Leçon : ÉQUATIONS ET INÉQUATIONS DU SECOND DEGRE DANS IR

Exercices de renforcement

EXERCICE 1

1) (E_1) : $-x^2 = 6x + 9 \Leftrightarrow x^2 + 6x + 9 = 0$. $\Delta = 0$ donc $S_{\mathbb{R}} = \{-3\}$.
   (E_2) : $3x^2 - 2x = -3 \Leftrightarrow 3x^2 - 2x + 3 = 0$. $\Delta = -32$ donc $S_{\mathbb{R}} = \emptyset$.
   Même procédé pour (E_3).

(E_3): $\frac{1}{2}x + 4 = 2x^2 \Leftrightarrow 2x^2 - \frac{1}{2}x - 4 = 0$ donc $S_R = \left\{\frac{1-\sqrt{129}}{8}; \frac{1+\sqrt{129}}{8}\right\}$

2) (E_4) : $\frac{1}{x} - \frac{x}{2} = 5$. $E_V = \mathbb{R}^*$. (E_4) :$\frac{1}{2}x^2 - 5x + 1 = 0$. $\Delta = 21$.
   $S_{\mathbb{R}} = \{5 - \sqrt{21}\,; 5 + \sqrt{21}\}$
   (E_5): $\frac{2x}{3} + \frac{2}{x} = -1 \Leftrightarrow \frac{2x^2+6}{3x} = -1 \Leftrightarrow 2x^2 + 6 = -3x \Leftrightarrow 2x^2 + 3x + 6 = 0$
   $S_R = \emptyset$
   (E_6): $7x + 2 = \frac{1}{x} \Leftrightarrow 7x^2 + 2x = 1 \Leftrightarrow 7x^2 + 2x - 1 = 0$
   $S_R = \left\{-\frac{1}{7} - \frac{2\sqrt{2}}{7}; -\frac{1}{7} + \frac{2\sqrt{2}}{7}\right\}$

EXERCICE 2

1) a : Rectifier : (E_1) : $2x^2 + \sqrt{3}x + 1 = 0$. $\Delta = -5$ donc $S_{\mathbb{R}} = \emptyset$.
   b. Comme $2x^2 + \sqrt{3}x + 1 > 0$ alors $S_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$
2) a. on a : $(\sqrt{2} + 2)^2 = 6 + 4\sqrt{2}$
   b. (E_2) : $-x^2 + (\sqrt{2} - 2)x + 2\sqrt{2} = 0$. $\Delta = (\sqrt{2} + 2)^2$ donc $S_{\mathbb{R}} = \{-2\,; \sqrt{2}\}$.
   c. D'après le tableau de signe : S = $]-\infty; -2[\cup]2; +\infty[$

EXERCICE 3

1) (E_3) : alors $m = 3$. On a : $-2x^2 + x + 4 = 0$. $\Delta = 33$. $S_{\mathbb{R}} = \{\frac{-1-\sqrt{33}}{-4}\,; \frac{-1+\sqrt{33}}{-4}\}$
2) a. Condition : $m \neq 1$.
   b. $\Delta_m = 5m^2 - 4m = m(5m - 4)$
3) Les solutions dépendent du signe de Δ_m.

- Pour $m \in]0; \frac{4}{5}[$, $\Delta_m < 0$ donc pas de solution.
- Pour $m \in \left\{0; \frac{4}{5}\right\}$, $\Delta_m = 0$ donc il y une solution unique :$x = \frac{2-m}{2(1-m)}$.

En effet pour $m = 0$ alors $x = 1$ et pour $m = \frac{4}{5}$ alors $m = 3$.

- Pour $m \in]-\infty; 0[\cup]\frac{4}{5}; +\infty[$, $\Delta_m > 0$ donc il y a deux solutions :

$S_{\mathbb{R}} = \{\frac{2-m-\sqrt{m(5m-4)}}{2(1-m)} ; \frac{2-m+\sqrt{m(5m-4)}}{2(1-m)}\}$

EXERCICE 4

1) a. $P(x) = \left(x-\frac{1}{2}\right)(x-5) = x^2 - \frac{9}{2}x - \frac{5}{2}$; b. $P(x) = (x-0)(x+3) = x^2 + 3x$.

c. $P(x) = (x+2)^2 = x^2 + 4x + 4$.

2) a. $Q(x) = a\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-5) = a(x^2 - \frac{9}{2}x - \frac{5}{2})$. Comme $Q(-2) = 63$ alors $a = 6$.

Donc $Q(x) = 6x^2 - 18x - 15$.

Même procédé pour b. et c.

EXERCICE 5

1) Aire $\mathcal{A} = \frac{AB\prime \times AC\prime}{2} = \frac{(x-20)(x-30)}{2} = \frac{1}{2}x^2 - 25x + 300$; Où $x > 0$.
2) Aire $\mathcal{A} = 600$ équivaut à : $\frac{1}{2}x^2 - 25x - 300 = 0.$ $\Delta = 1225$.
   On a : $x = 60$ ou $x = -10$. Donc $x = 60\ m$.

EXERCICE 6

1)a. $ax^2 + bx + c = 0$, or $b = 2b'$. $\Delta = b^2 - 4ac$ alors $\Delta = 4b'^2 - 4ac = 4\Delta'$.

b. Pour $\Delta > 0$ alors $\Delta' > 0$, alors $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b-\sqrt{4\Delta\prime}}{2a} = \frac{-b\prime-\sqrt{\Delta\prime}}{a}$; $x_2 = \frac{-b\prime+\sqrt{\Delta\prime}}{a}$.

2)a. (E_1) : $15x^2 - 32x + 16 = 0$. En posant $b' = \frac{b}{2} = \frac{-32}{2} = -16$. $\Delta' = 16$. Les solutions sont : $x_1 = \frac{16+\sqrt{16}}{15} = \frac{4}{5}$; $x_2 = \frac{16-\sqrt{16}}{15} = \frac{4}{3}$.

Même principe pour (E_2) et (E_3).

EXERCICE 7

1. **Déterminons la somme et le produit des solutions de chacune des équations**

(E_1): $3x^2 - 6x - 9 = 0$;
$S = -\frac{b}{a} = -\frac{-6}{3} = 2$; $P = \frac{c}{a} = \frac{-9}{3} = -3$
(E_2): $x^2 + (\sqrt{2}+3)x + 3\sqrt{2}$; $x_1 = -\sqrt{2}$
$S = -\frac{b}{a} = -\frac{(\sqrt{2}+3)}{1} = -\sqrt{2} - 3$; $P = \frac{c}{a} = \frac{3\sqrt{2}}{1} = 3\sqrt{2}$
(E_3): $2x^2 - 4x - 8 = 0$; $x_1 = 1 - \sqrt{5}$
$S = -\frac{b}{a} = -\frac{-4}{2} = 2$; $P = \frac{c}{a} = \frac{-8}{2} = -4$

2. Déterminons le signe des solutions de chacune des équations sans les calculer
   (E_1): $3x^2 - 6x - 9 = 0$; $x_1 = -1$;
   $P = x_1 \times x_2 = -3$. x_1 et x_2 sont de signes contraires. Donc : $x_1$est négatif et x_2 positif

(E_2): $3x^2 + (\sqrt{2}+3)x + 3\sqrt{2}$; $x_1 = -\sqrt{2}$

$P = x_1 \times x_2 = \sqrt{2}$; x_1 et x_2 sont de même signe. Donc x_1 et x_2 sont négatifs.

(E_3): $2x^2 - 4x - 8 = 0$; $x_1 = 1 - \sqrt{5}$

$P = x_1 \times x_2 = -3$. x_1 et x_2 sont de signes contraires. Donc : x_1 est négatif et x_2 positif

3. **<u>Déduisons l'autre solution de chacune des équations</u>**.

   (E_1): $3x^2 - 6x - 9 = 0$; $x_1 = -1$;

   $P = x_1 \times x_2 = -3 \Leftrightarrow -x_2 = -3$ soit $x_2 = 3$

(E_2): $x^2 + (\sqrt{2}+3)x + 3\sqrt{2}$; $x_1 = -\sqrt{2}$

$P = x_1 \times x_2 = \sqrt{2} \Leftrightarrow -\sqrt{2}x_2 = 3\sqrt{2}$ soit $x_2 = -3$

(E_3): $2x^2 - 4x - 8 = 0$; $x_1 = 1 - \sqrt{5}$

$P = x_1 \times x_2 = -4 \Leftrightarrow (1-\sqrt{5})x_2 = -4$; $x_2 = \frac{-4}{1-\sqrt{5}} = \frac{-4(1+\sqrt{5})}{-4} = 1 + \sqrt{5}$

Exercice 8

On considère l'équation (E): $x \in R, \frac{1}{2}x^2 - px + 1 = 0$ où p est un nombre réel.

<u>Déterminons p dans chacun des cas suivants :</u>

1. L'équation (E) admet une solution unique.

L'équation (E) admet une solution unique équivaut à $\Delta = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-p)^2 - 4 \times \frac{1}{2} \times 1 = p^2 - 2 = (p-\sqrt{2})(p+\sqrt{2})$

$\Delta = 0 \Leftrightarrow p = \sqrt{2}$ ou $p = -\sqrt{2}$

L'équation (E) admet une solution unique si $p = \sqrt{2}$ ou $p = -\sqrt{2}$

2. L'équation (E) admet deux solutions distinctes si $\Delta > 0$ Soit $p \in]-\infty; -\sqrt{2}[\cup]\sqrt{2}; +\infty[$
3. L'une des solutions de (E) est le double de l'autre :

<u>EXERCICE 8</u>

(E) : $\frac{1}{2}x^2 - px + 1 = 0$

1) Solution unique : $\Delta = 0$ alors $p^2 - 2 = 0$. Soit $p = -\sqrt{2}$ ou $p = \sqrt{2}$.

Pour $p = \sqrt{2}$ alors $x_0 = \sqrt{2}$ et pour $p = -\sqrt{2}$ alors $x_0 = -\sqrt{2}$.

2) Deux solutions distinctes : $\Delta > 0$ alors $p^2 - 2 > 0$. Soit $p \in]-\infty; -\sqrt{2}[\cup]\sqrt{2}; +\infty[$.
$x_1 = p - \sqrt{p^2 - 2}$ et $x_2 = p + \sqrt{p^2 - 2}$.

1) L'une des solutions est le double de l'autre : $\Delta > 0$. Soit $p \in]-\infty; -\sqrt{2}[\cup]\sqrt{2}; +\infty[$.

   $x_1 = p - \sqrt{p^2 - 2}$ et $x_2 = 2x_1$; S = $x_1 + x_2 = 2p$ et P = $x_1x_2 = 2x_1^2 = 2$,

   soit $x_1 = -1$ et $x_2 = -2$ ou $x_1 = 1$ et $x_2 = 2$. Alors $p = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{3x_1}{2}$

   Donc pour $x_1 = -1$, $x_2 = -2$, $p = -\frac{3}{2}$ et $x_1 = 1$, $x_1 = 2$, $p = \frac{3}{2}$.

<u>EXERCICE 9</u>

1) Etude du signe :

- $f(x) = 2x^2 + 5x - 3$. $\Delta = 49$. $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = -3$. Alors d'après le tableau de signe : $\forall\, x \in]-\infty; -3[\cup]\frac{1}{2}; +\infty[, f(x) > 0$ et $\forall\, x \in]-3; \frac{1}{2}[, f(x) < 0$.
- $g(x) = -x^2 + x - 3$. $\Delta = -11$. Donc $\forall\, x \in \mathbb{R}, g(x) < 0$.
- Même procédé pour $h(x)$.

2) a. S = $[-3; \frac{1}{2}]$; b. $\emptyset$; c. $\{2\sqrt{3}\}$.

EXERCICE 10

1) Signe de $H(x)$: On a : $H(x) = 8x^2 - 6x + 4$. $\Delta = -92$. Donc $\forall\, x \in \mathbb{R}, H(x) > 0$.
2) Comme $P(x) - Q(x) > 0$ alors (C_P) au dessus de (C_Q) sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE 11

$$(I_1): \frac{x}{3x-4} \geq \frac{x-3}{x+1}$$

- Contraintes ou ensemble de validité : $x \neq -1$ et $x \neq \frac{4}{3}$.
- Résolution : $(I_1) \Leftrightarrow \frac{-x^2+7x-6}{(3x-4)(x+1)} \geq 0$. D'après le tableau de signe la solution est : S = $]-1; 1] \cup]\frac{4}{3}; 6[$.

Même principe pour $(I_2), (I_3), (I_4), (I_5), (I_6)$.

EXERCICE 12

1) Parabole renversée en ''∩'' donc le coefficient a est négatif. De plus la courbe coupe deux fois l'axe des abscisses donc $\Delta > 0$.
2) a. $g(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = -4$. b. $g(x) = -3 \Leftrightarrow x = -6$.
   c. $g(x) = 1 \Leftrightarrow x = -2$.
3) a. $g(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-4; 0]$. b. $-3 < g(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]-6; 0[$.

EXERCICE 13

1) a. $(E_1): \sqrt{3}x^4 - 3x^2 + 5 = 0$. Soit $y = x^2, x \geq 0$. On a : $(E'_1): \sqrt{3}y^2 - 3y + 5 = 0$.

$\Delta = 9 - 20\sqrt{3} < 0$. (E'_1) n'a pas de solution donc (E_1) n'admet pas de solution.

b. En suivant le même principe : (E'_2) a pour solutions :$y = \frac{3+\sqrt{5}}{4}$ ou $y = 2 - \sqrt{5}$.

Or $2 - \sqrt{5} < 0$. Donc les solutions de (E_2) sont : $\{-\frac{\sqrt{3+\sqrt{5}}}{2}; \frac{\sqrt{3+\sqrt{5}}}{2}\}$.

2) a. $(E'_3): 3X^2 + 5y - 2 = 0$. $\Delta = 49$. $X = -2$ ou $X = \frac{1}{3}$.
   b. $(E_1): \frac{3}{x^4} + \frac{5}{x^2} - 2 = 0$. Soit $X > 0, X = \frac{1}{x^2}$. On a : $\frac{1}{x^2} = -2$ (impossible) ou $\frac{1}{x^2} = \frac{1}{3}$.
   Les solutions de (E_1) sont :$\{-\sqrt{3}; \sqrt{3}\}$.

EXERCICE 14

1) $y = x - 1$; $(E_y): y^4 - 4x^2 + 3 = 0$. Soit $Y = y^2$;$Y \geq 0$. $(E_Y): Y^2 - 4Y + 3 = 0$

$\Delta = 4$. $Y = 3$ ou $Y = 1$. On déduit : $y = -\sqrt{3}$ ou $y = \sqrt{3}$ ou $y = -1$ ou $y = 1$.
Par suite : $x = 1 + \sqrt{3}$; $x = 1 - \sqrt{3}$ ou $x = 0$ ou $x = 2$.
Les solutions de (E) sont : $\{1 + \sqrt{3}; 1 - \sqrt{3}\ ; 0; 2\}$

EXERCICE 15

(I_1): $x^4 - 2x^2 - 3 > 0$. Soit $y = x^2$;$y \geq 0$. (I_y): $y^2 - 2y - 3 > 0$. $\Delta = 4$. $y = -1$ ou $y = 3$.

Par suite : $x^2 = -1$ou $x^2 = 3$. Soit $x = -\sqrt{3}$ ou $x = \sqrt{3}$.

Les factorisations sont : $y^2 - 2y - 3 = (y + 1)(y - 3)$

Alors $x^4 - 2x^2 - 3 = (x^2 + 1)(x^2 - 3) = (x^2 + 1)(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})$.

D'après le tableau de signe : $S_{I_1} =]-\infty; -\sqrt{3}[\cup]\sqrt{3}; +\infty[$.

Même méthode pour les autres.

EXERCICE 16

(I_2): $\frac{3x^2-2}{x} > -x^3$.

- Contraintes ou ensemble de validité : $x \neq 0$.
- Résolution : $(I_2) \Leftrightarrow \frac{x^4+3x^2-2}{x} > 0$.

Les racines de $x^4 + 3x^2 - 2$ sont : $\{-\frac{\sqrt{3+\sqrt{17}}}{2}\ ; \frac{\sqrt{3+\sqrt{17}}}{2}\}$.

D'après le tableau de signe : la solution est : $S_{I_2} =]-\frac{\sqrt{3+\sqrt{17}}}{2}; 0[\cup]\frac{\sqrt{3+\sqrt{17}}}{2}; +\infty[$.

Même méthode pour les autres.

EXERCICE 17

1) $x \in D_f \Leftrightarrow 6x^2 - x + 1 \geq 0$. $\Delta = -23$. Donc $6x^2 - x + 1 > 0$ (triviale). $D_f = \mathbb{R}$.

2) $f(x) = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} 6x^2 - x + 1 \geq 0 & (1) \\ 2x - 1 \geq 0 & (2) \\ 6x^2 - x + 1 = (2x-1)^2 & (3) \end{cases}$

(1) $\Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$. (2) $\Leftrightarrow x \in [\frac{1}{2}; +\infty[$. Alors $V = \mathbb{R} \cap [\frac{1}{2}; +\infty[= [\frac{1}{2}; +\infty[$.

(3)) $\Leftrightarrow 2x^2 + 3x - 2$; $x = -2$ ou $x = \frac{1}{2}$. Or $-2 \notin [\frac{1}{2}; +\infty[$. Donc $S_{\mathbb{R}} = \{\frac{1}{2}\}$.

EXERCICE 18

1. Revoir (E_1): $\sqrt{x} + \sqrt{x^2} - 1 = x + \sqrt{x+1}$ ajouter $x \geq 0$

Si ≥ 0 , l'équation devient $\sqrt{x}+x-1=x+\sqrt{x+1}$
Soit $\sqrt{x}-1=\sqrt{x+1}$, cette equation a un sens si $x \geq 1$.
$x-2\sqrt{x}+1=x+1$
$-2\sqrt{x}=0$
L'équation n'a pas de solution.

2. $2\sqrt{2x+1}=x-1$

$$\begin{cases} 2x+1\geq 0 \\ x-1\geq 1 \\ 4(2x+1)=x^2-2x+1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x\geq -\dfrac{1}{2} \\ x\geq 2 \\ x^2-10x-3=0 \end{cases}$$

$S_{\mathbb{R}}=\{\frac{10-\sqrt{112}}{2}\}$

(E3) : $S_{\mathbb{R}}=\{\frac{5}{7}\}$

EXERCICE 19

(I_1): $\sqrt{x^2-\dfrac{3}{2}x-1}\leq x-3 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-\dfrac{3}{2}x-1\geq 0 & (1) \\ x-3\geq 0 & (2) \\ x^2-\dfrac{3}{2}x-1\leq (x-3)^2 & (3) \end{cases}$

On obtient : $S_1=]-\infty;-\frac{1}{2}]\cup[2;+\infty[$; $S_2=[3;+\infty[$; $S_3=]-\infty;\frac{20}{9}]$. $S=S_1\cap S_2\cap S_3$

Donc $S=\emptyset$.

(I_3): $\sqrt{x^2+4}\leq\sqrt{4x^2-3x+1}\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+4\geq 0 & (1) \\ 4x^2-3x+1\geq 0 & (2) \\ x^2+41\leq 4x^2-3x+1 & (3) \end{cases}$

On obtient : $S_1=\mathbb{R}$; $S_2=\mathbb{R}$; $S_3=[\frac{1-\sqrt{5}}{2};\frac{1+\sqrt{5}}{2}]$. $S=S_1\cap S_2\cap S_3==[\frac{1-\sqrt{5}}{2};\frac{1+\sqrt{5}}{2}]$.

EXERCICE 20

(I_2) : S =]-∞ ; -2] ∪[$\frac{5}{2}$; +∞[

(I_2): $2\sqrt{x-x^2}>x+1, on\ a$: (A): $\begin{cases} x-x^2\geq 0 & (1) \\ x+1\geq 0 & (2) \\ x-x^2>(x+1)^2 & (3) \end{cases}$ ou

(B): $\begin{cases} x-x^2\geq 0 & (1) \\ x+1\leq 0 & (4) \end{cases}$

On obtient : $S_1 = [0;1]$; $S_2 = [-1;+\infty[$; $S_3 = \emptyset$; $S_4 =]-\infty;-1]$ $S_A = S_1 \cap S_2 \cap S_3 = \emptyset$.

$S_B = S_1 \cap S_4 = \emptyset$.

En conclusion : $S = S_A \cup S_B = \emptyset$.

(I_3): $S = \varnothing$

(I_4) : $S =]-\frac{1}{3};0[$

Exercice d'approfondissement

EXERCICE 21

1) a. Résolvons dans $\mathbb{R}$, $x^2 + x + 1 = 0$.
   $\Delta = -3$ donc $S_{\mathbb{R}} = \emptyset$.
   b. $D_f = \mathbb{R}$.
2) Justifions que 2 admet des antécédents
   $f(x) = 2 \Leftrightarrow \frac{x^2+10x+11}{x^2+x+1} = 2$
   $\Leftrightarrow x^2 - 8x - 9 = 0$
   $\Delta = 100$ donc $x_1 = -1$ et $x_2 = 9$.

   Les antécédents de 2 sont -1 et 9.

EXERCICE 22

$P(x) = x^3 - 5x^2 + 3x + 9$.

1) a. Calculons $P(-1)$: $P(-1) = 0$.
   b. $P(x) = (x+1)(x^2 - 6x + 9)$ donc $Q(x) = x^2 - 6x + 9$.
2) Résolvons dans $\mathbb{R}$
   $P(x) = 0 \Leftrightarrow (x+1)(x^2 - 6x + 9) = 0$
   $\Leftrightarrow x + 1 = 0$ ou $x^2 - 6x + 9 = 0$.
   $\Leftrightarrow x = -1$ ou $x = 3$
   $S_{\mathbb{R}} = \{-1;3\}$
3) Etudions le signe de $P(x)$
   $P(x) = (x+1)(x-3)^2$
   $\forall x \in]-\infty;-1], P(x) \leq 0$
   $\forall x \in [-1;+\infty[, P(x) \geq 0$
4) Résolvons dans $\mathbb{R}$, l'inéquation(I) : $\frac{P(x)}{x(x^2-4)} \leq 0$.
   $E_V = \mathbb{R} \setminus \{-2;0;2\}$
   D'après le tableau de signe : $S_{\mathbb{R}} =]-2;-1] \cup]0;2[$.

EXERCICE 23

1) Résolvons dans $\mathbb{R}$ chacune des équations :

$(\mathrm{E}_1): x+\sqrt{x}-6=0$

$\mathrm{E_V}=[0;+\infty[$

L'équation a le même ensemble de solutions que le système : $\begin{cases} x\in \mathrm{E_V} \\ 6-x\geq 0 \\ x=(6-x)^2 \end{cases}$

$\mathrm{S}_{\mathbb{R}}=\{4\}$.

$(\mathrm{E}_2): 3x^2-|x|-10=0$

Si $x\leq 0$ alors (E_2) devient $3x^2+x-10=0$.

$\Delta=81$. $x_1=\frac{5}{3}$ et $x_2=-2$.

Si $x\geq 0$ alors (E_2) devient $3x^2-x-10=0$.

$\Delta=81$. $x_1=-\frac{5}{3}$ et $x_2=2$.

$\mathrm{S}_{\mathbb{R}}=\{-2;2\}$

2) Résolvons dans $\mathbb{R}$ chacune des inéquations :

$(\mathrm{I}_1): x+\sqrt{x}-6\geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x}\geq 6-x$

$\mathrm{E_V}=[0;+\infty[$
Si $6-x\leq 0$ l'inéquation est vérifiée. Tout nombre réel de $[6;+\infty[$ est solution de (I_1).

Si $6-x>0$ alors $\sqrt{x}\geq 6-x \Leftrightarrow x\geq (6-x)^2$

$$\Leftrightarrow x^2-13x+36\leq 0$$

$$\Leftrightarrow x\in[4;9]$$

Tout nombre réel de $[4;6[$ est solution de (I_1).

$\mathrm{S}_{\mathbb{R}}=[4;6[\cup[6;+\infty[$

$\mathrm{S}_{\mathbb{R}}=[4;+\infty[$

$(\mathrm{I}_2): 3x^2-|x|-10\leq 0$

Si $x\leq 0$ alors $\mathrm{S}_1=[-2;0]$

Si $x\geq 0$ alors $\mathrm{S}_2=[0;2]$

$\mathrm{S}_{\mathbb{R}}=[-2;2]$

(On pouvait procéder par un changement de variable en posant $y=\sqrt{x}$, $x\geq 0$.

EXERCICE 24

Apporter des précisions à a et c : par exemple : a et c sont des nombres entiers relatifs.

1) 1 et 3 sont solutions de (E) alors : $\begin{cases} a+4+c=0 \\ 9a+12+c=0 \end{cases}$. Soit $a=-1$ et $c=-3$.
2) (E) admet une solution unique alors $\Delta=0 \Leftrightarrow 16-4ac=0$. Soit $c=\frac{4}{a}$.

Or $a \in [-4{,}4] \setminus \{0\}$ alors $c \in [-1{,}1] \setminus \{0\}$ tel que le couple $(a; c) = (a; \frac{4}{a})$.

(E) admet deux solutions distinctes positives alors : $x_1\, x_2 = \frac{c}{a} > 0$. Soit $a > 0$ et $c > 0$ ou $a < 0$ et $c < 0$. De plus $\Delta = 0 \Leftrightarrow 16 - 4ac > 0 \Leftrightarrow \mathrm{c} < \frac{4}{a}$.

Or $a \in [-4{,}4] \setminus \{0\}$ alors $c \in]-1; 1[\setminus \{0\}$ tel que le couple $(a; c) = (a; \frac{4}{a})$.

EXERCICE 25

$(\mathrm{E}'): 2x^4 + mx^2 + 2 = 0.$

1) a. -1 est solution de l'équation si et seulement si $2 + m + 2 = 0$. Donc $= -4$.
   b. L'autre solution est 1.
2) Si $m \in]-4; 4[$, l'équation n'admet pas de solutions.
   Si $m \in]-\infty; -4] \cup \{4\}$ l'équation admet au moins une solution.

EXERCICE 26

1) Déterminons la valeur numérique de $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$:

   $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{\frac{2}{-1}}{\frac{4}{-1}} = \frac{1}{2}$
2) Justifions que : ${x_1}^2 + {x_2}^2 = 12$.

   $$\begin{aligned} {x_1}^2 + {x_2}^2 &= (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 \\ &= (-2)^2 - 2(-4) \\ &= 4 + 8 \\ &= 12 \end{aligned}$$
3) Déduisons-en la valeur numérique de : $\frac{x_1 - 1}{x_2} + \frac{x_2 - 1}{x_1}$.

   $$\begin{aligned} \frac{x_1 - 1}{x_2} + \frac{x_2 - 1}{x_1} &= \frac{{x_1}^2 - x_1 + {x_2}^2 - x_2}{x_1 x_2} \\ &= \frac{{x_1}^2 + {x_2}^2 - (x_1 + x_2)}{x_1 x_2} \\ &= \frac{12 - (-2)}{-4} \\ &= -\frac{7}{2} \end{aligned}$$

EXERCICE 27

1) $\begin{cases} x + y = \frac{5}{2} \\ xy = 1 \end{cases}$

   On a : $x^2 - \frac{5}{2}x + 1 = 0$.

   $\mathrm{S}_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} = \{\left(\frac{1}{2}; 2\right), \left(2; \frac{1}{2}\right)\}$

2) $\begin{cases} x - y = 12 \\ xy = -11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + (-y) = 12 \\ x(-y) = 11 \end{cases}$

   On a : $x^2 - 12x + 11 = 0$.

   $x_1 = 11$ et $x_2 = 1$

$S_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} = \{(11;-1);(1;-11)\}$

3) $\begin{cases} \frac{x}{y}+\frac{y}{x}=\frac{5}{2} \\ x^2+y^2=20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2+y^2}{xy}=\frac{5}{2} \\ x^2+y^2=20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{20}{xy}=\frac{5}{2} \\ x^2+y^2=20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy=8 \\ x^2+y^2=20 \end{cases} \Leftrightarrow$
$\begin{cases} x^2y^2=64 \\ x^2+y^2=20 \end{cases}$

Posons $X = x^2$ et $Y = y^2$ donc le système devient : $\begin{cases} XY=64 \\ X+Y=20 \end{cases}$

On a : $X^2-20X+64=0$.

$X_1 = 16$ et $X_2 = 4$

$X = 16 \Leftrightarrow x^2 = 16 \Leftrightarrow x = 4$ ou $x = -4$

$Y = 4 \Leftrightarrow y^2 = 4 \Leftrightarrow y = 2$ ou $y = -2$

$S_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} = \{(4;2);(-4;-2);(2;4);(-2;-4)\}$

EXERCICE 28

1. V = $[-1;\frac{3}{2}]$.

2.

Si $a \leq 0$; S = $[-1;\frac{3}{2}]$.

Si $a > 0$

V $= \left[-1;\frac{3}{2}\right]$.

$x \in V \Leftrightarrow -2x^2+x+3 \geq a^2$. Soit $\Leftrightarrow -2x^2+x+3-a^2 \geq 0$. $\Delta = 1-4\times(-2)(3-a^2)$.

$\Delta = 25-8a^2$

Puis discuter suivant le signe de Δ en tenant compte de la contrainte de a.

- Si $\Delta \leq 0$ alors $a \in]-\infty;-\frac{5}{2\sqrt{2}}[\cup]\frac{5}{2\sqrt{2}};+\infty[$. Alors S = $\emptyset$. La solution définitive est donc $\emptyset$.
- Si $\Delta > 0$ alors $[-\frac{5}{2\sqrt{2}};\frac{5}{2\sqrt{2}}]$. Alors d'après le tableau de signe : $x \in [\frac{-1-\sqrt{25-8a^2}}{-4};\frac{-1+\sqrt{25-8a^2}}{-4}]$ Donc la solution définitive est
  S = $[\frac{-1-\sqrt{25-8a}}{-4};\frac{-1+\sqrt{25-8a}}{-4}] \cap \left[-1;\frac{3}{2}\right]$.

EXERCICE 29

1) a. $S_{\mathbb{R}} = \{-1{,}5;2{,}5\}$
   b. $S_{\mathbb{R}} =]-1{,}5;2{,}5[$
2) $S_{\mathbb{R}} =]-\infty;-1{,}5] \cup [2{,}5;+\infty[$.

EXERCICE 30

1) $IC^2 = ID^2 + DC^2 = \frac{17}{4}$; $MI^2 = \frac{1}{4} + x^2$;
$MC^2 = MB^2 + BC^2 = (2-x)^2 + 1^2 = x^2 - 4x + 5$.
2) a. Théorème de la médiane : $MI^2 + MC^2 = 2MK + \frac{IC^2}{2}$.
b. $KM^2 - KI^2 = \frac{MI^2}{2} + \frac{MC^2}{2} - \frac{IC^2}{4} - KI^2 = x^2 - 2x + \frac{1}{2}$.

3) a. $KM = KI$ alors K est le centre du cercle circonscrit au triangle IMC. Par conséquent IMC est un triangle rectangle en M.

b. $\widehat{IMC}$ est un angle droit, alors $KM = KI$ ou $MI^2 + MC^2 = IC^2$.
On obtient : $x^2 - 2x + \frac{1}{2} = 0$ ou $2x^2 - 4x + 1 = 0$. Soit $x = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $x = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$.

EXERCICE 31

1) a. $\Delta' = b'^2 - ac$ où $b' = \frac{b}{2}$. Si $\Delta' < 0$ alors $\frac{\Delta}{4} < 0$. Soit $\Delta < 0$. Donc (E) n'a pas de solution.
b. $\Delta' = 0$ alors $\frac{\Delta}{4} = 0$. Soit $\Delta = 0$. (E) a une solution unique $x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{-2b'}{2a} = \frac{-b'}{a}$.
c. Si $\Delta' > 0$ alors $\frac{\Delta}{4} > 0$. Soit $\Delta = 0$. (E) a deux solutions distinctes :
$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b'-\sqrt{4\Delta'}}{2a} = \frac{-b'-\sqrt{\Delta'}}{a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b'+\sqrt{4\Delta'}}{2a} = \frac{-b'+\sqrt{\Delta'}}{a}$.
2) a. $x^2 + 12x + 35 = 0$. $b = 12$ et $b' = \frac{b}{2} = 6$. $\Delta' = b'^2 - ac = 1$. $x_1 = -7$; $x_1 = -5$.
b. Méthode analogue pour b) et c).

EXERCICE 32

1. Condition : $m \neq 1,\ \mathrm{V} = \mathbb{R}\backslash\{1\}$

2.

$\Delta = 12m - 8$

a) $m < \frac{2}{3}$

b) $m = \frac{2}{3},\ \ x_0 = 2$

c) $m > \frac{2}{3}$

$x_1 = -\frac{m+\sqrt{3m-2}}{m-1}$; $x_1 = -\frac{m-\sqrt{3m-2}}{m-1}$;

d) Pour $m \neq 1$, on a : $x^2 + \frac{2m}{m-1}x + \frac{m-2}{m-1} = 0$

On a : $\begin{cases} m > \frac{2}{3} \\ \frac{m-2}{m-1} < 0 \end{cases}$

On a : $\begin{cases} m > \frac{2}{3} \\ 1 < m < 2 \end{cases}$

Solution : $1 < m < 2$

3. a) suivre la même méthode

b) suivre la même méthode

EXERCICE 33

Ecrire sans symbole de valeur absolue puis résoudre chacune des équations. L'ensemble des solutions est la réunion des solutions.

Résolvons c) $|x+4|+2x|x-1|=0$.

$x+4=0 \Leftrightarrow x=-4$ et $x-1=0 \Leftrightarrow x=1$.

Ecriture sans symbole de valeur absolue :

$$|x+4|+2x|x-1|=0 \Leftrightarrow \begin{cases} Si\ x\in]-\infty;-4], -2x^2+x-4=0 \quad (1) \\ Si\ x\in [-4;1], -2x^2+3x+4=0 \quad (2) \\ Si\ x\in [1;+\infty[, 2x^2-x+4=0 \quad (3) \end{cases}$$

(1) :Pas de solution. (2) : $x=\frac{-3-\sqrt{41}}{-4}$ ou $x=\frac{-3+\sqrt{41}}{-4}$ or $x\in[-4;1]$. Alors la solution est $x=\frac{-3+\sqrt{41}}{-4}$. (3) : Pas de solution.

Donc la solution de l'équation est : $\{\frac{-3+\sqrt{41}}{-4}\}$

EXERCICE 34

Consigne : Exprime chacune des expressions suivantes en fonctions de a, b ou c.

$I=\frac{1}{{x_1}^2}+\frac{1}{{x_2}^2}=\frac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{(x_1x_2)^2}$ or $x_1x_2=\frac{c}{a}$ et $x_1+x_2=\frac{-b}{a}$ alors $I=\frac{b^2-2ac}{c^2}$.

$J=\frac{-b^3-2ac}{c^2}$ (Utiliser $(a^3+b^3=(a+b)((a+b)^2-3ab)$.

$K=\frac{b^2-2c-3b+6a}{a-b+c}$; $L=-\frac{b^3}{a^3}+\frac{3bc-9b^2}{a^2}+\frac{18c-27b}{a}-54$.

EXERCICE 35

Voir Exercice 32.

EXERCICE 36

a) $-2x(x-2)(x^2-8x+16)>0$

x	$-\infty$		0		2		4		$+\infty$
$-2x$		+	0	−		−		−	
$x-2$		−		−	0	+		+	
$x^2-8x+16$		+		+		+	0	+	
$-2x(x-2)(x^2-8x+16)$		−	0	+	0	−	0	−	

$S_{\mathbb{R}}=]0;2[$

b) $\frac{-6x^2-9x-3}{-x^2+8x-17} < 0$

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$-6x^2-9x-3$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$-x^2+8x-17$		$-$		$-$		$-$	
$\frac{-6x^2-9x-3}{-x^2+8x-17}$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$S_{\mathbb{R}} = \left]-1; -\frac{1}{2}\right[$

c) $\frac{5(7x+5-6x^2)}{-3(1-x)^2} \geq 0$

$E_V = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		1		$\frac{5}{3}$		$+\infty$
$5(7x+5-6x^2)$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
-3		$-$		$-$		$-$		$-$	
$(1-x)^2$		$+$		$+$	0	$+$		$+$	
$\frac{5(7x+5-6x^2)}{-3(1-x)^2}$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

$S_{\mathbb{R}} = \left]-\infty; -\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{5}{3}; +\infty\right[$.

EXERCICE 37

Voir exercice 36.

EXERCICE 38

1) $\begin{cases} -2 < -2x+3 < 5 & (1) \\ -x^2 + x < 0 & (2) \end{cases}$.

(1) a pour solution : $x \in]-1; \frac{5}{2}[$. (2) D'après le tableau de signe on a pour solution $x \in]-\infty; 0[\cup]1; +\infty[$. Donc la solution est S = $S_1 \cap S_2 =]-1; 0[\cup]1; \frac{5}{2}[$.

Principe analogue pour les systèmes 2 et 3.

EXERCICE 39

1) a. On a : $0^4 + 10 \times 0^3 + 26 \times 0^2 + 10 \times 0 + 1 = 1 \neq 0$. Donc 0 n'est pas une solution de (E).

b. (E) : $x^4+10x^3+26x^2+10x+1=0 \Leftrightarrow x^2\left(x^2+10x+26+\frac{10}{x}+\frac{1}{x^2}\right)=0$. Or $x \neq 0$ alors (E) $\Leftrightarrow x^2+10x+26+\frac{10}{x}+\frac{1}{x^2}=0$ (E').

2) $X=x+\frac{1}{x}$; $x\neq 0$.

a. $x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2\times x\times\frac{1}{x}=X^2-2$.

b. x solution de (E'): $x^2+10x+26+\frac{10}{x}+\frac{1}{x^2}=0 \Leftrightarrow x^2+\frac{1}{x^2}+10(x+\frac{1}{x})+26=0$

Soit (E'): $X^2-2+10X+26=0$. Donc : (E'): $X^2+10X+24=0$.

3) (E''): $X^2+10X+24=0$. $\Delta=4$. $X=-6$ ou $X=-4$.

Les solutions de (E) :

- $X=x+\frac{1}{x}=-6$ alors : $\frac{x^2+6x+1}{x}=0$. $x\neq 0$; $x^2+6x+1=0$. $\Delta=32$.

Soit $x=-3-2\sqrt{2}$ ou $x=-3+2\sqrt{2}$.

- $X=x+\frac{1}{x}=-4$ alors : $\frac{x^2+4x+1}{x}=0$. $x\neq 0$; $x^2+4x+1=0$. $\Delta=12$.

Soit $x=-2-\sqrt{3}$ ou $x=-2+\sqrt{3}$. Donc les solutions de (E) sont :

$\{-3-2\sqrt{2};-3+2\sqrt{2}\,;-2-\sqrt{3}\,;-2+\sqrt{3}\}$

EXERCICE 40

1) Déterminons $\mathrm{P}(x)$

$\mathrm{P}(x)=ax^2+bx+c$

$\mathrm{P}(x)-\mathrm{P}(x-1)=x \Leftrightarrow ax^2+bx+c-[a(x-1)^2+bx-b+c]=x$

$\Leftrightarrow ax^2+bx+c-ax^2+2ax-a-bx+b-c=x$

$\Leftrightarrow 2ax-a+b=x$

Par identification on a :

$$\begin{cases}2a=1\\-a+b=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a=\frac{1}{2}\\b=\frac{1}{2}\end{cases}$$

Donc $\mathrm{P}(x)=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x$.

2) a. Calculons $\mathrm{S_n}=1+2+3+\cdots+\mathrm{n}$

$\mathrm{S_n}=\frac{\mathrm{n(n+1)}}{2}$

b. $\mathrm{S_{2022}}=1+2+3+\cdots+2022$

$\mathrm{S_{2022}}=\frac{2022(2022+1)}{2}$

$\mathrm{S_{2022}}=2\,045\,253$.

EXERCICE 41

1) On a : $P=2(L+l)=140$;$D=\sqrt{L^2+l^2}=50$. $L>l$.

On obtient : $2l^2 - 140l + 2400 = 0$. $\Delta = 400$. Soit $l = 30\ m$ et $L = 40\ m$.

2) Soit n le nombre de personnes.

Le nombre total de part est : $\frac{720000}{n}$. On traduit par : $\frac{720000}{n-5} = \frac{720000}{n} + 2000$.

On obtient : $-2000n^2 + 10000n + 3600000 = 0 \Leftrightarrow -n^2 + 5n + 1800 = 0$. $\Delta = 7225$. Soit $n = 45$ ou $n = -40$. Donc il y a 40 personnes.

EXERCICE 42

On a : $V_A = V_R + 5$. T = $t_A + t_R = 5{,}5\ h$. Or $V = \frac{d}{t}$ avec $d_A = d_R = 75\ Km$.

$t_A + t_R = 5{,}5 \Leftrightarrow \frac{d_A}{V_A} + \frac{d_R}{V_R} = 5{,}5$. Soit $\frac{75}{V_R - 5} + \frac{75}{V_R} = 5{,}5 \Leftrightarrow -5{,}5V_R^2 + 177{,}5V_R - 375 = 0$.

$\Delta = 23256{,}25$. $V_R = \frac{25}{11} \cong 2{,}27\ Km/h$ ou $V_R = 30\ Km/h$

Alors $V_A = \frac{80}{11} \cong 7{,}27\ Km/h$ ou $V_A = 35\ Km/h$

EXERCICE 43

On a : $\sqrt{AB^2 + AC^2} = BC = a$ et $AB + AC = \frac{5a}{4}$. On obtient : $x^2 - \frac{5a}{4}x + \frac{32a^2}{9} = 0$. $\Delta = \frac{7a^2}{16}$.

On a : $x = \frac{5-\sqrt{7}}{8}$; $x = \frac{5+\sqrt{7}}{8}$. Soit AB $= \frac{5-\sqrt{7}}{8}$ et BC $= \frac{5+\sqrt{7}}{8}$. (En supposant que BC > AB).

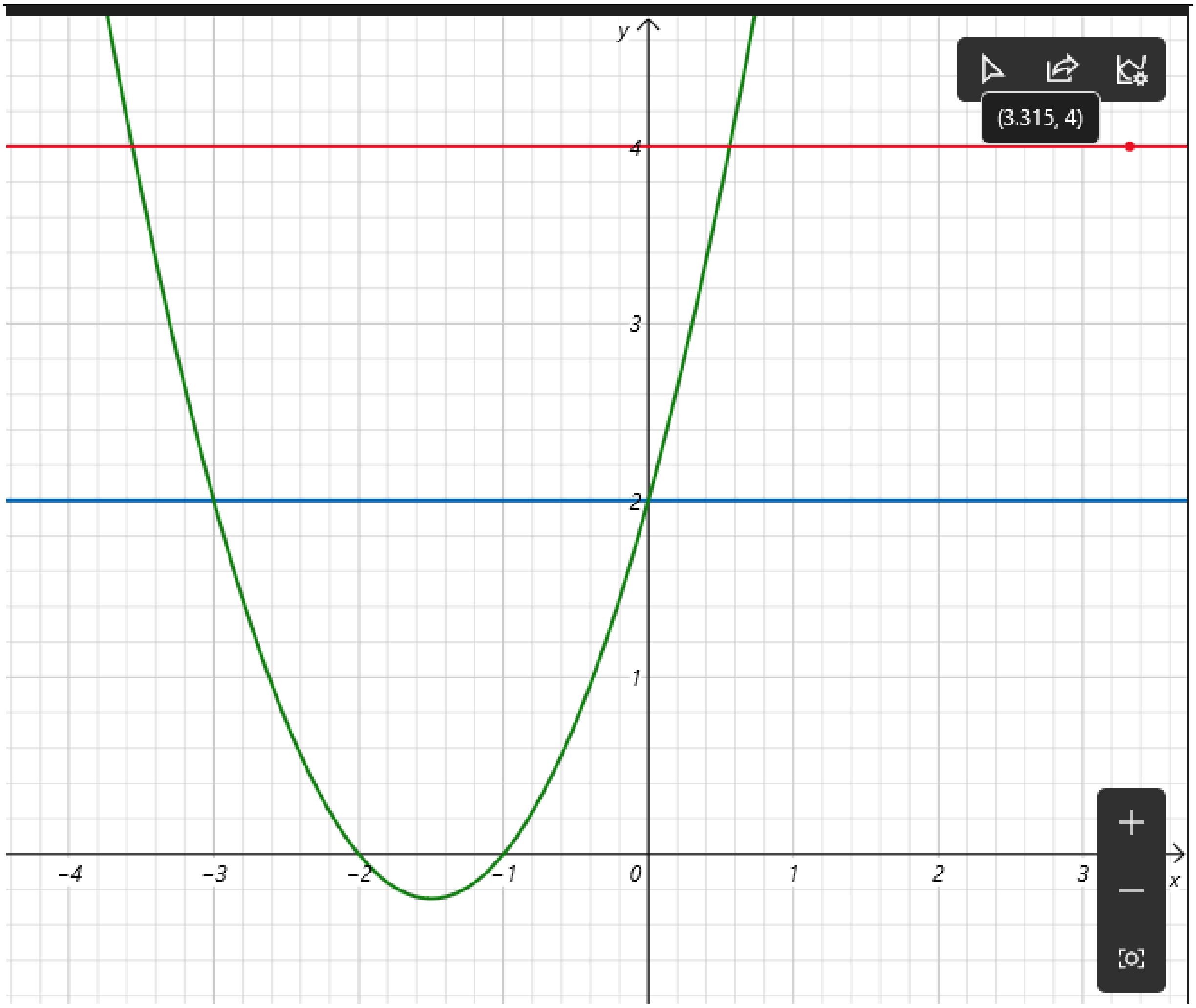
EXERCICE 44

Rectifier : $x^2 + 3x + 2$.

$f(x) = x^2 + 3x + 2$

1) a. Signe Voir exercices antérieures.
   b. Représentation graphique :

2)



3) a. Par calcul : $f(x) = 4$ équivaut à $x = \frac{-3-\sqrt{17}}{2}$ ou $x = \frac{-3+\sqrt{17}}{2}$

b. Par calcul : $f(x) = 2$ équivaut à $x = 0$ ou $x = -3$.

c. Par calcul :$2 \leq f(x) \leq 4$ équivaut à $x \in [\frac{-3-\sqrt{17}}{2}\,;-3] \cup [0;\frac{-3+\sqrt{17}}{2}]$.

EXERCICE 45

1) $f(x)$ correspond à la courbe qui passe par l'ordonnée -3 lorsque $x = 0$.
2) $g(x)$ correspond à la courbe qui passe par l'ordonnée 1 lorsque $x = 0$.
3) $h(x)$ correspond à la courbe qui passe par l'ordonnée 0 lorsque $x = 0$.

SITUATIONS COMPLEXES

Voir coup de pouce pour exercice 46, 47, 48,49.

- Exemple de rédaction :

EXERCICE 46

MODIFER : Il souhaite déterminer le taux annuel de placement mais il ne sait pas comment s'y prendre. Pour cela, il te sollicite.

Pour connaitre la valeur acquise et le taux annuel de placement, je vais appliquer mes connaissances sur les mathématiques financières et les équations du second degré dans IR.

Pour ce faire, je vais :

- Formuler les inconnues et exprimer la valeur acquise
- Etablir et résoudre une équation
- Conclure quant à la valeur du taux de placement

- Formulation des inconnues et expression de la valeur acquise

Soit x le taux de placement. V_{at} la valeur acquise à l'année t. V_0 la valeur d'origine initialement (à placer). I_t les intérêts générés par le capital en fin d'année t.

-A la première année : $V_{a1} = V_0 + I_1 = V_0 + V_0 \times x\% = V_0(1 + \frac{x}{100})$.

-A la deuxième année : $V_{a2} = V_{a1} + I_2 = V_{a1} + V_{a1} \times x\% = V_{a1}\left(1 + \frac{x}{100}\right) = V_0\left(1 + \frac{x}{100}\right)^2$.

Donc $V_{a2} = V_0\left(1 + \frac{2x}{100} + \frac{x^2}{10000}\right)$. Or $V_0 = 5000000$ F.

Soit $V_{a2} = 500x^2 + 100000x + 5000000$.

- Etablissement et résolution d'une équation

Puisqu'il retire 7000000 après les deux années de placement alors :

$V_{a2} = 7000000$. Soit $500x^2 + 100000x + 5000000 = 7000000$.

On obtient : $500x^2 + 100000x - 2000000 = 0$. $\Delta = 1,4.10^{10}$.

$x \cong -218,32$ % ou $x \cong 18,32$ %

- Valeur du taux annuel de placement

Puisque le taux est positif alors, le taux annuel de placement est de $18,32$ %.

Leçon : DENOMBREMENT

Exercices de renforcement

Exercice 1
On considère trois ensembles finis A, B et C.
Sachant que Card $(A\cup B) = \text{Card}A + \text{Card}B - \text{Card}(A\cap B)$, détermine Card $(A\cup B\cup C)$.
Résolution
$A\cup B\cup C = A\cup (B\cup C)$
Card $(A\cup (B\cup C)) =$ Card A + Card $(B\cup C) -$ Card $(A\cap(B\cup C))$. Or
Card $(B\cup C) = \text{Card}C + \text{Card}B - \text{Card}(C\cap B)$ et $A\cap (B\cup C) = (A\cap B)\cup (A\cap C)$ d'où :
Card $(A\cap(B\cup C)) =$ Card $(A\cap B)$ + Card $(A\cap C)$ - Card $(A\cap B\cap C)$ et finalement on a :
Card $(A\cup B\cup C)) = \text{Card}A + \text{Card}B + \text{Card}C - \text{Card}(C\cap B) - \text{Card}(A\cap B) - \text{Card}(A\cap C) +$
$+ \text{Card}(A\cap B\cap C)$.

Exercice 2
Dans une classe de 30 élèves, 20 étudient l'anglais et 15 étudient l'allemand.
Sachant que tous les élèves étudient au moins l'une des deux langues, détermine :
1. le nombre d'élèves qui étudient à la fois l'anglais et l'allemand
2. le nombre d'élèves qui étudient seulement l'anglais
3. le nombre d'élèves qui étudient seulement l'allemand

Résolution
Posons : C l'ensemble des élèves de la classe, A l'ensemble des élèves qui étudient l'anglais et B l'ensemble des élèves qui étudient l'allemand
On a : $C = A\cup B$, Card C $= 30$, Card$A = 20$ et Card$B = 15$.
1. Le nombre d'élèves qui étudient à la fois l'anglais et l'allemand est Card$(A\cap B)$
Or Card$(A\cap B) = \text{Card}A + \text{Card}B - \text{Card}(A\cup B) = 5$.
2. Le nombre d'élèves qui étudient seulement l'anglais est : Card A – Card$(A\cap B) = 15$
3. Le nombre d'élèves qui étudient seulement l'allemand est : Card B – Card$(A\cap B) = 10$

Exercice 3
Résolution
On lance cinq fois une pièce de monnaie pour jouer à pile ou face.
Le nombre de résultats possibles est $2^5 = 32$.

Exercice 4
Résolution
Soit A et B deux ensembles tels que : $A = \{a, b, c, d\}$ et $B = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5\}$.
1. Le nombre d'applications de A dans B est : $5^4 = 625$
2. Le nombre d'applications injectives de A dans B est : 5x4x3x2 =120

Exercice 5
Résolution
Soit E et F deux ensembles tels que : $E = \{a, b, c, d, e\}$ et $F = \{x ; y ; z ; t ; u\}$.
Le nombre de bijections de E sur F est : $5! = 120$

Exercice 6

Résolution

Soit l'ensemble E tel que : E = {a, b, c, d, e}

1. Le nombre de sous-ensembles de E qui contiennent 3 éléments est : C_5^3 =10
2. Le nombre total de sous-ensembles de E est : 2^5=32

Exercice 7

Résolution

Le nombre de mots ayant un sens ou non qu'on peut écrire avec les lettres du mot MATHS est 5!=120

Exercice 8

Résolution

Le nombre de mots ayant un sens ou non qu'on peut écrire avec les lettres du mot ananas est $\frac{6!}{3!X2!} = 10$

Exercice 9

Résous l'équation suivante : (E) : $n \in$ IN, $2A_n^2 + 50 = A_{2n}^2$

Résolution

Ensemble de validité V(E)

(E) a un sens si et seulement si n≥2 et n≥1 d'où : V(E) =[2 ;+∞[

A_n^2 =n×(n-1), A_{2n}^2=2n×(2n-1) d'où : $2A_n^2 + 50 = A_{2n}^2 \Leftrightarrow$ n²-25=0

S(E)={5}

Exercice 10

Résous l'équation suivante : (E) : $n \in \mathbb{N}$, $C_{n+1}^2 + C_{n+1}^3 = \frac{5}{3}n^2 + \frac{n}{3}$

Résolution

Ensemble de validité V(E)

(E) a un sens si et seulement si n+1 ≥2 et n+1 ≥3 d'où : V(E) = ℕ ∩[2 ;+∞[

$C_{n+1}^2 = \frac{n(n+1)}{2}$ et $C_{n+1}^3 = \frac{n(n+1)(n-1)}{6}$ d'où : $C_{n+1}^2 + C_{n+1}^3 = \frac{5}{3}n^2 + \frac{n}{3} \Leftrightarrow$ n²(n-7)=0

S(E)= {7}

Exercice 11

Résolution

a)Posons (E) : $n \in \mathbb{N}$, $C_n^2 = 7n$

Ensemble de validité V(E)

(E) a un sens si et seulement si n≥2 d'où : V(E) = ℕ ∩[2 ;+∞[

(E)$\Leftrightarrow \frac{n!}{2!(n-2)!} = 7n$

$\Leftrightarrow$ n(n-15)=0

S(E)= {15}

b) Posons (E) : $n \in \mathbb{N}$, $C_n^2 = 21$

Ensemble de validité V(E)

(E) a un sens si et seulement si n≥2 d'où : V(E) = ℕ ∩[2 ;+∞[

(E)$\Leftrightarrow \frac{n!}{2!(n-2)!}$ =21
$\Leftrightarrow$ $n^2 - n - 42$ =0
S(E)= {7}
c) Posons (E) : $n \in \mathbb{N}, \frac{C_n^3}{C_n^2}$ =18
Ensemble de validité V(E)
(E) a un sens si et seulement si n≥2 et n≥3 d'où : V(E) = $\mathbb{N} \cap [3\,;+\infty[$

(E)$\Leftrightarrow \frac{n!}{3!(n-3)!} \times \frac{2!(n-2)!}{n!}$ =18
$\Leftrightarrow$ n=$\frac{163}{54} \notin \mathbb{N}$ d'où : S(E)=∅

Exercice12
Dans une classe il y a 20 garçons et 13 filles.
Sachant que l'on doit élire deux délégués, détermine :
1. Le nombre de choix possibles.
2. Le nombre de choix possibles sachant qu'il doit y avoir un garçon et une fille.
Résolution
1. Le nombre de choix possibles est : C_{33}^2 =528
2. Le nombre de choix possibles contenant un garçon et une fille est : $C_{20}^1 \times C_{13}^1$=260

Exercice13
Un sac contient 5 boules blanches, 4 boules vertes et 3 boules rouges.
1. Détermine le nombre de manières de tirer en même temps 3 boules de même couleur.
2. .Détermine le nombre de manières de tirer en même temps 3 boules de couleurs différentes deux à deux.
3. Détermine le nombre de manières de tirer en même temps 3 boules de couleurs différentes.
Résolution
1. Le nombre de tirages simultanés de 3 boules de même couleur est : $C_5^3 + C_4^3 + C_3^3$ =15
2. Le nombre de tirages simultanés de 3 boules de couleurs différentes deux à deux est :
$C_5^1 \times C_4^1 \times C_3^1 = 60$
3. Le nombre de tirages simultanés de 3 boules de couleurs différentes est : C_{12}^3 -15-60 =145
ou $C_5^2 \times (C_4^1 + C_3^1)$ +$C_4^2 \times (C_5^1 + C_3^1)$+ $C_3^2 \times (C_5^1 + C_4^1)$= 145

Exercice 14
Un club de 20 membres dont 8 femmes décident d'élue un bureau composé d'un président un secrétaire général, un trésorier général et un commissaire aux comptes.
Détermine le nombre de bureaux possibles dont le club peut disposer dans chacun des cas suivants.
1.Le bureau contient une seule femme.
2.Le bureau contient au moins une femme
3.Le bureau contient une seule femme qui est la trésorière générale.
4. Le bureau ne contient aucune femme.
Résolution
1. Soit N_1 le nombre demandé
N_1 = 4 x A_8^1 x A_{12}^3 = 42240
2. Soit N_2 le nombre demandé

$N_2 = A_{20}^4 - A_{12}^4 = 104400$

3. Soit N_3 le nombre demandé

$N_3 = A_8^1 \times A_{12}^3 = 10560$

4. Soit N_4 le nombre demandé

$N_4 = A_{12}^4 = 11880$

Exercice 15

Un restaurant de la place propose à ses clients quatre entrées, cinq plats de résistance et six desserts. Détermine le nombre de repas différents qu'on peut composer en choisissant une entrée, un plat de résistance et un dessert.

Résolution

Soit N le nombre demandé

N = 4 X 5 X 6 = 120

Exercice 16

On constitue une « main » en prélevant 8 cartes dans un jeu de 32 cartes.

On désigne par E l'ensemble de toutes les mains qu'on peut constituer dans un jeu de 32 cartes et A l'ensemble des mains contenant au moins un as.

1. Définis le complémentaire de A dans E
2. Calcule le nombre de mains contenant au moins un as.

Résolution

1. Le complémentaire de A dans E noté C_E^A ou $\bar{A}$ est l'ensemble des mains ne contenant aucun as.
2. Card E = C_{32}^8 . Il ya 4 as dans un jeu de 32 cartes d'où : Card $\bar{A}$ = C_{28}^8 .

Le nombre de mains contenant au moins un as est Card A.

Card A = C_{32}^8 - C_{28}^8 = 7.410.195

Exercice 17

Une compétition de football regroupe 12 équipes qui doivent se rencontrer deux à deux. Détermine le nombre de rencontres dans chacun des cas suivants :

1. Deux équipes ne se rencontrent qu'une seule fois.
2. La compétition se déroule par matches aller et retour

Résolution

1. Soit N_1 le nombre demandé

$N_1 = C_{12}^2 = 66$

2. Soit N_2 le nombre demandé

$N_2 = A_{12}^2 = 132$

Exercice 18

On désire dénombrer tous les nombres à trois chiffres ne commençant pas par zéro.

1. Calcule le nombre total de nombres qu'on peut avoir sans aucune restriction.
2. Calcule le nombre total de nombres composés de chiffres distincts deux a deux.
3. Calcule le nombre total de nombres dans lesquels un chiffre est répété deux fois.

Résolution

1. Soit N le nombre demandé

La numération décimale est constituée des chiffres 0 ;1 ;2 ;3 ;4 ;5 ;6 ;7 ;8 ; 9

N = $9\times 10 \times 10 = 9 \times 10^2$ =900

2. Soit N_1 le nombre demandé. On a : $N_1 = 9 \times 9 \times 8 = 9 \times A_9^2$=648
3. Soit N_2 le nombre de demandé.

Cas I : le chiffre répété est 0. Il ne peut être que le chiffre des dizaines et des unités. On a : 10 possibilités.
Cas II : le chiffre répété n'est pas 0.
Il y a 9 choix possibles du chiffre à répéter 2 fois. Le chiffre à répéter 2 fois étant choisi il y a 3 cas possibles.
Cas 1 : il est le chiffre des centaines et le chiffre des dizaines on a 10 choix possibles pour le chiffre des unités
Cas 2 : il est le chiffre des dizaines et le chiffre des unités on a 9 choix possibles pour le chiffre des centaines.
Cas 3 : il est le chiffre des centaines et des unités on a 10 choix possibles pour le chiffre des dizaines on a donc : $N_2 = 9(10 + 9 + 10) = 261$

Exercice 19
Détermine le nombre de nombres de quatre chiffres différents qui contiennent les chiffres 1 et 6 une seule fois.
Résolution
Un nombre de 4 chiffres contient un chiffre des milliers, un chiffre des centaines, un chiffre des dizaines et un chiffre des unités.
On a : A_4^2 possibilités de mettre les chiffres 1 et 6 dans un nombre de quatre chiffres.
Les chiffres 1 et 6 étant choisis on a : A_8^2 possibilités de choisir les deux autres chiffres.
Il y a A_9^3 nombres de quatre chiffres commençant par 0.
D'où le nombre de nombres de quatre chiffres contenant une seule fois les chiffres 1 et 6 est :
$A_4^2 \times A_8^2 - A_9^3 = 168$

Exercice 20
Pour la CAN 2021 vingt-quatre nations de football sont retenues pour la phase finale.
Détermine le nombre de façons possible de constituer les quarts de finale.
Résolution
Soit N le nombre demandé. Les quarts de finale sont constitués de 8 équipes d'où :
N = C_{24}^8 = 12903

Exercice 21
Détermine le nombre de façons de placer 5 invités autour d'une table ronde.
Résolution
Le nombre de façons de placer 5 invités autour d'une table ronde est le nombre de permutations de 5 éléments qui est : 5! = 120.

Exercice 22
On veut former les mots avec toutes les lettres du mot MATH.
1. Détermine le nombre de mots qui commencent par M.
2. Détermine le nombre de mots qui commencent par la lettre A
3. Détermine le nombre de mots qui se terminent par la lettre H
Résolution
1. Soit N_1 le nombre demandé
N_1 = 3! = 6
2. Soit N_2 le nombre demandé
N_2 = 3! =6
3. Soit N_3 le nombre demandé
N_2 = 3! = 6

Exercice 23
Les numéros de téléphone passent de 8 chiffres à 10 chiffres en Côte d'Ivoire depuis le 31 Janvier 2021. Détermine le nombre de nouveaux numéros de téléphone disponibles après cette opération.

Résolution

1. Soit N le nombre demandé

$N = 10^{10} - 10^{8} = 99.10^{8}$

Exercice 24

Pour accéder à un service sur Internet, vous devez taper un mot de passe ayant un sens ou non de 4 lettres choisies dans l'alphabet français (26 lettres).

1. Détermine le nombre de mots de passe de 4 lettres que l'on peut créer.
2. Détermine le nombre de mots de passe de 4 lettres distinctes que l'on peut créer.

Résolution

1. Soit N_1 le nombre demandé

$N_1 = 26^4 = 456976$

2. Soit N_2 le nombre demandé

$N_2 = A_{26}^{4} = 358.800$

Exercice 25

La plaque d'immatriculation d'une voiture comporte quatre chiffres compris entre 0 et 9 suivi de deux lettres sauf les lettres O, I et D. Les chiffres d'immatriculation ne commencent pas par 0.

1) Détermine le nombre de plaques d'immatriculation différentes possibles.

2) Détermine le nombre de plaques d'immatriculation différentes comportant deux lettres distinctes.

3) Détermine le nombre de plaques d'immatriculation différentes comportant quatre chiffres distincts.

Résolution

1. Soit N_1 le nombre demandé

$N_1 = 9\times 10^3 \times 23^2 = 4.761.000$

2. Soit N_2 le nombre demandé

$N_2 = 9\times 10^3 \times 23 \times 22 = 4.554.000$

3. Soit N_3 le nombre demandé

$N_3 = 9\times 9 \times 8 \times 7 \times 23^3 = 2.399.544$

Exercice 26

Un sac contient 13 jetons indiscernables au toucher, 3 jetons noirs marqués A, B et C et 10 jetons blancs numérotés de 1 à 10. On extrait simultanément 5 jetons au hasard. On considère les 3 événements suivants : R : « Obtenir les 3 jetons noirs parmi les 5 jetons extraits ». S : « Obtenir le jeton marqué C parmi les 5 jetons extraits ». T : « Obtenir au moins un jeton noir parmi les 5 jetons extraits ».

Calcule le nombre de cas de R, S et T

Résolution

Soit N_1 le nombre de cas de R

$N_1 = C_3^3 \times C_{10}^2 = 45$

Soit N_2 le nombre de cas de R

$N_2 = C_{12}^4 = 495$

Soit N_3 le nombre de cas de R

$N_3 = C_{13}^5 - C_{10}^5 = 1035$

Exercice 27

Lors d'une loterie de Noël, 50 billets sont vendus par les enfants d'une école, dont 3 sont gagnants. Un élève achète 5 billets.

1) Détermine le nombre de possibilités d'achat des 5 billets.

2) Détermine le nombre de possibilités que l'élève gagne au moins un lot.

Résolution

1. Soit N_1 le nombre demandé

N_1 = C_{50}^{5}= 2.118.760

2. Soit N_2 le nombre demandé

N_2 = $C_{50}^{5} - C_{47}^{5}$= 584.821

Exercice 28

Un QCM comporte 10 questions ayant chacune 4 réponses dont une seule est exacte.

1) Détermine le nombre de possibilités de répondre à ce QCM

2) On répond au hasard à chaque question détermine le nombre de possibilités d'avoir 6 bonnes réponses

Résolution

1. Soit N_1 le nombre demandé

N_1 = 4^{10}= 1.048.576

2. Soit N_2 le nombre demandé

N_2 = $3^4 \times C_{10}^{6}$= 17010

Exercice 29

Lors d'une collecte de sang, 18 personnes se sont présentées. Parmi celles-ci, on a noté 11 Personnes du groupe O, 4 personnes du groupe A, 2 personnes du groupe B et une personne du groupe AB. A l'issue de la collecte, on prélève au hasard 3 flacons parmi les 18 obtenus.

1) Détermine le nombre de flacons de sangs que l'on peut prélever.

2) Détermine le nombre de flacons de sangs appartiennent au même groupe.

3) Détermine le nombre de flacons de sangs contenant au moins un flacon de sang du groupe A.

4) Détermine le nombre de flacons de sangs appartenant aux trois groupes différents.

Résolution

1. Soit N_1 le nombre demandé

N_1 = C_{18}^{3}

2. Soit N_2 le nombre demandé

N_2 = $C_{11}^{3} + C_{4}^{3}$

3. Soit N_3 le nombre demandé

N_3 = $C_{18}^{3} + C_{14}^{3}$

4. Soit N_4 le nombre demandé

N_4= $(11 \times 4 \times 2)$+ $(11 \times 4 \times 1)$+ $(11 \times 1 \times 2)$+ $(4 \times 2 \times 1)$ =162

Exercice 30

On lance deux dés cubiques équilibrés à 6 faces numérotés de 1 à 6 et on note la somme des chiffres des deux faces obtenues.

1) Détermine le nombre de résultats possibles.

2) Détermine le nombre de possibilités d'avoir une somme au moins égale à 5.

3) Détermine le nombre de possibilités d'avoir une somme au plus égale à 5.

4) Détermine le nombre de possibilités d'avoir une somme strictement inférieure à 3.

Résolution

1. Soit N_1 le nombre demandé

Les sommes proviennent des résultats suivants : 1 et 1 ; 1 et 2 ; 1 et 3 ; 1 et 4 ; 1 et 5 ; 1 et 6
2 et 2 ; 2 et 3 ; 2 et 4 ; 2 et 5 ; 2 et 6 ; 3 et 3 ; 3 et 4 ;3 et 5 ; 3 et 6
4 et 4 ; 4 et 5 ; 4 et ; 5 et 5 ; 5 et 6 ; 6 et 6

Les différentes sommes sont : 2 ;3 ;4 ;5 ;6 ;7 ;8 ;9 ;10 ;11 ;12 d'où :N_1= 11

2. Soit N_2 le nombre demandé

On a les résultats 1 et 4 ; 2 et 3 ; 1 et 5 ; 2 et 4 d'où : N_2= 4

3. Soit N_3 le nombre demandé

$N_3 = 6$

4. Soit N_4 le nombre demandé

N_4= 1

Exercice 31

On choisit 5 cartes dans un jeu de 32.

On rappelle qu'un jeu de 32 cartes est composé de quatre types : trèfle, carreau, cœur et pique.
Chaque couleur est composée de huit cartes : 7, 8, 9, 10, as et trois figures (valet, dame et roi).
Détermine le nombre de résultats comprenant :

1) exactement 2 valets ;
2) aucun as ;
3) au moins 3 dames ;
4) 2 trèfles et 3 carreaux ;
5) 2 cartes d'une couleur et trois de l'autre ;
6) au moins un roi ;
7) 3 piques et 2 roi

Résolution

1. Soit N_1 le nombre demandé

$N_1 = C_4^2 = 6$

2. Soit N_2 le nombre demandé

$N_2 = C_{28}^5 = 98280$

3. Soit N_3 le nombre demandé

$N_3 = (C_4^3 \times C_{28}^2) + (C_4^4 \times C_{28}^1)$ =1540

4. Soit N_4 le nombre demandé

$N_4 = C_8^2 \times C_8^3 = 1568$

5. Soit N_5 le nombre demandé

$N_5 = C_8^2 \times C_8^3 \times 4$ =6272

6. Soit N_6 le nombre demandé

$N_6 = C_{32}^5 - C_{28}^5$ =103096

7. Soit N_7 le nombre demandé

$N_7 = C_7^3 \times C_3^2 = 105$

Exercice 32

3 guides et 4 touristes partent à l'ascension d'une montagne. Ces 7 personnes forment une cordée dont la première et la dernière personne sont des guides.
Détermine le nombre de façons différentes de former ~~de~~ les cordées.

Résolution

Soit N le nombre demandé

$N = 3 \times 5! \times 2 = 720$

Exercice 33

Un groupe est composé de 15 femmes et 12 hommes. On veut constituer un comité de trois personnes pour représenter le groupe.

1) Détermine le nombre de comités que l'on peut former.
2) Détermine le nombre de comités ne comportant que des hommes
3) Détermine le nombre de comités ~~ne~~ comportant des personnes de même sexe
4) Détermine le nombre de comités ne comportant au moins une femme.
5) Madame Yao ne veut pas être dans le même comité ~~de~~ que monsieur Kacou.

Résolution

1. Soit N_1 le nombre demandé
$N_1 = C_{27}^{3} = 2925$
2. Soit N_2 le nombre demandé
$N_2 = C_{15}^{3} = 455$
3. Soit N_3 le nombre demandé
$N_3 = C_{15}^{3} + C_{12}^{3} = 675$
4. Soit N_4 le nombre demandé
$N_4 = C_{27}^{3} - C_{15}^{3} = 2470$
5. Soit N_5 le nombre demandé
$N_5 = C_{26}^{2} + C_{26}^{2} + C_{25}^{2} = 950$

Exercice 34

On tire successivement 4 boules avec remise d'un sac contenant 10 boules : 3 vertes et 7 jaunes.
Détermine le nombre de tirages permettant d'obtenir :
a) 4 boules jaunes ;
b) 4 boules vertes ;
c) 3 jaunes et 1 verte dans cet ordre ;
d) 3 jaunes et une verte ;
e) 2 jaunes et deux vertes dans cet ordre ;
f) deux jaunes et deux vertes ;
g) au moins 3 vertes ;
h) au plus 3 jaunes.

Résolution

a) Soit N_1 le nombre demandé
$N_1 = 7^4 = 2401$
b) Soit N_2 le nombre demandé
$N_2 = 3^4$
c) Soit N_3 le nombre demandé
$N_3 = 7^3 \times 3 = 1029$
d) Soit N_4 le nombre demandé
$N_4 = (7^3 \times 3) \times 4 = 4116$
e) Soit N_5 le nombre demandé
$N_5 = 7^2 \times 3^2 = 441$
f) Soit N_6 le nombre demandé
$N_6 = 7^2 \times 3^2 \times 6 = 2646$
g) Soit N_7 le nombre demandé
$N_7 = (7 \times 3^3) \times 4 + 3^4 = 837$
h) Soit N_8 le nombre demandé
$N_8 = 3^4 + (7 \times 3^3) \times 4 + (7^2 \times 3^2) \times 6 + (7^3 \times 3) \times 4$
$N_8 = 7599$

Exercice 35

On tire successivement 4 boules sans remise d'un sac contenant 10 boules : 3 vertes et 7 jaunes.
Détermine le nombre de tirages permettant d'obtenir :
a) 4 boules jaunes ;
b) 4 boules vertes ;
c) 3 jaunes et 1 verte dans cet ordre ;
d) 3 jaunes et une verte ;
e) 2 jaunes et deux vertes dans cet ordre ;
f) deux jaunes et deux vertes ;
g) au moins 3 vertes ;
h) au plus 3 jaunes.

Résolution

a) Soit N_1 le nombre demandé
$N_1 = A_7^4 = 840$
b) Soit N_2 le nombre demandé
$N_2 = 0$
c) Soit N_3 le nombre demandé
$N_3 = A_7^3 \times 3 = 630$
d) Soit N_4 le nombre demandé
$N_4 = (A_7^3 \times 3) \times 4 = 2520$
e) Soit N_5 le nombre demandé
$N_5 = A_7^2 \times A_3^2 = 252$
f) Soit N_6 le nombre demandé
$N_6 = A_7^2 \times A_3^2 \times 6 = 1512$
g) Soit N_7 le nombre demandé
$N_7 = (7 \times A_3^3) \times 4 = 168$
h) Soit N_8 le nombre demandé
$N_8 = (7 \times A_3^3 \times 4) + (A_7^2 \times A_3^2 \times 6) + (A_7^3 \times A_3^1) \times 4\ ) = 4200$

Exercice 36

Une classe de 30 élèves, 12 filles et 18 garçons, doit élire un comité composé d'un président, un vice-président et un secrétaire.
a) Détermine le nombre de comités que l'on peut constituer.
b) Détermine le nombre de comités que l'on peut constituer sachant que le poste de secrétaire doit être occupé par une fille.
c) Détermine le nombre de comités comprenant l'élève X.
d) Détermine le nombre de comités si le président est un garçon et le secrétaire est une fille.
e) Détermine le nombre de comités si le président et le vice-président sont de sexes différents.

Résolution

a) Soit N_1 le nombre demandé
$N_1 = A_{30}^3 =$
b) Soit N_2 le nombre demandé
$N_2 = 12 \times A_{29}^2 =$
c) Soit N_3 le nombre demandé
$N_3 = A_{29}^2 \times 3 =$
d) Soit N_4 le nombre demandé
$N_4 = (18 \times 17 \times 12) + (18 \times 12 \times 11) = 6048$
e) Soit N_5 le nombre demandé
$N_5 = (18 \times 12 \times 28) \times 2 = 12096$

Exercice 37

Une urne contient 5 boules rouges numérotées de 1 à 5, 4 boules noires numérotées de 1 à 4 et 3 boules vertes numérotées de 1 à 3.

On tire simultanément 3 boules de cette urne.

1) Détermine le nombre de tirages possibles.
2) Détermine le nombre de tirages contenant trois boules de même couleur.
3) Détermine le nombre de tirages contenant au moins une boule verte.
4) Détermine le nombre de tirages contenant au plus un numéro pair.
5) Détermine le nombre de tirages contenant un numéro pair et deux boules rouges.

Résolution

1. Soit N_1 le nombre demandé

$N_1 = C_{12}^3$

2. Soit N_2 le nombre demandé

$N_2 = C_5^3 \times C_4^3 \times C_3^3$

3. Soit N_3 le nombre demandé

$N_3 = C_{12}^3 - C_9^3$

4. Soit N_4 le nombre demandé

On a : soit zéro numéro pair ou un numéro pair

* Les numéros pairs

Rouge (2 ; 4)

Noire (2 ; 4)

Verte 2

* Les numéros pairs

Rouge (1 ; 3 ; 5)

Noire (1 ; 3)

Verte (1 ; 3)

$N_4 = C_7^3 \times C_5^0 + C_7^2 \times C_5^1 =$

5. Soit N_5 le nombre demandé

Les différentes possibilités sont :

*Cas 1 : Un numéro pair rouge, un numéro impair rouge et un numéro impair non rouge

$m_1 = C_2^1 \times C_3^1 \times C_4^1 = 2 \times 3 \times 4 = 24$

*Cas 2 : Un numéro pair noir et deux numéros rouge impairs

$m_2 = 2 \times C_3^2 = 6$

*Cas 3 : Un numéro pair vert et deux numéros rouge impairs

$m_3 = 1 \times C_3^2 = 3$

$N_5 = m_1 + m_2 + m_3 = 33$

Exercice 38

Sur une étagère se trouvent 12 livres différents : 5 livres différents de mathématiques, 4 livres différents de physique-chimie et 3 livres différents de SVT.

1. Détermine le nombre de façons différentes de ranger ces livres sur l'étagère.
2. Détermine le nombre de façons différentes de ranger ces livres sur l'étagère en ayant les livres de mathématiques côte à côte.
3. Détermine le nombre de façons différentes de ranger ces livres sur l'étagère en ayant les livres de chaque matière côte à côte.

Résolution

1) Soit N_1 le nombre demandé
N_1 =12! = 479001600
2. Soit N_2 le nombre demandé
N_2 = 5! × 7! =302400
3. Soit N_3 le nombre demandé
* On place les livres de math 5! façons.
* On place ceux de physique-chimique 4! façons.
* On place ceux de SVT 3! façons.
Après on permute leur position 3! façons.
D'où : N_3 =(5! × 4! × 3!) × 3! =103680

Exercice 39
On dispose de trois tiroirs pour ranger cinq pulls différents. Chaque tiroir peut contenir les cinq pulls. Détermine le nombre de façon on peut ranger les 5 pulls dans les trois tiroirs

Résolution
Soit N le nombre demandé
N est le nombre d'applications d'un ensemble de 5 éléments vers un ensemble à 3 éléments.
N = 3^5= 243

EXERCICE D'APPROFONDISSEMENT

Exercice 40
Justifie que, pour tous entiers naturels p et n tels que $p \leq n$, on a : $C_n^p \leq 2^n$
Résolution
Pour tous entiers naturels p et n tels que $p \leq n$, C_n^p est le nombre de parties de p éléments d'un ensemble à n éléments, or 2^n est le nombre de toutes les parties d'un ensemble à n éléments d'où : $C_n^p \leq 2^n$

Exercice 41
Justifie que, pour tous entiers naturels n et p tels que $p \leq n$, $C_n^p = C_n^{n-p}$
Résolution
$C_n^p = \frac{n!}{p!\times(n-p)!}$ et $C_n^{n-p} = \frac{n!}{(n-p)!\times(n-(n-p))!} = \frac{n!}{(n-p)!\times(p)!}$ d'où : $C_n^p = C_n^{n-p}$

Exercice42
Justifie que, pour tous entiers naturels n et p tels que $p+1 \leq n$, $C_{n+1}^{p+1} = C_n^p + C_n^{p+1}$
Résolution
$C_n^p = \frac{n!}{p!\times(n-p)!}$ et $C_n^{p+1} = \frac{n!}{(p+1)!\times(n-p-1)!}$ d'où :

$$C_n^p + C_n^{p+1} = \frac{n!}{p!\times(n-p)!} + \frac{n!}{(p+1)!\times(n-p-1)!} = \frac{n!}{p!\times(n-p)\times(n-p-1)!} + \frac{n!}{(p+1)\times p!\times(n-p-1)!}$$
$$= \frac{n!\times(p+1)}{(p+1)\times p!\times(n-p)\times(n-p-1)!} + \frac{n!\times(n-p)}{(p+1)\times p!\times(n-p)(n-p-1)!}$$
$$= \frac{n!\times[(p+1)+(n-p)]}{(p+1)\times p!\times(n-p)(n-p-1)!} = \frac{n!\times(n+1)}{(p+1)\times p!\times(n-p)(n-p-1)!} = \frac{(n+1)!}{(p+1)!\times(n-p)!} \text{ or } C_{n+1}^{p+1} = \frac{(n+1)!}{(p+1)!\times(n-p)!}$$

Donc : $C_{n+1}^{p+1} = C_n^p + C_n^{p+1}$

Exercice43

Justifie que pour tous entiers naturels n et p tels que : $2 \leq p \leq n$, $A_n^p = nA_{n-1}^{p-1}$

Résolution

$A_{n-1}^{p-1} = \frac{(n-1)!}{(n-p)!}$ d'où : $nA_{n-1}^{p-1} = \frac{n(n-1)!}{(n-p)!} = \frac{n!}{(n-p)!} = A_n^p$

Exercice44

Dans une colonie de vacances il y a 30 filles, 25 garçons et 5 moniteurs. Cette colonie, pour faire une excursion, ~~possède~~ utilise un mini-bus de 12 places.

Sachant que doivent partir deux moniteurs, détermine :

1. Le nombre de remplissages possibles du mini-bus.
2. Le nombre de remplissages possibles sachant que seul l'un des moniteurs connait le lieu de l'excursion et doit donc nécessairement la faire.
3. Le nombre de remplissages possibles sachant que deux des moniteurs ne peuvent monter ensemble.
4. Le nombre de remplissages possibles sachant que deux des moniteurs ne peuvent monter qu'ensemble.

Résolution

1. Soit N_1 le nombre demandé

$N_1 = C_5^2 \times C_{55}^{10}$

2. Soit N_2 le nombre demandé

$N_2 = 1\times C_4^1 \times C_{55}^{10}$

3. Soit N_3 le nombre demandé

$N_3 = 2(1\times C_3^1 \times C_{55}^{10}) + C_3^2 \times C_{55}^{10}$

4. Soit N_4 le nombre demandé

$N_4 = C_{55}^{10} + C_3^2 \times C_{55}^{10}$

Exercice45

Parmi les diviseurs de 546 détermine le nombre de ceux qui sont multiples de 2 ou 3.

Résolution

Soit E l'ensemble des diviseurs de 546, D l'ensemble des diviseurs de 546 multiples de 2 et T l'ensemble des diviseurs de 546 multiples de 3.

546= 2×3×7×13 d'où 546 admet 16 diviseurs.

E = {1 ;2 ;3 ;6 ;7 ;13 ;14 ;21 ;26 ;39 ;42 ;78 ;91 ;182 ;273 ;546}

D= {2 ; 6 ; 14 ; 26 ; 42 ; 78 ; 182 ; 546}

T= {3 ; 6 ; 21 ; 39 ; 42 ; 78 ; 273 ; 546}

L'ensemble des diviseurs de 546 multiples de 2 ou 3 est D∪T

D∪T = {2 ;3 ;6 ;14 ;21 ;26 ;39 ;42 ;78 ;182 ;273 ;546}

le nombre des diviseurs de 546 qui sont multiples de 2 ou 3 est Card(D∪T) c.-à-d. 12

Exercice46

Soit deux ensembles E et F tels que : E = {a ; b; c} et F = {1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5}.

1. Dénombre les applications de E dans F.
2. Dénombre les applications surjectives de E dans F.
3. Dénombre les applications de E dans F qui ne sont pas surjectives.
4. Dénombre les applications injectives de E dans F.

Résolution

1. Le nombre d'applications de E dans F est : 5^3=125
2. Le nombre d'applications surjectives de E dans F est : 3^5=243
3. Les cas possibles sont les suivants
   - ✓ Soit un seul élément de F n'a pas d'antécédent

Dans ce cas on a : $C_5^1 \times 3^4$ possibilités.
   - ✓ Soit seulement deux éléments de F n'ont pas d'antécédent

Dans ce cas on a : $C_5^2 \times 3^3$ possibilités.
   - ✓ Soit seulement trois éléments n'ont pas d'antécédent

Dans ce cas on a : $C_5^3 \times 3^2$ possibilités.
   - ✓ Soit seulement quatre éléments n'ont pas d'antécédent

Dans ce cas on a : $C_5^4 \times 3^1$ possibilités.

Le nombre d'applications non surjectives est N= $C_5^1 \times 3^4 + C_5^2 \times 3^3 + C_5^3 \times 3^2 + C_5^4 \times 3^1$=780

4. Le nombre d'applications injectives de E dans F est : A_5^3 =60.

Exercice 47

Résolution

1. Soit N_1 le nombre demandé

$N_1 = 5^4$ =625

2. Soit N_2 le nombre demandé

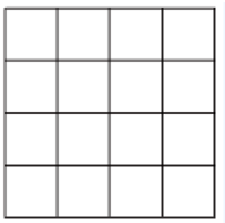
$N_2 = A_5^4 = 120$

3. Soit N_3 le nombre demandé

$N_3 = 5^4 - 5$ =620

Exercice 48

On considère le quadrillage 4×4 ci-contre ; tous les petits carreaux sont identiques
Détermine le nombre de carrés que l'on a dans ce quadrillage ;



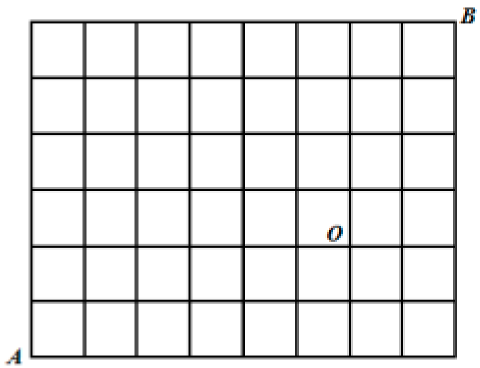
Résolution

Il ya 16 carrés de côté 1, 9 carrés de côté 2, 4 carrés de côté 3 et 1 carré de côté 4.
On a au total 30 carrés

Exercice 49

Les traits du quadrillage ci-contre représente les rues d'une ville.
Un promeneur (pressé !) veut se rendre de A à B (en suivant les rues !).
Un chemin de A à B est minimal s'il n'existe pas de chemin plus court pour aller de A à B.

1) Détermine le nombre de chemins minimaux que peut emprunter le promeneur pour aller de A à B ;



2) Détermine le nombre de chemins minimaux qu'il peut emprunter s'il veut passer par O .

Résolution

1) En prenant pour unité le côté d'un petit carré, tous les chemins minimaux ont pour longueur 14 : 8 vers la droite et 6 vers le haut.
Ils ne diffèrent que par l'ordre des mouvements vers la droite ou vers le haut.
Un chemin pourra par exemple être codé : HHHDDDHDDHHHDD.
Pour calculer le nombre de chemins minimaux, il suffit donc de choisir la place des 8 mouvements vers la droite parmi les 14 mouvements. Les autres seront les mouvements vers le haut.
Le nombre de chemins minimaux de A à B est donc le nombre de tirages simultanés de 8 places parmi 14, donc $C_{14}^{8} = 3003$
Il y a 3003 chemins minimaux de A à B.
2) Un chemin minimal de A à B passant par O est le raccordement d'un chemin minimal de A à O et d'un chemin minimal de O à B.
Un chemin minimal de A à O comporte 6 mouvements vers la droite et 2 vers le haut. Il y en a donc $C_8^6 = 28$.
Un chemin minimal de O à B comporte 2 mouvements vers la droite et 4 vers le haut. Il y en a donc $C_6^2 = 15$.
Les choix des chemins de A à O et de O à B sont indépendants.
Donc le nombre de chemins minimaux de A à BB passant par O est :
$C_8^6 \times C_6^2 = 420$.
Il y a 420 chemins minimaux de A à B qui passent par O .

SITUATION COMPLEXE

Exercice50

Le numéro d'immatriculation d'un véhicule dans une région de la Côte d'Ivoire est composé de 4 chiffres suivis de 2 lettres de l'alphabet français sauf D, O et W. Le service chargé de l'immatriculation informe qu'environ 200.000 véhicules sont immatriculés par an et que le 02 janvier 2014 le dernier numéro d'immatriculation attribué dans ladite région est 9999GZ.
Lors de la cérémonie d'inauguration de la bibliothèque d'un lycée dont il est le parrain, le président du conseil économique et social promet un ordinateur portable à chacun des élèves de la classe 1ère D qui donnera l'année quand le numéro d'immatriculation 1963ZZ sera attribué.
Détermine l'année quand le numéro d'immatriculation 1963ZZ sera attribué.

Résolution

Le numéro d'immatriculation qui suit le numéro 9999GZ est 0001HA.
Il y a 9999 numéros d'immatriculation qui se terminent par HA.
Les lettres D, O et W n'étant pas utilisées, le nombre de numéros d'immatriculation dont la première lettre est H est : 9999× 23 =229.977 (C-à-d de 0001HA à 9999HZ).
De 0001HA à 9999YZ on aura : 229977× 17=3.909.609 numéros d'immatriculation car de H à Y on a 17 lettres
Le numéro d'immatriculation qui suit 9999YZ est 0001ZA.

De 0001ZA à 9999ZY on a : 9999× 22=219.978 numéros d'immatriculation(les 4 lettres D, O, W et Z ne sont pas comptées).
De 0001ZZ à 1963ZZ on a : 1963 numéros d'immatriculation.
On a donc au total : 3 909 609+219.978 + 1963 = 4.131.550 numéros d'immatriculation
Chaque année 200.000 numéros d'immatriculation sont attribués.
4.131.550 ÷ 200.000 ≈20,65775. C'est donc dans la 21ème année après 2014 que le numéro d'immatriculation 1963ZZ sera attribué.
L'année quand le numéro d'immatriculation 1963ZZ sera attribué est donc 2014 +21=2035