

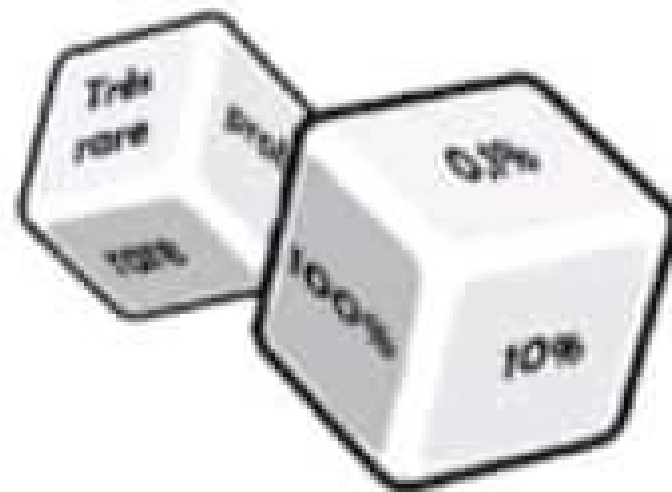
Probabilité

 **Fomesoutra.com**
ça s'outre !



Définition:

Les **probabilités** correspondent à la branche des mathématiques qui cherche à mesurer le caractère aléatoire de ce qui pourrait survenir.



DÉNOMBREMENTS:

1) Factorielle d'un entier naturel:

Soit n un entier

On définit factorielle n , noté par $n!$ par:

$$0! = 1 \quad 1! = 1 \quad \text{et} \quad n! = n(n-1)! = n(n-1)(n-2)! = \dots$$

Exemple:

$$\frac{(n+1)!}{n!} = \frac{(n+1) \times n!}{n!} = n+1$$

$$\frac{(n+1)! \times n!}{(n+2)!} = \frac{(n+1)! \times n!}{(n+2)(n+1)!} = \frac{n!}{n+2}$$

$$\frac{4!}{7!} = \frac{4!}{7 \times 6 \times 5 \times 4!} = \frac{1}{7 \times 6 \times 5} = \frac{1}{210}$$

II) Arrangement sans répétition

Soit E un ensemble fini de n éléments et p un entier naturel non nul avec $p \leq n$

Le nombre des arrangements sans répétition de p éléments de E est donné par : $nP_p = A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$

Exemple:

Soit l'ensemble E des lettres du mot LIBAN.

Combien de mots de 3 lettres **distincts** peut-on former parmi les "éléments" de E.

Solution:

distincts $\Rightarrow$ sans répétition

Liban

$$n=5$$

$$p=3$$

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$$

$$A_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2!}{2!} = 5 \times 4 \times 3 = 60 \text{ mots}$$

III) Arrangement avec répétition

Soit E un ensemble fini de n éléments et p un entier naturel non nul

Le nombre des arrangements avec répétition de p éléments de E est donné par: n^p

Exemple:

Soit l'ensemble E des lettres du mot LIBAN.

Combien de mots de 3 lettres peut-on former parmi les "éléments de E.

Solution :

$n=5$ et $p=3$

$n^p = 5^3 = 125$ mots

IV) Permutation:

Soit E un ensemble fini de n éléments ($n \in \mathbb{N}^*$)

On appelle permutation de n éléments de E notée P_n ;
tout arrangement sans répétition de n éléments de E

Le nombre de permutations de n est donné par :

$$p_n^n = A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!$$

Exemple 1:

Soit l'ensemble E des lettres du mot LIBAN. Combien de mots de 5 lettres distincts peut-on former parmi les lettres de E?

Solution:

$n=5$ L I B A N

$n! = 5! = 120$ mots

Exemple 2:

1) Combien de manières les 9 personnes
(5 hommes et 4 femmes) peuvent s'asseoir sur 9 chaises

Solution:

les 9 personnes (5 hommes et 4 femmes) peuvent s'asseoir sur 9 chaises par $9!$ Manières.



2) Combien de manières les 4 femmes peuvent s'asseoir l'une à côté de l'autre.

Solution:

On considère que les 4 femmes s'asseoir sur une seule chaise et les 5 hommes sur 5 chaises $\Rightarrow 6!$

Et les 4 femmes peuvent remplacer leurs positions $\Rightarrow 4!$

$\Rightarrow 6! \times 4!$ manières

3) Combien de manières les 5 hommes et 4 femmes peuvent s'asseoir à côté de l'autre

Solution:

On considère que les 4 femmes s'asseoir sur une seule chaise et les 5 hommes s'asseoir sur une seule chaise $\Rightarrow 2!$

Les 4 femmes peuvent remplacer leurs positions $\Rightarrow 4!$

Les 5 hommes peuvent remplacer leurs positions $\Rightarrow 5!$

$\Rightarrow 5! \times 4! \times 2!$ manières

Exemple 3:

Quel est le nombre de permutation du mot
"MAXIMIZATION"

Solution:

MAXIMIZATION

On a 2 lettres M $\Rightarrow 2!$

On a 2 lettres A $\Rightarrow 2!$

On a une seule lettre X $\Rightarrow 1!$

On a 3 lettres I $\Rightarrow 3!$

On a une seule lettre Z $\Rightarrow 1!$

On a une seule lettre T $\Rightarrow 1!$

On a une seule lettre O $\Rightarrow 1!$

On a une seule lettre N $\Rightarrow 1!$

$$\Rightarrow \frac{12!}{2! \times 2! \times 1! \times 3! \times 1! \times 1! \times 1! \times 1!} = 19958400 \text{ permutations}$$

Remarque:



Dans ce type de question (nombre de permutations d'un mot)

$$\text{Nombre de permutations} = \frac{(\text{nombre de lettres de ce mots})!}{(\text{chaque lettre combien de fois est repetté})!}$$

V) Combinaison:

1) DÉFINITION:

Soit E un ensemble de n éléments et p un entier naturel tel que $p \leq n$.

On appelle combinaison de p éléments de E toute partie de E formée de p éléments.

Deux combinaisons sont $\neq$ lorsqu'elles diffèrent d'au moins un élément.

Le nombre de combinaisons de p éléments de E sera noté par C_n^p ou $\binom{n}{p}$

Avec $C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$

$$C_n^0 = 1$$

$$C_n^n = 1$$

$$C_n^1 = n$$

Exemple:

$$C_7^2 = \frac{7!}{2!(7-2)!} = \frac{7!}{2!5!} = \frac{7!}{2!5!} = \frac{7 \times 6 \times 5!}{2!5!} = 21$$

2) PROPRIÉTÉS:

n et p sont des entiers naturels avec $0 \leq p \leq n$.

a) $C_n^p = C_n^{n-p}$

b) Relation de Pascal: on a, si $p \geq 1$ $C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}$

Exemple:

Déterminer x tel que $C_8^x = C_8^{x^2-5x}$

Solution :

Remarque:



Pour résoudre $C_a^{p(x)} = C_a^{q(x)}$

On fait $p(x)=q(x)$

Puis on fait $p(x)+q(x)=a$

$$C_8^x = C_8^{x^2-5x}$$

$$x = x^2 - 5x$$

$$x^2 - 6x = 0$$

$$x(x-6) = 0$$

$$x = 0 \text{ ou } x = 6$$

OU

$$x^2 - 5x + x = 8$$

$$x^2 - 4x - 8 = 0$$

$$x_1 = 2 + 2\sqrt{3} \notin \mathbb{N} \text{ à rejeter}$$

$$x_2 = 2 - 2\sqrt{3} \notin \mathbb{N} \text{ à rejeter}$$

3) TRIANGLE DE PASCAL:

1										
1	1									
1	2	1								
1	3	3	1							
1	4	6	4	1						
1	5	10	10	5	1					
1	6	15	20	15	6	1				
1	7	21	35	35	21	7	1			
1	8	28	56	70	56	28	8	1		
1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	

$$C_2^2 + C_2^3 = C_3^3$$

4) FORMULE DU BINÔME DE NEWTON;

Soit a et b deux nombres quelconques et n un entier naturel.

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^n b^n$$

$$= \sum_{p=0}^n C_n^p a^{n-p} b^p$$

Exemple:

- 1) Développer $(a+b)^4$
- 2) Développer $(2-x)^5$
- 3) Déterminer le coefficient de terme contenant x^{-2} dans l'expression: $\left(x + \left(\frac{-1}{2x^2}\right)\right)^7$

Solution:

$$1) (a+b)^4 = \sum_{p=0}^4 C_4^p a^{4-p} b^p$$

$$= \sum_{p=0}^4 C_4^p a^{4-p} b^p$$

$$= C_4^0 a^4 b^0 + C_4^1 a^3 b + C_4^2 a^2 b^2 + C_4^3 a b^3 + C_4^4 a^0 b^4$$

$$= a^4 + 4a^3 b + 6a^2 b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$$2) (2-x)^5 = \sum_{p=0}^5 C_5^p a^{5-p} b^p$$

$$\begin{aligned}
 (2+(-x))^5 &= \sum_{p=0}^5 C_5^p 2^{5-p} (-x)^p \\
 &= C_5^0 \cdot 2^5 \cdot (-x)^0 + C_5^1 \cdot 2^4 \cdot (-x)^1 + C_5^2 \cdot 2^3 \cdot (-x)^2 + C_5^3 \cdot 2^2 \cdot (-x)^3 \\
 &\quad + C_5^4 \cdot 2 \cdot (-x)^4 + C_5^5 \cdot 2^0 \cdot (-x)^5 \\
 &= 32 - 80x + 80x^2 - 40x^3 + 10x^4 - x^5
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3) \left(x + \left(\frac{-1}{2x^2} \right) \right)^7 &= \sum_{p=0}^7 C_7^p x^{7-p} \left(\frac{-1}{2x^2} \right)^p \\
 &= \sum_{p=0}^7 C_7^p x^{7-p} \left(\frac{-1}{2} \right)^p (x^{-2p}) \\
 &= \sum_{p=0}^7 C_7^p x^{7-3p} \left(\frac{-1}{2} \right)^p
 \end{aligned}$$

$$x^{-2} = x^{7-3p}$$

$$-2 = 7 - 3p$$

$$p = 3$$

$$\text{coefficient} = \left(\frac{-1}{2} \right)^3 C_7^3 = \frac{-35}{8}$$

Remarque: Dans la combinaison ; l'ordre n'est pas important.

Les différents types de tirages:

1) Les tirages successifs avec remise

On tire un élément de E, on remet cet élément dans E, et ainsi de suite jusqu'à ce que l'on ait effectué p tirages.

Dans ce cas, p n'est pas nécessairement inférieur à n, chaque résultat est une suite de p éléments.

Le nombre de résultats est n^p .

2) Les tirages successifs sans remise:

On tire successivement les p éléments de E , un à un.

Dans ce cas, p est nécessairement inférieur ou égal à n , chaque résultat est un arrangement sans répétition de p éléments de E .

Le nombre de résultats est A_n^p

3) Les tirages simultanés

On effectue en une seule fois le tirage de p éléments de E .

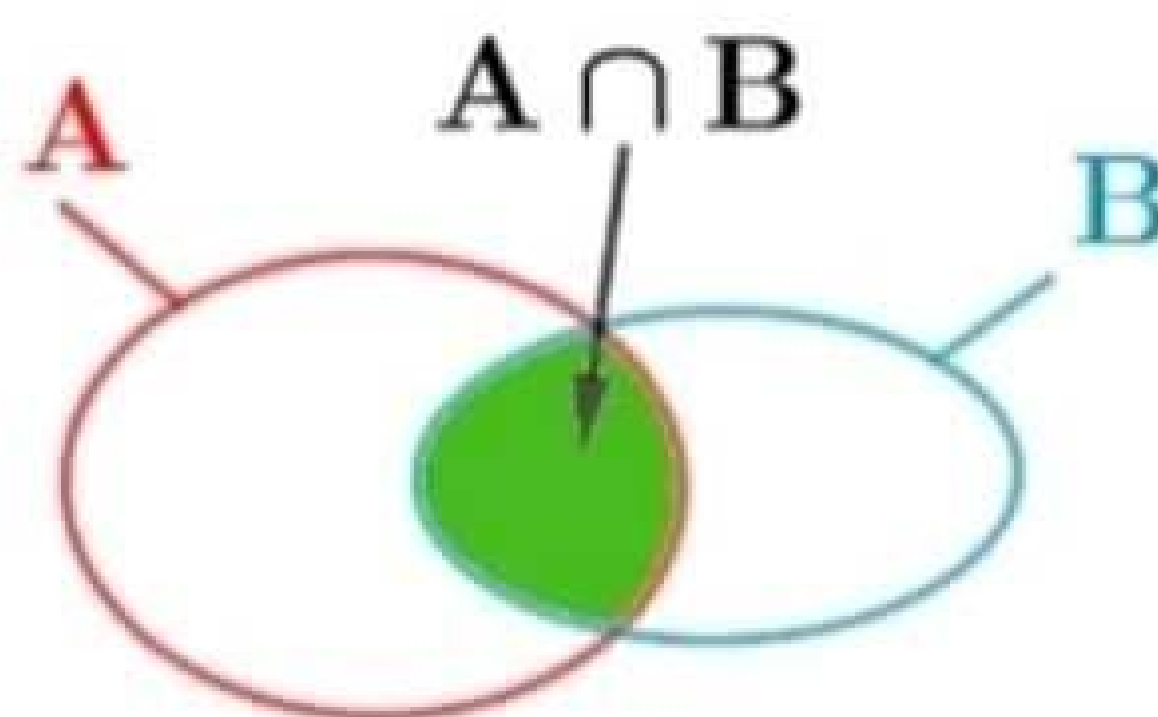
Dans ce cas, p est nécessairement inférieur ou égal à n , chaque résultat est une combinaison de p éléments de E .

Le nombre des résultats est C_n^p

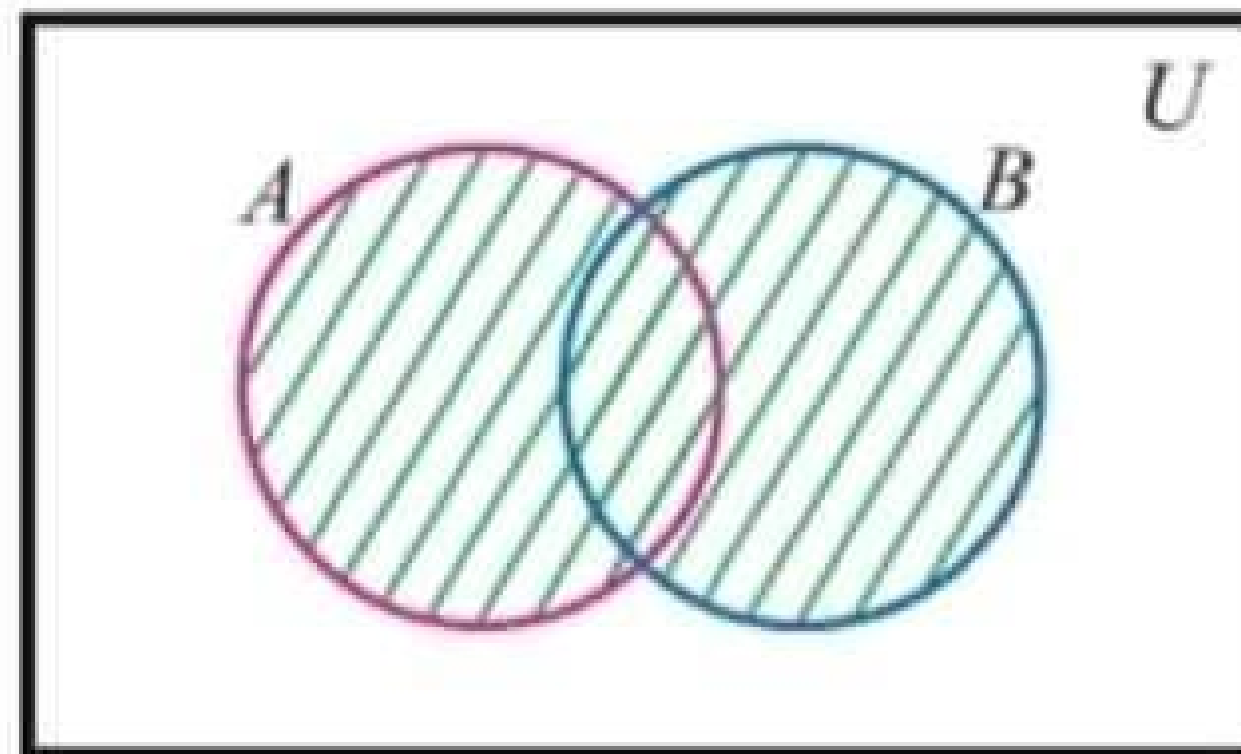
Probabilité

1) Événements:

1) A et B notée $A \cap B$



2) A ou B notée $A \cup B$



3) L'événement vide ($\emptyset$) est l'événement impossible.

4) L'événement Ω est l'événement certain

5) L'événement contraire de A c'est l'ensemble des événements de Ω qui ne sont pas dans A notée $\bar{A}$

$$A \cap \bar{A} = \emptyset \quad \text{et} \quad A \cup \bar{A} = \Omega$$

6) Les événements A et B sont dits **incompatibles** si

$$A \cap B = \emptyset$$

II) Propriétés:

A et B sont deux événements de l'univers Ω . On a:

$$1) p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B).$$

2) Si A et B sont **incompatibles**

$$\Rightarrow p(A \cup B) = p(A) + p(B)$$

$$3) p(A) + p(\bar{A}) = 1 \text{ ou } p(\bar{A}) = 1 - p(A).$$

$$4) p(\Omega) = 1 \text{ et } p(\emptyset) = 0.$$

III) Probabilité uniforme (équiprobabilité)

Lorsque tous les événements élémentaires de l'univers Ω ont la même probabilité d'être réalisés, la probabilité est dite uniforme.

Si A est un événement de Ω , alors

$$p(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{\text{nombre des cas favorable à la réalisation de A}}{\text{nombre totale des cas possibles}}$$

IV) Probabilité conditionnelle

Définition:

La probabilité pour que l'événement A soit réalisé, sachant que l'événement B est réalisé, est appelée **probabilité conditionnelle**

$$P(A/B) = P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

B sera l'univers



La formule de $P(A / B)$ est utilisée souvent pour déterminer $P(A \cap B)$. Dans la plupart des exercices $P(A / B)$ est donnée ou simple à calculer, on détermine $P(A \cap B)$ par la formule :

$$P(A \cap B) = P(A / B) \times P(B) = P(B / A) \times P(A).$$

V) Événement indépendants

Soit A et B deux événements d'un univers Ω tels que $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$.

A et B sont dits **indépendants** si la probabilité de l'un ne change pas, que l'autre soit réalisé ou non,

c'est à dire que $P(A / B) = P(A)$ ou $P(B / A) = P(B)$.

$$P(A \cap B) = P(A/B) \times P(B) = P(A) \times P(B)$$

VI) Formule des probabilités totales

1) Soit E un ensemble et $B_1, B_2, \dots, B_n$ sont n parties de E.

On dit que $B_1, B_2, \dots, B_n$ forment une partition de E si et seulement si, on a :

1) $B_i \neq \emptyset$ pour tout $i = 1, 2, \dots, n$;

2) $B_i \cap B_j = \emptyset$

3) $B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup \dots \cup B_n = E$

2) Si $B_1, B_2, \dots, B_n$ sont n événements formant une partition d'un univers Ω associé à une expérience aléatoire et si E est un événement de Ω ($E \cap \Omega$), on a:

$P(E) = P(E \cap B_1) + P(E \cap B_2) + \dots + P(E \cap B_n)$ d'où

$P(E) = P(E / B_1) \times P(B_1) + P(E / B_2) \times P(B_2) + \dots + P(E / B_n) \times P(B_n).$

VII) Variable aléatoire

Ω est un univers d'une expérience aléatoire. Définir une variable aléatoire X sur Ω , consiste à associer à chaque issu de Ω un nombre réel x_i .

Si $x_1, x_2, \dots, x_n$ sont les valeurs de X , on définit la loi de probabilité de X en calculant les probabilités $p_1,$

$p_2, \dots, p_n$ pour chaque valeur x_i prise par X . Nous écrivons $P(X = x_i) = p_i$.

La loi de probabilité d'une variable aléatoire de X est représentée par un tableau sous la forme:

$X = x_i$	x_1	x_2		x_n
$P_i = P(X = x_i)$	P_1	P_2		P_n



$$\sum_{i=1}^n P_i = P_1 + P_2 + \dots P_n = 1$$

L'espérance mathématique de X est la moyenne des x_i notée par:

$$E(X) = \sum_{i=1}^n x_i P_i = x_1 P_1 + x_2 P_2 + \dots x_n P_n$$

La **variance** de X est donnée par:

$$V(X) = \sum_{i=1}^n P_i x_i^2 - [E(X)]^2 = p_1 x_1^2 + p_2 x_2^2 + \dots + p_n x_n^2 - [E(X)]^2$$

L'**écart type** de X est donnée par:

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$



Exercices

Exercice 1

Simplifier: $\frac{(n+3)!}{(n+1)!}$

Solution:

$$\frac{(n+3)!}{(n+1)!} = \frac{(n+3)(n+2)(n+1)!}{(n+1)!} = (n+3)(n+2) = n^2 + 5n + 6$$

Exercice 2

1) Soit A et B deux événements indépendants sachant que $P(A)=0.2$ et $P(B)=0.3$

Trouver $P(A \cup B)$

2) Soit A et B deux événements sachant que $P(A)=0.1$ et $P(\bar{A} \cap B)=0.4$

Trouver $P(\bar{A} \cap \bar{B})$

Solution:

1) $P(A)=0.2$ et $P(B)=0.3$

A et B deux événements indépendants $\Rightarrow$

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B).$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B) = 0.2 + 0.3 - 0.2 \times 0.3$$

$$P(A \cup B) = 0.44$$

2) $P(A)=0.1$ et $P(\bar{A} \cap B)=0.4$

$P(\bar{A} \cap \bar{B})=?$

REMARQUE:

$$P(\overline{A \cap B}) = P(\bar{A} \cup \bar{B})$$

$$p(\overline{A \cup B}) = p(\bar{A} \cap \bar{B})$$

$$p(\overline{A \cup B}) = p(\bar{A} \cap \bar{B})$$

$$P(\bar{A})=P(\bar{A} \cap B)+P(\bar{A} \cap \bar{B})$$

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)=0.9$$

$$\begin{aligned} P(\bar{A} \cap \bar{B}) &= P(\bar{A}) - P(\bar{A} \cap B) \\ &= 0.9 - 0.4 \\ &= 0.5 \end{aligned}$$

Exercice 3:

Soit A et B deux événements indépendants sachant que $P(A)=K$; $P(B)=K+0.3$ et $P(A \cap B)=0.18$

a. Trouver K

b. Déduire $P(A \cup B)$

Solution:

A et B deux événements indépendants $\Rightarrow$

$$P(A \cap B)=P(A) \times P(B)$$

$$P(A \cap B)=P(A) \times P(B)$$

$$0.18 = K(K+0.3)$$

$$K^2 + 0.3K - 0.18 = 0$$

$K=0.3$ ou $K=-0.06$ (Impossible de trouver une probabilité négative.

$$\rightarrow K=0.3$$

$$b. P(A \cup B)=P(A)+P(B)-P(A \cap B)$$

$$=K + K+0.3 - 0.18$$

$$=0.3+0.3+0.3-0.18=0.72$$

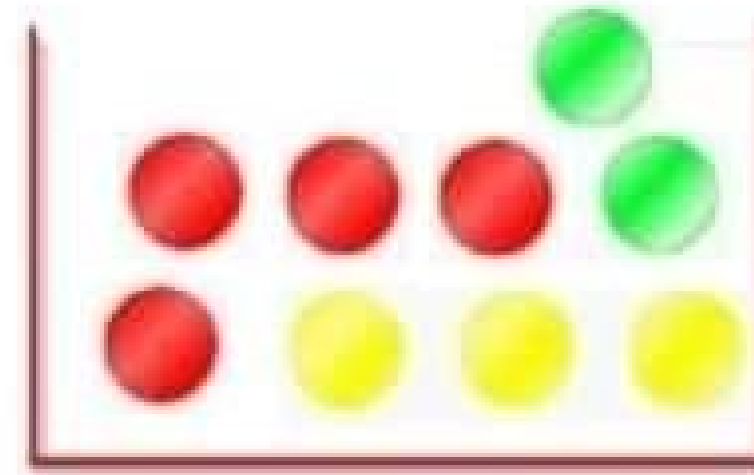
Exercice 4

Une urne contient :

3 boules jaunes

4 boules rouges

2 boules vertes



On tire simultanément 3 boules de cette urne.

Calculer la probabilité des événements suivantes:

A: " Les 3 boules tirées sont de couleurs différentes"

B: "deux boules tirées sont jaunes et une rouge"

C: "aucune de boules tirées est rouge"

D: "au moins une de boules tirées est rouge"

E: "au plus une de boules tirées est jaunes"

Solution:

$$P(A) = 1 - P(\bar{A})$$

Avec $\bar{A}$: "Les 3 boules tirées sont de même couleurs"

$$P(\bar{A}) = \frac{C_4^3 + C_3^3}{C_9^3} = \frac{5}{84}$$

+ : ou ×: et

$$P(A) = \frac{79}{84}$$

$$P(B) = \frac{C_3^2 \times C_4^1}{C_9^3} = \frac{1}{7}$$

$$P(C) = \frac{C_5^3}{C_9^3} = \frac{5}{42}$$

$$P(D) = P(\text{au moins 1 rouge}) = 1 - P(0 \text{ rouge})$$

$$P(0 \text{ rouge}) = P(C)$$

$$P(D) = 1 - P(C) = \frac{37}{42}$$

$$P(E) = P(1 \text{ Jaune et 2 autres}) + P(0 \text{ jaune})$$

$$P(E) = \frac{C_6^2 \times C_3^1}{C_9^3} + \frac{C_6^3}{C_9^3}$$

$$P(E) = \frac{19}{42}$$

Exercice 5:

Choisir la bonne réponse:

1)

$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n =$	2^n	$n!$	n^2	$2n$
---	-------	------	-------	------

2)

$C_{10}^6 - C_9^6 =$	1	C_9^5	C_{19}^6	0
----------------------	---	---------	------------	---

Solution:

1)

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = ??$$

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^n b^n$$

$$= \sum_{p=0}^n C_n^p a^{n-p} b^p$$

Par identification : on Remarque que $a=1$ $b=1$

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = (1 + 1)^n = 2^n$$

(Le premier choix est la bonne réponse)

2) On a:

Relation de Pascal: on a, si $p \geq 1$ $C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}$

$p=6$ $n=10$

$$C_{10}^6 = C_9^6 + C_9^5$$

→

$$C_{10}^6 - C_9^6 = C_9^5$$

(Le deuxième choix est la bonne réponse)

Exercice 6

Une agence de tourisme propose à ses clients des voyages de 7 jours avec deux options :
pension complète ou demi - pension .

L'agence publie l'annonce publicitaire suivante :

Option Destination	Pension complète	Demi - pension
France	1 500 000 LL	1300 000 LL
Italie	1 250 000 LL	1100 000 LL
Turquie	800 000 LL	700 000 LL

Cette agence estime que 25 % de ses clients choisissent la France, 35 % l'Italie et le reste la Turquie et que parmi les clients de chaque destination, 60 % choisissent la pension complète.
On interroge au hasard un client.

Soit les événements suivants :

F : « le client interrogé a choisi la France ».

I : « le client interrogé a choisi l'Italie ».

T : « le client interrogé a choisi la Turquie ».

C : « le client interrogé a choisi la pension complète ».

1) a- Calculer les probabilités suivantes :

$P(C \cap F)$; $P(C \cap I)$; $P(C \cap T)$ et $P(C)$.

b- Le client interrogé a choisi la pension complète, quelle est la probabilité qu'il ait choisi l'Italie ?

2) Soit X la variable aléatoire égale à la somme payée à l'agence par un voyageur.

a- Déterminer la loi de probabilité de X .

b- Calculer l'espérance mathématique $E(X)$. Que représente le nombre ainsi trouvé ?

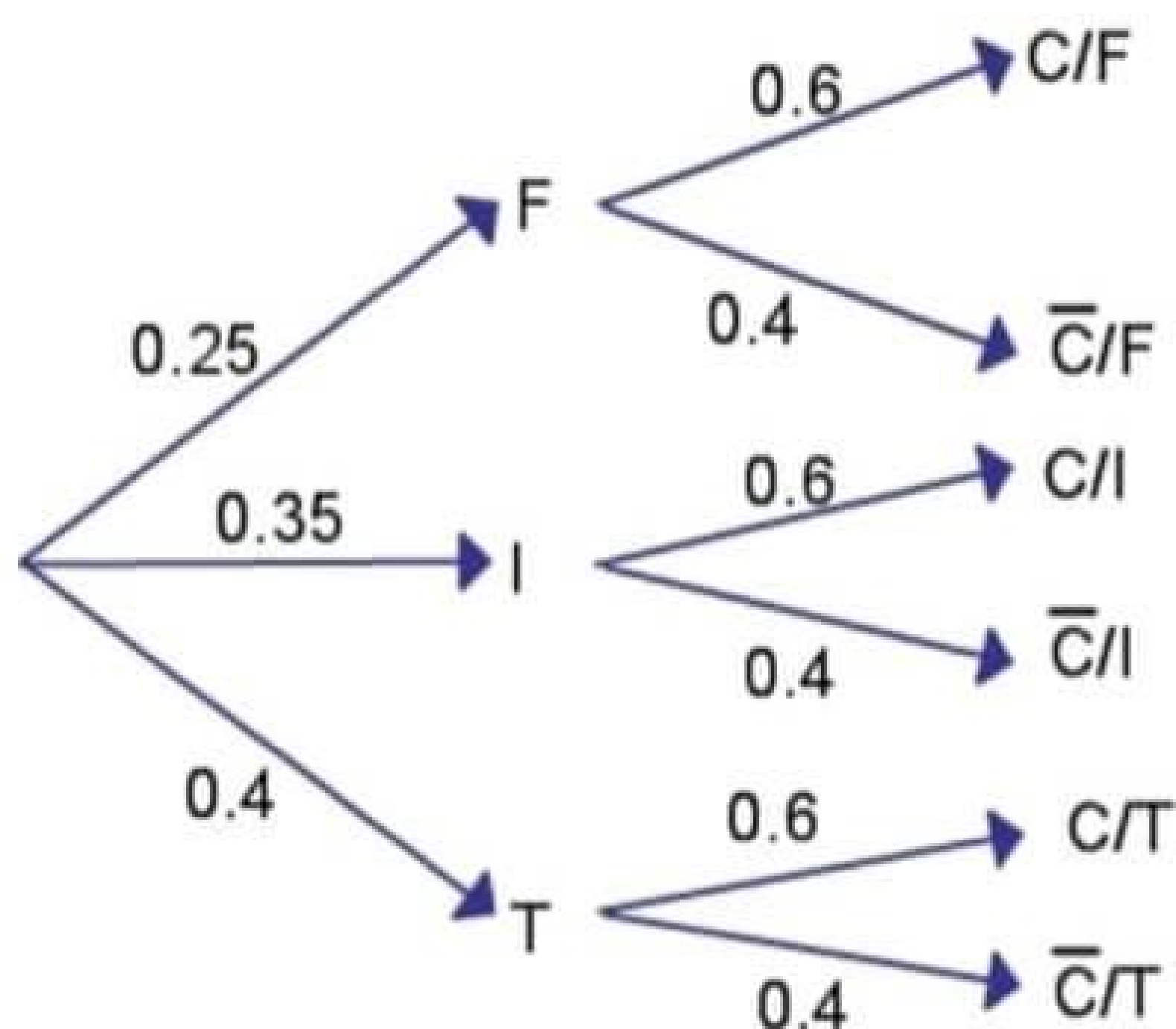
c- Estimer la somme reçue par l'agence lorsqu'elle sert 200 voyageurs.

$$P(F)=0.25$$

$$P(I)=0.35$$

$$P(T)=1-[P(F)+P(I)]=0.4$$

$$P(C)=0.6$$



$$1) a) P(C \cap F) = P(C/F) \times P(F) = 0.6 \times 0.25 = 0.15$$

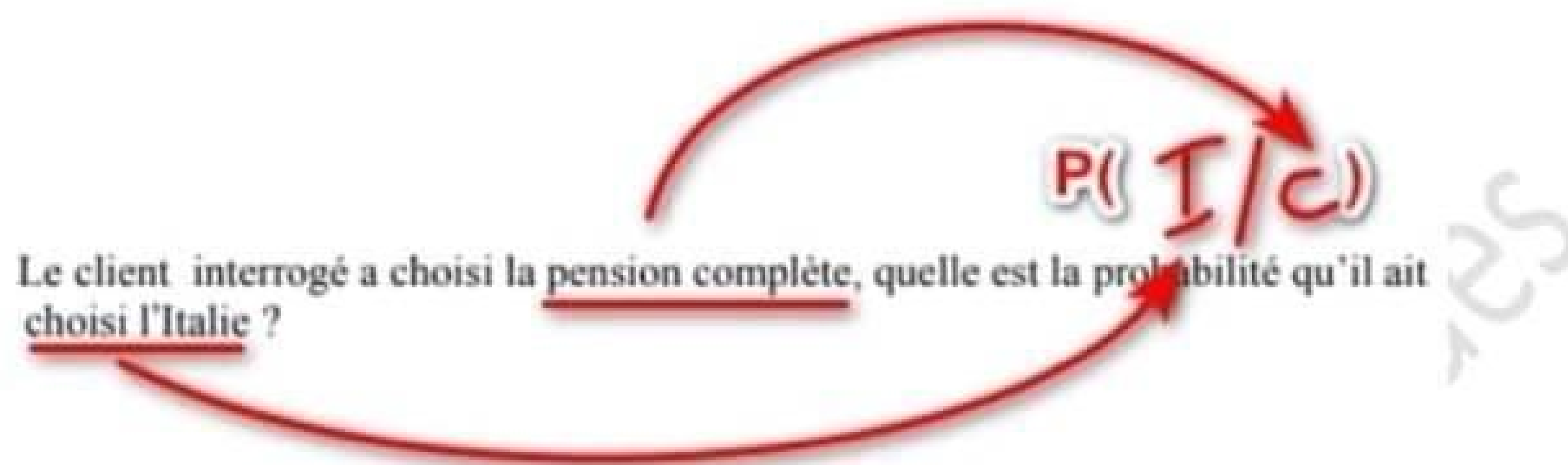
$$P(C \cap I) = P(C/I) \times P(I) = 0.35 \times 0.6 = 0.21$$

$$P(C \cap T) = P(C/T) \times P(T) = 0.4 \times 0.6 = 0.24$$

$P(C) = P(C \cap F) + P(C \cap I) + P(C \cap T)$ (Formule de probabilité totale)

$$P(C) = 0.6$$

b)



$$P(I/C) = \frac{p(C \cap I)}{p(C)} = \frac{0.21}{0.6} = 0.35$$

2)a)

	X
$C \cap F$	1 500 000 LL
$\bar{C} \cap F$	1 300 000 LL
$C \cap I$	1 250 000 LL
$\bar{C} \cap I$	1 100 000 LL
$C \cap T$	800 000 LL
$\bar{C} \cap T$	700 000 LL

$$P(X = 1\,500\,000 \text{ LL}) = P(C \cap F) = 0.15$$

$$P(X = 1\,300\,000 \text{ LL}) = P(\bar{C} \cap F)$$

$$= P(\bar{C}/F) \times P(F) = 0.4 \times 0.25 = 0.1$$

$$P(X=1\ 250\ 000\ \text{LL})=P(C \cap I)=0.21$$

$$P(X=1\ 100\ 000\ \text{LL})=P(\bar{C} \cap I)$$

$$=P(\bar{C}/I) \times P(I) = 0.4 \times 0.35 = 0.14$$

$$P(X=800\ 000\ \text{LL})=P(C \cap T)=0.24$$

$$P(X=700\ 000\ \text{LL})=P(\bar{C} \cap T)$$

$$=P(\bar{C}/T) \times P(T) = 0.4 \times 0.4 = 0.16$$

Ou bien

$$P(X=700\ 000\ \text{LL})=1-[P(X=800\ 000\ \text{LL})+P(X=1\ 100\ 000\ \text{LL})+P(X=1\ 250\ 000\ \text{LL})+P(X=1\ 300\ 000\ \text{LL})+P(X=1\ 500\ 000\ \text{LL})]$$

$$=1-(0.24+0.14+0.21+0.1+0.15)=1-0.84=0.16$$

Car

$$\sum_{i=1}^n P_i = P_1 + P_2 + \dots + P_n = 1$$

x_i	700 000	800 000	1100 000	1250 000	1300 000	1500 000
p_i	0,16	0,24	0,14	0,21	0,1	0,15

b)

$$E(X)=\sum_{i=1}^n x_i P_i = x_1 P_1 + x_2 P_2 + \dots + x_n P_n$$

$$E(X)=700\ 000 \times 0.16 + 800\ 000 \times 0.24 + 1\ 100\ 000 \times 0.14 + 1\ 250\ 000 \times 0.21 + 1\ 300\ 000 \times 0.1 + 1\ 500\ 000 \times 0.15 = 1\ 075\ 500\ \text{LL}$$

$$\text{c) Somme reçue} = 200E(X) = 215\ 100\ 000\ \text{LL}$$

Exercice 7

Durant le mois des soldes, la direction d'un supermarché organise, pour ses clients, chaque lundi une loterie.

Pour cela cette direction utilise deux urnes U et V.

L'urne U contient 4 boules rouges et 3 boules blanches.

L'urne V contient 10 bons d'achat de quatre catégories et dont les valeurs sont indiquées dans le tableau suivant:

	Première catégorie	Deuxième catégorie	Troisième catégorie	Quatrième catégorie
Nombre de bons d'achat.	2	3	4	1
Valeur du bon d'achat en LL.	100 000	50 000	10 000	0

Un client tire au hasard une boule de l'urne U :

si la boule tirée est blanche, il ne gagne rien ;

si la boule tirée est rouge, il tire au hasard un bon d'achat de l'urne V.

1) Soit les événements suivants :

E : « le client qui participe à cette loterie réalise un gain de 10 000 LL ».

N : « le client qui participe à cette loterie ne gagne rien ».

G : « le client qui participe à cette loterie réalise un gain non nul ».

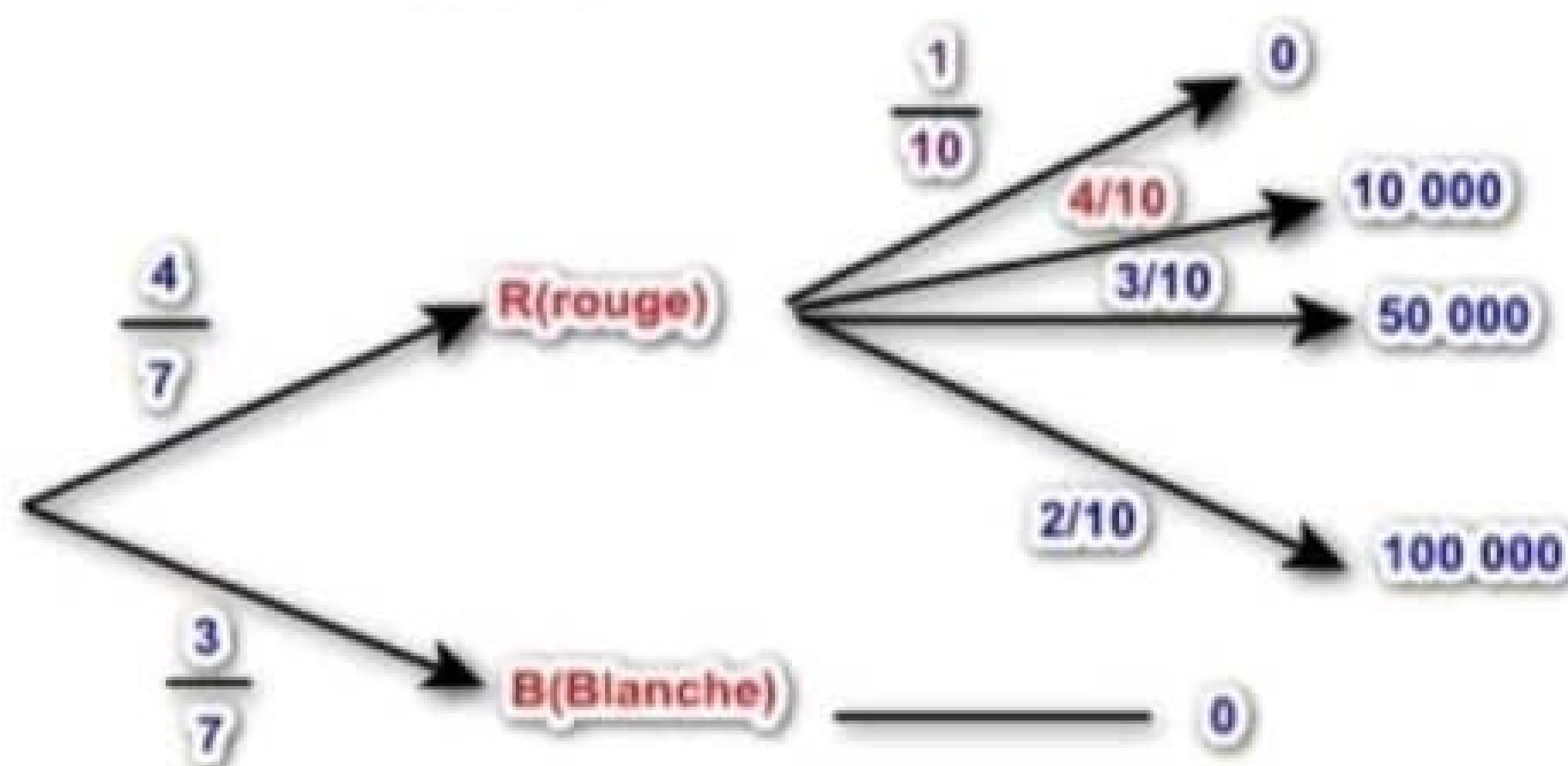
a- Vérifier que la probabilité de E est égale à $\frac{8}{35}$.

b- Calculer la probabilité de chacun des événements N et G.

2) On désigne par X la variable aléatoire égale au gain (positif ou nul) d'un client qui participe à cette loterie.

a- Déterminer la loi de probabilité de X.

b- Calculer l'espérance mathématique E(X).



1)a)

$$P(E) = \frac{4}{10} \times \frac{4}{7} = \frac{16}{70} = \frac{8}{35}$$

b)

$$P(N) = P(0) = \frac{3}{7} + \frac{4}{7} \times \frac{1}{10} = \frac{17}{35}$$

$$P(G) = P(\bar{N}) = 1 - P(N) = \frac{18}{35}$$

2)a)

	X
N	0
E	10 000
X=50 000	50 000
X=100 000	100 000

$$P(X=0) = P(N) = \frac{17}{35}$$

$$P(X=10\,000) = P(E) = \frac{8}{35}$$

$$P(X=50\,000) = \frac{3}{10} \times \frac{4}{7} = \frac{12}{70} = \frac{6}{35}$$

$$P(X=100\,000) = 1 - \left(\frac{6}{35} + \frac{8}{35} + \frac{17}{35} \right) = \frac{4}{35}$$

x_i	0	10 000	50 000	100 000	
p_i	$\frac{17}{35}$	$\frac{8}{35}$	$\frac{4}{7} \times \frac{3}{10} = \frac{6}{35}$	$\frac{4}{7} \times \frac{2}{10} = \frac{4}{35}$	1

b)

$$E(X) = \sum_{i=1}^n x_i P_i = x_1 P_1 + x_2 P_2 + \dots x_n P_n$$

$$E(X) = \frac{4}{35} \times 100\,000 + \frac{6}{35} \times 50\,000 + \frac{8}{35} \times 10\,000 = 22285.71 \text{ LL}$$

Exercice 8

Une urne U contient neuf boules :

- trois boules rouges numérotées 0
- deux boules vertes numérotées 1
- quatre boules bleues numérotées 2.

Partie A

On tire simultanément et au hasard 3 boules de cette urne.

On considère les événements suivants:

M: « les trois boules tirées sont de la même couleur »;

N: « le produit des nombres portés par les trois boules tirées est égal à zéro ».

1) Calculer $P(M)$, la probabilité de l'événement M.

2) a- Vérifier que $P(N) = \frac{16}{21}$.

b- Calculer $P(M \cap N)$ et vérifier que $P(\overline{M} \cap N) = \frac{3}{4}$.

3) Sachant que les trois boules tirées n'ont pas la même couleur, calculer la probabilité que le produit des nombres portés par les trois boules tirées soit égal à zéro.

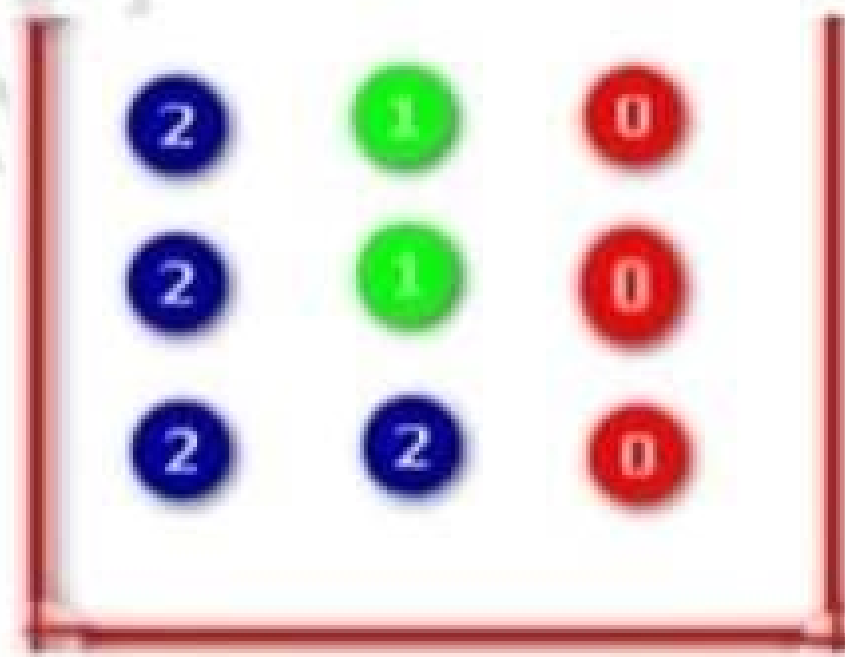
Partie B

Dans cette partie, on tire au hasard une boule de l'urne U.

On ne remet pas cette boule dans l'urne U.

- Si la boule tirée est numérotée 0, on tire alors simultanément et au hasard deux boules de U.
(On aura ainsi 3 boules)
- Si la boule tirée n'est pas numérotée 0, on tire alors au hasard une boule de U.
(On aura ainsi 2 boules)

Calculer la probabilité que la somme des nombres portés par les boules tirées soit égale à 3.



Partie A

$$1) P(M) = \frac{C_3^3}{C_9^3} + \frac{C_2^3}{C_9^3} = \frac{5}{84}$$

$$2) a) P(\overline{N}) = P(\text{le produit des nombres portés par les trois boules tirées est } \neq \text{ à zéro}) = \frac{C_6^3}{C_9^3} = \frac{5}{21}$$

$$P(N)=1-P(\bar{N})=1-\frac{5}{21}=\frac{16}{21}$$

$$b) P(M \cap N) = \frac{C_3^3}{C_9^3} = \frac{1}{84}$$

$$P(N)=P(M \cap N) + P(\bar{M} \cap N)$$

$$P(\bar{M} \cap N) = P(N) - P(M \cap N)$$

$$= \frac{16}{21} - \frac{1}{84} = \frac{3}{4}$$

- 3) Sachant que les trois boules tirées n'ont pas la même couleur, calculer la probabilité que le produit des nombres portés par les trois boules tirées soit égal à zéro.

$$P(N/\bar{M}) = \frac{p(N \cap \bar{M})}{p(\bar{M})} = \frac{\frac{3}{4}}{1 - \frac{5}{84}} = \frac{63}{79}$$

Partie B

$$P(S=3) = P(R \cap (V \text{ et } B)) + P(B \cap (V)) + P(V \cap (B))$$

$$= \frac{C_3^1}{C_9^1} \times \frac{C_2^1 \times C_4^1}{C_8^2} + \frac{C_4^1}{C_9^1} \times \frac{C_2^1}{C_8^1} + \frac{C_2^1}{C_9^1} \times \frac{C_4^1}{C_8^1} = \frac{20}{63}$$

