LE PAKAO

Matière

MATHEMATIQUES TI

Sources

DIVERS

Interdiction de commercialisation

numéro alerte : 221 78 370 31 51

ENONCE

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{-1 ; 1\}$ par :

$f(x) = \dfrac{x^3 + 2x^2}{x^2 - 1}$ et C sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal (unité graphique 2 cm).

A. Etude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = x^3 - 3x - 4$.

1. Etudier la fonction g.
2. Montrer qu'il existe un réel α unique tel que $g(\alpha) = 0$, puis déterminer une valeur approchée de α à 10^{-2} près.
3. Etudier le signe de g sur $\mathbb{R}$.

B. Etude de la fonction f

1. Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de chacun des intervalles de son ensemble de définition.
2. Montrer que pour tout x de $\mathbb{R} - \{-1 ; 1\}$:

$$f'(x) = \frac{x\,g(x)}{(x^2 - 1)^2}$$

3. *a.* Montrer que pour tout x de $\mathbb{R} - \{-1 ; 1\}$:

$$f(x) = x + 2 + \frac{x + 2}{x^2 - 1}$$

3. *b.* Etudier la position de la courbe C par rapport à D d'équation $y = x + 2$.

3. *c.* Montrer que la courbe C admet D pour asymptote oblique en $+\infty$ et $-\infty$.

4. Tracer la courbe C et la droite D.

CORRECTION

A. Etude d'une fonction auxiliaire

1. g est un polynôme donc est définie continu dérivable sur $\mathbb{R}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$

$g'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1)$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$		
g	$-\infty$	↗	-2	↘	-6	↗	$+\infty$

2. Sur $]-\infty ; -1]$ g est croissante ; sur $[-1 ; 1]$ g est décroissante donc g admet un maximum en -1, $g(-1) = -2$ donc pour tout x de $]-\infty ; 1]$ $g(x) \leq -2$.

L'équation $g(x) = 0$ n'a pas de solution sur $]-\infty ; 1]$.

Sur $[1 ; +\infty[$, g est définie continue, strictement croissante,

$g([1 ; +\infty[) = [-6 ; +\infty[$,

$0 \in [-6 ; +\infty[$, donc il existe un réel α unique tel que $g(\alpha) = 0$

$g(2{,}19) < 0$ et $g(2.20) > 0$ donc $2{,}19 < \alpha < 2{,}20$

3.

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$		

B. Etude de la fonction f

1. f est une fraction rationnelle (quotient de deux polynômes) donc sa limite en $+\infty$ et $-\infty$ est la même que celle du quotient de ses termes de plus haut degré

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3}{x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$ et

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^3}{x^2} = \lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$

$\lim\limits_{x \to -1} x^3 + 2x^2 = 1$ et $\lim\limits_{x \to -1} x^2 - 1 = 0$

Il faut donc préciser le signe de $x^2 - 1$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$x^2 - 1$	$+$	0	$-$	0	$+$		

donc $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} x^2 - 1 = 0^+$ donc $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} x^2 - 1 = 0^-$ donc $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to 1} x^3 + 2x^2 = 3$ et $\lim\limits_{x \to 1} x^2 - 1 = 0$

Il faut donc préciser le signe de $x^2 - 1$

$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} x^2 - 1 = 0^-$ donc $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} x^2 - 1 = 0^+$ donc $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f(x) = +\infty$

2. $f'(x) = \dfrac{(3x^2 + 4x)(x^2 - 1) - 2x(x^3 + 2x^2)}{(x^2 - 1)^2}$

$f'(x) = \dfrac{x[(3x + 4)(x^2 - 1) - 2(x^3 + 2x^2)]}{(x^2 - 1)^2}$

$f'(x) = \dfrac{x(x^3 - 3x - 4)}{(x^2 - 1)^2} = \dfrac{x\,g(x)}{(x^2 - 1)^2}$

x	$-\infty$		-1		0		1		α		$+\infty$
x	$-$		$-$		0	$+$	$+$				$+$
$g(x)$	$-$		$-$		$-$		$-$		0		$+$
$f'(x)$	$+$		$+$		0	$-$	$-$		0		$+$
f	$-\infty$	↗	$+\infty$	↗	0	↘	$-\infty$	↘	m	↗	$+\infty$

3. *a.* $x + 2 + \dfrac{x + 2}{x^2 - 1} = (x + 2)\left(1 + \dfrac{1}{x^2 - 1}\right) = \dfrac{(x + 2)x^2}{x^2 - 1}$

$x + 2 + \dfrac{x + 2}{x^2 - 1} = \dfrac{x^3 + 2x^2}{x^2 - 1} = f(x)$.

3. *b.* Soit $h(x) = f(x) - (x + 2) = \dfrac{x + 2}{x^2 - 1}$

x	$-\infty$		-2		-1		1	$+\infty$
$x^2 - 1$	$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$x + 2$	$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$h(x)$	$-$	0	$+$		$-$		$+$	

Donc sur $]-\infty ; -2[\cup]-1 ; 1[$ $f(x) - (x + 2) < 0$

La courbe C est en dessous de la droite D.

Donc sur $]-2 ; -1[\cup]1 ; +\infty[$ $f(x) - (x + 2) > 0$

La courbe C est au dessus de la droite D.

La courbe et la droite se coupent au point d'abscisse 2.

3. *c.* Montrer que la courbe C admet D pour asymptote oblique en $+\infty$ et $-\infty$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x + 2}{x^2 - 1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$

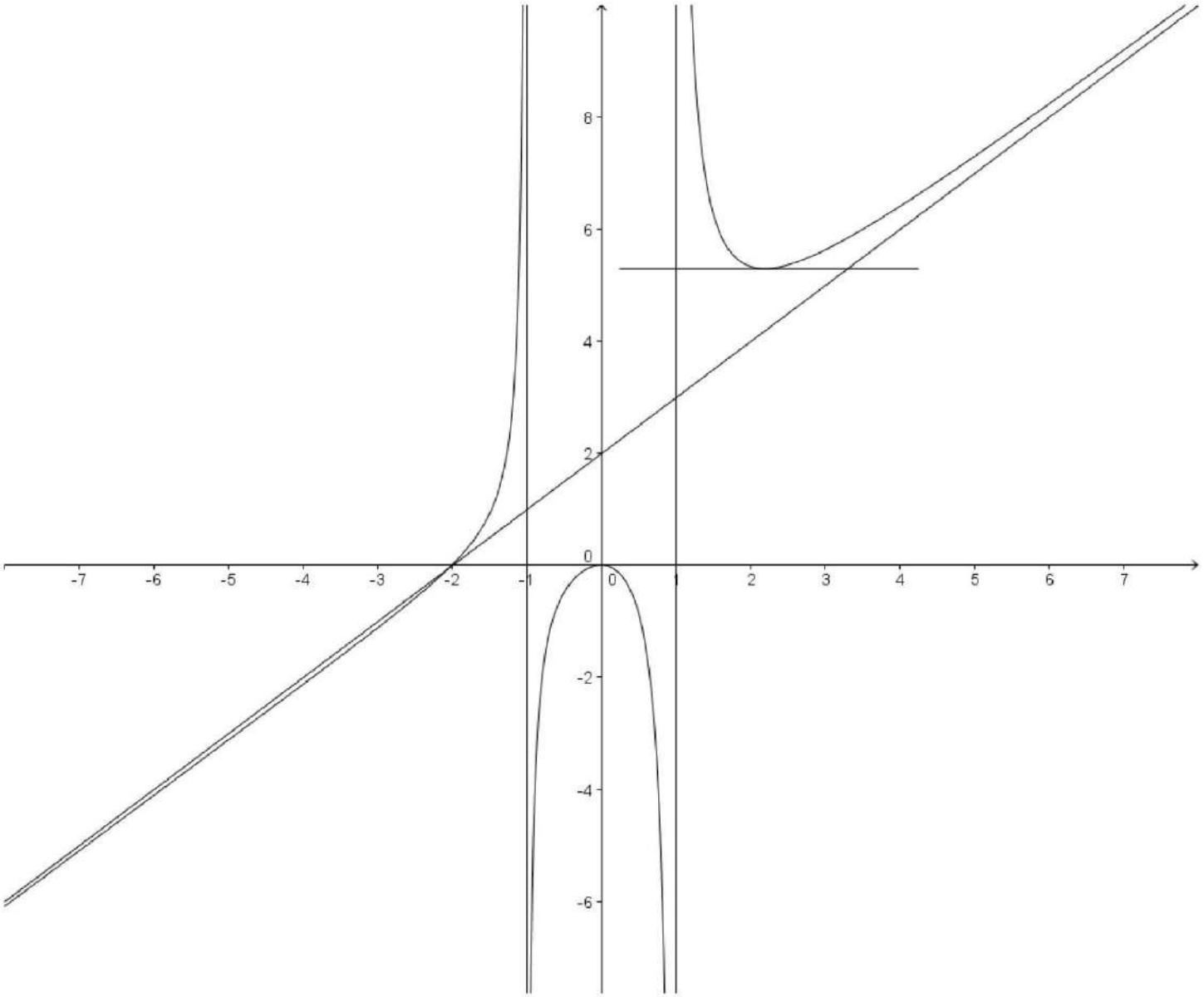
soit $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - (x + 2) = 0$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x + 2}{x^2 - 1} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x}{x^2} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x} = 0$

soit $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) - (x + 2) = 0$

la courbe C admet D pour asymptote oblique en $+\infty$ et $-\infty$.

4. Tracer la courbe C et la droite D.


8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-7
-6
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6
7

ENONCE

On veut étudier l'existence et le nombre d'extremum de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par: $f(x) = x^2 - 2\sin x$.
Pour cela, on étudie d'abord la fonction f' dérivée de f sur $\mathbb{R}$.

1. Étude de f'

a. Vérifier que $f'(x) = 2(x - \cos x)$ et étudier les variations de f' sur $\mathbb{R}$.

b. Préciser les limites de f' en $+\infty$ et en $-\infty$.

2. Montrer que l'équation : $f'(x) = 0$ admet une et une seule solution sur R, notée α.

3. Donner le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$. En déduire le tableau de variations de f et justifier l'existence d'un seul minimum m pour f.

4. Montrer que m vérifie: $m = \alpha^2 - 2\sqrt{1-\alpha^2}$.

CORRECTION

1. *a.* $f'(x) = 2x - 2\cos x = 2(x - \cos x)$
Pour étudier les variations de f', il faut calculer sa dérivée f''.
$f''(x) = 2(1 + \sin x)$
Pour tout x réel, $-1 \leq \sin x \leq 1$ donc $0 \leq 1 + \sin x \leq 2$
$f''(x) = 0$ si et seulement si $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$
Pour tout x réel, $f''(x) \geq 0$ donc f' est croissante sur $\mathbb{R}$.

1. *b.* Pour tout x réel, $-1 \leq \cos x \leq 1$ donc $1 \geq -\cos x \geq -1$
donc $x - 1 \leq x - \cos x \leq x + 1$
donc $2(x-1) \leq f'(x) \leq 2(x+1)$
$\lim\limits_{x \to -\infty} 2(x+1) = -\infty$ donc d'après le théorème de comparaison, $\lim\limits_{x \to -\infty} f'(x) = -\infty$.
$\lim\limits_{x \to +\infty} 2(x-1) = +\infty$ donc d'après le théorème de comparaison, $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = +\infty$.

2. f' est une fonction définie continue sur $\mathbb{R}$ (somme de fonctions continues sur $\mathbb{R}$) strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right[$,

$f'\left(\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right[\right) =]-\pi; 3\pi[$

$0 \in [-\pi; 3\pi]$ donc l'équation $f'(x) = 0$ admet une seule solution α sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right[$.

f' est croissante sur $\mathbb{R}$ donc si $x \leq -\frac{\pi}{2}$, $f'(x) \leq f'\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ donc $f'(x) \leq -\pi$ donc f' ne s'annule pas sur $\left]-\infty; -\frac{\pi}{2}\right]$

f' est croissante sur $\mathbb{R}$ donc si $x \geq \frac{3\pi}{2}$, $f'(x) \leq f'\left(\frac{3\pi}{2}\right)$ donc $f'(x) \geq 3\pi$ donc f' ne s'annule pas sur $\left[\frac{3\pi}{2}; +\infty\right[$.

Au bilan : l'équation $f'(x) = 0$ admet une seule solution α sur $\mathbb{R}$

3. si $x \leq -\frac{\pi}{2}$, $f'(x) \leq -\pi$ donc $f'(x) < 0$ sur $\left]-\infty; -\frac{\pi}{2}\right]$

si $x \geq \frac{3\pi}{2}$, $f'(x) \geq 3\pi$ donc $f'(x) > 0$ sur $\left[\frac{3\pi}{2}; +\infty\right[$.

f' est strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right[$, et $f'(\alpha) = 0$ donc si $-\frac{\pi}{2} < x < \alpha$ alors $f'(x) < 0$

si $x = \alpha$, $f'(x) = 0$

si $\alpha < x < \frac{3\pi}{2}$ alors $f'(x) > 0$

d'où le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$: si $x < \alpha$ alors $f'(x) < 0$; si $x = \alpha$, $f'(x) = 0$; si $x > \alpha$ alors $f'(x) > 0$

donc f est strictement croissante sur $]-\infty; \alpha]$ et f est strictement décroissante sur $[\alpha; +\infty[$.
donc f admet un seul minimum m en α sur $\mathbb{R}$.

4. $m = f(\alpha) = \alpha^2 - 2\sin\alpha$ or $f'(\alpha) = 0$ donc $\alpha - \cos\alpha = 0$ donc $\cos\alpha = \alpha$
or $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ donc $\sin^2\alpha = 1 - \alpha^2$ donc soit $\sin\alpha = \sqrt{1-\alpha^2}$ soit $\sin\alpha = -\sqrt{1-\alpha^2}$

f' est strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right[$, et $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi$ et $f'(0) = -2$ donc $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ donc $\sin\alpha \geq 0$.

donc $\sin\alpha = \sqrt{1-\alpha^2}$ d'où en remplaçant dans $m = \alpha^2 - 2\sin\alpha$ on obtient : $m = f(\alpha) = \alpha^2 - 2\sqrt{1-\alpha^2}$.

ENONCE

Soit f une fonction définie sur $]-\infty\,;\,0] \cup [1\,;+\infty[$, telle que : $f(x) = \sqrt{x^2 - x} + x$

1. *a.* Déterminer la limite de f en $+\infty$.

1. *b.* Déterminer la limite de f en $-\infty$, que peut-on en déduire pour la courbe de f ?

2. La fonction f est elle dérivable en 0 ? en 1 ? Que peut-on en déduire pour la courbe de f ?

3. *a.* Déterminer la limite en $+\infty$ de $\dfrac{f(x)}{x}$

3. *b.* Déterminer la limite en $+\infty$ de $[f(x) - 2x]$
En déduire que la courbe de f admet une asymptote oblique en $+\infty$.

CORRECTION

1. *a.* $f(x) = \sqrt{x^2\left(1 - \dfrac{1}{x^2}\right)} + x$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 - \dfrac{1}{x^2} = 1$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2\left(1 - \dfrac{1}{x^2}\right)} = +\infty$

et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

1. *b.* $f(x) = \dfrac{(\sqrt{x^2 - x} + x)(\sqrt{x^2 - x} - x)}{\sqrt{x^2 - x} - x} = \dfrac{x^2 - x - x^2}{\sqrt{x^2 - x} - x}$

$f(x) = \dfrac{-x}{\sqrt{x^2\left(1 - \dfrac{1}{x^2}\right)} - x}$

$x < 0$ donc $\sqrt{x^2} = -x$ et $f(x) = \dfrac{-x}{-x\sqrt{\left(1 - \dfrac{1}{x^2}\right)} - x}$ soit $f(x) = \dfrac{-x}{-x\left(\sqrt{1 - \dfrac{1}{x^2}} + 1\right)}$

$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{1}{x^2}} + 1}$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \dfrac{1}{2}$

2. si $x < 0$, $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \dfrac{\sqrt{x^2 - x} + x}{x} = \dfrac{x^2 - x - x^2}{x(\sqrt{x^2 - x} - x)}$

$\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \dfrac{-1}{\sqrt{x^2 - x} - x}$

si $x < 0$, $\sqrt{x^2 - x} - x = \sqrt{x^2 - x} + (-x)$

donc $\sqrt{x^2 - x} - x > 0$ (somme de termes positifs) et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \sqrt{x^2 - x} - x = 0^+$ donc $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \dfrac{-1}{\sqrt{x^2 - x} - x} = -\infty$

f n'est pas dérivable en 0 mais C admet au point d'abscisse 0 une tangente verticale.

si $x > 1$, $\dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \dfrac{\sqrt{x^2 - x} + x - 1}{x - 1} = \dfrac{\sqrt{x^2 - x}}{x - 1} + 1$

$\dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \dfrac{x(x - 1)}{(x - 1)\sqrt{x^2 - x}} + 1$

$\dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - x}} + 1$

si $x > 1$, $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \sqrt{x^2 - x} = 0^+$ donc $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - x}} = +\infty$ d'où $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1} = +\infty$

f n'est pas dérivable en 1 mais C admet au point d'abscisse 1 une tangente verticale.

3. *a.* $\dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{\sqrt{x^2 - x} + x}{x} = \dfrac{\sqrt{x^2\left(1 - \dfrac{1}{x^2}\right)}}{x} + 1$

x tend vers $+\infty$ donc $x > 1$, donc $x > 0$ donc $\sqrt{x^2} = x$

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}{x} + 1 = \sqrt{1-\frac{1}{x^2}} + 1 \text{ donc } \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 2$$

3. *b.* $f(x) - 2x = \sqrt{x^2 - x} - x$

$f(x) - 2x = \sqrt{x^2 - x} - x$

$$f(x) - 2x = \frac{(\sqrt{x^2 - x} - x)(\sqrt{x^2 - x} + x)}{\sqrt{x^2 - x} + x}$$

$$f(x) - 2x = \frac{-x}{\sqrt{x^2 - x} + x} = \frac{x}{\sqrt{x^2\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)} + x}$$

$x > 1$ donc $\sqrt{x^2} = x$ et $f(x) - 2x = \dfrac{x}{x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}} + x}$

$$f(x) - 2x = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}} + 1} \text{ donc } \lim_{x \to +\infty} f(x) - 2x = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - 2x = \frac{1}{2} \text{ donc } \lim_{x \to +\infty} f(x) - 2x - \frac{1}{2} = 0$$

soit $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - (2x + \frac{1}{2}) = 0$

La droite d'équation $y = 2x + \dfrac{1}{2}$ est asymptote à C en $+\infty$.

ENONCE

Soit f la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par : $f(x) = (15 - 2x)\sqrt{x} + 9x$.

1. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
2. Soit g la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par : $g(x) = 18\sqrt{x} - 6x + 15$.
   a. Déterminer la limite de g en $+\infty$.
   b. Étudier le signe de la dérivée de g.
   c. Dresser le tableau de variation de g.
   d. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$, sans la résoudre, admet une solution unique dans $[0 ; +\infty[$. On notera α cette solution.
   e. Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-3} près.
   f. Rechercher la valeur exacte de α.
   g. En déduire le signe de g sur $[0 ; +\infty[$.
3. Démontrer que : pour tout réel $x > 0$, $f(x) = \dfrac{g(x)}{2\sqrt{x}}$.
4. Établir le tableau de variation de f.

CORRECTION

1. $f(x) = x\left(\left(\dfrac{15}{x} - 2\right)\sqrt{x} + 9\right)$ or $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(\left(\dfrac{15}{x} - 2\right)\sqrt{x} + 9\right) = -\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

2. *a.* $g(x) = \left(\dfrac{18}{\sqrt{x}} - 6\right)x + 15$ or $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(\dfrac{18}{\sqrt{x}} - 6\right) = -6$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$

2. *b.* g est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et $g'(x) = 18 \times \dfrac{1}{2\sqrt{x}} - 6 = \dfrac{9 - 6\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$

$g'(x) > 0 \Leftrightarrow 3 - 2\sqrt{x} > 0$ et $x > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} < \dfrac{3}{2}$ et $x > 0$

$g'(x) > 0 \Leftrightarrow 0 < x < \dfrac{9}{4}$

$g'(x) < 0 \Leftrightarrow x > \dfrac{9}{4}$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{9}{4}$

2. *c.* $g\left(\dfrac{9}{4}\right) = \dfrac{57}{2}$

x	0		$\frac{9}{4}$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
g	15	↗	$\frac{57}{2}$	↘	$-\infty$

2. *d.* g est croissante sur $[0 ; 9/4]$ et $g(0) = 15$ donc pour tout x de $[0 ; 9/4]$, $g(x) \geq 15$ donc l'équation $g(x) = 0$ n'admet pas de solution sur $[0 ; 9/4]$.

f est définie dérivable, strictement décroissante sur $]9/4 ; +\infty[$, $g(]9/4 ; +\infty[) =]-\infty ; 57/2[$, donc $0 \in g(]9/4 ; +\infty[)$ donc l'équation $g(x) = 0$ admet une seule solution α sur $]9/4 ; +\infty[$.
l'équation $g(x) = 0$ admet une seule solution α sur $[0 ; +\infty[$.

2. *e.* $g(13{,}538) > 0$ et $g(13{,}539) < 0$ de plus l'équation $g(x) = 0$ admet une seule solution α sur $[0 ; +\infty[$
donc $13{,}538 < \alpha < 13{,}539$

2. *f.* $g(x) = 0 \Leftrightarrow 18\sqrt{x} = 6x - 15$ et $x \geq 0 \Leftrightarrow 6\sqrt{x} = 2x - 5$ et $x \geq 0$
$\Leftrightarrow 36x = (2x - 5)^2$ et $x \geq 0 \Leftrightarrow 36x = 4x^2 - 20x + 25$ et $x \geq 0 \Leftrightarrow 4x^2 - 56x + 25 = 0$ et $x \geq 0$
$\Delta = 56^2 - 4 \times 4 \times 25 = 16 \times 9 \times 19$ donc $x_1 = \dfrac{56 + 12\sqrt{19}}{8}$ et $x_2 = \dfrac{56 - 12\sqrt{19}}{8}$

$x_2 < 0$ donc ne convient pas car il est négatif donc $\alpha = x_1 = \dfrac{14 + 3\sqrt{19}}{2}$

2. g.

x	0		$\dfrac{9}{4}$		α		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0		$-$		
g	15	↗	$\dfrac{57}{2}$	↘	0		$-\infty$
$g(x)$		$+$			0	$-$	

3. $f'(x) = -2\sqrt{x} + (15 - 2x) \times \dfrac{1}{2\sqrt{x}} + 9$

$f'(x) = \dfrac{-4x + 15 - 2x + 18\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} = \dfrac{g(x)}{2\sqrt{x}}$

4. Pour tout $x > 0$, $f'(x)$ a le même signe que $g(x)$ donc

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	↗	M	↘	$-\infty$

$M = f(\alpha) = (15 - 2\alpha)\sqrt{\alpha} + 9\alpha$

ENONCE

A. Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = 2x^3 + x^2 - 1 .$$

1° Étudier les variations de g .

2° En déduire que l'équation $g(x) = 0$ admet sur $\mathbb{R}$ une unique solution α telle que $0{,}65 < \alpha < 0{,}66$.

B. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{1}{3}\left(x^2 + x + \frac{1}{x}\right)$.

On désigne par C , sa courbe représentative.

1° Étudier les limites de f aux bornes de l'ensemble de définition.

2° En utilisant la partie A, déterminer les variations de f et dresser son tableau des variations.

3° Soit I le point de C , d'abscisse -1 et J le point de C , d'abscisse 1.

a) Vérifier que la droite (IJ) est tangente en J à C .

b) Déterminer une équation de la tangente T en I à C .

c) Étudier la position de C , par rapport à T.

4° Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \frac{1}{3}(x^2 + x)$ et P sa courbe représentative dans le même repère que la courbe C .

a) Déterminer les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ de la fonction $x \longrightarrow f(x) - h(x)$.
Que peut-on dire des courbes C et P en $+\infty$ et en $-\infty$.

b) Étudier la position relative des courbes C et P.

5° Construire P, (IJ) , T et la courbe C .

CORRECTION

Partie A

1. $g(x) = 2x^3 + x^2 - 1$ donc $g'(x) = 6x^2 + 2x = 2x(3x + 1)$
d'où le signe de $g'(x)$:

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		0		$+\infty$
$2x$	$-$			$-$	0	$+$	
$3x+1$	$-$	0	$+$			$+$	
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$		
g	↗		↘		↗		

$g\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{26}{27}$ et $g(0) = -1$

2. g est croissante sur $]-\infty ; -1/3[$ et décroissante sur $]-1/3 ; 0]$ donc g admet un maximum en $-\frac{1}{3}$; $g\left(-\frac{1}{3}\right) < 0$ donc pour tout x de $]-\infty ; 0]$, $g(x) \leq -\frac{26}{27}$ donc l'équation $g(x) = 0$ n'admet pas de solution sur $]-\infty ; 0]$

g est définie dérivable, strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$, $g(]0 ; +\infty[) =]-1 ; +\infty[$, donc $0 \in g(]0 ; +\infty[)$ donc l'équation $g(x) = 0$ admet une seule solution α sur $]0 ; +\infty[$ donc sur $\mathbb{R}$.
$g(0{,}65) < 0$ et $g(0{,}66) > 0$ et l'équation $g(x) = 0$ admet une seule solution α sur $]0 ; +\infty[$ donc $0{,}65 < \alpha < 0{,}66$.

Partie B

1. $x^2 + x = x(x+1)$ donc $\lim\limits_{|x| \to +\infty} x^2 + x = +\infty$ de plus $\lim\limits_{|x| \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$ donc $\lim\limits_{|x| \to +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} x^2 + x = 0$ donc $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0^-} x^2 + x = 0$ donc $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$

2. $f'(x) = \frac{1}{3}\left(2x + 1 - \frac{1}{x^2}\right) = \frac{g(x)}{3x^2}$ donc $f'(x)$ a le même signe que $g(x)$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		0		α		$+\infty$
g	↗		$-\frac{26}{27}$	↘	-1	↗	0		
$g(x)$	$-$		$-$		$-$		0	$+$	

donc si $x <$ ■, $g(x) < 0$; si $x =$ ■, $g(x) = 0$; si $x >$ ■, $g(x) > 0$
d'où le tableau de variations de f :

x	$-\infty$	0	■	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	‖	$-$ 0 $+$	
f	$+\infty$ ↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘ m ↗ $+\infty$	

avec $m = f($■$)$

3. *a.* $f'(1) = \frac{2}{3}$ et $f(1) = 1$ donc une équation de la tangente T' en J à C est $y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$

$f(-1) = -\frac{1}{3}$ donc I a pour coordonnées $\left(-1 ; -\frac{1}{3}\right)$

Le point d'abscisse – 1 de la tangente T' a pour ordonnée :

$y = -\frac{2}{3} + \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}$ donc I appartient à T donc T' = (IJ)

3. *b.* $f'(-1) = -\frac{2}{3}$ et $f(-1) = -\frac{1}{3}$ donc une équation de la tangente T en I à C est $y = -\frac{2}{3}x - 1$

3. *c.* $f(x) - \left(-\frac{2}{3}x - 1\right) = \frac{1}{3}\left(x^2 + 3x + \frac{1}{x} + 3\right)$

$f(x) - \left(-\frac{2}{3}x - 1\right) = \frac{1}{3x}\left[x^3 + 3x^2 + + 3x + 1\right]$

$f(x) - \left(-\frac{2}{3}x - 1\right) = \frac{1}{3x}(x+1)^3$

donc $f(x) - \left(-\frac{2}{3}x - 1\right)$ a le même signe que $\frac{1}{3x}(x+1)^3$ donc que $\frac{x+1}{x}$

si $x < -1$, $f(x) - \left(-\frac{2}{3}x - 1\right) > 0$ donc C est au dessus de T

Si $x = -1$, $f(x) - \left(-\frac{2}{3}x - 1\right) = 0$, I est point de contact de C et de T.

si $-1 < x < 0$, $f(x) - \left(-\frac{2}{3}x - 1\right) < 0$ donc C est en dessous de T

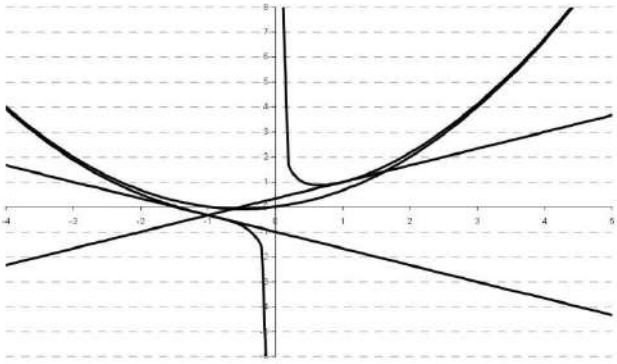
si $x > 0$, $f(x) - \left(-\frac{2}{3}x - 1\right) > 0$ donc C est au dessus de T

4. *a.* $f(x) - h(x) = \frac{1}{3x}$ donc $\lim\limits_{|x| \to +\infty} f(x) - h(x) = 0$

La courbe P est asymptote à la courbe C en $+\infty$ et $-\infty$.

4. *b.* $f(x) - h(x) = \frac{1}{3x}$ donc

si $x < 0$, $f(x) - h(x) < 0$ donc C est en dessous de T
si $x > 0$, $f(x) - h(x) > 0$ donc C est au dessus de T



ENONCE

1. On désigne par g la fonction numérique définie sur $[0 ; \pi]$ par : $g(x) = x\cos x - \sin x$.
Étudier g et dresser son tableau de variation.
En déduire le signe de $g(x)$ sur $[0 ; \pi]$.

2. Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie sur $[0 ; \pi]$ par : $\begin{cases} \text{si } x = 0, & f(0) = 1 \\ \text{si } x \in]0 ; \pi], & f(x) = \dfrac{\sin x}{x} \end{cases}$

On rappelle que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

Étudier les variations de f sur $]0 ; \pi]$.

3. Étude de f en 0

a. Prouver que, pour tout nombre réel $x \geq 0$: $0 \leq x - \sin x \leq \dfrac{x^3}{6}$

(Pour cela, on introduira la fonction φ définie sur $[0 ; +\infty[$ par : $\varphi(x) = \sin x - x + \dfrac{x^3}{6}$

on calculera les dérivées φ', φ'' et φ''' et on en déduira le signe de φ.)

b. Prouver que f est dérivable au point 0 et calculer $f'(0)$.

4. Construire la courbe représentative (C) de la fonction f dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$. (On prendra 3 cm pour unité.)
On tracera les tangentes connues.

CORRECTION

1. $g'(x) = 1 \times \cos x + x \times (-\sin x) - \cos x$ donc $g'(x) = -x\sin x$
$x \in [0 ; \pi]$ donc $\sin x \geq 0$

x	0		π
$g'(x)$	0	$-$	0
g	0 ↘		$-\pi$

g est strictement décroissante sur $[0 \pi]$ et $g(0) = 0$ donc pour tout x de $[0 ; \pi]$, $g(x) \leq 0$

2. si $x \in]0 ; \pi]$, $f'(x) = \dfrac{x\cos x - \sin x}{x^2} = \dfrac{g(x)}{x^2}$

Pour tout x de $]0 ; \pi]$, $g(x) < 0$ donc pour tout x de $]0 ; \pi]$, $f'(x) < 0$ donc f est strictement décroissante sur $]0 ; \pi]$.

3. *a.* $\varphi'(x) = \cos x - 1 + \dfrac{x^2}{2}$

$\varphi''(x) = (\varphi'(x))' = -\sin x + x$

$\varphi'''(x) = (\varphi''(x))' = -\cos x + 1$

Pour tout x de $[0 ; +\infty[$ $\cos x \leq 1$ donc $\varphi'''(x) \geq 0$

φ''' est la dérivée de φ'' donc φ'' est croissante sur $[0 ; +\infty[$

$\varphi''(0) = 0$ donc pour tout x de $[0 ; +\infty[$, $\varphi''(x) \geq 0$ donc pour tout $x \geq 0$, $x - \sin x \geq 0$

Pour tout x de $[0 ; +\infty[$ $\varphi''(x) \geq 0$

φ'' est la dérivée de φ' donc φ' est croissante sur $[0 ; +\infty[$

$\varphi'(0) = 0$ donc pour tout x de $[0 ; +\infty[$, $\varphi'(x) \geq 0$

Pour tout x de $[0 ; +\infty[$ $\varphi'(x) \geq 0$

φ est croissante sur $[0 ; +\infty[$

$\varphi(0) = 0$ donc pour tout x de $[0 ; +\infty[$, $\varphi(x) \geq 0$

soit $\sin x - x + \dfrac{x^3}{6} \geq 0$ donc $\dfrac{x^3}{6} \geq x - \sin x$ donc pour tout nombre réel $x \geq 0$, $0 \leq x - \sin x \leq \dfrac{x^3}{6}$

b. $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \dfrac{\dfrac{\sin x}{x} - 1}{x} = \dfrac{\sin x - x}{x^2}$ or pour tout nombre réel $x \geq 0$, $0 \leq x - \sin x \leq \dfrac{x^3}{6}$

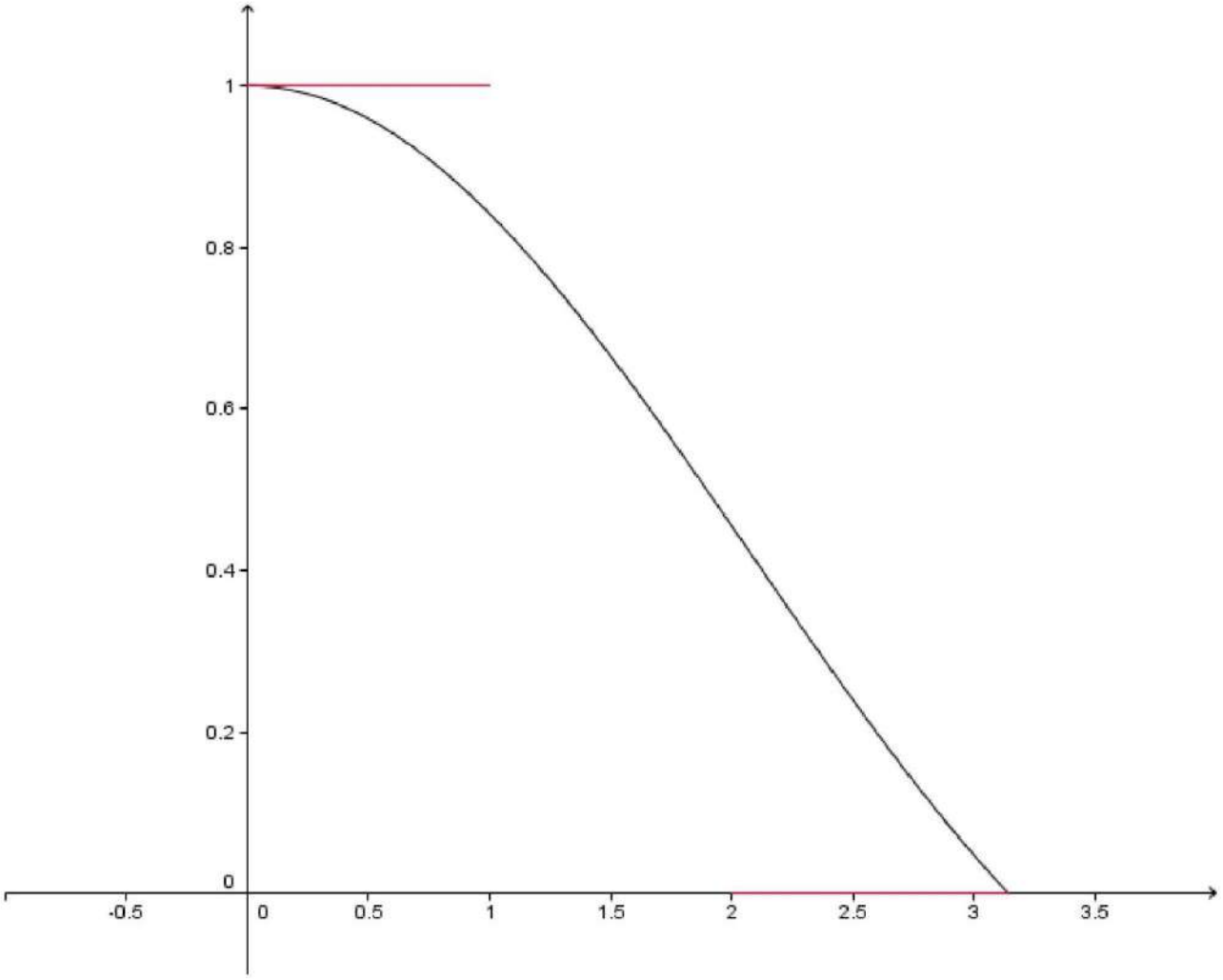
si $x \neq 0$, $x^2 > 0$, donc $0 \leq \dfrac{\sin x - x}{x^2} \leq \dfrac{x}{6}$

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \dfrac{x}{6} = 0$ donc d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \dfrac{\sin x - x}{x^2} = 0$

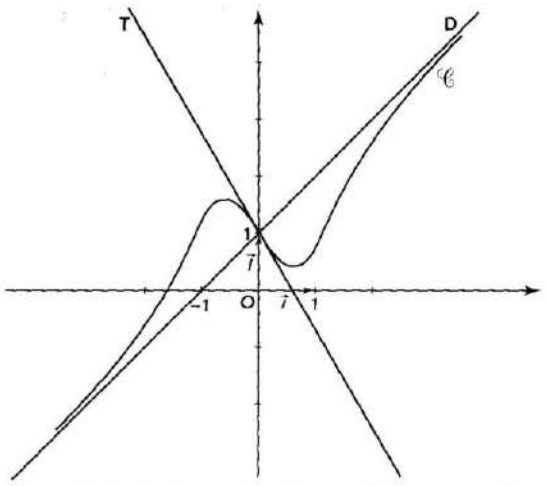
donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$

4.

x	0	0,4	0,8	1,2	1,6	2	2,4	2,8		
$f(x)$	1	0,97	0,90	0,78	0,62	0,45	0,28	0,12	0



Sur la figure ci-dessous, sont représentées la courbe représentative C dans le repère orthonormal (0; /,/) d'une fonction f définie et dérivable sur E ainsi que son asymptote D et sa tangente C, au point d'abscisse 0.



On sait que le point J(0 ; 1) est centre de symétrie de la courbe C, que l'asymptote D passe par les points K(– 1 ; 0) et J que la tangente C, a pour équation $y = (1 - e)\,x + 1$.

Partie A - Expression de f

1. Déterminer une équation de D.
2. On suppose qu'il existe deux réels m et p et une fonction cp définie sur R telle que, pour tout réel x, $f(x) = m\,x + p + \square(x)$ avec $\lim\limits_{x \to +\infty} \square(x) = 0$.

a. Déterminer m et p.

b. Démontrer que, pour tout réel x, $f(x) + f(-x) = 2$.

c. En déduire que la fonction □ est impaire puis que la fonction f', dérivée de f, est paire.

3. On suppose maintenant que, pour tout réel x : $\square(x) = (a\,x + b)\ e^{-x^2}$ où a et b sont des réels.
Démontrer, en utilisant les données et les résultats précédents, que $a = -e$ et $b = 0$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur R par $f(x) = 1 + x - x\ e^{-x^2}$ et on suppose que la courbe C représente la fonction f dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

1. *a.* Vérifier que, pour tout réel x : $f'(x) = 1 + (2\,x^2 - 1)\ e^{-x^2+1}$. Calculer $f'(0)$.

b. Vérifier que C, est bien la tangente â la courbe C au point d'abscisse 0.
Étudier la position relative de la courbe C et de sa tangente C,

2. Le graphique suggère l'existence d'un minimum relatif de f sur [0 ; 1] .

a. Démontrer que $f''(x)$ est du signe de $6\,x - 4\,x^3$

b. Démontrer que l'équation $f'(x) = 0$ admet une solution unique α sur] 0 ; 1].

c. Démontrer que $0{,}51 < \alpha < 0{,}52$.

d. Exprimer $f(a)$ sous la forme d'un quotient de deux polynômes en α.

CORRECTION

PARTIE A

1. (JK) est une droite qui n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées donc a une équation de la forme $y = a\,x + b$

Cette droite passe par les points J et K de coordonnées (0 ; 1) et (– 1 ; 0) donc $\begin{cases} 1 = a \times 0 + b \\ 0 = a \times (-1) + b \end{cases}$ donc $a = b = 1$

(JK) a pour équation $y = x + 1$.

2. *a.* $f(x) - (m\,x + p) = \square(x)$ or $\lim\limits_{x \to +\infty} \square(x) = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - (m\,x + p) = 0$

donc la droite d'équation $y = m\,x + p$ est asymptote à la courbe de f en $+\infty$, or la droite (JK) est asymptote à C en $+\infty$.
donc $m = 1$ et $p = 1$ donc $f(x) = x + 1 + \square(x)$

2. *b.* J(a ; b) est centre de symétrie de C donc pour tout x réel : $f(2\,a - x) + f(x) = 2\,b$
Ici $a = 0$ et $b = 1$ donc $f(x) + f(-x) = 2$

2. *c.* $f(x) = x + 1 + \square(x)$ donc $f(-x) = -x + 1 + \square(-x)$ en remplaçant dans $f(x) + f(-x) = 2$:
$x + 1 + \square(x) - x + 1 + \square(-x) = 2$ soit $\square(x) + \square(-x) = 0$ donc pour tout x réel : $\square(-x) = -\square(x)$ donc □ est impaire

f est définie dérivable sur ℝ
$f(x) + f(-x) = 2$ donc en dérivant : pour tout x réel : $f'(x) + [-f'(-x)] = 0$ soit $f'(-x) = f'(x)$ donc f' est paire

3. □ est impaire donc $\square(-x) = \square(x)$ donc pour tout x réel : $(-a\,x + b)\ e^{-x^2} = -(a\,x + b)\ e^{-x^2}$

pour tout x réel $e^{-x^2} \neq 0$, donc pour tout x réel : $-ax+b=-ax-b$
soit pour tout x réel : $2b=0$ donc $b=0$

$f(x)=x+1+axe^{-x^2}$

Soit $u(x)=e^{-x^2}$ donc $u'(x)=-2xe^{-x^2}$

donc $f'(x)=1+ae^{-x^2}-2ax^2e^{-x^2}$

La tangente en J a pour coefficient directeur $1-e$ donc $f'(0)=1-e$ donc $1+a=1-e$ donc $a=-e$

$f(x)=x+1-exe^{-x^2}$ soit $f(x)=x+1-xe^{-x^2+1}$

PARTIE B

1. *a.* D'après la première partie : $f'(x)=1-ae^{-x^2}+2ax^2e^{-x^2}$ avec $a=-e$

soit $f'(x)=1-e^{-x^2+1}+2x^2e^{-x^2+1}$ donc $f'(x)=1+(2x^2-1)e^{-x^2+1}$

$f'(0)=1-e$

1. *b.* La tangente T au point de la courbe d'abscisse 0 a pour équation $y=f'(0)x+f(0)$

$f(0)=1$ et $f'(0)=1-e$ donc T a pour équation $y=(1-e)x+1$

$f(x)-[(1-e)x+1]=x+1-xe^{-x^2+1}-(1-e)x-1$

$f(x)-[(1-e)x+1]=(e-e^{-x^2+1})x$

$f(x)-[(1-e)x+1]=e(1-e^{-x^2})x$

Pour tout x réel, $-x^2 \leq 0$ donc $e^{-x^2} \leq 1$ donc si $1-e^{-x^2} \geq 0$

$f(x)-[(1-e)x+1]$ a le même signe que x donc si $x<0$, la courbe est en dessous de la tangente
si $x=0$, point de contact de la courbe et de la tangente
si $x>0$, la courbe est au dessus de la tangente

2. *a.* $f'(x)=1+(2x^2-1)e^{-x^2+1}$

$f''(x)=4xe^{-x^2+1}+(2x^2-1)(-2xe^{-x^2+1})$

$f''(x)=2xe^{-x^2+1}[2-(2x^2-1)]$

$f''(x)=2xe^{-x^2+1}(3-2x^2)$

Pour tout x réel, $e^{-x^2}>0$
donc $f''(x)$ a le même signe que $2x(3-2x^2)$
soit $f''(x)$ a le même signe que $6x-4x^3$

2. *b.* $3-2x^2=0 \Leftrightarrow x=\sqrt{\frac{3}{2}}$ ou $x=-\sqrt{\frac{3}{2}}$ donc $3-2x^2$ est positif entre les racines donc sur $[0\ ;\ 1]$

donc sur $]0\ ;\ 1]$, $2x(3-2x^2)>0$ d'où le tableau de variation de f':

x	0		1
$f''(x)$	0	+	
f'	$1-e$	↗	2

La fonction f' est définie continue strictement croissante sur $[0\ ;\ 1]$, $f'([0\ ;\ 1])=[1-e\ ;\ 2]$
$0 \in [1-e\ ;\ 2]$ donc l'équation $f'(x)=0$ admet une seule solution α sur $[0\ ;\ 1]$.

2. *c.* $f'(0{,}51)<0$ et $f'(0{,}52)>0$ et f' est strictement croissante sur $[0\ ;\ 1]$, donc $0{,}51<\alpha<0{,}52$.

2. *d.* $f'(\alpha)=0 \Leftrightarrow 1+(2\alpha^2-1)e^{-\alpha^2+1}$

donc $e^{-\alpha^2+1}=\dfrac{-1}{2\alpha^2-1}$

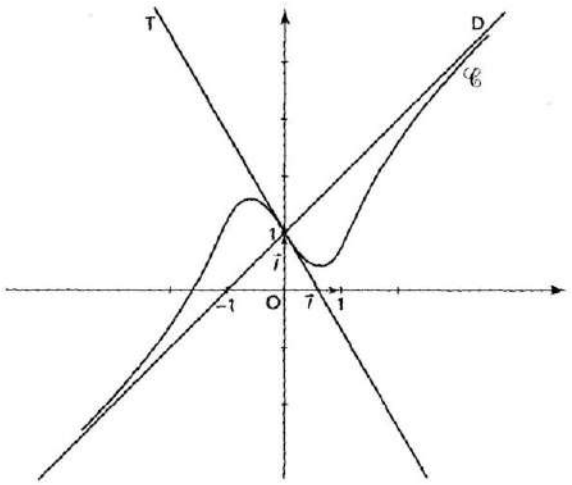
$f(\alpha)=1+\alpha-\alpha e^{-\alpha^2+1}$ donc $f(\alpha)=1+\alpha+\dfrac{\alpha}{2\alpha^2-1}$

$f(\alpha)=\dfrac{2\alpha^3+2\alpha^2-1}{2\alpha^2-1}$

ENONCE

Sur la figure ci-contre, sont représentées la courbe représentative C dans le repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ d'une fonction f définie et dérivable sur R ainsi que son asymptote D et sa tangente T au point d'abscisse 0.

On sait que le point J(0 ; 1) est centre de symétrie de la courbe C, que l'asymptote D passe parles points K(– 1 ; 0) et J, que la tangente T a pour équation $y = (1 - e)x + 1$.



Partie A - Expression de f

1. Déterminer une équation de D.

2. On suppose qu'il existe deux réels m et p et une fonction □ définie sur R telle que, pour tout réel x, $f(x) = m x + p + □(x)$ avec $\lim\limits_{x \to +\infty} □(x) = 0$.

a) Déterminer m et p.

b) Démontrer que, pour tout réel x, $f(x) + f(-x) = 2$.

c) En déduire que la fonction □ est impaire puis que la fonction f ', dérivée de f, est paire.

3. On suppose maintenant que, pour tout réel x $□(x) = (a x + b)\ e^{-x^2}$ où a et b sont des réels.

Démontrer, en utilisant les données et les résultats précédents, que $a = -e$ et $b = 0$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur R par $f(x) = 1 + x - x\ e^{-x^2+1}$ et on suppose que la courbe C représente la fonction f dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

1. *a*) Vérifier que, pour tout réel x : $f'(x) = 1 + (2x^2 - 1)\ e^{-x^2}$.

Calculer $f'(0)$.

b) Vérifier que T est bien la tangente â la courbe C au point d'abscisse 0. Étudier la position relative de la courbe C et de sa tangente T

2. Le graphique suggère l'existence d'un minimum relatif de f sur [0 ; 1] .

a) Démontrer que $f''(x)$ est du signe de $6x - 4x^3$.

b) Démontrer que l'équation $f'(x) = 0$ admet une solution unique α sur [0; 11 .

c) Démontrer que $0{,}51 < α < 0{,}52$.

d) Exprimer $f(α)$ sous la forme d'un quotient de deux polynômes en α.

CORRECTION

PARTIE A

1. (JK) est une droite qui n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées donc a une équation de la forme $y = a x + b$

Cette droite passe par les points J et K de coordonnées (0 ; 1) et (– 1 ; 0) donc $\begin{cases} 1 = a \times 0 + b \\ 0 = a \times (-1) + b \end{cases}$ donc $a = b = 1$

(JK) a pour équation $y = x + 1$.

2. *a*. $f(x) - (m x + p) = □(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} □(x) = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - (m x + p) = 0$

donc la droite d'équation $y = m x + p$ est asymptote à la courbe de f en $+\infty$, or la droite (JK) est asymptote à C en $+\infty$.
donc $m = 1$ et $p = 1$ donc $f(x) = x + 1 + □(x)$

2. *b*. J(a ; b) est centre de symétrie de C donc pour tout x réel : $f(2a - x) + f(x) = 2b$
Ici $a = 0$ et $b = 1$ donc $f(x) + f(-x) = 2$

2. *c*. $f(x) = x + 1 + □(x)$ donc $f(-x) = -x + 1 + □(-x)$ en remplaçant dans $f(x) + f(-x) = 2$:
$x + 1 + □(x) - x + 1 + □(-x) = 2$ soit $□(x) + □(-x) = 0$ donc pour tout x réel : $□(-x) = -□(x)$
□ est impaire

f est définie dérivable sur ℝ et $f(x) + f(-x) = 2$ donc en dérivant : pour tout x réel : $f'(x) + [-f'(-x)] = 0$ soit $f'(-x) = f'(x)$
f' est paire

3. □ est impaire donc $□(-x) = □(x)$ donc pour tout x réel : $(-a x + b)\ e^{-x^2} = -(a x + b)\ e^{-x^2}$

pour tout x réel $e^{-x^2} \neq 0$, donc pour tout x réel : $-a x + b = -a x - b$ soit pour tout x réel : $2b = 0$ donc $b = 0$

$f(x) = x + 1 + a x e^{-x^2}$

Soit $u(x) = e^{-x^2}$ donc $u'(x) = -2x e^{-x^2}$

donc $f'(x) = 1 + a\ e^{-x^2} - 2a x^2\ e^{-x^2}$

La tangente en J a pour coefficient directeur 1 – e
donc $f'(0) = 1 - e$ donc $1 + a = 1 - e$ donc $a = -e$
$f(x) = x + 1 - e\,x\,e^{-x^2}$ soit $f(x) = x + 1 - x e^{-x^2+1}$

PARTIE B

1. *a.* D'après la première partie :

$f'(x) = 1 - a\ e^{-x^2} + 2\,a\,x^2\ e^{-x^2}$ avec $a = -e$

soit $f'(x) = 1 - e^{-x^2+1} + 2\,x^2\ e^{-x^2+1}$

$f'(x) = 1 + (2\,x^2 - 1)\ e^{-x^2+1}$

$f'(0) = 1 - e$

1. *b.* La tangente T au point de la courbe d'abscisse 0 a pour équation $y = f'(0)\,x + f(0)$
$f(0) = 1$ et $f'(0) = 1 - e$ donc T a pour équation $y = (1 - e)\,x + 1$

$f(x) - [(1 - e)\,x + 1] = x + 1 - x e^{-x^2+1} - (1 - e)\,x - 1$

$f(x) - [(1 - e)\,x + 1] = (e - e^{-x^2+1})\,x$

$f(x) - [(1 - e)\,x + 1] = e\,(1 - e^{-x^2})\,x$

Pour tout x réel, $-x^2 \leq 0$ donc $e^{-x^2} \leq 1$ donc si $1 - e^{-x^2} \geq 0$

$f(x) - [(1 - e)\,x + 1]$ a le même signe que x donc
si $x < 0$, la courbe est en dessous de la tangente
si $x = 0$, point de contact de la courbe et de la tangente
si $x > 0$, la courbe est au dessus de la tangente

2. *a.* $f'(x) = 1 + (2\,x^2 - 1)\ e^{-x^2+1}$

$f''(x) = 4\,x e^{-x^2+1} + (2\,x^2 - 1)(-2\,x e^{-x^2+1})$

$f''(x) = 2\,x\ e^{-x^2+1}[2 - (2\,x^2 - 1)]$

$f''(x) = 2\,x\ e^{-x^2+1}(3 - 2\,x^2)$

Pour tout x réel, $e^{-x^2} > 0$
donc $f''(x)$ a le même signe que $2\,x\,(3 - 2\,x^2)$ soit $f''(x)$ a le même signe que $6\,x - 4\,x^3$

2. *b.* $3 - 2\,x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{3}{2}}$ ou $x = -\sqrt{\frac{3}{2}}$ donc $3 - 2\,x^2$ est positif entre les racines donc sur [0 ; 1]
donc sur] 0 ; 1], $2\,x\,(3 - 2\,x^2) > 0$ d'où le tableau de variation de f':

x	0		1
$f''(x)$	0	+	
f'	1 – e	↗	2

La fonction f' est définie continue strictement croissante sur [0 ; 1], $f'([0 ; 1]) = [1 - e ; 2]$
$0 \in [1 - e ; 2]$ donc l'équation $f'(x) = 0$ admet une seule solution α sur [0 ; 1].

2. *c.* $f'(0{,}51) < 0$ et $f'(0{,}52) > 0$ et f' est strictement croissante sur [0 ; 1], donc $0{,}51 < \alpha < 0{,}52$.

2. *d.* $f'(\alpha) = 0 \Leftrightarrow 1 + (2\alpha^2 - 1)\ e^{-\alpha^2+1}$

donc $e^{-\alpha^2+1} = \frac{-1}{2\alpha^2 - 1}$

$f(\alpha) = 1 + \alpha - \alpha\ e^{-\alpha^2+1}$ donc $f(\alpha) = 1 + \alpha + \frac{\alpha}{2\alpha^2 - 1}$

$f(\alpha) = \frac{2\alpha^3 + 2\alpha^2 - 1}{2\alpha^2 - 1}$

ENONCE

Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire

La fonction h est définie sur $]-1\ ;+\infty[$ par : $h(x)=\exp\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$

1. Calculer la fonction dérivée h'. En déduire les variations de h sur $]-1\ ;+\infty[$.
2. Déterminer les limites de h en -1 et en $+\infty$.
3. Montrer que, pour tout $x>-1$, on a : $0<h(x)<e$.

Partie B : Etude de la fonction f

Dans cette partie, on s'intéresse à la fonction f définie sur l'intervalle $]-1\ ;+\infty[$ par : $f(x)=x+1-\exp\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$

On appelle C_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormal, l'unité graphique étant 5 cm. On désigne par f' et f'' les dérivées premières et seconde de f.

1. Démontrer que la droite (D) d'équation $y=x-e+1$ est asymptote, à la courbe C_f, au voisinage de $+\infty$.
Préciser la position relative de (D) et C_f.
2. Etude des variations de la fonction f' sur $]-1\ ;+\infty[$

a. Pour $x\in\ ]-1\ ;+\infty[$ calculer $f'(x)$ et $f''(x)$.

Vérifier que $f''(x)=\dfrac{2x+1}{(x+1)^4}\exp\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$ En déduire le sens de variation de f'.

b. Dresser le tableau de variation de f'. (On admettra que $\lim\limits_{x\to-1}f'(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=1$.)

3. Démontrer que l'équation $f'(x)=0$ admet sur $]-1\ ;+\infty[$ deux solutions dont l'une est 0.
Dans la suite de l'exercice on notera α la solution non nulle.
Donner une valeur approchée de α au centième près
4. Etude des variations de f sur $]-1\ ;+\infty[$.

a. Etudier les variations de f.

b. Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

c. Dresser le tableau de variation de f.

Partie C: Prolongement de la fonction f en -1

On pourra utiliser sans justification que $\lim\limits_{x\to+\infty}x\,e^{-x}=0$

On considère la fonction g définie sur $[-1\ ;+\infty[$ par : $\begin{cases} g(-1)=0 \\ g(x)=f(x) \text{ si } x>-1. \end{cases}$

On appelle C_g la courbe représentative de la fonction g dans le repère de la partie B.

Etude de la dérivabilité de g en -1.

a. Montrer que l'on peut écrire : $\dfrac{g(x)-g(-1)}{x-(-1)}=1-\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{x}{x+1}\exp\left(\dfrac{x}{x+1}\right)\right)$

b. Pour $x\in\ ]-1\ ;+\infty[$ déterminer la limite lorsque x tend vers -1 de $\dfrac{x}{x+1}$ puis de $\dfrac{x}{x+1}\exp\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$

c. En déduire que g est dérivable en -1 et préciser sa dérivée $g'(-1)$.

CORRECTION

Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire

1. h est définie dérivable sur $]-1\,;+\infty[$ et $h'(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2}\exp\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$ donc $h'(x) > 0$

h est donc strictement croissante sur $]-1\,;+\infty[$.

2. $\lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{x}{x+1} = -\infty$. Soit $X = \dfrac{x}{x+1}$, $\lim\limits_{x\to -1^+} X = -\infty$ or $\lim\limits_{x\to -\infty} e^X = 0$ donc $\lim\limits_{x\to -1^+} h(x) = 0$

$\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x}{x+1} = 1$ donc $\lim\limits_{x\to +\infty} h(x) = e$

3. h est strictement croissante sur $]-1\,;+\infty[$, donc pour tout $x > -1$, $\lim\limits_{x\to -1^+} h(x) < h(x) < \lim\limits_{x\to +\infty} h(x)$

donc pour tout $x > -1$, on a : $0 < h(x) < e$.

Partie B : Etude de la fonction f

1. $f(x) - (x - e + 1) = e - \exp\left(\dfrac{x}{x+1}\right) = e - h(x)$

$\lim\limits_{x\to +\infty} h(x) = e$ donc $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) - (x - e + 1) = 0$

La droite (D) d'équation $y = x - e + 1$ est asymptote, à la courbe C_f, au voisinage de $+\infty$.

$e - \exp\left(\dfrac{x}{x+1}\right) > 0 \Leftrightarrow e > \exp\left(\dfrac{x}{x+1}\right) \Leftrightarrow 1 > \dfrac{x}{x+1} \Leftrightarrow 1 - \dfrac{x}{x+1} > 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{x+1} > 0$

$x > -1$ donc $x + 1 > 0$ donc pour tout $x > -1$, $e - \exp\left(\dfrac{x}{x+1}\right) > 0$ soit $f(x) - (x - e + 1) > 0$

La courbe C_f est donc au dessus de (D) sur $]-1\,;+\infty[$.

2. *a.* $f(x) = x + 1 - h(x)$ donc $f'(x) = 1 - h'(x) = 1 - \dfrac{1}{(x+1)^2}\exp\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$

Soit $u(x) = -\dfrac{1}{(x+1)^2}$ alors $u'(x) = \dfrac{2(x+1)}{(x+1)^4}$

$v(x) = \exp\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$ donc $v'(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2}\exp\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$

donc $f''(x) = \dfrac{2(x+1)}{(x+1)^4}\exp\left(\dfrac{x}{x+1}\right) - \dfrac{1}{(x+1)^4}\exp\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$

$f''(x) = \dfrac{2x+1}{(x+1)^4}\exp\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$

$(x+1)^4 > 0$ sur $]-1\,;+\infty[$ et la fonction exponentielle étant strictement positive, le signe de f'' est celui de $2x + 1$

x	-1		$-0,5$		$+\infty$
$2x+1$	‖	$-$	0	$+$	
$f''(x)$	‖	$-$	0	$+$	
f'	‖ 1	↘	$1 - 4e^{-1}$	↗	1

3. Soit $I =]-1\,;-0,5]$ f' est définie continue sur I, strictement décroissante sur I ; $f'(I) = [1 - 4e^{-1}\,;1[\subset]0\,;1[\subset f(I)$ donc l'équation $f'(x) = 0$ admet une seule solution α sur I.
Soit $J =]-0,5\,;+\infty[$ f' est définie continue sur J, strictement croissante sur J ;
$f'(J) =]1 - 4e^{-1}\,;1[\subset]0\,;1[\subset f(J)$ donc l'équation $f'(x) = 0$ admet une seule solution sur J.
$f'(0) = 0$ et $0 \in J$ donc la solution de $f'(x) = 0$ sur J est 0.
$f'(-0,72) > 0$ et $f'(-0,71) > 0$ de plus f' est strictement décroissante sur I donc $-0,72 < \alpha < -0,71$
On en déduit le signe de $f'(x)$:

x	-1		α		0		$+\infty$
f'	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	
f	‖ 0	↗	$f(\alpha)$	↘	0	↗	$+\infty$

b. $f(x) = x + 1 - h(x)$ or $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = e$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -1^+} h(x) = 0$ donc $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = 0$

Partie C: Prolongement de la fonction *f* en – 1

a. Si $x \neq -1$, $\dfrac{g(x) - g(-1)}{x - (-1)} = \dfrac{f(x) - 0}{x + 1} = \dfrac{1}{x+1}\left(x + 1 - \exp\left(\dfrac{x}{x+1}\right)\right)$

$\dfrac{g(x) - g(-1)}{x - (-1)} = 1 - \dfrac{1}{x+1}\exp\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$ donc $\dfrac{g(x) - g(-1)}{x - (-1)} = 1 - \dfrac{1}{x}\left(\dfrac{x}{x+1}\exp\left(\dfrac{x}{x+1}\right)\right)$

b. $\lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{x}{x+1} = -\infty$. Soit $X = -\dfrac{x}{x+1}$, $\lim\limits_{x \to -1^+} X = +\infty$

$\left(\dfrac{x}{x+1}\exp\left(\dfrac{x}{x+1}\right)\right) = -X e^{-X}$ or $\lim\limits_{x \to +\infty} X e^{-X} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to -1^+} \left(\dfrac{x}{x+1}\exp\left(\dfrac{x}{x+1}\right)\right) = 0$

$\lim\limits_{x \to -1^+} 1 - \dfrac{1}{x}\left(\dfrac{x}{x+1}\exp\left(\dfrac{x}{x+1}\right)\right) = 1$ donc $\lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{g(x) - g(-1)}{x - (-1)} = 1$

c. $\lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{g(x) - g(-1)}{x - (-1)} = 1$ donc g est dérivable en – 1 et $g'(-1) = 1$

ENONCE

Soit a et b deux nombres réels et g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = e^{(x^2+ax+b)}$.
Quelles sont les valeurs de a et de b pour lesquelles le tableau de variations de g est celui donné ci-dessous ?

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$e^{-\frac{5}{4}}$	$\nearrow$	$+\infty$

CORRECTION

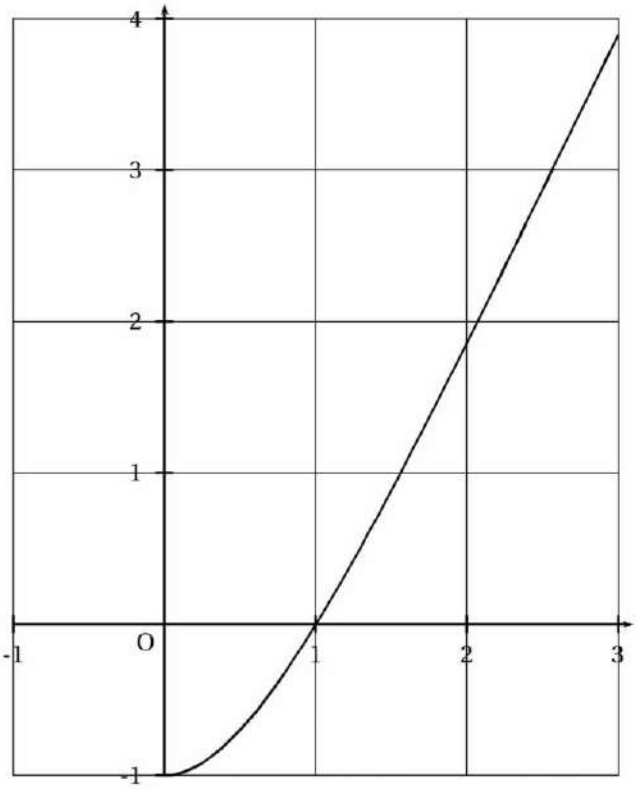
$g'(1,5) = 0$ or $g'(x) = (2x + a)\ e^{(x^2+ax+b)}$
La fonction exponentielle ne s'annule pas donc $3 + a = 0$ soit $a = -3$
$g(1,5) = e^{-\frac{5}{4}}$ donc $\frac{9}{4} + a\frac{3}{2} + b = -\frac{5}{4}$ donc $\frac{9}{4} - \frac{9}{2} + b = -\frac{5}{4}$ donc $b = 1$

Enoncé

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = (x - 1)(2 - e^{-x}).$$

Sa courbe représentative C est tracée dans le repère orthonormal ci-contre.



1. *a.* Étudier la limite de f en $+\infty$.

b. Montrer que la droite Δ d'équation $y = 2x - 2$ est asymptote à C .

On pourra utiliser sans justification que $\lim\limits_{x \to +\infty} x e^{-x} = 0$

c. Étudier la position relative de C et Δ.

d. Calculer $f'(x)$. Montrer que $f'(x) = x e^{-x} + 2(1 - e^{-x})$.

e. En déduire que, pour tout réel x strictement positif, $f'(x) \geq 0$.

c. Préciser la valeur de $f'(0)$, puis établir le tableau de variations de f.

2. Déterminer le point A de C où la tangente à C est parallèle à Δ.

3. Soit m un réel, $m \geq -1$.

Montrer que l'équation $f(x) = m$ admet une seule solution sur $[0 ; +\infty[$.

Dans le cas où $m = 1$, donner un encadrement à 10^{-2} près de cette solution.

Correction

1. *a.* $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

b. $f(x) - (2x - 2) = (x - 1)(2 - e^{-x}) - (2x - 2)$

$f(x) - (2x - 2) = 2x - 2 - (x - 1)e^{-x} - 2x + 2$

$f(x) - (2x - 2) = -x e^{-x} + e^{-x}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x e^{-x} = 0$

donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - (2x - 2) = 0$

la droite Δ d'équation $y = 2x - 2$ est asymptote à C en $+\infty$.

c. $f(x) - (2x - 2) = -(x - 1)e^{-x}$

La fonction exponentielle est strictement positive

donc $f(x) - (2x - 2)$ *a* le même signe que $-(x - 1)$

Si $x > 1$ alors $x - 1 > 0$ donc $-(x - 1) < 0$ donc C est en dessous de Δ.

Si $x = 1$ alors $-(x - 1)e^{-x} = 0$ donc C et Δ se coupent au point d'abscisse 1.

Si $x < 1$ alors $x - 1 < 0$ donc $-(x - 1) > 0$ donc C est au dessus de Δ.

d. Soit $u(x) = x - 1$ $\quad u'(x) = 1$

$v(x) = e^{-x}$ $\quad v'(x) = -e^{-x}$

$f'(x) = (2 - e^{-x}) + (x - 1)e^{-x} = 2 - e^{-x} + x e^{-x} - e^{-x}$

$f'(x) = 2 - 2e^{-x} + x e^{-x}$

$f'(x) = x e^{-x} + 2(1 - e^{-x})$.

e. Pour tout $x \geq 0$, $e^{-x} \leq 1$ donc $1 - e^{-x} \geq 0$

$x e^{-x} \geq 0$ donc $f'(x) \geq 0$ (somme de termes positifs).

c. $f'(0) = 0$

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	0	+	
f	-1	↗	$+\infty$

2. Pour que T et Δ soient parallèles, il faut que leurs coefficients directeurs soient égaux.

Le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse x_0 est $f'(x_0)$. Le coefficient directeur de Δ est 2, il faut donc résoudre $f'(x) = 2$.

$f'(x) = 2 - 2e^{-x} + x e^{-x} = 2 \Leftrightarrow -2e^{-x} + x e^{-x} = 0$

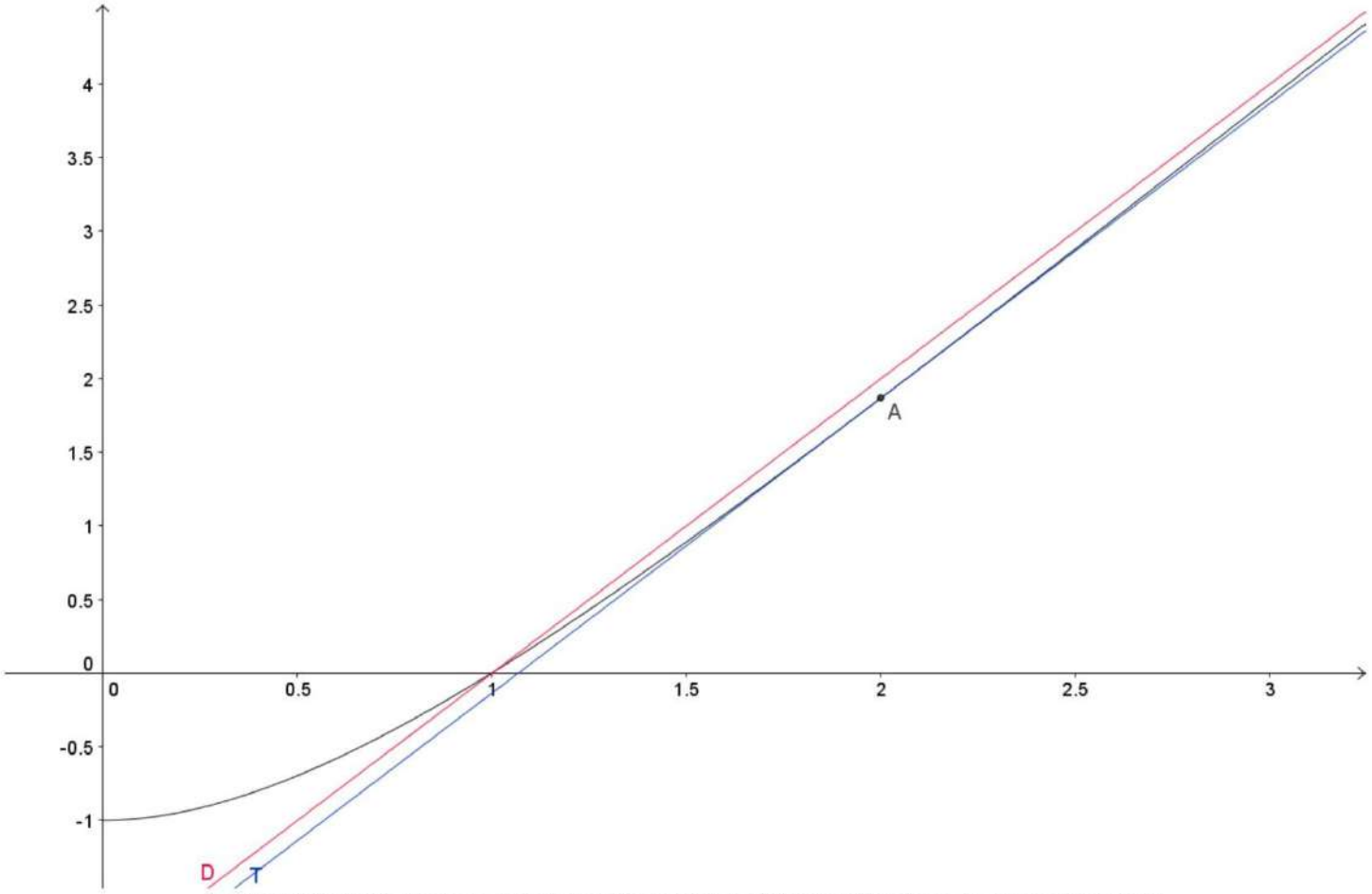
$\Leftrightarrow (x - 2)e^{-x} = 0 \Leftrightarrow x = 2$

$f(2) = 2 - e^{-2}$ donc le point A de C où la tangente à C est parallèle à Δ est A $(2 ; 2 - e^{-2})$

3. f est définie continue strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$, $f([0 ; +\infty[) = [-1 ; +\infty[$

$m \geq -1$ donc $m \in [-1 ; +\infty[$ donc l'équation $f(x) = m$ admet une seule solution sur $[0 ; +\infty[$.

$f(1,55) < 1$ et $f(1,56) > 1$ donc $1,55 < \alpha < 1,56$.



L'asymptote Δ est en rouge, la tangente T au point A d'abscisse 2 en bleu, la courbe C en noir.

LA REUNION juin 2007

On pourra utiliser sans justification que $\lim\limits_{x \to +\infty} x\,\mathrm{e}^{-x} = 0$

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x\,\mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{x} - 1} \text{ si } x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}.$$

On note C la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

1. *a.* Déterminer la limite de f en $-\infty$.

b. Établir que, pour tout nombre réel x non nul, on a :

$$f(x) = x\left(1 + \frac{1}{\mathrm{e}^{x} - 1}\right).$$

En déduire la limite de f en $+\infty$.

2. Donner, sans démontrer, la limite suivante : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\mathrm{e}^{x} - 1}$

et démontrer que f est continue en 0.

3. *a.* Démontrer que, pour tout nombre réel x, on a :

$$\mathrm{e}^{x} \geq x + 1,$$

et que l'égalité n'a lieu que pour $x = 0$.

b. Calculer la dérivée f' de la fonction f et déterminer la fonction g telle que, pour tout nombre réel x non nul,

$$f'(x) = \frac{\mathrm{e}^{x}\, g(x)}{(\mathrm{e}^{x} - 1)^{2}}.$$

c. Donner le tableau des variations de f.

4. Soient x un nombre réel non nul et les points $M(x ; f(x))$ et $M'(-x ; f(-x))$ de la courbe C.

a. Établir que $f(-x) = \dfrac{x}{\mathrm{e}^{x} - 1}$, puis déterminer le coefficient directeur de la droite (MM').

b. On admet que la fonction f est dérivable en 0. Que suggère alors le résultat précédent ?

CORRECTION

1. *a.* Soit $X = -x$, $\lim\limits_{x \to -\infty} X = 0$ et $x\,\mathrm{e}^{x} = X\,\mathrm{e}^{-X}$

$\lim\limits_{X \to +\infty} X\,\mathrm{e}^{-X} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} x\,\mathrm{e}^{x} = 0$ de plus $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^{x} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$

b. pour tout nombre réel x non nul, $f(x) = \dfrac{x\,\mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{x} - 1}$ or $x\left(1 + \dfrac{1}{\mathrm{e}^{x} - 1}\right) = x\,\dfrac{\mathrm{e}^{x} - 1 + 1}{\mathrm{e}^{x} - 1} = \dfrac{x\,\mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{x} - 1} = f(x)$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{\mathrm{e}^{x} - 1}\right) = 1$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

2. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\mathrm{e}^{x} - 1}{x} = 1$ donc $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\mathrm{e}^{x} - 1} = \dfrac{1}{1} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x\,\mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{x} - 1} = 0 \times 1 = 0$ donc $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$ donc f est continue en 0.

3. *a.* Soit $h(x) = \mathrm{e}^{x} - (x + 1)$, $h'(x) = \mathrm{e}^{x} - 1$ donc on obtient le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
h		↘	0	↗	

h est strictement décroissante sur $]-\infty ; 0]$ et strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$ h admet un minimum en 0 pour tout nombre réel x, on a : $h(x) \geq 0$ donc $\mathrm{e}^{x} \geq x + 1$, et l'égalité n'a lieu que pour $x = 0$.

b. $f'(x) = \dfrac{(x+1)\,\mathrm{e}^{x}(\mathrm{e}^{x} - 1) - \mathrm{e}^{x}\,x\,\mathrm{e}^{x}}{(\mathrm{e}^{x} - 1)^{2}}$ donc $f'(x) = \mathrm{e}^{x}\,\dfrac{\mathrm{e}^{x} - (x+1)}{(\mathrm{e}^{x} - 1)^{2}}$ soit $g(x) = \mathrm{e}^{x} - (x + 1)$

c.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
f	0	↗	0	↗	$+\infty$

4. *a.* $f(-x) = -x\,\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{-x} - 1} = -x\,\dfrac{\mathrm{e}^{-x} \times \mathrm{e}^{x}}{(\mathrm{e}^{-x} - 1)\,\mathrm{e}^{x}} = \dfrac{x}{\mathrm{e}^{x} - 1}$

Le coefficient directeur de la droite (MM') est égal à : $\dfrac{y_M - y_{M'}}{x_M - x_{M'}}$ or $y_M - y_{M'} = \dfrac{x\,\mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{x} - 1} - \dfrac{x}{\mathrm{e}^{x} - 1} = x$

$x_M - x_{M'} = x - (-x) = 2x$ donc $\dfrac{y_M - y_{M'}}{x_M - x_{M'}} = \dfrac{1}{2}$

b. On sait que la tangente au point A d'abscisse 0 est, quand elle existe, la position limite de la droite (AM) quand M est un point de la courbe qui tend vers A donc d'après la question précédente on pourrait penser que $f'(0) = \dfrac{1}{2}$

Quand on a à chercher une limite et qu'il y a une difficulté, il faut distinguer 2 cas :

- x tend vers ∞ ($+\infty$ ou $-\infty$) : on met alors x avec le plus grand exposant possible en facteur et on SIMPLIFIE
- x tend vers une valeur finie a : on met alors $x - a$ en facteur avec le plus grand exposant possible et on SIMPLIFIE.

EXERCICE 1

$f(x) = \dfrac{x^3 - x - 6}{x^2 - 4}$ $\quad D_f =]-\infty ; -2[\cup]-2 ; 2[\cup]2 ; +\infty[$

Déterminer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.

x tend vers ∞ ($+\infty$ ou $-\infty$) : on met alors x avec le plus grand exposant possible en facteur et on SIMPLIFIE

$f(x) = \dfrac{x^3\left(1 - \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{6}{x^3}\right)}{x^2\left(1 - \dfrac{4}{x^2}\right)}$ donc $f(x) = x\dfrac{\left(1 - \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{6}{x^3}\right)}{\left(1 - \dfrac{4}{x^2}\right)}$

Quand x tend vers $-\infty$ ou vers $+\infty$ alors $\left(1 - \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{6}{x^3}\right)$ tend vers 1 et $\left(1 - \dfrac{4}{x^2}\right)$ tend vers 1 donc

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\left(1 - \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{6}{x^3}\right)}{\left(1 - \dfrac{4}{x^2}\right)} = 1$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} x\dfrac{\left(1 - \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{6}{x^3}\right)}{\left(1 - \dfrac{4}{x^2}\right)} = -\infty$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\left(1 - \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{6}{x^3}\right)}{\left(1 - \dfrac{4}{x^2}\right)} = 1$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} x\dfrac{\left(1 - \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{6}{x^3}\right)}{\left(1 - \dfrac{4}{x^2}\right)} = +\infty$ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

Déterminer les limites de f en -2 et 2.

$f(x) = \dfrac{x^3 - x - 6}{x^2 - 4}$

Quand x tend vers -2 alors $x^3 - x - 6$ tend vers -12 et $x^2 - 4$ tend vers 0 donc $f(x)$ tend vers ∞ mais il faut déterminer le signe
$x^2 - 4$ est une expression du second degré qui s'annule en -2 et 2
donc $x^2 - 4 > 0$ si $x < -2$ et $x^2 - 4 < 0$ si $-2 < x < 2$ donc 2 cas se présentent :

***x* tend vers -2 et $x < -2$**

alors $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x < -2}} x^2 - 4 = 0^+$

et $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x < -2}} x^3 - x - 6 = -12$ donc $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x < -2}} f(x) = -\infty$ (d'après la règle des signes)

***x* tend vers -2 et $-2 < x < 2$**

$\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x > -2}} x^2 - 4 = 0^-$ et $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x > -2}} x^3 - x - 6 = -12$ donc $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x > -2}} f(x) = +\infty$ (d'après la règle des signes)

on n'a pas à traiter le cas $x > 2$, car on ne peut avoir simultanément, x tend vers -2 en restant plus grand que 2

Quand x tend vers 2 alors $x^3 - x - 6$ tend vers 0 et $x^2 - 4$ tend vers 0 donc on une forme indéterminée.
x tend vers une valeur finie 2 : on met alors $x - 2$ en facteur avec le plus grand exposant possible et on SIMPLIFIE.
$x^3 - x - 6 = (x - 2)(a x^2 + b x + c)$
$x^3 - x - 6 = a x^3 + (-2a + b) x^2 + (-2b + c) x - 2c$
donc par identification : $a = 1$; $-2a + b = 0$; $-2b + c = -1$ et $-2c = -6$
donc $a = 1$; $b = 2$ et $c = 3$
$x^3 - x - 6 = (x - 2)(x^2 + 2x + 3)$
$x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$

donc $f(x) = \dfrac{(x - 2)(x^2 + 2x + 3)}{(x - 2)(x + 2)}$

$f(x) = \dfrac{x^2 + 2x + 3}{x + 2}$

Quand x tend vers 2 alors $x^2 + 2x + 3$ tend vers 1 et $x + 2$ tend vers 4 donc $f(x)$ tend vers $\dfrac{11}{4}$

$\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \dfrac{11}{4}$.

EXERCICE 2

$f(x) = \dfrac{2x^2 - 5x + 3}{x^2 + 7x - 8}$ $\quad D_f =]-\infty ; -8[\cup]-8 ; 1[\cup]1 ; +\infty[$

Déterminer les limites de *f* en $-\infty$ et $+\infty$.

x tend vers ∞ ($+\infty$ ou $-\infty$) : on met alors x avec le plus grand exposant possible en facteur et on SIMPLIFIE

$$f(x) = \frac{x^2\left(2 - \dfrac{5}{x} - \dfrac{3}{x^2}\right)}{x^2\left(1 + \dfrac{7}{x} - \dfrac{8}{x^2}\right)}$$

$$\text{donc } f(x) = \frac{\left(2 - \dfrac{5}{x} - \dfrac{3}{x^2}\right)}{\left(1 + \dfrac{7}{x} - \dfrac{8}{x^2}\right)}$$

Quand x tend vers $-\infty$ ou vers $+\infty$ alors $\left(2 - \dfrac{5}{x} - \dfrac{3}{x^2}\right)$ tend vers 2 et $\left(1 + \dfrac{7}{x} - \dfrac{8}{x^2}\right)$ tend vers 1 donc

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\left(2 - \dfrac{5}{x} - \dfrac{3}{x^2}\right)}{\left(1 + \dfrac{7}{x} - \dfrac{8}{x^2}\right)} = 2 \text{ donc } \lim_{x \to -\infty} x \frac{\left(2 - \dfrac{5}{x} - \dfrac{3}{x^2}\right)}{\left(1 + \dfrac{7}{x} - \dfrac{8}{x^2}\right)} = -\infty \text{ donc } \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\left(2 - \dfrac{5}{x} - \dfrac{3}{x^2}\right)}{\left(1 + \dfrac{7}{x} - \dfrac{8}{x^2}\right)} = 2 \text{ donc } \lim_{x \to +\infty} x \frac{\left(2 - \dfrac{5}{x} - \dfrac{3}{x^2}\right)}{\left(1 + \dfrac{7}{x} - \dfrac{8}{x^2}\right)} = +\infty \text{ donc } \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

Déterminer les limites de *f* en – 8 et 1.

$f(x) = \dfrac{2x^2 - 5x + 3}{x^2 + 7x - 8}$

Quand x tend vers – 8 alors :
$2x^2 - 5x + 3$ tend vers 171 et $x^2 + 7x - 8$ tend vers 0
donc $f(x)$ tend vers ∞ mais il faut déterminer le signe

$x^2 + 7x - 8$ est une expression du second degré qui s'annule en – 8 et 1
donc $x^2 + 7x - 8 > 0$ si $x < -8$ et $x^2 + 7x - 8 < 0$ si $-8 < x < 1$
donc 2 cas se présentent :

***x* tend vers – 8 et *x* < – 8**

alors $\lim\limits_{\substack{x \to -8 \\ x < -8}} x^2 + 7x - 8 = 0^+$ et $\lim\limits_{\substack{x \to -8 \\ x < -8}} 2x^2 - 5x + 3 = 171$ donc $\lim\limits_{\substack{x \to -8 \\ x < -8}} f(x) = +\infty$ (d'après la règle des signes)

***x* tend vers – 2 et – 2 < *x* < 2**

$\lim\limits_{\substack{x \to -8 \\ x > -8}} x^2 + 7x - 8 = 0^-$ et $\lim\limits_{\substack{x \to -8 \\ x > -8}} 2x^2 - 5x + 3 = 171$ donc $\lim\limits_{\substack{x \to -8 \\ x > -8}} f(x) = -\infty$ (d'après la règle des signes)

on n'a pas à traiter le cas $x > 1$, car on ne peut avoir simultanément, x tend vers – 8 en restant plus grand que 1

Quand x tend vers 1 alors
$2x^2 - 5x + 3$ tend vers 0 et $x^2 + 7x - 8$ tend vers 0
donc on une forme indéterminée.
x tend vers une valeur finie 1 : on met alors $x - 1$ en facteur avec le plus grand exposant possible et on SIMPLIFIE.
$2x^2 - 5x + 3 = (x - 1)(2x - 3)$
$x^2 + 7x - 8 = (x - 1)(x + 8)$

$$\text{donc } f(x) = \frac{(x-1)(2x-3)}{(x-1)(x+8)} \text{ après simplification : } f(x) = \frac{2x-3}{x+8}$$

Quand x tend vers 1 alors $2x - 3$ tend vers – 1 et $x + 8$ tend vers 9 donc $f(x)$ tend vers $-\dfrac{1}{9}$ soit $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = -\dfrac{1}{9}$.

EXERCICE 3

$$f(x) = \frac{-2x^2 + 5x + 3}{x^2 + 7x - 8}$$

$D_f =]-\infty ; -8[\cup]-8 ; 1[\cup]1 ; +\infty[$

Déterminer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.

x tend vers ∞ ($+\infty$ ou $-\infty$) : on met alors x avec le plus grand exposant possible en facteur et on SIMPLIFIE

$$f(x) = \frac{x^2\left(-2 + \frac{5}{x} + \frac{3}{x^2}\right)}{x^2\left(1 + \frac{7}{x} - \frac{8}{x^2}\right)}$$

$$\text{donc } f(x) = \frac{\left(-2 + \frac{5}{x} + \frac{3}{x^2}\right)}{\left(1 + \frac{7}{x} - \frac{8}{x^2}\right)}$$

Quand x tend vers $-\infty$ ou vers $+\infty$ alors $\left(-2 + \frac{5}{x} + \frac{3}{x^2}\right)$ tend vers 2 et $\left(1 + \frac{7}{x} - \frac{8}{x^2}\right)$ tend vers 1 donc

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\left(2 - \frac{5}{x} - \frac{3}{x^2}\right)}{\left(1 + \frac{7}{x} - \frac{8}{x^2}\right)} = -2$$

$$\text{donc } \lim_{x \to -\infty} x \frac{\left(2 - \frac{5}{x} - \frac{3}{x^2}\right)}{\left(1 + \frac{7}{x} - \frac{8}{x^2}\right)} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\left(-2 + \frac{5}{x} + \frac{3}{x^2}\right)}{\left(1 + \frac{7}{x} - \frac{8}{x^2}\right)} = -2$$

$$\text{donc } \lim_{x \to +\infty} x \frac{\left(-2 + \frac{5}{x} + \frac{3}{x^2}\right)}{\left(1 + \frac{7}{x} - \frac{8}{x^2}\right)} = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$

Déterminer les limites de f en -8 et 1.

$$f(x) = \frac{-2x^2 + 5x + 3}{x^2 + 7x - 8}$$

Quand x tend vers -8 alors :
$-2x^2 + 5x + 3$ tend vers $-8{,}5$ et $x^2 + 7x - 8$ tend vers 0
donc $f(x)$ tend vers ∞ mais il faut déterminer le signe

$x^2 + 7x - 8$ est une expression du second degré qui s'annule en -8 et 1
donc $x^2 + 7x - 8 > 0$ si $x < -8$ et $x^2 + 7x - 8 < 0$ si $-8 < x < 1$ et $x^2 + 7x - 8 > 0$ si $x > 1$
donc 2 cas se présentent :

***x* tend vers -8 et $x < -8$**

alors $\lim\limits_{\substack{x \to -8 \\ x < -8}} x^2 + 7x - 8 = 0^+$

et $\lim\limits_{\substack{x \to -8 \\ x < -8}} -2x^2 + 5x + 3 = -8{,}5$ donc $\lim\limits_{\substack{x \to -8 \\ x < -8}} f(x) = -\infty$ (d'après la règle des signes)

***x* tend vers -8 et $-8 < x < 1$**

$\lim\limits_{\substack{x \to -8 \\ x > -8}} x^2 + 7x - 8 = 0^-$

et $\lim\limits_{\substack{x \to -8 \\ x > -8}} -2x^2 + 5x + 3 = -8{,}5$ donc $\lim\limits_{\substack{x \to -8 \\ x > -8}} f(x) = +\infty$ (d'après la règle des signes)

on n'a pas à traiter le cas $x > 1$, car on ne peut avoir simultanément, x tend vers -8 en restant plus grand que 1

Quand x tend vers 1 alors
$-2x^2 + 5x + 3$ tend vers $-8{,}5$ et $x^2 + 7x - 8$ tend vers 0
donc $f(x)$ tend vers ∞ mais il faut déterminer le signe

$x^2 + 7x - 8$ est une expression du second degré qui s'annule en -8 et 1 donc $x^2 + 7x - 8 > 0$ si $x < -8$ et $x^2 + 7x - 8 < 0$ si $-8 < x < 1$ et $x^2 + 7x - 8 > 0$ si $x > 1$
donc 2 cas se présentent :

x tend vers 1 et $-8 < x < 1$

alors $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} x^2 + 7x - 8 = 0^-$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} -2x^2 + 5x + 3 = -8{,}5$ donc $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x) = +\infty$ (d'après la règle des signes)

x tend vers 1 et $x > 1$

$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} x^2 + 7x - 8 = 0^+$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} -2x^2 + 5x + 3 = -8{,}5$ donc $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f(x) = -\infty$ (d'après la règle des signes)

on n'a pas à traiter le cas $x < -8$, car on ne peut avoir simultanément, x tend vers 1 en restant plus petit que -8.

Centres étrangers juin 2007

Le but de l'exercice est démontrer que l'équation (E) : $e^x = \frac{1}{x}$, admet une unique solution dans l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.

I. Existence et unicité de la solution

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x - e^{-x}$.

1. Démonter que x est solution de l'équation (E) si et seulement si $f(x) = 0$.

2. Étude du signe de la fonction f

a. Étudier le sens de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

b. En déduire que l'équation (E) possède une unique solution sur $\mathbb{R}$, notée α.

c. Déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

d. Étudier le signe de f sur l'intervalle $[0 ; \alpha]$.

II. Deuxième approche

On note g la fonction définie sur l'intervalle $[0 ; 1]$ par : $g(x) = \frac{1+x}{1+e^x}$.

1. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ est équivalente à l'équation $g(x) = x$.

2. En déduire que α est l'unique réel vérifiant : $g(\alpha) = \alpha$.

3. Exprimer $g'(x)$ en fonction de $f(x)$. En déduire le sens de variations de la fonction g sur l'intervalle $[0 ; 1]$.

Correction

I. Existence et unicité de la solution

1. x est solution de l'équation (E) $\Leftrightarrow e^x = \frac{1}{x} \Leftrightarrow \frac{1}{e^x} = x \Leftrightarrow e^{-x} = x \Leftrightarrow x - e^{-x} = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$

2. *a.* f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 1 + e^{-x}$ or la fonction exponentielle est positive sur $\mathbb{R}$ donc $f'(x) > 0$

f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2. *b.* $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

f est définie continue strictement croissante sur $\mathbb{R}$, $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, $0 \in f(\mathbb{R})$ donc l'équation (E) possède une unique solution sur $\mathbb{R}$, notée α.

2. *c.* f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et $f(0{,}56) < 0$ et $f(0{,}57) > 0$ donc $0{,}56 < \alpha < 0{,}57$

2. *d.* f est strictement croissante sur $[0 ; 1]$ et $f(\alpha) = 0$ donc si $0 \leq x < \alpha$ alors $f(x) < 0$; si $\alpha < x \leq 1$ alors $f(x) > 0$ et $f(\alpha) = 0$

II. Deuxième approche

1. $g(x) = x \Leftrightarrow \frac{1+x}{1+e^x} = x \Leftrightarrow 1 + x = x + x e^x \Leftrightarrow 1 = x e^x \Leftrightarrow e^{-x} = x \Leftrightarrow f(x) = 0$

2. Résoudre $g(x) = x$ est équivalent à résoudre $f(x) = 0$ or cette équation admet une seule solution sur $\mathbb{R}$, donc α est l'unique réel vérifiant : $g(\alpha) = \alpha$.

3. Exprimer $g'(x)$ en fonction de $f(x)$. En déduire le sens de variations de la fonction g sur l'intervalle $[0 ; 1]$.

$g'(x) = \frac{1 + e^x - (1+x)e^x}{(1+e^x)^2} = \frac{1 - x e^x}{(1+e^x)^2} = -e^x \frac{e^{-x} - x}{(1+e^x)^2} = -e^x \frac{f(x)}{(1+e^x)^2}$.

si $0 \leq x < \alpha$ alors $f(x) < 0$ donc $g'(x) > 0$ donc g est strictement croissante sur $[0 ; \alpha]$

si $\alpha < x \leq 1$ alors $f(x) > 0$ donc $g'(x) < 0$ donc g est strictement décroissante sur $[\alpha ; 1]$

EXERCICE 2 Nouvelle Calédonie novembre 2008

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x}{e^x - 1}$.

1. Restitution organisée de connaissances :

La fonction exponentielle est l'unique fonction g dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant : $\begin{cases} g'(x) = g(x) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R} \\ g(0) = 1 \end{cases}$

Démontrer que $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{e^h - 1}{h} = 1$.

2. Déterminer la limite de la fonction f en 0.

Correction

1. g est dérivable en 0 donc $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{g(h) - g(0)}{h} = g'(0)$ or $g'(0) = g(0)$ donc $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{g(h) - g(0)}{h} = g(0)$

or $g(x) = e^x$ et $g(0) = 1$ donc en remplaçant dans $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{g(h) - g(0)}{h} = g(0)$, on obtient $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{e^h - 1}{h} = 1$.

2. $f(x) = \dfrac{1}{\dfrac{e^x - 1}{x}}$ or $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{e^h - 1}{h} = 1$ donc $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$.

Nouvelle Calédonie novembre 2007 (partiel)

Partie A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^x - x - 1$ et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormal du plan. La droite (D) d'équation $y = -x - 1$ est asymptote à (C). On a représenté sur la feuille annexe la courbe (C) et la droite (D).

1. Soit a un nombre réel. Écrire, en fonction de a, une équation de la tangente (T) à (C) au point M d'abscisse a.
2. Cette tangente (T) coupe la droite (D) au point N d'abscisse b. Vérifier que $b - a = -1$.
3. En déduire une construction, à effectuer sur la feuille annexe, de la tangente (T) à (C) au point M d'abscisse 1,5. On fera apparaître le point N correspondant.

Partie B

1. Déterminer graphiquement le signe de f.
2. En déduire pour tout entier naturel non nul n les inégalités suivantes :

$$(1) \quad e^{\frac{1}{n}} \geq 1 + \frac{1}{n} \qquad \text{et} \qquad (2) \quad e^{-\frac{1}{n+1}} \geq 1 - \frac{1}{n+1}$$

3. En utilisant l'inégalité (1), démontrer que pour tout entier naturel non nul n : $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq e$

4. ***a.*** En utilisant l'inégalité (2), démontrer que pour tout entier naturel non nul n : $e \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$.

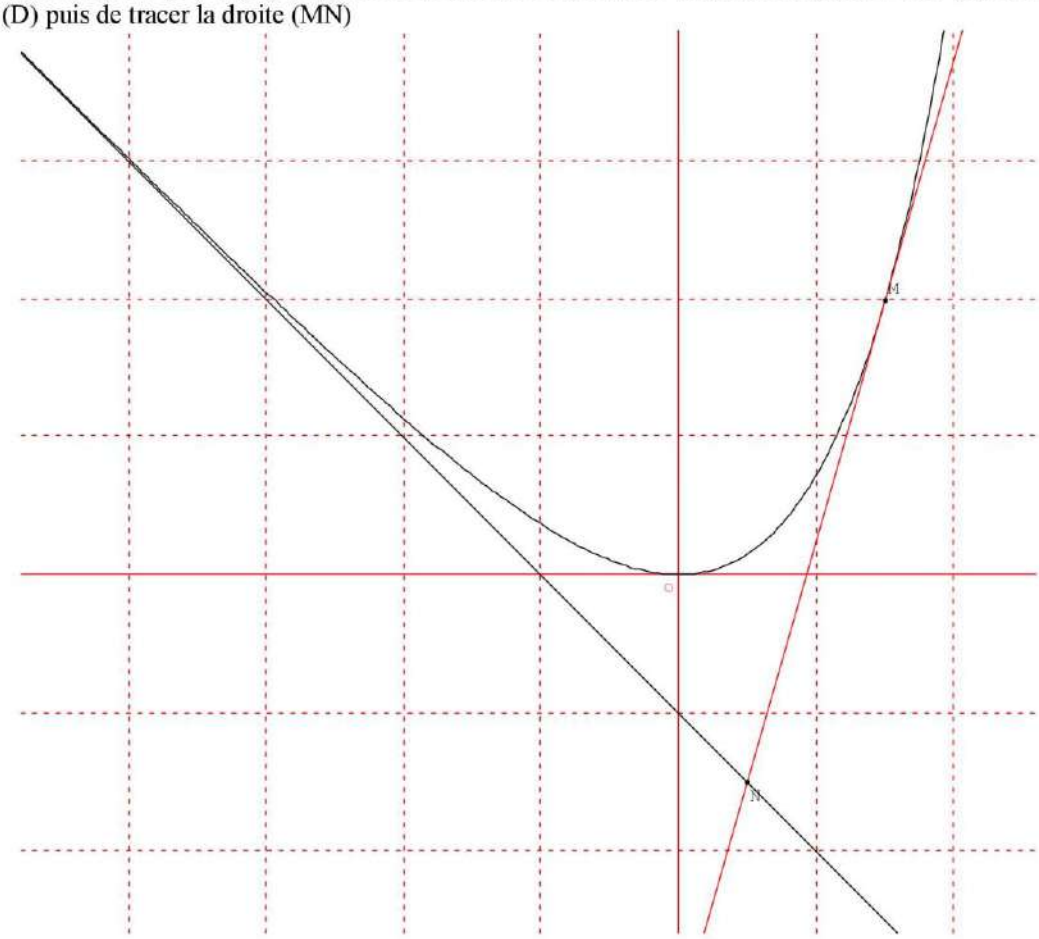
4. ***b.*** En déduire que $1{,}01^{100} \leq e \leq 1{,}01^{101}$

Correction

1. La tangente (T) à (C) au point d'abscisse a est une droite de coefficient directeur $f'(a) = e^a - 1$
donc d'équation $y = (e^a - 1)x + p$
Cette droite passe par le point de (C) d'abscisse a donc de coordonnées $(a ; e^a - a - 1)$ donc $e^a - a - 1 = a(e^a - 1) + p$
donc $p = e^a - a - 1 - a e^a + a$ soit $p = e^a - a e^a - 1$
La tangente (T) à (C) au point d'abscisse a est la droite d'équation $y = (e^a - 1)x + e^a - a e^a - 1$

2. Cette tangente (T) coupe la droite (D) au point N d'abscisse b.
N appartient à (T) donc $y_N = (e^a - 1)b + e^a - a e^a - 1$de plus N appartient à (D) donc $y_N = -b - 1$
donc $(e^a - 1)b + e^a - a e^a - 1 = -b - 1$ donc en isolant b : $b(e^a - 1) + b = a e^a - e^a$
soit $b e^a = (a - 1) e^a$ or la fonction exponentielle est strictement positive donc $e^a \neq 0$ donc $b = a - 1$ soit $b - a = -1$
donc N a pour coordonnées $(a - 1 ; -a)$ donc N est le point de D d'abscisse $a - 1$

3. Pour tracer la tangente (T) à (C) au point M d'abscisse 1,5, il suffit de placer le point M sur (C) et de placer le point N d'abscisse 0,5 sur (D) puis de tracer la droite (MN)



Partie B

1. Graphiquement $f(x) \geq 0$

2. Pour tout réel x, $f(x) \geq 0$ donc en particulier pour tout entier naturel n, $f\left(\frac{1}{n}\right) \geq 0$ donc $e^{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n} - 1 \geq 0$ soit $e^{\frac{1}{n}} \geq 1 + \frac{1}{n}$

Pour tout entier naturel n, $f\left(\frac{-1}{n+1}\right) \geq 0$ donc $e^{-\frac{1}{n+1}} - \frac{-1}{n+1} - 1 \geq 0$ soit $e^{-\frac{1}{n+1}} \geq 1 - \frac{1}{n+1}$

3. $e^{\frac{1}{n}} \geq 1 + \frac{1}{n}$ donc $\left(e^{\frac{1}{n}}\right)^n \geq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ donc pour tout entier naturel non nul n : $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq e$

4. *a.* $e^{-\frac{1}{n+1}} \geq 1 - \frac{1}{n+1}$ or $1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1-1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$ donc $e^{-\frac{1}{n+1}} \geq \frac{n}{n+1} > 0$

soit en passant aux inverses $0 < e^{\frac{1}{n+1}} \leq \frac{n+1}{n}$

donc $\left(e^{\frac{1}{n+1}}\right)^{n+1} \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ donc pour tout entier naturel non nul n : $e \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$

4. *b.* Pour tout entier naturel n, $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq e \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ donc pour $n = 100$ alors $1{,}01^{100} \leq e \leq 1{,}01^{101}$

Soit f la fonction définie sur $]-\infty\,;\,2]$ par $f(x) = \sqrt{4-2x}$.

Variations de f :

a. Écrire f comme composée de deux fonctions usuelles que l'on explicitera.

b. En déduire le sens de variations de f sur $]-\infty\,;\,2]$.

Dérivabilité de f :

a. Déterminer $f'(x)$ pour tout x de $]-\infty\,;\,2[$.

b. Étudier la dérivabilité de f en 2 et interpréter graphiquement le résultat obtenu.

Approximation affine:

a. Déterminer l'approximation affine de f au voisinage de 0.

b. En déduire une valeur approchée de $\sqrt{3,998}$.

CORRECTION

1. *a.* Soit $u(x) = 4-2x$ et $v(x) = \sqrt{x}$ alors $x \xrightarrow{u} 4-2x \xrightarrow{v} \sqrt{4-2x}$ donc $f = v \circ u$

1. *b.* La fonction u est une fonction affine (de la forme $u(x) = ax+b$ avec $a<0$) donc est décroissante sur $]-\infty\,;\,2]$

Sur $]-\infty\,;\,2]$, $x \leq 2$ donc $2x \leq 4$ donc $4-2x \geq 0$ or sur $[0\,;+\infty[$, la fonction v est croissante

La composée d'une fonction croissante v et d'une fonction décroissante u est une fonction décroissante donc f est décroissante sur $]-\infty\,;\,2]$

2. *a.* La dérivée de $\sqrt{u}$ est $\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$, ici $u(x) = 4-2x$ donc $u'(x) = -2$ et $f'(x) = \dfrac{-2}{2\sqrt{4-2x}} = -\dfrac{1}{\sqrt{4-2x}}$.

2. *b.* f est définie sur $]-\infty\,;\,2]$ donc pour étudier la dérivabilité de f en 2, il faut déterminer la limite quant h tend vers 0^- de $\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}$

$$\frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \frac{\sqrt{4-2(2+h)}}{h} = \frac{\sqrt{-2h}}{h} = \frac{\sqrt{-2h}\times\sqrt{-2h}}{h\sqrt{-2h}} = \frac{-2h}{h\sqrt{-2h}} = \frac{-2}{\sqrt{-2h}}$$

$\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h<0}} -2h = 0^+$ or $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \sqrt{x} = 0^+$ donc $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h<0}} \sqrt{-2h} = 0^+$ donc $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h<0}} \dfrac{1}{\sqrt{-2h}} = +\infty$ donc $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h<0}} \dfrac{-2}{\sqrt{-2h}} = -\infty$

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h<0}} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = -\infty$$

f n'est pas dérivable en 2, $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h<0}} \dfrac{f(2+h)-f(2)}{h} = -\infty$ donc la courbe de f admet au point d'abscisse 2 une tangente verticale.

3. *a.* une approximation affine de f au voisinage de 0 est $f(0) + xf'(0)$

$f(0) = \sqrt{4-2\times 0} = 2$ et $f'(0) = -\dfrac{1}{\sqrt{4-2\times 0}} = -\dfrac{1}{2}$ une approximation affine de f au voisinage de 0 est $2 - \dfrac{1}{2}x$

3. *b.* $3,998 = 4 - 2 \times 0,001$ donc $3,998 = f(0,001)$ or une approximation affine de f au voisinage de 0 est $2 - \dfrac{1}{2}x$ donc $f(0,001)$ est approximativement égal à $2 - \dfrac{1}{2} \times 0,001$ soit à 1,9995

Une valeur approchée de $\sqrt{3,998}$ est 1,9995

Soient f la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{3\}$ par : $f(x) = \dfrac{-2x^2+3x+7}{x-3}$ et C sa représentation graphique dans un repéré orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique: 1 cm).

1. *a.* Déterminer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.
b. Étudier le comportement asymptotique de f en 3. Interpréter les résultats graphiquement.
2. *a.* Déterminer la dérivée de f et étudier les variations de f. Dresser le tableau de variations complet de f.
3. *a.* Montrer que la courbe de f admet la droite d'équation $y = -2x - 3$ comme asymptote oblique en $+\infty$ et $-\infty$.
b) Déterminer algébriquement la position relative de C et de D.
4. Soit S(3 ; – 9). Montrer que S est centre de symétrie de C.
Déterminer les coordonnées des points d'intersection de C avec l'axe des abscisses.
5. Construire C, y faire apparaître les éléments remarquables.

CORRECTION

1. $f(x) = \dfrac{-2x^2+3x+7}{x-3} = \dfrac{x^2\left(-2+\dfrac{3}{x}+\dfrac{7}{x^2}\right)}{x\left(1-\dfrac{3}{x}\right)} = x\dfrac{\left(-2+\dfrac{3}{x}+\dfrac{7}{x^2}\right)}{\left(1-\dfrac{3}{x}\right)}$

or $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{7}{x^2} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(-2+\dfrac{3}{x}+\dfrac{7}{x^2}\right)}{\left(1-\dfrac{3}{x}\right)} = -2$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{7}{x^2} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\left(-2+\dfrac{3}{x}+\dfrac{7}{x^2}\right)}{\left(1-\dfrac{3}{x}\right)} = -2$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to3} x-3 = 0$ et $\lim\limits_{x\to3} -2x^2+3x+7 = -2$, il faut donc déterminer le signe de $x-3$

si $x > 3$; $x-3 > 0$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to3\\x>3}} x-3 = 0^+$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to3\\x>3}} f(x) = -\infty$

si $x < 3$; $x-3 < 0$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to3\\x<3}} x-3 = 0^-$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to3\\x<3}} f(x) = +\infty$

La droite d'équation $x = 3$ est asymptote à la courbe de f.

2. $u(x) = -2x^2+3x+7$ donc $u'(x) = -4x+3$
$v(x) = x-3$ donc $v'(x) = 1$

$f'(x) = \dfrac{(-4x+3)(x-3)-(-2x^2+3x+7)}{(x-3)^2} = \dfrac{-4x^2+3x+12x-9+2x^2-3x-7}{(x-3)^2}$

$f'(x) = \dfrac{-2x^2+12x-16}{(x-3)^2} = -2\dfrac{x^2-6x+8}{(x-3)^2}$

$x^2-6x+8 = 0$
$\Delta = 36-4\times8$ donc $x^2-6x+8 = 0$ ⇔ $x = 2$ ou $x = 4$ donc :

x	$-\infty$		2		3		4		$+\infty$
x^2-6x+8		+	0	–		–	0	+	
signe de $f'(x)$		–		+		+		–	
variation de f	$+\infty$	↘	-5	↗	$+\infty$	$-\infty$	↗	-1	↘ $-\infty$

3. *a.* $f(x)-(-2x-3) = \dfrac{-2x^2+3x+7}{x-3}+2x+3 = \dfrac{-2x^2+3x+7+(x-3)(2x+3)}{x-3}$

$f(x)-(-2x-3) = \dfrac{-2x^2+3x+7+2x^2-6x+3x-9}{x-3} = \dfrac{-2}{x-3}$

or $\lim\limits_{x\to+\infty} x-3 = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-2}{x-3} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(-2x-3) = 0$

or $\lim\limits_{x\to-\infty} x-3 = -\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-2}{x-3} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(-2x-3) = 0$

La droite d'équation $y = -2x-3$ est asymptote à la courbe de f en $+\infty$ et $-\infty$.

3. *b*. Pour connaître la position relative de $\mathscr{C}$ et de $\mathscr{D}$, il suffit d'étudier le signe de $f(x) - (-2x - 3)$ donc de $\dfrac{-2}{x-3}$

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$x-3$	$-$		$+$
signe de $f'(x)$	$+$		$-$
Position relative de $\mathscr{C}$ et de $\mathscr{D}$	$\mathscr{C}$ est au dessus de $\mathscr{D}$		$\mathscr{C}$ est en dessous de $\mathscr{D}$

4. Pour montrer que S est centre de symétrie de C, il suffit de prouver que pour tout h non nul, $f(3-h) + f(3+h) = -18$

D'après la question précédente $f(x) = -2x - 3 - \dfrac{2}{x-3}$

$f(3-h) = -2(3-h) - 3 - \dfrac{2}{3-h-3} = -9 + 2h + \dfrac{2}{h}$

$f(3+h) = -2(3+h) - 3 - \dfrac{2}{3+h-3} = -9 - 2h - \dfrac{2}{h}$

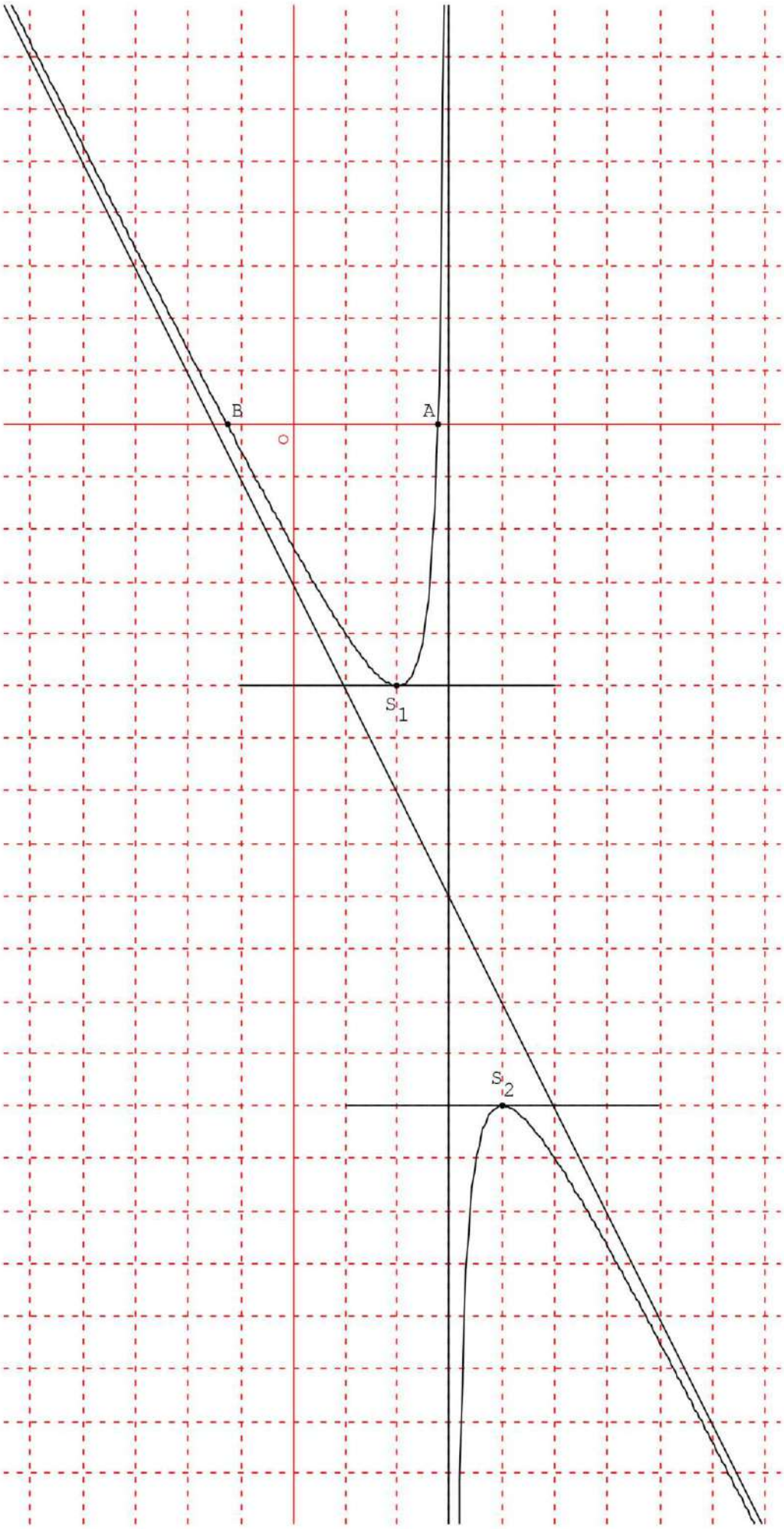
$f(3+h) + f(3-h) = -9 + 2h + \dfrac{2}{h} - 9 - 2h - \dfrac{2}{h} = -18$ donc le point S de coordonnées $(3 ; -9)$ est centre de symétrie de $\mathscr{C}$.

5. Pour déterminer les points d'intersection de $\mathscr{C}$ avec l'axe des abscisses, il suffit de résoudre $f(x) = 0$

soit $\dfrac{-2x^2 + 3x + 7}{x-3} = 0$ ou encore $-2x^2 + 3x + 7 = 0$ avec $x \neq 3$

$\Delta = 9 - 4 \times (-2) \times 7 = 65$ donc $x_1 = \dfrac{-3 + \sqrt{65}}{-4}$ et $x_2 = \dfrac{-3 - \sqrt{65}}{-4}$

Il existe deux points d'intersection de $\mathscr{C}$ avec l'axe des abscisses, l'un A de coordonnées $\left(\dfrac{3+\sqrt{65}}{4} ; 0\right)$ l'autre B de coordonnées $\left(\dfrac{3-\sqrt{65}}{4} ; 0\right)$.


B
A
O
S1
S2

ENONCE

a, b, c et d sont des réels tels que pour tout réel $x \neq -1$, $f(x) = a\,x + b + \dfrac{c}{x+d}$.

Le tableau de variation de f est le suivant :

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$+$	0	$+$	
f	$-\infty$	↗	-2	↘	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	2	↗	$+\infty$

1. *a*) Quelle est la valeur de d ?

1. *b*) Calculer $f'(x)$ en fonction de a et c.

1. *c*) Préciser, $f(0)$, $f(-2)$, $f'0)$, $f'(-2)$. En déduire que a, b, c sont solutions du système : $\begin{cases} a - c = 0 \\ b + c = 2 \\ -2a + b - c = -2 \end{cases}$

Déterminer les réels a, b et c.

2. *a*) Soit la fonction $f(x) = x + 1 + \dfrac{1}{x+1}$

Montrer que le point I $(-1\,;0)$ est centre de symétrie de la courbe

2. *b*) Démontrer que, dans un repère, la courbe représentative C de f admet la droite D d'équation $y = x + 1$ pour asymptote en $-\infty$ et en $+\infty$.

2. *c*) Étudier la position de C par rapport à D

CORRECTION

1. *a*) $f(x) = a\,x + b + \dfrac{c}{x+d}$ donc f est définie pour tous les x réels tels que $x + d \neq 0$ soit $x \neq -d$ or d'après le tableau de variation, f n'est pas définie pour $x = -1$, donc $-d = -1$ soit $d = 1$ donc $f(x) = a\,x + b + \dfrac{c}{x+1}$

1. *b*) $f'(x) = a - \dfrac{c}{(x+1)^2}$

1. *c*) D'après le tableau de variation : $f(0) = 2$ donc $b + c = 2$ de plus $f'0) = 0$ donc $a - c = 0$

$f(-2) = -2$ donc $-2a + b - c = -2$ de plus $f'(-2) = 0$ donc $a - c = 0$

a, b, c sont solutions du système : $\begin{cases} a - c = 0 \\ b + c = 2 \\ -2a + b - c = -2 \end{cases}$

$a = c$ donc en remplaçant dans le système :

$\begin{cases} a - c = 0 \\ b + c = 2 \\ b - 3c = -2 \end{cases}$ en soustrayant la deuxième et la troisième ligne : $\begin{cases} a - c = 0 \\ b + c = 2 \\ 4c = 4 \end{cases}$ donc $a = c = 1$ et $b = 1$

2. *a*) $f(-2-x) + f(x) = -1 - x - \dfrac{1}{x+1} + x + 1 + \dfrac{1}{x+1}$ donc le point I $(-1\,;0)$ est centre de symétrie de la courbe.

2. *b*) $f(x) - (x+1) = \dfrac{1}{x+1}$ or $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x+1} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x+1} = 0$ donc la courbe représentative C de f admet la droite D d'équation $y = x + 1$ pour asymptote en $-\infty$ et en $+\infty$.

2. *c*) $f(x) - (x+1) = \dfrac{1}{x+1}$ donc si $x < -1$, $x + 1 < 0$ donc $f(x) - (x+1) < 0$ la courbe C est en dessous de D sur $]-\infty\,;1[$.

si $x > -1$, $x + 1 > 0$ donc $f(x) - (x+1) > 0$ la courbe C est au dessus de D sur $]-1\,;+\infty[$.

1. Soit la fonction polynôme P définie sur $\mathbb{R}$ par : $P(x) = 4x^3 + 3x^2 - 2$.

a. Étudier les variations de P.

b. Montrer que, sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$, l'équation (E) $P(x) = 0$ admet une solution unique α.

c. Montrer que sur l'intervalle $]-\infty ; 0]$, l'équation (E) n'admet pas de solution.

2. Soit l'intervalle $]-1 ; +\infty[$, noté I. On considère la fonction f définie sur I par : $f(x) = \dfrac{2x+1}{x^3+1}$

On désigne par C sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique 4 cm).

a. En utilisant les résultats de la question 1), étudier les variations de f.

b. Déterminer une équation de la tangente (T) à C au point d'abscisse 0.

c. Etudier les positions respectives de C et de (T) pour $x \in]-1 ; +\infty[$.

3. *a.* Vérifier et justifier la proposition suivante : α est compris entre 0,60 et 0,61.

b. Démontrer que $f(\alpha) = \dfrac{2}{3\alpha^2}$.

c. En déduire que $f(\alpha)$ est compris entre 1,7 et 1,9.

4. *a.* Démontrer que C admet deux droites asymptotes que l'on précisera par leurs équations.

b. Représenter C, (T) et les droites asymptotes à C.

CORRECTION

1. *a.* P est un polynôme donc est continu et dérivable sur $\mathbb{R}$. Ses limites à l'infini sont celles de son terme de plus haut degré, $\lim\limits_{x \to +\infty} P(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} 4x^3 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} P(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} 4x^3 = -\infty$.

$P'(x) = 12x^2 + 6x = 6x(2x+1)$ donc $P'(x)$ est un polynôme du second degré qui s'annule en 0 et $-0,5$ d'où le tableau de variations de P :

x	$-\infty$		$-0,5$		0		$+\infty$
$P'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
P	$-\infty$	↗	$-1,75$	↘	-2	↗	$+\infty$

b. P est défini continu, strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$, $P([0 ; +\infty[) = [-2 ; +\infty[$, donc $0 \in P([0 ; +\infty[)$ donc l'équation $P(x) = 0$ admet une seule solution α sur $[0 ; +\infty[$.

c. Montrer que sur l'intervalle $]-\infty ; 0]$, l'équation (E) n'admet pas de solution.

P est croissante sur $]-\infty ; -0,5]$ et croissante sur $[-0,5 ; 0[$ donc P admet un maximum en $-0,5$; $P(-0,5) = -0,75$ donc pour tout x de $]-\infty ; 0[$, $P(x) \leq -0,75$ donc sur l'intervalle $]-\infty ; 0]$, l'équation (E) n'admet pas de solution.

2. *a.* En utilisant les résultats de la question 1), étudier les variations de f.

$$f'(x) = \frac{2(x^3+1) - 3x^2(2x+1)}{(x^3+1)^2} = \frac{-(4x^3+3x^2-2)}{(x^3+1)^2} = -\frac{P(x)}{(x^3+1)^2}$$

P est strictement négatif sur $]-\infty ; \alpha[$, nul en α et strictement positif sur $]\alpha ; +\infty[$ donc :

x	-1		α		$+\infty$
-1	‖	$-$		$-$	
$P(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f'(x)$	‖	$+$		$-$	
f	‖	↗	$f(\alpha)$	↘	0

$$f(x) = \frac{2x+1}{x^3+1} = \frac{2+\dfrac{1}{x}}{x^2\left(1+\dfrac{1}{x^3}\right)} \text{ donc } \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0 \text{ et } \lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$$

b. $f'(0) = 2$ donc (T) a pour équation $y = 2x + b$

$f(0) = 1$ donc (T) passe par le point de coordonnées $(0 ; 1)$ donc $1 = 2 \times 0 + b$ donc $b = 1$ donc (T) a pour équation $y = 2x + 1$

c. $f(x) - (2x+1) = \dfrac{2x+1}{x^3+1} - (2x+1) = (2x+1)\left(\dfrac{1}{x^3+1} - 1\right) = (2x+1)\left(\dfrac{-x^3}{x^3+1}\right)$

x	-1		$-0,5$		0	$+\infty$
$-x^3$	||	$+$		$+$	0	$-$
$2x+1$	||	$-$	0	$+$		$+$
$f(x)-(2x+1)$	||	$-$	0	$+$	0	$-$
	||	C est en dessous de (T)	Point d'inter-section	C est au dessus de (T)	Point d'inter-section	C est en dessous de (T)

3. *a.* P(0,60) < 0 et P(0,61) > 0 or P est continue sur $\mathbb{R}$ donc P s'annule sur [0,60 ; 0,61] donc $0,60 \leq \alpha \leq 0,61$.

3. *b.* $P(\alpha) = 0$ donc $4\alpha^3 + 3\alpha^2 - 2 = 0$ donc $4\alpha^3 = 2 - 3\alpha^2$

$$f(\alpha) - \frac{2}{3\alpha^2} = \frac{2\alpha+1}{\alpha^3+1} - \frac{2}{3\alpha^2} = \frac{3\alpha^2(2\alpha+1) - 2(\alpha^3+1)}{3(\alpha^3+1)\alpha^2}$$

$$f(\alpha) - \frac{2}{3\alpha^2} = \frac{6\alpha^3 + 3\alpha^2 - 2\alpha^3 - 2}{3(\alpha^3+1)\alpha^2} \text{ donc } f(\alpha) - \frac{2}{3\alpha^2} = \frac{4\alpha^3 + 3\alpha^2 - 2}{3(\alpha^3+1)\alpha^2} = \frac{P(\alpha)}{3(\alpha^3+1)\alpha^2} = 0 \text{ donc } f(\alpha) - \frac{2}{3\alpha^2}$$

3. *c.* $0,60 \leq \alpha \leq 0,61$ donc $0,60^2 \leq \alpha^2 \leq 0,61^2$

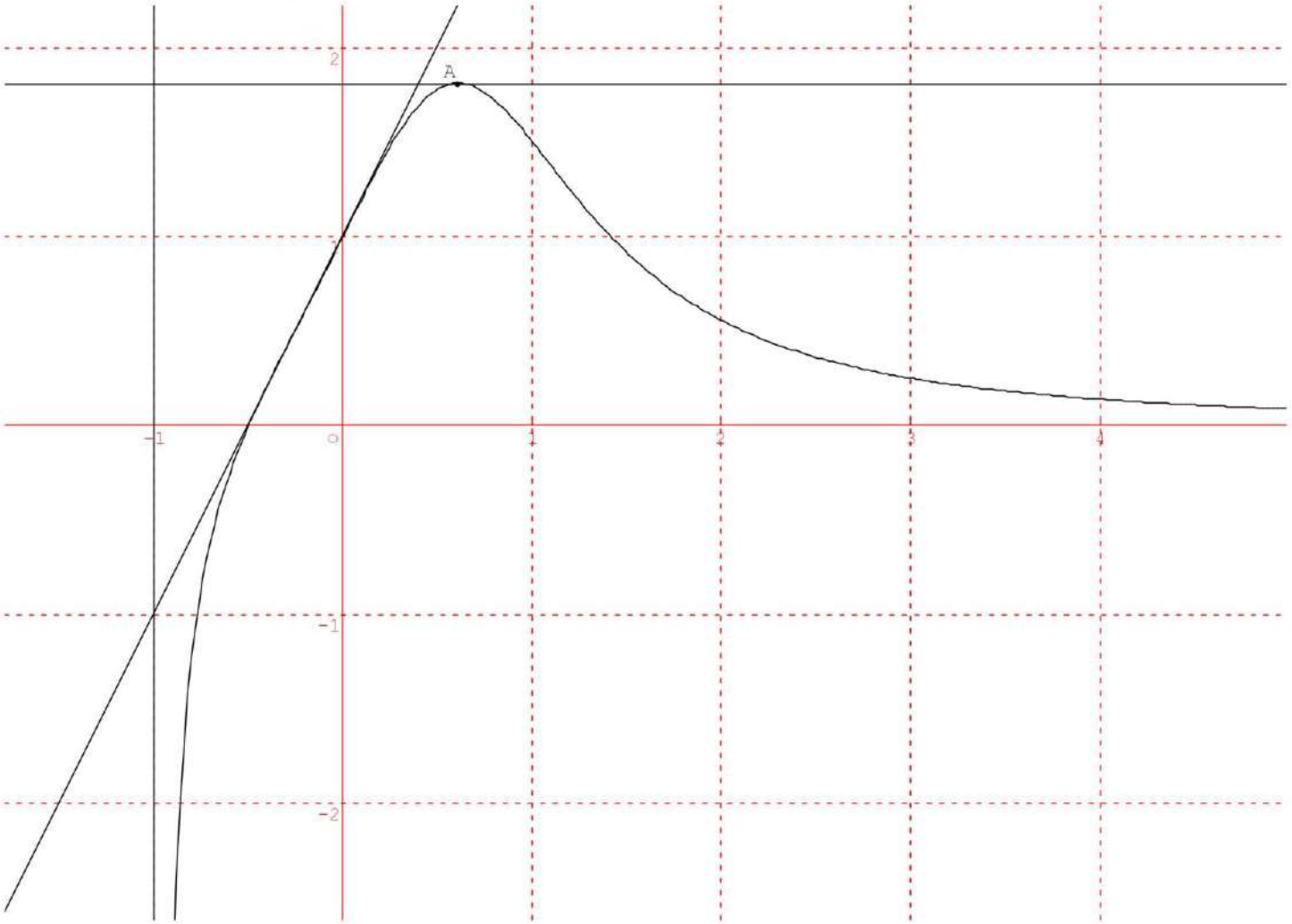
$3 \times 0,36 \leq 3\alpha^2 \leq 3 \times 0,3721$ soit $1,08 \leq 3\alpha^2 \leq 1,1163$ donc $\dfrac{1}{1,1163} \leq \dfrac{1}{3\alpha^2} \leq \dfrac{1}{1,08}$ donc $\dfrac{2}{1,1163} \leq \dfrac{2}{3\alpha^2} \leq \dfrac{2}{1,08}$

$\dfrac{2}{1,1163} \approx 1,792$ et $\dfrac{2}{1,08} \approx 1,852$ donc $1,7 \leq f(\alpha) \leq 1,9$

4. *a.* $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ donc la droite d'équation $y = 0$ est asymptote à C

$$f(x) = \frac{2x+1}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{1}{x+1} \times \frac{2x+1}{x^2-x+1}$$

$\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{2x+1}{(x^2-x+1)} = -\dfrac{1}{3}$ et $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} \dfrac{1}{x+1} = +\infty$ donc $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} f(x) = -\infty$, la droite d'équation $x = -1$ est asymptote à C.



Soit f la fonction définie sur $]-\infty ; -7] \cup [1 ; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x^2 + 6x - 7}$.

Justifier que la fonction f est bien définie sur $]-\infty ; -7] \cup [1 ; +\infty[$.

1. *a.* Déterminer la forme canonique du trinôme du second degré $x^2 + 6x - 7$.

1. *b.* Démontrer que la droite d'équation : $x = -3$ est un axe de symétrie de la courbe de f.

2. *a.* Conjecturer la dérivabilité de f en -7 et en 1 à l'aide de la calculatrice. Expliquer.

2. *b.* Démontrer le résultat conjecturé pour la dérivabilité en 1.

CORRECTION

Soit $D_f =]-\infty ; -7] \cup [1 ; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x^2 + 6x - 7}$.

1. La fonction racine carrée est définie sur $[0 ; +\infty[$

$x^2 + 6x - 7$ est un trinôme du second degré, $x^2 + 6x - 7 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = -7$

$x^2 + 6x - 7 \geq 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty ; -7] \cup [1 ; +\infty[$ donc pour tout x de $]-\infty ; -7[\cup]1 ; +\infty[$, $x^2 + 6x - 7 > 0$ donc f est définie sur $]-\infty ; -7] \cup [1 ; +\infty[$

2. *a.* $x^2 + 6x - 7 = (x+3)^2 - 9 - 7 = (x+3)^2 - 16$

2. *b.* Soit h un réel tel que $-3 + h$ et $-3 - h \in D_f$

$h \geq 4$ ou $h \leq -3$ alors $-3 + h \geq 1$ ou $-3 + h \leq -7$, donc $-3 + h \in D_f$

$f(-3 + h) = (-3 + h - 3)^2 - 16 = h^2 - 16$

si $h \geq 4$ ou $h \leq -3$ alors $-3 - h \leq 7$ ou $-3 - h \geq 1$, donc $-3 - h \in D_f$

$f(-3 - h) = (-3 - h - 3)^2 - 16 = h^2 - 16$ donc pour tout h réel, $f(-3 + h) = f(-3 - h)$

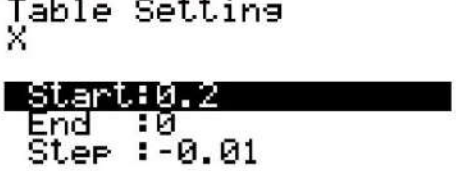
La droite d'équation : $x = -3$ est un axe de symétrie de la courbe de f.

3. *a.* f est dérivable en 1 si et seulement si $\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \dfrac{f(1+h) - f(1)}{h}$ existe, on a alors $f'(1) = \lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \dfrac{f(1+h) - f(1)}{h}$.

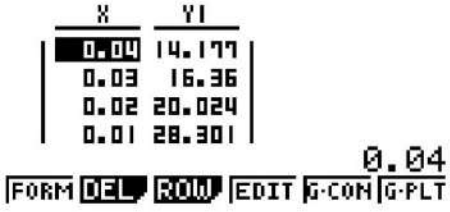
$f(1) = 0$ et $f(1+h) = \sqrt{(1 + h + 3)^2 - 16} = \sqrt{(4 + h)^2 - 16} = \sqrt{h^2 + 8h}$ donc $\dfrac{f(1+h) - f(1)}{h} = \dfrac{\sqrt{h^2 + 8h}}{h}$

donc sur la calculatrice, dans le menu TABLE, on écrit $\dfrac{f(1+h) - f(1)}{h} = \dfrac{\sqrt{h^2 + 8h}}{h}$

Dans RANG, il faut choisir des valeurs de h de plus en plus proches de 0 :
par exemple demander des valeurs de h en partant de 0,2 et en allant vers 0 en diminuant à chaque fois de 0,01



en demandant la table, la calculatrice affiche :



On constate que plus h se rapproche de 0, plus la valeur de $\dfrac{f(1+h) - f(1)}{h} = \dfrac{\sqrt{h^2 + 8h}}{h}$ augmente et donc, on peut supposer que $\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \dfrac{f(1+h) - f(1)}{h} = +\infty$, donc f n'est pas dérivable en 1 mais sa courbe admet une tangente verticale en 1.

La droite d'équation : $x = -3$ est un axe de symétrie de la courbe de f, le résultat est identique en -7 :
f n'est pas dérivable en -7 mais sa courbe admet une tangente verticale en -7.

3. *b.* Démontrer le résultat conjecturé pour la dérivabilité en 1.

$\dfrac{f(1+h) - f(1)}{h} = \dfrac{\sqrt{h^2 + 8h}}{h} = \dfrac{\sqrt{h^2\left(1 + \dfrac{8}{h}\right)}}{h} = \sqrt{1 + \dfrac{8}{h}}$ or $\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} 1 + \dfrac{8}{h} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$ donc

$\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \sqrt{1 + \dfrac{8}{h}} = +\infty$ soit $\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \dfrac{f(1+h) - f(1)}{h} = +\infty$. f n'est pas dérivable en 1 mais sa courbe admet une tangente verticale en 1.

Déterminer la limite en $\frac{\pi}{4}$ de $\frac{\sin x - \cos x}{4x - \pi}$

CORRECTION

Méthode générale

On peut depuis le début poser $h = x - \frac{\pi}{4}$ donc remplacer x par $h + \frac{\pi}{4}$ dans $\frac{\sin x - \cos x}{4x - \pi}$

Il faut alors développer $\frac{\sin\left(h + \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(h + \frac{\pi}{4}\right)}{4\left(h + \frac{\pi}{4}\right) - \pi}$ ce qui conduit après simplification à $\frac{\sqrt{2}}{4} \times \frac{\sin h}{h}$ puis ensuite chercher la limite en 0 de cette expression.

Méthode particulière : au lieu de poser $h = x - \frac{\pi}{4}$, on développe $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ à la recherche de simplification d'écriture.

$\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin x \cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{4} \cos x$ donc $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin x - \cos x)$

donc $\sin x - \cos x = \frac{2}{\sqrt{2}} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

$4x - \pi = 4\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ donc $\frac{\sin x - \cos x}{4x - \pi} = \frac{\sqrt{2}}{4} \times \frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{x - \frac{\pi}{4}}$

En posant $h = x - \frac{\pi}{4}$ on obtient : $\frac{\sin x - \cos x}{4x - \pi} = \frac{\sqrt{2}}{4} \times \frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{x - \frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{4} \times \frac{\sin h}{h}$

$\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} h = 0$ et $\lim\limits_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$ donc $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{4x - \pi} = \frac{\sqrt{2}}{4}$

ENONCE

Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R} - \{-3\}$, dont le tableau de variation est le suivant :

x	$-\infty$		-4		-3		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$+$	
f	$+\infty$	↘	10	↗	‖ $-\infty$	↗	$-\frac{7}{2}$	↗	$+\infty$

On sait, de plus, que pour tout réel $x \neq -3$, $f(x)$ peut s'écrire sous la forme : $a\,x^2 + b + \dfrac{c}{x+d}$ où a, b, c, d sont quatre réels (avec $a \neq 0$ et $c \neq 0$).

1. *a.* À l'aide des indications fournies par le tableau, déterminer la fonction f.

   b. Démontrer qu'il existe un réel e tel que : pour tout $x \in \mathbb{R} - \{-3\}$, $f'(x) = \dfrac{(x+1)^2\,(x+e)}{(x+3)^2}$

   c. Justifier toutes les informations du tableau de variation de f.

2. Soit C la courbe représentative de f dans un repère du plan et P la parabole d'équation $y = \dfrac{x^2}{2} - 2$ dans le même repère.

   a. Prouver que P coupe l'axe des abscisses en deux points que l'on déterminera.
   b. Prouver que C coupe l'axe des abscisses en seul point A. On déterminera une valeur approchée de l'abscisse de A à 10^{-2} près.
   c. Étudier la position relative des courbes C et P.
   d. Prouver que P est une courbe asymptote de C en $-\infty$ et en $+\infty$.
   e. Construire P et C.
   f. Résoudre algébriquement l'inéquation : $-0{,}1 < f(x) - (\frac{1}{2}x^2 - 2) < 0{,}1$. Interpréter graphiquement.

CORRECTION

1. *a.* D'après le tableau de variation, on a entre autre que $x \neq -3$ donc $d = 3$, de plus :

$f(-4) = 10$ et $f'(-4) = 0$; $f(-1) = -\dfrac{7}{2}$ et $f'(-1) = 0$

$$f'(x) = 2\,a\,x - \frac{c}{(x+3)^2} \text{ donc } \begin{cases} f(-4) = 16\,a + b - c = 10 \\ f'(-4) = -8\,a - c = 0 \\ f(-1) = a + b + \dfrac{c}{2} = -\dfrac{7}{2} \\ f'(-1) = -2\,a - \dfrac{c}{4} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16\,a + b - c = 10 \\ c = -8\,a \\ a + b - 4\,a = -\dfrac{7}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 24\,a + b = 10 \\ c = -8\,a \\ -3\,a + b = -\dfrac{7}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 24\,a + b + 3\,a - b = 10 + \dfrac{7}{2} \\ b = 10 - 24\,a \\ c = -8\,a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{2} \\ b = -2 \text{ donc } f(x) = \dfrac{1}{2}x^2 - 2 - \dfrac{4}{x+3} \\ c = -4 \end{cases}$$

1. *b.* $f'(x) = x + \dfrac{4}{(x+3)^2} = \dfrac{x^3 + 6x^2 + 9x + 4}{(x+3)^2}$

$x^3 + 6x^2 + 9x + 4 = (x^2 + 2x + 1)(x + e)$
$x^3 + 6x^2 + 9x + 4 = x^3 + (e+2)x^2 + (2e+1)x + e$
donc $e + 2 = 6$, $2e + 1 = 9$ et $e = 4$
donc $x^3 + 6x^2 + 9x + 4 = (x^2 + 2x + 1)(x + 4)$

$$f'(x) = \frac{(x+1)^2\,(x+4)}{(x+3)^2}$$

1. *c.* Un carré est toujours positif ou nul donc $f'(x)$ a le même signe que $x + 4$, et s'annule pour $x = -1$

x	$-\infty$		-4		-3		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$+$	

d'où le sens de variation de f
Il suffit ensuite de déterminer les limites de f aux bornes du domaine de définition

$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2 - \frac{4}{x+3}$ or $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{1}{2}x^2 - 2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{4}{x+3} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to -3} \frac{1}{2}x^2 - 2 = \frac{5}{2}$ et $\lim\limits_{x\to -3^+} \frac{4}{x+3} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to -3^+} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to -3} \frac{1}{2}x^2 - 2 = \frac{5}{2}$ et $\lim\limits_{x\to -3^-} \frac{4}{x+3} = -\infty$ donc $\lim\limits_{x\to -3^-} f(x) = +\infty$

2. *a* P coupe l'axe des abscisses quand $\frac{1}{2}x^2 - 2 = 0$ soit si $x^2 = 4$ donc si $x = 2$ ou $x = -2$ donc P coupe l'axe des abscisses en deux points A_1 (– 2 ; 0) et A_2 (2 ; 0).

2. *b* f est décroissante sur] – ∞ ; – 4] et croissante sur [4 ; – 3 [donc f admet un minimum en – 4; $f(-4) = 10$ donc pour tout x de] – ∞ ; – 3 [, $f(x) \geq 10$ donc C ne coupe pas l'axe des abscisses sur] – ∞ ; – 3 [.
f est définie continue, strictement croissante sur] – 3 ; + ∞ [, $f(]-3 ; +\infty[) =]-\infty ; +\infty[$, donc $0 \in f(]-3 ; +\infty[)$ donc l'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution α sur] – 3 ; + ∞ [.
La courbe C coupe donc l'axe des abscisses en un seul point d'abscisse α sur] – 3 ; + ∞ [.

$f(2{,}34) < 0$ et $f(2{,}35) > 0$ et l'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution α sur] – 3 ; + ∞ [donc f s'annule sur] 2,34 ; 2,35 [donc $2{,}34 < \alpha < 2{,}35$

2. *c.* $f(x) - (\frac{1}{2}x^2 - 2) = -\frac{4}{x+3}$ donc si $x > -3$, $f(x) - (\frac{1}{2}x^2 - 2) < 0$ donc C est en dessous de P sur] – 3 ; + ∞[

si $x < -3$, $f(x) - (\frac{1}{2}x^2 - 2) > 0$ donc C est au dessus de P sur] – ∞ ; – 3 [.

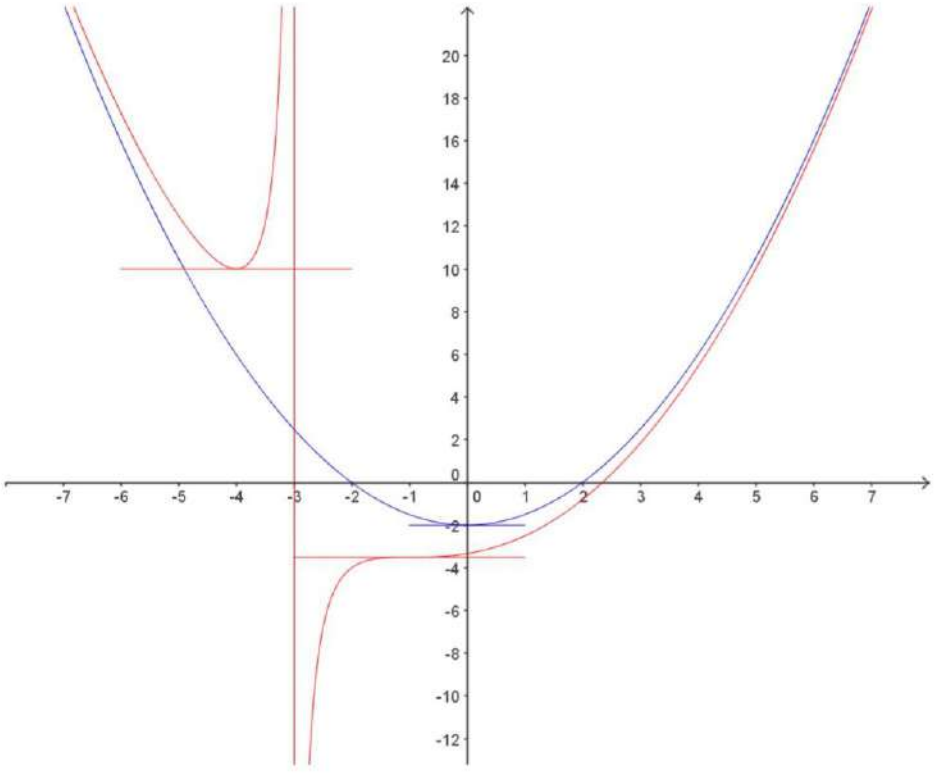
$f(x) - (\frac{1}{2}x^2 - 2) = -\frac{4}{x+3}$ et $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{4}{x+3} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) - (\frac{1}{2}x^2 - 2) = 0$ donc P est asymptote à C en + ∞ et – ∞.

2. *f.* $f(x) - (\frac{1}{2}x^2 - 2) = -\frac{4}{x+3}$, on doit donc résoudre $-0{,}1 < -\frac{4}{x+3} < 0{,}1$ soit en multipliant par – 1, il suffit donc de résoudre $-0{,}1 < \frac{4}{x+3} < 0{,}1$. On ne peut travailler qu'avec des nombres de même signe donc deux cas :

<u>Cas 1 :</u> $0 \leq \frac{4}{x+3} < 0{,}1$ donc en passant aux inverses : $\frac{x+3}{4} > 10$ soit $x + 3 > 40$ donc $x > 37$

<u>Cas 2 :</u> $-0{,}1 < \frac{4}{x+3} < 0$ donc en passant aux inverses : $\frac{x+3}{4} < -10$ soit $x + 3 < -40$ donc $x < -43$

Si $x \in]-\infty ; -43[\cup]37 ; +\infty[$, l'écart entre la courbe et la parabole est inférieur à 0,1.



EXERCICE 1

Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R} - \{-3\}$, dont le tableau de variation est le suivant :

x	$-\infty$		-4		-3		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$+$	
f	$+\infty$	↘	10	↗	‖ $-\infty$	↗	$-\frac{7}{2}$	↗	$+\infty$

On sait, de plus, que pour tout réel $x \neq -3$, $f(x)$ peut s'écrire sous la forme : $a\,x^2 + b + \dfrac{c}{x+d}$ où a, b, c, d sont quatre réels (avec $a \neq 0$ et $c \neq 0$) et que $f'(x) = 2\,a\,x - \dfrac{c}{(x+d)^2}$.

1. *a.* À l'aide des indications fournies par le tableau, déterminer d.

   Préciser $f(-4)$; $f(-1)$; $f'(-4)$ et $f'(-1)$. En déduire que a, b et c vérifient le système : $\begin{cases} 16\,a + b - c = 10 \\ -8\,a - c = 0 \\ 2\,a + 2\,b + c = -7 \end{cases}$.

   Résoudre ce système et déterminer la fonction f.

1. *b.* Démontrer qu'il existe un réel e tel que : pour tout $x \in \mathbb{R} - \{-3\}$, $f'(x) = \dfrac{(x+1)^2\,(x+e)}{(x+3)^2}$

1. *c.* Justifier toutes les informations du tableau de variation de f.

2. Soit C la courbe représentative de f dans un repère du plan et P la parabole d'équation $y = \dfrac{x^2}{2} - 2$ dans le même repère.

2. *a.* Prouver que P coupe l'axe des abscisses en deux points que l'on déterminera.

2. *b.* Étudier la position relative des courbes C et P.

2. *c.* Prouver que P est une courbe asymptote de C en $-\infty$ et en $+\infty$.

2. *d* Construire P et C.

2. *e* . Résoudre algébriquement l'inéquation : $-0{,}1 < f(x) - (\dfrac{1}{2}x^2 - 2) < 0{,}1$.

   On désigne par M et N les points de même abscisse x appartenant respectivement à (C) et (D).
   On juge que M et N sont indiscernables sur le graphique lorsque la distance MN est inférieure à 0,1 unité de longueur.
   Déterminer l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles M et N sont indiscernables.

EXERCICE 2

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin x - x$
   Déterminer le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$. Préciser $f(0)$, en déduire le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$

2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \cos x + \dfrac{x^2}{2} - 1$

   Déterminer le sens de variation de g sur $\mathbb{R}$. Préciser $g(0)$, en déduire le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$

3. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \sin x - x + \dfrac{x^3}{6}$

   Déterminer le sens de variation de h sur $\mathbb{R}$. Préciser $h(0)$, en déduire le signe de $h(x)$

4. *a.* A l'aide des questions précédentes, montrer que sur $[0 ; +\infty[$: $x - \dfrac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x$

4. *b.* En déduire un encadrement sur $]0 ; +\infty[$ de $\dfrac{\sin x}{x}$. Déterminer $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\sin x}{x}$.

5. A l'aide des questions précédentes, déterminer un encadrement de $\sin x$ sur $]-\infty ; 0]$.

4. *b.* En déduire un encadrement sur $]-\infty ; 0[$ de $\dfrac{\sin x}{x}$. Déterminer $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{\sin x}{x}$.

EXERCICE 1

1. *a.* f est définie lorsque $x + d \neq 0$ soit $x \neq -d$ donc d'après le tableau de variation $-d = -3$ donc $d = 3$

$f(x) = a\,x^2 + b + \dfrac{c}{x+3}$ et $f'(x) = 2\,a\,x - \dfrac{c}{(x+3)^2}$.

$f(-4) = 10$ donc $16\,a + b + \dfrac{c}{-4+3} = 10$ soit $16\,a + b - c = 10$

$f(-1) = -\dfrac{7}{2}$ donc $a + b + \dfrac{c}{-1+3} = -\dfrac{7}{2}$ donc $a + b + \dfrac{c}{2} = -\dfrac{7}{2}$ donc $2\,a + 2\,b + c = -7$

$f'(-4) = 0$ donc $-8\,a - \dfrac{c}{(-4+3)^2} = 0$ soit $-8\,a - c = 0$

$f'(-1) = 0$ donc $-2\,a - \dfrac{c}{(-1+3)^2} = 0$ soit $-2\,a - \dfrac{c}{4} = 0$ donc $-8\,a - c = 0$ donc a, b et c vérifient le système : $\begin{cases} 16\,a + b - c = 10 \\ -8\,a - c = 0 \\ 2\,a + 2\,b + c = -7 \end{cases}$

$c = -8\,a$ donc le système devient : $\begin{cases} c = -8\,a \\ 16\,a + b + 8\,a = 10 \\ 2\,a + 2\,b - 8\,a = -7 \end{cases}$ soit $\begin{cases} c = -8\,a \\ 24\,a + b = 10 \\ -6\,a + 2\,b = -7 \end{cases}$ donc en multipliant la dernière ligne par 4 :

$\begin{cases} c = -8\,a \\ 24\,a + b = 10 \\ -24\,a + 8\,b = -28 \end{cases}$ en ajoutant les deux dernières lignes : $\begin{cases} c = -8\,a \\ 24\,a + b = 10 \\ 9\,b = -18 \end{cases}$ soit $\begin{cases} c = -8\,a \\ 24\,a + b = 10 \\ b = -2 \end{cases}$ donc en remplaçant :

$\begin{cases} c = -8\,a \\ 24\,a - 2 = 10 \\ b = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -8\,a \\ 24\,a = 12 \\ b = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -8\,a \\ a = \dfrac{1}{2} \\ b = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{2} \\ b = -2 \\ c = -4 \end{cases}$ donc $f(x) = \dfrac{x^2}{2} - 2 - \dfrac{4}{x+3}$

$f'(x) = x + \dfrac{4}{(x+3)^2}$

1. *b.* $f'(x) = x + \dfrac{4}{(x+3)^2} = \dfrac{x^3 + 6\,x^2 + 9\,x + 4}{(x+3)^2}$

$x^3 + 6\,x^2 + 9\,x + 4 = (x^2 + 2\,x + 1)(x + e)$ donc $x^3 + 6\,x^2 + 9\,x + 4 = x^3 + (e+2)\,x^2 + (2\,e+1)\,x + e$
donc $e + 2 = 6$, $2\,e + 1 = 9$ et $e = 4$ donc $x^3 + 6\,x^2 + 9\,x + 4 = (x^2 + 2\,x + 1)(x + 4)$

$f'(x) = \dfrac{(x+1)^2\,(x+4)}{(x+3)^2}$

1. *c.* Un carré est toujours positif ou nul donc $f'(x)$ a le même signe que $x + 4$, et s'annule pour $x = -1$ d'où le sens de variation de f

x	$-\infty$		-4		-3		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$+$	

Il suffit ensuite de déterminer les limites de f aux bornes du domaine de définition

$f(x) = \dfrac{1}{2}x^2 - 2 - \dfrac{4}{x+3}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{2}x^2 - 2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4}{x+3} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{2}x^2 - 2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{4}{x+3} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{1}{2}x^2 - 2 = \dfrac{5}{2}$ et $\lim\limits_{x \to -3^+} \dfrac{4}{x+3} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to -3^+} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{1}{2}x^2 - 2 = \dfrac{5}{2}$ et $\lim\limits_{x \to -3^-} \dfrac{4}{x+3} = -\infty$ donc $\lim\limits_{x \to -3^-} f(x) = +\infty$

2. *a* P coupe l'axe des abscisses quand $\dfrac{1}{2}x^2 - 2 = 0$ soit si $x^2 = 4$ donc si $x = 2$ ou $x = -2$ donc P coupe l'axe des abscisses en deux points A_1 $(-2\,;\,0)$ et A_2 $(2\,;\,0)$.

2. *b* f est décroissante sur $]-\infty\,;-4]$ et croissante sur $[-4\,;-3\,[$ donc f admet un minimum en -4; $f(-4) = 10$ donc pour tout x de $]-\infty\,;-3\,[$, $f(x) \geq 10$ donc C ne coupe pas l'axe des abscisses sur $]-\infty\,;-3\,[$.

f est définie dérivable, strictement croissante sur $]-3\,;+\infty[$, $f(]-3\,;+\infty[)=]-\infty\,;+\infty[$, donc $0\in f(]-3\,;+\infty[)$ donc l'équation $f(x)=0$ admet une seule solution α sur $]-3\,;+\infty[$.
La courbe C coupe donc l'axe des abscisses en un seul point sur $]-3\,;+\infty[$.
$f(2{,}34)<0$ et $f(2{,}35)>0$ et l'équation $f(x)=0$ admet une seule solution α sur $]-3\,;+\infty[$ donc f s'annule sur $]2{,}34\,;2{,}35[$ donc $2{,}34<\alpha<2{,}35$

2. *c.* $f(x)-(\frac{1}{2}x^2-2)=-\dfrac{4}{x+3}$

donc si $x>-3$, $f(x)-(\frac{1}{2}x^2-2)<0$ donc C est en dessous de P sur $]-3\,;+\infty[$

si $x<-3$, $f(x)-(\frac{1}{2}x^2-2)>0$ donc C est au dessus de P sur $]-\infty\,;-3[$.

$f(x)-(\frac{1}{2}x^2-2)=-\dfrac{4}{x+3}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4}{x+3}=0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)-(\frac{1}{2}x^2-2)=0$ donc P est asymptote à C en $+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4}{x+3}=0$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)-(\frac{1}{2}x^2-2)=0$ donc P est asymptote à C en $-\infty$.

2. *d.* Pour tracer les courbes C et P, il faut placer les éléments remarquables :
Pour la parabole P
sommet de coordonnées $(0\,;-2)$ et la tangente horizontales au point d'abscisse 0
Ces éléments étant placés, il faut placer des points de P :

x	-6	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	16	6	2,5	0	$-1{,}5$	-2	$-1{,}5$	0	2,5	6

On peut alors tracer P

Pour la courbe C
Points à tangentes horizontales pour C aux points d'abscisse -4 et -1
l'asymptote $x=-3$.
Ces éléments étant placés, il faut placer des points de C :

x	-7	-5	-4	$-3{,}5$	$-2{,}5$	-2	-1	1	2	5
y	23,5	12,5	10	12,125	$-6{,}875$	-4	$-3{,}5$	$-2{,}5$	$-0{,}8$	10

On peut alors tracer C.

2. *e*. $f(x)-(\frac{1}{2}x^2-2)=-\dfrac{4}{x+3}$.

Il suffit donc de résoudre $-0{,}1<\dfrac{4}{x+3}<0{,}1$. On ne peut travailler qu'avec des nombres de même signe donc deux cas :

<u>Cas 1 :</u> $0\le\dfrac{4}{x+3}<0{,}1$ donc en passant aux inverses : $\dfrac{x+3}{4}>10$ soit $x+3>40$ donc $x>37$

<u>Cas 2 :</u> $-0{,}1<\dfrac{4}{x+3}<0$ donc en passant aux inverses : $-10>\dfrac{x+3}{4}$ soit $x+3<-40$ donc $x<-43$

Si $x\in]-\infty\,;-43[\cup]37\,;+\infty[$, l'écart entre la courbe et la parabole est inférieur à 0,1.

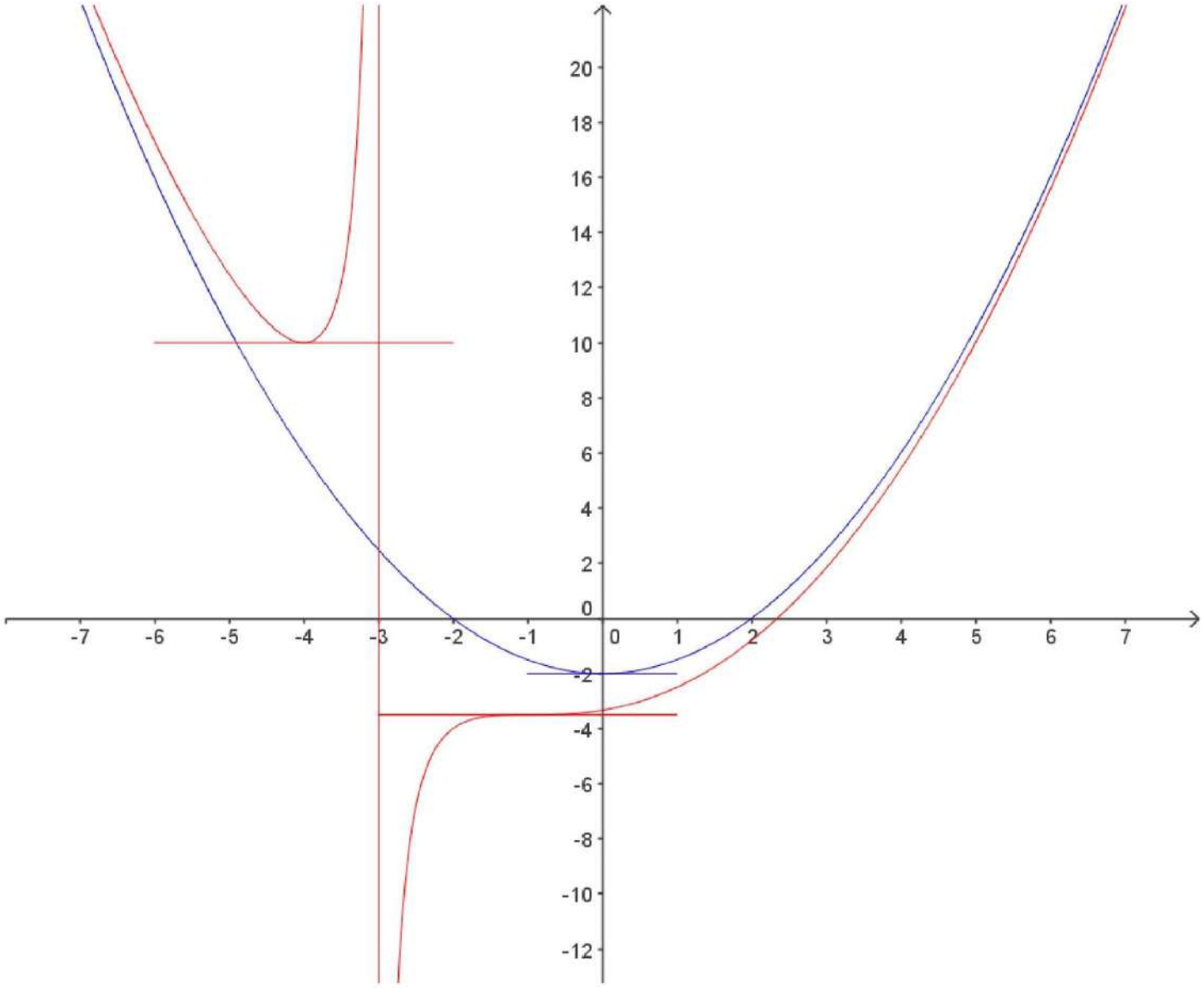
<u>Si $x<-3$</u>, C est au dessus de P sur $]-\infty\,;-3[$ donc $MN=f(x)-(\frac{1}{2}x^2-2)=-\dfrac{4}{x+3}$.

$MN<0{,}1\Leftrightarrow 0<-\dfrac{4}{x+3}<0{,}1\Leftrightarrow -0{,}1<\dfrac{4}{x+3}<0$ donc $x>-43$ d'après le calcul précédent

<u>Si $x>-3$</u>, C est en dessous de P sur $]-3\,;+\infty[$ donc $MN=(\frac{1}{2}x^2-2)-f(x)=\dfrac{4}{x+3}$.

$MN<0{,}1\Leftrightarrow 0<\dfrac{4}{x+3}<0{,}1$ donc $x>37$ d'après le calcul précédent

L'ensemble des valeurs de x pour lesquelles M et N sont indiscernables est donc $]-\infty\,;-43[\cup]37\,;+\infty[$,


20
18
16
14
12
10
8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
-10
-12
-7
-6
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6
7

EXERCICE 2

1. $f\,'(x) = \cos x - 1$ or $-1 \leq \cos x \leq 1$ donc $f\,'(x) \leq 0$ donc f est décroissante sur $\mathbb{R}$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f		↘	0	↘	
$f\,(x)$		$+$	0	$-$	

$f\,(0) = 0$ donc si $x < 0$ alors $f\,(x) \geq 0$ et si $x > 0$ alors $f\,(x) \leq 0$

2. $g'(x) = -\sin x + x = -f\,(x)$ donc :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g		↘	0	↗	
$g(x)$		$+$	0	$+$	

3. $h'(x) = \cos x - 1 + \dfrac{x^2}{2} = g(x)$ donc :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$+$	
h		↗	0	↗	
$h(x)$		$-$	0	$+$	

4. *a*. sur $[\,0\,;+\infty\,[\,: f\,(x) \leq 0$ donc $\sin x \leq x$ et $h(x) \geq 0$ donc $x - \dfrac{x^3}{6} \leq \sin x$ donc sur $[\,0\,;+\infty\,[\,: x - \dfrac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x$

4. *b*. sur $]\,0\,;+\infty\,[\,: x - \dfrac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x$ soit $x\left(1 - \dfrac{x^2}{6}\right) \leq \sin x \leq x$

$x > 0$ donc $1 - \dfrac{x^2}{6} \leq \dfrac{\sin x}{x} \leq 1$.

$\lim\limits_{x \to 0^+} 1 - \dfrac{x^2}{6} = \lim\limits_{x \to 0^+} 1 = 1$ et pour tout $x > 0 : 1 - \dfrac{x^2}{6} \leq \dfrac{\sin x}{x} \leq 1$ donc d'après le théorème des gendarmes $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

5. sur $]-\infty\,;0\,]\,: f\,(x) \geq 0$ donc $\sin x \geq x$ et $h(x) \leq 0$ donc $\sin x \leq x - \dfrac{x^3}{6}$ donc sur $]-\infty\,;0\,]: x \leq \sin x \leq x - \dfrac{x^3}{6}$

4. *b*. sur $]-\infty\,;0\,]\,: x \leq \sin x \leq x\left(1 - \dfrac{x^2}{6}\right)$ donc si $x < 0 : 1 \geq \dfrac{\sin x}{x} \geq 1 - \dfrac{x^2}{6}$

$\lim\limits_{x \to 0^-} 1 - \dfrac{x^2}{6} = \lim\limits_{x \to 0^-} 1 = 1$ et pour tout $x > 0 : 1 - \dfrac{x^2}{6} \leq \dfrac{\sin x}{x} \leq 1$ donc d'après le théorème des gendarmes $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

Dans tous les cas $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

Exercice 1

On désigne par n et a deux entiers naturels.

1. Démontrer que si a divise $5n + 31$ et a divise $3n + 12$, alors a divise 33.
2. Déterminer toutes les valeurs possibles pour les entiers a et n.

Exercice 2

Déterminer les entiers naturels n tels que le quotient $\dfrac{5n+3}{n+2}$ soit un entier.

Exercice 3

On désigne par a et b deux entiers naturels supérieurs ou égaux à 2.

1. Développer le carré $(a^2 + 2b^2)^2$.
2. En déduire que l'entier naturel $a^4 + 4b^4$ n'est jamais un nombre premier.

Exercice 4

Le reste de la division euclidienne de l'entier naturel a par 45 est 9.
Quel est le reste de la division euclidienne de a: par 15 par 9 ? par 5 ? par 3 ?

Exercice 5

Les divisions euclidiennes de l'entier naturel a par 155 et par 161 donnent le même quotient et des restes égaux respectivement à 65 et 23.

1. Déterminer l'entier a.
2. Quels sont les restes possibles dans la division euclidienne d'un entier naturel impair par 4 ?

Exercice 6

1. Montrer que $1\,000 \equiv -1$ [13], déterminer le reste de la division de 10^6 par 13
2. Soit n un entier naturel quelconque, montrer que n est de la forme $6k$; $6k + 1$ … $6k + 5$ où k est un entier naturel.
   En déduire les valeurs possibles du reste de la division de 10^n par 13.
3. Démontrer que pour tout entier naturel n, $10^{3n+3} + 10^{3n}$ est divisible par 13.

CORRECTION

Exercice 1

1. Soit $u = 5n + 31$ et $v = 3n + 12$, en éliminant n entre u et v alors $3u - 5v = 3(5n + 31) - 5(3n + 12)$
donc $3u - 5v = 93 - 60 = 33$
a divise u et v donc a divise $3u - 5v$ donc a divise 33.

2. La décomposition en produit de facteurs premiers de 33 est $33 = 3 \times 11$ donc les diviseurs positifs de 33 sont 1 ; 3 ; 11 ; 33.
$a \in \{ 1 ; 3 ; 11 ; 33 \}$

Si $a = 33$: en divisant n par 33, il existe k et r tels que $n = 33k + r$ avec $0 \leq r < 33$
alors $u = 165k + 5r + 31 = 33(5k + 1) + 5r - 2$
a divise u donc $5r - 2$ est divisible par 33
$5r - 2 \equiv 0\ (33)$ donc $5r \equiv 2\ (33)$ $5 \times 13\, r \equiv 2 \times 13\ (33)$ $-r \equiv 26\ (33)$ or $26 = 33 - 7$ donc $-r \equiv -7\ (33)$
$r \equiv 7\ (33)$ or $0 \leq r < 33$ donc $r = 7$ et $n = 33k + 7$
$v = 3n + 12 = 3 \times (33k + 7) + 12 = 33 \times 3k + 33 = 33(3k + 1)$
Donc si $n = 33$ alors $n = 33k + 7$ avec $k \in \mathbb{N}$.

Si $a = 11$: en divisant n par 11, il existe k et r tels que $n = 11k + r$ avec $0 \leq r < 11$
alors $u = 55k + 5r + 31 = 11(5k + 3) + 5r - 2$ or $0 \leq r < 11$

r	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$5r - 2$	-2	3	8	13	18	23	28	33	38	43	48

$5r - 2$ est divisible par 7 uniquement si $r = 7$ donc $n = 11k + 7$
alors $v = 3n + 12 = 33k + 21 + 12 = 33(k + 1)$ donc pour tout k, 11 divise v

Si $a = 3$: en divisant n par 3, il existe k et r tels que $n = 3k + r$ avec $0 \leq r < 3$
alors $u = 15k + 5r + 31 = 15(k + 2) + 5r + 1$; 3 divise 15 et 3 divise u donc 3 divise $5r + 1$ ce qui n'est possible que pour $r = 1$ donc $n = 3k + 1$ avec $k \in \mathbb{N}$.

$v = 3n + 12 = 3(n + 4)$ donc 3 divise v pour toute valeur de n.

Si $a = 1$: dans tous les autres cas donc pour $n = 33k$; $33k + 2$; $33k + 3$; $33k + 5$; $33k + 6$; ; $33k + 8$; $33k + 9$; $33k + 11$; $33k + 12$; $33k + 14$; $33k + 15$; $33k + 17$; $33k + 20$; $33k + 21$; $33k + 23$; $33k + 24$; $33k + 26$; $33k + 27$; $33k + 30$; $33k + 32$ avec $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 2

Si le quotient $\dfrac{5n + 3}{n + 2}$ est un entier alors $n + 2$ divise $5n + 3$ or $5n + 3 = 5 \times (n + 2) - 7$ donc $n + 2$ divise 7
Les diviseurs de 7 sont -7 ; -1 ; 1 ; 7 donc

$n + 2$	-7	-1	1	7
n	-9	-3	-1	5

n est un entier naturel donc $n = 5$

Exercice 3

1. $(a^2 + 2b^2)^2 = (a^2)^2 + 2 \times a^2 \times (2b^2) + (2b^2)^2 = a^4 + 4b^4 + 4a^2b^2$

2. $a^4 + 4b^4 = (a^2 + 2b^2)^2 - 4a^2b^2 = [a^2 + 2b^2 - 2ab][a^2 + 2b^2 + 2ab]$
$a^4 + 4b^4 = [(a - b)^2 + b^2][(a + b)^2 + b^2]$
$(a - b)^2 + b^2$ est un entier naturel donc $(a + b)^2 + b^2$ est un diviseur de $a^4 + 4b^4$.

$a \geq 2$ et $b \geq 2$ donc $(a - b)^2 + b^2 \geq b^2 \geq 4$ donc $(a - b)^2 + b^2 \neq 1$ donc $(a + b)^2 + b^2 \neq a^4 + 4b^4$.
$(a + b)^2 + b^2 \geq b^2 \geq 4$ donc $(a + b)^2 + b^2 \neq 1$
$(a + b)^2 + b^2$ est un diviseur de $a^4 + 4b^4$ distinct de 1 et de $a^4 + 4b^4$ donc $a^4 + 4b^4$ n'est jamais un nombre premier.

Exercice 4

Le reste de la division euclidienne de l'entier naturel a par 45 est 9, donc il existe un entier q tel que $a = 45q + 9$

$a = 15 \times (3q) + 9$; $3q \in \mathbb{Z}$ et $0 \leq 9 < 15$ donc le reste de la division euclidienne de a par 15 est 9

$a = 9 \times (5q + 1)$; $5q + 1 \in \mathbb{Z}$ donc le reste de la division euclidienne de a par 9 est 0

$a = 5 \times (9q) + 5 + 4 = 5(9q + 1) + 4$; $9q + 1 \in \mathbb{Z}$ et $0 \leq 4 < 5$ donc le reste de la division euclidienne de a par 5 est 4

$a = 3 \times (15q) + 9 = 3(15q + 3)$; $15q + 3 \in \mathbb{Z}$ donc le reste de la division euclidienne de a par 3 est 4

Exercice 5

1. Les divisions euclidiennes de l'entier naturel a par 155 et par 161 donnent le même quotient q et des restes égaux respectivement à 65 et 23 donc $a = 155\,q + 65$ et $a = 161\,q + 23$ donc $155\,q + 65 = 161\,q + 23$ donc $65 - 23 = 161\,q - 155\,q$ donc $6\,q = 42$ donc $q = 7$
$a = 155 \times 7 + 65 = 1150$

2. Dans la division euclidienne d'un entier n par 4, il existe un entier q et un entier r tels que $a = 4\,q + r$ et $0 \leq r < 4$
donc $a = 4\,k$ ou $4\,k + 1$ ou $4\,k + 2$ ou $4\,k + 3$ or $4\,k$ et $4\,k + 2$ sont pairs (somme de deux entiers pairs) et $4\,k + 1$ et $4\,k + 3$ sont impairs.
a est impair donc $a = 4\,k + 1$ ou $4\,k + 3$ donc les restes possibles dans la division euclidienne d'un entier naturel impair par 4 sont 1 et 3

Exercice 6

1. $1\,000 = 13 \times 77 - 1$ donc $1\,000 \equiv -1$ [13].
$10^3 \equiv -1$ [13] donc $10^6 \equiv (-1)^2$ [13] soit $10^6 \equiv 1$ [13] ;
Il existe un entier q tel que $10^6 = 13\,q + 1$ et $0 \leq 1 < 13$ donc le reste de la division de 10^6 par 13 est 1

2. Soit n un entier naturel quelconque, dans la division euclidienne de n par 6, il existe un entier k et un entier r tels que $n = 6\,k + r$ avec $0 \leq r < 6$ donc n est de la forme $6\,k$; $6\,k + 1$ … $6\,k + 12$ où k est un entier naturel.
$10^6 \equiv 1$ [13] donc $10^{6k} \equiv 1^k$ [13] soit $10^{6k} \equiv 1$ [13]
$10 \times 10^{6k} = 10^{6k+1}$ donc $10^{6k+1} \equiv 10$ [13]
$10 \times 10^{6k+1} = 10^{6k+2}$ donc $10^{6k+2} \equiv 10 \times 10$ [13] or $100 = 7 \times 13 + 9$ donc $10^{6k+2} \equiv 9$ [13]
$10 \times 10^{6k+2} = 10^{6k+3}$ donc $10^{6k+3} \equiv 10 \times 9$ [13] or $90 = 6 \times 13 + 12$ donc $10^{6k+3} \equiv 12$ [13]
$10 \times 10^{6k+3} = 10^{6k+4}$ donc $10^{6k+4} \equiv 10 \times 12$ [13] or $120 = 9 \times 13 + 3$ donc $10^{6k+4} \equiv 3$ [13]
$10 \times 10^{6k+4} = 10^{6k+5}$ donc $10^{6k+5} \equiv 10 \times 3$ [13] or $30 = 2 \times 13 + 4$ donc $10^{6k+5} \equiv 4$ [13]
donc les valeurs possibles du reste r de la division de 10^n par 13 sont :

si $n = 6\,k$	$r = 1$
si $n = 6\,k + 1$	$r = 10$
si $n = 6\,k + 2$	$r = 9$
si $n = 6\,k + 3$	$r = 12$
si $n = 6\,k + 4$	$r = 3$
si $n = 6\,k + 5$	$r = 4$

3. Pour tout entier naturel n, $10^{3n+3} + 10^{3n} = 10^{3n} \times 10^3 + 10^{3n} = 10^{3n} \times 1001$
or $1001 = 13 \times 77$ donc 1001 est divisible par 13 donc pour tout entier naturel n, $10^{3n+3} + 10^{3n}$ est divisible par 13

On pouvait aussi dire que $10^3 \equiv -1$ [13] donc $10^{3n} \times 10^3 \equiv -10^{3n}$ [13] donc $10^{3n+3} + 10^{3n} \equiv 0$ [13]

Exercice 1

Partie A

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2x^3 + 3x^2 + 1$

1. Etudier la fonction g sur $\mathbb{R}$, préciser les limites de g en $+\infty$ et $-\infty$. Dresser le tableau de variation de g.
2. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une seule solution α sur $\mathbb{R}$. Donner un encadrement de α à 10^{-2} près.
3. Préciser le signe de $g(x)$.

Partie B

Soit f la fonction définie, pour tout réel x différent de 1, par : $f(x) = \dfrac{x+1}{x^3-1}$

On désigne par C sa courbe représentative dans un plan rapporté à un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.
2. Montrer que $x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1)$ en déduire les limites de f en 1.

On admet que, pour tout réel x différent de 1, $f'(x) = \dfrac{-2x^3 - 3x^2 - 1}{(x^3-1)^2}$

3. En utilisant les questions précédentes, déterminer les variations de la fonction f sur les intervalles où elle est définie.
4. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe C au point A(0 ; – 1).
5. Montrer que $f(x) - (-x-1)$ a le même signe que $\dfrac{x(x+1)}{x-1}$. En déduire la position de C par rapport à la droite T.

Exercice 2

Partie A

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin x - \dfrac{2}{\pi} x$. Déterminer un encadrement de $f(x)$, en déduire la limite en $+\infty$ et $-\infty$ de f.

Partie B

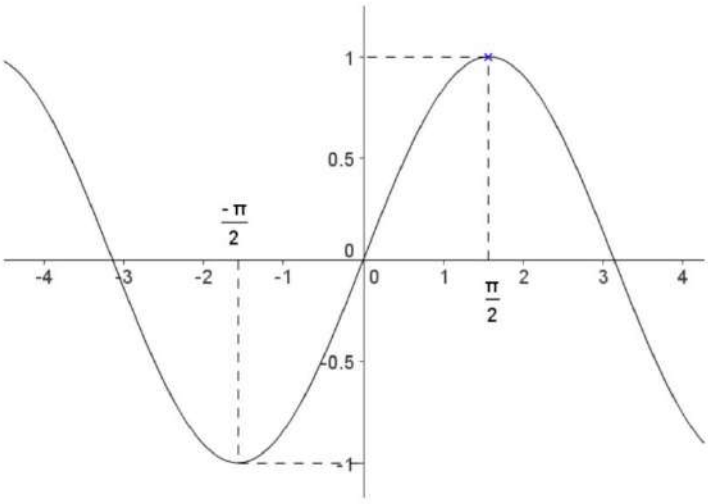
On souhaite démontrer l'inégalité suivante: pour tout $x \in \left[0 ; \dfrac{\pi}{2}\right]$: $\sin x \geq \dfrac{2}{\pi} x$

On considère alors la fonction f définie par : $f(x) = \sin x - \dfrac{2}{\pi} x$ sur l'intervalle $\left[0 ; \dfrac{\pi}{2}\right]$.

1. Déterminer f' et f'', les dérivée et dérivée seconde de la fonction f sur l'intervalle $\left[0 ; \dfrac{\pi}{2}\right]$.
2. Montrer que la fonction f' est strictement décroissante sur l'intervalle $\left[0 ; \dfrac{\pi}{2}\right]$. Dresser son tableau de variations.
3. Montrer qu'il existe un unique réel a de l'intervalle $\left[0 ; \dfrac{\pi}{2}\right]$ tel que $f'(a) = 0$.

   Vérifier que $0{,}880 < a < 0{,}881$. En déduire le signe de la fonction f' sur l'intervalle $\left[0 ; \dfrac{\pi}{2}\right]$.
4. Déduire de ce qui précède les variations de la fonction f que l'on résumera dans un tableau.
5. Démontrer alors que pour tout $x \in \left[0 ; \dfrac{\pi}{2}\right]$, on a la minoration suivante: $\sin x \geq \dfrac{2}{\pi} x$
6. Sur le graphique suivant est représenté sur $\left[0 ; \dfrac{\pi}{2}\right]$ la sinusoïde associée à la fonction sinus.

   Représenter la droite d'équation $y = \dfrac{2}{\pi} x$. Faire une interprétation graphique de ce résultat.


1
0.5
0
-0.5
-1
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
-π/2
π/2

CORRECTION

Exercice 1

Partie A

1. g est un polynôme donc sa limite à l'infini est la même que celle de son terme de plus haut degré :

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} 2x^3 = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} 2x^3 = +\infty$ et

$g'(x) = 6x^2 + 6x = 6x(x+1)$; $g'(x)$ est un polynôme du second degré qui s'annule en 0 et -1 donc :

x	$-\infty$		α		-1		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$		0		$-$		0	$+$
g	$-\infty$	↗	0	↗	2	↘	1	↗	$+\infty$

2. g est définie continue strictement croissante sur $]-\infty\,;-1]$; $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$ et $g(-1) = 2$ donc 0 est compris entre $\lim\limits_{x\to-\infty}$ $g(x)$ et $g(-1)$ donc l'équation $g(x) = 0$ admet une seule solution α sur $]-\infty\,;-1]$.

g est décroissante sur $[-1\,;0]$ et croissante sur $[0\,;+\infty[$ donc admet un minimum en 0 et pour tout x de $[-1\,;+\infty[$, $g(x) \geq 1$ donc l'équation $g(x) = 0$ n'admet pas de solution sur $[-1\,;+\infty[$.

L'équation $g(x) = 0$ admet une seule solution α sur $\mathbb{R}$.

$g(-1{,}67) \approx 0{,}051774$ et $g(-1{,}68) \approx -0{,}016064$ donc $-1{,}68 \leq \alpha \leq -1{,}67$

3. g est strictement croissante sur $]-\infty\,;-1]$ et $g(\alpha) = 0$ donc si $x < \alpha$ alors $g(x) < 0$; si $\alpha < x < -1$ alors $g(x) > 0$

pour tout x de $[-1\,;+\infty[$, $g(x) \geq 1$ donc $g(x) > 0$ d'où le tableau de signes.

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

Partie B

1. f est une fraction rationnelle donc sa limite à l'infini est la même que celle du quotient de ses termes de plus haut degré :

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{x^3} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{x^3} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$

2. $(x-1)(x^2+x+1) = x^3+x^2+x-x^2-x-1 = x^3-1$

$$f(x) = \frac{x+1}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{x+1}{x^2+x+1} \times \frac{1}{x-1}$$

$\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x+1}{x^2+x+1} = \dfrac{2}{3}$ et $\lim\limits_{x\to1^+} \dfrac{1}{x-1} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to1^-} \dfrac{1}{x-1} = -\infty$ donc $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = +\infty$.

3. $f'(x) = \dfrac{-2x^3-3x^2-1}{(x^3-1)^2} = \dfrac{-g(x)}{(x^3-1)^2}$ donc $f'(x)$ a le même signe que $-g(x)$

x	$-\infty$		α		1		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$-$	
f	0	↗	$f(\alpha)$	↘	$-\infty$	$+\infty$ ↘	0

4. La tangente T à la courbe C au point A(0 ; −1) est la droite de coefficient directeur $f'(0) = -1$ qui passe par A onc a pour équation $y = -x + b$ et $y_A = x_A + b$ donc $-1 = 0 + b$ donc l'équation de T est $y = -x - 1$.

$$f(x) - (-x-1) = \frac{x+1}{x^3-1} - (-x-1) = \frac{x+1}{x^3-1} + (x+1) = (x+1)\left(\frac{1}{x^3-1}+1\right) = (x+1)\frac{x^3-1+1}{x^3-1} = (x+1)\frac{x^3}{x^3-1}$$

$x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1)$ or $x^2+x+1 = 0$ n'a pas de solution sur R ($\Delta = -3$) donc $x^2+x+1 > 0$ sur R.

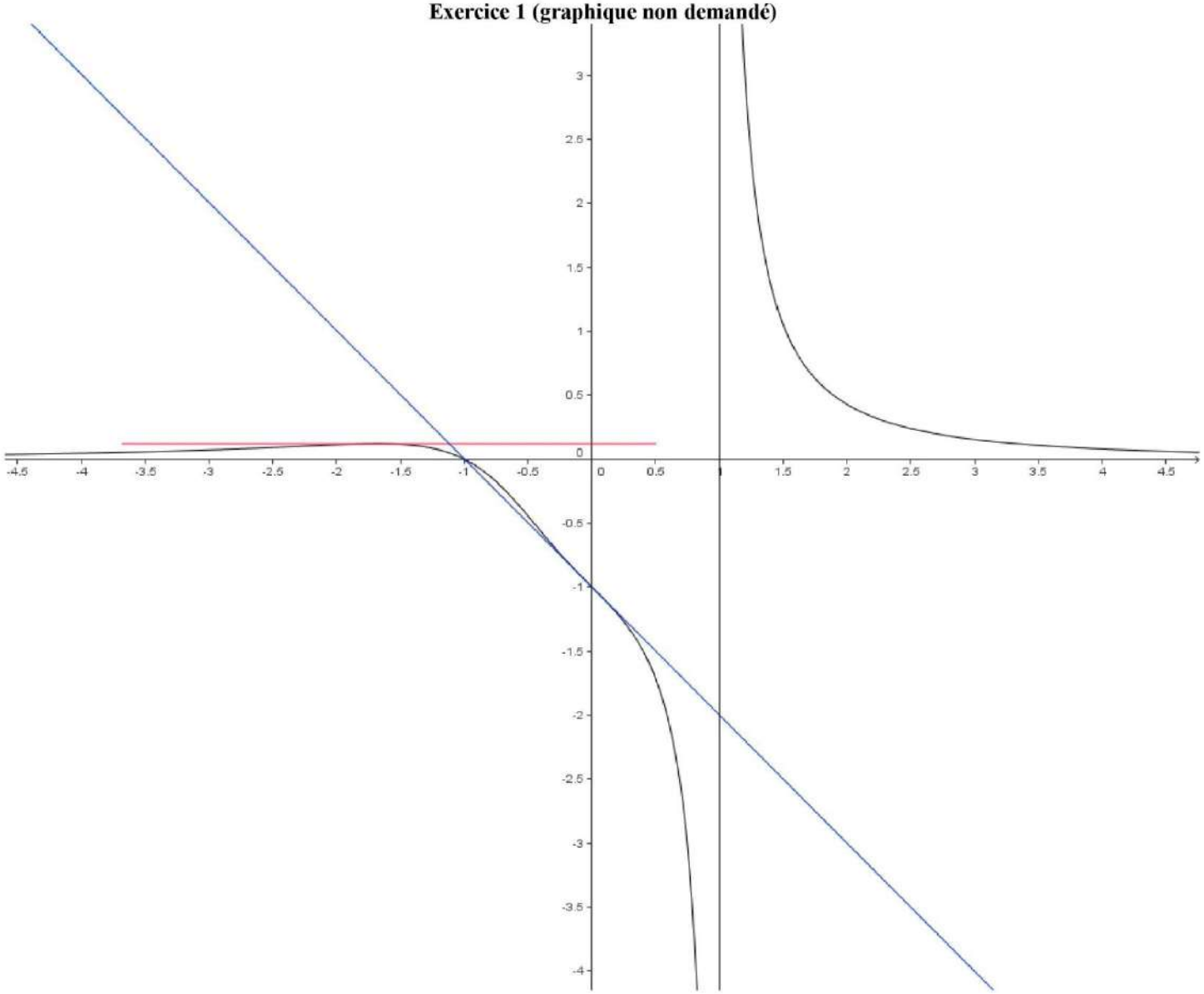
donc $x^3 - 1$ a le même signe sur R que $x - 1$

$f(x) - (x-1)$ a le même signe que $\dfrac{x(x+1)}{x-1}$

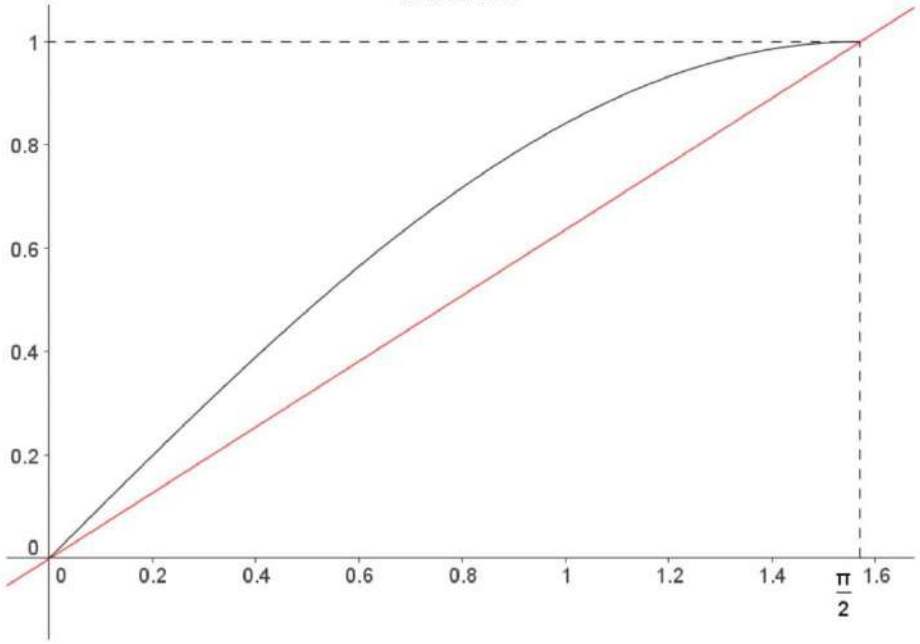
x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$		$-$		$+$	
$\dfrac{x(x+1)}{x-1}$		$-$	0	$+$	0	$-$		$+$	

La tangente T est en dessous de la courbe C sur $]-\infty\,;-1[$ et sur $]0\,;1[$; au dessus de la courbe C sur $]-1\,;0[$ et sur $]1\,;+\infty[$; coupe la courbe aux points d'abscisse -1 et 0.

Exercice 1 (graphique non demandé)



Exercice 2



Exercice 2
Partie A

Pour tout x réel, $-1 \leq \sin x \leq 1$ donc $-1-\frac{2}{\pi}x \leq f(x) \leq 1-\frac{2}{\pi}x$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} -1-\frac{2}{\pi}x = +\infty$ donc d'après le théorème de comparaison $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} 1-\frac{2}{\pi}x = -\infty$ donc d'après le théorème de comparaison $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

Partie B

1. $f'(x) = \cos x - \frac{2}{\pi}$ et $f''(x) = -\sin x$

2. Pour tout x de $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$, $\sin x > 0$ donc $f''(x) < 0$ et $f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ donc la fonction f' est strictement décroissante sur l'intervalle $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

x	0		α		$\frac{\pi}{2}$
$f''(x)$		$-$			0
f'	$1-\frac{2}{\pi}$		0		$-\frac{2}{\pi}$

3. f' est définie continue strictement décroissante sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$; $f'(0) = 1-\frac{2}{\pi}$ donc $f'(0) > 0$ et $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{2}{\pi}$ donc $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0$ donc 0 est compris entre $f'(0)$ et $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$ donc l'équation $f'(x) = 0$ admet une seule solution a sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

$f'(0{,}880) \approx 0{,}0005$ et $f'(0{,}881) \approx -0{,}0002$ donc $0{,}880 < a < 0{,}881$.

4.

x	0		α		$\frac{\pi}{2}$
f'	$1-\frac{2}{\pi}$		0		$-\frac{2}{\pi}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

x	0		α		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0
f	0		$f(\alpha)$		0

5. Pour tout $x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, $f(x) \geq 0$ donc $\sin x - \frac{2}{\pi}x \geq 0$ donc $\sin x \geq \frac{2}{\pi}x$

6. La droite d'équation $y = \frac{2}{\pi}x$ passe par l'origine du repère et par le point de coordonnées $\left(\frac{\pi}{2};1\right)$ d'où le tracé. Le calcul précédent permet d'affirmer que la sinusoïde est su dessus de la droite sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

EXERCICE 1
Démontrer que si n est un entier naturel impair, alors $n^2 - 1$ est divisible par 8.

EXERCICE 2
Trouvez tous les entiers naturels n tels que $n + 8$ est un multiple de n.

EXERCICE 3
Expliquez pourquoi il est impossible de trouver u et v dans $\mathbb{Z}$ tels que $6u - 9v = 2$.

EXERCICE 4
p est un nombre premier différent de 2.
Montrer que $x^2 - y^2 = p$ admet un seul couple de solution dans $\mathbb{N}$.

EXERCICE 5
Déterminer tous les entiers naturels qui divisés par 11 donnent un quotient égal au double du reste.

EXERCICE 6
Soit n un entier naturel. Soit $a = 18n + 60$ et $b = 15n + 26$
Soit d un diviseur commun à a et b.
1. Démontrer que d divise 144.
2. Démontrer que si d est pair alors n est pair.

CORRECTION

EXERCICE 1

Méthode 1
si n est un entier naturel impair, il existe un entier naturel p tel que $n = 2p + 1$
donc $n^2 - 1 = (2p + 1)^2 - 1 = 4p^2 + 4p = 4p(p + 1)$
p et $p + 1$ sont deux nombres entiers consécutifs donc l'un d'eux est pair donc $p(p + 1)$ est pair donc $n^2 - 1$ est divisible par 8.

Méthode 2
n est un entier impair donc n est congru modulo 8 à

n	1	3	5	7
n^2	1	9	25	49
$n^2 - 1$	0	8	24	48

comme 8 divise 8 ; 24 ; 48 dans tous les cas $n^2 - 1 \equiv 0$ [8]
$n^2 - 1$ est divisible par 8

EXERCICE 2
Si $n + 8$ est un multiple de n, n divise $n + 8$ donc n divise $(n + 8) - n$ donc n divise 8 donc $n \in \{1 ; 2 : 4 ; 8\}$

EXERCICE 3
$6u - 9v = 3(2u - 3v)$ donc 3 divise $6u - 9v$ or 2 est un nombre premier donc n'est divisible que par 1 ou 2 donc 3 ne divise pas 2 donc il est impossible de trouver u et v dans $\mathbb{Z}$ tels que $6u - 9v = 2$.

EXERCICE 4
p est un nombre premier différent de 2.
$x^2 - y^2 = p \Leftrightarrow (x - y)(x + y) = p$ donc $x + y$ divise p donc soit $x + y = p$ soit $x + y = 1$
x et y sont des entiers naturels donc $x + y \geq x - y$ donc $x + y = p$ et $x - y = 1$ donc $2x = p + 1$
p est un nombre premier différent de 2 donc p est impair donc $p + 1$ est pair donc $x = \frac{p+1}{2}$ et $y = \frac{p-1}{2}$

$x^2 - y^2 = p$ admet un seul couple de solution dans $\mathbb{N}$.

EXERCICE 5
$N = 11q + r$ avec $0 \leq r < 11$ or $q = 2r$ donc $N = 22r + r = 23r$ avec $0 \leq r < 11$
$N \in \{0 ; 23 ; 46 ; 69 ; 92 ; 115 ; 138 ; 184 ; 207 ; 230 ; 253\}$

EXERCICE 6
1. d divise $5a - 6b = 5(18n + 60) - 6(15n + 26) = 144$
d est un diviseur commun à a et b donc d divise $5a - 6b$ donc d divise 144.

2. Si d est pair alors $\begin{cases} 2 \text{ divise } d \\ d \text{ divise } a \text{ et } b \end{cases}$ donc 2 divise a et b

or $b = 2(7n + 13) + n$
2 divise b donc 2 divise $b - 2(7n + 13)$ donc 2 divise n donc n est pair

TS spé maths
vendredi 5 novembre

Exercice 1

1. Soit les polynômes $P(x) = x^3 - x^2 - 12x$ et $Q(x) = 2x^2 - 7x - 4$.
   Factoriser P et Q.

On définit pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 5 les entiers : $A = n^3 - n^2 - 12n$ et $B = 2n^2 - 7n - 4$

2. Démontrer que A et B sont divisibles par $n - 4$
3. On pose $\alpha = 2n + 1$ et $\beta = n + 3$.
   a. Soit d un diviseur commun à α et β, montrer que d divise 5
   b. Montrer que si $n - 2$ est multiple de 5 alors α et β sont multiples de 5.
   c Montrer que si 5 divise α et β alors 5 divise $n - 2$.
   d. Etablir que le seul diviseur positif commun à n et $2n + 1$ est 1.

Exercice 2

Pour tout entier naturel n, on pose : $a = 9n + 4$ $b = 2n - 1$

a. Soit d un diviseur commun à a et b, montrer d divise 17
b. Démontrer que si 17 est un diviseur commun à a et à b alors le reste de la division euclidienne de n par 17 est 9.
(On pourra remarquer que $a - 4b - 17 = n - 9$)
c. Démontrer que si le reste de la division euclidienne de n par 17 est 9 alors 17 est un diviseur commun à a et b.

Exercice 3

Soit p un nombre premier différent de 2 et de 3,

1. montrer que $p^2 - 1$ est divisible par 8.
2. Montrer que p est de la forme $3k + 1$ ou $3k + 2$ en déduire que 3 divise $p^2 - 1$.

Exercice 4

1. Montrer que si n est un nombre impair alors n^2 est impair et si n est pair alors n^2 est pair.

Il s'en suit donc que pour tout n de $\mathbb{N}$, n et n^2 on la même parité.

Soit E l'ensemble des couples $(p ; q)$ où p et q désignent deux entiers naturels tels que : $p^2 - 2q^2 = 1$.

2. Vérifier que (3 ; 2) appartient à E.
3. Soit un couple $(p ; q)$ de E,

a. Démontrer que p est impair.
b. Démonter que q est pair.

CORRECTION

Exercice 1

1. $P(x) = x^3 - x^2 - 12x = x(x^2 - x - 12)$

Résolvons $x^2 - x - 12 = 0$,

$\Delta = 49$ donc $x_1 = 4$ et $x_2 = -3$ donc $x^2 - x - 12 = (x-4)(x+3)$ donc $P(x) = x(x-4)(x+3)$

$Q(x) = 2x^2 - 7x - 4$.

Résolvons $2x^2 - 7x - 4 = 0$;

$\Delta = 81$ donc $x_1 = 4$ et $x_2 = -\frac{1}{2}$ donc $Q(x) = 2\left(x + \frac{1}{2}\right)(x-4) = (2x+1)(x-4)$

2. $A = n(n-4)(n+3)$; $n \geq 5$ donc $n - 4 \geq 1$ de plus $n(n+3)$ est un entier naturel donc $n-4$ divise A.

$B = (2n+1)(n-4)$ or $n - 4 \geq 1$ de plus $(2n+1)$ est un entier naturel donc $n-4$ divise B.

3. *a.* $-\alpha + 2\beta = -2n - 1 + 2(n+3) = 5$. Si d est un diviseur commun à α et β, d divise $-\alpha + 2\beta$ donc d divise 5.

b. si $n-2$ est multiple de 5 alors il existe un entier k tel que $n - 2 = 5k$

donc $2n + 1 = 2(5k+2) + 1 = 10k + 5$ soit $2n + 1 = 5(2k+1)$ or $2k+1$ est un entier naturel donc 5 divise $2n+1$

et $n + 3 = 5k + 2 + 3$ soit $n + 3 = 5(k+1)$ donc 5 divise β donc 5 divise α et β.

c si 5 divise α et β alors 5 divise $\alpha - \beta$ or $\alpha - \beta = n - 2$ donc 5 divise $n-2$.

d. Si d divise n et $2n+1$ alors d divise $(2n+1) - 2 \times n$ donc d divise 1 ; $d > 0$ donc $d = 1$.

Exercice 2

a. Soit d un diviseur commun à a et b, d divise $2a - 9b$ or $2a - 9b = 17$ donc d divise 17.

b. si 17 est un diviseur commun à a et à b alors 17 divise $a - 4b - 17$ donc 17 divise $n - 9$ donc il existe un entier naturel q tel que $n - 9 = 17q$ donc $n = 17q + 9$, $0 \leq 9 < 17$ donc le reste de la division euclidienne de n par 17 est 9.

c. Si le reste de la division euclidienne de n par 17 est 9 alors il existe un entier naturel q tel que $n = 17q + 9$

donc $a = 9 \times (17q + 9) + 4$ donc $a = 17 \times 9q + 85$ soit $a = 17(9q + 5)$ donc 17 divise a

$b = 2(17q + 9) - 1 = 17(2q + 1)$ donc 17 divise b

17 est un diviseur commun à a et b.

Exercice 3

Soit p un nombre premier différent de 2 et de 3,

1. p est un nombre premier différent de 2 donc p est impair, il existe un entier k tel que $p = 2k + 1$

$p^2 - 1 = 4k(k+1)$ or k et $k+1$ sont deux entiers consécutifs donc l'un d'eux est pair donc il existe un entier q tel que $k(k+1) = 2q$

$p^2 - 1 = 8q$ donc $p^2 - 1$ est divisible par 8.

2. Dans la division euclidienne de p par 3, il existe deux entiers k et r tels que $p = 3k + r$ avec $0 \leq r < 3$

si $r = 0$ alors 3 divise p ce qui est exclu car p est un nombre premier différent de 3 donc $p = 3k + 1$ ou $p = 3k + 2$

$p^2 - 1 = (p-1)(p+1)$

si $p = 3k + 1$ alors $p - 1 = 3k$ donc 3 divise $p - 1$ donc 3 divise $p^2 - 1$

si $p = 3k + 2$ alors $p + 1 = 3k + 3$ donc 3 divise $p + 1$ donc 3 divise $p^2 - 1$ dans tous les cas 3 divise $p^2 - 1$.

Exercice 4

1. si n est impair alors $n = 2k + 1$ donc $n^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$ donc n^2 est impair

si n est pair alors $n = 2k$ donc $n^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$ donc n^2 est pair

2. $p = 3$ et $q = 2$ donc $p^2 - 2q^2 = 3^2 - 2 \times 2^2 = 9 - 8 = 1$ donc (3 ; 2) appartient à E.

3. $(p ; q)$ est un couple de E, donc $p^2 - 2q^2 = 1$

a. $p^2 = 2q^2 + 1$ donc p^2 est impair donc p est impair

b. p est impair donc $p = 2k + 1$ ($k \in \mathbb{N}$) donc $p^2 = 4k^2 + 4k + 1$ donc $4k^2 + 4k + 1 - 2q^2 = 1$

$2q^2 = 4k^2 + 4k$ donc $q^2 = 2(k^2 + k)$ donc q^2 est pair donc q est pair.

Exercice 1

1. Soit les polynômes $P(x) = x^3 - 2x^2 - 8x$ et $Q(x) = 3x^2 - 11x - 4$.
   Factoriser P et Q.

On définit pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 5 les entiers : $A = n^3 - 2n^2 - 8n$ et $B = 2n^2 - 7n - 4$

2. Démontrer que A et B sont divisibles par $n - 4$.
3. On pose $\alpha = 3n + 1$ et $\beta = n + 2$.
   a. Soit d un diviseur commun à α et β, montrer que d divise 5
   b. Montrer que si $n - 3$ est multiple de 5 alors α et β sont multiples de 5.
   c Montrer que si 5 divise α et β alors 5 divise $n - 3$.
   d. Etablir que le seul diviseur positif commun à n et $3n + 1$ est 1.

Exercice 2

Pour tout entier naturel n, on pose : $a = 2n + 3$ $b = 7n - 1$

a. Soit d un diviseur commun à a et b, montrer d divise 23

b. Démontrer que si 23 est un diviseur commun à a et à b alors le reste de la division euclidienne de n par 23 est 10. (On pourra remarquer que $4a - b - 23 = n - 10$)

c. Démontrer que si le reste de la division euclidienne de n par 23 est 10 alors 23 est un diviseur commun à a et b.

Exercice 3

Soit p un nombre premier différent de 2 et de 3,

1. montrer que $p^2 - 1$ est divisible par 8.
2. Montrer que p est de la forme $3k + 1$ ou $3k + 2$ en déduire que 3 divise $p^2 - 1$.

Exercice 4

1. *a.* Montrer que, si l'entier n est pair, alors le reste de la division euclidienne de n^2 par 8 est soit 0 soit 4.

b. Montrer que, si l'entier n est impair, alors le reste de la division euclidienne de n^2 par 8 est 1.

2. Soit l'équation (E) : $8x + 1 = y^2$

a. Montrer que si $(x ; y)$ est solution de cette équation, y est impair.

b. En déduire que pour tout y impair, il existe un entier x solution de (E). (On pourra utiliser les résultats de la question 1.)

CORRECTION

Exercice 1

1. $P(x) = x^3 - 2x^2 - 8x = x(x^2 - 2x - 8)$

Résolvons $x^2 - 2x - 8 = 0$,

$\Delta = 36$ donc $x_1 = -2$ et $x_2 = 4$ donc $x^2 - 2x - 8 = (x-4)(x+2)$ donc $P(x) = x(x-4)(x+2)$

$Q(x) = 3x^2 - 11x - 4$.

Résolvons $3x^2 - 11x - 4 = 0$;

$\Delta = 169$ donc $x_1 = 4$ et $x_2 = -\frac{1}{3}$ donc $Q(x) = 3\left(x + \frac{1}{3}\right)(x-4) = (3x+1)(x-4)$

2. $A = n(n-4)(n+2)$; $n \geq 5$ donc $n - 4 \geq 1$ donc $n - 4$ est non nul, de plus $n(n+2)$ est un entier naturel donc $n - 4$ divise A.

$B = (3n+1)(n-4)$ or $n - 4 \geq 1$ de plus $(2n+1)$ est un entier naturel donc $n - 4$ divise B.

3. *a.* $-\alpha + 3\beta = -3n - 1 + 3(n+2) = 5$. Si d est un diviseur commun à α et β, d divise $-\alpha + 3\beta$ donc d divise 5.

b. si $n - 3$ est multiple de 5 alors il existe un entier k tel que $n - 3 = 5k$

donc $3n + 1 = 3(5k + 3) + 1 = 15k + 10$ soit $3n + 1 = 5(3k + 2)$ or $3k + 2$ est un entier naturel donc 5 divise $3n + 1$

et $n + 2 = 5k + 3 + 2$ soit $n + 2 = 5(k + 1)$ donc 5 divise β donc 5 divise α et β.

c si 5 divise α et β alors 5 divise $\alpha - 2\beta$ or $\alpha - 2\beta = n - 3$ donc 5 divise $n - 3$.

d. Si d divise n et $3n + 1$ alors d divise $(3n + 1) - 3 \times n$ donc d divise 1 ; $d > 0$ donc $d = 1$.

Exercice 2

a. Soit d un diviseur commun à a et b, d divise $7a - 2b$ or $7a - 2b = 23$ donc d divise 23.

b. si 23 est un diviseur commun à a et à b alors 23 divise $4a - b - 23$ donc 23 divise $n - 10$ donc il existe un entier naturel q tel que $n - 10 = 23q$ donc $n = 23q + 10$, $0 \leq 10 < 23$ donc le reste de la division euclidienne de n par 23 est 10.

c. Si le reste de la division euclidienne de n par 23 est 10 alors il existe un entier naturel q tel que $n = 23q + 10$

donc $a = 2 \times (23q + 10) + 3$ donc $a = 23 \times 2q + 23$ soit $a = 23(2q + 1)$ donc 23 divise a

$b = 7(23q + 10) - 1 = 23(7q + 3)$ donc 23 divise b

23 est un diviseur commun à a et b.

Exercice 3

Soit p un nombre premier différent de 2 et de 3,

1. p est un nombre premier différent de 2 donc p est impair, il existe un entier k tel que $p = 2k + 1$

$p^2 - 1 = 4k(k + 1)$ or k et $k + 1$ sont deux entiers consécutifs donc l'un d'eux est pair donc il existe un entier q tel que $k(k + 1) = 2q$

$p^2 - 1 = 8q$ donc $p^2 - 1$ est divisible par 8.

2. Dans la division euclidienne de p par 3, il existe deux entiers k et r tels que $p = 3k + r$ avec $0 \leq r < 3$

si $r = 0$ alors 3 divise p ce qui est exclu car p est un nombre premier différent de 3 donc $p = 3k + 1$ ou $p = 3k + 2$

$p^2 - 1 = (p - 1)(p + 1)$

si $p = 3k + 1$ alors $p - 1 = 3k$ donc 3 divise $p - 1$ donc 3 divise $p^2 - 1$

si $p = 3k + 2$ alors $p + 1 = 3k + 3$ donc 3 divise $p + 1$ donc 3 divise $p^2 - 1$ dans tous les cas 3 divise $p^2 - 1$.

Exercice 4

1. *a.* si n est pair alors il existe un entier k tel que $n = 2k$ donc $n^2 = 4k^2$

soit k est pair et $n = 4p$ donc $n^2 = 8 \times 2p^2$ donc le reste de la division euclidienne de n^2 par 8 est 0

soit k est pair et $n = 4p + 2$ donc $n^2 = 8 \times (2p^2 + 2p) + 4$ donc le reste de la division euclidienne de n^2 par 8 est 4

b. si n est impair alors il existe un entier k tel que $n = 2k + 1$ donc $n^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4k(k + 1) + 1$

k et $k + 1$ sont deux entiers consécutifs donc l'un d'eux est pair donc $k(k + 1)$ est pair, il existe un entier p tel que $k(k + 1) = 2p$

$n^2 = 8p + 1$ donc le reste de la division euclidienne de n^2 par 8 est 1.

2. *a.* si $(x ; y)$ est solution de cette équation alors $8x + 1 = y^2$, donc y^2 donc y est impair.

b. si y est impair, le reste de la division euclidienne de y^2 par 8 est 1 donc il existe un entier naturel p tel que $y^2 = 8p + 1$

Le nombre $y^2 - 1$ est divisible par 8, donc $x = p = \frac{y^2 - 1}{8}$ et x est entier naturel

Exercice 1

Partie 1

Soit g la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par :

$$g(x) = e^x - x e^x + 1.$$

1. Déterminer la limite de g en $+\infty$.

2. Étudier les variations de la fonction g.

3. Donner le tableau de variations de g.

4. *a.* Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet sur $[0 ; +\infty[$ une unique solution. On note α cette solution.

b. À l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α.

c. Démontrer que $e^{\alpha} = \dfrac{1}{\alpha - 1}$.

5. Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie 2

Soit A la fonction définie et dérivable sur $[0 ; +\infty[$ telle que $A(x) = \dfrac{4x}{e^x + 1}$.

1. Démontrer que pour tout réel x positif ou nul, $A'(x)$ a le même signe que $g(x)$, où g est la fonction définie dans la partie 1.

2. En déduire les variations de la fonction A sur $[0 ; +\infty[$.

Partie 3

On considère la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{4}{e^x + 1}.$$

On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$. La figure est donnée en annexe.

Pour tout réel x positif ou nul, on note :

M le point de (C) de coordonnées $(x ; f(x))$,

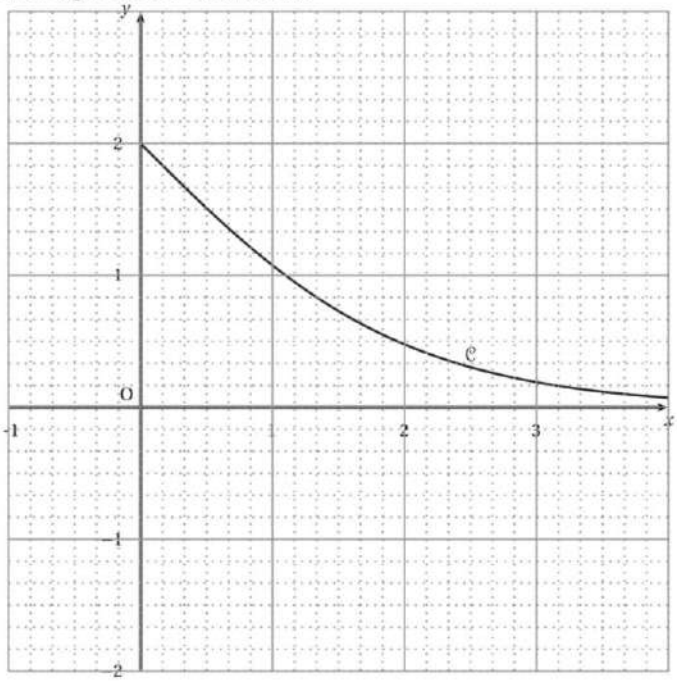
P le point de coordonnées $(x ; 0)$,

Q le point de coordonnées $(0 ; f(x))$.

1. Démontrer que l'aire du rectangle $OPMQ$ est maximale lorsque M a pour abscisse α. On rappelle que le réel α a été défini dans la partie 1.

2. Le point M a pour abscisse α. La tangente (T) en M à la courbe (C) est-elle parallèle à la droite (PQ) ?

Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.



Exercice 2

On considère les deux courbes (C_1) et (C_2) d'équations respectives $y = e^x$ et $y = -x^2 - 1$ dans un repère orthogonal du plan.

Le but de cet exercice est de prouver qu'il existe une unique tangente (T) commune à ces deux courbes.

1. Sur le graphique représenté dans l'annexe 1, tracer approximativement une telle tangente à l'aide d'une règle.

Lire graphiquement l'abscisse du point de contact de cette tangente avec la courbe (C_1) et l'abscisse du point de contact de cette tangente avec la courbe (C_2).

2. On désigne par a et b deux réels quelconques, par A le point d'abscisse a de la courbe (C_1) et par B le point d'abscisse b de la courbe (C_2).

a. Déterminer une équation de la tangente (T_A) à la courbe (C_1) au point A.

b. Déterminer une équation de la tangente (T_B) à la courbe (C_2) au point B.

c. En déduire que les droites (T_A) et (T_B) sont confondues si et seulement si les réels a et b sont solutions du système (S) : $\begin{cases} e^a = -2b \\ e^a - a e^a = b^2 - 1 \end{cases}$.

d. Montrer que le système (S) est équivalent au système (S') : $\begin{cases} e^a = -2b \\ e^{2a} + 4a e^a - 4e^a - 4 = 0 \end{cases}$.

3. Le but de cette question est de prouver qu'il existe un unique réel solution de l'équation (E)

$$e^{2x} + 4x e^x - 4e^x - 4 = 0$$

Pour cela, on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^{2x} + 4x e^x - 4e^x - 4$$

a. Montrer que pour tout x appartenant à $]-\infty ; 0[$,

$$e^{2x} - 4 < 0 \text{ et } 4e^x(x - 1) < 0$$

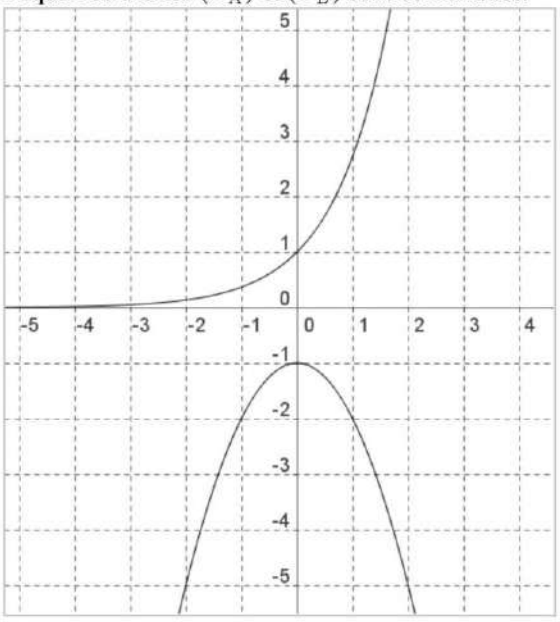
b. En déduire que l'équation (E) n'a pas de solution dans l'intervalle $]-\infty ; 0[$.

c. Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

d. Démontrer que l'équation (E) admet une solution unique, dans l'intervalle $[0 ; +\infty[$. On note α cette solution. Donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α.

4. On prend pour A le point d'abscisse α.

Déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-1} du réel b pour lequel les droites (T_A) et (T_B) sont confondues.



CORRECTION

Partie 1

1. $g(x) = e^x (1-x) + 1$ or $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 - x = -\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$

2. $g(x) = e^x (1-x) + 1$, soit $u(x) = e^x$ et $v(x) = 1 - x$ alors $u'(x) = e^x$ et $v'(x) = -1$ donc :
$g'(x) = e^x (1-x) - 1 \times e^x = e^x [1 - x - 1]$ soit $g'(x) = -x e^x$.

3. La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$ donc $g'(x)$ a le même signe que $-x$.

x	0		$+\infty$
$g'(x)$	0	$-$	
g	2	↘	$-\infty$

4. *a.* La fonction g est définie continue strictement décroissante sur $[\,0\,;+\infty\,[$, $g([\,0\,;+\infty\,[) =]\,-\infty\,;\,2\,]$ et $0 \in]\,-\infty\,;\,2\,]$ donc l'équation $g(x) = 0$ admet sur $[\,0\,;+\infty\,[$ une unique solution.

b. $g(1{,}27) \approx 0{,}038$ et $g(1{,}28) \approx -0{,}007$ donc $1{,}27 \leq \alpha \leq 1{,}28$

c. α est solution de $g(x) = 0$ donc $e^\alpha (1-\alpha) + 1 = 0$ soit $e^\alpha (1-\alpha) = -1$ donc $e^\alpha (\alpha - 1) = 1$, $\alpha \neq 1$ donc $e^\alpha = \dfrac{1}{\alpha - 1}$

5. g est strictement décroissante sur $[\,0\,;+\infty\,[$ et $g(\alpha) = 0$ donc si $0 \leq x < \alpha$ alors $g(x) > 0$, $g(\alpha) = 0$ et si $x > \alpha$ alors $g(x) < 0$.

Partie 2

1. $A'(x) = \dfrac{4(e^x + 1) - 4x e^x}{(e^x + 1)^2} = \dfrac{4[e^x + 1 - x e^x]}{(e^x + 1)^2} = \dfrac{4 g(x)}{(e^x + 1)^2}$

$(e^x + 1)^2 > 0$ donc pour tout réel x positif ou nul, $A'(x)$ a le même signe que $g(x)$.

2.

x	0		α		$+\infty$
$A'(x)$	0	$+$	0	$-$	
g	0	↗	$A(\alpha)$	↘	

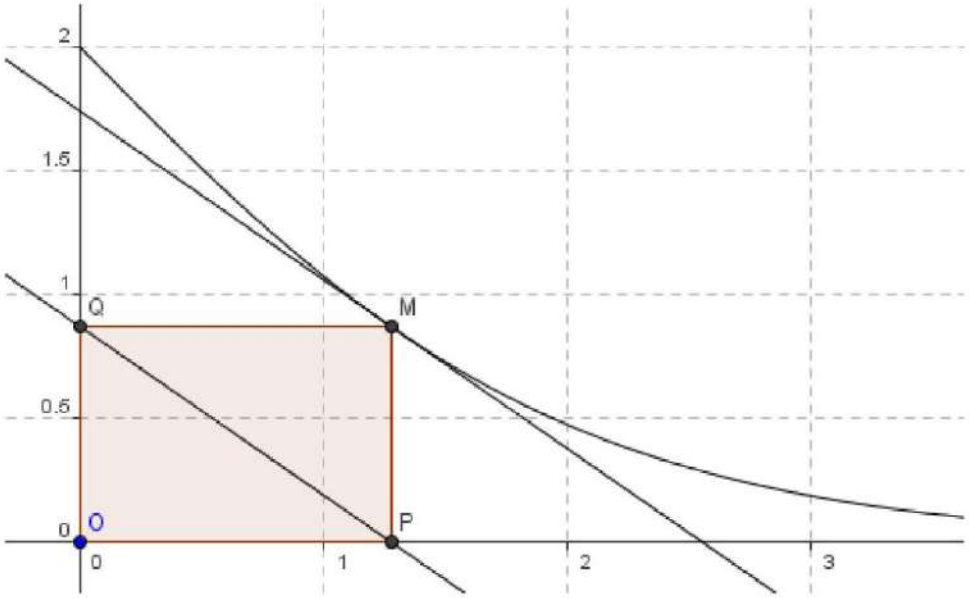
Partie 3

1. l'aire du rectangle $OPMQ$ est égale à $x f(x) = A(x)$ donc l'aire du rectangle $OPMQ$ est maximale lorsque M a pour abscisse α.

2. Le coefficient directeur de la droite (PQ) est $\dfrac{y_P - y_Q}{x_P - x_Q} = \dfrac{-f(\alpha)}{\alpha} = -\dfrac{1}{\alpha (e^\alpha + 1)}$

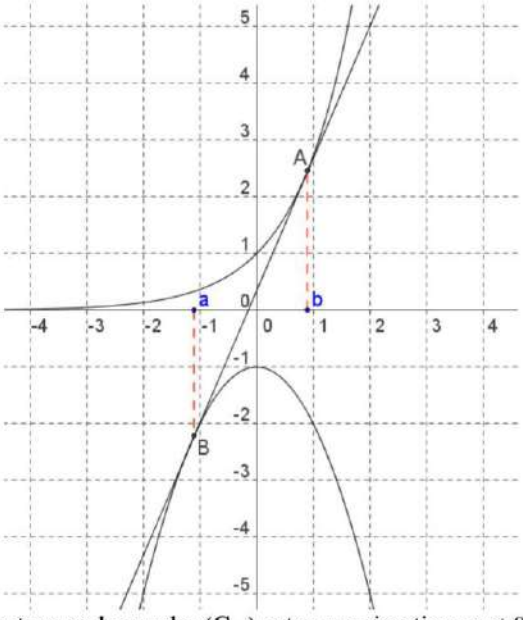
La tangente en M à la courbe (C) a pour coefficient directeur $f'(\alpha) = -\dfrac{e^\alpha}{(e^\alpha + 1)^2}$ or $e^\alpha = \dfrac{1}{\alpha - 1}$ donc $e^\alpha + 1 = \dfrac{1}{\alpha - 1} + 1 = \dfrac{\alpha}{\alpha - 1}$

donc $\dfrac{e^\alpha}{e^\alpha + 1} = \dfrac{1}{\alpha - 1} \times \dfrac{\alpha - 1}{\alpha} = \dfrac{1}{\alpha}$ donc $f'(\alpha) = -\dfrac{1}{\alpha (e^\alpha + 1)}$ donc la tangente en M et la droite (PQ) sont parallèles.



Exercice 2

1 .



l'abscisse du point de contact A de la tangente avec la courbe (C_1) est approximativement 0,9
l'abscisse du point de contact B de la tangente avec la courbe (C_2) est approximativement – 1,2.

2. *a*) La tangente à la courbe (C_1) au point A est la droite de coefficient directeur $f'(a) = e^a$ passant par A $(a ; e^a)$ donc une équation de la tangente (T_A) à la courbe (C_1) au point A est $y = e^a (x - a) + e^a$

b) La tangente à la courbe (C_2) au point B est la droite de coefficient directeur $g'(b) = -2b$ passant par B $(b ; -b^2 - 1)$
Une équation de la tangente (T_B) à la courbe (C_2) au point B est $y = -2bx + b^2 - 1$

c) Les droites (T_A) et (T_B) sont confondues si et seulement si leurs coefficients directeurs sont égaux $(e^a = -2b)$ et leurs ordonnées à l'origine sont égales $(-a e^a + e^a = b^2 - 1)$ soit les réels a et b sont solutions du système (S) : $\begin{cases} e^a = -2b \\ e^a - a e^a = b^2 - 1 \end{cases}$.

d) $\begin{cases} e^a = -2b \\ e^a - a e^a = b^2 - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2b = -e^a \\ 4e^a - 4a e^a = 4b^2 - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^a = -2b \\ 4e^a - 4a e^a = 4(e^a)^2 - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^a = -2b \\ 4e^a - 4a e^a = 4e^{2a} - 4 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} e^a = -2b \\ e^{2a} + 4a e^a - 4e^a - 4 = 0 \end{cases}$.

3. *a*) pour tout x appartenant à $]-\infty ; 0[$, $2x \leq 0$ donc $e^{2x} \leq e^0$ soit $e^{2x} \leq 1$ donc $e^{2x} - 4 \leq -3 < 0$
pour tout x appartenant à $]-\infty ; 0[$, $4 > 0$; $e^x > 0$ et $(x - 1) < 0$ donc $4e^x (x - 1) < 0$

b) $e^{2x} + 4x e^x - 4e^x - 4 = e^{2x} - 4 + 4e^x (x - 1)$
La somme de deux nombres strictement négatifs est un nombre strictement négatif donc pour tout x appartenant à $]-\infty ; 0[$, $f(x) < 0$
L'équation (E) n'*a* pas de solution dans l'intervalle $]-\infty ; 0[$.

c) $f'(x) = 2e^{2x} + 4(e^x + x e^x) - 4e^x$ donc $f'(x) = 2e^{2x} + 4x e^x = 2(x + 2)e^x$
La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$, $x \geq 0$ donc $x + 2 > 0$ et $f'(x) > 0$
la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{2x} - 4 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} 4e^x = +\infty$ $\lim\limits_{x \to +\infty} (x - 1) = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
$f(0) = -7$
f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$, (somme de fonctions continues sur $\mathbb{R}$) strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$.
$f([0 ; +\infty[) = [-7 ; +\infty[$
$0 \in [-7 ; +\infty[$ donc l'équation (E) $f(x) = 0$ admet une solution unique, dans l'intervalle $[0 ; +\infty[$.
$f(0{,}84) \approx -0{,}117$ et $f(0{,}85) \approx 0{,}07$ donc $f(0{,}84) < 0$ et $f(0{,}85) > 0$ donc $0{,}84 \leq \alpha \leq 0{,}85$.

4. $b = -\frac{1}{2} e^a$ or $0{,}84 \leq a \leq 0{,}85$ donc $e^{0{,}84} \leq e^a \leq e^{0{,}85}$ donc $-\frac{1}{2} e^{0{,}85} \leq -\frac{1}{2} e^a \leq -\frac{1}{2} e^{0{,}84}$

soit $-1{,}2 \leq -\frac{1}{2} e^{0{,}85} \leq b \leq -\frac{1}{2} e^{0{,}84} \leq -1{,}1$

EXERCICE 1

On divise 4373 et 826 par un même nombre entier ; les restes respectifs sont 8 et 7. Quel est ce diviseur ?

EXERCICE 2

Reconnaître si 401 est un nombre premier et résoudre dans l'ensemble des entiers naturels l'équation : $x^2 - y^2 = 401$.

EXERCICE 3

1. Démontrer que pour tout entier n non multiple de 3 on a : $n^2 \equiv 1$ [3].
2. En déduire que quels que soient les entiers relatifs a et b, le nombre $a\,b\,(a^2 - b^2)$ est divisible par 3.

EXERCICE 4

En remarquant que : $999 = 27 \times 37$, démontrer que pour tout entier positif n on a : $10^{3n} \equiv 1 \pmod{37}$
En déduire le reste de la division par 37 du nombre $A = 10^{10} + 10^{20} + 10^{30}$.

EXERCICE 5

1. Déterminer, en utilisant les congruences, les restes de la division par 7 des nombres suivants : 3 ; 3^2 ; 3^3 ; 3^4 ; 3^5 ; 3^6 ; 3^7.
2. Si p est un entier positif, démontrer que 3^p et 3^{p+6} ont le même reste dans la division par 7.
3. Quel que soit l'entier naturel n, démontrer que 2005^n et 3^n ont le même reste dans la division par 7.
   Déterminer n pour que ce reste soit 5.

EXERCICE 6

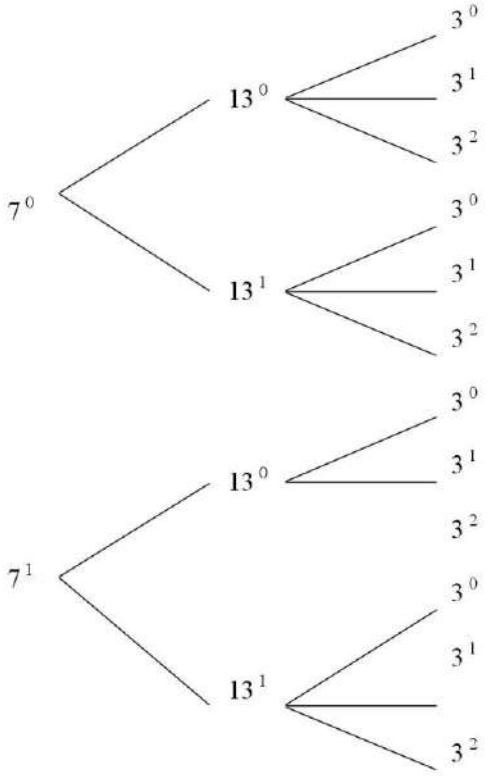
Dans la division euclidienne par 7, il y a 7 restes possibles. Un tableau peut aider à voir tous les cas.

1. Déterminer les entiers relatifs n tels que : $n^3 + 1 \equiv 0 \pmod{7}$.
   Déterminer les entiers relatifs n tels que $n^3 - 1 \equiv 0 \pmod{7}$.
2. En déduire que pour tout entier relatif n, le nombre : $n\,(n^3 + 1)\,(n^3 - 1)$ est divisible par 42.

CORRECTION

EXERCICE 1

Si on divise 4373 par n, le reste est 8 donc il existe un entier naturel q tel que $4373 = n\,q + 8$ donc $n\,q = 4373 - 8 = 4865$
donc n divise 4865
Si on divise 826 par n, le reste est 7 donc il existe un entier naturel q' tel que $826 = n\,q' + 7$ donc $n\,q' = 826 - 7 = 819$
donc n divise 819
$819 = 9 \times 91 = 3^2 \times 7 \times 13$ donc les diviseurs de 819 sont : 1 ; 3 ; 7 ; 9 ; 13 ; 21 ; 39 ; 57 ; 63 ; 91 ; 273 ; 813.



diviseurs de 819		
1	Le reste de la division de 4373 par n, est 8 donc $n > 8$, ces cas sont exclus	
3		
9	$4865 = 9 \times 573$	donc $n = 9$
13	$4865 = 13 \times 374 + 3$	donc $n \neq 13$
39	$4865 = 39 \times 124 + 29$	donc $n \neq 39$
57	$4865 = 57 \times 85 + 20$	donc $n \neq 57$
7	$n > 8$, ce cas est exclu	
21	$4865 = 21 \times 231 + 14$	donc $n \neq 21$
63	$4865 = 63 \times 77 + 14$	donc $n \neq 63$
91	$4865 = 91 \times 53 + 42$	donc $n \neq 91$
273	$4865 = 273 \times 17 + 224$	donc $n \neq 273$
819	$4865 = 819 \times 5 + 770$	donc $n \neq 819$

EXERCICE 2

$20 < \sqrt{401} < 21$, les nombres premiers 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ne divisent pas 401 donc 401 est un nombre premier.
$x^2 - y^2 = 401 \Leftrightarrow (x + y)(x - y) = 401$ donc $x + y$ est un diviseur positif de 401 donc soit $x + y = 401$ soit $x + y = 1$.
si $x + y = 401$ alors $x - y = 1$ donc $2x = 401 + 1$ donc $x = 201$ et $2y = 401 - 1$ donc $y = 200$
si $x + y = 1$ alors $x - y = 401$ donc $2x = 401 + 1$ donc $x = 201$ et $2y = 1 - 401 = -400$ donc y n'est pas un entier naturel.

Dans l'ensemble des entiers naturels l'équation : $x^2 - y^2 = 401 \Leftrightarrow x = 201$ et $y = 200$.

EXERCICE 3

1. Dans la division de n par 3, il existe un entier naturel k tel que $n = 3k + r$ avec $r \in \{0 ; 1 ; 2\}$
si n n'est pas un multiple de 3 alors $r \neq 0$ donc $n = 3k + 1$ ou $n = 3k + 2$ donc soit $n \equiv 1$ [3] soit $n \equiv -1$ [3] donc $n^2 \equiv 1$ [3].

2.
si a est un multiple de 3 alors 3 divise a donc 3 divise $ab(a^2 - b^2)$
si a n'est pas un multiple de 3 et si b est un multiple de 3 alors 3 divise b donc 3 divise $ab(a^2 - b^2)$
si a n'est pas un multiple de 3 et si b n'est pas un multiple de 3 alors $a^2 \equiv 1$ [3] et $b^2 \equiv 1$ [3] donc $a^2 - b^2 \equiv 1$ [3] donc 3 divise $ab(a^2 - b^2)$
Quels que soient les entiers relatifs a et b, le nombre $ab(a^2 - b^2)$ est divisible par 3.

EXERCICE 4

$999 = 27 \times 37$ donc $1000 = 27 \times 37 + 1$ donc $10^3 \equiv 1$ (mod 37)
donc pour tout entier positif n $[10^3]^n \equiv 1^n$ (mod 37) donc pour tout entier positif n on a : $10^{3n} \equiv 1$ (mod 37)

$10^{10} = 10^{3\times3+1}$ or $10^{3\times3} \equiv 1$ (mod 37) donc $10^{3\times3+1} \equiv 10$ (mod 37)

$10^{20} = 10^{3\times6+2}$ or $10^{3\times6} \equiv 1$ (mod 37) donc $10^{3\times6+2} \equiv 100$ (mod 37)
$100 = 3 \times 37 - 11$ donc $100 \equiv -11$ (mod 37) donc $10^{20} \equiv -11$ (mod (37)

$10^{30} = 10^{3\times10}$ or $10^{3\times10} \equiv 1$ (mod 37) donc $10^{30} \equiv 1$ (mod 37) donc $10^{10} + 10^{20} + 10^{30} \equiv 10 - 11 + 1$ (mod 37) soit $A \equiv 0$ (mod 37)
le reste de la division par 37 du nombre $A = 10^{10} + 10^{20} + 10^{30}$ est 0.

EXERCICE 5

1.

$3 \equiv 3$ [7]	reste 3
$3^2 = 9 = 7 + 2$ donc $3^2 \equiv 2$ [7]	reste 2
$3^3 = 3 \times 3^2$ donc $3^3 \equiv 6$ [7]	reste 6
$3^4 = 3^2 \times 3^2$ donc $3^4 \equiv 4$ [7]	reste 4
$3^5 = 3^2 \times 3^3$ donc $3^4 \equiv 12$ [7] or $12 = 7 + 5$ donc $3^5 \equiv 5$ [7]	reste 5
$3^6 = 3^3 \times 3^3$ donc $3^6 \equiv 36$ [7] or $36 = 7 \times 5 + 1$ donc $3^6 \equiv 1$ [7]	reste 1
$3^7 = 3^6 \times 3$ donc $3^7 \equiv 3$ [7]	reste3

2. Si p est un entier positif, $3^{p+6} = 3^p \times 3^6$ or $3^6 \equiv 1$ [7] donc $3^{p+6} \equiv 3^p$ [7]
3^p et 3^{p+6} ont le même reste dans la division par 7.

3. Quel que soit l'entier naturel n, $2005 = 7 \times 666 + 3$ donc $2005 \equiv 3$ [7] donc 2005^n et 3^n ont le même reste dans la division par 7.
$3^6 \equiv 1$ [7] donc pour tout k entier naturel, $3^{6k} \equiv 1^k$ [7] soit $3^{6k} \equiv 1$ [7]
$3^{6k} \equiv 1$ [7] donc $3^{6k+1} \equiv 3$ [7] et $3^{6k+2} \equiv 3^2$ [7] donc $3^{6k+2} \equiv 2$ [7] (voir question 1)
$3^{6k+3} \equiv 3^3$ [7] donc $3^{6k+3} \equiv 6$ [7]
$3^{6k+4} \equiv 3^4$ [7] donc $3^{6k+4} \equiv 4$ [7]
$3^{6k+5} \equiv 3^3$ [7] donc $3^{6k+53} \equiv 5$ [7]
pour que 3^n ait pour reste 5 dans la division par 7, il suffit que n soit de la forme $6k + 5$ avec k entier naturel.

EXERCICE 6

1. En écrivant les congruences des différentes expressions modulo 7 :

n	0	1	2	3	4	5	6
n^3	0	1	1	6	1	6	6
$n^3 + 1$	1	2	2	0	2	0	0
$n^3 - 1$	6	0	0	5	0	5	5

Les entiers relatifs n tels que : $n^3 + 1 \equiv 0$ (modulo 7) sont de la forme $7k + 3$; $7k + 5$; $7k + 6$ avec k entier naturel.
Les entiers relatifs n tels que $n^3 - 1 \equiv 0$ (modulo 7) sont de la forme $7k + 1$; $7k + 2$; $7k + 4$ avec k entier naturel.

2. En écrivant les congruences des différentes expressions modulo 7 :

n	0	1	2	3	4	5	6
$n^3 + 1$	1	2	2	0	2	0	0
$n^3 - 1$	6	0	0	5	0	5	5
$n(n^3 + 1)(n^3 - 1)$	0	0	0	0	0	0	0

Pour tout entier relatif n, le nombre : $n(n^3 + 1)(n^3 - 1)$ est divisible par 7

LE PAKAO

Le Pakao est une collection du Réseau Scolaire qui rassemble le maximum de documents , de sources et de matières différentes dans le but d'aider les candidats aux examens et concours .

Trouver d'autres documents sur le

www.reseauscolaire.com

+221 78 563 10 50