$ soit $\frac{KN_1}{\Omega P} = \frac{OK}{\Omega O}$

Les triangles OKN_1 et $O\Omega P$ sont rectangles respectivement en N_1 et P et $\frac{KN_1}{\Omega P} = \frac{OK}{\Omega O}$

ils sont donc semblables.

D'où $(\widehat{\overrightarrow{O\Omega};\overrightarrow{OP}}) = (\widehat{\overrightarrow{O\mathrm{K}};\overrightarrow{ON_1}})$, l'angle $(\widehat{\overrightarrow{O\Omega};\overrightarrow{OP}})$ est bien constant lorsque le point M est sur la droite (D).

De plus $\frac{ON_1}{\mathrm{OK}} = \frac{OP}{\mathrm{O\Omega}}$ donc le rapport $\frac{OP}{\mathrm{O\Omega}}$ est constant

$S' = S_{(O;k;\theta)}$ où $k = \frac{ON_1}{\mathrm{OK}}$ et $\theta = \mathrm{Mes}(\widehat{\overrightarrow{O\mathrm{K}};\overrightarrow{ON_1}})$

Applique Ω sur P

Le lieu des points M est donc la droite (L'') image de (L) par la similitude S'

Exercices de renforcement/Approfondissement

Exercice 1

1.B ; 2.B ; 3.C ; 4C ; 5.B

Exercice 2

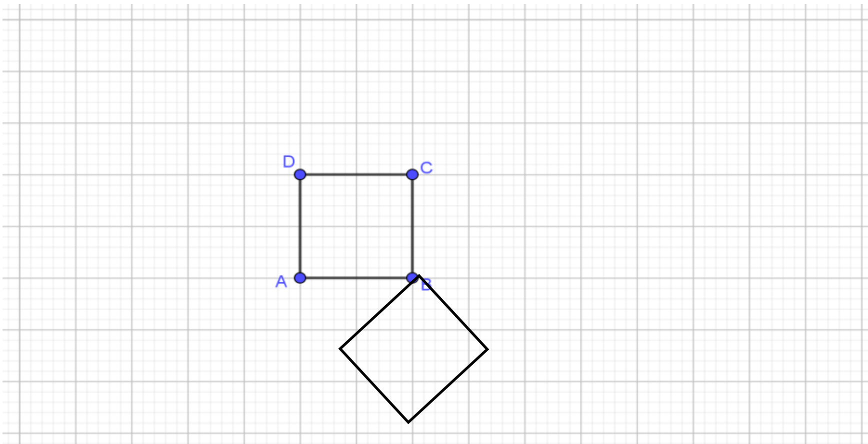
1. $S = S_{\left(A;2;\frac{\pi}{2}\right)}$
2. $S = S_{(CB)} \circ S_{(AC)} \circ S_{(AC)} \circ S_{(AD)}$

$= S_{(CB)} \circ S_{(AC)}$

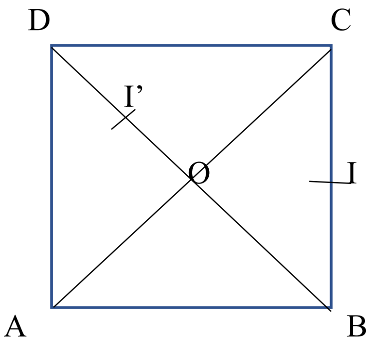
$= t_{2\overrightarrow{AB}}$

3. $S = r_{\left(B\,;-\frac{\pi}{4}\right)} \circ r_{(B\,;\pi)}$

$= r_{\left(B;\frac{3\pi}{4}\right)}$



Exercice 3



a)$k = \frac{AO}{AB} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\theta = \text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AO}}\right) = \frac{\pi}{4}$

b)$S(C) = D$ car $\frac{AD}{AC} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AD}}\right) = \frac{\pi}{4}$

c) $S(B) = O$ et $S(C) = D$

Donc $S\big((BC)\big) = (OD)$

d) $S(B) = O$; $S(C) = D$ et $S(I) = I'$

I $=$ mil$[BC]$ donc son image I$'$ $=$ mil$[OD]$

L'image de I est I' le milieu de $[OD]$

Exercice 4

a)$k = \frac{BA}{BC} = 1$ et et $\theta = \text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA}}\right) = \frac{\pi}{3}$

b)$k = \frac{BG}{BC} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ et et $\theta = \text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BG}}\right) = \frac{\pi}{6}$

c)$k = \frac{GC}{GB} = 1$ et et $\theta = \text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{GB};\overrightarrow{GC}}\right) = 2\text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right) = \frac{2\pi}{3}$

d)$k = \frac{GA}{GB} = 1$ et et $\theta = \text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{GB};\overrightarrow{GA}}\right) = -\frac{2\pi}{3}$

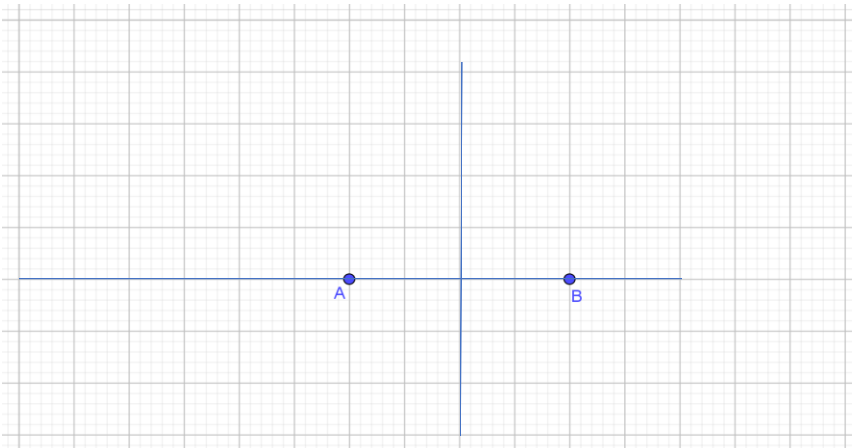
Exercice 5

$S_{\left(\Omega;2;\frac{\pi}{4}\right)}$ et $S(A) = B$ donc $\begin{cases} \dfrac{\Omega B}{\Omega A} = 2 \\ \mathrm{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{\Omega A};\overrightarrow{\Omega B}}\right) = \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$

$\frac{\Omega B}{\Omega A} = 2$ Ainsi $\Omega \in \mathcal{C}([G_1G_2])$où G_1=bar$\{(A,2);(B,1)\}$ et G_2=bar$\{(A,-2);(B,1)\}$

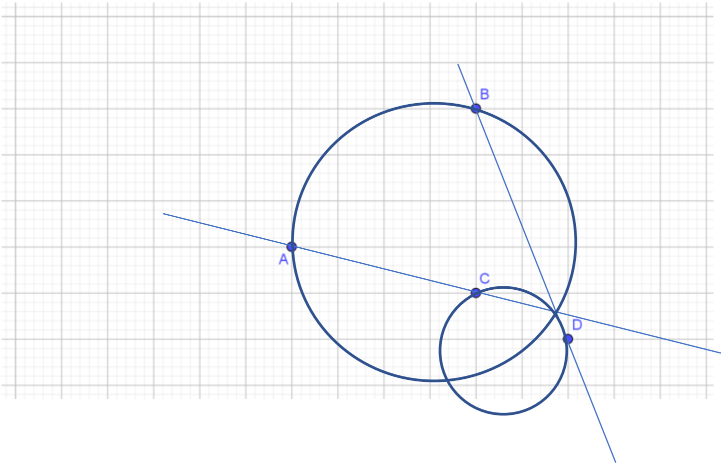
$\mathrm{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{\Omega A};\overrightarrow{\Omega B}}\right) = \frac{\pi}{4}$ donc Ω appartient à l'arc capable (Γ) de mesure $\frac{\pi}{4}$ d'extrémité A et B. Par suite $(\Gamma) \cap (\mathcal{C}) = \{\Omega\}$

on a : $\overrightarrow{AG_1} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AG_2} = \overrightarrow{BA}$

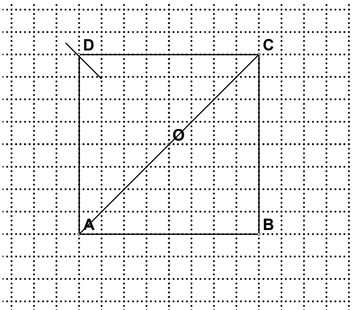


Exercice 6

Construire $\mathcal{C}(ABI) \cap \mathcal{C}(CDI)$



Exercice 7



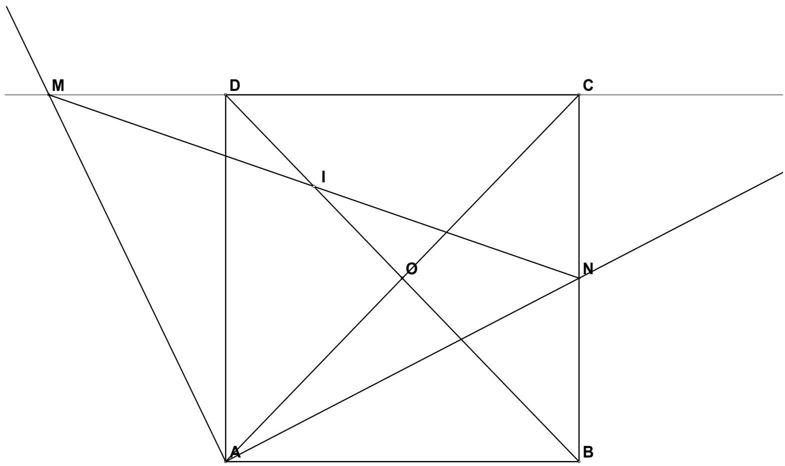
a)$k = \frac{AD}{AC} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\theta = \mathrm{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AD}}\right) = \frac{\pi}{4}$

b)$k = \frac{AB}{AO} = \sqrt{2}$ et $\theta = \mathrm{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{AO};\overrightarrow{AB}}\right) = -47\frac{\pi}{4}$

c)$k = \frac{AC}{AO} = 2$ et $\theta = \mathrm{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{AO};\overrightarrow{AC}}\right) = 047$

d)$k = \frac{BO}{BA} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\theta = \mathrm{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BO}}\right) = -\frac{\pi}{4}$jh ,hjg ;n

Exercice 8



1)Soit $r = r_{\left(A\,;\,-\frac{\pi}{2}\right)}$

On a $r(D) = B$ car $AB = AD$ et $\mathrm{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AB}}\right) = -\frac{\pi}{2}$ donc $r\big((DC)\big) = (BC)$ car $(BC) \perp (DC)$ ((BC) est la perpendiculaire à (DC) passant par B).

$(DC) \cap (AM) = \{M\}$ donc $r\big((DC)\big) \cap r\big((AM)\big) = \{r(M)\}$

Donc $(BC) \cap (AN) = \{r(M)\}$ or $(BC) \cap (AN) = \{N\}$

D'où $r(M) = N$ Ainsi AMN est un triangle rectangle isocèle en A.

2)A, M et I sont non alignés donc il existe une similitude directe s de centre A qui transforme M en I.

3)AMN est un triangle rectangle isocèle en A et I est le milieu de $[MN]$ donc le triangle AMI est rectangle isocèle en I.

$k = \frac{AI}{AM} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\mathrm{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AI}}\right) = -\frac{\pi}{4}$

$s = S_{\left(A;\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{\pi}{4}\right)}$

4) On a $s(M) = I$ et $M \in (DC)$ donc

On a $s(D) = O$ où O est le milieu de $[BD]$

Car $\frac{AO}{AD} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AO}}\right) = -\frac{\pi}{4}$

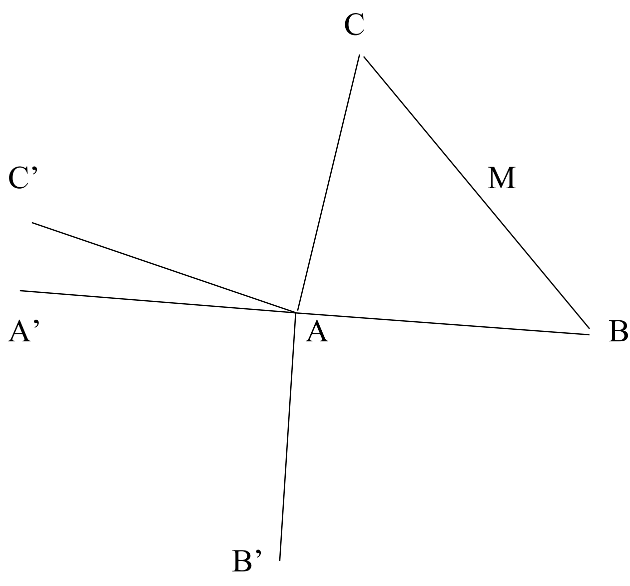
Et $s(C) = B$ car $\frac{AB}{AC} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB}}\right) = -\frac{\pi}{4}$

Ainsi $s\big((DC)\big) = (BD)$

Lorsque M décrit la droite (DC), son image décrit la droite (BD)

Le point I décrit donc la droite (BD)

Exercice 9



1)$h(A) = A'$ où $A' = S_A(B)$

$h(M) = C$ car $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{BM}$

2)Posons $r = R_{\left(A;\frac{\pi}{2}\right)}$

On a : $r \circ h(A) = r(A') = B'$ et $r \circ h(M) = r(C) = C'$

3)$s = r \circ h$ est une similitude directe de rapport 2 et d'angle $\frac{\pi}{2}$

a)

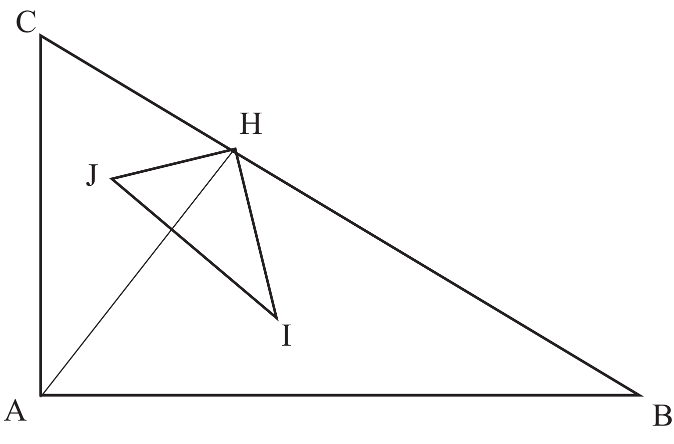
S				
	A	M	B	(AM)
	A'	C'	B'	$(B'C')$

L'angle de s est $\frac{\pi}{2}$ alors les droites (AM) et $(B'C')$ sont perpendiculaires.

b) Le rapport de s est 2 alors $B'C' = 2AM$

Exercice 10

1)



2)a) On a mes$C\hat{A}H$ + mes$A\hat{C}H = 90$ et mes$A\hat{B}H$ + mes$A\hat{C}H = 90$ donc mes$C\hat{A}H$ = mes$A\hat{B}H$ de plus $\tan A\hat{B}H = \frac{AH}{HB}$ et $\tan C\hat{A}H = \frac{CH}{AH}$ d'où $\frac{AH}{HB} = \frac{CH}{AH}$

ABH et AHC sont deux triangles tels que :
mes$C\widehat{H}A$ = mes$A\widehat{H}B$ et $\frac{AH}{HB} = \frac{CH}{AH}$

Donc les deux triangles sont donc semblables, il existe donc une similitude directe

plane s qui transforme AHB en AHC.

2)b) On a $\frac{HB}{HA} = \frac{HA}{HC} = \frac{BA}{AC}$

Le centre de s est H

L'angle de s est $-\frac{\pi}{2}$

Le rapport de s est $\frac{AH}{HB}$

2) c) I est le point de concours des bissectrices du triangle AHB

Par conservation du contact le point de concours des bissectrices du triangle AHC ;

J est l'image de I donc $s(I) = J$

d) s est la similitude directe de centre H, d'angle $-\frac{\pi}{2}$ et de rapport k où $k = \frac{AH}{HB}$ comme $s(I) = J$ alors le triangle HIJ est rectangle en H.

3) $s(B) = A$ et $s(I) = J$

Donc $(BI) \perp (AJ)$ Car l'angle de s est $-\frac{\pi}{2}$

4)$S'(HIJ) = AHB$

Le centre de S' est H et l'angle de s'est θ où

θ = Mes$\left(\widehat{\overrightarrow{HJ};\overrightarrow{HA}}\right) = \frac{1}{2}Mes\left(\widehat{\overrightarrow{HC};\overrightarrow{HA}}\right) = \frac{\pi}{4}$

[(HI)bissectrice]

5)

S

J	I
A	B

Donc $\text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{JI};\overrightarrow{AB}}\right) = \frac{\pi}{4}$

On a $\text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{IJ}\,;\overrightarrow{AB}}\right) = \text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{JI}\,;\overrightarrow{AB}}\right) + \pi$

$$= \frac{\pi}{4} + \pi$$

$$= \frac{5\pi}{4}$$

$$= -\frac{3\pi}{4}$$

Exercice 11 : pareil à l'exercice 8 page 27

Exercice 12

1) a) A, E, C et G sont quatre points du plan tels que $A \neq E$ et $C \neq G$ il existe une similitude directe et une seule telle que $S(A) = C$ et $S(E) = G$

b) Soit θ l'angle de S on a :

$\theta = \text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{AE}\,;\overrightarrow{CG}}\right)$

2) Soit Ω le centre de S.

a)On a $(AE) \cap (CG) = \{B\}$

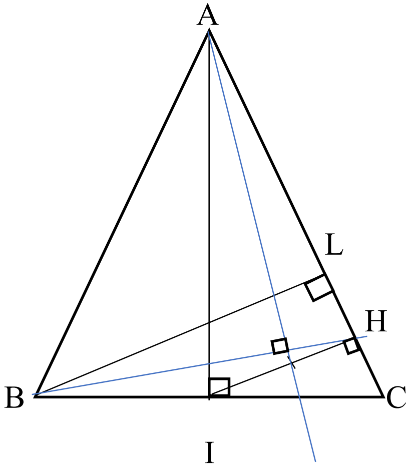
Ainsi Ω appartient au cercle circonscrit à ACB et au cercle circonscrit à EGB.

D'où Ω appartient aux cercles (Γ) et (Γ′)

b)$(\Gamma) \cap (\Gamma') = \{B; K\}$ donc $\Omega \neq B$.

c) Ω est l'autre point d'intersection autre que B donc $\Omega = K$

Exercice 13



Exercice 14

Considérons la similitude de centre A et d'angle $\frac{\pi}{4}$ et de rapport $\sqrt{2}$

$s = S_{\left(A;\sqrt{2};\frac{\pi}{4}\right)}$

On a :

S

A	B	C	D
A	C	E	F

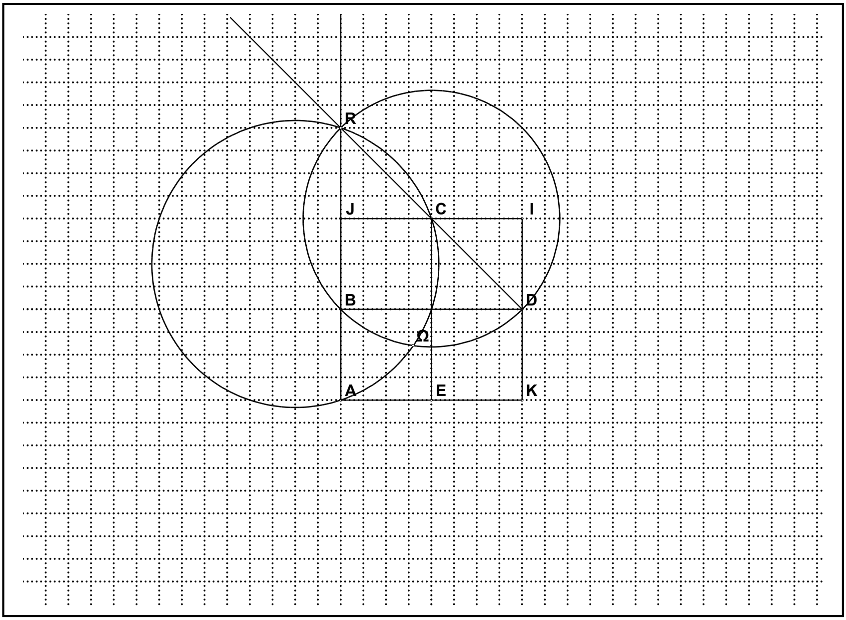
Donc $s(ABCD) = ACEF$

Toute similitude multiplie les aires par le carré du rapport donc

$\mathcal{A}_{ACEF} = \left(\sqrt{2}\right)^2 \mathcal{A}_{ABCD}$

Ainsi $\mathcal{A}_{ACEF} = 2\mathcal{A}_{ABCD}$

Exercice 15



On a

S

A	B
C	D

$(AB) \cap (CD) = \{R\}$

$(\mathcal{C})$ le cercle circonscrit au triangle ACR

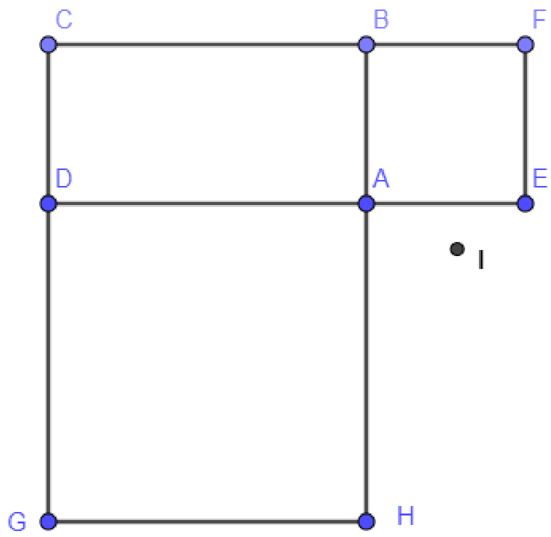
$(\mathcal{C}')$ le cercle circonscrit au triangle BDR

$(\mathcal{C}) \cap (\mathcal{C}') = \{R, \Omega\}$

Ω est le second point d'intersection de $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$

SITUATIONS COMPLEXES

Exercice 16



Pour répondre à la préoccupation de Monsieur Konan, Il suffit de justifier que les droites (AC), (GE) et (HF) sont oui ou non concourantes.

Notons I, le point d'intersection des droites (EG) et (FH), h_1 l'homothétie de centre I transformant G en E et h_2 l'homothétie de centre I transformant F en H

L'image de la droite (CG) par h_1 est la droite (EF), donc $(h_2 \circ h_1)$ (CG) = (AB).

De même, l'image de la droite (CF) par l'homothétie $h_1 \circ h_2$ est la droite (DA).

C est le point d'intersection des droites (CG) et (CF), il en résulte donc que l'image du point C par l'homothétie de centre I, $h_1 \circ h_2$ (remarquons que $h_2 \circ h_1 = h_1 \circ h_2$) est le point d'intersection des droites (AB) et (CA) c'est-à-dire le point A. $(h_1 \circ h_2)(C) = A$, on déduit que I appartient à (AC).

Il est donc possible d'installer un robinet conforme à la volonté de monsieur Konan.

Exercice 17

Dans cet énoncé, écrire $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AB}$ au lieu de $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ et choisir le cm comme unité, à l'échelle 1/2000.

ABC est un triangle rectangle en A tel que : AB = 80 mètres et AC = 250 mètres.

l'aire du triangle ABC est $A_{ABC} = \frac{80\times250}{2} = 10000\ m^2$

On a $AE = \frac{1}{4}AC$ donc $AE = \frac{250}{5} = 50$

D'où l'aire du carré AEFK est $A_{AEFK} = 50^2 = 2500\ m^2$

D'autre part l'aire soit A' égale à 40% de A_{ABC}

On a : $A' = \frac{40\times10000}{100} = 4000\ m^2$

Comme $2500 < 4000$, l'aire du carré AEFK n'est pas égal à 40% de l'aire totale

Du triangle ABC. L'affirmation de Gbessa est par conséquent fausse

1) Construction du carré AEFK
   Construis le point E tel que : $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AB}$
   Construis le point K tel que AK = AE et $K \in [AB)$
   Construis le point F, point d'intersection des perpendiculaires respectives à (AC) et (AB) passant par les points E et K.

2) Construction du carré AE'F'K'.

On obtient le carré AE'F'K' en utilisant l'homothétie de centre A qui applique F sur F'

(faire la figure)

En choisissant le cm comme unité, à l'échelle 1/2000, on a : AC = 12,5 et AB = 4. On peut chercher analytiquement une solution au problème en munissant le plan d'un repère orthonormé (A, I, J) tel que : AI = AJ = 1.

Dans ce repère On a : B (0 ; 4) et C (12,5 ; 0). $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AB}$ donc E (2,5 ; 0).

Le point F est sur la première bissectrice donc F (2,5 ; 2,5).

$AF^2 = AE^2 + EF^2$, donc AF = $2,5\sqrt{2}$.

Déterminons les coordonnées du point F'. Le point F' est le point d'intersection de la droite (BC) et de la droite d'équation y = x. Une équation de la droite (BC) après calcul donne :

y = - 0,32x +4. Après calcul, on a : F' (100/33 ; 100 /33) ; donc, AF'= 100 /33 $\sqrt{2}$. On a donc : k = $\mathbf{40/33}$.

D'où l'aire du carré AE'F'K' est : ($40/33$)2 × 2500 soit environ 3673. Ainsi Ainsi l'aire de la parcelle attribué à Kouamé est égal à environ : 10000 – 3673 soit environ 6327. Kouamé a donc le terrain le plus grand.

18 ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

EXERCICES DE FIXATION

Exercice 1

Toute équation dans laquelle apparaissent l'inconnue est une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ et des dérivées successives de l'inconnue s'appelle une équation différentielle.

Exercice 2

$y' + 4 = 0$; $y'' + 2y' + y = 5$; $5y + 3 = 0$

ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DU TYPE $y' = ay$ (a EST UN NOMBRE RÉEL)

Exercices de fixation

Exercice 3

A

Exercice 4

B) $x \mapsto ke^{-2x}$, $k \in \mathbb{R}$

Exercice 5

La solution générale est $y = Ce^{2x}$, $C \in \mathbb{R}$

$y(1) = 0$ d' où $0 = Ce^{2}$ donc $C = 0$ ainsi $f(x) = 0$

Exercice 6

La solution générale est $y = Ce^{\frac{1}{3}x}$, $C \in \mathbb{R}$

$y(6) = 2$ d' où $2 = Ce^{2}$ donc $C = 2e^{-2}$ ainsi $g(x) = 2e^{\frac{1}{3}x-2}$

ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DU TYPE $y' = ay + b$ (a et b réel $\boldsymbol{a \neq 0}$)

Exercices de fixation

Exercice 7

A) $x \mapsto ke^{2x} - \frac{5}{2}$, $k \in \mathbb{R}$

Exercice 8

C) $x \mapsto ke^{4x} + 6$, $k \in \mathbb{R}$

Exercice 9

Les solutions sont : $y = ke^{\,2x} - 2$, $k \in \mathbb{R}$

$y(1) = 1$ d' où $1 = ke^2 - 2$ donc $k = 3e^{-2}$ ainsi $f(x) = 3e^{\,2x-2} - 2$

Exercice 10

Les solutions sont : $y = ke^{\frac{1}{3}x} - 6$, $k \in \mathbb{R}$

$y(0) = 2$ donne $2 = ke^0 - 6$ donc $k = 8$ ainsi $h(x) = 8e^{\frac{1}{3}x} - 6$

ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DU TYPE $y'' = 0$

Exercices de fixation

Exercice 11

B) $x \mapsto kx + p$, $k \in \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{R}$

Exercice 12

On a $y' = x$ et $y'' = 0$ donc $x \mapsto x + 8$ est une solution de l'équation différentielle $y'' = 0$

Exercice 13

On a $y'' = 0$ donc $y = ax + b$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$

$y(1) = 2$ donne $a + b = 2$

$y(0) = 1$ donne $b = 1$

D'où $a = 1$ donc la solution p est $p(x) = x + 1$

Exercice 14

On a $y'' = 0$ donc $y = ax + b$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$

$y(0) = 5$ donne $b = 5$

$y(2) = 9$ donne $2a + b = 9$

D'où $a = 2$ donc la solution u est $u(x) = 2x + 5$

ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DU TYPE $y'' = \omega^2 y$ (ω nombre réel non nul)

Exercices de fixation

Exercice 15

a) $(E) \Leftrightarrow y'' = y$

Les solutions sont les fonctions $y = Ae^{x} + B\,e^{-x}$, $A \in \mathbb{R}$, $B \in \mathbb{R}$

b) $(E) \Leftrightarrow y'' = 2^2 y$

Les solutions sont les fonctions $y = Ae^{2x} + B\,e^{-2x}$, $A \in \mathbb{R}$, $B \in \mathbb{R}$

c) $(E) \Leftrightarrow y'' = \left(\sqrt{3}\right)^2 y$

Les solutions sont les fonctions $y = Ae^{\sqrt{3}\,x} + B\,e^{-\sqrt{3}\,x}$, $A \in \mathbb{R}$, $B \in \mathbb{R}$

Exercice 16

a) $(E) \Leftrightarrow y'' = \left(\frac{1}{2}\right)^2 y$

Les solutions sont les fonctions $y = Ae^{\frac{1}{2}x} + B\,e^{-\frac{1}{2}x}$, $A \in \mathbb{R}$, $B \in \mathbb{R}$

b) $(E) \Leftrightarrow y'' = \left(\frac{3}{4}\right)^2 y$

Les solutions sont les fonctions $y = Ae^{\frac{3}{4}x} + B\,e^{-\frac{3}{4}x}$, $A \in \mathbb{R}$, $B \in \mathbb{R}$

c) $(E) \Leftrightarrow y'' = \left(\frac{7}{2}\right)^2 y$

Les solutions sont les fonctions $y = Ae^{\frac{7}{2}x} + B\,e^{-\frac{7}{2}x}$, $A \in \mathbb{R}$, $B \in \mathbb{R}$

Exercice 17

a) $(E) \Leftrightarrow y'' = 2^2 y$

Les solutions sont les fonctions $y = Ae^{2x} + B\,e^{-2x}$, $A \in \mathbb{R}$, $B \in \mathbb{R}$

$y(0) = 1$ donne $A + B = 1$

$y\left(\frac{1}{2}\right) = 2$ donne $Ae^{1} + Be^{-1} = 2$

D'où $A = \frac{2 - e^{-1}}{e - e^{-1}}$ et $B = \frac{e - 2}{e - e^{-1}}$ donc la solution f est $f(x) = \frac{2 - e^{-1}}{e - e^{-1}}\ e^{2x} + \frac{e - 2}{e - e^{-1}}\ e^{-2x}$

b) $(E) \Leftrightarrow y'' = y$

Les solutions sont les fonctions $y = Ae^{x} + B\,e^{-x}$, $A \in \mathbb{R}$, $B \in \mathbb{R}$

$y(0) = 1$ donne $A + B = 1$

$y(2) = 2$ donne $Ae^{2} + Be^{-2} = 2$

D'où $A = \frac{2 - e^{-2}}{e^{2} - e^{-2}}$ et $B = \frac{e^{-2} - 2}{e^{2} - e^{-2}}$ donc la solution f est $f(x) = \frac{2 - e^{-2}}{e^{2} - e^{-2}}\ e^{x} + \frac{e^{-2} - 2}{e^{2} - e^{-2}}\ e^{-x}$

Exercice 18

a) $(E) \Leftrightarrow f'' = \left(\frac{1}{3}\right)^2 f$

Les solutions sont les fonctions $y = A\,e^{\frac{1}{3}x} + B\,e^{-\frac{1}{3}x}$, $A \in \mathbb{R}$, $B \in \mathbb{R}$

$y\left(\frac{1}{3}\right) = 1$ donne $A\,e^{-\frac{1}{9}} + B\,e^{-\frac{1}{9}x} = 1$

$y(1) = 18$ donne $A\,e^{\frac{1}{3}} + B\,e^{\frac{2}{9}x} = 18$

D'où $A = \frac{18 - e^{-\frac{2}{9}}}{e^{\frac{1}{3}} - e^{-\frac{1}{9}}}$ et $B = \frac{e^{\frac{4}{9}} - 18\,e^{\frac{2}{9}}}{e^{\frac{1}{3}} - e^{-\frac{1}{9}}}$ donc la solution f est

$$f(x) = \frac{18 - e^{-\frac{2}{9}}}{e^{\frac{1}{3}} - e^{-\frac{1}{9}}}\ e^{\frac{1}{3}x} + \frac{e^{\frac{4}{9}} - 18\, e^{\frac{2}{9}}}{e^{\frac{1}{3}} - e^{-\frac{1}{9}}}\ e^{-\frac{1}{3}x}$$

b) $(E) \Leftrightarrow f'' = \left(\frac{3}{2}\right)^2 f$

Les solutions sont les fonctions $y = A\, e^{\frac{3}{2}x} + B\, e^{-\frac{3}{2}x}$, $A \in \mathbb{R}$, $B \in \mathbb{R}$

Lire f ' (0) = 0 au de f(0) = 0

On a $y' = \frac{3}{2} A\, e^{\frac{3}{2}x} - \frac{3}{2} B\, e^{-\frac{3}{2}x}$

De plus $\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$ d'où $\begin{cases} A + B = 1 \\ A - B = 0 \end{cases}$ donc $\begin{cases} A = \frac{1}{2} \\ A = \frac{1}{2} \end{cases}$

Par suite la solution cherchée est $f(x) = \frac{1}{2}\, e^{\frac{3}{2}x} + \frac{1}{2}\, e^{-\frac{3}{2}x}$

ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DU TYPE $y'' = -\omega^2 y$ (ω nombre réel non nul)

Exercices de fixation

Exercice 19

a) $(E) \Leftrightarrow y'' = -y$

Les solutions sont les fonctions $y = A\, cosx + B\, sinx$, $A \in \mathbb{R}$, $B \in \mathbb{R}$

b) $(E) \Leftrightarrow y'' = -2^2\, y$

Les solutions sont les fonctions $y = A\, cos2x + B\, sin2x$, $A \in \mathbb{R}$, $B \in \mathbb{R}$

c) $(E) \Leftrightarrow y'' = -3^2\, y$

Les solutions sont les fonctions $y = A\, cos3x + B\, sin3x$, $A \in \mathbb{R}$, $B \in \mathbb{R}$

Exercice 20

a) $(E) \Leftrightarrow y'' = -\left(\frac{1}{2}\right)^2 y$

Les solutions sont les fonctions $y = A\,cos\left(\frac{1}{2}x\right) + B\,sin\left(\frac{1}{2}x\right)$, $A \in \mathbb{R}$, $B \in \mathbb{R}$

b) $(E) \Leftrightarrow y'' = -\left(\frac{3}{4}\right)^2 y$

Les solutions sont les fonctions $y = A\,cos\left(\frac{3}{4}x\right) + B\,sin\left(\frac{3}{4}x\right)$, $A \in \mathbb{R}$, $B \in \mathbb{R}$

c) $(E) \Leftrightarrow y'' = -\left(\frac{7}{2}\right)^2 y$

Les solutions sont les fonctions $y = A\,cos\left(\frac{7}{2}x\right) + B\,sin\left(\frac{7}{2}x\right)$, $A \in \mathbb{R}$, $B \in \mathbb{R}$

Exercice 21

a) $(E) \Leftrightarrow y'' = -2^2 y$

La solution générale est f tel que $f(x) = A\,cos(2x) + B\,sin(2x)$, $A \in \mathbb{R}$, $B \in \mathbb{R}$

On a que $f'(x) = -2A\,sin(2x) + 2B\,cos(2x)$

On a $A = 1$ et $B = -1$ donc $f(x) = cos(2x) - sin(2x)$

b) $(E) \Leftrightarrow y'' = -y$

La solution générale est f tel que $f(x) = A\,cos(x) + B\,sin(x)$, $A \in \mathbb{R}$, $B \in \mathbb{R}$

On a $A = 1$ et $B = 4$ donc $f(x) = cos(2x) + 4sin(2x)$

Exercice 22

a) $(E) \Leftrightarrow y'' = -\left(\frac{1}{3}\right)^2 y$

Les solutions sont les fonctions $y = A\,cos\left(\frac{1}{3}x\right) + B\,sin\left(\frac{1}{3}x\right)$, $A \in \mathbb{R}$, $B \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} A\cos\left(\frac{\pi}{9}\right)+B\sin\left(\frac{\pi}{9}\right)=1 \\ A\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+B\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=18 \end{cases}$$ d'où

$$\begin{cases} A+\sqrt{3}\,B=36 \\ (36-\sqrt{3}\,B)\cos\left(\frac{\pi}{9}\right)+B\sin\left(\frac{\pi}{9}\right)=1 \end{cases}$$

Donc $\begin{cases} A=36-\sqrt{3}\,B \\ B=\dfrac{1-36\cos\left(\frac{\pi}{9}\right)}{\sqrt{3}\cos\left(\frac{\pi}{9}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{9}\right)} \end{cases}$ par suite

$$y=\left[36-\sqrt{3}\left(\frac{1-36\cos\left(\frac{\pi}{9}\right)}{\sqrt{3}\cos\left(\frac{\pi}{9}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{9}\right)}\right)\right]\cos\left(\frac{1}{3}x\right)+$$
$$\frac{1-36\cos\left(\frac{\pi}{9}\right)}{\sqrt{3}\cos\left(\frac{\pi}{9}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{9}\right)}\sin\left(\frac{1}{3}x\right)$$

b) $(E)\Leftrightarrow y''=-\left(\frac{3}{4}\right)^2 y$

Les solutions sont les fonctions $y=A\cos\left(\frac{3}{4}x\right)+B\sin\left(\frac{3}{4}x\right)$, $A\in\mathbb{R}$, $B\in\mathbb{R}$

$y(0)=1$ et $y\left(\frac{3\pi}{4}\right)=2$ donc

$\begin{cases} A=1 \\ B=\dfrac{2-\cos\left(\frac{9\pi}{16}\right)}{\sin\left(\frac{9\pi}{16}\right)} \end{cases}$ par suite $f(x)=\cos\left(\frac{3}{4}x\right)+$
$\left(\dfrac{2-\cos\left(\frac{9\pi}{16}\right)}{\sin\left(\frac{9\pi}{16}\right)}\right)\sin\left(\frac{3}{4}x\right)$

EXERCICES DE RENFORCEMENT / D'APPROFONDISSEMENT

EXERCICE 1

1. $(E)\Leftrightarrow y''=-2^2 y$

Les solutions sont : $y=A\cos(2x)+B\sin(2x)$, $A\in\mathbb{R}$, $B\in\mathbb{R}$

2. On a $f'(x) = -2A\, sin(\, 2x\,) + 2B\, cos(\, 2x\,)$

3. $\begin{cases} A\, cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + B\, sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \\ -2A\, sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + 2B\, cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} B\, = 2 \\ -2\, A\, = -1 \end{cases}$

$\begin{cases} B\, = 2 \\ A\, = \frac{1}{2} \end{cases}$

Donc $f(x) = \frac{1}{2}\, cos(\, 2x\,) + 2sin(\, 2x\,)$

EXERCICE 2

1. a) $(E'_1\,) : y' = y$

La solution générale est $y = Ce^x\,, C\, \in \mathbb{R}$

On a $f'(x) = e^x$ donc f est solution de $(\, E_1'\,)$

b) $f(x) = e^x + k + 1$ est solution de $(E_1\,)$ si et seulement si $e^x = e^x + k + 1$ donc $k = -1$

cette solution est donc $f(x) = e^x - 1$

2. Une solution de $(E_2\,)$ est $f(x) = e^x - b$

3. Une solution de $(\, E\,)$ est $f(x) = e^x - \frac{b}{a}$

EXERCICE 3

1. $(E) \Leftrightarrow y'' = -\left(\frac{3}{2}\right)^2 y$

Les solutions sont les fonctions $t\, \mapsto\, A\, cos\left(\frac{3}{2}t\right) + B\, sin\left(\frac{3}{2}t\right), A\, \in \mathbb{R}\,,$ $B\, \in \mathbb{R}$

2. a) on a $f(\,0\,) = 1$ et $f'\left(\,\frac{\pi}{6}\,\right) = 0$

b) $f'\,(t) = -\,\frac{3}{2}A\, sin\left(\frac{3}{2}t\right) + \frac{3}{2}B\, cos\left(\frac{3}{2}t\right)$

on a $\begin{cases} A = 1 \\ -\frac{3}{2} A \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + \frac{3}{2} B \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0 \end{cases}$ donc $\begin{cases} A = 1 \\ B = A \end{cases}$ d'où $\begin{cases} A = 1 \\ B = 1 \end{cases}$

par suite $f(t) = \cos\left(\frac{3}{2}t\right) + \sin\left(\frac{3}{2}t\right)$

3. $\frac{1}{\sqrt{2}} f(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos\left(\frac{3}{2}t\right) + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin\left(\frac{3}{2}t\right) = \cos\left(\frac{3}{2}t - \frac{\pi}{4}\right)$

Donc $f(t) = \sqrt{2} \cos\left(\frac{3}{2}t - \frac{\pi}{4}\right)$

EXERCICE 4

1. $(E) \Leftrightarrow y'' = -5^2 y$

Les solutions sont les fonctions $x \mapsto A\cos(5x) + B\sin(5x)$, $A \in \mathbb{R}$, $B \in \mathbb{R}$

2. on a $f'' = -5^2 f$; $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = -2$ et $f'^{(0)} = -5$

$f'(x) = -5A\sin(5x) + \frac{3}{2} B\cos(5x)$

on a $\begin{cases} A\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + B\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -2 \\ -5A\sin(0) + \frac{3}{2} B\cos(0) = (5 \end{cases}$ donc $\begin{cases} A = \sqrt{3} \\ B = -1 \end{cases}$

par suite $f(x) = \sqrt{3}\cos(5x) - \sin(5x)$

3. on a : $2\cos\left(5x + \frac{\pi}{6}\right) = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \cos(5x) - 2 \times \frac{1}{2} \sin(5x)$

$= \sqrt{3}\cos(5x) - \sin(5x)$

Par suite $f(x) = 2\cos\left(5x + \frac{\pi}{6}\right)$

EXERCICE 5

1. On a : $g'(x) = e^{2x} + 2xe^{2x}$

et $g'(x) - 2g(x) = e^{2x} + 2xe^{2x} - e^{2x} - 2xe^{2x} = e^{2x}$ donc est solution de (E)

2. les solutions de (G) sont les fonctions $x \mapsto Ce^{2x}$, $C \in \mathbb{R}$

3. $f - g$ solution de $(G) \Leftrightarrow (f-g)' = 2\,(f-g)$

$$\Leftrightarrow f' - 2f = g' - 2g$$

$$\Leftrightarrow f' - 2f = e^{2x}$$

$$\Leftrightarrow f \text{ solution de } (E)$$

4. on a $f - g = Ce^{2x}$ d'où $f(x) = Ce^{2x} + g(x) = Ce^{2x} + xe^{2x}$, $C \in \mathbb{R}$

5. $f(1) = 0$ donc $C = e^{-1}$

La solution est $h(x) = e^{2x}(x + e^{-1})$

EXERCICE 6

1. $(1) \Leftrightarrow y' = \frac{1}{n}\, y$

Les solutions sont les fonctions $x \mapsto Ce^{\frac{1}{n}x}$, $C \in \mathbb{R}$

2. On a $g(x) = ax + b$

g est solution de $(2) \Leftrightarrow g'(x) - \frac{1}{n}\, g(x) = -\frac{x+1}{n(n+1)}$

$$\Leftrightarrow a - \frac{1}{n}(ax+b) = -\frac{x+1}{n(n+1)}$$

$$\Leftrightarrow (-an + a)x + an^2 + na - bn - b = -x - 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a(n+1) = 1 \\ (-1-n)b = -1 - an(n+1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{n+1} \\ b = 1 \end{cases}$$

Donc $g(x) = \frac{1}{n+1}\, x + 1$

3. a) $h - g$ solution de $(1) \Leftrightarrow (h-g)' - \frac{1}{n}\,(h-g) = 0$

$$\Leftrightarrow h' - \frac{1}{n}\, h = g' - \frac{1}{n}\, g$$

$$\Leftrightarrow \quad h' - \frac{1}{n} f = - \frac{x+1}{n(n+1)}$$

$\Leftrightarrow h$ solution de (2)

b)) $h - g$ est solution de (1) donc $h - g = Ce^{\frac{1}{n}x}$

par suite $h(x) = Ce^{\frac{1}{n}x} + g(x)$ enfin $h(x) = Ce^{\frac{1}{n}x} + \frac{1}{n+1}x + 1$

SITUATIONS COMPLEXES

Les solutions sont les fonctions : $t \longmapsto ke^{-tln3}$, $k \in \mathcal{Z}$.

2. $d\theta = -ln(3)\theta dt \Leftrightarrow \theta' = -(ln(3))\theta$, donc θ est solution de l'équation

différentielle $y' = -yln3$.

, on a $\theta(t) = ke^{-tln3}$.

$\theta(0) = 100 - 10 \Leftrightarrow k \times e^0 = 90 \Leftrightarrow k = 90$.

Donc $\theta(t) = 90e^{-tln3}$.

. $\theta(t) < 15 \Leftrightarrow 90e^{-tln3} < 15 \Leftrightarrow e^{-tln3} < \frac{1}{6}$.

$$\Leftrightarrow -tln3 < ln\left(\frac{1}{6}\right) \Leftrightarrow t > \frac{ln\left(\frac{1}{6}\right)}{-ln3}.$$

Or $-\frac{ln\left(\frac{1}{6}\right)}{ln3} \simeq 1{,}63$, donc la température passera au-dessous de 15°C après 1 mn 37 s.

19 STATISTIQUE À DEUX VARIABLES

EXERCICES DE FIXATION

1. Déterminons $Cov(X,Y)$

On a : $\overline{X} = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = \frac{21}{6} = 3{,}5$; $\overline{Y} = \frac{12+13+15+19+21+22}{6} = \frac{102}{6} = 17$

Donc $Cov(X,Y) = \frac{1\times12+2\times13+3\times15+4\times19+5\times21+6\times22}{6} - 3{,}5\times17 = \frac{396}{6} - 59{,}5 = 6{,}5$

2. $V(X) = \frac{1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2}{6} - 3{,}5^2 = 2{,}91$ et $V(Y) = \frac{12^2+13^2+15^2+19^2+21^2+22^2}{6} - 17^2 = 15$

3. Calculons le coefficient de corrélation linéaire

$$r = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{V(X)}\times\sqrt{V(Y)}} = \frac{6{,}5}{1{,}7\times3{,}87} = 0{,}98$$

On a $0{,}87 < 0{,}98 < 1$, donc un ajustement linéaire est approprié

4. a) Déterminons une équation de la droite de régression (D) de Y en X

On a $a = \frac{Cov(X,Y)}{V(X)} = \frac{6{,}5}{2{,}91} = 2{,}23$ et $b = \overline{Y} - a\,\overline{X} = 17 - 2{,}23\times3{,}5 = 9{,}2$

donc $(D) : y = 2{,}23x + 9{,}2$

b) Déterminons une équation de la droite de régression (D') de X en Y

On a $a' = \frac{Cov(X,Y)}{V(Y)} = \frac{6{,}5}{15} = 0{,}43$ et $b' = \overline{X} - a'\overline{Y} = 3{,}5 - 0{,}43\times17 = -3{,}81$

donc $(D') : x = 0{,}43y - 3{,}81$

5. À la fin du septième mois on a : $x = 7$ donc le chiffre d'affaires est

Le chiffre d'affaires de cette pharmacie à la fin du 7e mois est de 25 millions.

EXERCICES DE RENFORCEMENT / D'APPROFONDISSEMENT

EXERCICE 1

Noter dans l'énoncé 9 salariés au lieu de 10

Déterminons le coefficient de corrélation linéaire

On a : $\bar{X} = \frac{15+20+26+34+37+43+44+50+52}{9} = 35{,}66$;

$$\bar{Y} = \frac{600+750+740+990+820+1075+995+910}{9} = \frac{7700}{9} = 855{,}55$$

$$Cov(X,Y) = \frac{286870}{9} - 35{,}66 \times 855{,}55 = 1365{,}53$$

$$V(X) = \frac{15^2+20^2+26^2+34^2+37^2+43^2+44^2+50^2+52^2}{9} - 35{,}66^2 = 152{,}25 \text{ et}$$

$$V(Y) = \frac{600^2+750^2+740^2+990^2+820^2+1075^2+995^2+910^2}{9} - 8555^2 =$$
$20117{,}53$

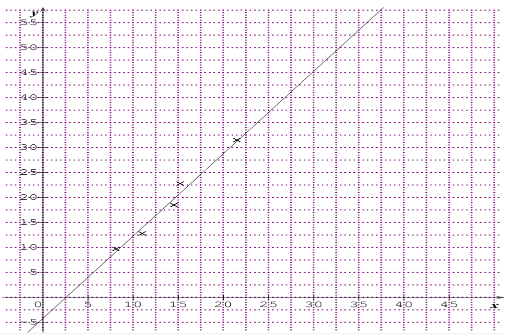
le coefficient de corrélation linéaire est donc

$$r = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{V(X)} \times \sqrt{V(Y)}} = \frac{1365{,}53}{12{,}33 \times 141{,}83} = 0{,}78$$

On a $0 < 0{,}78 < 0{,}87$, donc un ajustement linéaire n'est pas approprié

EXERCICE 2

1. Représentation du nuage de points



2. Déterminons les moyennes et les écarts types de X et Y

On a : $\bar{X} = \frac{8,1+11+14,4+15,2+21,5}{5} = 14,04$; $\bar{Y} = \frac{9,7+12,8+18,5+22,8+31,5}{5} = 18,96$

$V(X) = \frac{8,1^2+11^2+14,4^2+15,2^2+21,5^2}{5} - 14,04^2 = 20,33$ donc $\sigma_X = \sqrt{20,33} = 4,5$

$V(Y) = \frac{9,7^2+12,8^2+18,5^2+22,8^2+31,5^2}{5} - 18,96^2 = 56,72$ donc $\sigma_Y = \sqrt{56,72} = 7,53$

3. Déterminons une équation de la droite de régression (D) de Y en X

On a : $Cov(X,Y) = \frac{8,1\times 9,7+11\times 12,8+14,4\times 18,5+15,2\times 22,8+21,5\times 31,5}{5} - 14,04 \times 18,96 = 33,56$

Calculons le coefficient de corrélation linéaire

$r = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{V(X)}\times\sqrt{V(Y)}} = \frac{33,56}{4,5 \times 7,53} = 0,99$

On a $0,87 < 0,99 < 1$, donc un ajustement linéaire est approprié

On a $a = \frac{Cov(X,Y)}{V(X)} = \frac{33,56}{20,33} = 1,65$ et $b = \bar{Y} - a\,\bar{X} = 18,96 - 1,65 \times 3,5 = -4,22$

donc $(D) : y = 1,65x - 4,22$

EXERCICE 3

Dans l'énoncé, noter 248 ménages au lieu de 500

Y X	1	2	3	TOTAL
Entre 0 et 100	71	24	37	132
Entre 100 et 200	37	4	12	53
Entre 200 et 300	36	11	16	63
TOTAL	144	39	65	248

1. Distribution marginale du nombre d'enfants en pourcentage

y_i	1	2	3
f_i	58	17,7	26,3

2. Distribution marginale des dépenses annuelles de fournitures

x_i	Entre 0 et100	Entre 100 et 200	Entre 200 et 300
n_i	132	53	63

3 . a) $58\ \%$ des ménages ont un enfant

b) $21{,}4\ \%$ des ménages ont des dépenses annuelles comprise entre 100 000 F CFA et 200 000 F CFA

EXERCICE 4

1. Déterminons la valeur de α

On a : $\overline{X} = \frac{1{,}2+1{,}4+1{,}6+1{,}8+2}{5} = 1{,}6$; $\overline{Y} = \frac{13+12+14+16+\alpha}{5} = \frac{55+\alpha}{5}$

$V(X) = \frac{1{,}2^2+14^2+1{,}6^2+1{,}8^2+2^2}{5} - 1{,}6^2 = 0{,}08$; $V(Y) = \frac{4\alpha^2-110\alpha+800}{25}$

Et $Cov(X,Y) = \frac{0{,}4\,\alpha - 4{,}4}{5}$

De plus $\frac{Cov(X,Y)}{V(X)} = \frac{0{,}4\,\alpha - 4{,}4}{0{,}4}$ or $\frac{Cov(X,Y)}{V(X)} = 9$ donc $\frac{0{,}4\,\alpha - 4{,}4}{0{,}4} = 9$

Soit $\alpha = 20$

2. Déterminons le coefficient de corrélation linéaire

Pour $\alpha = 20$ on a $Cov(X,Y) = 0{,}72$ et $V(Y) = 8$ donc $a' = 0{,}09$

On a $aa' = r^2$ or $aa' = 9 \times 0{,}09 = 0{,}81$

D'où $r^2 = 0{,}81$

Donc $r = 0{,}93$ car $Cov(X,Y)$ et r ont le même signe.

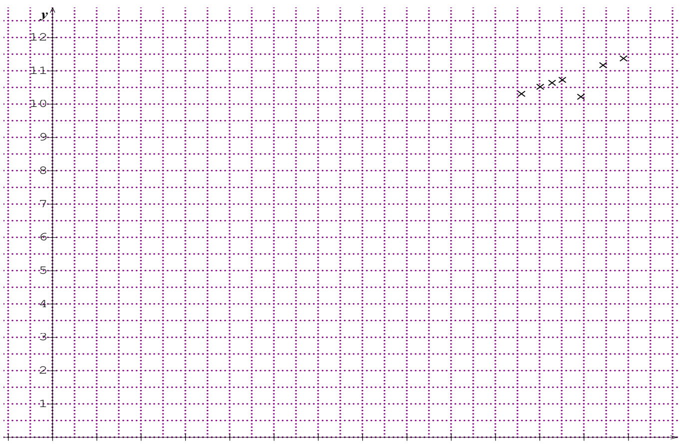
EXERCICE 5

1. On a $t_i = \ln(x_i)$ et $z_i = \ln(y_i)$

Tableau des valeurs

t_i	10,59	11,01	11,28	11,51	11,93	12,43	12,89
z_i	10,31	10,52	10,64	10,73	10,22	11 ,17	11,37

2. Représentation du nuage de points



3. Déterminons une équation de la droite de régression (D) de Z en T

On a : $\bar{T} = \frac{10{,}59 + \cdots \ldots + 12{,}89}{7} = 11{,}66$; $\bar{Z} = \frac{10{,}31 + \cdots \ldots + 11{,}37}{7} = 10{,}80$

$V(T) = \frac{10{,}59^2 + \cdots \ldots + 12{,}89^2}{7} - 11{,}66^2 = 0{,}55$ et

$V(Z) = \frac{10{,}31^2 + \ldots + 11{,}37^2}{7} - 10{,}80^2 = 0{,}11$

$Cov(T,Z) = \frac{10{,}59 \times 10{,}31 + \ldots + 12{,}89 \times 11{,}37}{7} - 11{,}66 \times 10{,}80 = 0{,}25$

On a $a = \frac{Cov(T,Z)}{V(T)} = \frac{0,25}{0,55} = 0,45$ et $b = \bar{Y} - a\,\bar{X} = 10,80 - 0,45 \times 11,66 = 5,45$

donc $(D) : z = 0,45t + 5,45$

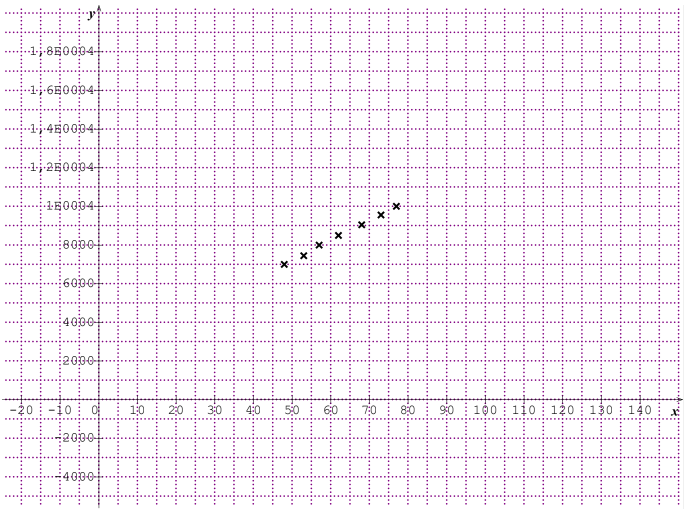
4. on a $z = lny$ et $t = lnx$

D'où $lny = 0,45\ lnx + 5,45$ donc $y = e^{5,45}\ x^{0,45}$

5. pour $x = 20\ 000$ on a $y = e^{5,45}\ 20\ 000^{0,45} \simeq 20\ 000$

EXERCICE 6

1. Représentation graphique du nuage de points



2. Déterminons les coordonnées du point moyen

On a $\bar{X} = \frac{48+53+57+62+68+73+77}{7} = 62,57$; $\bar{Y} = \frac{7000+7450+8000+8500+9050+9050+10000}{7} = 8507,14$

Donc $G(62,57\ ; 8507,14\ )$

3. Déterminons le coefficient de corrélation linéaire

On a : $Cov(X,Y) = 10038,8$; $V(X) = 97,38$ et $V(Y) = 1036731,24$

Donc $r = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{V(X)} \times \sqrt{V(Y)}} = \frac{10038,8}{9,86 \times 1018,2} = 0,99$

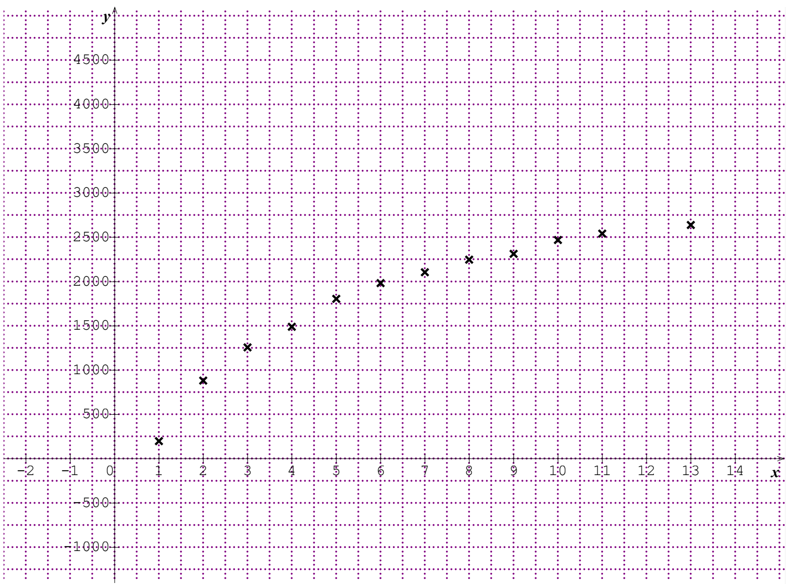
On a $0,87 < 0,99 < 1$, donc un ajustement linéaire est approprié

4. On a $a = \frac{Cov(X,Y)}{V(X)} = 103,08$ et $b = \bar{Y} - a\,\bar{X} = 2057,25$

donc $(D) : y = 1,03,08x + 2057,25$

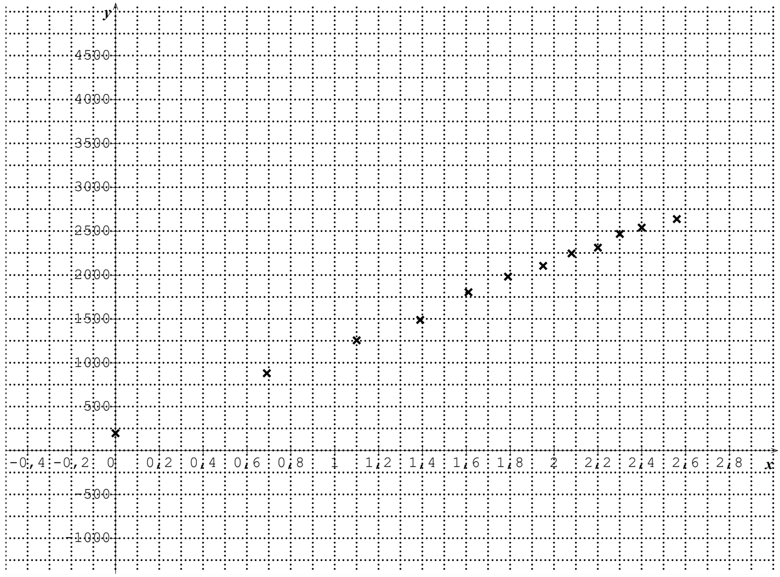
EXERCICE 7

1. Représentation graphique du nuage de points $(x_i \,;\, y_i)$



2. Représentation graphique du nuage de points $(x'_i \,;\, y_i)$ avec $x' = lnx$

x'_i	0	0,69	1,1	1,39	1,61	1,79	1,95	2,08	2,2	2,3	2,4	2,56
z_i	198	881	1256	1489	1804	1983	2104	2247	2312	2468	2541	2639



3. Déterminons le coefficient de corrélation linéaire de la série $(x';\ y)$

On a : $\overline{X'} = \frac{0+0{,}69+\ \ldots\ +2{,}4+2{,}56}{12} = 1{,}67$; $\overline{Y} = \frac{189+881+\cdots+2541+2639}{12} = 1826{,}83$

$$V(X') = \frac{0^2+0{,}69^2+\ \ldots\ +2{,}4^2+2{,}56^2}{12} - 1{,}67^2 = 0{,}55$$

$$V(Y) = \frac{189^2+881^2+\ \ldots +2541^2+2639^2}{12} - 1826{,}83^2 = 506825{,}31$$

$$Cov(X', Y) = 524{,}76$$

Donc

$$r = \frac{Cov(X4, Y)}{\sqrt{V(X4)} \times \sqrt{V(Y)}} = \frac{524{,}76}{0{,}74 \times 711{,}93} = 0{,}99$$

On a $0{,}87 < 0{,}99 < 1$, donc un ajustement linéaire est approprié

4. Déterminons une équation de la droite de régression (D) de Y en X'

On a $a = \frac{Cov(X', Y)}{V(X')} = \frac{524{,}76}{0{,}55} = 954{,}10$ et $b = \overline{Y} - a\,\overline{X'} = 233{,}49$

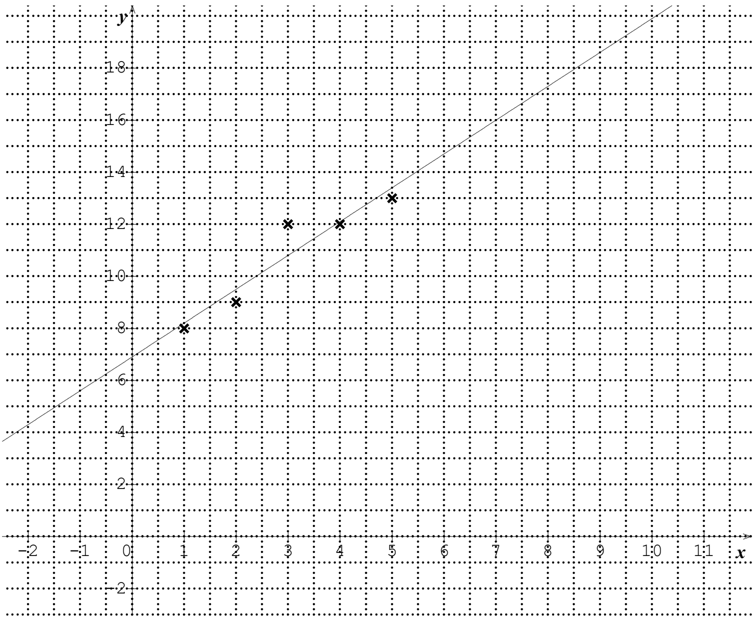
donc $(D) : y = 954{,}10\, x' + 233{,}49$

5. On a $x' = lnx$ donc $(D) : y = 954{,}10\, lnx + 233{,}49$

Ainsi $a = 954{,}10$ et $b = 233{,}49$

EXERCICE 8

1. Représentation graphique du nuage de points $(x_i\ ;\ y_i)$



2. Déterminons les coordonnées du point moyen G

On a : $\bar{X} = \frac{1+2+3+4+5}{5} = 3\ ;\ \bar{Y} = \frac{8+9+12+12+13}{5} = 10{,}8$

Donc $G(3\ ;10{,}8)$

Dans la troisième question, il s'agit de déterminer la variance au lieu de la moyenne

3. $V(X) = \frac{1^2+2^2+3^2+4^2+5^2}{5} - 3^2 = 1{,}99$ donc $\sigma_X = \sqrt{1{,}99} = 1{,}41$

et $V(Y) = \frac{8^2+9^2+12^2+12^2+13^2}{5} - 10{,}8^2 = 3{,}75$ donc $\sigma_X = \sqrt{3{,}75} = 1{,}93$

4. Calculons la covariance de (X, Y)

$$Cov(X,Y) = \frac{1\times8+2\times9+3\times12+4\times12+5\times13}{5} - 1{,}99 \times 3{,}75 = 2{,}6$$

5. Calculons le coefficient de corrélation linéaire (X, Y)

$$r = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{V(X)}\times\sqrt{V(Y)}} = \frac{2{,}6}{1{,}41\times1{,}93} = 0{,}94$$

On a $0{,}87 < 0{,}94 < 1$, donc un ajustement linéaire est approprié

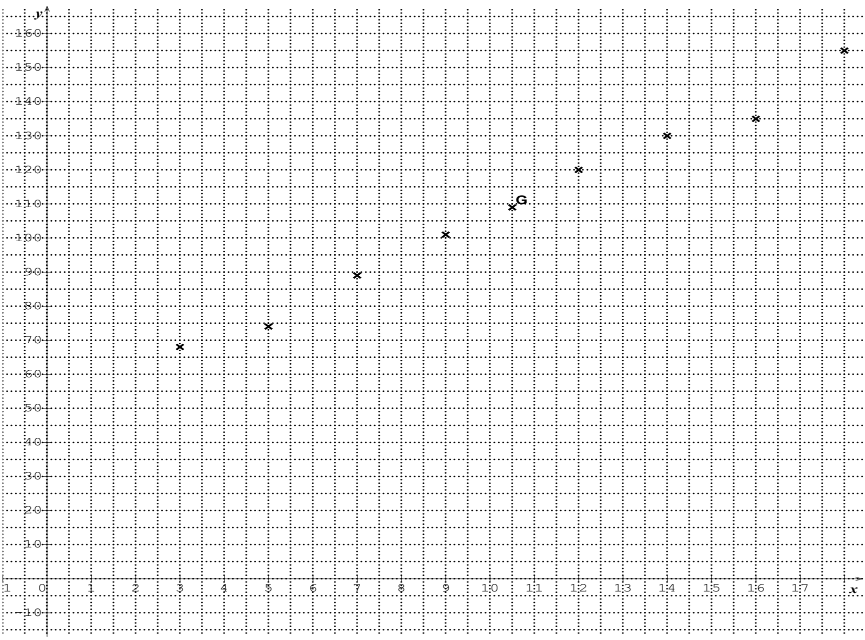
6. a) Déterminons une équation de la droite de régression (D) de Y en X

On a $a = \frac{Cov(X,Y)}{V(X)} = \frac{2{,}6}{1{,}99} = 1{,}3$ et $b = \bar{Y} - a\,\bar{X} = 10{,}8 - 1{,}3 \times 3 = 6{,}9$

donc $(D) : y = 1{,}3x + 6{,}9$

EXERCICE 9

1. Représentation graphique du nuage de points $(x_i\ ;\ y_i)$



2. a) Déterminons les coordonnées du point moyen G

On a : $\bar{X} = \frac{3+5+\cdots\ldots+16+18}{8} = 10{,}5$; $\bar{Y} = \frac{68+74+\cdots\ldots\ldots+135+155}{8} = 109$

donc $G(10{,}5\,;109\,)$

b) Construction du point G

3. a) Déterminons la covariance de la série double $(x_i\ ;\ y_i)$

$$Cov(\,X,Y) = \frac{3\times68+5\times74+\ \ldots\ldots+16\times135+8\times155}{8} - 10{,}5\times109 = 145$$

b) Déterminons une équation de la droite de régression $(\,D\,)$ de y en fonction de x

On a : $V(\,X) = \frac{3^2+5^2+\ \ldots\ldots+16^2+18^2}{8} - 10{,}5^2\ = 25{,}25$

et $V(\,Y) = \frac{68^2+74^2+\ \ldots\ldots\ldots+135^2+155^2}{5} - 109^2\ = 840{,}5$

De plus $a = \frac{Cov(\,X,Y)}{V(\,X)} = \frac{145}{25{,}25} = \frac{580}{101}$ et $b = \bar{Y} - a\,\bar{X} = 109 - \frac{580}{101}\times 10{,}5 = \frac{4919}{101}$

donc $(\,D\,) : y = \frac{580}{101}x + \frac{4919}{101}$

c) Calculons le coefficient de corrélation linéaire r

$$r = \frac{Cov(\,X,Y)}{\sqrt{V(\,X)}\times\sqrt{V(\,Y)}} = \frac{145}{5{,}02\times28{,}99} = 0{,}99$$

On a $0{,}87 < 0{,}99 < 1$, donc un ajustement linéaire est approprié

d) Pour : $x = 24$, on a : $y = \frac{580}{101}\ \times 24\ + \frac{4919}{101} = 186{,}52\ \simeq 187$

Dans sa $24^{ème}$ année un ouvrier a 187 000 F

EXERCICE 10

1. Le nombre 7 est le nombre de véhicule de 25 CV dont la durée des pneumatiques est de

4 milliers de kilomètres.

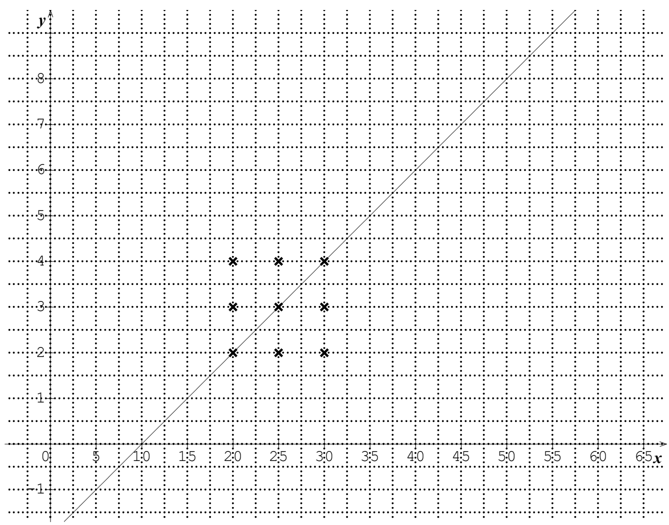
2. a) Série marginale de x

x	20	25	30
Fréquence	38	32	30

Série marginale de y

y	2	3	4
Fréquence	30	31	39

b) Représentation du nuage de points



c) La droite (D) passe par les points $A(20;2)$ et $B(25;3)$

Soit $M(x\,;y)$ un point du plan , on a : $\overrightarrow{AB}(5;1)$ et $\overrightarrow{AM}(x-20\,;y-2)$

$$M \in (AB) \Leftrightarrow det\left(\overrightarrow{AM}\,;\,\overrightarrow{AB}\right) = 0$$

Soit $x - 5y - 10 = 0$

Une équation de la droite (D) est donc $y = \frac{1}{5}x - 2$

3. a) On a

$\bar{X} = \frac{20\times38+25\times32+30\times30}{100} = \frac{2460}{100} = 24{,}6$ et $\bar{Y} = \frac{2\times30+3\times31+4\times39}{100} = \frac{309}{100} = 3{,}09$

Donc $G\ (24{,}6\ ;3{,}09\ )$

b) Déterminons la variance de x et la variance de y

$$V(\,X) = \frac{20^2\times38+25^2\times32+30^2\times30}{100} - 24{,}6^2 = 16{,}84$$

et $V(\,Y) = \frac{2^2\times30+3^2\times31+4^2\times39}{100} - 3{,}09^2 = 0{,}69$

c) Déterminons la covariance de $(\,x, y\,)$

$Cov(\,X,Y) = \frac{1}{100}(20\times2\times0+20\times3\times8+20\times4\times30\ +25\times2\times5\ +25\times3\times20+25\times4\times7\ +30\times2\times35\ +30\times3\times3\ +30\times4\times2\,) - 24{,}6\times3{,}09$

$$= \frac{1}{100}\times7940 - 76{,}01 = 3{,}39$$

d) Déterminons une équation de la droite de régression $(\,D\,)$ de Y en X

On a $a = \frac{Cov(\,X,Y)}{V(\,X)} = \frac{3{,}39}{16{,}84} = 0{,}2$ et

$b = \bar{Y} - a\,\bar{X} = 3{,}09 - 0{,}2\times24{,}6 = -1{,}83$.

Donc $(\,D\,)$: $y = 0{,}2\,x - 1{,}83$

e) Déterminons une équation de la droite de régression $(\,D'\,)$ de X en Y

On a $a' = \frac{Cov(\,X,Y)}{V(\,Y)} = \frac{3{,}39}{0{,}69} = 4{,}91$ et $b' = \bar{X} - a'\,\bar{Y} = 24{,}6 - 4{,}91\times3{,}09 = 9{,}43$.

Donc $(\,D'\,)$: $x = 4{,}91\,y + 9{,}3$

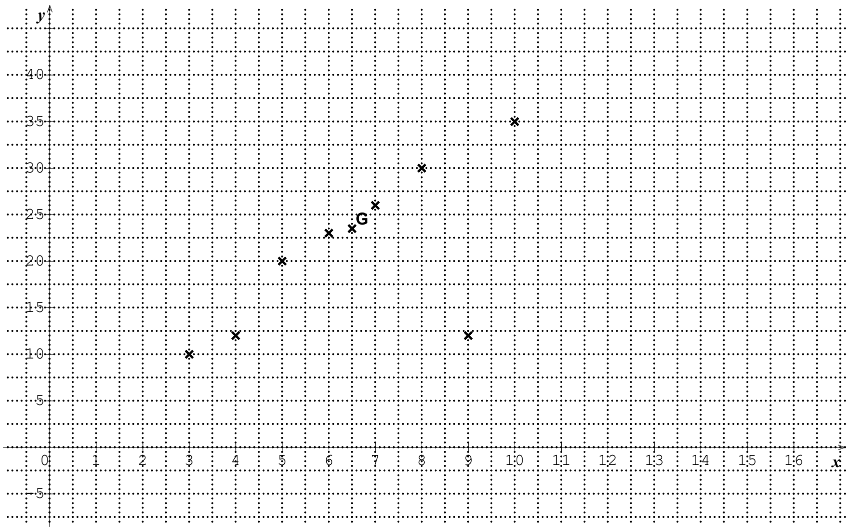
4. Calculons le coefficient de corrélation linéaire r

$$r = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{V(X)} \times \sqrt{V(Y)}} = \frac{3,39}{4,10 \times 0,83} = 0,99$$

On a $0,87 < 0,99 < 1$, donc un ajustement linéaire est approprié.

EXERCICE 11

1. Représentation graphique du nuage de points $(x_i\ ;\ y_i)$



2. Déterminons les coordonnées du point moyen G

On a : $\overline{X} = \frac{3+4+\cdots\ldots+9+10}{8} = 6,5$; $\overline{Y} = \frac{10+12+\cdots\ldots\ldots+32+35}{8} = 23,5$

donc $G(6,5\ ;23,5\ )$ construction du point G (voir courbe)

3. a) Déterminons le coefficient de corrélation linéaire de la série double $(x_i\ ;\ y_i)$

On a : $Cov(X,Y) = \frac{3\times10+4\times12+\ \ldots\ldots+9\times32+10\times35}{8} - 6,5 \times 23,5 = 19,25$

$V(X) = \frac{3^2+4^2+\ \ldots\ldots+9^2+10^2}{8} - 6,5^2\ = 5,25$ et $V(Y) = \frac{10^2+12^2+\ \ldots\ldots+32^2+35^2}{8} - 23,5^2\ = 72,49$

D'où $\quad r = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{V(X)} \times \sqrt{V(Y)}} = \frac{19{,}25}{2{,}29 \times 8{,}51} = 0{,}98$

b) On a $0{,}87 < 0{,}98 < 1$, donc un ajustement linéaire est approprié

4. Déterminons une équation de la droite de régression (D) de y en fonction de x

On a : $a = \frac{Cov(X,Y)}{V(X)} = \frac{19{,}25}{5{,}25} = 3{,}66$ et $b = \bar{Y} - a\,\bar{X} = 23{,}5 - 3{,}66 \times 6{,}5 = -0{,}33$

donc $(D) : y = 3{,}66\,x - 0{,}33$

5. a) Pour $x = 12$ on a $y = 3{,}66 \times 12 - 0{,}33 = 43{,}59 \simeq 44$

La quantité d'essence est d'environ 44 litres

b) Déterminons une équation de la droite de régression (D') de x en fonction de y

On a : $a' = \frac{Cov(X,Y)}{V(Y)} = \frac{19{,}25}{72{,}49} = 0{,}26$ et $b = \bar{X} - a'\,\bar{Y} = 6{,}5 - 0{,}26 \times 23{,}5 = 0{,}26$

donc $(D') : x = 0{,}26\,y + 0{,}26$

Pour $y = 50$ on a $x = 0{,}26 \times 50 + 0{,}26 = 13{,}26 \simeq 14$

Une voiture qui consomme 50 litres d'essence pour cette distance a une puissance d'environ14 Chevaux

SITUATIONS COMPLEXES

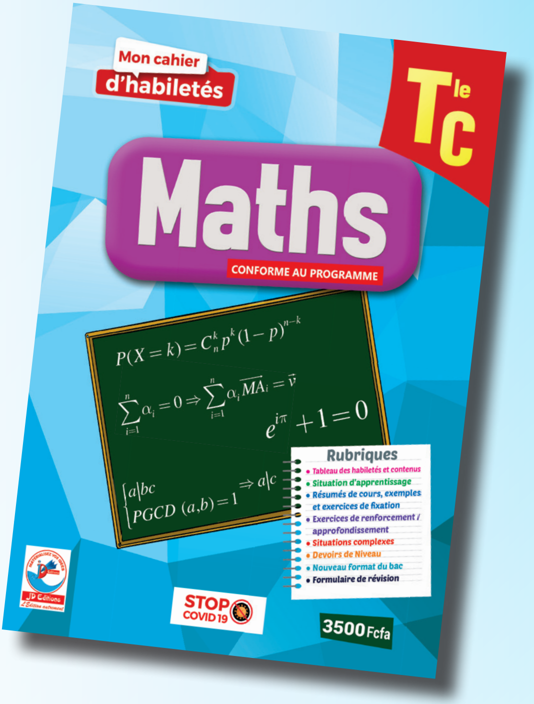
Exercice 12

- Déterminer une équation de la droite de régression de *y* en *x*.
  y = 86,05x +1014,85
- Estimer le coefficient de corrélation linéaire
  r = 0,96 d'où l'existence d'une forte corrélation linéaire
- Déterminer la plus petite valeur de *x* pour que :
  86,05*x* +1014,85 $\geq$ 3000
  x vaut 24
- Conclure

X = 24 correspond au mois de décembre 2019

Achevé d'imprimer sous les presses de : JD Éditions
Pour le compte de JD Éditions.
Tél. : 25 23 00 17 50
Mise en page : JD Éditions

De la même collection



MESURES BARRIÈRES