Professeur : GHAZOUI Mohammed
Matière : Mathématiques
Class : 2 Bac Sciences Physiques
Année scolaire : 2021-2022

Techniques pour calculer la limite d'une fonction (I)

Lycée Ibn Al Khatib
Tanger

$$x_0^- \searrow \quad x_0 \quad \swarrow x_0^+$$

Les formes indéterminées

$(+\infty)-(+\infty)$ $(+\infty)+(-\infty)$	$0\times\infty$	$\dfrac{\infty}{\infty}$	$\dfrac{0}{0}$

Règles

$\dfrac{a}{\pm\infty}\to 0$	$\dfrac{"a\neq 0"}{0}\to\pm\infty$	$(+\infty)+a\to+\infty$	$(-\infty)+a\to-\infty$
$(+\infty)^n\to+\infty$	$(-\infty)^n\to\begin{cases}+\infty\ ;\ si\ n\ est\ paire\\ -\infty\ ;\ si\ n\ est\ impaire\end{cases}$	$a\times(-\infty)\to\begin{cases}-\infty\ ;\ si\ a>0\\ +\infty\ ;\ si\ a<0\end{cases}$	$a\times(+\infty)\to\begin{cases}+\infty\ ;\ si\ a>0\\ -\infty\ ;\ si\ a<0\end{cases}$

Une fonction polynomiale

Règle (1)	Règle (2)
$\lim\limits_{x\to a}P(x)=P(a)$	$\lim\limits_{x\to\pm\infty}(a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_0)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}(a_nx^n)$

Une fonction rationnelle

Règle (1)

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\ldots+b_0}\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{a_nx^n}{b_mx^m}\right)$$

Règle (2)

- $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ ou • $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ ou • $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$

(On replacer x par x_0 à l'expression du $f(x)$)

Et il y a trois cas :

1er cas	2ème cas	3ème cas
$\dfrac{a\neq 0}{0}$ La limite est : $\pm\infty$ ◆ On calcule la limite du numérateur. ◆ On calcule la limite du dénominateur. ◆ On détermine le signe par l'étude du signe de Quotient.	$\ell\in\mathbb{R}$ La limite est le nombre ℓ	$\dfrac{0}{0}$ On réduit par $(x-x_0)$,par l'utilisation : ◆ Division euclidienne ◆ Factorisation ◆ Identités remarquables : $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$ $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$ $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

Professeur : GHAZOUI Mohammed Matière : Mathématiques Class : 2 Bac Sciences Physiques Année scolaire : 2021-2022	**Techniques pour calculer la limite d'une fonction** (II)	Lycée Ibn Al Khatib Tanger

Une fonction rationnelle

Règle (1)

Pour trouver la limite : $\lim\left(\sqrt{u(x)}\right)$ Il faut d'abord trouver la limite : $\lim(u(x))$

Et il y a deux cas :

1er cas	2ème cas
Si $\lim u(x) = +\infty$ alors $\lim \sqrt{u(x)} = +\infty$	Si $\lim u(x) = a$ tel que $a \geq 0$ alors : $\lim \sqrt{u(x)} = \sqrt{a}$

Règle (2)

Après remplacement, si nous obtenons la forme indéterminée $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ on fait la factorisation par x à l'intérieur d'une racine.	Après remplacement, si nous obtenons la forme indéterminée $\frac{0}{0}$ on fait le conjugué.

Rappel

$\sqrt{x^2} = \lvert x \rvert = \begin{cases} x \ ; \ si \ x \to +\infty \\ -x \ ; \ si \ x \to -\infty \end{cases}$	Le conjugué de $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ est $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ Le conjugué de $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ est $\sqrt{a} - \sqrt{b}$

Règle (3)

Lorsque on calcule la limite : $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(\sqrt{ax^2 + bx + c} + ex + d\right)$, si nous obtenons la forme indéterminée $(+\infty) + (-\infty)$ alors on calcule le nombre $T = \sqrt{a} + e$; il y a deux cas :

1er cas	2ème cas
◆ Si $T = 0$ on fait le conjugué.	◆ Si $T \neq 0$ on fait la factorisation.

Règle (4)

Lorsque on calcule la limite : $\lim\limits_{x \to -\infty}\left(\sqrt{ax^2 + bx + c} + ex + d\right)$, si nous obtenons la forme indéterminée $(+\infty) + (-\infty)$ alors on calcule le nombre $T = -\sqrt{a} + e$; il y a deux cas :

1er cas	2ème cas
◆ Si $T = 0$ on fait le conjugué.	◆ Si $T \neq 0$ on fait la factorisation.

Fonctions trigonométriques

Règle (1)

S'il existe à l'intérieur $\tan$ ou $\cos$,ou $\sin$ tend vers 0 et nous obtenons la forme indéterminée $\frac{0}{0}$ alors on utilise les limites suivantes : $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$, $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(ax)}{x} = a \quad , \quad \lim_{x \to 0} \frac{\tan(ax)}{x} = a \quad , \quad \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(ax)}{x^2} = \frac{a^2}{2}$$

Règle (2)

Si $x \to x_0$ et nous obtenons la forme indéterminée, on pose $t = x - x_0$ et on utilise les propriétés de la trigonométrie $(x \to x_0) \Leftrightarrow (t \to 0)$ et $(x = t + x_0) \Leftrightarrow (t = x - x_0)$

Règle (3)

S'il existe à l'intérieur $\tan$ ou $\cos$,ou $\sin$ tend vers $\pm\infty$ alors on utilise :

$$-1 \leq \sin(u(x)) \leq 1 \ \text{ et } -1 \leq \cos(u(x)) \leq 1$$

Professeur : GHAZOUI Mohammed Matière : Mathématiques Class : 2 Bac Sciences Physiques Année scolaire : 2021-2022	**Continuité d'une fonction numérique**	Lycée Ibn Al Khatib Tanger

Continuité en un point :

f est continue en $x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$

Continuité à gauche - Continuité à droite :

f est continue à gauche en $x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\prec x_0}} f(x)=f(x_0)$

f est continue à droite en $x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\succ x_0}} f(x)=f(x_0)$

f est continue en $x_0 \Leftrightarrow f$ est continue à gauche et à droite en x_0

Continuité sur un intervalle :

- f est continue sur un intervalle ouvert $]a,b[$ si f est continue en chaque élément de $]a,b[$.
- f est continue sur un intervalle fermé $[a,b]$ si f est continue sur l'intervalle ouvert $]a,b[$ et f est continue à droite en a et à gauche en b.

- Tout fonction polynôme est continue sur $\mathbb{R}$.
- Toute fonction rationnelle est continue sur chaque intervalle de son domaine de définition.
- Les fonctions $\sin$ et $\cos$ sont continués sur $\mathbb{R}$.
- La fonction $\tan$ est continue sur chaque intervalle de son domaine de définition, $D_{\tan}=\mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi / k\in\mathbb{Z}\right\}$
- La fonction $x\mapsto\sqrt{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$; (irrationnel fonction).

Composé de deux fonctions continues :

Si f une fonction continue sur l'intervalle I et g une fonction continue sur l'intervalle J tel que $f(I)\subset J$, alors la fonction $g\circ f$ est continue sur I.

- Si f est continue et positive sur I alors $\sqrt{f}$ est continue sur I.
- Si f est continue sur I alors f^n est continue sur I. $(n\in\mathbb{N}^*)$

	L'image d'un intervalle I par une fonction f	
L'intervalle I	f est strictement croissante sur I	f est strictement décroissante sur I
$[a,b]$	$[f(a),f(b)]$	$[f(b),f(a)]$
$]a,b]$	$]\lim\limits_{x\to a^+} f(x),f(b)]$	$[f(b),\lim\limits_{x\to a^+} f(x)[$
$[a,b[$	$[f(a),\lim\limits_{x\to b^-} f(x)[$	$]\lim\limits_{x\to b^-} f(x),f(a)]$
$]a,b[$	$]\lim\limits_{x\to a^+} f(x),\lim\limits_{x\to b^-} f(x)[$	$]\lim\limits_{x\to b^-} f(x),\lim\limits_{x\to a^+} f(x)[$
$[a,+\infty[$	$[f(a),\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)[$	$]\lim\limits_{x\to+\infty} f(x),f(a)]$
$]a,+\infty[$	$]\lim\limits_{x\to a^+} f(x),\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)[$	$]\lim\limits_{x\to+\infty} f(x),\lim\limits_{x\to a^+} f(x)[$
$]-\infty,b]$	$]\lim\limits_{x\to-\infty} f(x),f(b)]$	$[f(b),\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)[$
$]-\infty,b[$	$]\lim\limits_{x\to-\infty} f(x),\lim\limits_{x\to b^-} f(x)[$	$]\lim\limits_{x\to b^-} f(x),\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)[$

$(\forall x\in\mathbb{R}^+)(\forall y\in\mathbb{R}^+): \sqrt[n]{x}=y \Leftrightarrow y^n=x$

$(\forall x\in\mathbb{R}^+): \left(\sqrt[n]{x}\right)^n=\sqrt[n]{x^n}=x$

$(\forall x_1\in\mathbb{R}^+)(\forall x_2\in\mathbb{R}^+): \sqrt[n]{x_1}=\sqrt[n]{x_2} \Leftrightarrow x_1=x_2$

$(\forall x_1\in\mathbb{R}^+)(\forall x_2\in\mathbb{R}^+): \sqrt[n]{x_1}\prec\sqrt[n]{x_2} \Leftrightarrow x_1\prec x_2$

- La fonction $x\mapsto\sqrt[n]{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[n]{x}=+\infty$

$(\forall n\in\mathbb{N}^*)(\forall p\in\mathbb{N}^*)(\forall a\in\mathbb{R}^+)(\forall b\in\mathbb{R}^+)$

$\sqrt[n]{a}=\sqrt[np]{a^p}$, $\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}}=\sqrt[np]{a}$, $\left(\sqrt[n]{a}\right)^p=\sqrt[n]{a^p}$

$\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$, $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$

$(\forall r\in\mathbb{Q}^*)(\forall r'\in\mathbb{Q}^*)(\forall x\in\mathbb{R}_+^*)(\forall y\in\mathbb{R}_+^*)$

$x^{r+r'}=x^r\cdot x^{r'}$, $x^r\cdot y^r=(x\cdot y)^r$, $(x^r)^{r'}=x^{rr'}$

$\frac{1}{x^r}=x^{-r}$, $\frac{x^r}{y^r}=\left(\frac{x}{y}\right)^r$, $\frac{x^r}{x^{r'}}=x^{r-r'}$

Fonction réciproque

- Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I alors f admet une fonction réciproque, notée f^{-1} définie sur l'intervalle $J=f(I)$.
- La fonction f^{-1} est continue sur J et a le même sens de variation de la fonction f sur I.
- Les courbes (C_f) et $(C_{f^{-1}})$ sont symétriques par rapport la droite $(\Delta): y=x$.

Théorème des valeurs intermédiaires (TVI)

- Si f est continue sur un intervalle $[a,b]$ telle que $f(a)\cdot f(b)\prec 0$ alors l'équation $f(x)=0$ admet au moins une solution α dans l'intervalle $]a,b[$.
- Si f est continue et strictement monotone sur un intervalle $[a,b]$ telle que $f(a)\cdot f(b)\prec 0$ alors l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $]a,b[$.

Professeur : GHAZOUI Mohammed
Matière : Mathématiques
Class : 2 Bac Sciences Physiques
Année scolaire : 2021-2022

Les Branches Infinies

⌘

Lycée Ibn Al Khatib

Tanger

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$

La droite d'équation $x = a$ est une asymptote verticale de la courbe (C_f)

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = b$

La droite d'équation $y = b$ est une asymptote horizontale de la courbe (C_f) au voisinage $\pm\infty$

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$

0

La courbe (C_f) admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses au voisinage $\pm\infty$

$\pm\infty$

La courbe (C_f) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnes au voisinage $\pm\infty$

$a \; ; (a \neq 0)$

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) - ax$

$\pm\infty$

La courbe (C_f) admet une branche parabolique de direction la droite d'équation $y = ax$ au voisinage $\pm\infty$

$b \in \mathbb{R})$

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} [f(x) - (ax + b)]$

0

La courbe (C_f) admet une asymptote oblique d'équation $y = ax + b$ au voisinage $\pm\infty$

Professeur : GHAZOUI Mohammed Matière : Mathématiques Class : 2 Bac Sciences Physiques Année scolaire : 2021-2022	**Résumé des fonctions**	Lycée Ibn Al Khatib Tanger

I) Ensemble de définition :

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \,/\, f(x) \in \mathbb{R}\}$$

$$f(x) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Denominateur} \neq 0 \\ \text{Interieur de} \sqrt{\ } \geq 0 \end{cases}$$

II) Fonction périodique :

- f Périodique de période T si :

  $\forall x \in D_f : (x+T) \in D_f$ et $f(x+T) = f(x)$
- Il suffit d'étudier f sur $D_E = [0,1]$

III) Fonction paire :

- f est une fonction paire si :

  $\forall x \in D_f : -x \in D_f$ et $f(-x) = f(x)$
- (C_f) est symétrique par rapport à (Oy) .
- Il suffit d'étudier f sur $D \subset \mathbb{R}^+$.

IV) Fonction impaire :

- f est une fonction impaire si :

  $\forall x \in D_f : -x \in D_f$ et $f(-x) = -f(x)$
- (C_f) est symétrique par rapport à O .
- Il suffit d'étudier f sur $D \subset \mathbb{R}^+$.

V) Centre de symétrie :

$\Omega(a,b)$ centre de symétrie de (C_f) si :

$$\forall x \in D_f : \begin{cases} (2a-x) \in D_f \\ f(2a-x) = 2b - f(x) \end{cases}$$

VI) Axe de symétrie :

$x = a$ axe de symétrie de (C_f) si :

$$\forall x \in D_f : \begin{cases} (2a-x) \in D_f \\ f(2a-x) = f(x) \end{cases}$$

VII) Concavité d'une courbe :

- (C_f) Convexe sur I si : $\forall x \in I \,;\, f''(x) \geq 0$. ☺
- (C_f) Concave sur I si : $\forall x \in I \,;\, f''(x) \leq 0$. ☹

x	$-\infty$	a	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
La Concavité de la courbe (C_f)	$\cap$	$\Omega(a, f(a))$ Point d'inflexion	$\cup$

VIII) Point d'inflexion :

- La courbe (C_f) admet un point d'inflexion en a si : $f''(x)$ s'annule et change de signe en a.
- Si $f''(x)$ s'annule et ne change pas de signe en a alors (C_f) n'est pas admet un point d'inflexion en a.

IX) Théorème de Rolle :

Si f continue sur $[a,b]$

Et f dérivable sur $]a,b[$ et $f(a) = f(b)$ alors :

$$\exists c \in \,]a,b[\ : \ f'(c) = 0$$

X) Théorème des accroissements finis : (TAF)

Si f continue sur $[a,b]$

Et f dérivable sur $]a,b[$ alors :

$\exists c \in \,]a,b[\ : \ f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$

XI) Inégalité du TAF avec la valeur absolue :

f continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$

Et $\exists k \succ 0$, $\exists x \in \,]a,b[\ : \ |f'(x)| \leq k$

Alors : $|f(b) - f(a)| \leq k|b-a|$

XII) Position relative : (C_f) & (Δ)

x		x_0	
$f(x)-(ax+b)$	$-$		$+$
Position relative de (C_f) et (Δ)	(C_f) au dessous de (Δ)	Ω : Point d'intersection $(C_f) \cap (\Delta) = \Omega(x_0, f(x_0))$	(C_f) au dessus de (Δ)

XIII) Fonction primitive :

- F fonction primitive de f sur I si F dérivable sur I et $F' = f$.
- Toute fonction continue admet une primitive.
- Il existe une fonction primitive $F \,/\, F(x_0) = y_0$
  - f paire $\Rightarrow$ F qui s'annule en O impaire
  - f impaire $\Rightarrow$ F paire

Professeur : GHAZOUI Mohammed Matière : Mathématiques Class : 2 Bac Sciences Physiques Année scolaire : 2021-2022	**Les suites Numériques** ⌘	Lycée Ibn Al Khatib Tanger

$(v_n)_{n\geq n_0}$ est géométrique s'il existe un réel q tel que : $\forall n \geq n_0 \;;\; v_{n+1} = qv_n$ Le nombre q est appelé la raison de la suite $(v_n)_{n\geq n_0}$	$(v_n)_{n\geq n_0}$ est arithmétique s'il existe un réel r tel que : $\forall n \geq n_0 \;;\; v_{n+1} - v_n = r$ Le nombre r est appelé la raison de la suite $(v_n)_{n\geq n_0}$
$(v_n)_{n\geq p}$ Géométrique $\Leftrightarrow$ $\forall n \geq p \;:\; v_n^2 = v_{n+1}\times v_{n-1}$	$(v_n)_{n\geq p}$ Arithmétique $\Leftrightarrow$ $\forall n \geq p \;:\; 2v_n = v_{n+1} + v_{n-1}$
Terme générale d'une suite géométrique ✧ Si (v_n) est une suite géométrique de raison q et de premier terme v_0 alors : $(\forall n\in\mathbb{N}) \quad v_n = v_0 \times q^n$ ✧ Si $(v_n)_{n\geq 1}$ est une suite géométrique de raison q et de premier terme v_1 alors : $(\forall n\in\mathbb{N}^*) \quad v_n = v_1\times q^{n-1}$ ✧ Pour tous n et p de $\mathbb{N}$: $v_n = v_p \times q^{n-p}$	**Terme générale d'une suite arithmétique** ✧ Si (v_n) est une suite arithmétique de raison r et de premier terme v_0 alors $(\forall n\in\mathbb{N}) \quad v_n = v_0 + n\times r$ ✧ Si $(v_n)_{n\geq 1}$ est une suite arithmétique de raison r et de premier terme v_1 alors : $(\forall n\in\mathbb{N}^*) \quad v_n = v_1 + (n-1)\times r$ ✧ Pour tous n et p de $\mathbb{N}$: $v_n = v_p + (n-p)\times r$
Somme de termes consécutifs d'une suite géométrique (u_n) est une suite géométrique de raison q tels que $q\neq 1$: $\forall n\in\mathbb{N} \quad v_0+v_1+\ldots\ldots+v_n = v_0\times\left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right)$ $\forall(n,p)\in\mathbb{N}^2; n\geq p \;;\; v_p+v_{p+1}+\ldots\ldots+v_n = v_p\times\left(\frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}\right)$ $1+q+q^2\ldots\ldots+q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ $(1^{er}\ \textit{terme de la somme})\times\left(\frac{1-q^{\text{nombre de termes}}}{1-q}\right)$	**Somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique** (u_n) est une suite arithmétique $\forall n\in\mathbb{N} \;;\; v_0+v_1+\ldots\ldots+v_n = (n+1)\times\left(\frac{v_0+v_n}{2}\right)$ $\forall(n,p)\in\mathbb{N}^2; n\geq p \;;\; v_p+v_{p+1}+\ldots\ldots+v_n = (n-p+1)\times\left(\frac{v_p+v_n}{2}\right)$ $1+2+\ldots\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ $(\textit{nombre de termes})\times\frac{(1^{er}\ \textit{terme}+\textit{dernier terme})}{2}$
$(u_n)_{n\geq p}$ est croissante, if: $\forall n\geq p \;:\; u_{n+1}-u_n \geq 0$ $(u_n)_{n\geq p}$ est décroissante, if: $\forall n\geq p \;:\; u_{n+1}-u_n \leq 0$ $(u_n)_{n\geq p}$ est constante, if: $\forall n\geq p \;:\; u_{n+1}-u_n = 0$	$(u_n)_{n\geq p}$ est majorée par un réel M , si: $\forall n\geq p \;:\; u_n \leq M$ $(u_n)_{n\geq p}$ est minorée par un réel m , if: $\forall n\geq p \;:\; u_n \geq m$ $(u_n)_{n\geq p}$ est bornée par, if: $\forall n\geq p \;:\; m\leq u_n \leq M$
$\left(\forall n\geq p \;:\; \frac{u_{n+1}}{u_n}\geq 1 \ \textit{and}\ u_n \succ 0\right) \Rightarrow \left((u_n)_{n\geq p}\ \textit{est croissante}\right)$	$\left(\forall n\geq p \;:\; \frac{u_{n+1}}{u_n}\leq 1 \ \textit{and}\ u_n \succ 0\right) \Rightarrow \left((u_n)_{n\geq p}\ \textit{est décroissante}\right)$
(u_n) est croissante: $u_0\leq u_1\leq u_2\leq\ldots\leq u_{n-1}\leq u_n\leq u_{n+1}\ldots$	(u_n) est décroissante: $\ldots u_{n+1}\leq u_n\leq u_{n-1}\leq\ldots\leq u_2\leq u_1\leq u_0$
On dit qu'une suite est convergente ou elle converge vers l si est seulement si : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$	On dit qu'une suite est divergente ou qu'elle diverge vers l si est seulement si : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \pm\infty$ ou qu'elle n'admet pas de limite.
• Toute suite croissante et majorée est convergente. • Toute suite croissante et négative est convergente.	• Toute suite décroissante et minorée est convergente. • Toute suite décroissante et positive est convergente.
$(\forall n\geq n_0 : u_n\leq v_n \;;\; \lim u_n = \ell \ \textit{et}\ \lim v_n = \ell') \Rightarrow (\ell\leq\ell')$ $(\forall n\geq n_0 : u_n\leq v_n \quad \textit{et} \quad \lim u_n = +\infty) \Rightarrow (\lim v_n = +\infty)$ $(\forall n\geq n_0 : u_n\leq v_n \quad \textit{et} \quad \lim v_n = -\infty) \Rightarrow (\lim u_n = -\infty)$ $(\forall n\geq n_0 : \lvert u_n-\ell\rvert\leq v_n \quad \textit{et} \quad \lim v_n = 0) \Rightarrow (\lim u_n = \ell)$ $(\forall n\geq n_0 : w_n\leq u_n\leq v_n \ \textit{et}\ \lim w_n = \lim v_n = \ell) \Rightarrow (\lim u_n = \ell)$	Si $q\succ 1$ alors: $\lim q^n = +\infty$ Si $q=1$ alors: $\lim q^n = 1$ Si $-1\prec q\prec 1$ alors: $\lim q^n = 0$ Si $q\leq -1$ alors la suite $(q^n)_n$ n'admet pas de limite. • Si $\alpha\succ 0$ alors: $\lim n^\alpha = +\infty$ • Si $\alpha\prec 0$ alors: $\lim n^\alpha = 0$
$(\lim u_n = 0) \Leftrightarrow (\lim\lvert u_n\rvert = 0)$	$(\lim u_n = \ell \quad \textit{et} \quad \ell\neq 0) \Rightarrow (\lim\lvert u_n\rvert = \lvert\ell\rvert)$
Soit une suite définie par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ Si f est continue sur un intervalle I et la suite (u_n) est convergente et $f(I)\subset I$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ est la solution de l'équation $f(x)=x$	Si $\lim u_n = \ell$ et f est continue en ℓ Alors la suite $(v_n)_{n\geq n_0}$ tels que $\forall n\geq n_0 : v_n = f(u_n)$ est convergente et $\lim v_n = f(\ell)$

Professeur : GHAZOUI Mohammed Matière : Mathématiques Class : 2 Bac Sciences Physiques Année scolaire : 2021-2022	**Dérivabilité** ⌘	Lycée Ibn Al Khatib Tanger

★ $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$

- La fonction f est dérivable en a.
- La courbe (C_f) admet une tangente au point $A(a,f(a))$ d'équation : (T): $y=(x-a)f'(a)+f(a)$

★ $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x>a}}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'_d(a)$

- La fonction f est dérivable à droite en a.
- La courbe (C_f) admet une demi-tangente à droite au point $A(a,f(a))$ de système d'équations :

$$\begin{cases}y=(x-a)f'_d(a)+f(a)\\x\geq a\end{cases}$$

★ $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x<a}}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'_g(a)$

- La fonction f est dérivable à gauche en a.
- La courbe (C_f) admet une demi-tangente à gauche au point $A(a,f(a))$ de système d'équations :

$$\begin{cases}y=(x-a)f'_g(a)+f(a)\\x\leq a\end{cases}$$

★ $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=+\infty$

- La fonction f n'est pas dérivable à droite en a.
- La courbe (C_f) admet une demi-tangente verticale dirigée vers le haut à droite au point $A(a,f(a))$.

★ $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=-\infty$

- La fonction f n'est pas dérivable à droite en a.
- La courbe (C_f) admet une demi-tangente verticale dirigée vers le bas à droite au point $A(a,f(a))$

★ $\lim\limits_{x\to a^-}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=+\infty$

- La fonction f n'est pas dérivable à gauche en a.
- La courbe (C_f) admet une demi-tangente verticale dirigée vers le bas à gauche au point $A(a,f(a))$

★ $\lim\limits_{x\to a^-}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=-\infty$

- La fonction f n'est pas dérivable à gauche en a.
- La courbe (C_f) admet une demi-tangente verticale dirigée vers le haut à gauche au point $A(a,f(a))$.

$f(x)$	$f'(x)$
α ; $\alpha=$Constante	0
x	1
αx	α
x^2	$2x$
x^n ; $n\in\mathbb{N}^*$	nx^{n-1}
αx^n	αnx^{n-1}
$\dfrac{1}{x}$	$\dfrac{-1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$\cos x$	$-\sin x$
$\sin x$	$\cos x$
$\tan x$	$1+\tan^2 x=\dfrac{1}{\cos^2 x}$
$\cos(\alpha x+\beta)$	$-\alpha\sin(\alpha x+\beta)$
$\sin(\alpha x+\beta)$	$\alpha\cos(\alpha x+\beta)$
$\tan(\alpha x+\beta)$	$\alpha(1+\tan^2(\alpha x+\beta))$
$u+v$	$u'+v'$
$u-v$	$u'-v'$
$u\times v$	$u'\cdot v+u\cdot v'$
$\dfrac{u}{v}$	$\dfrac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^2}$
u^n	$n\cdot u'\cdot u^{n-1}$
$\sqrt{u}$	$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$
$\sqrt[n]{u}$	$\dfrac{u'}{n\left(\sqrt[n]{u}\right)^{n-1}}$
$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$
$\ln u$	$\dfrac{u'}{u}$
e^x	e^x
e^u	$u'e^u$
e^{-x}	$-e^{-x}$
e^{2x}	$2e^{2x}$
$e^{\frac{x}{2}}$	$\dfrac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}$

- f est dérivable sur I et $((\forall x\in I): f'(x)\neq 0)$ alors la fonction f^{-1} est dérivable sur $f(I)$ et on a:

$$(\forall x\in f^{-1}(I));\ \ (f^{-1})'(x)=\frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

- f est dérivable en x_0 et $f'(x_0)\neq 0$ alors:

$$(f^{-1})'(f(x_0))=\frac{1}{f'(x_0)}$$

Professeur : GHAZOUI Mohammed Matière : Mathématiques Class : 2 Bac Sciences Physiques Année scolaire : 2021-2022	**Signe de $g(x)$** ⌘ **Théorème des valeurs intermédiaires**	Lycée Ibn Al Khatib Tanger

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$		$\nearrow$	0	$\searrow$	

$\forall x \in \left]-\infty,\alpha\right]$

✪ g est continue et croissante sur $\left]-\infty,\alpha\right]$.

✪ g admet une valeur maximale en α .

$\forall x \in \left]-\infty,\alpha\right] : g(x) \leq g(\alpha)$

$\forall x \in \left]-\infty,\alpha\right] : g(x) \leq 0$

$\forall x \in \left[\alpha,+\infty\right[$

✪ g est continue et décroissante sur $\left[\alpha,+\infty\right[$.

✪ g admet une valeur maximale en α .

$\forall x \in \left[\alpha,+\infty\right[: g(x) \leq g(\alpha)$

$\forall x \in \left[\alpha,+\infty\right[: g(x) \leq 0$

$\forall x \in \left]-\infty,\alpha\right] \cup \left[\alpha,+\infty\right[\quad g(x) \leq 0$

$\forall x \in \left]-\infty,+\infty\right[\quad g(x) \leq 0$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) \leq 0$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

$\forall x \in \left]-\infty,\alpha\right]$

✪ g est continue et décroissante sur $\left]-\infty,\alpha\right]$.

✪ g admet une valeur minimale en α .

$\forall x \in \left]-\infty,\alpha\right] : g(x) \geq g(\alpha)$

$\forall x \in \left]-\infty,\alpha\right] : g(x) \geq 0$

$\forall x \in \left[\alpha,+\infty\right[$

✪ g est continue et croissante sur $\left[\alpha,+\infty\right[$.

✪ g admet une valeur minimale en α .

$\forall x \in \left[\alpha,+\infty\right[: g(x) \geq g(\alpha)$

$\forall x \in \left[\alpha,+\infty\right[: g(x) \geq 0$

$\forall x \in \left]-\infty,\alpha\right] \cup \left[\alpha,+\infty\right[\quad g(x) \geq 0$

$\forall x \in \left]-\infty,+\infty\right[\quad g(x) \geq 0$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) \geq 0$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g'(x)$			$-$		
$g(x)$		$\searrow$	0	$\searrow$	

$\forall x \in \left]-\infty,\alpha\right]$

✪ g est continue et décroissante sur $\left]-\infty,\alpha\right]$.

✪ g admet une valeur minimale en α .

$\forall x \in \left]-\infty,\alpha\right] : g(x) \geq g(\alpha)$

$\forall x \in \left]-\infty,\alpha\right] : g(x) \geq 0$

$\forall x \in \left[\alpha,+\infty\right[$

✪ g est continue et décroissante sur $\left[\alpha,+\infty\right[$.

✪ g admet une valeur maximale en α .

$\forall x \in \left[\alpha,+\infty\right[: g(x) \leq g(\alpha)$

$\forall x \in \left[\alpha,+\infty\right[: g(x) \leq 0$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g'(x)$			$+$		
$g(x)$		$\nearrow$	0	$\nearrow$	

$\forall x \in \left]-\infty,\alpha\right]$

✪ g est continue et croissante sur $\left]-\infty,\alpha\right]$.

✪ g admet une valeur maximale en α .

$\forall x \in \left]-\infty,\alpha\right] : g(x) \leq g(\alpha)$

$\forall x \in \left]-\infty,\alpha\right] : g(x) \leq 0$

$\forall x \in \left[\alpha,+\infty\right[$

✪ g est continue et croissante sur $\left[\alpha,+\infty\right[$.

✪ g admet une valeur minimale en α .

$\forall x \in \left[\alpha,+\infty\right[: g(x) \geq g(\alpha)$

$\forall x \in \left[\alpha,+\infty\right[: g(x) \geq 0$

Théorème des valeurs intermédiaires

f est continue et strictement décroissante sur $[a,b]$.

$$f(a) = \cdots \succ 0 \quad ; \quad f(b) = \cdots \prec 0$$

$$\Rightarrow \qquad f(a)\cdot f(b) \prec 0$$

Par l'utilisation de théorème des valeurs intermédiaires l'équation : $f(x)=0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $\left]a,b\right[$.

f est continue et strictement croissante sur $[a,b]$.

$$f(a) = \cdots \prec 0 \quad ; \quad f(b) = \cdots \succ 0$$

$$\Rightarrow \qquad f(a)\cdot f(b) \prec 0$$

Par l'utilisation de théorème des valeurs intermédiaires l'équation : $f(x)=0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $\left]a,b\right[$.

Professeur : GHAZOUI Mohammed Matière : Mathématiques Class : 2 Bac Sciences Physiques Année scolaire : 2021-2022	**Trigonométrie** ⌘	Lycée Ibn Al Khatib Tanger

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha$$

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}\quad;\quad \alpha+\beta\not\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$$

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\quad;\quad \alpha-\beta\not\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$$

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$$

$$\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1$$

$$\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha$$

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}\quad;\quad 2\alpha \ \textit{and}\ \alpha\not\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right]$$

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right]$$

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right]$$

$$\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\right]$$

On pose: $\begin{cases}p=\alpha+\beta\\ q=\alpha-\beta\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=\dfrac{p+q}{2}\\ \beta=\dfrac{p-q}{2}\end{cases}$

$$\cos p+\cos q=2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$

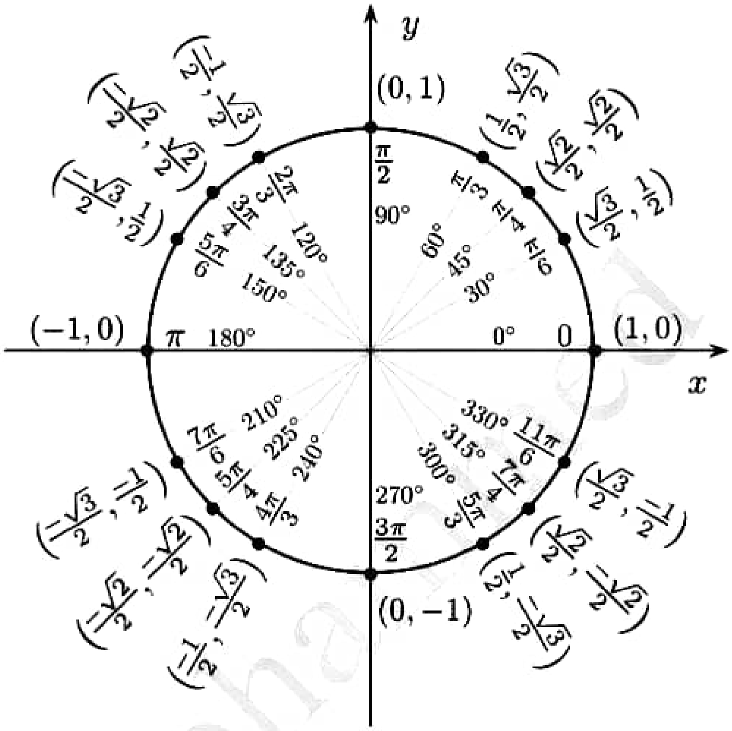
$$\cos p-\cos q=-2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$$

$$\sin p+\sin q=2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$

$$\sin p-\sin q=2\cos\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$$

Si $t=\tan\dfrac{x}{2}$ alors $\cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, $\sin x=\dfrac{2t}{1+t^2}$

$$\tan x=\frac{2t}{1-t^2}\quad;\ (x\not\equiv\frac{\pi}{2}[\pi]\ \text{et}\ x\not\equiv\pi[2\pi])$$



$\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$, $\tan(-\alpha)=-\tan\alpha$

$\cos(-\alpha)=\cos\alpha$, $\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$

$\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$, $\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$

$\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha$, $\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha$

$\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$, $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$

$\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha$, $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha$

$\cos(\alpha+2k\pi)=\cos\alpha$, $\sin(\alpha+2k\pi)=\sin\alpha$

$$\tan(x+k\pi)=\tan x\ ;\ \left(x\not\equiv\frac{\pi}{2}[\pi]\right)$$

$$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}\quad;\quad\left(x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi\ \ /k\in\mathbb{Z}\right)$$

$$1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}\quad;\quad\left(x\not\equiv\frac{\pi}{2}[\pi]\right)$$

$$\cos x=\cos\alpha\ \Leftrightarrow\ \begin{cases}x=\alpha+2k\pi\\ x=-\alpha+2k\pi\end{cases}\quad /k\in\mathbb{Z}$$

$$\sin x=\sin\alpha\ \Leftrightarrow\ \begin{cases}x=\alpha+2k\pi\\ x=\pi-\alpha+2k\pi\end{cases}\quad /k\in\mathbb{Z}$$

$$\tan x=\tan\alpha\ \Leftrightarrow\ x=\alpha+k\pi\quad /k\in\mathbb{Z}$$

Professeur : GHAZOUI Mohammed Matière : Mathématiques Class : 2 Bac Sciences Physiques Année scolaire : 2021-2022	**Les Nombres Complexes** (I)	Lycée Ibn Al Khatib Tanger

◆ La forme algébrique d'un nombre complexe : $z = a + ib$, $(a,b) \in \mathbb{R}^2$

◆ La partie réelle de z est : $\text{Re}(z) = a$

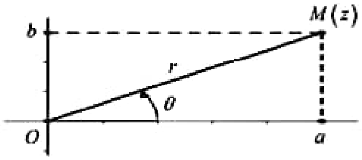
◆ La partie imaginaire de z est :

$$\text{Im}(z) = b$$

◆ Le conjugué de z est : $\overline{z} = a - ib$

◆ Le module de z est : $|z| = \sqrt{z.\overline{z}}$

$$(a+ib)(a-ib) = a^2 + b^2$$



$M(z)$ est l'image de z et $\overrightarrow{OM}$ est l'image vectorielle de z

$z = a + ib$ est appelé l'affixe du point $M(a,b)$ ou l'affixe du vecteur $\overrightarrow{OM}$

◆ La forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul :

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, $r \succ 0$

◆ Le module de z est : $r = |z| = OM$

◆ L'argument de z est :

$$\arg z \equiv \left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM}\right) \equiv \theta[2\pi]$$

◆ $a = r\cos\theta$ et $b = r\sin\theta$

$$z = [r,\theta] = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$\arg(-z) \equiv \pi + \arg z[2\pi]$

$\arg \overline{z} \equiv -\arg z[2\pi]$

$\arg(z + z') \neq \arg z + \arg z'[2\pi]$

$\arg(z \times z') \equiv \arg z + \arg z'[2\pi]$

$\arg z^n \equiv n.\arg z[2\pi]$

$\arg \frac{z}{z'} \equiv \arg z - \arg z'[2\pi]$

$\arg \frac{1}{z} \equiv -\arg z[2\pi]$

La distance AB est: $AB = |z_B - z_A|$

$|z| = |-z| = |\overline{z}|$

$|z + z'| \leq |z| + |z'|$

$|z \times z'| = |z| \times |z'|$

$|z^n| = |z|^n$

$\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$

$z + \overline{z} = 2\text{Re}(z)$

$z - \overline{z} = 2i\,\text{Im}(z)$

$\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$

$\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$

$\overline{(z^n)} = \left(\overline{z}\right)^n$

$\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$

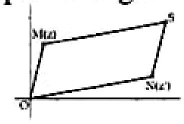
I est le milieu de $[AB]$:

$$z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$$

L'affixe du $\overrightarrow{AB}$ est: $z_B - z_A$

$$\text{aff}\,\overrightarrow{AB} = z_B - z_A = b - a$$

Si $M(z)$ et $N(z')$ alors le point $S(z + z')$ tel que $OMSN$ parallélogramme



Les points A , B et C sont alignés $\Leftrightarrow \frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} \in \mathbb{R}$

Les points A , B , C et D sont cocycliques si et seulement si : $\frac{z_D - z_A}{z_B - z_A} \times \frac{z_B - z_C}{z_D - z_C} \in \mathbb{R}$ ou $\frac{z_D - z_A}{z_B - z_A} \times \frac{z_D - z_C}{z_B - z_C} \in \mathbb{R}$

$$\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AB}\right) \equiv \arg(z_B - z_A)[2\pi]$$

$$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right) \equiv \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)[2\pi]$$

$$(AB)//(CD) \Leftrightarrow \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) \equiv 0[2\pi] \Leftrightarrow \frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}^*$$

$$(AB)\perp(CD) \Leftrightarrow \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \Leftrightarrow \frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in i\mathbb{R}^*$$

◆ La forme exponentielle d'un nombre complexe non nul : $z = re^{i\theta}$, tel que $r \succ 0$

$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

$e^{i\theta} = [1,\theta]$

$\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$

$e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta} \times e^{i\theta'}$

$e^{i(\theta-\theta')} = \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}}$

$e^{-i\theta'} = \frac{1}{e^{i\theta'}}$

$e^{ix} + e^{-ix} = 2.\cos x$

$e^{ix} - e^{-ix} = 2.i.\sin x$

Z est réel $\Leftrightarrow \text{Im}(Z) = 0 \Leftrightarrow \overline{Z} = Z$

Z est imaginaire pur $\Leftrightarrow \text{Re}(Z) = 0 \Leftrightarrow \overline{Z} = -Z$

$\text{Re}(Z) \succ 0$ et $\text{Im}(Z) = 0 \Leftrightarrow Z \in \mathbb{R}_+^* \Leftrightarrow \arg Z \equiv 0[2\pi]$

$\text{Re}(Z) \prec 0$ et $\text{Im}(Z) = 0 \Leftrightarrow Z \in \mathbb{R}_-^* \Leftrightarrow \arg Z \equiv \pi[2\pi]$

$\text{Im}(Z) \succ 0$ et $\text{Re}(Z) = 0 \Leftrightarrow Z \in i\mathbb{R}_+^* \Leftrightarrow \arg Z \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$

$\text{Im}(Z) \prec 0$ et $\text{Re}(Z) = 0 \Leftrightarrow Z \in i\mathbb{R}_-^* \Leftrightarrow \arg Z \equiv \frac{-\pi}{2}[2\pi]$

$\text{Re}(Z) \neq 0$ et $\text{Im}(Z) = 0 \Leftrightarrow Z \in \mathbb{R}^* \Leftrightarrow \arg Z \equiv 0[\pi]$

$\text{Im}(Z) \neq 0$ et $\text{Re}(Z) = 0 \Leftrightarrow Z \in i\mathbb{R}^* \Leftrightarrow \arg Z \equiv \pi[\pi]$

$\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}} = \left[1, \frac{\pi}{4}\right]$

$\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \left[1, \frac{\pi}{3}\right]$

$\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} = \left[1, \frac{\pi}{6}\right]$

$0 + i = \left[1, \frac{\pi}{2}\right]$

$-1 + i.0 = [1, \pi]$

$1 + i.0 = [1, 0]$

Professeur : GHAZOUI Mohammed Matière : Mathématiques Class : 2 Bac Sciences Physiques Année scolaire : 2021-2022	**Les Nombres Complexes** (II)	Lycée Ibn Al Khatib Tanger

$[r,\theta]\times[r',\theta']=[r\times r',\theta+\theta']$

$\dfrac{[r,\theta]}{[r',\theta']}=\left[\dfrac{r}{r'},\theta-\theta'\right]$

$[r,\theta]^n=[r^n,n\theta]$, $-[r,\theta]=[r,\theta+\pi]$

$\overline{[r,\theta]}=[r,-\theta]$, $\dfrac{1}{[r,\theta]}=\left[\dfrac{1}{r},-\theta\right]$

L'équation : $az^2+bz+c=0$, tels que : $(a\in\mathbb{R}^*)$ et $(b,c)\in\mathbb{R}^2$

$$\Delta=b^2-4ac$$

Si $\Delta\prec 0$: l'équation admet deux solutions complexes conjuguées $z_2=\overline{z_1}$:

$z_1=\dfrac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $z_2=\dfrac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$

- La factorisation : $az^2+bz+c=a(z-z_1)(z-z_2)$

$$G=bary\{(A,\alpha);(B,\beta)\}\Leftrightarrow \alpha\overrightarrow{AG}+\beta\overrightarrow{BG}=\vec{0}\Leftrightarrow \alpha(z_G-z_A)+\beta(z_G-z_B)=0$$

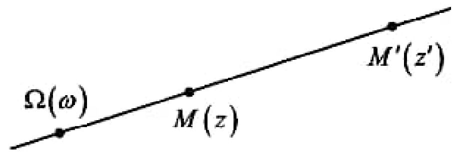
Une homothétie h de centre $\Omega(\omega)$ et de rapport k ; $(k\in\mathbb{R})$

Le point $M'(z')$ est l'image du point $M(z)$ par $h(\Omega,k)$

$h_{(\Omega,k)}(M)=M' \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M'}=k\overrightarrow{\Omega M}$

$\Leftrightarrow \text{aff}\,\overrightarrow{\Omega M'}=k\,\text{aff}\,\overrightarrow{\Omega M}$

$\Leftrightarrow z'-\omega=k(z-\omega)$



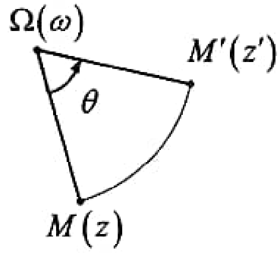
Une rotation R de centre $\Omega(\omega)$ et d'angle θ

Le point $M'(z')$ est l'image du point $M(z)$ par $R(\Omega,\theta)$

$R_{(\Omega,k)}(M)=M' \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M'}=e^{i\theta}\overrightarrow{\Omega M}$

$\Leftrightarrow \text{aff}\,\overrightarrow{\Omega M'}=e^{i\theta}\,\text{aff}\,\overrightarrow{\Omega M}$

$\Leftrightarrow z'-\omega=e^{i\theta}(z-\omega)$



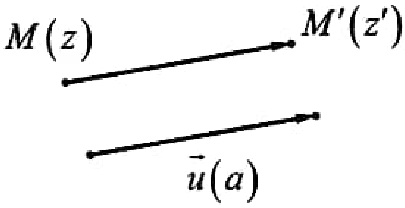
Une translation T du vecteur $\vec{u}(a)$; $(a\in\mathbb{C})$

Le point $M'(z')$ est l'image du point $M(z)$ par $T_{\vec{u}}$

$T_{\vec{u}}(M)=M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'}=\vec{u}$

$\Leftrightarrow \text{aff}\,\overrightarrow{MM'}=\text{aff}\,\vec{u}$

$\Leftrightarrow z'-z=a$



$|z-z_A|=|z-z_B| \Leftrightarrow$ L'ensemble des points $M(z)$ est la médiatrice du segment $[AB]$

$|z-z_\Omega|=r \Leftrightarrow$ L'ensemble des points $M(z)$ est le cercle (C) de centre Ω et de rayon r.

Si $\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\left[\left|\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right|,\arg\left(\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)\right]$ et $\dfrac{z_B-z_A}{z_B-z_A}=[r,\theta]$

Alors : $\left|\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right|=r \Leftrightarrow \dfrac{AC}{AB}=r$ et $\arg\left(\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)\equiv\theta[2\pi] \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)\equiv\theta[2\pi]$

$\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\left[1,\pm\dfrac{\pi}{2}\right] \Leftrightarrow$ Le triangle ABC est rectangle et isocèle en A.

$\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\left[1,\pm\dfrac{\pi}{3}\right] \Leftrightarrow$ Le triangle ABC est équilatéral.

$\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\left[k,\pm\dfrac{\pi}{2}\right] \Leftrightarrow ABC$ est rectangle en A.

$\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=[1,\theta] \Leftrightarrow ABC$ est isocèle en A.

Professeur : GHAZOUI Mohammed
Matière : Mathématiques
Class : 2 Bac Sciences Physiques
Année scolaire : 2021-2022

Le logarithme népérien

⌘

Lycée Ibn Al Khatib

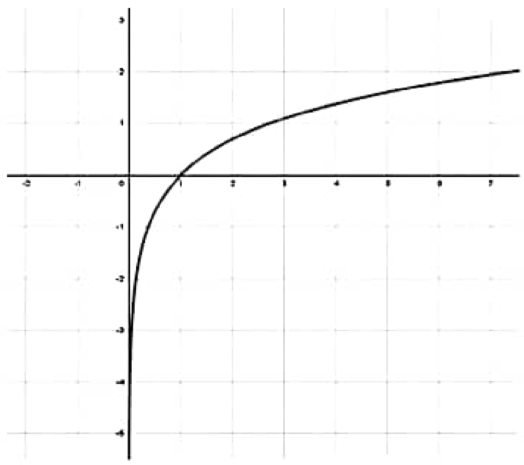
Tanger

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\succ 0}} \ln x = -\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\succ 0}} x\ln x = 0^-$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\succ 0}} x^n \ln x = 0^-$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$$



$$\lim_{x\to +\infty} \ln x = +\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0^+$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0^+$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$$

$$\ln 1 = 0$$
$$\ln e = 1$$
$$e \simeq 2.7$$
$$\ln^2 x = (\ln x)^2 \quad , \quad \ln x^2 = 2\ln x$$

$\forall a \succ 0 \ , \ \forall b \succ 0 \ , \ r \in \mathbb{Q}$

$$\ln(a\cdot b) = \ln a + \ln b$$

$$\ln\frac{a}{b} = \ln a - \ln b$$

$$\ln\frac{1}{b} = -\ln b$$

$$\ln a^r = r\ln a$$

$$\ln\sqrt{a} = \frac{1}{2}\ln a$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

$\forall a \in]0,1[\cup]1,+\infty[$

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

$$\log_a a = \frac{\ln a}{\ln a} = 1$$

$$\log_a 1 = \frac{\ln 1}{\ln a} = 0$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a}$$

$$(\ln^2 x)' = 2(\ln x)'(\ln x)^{2-1}$$

$$\left((\ln x)^2\right)' = 2\cdot\frac{1}{x}\cdot\ln x = \frac{2\ln x}{x}$$

$$\ln x = \ln y \quad \Leftrightarrow \quad x = y$$

$$\ln x \succ \ln y \quad \Leftrightarrow \quad x \succ y$$

$$\ln x \le \ln y \quad \Leftrightarrow \quad x \le y$$

$$\left(\frac{\ln x}{x}\right)' = \frac{(\ln x)'\cdot x - \ln x\cdot(x)'}{x^2}$$

$$\left(\frac{\ln x}{x}\right)' = \frac{\frac{1}{x}\cdot x - \ln x\cdot 1}{x^2}$$

$$\left(\frac{\ln x}{x}\right)' = \frac{1-\ln x}{x^2}$$

$$\log x = \log_{10} x$$

$$\log x = \frac{\ln x}{\ln 10}$$

$$\log 10 = \frac{\ln 10}{\ln 10} = 1$$

$$\log 1 = \frac{\ln 1}{\ln 10} = 0$$

$\forall x \in]0,1] \ : \ \ln x \le 0$

$\forall x \in [1,+\infty[\ : \ \ln x \ge 0$

x	0		1		$+\infty$
$\ln x$	‖	$-$	0	$+$	

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\succ 0}} \frac{\ln x}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x\succ 0}} \frac{1}{x}\cdot\ln x = +\infty\cdot(-\infty) = -\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\succ 0}} \frac{\ln^2 x}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x\succ 0}} \frac{1}{x}\cdot(\ln x)^2 = +\infty\cdot(-\infty)^2 = +\infty$$

$$X = \sqrt{x} \quad \Leftrightarrow \quad X^2 = x \qquad ; \qquad \begin{cases} x \to +\infty \\ X \to +\infty \end{cases}$$

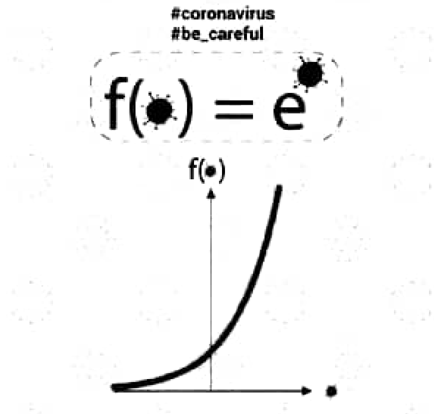
$$\lim_{x\to +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{(\ln x)^2}{\sqrt{x}^2} = \lim_{x\to +\infty} \left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right)^2 = \lim_{X\to +\infty} \left(\frac{\ln X^2}{X}\right)^2 = \lim_{X\to +\infty} \left(2\frac{\ln X}{X}\right)^2 = (2\cdot 0)^2 = 0$$

Professeur : GHAZOUI Mohammed Matière : Mathématiques Class : 2 Bac Sciences Physiques Année scolaire : 2021-2022	**Fonction Exponentielle** ⌘	Lycée Ibn Al Khatib Tanger

$$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0^+$$

$$\lim_{x \to -\infty} xe^x = 0^-$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad \lim_{x \to -\infty} x^n e^x = 0$$



$$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$$

$$e^0 = 1 \quad , \quad e \simeq 2.7$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$e^1 = e \approx 2.7182818$$

$$\ln x = a \iff x = e^a$$

$$e^{\ln x} = x \quad , \quad x \succ 0$$

$$\ln e^x = x \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\forall a \in \mathbb{R} \ , \forall b \in \mathbb{R} \ , r \in \mathbb{Q}$$

$$e^{a+b} = e^a \cdot e^b \quad , \quad e^{-a} = \frac{1}{e^a}$$

$$e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b} \quad , \quad \left(e^a\right)^r = e^{a \cdot r}$$

$$\sqrt{e^x} = e^{\frac{1}{2}x} \quad , \quad \sqrt[n]{e^x} = e^{\frac{1}{n}x}$$

$$\left(e^x\right)' = e^x$$

$$\left(e^u\right)' = u' \cdot e^u$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \ ; \ e^x \succ 0$$

$$x \succ 0 \iff e^x \succ 1$$

$$x = 0 \iff e^x = 1$$

$$x \prec 0 \iff 0 \prec e^x \prec 1$$

$$e^x = e^y \iff x = y$$

$$e^x \succ e^y \iff x \succ y$$

$$e^x \geq e^y \iff x \geq y$$

$$e^x \prec e^y \iff x \prec y$$

$$e^x \leq e^y \iff x \leq y$$

$$\left(e^{-x}\right)' = -e^{-x}$$

$$\left(e^{2x}\right)' = 2e^{2x}$$

$$\left(e^{-2x}\right)' = -2e^{-2x}$$

$$\left(e^{\frac{x}{2}}\right)' = \frac{1}{2} e^{\frac{x}{2}}$$

$$\forall a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$$

$$a \succ 0 \quad , \quad a \neq 1$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \ : \ a^x = e^{x \ln a}$$

$$a^0 = 1 \ ; \ a^1 = a$$

$$a^x = t \iff x = \log_a(t)$$

$$10^x = t \iff x = \log t$$

$$\left(a^x\right)' = (\ln a) \cdot a^x$$

$$\left(\frac{e^x}{x}\right)' = \frac{\left(e^x\right)' \cdot x - e^x \cdot (x)'}{x^2} = \frac{e^x \cdot x - e^x \cdot 1}{x^2} = \frac{(x-1)e^x}{x^2}$$

$$\lim_{x \to +\infty} e^{-x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{e^x} = 0 \quad , \quad \left\{\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty\right\}$$

$$\lim_{x \to -\infty} e^{-x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{e^x} = +\infty \quad , \quad \left\{\lim_{x \to -\infty} e^x = 0^+\right\}$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{e^x}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} \cdot e^x = 0 \cdot 0 = 0$$

$$\left\{\lim_{x \to -\infty} e^x = 0 \ , \ \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0\right\}$$

$$t = -x \iff -t = x$$

$$\begin{cases} x \to +\infty \\ t \to -\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x \to +\infty} e^{-x} = \lim_{t \to -\infty} e^t = 0$$

$$X = -x \iff -X = x$$

$$\begin{cases} x \to +\infty \\ X \to -\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x \to +\infty} e^{-x} = \lim_{X \to -\infty} e^X = 0$$

Professeur : GHAZOUI Mohammed Matière : Mathématiques Class : 2 Bac Sciences Physiques Année scolaire : 2021-2022	**L'intégrales** ⌘	Lycée Ibn Al Khatib Tanger

★ L'intégrale d'une fonction continue sur un segment $[a,b]$

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

★ La linéarité de l'intégrale :

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0 \quad , \quad \int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

$$(\lambda \in \mathbb{R}); \quad \int_a^b \lambda f(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx$$

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

★ La relation de Chasles :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

★ Intégrale et ordre :

- Si $\forall x \in [a,b]$: $f(x) \geq 0$ alors : $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$
- Si $\forall x \in [a,b]$: $f(x) \leq g(x)$ alors : $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$

★ La valeur moyenne : $\mu = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$

★ L'intégration par partie : $I = \int_a^b u(x) \cdot v'(x)\,dx$

$\overline{\text{ALPES}}$

$$\begin{array}{ccc} & u' = & & u = \cdots \\ \uparrow & & \swarrow ① & \\ -② & v = & & v' = \cdots \end{array}$$

$$I = [①] - \int ② = [uv]_a^b - \int_a^b v \cdot u'\,dx$$

★ L'aire $\mathcal{A}$ du domaine plan limite par la courbe (C_f) et les droits d'équations $y = \alpha x + \beta$, $x = a$ et $x = b$ est :

$$\mathcal{A} = \int_a^b |f(x) - y|\,dx \ u.a.$$

★ L'aire $\mathcal{A}$ du domaine plan limite par (C_f) et (Ox) et les droits d'équations $x = a$ et $x = b$ est :

$$\mathcal{A} = \int_a^b |f(x)|\,dx \ u.a.$$

★ L'aire $\mathcal{A}$ du domaine plan limite par (C_f) et (C_g) et les droits d'équations $x = a$ et $x = b$ est :

$$\mathcal{A} = \int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx \ u.a.$$

★ Le volume $\mathcal{V}$ du solide de révolution engendre par la rotation de la courbe (C_f) autour de l'axe (Ox) sur l'intervalle $[a,b]$ est : $\mathcal{V} = \int_a^b \pi (f(x))^2\,dx \ u.v.$

$f(x)$: fonction	$F(x)$: Primitive fonctions
0	c ; $c =$ Constante
a ; $a =$ Constante	$ax + c$
$2x$	$x^2 + c$
x^n ; $n \in \mathbb{N}^*$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c$
αx^n	$\alpha \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c$
$\dfrac{-1}{x^2}$	$\dfrac{1}{x} + c$
$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$\sqrt{x} + c$
$\sin x$	$-\cos x + c$
$\cos x$	$\sin x + c$
$1 + \tan^2 x$	$\tan x + c$
$u' \sin(u)$	$-\cos(u) + c$
$u' \cos(u)$	$\sin(u) + c$
$u'(1 + \tan^2(u))$	$\tan(u) + c$
$\dfrac{u'}{u^2}$	$\dfrac{-1}{u} + c$
$u'u^n$	$\dfrac{u^{n+1}}{n+1} + c$
$\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u} + c$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + c$
$\dfrac{u'}{u}$	$\ln\lvert u\rvert + c$
e^x	$e^x + c$
$u'e^u$	$e^u + c$
e^{-x}	$-e^{-x} + c$
e^{2x}	$\dfrac{e^{2x}}{2} + c$
a^x	$\dfrac{a^x}{\ln a} + c$

$u.a.$: L'unité de l'aire. $u.a. = \|\vec{i}\| \cdot \|\vec{j}\|$

$u.v.$: L'unité de volume. $u.v. = \|\vec{i}\| \cdot \|\vec{j}\| \cdot \|\vec{k}\|$

ALPES: A : arctan L : ln P : polynomial
E : exponential S : sinusoidal (sin, cos)

Professeur : GHAZOUI Mohammed Matière : Mathématiques Class : 2 Bac Sciences Physiques Année scolaire : 2021-2022	**Les équations différentielles** ⌘	Lycée Ibn Al Khatib Tanger

Équation différentielle du premier ordre	La solution générale de l'équation différentielle
$(a \neq 0)$; $y' = ay + b$	$(\alpha \in \mathbb{R})$; $y(x) = \alpha e^{ax} - \dfrac{b}{a}$

Équation différentielle du second ordre	L'équation caractéristique	L'équation caractéristique admet :		La solution générale de l'équation différentielle
$ay'' + by' + cy = 0$	$ar^2 + br + c = 0$ $\Delta = b^2 - 4ac$	$\Delta \succ 0$	Deux solutions réelles : $r_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $r_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$	$y(x) = \alpha e^{r_1 x} + \beta e^{r_2 x}$ Tel que : $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$
		$\Delta = 0$	Une solution unique réelle : $r_0 = \dfrac{-b}{2a}$	$y(x) = (\alpha x + \beta) e^{r_0 x}$ Tel que : $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$
		$\Delta \prec 0$	Deux solutions complexes et conjuguées $r_1 = \dfrac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a} = p + iq$ $r_2 = \dfrac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a} = p - iq$	$y(x) = e^{px}(\alpha \cos(qx) + \beta \sin(qx))$ Tel que : $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$

Professeur : GHAZOUI Mohammed Matière : Mathématiques Class : 2 Bac Sciences Physiques Année scolaire : 2021-2022	**Probabilité** ⌘	Lycée Ibn Al Khatib Tanger

- **Une expérience aléatoire** est une expérience qu'on ne peut pas prévoir les résultats.
- **Une éventualité** est tout résultat d'une expérience aléatoire.
- **L'univers des éventualités** est l'ensemble de toutes les éventualités, il est noté Ω.
- **L'événement** est toute partie de l'univers des éventualités.
- **L'événement certain est** l'ensemble Ω.
- **L'événement impossible est** l'ensemble vide $\varnothing$.
- **L'événement élémentaire tout** singleton $\{e_i\}$ inclus dans Ω.
- **L'événement** $A \cap B$ c'est l'événement A et B.
- **L'événement** $A \cup B$ c'est l'événement A ou B.
- **L'événement contraire** de A noté $\overline{A}$ c'est l'événement qui vérifie : $A \cap \overline{A} = \varnothing$ et $A \cup \overline{A} = \Omega$.
- **Deux événements** A et B sont **incompatibles** si $A \cap B = \varnothing$.
- et : $\times$ ou : $+$

⌘ La probabilité d'un événement M : $p(M) = \dfrac{Card\, M}{Card\, \Omega}$

$p(\Omega) = 1$, $p(\varnothing) = 0$, $0 \le p(M) \le 1$

⌘ La probabilité de l'union de deux évènements :

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

- Si A et B deux événements incompatibles (càd $A \cap B = \varnothing$) alors : $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$

⌘ **Indépendance de deux événements**

On dit que deux événements A et B sont indépendants si

$$p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$$

Types de tirages et dénombrement

⌘ **Tirages simultanés** : C_n^p

Le tirage simultané de p éléments parmi n éléments $(0 \le p \le n)$ c'est tirer simultanément p éléments parmi n éléments et le nombre de ces tirages est C_n^p càd le nombre de combinaisons de p éléments parmi n éléments.

⌘ **Tirages successifs sans remise** : A_n^p

Le tirage successif sans remise de p éléments parmi n éléments $(1 \le p \le n)$ c'est tirer un élément parmi n, on ne le remet pas jusqu'à tirer p éléments et le nombre de ces tirages est A_n^p càd le nombre des arrangements sans répétition de p éléments parmi n éléments

⌘ **Tirages successifs avec remise** : n^p

Le tirage successif avec remise de p éléments parmi n éléments c'est tirer un élément parmi n, on le remet jusqu'à tirer p éléments et le nombre de ces tirages est n^p càd le nombre des arrangements avec répétition de p éléments parmi n éléments (c'est possible que $p \ge n$).

⌘ **Probabilité conditionnelle :**

La probabilité de l'événement B sachant que A est réalisé, est le nombre noté $p_A(B)$ ou $p(B/A)$ définie par : $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!} \qquad C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times n$ $\qquad 0! = 1$

⌘ Probabilité de l'événement contraire $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$

⌘ La loi de probabilité d'une variable aléatoire X

$X = x_i$	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
$P(X = x_i)$	p_1	p_2	$\cdots$	p_n

- L'espérance mathématique : $E(X) = \sum_1^n x_i \cdot p_i$
- La variance : $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$
- L'écart-type : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

« $E(X) = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \cdots + x_n \cdot p_n$ » , « $E(X^2) = \sum_1^n x_i^2 \cdot p_i$ »

⌘ Loi binomiale :

Soit A un événement de probabilité p dans une expérience aléatoire.

On répète cette expérience n fois

Si X est une variable aléatoire binomiale de paramètres n et p alors $X(\Omega) = \{0,1,2,.....,n\}$ et la loi de probabilité de X est définie Par : $P(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$

$\forall k \in \{0,1,2,\ldots,n\}$

- L'espérance mathématique : $E(X) = np$
- La variance : $V(X) = np\overline{p} = np(1-p)$
- L'écart-type : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

⌘ **Epreuves répétées**

Soit A un événement de probabilité p dans une expérience aléatoire et soient n et k deux entiers naturels tels que $k \le n$.

Lorsqu'on répète cette expérience n fois de manière indépendante alors la probabilité pour que A se réalise k fois exactement est $C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$

Professeur : GHAZOUI Mohammed
Matière : Mathématiques
Class : 2 Bac Sciences Physiques
Année scolaire : 2021-2022

Produit scalaire et produit vectoriel dans l'espace
(I)

Lycée Ibn Al Khatib
Tanger

$$\vec{u}(x,y,z) \quad , \quad \vec{v}(x',y',z')$$
$$\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy' + zz'$$
$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$A(x_A,y_A,z_A) \quad , \quad B(x_B,y_B,z_B)$$
$$\overrightarrow{AB}(x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$$
$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

Soit (D) la droite de vecteur directeur $\vec{u}(a,b,c)$, et (D') la droite de vecteur directeur $\vec{v}(a',b',c')$

$$(D) \perp (D') \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$$
$$\Leftrightarrow \vec{u}.\vec{v} = 0$$
$$\Leftrightarrow aa' + bb' + cc' = 0$$

$$\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right)$$

Intersection de (S) et $(\mathcal{P})$

Soit (S) la sphère de centre Ω et de rayon R, et soit $(\mathcal{P})$ un plan

★ si $d(\Omega,(\mathcal{P})) < R$ alors le plan $(\mathcal{P})$ coupe la sphère (S) selon un cercle de centre H et de rayon r

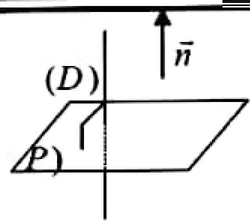
- H est le projeté orthogonal du point Ω sur $(\mathcal{P})$
- $r = \sqrt{R^2 - d^2}$

★ Si $d(\Omega,(\mathcal{P})) = R$ alors le plane $(\mathcal{P})$ tangent à sphère (S) au point H

★ Si $d(\Omega,(\mathcal{P})) > R$ alors le plan $(\mathcal{P})$ est à l'extérieur de la sphère (S) .
$(S) \cap (\mathcal{P}) = \varnothing$

✦ Si $d(\Omega,(\mathcal{P})) = 0$ alors le plan $(\mathcal{P})$ coupe la sphère selon cercle de centre Ω et de rayon R

- Un vecteur $\vec{n}$ non nul de l'espace est normal à un plan (P) lorsque toute droite de vecteur directeur $\vec{n}$ est perpendiculaire à (P)

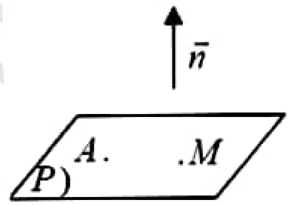


- On considère le plan $(\mathcal{P})$ d'équation $ax + by + cz + d = 0$

Le vecteur $\vec{n}(a,b,c)$ est un vecteur normal au plan $(\mathcal{P})$

Une équation cartésienne du plan $(\mathcal{P})$ passant par le point $A(x_A,y_A,z_A)$ et vecteur normal $\vec{n}(a,b,c)$

★ 1^er Méthode :



$$M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in (\mathcal{P}) \Leftrightarrow \vec{n} \perp \overrightarrow{AM}$$
$$\Leftrightarrow \vec{n}.\overrightarrow{AM} = 0$$
$$\Leftrightarrow a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$$
$$\Leftrightarrow ax + by + cz + d = 0$$

Avec $d = -(ax_A + by_A + cz_A)$

★ 2^eme Méthode :

puisque $\vec{n}(a,b,c)$ est un vecteur normal à $(\mathcal{P})$,alors une équation cartésienne du plan $(\mathcal{P})$ est de la forme : $ax + by + cz + \delta = 0$

Puisque $A \in (\mathcal{P})$ alors $ax_A + by_A + cz_A + \delta = 0$

$$\delta = -(ax_A + by_A + cz_A)$$

Distance du point Ω au plan $(\mathcal{P}) : ax + by + cz + d = 0$

$$d(\Omega,(\mathcal{P})) = \frac{|ax_\Omega + by_\Omega + cz_\Omega + d|}{\|\vec{n}\|} = \frac{|ax_\Omega + by_\Omega + cz_\Omega + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

⅄ La sphère de centre Ω et de rayon R est l'ensemble des points M tels que : $\Omega M = R$

⅄ Une équation cartésienne de la sphère de centre $\Omega(a,b,c)$ et de rayon R est : $\quad (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$

Où : $\quad x^2 + y^2 + z^2 + \alpha x + \beta y + \delta z + \lambda = 0$

⅄ Une équation cartésienne de la sphère (S) de diamètre $[AB]$

$$M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in (S) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{BM}$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = 0$$
$$\Leftrightarrow (x - x_A)(x - x_B) + (y - y_A)(y - y_B) + (y - z_A)(y - z_B) = 0$$

Professeur : GHAZOUI Mohammed
Matière : Mathématiques
Class : 2 Bac Sciences Physiques
Année scolaire : 2021-2022

Produit scalaire et produit vectoriel dans l'espace
(II)

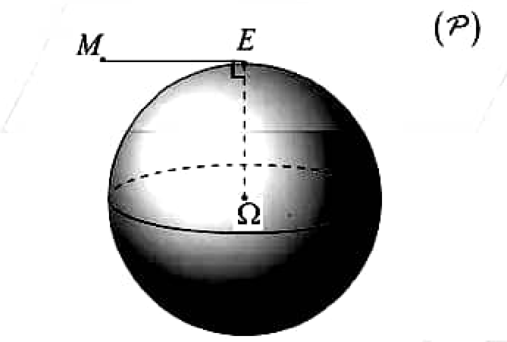
Lycée Ibn Al Khatib
Tanger

Une équation cartésienne du plan $(\mathcal{P})$ tangent à la sphère de centre $\Omega(a,b,c)$ et de rayon R au point E

$$\overrightarrow{\Omega E} \perp (\mathcal{P})$$

$\overrightarrow{\Omega E}$ est un vecteur normal au plan $(\mathcal{P})$

$$M(x,y,z) \in (\mathcal{P}) \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega E} \perp \overrightarrow{EM}$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega E}.\overrightarrow{EM} = 0$$



Une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par le point Ω et orthogonale au plan $(\mathcal{P})$

* $\vec{n}(a,b,c)$ est un vecteur normal au plan $(\mathcal{P})$
* Puisque $(\Delta) \perp (\mathcal{P})$ alors $\vec{n}(a,b,c)$ un vecteur directeur de la droite (Δ)

$$M(x,y,z) \in (\Delta) \Leftrightarrow \vec{n} \text{ et } \overrightarrow{\Omega M} \text{ sont colinéaires}$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M} = t\vec{n} \quad / t \in \mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - x_\Omega = at \\ y - y_\Omega = bt \\ z - z_\Omega = ct \end{cases} \quad / t \in \mathbb{R}$$
$$(\Delta) : \begin{cases} x = x_\Omega + at \\ y = y_\Omega + bt \\ z = z_\Omega + ct \end{cases} \quad / t \in \mathbb{R}$$

$\vec{u}(x,y,z) \ , \ \vec{v}(x',y',z')$

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} yz' - zy' \\ zx' - xz' \\ xy' - yx' \end{vmatrix}$$

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \sin\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right)$$

- $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$
- $\alpha\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{u} \wedge \alpha\vec{v} = \alpha(\vec{u} \wedge \vec{v})$
- $\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}$

Une équation cartésienne du plan (ABC) :

$\vec{n} \equiv \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ est un vecteur normal au plan (ABC)

$$M(x,y,z) \in (ABC) \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right) \perp \overrightarrow{AM}$$
$$\Leftrightarrow \vec{n} \perp \overrightarrow{AM}$$
$$\Leftrightarrow \vec{n}.\overrightarrow{AM} = 0$$

Distance du point Ω à la droite (Δ) passant par le point A est dirigée par le vecteur $\vec{u}$

$$d\left(\Omega, \Delta\left(A,\vec{u}\right)\right) = d\left(\Omega,(\Delta)\right) = \frac{\left\|\overrightarrow{\Omega A} \wedge \vec{u}\right\|}{\|\vec{u}\|}$$

$\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires

$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \vec{0} \Leftrightarrow A$, B et C sont alignés

$\det\left(\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right) = 0 \Leftrightarrow \vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires

Aire du triangle ABC est : $\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right\|$

Aire du parallélogramme $ABCD$ est : $\mathcal{A}_{ABCD} = \left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}\right\|$

La distance entre les droites $D\left(A,\vec{u}\right)$ et $D'\left(B,\vec{v}\right)$

$$d\left(D\left(A,\vec{u}\right), D'\left(B,\vec{v}\right)\right) = \frac{\left|\overrightarrow{AB}.\left(\vec{u} \wedge \vec{v}\right)\right|}{\left\|\vec{u} \wedge \vec{v}\right\|}$$

Intersection de $S(\Omega,R)$ la (Δ)

★ Si $d\left(\Omega,(\Delta)\right) < R$ alors la droite (Δ) coupe la sphère (S) en deux points

★ Si $d\left(\Omega,(\Delta)\right) = R$ la droite (Δ) coupe la sphère (S) en un seul point.
(Δ) est tangente à la sphère (S)

★ Si $d\left(\Omega,(\Delta)\right) > R$ la droite (Δ) est à l'extérieur de la sphère (S)
$(S) \cap (\Delta) = \varnothing$