MATHÉMATIQUES 1re.D

ATMANI.N

edby0h

LOGIQUE ET RAISONNEMENTS

Quelques motivations

• Il est important d'avoir un langage rigoureux. La langue française est souvent ambigüe. Prenons l'exemple de la conjonction « ou » ; au restaurant « fromage ou dessert » signifie l'un ou l'autre mais pas les deux. Par contre si dans un jeu de carte on cherche « les as ou les cœurs » alors il ne faut pas exclure l'as de cœur. Autre exemple : que répondre à la question « As-tu 10 DH en poche ?» si l'on dispose de 15 DH ? • Il y a des notions difficiles à expliquer. C'est le but de ce chapitre de rendre cette ligne plus claire ! C'est la logique.
Enfin les mathématiques tentent de distinguer le vrai du faux. Par exemple « Est-ce qu'une augmentation de 20%, puis de 30% est plus intéressante qu'une augmentation de 50% ?». Vous pouvez penser « oui » ou « non », mais pour en être sûr il faut suivre une démarche logique qui mène à la conclusion. Cette démarche doit être convaincante pour vous mais aussi pour les autres. On parle de raisonnement.
Les mathématiques sont un langage pour s'exprimer rigoureusement, adapté aux phénomènes complexes, qui rend les calculs exacts et véritables. Le raisonnement est le moyen de valider ou d'infirmer une hypothèse et de l'expliquer.

1. PROPOSITION :

Une proposition est une phrase soit vraie, soit fausse, pas les deux en même temps.

Exemples :

– « Je suis plus grand que toi. »

– « $2+2=4$ »

– « $2\times 3=7$ »

– «Pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a $x^2\geq 0$ »

2. OPERATIONS LOGIQUES :

Si P est une proposition et Q est une autre proposition, nous allons définir de nouvelles propositions construites à partir de P et de Q.

2-1) L'opérateur logique «et »

La proposition « P et Q » est vraie si P est vraie et Q est vraie. La proposition « P et Q » est fausse sinon. On résume ceci en une table de vérité

$P \setminus Q$	V	F
V	V	F
F	F	F

FIGURE 1 – Table de vérité de « P et Q »

Exemple1 : soient les propositions $P"\left(\sqrt{3}\geq 1\right)$ et $Q"\left(\left|-\sqrt{3}\right|=-\sqrt{3}\right)$La proposition P est vraie si Q est fausse Donc La proposition $"PetQ"$ est fausse

Exemple2 :si P est la proposition « Cette carte est un as » et Q La proposition « Cette carte est cœur » alors La proposition « P et Q » est vraie si la carte est l'as de cœur et est fausse pour toute autre carte.

2-2) L'opérateur logique « ou »

La proposition « P ou Q » est vraie si l'une (au moins) des deux proposition s P ou Q est vraie.
La proposition « P ou Q » est fausse si les deux proposition s P et Q sont fausses. On reprend ceci dans la table de vérité :

$P \setminus Q$	V	F
V	V	V
F	V	F

FIGURE 2 – Table de vérité de « P *ou* Q »

Exemple : soient les propositions $P"\left(\sqrt{3}\geq 1\right)$ et $Q"\left(\left|-\sqrt{3}\right|=-\sqrt{3}\right)$

La proposition P est vraie si Q est fausse

Donc La proposition $"PouQ"$ est vraie

2-3) La négation « non »

La proposition « non P » est vraie si P est fausse, et fausse si P est vraie.

On note $\overline{P}$ la négation de La proposition P

p	$\overline{p}$
1	0
0	1

FIGURE 1.3 – Table de vérité de « non P »

2-3) L'implication ⇒

La proposition « (non P) ou Q » est notée « P ⇒ Q ». Sa table de vérité est donc la suivante :

p	q	$(p \Rightarrow q)$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

FIGURE 1.4 – Table de vérité de « P ⇒ Q »

La proposition « P ⇒ Q » se lit en français « P implique Q ». Elle se lit souvent aussi «si P est vraie alors Q est vraie » ou «si P alors Q ».

Par exemple :

1) $"0\leq 1"\Rightarrow"\sqrt{2}=1"$ est fausse

2) $"1+2=4"\Rightarrow"\sqrt{2}=-1"$ est vraie Eh oui, si P est fausse alors La proposition « P ⇒ Q » est toujours vraie.

3) $0\leq x\leq 100\Rightarrow\sqrt{x}\leq 10$ est vraie (prendre la racine carrée).

3) $x\in\left]-\infty;-4\right]\Rightarrow x^2+3x-4\succ 0$ est vraie (étudier le binôme).

4) $"\sin x=0\Rightarrow x=0"$ est fausse (regarder pour x =2π par exemple).

Remarque :

Les propositions suivantes ont la même signification :

- si $ABCD$ est un carrée alors $ABCD$ est un parallélogramme.
- $ABCD$ est un carrée implique $ABCD$ est un parallélogramme.
- Pour que $ABCD$ soit un parallélogramme il suffit qu'il soit un carrée.

 Pour que $ABCD$ soit un carrée il faut qu'il soit un parallélogramme
En générale : si on a : $\boldsymbol{P} \Rightarrow \boldsymbol{Q}$ on peut dire que :
Q est une condition nécessaire pour que $ABCD$ un parallélogramme est nécessaire pour que $ABCD$ soit un carrée
P est une condition suffisante pour que $ABCD$ un carrée est suffisante pour que $ABCD$ soit un parallélogramme

2-4) L'équivalence $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ L'équivalence est définit par : « P $\Leftrightarrow$ Q » est La proposition «(P ⇒ Q) et (Q ⇒ P)». On dira « P est équivalent à Q » ou « P équivaut à Q » ou « P si et seulement si Q ». Cette proposition est vraie lorsque P et Q sont vraies ou lorsque P et Q sont fausses. La table de vérité est :

p	q	$(p \Leftrightarrow q)$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

FIGURE 1.5 – Table de vérité de « P $\Leftrightarrow$ Q »

Exemples :

1)$"0 \leq -1" \Leftrightarrow "\sqrt{2} = 1"$ est vraie
2) Pour $x \in \mathbb{R}$ et $x' \in \mathbb{R}$ l'équivalence $x \times x' = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x' = 0$ est vraie.
3)Voici une équivalence toujours fausse
(quelle que soit La proposition P) : « P $\Leftrightarrow$ non(P)».

2-5) Loi logique ou une tautologie.

Activité : En utilisant les tableaux de vérité ; déterminer les valeurs de vérité des propositions suivantes :
1- ($[(P \Rightarrow Q) \; et \; (Q \Rightarrow P)] \Leftrightarrow (P \Leftrightarrow Q)$)
2-$P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow R \Rightarrow (P \Rightarrow R$

Définition : On appelle une loi logique toute proposition constitué par des propositions liées entre elles par des connexions logiques est qui est toujours vraie quel que soit la valeur de vérité des propositions qui la constituent.
Une loi logique s'appelle aussi une tautologie.

Proposition 1 : Soient P, Q, R trois proposition s. Nous avons les équivalences (vraies) suivantes :
1) P $\Leftrightarrow$non(non(P))
2. (P et Q) $\Leftrightarrow$ (Q et P)

3. (P ou Q) $\Leftrightarrow$ (Q ou P)

4. non(P et Q) $\Leftrightarrow$ (non P) ou (non Q)

5. non(P ou Q) $\Leftrightarrow$ (non P) et (non Q)

6.P et (Q ou R) $\Leftrightarrow$ (P et Q) ou (P et R)

7.P ou (Q et R) $\Leftrightarrow$ (P ou Q) et (P ou R)

8. « P ⇒ Q » $\Leftrightarrow$ «non(Q) ⇒ non(P)»

<u>Démonstration :</u> Voici la démarche de démonstrations : Il suffit de dresser les tables de vérités de et comme elles sont égales les deux propositions sont équivalentes

3. Quantificateurs et fonction propositionnelle

Si une proposition P dépend d'un paramètre x on l'appelle fonction propositionnelle

Définition : Une fonction propositionnelle sur un ensemble E est une expression contenant une ou plusieurs variables Libres dans E et qui est susceptible de devenir une proposition vraie ou fausse si l'on attribue à ces variables certaines valeurs particulières de l'ensemble E

Par exemple « $x^2 \geq 0$ », La fonction propositionnelle P(x) est vraie ou fausse selon la valeur de x.

La proposition « $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 0$ » est une proposition vraie

Lorsque les propositions P(x) sont vraies pour tous les éléments x de l'ensemble E

3.1 Le Quantificateurs ∀: «pour tout» :

On lit « Pour tout x appartenant à E, P(x) »

Sous-entendu « Pour tout x appartenant à E, P(x) est vraie ».

Exemples :

«$\forall x \in [1;+\infty[: x^2 \geq 1$)» est une proposition vraie.

«$\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 1$)»est une proposition fausse.

«$\forall n \in \mathbb{N} : n(n+1)$)»est divisible par 2» est vraie.

3.2 Le Quantificateurs ∃: «il existe»

La proposition $\exists x \in E / P(x)$est une proposition vraie lorsque l'on peut trouver au moins un x de E pour lequel P(x) est vraie. On lit «il existe x appartenant à E tel que P(x) (soit vraie)».

Exemples :

1) «$\exists x \in \mathbb{R} : x(x-1) \geq 0$)» est vraie (par exemple x = 1 (1 vérifie bien la propriété).

2)«$\exists n \in \mathbb{N} : n^2 - n \geq n$)»est vraie (il y a plein de choix, par exemple n=3 convient, mais aussi n=10 ou même n=100, un seul suffit pour dire que La proposition est vraie)

3) «$\exists x \in \mathbb{R} : x^2 = -1$)» est fausse (aucun réel au carré ne donnera un nombre négatif)

3.3 La négation des Quantificateurs :

La négation de «$\forall x \in E : P(x)$)»est «$\exists x \in E : \overline{P(x)}$».

La négation de «$\exists x \in E : P(x)$)»est «$\forall x \in E : \overline{P(x)}$».

Exemples :

1)La négation de «$\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 1$)»est La proposition $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 \prec 1$

En effet la négation de $x^2 \geq 1$ est non($x^2 \geq 1$) mais s'écrit plus simplement $x^2 \prec 1$.

2)La négation de «$\forall x \in \mathbb{R} : x+1 \in \mathbb{Z}$)»est «$\exists x \in \mathbb{R} : x+1 \notin \mathbb{Z}$)»

3)La négation de «$\exists x \in \mathbb{R} : x^2 = -1$)»est «$\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \neq -1$)»

4) La négation de P :«$\forall x \in \mathbb{R}; \exists y \succ 0 : x + y \geq 10$» sa négation est :

$\overline{P}$:«$\exists x \in \mathbb{R}; \forall y \succ 0 : x + y \prec 10$»

Remarques

L'ordre des Quantificateurs est très important. Par exemple les deux phrases logiques :
«$\forall x \in \mathbb{R}; \exists y \in \mathbb{R} : x + y \geq 0$» et $\exists x \in \mathbb{R}; \forall y \in \mathbb{R} : x + y \geq 0$ sont différentes. La première est vraie, la seconde est fausse. En effet une phrase logique se lit de gauche à droite, ainsi la première phrase affirme « Pour tout réel x, il existe un réel y
(qui peut donc dépendre de x) tel que x + y > 0.» (Par exemple on peut prendre y =|x|+1). C'est donc une phrase vraie. Par contre la deuxième se lit :
« Il existe un réel y, tel que pour tout réel x, x + y > 0.»
Cette phrase est fausse, cela ne peut pas être le même y qui Convient pour tous les x !
On retrouve la même différence dans les phrases en français suivantes. Voici une phrase vraie « Pour toute personne, il existe un numéro de téléphone », bien sûr le numéro dépend de la

personne. Par contre cette phrase est fausse : « Il existe un numéro, pour toutes les personnes ». Ce serait le même numéro pour tout le monde !

Remarques :

1)Quand on écrit «$\exists x\in\mathbb{R}: f\left(x\right)=0$ »cela signifie juste qu'il existe au moins un réel pour lequel f s'annule. Rien ne dit que ce x est unique. Afin de préciser que f s'annule en une unique valeur, on rajoute un point d'exclamation : $\exists ! x\in\mathbb{R}: f\left(x\right)=0$

2)Pour la négation d'une phrase logique, il n'est pas nécessaire de savoir si la phrase est fausse ou vraie. Le procédé est algorithmique : on change le « pour tout » en «il existe » et inversement,

Exercice1 : Donner la négation et la valeur de vérité de chacune des propositions suivantes

1) $P:"\forall x\in\mathbb{R} / x^2>0"$

2) $P:$ $"\exists x\in\mathbb{R} / x^2-2=0"$

3) $P: x\in\left[1;2\right[$

4) $P:"$ $\forall n\in\mathbb{N} / \frac{n}{2}\in\mathbb{N}"$

5) $P:\left(\forall x\in\mathbb{R}\right);-1\leq\cos x\leq 1$

6) $P:\left(\forall n\in\mathbb{N}\right);\left(\exists m\in\mathbb{N}\right): n\prec m$

7) $P:\left(\exists n\in\mathbb{N}\right)$ $2n+1$ est pair

8) $P:\left(\forall n\in\mathbb{N}\right);\sqrt{n}\in\mathbb{N}$

9) $P:\left(\forall x\in\mathbb{R}\right);\left(\exists y\in\mathbb{R}\right): y-x>0$

10) $P:\left(\exists ! x\in\mathbb{R}\right);2x+4=0$

11) $P:\left(\exists ! x\in\mathbb{R}\right);x^2=2$

12) $P:\left(\exists x\in\mathbb{Z}\right);\frac{x}{4}\in\mathbb{Z}$

13) $P:\left(\forall x\in\mathbb{R}\right);\left(\exists y\in\mathbb{R}\right): y^2=x$

Solution :

1) $\overline{P}:"\exists x\in\mathbb{R} / x^2\leq 0"$ et on a P:est fausse

2) $\overline{P}$ $"\forall x\in\mathbb{R} / x^2-2\neq 0"$ et on a P:est vraie

3) $\overline{P}$: $x\notin\left[1;2\right[$

4) $\overline{P}$ $\exists n\in\mathbb{N} / \frac{n}{2}\notin\mathbb{N}"$ et on a P:est fausse

5) $\overline{P}$ $\left(\exists x\in\mathbb{R}\right);\cos x\succ 1$ ou $\cos x\prec -1$ et on a P:est vraie

6) $\overline{P}$ $\left(\exists n\in\mathbb{N}\right);\left(\forall m\in\mathbb{N}\right): n\geq m$ et on a P:est vraie

7) $\overline{P}$ $\left(\forall n\in\mathbb{N}\right)$ $2n+1$ est impair P:est fausse

8) $\overline{P}$ $\left(\exists n\in\mathbb{N}\right);\sqrt{n}\notin\mathbb{N}$ et on a P:est vraie

$\overline{P}$ 9)$\left(\exists x\in\mathbb{R}\right);\left(\forall y\in\mathbb{R}\right): y-x\leq 0$ et on a P:est fausse

10) $P:\left(\exists ! x\in\mathbb{R}\right);2x+4=0$ on a P:est vraie

11) $P:$ $\left(\exists ! x\in\mathbb{R}\right);x^2=2$ on a P:est fausse

12) $\overline{P}$ $\left(\forall x\in\mathbb{Z}\right);\frac{x}{4}\notin\mathbb{Z}$ et on a P:est vraie

13) $\overline{P}$ $\left(\exists x\in\mathbb{R}\right);\left(\forall y\in\mathbb{R}\right): y^2=x$ et on a P:est fausse

Exercice 2 Ecrire à l'aide de quantificateurs les propositions suivantes :

1. Le carré de tout réel est positif.
2. Certains réels sont strictement supérieurs à leur carré.

3. Aucun entier n'est supérieur à tous les autres.
4. Tous les réels ne sont pas des quotients d'entiers.
5. Il existe un entier multiple de tous les autres.
6; Entre deux réels distincts, il existe un rationnel.

Solution :

1. "$\forall x \in \mathbb{R} / x^2 \geq 0$"
2. "$\exists x \in \mathbb{R}, x \succ x^2$ "
3. $(\forall n \in \mathbb{N});(\exists m \in \mathbb{N}): n \prec m$
4. $(\exists x \in \mathbb{R}):(\forall n \in \mathbb{Z});(\forall m \in \mathbb{N}^*): x \neq \frac{n}{m}$
5. $(\exists n \in \mathbb{N});(\forall m \in \mathbb{N})(\exists k \in \mathbb{N}): n = m \times k$
6. $(\forall x \in \mathbb{R});(\forall y \in \mathbb{R}) / x \prec y \Rightarrow \exists z \in \mathbb{Q} / x \prec z \prec y$

4. RAISONNEMENTS

Voici des méthodes classiques de raisonnements.

4.1. <u>Raisonnement direct</u> : On veut montrer que La proposition « P ⇒ Q » est vraie. On suppose que P est vraie et on montre qu'alors Q est vraie

Exemple1 : $x \in \mathbb{R}; y \in \mathbb{R}$

Montrer que : $\begin{cases} 0 \leq x \prec 2 \\ 0 \leq y \prec 2 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \succ 1$

Solution : $\begin{cases} 0 \leq x \prec 2 \\ 0 \leq y \prec 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} \succ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{y} \succ \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \succ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \succ 1$

Exemple2 : $x \in \mathbb{R}^+$ Montrer que : $\frac{1}{1+\sqrt{x}} = 1 - \sqrt{x} \Rightarrow x = 0$

Solution : $\frac{1}{1+\sqrt{x}} = 1 - \sqrt{x} \Rightarrow \left(1+\sqrt{x}\right)\left(1-\sqrt{x}\right) = 1$

$\Rightarrow 1 + \left(\sqrt{x}\right)^2 = 1 \Rightarrow 1 + x = 1 \Rightarrow x = 0$

Exemple3 : 1) Montrer que : $\left(\forall (a;b) \in \mathbb{R}^2\right): a^2 + b^2 = 0 \Rightarrow a = 0$ et $b = 0$

2) $x \in \mathbb{R}^+$ et $y \in \mathbb{R}^+$ Montrer que: $x + y + 2 = 2\sqrt{x} + 2\sqrt{y} \Rightarrow x = y = 1$

Solution : 1) $a^2 + b^2 = 0 \Rightarrow a^2 = -b^2 \Rightarrow a^2 \in \mathbb{R}^-$

Or on sait que $a^2 \in \mathbb{R}^+$ donc $a^2 \in \mathbb{R}^+ \cap \mathbb{R}^-$ donc $a^2 = 0$ donc $a = 0$

Et puisque $a^2 + b^2 = 0$ alors $b = 0$

2) $x + y + 2 = 2\sqrt{x} + 2\sqrt{y} \Rightarrow x - 2\sqrt{x} + 1 + y - 2\sqrt{y} + 1 = 0$

$\Rightarrow \left(\sqrt{x} - 1\right)^2 + \left(\sqrt{y} - 1\right)^2 = 0 \Rightarrow \sqrt{x} - 1 = 0$ et $\sqrt{y} - 1 = 0$ d'apres1)

$\Rightarrow \sqrt{x} = 1$ et $\sqrt{y} = 1 \Rightarrow x = 1$ et $y = 1$

Donc : $x + y + 2 = 2\sqrt{x} + 2\sqrt{y} \Rightarrow x = y = 1$

Exemple4 : Montrer que : $\left(\forall (a;b) \in \mathbb{R}^2\right): a^2 + b^2 = 1 \Rightarrow |a + b| \leq \sqrt{2}$

Solution : 1)supposons que : $a^2+b^2=1$

Or on sait que $\forall(a;b)\in\mathbb{R}\ :(a-b)^2\geq 0$

Donc : $a^2-2ab+b^2\geq 0$ et puisque : $a^2+b^2=1$ alors :

$1-2ab\geq 0$ Donc $2ab\leq 1$ et $a^2+b^2=1$

Par suite : $a^2+b^2+2ab\leq 2$ donc $(a+b)^2\leq 2$

donc $\sqrt{(a+b)^2}\leq\sqrt{2}$ donc $|a+b|\leq\sqrt{2}$

Or on sait que $a^2\in\mathbb{R}^+$ donc $a^2\in\mathbb{R}^+\cap\mathbb{R}^-$ donc $a^2=0$ donc $a=0$

Et puisque $a^2+b^2=0$ alors $b=0$

2) $x+y+2=2\sqrt{x}+2\sqrt{y}\Rightarrow x-2\sqrt{x}+1+y-2\sqrt{y}+1=0$

$\Rightarrow\left(\sqrt{x}-1\right)^2+\left(\sqrt{y}-1\right)^2=0\Rightarrow\sqrt{x}-1=0$ et $\sqrt{y}-1=0$ d'apres1)

$\Rightarrow\sqrt{x}=1$ et $\sqrt{y}=1\Rightarrow x=1$ et $y=1$

Donc : $x+y+2=2\sqrt{x}+2\sqrt{y}\Rightarrow x=y=1$

Exemple5 : Montrer que si $a\in\mathbb{Q}$ et $b\in\mathbb{Q}$ alors $a+b\in\mathbb{Q}$

Solution : Prenons $a\in\mathbb{Q}$ et $b\in\mathbb{Q}$. Rappelons que les rationnels $\mathbb{Q}$ sont l'ensemble des réels s'écrivant $\frac{p}{q}$avec $p\in\mathbb{Z}$ et $q\in\mathbb{N}^*$.

Alors $a=\frac{p}{q}$ avec $p\in\mathbb{Z}$ et $q\in\mathbb{N}^*$; De même $b=\frac{p'}{q'}$ avec $p'\in\mathbb{Z}$ et $q'\in\mathbb{N}^*$ donc

$a+b=\frac{p}{q}+\frac{p'}{q'}=\frac{p\times q'+q\times p'}{q\times q'}$. Or le numérateur $p\times q'+q\times p'$ est bien un élément de $\mathbb{Z}$; le dénominateur $q\times q'$ est lui un élément de $\mathbb{N}^*$. Donc $a+b$ s'écrit bien de la forme $a+b=\frac{p''}{q''}$ avec $p''\in\mathbb{Z}$ et $q''\in\mathbb{N}^*$ Ainsi $a+b\in\mathbb{Q}$

Exemple6 : on considère la fonction définie sur $\mathbb{R}-\left\{-\frac{1}{2}\right\}$ par :

$f(x)=\frac{x+2}{2x+1}$ Montrer que : $|x-1|\prec\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{1}{4}|x-1|\leq\left|f(x)-f(1)\right|\leq\frac{1}{2}|x-1|$

Solution : $|x-1|\prec\frac{1}{2}\Rightarrow-\frac{1}{2}\prec x-1\prec\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{1}{2}\prec x\prec\frac{3}{2}$

On a : $f(x)-f(1)=\frac{x+2}{2x+1}-1=\frac{x+2-2x-1}{2x+1}=\frac{1-x}{2x+1}$

Donc : $\left|f(x)-f(1)\right|=\left|\frac{1-x}{2x+1}\right|=|1-x|\times\frac{1}{|2x+1|}$

Et on a : $|x-1|\prec\Rightarrow\frac{1}{2}\prec x\prec\frac{3}{2}\Rightarrow 2\prec 2x+1\prec 4$

$\Rightarrow\frac{1}{4}\prec\frac{1}{|2x+1|}\prec\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{1}{4}|x-1|\leq\left|f(x)-f(1)\right|\leq\frac{1}{2}|x-1|$

Donc : $|x-1|\prec\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{1}{4}|x-1|\leq\left|f(x)-f(1)\right|\leq\frac{1}{2}|x-1|$

Exemple7 : Montrer que : $n\in\mathbb{N}\Rightarrow\frac{n+1}{n+2}\notin\mathbb{N}$

Solution :

On a : $n\in\mathbb{N}$ donc $n+1\prec n+2$

donc $0\prec\frac{n+1}{n+2}\prec1$ donc $\frac{n+1}{n+2}\notin\mathbb{N}$

Exemple8 : Montrer que pour tout $\forall x\in[-2;2]:2\sqrt{2}\succ\sqrt{4-x^2}$.

Solution : l'inéquation est définie ssi voici le tableau de signe :

x	$-\infty$	-2		2	$+\infty$
$4-x^2$	$-$	0	$+$	0	$-$

$D_I=[-2;2]$

Soit $x\in[-2;2]$.

$$2\sqrt{2}-\sqrt{4-x^2}=\frac{\left(2\sqrt{2}\right)-\left(\sqrt{4-x^2}\right)^2}{2\sqrt{2}+\sqrt{4-x^2}}=\frac{8-4+x^2}{2\sqrt{2}+\sqrt{4-x^2}}$$

$$2\sqrt{2}-\sqrt{4-x^2}=\frac{4+x^2}{2\sqrt{2}+\sqrt{4-x^2}}\succ0$$

donc $\forall x\in[-2;2]:2\sqrt{2}\succ\sqrt{4-x^2}$

4.2. Raisonnement par disjonction des cas :

Si l'on souhaite verrier une proposition P(x) pour tous les x dans un ensemble E, on montre La proposition pour les x dans une partie A de E, puis pour les x n'appartenant pas à A. C'est la méthode de disjonction des cas ou méthode cas par cas.

Donc : Si on montre que les deux proposition $\overline{P}\Rightarrow Q$ et $P\Rightarrow Q$ sont vraies (et puisque la dernière proposition est une loi logique) on peut conclure que Q est vraie.

Exemple1 : Montrer que pour tout $\forall x\in\mathbb{R}:|x-1|\le x^2-x+1$.

Solution : Soit $x\in\mathbb{R}$. Nous distinguons deux cas.

Premier cas : x >1 Alors|x−1|= x−1.

Calculons alors $\left(x^2-x+1\right)-\left(x-1\right)=x^2-x+1-x+1$

$\left(x^2-x+1\right)-\left(x-1\right)=x^2-2x+1+1=\left(x-1\right)^2+1\ge0$ Ainsi $x^2-x+1\ge|x-1|$

Deuxième cas : x < 1. Alors|x−1|=−(x−1).

Nous obtenons $\left(x^2-x+1\right)+\left(x-1\right)=x^2-x+1+x-1=x^2\ge0$.

Et donc $x^2-x+1\ge|x-1|$

Conclusion : Dans tous les cas $x^2-x+1\ge|x-1|$.

Exemple2 : résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation (E): $1-\frac{x}{4}\succ\frac{1}{\sqrt{1+x}}$

Solution : soit S l'ensemble des solution de (E)

et $x\in]-1;+\infty[$ **on a :** $x\in S\Leftrightarrow\frac{4-x}{4}\succ\frac{1}{\sqrt{1+x}}$

1 cas : si $x\in[4;+\infty[$ alors $4-x\le0$ donc $S=\varnothing$

2 cas : si $x \in]-1;4[$ alors $4-x \geq 0$ donc

$$\frac{4-x}{4} \succ \frac{1}{\sqrt{1+x}} \Leftrightarrow \left(\frac{4-x}{4}\right)^2 \succ \left(\frac{1}{\sqrt{1+x}}\right)^2 \Leftrightarrow x\left(x^2-7x+8\right) \succ 0$$

$\Leftrightarrow x \in \left]0;\frac{7-\sqrt{17}}{2}\right]$ donc $S_2 = \left]0;\frac{7-\sqrt{17}}{2}\right]$

Donc $S = S_1 \cup S_2 = \left]0;\frac{7-\sqrt{17}}{2}\right]$

Exemple3 : résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation (1) : $|x-1|+2x-3 \geq 0$

Solution : soit S l'ensemble des solution de (1)

soit $x \in \mathbb{R}$**:** on va déterminer le signe de : $x-1$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$x-1$	$-$	0	$+$

si $x \in [1;+\infty[$ alors $|x-1| = x-1$

donc l'inéquation (1) devient : $x-1+2x-3 \geq 0 \Leftrightarrow 3x-4 \geq 0$

$3x-4 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{4}{3}$ donc : $S_1 = \left[\frac{4}{3};+\infty\right[\cap [1;+\infty[= \left[\frac{4}{3};+\infty\right[$

si $x \in]-\infty;1]$ alors $|x-1| = -(x-1) = -x+1$

donc l'inéquation (1) devient : $-x+1+2x-3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$

donc $S_2 = [2;+\infty[\cap]-\infty;1] = \varnothing$

finalement : $S = S_1 \cup S_2 = \left[\frac{4}{3};+\infty\right[$

Exemple4 : Montrer que pour tout $\forall x \in \mathbb{R} : \sqrt{x^2+1}+x \succ 0$.

Solution : Soit $x \in \mathbb{R}$. Nous distinguons deux cas.

Premier cas : $x \geq 0$ Alors $x^2 \geq 0$ donc $x^2+1 \geq 1 \succ 0$

donc $\sqrt{x^2+1} \succ 0$ et on a $x \geq 0$ donc $\sqrt{x^2+1}+x \succ 0$

Deuxième cas : $x \leq 0$. on a $x^2+1 \succ x^2$

donc $\sqrt{x^2+1} \succ \sqrt{x^2}$ donc $\sqrt{x^2+1} \succ |x|$ or $x \leq 0$

alors on a : $\sqrt{x^2+1} \succ -x$ donc $\sqrt{x^2+1}+x \succ 0$

finalement : $\forall x \in \mathbb{R} : \sqrt{x^2+1}+x \succ 0$

Exemple5 : résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation (1) : $x^2-|x-2|+5=0$

Solution : soit S l'ensemble des solution de (1)

soit $x \in \mathbb{R}$**:** étudions le signe de : $x-2$

Premier cas : si $x \in [2;+\infty[$ alors $|x-2| = x-2$

donc l'équation (1) devient : $x^2-(x-2)+5=0 \Leftrightarrow x^2-x+7=0$

$\Delta = 1-28 = -27 \prec 0$ donc : $S_1 = \varnothing$

Deuxième cas : si $x \in]-\infty;2[$ alors $|x-2| = -(x-2) = -x+2$

donc l'équation (1) devient : $x^2+(x-2)+5=0 \Leftrightarrow x^2+x+3=0$

$\Delta = 1-12 = -11 \prec 0$ donc $S_2 = \varnothing$

finalement : $S = S_1 \cup S_2 = \varnothing$

Exemple 6 :Montrer que $n(n+1)(n+2)$ est un multiple de 3 pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Solution : soit $n \in \mathbb{N}$ on a 3 cas possibles seulement pour n

$n=3k$ ou $n=3k+1$ ou $n=3k+2$ avec $k \in \mathbb{N}$

1cas : $n=3k$

$n(n+1)(n+2) = 3k(3k+1)(3k+2) = 3k'$ Avec $k' = k(3k+1)(3k+2)$

Donc $n(n+1)(n+2)$ est un multiple de 3

2cas : $n=3k+1$

$n(n+1)(n+2) = (3k+1)(3k+2)(3k+3) = 3(3k+1)(3k+2)(k+1) = 3k'$

Avec $k' = (3k+1)(3k+2)(k+1)$

Donc $n(n+1)(n+2)$ est un multiple de 3

3cas : $n=3k+2$

$n(n+1)(n+2) = (3k+2)(3k+3)(3k+4) = 3(3k+2)(k+1)(3k+4) = 3k'$

Avec $k' = (3k+2)(k+1)(3k+4)$

Donc $n(n+1)(n+2)$ est un multiple de 3

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$ $n(n+1)(n+2)$ est un multiple de 3

4.3. Raisonnement par contraposition :

Le raisonnement par contraposition est basé sur l'équivalence suivante :
La proposition « P ⇒ Q » est équivalente à « non(Q) ⇒ non(P) ».
Donc si l'on souhaite montrer La proposition « P ⇒ Q »
On montre en fait que non(Q) ⇒ non(P) est vraie.

Exemple 1 : $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$

Montrer que : $x \neq 2$ et $y \neq 2 \Rightarrow 2x+2y-xy-2 \neq 2$

Solution : soit $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$

Utilisons un Raisonnement par contraposition :

Montrons que : $2x+2y-xy-2=2 \Rightarrow x=2$ ou $y=2$

On a : $2x+2y-xy-2=2 \Rightarrow 2x+2y-xy-4=0$

$\Rightarrow x(2-y)-2(2-y)=0 \Rightarrow (2-y)(x-2)=0$

$\Rightarrow 2-y=0$ ou $x-2=0$ $\Rightarrow y=2$ ou $x=2$

Donc : $x \neq 2$ et $y \neq 2 \Rightarrow 2x+2y-xy-2 \neq 2$

Exemple 2 : $x \in \mathbb{R}$ et $x \neq -5$

Montrer que : $x \neq -8 \Rightarrow \dfrac{x+2}{x+5} \neq 2$

Solution : soit $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$

Utilisons un Raisonnement par contraposition :

Montrons que : : $\frac{x+2}{x+5}=2\Rightarrow\ x=-8$

On a : $\frac{x+2}{x+5}=2\Rightarrow\ x+2=2(x+5)$

$\Rightarrow x+2=2x+10\Rightarrow x=-8$

Donc : $x\neq -8\ \Rightarrow\frac{x+2}{x+5}\neq 2$

Exemple 3 : Soit $n\in\mathbb{N}$. Montrer que si n^2 est pair alors n est pair.

Solution : Nous supposons que n n'est pas pair

Nous voulons montrer qu'alors n^2 n'est pas pair

Comme n n'est pas pair il est impair et donc il existe $k\in\mathbb{N}$ tel que $n=2k+1$.

Alors $n^2=(2k+1)^2=4k^2+4k+1=2(2k^2+2k)+1=2k'+1$avec $k'=2k^2+2k\in\mathbb{N}$.

Et donc n^2 est impair.

Conclusion : nous avons montré que si n est impair alors n^2 est impair. Par contraposition ceci est équivalent à : si n^2 est pair alors n est pair.

Exemple4 : $x\in\mathbb{R};y\in\mathbb{R}$

Montrer que : $x\neq y\Rightarrow(x+1)(y-1)\neq(x-1)(y+1)$

Solution : Utilisons un Raisonnement par contraposition :

Montrons que : $(x+1)(y-1)=(x-1)(y+1)\Rightarrow x=y$??

On a : $(x+1)(y-1)=(x-1)(y+1)\Rightarrow xy-x+y-1=xy+x-y-1$

$\Rightarrow -2x=-2y\Rightarrow x=y$

Donc : $x\neq y\Rightarrow(x+1)(y-1)\neq(x-1)(y+1)$

Exemple 5 : Soit $n\in\mathbb{N}$et $p\in\mathbb{N}$

Montrer que $n\times p$ est pair ou n^2-p^2 est un multiple de 8 .

Solution :

- Si n ou p sont pairs alors $n\times p$ est pair
- Si n ou p sont impairs alors

$n=2k+1$ et $p=2k'+1$ avec $k\in\mathbb{N};k'\in\mathbb{N}$

Donc $n^2-p^2=(2k+1)^2-(2k'+1)^2$

$n^2-p^2==4\big(k(k+1)-k'(k'+1)\big)$ et on a : $m(m+1)$ est pair

$n^2-p^2=4(2\alpha-2\beta)=8(\alpha-\beta)=8k''$ donc n^2-p^2 est un multiple de 8 .

4.4. <u>Raisonnement par l'absurde :</u>

Le raisonnement par l'absurde repose sur le principe suivant : pour montrer « P ⇒ Q » on suppose à la fois que P est vraie et que Q est fausse et on cherche une contradiction. Ainsi si P est vraie alors Q doit être vraie et donc « P ⇒ Q » est vraie.

Exemple1 : Soient $a\succ 0$ et $b\succ 0$ Montrer que si $\frac{a}{1+b}=\frac{b}{1+a}$ alors a = b.

Solution : Nous raisonnons par l'absurde en supposant que $\frac{a}{1+b}=\frac{b}{1+a}$ et $a\neq b$.

Comme $\frac{a}{1+b}=\frac{b}{1+a}$ alors $a(1+a)=b(1+b)$donc $a+a^2=b+b^2$ d'où $a^2-b^2=b-a$. Cela conduit à $(a-b)(a+b)=-(a-b)$Comme $a\neq b$alors $a-b\neq 0$et donc en divisant par a−b on obtient :

a+ b =−1. La somme des deux nombres positifs a et b ne peut être négative. Nous obtenons une contradiction. Conclusion : si $\frac{a}{1+b}=\frac{b}{1+a}$ alors a = b.

Exemple2 : Soit f la fonction numérique définit sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x^2+2x$

Montrer qu'il n'existe pas de nombre positif M tel que : $\forall x\in\mathbb{R}$ on a : $f(x)\leq M$

Solution : Nous raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe un nombre positif M tel que : $\forall x\in\mathbb{R}$ on a : $f(x)\leq M$

$$f(x)\leq M \Rightarrow x^2+2x\leq M \Rightarrow x^2+2x+1\leq M+1$$

$$\Rightarrow (x+1)^2\leq M+1 \Rightarrow \sqrt{(x+1)^2}\leq\sqrt{M+1} \Rightarrow |x+1|\leq\sqrt{M+1}$$

$$\Rightarrow -\sqrt{M+1}\leq x+1\leq\sqrt{M+1} \Rightarrow -\sqrt{M+1}-1\leq x\leq\sqrt{M+1}-1 \quad \forall x\in\mathbb{R}$$

Nous obtenons une contradiction car il suffit de prendre : $x=\sqrt{M+1}$

Donc notre supposition est fausse donc : il n'existe pas de nombre positif M tel que : $\forall x\in\mathbb{R}$ on a : $f(x)\leq M$

Exemple3 : Montrer que : $\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$

Solution : Nous raisonnons par l'absurde en supposant que $\sqrt{2}\in\mathbb{Q}$

Donc il existe $a\in\mathbb{N}$ et $b\in\mathbb{N}^*$; tel que $\sqrt{2}=\frac{a}{b}$ avec $a\wedge b=1$

$$\sqrt{2}=\frac{a}{b}\Rightarrow a=b\sqrt{2}\Rightarrow a^2=\left(b\sqrt{2}\right)^2$$

$\Rightarrow a^2=2b^2\Rightarrow a^2$ est pair $\Rightarrow a$ est pair

Et on a : $\sqrt{2}=\frac{a}{b}\Rightarrow a^2=2b^2\Rightarrow 4k^2=2b^2\Rightarrow 2k^2=b^2$

$\Rightarrow b^2$ est pair $\Rightarrow b$ est pair

Donc on a : $\sqrt{2}=\frac{a}{b}$ avec a est pair et b est pair

Cad : $a\wedge b\neq 1$ Nous obtenons une contradiction

Donc notre supposition est fausse donc $\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$

Exemple4 (Contraposée ou absurde)

Soient $a;b\in\mathbb{Q}$

1)Montrer que : $a+b\sqrt{2}=0\Rightarrow a=b=0$

2)en déduire que : $a+b\sqrt{2}=a'+b'\sqrt{2}\Rightarrow a=a'$ et $b=b'$

Solution :1) Nous raisonnons par l'absurde en supposant que $b\neq 0$

$$a+b\sqrt{2}=0\Rightarrow b\sqrt{2}=-a\Rightarrow -\frac{a}{b}=\sqrt{2}$$

Or $a;b\in\mathbb{Q}$ donc $-\frac{a}{b}\in\mathbb{Q}$ mais on sait que $\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$ Nous obtenons donc une contradiction

Donc $b=0$ et puisque : $a+b\sqrt{2}=0$ alors $a=0$

2) supposons que : $a+b\sqrt{2}=a'+b'\sqrt{2}$ donc $a-a'+b\sqrt{2}-b'\sqrt{2}=0$

donc $a-a'+\sqrt{2}(b-b')=0$ et d'après **1) on aura :** $a-a'=0$ et $b-b'=0$

donc $a=a'$ et $b=b'$

Exemple5 (absurde)

On considère l'ensemble : $A=\{1;2;3;4;...;n\}$ avec n un nombre entier impair

Et soient x_1 ; x_2 ; x_3 ; x_4 ;… ; x_n des éléments de l'ensemble A distincts deux a deux

Montrer que : $\exists i \in A/\ \ x_i - i$ est pair

Solution : Nous raisonnons par l'absurde en supposant que :
$\forall i \in A/\ \ x_i - i$ est impair

On a donc : $S=(x_1-1)+(x_2-2)+(x_3-3)+...+(x_n-n)$ un nombre entier impair
Car c'est la somme d'un nombre impair de nombres impairs
Or : $S=(x_1+x_2+x_3+...+x_n)-(1+2+3+...+n)=0$ est 0 est pair
Nous obtenons donc une contradiction donc :
$\exists i \in A/\ \ x_i - i$ est pair

4.5. <u>Raisonnement par Contre-exemple :</u>

Si l'on veut montrer qu'une proposition du type $\forall x \in E : P(x)$est vraie alors pour chaque x de E il faut montrer que P(x) est vraie. Par contre pour montrer que cette proposition est fausse alors il suffit de trouver $x \in E$ tel que P(x) soit fausse. Trouver un tel x c'est trouver un contre-exemple à La proposition $\forall x \in E : P(x)$

Exemple1 : Montrer que La proposition $P:(\forall x \in [0;1]) : x^2 \geq x$ est fausse :

Solution : sa négation est : $\overline{P}:(\ni x \in [0;1]) : x^2 \prec x$

On posant : $x=\frac{1}{2}$ on aura : $\left(\frac{1}{2}\right)^2 \prec \frac{1}{2}$ donc La proposition $\overline{P}$ est vraie donc P est fausse

Exemple2 : Montrer que La proposition $P:(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}) : x^2+y^2 \geq x+y$ est fausse :

Solution : sa négation est : $\overline{P}:(\exists x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}) : x^2+y^2 \prec x+y$

On posant : $x=1$ et $y=\frac{1}{2}$ on aura : $1^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2 \prec 1+\frac{1}{2}$ c a d $\frac{5}{4} \prec \frac{6}{4}$ donc La proposition $\overline{P}$ est vraie donc P est fausse

Exemple3 : Montrer que La proposition $P:(\forall (a;b) \in \mathbb{R}^2) : \sqrt{a^2+b^2}=a+b$ est fausse :

Solution : sa négation est : $\overline{P}:(\exists (a;b) \in \mathbb{R}^2) : \sqrt{a^2+b^2} \neq a+b$

On posant : $a=4$ et $b=3$ on aura : $\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5$ et $a+b=4+3=7$donc La proposition $\overline{P}$ est vraie donc P est fausse

Exemple4 : Montrer que La proposition suivante est fausse :
« Tout entier positif est somme de trois carrés »
(Les carrés sont les 0^2, 1^2, 2^2, 3^2,... Par exemple $6=1^2+1^2+2^2$.)
Démonstration. Un contre exemples : les carrés inférieurs à7 sont 0,1,4 mais avec trois de ces nombres on ne peut faire 7.

Exemple5 : Montrer que La proposition $P:(\forall x \in \mathbb{R}^*) : x+\frac{1}{x} \geq 2$ est fausse :

Solution : sa négation est : $\overline{P}:(\exists x \in \mathbb{R}^*) : x+\frac{1}{x} \prec 2$

On posant : $x=-1$ on aura : $-1+\frac{1}{-1}=-2 \prec 2$ donc La proposition $\overline{P}$ est vraie donc P est fausse

Exemple6 : on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x)=2x^2-x+3$ Montrer que : f n'est ni pair ni impair

Solution : f est n'est pas pair ssi $(\exists x\in\mathbb{R}): f(-x)\neq f(x)$

f est n'est pas impair ssi $(\exists x\in\mathbb{R}): f(-x)\neq -f(x)$

On a en effet : $f(1)=4$ et $f(-1)=6$ donc

$f(-1)\neq -f(1)$ et $f(-1)\neq f(1)$

Donc f n'est ni pair ni impair

Exempl7 : Montrer que La proposition $P:\forall(a;b;c;d)\in\mathbb{R}^4;\begin{cases}a\neq b\\ c\neq d\end{cases}\Rightarrow a+c\neq b+d$ est fausse :

Solution : sa négation est : $\overline{P}:\exists(a;b;c;d)\in\mathbb{R}^4;\begin{cases}a\neq b\\ c\neq d\end{cases}$ et $a+c=b+d$

On a : $2\neq 3$ et $1\neq 0$ et $2+1=3+0$

donc La proposition $\overline{P}$ est vraie donc P est fausse

Exemple8 : Montrer que La proposition $P:(\forall x\in\mathbb{R})(\exists y\in\mathbb{R}): x^2-xy+y^2=0$ est fausse

Solution : sa négation est : $\overline{P}:(\exists x\in\mathbb{R})(\forall y\in\mathbb{R}): x^2-xy+y^2\neq 0$

On posant : $x=1$ on aura : $1-y+y^2$ c a d y^2-y+1

$\Delta=(-1)^2-4=-3\prec 0$ donc : $y^2-y+1\succ 0$ donc : $y^2-y+1\neq 0$

donc La proposition $\overline{P}$ est vraie donc P est fausse

4.6. <u>Raisonnement par équivalence :</u>

Le raisonnement par équivalence repose sur le principe suivant : pour montrer que P est vraie on montre que « P $\Leftrightarrow$ Q » est vraie et Q est vraie donc on déduit que P est vraie.

Exemple1 : $\forall x>0\quad x+\frac{1}{x}\geq 2$

Solution : $x+\frac{1}{x}\geq 2\Leftrightarrow\frac{x^2+1}{x}\geq 2\Leftrightarrow\frac{x^2+1}{x}\geq 2$

$\Leftrightarrow\frac{x^2+1}{x}-2\geq 0\Leftrightarrow\frac{x^2+1-2x}{x}\geq 0$

$\Leftrightarrow\frac{x^2+1-2x}{x}\geq 0\Leftrightarrow\frac{(x-1)^2}{x}\geq 0$

et puisque on a : $\frac{(x-1)^2}{x}\geq 0$ donc $\forall x>0\quad x+\frac{1}{x}\geq 2$

Exemple2 : soit $x\in\mathbb{R}$ Montrer que : $|x-1|\leq\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{2}{5}\leq\frac{1}{x+1}\leq\frac{2}{3}$

Solution : $|x-1|\leq\frac{1}{2}\Leftrightarrow-\frac{1}{2}\leq x-1\leq\frac{1}{2}\Leftrightarrow-\frac{1}{2}+2\leq x-1+2\leq\frac{1}{2}+2$

$\Leftrightarrow\frac{3}{2}\leq x+1\leq\frac{5}{2}\Leftrightarrow\frac{2}{5}\leq\frac{1}{x+1}\leq\frac{2}{3}$

Exemple3 : résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E): $\sqrt{x^2+1}=2x$

soit S l'ensemble des solution de l'équation (E)

Solution :

Methode1 : $x\in S\Rightarrow\sqrt{x^2+1}=2x\Rightarrow\sqrt{x^2+1}^2=(2x)^2$

$\Rightarrow x^2+1=4x^2\Rightarrow 3x^2=1\Rightarrow x^2=\frac{1}{3}\Rightarrow x=\frac{\sqrt{3}}{3}\,ou\,x=-\frac{\sqrt{3}}{3}$

Remarque : on ne peut pas affirmer que :

$x=\frac{\sqrt{3}}{3}$ et $x=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ sont les solutions de l'équation

Et inversement on a : $\sqrt{\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2+1}=\sqrt{\frac{1}{3}+1}=\frac{2\sqrt{3}}{3}\neq-\frac{2\sqrt{3}}{3}$

Donc : $-\frac{\sqrt{3}}{3}\notin S$ et on a : $\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2+1}=\sqrt{\frac{1}{3}+1}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

Methode2 : $x\in S\Leftrightarrow\sqrt{x^2+1}=2x$ et $x\geq 0\Leftrightarrow\sqrt{x^2+1}^2=(2x)^2$

$\Leftrightarrow x^2+1=4x^2$ et $x\geq 0\Leftrightarrow x^2=\frac{1}{3}$ et $x\geq 0$

$\Leftrightarrow$ ($x=\frac{\sqrt{3}}{3}$ ou $x=-\frac{\sqrt{3}}{3}$) et $x\geq 0$

Donc : $S=\left\{\frac{\sqrt{3}}{3}\right\}$

Exemple4 : $x\in\mathbb{R}$ et $y\in\mathbb{R}$

Montrer que : $|x-y|\leq 2\sqrt{x^2+y^2+xy}$

Solution : $x\in\mathbb{R}$ et $y\in\mathbb{R}$

$|x-y|\leq 2\sqrt{x^2+y^2+xy}\Leftrightarrow|x-y|^2\leq\left(2\sqrt{x^2+y^2+xy}\right)^2$

$\Leftrightarrow x^2-2xy+y^2\leq 4x^2+4y^2+4xy\Leftrightarrow 3x^2+3y^2+6xy\geq 0$

$\Leftrightarrow 3\left(x^2+2xy+y^2\right)\geq 0\Leftrightarrow x^2+2xy+y^2\geq 0\Leftrightarrow(x+y)^2\geq 0$

On sait que $(x+y)^2\geq 0$ (vraie)

Donc : $\forall x\in\mathbb{R}$ et $\forall y\in\mathbb{R}$: $|x-y|\leq 2\sqrt{x^2+y^2+xy}$

Exemple5 : 1) Montrer que : $\left(\forall(a;b)\in\left(\mathbb{R}^+\right)^2\right):a+b=0\Leftrightarrow a=0$ et $b=0$

2) $x\in\mathbb{R}$ et $y\in\mathbb{R}$ Montrer que: $\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}=2\Leftrightarrow x=y=0$

Démonstration : 1)a) $\Rightarrow$: $\left(\forall(a;b)\in\left(\mathbb{R}^+\right)^2\right):a+b=0\Rightarrow a=0$ et $b=0$

Supposons que ; $a+b=0$ et ($a\neq 0$ ou $b\neq 0$) et $(a;b)\in\left(\mathbb{R}^+\right)^2$

Donc $a+b\succ 0$ contradiction par suite $a=0$ et $b=0$

b) $\Leftarrow$ inversement si $a=0$ et $b=0$ alors on aura $a+b=0$

donc : $\left(\forall(a;b)\in\left(\mathbb{R}^+\right)^2\right):a+b=0\Leftrightarrow a=0$ et $b=0$

2) $x\in\mathbb{R}$ et $y\in\mathbb{R}$

$\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}=2\Leftrightarrow\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}-2=0$

$\Leftrightarrow\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)+\left(\sqrt{y^2+1}-1\right)=0$ or $\sqrt{x^2+1}-1\geq 0$ et $\sqrt{y^2+1}-1\geq 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+1}-1=0$ et $\sqrt{y^2+1}-1=0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1}=1$ et $\sqrt{y^2+1}=1$

$\Leftrightarrow x^2+1=1$ et $y^2+1=1 \Leftrightarrow x^2=0$ et $y^2=0 \Leftrightarrow x=0$ et $y=0$

Donc : $\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}=2 \Leftrightarrow x=y=0$

4.7. <u>Raisonnement par récurrence :</u>

Le principe de récurrence permet de montrer qu'une proposition P(n), dépendant de n, est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. La démonstration par récurrence se déroule en trois étapes :

1étapes : l'initialisation on prouve P (0) est vraie

2étapes : d'hérédité : on suppose n > 0 donné avec P(n) vraie

3étapes : on démontre alors que La proposition P(n+1) au rang suivant est vraie

Enfin dans la conclusion : P(n) est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Pour expliquer ce principe assez intuitivement, prenons l'exemple suivant :
La file de dominos : Si l'on pousse le premier domino de la file (Initialisation).
Et si les dominos sont posés l'un après l'autre d'une manière `a ce que la chute d'un domino entraine la chute De son suivant (hérédité).
Alors : Tous les dominos de la file tombent. (La conclusion)

Exemple 1: Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}; 3^n \geq 1+2n$.

Solution : notons P(n) La proposition suivante : $\forall n \in \mathbb{N}; 3^n \geq 1+2n$. Nous allons démontrer par récurrence que P(n) est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1étapes : l'initialisation :Pour n=0 nous avons $3^0 \geq 1+2\times 0$ donc $1 \geq 1$.

Donc P (0) est vraie.

2étapes : d'hérédité ou Hypothèse de récurrence : Supposons que P(n) soit vraie c'est-à-dire : $3^n \geq 1+2n$

3étapes : Nous allons montrer que P(n+1) est vraie.

Montrons alors que : $3^{n+1} \geq 1+2(n+1)$?? c'est-à-dire Montrons que $3^{n+1} \geq 2n+3$??

On a : $3^n \geq 1+2n$ d'après l'hypothèse de récurrence donc $3^n \times 3 \geq 3\times(1+2n)$

donc : $3^{n+1} \geq 6n+3$

Or on remarque que : $6n+3 \geq 2n+3$(on pourra faire la différence$(6n+3)-(2n+3)=4n \geq 0$)

donc : on a $6n+3 \geq 2n+3$ et $3^{n+1} \geq 6n+3$ donc $3^{n+1} \geq 2n+3$

Donc P(n+1) est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence P(n) est vraie pour tout n > 0, c'est-à-dire $\forall n \in \mathbb{N}; 3^n \geq 1+2n$.

Exemple 2: (Récurrence) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1+2+3+...+n = \frac{n\times(n+1)}{2}$.

Solution : notons P(n) La proposition

Nous allons démontrer par récurrence que P(n) est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1étapes : l'initialisation :Pour n=1 nous avons $1=\frac{1\times(1+1)}{2}=\frac{2}{2}=1$ donc $1=1$.

Donc P(0) est vraie.

2étapes : d'hérédité : Supposons que P(n) soit vraie c'est-à-dire : $1+2+3+...+n=\frac{n\times(n+1)}{2}$

3étapes : Nous allons montrer que P(n+1) est vraie.

Montrons alors que : $1+2+3+...+n+(n+1)=\frac{(n+1)\times(n+2)}{2}$??

On a : $1+2+3+...+n+(n+1)=(1+2+3+...+n)+(n+1)$

et on a d'après l'hypothèse de récurrence: $1+2+3+...+n+(n+1)=\frac{(n+1)\times(n+2)}{2}$

donc $1+2+3+...+n+(n+1)=\frac{n\times(n+1)}{2}+(n+1)=(n+1)\left(\frac{n}{2}+1\right)=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$

Donc P(n+1) est vraie.

Conclusion: Par le principe de récurrence on a : $\forall n\in\mathbb{N}^*;1+2+3+...+n=\frac{n\times(n+1)}{2}$

Exemple 3: Montrer par récurrence que :pour tout entier $n\geq 5$: $2^n\geq 6n$

Solution : notons P(n) La proposition : « $2^n\geq 6n$ »

1étapes : Initialisation : Pour $n=5:2^5=32$ et $6\times 5=30$ donc $2^5\geq 6\times 5$
Donc P(5) est vraie.

2étapes : d'hérédité : Supposons que P(n) soit vraie c'est-à-dire : $2^n\geq 6n$
3étapes : Nous allons montrer que P(n+1) est vraie.

Montrons alors que : $2^{n+1}\geq 6(n+1)$??

Or, puisque $2^n\geq 6n$ (d'après l'hypothèse de récurrence)
Donc : $2^n\times 2\geq 6n\times 2$ donc $2^{n+1}\geq 12n$ **(1)**
Or on remarque que : $12n\geq 6(n+1)$ **(2)**

En effet : $12n-6(n+1)=6n-6\geq 0$

Car : $n\geq 5$ donc $6n\geq 30$ donc $6n-6\geq 24\geq 0$

On conclut par récurrence que : Pour tout $n\geq 5$: $2^n\geq 6n$

Exemple 4: Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N};n^3+2n$ est divisible par 3

Solution :montrons $\exists k\in\mathbb{N}/n^3+2n=3k$

1étapes : l'initialisation :Pour n=0 nous avons $0^3+2\times 0=0$ est un multiple de3
Donc P (0) est vraie.
2étapes : d'hérédité : Supposons que P(n) soit vraie
c'est-à-dire : $\exists k\in\mathbb{N}/n^3+2n=3k$
3étapes : Nous allons montrer que P(n+1) est vraie.

Montrons alors que : $\exists k'\in\mathbb{N}/(n+1)^3+2(n+1)=3k'$??

$(n+1)^3+2(n+1)=n^3+3n^2+3n+1+2n+2=$

$=(n^3+2n)+3n^2+3n+3=3k+3(n^2+n+1)=3(k+n^2+n+1)$

$=3(k+n^2+n+1)=3k'$ avec $k'=k+n^2+n+1$

Donc P(n+1) est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence on a : $\forall n\in\mathbb{N};n^3+2n$ est divisible par 3

Exemple 5: (Récurrence) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^{n}k^2=1^2+2^2+3^2+...+n^2=\frac{n\times(n+1)\times(2n+1)}{6}.$$

Solution : notons P(n) La proposition
Nous allons démontrer par récurrence que P(n) est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

1étapes : l'initialisation :Pour n=1 nous avons $1^2=\frac{1\times(1+1)\times(2+1)}{6}=\frac{1\times 2\times 3}{6}=1$

donc $1=1$. Donc P(0) est vraie.

2étapes : d'hérédité : Supposons que P(n) soit vraie c'est-à-dire : $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n\times(n+1)\times(2n+1)}{6}$

3étapes : Nous allons montrer que P(n+1) est vraie.

Montrons alors que : $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2+(n+1)^2 = \frac{(n+1)\times(n+2)\times(2n+3)}{6}$??

On a : $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2+(n+1)^2 = (1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2)+(n+1)^2$

et on a : $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2 = \frac{n\times(n+1)\times(2n+1)}{6}$ d'après l'hypothèse de récurrence donc

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2+(n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2$$

$$=(n+1)\left(\frac{n(2n+1)}{6}+(n+1)\right)=(n+1)\left(\frac{n(2n+1)+6(n+1)}{6}\right)$$

$$=(n+1)\left(\frac{2n^2+7n+6}{6}\right)$$

Et on remarque que : $2n^2+7n+6=(n+2)(2n+3)$

Donc : $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2+(n+1)^2 = \frac{(n+1)\times(n+2)\times(2n+3)}{6}$

Donc P(n+1) est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence on a : $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2 = \frac{n\times(n+1)\times(2n+1)}{6}$

Exemple 6: (Récurrence) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3 = \frac{n^2\times(n+1)^2}{4}.$$

Solution : notons P(n) La proposition

Nous allons démontrer par récurrence que P(n) est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1étapes : l'initialisation :Pour n=1 nous avons $1^3 = \frac{1^2\times(1+1)^2}{4} = 1$

donc $1=1$. Donc P(0) est vraie.

2étapes : d'hérédité : Supposons que P(n) soit vraie c'est-à-dire : $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2\times(n+1)^2}{4}$

3étapes : Nous allons montrer que P(n+1) est vraie.

Montrons alors que : $\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \frac{(n+1)^2\times(n+2)^2}{4} = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$??

On a : $\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3$

et on a : $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2\times(n+1)^2}{4}$ d'après l'hypothèse de récurrence donc

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \frac{n^2\times(n+1)^2}{4}+(n+1)^3 = (n+1)^2\left(\frac{n^2}{4}+n+1\right) = (n+1)^2\left(\frac{n^2+4n+4}{4}\right)$$

$$=\left(n+1\right)^2\frac{\left(n+2\right)^2}{4}=\left(n+1\right)^2\frac{\left(n+2\right)^2}{2^2}=\left(\frac{\left(n+1\right)\left(n+2\right)}{2}\right)^2$$

Donc P(n+1) est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence on a : $n\in\mathbb{N}^*$: $\sum_{k=1}^{n}k^3=\frac{n^2\times\left(n+1\right)^2}{4}$.

Exemple 7: (Récurrence) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$\sum_{k=1}^{k=n}\left(2k+1\right)=1+3+5+...+\left(2n+1\right)=\left(n+1\right)^2$.

Solution : notons P(n) La proposition

Nous allons démontrer par récurrence que P(n) est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

1étapes : l'initialisation :Pour n=1 nous avons $1+3=4$ et $\left(1+1\right)^2=4$ donc $4=4$.

Donc P(0) est vraie.

2étapes : d'hérédité : Supposons que P(n) soit vraie c'est-à-dire : $\sum_{k=1}^{k=n}\left(2k+1\right)=\left(n+1\right)^2$

3étapes : Nous allons montrer que P(n+1) est vraie.

Montrons alors que : $\sum_{k=1}^{k=n+1}\left(2k+1\right)=1+3+5+...+\left(2n+1\right)+\left(2n+3\right)=\left(n+2\right)^2$??

On a : $\sum_{k=1}^{k=n+1}\left(2k+1\right)=\sum_{k=1}^{k=n}\left(2k+1\right)+\left(2n+3\right)$

et on a d'après l'hypothèse de récurrence: $\sum_{k=1}^{k=n}\left(2k+1\right)=\left(n+1\right)^2$

donc $\sum_{k=1}^{k=n+1}\left(2k+1\right)=\left(n+1\right)^2+\left(2n+3\right)=n^2+2n+1+2n+3=n^2+4n+4$

donc $\sum_{k=1}^{k=n+1}\left(2k+1\right)=\left(n+2\right)^2$ donc P(n+1) est vraie.

Conclusion: Par le principe de récurrence on a : $\sum_{k=1}^{k=n}\left(2k+1\right)=\left(n+1\right)^2\quad\forall n\in\mathbb{N}^*$

Exemple 8: Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N};4^n+6n-1$ est divisible par 9

Solution :montrons que : $\exists k\in\mathbb{N}\ /\ 4^n+6n-1=9k$

1étapes : l'initialisation :Pour n=0 nous avons $4^0+6\times0-1=0$ est un multiple de 9

Donc P (0) est vraie.

2étapes : d'hérédité : Supposons que P(n) soit vraie

c'est-à-dire : $\exists k\in\mathbb{N}\ /\ 4^n+6n-1=9k$ donc $4^n=9k-6n+1$

3étapes : Nous allons montrer que P(n+1) est vraie.

Montrons alors que : $\exists k'\in\mathbb{N}\ /\ 4^{n+1}+6\left(n+1\right)-1=9k'$??

$4^{n+1}+6\left(n+1\right)-1=4\times4^n+6n+6-1$

$=4\times\left(9k-6n+1\right)+6n+6-1=36k+4-24n+6n+6-1$

$=36k+9-18n=9\left(4k+1-2n\right)=9k'$ avec $k'=4k+1-2n$

Donc P(n+1) est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence on a : $\forall n\in\mathbb{N};4^n+6n-1$ est divisible par 9

Exemple 9: Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N};7^n-1$ est divisible par 6

Solution : 1étapes : l'initialisation :Pour n=0 nous avons $7^0-1=0$ est un multiple de 6
Donc P (0) est vraie.
2étapes : d'hérédité : Supposons que P(n) soit vraie
c'est-à-dire : $\exists k\in\mathbb{N} / 7^n-1=6k$
3étapes : Nous allons montrer que P(n+1) est vraie.
Montrons alors que : $\exists k'\in\mathbb{N} / 7^{n+1}-1=6k'$??

$$7^{n+1}-1=7\times 7^n-1=7^n\times(6+1)-1=6\times 7^n+7^n-1=6\times 7^n+6k$$
$$7^{n+1}-1=6\left(7^n+k\right)=6k' \quad \text{avec } k'=7^n+k$$

Donc P(n+1) est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence on a : $\forall n\in\mathbb{N}; 7^n-1$ est divisible par 6

Erreur classique dans les récurrences

Exemple 10 : Pour tout entier naturel n, on considère les deux propriétés suivantes :
P (n) : 10^n-1est divisible par 9
Q (n) : 10n + 1 est divisible par 9
1) Démontrer que si P (n) est vraie alors P (n + 1) est vraie.
2) Démontrer que si Q (n) est vraie alors Q (n + 1) est vraie.
3) Un élève affirme : " Donc P (n) et Q (n) sont vraies pour tout entier naturel n.
Expliquer pourquoi il commet une erreur grave.
4) Démontrer que P (n) est vraie pour tout entier naturel n.
5) Démontrer que Q (n) est fausse pour tout entier naturel n.
On pourra utiliser un raisonnement par l'absurde.

Exemple 11 : Soit P(n) la propriété dénie sur $\mathbb{N}$ par :
7^n-1Est divisible par 3
1) Démontrer que si P(n) est vraie alors P (n + 1) est vraie.
2) Que peut-on conclure

Remarques : La rédaction d'une récurrence est assez rigide.
Respectez scrupuleusement la rédaction proposée : donnez un nom à La proposition que vous souhaitez montrer (ici P(n)), respectez les trois étapes (même si souvent l'étape d'initialisation est très facile

Exercice : $a\in\mathbb{R}$ et$b\in\mathbb{R}$ tel que : $a\in\left]-1;1\right[$ et $b\in\left]-1;1\right[$

Montrer que : $-1\prec\dfrac{a+b}{1+ab}\prec 1$

Solution : $-1\prec\dfrac{a+b}{1+ab}\prec 1\Leftrightarrow\left|\dfrac{a+b}{1+ab}\right|\prec 1\Leftrightarrow|a+b|\prec|1+ab|$

$\Leftrightarrow|a+b|^2\prec|1+ab|^2\Leftrightarrow a^2+b^2+2ab\prec 1+a^2b^2+2ab$

Donc : $-1\prec\dfrac{a+b}{1+ab}\prec 1\Leftrightarrow\left(a^2-1\right)\left(1-b^2\right)\prec 0$

Donc : $a\in\left]-1;1\right[$ et $b\in\left]-1;1\right[\Rightarrow -1\prec a\prec 1$ et $-1\prec b\prec 1$

$\Rightarrow|a|\prec 1$ et $|b|\prec 1\Rightarrow a^2\prec 1$ et $b^2\prec 1\Rightarrow a^2-1\prec 0$ et $1-b^2\succ 0$

$\Rightarrow\left(a^2-1\right)\left(1-b^2\right)\prec 0$

Donc : $a\in\left]-1;1\right[$ et $b\in\left]-1;1\right[\Rightarrow -1\prec\dfrac{a+b}{1+ab}\prec 1$

Exercice 4 Traduisez les propositions suivantes en langage courant puis déterminer sa négation et la valeur de vérité :

1) $P:(\forall x\in\mathbb{R});(\exists y\in\mathbb{R}):x>y$

2) $P:(\exists x\in\mathbb{R});(\forall y\in\mathbb{R}):x>y$

3) $P:(\forall x\in\mathbb{R});x^2\geq 4\Rightarrow x\geq 2$

4) $P:(\exists x\in\mathbb{R});x^2=4$

5) $P:(\forall\varepsilon\succ 0);\left(\exists x\in\left\{1+\frac{1}{n};n\in\mathbb{N}^*\right\}\right)/\,x\prec\varepsilon+10$

Solution :

1)Pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$ il existe au moins un y appartenant à $\mathbb{R}$ tel que x est supérieur strictement a y et $\overline{P}:(\exists x\in\mathbb{R});(\forall y\in\mathbb{R}):x\leq y$

$P:(\forall x\in\mathbb{R});(\exists y\in\mathbb{R}):x>y$ Est une proposition vraie car l'lorsque je prends x je peux trouver y il suffit de prendre : $y=x-1$

2) il existe au moins un y appartenant à $\mathbb{R}$ tel que Pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$ on a x est supérieur strictement a y et $\overline{P}:(\forall x\in\mathbb{R});(\exists y\in\mathbb{R}):x\leq y$

P est une proposition fausse car l'lorsque je prends x je peux toujours donner à y la valeur: $y=x+1$

3) $P:(\forall x\in\mathbb{R});x^2\geq 4\Rightarrow x\geq 2$

Pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$ si x^2 est supérieur ou égal à 4 alors x est supérieur ou égal à 2

$\overline{P}:(\exists x\in\mathbb{R});x^2\geq 4$ et $x\prec 2$

P est une proposition fausse car l'lorsque je prends $x=-2$ on a $(-2)^2\geq 4$ et $-2\prec 2$

4) $P:(\exists x\in\mathbb{R});x^2=4$

il existe au moins un y appartenant à $\mathbb{R}$ tel que x^2 est égal à 4

$\overline{P}:(\forall x\in\mathbb{R});x^2\neq 4$

P une proposition vraie car il suffit de prendre : $x=2$

5) $P:(\forall\varepsilon\succ 0);\left(\exists x\in\left\{1+\frac{1}{n};n\in\mathbb{N}^*\right\}\right)/\,x\prec\varepsilon+10$

Pour tout ε supérieur strictement a 0 il existe au moins un x qui s'écrit sous la forme $1+\frac{1}{n}$ avec $n\in\mathbb{N}^*$ tel que x est inferieur strictement a $\varepsilon+10$

$\overline{P}:(\exists\varepsilon\succ 0);\left(\forall x\in\left\{1+\frac{1}{n};n\in\mathbb{N}^*\right\}\right)/\,x\geq\varepsilon+10$

Soit $\varepsilon\succ 0$ $\quad x\prec\varepsilon+10\Leftrightarrow 1+\frac{1}{n}\prec\varepsilon+10\Leftrightarrow\frac{1}{n}\prec\varepsilon+9\Leftrightarrow n\succ\frac{1}{\varepsilon+9}$

Donc pour $n=E\left(\frac{1}{\varepsilon+9}\right)+1$ on prend $x=1+\frac{1}{n}$ et on a $x\prec\varepsilon+10$

P Est donc une proposition vraie

Exercice 5 A l'aide de la méthode des tables de vérité, dites si la formules $P\,ou\,\overline{P}$ est une tautologies.

Solution :

P	$\overline{P}$	$P\,ou\,\overline{P}$
0	1	1
1	0	1

Exercices d'applications

1. (Raisonnement direct) Soient $a \in \mathbb{R}^{+} ; b \in \mathbb{R}^{+}$

Montrer que si $a \leq b$ alors $a \leq \frac{a+b}{2} \leq b$ et $0 \leq \sqrt{ab} \leq b$

2. (Cas par cas) Montrer que pour tout $\forall n \in \mathbb{N} ; n(n+1)$ est divisible par 2 (distinguer les n pairs des n impairs).

4. (Absurde) Soit $n \in \mathbb{N}^{*}$ Montrer que $\sqrt{n^{2}+1}$ n'est pas un entier.

5. (Contre-exemple) Est-ce que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $x<2 \Rightarrow x^{2}<4$?

6. (Récurrence) Fixons un réel $a \in \mathbb{R}^{+*}$

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} ;(1+a)^{n} \geq 1+n \times a$.

Exercices.

Exercice 1 : P, Q des propositions ; Ecrire la négation des propositions suivantes :
1. Toutes les voitures rapides sont rouges ;
2. Tout triangle rectangle possède un angle droit
3. Dans toutes les prisons tous les détenus détestent tous les gardiens
4. Pour tout entier x il existe un entier y tel que pour tout entier z la relation z < y implique la relation z < x + 1.
5. il existe un mouton écossais dont au moins un côté est noir
6. a) (*P et Q*) b) (*non P et non Q*) c) (*P* ⇒ *Q*)

Exercice 2 : Supposons que les chiens aboient et que la caravane passe. Traduisez les propositions suivantes
En langage propositionnel. On note *p* : les chiens aboient et *q* : la caravane passe.
a) Si la caravane passe, alors les chiens aboient.
b) Les chiens n'aboient pas.
c) La caravane ne passe pas ou les chiens aboient.
d) Les chiens n'aboient pas et la caravane ne passe pas.

Exercice 3 : Démontrer les énoncés suivants par récurrence :

1) $\forall n \in \mathbb{N}$ $n^{3}-n$ est divisible par 6

2) $\forall n \in \mathbb{N}$ $n^{5}-n$ est divisible par 30

3) $\forall n \in \mathbb{N}$ $n^{7}-n$ est divisible par 42

Exercice 4 : Déterminer les valeurs de vérité des propositions suivantes :
1. (3 est un nombre impair) ⇒ (6 est un nombre premier)
2. ($\sqrt{2}$ est un nombre irrationnelle) ⇒ [$(\forall x \in \mathbb{R})$ $(1 + 2x < x^2)$]
3. (5 est positif) ⇒ (3 divise 18)

Exercice 5 :
1)Donner une condition nécessaire et pas suffisante pour :
a) $x \in [1,2]$
b) n divise 6
2)Donner une condition suffisante et pas nécessaire pour :
a) $x \in [1,2]$
b) n divise 6.

Exercice 6 : Etudier la vérité des propositions suivantes :

1. $\forall x \in \mathbb{R}: 2x^{2}+x+3 \succ 0$

2. $\forall(a ; b) \in \mathbb{Q}^{*2}: a \sqrt{2}+b \neq 0$

3. $\forall n \in \mathbb{N}^{*}: \frac{n+1}{n} \notin \mathbb{N}$

Exercice 7 : écrire la négation des propositions suivantes

$Q ;(\exists x \in \mathbb{R}): x<2 \Rightarrow x^{2} \geq 2019$ $\quad$ $P ;(\forall x \in \mathbb{R}): x \neq 2 \Rightarrow x^{2} \neq 4$

Exercice 8 : Écrire à l'aide des Quantificateurs la phrase suivante :

1) « Pour tout nombre réel, son carré est positif ».

2) « Pour chaque réel, je peux trouver un entier relatif tel que leur produit soit strictement plus grand que 1 ».

3)« Pour tout entier n, il existe un unique réel x tel que $x \succ n$ ».

Exercice 9 : Ecrire avec des Quantificateurs les propositions suivantes puis dans chaque cas dire si la proposition est vraie ou fausse.

1)Tout entier naturel est pair ou impair.

2)Tout entier naturel est pair ou tout entier naturel est impair.

3)Il y a un entier plus grand que tous les entiers.

Exercice 10 : Ecrire avec des Quantificateurs les propositions suivantes :

1)f est constante sur $\mathbb{R}$ (où f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$).

2)f n'est pas constante sur $\mathbb{R}$

Exercice 11 : En utilisant le raisonnement par contraposé montrer que :

si $x \in]1;+\infty[$ et $y \in]1;+\infty[$

$x \neq y \Rightarrow x^2 - 3x \neq y^2 - 3y$

Exercice 12 : Etudier la vérité des propositions suivantes :

1. $\exists x \in \mathbb{R} : \left|x^2 - x\right| + 3x = 0$

2. $\exists x \succ 0 : x^2 + 3x = 0$

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices

Que l'on devient un mathématicien

Cours de 1ere S Sciences expérimentale BIOF

FONCTIONS - *Généralités*

Leçon : FONCTIONS - Généralités

Présentation globale

1) Définitions d'une fonction et Domaine de définitions

1-1) Définition :

Une ***fonction*** est un procédé qui à un nombre x appartenant à un ensemble D associe un nombre y. On note : $x \overset{f}{\longmapsto} y$

ou encore $f : x \mapsto y$

ou encore $y = f(x)$

• On dit que y est l'image de x par la fonction f

• On dit aussi que x est un antécédent de y par la fonction f

1-2) Exemples

Exemple1 :

a)Les fonctions numériques sont, le plus souvent, définies par une expression mathématique, comme par exemple :

$f(x) = x^2 + 2x - 5$ ou $g(x) = \dfrac{3x^3 + 2x^2 - 1}{5x^2 - 4}$.

Ou $h(x) = \dfrac{2x-1}{5x-4}$ ou $l(x) = \sqrt{x}$

$R(x) = \dfrac{\sin x - \cos x}{\tan x}$

f S'appelle une fonction polynôme

g S'appelle une fonction rationnelle

h S'appelle une fonction rationnelle et s'appelle aussi une fonction homographique

Une fonctions homographique s'écrit sous la forme : $h(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$

l S'appelle la fonction racine carré

R S'appelle la fonction circulaire ou fonction trigonométrique

Exemple2 :

Soit la fonction f définie par , $f(x) = 3x^2 - 1$

1)Calculer l'image de 1 et $\sqrt{2}$ et -1 par f.

2)Déterminer les antécédents éventuels de 2 par f,

Réponses : 1) $f(1) = 3\times1^2 - 1 = 3 - 1 = 2$ et

$f(\sqrt{2}) = 3\times(\sqrt{2})^2 - 1 = 6 - 1 = 4$

$f(-1) = 3\times(-1)^2 - 1 = 3 - 1 = 2$

2) $f(x)=2$ ssi $3\times x^2-1=2$

ssi $3\times x^2=2+1$ ssi $3\times x^2=3$ ssi $x^2=1$

ssi $x=-1$ ou $x=1$

donc les antécédents éventuels de 2 par f sont -1 et 1

1-3) Domaine de définitions

activités

a. On considère la fonction définie

par : $x\overset{f}{\longmapsto}\dfrac{1}{x-3}$

Parmi les valeurs suivantes, laquelle/lesquelles n'a/ont pas d'image par f ? 0 ; 2 ; -3 ; 3.

b. On considère la fonction définie

par : $x\overset{g}{\longmapsto}\sqrt{x-3}$

Parmi les valeurs suivantes, laquelle/lesquelles n'a/ont pas d'image par g ? 0 ; 2 ; -3 ; 4.

c. On considère la fonction définie

par : $x\overset{h}{\longmapsto}\dfrac{1}{\sqrt{7-x}}$

Parmi les valeurs suivantes, laquelle/lesquelles n'a/ont pas d'image par h ? 5 ; -6 ; 9 ; 7.

Définition

Pour une fonction f donnée, l'ensemble de tous les nombres réels qui ont une image calculable par cette fonction est appelé ensemble de définition de la fonction f, que l'on notera D f

Exemple 1

Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes définie par

1) $f(x)=3x^2-x+1$. 2) $f(x)=\dfrac{x^3}{2x-4}$.

3) $f(x)=\dfrac{2x^4}{x^2-4}$. 4) $f(x)=\dfrac{7x-1}{x^3-2x}$.

5) $f(x)=\sqrt{-3x+6}$. 6) $f(x)=\dfrac{x-5}{2x^2-5x-3}$.

7) $f(x)=\sqrt{x^2-3x+2}$. 8) $f(x)=\sqrt{\dfrac{-3x+9}{x+1}}$.

9) $f(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{-2x^2+x+3}}$. 10) $f(x)=\dfrac{|x-5|}{x^2+1}$.

11) $f(x)=\dfrac{\sqrt{|x|}}{x}$. 12) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+2}}{x-1}$.

13) $f(x)=3x^2-\dfrac{1}{x}+\sqrt{-x}$.

14) $f(x)=\dfrac{x}{|2x-4|-|x-1|}$. 15) $f(x)=\dfrac{2\sin x}{2\cos x-1}$.

16) $f(x)=\sqrt{\dfrac{-2x^2+2x+13}{x^2-x-6}}$.

17) $f(x)=\sqrt{x^2+\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)x-2\sqrt{6}}$

18) $f(x)=\dfrac{|x-4|-|x-1|}{x^2+2|x|-3}$

19) $f(x)=\sqrt{2x-1}+\sqrt{3-5x}$.

Solutions

1) $f(x)=3x^2-x+1$

f Est une fonction polynôme donc Un réel a toujours une image. Donc $D_f=\mathbb{R}$

2) $f(x)=\dfrac{x^3}{2x-4}$.

Pour les fonctions du type fractions rationnelles, l'ensemble de définition est l'ensemble des nombres pour lesquels le dénominateur est non nul.

$D_f=\{x\in\mathbb{R}/2x-4\neq 0\}$

$2x-4=0$ ssi $x=\dfrac{4}{2}=2$ Donc $D_f=\mathbb{R}-\{2\}$

On dira aussi que 2est une valeur interdite pour la fonction f

3) $f(x)=\dfrac{2x^4}{x^2-4}$.

$D_f=\{x\in\mathbb{R}/x^2-4\neq 0\}$

$x^2-4=0$ ssi $x^2-2^2=0$ ssi $(x-2)(x+2)=0$

ssi $x-2=0$ ou $x+2=0$ ssi $x=2$ ou $x=-2$

donc $D_f=\mathbb{R}-\{-2;2\}$

4) $f(x)=\dfrac{7x-1}{x^3-2x}$.

$D_f=\{x\in\mathbb{R}/x^3-2x\neq 0\}$

$x^3-2x=0$ ssi $x\left(x^2-2\right)=0$ ssi $x=0$ ou

$x^2-2=0$ ssi $x=0$ ou $x^2=2$

ssi $x=0$ ou $x=\sqrt{2}$ ou $x=-\sqrt{2}$

donc $D_f=\mathbb{R}-\{-\sqrt{2};0;\sqrt{2}\}$

5) $f(x)=\sqrt{-3x+6}$.

Pour les fonctions du type racine carrée, l'ensemble de définition est l'ensemble des nombres pour lesquels l'intérieur de la racine est positif

$D_f=\{x\in\mathbb{R}/-3x+6\geq 0\}$

$-3x+6\geq 0$ ssi $-3x\geq -6$ ssi $x\leq\dfrac{-6}{-3}$ ssi $x\leq 2$

Donc $D_f=]-\infty;2]$

6) $f(x)=\dfrac{x-5}{2x^2-5x-3}$.

$D_f=\{x\in\mathbb{R}/2x^2-5x-3\neq 0\}$

$2x^2-5x-3=0 \quad a=2$ et $b=-5$ et $c=-3$

$\Delta=b^2-4ac=(-5)^2-4\times2\times(-3)=25+24=49=(7)^2>0$

$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_1=\frac{-(-5)+\sqrt{49}}{2\times2}=\frac{7+5}{4}=\frac{12}{4}=3$ et

$x_2=\frac{(-5)-\sqrt{49}}{2\times2}=\frac{5-7}{4}=\frac{-2}{4}=-\frac{1}{2}$

Donc $D_f=\mathbb{R}-\left\{-\frac{1}{2};3\right\}$

7) $f(x)=\sqrt{2x^2-3x+1}$.

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,2x^2-3x+1\geq0\right\}$ soit Δ son discriminant

$a=2$

$\Delta=b^2-4ac=(-3)^2-4\times2\times1=9-8=1>0$

$x_1=\frac{-(-3)+\sqrt{1}}{2\times2}=\frac{4}{4}=1$ et $x_2=\frac{-(-3)-\sqrt{1}}{2\times2}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

x	$-\infty$		$1/2$		1		$+\infty$
$P(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc $D_f=\left]-\infty,\frac{1}{2}\right]\cup[1,+\infty[$

8) $f(x)=\sqrt{\frac{-9x+3}{x+1}}$.

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,\frac{-9x+3}{x+1}\geq0 \text{ et } x+1\neq0\right\}$

$-9x+3=0$ ssi $-9x=-3$ ssi $x=\frac{1}{3}$

$x+1=0$ ssi $x=-1$

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$-9x+3$		$+$		$+$	0	$-$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{-9x+3}{x+1}$		$-$	‖	$+$	0	$-$	

Donc $D_f=\left]-1,\frac{1}{3}\right]$

9) $f(x)=\frac{x+1}{\sqrt{-2x^2+x+3}}$.

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,-2x^2+x+3>0\right\}$

$-2x^2+x+3=0 \quad a=-2$ et $b=1$ et $c=3$

$\Delta=b^2-4ac=(1)^2-4\times(-2)\times3=1+24=25=(5)^2>0$

Donc on a deux racines

$x_1=\frac{-1+5}{2\times(-2)}=\frac{4}{-4}=-1$ et $x_2=\frac{-1-5}{2\times(-2)}=\frac{-6}{-4}=\frac{3}{2}$

x	$-\infty$		-1		$3/2$		$+\infty$
$-2x^2+x+3$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Donc $D_f=\left[-1,\frac{3}{2}\right]$

10) $f(x)=\frac{|x-5|}{x^2+1}$. $\quad D_f=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,x^2+1\neq0\right\}$

$x^2+1=0$ ssi $x^2=-1$

Cette équation n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$

Donc $D_f=\mathbb{R}$

11) $f(x)=\frac{\sqrt{|x|}}{x}$.

$f(x)\in\mathbb{R}$ ssi $\sqrt{|x|}\in\mathbb{R}$ et $x\neq0$

Or on sait que $|x|\geq0$ pour tout $x\in\mathbb{R}$

Donc $f(x)\in\mathbb{R}$ ssi $x\neq0$

Donc $D_f=\mathbb{R}-\{0\}=\mathbb{R}^*$

12) $f(x)=\frac{\sqrt{x+2}}{x-1}$. $\quad D_f=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,x+2\geq0 \text{ et } x-1\neq0\right\}$

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,x\geq-2 \text{ et } x\neq1\right\}$

$D_f=[-2,1[\cup]1,+\infty[$

13) $f(x)=3x^2-\frac{1}{x}+\sqrt{-x}$

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,-x\geq0 \text{ et } x\neq0\right\}$

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,x\leq0 \text{ et } x\neq0\right\}$

$D_f=]-\infty,0[$

14) $f(x)=\frac{x}{|2x-4|-|x-1|}$.

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,|2x-4|-|x-1|\neq0\right\}$

$|2x-4|-|x-1|=0$ ssi $|2x-4|=|x-1|$

ssi $2x-4=x-1$ ou $2x-4=-(x-1)$

ssi $2x-x=4-1$ ou $2x-4=-x+1$

ssi $x=3$ ou $2x+x=4+1$

ssi $x=3$ ou $3x=5$ ssi $x=3$ ou $x=\frac{5}{3}$

Donc : $D_f=\mathbb{R}-\left\{\frac{5}{3};3\right\}$

15) $f(x)=\dfrac{2\sin x}{2\cos x-1}$. $D_f=\{x\in\mathbb{R}/2\cos x-1\neq 0\}$

$2\cos x-1=0$ ssi $\cos x=\dfrac{1}{2}$

$\cos x=\dfrac{1}{2}$ ssi $\cos x=\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$

$x=\dfrac{\pi}{3}+2k\pi$ ou $x=-\dfrac{\pi}{3}+2k\pi$ où $k\in\mathbb{Z}$

Donc: $D_f=\mathbb{R}-\left\{-\dfrac{\pi}{3}+2k\pi;\dfrac{\pi}{3}+2k\pi/k\in\mathbb{Z}\right\}$

16) $f(x)=\sqrt{\dfrac{-2x^2+2x+13}{x^2-x-6}}$

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/\dfrac{-2x^2+2x+13}{x^2-x-6}\geq 0 et x^2-x-6\neq 0\right\}$

- On détermine les racines du trinôme $-2x^2+2x+13$:

Le discriminant est $\Delta'=2^2-4\times(-2)\times 13=108$ et ses racines sont :

$x_1=\dfrac{-2-\sqrt{108}}{2\times(-2)}=\dfrac{1+3\sqrt{3}}{2}$ et $x_2=\dfrac{-2+\sqrt{108}}{2\times(-2)}=\dfrac{1-3\sqrt{3}}{2}$

- On détermine les racines du trinôme x^2-x-6:

Le discriminant est $\Delta=(-1)^2-4\times(-6)\times 1=25$ et ses racines sont :

$x_1'=\dfrac{-(-1)-\sqrt{25}}{2\times 1}=\dfrac{1-5}{2}=-2$ et

$x_2'=\dfrac{-(-1)+\sqrt{25}}{2\times 1}=\dfrac{1+5}{2}=3$

- On obtient le tableau de signe :

x	$-\infty$		$\frac{1-3\sqrt{3}}{2}$		-2		3		$\frac{1+3\sqrt{3}}{2}$		$+\infty$
$-2x^2+2x+13$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	0	$-$	
x^2-x-6		$+$	|	$+$	0	$-$	0	$+$	|	$+$	
$\frac{-2x^2+2x+13}{x^2-x-6}$		$-$	0	$+$	||	$-$	||	$+$	0	$-$	

$D_f=\left[\dfrac{1-3\sqrt{3}}{2};-2\right[\cup\left]3;\dfrac{1+3\sqrt{3}}{2}\right]$.

17) $f(x)=\sqrt{x^2+\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)x-2\sqrt{6}}$

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/x^2+\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)x-2\sqrt{6}\geq 0\right\}$

$\Delta=b^2-4ac=\left(2\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2-4\times 1\times 2\sqrt{6}$

$\Delta=12-4\sqrt{6}+2+8\sqrt{6}=14+4\sqrt{6}$

$14+4\sqrt{6}=14+2\times 2\sqrt{3}\times\sqrt{2}=\left(2\sqrt{3}\right)^2+2\times 2\sqrt{3}\times\sqrt{2}+\left(\sqrt{2}\right)^2$

$14+4\sqrt{6}=\left(2\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2$

On a $\Delta=14+4\sqrt{6}>0$ donc

$x_1=\dfrac{-2\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{14+4\sqrt{6}}}{2\times 1}=\dfrac{-2\sqrt{3}+\sqrt{2}+\left|2\sqrt{3}+\sqrt{2}\right|}{2\times 1}$

et $x_2=\dfrac{-2\sqrt{3}+\sqrt{2}-\left|2\sqrt{3}+\sqrt{2}\right|}{2\times 1}$

$x_1=\dfrac{-2\sqrt{3}+\sqrt{2}+2\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2\times 1}=\dfrac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$ et

$x_2=\dfrac{-2\sqrt{3}+\sqrt{2}-2\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2\times 1}=\dfrac{-4\sqrt{3}}{2}=-2\sqrt{3}$

x	$-\infty$		$-2\sqrt{3}$		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$x^2+\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)x-2\sqrt{6}$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On a donc : $D_f=\left]-\infty;-2\sqrt{3}\right]\cup\left[\sqrt{2};+\infty\right[$

18) $f(x)=\dfrac{|x-4|-|x-1|}{x^2+2|x|-3}$

$D_f=\{x\in\mathbb{R}/x^2+2|x|-3\neq 0\}$

$x^2+2|x|-3=0\Leftrightarrow|x|^2+2|x|-3=0$ on pose

$|x|=X$ donc l'équation devient :

$X^2+2X-3=0$

Le discriminant est $\Delta=2^2-4\times 1\times(-3)=16$ et ses solutions sont :

$X_1=\dfrac{-2-\sqrt{16}}{2\times 1}=-3$ et $X_2=\dfrac{-2+\sqrt{16}}{2\times 1}=1$

Donc on a : $|x|=-3$ et $|x|=1$

$|x|=-3$ n'a pas de solution

$|x|=1\Leftrightarrow x=1$ ou $x=-1$ donc $D_f=\mathbb{R}-\{-1;1\}$

19) $f(x)=\sqrt{2x-1}+\sqrt{3-5x}$.

$D_f=\{x\in\mathbb{R}/2x-1\geq 0 et 3-5x\geq 0\}$

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/x\geq\dfrac{1}{2} et x\leq\dfrac{3}{5}\right\}$

Donc $D_f=\left[\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{5}\right]$

2) Fonctions paires et Fonctions impaires

2.1 Définitions

a. Ensemble de définition centré

Soit f une fonction. Soit D_f son ensemble de définition : On dit que D_f est un ensemble de définition centré si et et seulement si :

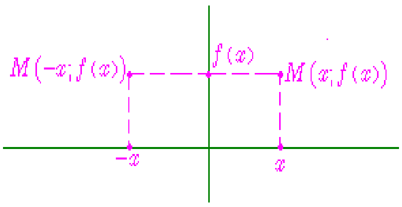
Pour tout réel x, si $x\in D_f$, alors $-x\in D_f$.

Exemples d'ensembles centrés	Exemples d'ensembles non centrés
$]-\infty,+\infty[$	$]0,+\infty[$
$\mathbb{R}^*$ (ou $\mathbb{R}$ -{0})	$\mathbb{R}$ -{1}
$\mathbb{R}$ -{-1; 1}	$\mathbb{R}$ -{-1; 2}
$[-4;\ 4]$	$[-4;\ 3]$

2.2. Fonction paire

On dit qu'une fonction *f* est paire si et seulement si :

1. Son ensemble de définition est centré
2. Pour tout réel x de D_f, on a : $f(-x) = f(x)$



Remarques :

- si n est un entier pair, positif ou négatif, la fonction définie par $f(x) = kx^n$ est paire.

(c'est d'ailleurs de cet exemple que vient la dénomination de fonction paire)

- la fonction $x \mapsto |x|$ est une fonction paire,
- la fonction $x \mapsto \cos(x)$ est une fonction paire,
- l'opposée d'une fonction paire est une fonction paire,
- l'inverse d'une fonction paire est une fonction paire,
- la somme de deux fonctions paires est une fonction paire,
- le produit de 2 fonctions paires ou de 2 fonctions impaires est une fonction paire.

2.3. Fonction impaire

On dit qu'une fonction f est impaire si et seulement si :

1. Son ensemble de définition est centré,
2. Pour tout réel x de D_f, on a : $f(-x) = -f(x)$

Remarques :

-si n est un entier impair, positif ou négatif, la fonction $x \mapsto kx^n$ est impaire,

-la fonction $x \mapsto \sin(x)$ est impaire,

-la fonction $x \to \tan x$ est impaire,

-l'opposée d'une fonction impaire est une fonction impaire,

-l'inverse d'une fonction impaire est une fonction impaire,

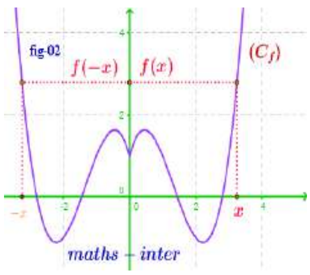
-la somme de deux fonctions impaires est une fonction impaire,

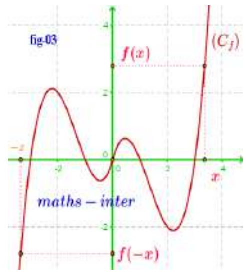
- le produit d'une fonction paire et d'une fonction impaire est une fonction impaire.
- la courbe représentative d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine.

2.4 le graphe et la parité de la fonction

- la courbe représentative d'une fonction paire est symétrique par à l'axe des ordonnées.
- la courbe représentative d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine.

Fonction paire **Fonction impaire**





Exemple 1 :

1) Soit f une fonction tq : $f(x) = 3x^2 - 5$

Donc $D_f = \mathbb{R}$ car f est une fonction polynôme

- Pour tout réel x, si $x \in \mathbb{R}$, alors $-x \in \mathbb{R}$
- $f(-x) = 3(-x)^2 - 5 = 3x^2 - 5$
  $f(-x) = f(x)$

Donc f est une fonction paire,

2) Soit g une fonction tq : $g(x) = \dfrac{3}{x}$

on a $g(x) \in \mathbb{R}$ ssi $x \neq 0$

donc $D_g = \mathbb{R}^*$

- Pour tout réel x, si $x \in \mathbb{R}^*$, alors $-x \in \mathbb{R}^*$
- $g(-x) = \dfrac{3}{-x} = -\dfrac{3}{x}$
  $g(-x) = -g(x)$

Donc g est une fonction impaire,

3) Soit h une fonction tq : $h(x) = 2x^3 + x^2$

h est une fonction polynôme donc Un réel a toujours une image. Donc $D_h = \mathbb{R}$

- Pour tout réel x, si $x \in \mathbb{R}$, alors $-x \in \mathbb{R}$
- $h(-x) = 2(-x)^3 + (-x)^2 = -2x^3 + x^2$
  $h(-x) = -(2x^3 - x^2) \neq -h(x)$

Donc h est une fonction ni paire ni impaire,

4) Soit t une fonction tq : $t(x) = \dfrac{x}{x-2}$

on a $t(x) \in \mathbb{R}$ ssi $x - 2 \neq 0$ ssi $x \neq 2$

Donc $D_t = \mathbb{R} - \{2\}$

on a $-2\in D_t$ mais $-(-2)=2\notin D_t$

Donc D_t n'est pas symétrique par rapport a O

Donc h est une fonction ni paire ni impaire,

Exemple 2 :

Etudier la parité des fonctions suivantes définie par :

1) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x}$. 2) $f(x)=x^2+\dfrac{1}{x}$.

3) $f(x)=\dfrac{|x|}{x^2-1}$. 4) $f(x)=\sqrt{1-x^2}$

5) $f(x)=\dfrac{2x^3}{x^2+5}$. 6) $f(x)=|x|-\sqrt{2x^2+4}$.

7) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{2}$.

Solutions : 1) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x}$

on a $f(x)\in\mathbb{R}$ ssi $x\neq 0$ donc $D_f=\mathbb{R}^*$

- Pour tout réel x, si $x\in\mathbb{R}^*$, alors $-x\in\mathbb{R}^*$
- $f(-x)=\dfrac{(-x)^2-1}{-x}=-\dfrac{x^2-1}{x}$

  $f(-x)=-f(x)$

Donc f est une fonction impaire,

2) $f(x)=x^2+\dfrac{1}{x}$ on a $f(x)\in\mathbb{R}$ ssi $x\neq 0$

donc $D_f=\mathbb{R}^*$

- Pour tout réel x, si $x\in\mathbb{R}^*$, alors $-x\in\mathbb{R}^*$
- $f(-x)=(-x)^2+\dfrac{1}{-x}=x^2-\dfrac{1}{x}=\left(-x^2+\dfrac{1}{x}\right)$

  $f(-x)\neq -f(x)$

Donc f est une fonction ni paire ni impaire,

3) $f(x)=\dfrac{|x|}{x^2-1}$ on a $f(x)\in\mathbb{R}$ ssi $x^2-1\neq 0$

$x^2-1=0$ ssi $x^2=1$ ssi $x=1$ ou $x=-1$

donc $D_f=\mathbb{R}-\{-1;1\}$

- Pour tout réel x, si $x\in\mathbb{R}-\{-1;1\}$, alors $-x\in\mathbb{R}-\{-1;1\}$
- $f(-x)=\dfrac{|-x|}{(-x)^2-1}=\dfrac{|x|}{x^2-1}$

  $f(-x)=f(x)$

Donc f est une fonction paire

4) $f(x)=\sqrt{1-x^2}$.

$D_f=\{x\in\mathbb{R}/1-x^2\geq 0\}$

$1-x^2=0$ ssi $x^2=1$ ssi $x=1$ ou $x=-1$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$1-x^2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Donc $D_f=[-1,1]$

- Pour tout réel x, si $x\in[-1,1]$, alors $-x\in[-1,1]$
- $f(-x)=\sqrt{1-(-x)^2}=\sqrt{1-x^2}$

  $f(-x)=f(x)$

Donc f est une fonction paire

5) $f(x)=\dfrac{2x^3}{x^2+5}$.

$D_f=\{x\in\mathbb{R}/x^2+5\neq 0\}$

$x^2+5=0$ ssi $x^2=-5$ pas de solutions

Donc $D_f=\mathbb{R}$

- Pour tout réel x, si $x\in\mathbb{R}$, alors $-x\in\mathbb{R}$
- $f(-x)=\dfrac{2(-x)^3}{(-x)^2+5}=\dfrac{-2x^3}{x^2+5}$

  $f(-x)=-f(x)$

Donc f est une fonction impaire

6) $f(x)=|x|-\sqrt{2x^2+4}$.

$D_f=\{x\in\mathbb{R}/2x^2+4\geq 0\}$

Or on sait que $2x^2\geq 0$ Pour tout réel x, donc $2x^2+4\geq 0+4$ donc $2x^2+4\geq 4\geq 0$

Donc $D_f=\mathbb{R}$

- Pour tout réel x, si $x\in\mathbb{R}$, alors $-x\in\mathbb{R}$
- $f(-x)=|-x|-\sqrt{2(-x)^2+4}=|x|-\sqrt{2x^2+4}$

  $f(-x)=f(x)$

Donc f est une fonction paire

7) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{2}$. $D_f=\{x\in\mathbb{R}/x\geq 0\}$ Donc

$D_f=\mathbb{R}^+=[0;+\infty[$

On a $2\in\mathbb{R}^+$ mais $-2\notin\mathbb{R}^+$ Donc f est une fonction ni paire ni impaire

Exemple 3 : Soit la fonction définie par :

$5f(x)+f(-x)=2x^3-3x$ Pour tout réel x

1)montrer que f est une fonction impaire

2)donner une expression de $f(x)$ Pour tout réel x

Solution : soit $x\in\mathbb{R}$

On a $5f(x)+f(-x)=2x^3-3x$ (1)

Pour tout réel x

On remplaçant x par –x on trouve :

$5f(-x)+f(x)=2(-x)^3-3(-x)$

Donc : $5f(-x)+f(x)=-2x^3+3x$ (2)

(1)+ (2) donne : $6\left(f(-x)+f(x)\right)=0$ donc :

$f(-x)+f(x)=0$

donc : $f(-x)=-f(x) \quad \forall x\in\mathbb{R}$

Donc f est une fonction impaire

2)on a : $5f(x)+f(-x)=2x^3-3x$

Et puisque f est une fonction impaire donc :

$5f(x)-f(x)=2x^3-3x$

$4f(x)=2x^3-3x \Leftrightarrow \boxed{f(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{4}}$

Exemple 4 : Soit la fonction définie par :

$f(x)=\frac{|x|+1}{2|x|-3}$ et (C_f) la courbe de f Dans le repère $\left(0;\vec{i};\vec{j}\right)$ orthonormé

Montrer que (C_f) symétrique par rapport à l'axe des ordonnée

Solution : $D_f=\{x\in\mathbb{R}/2|x|-3\neq 0\}=\left\{x\in\mathbb{R}/|x|\neq\frac{3}{2}\right\}$

Donc : $D_f=\mathbb{R}-\left\{-\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right\}$

Il suffit de montrer que f est une fonction paire

- Pour tout réel x, si $x\in\mathbb{R}-\left\{-\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right\}$ alors

$-x\in\mathbb{R}-\left\{-\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right\}$

- $f(-x)=\frac{|-x|+1}{2|-x|-3}=\frac{|x|+1}{2|x|-3}=f(x)$

Donc f est une fonction paire

Par suite la (C_f) symétrique par rapport à l'axe des ordonnée

3) Les variations d'une fonction numérique

3-1) Sens de variation d'une fonction :fonction croissante -décroissante - fonction constantes

Définition : Soit f une fonction et D_f son domaine de définition

Et soit I un intervalle inclus dans D_f

- Dire f que est strictement croissante sur I (croissante sur I) signifie que :

Si $x_1\in I$ et $x_2\in I$ tq $x_1 \prec x_2$ alors $f(x_1)\prec f(x_2) \quad \left(f(x_1)\leq f(x_2)\right)$

Rq : Une fonction croissante « conserve l'ordre ».

- Dire f que est strictement décroissante sur I (décroissante sur I) signifie que :

Si $x_1\in I$ et $x_2\in I$ tq $x_1 \prec x_2$ alors $f(x_1)\succ f(x_2) \quad \left(f(x_1)\geq f(x_2)\right)$

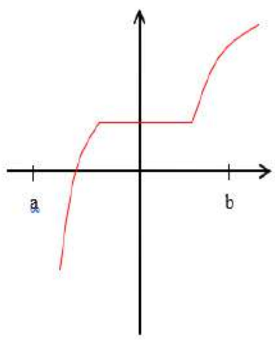
Rq : Une fonction décroissante « inverse l'ordre ».

- Dire f que est constante sur I signifie que :

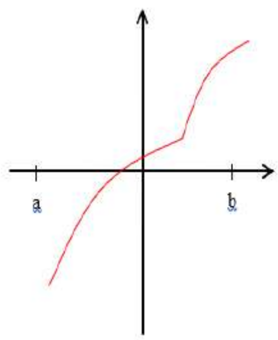
Si $x_1\in I$ et $x_2\in I$ tq $x_1 \prec x_2$ alors $f(x_1)=f(x_2)$

- Une fonction définie sur un intervalle I est monotone sur cet intervalle si elle est : soit croissante sur I soit décroissante sur I

Illustration graphique :



Fonction croissante sur [a,b], mais non strictement croissante



Fonction strictement croissante sur [a,b]

Exemples : 1) Soit f une fonction tq : $f(x)=7x-5$

f est une fonction polynôme donc $D_f=\mathbb{R}$

Soit $x_1\in\mathbb{R}$ et $x_2\in\mathbb{R}$ tq $x_1\prec x_2$

Donc $7x_1\prec 7x_2$ car $7\succ 0$

Donc $7x_1-5\prec 7x_2-5$

Alors $f(x_1)\prec f(x_2)$ d'où f que est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

2) Soit g une fonction tq : $g(x)=\frac{2}{x}$

$g(x)\in\mathbb{R}$ ssi $x\neq 0$ Donc $D_g=\mathbb{R}-\{0\}=\mathbb{R}^*$

a)Soit $x_1\in[0;+\infty[$ et $x_2\in[0;+\infty[$ tq $x_1\prec x_2$

Donc $\frac{1}{x_1}\succ\frac{1}{x_2}$ Donc $\frac{2}{x_1}\succ\frac{2}{x_2}$ car $2\succ 0$

Alors $f(x_1)\succ f(x_2)$ d'où f que est strictement décroissante sur $[0;+\infty[$

b)Soit $x_1\in]-\infty;0]$ et $x_2\in]-\infty;0]$ tq $x_1\prec x_2$

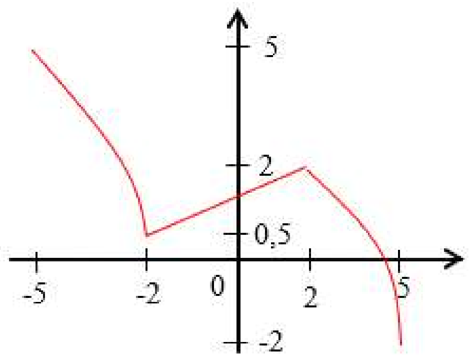
Donc $\frac{1}{x_1}\succ\frac{1}{x_2}$ Donc $\frac{2}{x_1}\succ\frac{2}{x_2}$ car $2\succ 0$

Alors $f(x_1)\succ f(x_2)$ d'où f que est strictement décroissante sur $]-\infty;0]$

b)tableau de variation :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	‖	$\searrow$

3)



x	-5		-2		2		5
$f(x)$	5	$\searrow$	0,5	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2

Propriété : Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I

On dit que f est strictement constante sur I ssi il existe un réel k tq: $f(x)=k$ pour tout $x\in I$

3-2) Le taux d'accroissement d'une fonction

a)Définition : Soit f une fonction et D_f son domaine de définition

Et soient $x_1\in D_f$ et $x_2\in D_f$ tq $x_1\neq x_2$

On appelle Le taux d'accroissement (taux de variation) de la fonction f entre x_1 et x_2

Le réel noté $T(x_1;x_2)$ est tq :

$$T(x_1;x_2)=\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$$

Exemple : Soit f une fonction tq :

$$f(x)=3x^2+2$$

f est une fonction polynôme donc $D_f=\mathbb{R}$

soient $x_1\in\mathbb{R}$ et $x_2\in\mathbb{R}$ tq $x_1\neq x_2$

$$T(x_1;x_2)=\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=\frac{(3x_1^2+2)-(3x_2^2+2)}{x_1-x_2}$$

$$T(x_1;x_2)=\frac{3x_1^2-3x_2^2+2-2}{x_1-x_2}=\frac{3(x_1^2-x_2^2)}{x_1-x_2}$$

$$T(x_1;x_2)=\frac{3(x_1-x_2)(x_1+x_2)}{x_1-x_2}=3(x_1+x_2)$$

b) Le taux d'accroissement d'une fonction et les variations :

Propriété : Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I

- On dit que f est strictement croissante(croissante) sur I ssi pour tout $x_1\in I$ et $x_é\in I$ et $x_1\neq x_2$ on a $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}\succ 0$ ($\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}\geq 0$)
- On dit que f est strictement décroissante(décroissante) sur I ssi pour tout $x_1\in I$ et $x_é\in I$ et $x_1\neq x_2$ on a $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}\prec 0$ ($\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}\leq 0$)
- On dit que f est constante sur I ssi pour tout $x_1\in I$ et $x_é\in I$ et $x_1\neq x_2$ on a $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=0$

Exemples :

1)Soit f une fonction tq : $f(x)=3x^2+2$

$D_f=\mathbb{R}$

soient $x_1\in\mathbb{R}$ et $x_2\in\mathbb{R}$ tq $x_1\neq x_2$ on a :

$T(x_1;x_2)=3(x_1+x_2)$

a)Soit $x_1\in[0;+\infty[$ et $x_2\in[0;+\infty[$

Donc $x_1 \geq 0$ et $x_2 \geq 0$ Donc $x_1 + x_2 \geq 0$

Donc $3(x_1 + x_2) \geq 0$ car $3 \succ 0$

Donc $T(x_1;x_2) = 3(x_1 + x_2) \geq 0$

d'où f que est croissante sur $[0;+\infty[$

b)Soit $x_1 \in]-\infty;0]$ et $x_2 \in]-\infty;0]$

Donc $x_1 \leq 0$ et $x_2 \leq 0$ Donc $x_1 + x_2 \leq 0$

Donc $3(x_1 + x_2) \leq 0$ car $3 \succ 0$

Donc $T(x_1;x_2) = 3(x_1 + x_2) \leq 0$

d'où f que est décroissante sur $]-\infty;0]$

b) <u>résumé</u> : **tableau de variation :**

$f(0) = 3\times 0^2 + 2 = 2$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	2	$\nearrow$

2)Soit f une fonction tq : $g(x) = \dfrac{x}{x+1}$ on

a $f(x) \in \mathbb{R}$ ssi $x+1 \neq 0$ ssi $x \neq -1$

Donc $D_g = \mathbb{R} - \{-1\}$

soient $x_1 \in D_g$ et $x_2 \in D_g$ tq $x_1 \neq x_2$ on a :

$$T(x_1;x_2) = \frac{g(x_1) - g(x_2)}{x_1 - x_2}$$

$$g(x_1) - g(x_2) = \frac{x_1}{x_1+1} - \frac{x_2}{x_2+1} = \frac{x_1(x_2+1) - x_2(x_1+1)}{(x_1+1)(x_2+1)}$$

$$T(x_1;x_2) = \frac{x_1 - x_2}{(x_1+1)(x_2+1)} \times \frac{1}{x_1 - x_2} = \frac{1}{(x_1+1)(x_2+1)}$$

a)sur $I =]-\infty;-1[$

Soit $x_1 \in]-\infty;-1[$ et $x_2 \in]-\infty;-1[$ $x_1 \neq x_2$

Donc $x_1 \prec -1$ et $x_2 \prec -1$ Donc $x_1 + 1 \prec 0$ et $x_2 + 1 \prec 0$ Donc $(x_1+1)(x_2+1) \succ 0$

Donc $T(x_1;x_2) = \dfrac{1}{(x_1+1)(x_2+1)} \succ 0$ sur $I =]-\infty;-1[$

d'où g que est strictement croissante sur $I =]-\infty;-1[$

b)sur $J =]-1;+\infty[$

Soit $x_1 \in]-1;+\infty[$ et $x_2 \in]-1;+\infty[$ $x_1 \neq x_2$

Donc $x_1 \succ -1$ et $x_2 \succ -1$ Donc $x_1 + 1 \succ 0$ et $x_2 + 1 \succ 0$ Donc $(x_1+1)(x_2+1) \succ 0$

Donc $T(x_1;x_2) = \dfrac{1}{(x_1+1)(x_2+1)} \succ 0$

sur $J =]-1;+\infty[$

d'où g que est strictement croissante sur $J =]-1;+\infty[$

c) <u>résumé</u> : **tableau de variation :**

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	$\Vert$	$\nearrow$

3-3) les variations et la parité :

Propriété : Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}^+$ et soit I' le symétrique de l'intervalle I

Si f est paire alors :

- f est croissante sur I ssi f est décroissante sur I'
- f est décroissante sur I ssi f est croissante sur I'

Si f est impaire alors :

- f est croissante sur I ssi f est croissante sur I'
- f est décroissante sur I ssi f est décroissante sur I'

Conséquences :

Si f est paire ou impaire alors il suffit d'étudier ses variations sur $D_f \cap \mathbb{R}^+$ et en déduire ses variations sur D_f

Exemple : Soit f une fonction :tq : $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$

1)Déterminer D_f et étudier la parité de f

2)Calculer Le taux d'accroissement $T(x_1;x_2)$ de f entre x_1 et x_2 deux éléments de D_f tq $x_1 \neq x_2$

3)Étudier les variations de f sur $I =]0;1]$ puis sur $J = [1;+\infty[$

4)En déduire les variations de f sur D_f

5)Dresser le tableau de variations de f sur D_f

Réponses : 1) on a $f(x) \in \mathbb{R}$ ssi $x \neq 0$ Donc $D_f = \mathbb{R} - \{0\} = \mathbb{R}^*$

- Pour tout réel x, si $x \in \mathbb{R}^*$, alors $-x \in \mathbb{R}^*$

- $f(-x) = -x + \dfrac{1}{-x} = -x - \dfrac{1}{x} = -\left(x + \dfrac{1}{x}\right)$

$f(-x) = -f(x)$

Donc f est une fonction impaire,

2) $f(x_1)-f(x_2)=\left(x_1+\frac{1}{x_1}\right)-\left(x_2+\frac{1}{x_2}\right)=x_1+\frac{1}{x_1}-x_2-\frac{1}{x_2}$

$$=\frac{x_1^2\times x_2+x_2-x_2^2\times x_1-x_1}{x_1\times x_2}=\frac{x_1\times x_2(x_1-x_2)+x_2-x_1}{x_1\times x_2}$$

$$=\frac{(x_1-x_2)(x_1\times x_2-1)}{x_1\times x_2}$$

$$T(x_1;x_2)=\frac{(x_1-x_2)(x_1\times x_2-1)}{x_1\times x_2}\times\frac{1}{x_1-x_2}=\frac{x_1\times x_2-1}{x_1\times x_2}$$

a)sur $I=]0;1]$ Soit $x_1\in]0;1]$ et $x_2\in]0;1]$

Donc $0\prec x_1\le 1$ et $0\prec x_2\le 1$ $x_2+1\prec 0$

Donc $0\prec x_1x_2\le 1$ et $x_1\ne x_2$ Donc $x_1x_2-1\prec 0$

et on a $0\prec x_1x_2$ Donc $T(x_1;x_2)=\frac{x_1\times x_2-1}{x_1\times x_2}\prec 0$

d'où f que est strictement décroissante sur $I=]0;1]$

b)sur $J=[1;+\infty[$ Soit $x_1\in[1;+\infty[$ et $x_2\in[1;+\infty[$

Donc $x_1\ge 1$ et $x_2\ge 1$ Donc $x_1x_2\ge 1$ et $x_1\ne x_2$ Donc $x_1x_2\succ 1$ Donc $x_1x_2-1\succ 0$

et on a $0\prec x_1x_2$ Donc $T(x_1;x_2)=\frac{x_1\times x_2-1}{x_1\times x_2}\succ 0$

d'où f que est strictement croissante sur $J=[1;+\infty[$

3) f est impaire et le symétrique de $I=]0;1]$ est l'intervalle $I'=[-1;0[$ et le symétrique de $J=[1;+\infty[$ est l'intervalle $J'=]-\infty;-1]$

Donc : f est strictement décroissante sur I
Donc f est strictement décroissante sur I'
f est strictement croissante sur J Donc f est strictement croissante sur J'

5) le tableau de variations de f sur D_f

$f(x)=1+\frac{1}{1}=2$

x	$-\infty$	-1		0		1	$+\infty$
Variations de $f(x)$	↗	-2	↘	‖	↘	2	↗

$f(-1)=-1-\frac{1}{1}=-2$

5) Les variations des deux fonctions : αf et f+α

Propriété : Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I et $\alpha\in\mathbb{R}^*$

- Si $\alpha\in\mathbb{R}^{*+}$ alors les fonctions f et αf ont les mêmes variations sur I
- Si $\alpha\in\mathbb{R}^{*-}$ alors les fonctions f et αf ont des variation opposées sur I
- f et α+f ont les mêmes variations sur I

Exemples :

1)soit la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par :

$g(x)=\frac{6}{x}$

On sait que la fonction $f:x\to\frac{1}{x}$ est décroissante sur $[0;+\infty[$ et puisque $6\succ 0$ donc la fonction $g=6f$ est aussi décroissante sur $[0;+\infty[$

2)Soit f et g les fonction numérique :

$f(x)=x^2$ et $g(x)=-\frac{1}{2}x^2$ $D_f=D_g=\mathbb{R}$

$h(x)=-\frac{1}{2}x^2+5$

On a $a=-\frac{1}{2}\prec 0$ Donc alors les fonctions f et g ont des variation opposées sur $\mathbb{R}$

g et h ont les mêmes variations sur $\mathbb{R}$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g(x)$		↗	0	↘	

6) comparaison deux fonctions (fonctions positives et négatives) Fonctions majorées ; minorées et bornée :

6-1) Comparaison de fonctions

Définition 1 : On dit que deux fonction f et g sont égales si et seulement

si : Elles ont même ensemble de définition :

$D_f=D_g=\mathbb{R}$

et Pour tout $x\in D_f$: f (x) = g(x) et On écrit : $f=g$

Exemple : Les fonction f et g définies respectivement par :

$f(x)=\sqrt{\dfrac{x-1}{x+3}}$ et $g(x)=\dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+3}}$

Sont-elles égales ?

Réponse :

Déterminons leur ensemble de définition :

Pour f , on doit avoir : $\dfrac{x-1}{x+3}\geq 0$ et $x-1\neq 0$ donc ce qui donne $D_f=]-\infty;-3[\cup[1;+\infty[$

Pour g, on doit avoir $x-1\geq 0$ et $x+3\succ 0$

ce qui donne $D_g=[1;+\infty[$

On a donc $D_f\neq D_g$. Les fonctions ne sont donc pas égales. On écrit : $f\neq g$

On remarquera cependant que sur $[1;+\infty[$

on a f (x) = g(x)

6-2) Définitions : Soit I un intervalle et soient f et g deux fonctions définies

Sur I. On dit que :

1)f est inférieure à g sur I lorsque : $f(x)\leq g(x)$ pour tout $x\in I$. On note : $f\leq g$ Sur I.

2)f est positive sur I lorsque : $f(x)\geq 0$ pour tout $x\in I$. On note : $f\geq 0$ sur I.

3)f est **majorée** sur I lorsqu'il existe un réel M tel que : $f(x)\leq M$ pour tout $x\in I$

4)f est **minorée** sur I lorsqu'il existe un réel m tel que : $m\leq f(x)$ pour tout $x\in I$

5)f est **bornée** sur I lorsqu'il existe des réels Met m tels que : $m\leq f(x)\leq M$ $\forall x\in I$.

(f est majorée et minorée)

Interprétation graphique :

1) $f(x)\leq g(x)$ pour tout $x\in I$ ssi La courbe (C_g) de la fonction g est au-dessus de La courbe (C_f) de f sur l'intervalle I

2) $f(x)\geq 0$ pour tout $x\in I$ ssi La courbe (C_f) de la fonction f est au-dessus de l'axe des abscisse sur l'intervalle I

6-3) Exemples :

Exemple1 : Soit f et g les fonctions numériques tel que: $f(x)=x+1$ et $g(x)=x^2+x+2$

Comparer les fonctions f et g

Solution : $D_f=D_g=\mathbb{R}$

$g(x)-f(x)=x^2+x+2-(x+1)=x^2+1\succ 0$

$\forall x\in\mathbb{R}$

Donc : $f(x)\prec g(x)$ $\forall x\in\mathbb{R}$ donc $f\prec g$

Exemple2 Soit f et g les fonctions numériques tel que: $f(x)=x$ et $g(x)=\dfrac{1}{x}$

Comparer les fonctions f et g

Exemple3 Soient les deux fonctions : $f(x)=\dfrac{3x^2+1}{\sqrt{x^2}}$ et $g(x)=\dfrac{1+3x^2}{|x|}$

- on a $f(x)\in\mathbb{R}$ ssi $\sqrt{x^2}\in\mathbb{R}$ et $x\neq 0$

or on sait que $x^2\geq 0$ donc $\sqrt{x^2}\in\mathbb{R}$ pour tout $x\in\mathbb{R}$

alors $f(x)\in\mathbb{R}$ ssi $x\neq 0$ donc $D_f=\mathbb{R}^*$

- on a $g(x)\in\mathbb{R}$ ssi $|x|\neq 0$ ssi $x\neq 0$

donc $D_g=\mathbb{R}^*$

alors $D_f=D_g=\mathbb{R}^*$

on sait que $\sqrt{x^2}=|x|$ et $3x^2+1=1+3x^2$ donc f(x)=g(x)

donc finalement on a trouvé que : $D_f=D_g=\mathbb{R}^*$ et f(x)=g(x)

Donc : f=g.

Exemple4 Soient les deux fonctions : $h(x)=\dfrac{x^2-x}{x}$ et $t(x)=x-1$

- on a $h(x)\in\mathbb{R}$ ssi $x\neq 0$ donc $D_h=\mathbb{R}^*$

- on a $t(x)$ est un polynôme donc $D_t=\mathbb{R}$

Exemple5 Soit f la fonction numérique tel que: $f(x)=\dfrac{(3x+1)(2-x)}{4x^2-1}$

Etudier le signe de le fonction f

Solution : $4x^2-1\neq 0\Leftrightarrow x\neq -\dfrac{1}{2}$ et $x\neq\dfrac{1}{2}$

Donc : $D_I=\mathbb{R}-\left\{-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right\}$

x	$-\infty$		$\frac{-1}{2}$		$\frac{-1}{3}$		$\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$3x+1$		−		−	0	+		+		+	
$2-x$		+		+		+		+	0	−	
$2x-1$		−		−		−	0	+		+	
$2x+1$		−	0	+		+		+		+	
$\frac{(3x+1)(2-x)}{4x^2-1}$		−	‖	+	0	−	‖	+	0	−	

$f(x) \geq 0$ ssi $x \in \left]-\frac{1}{2};-\frac{1}{3}\right] \cup \left]\frac{1}{2};2\right]$ donc $f \geq 0$

$\forall x \in \left]-\frac{1}{2};-\frac{1}{3}\right] \cup \left]\frac{1}{2};2\right]$

$f(x) \leq 0$ ssi $x \in \left]-\infty;-\frac{1}{2}\right[\cup \left[-\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right[\cup [2;+\infty[$

Exemple6 Soit f une fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -x^2 + x$

Démontrer que f est majorée sur $\mathbb{R}$.

Solution : On met la fonction sous la forme canonique :

$$f(x) = -x^2 + x = -(x^2 - x) = -\left(\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right) = -\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$$

On a : $-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 \leq 0$ donc $-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \leq \frac{1}{4}$

donc : $f(x) \leq \frac{1}{4} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

La fonction f est donc majorée sur $\mathbb{R}$ par $M = \frac{1}{4}$

Exemple7 Montrer que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 4\sin x - 3$ est Bornée.

Solution : On a $\forall x \in \mathbb{R}$ $-1 \leq \sin x \leq 1$ donc $-4 \leq 4\sin x \leq 4$

donc $-4-3 \leq 4\sin x - 3 \leq 4-3$

donc $-7 \leq g(x) \leq 1$ g est donc bornée sur $\mathbb{R}$.

Exemple8 Soit f une fonction numérique tq :

$$f(x) = \frac{1}{x^2+1}$$

1)Déterminer D_f

2) Démontrer que f est majorée sur $\mathbb{R}$.

3) Démontrer que f est minorée sur $\mathbb{R}$. Conclure

Solution : 1) $D_f = \{x \in \mathbb{R} / x^2 + 1 \neq 0\}$

$x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -1$ pas de solution dans $\mathbb{R}$

donc $D_f = \mathbb{R}$

2) On a $\forall x \in \mathbb{R}$ $x^2 \geq 0$ donc $x^2 + 1 \geq 0 + 1$

Donc $x^2 + 1 \geq 1$ donc $\frac{1}{x^2+1} \leq 1$

donc $f(x) \leq 1$ par suite f est donc majorée sur $\mathbb{R}$ par $M = 1$

2) On a $\forall x \in \mathbb{R}$ $x^2 \geq 0$ donc $x^2 + 1 \geq 0 + 1$

Donc $x^2 + 1 \geq 1$ donc $x^2 + 1 \succ 0$

Donc : $0 \prec f(x)$

par suite f est donc minorée sur $\mathbb{R}$ par $m = 0$

conclusion : $0 \leq f(x) \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

f est donc bornée sur $\mathbb{R}$.

Exemple9 Soit f une fonction numérique tq :

$$f(x) = \frac{2x^2 + 7x + 7}{x^2 + 3x + 3}$$

1)Déterminer D_f

2) Démontrer que f est minorée par 1.

3) Démontrer que f est majorée par $\frac{7}{3}$ .Conclure

Solution : 1) $D_f = \{x \in \mathbb{R} / x^2 + 3x + 3 \neq 0\}$

$\Delta = -3 \prec 0$ pas de solution dans $\mathbb{R}$ donc $D_f = \mathbb{R}$

2) soit $\forall x \in \mathbb{R}$

$$f(x) - 1 = \frac{2x^2+7x+7}{x^2+3x+3} - 1 = \frac{2x^2+7x+7-1(x^2+3x+3)}{x^2+3x+3} = \frac{x^2+4x+4}{x^2+3x+3}$$

$f(x) - 1 = \frac{(x+2)^2}{x^2+3x+3}$ or $x^2 + 3x + 3 \succ 0$ car $\Delta = -3 \prec 0$

(signe de a=1)

Et on a : $(x+2)^2 \geq 0$ donc $f(x) \geq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

f est donc minorée sur $\mathbb{R}$ par $m = 1$

2) soit $\forall x \in \mathbb{R}$

$$f(x) - \frac{7}{3} = \frac{2x^2+7x+7}{x^2+3x+3} - \frac{7}{3} = \frac{-x^2}{3(x^2+3x+3)} \leq 0$$

par suite f est majorée par $\frac{7}{3}$.

conclusion : $1 \prec f(x) \leq \frac{7}{3} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

f est donc bornée sur $\mathbb{R}$.

Exemple10 Soit f une fonction numérique tq :

$f(x) = \frac{x-1}{x^2+x+m}$ avec $m \in \mathbb{R}$

1)déterminer les valeurs de m pour que $D_f = \mathbb{R}$

2) Soit g la fonction numérique tq :

$g(x) = \frac{1}{x+2}$ déterminer les valeurs de m pour que $\forall x \in \{-2;1\}$ on a : $f(x) = g(x)$

Solution :

1) $D_f = \mathbb{R} \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} : x^2 + x + m \neq 0$

$x^2 + x + m \neq 0$ ssi $\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4m \prec 0$

Ssi $m \succ \frac{1}{4}$

2) $f(x)=g(x)\ \forall x\in\{-2;1\} \Leftrightarrow$

$$\frac{x-1}{x^2+x+m}=\frac{1}{x+2}$$

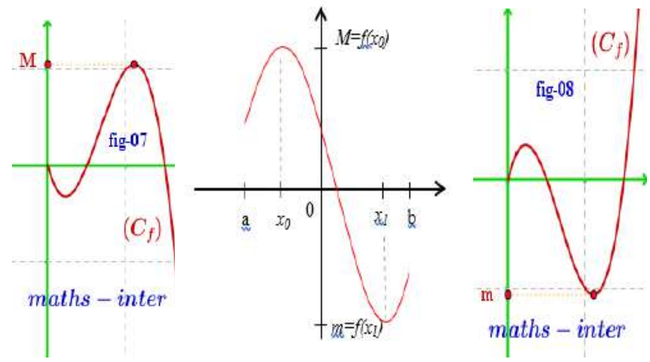
$\Leftrightarrow (x-1)(x+2)=x^2+x+m \Leftrightarrow$

$x^2+x-2=x^2+x+m$

$f(x)=g(x)\ \forall x\in\{-2;1\} \Leftrightarrow -2=m$

7) Les extremums d'une fonction Numérique

7-1)) Définitions :



Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle ouvert I et soit $a\in I$

- Dire que $f(a)$ est une valeur maximale de f sur I (ou $f(a)$ est un maximum de f sur I) ssi pour tout que $x\in I$: $f(x)\le f(a)$

- Dire que $f(a)$ est une valeur minimale de f sur I (ou $f(a)$ est un minimum de f sur I) ssi pour tout $x\in I$: $f(x)\ge f(a)$

7-2) Exemples d'applications :

1° Soit f une fonction numérique tq :

$f(x)=5x^2+3 \qquad D_f=\mathbb{R}$

On a pour tout $x\in\mathbb{R}$ $x^2\ge 0$ Donc $5x^2\ge 0$ car $5\succ 0$

Par suite $5x^2+3\ge 3$ et on a $f(0)=3$

Donc pour tout $x\in\mathbb{R}$ $f(x)\ge f(0)$

d'où $f(0)=3$ est un minimum absolue de f sur $\mathbb{R}$

2° Soit g une fonction numérique tq :

$g(x)=-4x^2+1 \qquad D_g=\mathbb{R}$

On a pour tout $x\in\mathbb{R}$ $x^2\ge 0$ Donc $-4x^2\le 0$ car $-4\prec 0$

Par suite $-4x^2+1\le 1$ et on a $g(0)=1$

Donc pour tout $x\in\mathbb{R}$ $g(x)\le g(0)$

d'où $g(0)=1$ est un maximum absolue de g sur $\mathbb{R}$

7-3) Exemples :

Exemple1 : Soit f une fonction numérique tq :

$f(x)=-4x^2+4x+5$

1°a) montrer que $f(x)=6-(2x-1)^2$ pour tout $x\in\mathbb{R}$

b) $f(x)\le 6$ pour tout $x\in\mathbb{R}$

2° calculer : $f\left(\frac{1}{2}\right)$ et en déduire les extrémums de f sur $\mathbb{R}$

Réponses: 1°a) on a $D_f=\mathbb{R}$

$6-(2x-1)^2=6-(4x^2-4x+1)$

$=6-4x^2+4x-1=-4x^2+4x+5$

Donc : $f(x)=6-(2x-1)^2$

b) Donc pour tout $x\in\mathbb{R}$ on a $(2x-1)^2\ge 0$

Par suite $-(2x-1)^2\le 0$ donc $6-(2x-1)^2\le 6$

Donc pour tout $x\in\mathbb{R}$ $f(x)\le 6$

2° on a $f\left(\frac{1}{2}\right)=6-\left(2\times\frac{1}{2}-1\right)^2=6-(1-1)^2=6$

on a pour tout $x\in\mathbb{R}$ $6-(2x-1)^2\le 6$ alors

$f(x)\le f\left(\frac{1}{2}\right)$

Donc $f\left(\frac{1}{2}\right)=6$ est un maximum de f sur $\mathbb{R}$

Exemple2 : Du tableau de variation on a :

x	-5		-2		2		5
$f(x)$	5	↘	0,5	↗	2	↘	-2

Le nombre 2 est une valeur maximale de f au point $x_0=2$

Le nombre 0.5 est une valeur Minimale de f au point $x_0=-2$

Exemple3 :

Soit f une fonction numérique tq :

$f(x)=-x^2+4x-3$

Montrer que 1 est le maximum absolu de f sur $\mathbb{R}$

Solution : $D_f=\mathbb{R}$

Montrons donc que : $f(x)\le 1$ et que l'équation $f(x)=1$ admet une solution dans $\mathbb{R}$

$f(x)-1=-x^2+4x-3-1=-x^2+4x-4$

$f(x)-1=-(x^2-4x+4)=-(x-2)^2\leq 0$

Donc $f(x)\leq 1\ \forall x\in\mathbb{R}$ et on a :

$f(x)=1\Leftrightarrow f(x)-1=0\Leftrightarrow -(x-2)^2=0\Leftrightarrow x=2$

Donc 'équation $f(x)=1$ admet une solution dans $\mathbb{R}$

Et on a : $f(2)=1$ donc : $f(x)\leq f(2)\ \forall x\in\mathbb{R}$

que $f(2)=1$ est le maximum absolue de f sur $\mathbb{R}$

Exemple4 : Soit f une fonction numérique tq :

$f(x)=\dfrac{2x^2+3}{x^2+1}$

1)Déterminer D_f

2) a) Démontrer que f est majorée par 3.

b) est ce que 3 est une valeur maximale de f ?

3) a) Démontrer que f est minorée par 2.

b) est ce que 2 est une valeur minimale de f. ?

Solution :

1) $D_f=\{x\in\mathbb{R}/x^2+1\neq 0\}$

$x^2+1=0\Leftrightarrow x^2=-1$ pas de solution dans $\mathbb{R}$ donc $D_f=\mathbb{R}$

2) a)soit $\forall x\in\mathbb{R}$

$f(x)-3=\dfrac{2x^2+3}{x^2+1}-3=\dfrac{2x^2+3-3(x^2+1)}{x^2+1}=\dfrac{2x^2+3-3x^2-3}{x^2+1}$

Donc $f(x)-3=\dfrac{-x^2}{x^2+1}\leq 0$ par suite $f(x)\leq 3\quad \forall x\in\mathbb{R}$

f est donc majorée sur $\mathbb{R}$ par $M=3$

b) on remarque que : $f(0)=3$

donc $f(x)\leq f(0)\quad \forall x\in\mathbb{R}$

Donc 3 est une valeur maximale de f

2) a)soit $\forall x\in\mathbb{R}$

$f(x)-2=\dfrac{2x^2+3}{x^2+1}-2=\dfrac{2x^2+3-2(x^2+1)}{x^2+1}=\dfrac{2x^2+3-2x^2-2}{x^2+1}$

Donc $f(x)-2=\dfrac{1}{x^2+1}\succ 0$ par suite :

$0\prec f(x)\quad \forall x\in\mathbb{R}$

par suite f est donc minorée sur $\mathbb{R}$ par $m=2$

b) on remarque que : $f(x)\succ 2\quad \forall x\in\mathbb{R}$

2 n'est pas donc une valeur minimale de f

conclusion : $2\prec f(x)\leq 3\quad \forall x\in\mathbb{R}$

f est donc bornée sur $\mathbb{R}$.

Exemple5: Soit f une fonction numérique définie sur $]1;+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{x-1}$

1)étudier le signe de f

2) a)Démontrer que f est majorée par $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

b) est ce que $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ est une valeur maximale de f ?

Solution : 1) soit $x\in]1;+\infty[$

$f(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{x-1}=\dfrac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{2})(\sqrt{x+1}+\sqrt{2})}{(x-1)(\sqrt{x+1}+\sqrt{2})}$

$f(x)=\dfrac{x+1-2}{(x-1)(\sqrt{x+1}+\sqrt{2})}=\dfrac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x+1}+\sqrt{2})}$

$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{2}}\succ 0$

Donc $f(x)\succ 0$ si $x\in]1;+\infty[$

2) a) $x\in]1;+\infty[$ montrons que $f(x)\leq\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

soit $x\in]1;+\infty[$ donc $x\succ 1$ cad $x+1\succ 2$

donc $\sqrt{x+1}\succ\sqrt{2}$ donc $\sqrt{x+1}+\sqrt{2}\succ 2\sqrt{2}$

donc $\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{2}}\prec\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$

donc $f(x)\prec\dfrac{\sqrt{2}}{4}\ \forall x\in]1;+\infty[$

f est donc majorée sur $\mathbb{R}$ par $M=3$

conclusion : $2\prec f(x)\leq 3\quad \forall x\in\mathbb{R}$

b) on remarque que : $f(0)=3$

donc $f(x)\leq f(0)\quad \forall x\in\mathbb{R}$

Donc 3 est une valeur maximale de f

f est donc bornée sur $]1;+\infty[$ par $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

b) puisque $f(x)\neq\dfrac{\sqrt{2}}{4}\ \forall x\in]1;+\infty[$

$\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ N'est pas une valeur maximale de f

Exemple6 : Soit f une fonction numérique définie sur $]1;+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2}$

1))Déterminer D_f

2) Démontrer que -1 est la valeur minimal de f

3) Démontrer que f est majorée par 1 et est ce que 1 est une valeur maximale de f ?

Solution :1)

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R} / \sqrt{x}+2\neq 0 et x\geq 0\right\}=\left\{x\in\mathbb{R} / \sqrt{x}\neq -2 et x\geq 0\right\}$

$D_f=[0;+\infty[$

2) Montrons donc que : $f(x)\geq -1$ et que l'équation $f(x)=-1$ admet une solution dans $\mathbb{R}^+$

$f(x)-(-1)=f(x)+1=\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2}+1=\dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}\geq 0$

Donc $f(x)\geq -1\ \forall x\in\mathbb{R}^+$ et on a :

$f(x)=-1\Leftrightarrow f(x)+1=0\Leftrightarrow \dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}=0\Leftrightarrow x=0$

Donc l'équation $f(x)=-1$ admet une solution dans $\mathbb{R}^+$

Et on a : $f(0)=-1$ donc : $f(x)\geq f(0)\ \forall x\in\mathbb{R}$

Ont dit que $f(0)=-1$ est le minimum absolue de f sur $\mathbb{R}^+$

3) soit $x\in\mathbb{R}^+$ $f(x)-1=\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2}-1=\dfrac{-4}{\sqrt{x}+2}\prec 0$

Donc $f(x)\prec 1\quad \forall x\in\mathbb{R}^+$

Donc f est donc majorée sur $\mathbb{R}^+$ par $M=1$

Et puisque $f(x)=1$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}^+$

Donc 1 n'est pas une valeur maximale de f

f est donc bornée sur $]1;+\infty[$ par $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

b) puisque $f(x)\neq\dfrac{\sqrt{2}}{4}\ \forall x\in]1;+\infty[$

$\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ n'est pas une valeur maximale de f

Exemple7 : Soit f une fonction numérique tel que : $f(x)=x^2-2x+3$

1)a) Démontrer que f est minorée.

b) est ce que f admet une valeur minimale ?

2) Démontrer que f est non majorée.

Solution : $D_f=\mathbb{R}$

1)a) $f(x)=x^2-2x+3=\left(x^2-2x+1\right)+2=(x-1)^2+2$

Donc $f(x)-2=(x-1)^2\geq 0$

Donc : $f(x)\geq 2\ \forall x\in\mathbb{R}$ donc que f est minorée par 2

et on a : $f(1)=2$ donc : $f(x)\geq f(1)\ \forall x\in\mathbb{R}$

Donc f admet une valeur minimale c'est 2

2) Démontrons que f est non majorée.

Supposons f majorée donc : $\exists M\in\mathbb{R}: f(x)\leq M$ $\forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R}:(x-1)^2+2\leq M$

$\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R}:(x-1)^2\leq M-2$

$\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R}:\sqrt{(x-1)^2}\leq\sqrt{M-2}$ (on peut toujours supposer $M\geq 2$

$\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R}:|x-1|\leq\sqrt{M-2}$

Donc on a : $-\sqrt{M-2}\leq x-1\leq\sqrt{M-2}\quad \forall x\in\mathbb{R}$

Donc on a : $-\sqrt{M-2}+1\leq x\leq\sqrt{M-2}+1\quad \forall x\in\mathbb{R}$ absurde

Donc f est non majorée

8) Etude et représentation graphique des fonctions $x\xrightarrow{f}ax^2+bx+c$

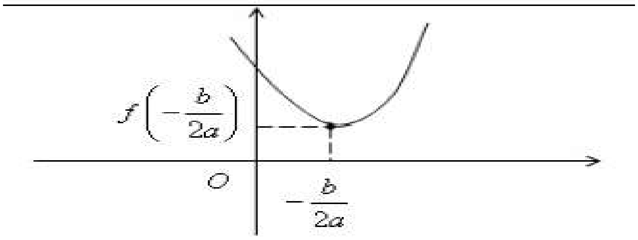
8-1)Résumé : $f(x)=ax^2+bx+c$ et $a\neq 0$

1° Dans le repére $(0;\vec{i};\vec{j})$ la courbe (C_f) c'est une parabole de sommet $W(\alpha;\beta)$ et d'axe de symétrie la droite $x=\alpha$

2° Les variations de f

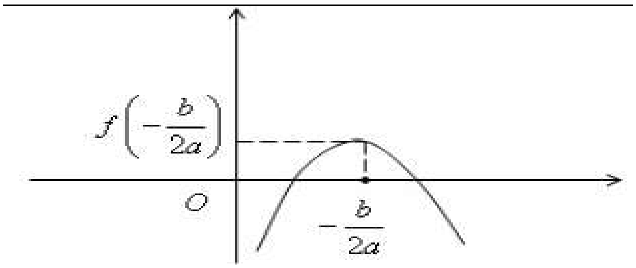
Si $a\succ 0$

x	$-\infty$	$-\dfrac{b}{2a}$	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	$f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)$	$\nearrow$



Si $a\prec 0$

x	$-\infty$	$-\dfrac{b}{2a}$	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	$f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)$	$\searrow$



2-2) Exemples :

1° Soit f une fonction numérique

tq : $f(x)=2x^2-4x-2$

On a f est une fonction polynôme donc $D_f=\mathbb{R}$

On a $a=2$ et $b=-4$ et $c=-2$

$\left(f(x)=ax^2+bx+c\right)$

Donc $-\frac{b}{2a}=\frac{4}{2\times 2}=1$ et $\left(f(1)=2-4-2=-4\right)$

Pour tout réel $x\in\mathbb{R}$ on peut écrire sous la forme :

$f(x)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a}=2(x-1)^2-4$

Soit $W(1;-4)$ Donc dans le repéré $\left(0;\vec{i};\vec{j}\right)$ l

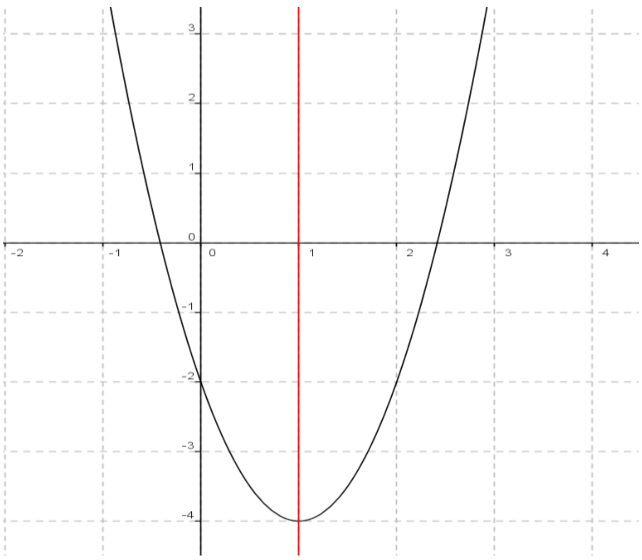
a courbe $\left(C_f\right)$ c'est une parabole de sommet $W(1;-4)$

et d'axe de symétrie la droite $x=1$

<u>Tableau de variations de f</u>

On a $a=2\succ 0$ donc :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	-4	$\nearrow$



$W(1;-4)$

2° Soit g une fonction numérique tq :

$g(x)=-\frac{1}{2}x^2+2x+1$

on a g est une fonction polynôme donc $D_g=\mathbb{R}$

On a $a=-\frac{1}{2}$ et $b=2$ et $c=1$

$\left(g(x)=ax^2+bx+c\right)$

Donc $-\frac{b}{2a}=2$ et $\beta=-\frac{\Delta}{4a}=-\frac{4+2}{-2}=3$

Donc pour tout réel $x\in\mathbb{R}$ on peut écrire sous la forme : $g(x)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a}=-\frac{1}{2}(x-2)^2+3$

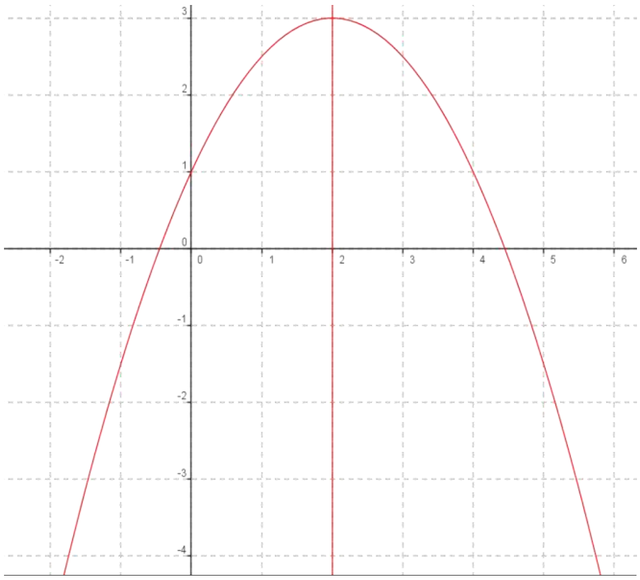
$\left(g(2)=-\frac{1}{2}(2-2)+3=3\right)$

Soit $W(2;3)$ Donc dans le repère $\left(0;\vec{i};\vec{j}\right)$ la courbe $\left(C_g\right)$ c'est une parabole de sommet $W(2;3)$ et d'axe de symétrie la droite $x=2$

<u>Tableau de variations de f</u>

On a $a=-\frac{1}{2}\prec 0$ donc :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	3	$\searrow$



9) Etude et représentation graphique des fonctions homographique :

$x \xrightarrow{f} \dfrac{ax+b}{cx+d}$ $\qquad a \neq 0$ et $c \neq 0$

9-1) Résumé et propriété : 1)Soit f une fonction tq : $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ on a $f(x) \in \mathbb{R}$ ssi $cx+d \neq 0$

ssi $x \neq -\dfrac{d}{c}$ $\qquad$ donc : $D_f = \mathbb{R} - \left\{-\dfrac{d}{c}\right\}$

dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ (C_f) est l'hyperbole de centre $W\left(-\dfrac{d}{c};\dfrac{a}{c}\right)$ et d'asymptotes les droites d'équations respectives $x=-\dfrac{d}{c}$ et $y=\dfrac{a}{c}$

1iér cas : si $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad-bc \succ 0$

<u>Tableau de variations de f :</u>

x	$-\infty$	$-\frac{d}{c}$	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	$\|$	$\nearrow$

2iér cas : si $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad-bc \prec 0$

<u>Tableau de variations de f :</u>

x	$-\infty$	$-\frac{d}{c}$	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	$\|$	$\searrow$

9-2) Exemples :

Exemple1: Soit f une fonction numérique tq :

$f(x)=\dfrac{2x+1}{x-1}$

on a $f(x) \in \mathbb{R}$ ssi $x-1 \neq 0$ ssi $x \neq 1$

Donc $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$ $\qquad \Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2-1 = -3 \prec 0$

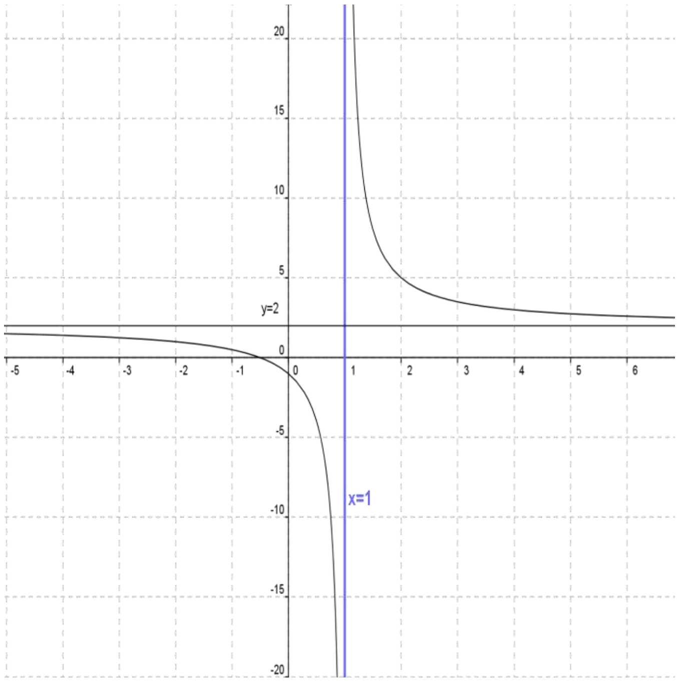
• <u>Donc le tableau de variations de</u> $x \longrightarrow \dfrac{2x+1}{x-1}$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	$\|$	$\searrow$

• <u>Représentation graphique</u>

-2	1-	0	1	2	3	4
1	$\frac{1}{2}$	-1		5	$\frac{7}{2}$	3

(C_f) est l'hyperbole de centre $W(1;2)$ et d'asymptotes les droites d'équations respectives $x=1$ et $y=2$



Exemples2:

Soit g une fonction numérique

tq : $g(x)=\dfrac{-x}{x-2}$

on a $g(x) \in \mathbb{R}$ ssi $x-2 \neq 0$ ssi $x \neq 2$

Donc $D_g = \mathbb{R} - \{2\}$

$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 2 \succ 0$

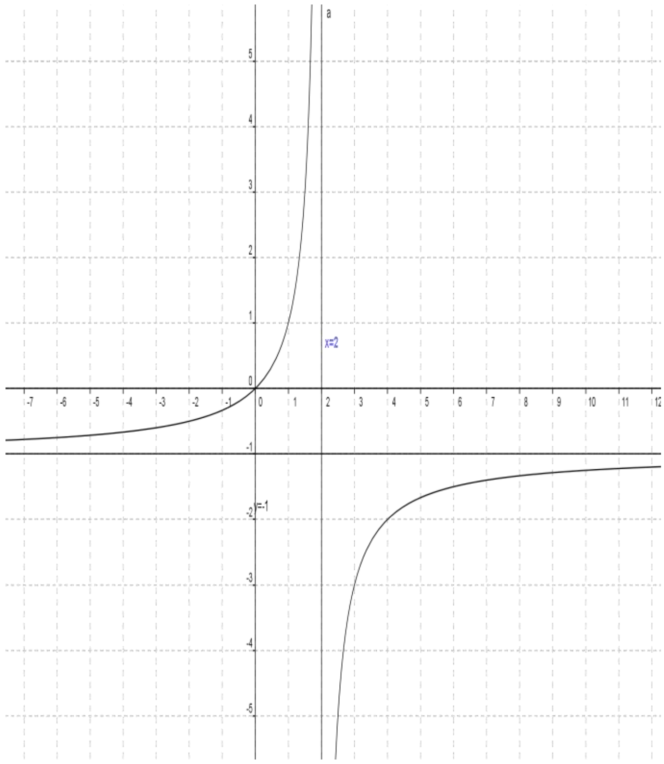
• <u>Donc le tableau de variations</u>

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	$\|$	$\nearrow$

• <u>Représentation graphique</u>

-1	0	1	2	3	4	5
-1/ 3	0	1		-3	-2	-5/ 3

(C_f) est l'hyperbole de centre $W(2;-1)$ et d'asymptotes les droites d'équations respectives $x=2$ et $y=-1$



10) Etude et représentation graphique de la fonction polynôme : $x \xrightarrow{f} ax^3$

Exemple : Soit f une fonction numérique

définie par : $f(x)=\frac{1}{4}x^3$

1) Déterminer D_f

2)étudier les variations de f et dresser le tableau de variation

3)tracer la dans le repère $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ la courbe $\left(C_f\right)$ de f

Solutions : 1) $D_f = x \in \mathbb{R}$

2)soient $x_1 \in \mathbb{R}$ et $x_2 \in \mathbb{R}$ tq $x_1 < x_2$

Donc : $x_1^3 < x_2^3$ Donc : $\frac{1}{4}x_1^3 < \frac{1}{4}x_2^3$

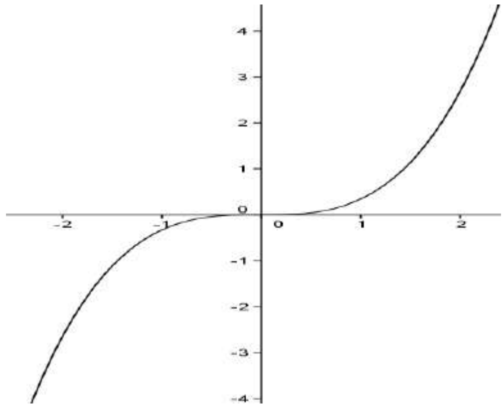
Donc : $f(x_1) < f(x_2)$

Donc f est strictement croissante

Tableau de variation

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	6.5	-2	-1/4	0	1/4	2	6.5



11) Etude et représentation graphique de la fonction polynôme: $x \xrightarrow{f} \sqrt{a+x}$

Exemple : Soit f une fonction numérique

définie par : $f(x)=\sqrt{x+2}$

1) Déterminer D_f

2)étudier les variations de f et dresser le tableau de variation

3)tracer la dans le repère $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ la courbe $\left(C_f\right)$ de f

Solutions : 1)

$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x+2 \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} / x \geq -2\} = [-2,+\infty[$

2)soient $x_1 \in [-2;+\infty[$ et $x_2 \in [-2;+\infty[$ tq $x_1 < x_2$

Donc : $x_1+2 < x_2+2$ Donc : $\sqrt{x_1+2} < \sqrt{x_2+2}$

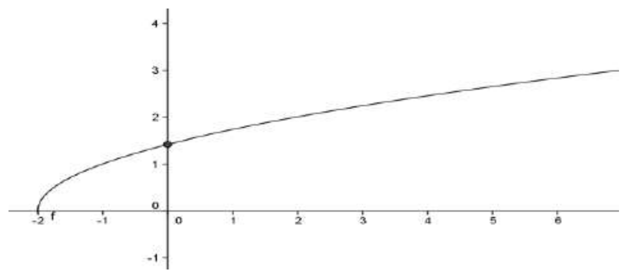
Donc : $f(x_1) < f(x_2)$

Donc f est strictement croissante

Tableau de variation :

x	-2	$+\infty$
$f(x)$	$0 \nearrow$	$+\infty$

x	-2	-1	0	2	7
$f(x)$	0	1	$\sqrt{2}$	2	3



12)La composée de deux fonctions

13-1) Définition : Soit la fonction définie sur l'ensemble I et g la fonction définie sur l'ensemble J tel que : $\forall x \in I \quad f(x) \in J$

La composée des deux fonctions f et g est la fonction notée : $g \circ f$ définie sur I par :

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \quad \forall x \in I$

On peut alors faire le schéma suivant :

$x \to f(x) = y \to g(f(x)) = z$

13-2) Exemples

Exemple1 : Soit les fonctions f et g

Tel que : $f(x) = x^2 - 2x + 3$ et $g(x) = 2x + 1$

Déterminer : $g \circ f$ et $f \circ g$

Solution : on a : $D_f = \mathbb{R}$ et $D_g = \mathbb{R}$ donc

$D_{g \circ f} = \mathbb{R}$ et $D_{f \circ g} = \mathbb{R}$

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2 - 2x + 3) = 2(x^2 - 2x + 3) + 1$

$(g \circ f)(x) = 2x^2 - 4x + 7$

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2x+1) = (2x+1)^2 - 2(2x+1) + 3$

$(f \circ g)(x) = 4x^2 + 4x + 1 - 4x - 2 + 3 = 4x^2 + 2$

Remarque :1) La composée de deux fonctions n'est pas commutative

c.-à-d. $g \circ f \neq f \circ g$

2)Soit D_f et D_g les ensembles de définition des fonctions f et g.

$D_{g \circ f} = \left\{ x \in \mathbb{R} / x \in D_f et f(x) \in D_g \right\}$

Exemple2: Soit les fonctions f et g définies par :

$f(x) = 3x + 4$ et $g(x) = \dfrac{1}{x+1}$

1) Déterminer $D_{g \circ f}$

2) déterminer : $(g \circ f)(x)$

Solution : 1) $D_{g \circ f} = \left\{ x \in \mathbb{R} / x \in D_f et f(x) \in D_g \right\}$

On a $D_f = \mathbb{R}$ et $D_g = \mathbb{R} - \{-1\}$ donc

$D_{g \circ f} = \left\{ x \in \mathbb{R} / x \in \mathbb{R} et f(x) \neq -1 \right\}$

$f(x) = -1 \Leftrightarrow 3x + 4 = -1 \Leftrightarrow 3x = -5 \Leftrightarrow -\dfrac{5}{3} = x$

Donc : $D_{g \circ f} = \mathbb{R} - \left\{ -\dfrac{5}{3} \right\}$

2)on a : $D_f = \mathbb{R}$ et $D_g = \mathbb{R} - \{-1\}$

Et $D_{g \circ f} = \mathbb{R} - \left\{ -\dfrac{5}{3} \right\}$

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(3x+4) = \dfrac{1}{3x+4+1}$

$(g \circ f)(x) = \dfrac{1}{3x+5}$

Exemple3 : Soit les fonctions f et g définies par :

$g(x) = \dfrac{x}{x+2}$ et $f(x) = \dfrac{x+3}{x+1}$

On pose : $h(x) = (g \circ f)(x)$

1) Déterminer D_h 2) déterminer : $h(x)$

3) Soit la fonctions k définie par : $k(x) = \dfrac{x+3}{3x+5}$

Les fonctions h et k sont-elles égales ?

Solution : 1) on a : $D_f = \mathbb{R} - \{-1\}$ et

$D_g = \mathbb{R} - \{-2\}$

$D_{g \circ f} = \left\{ x \in \mathbb{R} / x \in D_f et f(x) \in D_g \right\}$

$D_{g \circ f} = \left\{ x \in \mathbb{R} / x \neq -1 et f(x) \neq -2 \right\}$

$f(x) = -2 \Leftrightarrow \dfrac{x+3}{x+1} = -2$

$\Leftrightarrow -2(x+1) = x + 3 \Leftrightarrow -3x = 5 \Leftrightarrow x = -\dfrac{5}{3}$

Donc : $D_{g \circ f} = \mathbb{R} - \left\{ -\dfrac{5}{3}; -1 \right\}$

$h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\dfrac{x+3}{x+1} \right)$

$$h(x) = \frac{\frac{x+3}{x+1}}{\frac{x+3}{x+1} + 2} = \frac{\frac{x+3}{x+1}}{\frac{x+3+2x+2}{x+1}} = \frac{\frac{x+3}{x+1}}{\frac{3x+5}{x+1}} = \frac{x+3}{3x+5}$$

Donc : $h(x) = \dfrac{x+3}{3x+5}$

3)Les fonctions h et k ne sont pas égales car ils n'ont pas le même ensemble de définition :

$D_h = \mathbb{R} - \left\{ -\dfrac{5}{3}; -1 \right\}$ et $D_k = \mathbb{R} - \left\{ -\dfrac{5}{3} \right\}$

Exemple4 : exprimer les fonctions suivantes à l'aide de fonctions élémentaires :

1) $h_1(x) = \dfrac{1}{3x-1}$ 2) $h_2(x) = \sqrt{x+3}$

3) $h_3(x) = 3\sqrt{x} + 4$

Solution : 1) $h_1(x) = \dfrac{1}{3x-1}$ on a : $h_1(x) = (g \circ f)(x)$

Avec $f(x) = 3x - 1$ et $g(x) = \dfrac{1}{x}$

2) $h_2(x) = \sqrt{x+3}$ on a : $h_2(x) = (g \circ f)(x)$

Avec $f(x)=x+3$ et $g(x)=\sqrt{x}$

3) $h_3(x)=3\sqrt{x}+4$ on a : $h_3(x)=(g\circ f)(x)$

Avec $f(x)=\sqrt{x}$ et $g(x)=3x+4$

13-3) Variations d'une fonction composée

Théorème : Soit une fonction f définie sur un intervalle I et une fonction g définie sur f (I).

➪ Si f et g ont même variation respectivement sur I et f (I) alors la fonction $g\circ f$ Est croissante sur I.

➪ Si f et g ont des variations opposées respectivement sur I et f (I) alors là Fonction $g\circ f$ est décroissante sur I.

Remarque : Il peut être intéressant de décomposer une fonction en fonctions élémentaire

La fonction g ∘ f est décroissante sur I

Exemple1 : Soit f la fonction f définie sur Un intervalle $[0;+\infty[$ tel que : $f(x)=-5x^2+7$

On va décomposer une fonction en fonctions élémentaire :

$v(x)=-5x+7$ et $u(x)=x^2$

La fonctions $f=v\circ u$

La fonction u est croissante sur $[0;+\infty[$ et $u(x)=x^2\in[0;+\infty[$ et I v est décroissante sur $[0;+\infty[$ Donc d'après le théorème des fonctions composées, $f=v\circ u$ est décroissante sur $[0;+\infty[$

Exemple2:: Soit la fonction h définie sur $]-\infty;1]$ par $h(x)=\sqrt{1-x}$

1) Décomposer h en deux fonctions élémentaires.
2) Déterminer les variations de h.

Solution :1) La fonction h se décompose de cette façon $h=g\circ f$

on a alors : $f(x)=1-x$ et $g(x)=\sqrt{x}$

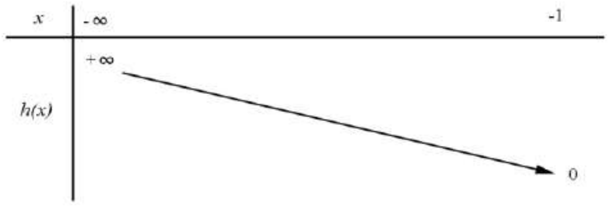
2) On sait que :

➪ f est décroissante sur $]-\infty;1]$

➪ g est croissante sur $f(]-\infty;1])=[0;+\infty[$

Donc La fonction h décroissante sur $]-\infty;1]$

On a alors le tableau de variation suivant



13) Fonctions périodiques :

Définition : On considère une fonction réelle f dont on note D l'ensemble de définition.

On dit que f est périodique de période T si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

a) $\forall x\in D$ on a $x+T\in D$

b) $\forall x\in D$ on a $f(x+T)=f(x)$

et la période de f c'est le plus petit réelle strictement positif qui vérifie les conditions

Exemple de fonctions périodiques :

1. Une fonction constante sur $\mathbb{R}$ est périodique ; tout réel non nul en est une période.
2. La fonction $x\to E(x)$ est périodique, 1 est une période ainsi que tout entier non nul.
3. les fonctions sinus et cosinus sont périodiques de période $T=2\pi$ et la fonction tangente est périodique de période $T=\pi$
4) La période des fonctions : $f:x\to\cos(ax)$ et $f:x\to\sin(ax)$ $a\neq 0$ est $T=\dfrac{2\pi}{a}$

Exemple1 : Montrer que la fonction $f:x\to x-E(x)$ est périodique de période 1.

Solution: $D_f=\mathbb{R}$

a) $\forall x\in\mathbb{R}$ on a $x+1\in\mathbb{R}$

b) $\forall x\in\mathbb{R}$ on a:

$f(x+1)=x+1-E(x+1)=x+1-E(x)-1=f(x)$

L'application f est donc périodique de période 1.

Exemple2 : Quelle est la période des fonctions suivantes :

1) $f:x\to\sin(4x-1)$ 2) $g:x\to\cos(5x)$

3) Trouver une fonction de période $T=\dfrac{3}{4}$

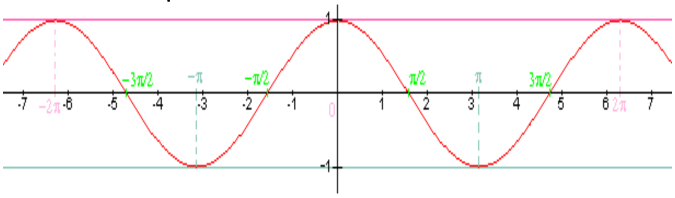
Solution :1) $T=\dfrac{2\pi}{a}=\dfrac{2\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}$ 2) $T=\dfrac{2\pi}{5}$

3)Une fonction est. $h:x\to\cos(\dfrac{8\pi}{3}x)$

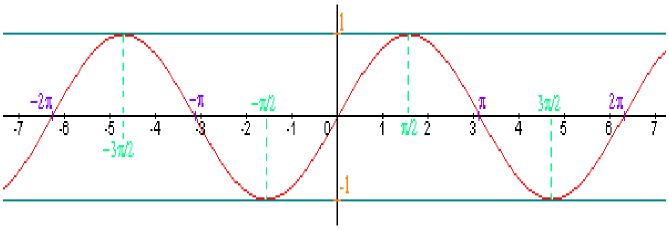
Remarque : La périodicité permet de réduire l'étude des variations d'une fonction à un intervalle de longueur égale à la période

Donc pour tracer la représentation graphique d'une fonction T-périodique, il suffit donc de construire la courbe sur un intervalle de longueur T puis de translater autant de fois que nécessaire.

Exemple3 : Observons une courbe représentative de la fonction cos on a $T=2\pi$ et sur $[-\pi;\pi]$ dont la longueur est égale à 2π La courbe se répète tous les $T=2\pi$



Exemple4 : courbe représentative de la fonction sin :



Exemple5: Soit f une fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ et périodique de période $T=2$

Tel que : $f(x)=2x-x^2 \quad \forall x\in[0;2[$

1)Tracer la représentation graphique de la fonction sur $[-2;8]$ dans un repère $(0;\vec{i};\vec{j})$

2) calculer : $f(4.1)$; $f(-3.5)$; $f(265.11)$

Solution : dans l'intervalle $I_0=[0;2[$

On a f est une fonction polynôme donc

$D_f=\mathbb{R}$

On a $a=-1$ et $b=2$ et $c=0$

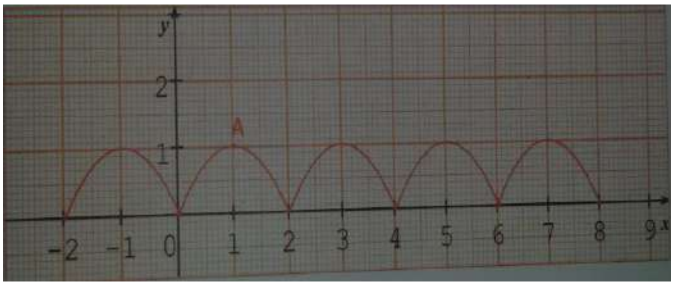
$(f(x)=ax^2+bx+c)$

Donc $-\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{-2}{2\times(-1)}=1$ et $(f(1)=2-1=1)$

Donc la courbe (C_f) c'est une portion parabole de sommet $A(1;1)$ et d'axe de symétrie la droite $x=1$

Pour Tracer la représentation graphique de la fonction sur $[-2;8]$ il suffit de Tracer la représentation graphique de la fonction sur $I_0=[0;2[$

et utiliser les translation $2k\vec{i}$ avec $k\in\mathbb{Z}$



2) calculer :

$f(4.1)=f(2+2.1)=f(2.1)=f(2+0.1)=f(0.1)$

$f(4.1)=2(0.1)-(0.1)^2=0.19$

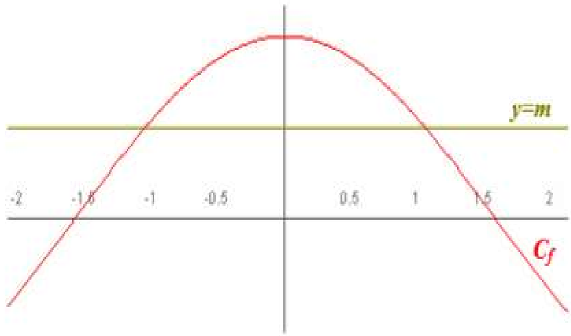
$f(-3.5)=f(-4+0.5)=f(0.5)$

$f(-3.5)=2(0.5)-(0.5)^2=0.75$

$f(265.11)=f(2\times132+1.11)=f(1.11)$

$f(1.11)=2(1.11)-(1.11)^2\approx0.98$

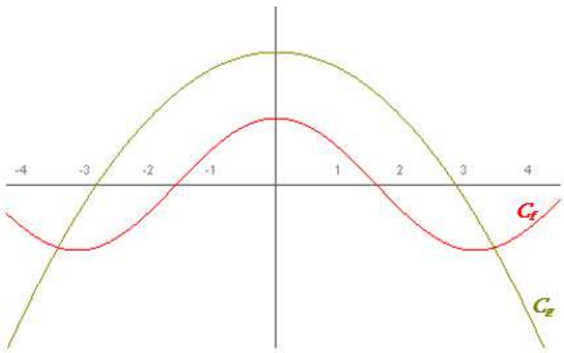
15) Applications : Position relative de courbes, interprétation graphique d'équations et d'inéquations



Le but de ce chapitre est de pouvoir déterminer par le calcul, entre 2 courbes, quelle courbe se situe au-dessus de l'autre et sur quel(s) intervalle(s). Il te permettra d'interpréter ensuite, dans des problèmes plus concrets, des situations liées `a la physique, la chimie, l'´économie, ?

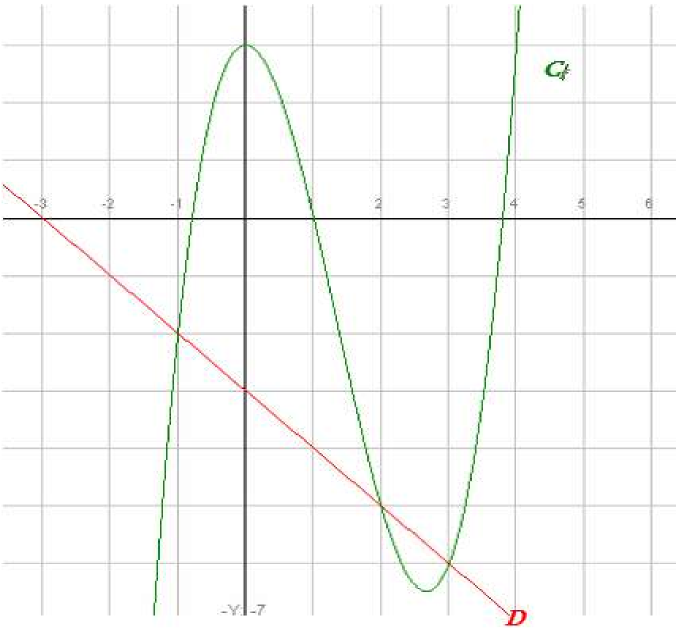
1) Position relative de deux courbes et intersection

Soient (C_f) la courbe représentative de f et (C_g) la courbe représentative de g.



On peut établir les relations suivantes :

$M(x;y) \in (C_f)$ ssi $y = f(x)$



$M(x;y) \in (C_g)$ ssi $y = g(x)$

Aux points d'intersection de (C_f) et de (C_g), on a $M \in (C_f)$ et $M \in (C_g)$

donc soit $f(x) = g(x)$

A retenir :

- les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$ sont les abscisses des points D'intersection de (C_f) et de (C_g).
- les solutions de l'inéquation $f(x) \geq g(x)$ sont les abscisses des points de (C_f) situées au-dessus de (C_g).
- les solutions de l'inéquation $f(x) \leq g(x)$ sont les abscisses des points de (C_f) situées au- dessous de (C_g).

Un cas particulier : équation $f(x) = m$ et inéquation $f(x) \geq m$

- Les solutions de l'équation $f(x) = m$ sont les abscisses des points d'intersection de (C_f) avec la droite d'équation $y = m$
- Les solutions de l'inéquation $f(x) \geq m$ sont les abscisses des points de (C_f) situés au-dessus de la droite d'équation $y = m$.

2) Quelques exercices d'application

Exercice1 : Soit la courbe (C_f) représentative de f telle que $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3$ et la droite (D) d'équation $y = -x - 3$

1- Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 3$ puis l'inéquation $f(x) \prec 3$.

2- Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 0$ puis l'inéquation $f(x) \geq 0$

3- Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = -x - 3$ puis l'inéquation $f(x) \leq -x - 3$

Réponses : 1) $f(x) = 3$ La solution est l'ensemble des antécédents de 3 : $S = \{0;4\}$

2- $f(x) = 0$ La solution est l'ensemble des antécédents de 0 : $S = \{a;1;b\}$ Avec $-1 \prec a \prec -0.5$ et $3.5 \prec b \prec 4$

$f(x) \geq 0 \quad S = [a;1] \cup [b;+\infty[$

3- $f(x) = -x - 3$ La solution l'ensemble des abscisses des points d'intersection de (C_f) et de D : $y = -x - 3$ donc $S = \{-1;2;3\}$

$f(x) \leq -x - 3 \quad S =]-\infty;-1] \cup [2;3]$

Exercice2 : Soient f et g les deux fonctions définies sur R par : $f(x) = x^2 - 3x - 4$ et $g(x) = 3x + 12$

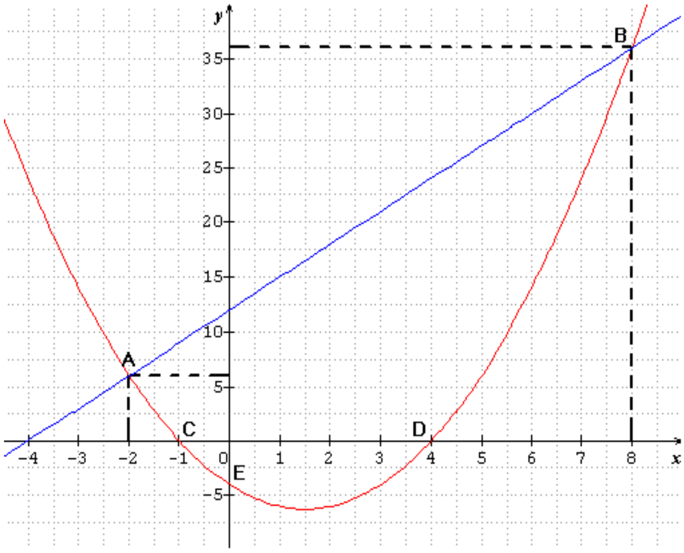
1) Tracer Les courbes (C_f) et (C_g)

2) Résoudre graphiquement et algébriquement l'équation $f(x) = g(x)$

3) Résoudre graphiquement et algébriquement l'inéquation $f(x) \geq g(x)$

4) Trouver les points d'intersection de la courbe (C_f) avec les axes du repère

Réponses : 1) Les courbes représentatives (C_f) (en rouge) et (C_g) (en bleu) sont données dans le repére ci-dessous



2) a) résolution graphique de l'équation $f(x)=g(x)$

Il suffit de chercher les abscisses des points d'intersection des courbes (C_f) et (C_g)

On a donc $x=-2$ et $x=8$ donc $S=\{-2;8\}$

b) résolution algébrique de l'équation $f(x)=g(x)$

$f(x)=g(x)$ ssi $x^2-3x-4=3x+12$ ssi $x^2-6x-16=0$

$a=1$ et $b=-6$ et $c=-16$

$$\Delta=b^2-4ac=(-6)^2-4\times1\times(-16)=36+64=100=(10)^2>0$$

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_1=\frac{-(-6)+\sqrt{100}}{2\times1}=\frac{6+10}{2}=\frac{16}{2}=8 \text{ et}$$

$$x_2=\frac{-(-6)-\sqrt{100}}{2\times1}=\frac{6-10}{2}=\frac{-4}{2}=-2$$

donc $S=\{-2;8\}$

3) a) résolution graphique de l'inéquation $f(x)\succ g(x)$

La courbe (C_f) est au-dessus de (C_g) si $x\in]-\infty;-2[\cup]8;+\infty[$

Donc $S=]-\infty;-2[\cup]8;+\infty[$

b) résolution algébrique de l'inéquation $f(x)\succ g(x)$

$f(x)\succ g(x)$ ssi $x^2-3x-4\succ 3x+12$ ssi $x^2-6x-16\succ 0$

Les racines sont : $x_1=8$ et $x_2=-2$

x	$-\infty$		-2		8		$+\infty$
$x^2-6x-16$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc $S=]-\infty;-2[\cup]8;+\infty[$

5) a) Intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses

Les points d'intersection C et D de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses ont leurs ordonnées nulles, et leurs abscisses sont les solutions de l'´équation $f(x)=0$

$f(x)=0$ ssi $x^2-3x-4=0$

$a=1$ et $b=-3$ et $c=-4$

$$\Delta=b^2-4ac=(-3)^2-4\times1\times(-4)=9+16=25=(5)^2>0$$

$$x_1=\frac{-(-3)+\sqrt{25}}{2\times1}=\frac{3+5}{2}=\frac{8}{2}=4 \text{ et } x_2=\frac{-(-3)-\sqrt{25}}{2\times1}=\frac{-2}{2}=-1$$

Donc les points d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses sont :

$C(-1;0)$ et $D(4;0)$

b) Intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des ordonnées

Le point d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des ordonnées a une abscisse nulle et on a $f(0)=0^2-3\times0-4=-4$

Donc le point d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des ordonnées est : $E(-4;0)$

Exercice3: Soient f et g les deux fonctions définies sur R par : $f(x)=-x^2-2x+3$ et $g(x)=\dfrac{x-1}{x+2}$ et (C_f) et (C_g) Les courbes représentatives de f et g

1) Dresser le Tableau de variations de f et de g

2) a) Trouver les points d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses

b) Trouver le point d'intersection de la courbe (C_g) avec l'axe des abscisses

3) Tracer Les courbes représentatives (C_f) et (C_g) dans le même repère

4) a) Résoudre graphiquement l'équation $f(x)=g(x)$

b) Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x)\geq g(x)$

Réponses : 1)a) $f(x)=-x^2-2x+3$

on a f est une fonction polynôme donc $D_f=\mathbb{R}$

On a $a=-1$ et $b=-2$ et $c=3$

$\left(f(x)=ax^2+bx+c\right)$

Donc $-\frac{b}{2a}=-\frac{-2}{2\times(-1)}=-1$ et $\left(f(-1)=4\right)$

Donc la courbe (C_f) c'est une parabole de sommet $A(-1;4)$

et d'axe de symétrie la droite $x=-1$

Donc le tableau de variations de f

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	4	$\searrow$

1)b) $g(x)=\frac{x-1}{x+2}$ on a $g(x)\in\mathbb{R}$ ssi $x+2\neq 0$

ssi $x\neq -2$ Donc $D_g=\mathbb{R}-\{-2\}$

$\Delta=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=2+1=3\succ 0$

(C_g) est l'hyperbole de centre $W(-2;1)$ et d'asymptotes les droites d'équations respectives $x=-2$ et $y=1$

Donc le tableau de variations de g

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$g(x)$	$\nearrow$	‖	$\nearrow$

2)a) Intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses

Les points d'intersection C et D de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses ont leurs ordonnées nulles, et leurs abscisses sont les solutions de l''équation $f(x)=0$

$f(x)=0$ ssi $-x^2-2x+3=0$

$\Delta=b^2-4ac=(-2)^2-4\times3\times(-1)=4+11=16>0$

$x_1=\frac{-(-2)+\sqrt{16}}{2\times(-1)}=\frac{2+4}{-2}=\frac{6}{-2}=-3$ et

$x_2=\frac{-(-2)-\sqrt{16}}{2\times(-1)}=1$ donc les points d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses sont :

$A(-3;0)$ et $B(1;0)$

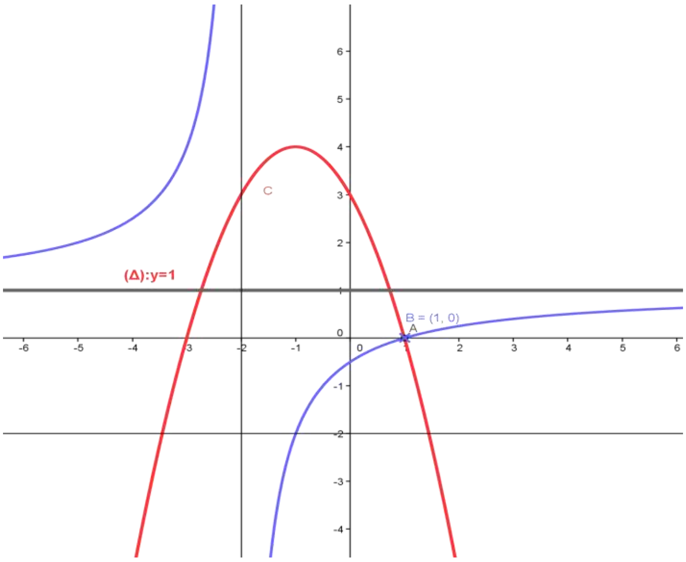
b) Intersection de la courbe (C_g) avec l'axe des abscisses

$g(x)=0$ ssi $\Leftrightarrow \frac{x-1}{x+2}=0 \Leftrightarrow x-1=0 \Leftrightarrow x=1$

le point d'intersection de la courbe (C_g) avec l'axe des abscisses est : $C(1;0)$

3)Représentation graphique

Les courbes représentatives (C_f) (en rouge) et (C_g) (en bleu) sont données dans le repére ci-dessous



4) a) résolution graphique de l'équation $f(x)=g(x)$

Il suffit de chercher les abscisses des points d'intersection des courbes (C_f) et (C_g)

On a donc $x=1$ donc $S=\{1\}$

4)b) résolution graphique de l'inéquation $f(x)\geq g(x)$

La courbe (C_f) est au-dessus de (C_g) si $x\in\left]-2;1\right]$

Donc $S=\left]-2;1\right]$

Exemple4 : Soit f une fonction numérique tq :

$f(x)=\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}$

1)Déterminer D_f

2) Démontrer que f est minorée.

3) Démontrer que f est majorée par $\frac{1}{2}$ Conclure

Solution :1) $D_f=\{x\in\mathbb{R}/x\geq 0\}=\mathbb{R}^+$

2) soit $x\in\mathbb{R}^+$ on a $x+\sqrt{x}\geq x$

Donc : $\sqrt{x+\sqrt{x}}\geq\sqrt{x}$ donc

$f(x)=\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}\geq 0$

f est donc minorée sur $\mathbb{R}^+$ par $m=0$

2) soit $x\in\mathbb{R}^+$

$$f(x)=\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}=\frac{\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}\right)}{\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}\right)}\geq 0$$

$$f(x)=\frac{x+\sqrt{x}-x}{\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}\right)}=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}\left(\sqrt{\frac{x+\sqrt{x}}{x}}+1\right)}=\frac{1}{\left(\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}+1\right)}$$

Si $x\in\mathbb{R}^{*+}$: $\frac{1}{\sqrt{x}}\succ 0$ donc $1+\frac{1}{\sqrt{x}}\succ 1$

Donc $\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}\succ 1$ donc $\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}+1\succ 2$

Donc $\frac{1}{\left(\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}+1\right)}\prec\frac{1}{2}$ donc $f(x)\prec\frac{1}{2}$

et on a : $f(0)=0\prec\frac{1}{2}$ donc $\forall x\in\mathbb{R}^+$ $f(x)\prec\frac{1}{2}$

Par suite f est majorée par $\frac{1}{2}$.

Conclusion : $0\prec f(x)\prec\frac{1}{2}$ $\forall x\in\mathbb{R}^+$

f est donc bornée sur $\mathbb{R}^+$.

Exemple5 : Soit f une fonction numérique tq :

$f(x)=x^2+2x\sqrt{x}+x-4$

1) Démontrer que f admet une valeur minimale

3) Démontrer que f n'est pas majorée

Solution : 1) $D_f=\{x\in\mathbb{R}/x\geq 0\}=\mathbb{R}^+$

Soit $x\in\mathbb{R}^+$

$f(x)=x^2+2x\sqrt{x}+x-4=x^2+2x\sqrt{x}+\left(\sqrt{x}\right)^2-4$

$f(x)=\left(x+\sqrt{x}\right)^2-4$

Donc $f(x)+4=\left(x+\sqrt{x}\right)^2\geq 0$

Donc $f(x)+4\geq 0$ donc $f(x)\geq -4$

Et on a : $f(0)=-4$ donc $f(x)\geq f(0)$

Donc $f(0)=-4$ est une valeur minimale de f au point $x_0=0$

2) Démontrons que f est non majorée.

Supposons f majorée donc : $\exists M\in\mathbb{R}: f(x)\leq M$ $\forall x\in\mathbb{R}^+$

$\Leftrightarrow\forall x\in\mathbb{R}^+:\left(x+\sqrt{x}\right)^2-4\leq M$

$\Leftrightarrow\forall x\in\mathbb{R}^+:\left(x+\sqrt{x}\right)^2\leq M+4$

$\Leftrightarrow\forall x\in\mathbb{R}^+: x+\sqrt{x}\leq\sqrt{M+4}$ (On peut toujours supposer $M\geq 0$

$\Leftrightarrow\forall x\in\mathbb{R}^+:\left(\sqrt{x}\right)^2+2\times\frac{1}{2}\sqrt{x}+\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2\leq\sqrt{M+4}$

$\Leftrightarrow\forall x\in\mathbb{R}^+:\left(\sqrt{x}+\frac{1}{2}\right)^2\leq\sqrt{M+4}+\frac{1}{4}$

$\Leftrightarrow\forall x\in\mathbb{R}^+:\sqrt{x}\leq\sqrt{\sqrt{M+4}+\frac{1}{4}}-\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow\forall x\in\mathbb{R}^+: x\leq\left(\sqrt{\sqrt{M+4}+\frac{1}{4}}-\frac{1}{2}\right)^2$ Absurde

Donc f est non majorée

Exercice6 : Soient f et g et h les trois fonctions définies par:

$f(x)=\frac{6x^2+8x+11}{(x-1)^2}$ et $g(x)=\frac{2x+3}{x-1}$ et

$h(x)=x^2+2$

1)a) Etudier les variations de g et de h

b) Etudier le signe de la fonction g

2)montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}-\{1\}: f(x)=(h\circ g)(x)$

3)Etudier les variations de f dans les intervalles :

$]1;+\infty[$; $\left[-\frac{3}{2};1\right[$; $\left]-\infty;-\frac{3}{2}\right]$

Réponses :1)a) $g(x)=\frac{2x+3}{x-1}$

On a $g(x)\in\mathbb{R}$ ssi $x-1\neq 0$ ssi $x\neq 1$

Donc $D_g=\mathbb{R}-\{1\}$ $\Delta=\begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-5\prec 0$

(C_g) Est l'hyperbole de centre $W(1;2)$ et d'asymptotes les droites d'équations respectives $x=1$ et $y=2$

Donc le tableau de variations de g

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$g(x)$	$\searrow$	$\|\|$	$\searrow$

1)a)on a h est une fonction polynôme donc $D_h=\mathbb{R}$

Donc le tableau de variations de h

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h(x)$	$\searrow$	2	$\nearrow$

b)étudions le signe de la fonction g sur $\mathbb{R}-\{1\}$

x	$-\infty$		$\frac{-3}{2}$		1		$+\infty$
$2x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{2x+3}{x-1}$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	

$D_{g\circ f}=\{x\in\mathbb{R}/x\in D_f et f(x)\in D_g\}$

2)montrons que : $\forall x\in\mathbb{R}-\{1\}: f(x)=(h\circ g)(x)$

$(h\circ g)(x)=h(g(x))=h\left(\frac{2x+3}{x-1}\right)$

$(h\circ g)(x)=\left(\frac{2x+3}{x-1}\right)^2+2=\frac{4x^2+12x+9+2x^2-4x+2}{(x-1)^2}$

$(h\circ g)(x)=\frac{6x^2+8x+11}{(x-1)^2}$

Donc $\forall x\in\mathbb{R}-\{1\}: f(x)=(h\circ g)(x)$

3)Etude des variations de f dans les intervalles :

a) Sur $\left]-\infty;-\frac{3}{2}\right]$:

On a $\forall x\in\mathbb{R}-\{1\}: f(x)=(h\circ g)(x)$

Puisque g est décroissante sur $\left]-\infty;-\frac{3}{2}\right]$ et

$\forall x\in\left]-\infty;-\frac{3}{2}\right]: g(x)\in[0;+\infty[$ et h est croissante sur $[0;+\infty[$ alors $f=h\circ g$ est décroissante sur $\left]-\infty;-\frac{3}{2}\right]$

b) sur $\left[-\frac{3}{2};1\right[$

Puisque g est décroissante sur $\left[-\frac{3}{2};1\right[$ et

$\forall x\in\left[-\frac{3}{2};1\right[: g(x)\in]-\infty;0]$ et h est décroissante sur $]-\infty;0]$ alors $f=h\circ g$ est croissante sur $\left[-\frac{3}{2};1\right[$

c) sur $]1;+\infty[$:

Puisque g est décroissante sur $]1;+\infty[$ et

$\forall x\in]1;+\infty[\ g(x)\in]0;+\infty[$ et h est croissante sur $]0;+\infty[$ alors $f=h\circ g$ est décroissante sur $]1;+\infty[$

Donc le tableau de variations de f :

x	$-\infty$	$-3/2$	1	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	2	$\nearrow$ $\|\|$	$\searrow$

http:// abcmaths.e-monsite.com

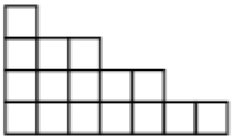
« C'est en forgeant que l'on devient forgeron »
Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices
Que l'on devient un mathématicien

prof: Atmani najib

LES SUITES NUMERIQUES

I) ACTIVITES

Activité 1 **:** suite définit par une formule explicite ou une formule de récurrence



Des gradins sont constitués de poutres comme ceci (voir dessin)

On considère la suite U des nombres de poutres par niveau en commençant par le haut qui sera appelé le rang 0, le nombre de poutres de rang n ∈ N est noté U_1.

1)formule de récurrence

a)donner les valeur de U_0 , U_1 , U_2 , U_3

b) comment passe-t-on de U_n à U_{n+1} ?

(Donner une relation entre ces deux termes)

c) en déduire les valeur de U_4 , U_5 , U_6

d) utiliser la calculatrice pour obtenir les valeurs de U_{10} , U_{100} puis U_{200}

e) utiliser la calculatrice pour trouver la plus petite valeur de n telle que $U_n \geq 500$

2) formule explicite

a) trouver une formule qui donne directement U_n en fonction de n

(Commencer par U_1 , U_2 , U_3 ,U_4 puis généraliser à n)

b) retrouver les valeurs de U_{10} ,U_{100} puis U_{200}

c) retrouver algébriquement la plus petite valeur de n telle que $U_n \geq 500$

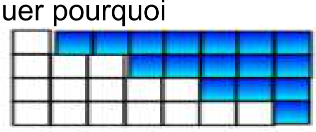
3. pour aller un peu plus loin :

soit $S_n = u_0 + u_1 + u_1 + ... + u_n$ la somme des nombres de poutres qu'il faut au total du rang 0 au rang n

a) donner les valeurs de S_0 , S_1 , S_2 et S_3

b) observer la figure et expliquer pourquoi

$$S_3 = 4\left(\frac{u_0 + u_3}{2}\right)$$



puis verrier que l'on retrouve bien S_3

c) calculer S_{10} par un raisonnement analogue

d) montrer que $S_n = (n+1)^2$

e) en déduire la hauteur maximale de gradin que l'on peut construire avec 1000 poutres au total et préciser le nombre de poutres qui restent

Activité 2 : Suite définie uniquement par une formule de récurrence :

soit la suite U définie par : $U_{n+1} = 0.95U_n + 5$

et $U_1 = 200$

1)calculer : U_1 , U_2 , U_3 , U_{10} , U_{100} , U_{200}

2) essayer de trouver la plus petite valeur de n telle que $U_n \prec 100$

3. un club à 200 membres inscrits le premier mois, Chaque mois, 5% des membres partent, mais le responsable arrive toujours à obtenir 5 nouvelles inscriptions

a) montrer que le nombre d'inscrit le ne mois est un

b) que semble devenir le nombre d'inscrits à long terme ?

Activité 3 **:** suite définie uniquement par une formule explicite

Soit la suite V définie par : $U_{n+1} = 100 + 100 \times 0.95^{n-1}$

1) calculer : V_1 , V_2 , V_3 , V_{10} , V_{100} et V_{200}

2) que semble-t-il pour les suites V et U où U est la suite de Activité 2 précédent ?

Activité4 : Une personne a reçu deux offres de deux société commerciales pour une durée de 4 ans.

La société $\mathcal{A}$ propose un salaire de 4500 Dh pour le premier mois et une augmentation de salaire de 75 Dh chaque mois.

La société $\mathcal{B}$ propose un salaire de 3500 Dh pour le premier mois et une augmentation de salaire de 3% chaque mois.

Soient a_n et b_n les salaires proposés respectivement par les sociétés $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ pour le nième mois.

1- Calculer les salaires des 4 premiers mois pour les deux sociétés.

2- Trouver une relation entre a_{n+1} et a_n puis entre b_{n+1} et b_n .

3- Calculer les salaires du 10 ème mois pour les deux sociétés.

4- Quelle est la société la plus bénéfique pour la personne ?

II) GENERALITES

1) Définitions et notations.

Définition : On appelle suite numérique toute application de $\mathbb{N}$ (ou une partie I de $\mathbb{N}$) vers $\mathbb{R}$

$u : I \to \mathbb{R}$

$n \mapsto u(n) = u_n$

Notation : Si u est une suite numérique définie Sur $\mathbb{N}$

L'image de l'entier n par u se note u_n et s'appelle le terme de rang *n* de la suite

L'entier n s'appelle **l'indice du terme** u_n

La suite numérique u se note : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. ou $(u_n)_n$

Remarque : On peut aussi définir une suite à partir d'un certain rang.

Exemple :1/ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie sur* $\mathbb{N}$ *par* $u_n = \dfrac{1}{n+2}$

$u_0 = \frac{1}{2}; u_1 = \frac{1}{3}; u_2 = \frac{1}{4}; u_3 = \frac{1}{5}; ......$

2/ $(v_n)_{n\geq 3}$ *définie pour tout* $n \geq 3$ *par* $v_n = \dfrac{1}{n-2}$

$v_3 = 1; v_4 = \frac{1}{2}; v_5 = \frac{1}{3}; v_6 = \frac{1}{4}; ......$

2) Comment générer une suite

Une suite numérique peut être définie de deux manières différentes :

a) Suite définie par : une expression explicite

Dans laquelle le terme u_n de la suite $(u_n)_n$ est définie en fonction de n

Exemple : Soit $(u_n)_n$ la suite définie par :

$u_n = 2n+3 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

1)Calculer : les quatres 1ere termes de la suite $(u_n)_n$

2) Calculer: $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} - u_n$

Solution :1) $u_0 = 2\times 0+3 = 3 \quad u_1 = 2\times 1+3 = 5$

$u_1 = 2\times 1+3 = 5 \quad u_3 = 2\times 3+3 = 9$

2) $u_{n+1} - u_n = (2(n+1)+3) - (2n+3)$

$u_{n+1} - u_n = 2n+2+3-2n-3 = 2$

b) Une suite définie par : une expression récurrente

Ces suites s'appellent des suites récurrentes, elles sont définies par le (ou les) premier (s) terme (s) et une relation entre deux ou plusieurs termes consécutifs.

Exemple1 : Suites récurrente du premier ordre

soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite récurrente définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 5u_n - 7 \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Calculer : $u_1; u_2; u_3$

Solution : On a $u_{n+1} = 5u_n - 7$

Pour n=0 on a: $u_{0+1} = 5u_0 - 7$ donc $u_1 = 5\times 2 - 7$

Donc : $u_1 = 3$

Pour n=1 on a: $u_{1+1} = 5u_1 - 7$ donc $u_2 = 5\times 3 - 7$

Donc : $u_2 = 8$

Pour n=2 on a: $u_{2+1} = 5u_2 - 7$ donc $u_3 = 5\times 8 - 7$

Donc : $u_3 = 33$

Remarque : Il faut bien écrire les indices : u_{n+1} n'est pas $u_n + 1$

Exemple2 : Suites numériques du second ordre.

Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite récurrente définie par :

$$\begin{cases} v_0 = 1; v_1 = -1 \\ v_{n+2} = 2v_{n+1} - 3v_n \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Calculer : $v_2; v_3; v_4$

Solution : On a $v_{n+2} = 2v_{n+1} - 3v_n$

Pour n=0 on a : $v_{0+2} = 2v_{0+1} - 3v_0$ donc $v_2 = 2v_1 - 3v_0$

Donc : $v_2 = 2\times(-1) - 3\times 1 = -5$

Pour n=1 on a: $v_{1+2} = 2v_{1+1} - 3v_1$ donc $v_3 = 2v_2 - 3v_1$

Donc : $v_3 = 2(-5) - 3(-1) = -7$

Pour n=2 on a: $v_{2+2} = 2v_{2+1} - 3v_2$ donc $v_4 = 2v_3 - 3v_2$

Donc : $v_4 = 2(-7) - 3(-5) = -14 + 15 = 1$

3) Suites majorées, suites minorées, suites bornées.

Activité1 : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$u_n = \dfrac{n+1}{2n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad : \frac{1}{2} < u_n \leq 1$

Solution :1) Montrons que : $u_n \leq 1$??

$1 - u_n = 1 - \dfrac{n+1}{2n+1} = \dfrac{(2n+1)-(n+1)}{2n+1} = \dfrac{n}{2n+1} \geq 0$

Donc $u_n \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

2)Montrons que : $\frac{1}{2} < u_n$??

$u_n - \frac{1}{2} = \frac{n+1}{2n+1} - \frac{1}{2} = \frac{2(n+1)-(2n+1)}{2n+1} = \frac{1}{2n+1} > 0$

Donc $\frac{1}{2} < u_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Par suite : : $\forall n \in \mathbb{N} \quad : \frac{1}{2} < u_n \leq 1$

On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par 1 car $u_n \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par $\frac{1}{2}$ car $\frac{1}{2} < u_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée car : $\forall n \in \mathbb{N}$: $\frac{1}{2} < u_n \leq 1$

Activité2 : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite récurrente définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

1- Calculer les 3 premiers termes.

2- Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad : 0 \leq u_n$

3- Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$: $u_n \leq 2$

Solution :1) On a $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$

Pour n=0 on a: $u_1 = \sqrt{u_0 + 2}$ donc $u_1 = \sqrt{2}$

Pour n=1 on a: $u_2 = \sqrt{u_1 + 2}$ donc $u_2 = \sqrt{\sqrt{2} + 2}$

Pour n=2 on a: $u_3 = \sqrt{u_2 + 2}$ donc $u_3 = \sqrt{\sqrt{\sqrt{2}+2}+2}$

2) Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad : 0 \leq u_n$

1étapes : l'initialisation : Pour n=0 nous avons $u_0 = 0$ donc $0 \leq u_0$.

Donc la proposition est vraie pour n=0

2étapes : d'hérédité ou Hypothèse de récurrence :

Supposons que : $0 \leq u_n$

3étapes : Montrons alors que : $0 \leq u_{n+1}$??

Or on a : $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2} \geq 0$

Donc : $\forall n \in \mathbb{N} \quad : 0 \leq u_n$

3) Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad : u_n \leq 2$

1étapes : l'initialisation : Pour n=0 nous avons $u_0 = 0$ donc $u_0 \leq 2$.

Donc la proposition est vraie pour n=0

2étapes : d'hérédité ou Hypothèse de récurrence :

Supposons que : $u_n \leq 2$

3étapes : Montrons alors que : $u_{n+1} \leq 2$??

on a : $u_n \leq 2$ donc $u_n + 2 \leq 4 \Rightarrow \sqrt{u_n + 2} \leq \sqrt{4}$

$\Rightarrow u_{n+1} \leq 2$

Donc : $\forall n \in \mathbb{N} \quad : 0 \leq u_n$

Par suite : : $\forall n \in \mathbb{N} \quad : 0 \leq u_n \leq 2$

On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par 0 car $u_n \leq 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 0car $0 \leq u_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée car : $\forall n \in \mathbb{N}$: $0 \leq u_n \leq 2$

Définition : Soit $(u_n)_{n\in I}$ une suite numérique. ($\mathbb{I} \subset \mathbb{N}$)

- On dit que la suite $(u_n)_{n\in I}$ est majorée s'il existe un réel M tel que : $\forall n \in I \quad u_n \leq M$
- On dit que la suite $(u_n)_{n\in I}$ est minorée s'il existe un réel m tel que : $\forall n \in I \quad m \leq u_n$
- On dit que la suite ($(u_n)_{n\in I}$ est bornée si elle est majorée et minorée.

Exemple : Soit $(v_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par :

$v_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

1)Montrer que $(v_n)_{n\geq 1}$ est minorée par 0

2)Montrer que $(v_n)_{n\geq 1}$ est majorée par $\frac{1}{2}$

3)Que peut-on déduire ?

Solution :1) Montrons que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad 0 \leq v_n$??

$v_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ (Le conjugué)

$v_n = \frac{(\sqrt{n+1})^2 - (\sqrt{n})^2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \geq 0$

Donc : $0 \leq v_n \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

Donc : $(v_n)_{n\geq 1}$ est minorée par 0

2)Montrons que : $v_n \le \frac{1}{2}$?? $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$v_n - \frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} - \frac{1}{2} = \frac{2-\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

On a : $n \ge 1$ et $n+1 \ge 2$ donc $\sqrt{n} \ge 1$ et $\sqrt{n+1} \ge \sqrt{2}$

Donc : $\sqrt{n+1}+\sqrt{n} \ge 1+\sqrt{2}$ donc

$-\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right) \le -1-\sqrt{2}$

Donc $2-\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right) \le 1-\sqrt{2}$ et puisque : $1-\sqrt{2} \prec 0$

Donc $v_n - \frac{1}{2} \prec 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

Donc $v_n \prec \frac{1}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

Donc la suite $(v_n)_{n\ge 1}$ est majorée par $\frac{1}{2}$

3)Donc la suite $(v_n)_{n\ge 1}$ est bornée car :

$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad : 0 < v_n < \frac{1}{2}$

Exercice1: Soit la suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$\begin{cases} u_{n+1} = u_n^{\,2} + 2u_n + 2 \\ u_0 = -1 \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Calculer u_1 et montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 1

Solutions :

$u_{0+1} = u_0^{\,2} + 2u_0 + 2 = (-1)^2 + 2\times(-1) + 2 = 1 + -2 + 2 = 1$

$u_n - 1 = u_n^{\,2} + 2u_n + 2 - 1 = u_n^{\,2} + 2u_n + 1 = (u_n+1)^2 \ge 0$

Donc : $1 \le u_n \ \forall n \in \mathbb{N}$

Donc : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 1

Exercice2: Soit la suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{7u_n}{2u_n+1} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 1 et majorée par 3.

Solutions : Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$: $0 < u_n < 3$

1étapes : n=0 on a : $0 < u_0 < 3$ car $0 < 1 < 3$

Donc la proposition est vraie pour n=0

2étapes : d'hérédité ou Hypothèse de récurrence :

Supposons que : $0 < u_n < 3$

3étapes : Montrons alors que : $0 < u_{n+1} < 3$??

On a : $0 < u_n$ donc $0 < 2u_n + 1$ et $0 < 7u_n$

Donc $0 < u_{n+1}$ (1)

Et on a : $u_{n+1} - 3 = \frac{7u_n}{2u_n+1} - 3 = \frac{7u_n - 3(2u_n+1)}{2u_n+1}$

$u_{n+1} - 3 = \frac{u_n - 3}{2u_n+1}$ et puisque on a : $0 < u_n < 3$

On a donc : $u_n - 3 < 0$ et $0 < 2u_n + 1$

Donc $u_{n+1} - 3 < 0$ Donc $u_{n+1} < 3$ (2)

De (1) **et** (2) **en déduit que :** $0 < u_{n+1} < 3$

D'où $\forall n \in \mathbb{N} \quad : 0 < u_n < 3$

Exercice3 : Soit la suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$u_n = 3n^2 + 6n - 4 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée

Solutions : Soit $n \in \mathbb{N}$ on a :

$u_n = 3n^2 + 6n - 4 = 3\left(n^2 + 2n\right) - 4 = 3\left((n+1)^2 - 1\right) - 4$

$u_n = 3(n+1)^2 - 7$

On a : $\forall n \in \mathbb{N} \quad (n+1)^2 \ge 0$

Donc : $3(n+1)^2 \ge 0$ donc $(n+1)^2 - 7 \ge -7$

Donc : $u_n \ge -7$ par suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par -7

Exercice4 : Soit la suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie

Par : $u_n = \frac{2+\cos n}{3-\sin\sqrt{n}} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée

Solutions : Soit $n \in \mathbb{N}$ on a :

$-1 \le \cos n \le 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ et $-1 \le \sin\sqrt{n} \le 1$

Donc : $1 \le 2+\cos n \le 3$ et $-1 \le -\sin\sqrt{n} \le 1$

Donc : $1 \le 2+\cos n \le 3$ et $2 \le 3-\sin\sqrt{n} \le 4$

Donc : $1 \le 2+\cos n \le 3$ et $1/4 \le \frac{1}{3-\sin\sqrt{n}} \le 1/2$

Donc : $1/4 \le \frac{2+\cos n}{3-\sin\sqrt{n}} \le 3/2$

Cad : $1/4 \le u_n \le 3/2$ donc : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée

Propriété : Une suite $(u_n)_{n\in I}$ est bornée si et seulement s'il existe un réel positif M tel que :

$\forall n \in I \ |u_n| \le M$

Exemple : Soit la suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$u_n = (-1)^n \sin\sqrt{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée

Solutions : Soit $n \in \mathbb{N}$ on a :

$|u_n| = \left|(-1)^n \sin\sqrt{n}\right| = \left|(-1)^n\right|\left|\sin\sqrt{n}\right| = \left|\sin\sqrt{n}\right| \leq 1$

Donc $|u_n| \leq 1 \; \forall n \in \mathbb{N}$

Donc : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée

4) Monotonie d'une suite.

Activité 1 : Soit la suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_n = \frac{-n}{n+2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Montrer que : $u_{n+1} - u_n \leq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Solutions : Soit $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$u_{n+1} - u_n = \left(\frac{-(n+1)}{n+1+2}\right) - \left(\frac{-n}{n+2}\right) = \frac{-n-1}{n+3} + \frac{n}{n+2}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(-n-1)(n+2) + n(n+3)}{(n+3)(n+2)} = \frac{-2}{(n+3)(n+2)} < 0$$

Donc : $u_{n+1} - u_n \leq 0$ donc $u_{n+1} \leq u_n \; \forall n \in \mathbb{N}$

On dira que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante

Activité2 :soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite récurrente définie

par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Montrer par récurrence que $u_n \leq u_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Solutions :1étapes :on a $u_1 = \sqrt{u_0 + 2} = \sqrt{2}$

Pour n=0 nous avons $u_0 = 1$ donc $u_0 \leq u_1$.

Donc la proposition est vraie pour n=0

2étapes : Supposons que : $u_n \leq u_{n+1}$

3étapes : Montrons alors que : $u_{n+1} \leq u_{n+2}$??

On a : $u_n \leq u_{n+1}$ donc $u_n + 2 \leq u_{n+1} + 2$

Donc : $\sqrt{u_n + 2} \leq \sqrt{u_{n+1} + 2}$ donc $u_{n+1} \leq u_{n+2}$

Par suite : : $\forall n \in \mathbb{N} \quad : u_n \leq u_{n+1}$

On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante

Définition : Soit $(u_n)_{n\in I}$ une suite numérique. ($\mathbb{I} \subset \mathbb{N}$)

On dit que la suite $(u_n)_{n\in I}$ est croissante si : $\forall n \in I$ $\forall m \in I \; : m \leq n \Rightarrow u_m \leq u_n$

On dit que la suite $(u_n)_{n\in I}$ est décroissante si :

$\forall n \in I \;\; \forall m \in I \; : m \leq n \Rightarrow u_m \geq u_n$

On dit que la suite $(u_n)_{n\in I}$ est monotone si elle est croissante ou décroissante sur $\mathbb{I}$.

Théorème : Soit $(u_n)_{n\in I}$ une suite numérique. ($\mathbb{I} \subset \mathbb{N}$)

- La suite $(u_n)_{n\in I}$ est croissante si et seulement si: $\forall n \in I \; u_{n+1} \geq u_n$: **(P)**
- La suite $(u_n)_{n\in I}$ est décroissante si et seulement si: $\forall n \in I \; u_{n+1} \leq u_n$

Démonstration :

On suppose que la suite $(u_n)_{n\in I}$ est croissante donc

$\forall n \in I \;\; \forall m \in I \; : m \leq n \Rightarrow u_m \leq u_n$

D'où (et puisque n + 1 ≥ n) alors : $u_{n+1} \geq u_n$

Inversement : On suppose que la suite $(u_n)_{n\in I}$ vérifie la propriété **(P).**

Soit n et m deux entiers tels que n ≥ m on a :

$u_m \leq u_{m+1} \leq u_{m+2} \leq \ldots \leq u_n$ Donc la suite : $(u_n)_{n\in I}$ est croissante.

Exemple1: soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite récurrente définie

Par : : $\begin{cases} u_0 = 1; u_1 = 1 \\ u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n - 2 \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Montrer que suite : $(u_n)_{n\in I}$ est croissante.

Solutions : Montrons par récurrence que $u_{n+1} \leq u_n$

1étapes : On a $u_1 \leq u_0$

Donc la proposition est vraie pour n=0

2étapes : Supposons que : $u_{n+1} \leq u_n$

3étapes : Montrons alors que : $u_{n+2} \leq u_{n+1}$??

On a : $u_{n+2} - u_{n+1} = 2u_{n+1} - u_n - 2 - u_{n+1}$

Donc $u_{n+2} - u_{n+1} = u_{n+1} - u_n - 2$ et on a : $u_{n+1} - u_n \leq 0$

Donc : $u_{n+1} - u_n - 2 \leq 0$ donc $u_{n+2} - u_{n+1} \leq 0$

Par suite : : $\forall n \in \mathbb{N} \quad : u_{n+1} \leq u_n$

Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante

Exemple2 : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{2^k}{k} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Etudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Solutions :

$$u_{n+1}-u_n=\sum_{k=1}^{n+1}\frac{2^k}{k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{2^k}{k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{2^k}{k}+\frac{2^{n+1}}{n+1}-\sum_{k=1}^{n}\frac{2^k}{k}$$

$u_{n+1}-u_n=\frac{2^{n+1}}{n+1}\succ 0$ Donc : $u_n\le u_{n+1}\quad \forall n\in\mathbb{N}^*$

Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante

Exemple3 : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par :

$$u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}\quad \forall n\in\mathbb{N}^*$$

Etudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Solutions : $u_{n+1}-u_n=\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{n+1+k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}$

Et on a : $\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{n+1+k}=\sum_{k'=2}^{n+2}\frac{1}{n+k'}$ on pose $k'=k+1$

Et puisque k' est une variable on peut l'appeler k'

$$\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{n+1+k}=\sum_{k'=2}^{n+2}\frac{1}{n+k'}=\sum_{k=2}^{n+2}\frac{1}{n+k}$$

Donc :

$$u_{n+1}-u_n=\sum_{k=2}^{n+2}\frac{1}{n+k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}=\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{n+1}$$

$$u_{n+1}-u_n=\frac{1}{2(n+1)(2n+1)}\succ 0\quad \forall n\in\mathbb{N}^*$$

$$u_{n+1}-u_n=\frac{2^{n+1}}{n+1}\succ 0\quad \forall n\in\mathbb{N}^*$$

Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante

Exercice5 : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite récurrente définie

par : $\begin{cases} u_{n+1}=\frac{8(u_n-1)}{u_n+2} & \forall n\in\mathbb{N} \\ u_0=3 \end{cases}$

1) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 2

2) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par 4

3)Etudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Solutions :1) Montrons que $2\le u_n\quad \forall n\in\mathbb{N}$????

1étapes : n=0 on a : $2\le u_0$ car $2<3$

Donc la proposition est vraie pour n=0

2étapes : Hypothèse de récurrence :

Supposons que: $2\le u_n$

3étapes : Montrons alors que : $2\le u_{n+1}$??

$$u_{n+1}-2=\frac{8(u_n-1)}{u_n+2}-2=\frac{8(u_n-1)-2(u_n+2)}{u_n+2}=\frac{6u_n-12}{u_n+2}$$

$u_{n+1}-2=\frac{6(u_n-2)}{u_n+2}$ et puisque on a : $2\le u_n$

Donc : $u_n-2\ge 0$ et $u_n+2>0$

Donc : $u_{n+1}-2\ge 0$

donc $2\le u_n\quad \forall n\in\mathbb{N}$

2) Montrons que $u_n\le 4\quad \forall n\in\mathbb{N}$????

1étapes : n=0 on a : $u_0\le 4$ car $3<4$

Donc la proposition est vraie pour n=0

2étapes : Hypothèse de récurrence :

Supposons que : $u_n\le 4$

3étapes : Montrons alors que : $u_{n+1}\le 4$??

$$4-u_{n+1}=4-\frac{8(u_n-1)}{u_n+2}=\frac{4(u_n+2)-8(u_n-1)}{u_n+2}=\frac{-4u_n+16}{u_n+2}$$

$4-u_{n+1}=\frac{4(4-u_n)}{u_n+2}=\frac{4(4-u_n)}{u_n+2}$ et puisque on a :

$u_n\le 4$

Donc : $4-u_n\ge 0$ et $u_n+2>0$

Donc $u_{n+1}\le 4$ par suite $u_n\le 4\ \forall n\in\mathbb{N}$

3) $u_{n+1}-u_n=\frac{8(u_n-1)}{u_n+2}-u_n=\frac{8(u_n-1)-u_n(u_n+2)}{u_n+2}=\frac{-u_n^2+6u_n-8}{u_n+2}$

On va factoriser $-u_n^2+6u_n-8$: $\Delta=36-32=4>0$

$x_1=\frac{-6+2}{-2}=2$ et $x_2=\frac{-6-2}{-2}=4$ donc :

$-u_n^2+6u_n-8=-(u_n-2)(u_n-4)$

Donc : $u_{n+1}-u_n=\frac{-(u_n-2)(u_n-4)}{u_n+2}$

Or on a : $u_n\ge 2$ et $u_n\le 4$

Donc : $u_{n+1}-u_n=\frac{-(u_n-2)(u_n-4)}{u_n+2}\ge 0$ donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

est strictement croissante

III) SUITES ARITHMETIQUES ; SUITES GEOMETRIQUES

1) Suite arithmétique.

1.1 Définition

Activité1 Compléter les suites de nombres suivantes :

-5 ; -2 ; 1 ; 4 ; … ;…. ;… ;16

10 ; 5 ; 0 ; -5 ; … ;…. ;… ;-25

Activité2 : soit $(u_n)_n$ la suite définie par :

$u_n = 3n+8 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Calculer $u_{n+1} - u_n$

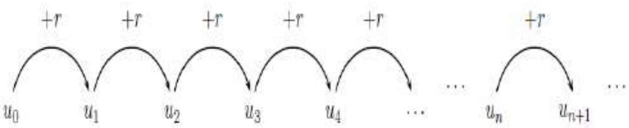
Solution : $u_{n+1} - u_n = (3(n+1)+8) - (3n+8)$

$u_{n+1} - u_n = 3n+3+8-3n-8 = 3 = constante$

On dit que la suite $(u_n)_{n\in I}$ est une suite arithmétique

Définition : On appelle suite **arithmétique** toute suite $(u_n)_{n\in I}$ définie par son premier terme et par la relation récurrente : $\forall n \in I \quad u_{n+1} = u_n + r$

Où r est un réel fixe. Le réel r s'appelle **la raison** de la suite $(u_n)_{n\in I}$.



Exemple : *soient Les suites* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définies par :* $u_{n+1} = u_n - 3$ et $u_0 = 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$v_n = n^2 + 2 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$

1)La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de raison $r = -3$ et de premier terme $u_0 = 2$

2) $v_0 = 2; v_1 = 3; v_2 = 6$

Ainsi : $v_1 - v_0 = 1$ et $v_2 - v_1 = 3$

La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est donc pas arithmétique

1.2 propriété caractéristique d'une suite arithmétique

Trois termes consécutifs d'une suite arithmétique.

$(u_n)_{n\geq p}$ Est suite arithmétique si et seulement si

$2u_{n+1} = u_n + u_{n+2} \ \forall n \geq p$

Preuve : soit $(u_n)_{n\geq p}$ suite arithmétique de raison r

On a donc : $u_{n+1} = u_n + r$ et $u_{n+2} = u_{n+1} + r$

Donc : $u_{n+2} - u_{n+1} = r$ et $u_{n+1} - u_n = r$ donc :

$u_{n+2} - u_{n+1} = u_{n+1} - u_n$ Donc : $u_{n+2} + u_n = 2u_{n+1}$

Inversement : soit $(u_n)_{n\geq p}$ suite tel que :

$2u_{n+1} = u_n + u_{n+2} \quad \forall n \geq p$

Montrons que $(u_n)_{n\geq p}$ est une suite arithmétique ??

On a : $2u_{n+1} = u_n + u_{n+2}$ donc $u_{n+2} - u_{n+1} = u_{n+1} - u_n \quad \forall n \geq p$

Donc la suite : $(u_{n+1} - u_n)_{n\geq p}$ est une suite constante

Soit r cette constante donc : $u_{n+1} - u_n = r$

Donc $(u_n)_{n\geq p}$ est une suite arithmétique

Application : Déterminer le réel x pour que les nombres $(3x - 1)$;$(1 - 4x)$ et $(x - 5)$ soient les termes consécutifs d'une suite Arithmétique pour laquelle il faut déterminer la raison.

Solution : $(3x - 1)$;$(1 - 4x)$ et $(x - 5)$ soient les Termes consécutifs d'une suite Arithmétique

Ssi $2(1-4x) = (3x-1) + (x-5)$

$-8x + 2 = 4x - 6 \Leftrightarrow -12x = -8 \Leftrightarrow x = \dfrac{2}{3}$

Donc les termes de la suite sont :

$3\times\dfrac{2}{3} - 1 = 1$ et $1 - 4\times\dfrac{2}{3} = -\dfrac{5}{3}$ et $\dfrac{2}{3} - 5 = -\dfrac{13}{3}$

Donc : $-\dfrac{5}{3} - 1 = -\dfrac{8}{3} = r$

1.3. Terme général d'une suite arithmétique.

Soit $(u_n)_{n\in I}$ une suite arithmétique de raison r et u_p l'un de ses termes. Soit n un entier naturel

$\cancel{u_{p+1}} = u_p + r$

$\cancel{u_{p+2}} = \cancel{u_{p+1}} + r$

$\vdots$

$u_n = \cancel{u_{n-1}} + r$

$u_n = u_p + \underbrace{(r + r + \cdots + r)}_{(n-p)termes}$

En faisant la somme membre à membre on obtient :

D'où : $u_n = u_p + (n-p)r$

Propriété : Soit $(u_n)_{n\in I}$ une suite arithmétique de raison r et u_p l'un de ses termes

On a : $\forall n \in I \quad u_n = u_p + (n-p)r$

Remarque : Si u_0 est le premier terme d'une suite arithmétique de raison r alors : $u_n = u_0 + nr$

Si u_1 est le premier terme d'une suite arithmétique de raison r alors : $u_n = u_1 + (n-1)r$

Application : Soit $(u_n)_n$ une suite arithmétique tel que $u_1 = 3$ et $u_5 = 9$

1) Déterminer sa raison r

2) Déterminer son premier terme u_0 .

3) écrire u_n en fonction de n

Solutions : 1) la raison r ??

on a : $\forall (n;p)\in\mathbb{N}^2 \quad u_n = u_p + (n-p)r$

Pour n= 5 et p=1 on a : $u_5 = u_1 + (5-1)r$

Donc : $9 = 3+4r \Leftrightarrow 4r = 6 \Leftrightarrow r = \frac{3}{2}$

2) le terme u_0 ??

$u_1 = u_0 + (1-0)r \Leftrightarrow 3 = u_0 + \frac{3}{2} \Leftrightarrow u_0 = 3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$

3) u_n en fonction de n ?

$u_n = u_1 + \frac{3}{2}(n-1) \Leftrightarrow u_n = 3 + \frac{3}{2}(n-1)$

$u_n = \frac{3}{2} + \frac{3}{2}n \quad \forall n\in\mathbb{N}$

Exercice6 : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite récurrente définie par : $\begin{cases} u_{n+1} = \frac{2u_n - 1}{u_n} & \forall n\in\mathbb{N} \\ u_0 = 2 \end{cases}$ et on considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$v_n = \frac{1}{u_n - 1} \quad \forall n\in\mathbb{N}$

1) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique

2) écrire u_n en fonction de n

Solution :

1) $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{u_{n+1}-1} - \frac{1}{u_n - 1} = \frac{1}{\frac{2u_n - 1}{u_n} - 1} - \frac{1}{u_n - 1}$

$v_{n+1} - v_n = \frac{u_n}{u_n - 1} - \frac{1}{u_n - 1} = 1$

Donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison $r = 1$ et de premier terme $v_0 = \frac{1}{u_0 - 1} = \frac{1}{2-1} = 1$

2) écrire u_n en fonction de n

On a $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison $r = 1$ et de premier terme $v_0 = 1$

Donc : $v_n = v_0 + nr = 1 + n\times 1 = 1 + n$

Puisque : $v_n = \frac{1}{u_n - 1}$ donc $u_n - 1 = \frac{1}{v_n}$ donc $u_n = \frac{1}{v_n} + 1$

donc $u_n = \frac{v_n + 1}{v_n} = \frac{1+(n+1)}{n+1} = \frac{n+2}{n+1}$

1.4 La somme des termes successifs d'une suite arithmétique.

Propriété : Soient $(u_n)_n$ une suite arithmétique p un entier naturel et $S_n = u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + \cdots + u_n$

On a : $s_n = \frac{(n-p+1)}{2}(u_p + u_n)$

Avec : $n-p+1$ le nombre des termes de la somme

u_p : le premier terme de la somme

u_n : le dernier terme de la somme

Preuve : Soient $(u_n)_n$ une suite arithmétique de raison r et p un entier naturel et

$s_n = u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + ... + u_{n-2} + u_{n-1} + u_n$

Donc : $s_n = u_n + u_{n-1} + u_{n-2} + ... + u_{p+2} + u_{p+1} + u_p$

En faisant la somme membre à membre on obtient :

$2s_n = (u_n + u_p) + (u_{n-1} + u_{p+1}) ... + (u_{n-1} + u_{p+1}) + (u_n + u_p)$

Et on a : $u_{n+k} + u_{p+k} = (u_p + kr) + u_p + (n-k-p)r$

Donc : $u_{n+k} + u_{p+k} = u_p + u_p + (n-p)r$

Donc : $u_{n+k} + u_{p+k} = u_p + u_n$

Et par suite :

$2s_n = (u_n + u_p) + (u_n + u_p) ... + (u_n + u_p) + (u_n + u_p)$

Donc :

$2s_n = \underbrace{(u_n + u_p) + (u_n + u_p) ... + (u_n + u_p) + (u_n + u_p)}_{n-p+1}$

Donc : $2s_n = (n-p+1)(u_n + u_p)$

Donc : $s_n = \frac{(n-p+1)}{2}(u_p + u_n)$

Remarque : On note la somme :

$s_n = u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + ... + u_{n-2} + u_{n-1} + u_n$ par :

$s_n = \sum_{k=p}^{k=n} u_k$

Si p=0 on a : $s_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k = \frac{n+1}{2}(u_0 + u_n)$

Si p=1 on a : $s_n = \sum_{k=1}^{k=n} u_k = \frac{n}{2}(u_1 + u_n)$

Exemple : calculer en fonction de n les sommes suivantes :

1) $s_n=\sum_{k=1}^{k=n} k=1+2+3+...+n$

2) $s_n'=\sum_{k=0}^{k=n}(2k+1)=1+3+5+...+(2n+1)$

Solutions :1) On pose : $u_n=n$

On a : $(u_n)_n$ une suite arithmétique de raison r=1

Car : $u_{n+1}-u_n=1$

Donc : $s_n=\sum_{k=1}^{k=n} k=u_1+u_2+u_3+...+u_n=\frac{n}{2}(u_1+u_n)$

Donc : $s_n=\frac{n}{2}(1+n)$

1)on pose : $v_n=2n+1$

On a : $(v_n)_n$ une suite arithmétique de raison r=2

Car : $v_{n+1}-v_n=2$

Donc :

$s_n'=\sum_{k=0}^{k=n}(2k+1)=v_0+v_1+v_2+...+v_n=\frac{n+1}{2}(v_0+v_n)$

Donc :

$s_n'=\frac{n+1}{2}(1+2n+1)=\frac{n+1}{2}(2n+2)=(n+1)^2$

Exercice7 : Une entreprise de transport possède 40 camions en décembre 1991. L'évolution de l'entreprise est telle que celle-ci doit acheter 8 camions supplémentaires chaque année.

1) Calculer le nombre de camions que possède l'entreprise en 1992, en 1993 et en 1994.

2) Ces nombres forment une suite.

a) Donner la nature de cette suite.

b) Préciser le premier terme u_1 et la raison de cette suite.

c) Donner l'expression du nombre Un de camions que possède l'entreprise l'année n.

3) Quel est le nombre de camions que possède l'entreprise en 2002 ?

2) Suite géométrique.

Activité1 Compléter les suites de nombres suivantes :

1 ; 2 ; 4 ; 8 ; … ;…. ;… ;128

1 ; 3 ; 9 ; 27 ; … ; …

$1,\ \frac{-1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{-1}{8}$,; … ;…. ;…

Définition : On appelle suite géométrique toute suite $(u_n)_n$ définie par son premier terme et par la relation récurrente : $u_{n+1}=qu_n\quad \forall n\in I$ où q est un réel fixe.

Le réel q s'appelle **la raison** de la suite $(u_n)_n$.

Le premier terme et la raison d'une suite géométrique s'appellent aussi les éléments de la suite géométrique.

Exemple1 : soit la suite $(u_n)_n$ définie par : $u_{n+1}=\frac{u_n}{2}$

$\forall n\in\mathbb{N}$ et $u_0=2$

la suite $(u_n)_n$ est une suite géométrique de raison $q=\frac{1}{2}$ et de premier terme $u_0=2$

Exemple2 : soit la suite $(v_n)_n$ définie par :

$v_n=2\times 3^n\quad \forall n\in\mathbb{N}$

$\frac{v_{n+1}}{v_n}=\frac{2\times 3^{n+1}}{2\times 3^n}=3=q$

Donc la suite est géométrique de raison $q=3$

1.2 Terme général d'une suite géométrique

Soit $(u_n)_n$ une suite géométrique de raison q et p un entier naturel on a :

$u_{p+1}=qu_p$

$u_{p+2}=qu_{p+1}$

⋮

$u_n=qu_{n-1}$

En faisant les produits membre à membre on obtient :

$u_n=\underbrace{q\times q\times q\times..\times q}_{n-p}u_p$

D'où $u_n=q^{n-p}u_p$

Propriété : Si $(u_n)_{n\in I}$ est une suite géométrique de raison q et si p est un entier naturel alors :

$u_n=q^{n-p}u_p\quad \forall n\in I$

Cas particuliers :

1) si p=0 alors : $u_n=q^n u_0$ 2) si p=1 alors : $u_n=q^{n-1}u_1$

Exemple1 : Soit $(u_n)_n$ une suite géométrique tel que $u_1=\frac{3}{2}$ et $u_4=\frac{3}{16}$ 1) Déterminer sa raison q

2) écrire u_n en fonction de n

Solutions : 1) la raison q ??

on a : $\forall(n;p)\in\mathbb{N}^2\quad u_n=q^{n-p}u_p$

Pour n= 4 et p=1 on a : $u_4 = q^{4-1}u_1$

Donc : $\frac{3}{16} = q^3 \frac{3}{126} \Leftrightarrow q^3 = \frac{1}{8} \Leftrightarrow q = \frac{1}{2}$

2) u_n en fonction de n ?

$$u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \times u_1 \Leftrightarrow u_n = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Exemple2 : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{u_n}{3-u_n} \\ u_0 = \dfrac{1}{2} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$ et on considère la suite

$(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $v_n = 1 - \frac{2}{u_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

1) Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique

2) écrire u_n en fonction de n

Solution :1) $v_{n+1} = 1 - \frac{2}{u_{n+1}} = 1 - \frac{2}{\frac{u_n}{3-u_n}} = 1 - \frac{6-2u_n}{u_n}$

$v_{n+1} = 3\left(1 - \frac{2}{u_n}\right)$ Donc $v_{n+1} = 3v_n$

Donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q = 3$ et de premier terme $v_0 = -3$

2) écrire u_n en fonction de n

On a $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q = 3$ et de premier terme $v_0 = -3$

Donc : $v_n = u_0 \times q^n \Leftrightarrow v_n = -3 \times 3^n = -3^{n+1} \; \forall n \in \mathbb{N}$

Puisque : $v_n = 1 - \frac{2}{u_n}$ donc $u_n = \frac{2}{1-v_n}$ donc $u_n = \frac{2}{1+3^{n+1}}$

1.3 La somme des termes consécutifs d'une suite géométrique.

Proposition : Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q , et u_p l'un de ses termes.

Et $s_n = u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + \ldots + u_{n-2} + u_{n-1} + u_n$

Si $q = 1$ alors : $s_n = (n-p+1)u_p$

Si $q \neq 1$ alors : $s_n = u_p \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$

Preuve : Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q , et u_p l'un de ses termes.

Soit $s_n = u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + \ldots + u_{n-2} + u_{n-1} + u_n$

Si $q = 1$ tous les u_i sont égaux

et $s_n = u_p + u_p + u_p + \ldots + u_p \; (n-p+1) termes$

Donc : $s_n = (n-p+1)u_p$

Si $q \neq 1$

On a : $s_n = u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + \ldots + u_{n-2} + u_{n-1} + u_n$

Donc : $qs_n = qu_p + qu_{p+1} + qu_{p+2} + \ldots + qu_{n-2} + qu_{n-1} + qu_n$

Donc :

$qs_n = qu_{p+1} + qu_{p+2} + qu_{p+3} + \ldots + qu_{n-1} + qu_n + qu_{n+1}$

$s_n - qs_n = u_p - u_{n+1}$

Par suite : $s_n(1-q) = u_p - u_p q^{n-p+1}$

$$s_n = u_p \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$$

Application :

Exemple1 : Un jeune homme se préparait à l'examen du baccalauréat ; son père, pour l'encourager, lui demanda ce qu'il désirait en récompense

Mon examen devant avoir lieu le 20 juin, répond-t-il, donne-moi seulement 1 centime le 1er juin, 2 centimes le lendemain, 4 centimes le surlendemain, en doublant chaque jour jusqu'au 20 inclusivement. Et donne mois la somme. J'emploierai cet argent pour faire un voyage pendant les vacances.

Le père pensa qu'avec cette somme son fils n'irait pas loin ; mais au bout de quelques jours, il commença à s'apercevoir de son erreur.

Avec quelle somme le fils va-t-il pouvoir partir en vacances ?

Solution : Les nombres de centimes à payer chaque jour sont les termes d'une suite géométrique de 20 termes dont le premier est : $u_1 = 1$ et et la raison $q = 2$

$u_2 = 2$ (La somme à donner le 2 iem jour) ....

$u_{20} = \ldots$ (La somme à donner le 20e jour)

Donc : $u_n = u_1 \times q^{n-1} = 1 \times 2^{n-1} = 2^{n-1}$

$u_{20} = 2^{20-1} = 2^{19} = 524288$ Centimes

La somme totale à payer serait :

$s_{20}=u_1+u_2+u_3+...+u_{20}=u_1\dfrac{1-2^{20-1+1}}{1-2}$

$s_{20}=2^{20}-1=10485.75$ Centimes

$s_{20}\simeq 1million$ 500dh   Joli voyage !

Exemple2 : calculer en fonction de n la somme suivante :

$$s_n=\sum_{k=0}^{k=n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^k=1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+...+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

Solutions :1) On pose : $u_n=\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

On a : $(u_n)_n$ une suite géométrique de raison $q=\dfrac{1}{2}$

Car : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\dfrac{1}{2}$ Donc : $s_n=\sum_{k=0}^{k=n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^k=1\dfrac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}=2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$

Propriété : a , b et c sont trois termes consécutifs d'une suite géométrique

si et seulement si $b^2=a\times c$

Preuve : (En exercice)

Application :

Déterminer le réel x pour que les nombres : $(1+x^2)$; $(3+x)$ et 10 soient les termes consécutifs d'une suite géométrique dans cet ordre et déterminer sa raison.

Solution : $(1+x^2)$; $(3+x)$ et 10 sont trois termes consécutifs d'une suite géométrique

si et seulement si $(3+x)^2=10\times(1+x^2)$

$\Leftrightarrow x^2+6x+9=10x^2+10\Leftrightarrow 9x^2-6x+1=0$

$\Leftrightarrow (3x-1)^2=0\Leftrightarrow 3x-1=0\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{3}$

Donc :les termes sont : $\dfrac{10}{9}$ et $\dfrac{10}{3}$ et 10 donc : $q=\dfrac{10/3}{10/9}=3$

Exercice8 : soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_{n+2}=\dfrac{1}{27}(12u_{n+1}-u_n) \\ u_0=2;u_1=\dfrac{4}{9}\end{cases}\quad \forall n\in\mathbb{N}$$

et on considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$v_n=u_n-\dfrac{1}{3^n}\quad\forall n\in\mathbb{N}$

1) Montrer que $u_{n+1}=\dfrac{1}{9}u_n+\dfrac{2}{3^{n+2}}\quad\forall n\in\mathbb{N}$

2) a) Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont en déterminera la raison et le premier terme

b) écrire v_n et u_n en fonction de n

c) calculer la somme : $s_n=\sum_{k=0}^{k=n}u_k=u_0+u_1+...+u_n$

Solution :1) Montrons par récurrence que

$u_{n+1}=\dfrac{1}{9}u_n+\dfrac{2}{3^{n+2}}\quad\forall n\in\mathbb{N}$

1étapes : n=0 $u_1=\dfrac{1}{9}u_0+\dfrac{2}{3^{0+2}}=\dfrac{2}{9}+\dfrac{2}{9}=\dfrac{4}{9}$

Donc la proposition est vraie pour n=0

2étapes : Supposons que : $u_{n+1}=\dfrac{1}{9}u_n+\dfrac{2}{3^{n+2}}$

3étapes : Montrons alors que : $u_{n+2}=\dfrac{1}{9}u_{n+1}+\dfrac{2}{3^{n+3}}$??

on a: $u_{n+1}=\dfrac{1}{9}u_n+\dfrac{2}{3^{n+2}}$ donc $u_n=9\left(u_{n+1}-\dfrac{2}{3^{n+2}}\right)$

et on a : $u_{n+2}=\dfrac{1}{27}(12u_{n+1}-u_n)$

$u_{n+2}=\dfrac{1}{27}\left(12u_{n+1}-9\left(u_{n+1}-\dfrac{2}{3^{n+2}}\right)\right)$

$u_{n+2}=\dfrac{1}{27}\left(3u_{n+1}+\dfrac{2}{3^n}\right)$ Donc $u_{n+2}=\dfrac{1}{9}u_{n+1}+\dfrac{2}{3^{n+2}}$

Par suite : : $\forall n\in\mathbb{N}\quad :u_{n+1}=\dfrac{1}{9}u_n+\dfrac{2}{3^{n+2}}$

2)a) on a: $v_{n+1}=u_{n+1}-\dfrac{1}{3^{n+1}}$

Donc : $v_{n+1}=\dfrac{1}{9}u_n+\dfrac{2}{3^{n+2}}-\dfrac{1}{3^{n+1}}=\dfrac{1}{9}u_n-\dfrac{1}{3^{n+2}}$

$v_{n+1}=\dfrac{1}{9}\left(u_n-\dfrac{1}{3^n}\right)$ donc $v_{n+1}=\dfrac{1}{9}v_n$

Donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison

$q=\dfrac{1}{9}$ et de premier terme $v_0=1$

2) b) Ecrire v_n et u_n en fonction de n

On a $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison

$q=\dfrac{1}{9}$ et de premier terme $v_0=1$

Donc : $v_n=v_0\times q^n\Leftrightarrow v_n=\left(\dfrac{1}{9}\right)^n\quad\forall n\in\mathbb{N}$

Puisque : $u_n=v_n+\dfrac{1}{3^n}$ donc $u_n=\left(\dfrac{1}{9}\right)^n+\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$

2) c) $s_n=\sum_{k=0}^{k=n}u_k=u_0+u_1+...+u_n$??

$u_n=v_n+w_n$ Avec $w_n=\left(\frac{1}{3}\right)^n$

On a $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites géométriques de raison $q=\frac{1}{9}$ et $q'=\frac{1}{3}$ donc

Donc $s_n=\sum_{k=0}^{k=n}u_k=\sum_{k=0}^{k=n}v_k+\sum_{k=0}^{k=n}w_k$

$$s_n=\sum_{k=0}^{k=n}u_k=v_0\frac{1-\left(\frac{1}{9}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{9}}+w_0\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{9}{8}\left(1-\left(\frac{1}{9}\right)^{n+1}\right)+\frac{3}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)$$

$$\sum_{k=0}^{k=n}u_k=\frac{21}{8}-\frac{1}{8}\left(\frac{1}{9}\right)^n-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Exercice9 : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1}=\dfrac{u_n}{\sqrt{u_n+2}} & \forall n\in\mathbb{N} \\ u_0\in\left]-1;0\right[\end{cases}$$

1) Montrer que $-1\prec u_n\prec 0\quad \forall n\in\mathbb{N}$

2) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite strictement croissante

3) Montrer que $u_{n+1}\geq\frac{u_n}{\sqrt{u_n+2}}\quad\forall n\in\mathbb{N}$

Et en déduire que : $u_n\geq\frac{u_0}{\left(\sqrt{u_0+2}\right)^n}\quad\forall n\in\mathbb{N}$

Solution : 1) montrons par récurrence que $-1\prec u_n\prec 0\quad\forall n\in\mathbb{N}$

1étapes : n=0 on a : $-1\prec u_0\prec 0$

Donc la proposition est vraie pour n=0

2étapes : Supposons que : $-1\prec u_n\prec 0$

3étapes : Montrons alors que : $-1\prec u_{n+1}\prec 0$??

On a : $-1\prec u_n\prec 0$ donc : $1\prec u_n+2\prec 2$

Donc : $1\prec\sqrt{u_n+2}\prec\sqrt{2}$ donc : $\frac{1}{\sqrt{2}}\prec\frac{1}{\sqrt{u_n+2}}\prec 1$

et puisque : $0\prec -u_n\prec 1$ alors : $0\prec\frac{-u_n}{\sqrt{u_n+2}}\prec 1$

Donc : $-1\prec\frac{u_n}{\sqrt{u_n+2}}\prec 0$ donc $-1\prec u_{n+1}\prec 0$

D'où : $-1\prec u_n\prec 0\quad\forall n\in\mathbb{N}$

2) Montrons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite strictement croissante

$$u_{n+1}-u_n=\frac{u_n}{\sqrt{u_n+2}}-u_n=\frac{u_n}{\sqrt{u_n+2}}\left(1-\sqrt{u_n+2}\right)$$

et puisque : $1-\sqrt{u_n+2}\prec 0$ et $\frac{u_n}{\sqrt{u_n+2}}\prec 0$

Alors : $u_{n+1}-u_n\succ 0$ donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite strictement croissante

3) Montrons que $u_{n+1}\geq\frac{u_n}{\sqrt{u_n+2}}\quad\forall n\in\mathbb{N}$

Soit $n\in\mathbb{N}$ on a : $u_n\geq u_0$ car $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante

Donc : $\sqrt{2+u_n}\geq\sqrt{2+u_0}$ cad $\frac{1}{\sqrt{2+u_n}}\leq\frac{1}{\sqrt{2+u_0}}$

et puisque : $u_n\prec 0$ alors : $\frac{u_n}{\sqrt{2+u_n}}\geq\frac{u_n}{\sqrt{2+u_0}}$

Donc : $u_{n+1}\geq\frac{u_n}{\sqrt{2+u_0}}\quad\forall n\in\mathbb{N}$

3)Soit $n\in\mathbb{N}$ on a : $0\succ u_{n+1}\geq\frac{u_n}{\sqrt{2+u_0}}$

Donc : $0\leq -u_{n+1}\leq\frac{-u_n}{\sqrt{2+u_0}}$

En donnant à n des valeurs on trouve :

$0\leq -u_1\leq\frac{-u_0}{\sqrt{2+u_0}}$

$0\leq -u_2\leq\frac{-u_1}{\sqrt{2+u_1}}$

………

$0\leq -u_{n-1}\leq\frac{-u_{n-2}}{\sqrt{2+u_0}}$

$0\leq -u_n\leq\frac{-u_{n-1}}{\sqrt{2+u_0}}$

Le produit des inégalités donne : $0\prec -u_n\leq\frac{-u_0}{\left(\sqrt{u_0+2}\right)^n}$

Donc : $u_n\geq\frac{u_0}{\left(\sqrt{u_0+2}\right)^n}\quad\forall n\in\mathbb{N}$

Activités sur les suites

Activité 1 :

Jeu d'échec et suite géométrique.

Le jeu d'échec fut inventé par un mathématicien indien. le Roi le communiqua en fut si émerveillé qu'il dit à l'inventeur de choisir lui-même la récompense qu'il désirait.
Or l'échiquier se compose de 64 case.
Le mathématicien demanda 1 grain de blé pour la première case, 2 grains pour la deuxième, 4 grains pour la troisième et ainsi de suite en doublant toujours le nombre de grains d'une case à la suivante jusqu'à la dernière.

Tout le monde fut étonné de la modicité d'une pareille demande ; mais on fut bien plus surpris quand le mathématicien, ayant fait son calcul, prouva au roi que son royaume ne suffirait pas à produire en plusieurs années tout le blé qu'il demanderait.

En effet, si on se sert de la formule pour avoir le nombre de grains, on obtient

$S = 2^{64} - 1 = 18\ 446\ 774\ 073\ 709\ 551\ 615$.

On peut savoir à peu prés combien il a de grains dans un kilo de blé et combien un hectare de terrain produit en moyenne de kilogrammes et donc combien d'hectares il faudrait pour produit le nombre demandé.
On trouve que la surface entière de la terre ensemencée ne serait pas suffisante.
On a aussi calculé que cette quantité de grains couvrirait à la hauteur de 1 m la surface de la france considérée comme plane.

Activité 2 :

1) La population d'un village de montagne diminue tous les ans de 20 %. Sachant qu'en 1996 elle était de 1 875 habitants, compléter le tableau suivant :

Année	1996	1997	1998	1999	2000
Nombre d'habitants					

2) Montrer que les nombres d'habitants sont des termes d'une suite dont on déterminera la nature et la raison.

3) À l'aide de la calculatrice ou d'un tableur :

a) Déterminer la population de ce village en 2010

b) Donner l'année d'extinction de ce village si on suppose la diminution de la population constante

La célèbre suite du mathématicien italien Fibonacci

La **suite de Fibonacci** tient son nom du mathématicien italien Leonardo Fibonacci, qui a vécu à Pise au XIIème siècle (1175-1240), d'où son nom de Léonard de Pise, en référence à Léonard de Vinci.

La suite de Fibonacci se construit facilement : chaque terme de la suite, à partir du rang 2, s'obtient en additionnant les deux précédents, les deux premiers termes étant 0 et 1. Le troisième terme est donc 1 (0 + 1 = 1), le quatrième terme 2 (1 + 1 = 2), le cinquième 3 (1 + 2 = 3), le sixième 5 (2 + 3 = 5), et ainsi de suite. Le début de la suite du célèbre mathématicien Fibonacci est donc : 0, 1, 1 , 2 , 3 , 5 , 8 , 13, 21 ...

Appelons (u_n) la suite de Fibonacci. On a donc $u_0 = 0$; $u_1 = 1$ et pour tout n entier naturel,
on a alors $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.
Chaque terme de cette suite, à partir du rang 2, est donc la somme des deux termes précédents.

La suite de Fibonacci n'est ni arithmétique, ni géométrique.

En effet, $u_1 - u_0 = 1 - 0 = 1$ et $u_2 - u_1 = 1 - 1 = 0$. La différence entre deux termes consécutifs de cette suite n'est pas constante donc la suite de Fibonacci n'est pas arithmétique.
Son premier terme étant 0, elle ne peut être géométrique.
On remarque également par exemple que $u_4/u_3 = 3/2$ et que $u_5/u_4 = 5/3$. En définissant une suite en prenant les termes de la suite de Fibonacci à partir du terme de rang 2, on obtient donc une suite qui n'est pas géométrique : le rapport entre 2 termes consécutifs de cette suite n'est pas constant.

C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices Que l'on devient un mathématicien

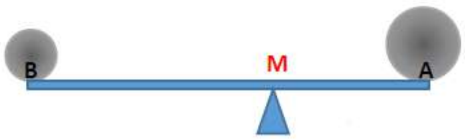
Cours** BARYCENTRE **avec exercices d'applications et de réflexions avec solutions

PROF: ATMANI NAJIB http://www.xriadiat.com/ 1BAC BIOF

BARYCENTRE

I) ACTIVITES

Activité 1 : Sur une barre rigide de poids négligeable et de longueur $1m$ on considère deux boules métalliques de 500 g en A et de 350 g en B. M un point sur la barre. Déterminer la position de M sachant que le système et en équilibre.



Activité 2 : Soit ABC un triangle rectangle en A et $AC = 2AB$.

1- Montrer qu'il existe un et un seul point G tel que : $2\overrightarrow{AG}-2\overrightarrow{BG}+2\overrightarrow{CG}=\vec{0}$

2- Tracer le point G.

3- Si le plan est rapporté au repère $\left(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AI}\right)$ où I est milieu de $[AC]$, quels seront les coordonnées du point G.

II) DEFINITIONS ET PROPRIETES :

1) Vocabulaires

Définitions : Soit A un point et α un réel non nul ; le couple (A, α) s'appelle un point pondéré. Plusieurs points pondérés constituent un système pondéré

2) Barycentre de deux points pondérés.

2.1 Définition.

Soit $\Sigma = \{(A, \alpha); (B, \beta)\}$ un système pondéré tel que $\alpha + \beta \neq 0$; le barycentre du système pondéré Σ est le point G qui vérifie :

$\alpha\overrightarrow{AG}+\beta\overrightarrow{BG}=\vec{0}$

On écrit : $G = Bar\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$

2.2 Propriétés de barycentre de deux points pondérés.

Soit $\Sigma = \{(A, \alpha); (B, \beta)\}$ un système pondéré, tel que $\alpha + \beta \neq 0$

et $G = Bar\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$ On a donc :

$\alpha\overrightarrow{AG}+\beta\overrightarrow{BG}=\vec{0}$

et par suite : pour tout réel k non nul on a :

$k\alpha\overrightarrow{AG}+k\beta\overrightarrow{BG}=\vec{0}$

Et donc $G = Bar\ \{(A, k\alpha); (B, k\beta)\}$.

Propriété :

a) Le barycentre d'un système pondéré de deux points ne varie pas si on multiplie les poids par le même réel non nul

b)Si $\alpha = \beta$ le barycentre du système pondéré $\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$ s'appelle l'isobarycentre de $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ qui n'est que le milieu du segment $[AB]$.

Construction :

Exemple1 : Construire $G = Bar\{(A, 4); (B, -5)\}$

$G = Bar\{(A, 4); (B, -5)\}$ donc : $4\overrightarrow{AG}-5\overrightarrow{BG}=\vec{0}$

$4\overrightarrow{AG}+5\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB}\right)=\vec{0} \Leftrightarrow -4\overrightarrow{GA}+5\overrightarrow{GA}+5\overrightarrow{AB}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{GA}+5\overrightarrow{AB}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG}=5\overrightarrow{AB}$

Donc le point $G\in(AB)$

Exemple2 :

Construire $G = Bar\{(A, \sqrt{8}); (B, -\sqrt{2})\}$

$G = Bar\{(A, \frac{1}{\sqrt{2}}\times\sqrt{8}); (B, \frac{1}{\sqrt{2}}\times\left(-\sqrt{2}\right))\}$

Donc : $G = Bar\{(A,\ 2); (B,\ -1)\}$

• Soit $\Sigma = \{(A, \alpha); (B, \beta)\}$ un système pondéré, tel que $\alpha + \beta \neq 0$

et $G = Bar\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$ On a donc par suite :

$\alpha\overrightarrow{AG}+\beta\overrightarrow{BG}=\vec{0}$

Soit M est un pont quelconque dans le plan (P) on a donc :

$\alpha\left(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MG}\right)+\beta\left(\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{MG}\right)=\vec{0} \Leftrightarrow (\alpha+\beta)\overrightarrow{MG}+\alpha\overrightarrow{AM}+\beta\overrightarrow{BM}=\vec{0}$

D'où : on conclut que : $\overrightarrow{MG}=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\overrightarrow{MA}+\frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{MB}$

Propriété : Soit $\Sigma = \{(A, \alpha); (B, \beta)\}$ un système pondéré, tel que $\alpha + \beta \neq 0$

et $G = Bar\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$.Pour tout point M du plan (P) on a : $\overrightarrow{MG}=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\overrightarrow{MA}+\frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{MB}$

ou $(\alpha+\beta)\overrightarrow{MG}=\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}$

Cette propriété s'appelle la propriété caractéristique du barycentre.

Propriété : Si $G = Bar\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$ alors les points A, B et G sont alignés.

Preuve : Il suffit d'utiliser la propriété précédente en posant A = M dans la propriété :

On aura : $\overrightarrow{AG}=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AA}+\frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$

Donc : $\overrightarrow{AG}=\frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$

D'où les vecteurs $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires et par suite : les points A, B et G sont alignés.

Propriété : Le plan (P) et rapporté à un repère $R(O;\vec{i};\vec{j})$ Soient $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$ des points du plan et $G = Bar\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$ on a :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\overrightarrow{OA} + \frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{OB}$$

et donc on a les coordonnées de G :

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{\alpha x_A + \beta x_B}{\alpha + \beta} \\ y_G = \dfrac{\alpha y_A + \beta y_B}{a + b} \end{cases}$$

Preuve : (Il suffit d'utiliser la propriété caractéristique du barycentre en posant A = O)

Exemples : 1)Dans le plan (P) rapporté à un repère $R(O;\vec{i};\vec{j})$ Soient $A(3;2)$ et $B(4;1)$

Et soit $G = Bar\ \{(A, 1); (B, -5)\}$

Solution : on a : $\begin{cases} x_G = \dfrac{-x_A + 5x_B}{4} \\ y_G = \dfrac{-y_A + 5y_B}{4} \end{cases}$ donc

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{17}{4} \\ y_G = \dfrac{3}{4} \end{cases}$$

Donc : $G\left(\frac{17}{4};\frac{3}{4}\right)$

Exercice1 : Soit ABC un triangle et soit :
$I = Bar\ \{(B, 4); (C, -3)\}$

Déterminer les coordonnées du point I dans le repère $R\left(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$

Solution : on a : donc $(4+(-3))\overrightarrow{AI} = 4\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$

donc $\overrightarrow{AI} = 4\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$ donc dans le repère $R\left(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$ $\quad I(4;-3)$

Exercice2 : E et F deux points du plan tels que : $\overrightarrow{EG} = 2\overrightarrow{EF}$ et $E \notin (AB)$ et G est le barycentre des points $(A;2)$ et $(B;-3)$

1)Montrer que G est le barycentre des points $(E;-1)$ et $(F;2)$

2) en déduire que les droites (EF) et (AB) se coupent et déterminer le point d'intersection

Solution : $\overrightarrow{EG} = 2\overrightarrow{EF} \Leftrightarrow \overrightarrow{EG} = 2\left(\overrightarrow{EG} + \overrightarrow{GF}\right)$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{EG} = 2\overrightarrow{EG} + 2\overrightarrow{GF} \Leftrightarrow -1\overrightarrow{EG} - 2\overrightarrow{GF} = \vec{0}$

$-\overrightarrow{GE} + 2\overrightarrow{GF} = \vec{0}$ Donc G est le barycentre des points $(E;-1)$ et $(F;2)$

2) on a G le barycentre des points $(E;-1)$ et $(F;2)$ donc $G \in (EF)$ et on a G est le barycentre des points $(A;2)$ et $(B;-3)$ donc $G \in (AB)$

Donc les droites (EF) et (AB) se coupent en G

Exercice3 : Dans le plan (P) rapporté à un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ Soient $A(0;5)$ et $B(3;2)$

Et soit $G = Bar\ \{(A, 1); (B, 2)\}$

1)Déterminer les coordonnées de G

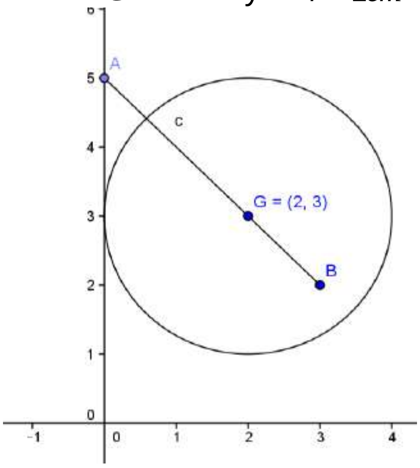
2)Déterminer et dessiner l'ensemble suivant :
$(C) = \left\{M \in (P) / \left\|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}\right\| = 6\right\}$

Solution : $\begin{cases} x_G = \dfrac{0+6}{3} = 2 \\ y_G = \dfrac{5+4}{3} = 3 \end{cases}$ donc $G(2;3)$

D'après la propriété caractéristique du barycentre on a : $\left\|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}\right\| = 6cm \Leftrightarrow \left\|3\overrightarrow{MG}\right\| = 6cm$

$\Leftrightarrow |3|\left\|\overrightarrow{MG}\right\| = 6cm \Leftrightarrow 3MG = 6cm \Leftrightarrow MG = 2cm$

Donc l'ensemble des points est le cercle de centre G et de rayon $r = 2cm$



3) Barycentre de trois points pondérés

Propriété et définition : Soit $\Sigma = \{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\}$ un système pondéré, tel que $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$

Il existe un et un seul point G qui vérifie :
$\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC} = \vec{0}$

Qui s'appelle barycentre du système pondéré Σ

Propriété : Soit $\Sigma = \{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\}$

Un système pondéré, tel que $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$

et $G = Bar\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\}$

si M est un pont quelconque dans le plan (P)

on a : $\overrightarrow{MG} = \dfrac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{MA} + \dfrac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{MB} + \dfrac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{MC}$

Donc : $(\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MG} = \alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC}$

Preuve : Même démonstration que dans le cas précèdent.

Construction :

• **Exemple :**

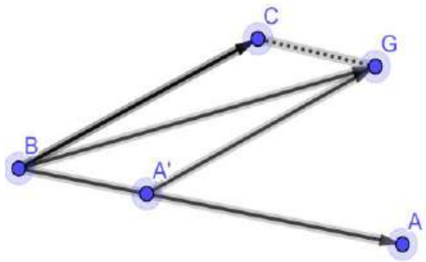
1°Construire $G = Bar\{(A, 1); (B, -1) ; (C, 3)\}$

$G = Bar\{(A, 1); (B, -1) ; (C, 3)\}$donc d'après la propriété caractéristique du barycentre on a :

$$\left(1+(-1)+3\right)\overrightarrow{MG}=1\overrightarrow{MA}+(-1)\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}$$

On pose : $M=B$ on aura :

$$3\overrightarrow{BG}=\overrightarrow{BA}+3\overrightarrow{BC}\Leftrightarrow \overrightarrow{BG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}$$



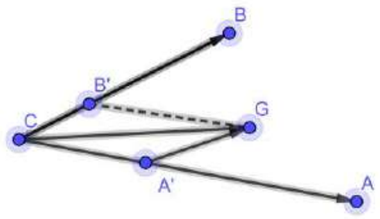
2°Construire $G = Bar\{(A, 4); (B, 1/2) ; (C, -3)\}$

Donc d'après la propriété caractéristique du barycentre on a :

$$\left(4+1/2-3\right)\overrightarrow{MG}=4\overrightarrow{MA}+1/2\,\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}$$

On pose : $M=C$ on aura :

$$\frac{3}{2}\overrightarrow{CG}=4\overrightarrow{CA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}\Leftrightarrow \overrightarrow{CG}=\frac{8}{3}\overrightarrow{CA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$$



Exercice 4 : Soit ABC un triangle et G point tel que : $2\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AG}-\overrightarrow{GB}$

1)montrer que G le barycentre de : $\{(A, 1); (B, 1); (C, 2)\}$ et construire le point G

Solution : $2\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AG}-\overrightarrow{GB}\Leftrightarrow 2\overrightarrow{AC}-3\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GB}=\vec{0}$

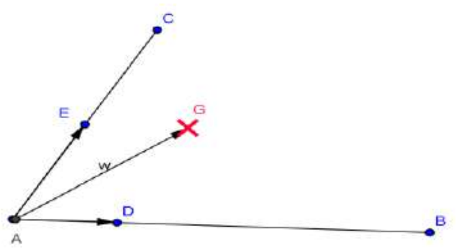
$$\Leftrightarrow 2\left(\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GC}\right)-3\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GB}=\vec{0}\Leftrightarrow -\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GB}+2\overrightarrow{GC}=\vec{0}$$

$$\Leftrightarrow -\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GB}+2\overrightarrow{GC}=\vec{0}\Leftrightarrow \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+2\overrightarrow{GC}=\vec{0}$$

Donc G le barycentre de : $\{(A, 1); (B, 1); (C, 2)\}$

On a :® $\overrightarrow{AG}=\dfrac{b}{a+b+c}\overrightarrow{AB}+\dfrac{c}{a+b+c}\overrightarrow{AC}$

Donc : $\overrightarrow{AG}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{4}\overrightarrow{AC}$ donc : $\overrightarrow{AG}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$



Propriété : Le plan (P) et rapporté à un repère $R\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$Soient $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$ et $C(x_C;y_C)$ des points du plan

et $G = Bar\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\}$

on a : $\overrightarrow{OG}=\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{OA}+\dfrac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{OB}+\dfrac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{OC}$

et donc on a les coordonnées de G :

$$\begin{cases} x_G=\dfrac{\alpha x_A+\beta x_B+\gamma x_C}{\alpha+\beta+\gamma} \\ y_G=\dfrac{\alpha y_A+\beta y_B+\gamma y_C}{\alpha+\beta+\gamma} \end{cases}$$

Propriété :

Le barycentre d'un système pondéré de trois points ne varie pas si on multiplie les poids par le même nombre non nul :

$Bar\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma) =$

$Bar\{(A, k\alpha); (B, k\beta); (C, k\gamma)\}$ pour $k \neq 0$

Exercice :

Soit $G = Bar\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\}$ où $\alpha + \beta \neq 0$

et $G' = Bar\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$

Montrer que $G = Bar\{(G', (\alpha + \beta)); (C, \gamma)\}$

Propriété :

Si $G = Bar\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)$ avec $\alpha + \beta \neq 0$

et $G' = Bar\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$

Alors : $G = Bar\{(G', (\alpha + \beta)); (C, \gamma)\}$

Remarque : La propriété d'associativité nous permet de construire le barycentre de trois points pondérés.

Exercice 5 : on utilisant La propriété d'associativité Construire le barycentre G du système pondéré $\{(A, 2); (B, -3); (C, 5)\}$

Solution : soit E = $Bar\{(A, 2); (B, -3)\}$

D'après la propriété caractéristique du barycentre on a : $-\overrightarrow{ME}=2\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}$

On pose : $M=A$ on aura : $-\overrightarrow{AE}=-3\overrightarrow{AB}$

Donc : $\overrightarrow{AE}=3\overrightarrow{AB}$

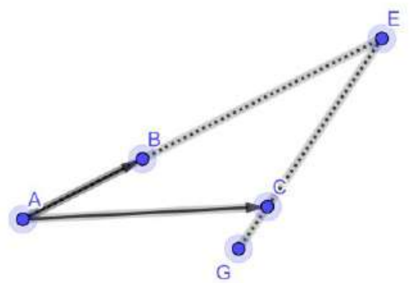
D'après la Propriété d'associativité on a :

G = $Bar\{(E, -1); (C, 5)\}$

D'après la propriété caractéristique du barycentre on a : $4\overrightarrow{MG}=-\overrightarrow{MA}+5\overrightarrow{MC}$

On pose : $M=E$ on aura :

$$4\overrightarrow{EG}=5\overrightarrow{EC}\Leftrightarrow \overrightarrow{EG}=\frac{5}{4}\overrightarrow{EC}$$



Cas particulier
Si les poids α; β et γ sont égaux le barycentre de $\{(A,\alpha); (B,\alpha); (C,\alpha)\}$
S'appelle **le centre de gravité** du triangle ABC.

Exercice 6 : Soit ABC un triangle.et G le centre de gravité du triangle ABC et I le milieu du segment $[BC]$. Monter que G est le centre de gravité de $(A;1)$ et $(I;2)$

Solution : G le centre de gravité du triangle ABC
Donc G est le barycentre de :
$\{(A, 1); (B, 1); (C, 1)\}$
I le milieu du segment $[BC]$ Donc I est le barycentre de : $\{(B, 1); (C, 1)\}$
D'après la Propriété d'associativité on a :
G est le barycentre de : { (I, 2); (A, 1)}

Exercice7 : Soit ABC un triangle. Pour tout point M on pose : $\vec{V}=2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}$
1) Réduire l'écriture de $\vec{V}$ et monter que $\vec{V}$ ne dépend pas du point M
2) soit K = $Bar\{(C, -3); (B, 1)\}$ montrer que : $\vec{V}=2\overrightarrow{KA}$
3) Soit G= $Bar\{(A, 2); (B, -1); (C, -3)\}$
Montrer que : Pour tout point M on a :
$2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{GM}$
4) en déduire l'ensemble des points M tel que $\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}\right\|$

Solution : 1)
$\vec{V}=2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}-3\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}\right)$
$\vec{V}=\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}$ donc $\vec{V}$ ne dépend pas du point M
2)on a : $2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}$ Pour tout point M donc si $M=K$ on aura :
$2\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KB}-3\overrightarrow{KC}=\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}$

Et on a : K = $Bar\{(C, -3); (B, 1)\}$ donc : $\overrightarrow{KB}-3\overrightarrow{KC}=\vec{0}$

Donc : $2\overrightarrow{KA}=\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}$ donc : $2\overrightarrow{KA}=\vec{V}$

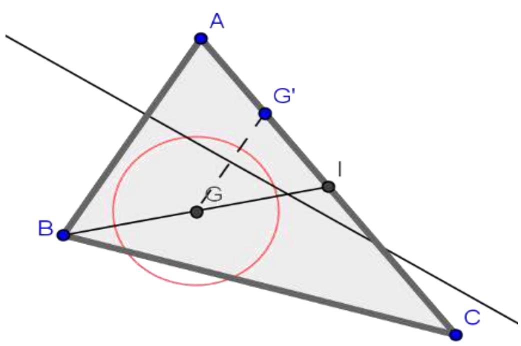
3) d'après la propriété caractéristique du Barycentre on a :
$2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}=\left(2+(-1)+(-3)\right)\overrightarrow{MG}=-2\overrightarrow{MG}=2\overrightarrow{GM}$

4) $\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}\right\|$
$\Leftrightarrow \left\|2\overrightarrow{GM}\right\|=\left\|2\overrightarrow{KA}\right\| \Leftrightarrow 2GM=2KA \Leftrightarrow GM=KA$
Donc l'ensemble des points est le cercle (C) de centre G et de rayon $r=KA$

Exercice 8 : Soit ABC un triangle tel que : $AC=6cm$ et $AB=5cm$ et $BC=4cm$
a) Construire G le barycentre de :
$\{(A, 1); (B, 2); (C, 1)\}$
b) Déterminer et Construire l'ensemble (E) des points M du plan tel que : $\left\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=AC$
c) Déterminer et Construire l'ensemble (F) des points M du plan tel que :
$\left\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|3\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MC}\right\|$

Solution : G est le barycentre de :
$\{(A, 1); (B, 2); (C, 1)\}$ donc G est le barycentre de : {(B, 2); (I, 2} d'après La propriété d'associativité du barycentre
Donc G est le milieu du segment $[BI]$
b) D'après la propriété caractéristique du barycentre on a :
$\left\|4\overrightarrow{MG}\right\|=AC \Leftrightarrow GM=\dfrac{AC}{4}=1.5$
Donc l'ensemble des points est le cercle de centre G et de rayon $r=1.5cm$

b) Soit G' est le barycentre de :
$\{(A, 3); (C, 1)\}$ Donc d'après la propriété caractéristique du barycentre on a : $\forall M\in(P)$
$\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=4\overrightarrow{MG}$ et $3\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=4\overrightarrow{MG'}$
Donc : $M\in(F) \Leftrightarrow 4MG=4MG' \Leftrightarrow MG=MG'$
Donc : (F) est la médiatrice du segment $[GG']$
Et pour construire le point G' on a : $\overrightarrow{AG'}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AC}$



4) Barycentre de quatre points pondérés

Propriété : Soit Σ= {(A, α); (B, β); (C, γ); (D, δ)} un système pondéré, tel que $\alpha + \beta + \gamma + \delta \neq 0$
Il existe un et un seul point G qui vérifie
: $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}+\delta\overrightarrow{GD}=\vec{0}$
Qui s'appelle barycentre du système pondéré Σ

Propriété :
Soit Σ = {(A, α); (B, β); (C, γ); (D, δ)} un système pondéré, tel que $\alpha + \beta + \gamma + \delta \neq 0$ et
$G = Bar${(A, α); (B, β); (C, γ); (D, δ)}
si M est un point quelconque dans le plan (P)
on a : $\overrightarrow{MG}=\frac{\alpha}{s}\overrightarrow{MA}+\frac{\beta}{s}\overrightarrow{MB}+\frac{\gamma}{s}\overrightarrow{MC}+\frac{\delta}{s}\overrightarrow{MD}$
où $s=\alpha+\beta+\gamma+\delta$

Preuve : Même démonstration que dans les cas précédents.

Propriété : Le plan (P) et rapporté à un repère $R(O;\vec{i};\vec{j})$ Soient $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$ et $C(x_C;y_C)$ et $D(x_D;y_D)$ des points du plan
$G = Bar${(A, α); (B, β); (C, γ); (D, δ)}
on a : $\overrightarrow{OG}=\frac{\alpha}{s}\overrightarrow{OA}+\frac{\beta}{s}\overrightarrow{OB}+\frac{\gamma}{s}\overrightarrow{OC}+\frac{\delta}{s}\overrightarrow{OC}$
Et donc on a les coordonnées de G :

$$\begin{cases} x_G=\dfrac{\alpha x_A+\beta x_B+\gamma x_C+\delta x_D}{s} \\ y_G=\dfrac{\alpha y_A+\beta y_B+\gamma y_C+\delta y_D}{s} \end{cases}$$

où $s=\alpha+\beta+\gamma+\delta$

Propriété : Le barycentre d'un système pondéré de quatre points ne varie pas si on multiplie les poids par le même nombre
Non nul : Bar {(A, α); (B, β); (C, γ); (D, δ)} =
Bar{(A, $k\alpha$); (B, $k\beta$); (C, $k\gamma$); (D, $k\delta$)}
pour $k \neq 0$

Propriété : Si $G = Bar${(A, α); (B, β); (C, γ); (D, δ)} avec $\alpha + \beta \neq 0$ et $\gamma + \delta \neq 0$
Si $G' = Bar${(A, α); (B, β)}
et $G'' = Bar${(C, γ); (D, δ)}
Alors $G = Bar${(G', ($\alpha + \beta$)); (G'', $\gamma + \delta$)}

Remarque : La propriété d'associativité nous permet de construire le barycentre de quatre points pondérés.

Exercice9 : Dans le plan (P) rapporté à un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ Soient $A(-1;1)$ et $B(0;2)$ et $C(1;-1)$ et $D(1;0)$ Et soit $G = Bar$ {(A, 1); (B, 2)}
1)Déterminer les coordonnées de
K = Bar {(A, 2); (B, 3)}
2)Déterminer les coordonnées de L le centre de gravité du triangle ABC
3)Déterminer les coordonnées de Barycentre des points $(A;2)$ et $(B;3)$ et $(C;1)$ et $(D;-1)$

Solution :1) $\begin{cases} x_K=\dfrac{-2+0}{5}==\dfrac{-2}{5} \\ y_K=\dfrac{2+6}{5}=\dfrac{8}{5} \end{cases}$ donc $K\left(-\frac{2}{5};\frac{8}{5}\right)$

2) les coordonnées de L sont :

$$\begin{cases} x_L=\dfrac{1x_A+1x_B+1x_C}{1+1+1} \\ y_L=\dfrac{1y_A+1y_B+1y_C}{1+1+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_L=\dfrac{1\times(-1)+1\times0+1\times1}{1+1+1}=0 \\ y_L=\dfrac{1\times1+1\times2+1\times(-1)}{1+1+1}=\dfrac{2}{3} \end{cases}$$

Donc $L\left(0;\frac{2}{3}\right)$

$$\begin{cases} x_G=\dfrac{ax_A+bx_B+cx_C+dx_D}{a+b+c+d} \\ y_G=\dfrac{ay_A+by_B+cy_C+dy_D}{a+b+c+d} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x_G=\dfrac{2\times x_A+3\times x_B+1\times x_C+(-1)\times x_D}{5}=\dfrac{-2}{5} \\ y_G=\dfrac{2\times y_A+3\times y_B+1\times y_C+(-1)\times y_D}{5}=\dfrac{7}{5} \end{cases}$$

$G\left(-\frac{2}{5};\frac{7}{5}\right)$

Application : $ABCD$ un rectangle tel que : $AB = 2BC$ Construire le barycentre du système pondéré {(A, −2) ; (B, 3) ; (C, 1) ; (D, 1)}

Cas particulier : Si les poids α ; β et γ sont égaux le barycentre de :
{(A, α) ; (B, α) ; (C, α) ; (D, δ)} s'appelle **le centre de gravité** du quadrilatère convexe $ABCD$

Exercice10 : soit $ABCD$ un quadrilatère convexe
Soit H le barycentre du système pondéré {(A, 2) ; (B, 5); (C, -1) }
Soit K le barycentre du système pondéré {(B, 5) ; (C, -1) ; (D, 6)}
Soit E = Bar {(C, -1) ; (B, 5)}
1)Montrer que $\overrightarrow{BE}=-\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$ et Construire E
2) Montrer que H est le barycentre du système pondéré {(A, 1) ; (E, 2)} et Construire H
3) Montrer que K est le barycentre du système pondéré {(D, -3) ; (E, 2)}
4) a) Montrer que D est le barycentre du système pondéré {(K, 1) ; (E, 2)}
b) en déduire que $(AK)\parallel(DH)$

Solution :

1)on sait que si M est un point quelconque dans le plan (P) on a :

$$\overrightarrow{ME}=\frac{1}{4}\left(5\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right)$$

Pour : M=B on a : $\overrightarrow{BE}=-\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$ et on peut

Construire E

2) on a : E = Bar {(C, -1) ; (B, 5)}

et $5+(-1)=4$

D'après La propriété d'associativité on a H le barycentre du système pondéré {(A, 2); (E, 4) } et puisque Le barycentre d'un système pondéré ne varie pas si on multiplie les poids par le même réel non nul on trouve donc que H est le barycentre du système pondéré

{(A, 1) ; (E, 2)}

on sait que si M est un point quelconque dans le plan (P) on a :

$$\overrightarrow{MH}=\frac{1}{3}\left(2\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MA}\right)$$

Pour : M=A on a : $\overrightarrow{AH}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AE}$ et on peut

Construire E

3) D'après La propriété d'associativité on trouve que K le barycentre du système

Pondéré {(D, -6); (E, 4) }

Et puisque Le barycentre d'un système pondéré ne varie pas si on multiplie les poids par le même réel non nul on trouve donc que K est le barycentre du système pondéré

{(D, -3) ; (E, 2)}

4) a) Montrons que D est le barycentre du système pondéré {(K, 1) ; (E, 2)} ?

Puisque K est le barycentre du système pondéré {(D, -3) ; (E, 2)}

Pour tout point M du plan (P) on a :

$-\overrightarrow{MK}=-3\overrightarrow{MD}+2\overrightarrow{ME}$

Donc : $3\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{MK}+2\overrightarrow{ME}$

Donc : D est le barycentre du système pondéré {(K, 1) ; (E, 2)}

4) b) Pour tout point M du plan (P) on a :

$3\overrightarrow{MH}=2\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MA}$ et $3\overrightarrow{MD}=2\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MK}$

Donc : $3\overrightarrow{DH}=3\overrightarrow{MH}-3\overrightarrow{MD}$:

$3\overrightarrow{DH}=3\left(\overrightarrow{MH}-\overrightarrow{MD}\right)$

Donc : $3\overrightarrow{DH}=\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MK}$

Donc : $3\overrightarrow{DH}=-\overrightarrow{AK}$ Donc : $(AK)\parallel(DH)$

Exercice11 : ABC un triangle

I et J et K points tels que : $2\overrightarrow{BI}=3\overrightarrow{BC}$

Et $8\overrightarrow{CJ}=\overrightarrow{CA}$ et $5\overrightarrow{AK}=2\overrightarrow{AB}$

1) Montrer que I est le barycentre des points pondéré $\left(B;\frac{1}{2}\right)$ et $\left(C;\frac{-3}{2}\right)$

2) Le plan (P) est rapporté au repère $R\left(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$

a) Déterminer les coordonnées du point J

b) Déterminer une équation cartésienne de la droite (IK)

c) Montrer que les points I et J et K sont alignés.

Solution :1)

$$\frac{1}{2}\overrightarrow{BI}-\frac{3}{2}\overrightarrow{CI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BI}-\frac{3}{2}\left(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BI}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\overrightarrow{BI}-\frac{3}{2}\overrightarrow{CB}-\frac{3}{2}\overrightarrow{BI}=-\overrightarrow{BI}+\frac{3}{2}\overrightarrow{BC}=-\frac{3}{2}\overrightarrow{BC}+\frac{3}{2}\overrightarrow{BC}=\vec{0}$$

Donc : $\frac{1}{2}\overrightarrow{BI}-\frac{3}{2}\overrightarrow{CI}=\vec{0}$ par suite : I est le barycentre des points pondéré $\left(B;\frac{1}{2}\right)$ et $\left(C;\frac{-3}{2}\right)$

2) dans le repère $R\left(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$ on a : $A(0;0)$ et $B(1;0)$ et $C(0;1)$

a) On a : $8\overrightarrow{CJ}=\overrightarrow{CA}$ donc : $8\overrightarrow{CA}+8\overrightarrow{AJ}=\overrightarrow{CA}$

Donc : $8\overrightarrow{AJ}=-7\overrightarrow{CA}$ donc : $\overrightarrow{AJ}=\frac{7}{8}\overrightarrow{AC}$

Donc : $J\left(0;\frac{7}{8}\right)$

b) la droite (IK) passe par I et de vecteur directeur

$\overrightarrow{IK}$ et on a : I est le barycentre de $\left(B;\frac{1}{2}\right)$ et $\left(C;\frac{-3}{2}\right)$ donc :

$$\begin{cases} x_I=\dfrac{\frac{1}{2}\times 1-\frac{3}{2}\times 0}{-1}=-\dfrac{1}{2} \\ y_I=\dfrac{\frac{1}{2}\times 0-\frac{3}{2}\times 1}{-1}=\dfrac{3}{2} \end{cases}$$

Donc : $I\left(\frac{-1}{2};\frac{3}{2}\right)$

Et on a : $5\overrightarrow{AK}=2\overrightarrow{AB}$ Donc : $\overrightarrow{AK}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$

Donc : $K\left(\frac{2}{5};0\right)$ Donc : $\overrightarrow{IK}\left(\frac{9}{10};\frac{3}{2}\right)$

L'équation cartésienne de la droite (IK) est :

$$\frac{3}{2}x-\frac{9}{10}y+c=0$$

$I \in (IK)$: donc : $\frac{3}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)-\frac{9}{10}\left(\frac{3}{2}\right)+c=0$

$\Leftrightarrow -\frac{3}{4}-\frac{27}{20}+c=0 \Leftrightarrow c=\frac{21}{10}$

Donc : $(IK): \frac{3}{2}x-\frac{9}{10}y+\frac{21}{10}=0$

$(IK): 15x-9y+21=0$

c) pour Montrer que les points I et J et K sont alignés il suffit de montrer que $J \in (IK)$

On a : $(IK): 15x-9y+21=0$ et $J\left(0;\frac{7}{8}\right)$

Et on a : $15\times 0-9\frac{7}{8}+21=-21+21=0$

Par suite : $J \in (IK)$ donc les points I et J et K sont alignés.

Exercice12 : ABC un triangle et I un point tel que : $\overrightarrow{AI}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ et K le symétrique de A par rapport a C et J le milieu du segment $[BC]$

1) exprimer I et J et K comme le barycentre de points pondérés a déterminer

2)quelle est le barycentre des points pondérés $(A;1)$;$(B;2)$; $(B;-2)$ et $(C;-2)$?

3)Monter que les points I et J et K sont alignés.

Solution :1)

• On a J le milieu du segment $[BC]$

Donc : J est le barycentre des points pondéré $(B;1)$ et $(C;1)$

• On a : $\overrightarrow{AI}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{AI}=2\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{AI}=2\overrightarrow{AI}+2\overrightarrow{IB}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}=\vec{0}$ Donc : I est le barycentre des points pondéré $(A;1)$ et $(B;2)$

• On a : K le symétrique de A par rapport a C

Donc : $2\overrightarrow{KC}=\overrightarrow{KA}$

Donc : $\overrightarrow{KA}-2\overrightarrow{KC}=\vec{0}$

Donc : K est le barycentre des points pondéré $(A;1)$ et $(C;-2)$

2) on a : K est le barycentre des points pondéré $(A;1)$ et $(C;-2)$ donc :

$1\overrightarrow{KA}+2\overrightarrow{KB}-2\overrightarrow{KB}-2\overrightarrow{KC}=\vec{0}$

Donc : K est le barycentre des points pondéré $(A;1)$ et $(B;2)$ et $(B;-2)$ et $(C;-2)$

3) D'après La propriété d'associativité on trouve que K le barycentre des points pondéré $(J;-4)$ et $(I;3)$ par suite : $K \in (IJ)$ donc les points I et J et K sont alignés.

Exercice13: ABCD un carré et I et J les milieux respectivement des segments $[BC]$ et $[CD]$ et M et N deux points tel que : $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AN}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$

1determiner le barycentre des points pondérés {(A, 3) ; (B, 1)} et {(A, 3) ; (D, 1)}

2)soit G le barycentre des points pondérés $(A;3)$;$(B;1)$; $(C;1)$ et $(D;1)$

3)Monter que les droites (MJ) et (NI) et (AC) sont concourantes en G

Solution :1)on a : $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow 4\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}$

Donc : $3\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\vec{0}$

Donc : M est le barycentre des points pondéré $(A;3)$ et $(B;1)$

De même on a : $\overrightarrow{AN}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AD} \Leftrightarrow 4\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{ND}$

Donc : $3\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{ND}=\vec{0}$

Donc : N est le barycentre des points pondéré $(A;3)$ et $(D;1)$

2) soit G le barycentre des points pondérés $(A;3)$;$(B;1)$; $(C;1)$ et $(D;1)$ et puisque J le milieu du segment $[DC]$ alors J est le barycentre des points pondéré $(C;1)$ et $(D;1)$

D'après La propriété d'associativité on trouve que G est le barycentre des points pondéré $(M;4)$ et $(J;2)$ par suite : $G \in (JM)$

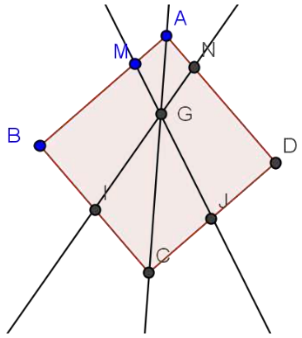
De même on a : I le milieu du segment $[BC]$ alors I est le barycentre des points pondéré $(B;1)$ et $(C;1)$ et d'après La propriété d'associativité on trouve que G est le barycentre des points pondéré $(N;4)$ et $(I;2)$ par suite : $G \in (NI)$

Soit H le centre de gravité du triangle BCD donc

H est le barycentre des points pondéré $(B;1)$ et $(C;1)$ et $(D;1)$ par suite D'après La propriété d'associativité on trouve que G est le barycentre des points pondéré $(A;3)$ et $(H;3)$

donc : G le milieu du segment $[AH]$ et puisque ABCD est un carré alors : $H \in [AC]$ donc $G \in (AC)$

Conclusion : les droites (MJ) et (NI) et (AC) sont concourantes en G



Exercice14: A et B deux points tel que : $AB=4cm$ et soit :(F) l'ensemble des points M du plan tel que : $\frac{MA}{MB}=3$

1)montrer que : $M\in(F)\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}^2-9\overrightarrow{MB}^2=0$

2)soit G le barycentre des points pondérés $(A;1)$;$(B;3)$ et K le barycentre des points pondérés $(A;1)$;$(B;-3)$

a) Montrer que : $M\in(F)\Leftrightarrow \overrightarrow{MG}\bullet\overrightarrow{MK}=0$

b) En déduire l'ensemble(F) et le tracer

Solution :1) $M\in(F)\Leftrightarrow \frac{MA}{MB}=3\Leftrightarrow MA=3MB$

$M\in(F)\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}^2-9\overrightarrow{MB}^2=0$

2)a)

$M\in(F)\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}^2-9\overrightarrow{MB}^2=0\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}\right)\left(\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}\right)=0$

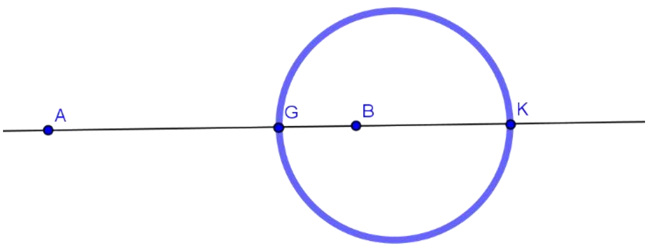
Et d'après La propriété caractéristique du barycentre on aura :

$\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}=4\overrightarrow{MG}$ et $\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}=-2\overrightarrow{MK}$

Donc : $M\in(F)\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}^2-9\overrightarrow{MB}^2=0\Leftrightarrow -8\overrightarrow{MA}\bullet\overrightarrow{MK}=0$

Donc : $M\in(F)\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}\bullet\overrightarrow{MK}=0$

2)b) d'après a) en déduit que(F) est le cercle de dont un diamètre est $[GK]$



Exercice15: A et B deux points tel que : $AB=4cm$ et I le milieu du segment $[AB]$

1)soit :(E) l'ensemble des points M du plan tel que : $\overrightarrow{IM}\bullet\overrightarrow{AB}=4$ et soit H le barycentre des points pondérés $(A;1)$;$(B;3)$

a) Montrer que : $H\in(E)$

b) Vérifier que : $M\in(E)\Leftrightarrow \overrightarrow{HM}\bullet\overrightarrow{AB}=0$

c)déterminer la nature de l'ensemble(E)

2)soit :(F) l'ensemble des points M du plan tel que : $MA^2-MB^2=8$

a) Montrer que : $\forall M\in(P)$ on a : $MA^2-MB^2=2\overrightarrow{IM}\bullet\overrightarrow{AB}$

b) En déduire que$(F)=(E)$ et le tracer

Solution :1) On a : H le barycentre des points pondérés $(A;1)$;$(B;3)$ donc : $\overrightarrow{AH}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$

Et on a $\overrightarrow{IH}=\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AH}$ donc $\overrightarrow{IH}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$

Donc $\overrightarrow{IH}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ par suite $\overrightarrow{IH}\bullet\overrightarrow{AB}=\frac{1}{4}AB^2=4$

Donc $H\in(E)$

b) $M\in(E)\Leftrightarrow \overrightarrow{IM}\bullet\overrightarrow{AB}=4\Leftrightarrow \overrightarrow{IM}\bullet\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{IH}\bullet\overrightarrow{AB}$

$\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{IM}-\overrightarrow{IH}\right)\bullet\overrightarrow{AB}=0\Leftrightarrow \overrightarrow{HM}\bullet\overrightarrow{AB}=0$

c)de b) on déduit que (E) est la droite perpendiculaire a (AB) en H

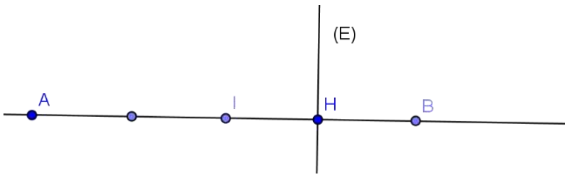
2)a) $MA^2-MB^2=0\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right)\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right)=2\overrightarrow{IM}\bullet\overrightarrow{AB}$

Car d'après La propriété caractéristique du barycentre on a : $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}$

2)b)

$M\in(F)\Leftrightarrow MA^2-MB^2=8\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}\bullet\overrightarrow{AB}=4\Leftrightarrow M\in(E)$

Donc $(F)=(E)$ par suite (F) est la droite perpendiculaire a (AB) en H



Solution16 : A et B deux points tel que : $AB=3cm$ et I le milieu du segment $[AB]$

1)soit :(C) l'ensemble des points M du plan tel que : $MA^2+MB^2=9$ et soit H le barycentre des points pondérés $(A;1)$;$(B;3)$

a) Monter que : $M\in(C)\Leftrightarrow MI=\frac{3}{2}$

b) Déterminer la nature et tracer l'ensemble(C)

2)soit : (C') l'ensemble des points M du plan tel que : $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \frac{-5}{4}$

a) Montrer que : $M \in (C') \Leftrightarrow MI = 1$

b) Déterminer la nature et tracer l'ensemble (C')

Solution :1)on a :

$MA^2 + MB^2 = \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\right)^2$

$= 2MI^2 + 2IA^2 + 2\overrightarrow{MI}\left(\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IA}\right) = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2}$

Car : $\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IA} = \vec{0}$

$M \in (C) \Leftrightarrow 2MI^2 + \frac{AB^2}{2} = 9 \Leftrightarrow MI = \frac{3}{2}$

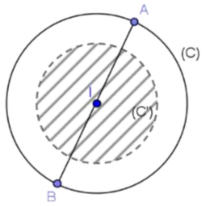
b)en déduit que (C) est le cercle de centre I et de rayon $r = \frac{3}{2}$

2) a) $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \left(\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IA}\right)\left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right) = MI^2 - \frac{AB^2}{4}$

Donc : $M \in (C') \Leftrightarrow MI = 1$

2) b) en déduit que (C') est le cercle de centre I et de rayon $r = 1$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe



PRODUIT SCALAIRE DANS $\mathcal{V}_2$
Etude analytique (1)

I) BASE ET REPERE ORTHONORMES

Définitions : Soit $B\left(\vec{i};\vec{j}\right)$ une base de V_2.

1) La base B est dite **orthogonale** si $\vec{i}.\vec{j}=0$

2) La base B est dite **normée si** $\left\|\vec{i}\right\|=\left\|\vec{j}\right\|=1$

3) Une base orthogonale et normée s'appelle une base orthonormée.

4)Soit O un point du plan

Soit $\mathcal{R}\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ un repère du plan $(\mathcal{P})$

On dit que le repère $\mathcal{R}$ est orthonormé si la base $B\left(\vec{i};\vec{j}\right)$) associé à $\mathcal{R}$ est orthonormée.

On pose : $\vec{i}=\overrightarrow{0I}$ et $\vec{j}=\overrightarrow{0J}$

II) EXPRESSION ANALYTIQUE DU PRODUIT SCALAIRE.

Soit $B\left(\vec{i};\vec{j}\right)$ une base orthonormée de V_2.

Soient : $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}$ et $\vec{v}=x'\vec{i}+y'\vec{j}$ deux vecteurs de V_2 ; on a : $\vec{u}.\vec{v}=\left(x\vec{i}+y\vec{j}\right)\left(x'\vec{i}+y'\vec{j}\right)$

Et d'après la bilinéarité du produit scalaire on a :

$\vec{u}.\vec{v}=xx'\vec{i}\vec{i}+yy'\vec{j}\vec{j}$ car $\vec{i}.\vec{j}=0$

$\vec{u}.\vec{v}=xx'+yy'$ puisque: $\left\|\vec{i}\right\|=1$ et $\left\|\vec{j}\right\|=1$

On a donc la propriété suivante :

Propriété : L'espace V_2 est rapporté à une base orthonormée $B\left(\vec{i};\vec{j}\right)$

Soient : $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}$ et $\vec{v}=x'\vec{i}+y'\vec{j}$ deux vecteurs de V_2 ; on a :

1) $\vec{u}.\vec{v}=xx'+yy'$

2) $\left\|\vec{u}\right\|=\sqrt{x^2+y^2}$

3) $\vec{u}\perp\vec{v}\Leftrightarrow xx'+yy'=0$

Si $A\left(x_A;y_A\right)$ et $B\left(x_B;y_B\right)$ alors

$$AB=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=\sqrt{\left(x_B-x_A\right)^2+\left(y_B-y_A\right)^2}$$

Exercice : dans Le plan $(\mathcal{P})$ est rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ Considérons les points $A(1;-3)$ et $B(3;7)$ et $C(-3;1)$

1)Montrer que le triangle ABC est rectangle en C

2)Calculer la surface du triangle ABC

Solution : 1)

Methode1 **:** $\overrightarrow{BC}(-6;-6)$ et $\overrightarrow{AC}(-4;4)$ et $\overrightarrow{AB}(2;10)$

$AB=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=\sqrt{2^2+10^2}=\sqrt{104}=2\sqrt{26}$

$AC=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$

$BC=\sqrt{72}=6\sqrt{2}$

Puisque : $AC^2+BC^2=32+72=104$ et $AB^2=104$

Donc : $AC^2+BC^2=AB^2$

Donc : le triangle ABC est rectangle en C

Methode2 : $\overrightarrow{BC}(-6;-6)$ et $\overrightarrow{AC}(-4;4)$

Donc : $\overrightarrow{AC}\bullet\overrightarrow{BC}=24-24+0$ Donc : $\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{BC}$

Donc : le triangle ABC est rectangle en C

2)puisque le triangle ABC est rectangle en C alors :

$S=\frac{1}{2}CA\times CB=\frac{1}{2}4\sqrt{2}\times 6\sqrt{2}=24$

III) PRODUIT SCALRE ET LIGNES TRIGONOMETRIQUES.

1) L'expression de $\cos$:

Le plan $(\mathcal{P})$ est rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$

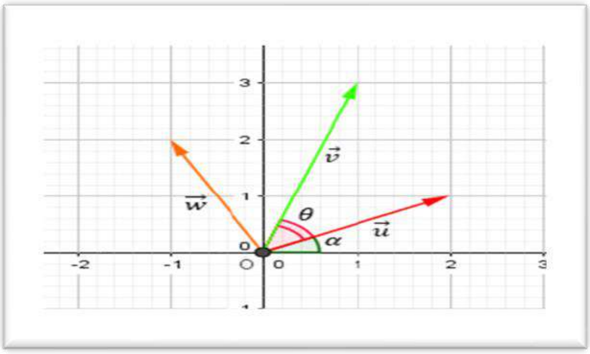
Soients : $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}$ et $\vec{v}=x'\vec{i}+y'\vec{j}$ deux vecteurs de V_2 ; on a : $\vec{u}\cdot\vec{v}=\left\|\vec{u}\right\|\times\left\|\vec{v}\right\|\cos\left(\vec{u};\vec{v}\right)=xx'+yy'$

Par suite : $\cos\left(\vec{u};\vec{v}\right)=\dfrac{xx'+yy'}{\sqrt{x^2+y^2}\times\sqrt{x'^2+y'^2}}$

2) L'expression de sin :

2.1 L'écriture trigonométrique d'un vecteur.

L'espace V_2 est rapporté à une base orthonormée $B\left(\vec{i};\vec{j}\right)$



$\vec{u}(x;y)$ et α la mesure da l'angle **polaire** $(\vec{i};\vec{u})$

Puisque $\vec{i}(1;0)$ alors : $\vec{u}\cdot\vec{i}=x$ et puisque $\vec{j}(0;1)$ alors

$\vec{u}\cdot\vec{j}=y$ D'autre part: $\vec{u}\cdot\vec{i}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{i}\|\cos(\vec{u};\vec{i})=\|\vec{u}\|\cos\alpha$

$\vec{u}\cdot\vec{j}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{j}\|\cos(\vec{u};\vec{j})=\|\vec{u}\|\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$

$\vec{u}\cdot\vec{j}=\|\vec{u}\|\sin\alpha$

On peut conclure que : $\begin{cases} x=\|\vec{u}\|\cos\alpha \\ y=\|\vec{u}\|\sin\alpha \end{cases}$

Et par suite : $\vec{u}=\|\vec{u}\|\cos\alpha\vec{i}+\|\vec{u}\|\sin\alpha\vec{j}=\|\vec{u}\|(\cos\alpha\vec{i}+\sin\alpha\vec{j})$

Cette écriture s'appelle l'écriture trigonométrique du vecteur $\vec{u}$.

2.2 L'expression de sin :

$\vec{u}(x;y)$ et α la mesure da l'angle polaire $(\vec{i};\vec{u})$

et $\vec{w}$ le vecteur tel que : $\|\vec{u}\|=\|\vec{w}\|$ et $(\vec{u};\vec{w})\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$

D'après l'écriture trigonométrique du vecteur $\vec{w}$

on a : $\vec{w}=\|\vec{w}\|\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)\vec{i}+\|\vec{w}\|\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)\vec{j}$

$\vec{w}=-\|\vec{w}\|\sin\alpha\vec{i}+\|\vec{w}\|\cos\alpha\vec{j}=-\|\vec{u}\|\sin\alpha\vec{i}+\|\vec{u}\|\cos\alpha\vec{j}$

(car : $\|\vec{u}\|=\|\vec{w}\|$) $\vec{w}=-y\vec{i}+x\vec{j}$

Par suite $\vec{w}(-y;x)$

D'où on peut conclure que : $\vec{v}\cdot\vec{w}=-x'y+xy'$

et on a : $\vec{v}\cdot\vec{w}=\|\vec{v}\|\cdot\|\vec{w}\|\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\|\vec{v}\|\cdot\|\vec{w}\|\cos\theta$

où : $(\vec{u};\vec{v})\equiv\theta[2\pi]$ Ce qui nous permet de confirmer que : $\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|\sin\theta=-x'y+xy'$

et donc : $\sin\theta=\frac{xy'-x'y}{\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|}=\frac{\det(\vec{u};\vec{v})}{\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|}$

Théorème : L'espace V_2 est rapporté à une base orthonormée $B(\vec{i};\vec{j})$ Soient $\vec{u}(x;y)$ et $\vec{v}(x';y')$

$$\cos(\vec{u};\vec{v})=\frac{xx'+yy'}{\sqrt{x^2+y^2}\times\sqrt{x'^2+y'^2}}$$

$$\sin\theta=\frac{xy'-x'y}{\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|}=\frac{\det(\vec{u};\vec{v})}{\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|}$$

Exercice: dans Le plan $(\mathcal{P})$ est rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}(O;\vec{i};\vec{j})$ Considérons les points $A(5;0)$ et $B(2;1)$ et $C(6;3)$

1) Calculer $\cos(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$ et $\sin(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$

2)en déduire une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$

Solution : 1) $\cos(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})=\frac{\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AB}\|\times\|\overrightarrow{AC}\|}$ et

$\sin(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})=\frac{\det(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})}{\|\overrightarrow{AB}\|\times\|\overrightarrow{AC}\|}$

et on a : $\overrightarrow{AB}(-3;1)$ et $\overrightarrow{AC}(1;3)$

$\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AC}=-3\times1+1\times3=-3+3=0$

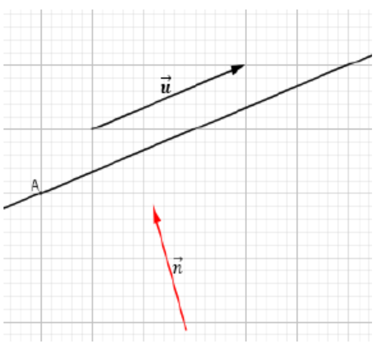
$\det(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})=\begin{vmatrix}-3 & 1\\ 1 & 3\end{vmatrix}=-10$

$AB=\|\overrightarrow{AB}\|=\sqrt{(-3)^2+1^2}=\sqrt{10}$ et $AC=\sqrt{10}$

$\cos(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})=\frac{0}{\sqrt{10}\times\sqrt{10}}=0$

$\sin(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})=\frac{-10}{\sqrt{10}\times\sqrt{10}}=-1$

2) on a : $\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AC}=0$ et $AB=AC$ donc le triangle ABC est rectangle et isocèle en A



$\overline{(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})}=\frac{-\pi}{2}[2\pi]$

car :

$\overline{(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{BC})}=\frac{-\pi}{4}[2\pi]$

et $\sin(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})=-1$

Donc : $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{BC}\right)=\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)+\left(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{BC}\right)[2\pi]$

$\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{BC}\right)=\frac{-\pi}{2}-\frac{\pi}{4}[2\pi]=-\frac{3\pi}{4}[2\pi]$

IV) DISTANCE D'UN POINT PAR RAPPORT A UNE DROITE.

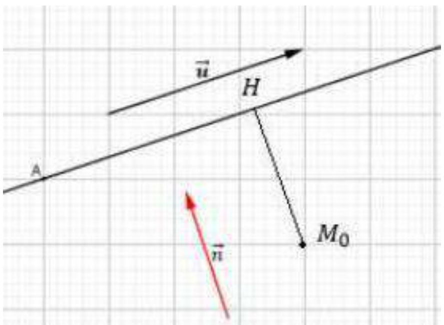
1) Vecteur normal sur une droite.

Définition : Soit $D\left(A;\vec{u}\right)$ la droite passante par A et de vecteur directeur $\vec{u}$; tout vecteur $\vec{n}$ non nul et orthogonal à $\vec{u}$ s'appelle un vecteur normal sur la droite ($\boldsymbol{D}$).

Remarque :

Si $\vec{n}$ est normal sur une droite (D) ; Tout Vecteur non nul colinéaire avec $\vec{n}$ est aussi Normal sur la droite (D).

Si (D): $ax + by + c = 0$ est une droite dans le plan alors $\vec{u}(-b;a)$ est un vecteur directeur de la droite (D), et le vecteur $\vec{n}(a;b)$ est non nul et orthogonal à $\vec{u}$ donc normal sur la droite (D).



2) Equation d'une droite définie par un point donné et un vecteur normal.

Soient $A\left(x_A;y_A\right)$ un point donné, et $\vec{v}(a;b)$ un vecteur non nul. Soit (D) la droite qui passe par A et qui admet $\vec{v}$ comme vecteur normal.

$M\left(x;y\right)\in(D)\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}.\vec{v}=0\Leftrightarrow a\left(x-x_A\right)+b\left(y-y_A\right)=0$

$\Leftrightarrow ax+by-\left(ax_A+by_A\right)=0$

Propriété : Soient $A\left(x_A;y_A\right)$ un point donné, et $\vec{n}(a;b)$ un vecteur non nul. La (D) la droite qui passe par A et qui admet $\vec{n}$ comme vecteur normal a une équation cartésienne de la forme :

(D): $a\left(x-x_A\right)+b\left(y-y_A\right)=0$

Exercice : déterminer une équation cartésienne de la droite (D) qui passe par $A(0;1)$ et qui admet $\vec{n}(2;1)$ comme vecteur normal

Solution : on a (D) qui passe $A(0;1)$ et $\vec{n}(2;1)$ un vecteur normal donc : une équation cartésienne de la droite (D) est : $2(x-0)+1(y-1)=0$

Donc : (D) : $2x+y-1=0$

Exercice : donner un vecteur normal a la droite (D) dans les cas suivants : 1) $(D):x-2y+5=0$

2) $(D):2y-3=0$ 3) $(D):x-1=0$

Solution : un vecteur normal a la droite (D) d'équation cartésienne : $ax+by+c=0$

Est $\vec{n}(a;b)$

1) $(D):x-2y+5=0$: $\vec{n}(1;-2)$ un vecteur normal

2) $(D):0x+2y-3=0$: $\vec{n}(0;2)$ un vecteur normal

2) $(D):1x+0y-1=0$: $\vec{n}(1;0)$ un vecteur normal

Exercice : dans Le plan ($\mathcal{P}$) est rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ Considérons les points $A(-3;0)$ et $B(3;0)$ et $C(1;5)$

1)déterminer une équation cartésienne de la droite (D) perpendiculaire à la droite (AB) Passant par C

2)déterminer une équation cartésienne de la droite (Δ) parallèle à la droite (AB) Passant par C

Solution : 1) Soit M un point du plan ($\mathcal{P}$)

$M\in(D)\Leftrightarrow\overrightarrow{CM}\bullet\overrightarrow{AB}=0\Leftrightarrow 6(x-1)-(y-5)=0$

$\Leftrightarrow 6x-y-1=0$

Donc : $(D):6x-y-1=0$

1)soit $M(x;y)$ un point du plan ($\mathcal{P}$)

$M\in(\Delta)\Leftrightarrow\overrightarrow{CM}\bullet\vec{n}=0$

Avec $\vec{n}$ un vecteur normal a la droite (AB)

Le vecteur : $\overrightarrow{AB}(6,-1)$ est un vecteur directeur de la droite (AB) et on a : $\vec{n}(1,6)$

On a donc : $M\in(\Delta)\Leftrightarrow(x-1)+6(y-5)=0$

$\Leftrightarrow x+6y-31=0$ Donc : $(\Delta):x+6y-31=0$

Exercice : dans Le plan ($\mathcal{P}$) est rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ Considérons les points $A(1;2)$ et $B(-2;3)$ et $C(0;4)$

1)déterminer une équation cartésienne

de la droite (D) médiatrice du segment $[AB]$

2)déterminer une équation cartésienne de la droite (Δ) la hauteur du triangle ABC passant par A

Solution : 1) $(D)/\, ax+by+c=0$

Avec $\overrightarrow{AB}(a,b)$ un vecteur normal a (D)

$\overrightarrow{AB}(-3,1)$ Donc : $(D)/-3x+y+c=0$

Or $I\in(D)$ I est le milieu du segment $[AB]$

$I\left(\frac{x_A+x_B}{2},\frac{y_A+y_B}{2}\right)$ Donc $I\left(\frac{-1}{2},\frac{5}{2}\right)$

Donc : $-3\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{5}{2}+c=0 \Leftrightarrow \frac{3}{2}+\frac{5}{2}+c=0 \Leftrightarrow c=-4$

Par suite : $(D)/-3x+y-4=0$

2) (Δ) la hauteur du triangle ABC passant par A

Donc : (Δ) perpendiculaire à (BC) passant par A

Donc $\overrightarrow{BC}(2,1)$ un vecteur normal a (Δ) donc

$(\Delta)/\,2x+y+c=0$ et on a $A\in(\Delta)$ donc

$2\times1+2+c=0 \Leftrightarrow c=-4$

$(\Delta)/\,2x+y-4=0$

3) droites perpendiculaires

Proposition : Le plan $(\mathcal{P})$ est rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$

On considère les deux droites : $(D): ax+by+c=0$ et $(D'): a'x+b'y+c'=0$

$(D)\perp(D') \Leftrightarrow \vec{n}\perp\vec{n'} \Leftrightarrow aa'+bb'=0$

Avec $\vec{n}$ le vecteur normal de **(D)** et $\vec{n}'$ le vecteur normal de **(D')**

Exercice : (D) $2x+3y-1=0$ et (D') $\frac{3}{2}x-y+4=0$

Etudier la position relative de (D) et (D')

un vecteur normal de (D) **Solution :** $\vec{n}(2;3)$ est

$\vec{n'}\left(\frac{3}{2};-1\right)$ est un vecteur normal de (D')

$\vec{n}\bullet\vec{n'}=2\times\frac{3}{2}+3\times(-1)=3-3=0$ Donc $\vec{n}\perp\vec{n'}$

Donc $(D)\perp(D')$

4) Distance d'un point par rapport à une droite.

Définition : Soient (D) une droite et M_0 un point dans le plan. La distance du point M_0 à la droite (D) est la distance M_0H où H est la projection orthogonal de M_0 sur (D).On la note : $d\left(M_0;(D)\right)$

Preuve : Soit la droite (D): $ax+by+c=0$ et $M_0(x_0;y_0)$;Soit H la projection orthogonale de M_0 sur (D), $\vec{n}(a;b)$ est normal sur (D).

On a pour tout point $A(x_A;y_A)$ de la droite (D) :

$\overrightarrow{M_0A}.\vec{n}=\left(\overrightarrow{M_0H}+\overrightarrow{HA}\right).\vec{n}=\overrightarrow{M_0H}.\vec{n}+\overrightarrow{HA}.\vec{n}=\overrightarrow{M_0H}.\vec{n}$

Donc : $\overrightarrow{M_0H}.\vec{n}=\overrightarrow{M_0A}.\vec{n}$

On conclue que $\left|\overrightarrow{M_0H}.\vec{n}\right|=\left|\overrightarrow{M_0A}.\vec{n}\right|$ par suite

$\left\|\overrightarrow{M_0H}\right\|\left\|\vec{n}\right\|=\left|\overrightarrow{M_0A}.\vec{n}\right|$ et finalement : $M_0H=\frac{\left|\overrightarrow{M_0A}.\vec{n}\right|}{\left\|\vec{n}\right\|}$

En passant à l'expression analytique :

$\vec{n}(a;b))$ et $\overrightarrow{M_0A}(x_A-x_0;y_A-y_0)$

Par suite : $M_0H=\frac{\left|a(x_A-x)_0+b(y_A-y_0)\right|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$M_0H=\frac{\left|ax_A-ax_0+by_A-by_0\right|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$M_0H=\frac{\left|ax_A+by_A-ax_0-by_0\right|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Or $A\in(D) \Leftrightarrow ax_A+by_A+c=0 \Leftrightarrow ax_A+by_A=-c$

D'où $M_0H=\frac{\left|-c-ax_0-by_0\right|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{\left|ax_0+by_0+c\right|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Théorème : Soient la droite (D): $ax+by+c=0$ et $M_0(x_0;y_0)$ un point dans le plan.

La distance du point M_0 à la droite (D) est :

$$M_0H=\frac{\left|ax_0+by_0+c\right|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Exercice : Soient la droite (D) d'équation :

$(D): 3x+4y+5=0$

1)Déterminer les coordonnées du point H la projection orthogonale de O sur (D)

2)calculer La distance du point O à la droite (D)

3)Déterminer les coordonnées du point O' le symétrique de O par rapport à la droite (D)

Solution :1) puisque H est la projection orthogonale de O sur (D) alors H est le point d'intersection de la droite (D)et la droite (Δ) qui passe par O et perpendiculaire a (D) on va donc résoudre le système suivant : $\begin{cases}(D):3x+4y+5=0\\(\Delta):4x-3y=0\end{cases}$ On trouve :

$x=\frac{-3}{5}$ et $y=\frac{-4}{5}$ donc $H\left(\frac{-3}{5};\frac{-4}{5}\right)$

Autre méthode :Soit $H\left(x_H;y_H\right)$ on a :

$H\in(D)\Leftrightarrow 3x_H+4y_H+5=0$

$\overrightarrow{OH}$ est normal a la droite (D) donc colinéaire avec $\vec{u}(3;4)$ Donc : $\exists k\in\mathbb{R}/\overrightarrow{OH}=k\vec{u}\Leftrightarrow\begin{cases}x_H=3k\\y_H=4k\end{cases}$

Pour déterminer x_H et y_H on va donc résoudre le système suivant : $\begin{cases}(1)\,x_H=3k\\(2)\,y_H=4k\\(3)\,3x_H+4y_H+5=0\end{cases}$

On remplace (1) et (2) dans (3) on trouve :

$k=\frac{-1}{5}$ Donc : $\begin{cases}x_H=\frac{-3}{5}\\y_H=\frac{-4}{5}\end{cases}$

2) $d\left(O;(D)\right)=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|3\times0+4\times0+5|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{5}{5}=1$

3) O' le symétrique de O par rapport à la droite (D)

Donc H est le milieu du segment $[OO']$

Donc : $\overrightarrow{O'H}=-\overrightarrow{OH}$ on pose : $O'(x;y)$

Donc : $\begin{cases}\frac{-3}{5}-x=\frac{3}{5}\\\frac{-4}{5}-y=\frac{4}{5}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-\frac{6}{5}\\y=-\frac{8}{5}\end{cases}$ Donc : $O'\left(-\frac{6}{5};-\frac{8}{5}\right)$

Exercice : dans Le plan $(\mathcal{P})$ est rapporté à un repère orthonormé et direct $\mathcal{R}\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ Considérons les points $A(1;-1)$ et $B(4;-1)$ et $C(-2;2)$

1) Calculer : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ et $\det\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$

2)en déduire une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$

3)Calculer la surface du triangle ABC

4)déterminer une équation cartésienne de la hauteur du triangle ABC passant par A

5)déterminer une équation cartésienne de la bissectrice de l'angle $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$

Solution :1) on a : $\overrightarrow{AB}(3;0)$ et $\overrightarrow{AC}(-3;3)$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=3\times(-3)+0\times3=-9$

$\det\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)=\begin{vmatrix}3&-3\\0&3\end{vmatrix}=9$

2)soit α une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$ on a :

$\cos\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AB}\|\times\|\overrightarrow{AC}\|}$ et $\sin\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)=\frac{\det\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)}{\|\overrightarrow{AB}\|\times\|\overrightarrow{AC}\|}$

$AB=\|\overrightarrow{AB}\|=\sqrt{3^2+0^2}=3$ et $AC=3\sqrt{2}$

Donc : $\cos\alpha=\frac{-9}{9\sqrt{2}}=\frac{-\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\alpha=\frac{9}{9\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

Donc : $\alpha=\frac{3\pi}{4}$

3) on a : $S=\frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)\right|=\frac{9}{2}cm^2$

4)soit (Δ) la hauteur du triangle ABC passant par A

Donc : (Δ) perpendiculaire a (BC) passant par A

Donc $\overrightarrow{BC}(-6,3)$ un vecteur normal a (Δ) donc

$(\Delta)/-6x+3y+c=0$ et on a $A(1;-1)\in(\Delta)$ donc

$-6\times1-3+c=0\Leftrightarrow c=9$

$(\Delta)/-6x+3y+9=0$ donc : $(\Delta)/2x-y-3=0$

4)soit (D) la bissectrice de l'angle $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$

Pour Chaque point $M(x,y)$ de la droite (D)

On a : $d\left(M;(AB)\right)=d\left(M;(AC)\right)$

D'où $\frac{|y+1|}{\sqrt{0^2+1^2}}=\frac{|x+y|}{\sqrt{0^2+1^2}}$

$\Leftrightarrow\sqrt{2}|y+1|=|x+y|$

On remarque que (D) se trouve dans le demi plan tel que : $\begin{cases}y+1\geq0\\x+y\geq0\end{cases}$ donc : $\sqrt{2}(y+1)=x+y$

Donc : l'équation cartésienne de (D) est :

$\begin{cases}x+\left(1-\sqrt{2}\right)y-\sqrt{2}=0\\y+1\geq0\end{cases}$ (D) est un demi droite

C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices

Que l'on devient un mathématicien

PRODUIT SCALAIRE DANS $\mathcal{V}_2$

Etude analytique (2) -Applications- : cercle

Dans tout ce qui va suivre le plan $(\mathcal{P})$ est rapporté à un repère $\mathcal{R}\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ orthonormé.

I) EQUATION D'UN CERCLE

Définition : Soient Ω un point et r un réel positif, le cercle de centre Ω et de rayon r est l'ensemble des points M dans le plan $(\mathcal{P})$ qui vérifient : $\Omega M = r$ on le note, $\mathcal{C}(\Omega,r)$: $C\left(\Omega;r\right)=\{\boldsymbol{M}\in(\boldsymbol{\mathcal{P}})/\boldsymbol{\Omega M}=\boldsymbol{r}\}$

Remarque : On peut considérer le point comme étant un cercle de rayon nul.

1) Cercle défini par son centre et son rayon.

Soient $\Omega(a, b)$ un point et r un réel positif,

$M(x, y)\in C\left(\Omega;r\right)\Leftrightarrow \Omega M = r$

$\Leftrightarrow \Omega M^2 = r^2$

$\Leftrightarrow (x-a)^2+(y-b)^2=r^2$

Exemple : déterminer l'équation cartésienne du cercle de centre $\Omega(-1;2)$ et de rayon $r=3$

Solution : l'équation cartésienne du cercle est :

$\mathcal{C}(\Omega,r)$: $(x+1)^2+(y-2)^2=3^2$

C a d : $x^2+y^2+2x-4y-4=0$

Propriété : Soient $\Omega(a, b)$ un point et r un réel positif, le cercle $\mathcal{C}(\Omega,r)$ à une équation cartésienne de la forme : $\mathcal{C}(\Omega,r)$: $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$

2) Equation réduite d'un cercle

On a : $M(x, y)\in\mathcal{C}(\Omega,r)\Leftrightarrow (x-a)^2+(y-b)^2=r^2$

$\Leftrightarrow x^2-2ax+a^2+y^2-2by+b^2-r^2=0$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+\alpha x+\beta y+\gamma=0$ où : $\alpha=-2a$; $\beta=-2b$ et $\gamma=a^2+b^2-r^2$

Propriété1 : Tout cercle dans le plan à une équation de la forme : $x^2+y^2+\alpha x+\beta y+\gamma=0$ où α , β et γ sont des réels.

Propriété2 : Soit (C) L'ensemble des points $M(x;y)$ du plan tel que :

$x^2+y^2-2ax-2by+c=0$

Avec a ; b ; c des réelles

- Si : $a^2+b^2-c\succ 0$

Alors (C) est un cercle de centre $\Omega(a;b)$ et de rayon $R=\sqrt{a^2+b^2-c}$

- Si : $a^2+b^2-c=0$ alors $(C)=\{\Omega(a;b)\}$
- Si : $a^2+b^2-c\prec 0$ alors $(C)=\varnothing$

PREUVE : $M(x;y)\in(C)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2+y^2-2ax-2by+c=0$

$\Leftrightarrow x^2-2ax+a^2+y^2-2by+b^2+c-a^2-b^2=0$

$\Leftrightarrow (x-a)^2+(y-b)^2=a^2+b^2-c=0$

- Si : $a^2+b^2-c\succ 0$ alors (C) est une cercle de centre $\Omega(a;b)$ et de rayon $R=\sqrt{a^2+b^2-c}$
- Si : $a^2+b^2-c=0$ alors $(C)=\{\Omega(a;b)\}$
- Si : $a^2+b^2-c\prec 0$ alors $(C)=\varnothing$

Exemples : Déterminer L'ensemble (E) dans les cas suivants :

1) (E): $x^2+y^2-x+3y-4=0$

2) (E): $x^2+y^2-6x+2y+10=0$

3) (E): $x^2+y^2-4x+5=0$

Solutions : 1) $a=\frac{1}{2};b=-\frac{3}{2};c=-4$

On a : $a^2+b^2-c=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{3}{2}\right)^2-(-4)=\frac{1}{4}+\frac{9}{4}+4=\frac{13}{2}>0$

Donc : $\Omega(\frac{-a}{2};\frac{-b}{2})$ donc $\Omega(\frac{1}{2};\frac{-3}{2})$

$R=\sqrt{a^2+b^2-c}=\frac{\sqrt{26}}{2}$

Alors (E) : est un cercle de centre

$\Omega(\frac{1}{2};\frac{-3}{2})$ et de rayon $\frac{\sqrt{26}}{2}$

2) $a=3;b=-1;c=10$ $a^2+b^2-c=3^2+(-1)^2-10=9+1-10=0$

Alors $(E)=\{\Omega(3;-1)\}$

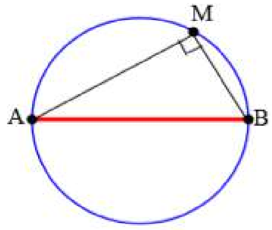
3) $a=2;b=0;c=5$

$a^2+b^2-c=4-5=-1<0$ alors $(E)=\varnothing$

3) Cercle définie par son diamètre.

Propriété : (Rappelle)

Soient A et B deux points distincts dans le plan l'ensemble des points M qui vérifient $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$ est le cercle de diamètre [AB].Ce qui nous permet d'énoncer la propriété suivante :



Propriété : Soient $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$ deux points distincts dans le plan, le cercle de diamètre [AB] à pour équation :

$(x-x_A)(x-x_B)+(y-y_A)(y-y_B)=0$

Exemple : Déterminer une équation du cercle de diamètre [AB] avec $A(1;2)$ et $B(-3;1)$

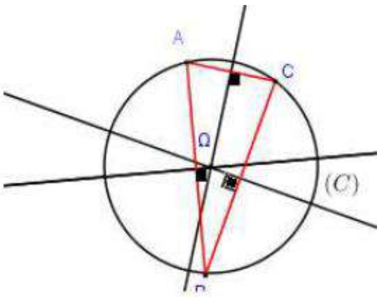
Solution : $M(x;y)\in(C)\Leftrightarrow\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$

$\overrightarrow{MA}(1-x;2-y)$ et $\overrightarrow{MB}(-3-x;1-y)$

$M(x;y)\in(C)\Leftrightarrow(-3-x)(1-x)+(1-y)(2-y)=0$

Donc : $(C):x^2+y^2+2x-3y-1=0$

4) cercle définie par trois points ou Cercle circonscrit à un triangle



Soit ABC un triangle, les médiatrices du triangle ABC se coupent en Ω le Centre du cercle circonscrit du triangle ABC

Exemple : le plan ($\mathcal{P}$) est rapporté à un repère $\mathcal{R}(O;\vec{i};\vec{j})$ orthonormé. Soient les points

$A(2;3)$ $B(0;1)$; $C(-4;5)$; $E(5;2)$ et $F(2;4)$

1)Ecrire l'équation du cercle circonscrit au Triangle ABC.

2)Ecrire l'équation du cercle circonscrit au triangle OEF.

Solution : 1) Soient $I(1;2)$ et $J(-1;4)$ le milieu respectivement du segment : $[AB]$ et $[AC]$

Et soit (Δ) la médiatrice de $[AB]$ donc (Δ) passe par $I(1;2)$ et $\overrightarrow{AB}$ un vecteur normal a (Δ)

Et on a : $\overrightarrow{AB}(-2;-2)$ donc une équation de (Δ) est :

$(\Delta):-2(x-1)-2(y-2)=0$

Donc : $(\Delta):-2x+2-2y+4=0$ donc $(\Delta):-2x-2y+6=0$

Donc $(\Delta):x+y-3=0$ (après simplifications)

Et soit (Δ') la médiatrice de $[AC]$ donc (Δ') passe par $J(-1;4)$ et $\overrightarrow{AC}$ un vecteur normal a (Δ') et on a : $\overrightarrow{AC}(-6;2)$ donc une équation de (Δ') est :

$(\Delta'):-6(x+1)+2(y-4)=0$ donc : $(\Delta'):3x-y+7=0$

On a Ω est le Centre du cercle circonscrit du triangle ABC donc le point d'intersection de (Δ) et (Δ') on va donc résoudre le système :

$$\begin{cases}(\Delta):x+y-3=0\\(\Delta'):3x-y+7=0\end{cases}$$

Et la solution de ce système est : $(-1;4)$ donc $\Omega(-1;4)$ est le centre du cercle circonscrit du triangle ABC et le rayon est :

$r=A\Omega=\sqrt{(-1-2)^2+(4-3)^2}=\sqrt{10}$

Et l'équation du cercle est : $(x+1)^2+(y-4)^2=10$

$(C):x^2+y^2+2x-8y+7=0$

2)déterminons l'équation du cercle circonscrit au triangle OEF.

On sait que l'équation du cercle s'écrit sous la forme :

$(C'):x^2+y^2-2ax-2by+c=0$

Et on a : $O\in(C')\Leftrightarrow c=0$

$E(5;2)\in(C')\Leftrightarrow 25+4-10a-4b=0$

$F(2;4)\in(C')\Leftrightarrow 4+16-4a-8b=0$

on va donc résoudre le système :

$$\begin{cases}10a+4b=29\\a+2b=5\\c=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\frac{19}{8}\\b=\frac{21}{16}\\c=0\end{cases}$$

Et l'équation du cercle est :

$(C'):x^2+y^2-\frac{19}{4}x-\frac{21}{8}y=0$

II) L'INTERIEUR ET L'EXTERIEUR D'UN CERCLE.

Définition : Soit $C(\Omega;r)$ un cercle dans le plan.

a) L'ensemble des points M dans le plan qui vérifient $\Omega M \leq r$ s'appelle la boule fermée de centre Ω et de rayon r, il s'appelle aussi l'intérieur du cercle $C(\Omega;r)$

b) L'ensemble des points M dans le plan qui vérifient $\Omega M > r$ s'appelle l'extérieur du cercle $C(\Omega;r)$

Application : La résolution graphique de quelques systèmes d'inéquation

Exemple : Nous allons résoudre graphiquement le système :

$$(S)\begin{cases} x^2+y^2-2x-4y+\dfrac{11}{4}\prec 0 \\ x^2+y^2+2x-4\succ 0 \end{cases}$$

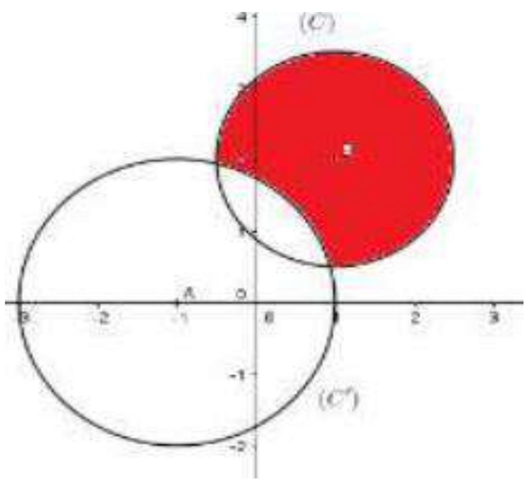
$x^2+y^2-2x-4y+\dfrac{11}{4}=0$

est l'équation du cercle $(\mathcal{C})$

de centre $B(1{,}2)$ et de rayon $r=\dfrac{3}{2}$

$x^2+y^2+2x-4=0$ est l'équation du cercle $(\mathcal{C}')$ de centre $A(-1{,}0)$ et de rayon $r'=2$.

L'ensemble des points M qui vérifient (S) est l'extérieur de $(\mathcal{C}')$ intersection l'intérieur de $(\mathcal{C})$



Exercice1 : résoudre graphiquement le système :

$$(S)\begin{cases} (1): x^2+y^2-4x\prec 0 \\ (2): x-y-1\succ 0 \end{cases}$$

Solution :

- $(1): x^2+y^2-4x\prec 0 \Leftrightarrow (x-2)^2+y^2\prec 2^2$

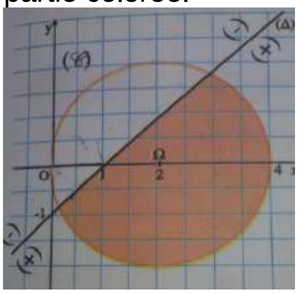
Donc les solutions de cette inéquation c'est les couples $(x;y)$ des points qui se trouvent à l'intérieurs du cercle $(\mathcal{C})$ de centre $\Omega(2;0)$ et de rayon $r=2$

- $(2): x-y-1\succ 0$: les solutions de cette inéquation c'est les couples $(x;y)$ des points qui se trouvent au-dessous de la droite d'équation : $(\Delta): x^2+y^2-4x=0$

(Demi plan qui contient $\Omega(2;0)$

Car $:2-0-1=1\succ 0$)

Finalement l'ensemble des solutions du système c'est les couples $(x;y)$ des points qui appartiennent à la partie colorée.



Exercice2 : Résoudre graphiquement $(x^2+y^2-4x-6y+9)(2x-y+1)\leq 0$

III) POSITIONS RELATIVES D'UN CERCLE EST D'UNE DROITE.

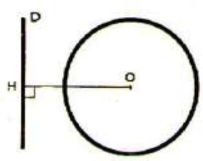
1) Propriété

Soit $C(O;r)$ un cercle de rayon r strictement positif et (D) une droite dans le plan. Pour étudier les positions relatives du cercle $C(O;r)$ de (D), il suffit de déterminer la distance de O à (D). soit H la projection orthogonal de O sur (D)

1)Si $d(O;(D))=OH\succ r$

Soit M un point de la droite (D) on a : $OM \geq OH > r$ donc tout point de la droite (D) est strictement à L'extérieure du cercle $(\mathcal{C})$

$(\mathcal{C})\cap(D)=\emptyset$



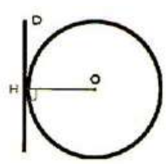
2) $d(O;(D))=OH=r$

Puisque $OH=r$ alors H est un point Commun entre (D) et $(\mathcal{C})$.

Soit M un point de la droite (D) Différent de H on a :

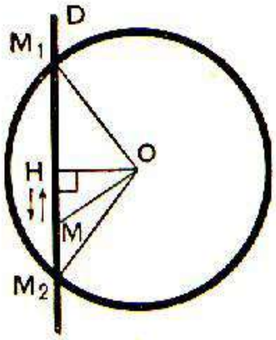
$OM > OH = r$

Donc tout point de la droite (D) Différent de H est strictement à L'extérieure du cercle $(\mathcal{C})$.



$(\mathcal{C}) \cap (D) = \{H\}$ Ont dit que la droite (D) est tangente au cercle $(\mathcal{C})$ en H

3) $d(O, (D)) = \Omega H < r$



Dans ce cas le cercle $(\mathcal{C})$ et la droite(D) se coupent en deux points M_1 et M_2 et H est le milieu du segment $[M_1M_2]$

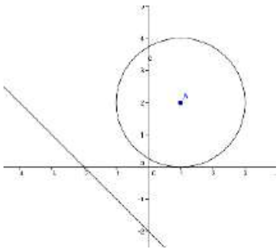
Exemple1 : Etudier la position du cercle de centre $\Omega(1;2)$ et de rayon $R = 2$ avec la droite d'équation $(D): x + y + 2 = 0$

Solution : on calcul $d(\Omega,(P))$?

$$d(\Omega,(P)) = \frac{|1+2+2|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{|5|}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2} > R = 2$$

Donc : droite (D) est à L'extérieure du cercle $(\mathcal{C})$

$(\mathcal{C}) \cap (D) = \emptyset$



Exemple2 : Etudier la position du cercle $(\mathcal{C})$ de centre $\Omega(1;2)$ et de rayon $R = 2$ avec la droite d'équation $(D): x - y + 2 = 0$

Solution : on calcul $d(\Omega,(P))$?

$$d(\Omega,(P)) = \frac{|1-2+2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \frac{|1|}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} < R = 2$$

Donc : le cercle $(\mathcal{C})$ et la droite (D) se coupent en deux points A et B

Déterminons les coordonnées des points d'intersections ?

On va résoudre le système suivant :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (1)\ (x-1)^2+(y-2)^2=(2)^2 \\ (2)\ x-y+2=0 \end{cases}$$

On a : $(2) \Leftrightarrow x+2=y$

En remplaçant dans (1) $y = x+2$

On trouve : $(1)\ (x-1)^2+(x+2-2)^2=(2)^2$

Donc : $(x-1)^2+(x)^2=4 \Leftrightarrow x^2-2x+1+x^2=4$

Donc : $2x^2-2x-3=0$ $\quad \Delta = 28$

Donc : $x_1 = \frac{2+2\sqrt{7}}{4}$ et $x_2 = \frac{2-2\sqrt{7}}{4}$

Donc : $x_1 = \frac{1+\sqrt{7}}{2}$ et $x_2 = \frac{1-\sqrt{7}}{2}$

Si : $x_1 = \frac{1+\sqrt{7}}{2}$ on remplace dans $x+2=y$

On trouve : $y_1 = \frac{1+\sqrt{7}}{2} + 2 = \frac{5+\sqrt{7}}{2}$

Si : $x_2 = \frac{1-\sqrt{7}}{2}$ on remplace dans $x+2=y$

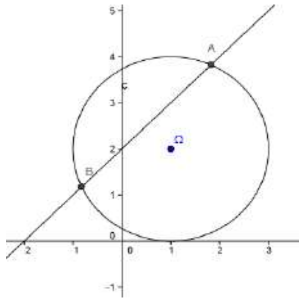
On trouve :

$y_2 = \frac{1-\sqrt{7}}{2} + 2 = \frac{5-\sqrt{7}}{2}$

Donc : les points d'intersections sont :

$A\left(\frac{1+\sqrt{7}}{2};\frac{5+\sqrt{7}}{2}\right)$ et

$B\left(\frac{1-\sqrt{7}}{2};\frac{5-\sqrt{7}}{2}\right)$



Exemple3 :Etudier la position du cercle $(\mathcal{C})$ de centre $\Omega(1;2)$ et de rayon $R=1$ avec la droite d'équation $(D): y = 3$

Solution : on calcul $d(\Omega,(P))$?

$(D): 0x + 1y - 3 = 0$

$$d(\Omega,(P)) = \frac{|0+2-3|}{\sqrt{0^2+1^2}} = \frac{|-1|}{\sqrt{1}} = 1 = R$$

Donc : la droite (D) est tangente au cercle $(\mathcal{C})$ en A

Déterminons les coordonnées du point d'intersection ou point de tangence ?

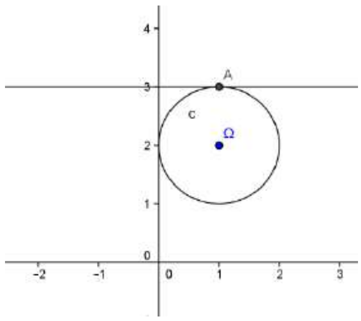
L'équation de $(\mathcal{C})$ est $(x-1)^2+(y-2)^2=1^2$

On va résoudre le système suivant :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (1)\ (x-1)^2+(y-2)^2=1 \\ (2)\ y=3 \end{cases}$$

En remplaçant dans $y=3$ dans (1)

On aura :



$(1)\ (x-1)^2+1=1 \Leftrightarrow (x-1)^2=0 \Leftrightarrow x-1=0$

Donc : $x=1$ donc point de tangence est $A(1;3)$

2) Droite tangente à un cercle.

2.1 Définition

Dans tous ce qui suit le rayon du cercle est strictement positif.

Définition : Une droite (D) est dite tangente à un cercle $(\mathcal{C})$ s'ils se coupent en un seul point.

Propriété : Une droite (D) est dite tangente au cercle $\mathcal{C}\ (\Omega, r)$ si et seulement si $d\ (\Omega, (D)) = r$

2.2 Equation de la tangente à un cercle en un de ses points.

Soit $\mathcal{C}\ (\Omega, r)$ un cercle dans le plan où $\Omega\ (a, b)$ et A l'un de ses points.

Soit la droite (T) la tangente à $\mathcal{C}\ (\Omega, r)$ en A

$M(x;y)\in(T)\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{A\Omega}=0$

$\Leftrightarrow(x-x_A)(y-y_A)+(a-x_A)(b-y_A)=0$

Propriété : Soient $\Omega\ (a, b)$ un point et $\mathcal{C}\ (\Omega, r)$ un cercle dans le plan et A l'un de ses points. La droite (T) tangente à $\mathcal{C}(\Omega,r)$ en A à pour équation :

$(x-x_A)(y-y_A)+(a-x_A)(b-y_A)=0$

Exemple : Soit $(\mathcal{C})$ le cercle d'équation :

$x^2+y^2-4x-2y+1=0\ (1)$

1)Vérifier que $A(0;1)\in(C)$

2) Ecrire l'équation de la tangente au cercle $(\mathcal{C})$ en A.

Solution :1) On a : $0^2+1^2-4\times0-2\times1+1=0$

Donc $A(0;1)\in(C)$

2)L'équation de la tangente au cercle $(\mathcal{C})$ en A. ??

$a=2;b=1;c=1$: $a^2+b^2-c=2^2+1^2-1=4>0$

Donc $(\mathcal{C})$ cercle de centre $\Omega(\frac{-a}{2};\frac{-b}{2})$ cad $\Omega(2;1)$

$\overrightarrow{A\Omega}(-2;0)$ et $\overrightarrow{AM}(x-0;y-1)$

$M(x;y)\in(D)\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}\bullet\overrightarrow{A\Omega}=0$

$-2(x-0)=0\Leftrightarrow-2(x-0)+0(y-1)=0\Leftrightarrow M(x;y)\in(D)$

$M(x;y)\in(D)\Leftrightarrow x=0$

Donc : L'équation de la tangente au cercle $(\mathcal{C})$ en A est : $(D):x=0$

Application : Soit $(\mathcal{C})$ le cercle d'équation :

$x^2 + y^2 - 2x - 2y - 6 = 0$

1)Vérifier que le point $A\ (3, -1)$ appartient au cercle

2- Ecrire l'équation de la tangente au cercle $(\mathcal{C})$ en A.

2.3 Tangente à un cercle $(\mathcal{C})$ passante par un point à l'extérieure de $(\mathcal{C})$

Exercice :

Soient le cercle $(\mathcal{C})$: $(x-2)^2+(y-1)^2=4$ et $A(5,6)$

1- Vérifier que le point A est à l'extérieur de $(\mathcal{C})$

2- a) Déterminer l'équation de la droite (δ) passante par A et parallèle à l'axe des ordonnées.

b) Vérifier que (δ) n'est pas tangente à $(\mathcal{C})$.

3- Soit (Δ) une droite qui passe par A et qui n'est pas parallèle à l'axe (Oy) et dont l'équation réduite est : $(\Delta)\ y = mx + p$

a) Déterminer l'équation de (Δ) en fonction de m uniquement.

b) Déterminer m pour que (Δ) soit tangente au cercle $(\mathcal{C})$.

4- Soit $B(4,5)$

a) Montrer que la droite passante par B et parallèle à l'axe des ordonnées est tangente au cercle $(\mathcal{C})$.

b) Soit (Δ') une droite qui passe par A et qui n'est pas parallèle à l'axe (Oy) et dont l'équation réduite est : $(\Delta')\ y = mx + p$; Déterminer m pour que (Δ) soit tangente au cercle $(\mathcal{C})$.

2.3 Tangente à un cercle et de direction déterminée.

Soit $(\mathcal{C})$ le cercle de centre $\Omega(-1,2)$ et de rayon 3. Déterminer les équations des tangentes à $(\mathcal{C})$ et de vecteur directeur $\vec{u}(-2;1)$.

3) Equation paramétrique d'un cercle.

Le plan $(\mathcal{P})$ est rapporté à un repère $\mathcal{R}(O;\vec{i};\vec{j})$ orthonormé.

Considérons $(\mathcal{C})$ le cercle de centre $\Omega(a, b)$ et de rayon r. On a : $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{O\Omega}+\overrightarrow{\Omega M}$ (1)

Si $M(x, y)$ dans $\mathcal{R}$ et $M(X, Y)$ dans $\mathcal{R}'$ où :

$\mathcal{R}(O;\vec{i};\vec{j})$ et $\mathcal{R}'(O;\vec{i};\vec{j})$

Alors (1) se traduit analytiquement par : $\begin{cases}x=a+X\\y=b+Y\end{cases}$

or $\begin{cases}X=r\cos\alpha\\Y=r\sin\alpha\end{cases}$ et par suite : $\begin{cases}x=a+r\cos\alpha\\y=b+r\sin\alpha\end{cases}$

Réciproquement l'ensemble

$(C)=\left\{M(x;y)\in(P)/\begin{cases}x=a+r\cos\alpha\\y=b+r\sin\alpha\end{cases}\right\}$

Où a et b sont des réels et r un réel positif

Est le cercle de centre $\Omega(a, b)$ et de rayon r

Exemple1 :Déterminer l'*équation paramétrique du cercle* (C) de centre $\Omega(1;-2)$ et de rayon $r=\sqrt{2}$

Solution : l'équation *paramétrique du cercle* (C) de centre $\Omega(1;-2)$ et de rayon $r=\sqrt{2}$ est :

$\begin{cases} x=1+\sqrt{2}\cos\theta \\ y=-2+\sqrt{2}\sin\theta \end{cases}$ avec $(\theta\in\mathbb{R})$

Exemple2 : Déterminer l'ensemble (C) des points $M\ (x\,;y)$ du plan tel que :

$\begin{cases} x=3+\sqrt{3}\cos\theta \\ y=1+\sqrt{3}\sin\theta \end{cases}$ avec $(\theta\in\mathbb{R})$

Solution : $\begin{cases} x-3=\sqrt{3}\cos\theta \\ y-1=\sqrt{3}\sin\theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3+\sqrt{3}\cos\theta \\ y=1+\sqrt{3}\sin\theta \end{cases}$

$(x-3)^2+(y-1)^2=\left(\sqrt{3}\cos\theta\right)^2+\left(\sqrt{3}\sin\theta\right)^2 \Leftrightarrow$

$(x-3)^2+(y-1)^2=3\left((\cos\theta)^2+(\sin\theta)^2\right)\Leftrightarrow$

$(x-3)^2+(y-1)^2=\sqrt{3}^2$

Donc l'ensemble (C) des points $M\ (x\,;y)$ du plan est *le cercle* (C) de centre $\Omega(3;1)$ et de rayon $R=\sqrt{3}$

Exercice1 : Le plan $(\mathcal{P})$ est rapporté à un repère $\mathcal{R}\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ orthonormé. (C) L'ensemble des points $M\ (x\,;y)$ du plan tel que : $\begin{cases} x=2+2\cos\theta \\ y=2\sin\theta \end{cases}$ avec $(\theta\in\mathbb{R})$

1) montrer que (C) est *le cercle* (C) dont on déterminera de centre Ω et de rayon R et une équation cartésienne

2)soit le point $A(-1;0)$; montrer que A est à l'extérieur du cercle (C) et déterminer les équations des deux tangentes au cercle $(\mathcal{C})$ passant par A

3) déterminer les équations des deux tangentes au cercle $(\mathcal{C})$ et qui sont parallèles à la droite : (D) : $3x-4y=0$

4)a) Soit la droite (Δ) d'équation : $y=x$

Montrer que (Δ) coupe le cercle (C) en deux points à déterminer

4)b) Déterminer graphiquement l'ensemble des points $M\ (x\,;y)$ du plan tel que : $\frac{x^2+y^2}{4}\le x\le y$

Solution :1) $\begin{cases} x=2+2\cos\theta \\ y=2\sin\theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2=2\cos\theta \\ y-0=2\sin\theta \end{cases}$

$(x-2)^2+(y-0)^2=(2\cos\theta)^2+(2\sin\theta)^2 \Leftrightarrow$

$(x-2)^2+(y-0)^2=4\left((\cos\theta)^2+(\sin\theta)^2\right)\Leftrightarrow$

$(x-2)^2+(y-0)^2=2^2$

Donc l'ensemble (C) des points $M\ (x\,;y)$ du plan est *le cercle* (C) de centre $\Omega(2;0)$ et de rayon $R=2$

2) $A(-1;0)$; (C) : $(x-2)^2+(y-0)^2=2^2$

On a : $(-1-2)^2+(0-0)^2-4=9-4\succ 0$ donc A est à l'extérieur du cercle (C)

Soit (T) une droite qui passe par A et tangente au cercle $(\mathcal{C})$ et soit : $ax+by+c=0$ une équation cartésienne de (T) avec $(a;b)\neq(0;0)$

Puisque (T) est tangente au cercle $(\mathcal{C})$ alors :

$d(\Omega,(T))=R$ cad $\frac{|2a+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=2$:

Et on a : $A\in(T)$ donc : $-a+c=0$ donc on trouve :

$b=\frac{a\sqrt{5}}{2}$ ou $b=-\frac{a\sqrt{5}}{2}$ et l'équation cartésienne de (T) est : $2x-\sqrt{5}y+2=0$ ou $2x+\sqrt{5}y+2=0$

Par suite les équations des deux tangentes au cercle $(\mathcal{C})$ passant par A sont :

(T_1) : $2x-\sqrt{5}y+2=0$ ou (T_2) : $2x+\sqrt{5}y+2=0$

3) (D) : $3x-4y=0$ $\qquad \Omega(2;0)$

Puisque $(T)\,||\,(D)$ donc on pose :

(T) : $3x-4y+c=0$ et (T) tangentes au cercle $(\mathcal{C})$

Donc : $d(\Omega,(T))=R \Leftrightarrow$ cad $\frac{|6+c|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=2$:

$\Leftrightarrow \frac{|6+c|}{5}=2 \Leftrightarrow |6+c|=10 \Leftrightarrow 6+c=10$ Ou $6+c=-10$

$c=4$ ou $c=-16$

Donc les tangentes au cercle $(\mathcal{C})$ sont :

(T_1') : $3x-4y+4=0$ ou (T_2') : $3x-4y-16=0$

4)a) On va résoudre le système suivant :

$\begin{cases} (x-2)^2+(y-0)^2=2^2 \\ y=x \end{cases}$ Donc : $y=x$ et $2x^2-4x=0$

Donc : ($x=0$ ou $x=2$) et $y=x$

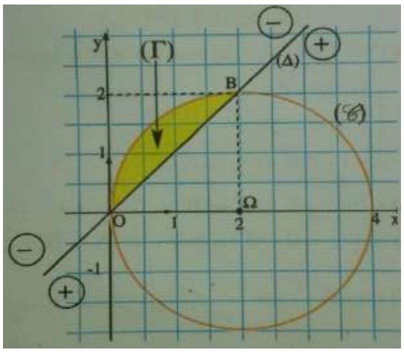
Donc : (Δ) coupe le cercle (C) aux points : $O(0;0)$ et $B(2;2)$

4)b) $\frac{x^2+y^2}{4}\le x\le y \Leftrightarrow \begin{cases} x-y\le 0 \\ x^2+y^2-4x\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y\le 0 \\ (x-2)^2+y^2-4\le 0 \end{cases}$

L'inéquation : $(x-2)^2+y^2-4\leq 0$ détermine l'ensemble des points $M(x;y)$ du plan qui se trouve à l'intérieur du cercle (C) ou sur le cercle (C)

Et L'inéquation : $x-y\leq 0$ détermine l'ensemble des points $M(x;y)$ du plan qui se trouve au-dessus de la droite (Δ) ou sur la droite (Δ)

Voire la figure ci-dessus :



Exercice2 :le plan $(\mathcal{P})$ est rapporté à un repère $\mathcal{R}\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ orthonormé. Soient les points

$A(3;4)$ $B(4;1)$; $C(2;-3)$

1)montrer que les points A ; B et C sont non alignés

2)Ecrire l'équation du cercle (C) passant par A ; B et C

Solution : 1) on a : $\overrightarrow{AB}(1;-3)$ et $\overrightarrow{AC}(-1;-7)$

$$\det\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)=\begin{vmatrix}1 & -1\\ -3 & -7\end{vmatrix}=-10\neq 0$$

Donc les points A ; B et C sont non alignés

1)Soient $I\left(\frac{7}{2};\frac{5}{2}\right)$ et $J(3;-1)$ le milieu respectivement des segments : $[AB]$ et $[BC]$

Et soit (D) la médiatrice de $[AB]$ donc (D) passe par I et $\overrightarrow{AB}$ un vecteur normal a (D)

$$M(x;y)\in(D)\Leftrightarrow \overrightarrow{IM}\bullet\overrightarrow{AB}=0\Leftrightarrow\left(x-\frac{7}{2}\right)-3\left(y-\frac{5}{2}\right)=0$$

$\Leftrightarrow x-3y+4=0$

Donc : $(D): x-3y+4=0$

Et soit (Δ) la médiatrice de $[BC]$ donc (Δ) passe par J et $\overrightarrow{BC}$ un vecteur normal a (Δ)

$$M(x;y)\in(\Delta)\Leftrightarrow\overrightarrow{JM}\bullet\overrightarrow{BC}=0\Leftrightarrow x+2y-1=0$$

Donc : $(\Delta): x+2y-1=0$ (après simplifications)

Soit Ω est le Centre du cercle circonscrit du triangle ABC donc le point d'intersection de (Δ) et (D) on va donc résoudre le système :

$$\begin{cases}x-3y+4=0\\ x+2y-1=0\end{cases}$$

Et la solution de ce système est : $\Omega(-1;1)$ donc $\Omega(-1;1)$ est le centre du cercle circonscrit du triangle ABC et le rayon est : $r=A\Omega=\sqrt{(3+1)^2+(4-1)^2}=5$

Et l'équation du cercle est : $(x+1)^2+(y-1)^2=25$

$(C): x^2+y^2+2x-2y-23=0$

Exercice 3 : le plan $(\mathcal{P})$ est rapporté à un repère $\mathcal{R}\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ orthonormé. (C_m) L'ensemble des points $M(x;y)$ du plan tel que :

$(C_m): x^2+y^2-2mx+2y+2m=0$ avec m Paramètre réel

1)Déterminer l'ensemble (C_1)

2) a) Montrer que $\forall m\in\mathbb{R}-\{1\}$ (C_m) est *un cercle* dont déterminera le centre Ω_m et de rayon R_m

2) b) Déterminer l'ensemble des centres Ω_m lorsque $m\in\mathbb{R}-\{1\}$

2) b) Montrer que tous les *cercles* (C_m) passent par un point fixe I dont déterminera et tracer $(C_0);(C_2);(C_3)$

3) a) Montrer que la droite (Δ) : $x=1$ est tangente A toutes les *cercles* (C_m)

3) b) Soit $m\succ\frac{-3}{2}$ et $m\neq 1$ et le point $A(0;1)$

Vérifier que A est à l'extérieur des *cercles* (C_m) et que la droite (AI) n'est pas tangente aux *cercles* (C_m)

Solution :1) (C_1) ? pour $m=1$ on a :

$(C_1): x^2+y^2-2x+2y+2=0\Leftrightarrow(x-1)^2+(y+1)^2=0$

$\Leftrightarrow x-1=0 et y+1=0\Leftrightarrow x=1$ et $y=1$

Donc : (C_1) est le point $E(1;-1)$

2) a) $(C_m): x^2+y^2-2mx+2y+2m=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(x-m)^2+(y+1)^2=(m-1)^2$

Donc : (C_m) est *un cercle* de centre $\Omega_m(m;-1)$ et de rayon $R_m = |m-1| \quad \forall m \in \mathbb{R}-\{1\}$

2) b) On pose : $x = m$ et $y = -1$ avec $m \in \mathbb{R}-\{1\}$

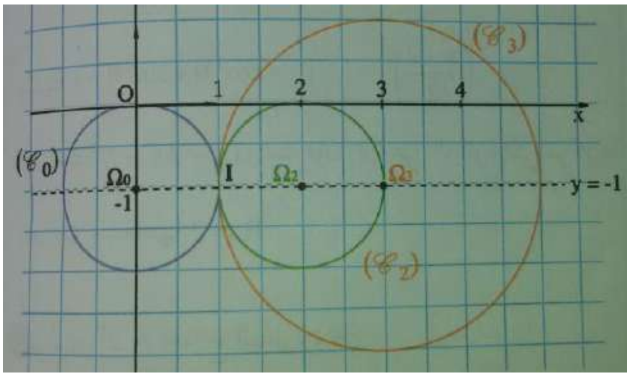
On a donc: l'ensemble des centres Ω_m lorsque $m \in \mathbb{R}-\{1\}$ est la droite d'équation : $y = -1$ privé du Point $E(1;-1)$

2) b) $I(a;b) \in (C_m) \ \forall m \in \mathbb{R}-\{1\}$

$\Leftrightarrow a^2+b^2-2ma+2b+2m=0$

$\Leftrightarrow m(2-2a)+a^2+b^2+2b=0 \ \forall m \in \mathbb{R}-\{1\}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2-2a=0 \\ a^2+b^2+2b=0 \end{cases} \Leftrightarrow a=1$ et $b=-1$ Donc : tous les *cercles* (C_m) passent par un point fixe $I(1;-1)$



3) a) L'équation de (Δ) est : $x+0y-1=0$

Et $d(\Omega_m,(\Delta)) = \dfrac{|m-1|}{\sqrt{1^2+0^2}} = |m-1| = R_m$

Donc : la droite (Δ) est tangente a toutes les *Cercles* (C_m) (on peut montrer que (Δ) coupe en (C_m) un point unique)

3) b) On a : $x^2+y^2-2mx+2y+2m=2m+3$

Et puisque : $m \succ \dfrac{-3}{2}$ alors : $x^2+y^2-2mx+2y+2m \succ 0$

donc A est à l'extérieur des *cercles* (C_m)

Montrons que : $d(\Omega_m,(AI)) = \dfrac{|2m-2|}{\sqrt{5}} = \dfrac{2}{\sqrt{5}} R_m$

Donc : (AI) n'est pas tangente aux *cercles* (C_m)

Car : $\dfrac{2}{\sqrt{5}} R_m \neq R_m$

Exercice 1 : Déterminer les ensembles :

$(\Gamma 1) = \{M(x, y) \in (\mathcal{P}) / x^2 + y^2 - 2x + y + 1 = 0\}$

$(\Gamma 2) = \{M(x, y) \in (\mathcal{P}) / x^2 + y^2 - x + 2y + 4 = 0\}$

Exercice1 :

Soient les points $A(-1,0)$, $B(1,2)$ et $C(5,-2)$

1- Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés

2- Ecrire l'équation du cercle circonscrit au Triangle ABC.

Exercice 2 : Soit l'ensemble :

$(C_m) = \{M(x, y) \in (\mathcal{P}) / x^2+y^2-2mx+4my+4m^2-1=0\}$

où m est un réel.

1- Montrer que pour tout m dans $\mathbb{R}$, l'ensemble (C_m) est un cercle et déterminer ses éléments.

2- Déterminer l'équation cartésienne du plus petit cercle (C_m).

3- Déterminer l'ensemble dans lequel varient les centres Ω_m quand m décrit $\mathbb{R}$

4- a) Déterminer pour quelles valeurs de m le point $A(-1,2)$ appartient-il à (C_m)

b) Soit $M_0(x_0;y_0)$) un point donné dans le plan, existent-ils toujours des réels m qui vérifient $M_0 \in (C_m)$

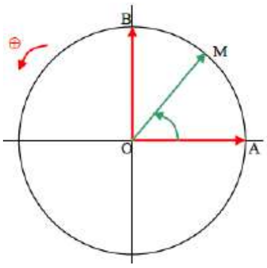
5- Déterminer s'il existe l'intersection de tous les cercles (C_m)

C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices
Que l'on devient un mathématicien

CALCUL TRIGONOMETRIQUE

I) RAPPELLES

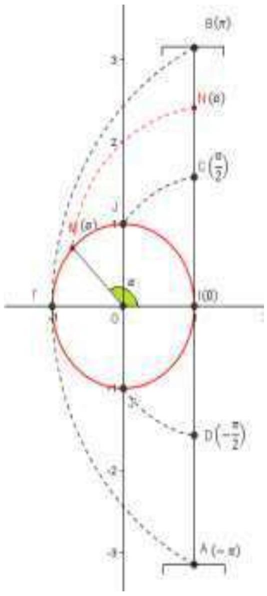
1) Cercle trigonométrique



Définition : Le cercle trigonométrique est un cercle de centre O l'origine du plan de rayon $R = 1$
Orienté une orientation positive.
et admet une origine I

2) Les abscisses curvilignes

1.1 L'abscisse curviligne principale d'un point sur le C.T



Soit $(\mathcal{C})$ le cercle trigonométrique d'origine I; considérons l'intervalle $]-\pi, \pi]$ tel que 0 l'abscisse de I sur l'axe perpendiculaire sur (OI). Si on fait enrouler le segment qui représente $]-\pi, \pi]$ au tour du cercle $(\mathcal{C})$ on remarque que chaque point N d'abscisse α de l'intervalle $]-\pi, \pi]$ s'associe avec un point unique M du cercle trigonométrique.
Le réel $\boldsymbol{\alpha}$ s'appelle l'abscisse curviligne principale du point $\boldsymbol{M}$ et inversement si α est un réel de l'intervalle $]-\pi, \pi]$, alors il existe un point M unique de $(\mathcal{C})$ qui s'associe avec le point $N(\alpha)$.Le réel α représente aussi la mesure de l'angle géométrique centrique $\left[IOM\right]$

1.2 Les abscisses curvilignes d'un point sur le cercle trigonométrique

Considérons le cercle trigonométrique $(\mathcal{C})$ d'origine I.
(Δ) est la droite Passant par I et perpendiculaire à (OI) et d'unité égale à OJ.
Soit M un point sur le cercle $(\mathcal{C})$ et d'abscisse curviligne principale α.
Si on suppose que la droite (Δ) est un file qu'on peut enrouler autour du cercle $(\mathcal{C})$
on remarque que la point M du cercle $(\mathcal{C})$ coïncide avec une infinité de points de la droite (Δ); et qui ont pour abscisses
$\ldots..(\alpha-6\pi), (\alpha-4\pi), (\alpha-2\pi), (\alpha), (\alpha+2\pi)\ldots..$

En générale : chaque point Nk de la droite (Δ) qui coïncidera avec le point M aura pour abscisse $\alpha + k\mathbf{2\pi}$
Ces réels s'appellent les abscisses curvilignes du point M sur le cercle $(\mathcal{C})$.
Définition : Soit M un point sur le cercle $(\mathcal{C})$ et d'abscisse curviligne principale $\boldsymbol{\alpha}$. Les réels qui s'écrivent de la forme :$\boldsymbol{\alpha} + \mathbf{2}\boldsymbol{k\pi}$ où $\boldsymbol{k}$ est un entier relatif s'appellent les abscisses curvilignes du point M sur le cercle $(\mathcal{C})$.

II) TRANSFORMATION DE $cos\,(x-y)$ ET CONSEQUENCES.

1) Formules de l'addition :

Activité : Soit M et N deux points sur le cercle trigonométrique d'abscisses curvilignes Respectifs x et y.
1- Calculer $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON}$ de deux façons différentes.
2- En déduire $cos(x-y) = cosx.\,cosy + sinx.\,siny$
3- Calculer $cos\,(x+y)$ en fonction des valeurs trigonométriques de x et de y.
4- Calculer $sin\,(x+y)$ et $sin\,(x-y)$ en fonction des valeurs trigonométriques de x et de y.
Propriété1 : Pour tous réels x et y on a :
$cos\,(x-y) = cosx.\,cosy + sinx.\,siny$ (1)
$cos\,(x+y) = cosx.\,cosy - sinx.\,siny$ (2)
$sin\,(x+y) = sinx.\,cosy + cosx.\,siny$ (3)
$sin\,(x-y) = sinx.\,cosy - cosx.\,siny$ (4)

Exemple :1)Calculer $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$

2)Calculer $\cos\frac{5\pi}{12}$ et $\sin\frac{5\pi}{12}$

3) monter que : $\cos x = \cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$

4) monter que : $\sin(x+\frac{2\pi}{3})+\sin(x-\frac{2\pi}{3})+\sin x = 0$

Solution :

1) $\cos\frac{\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6}+\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6}$

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$\sin\frac{\pi}{12}=\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6}-\cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

2) $$\cos\frac{5\pi}{12}=\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6}-\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$\sin\frac{5\pi}{12}=\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

3)($\cos(x+\frac{\pi}{3})+\cos(x-\frac{\pi}{3})=\cos x$??

$$\cos(x+\frac{\pi}{3})+\cos(x-\frac{\pi}{3})=\cos\frac{\pi}{3}\cos x-\sin\frac{\pi}{3}\sin x+\cos\frac{\pi}{3}\cos x+\sin\frac{\pi}{3}\sin x$$

$$=\frac{1}{2}\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x=2\times\frac{1}{2}\cos x=\cos x$$

4) $$\sin(x+\frac{2\pi}{3})=\sin x\cos\frac{2\pi}{3}+\sin\frac{2\pi}{3}\cos x=\sin x\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)\cos x$$

$$\sin(x+\frac{2\pi}{3})=-\sin x\cos\frac{\pi}{3}+\sin\frac{\pi}{3}\cos x$$

$$\sin(x-\frac{2\pi}{3})=\sin x\cos\frac{2\pi}{3}-\sin\frac{2\pi}{3}\cos x=\sin x\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)-\sin\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)\cos x$$

$$\sin(x-\frac{2\pi}{3})=-\sin x\cos\frac{\pi}{3}-\sin\frac{\pi}{3}\cos x$$

$$\sin(x+\frac{2\pi}{3})+\sin(x-\frac{2\pi}{3})+\sin x=-2\sin x\cos\frac{\pi}{3}+\sin x=-\sin x+\sin x=0$$

Exercice1 :

Soient : $0\prec a\prec\frac{\pi}{2}$ et $0\prec b\prec\frac{\pi}{2}$ et $\cos a=\sin b=\frac{1}{2}$

1)Calculer : $\sin a$ et $\cos b$

2) Calculer : $\sin(a+b)$

Solution : calcul de $\cos b$:

on a $\cos^2 b+\sin^2 b=1\Leftrightarrow\cos^2 b=1-\left(\frac{1}{2}\right)^2$

$$\cos^2 b=\frac{3}{4}\Leftrightarrow\cos b=\frac{\sqrt{3}}{2}\ \text{ou}\ \cos b=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Or : $0\prec b\prec\frac{\pi}{2}$ donc : $\cos b=\frac{\sqrt{3}}{2}$

calcul de : $\sin a$

on a : $\cos^2 b+\sin^2 b=1\Leftrightarrow\sin^2 a=1-\cos^2 a\Leftrightarrow\sin^2 a=1-\left(\frac{1}{2}\right)^2$

donc : $\sin^2 a=\frac{3}{4}$ donc $\sin a=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ou $\sin a=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

or $0\prec a\prec\frac{\pi}{2}$ donc : $\sin a=\frac{\sqrt{3}}{2}$

2) on a : $\sin(a+b)=\sin a\cos b+\sin b\cos a$

Donc : $\sin(a+b)=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}=1$

Exercice2 : Calculer $\cos\frac{11\pi}{12}$ et $\sin\frac{11\pi}{12}$

2) Formules d'angle double.

D'après propriété1 ligne (2) on a :

$cos(2x) = cos^2x - sin^2x$ et on sait que $cos^2x + sin^2x = 1$

$cos(2x) = = 2cos^2x - 1$

$cos(2x) = = 1 - 2sin^2x.$

D'après Propriété1 ligne (3) on a :

$sin(2x) = 2sinx.\ cosy$

Propriété2 : Pour tout réel x on a :

$cos(2x) = 2cos^2x - 1$ (1)

$cos(2x) = 1 - 2sin^2x$ (2)

$sin(2x) = 2sinx.\ cos$x (3)

Exemple :calculer $\cos\frac{\pi}{8}$ et $\sin\frac{\pi}{8}$

Solution : on a $\frac{\pi}{4}=2\frac{\pi}{8}$ donc $\cos\frac{\pi}{4}=\cos\left(2\frac{\pi}{8}\right)$

D'après : $cos(2x) = 2cos^2x - 1$ (1)

On a Donc : $\cos\frac{\pi}{4}=2\cos^2\frac{\pi}{8}-1$ donc :

$$\cos^2\frac{\pi}{8}=\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}=\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}=\frac{2+\sqrt{2}}{4}$$

donc : $\cos\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}}$ ou $\cos\frac{\pi}{8}=-\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}}$

Or $0\prec\frac{\pi}{8}\prec\frac{\pi}{2}$ donc : $\cos\frac{\pi}{8}\succ 0$ donc : $\cos\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}}$

donc : $\cos\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

D'après : $cos(2x) = 1 - 2sin^2x$ (2)

On a Donc : $\cos\frac{\pi}{4}=1-2\sin^2\frac{\pi}{8}$ donc :

$$\sin^2\frac{\pi}{8}=\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2}=\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}=\frac{2-\sqrt{2}}{4}$$

donc : $\sin\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}$ ou $\sin\frac{\pi}{8}=-\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}$

Or $0\prec\frac{\pi}{8}\prec\frac{\pi}{2}$ donc : $\sin\frac{\pi}{8}\succ 0$ donc : $\sin\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}$

$$\cos\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

Exercice3 : Sachant que $\sin x=\frac{1}{2}$ et $0\prec x\prec\frac{\pi}{2}$

calculer : $\cos(2x)$ et $\sin(2x)$

Solution : on a : $\cos(2x)=1-2\sin^2 x$

Donc : $\cos(2x)=1-2\left(\frac{1}{3}\right)^2=1-\frac{2}{9}=\frac{7}{9}$

Et on a : $\sin(2x)=2\sin x\times\cos x$ il faut Calculer $\cos x$?

on a : $\cos^2 x+\sin^2 x=1$ Donc : $\cos^2 x=1-\sin^2 x$

Donc : $\cos^2 x=1-\left(\frac{1}{3}\right)^2$ donc : $\cos^2 x=\frac{8}{9}$

donc : $\cos x=\frac{\sqrt{8}}{3}$ ou $\cos x=-\frac{\sqrt{8}}{3}$

or $0\prec x\prec\frac{\pi}{2}$ donc : $\cos x=\frac{\sqrt{8}}{3}$

donc : $\sin(2x)=2\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{8}}{3}=\frac{2\sqrt{8}}{9}$

Exercice4 : Montrer que : $\frac{\sin 3x}{\sin x}-\frac{\cos 3x}{\cos x}=2\ \forall x\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$

Solution :

$$\frac{\sin 3x}{\sin x}-\frac{\cos 3x}{\cos x}=\frac{\sin 3x\cos x-\sin x\cos 3x}{\sin x\cos x}=\frac{\sin(3x-x)}{\sin x\cos x}$$

$$=\frac{\sin(3x-x)}{\sin x\cos x}=\frac{\sin 2x}{\sin x\cos x}=\frac{2\sin x\cos x}{\sin x\cos x}=2$$

3) Formules du demi-angle.

D'après : propriété2 ligne (1) et (2) on a :

Propriété3 : Pour tous réels x et y on a :

$$\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}\quad(1)$$

$$\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}\quad(2)$$

D'après propriété2

Propriété4 : $\cos x=2\cos^2\frac{x}{2}-1$ (1)

$\cos x=1-2\sin^2\frac{x}{2}$ (2) $\qquad \sin x=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$ (3)

Exemple : montrer que :

1) $1-\cos x+\sin x=2\sin\frac{x}{2}\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)$

2)si $\alpha\in\mathbb{R}$ et $\sin\alpha\neq-1$ alors

$$\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}=\tan^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$$

Solution :

1)on a : $1-\cos x+\sin x=2\sin^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$

Car : $\cos x=1-2\sin^2\frac{x}{2}$ (2) et $\sin x=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$ (3)

Donc : $1-\cos x+\sin x=2\sin\frac{x}{2}\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)$

2) on a : $1-\sin\alpha=1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$ et $1+\sin\alpha=1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$

Donc : $1-\sin\alpha=2\sin^2\left(\frac{\frac{\pi}{2}-\alpha}{2}\right)$ et $1+\sin\alpha=2\cos^2\left(\frac{\frac{\pi}{2}-\alpha}{2}\right)$

Donc : $1-\sin\alpha=2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$ et $1+\sin\alpha=2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$

Donc : $\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}=\left(\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}\right)^2=\tan^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$

Exercice5 : Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}$

1) $\sin^2 2x-\cos 2x-1=-2\cos^2 x\times\cos 2x$

2) $2\sin^2 x+12\cos^2 x=5\cos 2x+7$

Solution :

1) $\sin^2 2x-\cos 2x-1=(2\cos x\sin x)^2-2\cos^2 x+1-1$

$4\cos^2 x\sin^2 x-2\cos^2 x=-2\cos^2 x\cos 2x$

2) $2\sin^2 x+12\cos^2 x=2\sin^2 x+12(1-\sin^2 x)=-10\sin^2 x+12$

$=\frac{-10}{2}(1-\cos 2x)+12=-5(1-\cos 2x)+12=5\cos 2x+7$

4) Formules de la tangente.

Soient x et y deux réels tels que: $(x+y)\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ on a

$$\tan(x+y)=\frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)}=\frac{\sin x\cos y+\cos x\sin y}{\cos x\cos y-\sin x\sin y}$$

si $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ et $y\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ alors : $\cos x.\cos y\neq 0$

$$\tan(x+y)=\frac{\frac{\sin x\cos y+\cos x\sin y}{\cos x\cos y}}{\frac{\cos x\cos y-\sin x\sin y}{\cos x\cos y}}=\frac{\tan x+\tan y}{1-\tan x\times\tan y}$$

si $x\neq\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}$ et $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$

On en déduit que : si $x\neq\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}$ et $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$

$$\tan 2x = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$$

Si $(x-y) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ et $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ et $y \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

$$\tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1+\tan x \times \tan y}$$

Propriété 5: Soient x et y deux réels tels que :

$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ et $y \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ on a :

1) Si $(x+y) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ alors $\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1-\tan x \times \tan y}$ (1)

2) si $x \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$ alors : $\tan 2x = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$ (2)

3) Si $(x-y) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ alors :

$\tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1+\tan x \times \tan y}$ (3)

Applications : Calculer $\tan\frac{\pi}{12}$ et $\tan\frac{5\pi}{12}$

Solution :

$$\tan\frac{\pi}{12} = \tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan\frac{\pi}{6}}{1-\tan\frac{\pi}{4}\tan\frac{\pi}{6}} = \frac{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = 2-\sqrt{3}$$

$$\tan\frac{5\pi}{12} = \tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan\frac{\pi}{6}}{1-\tan\frac{\pi}{4}\tan\frac{\pi}{6}} = \frac{1+\frac{1}{\sqrt{3}}}{1-\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} = 2+\sqrt{3}$$

Exercice6 : Calculer $\tan\frac{11\pi}{12}$

Exercice7 :

1- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^2 + 2x - 1 = 0$

2- En déduire $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$

Solution : 1) utiliser le déterminent Δ

2) utiliser : $\tan 2x = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$ (2) on remplaçant : $x = \frac{\pi}{8}$

5) Les valeurs trigonométrique en fonction de :

$t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$

1) D'après Propriété 5 (2) et si $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

et $x \neq \pi + 2k\pi$

$\tan x = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1-\tan^2\frac{x}{2}}$ On posant : $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$

on en déduit : $\tan x = \frac{2t}{1-t^2}$

2) D'après Propriété 4 (1) on a : $\cos x = 2\cos^2\frac{x}{2} - 1$

et on sait : $1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

par suite : $\cos x = \frac{2}{1+\tan^2\frac{x}{2}} - 1$

si $x \neq \pi + 2k\pi$ alors : on peut conclure que :

$$\cos x = \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$$

On posant $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ on en déduit : $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

D'après Propriété 4 (3) on a : $\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$

si $x \neq \pi + 2k\pi$

Alors on peut conclure que : $\sin x = 2\tan\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}$

d'où : $\sin x = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$ On posant : $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ on

en déduit : $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$

Propriété 6: Soit x un réel tel que : $x \neq \pi + 2k\pi$ on a :

1) $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ (1)

2) $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ (2)

Si de $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ et $x \neq \pi + 2k\pi$

3) $\tan x = \frac{2t}{1-t^2}$ (3)

Application: soit $a \in \mathbb{R}$ tel que : $\tan\frac{a}{2} = \sqrt{2}$

Calculer $\cos a$ et $\sin a$ et $\tan a$

Solution : on a $\cos a=\frac{1-t^2}{1+t^2}=\frac{1-\sqrt{2}^2}{1+\sqrt{2}^2}=-\frac{1}{3}$

$\sin a=\frac{2t}{1+t^2}=\frac{2\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}^2}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

$\tan a=\frac{2t}{1-t^2}=\frac{2\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}^2}=-2\sqrt{2}$

Exercice8 :1- Montrer que $tan\left(\frac{\pi}{12}\right)=2-\sqrt{3}$

2- Considérons l'équation :

(E): $2cosx-2sinx-1-\sqrt{3}=0$

a) Vérifier que $\pi+2k\pi$ n'est pas une solution de l'équation (E)

b) en posant : $t=tan\left(\frac{x}{2}\right)$, résoudre l'équation (E)

(remarquer que $4-2\sqrt{3}=\left(\sqrt{3}-1\right)^2$

3- Représenter les images des solutions sur le cercle trigonométrique.

6) Transformations des sommes en produits

De la propriété 1 et de (1)+(2) on peut conclure que :

$cos(x-y)+cos(x+y)=2cosx.\,cosy$

Si on pose : $x-y=p$ et $x+y=q$ alors on peut déduire : $x=\frac{p+q}{2}$ et $y=\frac{p-q}{2}$

On peut conclure que :

$cos\ p+cos\ q=2cos\left(\frac{p+q}{2}\right).\,cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$

De la propriété 1 et de (1)-(2) on peut conclure que :

$cos(x-y)-cos(x+y)=-2sinx.\,siny$

Si on pose : $x-y=p$ et $x+y=q$ alors on peut déduire : $x=\frac{p+q}{2}$ et $y=\frac{p-q}{2}$

$cos\ p-cos\ q=-2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right).\,\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$

De la même façon on peut montrer les autres propriétés :

Propriété 7: Pour tous réels p , q, on a :

$\sin p+\sin q=2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right).\,cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$

$\sin p-\sin q=2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right).\,\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$

$cos\ p+cos\ q=2cos\left(\frac{p+q}{2}\right).\,cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$

$cos\ p-cos\ q=-2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right).\,\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$

Application :*Transformer en produits les expressions suivantes :*

1) $A(x)=\sin 2x+\sin 4x$

2) $B(x)=\cos x+\cos 2x+\cos 3x+\cos 4x$

Solution :1)

$A(x)=\sin 2x+\sin 4x=2\sin\left(\frac{2x+4x}{2}\right)\cos\left(\frac{2x-4x}{2}\right)$

$\sin 2x+\sin 4x=2\sin 3x\cos(-2x)=2\sin 3x\cos 2x$

2)on a :

$\cos x+\cos 3x=2\cos\left(\frac{3x+x}{2}\right)\cos\left(\frac{3x-x}{2}\right)=2\cos 2x\cos x$

$\cos 2x+\cos 4x=2\cos\left(\frac{4x+2x}{2}\right)\cos\left(\frac{4x-2x}{2}\right)=2\cos 3x\cos x$

Donc : $B(x)=2\cos 2x\cos x+2\cos 3x\cos x=2\cos x(\cos 2x+\cos 3x)$

Et on a : $\cos 2x+\cos 3x=2\cos\frac{x}{2}\cos\frac{5x}{2}$

Donc : $B(x)=4\cos x\cos\frac{x}{2}\cos\frac{5x}{2}$

Exercice9 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$sinx+sin3x+sin5x+sin7x=0$

7) Transformations des produits en sommes.

De la propriété 1 et de (1)+ (2) on peut conclure que :

$cos(x-y)+cos(x+y)=2cosx.\,cosy$ d'où :

$cosx.\,cosy=\frac{1}{2}\ [cos(x-y)+cos(x+y)]$

De la même façon on peut montrer les autres égalités :

Propriété : Pour tous réels x, y on a :

$cosx.\,cosy=\frac{1}{2}[cos(x+y)+cos(x-y)]$

$sinx.\,siny=-\frac{1}{2}[cos(x+y)-cos(x-y)]$

$sinx.\,cosy=\frac{1}{2}[sin(x+y)+sin(x-y)]$

La linéarisation d'une expression c'est de l'écrire sous la forme d'une somme.

Application : écrire sous la forme d'une somme

1) $\cos 2x\times\sin 4x$ 2) $\sin x\times\sin 3x$ 3) $\cos 4x\times\cos 6x$

Solution :

1) $\cos 2x\times\sin 4x=\frac{1}{2}(\sin(2x+4x)-\sin(2x-4x))=\frac{1}{2}(\sin 6x-\sin(-2x))$

$=\frac{1}{2}(\sin 6x+\sin 2x)=\frac{1}{2}\sin 6x+\frac{1}{2}\sin 2x$

2) $\sin x\times\sin 3x=\frac{1}{2}(\cos(x+3x)-\cos(x-3x))=\frac{1}{2}(\cos 4x-\cos(-2x))$

$\sin x\times\sin 3x=\frac{1}{2}(\cos 4x-\cos(2x))=\frac{1}{2}\cos 4x-\frac{1}{2}\cos(2x)$

3) $\cos 4x\times\cos 6x=\frac{1}{2}\left(\cos(4x+6x)+\cos(4x-6x)\right)=\frac{1}{2}\left(\cos 4x-\cos(-2x)\right)$

$\cos 4x\times\cos 6x=\frac{1}{2}\cos 4x-\frac{1}{2}\cos(2x)$

Exercice10 : calculer

1) $\cos\frac{7\pi}{12}\times\cos\frac{5\pi}{12}$ 2) $\sin\frac{7\pi}{12}\times\cos\frac{5\pi}{12}$

Solution :

1) $\cos\frac{7\pi}{12}\times\cos\frac{5\pi}{12}=\frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{12}+\frac{5\pi}{12}\right)+\cos\left(\frac{7\pi}{12}-\frac{5\pi}{12}\right)\right)$

$\cos\frac{7\pi}{12}\times\cos\frac{5\pi}{12}=\frac{1}{2}\left(\cos\pi+\cos\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}\left(-1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}-2}{4}$

2) $\sin\frac{7\pi}{12}\times\cos\frac{5\pi}{12}=\frac{1}{2}\left(\sin\left(\frac{7\pi}{12}+\frac{5\pi}{12}\right)+\sin\left(\frac{7\pi}{12}-\frac{5\pi}{12}\right)\right)$

$\sin\frac{7\pi}{12}\times\cos\frac{5\pi}{12}=\frac{1}{2}\left(\sin\pi+\sin\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}\left(0+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$

Exercice11 : Montrer que

1) $\sin\frac{3\pi}{11}+\sin\frac{7\pi}{11}=2\sin\left(\frac{5\pi}{11}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{11}\right)$

2) $\sin\frac{3\pi}{11}-\sin\frac{7\pi}{11}=-2\cos\left(\frac{5\pi}{11}\right)\sin\left(\frac{2\pi}{11}\right)$

3) en déduire que: $\dfrac{\sin\frac{3\pi}{11}+\sin\frac{7\pi}{11}}{\sin\frac{3\pi}{11}-\sin\frac{7\pi}{11}}=-\dfrac{\tan\left(\frac{5\pi}{11}\right)}{\tan\left(\frac{2\pi}{11}\right)}$

Solution :

1) $\sin\frac{3\pi}{11}+\sin\frac{7\pi}{11}=2\sin\left(\frac{\frac{3\pi}{11}+\frac{7\pi}{11}}{2}\right)\cos\left(\frac{\frac{3\pi}{11}-\frac{7\pi}{11}}{2}\right)$

$\sin\frac{3\pi}{11}+\sin\frac{7\pi}{11}=2\sin\left(\frac{5\pi}{11}\right)\cos\left(-\frac{2\pi}{11}\right)=2\sin\frac{5\pi}{11}\cos\frac{2\pi}{11}$

2) $\sin\frac{3\pi}{11}-\sin\frac{7\pi}{11}=2\cos\left(\frac{\frac{3\pi}{11}+\frac{7\pi}{11}}{2}\right)\sin\left(\frac{\frac{3\pi}{11}-\frac{7\pi}{11}}{2}\right)$

$\sin\frac{3\pi}{11}-\sin\frac{7\pi}{11}=2\cos\left(\frac{5\pi}{11}\right)\sin\left(-\frac{2\pi}{11}\right)=-2\cos\frac{5\pi}{11}\sin\frac{2\pi}{11}$

3) $\dfrac{\sin\frac{3\pi}{11}+\sin\frac{7\pi}{11}}{\sin\frac{3\pi}{11}-\sin\frac{7\pi}{11}}=-\dfrac{2\sin\left(\frac{5\pi}{11}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{11}\right)}{-2\cos\left(\frac{5\pi}{11}\right)\sin\left(\frac{2\pi}{11}\right)}$

$=-\dfrac{\sin\left(\frac{5\pi}{11}\right)}{\cos\left(\frac{5\pi}{11}\right)}\times\dfrac{\cos\left(\frac{2\pi}{11}\right)}{\sin\left(\frac{2\pi}{11}\right)}=-\tan\left(\frac{5\pi}{11}\right)\times\dfrac{1}{\tan\left(\frac{2\pi}{11}\right)}=-\dfrac{\tan\left(\frac{5\pi}{11}\right)}{\tan\left(\frac{2\pi}{11}\right)}$

Exercice12 : Montrer que $\dfrac{\cos 2x-\cos 4x}{\cos 2x+\cos 4x}=\tan 3x\times\tan x$

Solution : on a :

$\cos 2x-\cos 4x=-2\sin\left(\frac{2x+4x}{2}\right)\sin\left(\frac{2x-4x}{2}\right)=2\sin(3x)\sin x$

et $\cos 2x+\cos 4x=-2\cos\left(\frac{2x+4x}{2}\right)\cos\left(\frac{2x-4x}{2}\right)=2\cos 3x\cos x$

donc : $\dfrac{\cos 2x-\cos 4x}{\cos 2x+\cos 4x}=\dfrac{2\sin 3x\sin x}{2\cos 3x\cos x}=\dfrac{\sin 3x}{\cos 3x}\times\dfrac{\sin x}{\cos x}=\tan 3x\times\tan x$

car : $\cos(-x)=\cos x$ et $\sin(-x)=-\sin x$

Exercice 13: Montrer que $\forall x\in\mathbb{R}$

$\cos^2\frac{5x}{2}-\cos^2\frac{3x}{2}=-\sin 4x\times\sin x$

Solution :

$\cos^2\frac{5x}{2}-\cos^2\frac{3x}{2}=\left(\cos\frac{5x}{2}+\cos\frac{3x}{2}\right)\left(\cos\frac{5x}{2}-\cos\frac{3x}{2}\right)$

$\cos\frac{5x}{2}+\cos\frac{3x}{2}=2\cos\left(\frac{\frac{5x}{2}+\frac{3x}{2}}{2}\right)\cos\left(\frac{\frac{5x}{2}-\frac{3x}{2}}{2}\right)=2\cos(2x)\cos\left(\frac{x}{2}\right)$

$\cos\frac{5x}{2}-\cos\frac{3x}{2}=-2\sin\left(\frac{\frac{5x}{2}+\frac{3x}{2}}{2}\right)\sin\left(\frac{\frac{5x}{2}-\frac{3x}{2}}{2}\right)=-2\sin(2x)\sin\left(\frac{x}{2}\right)$

Donc : $\cos^2\frac{5x}{2}-\cos^2\frac{3x}{2}=2\cos(2x)\cos\left(\frac{x}{2}\right)\times-2\sin(2x)\sin\left(\frac{x}{2}\right)$

$=-2\cos(2x)\times\sin(2x)2\cos\left(\frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{x}{2}\right)=-\sin(4x)\sin x$

Exercice 14: Montrer que $\forall x\in\mathbb{R}$

1) $\sin 3x=\sin x\times\left(3-4\sin^2 x\right)$

2) $\cos 3x=\cos x\left(4\cos^2 x-3\right)$

3) $\cos(4x)=8\cos^4 x-8\cos^2 x+1$

4) $\sin(4x)=4\sin x\left(2\cos^3 x-\cos x\right)$

5) $\cos^3 x=\frac{1}{4}(3\cos x+\cos 3x)$

Solution :

1) $\sin 3x=\sin(2x+x)=\sin 2x\cos x+\cos 2x\sin x$

$=2\sin x\cos^2 x+\left(1-2\sin^2 x\right)\sin x=2\sin x\left(1-\sin^2 x\right)+\left(1-2\sin^2 x\right)\sin x$

$=2\sin x-2\sin^3 x+\sin x-2\sin^3 x=3\sin x-4\sin^3 x=\sin x\left(3-4\sin^2 x\right)$

2) $\cos 3x=\cos(2x+x)=\cos x\cos 2x-\sin 2x\sin x$

$=\cos x\left(2\cos^2 x-1\right)+\sin x\times 2\cos x\sin x=2\cos^3 x-\cos x-2\cos x\sin^2 x$

$=2\cos^3 x-\cos x-2\cos x\left(1-\cos^2 x\right)=2\cos^3 x-\cos x-2\cos x+2\cos^2 x$

$=4\cos^3 x-3\cos x=\cos x\left(4\cos^2 x-3\right)$

3) $\cos(4x)=\cos(2\times 2x)=2\cos^2 2x-1=2\left(2\cos^2 x-1\right)^2-1$

$=2\left(4\cos^4 x-4\cos^2 x+1\right)-1=8\cos^4 x-8\cos^2 x+1$

4) $\sin(4x)=4\sin x\cos x\left(2\cos^2 x-1\right)=4\sin x\left(2\cos^3 x-\cos x\right)$

$\sin(4x)=\sin(2\times 2x)=2\sin 2x\cos 2x=2\times 2\sin x\cos x\left(2\cos^2 x-1\right)$

5) $\cos^3 x = \frac{1}{4}(3\cos x + \cos 3x)$??

Methode1

$$\frac{1}{4}(3\cos x+\cos 3x)=\frac{1}{4}(3\cos x+\cos(x+2x))=\frac{1}{4}(3\cos x+\cos x\cos 2x-\sin x\sin 2x)$$

$$=\frac{1}{4}\left(3\cos x+\cos x\left(2\cos^2 x-1\right)-2\sin x\sin x\cos x\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left(2\cos^3 x-\cos x-2\cos x+2\cos^3 x+3\cos x\right)=\frac{1}{4}\left(4\cos^3 x\right)=\cos^3 x$$

Methode1

$$\cos^3 x=\cos^2 x\times\cos x=\frac{1+\cos 2x}{2}\times\cos x=\frac{1}{2}(\cos x+\cos 2x\times\cos x)$$

$$\cos^3 x=\frac{1}{2}\left(\cos x+\frac{1}{2}(\cos 3x+\cos x)\right)=\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{4}\cos 3x+\frac{1}{4}\cos x=\frac{3}{4}\cos x+\frac{1}{4}\cos 3x$$

$$\cos^3 x=\frac{1}{4}(3\cos x+\cos 3x)$$

Exercice 15: $P(x)=\sin 2x-\sin x$ et $Q(x)=1+\cos x+\cos 2x$

Montrer que : $P(x)=\sin x(2\cos x-1)$ et $Q(x)=\cos x(2\cos x+1)$

Solution :

$$Q(x)=1+\cos x+\cos 2x=1+\cos x+2\cos^2 x-1=\cos x+2\cos^2 x=\cos x(1+2\cos x)$$

$$P(x)=\sin 2x-\sin x=2\sin x\cos x-\sin x=\sin x(2\cos x-1)$$

Exercices 16:

1- Linéariser : $2cos^2x.\ sin\ (2x)$

2- Linéariser : $\cos^3 x$

III) LES EQUATIONS TRIGONOMETRIQUES.

1) Rappelles

1.1 $\boldsymbol{cosx = a}$

Propriété : Considérons l'équation (E) $\boldsymbol{cosx = a}$ où a est un réel :

1) si $a < 1$ ou $a > 1$ alors l'équation (E) n'admet pas de solutions.

2) les solutions de l'équation $cosx = 1$ sont les réels $2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$

3) les solutions de l'équation $cosx = -1$ sont les réels $\pi + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$

4) Si $-1 < a < 1$ alors il existe un seul réel α dans $]0, \pi[$ qui vérifie $cos\alpha = a$ et l'ensemble de solutions de l'équation (E) sera :

$S_{\mathbb{R}} = \{\alpha + 2k\pi\ ;\ k \in \mathbb{Z}\} \cup \{-\alpha + 2k\pi\ ;\ k \in \mathbb{Z}\}$.

5) En générale : les réels qui vérifient l'équation $cos(A(x)) = cos\ (B(x))$ sont les solutions des équations $A(x) = B(x) + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$ ou $A(x) = -B(x) + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$

Exercices17 : 1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$cos\ (2x + \frac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Représenter les images des solutions sur le cercle trigonométrique.

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$cos\ (x + \frac{\pi}{4}) = sin\ (3x - \frac{\pi}{6})$$

Déterminer les solutions dans l'intervalle$]-\pi, \pi]$

1.2 $\boldsymbol{sin\ x = a}$

Propriété :

Considérons l'équation (E') $\boldsymbol{sinx = a}$ où a est un réel :

1) si $a < 1$ ou $a > 1$ alors l'équation (E') n'admet pas de solutions.

2) les solutions de l'équation $sinx = 1$ sont les réels : $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$

3) les solutions de l'équation $sinx = -1$ sont les réels $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$

4) Si $-1 < a < 1$ alors il existe un seul réel α dans $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ qui vérifie $sin\alpha = a$ et l'ensemble des solutions de l'équation (E') sera :

$S_{\mathbb{R}} = \{\alpha + 2k\pi\ ;\ k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\pi - \alpha + 2k\pi\ ;\ k \in \mathbb{Z}\}$.

5) En générale : les réels qui vérifient l'équation $sin(A(x)) = sin\ (B(x))$ sont les solutions des équations : $A(x) = B(x) + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$ Ou $A(x) = \pi - B(x) + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$

Exercices18 :

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $sin\ (3x + \frac{\pi}{6}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Représenter les images des solutions sur le cercle trigonométrique.

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$-cos\ (3x + \frac{\pi}{3}) = sin\ (x - \frac{\pi}{6})$$

Déterminer les solutions dans l'intervalle$]-\pi, \pi]$

1.3 $\boldsymbol{tanx = a}$

Propriété : Pour tout réel a, il existe un et un seul réel α dans l'intervalle$]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$qui vérifie $tan\alpha = a$,

et l'équation $\boldsymbol{tanx = a}$ aura comme ensemble de solutions $S_{\mathbb{R}} = \{\alpha + k\pi\ ;\ k \in \mathbb{Z}\}$.

En général l'équation : $\tan(A(x)) = \tan\ (B(x))$ est définie pour les réel x tels que :

$A(x) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ et $B(x) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ et a pour solution l'ensemble des réels x solution de l'équation : $A(x) = B(x) + k\pi$

Exercices19 :

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation tan $(2x + \frac{\pi}{6}) = -1$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation $cosx - \sqrt{3}\, sinx = 0$

Exercices20 :1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équations suivantes : $\cos 2x = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

2) Résoudre dans $[0;\pi]$ l'équations suivantes :

$\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$

3) Résoudre dans $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ l'équations suivantes :

$\tan\left(2x - \frac{\pi}{5}\right) = 1$

Solution : 1) on a $\cos 2x = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ ssi

$2x = x - \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $2x = -\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + 2k\pi$

Ssi $2x - x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $2x + x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ Ssi

$x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $x = \frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}$ et $k \in \mathbb{Z}$

$S_{\mathbb{R}} = \left\{-\frac{\pi}{3} + 2k\pi ; \frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3} / k \in \mathbb{Z}\right\}$

2) on a $\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$ ssi

$2x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{4} - x + 2k\pi$ ou $2x - \frac{\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{4} + x + 2k\pi$

ssi $3x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $x = \pi - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} + 2k\pi$

Donc $x = \frac{7\pi}{36} + \frac{2k\pi}{3}$ ou $x = \frac{13\pi}{12} + 2k\pi$

- Encadrement de $\frac{7\pi}{36} + \frac{2k\pi}{3}$:

$0 \le \frac{7\pi}{36} + \frac{2k\pi}{3} \le \pi$ et $k \in \mathbb{Z}$

Donc $0 \le \frac{7}{36} + \frac{2k}{3} \le 1$ Donc $-\frac{7}{24} \le k \le \frac{29}{36}$ Donc

$-0,29 \le k \le 1,2$ et $k \in \mathbb{Z}$

Donc $k = 0$ ou $k = 1$

Pour $k = 0$ on trouve $x_1 = \frac{7\pi}{36}$

Pour $k = 1$ on trouve $x_2 = \frac{7\pi}{36} + \frac{2\pi}{3} = \frac{31\pi}{36}$

- Encadrement de $x = \frac{13\pi}{12} + 2k\pi$

$0 \le \frac{13\pi}{12} + 2k\pi \le \pi$ et $k \in \mathbb{Z}$

Donc $0 \le \frac{13}{12} + 2k \le 1$ Donc $-\frac{13}{24} \le k \le -\frac{1}{24}$ Donc

$-0,54 \le k \le 0,04$ et $k \in \mathbb{Z}$

Donc k n'existe pas

- Donc $S_{[0.\pi]} = \left\{\frac{7\pi}{36};\frac{31\pi}{36}\right\}$

3) on a $\tan\left(2x - \frac{\pi}{5}\right) = 1$ est définie ssi

$2x - \frac{\pi}{5} \ne \frac{\pi}{2} + k\pi$ ssi $2x \ne \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{5} + k\pi$

ssi $2x \ne \frac{7\pi}{10} + k\pi$ ssi $x \ne \frac{7\pi}{20} + \frac{k\pi}{2}$ Donc

$D = \mathbb{R} - \left\{\frac{7\pi}{20} + \frac{k\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}\right\}$

or on sait que : $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$ Donc

$\tan\left(2x - \frac{\pi}{5}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)$

Donc $2x - \frac{\pi}{5} = \frac{\pi}{4} + k\pi$ ssi $2x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{5} + k\pi$ ssi

$2x = \frac{9\pi}{20} + k\pi$ ssi $x = \frac{9\pi}{40} + \frac{k\pi}{2}$

Encadrement de $\frac{9\pi}{40} + \frac{k\pi}{2}$

$-\frac{\pi}{2} \le \frac{9\pi}{40} + \frac{k\pi}{2} \le \frac{\pi}{2}$ et $k \in \mathbb{Z}$ donc

$-\frac{1}{2} \le \frac{9}{40} + \frac{k}{2} \le \frac{1}{2}$ donc $-\frac{29}{40} \le \frac{k}{2} \le \frac{11}{40}$

donc $-\frac{29}{40} \le \frac{k}{2} \le \frac{11}{40}$ donc $-\frac{29}{20} \le k \le \frac{11}{20}$ Donc

$-1,45 \le k \le 0,55$ et $k \in \mathbb{Z}$

Donc $k = 0$ ou $k = -1$

Pour $k = 0$ on trouve $x_1 = \frac{9\pi}{40}$

Pour $k=-1$ on trouve $x_2=\frac{9\pi}{40}-\frac{\pi}{2}=-\frac{11\pi}{40}$

Donc $S=\left\{-\frac{11\pi}{40};\frac{9\pi}{40}\right\}$

2) L'équation : (E): $acosx + bsinx + c = 0$

Si $abc = 0$ l'équation (E) se ramène à une équation usuelle.

2.1 Transformation de $acosx + bsinx$

Soient a et b deux réels non nuls on a :

$$a\cos x+b\sin x=\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x\right)$$

Or : $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2+\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2=1$

donc :Il existe un réel φ tel que :

$cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Par suite :

$$a\cos x+b\sin x=\sqrt{a^2+b^2}\left(\cos\varphi\cos x+\sin\varphi\sin x\right)$$

et d'après la formule d'addition

$$a\cos x+b\sin x=\sqrt{a^2+b^2}\cos(x-\varphi)$$

2.2 L'équation : (E): $acosx + bsinx + c = 0$

Soit a, b et c trois réels non nuls :

$acosx + bsinx + c = 0 \Leftrightarrow acosx + bsinx = -c$

$\Leftrightarrow \sqrt{a^2+b^2}\cos(x-\varphi)=-c$

où $cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$\Leftrightarrow cos(x-\varphi)=\frac{-c}{\sqrt{a^2+b^2}}$

ça revient à l'étude d'une équation usuelle.

Propriété : Soient a et b deux réels tels que : $(a, b)\neq(0,0)$ on a pour tout réel x :

$a\cos x+b\sin x=\sqrt{a^2+b^2}\cos(x-\varphi)$ où le réel φ est déterminer par : $cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

L'équation $acosx + bsinx + c = 0$ se ramène à :

$cos(x-\varphi)=\frac{-c}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Exemple1 : $\cos x-\sin x$ $\quad a=1$ et $b=-1$

calculons : $\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$

$$\cos x-\sin x=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x\right)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}\cos x-\sin\frac{\pi}{4}\sin x\right)$$

$$\cos x-\sin x=\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)$$

Exemple2 : Résoudre dans $[0;2\pi]$ l'équation :

$\sqrt{3}\cos x+\sin x=\sqrt{3}$

Solution : *Transformation de :* $\sqrt{3}\cos x+\sin x$

$b=1$ et $a=\sqrt{3}$

Donc : $\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{\sqrt{3}^2+1^2}=\sqrt{4}=2$

$$\sqrt{3}\cos x+\sin x=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x+\frac{1}{2}\sin x\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{6}\cos x+\sin\frac{\pi}{6}\sin x\right)$$

$$\sqrt{3}\cos x+\sin x=2\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$$

$2\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}\Leftrightarrow\sqrt{3}\cos x+\sin x=\sqrt{3}$

$\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\Leftrightarrow 2\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}+2k\pi$ ou $x-\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{6}+2k\pi$

$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ ou $x=2k\pi$ $\quad k\in\mathbb{Z}$

Donc : $S=\left\{0;\frac{\pi}{3};2\pi\right\}$

Exercices21 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$\sqrt{3}\,cos(3x) + sin(3x) + 2 = 0$

IV) LES INEQUATIONS TRIGONOMETRIQUES

Rappelles

1) Inéquations avec cos

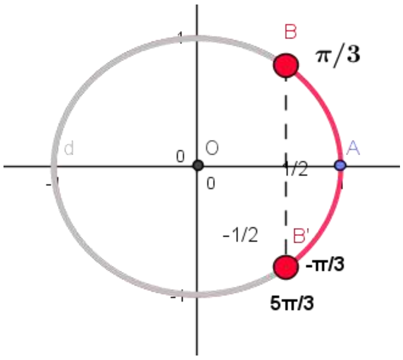
Exemple : Considérons l'inéquation cosx $\geq\frac{1}{2}$

Tout d'abord il faut résoudre l'équation cosx $=\frac{1}{2}$

les images des solutions de cette équation sont :

$M(\frac{\pi}{3})$ et $M'(-\frac{\pi}{3})$ et on constate que les réels qui vérifient l'inéquation cosx $\geq\frac{1}{2}$

sont les abscisse curvilignes des points qui se situent sur l'arc $M'IM$ (en rouge sur la figure)



et par suite on peut conclure que $S_{[-\pi,\pi]} = [-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}]$

les solutions dans $[0,2\pi]$ sont :

$S_{[0,2\pi]} = [0, \frac{\pi}{3}] \cup [\frac{5\pi}{3}, 2\pi]$

Exercices22 : Résoudre dans $[0,3\pi]$ l'inéquation :

$2cosx + \sqrt{3} \leq 0$

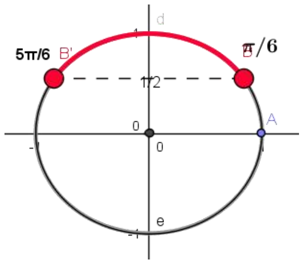
2) Inéquations avec sin

Exemple : Résoudre dans $[0, 2\pi[$ l'inéquation

suivante : $\sin x \geq \frac{1}{2}$

$\sin x \geq \frac{1}{2}$ ssi $\sin x \geq \sin \frac{\pi}{6}$

donc $S = \left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right]$



3) Inéquation avec tan

Exemple1 : Résoudre dans $[0\,;2\pi]$ l'inéquation

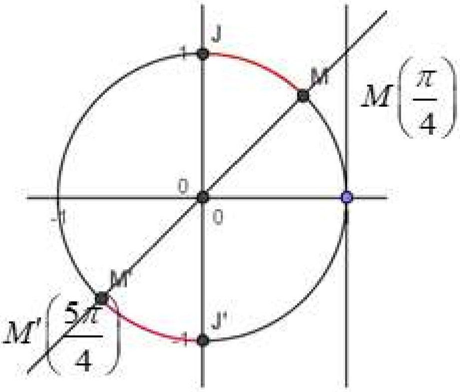
suivante : $\tan x - 1 \geq 0$

On a $\tan x - 1 \geq 0$ ssi $\tan x \geq 1$

On sait que : $\tan \frac{\pi}{4} = 1$ Les arc MJ et $M'J'$ en rouge correspond a tous les points $M(x)$ tq x vérifie

$\tan x - 1 \geq 0$ Donc

$S = \left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right[\cup \left[\frac{5\pi}{4}; \frac{3\pi}{2}\right[$

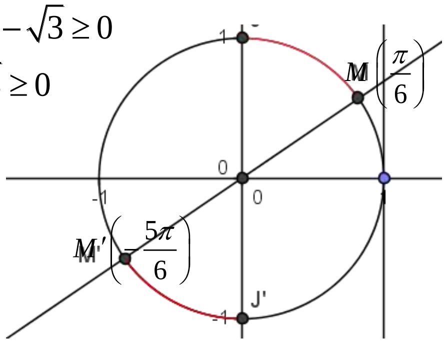


Exemple2 : Résoudre dans $[-\pi\,;\pi]$ l'inéquation

suivante : $3\tan x - \sqrt{3} \geq 0$

On a $3\tan x - \sqrt{3} \geq 0$

ssi $\tan x \geq \frac{\sqrt{3}}{3}$



On sait que : $\tan \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Les arc MJ et $M'J'$ en rouge correspond a tous les points $M(x)$ tq x vérifie $3\tan x - \sqrt{3} \geq 0$ Donc

$S = \left[-\frac{5\pi}{6}; -\frac{\pi}{2}\right[\cup \left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right[$

Exercices23 : 1)Résoudre dans $[-\pi;\pi]$ l'équation :

$\sqrt{3}\cos x - \sin x = 1$

2)Résoudre dans $[-\pi;\pi]$ l'inéquation :

$\sqrt{3}\cos x - \sin x \geq 1$

Solution : *Transformation de :* $\sqrt{3}\cos x + \sin x$

$b = -1$ et $a = \sqrt{3}$

Donc : $\sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{\sqrt{3}^2 + (-1)^2} = \sqrt{4} = 2$

$\sqrt{3}\cos x - \sin x = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{6}\cos x - \sin\frac{\pi}{6}\sin x\right)$

$\sqrt{3}\cos x - \sin x = 2\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$

$\sqrt{3}\cos x - \sin x = 1 \Leftrightarrow 2\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 1$

$\Leftrightarrow 2\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 1 \Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$

$\Leftrightarrow x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $x + \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ $k \in \mathbb{Z}$

- Encadrement de $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi$:

$-\pi \leq -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq \pi$ et $k \in \mathbb{Z}$

Donc $-1 \leq -\frac{1}{2} + 2k \leq 1$

Donc $-\frac{1}{4} \leq k \leq \frac{3}{4}$ et $k \in \mathbb{Z}$

Donc $k = 0$ on trouve $x_1 = -\frac{\pi}{2}$

- Encadrement de $\frac{\pi}{6} + 2k\pi$

$-\pi \leq \frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq \pi$

Donc $-1 \leq \frac{1}{6} + 2k \leq 1$

Donc $-\frac{7}{6}\leq 2k\leq\frac{5}{6}$ Donc $-\frac{7}{12}\leq k\leq\frac{5}{12}$

Donc $k=0$ on trouve $x_2=\frac{\pi}{6}$

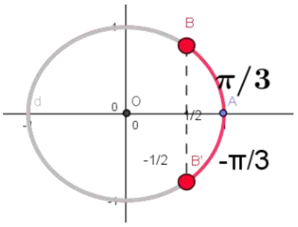
Donc $S_{[-\pi,\pi]}=\left\{-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{6}\right\}$

2) Résoudre dans $[-\pi;\pi]$ l'inéquation :

$\sqrt{3}\cos x-\sin x\geq 1$?

$\sqrt{3}\cos x-\sin x\geq 1\Leftrightarrow 2\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\geq 1\Leftrightarrow\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\geq\frac{1}{2}$

On pose : $X=x+\frac{\pi}{6}$ donc $\cos X\geq\frac{1}{2}$



$\cos X\geq\frac{1}{2}\Leftrightarrow -\frac{\pi}{3}\leq X\leq\frac{\pi}{3}\Leftrightarrow -\frac{\pi}{3}\leq x+\frac{\pi}{6}\leq\frac{\pi}{3}$

$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{2}\leq x\leq\frac{\pi}{6}$

$S_{[-\pi,\pi]}=\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{6}\right]$

Exercices24 : 1) a)Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équations suivantes : $2\sin^2 x-9\sin x-5=0$ et en déduire les solutions dans $[0;2\pi]$

b) résoudre dans $[0;2\pi]$ l'inéquation suivante :

$2\sin^2 x-9\sin x-5\leq 0$

2)Résoudre dans $[0;\pi]$ l'inéquation suivante :

$(2\cos x-1)(\tan x+1)\geq 0$

solution: 1) a)on pose $t=\sin x$

$2\sin^2 x-9\sin x-5\leq 0$ ssi $2t^2-9t-5\leq 0$

On cherche les racines du trinôme $2t^2-9t-5$:

Calcul du discriminant : $\Delta = (-9)^2 - 4 \times 2 \times (-5) = 121$

Les racines sont : $t_1=\frac{9-\sqrt{121}}{2\times 2}=-\frac{1}{2}$ et

$t_2=\frac{9+\sqrt{121}}{2\times 2}=5$ Donc $\sin x=-\frac{1}{2}$ et $\sin x=5$

Or on sait que $-1\leq\sin x\leq 1$ donc l'équation $\sin x=5$ n'admet pas de solutions dans $\mathbb{R}$

$\sin x=-\frac{1}{2}$ ssi $\sin x=\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ ssi $x=-\frac{\pi}{6}+2k\pi$ ou

$x=\pi-\left(-\frac{\pi}{6}\right)+2k\pi$

ssi $x=-\frac{\pi}{6}+2k\pi$ ou $x=\frac{7\pi}{6}+2k\pi$ et $k\in\mathbb{Z}$

$S_{\mathbb{R}}=\left\{-\frac{\pi}{6}+2k\pi;\frac{7\pi}{6}+2k\pi\,/\,k\in\mathbb{Z}\right\}$

- Encadrement de $-\frac{\pi}{6}+2k\pi$: $0\leq-\frac{\pi}{6}+2k\pi\leq 2\pi$

et $k\in\mathbb{Z}$

Donc $0\leq-\frac{1}{6}+2k\leq 2$ Donc $\frac{1}{12}\leq k\leq\frac{13}{12}$ Donc

$0,08\leq k\leq 1,02$ et $k\in\mathbb{Z}$

Donc $k=1$

Pour $k=1$ on remplace on trouve

$x_1=-\frac{\pi}{6}+2\pi=\frac{11\pi}{6}$

- Encadrement de $\frac{7\pi}{6}+2k\pi$: $0\leq\frac{7\pi}{6}+2k\pi\leq 2\pi$

et $k\in\mathbb{Z}$

Donc $0\leq\frac{7}{6}+2k\leq 2$ Donc $-\frac{7}{12}\leq k\leq\frac{5}{12}$ Donc

$-0,5\leq k\leq 0,41$ et $k\in\mathbb{Z}$

Donc $k=0$ on remplace on trouve $x_2=\frac{7\pi}{6}$

Donc $S_{[0;2\pi]}=\left\{\frac{11\pi}{6};\frac{7\pi}{6}\right\}$

1) b) $2\sin^2 x-9\sin x-5\leq 0$ ssi

$2\left(\sin x+\frac{1}{2}\right)(\sin x-5)\leq 0$

Or on sait que $-1\leq\sin x\leq 1$ donc $-1\leq\sin x\leq 1<5$

Donc $\sin x-5<0$

Puisque $\sin x-5<0$ et $2>0$ alors

$2\left(\sin x+\frac{1}{2}\right)(\sin x-5)\leq 0$ ssi $\sin x+\frac{1}{2}\geq 0$

ssi $\sin x\geq-\frac{1}{2}$ ssi $\sin x\geq\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

L'arc en rouge correspond a tous les points $M(x)$

tq x vérifie $\sin x\geq-\frac{1}{2}$

donc $S=\left[0;\frac{7\pi}{6}\right]\cup\left[\frac{11\pi}{6};2\pi\right]$

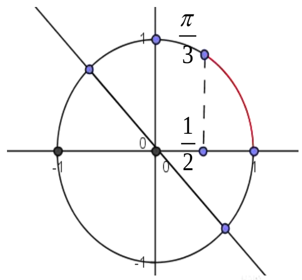
2) l'inéquation $(2\cos x-1)(\tan x+1)\geq 0$ est définie

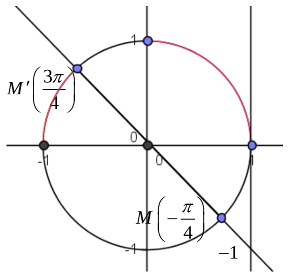
dans $[0;\pi]$ ssi $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$

Donc $D=[0;\pi]-\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$

$2\cos x-1\geq 0$ ssi $\cos x=\frac{1}{2}$ ssi $\cos x\geq\cos\frac{\pi}{3}$

$\tan x+1\geq 0$ ssi $\tan x\geq -1$ ssi $\tan x\geq\tan\left(\frac{3\pi}{4}\right)$





x	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{4}$		π
$2\cos x-1$		+	0	−		−		−	
$\tan x+1$		+		+	‖	−	0	+	
$(2\cos x-1)(\tan x+1)$		+	0	−	‖	+	0	−	

donc $S=\left[0;\frac{\pi}{3}\right]\cup\left]\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{4}\right]$

Exercice25 :

1. Résoudre dans $[-\pi,\pi]$ l'inéquation :

$sin\,(3x+\frac{\pi}{4})\leq -\frac{1}{2}$

2. Résoudre dans $[-\pi,\pi]$ l'inéquation :

$4cos^2x-2(1+\sqrt{2})cosx+\sqrt{2}\leq 0$

3. Résoudre dans $[-\pi,\pi]$ l'inéquation : $\frac{1+\tan x}{\sin 2x}\geq 0$

Exercice26 :

Résoudre dans $[-\frac{11\pi}{5},\frac{14\pi}{5}]$ l'équation $sin3x\geq\frac{1}{2}$

Exercice27 :: soit $x\in\mathbb{R}$ on pose :

$A(x)=\cos 3x-3\sin x+3\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

1) calculer $\cos 3x$ en fonction de $\cos x$

Et calculer $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ en fonction de $\cos x$ et $\sin x$

2) en déduire une écriture simple de $A(x)$

3)a)Résoudre dans $I=[-\pi;\pi]$ l'équations: $A(x)=\frac{1}{2}$

3)b) Résoudre dans I l'inéquations: $A(x)\leq\frac{1}{2}$

Solution : 1)

$\cos 3x=\cos(2x+x)=\cos x\cos 2x-\sin 2x\sin x$

$=\cos x(2\cos^2 x-1)+\sin x\times 2\cos x\sin x=2\cos^3 x-\cos x-2\cos x\sin^2 x$

$=2\cos^3 x-\cos x-2\cos x(1-\cos^2 x)=2\cos^3 x-\cos x-2\cos x+2\cos^2 x$

$=4\cos^3 x-3\cos x=\cos x(4\cos^2 x-3)$

$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\sin x\cos\frac{\pi}{4}+\cos x\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin x+\cos x)$

2) $A(x)=\cos 3x-3\sin x+3\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

$=4\cos^3 x-3\cos x-3\sin x+3(\sin x+\cos x)=4\cos^3 x$

3)a) $A(x)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow 4\cos^3 x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\cos^3 x-\frac{1}{8}=0$

$\Leftrightarrow\left(\cos x-\frac{1}{2}\right)\left(\cos^2 x+\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{4}\right)=0$

Car : $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

$\cos^2 x+\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{4}=0\Leftrightarrow\begin{cases}X^2+\frac{1}{2}X+\frac{1}{4}=0\\ X=\cos x\end{cases}$

Puisque : $\Delta\prec 0$ alors cette équation n'admet pas de solutions dans $\mathbb{R}$ donc :

$A(x)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\cos x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\cos x=\cos\frac{\pi}{3}$

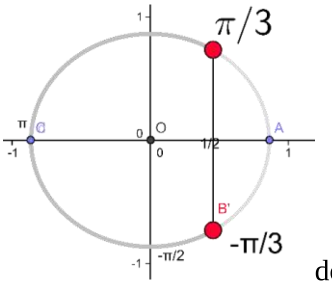
$x=-\frac{\pi}{3}+2k\pi$ ou $x=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ et $k\in\mathbb{Z}$

Donc : $S_{[-\pi,\pi]}=\left\{-\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{3}\right\}$

3)b) $A(x)\leq\frac{1}{2}\Leftrightarrow\Leftrightarrow\left(\cos x-\frac{1}{2}\right)\left(\cos^2 x+\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{4}\right)\leq 0$

Puisque : $\Delta\prec 0$ alors $\cos^2 x+\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{4}\succ 0$

Donc : $A(x)\leq\frac{1}{2}\Leftrightarrow\cos x\leq\frac{1}{2}\Leftrightarrow\cos x\leq\cos\frac{\pi}{3}$



donc $S = \left[0;\frac{\pi}{3}\right] \cup \left]\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{4}\right]$

Exercice28 : on pose :

$A = \sin\frac{\pi}{9}\times\sin\frac{2\pi}{9}\times\sin\frac{3\pi}{9}\times\sin\frac{4\pi}{9}$

1) monter que : $\sin\frac{\pi}{9}\times\sin\frac{4\pi}{9} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\cos\frac{5\pi}{9}\right)$

2) monter que : $\cos\frac{5\pi}{9}\times\sin\frac{2\pi}{9} = \frac{1}{2}\left(\sin\frac{7\pi}{9}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

3) en déduire que : $A = \frac{3}{16}$

Solution :

On a : $\sin a\times\sin b = -\frac{1}{2}\left(\cos(a+b)-\cos(a-b)\right)$

1): $\sin\frac{\pi}{9}\times\sin\frac{4\pi}{9} = -\frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{9}\right)-\cos\left(-\frac{3\pi}{9}\right)\right)$

$\sin\frac{\pi}{9}\times\sin\frac{4\pi}{9} = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{3}-\cos\frac{5\pi}{9}\right)$

Donc : $\sin\frac{\pi}{9}\times\sin\frac{4\pi}{9} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\cos\frac{5\pi}{9}\right)$

2) On a : $\cos a\times\sin b = -\frac{1}{2}\left(\sin(a+b)-\sin(a-b)\right)$

$\cos\frac{5\pi}{9}\times\sin\frac{2\pi}{9} = \frac{1}{2}\left(\sin\frac{7\pi}{9}-\sin\frac{\pi}{3}\right)$

Donc : $\cos\frac{5\pi}{9}\times\sin\frac{2\pi}{9} = \frac{1}{2}\left(\sin\frac{7\pi}{9}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

3) déduction : $A = \frac{3}{16}$?

$A = \left(\sin\frac{\pi}{9}\times\sin\frac{4\pi}{9}\right)\times\sin\frac{2\pi}{9}\times\sin\frac{\pi}{3}$

$A = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\cos\frac{5\pi}{9}\right)\times\sin\frac{2\pi}{9}\times\frac{\sqrt{3}}{2}$

$A = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{9}-\cos\frac{5\pi}{9}\sin\frac{2\pi}{9}\right) = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{9}-\frac{1}{2}\left(\sin\frac{7\pi}{9}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$

$A = \frac{\sqrt{3}}{8}\left(\sin\left(\pi-\frac{7\pi}{9}\right)-\sin\frac{7\pi}{9}+\frac{\sqrt{3}}{9}\right)$

$A = \frac{\sqrt{3}}{8}\left(\sin\frac{7\pi}{9}-\sin\frac{7\pi}{9}+\frac{\sqrt{3}}{9}\right) = \frac{3}{16}$ Donc : $A = \frac{3}{16}$

Exercice 29: soit : $\theta \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ tel que : $3\sin\theta+5\cos\theta = 5$

1) monter que : $5\sin\theta-3\cos\theta = 3$

2) déduire la valeur de : $\cos\theta$ et $\sin\theta$

Solution :1) $3\sin\theta+5\cos\theta = 5 \Leftrightarrow 3\sin\theta = 5-5\cos\theta$

$\Leftrightarrow 3\sin\theta = 5(1-\cos\theta) \Leftrightarrow 3\sin\theta = 5\times 2\sin^2\frac{\theta}{2}$

Car : $1-\cos\theta = 2\sin^2\frac{\theta}{2}$

Donc: $3\sin\theta+5\cos\theta = 5 \Leftrightarrow 3\sin\theta = 10\sin^2\frac{\theta}{2}$

$3\sin\theta+5\cos\theta = 5 \Leftrightarrow 6\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} = 10\sin^2\frac{\theta}{2}$

Car : $\sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$

$3\sin\theta+5\cos\theta = 5 \Leftrightarrow 6\cos\frac{\theta}{2} = 10\sin\frac{\theta}{2}$ car $\sin\frac{\theta}{2} \neq 0$

Donc : $3\sin\theta+5\cos\theta = 5 \Leftrightarrow \tan\frac{\theta}{2} = \frac{3}{5}$

Or on sait que : $\sin\theta = \frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}$ et $\cos\theta = \frac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}$

Donc : $3\sin\theta+5\cos\theta = \frac{5\left(2\tan\frac{\theta}{2}\right)}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}} - \frac{3\left(1-\tan^2\frac{\theta}{2}\right)}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}$

$3\sin\theta+5\cos\theta = \frac{10\times\frac{3}{5}}{1+\frac{9}{25}} - \frac{3\left(1-\frac{9}{25}\right)}{1+\frac{9}{25}} = \frac{102}{34} = 3$

2)on a le systeme: $\begin{cases} 3\sin\theta+5\cos\theta = 5 \\ 5\sin\theta-3\cos\theta = 3 \end{cases}$ on le résolvant on trouve: $\cos\theta = \frac{8}{17}$ et $\sin\theta = \frac{15}{10}$

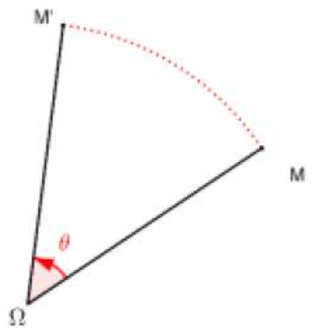
C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices
Que l'on devient un mathématicien

LA ROTATION DANS LE PLAN

I) LA ROTATION DANS LE PLAN

1) Définition :

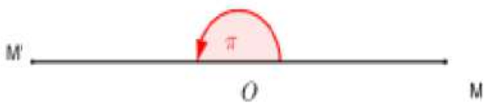
Définition : Soit Ω un point dans le plan et θ un nombre réel, **la rotation de centre Ω et d'angle θ** est l'application qui transforme tout point M en M' tel que : $\begin{cases} \Omega M = \Omega M' \\ \left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}\right) \equiv \alpha [2\pi] \end{cases}$



On la note par : R (Ω, θ)

Remarque : Si l'angle de la rotation est non nul, son centre est le seul point invariant.

Exemples : 1) La symétrie centrale S_O est la Rotation de centre O et d'angle π



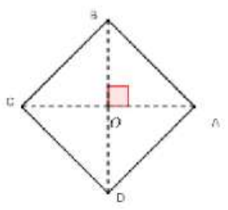
2)L'identité IdP est la rotation d'angle nul. (Tous les points de (P) sont centre de cette rotation)

Exercice1 : ABCD est un carré de centre O tel que : $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)$ positif. Soit r_A la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et r_O une rotation de centre O et d'angle α .

1) Déterminer $r_A(A)$; $r_A(B)$; $r_A(D)$,

2) Comment choisir α pour avoir $r_O(A) = B$?

Comment choisir α pour avoir $r_O(A) = C$?



Solution : $r_A\left(A; \frac{\pi}{2}\right)$ et $r_O(O; \alpha)$

- $r_A(A) = A$ Car le centre est le seul point invariant.
- $r_A(B) = D$ Car $\begin{cases} AB = AD \\ \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases}$
- $r_A(D) = B'$ avec B' le symétrique de B par rapport a A

2) $r_O(A) = B \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}$

$r_O(A) = C \Leftrightarrow \alpha = \pi$

2) Propriétés de la rotation

Propriété : Soit R la rotation de centre O

On a les propriétés suivantes :

1)La rotation conserve les distances : si $R(A) = A'$ et $R(B) = B'$ Alors $A'B' = AB$

2) La rotation conserve le coefficient de colinéarité de deux vecteurs et par suite conserve la linéarité des points

3) La rotation conserve le milieu et le barycentre d'un système pondéré.

4) La rotation conserve les mesures des angles géométriques

5) La rotation conserve les mesures des angles

Applications :

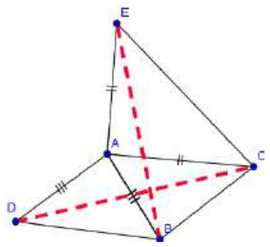
Exercice2 : ABC est un triangle.

On construit à l'extérieur deux triangles ABD et ACE isocèles et rectangles en A

1)Montrer que : $BE = CD$

2)Montrer que : $(BE) \perp (CD)$

Solution : Soit r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$



On a : $\begin{cases} AD = AB \\ \left(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}\right) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases}$

donc : $r(D) = B$ ❶

On a : $\begin{cases} AC = AE \\ \left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AE}\right) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases}$ donc :❷ $r(C) = E$

Et puisque la rotation conserve les distances

Alors de❶ et ❷ en déduit que $BE = CD$

2)on a $r(D) = B$ et $r(C) = E$

Donc : $\left(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{EB}\right) \equiv \frac{\pi}{2}$ par suite : $(BE) \perp (CD)$

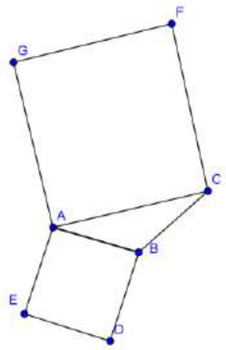
Exercice3 : ABC est un triangle tel que : $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$ positif. On construit à l'extérieur les carrés $ABDE$ et $ACFG$

Soit r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$

déterminer : $r(E)$ et $r(C)$

Et Montrer que : $\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CE}\right)\equiv\left(\overrightarrow{GA},\overrightarrow{GB}\right)[2\pi]$

Solution :



on a : $\begin{cases} AE = AB \\ \left(\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AB}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]\end{cases}$

Donc : $r(E)=B$ ❶

Et on a : $\begin{cases} AC = AG \\ \left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AG}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]\end{cases}$

Donc : ❷ $r(C)=G$

Et on a : $r(A)=A$ ❸ car A le centre de la rotation

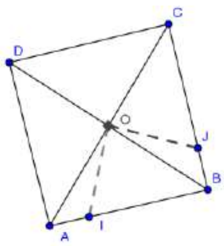
De : ❶et❷ et❸ en déduit que $\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CE}\right)\equiv\left(\overrightarrow{GA},\overrightarrow{GB}\right)[2\pi]$

Exercice4 : ABCD est un carré de centre O tel que : $\left(\overrightarrow{0A},\overrightarrow{0B}\right)$ positif.

I et J deux points tels que : $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BJ}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$

Montrer que $(OI)\perp(OJ)$ et $OI=OJ$

Solution :il suffit de montrer que **:** $r(I)=J$????



On pose : $r(I)=I'$

On a : $\begin{cases} OA = OB \\ \left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]\end{cases}$ donc

$r(A)=B$

Et on a : $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ donc : $\overrightarrow{BI'}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$ ❶ car la rotation conserve le coefficient de colinéarité de deux vecteurs

Et on sait que : $\overrightarrow{BJ}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$ ❷

De ❶ et ❷ en déduit que $\overrightarrow{BI'}=\overrightarrow{BJ}$ donc $I'=J$

Donc $r(I)=J$ par suite : $\begin{cases} OI = OJ \\ \left(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]\end{cases}$

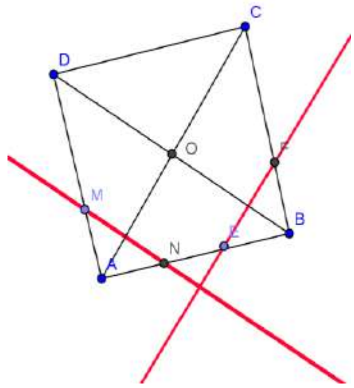
Exercice5 : ABCD est un carré de centre O tel que : $\left(\overrightarrow{0A},\overrightarrow{0B}\right)$ positif. Soit (D) la droite parallèle a (BD) et coupe (AD) en M et coupe (AB) en N et Soit r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$. E et F les images M et N respectivement Par la rotation r

1)Faire une figure et Montrer que $(EF)\perp(MN)$

2)Déterminer l'image de la droite (BD) par la rotation r

3)Montrer que $DN=FA$ et $(EF)\parallel(AC)$

Solution :1)



on a :❶ $r(M)=E$

et : $r(N)=F$ ❷

de ❶ et ❷ en deduit que:

$\left(\overrightarrow{MN},\overrightarrow{EF}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$

donc :$(EF)\perp(MN)$

2) on a: $\begin{cases} 0B = 0C \\ \left(\overrightarrow{0B},\overrightarrow{OC}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]\end{cases}$

Donc : $r(B)=C$ ❶

Et on a : $\begin{cases} 0D = 0A \\ \left(\overrightarrow{OD},\overrightarrow{OA}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]\end{cases}$ donc $r(D)=A$❷

de ❶ et ❷ en deduit que: $r((BD))=(AC)$

3) $DN=FA$???

on a: ❶ $r(D)=A$ et ❷ $r(N)=F$

donc : $DN=FA$

$(EF)\parallel(AC)$???

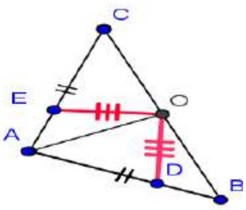
On a : $(MN)\parallel(BD)$ et $r((BD))=(AC)$ et $r((MN))=(EF)$

Donc : $(EF)\parallel(AC)$ car la rotation conserve le parallélisme

Exercice6 : ABC est un triangle isocèles et rectangles en A tel que : $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$ positif et O le milieu du segment $[BC]$.D et E deux points tels que : $\overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CE}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CA}$

Montrer que ODE est un triangle isocèles et rectangles en O

Solution : il suffit de montrer que **:** $r(E)=D$????



On pose : $r(E)=E'$

On a : $\begin{cases} OA = OC \\ \left(\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OA}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]\end{cases}$

Donc : $r(C)=A$ ❶

Et on a : $\begin{cases} OA=OB \\ (\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$ donc : $r(A)=B$ ❷

Et on a : $\overrightarrow{CE}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CA}$ ❸

De ❶et❷et❸: en déduit que : $\overrightarrow{AE'}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ ❹ car la rotation conserve le coefficient de colinéarité de deux vecteurs

Et on sait que : $\overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ ❺

De❹et ❺ en déduit que : $\overrightarrow{AE'}=\overrightarrow{AD}$ cad $E'=D$

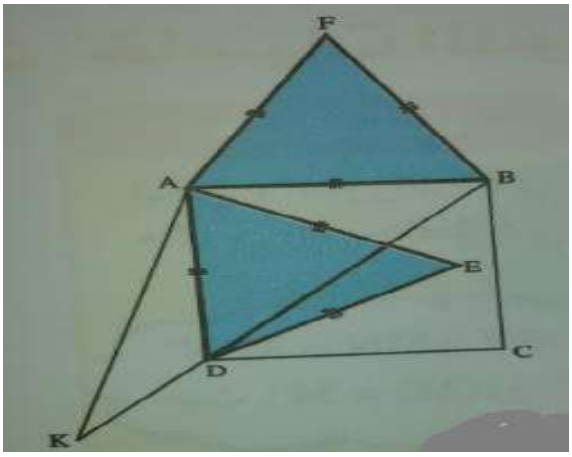
Donc : $r(E)=D$ par suite : $\begin{cases} OE=OD \\ (\overrightarrow{OE},\overrightarrow{OD})\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$

Donc ODE est un triangle isocèles et rectangles en O

Exercice7 : ABCD est un carré tel que : $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})$ positif. et AED et AFB deux triangles équilatéraux

Montrer que les points : E et C et F sont alignés

Solution : soit r la rotation de centre A et



d'angle $\frac{\pi}{3}$: $r\left(A;\frac{\pi}{3}\right)$

et soit K l'antécédent de C par r

On a : $r(B)=F$

Car $\begin{cases} AB=AF \\ (\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AF})\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi] \end{cases}$

Et on a : $r(D)=E$ Car $\begin{cases} AD=AE \\ (\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi] \end{cases}$

Et on a : $r(K)=C$

donc **:** $AK=AC$ et $(\overrightarrow{AK},\overrightarrow{AC})\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$

puisque : $AB=BC$ donc B appartient à la médiatrice du segment $[AC]$

et $AD=DC$ donc D appartient à la médiatrice du segment $[AC]$

et on a : $AK=AC$ et $(\overrightarrow{AK},\overrightarrow{AC})\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$

donc : AKC est équilatéral donc K appartient à la médiatrice du segment $[AC]$

Donc les points : K et B et D sont alignés

Et puisque la rotation conserve les alignement des points alors :les points : E et C et F sont alignés

Propriété : La rotation R (Ω, θ) est une bijection et sa bijection réciproque est la bijection R $(\Omega, -\theta)$

Preuve : $R(\Omega,\theta)(M)=M' \Leftrightarrow \begin{cases} \Omega M=\Omega M' \\ (\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega M'})\equiv\theta[2\pi] \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Omega M'=\Omega M \\ (\overrightarrow{\Omega M'},\overrightarrow{\Omega M})\equiv-\theta[2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow R(\Omega,-\theta)(M')=M$

Propriété : (Propriété fondamentale de la rotation)

Soit R (Ω, θ) la rotation de centre Ω et d'angle θ

si $R(M)=M'$ et $R(N)=N'$ alors $(\overrightarrow{MN},\overrightarrow{M'N'})\equiv\theta[2\pi]$

Preuve : On a :

$(\overrightarrow{MN},\overrightarrow{M'N'})\equiv(\overrightarrow{MN},\overrightarrow{\Omega M})+(\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega M'})+(\overrightarrow{\Omega M'},\overrightarrow{M'N'})[2\pi]$

$\equiv(\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega M'})[2\pi]$car : $(\overrightarrow{MN},\overrightarrow{\Omega M})\equiv(\overrightarrow{M'N'},\overrightarrow{\Omega M'})[2\pi]$

(la rotation conserve la mesure des angles orientés)

D'où : $(\overrightarrow{MN},\overrightarrow{\Omega M})+(\overrightarrow{\Omega M'},\overrightarrow{M'N'})\equiv 0[2\pi]$

Exercice10 : ABCD est un carré de centre O tel que : $(\overrightarrow{0A},\overrightarrow{0B})$ négatif. Soient M, N, P et Q quatre points dans le plan tels que : $\overrightarrow{DQ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{DA}$ et $\overrightarrow{CP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$

la droite (AN) coupe les droites (DM) et (BP) Respectivement en E et F

la droite (CQ) coupe les droites (DM) et (BP) Respectivement en H et G

Soit r la rotation de centre O et d'angle $-\pi/2$

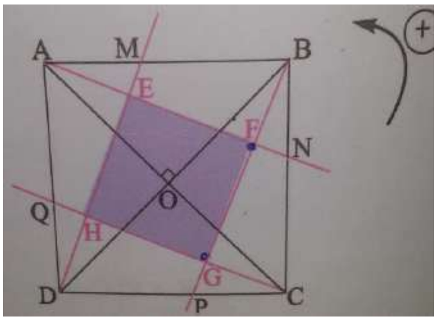
1)Faire une figure dans le cas ou : $AB=6cm$

2)Montrer que : $r(M)=N$ et $r(N)=P$ et $r(P)=Q$ et $r(Q)=M$

3) a)Montrer que : $r(F)=G$

b)en déduire que : le triangle FOG est isocèle et rectangle en O

Solution :1)



2) on a $\begin{cases} OA=OB \\ \left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)\equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$ donc : $r(A)=B$

$\begin{cases} OB=OC \\ \left(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}\right)\equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$ donc : $r(B)=C$

Et puisque $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et la rotation conserve le coefficient de colinéarité de deux vecteurs

Alors : $\overrightarrow{r(A)r(M)}=\frac{1}{3}\overrightarrow{r(A)r(B)}$

cad : $\overrightarrow{Br(M)}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ et on a : $\overrightarrow{BN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$

donc : $r(M)=N$

de meme : on montre que : $r(N)=P$ et $r(P)=Q$ et $r(Q)=M$

3) a)on montre que : $r(F)=G$?

Puisque : $r(N)=P$ et $r(A)=B$ alors : $r((AN))=(BP)$

Et Puisque : $r(P)=Q$ et $r(A)=B$ alors : $r((AN))=(BP)$

Et puisque : $r(P)=Q$ et $r(B)=C$ alors : $r((BP))=(QC)$

Donc : $r((AN)\cap(BP))=r((AN))\cap r((BP))$ car r est une application injective

Donc : $r(\{F\})=(BP)\cap(QC)=\{G\}$ par suite : $r(F)=G$

3)b)On a : $r(F)=G$ donc : $\begin{cases} OF=OG \\ \left(\overrightarrow{OF},\overrightarrow{OG}\right)\equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$

Donc : le triangle FOG est isocèle et rectangle en O

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron »
Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices
Que l'on devient un mathématicien

Cours *LIMITE D'UNE FONCTION Avec* **Exercices et exemples avec solutions**

PROF : ATMANI NAJIB 1BAC BIOF

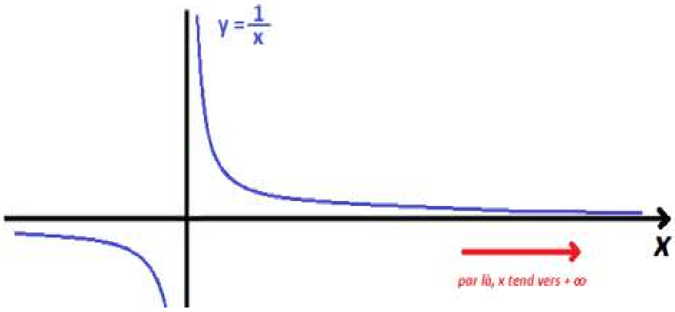
http:// xriadiat.e-monsite.com

LIMITE D'UNE FONCTION

1)Introduction et activités

La limite d'une fonction, c'est en gros « vers quoi tend » la fonction.

Le plus simple est de prendre un exemple : la fonction inverse : $f : x \to \frac{1}{x}$



On voit bien que quand x tend vers +∞, la fonction « tend » vers 0, c'est-à-dire qu'elle se rapproche de plus en plus de 0 par valeur supérieure sans jamais la toucher.et bien on appelle cela une limite, puisque la fonction « tend vers » quelque chose. on note cette limite de la façon suivante : $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0^+$

Et on prononce cela « limite quand x tend vers plus l'infini de $\frac{1}{x}$ est égal 0 plus».

Pour l'instant retiens juste la notation et cette notion de « tendre vers », de toute façon au fur et à mesure de la leçon tu assimileras de mieux en mieux le concept de limite avec les exemples.

2) LIMITE FINIE EN a.

Propriété : $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{R}^*$

Les fonctions : $x \mapsto x^2$; $x \mapsto x^3$; $x \mapsto x^n$; $x \mapsto k|x|$; $x \mapsto k\sqrt{|x|}$; $x \mapsto k|x|^n$

Tendent vers 0 quand x rend vers 0.

Exemple : Calculer les limites suivantes :

1) $\lim_{x\to0} x^8$ 2) $\lim_{x\to0} 5|x|$ 3) $\lim_{x\to0} \frac{1}{2}|x|^3$

Solutions:1) $\lim_{x\to0} x^8 = 0$ 2) $\lim_{x\to0} 5|x| = 0$ 3) $\lim_{x\to0} \frac{1}{2}|x|^3 = 0$

Propriété : Si P est une fonction polynôme alors $\lim_{x\to x_0} P(x) = P(x_0)$Une fonction polynôme P c'est une fonction qui s'écrit de la forme :

$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2. + ... + a_nx^n$

Exemple : $\lim_{x\to-1} 5x^2 + 2x - 8 = 5\times(-1)^2 + 2\times(-1) - 8 = -5$

Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle pointé de centre a et l un réel. On dit que la fonction f tend vers l quand x tend vers a si : $\lim_{x\to a} f(x) - l = 0$.

Propriété: Si sur un intervalle pointé de centre a on a : $|f(x) - l| \le u(x)$ et $\lim_{x\to a} u(x) = 0$ alors $\lim_{x\to a} f(x) = l$

Exemple1 :1)monter que : $\lim_{x\to0} x^2\cos\left(\frac{2}{x}\right) = 0$

2)a)monter que : $\forall x \in]-1;1[$: $|x^2 + 5x| \le 6|x|$

b)Calculer $\lim_{x\to0} x^2 + 5x$

Solution : 1) $x \in \mathbb{R}^*$ $\left|\cos\left(\frac{2}{x}\right)\right| \le 1$

donc $\left|x^2\cos\left(\frac{2}{x}\right)\right| \le x^2$ et on a $\lim_{x\to0} x^2 = 0$

Donc : $\lim_{x\to0} x^2\cos\left(\frac{2}{x}\right) = 0$

2)a) on a : $|x^2 + 5x| = |x(x+5)| = |x||x+5|$

Et puisque : $x \in]-1;1[$ alors : $4 \prec x + 5 \prec 6$

alors : $|x+5| \prec 6$ donc $|x^2 + 5x| \le 6|x|$

b) puisque : $\lim_{x\to0} 6|x| = 0$ alors : $\lim_{x\to0} x^2 + 5x$

Exemple2 : monter que: $\lim_{x\to0} 2 + x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 2$

Solution : $x \in \mathbb{R}^*$ $\left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \le 1$ donc :

$|f(x) - 2| = x^2\left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \le x^2$ et on a $\lim_{x\to0} x^2 = 0$

Alors : $\lim_{x\to0} f(x) = 2$

Exemple3 : monter que: $\lim_{x\to 4}\sqrt{2x+1}=3$

Solution : $\forall x\in\left[-\frac{1}{2};+\infty\right[$

$$\left|f(x)-3\right|=\left|\sqrt{2x+1}-3\right|=\frac{2|x-4|}{\sqrt{2x+1}+3}$$

et on a $\sqrt{2x+1}+3\geq 3$ donc : $\left|f(x)-3\right|\leq\frac{2}{3}|x-4|$

et puisque : $\lim_{x\to 4}|x-4|=0$ Alors : $\lim_{x\to 4}f(x)=3$

Exemple4 : On se propose d'étudier la limite de la fonction : $f(x)=\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$ en 0.

On remarque que : ($\forall x\in\mathbb{R}^*$) :

$$f(x)=\frac{\left(\sqrt{1+x^2}-1\right)\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)}{x\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)}=\frac{1+x^2-1}{x\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)}$$

(on a multiplié par le conjugué)

$f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}+1}$ D'autre part :

($\forall x\in\mathbb{R}^*$)($|f(x)|\leq|x|$) et puisque $\lim_{x\to 0}|x|=0$ alors

$\lim_{x\to 0}f(x)=0$

Propriété : Soit f une fonction définie sur un intervalle pointé de centre a

on a : $\lim_{x\to a}\left|f(x)\right|=0\Leftrightarrow\lim_{x\to a}f(x)=0$

Remarque :

$\lim_{x\to a}\left|f(x)\right|=l\Leftrightarrow\lim_{x\to a}f(x)=l$ ou $\lim_{x\to a}f(x)=-l$

Propriété : Si f admet une limite l en a alors cette limite est **unique.**

Exercice : Calculer les limites suivantes :

1) $\lim_{x\to 2}3x^2+2x+1$

2) $\lim_{x\to 1}\frac{3x^2-x}{2x^3+3x-4}$ 3) $\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{4x+1}+3}{x^2+3x+2}$

Solutions :1) $\lim_{x\to 2}3x^2+2x+1=3\times 2^2+2\times 2+1=17$

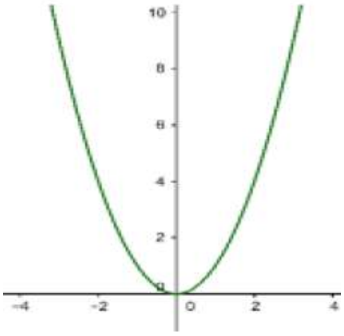
2) $\lim_{x\to 1}\frac{3x^2-x}{2x^3+3x-4}=\frac{3\times 1^2-1}{2\times 1^3+3\times 1-4}=\frac{2}{1}=2$

3) $\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{4x+1}+3}{x^2+3x+2}=\frac{\sqrt{4\times 2+1}+3}{2^2+3\times 2+2}=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$

3) Limite infinies en ±∞

Activité : Considérons la fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x\mapsto x^2$

La courbe représentative de f est la parabole de centre $O(0,0)$



1- Compléter le tableau suivant :

x	1	10^3	10^5	10^6	10^{12}
$f(x)$					

Que remarquer-vous ?

On voit bien que quand x tend vers +∞, la fonction « tend » vers +∞, c'est-à-dire qu'elle se rapproche de plus en plus grand

on écrit : $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

2- Compléter le tableau suivant :

x	-10^{12}	-10^5	-10^3	-10	-2
$f(x)$					

Que remarquer-vous ?

On voit bien que quand x tend vers $-\infty$, la fonction « tend » vers +∞, c'est-à-dire qu'elle se rapproche de plus en plus grand

on écrit : $\lim_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$

Propriété : Les fonctions :

$x\mapsto x^2$; $x\mapsto x^n$ ($n\in\mathbb{N}^*$); $x\mapsto\sqrt{x}$; $x\mapsto|x|$

Tendent vers +∞ quand x tend vers +∞

Exercice : Calculer les limites suivantes :

1) $\lim_{x\to+\infty}x^6$ 2) $\lim_{x\to-\infty}x^{2014}$ 3) $\lim_{x\to-\infty}-7x^9$

Solutions :

1) $\lim_{x\to+\infty}x^6=+\infty$ 2) $\lim_{x\to-\infty}x^{2014}=+\infty$ car 2014 pair

3) $\lim_{x\to-\infty}-7x^9=+\infty$ car 2014 impair

4) Limite finie en ±∞

Activité : Soit la fonction : $f:x\to\frac{1}{x}$

1)Compléter le tableau suivant :

x	1	10^3	10^5	10^6	10^{12}
$f(x)$					

On remarque que quand x tend vers +∞, la fonction « tend » vers 0, c'est-à-dire qu'elle se rapproche de plus en plus de 0 par valeur supérieure. On note cette limite de la façon suivante : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0^+$

2)Compléter le tableau suivant :

x	-10^{12}	-10^{6}	-10^{5}	-10	-1
$f(x)$					

On remarque que quand x tend vers $-\infty$, la fonction « tend » vers 0, c'est-à-dire qu'elle se rapproche de plus en plus de 0 par valeur inférieure. On note cette limite de la façon suivante : $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0^-$

Propriétés : les fonctions $x \mapsto \frac{k}{x}$; $x \mapsto \frac{k}{x^2}$;

$x \mapsto \frac{k}{x^n}$: $x \mapsto \frac{k}{|x|}$; $x \mapsto \frac{k}{\sqrt{|x|}}$; $x \mapsto \frac{k}{|x|^n}$ où $n \in \mathbb{N}^*$

et $k \in \mathbb{R}^*$ Tendent vers 0 quand x tend vers +∞.

Exemple : Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^3}$ **2)** $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x^5}$ **3)** $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{5}{x^7}$ **4)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-4}{x^5}$

5) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{12}{x^{2021}}$ **6)** $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{-5}{x^{2023}}$

Solution : 1) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^3} = 0^+$ **2)** $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x^5} = 0^-$

3) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{5}{x^7} = 0^-$ **4)** $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{-4}{x^5} = 0^+$ **5)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{12}{x^{2021}} = 0^+$

6) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{-5}{x^{2023}} = 0^+$

5) Limite infinies en un point

Activité : Soit la fonction : $f : x \to \frac{1}{x}$

1)Compléter le tableau suivant :

x	10^{12}	10^{6}	10^{2}	10	1
$f(x)$					

On remarque que quand x tend vers 0 par valeur supérieure la fonction f « tend » vers $+\infty$ c'est-à-dire qu'elle devient de plus en plus grand On note cette limite de la façon suivante :

$\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$

2)Compléter le tableau suivant :

x	-1	-10	-10^{2}	-10^{6}	-10^{12}
$f(x)$					

On remarque que quand x tend vers 0 par valeur inferieur la fonction f « tend » vers $-\infty$ c'est-à-dire qu'elle devient de plus en plus petit On note cette limite de la façon suivante :

$\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$

Exemple : Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x^3}$ **2)** $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{-5}{x^3}$ **3)** $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{9}{x^5}$ **4)** $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{-12}{x^4}$

5) $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{-1}{\sqrt{x}}$ **6)** $\lim\limits_{x \to 0^+} 3x + 7 + \frac{1}{\sqrt{x}}$

Solution : 1) $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x^3} = +\infty$ **2)** $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{-5}{x^3} = -\infty$

3) $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{9}{x^5} + \infty$ **4)** $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{-12}{x^4} = -\infty$

5) $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{-1}{\sqrt{x}} = -\infty$ **6)** $\lim\limits_{x \to 0^+} 3x + 7 + \frac{1}{\sqrt{x}} = 0 + 7 + \infty = +\infty$

6) LIMITE A DROITE, LIMITE A GAUCHE.

Exemple : Soit la fonction $f : x \mapsto \frac{|x-1|x}{x^2-1}$

Déterminer $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x \succ 1}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x \prec 1}} f(x)$

Solution : $\forall x \in \mathbb{R} - \{-1;1\}$

Si : $x \succ 1$: $f(x) = \frac{(x-1)x}{(x-1)(x+1)} = \frac{x}{x+1}$

Donc : $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x \succ 1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x \succ 1}} \frac{x}{x+1} = \frac{1}{2}$

Si : $x \prec 1$: $f(x) = \frac{-(x-1)x}{(x-1)(x+1)} = -\frac{x}{x+1}$

Donc : $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x \prec 1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x \prec 1}} -\frac{x}{x+1} = -\frac{1}{2}$

Remarque : $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x \succ 1}} f(x) \neq \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x \prec 1}} f(x)$

Théorème : Une fonction f admet une limite l en a si et seulement si elle admet une limite à droite de a égale à sa limite à gauche de a égale à l.

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = l \Leftrightarrow \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \succ a}} f(x) = l$ et $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \prec a}} f(x) = l$

Exemple : Soit la fonction $f : x \mapsto \frac{(x+1)^2}{|x^2-1|}$

Etudier la limite de f en $x_0 = -1$

Solution : Déterminons $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x\succ -1}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x\prec -1}} f(x)$?

Solution : $\forall x \in \mathbb{R}-\{-1;1\}$

Si : $-1 \prec x \prec 1$: $f(x)=\dfrac{(x+1)^2}{|x+1||x-1|}=-\dfrac{x+1}{x-1}$

Donc : $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x\succ -1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x\succ -1}} -\dfrac{x+1}{x-1}=0$

Si : $x \prec -1$: $f(x)=\dfrac{(x+1)^2}{|x+1||x-1|}=\dfrac{x+1}{x-1}$

Donc : $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x\prec -1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x\prec -1}} \dfrac{x+1}{x-1}=0$

donc : $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x\succ -1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x\prec -1}} f(x)=0$ donc : $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=0$

Exercice : Soit la fonction g définie par :

$g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto 2x^2 - x + 3 \ si \ x \geq 1$

$x \mapsto -x^2 + x + \alpha \ si \ x < 1$

Déterminer α pour que la fonction g admet une limite en 1.

7) OPERATIONS SUR LES LIMITES.

1)Opérations sur les limites finies.

Propriété : Soient f et g deux fonctions tels que :

$\lim\limits_{x\to a} f(x)=l$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x)=l'$ on a :

$\lim\limits_{x\to a}(f+g)(x)=l+l'$ et $\lim\limits_{x\to a}(f\times g)(x)=l\times l'$ et

$\lim\limits_{x\to a}|f|(x)=|l|$ et $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{1}{g}\right)(x)=\dfrac{1}{l'}$ si $l'\neq 0$

et $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)=\dfrac{l}{l'}$ si $l'\neq 0$ et $\lim\limits_{x\to a}\sqrt{f}(x)=\sqrt{l}$ si $l \succ 0$

Ces propriétés sont vraies à droite et à gauche d'un réel a.

Exemple : $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2+3}+1}{2x-1}=\dfrac{3}{1}=3$

2) Opérations sur les limites

Toutes les propriétés qui seront citées dans ce paragraphe sous forme de tableau sont admises

a) Limite de la somme

$\lim f$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim g$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim f+g$	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	Forme ind

Ces propriétés sont vraies si x tend vers :

$a+$; $a-$; $+\infty$ ou $-\infty$

Formes indéterminées : Veut dire qu'on ne peut pas calculer la limite directement, il faut faire d'autres calcules car il y a plusieurs cas.

Exemple1 : 1) $f(x) = 2 + x^2$, $g(x) = 5 - x^2$ on a

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=-\infty$

et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)+g(x)=-7$

2) $f(x) = 2 + x^2$, $g(x) = 5 - x$ on a

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x)=-\infty$

et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)+g(x)=\lim\limits_{x\to +\infty} x^2-x+7=\lim\limits_{x\to +\infty} x^2\left(1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{7}{x^2}\right)=+\infty$

Dans les deux exemples on a le même cas que dans la dernière colonne du tableau mais on a deux résultats différents

Exemple2 : déterminer : $\lim\limits_{x\to +\infty} x^2-\sqrt{x}$

on a $\lim\limits_{x\to +\infty} x^2=+\infty$; $\lim\limits_{x\to +\infty} -\sqrt{x}=-\infty$

Donc Formes indéterminée : "$+\infty-\infty$"

$\lim\limits_{x\to +\infty} x^2-\sqrt{x}=\lim\limits_{x\to +\infty} x^2\left(1-\dfrac{\sqrt{x}}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to +\infty} x^2\left(1-\dfrac{1}{x\sqrt{x}}\right)$

puisque : $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{1}{x\sqrt{x}}=0$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} x^2=+\infty$

alors : $\lim\limits_{x\to +\infty} x^2-\sqrt{x}=+\infty$

b) Limites des produits

$\lim f$	ℓ	$\ell>0$	$\ell>0$	$\ell<0$	$\ell<0$	0	0	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim g$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim f\times g$	$\ell\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	Forme ind	Forme ind	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$

c)Limites des inverses

$\lim f$	$\ell\neq 0$	0^+	0^-	$+\infty$	$-\infty$
$\lim \dfrac{1}{f}$	$\dfrac{1}{\ell}$	$+\infty$	$-\infty$	0	0

4) Limites des quotients

$\lim f$	ℓ	ℓ	$\ell\neq 0$	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$
$\lim g$	$\ell'\neq 0$	$\pm\infty$	0	ℓ	0	$\pm\infty$
$\lim \dfrac{f}{g}$	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	0	$\pm\infty$	$\pm\infty$	?	?

Exemple3 : déterminer : $\lim\limits_{x\to 0} x^2+x+2+\dfrac{1}{x^2}$

Solution : on a : $\lim\limits_{x\to 0} x^2+x+2=2$ et $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}=+\infty$

Donc : $\lim\limits_{x\to 0} x^2+x+2+\dfrac{1}{x^2}=+\infty$

Exemple4 : déterminer :

1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+1}{(x-1)^2}$ 2) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^3+1}{(x-1)^2}$

3) $\lim\limits_{x\to \pm\infty} 2x^3+x^2-x+4$

Solution : 1)on a : $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)^2=0^+$ et

$\lim\limits_{x\to 1} x^3+1=2$ Donc : $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+1}{(x-1)^2}=+\infty$

2)on a : $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^3+1}{(x-1)^2}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^3\left(1+\frac{1}{x^3}\right)}{x^2\left(1-\frac{1}{x}\right)^2}=\lim\limits_{x\to +\infty} x\dfrac{1+\frac{1}{x^3}}{\left(1-\frac{1}{x}\right)^2}$

et on a : $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{1}{x^3}=0$ et $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{1}{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} 1+\dfrac{1}{x^3}=1$

et $\lim\limits_{x\to +\infty} 1-\dfrac{1}{x}=1$ Donc : $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^3+1}{(x-1)^2}=+\infty$ car $\lim\limits_{x\to +\infty} x=+\infty$

3) $\lim\limits_{x\to +\infty} 2x^3+x^2-x+4=\lim\limits_{x\to +\infty} 2x^3\left(1+\dfrac{1}{2x}-\dfrac{1}{2x^2}+\dfrac{2}{x^3}\right)$

on a : $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2}{x^3}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{1}{2x^2}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{1}{2x}=0$ et

$\lim\limits_{x\to +\infty} x^3=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to +\infty} 2x^3+x^2-x+4=+\infty$

$\lim\limits_{x\to -\infty} 2x^3+x^2-x+4=\lim\limits_{x\to -\infty} 2x^3\left(1+\dfrac{1}{2x}-\dfrac{1}{2x^2}+\dfrac{2}{x^3}\right)$

on a : $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{2}{x^3}=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{1}{2x^2}=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{1}{2x}=0$ et

$\lim\limits_{x\to -\infty} x^3=-\infty$ donc $\lim\limits_{x\to +\infty} 2x^3+x^2-x+4=-\infty$

Exemple5 : On veut déterminer

$\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{3x+1}{x^2+x-2}$

on a : $\lim\limits_{x\to 1^+} 3x+1=4$

on a : $\lim\limits_{x\to 1^+} x^2+x-2=0^+$

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
x^2+x-2		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{3x+1}{x^2+x-2}=+\infty$

Remarque :1) Eviter d'écrire ces expressions qui n'ont pas de sens mathématique : $\dfrac{?}{0^+}$ et $\dfrac{?}{0^-}$

2)Ne pas utiliser $+\infty$ ou $-\infty$ dans les opérations dans $\mathbb{R}$ ($+\infty$ et $-\infty$ ne sont pas des réels)

Exercices : Déterminer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-x}{2x^3+2x-4}$ $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{4x+1}-3}{x^2-3x+2}$

3) Limites d'une fonction polynôme en $\pm\infty$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$

Soit f une fonction polynôme de degré n tel que :

$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n$

avec $a_n\neq 0$ On a :

$$f(x)=a_nx^n\left(\frac{a_0}{a_nx^n}+\frac{a_1}{a_nx^{n-1}}+\frac{a_2}{a_nx^{n-2}}+\ldots+\frac{a_{n-1}}{a_nx}+1\right)$$

puisque $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{a_0}{a_nx^n}+\dfrac{a_1}{a_nx^{n-1}}+\dfrac{a_2}{a_nx^{n-2}}+\ldots+\dfrac{a_{n-1}}{a_nx}+1=1$

alors $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty} a_nx^n$

Même chose si x tend vers $-\infty$

Propriété : La limite d'une fonction polynôme en **$+\infty$ ($-\infty$)** est la limite de son plus grand terme En $+\infty$ ($-\infty$)

Exemple :

$\lim\limits_{x\to +\infty} 2x^3+x^2-x+4=\lim\limits_{x\to +\infty} 2x^3=+\infty$

4) Limites d'une fonction rationnelle en $\pm\infty$

Une fonction rationnelle est le rapport de deux fonctions polynômes : $h(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$

$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n$ avec $an\neq 0$

$g(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots+b_mx^m$ avec $b_m\neq 0$

$$h(x)=\frac{a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n}{b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots+b_mx}$$

$$h(x)=\frac{a_nx^n\left(\frac{a_0}{a_nx^n}+\frac{a_1}{a_nx^{n-1}}+\frac{a_2}{a_nx^{n-2}}+\ldots+\frac{a_{n-1}}{a_nx}+1\right)}{b_mx^m\left(\frac{b_0}{b_mx^m}+\frac{b_1}{b_mx^{m-1}}+\frac{b_2}{b_mx^{m-2}}+\ldots+\frac{b_{m-1}}{b_mx}+1\right)}$$

et puisque : $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\frac{a_0}{a_nx^n}+\frac{a_1}{a_nx^{n-1}}+\frac{a_2}{a_nx^{n-2}}+\ldots+\frac{a_{n-1}}{a_nx}+1}{\frac{b_0}{b_mx^m}+\frac{b_1}{b_mx^{m-1}}+\frac{b_2}{b_mx^{m-2}}+\ldots+\frac{b_{m-1}}{b_mx}+1}=1$

$\lim\limits_{x\to +\infty} h(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{a_nx^n}{b_mx^m}$

Même chose si x tend vers $-\infty$

Propriété : La limite d'une fonction rationnelle en **+∞ (−∞)** est la limite du rapport des termes de plus grand degré en **+∞ (−∞)**

Exemples :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+5x^2-7x^4}{x-10x^2+14x^3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-7x^4}{14x^3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-x}{2}=-\infty$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x+8x^2-2x^5}{x^2+2x^6}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-2x^5}{2x^6}=\lim\limits_{x\to-\infty}-\dfrac{1}{x}=0$

Remarque : La propriété précédente n'est vraie que si x tend vers +∞ ou −∞

8)Limites des fonctions trigonométriques.

Propriété : Soit a un réel on a :

1) $\lim\limits_{x\to a}\sin x=\sin a$

2) $\lim\limits_{x\to a}\cos x=\cos a$

3)si $a\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ $\lim\limits_{x\to a}\tan x=\tan a$

Propriété : Soit $a\in\mathbb{R}^*$

a) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ b) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x}{x}=1$

c) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin ax}{ax}=1$ b) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan ax}{ax}=1$

c) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$

Exemples : Déterminer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 2x}{\sin 3x}$ 2) $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\cos\sqrt{x}-1}{x}$ 3) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{\sqrt{3}\sin x-\cos x}{x-\dfrac{\pi}{6}}$

Solution : 1)

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x}{\sin 3x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x}{2x}\times\frac{3x}{\sin 3x}\times\frac{2}{3}=1\times1\times\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$$

2) $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\cos\sqrt{x}-1}{x}$ directement on trouve une formes indéterminée : "$\dfrac{0}{0}$"

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\cos\sqrt{x}-1}{x}=\lim_{x\to0^+}-\frac{1}{2}\left(\frac{1-\cos\sqrt{x}}{\dfrac{\left(\sqrt{x}\right)^2}{2}}\right)=\lim_{h\to0^+}-\frac{1}{2}\left(\frac{1-\cos h}{\dfrac{h^2}{2}}\right)=-\frac{1}{2}\times1=-\frac{1}{2}$$

(On pose $\sqrt{x}=h$)

3) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{\sqrt{3}\sin x-\cos x}{x-\dfrac{\pi}{6}}$

On montre que : $\sqrt{3}\sin x-\cos x=2\sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{\sqrt{3}\sin x-\cos x}{x-\dfrac{\pi}{6}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{2\sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)}{x-\dfrac{\pi}{6}}$$

On pose $x-\dfrac{\pi}{6}=h$) donc $x\to\dfrac{\pi}{6}\Leftrightarrow h\to0$

Donc : $=2\lim\limits_{h\to0}\dfrac{\sin h}{h}=2\times1=2$

Exercice1 : Soient les fonctions tels que :

$f(x)=\sqrt{2x+1}\left(-3x^2+x\right)$ et $g(x)=\dfrac{-2x^2+1}{(x-3)^2}\left(\sqrt{x}+1\right)$

$k(x)=\dfrac{-3x+1}{x(x-2)}$ et $h(x)=\dfrac{x^2+1}{x^3}\sin x$

1)Déterminer : $\lim\limits_{x\to2}f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

2)Déterminer : $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$ et $\lim\limits_{x\to3}g(x)$

3)Déterminer : $\lim\limits_{x\to0}h(x)$

4)Déterminer les limites aux bornes du domaine de définition de k

Solution :

1)Déterminer : $\lim\limits_{x\to2}f(x)$ et $f(x)=\sqrt{2x+1}\left(-3x^2+x\right)$

$\lim\limits_{x\to2}2x+1=5$ et $\lim\limits_{x\to2}-3x^2+x=-10$

Donc : $\lim\limits_{x\to2}f(x)=\sqrt{5}\times(-10)=-10\sqrt{5}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}2x+1=\lim\limits_{x\to+\infty}2x=+\infty$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{2x+1}=+\infty$

Et on a : $\lim\limits_{x\to+\infty}-3x^2+x=\lim\limits_{x\to+\infty}-3x^2=-\infty$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$

- 2) $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$? et $g(x)=\dfrac{-2x^2+1}{(x-3)^2}\left(\sqrt{x}+1\right)$

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$ donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}+1=+\infty$

Et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-2x^2+1}{(x-3)^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-2x^2}{x^2}=-2$ donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=-\infty$

- 2) $\lim\limits_{x\to3}g(x)$? et $g(x)=\dfrac{-2x^2+1}{(x-3)^2}\left(\sqrt{x}+1\right)$

$\lim_{x\to3}\sqrt{x}+1=\sqrt{3}+1$ et $\lim_{x\to3}-2x^2+1=-17$ et

$\lim_{x\to3}(x-3)^2=0^+$ donc : $\lim_{x\to3}g(x)=-\infty$

3) $\lim_{x\to0}h(x)$?.

$\lim_{x\to0}h(x)=\lim_{x\to0}\frac{x^2+1}{x^2}\frac{\sin x}{x}$

Or $\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$ et puisque : $\lim_{x\to0}x^2+1=1$ et

$\lim_{x\to0}x^2=0^+$

et $\lim_{x\to0}\frac{x^2+1}{x^2}=+\infty$ alors : $\lim_{x\to0}h(x)=+\infty$

4) $k(x)=\frac{-3x+1}{x(x-2)}$ donc : $D_k=]-\infty;0[\cup]0;2[\cup]2;+\infty[$

- $\lim_{x\to+\infty}k(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{-3x+1}{x^2-2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-3x}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-3}{x}=0$
- $\lim_{x\to-\infty}k(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{-3x+1}{x^2-2x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-3x}{x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-3}{x}=0$
- $\lim_{x\to0}-3x+1=1$ et $\lim_{x\to0}x^2-2x=0$

Etude du signe de : x^2-2x

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$x(x-2)$		+	0	−	0	+	

Donc : $\lim_{x\to0^+}x^2-2x=0^-$ et $\lim_{x\to0^-}x^2-2x=0^+$

Donc : $\lim_{x\to0^+}k(x)=-\infty$ et $\lim_{x\to0^-}k(x)=+\infty$

$\lim_{x\to2}-3x+1=-5$ et $\lim_{x\to2^+}x^2-2x=0^+$ et $\lim_{x\to2^-}x^2-2x=0^-$

Donc : $\lim_{x\to2^+}k(x)=-\infty$ et $\lim_{x\to2^-}k(x)=+\infty$

Exercice2 : calculer les limites suivantes :

1) $\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{2x}-2}{x^2+3x-10}$ 2) $\lim_{x\to1}\frac{2x^3+3x^2-4x-1}{x^3-1}$

3) $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x}-x$ 4) $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x-1}{x-\frac{\pi}{4}}$

Solution : 1) $\lim_{x\to2}\sqrt{2x}-2=0$ et $\lim_{x\to2}x^2+3x-10=0$

on trouve une formes indéterminée : "$\frac{0}{0}$"

$$\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{2x}-2}{x^2+3x-10}=\lim_{x\to2}\frac{(\sqrt{2x}-2)(\sqrt{2x}+2)}{(x^2+3x-10)(\sqrt{2x}+2)}$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{(2x-4)}{(\sqrt{2x}+2)}\times\frac{1}{(x-2)(x+5)}=\lim_{x\to2}\frac{2}{(\sqrt{2x}+2)}\times\frac{1}{(x+5)}=\frac{2}{14}$$

2) $\lim_{x\to1}\frac{2x^3+3x^2-4x-1}{x^3-1}$?

On a : $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$

Et $2x^3+3x^2-4x-1=(x-1)(2x^2+5x+1)$

Donc :

$$\lim_{x\to1}\frac{2x^3+3x^2-4x-1}{x^3-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(2x^2+5x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)}=\lim_{x\to1}\frac{2x^2+5x+1}{x^2+x+1}=\frac{8}{3}$$

3) $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x}-x$?

On a : $\lim_{x\to+\infty}x^2+x=+\infty$ donc : $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x}=+\infty$

Et $\lim_{x\to+\infty}-x=-\infty$

on trouve une formes indéterminée : "$+\infty-\infty$"

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x}-x=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2+x}-x)(\sqrt{x^2+x}+x)}{(\sqrt{x^2+x}+x)}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x}-x=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+x-x^2}{\sqrt{x^2+x}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}+x}$$

$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{|x|\sqrt{\left(1+\frac{1}{x}\right)}+x}$ or $x\to+\infty$ donc $|x|=x$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x\left(\sqrt{\left(1+\frac{1}{x}\right)}+1\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{\left(1+\frac{1}{x}\right)}+1}=\frac{1}{2}$$

4) $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x-1}{x-\frac{\pi}{4}}$ On pose $x-\frac{\pi}{4}=h$ donc $x\to\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow h\to0$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x-1}{x-\frac{\pi}{4}}=\lim_{h\to0}\frac{\tan\left(h+\frac{\pi}{4}\right)}{h}$$

or : $\tan\left(h+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\tan h+\tan\frac{\pi}{4}}{1-\tan h\times\tan\frac{\pi}{4}}=\frac{\tan h+1}{1-\tan h}$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x-1}{x-\frac{\pi}{4}}=\lim_{h\to0}\frac{2}{1-\tan h}\times\frac{\tan h}{h}=\frac{2}{1}\times1=2$$

9) Limites et ordres.

Propriété : Si sur un intervalle pointé de centre a on a : $|f(x) - l| \leq u(x)$ et $\lim_{x \to a} u(x) = 0$ alors $\lim_{x \to a} f(x) = l$

(On peut citer les mêmes propriétés à gauche et adroites de a ou $+\infty$ ou $-\infty$.)

Propriété :1) soit f est une fonction définit sur un intervalle de la forme $I =]a-r; a-r[- \{a\}$

avec $a \in \mathbb{R}$ et $r \succ 0$

Si f admet une limite en a et f positif sur I alors $\lim_{x \to a} f(x) \geq 0$

2) soit f est une fonction définit sur un intervalle de la forme $I =]a-r; a-r[- \{a\}$

avec $a \in \mathbb{R}$ et $r \succ 0$

Si f admet une limite en a et g admet une limite en a et $f \leq g$ sur I alors $\lim_{x \to a} f(x) \leq \lim_{x \to a} g(x)$

3)si on a : $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ et si $\lim_{x \to a} g(x) = l$ et $\lim_{x \to a} h(x) = l$ alors $\lim_{\substack{x \to a \\ x \succ a}} f(x) = l$

Les propriétés précédentes sont vraies si x tend vers a à droite, ou a à gauche, ou $+\infty$ ou $-\infty$ en tenant compte des conditions pour chaque cas.

(On peut citer les mêmes propriétés à gauche de a.)

Propriété :1)Si sur un intervalle de la forme $]a, a + r[$ on a : $u(x) \leq v(x)$ et $\lim_{x \to a^+} u(x) = +\infty$

alors : $\lim_{x \to a^+} v(x) = +\infty$

2)Si sur un intervalle de la forme $]a, a + r[$ on a : $u(x) \leq v(x)$ et $\lim_{x \to a^+} v(x) = -\infty$

alors : $\lim_{x \to a^+} u(x) = -\infty$

La propriété précédente est vraie si x tend vers a à gauche, ou $+\infty$ ou $-\infty$ en tenant compte des conditions pour chaque cas.

Exemple1: Soit la fonction : $f : x \mapsto 3x^2 + 5x + 1$

déterminer : $\lim_{x \to +\infty} f(x)$

Solution : $\forall x \in \mathbb{R}^+$ on a $3x^2 \leq 3x^2 + 5x + 1$ et et puisque : $\lim_{x \to +\infty} 3x^2 = +\infty$ alors : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

Exemple2 : Soit la fonction :

$f : x \mapsto (x^2 + x^4)\sin\frac{1}{x}$ déterminer : $\lim_{x \to 0} f(x)$

Solution : $\forall x \in \mathbb{R}^*$ on a $-1 \leq \sin\frac{1}{x} \leq 1$ et

$x^2 + x^4 \geq 0$ donc $-x^2 - x^4 \leq (x^2 + x^4)\sin\frac{1}{x} \leq x^2 + x^4$

et puisque :

$\lim_{x \to 0} x^2 + x^4 = \lim_{x \to 0} - x^2 - x^4 = 0$ alors :

$\lim_{x \to 0} f(x) = 0$

Exemple3 : Soit la fonction : $f : x \mapsto x + \sin x - 1$

déterminer : $\lim_{x \to -\infty} f(x)$

Solution : $\forall x \in \mathbb{R}$ on a $-1 \leq \sin x \leq 1$ donc :

$x - 2 \leq f(x) \leq x$ et puisque :

$\lim_{x \to -\infty} x = -\infty$ alors : $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

Exemple4 : Soit la fonction : $f : x \mapsto \frac{1 + \sin x}{1 + \sqrt{x}}$

déterminer : $\lim_{x \to +\infty} f(x)$

Solution : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$ on a $1 + \sqrt{x} \geq \sqrt{x}$ et

$0 \leq 1 + \sin x \leq 2$ donc $\left|\frac{1 + \sin x}{1 + \sqrt{x}}\right| \leq \frac{2}{\sqrt{x}}$ donc

$|f(x)| \leq \frac{2}{\sqrt{x}}$ et on a $\lim_{x \to +\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0$ donc :

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$

Exercice3 : Déterminer les limites suivantes :

1) $\lim_{x \to 0} x^2 \sin\frac{1}{x}$ 2) $\lim_{x \to +\infty} \frac{\cos x}{x^3}$ 3) $\lim_{x \to +\infty} \frac{1 + \sin x}{x^2(2 + \cos x)}$

4) $\lim_{x \to -\infty} 1 + \frac{x}{2 + \sqrt{x^4 + 1}}$

Solution : 1)on pose : $f(x) = x^2 \sin\frac{1}{x}$

$\forall x \in \mathbb{R}^*$ $\left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq 1$ donc : $|f(x)| \leq x^2$ et on a

$\lim_{x \to 0} x^2 = 0$ Alors : $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$

2) $\lim_{x \to +\infty} \frac{\cos x}{x^3}$? on pose : $f(x) = \frac{\cos x}{x^3}$

$\forall x \in \mathbb{R}^*$ $|\cos x| \leq 1$ donc : $|f(x)| \leq \frac{1}{|x|^3}$ et on a $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{|x|^3} = 0$ Alors : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$

3) $\lim_{x \to +\infty} \frac{1+\sin x}{x^2(2+\cos x)}$? on pose : $f(x) = \frac{1+\sin x}{x^2(2+\cos x)}$

$\forall x \in \mathbb{R}^*$ $-1 \leq \cos x \leq 1$ et $-1 \leq \sin x \leq 1$ donc : $0 \leq \frac{1+\sin x}{2+\cos x} \leq 2$ donc $0 \leq f(x) \leq \frac{2}{x^2}$

Et puisque : $\lim_{x \to +\infty} 0 = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} \frac{2}{x^2} = 0$ Alors : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$

4) $\lim_{x \to -\infty} 1 + \frac{x}{2+\sqrt{x^4+1}}$? on pose : $f(x) = 1 + \frac{x}{2+\sqrt{x^4+1}}$

$\forall x \in \mathbb{R}^*$ $2+\sqrt{x^4+1} \geq \sqrt{x^4}$ cad $2+\sqrt{x^4+1} \geq x^2$

donc : $\frac{1}{2+\sqrt{x^4+1}} \leq \frac{1}{x^2}$ donc : $|f(x)-1| \leq \frac{1}{|x|}$

Et puisque : $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{|x|} = 0$ Alors : $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 1$

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron »
Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices Que l'on devient un mathématicien

LA DERIVATION

I) DERIVATION EN UN POINT

1) Activité

Déterminer la limite quad x tend vers a de $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ Dans les cas suivants :

1- $f(x)=3x^2-x+5$ et $a=-2$

2- $f(x)=\frac{2x^2+1}{x-1}$ et $a=2$

3- $f(x) = sin3x$ et $a=\frac{\pi}{6}$

4- $f(x)=\left|2x^2+x-3\right|$ et $a=1$.

2) Définition :

Définition : Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle ouvert de centre $\boldsymbol{a}$.

On dit que f est dérivable en a si la limite $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe et est finie. Dans ce cas on appellera cette limite le nombre dérivé de la fonction f en a et se note $f'(a)$.

Exemple : On considère la fonction f dénie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2+x-3$. Justifier que f est dérivable en -2 et préciser $f'(-2)$

Solution :

$$\lim_{x\to-2}\frac{f(x)-f(-2)}{x-(-2)}=\lim_{x\to-2}\frac{x^2+x-3+1}{x+2}=\lim_{x\to-2}\frac{x^2+x-2}{x+2}$$

$$=\lim_{x\to-2}\frac{(x+2)(x-1)}{x+2}=\lim_{x\to-2}x-1=-3=f'(-2)$$

Donc f est dérivable en en -2 et $f'(-2)=-3$

Remarque : Si f est dérivable en a et $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$

On pose : $h = x - a$ si x end vers a alors h tend vers 0 et on obtient

$$\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)$$

Application : Calculer le nombre dérivé de $f(x)=x^3+x$ en a = 1 en utilisant la deuxième formulation de la dérivation

Solution : $\lim\limits_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim\limits_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$

$$=\lim_{h\to0}\frac{(1+h)^3+1+h-2}{h}=\lim_{h\to0}\frac{h^3+3h^2+3h+1+1+h-2}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{h^3+3h^2+4h}{h}=\lim_{h\to0}h^2+3h+4=4=f'(1)$$

3) Dérivé à droite dérivé à gauche.

Activité : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x)=3x^2+x; x\prec 0 \\ f(x)=-2x^2+3x; x\geq 0 \end{cases}$$

Montrer que $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=3$ et que $\lim\limits_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=1$

Que peut-on conclure ?

Solution :

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{-2x^2+3x}{x}=\lim_{x\to0^+}-2x+3=3=f_d'(0)$$

3 s'appelle le nombre dérivé de la fonction f à droite de 0

On dit que f est dérivable à droite en 0

$$\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^-}\frac{3x^2+x}{x}=\lim_{x\to0^-}3x+1=1=f_g'(0)$$

1 s'appelle le nombre dérivé de la fonction f à gauche de 0

On dit que f est dérivable à gauche en 0

Mais on a : $f_d'(0)\neq f_g'(0)$

Donc : f n'est pas dérivable en 0.

Définition : 1) Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[a, a + r[$ où $r > 0$

On dit que f est dérivable à droite de a si la limite $\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe et est finie, dans ce cas on appelle cette limite ; le nombre dérivé de la fonction f à droite de a et on le note : $f_d'(a)$

2) Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme] $a-r, a$] où $r>0$

On dit que f est dérivable à gauche de a si la limite $\lim_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe et est finie, dans ce cas on appelle cette limite ; le nombre dérivé de la fonction f à gauche de a et on le note : $f_g'(a)$

Théorème : Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert de centre a.

f est dérivable en a si et seulement si elle dérivable à droite et à gauche de a et $f_d'(a)=f_g'(a)$

Preuve : En exercice.

Exemple1 : soit f une fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x)=\sqrt{x}\ldots x\geq 1 \\ f(x)=\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{4}\ldots x\prec 1\end{cases}$$

étudier la dérivabilité de f en $x_0=1$

Solution : on a $f(1)=\sqrt{1}=1$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}==\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}-1}{\left(\sqrt{x}\right)^2-1^2}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{x}+1}=\frac{1}{2}=f_d'(1)$$

Donc f est dérivable à droite en 1

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{4}-1}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{4}(x+1)=\frac{1}{2}=f_g'(1)$$

Donc f est dérivable à gauche en 1

et on a : $f_d'(1)=f_g'(1)$

Donc f est dérivable en 1 et $f'(1)=\frac{1}{2}$

Exemple2 : soit f une fonction définie par :

$f(x)=x^2-|x|$

étudier la dérivabilité de f en $x_0=0$

Solution :

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2-x}{x}=\lim_{x\to 0^+}x-1=-1=f_d'(0)$$

donc f est dérivable à droite en 0

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2+x}{x}=\lim_{x\to 0^-}x+1=1=f_g'(0)$$

Donc f est dérivable à gauche en 0

Mais on a : $f_d'(0)\neq f_g'(0)$

Donc : f n'est pas dérivable en 0.

Exercice1 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x)=3x^2+x; x\prec 0 \\ f(x)=-2x^2+3x; x\geq 0\end{cases}$$

1- Montrer que f est dérivable en $a=-2$.

2- f est–elle dérivable en 0.

Exercice2 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x)=\left|x^2-2x-3\right|+2x$

1- Ecrire une expression de f sur $\mathbb{R}$ sans valeur absolu.

2- Etudier la dérivabilité de f à droite et à gauche de -1.

3- f est-elle dérivable en -1.

II) INTERPRETATIONS GEOMETRIQUES.

1) Rappelles

Déterminer l'équation réduite de la droite qui passe par $A(-1,3)$ et de le Coefficient directeur -2

2) La fonction affine tangente à une fonction.

Soit f une fonction dérivable en a et $f'(a)$ son nombre dérivé en a.

Posons : $\begin{cases}\phi(x)=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}-f'(a); x\neq 0 \\ \phi(x)=0; x=0\end{cases}$

On a : $(x-a)\phi(x)=-f'(a)(x-a)+f(x)-f(a)$

et par suite : $f(x)=f'(a)(x-a)+f(a)+(x-a)\phi(x)$

Posons : $u(x)=f'(a)(x-a)+f(a)$ on aura :

$f(x)=u(x)+(x-a)\phi(x)$

La fonction u est une fonction affine et s'appelle la fonction affine tangente en a.

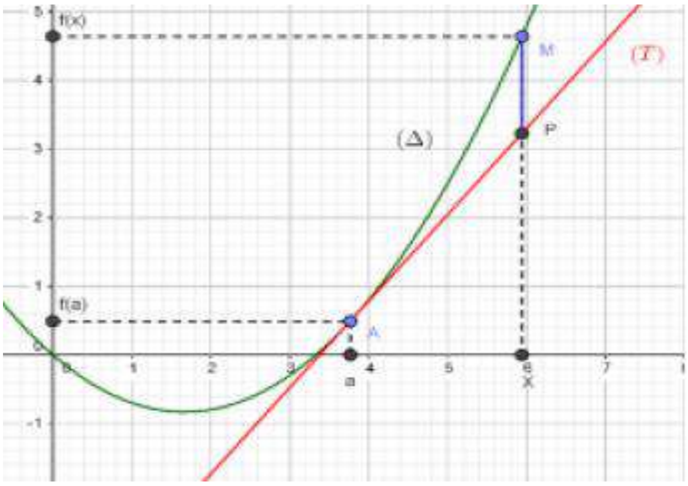
Propriété : Soit f une fonction dérivable en a. f admet une fonction affine tangente en a de la forme : $u(x)=f'(a)(x-a)+f(a)$

Application :Déterminer une fonction affine tangente en -3 de la fonction $f(x)=\frac{2x}{x^2+1}$.

Propriété : Toute fonction dérivable en a est continue en a.

Preuve : Puisque f est dérivable en a alors :

$f(x)=f'(a)(x-a)+f(a)+(x-a)\phi(x)$



en passant à la limite : $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ donc f est continue en a

La réciproque de la propriété précédente n'est pas vraie : $f(x) = |x|$ est continue en 0 mais pas dérivable en 0.

Remarques :1) La fonction affine tangente en a d'une fonction dérivable en a est une approximation de f au voisinage de a

On peut écrire alors : $f(x) \sim f'(a)(x-a) + f(a)$ au voisinage de a

2) Si on pose $x = a + h$; on aura :

$f(a+h) \sim f'(a)h + f(a)$ qui dit que si on ne connait pas $f\ (a+h)$ et si h est petit, on peut" essayer de mettre " $f'(a)h + f(a)$ a la place de $f(a+h)$.

Exemple : donner une approximation de $sin3$

Solution : Si on veut une approximation de $sin3$, on peut prendre :$f(x) = sinx$ et $a = \pi$ (car π est l'élément le plus proche de 3 dont le sinus est connu) $h = 3 - \pi$ (pour avoir :$3 = \pi + h$)

On a alors $f(a) = sin\pi = 0$ et $f'(a) = cos\pi = -1$

(à prouver) ce qui donne :

$sin3 = sin(\pi + h) \sim -1 \times (3 - \pi) = \pi - 3.$

Exercice3 : soit f une fonction définie sur

$]-\pi;\pi[$ par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2}{\tan\frac{x}{2}} \ldots si.x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

1)étudier la dérivabilité de f en 0

2)Donner une valeur approchée du nombre : $f\left(10^{-5}\right)$

Solution : $\lim_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\dfrac{\frac{x^2}{\tan\frac{x}{2}}}{x} = \lim_{x\to 0}\dfrac{x}{\tan\frac{x}{2}}$

$= 2\lim_{x\to 0}\dfrac{\frac{x}{2}}{\tan\frac{x}{2}} = 2\times 1 = 2$

Donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 2$

2)on a $f(a+h) \sim f'(a)h + f(a)$

Donc $f\left(0+10^{-5}\right) \sim f(0) + 10^{-5} f'(0)$ $a = 0$ et $h = 10^{-5}$

$f(0) = 0$ et $f'(0) = 2$

Donc $f\left(10^{-5}\right) \sim 2 10^{-5}$

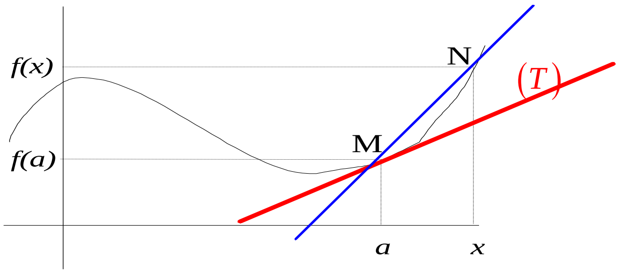
3) Interprétations géométriques.

3.1 Tangente en un point.

Soit f une fonction dérivable en M $(a, f(a))$

Soit x un élément de Df différent de a

et N$(x, f(x))$ $(\Delta) = (MN)$; le coefficient directeur de (Δ) est le réel : $m = \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$



En faisant tendre x vers a et à la position limite une droite (T) qui

passe par M$(a, f(a))$ et qui a pour coefficient directeur : $\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ qui n'est que $f'(a)$

(car f est dérivable en a)

Donc : (T): $y = f'(a)x + p$ et puisque (T) passe par $A(a, f(a))$

alors : $f(a) = f'(a)a + p$ donc $p = f(a) - f'(a)a$

et on peut conclure que :

(T): $y = f'(a)x + f(a) - f'(a)a$

Finalement ; (T): $y = f'(a)(x-a) + f(a)$

La droite (T) s'appelle la tangente à la courbe $\boldsymbol{Cf}$ en $\boldsymbol{A(a, f(a))}$

Théorème : Si f est dérivable en a alors sa courbe représentative $\boldsymbol{Cf}$ admet une tangente (T) en $A(a, f(a))$ d'équation :

$(\boldsymbol{T})$: $\boldsymbol{y = f'(a)(x - a) + f(a)}$

Exemple :

Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de la fonction $f(x) = \sin x$ en $A(0, f(0))$

Solution : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1 = f'(0)$

Donc f est dérivable en en 0

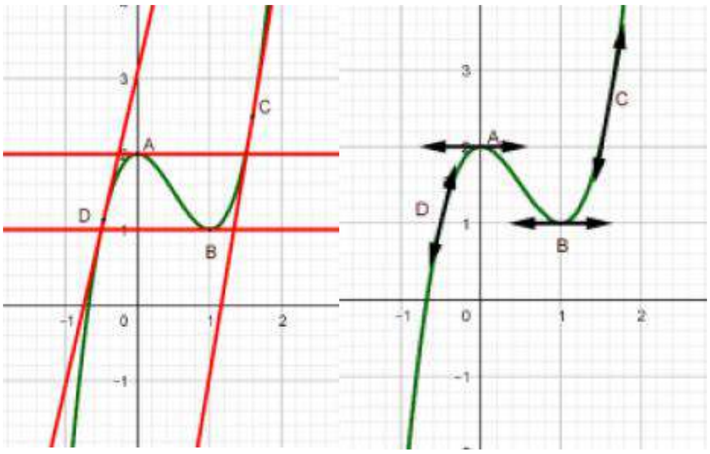
$(\boldsymbol{T})$: $\boldsymbol{y = f'}(0)(\boldsymbol{x} - 0) + \boldsymbol{f}(0)$

L'équation de la tangente à la courbe en $A(0, f(0))$ est : $(\boldsymbol{T})$: $\boldsymbol{y = x}$

Remarque :1) La tangente (T) à la courbe Cf en $A(a, f(a))$ ce n'est que la droite qui représente la fonction affine tangente à la fonction f en a et qui est $u(x) = f'(a)(x - a) + f(a)$ et :

$\overline{PM} = f(x) - (f'(a)(x - a) + f(a)) = \varphi(x)(x - a)$

2) En pratique au lieu de représenter la droite (T) on Représente seulement une partie de (T) avec deux flèches de direction et ceci afin de ne pas trop charger le graphe.



a) Cas particulier si f est dérivable en a et $f'(a) = 0$ alors l'équation de la tangente est : (T): $y = f(a)$ c'est une droite parallèle à l'axe (Ox)

b) Le vecteur directeur de la tangente en $A(a, f(a))$ est $\vec{u}(1; f'(a))$

Donc pour tracer une tangente on peut Seulement à partir de A tracer le vecteur $\vec{u}$

3.2 Demi-tangente.

Par la même façon que le paragraphe précédent on peut montrer le théorème suivant :

Théorème :1) Si f est une fonction dérivable à droite de a, alors son graphe admet une demi-tangente à droite de a :

$(T_d): y = f'_d(a)(x - a) + f(a)$: $\boldsymbol{x \geq a}$

2) Si f est une fonction dérivable à gauche de a, alors son graphe admet une demi-tangente à gauche de a :

$(T_g): y = f'_g(a)(x - a) + f(a)$: $\boldsymbol{x \leq a}$

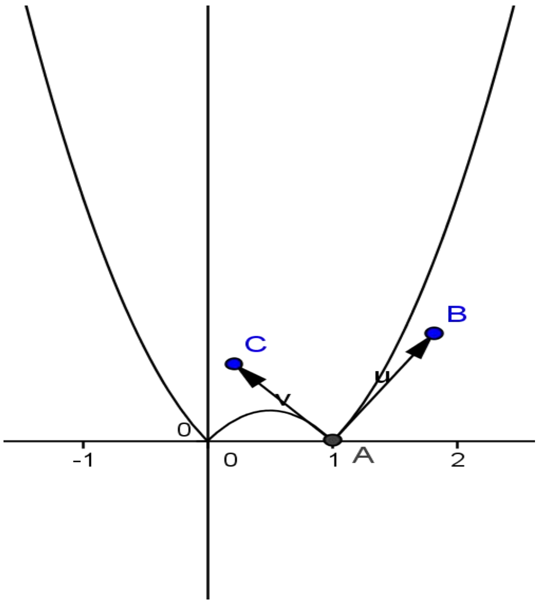
Exemple : $f(x) = \left|-2x^2 + x + 1\right|$

On a : f est dérivable à droite de 1 et $f'_d(1) = 3$ (à prouver) et est dérivable à gauche de 1 et $f'_g(1) = -3$ donc la courbe représentative de f admet deux demi-tangentes en $A(1, f(1))$.

$(T_d): y = 3(x - 1)$ $\boldsymbol{x \geq 1}$

$(T_g): y = -3(x - 1)$ $\boldsymbol{x \leq 1}$

Qu'on peut représenter par :



Remarque :

Dans cet exemple, au voisinage de a, on ne peut pas confondre la courbe avec un segment (f n'est pas dérivable en a) on dit que **l**a courbe représente un **point anguleux** en A $(1, f(1))$

Exercice 4: soit f une fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = (1+x)\sqrt{1-x^2} \ldots 0 \leq x \leq 1 \\ f(x) = \sqrt{x^3 - x} \ldots x \succ 1 \end{cases}$$

1)déterminer le domaine de définition de f

2)étudier la dérivabilité de f à droite en $x_0 = 0$ et donner une interprétation géométrique du résultat
3)étudier la dérivabilité de f à droite et à gauche en $x_0 = 1$ et donner une interprétation géométrique

Solution :1) $x \in D_f \Leftrightarrow 1 - x^2 \geq 0$ et $0 \leq x \leq 1$

ou $x^3 - x \geq 0$ et $x \succ 1$

$x \in D_f \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$ ou $x \succ 1$

$x \in D_f \Leftrightarrow x \in [0;+\infty[$ donc : $D_f = [0;+\infty[$

2) étude de la dérivabilité de f à droite de $x_0 = 0$

On a : $f(0) = 1$

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{(1+x)\sqrt{1-x^2} - 1}{x} = \frac{x\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-x^2} - 1}{x}$$

$$= \sqrt{1-x^2} - \frac{x^2}{x\left(\sqrt{1-x^2} + 1\right)} = \sqrt{1-x^2} - \frac{x}{\sqrt{1-x^2} + 1}$$

Donc : $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1 = f'_d(0)$

Donc f est dérivable à droite en 0

Interprétation géométrique du résultat :
La courbe de f admet un demi tangent en A(0, 1).de coefficient directeur $1 = f'_d(0)$

3)a)étudie de la dérivabilité de f à gauche en $x_0 = 1$ On a : $f(1) = 0$ soit $0 \leq x \leq 1$

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{(1+x)\sqrt{1-x^2}}{x - 1} = \frac{(1+x)(1-x^2)}{(x-1)\sqrt{1-x^2}} = \frac{-(1+x)^2}{\sqrt{1-x^2}}$$

Et puisque : $\lim\limits_{x \to 1^-} \sqrt{1-x^2} = 0^+$ et $\lim\limits_{x \to 1^-} -(1+x)^2 = -4$

Alors : $\lim\limits_{x \to 1^-} \frac{-(1+x)^2}{\sqrt{1-x^2}} = -\infty$ donc : $\lim\limits_{x \to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = -\infty$

Donc f n'est pas dérivable à gauche en $x_0 = 1$

b)soit $x \succ 1$

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{\sqrt{x^3 - x} - 0}{x - 1} = \frac{x(x+1)(x-1)}{(x-1)\sqrt{x^3 - x}} = \frac{x^2 + x}{\sqrt{x^3 - x}}$$

Et puisque : $\lim\limits_{x \to 1^+} \sqrt{x^3 - x} = 0^+$ et $\lim\limits_{x \to 1^+} x^2 + x = 2$

Alors : $\lim\limits_{x \to 1^+} \frac{x^2 + x}{\sqrt{x^3 - x}} = +\infty$ donc : $\lim\limits_{x \to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = +\infty$

Donc f n'est pas dérivable à droite en $x_0 = 1$

Interprétation géométrique du résultat :
La courbe de f admet un demi tangent en A(1,0) parallèle à l'axe des ordonnées dirigé vers le le haut

Exercice5 : soit f une fonction définie par :

$f(x) = |x^2 - 1|$

1)étudier la dérivabilité de f à droite en $x_0 = 1$ et donner une interprétation géométrique du résultat
2)étudier la dérivabilité de f à gauche en $x_0 = 1$ et donner une interprétation géométrique du résultat
3)étudier la dérivabilité de f en $x_0 = 1$ et donner une interprétation géométrique du résultat
4)donner l'équation de la demie tangente à droite a la courbe de f en en $x_0 = 1$
4)donner l'équation de la demie tangente à gauche a la courbe de f en en $x_0 = 1$

Solution :1) $f(x) = |x^2 - 1|$

étude du signe de : $x^2 - 1$

$x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1) = 0 \Leftrightarrow x = -1 ou x = 1$

Donc : $\begin{cases} f(x) = x^2 - 1; x \in]-\infty;-1] \cup [1;+\infty[\\ f(x) = -(x^2 - 1); x \in [-1;1] \end{cases}$ et

$f(1) = |1^2 - 1| = 0$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
x^2-1		$+$	0	$-$	0	$+$	

1)étude de la dérivabilité de f à droite en $x_0 = 1$

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{x^2 - 1 - 0}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{(x-1)(x+1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} x + 1 = 2$$

Donc f est dérivable à droite en $x_0 = 1$ et $f'_d(1) = 2$

Interprétation géométrique du résultat :
La courbe de f admet un demi tangent à droite en A(1, 0).de coefficient directeur $f'_d(1) = 2$

2)

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{-(x^2 - 1) - 0}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{-(x-1)(x+1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} -(x+1) = -2$$

Donc f est dérivable à gauche en $x_0 = 1$ et $f'_g(1) = -2$

Interprétation géométrique du résultat :
La courbe de f admet un demi tangent à gauche en A(1, 0).de coefficient directeur $f'_g(1) = -2$

3)f n'est pas dérivable en $x_0 = 1$ car : $f'_d(1) \neq f'_g(1)$

Interprétation géométrique du résultat :
La courbe admet un point anguleux en $A(1, 0)$.
4) l'équation de la demie tangente à droite a la courbe de f en en $x_0 = 1$ est :
$$y = f(x_0) + f'_d(x_0)(x - x_0)$$
5) l'équation de la demie tangente à gauche a la courbe de f en en $x_0 = 1$ est :
$$y = f(x_0) + f'_g(x_0)(x - x_0)$$
$$y = f(1) + f'_g(1)(x-1) \Leftrightarrow y = 0 - 2(x-1) \Leftrightarrow (\Delta_g) : y = -2x + 2$$

III) FONCTION DERIVEE D'UNE FONCTION.

1) Introduction

Exemple : Soit f la fonction définie par :
$f(x) = 2x^2 + x$.
Soit x un réel quelconque, déterminons le nombre dérivé de f en x (il est préférable d'utiliser la deuxième définition de la dérivation en un point)
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2(x+h)^2 + x + h - 2x^2 - x}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{2x^2 + 4xh + 2h^2 + x + h - 2x^2 - x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h(4x + 2h + 1)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} 4x + 2h + 1 = 4x + 1 = f'(x)$$
On peut remarquer donc que f est dérivable en tout point x de $\mathbb{R}$, la fonction qui associe à x son nombre dérivé $f'(x)$
S'appelle la fonction dérivée de la fonction $\boldsymbol{f}$ sur $\mathbb{R}$ et se note par f'.
Activités :1- Déterminer la fonction dérivée de la fonction sin sur $\mathbb{R}$.
2- Déterminer la fonction dérivée de la fonction
$x \mapsto 1/x$ sur $\mathbb{R}^*_+$ et sur $\mathbb{R}^*_-$

2) Dérivabilité sur un intervalle.

Définition : Soit f une fonction dont l'ensemble de définition est Df , a et b deux éléments de Df tels que :$a < b$
1) On dit que f est dérivable sur l'ouvert] a, b[si elle est dérivable en tout point de]a, b[
2) On dit que f est dérivable sur le semi-ouvert [a, b[si elle est dérivable sur]a, b[et dérivable à droite de a
3) On dit que f est dérivable sur le fermé [a, b] si elle est dérivable sur]a, b[et dérivable à droite de a et à gauche de b
Remarque : Une fonction qui est dérivable sur [a, b] et dérivable [b, c] n'est pas nécessairement dérivable sur [a, c] sauf si $f'_d(b) = f'_g(b)$

3) Fonction dérivée d'une fonction.

Définition : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert $\boldsymbol{I}$. La fonction qui associe à tout élément x son nombre dérivé $f'(x)$ s'appelle la fonction dérivée de la fonction $\boldsymbol{f}$ sur $\boldsymbol{I}$.

Fonctions dérivées de quelques fonctions usuelles.

Exercices : Déterminer les fonctions dérivées des fonctions :
1. $x \mapsto C$ sur $\mathbb{R}$ 2. $x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}$.
3. $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}^*_+$
4. $x \mapsto 1/x$ sur $\mathbb{R}^*_+$ et sur $\mathbb{R}^*_-$. 5. $x \mapsto sinx$ sur $\mathbb{R}$.
6. $x \mapsto cosx$ sur $\mathbb{R}$.

Tableau des dérivées des fonctions usuelles

f'	**Fonction f**
$f'(x) = 0$	$f(x) = k$
$f'(x) = 1$	$f(x) = x$
$f'(x) = a$	$f(x) = ax$
$f'(x) = a$	$f(x) = ax + b$
$f'(x) = nx^{n-1}$ $n \in \mathbb{Z}^*$	$f(x) = x^n$
$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$f(x) = \frac{1}{x}$
$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$f(x) = \sqrt{x}$
$f'(x) = -\sin x$	$f(x) = \cos x$
$f'(x) = \cos x$	$f(x) = \sin x$
$f'(x) = -a\sin(ax + b)$	$f(x) = \cos(ax + b)$
$f'(x) = a\cos(ax + b)$	$f(x) = \sin(ax + b)$
$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$f(x) = \tan x$

Exemples : Déterminer les fonctions dérivées des fonctions suivantes :1) $f(x)=11$

2) $f(x)=7x+15$ 3) $f(x)=x^3$ 4) $f(x)=\sin(5x-1)$

Solution :1) $f'(x)=(11)'=0$ 2) $f'(x)=(7x+15)'=7$

3) $f'(x)=\left(x^3\right)'=3x^{3-1}=3x^2$

4) $f'(x)=(\sin(5x-1))'=(5x-1)'\cos(5x-1)=5\cos(5x-1)$

IV) OPERATIONS SUR LES FONCTIONS DERIVEES.

Rappelle :A partir de deux fonctions f et g on peut définir :

1) la somme :

$(\forall x \in D_f \cap D_g)$ $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$

2) Le produit :

$(\forall x \in D_f \cap D_g)$ $(f` \times g)(x)=f(x)\times g(x)$

3) L'inverse : $(\forall x \in D_f)$ $si\ x \neq 0\ alors$

$\left(\frac{1}{f}\right)(x)=\frac{1}{f(x)}$

4) Le quotient : $(\forall x \in D_f \cap D_g)$ $si\ x \neq 0\ alors$

$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$

5) La racine : $(\forall x \in D_f)$ $si\ x \geq 0\ alors$

$\left(\sqrt{f}\right)(x)=\sqrt{f(x)}$

1) La somme

Soit f et g deux fonctions dérivables en a, étudions la dérivabilité de la fonction $(f+g)$ en a.

On a :

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)+g(x)-f(a)-g(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)+g(x)-g(a)}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}+\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\right)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}+\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}$$

$$=f'(a)+g'(a)=(f'+g')(a)$$

En général : Si f et g sont dérivables sur un intervalle ouvert I alors la fonction $(f+g)$ est dérivable sur I et $\boldsymbol{(f+g)'=f'+g'}$

Exemple : Déterminer la fonction dérivée de la fonction suivante : $f(x)=x^2+7x+15-\frac{1}{x}+\sqrt{x}$

Solution :

$$f'(x)=\left(x^2+7x+15-\frac{1}{x}+\sqrt{x}\right)'=\left(x^2\right)'+(7x+15)'-\left(\frac{1}{x}\right)'+\left(\sqrt{x}\right)'$$

$$f'(x)=\left(x^2+7x+15-\frac{1}{x}+\sqrt{x}\right)'=2x+7+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

2) Le produit :

Soit f et g deux fonctions dérivables en a, étudions la dérivabilité de la fonction $(f\times g)$ en a.

On a : $\lim_{x\to a}\frac{f(x)\times g(x)-f(a)\times g(a)}{x-a}$

$$=\lim_{x\to a}\frac{f(x)\times g(x)-f(x)\times g(a)+f(x)\times g(a)-f(a)\times g(a)}{x-a}$$

(on a ajouté et retranché le même nombre)

$$=\lim_{x\to a}\frac{f(x)\left(g(x)-g(a)\right)+g(a)\left(f(x)-f(a)\right)}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a}f(x)\frac{\left(g(x)-g(a)\right)}{x-a}+\lim_{x\to a}g(a)\frac{\left(f(x)-f(a)\right)}{x-a}$$

$= g'(a)\times f(a)+f'(a)\times g(a)=(f'g+g'f)(a)$

($\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$ car f est continue)

En général : Si f et g sont dérivables sur un intervalle ouvert I alors la fonction $(f\times g)$ est dérivable sur I et :

$\boldsymbol{(f\times g)'=f'g+g'f}$

En particulier : Si f est dérivable sur un intervalle ouvert I et $k\in\mathbb{R}$ alors la fonction kf est dérivable sur I et :(k$\boldsymbol{f}$)′ =k $\boldsymbol{f'}$

Exemples : Déterminer la fonctions dérivée de la fonction suivante : $f(x)=\left(5x^2+1\right)(3x-1)$

On utilise la formule : $(u\times v)'=u'\times v+u\times v'$

$$f'(x)=\left(\left(5x^2+1\right)(3x-1)\right)'=\left(5x^2+1\right)'\times(3x-1)+\left(5x^2+1\right)\times(3x-1)'$$

$$f'(x)=10x\times(3x-1)+3\left(5x^2+1\right)=30x^2-10x+15x^2+3$$

$$f'(x)=45x^2-10x+3$$

3) Puissance

On utilisant la propriété précédente et par récurrence prouver que :

$$\left(f^n\right)'=nf'f^{n-1}$$

Exemple :Déterminer la fonction dérivée de la fonction : $f(x)=(3x+4)^3$

On utilise la formule : $\left(u^n\right)'=nu^{n-1}\times u'$

$$f'(x)=\left((3x+4)^3\right)'=3\times(3x+4)^{3-1}\times(3x+4)'=3\times3\times(3x+4)^{3-1}=9(3x+4)^2$$

4) L'inverse : Soit f une fonction dérivable en a et $f(a) \neq 0$ étudions la dérivabilité de la fonction $\frac{1}{f}$ en a. On a : $\lim\limits_{x\to a}\frac{\frac{1}{f(x)}-\frac{1}{f(a)}}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\frac{\frac{-(f(x)-f(a))}{f(x)f(a)}}{x-a}$

$$=\lim_{x\to a}\frac{-(f(x)-f(a))}{x-a}\times\frac{1}{f(x)f(a)}=-\frac{f'(a)}{f(a)^2}=\left(-\frac{f'}{f^2}\right)(a)$$

En général si f est dérivable sur un intervalle ouvert I et f ne s'annule pas sur I alors :

$$\left(\frac{1}{f}\right)'=-\frac{f'}{f^2}$$

Exemple : Déterminer la fonction dérivée de la fonction : $f(x)=\frac{1}{\sin x}$

On utilise la formule : $\left(\frac{1}{u}\right)'=-\frac{u'}{u^2}$

$$f'(x)=\left(\frac{1}{\sin x}\right)'=-\frac{(\sin x)'}{(\sin x)^2}=-\frac{\cos x'}{(\sin x)^2}$$

5) Quotient : En remarquant que : $\frac{f}{g}=f\times\frac{1}{g}$ et en utilisant les propriétés du produit et de l'inverse on peut montrer que :

Si f et g sont dérivables sur un intervalle ouvert I et g ne s'annule pas sur I alors : $\left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'\times g-f\times g'}{g^2}$

Exemple : Déterminer la fonction dérivée de la fonction : $f(x)=\frac{3x-1}{x+2}$

On utilise la formule : $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$

$$f'(x)=\left(\frac{3x-1}{x+2}\right)'=\frac{(3x-1)'(x+2)-(3x-1)(x+2)'}{(x+2)^2}=\frac{3(x+2)-1\times(3x-1)}{(x+2)^2}=\frac{7}{(x+2)^2}$$

Application :

Montrer que la fonction tan est dérivable sur les intervalles de la forme

$I_k=]-\pi/2+k\pi,\pi/2+k\pi[$ $(k\in\mathbb{Z})$ et que

$(\forall x\in I_k)(tan'x=1+tan^2x)$.

6) La racine :

Soit f une fonction dérivable en a et $f(a)>0$ étudions la dérivabilité de la fonction $\sqrt{f}$ en a.

On a :

$$\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{f(x)}-\sqrt{f(a)}}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\left(\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(a)}\right)\left(\sqrt{f(x)}-\sqrt{f(a)}\right)}{\left(\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(a)}\right)(x-a)}$$

(On a multiplié par le conjuguais)

$$=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{\left(\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(a)}\right)(x-a)}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{(x-a)}\frac{1}{\left(\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(a)}\right)}$$

$$=\frac{f'(a)}{2\sqrt{f(a)}}=\left(\frac{f'}{2\sqrt{f}}\right)(a)$$

En générale ; si f est dérivable sur un intervalle ouvert I et **strictement positif sur I** alors $\sqrt{f}$ est dérivable sur I et $\left(\sqrt{f}\right)'=\frac{f'}{2\sqrt{f}}$

Exemple : Déterminer la fonction dérivée de la fonction : $f(x)=\sqrt{x^2+8x}$

On utilise la formule : $\left(\sqrt{u}\right)'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$

$$f'(x)=\left(\sqrt{x^2+8x}\right)'=\frac{\left(x^2+8x\right)'}{2\sqrt{x^2+8x}}=\frac{2x+8}{2\sqrt{x^2+8x}}=\frac{x+4}{\sqrt{x^2+8x}}$$

Exercice6 : Soit $f(x)=\sqrt{x^2-x}$

Etudier le domaine de dérivation de f et déterminer sa fonction dérivée.

Solution : $D_f=]-\infty;0]\cup[1;+\infty[$

On a : $f(x)=\sqrt{u(x)}$ avec $u(x)=x^2-x$

Et on a : $u(x)\succ 0\quad \forall x\in D_f-\{0;1\}$

Donc f est dérivables sur $D_f-\{0;1\}$

$$\forall x\in D_f-\{0;1\}\ :\ f'(x)=\left(\sqrt{x^2-x}\right)'=\frac{\left(x^2-x\right)'}{2\sqrt{x^2-x}}=\frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x}}$$

Remarque :

Pour calculer la dérivée de $|f|$, on procède comme suit :

-Exprimer $|f|$ sans le symbole de la valeur absolue sur des intervalles de Df

-Calculer la dérivée des fonctions obtenues sur ces intervalles.

Déterminer la dérivée de la fonction

$$f(x)=\left|3x^2+x-4\right|$$

Propriété :
1) Toute fonction polynôme est dérivable sur $\mathbb{R}$.
2) Toute fonction rationnelle est dérivable sur tout intervalle inclus dans son domaine de définition

Tableau des opérations sur les fonctions dérivées

f'	Fonction f
$f'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x$	$f(x)=\tan x$
$f'(x)=u'+v'$	$f(x)=u+v$
$f'(x)=u'-v'$	$f(x)=u-v$
$f'(x)=ku'$	$f(x)=ku$
$f'(x)=u'\times v+u\times v'$	$f(x)=u\times v$
$f'(x)=nu^{n}\times u'$	$f(x)=u^n$
$f'(x)=-\frac{u'}{u^2}$	$f(x)=\frac{1}{u}$
$f'(x)=\frac{u'\times v-u\times v'}{v^2}$	$f(x)=\frac{u}{v}$
$f'(x)=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$f(x)=\sqrt{u}$

Exercice7 : Calculer les fonctions dérivées des fonctions suivantes :

1) $f(x)=4x^4-\frac{1}{3}x^3-x+1$ 2) $f(x)=\frac{3}{x}$

3) $f(x)=4\sqrt{x}-1$ 4) $f(x)=\cos 2x+3\sin 3x$

5) $f(x)=(3x^2+2)(7x+1)$ 6) $f(x)=\frac{1}{5x+7}$

7) $f(x)=\frac{7x}{x^3+1}$

Solutions :

1) $f'(x)=\left(4x^4-\frac{1}{3}x^3-x+1\right)'=4\times 4x^{4-1}-\frac{1}{3}\times 3x^2-1+0=16x^3-x^2-1$

2) $f'(x)=\left(\frac{3}{x}\right)'=\left(3\times\frac{1}{x}\right)'=3\times\left(-\frac{1}{x^2}\right)=\frac{-3}{x^2}$

3) $f'(x)=\left(4\sqrt{x}-1\right)'=4\times\frac{1}{2\sqrt{x}}-0=\frac{2}{\sqrt{x}}=\frac{2\sqrt{x}}{x}$

4) $f'(x)=(\cos 2x+3\sin 3x)'=-2\sin 2x+3\times 3\cos 3x=-2\sin 2x+9\cos 3x$

5) $f(x)=(3x^2+2)(7x+1)$

On utilise la formule : $(u\times v)'=u'\times v+u\times v'$

$f'(x)=\left((3x^2+2)\times(7x+1)\right)'=(3x^2+2)'\times(7x+1)+(3x^2+2)\times(7x+1)'$

$f'(x)=6x\times(7x+1)+7(3x^2+2)=42x^2+6x+21x^2+14=63x^2+6x+14$

7) $f(x)=\frac{7x}{x^3+1}$

On utilise la formule : $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$

$f'(x)=\left(\frac{7x}{x^3+1}\right)'=\frac{(7x)'(x^3+1)-7x(x^3+1)'}{(x^3+1)^2}=\frac{7(x^3+1)-7x\times 3x^2}{(x^3+1)^2}$

$f'(x)=\frac{7x^3+7-21x^3}{(x^3+1)^2}=\frac{7-14x^3}{(x^3+1)^2}$

Exercice8 : Calculer les fonctions dérivées des fonctions suivantes ;

1. $f(x)=-2x^4+x^3+5x^2+x+1$
2. $f(x)=(3x^2+1)(2x+3)$
3. $f(x)=\frac{3x^2+x}{5x^2+1}$
4. $f(x)=\frac{3x^2+x}{5x^2+1}$
5. $f(x)=\frac{\sqrt{2x^2+1}}{x^2+1}$
6. $f(x)=\frac{\sin 2x}{\cos 3x+1}$

Exercice9 : déterminer $f'(x)$ dans les cas suivants :

1) $f(x)=9x+2$ 2) $f(x)=5x^2-3x+2$

3) $f(x)=x+\frac{2}{x}$ 4) $f(x)=\frac{5x+2}{3x-1}$

5) $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$ 6) $f(x)=\frac{1}{(2x+1)^5}$

7) $f(x)=(5x^3-3)^4$ 8) $f(x)=\sqrt{2x^2-6x+4}$

9) $f(x)=\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$ 10) $f(x)=x+\dfrac{x^2}{x-1}$

11) $f(x)=\sqrt{\dfrac{2x+1}{x-3}}$ 12) $f(x)=x\cos x$

13) $f(x)=\tan^2 x$ 14) $f(x)=\cos x\times\sin x$

15) $f(x)=\dfrac{\cos x+\sin x}{\cos x-\sin x}$ 16) $f(x)=\dfrac{\left(1+2x+x^2\right)^5}{4}$

17) $f(x)=1+x+\dfrac{x-1}{\sqrt{2+x^2}}$ 18) $f(x)=\dfrac{\sin 2x}{1-\cos 2x}$

Exercice 10: Etudier le domaine de dérivation de f et déterminer sa fonction dérivée dans les cas suivants :

1) $f(x)=x^2+3x-1$ 2) $f(x)=4\sin x$

3) $f(x)=x^4\cos x$ 4) $f(x)=\sqrt{x}+x^3$

5) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ 6) $f(x)=\dfrac{6}{4x^2+3x-1}$

7) $f(x)=\dfrac{4x-3}{2x-1}$ 8) $f(x)=\sqrt{x^2-4}$

9) $f(x)=(2x+3)^5$

Solution : 1) $f(x)=x^2+3x-1$ $D_f=\mathbb{R}$

f est une fonction polynôme donc dérivable sur $\mathbb{R}$

$\forall x\in\mathbb{R}$ $f'(x)=\left(x^2\right)'+(3x-1)'=2x+3$

2) $f(x)=4\sin x$ $D_f=\mathbb{R}$

$f(x)=4u(x)$ avec $u(x)=\sin x$

Puisque u est dérivable sur $\mathbb{R}$ alors f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$

$\forall x\in\mathbb{R}$ $f'(x)=4\left(u(x)\right)'=4\cos x$

3) $f(x)=x^4\cos x$ $D_f=\mathbb{R}$

$f(x)=u(x)\times v(x)$ avec $u(x)=x^4$ et $v(x)=\cos x$

Puisque u et v sont dérivables sur $\mathbb{R}$ alors f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$

On utilise la formule : $(u\times v)'=u'\times v+u\times v'$

$f'(x)=\left(\left(x^4\right)\times(\cos x)\right)'=\left(x^4\right)'\times(\cos x)+\left(x^4\right)\times(\cos x)'$

$f'(x)=4x^3\times(\cos x)-x^4\times\sin x=4x^3\cos x-x^4\times\sin x$

4) $f(x)=\sqrt{x}+x^3$ $D_f=\mathbb{R}^+=[0;+\infty[$

$f(x)=u(x)+v(x)$ avec $u(x)=\sqrt{x}$ et $v(x)=x^3$

Puisque u est dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ et v est dérivables en particulier sur $\mathbb{R}_+^*$ alors f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$

$\forall x\in\mathbb{R}_+^*$: $f'(x)=\left(u(x)\right)'+\left(v(x)\right)'=\dfrac{2}{2\sqrt{x}}+3x^2$

5) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ $D_f=\mathbb{R}^{*+}=]0;+\infty[$

On a : $f(x)=\dfrac{1}{u(x)}$ avec $u(x)=\sqrt{x}$

Puisque u est dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$

Donc f est dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$

On utilise la formule : $\left(\dfrac{1}{u}\right)'=-\dfrac{u'}{u^2}$

$\forall x\in\mathbb{R}_+^*$: $f'(x)==\dfrac{1}{2x\sqrt{x}}$

6) $f(x)=\dfrac{6}{4x^2+3x-1}$ $D_f=\mathbb{R}-\left\{-1;\dfrac{1}{4}\right\}$

Puisque f est une fonction rationnelle alors il dérivable sur $D_f=\mathbb{R}-\left\{-1;\dfrac{1}{4}\right\}$

est on a : $f(x)=\dfrac{6}{u(x)}$ avec $u(x)=4x^2+3x-1$

$$f'(x)=6\left(\frac{1}{u(x)}\right)'=6\left(-\frac{u'}{u^2}\right)=-6\frac{\left(4x^2+3x-1\right)'}{\left(4x^2+3x-1\right)^2}-6\frac{8x+3}{\left(4x^2+3x-1\right)^2}$$

7) $f(x)=\dfrac{4x-3}{2x-1}$ $D_f=\mathbb{R}-\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$

Puisque f est une fonction rationnelle alors il dérivable sur $D_f=\mathbb{R}-\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$

$f(x)=u(x)/v(x)$ avec $u(x)=4x-3$ et $v(x)=2x-1$

On utilise la formule : $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$

$$f'(x)=\left(\frac{4x-3}{2x-1}\right)'=\frac{(4x-3)'(2x-1)-(4x-3)(2x-1)'}{(2x-1)^2}=\frac{4(2x-1)-2\times(4x-3)}{(2x-1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{4(2x-1)-2\times(4x-3)}{(2x-1)^2}=\frac{8x-4-8x+6}{(2x-1)^2}=\frac{2}{(2x-1)^2}$$

8) $f(x)=\sqrt{x^2-4}$: $D_f=]-\infty;-2]\cup[2;+\infty[$

On a : $f(x)=\sqrt{u(x)}$ avec $u(x)=x^2-4$

Et on a : $u(x) \succ 0 \quad \forall x \in D_f - \{-2;2\}$

Donc f est dérivables sur $D_f - \{-2;2\}$

$\forall x \in D_f - \{-2;2\}$:

$$f'(x) = \left(\sqrt{x^2-4}\right)' = \frac{\left(x^2-4\right)'}{2\sqrt{x^2-4}} = \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}$$

9) $f(x) = (2x+3)^5 \qquad D_f = \mathbb{R}$

$f(x) = (u(x))^5$ avec $u(x) = 2x+3$

On utilise la formule : $\left(u^n\right)' = nu^{n-1} \times u'$

$$f'(x) = \left((2x+3)^5\right)' = 5\times(2x+3)^{5-1}\times(2x+3)' = 5\times 2\times(2x+3)^4 = 10(2x+3)^4$$

Exercice11 : soit f une fonction définie sur

$I =]-\pi;\pi[$ par : $\begin{cases} f(x) = 2\dfrac{\cos x - 1}{\sin x}; si...0 \prec x \prec \pi \\ f(x) = \dfrac{x|x+1|}{x-1}; si... -\pi \prec x \le 0 \end{cases}$

1)monter que f est dérivable en $x_0 = 0$
et donner l'équation de la tangente a la courbe de f en $x_0 = 0$

2)a)étudier la dérivabilité de f en $x_0 = -1$

b)donner les équations des demies tangentes à a la courbe de f en en $x_0 = -1$

Solution : 1)étude de la dérivabilité de f à droite en $x_0 = 0$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} 2\frac{\cos x - 1}{x\sin x} = \lim_{x\to 0^+} -2\frac{1-\cos x}{x^2} \times \frac{1}{\frac{\sin x}{x}}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = -2\times\frac{1}{2}\times 1 = -1 = f'_d(0)$$

Donc f est dérivable à droite en $x_0 = 0$ et $f'_d(0) = -1$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{|x+1|}{x-1} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x+1}{x-1} = -1 = f'_g(0)$$

Donc f est dérivable à gauche en $x_0 = 0$ et

$f'_g(0) = -1$

Et puisque : $f'_d(0) = f'_g(0)$

Donc f est dérivable à en $x_0 = 0$ et $f'(0) = -1$

Interprétation géométrique du résultat :

La courbe de f admet une tangent en O(0, 0).de coefficient directeur $f'(0) = -1$

l'équation de la tangente a la courbe de f en $x_0 = 0$ est : $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

$y = f(0) + f'(0)(x-0)$

$y = 0 - 1(x-0) \Leftrightarrow (T): y = -x$

2) $\displaystyle\lim_{x\to -1^+} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \lim_{x\to -1^+} \frac{x}{x-1} = \frac{1}{2} = f'_d(-1)$

Donc f est dérivable à droite en $x_0 = -1$ et $f'_d(-1) = \frac{1}{2}$

$$\lim_{x\to -1^-} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \lim_{x\to -1^+} \frac{-x}{x-1} = -\frac{1}{2} = f'_g(-1)$$

Donc f est dérivable à gauche en $x_0 = -1$ et

$f'_g(-1) = -\frac{1}{2}$ mais on a : $f'_d(-1) \ne f'_g(-1)$

Donc f n'est pas dérivable en $x_0 = -1$

Interprétation géométrique du résultat :

La courbe admet un point anguleux en A(-1, 0).

b) l'équation de la demie tangente à droite a la courbe de f en en $x_0 = -1$ est :

$y = f(-1) + f'_d(-1)(x+1)$ avec $x \ge -1$

$y = 0 + \frac{1}{2}(x+1) \Leftrightarrow (T_d): y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ avec $x \ge -1$

l'équation de la demie tangente à gauche a la courbe de f en en $x_0 = -1$ est :

$y = f(-1) + f'_g(-1)(x+1)$ avec $x \le -1$

$y = 0 - \frac{1}{2}(x+1) \Leftrightarrow (T_g): y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ avec $x \le -1$

Exercice12 : soit f une fonction définie par :

$$f(x) = \sqrt{3x-2}\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)^3$$

1)déterminer le domaine de définition D_f de f

2) déterminer le domaine de dérivation de f et déterminer sa fonction dérivée

Solution : 1) $x \in D_f \Leftrightarrow 3x - 2 \ge 0$ et $x - 1 \ne 0$

Donc : $D_f = \left[\frac{2}{3};1\right[\cup]1;+\infty[$

2) on a $f(x) = g(3x-2) \times h(x)$

Avec : $h(x) = \left(\dfrac{2x+1}{x-1}\right)^3$ et $g(x) = \sqrt{x}$

On sait que : g est dérivable sur $\mathbb{R}_*^+$ et la fonction polynôme D_f $x \to 3x-2$ est dérivable sur D_f

$3x-2 \succ 0 \Leftrightarrow x \succ \frac{3}{2}$ donc la fonction $x \to g(3x-2)$

est dérivable sur $D_f - \left\{\frac{2}{3}\right\}$

donc : f est dérivable sur $D_f - \left\{\frac{2}{3}\right\}$ cad $D_{f'} = D_f - \left\{\frac{2}{3}\right\}$

$\forall x \in D_{f'}$:

$$f'(x) = \left(g(3x-2)\right)' \times h(x) + g(3x-2) \times \left(h(x)\right)'$$

$$\left(g(3x-2)\right)' = (3x-2)' \times g'(3x-2) = 3 \times \frac{1}{2\sqrt{3x-2}}$$

Car : $g'(x) = \left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$$\left(h(x)\right)' = 3\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)' \times \left(\frac{2x+1}{x-1}\right)^2$$

$$\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)' = \frac{(2x+1)'(x-1)-(2x+1)(x-1)'}{(x-1)^2} = \frac{-3}{(x-1)^2}$$

Donc :

$$f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x-2}} \times \left(\frac{2x+1}{x-1}\right)^3 + \sqrt{3x-2}\,\frac{-9}{(x-1)^2}\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)^2$$

Exercice13 :en utilisant la dérivée calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x \to -1} \frac{(x+2)^{2018}-1}{x+1}$ 2) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{6}} \frac{2\sin x - 1}{x - \frac{\pi}{6}}$

Solution:1) on pose : $f(x) = (x+2)^{2018}$ on a : f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en particulier en -1 et

$f(-1) = (-1+2)^{2018} = 1$

Donc : $\lim\limits_{x \to -1} \frac{(x+2)^{2018}-1}{x+1} = \lim\limits_{x \to -1} \frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} = f'(-1)$

Et puisque : $f'(x) = 2018(x+2)^{2017}(x+2)' = 2018(x+2)^{2017}$

Donc : $f'(-1) = 2018 \times 1^{2017} = 2018$

Donc: $\lim\limits_{x \to -1} \frac{(x+2)^{2018}-1}{x+1} = 2018$

2) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{6}} \frac{2\sin x - 1}{x - \frac{\pi}{6}}$ on pose $f(x) = 2\sin x$

on a : f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en particulier en $\frac{\pi}{6}$ et $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2\sin\frac{\pi}{6} = 1$

Donc : $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{6}} \frac{2\sin x - 1}{x - \frac{\pi}{6}} = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{6}} \frac{f(x) - f\left(\frac{\pi}{6}\right)}{x - \left(\frac{\pi}{6}\right)} = f'\left(\frac{\pi}{6}\right)$

Et puisque : $f'(x) = 2\cos x$

Donc : $f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2\cos\frac{\pi}{6} = 2\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$

Donc : $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{6}} \frac{2\sin x - 1}{x - \frac{\pi}{6}} = \sqrt{3}$

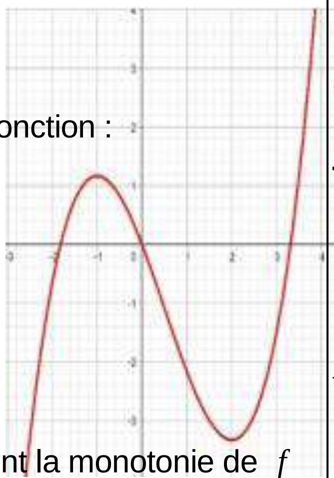
« C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices Que l'on devient un mathématicien

LA DERIVATION -APPLICATIONS

I) Activité

La courbe ci-contre est la courbe de la fonction :

$$f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-2x$$



1)Déterminer graphiquement la monotonie de f suivant desintervalles de $\mathbb{R}$

2)Dresser le tableau de variations de f

3)déterminer f' la fonction dérivée de f

4)Trouver une relation entre le signe de f' et sa monotonie

II) DERIVATION ET MONOT ONIE D'UNE FONCTION

Rappelle :Si g est une fonction positive sur un intervalle I, alors $(\forall a\in I)\lim\limits_{x\to a}g(x)\geq 0$

Propriété : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

1) Si f est croissante sur I alors f'est positive sur I.
2) Si f est décroissante sur I alors f'est négative sur I.
3) Si f est constante sur I alors f' est nulle sur I.

Preuve :
On suppose que f est dérivable sur I et que f est croissante sur I. Posons $g(x)=\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$

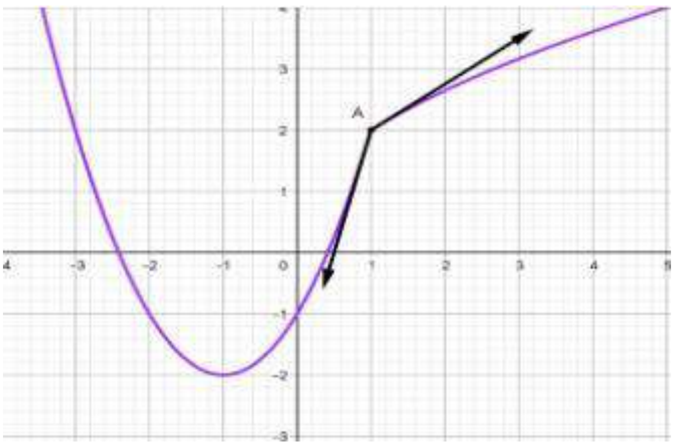
g est positive sur I(c'est le taux d'accroissement entre x et a d'une fonction croissante).
En passant à la limite et d'après le rappelle

$$(\forall a\in I)\lim_{x\to a}g(x)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)\geq 0$$

d'où $(\forall a\in I)\ f'(a)\geq 0$ donc f'' est positive sur I.

Remarque : Si f est dérivable et strictement croissante, on ne peut pas conclure que f' est strictement positive.

Exemple :
$f(x)=x^3$; on a f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ mais sa fonction dérivée qui est $f'(x)=3x^2$ n'est pas trictement positive sur $\mathbb{R}$, elle s'annule en 0.
2. Une fonction croissante sur I ne vérifie pas toujours la condition $f'\geq 0$ sur I
Soit f dont le courbe représentative est ci-contre, on a :
f est croissante sur $[-1,4]$ mais elle n'est même pas dérivable sur $[-1,4]$ car elle n'est pas dérivable en 1.($f_d'(1)\neq f_g'(1)$)



III) DERIVATION ET EXTREMUMS

Propriété :Soit fune fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et $a\in I$

Si f admet un extremum relatif en a alors $f'(a)=0$

Preuve : On suppose que f admet un extremum relatif en a donc :
(on suppose que c'est un maximum reltif)

$$(\exists r\succ 0)(\forall x\in]a-r;a+r[);\ f(x)\leq f(a)$$

D'où : $\left(\forall x\in\left]a-r;a\right[\right);\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}\geq 0$

Donc : $\lim\limits_{x\to a^-}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'_g(a)\geq 0$

D'autre part : $\left(\forall x\in\left]a;a+r\right[\right);\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}\leq 0$

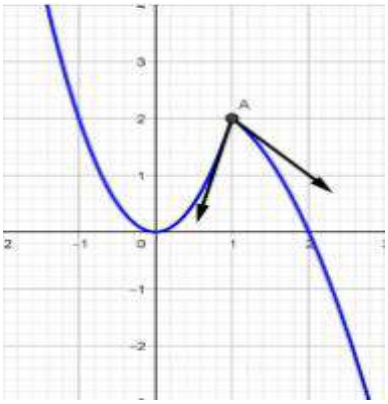
Donc : $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'_d(a)\leq 0$

puisque f est dérivable en a alors

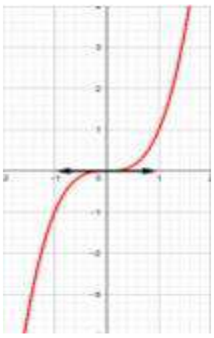
$f'_d(a)=f'_g(a)=f'(a)$ donc : $f'(a)\geq 0$ et

$f'(a)\leq 0$ Finalement: $f'(a)=0$

Remarque :1) Une fonction peut admettre un extremum relatif sans qu'elle vérifie la condition $f'(a)=0$. Sur la figure ci-contre f admet un maximum relatif en 1 et f n'est même dérivable en 1.



2)La réciproque de la propriété précédente est fausse ; $f(x)=x^3$ on a f est dérivable sur $\mathbb{R}$; $f'(x)=3x^2$ et donc $f'(0)=0$ et pourtant f n'admet pas d'extremum relatif en 0.
(Courbe ci-contre)



Propriété : Si f est dérivable en a et admet un extremum en a, alors sa courbe représentative Admet une tangente parallèle à (Ox) en $A(a, f(a))$

Preuve : Puisque f est dérivable en a et admet un extremum en a alors $f'(a)=0$

et donc C_f admet une tangente (T) en $A(a, f(a))$ d'équation :

(T): $y=0(x-a)+f(a)$

(T): $y=f(a)$

(T) est donc parallèle à l'axe de abscisses

Propriété : (Admise)

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

1) Si f' est positive sur I alors f est croissante sur I.

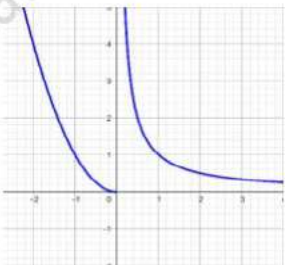
2) Si f' est négative sur I alors f est décroissante sur I.

3) Si f' est nulle sur I alors f est constante sur I.

Remarque :

Le faite que I est un intervalle est nécessaire.
sur la figure ci-contre on a :
$(\forall x\in\mathbb{R}^*)(f'(x)<0)$
Mais on ne peut pas dire f décroissante sur $\mathbb{R}^*$ car $f(-2)=4>f(1)=1$
Cette fonction est définie comme suite :

$$\begin{cases} f(x)=x^2\ldots x\leq 0\\ f(x)=\dfrac{1}{x}\ldots x\succ 0\end{cases}$$



Propriété : Si f est dérivable sur un intervalle I et sa fonction dérivée est strictement positive sauf sur un nombre fini de point où elle peut s'annuler alors f est strictement croissante sur I

Exemple1 :$f(x)=x^3$

Sa fonction dérivée est $f'(x)=3x^2$ est strictement positive sur $\mathbb{R}^*$
et s'annule en 0, on peut dire que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
Remarquer que pour cette fonction $f'(0)=0$ et pourtant f n'admet pas d'extremum relatif en 0.

Exemple2 : $f(x)=\dfrac{4x-3}{2x-6}$ $\quad D_f=\mathbb{R}-\{3\}$

Puisque f est une fonction rationnelle alors il dérivable sur $D_f=\mathbb{R}-\{3\}$

$$f'(x)=\left(\frac{4x-3}{2x-6}\right)'=\frac{(4x-3)'(2x-6)-(4x-3)(2x-6)'}{(2x-6)^2}$$

$$f'(x)=\frac{4(2x-6)-2\times(4x-3)}{(2x-6)^2}=\frac{8x-24-8x+6}{(2x-6)^2}=\frac{-18}{(2x-6)^2}\prec 0$$

Donc : $\forall x\in\mathbb{R}-\{3\}\quad f'(x)=\frac{-18}{(2x-6)^2}\prec 0$

Donc f est strictement décroissante sur les intervalles. $]1;+\infty[$ et $]-\infty;1[$

Exemple3 : Soit $f(x)=x\sqrt{x^2-x}$

Etudier les variations de la fonction f

Solution : $D_f=]-\infty;0]\cup[1;+\infty[$

On a : $f(x)=x\sqrt{u(x)}$ avec $u(x)=x^2-x$

Et on a : $u(x)\succ 0\quad \forall x\in D_f-\{0;1\}$

Donc f est dérivables sur $D_f-\{0;1\}$

$\forall x\in D_f-\{0;1\}$:

$$f'(x)=\left(x\sqrt{x^2-x}\right)'=x'\sqrt{x^2-x}+x\frac{(x^2-x)'}{2\sqrt{x^2-x}}$$

$$f'(x)=\sqrt{x^2-x}+x\frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x}}=\frac{4x^2-3x}{2\sqrt{x^2-x}}$$

Puisque : $2\sqrt{x^2-x}\succ 0\quad \forall x\in D_f-\{0;1\}$

Le signe de $f'(x)$ est le signe de $4x^2-3x$

Le tableau de signe de : $4x^2-3x$ est :

x	$-\infty$		0		$3/4$		$+\infty$
$4x^2-3x$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On a : $f'(x)\succ 0\quad \forall x\in]1;+\infty[$ et $\forall x\in]-\infty;0[$

donc f est strictement croissante sur $]4/3;+\infty[$

et sur $]-\infty;0[$

Propriété : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et $a\in I$.
Si f' s'annule en a en changeant de signe à droite et à gauche de a alors f admet un extremum en a

Exemple : Soit $f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-2x$

Etudier les extremums de la fonction f

Solution : $D_f=\mathbb{R}\quad \forall x\in\mathbb{R}\quad f'(x)=x^2+x-2$

Le signe de $f'(x)$ est le signe de x^2+x-2

$f'(x)=0\Leftrightarrow x^2+x-2=0$

$\Delta=9$ deux solutions : $x_1=1$ et $x_2=-2$

Donc voici le tableau de variation de f :

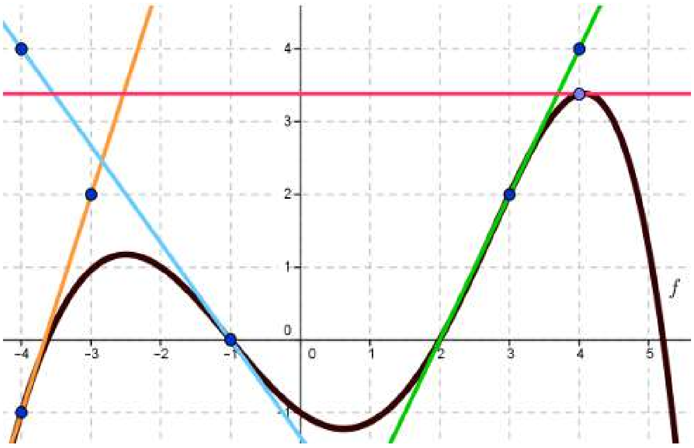
x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$10/3$	$\searrow$	$-7/6$	$\nearrow$	$+\infty$

Du tableau de variation de f en deduit que :

f admet une valeur minimal relatif c'est $-7/6$ en 1

f admet une valeur maximal relatif c'est $10/3$ en -2

Exercice 1: On considère une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ représentée par sa courbe C en noire ci-dessous.



On a également tracé les tangentes à la courbe de f aux points d'abscisses -4, -1, 3 et 4.

1)Déterminer graphiquement $f(-4)$, $f'(-4)$;

$f(-1)$; $f'(-1)$; $f(3)$; $f'(4)$

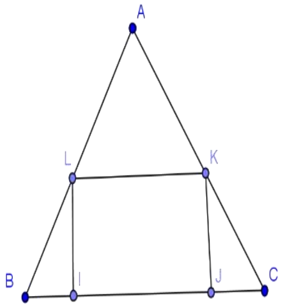
2) Déterminer le signe de $f'(3)$ et $f'(5)$

solution :1) $f(-4)=-1$; $f'(-4)=3$

$f(-1)=0$; $f'(-1)=-\frac{4}{3}$; $f(3)=2$; $f'(4)=0$

2) $f'(3)\succ 0$ et $f'(5)\prec 0$

Exercice2 : soit ABC un Triangle équilatéral et la longueur de son côté est a
On construit à l'intérieur un rectangle $IJKL$
(Voir la figure)
on pose $CI=BJ=x$



1) Déterminer l'intervalle qui contient x
2)Déterminer la valeur de x pour que la surface du rectangle $IJKL$ soit maximal

Solution :1)On a : $0\prec CI+BJ\prec CB$ donc $0\prec 2x\prec a$

donc $0\prec x\prec\frac{a}{2}$ donc $x\in\left]0;\frac{a}{2}\right[$

2)cherchons la surface $S(x)$ du rectangle $IJKL$?

$S(x)=IJ\times IL$ on a : $IJ=a-2x$

Calculons : IL ?? soit H la projection orthogonal de A sur (BC)

On a H est le milieu de $[BC]$(car ABC un Triangle équilatéral) et sur le Triangle AHC on a $I\in(HC)$

Et $L\in(CA)$ et $(IL)\parallel(HA)$ d'après thalles on a :

$\frac{CI}{CH}=\frac{IL}{AH}$ et on a : $CH=\frac{a}{2}$ et $AH=\frac{\sqrt{3}}{2}a$ et

$CI=x$ donc : $IL=\sqrt{3}x$

$\forall x\in\left]0;\frac{a}{2}\right[$ $S(x)=\sqrt{3}x(a-2x)=-2\sqrt{3}x^2+a\sqrt{3}x$

la fonction S est dérivable sur $\left]0;\frac{a}{2}\right[$ et on a :

$S'(x)=-4\sqrt{3}x+a\sqrt{3}$ $S'(x)=0\Leftrightarrow x=\frac{a}{4}$

Donc voici le tableau de variation de S :

x	0	$\frac{a}{4}$	$a/2$
$S'(x)$	$-$	0	$+$
$S(x)$	$0\nearrow$	$\frac{\sqrt{3}a^2}{8}$	$\searrow 0$

la surface $S(x)$ du rectangle $IJKL$ est maximal si et seulement si $x=\frac{a}{4}$ et la surface maximal est :

$S_{\max}=\frac{\sqrt{3}}{8}a^2$

IV) DERIVEES SUCCESSIVES.

Définition : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et f' sa fonction dérivée. Si f' est dérivable on dit que la fonction f est deux fois dérivable et $(f')'$ s'appelle la dérivée seconde de la fonction f.
En générale on définit (sous réserve d'existence) les dérivées successives sur un intervalle ouvert I par :L'initialisation : $f^{(0)}=f$
et la formule de récurrence $(\forall n\in\mathbb{N})(f^{(n+1)}=(f^{(n)})'$

Exemple : montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*$ et $\forall x\in\mathbb{R}$

$\cos^{(n)}x=\cos\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)$

Solution : raisonnement par récurrence

Pour n=1 $\cos^{(1)}x=\cos' x=-\sin x=\cos\left(x+1\frac{\pi}{2}\right)$

Supposons que : $\cos^{(n)}x=\cos\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)$

Montrons que : $\cos^{(n+1)}x=\cos\left(x+(n+1)\frac{\pi}{2}\right)$?

$\cos^{(n+1)}x=\left(\cos^{(n)}x\right)'=\left(\cos\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)\right)'=-\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)$

$=\cos\left(x+n\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(x+(n+1)\frac{\pi}{2}\right)$

V) LES EQUATIONS DIFFERENTIELLES

Définition : Une équation différentielle est une équation ayant pour inconnue une ou plusieurs fonctions ; elle se présente sous la forme d'une relation entre ces fonctions inconnues et leurs dérivées successives. L'ordre d'une équation différentielle correspond au degré maximal de dérivation auquel l'une des fonctions inconnues a été soumise.

On s'intéresse à l'équation (E): $y'' + \omega^2 y = 0$

Dans cette notation y représente $f(x)$.

L'équation (E) est une équation différentielle de second ordre.

Montrer ce qui suit :

1. si f et g sont solutions de l'équation (E) alors : $(\forall(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}2)(\alpha f + \beta g)$ est aussi solution de (E)
2. Montrer que les fonctions : $u(x) = cos\omega x$ et $v(x) = sin\omega x$ sont solution de l'équation différentielle (E).
3. En déduire que $(\forall(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ $(y = \alpha cos\omega x + \beta \omega x)$ est solution de (E)

On admet que la réciproque est vraie

Propriété : Les solutions de l'équation différentielle (E): $y'' + \omega^2 y = 0$ sont les fonctions : $y = \alpha cos\omega x + \beta\ sin\omega x$ où α et β sont des réels.

Il existe une seul solution g de l'équation différentielle (E) qui vérifie : $g(x_0) = y_0$

et $g'(x_0) = z_0$ où x_0, y_0 et z_0 sont des réels

Exemple : soit l'équation différentielle (E) : $y'' + 4y = 0$

1)Résoudre l'équation différentielle (E)

2)Déterminer la solution g qui vérifie :

$g(0) = 1$ et $g'(0) = 2$

solution : $(w = 2)$ 1) la solution générale de l'équation différentielle (E) est :

La fonction : $F(x) = a\cos 2x + b\sin 2x$ où α et β sont des réels

2) $F'(x) = -2a\sin 2x + 2b\cos 2x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Donc : $\begin{cases} F(0) = 1 \\ F'(0) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ 2b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$

Donc : $F(x) = \cos 2x + \sin 2x$

On peut écrire $F(x)$ sous la forme :

$$F(x) = \sqrt{2}\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$$

Exercice3 : Soient les fonctions suivantes :

1) $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$ 2) $g(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x - 1$

3) $h(x) = \frac{x^2 + x + 1}{(x-1)^2}$

Etudier les variations de ces fonctions et déterminer les extremums s'ils existent

Solution : 1) $D_f = \mathbb{R}$ f est une fonction polynôme donc dérivable sur $\mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 6x - 2 = 2(3x - 1)$

Le signe de $f'(x)$ est le signe de $3x - 1$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$$

Donc voici le tableau de variation de f :

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{2}{3}$	$\nearrow$	$+\infty$

f' s'annule en $1/3$ en changeant de signe à droite et à gauche alors f admet un extremum en $1/3$

Du tableau de variation de f en deduit que :

f Admet une valeur minimal absolue c'est $2/3$ en $1/3$ donc : $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \geq 2/3$

1) $D_g = \mathbb{R}$ g est une fonction polynôme donc dérivable sur $\mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad g'(x) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$

Puisque : $g'(x)\geq 0$ et g s'annule seulement en $x=1$ alors la fonction g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et g n'admet pas d'extremums

3) $h(x)=\dfrac{x^2+x+1}{(x-1)^2}$ $\quad x\in D_h \Leftrightarrow x-1\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 1$

$D_h=\mathbb{R}-\{1\}=]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$

Puisque h est une fonction rationnelle alors il dérivable sur D_h

$\forall x\in D_h$: $h'(x)=\dfrac{(2x+1)'(x-1)^2-2(x^2+x+1)(x-1)'}{(x-1)^4}$

$h'(x)=\dfrac{3(x+1)}{(x-1)^3}=\dfrac{3}{(x-1)^2}\times\dfrac{x+1}{x-1}$

Puisque: $\forall x\in\mathbb{R}-\{3\}$ $\dfrac{3}{(x-1)^2}\succ 0$ Le signe de $h'(x)$ est le signe de $\dfrac{x+1}{x-1}$

Donc voici le tableau de variation de h :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	
$h(x)$	-1	$\nearrow$	$-1/4$	$\searrow$	$-\infty$ $\|\|$ $-\infty$	$\nearrow$	-1

h′ s'annule en -1 en changeant de signe à droite et à gauche alors f admet un extremum en -1

Du tableau de variation de f en deduit que :

f Admet une valeur maximal relative c'est $-1/4$ en -1

Exercice 4: Soit la fonction : $f(x)=4x^3-3x^2-6x$

Montrer que f est majorée sur l'intervalle : $I_1=]-\infty;1]$ et minorée sur l'intervalle : $I_2=\left[-\dfrac{1}{2};+\infty\right[$

et bornée sur l'intervalle : $I_3=\left[-\dfrac{1}{2};1\right]$

Solution : 1) $D_f=\mathbb{R}$ f est une fonction polynôme donc dérivable sur $\mathbb{R}$

$\forall x\in\mathbb{R}$ $\quad f'(x)=6(2x^2-x-1)=6(x-1)(2x+1)$

Le signe de $f'(x)$ est le signe de $(x-1)(2x+1)$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=1$ ou $x=-\dfrac{1}{2}$

Donc voici le tableau de variation de f :

x	$-\infty$		$-1/2$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$7/4$	$\searrow$	-5	$\nearrow$	$+\infty$

Du tableau de variation de f on a :

- f est croissante sur $\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right]$ et décroissante

sur $\left[-\frac{1}{2};1\right]$ en deduit que f Admet une valeur maximal en $-\dfrac{1}{2}$ sur I_1 c'est $\dfrac{7}{4}$ donc :

$\forall x\in I_1$: $f(x)\leq\dfrac{7}{4}$ donc que f est majorée sur l'intervalle : $I_1=]-\infty;1]$ par $\dfrac{7}{4}$

- f est décroissante sur $\left[-\frac{1}{2};1\right]$ et croissante

sur $[1;+\infty[$ en deduit que f Admet une valeur minimal en 1 sur I_2 c'est -5 donc :

$\forall x\in I_2$: $-5\leq f(x)$ donc que f est minorée sur l'intervalle : I_2 par -5

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron »
Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement
Aux calculs et exercices Que l'on devient
Un mathématicien

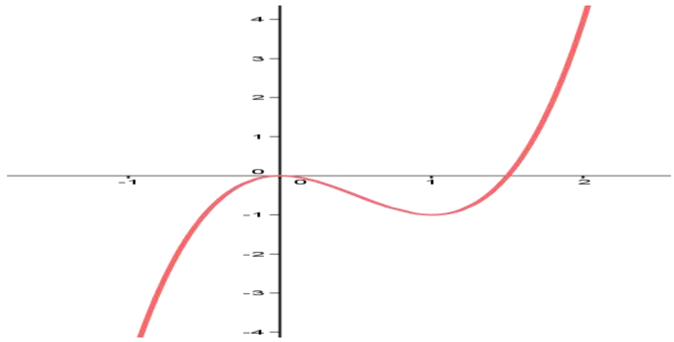
ETUDE DES FONCTIONS

I) CONCAVITE ; CONVEXITE ; POINTS D'INFLEXION

1) Activité : Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$g(x) = 2x^3 - 3x^2$

1. Déterminer les dérivées première et seconde de la fonction g.
2. Dresser le tableau de signe de $g''(x)$.

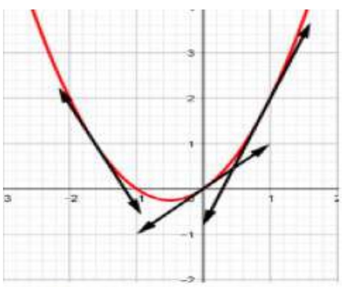


3. La courbe représentative de g est représentée ci-contre
Étudier graphiquement La position relative de la courbe cg par rapport à ses tangentes.
4. Que peut-on conclure ?

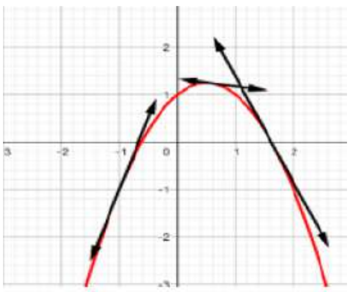
2) Définition et propriétés.

2.1 Définitions :

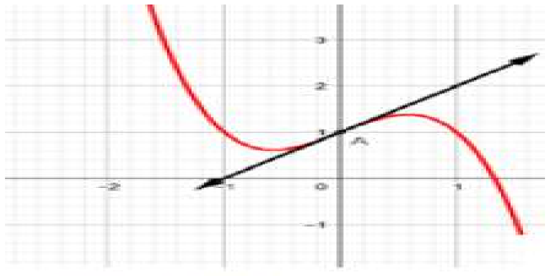
Définition : Soit f une fonction dont la courbe représentative est C_f.
1) On dit que la courbe est convexe si elle se trouve au-dessus de toutes ses tangentes
2) On dit que la courbe est concave si elle se trouve au-dessous de toutes ses tangentes.
3) Un point d'inflexion est un point où s'opère un changement de concavité de la courbe C_f



Graphe d'une fonction convexe



Graphe d'une fonction concave



Point d'inflexion en A

Remarque : Si f est dérivable en a et C_f traverse sa tangente en A alors le point A est un point d'inflexion

2.2 Dérivée seconde et concavité.

Théorème : Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I.
1) Si f'' est positive sur I alors C_f est convexe sur I.
2) Si f'' est négative sur I alors C_f est concave sur I.
3) Si f'' s'annule en $\boldsymbol{a}$ en changeant de signe alors C_f admet un point d'inflexion en $A(a, f(a))$

Remarque : Les conditions du théorème précèdent sont suffisantes ; on peut avoir une courbe convexe, concave ou un point D'inflexion sans l'existence même de la dérivée seconde.

Exemple : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{12}x^4 - 2x^2 + x + \frac{2}{3}$$

1. Déterminer les dérivées première et seconde de la fonction f.
2. Dresser le tableau de signe de f''(x).et étudier la concavité de la courbe de f et déterminer les points d'inflexions s'ils existent

Solution :1)

$$f'(x) = \left(\frac{1}{12}x^4 - 2x^2 + x + \frac{2}{3}\right)' = \frac{1}{12}4 \times x^3 - 4x + 1 = \frac{1}{3}x^3 - 4x + 1$$

$$f''(x) = \left(\frac{1}{3}x^3 - 4x + 1\right)' = x^2 - 4$$

2) $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2^2 = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x+2) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = -2 ou x = 2$

x	$-\infty$	-2		2	$+\infty$
x^2-4	$+$	0	$-$	0	$+$

(C_f) est convexe sur $]-\infty;-2]\cup[2;+\infty[$

(C_f) est concave sur $[-2,2]$ et $A(1,f(1))$ et $B(-1,f(-1))$ sont les points d'inflexions de (C_f)

Exercice1 : Soit la fonction f définie sur $I=[0;\pi]$ par : $f(x)=\sin^2 x$ Étudier la concavité de la courbe de f et déterminer les points d'inflexions s'ils existent sur I

Solution : $\forall x\in[0;\pi]$

$$f'(x)=\left(\sin^2 x\right)'=2(\sin x)'(\sin x)^{2-1}=2\cos x\sin x$$

$$f'(x)=\sin 2x\Rightarrow f''(x)=2\cos 2x\quad \forall x\in[0;\pi]$$

$$f''(x)=0\Leftrightarrow \cos 2x=0\Leftrightarrow 2x=\frac{\pi}{2}+k\pi\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}$$

Et $k\in\mathbb{Z}$ donc les solutions sont : $x=\frac{\pi}{4}$ et $x=\frac{3\pi}{4}$

$$x\in[0;\pi]\Rightarrow 2x\in[0;2\pi]$$

$2x$	0	$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\cos 2x$	$+$	0	$-$	0	$+$

On a donc :

x	0	$\frac{\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{4}$	π
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Donc : (C_f) est convexe sur $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]\cup\left[\frac{3\pi}{4};\pi\right]$

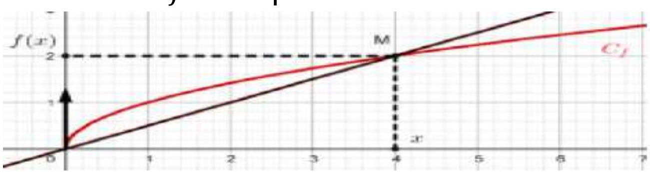
(C_f) est concave sur $\left[\frac{3\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right]$ et $A\left(\frac{\pi}{4},\frac{1}{2}\right)$ et $B\left(\frac{3\pi}{4},\frac{1}{2}\right)$ sont les points d'inflexions de (C_f)

II) DEMI-TANGENTE VERTICALE

Introduction : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}+$ par : $(\forall x\in\mathbb{R}+)$ $f(x)=\sqrt{x}$

On a : $\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$

La fonction f n'est pas dérivable à droite de 0.



Soient $x\neq 0$ et $M(x,f(x))$ un point de la courbe C_f la droite (OM) à pour coefficient directeur $m=\frac{\sqrt{x}}{x}=\frac{1}{\sqrt{x}}$ donc elle a pour vecteur directeur $\vec{u}\left(1;\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ et le vecteur $\vec{v}\left(\sqrt{x};1\right)$) est aussi vecteur directeur de la droite (OM) si on fait tendre x vers 0 (à droite) La droite (OM) "tend" pour une position limite vers une droite (T) de vecteur directeur $\vec{j}(0;1)$ Donc sera parallèle à l'axe (Oy).

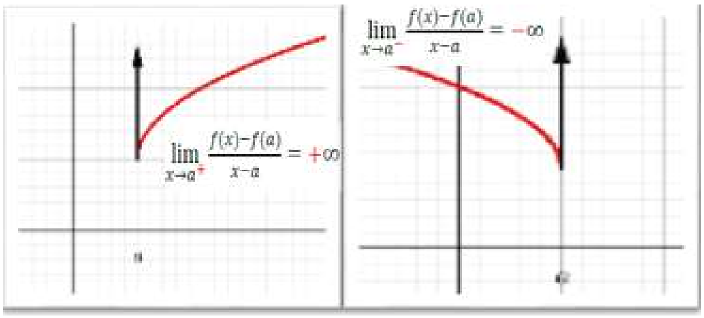
Propriété : Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[a,a+r[$

Si f est continue à droite de a et

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\pm\infty$$

Alors la courbe Cf admet une demi-tangente verticale à droite de a.

Interprétation géométriques



Exemple : Soit f la fonction définie par : $f(x)=x^2\sqrt{1+x}$

1. étudier la dérivabilité de f a droite en $x_0=-1$.
2. donner une interprétation géométrique

Solution : $D_f=[-1,+\infty[$

1) $\lim_{x\to-1^+}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim_{x\to-1^+}\frac{x^2\sqrt{1+x}-0}{x+1}=\lim_{x\to-1^+}\frac{x^2\sqrt{1+x}}{x+1}$

$$=\lim_{x\to-1^+}\frac{x^2\left(\sqrt{1+x}\right)^2}{(x+1)\sqrt{1+x}}=\lim_{x\to-1^+}\frac{x^2(1+x)}{(x+1)\sqrt{1+x}}=\lim_{x\to-1^+}\frac{x^2}{\sqrt{1+x}}=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

Donc f n'est pas dérivable a droite en $x_0=-1$.

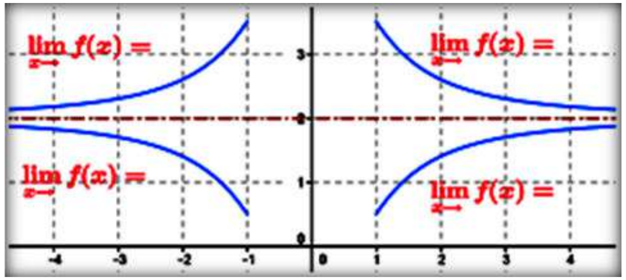
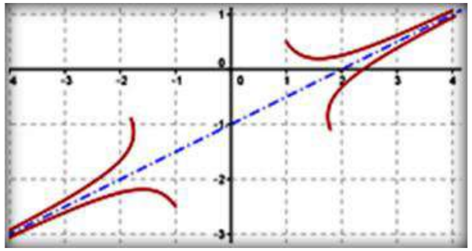
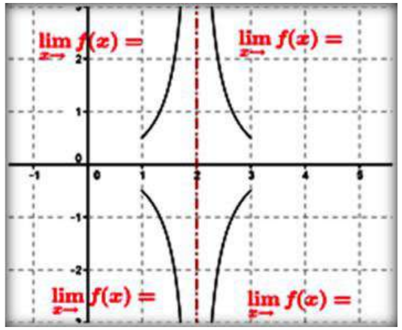
2)Interprétation géométrique :

La courbe Cf admet une demi-tangente verticale à droite du point $A(-1;f(-1))$ dirigée vers le haut

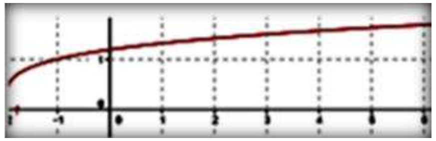
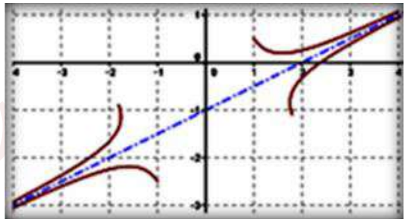
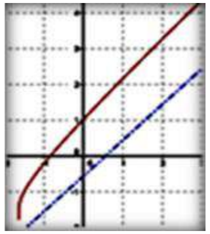
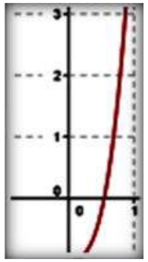
Car : $\lim_{x\to-1^+}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=+\infty$ $(+\times+=+)$

III)BRANCHES INFINIES.

II) BRANCHES INFINIES.

Si : $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=b$	**Si :** $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty$	**Si :** $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\pm\infty$
 **La droite (Δ) d'équation $y=b$ est une Asymptôte à (C_f) au voisinage de ∞**	**La droite $(\Delta): y=ax+b$ est une Asymptôte oblique à (C_f)** **signifie que : $\lim\limits_{x\to\infty}\big(f(x)-(ax+b)\big)=0$**  **(C_f) est au dessus de $(\Delta) \Leftrightarrow \big(f(x)-(ax+b)\big)>0$** **$(C_f)$ est en dessous de $(\Delta) \Leftrightarrow \big(f(x)-(ax+b)\big)<0$**	 **La droite (Δ) d'équation $x=a$ est une Asymptôte à (C_f) au voisinage de a**

Détermination de la nature de la branche infinie dans le cas : $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty$

Si : $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$	**Si :** $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}=a\neq 0$		**Si :** $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\pm\infty$
	$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\big(f(x)-ax\big)=b$	$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\big(f(x)-ax\big)=\infty$	
 **La courbe (C_f) admet une branche parabolique de direction (Ox)**	 **La droite (Δ) d'équation $y=ax+b$ est une Asymptôte à (C_f) au voisinage de ∞.**	 **La courbe (C_f) admet une branche parabolique de direction la droite (D), d'équation $y=ax$**	 **La courbe (C_f) admet une branche parabolique de direction (Oy)**

Exemples :

Exemple1 : Soit f la fonction définie par :

$$f(x)=\frac{2x-1}{3x-6}$$

déterminer les limites aux bornes de D_f et (Donner une interprétation géométrique des résultats)

Solution : $D_f=\mathbb{R}-\{2\}=]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$

1) $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{2x-1}{3x-6}$

$\lim\limits_{x\to 2^+} 2x-1=3$ **et** $\lim\limits_{x\to 2^+} 3x-6=0^+$ **et** $\lim\limits_{x\to 2^-} 3x-6=0^-$

x	$-\infty$ 2 $+\infty$
$3x-6$	$-$ 0 $+$

Donc : $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=-\infty$

Interprétation géométrique des résultats :

La droite (Δ): $x=2$ est une asymptote vertical a la courbe C_f

2) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{2x-1}{3x-6}=\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{2x}{3x}=\frac{2}{3}$

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{2x-1}{3x-6}=\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{2x}{3x}=\frac{2}{3}$

Interprétation géométrique des résultats :

La droite (Δ): $y=\frac{2}{3}$ est une asymptote horizontal a la courbe C_f

Exemple2 :

Soit f la fonction définie par : $f(x)=\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$

On a : $f(x)=\frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}{x}=\frac{|x|\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}{x}$ $\forall x\in\mathbb{R}^*$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{x\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}{x}=\lim\limits_{x\to +\infty}\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}=1$

($|x|=x$ car $x\to+\infty$)

La droite (Δ): $y=1$ est une asymptote horizontal a la courbe C_f au voisinage de $+\infty$

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{-x\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}{x}=\lim\limits_{x\to -\infty}-\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}=-1$

La droite (Δ'): $y=-1$ est une asymptote horizontal a la courbe C_f au voisinage de $-\infty$

Exemple3 : : Soit f la fonction définie par :

$\forall x\in\mathbb{R}^*$: $f(x)=2+\frac{x-1}{x^2}$

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$ car :

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$

Donc : La droite (Δ): $y=2$ est une asymptote horizontal a la courbe C_f au voisinage de ∞

étudions la position de courbe (C_f) et la droite (Δ) ?

$f(x)-2=\frac{x-1}{x^2}$ le signe et celui de $x-1$

x	$-\infty$ 0	1 $+\infty$
$f(x)-2$	$-$	$-$ 0 $+$

Donc la courbe C_f est au-dessous de (Δ): $y=2$

Sur l'intervalle $]-\infty;0[\cup]0;1[$ et la courbe C_f est au-dessus de (Δ): $y=2$ Sur l'intervalle $]1;+\infty[$

C_f coupe (Δ) au point $I(1;2)$

Exemple4: Soit f la fonction définie par :

$\forall x\in\mathbb{R}^*-\{3\}$: $f(x)=2x-1+\frac{1}{x-3}$

montrer que la courbe C_f que la fonction f admet une asymptote oblique au voisinage de $+\infty$ et au voisinage de $-\infty$ que l'on déterminera

Solution $f(x)=2x-1+\frac{1}{x-3}\Leftrightarrow f(x)-(2x-1)=\frac{1}{x-3}$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(2x-1)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x-3}=\frac{1}{+\infty}=0$

Donc : la droite (Δ): $y=2x-1$ est une asymptote oblique à la courbe C_f au voisinage de $+\infty$

Et on a : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-(2x-1)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x-3}=0$

Donc : la droite (Δ): $y=2x-1$ est une asymptote oblique à la courbe C_f au voisinage de $-\infty$

Exemple5 : Soit la fonction définie par :

$f(x)=\sqrt{x}$ étudier les branches paraboliques au voisinage de $+\infty$

Solution : On a : $Df=\mathbb{R}+$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ et

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}=0$$

Donc la courbe C_f admet une branche parabolique vers l'axe $(\boldsymbol{Ox})$ au voisinage de $+\infty$

Exemple6 : Soit la fonction définie par : $f(x)=x^3$ étudier les branches paraboliques au voisinage de $+\infty$

Solution : On a : $Df=\mathbb{R}+$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ et

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x}=\lim_{x\to+\infty}x^2=+\infty$$

Donc la courbe C_f admet une branche parabolique vers l'axe $(\boldsymbol{O}y)$ au voisinage de $+\infty$

Exemple7: Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x)=x+\sqrt{x}$

Solution : On a : $Df=\mathbb{R}+$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

et $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sqrt{x}}{x}=\lim_{x\to+\infty}1+\frac{1}{\sqrt{x}}=1$

Mais $\lim_{x\to+\infty} f(x)-1x=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$

Donc la courbe de la fonction admet une branche parabolique vers la droite $(\boldsymbol{\Delta})$: $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}$.

Propriété : Soit f une fonction définie au voisinage de $+\infty$. La droite (Δ): $y=ax+b$ ($a\neq 0$) est une asymptote oblique
au voisinage de $+\infty$ si et seulement si :

$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=a$ ($a\neq 0$) et $\lim_{x\to+\infty} f(x)-ax=b$

Preuve : D'après la propriété précédente : On peut écrire $f(x)=ax+b+h(x)$ où $\lim_{x\to+\infty}h(x)=0$

Donc : $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{ax+b+h(x)}{x}$

$$\lim_{x\to+\infty}a+\frac{b}{x}+\frac{h(x)}{x}=a$$

D'autre part : $f(x)-ax=b+h(x)$ $\lim_{x\to+\infty}h(x)=0$

donc $\lim_{x\to+\infty} f(x)-ax=b$

Exemple: Soit f la fonction définie par : $f(x)=\sqrt{x^2+1}$

1)Déterminer D_f

2) montrer que la courbe C_f que la fonction f admet une asymptote oblique au voisinage de $+\infty$ et au voisinage de $-\infty$ que l'on déterminera

Solution :1) On a : $x^2+1\succ 0\quad \forall x\in\mathbb{R}$

donc $D_f=\mathbb{R}$

2)a) $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}=+\infty$

Et $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}{x}$

$=\lim_{x\to+\infty}\frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x}$ $\quad |x|=x$ car $x\to+\infty$

$=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=1=a$

Et on a : $\lim_{x\to+\infty} f(x)-1x=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}-x$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=0$$

Donc : la droite (Δ): $y=1x$ est une asymptote oblique à la courbe C_f au voisinage de $+\infty$

b)De même on a :

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+1}=+\infty$

Et $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}{x}$

$=\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x}$ $\quad |x|=-x$ car $x\to-\infty$

$=\lim_{x\to-\infty}-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=-1=a$

Et on a : $\lim_{x\to-\infty} f(x)+1x=\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+1}+x$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\sqrt{x^2+1}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}=0$$

Donc : la droite (Δ): $y=-x$ est une asymptote oblique à la courbe C_f au voisinage de $-\infty$

IV) LES ELEMENTS DE SYMETRIE D'UNE COURBE.

1) Axe de symétrie :

Activité : Soit la fonction

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto \sqrt{2x^2 - 4x - 6}$

1. Déterminer D_f ensemble de définition de la fonction f.
2. Montrer que $(\forall x \in D_f)\ (2 - x \in D_f)$
3. Montrer que $(\forall x \in D_f)\ (f(2 - x) = f(x))$

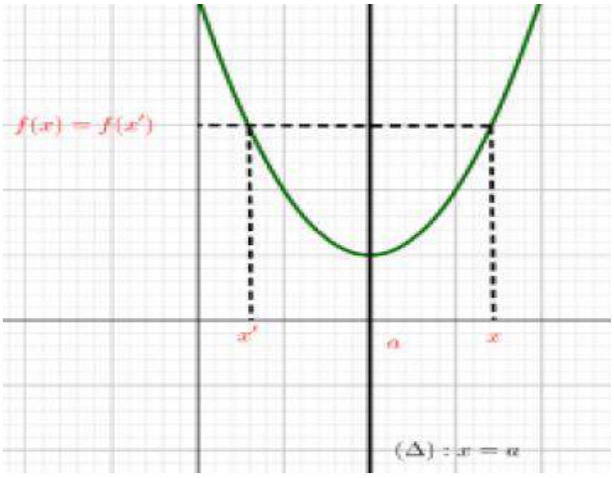
Propriété : Soit f une fonction numérique dont l'ensemble de définition est D_f.

La droite (Δ): $x = a$ est un axe de symétrie de la courbe C_f si et seulement si :

a) $(\forall x \in D_f)(2a - x \in D_f)$

b) $(\forall x \in D_f)(f(2a - x) = f(x))$

Preuve : Soit x un élément de D_f et $A(x, 0)$, si $A'(x', 0)$ est le symétrique



de A par rapport à (Δ) $x = a$ alors

$\frac{x + x'}{2} = a$ (a est le centre de l'intervalle de bornes x et x')

d'où : $x' = 2a - x$ et puisque $(\Delta) \perp (AA')$ alors $f(x) = f(x')$ ce que signifie : $f(2a - x) = f(x)$

Exemple: Soit f la fonction définie par :

$f(x) = \sqrt{x - x^2}$

1)Déterminer D_f

2) montrer que la La droite (Δ): $x = \frac{1}{2}$ est un axe de symétrie de la courbe C_f

Solution :1) On a : $f(x) = \sqrt{x - x^2}$

$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x - x^2 \geq 0\}$

$x - x^2 = 0 \Leftrightarrow x(1 - x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 ou x = 0$

Tableau de signe :

x	$-\infty$	0		1	$+\infty$
$x - x^2$	$-$	0	$+$	0	$-$

donc : $D_f = [0,1]$

2)a) montrons que : si $x \in D_f = [0,1]$ alors $1 - x \in D_f$?

$x \in D_f = [0,1] \Rightarrow 0 \leq x \leq 1 \Rightarrow -1 \leq -x \leq 0 \Rightarrow 1 - 1 \leq 1 - x \leq 1$

Donc : $x \in D_f \Rightarrow 0 \leq 1 - x \leq 1 \Rightarrow 1 - x \in D_f$

b) montrons que : $f(1 - x) = f(x)$????

$f(1 - x) = \sqrt{(1 - x) - (1 - x)^2} = \sqrt{1 - x - (1 - 2x + x^2)}$

$= \sqrt{1 - x - 1 + 2x - x^2} = \sqrt{x - x^2} = f(x)$

Donc : La droite (Δ): $x = \frac{1}{2}$ est un axe de symétrie de la courbe C_f

Exercice2: Soit f la fonction définie par :

$f(x) = 3x^2 - 2x + 5$

montrer que la La droite (Δ): $x = \frac{1}{3}$ est un axe de symétrie de la courbe C_f

Solution : On a : $D_f = \mathbb{R}$

a) si $x \in D_f = \mathbb{R}$ alors $\frac{2}{3} - x \in \mathbb{R}$

b) montrons que : $f\left(\frac{2}{3} - x\right) = f(x)$????

$f\left(\frac{2}{3} - x\right) = 3\left(\frac{2}{3} - x\right)^2 - 2\left(\frac{2}{3} - x\right) + 5$

$= 3x^2 - 2x + 5 = f(x)$

Donc : La droite (Δ): $x = \frac{1}{3}$ est un axe de symétrie de la courbe C_f

Exercice3: Soit f la fonction définie par :

$f(x) = \frac{1}{x - 1} - \frac{1}{x - 3}$

montrer que la La droite (Δ): $x = 2$ est un axe de symétrie de la courbe C_f

Solution : On a : $D_f = \mathbb{R} - \{1; 3\}$

a) si $x \in \mathbb{R} - \{1; 3\}$ alors $4 - x \in \mathbb{R} - \{1; 3\}$ en effet :

$x \in \mathbb{R} - \{1; 3\} \Rightarrow x \neq 1$ et $x \neq 3$

$\Rightarrow -x \neq -1$ et $-x \neq -3 \Rightarrow 4-x \neq 4-1$ et $4-x \neq 4-3$

$\Rightarrow 4-x \neq 3$ et $4-x \neq 1$ alors $4-x \in \mathbb{R}-\{1;3\}$

b) montrons que : $f(4-x)=f(x)\ \forall x \in \mathbb{R}-\{1;3\}$????

$$f(4-x)=\frac{1}{4-x-1}-\frac{1}{4-x-3}=\frac{1}{3-x}-\frac{1}{1-x}=\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x-3}$$

donc $f(4-x)=f(x)\ \forall x \in \mathbb{R}-\{1;3\}$

donc la droite (Δ): $x=2$ est un axe de symétrie de la courbe C_f

Exercice4: Soit f la fonction définie par :

$f(x)=\cos x$

montrer que la La droite (Δ): $x=k\pi$; $k\in\mathbb{Z}$ est un axe de symétrie de la courbe C_f

Solution : On a : $D_f=\mathbb{R}$

a) si $x\in\mathbb{R}$ alors $2k\pi-x\in\mathbb{R}$

b) montrons que : $f(2k\pi-x)=f(x)\ \forall x\in\mathbb{R}$????

$f(2k\pi-x)=\cos(2k\pi-x)=\cos(-x)=\cos x$

donc $f(2k\pi-x)=f(x)\ \forall x\in\mathbb{R}$

donc la droite (Δ): $x=k\pi$; $k\in\mathbb{Z}$ est un axe de symétrie de la courbe C_f

2) Centre de symétrie.

Propriété : Soit f une fonction numérique dont l'ensemble de définition est D_f.
Le point $\Omega(a, b)$ est un centre de symétrie de la courbe Cf si et seulement si :

a) $(\forall x \in D_f)(2a - x \in D_f)$

b) $(\forall x \in D_f)(f(2a - x) = 2b - f(x))$

Preuve : $\Omega(a, b)$ étant centre de symétrie de la courbe C_f, si $M(x, f(x))$ est un point de Cf alors sont symétrique M' par rapport à Ω est un point de C_f. soit $M'(x', f'(x))$ on a : $\frac{x+x'}{2}=a$

et $\frac{f(x)+f(x')}{2}=2b$

car a est le centre de l'intervalles de bornes x et x' et b est le centre de L'intervalles de bornes $f(x)$ et $f(x')$ Par suite : $x' = 2a - x$ et $f(x') = 2b - f(x)$

et finalement : $f(2a - x) = 2b - f(x)$

Exemple: Soit f la fonction définie par :

$f(x)=\frac{x^2-x}{x+1}$

1) montrer que : $\forall \in D_f$: $f(x)=x-2+\frac{2}{x+1}$

2)montrer que le point $\Omega(-1;-3)$ est un centre de symétrie de (C_f)

Solution : 1) On a : $D_f=\mathbb{R}-\{-1\}$

$$x-2+\frac{2}{x+1}=\frac{(x-2)(x+1)+2}{x+1}=\frac{x^2-x}{x+1}=f(x)$$

2)a) montrons que si $x\in\mathbb{R}-\{-1\}$ alors $-2-x\in\mathbb{R}-\{-1\}$ en effet :

$x\in\mathbb{R}-\{-1\}\Leftrightarrow x\neq-1\Leftrightarrow -x\neq1\Leftrightarrow -2-x\neq-2+1$

$\Leftrightarrow -2-x\neq-1\Leftrightarrow -2-x\in\mathbb{R}-\{-1\}$

b) montrons que : $f(-2-x)+f(x)=-6=2b$??

$$f(-2-x)+f(x)=-2-x-2+\frac{2}{-2-x+1}+x-2+\frac{2}{x+1}$$

$$=-6+\frac{2}{-x-1}+\frac{2}{x+1}=-6-\frac{2}{x+1}+\frac{2}{x+1}=-6$$

donc $f(-2-x)+f(x)=-6=2b\ \forall x\in\mathbb{R}-\{-1\}$

donc le point $\Omega(-1;-3)$ est un centre de symétrie de (C_f)

Exercice5 : Soit f la fonction définie par :

$f(x)=\sin x-\cos x$

montrer que le point $\Omega\left(\frac{\pi}{4};0\right)$ est un centre de symétrie de (C_f)

Solution :

a) on a si $x\in\mathbb{R}$ alors $2\frac{\pi}{4}-x=\frac{\pi}{2}-x\in\mathbb{R}$

b) montrons que : $f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=2\times0-f(x)$??

$$f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x-\sin x$$

donc $f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=2\times0-f(x)\ \forall x\in\mathbb{R}$

donc le point $\Omega\left(\frac{\pi}{4};0\right)$ est un centre de symétrie de (C_f)

Exercice6 : Soit f la fonction définie par :

$f(x)=\sqrt{4x^2+2x-2}$

1)Déterminer D_f

2) Déterminer le domaine de dérivabilité de f et calculer $f'(x)$

3) calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

4) montrer que la courbe C_f que la fonction f admet une asymptote oblique au voisinage de $-\infty$ que l'on déterminera

Solution : 1) $D_f = \left\{x\in\mathbb{R} / 4x^2+2x-2\geq 0\right\}$

$4x^2+2x-2=0 \Leftrightarrow 2x^2+x-1=0$

$\Delta = b^2-4ac=(1)^2-4\times 2\times(-1)=1+8=9=(3)^2>0$

$x_1=\dfrac{-1+3}{2\times 2}=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$ **et** $x_2=\dfrac{-4}{4}=-1$

x	$-\infty$		-1		$1/2$		$+\infty$
$4x^2+2x-2$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc : $D_f=\left]-\infty;-1\right]\cup\left[\dfrac{1}{2};+\infty\right[$

$4x^2+2x-2\succ 0 \Leftrightarrow \forall x\in\left]-\infty;-1\right[\cup\left]\dfrac{1}{2};+\infty\right[$

Donc :

$$f'(x)=\left(\sqrt{4x^2+2x-2}\right)'=\frac{\left(4x^2+2x-2\right)'}{2\sqrt{4x^2+2x-2}}=\frac{8x+2}{2\sqrt{4x^2+2x-2}}$$

$$f'(x)=\frac{4x+1}{\sqrt{4x^2+2x-2}}\quad \forall x\in\left]-\infty;-1\right[\cup\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$$

3) calculons : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{4x^2+2x-2}$

On a: $\lim\limits_{x\to-\infty} 4x^2+2x-2=\lim\limits_{x\to-\infty}4x^2=+\infty$

Donc : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

4) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+2x-2}}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2\left(4+\dfrac{2x}{x^2}-\dfrac{2}{x^2}\right)}}{x}$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{|x|\sqrt{4+\dfrac{2}{x}-\dfrac{2}{x^2}}}{x}$ $x\to-\infty$ donc $|x|=-x$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x\sqrt{4+\dfrac{2}{x}-\dfrac{2}{x^2}}}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}-\sqrt{4+\dfrac{2}{x}-\dfrac{2}{x^2}}=-\sqrt{4}=-2=a$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)+2x=\lim_{x\to-\infty}\sqrt{4x^2+2x-2}+2x=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{4x^2+2x-2}+2x\right)\left(\sqrt{4x^2+2x-2}-2x\right)}{\left(\sqrt{4x^2+2x-2}-2x\right)}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{4x^2+2x-2-4x^2}{|x|\sqrt{4+\frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}}-2x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x-2}{-x\sqrt{4+\frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}}-2x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x-2}{-x\sqrt{4+\frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}}-2x}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(2-\frac{2}{x}\right)}{-x\left(\sqrt{4+\frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}}+2\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2-\frac{2}{x}}{-\left(\sqrt{4+\frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}}+2\right)}=-\frac{2}{4}=-\frac{1}{2}=b$$

Donc : donc la droite $y=-2x-\dfrac{1}{2}$ est une asymptote oblique au voisinage de $-\infty$ a la courbe C_f

Exercice7 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x^3-3x+3$

1) Déterminer les limites de f aux bornes de D_f

2) étudier les branches infinies de la courbe (C_f)

3) dresser le tableaux de variation de f

4) Étudier la concavité de la courbe de (C_f)et déterminer les points d'inflexions s'ils existent sur $\mathbb{R}$

5)montrer que le point $I(0;3)$ est un centre de symétrie de(C_f) et déterminer l'équation de la tangente (T) a la courbe (C_f)en $I(0;3)$

6) on utilisant le tableaux de variation de f monter que l'équation : $f(x)=0$ admet une solution unique α tel que : $\alpha\prec-1$ et vérifier que $-2.2\prec\alpha\prec-2.1$ et déterminer le signe de $f(x)$

7) Tracer la courbe Cf et discuter suivant les valeurs du paramètre m le nombre de solutions de l'équation : $x^3-3x+3=m$

Solution : 1) On a : $D_f=\mathbb{R}=\left]-\infty;+\infty\right[$ car f est une fonction polynôme

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^3-3x+3=\lim\limits_{x\to+\infty}x^3=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^3-3x+3=\lim\limits_{x\to+\infty}x^3=-\infty$

2) étude des branches infinies de la courbe (C_f):

$\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{x^3-3x+3}{x}=x^2-3+\dfrac{3}{x}\quad\forall\in\mathbb{R}^*$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}x^2-3+\dfrac{3}{x}=+\infty$

Et $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}x^2-3+\dfrac{3}{x}=+\infty$

Donc la courbe C_f admet une branche parabolique vers l'axe ($\boldsymbol{O}$y) au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$

3) le tableaux de variation de f ?

$\forall x \in \mathbb{R}$

$f'(x) = \left(x^3 - 3x + 3\right)' = 3x^2 - 3 = 3\left(x^2 - 1\right) = 3(x-1)(x+1)$

Le signe de $f'(x)$ est celui de $(x-1)(x+1)$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	5	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

4) Étude de la concavité de la courbe de $\left(C_f\right)$?

$\forall x \in \mathbb{R}$; $f'(x) = 3\left(x^2 - 1\right)$ donc : $f''(x) = 6x$

le tableaux de signe de $f''(x)$ est :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	

Donc : $\left(C_f\right)$ est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$

$\left(C_f\right)$ est concave sur $\mathbb{R}_-^*$ et $f''(x)$ s'annule en changeant de signe 0 donc $I(0,3)$ est un point d'inflexion de $\left(C_f\right)$

5)montrons que le point $I(0;3)$ est un centre de symétrie de $\left(C_f\right)$?

a) on a si $x \in \mathbb{R}$ alors $2\times 0 - x = -x \in \mathbb{R}$

b) montrons que : $f(-x) = 2\times 3 - f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$?

$f(-x) = (-x)^3 - 3(-x) + 3 = -x^3 + 3x + 3$

$2\times 3 - f(x) = 6 - f(x) = 6 - \left(x^3 - 3x + 3\right) = -x^3 + 3x + 3$

donc $f(-x) = 2\times 3 - f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$ donc le point $I(0,3)$ est un centre de symétrie de $\left(C_f\right)$

l'équation de la tangente (T) a la courbe $\left(C_f\right)$ en $I(0;3)$ est : $(T): y = f'(0)x + f(0) = -3x + 3$

6) du tableaux de variation de f

On deduit que f admet une valeur minimal en 1 sur l'intervalle $[-1;+\infty[$ et c'est : $f(1) = 1$

Donc : $f(x) \geq f(1) = 1 \quad \forall x \in [-1;+\infty[$

Et l'image de l'intervalle $]-\infty;-1]$ par f est l'intervalle $]-\infty;5]$ et $0 \in]-\infty;5]$ donc il existe un α de $]-\infty;-1]$ tel que $f(\alpha) = 0$ et puisque f est strictement croissante sur $]-\infty;-1]$ alors quelque soit $x \neq \alpha$ on a $x \prec \alpha$ ou $\alpha \prec x \prec -1$ donc $f(x) \prec f(\alpha)$ ou $f(\alpha) \prec f(x) \prec f(-1)$

Donc : $f(x) \prec 0$ ou $0 \prec f(x) \leq 5$

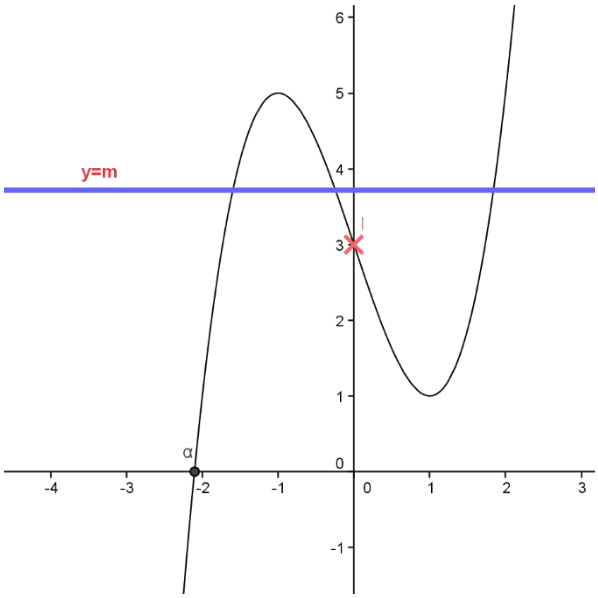
Donc : $\forall x \in]-\infty;-1] - \{\alpha\}$ on a $f(x) \neq 0$ donc α est unique et on utilisant la calculatrice en vérifie que : $f(-2.2) \approx -1.04$ et $f(-2.1) \approx 0.03$

Donc d'après l'étude précèdent on a alors : $-2.2 \prec \alpha \prec -2.1$

On deduit que : $f(x) \succ 0 \ \forall x \in]\alpha;+\infty]$ et

$f(x) \prec 0 \quad \forall x \in]-\infty;\alpha]$

7) Tracer la courbe Cf



Remarque : le signe de $f(x)$ partir de $\left(C_f\right)$?

a)sur $]-\infty;\alpha]$ $f(x) \leq 0$ car $\left(C_f\right)$ est au-dessous de l'axe des abscisses

b)sur $]\alpha;+\infty]$ $f(x) \geq 0$ car $\left(C_f\right)$ est au-dessus de l'axe des abscisses

7) $x^3 - 3x + 3 = m \Leftrightarrow f(x) = m$

Les solutions de l'équation : $f(x) = m$ sont les abscisses des points d'intersections de $\left(C_f\right)$ avec la droite d'équation : $y = m$

m	$m \in]5;+\infty[\cup]-\infty;1[$	$m=1$ ou $m=5$	$m \in]1;5[$
nombre de solutions	1	2	3

Exercice8 :soit f une fonction définie par :

$f(x)=2+\frac{1}{x}-\frac{1}{x-1}$

1) déterminer D_f ensemble de définition de f

2) étudier les branches infinies de la courbe (C_f)

3) étudier la position de courbe (C_f) avec son asymptote horizontal

4) étudier les variations de f et dresser le tableaux de variation de f

5) déterminer les points d'intersections de (C_f) avec l'axe des abscisses f

6) montrer que la droite d'équation $x=\frac{1}{2}$ est un axe de symétrie de (C_f)

7) tracer la courbe (C_f)

Solution : 1) $x \in D_f \Leftrightarrow x \neq 0$ et $x \neq 1$

donc : $D_f =]-\infty;0[\cup]0;1[\cup]1;+\infty[$

2) étude des branches infinies de la courbe (C_f)

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} 2+\frac{1}{x}-\frac{1}{x-1}=2$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} 2+\frac{1}{x}-\frac{1}{x-1}=2$

Car : $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x}-\frac{1}{x-1}=0$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=2$

La droite (Δ): $y=2$ est une asymptote horizontal a la courbe C_f au voisinage de $\pm\infty$

b) on a $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{1}{x}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to0^-} \frac{1}{x}=-\infty$ et

$\lim\limits_{x\to0} 2-\frac{1}{x-1}=3$

donc $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=-\infty$

donc La droite (Δ'): $x=0$ est une asymptote a la courbe C_f

c) on a $\lim\limits_{x\to1^+} \frac{-1}{x-1}=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to1^-} \frac{-1}{x-1}=+\infty$

et $\lim\limits_{x\to1} 2+\frac{1}{x}=3$

donc $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=+\infty$

donc La droite (Δ ''): $x=1$ est une asymptote a la courbe C_f

3) étude de la position de courbe (C_f) avec son asymptote horizontal : $(\forall x \in D_f)$

$f(x)-2=\frac{1}{x}-\frac{1}{x-1}=\frac{x-1-x}{x(x-1)}=\frac{-1}{x(x-1)}$

si $x\in]0;1[$ alors $f(x)-2\succ 0$

Donc la courbe C_f est au- dessus de (Δ): $y=2$

si $x\in]-\infty;0[\cup]1;+\infty[$ alors $f(x)-2\prec 0$

Donc la courbe C_f est au-dessous de (Δ): $y=2$

5) déterminons les points d'intersections de (C_f) avec l'axe des abscisses : $(\forall x \in D_f)$

$f(x)=0 \Leftrightarrow 2+\frac{1}{x}-\frac{1}{x-1}=0 \Leftrightarrow \frac{2x^2-x-1}{x(x-1)}=0$

$2x^2-x-1=0 \Leftrightarrow x=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ ou $x=\frac{1-\sqrt{3}}{2}$

Donc les points d'intersections de (C_f) avec l'axe des abscisses sont : $A\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2};0\right)$ et $B\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2};0\right)$

6) montrons que la droite d'équation $x=\frac{1}{2}$ est un axe de symétrie de (C_f) :

On a : $D_f =]-\infty;0[\cup]0;1[\cup]1;+\infty[$

a) si $x\in D_f$ alors $1-x\in D_f$ en effet :

$x\in\mathbb{R}-\{0;1\} \Rightarrow x\neq 0$ et $x\neq 1$

$\Rightarrow -x\neq 0$ et $-x\neq -1 \Rightarrow 1-x\neq 1$ et $1-x\neq 0$

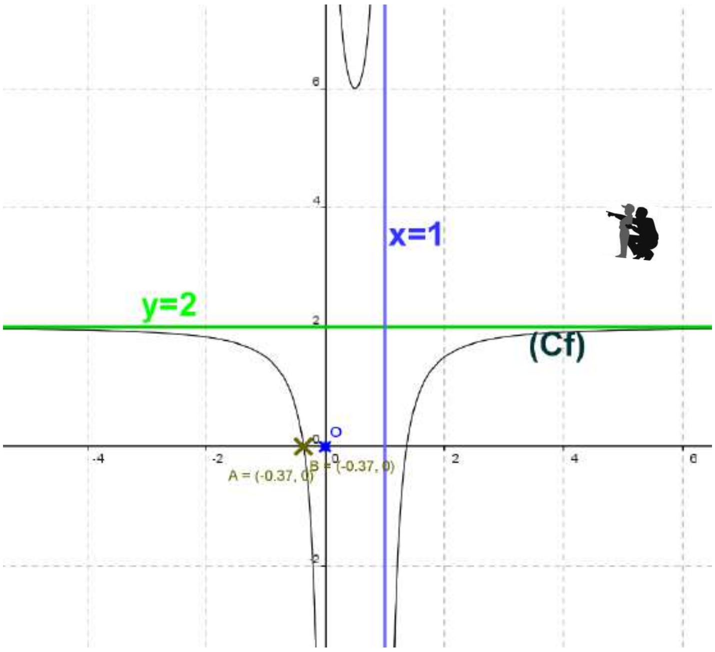
alors $1-x\in\mathbb{R}-\{0;1\}$

b) montrons que : $f(1-x)=f(x)\ \forall x\in\mathbb{R}-\{0;1\}$ ؟؟؟؟

$f(1-x)=2+\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1-x-1}=2+\frac{1}{1-x}+\frac{1}{x}=2-\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x}$

donc $f(1-x)=f(x)\ \forall x\in\mathbb{R}-\{0;1\}$

donc la droite $x=\frac{1}{2}$ est un axe de symétrie de la courbe C_f



Exercice9 : soit f une fonction définie par :

$$f(x)=\frac{x^2-2x+1}{x-3}$$

1) déterminer les limites aux bornes de D_f

2)déterminer les réels a et b tel que :

$$f(x)=ax+b+\frac{c}{x-3} \quad \forall x\in D_f$$

3) étudier les branches infinies de la courbe (C_f)

4) étudier les variations de f et dresser le tableau de variation de f

5) montrer que le point $\Omega(3;4)$ est un centre de symétrie de (C_f)

6) calculer $f''(x)$ $\forall x\in D_f$ et étudier la concavité de la courbe de f

7) étudier la position de courbe (C_f) et son asymptote oblique (Δ)

8) Déterminer les points d'intersection de la courbe (C_f) avec les axes du repére

9) déterminer l'équation de la tangente (T) a la courbe (C_f) en $x_0=2$

9) tracer la courbe (C_f)

Solution : 1) $x\in D_f \Leftrightarrow x\neq 3$

donc : $D_f=\mathbb{R}-\{3\}=]-\infty;3[\cup]3;+\infty[$

$$\lim_{x\to 3^-} f(x)=\lim_{x\to 3^+}\frac{x^2-2x+1}{x-3}=\frac{4}{0^-}=-\infty$$

$$\lim_{x\to 3^+} f(x)=\lim_{x\to 3^+}\frac{x^2-2x+1}{x-3}=\frac{4}{0^+}=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to-\infty}x=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to+\infty}x=+\infty$$

2)on fait la division euclidienne de x^2-3x+6 par $x-3$ on trouve : $x^2-2x+1=(x-3)(x+1)+4$

$$f(x)=\frac{x^2-2x+1}{x-3}=\frac{(x-3)(x+1)+4}{x-3}=x+1+\frac{4}{x-3}$$

Donc : $a=1$ et $b=1$ et $c=4$

3)Les branches infinies de la courbe (C_f)

a) $\lim_{x\to 3^+} f(x)=+\infty$ et $\lim_{x\to 3^-} f(x)=-\infty$

donc La droite $x=3$ est une asymptote a la courbe C_f

b) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

on a : $f(x)=x+1+\frac{4}{x-3} \Leftrightarrow f(x)-(x+1)=\frac{4}{x-3}$

c) $\lim_{x\to+\infty} f(x)-(x+1)=\lim_{x\to+\infty}\frac{4}{x-3}=\frac{4}{+\infty}=0$

Donc : la droite $y=x+1$ est une asymptote oblique à la courbe C_f au voisinage de $+\infty$

d) $\lim_{x\to-\infty} f(x)-(x+1)=\lim_{x\to-\infty}\frac{4}{x-3}=\frac{4}{-\infty}=0$

Donc : la droite $y=x+1$ est une asymptote oblique à la courbe C_f au voisinage de $-\infty$

4) les variations de f et le tableau de variation ?

$$\forall x\in\mathbb{R}-\{3\}: f'(x)=\left(x+1+\frac{4}{x-3}\right)'=1-\frac{4}{(x-3)^2}=\frac{(x-3)^2-4}{(x-3)^2}$$

$$f'(x)=\frac{(x-3)^2-2^2}{(x-3)^2}=\frac{(x-3-2)(x-3+2)}{(x-3)^2}=\frac{(x-5)(x-1)}{(x-3)^2}$$

Le signe de $f'(x)$ est celui de $(x-5)(x-1)$

$(x-5)(x-1)=0 \Leftrightarrow x-5=0$ ou $x-1=0 \Leftrightarrow x=5$ ou $x=1$

Le tableau de signe :

x	$-\infty$		1		3		5		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	‖	−	0	+	

Le tableau de variation

x	$-\infty$		1		3			5		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	‖		−	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$		↘	8	↗	$+\infty$

5) Montrons que le point $\Omega(3;4)$ est un centre de symétrie de (C_f) ??

a) Montrons que si $x\in\mathbb{R}-\{3\}$ alors $6-x\in\mathbb{R}-\{3\}$?

$x\in\mathbb{R}-\{3\}\Leftrightarrow x\neq 3\Leftrightarrow -x\neq -3\Leftrightarrow 6-x\neq 3\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 6-x\in\mathbb{R}-\{3\}$

b) Montrons que : $f(6-x)+f(x)=8=2b$?

$$f(6-x)+f(x)=6-x+1+\frac{1}{6-x-3}+x+1+\frac{1}{x-3}$$

$$=8+\frac{1}{-x+3}+\frac{1}{x-3}=8-\frac{1}{x-3}+\frac{1}{x-3}=8$$

Donc : $\Omega(3;4)$ est un centre de symétrie de (C_f)

6) étudie la concavité de la courbe de f ?

$\forall x\in D_f$: $f'(x)=1-\frac{4}{(x-3)^2}$

Donc : $f''(x)=\frac{2(x-3)4}{(x-3)^4}=\frac{8(x-3)}{(x-3)^4}$

Le signe de $f''(x)$ est celui de $x-3$

Si $x\succ 3$ (C_f)est convexe

Si $x\prec 3$ (C_f)est concave

7) $f(x)-(x+1)=\frac{4}{x-3}$

Si $x\succ 3$ alors $f(x)-(x+1)\succ 0$

Donc la courbe C_f est au- dessus de (Δ

Si $x\succ 3$ alors $f(x)-(x+1)\prec 0$

Donc la courbe C_f est au-dessous de (Δ

8) a) intersections avec l'axe des abscisses

$f(x)=0\Leftrightarrow\frac{x^2-2x+1}{x-3}=0\quad\forall x\in\mathbb{R}-\{3\}$:

$\Leftrightarrow x^2-2x+1=0\qquad\Delta=b^2-4ac=4-4\times1\times1=0$

$x=\frac{-b}{2a}=1$ **donc** le point d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses est $A(1;0)$

a) intersections avec l'axe des ordonnées

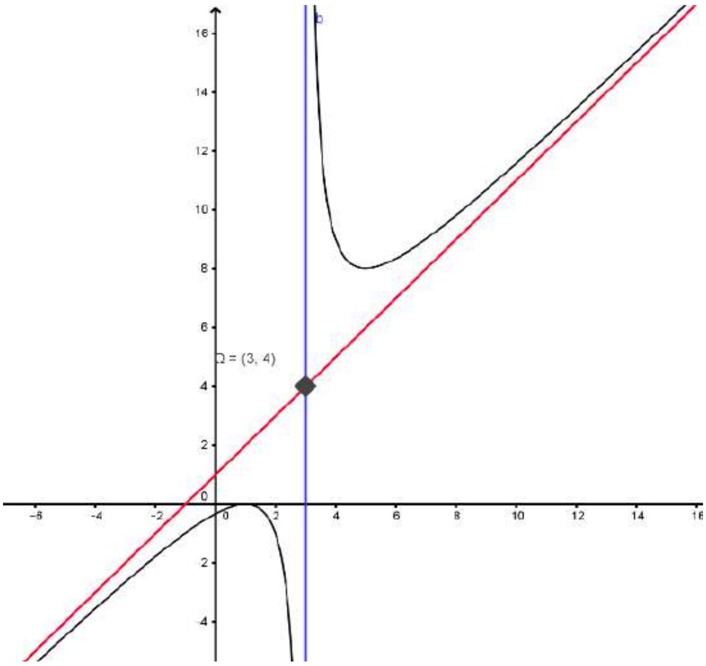
$f(0)=-\frac{1}{3}$ **donc** le point d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des ordonnées est $C\left(0;-\frac{1}{3}\right)$

9) l'équation de la tangente (T) a la courbe (C_f) en $x_0=2$ est $y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$

$f'(2)=\frac{(2-5)(2-1)}{(2-3)^2}=\frac{-3}{1}=-3$ et $f(2)=\frac{2^2-2\times2+1}{2-3}=-1$

$y=f(2)+f'(2)(x-2)\Leftrightarrow y=-1-3(x-2)\Leftrightarrow y=-3x+5$

9)La courbe (C_f) :



Exercice 10: Soit f la fonction définie par : $f(x)=\sqrt{x^2-x-2}$

1)Déterminer D_f

2) Déterminer les limites aux bornes de D_f

3) étudier les branches infinies de la courbe (C_f)

4) étudier la dérivabilité de f adroite de 2 et à gauche de -1

5) étudier les variations de f et dresser le tableaux de variation de f

6) tracer la courbe (C_f)

Solution :1) $D_f=\{x\in\mathbb{R}/x^2-x-2\geq$

$\Delta=b^2-4ac=(1)^2-4\times2\times(-1)=1+8=9=(3)^2>0$

$x_1=-1$ **et** $x_2=2$

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
x^2-x-2		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc : $D_f=]-\infty;-1]\cup[2;+\infty[$

2) on a : $\forall x\in D_f-\{0\}$

$$f(x)=\sqrt{x^2-x-2}=|x|\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}$$

Et puisque : $\lim_{x\to-\infty}\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}=1$et $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}=1$

Alors : $\lim_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$ et $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

3) étude des branches infinies de la courbe $\left(C_f\right)$ au voisinage de $-\infty$ et $+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{|x|\sqrt{1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}=1$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)-x=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2-x-2}+x\right)\left(\sqrt{x^2-x-2}-x\right)}{\sqrt{x^2-x-2}+x}$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)-x=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x-2}{\sqrt{x^2-x-2}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-1-\frac{2}{x}}{\sqrt{1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}+1}=-\frac{1}{2}$$

Donc : la droite $y=x-\frac{1}{2}$ est une asymptote oblique à la courbe C_f au voisinage de $+\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}-\sqrt{1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}=-1$$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)+x=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2-x-2}+x\right)\left(\sqrt{x^2-x-2}-x\right)}{\sqrt{x^2-x-2}-x}$$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)-x=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x-2}{\sqrt{x^2-x-2}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-1-\frac{2}{x}}{-\sqrt{1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}-1}=\frac{1}{2}$$

Donc : la droite $y=-x+\frac{1}{2}$ est une asymptote oblique à la courbe C_f au voisinage de $-\infty$

4) étudie de la dérivabilité de f adroite de 2 et à gauche de -1

$$\lim_{x\to-1^-}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim_{x\to-1^-}\frac{\sqrt{x^2-x-2}}{x+1}=\lim_{x\to-1^-}\frac{x-2}{\sqrt{x^2-x-2}}=-\infty$$

$$\lim_{x\to2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to-1^-}\frac{\sqrt{x^2-x-2}}{x-2}=\lim_{x\to-1^-}\frac{x+1}{\sqrt{x^2-x-2}}=+\infty$$

Donc f n'est pas dérivable à droite de 2 et à gauche de -1

Alors la courbe Cf admet une demi-tangente verticale aux points $A(-1.0)$ et $B(2.0)$

5) étude des variations de f et le tableaux de variation de f ?

$x^2-x-2\succ0\Leftrightarrow\forall x\in\left]-\infty;-1\right[\cup\left]2;+\infty\right[$

Donc :

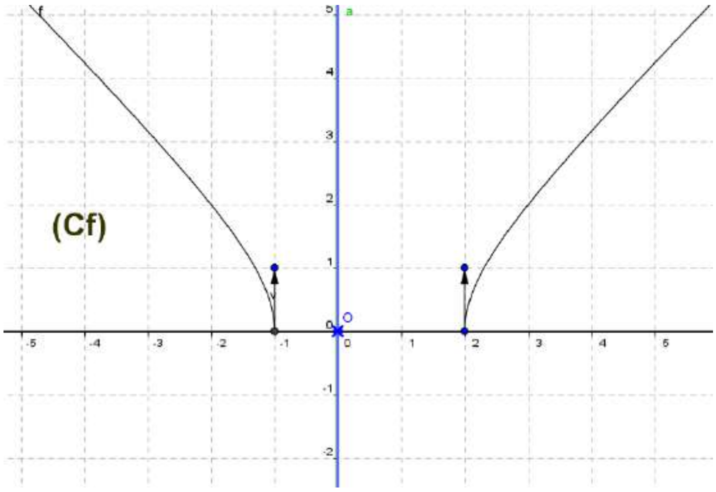
$$f'(x)=\left(\sqrt{x^2-x-2}\right)'=\frac{\left(x^2-x-2\right)'}{2\sqrt{x^2-x-2}}=\frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x-2}}$$

$$f'(x)=\frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x-2}}\quad\forall x\in\left]-\infty;-1\right[\cup\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$$

Le signe de $f'(x)$ est celui de : $2x-1$

x	$-\infty$ 1		2 $+\infty$
$f'(x)$	$-$	//////	$+$
$f(x)$	$+\infty$ ↘ 0	//////	0 ↗ $+\infty$

6) tracer la courbe $\left(C_f\right)$



Exercice11: soit f une fonction définie par :

$$f(x)=2\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$$

1) déterminer D_f ensemble de définition de f

2) montrer que f est périodique de période $T=\pi$ et en déduire le domaine d'étude de f

3) déterminer $f'(x)$ et dresser le tableaux de variation de f

4) tracer la courbe $\left(C_f\right)$ sur l'intervalle $[-\pi;\pi]$

Solution :

1) $D_f=\mathbb{R}$

2)a)si $x\in\mathbb{R}$ alors $\pi+x\in\mathbb{R}$

b)

$$f(\pi+x)=2\cos\left(2(\pi+x)+\frac{\pi}{4}\right)=2\cos\left(2x+2\pi+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$f(\pi+x)=2\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=f(x)$$

Donc : f est périodique de période $T=\pi$

Remarque : la fonction : $x\to\cos(ax+b)$ est périodique de période $T=\frac{2\pi}{|a|}$ si $a\neq0$

Un domaine d'étude de f

il suffit d'étudier f sur un intervalle de longueur $T=\pi$

donc par exemple : $D_E=[0;\pi]$

3) $f'(x)$ et le tableaux de variation de f ?

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$ on a :

$$f'(x) = 2 \times -2\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = -4\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$$

Etude du signe de $f'(x)$ sur $D_E = [0;\pi]$

$$x \in [0;\pi] \Leftrightarrow 0 \leq x \leq \pi \Leftrightarrow \frac{\pi}{4} \leq 2x + \frac{\pi}{4} \leq \frac{9\pi}{4}$$

On utilisant le cercle trigo en deduit le signe de $\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$

Le tableau de signe de $\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$ est :

$2x+\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$		π		2π		$\frac{9\pi}{4}$
$\sin(2x+\frac{\pi}{4})$		$+$	0	$-$	0	$+$	

le tableau de variation de f :

x	0		$\frac{3\pi}{4}$		$\frac{7\pi}{8}$		π
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\sqrt{2}$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2	$\searrow$	$\sqrt{2}$

4) du tableau de variation de f :on deduit que Que f change de signe en sur les intervalles $\left[0;\frac{3\pi}{8}\right]$ et $\left[\frac{3\pi}{8};\frac{7\pi}{8}\right]$ cad (C_f) coupe l'axe des abscisses

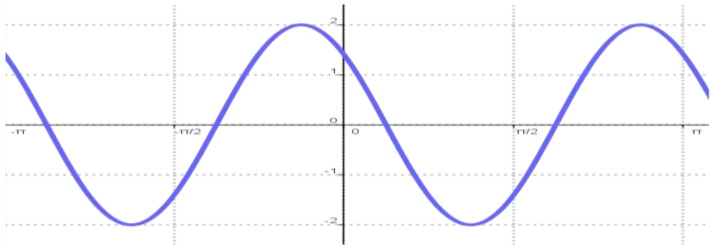
On va résoudre dans $I = \left[0;\frac{7\pi}{8}\right]$ l'équation : $f(x) = 0$

On a : $\begin{cases} f(x) = 0 \\ x \in I \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \\ \frac{\pi}{4} \leq 2x + \frac{\pi}{4} \leq \frac{9\pi}{4} \end{cases}$

$$\begin{cases} 2x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} ou 2x + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{2} \\ x \in I \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} ou. x = \frac{5\pi}{8}$$

On trace la courbe (C_f) sur l'intervalle $D_E = [0;\pi]$

Et on deduit le reste par les translations de vecteurs $k\pi\vec{i}$ $k \in \mathbb{Z}$



Exercice12: soit f une fonction définie par : $f(x) = 4\sin x + \cos 2x$

1) déterminer D_f ensemble de définition de f

2) montrer que f est périodique de période $T = 2\pi$ et en déduire le domaine d'étude de f

3) déterminer $f'(x)$ et dresser le tableaux de variation de f

4)donner l'équation de la tangente (T) a la courbe de f en en $x_0 = 0$

5) calculer $f''(x)$ en fonction de $\sin x$

6)déterminer les points d'inflexions de la courbe (C_f)

7) tracer la courbe (C_f) sur l'intervalle $[-2\pi;4\pi]$

Solution :1) $D_f = \mathbb{R}$

2)a)si $x \in \mathbb{R}$ alors $2\pi + x \in \mathbb{R}$

b) $f(2\pi + x) = 4\sin(x + 2\pi) + \cos(2(x + 2\pi))$

$$f(2\pi + x) = 4\sin x + \cos(2x) = f(x)$$

Donc : f est périodique de période $T = 2\pi$

Un domaine d'étude de f

il suffit d'étudier f sur un intervalle de longueur $T = 2\pi$

donc par exemple : $D_E = [0;2\pi]$

f est dérivable sur $D_E = [0;2\pi]$ et $\forall x \in D_E$ on a :

$$f'(x) = 4\cos x - 2\sin(2x) = 4\cos x - 4\cos x \sin x$$

$$f'(x) = 4\cos x(1 - \sin x)$$

Etude du signe de $f'(x)$ sur $D_E = [0;2\pi]$

On a : $1 - \sin x \geq 0$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x(1 - \sin x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0.ou.1 - \sin x = 0$$

$1 - \sin x = 0 \Leftrightarrow \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}$ Donc :

x	0		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	3	$\searrow$	-5	$\nearrow$	1

4) l'équation de la tangente (T) a la courbe de f en en $x_0 = 0$ est : $y = f(0) + f'(0)(x-0)$

Avec : $f'(0) = 4$ et $f(0) = 1$ donc : $y = 4x+1$

5) calcule de $f''(x)$ en fonction de $\sin x$:

On a $f'(x) = 4\cos x - 2\sin(2x)$

Donc : $\forall x \in \mathbb{R}$

$f''(x) = -4\sin x - 4\cos(2x) = -4\sin x - 4(1-2\sin^2 x)$

$f''(x) = 8\sin^2 x - 4\sin x - 4 = 4(\sin^2 x - \sin x - 1)$

Etude du signe de $f''(x)$ sur $D_E = [0;2\pi]$

On pose : $X = \sin x$ donc : $X \in [-1;1]$ et l'équation $\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$ devient : $X^2 - X - 1 = 0$

$\Delta = 9$ les solutions sont : $X_1 = -\dfrac{1}{2}$ et $X_2 = 1$

Donc : $f''(x) = 8(\sin x - 1)\left(\sin x + \dfrac{1}{2}\right)$

On a : $\sin x - 1 \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

En utilisant le cercle trigo en deduit que :

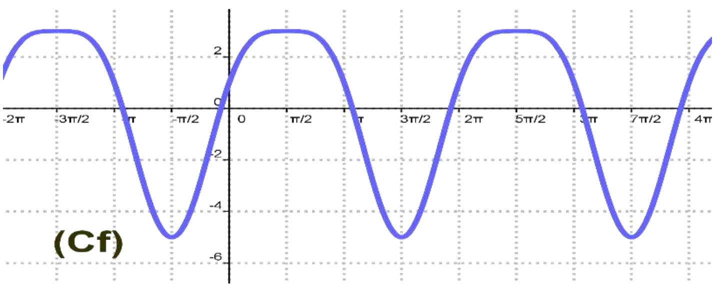
$\sin x + \dfrac{1}{2} \leq 0 \Leftrightarrow \sin x \leq -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x \in \left[\dfrac{7\pi}{6}; \dfrac{11\pi}{6}\right]$

x	0		$\frac{7\pi}{6}$		$\frac{11\pi}{6}$		2π
$f''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Donc : (C_f) est convexe sur $\left[\dfrac{7\pi}{6}; \dfrac{11\pi}{6}\right]$

(C_f) est concave sur $\left[0, \dfrac{7\pi}{6}\right] \cup \left[\dfrac{11\pi}{6}; 2\pi\right]$ et $A\left(\dfrac{7\pi}{6}, -\dfrac{3}{2}\right)$ et $B\left(\dfrac{11\pi}{6}, -\dfrac{3}{2}\right)$ sont les points d'inflexions de (C_f)

7) La courbe (C_f) sur l'intervalle $[-2\pi; 4\pi]$



Exercice13: soit f une fonction définie par :

$f(x) = \dfrac{\sin x}{2+\cos x}$

1) déterminer D_f ensemble de définition de f

2) montrer qu'il suffit d'étudier f sur $[0;\pi]$

3) déterminer $f'(x)$ et dresser le tableaux de variation de f

4) tracer la courbe (C_f) sur l'intervalle $[-2\pi; 2\pi]$

Solution : 1) $D_f = \mathbb{R}$ car $2+\cos x \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

2) <u>Un domaine d'étude de</u> f

a)si $x \in \mathbb{R}$ alors $2\pi + x \in \mathbb{R}$

) $f(2\pi + x) = \dfrac{\sin(2\pi + x)}{2+\cos(2\pi+x)} = \dfrac{\sin x}{2+\cos x} = f(x)$

Donc : f est périodique de période $T = 2\pi$

il suffit d'étudier f sur un intervalle de longueur $T = 2\pi$ donc par exemple : $D = [-\pi; \pi]$

Etudions la parité de f ?

$f(-x) = \dfrac{\sin(-x)}{2+\cos(-x)} = -\dfrac{\sin x}{2+\cos x} = -f(x)$

Donc f est impair

Donc il suffit d'étudier f sur $D_E = [0;\pi]$

3) f est dérivable sur $D_E = [0;\pi]$ et $\forall x \in D_E$ on a :

$f'(x) = \dfrac{\cos x(2+\cos x) + \sin x \times \sin x}{(2+\cos x)^2} = \dfrac{2\cos x + 1}{(2+\cos x)^2}$

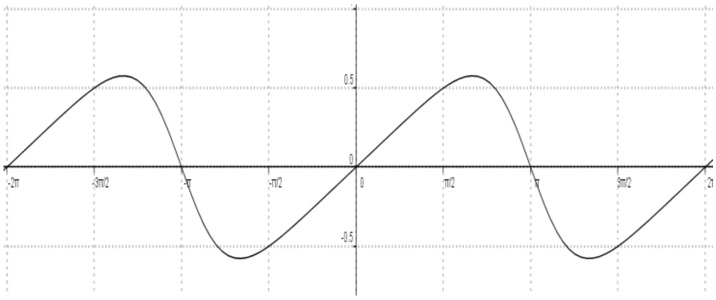
Etude du signe de $f'(x)$ sur $D_E = [0;\pi]$

Le signe de $f'(x)$ est celui de : $2\cos x + 1$

$2\cos x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow \cos x \geq -\dfrac{1}{2}$ Et $x \in [0;\pi]$ Donc :

$2\cos x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \in \left[0; \dfrac{2\pi}{3}\right]$

x	0		$\frac{2\pi}{3}$		π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\searrow$	0



C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices

Que l'on devient un mathématicien

VECTEURS DE L'ESPACE

I) DEFINITION : Vecteur de l'espace

Définition : Soient A, B deux points dans l'espace $\mathcal{E}$

Si A et Bsont distinctes alors Pour tout point M dans l'espace $\mathcal{E}$ il existe un point unique N dans l'espace $\mathcal{E}$ tel que :MABN est un parallélogramme et est écrit : $\vec{u}=\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{MN}$

Si A et B sont confondues alors : $\vec{0}=\overrightarrow{AA}=\overrightarrow{MN}$ (vecteur nul)

Remarques : Si O un point dans l'espace $\mathcal{E}$ alors pour tout vecteur $\vec{u}$ de l'espace il existe un point unique M dans l'espace $\mathcal{E}$ tel que : $\overrightarrow{OM}=\vec{u}$

L'application : $\varphi : \mathcal{E} \to V_3$

$M \mapsto \overrightarrow{OM}=\vec{u}$ est une bijection

L'ensemble des vecteurs se note V_3

Un vecteur non nul $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ est caractérisé par :

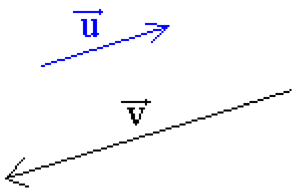
Sa direction : c'est la direction de la droite (AB)

Son sens : de A a B

Sa norme : $\|\vec{u}\|=\|\overrightarrow{AB}\|=AB$

Deux vecteurs sont **égaux** s'ils ont la même direction, le même sens, la même norme.

Deux vecteurs peuvent avoir la même direction de tels vecteurs sont **colinéaires**



$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{MN}$ ssi ABNM est un parallélogramme

II) LES OPERATIONS DANS V_3 .

1) L'addition.

Définition : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls de V_3 ; Soient les points O : A ; B

tel que $\vec{u}=\overrightarrow{OB}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{OC}$

la somme des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le vecteur $\vec{u}+\vec{v}=\overrightarrow{OD}$ tel que : OBDC est un parallélogramme

$\vec{u}+\vec{v}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OD}$

Propriété :L'addition dans V_3 a les propriétés suivantes :

L'addition dans V_3 est **commutative** :

$\forall \vec{u} \in V_3$ et $\forall \vec{v} \in V_3$ $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$

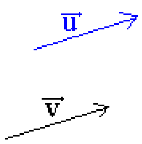
L'addition dans V_3 est **associative** $\forall \vec{u} \in V_3$ et $\forall \vec{v} \in V_3$ et $\forall \vec{w} \in V_3$

$\left(\vec{u}+\vec{v}\right)+\vec{w}=\vec{v}+\left(\vec{u}+\vec{w}\right)$

$\vec{0}$ Est **l'élément neutre pour l'addition dans** V_3 . $\forall \vec{u} \in V_3$: $\vec{u}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{u}=\vec{u}$

Tout vecteur $\vec{u}$ de V_3 admet un **opposé** noté $-\vec{u}$: $\vec{u}+\left(-\vec{u}\right)=\left(-\vec{u}\right)+\vec{u}=\vec{0}$

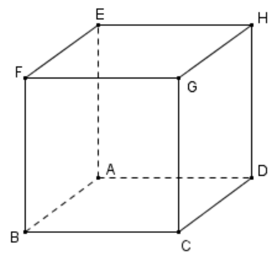
Puisque la somme de de deux vecteurs vérifie les quatre propriétés précédentes on dit que : (V_3 , +) est un groupe commutatif.



Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de V_3 la différence des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est la somme de $\vec{u}$ et de $\left(-\vec{u}\right)$ et se note : $\vec{u}-\vec{v}$

et on a donc : $\vec{u}-\vec{v}=\vec{u}+\left(-\vec{v}\right)$

Exemple :



ABCDEFGH un cube on pose :

Simplifier : $\vec{t}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{FH}$

Solution :

On a : $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$

$\vec{t}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{FH}=\overrightarrow{AB}+\left(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AE}\right)+\overrightarrow{FH}$

(Relation de Chasles)

$\vec{t}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{FH}=\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{BD}$ Car

$\overrightarrow{FH}=\overrightarrow{BD}$ (FHDB est un parallélogramme)

$\vec{t}=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{BB}+\overrightarrow{AE}=\vec{0}+\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AE}$

2) Produit d'un vecteur par un réel.

Définition : $\forall \vec{u} \in V_3$ et $\forall \vec{v} \in V_3$

Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul et k un réel non nul et on pose : $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$

sur la droite (AB) il existe un seul point C tel que $\overrightarrow{AC}=k\vec{u}$

Le vecteur $\vec{v}=k\overrightarrow{AB}=k\vec{u}$ s'appelle le produit du réel k et du vecteur $\vec{u}$

on pose pour tout k dans $\mathbb{R}$:

$k\vec{0}=\vec{0}$ et $\forall \vec{u} \in V_3$ $0\vec{u}=\vec{0}$

on a : $k\vec{u}=\vec{0} \Leftrightarrow \vec{u}=\vec{0}$ ou $k=0$

Propriété : Le produit d'un vecteur par un réel a les propriétés suivantes :

$\forall \vec{u} \in V_3$ et $\forall \vec{v} \in V_3$ et $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ $\forall \beta \in \mathbb{R}$

1) $\alpha\left(\vec{u}+\vec{v}\right)=\alpha\vec{u}+\alpha\vec{v}$ 2) $\left(\alpha+\beta\right)\vec{u}=\alpha\vec{u}+\beta\vec{u}$

3) $1\vec{u}=\vec{u}$ 4) $\alpha\left(\beta\vec{u}\right)=\left(\alpha\beta\right)\vec{u}$

Puisque (V_3 , +) est un groupe commutatif et le produit d'un réel par un vecteur vérifie les quatre propriétés précédente on dit que :

(V_3 , +, .) est un espace vectoriel réel.

Remarque :

$\forall \vec{u} \in V_3$ et $\forall \vec{v} \in V_3$ et $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ $\forall \beta \in \mathbb{R}$

1) $\alpha\left(\vec{u}-\vec{v}\right)=\alpha\vec{u}-\alpha\vec{v}$ 2) $\left(\alpha-\beta\right)\vec{u}=\alpha\vec{u}-\beta\vec{u}$

3) $\alpha\left(-\beta\vec{u}\right)=\left(-\alpha\right)\left(\beta\vec{u}\right)=-\alpha\beta\vec{u}$

III) VECTEURS COLINEAIRES.

1) Vecteur colinéaires

Définition : On dit que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires s'il existe un réel k tel que : $\vec{v} = k.\ \vec{u}$

Remarque : Tout vecteur est colinéaire avec lui-même : $\vec{u} = k.\ \vec{u}$

Tout vecteur est colinéaire avec $\vec{0}$

car : $\vec{u}$. 0= $\vec{0}$

On a : $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{CD}$ alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires ssi $(AB)\,||\,(CD)$

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls

A et B et C non alignés ssi $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires

A et B et C non alignés $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} / \overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}$

Exemple : ABCDEFGH un cube et K milieu du segment $[EF]$ et L milieu du segment $[CF]$ et M un point du segment $[CD]$ tel que :

$\overrightarrow{CM}=\frac{1}{4}\overrightarrow{CD}$ Montrer que : $(ML)\,||\,(DK)$

Solution : en utilisant la Relation de Chasles

On a : $\overrightarrow{ML}=\overrightarrow{CL}-\overrightarrow{CM}$ et puisque : L milieu du segment $[CF]$ Alors : $\overrightarrow{CL}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CF}$

donc : $\overrightarrow{ML}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CF}-\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}\right)$ (1)

D'autre part On a : $\overrightarrow{CK}=\overrightarrow{CF}+\overrightarrow{FK}$ et $\overrightarrow{DK}=\overrightarrow{CK}-\overrightarrow{CD}$ Donc : $\overrightarrow{DK}=\overrightarrow{CF}+\overrightarrow{FK}-\overrightarrow{CD}$

et puisque : K milieu du segment $[EF]$

Alors : $\overrightarrow{FK}=\frac{1}{2}\overrightarrow{FE}$ donc : $\overrightarrow{FK}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$ (car : $\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{CD}$)

Donc : $\overrightarrow{DK}=\overrightarrow{CF}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CF}-\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$ (2)

De (1) et (2) on a : $\overrightarrow{ML}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DK}$

donc $\overrightarrow{DK}$ et $\overrightarrow{ML}$ sont colinéaires

Donc : $(ML)\,||\,(DK)$

Propriété : Si on a : $a\vec{u}+b\vec{v}=\vec{0}$ avec $a\neq 0$ ou $b\neq 0$ alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires

Exemple : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires

Déterminer les réels x et y tels que :

$x\left(\vec{u}+2\vec{v}\right)+y\left(\vec{u}+3\vec{v}\right)=2\vec{u}+5\vec{v}$

Solution : $x\left(\vec{u}+2\vec{v}\right)+y\left(\vec{u}+3\vec{v}\right)=2\vec{u}+5\vec{v} \Leftrightarrow$

$$\left(x+y-2\right)\vec{u}+\left(2x+3y-5\right)\vec{v}=\vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-2=0 \\ 2x+3y-5=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=2 \\ 2x+3y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$$

2) Droite vectorielle

Définition : Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul, l'ensemble des vecteurs colinéaires avec le vecteur $\vec{u}$ s'appelle : **la droite vectorielle engendrée par le vecteur $\vec{u}$ et se note $\Delta_{\vec{u}}$**

$\Delta_{\vec{u}}=\left\{\vec{v}\in V_3 / \exists k \in \mathbb{R} / \vec{v}=k\vec{u}\right\}$

$\Delta_{\vec{u}}=\Delta_{\vec{v}} \Leftrightarrow \vec{u}$ *et* $\vec{v}$ sont colinéaires

Si $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires

alors $\Delta_{\vec{u}}\cap\Delta_{\vec{v}}=\left\{\vec{0}\right\}$

3) Détermination vectorielle d'une droite

Définition : Soient $\vec{u}$ un vecteur non nulle et A un point de l'espace affine $\mathcal{E}$. L'ensemble des points M dans l'espace $\mathcal{E}$ qui vérifient $\overrightarrow{AM}=k\vec{u}$

où k est un réel s'appelle **la droite qui passe par A et de vecteur directeur $\vec{u}$.** On la note par $D\left(A;\vec{u}\right)$:

$$D\left(A;\vec{u}\right)=\left\{M\in\varepsilon / \exists k\in\mathbb{R} / \overrightarrow{AM}=k\vec{u}\right\}$$

Remarque :

- Le couple (A, $\vec{u}$) détermine un repère sur la droite $D\left(A;\vec{u}\right)$
- Tout vecteur non nul et colinéaire avec $\vec{u}$ est aussi vecteur Directeur de la droite $D\left(A;\vec{u}\right)$

IV) VECTEURS COPLANAIRES.

1) vecteurs coplanaires.

Rappelle :

Un plan est défini par :

□Trois points non alignés

□Deux droites sécantes ou strictement parallèles.

□Une droite et un point extérieur à cette droite.

Définition : Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs et A un point l'espace

on pose $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$ $\overrightarrow{AC}=\vec{v}$ et $\overrightarrow{AD}=\vec{w}$

On dit que : les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires ssi les points A, B ; C et D sont coplanaires

Propriété : Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs dans l'espaces vectoriel

Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement s'ils existent deux réels x et y tels que $\vec{w}=x\vec{u}+y\vec{v}$

Remarque :si $\vec{u}$, $\vec{v}$ sont deux vecteurs colinéaires alors les vecteurssont $\vec{w}$ et $\vec{v}$ et $\vec{u}$ coplanaires

2) Plan vectoriel

Définition : Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires ; l'ensemble des vecteurs $\vec{w}$ dans V_3 qui s'écrivent de la forme : $\vec{w}=x\vec{u}+y\vec{v}$

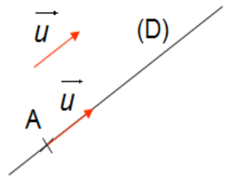
où x et y sont des réels s'appelle le plan vectoriel engendré par $\vec{u}$, $\vec{v}$

3) Détermination vectoriel d'un plan.

Définition : Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires

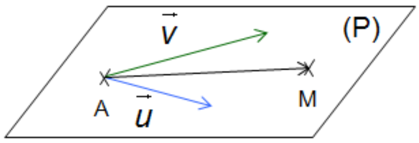
et A un point de l'espace $\mathcal{E}$

l'ensemble des point M dans l'espace qui vérifient $\overrightarrow{AM}=x\vec{u}+y\vec{v}$ est le plan qui passe par A et de vecteurs directeurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, on le note par : $P\left(A;\vec{u};\vec{v}\right)$



$$P\left(A;\vec{u};\vec{v}\right)=\left\{M\in\varepsilon / \exists x\in\mathbb{R} : \exists y\in\mathbb{R} / \overrightarrow{AM}=x\vec{u}+y\vec{v}\right\}$$

Le triplet $R\left(A;\vec{u};\vec{v}\right)$ s'appelle un repère du plan (P) et le couple (x, y) s'appelle les coordonnées du point M dans le plan (P) muni du repère R



Exemple :ABCDEFGH un parallélépipède de centre O et I milieu du segment $[AD]$

on pose $\overrightarrow{EG}=\vec{u}$ $\overrightarrow{FC}=\vec{v}$ et $\overrightarrow{IO}=\vec{w}$

Montrer que : $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires

Solution : On a : $\overrightarrow{EG}=\vec{u}$ et on a $\overrightarrow{EG}=\overrightarrow{AC}$

donc $\overrightarrow{AC}=\vec{u}$

On considère le triangle ADF

et puisque : I milieu du segment $[AD]$

et O milieu du segment $[FD]$

on trouve : $\overrightarrow{IO}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AF}$ Donc : $\overrightarrow{IO}=\overrightarrow{AK}$

et puisque : K milieu du segment $[AF]$

cad $\overrightarrow{AK}=\vec{w}$

et On considérons le point L tel que AFCL est un parallélogramme on trouve : $\vec{v}=\overrightarrow{AL}$

Alors : $\overrightarrow{AC}=\vec{u}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{AL}$ et $\overrightarrow{AK}=\vec{w}$

Donc : $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires

Exemple :ABCDEFGH un cube

M milieu du segment $[HE]$et et N milieu du segment $[HG]$

Les vecteurs $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{CH}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont-ils coplanaires ? justifier

Solution : On considérons le triangle HEG et puisque : M milieu du segment $[HE]$ N milieu du segment $[HG]$ on trouve : $\overrightarrow{EG}=2\overrightarrow{MN}$

et puisque $\overrightarrow{EG}=\overrightarrow{AC}$: alors $\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{MN}$ donc

Les vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires et par suite Les vecteurs $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{CH}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont coplanaires

V) PARALLELISME DANS L'ESPACE

1) Parallélisme de deux droites

Définition : Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ deux vecteurs et
et A et B deux points de l'espace

1) $D\left(A;\vec{u}\right) \parallel D\left(B;\vec{v}\right) \Leftrightarrow \vec{u}$, $\vec{v}$ sont colinéaires

2) A et B et C et D des points tels que : $A \neq B$ et $C \neq D$: $(AB) \parallel (CD) \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}; \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$

Exercice 01: $ABCD$ un tétraèdre et E le milieu du $[BC]$ et soit les points Q ; P ; N ; M tel que :

$\overrightarrow{AN} = 2\overrightarrow{AD}$ $\overrightarrow{CQ} = 3\overrightarrow{CB}$ $\overrightarrow{CP} = 3\overrightarrow{CD}$ $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB}$

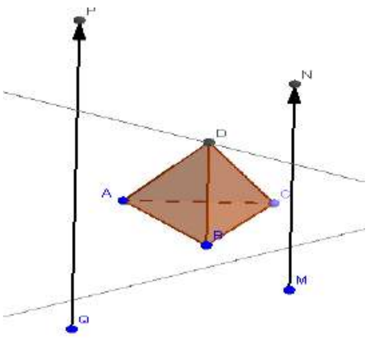
1)Tracer une figure

2)Ecrire $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{PQ}$ en fonction de $\overrightarrow{BD}$

3)En déduire que $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{PQ}$ sont colinéaires

4)Que peut-on dire des droites (MN) et (PQ)

Solution :1)



2) $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN} = -\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} = -2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{MN} = 2\overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{AD} = 2\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}\right) = 2\overrightarrow{BD}$

$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{CQ} = -\overrightarrow{CP} + \overrightarrow{CQ} = -3\overrightarrow{CD} + 3\overrightarrow{CB} = -3\left(\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CB}\right)$

$\overrightarrow{PQ} = -3\left(\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC}\right) = -3\left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}\right) = -3\overrightarrow{BD}$

3) on a $\overrightarrow{MN} = 2\overrightarrow{BD}$ donc $\overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MN}$ ❶

on a $\overrightarrow{PQ} = -3\overrightarrow{BD}$ donc $\overrightarrow{BD} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{PQ}$ ❷

de❶ et ❷ on trouve : $\frac{1}{2}\overrightarrow{MN} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{PQ}$ donc $\overrightarrow{MN} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{PQ}$

donc : $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{PQ}$ sont colinéaires

4)on a $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{PQ}$ sont colinéaires

Donc (MN) et (PQ) sont parallèles

Exercice02 : $ABCD$ un tétraèdre et E le milieu du $[BC]$ et soit les points K ; L tel que :

$\overrightarrow{CL} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$ et $\overrightarrow{DK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{CB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

Montrer que $(LD) \parallel (EK)$

Solution : pour montrer que $(LD) \parallel (EK)$ il suffit de montrer que : $\overrightarrow{LD}$, $\overrightarrow{EK}$ sont colinéaires ??

On a : $\overrightarrow{DK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{CB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ on utilisant la Relation de Chasles

Donc : $\overrightarrow{AK} - \overrightarrow{AD} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

Donc : $\overrightarrow{EK} = \left(\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\right) - \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$ et

puisque : $\overrightarrow{EK} = \overrightarrow{AK} - \overrightarrow{AE}$

Donc : $\overrightarrow{EK} = \left(\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\right) - \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$

Alors : $\overrightarrow{EK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ ❶

On a : $\overrightarrow{AL} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CL} = \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$

et puisque : $\overrightarrow{LD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AL} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$ ❷

de ❶ et ❷ on déduit que : $\overrightarrow{EK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{LD}$

donc : $(LD) \parallel (EK)$

2) Parallélisme d'une droite et d'un plan.

Propriété : La droite $D\left(A;\vec{u}\right)$ et le plan P

$P\left(B;\vec{v};\vec{w}\right)$ sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires

$D\left(A;\vec{u}\right) \parallel P\left(B;\vec{v};\vec{w}\right) \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R} : \exists y \in \mathbb{R} / \vec{u} = x\vec{v} + y\vec{w}$

Exemple : ABCDEFGH un cube
K est le symétrique du point D par rapport a H
Montrer que $(AK) \parallel (BCG)$

Solution :on a : $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{DH} = \overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{CG}$

donc : Les vecteurs $\overrightarrow{AK}$, $\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{CG}$ sont coplanaires

on déduit que : $\exists x \in \mathbb{R} : \exists y \in \mathbb{R} / \overrightarrow{AK} = x\overrightarrow{CB} + y\overrightarrow{CG}$

donc : $(AK) \parallel (BCG)$

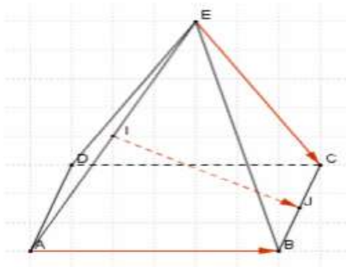
3) Parallélisme de deux plans

Propriété : Deux plans $P\left(A;\vec{u};\vec{v}\right)$ et $Q\left(B;\vec{u}';\vec{v}'\right)$ sont parallèles si et seulement si $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{u}'$ sont coplanaires et $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{v}'$ sont coplanaires aussi

Remarque : Une seule condition n'est pas suffisante

Exercices

Exercice01 : $EABCD$ un pyramide de base le rectangle $ABCD$ et soit I le milieu du segment $[AE]$ et J le milieu du segment $[BC]$



Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{EC}$ et $\overrightarrow{IJ}$ sont coplanaires

Exercice02 : $ABCD$ un tétraèdre et soit le point M de l'espace tel que : $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$

1)Montrer que $M \in (ABC)$

2) En déduire que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$; $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont coplanaires

Exercice07: $ABCDEFGH$ un parallélépipède rectangle et I le milieu du segment $[BF]$

1) les vecteurs $\overrightarrow{CA}$; $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{DG}$ sont-ils coplanaires ?

2) les vecteurs $\overrightarrow{AI}$; $\overrightarrow{DF}$ et $\overrightarrow{HE}$ sont-ils coplanaires ? (Justifier vos réponses)

Exercice03 : $ABCD$ un tétraèdre et soit les points K ; L ; M ; N tel que : $2\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{AD}$ et L le milieu du $[BK]$ et $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AN} = -2\overrightarrow{AD}$

1) écrire les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{AL}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$

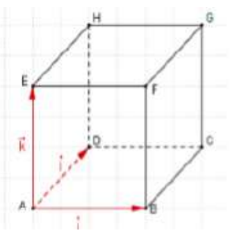
2)Montrer que les points L ; M ; N sont alignés et déterminer la position du point L sur la droite (MN)

3) déterminer les réels α et β tels que : $\overrightarrow{AD} = \alpha\overrightarrow{AL} + \beta\overrightarrow{AM}$ et que peut-on dire des points A ; M ; D ; L ?

Exercice04 : $ABCDEFGH$ un cube

On pose : $\overrightarrow{AD} = \vec{j}$ et $\overrightarrow{AE} = \vec{k}$ te $\overrightarrow{AB} = \vec{i}$

Et $\vec{u} = \vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$ avec I le milieu du segment $[HG]$



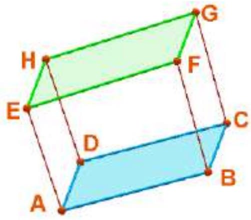
1)Montrer que $\vec{u}$ est un vecteur directeur de la droite (AI)

2)soit la droite (Δ) passant par le point G et parallèle a (AI) et le point M tel que $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BG}$ Montrer que $M \in (\Delta)$

Exercice05 : dans l'espace on considère les points A ; B ; C ; D ; E tel que : $2\overrightarrow{EA} + 4\overrightarrow{EB} - 5\overrightarrow{EC} - \overrightarrow{ED} = \vec{0}$

Montrer que les points : A ; B ; C ; D sont coplanaires

Exercice06 : $ABCDEFGH$ un parallélépipède rectangle ou pavé droit et soit le point I de l'espace tel que : $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AG}$

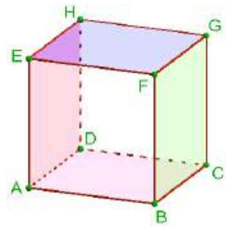


1)Montrer que : $\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{ID} + \overrightarrow{IE} = 3\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AG}$ et que $\overrightarrow{IE} = -\overrightarrow{IB} - \overrightarrow{ID}$

2)Que peut-on dire des points : I ; B ; D ; E

Exercice07: $ABCDEFGH$ un cube et soient les points :

M et N tels que : $\overrightarrow{EM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{EH}$ et $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$



1)Montrer que : $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{EA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{DB}$

2)Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{MN}$; $\overrightarrow{EA}$ et $\overrightarrow{AB}$ Sont coplanaires

Exercice08 : $ABCDEFGH$ un cube avec I le milieu du segment $[AB]$ et J le milieu de $[AD]$ et K un point tel que : $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AG}$

1) Ecrire les vecteurs $\overrightarrow{EI}$; $\overrightarrow{EJ}$ et $\overrightarrow{EK}$ en fonction de $\overrightarrow{EA}$; $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{EH}$

2) vérifier que : $5\overrightarrow{EK} = 2\overrightarrow{EI} + 2\overrightarrow{EJ}$

3) En déduire que les points : I ; J ; K ; E sont coplanaires

« c'est en forgeant que l'on devient forgeron » dit un proverbe.

c'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien

Géométrie analytique de l'espace

I)LE REPERE DANS L'ESPACE et LA BASE DANS V_3

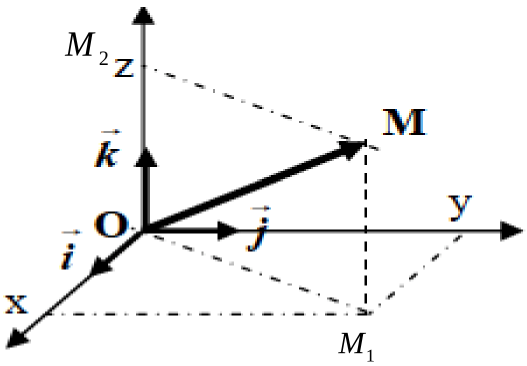
1) Le repère dans l'espace ($\mathcal{E}$)

Soit O un point dans l'espace ($\mathcal{E}$) et $\vec{i}$ et $\vec{j}$ et $\vec{k}$ trois vecteurs non coplanaires

On pose : $\overrightarrow{OI}=\vec{i}$ et $\overrightarrow{OJ}=\vec{j}$ et $\overrightarrow{OK}=\vec{k}$

Soient M un point dans l'espace, la droite qui passe par M et parallèle a (OK) coupe le plan (OIJ) en M_1

On a : $M_1\in(OIJ)$ donc $\overrightarrow{OM_1}$ et $\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{OJ}$ sont



non coplanaires

Donc : il existe un et un seul couple (x, y) tel que : $\overrightarrow{OM_1}=x\overrightarrow{OI}+y\overrightarrow{OJ}$ donc : $\overrightarrow{OM_1}=x\vec{i}+y\vec{i}$

la droite qui passe par M et parallèle au plan (OIJ) coupe la droite (OK) en M_2

On a : $M_2\in(OK)$ donc $\overrightarrow{OM_2}$ et $\overrightarrow{OK}$ sont colinéaires

Donc il existe un et un seul réelle z tel que : $\overrightarrow{OM_2}=z\overrightarrow{OK}=z\vec{k}$

Et puisque OM_1MM_2 est un parallélogramme $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OM_1}+\overrightarrow{OM_2}$ et par suite :

$(\forall M\in(\mathcal{E}))(\exists!\,(x, y, z)\in\mathbb{R}^3\ /\ \overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{i}+z\vec{k}$

Propriété et définition: Soit O un point dans l'espace ($\mathcal{E}$) , $\vec{i}$ et $\vec{j}$ et $\vec{k}$ trois vecteurs non coplanaires :

$(\forall M\in(\mathcal{E}))(\exists!\,(x, y, z)\in\mathbb{R}^3\ /\ \overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{i}+z\vec{k}$

Le quadruplet $R\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ s'appelle **u**n repère dans l'espace (**$\mathcal{E}$**) **;** on écrit $M(x, y, y)$

- Le réel x s'appelle l'abscisse du point M dans le repère R
- Le réel y s'appelle l'ordonnée du point M dans le repère R
- Le réel z s'appelle la cote du point M dans le repère R

Remarque : Pour définir un repère de l'espace il suffit d'un point et de 3 vecteurs non coplanaires

2) La base dans l'espace vectoriel V_3 .

$\vec{i}$ et $\vec{j}$ et $\vec{k}$ trois vecteurs non coplanaires et $\vec{u}$ un vecteur donné

Si O est un point dans l'espace ($\mathcal{E}$) alors on sait qu'il existe un seul point M dans ($\mathcal{E}$) tel que : $\vec{u}=\overrightarrow{OM}$ et d'après la propriété précédente :

$\exists!\,(x, y, z)\in\mathbb{R}^3\ /\ \overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{i}+z\vec{k}$

On peut conclure donc qu'il existe un unique triplet (x, y, z) tel que $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{i}+z\vec{k}$

Propriété et définition: Soit $\vec{i}$ et $\vec{j}$ et $\vec{k}$ trois vecteurs non coplanaires dans V_3

On a : $(\forall\vec{u}\in\mathcal{V}3)(\exists!\,(x, y, z)\in\mathbb{R}^3\ /$

$\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{i}+z\vec{k}$

Le triplet $B\left(\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ s'appelle une base de l'espace vectoriel V_3 on écrit $\vec{u}\left(x;y;z\right)$

- Le réel x s'appelle la première composante du vecteur $\vec{u}$ dans la base β
- Le réel y s'appelle la deuxième composante du vecteur $\vec{u}$ dans la base β
- Le réel z s'appelle la troisième composante du vecteur $\vec{u}$ dans la base β

Remarque : Pour définir une base de l'espace vectoriel V_3 , il suffit de trois vecteurs non coplanaires.

3) Les opérations dans V_3 .

- $\vec{u}\left(x;y;z\right)$ et $\vec{v}\left(x';y';z'\right)$ deux vecteurs dans l'espace vectoriel V_3 muni de la base $B\left(\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ on a donc : $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{i}+z\vec{k}$ et

$\vec{v}=x'\vec{i}+y'\vec{i}+z'\vec{k}$ par suite :

$\vec{u}+\vec{v}=(x+x')\vec{i}+(y+y')\vec{j}+(z+z')\vec{k}$

D'où : $\vec{u}+\vec{v}(x+x';y+y';z+z')$

De même on montre que si k est un réel alors : $k\vec{u}(kx;ky;kz)$

Si I est le milieu du segment $[AB]$ alors : $I\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2};\frac{z_A+z_B}{2}\right)$

- Dans l'espace muni d'un repère (O; $\vec{i}$; $\vec{j}$; $\vec{k}$), Si $A(x_A;y_A;z_A)$ et $B(x_B;y_B;z_B)$ alors $\overrightarrow{AB}(x_B-x_A;x_B-x_A;z_B-z_A)$

$\vec{u}(x;y;z)$ et $\vec{v}(x';y';z')$ sont égaux si et seulement si :x = x' , y = y' et z = z'.

II) CONDITIONS ANALYTIQUE DE COLINEARITE DE DEUX VECTEURS.

Soients $B(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ une base de V_3 et $\vec{u}(x;y;z)$ et $\vec{v}(x';y';z')$ Deux vecteurs non nuls.

On sait que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement s'il existe un réel k tel que : $\vec{v}=k\vec{u}$ et ceci est équivalent à :
$x' = kx$ et $y' = ky$ et $z' = kz$

et puisque $\vec{u}\neq\vec{0}$ on peut supposer l'un des réels non nul x par exemple

et on aura: $k=\frac{x'}{x}$ (1) et $y'=\frac{x'}{x}y$ (2)

et $z'=\frac{x'}{x}z$ (3)

ce qui est équivalent à :

$k=\frac{x'}{x}$ et $xy'-yx'=0$ et $xz'-zx'=0$

et de (2) et (3) on peut conclure :

$y'z=\frac{x'}{x}yz$ et $z'y=\frac{x'}{x}zy$

d'où : $yz'-zy'=0$ et finalement :
$yz'-zy'=0$ et $xy'-yx'=0$ et $xz'-zx'=0$ ce qui se traduit par : $\begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix}=0$ et $\begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix}=0$

et $\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}=0$ et Les trois déterminants s'appelle les déterminants extraits de $\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \\ z & z' \end{vmatrix}$

Remarque : les déterminants extraits on les trouve par la suppression des lignes
Donc : Si deux vecteurs sont colinéaires alors tous les déterminants extraits sont nuls.
Remarquer que : cette propriété reste vraie si l'un des vecteurs est nul.

Inversement : Soient $\vec{u}(x;y;z)$ et $\vec{v}(x';y';z')$ deux vecteurs non nuls.
Tels que : $yz'-zy'=0$ et $xy'-yx'=0$
et $xz'-zx'=0$

montrons que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

et puisque $\vec{u}\neq\vec{0}$ on peut supposer l'un des réels non nul, y par exemple on aura :

$y'=\frac{y'}{y}y$ et $x'=\frac{y'}{y}x$ et $z'=\frac{y'}{y}z$ donc, on posant :

$k=\frac{y'}{y}$ on obtient : $y'=ky$ et $x'=kx$ et $z'=kz$

ce qui est équivalent à : $\vec{v}=k\vec{u}$

par suite $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Théorème : Soient $\vec{u}(x;y;z)$ et $\vec{v}(x';y';z')$ deux vecteurs non nuls.

les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement tous les déterminants extraits de $\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \\ z & z' \end{vmatrix}$ sont nuls c'est-à-dire :

$yz'-zy'=0$ et $xy'-yx'=0$ et $xz'-zx'=0$

Remarques : $\vec{u}(x;y;z)$ et $\vec{v}(x';y';z')$ sont colinéaires si et seulement si leurs coordonnées sont des triplets proportionnels.

Exemple: $\vec{u}(1;-1;2)$ et $\vec{v}(-2;2;-4)$ et $\vec{w}(1;1;2)$

1)étudier la colinéarité des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$

2)étudier la colinéarité des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{w}$

Solution :1) $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}=2-2=0$ et $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix}=-4+4=0$

et $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix}=4-4=0$ Donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires

2) $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -2-2=-4 \neq 0$

Donc $\vec{u}$ et $\vec{w}$ sont non colinéaires

Exercice : Soit l'espace $(\mathcal{E})$ muni d'un repère $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$; et considérons les points

$A(1;2;1)$ et $B(2;1;3)$ et $C(-1;4;-3)$ et $D(2;3;3)$

1. étudier l'alignement des points A, B et C
2. étudier l'alignement des points A, B et D

Solution :1) $\overrightarrow{AB}(2-1;1-2;3-1) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}(1;-1;2)$

$\overrightarrow{AC}(-1-1;4-2;-3-1) \Leftrightarrow \overrightarrow{AC}(-2;2;-4)$

$\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 4-4=0$ et $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -4+4=0$ et $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2-2=0$

Donc A, B et C sont alignés

2) $\overrightarrow{AB}(2-1;1-2;3-1) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}(1;-1;2)$

$\overrightarrow{AD}(2-1;3-2;3-1) \Leftrightarrow \overrightarrow{AD}(1;1;2)$

$\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -2-2=-4 \neq 0$ Donc A, B et D ne sont pas alignés

Exercice : Soit l'espace $(\mathcal{E})$ muni d'un repère $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$; et considérons les points

A (1, −2,1) ; B (−1,0,1) ; C (0,1,0) et E (7,6,1)

1. Vérifier que les points A, B et C sont non alignés
 Que pouvez-vous dire des points A, B et E.
2. Déterminer le point D pour que le quadrilatère $ABCD$ soit un parallélogramme.
3. Déterminer le centre de ce parallélogramme.

///) CONDITIONS ANALYTIQUE DE COPLANARITE DE TROIS VECTEURS.

Définition : Soient $B\left(\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ une base de V_3

$\vec{u}(x;y;z)$ et $\vec{v}(x';y';z')$ et $\vec{w}(x'';y'';z'')$

trois vecteurs

le déterminant des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et $\vec{w}$ se note : $\det\left(\vec{u};\vec{v};\vec{w}\right)$ et on a :

$$\det\left(\vec{u};\vec{v};\vec{w}\right) = \begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix} = x\begin{vmatrix} y' & y'' \\ z' & z'' \end{vmatrix} - y\begin{vmatrix} x' & x'' \\ z' & z'' \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix}$$

(On a développé suivant la première colonne)

Exemple :

$$\begin{array}{c} + \\ - \\ + \end{array}\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 6 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & -2 \end{vmatrix} = +1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} - 6\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} + (-3)\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -4+12-9$$

$$= -1$$

Méthode de Sarrus (Pierre-Frédéric Sarrus 1798-1861)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 6 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & -2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 2 \\ 6 & 1 \\ -3 & 2 \end{matrix} = (-2-6-12)-(3+2-24) = -1$$

Théorème : Soient $B\left(\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ une base de $\mathcal{V}3$ et $\vec{u}(x;y;z)$ et $\vec{v}(x';y';z')$ et $\vec{w}(x'';y'';z'')$ trois vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement si $\det\left(\vec{u};\vec{v};\vec{w}\right)=0$

Remarque : Pour calculer le déterminant de 3 vecteurs, on développe suivant n'importe quelle ligne ou n'importe quelle colonne
en tenant compte des signes : +−+

Exemple : $B\left(\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ une base et Soient

$\vec{u}(2;-4;3)$ et $\vec{v}(-1;1;2)$ et $\vec{w}(3;1;-1)$

trois vecteurs

Est-ce que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires ?

Solution :

$$\det\left(\vec{u};\vec{v};\vec{w}\right) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -4 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - (-4)\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\det\left(\vec{u};\vec{v};\vec{w}\right) = 2(-1-2)+4(1-6)+3(-1-3) = -38 \neq 0$$

Donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont non coplanaires

Exercice : Considérons les vecteurs

$\vec{u}(2m+1;3;2-m)$ et $\vec{v}(-1;2;3)$ et $\vec{w}(-3;1;2)$

déterminer le réel m pour que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et $\vec{w}$ soient coplanaires.

Solution :

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires ssi

$\det\left(\vec{u};\vec{v};\vec{w}\right)=0$

$$\det\left(\vec{u};\vec{v};\vec{w}\right)=\begin{vmatrix}2m+1 & -1 & -3\\ 3 & 2 & 1\\ 2-m & 3 & 2\end{vmatrix}=\left(2m+1\right)\begin{vmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{vmatrix}-3\begin{vmatrix}-1 & -3\\ 3 & 2\end{vmatrix}+\left(2-m\right)\begin{vmatrix}-1 & -3\\ 2 & 1\end{vmatrix}$$

Ssi $1\left(2m+1\right)-21+5\left(2-m\right)=0 \Leftrightarrow -3m=10 \Leftrightarrow m=-\frac{10}{3}$

Application : Résolution des systèmes de 3 équations à 3 inconnus :

Résoudre dans $\mathbb{R}3$ le système :

$$\begin{cases}2x+y-z=2\\ x-y+3z=3\\ -x+2y+z=-1\end{cases}$$

1) On calcul:

$$\Delta=\begin{vmatrix}2 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 3\\ -1 & 2 & 1\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}-1 & 3\\ 2 & 1\end{vmatrix}-1\begin{vmatrix}1 & -1\\ 2 & 1\end{vmatrix}+1\begin{vmatrix}1 & -1\\ -1 & 3\end{vmatrix}=-15\neq 0$$

On a : $\Delta \neq 0$

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix}2 & 1 & -1\\ 3 & -1 & 3\\ -1 & 2 & 1\end{vmatrix}}{\Delta}=\frac{-25}{-15}=\frac{5}{3}$$

$$y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix}2 & 2 & -1\\ 1 & 3 & 3\\ -1 & -1 & 1\end{vmatrix}}{\Delta}=-\frac{2}{15}$$

$$z=\frac{\Delta_z}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix}2 & 1 & 2\\ 1 & -1 & 3\\ -1 & 2 & -1\end{vmatrix}}{\Delta}=\frac{-12}{-15}=\frac{4}{5}$$

Donc : $S=\left\{\left(\frac{5}{3};\frac{-2}{15};\frac{4}{5}\right)\right\}$

IV) Représentation paramétrique d'une droite dans l'espace

l'espace ($\mathcal{E}$) est muni d'un repère $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$

soit la droite (D) passant par le point $A\left(x_A;y_A;z_A\right)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\left(a;b;c\right)$

$$M\left(x;y;z\right)\in\left(D\right)\Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{R} \,/\, \overrightarrow{AM}=k\vec{u}$$

$$\begin{pmatrix}x-x_A\\ y-y_A\\ z-z_A\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix}\Leftrightarrow \boxed{\begin{cases}x=x_A+k\times a\\ y=y_A+k\times b\\ z=z_A+k\times c\end{cases}\quad (k\in\mathbb{R})}$$

point d'attache (x_A, y_A, z_A) — vecteur directeur (a, b, c)

Ce système est appelé représentation paramétrique de la droite (D) passant par le point $A\left(x_A;y_A;z_A\right)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\left(a;b;c\right)$

Remarques : Prenons l'exemple de la droite (D) de représentation $\begin{cases}x=-3+2k\\ y=-k\\ z=4+4k\end{cases}\quad\left(k\in\mathbb{R}\right)$:

1) Le réel k est appelé le paramètre.
A chaque point de (D) correspond une et une seule valeur de k et inversement.
D'un point de vue pratique, B (3 ; 2 ; 5) appartient à (D) si et seulement si il existe k tel que :

$$\begin{cases}3=-3+2k\\ 2=-k\\ 5=4+4k\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k=3\\ k=-2\\ k=\frac{1}{4}\end{cases}$$

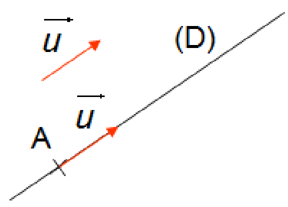
Ce qui est impossible donc B n'appartient pas à (D).

2) Le paramètre est souvent également noté à l'aide de la variable t.

3) Une droite admet une infinité de représentations paramétriques.
Il suffit en effet de changer de point d'attache ou de vecteur directeur pour obtenir un système de représentation différent.

4) la droite (D) passe par le point $A\left(-3;0;4\right)$ et $\vec{u}\left(2;-1;4\right)$ est un vecteur directeur de (D)

V) deux équations cartésiennes d'une droite dans l'espace



Propriété et définition : l'espace ($\mathcal{E}$) est muni d'un repère $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ et (D) la droite passant par le point $A\left(x_A;y_A;z_A\right)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\left(a;b;c\right)$

Si $abc \neq 0$ alors : le système :

$\frac{x-x_A}{a}=\frac{y-y_A}{b}=\frac{z-z_A}{c}$ s'appelle deux équations cartésiennes de la droite(D)

Si $ab \neq 0$ et $c=0$ alors : le système :

$\begin{cases} \frac{x-x_A}{a}=\frac{y-y_A}{b}=\frac{z-z_A}{c} \\ z-z_A=0 \end{cases}$ s'appelle deux équations cartésiennes de la droite(D)

Preuve :soit (D) la droite passant par le point $A(x_A;y_A;z_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(a;b;c)$ et soit $M(x;y;z)\in(D)$

$M(x;y;z)\in(D) \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} / \overrightarrow{AM}=k\vec{u} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} x-x_A=ka \\ y-y_A=kb \\ z-z_A=kc \end{cases}$

Si $abc \neq 0$ donc $a \neq 0$ et $b \neq 0$ et $c \neq 0$ alors :

$\frac{x-x_A}{a}=\frac{y-y_A}{b}=\frac{z-z_A}{c}=k$

Si $ab \neq 0$ et $c=0$ alors :

$\frac{x-x_A}{a}=\frac{y-y_A}{b}$ et $z-z_A=0$

Exemple : soient les points $A(-1;1;0)$ et $B(2;-1;1)$ et $C(0;-1;2)$

1)Déterminer deux équations cartésiennes de la droite(AB)

Est-ce que point $C(0;-1;2)\in(AB)$?

Solution : $\overrightarrow{AB}(3;-2;1)$

Donc : $\frac{x+1}{3}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z}{1}$ les deux équations cartésiennes de la droite(AB)

On remplace les coordonnées de C dans les équations de la droite(AB)

Et puisque : $\frac{0+1}{3} \neq \frac{-1-1}{-2}$ donc $C \notin (AB)$

Exercice : soit la droite (D)définie par les deux équations cartésiennes : $\frac{2x-1}{3}=\frac{y+1}{4}=\frac{3-4z}{4}$

1) déterminer un point et un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite (D)

2) déterminer une représentation paramétrique de la droite (D)

Solution : 1) $\frac{2x-1}{3}=\frac{y+1}{4}=\frac{3-4z}{4} \Leftrightarrow$

$\frac{2\left(x-\frac{1}{2}\right)}{3}=\frac{y-(-1)}{4}=\frac{\left(z-\frac{3}{4}\right)}{-1} \Leftrightarrow$

$\frac{x-\frac{1}{2}}{6}=\frac{y-(-1)}{8}=\frac{\left(z-\frac{3}{4}\right)}{-2}$

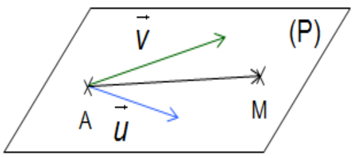
(D) la droite passant par le point $A\left(\frac{1}{2};-1;\frac{3}{4}\right)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(6;8;-2)$

1)une représentation est : $\begin{cases} x=\frac{1}{2}+6k \\ y=-1+8k \\ z=\frac{3}{4}-2k \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R})$:

V/) Représentation paramétrique d'un PLAN dans l'espace

L'espace est muni d'un repère (O; $\vec{i}$; $\vec{j}$; $\vec{k}$) .

Soit $P(A;\vec{u};\vec{v})$ le plan qui passe par $A(x_A;y_A;z_A)$ et de vecteurs directeurs $\vec{u}(a;b;c)$, $\vec{v}(a';b';c')$



$M \in P(A;\vec{u};\vec{v}) \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} : \exists k' \in \mathbb{R} / \overrightarrow{AM}=k\vec{u}+k'\vec{v}$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-x_A \\ y-y_A \\ z-z_A \end{pmatrix}=k\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}+k'\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x=x_A+k\times a+k'\times a' \\ y=y_A+k\times b+k'\times b' \\ z=z_A+k\times c+k'\times c' \end{cases}$

point d'attache — premier vecteur directeur — second vecteur directeur

Ce système est appelé représentation paramétrique du plan $P(A;\vec{u};\vec{v})$

Exemple1 : déterminer une représentation paramétrique du plan passant par les points : $A(2;-1;-3)$ et $B(0;1;4)$ et $C(-3;0;0)$

Solution : ABC est le plan passant par $A(2;-1;-3)$ et $\overrightarrow{AB}(-2;2;7)$ et $\overrightarrow{AC}(-5;1;3)$

Sont deux vecteurs directeurs

Donc une représentation paramétrique du plan ABC est : $\begin{cases} x = 2-2t-5t' \\ y = -1+4t+t' \\ z = -3+7t+3t' \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$ et $(t' \in \mathbb{R})$

Le dernier système est une représentation paramétrique du plan (ABC) c'est à dire que les coordonnées (x ; y ; z) d'un point quelconque du plan dépendent de paramètres qui sont ici t et t', mais il existe d'autre représentation paramétrique pour ce plan.

Exemple2 : déterminer les coordonnées d'un point de ce plan ainsi que les coordonnées de deux vecteurs directeurs du plan suivant définit par une représentation paramétrique:

$$\begin{cases} x = 3+2t-4s \\ y = 2+t-s \\ z = 5t-5s \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3+2\,t-4\,s \\ y = 2+1\,t-1\,s \\ z = 0\ +5\,t-5\,s \end{cases}$$

vous pouvez alors en déduire que c'est un plan passant par le point

A et de vecteurs directeurs $\vec{u}$et $\vec{v}$:

$A\begin{pmatrix}3\\2\\0\end{pmatrix}$ $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\1\\5\end{pmatrix}$ $\vec{v}\begin{pmatrix}-4\\-1\\-5\end{pmatrix}$

V//) EQUATION CARTESIENNE D'UN PLAN dans l'espace

Définition :

L'espace est muni d'un repère (O; $\vec{i}$; $\vec{j}$; $\vec{k}$) .

Soit $P\left(A;\vec{u};\vec{v}\right)$ le plan qui passe par $A(x_A;y_A;z_A)$ et de vecteurs directeurs $\vec{u}(\alpha;\beta;\delta)$, $\vec{v}(\alpha';\beta';\delta')$ l'équation cartésienne du plan (P) s'écrit sous forme: $ax+by+cz+d=0$ Avec : $(a;b;c)\neq(0;0;0)$

Exemple : Déterminer l'équation cartésienne du plan $P\left(A;\vec{u};\vec{v}\right)$ qui passe par $A(1;-3;1)$ et de vecteurs directeurs $\vec{u}(-2;4;1)$ et $\vec{v}(-1;0;2)$

solution : $M(x;y;z)\in P\left(A;\vec{u};\vec{v}\right) \Leftrightarrow \det\left(\overrightarrow{AM};\vec{u};\vec{v}\right)=0$

$\overrightarrow{AM}(x-1;y+3;z-1)$

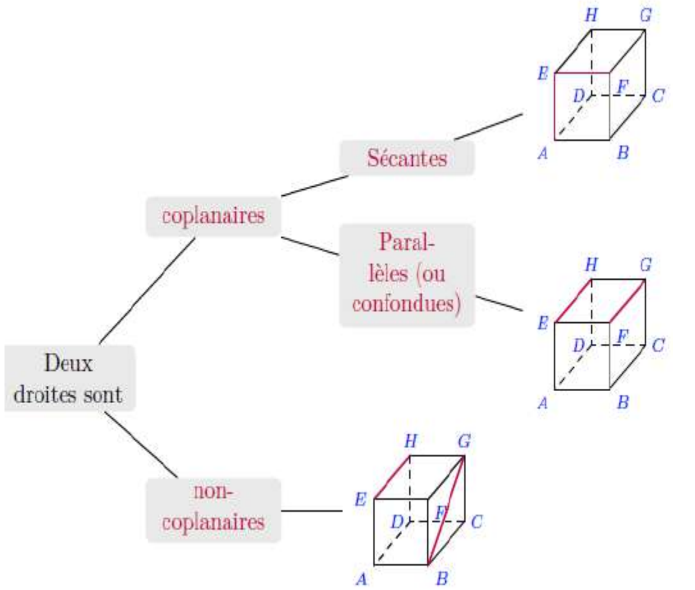
$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & -2 & -1 \\ y+3 & 4 & 0 \\ z-1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (x-1)\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - (y+3)\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (z-1)\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$8(x-1)+3(y+3)+4(z-1)=0 \Leftrightarrow 8x-8+3y+9+4z-4=0$$

$$(P): 8x+3y+4z-3=0$$

V///) Position relative de deux droites dans l'espace

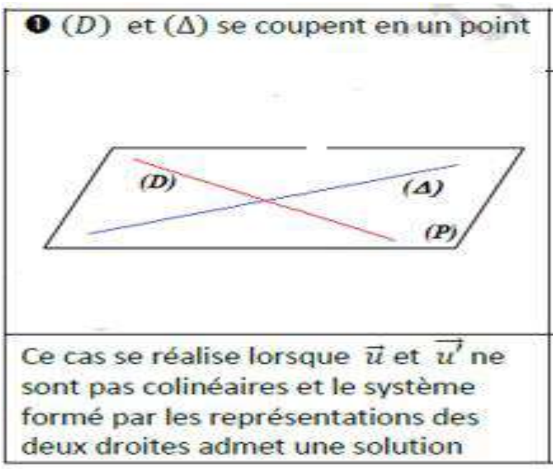
1/ Position relative de deux droites dans l'espace



Soient $D\left(A;\vec{u}\right)$ et $\Delta\left(B;\vec{v}\right)$

On a 3 positions pour (D) et (Δ) :

<u>Position n° 1</u>



Exemple1 Soient les droites (D_1)et (Δ_1)de représentations paramétriques respectives

$$(D_1)\begin{cases} x=-2+k \\ y=2-2k \\ z=4+k \end{cases}(k\in\mathbb{R}) \quad (\Delta_1)\begin{cases} x=-1-t \\ y=2t \\ z=1+t \end{cases}(t\in\mathbb{R})$$

Etudier la position relatif de (Δ_1) et (D_1)

Solution : on a : $\vec{u}(1;-2;1)$ un vecteur directeur de (D_1) et $\vec{v}(-1;2;1)$ un vecteur directeur de (Δ_1)

et puisque : $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$ les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires donc les droites (Δ_1) et (D_1) sont non parallèles

on va déterminer l'intersection de (Δ_1) et (D_1)

Donc on va résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} -2+k=-1-t \\ 2-2k=2t \\ 4+k=1+t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t+k=1 \\ t+k=1 \\ t-k=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t+k=1 \\ t-k=3 \end{cases}$$

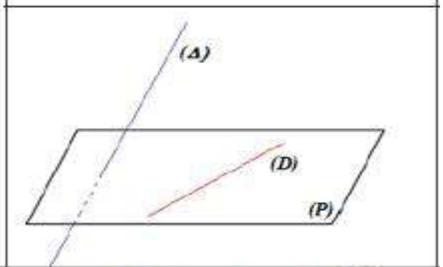
$\Leftrightarrow \begin{cases} 2t=4 \\ t-k=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=2 \\ k=-1 \end{cases}$ On remplaçant $t=2$ dans l'équation paramétriques de (Δ_1) On trouve :

$\begin{cases} x=-3 \\ y=4 \\ z=3 \end{cases}$ Donc les droites (Δ_1) et (D_1) se coupent en $E(-3;4;3)$

Position n° 2: deux droites peuvent être non coplanaires. Donc Il n'existe alors aucun plan contenant ces deux droites.

Pour le montrer, il suffit de montrer que les deux droites ne sont ni parallèles, ni sécantes.

❷ (D) et (Δ) ne sont pas coplanaire



Ce cas se réalise lorsque $\vec{u}$ et $\vec{u'}$ ne sont pas colinéaires et le système formé par les représentations des deux droites n'admet pas de solution

Exemple2 : Soient les droites (D_2) et (Δ_2) de représentations paramétriques respectives

$$(D_2)\begin{cases} x=1+k \\ y=-2-k \\ z=2+3k \end{cases}(k\in\mathbb{R}) \quad (\Delta_2)\begin{cases} x=2t \\ y=1-t \\ z=3+t \end{cases}(t\in\mathbb{R})$$

Etudier la position relatif de (D_2) et (Δ_2)

Solution :on a $\vec{u}(1;-1;3)$ un vecteur directeur de (D_2) et : $\vec{v}(2;-1;1)$ un vecteur directeur de (Δ_2)

et puisque : $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires donc les droites (D_2) et (Δ_2) sont non parallèles

on va déterminer l'intersection de (Δ_1) et (D_1)

Donc on va résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} 1+k=2t \\ -2-k=1-t \\ 2+3k=3+t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k-2t=-1 \\ k-t=-3 \\ 3k-t=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k-2t=-1 \\ k-t=-3 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} k=-5 \\ t=-2 \end{cases}$ mais le couple $(k;t)=(-5;-2)$ ne vérifie pas l'équation $3k-t=1$

Car : $3(-5)-(-2)=-13\neq 1$

Donc le système n'admet pas de solutions

Donc les droites (Δ_1) et (D_1) sont non coplanaires

Methode2 : on a (D_2) passe par $A(1;-2;2)$ et de vecteur directeur de $\vec{u}(1;-1;3)$

et : (Δ_2) passe par $B(0;1;3)$ et de vecteur directeur de

$\overrightarrow{AB}(-1;3;1)$ on va voir si les Les vecteurs $\vec{u}(1;-1;3)$ et $\vec{v}(2;-1;1)$ et $\overrightarrow{AB}(-1;3;1)$ sont coplanaires ??

$$\det\left(\overrightarrow{AB};\vec{u};\vec{v}\right) = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}$$

$\det\left(\overrightarrow{AB};\vec{u};\vec{v}\right) = 14 \neq 0$ Donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont non coplanaires

Donc les droites (Δ_1) et (D_1) sont non coplanaires

Position n° 3

❸ (D) et (Δ) sont coplanaires et disjoints

Ce cas se réalise lorsque $\vec{u}$ et $\vec{u'}$ sont colinéaires et le système formé par les représentations des deux droites n'admet pas de solution

Exemple3 : Soient les droites (D_3) et (Δ_3) de représentations paramétriques respectives

$$(D_3)\begin{cases} x=1+k \\ y=-2 \\ z=2-1k \end{cases} \quad (k\in\mathbb{R}) \qquad (\Delta_3)\begin{cases} x=2t \\ y=1 \\ z=3-2t \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R})$$

Etudier la position relatif de (D_3) et (Δ_3)

Solution : on a (D_3) passe par $A(1;-2;2)$

et de vecteur directeur de $\vec{u}(1;0;-1)$

et : (Δ_3) passe par $B(0;1;3)$ et de vecteur directeur de $\vec{v}(2;0;-2)$

on peut voir que les Les vecteurs $\vec{u}(1;0;-1)$ et $\vec{v}(2;0;-2)$ sont colinéaires

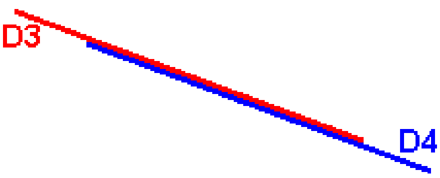
Car : $\vec{v}=2\vec{u}$ Donc les droites (D_3) et (Δ_3) sont parallèles

On remarque aussi que : $A\notin(\Delta_3)$

car $\begin{cases} 1=2t \\ -2=1 \\ 2=3-2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}=t \\ -\frac{1}{2}=t \\ 2=3-2t \end{cases}$

Donc les droites (D_3) et (Δ_3) sont strictement parallèles

<u>Position n° 4 ;</u> les droites sont confondues



Exemple4 : L'espace est muni d'un repère $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

Soient les droites (D_3) et (D_4) de représentations paramétriques respectives

$$(D_3)\begin{cases} x=k-3 \\ y=-k+3 \\ z=2 \end{cases} (k\in\mathbb{R}) \qquad (D_4)\begin{cases} x=-2t+1 \\ y=2t-1 \\ z=2 \end{cases}$$

$(t\in\mathbb{R})$

Etudier la position relatif de (D_3) et (D_4)

Solution : on a (D_3) passe par $A(-3;3;2)$ et de vecteur directeur de $\vec{u}(1;-1;0)$

et (D_4) passe par $B(1;-1;2)$ et de vecteur directeur de $\vec{v}(-2;2;0)$

on peut voir que les Les vecteurs $\vec{u}(1;-1;0)$ et $\vec{v}(-2;2;0)$ sont colinéaires

Car : $\vec{v}=-2\vec{u}$ Donc les droites (D_3) et (D_4) sont parallèles

On remarque aussi que :

$A\in(D_4)$ car $\begin{cases} -3=-2t+1 \\ 3=2t-1 \\ 2=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2=t \\ 2=t \\ 2=2 \end{cases}$

Donc les droites (D_3) et (D_4) sont confondues

Exercice : Soient les droites (D) et (D') de représentations paramétriques respectives :

$$(D)\begin{cases} x=k \\ y=1-k \\ z=3-2k \end{cases} (k\in\mathbb{R}) \qquad (D')\begin{cases} x=2+6k' \\ y=-3-12k' \\ z=4+3k' \end{cases} (k'\in\mathbb{R})$$

Etudier la position relatif de (D) et (D')

Solution :

M(x;y;z) appartient à (D) et (D') si et seulement si il existe k et k' réels tels que :

$$\begin{cases} k=2+6k' \\ 1-k=-3-12k' \\ 3-2k=4+3k' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=2+6k' \\ 1-2-6k'=-3-12k' \\ 3-2k=4+3k' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=0 \\ k'=-\frac{1}{3} \\ 3-2k=4+3k' \end{cases}$$

Cette dernière égalité sert à vérifier notre résultat :

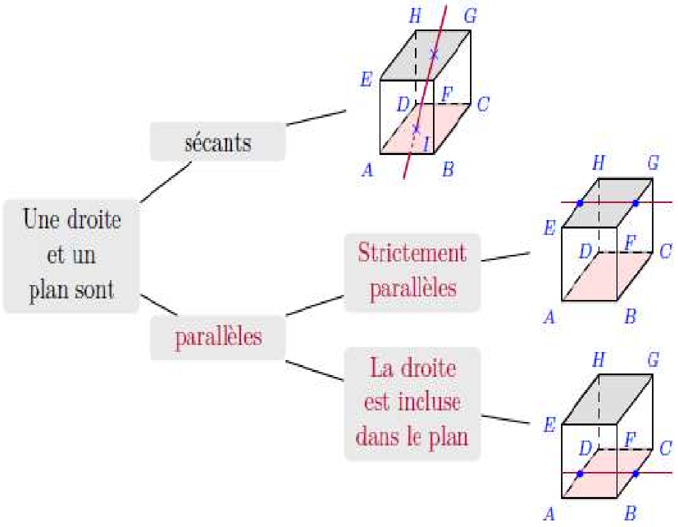
3 - 2k = 3 - 0 = 3 et 4 + 3k' = 4 - 1 = 3.

$k=0$ et $k'=-\frac{1}{3}$ donc (D) et (D') possèdent un unique point commun C

Dont les coordonnées peuvent être calculées à l'aide de k ou k' : $C(0;1;3)$

(D) et (D') sont alors contenues dans le plan (P) passant par C et de vecteurs directeurs $\vec{u}(1;-1;-2)$ et $\vec{v}(6;-12;3)$

2/ Position relative d'une droites et d'un plan dans l'espace



L'espace est muni d'un repère (O; $\vec{i}$; $\vec{j}$; $\vec{k}$) .

Proposition1 : La droite $D(A;\vec{u})$ et le plan $P(B;\vec{v};\vec{w})$ sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires et dans le cas contraire la droite coupe le plan

Proposition2 : soit la droite (D) passant par le point $A(x_A;y_A;z_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(\alpha;\beta;\gamma)$ et un plan (P) d'équation cartésienne: $ax+by+cz+d=0$

(D) // (P) si et seulement si $a\alpha+b\beta+c\gamma=0$

(D) coupe (P) si et seulement si $a\alpha+b\beta+c\gamma\neq 0$

Preuve : une représentation paramétrique de La droite $D(A;\vec{u})$ est $(D)\begin{cases}x=k\alpha+x_A\\ y=k\beta+y_A\\ z=k\gamma+z_A\end{cases}(k\in\mathbb{R})$

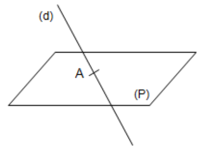
M(x;y;z) appartient à (D) et (P) si et seulement si il existe k tels que :

$$\begin{cases}x=k\alpha+x_A\\ y=k\beta+y_A\\ z=k\gamma+z_A\\ ax+by+cz+d=0\end{cases}$$

donc : $a(k\alpha+x_A)+b(k\beta+y_A)+c(k\gamma+z_A)+d=0$

donc : $k(a\alpha+b\beta+c\gamma)=-(ax_A+by_A+cz_A)-d$

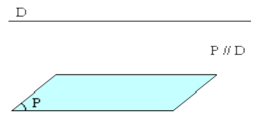
- **si :** $a\alpha+b\beta+c\gamma k\neq 0$ alors : $k=\dfrac{-(ax_A+by_A+cz_A)-d}{a\alpha+b\beta+c\gamma}$



donc (D) coupe (P) en un point unique

- **si :** $a\alpha+b\beta+c\gamma k=0$ et $ax_A+by_A+cz_A+d=0$ alors : $(D)\subset(P)$
- **si :** $a\alpha+b\beta+c\gamma k=0$ et $ax_A+by_A+cz_A+d\neq 0$ alors : $(D)\cap(P)=\varnothing$

Donc (D) strictement parallèles a (P)



Exemple1 : Soient la droite (D_1) de représentations paramétrique $(D_1)\begin{cases}x=-4t+2\\ y=2t-1\\ z=3t\end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$

et le plan (P_1) d'équation cartésienne:

$(P_1):3x+2y+z+1=0$

Etudier la position relatif de (D_1) et (P_1)

Solution :

on a (D_1) est de vecteur directeur $\vec{u}(-4;2;3)$

Et on a : $3(-4)+2\times2+3\neq 0$

donc (D_1)) coupe (P_1) en un point unique

on a $M(x;y;z)\in(D_1)\cap(P_1)\Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{R}$ /

$$\begin{cases}x=-4t+2\\ y=2t-1\\ z=3t\\ 3x+2y+z+1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-4t+2\\ y=2t-1\\ z=3t\\ 3(-4t+2)+2(2t-1)+3t+1=0\end{cases}$$

$\Leftrightarrow\begin{cases}t=1\\ x=-2\\ y=1\\ z=3\end{cases}$ donc (D_1)) coupe (P_1)

au point $A(-2;1;3)$

Exemple2 :

Soient la droite (D_2) de représentations paramétrique $(D_2)\begin{cases}x=-4+5t\\ y=-1-2t\\ z=-3+t\end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$

et le plan (P_2) d'équation cartésienne:

$(P_1): x+3y+z+4=0$

Etudier la position relatif de (D_2)et (P_2)

Solution :on a (D_2)est de vecteur directeur $\vec{u}(5;-2;1)$et on a : $5+3(-2)+1=0$

donc (D_2) est parallèle a (P_2)

on va déterminer l'intersection de (D_2) et (P_2)

Donc on va résoudre le système suivant :

on a $M(x;y;z)\in(D_2)\cap(P_2) \Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{R} / \begin{cases} x=-4+5t \\ y=-1-2t \\ z=-3+t \\ x+3y+z+4=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-4+5t \\ y=-1-2t \\ z=-3+t \\ (-4+5t)+3(-1-2t)+-3+t+4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-4+5t \\ y=-1-2t \\ z=-3+t \\ -6=0 \end{cases}$

Donc le système n'admet pas de solutions

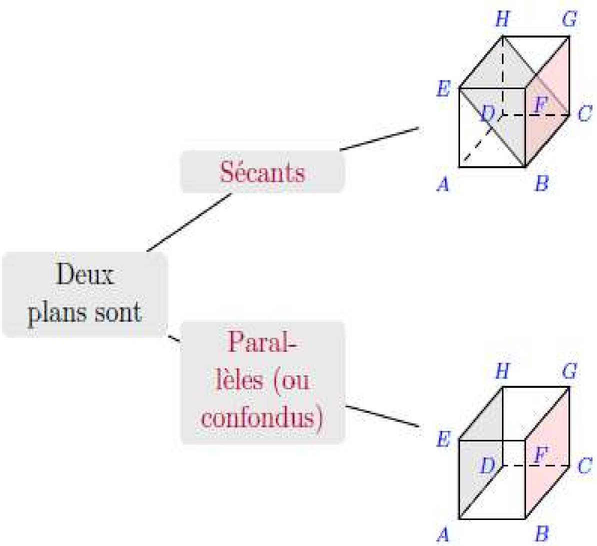
donc (D_2) ne coupe pas le plan (P_2)

Donc (D_2)strictement parallèles a(P_2)

Remarque1 :si $(D)//(P)$alors Tout vecteur directeur de (D)est alors un vecteur directeur de (P)

Remarque2: Il existe plusieurs façons de montrer qu'une droite (D)est incluse dans un plan (P).Une première méthode consiste à montrer dans un premier temps que (D)est parallèle à (P) puis dans un deuxième temps qu'un point de (D)appartient à (P).

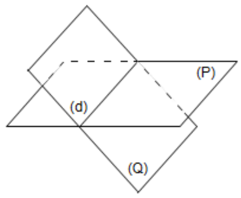
3)position relative de deux plans :



Proposition :*Soient deux plans (P) et (P') d'équations cartésiennes:*

$(P): ax+by+cz+d=0$ *et*

$(P'): a'x+b'y+c'z+d'=0$



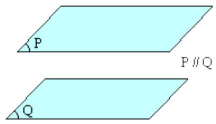
1)(P) et (P') se coupent si et seulement si

$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \neq 0$ *ou* $\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} \neq 0$ *ou* $\begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix} \neq 0$

Et leur intersection est une droite

2)$(P)//(P')$ si et seulement si $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = 0$ et

$\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} = 0$ et $\begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix} = 0$



_si $a\neq 0$ et $b\neq 0$ et $c\neq 0$

$(P)//(P') \Leftrightarrow \frac{a'}{a}=\frac{b'}{b}=\frac{c'}{c}$

Exemple1 :

L'espace est muni d'un repère (O; $\vec{i}$;$\vec{j}$; $\vec{k}$)

Soient deux plans (P) et (P') d'équations cartésiennes:

$(P): 2x+y-z+2=0$ et $(P'): 3x+y+4z-1=0$

Etudier la position relatif de (P)et (P')

Solution : on a : $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ donc (P) et (P') se coupent suivant une droite (D)

Déterminons une représentation paramétrique de la droite (D) intersection de(P) et (P')

(D) a pour système d'équations cartésiennes :

$M(x;y;z)\in(D) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y-z+2=0 \\ 3x+y+4z-1=0 \end{cases}$

$\begin{cases} 2x+y=z-2 \\ 3x+y=-4z+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3z+3 \\ y=-5z-8 \end{cases}$ et on pose $(z=t)$

Donc : $(D) \begin{cases} x=3+3t \\ y=-8-5t \\ z=t \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R})$

(D) est la droite qui passe par le point $A(-3;-8;0)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(3;-5;1)$

Exemple2 :

L'espace est muni d'un repère (O; $\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k}$)

Soient deux plans (Q) et (Q') d'équations cartésiennes:

$(Q):\left(1-\sqrt{2}\right)x-\dfrac{\sqrt{2}}{2}y+z-\sqrt{2}=0$ et

$(Q'):\left(\sqrt{2}-2\right)x-y+\sqrt{2}z-2=0$

Etudier la position relatif de (Q) et (Q')

Solution : on a : $\begin{vmatrix} 1-\sqrt{2} & -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sqrt{2}-2 & -1 \end{vmatrix}=0$ et $\begin{vmatrix} 1-\sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2}-2 & \sqrt{2} \end{vmatrix}=0$

et $\begin{vmatrix} -\dfrac{\sqrt{2}}{2} & 1 \\ -1 & \sqrt{2} \end{vmatrix}=0$ donc (Q) // (Q')

et puisque : $-\sqrt{2}\neq -2$

(Q) et (Q') sont strictement parallèles

4/ Droite d'intersection de deux plans

Il est souvent demandé dans les exercices de trouver la représentation paramétrique d'une droite qui est l'intersection de deux plans.

Ou encore de montrer qu'une droite dont on connaît la représentation paramétrique est l'intersection de deux plans donnés. Voyons les différentes stratégies qu'il est possible d'employer :

<u>Exemple</u>: Soient les plans (P) et (Q) d'équations cartésiennes respectives :

$(P):x-y-3z-2=0 \quad (Q):2x+y+z-1=0$

Déterminer une représentation paramétrique de la droite (D) intersection de (P) et de (Q).

Solutions :(D) a pour système d'équations cartésiennes :

$$\begin{cases} x-y-3z-2=0 \\ 2x+y+z-1=0 \end{cases}$$

Il va donc falloir être capable de passer de ce système à une représentation paramétrique:

$$\begin{cases} x-y-3z-2=0 \\ 2x+y+z-1=0 \end{cases}$$

Une technique consiste à prendre une des coordonnées comme paramètre,

par exemple puis à exprimer les deux autres coordonnées en fonction de z.

$$\begin{cases} x=y+3z+2 \\ 2(y+3z+2)+y+z-1=0 \\ z=z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y+3z+2 \\ 3y+7z+3=0 \\ z=z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1-\dfrac{7}{3}z+3z+2 \\ y=-1-\dfrac{7}{3}z \\ z=z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1+\dfrac{2}{3}z \\ y=-1-\dfrac{7}{3}z \\ z=z \end{cases}$$

Une représentation paramétrique de (D) est

donc : $(D)\begin{cases} x=1+\dfrac{2}{3}k \\ y=-1-\dfrac{7}{3}k \\ z=0+1k \end{cases} \quad (k\in\mathbb{R})$

(D) passe donc par le point A (1 ; -1 ; 0) et a pour vecteur directeur $\vec{u}\left(\dfrac{2}{3};\dfrac{-5}{3};1\right)$

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices

Que l'on devient un mathématicien