COLLECTION "LE RÉPÈRE"

MATHS

NOUVEAU PROGRAMME

APC

3e

$(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$

$q^n = \underbrace{q \times \ldots \times q}_{n \text{ facteurs égaux à } a}$

$\sqrt{a^2} = |a|$

$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

$\cos^2 a + \sin^2 a = 1$

$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$

Editions SuperNova

Mathématiques

Nouveau programme A.P.C. 2019

3e

- OKAINGNI Okpo Dorgeles , professeur de Lycée
- BADOLO Evariste, professeur de Lycée
- DJAKO Dompe, professeur de Lycée
- SANOGO SOULEYMANE, professeur de Lycée
- KOUA ENSELME , professeur de Collège

Editions SuperNova

Nous adressons nos remerciements à tous les enseignants qui ont contribués de près ou de loin à la réalisation de ce manuel.

Les Editions SUPERNOVA 2019
ISBN: 978-2-37967-000-8
Dépot légal de Cote d'Ivoire :15710 du 03 Juillet 2019

Editions SuperNova

Contacts: (+225) 21 32 80 84
08 64 71 07
E-mail:supernovasarl@gmail.com

AVANT-PROPOS

Vous voici en classe de $3^{ème}$.

Ce manuel vous aidera à assurer les bases nécessaires pour la suite de vos études de mathématiques et à acquérir les notions indispensables au raisonnement et à la compréhension.

Cet ouvrage, conforme au programme mathématique APC version 2019, a été conçu pour être un instrument de travail efficace et agréable à utiliser.

Il a été réalisé selon un double objectif :

- Etre un outil adapté aux séquences d'enseignement en classe avec l'enseignant ;
- Permettre aux élèves de mener un travail autonome en dehors de la classe.

Ce manuel est divisé en quatorze leçons, qu'il est souhaitable d'aborder selon une progression équilibrée en travaux numériques et géométriques. Chacune de ces leçons est présentée selon la structure suivante :

- Une ouverture de la leçon avec les **Notions essentielles** et **une Situation d'apprentissage** ;
- Des **Activités** introductrices qui vous permettront de réinvestir les notions étudiées dans les classes antérieures, paliers indispensables pour la compréhension de nouveaux outils ;
- Un **Résumé de cours** qui contient des définitions, des propriétés démontrées et illustrées d'exemples ;
- Une **Méthode** qui permet à l'apprenant de mieux appréhender les chemins nécessaires pour élaborer efficacement une démonstration ;
- Des **Savoir-faire** qui vous aideront à résoudre les exercices d'application en vous guidant à l'aide de méthodes générales. Cette rubrique permet à l'apprenant d'avoir un exemple de rédaction attendue de lui ;
- Des **Exercices** variés et en très grand nombre dont le but est de donner une base de travail adaptée à tous les apprenants ;
- Le **Rendez-vous des curieux** propose des informations de la vie courante qui sont en rapport avec la leçon étudiée.

Nous souhaitons que ce manuel permette un enseignement de mathématiques fructueux, motivant et agréable pour les apprenants et leurs enseignants.

Les auteurs

PRESENTATION DU LIVRE

Cet ouvrage, conforme aux programmes de Mathématiques mis en place en Septembre 2019, propose de nouvelles orientations. Une approche nouvelle (A.P.C), une plus grande variété des exercices, un accompagnement plus prégnant en font un outil plus efficace pour les enseignants et les élèves dans la mise en œuvre de l'activité mathématique.

Ce manuel se présente en quatorze (14) leçons subdivisées chacune en six rubriques :

Notions essentielles
On présente ici, en titres, les notions importantes de la leçon.

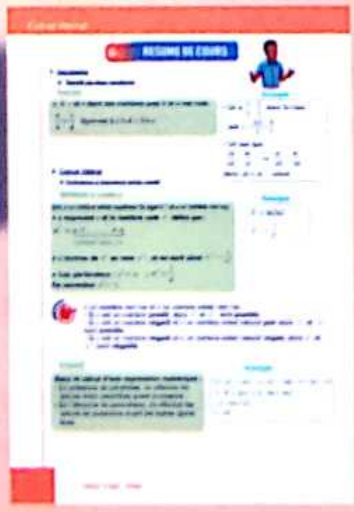
Situation d'apprentissage
Cette rubrique donne du sens à la leçon à étudier à travers une activité de vie courante.

Activités de découverte
Ce sont des activités qui permettent d'introduire les nouvelles notions abordées dans la leçon.

Je fais le point de l'activité
L'enseignant récapitule ici les notions qui viennent d'être mises en place.

J'évalue mes acquis
Des exercices d'application sont proposés aux apprenants pour évaluer les acquis de la notion qui vient d'être mise en place.

Cours
Cette rubrique contient les connaissances exigibles : des défintions, des propriétés, des demonstrations, des exemples et des remarques



Methode
On donne ici des stratégies pour :
- Mieux aborder les notions essentielles d'une leçon.
- Mieux comprendre certaines approches didactiques et pédagogiques

Savoir-faire
Ce sont des exercices résolus pour mettre en place les méthodes relatives aux notions essentielles de la leçon

Je m'exerce
Cette rubrique est consacrée à l'évaluation. Elle permet la vérification des connaissances et des acquis de la leçon. Elle est subdivisée en :
- Exercices de fixation / application
- Exercices de renforcement / approfondissement
- Situations d'évaluation.

Rendez-vous des curieux
C'est une ouverture socio-culturelle sur le monde pour situer les notions mathématiques étudiées relatives à la leçon

Sommaire

1 CALCUL LITTERAL

2 PROPRIÉTÉ DE THALÈS DANS UN TRIANGLE

3 RACINES CARRÉES

4 TRIANGLE RECTANGLE

5 CALCUL NUMÉRIQUE

6 ANGLES INSCRITS

7 VECTEURS

8 EQUATIONS ET INÉQUATIONS DANS $\mathbb{R}$

Sommaire

1 Calcul littéral

Notions essentielles :

- Egalité de deux quotients
- Puissances d'exposant entier relatif d'un nombre
- Produit nul
- Nombres de même carré
- Polynômes
- Fractions rationnelles

SITUATION D'APPRENTISSAGE

Un élève de 3ème d'un collège découvre sur un site internet l'information suivante :
« La vitesse de libération est la vitesse qu'il faut donner à un objet pour qu'il puisse échapper à l'attraction d'une planète.
Cette vitesse, notée v, se calcule grâce à la formule suivante : $v^2 = \dfrac{13,4\text{x}10^{-11}\text{x}M}{r+h}$.

v est la vitesse de libération de l'objet (en m/s) ;

M est la masse de la planète (en kg) ;

h est l'altitude de l'objet (en m). »

r est le rayon de l'objet (en m)

Pour la terre : $M = 6\text{x}10^{24}\,kg$

et $r = 6,4\text{x}10^{6}\,m$.

La fusée Ariane 5 libère un satellite de télécommunication à une altitude h égale à $1,9\text{x}10^{6}\,m$ ».

Il présente cette découverte à ses camarades de classe.
Intéressés par cette information, ceux-ci décident de renforcer leurs acquis sur le calcul littéral afin de calculer la vitesse de libération de la fusée Arianes à cette altitude.

I- ACTIVITES DE DECOUVERTE

Sauf mention contraire, les nombres considérés dans cette leçon sont des nombres rationnels ou des nombres réels.

1- Connaître la propriété relative à l'égalité de deux quotients

Activité 1

1- a) Complète l'égalité suivante : $\frac{5}{8} = \frac{20}{....}$

b) Calcule et compare les produits suivants :

5 x 32 et 8 x 20.

2- a) Vérifie que les produits 20 x 27 et 36 x 15 sont égaux.

b) Compare les quotients suivants: $\frac{20}{36}$ et $\frac{15}{27}$.

Je fais le point de l'activité

a, b, c et d désignent des nombres avec b et d non nuls.

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ équivaut à $a \times d = b \times c$

J'évalue mes acquis

1- Dans chacun des cas suivants, vérifie si les deux quotients sont égaux ou non :

a) $\frac{2}{7}$ et $\frac{14}{49}$; **b)** $\frac{3}{5}$ et $\frac{48}{81}$

2- a) Vérifie que les produits 14 x 3 et 21 x 2 sont égaux.

b) Déduis-en une comparaison des quotients $\frac{2}{3}$ et $\frac{14}{21}$

2- Connaître les propriétés relatives aux puissances à exposant entier relatif d'un nombre

2-1 Identifier une puissance d'exposant entier positif

Activité 2

1- Recopie et complète : 8 x 8 x 8 x 8 = $8^{...}$; 5^6 =...x...x...x...x...x...

2- a désigne un nombre et n un nombre entier naturel plus grand que 1 :

Recopie et complète avec le mot qui convient (« n facteurs » ; « produit » ; « a » ; « n ») la phrase suivante: $a^{...}$ désigne le .....de ....égaux au nombre......

J'évalue mes acquis

Complète chacune des égalités suivantes :

$a)$ 11^4=...×...×...×...

b) $13 \times 13 \times 13 \times 13 \times 13 = 13^{...}$

Je fais le point de l'activité

a désigne un nombre et n un nombre naturel entier naturel plus grand que 1.

$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times ... \times a}_{\text{« n facteurs égaux »}}$

2-2 Identifier une puissance d'exposant entier négatif

Activité 3

a est un nombre non nul. Effectue, dans chacun des cas, les calculs suivants :

1) $5^3 \times \frac{1}{5^3}$; 2) $12^4 \times \frac{1}{12^4}$;

3) $(-3)^5 \times \frac{1}{(-3)^5}$; 4) $a^n \times \frac{1}{a^n}$

(a nombre non nul et n entier positif)

Je fais le point de l'activité

a est un nombre non nul et n un nombre entier naturel.

- $\frac{1}{a^n}$ est l'inverse de a^n
- $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

J'évalue mes acquis

Recopie et complète les égalités suivantes :

a) $5^{-6}=\dfrac{1}{5^{\cdots}}$; b) $\dfrac{1}{3^{-8}}=3^{\cdots}$; c) $8^{2020}=\dfrac{1}{8^{\cdots}}$.

2-3 Connaître la propriété relative à la puissance d'un même nombre : $a^m \times a^n$; $(a^m)^n$ et $\dfrac{a^m}{a^n}$

Activité 4

1- Produit $a^n \times a^m$

Recopie, complète puis écris chacune des égalités suivantes sous la forme a^{n+m} :

a) $13^4 \times 13^7 = 13^{\cdots}$; b) $2^{-5} \times 2^9 = 2^{\cdots}$; c) $3^2 \times 3^{-7} = 3^{\cdots}$

2- Puissance d'une puissance : $(a^n)^m$

x désigne un nombre non nul. Recopie, complète puis écris chacune des égalités suivantes sous la forme $a^{n \times m}$:

a) $(x^2)^3 = \ldots \times \ldots \times \ldots = x^{\cdots}$; b) $(x^{-2})^3 = \left(\dfrac{1}{x^{\cdots}}\right)^3 = \ldots \times \ldots \times \ldots = \ldots \times \ldots \times \ldots = x^{\cdots}$

c) $(x^2)^{-2} = \dfrac{1}{(x^{\cdots})^{\cdots}} = \dfrac{1}{x^{\cdots}} \times \dfrac{1}{x^{\cdots}} = x^{\cdots} \times x^{\cdots} = x^{\cdots}$

3- Quotient $\dfrac{a^n}{a^m}$

Recopie, complète puis écris chacune des égalités suivantes sous la forme a^{n-m} :

a) $\dfrac{13}{13^3} = 13^{\cdots} \times 13^{\cdots} = 13^{\cdots}$; b) $\dfrac{11^{-5}}{11^4} = 11^{\cdots} \times 11^{\cdots} = 11^{\cdots}$

Je fais le point de l'activité

Soit a un nombre non nul et soient m et n deux nombres entiers relatifs. On a :

- $a^m \times a^n = a^{m+n}$;
- $(a^m)^n = a^{m \times n}$;
- $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$.

J'évalue mes acquis

a est un nombre non nul. Recopie et complète :

1) $a^3 \times a^2 = a^{\cdots}$; $a^{-8} \times a^{\cdots} = a^{-5}$; $a^{\cdots} \times a^{-6} = a^8$

2) $(a^5)^{-2} = a^{\cdots}$; $(a^{\cdots})^4 = a^{-20}$; $(a^{-4})^{\cdots} = a^{12}$

3) $\dfrac{a^8}{a^{-6}} = a^{\cdots}$; $\dfrac{a^{\cdots}}{a^{-5}} = a^{-3}$; $\dfrac{a^{-7}}{a^{\cdots}} = a^{15}$

2-4 Connaître la propriété relative aux puissances de même exposant : $(a \times b)^n$ et $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n$

Activité 5

1) Produit $a^n \times b^n$

Recopie, complète puis écris les égalités suivantes sous la forme $a^n \times b^n$ ou $(a \times b)^n$:

a) $13^3 \times 7^3 = \ldots \times \ldots \times \ldots \times \ldots \times \ldots \times \ldots = (13 \times 7)^{\cdots}$; b) $(5 \times 11)^2 = (\ldots \times \ldots) \times (\ldots \times \ldots) = 5^{\cdots} \times 11^{\cdots}$

2) Quotient : $\dfrac{a^n}{b^n}$

Recopie et complète chacune des égalités suivantes :

a) $\dfrac{5^3}{7^3} = 5^3 \times \dfrac{1}{\cdots} = 5^3 \times 7^{\cdots} = 5^3 \times (7^{\cdots}) = (5 \times 7^{\cdots})^3 = (5 \times \dfrac{1}{\cdots})^3 = \left(\dfrac{\cdots}{\cdots}\right)^{\cdots}$

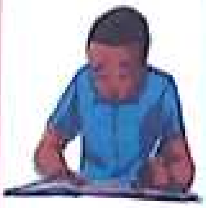
b) $\left(\dfrac{3}{11}\right)^4 = \left(3 \times \dfrac{1}{\cdots}\right)^4 = (3 \times 11^{\cdots})^4 = 3^{\cdots} \times 11^{\cdots} = 3^{\cdots} \times \dfrac{1}{11^{\cdots}} = \dfrac{3^{\cdots}}{11^{\cdots}}$.

Je fais le point de l'activité

a et b sont deux nombres non nuls et n un nombre entier relatif.

$\bullet\, a^n \times b^n = (a \times b)^n$; $\bullet\, \dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n$.

J'évalue mes acquis



Ecris sous la forme a^n, où a est un nombre et n un nombre entier relat

1) $3^6 \times 2^6$; $(-1,2)^3 \times 3^3$; $\left(-\dfrac{7}{8}\right)^{-4} \times \left(-\dfrac{4}{21}\right)^{-4}$

2) $\dfrac{6^4}{2^4}$; $\dfrac{(-8)^5}{(-2)^5}$; $\dfrac{(3,5)^{-3}}{(-7)^{-3}}$.

3- Connaitre la propriété relative au produit nul

Activité 6

Recopie et complète les cases vides du tableau ci-dessous :

a	0	-2	5	8	0	0	x	0	...	7
b	3	1	0	-8	9,6	0	0	y	-12	...
$a \times b$	...	...	...	...	...	...	...	...	0	0

Je fais le point de l'activité

Soient a et b deux nombres réels.

$a \times b = 0$ équivaut à $a = 0$ ou b

J'évalue mes acquis

Determine la (ou les) valeur(s) du nombre réel x dans chacun des cas ci-dessous :

a) $4(x - 1) = 0$

b) $(x+3) \times 2019 = 0$

c) $(x+2)(x-5) = 0$.

4- Connaître la propriété relative aux nombres de même carré

Activité 7

1) Recopie et complète dans les cases vides du tableau ci-dessous :

	b	a^2	b^2	Je compare a^2 et b^2
-1	1			
3	-3			
$-\dfrac{2}{3}$	$\dfrac{2}{3}$			
0	0			

2) x et y sont deux nombres.

a) Justifie que : $(x-y)(x+y) = x^2 - y^2$.

b) Déduis-en une relation entre x et y de sorte que $x^2 - y^2 = 0$.

c) Recopie et complète :

« $x^2 = y^2$ équivaut à ...... ou .... » .

Je fais le point de l'activité

a et b sont deux nombres, on a :

$a^2 = b^2$ équivaut à $a = -b$ ou $a = b$

J'évalue mes acquis

Détermine les valeurs des nombres x dans chacun des cas ci-dessous :

a) $x^2 = 25$; b) $(x-3)^2 = 100$

5- Développer et réduire les produits de la forme $k(a+b)$ et $(a+b)(c+d)$

Activité 8

Soient k, a, b, c et d des nombres. Recopie, effectue chacun des produits et remplace les pointillés par ce qui convient :

$k(a+b) = ... + ...$; $k(a-b) = ... - ...$; $(a+b)(c+d) = a(... + ...) + b(... + ...) = ... + ... + ... + ...$

Je fais le point de l'activité

a) Développer une expression consiste à l'écrire sous la forme d'une somme de termes.

b) Réduire une expression, c'est l'écrire avec le moins de termes possibles.

J'évalue mes acquis

Développe et réduis chacune des expressions suivantes :

a) $3x(5x+2)$; b) $(3x-5)(x-2)$

c) $5x(x-4)$; d) $(x+2)(x-6)$

6- Développer avec les produits remarquables- Calculer une valeur numérique d'une expression littérale

Activité 9

1) a et b désignent des nombres. Recopie et remplace les pointillés par ce qui convient :

$(a+b)^2 = ... + ... + ...$; $(a-b)^2 = ... - .... + ...$; $(a-b)(a+b) = ... - ....$

2) Pour chaque expression ci-dessous, indique le produit remarquable correspondant, le nombre a et le nombre b, puis développe-la.

$A = (5x+2)^2$; $B = (3-4x)^2$; $C = (7+2x)(7-2x)$

3) Calcule la valeur numérique de A, B et C pour $x = -1$ en indiquant la forme choisie pour le calcul.

Je fais le point de l'activité

Soient a et b des nombres.

On peut développer des expressions à l'aide des produits remarquables suivants :

•$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$; •$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$; •$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

J'évalue mes acquis

Recopie et associe chacune des expressions de la colonne de gauche à sa forme développée dans la colonne de droite.

$(x+3)^2$•	•$25x^2 - 20x + 4$
$(x-6)^2$•	•$25x^2 + 20x + 4$
$(x-6)(x+6)$•	•$x^2 - 12x + 36$
$(5x-2)^2$•	•$x^2 + 6x + 9$
$(5x-2)(5x+2)$•	•$x^2 - 36$
$(5x+2)^2$•	•$25x^2 - 4$

7- Factoriser une expression littérale avec un facteur commun

Activité 10

On donne les expressions A, B, C, D et E telles que :

A = $5x + 10$; B = $2x(x - 5)$; C = $2x - x^2$; D = $-3(7x - 4)$ et E = $8x^2 - 4x$

1) a) Parmi ces expressions, indique celles qui sont des produits en précisant leurs facteurs respectifs. $A = 5x + 10$; $B = 2x(x-5)$; $C = 2x - x^2$; $D = -3(7x-4)$; $E = 8x^2 - 4x$

b) Ecris les autres expressions sous la forme d'un produit.

3) Soit F tel que : $F = (5x-7)(2x+1) + (2x+1)(13x-8)$.

a) Précise les facteurs de chacun de ses produits

b) Déduis-en que : $F = 3(6x-5)(2x+1)$.

Je fais le point de l'activité

Factoriser une expression avec un facteur commun consiste à l'écrire sous la forme d'un produit de facteurs en utilisant :

- $ka + kb = k(a+b)$; • $ka - kb = k(a-b)$;
- $a(c+d) + b(c+d) = (a+b)(c+d)$.

J'évalue mes acquis

Pour chacune des expressions littérales, indique le facteur commun, puis factorise-la.

$A = 5x + 10$; $I = 6x - 3$;

$J = 14x + 7$; $K = 30x^2 - 42x$

$L = (x-3)(2x+5) + (x+9)(x-3)$

8- Factoriser une expression littérale a l'aide des produits remarquables

Activité 11

Recopie et complète chacune des égalités suivantes :

a) $x^2 + 12x + 36 = x^2 + 2 \times ... \times x + ...^2 = (x + ..)^2$;

b) $x^2 - 18x + 81 = x^2 - 2 \times ... \times x + ...^2 = (x - ..)^2$;

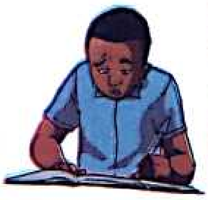
c) $x^2 - 0{,}49 = x^2 - ...^2 = (x - ..)(x - ..)$.

Je fais le point de l'activité

On peut factoriser une expression littérale à l'aide des produits remaquables en utilisant :

- $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$; • $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$; • $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

J'évalue mes acquis



Recopie et associe chacune des expressions de la colonne de gauche à sa forme factorisée dans la colonne de droite.

$36x^2 - 60x + 25$ •	• $(x-5)^2$
$36x^2 + 60x + 25$ •	• $(x-5)(x+5)$
$x^2 - 10x + 25$ •	• $(6x+5)^2$
$x^2 + 10x + 25$ •	• $(x+5)^2$
$x^2 - 25$ •	• $(6x-5)(6x+5)$
$36x^2 - 25$ •	• $(6x-5)^2$

9 - Identifier un polynôme

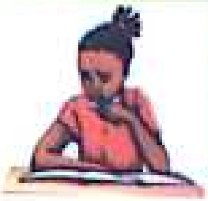
Activité 12

On donne l'expression A telle que :
$A = 9x^3 - 5x^2 + x - 2$
Dans l'écriture de A, indique :
a) Le terme en x^3, x^2 et en x en précisant le coefficient de chaque terme.
b) Le terme constant.
c) Le terme qui a la plus grande puissance de x.

Je fais le point de l'activité

• A est la somme de plusieurs monômes.
On l'appelle polynôme.
• Le monôme de plus haut degré est $9x^3$. Donc A est un polynôme de degré 3.
• A est écrite sous sa forme développée, réduite et ordonnée.

J'évalue mes acquis



Parmi les expressions suivantes, indique celles qui sont des polynômes en précisant leur degré.

$U = x^2 - 2x - 1$; $V = \sqrt{2x} + x^3 - 3$; $W = (x^2+1)\left(\frac{x^2}{x^2+1} - 2\right)$; $T = \sqrt{x}\left(2\sqrt{x}\right)$

10 - Identifier une fraction rationnelle

Activité 13

On donne l'expression C telle que :

$$C = \frac{x^2 - 4x + 4}{(2x-5)(x-3) + (3-x)(x-3)}$$

a) Ecris chacun des polynômes $x^2 - 4x + 4$ et $(2x-5)(x-3)+(3-x)(x-3)$ sous forme de produit de polynômes du premier degré.
b) Donne une autre écriture de C.
c) Détermine les valeurs de la variable x pour lesquelles le denominateur de C s'annule.
d) Simplifie C.

Je fais le point de l'activité

C est une fraction rationnelle car il est le quotient de deux polynômes.
• Pour étudier une fraction rationnelle, il faut au préalable déterminer les valeurs de la variable pour lesquelles la fraction existe.

J'évalue mes acquis

Réponds par vrai ou par faux à chacune des affirmations suivantes :
a) Toute fraction rationnelle est le quotient de deux polynômes
b) Tout polynôme est une fraction rationnelle
c) La fraction rationnelle $\frac{x^2 - 2x}{x - 2}$ existe pour tout nombre x différent de 2
d) Pour tout nombre x différent de -1 et de 0 on a : $\frac{3x^2+1}{x(x+1)} = \frac{3x+1}{x+1}$

II- RESUME DE COURS

1- Quotients

a) Egalité de deux quotients

Propriété

a, b, c et d étant des nombres avec b et d non nuls.

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ équivaut a $a \times d = b \times c$.

Exemple

- On a $\frac{x}{3} = \frac{2}{5}$, donc $5x = 3 \times 2$

soit $x = \frac{3 \times 2}{5} = \frac{6}{5}$

2- Calcul littéral

a) Puissance à exposant entier relatif

Définitions et notations

Soit n un nombre entier supérieur ou égal à 1 et a un nombre non nul.

- a exposant n est le nombre noté a^n défini par:

$a^n = \underbrace{a \times \dots \times a}_{n \text{ facteurs égaux à } a}$

- L'inverse de a^n se note a^{-n}, et on écrit ainsi $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
- Cas particuliers : $a^1 = a$; $a^{-1} = \frac{1}{a}$

Par convention: $a^0 = 1$.

Exemple

$5^3 = 5 \times 5 \times 5$

$2^{-4} = \frac{1}{2^4}$

REMARQUES

a un nombre non nul et n un nombre entier non nul.

- Si a est un nombre positif, alors a^n et a^{-n} sont **positifs**.
- Si a est un nombre **négatif** et n un nombre entier naturel **pair** alors a^n et a^{-n} sont **positifs.**
- Si a est un nombre **négatif** et n un nombre entier naturel **impair**, alors a^n et a^{-n} sont **négatifs**.

Propriété

Dans le calcul d'une expression numérique :

- En présence de parathèses, on effectue les calculs entre parenthèses avant la puissance ;
- En l'absence de parenthèses, on effectue les calculs de puissance avant les autres opérations.

Exemple

- $(5-8)^2 + 3 \times 2^3 = (-3)^2 + 3 \times 8 = 9 + 24 = 3$[illegible]
- $5 - 8^2 + 3 \times 2^3 = 5 - 64 + 3 \times 2^3$

$= 5 - 64 + 24$

$= -35$

Règles

a et b désignent deux nombres non nuls, et m et n deux nombres entiers relatifs.

	Règles de calcul	Exemples
Sans parenthèses	$a^m \times a^n = a^{m+n}$	$8^5 \times 8^{(-3)} = 8^{5+(-3)} = 8^2$
	$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$\frac{5^{-7}}{5^{-2}} = 5^{-7-(-2)} = 5^{-5}$
Avec parenthèses	$(a^m)^n = a^{m \times n}$	$(2{,}5^3)^{-2} = 2{,}5^{3\times(-2)} = 2{,}5^{-6}$
	$a^n \times b^n = (a \times b)^n$	$6^4 \times 0{,}5^4 = (6 \times 0{,}5)^4 = 3^4$
	$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$	$\frac{6^3}{1{,}5^3} = \left(\frac{6}{1{,}5}\right)^3 = 4^3$

b) *Développements et réduction-suppression de parenthèses*

Propriété

a,b et c sont des nombres.
On a :
- $a+(b-c)=a+b-c$
- $a-(b+c)=a-b-c$
- $a-(b-c)=a-b+c$

Exemple

$A=-4+(x-y+z)-(x+y-z)+5=-4+x-y+z-x-y+z+5$

$A=-4+5+x-x-y-y+z+z=1-2y+2z$

d'où : $A=1-2y+2z$

c) *Développement d'une expression*

Définition

Développer une expression consiste à l'écrire sous la forme d'une somme algébrique.

Propriété

a, b, c, d et k sont des nombres.
- $k(a+b)=ka+kb$
- $k(a-b)=ka-kb$
- $(a+b)(c+d)=a(c+d)+b(c+d)$
  $=ac+ad+bc+bd$

Exemple

Je développe et je réduis :

$B=(2x+5)(x-7)-(3-x)(3x-2)$

donc :

$B=2x(x-7)+5(x-7)-[3(3x-2)-x(3x-2)]$

$B=2x^2-14x+5x-35-(9x-6-3x^2+2x)$

$B=5x^2-20x-29$

d) *Factorisation d'une expression littérale*

Définition

Factoriser une expression consiste à l'écrire sous la forme d'un produit.

Propriété

k, a, b, d et k sont des nombres.
On a:

$ka+kb=k(a+b)$

$ka-kb=k(a-b)$

Exemple

Je factorise l'expression A telle que :

$A = 6x^2 + 15x$

$A = 2x \times 3x + 5 \times 3x$

$A=3x(2x+5)$.

3 - Egalités remarquables

a) Développement d'une expression littérale

Propriété

a et b sont des nombres, on a :

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Exemple

$A = (x-2,5)^2 = x^2 - 2 \times x \times 2,5 + 2,5^2 = x^2 - 5x + 6,25$

Propriété

a et b sont des nombres, on a :

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

Exemple

$A = \left(\frac{5}{11} - \frac{2}{3}x\right)\left(\frac{5}{11} + \frac{2}{3}x\right) = \left(\frac{5}{11}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}x\right)^2 = \frac{25}{121}$

b) Factorisation d'une expression littérale

Propriété

a et b sont des nombres, on a :

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$$

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

Exemple

Je factorise I et J :

$I = x^2 + 18x + 81 = x^2 + 2 \times x \times 9 + 9^2 = (x+9)$

$J = 9 - 3x + \frac{x^2}{4} = 3^2 - 2 \times 3 \times \frac{x}{2} + \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \left(3 - \frac{x}{2}\right)$

4- Produit nul - Nombres de même carré

a) Produit nul

Propriété

Un produit est nul si et seulement si l'un au moins de ses facteurs est nul.

a et b étant deux nombres :

- Si $ab = 0$, alors $a = 0$ ou $b = 0$
- Si $a = 0$ ou $b = 0$, alors $ab = 0$

Autrement dit : $ab = 0$ équivaut à $a = 0$ ou $b = 0$

Exemple

- $2(x-1) = 0$, équivaut à $x - 1 = 0$
  $2(x-1) = 0$ équivaut à $x = 1$
- $(x-6)(2x-5) = 0$ équivaut à $x = 6$ ou $x = 2,5$

b) Nombres de même carré

Propriété

a et b sont des nombres, on a :

$a^2 = b^2$, équivaut à $a = b$ *ou* $a = -b$

Exemple

- $x^2 = 4$ équivaut à $x = 2$ ou $x = -2$.
- $x = 5$ ou $x = -5$ équivaut à $x^2 = 25$

5- Expressions littérales

a) Polynômes

Définition

Un polynôme est la somme de plusieurs monômes

Exemple

- $2x^3$ est un monôme en x, de coefficient 2 et de degré 3 ;
- $6x^4 - 5x^3 + 2x^2 - 8$ est un polynôme de degré 4 et de terme contant -8.
- $6x^4 - 5x^3 + 2x^2 - 8$ est un polynôme développé, réduit et ordonné suivant les puissances décroissantes de x.
- $-1 + 5x - 3x^2 - 2x^3$ est un polynôme développé, réduit et ordonné suivant les puissances croissantes de x.

b) Fractions rationnelles

Définition

Une fraction rationnelle est le quotient de deux polynômes

Exemple

$\frac{2}{x^2}$; $\frac{3x}{x-4}$; $\frac{3x^2+4x+5}{8x}$ et $\frac{2x-5}{3x^2+5x-6}$ sont des fractions rationnelles.

III- METHODE

- ***Pour justifier que*** $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ *, où b et d sont deux nombres non nuls, on vérifie que :* $a \times d = b \times c$
- ***Pour démontrer une égalité:*** *A=B (A et B sont deux nombres)*

  -Soit on part d'un des deux membres A et B qui comporte des calculs, on les effectue pour retrouver l'autre membre de l'égalité ;

  -Soit on calcule A et on trouve C, puis on calcule B et on trouve C, et on conclut ;

  -Soit on calcule la différence A-B et on trouve 0.
- ***Pour développer un produit :***

  Développer, c'est transformer un produit en somme, c'est-à-dire obtenir une expression sans parenthèses. Pour cela, on utilise :

  -les règles de calcul :

  $k(a+b) = ka + kb$

  $(a+b)(c+d) = a(c+d) + b(c+d) = ac + ad + bc + bd$

  -les égalités remarquables :

  $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$; $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$; $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$.
- ***Pour factoriser une Somme , on peut :***

  -Soit reconnaître un facteur commun,

  -Soit utiliser une identité remarquable.
- ***Pour simplifier une fraction rationnelle :***

  -On l'écrit sous la forme $\frac{a \times k}{b \times k}$ *après avoir factorisé les deux termes de cette fraction ;*

  -On détermine la condition d'existence d'une valeur numérique de la fraction rationnelle ;

  -On simplifie la fraction rationnelle en faisant précéder de la condition d'existence d'une valeur numérique.

IV- SAVOIR-FAIRE

Savoir-faire 1- Calculer avec les puissances d'exposant entier relatif

Enoncé

Ecris chaque expression sous la forme a^n ,où a est un nombre et n un nombre entier rel

$(-4)^3\times(-4)^{-7}$; $(5^{-2})^3$; $(-2)^{-8}\times(-5)^{-8}$; $\frac{(-15)^6}{3^6}$; $\frac{2,4^{-3}}{2,4^7}$

Solution commentée

J'écris chaque expression sous la forme a^n, où a est un nombre et n un nombre entier relatif.

Réponses attendues	Propriétés utilisées
$(-4)^3\times(-4)^{-7}=(-4)^{3+(-7)}=(-4)^{-4}$	$a^m\times a^n=a^{m+n}$
$(5^{-2})^4=5^{-2\times4}=5^{-8}$	$(a^m)^n=a^{m\times n}$
$(-2)^{-8}\times(-5)^{-8}=((-2)\times(-5))^{-8}=10^{-8}$	$(a\times b)^n=a^n\times b^n$
$\frac{(-15)^{-3}}{3^{-3}}=\left(-\frac{15}{3}\right)^{-3}=(-5)^{-3}$	$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$
$\frac{2,4^{-3}}{2,4^{-1}}=2,4^{-3+1}=2,4^{-2}$	$\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$

Savoir-faire 2- Calculer avec les puissances d'exposant entier relatif

Enoncé

Développe, puis réduis lorsque cela est possible, chacune des expressions suivantes :

$A=3x(5-2x)$; $B=(7-3x)(2x+1)$; $C=(3x+0,2)^2$; $D=(5-4,5x)^2$;

$E=\left(\frac{3}{7}x-2\right)\left(\frac{3x}{7}+2\right)$

Solution commentée

Je développe, puis je réduis lorsque cela est possible, les expressions suivantes :

Réponses	Propriétés utilisées
$A=3x\times5-3x\times2x$ $A=15x-6x^2$	$k(a-b)=ka-kb$
$B=7(2x+1)-3x(2x+1)$ $B=14x+7-6x^2-3x$ $B=7+11x-6x^2$	$(a+b)(x+y)=a(x+y)+b(x+y)$ $(a+b)(x+y)=ax+ay+bx+by$
$C=(3x)^2+2\times3x\times0,2+0,2^2$ $C=9x^2+1,2x+0,04$	$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$
$D=5^2-2\times5\times4,5x+(4,5x)^2$ $D=25-45x+20,25x^2$	$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$
$E=\left(\frac{3}{7}x\right)^2-2^2=\frac{9x^2}{49}-4$	$(a-b)(a+b)=a^2-b^2$

Savoir-faire 3- Factoriser des expressions littérales

Enoncé

Factorise chacune des expressions suivantes :

$A = 6x^2 - x$; $B = (2x-5)(x+1) - (3x-7)(x+1)$; $C = 36x^2 + 12x + 1$;

$D = \frac{25x^2}{4} - 15x + 9$; $E = x^2 - 100y^2$

Solution commentée

Je factorise chacune des expressions

Solutions proposées	Propriétés utilisées
$A = x(6x-1)$	$ka + kb = k(a+b)$
$B = (x+1)[2x-5-(3x-7)]$ $B = (x+1)(2x-3x-5+7) = (x+1)(2-x)$	$a(x+y)+b(x+y) = (a+b)(x+y)$
$C = (6x)^2 + 2\times 6x \times 1 + 1^2 = (6x+1)^2$	$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$
$D = \left(\frac{5x}{2}\right)^2 - 2\times\frac{5x}{2}\times 3 + 3^2 = \left(\frac{5x}{2} - 3\right)^2$	$a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$
$E = (x-10y)(x+10y)$	$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

Savoir-faire 4- Déterminer les valeurs de la variable pour lesquelles une fraction rationnelle existe – Simplifier une fraction rationnelle

Enoncé

On donne la fraction rationnelle R telle que : $R = \frac{(x+6)(2x-1)}{(2x-1)(6x+1)}$

Détermine les valeurs de la variable x pour lesquelles R existe, puis simplifie R

Solution commentée

Je détermine les valeurs de la variable x pour lesquelles R existe, puis je simplifie R

A existe si et seulement si $(2x-1)(6x+1) \neq 0$

Or : $(2x-1)(6x+1) = 0$ si et seulement si $2x-1=0$ ou $6x+1=0$

$(2x-1)(6x+1) = 0$ si seulement si $x = \frac{1}{2} =$ ou $x = -\frac{1}{6}$

donc : A existe si et seulement si $x \neq \frac{1}{2}$ et $x \neq -\frac{1}{6}$

Je simplifie R

Pour $x \neq \frac{1}{2}$ et $x \neq -\frac{1}{6}$, on a :

$R = \frac{x-6}{6x+1}$

Savoir-faire 5- Déterminer les valeurs de x pour lesquelles une fraction rationnelle existe.

Enoncé

On donne l'expression C telle que : $C = \frac{x^2-4}{(x+3)(x-2)}$

a) Factorise $x^2 - 4$

b) Détermine les valeurs de x pour lesquelles C existe

c) Simplifie C

d) Détermine la valeurs de C pour $x = 1$.

Savoir-faire 3 : Factoriser des expressions littérales

Enoncé

Factorise chacune des expressions suivantes :

$A = 6x^2 - x$; $B = (2x-5)(x+1) - (3x-7)(x+1)$; $C = 36x^2 + 12x + 1$;

$D = \dfrac{25x^2}{4} - 15x + 9$; $E = x^2 - 100y^2$

Solution commentée

Je factorise chacune des expressions

Solutions proposées	Propriétés utilisées
$A = x(6x-1)$	$ka + kb = k(a+b)$
$B = (x+1)[2x-5-(3x-7)]$ $B = (x+1)(2x-3x-5+7) = (x+1)(2-x)$	$a(x+y) + b(x+y) = (a+b)(x+y)$
$C = (6x)^2 + 2 \times 6x \times 1 + 1^2 = (6x+1)^2$	$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$
$D = \left(\dfrac{5x}{2}\right)^2 - 2 \times \dfrac{5x}{2} \times 3 + 3^2 = \left(\dfrac{5x}{2} - 3\right)^2$	$a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$
$E = (x-10y)(x+10y)$	$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

Savoir-faire 4 : Déterminer les valeurs de la variable pour lesquelles une fraction rationnelle existe – Simplifier une fraction rationnelle

Enoncé

On donne la fraction rationnelle R telle que : $R = \dfrac{(x+6)(2x-1)}{(2x-1)(6x+1)}$

Détermine les valeurs de la variable x pour lesquelles R existe, puis simplifie R

Solution commentée

Je détermine les valeurs de la variable x pour lesquelles R existe, puis je simplifie R

A existe si et seulement si $(2x-1)(6x+1) \neq 0$

Or $(2x-1)(6x+1) = 0$ si et seulement si $2x-1=0$ ou $6x+1=0$

$(2x-1)(6x+1) = 0$ si seulement si $x = \dfrac{1}{2}$ ou $x = -\dfrac{1}{6}$

donc : A existe si et seulement si $x \neq \dfrac{1}{2}$ et $x \neq -\dfrac{1}{6}$

Je simplifie R

Pour $x \neq \dfrac{1}{2}$ et $x \neq -\dfrac{1}{6}$, on a

$R = \dfrac{x+6}{6x+1}$

Savoir-faire 5 : Déterminer les valeurs de x pour lesquelles une fraction rationnelle existe.

Enoncé

On donne l'expression C telle que : $C = \dfrac{x^2-4}{(x+3)(x-2)}$

a) Factorise $x^2 - 4$

b) Détermine les valeurs de x pour lesquelles C existe

c) Simplifie C

d) Détermine la valeurs de C pour $x = 1$

Solution commentée

a) $x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$

b) C existe si et seulement si $(x+3)(x-2) \neq 0$

$(x+3)(x-2) = 0$ *si et seulement* $x+3 = 0$ ou $x-2 = 0$

c'est -a- dire $x = -3$ ou $x = 2$

donc C existe si et seulement si $x \neq -3$ et $x \neq 2$

c) Je simplifie C pour $x \neq 3$ et $x \neq 2$,

$$C = \frac{x^2-4}{(x+3)(x-2)} = \frac{(x-2)(x+2)}{(x+3)(x-2)} = \frac{x+2}{x+3}$$

d) Je détermine la valeur de C pour $x = 1$

Pour $x = 1$, on a : $C = \frac{1+2}{1+3} = \frac{3}{4}$.

Savoir-Faire 6 Développer-réduire-Factoriser une expression littérale pour calculer une valeur pour une valeur de x donnée.

Enoncé

On considère l'expression A suivante : $A = (x-2)^2 + (x-2)(3x+1)$

a) Développe et réduis A.

b) Factorise A.

c) Calcule A pour $x = -1$.

Solution commentée

a) Je développe et je réduis A

$A = (x-2)^2 + (x-2)(3x+1)$

$= x^2 - 4x + 4 + 3x^2 + x - 6x - 2$ donc $A = 4x^2 - 9x + 2$

b) Je factorise A

$A = (x-2)^2 + (x-2)(3x+1)$

$= (x-2)(x-2+3x+1)$ donc $A = (x-2)(4x-1)$

c) Je calcule A pour $x = -1$

D'après la question précédente, $A = (x-2)(4x-1)$

Donc pour $x = -1$ on a : $A = (-1-2)(4(-1)-1) = -3 \times (-5)$ donc : $A = 15$

V- JE M'EXERCE

1- Exercices d'application/Fixation

Connaître la propriété relative à l'égalité de deux quotients

1 Les nombres a, b, c et d sont non nuls.
Dans chacun des cas, écris le produit en croix à partir des égalités de quotients ci-dessous.

a) $\frac{a}{b} = \frac{3}{4}$ b) $\frac{7}{6} = \frac{c}{d}$ c) $\frac{-4}{b} = \frac{12}{11}$.

2 Dans chacun des cas suivants, indique si les quotients donnés sont égaux en utilisant la propriété des produits en croix.

a) $\frac{15}{29}$ et $\frac{345}{667}$ b) $\frac{8,5}{5,4}$ et $\frac{13,6}{8,64}$ c) $\frac{-23}{15}$ et $\frac{392}{-255}$.

3 1- Effectue les produits suivants : 8x288 et 9x256
2- Déduis-en une fraction égale à $\frac{8}{9}$ puis à $\frac{9}{288}$.

4 x désigne un nombre positif non nul. Calcule la valeur du nombre x dans chacun des cas suivants ;

$a) \frac{2-x}{x} = \frac{3}{7}$; $b) \frac{3x-7}{x+1}$; c) $\frac{4}{x} = \frac{x}{9}$

5 Les lettres désignent des nombres non nuls. Recopie et complète :

a) Si $3a = 5c$, alors $\frac{a}{\dots} = \frac{c}{\dots}$ ou $\frac{3}{5} = \frac{\dots}{\dots}$

b) Si $8x = yz$, alors $\frac{x}{y} = \frac{\dots}{\dots}$ ou $\frac{z}{x} = \frac{\dots}{\dots}$

c) Si $ef = gh$, alors $\frac{e}{\dots} = \frac{\dots}{f}$ (deux possibilités)

6 Indique la bonne réponse par le numéro de la question suivi de la lettre .

1) Si $\frac{x}{6} = \frac{5}{3}$, alors :

a) $x = 27$ b) $x = 30$
c) $x = 10$ d) $x = 15$.

2) Si $\frac{2,5}{x} = \frac{7}{6}$, alors :

a) $x = 8$ b) $x = \frac{15}{7}$
c) $x = \frac{7}{15}$ d) $x = 2,14$

3) Si $\frac{x}{y} = \frac{2}{5}$ et $\frac{y}{z} = \frac{5}{3}$, alors $\frac{x}{z}$ vaut:

a) $\frac{5}{6}$; b) $\frac{6}{5}$
c) $\frac{3}{2}$; d) $\frac{2}{3}$.

Connaître les règles relatives aux puissances à exposant relatif d'un nombre

7 Ecris chacune des expressions ci-dessous sous la forme a^p, ou a est un nombre et p nombre entier relatif.

1) $a^5 \times a^{12}$; 2) $a^{-5} \times a^{26}$; 3) $(a^{-3})^{10}$; 4) $\frac{a^8}{a^3}$

8 a est un nombre non nul. Simplifie chacune des expressions ci-dessous et écris le résultat sous la forme a^p où p est un nombre entier relatif.

1) $\frac{a^5 \times a^{-4}}{a^{-6}}$; 2) $\frac{a^{-2} \times a^{-1}}{a^{-6} \times a^4}$; 3) $\frac{a^3 \times (a^{-3})^3}{(a^4)^3 \times a^{13}}$

9 Ecris chacune des expressions ci-dessous sous la forme $a^n b^m$ où a et b sont des nombres et n, m sont des entiers relatifs.

1) $a^3 \times b^{-4} \times a^{-7} \times (b^3)$; 2) $\frac{a^3 \times b^{-1} \times a^2}{(a^2)^3 \times (b^{-1})^{-2}}$

10 Recopie et complète les égalités suivantes :

1) $2^5 \times 2^{-3} = 2^{\dots}$; $(-8)^{-3} \times (-8)^{\dots} = (-8)^5$; $3^{\dots} \times 3^{-8} = 3^{-2}$

2) $(4^{-1})^4 = 4^{\dots}$; $((-2)^{-5})^{\dots} = (-2)^{15}$; $(5^{\dots})^{-3} = 5^{-12}$

3) $\frac{3^5}{3^2} = \dots^{\dots}$; $\frac{6^8}{6^{\dots}} = 6^{-3}$; $\frac{(-1,6)^{\dots}}{(-1,6)^{-3}} = (-1,6)^{11}$

4) $\frac{60^3}{4^3}=\dots$; $\frac{1,5^{-2}}{\dots}=3^{-2}$; $\left(\frac{-2}{5}\right)^3=\frac{\dots}{\dots}$

5) $2^6\times 0,6^6=\dots$; $(-4)^3\times 1,5^3=\dots$

Développer et réduire des expressions littérales- Calculer une valeur numérique d'une expression littérale

11 Réduis chacune des expressions suivantes :

1) $8x+3x-2x$; 2) $4y-y-5y$

3) $3x^2-6x^2+7x^2$; 4) $-2y^2+3y^2-4y^2$

12 Développe puis réduis les expressions A, B, C et D telles que :

$A=4(x-5)+2(x+1)$; $B=5(3-2x)-2(x+3)$

$C=7-(8x+3)+2x(5x-4)-3x^2$

$D=(x+2)(3x+4)$

13 On donne les expressions R et T suivantes :

$R=3x^3-6x^2-5$ et $T=(3x-6)(\frac{x}{6}+2)-\frac{5}{6}x-2$

Calcule la valeur numérique de R, puis de T pour $x=-1$.

14 Recopie et complète les égalités suivantes contenues dans le tableau ci-dessous en utilisant une égalité remarquable.

a) $(2x+4)^2=\boxed{\dots}^2+2\times\boxed{\dots}\times\boxed{\dots}+\boxed{\dots}^2$
b) $(x-7)^2=\boxed{\dots}^2-2\times\boxed{\dots}\times\boxed{\dots}+\boxed{\dots}^2$
c) $(9-2x)(9+2x)=\boxed{\dots}^2-\boxed{\dots}^2$

15 On donne l'expression P telle que :

$P(x)=(2x+3)^2+(3x-5)^2-(2x+1)(2x-1)$

Développe et réduis l'expression de P, puis calcule la valeur numérique de P pour $x=0$.

Factoriser des expressions littérales

16 Factorise chacune des expressions A, B, C et D contenues dans le tableau suivant.

$A=2ab-5b$	$B=4a+8b$
$C=a^2-ab$	$D=7ab+14b^2$

17 Recopie et complète les égalités suivantes :

$x^2+20x+100=x^2+2\times\boxed{\dots}\times x+\boxed{\dots}^2=(x+\dots)^2$

$25x^2-30x+9=(5\dots)^2-2\dots(3)+(\dots)^2$

$C=81-49x^2=(\dots-\dots)(\dots+\dots)$

18 Ecris chacune des expressions ci-dessous sous la forme de produit de polynômes du premier degré.

1) $x^2+4x+4+(5x+3)(x+2)$

2) $x^2-25-(3x+1)(x-5)$

3) $2x^3-18x+\frac{9}{2}(x-3)$

Connaître la propriété relative au produit nul

19 Dans chacun des cas ci-dessous, détermine la (ou les) valeur(s) du nombre x.

a) $203(x-2)=0$; b) $x(x-6)=0$

c) $(x-11)(5-x)=0$; e) $(4x-2)^2=0$

d) $\left(\frac{2}{7}x-1\right)\left(2+\frac{5}{6}x\right)=0$

20 Pour chaque question, une seule réponse est exacte. Indique le numéro suivi de la réponse exocte

		A	B	C
1	Les nombres pour lesquels $(2x+1)(3x+5)=0$ sont....	1 et 3	$\frac{1}{2}$ et $-\frac{5}{3}$	2 et $-\frac{3}{5}$
2	Pour les valeurs de x égales à 2 et -4, le produit correspondant est....	$(x-2)(x-4)=0$	$(x+2)(x-4)=0$	$(x-2)(x+4)=0$

Connaître la propriété relative aux nombres de même carré

21 Parmi les nombres ci-dessous, indique ceux qui ont le même carré.

$-\Pi-5$; $\frac{1}{3}$; 2 ; $\frac{21}{17}$; $-a$; -2 ; $\Pi-1$

$-\frac{1}{3}$; 5 ; Π ; $-\frac{21}{17}$; a ; $1-\Pi$

22 Détermine les valeurs du nombre x dans chacun des cas suivants :

a) $x^2=0,04$; b) $9x^2=3600$

c) $(3x+1)^2=25$; $(2x-5)^2=x^2$

Identifier une fraction rationnelle

23 Parmi les expressions ci-dessous, indique celles qui sont des polynômes.

$8x^3-2x+3$; $\frac{x^3}{x}-\frac{x^2}{x}+2$; $5x(x-1)+x^2$

24 Effectue le produit des monômes dans chacun des cas suivants :

a) $3x^2\times 5x$; b) $(-5x)^3(-2x^4)$

c) $\left(-\frac{3}{5}x^2\right)\times\left(\frac{5}{9}x^3\right)\times x$; d) $\left(-80x^2\right)\times\left(\frac{1}{16}x^3\right)\times\frac{3}{5}x$

25 On donne le polynôme P tel que :

$P = 27 - 8x + 5x^4 - 9x^2$.

Ordonne le polynôme P suivant les puissances décroissantes de x.

26 On donne les polynômes A et B tels que :

$A = 2 + x^2$ et $B = 5x^2 - x - 3$.

On pose: S = A+B ; D = A-B et P = AXB.

Développe, réduis et ordonne S, D et P.

27 Réponds par vrai ou par faux à chacune des affirmations suivantes :

a) Toute fraction rationnelle existe pour tout nombre

b) Toute fraction rationnelle est simplifiable

c) La touche inverse d'une calculatrice scientifique est une fraction rationnelle

d) Tout nombre est une fraction rationnelle

28 Parmi les expressions ci-dessous, indique celles qui sont des fractions rationnelles

1) $x - \frac{1}{x}$; 2) $|x| + x$; 3) $x\left(\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} - \frac{3}{x^3}\right)$

4) $\sqrt{(x-1)^4}$

Déterminer les valeurs de la variable pour lesquelles une fraction rationnelle existe – simplifié une fraction rationnelle.

29 On donne les fractions rationnelles A, B et C telles que :

$$A = \frac{3x+2}{9x^2-4};\ B = \frac{x^2-4}{x^2+4x+4};\ C = \frac{9x^2-12x+4}{(x-3)^2-(2x+1)^2}$$

a. Ecris sous forme de produits de polynômes du premier degré le numérateur et le dénominateur de chaque fraction rationnelle ci-dessus.

b. Détermine les valeurs de la variable x pour lesquelles chaque fraction rationnelle existe puis simplifie-la.

c. Calcule la valeur numérique de A et B pour $x = -3$

2- Exercices de renforcement / approfondissement

30 Calcule : $a+b; a-b; a\times b$ et $\frac{a}{b}$ dans chacun des cas suivants :

1) $a = \frac{4}{3}$ et $b = \frac{5}{12}$; 2) $a = \frac{3}{-5}$ et $b = \frac{-6}{7}$

31 Calcule chacune des expressions ci-dessous et donne le résultat sous la forme d'une fraction la plus simple possible.

$$A = \frac{2}{3} + \frac{5}{3} \times \frac{3}{4};\quad B = \frac{7}{30} - \frac{4}{3} : \frac{5}{2};$$

$$C = (5 - \frac{2}{5}) : (\frac{4}{5} \times 9);\quad D = \frac{3}{8} + \frac{5}{8} : \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{6}\right)$$

32 On considère les expressions A et B :

$$A = 2^3 + 2^2(2^2 \times 3 - 3^2)$$

$$B = \frac{7^2 - 7 \times 5}{7 \times 2^{-3}} - 2^2$$

1- Calcule les expressions A et B

2- Déduis-en que $A - B = 2^3$.

33 Ecris les expressions ci-dessous sous la forme $3^n \times 7^p$, où n et p sont des nombres entiers relatifs.

$$A = \frac{3^{-3} \times (7^{-6})^{-2}}{7^{13} \times 3^6} \qquad B = \frac{9^2 \times (3^5)^2}{3^{18} \times 21^{-2}}$$

34 Calcule la valeur numérique de chacune des expressions suivantes pour $x = 1$:

$$A = (x-2)\left(\frac{3}{2} + x\right) \quad ; \quad B = 2 - \frac{6}{5} \times \frac{1}{x}$$

$$C = \frac{x}{x - \frac{3}{2}} \quad ; \quad D = (2x-1) - 5x^3$$

35 a, b, c et d désignent des nombres non nuls tels que b et c soient différents de a.

Démontre que si $\frac{a+c}{a-c} = \frac{a+b}{b-a}$ alors $a^2 = bc$

36 On donne les expressions A, B et F telles que:

$$A = (2x+5)^2 + 8x + 20 + 4x^2 - 25$$

$$B = (3x+4)^2 - (x-1)^2;\ F = \frac{A}{B}$$

1- Ecris A et B sous forme de produit de polynôme du premier degré.

2- Détermine les valeurs de la variable x pour lesquelles B s'annule.

3- Simplifie la fraction rationnelle F lorsqu'elle existe, puis détermine le nombre x pour que F = 2.

37 On donne les expressions X, Y et Z telle que:

$$X = \frac{1-x^2}{1+x^2};\ Y = \frac{2x}{1+x^2};\ Z = \frac{2x}{1-x^2}$$

1- Détermine les valeurs de la variable x pour lesquelles X, Y et Z existent.

2- Démontre les égalités suivantes :

$a) X^2 + Y^2 = 1$; $b) \frac{Y}{X} = Z$;

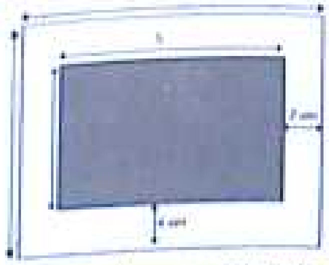
$c) 1 + Z^2 = \frac{1}{X^2}$; $d) \frac{1}{Y^2} - \frac{1}{Z^2} = 1$.

3- Situations d'évaluation

38 Pendant les grandes vacances, un groupe d'élèves de 3ème d'un lycée décident de vendre des objets fabriqués par une petite et moyenne entreprise (PME). Cette entreprise envisage de vendre un article à 200F. Le coût de fabrication journalier de x objets est donnée par la formule : $C = 2090x - x^2$.
Soucieux et très prudent, le directeur souhaite connaître le nombre d'articles pour lequel les dépenses et la recette s'équilibrent.

1- Exprime, en fonction de x, la recette R de x objets vendus.
2- Sachant que le bénéfice B = R - C, démontre que $B = x(x - 90)$.
3- Déduis-en le nombre d'articles pour lequel les dépenses et la recette s'équilibrent.

39 Pour l'encadrement d'une gravure, un professeur d'art plastique de ton établissement réalise la figure ci-dessous en respectant des marges. Il faut 2 cm à gauche et à droite, puis 4 cm en haut et en bas. Il veut que l'aire de l'œuvre soit de 441 cm^2 et de périmètre 140 cm.
Malheureusement, il a oublié les dimensions de cette gravure.
Soit x la longueur et y la largeur du support, en centimètres, où x est plus grand que 4 cm et y plus grand que 8 cm.
Le professeur sollicite ses élèves de la classe de 3ème pour l'aider à déterminer les dimensions



1- Exprime la longueur L et la largeur l de cette gravure en fonction de x et y.
2- a) Démontre que : $y = \dfrac{441}{x-4} + 8$
c) Démontre que le périmètre P de la gravure est
$P = \dfrac{882}{x-4} + 2x - 8$
c) Recopie et complète le tableau ci-dessous

x (en cm)	10	22	25	46	67
Périmètre P (en cm)					

3- A partir du tableau précédent ;
a) indique une longueur de la gravure.
b) Calcule la valeur exacte de y.
c) Déduis-en les dimensions de cette gravure.

VI- RENDEZ-VOUS DES CURIEUX !

Les calculateurs prodiges possèdent une mémoire exceptionnelle. Pour réaliser leurs exploits, ils utilisent des méthodes de calcul qui leur sont propres. Mais leur don de calculateur cache souvent de profonds troubles psychiques.
Parmi les plus prestigieux, le berger italien Jacques Inaudi (1867- 1950) était capable, dès l'âge de 7 ans et sans aller à l'école, de multiplier mentalement deux nombres de cinq chiffres chacun.
Au XVIIIe siècle, Jedediah Buxton, ouvrier agricole, a calculé mentalement le carré de :
725.958.238.096.074.907.868.531.656.993.638.851.106 !
Ce serait une erreur de confondre calculateur prodige et mathématicien. Néanmoins, quelques grands mathématiciens furent d'étonnants calculateurs. Citons Friedrich Gauss (1777-1855) qui, à 8 ans, étonna son instituteur en calculant de tête, quasi instantanément, la somme de tous les nombres entiers de 1 à 100. Ayant remarqué que 1+100=101 ; 2+99=101 ; 3+98 ; 4+97=101 et ainsi de suite, il lui avait suffi d'effectuer la multiplication de 50x101 pour obtenir la réponse !

2 Propriété de Thalès dans un triangle

Notions essentielles :

- Propriété de Thalès
- Conséquence de la propriété de Thalès
- Propriété réciproque de la propriété de Thalès

SITUATION D'APPRENTISSAGE

Les élèves d'une classe de 3ème d'un collège découvrent dans une revue de mathématiques l'information suivante :

« Dans l'antiquité un arpenteur mesurait la profondeur d'un puits dont on connaissait le diamètre, en alignant son œil avec le bord du puits et avec le coin opposé du fond du puits. Connaissant la distance de recul par rapport au puits et la distance entre les pieds et l'œil de l'arpenteur, on peut déduire la profondeur du puits ».

En vue de prendre des précautions pour éviter un éventuel accident des élèves dans le puits, ils décident d'en parler à leur chef d'établissement afin d'utiliser cette méthode pour déterminer la profondeur du puits dudit collège.

Ils obtiennent alors le schéma ci-dessous dont les données sont conformes à l'information reçue.

I- ACTIVITES DE DECOUVERTE

1- Propriété de Thalès

Activité 1

« ABC est un triangle, deux points M et N appartiennent respectivement aux droites (AB) et (AC) telles que les droites (MN) et (BC) soient parallèles. »

Il y a trois types de figure relative à ces données.

Figure 1 Figure 2 Figure 3

1) • Reproduis ces figures.
• Pour chaque figure, mesure à l'aide d'une règle graduée AM, AN, AB et AC ; recopie et complète le tableau ci-dessous.

	AM	AN	AB	AC	$\frac{AM}{AB}$	$\frac{AN}{AC}$
Figure 1						
Figure 2						
Figure 3						

2) Compare les rapports $\frac{AM}{AB}$ et $\frac{AN}{AC}$ dans chacun des cas de figures.

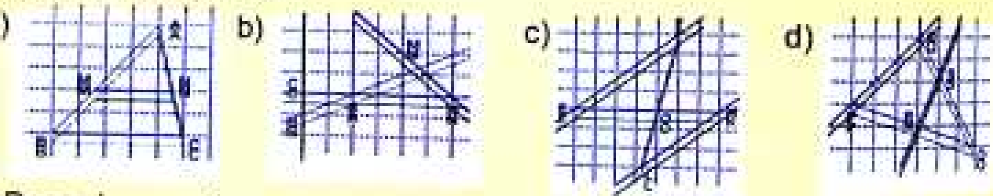
Je fais le point de l'activité

- Les trois types de figure 1, 2 et 3 de l'activité traduisent les mêmes données.
- A partir de ces données, on obtient : $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$.

J'évalue mes acquis

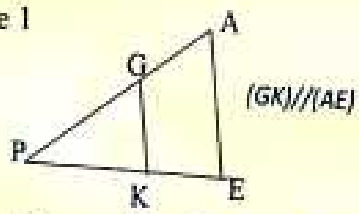
1) La propriété de Thalès peut s'appliquer dans deux des cas de figure ci-dessous, indique les.

a) b) c) d)



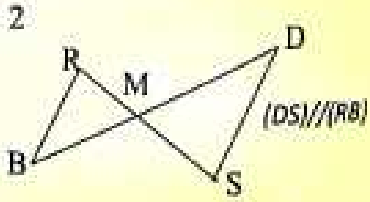
2) Dans chacune des configurations de Thalès ci-dessous, relève l'égalité correcte.

Figure 1



1) $\frac{AG}{AP} = \frac{AE}{AK}$; 2) $\frac{PE}{PK} = \frac{GA}{PA}$; 3) $\frac{PA}{PG} = \frac{PE}{PK}$

Figure 2



1) $\frac{MR}{MD} = \frac{MB}{MS}$; 2) $\frac{MB}{MD} = \frac{MR}{MS}$; 3) $\frac{RM}{RS} = \frac{DM}{DB}$

2- Connaître la propriété réciproque de la propriété de Thalès

Activité 2

Sur chacune des figures ci-dessous, ABC est un triangle, M est un point de la droite (AB), N est un point de la droite (AC).

Pour chaque figure :

1- Vérifie que les rapports $\frac{AM}{AB}$ et $\frac{AN}{AC}$ sont égaux.

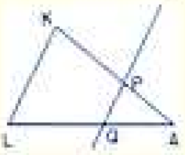
2 - Dis si les droites (MN) et (BC) sont parallèles.

Je fais le point de l'activité

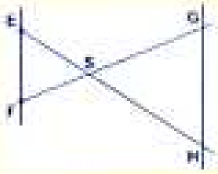
ABC étant un triangle, M un point de la droite (AB) et N un point de la droite (AC) tels que les points A, B et M d'une part et les points A, C et N d'autre part, soient alignés dans le même ordre : On constate que : $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$ et on verifie que (MN) // (BC).

J'évalue mes acquis

1) Pour la figure ci-dessous, énonce la réciproque de la propriété de Thalès permettant de justifier que les droites (KL) et (PQ) sont parallèles.



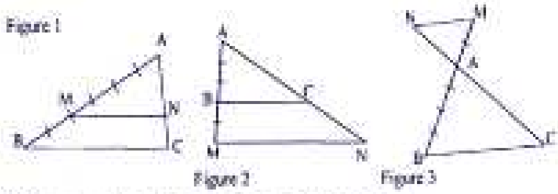
2) Sur la figure ci-contre, on donne SE = 9 cm, SG = 14 cm, SF = 7 cm et SH = 18 cm.
Démontre que : (EF)//(GH).



3- Connaître la conséquence de la propriété de Thalès

Activité 3 Conjecture

Sur chaque figure ci-dessous, ABC est un triangle, M est un point de la droite (AB), N est un point de la droite (AC) tels que les droites (MN) et (BC) soient parallèles.



1) Dans chaque cas de figure :
- A l'aide de la graduation, détermine la valeur de $\frac{AM}{AB}$, puis celle de $\frac{AN}{AC}$.

- Mesure BC et MN, et calcule $\frac{MN}{BC}$.
- Mentionne les résultats dans le tableau ci-dessous :

	$\frac{AM}{AB}$	$\frac{AN}{AC}$	BC	MN	$\frac{MN}{BC}$
Figure 1					
Figure 2					
Figure 3					

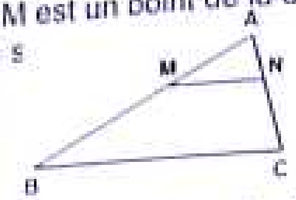
2) Compare les rapports $\frac{AM}{AB}$, $\frac{AN}{AC}$ et $\frac{MN}{BC}$ dans chaque cas de figure.

Je fais le point de l'activité

ABC étant un triangle, M un point de la droite (AB) et N un point de la droite (AC) tels que les droites (MN) et (BC) soient parallèles.
Les rapports $\frac{AM}{AB}$, $\frac{AN}{AC}$ et $\frac{MN}{BC}$ sont égaux.

Activité 4 *Démonstration*

Sur la figure ci-dessous, ABC est un triangle, M est un point de la droite (AB) et N un point de la droite (AC) tels que les droites (MN) et (BC) s



1- Nomme la propriété qui justifie que $\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}$

2- On se propose, dans cette question, de démontrer que $\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC}$

Pour cela, on trace la parallèle à la droite (AC) passant par le point M et coupant la droite (BC) en L.

a) Justifie que $\frac{BM}{BA}=\frac{BL}{BC}$.

b) Recopie et complète en suivant les indications :

Expression de BM en fonction de BA et MA ↘ ↙ *Expression de BL en fonction de LC et BC*

$$\frac{\ldots}{BA}=\frac{\ldots}{BC}$$

Déduis-en que $\frac{MA}{BA}=\frac{LC}{BC}$ (2).

c) Justifie que dans le quadrilatère de sommets M, N, C et L, on a LC = MN (3).

d) En utilisant les égalités (2) et (3), justifie que $\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC}$.

NB : Un raisonnement analogue peut s'appliquer aux autres cas de figure.

Je fais le point de l'activité

ABC étant un triangle, M un point de la droite (AB) et N un point de la droite (AC).

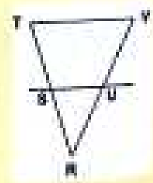
Si (MN) // (BC) alors $\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC}$

J'évalue mes acquis

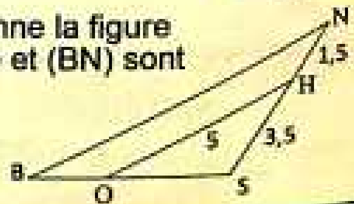
1) Le texte à trous ci-dessous est l'énoncé de la conséquence de la propriété de Thalès correspondant à la figure ci-contre.

« ... est un triangle ...∈(...) et ...∈(...).

Si .... alors $\frac{RU}{RV}=\frac{\ldots}{\ldots}=\frac{\ldots}{\ldots}$ ».



2) Une unité de longueur étant choisie, on donne la figure codée ci-contre dans laquelle les droites (OH) et (BN) sont parallèles.
Calcule BN.

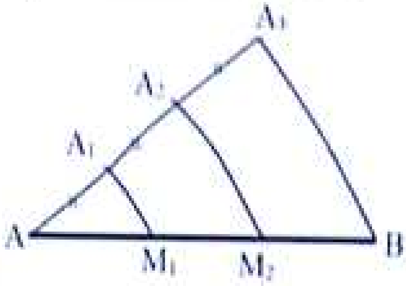


4- Partager un segment en des segments de même longueur

Activité 5

On donne un segment [AB].
On se propose de le partager en trois segments de même longueur.
Dans la figure codée réalisée à main levée ci-dessous, les points A, A_1, A_2 et A_3 sont alignés.

Les droites (A_1M_1), (A_2M_2) et (A_3B) sont parallèles ; cette figure présente une méthode de partage proposée par un élève.

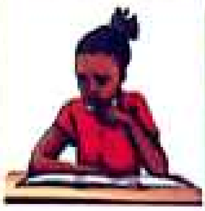


- Justifie que $\frac{AM_1}{AB} = \frac{1}{3}$, puis déduis que $AM_1 = \frac{1}{3}AB$.
- Justifie que $\frac{AM_2}{AB} = \frac{2}{3}$, puis déduis que $AM_2 = \frac{2}{3}AB$.
- Déduis que $M_1M_2 = \frac{1}{3}AB$ et $M_2B = \frac{1}{3}AB$.
- Justifie que la méthode de partage proposée est correcte.

Je fais le point de l'activité

Pour partager un segment en des segments de même longueur, on peut réaliser un tracé d'une configuration de Thalès.

J'évalue mes acquis



1) Trace un segment [AB]. Sans le mesurer, partage-le en cinq segments de même longueur.

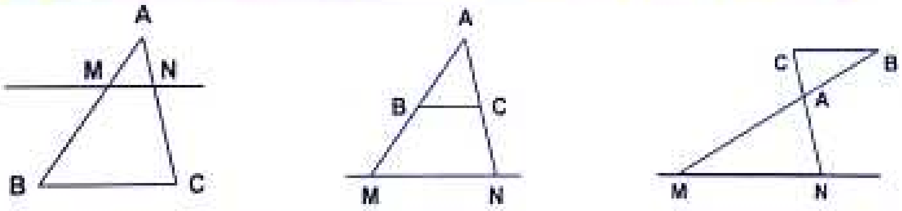
2) Trace un autre segment [AB]. Sans le mesurer, construis sur ce segment le point M tel que $AM = \frac{4}{7}AB$.

3) Trace un segment [AB]. Construis sur ce segment le point N tel que $\frac{AN}{AB} = \frac{5}{8}$

II- RESUME DE COURS

1- Propriétés de Thalès dans le triangle

NB : Pour les propriétés ci-dessous, se référer aux configurations suivantes :



A- Propriété de Thalès (propriété directe)

Propriété

ABC est un triangle. M est un point de la droite (AB) et N un point de la droite (AC).

Si (MN) // (BC) alors $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$.

B- Réciproque de la propriété de Thalès

Propriété

ABC est un triangle. M est un point de la droite (AB) et N un point de la droite (AC) tels que les points A, B et M d'une part et les points A, C et N d'autre part, soient alignés dans le même ordre :

Si $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$ ***alors (MN)//(BC).***

REMARQUES

Dans les mêmes conditions, si les quotients $\frac{AM}{AB}$ et $\frac{AN}{AC}$ ne sont pas égaux alors les droites (MN) et (BC) sont **sécantes**.

C- Conséquence de la propriété de Thalès

Propriété

AMN est un triangle. M est un point de la droite (AB) et N un point de la droite (AC).

Si (MN) // (BC) alors $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$.

REMARQUES

Les égalités $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$ données par la conséquence de la propriété de Thalès traduisent que les longueurs des côtés des triangles ABC et AMN sont **proportionnelles**.

En posant $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC} = k$, on obtient les égalités suivantes : $AM = kAB$, $AN = kAC$ et $MN = kBC$.

On dit que :

le triangle AMN est **une réduction** du triangle ABC à l'échelle k **dans le cas où** $k < 1$;

le triangle AMN est **un agrandissement** du triangle ABC à l'échelle k **dans le cas où** $k > 1$.

L'échelle k est donnée par exemple par l'un des trois rapports $\frac{AM}{AB}$, $\frac{AN}{AC}$ et $\frac{MN}{BC}$.

III- METHODE

- ***Pour écrire des rapports égaux à un rapport donné ou calculer des longueurs dans un triangle***, *on peut utiliser la propriété de Thalès ou la conséquence de la propriété de Thalès.*
- ***Pour démontrer que deux droites sont parallèles***, *on peut utiliser la réciproque de la propriété de Thalès.*
- ***Pour démontrer que deux droites sont sécantes***, *on peut utiliser la remarque suivante : «ABC est un triangle. M est un point de la droite (AB) et N un point de la droite (AC).*

Si $\frac{AM}{AB} \neq \frac{AN}{AC}$ alors les droites (MN) et (BC) sont sécantes ».

- ***Pour partager un segment [AB] en n segments de même longueur***, *on peut procéder comme suit :*

On trace une demi-droite d'origine A ;

On marque sur la demi-droite n points $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ tels que l'écart entre deux points consécutifs de la demi-droite soit identique ;

On trace les droites parallèles à la droite (A_nB) et passant respectivement par ces points marqués.

Ces droites déterminent sur le segment [AB], n segments de même longueur.

Exemple : Partageons un segment [AB] en 3 segments de même longueur.

IV- SAVOIR-FAIRE

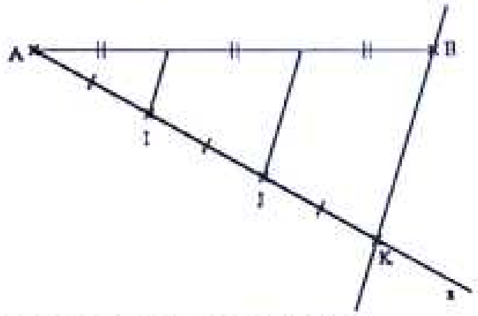
Savoir-faire 1- Partager un segment en des segments de même longueur

Enoncé

Partage le segment $[AB]$ de longueur 7 cm en trois segments de même longueur.

Solution commentée

Je partage le segment $[AB]$ en trois segments de même longueur



Programme de construction

- Je trace une demi-droite $[Ax)$ de support sécant à la droite (AB) ;
- Je place sur $[Ax)$ les points I, J et K tels que AI = IJ = JK = 1 cm ;
- Je trace les parallèles à la droite (BK) passant par chacun des points I et J.

Ces parallèles partagent le segment $[AB]$ en trois segments de même longueur.

Savoir-faire 2- Calculer des distances

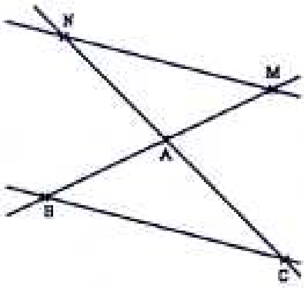
Enoncé

Dans la figure ci-contre, les droites (BM) et (CN) sont sécantes en A et les droites (BC) et (MN) sont parallèles.

On donne :

AB= 7,5 cm ; AM = 3 cm ; MN = 7 cm et AC = 13 cm

Calcule les longueurs AN et BC.



Solution commentée

Je calcule longueurs AN et BC

ABC est un triangle.

- M est un point de la droite (AB)
- N un point de la droite (AC)
- les droites (MN) et (BC) sont parallèles

D' après la conséquence de la propriété de Thalès dans un triangle, on a : $\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC}$

On obtient les deux égalités suivantes : $\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}$ et $\frac{AM}{AB}=\frac{MN}{BC}$

On a : $AN=\frac{AM\times AC}{AB}$ et $BC=\frac{AB\times MN}{AM}$.

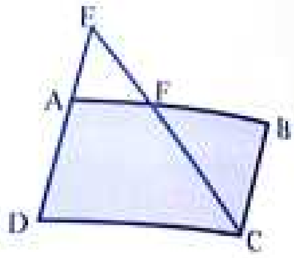
$AN=\frac{3\times 13}{7,5}=5,2$ et $BC=\frac{7,5\times 7}{3}=17,5$

Donc : AN = 5,2 cm et BC= 17, 5 cm

Savoir-Faire 3 Appliquer la propriété de Thalès pour calculer une distance

Enoncé

Sur la figure ci-contre qui n'est pas en grandeurs réelles,
ABCD est un parallélogramme tel que AB = 8 cm ; AD = 5 cm.
Sur la demi-droite [DA), on place le point E tel que DE = 7 cm.
La droite (EC) coupe le segment [AB] en F.
Calcule AF.



Solution commentée

D'après les hypothèses on a :

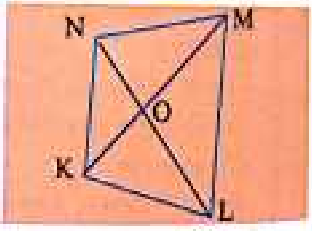
- Les droites (AD) et (FC) sont sécantes en E ;
- ABCD est un parallélogramme et F un point de (AB), (AF)//(DC).

D'après la propriété de Thalès, $\frac{AF}{DC} = \frac{EA}{ED}$. Or : A étant un point du segment [ED],
donc : EA = ED - AD = 7 – 5 = 2. D'où : $\frac{AF}{8} = \frac{2}{7}$; $AF = \frac{8\times2}{7} = \frac{16}{7}$

Savoir-Faire 4 Appliquer réciproque de la propriété de Thalès pour justifier la nature d'une figure

Enoncé

Les diagonales [KM] et [NL] d'un quadrilatère KLMN se coupent en O.
OK = 3 cm ; OL = 10,5 cm ; OM = 7 cm ; ON = 4,5 cm.
Démontre que le quadrilatère KLMN est un trapèze.



Solution commentée

Pour démontrer que le quadrilatère KLMN est un trapèze, je dois démontrer que les droites (KN) et (LM) sont parallèles.

D'après les hypothèses :

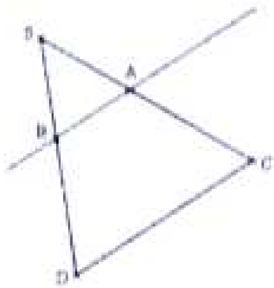
- Les points K,O, M, sur la droite (KM) sont dans le même ordre que les points N, O, L de la droite (LN)
- Et on a : $\frac{ON}{OL} = \frac{4,5}{10,5} = \frac{9}{21} = \frac{3}{7} = \frac{OK}{OM}$

D'après la réciproque de la propriété de Thalès, les droites (KN) et (LM) sont parallèles. Le quadrilatère KLMN est donc un trapèze de bases [KN] et [LM].

Savoir-faire 5- Démontrer le parallélisme de droites

Enoncé

On considère la figure ci-contre :
On donne :
SA = 8 cm ; AC = 10 cm.
SB = 6 cm ; SD = 13,5 cm.
Démontre que les droites (AB) et (DC) sont parallèles



Solution commentée

Je démontre que les droites (AB) et (DC) sont parallèles

On compare $\frac{SA}{SC}$ et $\frac{SB}{SD}$

On a : $\frac{SA}{SC} = \frac{8}{8+10} = \frac{4}{9}$ et $\frac{SB}{SD} = \frac{6}{13{,}5} = \frac{4}{9}$, donc : $\frac{SA}{SC} = \frac{SB}{SD}$.

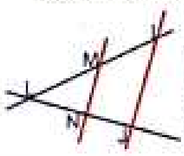
Dans le triangle SDC, B est un point du segment $[SD]$ et A un point du segment $[SC]$ tels que $\frac{SA}{SC} = \frac{SB}{SD}$. D'après la réciproque de la propriété de Thalès dans un triangle, les droites (AB) et (DC) sont parallèles.

V- JE M'EXERCE

1- Exercices de fixation/ Application

Connaître la propriété de Thalès, démontrer une égalité de distance

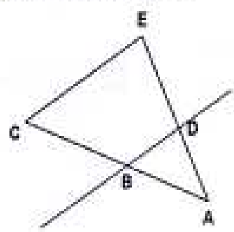
1 La figure ci-dessous représente deux droites sécantes coupées par deux droites parallèles.



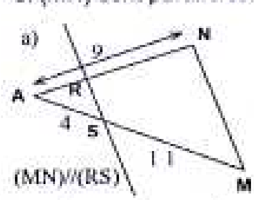
Recopie et complète le texte suivant :
« les droites ….et…..sont sécantes en L ; les droites …et … sont parallèles, d'après ….., on a :
$\frac{LM}{......} = \frac{......}{LJ} = \frac{......}{.....}$

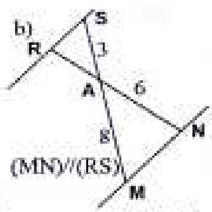
2 Sur la figure ci-contre :
- les droites (CE) et (BD) sont parallèles ;
- les droites (CB) et (ED) sont sécantes en A.

Justifie que : $\frac{AD}{AE} = \frac{AB}{AC}$



3 Une unité de longueur étant choisie, on donne les figures ci-dessous dans lesquelles les droites (RS) et (MN) sont parallèles.





Dans chaque cas, énonce la propriété de Thalès puis calcule AR.

Connaître la propriété reciproque de la propriété de Thalès - Démontrer le parallelisme de droites

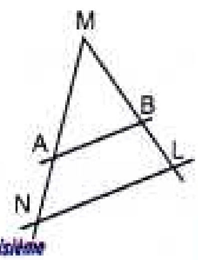
4 Les points M, A, N d'une part, M, B, L d'autre part sont alignés comme l'indique la figure ci-dessous.

MA = 4 cm

MB = 5 cm

MN = 12 cm

ML = 15 cm



On veut prouver que (NL) et (AB) sont parallèles. Recopie et complète la démonstration suivante :

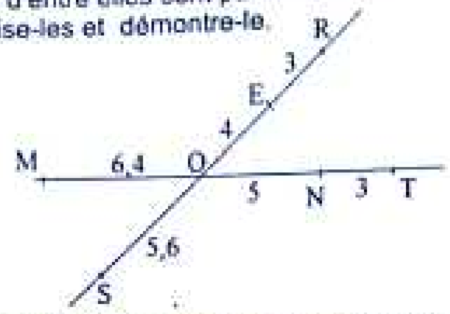
« Les points M, ... sur la droite (MN) sont dans le même ordre que M, ... sur la droite (ML).

Et on a : $\frac{MA}{MN} = \frac{4}{12} = \frac{\cdots}{\cdots}$; $\frac{MB}{ML} = \frac{5}{15} = \frac{\cdots}{\cdots}$

donc : $\frac{MA}{MN} = \frac{MB}{ML}$.

D'après .... les droites .... et .... sont parallèles. »

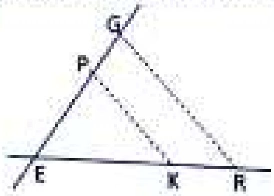
5 Une unité de longueur étant choisie, on considère la figure codée ci-dessous. Parmi les droites (MS), (EN) et (RT), deux d'entre elles sont parallèles. Précise-les et démontre-le.



6 Sur la figure ci-contre, les droites (PG) et (KR) sont sécantes en E telles que 3EG = 2EP et

$$ER = \frac{3}{2}EK$$

Démontre que les droites (PK) et (GR) sont parallèles.



7 L'unité de longueur est le centimètre. On considère deux segments [AE] et [KL] qui se coupent en J tels que : AJ = 2,3 ; JE = 5 ; KJ = 2,7 et JL = 6. Démontre que les droites (AK) et (LE) sont sécantes.

Connaître la conséquence de la propriété de Thalès

8 Réponds par vrai (V) ou par faux (F) à chacune des affirmations suivantes :

1- Dans un triangle ABC, si R est un point de (AB) et S un point de (BC), alors on a toujours $\frac{BR}{BA} = \frac{BS}{BC} = \frac{RS}{AC}$.

2- Dans un triangle IJK, si L est le milieu du segment [IJ] et si une droite parallèle à la droite (JK) passant par L coupe le côté [IK] en M, alors $\frac{IL}{IJ} = \frac{IM}{IK} = \frac{LM}{JK} = \frac{1}{2}$.

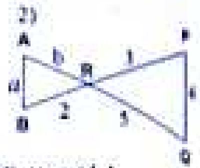
9 Sur la figure ci-dessous :

les droites (BF) et (CE) sont parallèles ;

- les droites (FE), (GD) et (BC) sont concourantes en A ;
- le point G appartient au segment [FB].

Ecris cinq quotients égaux à $\frac{GF}{DE}$.

10 Dans chacun des cas de figures ci-dessous les droites (AB) et (PQ) sont parallèles.



Calcule les valeurs de x, y, a et b.

Partager un segment en des segments de même longueur

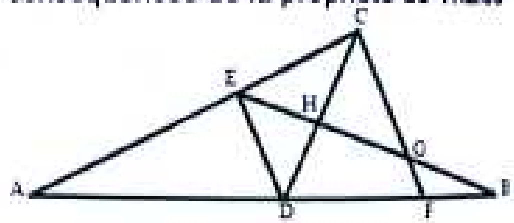
11 Trace un segment [EF] de longueur 8 cm. Partage-le en sept segments de même longueur.

12 Trace un segment [AB] de longueur 7 cm. Construis les points I, J, K et L tels que :

$$AI = \frac{5}{6}AB ; AJ = \frac{2}{3}AB ; BK = \frac{7}{6}AB ; BL = 0,5AB$$

Utiliser la propriété de Thalès pour calculer des longueurs

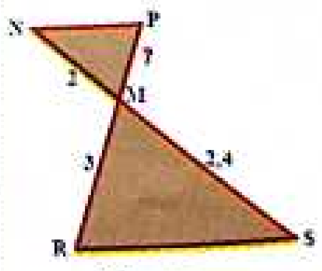
13 Ecris, avec les lettres du dessin, le plus de rapports égaux possibles qui sont des conséquences de la propriété de Thalès.



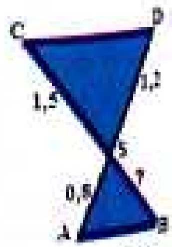
(ED) // (CF)

14 Dans les deux cas suivants, calcule la longueur demandée en utilisant les informations portées sur la figure. Les mesures sont exprimées dans la même unité.

a) MP b) BS

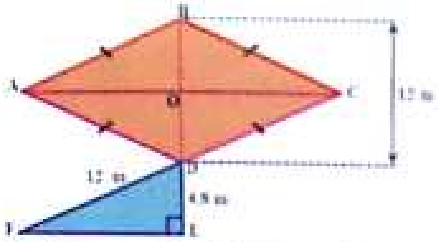


(RS) // (NP)



(AB) // (CD)

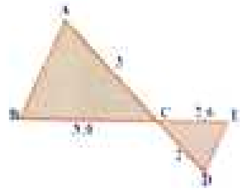
15 En utilisant les informations portées sur la figure, calcule la longueur d'un côté du quadrilatère ABCD et la longueur AC.



Utiliser la propriété réciproque de la propriété de Thalès

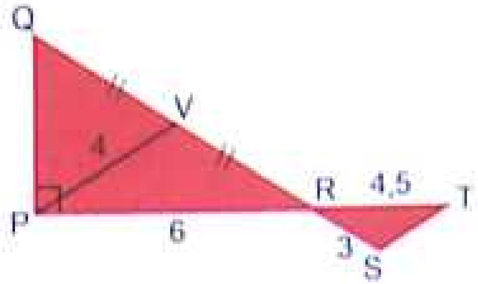
16 En utilisant les informations portées sur la figure, démontre dans chacun des cas, que (AB) et (DE) sont parallèles. Les mesures sont exprimées dans la même unité.

a)



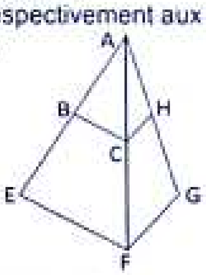
b)

17 En utilisant les informations portées sur la figure, démontre que les droites (PV) et (ST) sont parallèles. Les mesures sont exprimées dans la même unité.



2- Exercices de Renforcement / approfondissement

18 Sur la figure ci-dessous :
- AEF et AFG sont deux triangles ;
- B, C et H appartiennent respectivement aux segments [AE], [AF] et [AG] ;
- (BC)//(EF) et (CH)//(FG).

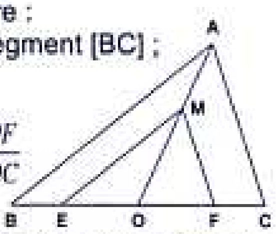


1) Démontre que : $\frac{AG}{AH} = \frac{AE}{AB}$

2) Déduis-en que les droites (BH) et (EG) sont parallèles.

19 Sur la figure ci-contre :
- O est le milieu du segment [BC] ;
- (AB)//(ME)
- (AC)//(MF) .

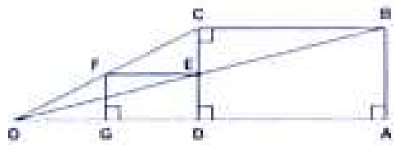
1) Démontre que : $\frac{OE}{OB} = \frac{OF}{OC}$



2- Déduis-en que le point O est le milieu du segment [EF].

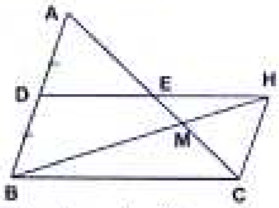
20 Sur la figure ci-dessous :
ABCD et DEFG sont deux rectangles tels que :
- $E \in [CD]$; et $G \in [OD]$.
- les droites (CF), (BE) et (AD) se coupent en O.

Démontre que $OD^2 = OG \times OA$.

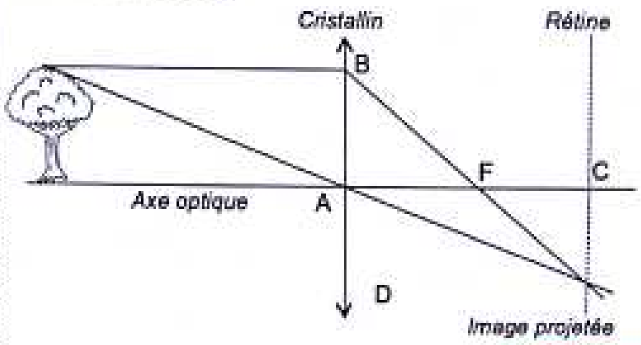


21 Sur la figure ci-dessous :
- le quadrilatère BCHD est un parallélogramme ;
- le point A est le symétrique du point B par rapport à D ;
- la droite (AC) coupe les droites (DH) et (BH) respectivement en E et M.

Démontre que: MC = 2ME



22 Le cristallin de l'œil joue le rôle d'une lentille convergente de foyer F et de distance focale AF. Lors de l'observation d'un objet, une image projetée se forme sur la rétine de l'œil, mais est renversée. Des élèves souhaitent connaître la taille de l'image d'un arbre sur la rétine. Pour cela, ils ont réalisé le schéma ci-dessous.



Sur ce schéma :
- les droites (SH), (AB) et (CD) sont parallèles ;
- les droites (SB) et (HC) sont horizontales ;
- les points H, A, F et C sont alignés ;
- les points F, D et B sont alignés ;
- AF = 0,014 m ; SH = 1,5 m ; AH = 2 m ; AS = 2,5 m

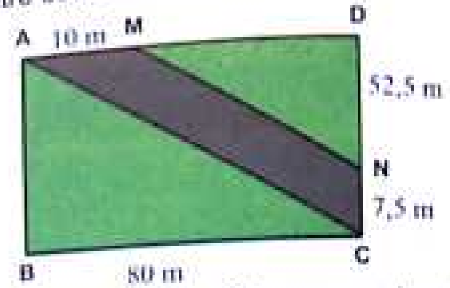
1) Justifie que DS = DA + 2,5 .
2) Justifie que : DA = 0,018 m (valeur arrondie au millième près).
3) Calcule au millième près, la taille CD de l'image sur la rétine.

3- Situations d'évaluation

23 Des élèves de 3ème décident de participer à un cross organisé par les professeurs d'EPS de leur collège.
A une semaine de cette compétition, ils souhaitent connaître la longueur du trajet à parcourir, situé entre le collège (C) et le dispensaire (D).
Pour cela les organisateurs leur donnent l'extrait ci-dessous sur lequel les droites (AC) et (EF) sont parallèles.

1- Précise les conditions pour pouvoir calculer la longueur du trajet.
2- Calcule cette longueur.

24 Un collège dispose d'un jardin rectangulaire. Pour créer une déviation, il faut traverser ce jardin par une piste de largeur uniforme comme l'indique la figure ci-dessous sur laquelle les droites (MN) et (AC) sont parallèles.
Pour clôturer la partie délimitée par le triangle DMN, il lui faut exactement 210 m de fil de fer dont le mètre coûte 875 FCFA.



Il veut réaliser deux clôtures avec la même quantité de fil de fer, une de chaque côté de la piste.
Pour cela, il sollicite un groupe d'élèves dont tu fais partie en vue de déterminer la somme totale qu'il faut pour réaliser ces clôtures.

1- Construis la figure à l'échelle $\frac{1}{1000}$.
2- Justifie que MN = 87,5.
3- Calcule AC.
4- Détermine le montant total nécessaire pour réaliser ces clôtures.

VI- RENDEZ-VOUS DES CURIEUX !

Thalès de Milet est l'un des sept sages de la Grèce antique. Né en Asie de Mineure au VIe siècle avant Jésus Christ, il aurait d'abord été marchand. Il se serait enrichit en spéculant sur le marché des olives et en monopolisant les moulins à huile de la région. Riche, il aurait alors pu s'adonner à la philosophie et aux mathématiques. Il avait appris l'astronomie en Egypte et il se rendit célèbre en prédisant l'éclipse du soleil de l'an - 585.
On lui attribue les quatre résultats suivants :
« Deux angles opposés par le sommet ont la même longueur. »
« Les angles à la base d'un triangle isocèle ont la même mesure. »
« Le diamètre d'un cercle coupe ce cercle en deux parties de même aire. »
« Si un triangle est inscrit dans un cercle tel que l'un de ses cotés soit le diamètre de ce cercle, alors ce triangle est rectangle. »
Ce n'est qu'à la fin du XIXè siècle que certaines propriétés prirent le nom de Thalès.


Thalès, 625-546 av JC

3 Racines Carrées

Notions essentielles :

- Racine carrée d'un nombre positif,
- Ensemble des nombres réels,
- Valeur absolue,
- Racine carrée du carré d'un nombre.

SITUATION D'APPRENTISSAGE

Pendant la récréation, des élèves d'un Lycée dans leurs causeries, discutent des problèmes scolaires. L'un d'entre eux, Emmanuel, en classe de 3ème, pose le problème suivant : « déterminer un nombre qui, augmenté de 1, est égal à son carré ».
Tous ses camarades de classe, intéressés par cette petite "colle", sollicitent l'aide de leur professeur de Mathématiques qui décide de leur enseigner les racines carrées afin d'identifier ses propriétés pour effectuer des calculs.

I- ACTIVITES DE DECOUVERTE

1- Identifier une racine carrée d'un nombre positif – Noter une racine carrée

Activité 1

1) Détermine si possible :
   a) Un nombre positif dont le carré est égal à 9.
   b) Un nombre positif dont le carré est égale à 0.
   c) Un nombre positif dont le carré est égale à - 4
2) Dis s'il existe un nombre positif dont le carré est égal à 2 en utilisant un carré de longueur de côté égal à 1.

Je fais le point de l'activité

- Les nombre positifs 9 ; 64 et 0 sont respectivement les carrés des nombres positifs 3 ; 8 ; et 0.
- Il existe un nombre positif dont le carré est égal à 2 : c'est la longueur du côté d'un carré d'aire 2 cm².
- Lorsque a est un nombre **positif**, il existe un nombre positif dont le carré est égal à a ; il se note $\sqrt{a}$ et se lit : racine carrée de a.

J'évalue mes acquis

1) Recopie et complète par les expressions « le carré » ou « la racine carrée ».
   - 25 est .... de 5.
   - 1,2 est .... de 1,44.
2) Recopie et complète.
   - $\sqrt{9}$ est le nombre positif dont le .... est égal à ....
   - .... est le nombre positif dont le carré est égal à 12.

2- Identifier des nombres réels – Noter l'ensemble des nombres réels

Activité 2

Afin d'approfondir la connaissance des nombres, des élèves doivent répondre à des questions en rapport avec les nombres suivants :

-1 ; $\sqrt{2}$; Π ; $\sqrt{18}$; $\sqrt{3}$; $\frac{2}{3}$

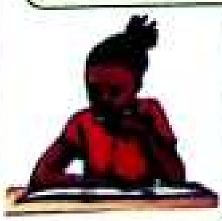
Nombres entiers naturels	
Nombres entiers relatifs	
Nombres décimaux relatifs	
Nombres rationnels	

1) Recopie les nombres qui n'ont pu être inscrits dans le tableau.
2) Affiche sur une calculatrice chacun des nombres $\sqrt{2}$ et π .

Je fais le point de l'activité

- Le nombre $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre décimal.
- Le nombre $\sqrt{2}$ n'est pas non plus un nombre rationnel. On démontre et nous l'admettons qu'il n'existe pas de fraction égale à $\sqrt{2}$. On dit que $\sqrt{2}$ est un ***nombre irrationnel.***
- Il en est de même du nombre π. Selon la puissance de la calculatrice ou de l'ordinateur, des valeurs décimales de plus en plus proches de ces nombres sont obtenues.
- Un nombre qui n'est pas un ***nombre rationnel*** est appelé nombre irrationnel.
- L'ensemble formé des ***nombres rationnels*** et des nombres irrationnes est appelé ***ensemble des nombres réels***, et noté $\mathbb{R}$.

J'évalue mes acquis



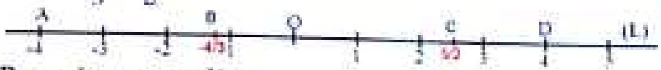
Recopie et complète par le symbole $\in$ ou $\notin$

$0 \ldots \mathbb{N}$	$-2 \ldots \mathbb{Z}$	$-3{,}14 \ldots \mathbb{Q}$	$\frac{10}{3} \ldots \mathbb{D}$	$\sqrt{2} \ldots \mathbb{R}$
$\frac{10}{3} \ldots \mathbb{Q}$	$\pi \ldots \mathbb{Q}$	$\pi \ldots \mathbb{R}$	$\frac{10}{3} \ldots \mathbb{R}$	$\sqrt{4} \ldots \mathbb{Q}$

3- Identifier la valeur absolue d'un nombre réel – Noter une valeur absolue

Activité 3

Sur la droite graduée (L) ci-dessous de repère (O ;I), on donne les points A, B, C et D d'abscisses respectives -4 ; $-\frac{4}{3}$; $\frac{5}{2}$ et 4.



Recopie et complète.

Point	A	B	C	D
Abscisse	-4	$-\frac{4}{3}$	$\frac{5}{2}$	4
Distance à zéro du nombre	OA = …	OB = …	OC = …	OD = …

Je fais le point de l'activité

- La distance à zéro du nombre réel - 4 est appelé la **valeur absolue** de ce nombre et est notée $|-4|$.
- La notation de $|a|$ se lit « **Valeur absolue de** a ».
- $|-4|=4$; $\left|\frac{5}{2}\right|=\frac{5}{2}$.

J'évalue mes acquis

Recopie et complète

$\lvert -24\rvert =$ …	$\lvert 80\rvert =$ …	$\lvert -\pi\rvert =$ …	$\lvert\sqrt{3}\rvert =$ …	$\lvert 0\rvert =$ …
$\lvert 10^{-3}\rvert =$ …	$\lvert -\frac{7}{3}\rvert =$ …	$\lvert 1+\sqrt{2}\rvert =$ …	$\lvert -1-\sqrt{2}\rvert =$ …	$\lvert \pi-5\rvert =$ …

4- Connaître la propriété relative à la racine carrée du carré d'un nombre

Activité 4

1- Recopie et complète le tableau ci-dessous:

a	-12	-4	0	3	0,25
a^2					
$\sqrt{a^2}$					
$\lvert a\rvert$					

2- Compare les résultats obtenus dans chaque colonne des deux dernières lignes du tableau précédent.

Je fais le point de l'activité

On obtient : $\sqrt{a^2}=|a|$

J'évalue mes acquis

Trouve l'écriture simplifiée de chacun des nombres suivants:

$\sqrt{(-9)^2}$; $\sqrt{(-23)^2}$

$\sqrt{(2+\pi)^2}$; $\sqrt{(1-\pi)^2}$

5- Connaître les propriétés relatives aux racines carrées

5-1 Additionner, multiplier et diviser deux racines carrées

Activité 5

1) Complète les tableaux ci-dessous. On utilisera au besoin la calculatrice.

Tableau 1 : Au départ

a	b	$\sqrt{a}$	$\sqrt{b}$
16	9		
144	25		
441	400		

Tableau 2 : Somme

$a+b$	$\sqrt{a+b}$	$\sqrt{a}+\sqrt{b}$

Tableau 3 : Produit

$a\times b$	$\sqrt{a\times b}$	$\sqrt{a}\times\sqrt{b}$

Tableau 4 : Quotien

$\frac{a}{b}$	$\sqrt{\frac{a}{b}}$	$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

Je fais le point de l'activité

D'après les tableaux de l'activité 5, on constate que *a et b* étant deux nombres réels positifs : $\sqrt{a\times b}=\sqrt{a}\times\sqrt{b}$; $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$ *(avec b≠0).*

En général, on a : $\sqrt{a}+\sqrt{b}\neq\sqrt{a+b}$.

J'évalue mes acquis

1) Recopie et remplace les pointillés par « = » ou « ≠ »

$\sqrt{2}+\sqrt{3} \ldots \sqrt{5}$	$\sqrt{2,5}\times\sqrt{4} \ldots \sqrt{10}$	$\frac{\sqrt{28}}{\sqrt{4}} \ldots \sqrt{7}$
$\sqrt{25-2} \ldots 5-\sqrt{2}$	$\sqrt{9\times5} \ldots 3\times\sqrt{5}$	$\sqrt{\frac{3}{16}} \ldots \frac{\sqrt{3}}{4}$

2) Simplifie les écritures suivantes : $\sqrt{2}\times\sqrt{2}$; $\sqrt{4}\times\sqrt{12,25}$; $\sqrt{10^{-3}}\times\sqrt{10^{3}}$

3) Ecris plus simplement les nombres ci-dessous, c'est-à-dire mets les sous la forme $a\sqrt{b}$ où a et b sont deux nombres entiers et b est le plus petit possible.

$\sqrt{16\times5}$; $\sqrt{7\times21}$; $\sqrt{18}$; $\sqrt{50}$; $\sqrt{600}$.

4) Réduis chacune des expressions suivantes :

$\sqrt{2}+\sqrt{2}$; $-\sqrt{6}+4\sqrt{6}$; $5\sqrt{2}-8\sqrt{2}$; $6\sqrt{7}-10\sqrt{7}+9\sqrt{7}$.

5-2 Connaitre la propriété relative à la racine carrée d'une puissance d'un nombre positif

Activité 6

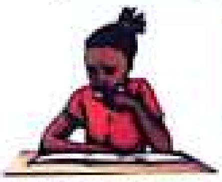
On se propose de transformer les expressions suivantes : $\sqrt{3^{24}}$; $\sqrt{10^{15}}$

a) Recopie et complète les raisonnements suivants :

$\sqrt{a^{2n}}=\sqrt{(\ldots)^2}$ donc $\sqrt{a^{2n}}=a^{\ldots}$	$\sqrt{a^{2n+1}}=\sqrt{a^{2n}\times\ldots}$ $=\sqrt{a^{2n}}\times\ldots$ donc $\sqrt{a^{2n+1}}=a^{\ldots}\times\ldots$

b) Déduis des résultats précédents, de nouvelles expression de $\sqrt{3^{24}}$ et $\sqrt{10^{15}}$

J'évalue mes acquis



Ecris plus simplement :

$\sqrt{5^4}$; $\sqrt{11^3}$; $\sqrt{2^6}$

$\sqrt{10^{2020}}$; $\sqrt{2^{13}\times3^{6}}$.

Je fais le point de l'activité

a étant un nombre réel positif et n un nombre entier naturel, les expressions de la forme $\sqrt{a^{2n}}$ ou $\sqrt{a^{2n+1}}$ peuvent s'écrire de la façon suivante :

$\sqrt{a^{2n}}=a^n$ et $\sqrt{a^{2n+1}}=a^n\times\sqrt{a}$

6- Ecrire un quotient sans radical au dénominateur

Activité 7

a et b sont deux nombres réels positifs non nuls.

1) Recopie et complète les égalités ci-dessous pour obtenir un quotient sans radical au dénominateur qui soit égal à $\frac{1}{\sqrt{a}}$; $\frac{1}{\sqrt{a}}=\frac{1\times\ldots}{\sqrt{a}\times\ldots}=\frac{\ldots}{\ldots}$.

2) a) Développe et réduis les produits $(\sqrt{a}+\sqrt{b})(-\sqrt{a}-\sqrt{b})$ et $(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})$.

b) Indique le produit dont le résultat ne comporte pas de radical.

c) On souhaite trouver un quotient sans radical au dénominateur qui soit égal à $\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$

Pour cela, recopie et complète : $\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{1\times\ldots\ldots}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})\times\ldots\ldots}=\frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots}$.

Je fais le point de l'activité

Le produit des expressions $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ et $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ s'écrit sans radical on dit que : $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ et $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ sont deux **expressions conjuguées** l'une de l'autre.

J'évalue mes acquis

1) Ecris les nombres suivants sans radical au dénominateur : $\frac{-4}{\sqrt{8}}$; $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

2) Ecris les nombres suivants sans radical au dénominateur : $\frac{4}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$; $\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-3}$.

II- RESUME DE COURS

1- Racine carré d'un nombre positif

a. Définition

Lorsque a est un nombre positif, la racine carrée de a est le nombre positif dont le carré est égal à a c'est-à-dire si $a \geq 0$ alors $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$

Exemple

$(\sqrt{5})^2 = 5$; $\left(\sqrt{11}\right)^2 = 11$

$\sqrt{9} = 3$ car $3^2 = 9$; $\sqrt{64} = 8$ car $8^2 = 64$

$\sqrt{1} = 1$ car $1^2 = 1$; $\sqrt{0} = 0$ car $0^2 = 0$.

REMARQUES

L'écriture $\sqrt{a}$ n'a de sens que lorsque a est un nombre positif.

Pour tout nombre a positif, $\sqrt{a} \geq 0$

Notation

Lorsque a est un nombre positif, on note $\sqrt{a}$, la racine carrée de a.

$\sqrt{a}$ se lit «racine carrée de a».

Le symbole $\sqrt{\ }$ est appelé «radical»

2- Ensemble des nombres réels

a. Définition

L'ensemble des nombres rationnels et des nombres irrationnels est appelé l'ensemble des nombres réels et est noté $\mathbb{R}$

REMARQUES

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

Exemple

- -5; 0; $78,6$ et $\frac{3}{4}$ sont des nombres rationnels
- $\sqrt{2}$ et π sont des nombres irrationnels car chacun d'eux ne peut s'écrire sous la forme $\frac{a}{b}(a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}^*)$
- -5; 0; $78,6$ et $\frac{3}{4}$; $\sqrt{2}$ et π sont des nombres réels

3- Valeur absolue

a. Définition

La valeur absolue d'un nombre réel est la distance à zéro de ce nombre.

On note $|a|$ et on lit: «valeur absolue de a».

Exemple

$|-2| = 2$; $|0| = 0$; $|17| = 17$

REMARQUES

- $|a| = a$, si a est un nombre positif;

  $|a| = -a$, si a est un nombre négatif;
- La valeur absolue d'un nombre réel est « toujours » positive.

  Pour tout nombre réel a, on a: $\sqrt{a^2} = |a|$.

Exemple

$\sqrt{3^2} = |3| = 3$ $\sqrt{(-5)^2} = |-5| = 5$

$2 - \pi$ est un nombre négatif donc :

$\sqrt{(2-\pi)^2} = |2-\pi| = -2 + \pi$.

$\sqrt{2} - 1$ est un nombre positif donc :

$\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2} = \left|\sqrt{2}-1\right| = \sqrt{2}-1$.

4 - Opérations sur les racines carrées : Produit – Somme - Quotient.

Propriété

Soit a et b deux nombres réels positifs.

On a : $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$; $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$ (avec $b \neq 0$)

Exemple

- $\sqrt{8} \times \sqrt{2} = \sqrt{8 \times 2} = \sqrt{16} = 4$
- $\sqrt{9 \times 7} = \sqrt{9} \times \sqrt{7} = 3 \times \sqrt{7} = 3\sqrt{7}$
- $\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}} = \frac{2}{3}$; $\frac{\sqrt{75}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{75}{3}} = \sqrt{25} = 5$.

a et b étant deux nombres réels positifs, on a en général pour tous nombres réels a et b positifs.

$\sqrt{a} + \sqrt{b} \neq \sqrt{a+b}$ et $\sqrt{a} - \sqrt{b} \# \sqrt{a-b}$.

Propriété

a est un nombre réel positif et n un nombre entier naturel.

$\sqrt{a^{2n}} = a^n$; $\sqrt{a^{2n+1}} = a^n\sqrt{a}$.

Exemple

$\sqrt{5^6} = \sqrt{5^{2\times3}} = 5^3$ $\sqrt{7^9} = \sqrt{7^{2\times4+1}} = 7^4\sqrt{7}$

5 - Calcul avec les racines carrées

Vocabulaire

a et b sont deux nombres rationnels positifs.
On a : $(\sqrt{a}+\sqrt{b})\times(\sqrt{a}-\sqrt{b}) = a-b$.
Le produit des expressions $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ et $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ s'écrit sans radical, le résultat est un nombre rationnel : $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ et $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ sont deux **expressions conjuguées** l'une de l'autre.

III- METHODE

Exemple

- Simplifier l'écriture d'une racine carrée

Mettre $\sqrt{12960}$ sous la forme $a\sqrt{b}$ où a et b sont deux nombres entiers et b est le plus petit possible.

On peut procéder comme suit :

- On décompose 12960 en un produit de facteurs premiers :

$12960 = 2^5 \times 3^4 \times 5$ donc $\sqrt{12960} = \sqrt{2^5 \times 3^4 \times 5}$

- On applique la règle de calcul d'un produit de deux racines carrées et celles de la racine carrée d'une puissance.

On a : $\sqrt{12960} = \sqrt{2^5} \times \sqrt{3^4} \times \sqrt{5}$

$= 2^2\sqrt{2} \times 3^2 \times \sqrt{5}$

$= 36 \times \sqrt{2 \times 5}$

Donc : $\sqrt{12960} = 36 \times \sqrt{10}$.

IV- SAVOIR-FAIRE

Savoir- faire 1- Ecrire un quotient sans radical au dénominateur

Ennoncé

Ecris chacun des quotients ci-dessous sans radical au dénominateur.

$\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{5}}$; $\dfrac{2\sqrt{3}-4}{3\sqrt{3}+5}$.

Solution commentée

J'écris chacun des quotients sans radical au dénominateur.

- $\dfrac{\sqrt{3}\times\sqrt{5}}{2\sqrt{5}\times\sqrt{5}} = \dfrac{3\sqrt{15}}{10}$;

- $\dfrac{(2\sqrt{3}-4)(3\sqrt{3}-5)}{(3\sqrt{3}+5)(3\sqrt{3}-5)} = \dfrac{6\times3-10\sqrt{3}-12\sqrt{3}+20}{(3\sqrt{3})^2-5^2}$

$\dfrac{38-22\sqrt{3}}{27-25} = \dfrac{2(19-11\sqrt{3})}{2}$, donc : $\dfrac{2\sqrt{3}-4}{3\sqrt{3}+5} = 19-11\sqrt{3}$.

Savoir- faire 2- Calculer des sommes, des différences, des produits, des quotients contenant des racines carrées

Ennoncé

On donne les nombres A, B, et C tels que : $A = 3\sqrt{27} - 4\sqrt{300} + \dfrac{\sqrt{150}}{\sqrt{2}}$; $B = 2\sqrt{3} + 3$; $C = 2\sqrt{3} - 3$

Calcule : A ; B^2 ; C^2 ; $B \times C$; $\dfrac{B}{C} + \dfrac{C}{B}$ et simplifie le résultat .

Solution commentée

Je calcule : $A = 3\sqrt{9\times 3} - 4\sqrt{100\times 3} + \sqrt{\dfrac{25\times 3\times 2}{2}}$

$$A = 3\times 3\sqrt{3} - 4\times 10\sqrt{3} + 5\sqrt{3}$$
$$A = 9\sqrt{3} - 40\sqrt{3} + 5\sqrt{3}$$
$$A = (9 - 40 + 5)\sqrt{3} = -26\sqrt{3}$$

Je sais que $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$$B^2 = \left(2\sqrt{3}\right)^2 + 2\times 2\sqrt{3}\times 3 + 3^2$$
$$B^2 = 12 + 12\sqrt{3} + 9 \text{ donc } B^2 = 21 + 12\sqrt{3}$$

•Je sais que $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$$C^2 = \left(2\sqrt{3}\right)^2 - 2\times 2\sqrt{3}\times 3 + 3^2$$
$$C^2 = 12 - 12\sqrt{3} + 9$$
$$C^2 = 21 - 12\sqrt{3}$$

•Je sais que $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

$$B\times C = \left(2\sqrt{3}\right)^2 - (3)^2$$
$$B\times C = 12 - 9$$
$$B\times C = 3$$
$$\frac{B}{C} + \frac{C}{B} = \frac{B^2 + C^2}{B\times C}$$
$$\frac{B}{C} + \frac{C}{B} = \frac{21 + 12\sqrt{3} + 21 - 12\sqrt{3}}{3}$$
$$\frac{B}{C} + \frac{C}{B} = \frac{42}{3}$$
$$\frac{B}{C} + \frac{C}{B} = 14.$$

V- JE M'EXERCE

1- Exercices de fixation/ Application

Identifier une racine carrée d'un nombre réel positif - Noter une racine carrée

1 Recopie et complète chacune des phrases suivantes :

a. $\sqrt{1600}$ = ...car .... est positif et $(.....)^2 = 1600$.

b. $\sqrt{5^2}$ = ...car .....est positif.

c. $\sqrt{0,64}$ = ...car ....est positif et $(....)^2$ = ...

d. $\sqrt{23^2}$ = ...car ....est positif.

2 Parmi les écritures suivantes, entoure celles qui sont incorrectes. Justifie ta réponse.

$a)\sqrt{32,4}$; $b)\sqrt{-16}$; $c)-\sqrt{16}$

$d)\sqrt{0}$; $e)\sqrt{(-4)^2}$; $f)\sqrt{2-7}$.

3 Recopie et complète chacune des égalités suivantes :

$\sqrt{81}$ = ... ; $\sqrt{124}$ = ... ; $\sqrt{...} = 11$;

$\sqrt{...} = 7$; $\sqrt{25^2}$ = ... ; $\sqrt{...} = 1$; $\sqrt{...} = 10^3$.

Identifier des nombres réels – Noter l'ensemble des nombres réels

4 Réponds par vrai ou par faux aux affirmations suivantes :

a) L'ensemble ℝ n'est constitué que de nombres irrationnels.

b) L'ensemble ℝ n'est constitué que de nombres rationnels.

c) L'ensemble ℝ est constitué de nombres rationnels et irrationnels.

5 Recopie et complète le tableau ci-dessous en réécrivant chaque nombre dans les cases de l'ensemble auquel il appartient.

	$\frac{1}{4}$	-8	5	$\frac{2}{3}$	$-0,9$	$\sqrt{7}$	$3,14$	π	$\frac{22}{7}$
ℕ	X								
ℤ	X								
𝔻	$\frac{1}{4}$								
ℚ	$\frac{1}{4}$								
ℝ	$\frac{1}{4}$								

Identifier la valeur absolue d'un nombre réel – Noter une valeur absolue

6 Donne la valeur absolue de chacun des nombres suivants : -3 ; 0 ; $\sqrt{2}$; $\frac{-3}{4}$; $1+\sqrt{2}$; $1-\pi$.

7 Réponds par vrai (V) ou par faux (F) à chacune des affirmations suivantes :

N°	Affirmations	Réponses
1	$\left(-\sqrt{7}\right)^2=7$	
2	$\sqrt{(-5)^2}=-5$	
3	$\sqrt{(3-\pi)^2}=3-\pi$	
4	$\sqrt{(2-x)^2}=\lvert x-2\rvert$	
5	$\left(\sqrt{2-x}\right)^2=\lvert x-2\rvert$	

8 a) Ecris les expressions suivantes sans radical

$A=\sqrt{(\pi-4)^2}$; $B=\sqrt{(5-\pi)^2}$

b) Justifie que : $\sqrt{(3+t^2)^2}=3+t^2$, $(t\in\mathbb{R})$.

Connaître les propriétés relatives aux racines carrées

9 Ecris chacun des nombres réels suivants sous la forme $a\sqrt{b}$ où a et b sont des entiers naturels et b le plus petit possible.

a) $\sqrt{8}$; $\sqrt{12}$; $\sqrt{32}$; b) $\sqrt{45}$; $\sqrt{50}$;

c) $\sqrt{300}$; $\sqrt{100}$; d) $\sqrt{7500}$; $\sqrt{162}$;

e) $\sqrt{500}$; $3\sqrt{24}$.

10 Ecris chacun des nombres plus simplement :

a) $\sqrt{2}\times\sqrt{8}$; b) $\sqrt{75}\times\sqrt{3}$; c) $\sqrt{0{,}009}\times\sqrt{0{,}4}$;

d) $\sqrt{2^2\times5^4}$; e) $\sqrt{18}$; f) $\sqrt{81\times121}$.

11 Ecris plus simplement

a. $\sqrt{35\times7^7}$; b. $\sqrt{11^{21}\times99}$; c. $\sqrt{2^3\times3\times6^5}$.

12 Ecris plus simplement

a. $\sqrt{\frac{0{,}16}{2{,}25}}$; b. $\sqrt{\frac{625}{0{,}09}}$; c. $\sqrt{\frac{0{,}0064}{0{,}81}}$.

13 Ecris plus simplement

a. $\frac{\sqrt{45}}{\sqrt{5}}$; b. $\frac{\sqrt{125}}{\sqrt{80}}$; c. $\frac{\sqrt{44}}{\sqrt{99}}$.

Calculer des sommes, des différences, des produits, des quotients contenant des racines carrées

14 Calcule les expressions suivantes, puis donne chaque résultat sous la forme $a\sqrt{b}$, où a est un nombre entier relatif et b un nombre entier naturel le plus petit possible :

1) $5\sqrt{3}-11\sqrt{3}+4\sqrt{3}$;

2) $9\sqrt{11}-\sqrt{11}-5\sqrt{11}$;

3) $-4\sqrt{7}-8\sqrt{7}+\sqrt{7}$.

15 Calcule les nombres suivants, puis donne chaque résultat sous la forme $a\sqrt{b}$, où a est un nombre entier relatif et b un nombre entier naturel le plus petit possible.

a) $8\sqrt{7}-2\sqrt{28}+\sqrt{112}$

b) $\sqrt{75}+2\sqrt{12}-4\sqrt{48}$

c) $-3\sqrt{125}+4\sqrt{180}-7\sqrt{45}$

d) $2\sqrt{24}-3\sqrt{96}+9\sqrt{294}$

16 Calcule le démi périmètre du rectangle ci-dessous, puis donne chaque résultat sous la forme $a\sqrt{b}$, où a est un nombre entier relatif et b un nombre entier le plus petit possible.

17 Calcule les nombres suivants, puis donne chaque résultat sous la forme a+b√c, où a et b sont des nombres entiers relatifs , et c un entier positif le plus petit possible :

1) $2\sqrt{500}-3\sqrt{245}-\sqrt{20}+2\sqrt{25}$

2) $-4\sqrt{81}+5\sqrt{63}-5\sqrt{343}$

3) $3\sqrt{(-64)^2}+5\sqrt{4000}-3\sqrt{640}-\sqrt{90}$

18 Calcule, puis donne chaque résultat sous la forme a+b√c, où a et b sont des nombres entiers relatifs, et c un entier positif :

$E=(\sqrt{2}-3)(5-7\sqrt{2})$;

$F=(4+2\sqrt{3})(\sqrt{3}+8)$; $G=\left(\sqrt{6}+4\sqrt{5}\right)^2$;

$H=(2\sqrt{7}-\sqrt{3})^2$; $I=(3\sqrt{7}+7\sqrt{3})(3\sqrt{7}-7\sqrt{3})$

19 Ecris les nombres E et B sous la forme $a+b\sqrt{c}$, où a et b sont des rationnels et c un entier, tels que :

$E=\left(2-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}+\frac{1}{2}\right)$; $B=\frac{5\sqrt{2}}{2}(\sqrt{2}-1)^2$

Ecrire un quotient sans radical au dénominateur

20 Ecris plus simplement les nombres suivants:

a) $\frac{4}{3-\sqrt{5}}$; b) $\frac{-1}{\sqrt{3}+1}$ c) $\frac{2\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$

d) $\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{11}}$.

21 On pose : $X = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$ et $Y = \dfrac{6\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$.

Ecris X et Y sous la forme $a + b\sqrt{6}$, où a et b sont des nombres entiers relatifs.

22 Ecris les quotients suivants sans radical au dénominateur.

a. $\dfrac{5}{\sqrt{3}}$ b. $\dfrac{-3}{\sqrt{7}}$ c. $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$ d. $\dfrac{-13}{5\sqrt{6}}$ e. $\dfrac{9\sqrt{5}}{5\sqrt{3}}$.

23 Ecris les nombres suivants sans radical au dénominateur

$A = \dfrac{5\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$; $B = \dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$; $C = \dfrac{3-\sqrt{8}}{\sqrt{2}-\sqrt{8}}$;

$D = \dfrac{5\sqrt{3}}{2\sqrt{3}-1}$; $E = \dfrac{2}{\sqrt{2}} - \dfrac{3-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}$.

2- Exercices de renforcement/approfondissement

24 Démontre que $2+\sqrt{3}$ et $2-\sqrt{3}$ sont inverses l'un de l'autre.

25 Ecris chacun des nombres suivants sous la forme de la racine carrée d'un entier naturel.

a) $2\sqrt{3}$; $5\sqrt{11}$; $3\sqrt{7}$.

b) $3\sqrt{12}$; $3\sqrt{5}$; $2\sqrt{11}$.

26 On donne l'expression littérale A telle que :

$A = x^2 - (3 - 2\sqrt{2})$

1) Justifie que : $(1-\sqrt{2})^2 = 3 - 2\sqrt{2}$.

2) Factorise A .

27 Un triangle équilatéral dont le côté mesure 8 cm et de hauteur $4\sqrt{3}$ cm a la même aire qu'un carré. Détermine la mesure d'un côté du carré.

28 A, B et C sont trois points du plan tels que :

$AB = \sqrt{50}$ cm, $AC = \sqrt{512}$ cm et $BC = \sqrt{882}$ cm

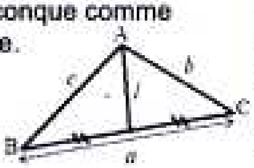
Démontre que A, B et C sont alignés.

29 Effectue, dans chacun des cas, les calculs suivants :

a) $\dfrac{1}{\sqrt{3}+1} + \dfrac{1}{\sqrt{3}-1}$; b) $\dfrac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{5}-4} + \dfrac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{5}+4}$

c) $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}-2} + \dfrac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5}+2}$

30 L'unité de longueur est le ***centimètre***. ABC est un triangle quelconque comme l'indique la figure ci-contre.



La longueur ***l*** de la médiane d'un triangle quelconque est donnée par la formule :

$l^2 = \dfrac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 - a^2)$.

Calcule la longueur exacte de la médiane du triangle ABC dans chacun des cas suivants:

1- $a = 3$; $b = 2$ et $c = 1$.

2- $a = 10$; $b = 6$ et $c = 8$. Ce dernier résultat était-il prévisible ? Justifie ta réponse.

31 Détermine, dans chacun des cas ci-dessous, le rayon d'un disque dont l'aire est :

a) 2,5434 cm² ; b) 200,96 cm²

(On prendra 3,14 pour valeur approchée de π).

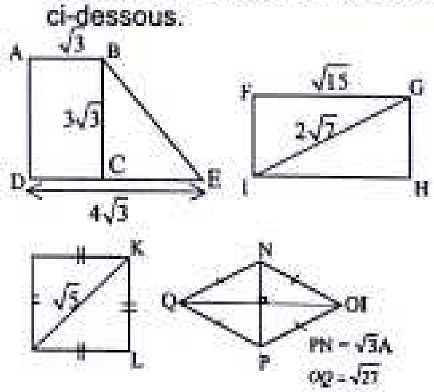
32 Un jardin rectangulaire dont la longueur est le triple de la largeur a une aire de 432 m². Détermine les dimensions de ce jardin.

33 L'unité de longueur est le centimètre. Sur les figures ci-dessous qui ne sont pas en grandeurs réelles, ABCD et FGHI sont des rectangles, JKLM est un carré et NOPQ est un losange.

Calcule l'aire de chacune des quatre figures ci-dessous.

JKLM est un carré et NOPQ est un losange.

Calcule l'aire de chacune des quatre figures ci-dessous.



3- Situations d'évaluation

34 Dans le but de protéger sa plantation de manioc contre les rongeurs, un planteur décide de la clôturer avec du grillage.
Il doit se rendre au marché mais, il a oublié la longueur de grillage qu'il lui faut. Il se rappelle néanmoins que sa parcelle a une forme carrée et que celle de son voisin, rectangulaire de 100 m sur 72 m, a la même superficie que la sienne. Aussi, demande-t-il qu'on l'aide à savoir s'il pourra acheter le grillage avec la somme de 120 000 francs en sa possession.
Le mètre de grillage coûte 350 francs.

1- Calcule la mesure du côté du champ de ce planteur.
2- Déduis que le périmètre du champ est égal à $240\sqrt{2}$ m.
3- Vérifie si le planteur dispose suffisamment d'argent pour acheter le grillage nécessaire. On prendra $\sqrt{2} \approx 1{,}414$.

35 Pendant ses recherches dans la salle multimédia de son établissement, un élève de la classe de 4ème, découvre ceci sur un site de mathématiques : « le mathématicien Héron d'Alexandrie (1er siècle) a trouvé une formule permettant de calculer l'aire A d'un triangle :

$$A = \sqrt{\frac{p}{2}\left(\frac{p}{2}-a\right)\left(\frac{p}{2}-b\right)\left(\frac{p}{2}-c\right)}$$

où a, b et c sont les longueurs des côtés du triangle et p son périmètre ».
Ne sachant pas utiliser cette formule, l'élève se confie à l'un de ses camarades, élève en classe de troisième, pour l'aider à calculer l'aire d'un triangle.

1- Justifie que $A = \frac{1}{4}\sqrt{p(p-2a)(p-2b)(p-2c)}$
2- Calcule, à l'aide de cette formule :
- l'aire exacte d'un triangle équilatérale de coté 3 cm ;
- l'aire exacte du triangle ABC tel AB = 16 cm, AC = 10 cm et BC = 8 cm.

Heron d'Alexandrie

VI- RENDEZ-VOUS DES CURIEUX !

L'histoire de la racine carrée commence autour du XXe siècle av. J-C. Sa première représentation connue date du XVIIe siècle av. J-C. La valeur de la racine carrée de deux a été calculée de manière approchée en Inde au VIIIe siècle av. J-C. et en Chine durant le IIe siècle av. J-C. Entre ces deux périodes, les grecs démontrent son irrationalité.
La racine carrée est une question classique d'histoire des sciences. Elle permet de tracer le fonctionnement réel des découvertes, de leur oubli ou de leur transmission.
La tablette babylonienne référencée YBC 7289 représente le premier témoignage connu d'une racine carrée. On y reconnait distinctement un carré avec ses diagonales (dont d'autres tablettes confirment la construction). Le dessin est bâclé, avec des écritures que les spécialistes reconnaissent être celle d'un apprenti scribe : c'est un cahier d'exercices.

Tablette babylonienne YBC 7289

4 Triangle Rectangle

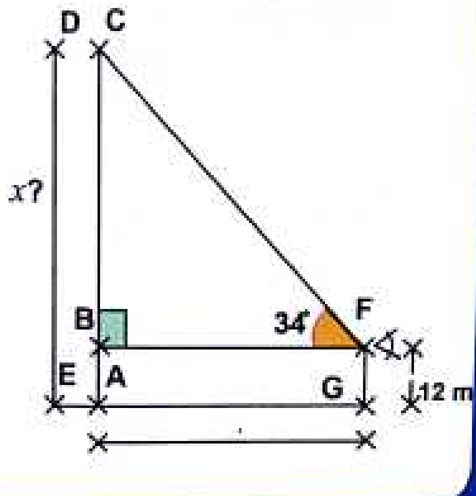
Notions essentielles :

- Sinus d'un angle aigu
- Cosinus d'un angle aigu
- Tangente d'un angle aigu
- Propriété de Pythagore
- Propriété réciproque de la propriété de Pythagore
- Propriété métrique déduite de l'aire
- Somme des carrés du cosinus et du sinus
- Propriété relative au cosinus et au sinus de deux angles supplémentaires
- Construction d'un segment de longueur $\sqrt{a}$; $a > 0$

SITUATION D'APPRENTISSAGE

Un géomètre topographe et ses stagiaires sont chargés de déterminer la hauteur d'un immeuble. Pour cela, il utilise un théodolite électronique bien équipé.

A partir d'une portion de terrain parfaitement horizontal, le chef réalise différentes mesures qui lui permettent de réaliser le schéma ci-contre. *Le segment [AC] représente la hauteur de l'immeuble, le segment [GF] représente la hauteur du trépied qui supporte le théodolite.*



Le géomètre demande à ses stagiaires de déterminer par le calcul la hauteur de l'immeuble. Ces derniers décident alors de revoir leurs cours relatifs aux propriétés de Pythagore ; au cosinus, au sinus et à la tangente d'un angle afin de réaliser avec succès la détermination de cette hauteur puisque cela compte dans l'évaluation de leur stage.

I- ACTIVITES DE DECOUVERTE

1- Connaître la propriété de Pythagore

Activité 1

On considère un triangle EFG rectangle en E tel que les longueurs des côtés [EF] ; [EG] et [FG] sont respectivement données dans les cas suivants :

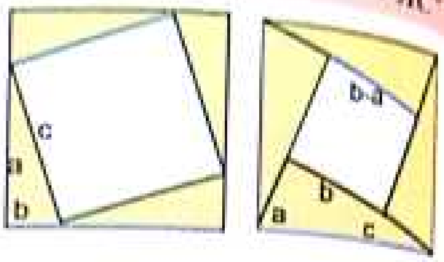
Cas 1 : 3 ; 4 ; 5 ; Cas 2 : 12 ; 16 ; 20
Cas 3 : 6 ; 8 ; 10; Cas 4 : 15; 20 ; 25

1 - Dans chaque cas compare $EF^2 + EG^2$ et FG^2

2 - Fais une conjecture

3- a) Dans chacun des cas des figures ci-contre, calcule de deux manières l'aire du grand carré.

b) Déduis que $c^2 = a^2 + b^2$.



Je fais le point de l'activité

On constate que:
Si ABC est un triangle rectangle en
alors $BC^2 = AB^2 + AC^2$

J'évalue mes acquis

Dans chacune des configurations ci-dessous, écris la propriété directe de Pythagore :

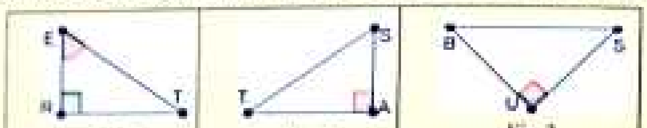


Fig 1 Fig 2 Fig 3

2- Connaître la réciproque de la propriété de Pythagore

Activité 2

On considère un triangle ABC tel que : **AB = 8 cm ; BC = 6 cm et AC = 10 cm**

1) Compare et $AB^2 + BC^2$ et AC^2.

2) Construis le triangle ABC puis identifie sa nature.

Je fais le point de l'activité

On constate que si ABC est un triangle tel que $AB^2 + BC^2 = AC^2$ alors le triangle ABC est rectangle en B.

J'évalue mes acquis

Complète les affirmations ci-dessous pour qu'elles soient vraies :

1 - LMP est un triangle
Si $MP^2 + ML^2 = LP^2$ alors LMP est rectangle en ....

2 - LMP est un triangle
Si $PL^2 + PM^2 = LM^2$ alors LMP est rectangle en ....

3 - LMP est un triangle
Si $ML^2 + PL^2 = MP^2$ alors LMP est rectangle en ....

3- Construire un segment de longueur $\sqrt{a}$, $a>0$

Activité 3

1) Construis un triangle ABC rectangle en A tel que AB = 1 cm et AC = 1 cm, puis calcule BC.

2) En remarquant que $13 = 3^2 + 2^2$, construis un segment de longueur $\sqrt{13}$ cm.

3) En remarquant que $\left(\sqrt{33}\right)^2 = 7^2 - 4^2$, construis un segment de longueur $\sqrt{33}$ cm.

Je fais le point de l'activité

• **Pour construire un segment de longueur** $\sqrt{13}$ cm, sachant que $13 = 3^2 + 2^2$, on pose : $BC = \sqrt{13}$ *cm ; AB = 3 cm et AC = 2 cm*

On a : $BC^2 = AB^2 + AC^2$, donc d'après la réciproque de la propriété de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en A.

- On trace deux droites (D_1) et (D_2) perpendiculaires en A
- On place sur la droite (D_1) le point C tel que AC = 2 cm ;
- On place sur la droite (D_2) le point B tel que AB = 3 cm

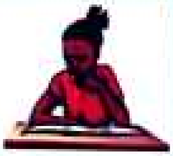
Le triangle rectangle ABC a son hypoténuse $[BC]$ qui a pour longueur $\sqrt{13}$ cm

• **Pour construire un segment de longueur** $\sqrt{33}$ **cm**. On a : $7^2 - 4^2 = \left(\sqrt{33}\right)^2$, donc en posant *AF = 7 et BF = 4*, le triangle ABF est rectangle en B.

- On trace un demi-cercle de diamètre $AF = 7cm$;
- On place sur ce demi-cercle le point B tel que *BF = 4 cm*

Le côté $[AB]$ de ce triangle rectangle a pour longueur $\sqrt{33}$.

J'évalue mes acquis



a) Construis un segment $[MN]$ de longueur $\sqrt{89}$ cm, sachant que *25 +64 = 89* .

b) Construis un segment $[RS]$ de longueur $\sqrt{39}$ cm, sachant que *39 = 64 - 25* .

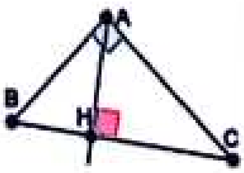
4- Connaitre la propriété métrique déduite de l'aire

Activité 4

Le triangle ABC ci-contre est rectangle en A. *[AH]* est la hauteur issue de *A*.

a) Calcule l'aire du triangle ABC de deux manières .

b) déduis-en que : $AH \times BC = AB \times AC$



Je fais le point de l'activité

ABC est un triangle rectangle en A dont H est la hauteur issue du sommet A on a: AH×BC=AB×AC.

J'évalue mes acquis

EFG est un triangle rectangle en E dont [EG] est la hauteur issue de E
Enonce la propriété métrique déduite de l'aire.

5- Identifier : le cosinus, le sinus ou la tangente d'un angle aigu

Activité 5

Soit MPN un triangle rectangle en M. Complète chacune des phrases suivantes :

a) Le côté le plus long est ....;

b) Le côté adjacent à l'angle $\hat{P}$ est...............................;

c) Le côté opposé à l'angle $\hat{M}$ est..................................;

d) Le côté djacent à l'angle $\hat{N}$ est...............................;

Je fais le point de l'activité

Dans le triangle ABC rectangle en B :

- le côté $[AC]$ est le coté le plus long : c'est l'hypoténuse du triangle ABC ;
- le côté $[AC]$ est appelé côté adjacent à l'angle $\widehat{BAC}$;
- le côté $[BC]$ est appelé côté opposé à l'angle $\widehat{BAC}$.

J'évalue mes acquis

On considère le triangle ROC rectangle en O.

a) Indique l'hypoténuse de ce triangle.

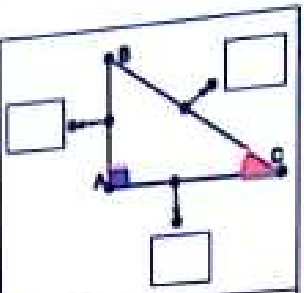
b) Pour chacun des angles aigus $\widehat{OCR}$ et $\widehat{ORC}$; indique le côté adjacent et le côté opposé correspondants.

Activité 6

1- On considère la figure ci-contre où le triangle ABC est rectangle en A.

On considere l'angle $\widehat{ACB}$

Complète chaque case vide par l'expression qui convient *Hypoténuse; côté adjacent; côté opposé; angle droit.*



2- On considère la figure codée ci-contre

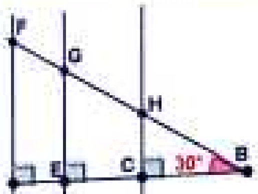
a) A l'aide de ta calculatrice, calcule les quotients dans le tableau ci-dessous:

Ligne 1	$\frac{CH}{BH}=$	$\frac{EG}{BG}=$	$\frac{AF}{BF}=$
Ligne 2	$\frac{BC}{BH}=$	$\frac{BE}{BG}=$	$\frac{BA}{BF}=$
Ligne 3	$\frac{CH}{BC}=$	$\frac{EG}{BE}=$	$\frac{AF}{BA}=$

b) Compare les résultats dans chaque ligne

c) Justifie que $\frac{CH}{BH}=\frac{EG}{BG}=\frac{AF}{BF}$

d) Justifie que $\frac{BC}{BH}=\frac{BE}{BG}=\frac{BA}{BF}$



BH=9,24
BG=16,18
BF=20,78
BC=8
BE=14
BA=18
CH=4,62
EG=8,09
AF=10,39

Je fais le point de l'activité

Dans le triangle ABC rectangle en B

- Le **cosinus** de l'angle $\widehat{BAC}$ est : $\frac{AB}{AC}$
  On note cos $\widehat{BAC}$.
- Le **sinus** de l'angle $\widehat{BAC}$ est : $\frac{BC}{AC}$
  On note sin $\widehat{BAC}$.
- Le **tangente** de l'angle $\widehat{BAC}$ est : $\frac{BC}{AB}$
  On note tan $\widehat{BAC}$.

J'évalue mes acquis

Indique pour chaque cas, la bonne réponse parmi les trois réponses proposées.

		A	B	C
1	ABC est un triangle rectangle en C tel que : BC= 5 cm et AC) 7 cm. La longueur AB est égale à …..	$\frac{5}{\cos\widehat{B}}$	$7\times\tan\widehat{B}$	$7\times\sin\widehat{A}$
2	Si $\sin\widehat{A}=\frac{AB}{AC}$, alors………	$AB=\frac{AC}{\sin\widehat{A}}$	$AC=AB\times\sin\widehat{A}$	$AC=\frac{AB}{\sin\widehat{A}}$
3	ABC est un triangle rectangle en A tel que : AB= 3 et que mes . Donc :….	$BC=\frac{\tan 30^\circ}{3}$	$BC=\frac{3}{\sin 30^\circ}$	$BC=3\times\sin 30^\circ$

6- Connaître la propriété relative à la somme des carrés du cosinus et du sinus

Activité 7

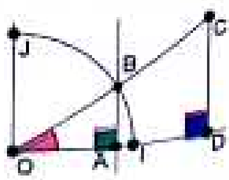
On considère la figure codée ci-contre où (O, I, J) est un repère orthonormé.

1-Justifie que: $\cos\widehat{BOA}=OA$.

2-Justifie que: $\sin\widehat{BOA}=AB$.

3-Justifie que: $\tan\widehat{BOA}=\frac{\sin\widehat{BOA}}{\cos\widehat{BOA}}$.

4-Justifie que: $\cos^2\widehat{BOA}+\sin^2\widehat{BOA}=1$.



Je fais le point de l'activité

Pour tout angle aigu de mesure a^0, on a: $\cos^2 a^0 + \sin^2 a^0 = 1$.

J'évalue mes acquis

Soit x la mesure d'un angle aigu.

Parmi les cas ci-dessous, indique les informations qui sont vraies :

1) $\cos x = 0{,}2$ *et* $\sin x = 1$

2) $\cos x = 0{,}7$ *et* $\sin x = 0{,}3$

3) $\cos x = \frac{12}{13}$ *et* $\sin x = \frac{5}{13}$.

7- Encadrer le sinus ou le cosinus d'un angle aigu

Activité 8

ABC est un triangle rectangle en A.

1) Ecris la formule de sin $\widehat{ABC}$ et cos $\widehat{ABC}$.

2) a) Justifie que : $AB<BC$ et $AC<BC$.

b) Déduis- en que : $\frac{AB}{BC}<1$ et $\frac{AC}{BC}<1$.

3) Explique pourquoi $\frac{AB}{BC}$ et $\frac{AC}{BC}$ sont des nombres positifs non nuls .

4) Déduis des questions précédentes que : $0<\cos \widehat{ABC}<1$ et $0<\sin \widehat{ABC}<1$.

Je fais le point de l'activité

Pour tout angle aigu $a°$ (c'est à dire compris entre 0 et 90°), on a :

- $0 \leq \cos a^0 \leq 1$
- $0 \leq \sin a^0 \leq 1$

J'évalue mes acquis

Parmi les cas suivants, indique ceux pour lesquels il ne sera pas possible de trouver la mesure de l'angle $\hat{A}$.

a) $\cos \hat{A} = 1{,}001$; *b)* $\sin \hat{A} = 0{,}9^2$; *c)* $\cos \hat{A} = \frac{51}{59}$; *d)* $\sin \hat{A} = \frac{3}{2}$.

8- Connaitre la propriété relative au cosinus et au sinus de deux angles complémentaires

Activité 9

On considère un triangle ABC rectangle B.

1) Justifie que les angles $\hat{A}$ et $\hat{C}$ sont complementaires.

2) Exprime en fonction des longueurs des côtés du triangle ABC :

$\cos \hat{A}$, $\cos \hat{C}$, $\sin \hat{A}$ et $\sin \hat{C}$

3) Compare $\cos \hat{A}$ et $\sin \hat{C}$, puis $\cos \hat{C}$ et $\sin \hat{A}$.

Je fais le point de l'activité

Lorsque deux angles sont complémentaires, le sinus de l'un est égal au cosinus de l'autre.

$a°$ est la mesure d'un angle aigu, donc :

- $\cos(90° - a°) = \sin(a°)$;
- $\sin(90° - a°) = \cos(a°)$.

J'évalue mes acquis

1) Recopie et complète chacune des égalités suivantes :
a) $\cos 20° = \sin ...$; b) $\sin 80° = \cos ...$; c) $\cos ... = \sin 35°$; d) $\sin ... = \cos ...$
2) Sachant que $\cos 20° = 0{,}940$ et $\sin 66 = 0{,}914$.
Détermine les valeurs approchées de $\cos 70°$ et $\sin 24°$.

9- Utiliser une table ou une calculatrice pour donner la valeur exacte, une valeur approchée ou un encadrement de la mesure d'un angle aigu connaissant son cosinus, son sinus ou sa tangente

Activité 10

1) On donne les mesures d'angle suivantes : 31° ; 45° ; 88°.
a) A l'aide de ta calculatrice, donne un arrondi d'ordre 2 du cosinus, du sinus et de la tangente de chaque angle.
b) A l'aide d'un extrait de la table trigonométrique ci-dessous, donne un arrondi d'ordre 2 du cosinus, du sinus et de la tangente de chaque angle, en expliquant ta méthode.
c) Compare les cosinus et les sinus de chaque angle en a) et en b).

degrés	sin	cos	tan		
0	0,000	1	0		90
1	0,0175	0,9998	0,0176	57,1314	89
2	0,0349	0,9994	0,0349	28,6361	88
3	0,0523	0,998	0,0524	14,3007	87
4	0,0698	0,9976	0,0699	11,4301	86
...	...	...	...	...	...
30	0,500	0,8660	0,5774	1,1918	60
31	0,5150	0,8572	0,6009	1,1504	59
32	0,5299	0,8480	0,6249	1,1106	58
...	....	...	...	1,0724	...
44	0,6947	0,7193	0,9657	1,0355	46
45	0,7071	0,7071	1,0000	1	45
	cos	Sin		tan	degrés

2) Détermine, en expliquant ta méthode, la mesure des angles $\widehat{A}$; $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$ tels que : $\cos\widehat{A} = 0{,}7193$; $\sin\widehat{B} = 0{,}9994$ et $\tan\widehat{C} = 1{,}1504$.
3) Un angle aigu $\widehat{D}$ est tel que : $\cos\widehat{D} = 0{,}52$. Donne un encadrement de la mesure de l'angle $\widehat{D}$ par deux nombres entiers naturels consécutifs .

Je fais le point de l'activité

On utilise, soit une calculatrice, soit un extrait d'une table trigonométrique pour donner la valeur exacte, une valeur approchée ou un encadrement de la mesure d'un angle aigu connaissant son cosinus, son sinus ou sa tangente.

J'évalue mes acquis

Recopie et complète le tableau ci-dessous :

$\widehat{E}$	3°		44°		60°	85°
Cos $\widehat{E}$						
Sin $\widehat{E}$		0,5				
Tan $\widehat{E}$				1		

Scanned by CamScanner

II- RESUME DE COURS

1- Hypoténuse

a- Définition

On appelle hypoténuse d'un triangle rectangle, le côté opposé à l'angle droit.

2- Propriété directe de Pythagore

Dans un triangle rectangle, le carré de la longueur de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés.

Autrement dit:

ABC est un triangle
Si ABC est rectangle en B, alors $AC^2 = AB^2 + BC^2$

REMARQUES *On ne peut appliquer la propriété directe de Pythagore que si le triangle est rectangle.*

3- Réciproque de la propriété directe de Pythagore

a. Propriété

Si dans un triangle le carré de la longueur du côté le plus long est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés alors ce triangle est rectangle.

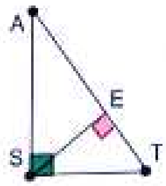
Autrement dit:

VER est un triangle
Si $VR^2 = EV^2 + ER^2$ alors VER est rectangle en E et [VR] est l'hypoténuse.

REMARQUES *La réciproque de la propriété directe de Pythagore permet de démontrer qu'un triangle est rectangle connaissant longueurs de ses trois côtés.*

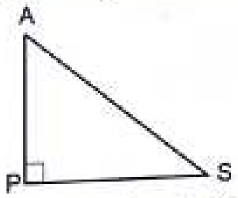
4- Propriété métrique déduite de l'aire

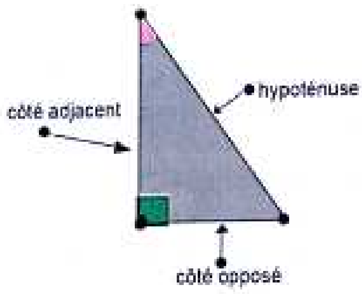
SAT est un triangle et E le pied de la hauteur issue de S.
Si SAT est rectangle en S alors $AT \times SE = SA \times ST$



5- Cosinus, Sinus et tangente d'un angle aigu dans un triangle rectangle

On considère la figure codée ci-contre et l'angle $\widehat{PAS}$





Considerons le rectangle APS, rectangle en P

a. Cosinus

Définition

Dans un triangle rectangle, le cosinus d'un angle aigu est le quotient de la longueur du côté adjacent par la longueur de l'hypoténuse

$$\cos\widehat{PAS} = \frac{\text{longueur du côté adjcent}}{\text{longueur de l'hypoténuse}} = \frac{PA}{AS}$$

b. Sinus

Définition

Dans un triangle rectangle, le sinus d'un angle aigu est le quotient de la longueur du côté opposé par la longueur de l'hypoténuse.

$$\sin\widehat{PAS} = \frac{\text{longueur du côté opposé}}{\text{hypoténuse}} = \frac{PS}{AS}$$

c. Tangente

Définition

Dans un triangle rectangle, la tangente d'un angle aigu est le quotient de la longueur du côté opposé par la longueur du côté adjacent.

i. $tan\widehat{PAS} = \frac{\text{longueur du côté opposé}}{\text{longueur du côté adjacent}} = \frac{PS}{PA}$

ii. $tan\widehat{PAS} = \frac{sin\widehat{PAS}}{cos\widehat{PAS}}$

d. Relation entre le cosinus et le sinus de deux angles complémentaires

Définition

Lorsque deux angles sont complémentaires le sinus de l'un est égal au cosinus de l'autre.

e. Somme des carrés de cosinus et sinus d'angle aigu

Définition

$a°$ désigne la mesure d'un angle aigu : $\cos^2 a° + \sin^2 a° = 1$

III- METHODE

a) Pour démontrer qu'un triangle est rectangle

1) *J'identifie le plus grand côté et je calcule le carré de sa longueur.*
2) *Je calcule la somme des carrés des deux autres côtés*
3) *Je compare les résultats des deux calculs ; s'il y a égalité alors le triangle est rectangle sinon le triangle n'est rectangle.*

b) Pour retenir les 3 rapports, on peut utiliser

« Ce moyen mémotechnique SOHCAHTOA » :

I- Sinus	II - Cosinus	III- Tangente
Opposé	Adjacent	Opposé
Hypoténuse	Hypoténuse	Adjacent

IV- SAVOIR-FAIRE

Savoir-faire 1- Construire un segment de longueur $\sqrt{a}$, $a > 0$

Enoncé

L'unité de longueur est le centimètre.

On sait que : et 64 – 25 = 39.

Construis, sur deux figures différentes, deux segments $[MN]$ et $[PQ]$ de longueurs respectives $\sqrt{74}$ et $\sqrt{39}$.

Solution commentée

Je construis les segments $[MN]$ et $[PQ]$ de longueurs respectives $\sqrt{74}$ et $\sqrt{39}$.

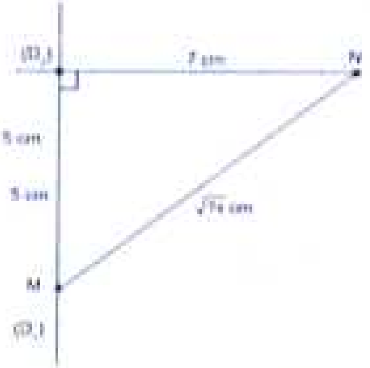
- **Construction du segment $[MN]$**

On sait que 25+ 49 = 74, donc $5^2 + 7^2 = (\sqrt{74})^2$

En prenant : OM = 5 ; ON = 7 et $MN = \sqrt{74}$, on a $MN^2 = OM^2 + ON^2$

D'après la réciproque de la propriété de Pythagore le triangle OMN est rectangle en O.

Programme de construction



- Je trace deux droites (D1) et (D2) perpendiculaires en O
- Je place sur la droite (D1) le point M tel que OM = 5
- Je place sur la droite (D2) le point N tel que ON = 7
- Je trace le segment $[MN]$

- **Construction du segment $[PQ]$**

On sait que 64 – 25 = 39, donc

En prenant : AP = 8 ; AQ = 5 et PQ = $(\sqrt{39})^2$,

on a : $AP^2 = AQ^2 + PQ^2$

D'après la réciproque de la propriété de Pythagore le triangle APQ est rectangle en Q

Programme de construction

- Je trace un segment $[AP]$ de longueur 8 cm
- Je trace un demi-cercle (C) de diamètre $[AP]$
- Je place sur ce demi-cercle le point Q tel que AQ = 5 cm
- Je trace le segment $[PQ]$

Savoir-faire 2- Calculer le cosinus, le sinus ou la tangente d'un angle aigu

Enoncé

ABC est un triangle rectangle en B tel que AB= 45 mm ; BC = 24 mm et AC = 51 mm

Calcule les nombres réels suivants : $\cos\widehat{BAC}$, $\sin\widehat{BAC}$ et $\tan\widehat{ACB}$.

Solution commentée

Je calcule les nombres réels cos, sin et tan

- Le triangle ABC est rectangle en B

D'après la définition du cosinus d'un angle aigu, on a :

$\cos\widehat{BAC} = \dfrac{AB}{AC}$ Or : AB = 45 et AC = 51, donc : $\cos\widehat{BAC} = \dfrac{45}{51} = \dfrac{15}{17}$.

- Le triangle ABC est rectangle en B

D'après la définition du sinus d'un angle aigu, on a :

$\sin\widehat{BAC} = \dfrac{BC}{AC}$ et AC = 51. Donc : $\sin\widehat{BAC} = \dfrac{24}{51} = \dfrac{8}{17}$.

- Le triangle ABC est rectangle en B

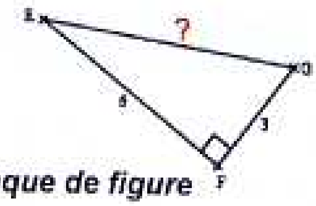
D'après la définition de la tangente d'un angle aigu, on a :

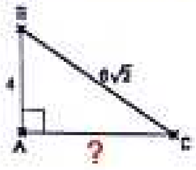
$\tan\widehat{ACB} = \dfrac{AB}{BC}$ Or : AB = 45 et BC = 24, donc : $\tan\widehat{ACB} = \dfrac{45}{24} = \dfrac{15}{8} = 1{,}875$.

Savoir-faire 3- Utiliser la propriété de Pythagore pour calculer différentes longueurs dans un triangle rectangle

Enoncé

Calcule la longueur manquante dans chacune des figures ci-contre :





Solution commentée

Je calcule la longueur manquante dans chaque de figure

- **Calcul de la longueur EG**

Le triangle EFG est rectangle en F.

D'après la propriété de Pythagore, on a : $EG^2 = EF^2 + FG^2$. Or : $EF = 6$ et $FG = 3$,

donc : $EG^2 = 36 + 9 = 45$, d'où : $EG = \sqrt{9 \times 5} = 3\sqrt{5}$.

- **Calcul de la longueur AC**

Le triangle ABC est rectangle en A.
D'après la propriété de Pythagore, on a : $BC^2 = AB^2 + AC^2$. Or : $AB = 4$ et $BC = 6\sqrt{2}$,
donc : $AC^2 = BC^2 - AB^2$, soit $AC^2 = 72 - 16 = 56$. D'où : $AC = \sqrt{4 \times 14} = 2\sqrt{14}$.

Savoir-faire 4- Utiliser la réciproque de la propriété de Pythagore pour justifier qu'un triangle est rectangle et la propriété directe pour justifier qu'un triangle n'est pas rectangle

Enoncé

Dans chacun des cas ci-dessous, dis si le triangle ABC est rectangle ou non. Justifie ta réponse.

a) $AB = 6\sqrt{2}$; BC = 7 cm et AC = 11 cm b) AB = 8 cm; BC = 4 cm et AC = 7 cm

Solution commentée

Je cherche à dire si le triangle ABC est rectangle ou non

a) Je sais que le triangle ABC est tel que : $AB = 6\sqrt{2}$; $BC = 7$ et $AC = 11$

On a : $AB^2 = \left(6\sqrt{2}\right)^2 = 72$; $BC^2 = 49$ et $AC^2 = 121$. Donc : $AB^2 + BC^2 = AC^2$

Par conséquent, d'après la réciproque de la propriété de Pythagore le triangle ABC est rectangle en B.

b) Je sais que le triangle ABC est tel que : $AB = 8$; $BC = 4$ et $AC = 7$

On a : $AC^2 + BC^2 = 49 + 16 = 65$. Or $AB^2 = 64$. Donc le triangle ABC n'est pas rectangle (sinon la propriété de Pythagore serait vérifiée).

Savoir-faire 5- Utiliser la propriété métrique déduite de l'aire pour calculer différentes longueurs dans un triangle rectangle

Enoncé

ABC est un triangle rectangle en A dont $[AH]$ est la hauteur relative à $[BC]$.

On donne : AB = 6 cm ; AC = 8 cm et BC = 10 cm

Calcule la longueur AH

Solution commentée

Je calcule la longueur AH

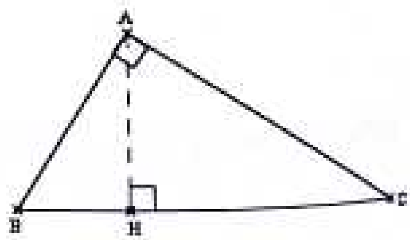
Je sais que ABC est un triangle rectangle en A dont $[AH]$ est la hauteur relative à $[BC]$

D'après la propriété métrique déduite de l'aire, on a :

$AB \times AC = AH \times BC$. Or : $AB = 6$; $AC = 8$ et $BC = 10$,

donc : $6 \times 8 = 10 \times AH$. D'où : $AH = \dfrac{6 \times 8}{10} = \dfrac{48}{10} = 4{,}8$

Ainsi la longueur AH est égale à 4, 8 cm.

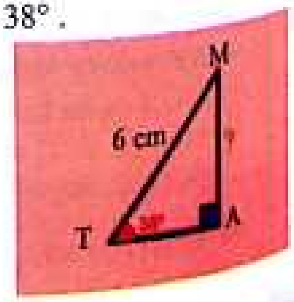


Savoir-Faire 6 Calculer une longueur en utilisant le sinus d'un angle

Enoncé

Un triangle TAM, rectangle en A est tel que TM = 6 cm et $mes\,\widehat{ATM} = 38°$.

Calcule AM (donne la valeur exacte et l'arrondi à 0,1 cm) .



Solution commentée

Dans le triangle TAM, rectangle en A, on a : $\frac{AM}{TM} = \sin\widehat{ATM}$, donc : $\frac{AM}{6} = \sin 38°$.

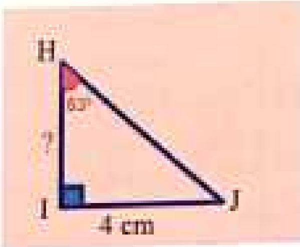
D'où $AM = 6 \times \sin 38° = 3,7$. On déduit que : $AM = 3,7$ cm.

Savoir-Faire 7 Calculer une longueur en utilisant la tangente d'un angle

Enoncé

Un triangle HIJ, rectangle en I est tel que : IJ = 4 cm, $mes\widehat{IHJ} = 63°$

Calcule HI (donne la valeur exacte et l'arrondi à 0,1 cm).



Solution commentée

Dans le triangle HIJ, rectangle en I,

$\frac{IJ}{HI} = \tan\widehat{IHJ}$, $\frac{IJ}{HI} = \tan 63°$, d'où $HI \times \tan 63° = 4$, $HI = \frac{4}{\tan 63°} = 2,0\ cm$. Donc : $HI = 2\ cm$

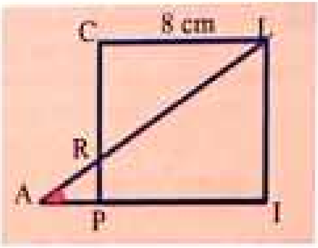
Savoir-Faire 8 Déterminer la mesure d'un angle dans un triangle rectangle

Enoncé

Sur la figure ci-contre qui n'est pas en grandeurs réelles,

- CLIP est un carré de longueur 8 cm de côté.
- Une droite passant par le point L coupe la droite (IP) en A
- $R \in (CP) \cap (AL)$
- CR = 6 cm.

Calcule la valeur arrondie de la mesure de l'angle $\widehat{LAI}$ à 10^{-1} degré près.



Solution commentée

CLIP est un carré donc dans le triangle rectangle CLR on a :

$\tan\widehat{CLR} = \frac{CR}{CL} = \frac{6}{8}$, d'où $mes\widehat{CLR} = 36,9°$

De plus R appartient au segment [CP] et les droites (CL) et (AI) sont parallèles,

donc les angles $\widehat{LAI}$ et $\widehat{CLR}$ sont des angles alternes-internes. On en déduit que :

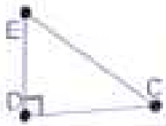
$mes\widehat{LAI} = mes\widehat{CLR} = 36,9°$.

V- JE M'EXCERCE

1- Exercices de fixation / Application

Identifier le sinus d'un angle aigu - identifier le cosinus d'un angle aigu - identifier la tangente d'un angle aigu

1 On considère la figure codée ci-contre
Complète le tableau ci-dessous



Quotients	Sinus	Cosinus	Tangente
$\frac{DE}{CE}$			
$\frac{DC}{EC}$		$\cos\widehat{DCE}$	
$\frac{DC}{DE}$			
$\frac{DE}{CE}$			
$\frac{DC}{CE}$			
$\frac{DE}{DC}$			

Connaitre la propriété directe de Pythagore

2 Réorganise les expressions ci-dessous pour retrouver l'énoncé de la propriété directe de Pythagore en les numérotant de 1 à 4
- Alors le carré de la longueur de l'hypoténuse
- est égal à la somme des carrés .
- Si un triangle est rectangle
- des longueurs des 2 autres côtés .

3 (La propriété directe de Pythagore)
Complète avec "somme" ; "rectangle" ; "deux autres" ; "hypoténuse" ou "opposés"

> Dans tout triangle ...., le carré de la longueur de................................ égale à .... des carrés des longueurs des ....côtés

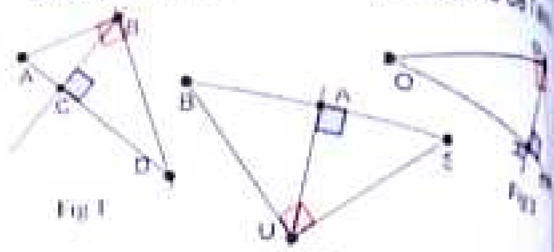
Connaitre la réciproque de la propriété de Pythagore

4 Réorganise les expressions ci-dessous pour retrouver l'énoncé de la réciproque de la propriété de Pythagore en les numérotant de 1 à 5
- Dans un triangle
- Si le carré de la longueur de l'hypothénuse
- est égal à la somme des carrés des longueurs
- des 2 autres côtés
- Alors ce triangle est rectangle .

5 Complète avec "somme" "carré" ; "rectangle" ou "opposé"

> Si dans un triangle, le .... de la longueur du plus grand côté est égal à la .... des carrés des longueurs des deux autres côtés, alors ce triangle est ....

6 Dans chacune des configurations ci-dessous, énonce la propriété métrique déduite de l'...



Connaitre la propriété relative à la somme des carrés du cosinus et du sinus

7 $\alpha°$ et $\beta°$ désignent les mesures de deux angles aigus d'un triangle rectangle.
Complètes les formules ci-dessous :

1. $\sin^2\alpha° + ... = 1$
2. $.....+ \cos^2(\beta) = 1$
3. $..... = \sin^2\alpha° + \cos^2\alpha°$.

8 $y°$ désigne la mesure d'un angle aigu.
Identifie parmi les formules ci-dessous, celle qui est exacte

1. $\cos y° + \sin y° = 1$
2. $\cos y° - \sin y° = 1$
3. $\cos^2 y° + \sin^2 y° = 1$
4. $\cos^2 y° - \sin^2 y° = 1$

Connaitre la propriété relative au cosinus et au sinus de deux angles complémentaires

9 $\alpha°$et $\beta°$désignent les mesures des deux angles aigus d'un triangle rectangle .
Complète les formules ci-dessous:

1. $\cos\ \alpha° = ...$
2. $\cos\ \beta° = ...$
3. $\cos\ (90° - \alpha°) = ...$
4. $\cos\ (90° - \beta°) = ...$

10 En utilisant la propriété relative au cosinus et sinus de deux angles complémentaires, complète les égalités ci-dessous :

$\cos 15° = \sin.....$	$\sin 37° = \cos.....$
$\cos 40° = \sin.....$	$\sin 73° = \cos.....$
$\cos 45° = \sin.....$	$\sin 25° = \cos.....$
$\cos 67° = \sin.....$	$\sin 46° = \cos.....$

Construire un segment de longueur $\sqrt{a}$, $a>0$

11 Pour chacune des valeurs de n ci-dessous construis un segment de longueur $\sqrt{n}$.

n	5	7	13	10	19

Encadrer le cosinus, le sinus ou la tangente d'un angle aigu

12 $\widehat{BAC}$ est angle aigu d'un triangle rectangle. A la consigne " calcule $\sin\widehat{BAC}$ " ; un élève a répondu $\sin\widehat{BAC} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Apprécie cette réponse.

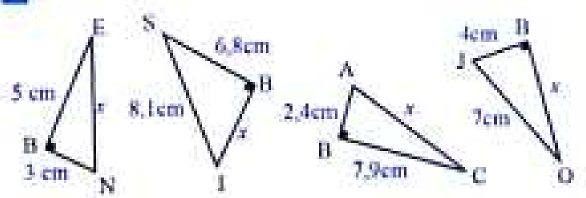
13 Dans chacun des cas ci-dessous, donne un encadrement par deux décimaux consécutifs d'ordre 2 : $\tan x = \sqrt{3}$; $\sin x = \frac{\sqrt{6}}{7}$; $\cos x = \frac{\sqrt{43}}{7}$.

Utiliser les propriétés de Pythagore pour calculer différentes longueurs dans un triangle rectangle

14 ABC est un triangle rectangle en A. Détermine la longueur manquante dans le tableau ci-dessous :

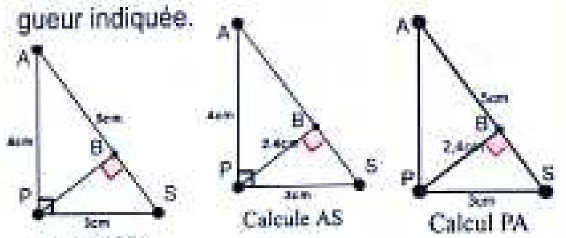
AB	AC	BC
45	24	......
......	55	73
35	......	91
66	88	......
57	......	95
......	64	80
54	72	......
......	56	70

15 Dans chacun des cas ci-dessous, calcule x



Utiliser la propriété métrique déduite de l'aire pour calculer différentes longueurs dans un triangle rectangle

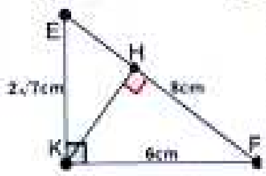
16 APS est un triangle rectangle en P.
Dans chacun des cas ci-dessous, calcule la longueur indiquée.



Calcule BP — Calcule AS — Calcul PA

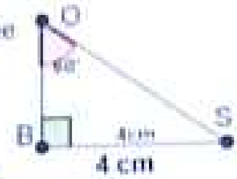
17 On considère la figure codée ci-contre où l'aire du triangle *ABC* est 12 cm² et AC vaut 5 cm.
Calcule *BE*.

18 On considère la figure codée ci-contre.
Calcule *KH*

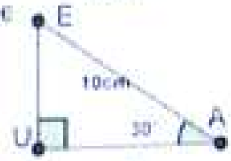


Utiliser le cosinus, le sinus ou la tangente d'un angle aigu pour calculer différentes longueurs dans un triangle rectangle

19 On considère la figure codée ci-contre.
1- Calcule SO.
2- Calcule OB.

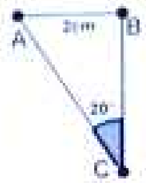


20 On considère la figure codée ci-contre.
1- Calcule EU.
2- Calcule AU.



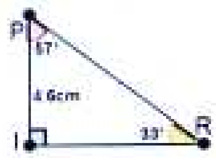
21 On considère la figure codée ci-contre.
1- Calcule TR.
2- Calcule ER.

22 On considère la figure ci-contre.
La consigne est de calculer la longueur du côté BC.
Parmi les propositions d'outils ci-dessous, relève le numéro de celui qui permet de calculer BC.



1. Le cosinus
2. Le sinus
3. La tangente.

23 On considère la figure codée ci-contre qui n'est pas en vraies grandeurs.
Calcule au centième près les distances *PR et IR*.



24 La ficelle tendue d'un cerf-volant mesure 150 mètres. Elle fait un angle de 60° avec l'horizontale et est tenu par un enfant de taille 1m20 avec la main levée.
Détermine la hauteur à laquelle se trouve le cerf-volant.

Utiliser une table trigonométrique ou une calculatrice pour donner la valeur exacte, une valeur approchée ou un encadrement de la mesure d'un angle aigu connaissant son cosinus, son sinus ou sa tangente

25 Complète le tableau ci-dessous *(table trigonométrique ou la calculatrice)*

Mesure de l'angle	...	82°		58°	....	34°
cosinus s	0.9	....	0.5	....	0.03	....

26 $\widehat{KIS}$ est angle aigu d'un triangle rectangle.

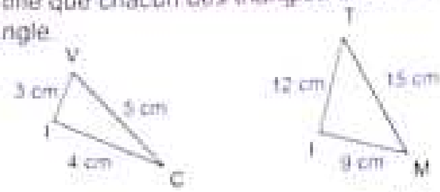
On donne : $\widehat{KIS} = \frac{1}{2}$

Détermine la mesure de l'angle $\widehat{KIS}$.

27 $\widehat{LAS}$ est angle aigu d'un triangle rectangle.
On donne : $\sin\widehat{LAS} = 1$.
Détermine la mesure de l'angle $\widehat{LAS}$.

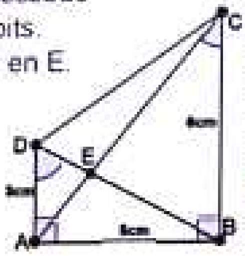
Justifier qu'un triangle est rectangle

28 Justifie que chacun des triangles ci-dessous est rectangle.



29 Sur la figure ci-contre, [AB] un diamètre du cercle et mesure 8 cm. D est un point du cercle tel que $mes\widehat{BAD} = 40°$.
La bissectrice (D) de l'angle $\widehat{BAD}$ recoupe le cercle en F.
Détermine à 0,01 cm près de la longueur du segment [AF].

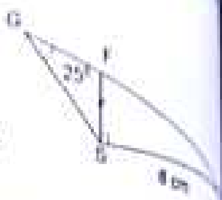
30 ABCD est un trapèze qui possède en A et en B des angles droits.
Ses diagonales se coupent en E.
On donne : AB= 3 cm,
AD = 5 cm, et DC = 6 cm.
1- Détermine à un degré près la mesure de chacun des angles $\widehat{BDA}$ *et* $\widehat{ACB}$
2- Calcule AC.



31 Soit BUS un triangle rectangle en U tel que BU = 8 cm et US = 15 cm.
Calcule BS.

32 Soit TER un triangle rectangle en E tel que TE = 8,1cm et RE = 15,1 cm.
Calcule TR.

33 Sachant que les points E, F et G sont alignés, on veut calculer la longueur FS.
1- Calcule la mesure de l'angle $\widehat{GFS}$
2- Calcule la mesure de l'angle $\widehat{SFE}$
3- Déduis-en l'arrondi au dixième de FS.



34 Soit BUT un triangle rectangle en U tel que BU = 6,3 cm et que BT = 10,5 cm.
Sans construire le triangle, calcule UT.

35 1- RIS est un rectangle en I tel que RS = 13 cm et RI = 12 cm. Calcule IS.
2- TOC est un triangle rectangle en O tel que TO = 64 mm et OC = 48 mm. Calcule TC.
3- MER un triangle rectangle en E tel que ER = 60cm et MR = 87cm. Calcule ME.

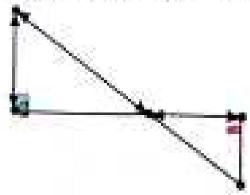
36 Calcule la longueur des diagonales du carré de 5 cm de longueur du côté.

37 Calcule la longueur des diagonales du carré LMNP de longueur 5 cm de côté.

38 On considère la figure codée ci-contre qui n'est pas en vraies grandeurs. Calcule DA.

I- Exercices de renforcement/ approfondissement

39 On considère la figure codée ci-contre qui n'est pas en vraies grandeurs.
Les points *D, E et C* sont alignés de même que *A, E et B.*
Calcule les distances *AE, BC et EC.*



40 α est angle d'un triangle rectangle.
1- Calcule sin(α) et tan(α) sachant que cos(α) = 4/7
2- Calcule cos(α) et tan(α) sachant que sin(α) = 3/8
3- Calcule cos(α) et sin(α) sachant que sin(α) = 6
4- Calcule cos(α) et tan(α) sachant que sin(α) = 4/3.

41 Dans chaque cas ci-dessous, calcule la longueur du côté manquant.

Le Triangle ABC est rectangle en ...	AB	BC	AC
A	15cm	...	25cm
B	...	28cm	35cm
C	24cm	32cm	...

42 Trace un triangle ADE, rectangle en D. Marque un point B sur [AD] et un point C sur [AE] tels que ABC soit un triangle rectangle en B.

1- Justifie les égalités suivantes :
$\frac{AC}{AE} = \frac{BC}{DE}$; $AE \times BC = AC \times DE$; $\frac{BC}{AC} = \frac{DE}{AE}$

2- En s'inspirant de la question a), démontre que : $\frac{BC}{AB} = \frac{DE}{AD}$

Commentaire !

Soit des triangles rectangles ayant le même angle aigu *A*.
Les rapports (côté opposé/hypoténuse) et (côté adjacent/hypoténuse) sont indépendants de ces triangles rectangles : on les appelle respectivement ***le sinus et la tangente de l'angle***

3- Dans le triangle ABC, rectangle en B :

a) Compare : $\cos\hat{A}$ *et* $\sin\hat{C}$, puis $\frac{\sin\hat{A}}{\cos\hat{A}}$ et $\tan\hat{A}$

b) Démontre que : $\left(\cos\hat{A}\right)^2 + \left(\sin\hat{A}\right)^2 = 1$

43 1- Soit un triangle ABC rectangle en A.
Démontre que :

a) $\dfrac{\sin\widehat{B}}{AC} = \dfrac{\sin\widehat{C}}{AB}$

b) $\left(\tan\widehat{B} + \tan\widehat{C}\right)^2 = \tan^2\widehat{B} + \tan^2\widehat{C} + 2$

c) $\dfrac{\cos\widehat{B} \times \tan\widehat{B}}{\sin\widehat{B}} = 1$.

2- Calcule : $\cos^2 60° + \sin^2 60°$.

44 x désigne la mesure d'un angle aigu tel que :

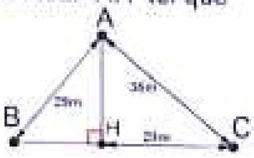
$$\sin x = \frac{2}{3}$$

Calcule la valeur exacte de $\cos x$ et $\tan x$.

45 Le triangle ABC a pour hauteur AH tel que AB =[29] m, AC = 35 m et CH= 28 m.

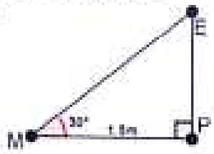
a) Calcule AH et BH

b) Calcule l'aire du triangle ABC.



46 On considère le losange RHDP est tel que RH = 6 cm. Une diagonale mesure 8 cm.
Détermine la longueur de l'autre diagonale au dixième de centimètre près.

47 Pour propulser ses cartons, un marchand a construit un plan incliné de 30° dont la base mesure 1.5 m de long comme l'indique la figure ci-contre.
Détermine la longueur du segment [ME]



48 ABCD est un carré de 7cm de diagonale. A' est le point symétrique de A par rapport à B. Calcule CA'.

49 On considère la figure ci-contre qui n'est pas en grandeurs réelles où ABCD est un rectangle
Justifie que le triangle FED est rectangle

50 Construis un triangle rectangle BUS tel que BU=5cm et US=13 cm.

1- Identifie tous les cas de tracés possibles.

2- Dans tous ces cas, calculer BC.

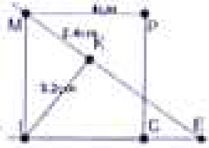
51 On considère la figure dessous où MPCI est un carré de 4 cm de côté. K est un point situé à l'intérieur du carré et vérifie MK = 2,4 cm et IK = 3,2 cm. La droite (MK) coupe la demi-droite [IC) au point E.

1. Justifie que le triangle IMK est rectangle en K

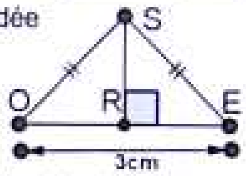
2. Calcule la mesure de l'angle $\widehat{IMK}$ arrondi

3. Exprime tanIME en fonction des longueurs des coté du triangle MIE

4. Déduis-en une valeur approché au mm près de la longueur du segment $[IE]$.



52 On considère la figure codée ci-contre qui n'est pas en grandeur réelle où le périmètre du triangle OSE est 11cm, Calcule SR.



53 Sur la figure ci-dessous, H est le pied de la hauteur issue du sommet C dans le triangle ABC.

1- Justifie les égalités suivantes :

$$AH = \frac{CH}{\tan\widehat{BAC}} \quad et \quad BH = \frac{CH}{\tan\widehat{CBH}}.$$

3 - Situations d'évaluation

54 Lors d'une navigation sur un site INTERNET, un membre du club de mathématiques d'un lycée Moderne découvre le schéma ci-dessous.
Ce dernier présente sa trouvaille aux membres du club. Emerveillés ceux-ci décident de déterminer la hauteur de la statue.

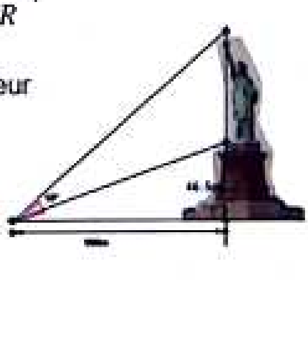
1) VER est un triangle rectangle en E. Énonce la réciproque de la propriété de Pythagore dans le triangle VER.

2) Parmi les quotients ci-dessous, un seul désigne $\cos\widehat{ERV}$:

$\dfrac{VE}{ER}$; $\dfrac{VE}{VR}$; $\dfrac{ER}{VE}$; $\dfrac{ER}{VR}$.

Entoure ce quotient

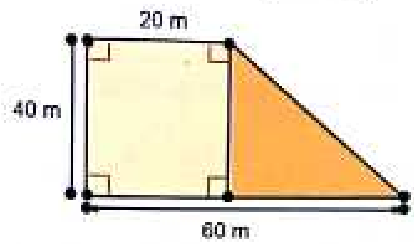
3) Détermine la hauteur de la statue



55 Un agriculteur a décidé d'acheter une parcelle de terrain dont on peut assimiler la forme à la figure ci-dessous. Il souhaite mettre du gazon sur toute la parcelle afin de lutter contre l'érosion.
Pour cela, il veut en acheter dans des sachets de 15 kg où il est écrit : «1 kg pour 35 m²».
Aussi cet agriculteur envisage clôturer cette parcelle pour la protéger des animaux en divagation. Il dispose de 117m de grillage.

1) Détermine le nombre de sachets nécessaires

2) Dis si oui ou non il dispose suffisamment de grillage pour clôturer sa parcelle.



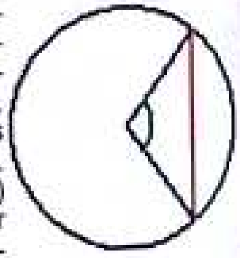
VI- RENDEZ-VOUS DES CURIEUX !

Quand on parle de trigonométrie, on associe nécessairement le mot aux fonctions cosinus, sinus et tangente, pour le calcul de longueurs ou d'angles dans le triangle. Aujourd'hui, l'usage de la calculatrice est incontournable lorsqu'on applique ces fonctions. Mais si l'on remonte à la fin des années 70, les collégiens ne disposaient pas encore de calculatrice et devaient se munir de tables trigonométriques pour effectuer les calculs.

Angle (degrés)	Cosinus de l'angle	Sinus de l'angle		Angle (en degrés)	Cosinus de l'angle
0	1,0000	0,0000		30	0,86
1	0,9998	0,0175		31	0,85
2	0,9994	0,0349		32	0,84
3	0,9986	0,0523		33	0,83
4	0,9976	0,0698		34	0,82
5	0,9962	0,0872		35	0,81
6	0,9945	0,1045		36	0,80
7	0,9925	0,1219		37	0,79
8	0,9903	0,1392		38	0,78

Extrait de la table trigonométrique

Le mot vient du grec "trigone" (triangle) et "metron" (mesure). Dans l'Encyclopédie (1751), Jean le Rond d'Alembert (1717;1783) définit la trigonométrie comme « l'art de trouver les parties inconnues d'un triangle par le moyen de celles qu'on connait ». C'est bien la démarche qui est demandée aux élèves du collège. Et pourtant la trigonométrie n'est pas à l'origine un outil de calcul du triangle mais du cercle. Il faut remonter jusqu'aux babyloniens, 2000 ans avant notre ère, pour trouver les premières traces de tables de données astronomiques. Car à la base, la trigonométrie est une géométrie appliquée à l'étude du monde, de l'univers et est indissociable de l'astronomie. L'héritage de ces tables données aux grecs et la numération sexagésimale des babyloniens (base 60) contribuera à l'introduction du partage du cercle en 360°. Eratosthène de Cyrène (-276 ; -196) et Aristarque de Samos (-310 ; -230) utilisent ces tables pour l'astronomie. Eratosthène se rendra célèbre pour avoir calculé la circonférence de la terre avec une précision tout à fait remarquable (seulement 3% d'erreur). Mais on attribue à Hipparque de Nicée (-190 ; -120) les premières tables trigonométriques. Elles font correspondre l'angle au centre et la longueur de la corde interceptée dans le cercle.
(Source internet)



5 Calcul Numérique

Notions essentielles :

- Intervalles
- Inégalités et opérations
- Comparaison de deux nombres
- Encadrement d'un nombre par deux entiers consécutifs ou par deux nombres décimaux consécutifs d'ordre 1, 2 ou 3 à l'aide d'une table de carrés ou d'une calculatrice.
- Arrondi d'ordres 1, 2 ou 3 d'une racine carrée .

SITUATION D'APPRENTISSAGE

A l'occasion de la fête de fin d'année, un collège sollicite un groupe de danseurs pour animer sa soirée.

Les organisateurs proposent alors aux élèves des places plein tarif à 2000 FCFA et des places à tarif réduit dont le prix est compris entre 1000 FCFA et 1500 FCFA.

Les soixante (60) élèves de la 3ème 2 souhaitent assister à cette fête et ils bénéficient de 18 tickets à tarif réduit.

Ceux-ci veulent avoir une idée de ce que chacun pourrait payer.

La classe s'organise pour faire des recherches afin de situer chaque élève sur le montant à débourser. Pour cela les élèves décident d'étudier les calculs numériques afin de satisfaire à leurs exigences.

I- ACTIVITES DE DECOUVERTE

1- Identifier un intervalle – Noter un intervalle – Lire un intervalle

Activité 1

On donne la liste de nombres réels suivants :

$-5,2;\ -4;\ -2,5;\ 1,9;\ \frac{7}{3};\ -1;\ 1;\ 2;\ \frac{-5}{3};\ \sqrt{2};\ \frac{9}{4}$.

1- Range chacun de ces nombres dans le tableau ci-dessous lorsqu'il vérifie l'inégalité (ou les inégalités).

	Inégalités				
	$x \geq 1$	$x < 2$	$-1 \leq x < 2$	$-1 < x \leq 2$	$-1 < x < 2$
Nombres					

2- Cite deux autres nombres qui vérifient chacune des inégalités ci-dessus.

3- Soit (D) une droite munie du repère (O , I).

a) Trace en bleu l'ensemble des points de la droite (D) dont l'abscisse x est supérieure ou égale à -1.

b) Trace en rouge l'ensemble des points de la droite (D) dont l'abscisse x est inférieure à 2.

4- Associe l'une des inégalités ci-dessus à l'ensemble tracé en bleu, à l'ensemble en rouge, puis à l'ensemble tracé en bleu et rouge.

J'évalue mes acquis

Parmi les écritures suivantes, indique celles qui sont des intervalles de $\mathbb{R}$.

a) $[-2;-5]$; b) $]2;\rightarrow]$; c) $]2;5]$

d) $]\leftarrow;\rightarrow[$; e) $\{-2;-5\}$.

Je fais le point de l'activité

- $]\leftarrow;2]$; $[-1;2]$; $[2;\rightarrow[$ sont des parties de l'ensemble $\mathbb{R}$, appelées intervalles.
- a et b sont des nombres réels tels que $a < b$ sont appelés **bornes** des intervalles $[a;b]$; $]a;b[$; $[a;b[$; $]a;b]$.

2- Déterminer l'amplitude d'un intervalle – Déterminer le centre d'un intervalle

Activité 2

Soit (D) une droite. On muni la droite (D) du repère (O; I).

1- Place les points A et B d'abscisses respectives -3 et 5.

2- Soit P le milieu du segment $[AB]$

Détermine l'abscisse du point P, puis vérifie que :

$x_P = \frac{x_A + x_B}{2}$.

3- Mesure la longueur du segment $[AB]$, puis vérifie que : $AB = |x_A - x_B|$.

Je fais le point de l'activité

Tout intervalle dont les bornes sont a et b, a pour **amplitude** $|a-b|$ et pour **centre** $\frac{a+b}{2}$.

J'évalue mes acquis

Indique l'amplitude de chacun des intervalles suivants :

a) $]-8;-3]$; b) $[0;4]$;

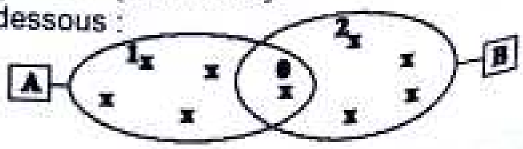
c) $[-2;7[$; d) $\left]-\frac{1}{2};\frac{5}{3}\right[$.

3- Identifier l'intersection et la réunion de deux ensembles

Activité 3

Soit les ensembles: $A = \{0;1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$ et $B = \{0;2;4;6;8\}$.

1) a) Reproduis et complète le diagramme ci-dessous :



b) Cite les éléments qui appartiennent à A et à B

2) a) Cite les éléments qui appartiennent à A ou à B

J'évalue mes acquis

Recopie et complète :

a) $\{-2;-1;0;1;2\} \cap \{-3;-2;0;1;3\} = ...$

b) $\{-2;-1;0;1;2\} \cap \left]-2;\frac{5}{2}\right] = ...$

c) $\{-2;-1;0;1;2\} \cup \{-3;-2;0;1;3\} = ...$

d) $\{-2;-1;0;1;2\} \cup \left]-2;\frac{5}{2}\right] = ...$

Je fais le point de l'activité

A et B sont deux ensembles non vides
$x \in A \cap B$ *signifie que* $x \in A$ *et* $x \in B$
$x \in \cup B$ *signifie que* $x \in A$ *ou* $x \in B$
$x \in A \cup B$ signifie que $x \in A$ ou $x \in B$.

4- Représenter un intervalle sur une droite graduée

Activité 4

Soit les intervalles : $I = [-8;5[$ et $J =]-2;\rightarrow[$

Représente sur une droite graduée :

a) l'intervalle I en bleu ;

b) l'intervalle J en rouge.

Je fais le point de l'activité

Un intervalle peut être représenté sur une droite graduée .

J'évalue mes acquis

Représente sur une droite graduée les intervalles suivants par deux couleurs différentes a) $[-2;5]$; b) $]-3;\rightarrow[$.

5- Représenter l'intersection ou la réunion de deux intervalles sur une droite graduée

Activité 5

1-Dans chacun des cas suivants, représente sur une droite graduée,chacun des intervalles puis détermine leur l'intersection :

$a)[0;2]$, $]1;5]$; $b)]\leftarrow;3]$, $[4;7]$; $c)]5;6]$, $[-2;7[$; $d)]-1;5]$, $]5;\rightarrow[$; $e)]\leftarrow;1]$, $[1;\rightarrow[$.

2- Dans chacun des cas suivants, représente sur une droite graduée chacun des intervalles, puis détermine la réunion des intervalles :

$a)]\leftarrow;4],[3;\rightarrow[$; $b)]-2;3],[-5;7]$; $c)]-4;3],[2;\rightarrow[$; $d)]-8;5],[0;1]$

Je fais le point de l'activité

Sur une droite graduée, on peut représenter l'intersection ou la réunion de deux intervalles.

J'évalue mes acquis

Représente l'intersection et la réunion des intervalles I et J, puis détermine-les.
$I = [-3;5]$ et $J =]-6;2[$.

6- Connaître la propriété relative aux inégalités et addition

Activité 6

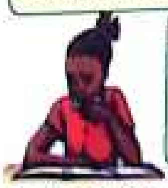
On considère quatre nombres a, b, c et d tels que :
$a<b$ et $c<d$.

1) Justifie les inégalités suivantes : $a+c<b+c$ et $b+c<b+d$
2) Déduis-en la comparaison de $a+c$ et $b+d$.
3) Recopie et complète :
« Si $a<b$ et $c<d$, alors ...+...<...+... ».

Je fais le point de l'activité

Lorsqu'on ajoute membre à membre deux inégalités de même sens, on obtient une nouvelle inégalité de même sens.

J'évalue mes acquis



Deux nombres t et z sont tels que : $\pi<t<3,2$ et $-5<z<\sqrt{2}$.
Indique la bonne réponse parmi les deux inégalités :
a) $\pi+\sqrt{2}<t+z<-5+3,2$ b) $\pi-5<t+z<3,2+\sqrt{2}$.

7- Connaître la propriété relative aux inégalités et multiplication

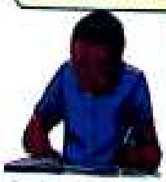
Activité 7

On considère quatre nombres x ; y ; z et t tels que : $0<x<y$; $0<z<t$.
1) Justifie les inégalités suivantes : $xz<yz$ et $yz<yt$
2) Déduis-en la comparaison de xz et yt
3) Recopie et complète :
« Si $0<x<y$ et $0<z<t$, alors ...×...<...×... » ».

Je fais le point de l'activité

Lorsqu'on multiplie membre à membre deux inégalités de même sens entre nombres positifs, on obtient une nouvelle inégalité de même sens.

J'évalue mes acquis



Sachant que : $a>\pi$ et $b>\frac{1}{\pi}$, indique la bonne inégalité parmi les deux proposées : a) $ab>1$; b) $ab<1$.

8- Comparer deux nombres en recherchant le signe de leur différence

Activité 8

Soit $a=\frac{6}{7}$ et $b=\frac{9}{8}$

1- Compare ***a et b***
2- Calcule ***a - b*** puis déduis son signe
3- Retrouve le résultat de la question 1.

Je fais le point de l'activité

a et b sont deux nombres réels
$a-b\geq 0$ *équivaut à* $a\geq b$
$a-b\leq 0$ *équivaut à* $a\leq b$

J'évalue mes acquis

Dans chacun des cas suivants, compare les nombres en recherchant le signe de leur différence :
a) $-\frac{7}{6}$ et $-\frac{5}{6}$; b) $6-5\sqrt{17}$ et $-2-5\sqrt{17}$; c) $2n^2+6n-2$ et n^2+n-2

9- Comparer deux nombres en comparant leurs carrés

Activité 9

On donne deux listes **A** et **B** de nombres réels : $A:-10;-18;-20;-25$ *et* $B:20;9;12;5$
1- Range dans l'ordre croissant les nombres de chaque liste.
2- Détermine le carré de chacun des nombres qui composent chaque liste.

3- Dis sur quelle liste les nombres sont rangés dans le même ordre que leurs carrés.

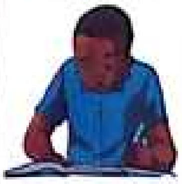
4- Recopie et complète chacune des phrases suivantes :

On constate que :

a) Les nombres .... sont rangés dans l'ordre .... de leurs carrés.

b) Les nombres .... sont rangés dans le même .... que leurs carrés.

J'évalue mes acquis



Compare les nombres suivants en comparant leurs carrés :

a) $\sqrt{29}$ *et* $\sqrt{17}$; b) $2\sqrt{6}$ *et* $6\sqrt{5}$;

c) $-\sqrt{3}$ *et* $-2\sqrt{2}$; d) $-7\sqrt{3}$ *et* $-2\sqrt{17}$.

Je fais le point de l'activité

- $a < b < 0$ équivaut à $a^2 > b^2$
  $a \leq b < 0$ équivaut à $a^2 \geq b^2$
- $0 < a < b$ équivaut à $a^2 < b^2$
  $0 < a \leq b$ équivaut à $a^2 \leq b^2$

10- Comparer deux nombres strictement positifs en comparant leurs inverses

Activité 10

On sait que : 3<5<20

1- Range leurs inverses.

2- Recopie et complète :

On constate que les nombres non nuls de même .... sont rangés dans l'ordre ....de leurs inverses.

3- Démontre le résultat obtenu au **2)** dans le cas général .

J'évalue mes acquis

Compare les nombres suivants :

a) $\frac{1}{\sqrt{7}}$ *et* $\frac{1}{2\sqrt{2}}$; **b)** $\frac{1}{2\sqrt{3}}$ et $\frac{1}{2\sqrt{2}}$.

Je fais le point de l'activité

Soit a et b deux nombres non nuls de même signe.

$a < b$ *équivaut à* $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.

11- Encadrer : la somme, la différence de deux nombres, le produit et le quotient de deux nombres positifs

Activité 11

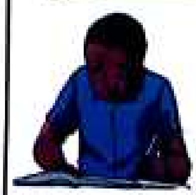
On donne : $3{,}141 < \pi < 3{,}142$ et $1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415$

Encadre chacun des nombres ci-dessous par deux décimaux consécutifs d'ordre 2 lorsque cela est possible. $a)\ \pi + \sqrt{2}$; $b)\ \sqrt{2} - \pi$; $c)\ \pi\sqrt{2}$; $d)\ \frac{\sqrt{2}}{\pi}$.

Je fais le point de l'activité

On utilise les propriétés relatives aux inéquations et opérations pour encadrer : la somme, la différence de deux nombres, le produit et le quotient de deux nombres positifs.

J'évalue mes acquis



Recopie et complète le tableau ci-dessous :

	Encadrement de :						
a et b sont deux nombres tels que : $2<a<5$ et $1<b<4$	$-b$	$\frac{1}{a}$	$\frac{1}{b}$	$a+b$	$a-b$	ab	$\frac{a}{b}$

II- RESUME DE COURS

A - Intervalles

1- Intervalles

Encadrement	Intervalles	Lecture	Représentation
$a \le x \le b$	$[a;b]$	Intervalle fermé a,b	
$a<x<b$	$]a;b[$	Intervalle ouvert a,b	
$a\le x<b$	$[a;b[$	Intervalle fermé en a et ouvert en b	
$a<x\le b$	$]a;b]$	Intervalle ouvert en a et fermé en b	
$x \le b$	$]\leftarrow;b]$	Intervalle des nombres inférieurs ou égaux à b	
$x>a$	$]a;\rightarrow[$	Intervalle des nombres supérieurs à a	
$x<b$	$]\leftarrow;b[$	Intervalle des nombres inférieurs à b	
$x \le b$	$]\leftarrow;b]$	Intervalle des nombres inférieurs ou égaux à b	

REMARQUES

Chacun des intervalles $[a;b]$; $[a;b[$; $]a;b]$; $]a;b[$ a pour :

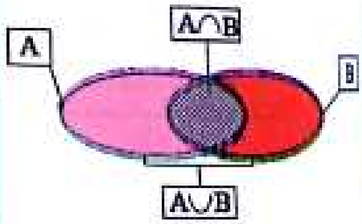
• ***Bornes*** a et b • ***Amplitude*** $|b-a|$ • ***Centre*** $\frac{a+b}{2}$

2-Intersection et réunion d'intervalles

Définition

• ***L'intersection de deux ensembles*** A et B est l'ensemble des éléments appartenant à A et à B. On le note $A \cap B$.
Autrement dit : $x \in A \cap B$ *signifie que* $x \in A$ et $x \in B$

• ***La réunion de deux ensembles*** A et B est l'ensemble des éléments appartenant à A ou à B. On le note $A \cup B$.
Autrement dit : $x \in A \cup B$ **signifie que** $x \in A$ ou $x \in B$.



Exemple

• $]\leftarrow;0[\cap]0;\rightarrow[= \varnothing$
(lis ensemble vide), on dit que les intervalles $]\leftarrow;0[$ *et* $]0;\rightarrow[$ sont **disjoints.**

• $]\leftarrow;0] \cup [0;\rightarrow[= \mathbb{R}$.

B - Comparaison de nombres réels

1- Inégalités et addition

Propriété

Lorsqu'on ajoute membre à membre des inégalités de même sens, on obtient une nouvelle inégalité de **même sens.**
$a; b$ et c étant des nombres réels :
Si $a<b$ et $c<d$ alors $a+c<b+d$
Si $a\le b$ et $c \le d$ alors $a+c \le b+d$

2- Inégalités et multiplication

Propriété

Lorsqu'on multiplie membre à membre des inégalités de même sens entre nombres positifs, on obtient une nouvelle inégalité de **même sens.**
$a; b; c$ et d étant des nombres réels positifs :
Si $a<b$ et $c<d$ alors $ac<bd$
Si $a \le b$ et $c \le d$ alors $ac \le bd$

3- Inégalités et carrés

Propriété

1

- **Deux nombres réels négatifs** sont rangés dans **l'ordre contraire** de leurs carrés.

a et *b* sont des nombres réels négatifs

$a < b$ équivaut à $a^2 > b^2$

$a \leq b$ équivaut à $a^2 \geq b^2$

2

- **Deux nombres réels positifs** sont rangés dans le **même ordre** que leurs carrés.

a et *b* sont des nombres réels positifs

$a < b$ équivaut à $a^2 < b^2$

$a \leq b$ équivaut à $a^2 \leq b^2$

3

- **Deux nombres réels positifs** sont rangés dans **le même ordre** que leurs racines carrées

a et *b* sont des nombres réels positifs

$a < b$ équivaut à $\sqrt{a} < \sqrt{b}$; $a \leq b$ équivaut à $\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$

4- Inégalités et inverses

Propriété

Deux nombres non nuls de même signe sont rangés dans **l'ordre contraire** que leurs inverses.

a et *b* sont des nombres réels non nuls de même signe.

$a < b$ équivaut à $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$; $a \leq b$ équivaut à $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$.

III- METHODE

1- Pour comparer deux nombres, on peut utiliser l'une des méthodes suivantes :

- *Comparer leurs carrés ou leurs racines carrées ;*
- *Comparer leurs inverses ;*
- *Etudier le signe de leurs différences.*

2- *a; b; c et d étant des nombres réels,* ***pour encadrer :***

- ***La somme*** $x+y$ *sachant que* $a < x < b$ *et* $c < y < d$, *on utilise :* $a+c < x+y < b+d$;
- ***La différence*** $x-y = x+(-y)$ *sachant que* $a < x < b$ *et* $c < y < d$, *on utilise:* $a-d < x-y < b-c$;
- ***Le produit*** xy *sachant que* $0 < a < x < b$ *et* $0 < c < y < d$, *on utilise :* $ac < xy < bd$;
- ***Le quotient*** $\frac{x}{y} = x \times \frac{1}{y}$ *sachant que* $a < x < b$ *et* $c < y < d$, *on utilise :* $a \times \frac{1}{d} < \frac{x}{y} < b \times \frac{1}{c}$.

IV- SAVOIR-FAIRE

Savoir-faire 1- Comparer deux nombres en recherchant le signe de leur différence

Enoncé

On donne les nombres A et B tels que : $A = \frac{1}{7} - 6\sqrt{\pi}$ et $B = \frac{1-48\sqrt{\pi}}{8}$.

Compare A et B .

Solution commentée

Je compare A et B après avoir déterminé le signe de A-B. On a : $A - B = \frac{1}{7} - 6\sqrt{\pi} - \frac{1-48\sqrt{\pi}}{8}$

$A - B = \frac{1}{7} - 6\sqrt{\pi} - \frac{1}{8} + 6\sqrt{\pi} = \frac{1}{7} - \frac{1}{8}$. Donc : $A - B = \frac{1}{56}$

Or : $\frac{1}{56}$ est strictement positif, donc : A- B est strictement positif. On en déduit que : $A > B$

Savoir-faire 2- Comparer deux nombres positifs en comparant leurs carrés

Enoncé

Compare : $5\sqrt{7}$ et $8\sqrt{3}$

Solution commentée

Je compare $5\sqrt{7}$ et $8\sqrt{3}$

$5\sqrt{7}$ et $8\sqrt{3}$ sont deux nombres positifs. $\left(5\sqrt{7}\right)^2 = 25\times7 = 175$ et $\left(9\sqrt{2}\right)^2 = 81\times2 = 162$

Or : $175 > 162$, donc : $\left(5\sqrt{7}\right)^2 > \left(9\sqrt{2}\right)^2$. Ainsi : $5\sqrt{7} > 9\sqrt{2}$.

Savoir-faire 3- Comparer deux nombres strictement positifs en comparant leurs inverses

Enoncé

Compare : $\frac{1}{13\pi}$ et $\frac{1}{8\pi}$

Solution commentée

$\frac{1}{13\pi}$ et $\frac{1}{8\pi}$ sont deux nombres strictement positifs. On a : $13 > 8$, donc : $13\pi > 8\pi$

Ainsi : $\frac{1}{13\pi} < \frac{1}{8\pi}$.

Savoir-faire 4- Encadrer la somme, la différence de deux nombres

Enoncé

On donne : $1,414 < \sqrt{2} < 1,415$; $2,236 < \sqrt{5} < 2,237$

Encadre chacun des nombres $\sqrt{2}+\sqrt{5}$ *et* $\sqrt{2}-\sqrt{5}$ par deux nombres décimaux d'ordre 2.

Solution commentée

J'encadre chacun des nombres $\sqrt{2}+\sqrt{5}$ et $\sqrt{2}-\sqrt{5}$ par deux nombres décimaux d'ordre 2

Encadrement de $\sqrt{2}+\sqrt{5}$

Je sais que : $1,414 < \sqrt{2} < 1,415$; $2,236 < \sqrt{5} < 2,237$

Par addition membre à membre, on obtient : $1,414 + 2,236 < \sqrt{2}+\sqrt{5} < 1,415 + 2,237$,

soit : $3,65 < \sqrt{2}+\sqrt{5} < 3,652$. Donc l'encadrement de $\sqrt{2}+\sqrt{5}$ à l'ordre 2 par deux décimaux consécutifs est : $3,65 < \sqrt{2}+\sqrt{5} < 3,66$.

Encadrement de $\sqrt{2}-\sqrt{5}$

On a : $\sqrt{2}-\sqrt{5}=\sqrt{2}+(-\sqrt{5})$. Or : $1{,}414<\sqrt{2}<1{,}415$, $-2{,}237<-\sqrt{5}<-2{,}236$,
donc par addition membre à membre, on a : $1{,}414-2{,}237<\sqrt{2}-\sqrt{5}<1{,}415-2{,}236$,
soit : $-0{,}823<\sqrt{2}-\sqrt{5}<-0{,}821$.
Donc l'encadrement de $\sqrt{2}-\sqrt{5}$ à l'ordre 2 par deux nombres décimaux consécutifs est
$-0{,}83<\sqrt{2}-\sqrt{5}<-0{,}82$.

Savoir-faire 5- Encadrer le produit, le quotient de deux nombres positifs

Enoncé

On donne : $3<a<5$ et $8<b<10$. Encadre chacune des expressions ab et $\frac{a}{b}$

Solution commentée

J'encadre les expressions ab et $\frac{a}{b}$

- **Encadrement *ab***

Je sais que : $3<a<5$ et $8<b<10$

Par multiplication membre à membre, obtient : $3\times 8<ab<5\times 10$, soit $24<ab<50$;

Ainsi : $24<ab<50$;

- **Encadrement de $\frac{a}{b}$**

On a : $\frac{a}{b}=a\times\frac{1}{b}$. Or : $3<a<5$ et $\frac{1}{10}<\frac{1}{b}<\frac{1}{8}$,
donc par multiplication membre, on obtient : $\frac{3}{10}<\frac{a}{b}<\frac{5}{8}$. Ainsi : $\frac{3}{10}<\frac{a}{b}<\frac{5}{8}$.

Savoir-Faire 6 Comparer des nombres réels

Enoncé

Soit $X=\left(1+\sqrt{2}\right)\sqrt{3-2\sqrt{2}}$

a) Justifie que : $1<\sqrt{2}$

b) Déduis-en que $1-\sqrt{2}$ est un nombre négatif

c) Justifie que : $3-2\sqrt{2}=(1-\sqrt{2})^2$

d) Déduis-en que X est égal à 1 .

Solution commentée

a) Je justifie que $1<\sqrt{2}$

On sait que : $1<2$. Donc : $1<\sqrt{2}$.

b) J'en déduis que $1-\sqrt{2}$ est un nombre négatif

On sait, d'après la question précédente que $1<\sqrt{2}$ donc $1-\sqrt{2}<0$

c) Je justifie que : $3-2\sqrt{2}=(1-\sqrt{2})^2$

$$\left(1-\sqrt{2}\right)^2=1-2\sqrt{2}+2$$
$$=3-2\sqrt{2}$$

d) Je justifie que X est égal à 1.

$$X=\left(1+\sqrt{2}\right)\sqrt{3-2\sqrt{2}}$$
$$=\left(1+\sqrt{2}\right)\sqrt{\left(1-\sqrt{2}\right)^2}$$
$$=\left(1+\sqrt{2}\right)\left|1-\sqrt{2}\right|=\left(1+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2}-1\right)$$

$=2-1=1$, donc : $X=1$.

V- JE M'EXERCE

1- Exercices de fixation

Identifier un intervalle – Noter un intervalle – Lire un intervalle

1 Pour chaque ensemble de nombres réels, une seule écriture est correcte. Indique-la par le chiffre suivi de la lettre correspondant.

1- $x < 3$:

a) $]\leftarrow;3]$ b) $[\leftarrow;3[$ c) $]\leftarrow;3[$

2- $-2 < x \leq 5$:

a) $[-2;5]$ b) $]-2;5]$ c) $]-2;5[$

3- $x \geq 0$:

a) $[0;\rightarrow[$ b) $[0;\rightarrow]$ c) $]0;\rightarrow]$

4- $10 \geq x > 3$:

a) $[10;3]$ b) $]3;10]$ c) $[10;3[$.

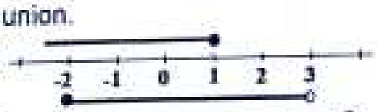
2 Réponds par vrai ou par faux à chacune des affirmations suivantes :

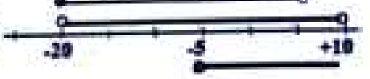
a) L'ensemble des nombres réels positifs s'écrit $[0;\rightarrow[$;

b) L'intervalle des nombres compris entre -5 et 1 s'écrit $\{-5;1\}$;

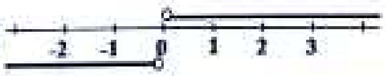
c) L'intervalle des nombres de 0 exclu à 5 compris s'écrit $]0;5]$.

3 Pour chaque schéma, donne les deux intervalles représentés, ainsi que leur intersection et leur réunion.

a) 

b) 

c) 

d) 

e) 

4 A l'aide d'un schéma, détermine l'intersection et la réunion des deux intervalles donnés.

a) $I = [-1;2]$ et $J = [-3;7]$

b) $I =]\leftarrow;3]$ et $J = [-6;\rightarrow[$

c) $I = [7;\rightarrow[$ et $J = [-5;\rightarrow[$

d) $I = [3;18]$ et $J =]17;20]$.

Comparaison des nombres réels

5 Dans chacun des cas ci-dessous, compare les nombres *a et b* après avoir étudié leur différence

a) $a = \frac{3}{4}$ et $b = \frac{2}{3}$

b) $a = \frac{-5}{4}$ et $b = \frac{-9}{7}$

c) $a = \frac{\pi}{7} - 2$ et $b = \frac{\pi}{9} - 1$.

6 x étant un nombre réel positif, compare A et B après avoir étudié le signe de leur différence

a) $A = (x-8)^2$ et $B = x^2 + 64$

b) $A = x^2$ et $B = x^2 + 5x$

c) $A = \frac{1}{3}$ et $B = \frac{30+x}{89+3x}$.

7 Dans chacun des cas ci-dessous, compare les nombres après avoir comparé leurs carrés

a) $7\sqrt{2}$ et $3\sqrt{11}$ b) $5\sqrt{2}$ et 7 c) $-3\sqrt{5}$ et $-3\sqrt{}$

d) $-6\sqrt{2}$ et $-5\sqrt{3}$ e) $\sqrt{5} + \sqrt{7}$ et $2\sqrt{3}$.

8 Dans chacun des cas ci-dessous, compare les nombres après avoir comparé leurs inverses

a) $\frac{1}{3,392}$ *et* $\frac{1}{3,4}$ b) $\frac{1}{57,2}$ *et* $\frac{3}{178,5}$ c) $\frac{1}{3\sqrt{5}}$ et $\frac{1}{6\sqrt{}}$

Encadrer les nombres

9 Sans ta calculatrice, encadre chacun des nombres ci-dessous par deux nombres entiers relatifs consécutifs.

$$\sqrt{547};\sqrt{3492};\sqrt{18921};-\sqrt{640153}.$$

10 Utilise ta calculatrice pour donner un encadrement de chacun des nombres ci-dessous par deux nombres décimaux consécutifs d'ordre 2.

$$\sqrt{29}+3;\sqrt{61}-17;-3\sqrt{6}-2.$$

11 Sachant que :

$1,4142 < \sqrt{2} < 1,4143$ et $1,7320 < \sqrt{3} < 1,7321$

Encadre chacun des nombres par deux nombres décimaux relatifs d'ordre dans les cas suivants :

a) $5\sqrt{2}$; $\frac{3}{5}\sqrt{3}$ *b)* $3\sqrt{6}+60$; $4\sqrt{3}-3\sqrt{2}$.

12 Sachant que :

$1,4142 < \sqrt{2} < 1,4143$; $1,7320 < \sqrt{3} < 1,7321$

et $3,141 < \pi < 3,142$

Encadre chacun des nombres par deux décimaux d'ordre 1.

a) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$; $\pi+\sqrt{2}$; $\pi+\sqrt{3}$

b) $\pi\sqrt{2}$; $\pi\sqrt{3}$; $-\pi+\sqrt{3}$

c) $\sqrt{2}-\sqrt{3}$; $\pi-\sqrt{3}$; $\pi-\sqrt{2}$

13 Sachant que : $29 \leq a \leq 30$ et $69 \leq b \leq 70$
Encadre les nombres :
$a+b$; $b-a$; $\frac{a}{b}$; $\frac{a}{a+b}$; $\frac{a}{b-a}$.

14 La largeur d'un rectangle est inférieure à 3 cm et sa longueur est inférieure à 7 cm. Démontre que le périmètre du rectangle est inférieure à 20 cm.

2- Exercices de renforcement/ approfondissement

15 Dans chacun des cas ci-dessous, compare les nombres en utilisant la méthode de ton choix.

a) $3\sqrt{7}$ et 8 b) $\sqrt{\frac{13}{7}}$ et $\sqrt{\frac{13}{8}}$ c) $\frac{1}{2\sqrt{45}}$ et $\frac{1}{3\sqrt{20}}$

d) $\frac{x+2}{x+3}$ et $\frac{x+3}{x+4}$ $(x \in \mathbb{R})$. e) $\sqrt{5}-3$ et $\sqrt{14-6\sqrt{5}}$.

16 Dans chacun des cas ci-dessous, compare les nombres réels sans aucun calcul.

a) $\sqrt{69}$ et $\sqrt{53}$ b) $\sqrt{\pi-3,1}$ et $\sqrt{\pi-3}$

c) $-\sqrt{235}$ et $-\sqrt{229}$ d) $2\sqrt{6}$ et 5.

17 Range dans l'ordre croissant, sans utiliser la calculatrice : a) $3\sqrt{5}$; $2\sqrt{11}$; $4\sqrt{3}$; $5\sqrt{2}$

b) $6\sqrt{3}$; $-\sqrt{108}$; $7\sqrt{2}$; $-5\sqrt{5}$

c) $\frac{1}{\sqrt{117}}$; $\frac{-1}{3\sqrt{13}}$; $\frac{1}{3\sqrt{11}}$; $\frac{1}{12\sqrt{2}}$.

18 Détermine le signe de chacun des nombres réels ci-dessous :

$6-\sqrt{3}$; $3\sqrt{5}-5\sqrt{3}$; $-20\sqrt{\pi}-\sqrt{317}$;
$\frac{2-\sqrt{13}}{\sqrt{2}-1}$; $(2\sqrt{5}-3\sqrt{3})(\pi-5)$.

19 Un nombre y vérifie : $-\frac{1}{4} < y < \frac{3}{5}$

Encadre : $y+5$; $y-\frac{1}{4}$; $\frac{2}{5}-y$; $2-4y$.

20 En utilisant le fait que : $1 < \sqrt{3} < 2$ et $2 < \sqrt{5} < 3$, compare les nombres ci-dessous :

a) $5+\sqrt{3}$ et 7 b) $9\sqrt{5}+2$ et 20

c) $4+\sqrt{5}$ et 7 d) $49-10\sqrt{3}$ et 25.

21 Les nombres réels sont tels que :
$-3 < x < -2$; $2 < y < 3$
Encadre les nombres réels : $x-y$; x^2+2 ; xy ; $\frac{x}{y}$

22 Détermine un encadrement du nombre réel x dans chacun des cas ci-dessous :

a) $-2 \leq 2x-8 \leq 8$ b) $\frac{3-x}{2} \in [0,5]$ c) $\frac{1}{3}-\frac{x}{4} \in \left]\frac{2}{3};\frac{7}{3}\right[$

23 On donne : $1,4142 < x < 1,4143$
Donne un encadrement de $y = \frac{6+5x}{4}$ d'amplitude une puissance de 10.

24 ABC est un triangle rectangle en A, tel qu'en centimètres : $3,5 \leq AB \leq 3,6$ et $4,1 \leq AC \leq 4,2$.
Encadre la longueur BC.

25 On donne : $X = (2+\sqrt{5})\sqrt{9-4\sqrt{5}}$

1) Justifie que $\sqrt{5} > 2$

2) Déduis-en que $2-\sqrt{5}$ est un nombre négatif

3) Justifie que $9-4\sqrt{5} = (2-\sqrt{5})^2$

4) Justifie que X est un nombre entier relatif.

26 On donne : $a = 7-2\sqrt{11}$ et $b = 7-3\sqrt{5}$

1) Démontre que $a-b = 3\sqrt{5}-2\sqrt{11}$

2) Compare $3\sqrt{5}$ et $2\sqrt{11}$.

3) Déduis-en l'écriture simplifiée de chacun des nombres $\sqrt{a^2-2ab+b^2}$ et $\sqrt{b^2-2ab+b^2}$.

3 - Situations d'évaluation

27 Un établissement scolaire dispose d'une pelouse circulaire dont l'aire est de 32,36 m^2.
Le Président du COGES a à sa possession un rouleau de fil de fer de longueur 22 m et désire l'entourer une fois. Il sollicite ta classe pour savoir si cela est possible.
On rappelle que le rayon R de la pelouse est en mètres et que $3,14 < \pi < 3,15$.

1 - Donne un encadrement de R^2 par deux décimaux d'ordre 4.

2 - Déduis-en un encadrement de R par deux-décimaux d'ordre 2.

3 - Donne un encadrement de la longueur de cette pelouse par entiers naturels consécutifs.

4- Dis si le Président du COGES de cet établissement pourra entourer cette pelouse.
Justifie ta réponse.

28 Au cours de ses festivités de chaque fin d'année, le Conseil Municipal d'une commune offre des cadeaux aux enfants d'une famille démunie. Cette année, le Président de ce Conseil Municipal porte son choix sur une famille dont il ignore malheureusement le nombre exact d'enfants.

Il dispose néanmoins de deux informations très utiles qui sont :

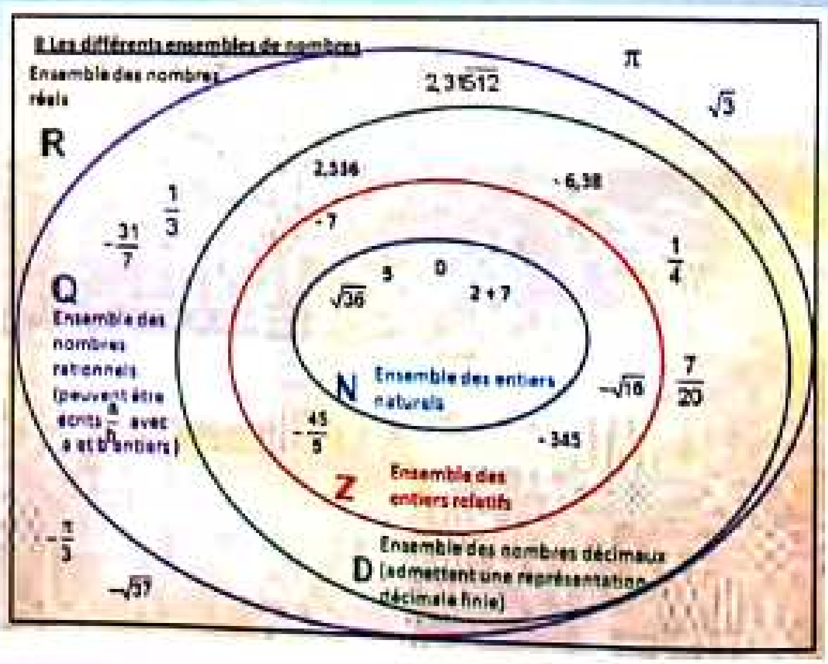
- Le nombre d'enfants cherché est plus grand ou égal à 3 et plus petit que 8 ;
- Le nombre d'enfants cherché appartient à l'intervalle]4 ; 13]

Il est question de déterminer le nombre exact d'enfants qui doivent recevoir ces cadeaux.

1- Traduis la première information à l'aide d'un intervalle.
2- Démontre que le nombre d'enfants cherché appartient finalement à l'intervalle]4 ; 8[.
3- Détermine ce nombre sachant qu'il est le centre de l'intervalle]4 ; 8[

VI- RENDEZ-VOUS DES CURIEUX !

Les signes mathématiques =, < ; > ; ≤ ; ≥ sont apparus principalement aux *XVI^e et XVII^e* siècles. Avant, on utilisait surtout des mots : « est égal », « est supérieur à »,..etc.
Le signe «=» a été introduit en 1557 par le mathématicien gallois ***Robert Recorde*** (env.1510-1558). Il choisit « une paire de parallèles ou lignes jumelles parce que rien n'est plus pareil que deux jumeaux. »
Les signes «< » et «>» apparaissent pour la première fois en 1631 dans un ouvrage du mathématicien anglais ***Thomas Harriot*** (1650 - 1621).
Les signes «<» et «>» ont été utilisés en 1670 par le mathématicien français ***John Wallis*** (1616-1703) alors que le mathématicien français ***pierre Bouguer*** (1698-1758) utilisait des signes semblables, ≤ et ≥ , en 1734.
Les signes d'inégalités sont encore très peu utilisés dans la vie courante.



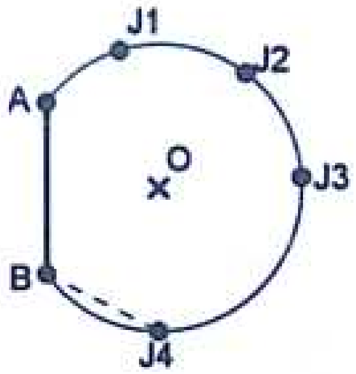
6 Angles Inscrits

Notions essentielles :

- Angle inscrit
- Angle au centre
- Arc intercepté
- Angles associés
- Propriété relative aux mesures de deux angles associés
- Propriété relative aux mesures de deux angles inscrits interceptant le même arc.

SITUATION D'APPRENTISSAGE

Dans le cadre de la préparation des championnats inter-classes, le coach d'une classe de troisième explique à ses joueurs à partir du schéma ci-contre, où les points A et B représentent les pieds des poteaux de but, le positionnement des joueurs pour l'exercice de tir de coup franc du jour. Tous les joueurs de façon unanime estiment que les joueurs en position J1 et J4 sont défavorisés car ils ont les plus petits angles de tir. Le coach affirme que tous les joueurs tirent au but avec le même angle de tir de chaque position.
Pour s'en convaincre, ces joueurs décident d'approfondir leurs connaissances sur les cercles et les angles.



I- ACTIVITES DE DECOUVERTE

1- Identifier un angle inscrit dans un cercle – Reconnaître l'arc de cercle intercepté par un angle au centre ou un angle inscrit donné

Activité 1

O est un point du plan. Construis un cercle de centre O.

1- Place sur ce cercle les points A, B et C puis trace l'angle $\widehat{CAB}$, colorie l'arc de cercle d'extrémités B et C ne contenant pas le point A.

2- Identifie l'arc de cercle intercepté par les angles CAB et BOC.

Je fais le point de l'activité

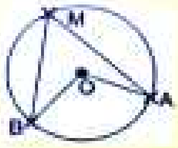
- L'angle $\widehat{CAB}$ a son sommet sur le cercle et ses côtés coupent le cercle, on dit que l'angle $\widehat{CAB}$ est un **angle inscrit dans un cercle.**
- L'angle $\widehat{BOC}$ est **un angle au centre** i intercepte le même arc $\overset{\frown}{BC}$ que l'angle inscrit $\widehat{CAB}$, on dit que l' angle au centre $\widehat{BOC}$ est **associé** à l'angle inscrit $\widehat{CAB}$

J'évalue mes acquis

Parmi les écritures suivantes réponds par vrai lorsque l'affirmation est vraie ou par faux lorsque l'affirmation est fausse.

Soit la figure ci-contre, l'angle AMB est :

1. un angle au centre et intercepte l'arc $\overset{\frown}{MA}$.
2. inscrit dans le cercle et intercepte l'arc $\overset{\frown}{MB}$.
3. inscrit dans le cercle et intercepte l'arc $\overset{\frown}{MA}$.
4. inscrit dans le cercle et intercepte l'arc $\overset{\frown}{AB}$.



2- Connaître la propriété relative à un angle inscrit et un angle au centre associé

Activité 2

On considère les figures ci-contre où sont construits un angle inscrit et l'angle au centre associé.

a) Reproduis ces figures.

b) Mesure l'angle dont la mesure n'est pas indiquée.

c) Conjecture dans chaque cas une relation entre la mesure de l'angle inscrit et celle de l'angle au centre associé.

Fig 1

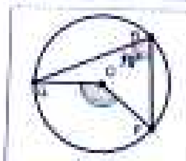


Fig 2

Je fais le point de l'activité

Un angle inscrit dans un cercle a pour mesure la moitié de la mesure de l'angle au centre associé.

J'évalue mes acquis

Parmi les formulations ci-dessous, identifie celle qui correspond à la propriété relative à la mesure d'un inscrit et celle d'un angle au centre interceptant le même arc.

Formulation 1

Dans un cercle, si un angle au centre et un angle inscrit interceptent le même arc de cercle, alors la mesure de l'angle au centre est le double de celle de l'angle inscrit.

Formulation 2

Dans un cercle, si un angle au centre et un angle inscrit interceptent le même arc de cercle, alors les deux ont la même mesure.

Formulation 3

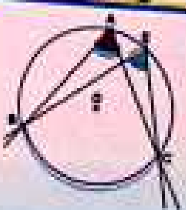
Dans un cercle, si un angle au centre et un angle inscrit interceptent le même arc de cercle, alors la mesure de l'un est égale à la moitié de la mesure de l'autre.

3- Reconnaître des angles inscrits qui interceptent le même arc – Connaître la propriété relative aux mesures de deux angles inscrits interceptant le même arc

Activité 3

Fais des figures analogues aux figures ci-contre.

1. Complète les cases vides dans le tableau ci-contre :



Angles	Arc intercepté	Mesure
$\widehat{BAC}$		
$\widehat{BEC}$		

2. Compare les mesures des deux angles inscrits CAE et CPE.
3. Dis s'il était possible de prévoir ce résultat ; justifie ta réponse.
4. On considère la figure ci-contre.

Justifie que : $mes\widehat{CAE} = mes\widehat{CPE}$

Je fais le point de l'activité

Dans un cercle, deux angles inscrits qui interceptent le même arc ont la même mesure.

J'évalue mes acquis

Les angles $\widehat{EAU}$ et $\widehat{ABU}$ sont deux angles inscrits dans un même cercle et interceptent un même arc de cercle.
Entoure la formule qui est exacte.

1) $mes\widehat{EAU} = \frac{1}{2}mes\widehat{EBU}$ 2) $mes\widehat{EAU} = mes\widehat{EBU}$ 3) $mes\widehat{EAU} = 2mes\widehat{EBU}$.

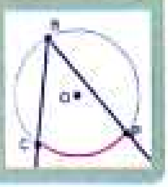
II- RESUME DE COURS

A- Angles inscrits- Angles au centre

1. Définitions

a. Angles inscrits

Soient trois points distincts B, P et C appartenant à un cercle (C).
On dit que l'angle $\widehat{PBC}$ est un **angle inscrit** dans le cercle (C).
L'arc de cercle $\widehat{PC}$ ne contenant pas le sommet de cet angle s'appelle l'**arc de cercle intercepté**.
On dit aussi que l'angle inscrit $\widehat{PBC}$ intercepte l'arc de cercle $\widehat{PC}$.



b. Angles au centre

Soient un cercle (C) de centre O et deux points distincts P et C du cercle.
On dit que l'angle $\widehat{POC}$ est un angle au centre.
Il intercepte l'arc de cercle rouge.

2. Propriétés des angles inscrits et des angles au centre

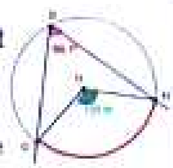
a. Relation entre angle inscrit et angle au centre associé

Propriété

Dans un cercle, si un angle au centre et un angle inscrit interceptent le même arc de cercle, alors la mesure de l'angle au centre est le double de celle de l'angle inscrit.

Exemple

Le cercle ci-contre a pour centre O.
L'angle $\widehat{POC}$ est un angle au centre et l'angle $\widehat{PBC}$ est un angle inscrit dans ce cercle.
ces deux angles interceptent le même arc de cercle rouge.
Donc : $mes\widehat{POC} = 2mes\widehat{PBC}$ ou $mes\widehat{PBC} = \frac{1}{2}mes\widehat{POC}$

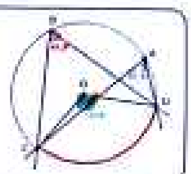


b. Relation entre angles inscrits

Propriété

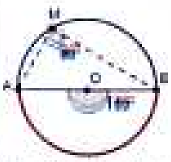
Si deux angles inscrits dans un même cercle interceptent le même arc de cercle alors ils ont la même mesure.

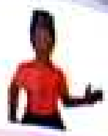
Les angles inscrits $\widehat{PBC}$ et $\widehat{PAC}$ interceptent le même arc de cercle en rouge :
$mes\widehat{PBC} = mes\widehat{PAC}$



c. Cas particulier :
Cercle circonscrit à un triangle rectangle

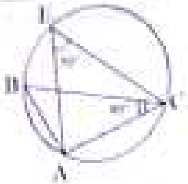
Soient A et B deux points distincts.
Si un point M, distinct de A et B, appartient au cercle de diamètre $[AB]$, alors l'angle $\widehat{AMB}$ est un angle droit.





III- METHODE

• Calcule de la mesure d'un angle dans une situation d'angles inscrits

Exemple		Solution
On considère la figure ci-contre. Calcule mes $\widehat{ABC}$		Les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{AEC}$ sont inscrits dans un même cercle et interceptent le même arc cercle donc ils ont la même mesure. Or : mes $\widehat{AEC} = 30°$, donc : mes $\widehat{ABC} = 30°$
On considère la figure ci-contre. Calcule la mesure de l'angle $\widehat{BAE}$		L'angle inscrit $\widehat{BCE}$ et l'angle au centre $\widehat{BAE}$ interceptent le même arc de cercle donc mes $\widehat{BAE} = 2$ mes $\widehat{BCE}$. Par conséquent mes $\widehat{BAE} = 2 \times 32° = 64°$

REMARQUES

• *Pour démontrer que deux angles ont la même mesure, on peut utiliser :*
« Dans un cercle, deux angles inscrits interceptant un même arc ont la même mesure ».

IV SAVOIR-FAIRE

Savoir-faire 1- Déterminer la mesure d'un angle

Enoncé

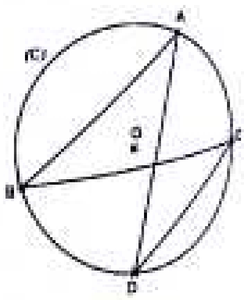
Soit un cercle (C) de centre O. A et B deux points de (C) et J un point de l'arc $\overset{\frown}{AB}$.
On donne : mes $\widehat{AOB} = 74°$
Détermine la mesure de l'angle $\widehat{AJB}$.

Solution commentée

Je détermine la mesure de l'angle $\widehat{AJB}$

Je sais que, dans le cercle (C), l'angle au centre $\widehat{AOB}$ est associé à l'angle inscrit $\widehat{AJB}$.
Or dans un cercle, la mesure de l'angle inscrit aigu est égale à la moitié de celle de l'angle au centre.
Donc : $mes\ \widehat{AJB} = \frac{1}{2}\ mes\ \widehat{AOB}$. D'où $mes\ \widehat{AJB} = \frac{1}{2}\ mes\ \widehat{AOB}$. On a : mes $\widehat{AJB} = 37°$.

Savoir-faire 2- Justifier une égalité de mesure angulaire



Enoncé

On considère la figure ci-contre.
Justifie que les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ADC}$ ont la même mesure.

Solution commentée

Je justifie que les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ADC}$ ont la même mesure.

Je sais que les angles inscrits $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ADC}$ interceptent le même arc $\overset{\frown}{AC}$. Or deux angles inscrits qui interceptent le même arc ont la même mesure,
donc les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ADC}$ ont la même mesure.

V- JE M'EXERCE

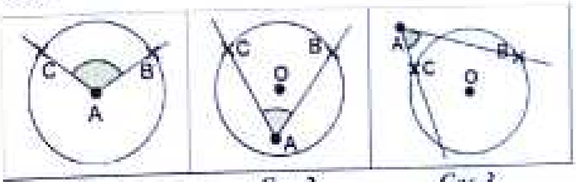
1- Exercices de fixation/ Application

Identifier un angle inscrit dans un cercle angle au centre associée – arc de cercle intercepte

1 Dans chacun des quatre cas suivants, précise si l'angle $\widehat{CBM}$ est inscrit ou non dans le cercle.

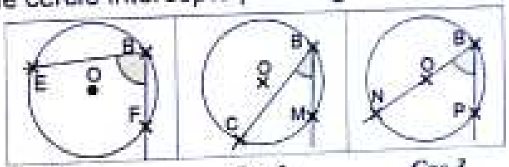
Cas 1 *Cas 2* *Cas 3* *Cas 4*

2 Dans chacun des cas suivants, précise si l'angle $\widehat{BAC}$ marqué est un angle au centre du cercle ou non.



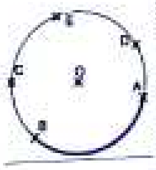
Cas 1 *Cas 2* *Cas 3*

3 Dans chacun des cas suivants, précise l'arc de cercle intercepté par l'angle inscrit marqué.



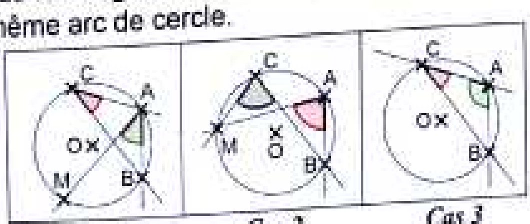
Cas 1 *Cas 2* *Cas 3*

4 Reproduis la figure ci-contre.
Trace les angles inscrits de sommets **C,E** et **D** qui interceptent l'arc de cercle en bleu.



Reconnaître des angles inscrits qui interceptent le même arc.

5 Observe les figures ci-dessous et dis dans quel cas les angles inscrits marqués interceptent le même arc de cercle.

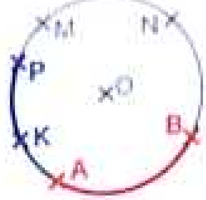


Cas 1 *Cas 2* *Cas 3*

6 On considère la figure ci-contre où les points marqués appartiennent tous au cercle de centre O.

a) Nomme deux angles inscrits qui interceptent l'arc $\overset{\frown}{AB}$ en rouge.

b) Nomme trois angles inscrits qui interceptent l'arc $\overset{\frown}{PK}$ en bleu.



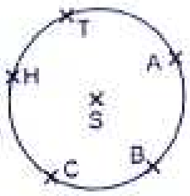
7 On considère la figure ci-contre où les points marqués appartiennent tous au cercle de centre O.

a) Nomme deux angles inscrits qui interceptent le même arc que l'angle au centre $\widehat{AOB}$.

b) Nomme trois angles inscrits qui interceptent le même arc que l'angle au centre $\widehat{PON}$.

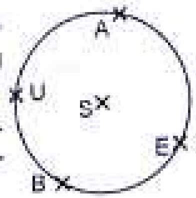
Reconnaître un angle inscrit et un angle au centre associés

8 Sur la figure ci-contre les points **C, H, A** et **T** appartiennent au cercle de centre **S**.
Reproduis le tableau puis complète.



Angles inscrits	$\widehat{CTA}$	$\widehat{ATC}$	$\widehat{TCA}$
Angles au centre associé			

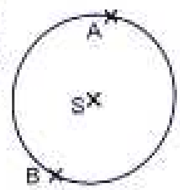
9 Sur la figure ci-contre les points **A, E, B** et **U** appartiennent au cercle de centre **S**.
Reproduis puis complète le tableau ci-dessous par ***vrai*** ou par ***faux***.



Angle inscrit	$\widehat{EAU}$	$\widehat{UAB}$	$\widehat{EUB}$	$\widehat{UEA}$
Intercepte le même arc que l'angle au centre	$\widehat{USE}$ …	$\widehat{ESB}$ …	$\widehat{BSU}$ …	$\widehat{USA}$ …

10 1. Reproduis cette figure ci-contre.

2. Place les points *U et E* sur le cercle de centre *S* de sorte que l'affirmation suivante soit vraie :
Les angles inscrits $\widehat{BAU}$ et $\widehat{BEU}$ interceptent le même arc de cercle $\overset{\frown}{BU}$.



Connaître la propriété relative à un angle inscrit et son angle au centre associé

11 Dans un cercle, l'angle au centre mesure :
a) Le double de l'angle inscrit qui intercepte le même arc.
b) La moitié de l'angle inscrit qui intercepte le même arc.
c) Le tiers de l'angle instrit qui intercepte le meme arc.
Entoure le numéro de la bonne confirmation.

12 Soit $\widehat{BAC}$ un angle inscrit dans un cercle de centre O et $\widehat{BOC}$ l'angle au centre associé.
Parmi les formules ci-dessous entoure celle qui donne la relation entre mesure de l'angle inscrit et celle de son angle au centre associé.

$mes\widehat{BAC} = 2mes\widehat{BOC}$	$mes\widehat{BAC} = mes\widehat{BOC}$	$mes\widehat{BAC} = \frac{1}{2}mes\widehat{BOC}$

13 Soit $\widehat{BAC}$ un angle inscrit dans un cercle de centre O et $\widehat{BOC}$ l'angle au centre associé.
Recopie et complète la formule suivante avec le nombre qui convient : $mes\widehat{BAC} = \cdots mes\widehat{BOC}$

Connaître la propriété relative aux mesures de deux angles inscrits interceptant le même arc.

14 Parmi les formulations ci-dessous, identifie celle qui correspond à la propriété relative à la mesure de deux angles inscrits dans un même cercle interceptant le même arc.

Formulation 1
Si deux angles inscrits dans un même cercle interceptent le même arc de cercle alors la mesure de l'un est le double de la mesure de l'autre.

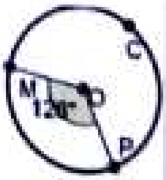
Formulation 2
Si deux angles inscrits dans un même cercle interceptent le même arc de cercle alors la mesure de l'un est égale à la moitié de la mesure de l'autre.

Formulation 3
Si deux angles inscrits dans un même cercle interceptent le même arc de cercle alors ils ont la même mesure.

15 Les angles $\widehat{MNP}$ et $\widehat{MKP}$ sont deux angles inscrits dans un même cercle qui interceptent un même arc de cercle.
Recopie et complète la formule ci-dessous par la relation qui convient : "< ; > et = "
$mes\widehat{MNP} \ldots mes\widehat{MKP}$

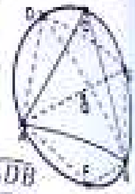
Déterminer la mesure d'un angle

16 Soit le cercle de centre O ci-contre et les points *M, P et C* appartenant à ce cercle. Détermine la mesure de l'angle $\widehat{PCM}$.



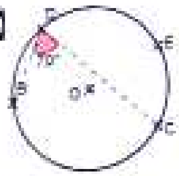
17 Sur la figure ci-contre, tous les points marqués appartiennent au cercle de centre O.
Détermine les mesures des angles $\widehat{BOA}$ et $\widehat{BNA}$.

18 Sur la figure ci-contre le triangle ABC est un triangle équilatéral et tous les points appartiennent au cercle de centre O.



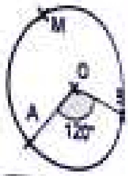
a. Détermine la mesure de l'angle $\widehat{ADB}$
b. Détermine la mesure de l'angle $\widehat{AEB}$
c. Détermine la mesure de l'angle $\widehat{AOB}$

Justifier une égalité de mesure d'angles

19 

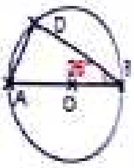
Sur la figure ci-contre, tous les points appartiennent au cercle de centre O. Justifie que $mes\widehat{BEC} = 70°$

20 On considère la figure ci-contre où tous les points marqués appartiennent au cercle de centre O. Justifie que : $mes\widehat{AMB} = 60°$

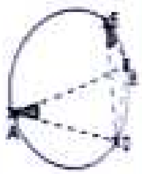


21 On considère la figure ci-contre où tous les points marqués appartiennent au cercle de centre O.
Justifie que: $mes\widehat{AMB} = mes\widehat{ANB}$

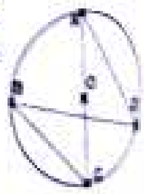
22 Sur la figure ci-contre, les points *B, D et A* sont des points du cercle de centre *O* et [AB] est un diamètre de (C).
Justifie que le triangle BAD est rectangle en D



23 Sur la figure ci-contre, les points A, H, B, E et D appartiennent au cercle (C).
Démontre que :
$mes\widehat{BAD} = mes\widehat{BED}$.

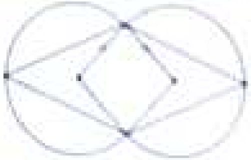


24 On considère la figure ci-contre où les points A, B, C, et D appartiennent au cercle (C) de centre O de diamètre [AC].
1- Justifie que:
$mes\widehat{BCA} = mes\widehat{BDA}$
2- Justifie que les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{CDA}$ sont droits



2- Exercices de renforcement/approfondissement

25 Les cercles (C) et (C') ont pour centres respectifs A et B, et ils ont le même rayon.



1- Justifie que le quadrilatère ABCD est un losange.

2- Justifie les égalités :

a) $mes(\widehat{CAD}) = mes(\widehat{CBD})$; b) $mes(\widehat{CED}) = mes(\widehat{CFD})$.

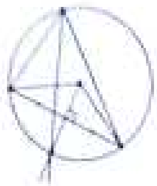
26 Le point A est le centre du cercle (C) circonscrit au triangle BCD. La médiatrice du côté [BD] est sécante au point E avec l'arc BD.

Justifie les égalités :

a) $mes\widehat{BAE} = mes\widehat{DAE}$

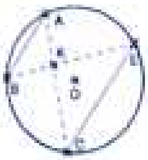
b) $mes\widehat{BAE} = 2mes\widehat{BCE}$

c) $mes\widehat{DAE} = 2mes\widehat{BCE}$.



27 Sur la figure ci-contre, [AB] et $[CE]$ sont des cordes du cercle de centre O à supports parallèles et K le point d'intersection des segments [AC] et [BE].

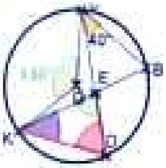
Justifie que : $mes\widehat{ECA} = mes\widehat{BEC}$.



28 On considère la figure ci-contre.

a) Calcule les mesures des angles du triangle KED.

b) Détermine la mesure de l'angle $\widehat{KBC}$.

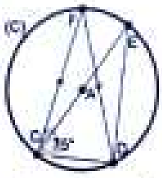


29 FCD est un triangle isocèle en F tel que $\widehat{FCD}$ mesure 75^0.

(C) est le cercle circonscrit au triangle FCD ;

A est le centre du cercle (C) ;

[CE] est un diamètre de (C).



a) Justifie que le triangle EDC est un triangle rectangle.

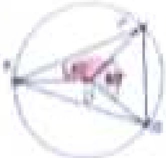
b) Détermine la mesure de l'angle $\widehat{CAD}$

c) Cite un angle inscrit qui intercepte le même arc que l'angle $\widehat{CED}$.

Justifie que l'angle $\widehat{CED}$ mesure 30 degrés.

30 Sur la figure ci-contre, les points B, K et P sont des points du cercle de centre O.

Détermine les mesures des angles du triangle **BKP**



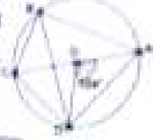
31 Sur la figure ci-contre, les points A, B et C sont alignés de même que

les points E, A et D

Les points B,C,E et D appartiennent au cercle de centre D

Calcule la mesure de l'angle $\widehat{BAE}$.

32 Sur la figure ci-contre, $[AC]$ est un diamètre du cercle de centre O. Les points A,B,C et D appartiennent au cercle (C).



a) Détermine la mesure de l'angle $\widehat{BDA}$.

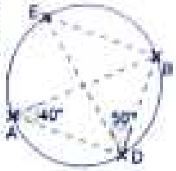
b) Justifie que : $mes\widehat{ABC} = 90^0$

c) Détermine la mesure de l'angle $\widehat{CAD}$.

d) Déduis de ce qui précède la mesure de $\widehat{CBD}$.

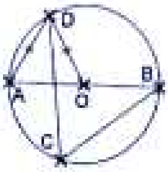
33 Sur la figure ci-contre, les points A, B, E et D appartiennent au cercle (C).

Démontre que le triangle EBD est rectangle en B.



34 Sur la figure ci-contre; les points A, B, C et D appartiennent au cercle de centre O.

Détermine les mesures des angles inscrits $\widehat{DAB}$, $\widehat{DOB}$ et $\widehat{DCB}$.



35 Soit ABC un triangle, dont le cercle circonscrit a pour centre O et pour rayon R.

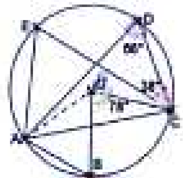
On donne : $mes\widehat{BAC} = 45^0$.

Démontre que : $BC = R\sqrt{2}$.

3- Situations d'évaluation

36 Un artisan de Waraniéné a reçu d'un client, une commande de nappe de table circulaire avec les contraintes précisées par la figure ci-dessous. Il devra réaliser sur une toile circulaire de diamètre 3 mètres, une figure respectant les exigences du client afin d'y graver les images. Seulement après analyse du schéma fourni, il conclut qu'il lui est impossible de satisfaire le client parce que les mesures des angles $\widehat{AOB}$, $\widehat{EAD}$, $\widehat{BAC}$ et $\widehat{AEC}$ ne sont pas données.

L'artisan te sollicite pour l'aider à déterminer les différentes mesures afin qu'il ne perdent pas ce marché.

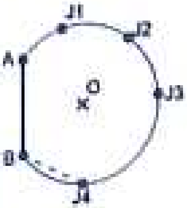


1) Enonce la définition d'un angle inscrit dans un cercle.

2) Enonce la définition d'un angle au centre.

3) Reponds aux préocupations de l'artisan

37 Dans le cadre de la préparation des championnats interclasses, le coach d'une classe de troisième explique à ses joueurs à partir du schéma ci-contre où les points A et B représentent les pieds des poteaux de but, le positionnement des joueurs pour l'exercice de tir de coup franc du jour. Tous les joueurs de façon unanime estiment que les joueurs en position J1 et J4 sont défavorisés car ils ont les plus petits angles de tir.



Le coach affirme que tous les joueurs tirent au but avec le même angle de tir de chaque position.

Pour les en convaincre, il faut prouver l'égalité des mesures des différents angles de tirs.

1) Donne la propriété relative aux mesures d'un angle inscrit aigu de l'angle au centre associé.

2) Qui du coach et des joueurs à raison? Justifie ta reponse.

VI- RENDEZ-VOUS DES CURIEUX !

MESUREURS D'ANGLE

Une organisation historique en découle directement pour les rapporteurs circulaires, mais on ne sait pas la filiation des outils pour le rapporteur rectiligne (enquête à faire auprès des concepteurs contemporains pour deux outils).

Les usages sont nombreux :

Mesurer ou construire sur un terrain : implanter des jardins des bâtiments, travail de l'architecte extérieur arpenter pour dresser les plans : travail de l'arpenteur puis du géomètre.

Mesurer ou construire pour d'architecture intérieure - métiers du bâtiment, du bois, de la métallerie mesurer des **angles** pour la balistique, métier de l'armurerie mesurer directement (accessible) ou indirectement (**angle** inaccessible ou longueur inaccessible) les longueurs au service des angles, les angles au service des longueurs.

Un classement immédiat dans la conception des outils à mesurer les angles.

<u>Par lecture directe de l'ouverture de l'angle</u> :

Fausse-équerre graduée ou récipiangle E, trigomètre, quadrant, sextant, octant (à vérifier)

<u>Par lecture « indirecte » de l'angle</u> :

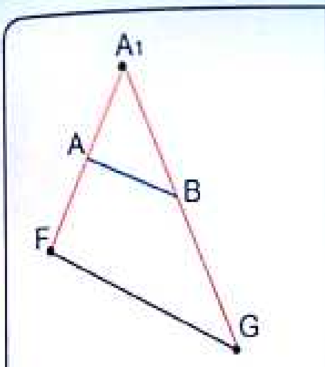
Graphomètre (angle opposé par le sommet), récipiangle C (angles d'un losange, angle alterne-interne, angle opposé par le sommet, angle correspondant, angle moitié).

7 Vecteurs

Notions essentielles :

- Caractéristiques d'un vecteur
- Somme de vecteurs
- Différence de deux vecteurs
- Produit d'un vecteur par un nombre réel
- Vecteurs colinéaires
- Vecteurs directeurs d'une droite
- Vecteurs orthogonaux.

SITUATION D'APPRENTISSAGE



Description

Les segments **[AF]** et **[AG]** sont articulés au point A_1, les points A *et* B sont les milieux respectifs des segments **[A_1F]** et **[A_1G]**. Les extrémités F *et* G sont libres.

Mode d'emploi

Pour obtenir un morceau de bois de longueur la moitié de la longueur d'un morceau de bois donné, il suffit de faire coïncider les extrémités F *et* G avec les extrémités du morceau et on obtient un morceau représenté par le segment **[AB]** et sa longueur est la moitié de la longueur du segment **[FG]**.

La figure ci-dessus est le schéma d'un outil qu'un menuisier utilise pour découper un morceau de bois de longueur la moitié de la longueur d'un morceau de bois donné.
Un fils de ce menuisier, élève en classe de troisième, a essayé à maintes reprises de comprendre le fonctionnement de cet instrument. Cet élève et les membres de son groupe de travail recourent à leur professeur de maison qui affirme qu'avec les connaissances sur les vecteurs on peut aisément justifier l'exactitude de cet instrument.
Ces derniers décident alors d'approfondir leurs connaissances relatives aux opérations sur les vecteurs et sur les relations possibles entre plusieurs vecteurs.

I- ACTIVITES DE DECOUVERTE

1- Identifier la différence de deux vecteurs

Activité 1

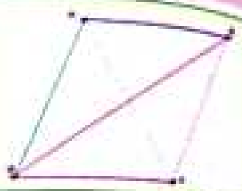
$\vec{AB}$ et $\vec{CD}$ étant deux vecteurs.
On pose : $\vec{AB} - \vec{CD} = \vec{AB} + (-\vec{CD})$.
Justifie que la définition $\vec{AB} - \vec{CD}$ a un sens, c'est-à-dire qu'il existe un seul vecteur égal à $\vec{AB} + (-\vec{CD})$

Je fais le point de l'activité

Soit $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$ deux vecteurs deux quelconques.
On appelle *différence* du vecteur $\vec{AB}$ et du vecteur $\vec{CD}$ le vecteur noté $\vec{AB} - \vec{CD}$ défini par : $\vec{AB} - \vec{CD} = \vec{AB} + (-\vec{CD})$.

J'évalue mes acquis

1. Sur la figure ci-contre, ADCB est un parallélogramme.
   Identifie le vecteur $\vec{AC} - \vec{CD}$.
2. Observe la figure ci-contre, identifie le vecteur $\vec{BC} - \vec{AC}$.



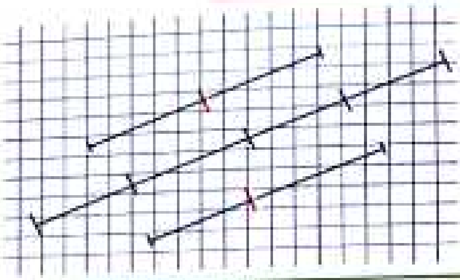
2- Identifier le produit d'un vecteur par un nombre réel

Je fais le point de l'activité

$2\vec{AB}$ **est le produit du vecteur** $\vec{AB}$ **par** le nombre réel 2.

Activité 2

1. Exprime les vecteurs $\vec{CD}$ et $\vec{EF}$ en fonction du vecteur $\vec{AB}$.
2.a) Exprime la longueur de $\vec{CD}$ en fonction de celle de $\vec{AB}$.
b) Exprime la longueur de $\vec{EF}$ en fonction de celle de $\vec{AB}$.



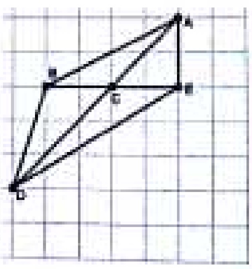
J'évalue mes acquis

Observe la figure ci-dessus puis :
a) Cite un vecteur égal au vecteur $3\vec{MP}$.
b) Cite un vecteur d'origine R égal au vecteur $-2\vec{QR}$.

3- Connaître les propriétés du produit d'un vecteur par un nombre réel

Activité 3

1. On considère la figure ci-contre.
   Construis les vecteurs
   en prenant le point B comme origine;
   Dis ce que tu constates après la construction.
2. Soit $\vec{AB}$ un vecteur.
   On donne les points M et N tels que :
   $\vec{AM} = 3\vec{AB}$ et $\vec{AN} = 2\vec{AB}$
   Justifie que : $\vec{AM} + \vec{AN} =$
3. Soit un vecteur.
   On donne les points P et Q tels que : $\vec{EP} = 4\vec{EF}$ et $\vec{EQ} = \frac{1}{2}\vec{EP}$
   Exprime le vecteur $\vec{EQ}$ en fonction du vecteur $\vec{EF}$.



Je fais le point de l'activité

Soit A, B, C et D quatre points du plan. On a :
a) $3\vec{AB} + 3\vec{CD} = 3(\vec{AB} + \vec{CD})$
b) $5\vec{AB} - 3\vec{CD} = (5-3)\vec{AB}$
c) $2(4\vec{AB}) = (2 \times 4)\vec{AB}$

J'évalue mes acquis

Recopie et complète :

a) $5\overrightarrow{EF}+5\overrightarrow{GH}=\ldots(\ldots+\ldots)$

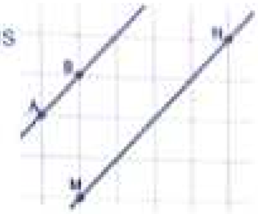
b) $-7\overrightarrow{EF}+3\overrightarrow{EF}=\ldots\overrightarrow{EF}$

c) $\frac{3}{8}\left(\frac{4}{-3}\overrightarrow{EF}\right)=\ldots\overrightarrow{EF}$

4- Identifier les vecteurs colinéaires

Activité 4

Sur la figure ci-contre, les droites (AB) et (MN) sont parallèles. Détermine les directions des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{MN}$



Je fais le point de l'activité

Deux vecteurs sont colinéaires lorsqu'ils ont la même direction ou lorsque l'un d'eux est le vecteur nul.

J'évalue mes acquis

Sur la figure ci-contre, les points A,B,C,D,E,F et G sont alignés. Cite trois vecteurs colinéaires au vecteur $\overrightarrow{GH}$

5- Identifier les vecteurs directeurs d'une droite

Activité 5

L, M, N, O, P, K et A sont des points du plan tels que : $\overrightarrow{MN}=3\overrightarrow{AK}$; $\overrightarrow{OP}=\frac{2}{3}\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{PL}=-2\overrightarrow{KA}$.

Identifie les vecteurs colinéaires au vecteur $\overrightarrow{MN}$.

Je fais le point de l'activité

- Les vecteurs $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{AK}$, $\overrightarrow{PL}$, et $\overrightarrow{MN}$ sont colinéaires au vecteur $\overrightarrow{MN}$.
- $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{AK}$, $\overrightarrow{PL}$ et $\overrightarrow{MN}$ sont dit vecteurs directeurs de la droite (MN).

J'évalue mes acquis

Complète la phrase ci-dessous par les mots ou groupe de mots ; "*vecteur directeur*" ; "(AB)" ; "*appartiennent*" ; "*la direction*";"(D)" qui conviennent ;

A et B sont deux points du plan et *(D)* une droite.

$\overrightarrow{AB}$ est un .... de (D) lorsque................. est parallèle à ....

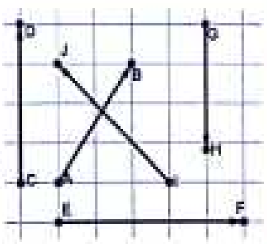
ou lorsque A et B sont.................à (D).

6- Identifier les vecteurs orthogonaux

Activité 6

On considère la figure ci-contre.

En t'aidant du quadrillage, identifie les vecteurs qui sont vecteurs directeurs de droites perpendiculaires.



Je fais le point de l'activité

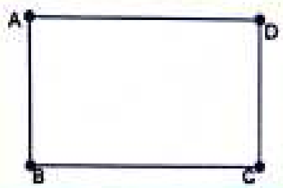
- $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{HG}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont respectivement des vecteurs directeurs des droites perpendiculaires (CD) et (EF);(HG) et (EF) .
- Les vecteurs $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont dits orthogonaux.

J'évalue mes acquis

Sur la figure ci-contre, le quadrilatère *ABCD* est un rectangle. Réponds par *vrai* ou par *faux* à chacune des affirmations suivantes :

a- Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont orthogonaux.

b- Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont orthogonaux.



7- Identifier la propriété des vecteurs de même direction

Activité 7

M, N, O, P, K et A sont des points du plan tels que $\overrightarrow{MN} = 2\overrightarrow{AK}$; $\overrightarrow{OP} = -3\overrightarrow{MN}$

1. Cite des vecteurs de même direction.
2. *ABCD* est un trapèze rectangle en *A* tel que $AB = 3\ cm$ et $CD = 6\ cm$.
   Exprime le vecteur [illegible] en fonction du vecteur $\overrightarrow{AB}$

Je fais le point de l'activité

Soit A, B, C et D quatre points du plan. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont la même direction si et seulement si il existe un nombre non nul k tel que $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{CD}$

J'évalue mes acquis

Réponds par vrai lorsque l'affirmation est vraie ou par faux lorsque l'affirmation est fausse.

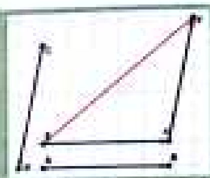
a) Deux vecteurs colinéaires ont la même direction.
b) Deux vecteurs ont la même direction lorsque l'un d'eux s'exprime en fonction de l'autre.
c) Deux vecteurs opposés ont la même direction.
d) Le vecteur nul à même direction que tous les vecteurs .

II- RESUME DE COURS

1- Différence de deux vecteurs

Définition

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont deux vecteurs quelconques.
On appelle *différence* du vecteur $\overrightarrow{AB}$ et du vecteur $\overrightarrow{CD}$, le vecteur noté $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD}$ défini par :
$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}+(-\overrightarrow{CD})$.



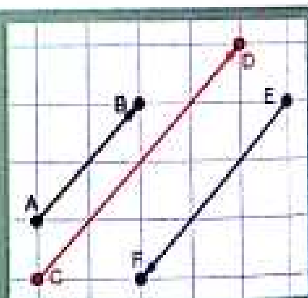
$\overrightarrow{EK} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{KF} = □\overrightarrow{CD}$ donc $\overrightarrow{AB} □ \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF}$

2- Produit d'un vecteur par un nombre réel

Définition

$\overrightarrow{AB}$ est un vecteur différent du vecteur nul et k un nombre réel non nul.
On appelle ***produit*** du vecteur $\overrightarrow{AB}$ par le nombre réel k, le vecteur noté $k\overrightarrow{AB}$
- de même direction que $\overrightarrow{AB}$
- de même sens que $\overrightarrow{AB}$, si $k > 0$;
  et de sens contraire, si $k < 0$
- de longueur égale à k.AB

On pose : $0.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0}$.



$\overrightarrow{CD} = k\overrightarrow{AB}$ avec $k > 0$ et $\overrightarrow{EF} = k\overrightarrow{AB}$ avec $k < 0$

Propriétés

Soient $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ deux vecteurs et a et b deux nombres réels.

$1.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}$

$a.(b.\overrightarrow{AB}) = (ab).\overrightarrow{AB}$

$(a+b)\overrightarrow{AB} = a.\overrightarrow{AB} + b.\overrightarrow{AB}$

$a(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}) = a.\overrightarrow{AB} + a.\overrightarrow{CD}$

3- Vecteurs colinéaires

Définition

Deux vecteurs non nuls $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires signifie qu'ils ont la même direction, ou que l'un d'eux est le vecteur nul.

Propriétés

A, B, C et D étant quatre points deux à deux distincts du plan

1. Dire que les droites (AB) et (CD) sont parallèles revient à dire que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires
2. Dire que les points A, B et C sont alignés revient à dire que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires

4- Vecteurs orthogonaux

Définition

Soient $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ deux vecteurs non nuls. $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont orthogonaux lorsque les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires.

Par convention, le vecteur nul est orthogonal à tout vecteur

Notation : $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont orthogonaux se note $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD}$

5- Vecteurs directeurs d'une droite

Définition

Soient (D) une droite, A et B deux points de (D).
On appelle vecteur directeur de (D) tout vecteur non nul colinéaire au vecteur $\overrightarrow{AB}$.

III- METHODE

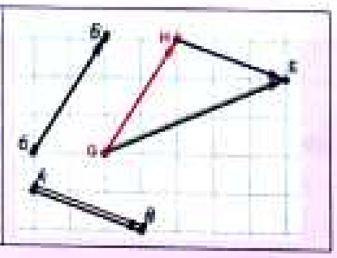
• Comment construire la somme de deux vecteurs. (Vu en 4ème)

A partir d'un point origine, on construit un vecteur égal à l'un des vecteurs puis à partir de l'extrémité du vecteur construit, on construit un vecteur égal à l'autre vecteur. On obtient un vecteur qui est la somme des deux vecteurs;

Exemple

construis $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$

A partir du point G, on construit $\overrightarrow{GH} = \overrightarrow{CD}$
A partir du point H, on construit $\overrightarrow{HE} = \overrightarrow{AB}$
Le vecteur $\overrightarrow{GE}$ *est la somme des vecteurs* $\overrightarrow{CD}$ *et* $\overrightarrow{AB}$.



Scanned by CamScanner

IV- SAVOIR-FAIRE

Savoir-faire 1- Construire le point M tel que $\overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{AB}$ où k est un nombre réel non nul et le vecteur $\overrightarrow{AB}$ donné.

Enoncé

$[AB]$ est un segment de longueur de longueur 6 cm.

Construis le point M tel que $\overrightarrow{AM}=\frac{3}{7}\overrightarrow{AB}$.

Solution commentée

Je construis le point M tel que $\overrightarrow{AM}=\frac{3}{7}\overrightarrow{AB}$.

$\overrightarrow{AM}=\frac{3}{7}\overrightarrow{AB}$ signifie que :

- les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ ont le même sens ;
- les points A, B et M sont alignés ;
- $AM=\frac{3}{7}AB$;

Programme de construction

- Je trace un segment $[AB]$ de longueur 6 cm ;
- Je trace une demi-droite $[Ax)$ de support sécant à (AB)
- Je place les points I et J sur cette demi-droite tels que AI = 3 cm et AJ = 7 cm
- Je trace la parallèle à la droite (BJ) passant par le point I qui coupe (AB) en M .

Savoir-faire 2- Réduire des sommes de vecteurs

Enoncé

Réduis la somme $\overrightarrow{OM}$ de vecteurs tels que :

$$\overrightarrow{OM}=2(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})-3\left(2\overrightarrow{AB}-\frac{5}{6}\overrightarrow{AC}\right)$$

Solution commentée

Je réduis la somme de vecteurs.

$\overrightarrow{OM}=2\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}-6\overrightarrow{AB}+\frac{5}{2}\overrightarrow{AC}=(2-6)\overrightarrow{AB}+\left(2+\frac{5}{2}\right)\overrightarrow{AC}$. Donc : $\overrightarrow{OM}=-4\overrightarrow{AB}+\frac{9}{2}\overrightarrow{AC}$.

Savoir-faire 3- Démontrer la colinéarité de deux vecteurs

Enoncé

ABC est un triangle.

On considère les points L et K tels que : $\overrightarrow{AL}=-\overrightarrow{AB}+5\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BK}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}$.

Démontre que les vecteurs $\overrightarrow{AL}$ et $\overrightarrow{BK}$ sont colinéaires.

Solution commentée

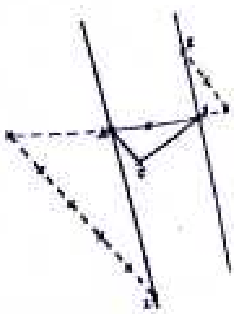
Je démontre que les vecteurs $\overrightarrow{AL}$ et $\overrightarrow{BK}$ sont colinéaires

Je cherche à trouver un nombre réel k tel que $\overrightarrow{BK}=k\overrightarrow{AL}$

On a : $\overrightarrow{BK}=-\frac{2}{5}\left(-\overrightarrow{AB}+5\overrightarrow{AC}\right)$

Or : $\overrightarrow{AL}=-\overrightarrow{AB}+5\overrightarrow{AC}$, donc : $\overrightarrow{BK}=-\frac{2}{5}\overrightarrow{AL}$

D'où : $k=-\frac{2}{5}$. Ainsi les vecteurs $\overrightarrow{AL}$ et $\overrightarrow{BK}$ sont colinéaires.



Savoir-faire 4- Démontrer l'alignement de points

Enoncé

On donne trois points A, B et C tels que $-\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{BC}=3\overrightarrow{AC}$

Démontre que les points A, B et C sont alignés

Solution commentée

Je démontre que les points A, B et C sont alignés

Je cherche à trouver un nombre réel x tel que : $\overrightarrow{AB}=x\overrightarrow{AC}$

D'après l'égalité de Chasles, on a : $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}$

Donc de l'égalité : $-\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{BC}=3\overrightarrow{AC}$, on a : $-\overrightarrow{AB}-2\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right)=3\overrightarrow{AC}$

$-\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{BA}-2\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AC}$, donc : $-\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AC}+3\overrightarrow{AC}=5\overrightarrow{AC}$, donc : $\overrightarrow{AB}=5\overrightarrow{AC}$. D'où : $k=5$

Par conséquent les points A, B et C sont alignés

Savoir-faire 5- Démontrer le parallélisme de droites

Enoncé

Soit ABC un triangle.

Soient les points D et E tels que : $\overrightarrow{BD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{EA}=\frac{5}{3}\overrightarrow{CA}$.

Démontre que les droites (DE) et (BC) sont parallèles

Solution commentée

Je démontre que les droites (DE) et (BC) sont parallèles

Je cherche à trouver un nombre réel y tel que $\overrightarrow{DE}=y\overrightarrow{BC}$.

D'après l'égalité de Chasles, on a : $\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AE}$.

$\overrightarrow{DE}=-\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{EA}$. Or : $\overrightarrow{BD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{EA}=\frac{5}{3}\overrightarrow{CA}$,

donc, on a : $\overrightarrow{DE}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}-\frac{5}{3}\overrightarrow{CA}$.

$\overrightarrow{DE}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BA}+\frac{5}{3}\overrightarrow{AC}=\left(\frac{2}{3}+1\right)\overrightarrow{BA}+\frac{5}{3}\overrightarrow{AC}$, donc : $\overrightarrow{DE}=\frac{5}{3}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})$. D'où : $\overrightarrow{DE}=\frac{5}{3}\overrightarrow{BC}$.

D'où : $y=\frac{5}{3}$ et par conséquent les droites (DE) et (BC) sont parallèles.

Savoir-faire 6 : utiliser les vecteurs dans une démonstration

Enoncé

ABCD est parallelogramme et M le point tel que : $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{DA}$.

Démontre que : $\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{AC}$.

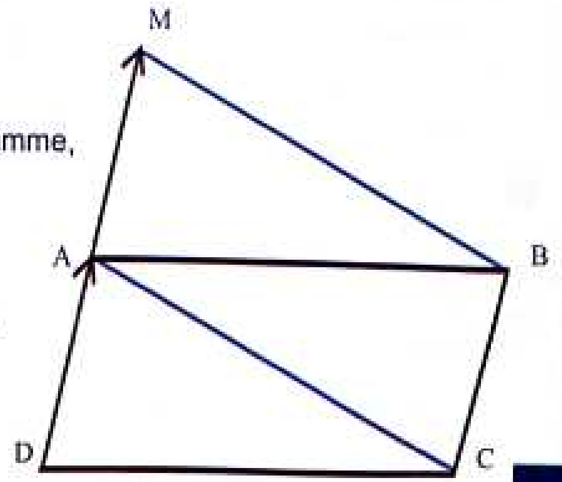
Solution commentée

Je démontre que $\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{AC}$.

- Le quadrilatère ABCD étant un parallélogramme, on a : $\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{DA}$. Par hypothèse : $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{DA}$;

On en déduit que : $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{CB}$.

- Puisque $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{CB}$, le quadrilatère AMBC est un parallélogramme et on a : $\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{AC}$.

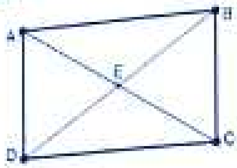


V- JE M'EXERCE

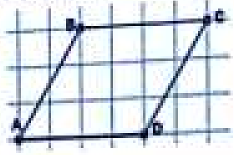
1- Exercices de fixation/ Application

Identifier la différence de deux vecteurs

1 Sur la figure ci-contre ABCD est un rectangle. Identifie le vecteur $\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{AD}$.



2 Le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme.



Réduis chacune des écritures suivantes :

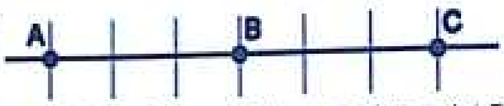
1- $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC}$

2- $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB}$

3- $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$

Identifier le produit d'un vecteur par un nombre réel

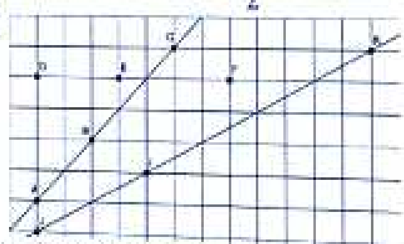
3



On considère la figure ci-dessus où le point B est le milieu du segment [AC].
Parmi les égalités ci-dessous, recopie sur ton cahier celle qui est vraie :

• $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB}$; • $\overrightarrow{BA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$; • $\overrightarrow{CB} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

4

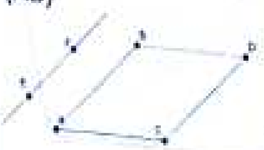


Observe la figure ci-dessus.
En utilisant les nombres suivants : $\frac{5}{2}$; -2; $\frac{4}{3}$; $\frac{1}{2}$; $-\frac{1}{3}$, complète les égalités de vecteurs ci-dessous pour qu'elles soient vraies : $\overrightarrow{AB} = ...\overrightarrow{AC}$ $\quad \overrightarrow{JK} = ...\overrightarrow{IK}$

$\overrightarrow{EF} = ...\overrightarrow{ED}$ $\quad \overrightarrow{IJ} = ...\overrightarrow{JK}$.

Identifier des vecteurs directeurs d'une droite

5 Sur la figure ci-dessous, ABDC est un parallélogramme. La droite (EF) est parallèle à la droite (AB)



Parmi les vecteurs ci-dessous entoure les deux qui sont des vecteurs directeurs de la droite (EF).

1) $\overrightarrow{AD}$; 3) $\overrightarrow{DA}$;
2) $\overrightarrow{CD}$; 4) $\overrightarrow{CB}$

6 Soit un point A donné et $\overrightarrow{BC}$ un vecteur non nu[l]
Réponds par Vrai (V) ou par Faux (F) à chacun[e] des affirmations ci-dessous :

1- Il existe plusieurs droites passant par A et de vecteur directeur $\overrightarrow{BC}$.

2- Il existe une seule droite passant par A et de vecteur directeur $\overrightarrow{BC}$.

3- Il existe une seule droite de vecteur direc-teur $\overrightarrow{BC}$.

Connaître les propriétés relatives au produit d'un vecteur par un nombre réel

7 On considère trois points A, B et C ; k et t deux nombres réels. Complète les égalités ci-dessous : $k(t\overrightarrow{AB}) = \cdots\overrightarrow{AB}$; $k\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AC} = k...$
$k\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AB} = \cdots\overrightarrow{AB}$

8 A, B, C et D sont quatre points tels que : $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{CD}$.
Parmi les affirmations ci-dessous entoure celle qui est vraie :

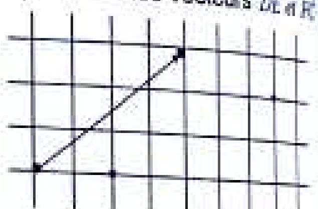
1- A, B, C et D sont donc alignés.

2- **ABCD** est donc un parallélogramme.

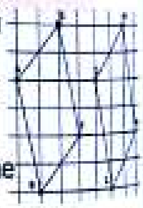
3- Les droites (AB) et (CD) sont donc parallèles.

Représenter des vecteurs égaux

9 Reproduis et représente les vecteurs $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{FC}$ tels que :
$\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AB}$ et
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{FC}$



10 La figure ci-contre est formée de parallélogrammes juxtaposés.



a) Nomme un vecteur égal au vecteur $\overrightarrow{DC}$.

b) Nomme trois vecteurs égaux au vecteur $\overrightarrow{AE}$

c) Nomme un vecteur d'origine A égal au vecteur $\overrightarrow{FG}$.

d) Nomme un vecteur égal au vecteur $-\overrightarrow{GH}$

Connaître la propriété de vecteurs de même direction

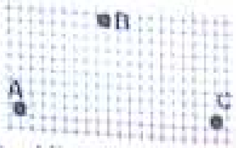
11 Réponds par Vrai (V) ou par Faux (F) à chacune des affirmations contenues dans le tableau ci-dessous :

N°	Affirmations	Réponse
1	Deux vecteurs directeurs d'une droite ont la même direction	
2	Deux vecteurs de même direction ont toujours le même sens	
3	Deux vecteurs de même direction ont toujours la même longueur	
4	Deux vecteurs colinéaires ont la même direction	

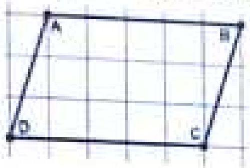
12 Soient *M, N et P* trois points du plan.
Complète l'affirmation ci-dessous avec l'expression qui convient :
« ont le même sens » ; « ont la même longueur » ; « ont la même direction »
Si $\overrightarrow{MN} = -2\overrightarrow{MP}$ alors $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{MP}$

Représenter une somme de deux ou trois vecteurs

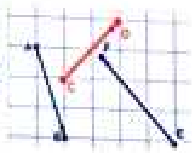
13 On considère la figure ci-dessous
1- Reproduis sur une feuille quadrillée les points *A, B et C*.
2- Construis le vecteur $2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$



14 Sur la figure ci-dessous, ABCD est un parallélogramme.
Nomme un vecteur égal à $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$
Nomme un vecteur égal à $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}$
Nomme un vecteur égal à $-\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BC}$



15 Reproduis la figure ci-contre sur une feuille quadrillée.
1- Construis un vecteur à $2\overrightarrow{AB}$
2- Construis un vecteur sommes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{EF}$



16 Soient *A, B, C* trois points non alignés du plan et *D et E* des points tels que :
$\overrightarrow{AD} = -2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$
Réalise une figure.

Réduire des sommes de vecteurs

17 Le quadrilatère *ABCD* est un parallélogramme.
Réduis chacune des écritures suivantes :
1- $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC}$
2- $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB}$
3- $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$

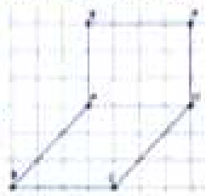
18 Réduis l'écriture de chacun des vecteurs ci-dessous :
1- $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB}$
2- $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}$
3- $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DB}$

19 *C, M, N et P* sont des points du plan.
Réduis les sommes de vecteurs ci-dessous.
1- $3\overrightarrow{MN} + 3\overrightarrow{NP}$
2- $3\overrightarrow{BP} + \overrightarrow{CP} - 4\overrightarrow{BP}$
3- $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{RP} - \overrightarrow{KQ} - \overrightarrow{RK}$

20 Soient *E, F et G* trois points du plan.
Démontre les égalités suivantes
1- $\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{GE} = \vec{0}$
2- $\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{GE} - \overrightarrow{GF} = \vec{0}$
3- $\overrightarrow{EG} + \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{EF} = 2\overrightarrow{EG}$

Démontrer la colinéarité de deux vecteurs

21 La figure ci-dessous est formée de deux parallélogrammes juxtaposés.
1- Justifie que les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont égaux
2- Justifie que les vecteurs $\overrightarrow{EB}$ et $\overrightarrow{FC}$ sont égaux



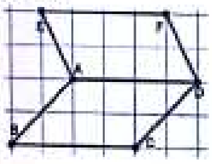
22 *M, N et P* sont trois points du plan. *N' et P'* sont deux points du plan tels que :
$$\overrightarrow{MN'} = 2\overrightarrow{MN} \text{ et } \overrightarrow{MP'} = 2\overrightarrow{MP}.$$
Démontre que les vecteurs $\overrightarrow{NP}$ et $\overrightarrow{N'P'}$ sont colinéaires.

Démontrer l'alignement de points

23 1- *ABC* est un triangle. On considère les points *P* et *Q* tels que : $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AQ}$
Démontre que les points *A, P et Q* sont alignés.
M ; N et P sont trois points non alignés.
2- On considère les *A et B* tels que :
$\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{PM} - 2\overrightarrow{PN}$ et $\overrightarrow{PB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{PM} - \overrightarrow{PN}$
Démontre que les points *A, B et P* sont alignés.

Démontrer le parallélisme de droites

24 La figure ci-dessous est formée de deux parallélogrammes *BCDA et ADFE*.
Démontre que les droites *(EB)* et *(FC)* sont parallèles



2- Exercices de renforcement/approfondissement

25 Soit *ABC* un triangle. On considère les points *I, J et K* tels que : $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$
$\overrightarrow{JC} = 2\overrightarrow{JA}$ et $\overrightarrow{KB} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{KC}$
Démontre que les points *I, J et K* sont alignés.

26 Soit *ABCD* un parallélogramme. On considère les points *M et N* tels que :
$\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AN} = 3\overrightarrow{AD}$
Démontre que les points *C, M et N* sont alignés

27 Soit *ABCK* un parallélogramme. Soit *I* le milieu de [AB] et *P* le point tel que : $\overrightarrow{IP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{IK}$.
Démontre que les points *A, P et C* sont alignés.

28 Traduis par une égalité vectorielle les phrases suivantes :

a) $MNPQ$ est un parallélogramme.
b) O est le centre du carré $ABCD$.
c) M est un point de la droite (EF).
d) Le point G est le milieu du segment $[AB]$.

29 Soit A, B, C, D, O, F et G des points du plan.
Démontre chacune des égalités suivantes :

1- $\vec{AB} - \vec{DC} + \vec{DA} = \vec{CB}$
2- $2\vec{OA} + \vec{AC} - \vec{OC} = \vec{CB}$
3- $\vec{FG} - (\vec{FA} + \vec{FB}) - (\vec{AB} - \vec{GB}) = \vec{BF}$
4- $-\vec{AB} + \vec{BC} - \vec{CA} + 3(\vec{AB} - \vec{AC}) - 2\vec{CB} = \vec{BC}$

30 On considère un quadrilatère ABCD et les points T et R tels que : $\vec{BT} = \frac{1}{2}\vec{AB}$ et $\vec{AR} = 2\vec{AD}$

1- Juste que : a. $\vec{CT} = \frac{1}{2}\vec{AB} - \vec{BC}$

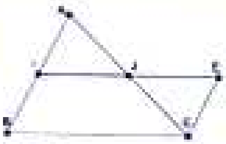
b. $\vec{CR} = 2\vec{AD} - \vec{DC}$

2- Démontre que si $ABCD$ est un parallélogramme alors les points C, T et R sont alignés.

3- Situations d'évaluation

31 Un élève a manqué le cours de mathématique sur les propriétés relatives à la droite des milieux dans un triangle. Pour se mettre à jour, il prend le cahier de son voisin qui malheureusement a mélangé les différentes étapes d'une démonstration faite lors de cette séance.

Cet élève doit remettre les sept étapes du raisonnement dans le bon ordre afin d'éviter une sanction de la part de son professeur qui a promis contrôler les cahiers au prochain cours.



Sur la figure ci-contre, AICE est un parallélogramme, le point I est le milieu du coté [AB] du triangle ABC.

Démontre que la droite (IJ) est parallèle à la droite (BC) et $\vec{IJ} = \frac{1}{2}\vec{BC}$

Solution

- d'autre part I est milieu de [AB] donc
- De (I) et (II) on déduit $\vec{EC} = \vec{IB}$, on en déduit $IECB$ est un parallélogramme et
- On a montré $\vec{IE} = \vec{BC}$ donc $(IE)//(BC)$ et comme $J \in (IE)$ donc $(IJ)//(BC)$.
- Par hypothèse on a :
d'une part $AICE$ est un parallélogramme donc $\vec{AI} = \vec{EC}$
- De l'hypothèse $AICE$ est un parallélogramme, on déduit I milieu de [IE] donc $\vec{IE} = 2\vec{IJ}$
- Finalement nous avons $(IJ)//(BC)$ et $IJ = \frac{1}{2}BC$
- Comme $\vec{IE} = \vec{BC}$, alors $\vec{BC} = 2\vec{IJ}$
donc $BC = 2IJ$.

1. Énonce la propriété relative à la cratérisation vectorielle du milieu d'un segment.
2. Mets les numéros de 1 à 7 pour que les étapes de la démonstration soient dans le bon ordre.

VI- RENDEZ-VOUS DES CURIEUX !

« Vecteur » vient du latin « vehere » (conduire, transporter)
Le mot a été introduit en 1925 et la notation en 1920.
A l'origine des vecteurs, un italien, ***Giusto Bellavitis*** (1803-1880) qui les désignait comme segments équipollents.

Michel Chasles (Fr, 1793-1880)
La relation n'est pas de lui, mais nommée ainsi en hommage à ses travaux sur les vecteurs.
Homme naïf, on raconte qu'il fut ruiné en achetant de fausses lettres. *(Jeanne d'arc à sa mère, Vercingétorix à César)*

8 Equations et Inéquations dans $\mathbb{R}$

Notions essentielles :

- Equations de types : $ax + b = 0$; $ax + b = cx + d$; $(ax + b)(cx + d) = 0$
- Système de deux équations du premier degré dans $\mathbb{R}$
- Inéquations du type : $ax + b \geq cx + d$; $ax + b \geq 0$; $ax + b > 0$; $ax + b < cx + d$
- Résoudre des problèmes du premier degré dans $\mathbb{R}$

SITUATION D'APPRENTISSAGE

Pour peindre les murs des bureaux des éducateurs de niveaux dans un lycée, le peintre envisage d'utiliser des bidons de 5 L qui couvrent une aire de 12,5 m².
Le COGES dudit établissement souhaite que la quantité totale de peinture utilisée soit inférieure à 188 L et que l'aire totale couverte soit supérieure à 4,38 m².
Embarrassé, le COGES sollicite des élèves de 3ème dont tu fais partie pour déterminer le nombre de bidons de 5 L utilisés.
Ces élèves décident de s'informer pour répondre aux exigences du COGES.

I- ACTIVITES DE DECOUVERTE

1- Résoudre des inéquations de type : $ax + b = 0$

Activité 1

1- Deux élèves A et B ont résolu l'équation suivante : $x - 5 = 3$

Voici une reproduction de leurs copies

Résolution	
Elève A	Elève B
$x - 5 = 3$ $x - 5 + 5 = 3 + 5$ $x = 8$ La solution de l'équation est 8	$x - 5 = 3$ $x = 3 + 5$ $x = 8$ La solution de l'équation est 8

Dis si la démarche de chaque élève est correcte, puis justifie les différentes étapes utilisées par chacun d'eux.

2- Voici les copies de deux autres élèves, qui eux aussi, devraient résoudre des équations

Résolution	
Elève C	Elève D
$\frac{1}{4}x = \frac{9}{8}$ $\frac{4}{3} \times \frac{1}{4}x = \frac{9}{8} \times \frac{4}{3}$ $x = \frac{3}{2}$ La solution de l'équation est $\frac{3}{2}$	$7x = 21$ $x = 21 \times \frac{1}{7}$ $x = \frac{3 \times 7}{7}$ $x = 3$ La solution de l'équation est 3

Dis si la solution trouvée par chaque élève est correcte. Justifie sans résoudre les équations.

J'évalue mes acquis

Résous chacune des équations suivantes en justifiant chaque étape.

a) $x - 7 = 15$; b) $\frac{3}{8} + x = 0$

c) $\frac{3}{5}x = \frac{6}{35}$; d) $\frac{8}{7}x = 24$.

Je fais le point de l'activité

- Pour résoudre une équation à une inconnue, on utilise les propriétés des égalités.
- Un nombre qui vérifie l'égalité est une ***solution*** de l'équation.

2- Résoudre des équations de type : $ax + b = cx + d$

Activité 2

Un professeur demande à Emmanuel « explique comment tu fais pour résoudre l'équation : $3x - 2 = x + 12$ ».

Emmanuel répond : «Je commence par regrouper les termes en x dans un membre, et les termes constants dans l'autre membre. Ensuite, je réduis chaque membre, puis, à l'aide d'une multiplication, je trouve finalement la solution ».

Applique la démarche d'Emmanuel et trouve la solution de l'équation : $3x - 2 = x + 12$.

Je fais le point de l'activité

Pour résoudre une équation du $ax + b = cx + d$.
On regroupe les termes en x dans un membre, et les termes constants dans l'autre membre. Ensuite, on réduit chaque membre, puis, à l'aide d'une multiplication, on trouve finalement la solution.

J'évalue mes acquis

Résous chacune des équations ci-dessous :

a) $6x - 5 = 3 + 2x$ b) $-\frac{7}{8}x = \frac{3}{10}x - 25$.

3- Résoudre des équations de type : $(ax + b)(cx + d) = 0$

Activité 3

1- a) x désigne un nombre quelconque, calcule $x \times 0$ et $0 \times x$

b) On considère deux nombres réels a et b.
Recopie et complète :
Si $a = 0$ ou $b = 0$, alors $a \times b = ...$

Je fais le point de l'activité

Soient A et B deux expressions qui dépendent de la même variable x.
L'équation $A \times B = 0$ est appelée ***équation produit.***
$A \times B = 0$ ***équivaut à*** $A = 0$ ou $B = 0$.

c) Réponds par *vrai* ou par *faux* à l'affirmation suivante
Le produit de deux nombres peut être nul si aucun des deux nombres n'est nul

d) Recopie et complète : Si $a \times b = 0$, alors $a = ...$ ou $b = ...$

2- On considère l'équation $(2 - x)(2x + 5) = 0$

a) Détermine les valeurs de x pour que chacun de ses facteurs soit nul.

b) Déduis-en les solutions de l'équation $(2-x)(2x+5)=0$.

J'évalue mes acquis

Parmi les équations, indique celles qui sont des équations produits, puis résous-les :

a) $(3+x)(7-x)=0$ d) $(6+x)-4(x+1)=0$
b) $(2x-4)(x+2)=0$ e) $(3x-7)+(x-4)=0$
c) $3x(7-x)=0$ f) $7x(2x-3)(x+2)=0$.

4- Résoudre un problème de vie courante à l'aide d'une inéquation du premier degré dans ℝ

Activité 4

Le chef d'une classe de 3ème a oublié une de ses notes de devoirs surveillés et il remarque que s'il la multiplie par 5 et ajoute 12 au produit, il obtient le même résultat que s'il avait retranché le double de cette note à 110. On souhaite déterminer la note du chef de classe.

On désigne par x cette note.

1- Traduis les expressions suivantes en langage mathématique :
   a) « s'il la multiplie par 5 et ajoute 12 au produit »
   b) « s'il avait retranché le double de cette note à 110 »

2- Justifie que cette note est solution de l'équation $5x + 12 = 110 - 2x$

3- Déduis-en la note du chef de classe

4- Donne les différentes étapes de la résolution de ce problème.

Je fais le point de l'activité

La résolution d'un problème conduisant à une équation passe par les étapes suivantes :
a) choix de l'inconnue (en précisant dans quel ensemble elle a été choisie);
b) mise en équation(s) ;
c) résolution de l'équation ;
d) vérification
e) conclusion.

J'évalue mes acquis

Détermine un nombre dont son double diminué de 8 est égal à ce nombre augmenté de -5.

5- Résoudre des inéquations des types : $ax+b \geq 0$; $ax+b>0$; $ax+b<0$ - Utiliser des intervalles pour donner l'ensemble des solutions d'une équation du premier dans ℝ

Activité 5

On considère l'inéquation $(I) : x+2 \geq 0$

1- Parmi les nombres -2 ; -7 ; $\frac{10}{3}$; $\sqrt{2}$; $-4,5$; -17, indique ceux qui sont solutions de (I).

2- Énonce la propriété qui permet de passer de l'inéquation (I) à $x \geq -2$.

3- Cite quatre autres nombres solutions de (I).

Je fais le point de l'activité

Une **solution** d'une inéquation est un nombre qui vérifie l'inégalité
Pour résoudre une inéquation à une inconnue, on utilise les propriétés des inégalités.

J'évalue mes acquis

Pour chaque question, donne la bonne réponse par la lettre:

		Réponses		
		A	B	C
1	Une solution de l'inéquation $2x - 5 \leq -1$ est	10	-1	3
2	Le nombre 1 est une solution de l'inéquation	$4x - 3 > 7$	$-2x + 1 \leq -3$	$5x + 3 < 9$
3	Une solution de l'inéquation $3x+12 < 4-2x$ est ...	-2	0	2

6- *Résoudre des inéquations des types : $ax+b>cx+d$; $ax+b<cx+d$ - Utiliser des intervalles pour donner l'ensemble des solutions d'une équation du premier dans $\mathbb{R}$*

Activité 6

On considère l'inéquation $3x-7 \geq 3+x$

a) Résous cette inéquation en justifiant les différentes étapes.

b) Représente l'ensemble des solutions sur une droite graduée.

c) Déduis-en l'ensemble des solutions de l'inéquation.

Je fais le point de l'activité

Pour résoudre une inéquation du type $ax+b > cx+d$. On regroupe les termes en dans un membre, et les termes constants dans l'autre membre. Ensuite, on réduit chaque membre, puis, à l'aide des propriétés des inégalités, on ramène l'inéquation sous la forme : $x \leq u$; $x \geq u$; $x < u$ ou $x > u$

J'évalue mes acquis

Résous chaque inéquation et écris l'ensemble des solutions sous forme d'un intervalle de $\mathbb{R}$.

a) $x < 7-6x$; c) $2-4x > 1-6x$

b) $5x+2 \leq x-15$; d) $-3x+\frac{2}{7} \leq -\frac{5}{7}-2x$

7- *Résoudre un système d'inéquations du premier degré dans $\mathbb{R}$ - Utiliser des intervalles pour donner l'ensemble des solutions d'un système de deux équations du premier dans $\mathbb{R}$*

Activité 7

On se propose de déterminer tous les nombres réels qui sont solutions à la fois des inéquations :

(I_1): $5x-4>-19$ et (I_2): $3x+7<13$

1- Parmi les nombres 0 ; -2 ; 5 ; $\frac{37}{5}$; $\sqrt{5}$; $\sqrt{2}$ et 2, indique ceux qui sont solutions à la fois des inéquations (I_1) et (I_2).

2- a) Résous chacune des inéquations (I_1) et (I_2)

b) Représente sur une droite graduée, en bleu l'ensemble des solutions de (I_1) puis en rouge l'ensemble des solutions de (I_2).

c) Déduis-en l'ensemble des nombres réels qui vérifient à la fois les inéquations (I_1) et (I_2).

3- Donne les étapes de résolution du système d'inéquations composé de (I_1) et (I_2).

Je fais le point de l'activité

Un nombre est une solution d'un système composé de deux inéquations (I_1) et (I_2) lorsqu'il est solution à la fois de (I_1) et (I_2).

J'évalue mes acquis

Parmi les nombres -2 ; $\sqrt{2}$; $\sqrt{6}$; $\frac{7}{3}$; $-\frac{8}{3}$, indique ceux qui sont solutions du système d'inéquations (S): $\begin{cases} 7x+3 \geq -9+12x \\ -8x \geq -5x-21 \end{cases}$

8- *Résoudre un problème de vie courante à l'aide d'une inéquation du premier degré dans $\mathbb{R}$*

Activité 8

Un marchand de glaces a remarqué qu'il dépensait 650.000 F par semaine pour faire 1.700 glaces. Sachant qu'une glace est vendue à 500 F, on veut déterminer le nombre minimum de glaces qu'il doit vendre dans la semaine pour avoir un bénéfice supérieur à 160.000 F.

On désigne par x le nombre minimum de glaces à vendre.

1- Exprime la recette, puis le bénéfice de ce marchand en fonction de x

2- Justifie que le nombre 1360 est solution de l'inéquation $x-\frac{13}{17}x > 320$

3- Déduis-en le nombre minimum de glaces à vendre.

4- Donne les étapes de résolution de ce problème.

Je fais le point de l'activité

La résolution d'un prob... sant à une inéquation p... étapes suivantes : a) ch... connue (en précisant dan... semble elle a été choisie)
b) mise en inéqu...
c) résolution de l...
d) vérification
e) conclusion

J'évalue mes acquis

Détermine les nombres dont leur moitié diminuée de 3 est inférieure ou égale à leur double.

II- RESUME DE COURS

Equation produit nul

1. Définition

Une équation produit nul est une équation dont un membre est un produit et dont l'autre membre est égal à zéro.

Exemple

$(5x - 2)(3x + 7) = 0$ est une équation produit nul d'inconnue x.
Le premier membre de cette équation est le produit $(5x - 2)(3x + 7)$ et le second membre est 0.

Propriété

• **Un produit est nul** lorsque l'un au moins de ses facteurs est nul, et seulement dans ce cas.
Autrement dit, a et b étant deux nombres réels :
*Si $ab = 0$, alors $a = 0$ ou $b = 0$
*Si $a = 0$ ou $b = 0$, alors $b = 0$
• a, b et c étant des nombres réels (a et c étant non nuls), ***les solutions de l'équation produit nul***.
$(ax + b)(cx + d) = 0$ sont telles que :
$ax + b = 0$ ou $cx + d = 0$.

Exemple

Les solutions de l'équation produit nul
$(5x - 2)(3x + 7) = 0$
sont donc les valeurs de x telles que :
$5x - 2 = 0$ ou $3x + 2 = 0$
$5x = 2$ ou $3x = -7$
$x = \frac{5}{2}$ ou $x = -\frac{7}{3}$
Les solutions de l'équation sont donc les nombres $\frac{5}{2}$ et $-\frac{7}{3}$.

III- METHODE

POUR RÉSOUDRE :

• ***Une équation du premier degré d'inconnu x,***

- *On regroupe tous les termes en x dans un membre et les termes constants dans l'autre membre ;*
- *On conclut en utilisant les propriétés relatives aux opérations et égalité.*

• ***Une équation produit nul, on utilise la propriété suivante :***

$A \times B = 0$ *si et seulement si* $A = 0$ ou $B = 0$

• ***Une équation de la forme $X^2 = A$***

-Si $A < 0$, alors l'équation n'a pas de solution ;

-Si $A = 0$, alors l'équation admet 0 comme l'unique solution ;

-Si $A > 0$, alors l'équation admet deux solutions opposées $-\sqrt{A}$ et $\sqrt{A}$.

• ***Une équation se ramenant à une équation de type AxB = 0 grâce à une factorisation,***

on procède de la façon suivante :

- *on transpose tous les termes dans un même membre de l'équation,*
- *on factorise (éventuellement, on développe si aucune factorisation n'est possible) ;*
- *on résout ;*
- *on conclut.*

• ***Pour résoudre une inéquation du premier degré,***

- *on regroupe tous les termes en dans un membre et les termes constants dans l'autre membre ;*
- *on conclut en utilisant les propriétés relatives aux opérations et inégalités.*

• ***Pour résoudre un Problème du premier degré conduisant à une équation ou à une inéquation dans $\mathbb{R}$,***

on utilise la méthode suivante :

a) choix de l'inconnue (en précisant dans quel ensemble elle a été choisie);
b) mise en équation(s) ou en inéquation(s) ;
c) résolution de l'équation ou de l'inéquation ;
d) vérification
e) conclusion .

IV- SAVOIR-FAIRE

Savoir-faire 1- Résoudre des équations de chacun des types : $ax+b=0$; $ax+b=cx$; $(ax+b)(cx+d)=0$

Enoncé

Résous chacune des équations suivantes :

a) $x-1=0$; b) $2x=7$; c) $3x-2=0$; d) $5x-1=2x+8$; e) $(5x-4)(x+9)=0$

Solution commentée

Je résous chacune des équations

a) $x-1=0$

$x=1$

La solution de l'équation est : 1

b) $2x=-7$

$x=-7\times\frac{1}{2}$

$x=-\frac{7}{2}$

La solution de l'équation est : $-\frac{7}{2}$

c) $3x-2=0$

$3x=2$

$x=2\times\frac{1}{3}$

$x=\frac{2}{3}$

La solution de l'équation est : $\frac{2}{3}$

b) $5x-1=2x+8$

$5x-2x=1+8$

$3x=9$

$x=9\times\frac{1}{3}$

$x=3$

La solution de l'équation est : 3

c) $(5x-4)(x+9)=0$

$5x-4=0$ *ou* $x+9=0$

$x=\frac{4}{5}$ *ou* $x=-9$

Les solutions de l'équation sont : $\frac{4}{5}$ et -9

Savoir-faire 2- Résoudre des inéquations de chacun des types : $ax+b\geq 0$; $ax+b>0$; $ax+b\geq cx+d$; $ax+b<cx+d$

Enoncé

Résous chacune des inéquations suivantes :

a) $x+1\geq 0$; b) $3x<4$; c) $-2x\geq 6$; d) $2-5x>0$ e) $3x-1\leq 6x-4$

Solution commentée

Je résous chacune des inéquations $a) x+1\geq 0$

$x\geq -1$

L'ensemble des solutions de l'inéquation est : $[-1;\rightarrow[$

$b)$ $3x<4$

$x<4\times\frac{1}{3}$, donc : $x<\frac{4}{3}$

L'ensemble des solutions de l'inéquation est : $]\leftarrow;\frac{4}{3}[$

$c) -2x\geq 6$

$x\leq 6\times(\frac{1}{-2})$, donc : $x\leq -3$

L'ensemble des solutions de l'inéquation est : $]\leftarrow;-3]$

$d) 2-5x>0$

$-5x>-2$ donc : $x<-2\times(\frac{1}{-5})$, d'où : $x<\frac{2}{5}$.

L'ensemble des solutions de l'inéquation est : $\left]\leftarrow ; \frac{2}{5}\right[$

e) $3x-1 \le 6x-4$

$3x-6x \le 1-4$

$-3x \le -3$ donc : $3x \ge -3 \times \left(\frac{1}{-3}\right)$ c'est à dire : $x \ge 1$.

L'ensemble des solutions de l'inéquation est : $[-4;3]$.

Savoir-faire 3- Résoudre un système de deux inéquations du premier degré dans $\mathbb{R}$

Enoncé

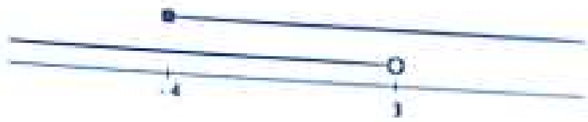
Résous le système de deux inéquations suivant : $\begin{cases} 3x+2 \ge x-6 \\ 2x-1 < 5 \end{cases}$

Solution commentée

Je résous le système de deux inéquations

$3x+2 \ge x-6$ et $2x-1<5$

$3x-x \ge -2-6$ et $2x<5+1$



$2x \ge -8$ et $2x<6$

$x \ge -8 \times \frac{1}{2}$ et $x < 6 \times \frac{1}{2}$ c'est à dire $x \ge -4$ et $x<3$.

L'ensemble des solutions du système est : $[-4;3[$.

Savoir-faire 4 : Résoudre un problème avec une inéquation

Enoncé

Un réservoir contient 200 litres d'eau. Pendant une expérience de 2 heures, on alimente le réservoir pour pouvoir prélever 3,5 L d'eau par minute.
Dis comment il faut régler le débit de l'arrivée d'eau pour qu'à la fin de l'expérience le réservoir contienne au moins 50 L d'eau.

Solution commentée

- Soit x le débit d'arrivée d'eau en litres par minute (L/min).
- Soit V le volume d'eau contenu par le réservoir à la fin de l'expérience, exprimé en L ;

2 h = 120 min

$V = 200 + x \times 120 - 3,5 \times 120$

$= 120x - 220$

Le volume final est supérieur ou égal à 50 L lorsque x est solution de l'inéquation :
$120x - 220 \ge 50$.

- Résolution de l'inéquation :

$120x \ge 220 + 50$

$120x \ge 270$

$x \ge \frac{270}{120}$

$x \ge 2,25$.

- Le débit de l'arrivée d'eau doit être supérieur ou égal à 2,25 L/min.

Savoir-Faire 5 **Résoudre des équations produits**

Enoncé

On donne $A = (3x + 1)(x + 2) - 3(3x + 1)$

a) Développe et réduis A

b) Factorise A

c) Résous l'équation A = - 1

d) Résous l'équation A = 0

Solution commentée

a) Je développe et je réduis A

$A = (3x + 1)(x + 2) - 3(3x + 1)$
$= 3x^2 + 6x + x + 2 - 9x - 3$

$A = 3x^2 - 2x - 1$

b) Je factorise A

$A = (3x + 1)(x + 2) - 3(3x + 1)$
$= (3x + 1)[x + 2 - 3]$

$A = (3x + 1)(x - 1)$

c) Je résous l'équation A = -1

D'après la question a) on a : $A = 3x^2 - 2x - 1$

Donc A = -1 équivaut à $3x^2 - 2x - 1 = -1$

$3x^2 - 2x = 0$ d'où $x(3x - 2) = 0$ ce qui équivaut à

$x = 0$ ou $x = \frac{2}{3}$. Donc : $S = \left\{0; \frac{2}{3}\right\}$

d) Je résous l'équation A = 0

On sait que $A = (3x + 1)(x - 1)$

Donc $(3x + 1)(x - 1) = 0$ équivaut à $3x + 1 = 0$ ou $x - 1 = 0$, $x = -\frac{1}{3}$ ou $x = 1$,

donc : $S = \left\{-\frac{1}{3}; 1\right\}$

Savoir-Faire 6 **Factoriser une expression pour résoudre une équation**

Enoncé

On considère l'expression $D = (2x + 3)^2 + (x - 5)(2x + 3)$.

a) Développe et réduis l'expression D.

b) Factorise l'expression D.

c) Résous l'équation D = 0.

Solution commentée

a) Je développe et je réduis l'expression D

$D = (2x + 3)^2 + (x - 5)(2x + 3)$
$= 4x^2 + 12x + 9 + 2x^2 + 3x - 10x - 15$

$D = 6x^2 + 5x - 6$

b) Je factorise l'expression D

$D = (2x + 3)^2 + (x - 5)(2x + 3)$
$= (2x + 3)[2x + 3 + x - 5]$

$D = (2x + 3)(3x - 2)$.

c) Je résous l'équation D = 0

$(2x + 3)(3x - 2) = 0$ équivaut à $2x + 3 = 0$ ou

$3x - 2 = 0$, $x = -\frac{3}{2}$ ou $x = \frac{2}{3}$.

Donc : $S = \left\{-\frac{3}{2}; \frac{2}{3}\right\}$.

V- JE M'EXCERCE

1- Exercices de fixation/ Application

Résoudre les équations du type $ax + b = 0$

1 Recopie et complète les égalités suivantes :

a) Si $x-5=2$, alors $x = ...$

b) Si $x+5=2$, alors $x = ...$

c) Si $5x=2$, alors $x = ...$

d) Si $\frac{x}{5}=2$, alors $x = ...$

2 Recopie et relie les égalités qui sont équivalentes

$15+x=4$ •	• $x=4-15$
$15x=4$ •	• $x=4+15$
$4x=15$ •	• $x=\frac{4}{15}$
$x+4=15$ •	• $x=\frac{15}{4}$
$x-4=15$ •	• $x=4\times 15$
$\frac{x}{15}=4$ •	• $x=15-4$

3 Recopie et complète les égalités suivantes :

a) Si $2x+9=0$, alors $2x = ...$, donc: $x = ...$

b) Si $3x-9=0$, alors $3x = ...$, donc: $x = ...$

c) Si $-7+4x=0$, alors $4x = ...$, donc: $x = ...$

d) Si $2-\frac{3}{5}x=0$, alors $-\frac{3}{5}x = ...$, donc: $x = ...$

4 Pour chacune des équations ci-dessous, précise si les nombres 3 ; -8 ; 0 sont des solutions :

a) $x+8=0$; b) $8-x=0$;

c) $x+4=2x$; d) $2x(3-x)=0$.

5 Parmi les nombres -5 ; 0 ; -1 ; 1 ; 5, indique les solutions des équations suivantes :

a) $4x-7=13$; b) $9-2x=19$;

c) $3x+8=13-2x$; d) $\frac{7}{2x}=\frac{3,5}{5}$.

6 Résous dans $\mathbb{R}$ chacune des équations suivantes :

a) $2x+3=-7$; b) $-3x+7=10$; c) $5-2x=25$

d) $1-3x=13$; e) $8=6-2x$; f) $25=7+4x$.

7 Résous dans $\mathbb{R}$ chacune des équations suivantes :

a) $\frac{x}{2}+3=4$; b) $\frac{x}{4}-1=\frac{5}{3}$; c) $\frac{2x}{3}-4=5$

d) $\frac{3}{5}x+7=8$; e) $\frac{2}{3}x=-\frac{x}{3}+3$; f) $\frac{3}{7}x+1=\frac{5}{7}$.

Résoudre les équations du type $(ax + b)(cx + d) = 0$

8 Associe chaque équation à sa (ou ses) solution(s) :

$(x+8)(x-5)=0$ •	• 8
$(2x-10)(3x+24)=0$ •	• 5
$(3x-15)(x+2)=0$ •	• -2
$(3x+6)(x-8)=0$ •	• -8

9 Résous chacune des équations suivantes :

a) $2x(2-x)=0$; c) $(5+2y)(3y-9)=0$;

b) $(2z+4)(z-3)=0$; d) $(2t+1)(t+6)=0$.

10 Résous les équations suivantes :

a) $x^2=0,81$; d) $x^2=-9$;

b) $x^2=6$; e) $3x^2=12$;

c) $x^2=0$; f) $x^2=\frac{3}{4}$.

11 Détermine tous les nombres dont le carré est :

b) 25 ; b) 0,4 ; c) $\frac{100}{49}$.

Résoudre les inéquations du type $ax + b > 0$ ou $ax + b < 0$

12 Recopie et relie les inégalités qui sont équivalentes :

$x-40<-50$ •	• $x<-10$
$x-40<50$ •	• $x<10$
$x+40<-50$ •	• $x<90$
$x+40<50$ •	• $x<-90$

13 Recopie et relie les inégalités qui sont équivalentes :

$4x\geq 8$ •	• $x\geq 0,5$
$x\geq 8$ •	• $2x\geq 8$
$-4x\leq -2$ •	• $x\geq 2$
$-x\leq -4$ •	• $4x\geq 32$

14 Un nombre x est tel que : $-1,5<x$.
Dans chacun des cas suivants, remplace les pointillés par l'inégalité correspondante :

a) -3 ……..$2x$; b) -9,5 ……..$x-8$;

c) 4,5 ……$-3x$.

15 Un nombre a est tel que : $-3<a<-2$.

a) Complète les inégalités suivantes :

……. $\leq a+3$ et $a+3\leq$ …….

b) Déduis-en un encadrement de $a+3$.

16 Parmi les nombres -7 ; 0 ; -1 ; 8 ; $-\frac{4}{3}$, donne ceux qui sont solutions de l'inéquation : $7-3x>11$.

17 Le nombre 3 est une solution de certaines inéquations ci-dessous, détermine-les.

a) $2 + 3x \geq -1$; c) $-15x - 3 < -8$;
b) $11 - 5x > 0$; d) $x + 5 < 2 - 4x$.

18 Associe chaque inéquation à son ensemble de solutions.

$x - 7 > 5$ •	• $]\leftarrow ; -12[$
$13 + x \geq 1$ •	• $[-12 ; \rightarrow[$
$-5x < 60$ •	• $]12 ; \rightarrow[$

19 Résous chaque inéquation et écris l'ensemble de solutions sous forme d'un intervalle.

a) $x + 5 < 7$; c) $3 + x \leq -6$;
b) $x - 6 > 11$; d) $13 - x \leq 12$.

20 Résous chaque inéquation et écris l'ensemble de solutions sous forme d'un intervalle.

a) $2x + 1 > 7$; c) $5 - 2x \leq 9$;
b) $9 - 4x \geq 7$; d) $-3x + 2 \leq -7$.

21 Résous chaque inéquation et écris l'ensemble de solutions sous forme d'un intervalle.

a) $3(x + 1) < -4$; c) $-4x \leq -3(2x - 5)$;
b) $-2(x - 5) < 10$; d) $7(5 - 2x) \geq -3(4 - 2x)$.

22 Représente sur une droite graduée les nombres x qui vérifient les inégalités suivantes :

a) $x > -3$; b) $x > 2$; c) $x \leq -5$.

Résoudre un système de deux inéquations dans $\mathbb{R}$

23 Résous chacun des systèmes d'inéquations suivants, représente graphiquement l'ensemble de solutions et écris-le sous la forme d'un intervalle de $\mathbb{R}$:

a) $\begin{cases} 3x - 4 > 8 \\ 8x + 5 > 21 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x \leq -6 \\ 5 - 4x \geq 25 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 8x > -24 \\ 2x < -9 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 7x \geq -21 \\ 5x < 10 \end{cases}$

Problèmes du premier degré dans $\mathbb{R}$

24 Deux nombres ont pour somme 231. L'un est égal au trois quarts de l'autre. Détermine ces deux nombres.

25 Détermine trois nombres entiers relatifs dont la somme vaut 2, sachant que :
- Le deuxième est la somme du premier et de 3 ;
- Le troisième est le triple du deuxième.

26 Dans une citerne, il reste 500 litres d'essence. Si on ajoute un tiers de sa capacité totale, elle sera à moitié remplie.
Détermine la capacité totale de cette citerne.

27 Pour fabriquer une boisson à base d'un sirop de menthe, il faut la doser de la manière suivante : 8 volumes d'eau pour un volume de sirop.
Détermine, en centilitre, le volume de sirop et le volume d'eau nécessaires pour obtenir un verre de 27 cl de cette boisson.

28 Lors d'un spectacle de fin d'année, la recette est 260.000 FCFA. Dans le public, on a compté 100 adultes et 50 enfants.
Le tarif enfant coûte 800 FCFA de moins que celui d'un adulte.
Détermine les prix d'entrée pour enfant et pour adulte ce jour-là.

29 Le coût d'une course en taxi est la somme d'un montant fixe (le forfait de prise en charge) et d'un montant dépendant du nombre de kilomètres parcourus.
Dans une ville, le forfait de prise en charge s'élève à 250 FCFA et le prix du kilomètre est 200 FCFA. Détermine la distance maximale qu'un client peut parcourir en dépensant au plus 3.700 FCFA.

30 Un aquarium a la forme d'un parallélépipède rectangle de longueur 60 cm, de largeur 40 cm et de hauteur 50 cm.
On souhaite remplir cet aquarium avec 90 litres d'eau au maximum.
Détermine la hauteur d'eau que l'on ne devrait pas dépasser.

31 Un élève a obtenu 8,5 ; 13 et 9,5 sur 20 aux trois premiers devoirs de mathématiques du premier trimestre.
Détermine la note minimale que cet élève devra obtenir au prochain devoir pour être sûr d'avoir une moyenne supérieure ou égale à 12 sur 20.

2- Exercices de renforcement/approfondissement

32 Résous les équations suivantes :

a) $1,25x + 2,75x - 8,25 = 8,50 - 4,25x$
b) $2 - 3x + 5(x - 3) = 3x + 8 - 4(x - 1)$
c) $3x - 6[4x + 2 - 2(x + 1)] = 0$

33 Résous les équations suivantes :

a) $\dfrac{x+1}{3} - \dfrac{x-1}{4} = \dfrac{x}{2} - \dfrac{x-2}{12}$
b) $\dfrac{9x+7}{2} - (x - \dfrac{x-2}{7}) = 36$
c) $\dfrac{5(x-2)}{3} - \dfrac{7(x-3)}{2} = 5 + \dfrac{x-1}{2} - (x+4)$

34 Résous les équations suivantes :

a) $3x\sqrt{5}+2x=4x-x\sqrt{5}-4$

b) $3x\sqrt{2}-11=2x+7$

c) $18-5x\sqrt{2}+4=12-7x\sqrt{2}$

d) $2x\sqrt{2}-3=3x+1$

35 Résous les équations suivantes :

a) $\dfrac{x+1}{x+2}=4$; b) $\dfrac{x+2}{3x-5}=\dfrac{1}{3}$;

c) $\dfrac{1-x}{1+x}=\sqrt{2}$; d) $\dfrac{6x+9}{2x+3}=3$

36 Ecris sous la forme d'un produit égal à zéro (on reconnaîtra une égalité remarquable) et résous :

a) $(3x+2)^2-49=0$; b) $25x^2=40x-16$;

c) $(x-2)^2=4(2-3x)^2$;

d) $(3x-2)(2x-1)=(x+3)(3x-2)$;

e) $(3x+2)(x-5)-(10-2x)(x+4)+(15-3x)(x-3)=0$

f) $5(1-2x^2)=x(x\sqrt{2}+1)$; g) $5x^3-10x^2+5x=0$

37 On considère l'expression C telle que :
$C=(3x-1)^2-4x(2x-1)$

1- Développe et réduis C

2- Déduis-en la factorisation de C

3- Résous les équations suivantes :
a) $C=0$; b) $C=144$.

38 On considère la fraction rationnelle S telle que :

$S=\dfrac{20x}{4x^2-9}+\dfrac{8x-12}{4x^2 12x+9}-\dfrac{5x}{2x^2+3x}$

1- Factorise chacune des expressions ci-dessous : $4x^2-9$; $4x^2-12x+9$ et $2x^2+3x$.

2- Détermine les valeurs de la variable x pour lesquelles S existe.

3- Démontre que S peut s'écrire : $\dfrac{a}{bx+c}$, a, b et c étant trois nombres ne dépendant pas de x.

4- Détermine le nombre x pour que $S=5$.

39 Détermine trois nombres entiers consécutifs, dont la somme des carrés est égale à 110.
(*On désignera par $x-1$; x et $x+1$ ces nombres entiers*).

40 Si on additionne le tiers, le quart et le neuvième d'un nombre, on obtient son inverse.
Détermine ce nombre.

41 1- Démontre que, pour tout nombre x, on a :
$(x-4)(4x+1)=4x^2-15x-4$.

2- Détermine un nombre qui surpasse son inverse de $\dfrac{15}{4}$.

42 1- Développe et réduis l'expression $(x-11)(x-9)$

2- Détermine un nombre à deux chiffres tels que :

- La somme de ses chiffres est 11 ;
- Si à leur produit, on ajoute 11, on trouve le nombre renversé.

43 Soit a, b et c trois nombre réels, a non nul

1- Démontre que, pour $a \neq 0$, on a

$$ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$$

Cette nouvelle expression de ax^2+bx+c est appelée ***forme canonique***.

2- Utilise ce résultat pour résoudre les équations suivantes :

a) $x^2+2x-15=0$; b) $2x^2+x-15=0$

c) $x^2-x-1=0$; d) $-2x^2+11x+6=0$

44 Résous les équations suivantes :

a) $\sqrt{x}=x$; c) $\sqrt{x}+7x-5=\sqrt{x}+5x+3$

b) $\sqrt{2-x}=13$; d) $\sqrt{x}+7x+5=\sqrt{x}+5x+3$

45 La somme de deux nombres est égale à 109.
En ajoutant 7 au plus petit et en retranchant 7 au plus grand, leur produit augmente de 28.
Détermine ces deux nombres.

46 Résous les inéquations suivantes :

a) $\dfrac{15-4}{2}\leq 1+6x$ b) $3-\dfrac{2x}{3}+\dfrac{7}{2}(5-3x+\dfrac{x}{6}$

c) $\dfrac{8x-6}{3}-\dfrac{7x-5}{2}(2-\dfrac{3x+7}{4}$.

47 L'unité de longueur est le mètre, l'unité d'aire, le mètre carré.
Un rectangle de largeur l, de longueur L est tel que : $70<l<80$

$110<L<120$

a) Donne un encadrement du périmètre de ce rectangle.

b) Donne un encadrement de son aire.

48 Résous les inéquations suivantes :

a) $(3x+45)(3x+3)\geq(3x+6)(3x+18)$

b) $2(x+2)(x-1)-x^2)(x+4)^2-38$

49 Résous les inéquations suivantes :

a) $3x+1\leq\sqrt{3}(x-1)$

b) $x\sqrt{3}+\sqrt{2})x\sqrt{2}+\sqrt{3}$

c) $3x-\pi(\pi x-3$

d) $x\sqrt{2}+\sqrt{2}\geq x\sqrt{3}+\sqrt{3}$

50 1- Résous les systèmes d'inéquations suivants et représente graphiquement les solutions.

$a)\ \begin{cases}-3x-4\leq 4-x\\ 4x-5(10-x\end{cases}$ $b)\ \begin{cases}7-4x)3-6x\\ 3x-9\leq 3+x\end{cases}$

2- Donne, pour chaque système, les solutions qui sont des nombres entiers relatifs.

51 Un concours comporte les deux épreuves suivantes :

- Une épreuve orale (coefficient 4) ;
- Une épreuve écrite (coefficient 6).

Chacune de ces épreuves est notée de 0 à 20. Pour être reçu à cet concours, un candidat doit obtenir au minimum 10 sur 20 de moyenne. Un élève de 3ème est candidat à ce concours, et ses parents lui ont promis un ordinateur s'il obtenait une moyenne supérieure ou égale à 13 sur 20.

A l'épreuve orale, il a obtenu 07 sur 20. Il souhaite connaître la note minimale qu'il doit avoir à l'écrit, et il se confie à ses camarades dont tu fais partie.

On désigne par x la note obtenue à l'écrit et par m la moyenne de cet élève.

1- Justifie que : $m = \frac{3x+14}{5}$

2- Justifie que cette note est solution de l'inéquation $(I) : \frac{14}{5} + \frac{3}{5}x \geq 13$

3- Résous l'inéquation (I).

4- Déduis-en la note minimale que cet élève doit obtenir pour pouvoir bénéficier de cet ordinateur.

52 En début d'année scolaire, le proviseur d'un lycée veut commander de l'encre pour les photocopieuses de son établissement. Deux magasins lui font alors les propositions suivantes :

- Magasin A : 16 300 F la cartouche d'encre et une livraison gratuite ;
- Magasin B : 14 800 F la cartouche d'encre et un frais de 9.000 F quel que le nombre de cartouches achetées.

Embarrassé, il informe un groupe d'élèves de 3ème dont tu fais partie, qu'il utilise 75 cartouches toute l'année scolaire et souhaite alors faire ses commandes dans le magasin qui lui fait la meilleure offre, puis connaître le montant total de ses achats.

On désigne par x le nombre de cartouches d'encre, par P_A et P_B les montants à payer dans les magasins A et B.

1- Exprime P_A et P_B en fonction de x.

2- Recopie et complète le tableau de valeurs ci-dessous :

x	0	1	2	6	28	65
P_A (en FCFA)	0					
P_B (en FCFA)	9000					

3- A l'aide du tableau de valeurs, indique le magasin que le proviseur doit choisir. Justifie ta réponse.

4- Calcule le montant total des achats de ce proviseur.

VI- RENDEZ-VOUS DES CURIEUX !

Le mathématicien grec Diophante d'Alexandrie (IIIe siècle avant J.C), surnommé le « père de l'algèbre », est surtout connu pour les équations qui portent son nom, les équations diophantiennes, et pour son traité Arithmétique, œuvre de référence pour de grands mathématiciens comme Pierre de Fermat.

On ignore tout de la vie de Diophante, mais selon une légende, un de ses élèves aurait écrit épitaphe permettant de calculer l'âge auquel il mourut.

« Passant, sous ce tombeau repose Diophante.
Ces quelques vers tracés par une main savante vont te faire connaître à quel âge il est mort.
Des jours assez nombreux que lui compta le sort,
Le sixième marqua le temps de son enfance ;
Le douzième fut pris par son adolescence.
Des sept parts de sa vie, une encore s'écoula,
Puis s'étant marié, sa femme lui donna
Cinq ans après un fils qui, du destin sévère
Reçut de jours hélas ! deux fois moins que son père.
De quatre ans, dans les pleurs, celui-ci survécut.
Dis, si tu sais compter, à quel âge il mourut »

Traduction par Emile Fourrey, Récréations arithmétiques, Vuibert (1947)

Diophante d'Alexandrie (source internet)

9 Coordonnées d'un vecteur

Notions essentielles :

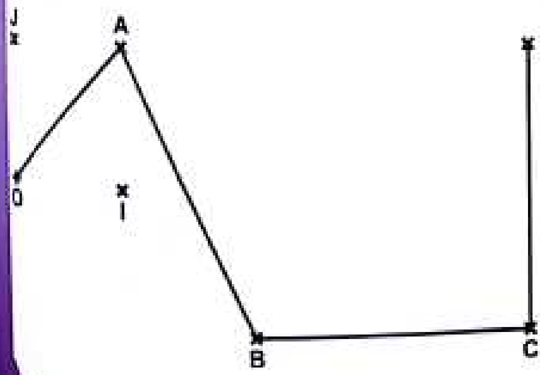
- Coordonnées d'un vecteur
- Egalité de deux vecteurs à partir de leurs coordonnées
- Coordonnées d'une somme de deux vecteurs
- Coordonnées du produit d'un vecteur par un nombre réel
- Vecteurs colinéaires
- Vecteurs orthogonaux
- Coordonnées du milieu d'un segment
- Distance de deux points dans un repère orthonormé
- Droites parallèles
- Droites perpendiculaires

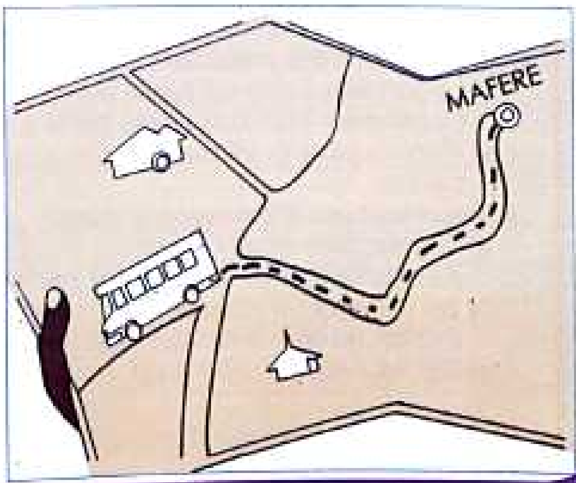
SITUATION D'APPRENTISSAGE

Les élèves de la classe de 3ème2 du lycée municipal de Maféré décident de faire une sortie détente. Pour cela, les élèves chargés de l'organisation s'informent sur le site (d'emplacement le point S) et ils reçoivent un extrait du trajet $OABCS$ à parcourir fait à l'échelle 1/2500.

Les derniers rendent compte à la classe. Tous les participants veulent alors connaître la distance de Maféré (emplacement le point O) au point S.

Connaissant l'emplacement des points O, I et J des trois villes, ils s'organisent pour repérer les vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CS}$ et $\overrightarrow{DS}$ puis calculer la longueur du trajet $OABCS$.



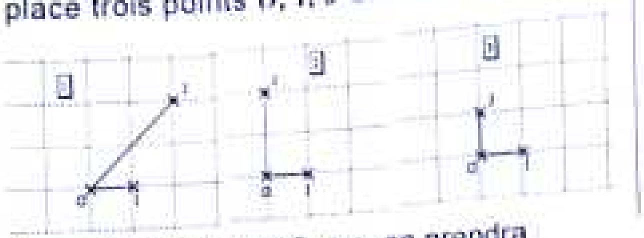


I- ACTIVITES DE DÉCOUVERTE

1- Identifier les différents repères du plan

Activité 1

Dans les trois cas de figures ci-dessous, on place trois points O, I, J dans un quadrillage.



Dans chaque cas de figure, on prendra (O, I) et (O, J) comme repère sur les droites (OI) et (OJ).

1-a) Pour chaque figure, dis si le triangle OIJ est rectangle ;

b) Rectangle et isocèle ; ou quelconque.

b) Justifie tes réponses.

2- Complète avec les mots qui conviennent.

a. Dans la figure (1), (O, I, J) est un repère du plan ...

b. Dans la figure (2), (O, I, J) est un repère du plan ...

c. Dans la figure (3), (O, I, J) est un repère du plan ...

Je fais le point de l'activité

Dans un plan, il existe quatre types de repères :
- *repère quelconque,*
- *repère orthogonal,*
- *repère orthonormé,*
- *repère normé.*

J'évalue mes acquis

O, I et J sont trois points non alignés.
Indique le nom de chaque repère à partir des informations contenues dans le tableau ci-dessous :

N°	Affirmations	Réponses
1	• (OI) et (OJ) sont sécantes. • OI = 1 cm et OJ = 2 cm	
2	• $(OI) \perp (OJ)$ • OI = 1 et OJ = 1	
3	• $(OI) \perp (OJ)$ • OI = 2 et OJ = 3	

2 - Identifier les coordonnées d'un vecteur - Lire le couple de coordonnées d'un vecteur

Activité 2

Le plan est muni d'un repère (O, I, J). On considère deux points A et B du plan.
On se propose d'exprimer le vecteur $\overrightarrow{AB}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{OJ}$.

1- Place les deux points A et B dans le repère (O, I, J).

2- a) Dans le repère précédent, trace :
- La parallèle à (OI) qui passe par le point A,
- La parallèle à (OJ) qui passe par le point B.

b) Place le point **C**, intersection des deux parallèles tracées.

3- Recopie et complète avec les mots:

a) Les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{OI}$ sont ...,
il existe un unique nombre réel x tel que $\overrightarrow{AC} = ... \overrightarrow{OI}$

b) les vecteurs $\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{OJ}$ sont ...,
il existe un unique nombre réel y tel que $\overrightarrow{CB} = ... \overrightarrow{OJ}$

c) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A...} + \overrightarrow{CB} = ...\overrightarrow{OI} + ...\overrightarrow{OJ}$

Je fais le point de l'activité

Le plan est muni du repère (O, I, J). A et B sont deux points du plan.
On appelle **couple de coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$** *le couple $(x; y)$ tel que : $\overrightarrow{AB} = x\overrightarrow{OI} + y\overrightarrow{OJ}$.*

J'évalue mes acquis

Le plan est muni du repère (O, I, J). A et B sont deux points du plan.
Dans chacun des cas ci-dessous, indique les couples de coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.
1) $\overrightarrow{AB} = 30\vec{I} - 50\vec{J}$; 2) $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{OJ}$; 3) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{OJ}$.

3 - Identifier l'égalité de deux vecteurs à partir de leur couple de coordonnées

Activité 3

Le plan est muni du repère (O,I,J).

1) Place les points A et B tels que :

$\overrightarrow{IA} = 3\overrightarrow{OI} - 2\overrightarrow{OJ}$ et $\overrightarrow{JB} = 3\overrightarrow{OI} - 2\overrightarrow{OJ}$.

2) Dis si les vecteurs $\overrightarrow{IA}$ et $\overrightarrow{JB}$ sont égaux ou non.

3) Soit les vecteurs $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

Etablis une relation entre les coordonnées de ces deux vecteurs de sorte qu'ils soient égaux.

Je fais le point de l'activité

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont égaux équivaut à $x = x'$ et $y = y'$.

J'évalue mes acquis

a et m sont deux nombres réels.
Réponds par vrai ou par faux aux affirmations suivantes :

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} a-2 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix} 1 \\ m+1 \end{pmatrix}$ sont égaux si :

1) $a = -1$ et $m = -4$.
2) $a = 3$ et $m = 0$.
3) $a = 3$ et $m = -4$.

4 - Identifier les coordonnées de la somme de deux vecteurs

Activité 4

Le plan est muni d'un repère (O, I, J). Soit les vecteurs $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.

On se propose de déterminer les coordonnées de la somme des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$

1- Place quatre points **A, B, C, D** de sorte que **ABCD** soit un quadrilatère quelconque.
2- Exprime chacun des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{OJ}$.
3- Détermine les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$.

Je fais le point de l'activité

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

alors $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD})\begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \end{pmatrix}$.

J'évalue mes acquis

Complète le tableau ci-dessous en indiquant le couple de $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ}$ de coordonnées de :

	Vecteurs	Couples de coordonnées			
Somme de vecteurs	$\overrightarrow{MN}$	(3;2)	(-6;-5)	(6;-8)	$(x;y)$
	$\overrightarrow{PQ}$	(-1;-3)	(4;2)	(-7;1)	$(m;n)$
	$\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ}$	....	....	....	....

5 - Identifier les coordonnées du produit d'un vecteur par un nombre réel

Activité 5

Le plan est muni d'un repère (O, I, J).

Soit le vecteur $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$

1- a) Construis le vecteur $\overrightarrow{AB}$.

b) Construis le vecteur $2\overrightarrow{AB}$, puis par une lecture graphique, donne les coordonnées du vecteur $2\overrightarrow{AB}$.

2- Soit un vecteur $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et k un nombre réel.

Donne le couple de coordonnées du vecteur $k\overrightarrow{AB}$.

Je fais le point de l'activité

Si $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ alors $k\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}kx\\ky\end{pmatrix}$, où k est un nombre réel.

J'évalue mes acquis

Complète le tableau ci-dessous en indiquant le couple de coordonnées du produit d'un vecteur par un nombre réel.

$\overrightarrow{MN}$	$(2;5)$	$(-2;-3)$	$(-\sqrt{2};\sqrt{3})$	$(x;y)$
Nombre réel k	3	-5	$\sqrt{3}$	a
$k\overrightarrow{MN}$	....	....	....	....

6 - Connaître la propriété relative à la condition de colinéarité de deux vecteurs

Activité 6

Partie A

Le plan est muni d'un repère (O, I, J).

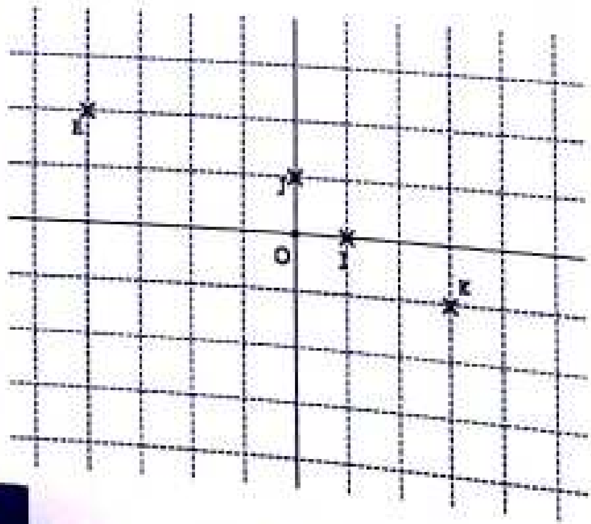
On considère les vecteurs $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{KL}\begin{pmatrix}-6\\3\end{pmatrix}$.

1- Reproduis la figure ci-dessous puis place les points F et L.

2-a) Vérifie que $\overrightarrow{EF}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{KL}$, puis donne la position relative des droites (EF) et (KL).

b) Vérifie le résultat précédent sur la figure à l'aide de tes instruments.

c) Calcule : $2\times3-(-6)\times(-1)$.



Partie B

Le plan est muni d'un repère (O, I, J).

Soit $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ deux vecteurs.

1- On se propose de démontrer que si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires alors $xy'-x'y=0$

Recopie et complète :

- Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires, alors il existe un nombre réel k tel que : $\overrightarrow{AB}=....\overrightarrow{CD}$
- Si $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{CD}$, alors $x=k\times.....$ et $y=.....\times y'$ et
- Donc : $xy'-x'y=....$

2- On se propose de démontrer que si $xy'-x'y=0$, alors $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ sont colinéaires.

Recopie et complète :

a) Si x' et y' sont nuls, alors $\overrightarrow{CD}$ est le vecteur ....et il est colinéaire à .....

b) Si l'un des deux nombres x' ou y' est non nul, supposons par exemple que x' est non nul.

Justifie que : $\overrightarrow{AB}=\frac{x}{x'}\overrightarrow{CD}$.

J'évalue mes acquis

Coche la case du tableau pour indiquer que les vecteurs sont colinéaires $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{PQ}$ sont colinéaires.

$\overrightarrow{MN}$	$\begin{pmatrix}-6\\8\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-\frac{3}{2}\\4\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-2\sqrt{6}\\3\end{pmatrix}$
$\overrightarrow{PQ}$	$\begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-6\\8\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\-\frac{3}{2\sqrt{3}}\end{pmatrix}$
Réponse				

Je fais le point de l'activité

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ sont colinéaires équivaut à $xy' - x'y = 0$.

7- Connaître la propriété relative à la condition d'orthogonalité de deux vecteurs orthogonaux

Activité 7

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O,I,J).

On donne les vecteurs $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$.

1- Construis les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ dans le repère (O,I,J).

2- Utilise tes instruments pour vérifier que les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires.

3- Vérifie que $2 \times 3 + 3 \times (-2) = 0$.

4- Soit $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ deux vecteurs. Ecris une relation entre les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ qui caractérise l'orthogonalité de ces deux vecteurs.

Je fais le point de l'activité

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ sont orthogonaux équivaut à $xx' + yy' = 0$.

J'évalue mes acquis

Coche d'une croix la case du tableau pour indiquer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont orthogonaux.

$\overrightarrow{AB}$	$(3\,;-2)$	$(-\sqrt{3}\,;-\sqrt{6})$	$(3\,;5)$	$(a\,;b)$	$\left(\frac{5}{6}\,;\frac{6}{5}\right)$
$\overrightarrow{CD}$	$(2\,;3)$	$(\sqrt{2}\,;-1)$	$(-8\,;-6)$	$(b\,;-a)$	$(6\,;-5)$
Réponses					

8- Calculer les coordonnées d'un vecteur

Activité 8

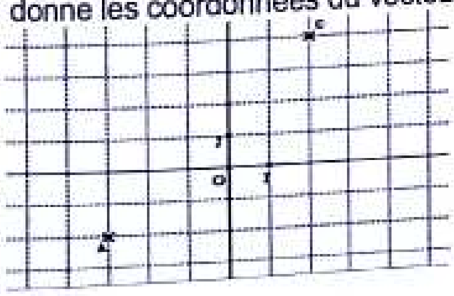
Partie A

Le plan est muni d'un repère (O, I, J).

On donne les points A (2 ; 5) et B (-3 ; 1).

1- Place les points A et B dans le repère (O, I, J).

2- Par une simple lecture graphique, donne les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.



Partie B

Le plan est muni d'un repère (O, I, J). Soit les points A $(x_A\,; y_A)$ et B $(x_B\,; y_B)$.

1- Recopie et complète chacune des phrases suivantes : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{....O} + \overrightarrow{.....}$

•(d'après..................)

• Or : $\overrightarrow{OA} = ...\overrightarrow{OI} + ...\overrightarrow{OJ}$ et $\overrightarrow{OB} = ...\overrightarrow{OI} + ...\overrightarrow{OJ}$

• Donc :

$\overrightarrow{AB} = (...\overrightarrow{OI} + ...\overrightarrow{OJ}) + (...\overrightarrow{OI} + ...\overrightarrow{OJ}) = (...-...)\overrightarrow{OI} + (...-...)\overrightarrow{OJ}$

2- Donne le couple de coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

J'évalue mes acquis

Dans chaque cas, calcule les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

	1er cas	2ème cas	3ème cas	4ème cas	5ème cas
A	(3;0)	(2;5)	$\left(\frac{1}{2};\frac{1}{3}\right)$	$\left(\frac{2}{3};\frac{1}{5}\right)$	$(3\sqrt{2}-3;6)$
B	(-1;-2)	(4;6)	$\left(-\frac{1}{2};-\frac{2}{3}\right)$	$\left(\frac{5}{6};3\right)$	$(3\sqrt{2};6-\sqrt{3})$
$\overrightarrow{AB}$					

Je fais le point de l'activité

Si $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$

alors $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$.

9 - Identifier les coordonnées du milieu d'un segment

Activité 9

Le plan est muni d'un repère (O, I, J).

On donne les points $A(-1 ; 2)$ et $B(-5 ; 3)$.

1- Place les points A et B, puis le milieu K du segment $[AB]$ dans le repere (O, I, J).

2- Soit les points $A(x_A ; y_A)$ et $B(x_B ; y_B)$ et $K(x_K ; y_K)$.

a- Donne la caracterisation vectorielle du milieu K d'un segment $[AB]$.

b- Justifie que : $x_K = \frac{x_A + x_B}{2}$ et $x_K = \frac{y_A + y_B}{2}$.

Je fais le point de l'activité

Soit K le milieu du segment $[AB]$

Si $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$

alors $K\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2}\right)$.

J'évalue mes acquis

Dans chaque cas, complète en indiquant les coordonnées du milieu K du segment [AB].

	1er cas	2ème cas	3ème cas	4ème cas
Coordonnées de A	(3;0)	(−2;2)	(−5;−3)	$\left(\frac{1}{3};-\frac{1}{2}\right)$
Coordonnées de B	(5;2)	(4;−6)	(−1;−7)	$\left(\frac{2}{3};-\frac{3}{2}\right)$
Coordonnées du milieu K du segment [AB]				

10 - Connaître la propriété relative à la distance de deux points.

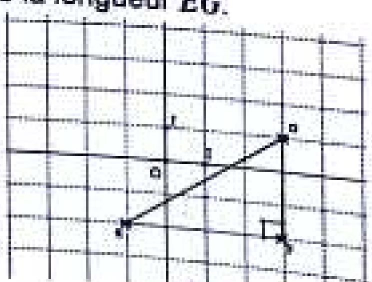
Activité 10

Partie A

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

1- Sur le graphique ci-dessous, indique les distances EF et FG.

2- Calcule la longueur EG.



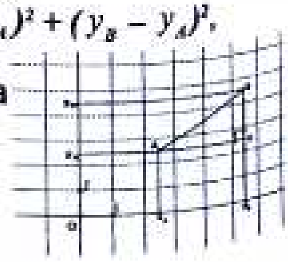
Partie B

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J)

Sur le graphique ci-dessous, on a : $x_A < x_B$ et $y_A < y_B$.

1- Recopie et complète : $AC = x_C - x_A$ et $BC = y_C - y_A$

2- Déduis-en que $AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$, puis donne une expression de la distance AB.



J'évalue mes acquis

Dans chaque cas, calcule la valeur exacte de la distance MN en précisant la formule utilisée.

M	$(2;3)$	$(-5;-6)$	$(-0,3;0,9)$	$(3\sqrt{3};\sqrt{2})$
N	$(5;7)$	$(-7;-11)$	$(0,6;-0,3)$	$(\sqrt{2};-\sqrt{3})$

Je fais le point de l'activité

Si $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$

alors $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

II- RESUME DE COURS

1- Coordonnées d'un vecteur

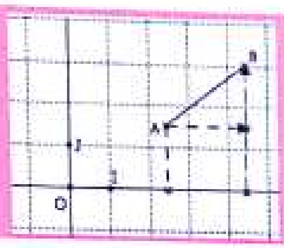
Définition

Le plan est muni d'un repère (O, I, J). A et B sont des points du plan.
On appelle couple de coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ le couple de nombres réels (x;y) tel que : $\overrightarrow{AB} = x\overrightarrow{OI} + y\overrightarrow{OJ}$.

Les différents repères

REMARQUES

On note : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$



- Soit $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ équivaut à $x = x'$ et $y = y'$
- Le vecteur nul a pour couple de coordonnées (0;0).

a) Coordonnées d'une somme de vecteurs

Propriété

Le plan est muni d'un repère. A, B, A' et B' des points du plan.

Si $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{A'B'}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ alors $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A'B'})\begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$

b) Coordonnées du produit d'un vecteur par un nombre réel.

Propriété

Le plan est muni d'un repère. A et B sont des points du plan, k est un nombre réel.

Si $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ alors $k\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$.

2 - Vecteurs colinéaires-vecteurs orthogonaux

a) Vecteurs colinéaires

Propriété

Le plan est muni d'un repère (O, I, J).

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{A'B'}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont ***colinéaires*** équivaut à $xy' - x'y = 0$.

b) Vecteurs non nuls orthogonaux

Propriété

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{A'B'}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont ***orthogonaux*** équivaut à $xy + x'y' = 0$.

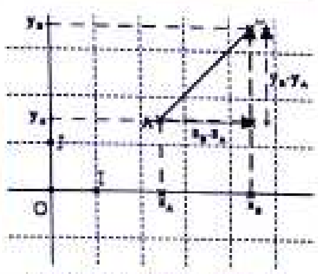
3- Calcul dans un repère

a) Calcul des coordonnées d'un vecteur

Propriété

Le plan est muni d'un repère (O, I, J). A et B sont deux points du plan.

Si $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$ alors $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$

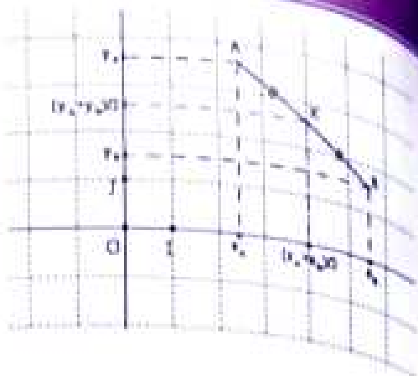


b) Coordonnées du milieu d'un segment

Propriété

Le plan est muni du repère (O, I, J). K est le milieu du segment $[AB]$

Si $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$ alors $K\left(\dfrac{x_A+x_B}{2}\ ;\ \dfrac{y_A+y_B}{2}\right)$



c) Distance de deux points

Propriété

Le plan est muni d'un repère orthonormé. *A et B* sont deux points du plan.

Si $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$ alors $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$

III- METHODE

- *Pour démontrer la colinéarité de deux vecteurs* $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{CD}$ *:*

  Dans un repère (O ;I ;J), $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ *et* $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$*;*

  - Soit par définition, il existe un nombre réel k tel que $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{CD}$

  - Soit : $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{CD}$ *colinéaires équivaut à* $xy'-yx'=0$

- *Pour démonter le parallélisme de droites ou l'alignement de points :*

- Pour démontre que les droites (AB) et (CD) sont parallèles, on démontre que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{CD}$ *sont colinéaires.*

- Pour démontrer que les points A, B et C sont alignés, on démontre que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{AC}$ *sont colinéaires.*

- *Pour démontrer que deux vecteurs* $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{AC}$ *sont orthogonaux, on utilise la propriété :*

  $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\perp\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ *équivaut à* $xx'+yy'=0$.

- *Pour démontre que les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires, on démontre que les vecteurs* $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{CD}$ *sont orthogonaux.*

IV- SAVOIR-FAIRE

Savoir-faire 1- Calculer les coordonnées d'un vecteur

Enoncé

Dans le plan muni du repère (O, I, J), on donne les points A (6 ; -8) et B (-3 ; -2).
Calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BA}$.

Solution commentée

Je calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BA}$.

Je sais que : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$. Or : A (6 ; -8) et B (-3 ; -2).

donc : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -3-6 \\ -2-(-8) \end{pmatrix}$; d'où : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -9 \\ 6 \end{pmatrix}$. Comme les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BA}$ sont opposés,

alors $\overrightarrow{BA} = (-1) \times \overrightarrow{AB}$. Ainsi : $\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix} 9 \\ -6 \end{pmatrix}$.

Savoir-faire 2- Calculer les coordonnées du milieu d'un segment

Enoncé

Dans le plan muni du repère (O, I, J), on donne les points E (-7 ; -3) et F (5 ; 6).
Calcule les coordonnées du milieu L du segment $[EF]$.

Solution commentée

Je calcule les coordonnées du milieu L du segment $[EF]$

Je sais que L est le milieu du segment $[EF]$ où E (-7 ; -3) et F (5 ; 6).

Or : $L\left(\frac{x_E + x_F}{2} ; \frac{y_E + y_F}{2}\right)$, donc : $L\left(\frac{-7+5}{2} ; \frac{-3+6}{2}\right)$; d'où : $L\left(-1 ; \frac{3}{2}\right)$

Savoir-faire 3- Calculer la distance de deux points

Enoncé

Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J). On donne les points A (-3; 2) et B (1 ; 3).
Calcule la longueur AB.

Solution commentée

Je calcule la longueur AB.

Je sais que : $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$. Or : A (-3; 2) et B (1 ; 3),

donc : $AB = \sqrt{(1-(-3))^2 + (3-2)^2} = \sqrt{4^2 + 1^2}$; d'où : $AB = \sqrt{17}$.

Savoir-faire 4- Démontrer que deux vecteurs sont colinéaires

Enoncé

Dans le plan muni du repère (O, I, J), on donne les vecteurs $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{RS}\begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.
Démontre que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{RS}$ sont colinéaires.

Solution commentée

Je démontre que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{RS}$ sont colinéaires

Je sais que deux vecteurs $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{RS}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont colinéaires si $xy' - yx' = 0$

On a : $4 \times \frac{1}{2} - (-2) \times (-1) = 2 - 2 = 0$. Donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{RS}$ sont colinéaires.

Savoir-faire 5- Démontrer que deux droites sont parallèles

Enoncé

Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J). On donne les points A (4; 2) et B (-2 ; -3) et C (6 ; 1).

Démontre que les droites (OA) et (BC) sont parallèles.

Solution commentée

Je démontre que les droites (OA) et (BC) sont parallèles

(OA) et (BC) sont parallèles revient à démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires

On a : $\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}6-(-2)\\1-(-3)\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}8\\4\end{pmatrix}$

On a : $4\times4-2\times8=16-16=0$. Donc les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires

Ainsi les droites (OA) et (BC) sont parallèles.

Autre méthode: en observant les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{BC}$, on a $\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{OA}$

D'où le résultat.

Savoir-faire 6- Démontrer que des points sont alignés

Enoncé

Le plan est muni du repère (O, I, J). On donne les points A (4; 2) et B (10 ; -5) et C (-8; 16)

Démontre que les points A, B et C sont alignés.

Solution commentée

Je démontre que les points A, B et C sont alignés

A, B et C alignés revient à démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires.

On calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$:

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}10-4\\-5-2\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}6\\-7\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-8-10\\16-(-5)\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-18\\21\end{pmatrix}$

On a : $\overrightarrow{BC}=-3\overrightarrow{AB}$. Donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires.

D'où les points A, B et C sont alignés.

Savoir-faire 7- Démontrer que deux vecteurs sont orthogonaux

Enoncé

Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J). On donne les vecteurs $\overrightarrow{EG}\begin{pmatrix}6\\-3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{FK}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$.

Démontre que les vecteurs $\overrightarrow{EG}$ et $\overrightarrow{FK}$ sont orthogonaux.

Solution commentée

Je démontre que les vecteurs $\overrightarrow{EG}$ et $\overrightarrow{FK}$ sont orthogonaux.

Je sais que deux vecteurs $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ sont orthogonaux si et seulement si $xx'+yy'=0$

On a : $6\times1+(-3)\times2=6-6=0$. Donc les vecteurs $\overrightarrow{EG}$ et $\overrightarrow{FK}$ sont orthogonaux.

Remarque : Démontrer que deux droites *(EG) et (FK)* sont perpendiculaires revient à démontrer que les $\overrightarrow{EG}$ et $\overrightarrow{FK}$ sont orthogonaux.

V- JE M'EXERCE

1- Exercices de fixation/ Application

Le plan est reporté à un repère orthonormé (O, I, J)

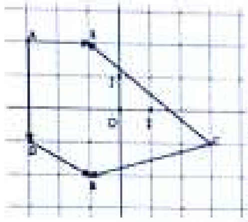
Identifier l'égalité de deux vecteurs à partir de leur couple de coordonnées

1 Dans chaque cas, détermine a et b pour que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ soient égaux :

a. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}a-2\\b+2\end{pmatrix}$

b. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}a+3\\5-b\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}2a+5\\3b-1\end{pmatrix}$.

2 Ecris les coordonnées des vecteurs : $\overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{AE}$; $\overrightarrow{DB}$; $\overrightarrow{CB}$; $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{CE}$ dans le repère (O, I, J) .



3 On donne : $x = a - 1$ et $y = 2 - 3a$, où a est un nombre réel donné.
Parmi ces deux cas ci-dessous, indique dans quel cas les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux.

a. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x+a\\y+2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}-1\\-3a\end{pmatrix}$

b. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\3+4a\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}3x+y+5\\x+y\end{pmatrix}$.

Vecteurs colinéaires-vecteurs orthogonaux

4 1- Parmi les vecteurs ci-dessous, indique ceux qui sont colinéaires :

$\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}6\\8\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{DB}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{CB}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{BE}\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CE}\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\3\end{pmatrix}$

2- Justifie les réponses.

5 On donne : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}x+1\\2x+1\end{pmatrix}$ où $x \in \mathbb{R}$.

Détermine la valeur du nombre réel x pour que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ soient colinéaires.

6 On donne : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\m+1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}-1\\m+1\end{pmatrix}$ où $m \in \mathbb{R}$.

Démontre que, pour tout nombre réel m, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

7 Indique la (*ou les*) bonne(s) réponse(s)

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x\\3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}3x\\-4\end{pmatrix}$ sont orthogonaux si :

a) $x = -2$; b) $x = -1$; c) $x = 2$; d) $x = 3$.

8 Dans chacun des cas suivants, détermine la (ou les) valeur(s) du nombre réel m, s'il en existe, pour la(les)quelle(s) les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont orthogonaux.

1. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}m\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$; 2. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}m\\1-2m\end{pmatrix}$;

3. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}m\\6\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}2m\\3\end{pmatrix}$; 4. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}m\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}m-1\\-6\end{pmatrix}$.

Calculer les coordnnées d'un vecteur - Les coordonnées du milieu d'un segment - La distance de deux points

9 On donne : $A(3;3)$; $B(-2;3)$; $C(-2;-2)$ et $D(4;-2)$

1. Fais la figure, et détermine les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{DA}$ et $\overrightarrow{IA}$:
   a) par une lecture graphique ;
   b) par le calcul.

10 On donne : A (- ; 5) ; B (1 ; 7) et C (-1 ; -1).

1. Indique la (ou les) bonne(s) réponse(s) :
   a) B est le milieu du segment $[AC]$;
   b) C est le milieu du segment $[AB]$;
   c) A est le milieu du segment $[BC]$.
   d) B est le milieu du segment $[AC]$.

11 On donne : $A(-2;1)$; $B(4;-1)$; $C(11;7)$; $D(-4;-1)$ et $E(8;-5)$.

1- Calcule les coordonnées des vecteurs :
$\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{AE}$; $\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{BD}$; $\overrightarrow{BE}$; $\overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{CE}$ et $\overrightarrow{DE}$.

2- Calcule les coordonnées des vecteurs :
a. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BD}$; $\overrightarrow{CE}-\overrightarrow{BC}$;
b. $2\overrightarrow{AB}$; $\frac{5}{6}\overrightarrow{AC}$; $-3\overrightarrow{CD}$ et $3\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{CE}$.

12 On donne : $A(2;1)$; $B(-2;-2)$; $C(1;-4)$ et $D(5;-1)$
Calcule les coordonnées du milieu E du segment $[AC]$ et celles du milieu F du segment $[BD]$.

2- Exercices de renforcement / approfondissement

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O ; I ; J).

13 Dans les cas suivants, dis si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux :

a. A (-2; -1) ; B (1 ; 3) ; C (1 ; 1) et D (-2 ; -1).

b. A (0; -1) ; B (1 ; 0) ; C (0 ; -2) et D (1 ; -1).

c. A (-1 ; 2) ; B (0 ; 1) ; C (3 ; -2) et D (2 ; -1).

14 Dans chacun des cas suivants, détermine les coordonnées du quatrième point D de sorte que le quadrilatère $ABCD$ soit un parallélogramme :
a. A (1 ; 1) ; B (5 ; 2) et C (3 ; 4) ;
b. A (-1 ; 2) ; B (5 ; -2) et C (1 ; -5)

15 1. Détermine les coordonnées du point K, image du point O par la translation de vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$

2. Sachant que le point A a pour coordonnées (5;1). Calcule les coordonnées du point B.

16 On donne les points $A(-3 ; 7)$; $B(0 ; -3)$ et $C(-2;3)$.
Dans chacun des cas suivants, détermine les coordonnées du point $M(x;y)$.

1. $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$ 2. $\overrightarrow{BM} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB}$
3. $2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{CM} = \vec{0}$ 4. $3\overrightarrow{BM} = 2\overrightarrow{AM}$.

17 On considère les points :
P (0 ;-1) ; A $\left(-\frac{3}{2} ; -\frac{3}{2}\right)$ et R (-3 ; -2).
1. Calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{PA}$ et $\overrightarrow{AR}$.
2. Déduis-en la position du point A sur le segment $[AC]$.

18 On considère les points $A(2;9)$; $B(-1;3)$ et $C(1;1)$.
1) Détermine les coordonnées du point $M(x;y)$ appartenant à l'axe des ordonnées et tel que les droites (AB) et (CM) soient parallèles.
2) Détermine les coordonnées du point $P(x';y')$ appartenant à l'axe des abscisses et tel que les points C ; B et P soient alignés.

19 Dans chacun des cas suivants, dis si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont colinéaires.
a. A (1 ; -3) ; B (-4 ; 8) ; C (-6 ; 2) et D(0;2)
b. A (5 ; 5) ; B (0 ; -1) ; C (10 ; 11) et D(5;6)
c. A (9 ; 1) ; B (6 ; -1) ; C (3 ; -3) et D(1;2).

20 On donne : A (-1 ; -1) ; B (5 ; 3) ; C (0 ; 5).
Démontre que les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

21 Dans chacun des cas suivants, détermine le nombre réel m tel que les points A, B et C soient alignés.
1- A (1 ; 3) ; B (-2 ; 1) et C (m ; 2)
2- A (-5 ; 1) ; B (7 ; 1) et C (1 ; m-2)
3- A (m+3 ; 1) ; B (-4 ; 2) et C (2m ; 3).

22 On donne : $A(-3 ; -4)$, $B(3 ; -1)$, $C(-1 ; 1)$ et $D(1 ; 2)$.
Démontre que le quadrilatère $ABDC$ est un trapèze.

23 Dans chacun des cas suivants, détermine la valeur qu'il faut attribuer au nombre réel m pour que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ soient colinéaires.
Dis si ces deux vecteurs sont de même sens ou non.

a. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}m-3\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}3m+1\\2\end{pmatrix}$; b. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}5m\\2m+3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix}$; c. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}m-2\\3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}4\\m+2\end{pmatrix}$

24 Dans chacun des cas, dis si le triangle ABC est rectangle, puis précise en quel point :
1- A (4 ; 1) ; B (-2 ; 0) et C (-1 ; -6)
2- A (1 ; 4) ; B (5 ; -2) et C (-1 ; -1)
3- A ($2\sqrt{2}$; 2) ; B (0 ; 4) et C ($-\sqrt{2}$; 0)
4- A ($\sqrt{3}$; -1) ; B ($2\sqrt{3}$;5) et C = ($-4\sqrt{3}$; 8)

25 Dans chacun des cas suivants, dis si les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires et justifie ta réponse.
1- A (3 ; -1) ; B (-2 ; 1) ; C (0 ; 5) et D (2 ; 10)
2- A ($\sqrt{3}$; 3) ; B (-1 ; $2\sqrt{3}$) ; C (0 ; 0) et D (2 ; 1)

26 On donne les points : $A(-5 ; -1)$; $B(4 ; -1)$ et $C(x ; 2)$.
Détermine dans chacun des cas suivants la ou les valeur(s) du nombre x de sorte que :
1. Le triangle ABC soit isocèle en C ;
2. Le triangle ABC soit rectangle en A ;
3. Le triangle ABC soit rectangle en B

27 On donne les points : $E(-3 ; 1)$ et $F(1 ; 4)$.
Détermine, par graphique, puis par calcul les coordonnées :
a. Du point G, sachant qu'il est sur l'axe des abscisses et que le triangle EFG est rectangle en F.
b. Du point K, sachant qu'il est sur l'axe des ordonnées et que le triangle EFK est rectangle en E.

28 On considère les points : **E (-3 ; 2) ; F (-3 ; -4) et G (1 ; -4).**
1- Calcule les distances EF, FG et EG.
2- Soit le point **M (-3;-2)**. La parallèle à la droite (FG) passant par **M** coupe la droite (EG) en N. Calcule la valeur exacte des longueurs EN et MN.

29 On donne les points : L$\left(-\frac{2}{3} ; \frac{3}{4}\right)$; M$\left(-\frac{11}{6} ; \frac{-3}{2}\right)$ et N(3;2).
1- Calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{LN}$, $\overrightarrow{LM}$ et $\overrightarrow{MN}$.
2- Emmanuel prétend qu'il peut obtenir les coordonnées de $\overrightarrow{LM} + \overrightarrow{MN}$ sans aucun calcul. Explique sa méthode.

30 1- Détermine les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{OI}$; $\overrightarrow{OJ}$ et $\overrightarrow{IJ}$.
2- Déduis-en les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{IO}$; $\overrightarrow{JO}$ et $\overrightarrow{JI}$.
3- Soit le point $M(x;y)$. Détermine les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OM}$.
4- Soit les points $A(2;1)$ et $B(-3;4)$. Calcule les coordonnées du point M tel que : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{BA}$.

31 1- Place les points A(2;1), $B(-\frac{1}{3};-3)$ et $C(-3;2)$

2- Construis le point D tel que le quadrilatère ABCD soit un parallélogramme.

3- Construis le point E, image du point C par la translation du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

4- Démontre que le point C est le milieu du segment $[DE]$.

5- Calcule les coordonnées des points D et E.

32 On donne : $A(0;-3)$, $B(2;3)$, $C(-7;1)$ et $D(-1;-1)$.

1- Calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.

2- Soit les points E et F tels que : $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AF} = 3\overrightarrow{AD}$.

Détermine les coordonnées des points E et F.

3- Démontre que les points C, E et F sont alignés.

33 On donne : $A(2;2)$; $B(-2;-1)$ et $C(-5;3)$.

1- a) Calcule les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$.

b) Démontre que le triangle ABC est rectangle en B.

2-a) Calcule AB^2 ; AC^2 et BC^2

b) Retrouve le résultat de la question 2).

34 On donne : $A(-3;2)$; $B(1;3)$ et $C(2;-1)$.

1- Calcule les distances AB ; AC et BC.

2- Démontre que le triangle ABC est rectangle en B.

3- a) Détermine les coordonnées du centre I du cercle (C) circonscrit au triangle ABC.

b) Calcule le rayon de (C).

35 Soit ABC un triangle isocèle en A.

On sait que :

- $A(0;4)$ dans le repère (O, I, J) ;
- L'aire du triangle ABC vaut $12cm^2$.
- La hauteur issue de A est la droite (OJ).

Détermine les coordonnées de B et de C sachant que l'abscisse de B est -4.

36

On considère les points $A(-1;3)$; $B(-2;2)$; $C(4;-2)$ et $D(-2;-2)$.

1- Place les points A, B, C, et D.

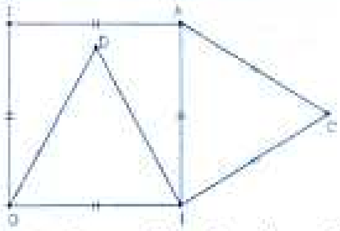
2- Démontre que les triangles ABC et BDC sont rectangles.

3- Déduis-en que les points A, B, C et D appartiennent à un même cercle (C) dont on précisera le centre et le rayon.

4- Encadre la mesure des angles $\widehat{BCD}$ et $\widehat{BCA}$ par deux nombres entiers naturels consécutifs.

3- Situations d'évaluation

37 En vue de préparer le prochain devoir de classe, deux élèves d'une classe de 3ème d'un lycée moderne font des recherches. Ils découvrent dans un livre de 3ème la figure codée ci-dessous dans la quelle $OIAJ$ est un carré.



En observant la figure, l'un des deux élèves affirme que les points J, D et C sont alignés, et le second, il est d'avis contraire. Très consciencieux, ils proposent cet exercice à leurs camarades de classe afin de les départager.

1- Soit H le milieu du segment $[OI]$.

a) Justifie que (DH) est la médiatrice du segment $[OI]$.

b) Démontre que : $DH = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

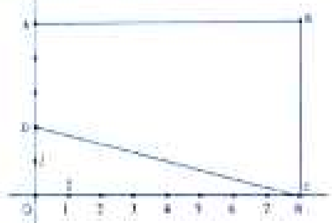
2- Soit (O, I, J) le repère du plan considéré.

a) Détermine les coordonnées des points B, D et C.

b) Calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{BC}$.

3- Dis lequel des deux élèves a raison. Justifie ta réponse.

38 Le COGES d'un établissement bénéficie auprès de la mairie de ta localité une parcelle rectangulaire qui est représentée par la figure ci-dessous.



Il souhaite placer sur le segment [AB] un point M (*emplacement d'une borne*) d'abscisse x telle que $0 < x < 8$, de sorte que le triangle CDM soit rectangle et isocèle en M.

Malheureusement, le *COGES* ne dispose pas d'instruments géométriques adéquats et il sollicite alors le concours de ta classe.

On considère le repère (O, I, J).

1- Détermine les coordonnées des points A, B, C et D.

2- Exprime en fonction de x les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{DM}$ et $\overrightarrow{CM}$.

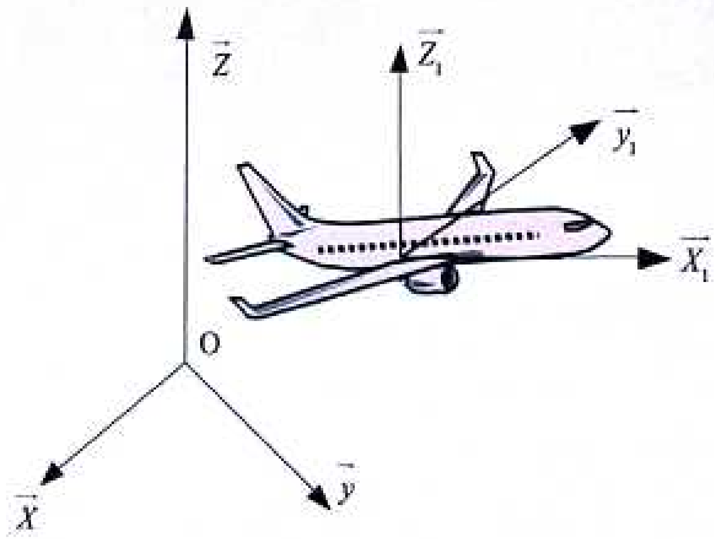
3- a. Démontre que pour tout nombre réel x, on a : $x^2 - 8x + 15 = (x-4)^2 - 1$.

b. Déduis-en les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $x^2 - 8x + 15 = 0$.

c- Indique la valeur du nombre réel x qui satisfait au souhait du COGES.

VI- RENDEZ-VOUS DES CURIEUX !

Pour situer une rue sur le plan d'une ville, pour utiliser un tableur sur un ordinateur et dans de nombreuses autres circonstances de la vie quotidienne ou professionnelle, nous utilisons, par habitude, un système de repérage dont la création date du XVII^e siècle.
La légende rapporte que le mathématicien et philosophe français René Descartes (1596-1650) a eu cette idée en observant se déplacer sur les petits carreaux un insecte de sa fenêtre.
Ainsi naquirent les « coordonnées cartésiennes » et les « repères cartésiens ».
Mais il ne faudrait pas en rester à cette anecdote.
Descartes créa la géométrie analytique :Ainsi inventa-t-il les notations x^2 pour le carré et x^3 pour le cube.



10 Equations de droites

Notions essentielles :

- Equations de droites
- Positions relatives de deux droites
- Droites parallèles
- Droites perpendiculaires
- Coefficient directeur d'une droite non parallèle à l'axe des ordonnées.

SITUATION D'APPRENTISSAGE

Un élève de 3ème d'un collège veut participer au jeu de « génie en herbe » organisé par le club de mathématiques de cet établissement.
Pour cela, il fait des recherches et découvre entre autres, des équations du type : $ax + by + c = 0$ *(a et b n'étant pas tous nuls)* qu'il présente à ses camarades de classe.
Curieux, ceux-ci décident de déterminer des équations et de construire des courbes d'équations de type $ax + by + c = 0$ (a et b n'étant pas tous nuls) afin de mieux prendre en compte dans leurs recherches toutes les propriétés relatives aux équations de droites.

I- ACTIVITES DE DECOUVERTE

1- Identifier une droite - Vérifier l'appartenance ou non d'un point à une droite

Activité 1

Le plan est rapporté à un repère (O, I, J).
On se propose de conjecturer l'ensemble des points $M(x\,;\,y)$ tels que $ax + by + c = 0$ (*a et b n'étant pas tous nuls*).

1. Dans chacun des cas ci-dessous, détermine trois couples solutions de l'équation obtenue, puis place-les dans le repère (O, I, J) et fais une conjecture.
   a. $a = 1$ et $b = c = 0$
   b. $b = 1$ et $a = c = 0$
   c. $a = 1$; $b = 1$ et $c = -2$
2. Justifie que les points $A(1\,;\,-2)$; $B(-3\,;\,6)$ et $C(10\,;\,-20)$ sont alignés.

Je fais le point de l'activité

Soit a et b deux nombres réels tels que $(a;b) \neq (0;0)$
L'ensemble des points $M(x\,;\,y)$ tels que $ax + by + c = 0$ est une **équation de droite.**

J'évalue mes acquis

Parmi les équations ci-dessous, indique celles qui sont des équations de droite.

a) $2x - 3y + 7 = 0$; b) $(x+y)(x-y) = 0$

c) $y = x + 5$; d) $\frac{x^2}{2x} - \frac{y^2}{y} = 0$.

2 - Déterminer une équation d'une droite passant par deux points distincts du plan

Activité 2

Dans le plan muni d'un repère (O, I, J) on donne les points $A(-3\,;\,1)$ et $B(1\,;\,2)$.
Soit $M(x\,;\,y)$ un point du plan.
On souhaite déterminer une relation entre x et y de sorte que les points A ; B et M soient alignés.

1- Calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$.

2- Recopie et complète :

M appartient à (AB) équivaut à $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ *sont …*
M appartient à (AB) équivaut à ……-…………= 0
M appartient à (AB) équivaut à ……-…………= 0

Je fais le point de l'activité

Une équation de droite peut être déterminée à partir deux points distincts.

J'évalue mes acquis

Détermine une équation de la droite qui passe par les points A (-4 ; 1) et B (3 ; 5).

3 - Déterminer une équation d'une droite passant par un point et parallèle à une droite donnée

Activité 3

Dans le plan muni d'un repère (O, I, J), on donne les points $K(6\,;\,1)$; $L(-1\,;\,-2)$ et $R(1\,;\,3)$.
Soit $M(x\,;\,y)$ un point du plan.
On souhaite déterminer une relation entre x et y de sorte qu'un point M appartienne à la droite (D) qui passe par le point R et parallèle à la droite (KL).

1- Place les points K ; L et R dans un repère

2- Calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{RM}$ et $\overrightarrow{KL}$

3- Recopie et complète :

M appartient à (D) équivaut à $\overrightarrow{RM}$ *et* $\overrightarrow{KL}$ *sont ……*
M appartient à (D) équivaut à ……-…………= 0
M appartient à (D) équivaut à ……-…………= 0.

Je fais le point de l'activité

Une équation de droite peut être déterminée par un point et une droite qui lui est parallèle.

J'évalue mes acquis

Le plan est muni d'un repère (O, I, J).
Détermine une équation de la droite qui passe par le point E(2,5) et parallèle à la droite (IJ).

4- Déterminer une équation d'une droite passant par un point et de vecteur directeur donné

Activité 4

Le plan est rapporté au repère (O, I, J).

A(2 ; 3) est un point du plan et AB $\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ un vecteur.

Détermine une équation de la droite (AB).

Je fais le point de l'activité

Pour déterminer une équation de la droite (D) qui passe par le point A et de vecteur direteur, on choisit un point $M(x\,;y)$ de la droite (D) et on utilise la propriété relative à la colinéarité des vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BC}$.

J'évalue mes acquis

1-Parmi les droites (D) ci-dessous, indique celles qui passent par le point A (-1 ; 1) et de vecteur directeur $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

a) (D) : $-x+2y-3=0$ b) (D) : $y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$

c) (D) : $-x-2y+1=0$ d) (D) : $y=\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$

2- Détermine une équation de la droite passant par le point H(1 ;2) et de vecteur directeur $\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

5 - Déterminer une équation d'une droite passant par un point et perpendiculaire à une droite donnée dans un repère orthonormé

Activité 5

Dans le plan muni d'un repère orthonomé *(O, I, J)*, on donne les points *U(4;3) ; V(1;-3) et W(1;3)*.
Soit $M(x\,;y)$ un point du plan.
On souhaite déterminer une relation entre x et y de sorte qu'un point M appartienne à la droite *(D')* qui passe par le point W et perpendiculaire à la droite *(UV)*.

1- Place les points *U ; V et W* dans le repère (O, I, J).
2- Calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{WM}$ et $\overrightarrow{UV}$
3- Recopie et complète :
M appartient à (D') équivaut à $\overrightarrow{WM}$ et $\overrightarrow{UV}$ sont ....
M appartient à (D') équivaut à ......-.........= 0 .

Je fais le point de l'activité

Une équation de droite peut être déterminée par un point et une droite qui lui est perpendiculaire.

J'évalue mes acquis

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
Détermine une équation de la droite qui passe par le point F(-2;-5) et perpendiculaire à la droite (IJ).

6 - Construire une droite dont on connaît une équation

Activité 6

Le plan est muni d'un repère $(O ; I ; J)$.
On donne les droites d'équations :
$(D_1) : 2x-y-4=0$; $(D_2) : 3x-6=0$ et $(D_3) : y+3=0$.

1- Construis les droites (D_1) ; (D_2) et (D_3) dans un même repère.
2- Parmi ces droites ci-dessus, indique celles qui sont non parallèles à l'axe des ordonnées, puis pour chacune de ces équations, exprime y en fonction de x.
3- Soit une droite (D) d'équation $px+qy+c=0$, où p et q ne sont pas tous nuls.
Recopie puis complète le tableau ci-dessous.

	Ecris une équation de la droite (D)	Dis si la droite (D) coupe l'axe des ordonnées	Exprime y en fonction de x lorsque cela est possible
$p \neq 0$ et $q=0$	....	....	....
$p=0$ et $q \neq 0$	....	....	....
$p \in \mathbb{R}$ et $q \neq 0$	....	....	....

Je fais le point de l'activité

Pour construire une droite (D),
- Il suffit de placer deux points de cette droite et tracer la droite passant par ces deux points
- On construit une droite (D)
- Une droite non parallèle à l'axe des ordonnées a une équation de la forme $y=ax+b$
- Une droite parallèle à l'axe des ordonnées a une équation de la forme $x=k$

J'évalue mes acquis

Le plan est muni d'un repère (O, I, J). On considère les droites dont les équations sont contenues dans le tableau :

(D_1): $y=\frac{\sqrt{3}}{2}x-2$	(D_2): $x=-7$	(D_3): $y-5=0$
(D_4): $-11x+y-6=0$	(D_5): $y=x$	(D_6): $y=2x-2$

1) Construis (D_1), (D_2) et (D_6)
2) parmi ces droites, indique :
a) Celles qui sont non parallèles à l'axe des ordonnées.
b) Celles qui sont parallèles à l'axe des ordonnées.

7 - Identifier le coefficient directeur d'une droite

Activité 7

Le plan est muni d'un repère (O, I, J).
Soit la droite (D) d'équation $y=ax+b$; $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$ deux de ses points.

1- Recopie et complète :
a) $A \in (D)$ équivaut à $y_A = ... + ...$
b) $B \in (D)$ équivaut à $y_B = ... + ...$
2- Justifie que $y_B - y_A = a(x_B - x_A)$
3- Déduis-en une expression du nombre a en fonction des coordonnées de A et B.
4- Soit la droite (D') d'équation $y=-3x+2$.
a. Vérifie que les points $E(-1;5)$ et $F(7;19)$ appartiennent à la droite (D').
b. Calcule $\frac{y_E - y_F}{x_E - x_F}$ puis donne ta remarque.

Je fais le point de l'activité

Dans le plan muni d'un repère (O, I, J), si une droite non parallèle à (OJ) passe par les points $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$, alors son coefficient directeur est : $a=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$

J'évalue mes acquis

Le plan est muni d'un repère (O,I,J).
Soit $A(x_A ; y_A)$ et $B(x_B ; y_B)$ deux points distincts et d'abscisses différentes d'une droite (D).
Parmi les expressions ci-dessous, indique celles qui te permettent de calculer le coefficient directeur de la droite (D)

a. $\frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$; b. $\frac{y_B - y_A}{x_A - x_B}$

c. $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$; d. $\frac{y_A - y_B}{x_B - x_A}$.

8- Construire une droite connaissant un de ses points et son coefficient directeur

Activité 8

Le plan est muni du repère (O, I, J).
On veut construire une droite (D) qui passe par le point A et de coefficient directeur a, dans chacun des cas suivants :

a) $A(3;-2)$ et $a=2$; b) $A(-1;4)$ et $a=-\frac{3}{4}$

Réalise la figure dans chacun de ces cas en suivant les instructions :

- Place le point A ;
- Place le point B tel que : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\a\end{pmatrix}$ dans le premier cas et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\4a\end{pmatrix}$ dans le deuxième cas.
- Trace la droite (AB).

Je fais le point de l'activité

La méthode ainsi exposée dans l'activité permet de construire une droite (D) passant par un point A et de coefficient directeur (ou de vecteur directeur) donné.

J'évalue mes acquis

Construis la droite (D) qui passe par le point E (-2 ; 1) et de coefficient directeur 3.

9 - Connaître la propriété relative au parallélisme de deux droites

Activité 9

Partie A

Le plan est muni d'un repère *(O, I, J)*. Soit les points A$(1;2)$; $B(-2;-7)$; C$(-1;-1)$ et $D(2;7)$.

1- Place les points *A ; B ; C et D* dans le repère (O, I, J).
2- Justifie que les droites *(AB) et (CD)* sont parallèles.
3- Calcule le coefficient directeur de chacune des droites *(AB) et (CD)*, puis compare-les.

Je fais le point de l'activité

Soit (D) et (D') deux droites de coefficients directeurs respectifs a et a'.
(D) est parallèle à (D') équivaut à $a = a'$.

Partie B *Démonstration*

Le plan est muni d'un repère *(O, I, J)*. On considère les droites *(D) et (D')* d'équations respectives $y = ax + b$ et $y = a'x + b'$.
On souhaite trouver une relation entre a et a' de sorte que les droites *(D) et (D')* soient parallèles.

1- Donne les coordonnées des vecteurs directeurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{EF}$ respectifs des droites *(D) et (D')*.
2- Recopie et complète :
(D) // (D') équivaut à et sont..........
(D) // (D') équivaut à ....=0

J'évalue mes acquis

Réponds par vrai ou par faux à chacune des affirmations suivantes :

a) Toute droite parallèle à la droite (L) d'équation $y = \frac{2}{13}x - 3$ a pour coefficient directeur $\frac{2}{13}$.
b) Les droites d'équations $4x - y - 5 = 0$ et $-4x + y - 5 = 0$ sont parallèles.
c) Toute droite parallèle à l'axe des ordonnées a pour coefficient directeur 0.
d) Toute droite parallèle à l'axe des abscisses n'a pas de coefficient directeur.

10 - Connaître la propriété relative à la perpendicularité de deux droites

Activité 10

Partie A

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). On donne les points $A(1;3)$; $B(2;-1)$; $C(0;3)$ et $D(2;4)$.

1- Place les points A, B, C et D dans le repère (O, I, J).

2- Justifie que les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires.

3- Calcule le coefficient directeur de chacune des droites (AB) et (CD), puis vérifie que leur produit est égal à -1.

Partie B *Démonstration*

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). Soit (D) et (D') deux droites de coefficients directeurs respectifs a et a'.

On souhaite établir une relation entre a et a' de sorte que les droites (D) et (D') soient perpendiculaires.

1- Donne les coordonnées des vecteurs directeurs respectifs des droites (D) et (D').

2- Recopie et complète

(D) ⊥ (D') équivaut à $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont ...

(D) ⊥ (D') équivaut à ...

(D) ⊥ (D') équivaut à ...

Je fais le point de l'activité

Soit (D) et (D') deux droites de coefficients directeurs respectifs a et a'.
(D) est perpendiculaire à (D') équivaut à $a \times a' = -1$.

J'évalue mes acquis

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
Parmi les droites ci-dessous, indique celles qui sont perpendiculaires.

(D_1) : $y = 2 + 3x$; (D_2) : $y = 3 - 2x$; (D_3) : $y = -2x + 3,5$; (D_4) : $y = 3 - x$

(D_5) : $y = \frac{x}{3} - 7$; (D_6) : $y = \frac{x}{2} + 7$; (D_7) : $y = x - 3$; (D_8) : $y = \frac{x}{3} + 1$

II- RESUME DE COURS

A- Equation d'une droite

Propriétés 1

Dans le plan muni d'un repère,
- Toute droite a une équation de la forme $px + qy + r = 0$ *(p et q n'étant pas tous nuls).*
- Toute équation de la forme $px + qy + r = 0$ est une équation d'une droite *(p et q n'étant pas tous nuls).*

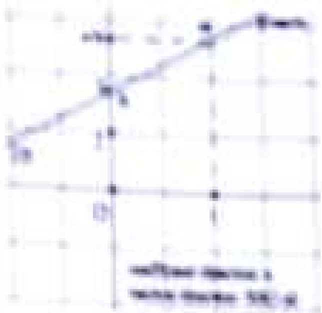
Propriétés 2

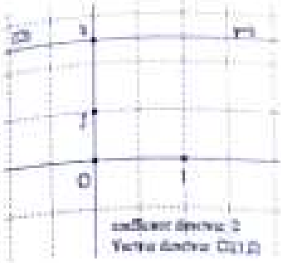
Le vecteur de coordonnées $\binom{-q}{p}$ est un vecteur directeur de toute droite d'équation $px + qy + r = 0$ *(p et q n'étant pas tous nuls).*

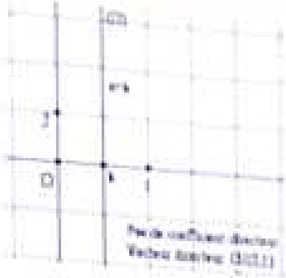
B- Coefficient directeur d'une droite

Propriétés

- Une droite *(D)* non parallèle à l'axe des ordonnées a une équation de la forme $y = ax + b$; a est le coefficient directeur de la droite *(D)*, b est son ordonnée à l'origine.
- Une droite parallèle à l'axe des ordonnées a une équation de la forme $x = k$. Elle n'a ni coefficient directeur ni ordonnée à l'origine.





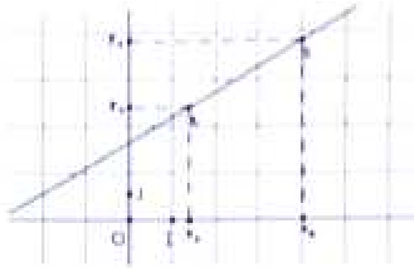


Une droite d'équation $y = ax + b$ ou $px + qy + r = 0$ (avec q non nul) est nécessairement sécante à l'axe des ordonnées.

C- Calcul du coefficient directeur

Propriétés

Dans le plan muni d'un repère (O, I, J), si une droite non parallèle à (OJ) passe par les points $A(x_A ; y_A)$ et $B(x_B ; y_B)$, alors son coefficient direcrecteur est : $a = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

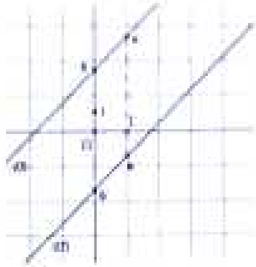


D-Positions relatives de deux droites

a-Droites parallèles

Propriétés

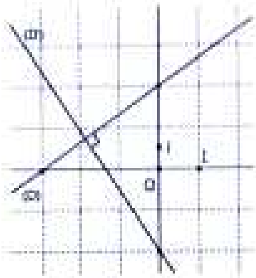
Le plan est muni d'un repère (O, I, J).
Les droites (D) et (D') ont pour coefficient directeurs a et a'.
(D) est parallèle à (D') équivaut à $a = a'$.



b- Droites perpendiculaires

Propriétés

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
Les droites (D) et (D') **ont pour coefficient** directeurs a et a'.
(D) est perpendiculaire à (D') équivaut à : $a \times a' = -1$



III- METHODE

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
Pour déterminer une équation de droite passant par deux points $A(x_A ; y_A)$ et $B(x_B ; y_B)$.

Cas où les deux points ont la même abscisse

Exemple

Déterminer une équation de la droite (D_1) passant par les points $A(2;-3)$ et $B(2;6)$.
On remarque que les deux points ont la même abscisse 2, donc la droite (AB) est parallèle à l'axe des ordonnées.
Ainsi : la droite (AB) a pour équation $x = 2$.

Cas où les deux points ont la même ordonnée.

Exemple

Déterminer une équation de la droite (D_2) passant par les points $E(2 ; -5)$ et $F(2;-5)$.
On remarque que les deux points ont la même ordonnée -5, donc la droite (EF) est parallèle à l'axe des abscisses.
Ainsi : la droite (AB) a pour équation $y = -5$.

Cas général

Exemple

Déterminer une équation de la droite (D_1) qui passe par les points G (2 ; -3) et P (-5 ; 1).

Première méthode

Soit M(x,y) un point du plan.

M appartient à (D) équivaut à $\vec{GM}$ et $\vec{GP}$ sont colinéaires

Or $\vec{GM}\begin{pmatrix} x-2 \\ y+3 \end{pmatrix}$ et $\vec{GP}\begin{pmatrix} 2-(-5) \\ -3-1 \end{pmatrix}$, $\vec{GP}\begin{pmatrix} 7 \\ -4 \end{pmatrix}$.

Donc : $M \in (D)$ équivaut à $-4(x-2)-7(y+3)=0$. $M \in (D)$ équivaut à $-4x-7y-13=0$.

Conclusion

La droite (AB) a pour équation $-4x-7y-13=0$ ou $4x+7y+13=0$

Deuxième méthode

On écrit une équation de la droite (D) sous la forme $px+qy+r=0$ (p et q n'étant pas nuls) de vecteur directeur de coordonnées $\vec{RS}\begin{pmatrix} -q \\ p \end{pmatrix}$.

Détermination de p et q :

Comme les vecteurs directeurs d'une droite sont colinéaires, il suffit d'identifier les coordonnées des vecteurs $\vec{GP}$ et $\vec{RS}$

Or $\vec{GP}\begin{pmatrix} 2-(-5) \\ -3-1 \end{pmatrix}$, $\vec{GP}\begin{pmatrix} 7 \\ -4 \end{pmatrix}$

Donc: $-q = 7$ et $p = -4$. Soit $p = 4$ et $q = -7$

L'équation de la droite (D) s'écrit : $-4x-7y+r=0$

Détermination de r

G appartient à la droite (D), donc ses coordonnées vérifient l'équation $-4x-7y+r=0$

On a : $-4\times 2-7\times(-3)+r=0$, soit $r=-13$

Troisième méthode

On remarque les points G et P ont des abscisses différentes. La droite (D) est non parallèle à l'axe des ordonnées. Elle a une équation de la forme $y=ax+b$.

<u>Calcul de a :</u> $a=\dfrac{y_G-y_P}{x_G-x_P}=\dfrac{-3-1}{2-(-5)}=\dfrac{-4}{7}$

En remplaçant a par sa valeur

on obtient : $y=\dfrac{-4}{7}x+b$

<u>Calcul de b :</u> $G\in(D)$, donc $-3=\dfrac{-4}{7}\times 2+b$; soit $b=-3+\dfrac{8}{7}=\dfrac{-13}{7}$

Conclusion

(D) a pour équation :

$y=\dfrac{-4}{7}x-\dfrac{13}{7}$ ou $4x+7y+13=0$

Pour déterminer une équation d'une droite (D) passant par un point A et de vecteur directeur $\vec{EF}$ donné.

Exemple

Détermine une équation de la droite (D) passant le point A (3 ; 7) et de vecteur directeur $\vec{EF}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

Soit (D) : $px+qy+r=0$ (p et q n'étant tous nuls) de vecteur directeur $\vec{EF}\begin{pmatrix} -q \\ p \end{pmatrix}$.

Donc $-q=2$ et $p=-1$; soit $p=-1$ et $q=-2$

En remplaçant p et q par leur valeur, on obtient : (D) : $-x-2y+r=0$

$A\in(D)$, donc $-3-2\times7+r=0$, soit $r=17$.

<u>**NB:**</u> **On pourrait utiliser l'une des deux autres méthodes exposées dans le cas général pour déterminer cette équation.**

Conclusion

(D) a pour équation :

$-x-2y+17=0$ ou $x+2y-17=0$

Pour déterminer une équation d'une droite (D) passant par un point A et parallèle à une droite donnée.

Exemple

Détermine une équation d'une droite (D) passant le point A (2 ; 0) et parallèle à la droite (L) d'équation $3x - y + 8 = 0$.

- On vérifie que le point A n'appartient pas à la droite (L) ; sinon la droite (D) serait confondue à la droite (L) et les deux droites auraient les mêmes équations.
- Pour écrire une équation d'une telle droite (D) ; il suffit d'écrire une équation d'une droite passant par le point A et de vecteur directeur de coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Se référer à la méthode précédente.

Pour déterminer une équation d'une droite (D) passant par un point A et perpendiculaire à une droite donnée.

Exemple

Soit les points A (2 ; -3) ; E (-3 ; 4) et F (6 ; 2).
Détermine une équation d'une droite (D) qui passe par le point A et perpendiculaire à la droite (EF).

Première méthode

$A \in (D)$ et $(D) \perp (EF)$.

La droite (EF) est non parallèle à l'axe des ordonnées. Elle a un coefficient directeur a.

Calcul de a $\quad a = \frac{y_E - y_F}{x_E - x_F} = \frac{4-2}{-3-6} = -\frac{2}{9}$

Soit a' le coefficient directeur de la (D).

Comme (D) et (EF) sont perpendiculaires, on a : $a \times a' = -1$ et donc : $a' = -\frac{1}{a} = \frac{9}{2}$

Une équation de (D) s'écrit : $y = \frac{9}{2}x + b$.

Calcul de b

A appartient à la droite (D).

Donc : $-3 = \frac{9}{2} \times 2 + b$ soit $b = -12$.

Conclusion

(D) a pour équation : $y = \frac{9}{2}x - 12$ ou $9x - 2y - 24 = 0$

Deuxième méthode

Soit M(x ; y) un point du plan.

M appartient à la droite (D) équivaut à AM et EF sont orthogonaux.

Or $\vec{AM}\begin{pmatrix} x-2 \\ y+3 \end{pmatrix}$ et $\vec{EF}\begin{pmatrix} 6-(-3) \\ 2-4 \end{pmatrix}$; $\vec{EF}\begin{pmatrix} 9 \\ -2 \end{pmatrix}$

Donc : M appartient à la droite (D) équivaut à $9(x - 2) - 2(y + 3) = 0$

M appartient à la droite (D) équivaut à $9x - 2y - 24 = 0$

Conclusion

(D) a pour équation : $9x - 2y - 24 = 0$

IV- SAVOIR-FAIRE

Savoir-faire 1- Déterminer une équation de droite passant par deux points

Enoncé

Le plan est muni du repère (O, I, J). On donne les points A (7 ; -2) et B (-5 ; -4).

Détermine une équation de la droite (AB).

Solution commentée

Je détermine une équation de la droite (AB)

Soit M $(x ; y)$ un point du plan.

M $(x ; y)$ appartient à la droite (AB) équivaut à $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires

Or : $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x-7 \\ y-(-2) \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x-7 \\ y+2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -5-7 \\ -4-(-2) \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -12 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Donc : M $(x ; y)$ appartient à (AB) équivaut à $-2(x-7)-(-12)(y+12)=0$

M $(x ; y)$ appartient à (AB) équivaut à $-2x+12y+38=0$

D'où la droite (AB) a pour équation $-2x+12y+38=0$ ou $x-6y-19=0$

Autre méthode :

La droite (AB) a une équation de la forme $ax+by+c=0$ de vecteur directeur $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$

Or : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -5-7 \\ -4-(-2) \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -12 \\ -2 \end{pmatrix}$, donc : $-b=-12$ et $a=-2$, soit : $a=-2$ et $b=12$

D'où: $(AB) : -2x+12y+c=0$. Comme A est un point de la droite (AB), donc ses coordonnées cette équation. On obtient : $c=38$.

Ainsi la droite (AB) a pour équation : $-2x+12y+38=0$ ou $x-6y-19=0$.

Savoir-faire 2- Déterminer une équation d'une droite passant par un point et parallèle à une droite donnée

Enoncé

Le plan est muni du repère (O, I, J). On donne les points R (1 ; 2) et S (-3 ; 5) et T (-6 ; 3).

Détermine une équation de la droite (D) qui passe par le point R et parallèle à la droite (ST).

Solution commentée

Je détermine une équation de la droite (D) qui passe par le point R et parallèle à la droite (ST).

J'utilise l'une des deux méthodes exposées dans l'exercice précédent.

Soit la droite (D) dont une équation est de la forme $ax+by+c=0$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{ST}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$.

Or : $\overrightarrow{ST}\begin{pmatrix} -6-(-3) \\ 3-5 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{ST}\begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}$, donc : $-b=-3$ et $a=-2$, soit $a=-2$ et $b=3$

D'où : (D) d'équation $-2x+3y+c=0$. Comme la droite passe par le point R, donc ses coordonnées vérifient cette équation. On obtient : $-2\times1+3\times2+c=0$, soit $c=-4$

Ainsi la droite (D) a pour équation : $-2x+3y-4=0$ ou bien $2x-3y+4=0$

Remarque : on utilise l'une des méthodes exposées ci-dessus **pour déterminer une équation d'une droite passant par un point et de vecteur directeur donné.**

Savoir-faire 3- Déterminer une équation d'une droite passant par un point et perpendiculaire à une droite donnée dans un repère orthonormé.

Enoncé

Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J). On donne les points A (4;-1) et B (-3;5) et C (-3;4).
Détermine une équation de la droite (D_1) qui passe par le point A et perpendiculaire à la droite (ST).

Solution commentée

Je détermine une équation de la droite (D_1) qui passe par le point A et perpendiculaire à la droite (ST).

Soit M (x ; y) un point du plan.

$M \in (D_1)$ équivaut à $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BC}$. Or : $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x-4 \\ y-(-1) \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x-4 \\ y+1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} -3-2 \\ 4-5 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} -5 \\ -1 \end{pmatrix}$

Donc : $M \in (D_1)$ équivaut à $-5(x-4)+(-1)(y+1)=0$, c'est-à-dire : $-5x+20-y-1=0$
Ainsi la droite (D_1) a pour équation : $-5x-y+19=0$ ou bien $5x+y-19=0$.

Savoir-faire 4- Construire une droite connaissant un de ses points et son coefficient directeur

Enoncé

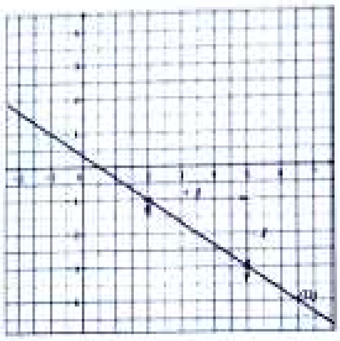
Le plan est muni du repère (O, I, J). Soit (D) la droite qui passe par le point E (2 ; -1) et de coefficient directeur $-\frac{2}{3}$. Construis la droite (D).

Solution commentée

Je construis la droite (D).

Je sais que la droite (D) passe par le point E (2 ; -1) et de coefficient directeur $-\frac{2}{3}$. Elle a pour vecteur directeur de coordonnées $\left(1;-\frac{2}{3}\right)$ ou $(3;-2)$.

- Je place le point E (2 ; -1) et le point F tel que $\overrightarrow{EF}=3\overrightarrow{OI}-2\overrightarrow{OJ}$.
- Je trace la droite (D) qui passe par les points E et F.



Savoir-faire 5- Justifier que deux droites sont parallèles

Enoncé

Le plan est muni du repère (O, I, J). On donne les points E (10 ; 8) et F (-5 ; -1).
Soit (D) la droite qui passe par le point A (0 ; -2) et de coefficient directeur $\frac{3}{5}$.
Justifie que les droites (D) et (EF) sont parallèles.

Solution commentée

Je justifie que les droites (D) et (EF) sont parallèles.

Je vérifie que les droites (D) et (EF) ont le même coefficient directeur
Je calcule le coefficient directeur a de la droite (EF)

On a : $a=\frac{8-(-1)}{10-(-5)}=\frac{9}{15}=\frac{3}{5}$. Or la droite (D) a pour coefficient directeur $\frac{3}{5}$,
donc les droites (D) et (EF) ayant le même coefficient directeur sont parallèles.

Savoir-faire 6- Justifier que deux droites sont perpendiculaires

Enoncé

Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J).

Soient les droites (D_1) et (D_2) d'équations respectives $3x+2y-13=0$ et $y=\frac{2}{3}x$

Justifie que les droites (D_1) et (D_2) sont perpendiculaires.

Solution commentée

Je justifie que les droites (D_1) et (D_2) sont perpendiculaires.

Je détermine le coefficient directeur a de la droite (D_1) :

On a : $3x+2y-13=0$ ainsi $2y=-3x+13$ d'où $y=-\frac{3}{2}x+\frac{13}{2}$. Donc : $a=-\frac{3}{2}$

La droite (D_2) a pour coefficient directeur $a'=\frac{2}{3}$.

On a : $a \times a' = -\frac{3}{2} \times \frac{2}{3} = -1$. Ainsi les droites ($D_1$) et ($D_2$) sont perpendiculaires.

V- JE M'EXERCE

1- Exercices de fixation/ Application

Dans les exercices suivants, le plan est muni d'un repère (O, I, J).

Identifier une équation de droite

1 Choisis la ou les bonne(s) réponse(s) :

1-Toute équation de droite est de type :

a) $y=ax+b$; b) $x=c$;

c) $ax+by+c=0$; d) $x=ay+b$

2- La droite d'équation $ax+by+c=0$ ($(a,b) \neq (0,0)$) a pour vecteur directeur de coordonnées :

a) (b ; a) ; b) (-b ; a)

c) (b ; -a) ; d) (-b ; a)

3-La droite (D) d'équation $\frac{1}{3}x+\frac{1}{2}y-1=0$ admet aussi pour équation :

a) $3x+2y-1=0$; b) $x+\frac{1}{2}y+3=0$;

c) $\frac{2}{3}x-y+2=0$; d) $2x+3y-6=0$

2 Dans chacun ci-dessous, indique les coordonnées d'un vecteur directeur de la droite (D).

a) (D) : $5x-2y-1=0$;

b) (D) : $y=2x-7$

c) (D) passe par les points A (3 ; 1) et B (-6 ; - 5)

d) (D) est parallèle à la droite (L) d'équation $-3x+y+1=0$.

Déterminer une équation d'une droite passant deux points

3 Dans chacun des cas suivants, détermine une équation de la droite *(D)* qui passe par les points *A et B*.

a. A (4 ; 1) et B (4 ; -2) b. A (5 ; -1) et B (-2 ; -1)

c. A (-4 ; -1) et B (1 ; -3)

Déterminer une équation d'une droite passant par un point et parallèle à une droite donnée

4 Dans chacun des cas suivants, détermine une équation de la droite *(D)* qui passe par le point A et parallèle à la droite *(BC)*.

1) A (2 ; -3) ; B (7 ; 5) et C (1 ; 1)

2) A ($\frac{1}{2}$; 1) ; B ($\frac{3}{2}$;$\frac{-5}{2}$) et C (0 ; 2)

3) A (6 ; 5) ; B (2 ; 1 et C (2 ; 2)

5 Dans chacun des cas suivants, détermine une équation de la droite *(D')* qui passe par le point A et parallèle à la droite *(D)*.

1) $A(2;1)$ et $(D): 2x-3y+2=0$

2) $A(-5;7)$ et $(D): y=5x-6$

3) A (8 ; -3) et (D) : $y=4$

Déterminer une équation d'une droite passant par un point et de vecteur directeur donné

6 Dans chacun des cas suivants, détermine une équation de la droite *(D')* qui passe par le point *A* et de vecteur directeur $\overrightarrow{RS}$.

1) A (-3 ; 5) et $\overrightarrow{RS}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$; 2) A (8 ; 6) et $\overrightarrow{RS}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

Déterminer une équation d'une droite passant par un point et perpendiculaire à une droite donnée dans un repère orthonormé

7 Dans chacun des cas suivants, détermine une équation de la droite *(D)* qui passe par le point A et perpendiculaire à la droite *(GK)*.

1) A (-5 ; 2) ; G (1 ; 1) et K (3 ; -4)
2) A ($\sqrt{2}$; $\sqrt{3}$) ; G (4 ; 6) et K(5 ; 1)
3) A (11 ; -13) ; G (-3 ; 1) et K(-1 ; 2).

Déterminer le coefficient directeur d'une droite

8 Dans chacun des cas suivants, détermine le coefficient directeur de la droite *(D)*.

1) (D) : $5x + 6y - 1 = 0$
2) (D) : $y = \frac{6-2x}{3}$
3) (D) : $x = 2y - 1$
4) (D) : $x\sqrt{6} - \sqrt{2}y + \sqrt{6} = 0$
5) (D) : $mx + py + n = 0$ (p non nul)

9 Recopie et complète le tableau suivant en indiquant, lorsqu'ils existent, le coefficient directeur m et l'ordonnée à l'origine p de la droite.

Equation	Equation réduite	m	p
$4x - 5y + 5 = 0$			
	$y = -7x + 1$		
2y+8			

10 Dans chacun des cas ci-dessous, détermine le coefficient directeur de la droite (D).

a) (D) : $3x - 8y + 1 = 0$; b) (D) : $x = 3y + 1$;

c) (D) : $\frac{5}{3}x - \frac{3}{5}y - 1 = 0$.

Vérifier l'appartenance ou non d'un point à une droite

11 On considère la droite *(D)* d'équation $3x - 2y + 3 = 0$. Complète le tableau sachant que les points A, B, C, D, E, F et G appartiennent à la droite (D).

Point	A	B	C	D	E	F	G
Abscisse	-1	....	6	.....	$-\sqrt{3}$	.....	0
Ordonnée	....	3	.....	-5	....	0	....

12 Construis les droites :

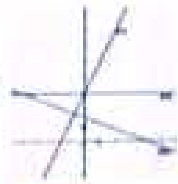
1) (D_1) : $3x - y - 2 = 0$
2) (D_2) : $y = 5x + 1$
3) (D_3) : $x = 2,5$
4) $y + 3 = 0$
5) $x = 2y - 6$

13 Soit *(D)* la droite d'équation $2x - 3y - 1 = 0$.
Parmi les points ci-dessous, indique ceux qui appartiennent à la droite *(D)*.

A (3 ; -2) ; B (0 ; 3) ; C (0 ; $\frac{1}{3}$) ; E (0 ; $\frac{-1}{3}$) et F ($\frac{1}{2}$; 0)

Construire une droite dont on connait une équation

14 Par une simple lecture, indique le coefficient directeur des droites représentées.



Identifier le coefficient directeur une droite

15 Soient les points A (-2 ; 2) ; B (-3 ; 2) et C (-2 ; -2) d'un repère du plan.
Parmi les droites (AB) ; (AC) et (BC), indique celles qui ont un coefficient directeur.

16 Soient les points E (x ; y) et F (a ; b) tels que x est différent de a.
Choisis le coefficient directeur de la droite (EF) parmi les propositions suivantes :

a) $\frac{y-b}{x-a}$; b) $\frac{b-y}{x-a}$; c) $\frac{b-y}{a-x}$

17 La droite (D) a pour coefficient directeur 2 et passe par les points A et B.
Indique les coordonnées possibles des points A et B.

Construire une droite connaissant un de ses points et son coefficient directeur

18 Construis la droite *(D)* qui a pour ordonnée à l'origine -3 et de coefficient directeur 2.

19 Dans chacun des cas suivants, construis la droite qui passe par la point A et de coefficient directeur donné a.

1) A (1 ; -2) et $a = 3$
2) A (-2 ; 6) et $a = -2$
3) A (4 ; -3) et $a = \frac{2}{3}$.
4) A (-1 ; -3) et $a = \frac{-5}{3}$

Connaître la propriété relative au parallélisme de droite

20 Parmi les droites ci-dessous, indique celles qui sont perpendiculaires à la droite (D) d'équation $y = 2x - 1$.

$(D_1) : y = \frac{1}{2}x + 1$; $(D_2) : y = -\frac{1}{2}x + 5$;

$(D_3) : -4x + 2y - 1 = 0$; $(D_4) : \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}y - 1 = 0$.

21 Dans chacun des cas, indique la valeur du nombre réel m de sorte que les droites (D_1) et (D_2).

a) (D_1) : $y = mx - 2$ et (D_2) : $y = 3x + 2$
b) (D_1) : $5x + 2y - 8 = 0$ et (D_2) : $y = mx - 11$
c) (D_1) : $x = -3y - 1$ et (D_2) : $mx + 2y + 3 = 0$

Calculer le coefficient directeur d'une droite dans un quadrillage

22 Calcule le coefficient directeur de la droite (D) qui passe par les points A et B dans chacun des cas suivants :

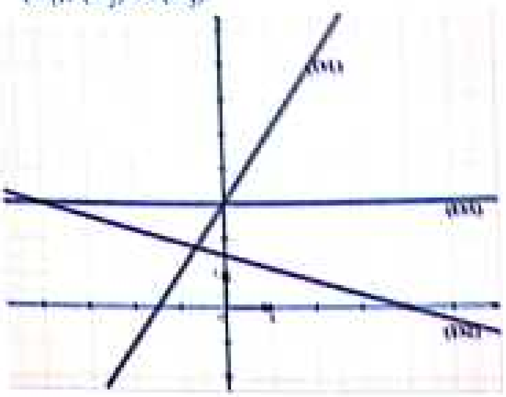
1) A(2;4) et B(5;6)

2) A(11;-7) et B (-12;-9)

3) $A(\sqrt{2}+1;\sqrt{6})$ et $B(3+\sqrt{2};\sqrt{6}-3)$.

Lire graphiquement le coefficient directeur d'une droite passant par deux points et non parallèles à l'axe des ordonnées

23 A l'aide du graphique ci-dessous, donne le coefficient directeur de chacune des droites (D_1), (D_2) et (D_3).



Justifier que deux droites sont parallèles

24 Parmi les droites (D_1), (D_2), (D_3) et (D_4) définies par leurs équations, donne celles qui sont parallèles puis justifie ta réponse.

(D_1): $y = 2x$; (D_3): $y = 2x - 5$

(D_2): $y = \frac{1}{2}x - 1$; (D_4): $y = \frac{1}{2}x - 3$.

25 On considère les points A(-2;4), B(-4;-2), C(3;-1) et D(4;2).

En utilisant les coefficients directeurs, démontre que :

1) Les droites (AB) et (CD) sont parallèles

2) Les droites (AD) et (BC) sont sécantes

26 On donne une droite (D) d'équation $2x+y-1=0$.

Détermine parmi les droites suivantes, données par une équation, celles qui sont parallèles à la droite (D). Justifie ta réponse.

a) $2x + y + 2 = 0$; c) $x + y - 3 = 0$

b) $-4x + 2y + 1 = 0$; d) $-2x + y - 1 = 0$

27 Dans chacun des cas suivants, détermine le nombre réel m pour que (D_1) et (D_2) soient deux droites parallèles.

1- $(D_1) : y = 3x - 1$ et $(D_2) : y = mx + 2$

2- $(D_1) : 5x - 3y + 1 = 0$ et $(D_2) : y = (m-1)x - 1$

3- $(D_1) : 8x + 5y - \frac{1}{3} = 0$ et $(D_2) : mx + (2m-1)y = 0$.

Justifier que deux droites sont perpendiculaires

28 Parmi les droites (L_1), (L_2), (L_3) et (L_4), indique celles qui sont perpendiculaires puis justifie la réponse. $(L_1) : y = \frac{3}{4}x + 1$; $(L_2) : y = -\frac{3}{4}x - \frac{2}{5}$

$(L_3) : y = \frac{4}{3}x - 7$; $(L_4) : y = -\frac{4}{3}x + \frac{1}{2}$.

29 On donne la droite (D) d'équation $y = \frac{2}{3}x - 5$.

Indique parmi les droites suivantes, données par une équation, celles qui sont parallèles à la droite (D). Justifie ta réponse

a) $3x - 2y + 3 = 0$; c) $-3x - 2y + 1 = 0$

b) $1{,}5x + y - 7 = 0$; d) $6x - 2y - 3 = 0$.

2- Exercices de renforcement / approfondissement

30 Le plan est muni d'un repère (O, I, J).

1) Construis la droite (D) d'équation $y = 2x$.

2) Construis, sans aucun calcul, sur le même repère les droites (D_1) et (D_2) d'équations respectives $y = 2x + 3$ et $-2x + y = 1$

31 Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;I;J)$.

1) Construis la droite (D) d'équation $y = \frac{3}{2}x$.

2) Construis en expliquant ta méthode, sans aucun calcul, les droites (D_1) et (D_2) d'équations respectives: $y = -\frac{3}{2}x + 5$ et $2x + 3y - 8 = 0$.

32 Dans le plan muni d'un repère (O, I, J), on donne la droite (D) d'équation $2x - y - 2 = 0$.

1) Construis la droite (D) ;

2) Soit A le point de (D) d'abscisse 1 et B le point de (D) d'ordonnée - 6.

Calcule les coordonnées des points A et B.

33 Le plan est muni d'un repère (O, I, J).

Sur la figure ci-dessous, on a construit la droite (AB).

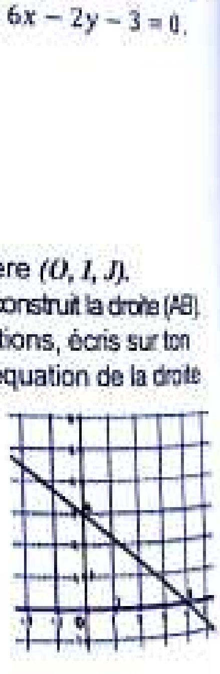
1) Parmi les quatre propositions, écris sur ton cahier celle qui est une équation de la droite (AB).

a) $y = 3x$

b) $y = 4 - 3x$

c) $y = -\frac{3}{4}x + 3$

d) $y = \frac{3}{4}x + 3$.



2) Reproduis la droite (AB) dans un repère orthonormé et construis les trois autres droites données par leurs équations à la question 1)

34 Soit (O, I, J) un repère orthonormé du plan.
On donne : $A(-3;-2)$; $B(2;-1)$ et $C(1;4)$.

1) Démontre que la droite (AB) a pour équation $x - 5y - 7 = 0$.
2) Déduis-en que les points A, B et C ne sont pas alignés.
3) La droite (AB) coupe l'axe des abscisses en E et l'axe des ordonnées en F. Détermine les coordonnées des points E et F.

35 Soit (O, I, J) un repère du plan. On considère la droite (D) d'équation $2x - 3y - 7 = 0$.

1) Détermine les coordonnées de trois points A, B et C de la droite (D).
2) Calcule la première coordonnée d'un vecteur directeur de la droite (D) tel que la deuxième ordonnée vaut -1.
3) Calcule la deuxième coordonnée d'un vecteur directeur de la droite (D) d'ordonnée 1.
4) Dis si le vecteur $\overrightarrow{PQ}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{3} \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite (D). Justifie ta réponse.

36 Le plan est muni d'un repère (O, I, J). Dans chacun des cas suivants, détermine une équation de la droite (D).

1- (D) passe par A(-7;-3) et de coefficient directeur $\frac{4}{5}$.
2- (D) passe par B(-2;3) et parallèle à la droite (K) d'équation $3x+5y-6=0$.
3- (D) passe par le point C(1;1) et perpendiculaire à la droite (L) de coefficient directeur $-\frac{2}{3}$.
4- (D) passe par le point E (0;-3) et perpendiculaire à la droite (L) d'équation $6x-y+11=0$

37 Dans le plan muni d'un repère (O, I, J), on considère les droites (D_1), (D_2) et (D_3) d'équations respectives $2x - y - 3 = 0$; $3x - 5y - 1 = 0$ et $7x - 2y - 12 = 0$.
Démontre que les droites (D_1), (D_2) et (D_3) sont concourantes au point K(2 ;1).

38 Le plan est muni d'un repère (O, I, J).
Construis la droite (D) d'équation $3x - 2y + 5 = 0$
Détermine par le graphique :

1) L'abscisse du point A d'ordonnée -2
2) L'ordonnée du point B d'abscisse 1

39 Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). Soit les droites (D_1) et (D_2) d'équations respectives : $y = \frac{7}{2}x + 12$ et $y = \frac{x}{2} + 3$

1) Démontre que les droites (D_1) et (D_2) sont sécantes au point $P\left(-3; \frac{3}{2}\right)$
2) La droite (D_1) coupe l'axe des ordonnées en A et la droite (D_2) coupe l'axe des ordonnées en B. Calcule les coordonnées du milieu C du segment $[AB]$.
3) Démontre que le triangle POC est rectangle en P.

40 Le plan est muni d'un repère $(O; I; J)$. On considère les points A(1;5) ; B(-2;3) et C(-1;-2).

1) Calcule les coordonnées du milieu K du segment $[BC]$.
2) Déduis-en une équation de la médiane issue du point A du triangle ABC.

41 Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). On considère les points A(-2;4) ; B(5;8) et C(2 ;-3).

1) Démontre que le triangle ABC est rectangle en A.
2) Calcule les coordonnées du milieu E du segment $[BC]$.
3) Démontre que la droite (D) d'équation $x + 2y - 6 = 0$ est la médiatrice du segment $[BC]$.

42 Le plan est muni d'un repère (O, I, J).
Soit (D) et (D') deux droites d'équations respectives $x + ay + b = 0$ et $x + by + a = 0$, où a et b sont des nombres réels.

1) Etablis une condition sur les nombres a et b pour que les droites (D) et (D') soient sécantes.
2) Lorsque cette condition est satisfaite, justifie que $Q(-a-b ; 1)$ est le point d'intersection des droites (D) et (D').
3) Démontre que les droites (D) et (D') sont perpendiculaires si, et seulement si $ab + 1 = 0$.

3- Situations d'évaluation

43 Une agence de commerce propose aux élèves de 3ème d'un collège trois rémunérations hebdomadaires Y_1, Y_2 et Y_3 pour la vente de ses produits pendant les vacances. Elles sont calculées de la manière suivante :

- La rémunération Y_1 est égale à 40% du montant des ventes hebdomadaires ;
- La rémunération Y_2 est une prime fixe de 3000F à laquelle s'ajoute 15 % du montant des ventes hebdomadaires ;
- La rémunération Y_3 est un salaire hebdomadaire de 5.500 F.

Intéressés par cette proposition, ils décident de connaître la rémunération la plus avantageuse suivant le montant des ventes hebdomadaires.
On désigne par le montant, en francs des ventes hebdomadaires.

1) Exprime en fonction de , les rémunérations Y_1, Y_2 et Y_3

2) Représente graphiquement les rémunérations hebdomadaires trouvées en 1) (1cm pour 1 000 F en abscisse et 1 *cm* pou 500 F en ordonnée)
3) Détermine graphiquement, puis par calcul, le montant des ventes hebdomadaires pour lequel les rémunérations Y1et Y2 sont les mêmes
4) Dis laquelle des trois rémunération est avantageuse. Justifie ta réponse

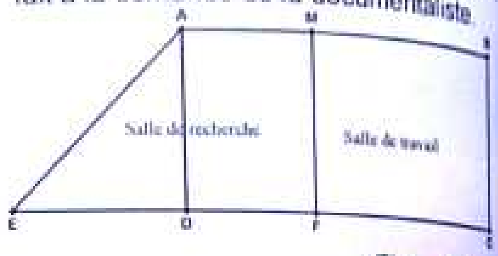
44 La figure ci-dessous est le plan du centre de documentation et d'information (CDI) d'un collège dans une localité.

Ce CDI doit être réaménagé en deux parties distinctes : une salle de travail et une salle de recherche. Pour cela, elle sollicite un groupe d'élèves de 3ème de la ville dont tu fais partie afin de l'aider à satisfaire à sa demande.

On désigne par y l'aire de la salle de travail puis de la salle de recherche.

1) Exprime l'aire y de la salle de travail puis l'aire y de la salle de recherche en fonction de x.
2) Soit $(O ; I ; J)$ un repère orthogonal. On considère les droites (D_1) : $y = 8x + 16$ et (D_2) : $y = 72 - 8x$
   a) Construis les droites (D_1) et (D_2) dans un même repère. On choisira pour unités :
   - En abscisses, *2cm pour 1 mètre*
   - En ordonnées, *1cm pour 4 mètres carrés*

   b) Justifie que les droites (D_1) et (D_2) sont sécantes.
3) Soit A le point commun aux droites (D_1) et (D_2). Par une simple lecture, indique les coordonnées de A.
4) a) Justifie que x est solution de l'équation $(E) : 8x + 16 = 72 - 8x$.
   b) Résous l'équation (E)
5) Indique la valeur du nombre réel x qui satisfait à la demande de la documentaliste.



VI- RENDEZ-VOUS DES CURIEUX !

La forme est appelée équation cartésienne d'une droite en référence à Descartes qui, au XVIIème siècle, posa les bases de la géométrie et introduit la notion de coordonnées.

Réné Descartes
(source internet)

René Descartes, né le 31 mars 1596 à La Haye-en-Touraine, aujourd'hui Descartes (Indre-et-Loire), et mort le 11 février 1650 à Stockholm, est un mathématicien, physicien et philosophe français. Il est considéré comme l'un des fondateurs de la philosophie moderne. Il reste célèbre pour avoir exprimé dans son Discours de la méthode l'expression « cogito ergo sum : je pense donc je suis »

11 Statistiques

Notions essentielles :

- Effectifs cumulés croissants
- Fréquences cumulées croissantes
- Médiane
- Regroupement en classes de même amplitude
- Classe modale

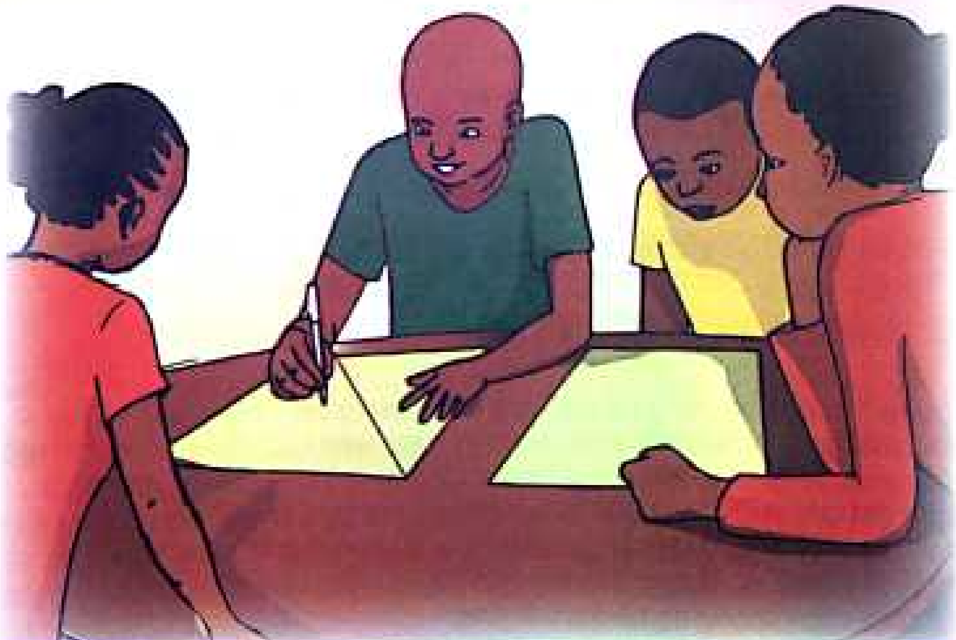
SITUATION D'APPRENTISSAGE

Un élève de la classe de 3ème d'un Collège a pu obtenir un emploi de vacances, qui consiste à mener une enquête dans deux entreprises A et B de sa localité.
Il a relevé entre autres informations, l'âge des employés de ces entreprises.

Entreprise A :
30 – 28 – 47 – 30 – 44 – 60 – 50 – 26 – 29 – 37 – 30 – 29 – 58 – 59 – 28

Entreprise B :
35 – 37 – 50 – 24 – 42 – 24-36 – 52 – 43 – 27 – 55 – 49 – 41 – 24 – 39 – 46

Cet élève souhaite connaître l'entreprise dont les employés sont majoritairement jeunes. Pour cela, il présente ces relevés à ses camarades de classe. Ceux-ci décident de s'informer puis organisent ces relevés pour faire des calculs.



I- ACTIVITES DE DECOUVERTE

1- Identifier les effectifs cumulés croissants – identifier les fréquences cumulées croissantes – Dresser le tableau des effectifs cumulés croissants et le tableau des fréquences cumulées croissantes

Activité 1

Quarante élèves de 3ème ont passé un test de culture générale noté sur 5.
Voici les résultats consignés dans le tableau ci-contre.

Note	0	1	2	3	4	5
Effectif	2	3	7	12	7	9

1- Détermine le nombre d'élèves qui ont obtenu une note :
   a) Inférieure ou égale à 2 ;
   b) Inférieure ou égale à 3 ;
   c) Supérieure à 4 ;
2- Dresse le tableau des fréquences.
3- Réponds par vrai ou par faux aux affirmations suivantes :
   a) Le quart des élèves ont obtenu une note inférieure ou égale à 2.
   b) 40 % des élèves ont obtenu une note supérieure à 3.

Je fais le point de l'activité

Dans un tableau statistique dont les valeurs sont rangées dans l'ordre croissant :
• L'effectif cumulé croissant d'une valeur est la somme de l'effectif de cette valeur et des effectifs des valeurs précédentes ;
• La fréquence cumulée croissante d'une valeur est la somme de la fréquence de cette valeur et des fréquences de toutes les valeurs précédentes.

J'évalue mes acquis

Reproduis et complète les tableaux ci-dessous :

Valeur	4	8	12	14	16
Effectif	......	......	......	......	......
Effectif cumulé croissant	2	3	9	12	16

Groupe	1	2	3
Effectif	0,4	0,35	0,25
Fréquence cumulée croissante	......	......	......

2- Identifier la médiane d'une série statistique à caractère discret ou continu – Déterminer la médiane d'une série statistique - interpréter la médiane d'une série statistique

Activité 2

Voici les notes sur 20 obtenues par deux groupes d'une classe de 3ème en EDHC.

Groupe A	Groupe B
16-13-0-8-16-12-15-17-14-10-5-3-14	9-8-16-12-18-9-17-9-8-16-8-17

1- a) Sur une seule ligne, range dans l'ordre croissant les notes du groupes A.
   b) Entoure la note ***« centrale »*** qui partage cette série en deux séries de même effectif.
2- a) Sur une seule ligne range dans l'ordre croissant les notes du groupe B.
   b) Dis s'il est possible d'entourer une note qui partage la série en deux séries de même effectif. Explique ta réponse, puis entoure deux notes ***« centrales »*** de cette série.
   c) Calcule le centre de l'intervalle fermé constitué par ces deux notes « centrales ».
   d) Dis à quoi correspond ce nombre trouvé.

Je fais le point de l'activité

Dans une série statistique ordonnée, la médiane est la valeur qui partage cette série en deux séries de même effectif.

J'évalue mes acquis

Réponds par vrai ou par faux à chacune des affirmations contenues dans le tableau.

N°	Affirmations	Réponses
1	La médiane est toujours une valeur de la série	
2	La médiane est égale à la moitié de l'effectif total	
3	La médiane et la moyenne sont égales	
4	La moitié des valeurs d'une série statistique a une valeur supérieure ou égale à la médiane	
5	La médiane sépare une série statistique rangée dans l'ordre croissant en exactement deux parties de même effectif	
6	La moitié des valeurs d'une série statistique a une valeur supérieure à la moyenne	

3- Identifier une classe modale – Identifier les classes de même amplitude – déterminer la classe modale – Regrouper les données d'une série statistique en classes de même amplitude

Activité 3

Une enquête a permis de relever le prix en francs d'un même article dans quinze points de vente différents.
On obtient la liste suivante :

1230	1235	1205	1100	1150
1085	1220	1070	1245	1205
1275	1290	1180	1255	1235

Je fais le point de l'activité

Les intervalles

$[1000;1050[$ *et* $[1050;1100[$

*sont des **classes d'amplitude** 50.*

***La classe modale** est la classe ayant le plus grand effectif.*

1- Recopie et complète les pointillés du tableau ci-dessous par ce qui convient :

a) Le tableau ci-dessous en regroupant les prix observés par « tranches » de 50F.

Prix	$[1000;1050[$	$[1050;1100[$	$[1100;1150[$	$[1150;1300[$
Effectif	......	....	......	......

b) L'effectif de $[1000;1050[$ est égal à ....

c) L'amplitude de chaque ....est égale à 50.

d) Détermine l'intervalle qui a le plus grand effectif.

2- a) Calcule la fréquence de chaque intervalle.

b) Dresse le tableau des fréquences cumulées croissantes.

J'évalue mes acquis

On rélevé le poids d'enfants participant à une colonie de vacances.
10 ; 17,8 ; 39,1 ; 38,6 ; 12,4 ; 13 ; 14,2 ; 17 ; 10 ; 22,2 ;
12 ; 35,5 ; 24,7 ; 15 ; 17,8 ; 23 ; 11,7 ; 45 ; 32,4 ; 24 ; 15,7 ; 35,4 ; 23 ; 27,1 ;
15,7 ; 16,4 ; 38,6 ; 21,8 ; 23 ; 11,7 ; 45 ;
27 ; 37,4 ; 25,3 ; 18,4

1- Recopie et complète le tableau suivant où l'on a les données en classes de même amplitude

Poids p	$10 \leq p < 15$	... $\leq p <$ ...	... $\leq p <$ ...	... $\leq p <$ ...	... $\leq p <$ ...	... $\leq p <$ ...
Effectif	....	....	....	....	....	....

2- Indique la classe modale de cette série.

4- Identifier la moyenne d'une série statistique à caractère continu

Activité 4

On a relevé les poids(en kg) de cacao récolté par un groupe de jeunes d'un village pendant la petite traite. On obtient les résultats suivants :

51,70	54,50	51,80	50,20	51,20	53,40	52,30	53,20
54	51,20	56	55	55,20	54	54,70	51
51,30	53	54	53	54,80	53,10	54,50	55
53	52,40	54 ,20	55,10	52,50	54,10	54,50	53,20
52	51,50	54,20	50,90	56	54,50	50,50	56

Fèves de cacao

1- Calcule le poids moyen P_1 de cacao récolté.

2- On se propose de calculer une valeur approchée du poids moyen P_2 de cacao récolté à partir d'un regroupement des valeurs en classes.

a) Reproduis et complète le tableau ci-contre :

Poids (en kg)	[50,51[	[51,52[	[52,53[	[53,54[	[54,55[	[55,56]
Effectif	3	7	4	....	....	....
Centre de la classe	50,5	51,5	....	.....	....	.....

b) Recopie, complète et effectue le calcul suivant ;

$$P_2 = \frac{50,50 \times 3 + 51,5 \times 7 + ...\times.... + ...}{40}$$

c) Compare P_1 et P_2

Je fais le point de l'activité

Dans le cas d'une série statistique à caractère continu, la moyenne se calcule de la même que P_2

J'évalue mes acquis

1- Complète le tableau de la série statistique suivante :

Classe	[0 ; 10[	[10 ; 20[	[20 ; 30[	[30 ; 40[	Total
Effectif	12	8	4	2	....
Centre de la classe	....	....	....	....	
Produit du centre par l'effectif	....	....	....	....	....

2- Complète : Moyenne =

5- Construire un digramme circulaire – Interpréter un diagramme circulaire – Dresser un tableau des effectifs cumulés croissants ou des fréquences cumulées croissantes à partir d'un diagramme circulaire

Activité 5

Le proviseur d'un lycée a noté dans un tableau la répartition du choix de la couleur de la tenue d'EPS des 720 élèves de son établissement. Il a commencé à construire le diagramme circulaire des données ci- dessous en représentant la couleur rouge par un secteur angulaire droit.

1) Les effectifs et la mesure des angles sont proportionnels

a) Détermine le coefficient de proportionnalité et recopie, puis complète le tableau :

Choix de la couleur	Marron	Vert	Rouge	Jaune	Bleu	Total
Effectif	45	295	.....	120	.....	.....
Mesure du secteur angulaire (en degrés)			90			360

b) Indique le nombre de secteurs angulaires que ce diagramme aura.

2) Réalise le digramme circulaire représentant le choix de la couleur de la tenue d'EPS des élèves de ce lycée en prenant un rayon de 4 cm.

Je fais le point de l'activité

Dans **un digramme circulaire**, le disque est partagé en secteurs. La mesure de l'angle d'un secteur est proportionnelle à l'effectif et à la fréquence de la valeur associée à ce secteur.

J'évalue mes acquis

On considère la série statistique suivante.
Recopie et complète le tableau de proportionnalité.

Modalités	A	B	C	D	Total
Effectif	20		25		90
Mesure du secteur angulaire (en degré)		120		60	360

6 - Construire un polygone des effectifs cumulés croissants

Activité 6

1) Cas d'un caractère discret

Voici un tableau donnant la pointure des élèves d'une classe de $3^{ème}$.

Pointure	37	38	39	40	41	42	43
Effectif	14	8	10	5	2	1	2

a) Dresse le tableau des effectifs cumulés croissants.

b) Dans un repère orthogonal d'unités graphiques bien choisies, place les points de coordonnées (pointure ; effectif cumulé croissant correspondant).

c) Relie les points ainsi obtenus en partant de l'origine du repère.

2) Cas d'un caractère continu

On a résumé dans un tableau la taille de 25 adultes.

Taille (en cm)	[150;155[	[155;160[	[160;165[	[165;170[
Effectif	5	4	10	6

a) Dresse le tableau des effectifs cumulés croissants .
b) Dans un repère orthogonal d'unités graphiques bien choisies, place les points de coordonnées (borne supérieure de la classe ; effectif cumulé croissant correspondant).
c) Relie ces points ainsi obtenus en partant du point de coordonnées (150 ; 0).

Je fais le point de l'activité

La ligne brisée obtenue dans chacun des cas s'appelle **le polygone des effectifs cumulés croissants .**
On pourrait de même construire **le polygone des fréquences cumulées croissantes** en suivant les mêmes méthodes.

J'évalue mes acquis

Le professeur de mathématiques a résumé dans un tableau les notes du premier devoir obtenues par ses élèves.

Note	[0;5[	[5;10[	[10;15[	[15;20[
Effectif	15	20	12	6

Construis le diagramme des effectifs cumulés croissants.

7- *Déterminer la médiane d'une série statique par lecture graphique*

Activité 7

En utilisant le graphique du deuxième cas de l'activité précédente :
1) Trace la droite d'équation y =12,5 (correspondant à la moitié de l'effectif total), elle coupe le polygone en un point M d'ordonnée 12,5.
2) Indique l'abscisse du point M.

Je fais le point de l'activité

L'abscisse du point M ainsi obtenue est **la taille médiane de cette série statistique.**

J'évalue mes acquis

Utilise le graphique de l'exercice de fixation relatif à l'activité précédente pour déterminer la note médiane de cette série statistique.

II- RESUME DE COURS

1- Effectif cumulés et fréquences cumulées

Définition

Dans un tableau statistique dont les valeurs sont rangées dans l'ordre croissant :

- ***L'effectif cumulé croissant*** d'une valeur est la somme de l'effectif de cette valeur et des effectifs des valeurs précédentes ;
- ***La fréquence cumulée croissante*** d'une valeur est la somme de la fréquence de cette valeur et des fréquences de toutes les valeurs précédentes.

REMARQUES

La fréquence cumulée croissante d'une valeur est égale au quotient de l'effectif cumulé croissant de cette valeur par l'effectif total.

2- Médiane d'une série statistique

Définition

On considère une série statistique de N données rangées dans l'ordre croissant.
La ***médiane*** est un nombre qui partage cette série ordonnée en deux groupes de même effectif.

Règles

- Si N est impair, ***la médiane*** est «la donnée centrale» de la série.
- Si N est pair, ***la médiane*** est la moyenne des «deux données centrales» de la série.

Exemple

- **Cas où N = 7**

0-1-5-8-13-14-18

« La donnée centrale » qui est 8 partage la série en deux groupes de même effectif, donc 8 est la médiane de cette série.

- **Cas où N = 8**

6-8-8-9-12-13-17-19

« Les données centrales » sont : 9 et 12.

Donc la médiane est : $\frac{1}{2}(9+12)=10,5$.

3- Regroupement en classes

Calcul de la moyenne dans le cas d'un caractère quantitatif continu.

Définitions

- Lorsque le nombre de données est important, on peut les regrouper par tranches de valeurs, appelées des «classes».
- L'effectif d'une classe est le nombre de données comprises dans cette classe.
- La fréquence d'une classe est le quotient de l'effectif de cette classe par l'effectif total.
- La classe modale est la classe qui a le plus grand effectif.

Exemple

Voici la répartition des tailles (en cm) de 25 athlètes d'un collège dans le tableau ci-dessous :

Taille	[140;150[	[150;160[	[160;170[	[170;180]
Effectif	3	8	10	4

Athlétisme en milieu scolaire :

On ne connait pas exactement les 25 valeurs relevées ;

On sait seulement que :

- 3 athlètes ont leur taille dans la classe ;
- 8 dans la classe .....

On effectue un calcul approché de la moyenne de cette série statistique en considérant que, dans une classe, les valeurs relevées sont égales au centre de la classe.

On organise le calcul à partir de ce tableau ci-dessous :

Taille	[140;150[	[150;160[	[160;170[	[170;180]
Effectif	3	8	10	4
Centre de la classe	145	155	165	175

On a : $m = \frac{145 \times 3 + 155 \times 8 + 165 \times 10 + 175 \times 4}{25} = 161$

Donc la taille moyenne des 25 athlètes est 161 cm.

4- Representations graphiques

4-1 Diagramme circulaire

Propriété

Dans un diagramme circulaire, le disque est partagé en secteurs. La mesure de l'angle au centre d'un secteur est proportionnelle à l'effectif et à la fréquence de la valeur associée à ce centre.

Exemple

Lors d'une élection de délégués, Emmanuel a obtenu 45% des voix, Nadège 20%, Julien 25% et Gaël 10%.

On veut réaliser un diagramme circulaire à partir de ces données.

- On dresse un tableau de proportionnalité pour établir le lien les fréquences et les angles.
- On calcule le coefficient de proportionnalité : 100% correspond à 360 degrés, le coefficient de proportionnalité pour passer des fréquences aux angles est : $\frac{360}{100} = 3,6$.
- On applique le coefficient de proportionnalité pour trouver les mesures de tous les angles.

Candidat	Emmanuel	Nadège	Julien	Gaël
Fréquence (en %)	45	20	25	10
d'angle (en degrés)	162	72	90	36

- On construit le diagramme circulaire en indiquant une légende. Ce diagramme permet de remarquer facilement à vue d'œil qui a obtenu plus d'un quart des voix.

4-2 Polygone des effectifs cumulés croissants

a) Cas d'un caractère discret

Voici un tableau donnant la pointure des élèves d'une classe de 3ème

Pointure	37	38	39	40	41	42	43
Effectif	14	8	10	5	2	1	2

Pour construire le diagramme cumulatif des effectifs cumulés croissants :

- On dresse le tableau des effectifs cumulés croissants.
- On place dans un repère orthogonal les points de coordonnées **(pointure ; effectif cumulé croissant correspondant).**
- On relie les points par des segments horizontaux. Cela a l'allure d'une marche en escalier.

b) Cas d'un caractère continu

On a résumé dans un tableau la taille de 25 adultes

Taille (en cm)	[150;155[	[155;160[	[160;165[	[165;170[
Effectif	5	4	10	6

Pour construire le polygone des effectifs croissants :
- On dresse le tableau des effectifs cumulés croissants ;
- On place dans un repère orthogonal les points de coordonnées **(borne supérieure de la classe ; effectif cumulé croissant correspondant)** ;
- On relie les points ainsi obtenus en partant du point de coordonnées (150 ; 0).

III- METHODE

• *Pour déterminer la médiane d'une série statistique quantitative discrète d'effectif total N :*
On range les N valeurs de la série par ordre croissant.

- Si N est impair, alors la médiane est la valeur rangée au rang $\frac{N+1}{2}$.

- Si N est pair, alors la médiane est la moyenne des deux valeurs rangées aux rangs $\frac{N}{2}$ *et* $\frac{N}{2}+1$.

• *Pour calculer la médiane d'une série statistique à caractère quantitatif continu.*
On prend l'abscisse du point M du polygone des effectifs cumulés croissants ainsi construit, ayant pour ordonnée égale à $\frac{N}{2}$.

Soit le point M (Me; $\frac{N}{2}$ *) du segment [AB] ; les droites (AM) et (AB) sont donc confondues et elles ont le même coefficient directeur.*

Ainsi on obtient l'égalité $\frac{\frac{N}{2}-y_A}{Me-x_A}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$ *(1) où la seule inconnue est Me.*

Autrement dit :
On pourrait effectuer le calcul (1) en deux étapes :

- On calcule d'abord le coefficient directeur de la droite $a=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$.

- On écrit ensuite l'égalité : $a(Me-x_A)=\frac{N}{2}-y_A$ *de laquelle on tire Me.*

IV- SAVOIR-FAIRE

Savoir-faire 1- Déterminer la médiane d'une série statistique par lecture graphique

Enoncé

Un professeur de mathématiques a construit le polygone des effectifs cumulés croissants de la répartition des notes obtenues par ses élèves après un devoir surveillé.

Détermine la note médiane de cette série statistique par une lecture graphique.

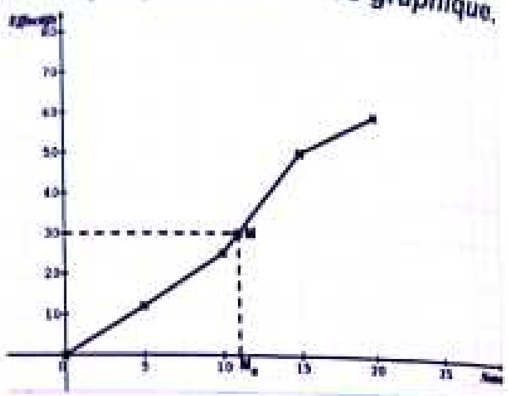
Solution commentée

Je détermine la note médiane de cette série statistique par une lecture graphique.

L'effectif total N est 60 , donc : $\frac{N}{2} = 30$

Je lis l'abscisse du point M de la courbe d'ordonnée 30 et j'obtiens 11.

Donc la note médiane de cette statistique est 11.



Savoir-faire 2- Construire un polygone des effectifs cumulés croissants

Enoncé

On a relevé les tailles de 125 adultes hommes.

Taille (en cm)	[155;165[	[165;175[	[175;185[	[185;195[
Effectif	21	54	38	12

Construis le polygone des effectifs cumulés croissants de cette série statistique

Solution commentée

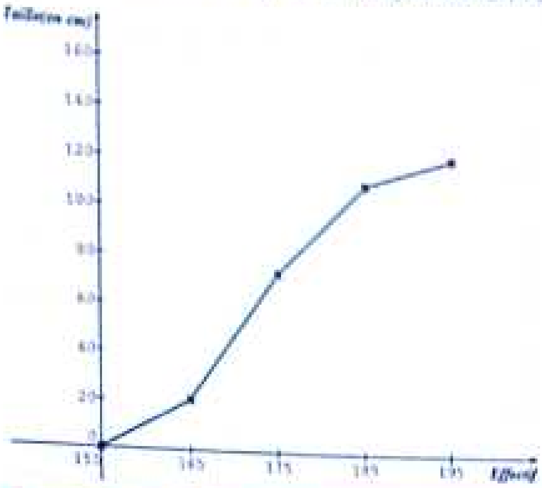
Je construis le polygone des effectifs cumulés croissants de cette série statistique

• Je dresse le tableau des effectifs cumulés croissants.

Taille (en cm)	[155;165[	[165;175[	[175;185[	[185;195[
Effectif	21	54	38	12
Effectifs cumulés croissants	21	75	113	125

Scanned by CamScanner

• Je place les points de coordonnées (155,0), (165 ; 21), (175 ; 75) ; (185 ; 113) et (195 ; 125) dans un repère orthogonal bien choisi, puis je les joins



Savoir-faire 3- Calculer la médiane d'une série statistique.

Enoncé

On a relevé les tailles de 125 adultes hommes (Voir énoncé de l'exercice précédent).
Détermine, par calcul, la taille médiane d'une série statistique.

Solution commentée

Je détermine, par calcul, la taille médiane d'une série statistique.

Taille (en cm)	$[155;165[$	$[165;175[$	$[175;185[$	$[185;195[$
Effectif	21	54	38	12
Effectifs cumulés croissants	21	75	113	125

• L'effectif total N est 125 et $\frac{N}{2} = 62,5$, donc la taille médiane M_e appartient à l'intervalle $[165;175[$.
• Les points A (165 ; 21), B (175 ; 75) et M (M_e ; 62,25) sont alignés.
Or : A (165 ; 21), B (175 ; 75) et M (M_e ; 62,25) sont alignés si les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.

On a : $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} M_e - 165 \\ 62,25 - 21 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} M_e - 165 \\ 41,25 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 175-165 \\ 75-21 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 10 \\ 54 \end{pmatrix}$

Donc : A, B et M sont alignés si $54(M_e - 165) - 41,25 \times 10 = 0$
Je résous l'équation ainsi obtenue

$$54(M_e - 165) - 41,25 \times 10 = 0$$

$$54M_e - 54 \times 165 - 41,25 \times 10 = 0$$

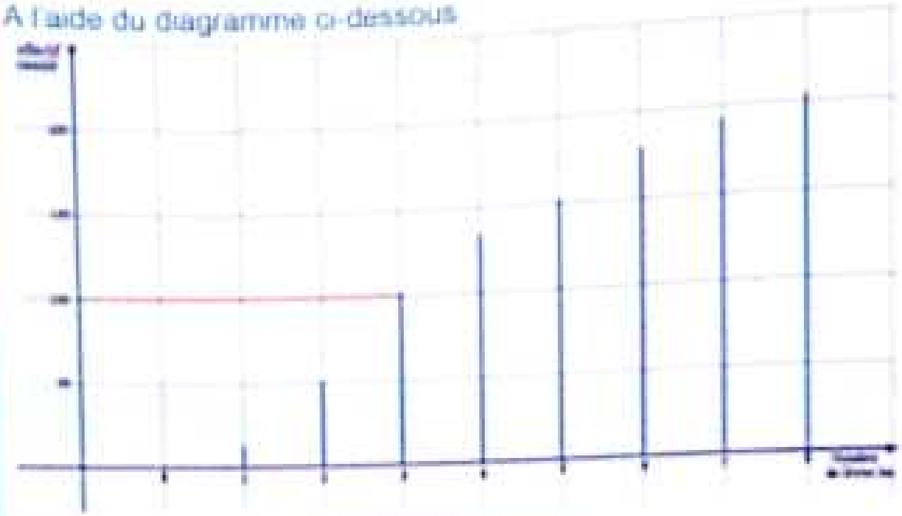
$54M_e - 8910 - 412,5 = 0$ ainsi $54M_e - 9322,5 = 0$ d'où $M_e = \frac{9322,5}{54}$

$M_e = 172,638...$ Ainsi la taille médiane de cette série statistique est environ 173 m.

Savoir-Faire 4 Déterminer graphiquement la médiane d'une série statistique

Enoncé

On a interrogé 200 personnes « combien de livres avez-vous lus au cours des derniers mois ? »
Les réponses vont de 0 à 8 livres
A l'aide du diagramme ci-dessous



Détermine la valeur médiane de ces réponses

Solution commentée

D'après le graphique, la moitié de l'effectif 100 est atteint avec la valeur 3.
Donc la médiane de cette série statistique est 3

Savoir-Faire 5 Déterminer la classe modale d'une série statistique- construire un diagramme à bande d'une série statistique.

Enoncé

Voici les résultats obtenus par les élèves d'une classe de 3ème de 60 élèves dans un devoir surveillé de mathématiques

Notes	[0 ;5[	[5 ;10[	[10 ;15[	[15 ;20	Total
Effectifs	20	10	25	5	60

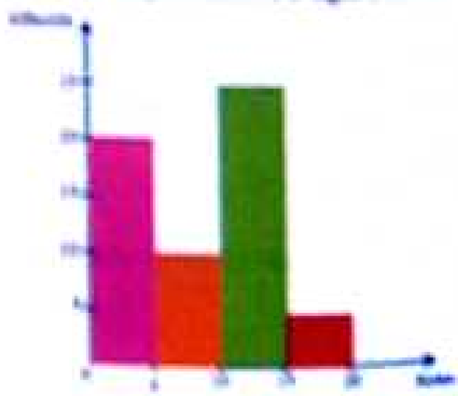
1- Détermine la classe modale de cette série statistique
2- Calcule le pourcentage des élèves ayant eu une note supérieure ou égale à 15.
3- Construis le diagramme à bande de cette série statistique

Solution commentée

1- La classe modale est [10 ;15[
2- Je calcule le pourcentage des élèves ayant eu une note supérieure ou égale à 15

$\frac{5\times 100}{60} = 8,33\ \%$

3- Je construis le diagramme à bandes de cette série statistique



V- JE M'EXERCE

1- Exercices de fixation/ Application

Identifier les effectifs cumulés croissants – identifier les fréquences cumulées croissantes – Dresser le tableau des effectifs cumulés croissants et le tableau des fréquences cumulées croissantes

1 Indique la (ou les) bonne(s) réponse(s) a, b, c et d.

Le tableau ci-dessous donne le résultat d'une enquête dans une classe de 2nd A sur le nombre de romans lus pendant un trimestre

Nombre de livres lus	0	1	2	3	4
Effectif	1	2	11	8	3

1) La ligne des effectifs cumulés croissants est :
a) 0 ; 1 ; 3 ; 5 ; 7 b) 0 ; 1 ; 3 ; 14 ; 22
c) 1 ; 3 ; 13 ; 19 ; 11 d) 1 ; 3 ; 14 ; 22 ; 25
2) L'effectif cumulé croissant de 2 est :
a) 11 ; b) 14 ; c) 22 ; d) 9.
3) La fréquence cumulée croissante de 1 est :
a) $\frac{3}{25}$; b) $\frac{24}{25}$; c) $\frac{1}{10}$; d) $\frac{9}{10}$
4) La fréquence (en pourcentage) d'élèves qui ont lu moins de deux livres est :
a) 32 % ; b) 44 % ; c) 56 % ; d) 88 %.

2 Voici un tableau relatif à l'âge des élèves d'un collège.

Age	[10,11[	[11,12[	[12,13[	[13,14[	[14,15[	[15,16[	[16,17[
Effectif	26	106	98	122	54	60	34

Réponds par vrai ou par faux aux affirmations suivantes :
a) L'effectif cumulé croissant de 12 est 230.
b) La fréquence (en pourcentage) d'élèves qui ont moins de 14 ans est 70,40 %.

3 Le tableau ci-dessous donne le résultat d'une enquête dans une classe de 3ème sur le nombre de romans lus pendant un trimestre.

Nombre de livres lus	0	1	2	3	4
Effectif	1	2	11	8	3

Pour chacune des questions ci-dessous, indique la (ou les) bonne(s) réponse(s) par la lettre A, B, C ou D.

1- La ligne des effectifs cumulés est :
A) 0; 1; 3; 5; 7. **B)** 0; 1; 3; 14; 22. **C)** 1; 3; 13; 19; 11. **D)** 1; 3; 14; 22; 25.

2- La fréquence (en pourcentage) d'élèves qui ont lu moins de trois romans est
A) 32% **B)** 44% **C)** 56% **D)** 88%
3- La fréquence (en pourcentage) d'élèves qui ont lu au moins deux romans est
A) 88% **B)** 56% **C)** 44% **D)** 12%

4 Recopie et complète le tableau des effectifs cumulés croissants

Valeur	A	B	C	D	E
Effectif	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
Effectifs cumulés croissants					

5 Recopie et complète le tableau ci-dessous

Valeur	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
Effectif				
Effectif cumulé croissant	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

6 Recopie et complète les phrases suivantes avec *au moins ; moins de ; plus de ; au plus*.
1) Si la note n sur 20 de Bernard vérifie $8 \leq n \leq 15$, alors il a ....08/20 et ....15/20.
2) Si la note n sur 20 de Claude vérifie $9 < n < 13$ alors il a ....09/20 et ....13/20.

Identifier la médiane d'une série statistique à caractère discret ou continu - interpréter la médiane d'une médiane

7 Recopie et complète les phrases suivantes à l'aide des mots suivants : 50% ; médiane ; effectif ; groupes ; 50%.
a) « Dans une série statistique ordonnée, la ...... est la valeur qui partage cette série en deux .....de même ..... »
b) « Dans une série statistique, ...des valeurs sont au-dessus de la médiane et .... sont en dessous ».

8 Identifie la médiane de chacune des séries ordonnées suivantes :
a) 17 ; 19 ; 21 ; 22 ; 23 ; 25.
b) 5 ; 51 ; 500 ; 8000.
c) 2 ; 3 ; 4 ; 39 ; 74.

9 Pour la fête ci-dessous, les élèves doivent vendre des tickets de tombola. Le tableau ci-dessous indique le nombre de carnets de tickets vendus par jour pendant le mois précédant le tirage.

Nombre de carnets	4	9	15	20	22
Nombre de jours	6	11	7	4	2

Identifie la médiane de cette série statistique puis interprète – la

10 Le professeur de physique et chimie a relevé les valeurs des pH de boissons gazeuses, mesurés par les élèves lors d'une séance de TP.

pH	5,5	6	6,5	7	7,5	8
Nombre d'élèves	1	3	5	8	6	2

Identifie le pH médian et fais une phrase permettant de l'interpréter.

11 La médiane d'une série statistique ordonnée de 51 élèves est la note 11 sur 20
Donne une interprétation de cette médiane pour cette série.

12 Dans une entreprise, les salaires hebdomadaires sont les suivants :
Le patron gagne12000 Fcfa, son adjoint 7000 F cfa, le comptable 3000 Fcfa et les quatre employés 1500 Fcfa.

1- Choisis la bonne réponse parmi les trois proposées :

a) Le salaire moyen hebdomadaire en francs est :
A. 1500 **B.** 3000 **C.** 4000

b) Le salaire médian hebdomadaire en francs est :
A. 1500 **B.** 3000 **C.** 4000

2- Guy désire être embauché comme employé dans cette entreprise. Parmi les deux renseignements : le salaire moyen et le salaire médian, indique lequel il doit demander.

13 Le professeur de physique-chimie a relevé les valeurs des pH de boissons gazeuses, mesurés par les élèves lors d'une séance de TP.

PH	5,5	6	6,5	7	7,5	8
Nombre d'élèves	1	3	5	8	6	2

1- Calcule la valeur moyenne des Ph mesurés.
2- Détermine le Ph médian.
3- Fais une phrase permettant d'interpréter le pH médian.

Identifier une classe modale – Identifier les classes de même amplitude – déterminer la classe modale – Regrouper les données d'une série statistique en classes de même amplitude

14 Dans chacun des cas suivants, indique la classe modale

a)

Taille (en cm)	]150,155]	]155,160]	]160,165]	]165,170]
Effectif	5	4	10	8

b)

Note	]0,5]	[5,10[	]10,15]	]15,20]
Effectif	1	12	7	8

15 Dans une maternité, on a noté la masse de (en kg) des nouveaux nés à leur naissance

3,5	3,6	2,8	2,7	3,8	4,16	3,87	2,8	3,5	2,75	3,5	2,26
3,80	3,14	3,25	3,10	4,75	4,80	3,65	3,98	1,95	3,50	3,80	4,10
2,80	2,74	2,04	2,06	2,60	3,10	3,25	3,35	3,40	3,54	3,44	3,25

Recopie et complète le tableau suivant où l'on a regroupé les données en classes de même amplitude

Masse (en kg)	[1,5;2[	....	.....	....	....	...	...

16 Regroupe les heures d'arrivée au travail de 24 personnes en classes de même amplitude

8h	7h30min	9h	9h50min	7h15min	6h30min	8h15min	8h30min
8h45min	9h10min	9h15min	9h30min	9h15min	7h10min	6h	8h15min
9h10min	9h20min	8h45min	7h50min	8h00min	8h15min	8h25min	8h10min

17 Une étude porte sur la durée de vie d'une pile. Le test porte sur 30 piles. Voici le résultat des tests :
94–95–80,7–99–79,4–101–105–68–75–74,5
84 – 84 – 81 – 78 – 81 - 77 – 73 – 68 – 78 – 72
69–102,3–104–65–101–72–65–78–70–104,1
Organise les résultats par classes de 10h.
Complète le tableau de type suivant :

Classes	[65 ; 75[	[75 ; 85[	[85 ; 95[	[95 ; 105[
Effectif	...	...	...	...

18 Le tableau ci-dessous donne les vitesses, en kilomètre par heure, enregistrées par un radar sur une autoroute pendant une minute.

129,2	131,4	129,8	125,1	95	110,7
108,5	148,8	118	135	119	140
98	110,4	124,3	112	124	130
130	107	112,6	115,8	123,7	129
133	130	128	131	121	127

1- Regroupe ces données dans des classes telles que : 90 ≤ v < 100 , 100 ≤ v < 100 , etc
2- Indique la classe la plus fréquente.

19 Regroupe les données en classes de même amplitude.
Taille *(en cm)* de 20 joueurs de basket :
1,84 - 1,85 - 1,75 - 1,98 - 1,97 - 1,65 - 1,68 - 1,79 - 1,99 - 2
2,01 - 1,79 - 1,83 - 1,84 - 1,86 - 1,87 - 1,66 - 2,05 - 1,73 - 1,89.

20 Ce tableau indique les vitesses en *km/h* relevées par un radar sur une route départementale en une heure.

86	89	92	104	90	89	95	89	86
89	88	90	89	86	89	79	89	88
87	91	95	107	78	85	98	75	89
92	86	87	91	100	89	87	79	81

1- Regroupe ces vitesses dans des classes d'amplitude *5 km/h* dont la première est de type.
2- La vitesse maximale autorisée étant *90 km/h*, calcule la fréquence des automobilistes qui devraient être verbalisés.

21 On considère la série statistique suivante :

Valeur du caractère	[5 ; 10[	[10 ; 15[	[15 ; 20[	[20 ; 25[
Effectif	12	20	8	40

Construis le polygone des effectifs cumulés croissants.

Identifier la moyenne d'une série statistique à caractère continu – Calculer la moyenne d'une série statistique à caractère continu

22 Recopie et complète la phrase avec les mots suivants : effectif total ; produits ; quotient ; effectif correspondant
« La moyenne d'une série statistique à caractère continu est le ……de la somme des ……. des centres des classes par leur…. par l'……. ».

23 Voici le relevé des paiements réalisés chez un commerçant lors d'une journée de travail.
1) Recopie et complète le tableau ci-dessous :

Montant (en milliers de francs CFA)	[15;20[	[20;25[	[25;30[	[30;35[	[35;40[	Total
Effectif	2	5	7	2	1	....
Centre de classe	...	....	...	...	...	
« Produit »	...	...	....	....	....	....

2) Déduis-en le montant moyen dépensé chez ce commerçant.

24 Une enquête sur le nombre d'heures passées par jour à regarder la télévision a été réalisée auprès de 1000 adolescents. Elle a donné les résultats suivants :

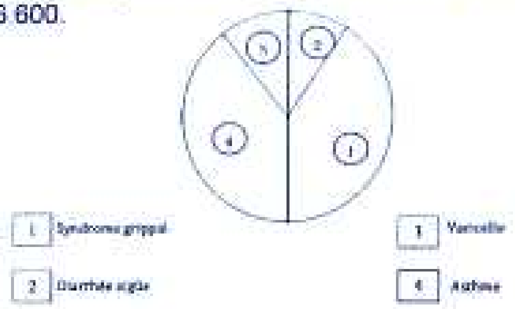
- moins de 1h : 70
- de 1h à 2h : 250
- de 2h à 3h : 100
- de 3h à 4h : 230
- de 4h à 5h : 250
- de 5h à 6h : 100

Calcule la durée moyenne passée par jour devant la télévision par l'un de ces adolescents.

Construire un digramme circulaire – Interpréter un diagramme circulaire – Dresser un tableau des effectifs cumulés croissants ou des fréquences cumulées croissantes à partir d'un diagramme circulaire

25 Réponds par vrai ou par faux à chacune des affirmations suivantes :
a) Un digramme circulaire de rayon de 6 cm représente un effectif total deux fois plus grand qu'un diagramme circulaire de rayon 3 cm.
b) Un diagramme circulaire représente un effectif total deux fois plus grand qu'un diagramme semi-circulaire.
c) Dans un diagramme circulaire, un secteur d'angle 30° correspond à une fréquence de 30% .

26 Dans le graphique suivant, on a représenté le pourcentage de grippe, diarrhée aigüe, varicelle et asthme dans un pays développé. Le nombre total de personnes ayant contracté ces maladies est 10 786 600.



Donne une interprétation graphique de ce diagramme.

Construire un polygone des effectifs cumulés croissants

27 1) Dans chacun des cas suivants, construis le polygone des effectifs cumulés croissants

a)

Taille (en cm)	[150;155[	[155;160[	[160;165[	[165;170[
Effectif	5	4	10	6

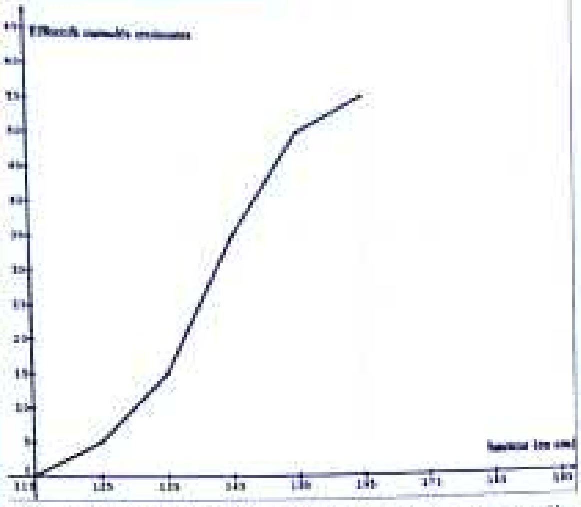
b)

Note	[0;5[	[5;10[	[10;15[	[15;20[
Effectif	1	12	7	6

2) Détermine par le calcul la médiane de chaque série.

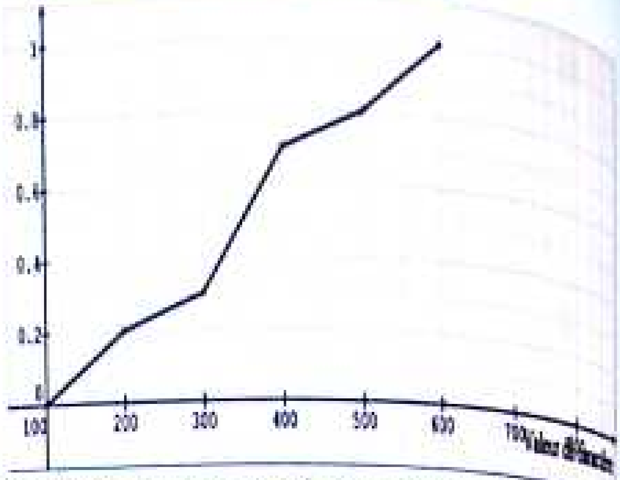
Déterminer la médiane d'une série statique par lecture graphique

28 On considère le polygone des effectifs cumulés croissants.



Détermine graphiquement la médiane de cette série statistique .

29 On considère le polygone des fréquences cumulées croissantes ci-dessous.

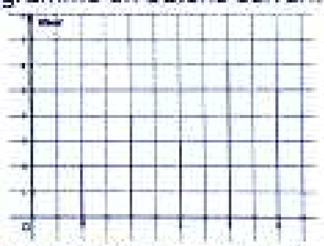


Détermine la médiane de cette série statistique.

2- Exercices de renforcement/approfondissement

30 On considère la série :
7 – 8 – 12 – 12 – 14 – 15 – 15 – 41 .
Une seule des affirmations suivantes concernant cette série est exacte. Indique-la.
a) La médiane est égale à la moyenne.
b) La médiane est supérieure à la moyenne.
c) La médiane est inférieure à la moyenne.

31 Pour les affirmations suivantes, on considère la série statistique représentée par le diagramme en bâtons suivant :



a) Les effectifs cumulés sont : 2- 6- 9- 15- 20.
b) 25% est la fréquence relative à la valeur 1.
c) La moyenne est 2,4.

32 Le diagramme ci-dessous représente le résultat d'une enquête sur le salaire journalier d'un échantillon de 1080 travailleurs d'une entreprise.
1- Dresse le tableau des effectifs puis le tableau des effectifs cumulés croissants.

33 Une grande société possède de nombreux magasins. La répartition du chiffre d'affaires de ces sociétés est résumée dans le tableau suivant :

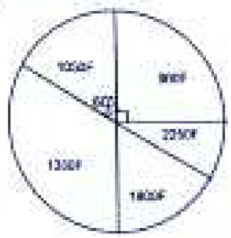
Tranche du chiffre d'affaires (en milliers de francs)	[1;3[	[3;5[	[5;7[	[7;9[	[9;11[
Fréquences	0,21	0,17	0,33	0,12	0,17

1- Calcule le chiffre d'affaires moyen des magasins.
2- Calcule le chiffre d'affaires médian.

Classe de vitesse	[31;40[	[41;50[	[...;...[
Effectif	....	....	....
Fréquences cumulées croissantes	....	....	....

2- Construis le polygone des fréquences cumulées croissantes.
3- Dis s'il est vrai que la moitié des automobilistes ne respectent pas la limitation de vitesse.
Justifie ta réponse.

34 Dans un village, où la vitesse est limitée à 50 km/h, les gendarmes ont relevé les vitesses de 32 véhicules.
45 - 56 - 47- 50 - 46 - 65 - 40 - 44 - 50 - 51 - 36 - 58
60 - 59 - 39 - 49 - 55 - 57 - 49 - 52 - 70- 48 - 50 - 47
38 - 58 - 50 - 60 - 49 - 54 - 56 - 45.
1- Recopie et complète le tableau commencé par les gendarmes.
2- Détermine le salaire fréquent.
3- Détermine le salaire moyen.
4- Détermine le salaire médian.
5- Parmi les trois résultats précédents, indique le renseignement le plus intéressant pour l'enquêteur.



35 Le directeur d'une entreprise de transport demande à ses employés que la fréquence des pauses inférieures à 20 minutes soit au plus 40 % afin de privilégier les longues pauses pour se reposer.

Le ***chronotachigraphe*** est un appareil qui enregistre la vitesse des véhicules au cours du temps en la gravant sur un disque. Lorsque la vitesse est nulle, cela indique le conducteur fait une pause.

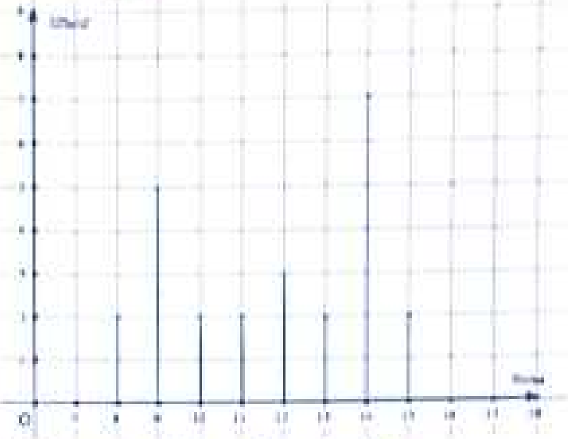
Voici les durées des pauses des routiers de l'entreprise sur une semaine obtenue grâce aux disques :

Durée de la pause (en min)	[0;5[	[5;10[	[10;15[	[15;20[	[20;25[	[25;30[
Effectifs cumulés croissants	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

1- Dresse le tableau des effectifs.
2- Calcule la durée moyenne de pause.
3- Détermine le nombre de pauses de moins de 20 minutes.

36 1- Calcule le montant moyen d'un repas.
2- Dresse le tableau des effectifs cumulés croissants.
3- Détermine l'intervalle auquel la médiane appartient.
4- a) Dans le plan muni d'un repère, détermine une équation de la droite *(D)* qui passe par les points *A(2000; 45) et B(2500; 105)*.
b) Déduis-en la médiane de cette série statistique.

37 Le diagramme en bâtons ci-dessous donne la répartition des notes obtenues à un devoir surveillé de mathématiques par les élèves de 3ème d'un collège.



1- Dresse le tableau des effectifs.
2- Calcule la moyenne de la classe lors de ce devoir.
3- Détermine la note médiane.
4- Indique la note qu'il fallait avoir à ce devoir pour être dans «la moitié supérieure» de la classe.
5- Le professeur décide de faire «refaire» le devoir aux 25 % des élèves ayant obtenu les moins bonnes notes. Détermine la note en dessous de laquelle on doit refaire le devoir.

3- Situations d'évaluation

38 Pendant les vacances, un de tes camarades de classe est gérant d'un salon de coiffure. Il fait une étude sur un échantillon de 70 clients pour connaître le temps d'attente moyen des clients.

Temps d'attente (en min)	[0;5[	[5;10[	[10;15[	[15;20[	[20;25[
Effectif	10	20	16	9	15

1- Détermine le temps d'attente moyen.
2- Le gérant estime qu'un client est satisfait lorsqu'il attend moins de 15 min et qu'il est mécontent lorsqu'il attend plus de 20 min. Détermine la proportion du client mécontents.

39 Un lycée moderne possède 15 ordinateurs utilisés par l'ensemble des élèves et professeurs. Parfois les ordinateurs tombent en panne (pas tous en même temps !) et un informaticien vient réparer.

Le technicien demande 2.500 F l'heure (déplacement compris).

Le tableau ci-dessous résumant les pannes et le temps passé par l'informaticien chaque semaine :

Temps passé sur le problème (en min)	[0;30[	[30;60[	[60;90[	[90;150[	[150;200]
Nombre d'interventions	16	20	16	11	7

Trois options s'offrent au Proviseur du lycée.

Option A	Option B	Option C
Embaucher deux informaticiens qui travailleront 15h par semaine, cela permet de ne plus payer 2.500F de l'heure mais le salaire de l'informaticien plus les charges patronales sont de 40.000F par informaticien par semaine.	Embaucher un informaticien et le reste du travail sera effectué par un informaticien extérieur au lycée qui facturera 2.500F de l'heure.	Ne pas embaucher d'informaticien

Le proviseur te sollicite afin de l'aider à faire un choix intéressant parmi les trois options.
1- Calcule la moyenne puis la médiane de cette série statistique.
2- Calcule le temps nécessaire pour régler les problèmes informatiques de la semaine.
3- Calcule le coût des options A et B.
4- Dis laquelle des options est avantageuse. Justifie ta réponse.

VI- RENDEZ-VOUS DES CURIEUX !

• La statistique est la partie des mathématiques qui consiste à analyser des informations chiffrées sur une « population » donnée : population d'individus (demandeurs d'emploi, électeurs, ...), population d'objets (voitures,.....). Les résultats obtenus lors d'enquêtes donnent des renseignements globaux sur cette population (âges, sexes, professions, prix de vente, performances, etc.)qui sont ensuite classés sous la forme de tableaux ou de pyramides afin d'être exploités pour réaliser des prévisions, résoudre des problèmes. La statistique s'applique à beaucoup de domaines : l'économie, la médecine, l'industrie,...

• Recenser la population permet de mieux cerner les problèmes et les enjeux démographiques économiques ou sociaux d'un pays.
De tout temps, les dirigeants ont cherché à mieux connaître leur population.
Déjà, bien longtemps avant notre ère, les Egyptiens recensaient leurs habitants afin de repartir les terres. Mais les moyens n'étaient pas développés et les résultats restaient hasardeux. Au cours des siècles, des progrès ont été réalisés et de vraies méthodes de statistique ont vu le jour grâce à de grands mathématiciens comme Blaise Pascal ou Carl Gauss.

12 Equation et inéquation du premier degré dans ℝxℝ

Notions essentielles :

- Equations du premier degré dans ℝ x ℝ
- Inéquations du premier degré dans ℝ x ℝ
- Système d'équations du premier degré dans ℝ x ℝ
- Problèmes du premier degré dans ℝ x ℝ

SITUATION D'APPRENTISSAGE

Un élève de troisième qui utilise un ancien cahier de son grand frère pour la préparation au BEPC découvre sur une page les étapes de résolution ci-après :

Etapes de résolution d'un problème du premier degré :

1ère étape :
J'analyse le problème afin d'identifier les inconnues et les données :

2ème étape :
J'ai mes inconnues ; j'essaie maintenant de comprendre le problème et d'isoler les éléments qui vont me permettre d'écrire mon système d'équations ou d'inéquations (c'est à dire les éléments qui ont un rapport avec mes inconnues). Ensuite, j'essaie d'interpréter les données, et les retranscrire en écriture mathématique (c'est à dire en équations ou inéquations)

3ème étape :
J'ai mis mon problème en système d'équations ou inéquations : il ne me reste plus qu'à le résoudre et analyser les résultats obtenus afin de retenir les solutions.

Le lendemain, cet élève présente sa recherche à ses amis de classe qui décident de s'informer sur les systèmes d'équations et d'inéquations du premier degré dans ℝ x ℝ afin de mieux appliquer ces étapes dans la résolution d'un exercice pour la préparation de l'examen du BEPC.

I- ACTIVITES DE DECOUVERTE

1- Identifier une équations du premier degré dans ℝ x ℝ

Activité 1

Au cours d'une journée, un distributeur automatique de billets a fourni 204 billets de banque, uniquement des billets de 10 000 FCFA et de 5 000 FCFA, pour une somme de 3 600 000 FCFA. On désigne par x le nombre de billets de 10 000 F et par y le nombre de billets de 5 000F.

Traduis en écriture mathématique les phrases suivantes.

a) « Un distributeur automatique a fourni 204 billets de banque ».

b) « Les billets de 10 000F et de 5 000F ont une somme de 3 600 000F ».

Je fais le point de l'activité

L'égalité $x + y = 204$ **est une équation du premier degré dans** ℝxℝ**, d'inconnue** $(x;y)$

J'évalue mes acquis

Parmi les équations ci-dessous, indique celles qui sont des équations du premier degré dans ℝxℝ

$a) 2x - 6y + 9 = 0$; $b) x^2 - 5y + 1 = 0$

$c) x + 1 = 0$; $d) \dfrac{x^2 - y^2}{x + y} - 2 = 0$

2- Vérifier qu'un couple de nombres donné est solution ou non d'une équation du premier degré dans ℝ x ℝ

Activité 2

Un professeur de mathématiques demande à un de ses élèves de trouver deux nombres réels différents de zéro dont la somme est égale 29.

Cet élève propose les couples suivants : (12;17); (11;17); (17;12); (-1;30); (36;-7)

1) Écris une équation du premier degré à deux inconnues qui traduit le problème.

2) Détermine les réponses fausses dans la proposition de l'élève.

Je fais le point de l'activité

Une solution d'une équation du premier degré dans ℝxℝ est un couple de nombres pour lequel l'égalité proposée est vérifiée.

J'évalue mes acquis

On considère l'équation du premier dans ℝxℝ suivante : $5x + 2y = 4$

Parmi les couples suivants, indique ceux qui sont solutions de cette équation : (2;-3) ; (5;5) ; (8;-18) ; (7;8) ; (-4;12).

3- Déterminer des couples de réelles solutions d'une équation du premier degré dans ℝ x ℝ

Activité 3

On considère l'équation du premier degré dans ℝxℝ suivante : $5x-3y+8=0$

1) Détermine la valeur de b pour que le couple $(2 ; b)$ soit solution de cette équation.

2) Détermine la valeur de a pour que le couple $(a;1)$ soit solution de cette équation.

3) Détermine d'autres couples solutions.

Je fais le point de l'activité

Pour déterminer un couple solution d'une équation du premier degré dans ℝxℝ ; on donne une valeur quelconque à l'une des deux inconnues, puis on résout l'équation obtenue pour déterminer l'autre inconnue.

J'évalue mes acquis

Un rectangle a un périmètre de 60 cm.
Détermine des dimensions entières possibles de ce rectangle.

4 - Identifier un système de deux inéquations du premier degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Activité 4

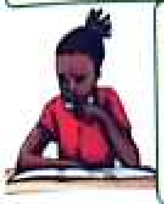
Dans une boulangerie deux amis ont acheté des croissants et des pains au chocolat.
L'un a acheté deux croissants et un pain au chocolat et a payé **moins** de 1100 FCFA et l'autre a acheté un croissant et trois pains au chocolat et a payé **moins** de 1550 FCFA.
Ecris un système de deux inéquations du premier degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ qui traduit la situation.

Je fais le point de l'activité

Un système de deux inéquations du premier dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ est composé deux équations à une inconnue qui doit être vérifiée simultanément.

$\begin{cases} 2x + y < 1100 \\ x + 3y < 1550 \end{cases}$ est **un système** de deux équations du premier dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$

J'évalue mes acquis



Parmi les systèmes suivants, indique ceux qui sont des systèmes de deux inéquations du premier dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$

$a)\begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ x = 2 \end{cases}$ $\quad b)\begin{cases} 5x + y = 9 \\ \dfrac{1}{x} = \dfrac{2}{y} \end{cases}$ $\quad c)\begin{cases} \dfrac{4}{5}x + y = -2 \\ x + 7y - 3 = 0 \end{cases}$ $\quad d)\begin{cases} x \le y \\ x - y + 7 = 0 \end{cases}$

5- Résoudre graphiquement un système du premier degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Activité 5

Dans le plan muni du repère *(O, I, J)*, on considère les droites (D_1) et (D_2) d'équations respectives :

(D_1) : $x - y + 5 = 0$

(D_2) : $2x + y - 8 = 0$

1) Justifie que les droites (D_1) et (D_2) sont sécantes en un point A.

2) Construis les droites (D_1) et (D_2)

3) Détermine graphiquement les coordonnées du point A.

4) Déduis-en la solution du système d'équations

$$\begin{cases} x - y + 5 = 0 \\ 2x + y + 8 = 0 \end{cases}$$

5) Indique les différentes étapes de résolution graphique d'un système d'équations du premier degré dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.

Je fais le point de l'activité

Pour résoudre graphiquement un système d'équations du premier degré dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$:
- On construit les deux droites dans un repère.
- On détermine la position relative des deux droites dont leurs équations composent ce système ;
- On lit la solution si elle existe, sinon on conclut.

J'évalue mes acquis

Résous graphiquement le système suivant :

$$\begin{cases} 2x - y - 2 = 0 \\ x + y - 7 = 0 \end{cases}$$

6- Résoudre un système de deux équations du premier degré dans ℝ x ℝ par combinaison

Activité 6

Tâches	Explications
$\begin{cases} 2x + y - 1100 = 0 \\ x + 3y = 1550 \end{cases}$	On recopie les deux équations trouvées ou données sous forme de système
	On réécrit les deux équations sous la forme $ax + by = c$ si nécessaire **puis** on multiplie une ou les deux équations par un nombre pour que les coefficients d'une des inconnues soient opposés.
	On recopie les deux équations multipliées. On les additionne membre à membre. On obtient ainsi une nouvelle équation à une inconnue
	On recopie une des deux équations de départ et la nouvelle équation trouvée en dessous
	On résout l'équation à une inconnue ainsi obtenue. On détermine ainsi la valeur d'une des inconnues. On reprend le même processus afin de trouver la valeur de l'autre inconnue

7- Résoudre un systeme de deux équations du premier dégré dans ℝ x ℝ par substitution

Activité 7

On considère le système suivant : $\begin{cases} 2x + 4y = 8 \\ x - 9y = 15 \end{cases}$

1) Dans la deuxième équation du système ci-dessus, exprime l'inconnue x en fonction de l'inconnue y.
2) Remplace dans la première équation du système, l'inconnue x par son expression en fonction de y et déduis-en la valeur de y.
3) Reprends la démarche des questions 1 et 2 pour déterminer la valeur de x.

8- Identifier une inéquations du premier degré dans ℝ x ℝ

Activité 8

On veut trouver deux nombres réels non nuls dont la somme est plus petite que 9.
On désigne par x et y ces deux nombres
Traduis ce problème par une écriture mathématique.

Je fais le point de l'activité

L'inégalité $x + y - 9 < 0$ est une **inéquation du premier degré** dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, d'inconnue $(x;y)$

J'évalue mes acquis

Parmi les inégalités ci-dessous, indique celles qui sont des inéquations du premier degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

a) $x \geq 2$; b) $5x - y + 2 \leq 0$; *c)* $\frac{x^2}{x} - \frac{y^2}{y} < 1$; *d)* $\frac{2}{y} > 3$

9- Vérifier qu'un couple de nombre donné est solution d'une inéquation du premier degré dans ℝ x ℝ

Activité 9

Un jeu consiste à trouver cinq couples de nombres réels dont la somme des composantes pour chaque couple est inférieure ou égale 32.
Un Joueur propose les couples suivants : (16 ; 16) ; (11 ; 17) ; (17 ; 22) ; (-61 ; 22) ; (-39 ; -7).
1) Justifie que l'inéquation $x + y \leq 32$ traduit bien **ce problème.**
2) Dis si ce joueur peut empocher le gain du jeu.

Je fais le point de l'activité

Une solution d'une inéquation du premier degré dans ℝ x ℝ est un couple de nombres pour lequel l'inégalité proposée est vérifiée.

J'évalue mes acquis

On considère l'inéquation du premier dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ suivante : $x - 9y \geq 15$
Parmi les couples suivants, indique ceux qui sont solutions de cette inéquation : (37 ; 2) ; (40 ; 0) ; (23 ; -5) ; (-23 ; -6) et (29,5 ; 7,8)

10- Déterminer des solutions d'une inéquation du premier degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Activité 10

On considère l'inéquation du premier suivante :
$5x - 3y + 8 \leq 0$

1) Détermine la valeur de b pour que le couple (2 ; b) soit une solution de cette inéquation.
2) Détermine la valeur de a pour que le couple (a ; 1) soit une solution de cette inéquation.
3) Détermine d'autres couples solutions.

Je fais le point de l'activité

Pour déterminer un couple de nombres solution d'une inéquation du premier degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, on donne une valeur quelconque à une des deux inconnues et on résout l'inéquation obtenue afin de choisir des valeurs qui conviennent à l'autre inconnue.

J'évalue mes acquis

Un rectangle a un périmètre de 60 cm.
Détermine des dimensions entières possibles de ce rectangle.

11- Représenter graphiquement l'ensemble des solutions d'une inéquation du premier degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Activité 11

On considère l'inéquation suivante : $x + 3y \leq 2$

1) Représente dans un repère orthonormé (O, I, J), la droite d'équation $x + 3y = 2$.
2) Place dans ce repère, un point dont les coordonnées sont solutions de cette inéquation.
3) Hachure la partie du plan dont les coordonnées des points sont solutions de l'inéquation ci-dessus.

Je fais le point de l'activité

La droite (D) d'équation $ax + by + c = 0$ *(a et b des nombres non tous nuls)* étant représentée dans un repère, on détermine un couple solution de l'inéquation $ax + by + c < 0$ par exemple, puis on choisit le demi-plan correspondant.

J'évalue mes acquis

Un rectangle a un périmètre de moins $24\ m$.
a) Ecris une inéquation qui traduit cette situation.
b) Représente graphiquement l'ensemble des nombres réels qui peuvent être les dimensions de ce rectangle.

12 - Représenter graphiquement de l'ensemble des solutions d'une inéquation du premier degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Activité 12

Le plan est muni d'un repère (O,I,J). $(D_1) : 2x - y = 0$ et $(D_2) : x + 2y - 4 = 0$ sont deux droites du plan.

1- Représente dans le repère (O,I,J) les droites (D_1) et (D_2).

2- a) Représente dans le repère (O,I,J) le demi-plan (P_1) de bord (D_1) dont les coordonnées des points vérifient : $2x - y < 0$.

b) Représente dans le repère (O,I,J) le demi-plan (P_2) de frontière (D_2) dont les coordonnées des points vérifient : $x + 2y - 4 > 0$.

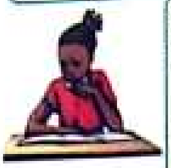
3- Hachure en bleu, l'ensemble des points $M(x,y)$ qui appartiennent à la fois à (P_1) et (P_2).

Je fais le point de l'activité

La droite (D) d'équation $x + 2y - 4 = 0$ partage le plan en deux demi-plans de bord ou de frontière (D) :
- le demi-plan (P_1) dont les points vérifient $x + 2y - 4 < 0$
- le demi-plan (P'_1) dont les points vérifient $x + 2y - 4 > 0$.

La partie du plan dont les abscisses des points vérifient simultanément $x + 2y - 4 < 0$ et $x + 2 - 4 > 0$ est l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ du système $\begin{cases} x+2y-4>0 \\ 2x-y<0 \end{cases}$

J'évalue mes acquis



Soit (O,I,J) un repère du plan.
Représente graphiquement l'ensemble des solutions du système
$$\begin{cases} x+3y-1 > 0 \\ 2x+5y+4 < 0 \end{cases}$$

13 - Résoudre un problème de vie courante à l'aide d'une équation - Résoudre un probleme de vie courante a l'aide d'une inéquation du premier degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Activité 13

La somme de deux nombres entiers naturels est égale à 141. Le plus grand surpasse le second de 23.
Soit x le plus grand et y le plus petit nombre.

1) Traduis ce problème par une écriture mathématique.
2) Résous le système d'équations obtenu.
3) Déduis-en les deux nombres.

Je fais le point de l'activité

La résolution d'un problème du premier degré conduisant à une équation passe des étapes qui sont à respecter :
- Le choix des inconnues ;
- La mise en équations, la résolution ;
- La vérification et la conclusion.

Activité 14

La petite économie d'une commerçante, composée de billets de 500 F et de 1.000 F est moins de 15.000 F. Elle dispose moins de 20 billets dans son coffre.

1) Traduis ce problème par une écriture mathématiques.
2) Représente graphiquement l'ensemble des solutions du système obtenu
3) Déduis-en deux exemples de nombres qui répondent au problème posé.

Je fais le point de l'activité

La résolution d'un problème du premier degré conduisant à une inéquation passe des étapes qui sont à respecter :
- Le choix des inconnues ;
- La mise en inéquations,
- La résolution graphique ;
- La vérification et la conclusion.

II- RESUME DE COURS

A. Equations, système d'équations dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$

1- Equations du premier degré dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$

Définition

Une équation du 1er degré à deux inconnues x et y est de la forme $ax + by + c = 0$ où a, b et c sont des nombres réels donnés.

Exemple

$2u + 3v = 5$ est une équation du premier degré à deux inconnues u et v.

REMARQUES

Les inconnues peuvent être désignées par d'autres lettres.

2- Système de deux équations du premier degré dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$

Définition

Un système de deux équations du 1er degré d'inconnues x et y est de la forme $\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a'x+b'y+c'=0 \end{cases}$ où a, b, c, a', b' et c' sont des nombres réels donnés.

Exemple

$(E): \begin{cases} 3x+2y+5=0 \\ x-3y-2=0 \end{cases}$ est un système de deux équations du 1er degré d'inconnues x et y.

B. Inéquations dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ – systèmes d'inéquations dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$

1- Equations $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$

Définition

Une inéquation du premier degré à deux inconnues x et y est de la forme $ax + by + c < 0$ ($ax + by + c > 0$) où a,b et c sont des nombres réels donnés.

Exemple

$2x + 3y < 5$ est une équation du premier degré à deux inconnues x et y.

REMARQUES

Les inconnues peuvent être désignées par d'autres lettres.

Les inégalités peuvent être larges.

2- Système d'inéquations dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$

Définition

Un système de deux inéquations du 1er degré d'inconnues x et y est de la forme $\begin{cases} ax+by+c<0 \\ a'x+b'y+c'>0 \end{cases}$ où a, b, c, a', b' et c' sont des nombres réels donnés.

Exemple

$(E): \begin{cases} 3x+2y+5>0 \\ x-3y-2\geq 0 \end{cases}$ est un système de deux inéquations du 1er degré d'inconnues x et y.

Théorème fondamental

Le plan est muni d'un repère (O,I,J). (D) est une droite d'équation $ax + by + c = 0$. La droite (D) partage le plan en deux demi-plans ouverts de bord ou de frontière (D).

- Le demi-plan (P_1) dont les points $M(x;y)$ vérifient : $ax + by + c < 0$.
- Le demi-plan (P_2) dont les points $M(x;y)$ vérifient : $ax + by + c > 0$.

Exemple

Le plan est muni d'un repère (O,I,J). L'ensemble des points M(x,y) tels que $2x + 3y - 7 < 0$ est le demi-plan ouvert de bord la droite (D) d'équation $2x + 3y - 7 = 0$.
L'ensemble des points M(x,y) tels que $x + 2y - 3 > 0$ est le demi-plan ouvert de frontière la droite (D) d'équation $x + 2y - 3 = 0$.

- Si A et B sont deux points distincts appartenant à un demi-plan ouvert de bord une droite (D) alors le segment [AB] est contenu dans ce demi-plan.
- Si un point appartient à un demi-plan ouvert de bord (D) alors la partie du plan auquel appartient ce point est ce demi-plan.

III- METHODE

A- Equations et systèmes d'équations dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

1. Principe de la résolution par combinaison linéaire

On multiplie chaque équation par un nombre bien choisi de façon que l'une des inconnues disparaisse quand on additionne membre à membre les deux nouvelles équations. On résout ensuite l'équation à une inconnue qui a été obtenue pour déterminer la valeur de l'une des inconnues.
On procède de la même manière pour déterminer la valeur de l'autre inconnue.

Solution

Nous allons résoudre le système $(E): \begin{cases} 3x + 2y + 5 = 0 \\ x - 3y - 2 = 0 \end{cases}$

Multiplions la deuxième équation par -3 on obtient $(E): \begin{cases} 3x + 2y + 5 = 0 \\ -3x + 9y + 6 = 0 \end{cases}$

En additionnant membre à membre les deux équations, on obtient $11x + 11 = 0$ *d'où* $y = -1$

Multiplions la première équation par 3 et la deuxième par 2, on obtient $(E): \begin{cases} 9x + 16y + 15 = 0 \\ +2x - 6y - 4 = 0 \end{cases}$

En additionnant membre à membre les deux équations, on obtient $11x + 11 = 0$, *d'où* $x = -1$
Finalement $S = \{(-1;-1)\}$.

2. Principe de la résolution par substitution

A partir de l'une des deux équations, on exprime l'une des inconnues en fonction de l'autre. On remplace dans l'autre équation l'inconnue trouvée par son expression. On obtient une équation à une inconnue que l'on résout et trouve la valeur de l'inconnue. On la remplace par sa valeur dans l'expression de la première inconnue.

Solution

Nous allons résoudre le système $(E): \begin{cases} 3x + 2y + 5 = 0 \\ x - 3y - 2 = 0 \end{cases}$

A partir de la deuxième équation, on a: $x = 3y + 2$. *Dans la première équation, on remplace l'inconnue x par* $3y + 2$ *alors on obtient :* $11y + 11 = 0$ *d'où* $y = -1$
En remplaçant dans l'expression de l'inconnue x, *l'inconnue y par la valeur trouvée, on* $x = -1$.
Finalement $S = \{(-1;-1)\}$.

3. Résolution graphique

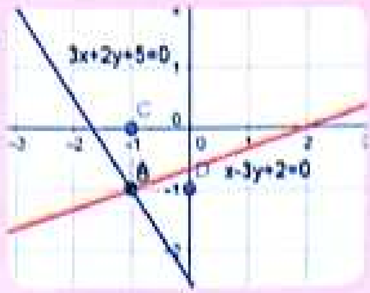
Pour résoudre graphiquement le système, il faut prendre chaque équation du système comme une équation de droite, puis on les représente dans un repère.

Remarques

Si les droites sont parallèles, alors le système n'admet pas de solution.
Si les droites sont confondues, alors le système admet une infinité de solution.

Solution

Résous graphiquement le système (E): $\begin{cases} 3x+2y+5=0 \\ x-3y-2=0 \end{cases}$



Dans un repère du plan, on représente deux droites qui ont pour équation les équations du système.
La lecture des coordonnées du point d'intersection nous donne le couple solution du système.

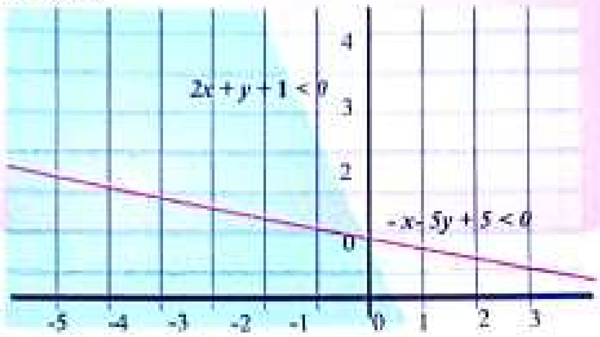
B- inéquations et systèmes d'inéquations dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

1- Représenter graphiquement l'ensemble solution

On représente graphiquement l'ensemble des solutions de chacune des inéquations. La partie du plan qui satisfait les deux inégalités est l'ensemble des solutions

Résous graphiquement le système (E): $\begin{cases} 2x+y-1<0 \\ -x-5y+5<0 \end{cases}$

On a représenté graphiquement l'ensemble des solutions de chacune des inéquations.
La partie à la fois en bleue et en rose est l'ensemble des solutions du système (E).



IV- SAVOIR-FAIRE

Savoir-faire 1- Déterminer des couples de nombres réels solutions d'une équation du premier degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Enoncé

Soit l'équation (E) dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$: $x-5y-2=0$

Détermine trois couples de nombres réels solutions de (E)

Solution commentée

Je détermine trois couples de nombres réels solutions de (E).

Dans l'équation (E), j'exprime, par exemple, x en fonction de y, on obtient :

x-5y-2 = 0, soit x = 5y+2

Je donne des valeurs arbitraires à y et j'obtiens celles de x.

- Si y = 0, on a : $5\times0+2=2$, donc le couple (2 ; 0) est une solution de (E)
- Si y = -2, on a : $5\times(-2)+2=-10+2=-8$, donc le couple (8 ; -2) est une solution de (E).
- Si y = 13, on a : $5\times13+2=65+2=67$, donc le couple (67 ; 13) est une solution de (E).

Ainsi trois couples de nombres réels solutions de (E) sont : (2 ; 0) ; (8 ; -2) et (67 ; 13) .

Savoir-faire 2- Déterminer des couples de nombres réels solutions d'une inéquation du premier degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Enoncé

Soit l'inéquation (I) dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$: $-x-y>2$

Détermine quatre couples de nombres réels solutions de (I)

__Solution commentée__

Je détermine quatre couples de nombres réels solutions de (I)

Dans l'inéquation (I), je donne une valeur particulière à y, par exemple, pour ramener celle-ci à une inéquation dans et je la résous.

Si $y = 5$, on obtient : $-x - 5 > 2$

Ainsi les couples de nombres de nombres réels qui sont solutions de (I) sont :

$-x > 5 + 2$, soit $x < -7$ Donc lorsque $y = 5$, on a : $x < -7$

(-50 ; 5) ; (-9 ; 5) ; (-8 ; 5) et (-11 ; 5).

Savoir-faire 3- Représenter graphiquement l'ensemble des solutions d'une inéquation du premier degré dans ℝ x ℝ

__Enoncé__

Soit l'inéquation (I) dans ℝxℝ : $-x + 2y + 5 < 0$

Représente graphiquement l'ensemble des solutions de (I).

__Solution commentée__

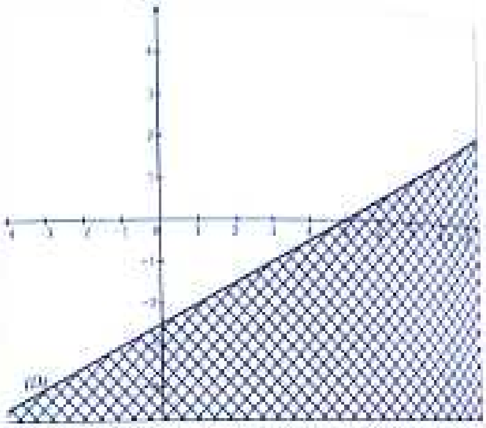
Je représente graphiquement l'ensemble des solutions de (I).

Je construis la droite (D) d'équation $-x + 2y + 5 = 0$

(D) : $-x + 2y + 5 = 0$

$x = 2y + 5$

x	1	5
y	-2	0
$(x ; y)$	(1 ; -2)	(5 ; 0)



Je vérifie si le couple (0 ; 0) est une solution de (I).

On a : $-0 + 2 \times 0 + 5 = 5$. Or : $5 > 0$, donc le demi-plan de frontière (D) qui ne contient pas le couple (0 ; 0) est l'ensemble des solutions. Celui-ci est hachuré sur la figure.

Savoir-faire 4- Représenter graphiquement l'ensemble des solutions d'un système de deux inéquations du premier degré dans ℝ x ℝ

__Enoncé__

Soit le système (S) d'inéquations dans ℝxℝ : $\begin{cases} x + y - 2 < 0 \\ x - y + 3 < 0 \end{cases}$

Représente graphiquement l'ensemble des solutions du système (S).

__Solution commentée__

Je représente graphiquement l'ensemble des solutions du système (S).

Soit (I_1) d'équation $x + y - 2 < 0$ et (I2) d'équation $x - y + 3 < 0$

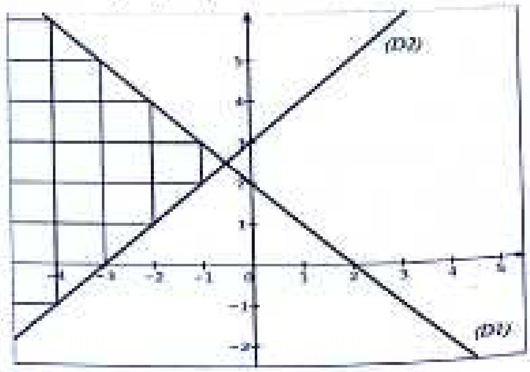
Je construis dans un même repère les droites (D_1) et (D_2) d'équations respectives $x + y - 2 = 0$ et $x - y + 3 = 0$

Pour la construction de (D_1)

(D_1) : $x + y - 2 = 0$

$y = -x + 2$

x	0	2
y	2	0
$(x ; y)$	(0 ; 2)	(2 ; 0)



Pour la construction de (D_2)

$(D_2) : x - y + 3 = 0$

$x = y - 3$

x	-3	0
y	0	3
$(x ; y)$	(-3; 0)	(0 ; 3)

- Je vérifie si le couple (0 ; 0) est solution de (I_1).
On a : $0 + 0 - 2 = -2$. Or : $-2 < 0$,
donc le demi-plan de frontière (D_1) qui contient le couple (0 ; 0) est l'ensemble des solutions de (I_1).

- Je vérifie si le couple (0 ; 0) est solution de (I_2).
On a : 0 - 0 + 3 = 3. Or : 3 > 0,
donc le demi-plan de frontière (D_2) qui ne contient pas le couple (0 ; 0) est l'ensemble des solutions de (I_2).
Ainsi la partie hachurée sur le graphique est l'ensemble des solutions du système (S).

Savoir-faire 5- Résoudre un système de deux équations du premier degré dans ℝ x ℝ par substitution

Enoncé

Soit le système d'équations dans ℝxℝ : $\begin{cases} x - 11y + 5 = 0 \\ 10x + 3y - 63 = 0 \end{cases}$

Résous le système par substitution

Solution commentée

Je résous le système par substitution

Soit le système : $\begin{cases} x - 11y + 5 = 0 & (E_1) \\ 10x + 3y - 63 = 0 & (E_2) \end{cases}$

Dans l'équation (E1), j'exprime en fonction de y et j'obtiens : x-11y + 5 = 0, soit x = 11y- 5
Dans l'équation (E2), je remplace x par 11y - 5 et j'obtiens l'équation 10(11y-5) +3y - 63 = 0 que je résous.

$10(11y - 5) + 3y - 63 = 0$

$110y - 50 + 3y - 63 = 0$, donc : $113y - 113 = 0$, $113(y - 1) = 0$. D'où $y = 1$

Or $x = 11y - 5$ et $y = 1$, donc on a : $x = 11 \times 1 - 5 = 11 - 5 = 6$.
Je vérifie que le couple (6 ; 1) est la solution du système.
On a : $6 - 11 \times 1 + 5 = 6 - 11 + 5 = 0$ et $10 \times 6 + 3 \times 1 - 63 = 60 + 3 - 63 = 0$
Ainsi la solution du système est le couple : (6 ; 1).

Savoir-faire 6- Résoudre un système de deux équations du premier degré dans ℝ x ℝ par combinaison

Enoncé

Soit le système d'équations dans ℝxℝ : $\begin{cases} 8x - 3y - 2 = 0 \\ 6x + 4y - 1 = 0 \end{cases}$

Résous le système par substitution

Solution commentée

Je résous le système par combinaison

$\begin{cases} 8x - 3y - 2 = 0 & (E1) \\ 6x + 4y - 1 = 0 & (E2) \end{cases}$

Je multiplie l'équation (E1) par 4 et l'équation (E2) par 3, puis j'obtiens le système suivant :

$$\begin{cases} 32x - 12y - 8 = 0 \\ 18x + 12y - 3 = 0 \end{cases}$$

En additionnant membre à membre les deux équations du système obtenu, on a :

$50x - 11 = 0$, soit $x = \dfrac{11}{50}$

Dans l'équation (E2), par exemple, je remplace x par $\dfrac{11}{50}$ et j'obtiens l'équation :

$6 \times \dfrac{11}{50} + 4y - 1 = 0$ que je résous.

$\dfrac{33}{25} + 4y - 1 = 0$, donc: $4y = 1 - \dfrac{33}{25}$, on obtient $4y = -\dfrac{8}{25}$, d'où: $y = -\dfrac{8}{25} \times \dfrac{1}{4}$, ainsi : $y = -\dfrac{2}{25}$.

On vérifie que le couple $\left(\dfrac{11}{50}; -\dfrac{2}{50}\right)$ (quitte à toi de faire ces deux calculs).

Ainsi la solution du système est le couple : $\left(\dfrac{11}{50}; -\dfrac{2}{50}\right)$.

Savoir-Faire 7 Résoudre un problème du premier degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Enoncé

1- Résoudre le système : $\begin{cases} x + y = 14 \\ 4x + 3y = 48 \end{cases}$

2- 6 kg de confiture doivent être répartis dans 14 pots ; certains contiennent 500 g, d'autres 375 g.

a) Si x désigne le nombre de pots de 500 g et y le nombre de pots de 375 g, écrire un système d'équations traduisant les données précédentes.

b) Vérifier que ce système se ramène au système résolu dans la question 1).

c) En déduire le nombre de pots de chaque sorte utilisés.

Solution commentée

1- Je résous le système d'équations

J'utilise la méthode de la substitution.

$$\begin{cases} x + y = 14 & (1) \\ 4x + 3y = 48 & (2) \end{cases}$$

De l'équation (1) on obtient : $y = 14 - x$

Dans l'équation (2) on obtient : $4x + 3(14 - x) = 48$, donc : $x = 48 - 42$ d'où $x = 6$

De l'équation (1) on déduit $y = 14 - 6 = 8$

Donc : $S_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} = \{(6;8)\}$

2- a) J'écris un système d'équations traduisant les données du problème

- x désigne le nombre de pots de 500 g
- y désigne le nombre de pots de 375 g

on a au total 14 pots donc $x + y = 14$

• au départ on a au total 6 kg de confiture dont x de pots de 500 g et y pots de 375 g
donc on a : $500x + 375y = 6000$
on obtient donc le système d'équations suivant $\begin{cases} x + y = 14 \\ 500x + 375y = 6000 \end{cases}$

b) Je vérifie que ce système se ramène au système résolu dans l'équation (1).

$\begin{cases} x + y = 14 \\ 500x + 375y = 6000 \end{cases}$

$500 = 4 \times 125$
$375 = 3 \times 125$
$6000 = 48 \times 125$

Donc $500x + 375y = 6\,000$ équivaut à $4x + 3y = 48$.

On obtient ainsi $\begin{cases} x + y = 14 \\ 4x + 3y = 48 \end{cases}$

c) J'en déduis le nombre de pots de chaque sorte

Dans la résolution de ce système on a :
$x = 6$ et $y = 8$ donc on a 6 pots de 500 g et 8 pots de 375 g.

V- JE M'EXERCE

1- Exercices de fixation/ Application

Identifier une équation du premier degré dans $\mathbb{R}x\mathbb{R}$

1 Parmi les équations suivantes entoure celle qui est une équation du premier degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$
1) $4x^2 - 3y^2 = 0$
2) $3\sqrt{x} + 5\sqrt{y} = 0$
3) $-2x + 7y = 0$

Identifier une inéquation du premier degré dans $\mathbb{R}x\mathbb{R}$

2 Parmi les équations suivantes entoure celle qui est une inéquation du premier degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$4x^2 - 3y^2 \leq 0$; $3\sqrt{x} + 5\sqrt{y} \geq 0$; $-2x + 7y > 0$.

Identifier un système de deux équation du premier degré dans $\mathbb{R}x\mathbb{R}$

3 Parmi les propositions de réponses ci-dessous, une seule est vraie, entoure-la !
Un système de deux équations dans $\mathbb{R}x\mathbb{R}$ est :
1- formé par deux équations à une inconnue $\mathbb{R}$.
2- formé par une équation à deux inconnues $\mathbb{R}x\mathbb{R}$.
3- formé par deux équations à deux inconnues $\mathbb{R}x\mathbb{R}$.

4 Parmi les systèmes suivants entoure celui qui est un système de deux équations du premier degré dans $\mathbb{R}x\mathbb{R}$;

$\begin{cases} 11x - 9y > 0 \\ 4x + 13y = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} 3x + 2y = 0 \\ -x + y = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$

5 Soit l'inéquation (I): $-3x + 2y \geq 0$. (I)
Parmi les couples de nombres réels suivants, un seul est solution de l'inéquation (I), entoure-le :
• (1;2) ; • (3;1) ; • (2;3).

6 Parmi les couples de nombres réels suivants entoure ceux qui sont des solutions de l'inéquation $3x - 2y + 1 < 0$:

$(1;1)$; $\left(\frac{1}{3};2\right)$; $(-2;-3)$; $\left(0;\frac{1}{2}\right)$.

Déterminer des couples réels solutions d'un équation du premier degré dans $\mathbb{R}x\mathbb{R}$

7 Détermine deux couples solutions de l'équation :
(E): $0 = -y + 2x + 3$.

8 Détermine trois couples solutions de l'équation :
(E): $2y + x - 3 = 0$.

Déterminer des couples réels solutions d'un inéquation du premier degré dans $\mathbb{R}x\mathbb{R}$

9 Détermine deux couples solutions de l'inéquation :
(I): $y > -2x + 3$.

10 Représente graphiquement l'ensemble des solutions de chacune des inéquations ci-dessous :
(I_1) : $y > -2x + 3$; (I_2) : $-x + y \leq 2$

Résoudre graphiquement un système de deux équation du premier degré dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$

11 Résous graphiquement chacun des systèmes d'équations du premier degré ci-dessous :

$(S_1) : \begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ x + 2y - 3 = 0 \end{cases}$ $\quad (S_2) : \begin{cases} x + 2y = 0 \\ -x + y = 6 \end{cases}$

Résoudre un système de deux équation du premier degré dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ par substitution

12 Dans la première colonne du tableau ci-dessous sont décrites des méthodes de résolution d'un système de deux équations du premier degré dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.
Relie par un trait chaque description de méthode de résolution d'un système à son nom dans la deuxième colonne.

Méthode de résolution (description)	Nom
On écrit, dans l'une des deux équations, une inconnue en fonction de l'autre, et on remplace l'expression obtenue dans l'autre équation. On obtient une équation à une inconnue que l'on résout.	Combinaison
On ajoute, membre à membre, les deux équations après les avoir multipliées par des coefficients convenablement choisis pour éliminer une des deux inconnues, ensuite on reprend le même processus pour déterminer la valeur de l'autre inconnue.	Substitution
	Comparaison

13 Résous par substitution les systèmes d'équations du premier degré ci-dessous :

$(S_1) : \begin{cases} x + 2y = 0 \\ -x + y = 6 \end{cases}$ $\quad (S_2) : \begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ x + 2y - 3 = 0 \end{cases}$

$(S_3) : \begin{cases} 3x + 4y - 4 = 0 \\ 5x + 7y = 6 \end{cases}$

Résoudre un système de deux équation du premier degré dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ par combinaison

14 Résous par combinaison les systèmes d'équations du premier degré ci-dessous :

$(S_1) : \begin{cases} x + 2y = 0 \\ -x + y = 6 \end{cases}$ $\quad (S_2) : \begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ x + 2y - 3 = 0 \end{cases}$

$(S_3) : \begin{cases} 4x + 3y - 29 = 0 \\ 2x - y - 7 = 0 \end{cases}$

Traduire un problème du premier degré par une équation ou inéquation du premier degré dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$

15 Un parent a acheté 6 cahiers de 200 pages et 4 cahiers de 300 pages pour ses enfants.
Il a dépensé au total 3 800 f CFA pour l'achat de ces cahiers. Ayant perdu son reçu, il souhaite connaître le prix unitaire de chacun de ces types de cahiers.
Traduis par une équation ou une inéquation du premier degré dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ le problème posé.

16 Un élève veut acheter des stylos à 100frs l'un et des cahiers à 150 frs l'un sans toutefois dépasser les 1 500 frs qu'il possède.
Traduis cette situation par une inéquation du premier degré à deux inconnues.

17 Cinq pantalons jeans et trois T-shirts coûtent réunis moins de 107000 fcfa. Traduis cette situation par une inéquation du premier degré à deux inconnues.

2-Exercices de renforcement/approfondissement

18 Résous dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ chacun des systèmes suivants :

$(S_1) : \begin{cases} \sqrt{2}x + y = 3 \\ x - \sqrt{2}y = -2 \end{cases}$

$(S_2) : \begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y = 2 \\ -\frac{1}{3}x + \frac{1}{2}y = -3 \end{cases}$

19 Le plan est muni d'un repère orthonormé (O;I;J).
Soit (I) l'ensemble des points $M(x;y)$ tels que :

$(I) : \begin{cases} x - y + 1 < 0 \\ x + y \leq 0 \end{cases}$

Représente graphiquement (I).
Détermine trois couples solutions de (I) tels que : $0 < x < 2$ et $y < 0$.

20 Les étapes de résolution d'un problème du premier se déroule en cinq étapes. Les étapes ci-dessous sont en désordre.
Mets-les en ordre en mettant les numéros de 1 à 4.

- On traduit par une équation ou une inéquation chaque renseignement (ou contrainte) sur une grandeur.
- On exhibe les solutions au problème posé.
- On définit explicitement les inconnues en les désignant par des variables (x, y, n, etc.) et en précisant leurs unités si nécessaire ;

- On résout alors le système d'équations par substitution d'une variable ou par combinaison linéaire des équations.

21 Détermine deux nombres entiers naturels tels que :
- Leur somme est 355.
- Le plus grand divisé par le plus petit donne 19 pour reste et 11 pour quotient.

22 Deux nombres entiers x et y ont pour somme 37. Dans la division euclidienne de x par y, le quotient est 6 et le reste 2.
Trouve les valeurs de x et de y.

23 Trouve les nombres réels a et b tels que les couple (-1;3) et (2; -5) soient solutions de l'équation $ax + by - 1 = 0$.

24 Résous chacun des systèmes ci-dessous par la méthode indiquée :

A. Par substitution :

○ $\begin{cases} x - 2y = \frac{2}{3} \\ 3x - 5y = \frac{3}{4} \end{cases}$

○ $\begin{cases} \frac{x}{3} + \frac{y}{3} - \frac{1}{6} = 0 \\ 2x + 4y - 1 = 0 \end{cases}$

○ $\begin{cases} 2x - 3y = 2\sqrt{2} - 3\sqrt{5} \\ x + y = \sqrt{2} + \sqrt{5} \end{cases}$

B. Par Combinaison :

○ $\begin{cases} -13x - 2y = 3 \\ 5x + 2y = 5 \end{cases}$

○ $\begin{cases} x + 5y = 3 \\ \frac{1}{5}x - \frac{1}{4}y = \frac{1}{4} \end{cases}$

○ $\begin{cases} 5x + 7y = 13 \\ 25y - 75 = -25x \end{cases}$

C. Résous graphiquement :

$\begin{cases} 2x + y = 7 \\ -4x - 2y + 14 = 0 \end{cases}$

25 A l'occasion des fêtes de fin d'année, un pére achète une caisse de 24 bouteilles de vin. Cette caisse contient des bouteilles de vin rouge à 4.000 frs l'une et des bouteilles de vin blanc à 3.500 frs l'une.
Ce monsieur n'ayant pas conservé sa facture, veut savoir combien de bouteille de chaque vin il a acheté. Il sait seulement qu'il a versé 1.000.000 frs et qu'on lui a rendu 9.000 frs comme monnaie.

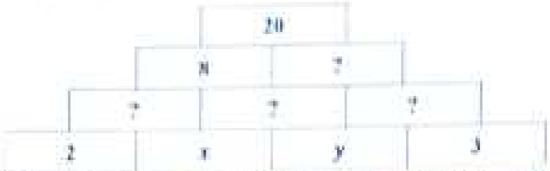
1- Résous le système suivant :
$$\begin{cases} z + t = 24 \\ 40z + 35t = 910 \end{cases}$$
2- Détermine le prix d'une bouteille de chaque type de vin.

26 La recette d'un spectacle s'est élevée à 1.500.000 frs. Certains spectateurs ont payé chacun 7.000 frs pour un siège catégorie 1 et d'autres ont payé 4.000 frs chacun pour un siège en catégorie 2. Trois mille personnes ont assisté au spectacle.
Trouve le nombre de sièges occupés dans chaque catégorie.

27 Il y a 4 ans, Patrick avait 6 fois l'âge de son frère Franc.
Aujourd'hui, Patrick à 2 fois l'âge de Franc.
Détermine l'âge de chacun aujourd'hui.

28 Représente graphiquement les solutions du système d'inéquations ci-dessous :
$$\begin{cases} 3x + y - 5 < 0 \\ -3x - 5y + 15 > 0 \end{cases}$$

29 Dans cette pyramide, le numéro d'une brique est égal à la somme des numéros des deux briques qui la soutiennent.



Écris et résous le système de deux équations qui permet de la compléter.

30 L'équation d'une courbe est $y = ax^2 + bx - 1$.
Détermine les valeurs des coefficients a et b pour que la courbe passe par les points de coordonnées (1 ,-2) et (-1 ,4).

31 Un artiste plasticien va chercher deux sortes de peinture chez un grossiste.
La première sorte est conditionnée en pots de 10 kg, la deuxième en pots de 25 kg. Le pot de 10 kg coûte 3.500 frs et celui de 25 kg coûte 6.000 frs.
La capacité du coffre de sa voiture ne dépasse pas 170 kg et la dépense totale ne doit pas s'élever à plus de 45.000 frs.
Détermine les achats possibles sachant qu'il faut plus de 3 pots de 25 kg et plus de 2 pots de 10 kg.

32 A la librairie « PAR TERRE », un commerçant a vendu 23 livres, les uns à 1500 frs, les autres à 2800 frs. La recette totale de toute la vente est 46.200 frs.
Détermine le nombre de livres de chaque type vendu par ce commerçant.

33 Trouve les nombres réels a et b tels que les couple (-1;3) et (2;-5) soient solutions de l'équation $ax + by - 1 = 0$

34 Une jeune fille veut acheter des mangues à 10 frs l'une et des oranges à 15 frs l'une sans toutefois dépasser les 150 frs qu'elle possède.

1- Traduis cette situation par une inéquation à deux inconnues.
2- Dis si elle peut acheter 5 mangues et 5 oranges !
3- Dis si elle peut acheter 8 mangues et 5 oranges !

3- Situations d'évaluation

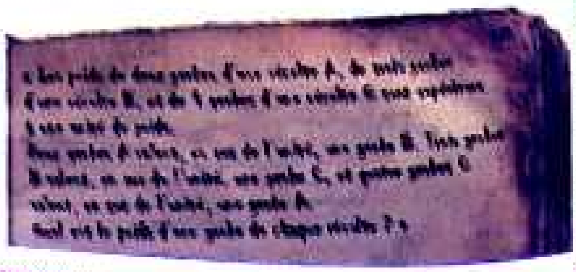
35 Une Organisation Non gouvernementale (ONG) désire acheter pour une bibliothèque d'un Lycée d'excellence des ouvrages de deux types :
Type 1 : six mille frs l'un et Type 2 : douze mille frs l'un.
Cette ONG exige les trois conditions suivantes :
1- Au moins deux ouvrages de type 1.
2- Plus d'ouvrages de type 2 que d'ouvrage de type 1.
3- La dépense doit être inférieure ou égale quatre-vingt-dix mille frs.
Détermine les diverses possibilités d'achats.

36 Un des professeurs d'une classe dans un Lycée est indisponible pour raison de maladie. Il a fait deux devoirs surveillés comptant pour le dernier trimestre, l'un a duré une heure et l'autre deux heures. Pour le calcul des moyennes, le devoir d'une heure compte pour coefficient 1 et celui de deux heures, coefficient 2.
La fiche de moyenne fournie par le professeur présente des insuffisances pour trois élèves.
Cependant les informations ci-dessous sont exactes et fournies à chacun d'eux :
- le premier élève a eu 15 au premier devoir et 9 au deuxième,
- le deuxième a eu 8 au premier devoir avec une moyenne trimestrielle de 12 sur 20,
- le troisième a eu 12 de moyenne mais si on permute ces deux notes il obtient 13 sur 20 comme moyenne.
Pour éviter le renvoi, la moyenne et les notes de cette discipline doivent être retrouvées pour chacun.
1- Calcule la moyenne du premier élève.
2- Détermine la note manquante du deuxième.
3- Détermine les notes du troisième.

VI- RENDEZ-VOUS DES CURIEUX !

Il y a un peu plus de 2000 ans, les chinois connaissaient des méthodes pour résoudre les systèmes linéaires proches de notre méthode des combinaisons linéaires.
Ils employaient également la méthode de fausse position.
Extrait du manuscrit chinois « Neuf chapitres sur l'art du calcul »,
Ier siècle. Le problème revient aujourd'hui à résoudre le système d'équations : $\begin{cases} 2x = 1 + y \\ 3y = 1 + z \\ 4z = 1 + x \end{cases}$
Où x,y et z sont les poids respectifs d'une gerbe de chaque récolte.

(Source INTERNET)



13 Application affine

Notions essentielles :

- Application affine
- Application linéaire
- Sens de variation
- Représentation graphique d'une application affine
- Représentation graphique d'une application linéaire

SITUATION D'APPRENTISSAGE

Un site internet propose aux élèves d'un lycée deux formules de téléchargement de musique en ligne :
- Formule A : payer 200 FCFA par titre téléchargé ;
- Formule B : payer un abonnement mensuel de 3000 FCFA, puis 50 FCFA par titre téléchargé.

Des élèves de 3ème semblent intéressés, mais n'ayant pas assez d'argent, ils cherchent la formule la plus économique.
Ils décident alors d'utiliser une représentation graphique des deux propositions pour faire un choix intéressant.

I- ACTIVITES DE DECOUVERTE

1- Identifier une application affine

Activité 1

Un boulanger dispose de 300 kg de farine. Chaque jour, pour la fabrication de son pain, il utilise 25 kg de farine.

1- Recopie et complète le tableau ci-dessous.

Nombre de pains écoulés	0	1	2	3			
Masse de en stock (en					15	50	0

2- Justifie que ce tableau n'est pas un tableau de proportionnalité.

3- Soit x le nombre de jours écoulés et $f(x)$ la masse de farine restante au bout de x jours. Exprime $f(x)$ en fonction de x.

4- Indique les valeurs de $f(0), f(1), f(2), f(3), f(6)$ à partir du tableau ci-dessus.

5- Recopie et complète : $f(\ldots)=50$ et $f(\ldots)=0$

Je fais le point de l'activité

L'application qui, au nombre de jours écoulés x, associe $-25x+300$ est une **application affine**.

On la note : $f: x \mapsto -25x+300$

; l'expression algébrique $f(x)$ est : $f(x) = -25x+300$

Four de fabrication de pains

J'évalue mes acquis

Parmi les applications f suivantes, indique celles qui sont des applications affines en précisant le coefficient a et le terme constant b pour chaque cas.

a) f est l'application qui, à x, associe $2x^2$

b) f est l'application qui, à x, associe $\frac{1}{2}x+2$

c) f est l'application qui, à x, associe $4x$

d) f est l'application qui, à x, associe $\sqrt{x}-5$.

Activité 2

On considère les applications f et g ci-dessous :

$$f : x \mapsto x-2\ ;\ g : x \mapsto \frac{3}{2}x \text{ et } h : x \mapsto -1$$

1- Justifie que f et g sont des applications affines.

2- Calcule l'image des nombres -1 et 8 par chacune de ces applications ci-dessus.

3- a) Indique pour laquelle des trois applications affines, les nombres -1 et 8 ont la même image.

b) Détermine les images d'un nombre réel a quelconque par f et g. Dis ce que tu constates.

Je fais le point de l'activité

Toute application affine dont le coefficient est nul est une **application affine constante**

J'évalue mes acquis

Réponds par vrai lorsque l'affirmation est vraie ou par faux lorsque l'affirmation est fausse

a) l'application $x \mapsto 2020$ est une application constante

b) l'application $x \mapsto 2x+1$ est une application constante

c) dans une application constante, tous les nombres ont la même image

2- Connaître la propriété relative à la représentation graphique d'une application affine

Activité 3

On considère l'application affine g définie par : $g(x) = x - 2$

1) Recopie et complète le tableau suivant :

x	-5	-4	-3	0	2	3	5
$g(x)$							

a) Dans un repère du plan d'origine O et d'unité graphique 1 cm sur les axes, place les points de coordonnées $(x\ ;\ g(x))$ issues du tableau précédent.

b) Fais une conjecture concernant ces points ainsi placés.

2) Soit la droite (D) d'équation $2x + y - 5 = 0$

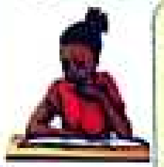
a) Etablis une rélation entre y et x.

b) Justifie que l'application $h : x \mapsto y$ est une application affine.

Je fais le point de l'activité

- La représentation graphique d'une application affine définie par f : $x \mapsto ax + b$ est une droite d'équation $y = ax + b$.
- Toute droite d'équation $y = ax + b$ est la représentation d'une application affine.

J'évalue mes acquis



1- Dans chacun des cas, écris l'équation de la droite (D), représentation graphique de l'application affine f.

a) $f(x) = \frac{1}{2}x - 1$; b) $f(x) = 2 - 3x$; c) $f(x) = -1$; d) $f(x) = -3x$.

2- Dans chacun des cas, détermine l'expression explicite de $g(x)$ dont la droite (D) est la représentation graphique.

a) (D): $y = 2x - 7$; b) (D): $y = 3$; c) (D): $-x + 2y + 2 = 0$; d) $(D): 2x + 6y = 0$.

3- *Déterminer graphiquement une image – Déterminer graphiquement le nombre réel a tel que $f(a) = b$ (où f est une application affine et b un nombre réel donné)*

Activité 4

Le plan est muni du repère (O ; I ; J). Soient A (-2 ; 1) et B (3 ; 5) deux points du plan.
La droite (AB) est la représentation graphique d'une application affine f.

1- Construis la représentation graphique (AB) de l'application affine f.

2- Détermine graphiquement l'ordonnée du point M de la droite (AB) d'abscisse 0,5.

3- Détermine graphiquement l'abscisse du point N de la droite (AB) d'ordonnée -3.

Je fais le point de l'activité

- Pour déterminer graphiquement l'image d'un nombre réel u par une application affine f :
  - On trace la droite la droite (D) d'équation $x = u$ qui coupe la représentation graphique de f en un point M
  - On lit l'ordonnée v du point M et on a : $f(u) = v$
- Pour déterminer graphiquement le réel a tel que $f(a) = b$:
  - On trace la droite (D') d'équation $y = b$ qui coupe la représentation graphique de f en un point N
  - On lit l'abscisse a du point N et on a : $f(a) = b$.

J'évalue mes acquis

Le plan est muni du repère (O, I, J). Soient E (1 ; 1) et F (-1 ; 2) deux points du plan.
La droite (EF) est la représentation graphique d'une application affine g.
Détermine graphiquement :
a) l'image de -3 par g.
b) le nombre réel x tel que $g(x) = 0$.

4- Déterminer l'expression d'une application affine connaissant deux nombres réels et leurs images

Activité 5

On souhaite déterminer l'application affine $f : x \mapsto ax + b$ qui vérifie : $f(6) = -3$ et $f(-3) = 3$

1- Calcule le coefficient de l'application affine f

2- a) Traduis $f(6) = -3$ à l'aide de a et b.
b) Traduis $f(-3) = 3$, à l'aide de a et b.
c) Résous le système obtenu.
d) Déduis-en l'expression explicite $f(x)$.

Je fais le point de l'activité

On peut déterminer une application affine connaissant deux nombres et leurs images.

J'évalue mes acquis

Indique la bonne réponse parmi les propositions suivantes :
Soit g l'application affine telle que : $g(2) = 10$ et $g(0) = -4$. On a :
a) $g(x) = -5x - 4$; b) $g(x) = 7x - 4$; c) $g(x) = -4$; d) $g(x) = 10x - 4$

5- Connaître la propriété relative du sens de variation d'une application affine

Activité 6

Partie A

On considère les applications affines définies par :
$f(x) = 2x - 7$; $g(x) = -3x + 2$; $h(x) = 17$

x	-23	-15	7	10	128
$f(x)$					
$g(x)$					
$h(x)$					

1- En utilisant le tableau ci-dessus, range dans l'ordre croissant les images des nombres : -23 ; -15 ; 7 ; 10 et 128 par chacune des applications affines f, et g.

2- Compare les images des nombres -23 ; -15 ; 7 ; 10 et 128 par l'application affine h.

Partie B :

Soit l'application affine f définie par : $f(x) = ax + b$.
Soit u et v deux nombres réels.
1- Justifie que $f(u) - f(v) = a(u - v)$.
2- En utilisant la question précédente, recopie et complète le tableau suivant :

Je fais le point de l'activité

L'application f définie par :
$f(x) = ax + b$ est :
- **croissante** sur $\mathbb{R}$ lorsque $a > 0$ (les nombres sont dans le même ordre que leurs images)
- **décroissante** sur $\mathbb{R}$ lorsque $a < 0$ (les nombres et leurs images sont rangés dans l'ordre contraire)
- **constante** sur $\mathbb{R}$ lorsque $a = 0$ (les nombres ont la même image)

	$a \neq 0$		$a = 0$
	$a > 0$	$a < 0$	
Signe du produit $(a(u-v))$			
Comparaison de $f(u)$ et $f(v)$			

3- En t'inspirant du tableau ci-dessus, donne les méthodes de comparaison des images de deux nombres par une application affine de coefficient a dans les cas suivants $a > 0$, $a < 0$ et $a = 0$.

4- Soit l'application affine définie par $g(x) = mx + p$, où m et p sont des nombres réels. Donne les conditions sur m pour que g soit croissante, décroissante et constante sur $\mathbb{R}$.

J'évalue mes acquis

Indique le sens de variation de chacune des applications affines suivantes

a) $x \mapsto -2x - 1$; b) $x \mapsto \frac{1}{2}x$; c) $x \mapsto -30$.

6- *Identifier une application linéaire - Reconnaitre une application linéaire*

Activité 7

On considère le triangle équilatéral ABC ci-contre. On désigne par x la longueur en centimètre, de l'un de ses côtés.

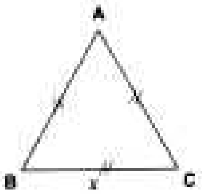
1- a) Exprime en fonction de x, le périmètre $p(x)$ du triangle ABC.

b) Justifie que la longueur x et le périmètre $p(x)$ sont deux grandeurs proportionnelles.

2- a) Recopie et complète la phrase suivante :

L'application qui, à la longueur .... du côté du triangle ABC fait correspondre son ...... $p(x)$ se note : p : ..... $\mapsto$ .....

b) Justifie que P est une application affine dont on précisera le coéfficient et le terme constant.



Je fais le point de l'activité

L'application $p : x \mapsto 3x$ est une application affine dont le terme constant est nul.
Le nombre 3 est le coefficient de p.
Toute application affine dont le terme constant est nul est une application linéaire.

J'évalue mes acquis

Chacune des phrases ci-dessous définit une application f. Indique si f est une fonction linéaire. Si oui, précise le coefficient.

a) f est la fonction qui, à x, associe $\frac{1}{3x}$.

b) f est la fonction qui, à x, associe $2x$.

c) f est la fonction qui, à x, associe $-x+1$.

d) f est la fonction qui, à x, associe x^2.

7- Identifier la représentation graphique d'une application linéaire – Connaître la propriété relative à la représentation graphique d'une application linéaire

Activité 8

1- Soit l'application linéaire f définie par : $f(x) = \frac{1}{2}x$.
Soit (D) la droite représentative de f dans un repère (O, I, J).

a - Ecris une équation de la droite (D).

b- Vérifie que le point O appartient à la droite (D).

c- Construis la droite (D).

2- Soit g l'application linéaire de coefficient a dont (Δ) est sa représentation graphique dans un repère (O, I, J).

a- Justifie que la droite (D) passe par l'origine du repère.

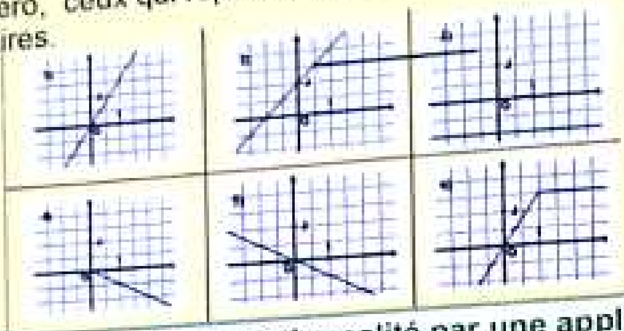
b- Soit (D) la d'équation $y = mx + p$. Donne une condition pour que la droite (D) soit la représentation graphique d'une application linéaire.

Je fais le point de l'activité

Soit f une application linéaire de coefficient a. Sa représentation graphique dans le plan muni d'un repère est une **droite** d'équation $y = ax$ qui passe par l'origine du repère.

J'évalue mes acquis

Parmi les graphiques ci-dessous, indique par leur numéro, ceux qui représentent des applications linéaires.



8- Traduire une situation de proportionnalité par une application linéaire

Activité 9

1- On considère le tableau de proportionnalité suivant :

x	-3	-4	5	12,5	0	1
y	-9	-12	15	37,5	0	3

2- a) Détermine le coeficient de proportionnalité de la première ligne à la deuxième

b) Justifie que l'application $x \mapsto y$ est une application linéaire.

Je fais le point de l'activité

Une situation de proportionnalité peut être modélisée par une application linéaire

9- Connaître les propriétés de linéarité

Activité 10

1- a) Au marché, 5 kg de pommes de terre coûtent 3750 FCFA et 8 kg coûtent 6000 FCFA.
Explique comment on obtient simplement le prix de 13 kg de pommes de terre.

b) La situation précédente peut être exprimée à l'aide d'un tableau de proportionnalité.

[Image de pommes de terre]

Masse (en kg)	5	8	13
Prix (en FCFA)	3750	6000	.....

Explique comment on obtient la dernière colonne à partir des deux précédentes.

c) Soit f l'application linéaire de coeficient k :

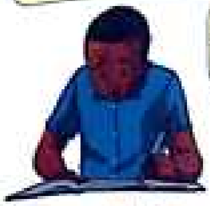
d) Calcule $f(5) + f(8)$ et $f(13)$, puis compare-les.

2- Soit g l'application linéaire de coeficient a.
Démontre que, que quels soient les nombres réels u et v, on a : $g(u + v) = g(u) + g(v)$

Je fais le point de l'activité

Soit f l'application linéaire, u, v et k des nombres réels, on a :
$f(u+v)=f(u)+f(v)$.

J'évalue mes acquis



Soit f une application linéaire telle que : $f(-3) = 0,5$ et $f(1,8) = -0,3$.
Indique la valeur de $f(-1,2)$.

Activité 11

1- a) Une recette de gâteau indique qu'il faut 120 g de farine pour 3 personnes. Explique comment on obtiendrait simplement la masse de farine nécessaire pour faire un gâteau pour 15 personnes.

b) La situation précédente peut être exprimée à l'aide d'un tableau de proportionnalité.

Nombre de personnes	3	15
Masse de farine (en g)	120	......

Explique comment on obtient la dernière colonne à partir de la précédente.

2- Soit h une application linéaire définie par : $h(x)=40x$.

Calcule: $5h(3)$ et $h(15)$, puis compare-les.

3- Soit g une application linéaire de coefficient a.

Démontre que, que quels que soient les nombres réels u, v et k, on a : $g(ku)=kg(u)$.

Je fais le point de l'activité

f étant une application linéaire de coefficient a et k un nombre réel, on a : $f(ku)=kf(u)$.

J'évalue mes acquis

f est une application linéaire telle que $f(2)=8$
Indique la valeur de $f(1)$.

II- RESUME DE COURS

A- Applications affines

1-Définition

a et b sont des nombres réels.
On appelle ***application affine*** de ***coefficient*** a et de terme constant b la correspondance qui à chaque nombre x associe le nombre réel $ax+b$.
On dit que l'application affine f est définie par : $f(x)=ax+b$.
On note $f : x \mapsto ax+b$.

Exemple

Pour $a = 5$ et $b = -11$, f est l'application affine qui, au nombre x, associe le nombre $5x - 11$.
On note $f : x \mapsto 5x-11$, ainsi $f(x)=5x-11$;
Pour $x = 2$, on a : $f(2)=5 \times 2 -11=10-11=-1$

REMARQUES

On considère l'application affine $f : x \mapsto ax + b$.
- Le nombre $ax + b$ est **l'image** du nombre x par l'application f.
- Calculer le nombre $f(x)$ revient à « **multiplier** x **par** a, **puis ajouter** b » ;
- Lorsque $a = 0$, f est une application affine constante et on a $f : x \mapsto b$.

2-Représentation graphique

2- 1 Définition

Le plan est muni d'un repère. A et B sont des ensembles de nombres.
f est une application de A dans B.
On appelle **représentation graphique** de l'application f, l'ensemble des points du plan de couple de coordonnées $(x; f(x))$, x étant un élément de A.

2-2 Propriété

Le plan est muni du repère (O, I, J). a et b sont des nombres réels donnés.
L'application affine f définie par : $f(x) = ax + b$ a pour représentation graphique la droite d'équation $y = ax + b$.

Exemple

L'application affine $f : x \mapsto x + 2$ a pour représentation graphique la droite d'équation $y = x + 2$.

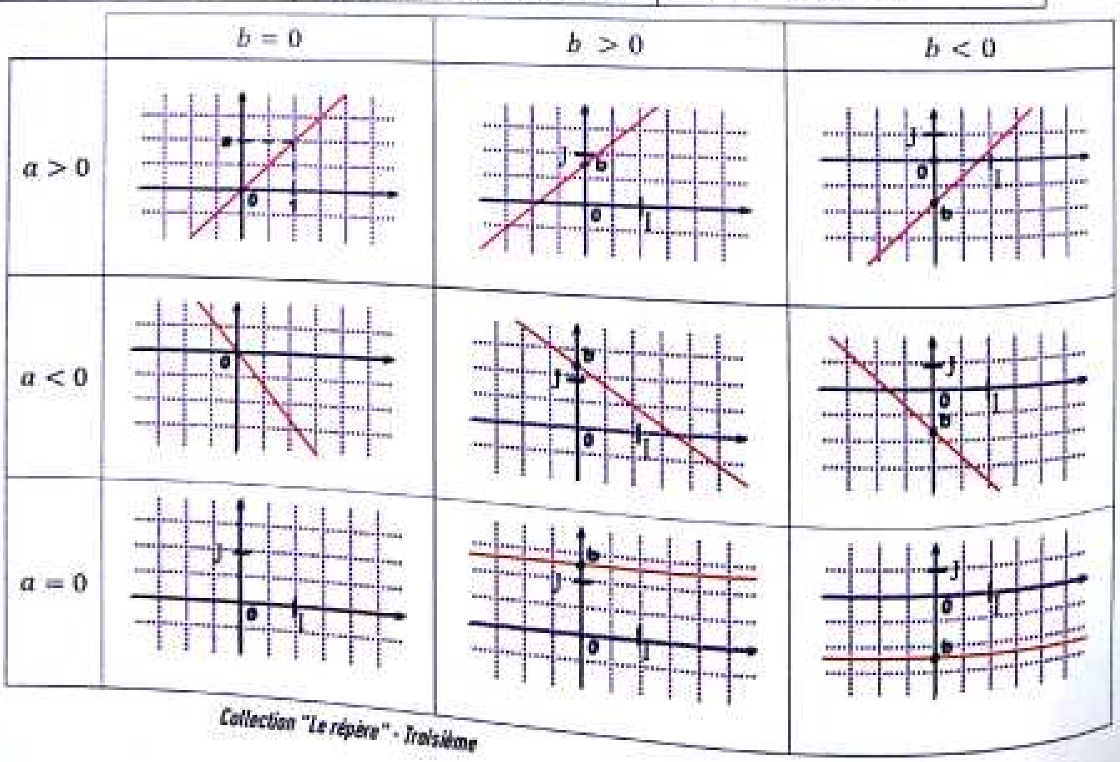
REMARQUES

Toute droite, non parallèle à l'axe des ordonnées, est la représentation graphique d'une application affine.

3- Sens de variation d'une application affine

f est une application définie par : $f(x) = ax + b$

Si $a > 0$, alors f est croissante sur $\mathbb{R}$. Dans ce cas, les nombres et leurs images par f sont rangés dans le même ordre. (Si $u < v$, alors $f(u) < f(v)$)	Si $a < 0$, alors f est décroissante sur $\mathbb{R}$. Dans ce cas, les nombres et leurs images par f sont rangés dans l'ordre contraire. (Si $u < v$, alors $f(u) > f(v)$)	Si $a = 0$, alors f est constante sur $\mathbb{R}$. Dans ce cas, les nombres ont la même image par f qui est le terme constant donné. ($f(u) = f(v) = b$)



B- Applications linéaires

1-Définition

a est nombre. On appelle application linéaire de coeficient a, la correspondance f qui a tout nombre réel associé ax

Exemple

- $f : x \mapsto 1{,}2x$ est une application linéaire ;
- $g : x \mapsto x^2$ n'est pas une application linéaire

REMARQUES

Toute application linéaire est une application afine.

2-Propriété

Soit f une application linéaire. u, v et k sont des nombres réels. On a :

- $f(u+v) = f(u) + f(v)$;
- $f(ku) = kf(u)$.

3- Représentation graphique

Propriété

Dans un repère, une application linéaire de coefficient a est représentée par une droite (D) d'équation $y = ax$ passant par l'origine du repère.

- Toute droite passant l'origine du repère, autre que l'axe des ordonnées, est la représentation graphique d'une application linéaire.

Exemple

L'application linéaire $h : x \mapsto x$ a pour représentation graphique la droite d'équation $y = x$

III- METHODE

• Pour déterminer une application affine f connaissant deux nombres réels et leurs images.

Soit x_1 et x_2 deux nombres réels distincts et f une application affine telle que :

$f(x_1)=y_1$ et $f(x_2)=y_2$

On utilise l'une des deux méthodes ci-dessous :

<u>Méthode 1 :</u>

Soit f l'application affine définie par $f(x)=ax+b$. On détermine les valeurs des nombres a et b en résolvant le système : $\begin{cases} ax_1+b=y_1 \\ ax_2+b=y_2 \end{cases}$

On remplace les valeurs des nombres a et b ainsi trouvées dans l'expression algébrique $f(x)=ax+b$.

<u>Méthode 2 :</u>

On calcule le coefficient a de f et on choisit un des deux nombres x_1 ou x_2 :

$a=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ et $f(x)=a(x-x_1)+y_1$ ou $f(x)=a(x-x_2)+y_2$

On développe et on réduit l'expression de f.

• Pour déterminer le sens de variation d'une application affine, on comparer les images des nombres par une application affine, on utilise la propriété ci-dessous : f est une application affine définie par $f(x)=ax+b$.

Si $a>0$, alors f est croissante sur $\mathbb{R}$. Dans ce cas, les nombres et leurs images par f sont rangés dans le même ordre. (Si $u<v$, alors $f(u)<f(v)$)	Si $a<0$, alors f est décroissante sur $\mathbb{R}$. Dans ce cas, les nombres et leurs images par f sont rangés dans l'ordre contraire. (Si $u<v$, alors $f(u)>f(v)$)	Si $a=0$, alors f est constante sur $\mathbb{R}$. Dans ce cas, les nombres ont la même image par f qui est le terme constant donné. ($f(u)=f(v)=b$)

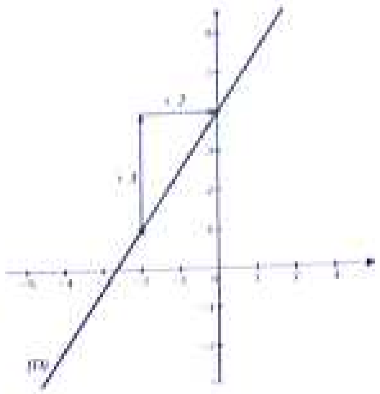
IV- SAVOIR-FAIRE

Savoir-faire 1 - Déterminer l'expression d'une application affine à partir de sa représentation graphique

Enoncé

La droite (D) ci-contre est la représentation graphique d'une application affine $f : x \mapsto ax + b$.

Détermine l'expression algébrique de f



Solution commentée

Je détermine l'expression algébrique de $f(x)$

- La droite (D) coupe l'axe des ordonnées au point de coordonnées (0 ; 4).

Donc l'ordonnée à l'origine de f est 4, on a $b = 4$

- Pour passer du point A au point B de la droite (D), l'abscisse augmente de 2 et l'ordonnée augmente de 3

Donc le coefficient de f est $a = \frac{3}{2}$. Ainsi : pour tout nombre réel x, $f(x) = \frac{3}{2}x + 4$.

Savoir-faire 2- Déterminer une application affine connaissant deux nombres et leurs images

Enoncé

Une application affine g est telle : $g(-3) = 7$ et $g(8) = -15$

Détermine l'expression algébrique de $g(x)$

Solution commentée

Je détermine l'expression algébrique de $g(x)$

Je sais que g est une application affine, donc : $g(x) = ax + b$

Je calcule le coefficient a de g, on a : $a = \frac{g(-3) - g(8)}{-3 - 8} = \frac{7 - (-15)}{-11} = -2$ Donc : $g(x) = -2x + b$

Je calcule l'ordonnée à l'origine de g.

Je sais que : $g(-3) = 7$, donc : $-2 \times (-3) + b = 7$, soit : $b = 7 - 6 = 1$

Ainsi : Pour tout nombre réel x, $g(x) = -2x + 1$

Savoir-faire 3- Déterminer une application linéaire connaissant un nombre et son image

Enoncé

Une application linéaire est telle que : $h(12) = 20$

Détermine l'expression algébrique de $h(x)$

Solution commentée

Je détermine l'expression algébrique de $h(x)$

Je sais que h est une application linéaire, donc $h(x) = ax$

Je calcule le coefficient a de h.

Je sais que : $h(12) = 20$, donc on a : $a = \frac{h(12)}{12} = \frac{20}{12} = \frac{5}{3}$.

Ainsi, pour tout nombre réel x, $h(x) = \frac{5}{3}x$.

Savoir-Faire 4 Déterminer l'expression algébrique d'une fonction affine

Enoncé

Soit f une fonction affine. Les points M(4 ;5) et N(6 ;9) appartiennent à la représentation graphique de f.

Détermine l'expression algébrique de f.

Solution commentée

Je détermine l'expression algébrique de f

f étant une fonction affine, sa forme générale est : $f : x \mapsto ax+b$

On calcule a avec la formule :

$$a = \frac{f(x_M)-f(x_N)}{x_M-x_N}$$

$$= \frac{f(6)-f(4)}{6-4} = \frac{9-5}{2} = 2$$

On calcule b en utilisant les coordonnées d'un des deux points donnés :

$f(x) = 2x + b$ et on sait que $f(4) = 5$ donc $2\times4+b=5$ d'où $b=-3$

Ainsi l'expression algébrique de f est $f(x) = 2x - 3$.

Savoir-Faire 5 Déterminer l'expression algébrique d'une fonction linéaire

Enoncé

Soit une fonction linéaire f, le point A(2 ;8) appartient à la représentation graphique de f.

Détermine l'expression algébrique de f.

Solution commentée

Une fonction linéaire est de la forme $f : x \mapsto ax$ avec $a \neq 0$

Puisque A(2 ;8) appartient à la représentation graphique de f, alors on a : $f(2) = 8$.

Donc $2a = 8$ d'où $a = 4$.

Ainsi l'expression algébrique de f est : $f(x) = 4x$.

Savoir-faire 6- Déterminer le sens de variation d'une application affine

Enoncé

f, g et h sont des applications affines définies par :

$f(x)=13x-6$, $g(x)=-\frac{1}{8}x+2\sqrt{3}$ et $h(x)=-5$

Détermine le sens de variation de chacune des applications affines f , g et h

Solution commentée

Je détermine le sens de variation de chacune des applications affines f, g et h

- Le coefficient de f est 13 qui est positif, donc f est croissante sur $\mathbb{R}$.
- Le coefficient de g est $-\frac{1}{8}$ qui est négatif, donc g est décroissante sur $\mathbb{R}$.
- Le coefficient de h est nul, donc h est constante sur $\mathbb{R}$.

V- JE M'EXERCE

1- Exercices de fixation/ Application

Identifier une application affine – Reconnaître une application affine

1 Traduis chacune des affirmations suivantes par une application affine f, puis précise son coefficient et son terme constant.
1- Pour déterminer l'image d'un nombre réel, on le multiplie par 7, puis on ajoute -3 ;
2 - Pour déterminer l'image d'un nombre réel, on le multiplie par -5, puis on ajoute 5 ;
3- Pour déterminer l'image d'un nombre réel, on lui ajoute 3, puis on multiplie le résultat par -11 ;
4- Pour déterminer l'image d'un nombre réel, on lui ajoute -2, puis divise le résultat par 13.

2 Soit g une application affine. Traduis par une égalité chacune des phrases suivantes :
1) L'image de 4 par g est 13 ;
2) -8 est l'image de 5 par g.

3 Chacune des applications affines peut s'écrire sous la forme $x \mapsto ax+b$.
Précise pour chaque cas les nombres a et b :

$a)\ x \mapsto \frac{2}{3}x-5$; $b)\ x \mapsto -5$;

$c)\ x \mapsto \frac{4}{3}x$; $d)\ x \mapsto -2x+\frac{3}{7}$.

4 Parmi les applications ci-dessous, indique celles qui sont des applications affines. Précise alors les coefficients et les termes constants.

$a)\ x \mapsto \frac{5}{3}x-2$; $b)\ x \mapsto -5x^2$;

$c)\ x \mapsto 5-x$; $d)\ x \mapsto -13$; $e)\ x \mapsto \frac{6x-5}{4}$

Calculer l'image d'un nombre réel par une application affine – Calculer le nombre a tel que f (a) = b (où f est une application affine et b un nombre réel donné).

5 On considère l'application affine f telle que : $f(x) = 5x-6$.
Détermine l'image de chacun des nombres suivants par f : -2; -8; 0; 2; $\frac{3}{5}$.

6 Soit l'application affine f telle que : $f(x) = ax+b$.
Dans chacun des cas, détermine a, b, c et d.
a) $a = 3$ et $f(5) = 2$; b) $b = 5$ et $f(-2) = 3$
c) $a = -\frac{3}{4}$ et $f(-8) = -1$, d) $b = 0$ et $f(2\sqrt{3}) = 3$

7 Une application affine g est telle que : $g(-1) = 2$ et $g(3) = 4$.
Détermine l'expression de $g(x)$.

8 Une application affine h est telle que : $h(-3) = 7$ et $h(8) = -15$.
Détermine, par calcul, l'expression algébrique de $h(x)$.

9 On donne les tableaux de valeurs suivants ; Parmi ces deux tableaux, un seul correspond à une application affine f.
Indique le et justifie ta réponse.

Tableau 1

x	-2	0	1
$f(x)$	7	-3	1

Tableau 2

x	-12	0	23
$f(x)$	41	5	-57

Connaître la propriété relative à la représentation graphique d'une application affine - Représenter graphiquement une application affine connaissant deux nombres et leurs images

10 Dans chacun des cas, détermine l'application affine h dont la représentation graphique est la droite (D).
$a)\ (D): y = 2x - 1$; $b)\ (D): 3x + 6y + 13 = 0$;
$c)\ (D): 16 = 8y$; $d)\ (D): ax - 2y + a = 0$,
où a est un nombre réel

11 Pour chacune des applications affines g, écris une équation de la droite représentative (D).
a) $g(x) = 7x - 2$ c) $g(x) = 2{,}3x$
b) $g(x) = -5$ d) $g(x) = \frac{7}{6}x + \frac{3}{5}$

12 Dans un repère du plan, la droite (BC) est la représentation graphique de l'application affine g où $B(-5\ ;\ 1)$ et $C(3\ ;\ 9)$
Détermine, par le calcul, l'expression algébrique $g(x)$.

13 Soit l'application linéaire h définie par :
$h(x) = \frac{7}{2}x$
Recopie et complète le tableau suivant :

x	-2	....	....	14		$\frac{7}{2}$
$h(x)$	....	14	$\frac{7\pi}{2}$	....	14π	....

Connaître la propriété relative du sens de variation d'une application affine - Déterminer le sens de variation d'une application affine

14 Dans chacun des cas, précise le sens de variation de l'application affine f telle que :
a) $f(3) = -2$ et $f(1) = 0$
b) $f(5) = 1$ et $f(-40) = 1$

Utiliser le sens de variation d'une application pour comparer les images de nombres

15 Soit f l'application affine définie par
$f(x) = \frac{2}{7}x - \frac{3}{8}$.
Sans aucun calcul, compare les images des nombres $-\pi$; 0 ; - 4 et $\frac{\pi}{2}$ par f.

16 Soit f l'application affine définie par :
$f(x) = -\pi x + 2$.
Sans aucun calcul, compare les images des nombres 1 ; 0 ; - 1 et 4 par f.

17 On considère les applications affines f, g et h définies par
$f(x) = -x + 3$; $g(x) = 3x - 1$ et $h(x) = 1$
Sans aucun calcul, compare les images des nombres 8, 973 ; -5,25 et 8, 97 par :
a) f ; b) g ; c) h.

18 Soit h l'application affine définie par
$h(x) = 2020$
Compare h (-307) ; h (2019) ; h (2021) et h (0)

19 Dans chacun des cas ci-dessous, compare
$f\left(\frac{2019}{2020}\right)$; $f(1)$ et $f\left(\frac{2020}{2019}\right)$
lorsque l'application f est déterminée par :
a) $f(-2) = 0$ et $f(-5) = 8$
b) $f(9) = -1$ et $f(0) = -1$
c) $f(6) = 2$ et $f(10) = -7$

Identifier une application linéaire - Reconnaître une application linéaire

20 Construis dans un repère chacune des courbes représentatives des applications linéaires f, g et h telles que :
$f(1) = -1$; $g(3) = -2$; $h(\frac{3}{2}) = \frac{7}{4}$

21 Soit h une application linéaire.
Sachant que $h(\sqrt{5}) = -5$, en utilisant les propriétés des applications linéaires, détermine : $h(1)$;
$h(1 - \sqrt{5})$ et $h\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$.

22 On considère les applications f et g définies par : $f(x) = (2x + 1)^2 - (x + 2)(4x + 3)$
$g(x) = x - 3x(2x + 4) + 4x(\frac{3x}{2} - 2)$
1- Démontre que f est une application affine
2- Démontre que g est une application linéaire

23 On considère l'application affine k telle que $k(-4) = -8$ et $k(2) = 22$
On pose : $k(x) = ax + b$
1- Justifie que les nombres a et b sont solutions du système (S) : $\begin{cases} 4a - b = 8 \\ 2a + b = 22 \end{cases}$
2- Résous le système (S).
3- Déduis-en l'expression de $k(x)$

Identifier la représentation graphique d'une application linéaire - Connaître la propriété relative à la représentation graphique d'une application linéaire

24 Réponds par vrai ou par faux à chacune des affirmations suivantes :
a) Les axes d'un repère sont des représentations graphiques d'une application linéaire
b) Toute représentation graphique d'une application linéaire passe par l'origine du repère

c) La droite d'équation $y = -2x + 1$ est la représentation graphique d'une application linéaire.
d) L'application linéaire $f : x \mapsto ax$ a pour représentation graphique la droite d'équation $y = ax$.

25 Le plan est muni d'un repère (O, I, J). On donne les points A (-2 ; 2), B (6 ; 8) et C (-2000 ; 3300).
Parmi les droites (OA), (AB), (BC), (OB), (AC) et (OC), indique celles qui sont des représentations graphiques d'une application linéaire.

Traduire une situation de proportionnalité par une application linéaire

26 Indique la bonne réponse
On considère le tableau de proportionnalité suivant :

x	9	0	12
$f(x)$	6	0	8

L'application linéaire associée est :

$a)\ f : x \mapsto \frac{2}{3}x$; $b)\ f : x \mapsto 6x$;

$c)\ f : x \mapsto \frac{3}{2}x$; $d)\ f : x \mapsto 1{,}5x$.

27 Retrouve les tableaux qui traduisent une situation de proportionnalité. Pour ceux-là, uniquement, écris sous la forme les applications linéaires qui font correspondre les nombres de la première ligne à ceux de la seconde.

Tableau A

5	10	15	20
10	15	20	25

Tableau B

1,5	2	2,5	3
4,5	6	7,5	9

Tableau C

30	33	36	39
10	11	12	13

Tableau D

7	14	21	35
1	2	3	4

28 Indique quels tableaux parmi ceux proposés ci-dessous peuvent être associés à une application linéaire. Précise alors le coefficient de cette application.

Tableau 1

x	-6	-5	-2	4	8	10
f (x)	18	15	6	-12	-24	-30

Tableau 2

x	-10	-8	-5	2	6	17
f (x)	-5	-3	0	7	11	22

Tableau 3

x	-15	-9	-3	6	12	18
f (x)	-10	-6	-2	4	8	12

Connaître les propriétés de linéarité

29 Soit f une application linéaire ; x, y et k sont des nombres réels.
Indique les égalités qui sont correctes.
a) $f(x) = kf(x)$; b) $f(x - y) = f(x) - f(y)$;
c) $f(kx) = kf(x)$; d) $f(kx + ky) = k(f(x) + f(y))$

30 On considère l'application linéaire g telle que $g(2) = 1$.
Sans calculer le coefficient de g, indique $g(1)$ et $g(3)$.

Reconnaître la représentation graphique d'une application affine

31 Réponds par vrai ou par faux à chacune des affirmations suivantes.
a) Toute droite du repère (O, I, J) est la représentation graphique d'une application affine.
b) Un segment dans un repère peut être la représentation d'une application affine.
c) Une demi- droite peut être la représentation graphique d'une application affine.

32 Le plan est muni du repère (O, I, J). On donne les points A (2 ; -1) ; B (0 ; -1) ; C (2 ; -5).
Parmi les droites (OA), (AB), (AC) et (BC), indique celles qui sont les représentations graphiques d'une application affine.

Reconnaître la représentation graphique d'une application linéaire

33 Le plan est muni du repère (O, I, J).
Réponds par vrai ou par faux à chacune des affirmations suivantes :
a) Toute demi- droite d'origine O est la représentation graphique d'une application linéaire.
b) Tout arc de cercle contenant l'origine O du repère est une représentation graphique d'une application linéaire.
c) La droite (OI) est une représentation graphique d'une application linéaire.

Reconnaître la représentation graphique d'une application affine constante, croissante ou décroissante

34 Le plan est muni du repère (O, I, J). On donne les points A (2 ; -1) ; B (0 ; -1) ; C (2 ; -5).
Parmi les droites (OA), (AB), (AC) et (BC), indique celles qui sont les représentations graphiques d'une application affine constante, croissante ou décroissante.

35 Le plan est muni du repère (O, I, J) et une liste de droites (D) données par leurs équations. Indique celles qui sont les représentations graphiques d'une application affine constante, croissante ou décroissante.

a) (D) : $y = 2x - 1$; b) (D) : $3y + 4 = 0$;

c) (D) : $2x + 6y - 11 = 0$; d) (D) : $y = -\dfrac{2 - 3x}{8}$.

Déterminer l'expression d'une application affine à partir de sa représentation graphique

36 Le plan est muni du repère (O, I, J). On donne les points E (8 ; -6) et F (1 ; 3).
Les applications affines f et g ont pour représentations graphiques respectives les droites (OE) et (EF).
Détermine les expressions explicites $f(x)$ et $g(x)$.

Déterminer graphiquement une image - Déterminer graphiquement le nombre a tel que $f(a) = b$ (où f est une application et b nombre réel donné)

37 Le plan est muni du repère (O, I, J).
On donne les points A (2 ; -1) et B (1 ; -2).
Les applications affines f et g ont pour représentations graphiques respectives les droites (OA) et (AB).
1) Construis les droites (OA) et (AB).
2) a) Détermine graphiquement l'image de 2 par f, puis par g.
b) Détermine graphiquement le nombre réel x tel que $f(x) = 2$.
c) Détermine graphiquement le nombre réel x tel que : $g(x) = -5$.

Déterminer une application connaissant deux nombres et leurs images

38 Dans un repère du plan, construis la représentation graphique (D) de l'application affine h telle que : $h(-2) = 2$ et $h(3) = 0$.

39 Dans un repere du plan, construis les droites (D_1), (D_2), (D_3) et (D_4) qui sont les représentations graphiques respectives des applications affines suivantes :

$f : x \mapsto 2x - 3$; $g : x \mapsto 2x - 3$;

$h : x \mapsto \dfrac{3}{4}x$; $k : x \mapsto -3$.

40 Soit l'application affine h telle que :
$h : x \mapsto 2x - 7$.
1- Calcule l'image de -3 par h.
2- Calcule l'image de 0 par h.

41 Soit l'application affine t telle que :
$t : x \mapsto \dfrac{2}{3}x - 4$
Recopie et complète le tableau suivant :

x	-3	$-\dfrac{1}{2}$		$\dfrac{3}{2}$	.....
$t(x)$	.....	.....	-4		0

Déterminer une application linéaire connaissant un nombre et son image

42 Détermine les applications affines f, g, h et k suivantes sachant que :
1) $f(8) = 11$ et $f(12) = 14$
2) $g(6) = -3$ et $g(-3) = 3$
3) $h(-2) = 5$ et $h(-5) = 23$
4) $k(0) = 7{,}2$ et $k(-3) = 24$

Déterminer l'application affine dont on connait une équation de sa représentation graphique

43 Parmi les applications suivantes, indique celles qui sont des applications linéaires.
Précise alors leurs coefficients.

a) $f : x \mapsto 4x$; b) $g : x \mapsto 2x + 1$.

c) $h : x \mapsto -3x$; d) $i : x \mapsto 3x^2$.

e) $j : x \mapsto \dfrac{2x^2}{3x}$; g) $l : x \mapsto \dfrac{2x\sqrt{x^2}}{|x|}$.

h) $k : x \mapsto \dfrac{-x^2 - x}{2x^2 + 2}$; i) $p : x \mapsto 2x$.

44 Soit l'application linéaire f définie par : $f(x) = 8x$.
1- Calcule l'image de chacun des nombres suivants par f : 8 ; -1 ; -2 ; $\dfrac{7}{2}$; $-\dfrac{60}{7}$.
2- Détermine l'antécédent par f de chacun des nombres suivants : -12 ; 40 ; $\dfrac{12}{5}$; $-\dfrac{60}{7}$

Représenter graphiquement une application affine ou linéaire dont on connait l'expression explicite

45 Pour chacune des applications affines : indique son coefficient, son sens de variation, deux points de sa droite représentative, si possible à coordonnées entières, et trace cette droite dans un repère orthonormé.

1) $f(x) = \dfrac{-3x + 9}{7}$; 2) $g(x) = \dfrac{2x - 13}{3}$;

3) $h(x) = \dfrac{-x - 8}{5}$.

Justifier le sens de variation d'une application affine ou linéaire

46 Soient les applications affines f, g et h définies par :
$f(x) = (\pi - 5)x + 7$; $g(x) = (2\sqrt{13} - 7)x + 20$;
$h(x) = 1{,}002$.
Justifie que :
a) f est décroissante sur $\mathbb{R}$
b) g est croissante sur $\mathbb{R}$
c) h est constante sur $\mathbb{R}$

47 Soit f une application affine.
Dans chacun des cas ci-dessous, détermine le sens de variation de f.
a) $f(20) = -1$ et $f(-1) = 20$
b) $f(50) = -2$ et $f(20) = -3$.

48 Soit h l'application affine définie par :
$h(x) = (a - 2)x + 11$
Dans chacun des cas ci-dessous, détermine les valeurs du nombre réel a pour lesquelles :
a) h est décroissante sur $\mathbb{R}$
b) h est croissante sur $\mathbb{R}$
c) h est constante sur $\mathbb{R}$.

2- Exercices de renforcement/ approfondissement

49 Dans chacun des cas, précise le sens de variation de l'application affine f définie par :
a) $f(x) = 2x + 3$ c) $f(x) = \frac{3}{7}x$
b) $f(x) = 41$ d) $f(x) = -5x + 21$.

50 On considère les applications linéaires et telles que : $f(5) = -7,5$; $g(\frac{2}{3}) = -5$; $h(-2) = 6$.
Détermine les expressions algébriques de f, g et h.

51 Construis dans un repère chacune des représentations des représentatives des applications linéaires f, g et h :
$f : x \mapsto 3x$; $g : x \mapsto -5x$; $h : x \mapsto \frac{x}{7}$.

52 Chacune des droites est une représentation graphique d'une application affine f.
Dans chacun des cas, précise le sens de variation de f.
$(D_1) : y = (2 + \sqrt{10})x - 9$; $(D_2) : (\sqrt{2} - \sqrt{3})x + y - 1 = 0$;
$(D_3) : \sqrt{3}y + \sqrt{6} = 0$.

53 L'application f est associée à chacune des situations suivantes. Indique celles qui traduisent une application linéaire.
a) $f(x)$ est le périmètre d'un carré de côté centimètres ;
b) $f(x)$ est l'aire d'un carré de côté x centimètres ;
c) $f(x)$ est le périmètre d'un cercle de rayon 3 centimètres ;
d) $f(x)$ est le volume d'une pyramide régulière à base carrée de côté 5 centimètres et de hauteur x centimètres.

54 Une application linéaire g est telle que $g(-\sqrt{2}) = \sqrt{3}$
Détermine l'image du nombre $\frac{\sqrt{6}}{2}$ par g.

55 Un peintre mélange $200\,g$ de peinture blanche, $30\,g$ de peinture verte et $20\,g$ de peinture jaune.
Pour obtenir $3\,kg$ du même mélange, calcule les quantités de peinture de chaque sorte qu'il faut mélanger.

56 Dans un repère, on considère les points $A(-1\,;\,3)$; $B(3\,;\,-5)$ et $C(-7\,;\,13,5)$.
1- Détermine l'application affine dont la représentation graphique est la droite (AB).
2- Déduis-en que le point C n'appartient pas à la droite (AB).

57 On considère l'application affine f définie par : $f(x) = (m - 1)x + 2$ où m est un nombre réel.
Soit (D) la droite représentative de f dans un repère orthonormé (O, I, J).
On donne : $A(2\,;\,-5)$ et $B(-8\,;\,-1)$ deux points de ce repère.
Détermine la valeur de m pour que :
1- Les droites (D) et (AB) soient parallèles.
2- Les droites (D) et (OB) soient perpendiculaires.

58 Soit l'application affine définie par : $g(x) = ax + b$
On désigne par (D) la droite représentative de g dans un repère (O,I,J).
1- Démontre que, pour tout nombre réel, on a : $g(x+1) - g(x) = a$
2- a) Démontre que si le point M appartient à la droite (D), alors le point N l'est aussi.
b) Déduis-en que le point $N(x+1\,;\,y+a)$ est l'image du point M par la translation de vecteur $\overrightarrow{OI} + a\overrightarrow{OJ}$.
3- Soit l'application affine définie h par $h(x) = 3x - 5$ et (D) sa représentation graphique dans un repère.
Détermine les coordonnées entières d'un point A de la droite (Δ), puis en utilisant les questions précédentes, construis la droite (Δ).

3- Situations d'évaluation

59 Pour les travaux de construction dans un lycée, le président du **COGES** fait remplir une citerne d'eau.
Chaque jour, les ouvriers y prélèvent la même quantité d'eau.
Au bout 3 jours, il reste 4,5 m^3 dans la citerne et au bout de 13 jours, il reste 3,5 m^3.

Afin d'éviter le manque d'eau sur le chantier, celui-ci sollicite un groupe d'élèves dont tu fais partie pour connaître la quantité d'eau prélevée chaque jour, la contenance de cette citerne et enfin le nombre de jours au bout duquel la citerne sera vide.
On désigne par x le nombre de jours écoulés et par $f(x)$ la quantité d'eau restant dans la citerne.

On suppose que f est une application affine définie par $f(x) = ax + b$.
1- Démontre que les nombres a et b vérifient le système $(S)\begin{cases} 6a + 2b = 9 \\ 26a + 2b = 7 \end{cases}$
2- Résous le système (S).
3- Déduis-en la quantité d'eau journalière prélevée, puis la contenance de cette citerne.
4- Détermine le nombre de jours pour lequel la citerne sera vide.

60 Dans une usine, les ouvriers sont informés que désormais, ils percevront un salaire en fonction du nombre d'objets fabriqués.
- Ouvrier du groupe A : perçoit une prime fixe de 150.000 FCFA, puis 450 FCFA par objet fabriqué ;
- Ouvrier du groupe B : perçoit une prime fixe de 145.000 FCFA, puis 500 FCFA par objet fabriqué ;

Suite à ces nouvelles mesures, un ouvrier du groupe B veut connaître le nombre d'objets à partir duquel il a un salaire égal à celui du groupe A.
Il informe alors son fils en classe de 3ème.
On désigne par x le nombre d'objets fabriqués.
1- Détermine les applications affines f et g associées respectivement aux salaires des groupes A et B.
2- Dans un repère orthogonal, construis les droites représentatives des applications affines f et g.
3- Par une lecture graphique, détermine le nombre d'objets fabriqués pour lequel les deux salaires sont les mêmes.
4- Retrouve, par calcul, le résultat de la question 3.

VI- RENDEZ-VOUS DES CURIEUX !

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) était un philosophe savant, mathématicien, juriste… . Il a introduit des notations pour rendre les textes mathématiques plus lisibles. Il utilisa pour la première fois en 1692 le mot « fonction », du latin functio (qui signifie « accomplissement », « exécution »).
Imaginons que le 1er janvier 2000, un astronaute âgé de 30 ans parte à bord d'un vaisseau spatial à la vitesse de 250.000 km/s (aucun vaisseau n'est capable, actuellement, de se déplacer à une telle vitesse), laisse sur la Terre sa femme et son fils âgé de 10 ans.

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716)

D'après la fameuse théorie de la relativité du physicien Albert Einstein (1879-1955), pour l'astronaute, « le temps ralentira » considérablement par rapport à celui mesuré sur la Terre.
Si on désigne par t le temps en années qui s'écoule sur la Terre, alors le temps f(t) écoulé pour l'astronaute durant son voyage à une telle vitesse sera donné par : $f(t)= 0,3t$.

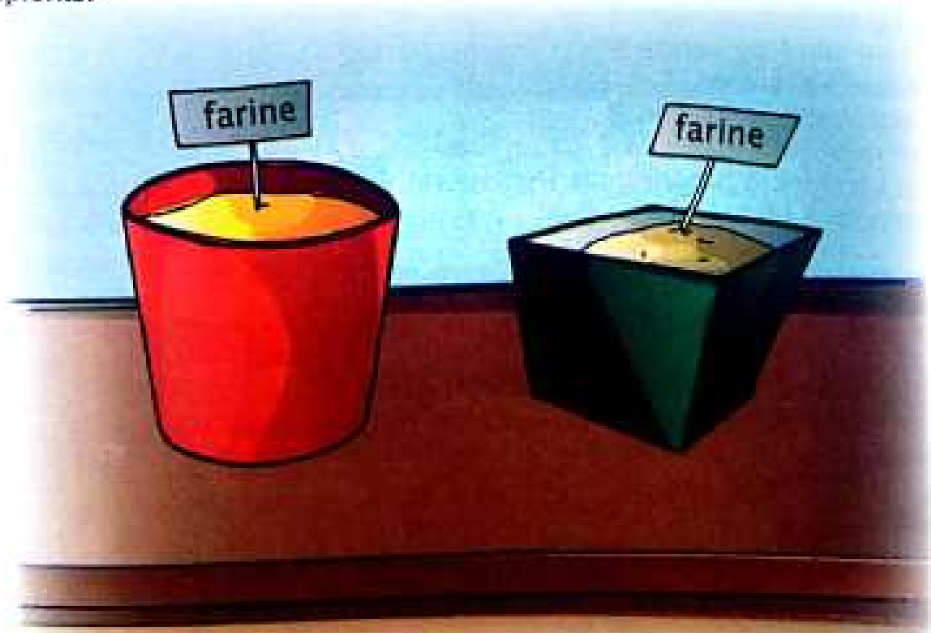
14 Pyramides et Cônes

Notions essentielles :

- Pyramide régulière
- Cône de révolution
- Sections planes
- Réalisation d'un patron d'un cône de révolution
- Réalisation d'un patron d'une pyramide régulière
- Réalisation d'une pyramide régulière
- Extraction d'une représentation de l'espace, d'une figure plane.

SITUATION D'APPRENTISSAGE

Une élève de troisième d'un collège a pu identifier chez une vendeuse de farine de maïs deux types de récipients dont leurs figures ont été réalisées par son grand frère en classe de première D.
Elle les présente à ses camarades de classes pour connaître les solides dont ces récipients sont issus et ensuite identifier les formules lui permettant de calculer leur volume.
Intéressés, ceux-ci décident de s'informer et faire des recherches sur les volumes de ces récipients.

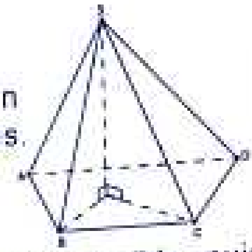


I- ACTIVITES DE DECOUVERTE

1- Identifier une pyramide régulière

Activité 1

La figure ci-contre représente un solide dont les faces sont planes.



1- Cite les faces triangulaires de ce solide, puis donne leur particularité.

2- Cite la face de ce solide ne contenant pas le point **S**.

3- Indique la droite qui passe par le point **S** et perpendiculaire à deux autres droites d'une face.

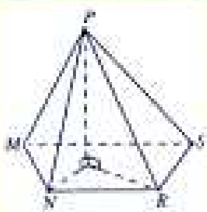
Je fais le point de l'activité

Une ***pyramide*** est un solide dont :
- une des faces est un polygone appelé ***base*** ;
- les autres faces sont des triangles qui ont un **sommet** commun qui est le sommet de la pyramide. Ces faces sont appelées **faces latérales** ;
- la **hauteur** d'une pyramide de sommet **S** est la droite passant par S et perpendiculaire au plan contenant la base de la pyramide.

On appelle aussi hauteur la longueur SH ou le segment $[SH]$.

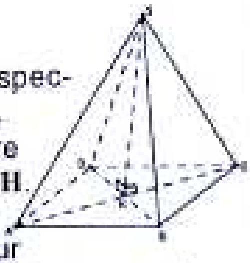
J'évalue mes acquis

En observant la figure ci-contre:
1- Cite les faces triangulaires
2- Cite le sommet
3- Cite la hauteur
4- Cite la base
5- Cite une face latérale.



Activité 2

Voici la représentation en perspective cavalière d'une pyramide.
Sur cette figure, le quadrilatère **ABCD** est un carré de centre **H**.

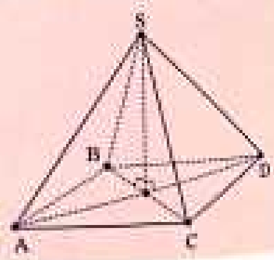


1- Justifie que les arêtes latérales ont la même longueur

2- Sachant que $AH = 3\ cm$ et $SH = 4\ cm$, calcule SA en utilisant la propriété de Pythagore dans le triangle SAH.

Je fais le point de l'activité

*On dit que **SABCD** est une pyramide régulière de sommet **S**.*

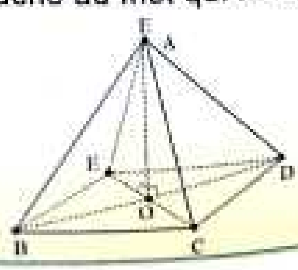


J'évalue mes acquis

- Recopie et complète :
EABCD est une …………régulière à ………… Carrée.

2- Associe chaque désignation de gauche au mot qui lui correspond à droite.

A.	.face latérale
ABC.	.hauteur
BCDE.	.sommet
(AO).	.base



2- Identifier un patron d'une pyramide régulière

Activité 3

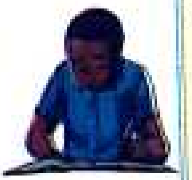
On considère la pyramide régulière SABCD de sommet S telle que SA = 8 cm et AB = 6 cm.
Réalise la figure en suivant les instructions ci-dessous :

- trace le carré ABCD
- construis sur chaque côté du carré une face latérale d'arête de longueur 8 cm.

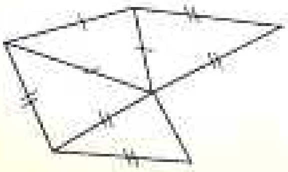
Je fais le point de l'activité

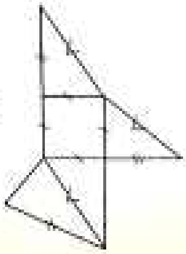
La figure ainsi obtenue est un patron de la pyramide régulière SABCD.
Ce patron est constitué d'un polygone régulier (la base qui est le carré ABCD) et de triangles isocèles qui sont les faces latérales.

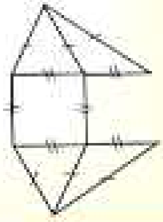
J'évalue mes acquis



Parmi les figures ci-dessous, indique celles qui sont des patrons de pyramides régulières.

a) 

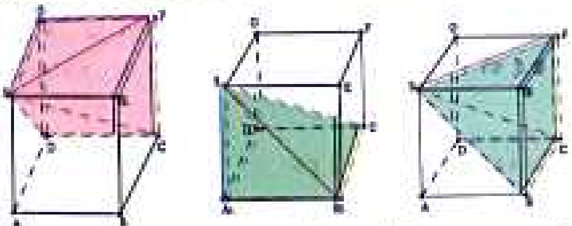
b) 

c) 

3- Connaître la formule du volume d'une pyramide regulière

Activité 4

SABCDEFG est un cube d'arête.



Je fais le point de l'activité

Le volume d'une pyramide est égal au tiers du produit de l'aire de sa base par sa hauteur.

$V = \frac{1}{3} \times$ *aire de la base* $\times$ *hauteur*.

1- Construis trois pyramides à bases carrées sur le modèle de la pyramide *SABCD* :
- La base est un carré *ABCD* de côté *4 cm* ;
- l'arête [*SA*] a son support perpendiculaire au plan de la base.

2- Vérifie qu'en collant certaines faces des trois pyramides, on peut obtenir un cube de 4 cm d'arête.

3- Déduis le volume **V** de la pyramide *SABCD* et vérifie que : $V = \frac{1}{3} B \times h$ où *B* est l'aire de la base et *h* la hauteur de la pyramide.

J'évalue mes acquis

V, B* et *h désignent respectivement le volume, l'aire de la base et la hauteur d'une pyramide régulière.
Parmi les formules suivantes, indique celles qui sont correctes.

a) $V = 3B \times h$ b) $V = \frac{1}{3} B \times h$ c) $V = B^3 \times h$ d) $B = \frac{3V}{h}$

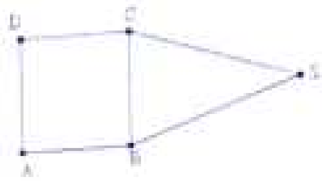
e) $B = \frac{V}{3h}$ f) $h = \frac{3V}{B}$ g) $h = \frac{V}{B^3}$

4 - Connaître la formule de l'aire latérale d'une pyramide régulière

Activité 5

La figure ci-dessous est le début de la construction d'un patron d'une pyramide régulière à base carrée. On donne : $BT = 3\ cm$ et $BS = 5\ cm$.

1- Reproduis et achève cette construction.



2- Justifie que l'apothème vaut $4\ cm$.

3- a) Calcule l'aire du triangle SBC.

b) Déduis l'aire latérale A de cette pyramide et vérifie que $A = \frac{1}{2} P \times a$ où P est le périmètre de la base et a l'apothème de cette pyramide.

4- Calcule l'aire totale de cette pyramide.

Je fais le point de l'activité

L'aire latérale d'une pyramide régulière est égale à la moitié du produit du périmètre de sa base par son apothème. Aire latérale $= \frac{1}{2} \times$ périmètre de la base $\times$ apothème.

J'évalue mes acquis

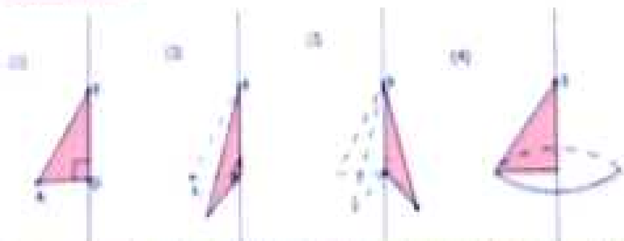
A, P et a désignent respectivement l'aire latérale, le périmètre de la base et l'apothème d'une pyramide régulière.

Indique les formules qui sont correctes par la lettre.

a) $A = \frac{P \times a}{2}$; b) $A = 2P \times a$; c) $P = \frac{A}{2a}$; d) $P = \frac{2A}{a}$; e) $a = \frac{2A}{P}$

5 - Identifier cône de révolution

Activité 6



Observe le film ci-dessous, puis recopie et complète les textes suivants.

1- En faisant tourner un triangle .... autour d'un des côtés de l'angle ...., on obtient un .... de ....

2- Le segment [SA] est une .... du ....

3- La droite (SO) est une .... du ....

4- La base de ce cône est le .... de centre O et de rayon ....

Je fais le point de l'activité

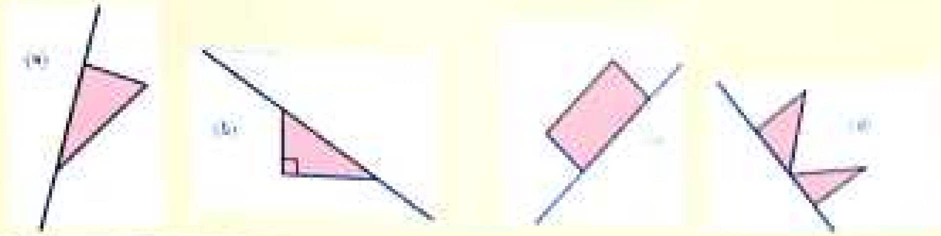
Un cône de révolution est un solide délimité par :

- un disque, appelé ***la base*** du cône
- une portion de disque « enroulée » autour de la base, appelée ***la surface latérale*** du cône.

Le centre de la surface latérale est ***le sommet*** du cône.

J'évalue mes acquis

Parmi les situations suivantes, indique celle qui engendre un cône de révolution.



6- *Identifier le patron d'un cône de révolution –Identifier l'angle de développement d'un cône de révolution - Connaître la relation entre la longueur d'une génératrice, l'angle de développement et le périmètre de la base d'un cône*

Activité 7

Examine attentivement les figures ci-dessous, puis réponds aux questions suivantes :

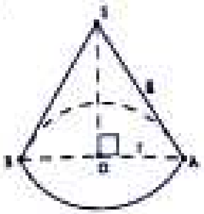


Figure a)

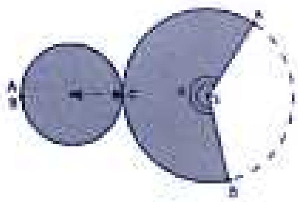


Figure b)

1- Donne l'expression :
   a) du périmètre du cercle de la base.
   b) de la longueur de l'arc $\widehat{AB}$
2- Déduis une relation entre ***r***, ***g*** et α pour que la figure (b) soit le patron de la figure (a).

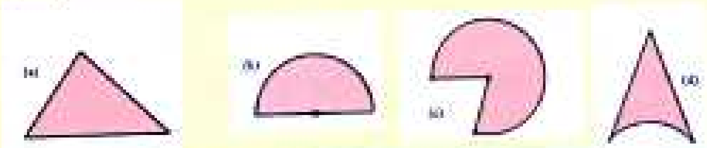
Je fais le point de l'activité

*La longueur de l'arc **AB** est la même que le périmètre de la base du cône, on a :*

$$\frac{\pi \times g \times \alpha}{180} = 2\pi r$$

J'évalue mes acquis

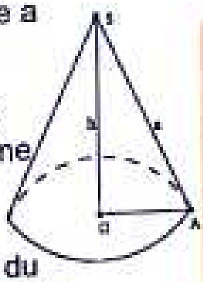
Indique les cas où on a tracé la surface d'un cône de révolution.



7- *Connaître la formule de l'aire latérale d'un cône de révolution –Connaître la formule du volume d'un cône de révolution*

Activité 8

Le cône ci-contre a pour hauteur $h = 4cm$ et dont son cercle de base a pour rayon $3\ cm$.
1- Le volume d'un cône de révolution et celui d'une pyramide régulière se calculent avec la même formule $V = \frac{1}{3}B \times h$ où B est l'aire de la base et la hauteur du cône. Calcule le volume V de ce cône.



Je fais le point de l'activité

Le volume d'un cône de révolution est égal au tiers du produit de l'aire de sa base par sa hauteur.

$$V = \frac{\textit{aire de la base} \times \textit{hauteur}}{3}$$

$$\textit{Aire latérale} = \frac{\textit{périmètre de la base} \times \textit{génératrice}}{2}$$

2- L'aire latérale d'un cône et celle d'une pyramide régulière se calculent avec la même formule $A = \frac{1}{2} P \times a$ où P est le périmètre de la base et a la longueur d'une génératrice de ce cône.

a) Calcule l'aire latérale de ce cône pour $a = 6\,cm$

b) Déduis-en l'aire totale du cône.

J'évalue mes acquis

Le volume d'un cône de révolution de rayon $6cm$ et de hauteur $10\ cm$ est :

a) $200\pi cm^3$; b) $600\pi cm^3$;
c) $120\pi cm^3$; d) $360\pi cm^3$

8- Identifier le tronc d'une pyramide régulière

Activité 9

La figure ci-dessus représente une pyramide régulière $SABCD$ coupée par un par un plan (P) parallèle au plan de la base.

1- Le plan (P) étant parallèle au plan de la base, indique les positions relatives des droites :

a) (EF) et (AB) ; b) (FG) et (BC).
c) (HG) et (DC) ; d) (EH) et (AD).

2- a) Ecris les égalités de quotients obtenues en appliquant la conséquence de la propriété de Thalès aux triangles ASB ; BSC ; CSD et ADS.

b) Déduis-en que : $EF = kAB$; $SE = kSA$ et $SF = kSB$ où k est un nombre positif non nul.

c) Sur cette figure, cite des paires de triangles ayant les longueurs des côtés deux à deux proportionnels.

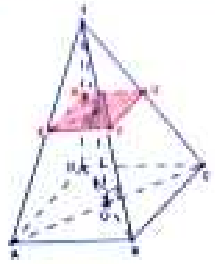
d) Cite deux quadrilatères qui ont les longueurs de leurs côtés deux à deux proportionnels.

e) Dis si le quadrilatère $EFGH$ est une réduction, où un agrandissement d'échelle k de la base $ABCD$.

3- Indique la figure qui représente la réduction de la pyramide de rapport .

Je fais le point de l'activité

Le solide ABCDEFGH ainsi obtenu est appelé le tronc de la pyramide SABCD



J'évalue mes acquis

Réponds par vrai lorsque l'affirmation est vraie ou par faux lorsque l'affirmation est fausse

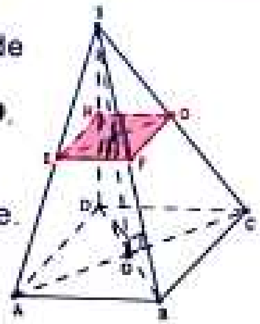
Indique la nature de la section d'une pyramide régulière par un plan parallèle à sa base lorsque cette base est :

a) Un rectangle ;
b) un triangle équilatéral ;
c)un losange.

9 - Connaître la propriété de réduction

Activité 10

Sur la figure ci-contre, le solide $SABCD$ est une pyramide régulière à base carrée $ABCD$. Le carré $EFGH$ est une section plane de cette pyramide par un plan parallèle à la base. On donne : $AB = 6\ cm$; $EF = 4\ cm$ et $SO = 9\ cm$.



Je fais le point de l'activité

On coupe une pyramide régulière par un plan parallèle à sa base, on obtient une réduction de cette pyramide.

Dans cette réduction de rapport k,

- l'aire d'une surface est multipliée par k^2 ;

- le volume d'un solide est multiplié par k^3

1- La pyramide $SEFGH$ est une réduction de la pyramide $SABCD$ à l'échelle k.
a) Calcule l'échelle de réduction k.
b) Justifie que SI = 6.
2- Calcule les aires des carrés $ABCD$ et $EFGH$, puis vérifie que $\frac{aire(EFGH)}{aire(ABCD)} = k^2$.
3- Calcule les volumes des pyramides $SEFGH$ et $SABCD$, puis vérifie que $\frac{Vol(SEFGH)}{Vol(SABCD)} = k^3$.

J'évalue mes acquis

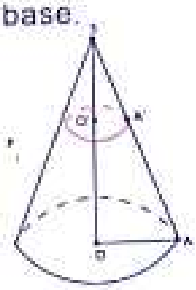
Recopie et complète la phrase suivante :
Dans un agrandissement ou une réduction d'échelle k :
a)……sont multipliées par k;
b)……..est multipliée par k^2;
c)……..est multipliée par k^3.

10 - *Identifier le tronc d'un cône de révolution*

Activité 11

Le cône de révolution (C) ci-contre est coupé par un plan (P) parallèle à sa base.
- A est un point du cercle de base de centre O;
- Ce plan coupe l'axe (OS) en O' et la génératrice $[SA]$ en A'.

On donne: $SO = 6$ cm ; $OA = 2$ cm et $SO' = 4$ cm.



1- Représente en vraie grandeur le triangle SOA et place les points O' et A'.
2- Démontre que le triangle $SO'A'$ est une réduction du triangle SOA et précise le rapport de réduction k.
3- a) Détermine la section du cône (C) par le plan (P).
b) Dis ce que le petit cône obtenu représente pour le cône (C).

Je fais le point de l'activité

La section d'un cône de révolution par un plan parallèle à sa base est un disque.

J'évalue mes acquis

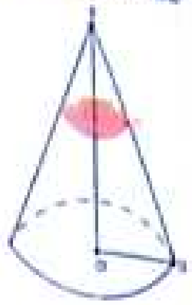
Indique pour chaque cas, la (les) réponse(s) exacte(s) parmi les trois réponses proposées.

		A	B	C
1	Si un cône de révolution de hauteur 9 cm et de rayon 5 cm est coupé par un plan parallèle à sa base et situé à 4,5 cm du sommet, alors…….	La section est un disque de rayon 2,5 cm	La section est un disque de rayon 5 cm	La section est un disque de rayon 4,5 cm
2	La section d'un cône de révolution par un plan parallèle à sa base est …….	un cercle	une réduction de sa base	un disque

11 - Connaître la propriété de réduction relative au cône de révolution

Activité 12

Sur la figure ci-contre, le disque de centre I et de rayon IC' est une section plane du cône de révolution par un plan parallèle à la base.



On donne $SO = 54\ mm$; $SI = 18\ mm$ et $OD = 72\ mm$.

1- Le petit cône (C') est une réduction du grand cône (C) à l'échelle k.

a) Calcule l'échelle de réduction k.

b) Calcule la longueur IC'.

2- Calcule les aires latérales des cônes (C') et (C),

puis vérifie que $\dfrac{aire\,latérale(C')}{aire\,latérale(C)} = k^2$.

3- Calcule les volumes des cônes (C') et (C), puis

vérifie que $\dfrac{volume(C')}{volume(C)} = k^3$.

Je fais le point de l'activité

On coupe un cône de révolution par un plan parallèle à sa base, on obtient une réduction de ce cône.

Dans cette réduction de rapport k :

- l'aire d'une surface est multipliée par k^2 ;
- le volume d'un solide est multiplié par k^3.

J'évalue mes acquis

On réduit un cône de révolution en multipliant les longueurs par $\dfrac{2}{3}$

Son volume est multiplié par :

a) $\dfrac{6}{9}$; b) $\dfrac{4}{9}$; c) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^3$; d) $\dfrac{2}{3}\times 3$.

II- RESUME DE COURS

A- Pyramides

1- Définitions

• Une pyramide est un solide délimité par :
- ***un polygone***, appelé la base de la pyramide;
- ***des faces triangulaires*** ayant un sommet commun, appelées les ***faces latérales*** de la pyramide ;

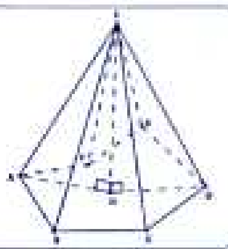
• Le sommet commun aux faces latérales est le sommet de la pyramide.

• La hauteur d'une pyramide désigne :
- la droite passant le sommet de la pyramide et perpendiculaire au plan de la base.
- la longueur du segment joignant le sommet de la pyramide au pied de la hauteur.

• ***L'apothème*** est la distance du sommet de la pyramide aux arêtes de la base.

Exemple

Dans la pyramide représentée ci-contre :
- Le sommet est le point S,
- La base est l'hexagone ABCDEF,
- Les faces latérales sont les triangles SAB, SBC, SCD, SDE, SEF et SAF.
- Les arêtes latérales sont les segments: $[SA]$, $[SB]$, $[SC]$, $[SD]$, $[SE]$, et $[SF]$.
- La hauteur est le segment $[SH]$ ou la longueur SH ou la droite (SH).
- L'apothème est la distance SI.

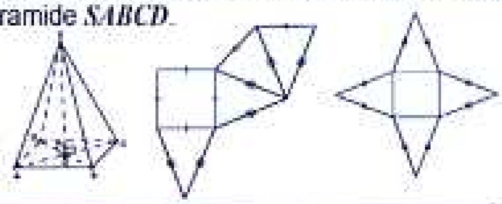


2- Pyramide régulière et patron

Une pyramide régulière est une pyramide telle que :
- la base est un polygone régulier *(inscriptible dans un cercle de centre O)* ;
- le sommet est sur la perpendiculaire au plan de base qui passe par le centre du cercle circonscrit à cette base.

Exemple

Les patrons ci-dessous sont deux patrons de la pyramide $SABCD$.



REMARQUES

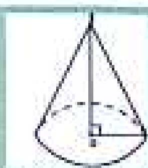
Les arêtes latérales d'une pyramide régulière ont la même longueur.

Propriété

Si une pyramide est régulière, alors sa hauteur passe par le centre du cercle circonscrit à sa base.

B- Cônes de révolution

Définitions



• ***cône de révolution*** est un solide délimité par :
- un disque, appelé la ***base*** du cône ;
- une portion de disque « enroulée » autour de la base appelée ***la surface latérale*** du cône.

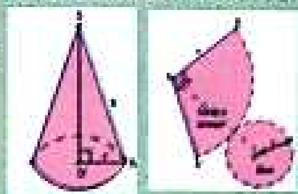
Le centre de la surface latérale est le ***sommet*** du cône.

• ***La hauteur*** d'un cône de révolution de sommet S est le segment $[SO]$, de support perpendiculaire au plan de la base, O étant le centre de la base. On appelle aussi hauteur la longueur SO.

• La droite (SO) est l'*axe* du cône.

• Tout segment ayant pour extrémité le sommet du cône et un point du cercle de base est appelé une ***génératrice***.

Patron d'un cône de révolution



- L'arc de cercle AA' a pour longueur : $\frac{2\pi \times SA \times mes\,ASA'}{360} = \frac{\pi \times g \times \alpha}{180}$

- Le cercle de base a pour périmètre (ou longueur) : $2\pi r$

- **L'arc de cercle AA' et le cercle de base ont la même longueur** : $\frac{\pi \times g \times \alpha}{180} = 2\pi r$.

C- Volumes et aires de pyramides et cônes

Propriétés

• ***Le volume d'une pyramide*** ou d'un ***cône de révolution*** est égal au tiers du produit de l'aire de sa base par sa hauteur.

$V = \frac{1}{3}$ ***x aire de la base x hauteur*** $= \frac{1}{3} \times B \times h$.

• ***L'aire latérale d'une pyramide*** ou d'un ***cône de révolution*** est égale à la moitié du produit du périmetre de la base par l'apotheme.

$A = \frac{1}{2}$ ***x Périmètre de la base x apothème*** $= \frac{1}{2} \times P \times a$.

D- Sections planes : Section d'une pyramide ou d'un cône de révolution

1- Agrandissements et réductions

Définition

Soit une figure (F).
On dit qu'une figure (F') est une **réduction** ou un **agrandissement** de (F), lorsque toutes les dimensions de (F') s'obtiennent en multipliant les dimensions de (F) par un même nombre positif non nul k.

- Si k est **inférieur à 1**,(F') est une **réduction** de (F).
- Si k est **supérieur à 1**, (F') est une **agrandissement** de (F).

REMARQUES

Les angles sont conservés et donc la « forme » de la figure est la même.

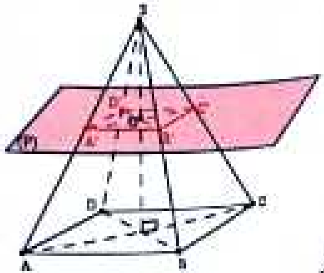
2- Section d'une pyramide régulière par un plan parallèle

La section d'une pyramide par un plan parallèle à la base est un polygone de même nature que cette base ; les supports des côtés de ces polygones sont deux à deux parallèles.

Exemple

SABCD est une pyramide.
Le plan (P) est parallèle à la base rectangulaire ABCD.
- La section de cette pyramide par le plan(P) est le rectangle A'B'C'D', réduction du rectangle ABCD.
- La pyramide SA'B'C'D' est une réduction de la pyramide SABCD.
- Le rapport de réduction est par exemplaire :

$\frac{A'B'}{AB}$ ou $\frac{SA'}{SA}$ ou $\frac{SO'}{SO}$.



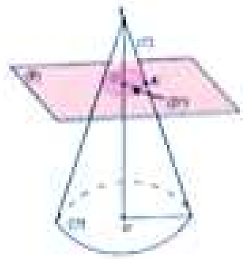
3- Section d'un cône de révolution par un plan

La section d'un cône de révolution et d'un plan parallèle à sa base est un disque.

Exemple

Un cône de révolution (C) a pour sommet S et pour base le disque *(D)*.
Le plan *(P)* est parallèle à la base *(D)*.
- La section de ce cône par le plan *(P)* est le disque *(D')* de centre *O'*, réduction du disque *(D)*.
- Le cône de sommet S et de base le disque *(D')* est une réduction du cône de révolution *(C)*.
- Le rapport de réduction est par exemple :

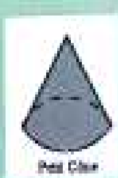
$\dfrac{OA'}{OA}$ ou $\dfrac{SA'}{SA}$ ou $\dfrac{SO'}{SO}$



4- Propriétés de réduction


Petite pyramide


Tronc de Pyramide


Petit Cône


Tronc de Cône

Si l'échelle de la réduction est égale au nombre k, alors :

$$\frac{\text{aires de la pyramide reduite}}{\text{aires homologues de la pyramide}} = k^2 \ ;$$

$$\frac{\text{volume de la pyramide reduite}}{\text{volume de la pyramide}} = k^3 \ .$$

Si l'échelle de la réduction est égale au nombre k, alors :

$$\frac{\text{aires du cône reduit}}{\text{aires homologues du cône}} = k^2 \ ;$$

$$\frac{\text{volume du cône reduit}}{\text{volume du cône}} = k^3.$$

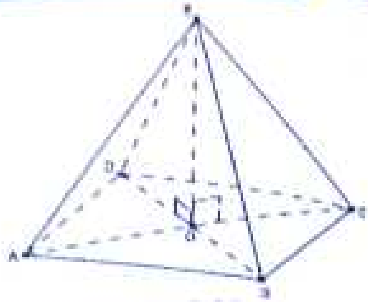
III- METHODE

Pour démontrer ou calculer des longueurs, on pourra utiliser certaines propriétés de la géométrie du plan telles que la propriété de Pythagore et sa réciproque- la propriété de Thalès et sa conséquence dans un triangle- etc.
Pour calculer le volume V_{Tronc} de tronc de pyramide ou de cône de révolution :
V désignant le volume de la grande pyramide (ou du grand cône) et v le volume de la petite pyramide (ou du petit cône).

- *On pourra effectuer :* $V_{Tronc} = V - v$;
- *On pourra utiliser la formule :* $V_{Tronc} = V - v = V - k^3V = (1-k^3)V$ *dans une réduction d'échelle de la grande pyramide (ou du grand cône).*

IV- SAVOIR-FAIRE

Savoir-faire 1- Calculer le volume, l'aire latérale et l'aire totale d'une pyramide



Enoncé

On considère la pyramide régulière SABCD à base carrée et de hauteur $[OS]$ et d'apothème $[SH]$

On donne : AB = 4 cm ; OS = 8 cm ; $SH = 2\sqrt{17}$ cm

Calcule l'aire latérale, l'aire totale et le volume de la pyramide SABCD.

Solution commentée

Je calcule l'aire latérale, l'aire totale et le volume de la pyramide SABCD.

- Aire latérale A_l d'une pyramide est :

$A_l = \dfrac{P \times a}{2}$, où P est le périmètre de la base et a est l'apothème.

On a : $A_l = \dfrac{4 \times AB \times SH}{2} = 2AB \times SH$. Or : AB = 4 cm et $SH = 2\sqrt{17}$ cm ,

donc : $A_l = 2 \times 4 \times 2\sqrt{17}cm^2 = 16\sqrt{17}cm^2$.

Doù l'aire latérale de la pyramide SABCD est égale à $16\sqrt{17}cm^2$

- Aire totale d'une pyramide est : $A_T = A_l + aire$ (ABCD).

On a : $A_T = A_l + AB^2$. Or : $A_l = 16\sqrt{17}$ cm² ; AB= 4 cm, donc :

$A_T = 16\sqrt{17}cm^2 + 16cm^2 = 16\left(1+\sqrt{17}\right)cm^2$

D'où l'aire totale de la pyramide SABCD est égale à $16\left(1+\sqrt{17}\right)cm^2$

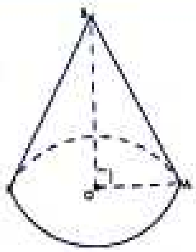
- Le volume V d'une pyramide est :

$V = \dfrac{B \times h}{3}$, où B est l'aire de la base et h est la hauteur de la pyramide.

On a : $V = \dfrac{AB^2 \times OS}{3}$. Or : AB = 4 cm et OS = 8 cm , donc : $V = \dfrac{4^2 \times 8}{3}cm^3 = \dfrac{128}{3}cm^3$.

D'où le volume de la pyramide régulière SABCD est égal à $\dfrac{128}{3}cm^3$.

Savoir-faire 2- Calculer le volume, l'aire latérale et l'aire totale d'un cône de révolution



Enoncé

On considère le cône de révolution ci-contre.

On donne : OA = 4 cm ; SA = 8 cm et OS = $4\sqrt{3}cm$.

Calcule l'aire latérale, l'aire totale et le volume de ce cône.

Solution commentée

Je calcule l'aire latérale, l'aire totale et le volume de ce cône.

- Aire latérale A_l d'un cône est :

$A_l = \pi \times R \times a$, où R est le rayon du disque et a est l'apothème.

On a : $A_l = \pi \times OA \times SA$. Or : OA = 4 cm et SA= 8 cm,

donc : $A_l = \pi \times 4 \times 8$ cm² $= 32\pi$ cm² . D'où l'aire latérale de ce cône est égale à 32 π cm²

- Aire totale A_T d'un cône est :

On a : $A_T = A_l + \pi R^2$ On a : $A_T = A_l + \pi R^2$

Or : $A_l = 32\pi$ cm²; R = OA = 4 cm , donc $A_T = 32\pi \text{ cm}^2 + 16\pi \text{ cm}^2 = 48\pi \text{ cm}^2$

D'où l'aire totale de ce cône est égale à $48\pi cm^2$.

- Le volume V d'un cône est :

$V = \frac{\pi R^2 \times h}{3}$, où πR^2 est l'aire de la base et h est la hauteur du cône.

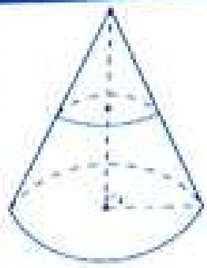
On a : $V = \frac{\pi \times OA^2 \times OS}{3}$ Or : R = AB = 4 cm et h = OS = $4\sqrt{3}$ cm

Donc : $V = \frac{\pi \times 16 \times 4\sqrt{3}}{3}$ cm³ = $\frac{64\pi\sqrt{3}}{3}$ cm³. D'où le volume de ce cône est égal à $\frac{64\pi\sqrt{3}}{3}$ cm³

Savoir-faire 3- Calculer des aires de troncs de pyramides régulières ou de cônes de révolution

Enoncé

Un cône de révolution de hauteur 9 cm a une aire latérale de 81 π cm². Ce cône est coupé par un plan parallèle à sa base et situé à 6 cm du sommet. Calcule l'aire du tronc de cône obtenu.



Solution commentée

Je calcule l'aire du tronc de cône obtenu.

Je calcule le coefficient de réduction (ou l'échelle de réduction)

On a : $k = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$. Or dans une réduction, si les longueurs sont multipliées par k, alors les aires sont multipliées par k^2.

Donc l'aire latérale du cône réduit (petit cône) est $k^2 \times A_l$; où A_l est l'aire latérale du cône.

D'où l'aire A du tronc de cône obtenu est :

$A = A_l - k^2 \times A_l = (1-k^2) \times A_l$ On a : $A_l = 81\pi$ cm² et $k = \frac{2}{3}$.

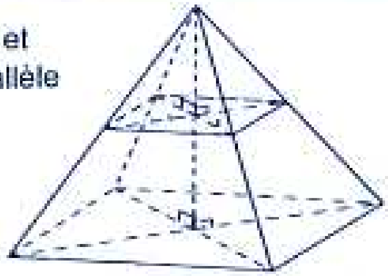
on obtient : $A = \left(1 - \frac{4}{9}\right) \times 81\pi$ cm² $= \frac{5}{9} \times 81\pi$ cm² $= 45\pi$ cm²

Ainsi l'aire du tronc de cône est égale à $45\pi cm^2$.

Savoir-faire 4- Calculer des volumes de troncs de pyramides régulières ou de cônes de révolution

Enoncé

Une pyramide régulière, à base carrée, a une hauteur de 10 cm et un volume de 30 cm. Cette pyramide est coupée par un plan parallèle à sa base et situé à 4 cm du sommet.
Calcule le volume du tronc de pyramide obtenu.



Solution commentée

Je calcule le volume du tronc de pyramide obtenu.

Je calcule le coefficient de réduction (ou l'échelle de réduction)

On a : $k = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$

Or dans une réduction, si les longueurs sont multipliées par k, alors les volumes sont multipliés par k^3.

Donc le volume de la pyramide réduite (petite pyramide) est $k^3 \times V$, où V est le volume de la pyramide régulière.

D'où le volume V_T du tronc de pyramide obtenu est :

$V_T = V - k^3 \times V = (1-k^3) \times V$ On a : $V = 30\ cm^3$ et $k = \frac{2}{5}$

on obtient : $A = \left(1 - \frac{8}{125}\right) \times 30\ cm^3 = \frac{117}{125} \times 30\ cm^3 = 28{,}08\ cm$

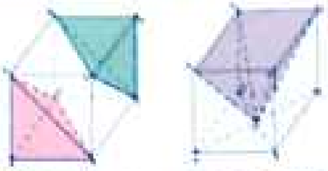
Ainsi le volume du tronc de pyramide obtenu est égal à 28,08 cm³

V- JE M'EXCERCE

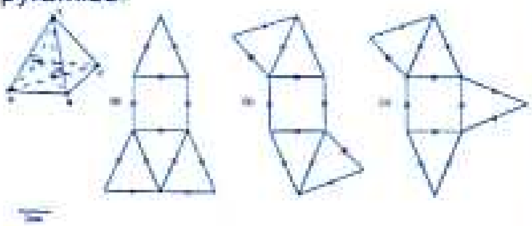
1- Exercices de fixation/ Application

Identifier : une pyramide régulière, un patron d'une pyramide régulière, le sommet d'une pyramide régulière, les faces latérales d'une pyramide régulière, la base d'une pyramide régulière, une arête d'une pyramide régulière, la hauteur d'une pyramide régulière, le tronc d'une pyramide régulière, l'apothème

1 *ABCDEFGH* est un cube. Pour chaque pyramide
a. Indique la nature de chaque face ;
b. Donne une base et la hauteur associée.



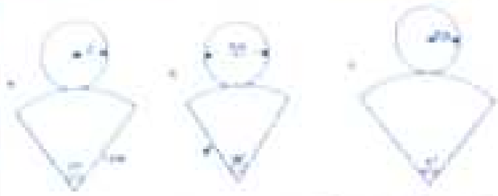
2 *SABCD* est une pyramide régulière à base carrée.
a. Parmi les figures ci-dessous, indique celles qui sont des patrons de cette pyramide.
b. Reproduis un des patrons de cette pyramide *SABCD* avec l'échelle indiquée.
c. Découpe le patron puis assemble la pyramide.



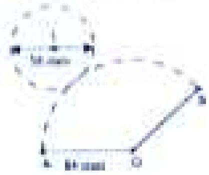
3 On considère un cube ABCDEFGH.
Soit O son centre et I le milieu de l'arête .
a) La pyramide IABCD est régulière (Réponds par vrai ou par faux) ;
b) Cite six pyramides régulières.

Identifier : un cône de révolution, le patron d'un cône de révolution, la base d'un cône de révolution, la hauteur d'un cône de révolution, l'angle de développement d'un cône de révolution, le tronc d'un cône de révolution, une génératrice d'un cône de révolution

4 Les figures ci-dessous représentent des patrons de cônes de révolution pour lesquelles il manque une donnée. Détermine-la dans chacun des cas.



5 La figure ci-dessous est un patron d'un cône de révolution.
a. Nomme son sommet et le centre de sa base.
b. Indique le rayon de la base, la longueur des génératrices et la hauteur.
c. Indique la longueur de l'arc *AB*.



6 Un cône de révolution a son cercle de base de rayon **3 *cm*** et dont une génératrice vaut **6 *cm***. Construis un patron de cône.

7 Dans un cercle de rayon 9 cm, on découpe un secteur circulaire, d'angle au centre 40°.
Calcule le périmètre, puis le diamètre de la base du cône que l'on peut ainsi obtenir.

Connaitre : la formule du volume d'une pyramide régulière, la formule de l'aire latérale d'une pyramide régulière

8 Complète le tableau suivant qui concerne des pyramides régulières à base carrée, de côté c, de hauteur h, d'aire de base B et de volume V.

h	12 cm	.... Cm	0,6 m	...dm
c	50 cm	.... Cm	...dm	1,7 dam
B	....dm²	144 cm²	...dm²	...m²
V	... dm³	0,624 dm³	242 dm³	433,5 cm³

Connaitre : la formule du volume d'un cône de révolution, la formule de l'aire latérale d'un cône de révolution, la relation entre la longueur d'une génératrice, l'angle de développement et le périmètre de la base d'un cône

9 On considère le cône de révolution de sommet *S*, dont [*AB*] est un diamètre du disque de base. O est le milieu du segment [*AB*].
Calcule :
a. SA lorsque OA = OS = 5 cm.
b. OS lorsque OA = 3,6 cm et SA = 6 cm.
c. OA lorsque OS = 7 cm et SA = 8 cm.
d. OS lorsque l'aire de base vaut 625π cm² et SA = 40 cm.

10 Complète le tableau suivant qui concerne des cônes de révolution de rayon r, de hauteur h, d'aire de base B et de volume V.
on prendra $\frac{22}{7}$ pour la valeur de π.

h	72 mm	.....m	....m	....dm
r	49 cm	..... Cm	...dam	0,14 dm
B	.....mm²	144 cm²	2464 dm²	....dm²
V	.... mm³	0,624 dm³	22,176 dam³	8,624 cm³

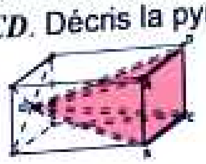
Connaitre les propriétés de réduction

11 Recopie et complète la phrase suivante avec : le volume, les longueurs, l'aire.
Dans un agrandissement ou une réduction d'échelle k :
- .....sont multipliées par k ;
- .....est multipliée par k^2 ;
- .....est multipliée par k^3

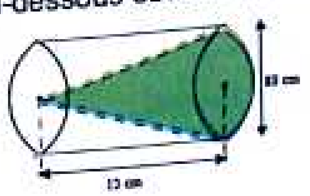
12 Choisis la bonne réponse
1) Si on réduit une pyramide régulière en multipliant les longueurs par $\frac{2}{3}$, alors son volume est multiplié par :
a) $\frac{6}{9}$; b) $\left(\frac{2}{3}\right)^3$; c) $\frac{2}{3} \times 3$
2) Si le carré EFGH est la section de la pyramide régulière SABCD, où E est un point de $[SA]$, F un point de $[SB]$, alors :
a) Aire (EFGH) = $\left(\frac{EF}{AB}\right)^2$ x aire (ABCD)
b) Aire (EFGH) = $\left(\frac{AB}{EF}\right)^2$ x aire (ABCD)
c) Aire (EFGH)= aire (ABCD)

Décrire : une pyramide régulière, un tronc de cône de révolution

13 On extrait du pavé droit ci-dessous, la pyramide $OABCD$. Décris la pyramide ainsi obtenue.

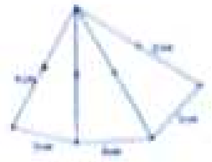


14 Décris le cône ci-dessous obtenu à partir du cylindre.



Construire : un patron de pyramide régulière, un patron de cône de révolution

15 Reproduis la figure ci-contre et complète-la afin d'obtenir un patron d'une pyramide à base triangulaire.



16 Construis un patron d'une pyramide régulière dont la base est un carré de côté *3,5 cm* et dont les arêtes latérales ont pour longueur *5 cm*.

17 Réalise un patron de pyramide régulière à base carrée, dont les faces latérales sont des triangles équilatéraux de 4 cm de côté.

18 Réalise le patron d'un cône de révolution ayant pour diamètre du cercle de base 12 cm et pour apothème de longueur 18 cm.

Réaliser: un cône de révolution, une pyramide régulière

19 a) Découpe les trois quarts d'un disque de 5 cm de rayon.
b) Réalise le cône de révolution que l'on peut ainsi obtenir.

20 Réalise, en perspective cavalière, une pyramide régulière SABCD de sommet S, dont la base est un carré de côté de longueur 8 cm.

Extraire : une figure plane d'une représentation d'un cône de révolution ou d'une pyramide régulière

21 SABCD est une pyramide régulière de sommet S, dont les faces latérales sont des triangles équilatéraux de côté de longueur 4 cm.
Construis, en vraie grandeur, la base de cette pyramide, le triangle ASC.

22 Un cône de révolution de sommet S a pour rayon du disque de base 6 cm et d'apothème $[AS]$ de longueur 10 cm. O est le centre de ce disque.
Construis en vraie grandeur le triangle ASO.

Calculer : le volume, l'aire latérale et l'aire totale d'une pyramide régulière, des aires de troncs de pyramides régulières, des volumes de troncs de pyramides régulières, le coefficient de réduction

23 Une pyramide a une base d'aire $15\ cm^2$ et un volume de $30\ cm^3$. Calcule la hauteur h de cette pyramide.

24 On coupe un cône de révolution de hauteur $SH = h$ par un plan parallèle à sa base comme indiqué sur la figure ci-dessous.
Ce plan coupe la droite (SH) en O.
On pose $SO = h'$.
1) Recopie et complète le tableau suivant (les mesures sont en cm)

	R	R'	h	h'
(1)	8	2,5	10	
(2)		1,2	6	2
(3)	9		1,5	3,6
(4)	7,2	1,8		2,4

2) Calcule de deux façons différentes (lorsque cela est possible) :
a. l'aire du disque de base du petit cône,
b. le volume du grand cône,
c. le volume du tronc de cône.

25 Une pyramide de hauteur $8\ cm$ a pour base un carré de $10\ cm$ de côté.
Calcule le volume d'une réduction de cette pyramide à l'échelle $\frac{1}{3}$.

26 La figure ci- contre représente le patron d'une pyramide régulière à base carrée $ABCD$ et d'apothème $8\ cm$.
Calcule l'aire latérale de cette pyramide.

27 L'aire d'une maison est $400\ m^2$. Calcule son aire, en cm^2, sur un plan à l'échelle $\frac{1}{20}$.

28 SABC est une pyramide de sommet S, dont la hauteur $[SH]$ a pour longueur 7,5 cm.
On coupe cette pyramide par un plan parallèle à la base. Ce plan coupe $[SH]$ en H', $[SA]$ en A', $[SB]$ en B', $[SC]$ en C.
On donne : AB = 12 cm, BC = 9 cm et AC = 15 cm.
1) Recopie et complète le tableau suivant (les mesures sont en cm) :

	(1)	(2)	(3)	(4)
SH'	2,5	.....	.....	....
A'B'	....	2,4		....
B'C'	.....	....	2,4	....
A'C'	....	....	.....	9

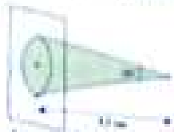
2) Calcule, dans chaque cas, le volume du tronc de pyramide obtenu, l'aire de tronc de pyramide.

Calculer : le volume, l'aire latérale et l'aire totale d'un cône de révolution, des aires de troncs de cônes de révolution, des volumes de troncs de cônes de révolution, le coefficient de réduction

29 Calcule la hauteur d'un cône de révolution dont la base a pour rayon $6\ cm$ et dont le volume est égal à $144\pi\ cm^3$

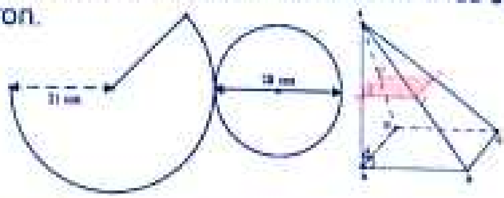
30 Indique la nature et les dimensions de la section du cône de révolution (C) ci-contre par le plan (P).
On donne : $SO = 9\ cm$;
$SO' = 3\ cm$; $OA = 6\ cm$

31 Une lampe placée à $3,5\ cm$ d'un mur projette un faisceau lumineux sous un angle de 60°.
1- Donne la nature de la surface éclairée.
2- Calcule le diamètre de la surface éclairée sur le mur.

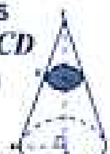


32 On considère le cône de révolution ci-contre.
Les questions 1) et 2) sont indépendantes.
1- On donne : $AS = 10\ cm$ et $mes\ \widehat{ASB} = 120°$.
a) Calcule OS
b) Calcule l'aire latérale, puis le volume de ce cône.
2- On donne : $SA = 6\ cm$ et $AB = 4\ cm$.
a) Calcule OS
b) Calcule l'aire totale de ce cône

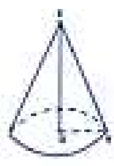
33 La figure ci-dessous représente un patron d'un cône de révolution. Calcule l'aire de ce patron.



34 Donne la nature et les dimensions de la section de la pyramide $SABCD$ à base rectangulaire par le plan (EFG).
On donne : SA = 8 cm ; SE = 3 cm ; AB = 5 cm ; BC = 4 cm.



35 Calcule le volume puis l'aire latérale du cône de révolution représenté ci-contre.
On donne : $SO = 6\ cm$ et $SA = 6,5\ cm$.



36 Dans chaque cas, calcule la valeur exacte du volume V d'un cône de révolution de hauteur h et de rayon de base r.
a. $h = 12\text{ cm}$ et $r = 5,2\text{ cm}$
b. $h = 4,5\text{ cm}$ et $r = 80\text{ cm}$

37 On coupe un cône de révolution de hauteur SH =h par un plan parallèle à sa base. Ce plan coupe la droite (SH) en H' et la génératrice $[SM]$ en M'. On pose : SH' = h', HM = R et H'M'= R'

1) Recopie et complète le tableau suivant (les mesures sont en cm) :

	R	R'	h	h'
(1)	8	2,5	10	.....
(2)	...	1,2	6	2
(3)	9	...	1,5	3,6
(4)	7,2	1,8	...	2,4

2) Calcule, dans chaque cas, le volume du tronc de cône, l'aire du tronc de cône.

2- Exercices de renforcement/ approfondisse-

38 Sur la figure ci-contre, le cône de révolution de sommet S et de base un disque de diamètre $[RT]$ a été sectionné par un plan parallèle à la base.

On donne : $R'T' = 52$ *cm* ; $RT=13$ *cm* et $SO'= 6$*cm*.

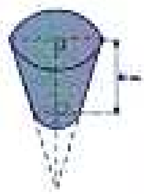
1- Calcule le volume du petit cône.

2- Déduis :

a) Le volume du grand cône.

b) Le volume du tronc de cône de hauteur OO'.

39 Un réservoir a la forme d'un tronc de cône. Les cercles de base ont pour rayons **80 cm** et **120cm**. La hauteur du réservoir est égale à **80 cm**.



Calcule le volume du réservoir en m^3, puis sa capacité en litres.

40 On considère une pyramide régulière $SABCD$, la base $ABCD$ est un carré de centre I.

Les questions 1) et 2) sont indépendantes.

1- a) Calcule les longueurs AB et SA sachant que $AC= 3$ *cm* et $SI= 6$ *cm*.

b) Encadre la mesure de l'angle SAI par deux nombres entiers naturels consécutifs.

2- On suppose que AB vaut 5 *cm* et que les faces latérales sont des triangles équilatéraux.

a) Démontre que le triangle ASC est rectangle.

b) Calcule la longueur SI.

3- Situations d'évaluation

41 La figure ci- contre représente un bassin qui a la forme d'un tronc de cône de révolution. Au cours d'une séance de travaux manuels (T.M) dans un collège, un groupe d'élèves de 3ème utilisent une pompe qui débite $15l/s$ pour remplir ce bassin avec de l'eau, qui servira à la fabrication des briques.
L'éducateur de niveau 3ème leur affirme qu'ils ont moins de trois quarts d'heure pour le faire avant de se rendre en classe. Le chef de groupe dit qu'ils ont besoin d'un peu plus de temps.

On donne :

OA *m* $= 3m$; $O'B$ *m* $= 2$ *m* et

$O'O = 2$ *m*

1- Détermine l'échelle de réduction du grand cône dont est issu le tronc.

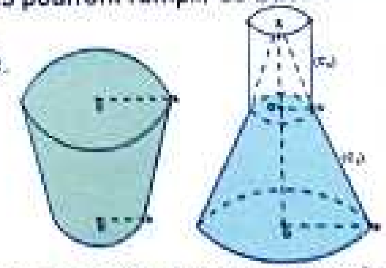
2- Soit h la hauteur du grand cône, démontre que :

$h - 2 = \frac{2}{3}h$, puis déduis la valeur exacte de h.

3- Calcule le volume du tronc de tronc.

4- Dis si ces élèves pourront remplir ce bassin dans le temps indiqué.

Justifie ta réponse.



42 Lors de la fête de promotion des élèves de 3ème d'un collège, les organisateurs ont le choix entre deux types de verres pour le service du cocktail.
Soit $SABCD$ une pyramide à base carrée de sommet S, et $A'B'C'D'$ une section plane de cette pyramide par un plan parallèle à la base :

- $AB= 30$ *cm*
- $SO= 18$ *cm*
- $SO'= 6$ *cm*

1- Calcule le volume de $SABCD$

2- Déduis

a) Le volume de la pyramide $SA'B'C'D'$;

b) Le volume du tronc de pyramide $ABCDA'B'C'D'$

Ces verres dont l'un a la forme d'un cône de révolution et l'autre une pyramide régulière, ont la même hauteur $h = 10\ cm$.

Ils sont représentés par les figures ci-contre.

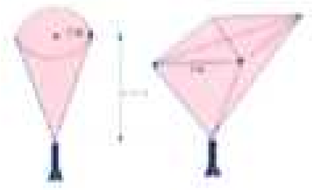
Les organisateurs souhaitent utiliser le verre le plus économique compte tenu de leur effectif.

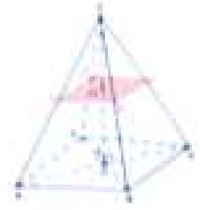
On désigne par V_C le volume du verre ayant la forme de cône et par V_P celui dont la forme est une pyramide.

1- Calcule le volume de chaque verre

2- Sachant que $3{,}14 < \pi < 3{,}15$ encadre V_C par deux nombres entiers naturels consécutifs.

3- Dis lequel des deux verres est plus économique. Justifie ta réponse.





VI- RENDEZ-VOUS DES CURIEUX !

Au IVe siècle avant Jésus-Christ, le philosophe grec Platon faisait du nombre « le plus haut degré de la reconnaissance ». Il écrivit à Socrate : « Si tu ne possèdes pas la puissance du calcul, ta vie sera non pas celle d'un humain, mais celle d'une huître ou d'un poumon marin ! ».

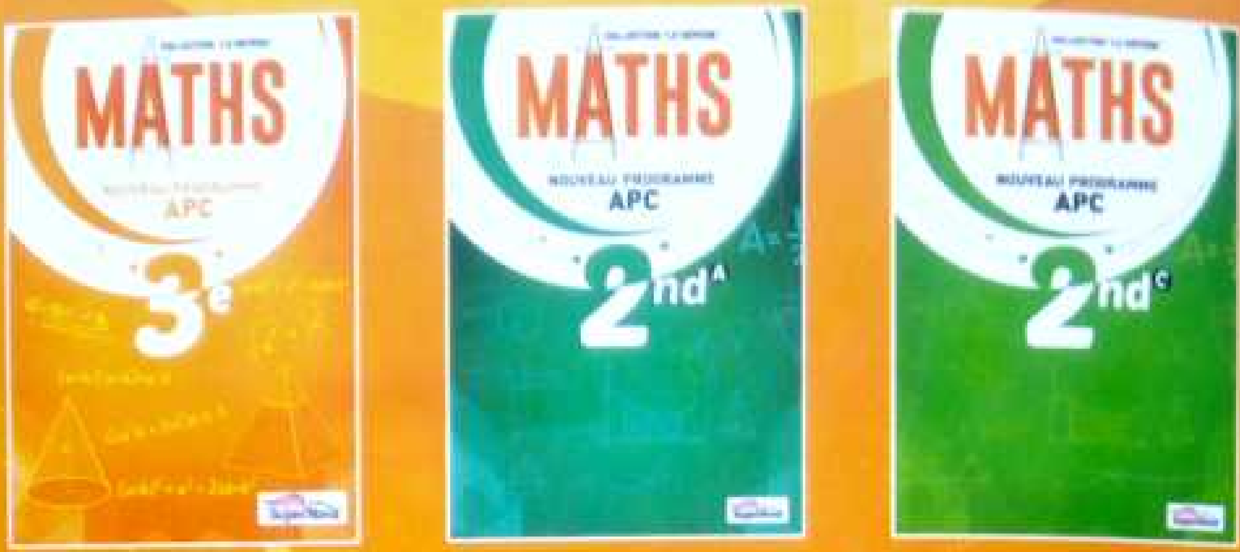
Il connaissait cinq polyèdres convexes.

Plus tard, les mathématiciens démontrèrent qu'il n'y en avait pas d'autres.

Bundu dia Kongo: une pyramide à trois faces dans les amériques (source internet)

Achevé d'imprimer : EDITIONS SUPERNOVA
3ème Trimestre 2019
Dépot légal de Cote d'Ivoire :15710 du 03 Juillet 2019
ISBN: 978-2-37967-000-8

DISPONIBLE CETTE ANNÉE



BIENTÔT DISPONIBLE

ISBN 978-2-37967-000-8

PRIX 4 500 F CFA TTC

Scanned by CamScanner