CORRECTIONS Leçon 2 : RACINE CARREE

Situation d'apprentissage

- <u>**Faire dégager le contexte**</u>

Pour cela on peut poser les questions du genre :

- **De quel évènement parle le texte ?** Le texte parle de déterminer***l***a longueur de grillage nécessaire pour clôturer la ferme d'un agriculteur
- **Quels sont les acteurs de cet évènement ?** Les acteurs sont les élèves de niveau 3ème et d'un agriculteur.
- **Où se déroule l'évènement ?** L'évènement se déroule à Boundiali**.**

•<u>**Faire dégager la (ou les) circonstance(s)**</u>

Pour cela on peut poser les questions du genre

- **Quel(s) problème(s) se pose(nt) dans cet évènement ?** Le problème qui se pose est de : savoir la longueur de grillage nécessaire pour clôturer la fermed'un agriculteur en forme de carrée et d'aire égale à 500 m^2.
- **Quelle(s) difficulté(s) rencontre(nt) les acteurs de cet évènement ?** L'agriculteur ne sait pas comment déterminer la longueur de grillage, il se confie à son neveu qui à son tour collabore avec ses amis de classe.

•<u>**Faire dégager la (ou les) tâche(s)**</u>

Pour cela on peut poser les questions du genre

- Que décident de faire les acteurs ? Les élèves décident d'effectuer des calculs.

•<u>**Faire la synthèse et annoncer des notions mathématiques convoquées par la situation (le professeur)**</u>

Tout comme ces élèves, nous allons découvrir à travers cette situation une nouvelle leçon intitulée « **RACINE CARREE** », des propriétés et règles de calcul qui vous permettront de régler ce genre de problème qui se pose dans la situation d'apprentissage.

CORRECTIONS

ACTIVITÉ1 : RACINE CARRÉE

1.a) Tous les nombres dont le carré est 49 sont : 7 et -7 ; Tous les nombres dont le carré est 16 sont : 4 et -4

b) on $a^2 = 25$

2.

a	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\sqrt{a}$	0	1	1,414	1,732	2	2,236	2,449	2,645	2,828	3

Exercices de fixation

Exercice1

$2^2 = 4$ donc $\sqrt{4} = 2$

$11^2 = 121$ donc $\sqrt{121} = 11$

$(1,2)^2 = 1,44$ donc $\sqrt{1,44} = 1,2$

Exercice2

$$\sqrt{81} = 9 \; ; \sqrt{0,64} = 0,8 \; ; \sqrt{0,01} = 0,1 \; ; \sqrt{625} = 25$$

Activité 2

1.

a	b	$\sqrt{a+b}$	$\sqrt{a}+\sqrt{b}$	$\sqrt{a\times b}$	$\sqrt{a}\times\sqrt{b}$	$\sqrt{\frac{a}{b}}$	$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$
9	16	25	7	12	12	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$
36	64	10	14	48	48	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$
16	36	$\approx 7,2$	10	24	24	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$
25	4	$\approx 5,4$	7	10	10	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{2}$

2. On remarque que : $\sqrt{a\times b} = \sqrt{a}\times\sqrt{b}$; $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

et que $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a}+\sqrt{b}$ de même $\sqrt{a-b} \neq \sqrt{a}-\sqrt{b}$

Exercices de fixation

Exercice 1

$\sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{25}} = \frac{4}{5}$; $\frac{\sqrt{45}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{45}{5}} = \sqrt{9} = 3$;

$$\sqrt{2}\times\sqrt{8} = \sqrt{2\times 8} = \sqrt{16} = 4$$

$$\sqrt{49\times 121} = \sqrt{49}\times\sqrt{121} = 7\times 11 = 77$$

$$\frac{\sqrt{81}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{81}{3}} = \sqrt{27} = \sqrt{9\times 3} = 3\sqrt{3}$$

$(\sqrt{3})^2 = 3$

Exercice 2

• $\sqrt{28} = \sqrt{4 \times 7} = \sqrt{4} \times \sqrt{7} = 2\sqrt{7}$;•

• $\sqrt{108} - \sqrt{192} = 6\sqrt{3} - 8\sqrt{3} = -2\sqrt{3}$;

• $\dfrac{\sqrt{96}}{\sqrt{72}} = \dfrac{4\sqrt{2} \times \sqrt{3}}{6\sqrt{2}} = \dfrac{2}{3}\sqrt{3}$

Activité3

$(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = a - b$

Exercice de fixation

Exercice 1

- L'expression conjuguée de $\sqrt{5} + \sqrt{3}$ est $\sqrt{5} - \sqrt{3}$
- L'expression conjuguée de $\sqrt{7} - \sqrt{2}$ est $\sqrt{7} + \sqrt{2}$
- L'expression conjuguée de $4 - \sqrt{13}$ est $4 + \sqrt{13}$
- L'expression conjuguée de $\sqrt{3} + 1$ est $\sqrt{3} - 1$
- Une expression conjuguée de $\sqrt{7}$ est $\sqrt{7}$
- Une expression conjuguée de $-\sqrt{11}$ est $\sqrt{11}$

Exercice 2

$(\sqrt{5} + \sqrt{3})(\sqrt{5} - \sqrt{3}) = 5 - 3 = 2$

$(4 - \sqrt{13})(4 + \sqrt{13}) = 16 - 13 = 3$

ACTIVITÉ 2: ENSEMBLE DES NOMBRES RÉELS

1. Les éléments A qui appartiennent à $\mathbb{N}$ sont :7 et 0
2. Les éléments A qui appartiennent à$\mathbb{Z}$ sont :-1 ; 7 ; -5 et 0
3. Les éléments A qui appartiennent à ID sont : :-1 ; 7 ; -5 ; 0 et $\frac{7}{8}$
4. Les éléments A qui appartiennent à$\mathbb{Q}$ sont : -1 ; 7 ; -5 ; 0 ; $\frac{7}{8}$ et $\frac{8}{3}$
5. Les éléments A qui n'appartiennent ni à $\mathbb{N}$, ni à$\mathbb{Z}$, ni à ID, ni à$\mathbb{Q}$ sont : π ; $\sqrt{2}$ et $2 - \sqrt{3}$

Exercices de fixation

Exercice 1

	$\frac{3}{8}$	$5-\sqrt{41}$	$-\frac{9}{13}$	$1-\sqrt{9}$	$(3+\sqrt{2})^0$	$\frac{2\pi}{3}$	0
$\mathbb{N}$					×		×
ID	×			×	×		×
$\mathbb{Z}$				×	×		×
$\mathbb{Q}$	×		×	×	×	×	×
$\mathbb{R}$	×	×	×	×	×	×	×
$\mathbb{R}^*$	×	×	×	×	×	×	

Exercice 2

AFFIRMATIONS	V ou F
$\frac{6}{7}$ est un nombre décimal	F
$-\frac{2}{13}$ est un nombre rationnel	V
$-\frac{5}{16}$ est un nombre décimal	V
$\frac{2\pi}{3}$ est un nombre irrationnel	V
-2,4758 est un nombre réel	V

ACTIVITE 3 : VALEUR ABSOLUE D'UN NOMBRE REEL

Activité

1. Distance à zéro d'un nombre réel

- La distance à zéro de 3 est 3
- La distance à zéro de -5 est 5
- La distance à zéro de -0,2 est 0,2
- La distance à zéro de 0 est 0

2.

a	a^2	$\sqrt{a^2}$
3	9	3
-5	25	5
0,2	0,04	0,2
0	0	0

3. On constate que $\sqrt{a^2} = a \ si \ a \geq 0 \ et \ \sqrt{a^2} = -a \ si \ a < 0$

Exercices de fixation

Exercice 1

a	0,023	$-\sqrt{3}$	$2\sqrt{5}$	-7π
$\lvert a \rvert$	0,023	$\sqrt{3}$	$2\sqrt{5}$	7π

Exercice 2

AFFIRMATIONS	V ou F
$\sqrt{15^2} = 15$	V
$\sqrt{(-22)^2} = -22$	F
$\sqrt{(-\pi)^2} = \pi$	F
$\sqrt{(-41)^2} = 41$	V

Activité : Racine carrée et puissance

1. $5^6 = (5^3)^2 donc \sqrt{5^6} = \sqrt{(5^3)^2} = 5^3$
2. $5^7 = 5 \times (5^3)^2 donc \sqrt{5 \times 5^6} = \sqrt{5} \times \sqrt{(5^3)^2} = 5^3\sqrt{5}$

Exercices de fixation

Exercice1

$\sqrt{11^4} = 11^2$; $\sqrt{5^{20}} = 5^{10}$; $\sqrt{2^{2022}} = 2^{1011}$

Exercice2

$\sqrt{17^5} = 17^2\sqrt{17}$; $\sqrt{10^{21}} = 10^{10}\sqrt{10}$; $\sqrt{41^{17}} = 41^8\sqrt{41}$

Exercices de renforcement

Exercice 1 Réponse

$A = \sqrt{2} \times \sqrt{8} = \sqrt{2 \times 8} = \sqrt{16} = 4$

$B = \sqrt{5^4} = \sqrt{(5^2)^2} = 5^2 = 25$

$C = \sqrt{2 \times 4 \times 8} = \sqrt{8 \times 8} = \sqrt{8^2} = 8$

$D = \sqrt{1000} \times \sqrt{10} = \sqrt{1000 \times 10} = \sqrt{10^4} = 10^2 = 100$

$E = \sqrt{5^3 \times 2 \times 10} = \sqrt{5^3 \times 2 \times 2 \times 5} = \sqrt{5^4 \times 2^2} = 5^2 \times 2 = 50$

$F = \sqrt{2} \times \sqrt{3} \times \sqrt{6} = \sqrt{2 \times 3} \times \sqrt{6} = \sqrt{6} \times \sqrt{6} = \left(\sqrt{6}\right)^2 = 6$

$G = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{32}} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{16}} = \dfrac{1}{4}$

$H = \sqrt{7} \times \dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{16}} = \dfrac{\sqrt{49}}{\sqrt{16}} = \dfrac{7}{4}$

$I = 2\sqrt{7} \times \sqrt{28} = 2\sqrt{2} \times 2\sqrt{7} = 28$

$J = \sqrt{\dfrac{18}{50}} = \sqrt{\dfrac{2 \times 9}{2 \times 25}} = \dfrac{\sqrt{9}}{\sqrt{25}} = \dfrac{3}{5}$

$K = \sqrt{0{,}12} \times 8\sqrt{3} = 8\sqrt{0{,}12 \times 3} = 8\sqrt{0{,}36} = 8\sqrt{36 \times 10^{-2}} = 8 \times 6 \times 0{,}1 = 4{,}8$

$L = \dfrac{\sqrt{0{,}32} \times \sqrt{0{,}2}}{\sqrt{3{,}6}} = \sqrt{\dfrac{0{,}064}{3{,}6}} = \sqrt{\dfrac{64}{3600}} = \dfrac{8}{60} = \dfrac{2}{15}$

Exercice2 : **Réponse**

$A = \sqrt{9} + \sqrt{64} = 3 + 8 = 11$

$B = \sqrt{0{,}36} - \sqrt{0{,}25} = 0{,}6 - 0{,}5 = 0{,}1$

$C = \sqrt{0{,}04} + \sqrt{0{,}01} + \sqrt{10^{-4}} = 0{,}2 + 0{,}1 + 10^{-2} = 0{,}3 + 0{,}01 = 0{,}31$

$D = \sqrt{16} - \sqrt{1{,}69} + \sqrt{0{,}81} = 4 - 1{,}3 + 0{,}9 = 3{,}6$

$E = \sqrt{2020 \times 2021 + 2021} = \sqrt{2021(2020 + 1)} = \sqrt{2021 \times 2021} = 2021$

Exercice 3 :Réponse

$\mathrm{A} = 3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - 9\sqrt{2} = (3 + 5 - 9)\sqrt{2} = -\sqrt{2}$

$\mathrm{B} = \dfrac{5\sqrt{3}}{2} - 3\sqrt{3} = \left(\dfrac{5}{2} - 3\right)\sqrt{3} = \dfrac{5 - 6}{2}\sqrt{3} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\mathrm{C} = -\sqrt{5} + 4\sqrt{5} - \dfrac{7\sqrt{5}}{3} = \left(-1 + 4 - \dfrac{7}{3}\right)\sqrt{5} = \dfrac{9 - 7}{3}\sqrt{5} = \dfrac{2}{3}\sqrt{5}$

$\mathrm{D} = \dfrac{2\sqrt{7}}{5} + \sqrt{7} - \dfrac{\sqrt{7}}{3} = \left(\dfrac{2}{5} + 1 - \dfrac{1}{3}\right)\sqrt{7} = \left(\dfrac{7}{5} - \dfrac{1}{3}\right)\sqrt{7} = \dfrac{21 - 5}{15}\sqrt{7} = \dfrac{16}{15}\sqrt{7}$

Exercice 4 : **Réponse**

$\mathrm{A} = \sqrt{20} - 3\sqrt{5} + \sqrt{45} = \sqrt{4 \times 5} - 3\sqrt{5} + \sqrt{9 \times 5} = 2\sqrt{5} - 3\sqrt{5} + 3\sqrt{5} = 2\sqrt{5}$

$\mathrm{B} = 3\sqrt{96} + \sqrt{150} - \sqrt{726} = 3\sqrt{16 \times 6} + \sqrt{25 \times 6} - \sqrt{121 \times 6} = 12\sqrt{6} + 5\sqrt{6} - 11\sqrt{6}$

$B = 6\sqrt{6}$

$$C = \sqrt{\frac{50}{9}} - \sqrt{\frac{18}{25}} = \frac{\sqrt{50}}{\sqrt{9}} - \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{25}} = \frac{5\sqrt{2}}{3} - \frac{3\sqrt{2}}{5} = \left(\frac{5}{3} - \frac{3}{5}\right)\sqrt{2} = \frac{25-9}{15}\sqrt{2} = \frac{16}{15}\sqrt{2}$$

Exercice 5

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{2}\times\sqrt{7}}{\sqrt{7}\times\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{14}}{7} \quad ; \quad \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{3\times\sqrt{3}}{2\sqrt{3}\times\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{2\times 3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{-4}{\sqrt{3}-1} = \frac{-4(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} = \frac{-4(\sqrt{3}+1)}{3-1} = -2\sqrt{3}-2$$

$$\frac{\sqrt{5}}{2+\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}(2-\sqrt{5})}{(2+\sqrt{5})(2-\sqrt{5})} = \frac{2\sqrt{5}-5}{2-5} = \frac{2\sqrt{5}-5}{-3} = \frac{5-2\sqrt{5}}{3}$$

$$\frac{2}{-1-\sqrt{2}} = \frac{2(-1+\sqrt{2})}{(-1-\sqrt{2})(-1+\sqrt{2})} = \frac{2(-1+\sqrt{2})}{1-2} = 2-2\sqrt{2}$$

$$\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = \frac{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)} = \frac{3-2\sqrt{3}+1}{3-1} = \frac{4-2\sqrt{3}}{2} = 2-\sqrt{3}$$

$$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{2}+\sqrt{3})}{(\sqrt{2}-\sqrt{3})(\sqrt{2}+\sqrt{3})} = \frac{2+2\sqrt{6}+3}{2-3} = -5-2\sqrt{6}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{5}-3\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{3}(2\sqrt{5}+3\sqrt{7})}{(2\sqrt{5}-3\sqrt{7})(2\sqrt{5}+3\sqrt{7})} = \frac{2\sqrt{15}+3\sqrt{21}}{(2\sqrt{5})^2-(3\sqrt{7})^2} = \frac{2\sqrt{15}+3\sqrt{21}}{20-63}$$

$$= \frac{2\sqrt{15}+3\sqrt{21}}{-43}$$

Exercice 6 **Réponse** :

A = $\sqrt{3}(4+2\sqrt{3})$
= $4\sqrt{3}+6$

B = $(1 + 7\sqrt{5})(5-3\sqrt{5})$
B = $5 - 3\sqrt{7} + 35\sqrt{5} - 21\sqrt{35}$

C = $(2\sqrt{5}-3)^2$
C = $(2\sqrt{5})^2 - 2\times 2\sqrt{5}\times 3 + 3^2$
C = $20 - 12\sqrt{5} + 9$
C = $29 - 12\sqrt{5}$
D = $(\sqrt{5}+2\sqrt{3})(\sqrt{5}-2\sqrt{3})$
D = $(\sqrt{5})^2 - (2\sqrt{3})^2$
D = 5 – 12
D = - 7

E = $(\sqrt{3} + 2\sqrt{2})^2 - \sqrt{3}(\sqrt{3} + 2\sqrt{2})$

E = $3 + 4\sqrt{6} + 8 - 3 - 2\sqrt{6}$

E = $8 - 2\sqrt{6}$

Exercice 7

$$H = 1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{1-\sqrt{3}}} = 1 - \frac{1}{1 - \frac{1+\sqrt{3}}{1-3}} = 1 - \frac{1}{\frac{-2-1-\sqrt{3}}{-2}} = 1 - \frac{1}{\frac{3+\sqrt{3}}{2}} = 1 - \frac{2}{3+\sqrt{3}}$$

$$= \frac{3+\sqrt{3}-2}{3+\sqrt{3}} = \frac{(1+\sqrt{3})(3-\sqrt{3})}{(3+\sqrt{3})(3-\sqrt{3})} = \frac{3-\sqrt{3}+3\sqrt{3}-3}{9-3} = \frac{2\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$I = \frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} + \frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = \frac{(2+\sqrt{3})^2 + (2-\sqrt{3})^2}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})} = \frac{4+4\sqrt{3}+3+4-4\sqrt{3}+3}{4-3} = 14$$

$$\mathrm{J} = \sqrt{(3-2\sqrt{5})^2} = |3-2\sqrt{5}| = 2\sqrt{5} - 3 \text{car} \quad 3 - 2\sqrt{5} < 0$$

$$K = 3\sqrt{80} - \sqrt{180} - 2\sqrt{45} = 3\sqrt{16\times 5} - \sqrt{36\times 5} - 2\sqrt{9\times 5} = 12\sqrt{5} - 6\sqrt{5} - 6\sqrt{5} = 0$$

$$L = \sqrt{\frac{27}{2}} \times \sqrt{\frac{8}{49}} = \sqrt{\frac{3\times 9\times 8}{2\times 49}} = \sqrt{\frac{3\times 9\times 4}{49}} = \frac{\sqrt{3}\times\sqrt{9}\times\sqrt{4}}{\sqrt{49}} = \frac{2\times 3\times\sqrt{3}}{7} = \frac{6}{7}\sqrt{3}$$

$$M = \sqrt{\frac{8}{9}} \times \sqrt{\frac{12}{25}} \times \sqrt{\frac{225}{24}} = \sqrt{\frac{8\times 12\times 225}{9\times 25\times 24}} = \sqrt{\frac{4\times 24\times 9\times 25}{9\times 25\times 24}} = \sqrt{4} = 2$$

$$\mathrm{N} = (1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3})(2+\sqrt{2}) = (1-3)(2+\sqrt{2}) = -2(2+\sqrt{2}) = -4 - 2\sqrt{2}$$

Exercice 8

a) $x = \sqrt{75} = \sqrt{25\times 3} = 5\sqrt{3}$ et $y = \sqrt{80} = \sqrt{16\times 5} = 4\sqrt{5}$

b) $(x-y)^2 = (5\sqrt{3} - 4\sqrt{5})^2 = 25\times 3 - 2\times 5\times 4\sqrt{3}\times\sqrt{5} + 16\times 5 = 75 - 40\sqrt{15} + 80$

$$= 155 - 40\sqrt{15}$$

$$\frac{xy}{x+y} = \frac{(5\sqrt{3})(4\sqrt{5})}{5\sqrt{3}+4\sqrt{5}} = \frac{20\sqrt{3}\times\sqrt{5}(5\sqrt{3}-4\sqrt{5})}{(5\sqrt{3}+4\sqrt{5})5\sqrt{3}-4\sqrt{5})} = \frac{20\times 3\times 5\sqrt{5} - 20\times 4\times 5\sqrt{3}}{75-80}$$

$$= \frac{300\sqrt{5} - 400\sqrt{3}}{-10} = 40\sqrt{3} - 30\sqrt{5}$$

Exercice 9

$$\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})} = \frac{3+2\sqrt{2}+2}{3-2} = 5+2\sqrt{2}$$

$\frac{10+4\sqrt{2}}{2} = 5+2\sqrt{2}$, On a $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{10+4\sqrt{2}}{2}$ donc le tableau est un tableau de proportionnalité.

Exercice 10

$$\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}+\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3}{2}\sqrt{2} = \frac{\sqrt{9\times 2}}{\sqrt{4}} = \sqrt{\frac{9\times 2}{4}} = \sqrt{\frac{9}{2}} = \sqrt{4{,}5}$$

$$\sqrt{\sqrt{2}+1}\times\sqrt{\sqrt{2}-1} = \sqrt{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} = \sqrt{2-1} = \sqrt{1} = 1$$

Exercice 11

1.a) $(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1) = 2-1 = 1$

b)

$$1+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{\sqrt{2}+1}}} = 1+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}}} = 1+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\sqrt{2}-1}} = 1+\frac{1}{2+\frac{1}{\sqrt{2}+1}} = 1+\frac{1}{2+\frac{1}{\sqrt{2}+1}}$$

$$= 1+\frac{1}{2+\frac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}} = 1+\frac{1}{2+\sqrt{2}-1} = 1+\frac{1}{\sqrt{2}+1} = 1+\frac{\sqrt{2}-1}{2-1}$$

$$= 1+\sqrt{2}-1 = \sqrt{2}\text{CQFD.}$$ (ce qu'il fallait démontrer)

$$\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{1+5\sqrt{(1+6)^2}}}}} = \sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{1+5\sqrt{7^2}}}}}$$

$$= \sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{1+5\sqrt{7^2}}}}} = \sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{1+35}}}}$$

$$= \sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{1+35}}}} = \sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{36}}}}$$

$$= \sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\times 6}}} = \sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{25}}} = \sqrt{1+2\sqrt{1+3\times 5}} = \sqrt{1+2\sqrt{16}}$$

$$= \sqrt{1+2\times 4} = \sqrt{9} = 3 \quad \text{cqfd}$$

Exercice 12

$(-2)^2 \times \left(-\sqrt{5}\right)^2 = 4 \times 5 = 20$

$\frac{(-0,1)^3}{(-0,1)^5} = (0,1)^{3-5} = \frac{1}{(-0,1)^2} = 100. (\frac{1}{2})^4 \times \left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right)^4 = \left(\frac{1}{2} \times \frac{4}{\sqrt{3}}\right)^4 = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^4 = \frac{16}{9}.$

$(-\sqrt{5})^3 \times (-\sqrt{5})^2 = (-\sqrt{5}) \times (-\sqrt{5})^2 \times (\sqrt{5})^2$

$= - 25\sqrt{5}$

Exercice 13

$$A = \left(\sqrt{a^5 \times b^6 \times c^{30}}\right)^2$$
$$= a^5 b^6 c^{30}$$

$B = (\sqrt{a^{34} \times b^{57} \times c^{175}})^5$

$= (\sqrt{a^{34} \times b^{57} \times c^{175}})^4 \times (\sqrt{a^{34} \times b^{57} \times c^{175}})^1$

$= (a^{34} b^{57} c^{175})^2 (\sqrt{a^{34} b^{57} c^{175}})^1$

$= a^{68} b^{114} c^{350} \left(\sqrt{a^{34} \times b^{57} \times c^{175}}\right)^1$

$C = \left(\frac{\sqrt{a^{75} \times b^{552} \times c^{127}}}{\sqrt{a^{33} \times b^{133} \times c^{355}}}\right)^3$

$= \left(\sqrt{\frac{a^{75} b^{552} c^{127}}{a^{33} b^{133} c^{355}}}\right)^3$

$= \left(\sqrt{\frac{a^{42} b^{419}}{c^{228}}}\right)^3$

$= (\sqrt{\frac{a^{42} b^{419}}{c^{228}}})^2 \times \sqrt{\frac{a^{42} b^{419}}{c^{228}}}$

$= \frac{a^{42} b^{419}}{c^{228}} \times \frac{a^{21} b^{209}}{c^{114}} \sqrt{b}$

$= \frac{a^{63} b^{628}}{c^{342}} \sqrt{b}$

Exercice 14

A = $a^2 - 2$
A = $a^2 - (\sqrt{2})^2$
A = $(a + \sqrt{2})(a - \sqrt{2})$

B = $x\sqrt{3} - x^2\sqrt{3}$

B = $x\sqrt{3}(1-x)$

C = $x^2 - 2\sqrt{7}x + 7$
C = $(x-\sqrt{7})^2$

D = $(x - 2)^2 - 5$
D = $(x - 2)^2 - (\sqrt{5})^2$
D = $(x - 2 - \sqrt{5})(x - 2 + \sqrt{5})$

E = $5x^2 - 8$
E = $(\sqrt{5}x)^2 - (2\sqrt{2})^2$
E = $(\sqrt{5}x + 2\sqrt{2})(\sqrt{5}x - 2\sqrt{2})$

F = $(\sqrt{5}-1)x - \sqrt{5} + 1$
F = $(\sqrt{5}-1)x - (\sqrt{5}-1)$
F = $\left(\sqrt{5}-1\right)(x-1)$

G = $7 + 4\sqrt{7}x + 4x^2 - \left(\sqrt{7}+2x\right)(5x - 3\sqrt{7})$
G = $(\sqrt{7}+2x)^2$ - $\left(\sqrt{7}+2x\right)(5x-3\sqrt{7})$
G =$\left(\sqrt{7}+2x\right)[\left(\sqrt{7}+2x\right) - (5x - 3\sqrt{7})]$
G = $\left(\sqrt{7}+2x\right)(\sqrt{7}+2x-5x+3\sqrt{7})$
G = $\left(\sqrt{7}+2x\right)\left(4\sqrt{7}-3x\right)$

Exercice 15

1. $x + 2 = x\sqrt{2} \Leftrightarrow \quad x - x\sqrt{2} = -2$

$$\Leftrightarrow x\left(1-\sqrt{2}\right) = -2$$

$$\Leftrightarrow \qquad x = \frac{-2}{1-\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow \qquad x = \frac{-2\left(1+\sqrt{2}\right)}{\left(1-\sqrt{2}\right)\left(1+\sqrt{2}\right)}$$

$$\Leftrightarrow \qquad x = \frac{-2\left(1+\sqrt{2}\right)}{1-2}$$

$$\Leftrightarrow \qquad x = 2+2\sqrt{2}$$

$2+2\sqrt{2}$ est la solution de l'équation.

2. $x + 4\sqrt{3} - 1 = 2x\sqrt{3} - 4 \Leftrightarrow x - 2x\sqrt{3} = -4 + 1 - 4\sqrt{3}$

$$\Leftrightarrow x\left(1-2\sqrt{3}\right) = -3 - 4\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \qquad x = \frac{-3-4\sqrt{3}}{1-2\sqrt{3}}$$

$$\Leftrightarrow \qquad x = \frac{(-3-4\sqrt{3})(1+2\sqrt{3})}{(1-2\sqrt{3})(1+2\sqrt{3})}$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{-3-6\sqrt{3}-4\sqrt{3}-8\times 3}{1-12}$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{-27-10\sqrt{3}}{-11}$$

$\frac{27+10\sqrt{3}}{11}$ est la solution de l'équation

3. $\frac{x}{4+\sqrt{5}} = \frac{4-\sqrt{5}}{\sqrt{5}-2} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{(4-\sqrt{5})(4+\sqrt{5})}{\sqrt{5}-2} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{16-5}{\sqrt{5}-2}$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{11(\sqrt{5}+2)}{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)} = \frac{11}{3}(\sqrt{5}+2)$$

$\frac{11}{3}(\sqrt{5}+2)$ est la solution de l'équation.

4. $\frac{1-2x}{3\sqrt{2}+1} = \frac{2x}{3\sqrt{2}} \quad \Leftrightarrow \quad 3\sqrt{2}(1-2x) = 2x(3\sqrt{2}+1)$

$$\Leftrightarrow \quad -6x\sqrt{2} - x(6\sqrt{2}+2) = -3\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad x(-12\sqrt{2}-2) = -3\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{3\sqrt{2}}{12\sqrt{2}+2}$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{3\sqrt{2}(12\sqrt{2}-2)}{(12\sqrt{2}+2)(12\sqrt{2}-2)}$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{72-6\sqrt{2}}{288-4}$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{36-3\sqrt{2}}{142}$$

$\frac{36-3\sqrt{2}}{142}$ est la solution de l'équation

5. $x - \frac{5+\sqrt{7}}{2} + \frac{x}{\sqrt{7}} = 0 \quad \Leftrightarrow x - \frac{x}{\sqrt{7}} = \frac{5+\sqrt{7}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{\sqrt{7}-1}{\sqrt{7}}\right)x = \frac{5+\sqrt{7}}{2}$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{\sqrt{7}(5+\sqrt{7})}{2(\sqrt{7}-1)} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(5\sqrt{7}+7)(\sqrt{7}+1)}{2(\sqrt{7}-1)(\sqrt{7}+1)}$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{35+5\sqrt{7}+4\sqrt{7}+7}{2(7-1)} \Leftrightarrow \quad x = \frac{42+9\sqrt{7}}{12}$$

$\frac{14+3\sqrt{7}}{4}$ est la solution de l'équation

Exercice 16

1. $x^2 = 4-\sqrt{2} \quad \Leftrightarrow \quad x = \sqrt{4-\sqrt{2}} \;\; ou \;\; x = -\sqrt{4-\sqrt{2}}$
2. $5x^2+4=0 \Leftrightarrow \quad x^2 = -\frac{4}{5}$ impossible donc pas de solution

3. $2x^2-3=0 \quad \Leftrightarrow \quad (x\sqrt{2})^2 - (\sqrt{3})^2 = 0 \quad \Leftrightarrow (x\sqrt{2}-\sqrt{3})(x\sqrt{2}+\sqrt{3}) = 0$

$$\Leftrightarrow \quad x\sqrt{2}-\sqrt{3} = 0 \quad ou \;\; x\sqrt{2}+\sqrt{3} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \quad ou \quad x = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{\sqrt{6}}{2} \quad ou \quad x = -\frac{\sqrt{6}}{2}$$

4. $x^2 - 2x\sqrt{3} + 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(x - \sqrt{3}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{3}$
5. $(x+1)^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow x + 1 = \sqrt{2} \quad ou \quad x + 1 = -\sqrt{2}$

$$\Leftrightarrow \quad x = -1 + \sqrt{2} \quad ou \quad x = -1 - \sqrt{2}$$

Exercice 17

$$A = \sqrt{1{,}21} \times \sqrt{100} = \sqrt{1{,}21 \times 100} = \sqrt{121} = 11$$

$$B = \sqrt{7{,}2} \times \sqrt{10} = \sqrt{7{,}2 \times 10} = \sqrt{72} = \sqrt{36 \times 2} = 6\sqrt{2}$$

$$C = \sqrt{1{,}69 \times 300} = \sqrt{507} = \sqrt{3 \times 169} = 13\sqrt{3}$$

$$D = \sqrt{27} - \frac{3}{4}\sqrt{12} - \sqrt{75} + \frac{5}{6}\sqrt{192} = 3\sqrt{3} - \frac{3}{2}\sqrt{3} + \frac{5}{3} \times 4\sqrt{3} = \frac{49}{6}\sqrt{3}$$

$$E = \sqrt{20} - \frac{3}{4}\sqrt{80} + 2\sqrt{2{,}45} = 2\sqrt{5} - \frac{3}{4} \times 4\sqrt{5} + 2\sqrt{\frac{245}{100}} = -\sqrt{5} + \frac{7}{5}\sqrt{5} = \frac{2}{5}\sqrt{5}$$

$$F = \frac{7}{3}\sqrt{\frac{54}{16}} - \frac{3}{2}\sqrt{\frac{24}{81}} = \frac{7}{4}\sqrt{6} - \frac{3}{8}\sqrt{6} = \frac{11}{8}\sqrt{6}$$

Exercice 18

$$E = 3\sqrt{2} - 5\sqrt{2} + 4\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

$$F = \left(\sqrt{2} - \sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right) = 2 - 3 = -1$$

$$G = -2\sqrt{3} + 9\sqrt{3} - 10\sqrt{3} = -3\sqrt{3}$$

$$H = \frac{4}{5} - 3 = -\frac{11}{5}$$

Exercice 19

$$H = 3\sqrt{2} - 12\sqrt{2} - 8\sqrt{2} + 30\sqrt{2} = 13\sqrt{2}$$

$$P = 6\sqrt{3} - 4\sqrt{3} - 6\sqrt{3} + 30\sqrt{3} = 26\sqrt{3}$$

$$K = \sqrt{2 \times 2021(2022 - 1)} = 2021\sqrt{2}$$

Exercice 20

Pour tout nombre réel x on pose $A(x) = (1 - \sqrt{5})x^2 + 2(1 + \sqrt{5})x - 8$

Pour $x = \sqrt{5}$ on a : $A(1 + \sqrt{5}) = 5(1 - \sqrt{5}) + 2(1 + \sqrt{5}) \times \sqrt{5} - 8 = 7 - 3\sqrt{5}$

Pour $x = 1 + \sqrt{5}$ on a : $A(1 + \sqrt{5}) = (1 - \sqrt{5})(1 + \sqrt{5})^2 + 2(1 + \sqrt{5}) \times (1 + \sqrt{5}) - 8 = 0$

Pour $x = 1 - \sqrt{5}$ on a : $A(1 - \sqrt{5}) = (1 - \sqrt{5})(1 - \sqrt{5})^2 + 2(1 + \sqrt{5}) \times (1 - \sqrt{5}) - 8 = -8\sqrt{5}$

Exercice 21

On donne la fraction rationnelle R telle que $R = \frac{x+\sqrt{2}}{x^2-2}$

1) a) R existe si et seulement si $x^2 - 2 \neq 0$
   R existe si et seulement si $x \neq \sqrt{2}$ et $x \neq -\sqrt{2}$
   b) pour $x \neq \sqrt{2}$ et $x \neq -\sqrt{2}$ on a : $R = \frac{1}{x-\sqrt{2}}$
2) Pour $x = -2\sqrt{2}$ on a : $R = \frac{1}{-2\sqrt{2}-\sqrt{2}} = \frac{1}{-3\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{3}$

Exercice 22

1) $a = \frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}(2-\sqrt{3})}{4-3} = 2\sqrt{2} - \sqrt{6}$ et $b = \frac{-2}{\sqrt{6}+2\sqrt{2}} = \frac{-2(\sqrt{6}-2\sqrt{2})}{-2} = \sqrt{6} - 2\sqrt{2}$
2) On a : $a + b = 2\sqrt{2} - \sqrt{6} + \sqrt{6} - 2\sqrt{2} = 0$ donc a et b sont opposés.

Exercice 23

$$A = 2x^2 - 3 = (x\sqrt{2} - \sqrt{3})(x\sqrt{2} + \sqrt{3})$$
$$B = x^2 - 2 + (x - \sqrt{2})(2x - \sqrt{2}) = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}) + (x - \sqrt{2})(2x - \sqrt{2})$$
$$= (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2} + 2x - \sqrt{2}) = 3x(x - \sqrt{2})$$
$$C = 2x\sqrt{3} - 3x^2 + (4 - 3x^2) = x\sqrt{3}(2 - x\sqrt{3}) + (2 - x\sqrt{3})(2 + x\sqrt{3})$$
$$= (2 - x\sqrt{3})(x\sqrt{3} + 2 + x\sqrt{3}) = 2(2 - x\sqrt{3})(1 + x\sqrt{3})$$

Exercice 24

1) a) $E = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{7}}{\sqrt{5}+\sqrt{7}} = \frac{(\sqrt{5}-\sqrt{7})^2}{5-7} = \frac{5+7-2\sqrt{35}}{-2} = \sqrt{35} - 6$
   b) on a $35 < 36 \Leftrightarrow \sqrt{35} < 6 \Leftrightarrow \sqrt{35} - 6 < 0$ donc E est négatif.
2) a) $E^2 = (\sqrt{35} - 6)^2 = 35 + 36 - 12\sqrt{35} = 71 - 12\sqrt{35}$
   b) $B = \sqrt{71 - 12\sqrt{35}} = \sqrt{E^2} = |E| = -E = 6 - \sqrt{35}$

Exercice 25

a) $3x - \sqrt{3} = 2 - x\sqrt{3} \Leftrightarrow (3 + \sqrt{3})x = 2 + \sqrt{3} \Leftrightarrow x = \frac{2+\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} \Leftrightarrow x = \frac{(2+\sqrt{3})(3-\sqrt{3})}{9-3} = \frac{6+\sqrt{3}-3}{6}$

$x = \frac{3 + \sqrt{3}}{6}$

b) $16x^2 - 5 = 0 \Leftrightarrow (4x - \sqrt{5})(4x + \sqrt{5}) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{5}}{4} oux = -\frac{\sqrt{5}}{4}$
c) $2x + \sqrt{3} > 3x + 1 \Leftrightarrow \sqrt{3} - 1 > x \Leftrightarrow x \in] \leftarrow; \sqrt{3} - 1[$
d) $x - \sqrt{5} \geq -2 \Leftrightarrow x \geq \sqrt{5} - 2 \Big\{ \Leftrightarrow x \in [\sqrt{5} - 2; \rightarrow [$

Exercice 26

1. $A \times B = (5-2\sqrt{6})(5+2\sqrt{6}) = 25-24 = 1$ donc A et B sont deux nombres inverses l'un de l'autre
2. $B = \frac{1}{A}$ or $0{,}101 < A < 0{,}102$ donc $\frac{1}{0{,}102} < \frac{1}{A} < \frac{1}{0{,}101}$ d'où $9{,}80 < B < 9{,}90$

Exercice 27

1) $a = \frac{(\sqrt{3}-1)^2}{3-1} = \frac{3+1-2\sqrt{3}}{2} = 2-\sqrt{3}$; $c = \frac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2}{4} = \frac{6+2-4\sqrt{3}}{4} = 2-\sqrt{3}$
2) on a: $a = 2-\sqrt{3}$ et $c = 2-\sqrt{3}$ donc $a = c$.

$$b = \sqrt{2-\sqrt{3}} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$$

Exercice 28

1) $a = \frac{-\sqrt{3}}{2+\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{3}(2-\sqrt{2})}{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})} = \frac{-2\sqrt{3}+\sqrt{6}}{4-2} = \frac{\sqrt{6}-2\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2} - \sqrt{3}$

2) $a \times b = \left(\frac{\sqrt{6}}{2} - \sqrt{3}\right)(\sqrt{6}+2\sqrt{3}) = \frac{6}{2} + \sqrt{3}\times\sqrt{6} - \sqrt{3}\times\sqrt{6} - 2\times 3 = 3-6 = -3$

Exercice 29

a) $a + b = \frac{-3}{3+2\sqrt{3}} + 2\sqrt{3} - 3 = \frac{-3+6\sqrt{3}-9+12-6\sqrt{3}}{3+2\sqrt{3}} = \frac{0}{3+2\sqrt{3}} = 0$
b) a + b = 0 , on dit que les réels a et b sont opposés.

Exercices d'approfondissement

Exercice 30

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \frac{5-2\sqrt{6}}{5+2\sqrt{6}} + \frac{5+2\sqrt{6}}{5-2\sqrt{6}} = \frac{(5-2\sqrt{6})^2 + (5+2\sqrt{6})^2}{25-24} = 25+24-20\sqrt{6}+25+24+20\sqrt{6}$$

$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 98$ et $98 \in IN$ donc $\frac{a}{b} + \frac{b}{a}$ est un nombre entier nature

Exercice 31

1) a) $a = (3+2\sqrt{2})^2 = 9+8+12\sqrt{2} = 17+12\sqrt{2}$;
$b = (3-2\sqrt{2})^2 = 9+8-12\sqrt{2} = 17-12\sqrt{2}$.

b) $A = \sqrt{17+12\sqrt{2}} + \sqrt{17-12\sqrt{2}} = \sqrt{(3+2\sqrt{2})^2} + \sqrt{(3-2\sqrt{2})^2} = 3+2\sqrt{2}+3-2\sqrt{2}$

$$A = 6$$

2) a) $XY = \sqrt{(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})} = \sqrt{9-8} = 1$. On dit que X et Y sont inverses l'un de l'autre.

b) $B = X - Y = \sqrt{3+2\sqrt{2}} - \sqrt{3-2\sqrt{2}}$.

on a : $3+2\sqrt{2} > 3-2\sqrt{2}$ soit $\sqrt{3+2\sqrt{2}} - \sqrt{3-2\sqrt{2}} > 0$ donc $B > 0$

c) $B^2 = 3+2\sqrt{2}+3-2\sqrt{2}-2 = 4$ et Comme $B > 0$ on a : $B = 2$

Exercice 32

1) On a : $AB = \sqrt{300} - \sqrt{147} = 3\sqrt{3}$et $BC = 5\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$
ABCD est un rectangle et$AB = BC$ donc ABCD est un carré

2) L'aire du carré ABCD est $AB^2 = \left(3\sqrt{3}\right)^2 = 27$

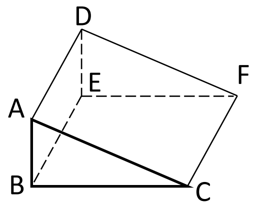
Exercice 33

1) $l = 2\sqrt{12} + \sqrt{147} - 5 = 11\sqrt{3} - 5$ hm et $L = l + 10 = 11\sqrt{3} + 5$ hm

2) $P = 2(L + l) = 2\left(2 \times 11\sqrt{3}\right) = 44\sqrt{3}$ hm

3) $A = L \times l = \left(11\sqrt{3} - 5\right)\left(11\sqrt{3} + 5\right) = 121 \times 3 - 25 = 338$ hm²

Exercice 34



On donne le prisme droit ci-contre (l'unité est le mètre),

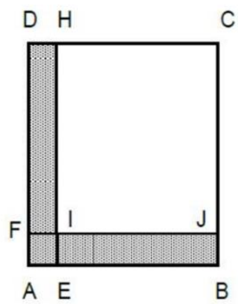
où $AB = 2 - \sqrt{2}$; $BC = 2 + \sqrt{2}$; $AC = 2\sqrt{3}$ et $AD = 1 + \sqrt{3}$

1) $A_{Latérale} = P_{base} \times h = (AB + AC + BC) \times AD$
$A_{Latérale} = (2 - \sqrt{2} + 2\sqrt{3} + 2 + \sqrt{2})(1 + \sqrt{3}) = 10 + 6\sqrt{3}$ m²

2) $A_{Totale} = A_{Latérale} + 2A_{Base} = 10 + 6\sqrt{3} + 2\left(\frac{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})}{2}\right) = 12 + 6\sqrt{3}$ m²

3) $V = A_{Base} \times h = \frac{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})}{2} \times 2\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$m³

Exercice 35



Partie A

1) On a : $2\left[\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)\left(5\sqrt{7}-2\right)\right]^2 - 4\left(5\sqrt{7}-2\right)\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)\left(5\sqrt{7}-2\right) + \left(5\sqrt{7}-2\right)^2 = 0$
donc A est solution de (E)

On a : $2\left[\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)\left(5\sqrt{7}-2\right)\right]^2 - 4\left(5\sqrt{7}-2\right)\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)\left(5\sqrt{7}-2\right) + \left(5\sqrt{7}-2\right)^2 = 0$

donc B est solution de (E)

2) Posons $DH = x$

$A_{Canalisation} = x(5\sqrt{7}-2) + x(5\sqrt{7}-2-x)$; $A_{CHIJ} = (5\sqrt{7}-2-x)^2$

$$A_{Canalisation} = A_{CHIJ} \Leftrightarrow x(5\sqrt{7}-2) + x(5\sqrt{7}-2-x) = (5\sqrt{7}-2-x)^2$$

$$\Leftrightarrow (E): 2x^2 - 4(5\sqrt{7}-2)x + (5\sqrt{7}-2)^2 = 0$$

On sait que A et B sont solution de (E) et DH < DC c'est-à-dire $x < 5\sqrt{7}-2$. La valeur de DH respectant toutes ces conditions est A donc :

$$DH = A = \left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)(5\sqrt{7}-2)$$

Partie B

Première méthode : $A = A_{ABCD} - A_{CHIJ}$

$$A = (5\sqrt{7}-2)^2 - (3\sqrt{3}+2)^2 = (5\sqrt{7}-2+3\sqrt{3}+2)(5\sqrt{7}-2-3\sqrt{3}-2)$$

$$A = (8\sqrt{7})(2\sqrt{7}-4) = 16 \times 7 - 32\sqrt{7} = 112 - 32\sqrt{7}$$

Deuxième méthode : $A = A_{DHEA} + A_{EBJI}$

$$DH = 5\sqrt{7} - 2 - 3\sqrt{7} - 2 = 2\sqrt{7} - 4$$

$$A = (5\sqrt{7}-2)(2\sqrt{7}-4) + (2\sqrt{7}-4)(3\sqrt{7}+2) = (2\sqrt{7}-4) \times 8\sqrt{7} = 112 - 32\sqrt{7}$$

Exercice 36

1) $x = -2 - x\sqrt{3} \Leftrightarrow x + x\sqrt{2} = -2 \Leftrightarrow x(1+\sqrt{3}) = -2 \Leftrightarrow x = \frac{-2}{1+\sqrt{3}}$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-2(1-\sqrt{3})}{1-3} \Leftrightarrow x = 1 - \sqrt{3}$$

2) $1{,}732 < \sqrt{3} < 1{,}733$

$$-1{,}733 < -\sqrt{3} < 1{,}732$$

$$1 - 1{,}733 < 1 - \sqrt{3} < 1 - 1{,}732$$

$-0{,}733 < 1 - \sqrt{3} < -0{,}732 \quad \Leftrightarrow \quad -0{,}74 < 1 - \sqrt{3} < -0{,}73$

Exercice 37

1) a- Le signe de A

$$\left.\begin{matrix}(\sqrt{3})^2 = 3 \\ 2^2 = 4\end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix}\text{on a } 3 < 4 \\ \sqrt{3} < 2 \\ \sqrt{3} - 2 < 0\end{matrix}\right\} \text{donc } A < 0$$

b) $\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2} = |\sqrt{3}-2| = 2 - \sqrt{3} \quad car \quad \sqrt{3} - 2 < 0$

2) $A \times B = (\sqrt{3}-2)(-\sqrt{3}-2) = -3 - 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} + 4 = 4 - 3 = 1$

donc A et B sont inverses l'un de l'autre

3) $C = \frac{1}{A} \times (1-\sqrt{3}) + \frac{1}{B}(1+\sqrt{3}) = B(1-\sqrt{3}) + A(1+\sqrt{3})$

$$= (-\sqrt{3}-2)(1-\sqrt{3}) + (\sqrt{3}-2)(1+\sqrt{3})$$

$= -\sqrt{3} + 3 - 2 + 2\sqrt{3} + \sqrt{3} + 3 - 2 - 2\sqrt{3}$

$= 6 - 4 = 2$, C est donc un entier naturel.

4) $1{,}732 < \sqrt{3} < 1{,}733$

-1,733 $< -\sqrt{3} <$ -1,732

-2 -1,733 $< -\sqrt{3} - 2 <$ -1,732-2

-3, 733 $< -\sqrt{3} - 2 <$ -2,732 donc $-3{,}74 < B < -3{,}73$

Exercice 38

1) $(3-2\sqrt{2})(3+2\sqrt{2}) = 9 - 8 = 1$, ainsi les nombres réels $3-2\sqrt{2}$ et $3+2\sqrt{2}$ sont inverses l'un de l'autre.

2) $\frac{1}{2\sqrt{2}-3} + 3 + 2\sqrt{2} = -3 - 2\sqrt{2} + 3 + 2\sqrt{2} = 0$ donc les nombres réels $\frac{1}{2\sqrt{2}-3}$ et $3 + 2\sqrt{2}$ sont opposés.

Exercice 39

1) $A = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{(\sqrt{6}-\sqrt{2})(\sqrt{6}+\sqrt{2})} = \frac{6+2\sqrt{12}+2}{6-2} = \frac{8+4\sqrt{3}}{4} = 2+\sqrt{3}$

2) a) Signe de B

$$\left.\begin{array}{l}(5\sqrt{2})^2 = 50\\ (4\sqrt{3})^2 = 48\end{array}\right\} \left.\begin{array}{c} on a\ \ 50 > 48\\ 5\sqrt{2} > 4\sqrt{3}\\ 5\sqrt{2}-4\sqrt{3} > 0\end{array}\right\} \quad \text{donc } B > 0$$

b) $B^2 = (5\sqrt{2}-4\sqrt{3})^2 = 50 - 40\sqrt{6} + 48 = 78 - 40\sqrt{6}$

$D = \sqrt{78-40\sqrt{6}} = \sqrt{(5\sqrt{2}-4\sqrt{3})^2} = |5\sqrt{2}-4\sqrt{3}| = 5\sqrt{2}-4\sqrt{3}$ car $5\sqrt{2}-4\sqrt{3} > 0$

3) on a : $1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415$et $1{,}732 < \sqrt{3} < 1{,}733$

soit$-4(1{,}733) < -4\sqrt{3} < -4(1{,}732)$

$5 \times 1{,}414 - 6{,}932 < 5\sqrt{2} - 4\sqrt{3} < 5 \times 1{,}415 - 6{,}928$

$0{,}138 < 5\sqrt{2} - 4\sqrt{3} < 0{,}147$. Ainsi$0{,}138 < B < 0{,}147$

Exercice 40

1. $A(x)$ *existe ssi* $x^2 - x\sqrt{2} \neq 0 \Leftrightarrow x(x-\sqrt{2}) \neq 0$

$\Leftrightarrow x \neq 0 \ \ et \ \ x \neq \sqrt{2}$

2. Pour $x \neq 0 \ \ et \ \ x \neq \sqrt{2}$ on a :$A(x) = \frac{x^2(x+\sqrt{2})}{x^2-x\sqrt{2}} = \frac{x^2(x+\sqrt{2})}{x(x-\sqrt{2})} = \frac{x(x+\sqrt{2})}{x-\sqrt{2}}$

3. Pour x = 1 , on a A(1)= $\frac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} = \frac{(1+\sqrt{2})(1+\sqrt{2})}{(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})} = \frac{1+2\sqrt{2}+2}{1-2} = -3-2\sqrt{2}$

Pour x = 0 , A(0) n'existe pas

Pour x =$2\sqrt{2}$, on a $A(2\sqrt{2}) = \frac{2\sqrt{2}(2\sqrt{2}+\sqrt{2})}{2\sqrt{2}-\sqrt{2}} = \frac{6\times 2}{\sqrt{2}} = 6\sqrt{2}$

Pour x = $3+5\sqrt{2}$, on a $A(3+5\sqrt{2}) = \frac{(3+5\sqrt{2})(3+5\sqrt{2}+\sqrt{2})}{3+5\sqrt{2}-\sqrt{2}} = \frac{(3+5\sqrt{2})(3+6\sqrt{2})}{3+4\sqrt{2}}$

$= \frac{9+18\sqrt{2}+15\sqrt{2}+60}{3+4\sqrt{2}} = \frac{69+33\sqrt{2}}{3+4\sqrt{2}} =$

$\frac{(69+33\sqrt{2})(3-4\sqrt{2})}{(3+4\sqrt{2})(3-4\sqrt{2})} = \frac{207-276\sqrt{2}+99\sqrt{2}-264}{9-32} = \frac{-57-177\sqrt{2}}{-23} = \frac{57+177\sqrt{2}}{23}$

Exercice 41

1. $P_{ABCD} = P_{EFGH} \Leftrightarrow 2(L + l) = 4c$ en posant FG = L et$c = 1 + \sqrt{3}$,
   on obtient $2L + 2 = 4(1 + \sqrt{3}) \Leftrightarrow 2L = 2 + 4\sqrt{3}$
   $\Leftrightarrow L = 1 + 2\sqrt{3}$
2. $A_{ABCD} = A_{EFGH} \Leftrightarrow 1 \times L = (1 + \sqrt{3})^2$
   $\Leftrightarrow L = 1 + 2\sqrt{2} + 3 = 4 + 2\sqrt{3}$

Exercice 42

1. $(a - b)^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab$
2. a) $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0 \Leftrightarrow a - 2\sqrt{ab} + b \geq 0 \Leftrightarrow a + b \geq 2\sqrt{ab}$
   b) $\sqrt{a + b + 2\sqrt{ab}} = \sqrt{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2} = |\sqrt{a} + \sqrt{b}| = \sqrt{a} + \sqrt{b} car \sqrt{a} + \sqrt{b} > 0$
   c) on a $a + b + 2\sqrt{ab} \geq a + b \Leftrightarrow \sqrt{a + b + 2\sqrt{ab}} \geq \sqrt{a + b}$
   $\Leftrightarrow \sqrt{a} + \sqrt{b} \geq \sqrt{a + b}$

Exercice 43

$AB = \sqrt{325} = \sqrt{25 \times 13} = 5\sqrt{13}$

$AC = \sqrt{52} = \sqrt{4 \times 13} = 2\sqrt{13}$

$BC = \sqrt{637} = \sqrt{49 \times 13} = 7\sqrt{13}$

On remarque que $5\sqrt{13} + 2\sqrt{13} = 7\sqrt{13}$ c'est-à-dire que AB + AC = BC ce qui prouve que $A \in [BC]$ donc effectivement les points A , B et C sont alignés. Ainsi Koffi a raison.

Situation d'évaluation

Exercice 44

1. A = L × l = $\frac{(5+2\sqrt{5})}{5}(5 - 2\sqrt{5}) = \frac{5}{5} = 1\ km^2$

2. Pour 1 km² de champ il faut 50kg d'engrais. 19kg ne peuvent couvrir qu'une aire de
   $\frac{19}{50} = 0{,}38$ km² . Or le champ de M. Irié a une aire de champ plus grande que les 0, 38 km². Ainsi le stock d'engrais que possède M. IRIE ne suffit pas pour améliorer le rendement de son verger**.**

CORRECTIONS Leçon 12 : COORDONNEES DE VECTEURS

Situation d'apprentissage

- **Faire dégager le contexte**

Pour cela on peut poser les questions du genre :

- **De quel évènement parle le texte ?** Le texte parle de la détermination de la distance parcourue entre deux villes.
- **Quels sont les acteurs de cet évènement ?** Les acteurs sont les élèves de niveau $3^{ème}$,Monsieur Koffi, un chauffeur et un géographe.
- **Où se déroule l'évènement ?** L'évènement se déroule dans la ville B**.**

•**Faire dégager la (ou les) circonstance(s)**

Pour cela on peut poser les questions du genre

- **Quel(s) problème(s) se pose(nt) dans cet évènement ?** Le problème qui se pose est de : savoir la distance exacte parcourue par M. Koffi entre deux villesA et B.
- **Quelle(s) difficulté(s) rencontre(nt) les acteurs de cet évènement ?** M. Koffi ne sait pas comment déterminer la distance exacte qu'il a parcourue entre les villesA et B ,il se confie à son fils qui à son tour collabore avec ses amis de classe.

•**Faire dégager la (ou les) tâche(s)**

Pour cela on peut poser les questions du genre

- Que décident de faire les élèves ? Les élèves décident d'effectuer des calculs.

•**Faire la synthèse et annoncer des notions mathématiques convoquées par la situation (le professeur)**

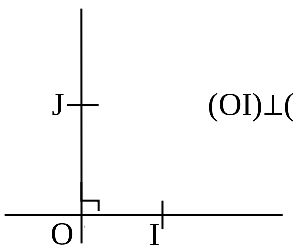
Tout comme ces élèves, nous allons découvrir à travers cette situation une nouvelle leçon intitulée « **COORDONNEES DE VECTEURS** », des propriétés et règles de calcul qui vous permettront de régler ce genre de problème qui se pose dans la situation d'apprentissage.

CORRECTIONS

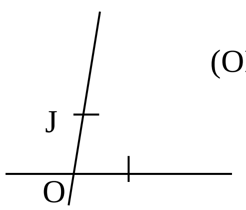
INSTALLATION DES HABILETÉS

ACTIVITÉ 1 COORDONNÉES D'UN VECTEUR

1.Activité :**Les repères du plan**

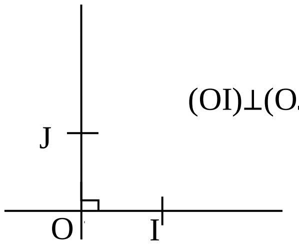


(OI)⊥(OJ) et OI ≠ OJ

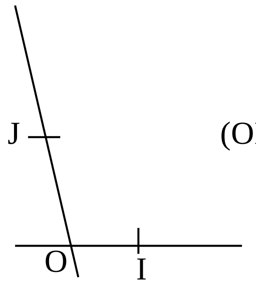


(OI) et (OJ) sécantes et OI = OJ

Repère orthogonalRepère Normé



$(OI)\perp(OJ)$ et $OI = OJ$



(OI) et(OJ) sécantes et $OI \neq OJ$

Repère orthonorméRepère quelconque

Exercices de fixation

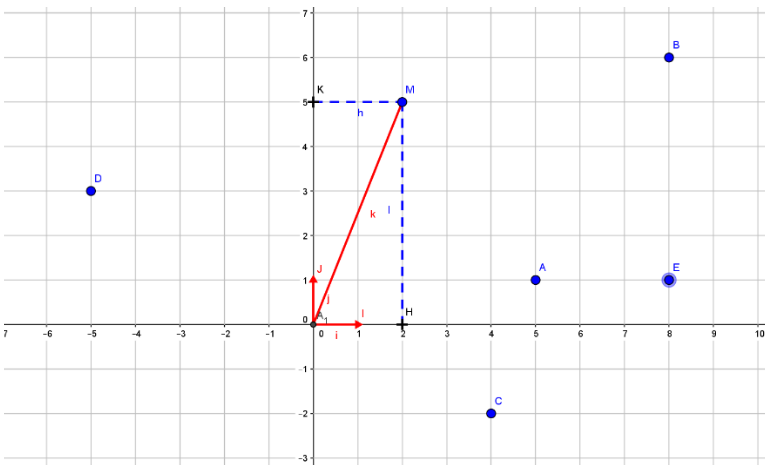
- Sur la figure 1 le repère (A, B, C) est orthogonal
- Sur la figure 2 le repère (A, B, C) est normé
- Sur la figure 3 le repère (A, B, C) est orthonormé
- Sur la figure 4 le repère (A, B, C) est quelconque

2. Activité : Couple de cordonnées d'un point

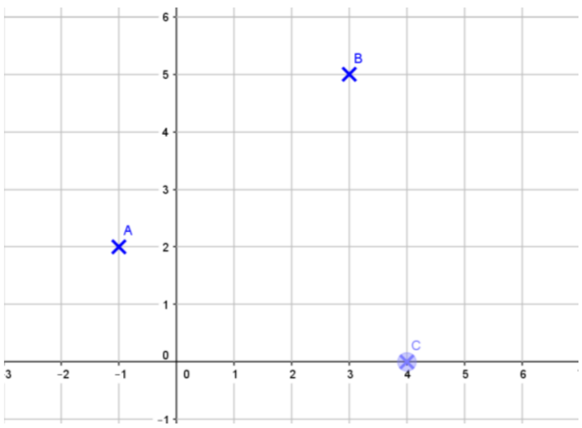
a) $\overrightarrow{OH} = 2\overrightarrow{OI}$; $\overrightarrow{OK} = 5\overrightarrow{OJ}$

b) $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{OK}$donc $\overrightarrow{OM} = 2\overrightarrow{OI} + 5\overrightarrow{OJ}$

c) A(5 ;1) , B(8 ;6) et E(8 ;1)



Exercices de fixation



$\overrightarrow{OA} = -\overrightarrow{OI} + 2\overrightarrow{OJ}$, $\overrightarrow{OC} = 4\overrightarrow{OI} + 0\,\overrightarrow{OJ}$; $\overrightarrow{AB} = 4\overrightarrow{OI} + 3\overrightarrow{OJ}$ et $\overrightarrow{CA} = -5\overrightarrow{OI} + 2\overrightarrow{OJ}$

3. Activité :Couple de coordonnées d'un vecteur

1. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$
   $\overrightarrow{AB} = -x_A\overrightarrow{OI} - y_A\overrightarrow{OJ} + x_B\overrightarrow{OI} + y_B\overrightarrow{OJ} = (x_B - x_A)\overrightarrow{OI} + (y_B - y_A)\overrightarrow{OJ}$
2. On en déduis que $\overrightarrow{AB\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}}$

Exercices de fixation

$\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix} -12 \\ 21 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{EG}\begin{pmatrix} -19 \\ 16 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{FG}\begin{pmatrix} -7 \\ -5 \end{pmatrix}$

ACTIVITÉ 2 VECTEURS ÉGAUX

1.ABCD est un parallélogramme donc (AB) // (DC) et AB = DC d'où $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

2.a) A(-6 ;-2) , B(2 ;1) , C(6 ; -2) et D(-2 ; -5)

b) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix}$et $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix}$

c) les deux vecteurs ont les mêmes coordonnées.

3. Pour $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ on a :$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ équivaut à$x = x'$ et $y = y'$

Exercices de fixation

Exercice1

- Deux vecteurs sont égaux lorsqu'ils ont les mêmes cordonnées
- Étant donné deux vecteurs $\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{KP}\begin{pmatrix} -5 \\ 8 \end{pmatrix}$.

  $\alpha = -5$ et $\beta = 8$ équivaut à $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{KP}$

Exercice2

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$et comme $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EF}$ on a : $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

Exercice3

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{PQ}$ donc $\begin{cases} x - 1 = 3 \\ y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = -2 \end{cases}$

Activité 3 Coordonnées d'une somme de deux vecteurs

- $\overrightarrow{AB} = x\overrightarrow{OI} + y\overrightarrow{OJ}$; $\overrightarrow{A'B'} = x'\overrightarrow{OI} + y'\overrightarrow{OJ}$
- $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A'B'} = (x\overrightarrow{OI} + y\overrightarrow{OJ}) + (x'\overrightarrow{OI} + y'\overrightarrow{OJ}) = (x + x')\overrightarrow{OI} + (y + y')\overrightarrow{OJ}$
- $\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A'B'}\right)\begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$

Exercices de fixation

Exercice1

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix} \quad ; \quad \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{EF}\begin{pmatrix} -5 \\ -5 \end{pmatrix} \quad ; \quad \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EF}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Exercice2

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -13 \\ 4 \end{pmatrix} ; \ \overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} 2 \\ -8 \end{pmatrix} \ donc \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} -11 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Activité 4 Coordonnées du produit d'un vecteur par un nombre réel

1. On a $k\overrightarrow{AB} = kx\ \overrightarrow{OI} + ky\ y\overrightarrow{OJ}$ donc le vecteur $k\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$
2. $-1 \times \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$
3. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{EF}\begin{pmatrix} x - x' \\ y - y' \end{pmatrix}$

Exercices de fixation

Exercice 1

- Si $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ alors $-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$
- Si $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ alors $-5\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -5 \\ 15 \end{pmatrix}$
- Si $-6\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 6 \\ 18 \end{pmatrix}$ alors $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -36 \\ -108 \end{pmatrix}$
- Si $5\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2 \\ -10 \end{pmatrix}$ alors $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} \frac{2}{5} \\ -2 \end{pmatrix}$

Exercice 2

$-\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 3 \\ -6 \end{pmatrix}$; $5\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -15 \\ 30 \end{pmatrix}$; $\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$

Exercice 3

. $\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix} -2 - 1 \\ 3 + 2 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$

Activité 5 : Vecteurs colinéaires

1. a) Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{A'B'}$ sont colinéaires alors les droites (AB) et (A'B') sont parallèles donc il existe un nombre réel k tel que $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB}$. Ainsi $x' = kx \;\; et \; y' = ky$

   b) On a : $x'y = kxyet\; y'x = kxy$ d'où $x'y = xy'$ soit $x'y - xy' = 0$

2. a) si $x'y - xy' = 0$ alors il existe un nombre réel k tel que $k = \frac{x'}{x} = \frac{y'}{y}$ soit $x' = kx \;\; et \; y' = ky$

   d'où $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB}$ d'où les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{A'B'}$ sont colinéaires.

   b) Le vecteur nul est colinéaire à tous les vecteurs donc si $\overrightarrow{AB}$ est nul alors $\overrightarrow{AB}$ est colinéaire à $\overrightarrow{A'B'}$

   c) pour $x \neq 0 \;\; ety \neq 0, ona{:}\; k = \frac{x'}{x} = \frac{y'}{y}$ d'où $x'y - xy' = 0$. Ainsi les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{A'B'}$ sont colinéaires.

3.les vecteurs $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{A'B'}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont colinéaires équivaut à $x'y - xy' = 0$

Exercices de fixation

Exercice1

AFFIRMATIONS	V ou F
Les vecteurs $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix}$ sont colinéaires	F
Les vecteurs $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ sont colinéaires	V
Les vecteurs $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OI} - 5\overrightarrow{OJ}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} 2 \\ -10 \end{pmatrix}$ sont colinéaires	V
Les vecteurs $\overrightarrow{AB} = -8\overrightarrow{OI} - 7\overrightarrow{OJ}$ et $3\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires	F

Exercice2

1. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 5 \\ -6 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} -10 \\ 12 \end{pmatrix}$ .On a :$5 \times 12 - (-6)(-10) = 60 - 60 = 0$ donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires

2. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -2 \\ -7 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} 6 \\ 21 \end{pmatrix}$ .On a : $-2 \times 21 - (-7) \times 6 = -42 + 42 = 0$ donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires

3. $\overrightarrow{RB} = 8\overrightarrow{OI} - 12\overrightarrow{OJ}$ et $\overrightarrow{PK} = -2\overrightarrow{OI} + 3\overrightarrow{OJ}$ .On a : $8 \times 3 - (-12) \times 2 = 24 - 24 = 0$ donc les vecteurs $\overrightarrow{RB}$ et $\overrightarrow{PK}$ sont colinéaires

Activité 6 : Distance de deux points

1. a) $AC = 8 - 3 = 5$; $BC = 7 - 2 = 5$

   b) Le triangle ABC est rectangle en C, d'après la propriété de Pythagore on a:

   $AB^2 = AC^2 + BC^2$donc$AB = \sqrt{5^2 + 5^2} = 5\sqrt{2}$

2. a) A(3 ;2) , B(8 ;7) et C(8 ;2)

   b) $a = AB$; $b = ACetc = BC$

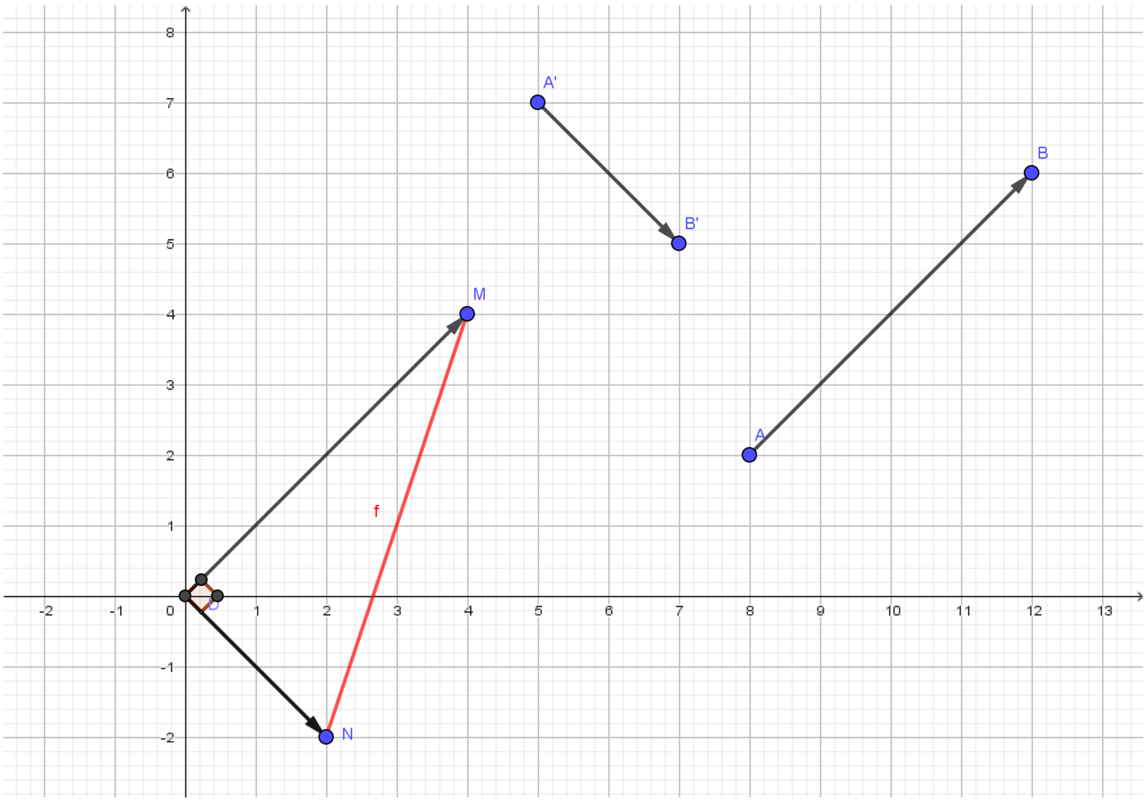
Exercice d'application

1 $EF = \sqrt{(-9+5)^2 + (-1-8)^2} = \sqrt{(-4)^2 + (-9)^2} = \sqrt{16+81} = \sqrt{97}$

2. $\mathrm{AB} = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

3 $\mathrm{BC} = \sqrt{(-3)^2 + 3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

ACTIVITÉ 7 : VECTEURS ORTHOGONAUX



1. voir figure
2. $\overrightarrow{\mathrm{OM}}\binom{\mathrm{x}}{\mathrm{y}}$; $\overrightarrow{\mathrm{ON}}\binom{\mathrm{x'}}{\mathrm{y'}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{MN}}\binom{\mathrm{x'-x}}{\mathrm{y'-y}}$
3. Le triangle OMN est rectangle en O, d'après la propriété de Pythagore on a:
   $MN^2 = OM^2 + ON^2$donc$MN^2 = x^2 + y^2 + x'^2 + y'^2$ (1)
   On sait $MN^2 = \overrightarrow{\mathrm{MN}}^2 = x^2 - 2xx' + y^2 + x'^2 - 2yy' + y'^2$ (2)
   D'après (1) et (2) on a : $-2xx' - 2yy' = 0$ donc $xx' + yy' = 0$

4. De tout ce qui précède on retient que : Les vecteurs $\overrightarrow{AB}\binom{x}{y}$ et $\overrightarrow{A'B'}\binom{x'}{y'}$ sont orthogonaux équivaut à $xx' + yy' = 0$.

Exercices d'application

Exercice 1

AFFIRMATIONS	V ou F
Les vecteurs $\overrightarrow{AB}\binom{4}{-2}$ et $\overrightarrow{CD}\binom{-3}{-6}$ sont orthogonaux	V
Les vecteurs $\overrightarrow{AB}\binom{-3}{4}$ et $\overrightarrow{CD}\binom{3}{-4}$ sont orthogonaux	F
Les vecteurs $\overrightarrow{AB} = 7\overrightarrow{OI} - 5\overrightarrow{OJ}$ et $\overrightarrow{CD}\binom{5}{7}$ sont orthogonaux	V
Les vecteurs $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{OI} + 11\overrightarrow{OJ}$ et $-13\overrightarrow{AB}$ sont orthogonaux	F

Exercice 2

on a :$-2 \times 6 + 3 \times 3 = -12 + 12 = 0$ donc les vecteurs $\overrightarrow{PB}$ et $\overrightarrow{AQ}$ sont orthogonaux

Activité8. Coordonnées du milieu d'un segment

Kest le milieu du segment [AB] si et seulement si$\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} = \vec{0}$:

$$\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{KA} = -\overrightarrow{KB} \Leftrightarrow \overrightarrow{KA} = \overrightarrow{BK}$$

$$\Leftrightarrow x_A - x_K = x_K - x_B \quad \text{et} \quad y_A - y_K = y_K - y_B$$

$$\Leftrightarrow x_K = \frac{x_A + x_B}{2} \quad \text{et} \quad y_K = \frac{y_A + y_B}{2}$$

Exercices de fixation

Exercice 1

le milieu I du segment [EF] a pour coordonnées $x_I = \frac{-1+5}{2}$ et $y_I = \frac{7-2}{2}$ donc I(2 ;$\frac{5}{2}$).

Exercice 2

Soit P le milieu de [AB]

On a ; $x_P = \frac{-19+9}{2} = -5$ *et* $y_P = \frac{4+2}{2} = 3$ et on constate que P = K donc le point K(-5 ; 3) est le milieu du segment [AB]

Exercices d'approfondissement

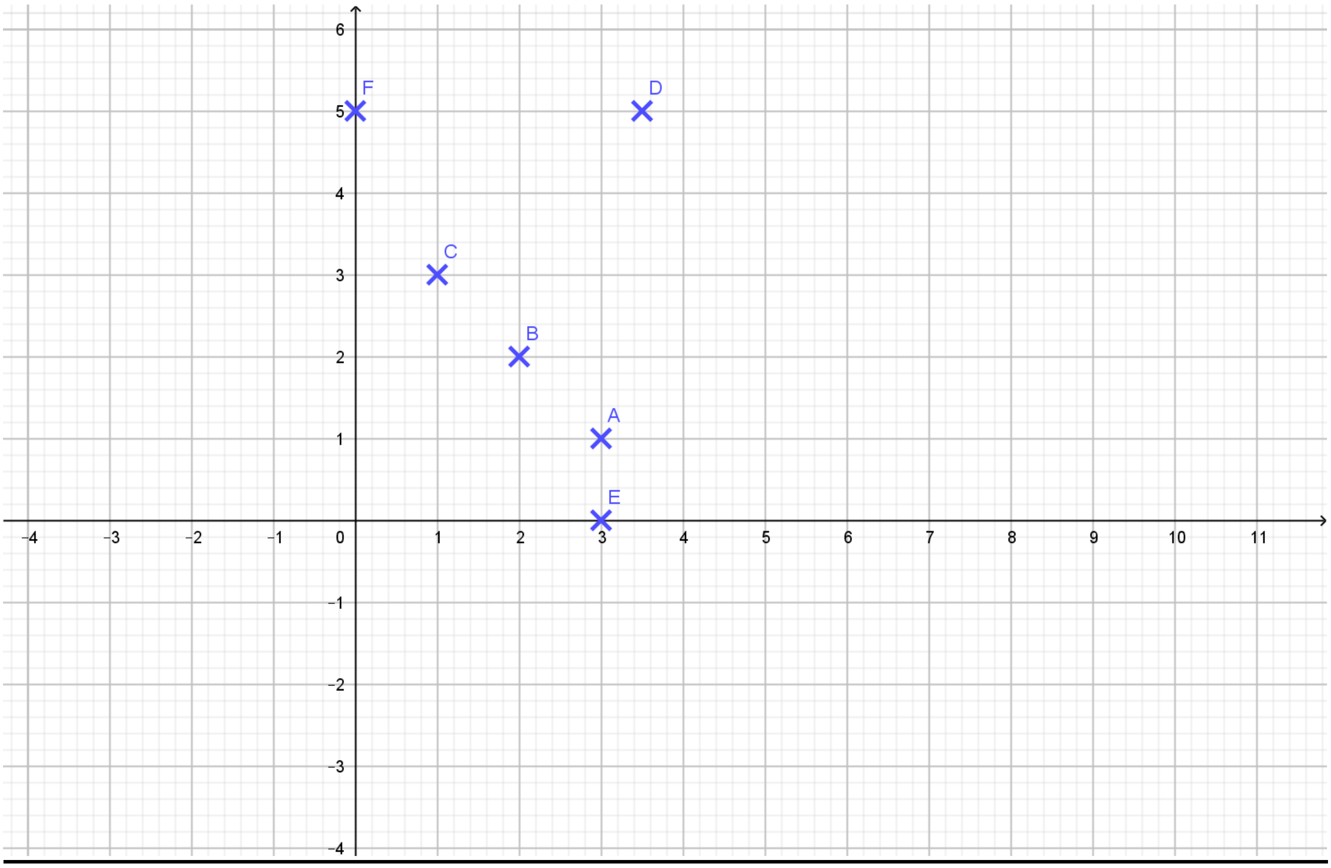
Execice1

A(-2 ; 2) B(2 ; 5) C(4 ; -1) D(-5 ; -3) E(7 ; 3) F(- 4 ; 5)

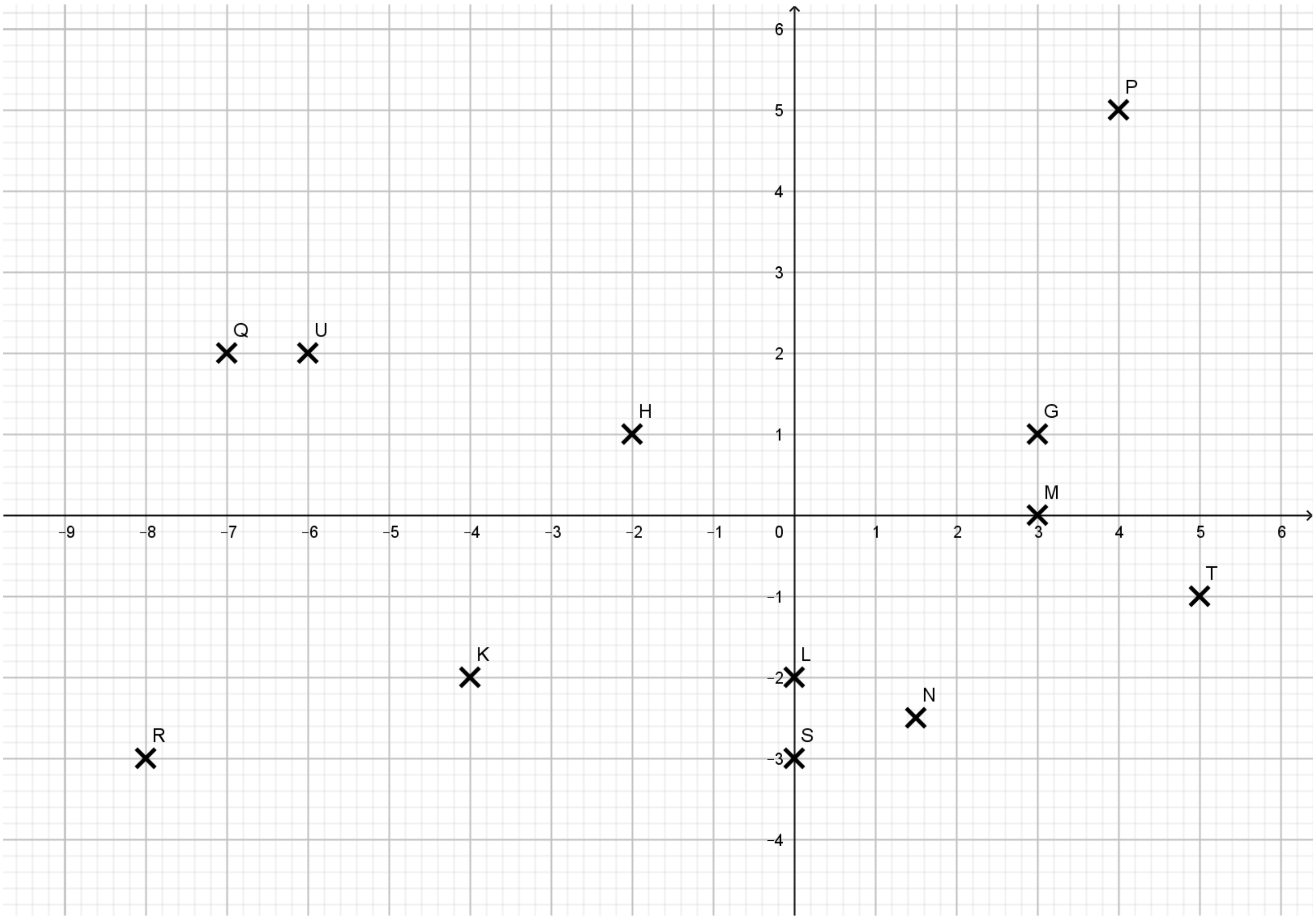
Execice2

G(-3 ; 0) H(6 ; 0) K(0 ; 2) L(0 ; -1) M(5 ; -3) N(-1 ; -2)

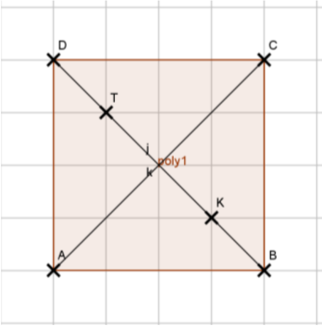
Exercice 3



Exercice 4



Exercice 5



a. $A(\ 0\ ;0\ )$, $B(\ 1\ ;0\ )$, $D(\ 0\ ;1\ )$ et $O(\ \frac{1}{2}\ ;\frac{1}{2})$

b. K milieu de $[OB]$: $K(\ \frac{3}{4};\frac{1}{4}\ )$

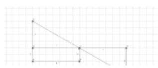
c. T milieu de $[OD]$: $T(\ \frac{1}{4}\ ;\frac{3}{4}\ )$

Exercice 6

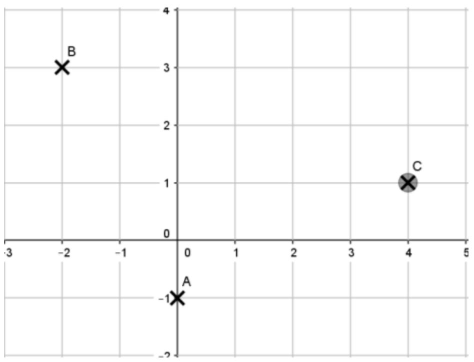
1. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}6\\-3\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}2\\-6\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{BE}\begin{pmatrix}5\\-2\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}-11\\2\end{pmatrix}$
2. $\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix}-6\\1\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{NL}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{GH}\begin{pmatrix}9\\0\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{KL}\begin{pmatrix}0\\-3\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{HK}\begin{pmatrix}-6\\2\end{pmatrix}$

Exercice 7

a) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$
b) $E(3\,;0)$
c) $F(2\,;-1)$



Exercice 8



a) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x-0\\y+1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}$donc
$\begin{cases}x=-2\\y+1=4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-2\\y=3\end{cases}$ $d'où\ B(-2\,;3)$

b) $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}x-0\\y+1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$
donc$\begin{cases}x=4\\y+1=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=4\\y=1\end{cases}$ $d'où\ B(4\,;1)$

Exercice 9

$\overrightarrow{OC}\begin{pmatrix}-4\\7\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{IA}\begin{pmatrix}1-1\\3{,}5-0\end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{IA}\begin{pmatrix}0\\3{,}5\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}5-1\\1-3{,}5\end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\-2{,}5\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}7-5\\-4-1\end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}2\\-5\end{pmatrix}$

Exercice10

On a :$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1-(-2)\\3-5\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-3-1\\3-3\end{pmatrix} \quad ; \quad \overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-4\\0\end{pmatrix}$$
$$\overrightarrow{CA}\begin{pmatrix}-2-(-3)\\5-3\end{pmatrix} \ ; \ \overrightarrow{CA}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

Exercice 11

$$\overrightarrow{OI}-\overrightarrow{OJ}\begin{pmatrix}1-0\\0-1\end{pmatrix} \ ; \ \overrightarrow{OI}-\overrightarrow{OJ}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix}-5+6\\2+8\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix}1\\10\end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{OJ}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix}1+0-5+6\\0+1+2+6\end{pmatrix} \quad ; \quad \overrightarrow{OI}+\overrightarrow{OJ}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix}2\\9\end{pmatrix}$$

Exercice12

On a $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD})\begin{pmatrix}2-6\\5+\frac{1}{2}\end{pmatrix}$; $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD})\begin{pmatrix}-4\\\frac{11}{2}\end{pmatrix}$

$$(\overrightarrow{PQ}-\overrightarrow{AB})\begin{pmatrix}-5-2\\1-5\end{pmatrix};(\overrightarrow{PQ}-\overrightarrow{AB})\begin{pmatrix}-7\\-4\end{pmatrix}$$

Exercice 13

$5\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}5\times 1\\5\times(-2)\end{pmatrix}$; : $5\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}5\\-10\end{pmatrix}$

$-\frac{3}{2}\overrightarrow{GH}\begin{pmatrix}-\frac{3}{2}\times(-4)\\-\frac{3}{2}\times 0\end{pmatrix}$; $-\frac{3}{2}\overrightarrow{GH}\begin{pmatrix}6\\0\end{pmatrix}$

$4\overrightarrow{EF}-\overrightarrow{RS}\begin{pmatrix}4\times 1-(-6)\\4\times(-2)-(-5)\end{pmatrix}$; $4\overrightarrow{EF}-\overrightarrow{RS}\begin{pmatrix}10\\-3\end{pmatrix}$

$-\overrightarrow{GH}+2\overrightarrow{EF}-3\overrightarrow{RS}\begin{pmatrix}4+2\times 1-3(-6)\\0+2(-2)-3(-5)\end{pmatrix}$; $-\overrightarrow{GH}+2\overrightarrow{EF}-3\overrightarrow{RS}\begin{pmatrix}24\\11\end{pmatrix}$

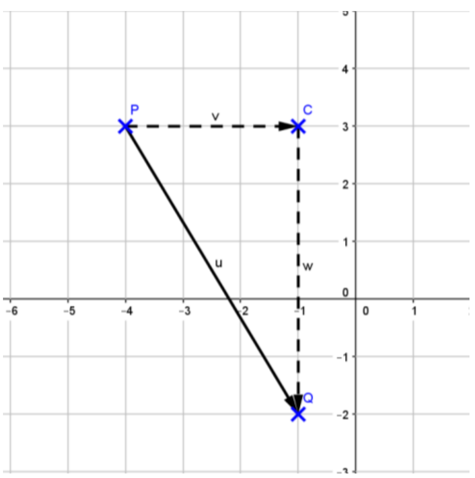
Exercice 14

On a : $2\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix}2(-11)-5\\2(2)-8\end{pmatrix}$; $2\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix}-27\\-4\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}5+11\\8-2\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}16\\6\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}0-1\\1-0\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ donc $-\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}-\frac{3}{4}\times 16-1\\-\frac{3}{4}\times 6+1\end{pmatrix}$

$-\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}-12-1\\-\frac{9}{2}+1\end{pmatrix}$; $-\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}-13\\-\frac{7}{2}\end{pmatrix}$

Exercice 15



1) Voir figure
2) Posons $Q(x\,;y)$. *on a* $\overrightarrow{PQ}\begin{pmatrix}x+4\\y-3\end{pmatrix}$

   et $\begin{pmatrix}x+4\\y-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-5\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}x+4=3\\y-3=-5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-1\\y=-2\end{cases}$

   donc $Q\,(-1\,;\,-2\,)$

Exercice16

$\overrightarrow{PR}$et$\overrightarrow{ST}$sontégaux$\Leftrightarrow \begin{cases} 6-y=1 \\ x+1=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=6-1 \\ x=3-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=5 \\ x=2 \end{cases}$

Exercice 17

1.ABCD soit un parallélogramme$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}5-2\\2-3\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$. En posant D(x; y) on a $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}6-x\\3-y\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} 6-x=3 \\ 3-y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=6-3 \\ y=3+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=4 \end{cases}$donc D(3 ; 4)

2. ABCD soit un parallélogramme$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2+2\\0-1\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}$. En posant D(x; y) on a $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}1-x\\-2-y\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-x=4 \\ -2-y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1-4 \\ y=-2+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-3 \\ y=-1 \end{cases}$donc D(-3 ; -1)

Exercice18

1) $S_P(A)=C \Leftrightarrow$ P est le milieu de [AC]

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x_C-1}{2}=3 \\ \dfrac{y_C+2}{2}=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C=6+1 \\ y_C=-4-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C=7 \\ y_C=-6 \end{cases} \text{donc } \; C\,(7\,;\,-6\,)$$

2) ABCD est un paralléogramme $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$

Soit D (x ; y) . $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-7+1\\-4-2\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-6\\-6\end{pmatrix}$ *et* $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}7-x\\-6-y\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} 7-x=-6 \\ -6-y=-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=13 \\ y=0 \end{cases}$donc $D(13\,;0\,)$

Exercice19

1. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3-1\\-2-2\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\-4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1-1\\6-2\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}$
2. On a $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{AC}$donc$\overrightarrow{AB}$et $\overrightarrow{AC}$sont colinéaires et(AB) = (AC) d'où le point C appartientà la droite (AB)

Exercice20

a. On a : $2\times1-3\times\frac{2}{3}=2-2=0$ donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires
b. $\overrightarrow{AB}\binom{3-1}{5-4}$; $\overrightarrow{AB}\binom{2}{1}$ et $\overrightarrow{CD}\binom{4+2}{2+1}$; $\overrightarrow{CD}\binom{6}{3}$. On a : $2\times3-1\times6=6-6=0$ donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires
c. $\overrightarrow{AB}\binom{1+2}{3-5}$; $\overrightarrow{AB}\binom{3}{-1}$ et $\overrightarrow{CD}\binom{3+1}{-1+1}$; $\overrightarrow{CD}\binom{4}{0}$. On a : $0\times3+1\times4=0+4=4\neq0$ donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ne sont pas colinéaires

Exercice 21

$\overrightarrow{AB}\binom{2-2}{-3+4}$; $\overrightarrow{AB}\binom{0}{1}$ et $\overrightarrow{BD}\binom{2-2}{3+3}$; $\overrightarrow{CD}\binom{0}{6}$. On a : $0 \times 6 - 3 \times 0 = 0$ donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires d'où ils ont la même direction.

Exercice22

a. On a : $\overrightarrow{OA}\binom{-1}{3}$ et $\overrightarrow{OB}\binom{6}{2}$et-1$\times 6 + 3 \times 2 = -6 + 6 = 0$ donc$\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB}$
b. On a $3 \times 5 - 5 \times 4 = 15 - 20 = -5 \neq 0$ donc les vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{GH}$ ne sont pas orthogonaux
c. $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2-1\\6-1\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CB}\begin{pmatrix}-4-2\\2-6\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{CB}\begin{pmatrix}-6\\-4\end{pmatrix}$on a 1$\times (-6) + (-4) \times 5 = -6 - 20 \neq 0$
donc les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{CB}$ ne sont pas orthogonaux
$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-4-1\\2-1\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-5\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}3-2\\-2-6\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}1\\-8\end{pmatrix}$ on a $1 \times (-5) + (-8) \times 1 = -5 - 8$
$\neq 0$donc les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{CB}$ ne sont pas orthogonaux

Exercice 23

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux équivaut à $-1(x-5) - 2(2x) = 0$

équivaut à $-x + 5 - 4x = 0$

équivaut à $5x = 5 = 0$

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$sont orthogonaux équivaut à $x = 1$

Exercice 24

1. (AG) et (EF) sont parallèles $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont colinéaires

$$.\Leftrightarrow 9 \times 2 + 3(1-x) = 0$$
$$\Leftrightarrow 18 + 3 - 3x = 0$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{21}{3}$$
$$\Leftrightarrow x = 7$$

2. (AG) et (EF) sont perpendiculaires $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont orthogonaux

$$\Leftrightarrow 9 \times (-3) + 2(1-x) = 0$$
$$\Leftrightarrow -27 + 2 - 2x = 0$$
$$\Leftrightarrow -25 = 2x$$
$$\Leftrightarrow x = -\frac{25}{2}$$

Exercice 25

1. E Milieu de [AB] $\Leftrightarrow x_E = \frac{3+1}{2} = 2 \quad et \;\; y_E = \frac{2+4}{2} = 3$donc E (2 ; 3)
F Milieu de [AC] $\Leftrightarrow x_F = \frac{3-1}{2} = 1 \quad et \;\; y_F = \frac{2-3}{2} = -\frac{3}{2}$doncF (1 ; $-\frac{3}{2}$)
G Milieu de [BC] $\Leftrightarrow x_G = \frac{1-1}{2} = 0 \quad et \;\; y_G = \frac{4-3}{2} = \frac{1}{2}$doncG (0 ; $\frac{1}{2}$)

2. L Milieu de [CD] $\Leftrightarrow x_L = \frac{-4-5}{2} = -\frac{9}{2}$ $et\ y_L = \frac{3+2}{2} = \frac{5}{2}$doncL ($-\frac{9}{2}; \frac{5}{2}$)

   M Milieu de [CE] $\Leftrightarrow x_M = \frac{-4-3}{2} = -\frac{7}{2}$ $et\ y_M = \frac{3+2}{2} = \frac{5}{2}$doncM ($-\frac{7}{2}$; $\frac{5}{2}$)

   N Milieu de [ED] $\Leftrightarrow x_N = \frac{-3-5}{2} = -4$ $et\ y_N = \frac{2+2}{2} = 2$doncN (-4 ; 2)

Exercice26

1. Soit K milieu de [EG] et L milieu de [FH]

   On a K Milieu de [EG] $\Leftrightarrow x_K = \frac{2+12}{2} = 7$ $et\ y_K = \frac{3-1}{2} = 1$ donc K(7 ; 1)

   etL Milieu de [FH] $\Leftrightarrow x_L = \frac{8+6}{2} = 7$ $et\ y_L = \frac{5-3}{2} = 1$ donc L (7 ; 1)

   On constate que K = L donc les segments [EG] et [FH] ont le même milieu.
2. Le quadrilatère EFGH est un parallélogramme car ses diagonales ont le même milieu

Exercice27

On a : $\overrightarrow{OA}\binom{-1}{2}$ donc $OA = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} \Longrightarrow OA = \sqrt{5}$.

$$\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ donc } OB = \sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2 + (-\frac{1}{2})^2} \Longrightarrow OB = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{10}{4}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} + 1 \\ -\frac{1}{2} - 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{5}{2} \end{pmatrix} \text{donc } AB = \sqrt{(-\frac{1}{2})^2 + (-\frac{5}{2})^2} = \frac{\sqrt{26}}{2}$$

Exercice 28

1. $\overrightarrow{AB}\binom{-4-2}{-1-3}$; $\overrightarrow{AB}\binom{-6}{-4}$, $\overrightarrow{CD}\binom{-5-2}{1-4}$; $\overrightarrow{CD}\binom{-7}{-3}$, $\overrightarrow{AC}\binom{2-2}{4-3}$; $\overrightarrow{AC}\binom{0}{1}$,$\overrightarrow{BD}\binom{-5+4}{1+1}$; $\overrightarrow{BD}\binom{-1}{2}$
2. $AB = \sqrt{(-6)^2 + (-4)^2} = \sqrt{36 + 16} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$.

   $CD = \sqrt{(-7)^2 + (-3)^2} = \sqrt{49 + 9} = \sqrt{58} = \sqrt{58}$.

   $AC = \sqrt{0^2 + 1^2} = \sqrt{1} = 1$.

   $BD = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$.

Exercice 29

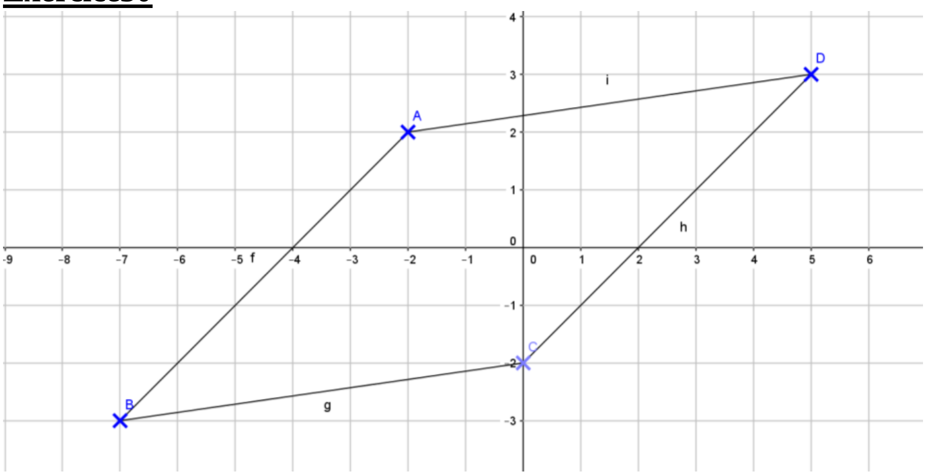
1. $\overrightarrow{AB}\binom{7-4}{-1-2}$; $\overrightarrow{AB}\binom{3}{-3}$, $\overrightarrow{AC}\binom{12-4}{4-2}$; $\overrightarrow{AC}\binom{8}{2}$, $\overrightarrow{BC}\binom{12-7}{4+1}$; $\overrightarrow{AC}\binom{5}{5}$
2. $AB = \sqrt{3^2 + (-3)^2} = \sqrt{9 + 9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

   $AC = \sqrt{8^2 + 2^2} = \sqrt{64 + 4} = \sqrt{68} = 2\sqrt{17}$

   $BC = \sqrt{5^2 + 5^2} = \sqrt{25 + 25} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$
3. On a 18 +50 = 68 c'est-à-dire $AB^2 + BC^2 = AC^2$, d'après la réciproque de la propriété de Pythagore le triangle ABC est rectangle en B.

Exercices de d'approfondissement

Exercice30



2. Justifions que ABCD est un parallélogramme

   Soit K milieu de [AC] et L milieu de [BD]

   On a K Milieu de [AC] $\Leftrightarrow x_K = \frac{-2+0}{2} = -1 \quad et \ y_K = \frac{2-2}{2} = 0$ donc K (-1 ; 0)

   etL Milieu de [BD] $\Leftrightarrow x_L = \frac{-7+5}{2} = -1 \quad et \ y_L = \frac{-3+3}{2} = 0$ donc L (-1 ; 0)

   On constate que K = L donc les segments [AC] et [BD] ont le même milieu.

Le quadrilatère ABCD est un parallélogramme car ses diagonales se coupent en leur milieu

3. Justifions que le triangle CBD est isocèle en C

   On a $\overrightarrow{CB}\binom{-7-0}{-3+2}$; $\overrightarrow{CB}\binom{-7}{-1}$; $CB = \sqrt{(-7)^2 + (-1)^2} = \sqrt{49+1} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

   et$\overrightarrow{CD}\binom{5-0}{3+2}$; $\overrightarrow{CB}\begin{pmatrix}5\\5\end{pmatrix}$; $CB = \sqrt{5^2+5^2} = \sqrt{25+25} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

   On constate que CB = CD donc le triangle CBD est isocèle en C
4. Le quadrilatère ABCD est un parallélogramme qui deux côtés consécutifs de même longueur donc c'est un losange.

Exercice31

1. Démontrons que le triangle RST est rectangle

   $\overrightarrow{SR}\begin{pmatrix}-6+1\\3-5\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{SR}\begin{pmatrix}-5\\-2\end{pmatrix}$; et $\overrightarrow{ST}\begin{pmatrix}3+1\\-5-5\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{ST}\begin{pmatrix}4\\-10\end{pmatrix}$;

   on a : $-5\times 4 - 2\times(-10) = -20 + 20 = 0$ donc les vecteurs $\overrightarrow{SR}$ et $\overrightarrow{ST}$ sont orthogonaux donc le triangle RST est rectangle en S.

2. Le milieu P de l'hypoténuse [RT] est le centre du cercle circonscrit au triangle RST
   On a P Milieu de [RT] $\Leftrightarrow x_P = \frac{-6+3}{2} = -\frac{3}{2}$ et $y_P = \frac{3-5}{2} = -1$ donc P ($-\frac{3}{2}$;-1) , on constate que P = K donc K est le centre du cercle circonscrit au triangle RST
3. $S_K(S) = U$ donc K est le milieu de [SU]
   K est le milieu de [SU] $\Leftrightarrow -\frac{3}{2} = \frac{-1+x_U}{2}$ et $-1 = \frac{5+y_U}{2}$
   $\Leftrightarrow x_U - 1 = -3$ et $y_U + 5 = -2$
   $\Leftrightarrow x_U = -2$ et $y_U = -7$ donc $U(-2;-7)$
4. Justifions que $U \in (C)$(plusieurs méthodes possibles)
   K est le milieu de [SU] $\Leftrightarrow$ KU = KS or S$\in$ C (K; KS) donc U $\in \mathscr{C}$(K; KS)

Exercice32

1. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-4-2\\4-6\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-6\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}4-2\\0-6\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}2\\-6\end{pmatrix}$
   on a $-6\times 2 - 2\times(-6) = -12+12 = 0$ donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont orthogonaux
2. $AB = \sqrt{(-6)^2+(-2)^2} = \sqrt{36+4} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$
   $AE = \sqrt{2^2+(-6)^2} = \sqrt{4+36} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$, il vient que AB = AE.
3. $\overrightarrow{AB}$et$\overrightarrow{AE}$sont orthogonaux et AB = AE donc le triangle ABE est rectangle et isocèle en A
4. $\overrightarrow{BE}\begin{pmatrix}4+4\\0-4\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{BE}\begin{pmatrix}8\\-4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix}-2+4\\3-4\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$
   on a $-1\times 8 - 2\times(-4) = -8+8 = 0$ donc les vecteurs $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{BM}$ sont colinéaires d'où les points B , E et M sont alignés

Exercice 33

1. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0-1\\-2-\frac{3}{2},\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\-\frac{7}{2}\end{pmatrix}$
   R milieu de [AB] $\Leftrightarrow x_R = \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2}$ et $y_R = \frac{\frac{3}{2}-2}{2} = -\frac{1}{4}$ donc R ($\frac{1}{2}$; $-\frac{1}{4}$)
2. D appartienne à la médiatrice de [AB]$\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{RD}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont orthogonaux. On a $\overrightarrow{RD}\begin{pmatrix}2-\frac{1}{2}\\-x+\frac{1}{4}\end{pmatrix}$
   $\overrightarrow{RD}$ et $\overrightarrow{AB}$sont orthogonaux $\Leftrightarrow \frac{3}{2}\times(-1) - \frac{7}{2}\left(-x+\frac{1}{4}\right) = 0$
   $\Leftrightarrow -\frac{3}{2} + \frac{7}{2}x - \frac{7}{8} = 0$
   $\Leftrightarrow -12 + 28x - 7 = 0$
   $\Leftrightarrow x = \frac{19}{28}$
3. $t_{\overrightarrow{AJ}}(B) = F \Leftrightarrow \overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{BF}$. On a $\overrightarrow{AJ}\begin{pmatrix}0-1\\1-\frac{3}{2}\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AJ}\begin{pmatrix}-1\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ $et$$\overrightarrow{BF}\begin{pmatrix}x\\y+2\end{pmatrix}$
   $\Leftrightarrow \begin{cases}x=-1\\y+2=-\frac{1}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-1\\y=-\frac{1}{2}-2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-1\\y=-\frac{5}{2}\end{cases}$ donc $F(-1\,;-\frac{5}{2})$

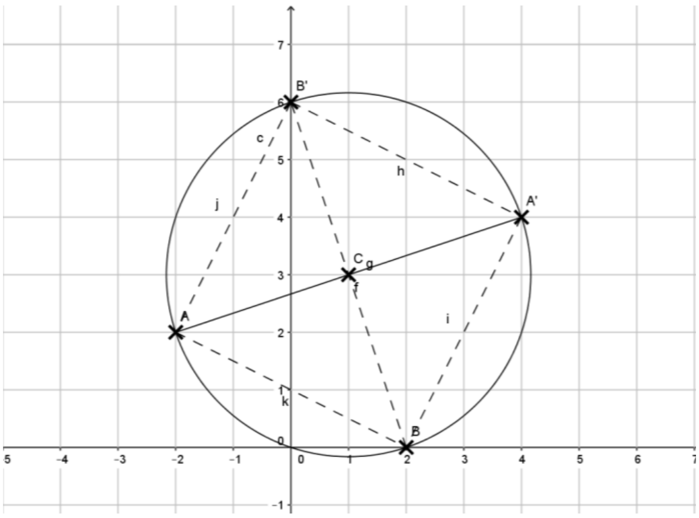
Exercice 34

1. Soit P le milieu de [AB]. C appartienne à la médiatrice de [AB]$\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{\mathrm{PC}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ sont orthogonaux.
   On a : P le milieu de [AB]$\Leftrightarrow$ $x_P = \frac{-2+2}{2} = 0 \;\; et \;\; y_P = \frac{2+0}{2} = 1 \;\; donc\; P(0\,;1)$
   $\overrightarrow{\mathrm{PC}}\begin{pmatrix}1-0\\3-1\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{\mathrm{PC}}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2+2\\0-2\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}$
   On a : $4 \times 1 - 2 \times 2 = 4 - 4 = 0$ donc $\overrightarrow{\mathrm{PC}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ sont orthogonaux. Ainsi C appartienne à la médiatrice de [AB.

2. a) $\mathrm{C} \in \mathrm{med[AB]} \Leftrightarrow \mathrm{CA} = \mathrm{CB}$ et comme C est le centre de ($\mathscr{C}$) on a r = CA
   $r = CA = \sqrt{(-2-1)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$
   a) A et A' sont diamétralement opposés signifie que C est le milieu de [AA']
   C est le milieu de [AA']$\Leftrightarrow$ $1 = \frac{-2+x_{A'}}{2} \;\; et \; 3 = \frac{2+y_{A'}}{2}$
   $\Leftrightarrow 2 = -2 + x_{A'} \;\; et \; 6 = 2 + y_{A'}$

$\Leftrightarrow 4 = x_{A'} \;\; et \; 4 = y_{A'}$donc A' (4 ; 4)
B et B' sont diamétralement opposés signifie que C est le milieu de [BB']
C est le milieu de [BB']$\Leftrightarrow$ $1 = \frac{2+x_{B'}}{2} \;\; et \; 3 = \frac{0+y_{B'}}{2}$
$\Leftrightarrow 2 = 2 + x_B \;\; et \; 6 = 0 + y_{B'}$
$\Leftrightarrow 0 = x_{B'} \;\; et \; 6 = y_{B'}$donc B' (0 ; 6)

   b) Démontrons que ABC est rectangle et isocèle.
   $\overrightarrow{CA}\begin{pmatrix}-2-1\\2-3\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{CA}\begin{pmatrix}-3\\-1\end{pmatrix} et \overrightarrow{CB}\begin{pmatrix}2-1\\0-3\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{CB}\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$ on a $-3 \times 1 - 1 \times (-3) = -3 + 3 = 0$
   Donc $\overrightarrow{CA} \;\; et \;\; \overrightarrow{CB}$ sont orthogonaux et comme CA = CB , le triangle ABC rectangle et isocèle en C. le quadrilatère ABA'B' est un carré les diagonales ont la même longueur et sont perpendiculaires en leur milieu.

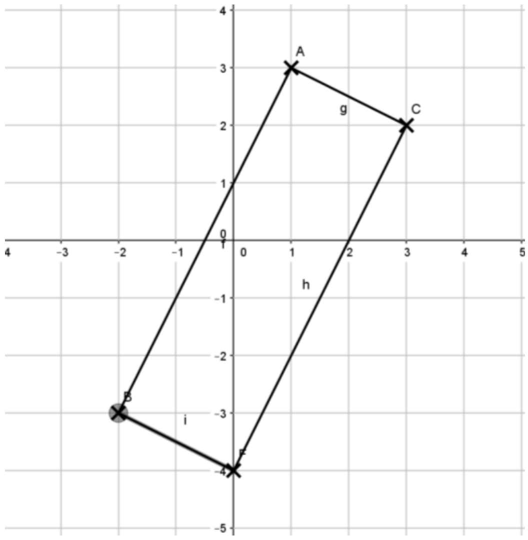


Exercice 35

1. I appartient à (BC) si et seulement si $\overrightarrow{\mathrm{IB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{IC}}$ sont colinéaires
   On a $\overrightarrow{\mathrm{IB}}\begin{pmatrix}-2-1\\-3-0\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{\mathrm{IB}}\begin{pmatrix}-3\\-3\end{pmatrix}$; et $\overrightarrow{\mathrm{IC}}\begin{pmatrix}3-1\\2-0\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{\mathrm{IC}}\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$; et $-3 \times 2 + 2 \times 3 = -6 + 6 = 0$
   donc les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{IB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{IC}}$ sont colinéaires d'où le point C appartient à la droite (BC)
2. Justifions que les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2-1\\-3-3\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3\\-6\end{pmatrix}$; et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}3-1\\2-3\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$; et $-3\times 2+(-6)(-1)=-6+6=0$ donc les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires

3. a) ACFB soit un parallélogramme $\Leftrightarrow \overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BF}$ soit F (x ; y)
$\Leftrightarrow \begin{cases} x+2=2\\ y+3=-1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0\\ y=-4\end{cases}$ donc F(0 ; - 4)
b) ACFB est un parallélogramme qui possède un angle droit en A donc c'est un rectangle.



Exercice 36

1. C appartient au cercle de diamètre [AB]$\Leftrightarrow$ ABC est rectangle en C

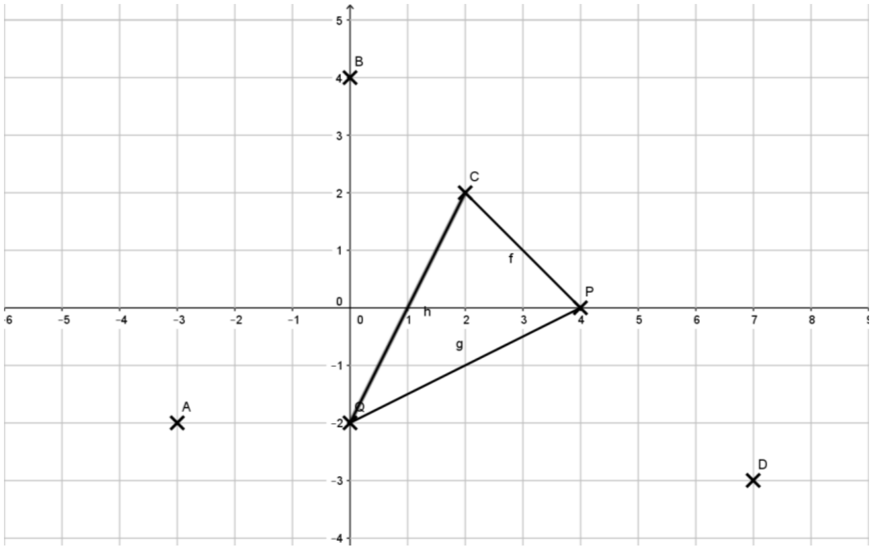
On a $\overrightarrow{CA}\begin{pmatrix}-3-2\\-3-2\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{CA}\begin{pmatrix}-5\\-5\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CB}\begin{pmatrix}0-2\\4-2\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{CB}\begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}$ et $-5(-2)+(-5)\times 2=10-10=0$ donc le triangle ABC est rectangle en Cd'où le point Cappartient au cercle de diamètre [AB]

2. a) Soit D(x ; y) . $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}x-2\\y-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix}$
$2\overrightarrow{CD}=5\overrightarrow{BC}\Leftrightarrow \begin{cases}2(x-2)=10\\2(y-2)=-10\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-2=5\\y-2=-5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=7\\y=-3\end{cases}$ donc D(7 ; - 3)
b) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0+3\\4+3\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\7\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{OD}\begin{pmatrix}7\\-3\end{pmatrix}$. On a $3\times 7+(-3)\times 7=21-21=0$ donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{OD}$ sont orthogonaux.

3. $S_I(C)=Q\Leftrightarrow$ I est le milieu de [CQ]

$$\Leftrightarrow 1=\frac{2+x_Q}{2}\quad et\ \ 0=\frac{2+x_Q}{2}$$
$$\Leftrightarrow 2=2+x_Q\quad et\ \ 0=2+x_Q$$
$\Leftrightarrow 0=x_Q\quad et\ -2=x_Q$ doncQ (0;-2)

4. $\overrightarrow{QC}\begin{pmatrix}2-0\\2+2\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{QC}\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{QP}\begin{pmatrix}4-0\\0+2\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{QP}\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$ et $QC=\sqrt{4+16}=2\sqrt{5}$ et $QP=\sqrt{16+4}=2\sqrt{5}$. On remarque QC = QP donc le triangle QCP est isocèle en Q.



Exercice 37

1. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1+2\\2-1\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-3+2\\4-1\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}et-1\times 3+1\times 3=-3+3=0$ donc le triangle ABC est rectangle en A
2. E milieu de [BC] $\Leftrightarrow x_E=\frac{1-3}{2}=\ -1\ \ et\ \ y_E=\frac{2+3}{2}=3$ donc E (-1 ; 3)
3. E milieu de [AP] $\Leftrightarrow -1=\frac{-2+x_P}{2}\ \ et\ \ 3=\frac{1+x_P}{2}$

   $\Leftrightarrow\ -2=-2+x_P\ \ et\ \ 6=1+x_P$

   $\Leftrightarrow\ \ 0=x_P\ \ et\ \ 5=x_P$donc P(0 ; 5)
4. a) ABC est rectangle en A donc les points A, B et C appartient au cercle ($\mathscr{C}$) de diamètre [BC] . E étant le milieu de [BC],est le centre de ($\mathscr{C}$). De plus P est le symétrique de A par rapport à E donc P appartient à (C). Ainsi les points A, B, C et P appartiennent au cercle ($\mathscr{C}$) de centre E et de rayon EA= $\sqrt{(-2+1)^2+(1-3)^2}=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$

   b) EJ $\sqrt{(0+1)^2+(1-3)^2}=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$, EJ est un rayon de ($\mathscr{C}$) donc J$\in$ ($\mathscr{C}$)

Exercice 38

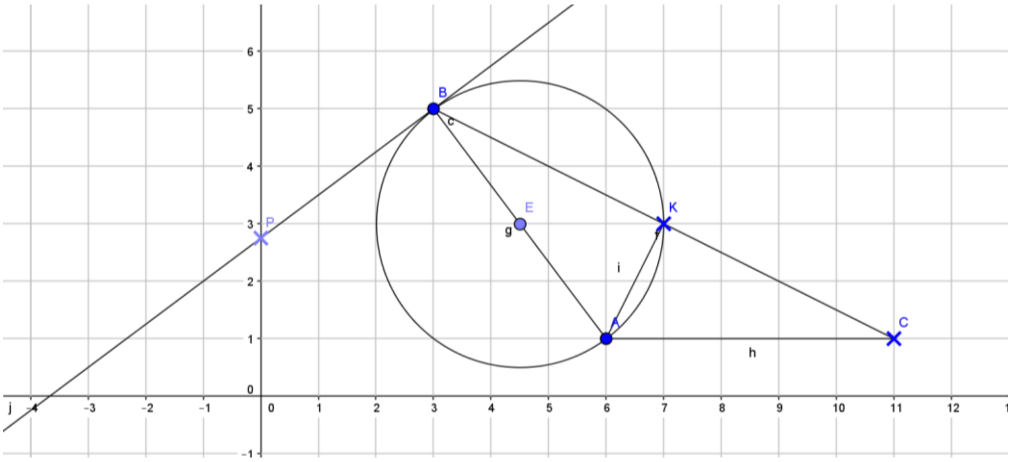
1. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3-6\\5-1\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{CA}\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}$ $et$$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}11-6\\1-1\end{pmatrix}$;$\overrightarrow{CB}\begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix}$,AB= $\sqrt{(-3)^2+4^2}=\sqrt{9+16}=5$

   et $AC=\sqrt{5^2+0^2}=\sqrt{25}=5$, on a AC = AB donc le triangle ABC est isocèle en A
2. K milieu de [BC] $\Leftrightarrow x_K=\frac{3+11}{2}=\ 7\ \ et\ \ y_K=\frac{5+1}{2}=3$ donc K (7 ; 3)
3. ABC est isocèle en A et K est le milieu de [BC] donc (AK) est une hauteur de ABC d'où (AK) est perpendiculaire à (BC) donc le triangle ABK est rectangle en K. Le point E centre du cercle circonscrit au triangle ABK est le milieu de l'hypoténuse [AB]

   E milieu de [AB] $\Leftrightarrow x_E=\frac{6+3}{2}=\frac{9}{2}\ \ et\ \ y_E=\frac{5+1}{2}=3$ donc E ($\frac{9}{2}$; 3)
4. la droite (PB) est tangente en B au cercle (C)ssi (PB) est perpendiculaire à (EB)

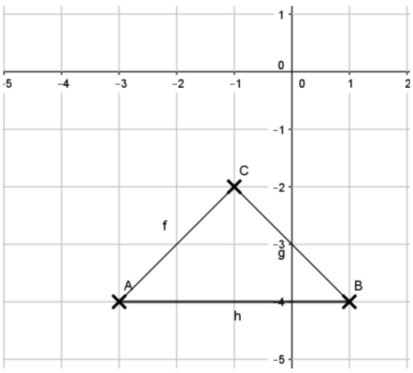
   $\overrightarrow{PB}\begin{pmatrix}3-0\\5-\frac{11}{4}\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{PB}\begin{pmatrix}3\\\frac{9}{4}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{EB}\begin{pmatrix}3-\frac{9}{2}\\5-3\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{EB}\begin{pmatrix}-\frac{3}{2}\\2\end{pmatrix}$on a : $-\frac{3}{2}\times 3+2\times\frac{9}{4}=-\frac{9}{2}+\frac{9}{2}=0$ donc (PB) et (EB) sont perpendiculaires, ainsi la droite (PB) est tangente en B au cercle (C).
5. S est un élément de la droite (PB) ssi$\overrightarrow{SP}$ et $\overrightarrow{SB}$ sont colinéaires.

$\overrightarrow{SP}\begin{pmatrix} 0+\frac{7}{3} \\ \frac{11}{4}-1 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{SP}\begin{pmatrix} \frac{7}{3} \\ \frac{7}{4} \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{SB}\begin{pmatrix} 3+\frac{7}{3} \\ 5-1 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{SB}\begin{pmatrix} \frac{16}{3} \\ 2 \end{pmatrix}$on a :$\frac{7}{3}\times 2-\frac{16}{3}\times\frac{7}{4}=\frac{14}{3}-\frac{14}{3}=0$ donc$\overrightarrow{SP}$ et $\overrightarrow{SB}$ sont colinéaires, ainsi le point S est un élément de la droite (PB)



Exercice39

1.



2. AB = $\sqrt{(1+3)^2+(-4+4)^2}=\sqrt{16}=4$;
   AC= $\sqrt{(-1+3)^2+(-2+4)^2}=\sqrt{4+4}=2\sqrt{2}$
   BC = $\sqrt{(-1-1)^2+(-2+4)^2}=\sqrt{4+4}=2\sqrt{2}$
   On a 4 + 4 = 8 c'est-à-dire CB² +CA² = AB² , d'apès la réciproque de la propriété de Pythagore le triangle ABC est rectangle en C , de plus CA = CB donc ABC est aussi isocèle en C.
   Finalement, le triangle ABC est rectangle et isocèle en C*(on peut untiliser les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$orthogonaux et de même longueur)*

Exercice40

1. AB = $\sqrt{\left(-3-3\sqrt{3}\right)^2+(-3+3\sqrt{3})^2}=\sqrt{9+27+9+27}=\sqrt{18+54}=6\sqrt{2}$;
   AC= $\sqrt{\left(3-3\sqrt{3}\right)^2+(3+3\sqrt{3})^2}=6\sqrt{2}$
   BC = $\sqrt{(3+3)^2+(2+4)^2}=\sqrt{36+36}=6\sqrt{2}$
   On a AB = AC = BC donc le triangle ABC est équilatéral.
   2.a) E milieu de [BC] $\Leftrightarrow x_E=\frac{-3+3}{2}=0$ et $y_E=\frac{-4+2}{2}=-1$ donc E (0 ;−1)

b) ABCD est un losange implique que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Soit D(x ; y)

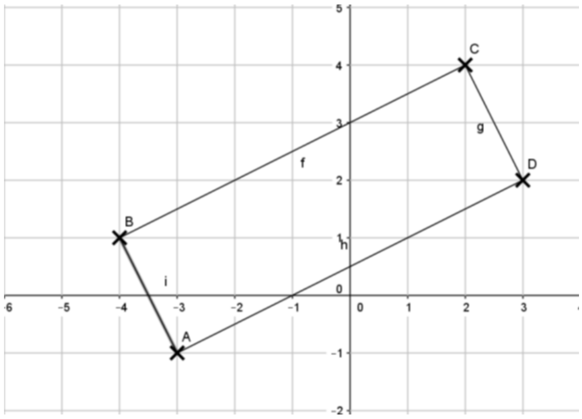
$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3-3\sqrt{3}\\-3+3\sqrt{3}\end{pmatrix}et\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}3-x\\2-y\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \iff \begin{cases}3-x=-3-3\sqrt{3}\\2-y=-3+3\sqrt{3}\end{cases} \iff \begin{cases}x=3+3+3\sqrt{3}\\y=2+3-3\sqrt{3}\end{cases} \iff \begin{cases}x=6+3\sqrt{3}\\y=5-3\sqrt{3}\end{cases}.$

Donc D($6+3\sqrt{3}$; $5-3\sqrt{3}$)

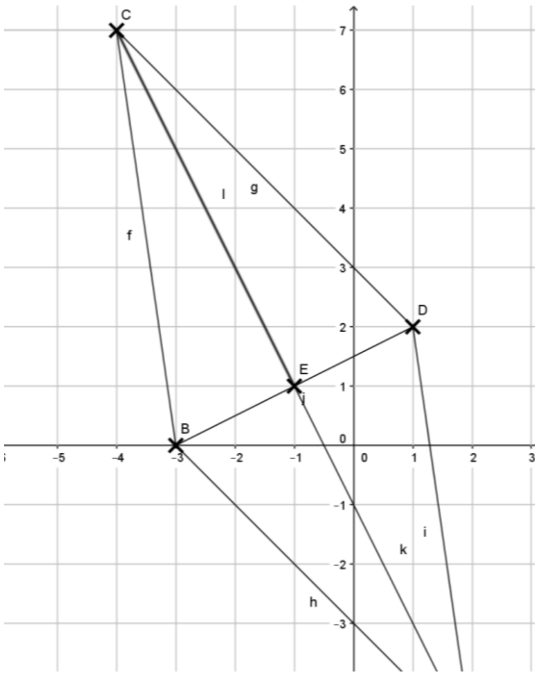
Exercice 41

1.



2. on a :$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ donc ABCD est un parallélogramme, de plus AC = BD donc ABCD est rectangle car un parallélogramme qui a ses diagonales de même longueur est un losange

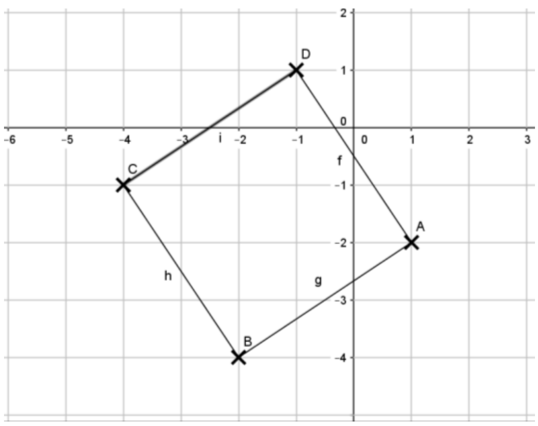
Exercice 42



2. Plusieurs méthodes

- On démontre que les diagonales [BD] et [AC] sont perpendiculaires en leur milieu
- On peut aussi démontrer que AB = BC = CD = DA
- ABCD est un parallélogramme qui a deux côtés consécutifs de même longueur

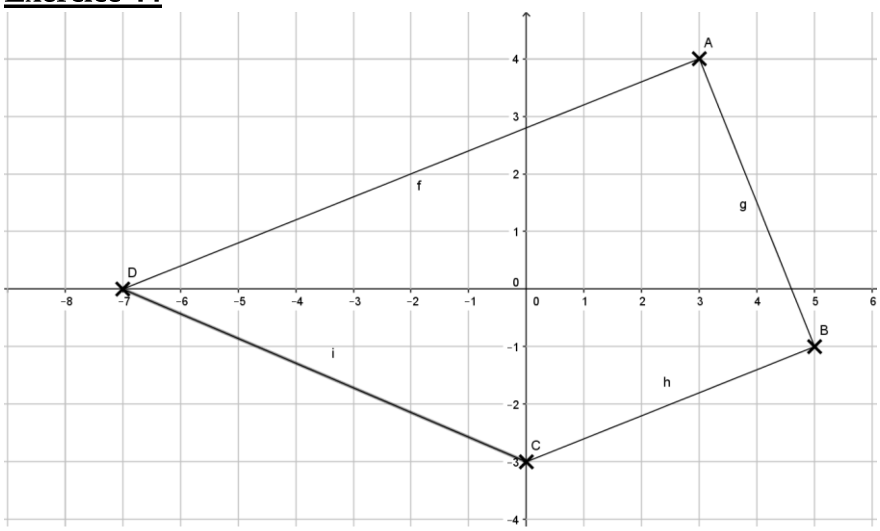
Exercice 43



2. Plusieurs méthodes

- On démontre que ABCD est un rectangle qui a ses diagonales perpendiculaires
- On démontre que ABCD est un losange qui a ses diagonales de même longueur
- On démontre que ABCD possède quatre côtés de même longueur et a un angle droit

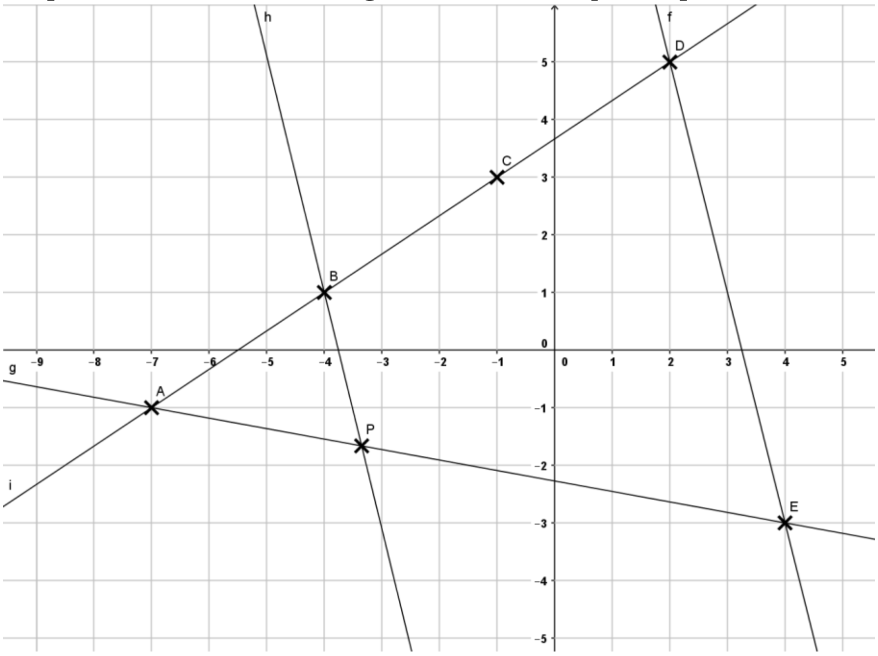
Exercice 44



2. On démontre que (BC) et (AD) sont parallèles, puis les droites (CD) et (AB) sont sécantes (*ne sont pas parallèles*)

Exercice 45

2.b) C est le symétrique de A par rapport à B donc A, B et C sont alignés. C est le milieu de [BD] donc les points C , B et D sont alignés. On obtient que les points A, B , C et D sont tous alignés.



2. On considère le triangle ADE. On a B$\in (AD)$, $P \in$(AE) tel que (PB) // (DE) .

- D'après le propriété de Thalès on a $\frac{AB}{AD} = \frac{AP}{AE}$ donc AP =$\frac{AB \times AE}{AD}$; AB = $\sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$;

  AE = $\sqrt{11^2 + (-2)^2} = 5\sqrt{5}$; AD = $\sqrt{9^2 + 6^2} = 3\sqrt{13}$soit AP = $\frac{\sqrt{13} \times 5\sqrt{5}}{3\sqrt{13}} = \frac{5\sqrt{5}}{3}$
- D'après la conséquence de Thalès on a : $\frac{AB}{AD} = \frac{PB}{DE}$ donc PB = $\frac{AB \times DE}{AD}$

  On a DE = $\sqrt{1^2 + 8^2} = \sqrt{65} =$ d'où PB = $\frac{\sqrt{13} \times \sqrt{65}}{3\sqrt{13}} = \frac{\sqrt{65}}{3}$

<u>Exercice47</u>

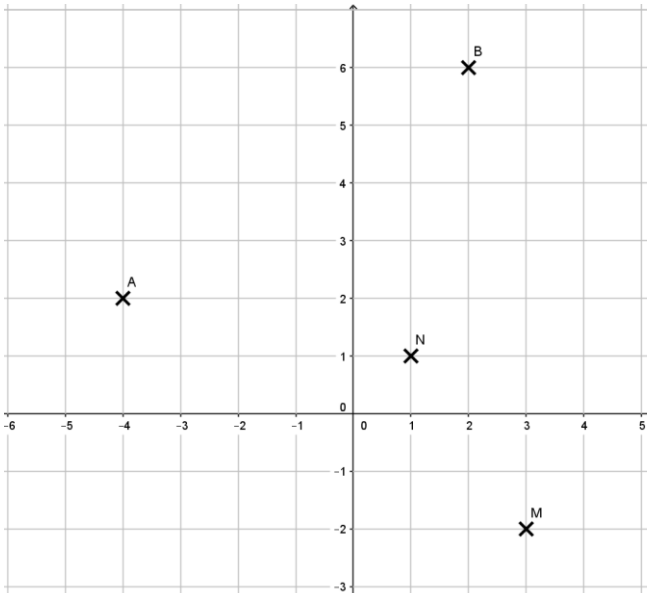
1. AB = $\sqrt{(-3+6)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$;

BC = $\sqrt{(6+3)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{81+9} = 3\sqrt{10}$

AC = $\sqrt{(6+6)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{144+16} = 4\sqrt{10}$

On a AB + BC = AC donc B$\in [AC]$ d'où les points A, B et C sont alignés.

<u>Exercice48</u>

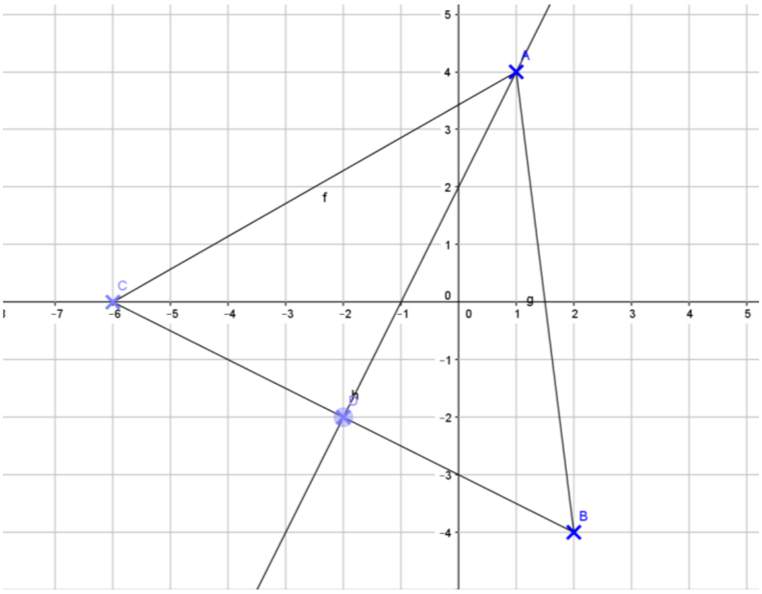


1. A(-4 ; 2) ; B(2; 6) , M(3 ;- 2) , N(1 ; 1)
2. NB = $\sqrt{(2-1)^2+(6-1)^2} = \sqrt{1^2+5^2} = \sqrt{26}$;
   MB = $\sqrt{(2-3)^2+(6+2)^2} = \sqrt{1+64} = \sqrt{65}$
3. a. on a NA = NB et MA = MB donc les points N et M appartiennent à la médiatrice de [AB] d'où la droite (MN) est la médiatrice du segment [AB]

a. B est le symétrique de A par rapport à (MN) car(MN) est la médiatrice du segment [AB]

Exercice49

1.



2. AB = $\sqrt{(2-1)^2+(-4-4)^2} = \sqrt{1+64} = \sqrt{65}$

AC = $\sqrt{(-6-1)^2+(-4)^2} = \sqrt{49+16} = \sqrt{65}$

BC = $\sqrt{(-6-2)^2+(0+4)^2} = \sqrt{64+16} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$

On remarque que AB = AC donc le triangle ABC est isocèle en A.

3. H milieu de [BC] $\Leftrightarrow x_H = \frac{2-6}{2} = -2 \;\; et \;\; y_H = \frac{-4+0}{2} = -2$ donc H $(-2\,;-2)$

D'où AH = $\sqrt{(-3)^2+(-6)^2} = \sqrt{9+36} = 3\sqrt{5}$

Aire(ABC) = $\frac{AH \times BC}{2} = \frac{3\sqrt{5}\times 4\sqrt{5}}{2} = 30$ cm²

Exercice 50

1. Soit H milieu de [AC] $\Leftrightarrow x_H = \frac{-1+2}{2} = \frac{1}{2} \;\; et \;\; y_H = \frac{3-3}{2} = 0$ donc H $(\frac{1}{2};0)$

   Et Kmilieu de [BD] $\Leftrightarrow x_K = \frac{3-2}{2} = \frac{1}{2} \;\; et \;\; y_K = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{3}}{2} = 0$ donc K $(\frac{1}{2};0)$

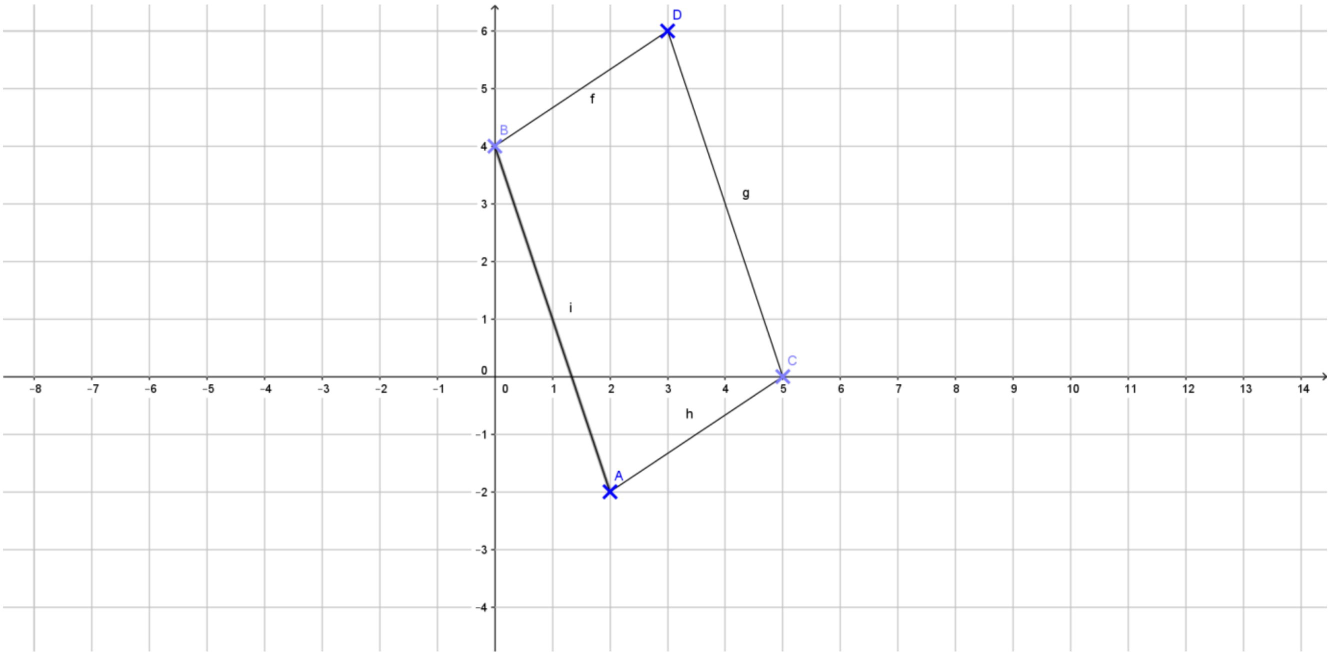
   On remarque que les segments [AC] et [BD] ont le même milieu.
2. AC = $\sqrt{(2+1)^2+(-3-3)^2} = \sqrt{9+36} = \sqrt{37}$

   BD = $\sqrt{(-2-3)^2+(-\sqrt{3}-\sqrt{3})^2} = \sqrt{25+12} = \sqrt{37}$d'où AC = BD

On a aussi $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}3\\-6\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}-5\\-2\sqrt{3}\end{pmatrix}$ et $-5\times 3 - 6(-2\sqrt{3}) \neq 0$ donc le quadrilatère ABCD a ses diagonales qui se coupent en leur milieu et ont la même longueur donc c'est un rectangle.

Exercice 51

1.



2. $\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}$

3. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\6\end{pmatrix}$

4. ACDB est un parallélogramme car $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$

Situation d'évaluation

1. $500\,\overrightarrow{GA} + 950\,\overrightarrow{GB} + 350\,\overrightarrow{GC} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow 500\,\overrightarrow{GO} + 500\,\overrightarrow{OA} + 950\,\overrightarrow{GO} + 950\,\overrightarrow{OB} + 350\,\overrightarrow{GO} + 350\,\overrightarrow{OC} = \vec{0}$.

$\Leftrightarrow 1800\overrightarrow{GO} + 500\,\overrightarrow{OA} + 950\,\overrightarrow{OB} + 350\,\overrightarrow{OC} = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow 1800\,\overrightarrow{OG} = 500\,\overrightarrow{OB} + 950\,\overrightarrow{OB} + 350\,\overrightarrow{OC}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OG} = \frac{500}{1800}\overrightarrow{OA} + \frac{950}{1800}\overrightarrow{OB} + \frac{350}{1800}\overrightarrow{OC}$$

$$\Leftrightarrow \quad x_G = \frac{500}{1800}x_A + \frac{950}{1800}x_G + \frac{350}{1800}x_C \quad et \quad y_G = \frac{500}{1800}y_A + \frac{950}{1800}y_G + \frac{350}{1800}y_C$$

$$\Leftrightarrow x_G = \frac{500}{1800}(-500) + \frac{950}{1800}(100) + \frac{350}{1800}(2500) = 400$$

$y_G = \frac{500}{1800}(300) + \frac{950}{1800}(600) + \frac{350}{1800}(0) = 400$donc l'emplacement du château est au point G(400 ; 400)

2. AG = $\sqrt{(400+500)^2 + (400-300)^2} = 100\sqrt{82}$

BG = $\sqrt{(400-100)^2 + (400-600)^2} = 100\sqrt{13}$

CG = $\sqrt{(400-2500)^2 + (400-0)^2} = 100\sqrt{457}$